



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

GLEISON DE JESUS MARINHO SODRÉ

**MODELAGEM MATEMÁTICA ESCOLAR: uma organização praxeológica
complexa**

BELÉM
2019

GLEISON DE JESUS MARINHO SODRÉ

**MODELAGEM MATEMÁTICA ESCOLAR: uma organização praxeológica
complexa**

Tese apresentada à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará (PPGECM/IEMCI/UFPA), como requisito para a obtenção do título de Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas. Área de concentração: Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Renato Borges Guerra

BELÉM

2019

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a)
autor(a)**

S679m Sodré, Gleison de Jesus Marinho
Modelagem matemática escolar : uma organização
praxeológica complexa / Gleison de Jesus Marinho Sodré. —
2019.
161 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Renato Borges Guerra
Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em
Educação em Ciências e Matemáticas, Instituto de Educação
Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará,
Belém, 2019.

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Modelos
matemáticos. 3. Educação - Matemática. 4. Didática -
Matemática. 5. Professores de matemática - Formação.
I. Título.

CDD 510.7

GLEISON DE JESUS MARINHO SODRÉ

**MODELAGEM MATEMÁTICA ESCOLAR: uma organização praxeológica
complexa**

Tese apresentada à banca examinadora do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará (PPGECM/IEMCI/UFPA), como requisito para a obtenção do título de Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas. Área de concentração: Educação Matemática.

Data de apresentação: 28 de fevereiro de 2019

Conceito: Aprovado

Banca Examinadora

Prof. Dr. Renato Borges Guerra, Orientador

Prof. Dr. Denivaldo Pantoja da Silva, Membro externo - Campus Cametá/UFPA

Prof. Dr. José Augusto Nunes Fernandes, Membro externo - ICEN/UFPA

Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes, Membro interno

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes, Membro interno

Ao **Senhor Jesus Cristo**, pela sabedoria concedida que iluminou nossos pensamentos para concretização desta obra. Aos meus pais, **Lavoziel Oliveira Sodré** (*in memoriam*) e **Rosalina Marinho Sodré** (*in memoriam*), que sempre deram o melhor dos ensinamentos: o amor incondicional. À minha esposa, **Ellen Shirlen Lima da Silva**, e ao nosso filho, **Henrique da Silva Sodré**, que dividiram todos os momentos em respeito ao conhecimento. Aos meus irmãos, **Elinete Sodré**, **Raimunda de Jesus**, **Laudival Marinho**, **Edileuza Sodré**, **Laudinei Sodré** e **Rosineia Amaral**, que também sempre me incentivaram e acreditaram na concretização desta obra.

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal do Pará (UFPA) e ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas e, em especial, aos professores deste programa, pelas oportunidades inefáveis de formação acadêmica por meio dos debates científicos, eventos e compartilhamento de saberes.

Aos membros da Banca Examinadora por terem aceitado o convite e, sobretudo, compartilhado ideias necessárias à construção e fortalecimento deste trabalho científico: Prof. Dr. Renato Borges Guerra (UFPA), Prof. Dr. Denivaldo Pantoja da Silva (Campus Cametá/UFPA), Prof. Dr. José Augusto Nunes Fernandes (ICEN/UFPA), Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes (UFPA) e Prof. Dr. Iran Abreu Mendes (UFPA).

De modo especial, ao professor e amigo, Dr. Renato Borges Guerra, pela paciência, dedicação, zelo, rigor e comprometimento nas orientações acadêmicas e não menos importantes, pela oportunidade de constante aprendizagem em nossos sistemas didáticos instalados no percurso de formação.

A todos nossos amigos do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEDIM) do IEMCI/UFPA, em particular ao coordenador, Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes, pelos momentos de aprendizagem.

Aos servidores do PPGECEM/IEMCI/UFPA pelo apoio logístico aos assuntos de interesse da comunidade acadêmica.

À bibliotecária do PPGECEM/IEMCI/UFPA, pelo atendimento profissional sempre respeitoso e, sobretudo, pelo zelo ao patrimônio da Biblioteca do IEMCI.

Aos meus amigos que sempre me apoiaram, mas que também deixo de citar nomes para não cometer injustiças.

À Escola de Aplicação da UFPA, por ter concedido a licença para dedicação integral ao curso de doutoramento.

E, finalmente, parafraseando Gilberto Gil, *para você que me esqueceu... aquele abraço!*

RESUMO

Este trabalho questiona o ciclo de modelagem matemática como técnica da tarefa de modelar matematicamente problemas em contextos concretos a partir da noção de organização praxeológica complexa concebida à luz da Teoria Antropológica do Didático. Propõe novas técnicas de modelagem que preservam o caráter cíclico e a partir de experimentação empírica, propõe o ciclo investigativo de modelagem matemática.

Palavras-chave: Educação Matemática. Modelagem Matemática. Teoria Antropológica do Didático. Técnicas de Modelagem. Ciclo Investigativo de Modelagem Matemática.

ABSTRACT

This work questions the mathematical modeling cycle like a technique of the task of mathematically modeling problems at concrete contexts from the notion of complex praxeological organization conceived in the light of the Didactic Anthropological Theory. The work proposes new modeling techniques that preserve the cyclical character and from empirical experimentation, it proposes the investigative cycle of mathematical modeling.

Keywords: Mathematics Education. Mathematical Modeling. Anthropological Teaching Theory. Modeling Techniques. Investigative Cycle of Mathematical Modeling.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Modelos descritivos e normativos	44
Figura 2 – Noção de modelo matemático	47
Figura 3 – Ciclo de modelagem apresentado por Bassanezi	48
Figura 4 – Ciclo de modelagem proposto por Borroumeo Ferri	50
Figura 5 - Ciclo de modelagem proposto por Blum	52
Figura 6 - Modelo do processo de modelagem matemática por Blomhøj e Jensen	53
Figura 7 – Ciclo de modelagem matemática ampliado de Blum e Leiß	57
Figura 8 - Ciclo de modelagem proposto por Perrenet e Zwaneveld	58
Figura 9 – Uma dicotomia sobre aprendizagem dos alunos	67
Figura 10 – Quatro etapas para resolver uma tarefa de modelagem (“Plano de Solução”)	69
Figura 11 – Modelo de letramento em matemática na prática	70
Figura 12 - Problema sobre investimento	99
Figura 13 – Registro do sistema didático $S_1(x_1, x_3, x_4, \wp_1)$	100
Figura 14 – Registro do sistema didático auxiliar $S_2(x_2, x_5, \wp_2)$	101
Figura 15 - Esquema gráfico do dinheiro em função do tempo	103
Figura 16 – Customização da praxeologia matemática \wp_3	105
Figura 17 – Registro do sistema didático auxiliar $S_1(x_1, x_3, \wp_4)$	106
Figura 18 – Registro do sistema didático auxiliar $S_1(x_1, x_3, \wp_4)$	107
Figura 19 – Registro do sistema didático auxiliar $S_2(x_2, x_5, \wp_4)$	108
Figura 20 – Registro do sistema didático auxiliar $S_1(x_1, x_3, \wp_4)$	110
Figura 21 – Registro do sistema didático auxiliar $S_2(x_2, x_5, \wp_4)$	110
Figura 22 - Registro do sistema didático auxiliar $S_2(x_2, x_5, \wp_4)$	111
Figura 23 – Registro do sistema didático auxiliar $S_1(x_1, x_3, \wp_4)$	112
Figura 24 – Registro do sistema didático auxiliar $S_2(x_2, x_5, \wp_2)$	115
Figura 25 – Registro do sistema didático auxiliar $S_2(x_2, x_5, \wp_4)$	116
Figura 26 – Registro do sistema didático auxiliar $S_2(x_2, x_5, \wp_4)$	119
Figura 27 – Trajetória de questionamentos	122
Figura 28 – O ciclo investigativo de Modelagem Matemática	138

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Perspectivas em Modelagem Matemática	18
Quadro 2 – Perspectivas e objetivos centrais no ensino de modelagem	19
Quadro 3 – Customização da equação matemática: $z = x.y$	42
Quadro 4 – Subcompetências de Modelagem Matemática	56

LISTA DE ABREVIATURAS

AIMMS	Software Avançado de Modelagem Multidimensional Integrada
CIMM	Ciclo Investigativo de Modelagem Matemática
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
ICTMA	Conferências Internacionais sobre o Ensino de Modelagem Matemática e Aplicações
IEMCI	Instituto de Educação Matemática e Científica
LIECML	Licenciatura Integrada em Educação em Ciências, Matemática e Linguagens
MM	Modelagem Matemática
OCDE	Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico
OPC	Organização Praxeológica Complexa
PAPIM	Programa de Apoio a Projetos de Intervenção Metodológica
PEP	Percurso de Estudo e Pesquisa
PEPO	Percurso de Estudo e Pesquisa Orientado
PISA	Programa Internacional de Avaliação de Estudantes
PMC	Praxeologia Matemática Customizada
TAD	Teoria Antropológica do Didático
UFPA	Universidade Federal do Pará

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	12
CAPÍTULO 1 - PROBLEMÁTICA E OBJETIVOS DA PESQUISA	14
1.1 Perspectivas Teóricas da Modelagem Matemática.....	17
CAPÍTULO 2 - RECURSOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS E A MODELAGEM MATEMÁTICA	27
2.1 Modelo Praxeológico Lato Senso da TAD.....	27
2.2 Organizações Praxeológicas Complexas.....	33
2.3. Modelo Matemático.....	39
2.3.1 Propósitos dos modelos matemáticos.....	43
2.4 Processo de Modelagem Matemática Como Organização Praxeológica Complexa.....	47
CAPÍTULO 3 - PROBLEMATIZAÇÃO DO CICLO DE MODELAGEM MATEMÁTICA À LUZ DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO	61
3.1 Ciclo de modelagem proposto para o ensino.....	61
3.2 Subprocessos do ciclo de modelagem interpretados a partir da Teoria Antropológica do Didático.....	72
CAPÍTULO 4 - PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA ORIENTADO E EMPIRIA DE FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES	90
4.1 Percurso de Estudo e Pesquisa.....	90
4.2 Percurso de Estudo e Pesquisa Orientado.....	97
4.3 Empiria de formação inicial de professores em modelagem matemática.....	98
4.3.1 Análises das sessões de estudos.....	99
4.3.1.1 <i>Uso da calculadora científica: uma entidade praxeológica necessária à Modelagem Matemática</i>	118
4.4 Encaminhamentos da empiria de formação.....	120
CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E ENCAMINHAMENTOS: O CICLO INVESTIGATIVO DE MODELAGEM MATEMÁTICA	125
5.1 Em retrospectiva.....	125
5.2 Ciclo Investigativo de Modelagem Matemática.....	130
5.3 Considerações.....	138
REFERÊNCIAS	143
APÊNDICE	152

APRESENTAÇÃO

Esta investigação se insere em um projeto científico institucional de pesquisa de maior amplitude proposto pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática das Matemáticas (GEDIM), do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM), do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI) da Universidade Federal do Pará (UFPA), mais precisamente, sobre a Modelagem Matemática Escolar que é vista aqui como uma Organização Praxeológica Complexa a partir de recursos teórico-metodológicos da Teoria Antropológica do Didático proposta, por Yves Chevallard.

O termo complexo aqui utilizado é no sentido dado por Chevallard para as organizações praxeológicas de um dado saber por meio de articulações e integrações de praxeologias pontuais que podem estar dotadas ou não de diferentes discursos teóricos, mas que são necessariamente coordenadas por uma lógica prática, ou seja, por um saber prático.

Esse modo de ver a modelagem matemática escolar de problemas, em contextos concretos como organizações praxeológicas complexas, nos leva ao encontro da incompletude do ciclo de modelagem usado de forma dominante nas escolas, em particular, o recomendado pelo Relatório Nacional do PISA (BRASIL, 2012), como possível gerador das dificuldades no ensino e, em consequência, para a aprendizagem da modelagem matemática escolar.

Em nossa compreensão, a incompletude do ciclo de modelagem matemática é observada em diferentes pesquisas cognitivistas (BLUM, 1985; BLOMHØJ; JENSEN, 2007, BLUM; LEIß, 2005; BORROMEO FERRI, 2006; PERRENET; ZWANEVELD, 2012; GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016), quando apresentam diferentes versões do ciclo de modelagem matemática com ampliações por meio de inclusões de subprocessos, todos em busca de melhor compreensão do processo de modelagem e, com isso, o seu ensino nas escolas, em busca de construir uma resposta satisfatória ao questionamento mais importante das pesquisas sobre o ensino de modelagem, frequentemente discutida nas Conferências Internacionais sobre o Ensino de Modelagem Matemática e Aplicações: “Como podemos ensinar modelagem?”¹ (BLUM, 2011) (apud SCHUKAJLOW, KAISER; STILLMAN, 2018, p. 11, tradução nossa).

¹ Fragmento do texto: *How can we teach modelling?*

De modo distinto, sob nossa hipótese assentada nos pressupostos da modelagem matemática escolar como uma atividade humana que nos encaminha a Teoria Antropológica do Didático (TAD), encaminhamos um novo ciclo de modelagem matemática escolar como uma possível resposta a esse questionamento.

Entre os pressupostos, tomamos os cinco gestos de uma verdadeira pesquisa, ou seja, (1) Observar as respostas que vivem nas instituições; (2) Analisar notadamente em duplo plano experimental e teórico essas respostas; (3) Avaliar essas mesmas respostas; (4) Desenvolver uma resposta própria e (5) Difundir e defender a resposta produzida, que orientam o novo ciclo e, claro, o desenvolvimento deste relatório.

No Capítulo 1 apresentamos nossa questão de pesquisa como uma problemática à luz da TAD e delimitamos nossos objetivos a serem buscados no desenvolvimento da pesquisa.

No Capítulo 2, encaminhamos recursos teórico-metodológicos da Teoria Antropológica do Didático que tornou possível criar condições para propor a noção de Organização Praxeológica Complexa e, partir dessa passamos a conceber o processo de modelagem e/ou construção de modelo matemático como um tipo dessa organização.

No Capítulo 3, problematizamos o ciclo de modelagem à luz da Teoria Antropológica do Didático, mais especificamente, as etapas do ciclo e suas interconexões que, em geral, escondem parte da complexidade do processo de modelagem matemática.

No Capítulo 4, parafraseando os três gestos genuínos que definem uma verdadeira atividade matemática escolar, segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001), que preserva o caráter cíclico propomos uma técnica de modelagem. A partir da proposição dessa técnica encaminhamos uma empiria com professores em formação inicial.

E, finalmente, no Capítulo 5, a partir de experimentação empírica, propomos o Ciclo Investigativo de Modelagem Matemática como dispositivo didático para o ensino e aprendizagem de modelagem matemática escolar, bem como o encaminhamento de pesquisas empíricas futuras de modo a melhor ratificar esse ciclo e, sobretudo, seu alcance na formação inicial de professores e continuada.

Observar as respostas que vivem nas instituições**CAPÍTULO 1 - PROBLEMÁTICA E OBJETIVOS DA PESQUISA**

A leitura de mundo proposto pela Organização para Cooperação do Desenvolvimento Econômico e o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes² - OCDE/Pisa³ (BRASIL, 2012), com o desejável uso dos conhecimentos matemáticos escolares, tem se tornado um desafio aos professores por exigir o enfrentamento de situações do mundo concreto para a formação de uma cidadania crítica que permita questionar o mundo em que vivem.

Essa recomendação toma substância por meio de vários discursos pedagógicos com referência ao exercício da cidadania a partir do uso da Matemática para leitura, formulação, aplicação e interpretação de diferentes situações em contextos, como os de capacidades sob a denominação de letramento em Matemática.

Letramento em matemática é a capacidade do indivíduo de formular, aplicar e interpretar a matemática em diferentes contextos, o que inclui o raciocínio matemático e a aplicação de conceitos, procedimentos, ferramentas e fatos matemáticos para descrever, explicar e prever fenômenos. Além disso, o letramento em matemática ajuda os indivíduos a reconhecer a importância da matemática no mundo, e agir de maneira consciente ao ponderar e tomar decisões necessárias a todos os cidadãos construtivos, engajados e reflexivos (BRASIL, 2012, p. 18).

A proposta de letramento em Matemática, referenciada pela OCDE/Pisa (BRASIL, 2012), destaca o esperado sobre o uso da Matemática no ensino para formular, aplicar e interpretá-la em diferentes contextos, de tal maneira que leve o sujeito a aplicar conceitos, procedimentos, ferramentas e fatos matemáticos para descrever, explicar e prever fenômenos, bem como agir consciente nas tomadas de decisão a todos os cidadãos.

² Fragmento de texto: *Organisation for Economic Co-operation and Development Programme form International Student Assessmente* OCDE/Pisa (BRASIL, 2012).

³ A OCDE tem por objetivo promover políticas que visem o desenvolvimento econômico e o bem-estar social de pessoas por todo o mundo. O Programa Internacional de Avaliação de Alunos (Pisa) é uma avaliação internacional que mede o nível educacional de jovens de 15 anos por meio de provas de Leitura, Matemática e Ciências. O exame é realizado a cada três anos pela OCDE, entidade formada por governos de 30 países que têm como princípios a democracia e a economia de mercado. Países não membros da OCDE também podem participar do Pisa, como é o caso do Brasil. O objetivo principal do Pisa é produzir indicadores que contribuam, dentro e fora dos países participantes, para a discussão da qualidade da educação básica e que possam subsidiar políticas nacionais de melhoria da educação.

A noção de letramento em Matemática encaminha, de algum modo, à noção de Modelagem Matemática, daqui em diante MM⁴, no sentido encaminhado por Greefrath e Vorhölter (2016), considerando as seguintes experiências fundamentais e inter-relacionadas, propostas por Winter (1996) para a Educação Matemática geral:

- (1) Fenômenos do mundo que nos rodeia, que devemos abordar e nos interessar, da natureza, da sociedade e da cultura, com formas específicas de perceber e compreender;
- (2) Objetos matemáticos e fatos representados em linguagens, símbolos, imagens e fórmulas, como criações mentais, como num mundo dedutivamente ordenado que se queira conhecer e entender o próprio caminho;
- (3) Lidar com tarefas para adquirir habilidades de resolução de problemas que vão além da Matemática (habilidades heurísticas).

Essas experiências encaminhadas por Winter (1996) parecem ir ao encontro do que alertam Blum e Borromeo Ferri (2009), quando afirmam que a MM é geralmente destinada a:

- Ajudar os alunos a entender melhor o mundo,
- Apoiar a aprendizagem da matemática (motivação, formação de conceitos, compreensão, retenção),
- Contribuir para desenvolver várias competências matemáticas e atitudes apropriadas,
- Contribuir para um quadro adequado da matemática⁵ (BLUM; BORROMEO FERRI, 2009, p. 47, tradução nossa).

Nesse sentido, Blum e Borromeo Ferri (2009, p. 47) encaminham o seguinte questionamento: “Por que a modelagem é tão importante para os alunos?”⁶ pois, segundo esses autores, modelos matemáticos e MM estão presentes ao nosso redor, e, em geral, em conexões com ferramentas tecnológicas. Portanto, esses autores afirmam que “preparar os alunos para uma cidadania responsável e para a

⁴ A sigla MM é utilizada ao longo do texto para designar a Modelagem Matemática como atividade humana que inclui os três grandes gestos genuínos da atividade matemática interpretado nessa atividade.

⁵ Fragmento do texto:

- *help students' to better understand the world,*
- *support mathematics learning (motivation, concept formation, comprehension, retaining),*
- *contribute to develop various mathematical competencies and appropriate attitudes,*
- *contribute to an adequate picture of mathematics.*

⁶ Fragmento do texto: *Why is modelling so important for students'?*

participação em desenvolvimentos sociais exige que eles criem competências de modelagem”⁷ (BLUM; BORRAMEO FERRI, 2009, p. 47, tradução nossa).

De outro modo, Greefrath e Vorhölter (2016) afirmam que existem diferentes objetivos que são perseguidos no uso da MM no ensino de Matemática, mas destacam os seguintes objetivos que, segundo os autores, oferecem oportunidades únicas para o encontro de impressões da matemática como também da vida real.

a) Objetivos relacionados ao conteúdo

São aqueles que incorporam a premissa pragmática de que os alunos que trabalham com problemas de modelagem desafiam seu ambiente e são capazes de explorá-lo por meio da Matemática. O objetivo é - como é para problemas de palavras relacionadas à modelagem como uma direção didática - a capacidade de estar ciente e compreender os fenômenos do mundo real. Isso corresponde ao primeiro dos três objetivos do que Winter (1996) chamou de experiências fundamentais, que todo estudante deveria conhecer (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016, p.15, tradução nossa).

b) Objetivos orientados para o processo

Em particular, a interação com aplicações em Educação Matemática requer habilidades matemáticas gerais, como capacidade de resolver problemas. Estratégias heurísticas essenciais para a resolução de problemas, por exemplo, trabalhando com analogias ou trabalhando com cálculo reverso, podem ser usadas e encorajadas ao trabalhar com problemas de modelagem. Além disso, os problemas de modelagem estimulam particularmente a comunicação e a argumentação (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016).

Essa justificativa formal da MM corresponde à terceira experiência fundamental de Winter (1996) para uma Educação Matemática geral: “A Educação Matemática é fundamental porque as capacidades de resolução de problemas vão muito além das tarefas matemáticas aprendidas”⁸ (WINTER, 1996, p. 37, tradução nossa). Os objetivos da psicologia também se referem ao processo de aprendizagem, pois se concentram em entender e lembrar sobre a Matemática ao

⁷ Fragmento do texto: *Preparing students' for responsible citizenship and for participation in societal developments requires them to build up modelling competency.*

⁸ Fragmento do texto: *Mathematics education is fundamental because problem-solving capabilities far beyond mathematical tasks are learned.*

tratar da MM. No contexto da MM, o aumento da motivação, bem como o interesse geral em Matemática é, muitas vezes, apontado como um objetivo principal (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016, p. 15, tradução nossa).

c) Objetivos gerais

Os argumentos culturais, em particular, são mencionados como os objetivos gerais mais importantes. A Educação Matemática deve fornecer uma imagem equilibrada da Matemática como ciência. O uso da Matemática no ambiente é crucial para o desenvolvimento da ciência matemática e para a sociedade democrática. Isso também inclui educar os alunos para se tornarem membros responsáveis da sociedade, que sejam capazes de julgar criticamente modelos que são usados diariamente, como por exemplo, os modelos matemáticos utilizados para calcular impostos. As habilidades sociais também podem ser ensinadas em cooperação com problemas de modelagem, segundo alerta Greefrath *et al.* (2013 *apud* GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016, p. 15, tradução nossa).

Os objetivos sobre aplicação da Matemática e da MM apresentados por Greefrath e Vorhölter (2016) nos levam ao encontro das capacidades requeridas pelo Letramento Matemático, ou seja, as que decorrem dos objetivos relacionados ao conteúdo e aos percursos orientados que podem levar um indivíduo a formular, aplicar e interpretar a Matemática em diferentes contextos, inclusive, o do raciocínio matemático de aplicar conceitos, procedimentos, ferramentas e fatos matemáticos para descrever, explicar e prever fenômenos, enquanto as capacidades decorrentes do objetivo geral podem encaminhar os indivíduos a reconhecer a importância da Matemática no mundo, e agir de maneira consciente ao ponderar e tomar decisões necessárias a todos os cidadãos construtivos, engajados e reflexivos.

Assim, podemos assumir a MM como um dispositivo didático para o letramento matemático e encaminhar nossos estudos sobre a MM, começando pela apresentação de suas perspectivas teóricas, nacional e internacional.

1.1 Perspectivas teóricas da Modelagem Matemática

Segundo Greefrath e Vorhölter (2016) e Kaiser-Meßmer (1986), foram identificados diferentes perspectivas teórica de MM na Educação Matemática no debate internacional a partir de três dimensões, a saber: a relacionada ao conceito referente à importância das aplicações dentro dos objetivos da Educação

Matemática, a curricular com foco no papel das aplicações nas aulas e, aquelas decorrentes do grau de realidade das aplicações.

A partir dessa análise, Kaiser e Sriraman (2006) desenvolveram uma classificação das perspectivas históricas mais recentes sobre MM na escola. Apresentamos a classificação dessas perspectivas tomando emprestadas as descrições de Greefrath e Vorhölter (2016), sobre as pesquisas realizadas nos países de língua alemã. Essa especificidade não considera apenas as duas perspectivas descritas por Kaiser e Sriraman (2006), a saber: a contextual e a epistemológica.

Quadro 1 – Perspectivas em Modelagem Matemática

Perspectivas em modelagem	Evidências das perspectivas
Realística	O objetivo está relacionado à resolução de problemas reais, compreensão do mundo real e incentivo a habilidades de modelagem. Concentra-se em problemas reais e, acima de tudo, autênticos na indústria e na ciência. A modelagem é vista como um ato em que problemas autênticos são resolvidos. A base teórica dessa tendência está intimamente relacionada à matemática aplicada e historicamente se relaciona com as abordagens pragmáticas da modelagem, que foram desenvolvidas por Pollak (1968).
Contextual	Objetivos relacionados ao conteúdo e psicológicos, ou seja, resolver problemas relacionados à palavra.
Pedagógica	O objetivo dessa tendência inclui metas relacionadas a processos e conteúdo. Pode ser distinguido ainda em modelagem didática e conceitual: A modelagem didática inclui, por um lado, incentivar o processo de aprendizagem da modelagem e, por outro lado, lidar com exemplos de modelagem para introduzir e praticar novos métodos matemáticos. A intenção da modelagem conceitual é aprimorar a compreensão dos alunos no que diz respeito aos processos de modelagem. Isso também inclui ensinar o conhecimento dos ciclos de modelagem e julgar a adequação dos modelos utilizados. Os problemas usados na modelagem pedagógica são desenvolvidos para o ensino de Matemática.
Sócio-crítica	Objetivos pedagógicos e uma compreensão crítica do mundo a fim de examinar criticamente o papel dos modelos matemáticos e da Matemática em geral na sociedade. O foco básico não está no processo de modelagem em si.
Epistemológica	Objetivos orientados para a teoria, ou seja, promoção do desenvolvimento da teoria.
Cognitiva	Essa abordagem é vista como uma espécie de meta-perspectiva, porque se concentra em metas científicas. Trata-se de analisar e compreender os procedimentos cognitivos que ocorrem nos problemas de modelagem. Assim, diferentes modelos descritivos de processos de modelagem são desenvolvidos.

Fonte: Kaiser e Sriraman (2006) e Greefrath e Vorhölter (2016, p. 16-17)

Para maior clareza sobre essas perspectivas de MM, Frejd e Bergsten (2018) as destacam a partir de seus objetivos centrais no ensino (Quadro 2).

Quadro 2 - Perspectivas e objetivos centrais no ensino de modelagem

Perspectivas	Objetivos centrais
Modelagem realista ou aplicada	Resolvendo problemas do mundo real; Entendendo o mundo real
Modelagem contextual	Objetivos psicológicos e relacionados ao assunto
Modelagem educacional	Modelagem como ferramenta didática ou conceitual
Modelagem sócio-crítica e sociocultural	Compreensão crítica do mundo circundante
Modelagem epistemológica ou teórica	Objetivos orientados pela teoria
Modelagem cognitiva	Objetivos psicológicos com foco nos processos mentais

Fonte: Adaptado de Frejd e Bergsten (2018, p. 118)

Segundo Schukajlow, Kaiser e Stillman (2018), no grande campo de pesquisa em MM na Educação Matemática tem sido predominante o enfoque cognitivo nas últimas quatro décadas que, embora essas pesquisas tenham melhorado consideravelmente nesse período, introduzem diferentes tipos de abordagens de ensino com análises usando métodos qualitativos e/ou quantitativos, em que pesquisadores têm dado mais atenção à fundamentação teórica das questões de pesquisa e ao uso de métodos de pesquisa apropriados para seus estudos.

Esses autores afirmam que há um número limitado de contribuições que compararam diferentes abordagens de ensino e que somente alguns estudos confirmaram as hipóteses sobre os efeitos das abordagens de ensino, em particular, que são dois princípios fundamentais que parecem ser importantes para projetar ambientes de aprendizagem para MM: o ensino centrado no aluno e a motivação dos alunos para usar estratégias.

Há especial atenção de Schukajlow, Kaiser e Stillman (2018) sobre o baixo número de publicações de pesquisas empíricas em periódicos internacionais de impacto, mesmo que a importância da pesquisa empírica se destaque nas Conferências Internacionais sobre o Ensino de Modelagem Matemática e Aplicações, ou simplesmente ICTMA. Assim, recomendam maior investimento em pesquisas empíricas, bem como encaminham os seguintes aspectos a serem observados que assegurem a qualidade científica dessas pesquisas:

- Realização de estudos de intervenção aleatória de curto prazo dentro e fora das escolas ou universidades. Os resultados dos estudos de controle

de curto prazo podem ser mais facilmente implementados e sua implementação pode ser melhor controlada do que intervenções de médio ou longo prazo. Assim, esses estudos muitas vezes podem responder a perguntas de pesquisa com mais precisão. Além disso, esses estudos têm o potencial de ampliar seus resultados para estudos de longo prazo (STYLIANIDES; STYLIANIDES, 2014);

- Estudos intervencionais sobre abordagens de ensino podem ajudar a examinar formas de modelagem de ensino. O monitoramento do desenvolvimento da competência de modelagem durante os anos escolares e sua interação com outras variáveis cognitivas (por exemplo, competência intramatemática) ou afetivas (por exemplo, emoções, crenças ou valores) podem aumentar nossa compreensão do ensino e da aprendizagem;
- Escolhendo metodologias para investigar questões de pesquisa cuidadosamente. Na pesquisa quantitativa, as seguintes questões metodológicas devem ser levadas em consideração: uso de amostras randomizadas sempre que possível; dependência da observação dentro das aulas ou dentro das escolas; estimativa de valores omissos;
- Desenvolvimento cuidadoso de rubricas para análise qualitativa e testes ou questionários para análise quantitativa (VORHÖLTER, 2018), pois a validade das medidas é essencial para a pesquisa empírica de alta qualidade⁹ (SCHUKAJLOW; KAISER; STILLMAN, 2018, p. 14-15, tradução nossa).

De qualquer modo, nos desperta especial interesse que os estudos intervencionais sobre o ensino, a partir de diferentes correntes teóricas, que seja tomado por eles como cruciais para esclarecer, talvez, a questão mais importante da pesquisa sobre MM que tem sido frequentemente discutida na ICTMA (por exemplo, BLUM, 2011), que é assim anunciada: “Como podemos ensinar modelagem?”¹⁰ (SCHUKAJLOW; KAISER; STILLMAN, 2018, p. 11, tradução nossa).

Uma possível resposta a essa questão parece ser parcialmente dada por Blum e Borromeo Ferri (2009), quando questionaram anteriormente se a MM pode ser ensinada e aprendida. Eles chegaram à conclusão, por meio de resultados empíricos, que parecia ser realmente ensinável e aprendida, a partir da implementação dos *insights* e ideias tratadas em suas pesquisas no ensino cotidiano, considerando a necessária implementação dessas percepções na formação de professores, tanto inicial quanto continuada.

⁹ Fragmento do texto:

- *Conducting short-term randomised intervention studies in and outside schools or universities. Results of short-term control trials can be more easily implemented and their implementation can be better controlled than middle- or long-term interventions. Thus, these studies can often answer research questions more precisely. Further, such studies have the potential for scaling up their results to long-term studies (Stylianides and Stylianides 2014);*
- *Interventional studies on teaching approaches can help to examine ways for teaching modelling. Monitoring of development of modelling competency during the school years and its interplay with other cognitive (e.g. intra-mathematical competency) or affective variables (e.g. emotions, beliefs or values) might increase our understanding of teaching and learning;*
- *Choosing methodologies for investigating research questions carefully. In quantitative research, the following methodological issues should be taken into account: use of randomised samples whenever possible; dependence of observation within classes or within schools; estimation of missing values;*
- *Careful development of rubrics for qualitative analysis and tests or questionnaires for quantitative analysis (Vorhölter 2018), as validity of measures is essential for the high quality empirical research.*

¹⁰ Fragmento do texto: *How can we teach modelling?*

Blum e Borromeo Ferri (2009) encaminham princípios orientadores para o ensino de MM, especificamente o plano estratégico-operacional com os seguintes propósitos:

- Ensino visando às construções ativas e independentes dos alunos e soluções individuais (realizando permanentemente o equilíbrio desejado entre a independência dos alunos e a orientação do professor);
- Mudança sistemática entre trabalhos independentes nos grupos (treinados pelo professor) e as atividades de toda a turma (especialmente para comparação das diferentes soluções e reflexões retrospectivas);
- Instrução do professor baseado em ciclo de modelagem e em diagnósticos individuais¹¹ (BLUM; BORROMEO FERRI, 2009, p.55, tradução nossa).

Esses princípios se mostraram mais efetivos no ensino quando comparados com o ensino “diretivo” (BLUM; BORROMEO FERRI, 2009), caracterizado pelo desenvolvimento de padrões comuns de solução pelo professor e uma mudança sistemática entre o ensino para toda a turma, orientado para um “estudante médio” fictício e o trabalho individual dos alunos em exercícios, e com o trabalho de alunos “independentes”, considerando as conquistas e atitudes dos mesmos.

Segundo Blum e Borromeo Ferri (2009), os melhores resultados foram obtidos nas aulas em que foi alcançado um equilíbrio entre a independência dos alunos e a orientação do professor, com uma mistura de diferentes tipos de intervenções adaptativas, sempre com o uso da ferramenta específica e estratégica para as tarefas de MM denominada de ciclo de MM de quatro etapas, a saber:

- (1) Compreendendo a tarefa;
- (2) Estabelecendo o modelo;
- (3) Usando matemática;
- (4) Explicando o resultado.

Essa ferramenta, de acordo com Blum e Borromeo e Ferri (2009), constitui um esquema que deve ser usado pelos alunos como uma ajuda às suas dificuldades, que deve ser aprendida por eles de forma independente e de modo apropriado, não necessariamente ensinado.

Nesse sentido, esses autores destacam que o ensino deve considerar a necessária introdução cuidadosa e gradual desta ferramenta, bem como exercícios

¹¹ Fragmento do texto:

- *Teaching aiming at students' active and independent constructions and individual solutions (realising permanently the aspired balance between students' independence and teacher's guidance);*
- *Systematic change between independent work in groups (coached by the teacher) and whole-class activities (especially for comparison of different solutions and retrospective reflections);*
- *Teacher's coaching based on the modelling cycle and on individual diagnoses.*

repetidos de como usá-la. “Se isso for levado em conta, até os alunos da *Hauptschule* (faixa de baixa capacidade) conseguirão lidar com essa ferramenta com sucesso”¹² (BLUM; BORROMEO FERRI, 2009, p. 55, tradução nossa).

Essa resposta parcial, como destacado, recorre a ferramenta ciclo de modelagem, que é questionada à luz da Teoria Antropológica do Didático, ou simplesmente TAD (CHEVALLARD, 1992), por Garcia *et al.* (2006) por exemplo, que apontam a ausência de um arcabouço teórico que a fundamente para o ensino.

Assim, encaminhamos a questão “Como podemos ensinar modelagem?”¹³ a partir da perspectiva epistemológica, tendo em conta o que destacam Bosch e Gascón (2001) e Garcia *et al.* (2006), por exemplo, sobre essa perspectiva, que pode ser vista como complementar às abordagens cognitivistas.

A MM é compreendida sob a TAD como uma atividade humana compartilhada por grupos ou instituições, por exemplo, uma classe no interior de um tipo de escola, segundo uma cognição social ou institucional. De outro modo, as pesquisas realizadas na perspectiva epistemológica da TAD buscam, mas não somente, reformular os processos de modelagem dentro de seu arcabouço teórico por meio do quadro epistemológico geral da Matemática (GARCIA *et al.*, 2006, BOSCH *et al.*, 2006), mais precisamente, transpondo-o¹⁴ para um arcabouço teórico sólido com implicações, em particular, no ensino da MM.

Especificamente, a questão encaminhada por Blum (2011) problematiza o ensino e as pesquisas, que à luz da TAD é tomada como um problema da profissão docente que, nos termos de Barquero, Bosch e Gascón (2011), pode ser assim anunciado:

Q₀ (MM): O que tenho que ensinar a meus alunos em relação à MM e como tenho que ensiná-los?

Essas pesquisas à luz da TAD, que incluem as de Barquero, Bosch e Gascón (2011; 2013), assentam a MM como uma atividade de desenvolver modelos matemáticos segundo uma organização matemática, denotada por OM, de complexidade crescente.

