



## **APLICAÇÃO DA EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON NA OTIMIZAÇÃO DE PROBLEMAS EM FLUIDODINÂMICA COMPUTACIONAL**

**Alexandre Marcus Madeira Santos**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Processos – Mestrado Profissional, PPGEP/ITEC, da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Processos.

Orientador: Rui Nelson Otoni Magno

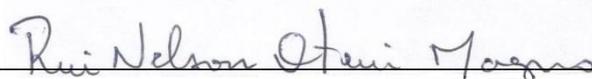
Belém  
Fevereiro de 2020

**APLICAÇÃO DA EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON NA OTIMIZAÇÃO  
DE PROBLEMAS EM FLUIDODINÂMICA COMPUTACIONAL**

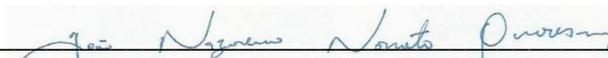
Alexandre Marcus Madeira Santos

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA PROCESSOS – MESTRADO PROFISSIONAL (PPGEP/ITEC) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA DE PROCESSOS.

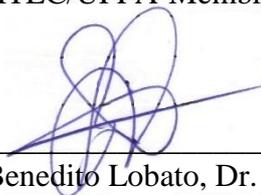
Examinada por:



Prof. Rui Nelson Otoni Magno, Dr.  
(PPGEP/ITEC/UFPA-Orientador)



Prof. João Nazareno Nonato Quaresma, Dr.  
(PPGEP/ITEC/UFPA-Membro)



Prof. Benedito Lobato, Dr.  
(DCNA/UEPA-Membro)

BELÉM, PA - BRASIL  
FEVEREIRO DE 2020

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)**  
**Sistema de Bibliotecas da UFPA**

---

Santos, Alexandre Marcus Madeira-1994  
Aplicação da extrapolação de Richardson na otimização de  
problemas em fluidodinâmica computacional / Alexandre Marcus  
Madeira Santos - 2020'.

Orientador: Rui Nelson Otoni Magno

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal  
do Pará. Instituto de Tecnologia. Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia de Processos, 2019.

1. Extrapolação de Richardson 2. Otimização 3.  
Transferência de Calor 4. Fluidodinâmica computacional I.  
Título

CDD 22. ed.660.284245

---

“... E naquela mesma noite Deus apareceu a Salomão, e lhe disse: Pede o que queres que eu te dê. E Salomão disse a Deus: Dá-me, pois, agora sabedoria e conhecimento...

Então Deus disse a Salomão: Porquanto houver isto no teu coração, e não pediste riquezas, bens ou honra, nem a morte dos que te odeiam, nem tampouco pediste muitos dias de vida, mas pediste para ti sabedoria e conhecimento para poderes julgar o meu povo, sobre o qual te fiz reinar, sabedoria e conhecimento te são dados; também te darei riquezas, bens e honra, quais não teve nenhum rei antes de ti, nem haverá depois de ti rei que tenha coisas semelhantes.” Esdra, II Livro de Crônicas (430 A.C).

“Posso todas as coisas em Cristo que me fortalece.” (Filipenses 4:13)

*Dedico este trabalho de dissertação de mestrado aos meus pais Júnior e Sandra, que sempre fizeram de tudo para dar o melhor aos seus filhos. Conseguiram vencer as dificuldades e os momentos difíceis nunca deixando de nos apoiar na busca pelo conhecimento.*

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, em quem deposito toda a minha confiança, o único que é digno de toda honra, todo o louvor e toda a glória.

Aos meus pais Junior e Sandra.

A Camilla Karollyne, minha companheira, pelo carinho, apoio e por ter me aturado nos momentos de estresse. Graças a sua presença foi mais fácil transpor os dias de desânimos e cansaço.

À minha filha Anna Júlia, que já me deixou muitas noites sem dormi, te amo.

Ao meu orientador Rui Magno, pelo acompanhamento durante as pesquisas experimentais e pela assistência na elaboração desta dissertação.

Aos professores e colegas do PPGEP.

À UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ e a todos os que fazem parte desta família e aos professores que também fizeram parte desta história.

Agradeço a mim mesmo pelo meu esforço e dedicação em mais esta etapa de muitas outras da minha vida que ainda estão por vim.

Enfim, a todos que de alguma forma contribuíram para a execução deste trabalho.

*“Tente uma, duas, três vezes e se possível tente a quarta, a quinta e quantas vezes for necessário. Só não desista nas primeiras tentativas, a persistência é amiga da conquista. Se você quer chegar aonde a maioria não chega, faça o que a maioria não faz...”*

(Bill Gates)

Resumo da Dissertação apresentada ao PPGEP/UFPA como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia de Processos (M. Eng.)

## **APLICAÇÃO DA EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON NA OTIMIZAÇÃO DE PROBLEMAS EM FLUIDODINÂMICA COMPUTACIONAL**

**Alexandre Marcus Madeira Santos**

Fevereiro/2020

Orientador: Rui Nelson Otoni Magno

Área de Concentração: Engenharia de Processos

O trabalho atual visa investigar a aplicação do método de Extrapolação de Richardson (ER) como uma alternativa para reduzir o tempo de computação de um problema CFD específico, que está relacionado a um problema convectivo e difusivo. A geometria em estudo foi construída no software Blender. As condições iniciais e de contorno foram configuradas usando o programa BlenderFDS, o cálculo foi feito com um código CFD chamado Fire Dynamics Simulator (FDS), os resultados foram extraídos com o software smokeview. Além disso, foi desenvolvido um código de extrapolação de Richardson na linguagem de programação Fortran. As propriedades do campo de fluxo, como massa específica, pressão, temperatura e velocidade foram calculadas para três tamanhos de malhas com e sem o emprego do método de ER. Os resultados extrapolados mostram ser promissores para manter a precisão a um custo computacional mais baixo.

Abstract of Dissertation presented to PPGE/UFPA as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Process Engineering (M. Eng.)

## **APPLICATION OF RICHARDSON EXTRAPOLATION IN THE OPTIMIZING OF COMPUTATIONAL FLUIDODYNAMICS**

**Alexandre Marcus Madeira Santos**

February/2020

Advisor: Rui Nelson Otoni Magno

Research Area: Process Engineering

The present work aims to investigate the application of the Richardson Extrapolation (ER) method as an alternative to reduce the simulation time of a specific CFD problem, which is related to a convective and diffusive problem. The geometry under study was built in the Blender software. The initial and boundary conditions were set using the BlenderFDS program, the calculation was done with a CFD code called Fire Dynamics Simulator (FDS), the results were extracted with smokeview software. In addition, Richardson extrapolation code was developed in the Fortran programming language. Flow field properties such as specific mass, pressure, temperature and velocity were calculated for three mesh sizes with and without the RE method. The extrapolated results show promise for maintaining accuracy at a lower computational cost.

## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1 - MOTIVAÇÃO.....	1
1.2 - OBJETIVOS.....	3
<b>1.2.1 - Objetivo geral.....</b>	<b>3</b>
<b>1.2.2 - Objetivos específicos.....</b>	<b>3</b>
1.3 - CONTRIBUIÇÕES DA DISSERTAÇÃO.....	3
1.4 - ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	3
<b>CAPÍTULO 2 - REVISÃO DA LITERATURA.....</b>	<b>5</b>
2.1 - DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL.....	5
2.2 - APLICAÇÕES DO CFD E ER.....	13
<b>CAPÍTULO 3 - MATERIAIS E MÉTODOS.....</b>	<b>18</b>
3.1 - DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA.....	18
<b>3.1.1 - O software blender.....</b>	<b>18</b>
<b>3.1.2 - O software fire dynamics simulator.....</b>	<b>19</b>
3.2 - PROCESSO DE MODELAGEM: A MODELAGEM MATEMÁTICA.....	20
3.3 - FLUIDODINÂMICA COMPUTACIONAL.....	20
<b>3.3.1 - Discretização do domínio.....</b>	<b>24</b>
<b>3.3.2 - Malha.....</b>	<b>24</b>
<b>3.3.3 - Métodos de discretização.....</b>	<b>25</b>
3.4 - EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON (ER).....	25
<b>3.4.1 - Procedimentos numéricos do método de extrapolação de Richardson.....</b>	<b>26</b>
3.5 - METODOLOGIA.....	27
<b>3.5.1 - Problema puramente convectivo.....</b>	<b>27</b>
<b>3.5.2 - Problema puramente difusivo.....</b>	<b>28</b>
<b>CAPÍTULO 4 - RESULTADOS E DISCUSSÃO.....</b>	<b>30</b>
4.1 - CONVERGÊNCIA DE MALHA.....	30
<b>4.1.1 - Resultados para o problema puramente convectivo.....</b>	<b>30</b>
<b>4.1.2 - Resultados para o problema puramente difusivo.....</b>	<b>33</b>
<b>CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....</b>	<b>35</b>
5.1 - CONCLUSÕES.....	35
5.2 - SUGESTÕES.....	36

<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>37</b>
<b>APÊNDICE A - PROGRAMA UTILIZADO NA CONSTRUÇÃO DA GEOMETRIA E EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON.....</b>	<b>42</b>

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Fluxograma de solução de problemas.....	8
Figura 2.2	Diferença entre o grau de modelagem versus custo computacional dos métodos de análise de escoamento turbulento no contexto da Mecânica dos Fluidos.....	11
Figura 3.1	Interface gráfica do Software Blender.....	19
Figura 3.2	Configuração do duto com uma “bump” no meio da geometria..	28
Figura 3.3	Transferência de calor bidimensional em uma placa com temperatura especificada e condição de contorno convectiva.....	29
Figura 4.1	Três malhas diferentes utilizadas para análise de convergência. Malha 1, Malha 2 e Malha 3 são definidos de cima para baixo, respectivamente.....	31
Figura 4.2	Perfil da massa específica ( $\text{kg/m}^3$ ) para a malha 1, malha 2, malha 3 e extrapolação de Richardson.....	32
Figura 4.3	Perfil da pressão (Pa) para a malha 1, malha 2, malha 3 e extrapolação de Richardson.....	32
Figura 4.4	Perfil de velocidade (m/s) para a malha 1, malha 2, malha 3 e extrapolação de Richardson.....	32
Figura 4.5	Três malhas diferentes usadas para análise de convergência. Malha 1, 2 e 3 são definidos da esquerda para a direita, respectivamente.....	33
Figura 4.6	Perfil de temperatura (K) para as malhas 1, malha 2, malha 3 e extrapolação de Richardson.....	34

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1	Comparação entre as técnicas de solução.....	5
Tabela 4.1	Número mínimo de tempo necessário para convergência de malha.....	33
Tabela 4.2	Número de tempo necessário para convergência de malha.....	34

## NOMENCLATURA

CFD	DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAIS
CPU	CENTRAL PROCESSING UNIT OU UNIDADE CENTRAL DE PROCESSAMENTO
DNS	DIRECT NUMERICAL SIMULATION
ER	EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON
EQ	EQUAÇÃO
FDS	FIRE DYNAMIC SIMULATOR
MESH	MALHA
MDF	MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS
MEF	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
MVF	MÉTODO DOS VOLUMES FINITOS
MEC	MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
MER	MÚLTIPLAS EXTRAPOLAÇÕES DE RICHARDSON
Pa	PASCAL
RANS	REYNOLDS AVERAGER NAVIER-STOKES
RE	RICHARDSON EXTRAPOLATION
RRE	REPEATED RICHARDSON EXTRAPOLATION
LES	LARGE EDDY SIMULATION

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

Neste capítulo são abordados as motivações, principais objetivos, contribuições e síntese do presente trabalho, o qual trata da aplicação de aproximações numéricas a ser utilizada em um problema de fluidodinâmica computacional

### 1.1 - MOTIVAÇÃO

A simulação de processos está inserida como ferramenta essencial na indústria a partir da aplicação da simulação, os sistemas podem ser estudados de forma ampla sem que seja necessário realizar experimentos real na planta. Nesse estudo de transferência de calor, usa-se a análise da técnica de extrapolação de Richardson a qual consiste em calcular uma nova aproximação usando duas ou mais aproximações menos acuradas, aplicada em problemas puramente convectivos e puramente difusivos.