Seguindo os trabalhos de García (2005) e de García *et al.* (2006), e generalizando a noção clássica do “ciclo de modelagem” (BLUM; LEIB, 2007), consideramos os processos de modelagem como processos de

¹² Fragmento do texto: *If this is taken into account, even students' from Hauptschule (low ability track) are able to successfully handle this plan.*

¹³ Fragmento do texto: *How can we teach modelling?*

¹⁴ O termo transpor é utilizado aqui como metáfora dos processos de transposição didática.

reconstrução e articulação de OM de complexidade crescente¹⁵ (BARQUERO; BOSCH; GASCÓN, 2013, p. 7, tradução nossa).

A noção de complexidade crescente é compreendida no sentido de a MM ser desenvolvida em uma rede interconectada de organizações matemáticas e que deve ser tomada como foco a ser seguido nas pesquisas por meio de questionamentos cruciais no sentido de darem origem a um conjunto amplo dessas organizações matemáticas.

Parece-nos que essa compreensão pode confinar a MM, ou pelo menos de modo dominante, à atividade da matemática e, com isso, deixar escapar o objetivo maior da MM, ou seja, o objetivo de promover a “esmagificação” de realidades extramatemáticas por meio da modelagem de partes dessa realidade cujos modelos, longe de serem suas representações exatas, acabam por serem boas "máquinas" para produzir conhecimentos sobre essas realidades questionadas (BOSCH; CHEVALLARD; GASCÓN, 2006).

Outra linha que se desenvolve na perspectiva epistemológica da TAD, mas com viés crítico da MM, são as pesquisas encaminhadas por Burgermeister (2007; 2010; 2012) que reinterpretem a definição dada por Chevallard (1989c) sobre o processo de MM, descrito em três etapas, a saber:

1. Definimos o sistema que pretendemos estudar, especificando os "aspectos" **pertinentes** para o estudo que queremos fazer deste sistema, o conjunto de **variáveis** pelas quais se divide no domínio de realidade onde nos aparece.
2. Constrói-se então o modelo propriamente dito estabelecendo certo número de relações, R, R', R", etc., entre as variáveis consideradas na primeira etapa, sendo o modelo do sistema a ser estudado o **conjunto dessas relações**.
3. Trabalha-se o modelo obtido com o objetivo de produzir **conhecimentos** sobre o sistema em estudo, que tomem a forma de novas relações entre as variáveis do sistema¹⁶ (CHEVALLARD, 1989, p. 53, grifos do autor, tradução nossa).

Burgermeister (2007; 2010; 2012) encaminha o processo de MM orientado por essas três etapas e, inclui, a noção de Percurso de Estudos e Investigação –

¹⁵ Fragmento do texto: *Siguiendo los trabajos de García (2005) y de García et al. (2006), y generalizando la noción clásica del “ciclo de modelización” (BLUM, LEIB 2007), consideraremos los procesos de modelización como procesos de reconstrucción y articulación de PM de complejidad creciente.*

¹⁶ Fragmento do texto:

1. On définit le système que l'on entend étudier, en précisant les « aspects » **pertinents** par rapport à l'étude que l'on veut faire de ce système, soit l'ensemble des **variables** par lesquelles on le découpe dans le domaine de réalité où il nous apparaît.
2. On construit alors le modèle à proprement parler en établissant un certain nombre de relations, IR, IR', IR", etc., entre les variables prises en compte dans la première étape, le modèle du système à étudier étant **l'ensemble de ces relations**.
3. On « travaille » le modèle ainsi obtenu, dans le but de produire des **connaissances** relatives au système étudié, connaissances qui prennent la forme de nouvelles relations entre les variables du système.

PER no original - (CHEVALLARD, 2009a), de modo a tornar esse processo exequível em sala de aula.

Essa proposta é centrada no estudo crítico de adequação, ou não, de modelos matemáticos sobre um domínio de realidade previamente estabelecido, a partir da resposta por eles produzida para uma dada questão. Essa abordagem se afasta da abordagem clássica dominante do processo de modelagem como um processo cíclico (PERRENET; ZWANEVELD, 2012; BORROMEO FERRI, 2006), cujo produto é um modelo matemático, entendido como um objeto estrito da matemática.

Frente às pesquisas citadas, observamos que Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 50) afirmam que a atividade matemática poder ser interpretada como uma atividade de MM, no sentido de que fazer matemática pode ser caracterizado como um trabalho de transformação de um sistema não matemático, ou previamente matematizado, no estudo de problemas matemáticos que são resolvidos utilizando de maneira adequada certos modelos matemáticos.

Ainda que Chevallard, Bosch e Gascón (2001) considerem a impossibilidade de traçar uma fronteira clara e precisa que separe, de uma vez por todas, as atividades matemáticas das atividades não matemáticas, eles destacam três grandes gestos que costumam ser considerados como genuinamente matemáticos: *utilizar a matemática conhecida; aprender e ensinar matemática e criar uma matemática nova* (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001).

Esses três gestos, considerados pelos autores como genuinamente matemáticos, são aqui interpretados de modo parafraseados no âmbito das “práticas sociais *com matemática*”¹⁷ (CHEVALLARD, 2005, p. 174, grifos do autor, tradução nossa), como gestos genuínos que definem a atividade de MM escolar descritos por:

- **G₁** - Usar praxeologias matemáticas rotineiras da escola de modo customizado em situações com matemática escolar sobre contextos reais do cotidiano escolar e do seu entorno social;
- **G₂** - Estudar e, com isso aprender, modelos matemáticos, entendidos como os questionamentos sobre contextos concretos, as situações com matemática e praxeologias matemáticas customizadas associadas;

¹⁷ Fragmento do texto: *prácticas sociales con matemáticas*.

- G_3 - Criar, mesmo que se reduza apenas à customização, modelos matemáticos para novas situações com matemática em contextos a partir de analogias ou homologias com outras situações com matemática, inclusive as praxeologias customizadas associadas, sobre contextos concretos estudados em G_1 e G_2 .

Não menos importante, é preciso considerar de modo complementar, o que nos diz Frejd e Bergsten (2018), quando refere à abordagem da MM sob a TAD, ou seja, os seguintes aspectos considerados, nem sempre claramente diferenciados nas discussões sobre a noção de MM:

- 1 - Atividade de desenvolver modelos matemáticos;
- 2 - O produto da atividade de modelagem (isto é, o modelo em si e seu uso);
- 3 - O objetivo da atividade de modelagem.

Essas características apontadas à luz da TAD são compreendidas aqui como transposições dos gestos genuínos da atividade de MM. O aspecto (1) remete ao gesto G_3 que trata da criação de modelos, o aspecto (2) ao gesto G_2 por tratar dos modelos e situações de uso e (3) ao gesto G_1 , por definitivamente, associar a necessidade do conhecimento da situação para o uso adequado do modelo.

Pressupomos que essa compreensão à luz da TAD pode encaminhar a infraestrutura teórica para a concepção e a execução do projeto de tese que busca encontrar respostas ao questionamento $Q_0(\text{MM})$ que pode ser anunciado aqui sob a forma do problema primordial de Chevallard (2009a) do seguinte modo:

Dado um projeto (de tese) que desejamos executar, qual é o equipamento praxeológico¹⁸ que se julga indispensável, ou pelo menos útil, para a concepção e execução desse projeto?

A abordagem desse problema primordial de MM se insere nas pesquisas encaminhadas à luz da TAD como as de Garcia (2005; 2006), Delgado (2006), Barquero (2009), Ruiz-Munzón (2010), Barquero, Bosch e Gascón (2011; 2013), que generalizam a noção clássica de "ciclo de modelagem" (BLUM; LEIB, 2007), considerando os processos de modelagem como processos de reconstrução e

¹⁸ O termo específico Equipamento Praxeológico segundo Chevallard (2009) refere ao "conjunto de praxeologias que a pessoa dispõe, ou que está equipada (mesmo que não possa atualizar tal ou tal praxeologia que venha a ocupar tal posição dentro de tal instituição): é o que chamo de equipamento praxeológico da pessoa" (CHEVALLARD, 2009, p. 1-2, tradução nossa).

articulação de OM em complexidade crescente, privilegiando as atividades matemáticas.

As pesquisas de Burgermeister (2007; 2010; 2012) privilegiam aspectos da MM crítica, com ênfase sobre o papel de diferentes modelos matemáticos no estudo de uma mesma situação em contexto e, com isso, exploram os alcances das práticas matemáticas, mas sem mencionar, ou considerar, a estrutura praxeológica de complexidade crescente.

Embora essas pesquisas também considerem as problemáticas relativas às atividades de MM com o viés de formação docente, elas privilegiam aspectos de suposta prática científica em que se buscam problemas que podem ser reproduzidos e desenvolvidos em outros mais amplos e complexos (GARCIA *et al.*, 2006, p. 233), ou ainda, sobre a limitação de modelos matemáticos para o estudo de certos domínios de realidade (BURGERMEISTER, 2007; 2010; 2012).

Aqui, de modo distinto, dirigimos olhares holísticos sobre a atividade de MM na instituição docente que, como qualquer instituição usuária de Matemática (CHEVALLARD, 2005), fabrica e aplica modelos matemáticos em práticas sociais específicas, mas não gozam de reconhecimento social dessas atividades por serem fatos socialmente ‘escondidos’ no interior de suas instituições. À exceção do que concerne aos ‘grandes modelos’ (os da Física, por exemplo), as práticas correspondentes não têm dignidade científica e (então) social, posto que são com maior frequência, “Engenheiros, técnicos ou pesquisadores não-matemáticos [...] que são os seus agentes” (CHEVALLARD, 1989b, p. 147), e, claro, professores de Matemática.

O projeto desta tese envolve então a formação de professores em MM sob a questão **Q₀ (MM)** da profissão docente anunciada sob a ótica da TAD. Assim, nosso objetivo geral é reconstruir noções teóricas e metodológicas à luz da TAD para o enfrentamento da problemática.

Como objetivo específico, assumimos o recomendado por Barquero, Bosch e Romo (2018) e Schukajlow, Kaiser e Stillman (2018), ou seja, desenvolver atividades empíricas de estudo e investigação com professores em formação inicial de modo a colher novos *insights* sobre as atividades de MM em situação de ensino/formação de professores.

Em última análise, a resposta ao nosso problema primordial é construída por meio do desdobramento dos capítulos subsequentes.

Analisar notadamente em duplo plano experimental e teórico essas respostas

CAPÍTULO 2 - RECURSOS TEÓRICO-METODOLÓGICOS E MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo, destacamos recursos teórico-metodológicos da Teoria Antropológica do Didático que permitiram o encaminhamento da noção de organização praxeológica complexa concebida à luz dessa teoria. Sob essa noção passaremos a interpretar a atividade de MM especificamente, o processo de modelagem e/ou a construção de um modelo matemático como um tipo de organização praxeológica complexa que se desdobrará nos próximos capítulos.

2.1 Modelo praxeológico *lato senso* da TAD

O postulado base da TAD assume que toda atividade humana regularmente realizada no interior de um espaço social – que pode ser a família, a escola, por exemplo, e que aqui são denominados de instituições por instituir o modo de fazer e de pensar uma prática em seu interior – pode ser descrita a partir de um modelo que cuja unidade mais simples é resumida com a palavra praxeologia (CHEVALLARD, 1999).

Chevallard (1999) destaca que as praxeologias não são dados da natureza, e sim “artefatos”, ou “obras” humanas construídas no interior das instituições para atender seus interesses e intenções e, portanto, funcionam sob condições da cultura e da sociedade em que se inserem, destacando nessas instituições “uma verdadeira capacidade de produção de saber para fins de autoconsumo”¹⁹ (CHEVALLARD, 2005, p. 26, tradução nossa).

Toda atividade humana, e em particular a atividade matemática, pode assim ser interpretada por meio de organizações praxeológicas em que a estrutura mais simples, dita pontual, é um tipo de praxeologia e, como tal, é constituída de dois blocos inseparáveis: a *práxis* e o *logos*, embora Chevallard (1999) alerte que dificilmente uma prática possa ser descrita somente por meio de uma organização praxeológica pontual.

¹⁹ Fragmento do texto: *una verdadera capacidad de producción de saber a los fines del auto consumo.*

- A *práxis*, denotada por $[T, \tau]$, designa o bloco do saber prático, saber fazer, ou *know-how*, que é constituído pelo que se faz em um tipo de prática, chamado de tipo de tarefa T , e o modo como se faz essa prática, é chamada de técnica τ ;

Na maioria das práticas, um tipo de tarefa é associado por meio de um verbo no infinitivo, como calcular o valor numérico de um polinômio, limpar o ambiente doméstico, derivar uma função num dado ponto, enquanto simplesmente o verbo calcular, limpar ou derivar são associados a gêneros de tarefas e não a um tipo específico de tarefas.

Os tipos de tarefas rotineiras em uma instituição são realizados segundo uma técnica nela naturalizada e, assim, mesmo que essa técnica tenha sido produto de uma tecnologia, ela pode estar longe de ser questionada, até emergir uma tarefa do mesmo tipo em que essa técnica não a responda.

Nesse sentido, a técnica é dita limitada, de baixo alcance e, em consequência, a tarefa se torna uma “tarefa problemática”, e isso demandará a construção de novas técnicas com maior alcance, no sentido de serem capazes de enfrentá-la, bem como todas as outras tarefas do mesmo tipo até então existentes em uma dada instituição.

Segundo a TAD, toda técnica, dotada ou não de maior alcance, deve comportar um discurso que a justifique, explique ou produza no interior da instituição em que vive.

- O *logos*, denotado por $[\theta, \Theta]$, designa o saber, ou discurso, que justifica, explica ou produz a técnica τ , que é chamado de tecnologia θ da técnica τ . A tecnologia θ , por sua vez, pode ser vista como dotada de um discurso mais inclusivo, chamado de teoria Θ , que “aparece frequentemente como ‘abstrata’, isolada das preocupações dos simples tecnólogos e técnicos”²⁰ (CHEVALLARD, 1999, p. 225, grifos do autor, tradução nossa). O bloco *logos* desempenha um papel similar ao da tecnologia, mas que incide sobre a tecnologia de uma ou mais técnicas.

A tecnologia e a teoria nem sempre se fazem distintas no *logos*. Além disso, o estilo de racionalidade desse discurso pode variar no espaço intra e interinstitucional ao fio da história das praxeologias, de modo que a racionalidade de uma instituição

²⁰ Fragmento do texto: *De hecho, los enunciados teóricos aparecen frecuentemente como “abstractos”, apartados de las preocupaciones de los “simples” tecnólogos y técnicos.*

poderá parecer como pouco racional e, até mesmo, estranha à outra instituição (CHEVALLARD, 1999).

Na maioria das práticas realizadas no interior de uma instituição, o discurso [θ, Θ] não se faz visível e, frequentemente, pode ser produto da cultura institucional sobre as práticas, entre eles, por exemplo, o discurso do tipo “faz-se assim porque é assim o jeito certo de se fazer”.

Para esse tipo de *praxis* há uma única técnica canônica reconhecida ou empregada no enfrentamento da tarefa. Sobre essa técnica é conferida uma função dita “autotecnológica: atuar dessa maneira não exige justificativa porque é a boa maneira de atuar (em I)”²¹ (Ibid. p. 224, tradução nossa).

Assim, pode-se afirmar que uma *praxis* sempre estará acompanhada de um discurso, ou de pelo menos um embrião deste, como exemplifica Chevallard (1999) por meio dos problemas ditos de regra de três, em que “o mesmo pequeno discurso tem uma dupla função, técnica e tecnológica, que permite encontrar o resultado pedido (função técnica) e justificar que é correto o resultado esperado (função tecnológica)”²² (CHEVALLARD, 1999, p. 224, tradução nossa).

Pode acontecer, em uma dada instituição, que alguns sujeitos manifestem verdadeiras paixões a determinadas técnicas, em geral, que acabam levando-os a ignorar outras técnicas possíveis, encarando-as como artifícios e, por isso, contestáveis e até mesmo inaceitáveis (CHEVALLARD, 1999).

É importante ressaltar a unidade dos blocos, *praxis* e *logos*, na noção de praxeologia, pois tal unidade encaminha a compreensão de que uma *praxis* realizada no interior de duas instituições distintas, a escola e a academia, por exemplo, podem não ser a mesma praxeologia. Pois, mesmo que objetivamente as *praxis* sejam as mesmas, estas podem estar dotadas de discursos tecnológico-teóricos distintos.

Por exemplo, uma dada *praxis* escolar considerada por um matemático como uma *praxis* matemática será dotada por ele de um discurso distinto dos professores que ensinam Matemática e, portanto, são praxeologias distintas.

Nesse sentido:

²¹ Fragmento do texto: “autotecnológica”: *actuar de esta manera no exige justificación, porque es la buena manera de actuar (en I)*.

²² Fragmento do texto: *el mismo pequeño discurso tiene una doble función, técnica y tecnológica, que permite a la vez encontrar el resultado pedido (función técnica) y justificar que es correcto el resultado esperado (función tecnológica)*.

Em seu curso de análise de 1821, Cauchy demonstra assim o teorema dos valores intermediários:

"Uma propriedade notável de funções contínuas de uma variável é a de servir para representar a geometria ordenada de linhas retas ou curvas. Desta observação se deduz facilmente a seguinte proposição:

Teorema IV. Se a função $f(x)$ é contínua em relação à variável x entre os limites $x = x_0$, $x = X$ e eventualmente designado como b um valor intermediário entre $f(x_0)$ e $f(X)$, que poderá satisfazer a equação $f(x) = b$ por um ou muitos valores reais de x entre x_0 e X .

Demonstração. Para definir a proposição acima, é suficientemente ver que a curva tem uma equação de $y = f(x)$ cortará uma ou várias vezes a reta que tem a equação $y = b$ no intervalo compreendido entre as coordenadas que correspondem às abscissas x_0 e X ; Agora, é evidentemente o que ocorrerá na hipótese admitida".

Para nós, esta demonstração não é uma demonstração. Os termos sintomáticos de insustentabilidade são "ver" e "evidentemente" indicam que se recorre a uma evidência gráfica que atualmente não aceitamos mais, pelo menos entre os matemáticos - é diferente quando o matemático se faz professor²³ (CHEVALLARD, 2005, p. 103-104, grifos do autor, tradução nossa).

Neste extrato de texto, Chevallard (2005) destaca a demonstração de Cauchy como uma praxeologia escolar onde o professor recorre de modo indiscutível a observações físicas sobre um gráfico como argumento de demonstração, o que não é aceito pela comunidade de matemáticos.

Além da função de justificar uma técnica, a tecnologia pode cumprir outras funcionalidades como a de coordenar tarefas, segundo as técnicas que essa tecnologia dá suporte, seguindo uma dinâmica praxeológica que pode levar à produção de novas técnicas para novos e velhos tipos de tarefas.

Essa linha de pensamento encaminha à compreensão sobre as organizações praxeológicas, no sentido de articulações e integrações de praxeologias, ou fragmentos destas, como uma expressão da tecnologia institucional.

Em uma dada instituição podem conviver praxeologias, designadas por $[T, \tau, \theta, \Theta]$, no sentido de serem dotadas de um discurso que pode ser explicitado em

²³ Fragmento de texto: *En su curso de análisis de 1821, Cauchy demuestra así el teorema de los valores intermedios:*

"Una propiedad notable de las funciones continuas de una sola variable es poder servir para representar en geometría las ordenadas de líneas rectas o curvas. De esta observacion se deduce fácilmente la siguiente presuposición:

Teorema IV. Si la función $f(x)$ es continuas en relación con la variable x entre los limites $x = x_0$, $x = X$ y si se designa como b una cantidad intermedia entre $f(x_0)$ y $f(X)$, se podrá satisfacer siempre la ecuación $f(x) = b$ por uno o muchos valores reales de x comprendidos entre x_0 y X .

Demonstración. Para establecer la proposición precedente, basta con hacer ver que la curva que tiene por ecuación $y = f(x)$ cortará una o vrias veces la recta que tiene por ecuación $y = b$ en el intervalo comprendido entre las coordenadas que corresponden a las abscisas x_0 y X ; ahora bien, es evidentemente lo que ocurrirá en la hipótesis admitida".

Para nosotros, esta demostración no es una demostración. Los términos sintomáticos de su insostenibilidad son "hacer ver" y "evidentemente" indican que se recurre a una evidencia gráfica que actualmente ya no aceptamos, por lo menos entre los matemáticos - es diferente cuando el matemático se hace profesor.

termos do par tecnologia-teoria, e praxeologias autotecnológicas, com discursos embrionários, inclusive, como o de sucesso da própria prática em si.

No entanto, uma praxeologia completa, que habita em uma dada instituição, pode apresentar gênese histórico-social distinta da sua epistemologia escolar atual. Por exemplo, as resoluções de equações, redutíveis as equações do primeiro grau, desenvolvidas pelo povo hindu, como mostrados por Datta e Singh (1938), antecedem a criação do logos $[\theta, \Theta]$, a Álgebra Moderna, que hoje é assumida como o discurso teórico.

A noção de organização praxeológica supõe sempre uma inteligibilidade que engendra as praxeologias pontuais para atender uma intencionalidade institucional ou pessoal e, sobretudo, que seja capaz de evidenciar a *práxis* designada por $[T, \tau]$, como produto da inteligibilidade designada de logos $[\theta, \Theta]$. Essa compreensão é depreendida do seguinte extrato de texto:

É verdade que, na maioria dos casos, o tipo de tarefa precede *geneticamente* o bloco $[\theta, \Theta]$ (que aparece então como meio de produzir e de justificar uma técnica τ apropriada a T), não é menos certo, que, *estruturalmente*, o saber $[\theta, \Theta]$ permite gerar τ (para dado tipo de tarefa T). Por esta razão, geralmente é apresentado de forma clássica, no texto do saber, o saber-fazer $[T, \tau]$ como uma simples aplicação do “saber” $[\theta, \Theta]$ ²⁴ (CHEVALLARD, 1999, p. 226, grifos do autor, tradução nossa).

Sob esse olhar, do saber como regente do saber-fazer, embora admita que o saber não necessariamente precede o saber-fazer, Chevallard (1999) estabelece o modelo praxeológico *lato senso* a partir da crescente visibilidade do saber $[\theta, \Theta]$, em uma dada instituição, em detrimento do saber-fazer $[T, \tau]$.

O modelo praxeológico *lato senso* da TAD é anunciado nos seguintes termos:

Geralmente, em uma instituição dada, I , uma teoria Θ responde a várias tecnologias θ_j , cada uma delas por sua vez justifica e faz inteligíveis várias técnicas, τ_{ij} , correspondentes a outros tantos tipos de tarefas, T_{ij} . As organizações pontuais vão assim combinando-se, em primeiro lugar, em organizações locais, $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$, centradas sobre uma determinada tecnologia θ , e depois em organizações regionais, $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$, formadas ao redor de uma teoria Θ . (Mais além, se denominará organização global o complexo praxeológico obtido, $[T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{ijk}, \Theta_k]$, em uma dada instituição, pela agregação de várias organizações regionais correspondentes a várias teorias Θ_k). Agora, o passo de uma praxeologia pontual $[T, \tau, \theta, \Theta]$ a uma praxeologia local $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$ põe em marcha a tecnologia θ , da mesma

²⁴ Fragmento do texto: *es verdad que, en la mayoría de los casos, el tipo de tarea precede genéticamente el bloque $[\theta/\Theta]$ (que aparece entonces como medio de producir y de justificar una técnica τ apropiada a T), no es menos cierto, que, estructuralmente, el saber $[\theta/\Theta]$ permite generar τ (para T dado). Por esta razón, se suele presentar clásicamente, en el texto del saber, al saber-hacer $[T/\tau]$ como una simple aplicación del “saber” $[\theta/\Theta]$.*

maneira que o passo ulterior a uma praxeología regional $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$ levará ao primeiro plano a teoria, Θ . Nos dois casos, a visibilidade do bloco do saber aumenta, em detrimento do saber-fazer²⁵ (CHEVALLARD, 1999, p. 226, tradução nossa).

O fragmento do extrato de texto nos encaminha à compreensão que em uma dada instituição são construídas redes de organizações praxeológicas que se articulam formando outras organizações com maiores complexidades, todas coordenadas segundo um saber. Essas redes de organizações constituem uma expressão da relação institucional com o saber teórico Θ , que responde a várias tecnologias θ_j , que por sua vez, justificam e tornam inteligíveis o uso de várias técnicas τ_{ij} correspondente a tantos outros tipos de tarefas T_{ij} .

A **organização praxeológica regional** pode ser interpretada como uma qualidade de relação institucional com um saber teórico Θ , que é alcançado por meio do uso e desenvolvimento de praxeologias organizadas em uma rede articulada e integrada de **organizações praxeológicas locais**, que por sua vez, são obtidas de modo similar segundo uma tecnologia θ_j que dão suporte às **organizações de praxeologias pontuais** $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$.

As organizações praxeológicas da matemática, daqui em diante OM, comumente desenvolvidas na academia podem ser interpretadas como organizações praxeológicas que se desenvolvem segundo uma axiomática²⁶ e, frequentemente, são confundidas pelos sujeitos acadêmicos com o saber, embora outras organizações praxeológicas, com estrutura axiomática, possam ser construídas como esse saber. Assim, por exemplo, as organizações praxeológicas regionais de estruturas algébricas constantes no livro texto de álgebra moderna tem a álgebra moderna como saber direcionado aos professores e alunos de um curso de graduação de Matemática.

É preciso notar que a inteligibilidade das organizações locais e regionais são explicadas, justificadas e até produzidas a partir de tecnologias segundo uma dada

²⁵ Fragmento do texto: *Generalmente, en una institución dada, I, una teoría Θ responde de varias tecnologías θ_j , cada una de las cuales a su vez justifica y hace inteligibles varias técnicas, τ_{ij} , correspondientes a otros tantos tipos de tareas, T_{ij} . Las organizaciones puntuales van así a combinarse, en primer lugar, en organizaciones locales, $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$, centradas sobre una tecnología θ determinada, y después en organizaciones regionales, $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$, formadas alrededor de una teoría Θ . (Más allá, se denominará organización global el complejo praxeológico obtenido, $[T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta_k]$, en una institución dada, por la agregación de varias organizaciones regionales correspondientes a varias teorías Θ_k). Ahora bien, el paso de una praxeología puntual $[T, \tau, \theta, \Theta]$ a una praxeología local $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$ pone en marcha la tecnología θ , de la misma manera que el paso ulterior a una praxeología regional $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$ llevará al primer plano la teoría, Θ . En los dos casos, la visibilidad del bloque del saber aumenta, en detrimento del saber-hacer.*

²⁶ O termo axiomática é referido neste texto aos objetos que são **evidentes, inquestionáveis ou até mesmo incontestáveis**.

teoria, enquanto a inteligibilidade das organizações praxeológicas globais envolvem mais de uma teoria e, portanto, nesse caso, que nos levou a supor que uma dessas teorias engendra as demais, inclusive como um saber oriundo do campo de práticas (BOURDIEU, 1980).

Sobre essa compreensão, ou seja, a de organização praxeológica *superestrutural* (CHEVALLARD, 2009b) que orchestra distintas organizações praxeológicas infraestruturais, encaminhamos a noção de organizações praxeológicas complexas, concebida a partir da TAD, como destacamos a seguir.

2.2 Organizações Praxeológicas Complexas

Uma organização praxeológica global é de maior complexidade quando desenvolvida em uma instituição pela agregação de diferentes organizações regionais e, portanto, sob diferentes logos $[\theta, \Theta]$, o que constitui um complexo praxeológico $[T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{ijk}, \Theta_k]$ para atender a uma intenção institucional ou pessoal.

A noção sobre essa estrutura nos encaminha a outros tipos de complexos praxeológicos, e de nosso particular interesse, os desenvolvidos por agregação de organizações praxeológicas mais simples, nem todas regionais, com a presença de pelo menos um saber $[\theta_{ikp}, \Theta_p]$ para algum p , que pode ser um saber não matemático, inclusive um saber prático, no sentido dado por Bourdieu (1980).

Por exemplo, uma organização praxeológica didática ou simplesmente organização didática - daqui em diante OD - compreendida como mobilizações de OM para fins de ensino, são engendradas por técnicas didáticas, frequentemente de caráter autotecnológico e dependente fortemente de *slogans* pedagógicos não discutidos e indiscutíveis (BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 3). Nesse sentido, estes autores afirmam que:

Assim, por exemplo, é comum que o professor introduza os números racionais positivos dividindo a 'unidade' (representada por um objeto 'concreto' como um bolo) em partes iguais e tirando uma quantidade delas. O discurso de justificar que se costuma utilizar, e que é uma parte importante da tecnologia didática de sua praxeologia didática espontânea, é reduzido ao '*slogan* pedagógico' que contrasta o 'concreto' (presumivelmente compreensível e motivador) ao 'abstrato' (presumivelmente incompreensível e desmotivador)²⁷ (BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 3, tradução nossa).

²⁷ Fragmento do texto: *Así, por ejemplo, es habitual que en la el profesor introduzca los números racionales positivos dividiendo la "unidad" (representada por un objeto "concreto" como puede ser un pastel) en partes iguales y tomando unas cuantas de ellas. El discurso justificativo que suele utilizar, y que es una parte importante de la tecnología didáctica de su praxeología didáctica espontánea, se reduce al "eslogan pedagógico" que*

Desse extrato de texto, depreende-se que, em geral, o professor reduz qualquer vestígio tecnológico-teórico matemático por um discurso tecnológico-teórico pedagógico ao contrastar o concreto, que é supostamente passível de compreensão e motivador, com o abstrato, presumivelmente incompreensível e sem motivação para produzir aprendizagem.

O complexo praxeológico regido por saberes, em sentido amplo, de uma instituição que agrega saberes transpostos, inclusive como saberes práticos, nós interpretamos aqui como uma tarefa superestrutural cuja técnica pode ser descrita por meio de mobilizações de tarefas infraestruturais de técnicas heterogêneas, às vezes não discutidas ou indiscutíveis, para atender uma intencionalidade institucional, denominamos de Organização Praxeológica Complexa ou simplesmente, OPC.

Essa compreensão de OPC começa a se desenhar a partir da noção de transposições didáticas interinstitucionais, mais precisamente, quando Chevallard (2009a) afirma que uma praxeologia transposta de uma instituição para outra pode ter suas componentes, *práxis* ou *logos*, adaptados, inclusive, ser transformada em incompleta por perda de sentido ou interesse de seu discurso tecnológico-teórico na nova instituição.

De outro modo, uma praxeologia completa em uma instituição pode se tornar um saber prático, ou ser esvaziada de sua substância, por não apresentar uma *práxis* no interior da nova instituição. A esse respeito, Chevallard (2009a) expressa que:

Se $\Pi \oplus \Lambda$ denota uma praxeologia $[T / \tau / \theta / \Theta]$ existente em uma instituição I , a sua transposição para outra instituição I^* , denotada por $(\Pi \oplus \Lambda)^*$, pode em alguns casos (aproximadamente) se escrever $\Pi \oplus (\Lambda^*)$; Neste caso, a *práxis* será (essencialmente) a mesma, mas o *logos* terá mudado. A praxeologia transposta $(\Pi \oplus \Lambda)^*$ pode ser da forma $(\Pi^*) \oplus \Lambda$, em que o *logos* é mantido, mas a *práxis* alterada, e às vezes esvaziada de sua substância (quando temos $\Pi^* \approx \emptyset$). Alterações e recombinações praxeológicas são, portanto, um fenômeno no coração da história social das praxeologias²⁸ (CHEVALLARD, 2009a, p. 4, tradução nossa).

contrapone lo “concreto” (presuntamente comprensible y motivador) a lo “abstracto” (presuntamente incomprensible y desmotivador).

²⁸ Fragmento do texto: *Si l'on note $\Pi \oplus \Lambda$ une praxéologie $[T / \tau / \theta / \Theta]$ existant en une institution I , sa transposée en une autre institution I^* , qu'on peut écrire $(\Pi \oplus \Lambda)^*$, pourra en certains cas s'écrire (approximativement) $\Pi \oplus (\Lambda^*)$: en un tel cas, la praxis sera bien (essentiellement) la même, mais le logos aura changé. La praxéologie transposée $(\Pi \oplus \Lambda)^*$ pourra quelquefois aussi s'écrire $(\Pi^*) \oplus \Lambda$, avec, donc, un logos maintenu, mais une praxis modifiée, qui, parfois, sera même vidée de sa substance (on aura $\Pi^* \approx \emptyset$).*

Em particular, quando uma praxeologia é transposta de uma instituição para outra e adaptada como um saber-fazer, ela evidencia a qualidade da relação da nova instituição com um dado objeto que se faz ver, portanto, assume funcionalidades que atendem a lógicas práticas (BOURDIEU, 1980) e, assim, se distingue de um saber, no sentido de ser uma hipóstase improvável de existência nunca assegurada e, portanto, sempre discutível e, também, um espaço de conflito que introduz uma dinâmica na sociedade e na cultura que o torna um objeto de desejo (CHEVALLARD, 2005).

A legitimidade institucional desse tipo de organização praxeológica não estaria na clareza de seus saberes, enquanto teóricos, e sim no papel funcional como conhecimento necessário para produção de respostas a determinadas questões de interesses da nova instituição.

Toda organização praxeológica em ato pode ser vista como um tipo de OPC, pois, frequentemente, apresentam em sua estrutura tipos de praxeologias incompletas, não discutidas, senão indiscutíveis, mas que são indispensáveis para engendrar essa organização.

As praxeologias incompletas indispensáveis para o funcionamento de uma organização praxeológica incluem aqui a noção de saber pré-construído, pois, “é um fato essencial que, em um dado momento, *qualquer saber científico funciona sobre um extrato profundo de pré-construções*”²⁹ (CHEVALLARD, 2005, p. 107, grifos do autor, tradução nossa).

A noção de *pré-construído* pode ser entendida como objetos da cultura institucionalizada que conformam as praxeologias de uma ou mais instituições e, como tais, são inquestionáveis ou não questionados, como exemplifica Chevallard (2005), ao afirmar que:

Quando reflito sobre o mundo sensível que me rodeia (para agir sobre ele, por exemplo), não questiono sua existência obstinada e opaca: essa parede, essa porta, minha mão que escreve. O mesmo acontece na vida intelectual, tomada de pré-construções³⁰ (CHEVALLARD, 2005, p. 106, tradução nossa).

Mais especificamente, um objeto pré-construído é apontado por uma pessoa usando palavras ou expressões linguísticas adequadas a uma situação em contexto,

²⁹ Fragmento do texto: *es preciso insistir de todos modos sobre el hecho esencial de que, en un momento dado, cualquier saber científico funciona sobre un extrato profundo de pre-construcción.*

³⁰ Fragmento do texto: *Cuando reflexiono sobre el mundo sensible que me rodea (con vistas a actuar sobre él, por ejemplo), no pongo en duda sua existencia obstinada, opaca: esa pared, esta puerta, mi mano que escribe. Lo mismo ocurre en la vida intelectual, colmada de pre-construcciones.*

em um dado tempo e em um dado lugar. De outro modo, são indicados por dêixis explícita, no sentido de objetos explicitamente nominados e, de modo implícito, mediante o mecanismo da *aposição*, a título de *pressuposição* (CHEVALLARD, 2005, p. 106, grifos do autor).

Nesse sentido, Chevallard (2005) assim se refere seguindo um exemplo de Wittgenstein (1976):

Meu saber em preconstituição me permite dizer que essas plantas são tréboles, porque eu sei que nesse lugar do jardim, nessa época do ano, sempre há - e sempre tem havido- tréboles, meu saber está estritamente subordinado a uma situação estreitamente definida; em outro jardim, que não conheço, duvidaria: Se trata de tréboles ou de outra coisa?³¹ (CHEVALLARD, 2005, p. 106, tradução nossa).

Os pré-construídos são saberes que dependem de modo indispensável do contexto, ou seja, são absolutamente não descontextualizáveis e, com isso, a sua manipulação está submetida a uma lógica prática, definida por um código de conduta que, em cada situação define uma conduta particular (CHEVALLARD, 2005).

Embora os pré-construídos, enquanto saberes não científicos sejam frágeis, *sem vigor*, eles são indispensáveis para o funcionamento das praxeologias em ato, como podemos depreender do seguinte extrato de texto:

Mas acontece que, entre um saber e uma prática, há uma distância nunca inteiramente abolida. (Portanto, há sempre uma distância entre a escola profissional e profissão: a aprendizagem no local de trabalho, aculturação profissional, mesmo que a formação escolar tenda a reduzir seus papéis, eles não deixam de ser necessários)³² (CHEVALLARD, 2005, p. 171, tradução nossa).