Na medida em que as demandas de produção se tornam cada vez mais acirradas em meio ao mercado competitivo. A difícil resolução de problemas analíticos no meio contínuo estimula a resolver o problema em pontos específicos, para isso é recomendado discretizar o domínio do problema, determinando uma malha que simule esses pontos. Na resolução de práticas de um estudo de CFD a solução do problema somente é alcançada através da utilização de métodos de discretização, mais especificamente com a utilização de uns dos seguintes métodos, sejam eles: o Método das Diferenças Finitas (MDF), Método dos Volumes Finitos (MVF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF).

Neste trabalho foi proposto a utilização do MDF, e do ponto de vista operacional, também se fez necessário avaliar os níveis das principais variáveis, para assim poder atingir melhores resultados com tempo maximizado.

Para o desenvolvimento da simulação foi escolhido o programa Smokeview, que é um simulador desenvolvido para avaliar processos industriais e está validado como ferramenta de trabalho de visualização usado para exibir a saída de simulações. Nestas condições, foi utilizado o Fire Dynamics Simulator (FDS) que é um código de simulação que contempla a representação de simulação em grandes escalas (LES) para o fluxo em baixas velocidades.

Mediante a série de Taylor, a fórmula generalizada de qualquer representação baseada em diferenças finitas, na companhia de seu erro de truncamento oferece inúmeras contribuições no que diz respeito a ordem de precisão. A partir de experimentos virtuais serão obtidos os dados a serem submetidos às técnicas de otimização, utilizando-se a técnica de extrapolação de Richardson.

Uma preocupação constante das indústrias está relacionada com a busca de processos mais eficientes, tanto em relação à otimização dos processos quanto à questão ambiental. Sendo assim, dentro deste contexto se enquadra a Fluidodinâmica Computacional (CFD), (do inglês Computational Fluid Dynamics). A CFD é um ramo da engenharia que emprega conceitos relacionados às disciplinas de fenômenos de transporte, matemática e computação, na solução de problemas que envolvem escoamentos. A partir da CFD pode-se abordar um fenômeno a partir de suas equações fundamentais, como transferência de calor, massa e momento, resolvendo-as a partir de ferramentas numéricas e computacionais.

O desenvolvimento da CFD está fortemente ligado à rápida evolução dos computadores digitais e a partir de 1990 começou a ser utilizada em escala industrial. Além da grande vantagem em se observar o fenômeno de maneira mais realista, a CFD também permite a diminuição dos gastos relacionados com experimentos, pois através desta técnica pode-se avaliar os diversos testes propostos para uma determinada melhoria no processo e selecionar apenas os mais promissores para serem executados (TU; YEOH; LIU, 2008).

Desta maneira, é neste contexto que se baseia a temática desta dissertação, no intuito de fazer uma análise dos problemas de transferência de calor, visando a melhor compreensão dos fenômenos ocorridos e a aplicação do método de extrapolação de Richardson, para posteriores propostas de melhorias e mudanças visando à otimização do processo. A vantagem do uso da ER se dá pelo fato do seu pós-processamento simples, o qual não interfere diretamente na aquisição da solução, e o seu custo computacional que é muito baixo comparado nos termos de memória e tempo de cálculo.

## 1.2 - OBJETIVOS

### 1.2.1 - Objetivo geral

Analisar a utilização da Extrapolação de Richardson na otimização de escoamento em túnel de vento aplicando Dinâmica de Fluidos Computacional (CFD).

### 1.2.2 - Objetivos específicos

- Modelar os problemas a serem estudados: puramente convectivo e puramente difusivo;
- Aplicar o método de ER nos problemas considerando escoamento em túnel de vento e com isto avaliar o comportamento no campo de fluxo após aplicação da ER;
- Comparar os resultados obtidos pelo método de ER com os obtidos por meio da simulação numérica computacional;
- Apresentar o desempenho de método de ER.

## 1.3 - CONTRIBUIÇÕES DA DISSERTAÇÃO

O presente trabalho desenvolve um estudo dos problemas de transferência de calor. Ao qual irá verificar o uso da ER, e compara o seu custo computacional quando comparado nos termos de memória e tempo de cálculo sem a sua aplicação.

## 1.4 - ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Esse trabalho será organizado em 5 diferentes capítulos detalhados a seguir:

O capítulo 1 apresenta a motivação, os objetivos, as contribuições da dissertação e a forma de organização do trabalho.

O capítulo 2 apresentar uma revisão da literatura sobre o que já foi discutido por diferentes autores sobre o método de extrapolação de Richardson, fluidodinâmica computacional, simulação numérica, métodos de escoamentos turbulentos, e aplicações da expansão de Richardson na área de fenômeno de transporte.

O capítulo 3, apresenta os materiais e métodos quanto a forma de delimitação do problema, quanto a importância de sua aplicação. Apresenta o modelo do procedimento de modelagem matemática e seus principais parâmetros analisados, e os princípios de verificação e validação numérica. Ainda neste capítulo observa-se os princípios básicos de modelagem por fluidodinâmica computacional, e suas principais etapas. Apresenta também o uso da aplicação do método de extrapolação de Richardson, da qual é possível construir operações de métodos numéricos com uma maior precisão, otimizando-se desta maneira o tempo de cálculo. Neste capítulo ainda é apresentada a metodologia que será explicada no presente trabalho, a qual foi dividida em duas partes. A primeira consistiu na resolução de um problema CFD puramente convectivo e puramente difusivo. A segunda parte teve como objetivo a utilização do método de extrapolação de Richardson na análise CFD em estudo.

O capítulo 4 traz os resultados e discussões encontrados nos problemas propostos com e sem a emprego do método de extrapolação de Richardson.

O capítulo 5 apresenta as conclusões sobre o estudo, resumindo os pontos principais, sugestões para trabalhos futuros e contribuições.

## CAPÍTULO 2

### REVISÃO DA LITERATURA

#### 2.1 - DINÂMICA DOS FLUIDOS COMPUTACIONAL

Existem basicamente três tipos de técnicas para resolução de problemas de engenharia sendo eles métodos experimentais, analíticos e numéricos. Desses, cada um possui vantagens e desvantagens que dependem das particularidades do problema (TANNEHILL *et al.*, 1997), na Tabela 2.1 mostra a comparação entre os três tipos de técnicas de solução e os seus respectivos métodos. Uma discussão a esse respeito, ressalta que o emprego de métodos numéricos está livre de algumas restrições impostas aos métodos experimentais. Entre elas pode-se destacar a repetição de simulações ao se considerar a variação de parâmetros e de geometrias de cálculo.

Tabela 2.1 - Comparação entre as técnicas de solução.

<b>Técnica</b>	<b>Vantagens</b>	<b>Desvantagens</b>
<b>Experimental</b>	- Mais realista	- Equipamento exigido - Problema de escala - Dificuldade de medição - Custo operacional
<b>Teórica (Analítica)</b>	- Mais Geral - Fórmula Fechada	- Geometrias restritas e os processos físicos são mais simples - Em geral é mais restrita a problemas lineares
<b>Numérica</b>	- Não há restrição - Geometrias e processos complicados - Evolução temporal do processo	- Erros de truncamento e arredondamento - Exatidão das condições de contorno - Custo operacional

Fonte: Adaptado de TANNEHILL *et al.* (1997).

A Dinâmica dos Fluidos Computacional (do inglês, *Computational Fluid Dynamics* – CFD), consiste basicamente no emprego de métodos numéricos na resolução de equações que representam problemas envolvendo fluidos que estão em movimento, com ou sem troca de calor, onde o interesse principal é obter a distribuição dos perfis de velocidade, pressão e temperatura na região de escoamento (FORTUNA, 2000).

O uso do CFD permite a experimentação de novos projetos que antes não era possível, devido ao custo excessivo associado com a manufatura e testes. Assim o CFD pode melhorar o projeto, reduzir o custo do desenvolvimento e contribuir para o melhor desempenho do processo.

Para exemplificar, MARCHI (2001) apresenta um fluxograma detalhado no qual pode ser verificado na Figura 2.1, a qual representa as formas de solução de problemas e seus métodos. A solução de problema inicia-se com o fenômeno físico assim como é observado na natureza. Após ser definido o problema, opta-se por resolvê-lo de forma experimental ou de forma teórica dependendo dos recursos financeiros, equipamentos e mão de obra que esteja disponível.

Quando o problema em questão é resolvido de forma experimental ou empírica, desenvolvem-se modelos em tamanho real ou em escala, com a finalidade de que seja possível instalar os instrumentos necessários para definir seus critérios, com vistas ao entendimento e a geração da solução do problema e assim definir os parâmetros do projeto. Os resultados empíricos podem auxiliar os métodos teóricos na definição de constantes e comprovar a validade da equação estudada. Sendo assim na Figura 2.1 existe uma seta de ligação entre os resultados experimentais e a seta que liga o fenômeno, que se deseja estudar, aos métodos teóricos.

Quando resolvido de forma teórica, os resultados são expressões matemáticas. Entretanto, existem equações que não são resolvidas de forma analítica. Uma alternativa para suas resoluções é através do método numérico considerando soluções aproximadas. Na Figura 2.1 é mostrado que os modelos matemáticos podem ser resolvidos por métodos analíticos e numéricos. Para um mesmo problema ou modelo matemático as soluções obtidas por método analítico são mais precisas que as resolvidas pelos métodos numéricos. A diferença está no fato de haver erros da solução numérica em virtude do truncamento dos termos da equação ao aproximá-la. Este fenômeno é chamado de erro de truncamento. Outro erro associado com a aplicação de métodos numéricos são o erro de iteração este erro é quando apresenta uma sequência de passos sucessivos partindo-se

de uma aproximação inicial, e na ocasião em que o erro da solução numérica é composto somente por erros de truncamento, esta passa a se chamar erro de discretização. A redução do erro de discretização é obtida com o refinamento de malha, entretanto a desvantagem é o aumento do uso de memória e de tempo computacional, com a utilização de métodos de alta ordem há desvantagem no aumento da complexidade deste modelo numérico FERZIGER e PERIC (2002), ou ainda a aplicação de técnicas de extrapolação (SIDI, 2003).

Segundo SHYY *et al.* (2002), ROY (2005), MARCHI e GERMER (2009) eles referenciam à importância do emprego da técnica de Extrapolação de Richardson (ER) (do inglês, *Richardson Extrapolation – RE*) no auxílio as análises de erros numéricos e na precisão obtida com sua aplicação.

Cientistas, engenheiros e pesquisadores possuem diversas formas para solucionar problemas de forma numérica aplicando:

- Programas matemáticos: são programas como MATLAB (proprietário) é um software de alta performance voltado para o cálculo numérico e SCILAB (gratuito) é um software científico para computação numérica bem semelhante ao MatLab, sendo estas ferramentas matemáticas que apresentam rotinas determinadas e auxiliam no cálculo numérico. São flexíveis, entretanto, demandam tempo para inserção dos dados e devida execução.
- Programas computacionais: são programas prontos como ANSYS FLUENT, PHOENICS, FIRE DYNAMICS SIMULATOR e FLOW3D que possibilitam solucionar os problemas desejados.

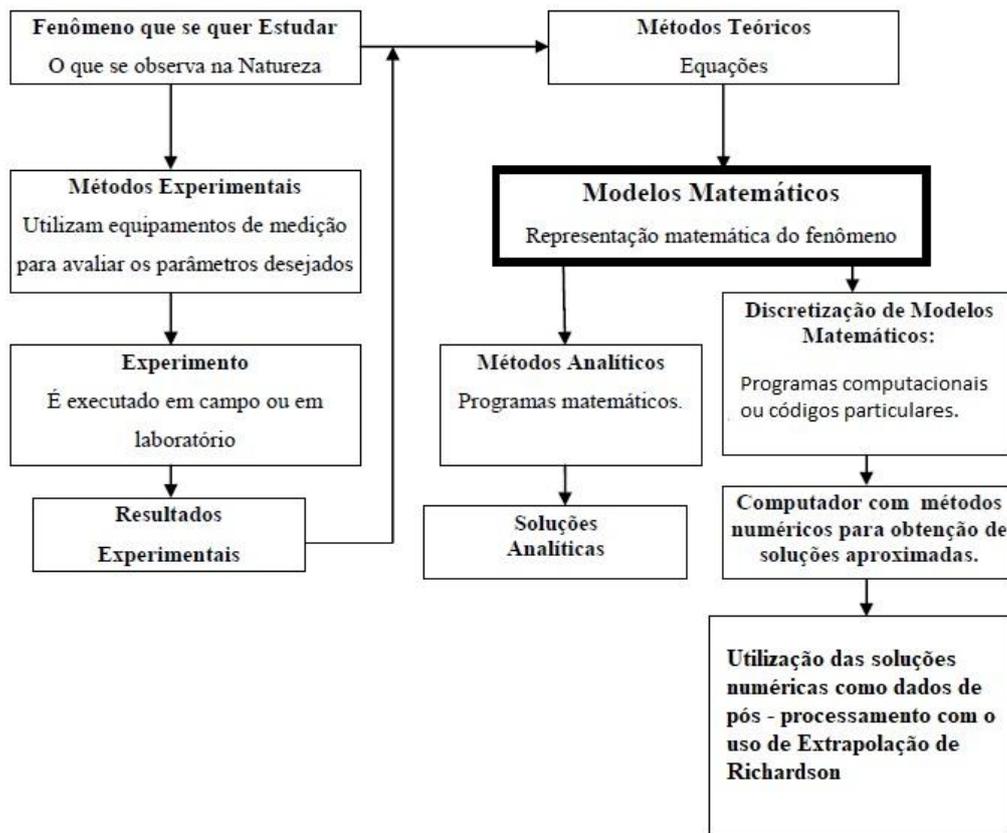


Figura 2.1 - Fluxograma de solução de problemas.  
Fonte: Adaptado de MARCHI (2001).

Os métodos numéricos são utilizados em problemas independentemente da complexidade, da geometria e dos parâmetros físicos. MALISKA (2004), qualifica os métodos analíticos e numéricos por métodos teóricos, quanto ao emprego dos métodos teóricos, os problemas que têm soluções analítica conhecida são aqueles que envolvem equações, geometrias, condições de contorno e condições iniciais muito simples, ou seja, são as exceções, nos demais problemas utilizam-se métodos numéricos cujas soluções adquiridas são determinadas com o emprego de computadores. São empregados diversos métodos como:

- Método das Diferenças Finitas (MDF)
- Método dos Elementos Finitos (MEF)
- Método dos Volumes Finitos (MVF)
- Método dos Elementos de Contorno (MEC)

Ao contrário dos métodos numéricos, os métodos analíticos somente conseguem obter uma solução se a geometria for simples. As idealizações em problemas complexos tornam os resultados analíticos distantes dos resultados reais, em virtude da dificuldade

do analisador em resolver as equações sem fazer considerações simplificadoras do modelo que foi estudado. Uma opção para a resolução de problemas complexos é utilizar as técnicas numéricas que veem avançando bastante e com isto os custos computacionais têm diminuído em função do desenvolvimento de novas tecnologias e softwares computacionais (DEITEL *et al.*, 2001).

Como a necessidade de estudos da CFD requer o uso de métodos que forneça soluções numéricas adequadas. De acordo com BREZINSKI e ZAGLIA (2009), qualquer transformação em que se aplique uma sequência de escala ou vetores pode ser entendida como um método de extrapolação, e no decorrer dos últimos anos a relevância desses métodos, como instrumentos computacionais eficazes, estão sendo cada vez mais reconhecidos no campo científico, dentre estes o método da extrapolação de Richardson (ER) é um dos mais conhecidos.

A utilização do método de extrapolação de Richardson (ER) pode ser empregado para melhorar qualquer método numérico que tenha a sua ordem de grandeza de seu erro conhecido. Quando se considera o emprego da extrapolação de Richardson (ER) de forma recursiva, com isto é possível potencializar a eficácia deste método. Esse processo é denominado Multiextrapolação de Richardson (MER) ou em inglês por *Repeated Richardson Extrapolation (RRE)* (DAHLQUIST e BJORCK, 2008).

MER é entendida como um pós-processamento onde se aplica um código já existente, ou em resultados que já foram adquiridos. Bastando somente a disposição das soluções numéricas em malhas distintas, sendo esta determinada por um processo de refinamento. Com a MER, mesmo considerando-se a aplicação de esquemas numéricos de baixa ordem, é possível obter soluções numéricas de alta ordem.

No estudo CFD, existem modelos matemáticos que procuram representar a presença de um regime turbulento no escoamento. Deste modo encontra-se uma grande quantidade de modelos de turbulência disponível, contudo apesar de inúmeras pesquisas no campo de turbulência, não existe apropriadamente nenhum modelo de turbulência adequado que possa vir ser aplicado a todos os tipos de regime de escoamento. Deste modo faz-se necessário selecionar adequadamente o modelo de turbulência para que o mesmo venha assegurar uma solução apropriada do escoamento. Atualmente existe três métodos para a análise de um escoamento turbulento, os quais podemos destacar:

- O método RANS (do inglês, *Reynolds Averaged Navier-Stokes*): No método RANS suas equações são obtidas através de um conjunto de médias das

equações de Navier-Stokes e da equação da continuidade. Esta é a técnica CFD mais empregada.

- O método LES (do inglês, *Large Eddy Simulation*): No método de simulação das grandes escalas de turbulência, resolve-se o cálculo dos turbilhões de grandes escalas, com uma menor modelagem dos turbilhões de menor escala, ou seja, as grandes escalas são calculadas enquanto que as menores escalas são modeladas. A malha estudada deve ser bastante refinada, pois a mesma exige um esforço computacional maior que o do método RANS. Costuma ser empregada em casos transientes.
- O método DNS (do inglês, *Direct Numerical Simulation*): É o cálculo das escalas de comprimento de turbulência. A malha é gerada de modo que venha a garantir que todas as escalas do escoamento turbulento sejam capazes de serem calculadas diretamente.

O método mais natural para a resolução de um escoamento turbulento é através da simulação DNS, nela as equações de Navier-Stokes são discretizadas e resolvidas numericamente. Porém devido à grande exigência de resolução e tempo computacional, a utilização do método DNS limita-se a aplicação de escoamentos com baixo ou com moderado número de Reynolds. O método DNS tende a tornar-se inviável ao ponto de vista prático, na medida em que a turbulência é qualificada em grandes números, escalas temporais e espaciais, e a simulação RANS e LES tornam-se as melhores opções na resolução dos problemas de turbulência. Todas as informações espectrais na modelagem RANS será perdida. Já no procedimento LES, ela é intermediária tanto em custo, quanto em tempo computacional entre a modelagem RANS e DNS.

Classifica-se os métodos de escoamento turbulento quanto ao seu grau de modelagem e ao seu custo computacional como observado na Figura 2.2. Nota-se que a simulação de grande escala LES está entre o método estatístico RANS e a simulação numérica direta DNS, em que observa-se também que este último é o que possui o maior custo computacional.

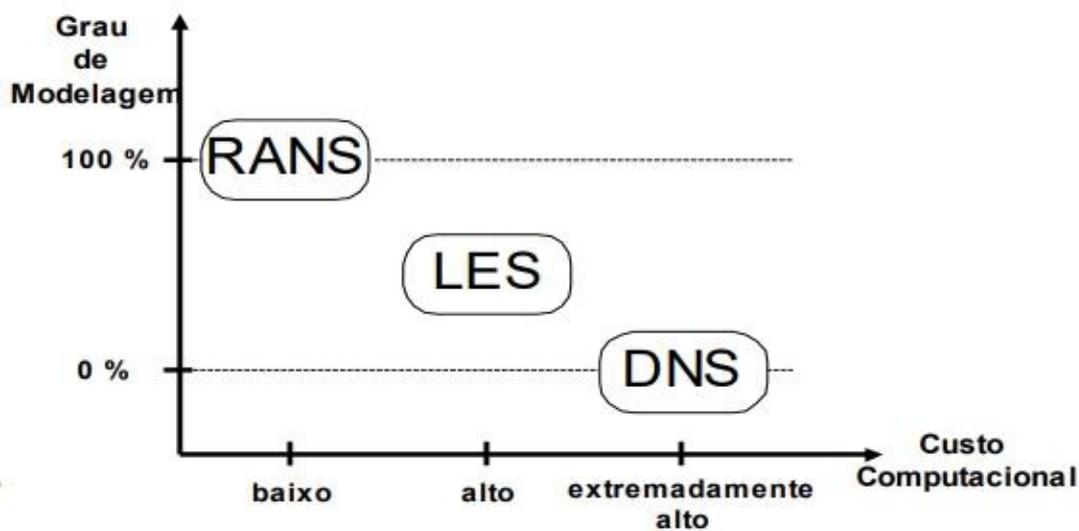
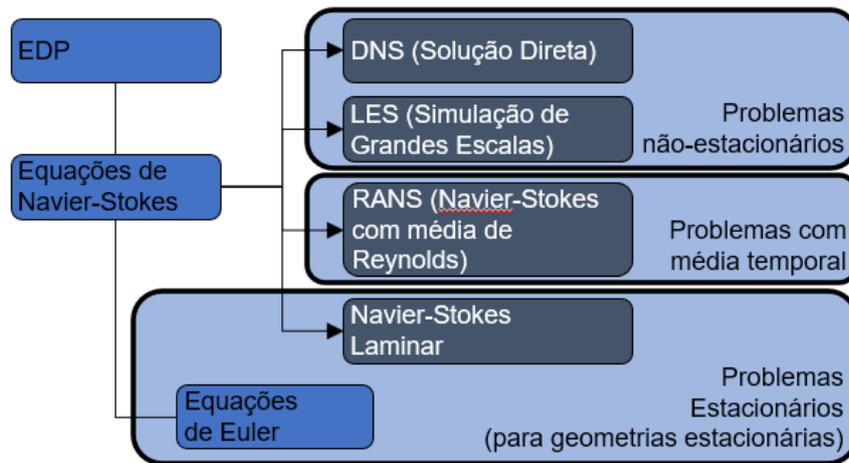


Figura 2.2 - Diferença entre o grau de modelagem versus custo computacional dos métodos de análise de escoamento turbulento no contexto da Mecânica dos Fluidos. Fonte: Adaptado de REZENDE (2009).

A presente avaliação do método de extrapolação de Richardson visa a avaliação da aplicação do método das diferenças finitas, aplicando a um túnel de vento no campo de fluxo e a comparação dos resultados por meio de simulação numérica de escoamento de fluido baseada no método LES. As escalas de tamanho que não são resolvidas, menores do que as malhas computacionais são modeladas utilizando métodos sub-grid específicos. Esta é a grande vantagem do método LES em comparação a modelagem RANS, aonde a turbulência é modelada.

A simulação de grandes tempos (LES) é um modelo matemático aplicado a turbulência e utilizado em CFD. Foi originalmente proposto por SMAGORINSKY (1963) para simular fluxos (escoamentos) de ar atmosféricos. O método LES tornou-se uma das metodologias mais promissora e bem sucedida para simular fluxos

(escoamentos) turbulentos isto com a melhoria de novas tecnologias computacionais, atualmente tem grande aplicação na engenharia, incluindo combustão, acústica e simulação da camada limite atmosférica.

A principal ideia por trás do método LES é a redução do custo computacional, ignorando as escalas de menor comprimento, que são as que computacionalmente demandam mais tempo para serem resolvidas, através da filtragem passa-baixa das equações de Navier-Stokes. Essa filtragem de passagem baixa, que pode ser vista como uma média temporal e espacial, efetivamente remove informações de pequena escala da solução numérica, no entanto, seu efeito no campo de fluxo deve ser modelado, sendo está uma área de pesquisa ativa para problemas em que as pequenas escalas podem desempenhar um papel importante, como os fluxos multifásicos.

O termo Fenômeno de Transporte é o nome dado a uma das áreas de estudo da Física Aplicada. Essa área se subdivide em Mecânica dos Fluidos, Transferência de Calor e Transferência de Massa, sendo:

- Mecânica dos Fluidos: estudo do transporte de quantidade de movimento;
- Transferência de Calor: estudo do transporte de energia;
- Transferência de Massa: estudo do transporte de massa.

Os Problemas que envolvem dois ou mais fenômenos de transporte podem estar ocorrendo simultaneamente. Estes tipos de problemas são encontrados corriqueiramente em processos industriais, porém, didaticamente estes fenômenos são estudados separadamente.

No cotidiano da indústria o profissional se depara com vários processos envolvendo os fenômenos de transporte. Para um fluxo perfeito ou para um melhor entendimento do problema, bem como resolução de problemas envolvendo o mesmo, o profissional deve recorrer ao estudo dessa área da Física Aplicada.