De outro modo, um saber não se confunde com uma prática e, portanto, segundo Chevallard (2005), há sempre uma distância que os separa. De acordo com o autor, o saber relativo a um domínio de realidade é um saber sobre as práticas desse domínio, enquanto o que constitui o saber dessas práticas não está assegurado. Nesse sentido, a manipulação das praxeologias, em geral, é condicionada por saberes práticos, isto é, os pré-construídos da cultura das práticas

³¹ Fragmento do texto: *En otro jardín, que no conozco, dudaría? Se trata de treboles o de otra cosa?.*

³² Fragmento do texto: *Pero ocurre que entre un saber y una práctica hay una distancia nunca enteramente abolida. (De modo que existe siempre una distancia entre a escuela profesional y la profesión: el aprendizaje en el lugar de trabajo, la aculturación profesional, por más que la formación escolar tienda a reducir su papel, no dejan de ser necesarias).*

institucionais e, como tais, esses saberes possuem um papel funcional que dá sentido a essas praxeologias.

Para evidenciar o que queremos dizer, recorreremos a Sierpinska e Lerman (1996), quando tratam da epistemologia da Matemática e da Educação Matemática. Eles citam Fodor (1979), quando afirmam que o conhecimento não é resultado de experiências individuais apontando, por exemplo, que os dados (0, -1), (1, 0) e (2, 1) referem uma infinidade de possibilidades de generalizações, por exemplo, $y = x - 1$; $y = (x - 1)^3$ ou $y = (x - 1)^{2n} \cos 1 (1 - x/2)$ para $n = (1, 2, \dots)$, mas que há uma ordem de preferência na escolha da função do modelo, que torna $y = x - 1$ a escolha óbvia.

Nos parece que a escolha é encaminhada por um saber não matemático pré-construído, pois, segundo esses autores, Fodor (1979) fez o seguinte comentário: "Você pode chamar isso de simplicidade, ou a ordem *a priori* das funções, ou innatismo"³³ (SIERPINSKA; LERMAN, 1996, p. 3, tradução nossa).

Entretanto, sob a compreensão da TAD, o conhecimento sempre é dependente da instituição em que habita e, portanto, está sujeito à cultura das práticas ali institucionalizadas. No caso da instituição Matemática, a escolha da função $y = x - 1$ pode ser óbvia, mas nas instituições não-matemáticas, que mobilizam práticas com o uso de objetos matemáticos, a escolha depende das especificidades das situações em contextos e, portanto, de pré-construídos que habitam e conformam essas situações.

Para a instituição Engenharia Civil, por exemplo, frente a um contexto de movimento de maré, por exemplo, a escolha poderia ser $y = x - \cos[x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2)]$ que atende aos dados (0, -1), (1, 0) e (2, 1) e apresenta comportamento periódico que pode se mostrar adequado, ou factível, para simular o movimento de maré presente na especificidade da situação desse contexto concreto.

Tal compreensão é ratificada também por Fernandes (2015), ao destacar que:

A instituição engenharia atua em campo diverso da matemática, em que uma realidade objetiva, ou potencialmente objetivada, se traduz em função, mas não se confunde com ela, ou seja, a função não está algebricamente definida a espera de ser descoberta pelo Engenheiro, ou mesmo por um matemático. Para tornar claro o que estamos expondo, consideremos os

³³ Fragmento do texto: *El argumento es el siguiente: (0, -1), (1, 0) y (2, 1). Hay infinitas posibilidades de generalizaciones (por ejemplo, $y = x - 1$; $y = (x - 1)^3$ ou $y = (x - 1)^{2n} \cos 1 (1 - x/2)$ para $n = (1, 2, \dots)$). Si el conocimiento fuera un resultado de las experiencias individuales, en principio, todas estas generalizaciones serían equivalentes. Pero hay un orden de preferencia en la elección de la función modelo, que hace de ($y = x - 1$) la elección obvia. Fodor comentó: 'Se puede llamar a esto simplicidad, o el orden a priori de las funciones, o innatismo.*

dados da tabela 01 a seguir, referentes a duas grandezas que se deseja pôr em relação por meio de uma expressão algébrica.

Tabela 01 – Função a partir de pontos conhecidos

X	Y = F(X)
1	2
3	4
5	6

Elaborado pelo autor

A expressão do modelo para tal situação que de imediato podemos estimar seria $F_1(x) = x + 1$, no entanto, nada garante que seja esta, dentre outras, também poderiam ser: $F_2(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 14$ ou $F_3(x) = x + \text{Cos}(x^3 - 9x^2 + 23x - 15)$, pois há uma infinidade de modelos de funções $F_i(t)$ em que $F_i(1) = 2$, $F_i(3) = 4$ e $F_i(5) = 6$ (FERNANDES, 2015, p. 96).

A partir dessas observações, o autor conclui que a elaboração de uma função não se reduz a uma tabela ou um gráfico, por exigir uma representação textual que encaminhe de algum modo à expressão algébrica, que pode ser adequada, ou não, a um problema de interesse da Engenharia.

De outro modo, “isso não se constitui uma tarefa fácil, e daí o interesse da modelação matemática pelas ciências aplicadas e, claro, pela própria Educação Matemática” (FERNANDES, 2015, p. 97). Nesses exemplos, uma OPC encaminha à construção de um modelo matemático que pode ser compreendido como produto de uma OPC.

O processo de modelagem é objeto de interesse da Educação Matemática e de outras instituições que se ocupam com o tratamento de problemas em contextos concretos por meio de objetos matemáticos, por exemplo, o Guia de Otimização de Modelos (BISSCHOP, 2019), especificamente com o uso do Software Avançado de Modelagem Multidimensional Integrada³⁴ (AIMMS).

O AIMMS oferece um ambiente de desenvolvimento, no qual pessoas experientes em MM podem criar aplicações funcionais que podem ser utilizadas por pessoas leigas ou usuários finais, constituindo-se, segundo Bisschop (2019), como uma ferramenta que inclui formas gerais de uso dos modelos matemáticos por meio de ferramentas que permitam a tomada de decisão iterativa para a solução dos problemas.

Nessa perspectiva, Bisschop (2019) destaca que:

O processo de desenvolvimento de um modelo geralmente envolve várias atividades diferentes. Embora essas atividades sejam listadas

³⁴ Corresponde ao termo original *Advanced Integrated Multidimensional Modeling Software (AIMMS)*.

sequencialmente abaixo, várias serão repetidas à medida que novas informações forem disponibilizadas durante a execução de outras etapas, portanto, uma abordagem iterativa será muitas vezes necessária:

Defina o objetivo;
 Consulte literatura e outras pessoas;
 Formule o modelo e colete os dados;
 Teste inicial;
 Validação.

Em um problema complexo, a estrutura e a meta do modelo podem não ser óbvias. Portanto, o primeiro passo deve ser analisar o problema geral conceitualmente e determinar quais aspectos da situação do mundo real deve ser incluído³⁵ (BISSCHOP, 2019, p. 06, tradução nossa).

De qualquer modo, essa compreensão do processo de modelagem apresentado por Bisschop (2019) pode ser traduzida na perspectiva da Educação Matemática, por meio da técnica ou ferramenta estratégica específica, denominada de ciclos de modelagem.

Essa técnica dominante na Educação Matemática como dispositivo é, segundo Blum e Borromeo Ferri (2009), apropriada, e às vezes indispensável, para fins de pesquisa e ensino. Tanto nas pesquisas em nível nacional como internacional, o ciclo de modelagem que independente das perspectivas de MM adotadas, recebeu segundo Perrenet e Zwaneveld (2012) modificações de acordo com a intenção da pesquisa.

Postulamos que a compreensão do processo de modelagem do campo profissional pode ser útil para nossos objetivos e, por isso, convém considerarmos seus elementos explícitos à luz da Educação Matemática, dentre eles, a noção de modelo matemático como apresentamos a seguir.

2.3 Modelo Matemático

A noção de modelo matemático é apresentada de diferentes maneiras na literatura nacional e internacional como uma praxeologia matemática que traduz ou representa, sob certas condições, situações em contextos concretos com propósitos

³⁵ Fragmento do texto: *The process of developing a model usually involves several different activities. Although these activities are listed sequentially below, several will be repeated as new information becomes available during the execution of other steps, thus an iterative approach will often be necessary.*

- *Define the goal.*
- *Consult literature and other people.*
- *Formulate the model, and collect the data.*
- *Initial testing.*
- *Validation.*

In a complex problem, the structure and goal of the model may not be obvious. Therefore, the first step should be to analyze the general problem conceptually and to determine which aspects of the real-world situation must be included.

de estudar um domínio de realidade de modo a responder um dado interesse dessa realidade.

Essa compreensão, por exemplo, pode ser apreendida do seguinte extrato de texto:

O modelo matemático no âmbito da Modelagem Matemática sob a ótica da Educação Matemática constitui uma forma de representar a realidade a partir da investigação. Os modelos são apresentados por uma linguagem matemática que retrata o comportamento de um sistema, permitindo previsões sobre este (SILVA; DESSBESEL; BASNIAK, 2018, p. 287).

No entanto, há apresentações de modelos matemáticos que procuram dar destaque aos aspectos das praxeologias matemáticas produzidas em relação com domínios de realidades, como podemos apreender do seguinte extrato de texto:

Modelo é um conjunto de símbolos os quais interagem entre si representando alguma coisa. Esse conjunto de representação pode se dar por meio de desenho ou imagem, projeto, esquema, gráfico, lei matemática, dentre outras formas (BIEMBENGUT, 2014, p. 201).

Essa compreensão se agrega ao que apresenta Barbosa (2009), por exemplo, ao afirmar que o “modelo matemático como aqueles que empregam símbolos matemáticos, sejam tabelas, gráficos, equações, inequações, ou, em outras palavras, empregam conceitos, notações e/ou procedimentos matemáticos” (BARBOSA, 2009, p. 70-71).

No campo internacional, Blum (2015) e Greefrath e Vorhölter (2016), por exemplo, explicitam compreensões sobre o modelo matemático adotadas na literatura alemã, dentre elas a de Henn e Maaß (2003), que compreendem o modelo matemático como representações simplificadas da realidade, ou ainda de Zais e Grund (1991) que destacam como representação especial do mundo real, permitindo a aplicação de métodos matemáticos.

As compreensões citadas por Greefrath e Vorhölter (2016) se ocupam em destacar o modelo matemático como relação entre um domínio de realidade e uma praxeologia matemática, que Blum (2015) assim resume:

Um *modelo matemático* é deliberadamente uma imagem simplificada e formalizada de alguma parte do mundo real, formalmente falando: a tripla (D, M, f) consistindo de um domínio D do mundo real, um subconjunto M do mundo matemático e um mapeamento de D para M (NISS et al. 2007)³⁶ (BLUM, 2015, p. 77, grifos do autor, tradução nossa).

³⁶ Fragmento do texto: *A mathematical model is a deliberately simplified and formalized image of some part of the real world, formally speaking: a triple (D, M, f) consisting of a domain D of the real world, a subset M of the mathematical world and a mapping from D to M (Niss et al. 2007). Among the purposes of models are not only*

Assumimos aqui uma compreensão de modelo matemático próxima ao apresentado por Greefrath e Vorhölter (2016), especificamente, no sentido de que uma praxeologia matemática não se confunde com um modelo matemático. De outro modo, uma praxeologia matemática somente se torna modelo matemático em relação a um domínio de realidade.

Esse aspecto da praxeologia matemática não se confundir com modelo matemático é congruente com a noção adotada pela TAD, pois esta encaminha o modelo matemático não como cópia de um domínio de realidade, mas como uma construção artificial sobre esse domínio, com fins de obter respostas com eficácia e de modo mais econômico possível a questionamentos sobre esse domínio de realidade.

Essa noção de modelo matemático é depreendida do afirmado por Chevallard (1992) quando assim se expressa:

Um modelo não é, de modo algum, uma *pintura* mais ou menos realista do real. Apresenta-se objetivamente como uma construção, um artefato que, longe de pretender "assemelhar-se" ao real que deve permitir a compreensão e o estudo, constitui uma "*máquina*" para produzir conhecimentos relativos aos objetos do estudo³⁷ (CHEVALLARD, 1992, p. 160, grifos do autor, tradução nossa).

Assim, a compreensão de modelo matemático que adotamos segue a noção apresentada por Chevallard (1992) como uma construção, um artefato como "máquina", cuja funcionalidade é produzir conhecimentos sobre um domínio de realidade, portanto, constitui-se também em ferramenta de aprendizagem (BISSCHOP, 2019).

Em resumo, a noção de modelo matemático, aqui adotada, inclui de modo indispensável uma praxeologia matemática *customizada*³⁸ (BISSCHOP, 2019) sobre um domínio de realidade, isto é, uma situação com matemática em contexto, e, não menos importante, os questionamentos sobre esse domínio de realidade que

describing and explaining ("descriptive models") but also predicting and even creating parts of the real world ("normative models").

³⁷ Fragmento do texto: *Un modele – n'est en rien une peinture, plus ou moins realiste, du réel. Elle se presente objectivement comme une construction, un artefact aqui, loin de prétendre "ressemble" au réel dont ele doit permettre la compréhension et l'étude, constitue une "machine" à produire des connaissances relativement aux objets de l'étude.*

³⁸ O termo customização é inspirado em Bisschop (2019) quando destaca que "uma vez que o objetivo do modelo é acordado, o próximo passo é investigar se um modelo semelhante já foi desenvolvido. Há benefícios para revisar o trabalho dos outros. Pode ajudá-lo a encontrar os dados de que precisa e pode dar-lhe algumas dicas sobre como formular o seu modelo. No entanto, em geral, você pode esperar fazer alguma customização" (BISSCHOP, 2019, p. 6, tradução nossa).

encaminham os propósitos da atividade de MM que definem, de algum modo, a relação entre domínio de realidade e a Praxeologia Matemática Customizada, daqui em diante **PMC**.

Por exemplo, uma **PMC** que pode ser obtida a partir da equação matemática $z = x.y$, quando situada no contexto da física escolar, especificamente, sobre a segunda Lei de Newton: $F = m.a$, as letras são alteradas de modo a dar sentido nesse contexto, mais precisamente, para expressar que a força resultante (F) que atua sobre um corpo é proporcional ao produto da massa (m) pela aceleração (a).

Essa equação matemática pode ser customizada a outras situações em contextos, em particular, para situações de disciplinas escolares, conforme destacamos no Quadro 3.

Quadro 3 – Customização da equação matemática: $z = x.y$

Disciplinas escolares	Relação algébrica: $z = x.y$
Física	<p>a) $f = K.x$, sendo (f a força elástica, K a constante elástica e x a deformação do meio);</p> <p>b) $V = \lambda.f$, sendo (V a velocidade de onda, λ comprimento da onda e f a frequência de onda);</p> <p>c) $V = R.I$, sendo (V a diferença de potencial (ddp), R a resistência elétrica e I a intensidade de corrente elétrica);</p> <p>d) $E = h.f$, sendo (E a energia de um fóton, h a constante de Planck e f a frequência de oscilação).</p>
Química	<p>a) $m_1 = C.V$, sendo (m_1 a massa do soluto, C a concentração comum e V o volume);</p> <p>b) $m_A = n_A.M_A$, sendo (m_A a massa de um gás, n_A o número de mol e M_A a massa molar).</p>
Geografia	<p>$n_d = d.A$, sendo (n_d o número de indivíduos, C a densidade e A a área).</p>
Matemática	<p>a) $A_R = b.h$, sendo (A_R a área de um retângulo, b a medida da base e h a medida da altura);</p> <p>b) $J = t.C$, sendo (J o valor do jûros, t a taxa e C o valor do capital).</p>

Fonte: Elaborado pelo autor (2019)

Nesse sentido, é preciso considerar que a **PMC** é subordinada à cultura das práticas institucionais a que está vinculada. Assim, a relação entre as variáveis envolvidas é dotada de sentidos e significados distintos, tanto no contexto intrainstitucional quanto interinstitucional, pois frente ao tipo de situação

considerada, as mudanças de letras implicam em dotar a expressão de sentido. Nessa perspectiva, uma expressão algébrica matemática, ou em geral, uma tarefa matemática pode ser customizada para diferentes situações em diversos contextos concretos, em sentido multivalente, como alerta Revuz (1971).

Assim, dependendo do tipo de questionamentos sobre o domínio de realidade, encaminham-se os propósitos do modelo matemático, como segue no próximo tópico.

2.3.1 Propósitos dos modelos matemáticos

Na literatura internacional, Greefrath e Vorhölter (2016), por exemplo, apresentam dois principais propósitos e uma taxonomia associada para os modelos matemáticos, quando assim se expressam:

Tarefas com modelos matemáticos descritivos e normativos podem ser bem diferentes. Enquanto os modelos descritivos são usados para descrever e, finalmente, resolver problemas da vida real, os modelos normativos visam criar regras matemáticas como auxiliares na tomada de decisões em determinadas situações³⁹ (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016, p. 10, tradução nossa).

Esses modelos caracterizam-se da seguinte forma:

- 1- Modelos Descritivos, cujos propósitos são descrever e ou explicar;
- 2- Modelos Normativos, cujos propósitos são prever e ou criar realidades.

Os modelos descritivos são desdobrados por Greefrath e Vorhölter (2016) do seguinte modo:

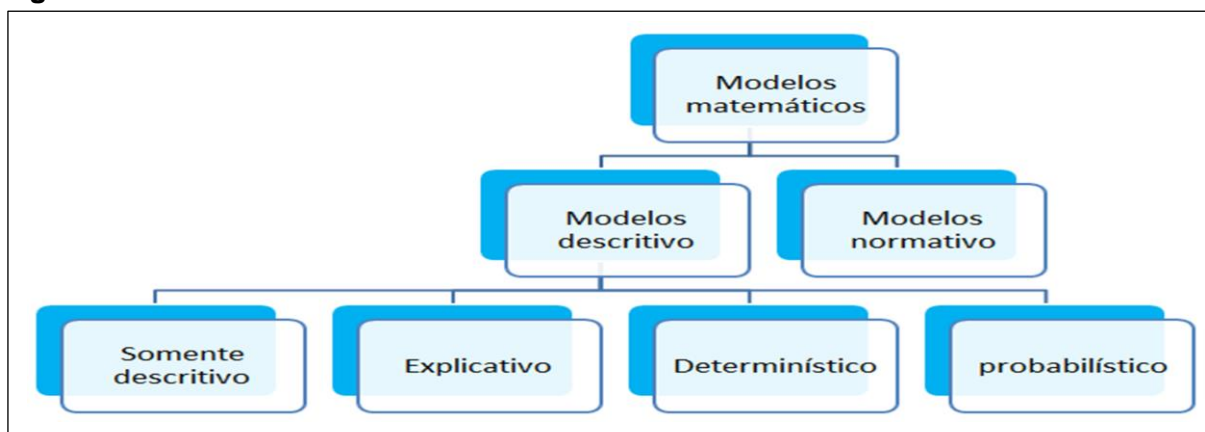
Modelos descritivos visam simular e representar a vida real. Isso pode acontecer de forma descritiva ou até explicativa (WINTER, 1994, 2004). Portanto, um tipo de modelo descritivo não pretende apenas descrever uma parte selecionada da realidade, mas ajudar a entender a coerência interna. Além disso, é possível distinguir entre modelos que visam a compreensão e modelos que preveem um desenvolvimento futuro (BURSCHEID, 1980). Essas previsões podem ser completamente determinadas e, até certo ponto, prováveis. Para resumir, existem modelos descritivos que são apenas de caráter descritivo, outros que têm explicações adicionais para algo (modelos explicativos descritivos) e, finalmente, aqueles que até predizem um desenvolvimento (modelos determinísticos e probabilísticos)⁴⁰ (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016, p. 10, tradução nossa).

³⁹ Fragmento do texto: *Tasks on descriptive and normative mathematical models can be quite different. Whereas descriptive models are used to describe and finally solve real-life problems, normative models aim to create mathematical rules as help in decision making in certain situations.*

⁴⁰ Fragmentos do texto: *Descriptive models aim to simulate and represent real life. This can happen in a descriptive or even explanato way (Winter 1994, 2004). Therefore, one kind of descriptive model does not intend only to describe a selected part of reality but to help understanding the inner coherence. Furthermore, it is possible to distinguish between models aiming for understanding and models predicting a future development (Burscheid 1980). These predictions might be completely determined as well as to some extent probable. To summarise, there are descriptive models that are just descriptive in character, others that have additional*

Em resumo, Greefrath e Vorhölter (2016) desdobram essa taxonomia a respeito dos modelos descritivos e normativos, explicitados na Figura 1.

Figura 1 – Modelos descritivos e normativos



Fonte: Adaptado de Greefrath e Vorhölter (2016, p. 09)

Um exemplo de tipo de modelos descritivos que predizem um desenvolvimento é o modelo utilizado para estimar a população de uma dada região geográfica - município, estado, país etc. – em tempos futuros, por exemplo, o modelo matemático instituído pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística, daqui em diante IBGE (GUERRA; SILVA, 2009).

O IBGE faz estimativas de populações dos municípios brasileiros de uma região para obter cenários de desenvolvimento dessas populações por meio de um modelo que é assim apresentado:

O método de tendência de crescimento demográfico adotado tem como princípio fundamental a subdivisão de uma área maior, cuja estimativa já se conhece, em n áreas menores, de tal forma que seja assegurada ao final das estimativas das áreas menores a reprodução da estimativa, previamente conhecida, da área maior através da soma das estimativas das áreas menores (MADEIRA; SIMÕES, 1972) (IBGE, 2008, p. 21).

De outro modo, tomando uma área maior com população estimada $P(t)$ em um dado momento t , divide-se essa área maior em n áreas menores i com populações $P_i(t)$, de modo que:

$$P(t) = \sum_{i=1}^n P_i(t).$$

explanations for something (explicative descriptive models), and, finally, those that even predict a development (deterministic and probabilistic models).

Os modeladores do IBGE assumem que o crescimento da população de cada município i , $P_i(t)$, depende do crescimento da população da região maior $P(t)$ numa relação “linear” da forma $P_i(t) = a_i P(t) + b_i$ em que a_i é o *coeficiente de proporcionalidade* do incremento da população do município i em relação ao incremento da população da região, e b_i é tomado como um coeficiente de correção.

Esse modelo ignora fatores que podem agir de forma inesperada sobre uma dada população, por exemplo, epidemias ou catástrofes, que podem até dizimar essa população. Portanto, esse modelo considera apenas o estado de crescimento vegetativo sob essas condições e, com isso, pode descrever o comportamento de variação dessa população ao longo do tempo.

Os modelos normativos, segundo Greefrath e Vorhölter (2016), visam criar regras matemáticas como auxiliares na tomada de decisões em determinadas situações do mundo real. Esses modelos, de algum modo, são capazes de criar domínios de realidades por eles controladas com auxílio de regras matemáticas, deixando parecer que o modelo matemático traduz fielmente o que acontece nas situações do mundo concreto.

Para exemplificar modelos normativos recorreremos ao cálculo do valor de uma prestação fixa em um financiamento de um dado bem, que comumente segue a seguinte praxeologia:

$$p = \frac{D \cdot [i \cdot (1 + i)^n]}{(1 + i)^n - 1}$$

Essa praxeologia usual da matemática financeira, que relaciona o valor das prestações p , iguais e fixas, para uma dada taxa de financiamento i e, para um dado valor a ser financiado D , em um certo número de meses n , funciona com objetos matemáticos e auxilia a tomada de decisão sobre o financiamento.

A taxonomia sobre modelos matemáticos descritivos e normativos apresentada por Greefrath e Vorhölter (2016) é de certo modo, seguida no âmbito da TAD, que direciona o foco objetivamente para o tipo de compreensão do domínio de realidade considerado, sem referências objetivas ao propósito do modelo, como podemos depreender do seguinte extrato de texto:

Alguns dos sistemas que podemos querer estudar estão sujeitos a leis objetivas, que não dependem da vontade dos homens. Este é o caso dos

fenômenos físicos e, mais geralmente, dos fenômenos estudados pelas ciências naturais. Por outro lado, certos sistemas, criação da cultura, são explicitamente regulados, às vezes de maneira muito precisa, por convenção social. É o caso das transações financeiras, empréstimos de juros, etc., práticas sociais que são de fato *definidas a priori por um modelo matemático*⁴¹ (CHEVALLARD, 1989a, p. 27, grifos do autor, tradução nossa).

Essa taxonomia do modelo está sujeita ao seu papel funcional para responder a uma dada questão sobre o domínio de realidade, ou seja, a relatividade dos modelos matemáticos nessa taxonomia.

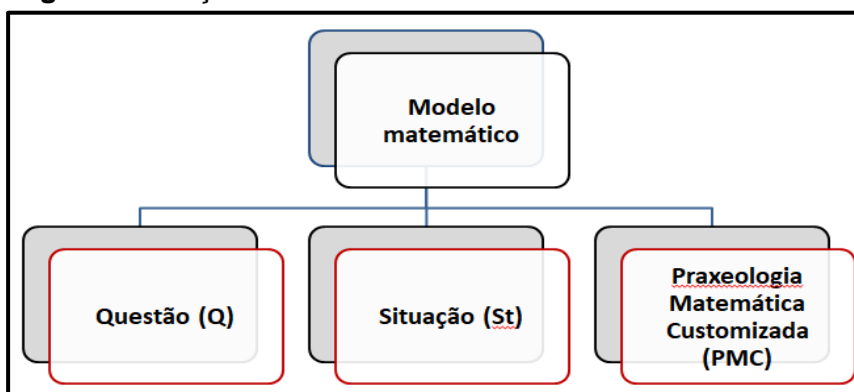
Por exemplo, o modelo matemático para o cálculo populacional, normalmente apresentado como um modelo descritivo, assume o papel de normativo quando é usado para orientar decisões dos municípios e estados brasileiros, para planejar o uso de recursos financeiros da saúde, educação, por exemplo, por meio dos Fundos de Participação Municipal e Estadual, ou simplesmente FPM e FPE, respectivamente, que dependem diretamente do cálculo da população realizado pelo IBGE.

De qualquer modo, independente da taxionomia, os modelos matemáticos podem ser interpretados como uma resposta encaminhada por uma OPC. Portanto, aqui compreendemos um modelo matemático constituído de:

- 1 – Propósitos: entendidos como questionamentos (Q) sobre um dado domínio de realidade;
- 2 – Situações com matemática, entendidas como abstrações matematizáveis de aspectos do domínio de realidade, e:
- 3 – Uma Praxeologia Matemática Customizada (PMC), entendida como uma praxeologia da matemática escolar expressa em termos das grandezas e/ou aspectos do domínio de realidade em estudo. A PMC pode ser constituída apenas de tarefa (T) e técnica (τ) a ela relacionadas.

Em nosso entendimento os modelos matemáticos podem ser expressos por meio da tríade da Figura 2.

⁴¹ Fragmento do texto: *Certains des systèmes que l'on peut vouloir étudier sont soumis à des lois objectives, qui ne dépendent pas de la volonté des hommes. C'est le cas des phénomènes physiques et, plus généralement, des phénomènes qu'étudient les sciences de la nature. En revanche, certains systèmes, création de la culture, sont explicitement réglés, de manière parfois fort précise, par convention sociale. C'est le cas des transactions financières, du prêt à intérêt, etc., pratiques sociales qui sont en fait définies a priori par un modèle mathématique.*

Figura 2 – Noção de modelo matemático

Fonte: Elaborada pelo autor (2019)

O processo de MM se dedica a encontrar uma tríade possível que permita o estudo de um domínio de realidade, dotado de sentido prático que o valorize como necessária para um meio institucional. No entanto, a tarefa de encontrar tal tríade, denominada de ciclo de MM, não tem se mostrado simples e constitui objeto de estudo deste trabalho.

2.4 Processo de Modelagem Matemática como organização praxeológica complexa

A ideia de processo de modelagem na literatura da Educação Matemática se encontra segundo Borromeo Ferri (2006), sob os diferentes ciclos de modelagem apresentados, que variam conforme as abordagens e os objetivos de como a MM é compreendida e, em alguns casos, se tarefas complexas ou não são utilizadas (BORROMEIO FERRI, 2006).

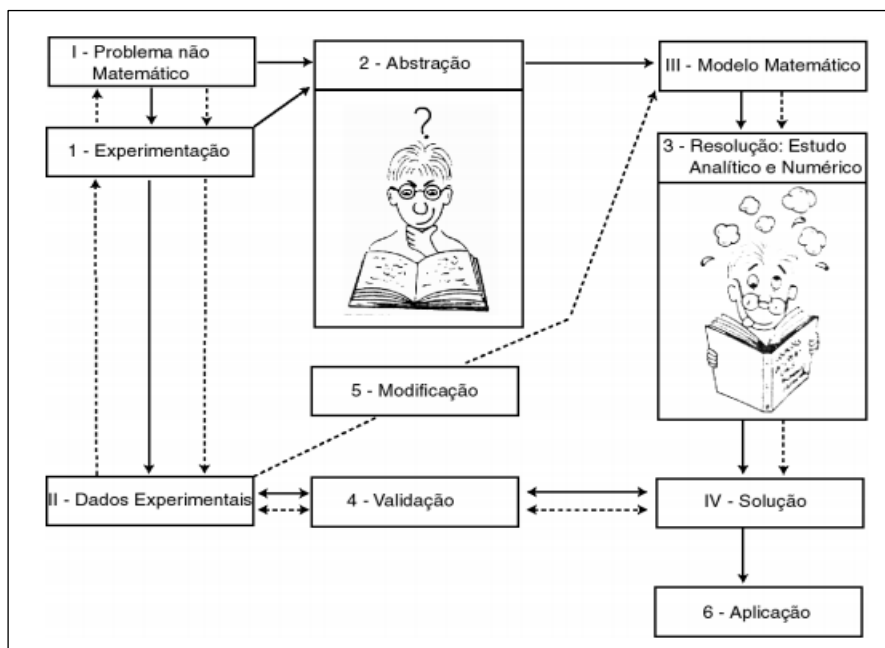
Essa ideia do processo de modelagem ligada à noção de ciclo, e este, à ideia de uma atividade dinâmica, é expressa no seguinte extrato de texto:

Os ciclos são esquemas que pretendem indicar o caminho que modeladores podem percorrer para desenvolver uma atividade de modelagem matemática, explicitando as etapas associadas a esse desenvolvimento. A ideia de ciclo pretende indicar o aspecto dinâmico da atividade de modelagem de modo que, etapas anteriores podem ser retomadas sempre que isto for adequado (ALMEIDA; ZANIN, 2016, p. 762).

A dinâmica do ciclo de modelagem seria caracterizada por retrabalhar tarefas antes executadas e julgadas, de algum modo, como ainda insuficientes para a obtenção de um modelo matemático, capaz de dar resposta a questionamento sobre a realidade considerada. É essa ideia de atividade dinâmica que nos encaminhou inicialmente à noção de OPC, como mostraremos a seguir.

Almeida e Silva (2015) afirmam que um dos esquemas mais mencionados como referência ao ciclo de modelagem na literatura brasileira é o apresentado por Bassanezi (2002), conforme a Figura 3.

Figura 3 – Ciclo de modelagem apresentado por Bassanezi



Fonte: Bassanezi (2002, p. 27)

Em nosso entendimento, esse esquema é suficientemente confuso para iniciantes em atividades de MM considerando as suas componentes e conexões entre elas, além de direcionar para modelos descritivos, ou seja, com objetivo de descrever, explicar ou prever um desenvolvimento.

Essas compreensões são apreendidas, primeiro pela afirmação de que a MM eficiente permite fazer previsões, tomar decisões, explicar e entender, enfim participar do mundo real com capacidade de influenciar em suas mudanças (BASSANEZI, 2002, p. 31).

Segundo, a conexão (1), denominada por Bassanezi (2002) de experimentação, pode ser tomada como essencialmente realizada em laboratório segundo métodos experimentais adequados à natureza do experimento e objetivo da pesquisa. Isso caracteriza o ciclo como um método de investigação e não necessariamente como atividade de ensino e aprendizagem da escola básica.

E terceiro, a afirmação de Bassanezi (2002) que a participação de um matemático na fase de experimentação pode ser fundamental, para facilitar a

matematização do problema real, pressupõe que o experimento é realizado por não-matemáticos e, como tal, dependeria dos matemáticos como influenciadores da experimentação de modo a ajustá-lo a um tipo modelo matemático conhecido por eles, já que assim conclui: facilitaria, posteriormente, o cálculo dos parâmetros envolvidos nos modelos matemáticos (BASSANEZI, 2002, p. 27).

Nos parece que a compreensão de Bassanezi (2002) sobre MM é a de aplicação da Matemática em problemas do mundo real, no sentido de podermos pensar que uma mesma praxeologia matemática adquire diferentes *formas de vida* (WITTGENSTEIN, 1999) em diferentes instituições não-matemáticas. Esse entendimento impõe uma rígida separação entre as praxeologias matemáticas e as praxeologias não-matemáticas, eliminando todo e qualquer vestígio de existência das praxeologias com Matemática em que se insere a noção da OPC.

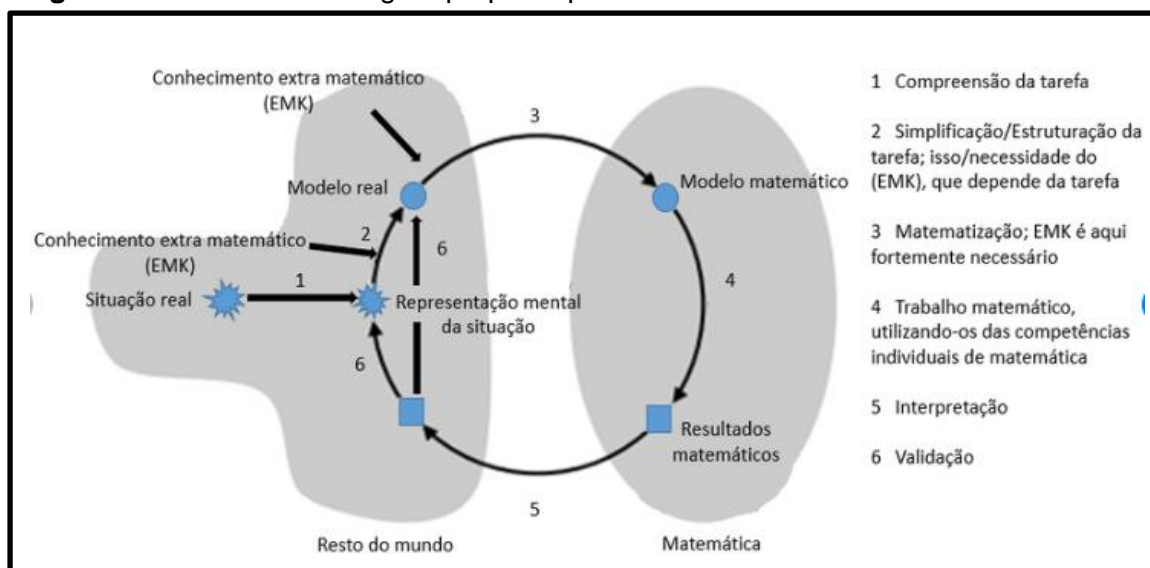
Almeida e Silva (2015) citam pelo menos dois trabalhos em nível internacional, em que o foco de interesse é o ciclo de MM, especificamente:

No primeiro, 'The Many Faces of the Mathematical Modeling Cycle' (As várias faces do ciclo da Modelagem Matemática) Perrenet e Zwaneveld (2012) fazem uma discussão sobre os elementos que diferentes ciclos apresentam pontuando, principalmente, que esses elementos podem ter relação com os interesses do modelador em cada atividade, sendo ela associada ao ensino ao à resolução de um problema. No segundo, 'Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process' (Diferenciações teóricas e empíricas das fases no processo de modelagem) Ferri (2006) passa a discutir e considerar relevantes aspectos cognitivos dos estudantes durante o desenvolvimento de atividades de modelagem, passando a integrá-los em um ciclo proposto pela autora (ALMEIDA; SILVA, 2015, p. 212).

Desse extrato depreendemos que Perrenet e Zwaneveld (2012) se ocupam do estudo dos ciclos na perspectiva do ensino, enquanto Borromeo Ferri (2006) o faz na perspectiva da aprendizagem.