Uma aplicação da Mecânica dos Fluidos se dá no dimensionamento de bombas e motores de tanque de agitação. Em processos contínuos, a potência de determinados equipamentos deve ser mencionada em função da vazão, de forma a estabelecer as condições de operação. Como por exemplo, ao dimensionar uma bomba obtém-se uma diferença de pressão e por meio dela, a relação com a vazão do processo. Uma outra aplicação é para se determinar a potência ou a rotação de um motor, uma vez conhecido a energia mecânica necessária para a mistura em um tanque de agitação.

O processo de produção e modelagem neste caso do vidro, é um problema típico de Transferência de Calor. Na produção do vidro, o mesmo é obtido de matérias-primas

fundidas que passam por um processo de modelagem e, em seguida deve ser resfriado. Porém, a Transferência de Calor auxilia o profissional a responder algumas questões, a saber: Qual o gradiente de temperatura dentro da peça de vidro? Quanto tempo o material levará para atingir a temperatura final desejada? Qual material pode ser utilizado para otimizar o processo e acelerar o resfriamento? Entre tantas outras perguntas.

Já a Transferência de Massa pode ser exemplificada em um processo que envolve reações químicas ou de separação. Em um processo de destilação, deve-se definir o grau de separação com base nas propriedades dos fluidos para em seguida realizar os balanços e dimensionar a torre de destilação. Na indústria de alimentos a Transferência de Massa é utilizada para o estudo da segurança alimentar. Por exemplo, para se determinar a composição do material e a espessura da embalagem para que o alimento não seja afetado pela umidade e oxigênio do ar.

## 2.2 - APLICAÇÕES DO CFD E ER

Grandes avanços têm sido observados em estudos e em análises no que se refere a verificações de soluções analíticas e/ou numéricas, apoiando-se em recursos fornecidos pelo estudo da dinâmica dos fluidos computacional ou CFD, a qual teve início no final da década de 70, para a obtenção de soluções numéricas através de métodos computacionais e das equações de conservação do momento e da massa. É uma área muito relevante na solução de problemas práticos. É a área da ciência que envolve problemas de simulação numérica de escoamento de fluidos, transferência de calor, e foi aplicada em vários cenários de engenharia. Como por exemplo na indústria do petróleo, dispersão de gás, processo químico, análise de explosão, engenharia aeroespacial e entre outros. O estudo de CFD se iniciou com a combinação das disciplinas de Cálculo Numérico e de Mecânica dos Fluidos. As equações que rege o escoamento dos fluidos se originaram na disciplina de mecânica dos fluidos e podem ser solucionadas pela resolução de diferentes métodos numéricos. Uma vez que a aplicação CFD é realizada, a análise da convergência de malha e o processamento para atingir a solução do problema requer um tempo muito grande considerando os padrões atuais da indústria onde respostas rápidas são exigidas (FERREIRA JR, 2002).

A fim de estudar um fenômeno físico qualquer, deve-se inicialmente modelar a parte física do problema. Por modelagem, entende-se determinar quais as grandezas

físicas (temperatura, pressão, densidade etc.) atuam sobre o sistema físico, e como elas o afetam. Elabora-se um modelo, por exemplo, a partir da aplicação dos princípios de conservação adequados ao fenômeno (conservação da massa, energia e momento) e de equações constitutivas (equação cinética, lei do resfriamento de Newton, lei de Raoult etc.). Dessa forma, os modelos resultantes são expressos por equações que relacionam as grandezas entre si, e frequentemente esses modelos só admitem soluções analíticas se forem feitas simplificações (FORTUNA, 2012).

A fluidodinâmica computacional é uma ferramenta utilizada por cientistas, profissionais da área e engenheiros na predição e simulação de escoamento de fluidos, transferência de calor e massa, reações químicas e fenômenos correlatos. Esses problemas governados por equações matemáticas são resolvidos por meio de métodos numéricos, geralmente utilizando-se computadores (TIAN 2015, p. 5).

Após 1960, a indústria aeroespacial implantou as técnicas de CFD para o design, desenvolvimento e produção das aeronaves. Dessa forma, com a disponibilidade mais acessível de computadores de alta performance, a CFD teve gradativamente um aumento de interesse, e entrou de forma mais ampla na comunidade industrial na década de 1990 (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007).

O nome CFD surgiu no início dos anos 70. Uma das primeiras aplicações da CFD foi na simulação aerodinâmica nas condições próximas à velocidade do som. No começo da década de 1980, deu-se início ao emprego da técnica em problemas de duas e três dimensões. Nessa mesma época, técnicas como multigrid abriram o leque de possibilidades para o uso e aplicação desta técnica. Já no final dos anos 1980, avanços como o esquema implícito, tornaram possíveis a resolução de problemas de gases reais. Depois disso, o foco se voltou para melhora e sofisticação da geração de grid, tendo como destaque o surgimento dos primeiros grids não estruturados (BLAZEK 2001, p. 1 e 2). O objetivo final da fluidodinâmica computacional é o entendimento dos eventos físicos do escoamento de fluidos internos ou externos à objetos, equipamentos ou corpos. Esses eventos incluem fenômenos como dissipação, ondas de choque, superfícies de deslizamento, difusão, convecção e turbulência (DAVID W. ZINGG 1999, p. 1). Atualmente, devido a sua versatilidade e baixo custo, a técnica de CFD vem sendo utilizada nas mais variadas disciplinas da engenharia. Mas de acordo com CEBECI *et al.* (2005), apesar do grande desenvolvimento em CFD nos últimos anos, a técnica ainda possui algumas imperfeições em função de ser um campo ainda muito novo.

A extrapolação de Richardson (ER) pode ser usada em problemas práticos de CFD para reduzir tão significativamente o erro numérico quanto em problemas simples. O erro numérico pode ser definido (KNUPP e SALARI, 2003) pela diferença entre a solução analítica exata e a solução numérica de uma determinada variável de interesse, isto é, as variáveis de interesse em dinâmica dos fluidos são: velocidade, temperatura, pressão, massa específica, fluxo de calor, fluxo de massa e força. Já o erro numérico (ROACHE, 1998) são os erros de discretização, de arredondamento, de iteração, entre outros, sendo que o primeiro geralmente é o que se tem maior magnitude. O próprio autor da ER (RICHARDSON e GAUNT, 1927) aplicou a ER com dois níveis de extrapolação em problemas bidimensionais de condução de calor antes da era do computador, nos estudos de JOYCE (1971), apresenta-se um extenso estudo sobre o processo da técnica de extrapolação em análises numéricas, baseando quase todo o estudo em extrapolação de Richardson.

Observamos a aplicação da ER de forma simples, isto é, com apenas um nível de extrapolação, por exemplo, nos trabalhos de, De VAHL DAVIS (1983) em convecção natural; WANG e ZHANG (2009) na equação de Poisson 2D; e MA e GE (2010) na equação de advecção-difusão 3D.

Nos dias atuais observamos o pouco emprego do uso de ER em CFD, talvez isto se dá pela dificuldade pouco compreendida, explorada e relatadas pela literatura. Estudos (MARCHI *et al.*, 2008) encontraram algumas destas dificuldades, que são: (1) a redução do erro com ER no caso dos valores de variáveis com extremos (máximo/mínimo); (2) para as coordenadas de variáveis com extremos; (3) com alguns níveis de extrapolação o erro de arredondamento pode se tornar maior que o erro de discretização, com isso ER perde sua eficiência; e (4) o uso incorreto das ordens do erro pode prejudicar muito a eficiência da ER.

Existem muitas vantagens em utilizar fluidodinâmica computacional. Primeiramente, deve-se recordar o fato de, no desenvolvimento teórico de uma situação física, muitos termos serem desprezados de modo que a resolução das equações seja possível. A CFD apresenta a possibilidade de resolver as equações diferenciais completas, tornando a análise do escoamento mais próxima da realidade, e possibilitando o estudo em maiores detalhes de alguns termos específicos que aparecem nas equações governantes. Outra vantagem está no fato da CFD complementar os estudos analíticos e experimentais no escoamento de um fluido real, fornecendo uma alternativa mais completa ou com menor custo. Em especial, a CFD reduz

substancialmente o tempo dedicado e os gastos em design e produção comparado com os estudos experimentais e oferece a habilidade de resolver problemas complexos de escoamentos nos quais os estudos analíticos não seriam possíveis. A CFD também tem a capacidade de simular escoamentos em condições que não seriam reproduzíveis em testes experimentais, por exemplo, em cenários de acidente nuclear, cenários muito grandes ou muito remotos e perigosos de serem simulados experimentalmente, como é o caso de estudos na biologia e na geofísica. Outra vantagem importante é a maneira com que os códigos de CFD fornecem os resultados das simulações, através de informações detalhadas e visíveis (TU *et al.*, 2008).

MEHTA *et al.* (1998), propôs um modelo tridimensional em estado estacionário e monofásico o sistema utilizado foi ar/água. No trabalho foram utilizadas as equações de conservação de massa (continuidade) e do momento (equação de Navier-Stokes) foram aplicados apenas para a fase líquida.

Já os trabalhos de KRISHNA *et al.* (1999a) e VAN BATEN e KRISHNA (2000), os mesmos propuseram um modelo tridimensional, transiente e multifásico, dentro de uma abordagem Euleriana-Euleriana. O sistema utilizado para este trabalho foi o ar para a fase gasosa e a água para a fase líquida, ambos os trabalhos foram elaborados em uma mesma modelagem, com uma diferença que o primeiro foi elaborado para uma coluna com seção transversal retangular e o segundo foi elaborado para uma coluna de seção transversal circular, os autores ainda utilizaram malhas estruturadas em seus respectivos trabalhos.

Já no que diz respeito ao trabalho de LIU *et al.* (2000), foi proposto um modelo bidimensional, monofásico, no qual as equações da continuidade e da transferência de momento (equações de Navier-Stokes) foram escritas e definidas apenas para a fase líquida, o sistema utilizado foi o ar/água, e o objetivo do estudo foi o de avaliar o padrão de escoamento na fase líquida. Neste trabalho os autores levaram em consideração a influência de dois fatores no padrão do escoamento da fase líquida, como a força de resistência exercida na fase líquida pela fase vapor, e o efeito borbulhante criado pela fase vapor.

GESIT *et al.* (2003), o mesmo propôs dois modelos tridimensionais, multifásicos, sendo um para regime estacionário e outro para transiente, ambos dentro de uma abordagem Euleriana-Euleriana. O sistema utilizado foi ar para a fase gasosa e água para a fase líquida. O objetivo deste trabalho foi o de avaliar o comportamento hidrodinâmico do escoamento. Dessa forma os autores trabalharam apenas com as

equações da continuidade e da transferência de momento (equações de Navier-Stokes), sendo estas escritas para as duas fases.

## CAPÍTULO 3

### MATERIAIS E MÉTODOS

#### 3.1 - DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

O presente trabalho propõe concentrar-se no estudo do desempenho da aplicação do método de extrapolação de Richardson (ER), no estudo de convergência de malha aplicado no campo de fluxo. A geometria em estudo foi construída no software Blender. As condições iniciais e de contorno foram configuradas usando o programa BlenderFDS, o cálculo foi feito com um código CFD chamado Fire Dynamics Simulator (FDS) e os resultados foram extraídos com o software Smokeview. Ainda, foi desenvolvido um código de Extrapolação de Richardson utilizando-se a linguagem de programação Fortran para extrapolar dados do software Smokeview. As propriedades do campo de fluxo, como massa específica, pressão, temperatura e velocidade em todas as direções, foram calculadas para três tamanhos de malhas com e sem a aplicação de ER.

##### 3.1.1 - O software blender

No presente trabalho foi utilizado o software Blender versão 2.78, um software livre ao qual é uma multiplataforma e está disponível para os mais variados tipos e versões de sistemas operacionais.

A Figura 3.1, representa a interface gráfica do software Blender. O qual é um software de código fonte aberto, que foi desenvolvido pela Blender Foundation, para projetos de animação, modelagem, texturização, composição, renderização e outros. Este software implementa avançadas ferramentas de simulação tais como, dinâmica de corpo rígido, dinâmica de corpo macio e dinâmica de fluidos e ferramentas de modelagem baseadas em modificadores, o mesmo suporta 25 idiomas, incluindo o português. Já o BlenderFDS é a interface gráfica de código aberto e o pre-processador para o Fire Dynamics Simulator (FDS), o BlenderFDS permite que os usuários mantenham o arquivo de entrada FDS exportado sob controle total, enquanto facilita a entrada de dados geométricos, ele é baseado no Blender, um conjunto de criação de conteúdo 3D de código aberto.

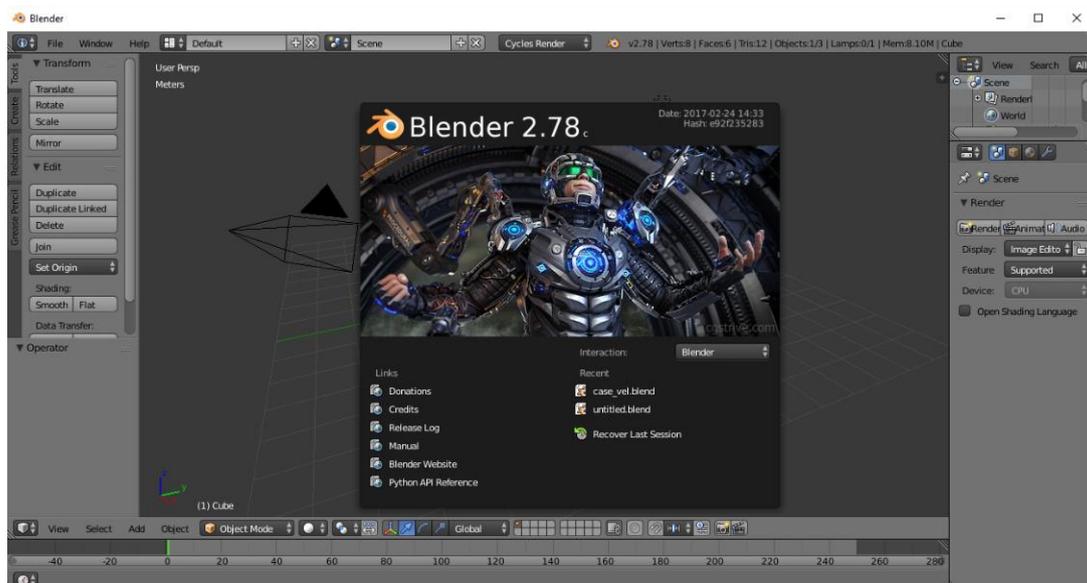


Figura 3.1 - Interface gráfica do Software Blender.  
Fonte: Blender Foundation.

### 3.1.2 - O software fire dynamics simulator (FDS)

Segundo VELASCO (2014) o FDS é um software livre e de simulação numérica CFD desenvolvido principalmente para análise de problemas práticos de combustão ligados ao escoamento de fluido acionado por incêndio. Além desta finalidade, o código tem sido utilizado no estudo fundamental de fenômenos físicos, como por exemplo dinâmico dos fluidos computacionais, reações de combustão e transferência de calor. O FDS é um programa Fortran que analisa os parâmetros de entrada de um arquivo de texto, calcula uma solução numérica para as equações de governo e grava os dados de saída específico pelo usuário. O Smokeview é um programa complementar que lê os arquivos de saída FDS e produz animações. O FDS é um software livre e foi desenvolvido pela *National Institute of Standards and Technology* (NIST) do Departamento de Comércio dos Estados Unidos, em cooperação com o *VTT Technical Research Centre of Finland*, este software foi lançado no ano 2000, e atualmente após 19 anos de desenvolvimento já está em sua versão 6.6.0, juntamente com o apoio de diversos outros centros de pesquisa, como a *University of Texas*, *University of Maryland*, *Centre Scientifique et Technique du Bâtiment* (França), *HHPBerlin* (Alemanha) e o *Global Engineering and Materials* (Princeton/USA).

### 3.2 - PROCESSO DE MODELAGEM: A MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem matemática é a técnica na qual se utiliza a aplicação de modelos experimentais e equações matemáticas na representação da natureza de uma situação real ou uma proposta sob investigação, com o propósito de mensurar o comportamento deste sistema sob o aspecto de diversas circunstâncias.

O processo de simulação pode ser estabelecido através da construção de um determinado modelo, no qual o seu tratamento de dados deve representar o desenvolvimento e resposta. Na simulação deve-se interpretar os dados para que se possa aplicar no experimento, de maneira que possa ser possibilitado o melhor entendimento do comportamento do sistema, objetivando deste modo a estimativa da operação do sistema. Neste entendimento se faz necessário a aplicação de alguns parâmetros na análise da avaliação e validação do modelo matemático. Segue-se os principais parâmetros que devem ser analisados para a validação de um modelo.

- Aplicação do modelo computacional tem que ser qualificada para que o mesmo possa descrever o comportamento físico do sistema experimental.
- Aplicação do modelo matemático deve ser comparada ao experimental.
- As teorias ou hipóteses que explicam o modelo matemático observado, ocorrendo um não entendimento do problema pode gerar uma não validação do problema.
- Aplicação do modelo matemático deve ser favorável para prever um comportamento futuro nas mudanças variadas ocorridas no sistema. Fazendo com que o modelo matemático seja eficaz a receber mudanças de variáveis com a mesma capacidade que é apresentada pelo modelo experimental. FONTES, (2005).

### 3.3 - FLUIDODINÂMICA COMPUTACIONAL (CFD)

Denomina-se CFD ao estudo da análise de sistemas no qual envolve fluidos, transferência de calor e fenômenos relacionados com o conforto térmico através de uma simulação numérica computacional. Este processo possibilita a redução dos custos com experimentos caros e que muitas vezes são inacessíveis, além de permitir a análise precisa detalhadamente de um determinado equipamento. O CFD foi inserido no

mercado em meados de 1960 na indústria aeronáutica com o objetivo e aperfeiçoamento dos projetos de aeronaves. A partir de 1990, com a expansão do desenvolvimento computacional, da redução do custo de produção de computadores e a inclusão de software com interface amigável, o CFD se difundiu por outras áreas (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007).

É a ciência da substituição das equações diferenciais de transporte (transporte de momento, de calor e de massa) que descreve os princípios fundamentais da física por suas equações discretizadas, possibilitando sua resolução no espaço e/ou no tempo e posterior visualização estacionária ou dinâmica, seus resultados quando empregados ao volume de controle, fenômenos como reação e turbulência necessitam ser modelados. Por esse motivo encontra-se uma dificuldade na aplicação desta ferramenta, que é a definição do modelo que será utilizado para descrever o fenômeno em estudo. Outra dificuldade encontrada é a discretização do domínio. Em soluções numéricas que envolvem problemas de fluidodinâmica só é viável a sua aplicação pela divisão do domínio geométrico estudado em números finitos de partes, a quais serão aplicadas as equações de conservação que representam o problema. Nesta etapa, é importante salientar que os volumes estabelecidos descrevam bem o domínio, pois a representatividade dos resultados irá depender diretamente da qualidade da discretização que será realizada.

No estudo de CFD, são estudadas as seguintes equações:

Equação da continuidade, onde  $p$  é qualquer quantidade,  $v$  é a velocidade do fluido e o  $S$  descreve a geração ou remoção de  $p$ . A presente equação pode ser derivada por considerar os escoamentos em um compartimento infinitesimal. Esta equação geral deve ser usada para derivar qualquer equação de continuidade de um volume a equações mais complicadas como as equações de Navier-Stokes, esta equação também generaliza a equação de advecção.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = S, \quad (3.1)$$

Equação de Navier–Stokes, vai descrever o escoamento de fluidos. Vão permitir determinar os campos de velocidade e de pressão no escoamento Eq. (3.2).

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla v \cdot v = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mu \nabla^2 v + \rho g, \quad (3.2)$$

E a equação da energia Eq. (3.3).

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}_x \frac{\partial T}{\partial x} + \mathbf{v}_y \frac{\partial T}{\partial y} + \mathbf{v}_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = - \left[ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right] - \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p \frac{Dp}{Dt} - (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \mathbf{v}), \quad (3.3)$$

Cada lei da conservação considera uma mudança de propriedade em uma partícula qualquer. Cada propriedade (velocidade, temperatura e massa) de uma partícula é calculada em função da posição e do tempo.

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}, \quad (3.4)$$

$$\nabla(\rho\phi\mathbf{u}), \quad (3.5)$$

$$\nabla(\kappa\phi), \quad (3.6)$$

$$s_\phi, \quad (3.7)$$

As Equações (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), são definidas como o termo de acúmulo, termo convectivo, termo difusivo e termo fonte respectivamente. Sendo assim pode-se definir uma equação geral da conservação que é dada pela Eq. (3.8).

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \nabla(\rho\phi\mathbf{u}) = \nabla(\kappa\phi) + s_\phi, \quad (3.8)$$

Onde,  $\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}$  é o termo de acúmulo,  $\nabla(\rho\phi\mathbf{u})$  é o termo convectivo,  $\nabla(\kappa\phi)$  é o termo difusivo e  $s_\phi$  é o termo fonte. Quando o valor  $\phi$  for igual a 1, ou igual a velocidade  $\mathbf{u}$  ou temperatura  $T$ , têm-se as equações de conservação da massa, momento e energia, respectivamente. Os termos convectivos e difusivos presentes na Eq. (3.8) são resolvidos pelo método das diferenças finitas, enquanto o termo de acúmulo é integrado utilizando o método da marcha no tempo (Runge-Kutta de primeira ordem).

O método de Runge-Kutta forma uma indispensável família de métodos iterativos implícitos e explícitos na resolução numéricas de problemas de valores iniciais na resolução de problemas que envolvem equações diferenciais ordinárias

(EDO). Este método foi desenvolvido pelos matemáticos RUNGE (1985) e KUTTA (1901).

A simulação matemática é uma ferramenta de bastante utilidade na elaboração de novos softwares computacionais. Na grande parte de estudo de sistemas, a modelagem matemática computacional é extremamente útil, uma vez que fatores como o tempo, número de experimentos e variabilidade nas condições experimentais, pode vir a dificultar uma análise mais completa. Dessa forma, busca-se desenvolver uma metodologia mais adequada para caracterizar e qualificar padrões de escoamentos observados e com isto passa a utilizar modelos de fluidodinâmica computacional CFD.

O CFD é um sistema de dado e de técnicas matemáticas, numéricas e computacionais, que são utilizadas para obter, visualizar e interpretar soluções computacionais na resolução das equações de conservação de grandezas físicas de interesse de um determinado escoamento. Observa-se que o princípio fundamental destas equações de conservação é a teoria de fenômeno de transporte. Deste modo afirma-se que o CFD é o conjunto que engloba as técnicas de simulação computacional empregadas para prever os fenômenos físicos ou físico-químicos que ocorrem em escoamentos que podem estar relacionados com a ação e a influência de mecanismos que envolveram fatores como dissipação, difusão, convecção, condições de contorno e turbulência.

Considerando-se o presente estudo de um túnel de vento no campo de fluxo, tendo em vista a aplicação do método de extrapolação de Richardson a fim da obtenção de respostas precisas para condições que foram aplicadas, fazendo-se indispensável a aplicação da técnica CFD. Esta técnica pode ser facilitada através do conhecimento de sua parte experimental, através dos detalhes das condições iniciais do processo e dados que possibilite uma futura tradução da condição real do experimento.

A utilização de um método numérico pode ser dividida em três etapas, as quais estas são definidas por: pré-processamento, processamento e pós-processamento. No pré-processamento, define-se a geometria ou domínio físico do problema, domínio este que será discretizado por algum tipo de elemento. Sendo esta a parte mais difícil e também a mais importante do pré-processamento que é a construção da geometria e a geração da malha. Nesta etapa são definidas as propriedades físicas do fluido e os demais parâmetros como condições iniciais e condições de contorno, que são necessárias para a resolução do problema. Na etapa do processamento, aplica-se um “solver” (nome usado para programas numéricos), fundamentado no modelo numérico

para a aquisição das grandezas de interesse (temperatura, pressão, velocidade). Já no pós-processamento os resultados serão analisados para se verificar a validade do modelo numérico que foi proposto para a resolução do problema. Procedimentos de visualização gráfica podem ser empregados para a análise dos resultados.

### **3.3.1 - Discretização do domínio**

O método analítico se difere do método numérico na seguinte condição, a primeira oferece uma solução exata e fechada para a resolução das equações propostas, porém existe diferenças em seu ponto de domínio. Já a segunda é que o método numérico resolve estas equações em número finito de pontos, no qual a malha é a divisão do domínio que é analisado.