Sobre a perspectiva da aprendizagem, Borromeo Ferri (2006) encaminha o ciclo de modelagem sob uma compreensão psicológica cognitiva, elaborado a partir de diferentes ciclos de modelagem, sendo a maioria das abordagens desses ciclos pertencentes aos países de língua alemã e anglo-saxônica. A discussão é feita com atenção às distinções nas várias fases do ciclo de modelagem. O ciclo proposto por Borromeo Ferri (2006), conforme a Figura 4, busca dentre outras finalidades, contrastes com os outros ciclos de países de língua alemã e anglo-saxônica.

Figura 4 – Ciclo de modelagem proposto por Borroumeu Ferri



Fonte: Adaptado de Borroumeu Ferri (2006, p. 92)

Sobre esse ciclo de modelagem, Borroumeu Ferri (2006) destaca que:

Na *transição* da representação mental da situação - RMS - para o modelo real, ocorre uma idealização e simplificação do problema. Isso ocorre porque durante a RMS o indivíduo toma decisões, que influenciam a maneira de “filtrar” as informações do problema. Dependendo do tipo de problema que é dado, surge à questão ou a demanda por conhecimentos extra-matemáticos⁴² (BORRAMEO FERRI, 2006, p. 92, grifos da autora, tradução nossa).

A autora chama atenção que, dependendo do tipo de problema, surge a necessidade de conhecimentos extramatemáticos relativos ao contexto a que se refere o tipo de problema. Esses conhecimentos parecem mais exigidos na transição do modelo real para o modelo matemático, quando assim expressa Borroumeu Ferri (2006):

A transição do modelo real para um modelo matemático se faz como segue: o indivíduo progride na matematização; além disso, o conhecimento extra-matemático (que depende de cada atividade de modelagem) é fortemente exigido dos indivíduos e usado para construir um modelo matemático⁴³ (BORRAMEO FERRI, 2006, p. 92, tradução nossa).

⁴² Fragmento do texto: *Within the transition process from MRS to real model an idealisation and simplification of the problem takes place, which is more aware for the individual. This is because during the MRS the individual makes decisions, which influences the way of “filtering” the information in the problem. Depending what kind of problem is given, the question or the demand for extra-mathematical knowledge comes up.*

⁴³ Fragmento do texto: *The transition from real model to mathematical model is characterized as follows: the individual progress in mathematizing; moreover the extramathematical knowledge (depends on the task) is strongly demanded by the individuals and used to build a mathematical model.*

De outro modo, os conhecimentos extramatemáticos destacados por Borromeo Ferri (2006) são indispensáveis aos sujeitos para construir um modelo matemático, o que encaminha nesse sentido, que os modelos são praxeologias híbridas, constituídos por conhecimentos matemáticos e não-matemáticos.

Borromeo Ferri (2006) aponta em linhas gerais, que o modo como o problema é estruturado pelos alunos pode influenciar a distinção entre as fases do ciclo do processo de modelagem e, de maneira pragmática, distingue dois tipos de problemas estruturados:

- 1 - Problemas de modelagem que contêm mais informações em relação a números dados na tarefa e números, que precisam ser adicionados por meio de conhecimentos extra-matemáticos;
- 2 - Problemas de modelagem, que têm menos números dados, mas o conhecimento matemático interno está disponível em um nível implícito e deve ser reconhecido e usado para solução⁴⁴ (BORROMEIO FERRI, 2006, p. 92, tradução nossa).

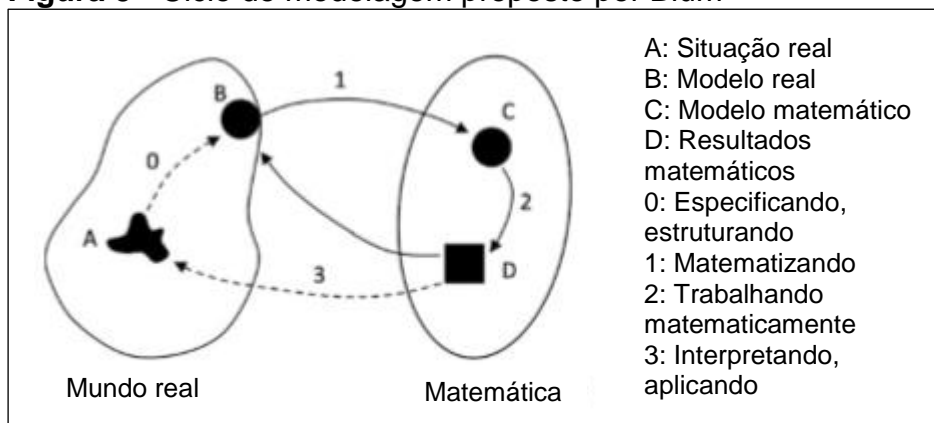
Na análise dos dados a partir desses dois problemas, Borromeo Ferri (2006) destaca que em relação aos problemas da categoria 1 comparados aos da categoria 2, a distinção entre modelo real e modelo matemático, foi difícil, por demandar, dentre outras razões, muitos cálculos a serem realizados.

Por outro lado, pela análise dos processos de modelagem dos alunos que resolveram o problema da categoria 2, ficou mais fácil distinguir as fases do ciclo, em razão, segundo a autora, por não ter muitos dados numéricos e, portanto, encaminhado como um tipo de problema mais aberto, embora ressalte que todos os problemas fossem complexos (BORROMEIO FERRI, 2006).

Em última análise, os ciclos de modelagem apresentados por Perrenet e Zwaneveld (2012) e Borromeo Ferri (2006) derivam de algum modo, das contribuições de Blum (1985), que de acordo com Greefrath e Vorhölter (2016), foram utilizados pela primeira vez para expressar o processo de modelagem, especificamente, a partir do esquema da Figura 5.

⁴⁴ Fragmento do texto:

1. Modelling problems which contain more information in connection with given numbers in the task and numbers, which have to be adding through extra-mathematical knowledge;
2. Modelling problems, which have less numbers given, but inner-mathematical knowledge is available on an implicit level and must be recognized and used for solving.

Figura 5 - Ciclo de modelagem proposto por Blum

Fonte: Adaptado de Blum e Kirsch (1989, p. 134 *apud* GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016, p. 7)

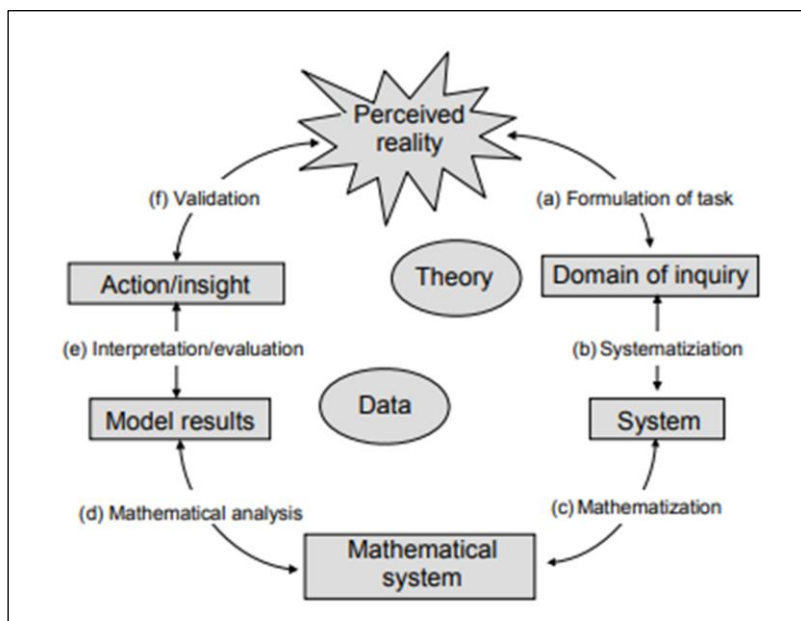
Segundo Greefrath e Vorhölter (2016), essa figura é a ilustração mais conhecida do ciclo de modelagem na Alemanha e, por sua vez, revela a importância do debate sobre a aplicação de objetos matemáticos para traduzir problemas em contextos do mundo real por meio do processo de modelagem.

Embora Perrenet e Zwaneveld (2012) destaquem o uso do ciclo de modelagem na literatura internacional, essa compreensão é também ratificada por Greefrath e Vorhölter (2016, p. 10, tradução nossa), quando afirmam que “todo o processo de modelagem é frequentemente representado como um ciclo”⁴⁵.

Sobre o processo de MM, Blomhøj e Jensen (2003; 2007) apresentam o ciclo como um modelo desse processo descrito por meio de seis subprocessos, conforme a Figura 6.

⁴⁵ Fragmento do texto: *The entire modelling process is often represented as a cycle.*

Figura 6 - Modelo do processo de modelagem por Blomhøj e Jensen



Fonte: Blomhøj e Jensen (2007, p. 48), adaptado de BLOMHØJ; JENSEN (2003)

O modelo do processo de modelagem, segundo Blomhøj e Jensen (2007), tem inspiração em outros modelos de ciclos encontrados na literatura, especificamente, da Educação Matemática. Essa compreensão dos autores busca, dentre outros objetivos, descrever a criação e o uso de um modelo matemático via subprocessos, que podem ser compreendidos por meio de tarefas do ciclo de modelagem, como encaminha o extrato de texto:

- (a) Formulação de uma tarefa (mais ou menos explícita) que orienta você a identificar as características da realidade percebida que deve ser modelada.
- (b) Seleção dos objetos relevantes, relações, etc. do domínio de pesquisa resultante, e idealização destes para tornar possível uma representação matemática.
- (c) Tradução desses objetos e relações de seu modo inicial de aparência para a matemática.
- (d) Uso de métodos matemáticos para alcançar resultados e conclusões matemáticos.
- (e) Interpretação destes como resultados e conclusões sobre o domínio de iniciação da investigação.
- (f) Avaliação da validade do modelo por comparação com dados observados ou previstos ou com conhecimento baseado teoricamente⁴⁶ (BLOMHØJ; JENSEN, 2003, p. 125, tradução nossa).

⁴⁶ Fragmento do texto:

- (a) *Formulation of a task (more or less explicit) that guides you to identify the characteristics of the perceived reality that is to be modelled.*
- (b) *Selection of the relevant objects, relations etc. from the resulting domain of inquiry, and idealisation of these in order to make possible a mathematical representation.*
- (c) *Translation of these objects and relations from their initial mode of appearance to mathematics.*
- (d) *Use of mathematical methods to achieve mathematical results and conclusions.*

Para Blomhøj e Jensen (2003), quando o ciclo é tomado em sua totalidade, à abordagem é dita holística, e quando o foco da abordagem é centrado apenas na conexão de subprocessos, essa abordagem é denominada atomística.

As abordagens holísticas, ou atomísticas, não dependem diretamente do propósito do processo de modelagem enquanto método de modelar problemas, mas da intencionalidade do ensino ou da pesquisa. O propósito desse processo deve considerar seu uso, pois nem sempre é possível descrever o mundo real com uso da Matemática. Esse propósito pode ser de agir sobre o mundo, como destaca Niss (2015), fazendo a distinção entre os objetivos da MM em termos de MM descritiva e prescritiva ou dita normativa.

Niss (2015, p. 69) afirma que o “objetivo final é preparar o caminho para a tomada de ações com base em decisões resultantes de certo tipo de considerações matemáticas”. A MM prescritiva é encontrada, por exemplo, na política e nas finanças, bem como na avaliação educacional. Tais modelos muitas vezes não podem ser validados empiricamente e a decisão de usá-los precisa ser baseada em uma discussão de questões críticas (NISS, 2015).

Blomhøj e Jensen (2003) afirmam que:

Por definição, a modelagem matemática inclui os processos (a) - (f) [...] e, portanto, os alunos devem ter a oportunidade de trabalhar com todos esses processos. Se os alunos sempre trabalham com problemas pré-estruturados, eles não podem desenvolver competências na estruturação de um domínio complexo de investigação.

Na outra posição extrema - a abordagem atomística - o argumento poderia ser que um curso destinado a desenvolver a competência de modelagem matemática dos alunos deve estar concentrado nos processos de matematização e análise de modelos matematicamente. Para apoiar esta posição, pode-se apontar o fato de que as atividades conectadas para esses elementos do processo de modelagem matemática podem ser vistos como uma forma de aprender matemática. Através dessas atividades, os conceitos matemáticos em jogo ganham novos significados para os estudantes⁴⁷ (BLOMHØJ; JENSEN, 2003, p. 128-129, tradução nossa).

(e) *Interpretation of these as results and conclusions regarding the initiating domain of inquiry.*

(f) *Evaluation of the validity of the model by comparison with observed or predicted data or with theoretically based knowledge.*

⁴⁷ Fragmento do texto: *By definition mathematical modelling includes the processes (a)–(f) [...] and therefore the students must have the opportunity to work with all these processes. [...] If the students always work with pre-structured problems, they cannot be expected to develop competences in structuring a complex domain of enquiry.*

At the other extreme position – the atomistic approach – the argument could be that a course aimed at developing students’ mathematical modelling competence must be concentrated on the processes of mathematising and analysing models mathematically. To support this position, one can point to the fact that activities connected to these elements of the mathematical modelling process can be seen as a way of learning mathematics. Through such activities the mathematical concepts in play gain new meaning for the students.

Nessa perspectiva, os subprocessos de modelagem (BLOMHØJ; JENSEN, 2003; 2007) também são encaminhados como subcompetências a serem desenvolvidas em MM, e, como tal, essa noção é depreendida de algum modo em outros autores, por exemplo, Bassanezi (2002), Blum (2015) e Greefrath e Vorhölter (2016), que utilizam o ciclo de modelagem como ferramenta tanto para pesquisa quanto para o ensino, quando do enfrentamento de problemas em contextos concretos.

Nesse sentido, a noção de competências em modelagem é apresentada do seguinte modo:

Por competência de modelagem matemática, entendemos ser a capacidade de realizar, de forma autônoma e perspicaz, todos os aspectos de um processo de modelagem matemática em um determinado contexto⁴⁸ (BLOMHØJ; JENSEN, 2003, p. 126, tradução nossa).

A abordagem de subprocessos de modelagem entendidos por Blum (2015) e Greefrath e Vorhölter (2016), como diferentes subcompetências, com diferentes níveis de detalhes e ênfases, são encaminhados como capacidades necessárias para o desenvolvimento da competência de modelagem (BLOMHØJ; JENSEN, 2003, 2007; MAAß, 2006; KAISER, 2007; TURNER *et al.*, 2013).

Para maior clareza sobre a compreensão de subcompetências em modelagem, Greefrath e Vorhölter (2016), apoiados em Greefrath *et al.* (2013, p. 19), as caracterizam conforme o Quadro 4.

⁴⁸ Fragmento do texto: *By mathematical modelling competence we mean being able to autonomously and insightfully carry through all aspects of a mathematical modelling process in a certain context.*

Quadro 4 – Subcompetências de modelagem matemática

Subcompetências	Indicador
Construir	Os alunos constroem seu próprio modelo mental a partir de um determinado problema e, assim, formulam uma compreensão de seu problema;
Simplificar	Os alunos identificam informações relevantes e irrelevantes de um problema real
Matematizar	Os alunos traduzem situações reais simplificadas em modelos matemáticos (por exemplo, termos, equações, figuras, diagramas e funções)
Interpretar	Os alunos relacionam os resultados obtidos da manipulação dentro do modelo com a situação real e, assim, obtêm resultados reais
Validar	Os alunos julgam os resultados reais obtidos em termos de plausibilidade
Expor	Os alunos relacionam os resultados obtidos no modelo situacional com a situação real e, assim, obtêm uma resposta para o problema.

Fonte: Adaptado de Greefrath e Vorhölter (2016, p. 19)

Em sentido amplo, a competência de modelagem, segundo Blum (2015), é apresentada por meio de capacidades, quando assim se expressa:

Competência de modelagem em um sentido abrangente significa a capacidade de construir, usar ou aplicar modelos matemáticos, executando as etapas apropriadas, bem como analisar ou comparar determinados modelos⁴⁹ (BLUM, 2015, p.77-78, grifos do autor, tradução nossa).

O extrato de texto revela que a competência de modelagem exige capacidades de construir, usar, aplicar modelos matemáticos, que de algum modo, se aproximam dos propósitos dos gestos aqui assumidos, como gestos genuínos da atividade de MM escolar. Além disso, incluem segundo Blum (2015), a análise e a comparação de modelos, sem explicitar, entretanto, sob que condições, ou critérios, determinados modelos matemáticos seriam analisados ou comparados.

Em última análise:

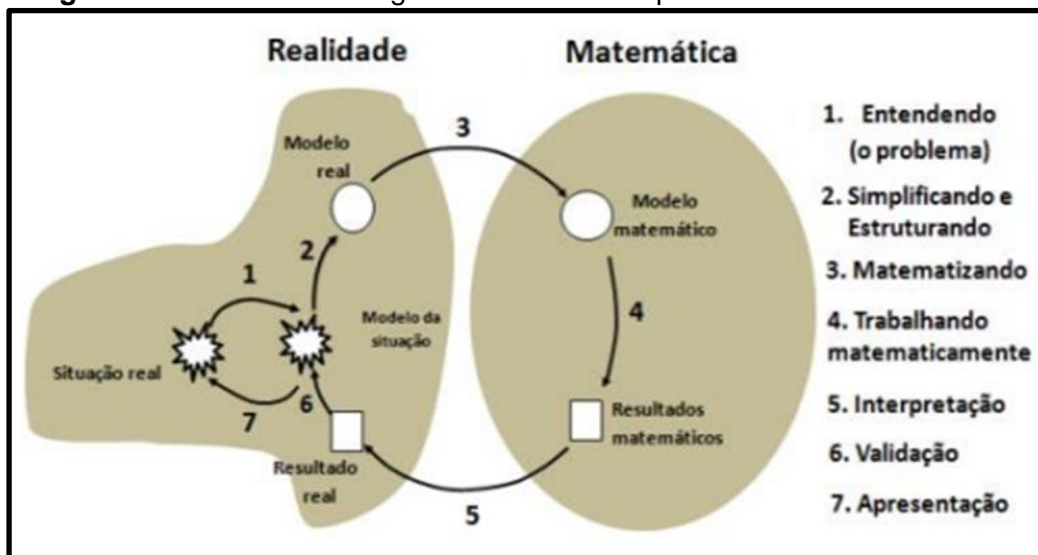
A maioria das pesquisas educacionais realizadas no domínio de “modelagem e aplicações” coincide no uso do “ciclo de modelagem” na descrição dos processos de modelagem, com poucas variações. No máximo, há alguns questionamentos sobre os processos cognitivos ativados em cada etapa do ciclo de modelagem ou na transição entre diferentes etapas⁵⁰ (GARCIA et al. 2006, p. 231, tradução nossa).

⁴⁹ Fragmento do texto: *In the language of competencies according to Niss and colleagues (see Niss 2003), the ability to carry out those steps corresponds to certain competencies or sub-competencies such as understanding a given real world situation or interpreting mathematical results in relation to a situation (Blomhøj and Jensen 2007; Maaß 2006; Kaiser 2007; Turner et al. 2013). Cognitively speaking, an individual’s competency is his/her ability to carry out certain actions in a well-aimed way. Modelling competency in a comprehensive sense means the ability to construct and to use or apply mathematical models by carrying out appropriate steps as well as to analyse or to compare given models.*

⁵⁰ Fragmento do texto: *Most of the educational research carried out in the domain of “modelling and applications” coincides in using the “modelling cycle” in the description of the modelling processes, with very few variations. At*

Essa compreensão levou a uma versão enriquecida do ciclo de modelagem como destacam Blum e Leiß (2005), por meio da Figura 7.

Figura 7 – Ciclo de modelagem matemática ampliado de Blum e Leiß



Fonte: Adaptado de Blum e Leiß (2005)

Sobre esse processo de modelagem Greefrath e Vorhölter (2016) afirmam que:

O modelo original de Blum de 1985 foi estendido pela adição de um modelo de situação, que mostrou mais detalhes ao considerar como um modelo matemático é gerado. O papel do indivíduo que criou o modelo também foi descrito de maneira mais detalhada. O modelo de situação delineou a representação mental da situação do indivíduo⁵¹ (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016, p. 13, tradução nossa).

Essa compreensão busca maior clareza do papel estratégico do *modelo de situação* presente no ciclo de modelagem para revelar maior detalhamento a serem considerado na construção de um modelo matemático, ausente segundo Greefrath e Vorhölter (2016), nas contribuições de Blum (1985), por exemplo.

Embora existam diversos modelos do processo de MM em diferentes perspectivas dessa atividade, Blum e Borromeo Ferri (2009) destacam vantagens para fins de pesquisa, especificamente, do último modelo proposto por Blum e Leiß (2005), apresentado na Figura 7, quando afirmam que:

the most, there is some questioning of the cognitive processes activated in each step of the modelling cycle or in the transition between different steps.

⁵¹ Fragmento do texto: *Blum's original model from 1985 was extended by the addition of a situation model, which showed more detail in considering how a mathematical model is generated. The role of the individual creating the model was also described in a more detailed way. The situation model outlined the individual's mental representation of the situation.*

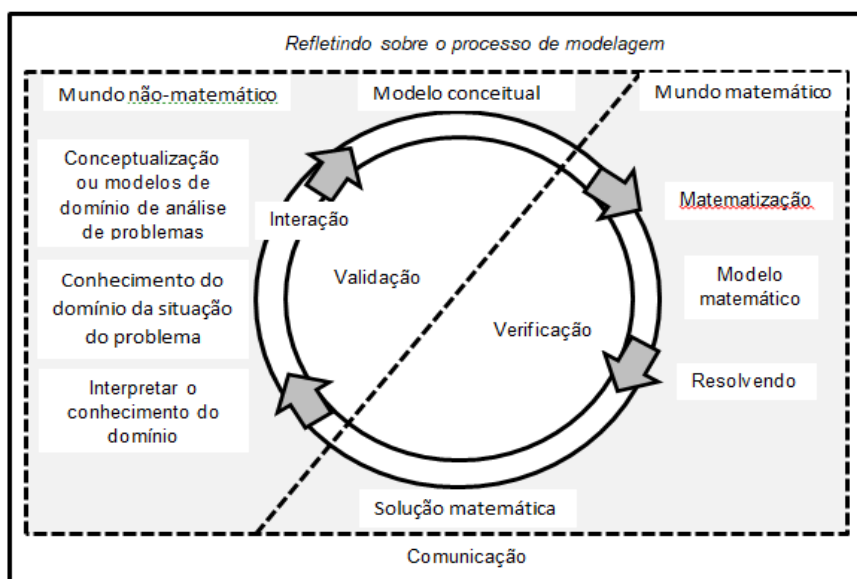
O passo 1 é separado, este é um processo de construção particularmente individual e a primeira barreira cognitiva para estudantes ao resolver tarefas de modelagem (ver, por exemplo, KINTSCH; GREENO 1985, DECORTE; GREER; VERSCHAFFEL, 2000, STAUB; REUSSER, 1995).

Todas essas etapas são potenciais barreiras cognitivas para os estágios dos alunos, bem como essenciais em processos reais de modelagem, embora geralmente não em uma ordem linear (BORROMEO FERRI, 2007, LEIß, 2007, MATOS; CARREIRA, 1997); veja nossa documentação de “rotas de modelagem” específicas em parte deste documento⁵² (BLUM; BORROMEO FERRI, 2009, p. 47, tradução nossa).

Os ciclos de modelagem até então apresentados são dispositivos usados pelos pesquisadores em MM, que exploram seus componentes e as conexões entre esses componentes, ditos subprocessos (BLOMHOJ; JENSEN, 2003, 2007). As taxonomias sobre o uso do ciclo também podem ser encontradas no ensino de MM nas escolas básicas e superiores, embora em sala de aula a escolha de uso nem sempre seja planejada, e sim, decorrente da ação didática espontânea do professor para atender sua intencionalidade de ensino.

Na perspectiva do ensino Perrenet e Zwaneveld (2012) propõem um ciclo de MM, conforme a Figura 8, de modo a considerar aspectos não encontrados nos ciclos de MM investigados por esses autores.

Figura 8 - Ciclo de modelagem proposto por Perrenet e Zwaneveld



Fonte: Adaptado de Perrenet e Zwaneveld (2012, p. 18)

⁵² Fragmento do texto:

- Step 1 is separated this is a particularly individual construction process and the first cognitive barrier for students' when solving modelling tasks (see, e.g., Kintsch/Greeno 1985, DeCorte/Greer/Verschaffel 2000, Staub/Reusser 1995)
- All these steps are potential cognitive barriers for students' as well as essential stages in actual modelling processes, though generally not in a linear order (Borromeo Ferri 2007, Leiß 2007, Matos/Carreira 1997); see our documentation of specific "modelling routes" in part of this paper.

O propósito desses autores foi buscar responder à seguinte questão: “que aspectos do ciclo de modelagem devem estar presentes no ensino de modelagem?”⁵³ (PERRENET; ZWANEVELD, 2012, p. 17, grifos dos autores, tradução nossa) a partir de dados de alunos e professores, pressupondo a existência de uma diversidade de aspectos na explicitação do ciclo de MM, desde as mais simples até as mais complexas, de modo a orientar suas atividades.

A resposta desses autores sobre esse questionamento foi a proposição do ciclo de MM, conforme a Figura 8, ao sistematizarem a agregação de aspectos por eles denominados de extras: (a) Análise do problema; (b) Mundos, modelos e conhecimentos; (c) Verificação; (d) Validação; (e) Comunicação; (f) Iteração e (g) Reflexão, além de considerarem a situação-problema, matematização, modelo matemático, resolução, solução matemática e interpretação.

A interação dinâmica desses aspectos considerados pelo ciclo de MM proposto por Perrenet e Zwaneveld (2012), encaminha de algum modo, parte da complexidade do processo de MM, ao transitar do mundo não-matemático para o mundo matemático e, vice-versa, deixando parecer talvez, por pressuposição, que é possível resolver problemas do mundo não-matemático por meio da aplicação de conhecimentos matemáticos, ratificando de algum modo, a predominância da pedagogia aplicacionista dominante sobre a MM (BARQUERO; BOSCH; ROMO, 2018).

A descrição dos processos de MM até então apresentados em diferentes perspectivas, coincidem por pressuposição, no uso dominante do ciclo de modelagem, deixando parecer que todo processo de MM é reduzido a um ciclo constituído por diferentes etapas e conexões entre si.

Em geral, segundo Garcia *et al.* (2006), poucas variações são destacadas de um ciclo de MM para outro e, no máximo há alguns questionamentos sobre os processos cognitivos ativados em cada subprocesso ou nas conexões entre esses subprocessos, que de alguma maneira, permitiram o enriquecimento do ciclo. Entranto, nos processos de MM até então esboçados, um ponto parece continuar intocável sobre o ciclo: a complexidade que se faz sentir pela magificação que transforma um problema não matemático em um problema matematizável e, vice-versa.

⁵³ Fragmento do texto: *what aspects of the modeling cycle should be present in teaching modeling?*

Embora se reconheça que importantes avanços foram alcançados com a MM escolar, alguns pesquisadores manifestam clareza sobre esses resultados estarem distantes do desejado, como parece alertar Blum (2002) e Blum e Borromeo Ferri (2009), por exemplo. Reiteramos, entretanto, que nosso propósito parafraseando Garcia *et al.* (2006), não é de criticar o ciclo de MM, mas situá-lo sob um arcabouço teórico da TAD.

Em última análise, essa complexidade de “transformar” um problema não matemático em um problema matematizável, como que por um passo de mágica, que se faz sentir, inclusive, no ciclo apresentado por Perrenet e Zwaneveld (2012), parece ratificar de algum modo, as etapas do ciclo de MM e, suas interconexões, propostas pelo Relatório Nacional do Pisa (BRASIL, 2012) para o ensino no Brasil que problematizaremos à luz da TAD, no próximo capítulo.

CAPÍTULO 3 - PROBLEMATIZAÇÃO DO CICLO DE MODELAGEM MATEMÁTICA À LUZ DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Neste capítulo apresentamos o ciclo de MM proposto pelo Relatório Nacional da OCDE/Pisa (BRASIL, 2012) para o ensino de praxeologias matemáticas escolares, buscando problematizar as etapas que compõem esse ciclo à luz de recursos teóricos da TAD.

3.1 Ciclo de modelagem proposto para o ensino

No ensino da Matemática escolar com modelagem, inclusive no Brasil, o uso do ciclo de MM (BORROMEIO FERRI, 2006; BLUM; BORROMEIO FERRI, 2009; PERRENET; ZWANEVELD, 2012, GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016) é tradicionalmente assumido como ferramenta didática dominante, como pressupõem Blum e Borromeo Ferri (2009) ao destacarem que a MM pode ser ensinada e aprendida.

Nesse sentido, Blum e Borromeo Ferri (2009) buscam a clareza de um modo apropriado para a concretização dessa ação em sala de aula, especificamente, ao questionarem: “Como a modelagem pode ser ensinada apropriadamente?”⁵⁴ (BLUM; BORROMEIO FERRI, 2009, p. 54, tradução nossa).

Essa problemática se insere no problema mais amplo de interesse da Didática da Matemática, em particular, na linha da TAD, formulado como um dos problemas da profissão docente em MM, sobre o que ensinar de MM e como ensinar, e, como tal, é um problema também reconhecido na linha cognitivista, quando Blum (2011) (apud SCHUKAJLOW, KAISER; STILLMAN, 2018, p. 11) questiona: “como podemos ensinar modelagem?”⁵⁵.

Entretanto, é preciso considerar que esses questionamentos pressupõem, dentre outros aspectos, a clareza da existência de dificuldades que são reveladas por alunos e professores, que podem, até mesmo, impedir o uso da modelagem em sala de aula, como destacam Barquero, Bosch e Romo (2018), por meio do seguinte extrato de texto:

⁵⁴ Fragmento do texto: *How can modelling be appropriately taught?*

⁵⁵ Fragmento do texto: *How can we teach modelling?*

Alguns projetos de pesquisa destacaram a existência de fortes restrições que impingem em *grande escala a disseminação* da matemática como uma atividade de modelagem nos atuais sistemas educacionais em todos os níveis escolares (Burkhardt 2006; Galbraith 2007). Portanto, como sublinham Greefrath e Vorhölter (2016, p. 28), os professores não precisam apenas ser convencidos e treinados no uso de modelagem matemática, eles também têm que superar inúmeros obstáculos⁵⁶ (BARQUERO; BOSCH; ROMO, 2018, p. 32, grifos dos autores, tradução nossa).

Blum e Borromeo Ferri (2009) parecem ratificar, de certo modo, o encaminhamento de Barquero, Bosch e Romo (2018) sobre a existência de dificuldades com a difusão da atividade de MM em sala de aula, especificamente, quando afirmam que:

Na prática em sala de aula em todo o mundo, no entanto, a modelagem ainda tem um papel bem menos proeminente do que o desejável. A principal razão para essa lacuna entre os objetivos do debate educacional e a prática diária da escola é que a modelagem é difícil tanto para os alunos quanto para os professores⁵⁷ (BLUM; BORROMEO FERRI, 2009, p. 45, tradução nossa).

Desse extrato de texto, depreende-se que mesmo considerando os resultados atingidos pela MM no debate educacional em relação à prática de sala de aula, é reconhecido pelos autores a existência de uma lacuna, principalmente, em função de dificuldades encontradas por alunos e professores em MM.

Nessa linha de pensamento, Garcia *et al.* (2006) ratificam que “o que é problemático é o ensino e aprendizagem de modelagem ou o uso de modelagem para o ensino e aprendizagem de matemática”⁵⁸ (GARCIA *et al.*, 2006, p. 232, tradução nossa).

De acordo com Blum e Borromeo Ferri (2009), os resultados do Pisa-2006 (OECD, 2007) revelaram que alunos de todo o mundo têm dificuldades no enfrentamento de tarefas de modelagem. Esses resultados, segundo os autores, mostram que a dificuldade com essas tarefas pode ser decorrente da inerente complexidade cognitiva dessas tarefas, isto é, por exigir competências não elementares dos alunos (BLUM; BORROMEO FERRI, 2009).

⁵⁶ Fragmento do texto: *Some research projects have highlighted the existence of strong constraints impinging on the largescale dissemination of mathematics as a modelling activity in current educational systems at all school levels (Burkhardt 2006; Galbraith 2007). Therefore, as Greefrath and Vorhölter (2016, p. 28) underline, teachers do not only have to be convinced of and trained in the use of mathematical modelling, they also have to overcome numerous obstacles.*

⁵⁷ Fragmento do texto: *In classroom practice all over the world, however, modelling still has a far less prominent role than is desirable. The main reason for this gap between the goals of the educational debate and everyday school practice is that modelling is difficult both for students' and for teachers.*

⁵⁸ Fragmento do texto: *What is problematic is the teaching and learning of modelling or the use of modelling for the teaching and learning of mathematics.*

Nesse sentido, Blum e Borromeo Ferri (2009) levantam o seguinte questionamento: “Por que a modelagem é tão difícil para os alunos?”⁵⁹ (BLUM; BORROMEIO FERRI, 2009, p. 46, tradução nossa). Em resposta a esse questionamento, os autores encaminham que a dificuldade dos estudantes pode ser decorrente de exigências cognitivas das tarefas de modelagem, que leva em conta as capacidades de ler, comunicar, projetar, e aplicar estratégias de resolução de problemas ou trabalhar matematicamente (BLUM; BORROMEIO FERRI, 2009).

Blum e Borromeo Ferri (2009) selecionaram alguns exemplos das dificuldades dos alunos, a saber:

- Etapa 1 “construção”: veja o exemplo introdutório 1 “Sapatos gigantes”! Este é um exemplo da conhecida estratégia de solução superficial: “Ignore o contexto, apenas extraia todos os números do texto e calcule com eles de acordo com um esquema familiar” que nas salas de aula cotidianas é muito bem sucedido para resolver problemas de palavras;
- Etapa 2 “simplificando”: aqui está uma solução autêntica do exemplo 2 de modelagem “Encher”: “*Você não pode saber se vale a pena, pois você não sabe o que o Golf consome. Você também não sabe o quanto ela quer preencher*”. Obviamente, o aluno construiu um modelo de situação apropriado, mas ele não é capaz de fazer suposições;
- O passo 6 “validação” parece ser particularmente problemático. Principalmente, os alunos não verificam se as soluções de tarefa são razoáveis e apropriadas, o professor parece ser exclusivamente responsável pela correção das soluções⁶⁰ (BLUM; BORROMEIO FERRI, 2009, p. 48, grifos dos autores, tradução nossa).

A primeira dificuldade dos alunos na Etapa 1, dita “construção”, inspirada no ciclo de modelagem de Blum e Leiß (2005) exposto na Figura 7, revela a estratégia usual de solução artificial utilizada pelos alunos que ignoram o contexto da tarefa de modelagem extraindo apenas os números para efetuar cálculos, como em geral, ocorre nas aulas cotidianas. O que parece estar em jogo nessa perspectiva da Etapa 1 é o exercício da atividade matemática e não propriamente o estudo da situação em contexto concreto. Essa compreensão que coloca em jogo o papel dominante da atividade matemática nas práticas de MM é também ratificada por Bosch, Chevallard e Gáscon (2006) e Garcia *et al.* (2006), por exemplo.

⁵⁹ Fragmento do texto: *Why is modelling so difficult for students?*

⁶⁰ Fragmento do texto:

- Step 1 “constructing”: See the introductory example 1 “Giant’s shoes”! This is an instance of the well-known superficial solution strategy “Ignore the context, just extract all numbers from the text and calculate with these according to a familiar schema” which in everyday classrooms is very often rather successful for solving word problems (Baruk 1985, Verschaffel/Greer/DeCorte 2000).
- Step 2 “simplifying”: Here is an authentic solution of modelling example 2 “Filling up”: “You cannot know if it is worthwhile since you don’t know what the Golf consumes. You also don’t know how much she wants to fill up.” Obviously, the student has constructed an appropriate situation model, but he is not able to make assumptions.
- Step 6 “validating” seems to be particularly problematic. Mostly, students’ do not check at all whether there task solutions are reasonable and appropriate, the teacher seems to be exclusively responsible for the correctness of solutions.

Na segunda dificuldade dita “simplificar”, os alunos constroem um modelo de situação, isto é, um tipo de situação sem ser capaz de fazer suposições ou inferências que possa talvez levá-los ao conhecimento da situação em contexto concreto.

Finalmente, a terceira dificuldade, a de “validação”, que segundo Blum e Borromeo Ferri (2009) parece ser problemático, pois os alunos não verificam se as soluções de tarefa são razoáveis e apropriadas, deixando a responsabilidade exclusiva ao trabalho do professor.