### **3.3.2 - Malha**

A malha computacional ou mesh, representa uma subdivisão do domínio computacional que se compreende em várias células de tamanho reduzido que são lidas pelo programa como pequenos volumes de controle nos quais os problemas físicos propostos podem ser resolvidos de forma individual. O processo de geração da malha é importante visto que muitas vezes acaba consumindo a maior parte do tempo e esforços aplicados nestas simulações. As malhas podem ser estruturadas e não estruturadas, hexagonal, tetraédrica, e malha híbrida. A geração da malha é um processo bem versátil que pode ser ajustado dependendo da sua demanda, em áreas de turbulência, uma malha mais refinada pode ser aplicada, enquanto em áreas de escoamentos menos turbulentos, a malha pode ser mais grosseira, reduzindo assim o seu custo computacional. Com isto, na solução numérica para um determinado escoamento ele irá depender da qualidade de sua malha, ou seja, uma malha refinada em uma região na qual os gradientes de suas variáveis são elevados, implicará na obtenção de melhores resultados. A geração de uma malha não é simples, principalmente quando se trata de uma região tridimensional. A obtenção da malha apropriada pode vir a se tornar um problema muito mais complexo do que calcular o escoamento do fluido.

### 3.3.3 - Métodos de discretização

É de grande fundamentação na resolução por aproximação das equações diferenciais a utilização de métodos numéricos. Os métodos de discretização são vistos como uma mineração de dados, dentre eles, os que mais se destacam são: o MDF, que utiliza a aproximação das equações na sua forma derivada, no ponto da malha; o MVF, em que sua aproximação é realizada na sua forma integral e nas suas superfícies e em seu volume de controle e; o MEF, o qual deve-se escolher funções de peso e de formato. (FERZIGER e PERIC, 2002).

### 3.4 - EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON (ER)

A extrapolação é um método matemático que nos permite encontrar o valor de uma determinada função num ponto fora de sua zona conhecida. Segundo BREZINSKI (2000), a extrapolação consiste em uma técnica de análise numérica para melhorar a precisão de um processo, baseada em um parâmetro ou para acelerar a convergência de uma sequência. A extrapolação de Richardson (ER) é um método simples que confirma essa ideia e tanto contribui para a velocidade de convergência como também para um resultado preciso. Esse método pode ser uma alternativa para a problemática em questão, conforme o resultado dos cálculos. Se o emprego da ER for favorável ao alcance de melhores resultados em menor tempo, a simulação terá sido otimizada e muitos pesquisadores poderão usufruir dos benefícios dessa estratégia com aplicação deste método de ER.

Segundo MACHI *et al.* (2013), as principais vantagens com o uso da extrapolação de Richardson são: (1) um pós-processamento simples no qual não interfere na obtenção da solução numérica em uma determinada malha; (2) o seu custo operacional é muito baixo relacionado em termo de memória e tempo de CPU; (3) pode ser empregada em códigos computacionais já existentes ou em resultados já obtidos; e (4) este método pode ser aplicado a diversos métodos numéricos, aproximações numéricas e variáveis de interesse. O objetivo principal da aplicação da ER é reduzir erros e, como consequência, aumentar a precisão das soluções. Entretanto a aplicação do método gera boas consequências para simulações em CFD, diminuição dos recursos computacionais utilizados e consequentemente o seu tempo computacional. Ao se empregar esse método de extrapolação obtém-se um bom resultado sem um robusto

refinamento de malha e sem o aumento da sua ordem de precisão das suas aproximações numéricas.

Tendo comprovado a eficácia da aplicação da ER em soluções numéricas para a redução do tempo computacional e aumento de precisão, este trabalho tem como objetivo aplicar o método de ER em problemas puramente convectivo e puramente difusivo, devido à complexidade da resolução das equações de Navier-Stokes para este dado tipo de escoamento turbulento. Além de usar a ER para melhorar os resultados utilizando menos recursos, outra vantagem é que a simulação será realizada em LES. A diminuição do tempo computacional desse tipo de simulação pode ser bastante útil para aplicações práticas na engenharia, reduzindo custos com pesquisas e otimizando ainda mais os processos industriais.

### 3.4.1 - Procedimentos numéricos do método de extrapolação de Richardson

O método de extrapolação de Richardson constitui-se em uma nova e melhorada aproximação, usando-se duas aproximações menos precisas com base no erro de truncamento da Série de Taylor.

Baseando-se na série de Taylor tem-se a Eq. (3.9):

$$f'(x) = D(h) - \frac{h^2}{6} f'''(x) - \frac{h^4}{120} f^{(5)}(x) - \dots, \quad (3.9)$$

Onde,  $D(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ .

Uma nova aproximação da série de Taylor pode ser obtida empregando o passo  $h/2$  na Eq. (3.9), e obtendo-se a Eq (3.10). da seguinte forma:

$$f'(x) = D\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{h^2}{24} f'''(x) - \frac{h^4}{1920} f^{(5)}(x) - \dots, \quad (3.10)$$

Multiplicando a Eq. (3.10) por 4 e subtraindo da Eq. (3.9):

$$f'(x) = D\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{h^2}{24} f'''(x) - \frac{h^4}{1920} f^{(5)}(x) - \dots \quad \times 4 \quad (3.10)$$

—

$$f'(x) = D(h) - \frac{h^2}{6} f'''(x) - \frac{h^4}{120} f^{(5)}(x) - \dots \quad (3.9)$$


---

Obtém-se uma nova equação a Eq. (3.11):

$$f'(x) = D\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{D\left(\frac{h}{2}\right) - D(h)}{3} + \frac{h^4}{160} f^{(5)}(x) + \dots, \quad (3.11)$$

Onde,  $\frac{h^4}{160} f^{(5)}(x)$  é denominado, o erro de truncamento.

O erro de truncamento surge sempre que se substitui um problema contínuo por um discreto, ou quando se substitui um processo de cálculo com um número infinito de operações por outro com um número finito. Ou seja, é um erro que manifesta-se cada vez em que se substitui um processo matemático infinito por um processo matemático finito ou discreto.

### 3.5 - METODOLOGIA

A metodologia aplicada no presente trabalho foi dividida em duas partes. A primeira parte consistiu na resolução de um problema de CFD puramente convectivo e puramente difusivo, onde as equações de conservação e condições de contorno foram definidas. A segunda parte teve como objetivo a utilização do método de ER aplicado na análise CFD em estudo.

As características da CPU utilizadas foram as seguintes:

- Intel(R) Dual-Core CPU N2806 1.60 GHz
- 4,00 GB de RAM

#### 3.5.1 - Problema puramente convectivo

O campo de fluxo em estudo investigado está apresentado na Figura 3.2, a que mostra a geometria de um duto com uma suave elevação (“*bump*”). As direções  $x$  e  $y$  têm 10,0 e 3,0 metros de unidades de comprimento e altura, respectivamente. As condições iniciais foram escolhidas de modo que o problema em estudo atinja a convergência numérica. A condição de contorno de entrada foi calculada considerando

o fluxo isentrópico e a de saída foi definida como um valor de pressão igual a 85000 Pa. Além disso, as paredes foram definidas com a condição de contorno de *Dirichlet* para os fluxos de massa na direção  $y$ .

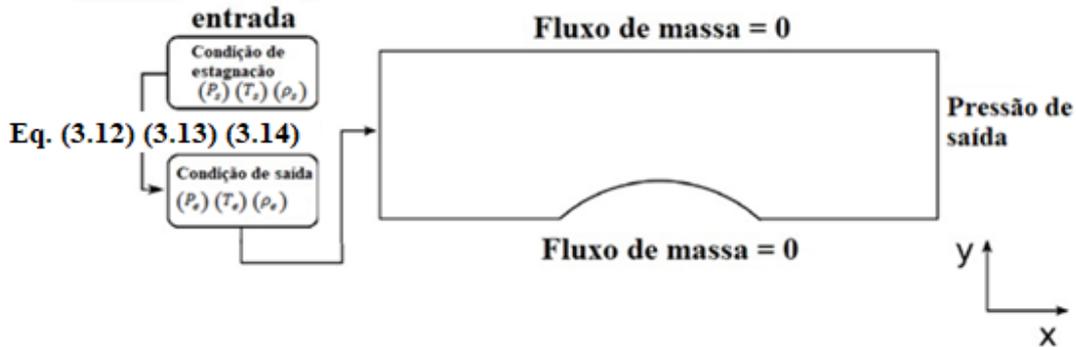


Figura 3.2 - Configuração do duto com um “bump” no meio da geometria.

Abaixo seguem as equações da expansão isentrópica, onde são determinadas na condição de entrada para o campo de fluxo estudado Eq. (3.12), Eq. (3.13) e Eq. (3.14).

$$\frac{P_e}{P_s} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad (3.12)$$

$$\frac{T_e}{T_s} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right), \quad (3.13)$$

$$\frac{\rho_e}{\rho_s} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (3.14)$$

Onde,  $P_e$  é a pressão de saída,  $P_s$  é a pressão de estagnação,  $T_e$  é a temperatura de saída,  $T_s$  é a temperatura de estagnação,  $\gamma$  é a razão entre as capacidades caloríficas do gás ( $\gamma = 1,4$ ),  $\rho_e$  é a massa específica de saída,  $\rho_s$  é a massa específica de estagnação.

Os valores das condições de estagnação utilizadas para o presente caso são:  $P_s = 100000 \text{ Pa}$ ,  $T_s = 300 \text{ K}$  e  $\rho_s = P_s/RT_s$ , sendo  $R$  a constante universal dos gases.

### 3.5.2 - Problema puramente difusivo

O problema bidimensional puramente difusivo foi utilizado para obter o perfil de temperatura em uma placa retangular mostrada na Figura 3.3, que trata de um problema

puramente difusivo bidimensional em que a condução de calor estacionária governa o fenômeno. O modelo que representa esse perfil é mostrado na Eq. (3.15) a seguir.

$$\nabla(k\nabla T) = 0, \quad (3.15)$$

Onde,  $\nabla(k\nabla T) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0$  é a representação da equação para o problema puramente difusivo bidimensional, com base na equação geral de conservação.

A temperatura especificada com 500K em torno das bordas e um fluido frio com 300K na parte superior da placa geram um gradiente de temperatura. As direções  $x$  e  $y$  têm ambas 1,0 unidades de comprimento.

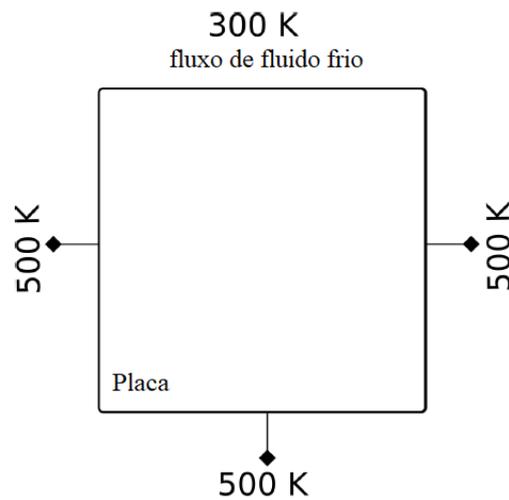


Figura 3.3 - Transferência de calor bidimensional em uma placa com temperaturas especificadas e condição de contorno convectiva.

## CAPÍTULO 4

### RESULTADOS E DISCUSSÃO

#### 4.1 - CONVERGÊNCIA DE MALHA

O procedimento de teste de convergência de malha é regularmente usado em um estudo CFD. Basicamente consiste em vários refinamentos de malha até que os resultados sejam independentes do tamanho da malha. No que diz respeito ao aplicativo CFD, a análise de malha é um passo crucial e muito demorado. O estudo de malha tradicional pode ser computacionalmente caro para os padrões da indústria onde as respostas rápidas são exigidas. No entanto, neste capítulo foi testado um novo procedimento para a análise de convergência de malha, com base na ideia do emprego do método de extrapolação de Richardson, a fim de verificar sua eficiência para manter a precisão de maneira mais rápida. Os testes foram aplicados nos problemas puramente convectivo e puramente difusivo.

##### **4.1.1 - Resultados para o problema puramente convectivo**

O teste tradicional de convergência de malha foi realizado em três refinamentos de malhas diferentes, como é observado na Figura 4.1. Foi assegurado que na malha 3 o resultado se torna estável. O tamanho da malha 1 foi  $\Delta x = 0,7$ , enquanto que a malha 2 era  $\Delta x = 0,33$  e a malha 3 a estável foi de  $\Delta x = 0,16$ .