Essa compreensão sobre a responsabilidade exclusiva do professor pode ser ratificada de algum modo, a partir do que Chevallard, Bosch e Gascón (2001) denominam de “irresponsabilidade matemática” dos alunos produzida pelo contrato didático da cultura escolar. Nesse sentido, os autores afirmam que:

O contrato didático vigente nos atuais sistemas de ensino da matemática mantém estável a atribuição exclusiva ao professor de toda responsabilidade matemática, em vez de evoluir no sentido de repassar progressivamente para os alunos uma parte dessa responsabilidade. [...] Ele é encarregado de conseguir que o aluno tenha uma atitude positiva e a motivação necessária para aprender matemática, ao mesmo tempo em que estas (atitude e motivação) são consideradas as condições básicas de toda aprendizagem. Em resumo, aceita-se que o resultado da aprendizagem do aluno depende essencialmente da instrução dada pelo professor (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 79-81).

Validar a solução para um tipo de problema em contexto concreto pressupõe que o aluno seja capaz de interpretar a solução desse problema, isto é, que o mesmo tenha algum tipo de relações com os objetos desse contexto, pois se a relação do aluno é vazia com esses objetos, tampouco será capaz de interpretar e, por conseguinte, validar a solução encontrada.

Além disso, é preciso considerar o que nos dizem Frejd e Bergsten (2018) sobre a validação ser extremamente difícil, requerendo negociação humana. Assim, esses autores afirmam que: “validar o modelo é extremamente difícil [...] sem uma negociação humana, confiando demais em modelos matemáticos como base, as coisas podem dar errado”⁶¹ (FREJD; BERGSTEN, 2018, p. 123, tradução nossa).

Sobre as dificuldades de alunos, Greefrath e Vorhölter (2016), por exemplo, destacam que as capacidades de formular, empregar, interpretar e avaliar, a serem adquiridas pelos alunos, são afetadas pelo professor em classe, pois não apenas as

⁶¹ Fragmento do texto: *To validate the model is extremely difficult [...] Without a human negotiation, trusting too much on mathematical models as a ground, things can go completely wrong.*

prioridades dos professores em relação à MM, bem como a falta de tempo, e seus comportamentos em classe, afetam o desempenho dos alunos, em particular, como um trabalho independente no enfrentamento de tarefas de modelagem. Ademais, esses autores afirmam que cada passo no processo de modelagem leva a alguma dificuldade para os estudantes ou potencial “bloqueio”.

Iversen e Larson (2006), por exemplo, destacam que mesmo alunos hábeis em Matemática não conseguem modelar situações em contexto ao nível escolar. Além disso, Houston e Neill (2003) e Frejd e Ärlebäck (2011) também destacam a modelagem como uma tarefa que revela dificuldade para os estudantes.

Por outro lado, as dificuldades com MM não são apenas dos alunos, mas também de professores, como afirma Grandsard (2005 *apud* GUERRA; SILVA, 2009, p.98), por exemplo, sobre professores de Matemática em formação que não conseguem modelar situações em contextos incomuns para eles.

Sobre dificuldades de professores, Greefrath e Vorhölter (2016) as distinguem como quatro tipos de obstáculos que agem sobre os professores no, e para, o ensino de MM:

1 – De naturezas organizacionais como a falta de tempo para cumprir o programa;

2 - Relativos à assunção da incapacidade do aluno frente à MM, por ser muito difícil para eles;

3 - Relacionados com a preparação de aulas, no sentido de tempo insuficiente para adaptar as tarefas e prepará-las em detalhe, bem como a falta de habilidades necessárias para essa tarefa e, finalmente,

4 – A falta de organizações didáticas para o ensino de MM.

Em experiência com 101 professores, Schmidt (2011) (*apud* GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016) destaca que mesmo após um treinamento, os professores ainda achavam difícil considerar problemas de modelagem, em especial por conta de resistências oriundas das dificuldades de falta de tempo para preparar aulas e cumprir o currículo, e ainda, a complexidade em acompanhar o desempenho dos alunos.

Além disso, Blum e Borromeo Ferri (2009) destacam dificuldades de professores com modelagem em vários países. Segundo eles, no ensino da Matemática cotidiana há poucas tarefas de modelagem e, quando se concentram em problemas do mundo real, eliminam qualquer vestígio do contexto que trata o

tipo de problema para evitar possíveis dificuldades dos alunos. “Compreender a estrutura de um problema independentemente do seu contexto e usar a estrutura como uma ferramenta para os alunos parece ser um procedimento convincente”⁶² (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016, p. 4, tradução nossa). O objetivo, segundo esses autores, parece se concentrar propriamente, no exercício da atividade matemática, de modo a esconder talvez, toda e qualquer relação com os objetos não-matemáticos do contexto concreto que refere o tipo de problema.

Nesse sentido, Blum e Borromeo Ferri (2009) afirmam que:

Só é importante ser honesto sobre a verdadeira natureza das tarefas e problemas orientados para a realidade. Por que encontramos tão poucas práticas de modelagem nas salas de aula, por que existe essa lacuna entre o debate educacional (e até mesmo os currículos oficiais), por um lado, e a prática em sala de aula, por outro? A principal razão é que a modelagem é difícil também para os professores, pois o conhecimento do mundo real é necessário e o ensino torna-se mais aberto e menos previsível (ver, por exemplo, FREUDENTHAL 1973, POLLAK 1979, DELANGE 1987, BURKHARDT 2004, BLUM *et al.* 2007)⁶³ (BLUM; BORROMEO FERRI, 2009, p. 47, grifos dos autores, tradução nossa).

O extrato de texto ratifica que a principal razão da existência da lacuna entre os debates educacionais sobre MM, incluindo currículos oficiais, com as práticas de modelagem em sala de aula é a dificuldade dos professores com a MM, decorrente segundo os autores, da exigência da prática de MM que leva em conta objetos de conhecimento do mundo real.

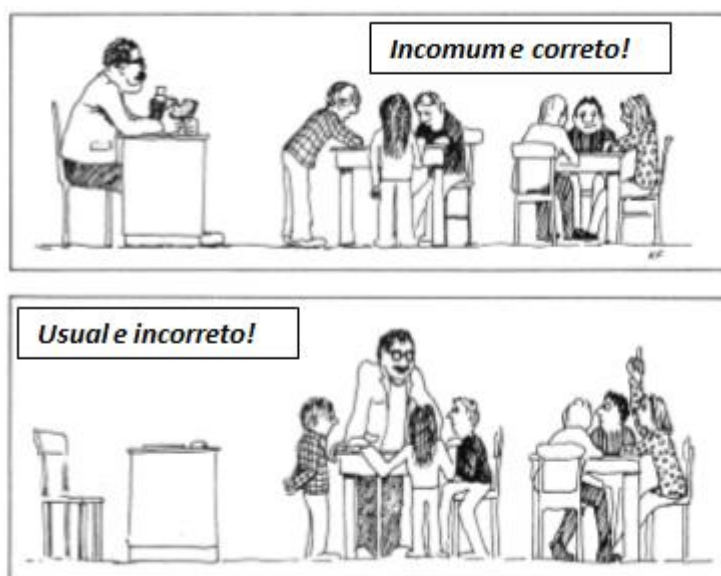
No sentido da TAD, essas dificuldades manifestadas por professores a partir do extrato de texto supracitado, podem ser aqui interpretadas em função da baixa ou inexistente qualidade relação de professores com a prática de MM em sala de aula (CHEVALLARD, 2005).

Blum e Borromeo Ferri (2009) alertam que talvez a descoberta mais importante é que os professores são indispensáveis para o encaminhamento das tarefas de modelagem e, como tal, fazem a distinção entre os alunos que trabalham independente com apoio do professor e os alunos que trabalham em coletividade, sem a participação direta do professor, como destaca a Figura 9.

⁶² Fragmento do texto: *Comprehending the structure of a problem independently of its context and using the structure as a tool for students seems to be a convincing procedure. However, it is difficult for students to understand the entire structure of a problem before beginning to work on it.*

⁶³ Fragmento do texto: *it is only important to be honest about the true nature of reality-oriented tasks and problems. Why do we find only so few modelling in everyday classrooms, why is there this gap between the educational debate (and even official curricula), on the one hand, and classroom practice, on the other hand? The main reason is that modelling is difficult also for teachers, for real world knowledge is needed, and teaching becomes more open and less predictable (see, e.g., FREUDENTHAL 1973, POLLAK 1979, DELANGE 1987, BURKHARDT 2004, BLUM *et al.* 2007).*

Figura 9 – Uma dicotomia sobre aprendizagem dos alunos



Fonte: Blum e Borromeo Ferri (2009, p. 51)

Segundo Blum e Borromeo Ferri (2009), a densa evidência empírica mostra que os efeitos do ensino só podem ser esperados se tomado como referência o “ensino de matemática de qualidade”⁶⁴ (BLUM; BORROMEO FERRI, 2009, p. 51, grifos dos autores, tradução nossa). Sobre o ensino de qualidade, os autores recomendam:

- *Uma orquestração exigente de ensinar o assunto matemático* (dando às estudantes às vastas oportunidades de adquirir competências matemáticas e estabelecendo conexões dentro e fora da matemática);
- *Ativação cognitiva permanente dos alunos* (estimulando atividades cognitivas e meta-cognitivas e promovendo a independência dos alunos);
- *Uma gestão de sala de aula eficaz com aprendizagem orientada pelo aluno* (variando os métodos de forma flexível, usando o tempo de forma eficaz, separando a aprendizagem e a avaliação, etc.)⁶⁵ (BLUM; BORROMEO FERRI, 2009, p. 52, grifos dos autores, tradução nossa).

De outro modo, esses autores alertam que no ensino de qualidade é crucial o equilíbrio permanente entre a orientação mínima do professor em sala de aula e a independência máxima dos alunos. Tal equilíbrio poderá ser alcançado se as

⁶⁴ Fragmento do texto: “*quality mathematics teaching*”.

⁶⁵ Fragmento do texto:

- *A demanding orchestration of teaching the mathematical subject matter (by giving students’ vast opportunities to acquire mathematical competencies and establishing connections within and outside mathematics);*
- *Permanent cognitive activation of the learners (by stimulating cognitive and meta-cognitive activities and fostering students’ independence);*
- *An effective and learner-oriented classroom management (by varying methods flexibly, using time effectively, separating learning and assessment etc.).*

intervenções do professor forem adaptadas de modo a preservar a independência dos alunos em sala de aula (BLUM; BORROMEIO FERRI, 2009).

Portanto, os critérios de um ensino de qualidade, segundo os autores, são geralmente violados nas aulas cotidianas de Matemática, pois as intervenções do professor não contribuem para preservar a independência dos alunos.

De acordo com a literatura supracitada, é consenso a existência de dificuldades de alunos e professores com a MM em sala aula, por conta da complexidade dessa atividade que é notadamente confessada por alguns autores (BLUM; BORROMEIO FERRI, 2009), mais precisamente, quando destacam aspectos problemáticos nas fases do ciclo de MM. Esses aspectos que são considerados, inclusive, nas empirias, não o são do ponto de vista teórico, ou seja, não aparecem propriamente como objetos teorizados por esses autores.

Nesse sentido, retoma-se o questionamento: “como a modelagem pode ser ensinada apropriadamente?”, encaminhado por Blum e Borromeo Ferri (2009, p. 54), que pressupõe a MM ser ensinável de algum modo. Assim, esses autores destacam que não há, é claro, um único meio geral para o ensino de MM na escola.

Em resposta a esse questionamento, Blum e Borromeo Ferri (2009) encaminham, a partir de resultados empíricos, implicações plausíveis, segundo esses autores, para o ensino de modelagem de maneira efetiva quando afirmam:

Implicação 1:

⇒ Os *critérios para o ensino de qualidade* devem ser considerados também para a modelagem de ensino. A substância para o ensino de qualidade é constituída por *tarefas* apropriadas de modelagem. Ao tratar de tarefas de modelagem, um *equilíbrio* permanente entre a máxima independência dos alunos e mínima orientação do professor deve ser realizado.

Implicação 2:

⇒ É importante apoiar as rotas *individuais* dos alunos em modelagem e incentivar *múltiplas soluções*. Para isso, os professores precisam estar familiarizados com *os espaços de tarefas* e estar cientes de suas próprias preferências em potencial por soluções especiais.

Implicação 3:

⇒ Os professores têm que conhecer um amplo espectro *de modos de intervenção*, e também intervenções particularmente estratégicas.

Implicação 4:

⇒ Os professores precisam saber como apoiar as *estratégias* adequadas dos alunos para resolver tarefas de modelagem⁶⁶ (BLUM; BORROMEIO FERRI, 2009, p. 54, grifos dos autores, tradução nossa).

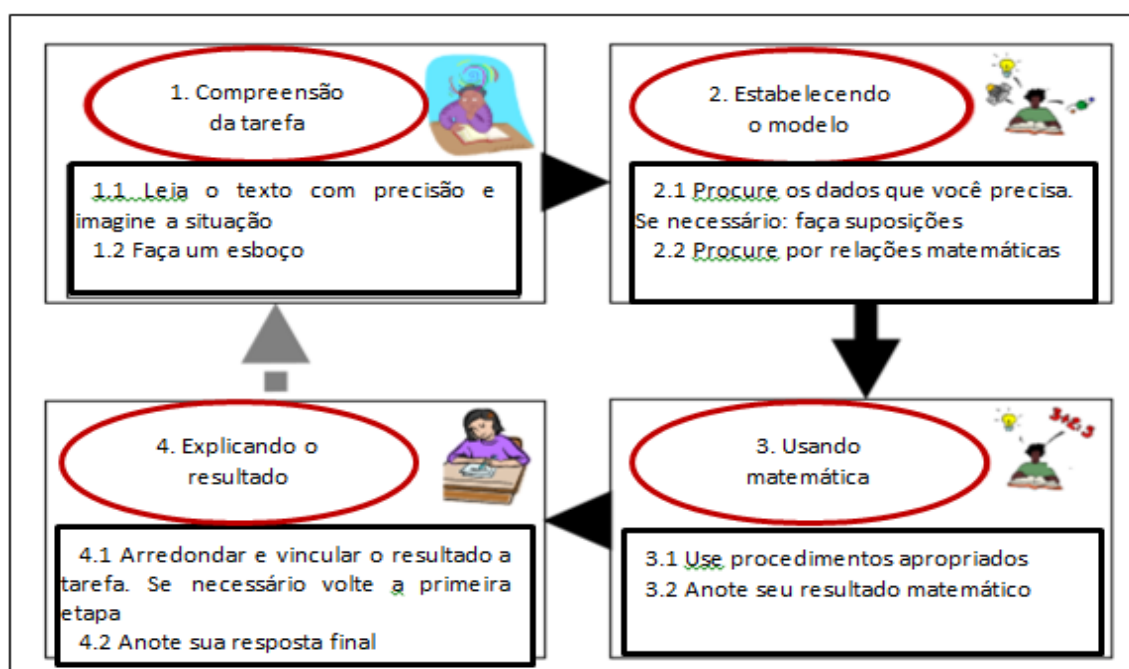
⁶⁶ Fragmento do texto:

Implication 1: ⇒ The criteria for quality teaching have to be considered also for teaching modelling. The substance for quality teaching is constituted by appropriate modelling tasks. When treating modelling tasks, a permanent balance between maximal independence of students' and minimal guidance by the teacher ought to be realised.

Implication 2:

Especificamente em relação à implicação 4, os autores afirmam que uma ferramenta estratégica está disponível para fins de ensino: o ciclo de modelagem de quatro etapas (Figura 10).

Figura 10 – Quatro etapas para resolver uma tarefa de modelagem (“Plano de Solução”)



Fonte: Adaptado de Blum e Borromeo Ferri (2009, p. 54)

Esse plano de solução é destinado aos alunos como ajuda para possíveis dificuldades que podem ocorrer no estudo de tarefas de modelagem. Nesse sentido, “o objetivo é que os alunos aprendam a usar esse plano de forma independente, sempre que apropriado”⁶⁷ (BLUM; BORROMEO FERRI, 2009, p. 55, tradução nossa).

Esses autores ainda acrescentam que as experiências mostram que é necessária uma introdução cuidadosa e gradual do plano de solução, bem como exercícios repetidos de como utilizá-lo em sala de aula. Essa linha de pensamento vai ao encontro do que Blum (2011; 2015 *apud* GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016) destaca sobre a necessária inclusão de uma ampla variação de contextos, bem

⇒ It is important to support students’ individual modelling routes and to encourage multiple solutions. To this end, teachers have to be familiar with the task spaces and to be aware of their own potential preferences for special solutions.

Implication 3:

⇒ Teachers have to know a broad spectrum of intervention modes, also and particularly strategic interventions.

Implication 4:

⇒ Teachers have to know ways how to support adequate student strategies for solving modelling tasks.

⁶⁷ Fragmento do texto: *The goal is that students’ learn to use this plan independently whenever appropriate.*

como de domínios matemáticos, para orientar os alunos a transferir estratégias de uma tarefa de modelagem para outra.

Em última análise, a ampla variação de contextos e de domínios matemáticos, no sentido da TAD, pode ser interpretada por meio da ampliação do *filtro de percepção* (CHEVALLARD, 2005) do sujeito no enfrentamento de tarefas de modelagem que o permitam transferir essas experiências agregadas pelo filtro de percepção a outras tarefas de modelagem como que por um *habitus* (BOURDIEU, 2002):

Entendido como um sistema de disposições duráveis e transponíveis que, integrando todas as experiências passadas, funciona em cada momento como uma matriz de percepções, apreciações e ações e possibilita o cumprimento de tarefas infinitamente diferenciadas graças à transferência analógica de esquemas” adquiridos em uma prática anterior (BOURDIEU, 2002 [1972], p. 261).

Parece claro e consensual na literatura (BORRAMEO FERRI, 2006; BLUM; BORRAMEO FERRI, 2009; PERRENET; ZWANEVELD, 2012, GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016) que o ciclo de modelagem constitui o modelo ferramental para o ensino e, especificamente, o ciclo proposto por Blum e Borromeo Ferri (2009) para resolver uma tarefa de modelagem, que em última análise, ratifica o ciclo de modelagem proposto pelo Relatório Nacional do Pisa (BRASIL, 2012) para o ensino praxeologias matemáticas escolares (Figura 11).

Figura 11 – Modelo de letramento em Matemática na prática



Fonte: Relatório Nacional OCDE/Pisa (BRASIL, 2012, p. 18)

O Relatório Nacional da OCDE/Pisa (BRASIL, 2012) apresenta o processo de modelagem para o ensino de praxeologias matemáticas escolares como parte das ações do letramento em Matemática para o desenvolvimento de capacidades dos indivíduos resolverem problemas em contextos por meio da Matemática.

Na parte mais interna da Figura 11, encaminha-se “uma visão simplificada e idealizada do processo de Modelagem Matemática” (BRASIL, 2012, p. 19) que parece destacar em nossa compreensão, uma versão reduzida do ciclo de Blomhøj e Jensen (2007), por exemplo, com apenas quatro subprocessos entendidos como capacidades a serem atingidas pelo aluno para o letramento matemático ao se deparar com um problema em determinado contexto, a saber:

Formular a situação matematicamente, de acordo com os conceitos e relacionamentos identificados, realizando suposições simples. Assim, transforma um “problema em determinado contexto” em um “problema matemático” passível de uma solução matemática. No estágio seguinte, deve **empregar** conceitos, ferramentas e procedimentos matemáticos para obter “resultados matemáticos”. Posteriormente, o estudante deve **interpretar** esses resultados nos termos do problema original inserido no contexto, colocando os “resultados no contexto”. No passo seguinte, deve **avaliar** esses resultados em sua razoabilidade dentro do problema, em determinado contexto (BRASIL, 2012, p. 19, grifos do autor).

Do extrato de texto, depreende-se que essa perspectiva do ciclo de modelagem encaminha quatro subprocessos:

- (a) Formular o problema em contexto em um problema matemático;
- (b) Empregar um procedimento matemático;
- (c) Interpretar o resultado à luz do problema em contexto real. O ciclo se reinicia a partir da avaliação dos resultados;
- (d) Avaliar os resultados em sua razoabilidade dentro do problema, em determinado contexto.

De qualquer modo, esses subprocessos do ciclo de modelagem do Relatório Nacional da OCDE/Pisa (BRASIL, 2012), tomados como capacidades centrais a serem atingidos para o ensino podem ratificar o esquema didático recomendado por Blum e Borromeo Ferri (2009) para resolver uma tarefa de modelagem.

Em retrospectiva a partir da Figura 10, a primeira e a segunda etapa do ciclo proposto por Blum e Borromeo Ferri (2009) para resolver uma tarefa de modelagem, isto é:

- (1) compreensão de tarefa e (2) estabelecer o modelo, respectivamente, são aqui interpretadas pelo subprocesso de *formular*

o problema em contexto em um problema matemático adotado pelo ciclo do Relatório Nacional da OCDE/Pisa (BRASIL, 2012);

- A terceira etapa, (3) usando matemática (BLUM; BORROMEO FERRI, 2009) é interpretado pelo subprocesso de *empregar* um procedimento matemático (BRASIL, 2012) e, finalmente,
- A quarta etapa, (4) explicando o resultado (BLUM; BORROMEO FERRI, 2009) é interpretada pelos subprocessos de *interpretar* e *avaliar* o resultado no problema em contexto (BRASIL, 2012).

Os quatro passos propostos para resolver uma tarefa de modelagem, segundo Blum e Borromeo Ferri (2009) ratificam de algum modo, os subprocessos do PISA (BRASIL, 2012), e, são aqui interpretados, a seguir, como tarefas no sentido da TAD.

3.2 Subprocessos do Ciclo de Modelagem interpretados a partir da Teoria Antropológica do Didático

A perspectiva do ciclo de modelagem do Relatório Nacional do Pisa (BRASIL, 2012), à luz da TAD, pode ser compreendida como uma organização praxeológica que envolve quatro tipos de tarefas sequenciais:

T₁: Formular um problema em contexto em um problema matemático;

T₂: Empregar um procedimento matemático;

T₃: Interpretar o resultado à luz do problema em contexto real. O ciclo se reinicia a partir da avaliação dos resultados;

T₄: Avaliar os resultados em sua razoabilidade no problema em contexto.

A realização desse tipo de organização praxeológica não será problemática se o problema em contexto real for reconhecido por meio de situação rotineira no interior da instituição. Assim, por exemplo, quando o professor do final do ensino básico anuncia um problema em contexto real seguindo os pré-construídos, geralmente implícitos, que encaminham a regra de três, essas tarefas são prontamente realizadas sem dificuldades, inclusive com a apresentação objetiva de um modelo matemático e seu procedimento associado (SILVA, 2011; 2017). Nesse sentido:

Se apenas um passo for usado para transferir um problema da vida real para um modelo, esse modelo de um ciclo de modelagem é chamado de matematização única. [...] o ciclo de modelagem nem sempre precisa ser

totalmente concluído ou ser repetido várias vezes⁶⁸ (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016, p. 11, tradução nossa).

De outro modo, para uma situação em contexto reconhecida pelo aluno ou professor, o encaminhamento de questionamentos para dadas situações à PMC é direto. No entanto, quando o problema trata de contextos incomuns para os alunos, inclusive para os professores, em que não há reconhecimento de situações rotineiras que lhe possa encaminhar, a realização da organização praxeológica da MM se torna problemática.

Sobre essa compreensão, Greefrath e Vorhölter (2016) apresentam a noção de matematização complexa e, como tal, envolve o modelo do processo de modelagem de Blum e Leiß (2005), desenvolvido a partir de um aspecto cognitivo, destacando mais detalhes ao considerar a construção de um modelo matemático. O papel do indivíduo que criou o modelo também passa a ser descrito com maior detalhamento. Assim, os autores, apoiados em Greefrath (2010), afirmam que: “de uma maneira normativa, os ciclos de modelagem poderiam apoiar os alunos que trabalham com problemas de modelagem em classes” (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016, p. 14, tradução nossa).

Segundo Blomhøj e Jensen (2003, p. 129), a realização de problemas em contextos reais que demandem o uso de todos os tipos de tarefas do ciclo de modelagem, além de consumirem muito tempo de ensino, enfrentam dificuldades para o engajamento dos alunos, devido a fatores afetivos e à falta de conhecimento factual e de experiências insignificantes com os fenômenos da vida real.

No caso do ensino da disciplina Matemática, que deve dar prioridades aos aspectos do uso da matemática, por ser frequentemente experimentada como cognitivamente exigente e frustrante pelos alunos, tem seu interesse contrariado uma vez que, para o desenvolvimento da MM, o entendimento consensual requerido pelos alunos sobre o fenômeno associado ao problema em contexto real - que acontece a partir da investigação do problema com a estruturação da complexidade da vida real em um objeto de MM - demanda tempo significativo e, com isso, minimiza o tempo e o esforço empregado no tipo de tarefas T_2 , de interesse da disciplina.

⁶⁸ Fragmento do texto: If only one step is used to transfer a real-life problem to a model, this model of a modelling cycle is called single mathematizing. [...] The modelling cycle need not always be fully completed or be repeated several times.

Convém observar que dentre os quatro tipos de tarefas que compõem o ciclo, apenas a do tipo **T₂: empregar um procedimento matemático** pode se encontrar no estrito domínio da disciplina Matemática que, como tal, é uma técnica adequada ao modelo matemático, aqui entendido pela tríade [*Questão (Q)*, *Situação (St)*, *Praxeologia Matemática Customizada (PMC)*], isto é, como uma *praxeologia com matemática* (FERNANDES, 2015; SILVA, 2017) que responde a questionamentos sobre tipos específicos de situações de contextos reais. Quando a situação é esquecida, o procedimento pode ser pensado e tratado como um objeto no estrito domínio matemático escolar e, portanto, inequivocamente como técnicas objetivas que, inclusive, podem assumir formas algorítmicas.

Os demais tipos de tarefas, em geral, não possuem tal propriedade, principalmente, por serem marcadas por saberes pré-construídos que vivem em situações de contextos e, desse modo, sempre requerem técnicas que podem ser distintas em acordo com a situação, como mostraremos a seguir.

O tipo de tarefa **T₁: formular a situação matematicamente**, segundo o extrato do Relatório Nacional da OCDE/Pisa (BRASIL, 2012), se realiza com uma técnica “de acordo com os conceitos e relacionamentos identificados, realizando suposições simples que, assim, transforma um “problema em determinado contexto” em um “problema matemático” passível de uma solução matemática”. Essa técnica é nebulosa uma vez que não nos diz como identificar conceitos e relacionamentos e, tampouco, os tipos de suposições simples, inclusive como devem agir para transformar um “problema em determinado contexto” em um “problema matemático” passível de uma solução matemática.

É uma receita genérica que somente assume especificidade na especificidade da situação, com movimentação de conhecimentos de como os ingredientes agem e reagem entre si. Esse conhecimento somente está disponível aos sujeitos da situação em contexto, pois somente eles podem reconhecer o que conhecem, que na linguagem da TAD, se traduz por aqueles que possuem a relação adequada com os objetos dessa receita, o que inclui a situação.

Essa compreensão encaminhada pela TAD desvia nossos olhares para a presença de pressuposições tomadas como inquestionáveis. Especificamente, encontramos pelo menos três relacionadas com nossa compreensão: (1) Se, por um lado, não podemos *a priori* pressupor que um problema matemático derivado de um problema em contexto é passível de solução matemática, por outro, (2) não

podemos também pressupor que conhecemos todos os problemas matemáticos passíveis de solução que podem ser *transformações* de um “problema em determinado contexto”. E, mais importante, (3) não podemos pressupor que todo problema em contexto real pode ser transformado em um problema matemático, pois Christensen, Skovsmose e Yasukawa (2008) mostram que isso nem sempre é possível, a partir do seguinte extrato de texto:

Por exemplo, pode haver um local sagrado para uma população indígena que é conhecida também por ser rico em minerais. Pode ser possível analisar os custos econômicos e os benefícios da exploração mineral do sítio por meio de uma detalhada descrição matemática; No entanto, é impróprio e impossível "matematizar" o significado cultural do sítio⁶⁹ (CHRISTENSEN; SKOVSMOSE; YASUKAWA, 2008, p. 78, tradução nossa).

À luz do programa epistemológico em que se insere a TAD, o ensino e a aprendizagem da Matemática, o que inclui a MM, “não é considerada como o ensino e a aprendizagem de ideias matemáticas, noções ou conceitos, mas como o ensino e a aprendizagem de uma *atividade humana situada*, realizada, em instituições concretas”⁷⁰ (BOSCH; CHEVALLARD; GASCÓN, 2006, p. 2-3, grifos dos autores, tradução nossa).

No caso específico da MM, as habilidades e as competências desenvolvidas são dependentes do contexto da situação, de modo que elas não asseguram sucessos em outros contextos, embora possam ajudar um economista experiente em modelagem de fenômenos econômicos do mercado de capitais, por exemplo, não necessariamente é capaz de modelar matematicamente uma situação de fenômenos físico-químicos.

Quando uma telha cai de um telhado sobre a sua cabeça, isso é um fato, apenas um fato, mesmo que ele seja muito desagradável. Mas a ciência não está interessada neste evento em particular. A física, para dar um exemplo disso, estuda os fenômenos relativos à queda dos corpos pesados; e a medicina estuda outros fenômenos relevantes, como as consequências da telha caindo na sua cabeça (CHEVALLARD, 2013c, p. 02).

O extrato de texto exemplifica que esse tipo de contexto leva a diferentes situações, pois um sujeito pertencente à instituição da Física estabelece relações com o contexto a partir de suas experiências, enquanto outro sujeito, o da instituição Medicina, revela outras relações por meio da situação imaginada com o contexto.

⁶⁹ Fragmento do texto: *For example, there may be a sacred site for an indigenous population that is known also to be rich in minerals. It may well be possible to analyse the economic costs and benefits of mining that site through a detailed mathematical description; however, it is both inappropriate and impossible to “mathematise” the cultural significance of the site.*

⁷⁰ Fragmento do texto: *is not considered as teaching and learning mathematical ideas, notions or concepts, but as teaching and learning a situated human activity performed in concrete institutions.*

No uso de MM no ensino de Matemática com intenções atomísticas sobre a atividade matemática, como ocorre na disciplina Matemática, à tarefa do tipo T_1 é encaminhada como magificação (BOSCH; CHEVALLARD; GASCÓN, 2006), ou seja, como o processo que em totalidade transforma um “problema em determinado contexto” em um “problema matemático passível de solução”, sem que se mostre como isso é possível. Isso permite atacar o problema matemático que é o objetivo da atividade.

A noção de magificação que referimos é devida a Umberto Eco (2002) e encaminhada ao construir uma resposta ao questionamento "o que era mágico, que tem sido ao longo dos séculos e que é ainda hoje, mesmo sob uma falsa aparência?". Em suas palavras:

A presunção de que podemos ir de uma causa a um efeito diretamente por meio de um breve circuito, sem percorrer etapas intermediárias. Por exemplo, você coloca um alfinete na boneca de um inimigo e obtém a morte dele/dela; você pronuncia uma fórmula e tudo de repente é capaz de converter o ferro em ouro; você chama os anjos e envia uma mensagem através deles. A Magia ignora a longa cadeia de causas e efeitos e, principalmente, não se preocupa em descobrir, processo após processo, se há alguma relação entre causa e efeito⁷¹ (ECO, 2002, p. 13-14, tradução nossa).

De outro modo, segundo Eco (2002), é a mentalidade mágica que insiste em viver entre nós e que é fomentada pela necessidade de satisfação imediata de nossos desejos. Em nosso caso, consiste ao transformar um problema em contexto concreto em um problema matemático passível de solução, como em ato de magia.

A magia é encaminhada por pressupostos inquestionáveis como essa transformação. Isso quer dizer também que pressupõe conjuntamente que existe um procedimento matemático adequado para esse problema e, portanto, quem “transforma” o problema não matemático é dotado da magia que lhe permite sacar da cartola a situação em forma de problema matemático acompanhado do procedimento matemático adequado. Essa magia observada por alunos e professores em cursos sobre MM, se constitui em dificuldades para eles e uma questão frequente emerge: Como podemos aprender/ensinar a fazer isso?

No campo da ciência em que o conhecimento se desenvolve na desmagificação dos fenômenos, podemos pensar que os tipos de tarefas T_1 e T_2

⁷¹ Fragmento do texto: *La presunción de que se podía pasar de golpe de una causa a un efecto por cortocircuito, sin completar los pasos in termedios. Clavo un alfiler en la estatuilla que representa al enemigo y éste muere; pronuncio una fórmula y transformo el hierro en oro; convoco a los ángeles y envío a través de ellos un mensaje. La magia ignora la larga cadena de las causas y los efectos y, sobre todo, no se preocupa de establecer, probando y volviendo a probar, si hay una relación entre causa y efecto.*

seriam uma totalidade [T_1 , T_2] no ciclo de modelagem, por serem engendradas a partir de uma dialética entre a situação em contexto e os saberes institucionais, em sentido amplo, que ali habitam, e que somente funcionam em situação de contextos reais.

Os *habitus* incluem os saberes em sentido amplo, ou seja, os saberes que tornam possíveis as ações práticas e, portanto, são eles que dão forma às práticas de uma instituição como nos ensina Bourdieu (1989; 1996; 2001; 2004; 2007):

se o agente possui uma compreensão imediata do mundo familiar, isso ocorre porque as estruturas cognitivas aplicadas por ele constituem o produto da incorporação das estruturas do mundo no qual ele age, e também porque os instrumentos de construção empregados para conhecer o mundo são construídos pelo mundo. Esses princípios práticos de organização do dado são construídos a partir da experiência das situações frequentemente encontradas (BOURDIEU, 2001, p. 166).

De outro modo, Bourdieu (2001) está afirmando que as instituições determinam e são determinadas por *habitus*, que como sistemas de disposições interiorizadas de estruturas objetivas se constituem em princípio unificadores e geradores de todas as práticas realizadas e, como tal, constitui o extrato mais profundo que unifica e gera as práticas realizadas pelos agentes dessa instituição.

A noção de *habitus* interiorizados por uma pessoa está então estreitamente relacionada à noção de universo cognitivo pessoal anunciado por Chevallard (2009), pois essa noção é compreendida como o conjunto de relações e objetos, em sentido amplo, que essa pessoa construiu e constrói com esses objetos no interior de instituições.

As relações de uma pessoa com um dado objeto ocorrem por meio de praxeologias com esse objeto nas diferentes posições que a pessoa ocupa ou ocupou nas instituições.

Desde o nascimento, cada indivíduo é assim “condicionado” – quer dizer, uma vez apresentado e mantido – por várias instituições, tais como a sua família, ele se torna sujeito. Em particular, a criança é imediatamente condicionada à instituição da linguagem, mais precisamente a língua, embora ainda não fale: ela não pode escapar, e, ao mesmo tempo, a linguagem que vai lhe permitir falar e lhe dará o “poder” linguístico. Em geral, por suas conformidades, *na medida em que é sujeito de uma multitude de instituições, é que o indivíduo x se constitui em uma pessoa*⁷² (CHEVALLARD, 2009a, p. 2, grifos do autor, tradução nossa).

⁷² Fragmento do texto: *Dès sa naissance, tout individu est ainsi assujetti à – c’est-à-dire à la fois soumis à et soutenu par – de multiples institutions, telle sa famille, dont il devient le sujet. En particulier, l’infans est assujetti d’emblée à cette institution qu’est le langage, et plus précisément à cette langue, bien qu’il ne la parle pas encore : il ne peut y échapper, et, en même temps, c’est elle qui lui permettra de parler, qui lui donnera sa « puissance » linguistique. D’une manière générale, c’est par ses assujettissements, par le fait qu’il est le sujet d’une multitude d’institutions, que l’individu x se constitue en une personne.*

De outro modo, um indivíduo é uma pessoa sempre em construção, caracterizada pela dinâmica de reconstruções de seu universo cognitivo, de modo aceitável pelos universos cognitivos das instituições em que vive e ou viveu, portanto, na dinâmica das interiorizações de *habitus* institucionais que, como sistemas de percepções, apreciações e ações, lhes permitem em exteriorização, o modo adequado de ação a uma dada situação em contexto reconhecida por uma ou mais dessas instituições.

Chevallard (2005) reconhece que os saberes práticos, somente são aprendidos no contexto das práticas, de modo que não há como confundir os saberes práticos com os saberes sobre a prática. Especificamente, assim se manifesta:

Um saber pode ser utilizado, ensinado, produzido. Em todas essas modalidades, os saberes se distinguem “dos sistemas institucionais de conhecimentos”, que poderíamos chamar – a expressão, segundo creio, pertence a Pierre Bourdieu – *saberes práticos, que se põe em funcionamento, se aprendem, se enriquecem, sem serem, no entanto utilizados, ensinados, produzidos*⁷³ (CHEVALLARD, 2005, p. 154, grifos do autor, tradução nossa).

Sobre essa noção de saberes práticos, que se aprendem e se enriquecem na cultura de seus usos em contextos sociais, como faz o experiente ciclista que realiza incríveis manobras aprendidas no decorrer do tempo de sua história de relações para com as bicicletas, poderíamos assentar o desenvolvimento do processo de modelagem.

Essa compreensão é compartilhada por Blum e Borromeo Ferri (2009) sob os diferentes pensamentos teóricos. Os autores afirmam que vários estudos, no contexto da cognição situada, apontam que em aprendizagens dependentes de contextos específicos não se pode esperar simples transferências de uma situação para outra e que isso vale para o aprendizado da MM e em seguida arrematam: esta é uma notícia “ruim”; a contrapartida “boa” é que diferentes estudos mostram que modelagem pode ser aprendida (ver GALBRAITH; CLATWORTHY, 1990; ABRANTES, 1993; KAISER; MESSMER, 1987; MAAß, 2007) (Ibid., p. 51).

⁷³ Fragmento do texto: *Por lo tanto, un saber puede ser utilizado, enseñado, producido. En todas esas modalidades, los saberes se distinguen de los sistemas institucionales de conocimientos, que podríamos llamar – la expresión, según creo, pertenece a Pierre Bourdieu – saberes prácticos, que se ponen en funcionamiento, se aprenden, se enriquecen, sin ser sin embargo utilizados, enseñados, producidos.*

De outro modo, o processo de modelagem funcionaria como uma OPC engendrada por *habitus* de campos de práticas sociais específicos que agem como sistemas de percepções e ações indispensáveis para articular e integrar diferentes praxeologias, ora como saber, ora como saber prático, para atender à intencionalidade de uma classe, alunos e professores, de produzir um modelo matemático adequado para um dado problema em contexto real.

Mas, nesse sentido, é preciso ficar entendido, então, que a noção de *habitus* inclui a ação como o uso de saberes em sentido amplo, e, portanto, inclui os saberes aprendidos por ensinamentos intencionais e que não dependem de situações em contextos, mas quando em ação em contextos, planejadas ou não, dependem da percepção da situação para encaminhar essas ações.

Por exemplo, uma agência financeira que realiza a praxeologia de financiamento de bens, “mobiliza” diferentes saberes, em particular, praxeologias matemáticas no interior da instituição sistema financeiro.

As praxeologias financeiras mobilizam praxeologias matemáticas para o uso, e/ou desenvolvimento de fórmulas que se substanciam somente a partir do chamado regime de juros, identificados na escola como simples ou composto. Mas esse regime é determinado pelos saberes práticos que permitem o sincretismo necessário em acordo com uma situação em contexto, por exemplo, um dado cenário econômico constitui um contexto, em que se quer projetar o valor de uma prestação de financiamento de um dado bem, que encaminha a situação.

A praxeologia de financiamento pode se mostrar complexa para quem não é agente do sistema financeiro, pois nem sempre será possível afirmar qual regime de juros deve ser considerado, por exemplo, pois estes são reconhecidos pelos agentes financeiros em acordo com a dada situação em contexto e, portanto, estão submetidos ao *filtro de percepção* (CHEVALLARD, 2005) das práticas financeiras que somente estão disponíveis àqueles que detêm a lógica prática dos agentes financeiros.

A totalidade $[T_1, T_2]$ do processo situado é vista no modelo teórico do ciclo como duas tarefas independentes, embora conectadas. Esse aspecto do ciclo permite questionar as tarefas T_1 e T_2 de modo independente. A segunda tarefa dessa unidade, a tarefa T_2 de empregar o procedimento matemático, pode ser complexa se considerarmos que o procedimento matemático pode não estar restrito aos saberes supostamente específicos da Matemática.

No ensino da Matemática, por exemplo, por meio dos pressupostos da TAD, especificamente, por meio do *modelo praxeológico de referência (MER)* (BARQUERO; BOSCH; GASCÓN, 2013), em consonância com os *momentos didáticos* (CHEVALLARD, 1999), os procedimentos matemáticos, que são denominados de técnicas, são problematizadas de modo a seguir a estrutura preconizada pela consonância dos modelos matemáticos e modelos didáticos, em geral, a partir de um desenvolvimento de técnicas em crescente complexidade.

A capacidade *de escolher qual procedimento* matemático deve ser utilizado pode se mostrar simples, por um lado, e complexa, por outro, considerando que as diferentes técnicas desenvolvidas não são obras da natureza, mas obras humanas para atenderem uma razão de ser. Essa razão de ser pode estar nas situações matemáticas ou em situações extramatemáticas e, nesse caso, uma técnica de uma tarefa pode ser adequada a uma situação e inadequada à outra e, portanto, levar à rejeição do modelo matemático (GUERRA; SILVA, 2009).

Esse é um aspecto da MM a que se dedicam diferentes pesquisas em Matemática Aplicada, com desenvolvimento de novas técnicas para velhas tarefas matemáticas que compõem modelos para atender especificidades que emergem de situações análogas ou homólogas as situações conhecidas.

No campo das pesquisas em MM na Educação Matemática encontramos interesses sobre o ciclo atomístico com foco nas atividades matemáticas, em particular, a conexão de T_1 e T_2 como uma estrita praxeologia matemática (BOSCH *et al.*, 2006, GARCIA *et al.*, 2006, FONSECA; GASCÓN; LUCAS, 2014, BARQUERO; BOSCH; ROMO, 2018). Esse aspecto não se faz presente no ensino com MM nas escolas básicas, pois, no cotidiano escolar, T_1 e T_2 não são problematizadas.

Em geral, as tarefas matemáticas transitam entre diferentes posições de uma escola, e entre escolas, no modo institucionalizado pelos manuais escolares para atender às necessidades de ensino e aprendizagem por eles preconizadas. Isso inclui a naturalização das tarefas matemáticas como saberes práticos e, como tais, limitados às situações específicas restritas à matemática, sem conexões com problemas do mundo real e, tampouco, com outras tarefas matemáticas as aprendidas e as ainda a serem ensinadas.

As quatro operações básicas entre números naturais, por exemplo, se fazem presentes desde os primeiros passos no mundo da matemática escolar, chegando a

se naturalizar como um saber prático, sem evidências teóricas que as justifiquem, como se pode depreender do seguinte extrato de texto.

A maior parte das tarefas institucionais são, de fato, tarefas *rotineiras*: a técnica utilizada para realizá-las, mesmo que tenha sido construída um dia, foi se tornando rotineira, ao ponto de não mais aparecer como tal – utilizar esta técnica para realizar uma tarefa acontece por si mesmo e não coloca nenhum problema para a pessoa⁷⁴ (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 06, grifo dos autores, tradução nossa).

As situações associadas à regra de três, que é apresentada no sétimo ano do ensino fundamental brasileiro, emergem em diferentes posições do ensino, inclusive em diferentes disciplinas do ensino médio e superior, mas nem sempre como associadas ao mesmo tipo de tarefas e técnicas matemáticas. Ora como aplicação da quarta proporcional, ora como função linear, recíproca e até como função homogênea. Em cada posição das escolas, pode-se apontar discursos tecnológicos-teóricos que produzem os tipos de tarefas e técnicas diferentes, mas, em geral, não guardam conexões entre si.

No ensino da Matemática do nível básico existe uma ausência dominante de discursos teóricos. Uma breve visita às organizações matemáticas presentes nos livros textos revela a estrutura das organizações de ensino com três componentes: definição, exemplos e exercícios. Os vestígios teóricos encontrados são indiscutíveis, por definição no linguajar matemático, que são convenientes para reduzir o estudo aos exercícios, sem que se saiba de que questões vêm e para que questões conduzem.

Essa desconexão interna da Matemática é evidenciada pelos Modelos Epistemológicos de Referência para um dado tema ou setor da disciplina Matemática e tem sido enfrentada por diferentes pesquisadores da didática da matemática (BOSCH *et al.*, 2006, GARCIA *et al.*, 2006, FONSECA; GASCÓN; LUCAS, 2014), mas ainda está em seus primeiros passos para influenciar as organizações de matemática para o ensino.

Assim, embora a Matemática possa fornecer quadros teóricos e tecnológicos para encaminhar os procedimentos matemáticos com segurança para as tarefas, é preciso ficar claro que esses saberes não são, e nem estão, claros a priori num

⁷⁴ Fragmento do texto: *La plupart des tâches institutionnelles sont, en effet, des tâches routinières: la technique utilisée pour les accomplir, bien qu'ayant été construite un jour, a été routinisée, au point de ne plus apparaître comme telle – utiliser cette technique pour accomplir une telle tâche va désormais de soi et ne pose plus aucun problème.*

processo de modelagem. As restrições impostas pela noosfera⁷⁵ (CHEVALLARD, 2005), que inclui argumentos da Pedagogia e das instituições matemáticas sobre o currículo, impedem que os saberes teóricos habitem as escolas do nível básico.

O equipamento de praxeologias matemáticas disponíveis aos sujeitos de uma dada posição do ensino básico, no caso, alunos e professores de um dado ano, para a realização da tarefa T_2 é reduzido ao equipamento praxeológico institucional disponível àquela posição escolar. Assim, em geral, as praxeologias que prevalecem para o processo de modelagem são as que foram tornadas rotineiras no percurso escolar em diferentes posições da escola, até as que são admitidas como possíveis pela instituição como objetos de estudo, no aqui e agora, do processo de modelagem.

As restrições impostas pela noosfera também agem sobre as tarefas seguintes T_3 e T_4 . Em particular, o tipo de tarefa T_3 que consiste em interpretar uma resposta produzida pelo modelo matemático, ou seja, a tríade: [*Questão (Q)*, *Situação (St)*, *Praxeologia Matemática Customizada (PMC)*], sendo a **PMC** constituída por tarefa (T) e técnica (τ).

A tarefa T_3 pode ser tomada como a de verificar a consistência da resposta frente aos dados das tarefas T_1 e T_2 , e a pertinência dessa resposta específica frente à questão Q para a situação específica St.

Isso quer dizer que se deve checar a consistência do resultado específico, tendo em conta o aspecto matemático, pelo cruzamento de dados e respostas, que dependem de saberes matemáticos, e a factibilidade desse resultado para a situação St, que depende de saberes específicos não matemáticos.

Por exemplo, o cálculo da idade gestacional – **IG** - de uma grávida é realizado pelas enfermeiras de uma dada unidade de saúde pelo seguinte modelo matemático:

$$IG = \frac{NDUM}{7}$$

Na expressão matemática, a grandeza **NDUM** denota o número de dias entre o dia da última menstruação e o dia da consulta. O procedimento matemático deve responder à questão Q: Qual a idade semanal da gestante? A resposta a essa

⁷⁵ O termo noosfera segundo Chevallard (2005, p.28-29) designa a esfera onde se pensa, segundo modalidades muito diferentes, o funcionamento didático, onde se inclui os representantes do sistema de ensino, os pais dos alunos, os especialistas de uma disciplina e até mesmo os representantes políticos.

questão é encaminhada pela tarefa: Calcular o valor numérico de **IG**, conhecido o valor numérico de **NDUM**.

Foi solicitado a uma estagiária que determinasse o **IG** de uma grávida com última data de menstruação em 29 de agosto de 2018 e dia da consulta em 10 de dezembro de 2018.

A estagiária apresentou a seguinte resposta, considerando o período de agosto a dezembro - 2 dias do mês de agosto, 30 dias do mês de setembro, 31 dias do mês de outubro, 30 dias do mês de novembro e 10 dias do mês de dezembro:

$$\mathbf{IG} = \frac{2 + 30 + 31 + 30 + 10}{7} = 14,7142 \dots$$

A resposta da tarefa matemática é consistente com os dados usados e por isso foi anunciada pela estagiária como resposta para a situação específica; 14,7142 semanas.

No entanto, a resposta foi rejeitada pela instituição Enfermagem, representada pelo professor-preceptor. Segundo ele, a **IG** não admite valores numéricos decimais como expressado pela estagiária e, portanto, não poderia ser aceita como resposta.

A resposta para a situação deve ser encaminhada em acordo com o contexto das práticas de enfermagem que tratam de grávidas como evidencia esse caso. A resposta do modelo não pode ficar restrita a uma tarefa matemática, pois depende da especificidade do tipo de situação.

A resposta precisa ser dada em valores numéricos inteiros que, segundo o professor-preceptor é 14 semanas e 5 dias. O modo de chegar a essa resposta faz parte do modelo, mas não da tarefa matemática, com saber alcançado na prática.

As interpretações dos resultados matemáticos dependem fortemente da situação e, portanto, dos saberes não matemáticos que envolvem a situação. De outro modo, a tarefa **T₃** não tolera a descontextualização e, como tal, se põe como portadora de saberes pré-construídos. Esses saberes são determinantes para determinar a qualidade da resposta produzida para o questionamento da realidade.

O tipo de tarefa **T₄** demanda julgar a razoabilidade da resposta perante o problema concreto, independente de qual técnica será utilizada para isso. A razoabilidade se encontra na racionalidade do contexto das práticas e, como alerta

Chevallard (1999, p. 224), o que é racional em uma instituição pode parecer como pouco racional em outra.

Em geral, a razoabilidade é apontada empiricamente fazendo variar os dados para a situação específica de modo a avaliar a boa qualidade, ou não, de respostas produzidas pela tarefa matemática e adequadas pela interpretação às especificidades das situações consideradas.

A baixa qualidade de uma resposta pode ser suficiente para rejeitar um modelo, no caso, o questionamento sobre a realidade, a situação ou a tarefa matemática e ou a técnica matemática.

Para exemplificar, recorremos a um problema sobre contexto concreto:

Dois produtos são disponibilizados no mercado em duas embalagens. Uma embalagem de custo igual a R\$ 50,01, que contém dez unidades de um produto e cinco unidades de outro produto, enquanto outra embalagem custa R\$ 25,02 e contém cinco e dez unidades respectivamente dos mesmos produtos.

Questionamento da realidade: Q: Qual o valor de custo de x unidades do primeiro produto mais y unidades do segundo?

Tarefa matemática - Calcular o valor numérico de C na expressão numérica:

$$C_1 x + C_2 y = C$$

Essa tarefa exige respostas das seguintes questões conectadas:

Q₀₁: Quais são os custos unitários de cada produto, C_1 e C_2 , respectivamente?

Tarefa matemática - Resolver o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 10C_1 + 5C_2 = 50,01 \\ 5C_1 + 10C_2 = 25,02 \end{cases}$$

Técnica matemática: Substituição e eliminação com uso de dispositivo eletrônico, considerando os dados numéricos com duas casas decimais após a vírgula, conforme o contexto do problema que envolve uso da moeda brasileira, no caso em reais, que admitem como unidade mínima 0,01, ou seja, 1 centavo.

Nesse caso, o sistema apresenta como resultado $C_1 = \text{R\$ } 5,00$ e $C_2 = \text{R\$ } 0,00$, o que leva à conclusão que o segundo produto tem custo nulo, o que parece uma solução não factível, independente da consistência do resultado encontrado em

relação aos dados considerados. Mas, a observação sobre as embalagens revela que esses custos não são consistentes com os custos dados dessas embalagens.

Esse modelo, para diferentes dados, se mostra robusto em interpretação, mas falha nessa situação específica. No entanto, a falibilidade reside na técnica e isso pode levar à rejeição do modelo. Os saberes práticos sobre praxeologias matemáticas com dispositivos eletrônicos podem ser determinantes na validação do modelo. Nesse caso, a mudança de técnica pode levar à validação do modelo.

Portanto, quanto maior o universo cognitivo da pessoa, ou seja, o conjunto de relações da pessoa, aluno ou professor, com os tipos de contextos que retratam os problemas e praxeologias matemáticas, maior será o seu repertório de situações, tarefas e técnicas matemáticas que podem encaminhar respostas aos questionamentos sobre uma dada realidade.

Nesse sentido, Julie (2002) alerta que “a modelagem matemática não deve ser apenas um veículo para as ideias matemáticas. Permanecer nesse nível esconde o trabalho de bastidores e as complexidades envolvidas na construção de um modelo matemático”⁷⁶ (JULIE, 2002, p. 02, tradução nossa).

Pesquisas apontam que as abordagens holísticas de MM são mais eficazes para alunos com baixo desempenho em Matemática (KAISER; BRAND, 2015) e isso estimula seu uso, inclusive por ter foco na totalidade do processo de modelagem, em sua complexidade de organização híbrida, matemática com não matemática, ao mesmo tempo, que permite reduzir essa complexidade assumindo o procedimental da Matemática como saber prático, inclusive realizado por meio de *softwares* matemáticos.

Isso é, particularmente, vantajoso considerando que a velocidade de decisões aumenta e com isso reduz o substancial tempo demandado pelo ciclo holístico; o computador permite que se manipulem muito mais informações do que poderia ser feito manualmente (BISSCHOP, 2019).

O guia de otimização de modelos, especificamente, o AIMMS, revela que não é preciso ser um matemático para se tornar um bom modelador, quando assim destaca:

São necessários algoritmos matemáticos para obter soluções de modelos matemáticos. Felizmente, existem algoritmos que têm ampla aplicação e oferecem soluções para classes inteiras de modelos matemáticos. Como

⁷⁶ Fragmento original do texto: *Mathematical modelling should not only be a vehicle for these mathematical ideas. Remaining at this level conceals the “behind-the-scene” work and intricacies involved in the construction of a mathematical model.*

um construtor de modelos, você pode optar por não adquirir um conhecimento aprofundado desses algoritmos, pois eles estão comercialmente disponíveis e acessíveis diretamente em um sistema de modelagem⁷⁷ (BISSCHOP, 2019, p. 5, tradução nossa).

No entanto, esse guia de otimização chama a atenção de que existem exemplos de modelos em larga escala para os quais os algoritmos padrões de solução já não são suficientes e, portanto, que novos algoritmos especiais precisam ser desenvolvidos. Estas afirmações sugerem que as abordagens holísticas podem ser vistas como condições favoráveis para promover o encontro do aluno com novas técnicas e até de teorias matemáticas.

Sob esse pensar, o ensino de Matemática com MM deve ser encaminhado de modo holístico, como sugere OCDE/Pisa (BRASIL, 2012), mas sem perder de vista aspectos atomísticos.

De qualquer modo, holístico ou atomístico, persiste a compreensão de que um professor ou aluno frente a um problema em contexto que já pertencente ao conjunto de suas relações pessoais, encaminha a situação em dialética com os *habitus* que conformam o contexto com matemática, e engendra a praxeologia com matemática adequada, tudo em ato prático, como se fora um único jeito, de formular a tarefa matemática e empregar a técnica ou procedimento matemático.

Nesse caso, o ciclo parece incompleto e pode ser tomado como uma técnica didática “espontânea”⁷⁸ do professor ou aluno frente ao problema em contexto concreto, no sentido de uma técnica não organizada previamente em seus detalhes, mas, ao contrário, que é improvisada dependendo do tipo de situação (BOSCH; GASCÓN, 2001).

A técnica didática espontânea do professor se estende a uma praxeologia espontânea do aluno no sentido encaminhado por Blum e Borromeo Ferri (2009), ou seja, a de ser um esquema do professor que não deve ser usado pelos alunos, mas tão somente em seus insucessos, como uma ajuda para suas dificuldades, e, portanto, que deve ser incorporado por eles de modo gradual e cuidadoso, como os exercícios de repetição que levam ao sucesso das práticas sem saber exatamente o quê, e o porquê, do que faz funcionar tal prática.

⁷⁷ Fragmento do texto: *Mathematical algorithms are needed to obtain solutions of mathematical models. Fortunately, there are algorithms that have wide spread application and give solutions for whole classes of mathematical models. As a model builder you can choose not to acquire an in-depth knowledge of these algorithms as they are commercially available and directly accessible within a modeling system.*

⁷⁸ A técnica didática “espontânea” não está previamente organizada em seus detalhes, mas ao contrário, muitas delas são improvisadas em situação (BOSCH; GASCÓN, 2001).

Mas, à luz da TAD, o ciclo de MM está longe de ser aceito como prática inquestionável (GARCIA *et al.*, 2006) e assim, interpretamos que as outras componentes e conexões do ciclo se fazem invisíveis nas certezas do uso da práxis que as tornam não discutíveis para uma dada situação em contexto. Em geral, nas praxeologias em ato, somente o saber-fazer se faz ver, pois a partir de um saber-fazer, um sujeito como o professor observando as praxeologias dos alunos, a parte tecnológico-teórica parece estar ausente, porque ela não se faz visível (ou é mal visível) (CHEVALLARD, 2009a, p. 4).

Assim, compreendemos o ciclo de MM como modelo do processo de MM e, portanto, não se confunde com o processo de MM em ato sobre um tipo de problema em contexto concreto, mas que o ciclo de MM como modelo do processo de MM pode se constituir em ferramenta para o professor organizar o processo de ensino.

Independentemente de o ciclo de MM como ferramenta ser útil para as pesquisas que buscam compreender como se dá um processo de modelagem em sala de aula, essa ferramenta pode permitir aos professores encontrar, nem todos, possíveis “erros” de alunos no processo de ensino e aprendizagem a partir do desenvolvimento do ciclo de MM em dada situação.

De outro modo, reafirmamos o ciclo de MM como um modelo praxeológico do processo de modelagem, mas como uma OPC que funciona para responder a questionamentos sobre um domínio de realidade e que, embora possa ser vista como constituído de praxeologias (componentes) e conexões entre elas, constitui um complexo de tarefas codisciplinares. Estas incluem de modo indispensável praxeologias da disciplina matemática e praxeologias de saberes práticos não disciplinares, todas articuladas e integradas a partir de intencionalidades, nem todas determinadas *a priori*, sobre os domínios de realidade questionados nesse processo.

Para minimizarmos a complexidade do desenvolvimento do ciclo de MM, passamos a interpretá-lo como uma OPC, ou seja, como o desenvolvimento de uma organização praxeológica em ato, com caminhos nem sempre visíveis, mas que podem se tornar visíveis, de algum modo, a partir de Percurso de Estudo e Pesquisa, ou simplesmente *PEP*. Este não necessariamente orientado pelo modelo estrutural de organizações praxeológicas em crescente complexidade, dominante em pesquisas sob o suporte teórico da TAD, mas segundo a necessária introdução cuidadosa e gradual do processo, privilegiando primeiramente, o uso eficaz de

praxeologias customizadas, passando pelo estudo de praxeologias matemáticas e suas customizações para atender diferentes situações em contextos diversos, até a recriação de modelos matemáticos em sala de aula.

Essa intencionalidade busca orientar o PEP de modo a atender as recomendações de Blum e Borromeo Ferri (2009), após observarem em suas experiências que seria necessária uma introdução cuidadosa e gradual de um plano de solução, bem como exercícios repetidos de como utilizá-lo em sala de aula, além de Blum (2011; 2015 *apud* GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016), quando destacam a necessária inclusão de uma ampla variação de contextos, bem como de domínios matemáticos, para orientar os alunos a transferir estratégias de uma tarefa de modelagem para outra.

A intencionalidade didática supra descrita, em consonância com os três gestos que caracterizam uma verdadeira atividade matemática (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001), isto é, *utilizar a matemática conhecida; aprender e ensinar matemática e criar uma matemática nova*, nos levaram a reafirmar os três seguintes gestos, ou gênero de tarefas, que orientam o PEP como um processo de MM escolar:

- **G₁** - Usar praxeologias matemáticas rotineiras da escola, de modo customizado, em situações com matemática escolar sobre contextos reais do cotidiano escolar e do seu entorno social;
- **G₂** - Estudar e, com isso aprender, modelos matemáticos, entendidos como os questionamentos sobre contextos concretos, as situações com matemática e praxeologias matemáticas customizadas associadas;
- **G₃** - Criar, mesmo que se reduza apenas à customização, modelos matemáticos para novas situações com Matemática em contextos a partir de analogias ou homologias com outras situações com matemática, inclusive as praxeologias customizadas associadas, sobre contextos concretos estudados em **G₁** e **G₂**.

Esses gestos consideram a complexidade do ciclo como produtora de dificuldades a serem enfrentadas por uma classe, em particular, o não conhecimento

ou a falta de experiências sobre situações com matemática, e praxeologias customizadas associadas, sobre contextos concretos que se deseja construir um modelo matemático para atender um dado propósito para um dado domínio de realidade, pois, em contrário, o modelo matemático é estabelecido em um procedimento direto que pode ser visto como uma simples matematização (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016), ou seja, uma estrita realização de G_1 .

De outro modo, pressupomos esses gestos como fundamentos para o desenvolvimento do ciclo de MM que permite questionar as tarefas de formular, empregar, interpretar e validar e, com isso, além de reduzir a crença sobre a existência de modeladores profissionais generalistas, por exemplo, e ao mesmo tempo, enfrentar a complexidade do ciclo em ato por meio dos indispensáveis saberes não-matemáticos que conformam os domínios de realidades.

O PEP Orientado pelos três gestos aqui parafraseados da verdadeira atividade de MM escolar sobre problemas em contextos concretos é, então, encaminhado no próximo capítulo.

CAPÍTULO 4 - PERCURSO DE ESTUDO E PESQUISA ORIENTADO E EMPIRIA DE FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

Neste capítulo propomos a partir de noções teórico-metodológicas da TAD, o Percurso de Estudo e Pesquisa Orientado, de modo a preservar as características dos cinco gestos que caracterizam uma verdadeira pesquisa (CHEVALLARD, 2013b) e, de maneira mais inclusiva, orientado pelos três gestos aqui definidos como gestos genuínos que definem uma verdadeira atividade de MM escolar. Além disso, encaminhamos uma empiria de formação inicial de professores sob essa noção aqui proposta que, em última instância, permitiu outros desdobramentos.

4.1 Percurso de Estudo e Pesquisa

Entendemos que o ciclo de MM dominante adotado pela OCDE/Pisa (BRASIL, 2012) não é necessariamente realizado de maneira consciente e controlada em sala de aula, ao considerar a complexidade existente nesse processo. Dificuldades são tornadas não-questionáveis, talvez por contratos didáticos que centralizam no professor a atividade de ensino de MM, deixando ao aluno o papel de assumir o que o professor propuser (VERONEZ; CASTRO; MARTINS, 2018), em contraposição ao desejável contrato didático que mantenha um equilíbrio permanente entre a orientação mínima do professor e a independência máxima do aluno, como defendem Blum e Borromeo Ferri (2009).

O professor então assume papel de protagonista principal nessa atividade, uma vez que condiciona o que deve ser aprendido e como deve ser aprendido, por exemplo, limitando as atividades de MM no estrito campo da Matemática, em geral, como uma tarefa de aplicação. As dificuldades são tomadas como falta de experiências com esse tipo de tarefas e, em consequência, a velha máxima generalista do ensino da Matemática se faz presente; quanto mais exercícios com tarefas de aplicação da Matemática a pessoa enfrentar, mais automaticamente essa pessoa será bem-sucedida nesse tipo de tarefas.

No entanto, pressupomos que as atividades de MM escolar não se resumem à aplicação de saberes matemáticos, uma vez que essas atividades são condicionadas por outros saberes, práticos e teóricos não-matemáticos, que condicionam e são condicionados por saberes matemáticos. Essa complexidade

aqui destacada é também percebida por outros autores que chegam a fazer recomendações sobre considerar conjuntos apropriados de tarefas de modelagem, como fazem Maaß (2006) e Blum (2011), considerando uma ampla variação de contextos, bem como de domínios matemáticos, como necessária para orientar os alunos a transferir estratégias de modelagem de uma tarefa para outra (BLUM, 2011; 2015).

Essas recomendações, no entanto, não têm implicações necessariamente sobre o contrato didático dominante em MM centralizado no professor (VERONEZ; CASTRO; MARTINS, 2018). Contudo, sobre a compreensão do ciclo de MM como uma OPC nos conduzem à condição de mudança desse contrato, já que uma OPC demanda o uso do instrumento metodológico proposto por Chevallard (2009b) denominado de Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), para desenvolvimento e análise de organizações praxeológicas ou, mais geralmente, para estudo e investigação das condições e restrições que agem sobre a difusão de praxeologias com matemáticas, o que inclui as praxeologias matemáticas.

O PEP é uma metodologia de pesquisa e/ou desenvolvimento de respostas R , em geral, entendidas como organizações praxeológicas para uma dada questão Q , por uma comunidade de estudo, entendida aqui como a classe $[X, Y]$ constituída de um pesquisador e/ou um professor Y , e de seus alunos, ou professores em formação X . O propósito é produzir respostas parciais R_i para as questões parciais Q_i , geratrizes ou auxiliares, para situações, por meio do estudo e/ou investigação de obras ω_i , o que inclui respostas praxeológicas reconhecidas e acessíveis pela comunidade, por meio do que Chevallard (2005) denomina de sistemas didáticos, denotado por $S_i(X, Y, \omega_i)$.

O PEP pode ser entendido, então, como um desdobrar de sistemas didáticos questionadores $S(X, Y, Q_{ij})$, em sistemas didáticos auxiliares $S(X, Y, \omega_j)$, inclusive, em sistemas didáticos solitários, em que $X = Y$, que encaminham o estudo de obras com pertinência cancelada pelo diretor de estudo. A esse respeito, Chevallard (2009a) expressa que:

Começamos a ver a idéia de PER engendrado por pequeno número de questões indeterminadas $Q_1, Q_2, Q_3, \text{ etc.}$, de onde o professor ou pesquisador, por exemplo, tira questões "determinadas" $Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, \dots, Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}, \dots, Q_{31}, Q_{32}, Q_{33}, \dots$, que levam ao reencontro com o conjunto de obras essenciais do programa de um certo domínio... Uma mesma questão Q pode conduzir uma classe à reencontrar um complexo de obras que podem variar dependendo do percurso tomado (o que depende da

atividade dos alunos X, das decisões do professor ou pesquisador Y, mas também dos recursos praxeológicos R_i^\diamond e O_j atualmente acessíveis⁷⁹ (CHEVALLARD, 2009b, p. 28, tradução do nossa).

Aos recursos praxeológicos entendidos, inclusive como praxeologias prontas, existentes na sociedade, Bosch e Gascón (2010) se referem do seguinte modo:

Surge da necessidade de fundamentar as organizações didáticas- tanto as escolares como de qualquer outro tipo de instituição- em uma epistemologia realmente *funcional*, na qual os saberes apareçam como “maquinas” produtoras de conhecimento úteis à criação de respostas R às questões Q⁸⁰ (BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 82, grifo dos autores, tradução nossa).

O PEP é desenvolvido considerando a necessidade de fundamentar respostas existentes ou produzidas para as questões que emergem para responder à questão geratriz Q. Esse caminhar de elaboração de respostas supõe, assim, a construção paulatina do meio didático M ao longo desse processo e que permitirá encaminhar a resposta desejada para a questão geratriz.

Chevallard (2009b) considera, como elementos desse meio M, as respostas parciais, existentes ou produzidas pela comunidade em estudo, mesmo que elas sejam rejeitadas, e as obras estudadas que fundamentam, de algum modo, essas respostas, bem como as questões que levaram a elas, sem esquecer-se de mencionar o caráter codisciplinar dessas questões. Nesse sentido, o autor afirma que:

A natureza dessas obras será especificada de acordo com a necessidade; em regra geral, ver-se-á que elas virão de diversos campos de conhecimento: portanto, fala-se de *investigação codisciplinar* a propósito das investigações que teremos de conduzir. Refinamos um pouco a modelização do meio M, fazendo aparecer, explicitamente, entre as “outras obras”, um tipo de obra essencial: as *questões* que são geradas pelo estudo da questão Q e, também, pelo estudo das respostas R_i^\diamond e das “outras obras” O_k necessárias para se utilizar, efetivamente, estas respostas e estas outras obras (teorias, experimentações, etc.). Recriar-se-á então o meio M sob a seguinte forma: $M = \{R_1^\diamond, R_2^\diamond, R_3^\diamond, \dots, R_n^\diamond, Q_{i+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p\}$ ⁸¹ (CHEVALLARD, 2013b, p.1-2, grifos do autor, tradução nossa).

⁷⁹ Fragmento do texto: *on voit poindre l'idée d'un petit nombre de PER, engendrés par des questions indéterminées Q_1, Q_2, Q_3, \dots , dont Y (par exemple) tire des questions « déterminées » $Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, \dots, Q_{21}, Q_{22}, Q_{23}, \dots, Q_{31}, Q_{32}, Q_{33}, \dots$, qui fassent rencontrer ensemble l'essentiel des œuvres du programme dans un certain domaine. Une précision terminologique doit être apportée en ce point: une question Q appelle une enquête, laquelle se concrétise en un certain parcours d'étude et de recherche. Une même question Q peut ainsi conduire une classe à rencontrer un complexe d'œuvres qui peut varier selon le parcours emprunté (lequel dépend de l'activité de X, des décisions de y, mais aussi des ressources praxéologiques R^\diamond_i et O_j actuellement accessibles).*

⁸⁰ Fragmento do texto: *Serge de la necesidad de fundamentar las organizaciones didácticas -tanto las escolares como las de cualquier otro tipo de institución- en una epistemología realmente funcional, en la que los saberes aparezcan como "maquinas" productoras de conocimiento útiles a la creación de respuestas R a las cuestiones Q.*

⁸¹ Fragmentos do texto: *La nature de ces œuvres sera précisée selon les besoins ; en règle générale, on verra qu'elles relèveront de champs de connaissance divers : on parlera donc d'enquêtes codisciplinaires à propos des*

O procedimento descrito no extrato de texto é representado por Chevallard (2009a; 2009b; 2013b) a partir do que ele denomina de esquema herbartiano expandido como segue:

$$[S(X; Y; Q) \leftrightarrow \{R_1^o, R_2^o, \dots, R_n^o, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p\}] \mapsto R^*$$

Embora a notação usada por Chevallard (2013b) explicita as respostas R, as questões Q e as obras O, é importante destacar que o meio M não se restringe somente a esses elementos, pois se constitui como produto e produtor de situações que emergem no processo e que são encaminhadas e encaminham as questões Q_{n+1}, \dots, Q_m da investigação, e, não menos importante, nem todas restritas à atividade matemática, pois podem emergir das necessidades de saberes de outros campos de conhecimento.

O PEP usado em uma comunidade de professores em formação X, para o enfrentamento de uma questão relativa à profissão docente como, por exemplo, o desenvolvimento de uma organização praxeológica para o ensino de um dado saber, se constitui em um percurso codisciplinar de formação de professores. Por isso é que, como um dispositivo questionador de mundo (CHEVALLARD, 2009a), de modo quase inevitável, leva a questionamentos sobre o currículo vigente nas escolas.

De qualquer modo, o PEP, em última instância, pode ser visto como um dispositivo criador de situações que geram um meio que permite criar outras situações que levam os sujeitos, professor-pesquisador e aluno-professor, a manipularem diferentes saberes como “*máquinas*” (CHEVALLARD, 1992) para produzir respostas aceitáveis por essa comunidade de estudo para uma dada questão considerada problemática.

É importante destacar que o PEP cria condições que implicam, em simultaneidade, sobre a mesogênese, a topogênese e a cronogênese da atividade didática.

A mesogênese diz respeito à construção do meio (M), que não deve estar pronto *a priori* e sim construído a partir das produções externas e internas à classe, como os questionamentos Q_i e as respostas R_i pessoais dos alunos (X) que podem

enquêtes que nous aurons à conduire. On affinera toutefois un peu la modélisation du milieu M en y faisant apparaître explicitement, parmi les « autres œuvres », un type d'œuvres essentiel : des questions, qui sont engendrées par l'étude de la question Q et aussi par l'étude des réponses R_i et des « autres œuvres » O_k nécessaire pour bien utiliser ces réponses et ces autres œuvres (théories, expérimentations, etc.). On réécrira donc le milieu M sous la forme suivante : $M = \{R_1, R_2, \dots, R_n, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p\}$.

vir a ser respostas chanceladas R_i^\diamond pela classe $[X, Y]$, como uma possível resposta R^\heartsuit desejada por essa classe para uma ou mais questões Q_k , todas a partir de dialéticas entre as mídias, entendidas como os alunos (X), professor (a) (Y), obras, e o meio M até então construído em presença dos materiais adequados para a construção dessa resposta R^\heartsuit validada em presença das restrições institucionais impostas. Assim, o meio M pode ser descrito da seguinte forma:

$$M = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_p, R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, O_{n+1}, \dots, O_m\}$$

Chevallard (2009a) destaca que nas práticas escolares tradicionais, existem vários tipos de obras que poderiam constituir o meio M, mas que são excluídas por se fazerem clandestinas, como os exercícios corrigidos ou qualquer outro fato usado discretamente pelos alunos.