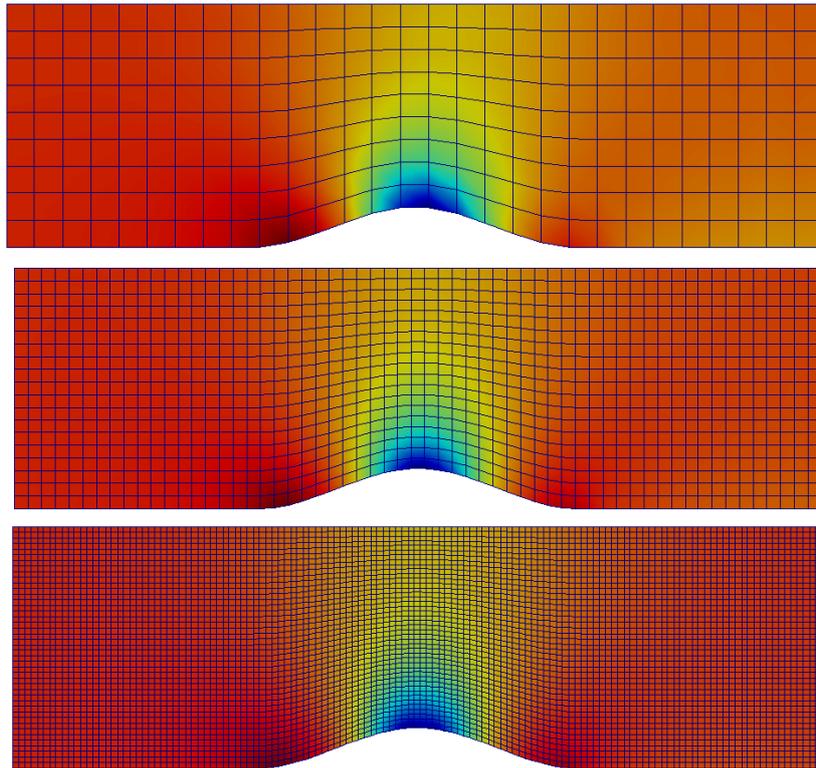


Figura 4.1 - Três malhas diferentes utilizadas para análise de convergência. Malha 1, Malha 2 e Malha 3 são definidos de cima para baixo, respectivamente.

A Figura 4.2 mostra o resultado do perfil de massa específica para as três diferentes malhas e a extrapolação de Richardson considerando as malhas 1 e 2. Pode-se observar que o perfil de massa específica calculado pela extrapolação de Richardson tem uma ótima concordância com o perfil gerado pela malha 3. Nas Figuras 4.3 e 4.4 o perfil de pressão e velocidade na direção  $x$  foi observada a mesma qualidade de concordância, respectivamente. Esse perfil é coincidente até Distância em torno de 4.5 – a partir deste ponto ocorre um deslocamento e, a partir do ponto 6, passa a coincidir melhor com as malhas 1 e 2. Ocorre também uma concordância para os perfis de pressão e velocidade.

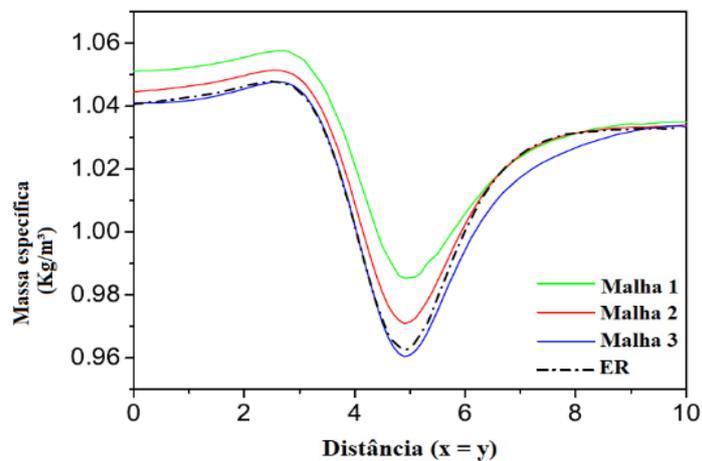


Figura 4.2 - Perfil da massa específica ( $\text{kg/m}^3$ ) para a malha 1, malha 2, malha 3 e extrapolação de Richardson.

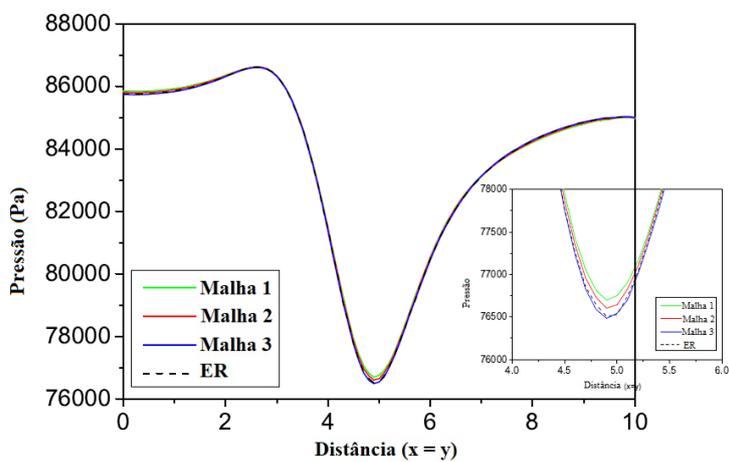


Figura 4.3 - Perfil da pressão (Pa) para a malha 1, malha 2, malha 3 e extrapolação de Richardson.

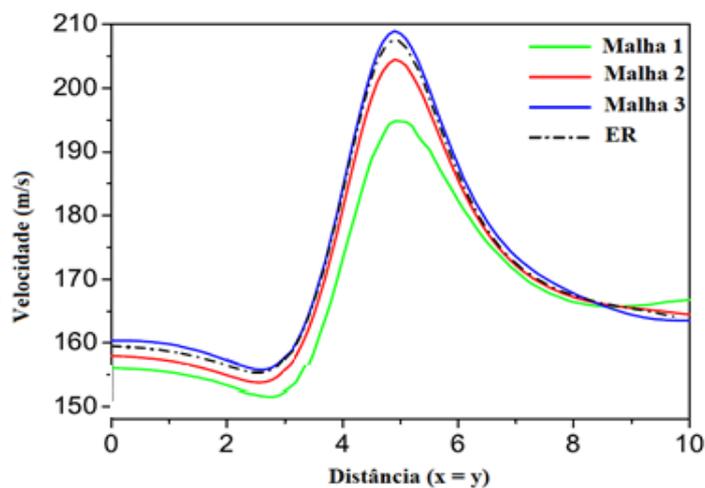


Figura 4.4 - Perfil de velocidade ( $\text{m/s}$ ) para a malha 1, malha 2, malha 3 e extrapolação de Richardson.

A Tabela 4.1 mostra o número de passo mínimo necessário para que as malhas 1, 2 e 3 alcancem a convergência do campo de fluxo. Além disso, a convergência da ER considera a soma do número de passo de tempo das malhas 1 e 2 uma vez que obtém informações das mesmas para alcançar a solução produzida pela malha 3. Além disso, através das informações da Tabela 1 pode-se verificar que a ER precisa de um número de passo 10421 vezes menor do que o da malha 3.

Tabela 4.1 - Número mínimo de tempo necessário para convergência de malha.

	Número de passo para convergência
Malha 1	4600,0
Malha 2	9064,0
Malha 3	24085,0
ER	<i>Malha1 + Malha 2 = 13664,0</i>

#### 4.1.2 - Resultados para o problema puramente difusivo

O teste tradicional de convergência de malha foi realizado em três refinamentos diferentes, como é indicado na Figura 4.5. Foi assegurado que na malha 3 o resultado se torna estável. O tamanho da malha 1 foi de  $\Delta x = 0,125$  e o da malha 2 é de  $\Delta x = 0,062$  enquanto que a malha estável foi de  $\Delta x = 0,031$ .

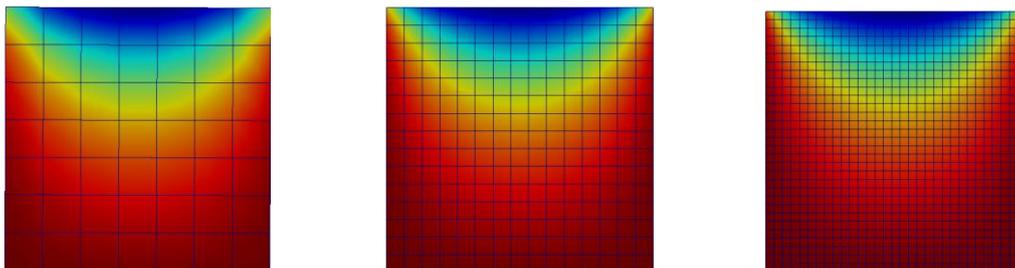


Figura 4.5 - Três malhas diferentes usadas para análise de convergência. Malha 1, 2 e 3 são definidos da esquerda para a direita, respectivamente.

A Figura 4.6 mostra o resultado do perfil de temperatura para as três diferentes malhas e a extrapolação de Richardson considerando as malhas 1 e 2. Pode-se observar que o perfil de temperatura calculado pela extrapolação de Richardson tem uma ótima concordância com o perfil gerado pela malha 3.

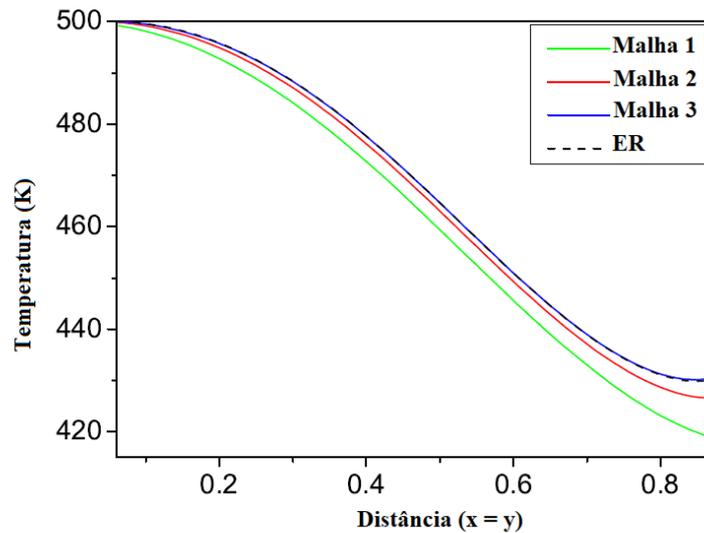


Figura 4.6 - Perfil de temperatura (K) para as malhas 1, malha 2, malha 3 e extrapolação de Richardson.

A Tabela 4.2 mostra o tempo mínimo em segundos, necessário para as malhas 1, 2 e 3, respectivamente, alcançarem o tempo de convergência do campo de fluxo. Além disso, o valor do tempo de convergência da ER foi dado pela soma de tempo das malhas 1 e 2, ou seja, depende das informações dessas malhas para alcançar uma solução que tenha uma boa concordância com os resultados que foram obtidos utilizando a malha 3. As informações da Tabela 2 mostram que a ER só precisou de 22,7 segundos a menos do que a malha 3.

Tabela 4.2 - Número de tempo necessário para convergência de malha.

	Tempo mínimo para convergência (s)
Malha 1	0,8
Malha 2	1,5
Malha 3	25
ER	<i>Malha1 + Malha 2 = 2,3</i>

## CAPÍTULO 5

### CONCLUSÕES E SUGESTÕES

#### 5.1 - CONCLUSÕES

Esse estudo foi baseado na aplicação do método de extrapolação de Richardson (ER) em casos convectivo e difusivo para diminuir a quantidade de tempo de convergência. A aplicação da ER, quando é realizada usando perfis de massa específica, pressão, temperatura e velocidade que não coincidem, é capaz de aumentar a precisão das respostas e diminuir o tempo computacional, ao se usar para os seus cálculos duas malhas que requerem menores recursos computacionais. Foi realizado um teste de malha nos casos estudados e, a malha estável foi comparada com o resultado da extrapolação. Foi constatado que a extrapolação de Richardson gera uma ótima aproximação e reduz a quantidade de passos para atingir a convergência nos problemas convectivo e difusivo propostos. Foi comprovado com isto que a utilização da extrapolação de Richardson é uma ferramenta capaz de melhorar a precisão das soluções numéricas diminuindo o seu custo computacional.