A condição mesogenética, assim encaminhada, afeta a topogênese, ou seja, a constituição do meio *M* é *da classe* $[X, Y]$, ou seja, dos alunos (X) e do professor (Y) e não somente do professor (Y). Isto acarreta no rompimento do contrato didático centrado no professor.

Os alunos não apenas podem elaborar respostas pessoais, como também produzir soluções e propor obras para serem estudadas. Essa mudança sobre o *topos*⁸² dos alunos está associada à mudança sobre o *topos* do professor. Este passa a assumir o papel de diretor do estudo, ou seja, de decidir, em última análise, depois de diálogos com os alunos, se a classe $[X, Y]$ e o meio M de estudo incluirá ou excluirá uma dada obra, o tipo de estudo particular, como o grau de profundidade desse estudo, bem como documentar de alguma maneira, as respostas dos alunos sujeitas às dialéticas das mídias e do meio, e zelar para que nenhuma mídia tenha o privilégio de ser “a primeira e única fala”.

Finalmente, o trabalho sobre o meio M afeta sua constituição e os papéis dos alunos e do professor no grande sistema didático, que se institui para o percurso de estudo, ao afetar a cronogênese que passa a ser facilmente identificada como “o calcanhar de Aquiles” de um PEP, pois implica em um “trabalho reiterado” de sistemas didáticos auxiliares que levam à *dilatação do tempo didático* e, portanto, de uma *extensão do tempo de relógio*, necessário para o estudo.

⁸² O termo *topos* é derivado do termo topogênese, que de acordo com a TAD, é relativo à posição dos sujeitos em um sistema didático.

Assim, a direção do estudo, no caso o professor ou investigador, não pode se exceder nos *habitus professorais* tradicionais de induzir o estudo de modo artificial e, com isso, incluir ferramentas não propostas pela investigação em curso, mesmo que, em particular, seja normalmente associada à organização dominante disciplinar.

O PEP produz rupturas com o contrato didático tradicional mencionado anteriormente e sugere que o ciclo deve ser visto como um dispositivo metodológico que busque promover condições para fazer manter, modificar ou criar novas relações pessoais com dados domínios de realidades. Tais dados devem funcionar como organizadores prévios para essas pessoas reagirem em diferentes contextos com sentido prático de forma coerente socialmente, no sentido de ser adequado, necessário, possível e valorizado.

Como dispositivo didático, o PEP para desenvolvimento do ensino de MM pressupõe essa intencionalidade de aprendizagem da MM no seio da instituição escolar. Portanto, esse dispositivo está subordinado às condições impostas pela escola, pedagogia e, ainda, pela disciplina Matemática.

Esta última pode se manifestar como restrições da instituição matemática, em geral, por meio dos professores, que assumem como seu o papel de controle e até de gestão do conjunto das práticas escolares que põem a matemática em jogo (CHEVALLARD, 2005). No entanto, o caráter codisciplinar do PEP contribui para a redução, senão a eliminação dessa restrição.

Preservando as características do PEP, propomos o *PEP Orientado*, ou simplesmente PEPO, a partir da orientação do estudo por meio dos três gestos seguintes, que definem uma atividade genuína de MM escolar:

- G_1 - Usar praxeologias matemáticas rotineiras da escola de modo customizado em situações com Matemática escolar sobre contextos reais do cotidiano escolar e do seu entorno social;
- G_2 - Estudar e, com isso aprender, modelos matemáticos, entendidos como os questionamentos sobre contextos concretos, as situações com Matemática e praxeologias matemáticas customizadas associadas;
- G_3 - Criar, mesmo que se reduza apenas à customização, modelos matemáticos para novas situações com Matemática em contextos a partir de analogias ou homologias com outras situações com

Matemática, inclusive as praxeologias customizadas associadas, sobre contextos concretos estudados em G_1 e G_2 .

Nossa afirmação se sustenta a partir da observação que o PEPO assume esses três gestos que definem a atividade de MM escolar de modo mais inclusivo e assim preserva os gestos da uma verdadeira atividade de investigação que caracteriza o PEP, mais precisamente, os cinco gestos expressos por Chevallard (2013b):

- H_1 - Observar as respostas R^\diamond que vivem nas instituições;
- H_2 - Analisar - notadamente em duplo plano experimental e teórico - essas respostas R^\diamond ;
- H_3 - Avaliar essas mesmas respostas R^\diamond ;
- H_4 - Desenvolver uma resposta própria, R^\heartsuit ;
- H_5 - Difundir e defender a resposta R^\heartsuit assim produzida⁸³ (CHEVALLARD, 2013, p. 3, tradução nossa).

Interpretamos o gesto genuíno G_1 como o gesto H_1 , uma vez que observar é empregado por Chevallard (2013b) no sentido de dar a conhecer e conhecer, no sentido da TAD, é usar de modo adequado. O gesto G_2 é interpretado como gesto mais inclusivo de H_2 e H_3 , uma vez que analisar e avaliar são gestos indispensáveis, embora nem sempre objetivamente explícitos, de quem estuda. O gesto G_3 é um gesto mais inclusivo dos demais em que interpretamos como os gestos H_4 e H_5 , pois desenvolver, difundir e defender são gestos indispensáveis na criação e na legitimação de novas respostas.

De outro modo, a orientação dos três grandes gestos de uma verdadeira atividade de MM escolar se integra às atividades da direção de estudo do PEP, ou seja, cabe ao *topos* do diretor de estudo e, portanto, não está ao alcance dos alunos no desenvolvimento do PEPO como dispositivo didático, do mesmo modo que é pressuposto no desenvolvimento de qualquer PEP para os gestos de uma verdadeira pesquisa.

Considerando que esses grandes gestos G_1 , G_2 e G_3 devem de forma mais inclusiva encaminhar os estudos, podemos dizer que o PEPO não se confunde com o PEP quando destituído de qualquer orientação *a priori*, mesmo que restrita ao *topos* do diretor de estudo.

⁸³ Fragmento traduzido no artigo "A prática de ensino como formação docente do professor de matemática", publicado na Revista Amazônia, de autoria de Mesquita e Guerra (2017).

4.2 Percurso de Estudo e Pesquisa Orientado

O PEPO é desenvolvido sob a direção de estudo que objetiva a realização dos três gestos, G_1 , G_2 e G_3 , iniciando com esses gestos em sequência, uma vez que cumprido, pode levar a resposta procurada. Caso a resposta não seja encontrada, o processo se reinicia a partir do primeiro gesto, se necessário, seguindo os demais.

É necessário aqui fazer uma distinção entre a resposta que um modelo matemático produz para uma situação em contexto e a resposta produzida pelo ciclo de MM na perspectiva do PEP.

No primeiro caso, a resposta desejada R^\vee é uma resposta a uma situação sobre um dado contexto concreto que, em geral, é validada sob algum critério, nem sempre claro, com base em uma solução produzida por uma técnica matemática para um tipo de tarefa matemática associada a essa situação. Aqui, o modelo matemático é, em geral, reduzido à **PMC**: [tarefa (T), técnica (τ)], com destaque para a resposta por ele produzida e que a legitimou, sem destaque para possíveis influências do tipo de situação e questão que a encaminharam.

No segundo caso, que é de nosso interesse, a resposta R^\vee é tomada como produto de um processo de estudo objetivamente mais amplo, com integração de saberes, matemáticos e não matemáticos, que aqui expressamos pela noção de modelo matemático descrito pela tríade [**Q**, **St**, **PMC**], ou seja, a questão (**Q**) que encaminha a situação (**St**) de uso e as tarefas (T) em seus modos de fazer (τ), isto é, a **PMC**. É oportuno destacar que encontrar essa última resposta demanda considerar as respostas referidas no primeiro caso.

A questão **Q** dita geratriz é, em geral, uma questão indeterminada sobre um dado contexto concreto, no sentido de que para ser respondida exige encaminhar questões determinadas, para serem associadas a situações determinadas, inclusive com matemática, e, portanto, com praxeologias associadas que produzem respostas determinadas. Assim, teremos respostas que podem estar prontas, no sentido de serem portadoras de questões determinadas para situações determinadas com as **PMC** associadas que permitem acessar, para poder produzir uma nova resposta pela classe [X, Y].

Com essa compreensão esboçada, e com propósito de melhor compreender seu funcionamento em ato, encaminhamos uma empiria de modo a nos prover novos conhecimentos sobre o ciclo de MM na perspectiva do PEPO.

4.3 Empiria de formação inicial de professores em Modelagem Matemática

O percurso de estudo desenvolvido em um curso de formação inicial de professores, com vinte horas, foi realizado em sete sessões com a participação de cinco professores do curso de Licenciatura Integrada em Educação em Ciências, Matemática e Linguagens, daqui em diante LIECML, de uma universidade pública federal do Brasil.

A proposta de formação inicial de professores em MM foi vinculada como parte das ações desenvolvidas com o Projeto *Modelagem Matemática Crítica como Questionamento de Mundo*, vinculado ao Programa de Apoio a Projetos de Intervenção Metodológica⁸⁴ (PAPIM) 2016, da Universidade Federal do Pará (UFPA), voltado à comunidade acadêmica dos discentes do curso de LIECML, com a participação de cinco professores em formação inicial.

A escolha do tema de Matemática Financeira se deu pelo interesse que o objeto apresenta socialmente e, com isso, ganha reconhecimento dentre os objetos a serem ensinados na escola básica, talvez para alertar possíveis riscos oferecidos em propagandas, mas, sobretudo, por exigências demandadas pela sociedade.

Há um interesse socialmente reconhecido pela *noosfera* (CHEVALLARD, 2005), onde se inclui a Base Nacional Comum Curricular – daqui em diante, BNCC - para difusão de práticas da Matemática Financeira nas instituições de ensino, incluindo como parte desses objetos de estudo, situações com referências ao modelo matemático do problema de financiamento.

Essa recomendação do modelo matemático do problema de financiamento é visível, inclusive, em avaliações externas à escola básica, como o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) onde se inclui o desenvolvimento e o uso do modelo em situações de financiamentos como revelaram, respectivamente, as questões 144 e 145 da prova de Matemática e suas Tecnologias na edição de 2017.

A produção de dados empíricos ocorreu por meio de gravações, registros fotográficos e conceituais, destacados pelos professores em formação, durante as

⁸⁴ O projeto foi coordenado pelo Prof. Dr. Renato Borges Guerra.

sessões de estudos. Além disso, foi utilizado um diário de bordo das sessões, pois nem sempre suas gravações captam comentários espontâneos que emergirem nas discussões.

Nesse sentido, encaminhamos as análises das sessões de estudos de modo a tentar responder à problematização da tese e dar um sentido inteligível ao ciclo de modelagem proposto pela OCDE/Pisa (BRASIL, 2012) para o ensino e a aprendizagem, além de explicitar o equipamento praxeológico indispensável, ou pelo menos útil, à formação de professores em MM.

Desse modo, encaminhamos nossas análises empíricas de modo a prover novos conhecimentos sobre o ciclo de MM a partir do PEPO.

4.3.1 Análises das sessões de estudos

O conjunto de professores em formação inicial, que participaram das sessões de estudo, foi simbolizado por $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, coordenados pelo diretor de estudo Y – neste caso, o pesquisador - constituindo o sistema didático principal designado por $S_i(X, Y, Q_i)$, em que Q_i são as questões. Desse sistema didático, derivam-se sistemas didáticos auxiliares descritos por: $\{S_1(X, Y, Q_1), S_2(X, Y, Q_2), \dots, S_n(X, Y, Q_n)\}$.

O percurso de estudos foi encaminhado pelo diretor de estudos a partir de um tipo de problema em contexto sobre investimentos, expresso da seguinte forma:

Figura 12 - Problema sobre investimento

O comerciante investidor deseja saber que investimento trará maior retorno financeiro em uma aplicação de R\$ 500,00, obtido como lucro de suas atividades. Para isso, pesquisou o rendimento e o imposto a ser pago em dois investimentos: a Poupança e o CDB (Certificado de Depósito Bancário). As informações estão resumidas no quadro a seguir.		
	Rendimento mensal (%)	IR (Imposto de Renda)
Poupança	0,560	Isento
CDB	0,716	Percentual (%) (sobre o ganho)
Qual a aplicação mais vantajosa ao comerciante investidor ao final de três meses? E em seis meses? E, em um ano?		

Fonte: Adaptado da questão 157 da prova de Matemática e suas tecnologias do ENEM (2011)

O tipo de problema considerado levou a instalação de sistemas didáticos auxiliares para o enfrentamento do questionamento Q_1 :

Q_1 : Qual a aplicação mais vantajosa ao comerciante investidor ao final de três meses? E em seis meses? E, em um ano?

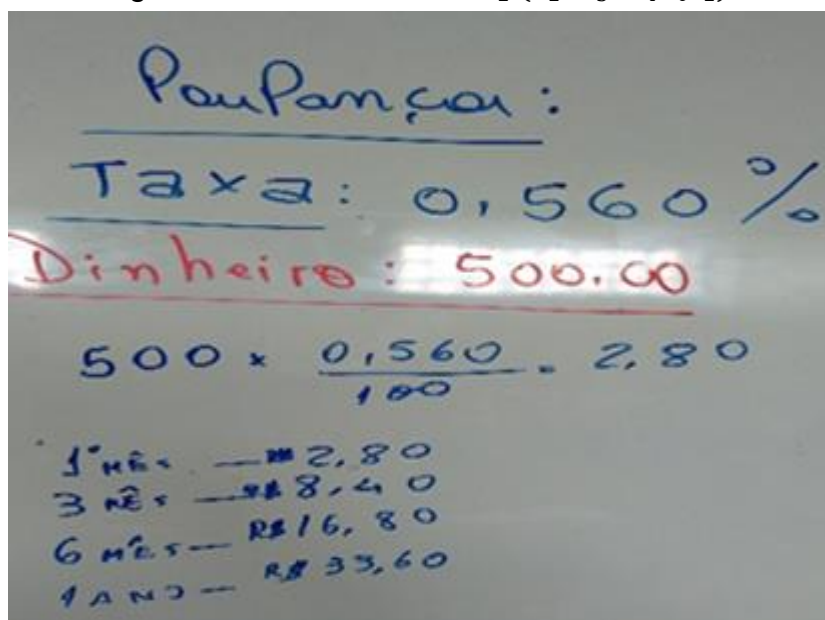
Orientado pelo gesto genuíno G_1 encaminhou-se a seguinte sessão:

- G_1 - Usar praxeologias matemáticas rotineiras da escola de modo customizado em situações com matemática escolar sobre contextos reais do cotidiano escolar e do seu entorno social.

a) Primeira sessão: 22.08.2016

O questionamento Q_1 levou os professores em formação ao encontro de situações com matemática. O primeiro grupo de professores constituído pelo sistema didático auxiliar $S_1(x_1, x_3, x_4, \wp_1)$, e tendo o professor x_3 como representante do grupo, destacou o uso de uma PMC $\ll \wp_1 \gg$, a partir de noções da aritmética prática como destaca a Figura 13.

Figura 13 – Registro do sistema didático $S_1(x_1, x_3, x_4, \wp_1)$



Fonte: Acervo da pesquisa (2019)

A PMC manifestada pelo sistema didático auxiliar S_1 encaminhou o jeito de fazer e de pensar mais específico desses professores sobre o tipo de problema em

contexto concreto, como um tipo de problema da aritmética prática, com a ênfase do cálculo de juros produzido pelo capital para um período, tomando esses juros como referencia para o 3º, 6º e 12º mês. No entanto, as noções de juros e capital, por exemplo, são tomadas por esse sistema didático S_1 implicitamente, no plano do pensamento aritmético-prático.

O segundo grupo de professores constituído pelo sistema didático auxiliar S_2 (x_2, x_5, \wp_2), tendo o professor x_5 como representante do grupo, recorreu ao modelo matemático de juros simples por meio da **PMC** $\ll \wp_2 \gg$ registrada por $\ll J = C \cdot i \cdot t \gg$ em que J é o valor dos juros produzido, C é o capital, sujeito a taxa i e t o tempo, para responder ao questionamento, como exemplifica a Figura 14.

Figura 14 – Registro do sistema didático auxiliar $S_2(x_2, x_5, \wp_2)$

The image shows a whiteboard with handwritten mathematical work in blue ink. The work consists of four lines of text:

$$J = C \cdot i \cdot t$$

$$J = 500,00 \cdot 0,560 \cdot 3$$

$$J = 500,00 \cdot 1,68$$

$$J = 508,40$$

Fonte: Acervo da pesquisa (2019)

A **PMC** $\ll \wp_2 \gg$ encaminhada pelos professores do sistema didático S_2 evidencia relações entre grandezas, isto é, $\ll J, C, i e t \gg$ envolvidas na situação com matemática, com a ênfase ao cálculo de juros para o terceiro mês, de modo a deixar claro em nossa compreensão, um aspecto mais global em termo de generalidades por meio do pensamento algébrico escolar.

As **PMC** $\ll \wp_1$ e $\wp_2 \gg$, encaminhadas pelos sistemas didáticos auxiliares S_1 e S_2 , respectivamente, podem ser interpretadas como tipos de Tarefas (T) que demandaram técnicas (τ) a partir de modelos matemáticos que vivem nas

instituições escolares, investigados para o tipo de problema em contexto. Essas **PMC** $\ll \wp_1$ e $\wp_2 \gg$ mobilizadas, talvez em função de os professores apresentarem maior qualidade de relações com esses objetos presentes na cultura escolar (CHEVALLARD, 2005).

A sessão foi encerrada com encaminhamentos sobre a investigação pelos professores do percentual de desconto para o imposto de renda na aplicação do CDB.

Síntese analítica da primeira sessão

Orientados pelo gesto G_1 , os modelos matemáticos investigados para o tipo de problema permitiram a construção de respostas parciais. Nesse sentido, o diretor de estudos percebeu que os sistemas didáticos S_1 e S_2 , após manifestação dos modelos matemáticos mobilizados para enfrentar a questão, realizavam um tipo de tarefa aqui compreendida como a Tarefa ***Investigar os modelos matemáticos que vivem na instituição escolar relativo ao tipo de problema***. Esse processo levou ao estudo de obras disponíveis na literatura da escola básica, especificamente, assentada em problemas de aritmética prática e de Matemática Financeira para construir as respostas provisórias.

As praxeologias da Matemática Financeira envolvidas no tipo de problema considerado se mostraram complexas para quem não é agente do sistema financeiro, pois a ausência do *habitus* (BOURDIEU, 1996) desse meio institucional dificultou, senão impediu aos professores reconhecer as situações e as praxeologias matemáticas associadas, que estão ao alcance somente daqueles que possuem o *filtro de percepção* (CHEVALLARD, 2005).

Esse filtro de percepção é o *habitus* do campo de práticas das instituições financeiras que funciona como estrutura estruturante e estruturada, que permite dentre outros aspectos, a transferência de experiências passadas para “novas” experiências. Nesse sentido, “podemos compreender um gesto apenas se conhecemos seu jogo” (GEBAUER, 2013, p. 68).

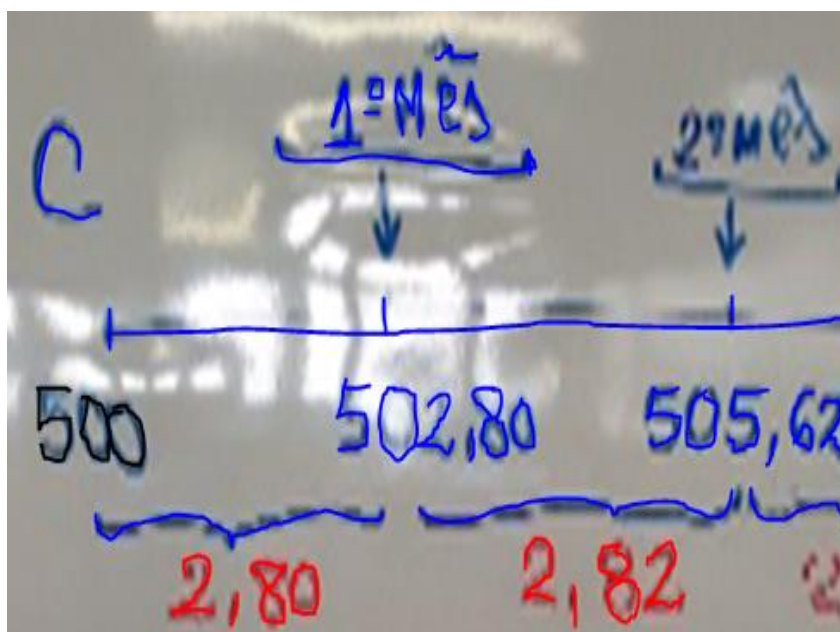
Sob a orientação do gesto genuíno G_2 encaminhou-se as seguintes sessões: segunda terceira, quinta e sexta sessões. O propósito desse gesto como gênero de tarefa é definido nos seguintes termos:

- **G_2 - Estudar e, com isso aprender, modelos matemáticos, entendidos como os questionamentos sobre contextos concretos, as situações com matemática e praxeologias matemáticas customizadas associadas:**

b) Segunda sessão: 29.08.2016

Nessa sessão, seguindo a primeira, contou-se além do diretor de estudos com os sistemas didáticos auxiliares S_1 e S_2 e a retomada do problema de investimento com a construção de uma situação esquemática feita pelo diretor de estudos, para o cálculo dos rendimentos da poupança durante os dois primeiros períodos, exemplificada no registro da Figura 15.

Figura 15 - Esquema gráfico do dinheiro em função do tempo



Fonte: Acervo da pesquisa (2019)

A partir do esquema gráfico, o diretor de estudos levantou o seguinte questionamento:

Q_{11} : O montante gerado no segundo mês de aplicação na poupança será referente ao montante do mês anterior ou sobre o valor do capital inicial aplicado?

A situação esquemática permitiu aos professores fazerem inferências em contraste às respostas provisórias obtidas pelos sistemas didáticos auxiliares S_1 e S_2 , deixando parecer por meio de gestos escolares, incluindo a aritmética prática, que o cálculo dos juros para o segundo período seria incidente sobre o montante do mês anterior e não sobre o capital inicial, como manifestado por meio das **PMC** « \wp_1 e \wp_2 ».

A situação esquemática como uma das *condições* úteis, senão indispensável no sentido da TAD (CHEVALLARD, 2009a), pode ser aqui interpretada como parte das *criatividades didáticas* para fins de *autoconsumo* (CHEVALLARD, 2005, p. 26), permitiu o confronto dos sistemas didáticos S_1 e S_2 frente às **PMC** « \wp_1 e \wp_2 » por essas instituições S_1 e S_2 . Assim, “tudo o que é acolhido no jogo de linguagem se transforma, independentemente de sua constituição original, em elementos do jogo” (GEBAUER, 2013, p.100).

Sob essa compreensão, a situação esquemática, além de permitir mudanças *na qualidade de relação* (CHEVALLARD, 2005) dos professores com essas praxeologias, encaminhou análise e avaliação dos modelos matemáticos, especificamente, por meio das **PMC** « \wp_1 e \wp_2 ».

c) Terceira sessão: 05.09.2016

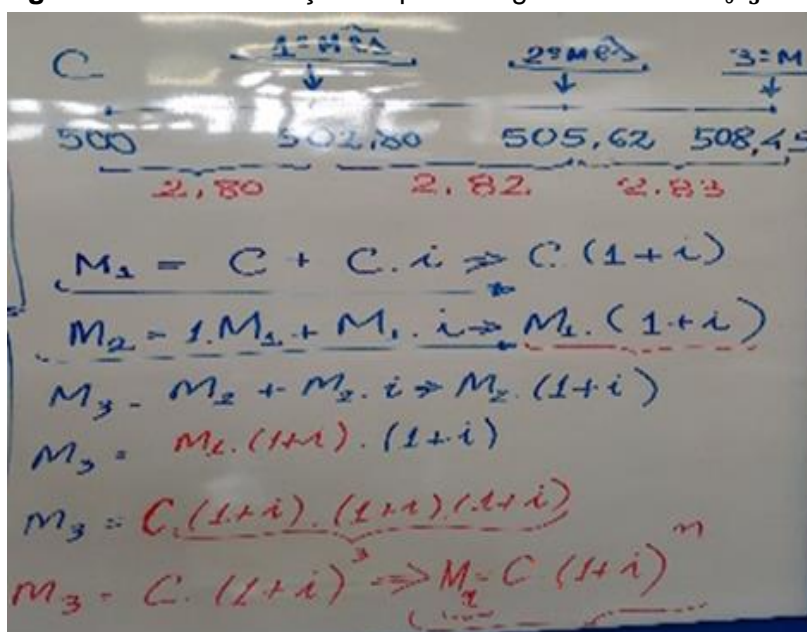
Essa sessão contou com os sistemas didáticos auxiliares $S_1 (x_1, x_3, x_4, \wp_3)$ e $S_2 (x_2, x_5, \wp_3)$ norteados pela problemática « Q_{12} : *A partir de que período o CDB passa a ser mais rentável ao comerciante em relação à poupança?* » encaminhada pelo diretor de estudos ao final da segunda sessão. Na socialização os sistemas didáticos fizeram as seguintes inferências:

- $S_2 (x_2, x_5, \wp_3)$: *Percebemos que o CDB é mais vantajoso como investimento a longo prazo, por apresentar um rendimento maior em relação a poupança, mas o prazo é maior no CDB [...]. Mas muita gente não conhece essa questão, só conhecem a poupança. Tanto é que a mais utilizada é a poupança, aí o banco em geral, não comunica o melhor investimento ao consumidor escondendo esse conhecimento.*
- $S_1 (x_1, x_3, x_4, \wp_3)$: *Por outro lado, muitas pessoas preferem fazer seu dinheiro render na poupança porque não vai ser declarado e não tem desconto. Já no CDB tem desconto e tem que declarar no imposto de renda. [...] Nos cálculos realizados notamos que o arredondamento de um número com vírgula em*

uma unidade a mais ou a menos, parece não fazer diferença ao resultado final obtido.

As respostas dos sistemas didáticos S_1 e S_2 parecem revelar a clareza de existência de conhecimentos específicos das práticas financeiras, ou seja, os *pré-construídos* (CHEVALLARD, 2005) do campo de práticas das instituições financeiras, que conformam o jeito de fazer e de pensar as praxeologias financeiras que ali vivem. Essa compreensão por eles manifestada foi apoiada a partir da PMC « \wp_3 », como um dos aspectos do modelo matemático estudado, como parece destacar a Figura 16.

Figura 16 – Customização da praxeologia matemática \wp_3



Fonte: Acervo da pesquisa (2019)

No entanto, o estudo da PMC « \wp_3 » só foi possível com o uso da calculadora científica que fez emergir inclusive, novas relações dos professores com esse dispositivo tecnológico, aqui compreendido como um saber não-matemático.

d) Quinta sessão: 19.09.2016

Essa sessão de estudos contou, além do diretor de estudos, com os sistemas didáticos auxiliares S_1 (x_1 , x_3 , \wp_4) e S_2 (x_2 , x_5 , \wp_4) no enfrentamento de um problema de financiamento de compra de um veículo, com dados obtidos pelos professores em formação nas concessionárias, como destaca a Figura 17.

Figura 17 – Registro do sistema didático auxiliar $S_1(x_1, x_3, \rho_4)$

Parcela	Valor da Parcela (R\$)	Taxa (%)
24	1.809,54	1,51
30	1.521,30	1,57
36	1.331,86	1,59
48	1.113,10	1,79

Fonte: Acervo da pesquisa (2019)

Essa realidade encaminha questionamentos sobre uma realidade social como deseja o Pisa (BRASIL, 2012), nesse caso, a compra de veículos. As situações de compra foram levantadas pelos grupos nas concessionárias simulando compra de veículos sem considerar marca ou modelos. Entre as situações apresentadas, foi eleita pelos professores uma situação específica que, supostamente, apresentava todas as informações necessárias para o enfrentamento do tipo de problema:

- **Situação específica 1:** (a) Valor do veículo: R\$ 52.900,00; (b) Valor da entrada R\$ 20.000,00; (c) Prazo do financiamento: 24 meses; (d) Taxa de juros mensal anunciada: 1,51% e (e) Valor da parcela: R\$: $p = 1.809,54$.

O questionamento detonador foi encaminhado da seguinte forma:

Q₂: Será que o vendedor está falando a verdade diante dos dados anunciados?

Esse questionamento levou os professores aos seguintes desdobramentos:

Q₂₁: O valor da parcela está em conformidade com o valor anunciado pelo vendedor?

Q₂₂: Que valor está sendo financiado?

Q₂₃: O valor da taxa corresponde ao anunciado pelo vendedor?

Esses questionamentos derivados e, em função da complexidade do tipo de problema considerado demandou aos professores o estudo de uma situação com

matemática do tipo “micromundo”⁸⁵, no sentido de Rieber (1996), constituída por quatro prestações fixas por meio do auxílio de uma obra disponível – um livro da internet, como parece exemplificar o registro da Figura 18.

Figura 18 – Registro do sistema didático auxiliar $S_1(x_1, x_3, \wp_4)$

Qual o valor da parcela (P), se a primeira for paga 60 após a compra?

Esquema gráfico

$$\begin{array}{ccccccccc} d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 = 0 \\ | & | & | & | & | & | \\ \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} & \text{-----} \\ & \text{P} & \text{P} & \text{P} & \text{P} & \text{P} \end{array}$$

Então: $d_1 = d_0(x)$; sendo $x = 1+i$, com $i = \text{taxa}$

$$d_2 = d_1(x) - P = [d_0(x)] \cdot x - P \Rightarrow d_0(x^2) - P$$

$$d_3 = d_2(x) - P = [d_0(x^2) - P] \cdot x - P \Rightarrow d_0(x^3) - Px - P$$

$$d_4 = d_3(x) - P = [d_0(x^3) - Px - P] \cdot x - P \Rightarrow d_0(x^4) - P(x^2) - Px - P$$

$$d_5 = d_4(x) - P = [d_0(x^4) - P(x^2) - Px - P] \cdot x - P \Rightarrow d_0(x^5) - P(x^3) - P(x^2) - P(x) - P = 0$$

$$d_0(x^5) = P \cdot [x^3 + x^2 + x + 1] \Rightarrow \text{Substituindo:}$$

$$d_0(x^5) = P \cdot \left(\frac{x^4 - 1}{x - 1} \right) \Rightarrow P = \frac{d_0(x^5)(x - 1)}{x^4 - 1}$$

$$P = [1200 \cdot (1.05^5) \cdot (0.05)] / ((1.05^4) - 1) \Rightarrow$$

$$P_1 = \frac{d_0(x^n)(x - 1)}{(x^n) - 1} \Rightarrow \text{com 30 dias} \quad P_2 = \frac{d_0(x^{n+1})(x - 1)}{x^n - 1} \Rightarrow \text{com 60 dias}$$

$$P_3 = \frac{d_0(x^{n+1})(x - 1)}{x^n - 1} \Rightarrow \text{Primeira parcela paga em ato}$$

Fonte: Acervo da pesquisa (2019)

Essa situação com matemática aqui interpretada como micromundo no sentido de Rieber (1996), desperta interesse por apresentar duas características: um domínio “simples” de comandos que permita interações e, não menos importante a de os professores saberem o que fazer no micromundo com pouco ou nenhum treinamento (RIEBER, 1996).

Além da utilização de calculadoras científicas, a situação esquemática manifestada para as prestações permitiu aos professores a manifestação da **PMC** « \wp_4 » para calcular a prestação fixa nos seguintes casos: no ato da compra, após o período de trinta e sessenta dias, inclusive, assumida como referência para o tipo de problema concreto, como parece claro na Figura 19.

⁸⁵ Segundo Barros (2013, p. 30): “Rieber (1996) acrescenta que um micromundo deve ter duas características: um domínio simples e coincidir com a necessidade cognitiva do aluno. A primeira remete a um domínio “simples” de comandos para o aluno interagir, apesar de o micromundo poder envolver ideias complexas. A segunda remete ao micromundo coincidir com o estado cognitivo ou afetivo do aluno, ou seja, este deve saber o que fazer no micromundo com pouco ou nenhum treinamento”.

Figura 19 – Registro do sistema didático auxiliar $S_2 (x_2, x_5, \wp_4)$

$$V_f = V_0(x^n) = P \cdot \left[\frac{x^n - 1}{x - 1} \right]$$

$$P = \frac{V_0(x^n) \cdot (x - 1)}{x^n - 1}$$

$$P = \frac{32900 \cdot (1,0151)^{24} \cdot 0,0151}{(1,0151)^{24} - 1} = \frac{32900 \cdot 1,43288675 \cdot 0,01}{1,43288675 - 1}$$

$$P = \frac{711,8438083}{0,43288675} \Rightarrow P = 1.644,41$$

$x = \text{correção: } (1+i)$
 $n = \text{prazo}$
 $p = \text{parcela}$
 $V_0 = \text{dívida}$
 $i = \text{taxa: } 1,51\%$

Fonte: Acervo da pesquisa (2019)

A partir das respostas encaminhadas com a **PMC** « \wp_4 » comparadas aos anúncios do vendedor sobre a prestação, a taxa e o valor financiado, os sistemas didáticos S_1 e S_2 inferiram que:

- $S_1 (x_1, x_3, \wp_4)$: *Aconteceu isso comigo. A gente fazia um calculo e não dava com o que o vendedor apresentava. É o seguro, é o não sei o que, [...] são valores flutuantes que agente não sabe o que é [...], ou seja, são cobrados valores abusivos nas prestações e outras taxas que não percebidas no contrato de compra do veículo.*
- $S_2 (x_2, x_5, \wp_4)$: *Por isso que já tem um escritório nas financeiras, especializados em pegar esses contratos de financiamentos de carro de clientes que não conseguem pagar o valor da parcela. Aí o escritório refaz o cálculo e reduz o valor para ver não se há valores abusivos nas operações financeiras.*

Os encaminhamentos dos sistemas didáticos S_1 e S_2 parecem manifestar, em nossa compreensão, a existência de saberes não-matemáticos em relações com os saberes matemáticos, que condicionam o jeito de fazer e de pensar sobre o modelo matemático do problema de financiamento.

e) Sexta sessão: 26.09.2016

A sexta sessão retomou aspectos da quinta sessão, além do diretor de estudos com os sistemas didáticos auxiliares $S_1 (x_1, x_3, \rho_4)$ e $S_2 (x_2, x_5, \rho_4)$ em torno dos seguintes questionamentos:

Q₂₄: Qual o valor da parcela a ser paga, caso a primeira parcela seja paga com sessenta dias após a compra?

Q₂₅: Qual o valor da parcela a ser paga, caso a primeira parcela seja paga no ato da compra?

Q₂₆: Qual o valor a ser pago pelo veículo no plano de 48 prestações, caso seja quitado com um ano de antecedência?

Esses questionamentos foram orientados pela seguinte situação:

Situação específica 2:

- (a) Valor do veículo: R\$ 52.900,00;
- (b) Valor da entrada R\$ 20.000,00;
- (c) Prazo do financiamento: 48 meses;
- (d) Taxa de juros mensal anunciada: 1,79% e
- (e) Valor da parcela: R\$: $p = 1.113,10$.

Os questionamentos Q_{24} e Q_{25} foram enfrentados pelos sistemas didáticos S_1 e S_2 a partir de esquemas manifestados pelos professores, como exemplificam os registros da Figura 18. Esses esquemas da situação com matemática do tipo “micromundo” foram transferidos pelos professores para o estudo da situação específica 2, como parece encaminhar o registro da Figura 20.

Figura 20 – Registro do sistema didático auxiliar S_1 (x_1, x_3, \wp_4)

Valor financiado 32900,00
 Prazo 48 meses
 Taxa: 1,79% (Pagamento em ato)

$P = 1009,22$ Fórmula: $P = \frac{i \cdot X^{n-1}}{X^n - 1}$

$P = \frac{32900 \cdot (1,0179)^{47} \cdot (0,0179)}{(1,0179)^{48} - 1}$

$P = 1009,22$

* *Sessenta dias após a compra:*
 Fórmula: $P = \frac{i \cdot X^{m+1}}{X^m - 1} \cdot (X - 1)$

$P = \frac{32900 \cdot (1,0179)^{49} \cdot (0,0179)}{(1,0179)^{48} - 1}$

$P = 1045,67$

Fonte: Acervo da pesquisa (2019)

O estudo do modelo matemático do problema de financiamento, especificamente a PMC $\ll \wp_4 \gg$ pareceu adequado a esses professores para o tipo de problema em contexto concreto considerado.