Com a utilização da técnica de extrapolação de Richardson fica evidente que a partir do refinamento de malhas obtém-se uma redução no tempo computacional, e que isto não influencia na qualidade dos resultados que foram obtidos sem a aplicação desta técnica. Conclui-se com isto que ao modelar e aplicar o método de ER nos problemas propostos no presente trabalho, observa-se que existe uma significativa melhoria obtida com a emprego do método de extrapolação de Richardson e que o mesmo é bastante eficaz para a aplicação envolvendo estes casos. Para os problemas puramente convectivo e puramente difusivo, foi observado que a qualidade da aplicação do método de ER depende da qualidade dos perfis estudados nas malhas, e que a aplicação deste método vem a ser bastante eficaz para a aplicação destes problemas, com isto observamos que se temos apenas duas malhas, se tem uma malha ótima ou seja o ponto ótimo da ER e assim não precisaria da malha 3.

## 5.2 - SUGESTÕES

Devido à grande abrangência do assunto abordado neste estudo, são apresentadas, a seguir, algumas sugestões para a continuação do presente trabalho:

- Estudar a influência do método de extrapolação de Richardson na determinação do coeficiente de difusão na modelagem de problemas de fluxo em campos de petróleo.
- Desenvolver um simulador numérico para o estudo de um escoamento monofásico em reservatórios de petróleo bidimensionais governados pela equação da difusividade e observar se a aplicação do método de extrapolação de Richardson seria apropriada neste desenvolvimento.
- Aplicar a ER a outras equações mais complexas para o escoamento de um fluido convectivo aplicado no escoamento do poço de extração de petróleo.
- Aplicar a ER em problemas convectivo-difusivos e ver a aplicação desse método na acurácia de resultados.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BREZINSKI, C. Numerical analysis 2000 – Vol. II: **Interpolation and extrapolation.** *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 122, 2000.

BLAZEK J., 2001, **Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications**, Elsevier Science, Idlington, Oxford.

BREZINSKI, C., ZAGLIA, M. R. A. **Review of vector convergence acceleration methods, with applications to linear algebra problems.** *International Journal of Quantum Chemistry*, v. 109, p. 1631 – 1639, 2009.

BENJAMIN, A. S., & DENNY, V. E. **On the convergence of numerical solutions for 2-D flows in a cavity at large Re.** *Journal of Computational Physics*, vol. 33, pp. 340-358, 1979.

C. RUNGE, **Über die numerisehe Auflösung von Differential gleichungen**, *Math. Ann.* v46. pp 167-178, (1985).

CELIK, I.; Li, J.; HU, G.; SHAFTER, C.,. **Limitation of richardson extrapolation and some possible remedies.** *Journal of fluids engineering*, vol. 127, pp. 795-805, 2005.

CEBECI, T., SHAO, J.P., KAFYEKE, F. E LAURENDEAU, E., **Computational Fluid Dynamics for Engineers**, HORIZONS PUBLISHING, 2005.

DAHLQUIST, G., BJORCK, A. **Numerical methods in scientific computing.** v. 1, Philadelphia: SIAM, 2008.

DEARDORFF, J. W. **Convective Velocity and Temperature Scales for the Unstable Planetary Boundary Layer and for Rayleigh Convection**, *J. Atmos. Sci.* V27, pp 1211-1213, 1970.

De VAHL DAVIS, G. Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 3, p. 249-264, 1983.

DEITEL, H.M.; DEITEL, P. J.; NIETO, T. R.; LIN, T.M.; SADHO, P.. **How to program.** New Jersey. Prentice Hall, 2001.

ERTURK, E., CORKE, T. C., & GÖKÇÖL, C. **Numerical solutions of 2-D steady incompressible driven cavity flow at high Reynolds numbers.** Int. J. Numer. Meth. Fluids, vol. 48, pp. 747-774, 2005.

FDS. **Fire Dynamics Simulator Technical Reference Guide. Volume 1: Mathematical Model.** NIST Special Publication 1018. 6ª Edição. 2013.

FORTUNA, A. O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos.** São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000.

FERZIGER, J. H.; PERIC, M. **Computational methods for fluid dynamics.** 3. ed. Berlin: Springer, 2002.

FONTES, C.E., SILVA, L.F.L.R., LAGE, P.L.C., RODRIGUES, R.C., **Introdução a Fluidodinâmica Computacional.** Escola Piloto Virtual, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

FERREIRA JR, E. S.; Ferreira, T.; Vianna, S. S. V. **Reducing computational time in turbulent jet modelling for gas dispersion simulation.** Blucher Chemical Engineering Proceedings, vol. 1, pp. 6202-6208, 2002.

FORTUNA, A. O. **Técnicas Computacionais para Dinâmicas dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações.** 2ª ed. São Paulo: Edusp, 2012. 426 p.

FERREIRA JR, E. S. **Gas Jet Modeling Using Large Eddy Simulation in a Low Momentum CFD Code.** 2015. 136 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) - Universidade Estadual de Campinas. Campinas, SP, 2015.

GESIT, G.; NANDAKUMAR, K.; CHUANG, K. T. CFD modeling of flow patterns and hydraulics of commercial-scale sieve trays. **AIChE Journal**, v. 49, p. 910-924, 2003.

INCROPERA, F. P.; DeWITT, D. P. **Fundamentos de transferência de calor.** México: Prentice Hall Hispanoamericana, 1999.

JOYCE, D. C. **Survey of extrapolation processes in numerical analysis.** SIAM Review, v. 13, p. 435-490, 1971.

KRISHNA, R. *et al.* CFD simulations of sieve tray hydrodynamics. **Transactions IChemE**, v. 77, p. 639-646, 1999a.

KNUPP, P.; SALARI, K. **Verification of computer codes in computational science and engineering**. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2003.

LIU, C. J. et al. A fluid-dynamic model for flow pattern on a distillation tray. **Chemical Engineering Science**, v. 55, p. 2287-2294, 2000.

MEHTA, B.; CHUANG, K. T.; NANDAKUMAR, K. Model for liquid phase flow on sieve trays. **Transactions IChemE**, v. 76, p. 843-848, 1998.

MARCHI, C. H. **Verificação de soluções numéricas unidimensionais em dinâmica dos fluidos**. 2001. 305 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, SC, 2001.

MALISKA, C. R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. 2ª ed., Rio de Janeiro: LTC, 2004.

MARCHI, C. H.; NOVAK, L. A.; SANTIAGO, C. D. **Múltiplas extrapolações de Richardson para reduzir e estimar o erro de discretização da equação de Laplace 2D**. In: Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering. **Anais**. Maceió, 2008. 14 p. XXIX CILAMCE.

MARCHI, C. H., GERMER, E. M. **Verificação de esquemas advectivo-difusivo 1D com e sem múltiplas extrapolações de Richardson**. Proceedings of the XXX Iberian Latin American Congress on the Computational Methods in Engineering (CILAMCE), Armação dos Búzios, Brazil, 2009.

MA, Y.; GE, Y. **A high order finite difference method with Richardson extrapolation for 3D convection diffusion equation**. Applied Mathematics and Computation, v. 215, p. 3408-3417, 2010.

MARCHI, C. H., ARAKI, L. K., ALVES, A. C., SUERO, R., GONÇALVES, S. F. T., PINTO, M. A. V. **Repeated Richardson extrapolation applied to the two-dimensional Laplace equation using triangular and square grids**. Applied Mathematical Modelling v. 37, n.1, p. 4661 – 4675, 2013.

RICHARDSON, L. F. **The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam**. Philosophical Proceedings of the Royal Society of London Serial A, vol. 210, pp. 307-357, 1910.

RICHARDSON, L. F., & GAUNT, J. A. **The deferred approach to the limit.** Philosophical Proceedings of the Royal Society of London Serial A, vol. 226, pp. 299-361, 1927.

ROACHE, P. J. **Verification and validation in computational science and engineering**, Albuquerque: Hermosa, 1998.

ROY, J. C. Review of code and solution verification procedures for computational simulation. **Journal of Computational Physics**, n. 205, p. 131 - 156, 2005.

REZENDE, A. L. T. **Análise Numérica da Bolha de Separação do Escoamento Turbulento sobre Placa Plana Fina Inclinada.** 2009. 263 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, RJ, 2009.

SMAGORINSKY, J. **General circulation experimets with primitive equations.** Mon. Weather Ver., v. 91, n. 99-164, 1963.

SCHREIBER, R.; KELLER, H. B.. **Driven cavity flows by efficient numerical techniques.** Journal of Computational Physics, v. 49, p. 310-333, 1983.

SHYY, W.; GARBEY, M.; APPUKUTTAN, A.; WU, J. **Evaluation of Richardson extrapolation in computational fluid dynamics.** Numerical Heat Transfer, vol. 41, pp. 139-164, 2002.

SIDI, A.. **Pratical extrapolation methods: theory and applications.** New York: Cambridge University Press, 2003.

TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A.; PLETCHER, R. H.. **Computational fluid mechanics and heat transfer.** 2. ed. USA Washington: Taylor & Francis, 1997.

TU, J.; YEOH, G. H.; LIU, C. **Computational Fluid Dynamics: A Practical Approach**, 1ª ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2008, 459 p.

TIAN, Z., **“CFD for Engineering Applications Lecture Book”**, School of Mechanical Engineering, University of Adelaide, Australia, 2015.

VAN BATEN, J. M.; KRISHNA, R. Modelling sieve tray hydraulics using computational fluid dynamics. **Chemical Engineering Journal**, v. 77, p. 143-151, 2000.

VERSTEEG, H; MALALASEKERA, W.. **An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method**. England: Longman Cientific & Technical, 2007.

VELASCO, G. E.. **Estudo da Interação Turbulência-Radiação Através do Método de Simulação de Grandes Escalas para Meios Participantes**. 2014. 112 f. Dissertação (Mestrado Engenharia Mecânica), Universidade federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, RS, 2014.

WANG, Y.; ZHANG, J. **Sixth order compact scheme combined with multigrid method and extrapolation technique for 2D poisson equation**. Journal of Computational Physics, v. 228, p. 137-146, 2009.

W. KUTTA. **Beitrag zur näherungsweisen Integration totaler Differential gleichungen**. Z. Mathe. Phys. v46. pp 235-453, (1901).

XING, T.; STERN, F. **Factors of safety for Richardson extrapolation**. Journal of Fluids Engineering, vol. 1232, pp.795-805, 2010.

ZINGG D.W., **Fundamentals of Computational Fluid Dynamics**, NASA Ames Research Center, University of Toronto Institute for Aerospace Studies, Toronto, CN. 1999.

## APÊNDICE A

### PROGRAMA UTILIZADO NA CONSTRUÇÃO DA MALHA E EXTRAPOLAÇÃO DE RICHARDSON

```
&HEAD CHID='Sim_vel'  
      TITLE='Flow around bodies'  
      /  
&TIME T_BEGIN=0.0  
      T_END=10.0  
      /  
&MISC RESTART=FALSE  
      /  
&DUMP RENDER_FILE='Sim_vel.gel'  
      STATUS_FILES=.TRUE.  
      /  
  
! --- Free text: 'HEAD free text'  
  
! --- Boundary conditions (from Blender Materials)  
  
&SURF ID='OPEN.001'  
      FYI='Predefined SURF'  
      RGB=51,204,204  
      TRANSPARENCY=0.200  
      /  
&SURF ID='supply'  
      RGB=0,0,204  
      VEL = -19.8  
      /  
  
! --- Geometric entities (from Blender Objects)  
  
! 8960 mesh cells of size 0.250x0.250x0.250 m  
&MESH ID='Mesh1'  
      IJK=28,40,8  
      XB=-3.500,3.500,-5.000,5.000,0.000,2.000  
      /  
&OBST ID='Cube1'  
      XB=-0.500,0.500,1.000,2.000,0.000,1.000  
      COLOR='RED'  
      /  
&VENT ID='back'  
      SURF_ID='OPEN.001'  
      MB = 'YMIN'  
      /  
&VENT ID='front'  
      SURF_ID='supply'  
      MB = 'YMAX'
```

```
 /
&SLCF ID='vel1'
  QUANTITY='VELOCITY'
  VECTOR=.TRUE.
  PBX=0.000
 /
&SLCF ID='vel2'
  QUANTITY='VELOCITY'
  VECTOR=.TRUE.
  PBZ=1.000
 /
&SLCF ID='vel3'
  QUANTITY='VELOCITY'
  VECTOR=.TRUE.
  PBY=0.000
 /

&TAIL /
! Generated in 0 s.
```