Sobre o questionamento $\ll Q_{26}$: *Qual o valor a ser pago pelo veículo no plano de 48 prestações, caso seja quitado com um ano de antecedência? \gg os professores recorreram a outra situação com seis prestações fixas, do tipo “micromundo” (RIEBER, 1996), como parece claro o registro da Figura 21.*

Figura 21 - Registro do sistema didático auxiliar S_2 (x_2, x_5, \wp_4)

Situação: $\vdots \vdots \vdots \bullet \vdots \vdots \vdots$
 $p = 500,00$
 $i = 5\%$
 Quitar a dívida.

$x^3 \cdot [D = Px^2 + Px + P + \frac{P}{x} + \frac{P}{x^2} + \frac{P}{x^3}] \cdot x^3$

$D \cdot x^3 = Px^5 + Px^4 + Px^3 + Px^2 + Px + P$

$Dx^3 = p \cdot [x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1]$

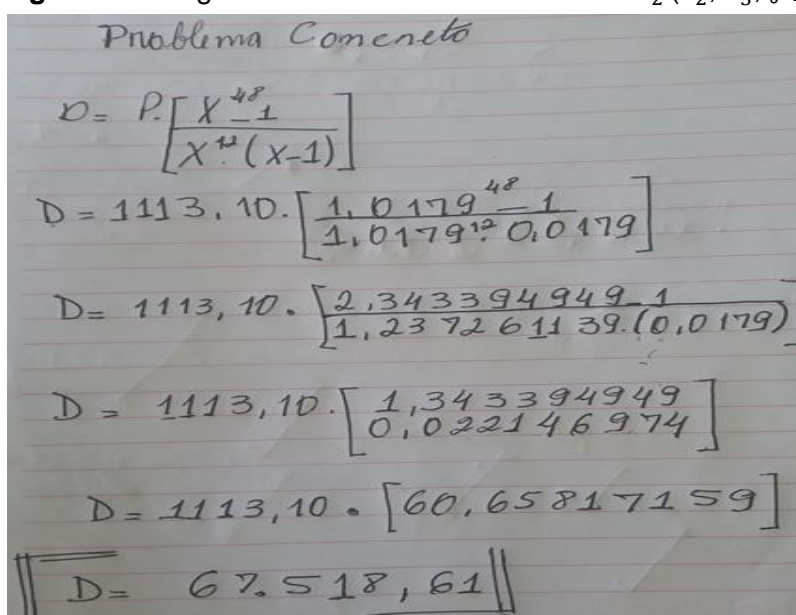
$D = p \cdot \frac{[x^6 - 1]}{[x - 1] \cdot x^3} \Rightarrow D = 500 \cdot \frac{[1,05^6 - 1]}{[1,05^3 \cdot 0,05]}$

$D = 2937,87$

Fonte: Acervo da pesquisa (2019)

A consistência das respostas até então obtidas pelos sistemas didáticos S_1 e S_2 por meio do modelo matemático, em particular, com a PMC $\ll \wp_4 \gg$ e a situação de “micromundo” pode ser aqui compreendido como produto de transferências de experiências passadas pelos professores com o estudo do modelo, isto é, como *habitus*, pois “possibilita o cumprimento de tarefas infinitamente diferenciadas graças à transferência analógica de “esquemas” adquiridos em uma prática anterior” (BOURDIEU, 2002 [1972], p. 261), como parece revelar o registro da Figura 22.

Figura 22 - Registro do sistema didático auxiliar S_2 (x_2, x_5, \wp_4)



Problema Concreto

$$D = P. \left[\frac{X^{48}}{X^{48} (X-1)} \right]$$

$$D = 1113,10. \left[\frac{1,0179^{48} - 1}{1,0179^{12} \cdot 0,0179} \right]$$

$$D = 1113,10. \left[\frac{2,343394949 \cdot 1}{1,237261139 \cdot (0,0179)} \right]$$

$$D = 1113,10. \left[\frac{1,343394949}{0,022146974} \right]$$

$$D = 1113,10. [60,65817159]$$

$$\boxed{D = 67.518,61}$$

Fonte: Acervo da pesquisa (2019)

O estudo sobre o modelo matemático permitiu aos professores, em nossa compreensão, mudanças na qualidade de relações com objetos não-matemáticos como o uso da calculadora científica, útil, senão indispensável, para a funcionalidade da PMC $\ll \wp_4 \gg$. A introdução da calculadora levou em consequência do estudo do modelo matemático, ao surgimento de objetos cuja relação desses professores foi vazia (CHEVALLARD, 2009a), isto é, objetos por eles desconhecidos, como o valor numérico $[3,21245559E - 19]$, como encaminha o registro da Figura 23.

Figura 23 - Registro do sistema didático auxiliar $S_1 (x_1, x_3, \wp_4)$

Handwritten mathematical derivation:

$$V_f = V_0 \cdot (X^n) = P_0 \cdot \left[\frac{X^n - 1}{X - 1} \right]$$

$$V_0 (1+i)^n = P \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \Rightarrow$$

$$V_0 = P \cdot \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \cdot i} \right]$$

$$V_0 = P \cdot \left[\frac{(1+i)^n}{(1+i)^n \cdot i} - \frac{1}{(1+i)^n \cdot i} \right]$$

$$V_0 = P \cdot \left[\frac{1}{i} - \frac{1}{(1+i)^n \cdot i} \right]$$

Table (Quanto):

n	$1/[(1+i)^n \cdot i]$
300	44,79
600	10,03
1200	0,50
2400	0,001266
4800	0,00008...
9600	2,01245559E-191

Fonte: Acervo da pesquisa (2019)

De outro modo, “o objeto O existe para o sujeito X se X tiver uma relação com o objeto O ”⁸⁶ (CHEVALLARD, 2005, p. 148, grifos do autor, tradução nossa). O estudo do modelo matemático do problema de financiamento revelou o alcance desse modelo para o estudo de várias situações em contextos, isto é, sua multivalência no sentido posto por Revuz (1971).

Síntese analítica das sessões

O processo de estudos orientado pelo gesto G_2 colocou em jogo o papel determinante da situação esquemática como uma das *condições* (CHEVALLARD, 2009b) que tornou possível confronto de praxeologias dos professores, isto é, « \wp_1 e \wp_2 » até então encaminhadas ao problema do investimento e, como tal, a transferência dessa situação foi também indispensável para o estudo do modelo matemático do problema de financiamento. Essa situação tomada talvez como referência pelos sistemas didáticos é aqui interpretada como a Tarefa H_0 , que consiste em **Construir uma Situação de Referência**.

É preciso considerar que a ausência dos pré-construídos das práticas financeiras impediu os professores reconhecer o tipo de situação com a PMC, pois os modelos matemáticos normativos são definidos *a priori* (CHEVALLARD, 1989a)

⁸⁶ Fragmentos do texto: *El objeto O existe para el sujeto X si X tiene una relación con el objeto O.*

para esse campo de prática. Nesse sentido, os pré-construídos funcionam “como um saber implícito, que não é ensinado explicitamente, ele é constitutivo da compreensibilidade do jogo” (GEBAUER, 2013, p. 148).

As respostas encaminhadas pelos professores revelaram, em nossa compreensão, a existência de saberes, matemáticos e não-matemático, em relações mútuas, com a clareza do papel dominante dos saberes não-matemáticos na conformação sobre o jeito de fazer e de pensar em um dado domínio de realidade. Esse processo demandou a análise e a avaliação dos modelos matemáticos até então assumidos como resposta ao tipo de problema considerado.

Sobre esses aspectos, interpretamos aqui a análise e avaliação do modelo matemático como Tarefas H_2 e H_3 , que consistem respectivamente, **Encontrar a situação que define a praxeologia matemática customizada e Avaliar os modelos matemáticos.**

Em última análise, orientado pelo gesto genuíno G_3 , encaminharam-se as seguintes sessões: segunda, terceira, quarta e sexta sessões. O propósito desse gesto como gênero de tarefa é definido nos seguintes termos:

- **G_3 - Criar, mesmo que se reduza apenas à customização, modelos matemáticos para novas situações com matemática em contextos a partir de analogias ou homologias com outras situações com matemática, inclusive as praxeologias customizadas associadas, sobre contextos concretos estudados em G_1 e G_2 .**

f) Segunda sessão: 29.08.2016

Nessa sessão já abordada em relação ao gesto G_2 , os sistemas didáticos S_1 e S_2 desenvolveram o modelo matemático de juros compostos por meio da PMC $\ll \wp_3 \gg$, cuja nova situação criada pelos professores levou-os ao confronto com as praxeologias $\ll \wp_1$ e $\wp_2 \gg$ por eles assumidas provisoriamente como resposta ao tipo de problema de investimento.

Apoiado sobre as respostas obtidas com o modelo matemático de juros composto os professores defenderam os seguintes aspectos sobre a problematização $\ll Q_1: Qual a aplicação mais vantajosa ao comerciante investidor ao final de três meses? E em seis meses? E, em um ano? \gg$

S_1 e S_2 : *A poupança se manifestou mais rentável que a aplicação no CDB, mas ao final do período de 12 (doze) meses, o CDB gerou maior rendimento.*

A conclusão das instituições S_1 e S_2 levou o diretor de estudos ao final da sessão à seguinte problematização:

Q_{12} : *A partir de que período o CDB passa a ser mais rentável ao comerciante em relação à poupança?*

g) Terceira sessão: 05.09.2016

Inspirado sobre arredondamento numérico, provocado pela inserção da calculadora científica, o sistema didático S_2 propôs o encaminhamento da discussão sobre a reportagem do site www.g1.globo.com, de 23.06.2016, cujo anúncio destacava:

Esquema no Planejamento desviava dinheiro de crédito consignado, diz PF. Uma empresa ao prestar serviço deveria cobrar R\$ 0,30 como taxa administrativa, mas na prática, cobrava R\$ 1,00, sendo que R\$ 0,70 cobrados indevidamente, produziu 7 (sete) milhões de reais como parte do montante desviado, no período de 2009 a 2015. (Fonte: www.g1.globo.com, 2016).

Essa discussão encaminhou o sistema didático S_2 à seguinte inferência:

- S_2 (x_2, x_5, \wp_3): *O rendimento de R\$ 7 milhões aplicado na poupança ao considerar a taxa mensal de 0,5% ao mês, durante um ano, produziria um montante de R\$ 7.431.744.683,00.*

O desenvolvimento desse encaminhamento parece orientado pelo *filtro de percepção* (CHEVALLARD, 2005) do sistema didático S_2 abstraído do domínio de realidade com a **PMC** $\ll \wp_3 \gg$, assumida no modelo matemático de juros composto.

Assim, o processo de estudos construído pelos sistemas didáticos S_1 e S_2 sobre o problema do investimento criou condições para o encaminhamento do modelo matemático do problema de financiamento, especificamente, no sentido de partir do montante para o valor de prestações fixas. O diretor de estudo finalizou a sessão com a seguinte problematização:

Q_{14} : *Qual o valor a ser depositado mensalmente em uma poupança, ao considerar a taxa de 0,5% ao mês, para obter ao final de 12 (doze) meses, o montante de R\$ 3.000,00 necessários para comprar um aparelho eletrônico?*

h) Quarta sessão: 12.09.2016

Nesta sessão retomada com a problematização <<Q₁₄: Qual o valor a ser depositado mensalmente em uma poupança, ao considerar a taxa de 0,5% ao mês, para obter ao final de 12 (doze) meses, o montante de R\$ 3.000,00 necessários para comprar um aparelho eletrônico?>>, contou além do diretor de estudos com os sistemas didáticos auxiliares $S_1(x_1, x_3, \wp_3)$ e $S_2(x_2, x_5, \wp_3)$.

A construção de uma resposta foi sustentada pelo desenvolvimento do modelo de juros composto, em partícula, por destacarem aspectos da **PMC** << \wp_3 >>, como parece exemplificar o registro da Figura 24.

Figura 24 – Registro do sistema didático auxiliar $S_2(x_2, x_5, \wp_2)$

$$M_{12} = C(1 + 0,005)^{12}$$

$$3.000 = C \cdot (1,005)^{12}$$

$$3.000 = C \cdot 1,06167782$$

$$C = \frac{3.000}{1,06167782} = \boxed{2.812,21}$$

$$\text{Diferença: } 3000 - 2.812,21 = 187,79$$

Fonte: Acervo da pesquisa (2019)

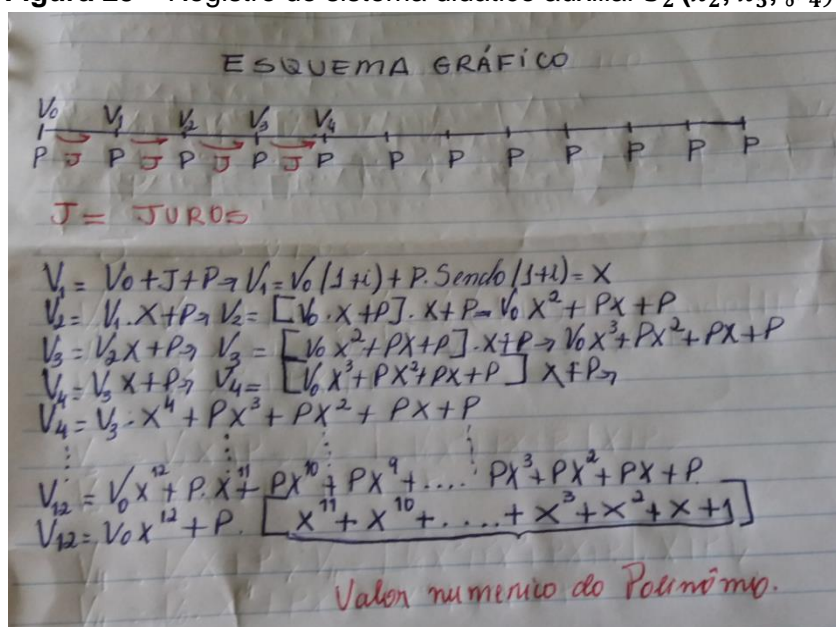
Com esse encaminhamento esboçado na Figura 24 apenas o sistema didático S_2 fez inferências sobre o tipo de problema considerado, como segue:

- $S_2(x_2, x_5, \wp_3)$: Fizemos essa questão com a sensação de não estar correta, com a clareza que a diferença produzida pelo montante de R\$ 3.000,00 com R\$ 2.812,21 corresponde ao juros do capital de R\$ 2.812,21 se fosse aplicado em 12 meses.

Como “toda atividade humana envolve o que eu chamo de uma *infraestrutura praxeológica*”⁸⁷ (CHEVALLARD, 2009b, p. 40, grifos do autor, tradução nossa), a manifestação do sistema didático S_2 parece evidenciar ausência de uma *infraestrutura praxeológica*, inclusive também por S_1 , por desconhecer talvez uma **PMC** que os permitam desenvolver um modelo.

Desse modo, a situação de referência, aqui compreendida por meio da situação esquemática, foi determinante para o desenvolvimento do modelo matemático do problema de financiamento e, com ele a **PMC** $\ll \wp_4 \gg$ associada, como parece demonstrar o registro da Figura 25.

Figura 25 – Registro do sistema didático auxiliar $S_2 (x_2, x_5, \wp_4)$



Fonte: Acervo da pesquisa (2019)

Nesse sentido, “nossa linguagem pode acolher algo novo se possibilidades foram encontradas para, de algum modo, lhe dar um papel em nossos jogos de linguagem” (GEBAUER, 2013, p.155).

O desenvolvimento do modelo matemático e com ele a **PMC** $\ll \wp_4 \gg$ associada, parece ter emergido por meio de articulações e integrações de **PMC** que vivem na instituição escolar, especificamente, a noção de polinômios e substituição de variáveis, sendo esta aqui compreendida como um parasaber no sentido amplo da noção de *paramatemática* (CHEVALLARD, 2005), que tornaram possível o desenvolvimento da **PMC** $\ll \wp_4 \gg$.

⁸⁷ Fragmento de texto: *toute activité humaine suppose ce que je nomme une infrastructure praxéologique.*

i) Sexta sessão: 26.09.2016

Nessa sessão já abordada em relação ao gesto G_2 , o modelo matemático do problema de financiamento desenvolvido por meio do estudo de diferentes situações em contextos concretos foi defendido em última análise, pelos professores como resposta ao tipo de problema considerado a partir de inferências por eles manifestadas a partir da “aplicação” em diferentes conjuntos de dados experimentados nas situações de micromundo segundo a noção de Rieber (1996). O sucesso com essas situações encaminhou os professores à “aplicação” do modelo aos problemas concretos considerados no processo de estudos.

Portanto, o sucesso do modelo que o legitimou frente aos professores em formação inicial, é aqui interpretado como uma resposta desejável, isto é, como resposta R^\vee para o tipo de problema em contexto concreto considerado.

Síntese analítica das sessões

O processo de estudos gerado pelos professores criou *condições* (CHEVALLARD, 2009b) para encaminhamento do modelo matemático do problema de financiamento, em particular, por meio da situação esquemática, aqui interpretada como Tarefa, que sucessivamente, permitiu o desenvolvimento do modelo matemático traduzido parcialmente pelas **PMC** $\ll \wp_3$ e $\wp_4 \gg$.

O modelo matemático do problema de financiamento especificamente, desenvolvido com a **PMC** $\ll \wp_4 \gg$ e, defendido pelos professores como resposta desejada R^\vee ao tipo de problema em contexto concreto, deixou parecer potencialidades do modelo frente às situações estudadas por esses professores, de modo que parte dessas situações foram geradas por meio do estudo e uso do modelo matemático, aqui compreendido de modo reverso ao usual em MM. Assim, o desenvolvimento e a defesa de modelos matemáticos é aqui interpretado como Tarefas - H_4 : **desenvolver o modelo matemático** e H_5 : **difundir e defender o modelo matemático desenvolvido**, respectivamente.

Os processos de estudos demandados ao longo das sessões encaminharam, retrospectivamente, ao gesto G_1 , especificamente, com o desdobramento de uso da calculadora científica. O propósito desse gesto como gênero de tarefa é definido, conforme já destacamos, nos seguintes termos:

- **G_1 - Usar praxeologias matemáticas rotineiras da escola de modo customizado em situações com matemática escolar sobre contextos reais do cotidiano escolar e do seu entorno social.**

O estudo de alguns problemas nesse processo foi possível somente com o uso da calculadora científica em função da complexidade do tipo de problema enfrentado pelos professores. Assim, o uso da calculadora constituiu, em última análise, parte da *infraestrutura* (CHEVALLARD, 2009b) praxeológica de saberes necessários, senão indispensável, para tornar possível o estudo de situações em contextos concretos enfrentada por esses professores em formação, como segue no próximo tópico.

4.3.1.1 *Uso da calculadora científica: uma entidade praxeológica necessária à Modelagem Matemática*

As praxeologias de uso da calculadora científica aqui simbolizadas pelo sistema didático $\mathbf{S}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbb{C})$, em que \mathbb{C} designa as práticas específicas com a calculadora científica, emergiram a partir da complexidade dos problemas em contextos concretos enfrentados pelos professores, que demandou a inserção de uso deste equipamento para tornar possíveis essas praxeologias. Nesse sentido, “estudar um saber, mais precisamente uma entidade praxeológica \wp , é realmente estudar algumas *questões* relativas à \wp , a sua estrutura e suas funções, sua gênese etc.”⁸⁸ (CHEVALLARD, 2009b, p. 16, grifos do autor, tradução nossa).

A manipulação de operações aritméticas de números com vírgulas revelou dificuldades dos professores frente ao uso das praxeologias com a calculadora científica, especificamente, ao envolver essas operações aritméticas de números com vírgulas, digitar os numerais para calcular exponenciais, a inclusão ou não de parênteses ou outros símbolos específicos da calculadora para tornar exequível a realização de práticas demandadas pelo estudo dos problemas em contextos concretos, como parece encaminhar os registros da Figura 26.

⁸⁸ Fragmento do texto: *Étudier un savoir ou, plus justement une entité praxéologique \wp , ce sera, en fait, étudier certaines questions relatives à \wp , à sa structure et à ses fonctions, à sa genèse, etc.*

Figura 26 – Registro do sistema didático auxiliar S_2 (x_2, x_5, \wp_4)

The image shows two pages of handwritten mathematical work. The left page is titled 'RESOLUÇÃO DA QUESTÃO' and 'Técnica Específica'. It shows the formula for a geometric series: $\frac{X^n - 1}{X - 1} = X^{n-1} + X^{n-2} + \dots + X + 1$. Below this, it is labeled 'Polinômio de Grau 11' and shows the expansion: $\frac{X^{12} - 1}{X - 1} = X^{11} + X^{10} + X^9 + X^8 + X^7 + X^6 + X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$. The right page is titled 'Substituindo em:' and shows the substitution of $X = 1,005$ into the geometric series formula to solve for P . The steps are: $V_{12} = V_0 \cdot X^{12} + P \cdot \left[\frac{X^{12} - 1}{X - 1} \right]$, $V_{12} = P \cdot \left[X^{12} + \left(\frac{X^{12} - 1}{X - 1} \right) \right]$, $3000,00 = P \cdot \left[X^{12} + \left(\frac{X^{12} - 1}{X - 1} \right) \right] =$, $3000 = P \cdot \left[1,005^{12} + \left(\frac{1,005^{12} - 1}{0,005} \right) \right]$, and finally $P = 223,93$.

Fonte: Acervo da pesquisa (2019)

Além das dificuldades no uso da calculadora frente à **PMC** « \wp_4 », por exemplo, os professores fizeram observações sobre o arredondamento numérico a partir da problematização do sistema didático S_1 , a seguir:

Q₁₃: *Por que a fornecedora de energia elétrica utiliza mais de duas casas decimais no valor unitário cobrado pelo kWh na composição da tarifa de energia?*

Essa problematização permitiu aos sistemas didáticos inferirem que:

- S_2 (x_2, x_5, \wp_1): Se o consumo de energia elétrica de uma residência for de 150 kWh no período de um mês comercial com o preço unitário do kWh de R\$ 0,663333, e não propriamente de R\$ 0,66, o valor a ser pago desprezando outros encargos da tarifa final é de R\$ R\$ 99,50 (em caso do preço unitário do kWh R\$ 0,663333) e não de R\$ 99,00 (caso o preço unitário do kWh seja de R\$ 0,66). Então, se a empresa fornecedora de energia utilizasse o arredondamento no preço unitário do kWh, haveria uma redução na arrecadação dessa empresa, pois a diferença de R\$ 0,50 pode parecer insignificante se considerar apenas uma residência, mas se considerar o universo de residências no estado do Pará, por exemplo, o impacto na arrecadação gera mais lucratividade a essa fornecedora de energia; [...] Tem um detalhe, que o estado é beneficiado, pois quando cobra o ICMS ele também aumenta a arrecadação;

- $S_1 (x_1, x_3, x_4, \rho_3)$: Que nem na gasolina também, que há arredondamento numérico na composição do valor cobrado pelo preço do litro de combustível que tem implicações em maior arrecadação dessas empresas.

A partir desses extratos de textos, é possível depreender que o uso da **PMC** « ρ_1 », da aritmética prática, além de revelar aspectos do modelo matemático *normativo* (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016), utilizado pela fornecedora de energia, de modo a atender interesses e intenções, por gerar realidades a partir desse modelo, deixou claro a indispensabilidade das praxeologias de uso da calculadora, inclusive, para auxiliar em tomada de decisões frente ao tipo de problema considerado.

De outro modo, as praxeologias de uso da calculadora científica como uma das *condições* no sentido da TAD (CHEVALLARD, 2009b), criaram perturbações aos sistemas didáticos auxiliares, que sem ela tampouco emergiriam no processo de estudos, e, não menos importante, mencionam-se restrições a partir das dificuldades manifestadas pelos professores, talvez em função da baixa qualidade de relação (CHEVALLARD, 2005) desses professores com essa praxeologias.

Essas dificuldades foram vencidas ao longo do processo de estudos com a interação entre os sistemas didáticos S_1 e S_2 , “aprendendo a fazer o que viu fazer, ou seja, se aprende com o mundo, com o outro e consigo mesmo, no sentido dado por Charlot (2003) sobre a relação com o aprender” (SODRÉ; GUERRA, 2018, p. 246), no sentido postulado pela *antropologia cognitiva dos saberes* (CHEVALLARD, 2005; 2009a), a partir do enfrentamento de situações inicialmente problemáticas, que paulatinamente, tornaram-se rotineiras pelo fazer regular.

4.4 Encaminhamentos da empiria de formação

A multivalência (REVUZ, 1971) do modelo matemático *normativo* (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016) do problema de financiamento desenvolvido com a **PMC** « ρ_4 » revelou, com a manifestação dos professores, o alcance desse modelo por atender diferentes situações em contextos concretos.

O estudo desse modelo matemático com as situações permitiu o desdobramento do estudo de outras situações em contextos concretos, subvertendo assim, o ensino que parece usual de MM, que parte normalmente, de uma situação

(*St*) com a formulação do modelo matemático, isto é: [*St* → *M*], para um tipo de formulação, aqui compreendida como formulação reversa.

De outro modo, neste tipo de formulação, parte-se do modelo matemático que leva ao conhecimento de situações, ou seja: [*M* → *St*]. Nesse sentido, o modelo matemático do problema de financiamento funcionou aos professores como “*máquina*”, capaz de produzir novos conhecimentos, novas relações entre as variáveis, enfim, “novos” saberes sobre as situações que emergiram no processo de formação de professores a partir desse modelo. A formulação reversa, que parte do modelo para a situação, em última análise, é aqui interpretada como *processo de Modelagem Matemática Reversa*.

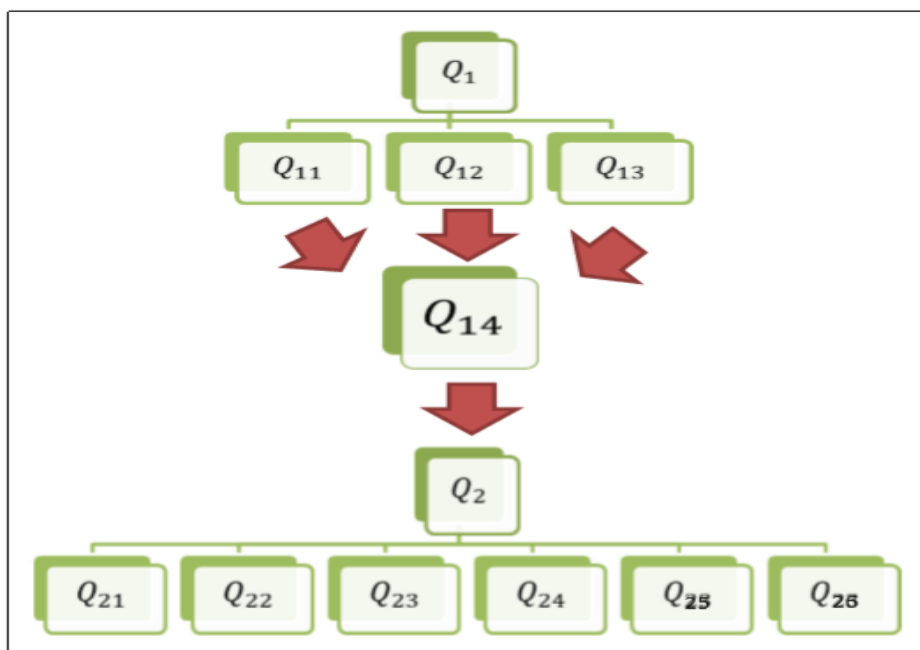
As sessões de estudos permitiram a construção de uma trajetória possível a partir do PEPO, que pode ser inclusive, aqui compreendido como um Modelo Epistemológico de Referência Orientado para o ensino de MM escolar a partir do estudo de situações em contextos concretos que se desdobraram no estudo de outras situações.

O estudo dos modelos matemáticos a partir das problematizações encaminhadas coletivamente, pelo diretor de estudos e os sistemas didáticos instalados, que levaram à legitimação de um modelo matemático, emergiu gradualmente. Desse modo, “mesmo se, retrospectivamente, pudermos dizer que era óbvio, ao se articular ao seguinte fato antropológico: toda atividade humana envolve o que eu chamo de uma *infraestrutura praxeológica*”⁸⁹ (CHEVALLARD, 2009b, p. 40, grifos do autor, tradução nossa).

Retrospectivamente, as organizações praxeológicas em torno das problematizações foram esquematizadas na Figura 27.

⁸⁹ Fragmento do texto: même si, rétrospectivement, on pourra toujours dire qu'elle crevait les yeux – s'articule au fait anthropologique suivant : toute activité humaine suppose ce que je nomme une *infrastructure praxéologique*.

Figura 27 – Trajetória de questionamentos



Fonte: Elaborada pelo autor (2019)

O percurso de estudos encaminhou também em retrospectiva, a estruturação de um esquema herbartiano inspirado no esquema proposto por Chevallard (2013b):

$$[S(X; Y; Q) \mapsto \{R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond, Q_{n+1}, \dots, Q_m, O_{m+1}, \dots, O_p\}] \mapsto R^\heartsuit.$$

Em nossa proposta as respostas $R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond$ do esquema são entendidas como sendo modelos matemáticos \mathbf{M}_k estudados e/ou desenvolvidos pelos professores constituídos pela tríade:

$$[\mathbf{M}_1 = (Q, St, \wp_1); \mathbf{M}_2 = (Q, St, \wp_2); \mathbf{M}_3 = (Q, St, \wp_3); \mathbf{M}_4 = (Q, St, \wp_4)].$$

As questões Q_{n+1}, \dots, Q_m , do esquema herbartiano correspondem aqui como parte dos sistemas didáticos auxiliares instalados, isto é:

$[S_1(x_1, x_3, x_4, \wp_1), S_2(x_2, x_5, \wp_2), S_1(x_1, x_3, x_4, \wp_3), S_2(x_2, x_5, \wp_3), S_1(x_1, x_3, \wp_4), S_2(x_2, x_5, \wp_4)]$ e, em última análise, além de incluir o estudo de obras destacamos que a resposta desejada R^\heartsuit do esquema herbartiano, corresponde aqui ao modelo matemático dado por:

$$\mathbf{M}_4 = \mathbf{M}^\heartsuit = (Q, St, \wp_4)^\heartsuit$$

Finalmente, a estruturação do esquema herbartiano da empíria de formação inicial de professores é expresso nos seguintes termos:

$$[S(X; Y; Q) \rightsquigarrow \{M_1, M_2, M_3, M_4, \dots, S_1, S_2, O\}] \rightsquigarrow M^*$$

Os questionamentos se mostraram, em nossa compreensão, indispensáveis para o estudo de modelos matemáticos e, como tal, criaram *condições* sob restrições institucionais para o estudo de objetos matemáticos e não-matemáticos, incluindo os saberes em sentido amplo como os pré-construídos que migraram mesmo que parcialmente, do estado de reconstrução para objeto de ensino.

De outro modo, os objetos, matemáticos e não-matemáticos, especificamente, as praxeologias relativas à calculadora científica, constituíram parte da infraestrutura praxeológica de saberes úteis, senão indispensáveis, a mudanças na qualidade de relações dos professores com a MM escolar.

É preciso considerar que os pré-construídos da cultura das práticas institucionais, como parte dos objetos não-matemáticos, mesmo sendo indispensáveis para o reconhecimento de situações e estudo de problemas em contextos, são aqui compreendidos como uma das *restrições* institucionais que dificultam, senão impedem o desenvolvimento da MM escolar nas instituições de ensino, ao despistar dos sujeitos, alunos ou professores, possibilidades que os permitam conhecer, o que inclui o reconhecer, de situações matematizáveis associadas ao tipo de problemas considerados.

Nesse sentido, parece incluir as praxeologias decorrentes do uso de calculadora pelos professores, pois as análises das sessões revelaram dificuldades desses professores, talvez porque:

há uma forte tendência entre pessoas e instituições, em "esquecer" a *infraestrutura como um problema*, enquanto a exploração rotineira a faz como um meio. O que domina, neste caso, é o que pode ser chamado de 'silêncio da infraestrutura'⁹⁰ (CHEVALLARD, 2009b, p. 41, grifos do autor, tradução nossa).

Sob a compreensão do PEPO como Modelo Epistemológico de Referência Orientado para o ensino de MM escolar a partir das problematizações que encaminharam os professores à construção de uma infraestrutura praxeológica de

⁹⁰ Fragmento do texto: *qu'il existe une forte propension, chez les personnes et dans les institutions, à « oublier » l'infrastructure comme problème, tout en l'exploitant de façon routinière comme moyen. Ce qui domine en ce cas est ce qu'on peut appeler le « silence de l'infrastructure ».*

saberes, matemáticos e não-matemáticos, sob condições e restrições institucionais, é que propomos no próximo capítulo, o Ciclo Investigativo de Modelagem Matemática, constituído pelo Sistema de Tarefas, descritas nos seguintes termos:

- H_0 : Construir uma situação de referência;
- H_1 : Investigar os modelos matemáticos que vivem na instituição escolar relativo ao problema;
- H_2 : Encontrar a situação que define a praxeologia matemática customizada;
- H_3 : Avaliar os modelos matemáticos;
- H_4 : Desenvolver o modelo matemático e
- H_5 : Difundir e defender o modelo matemático desenvolvido.

Essas tarefas, aqui abstraídas empiricamente das sessões de estudos para o ensino e aprendizagem de MM escolar, buscam de algum modo, minimizar os efeitos dos pré-construídos que podem ser de natureza matemática e não-matemática.

*Difundir e defender a resposta produzida***CAPÍTULO 5 - CONCLUSÕES E ENCAMINHAMENTOS:
CICLO INVESTIGATIVO DE MODELAGEM MATEMÁTICA**

Neste capítulo propomos o *Ciclo Investigativo de Modelagem Matemática* para o ensino e, eventualmente, aprendizagem de MM escolar, inspirado nos cinco gestos que definem uma verdadeira pesquisa (CHEVALLARD, 2013b), orientado pelos gestos genuínos que definem a atividade de MM escolar, isto é, G_1 , G_2 e G_3 , tomados como gestos mais inclusivos dessa atividade.

5.1 Em retrospectiva

O PEPO permite engendrar os saberes, em sentido amplo, que constituem a infraestrutura necessária para produzir uma resposta desejada para questão considerada.

Na TAD, essa técnica pode ser descrita como uma combinação de dispositivos e de "gestos"; uma infra-estrutura praxeológica inclui, nomeadamente, dispositivos, grandes e pequenos, que são as obras, e que permitem o desenvolvimento de *atividades superestruturais* - a implementação de tal técnica se apóia sobre essa infra-estrutura⁹¹ (CHEVALLARD, 2009b, p. 40, grifos do autor, tradução nossa).

A distinção entre as noções de infraestrutura e superestrutura, segundo Chevallard (2009b), é relativa e, como tal, pode ser aqui exemplificada a partir de resultados da empiria apresentado na sessão anterior, mais especificamente, sobre a manifestação de dificuldades reveladas pelos professores sobre o uso da calculadora científica.

Essas praxeologias relativas ao uso desse dispositivo didático, compreendido como instrumento de ajuda ao processo de estudo, constituem parte da infraestrutura praxeológica de saberes, que em geral, não se fazem ver, em função da ilusão da atividade superestrutural, como calcular o valor de uma prestação (p) fixa pelo financiamento de um bem, por exemplo, por meio da praxeologia **PMC** << \wp_4 >>, definida por:

$$p = \frac{D \cdot [i \cdot (1+i)^n]}{(1+i)^n - 1}$$

⁹¹ Fragmento do texto: *En TAD, une technique se laisse décrire comme l'association d'un dispositif et de « gestes » ; une infrastructure praxéologique comporte en particulier des dispositifs, grands et petits, qui sont des œuvres, et qui permettent de développer des activités superstructurelles – l'exécution de telle technique prenant appui sur cette infrastructure.*

Nesse sentido, o que prevalece, em geral, é a ilusão dessa atividade superestrutural, isto é, calcular o valor da prestação (p) fixa em um financiamento, “que oprime a questão das condições e restrições *infraestruturais* das atividades superestruturais”⁹² (Ibid. p. 41, grifos do autor, tradução nossa).

Essa atenção dada à noção do problema de infraestrutura, como ressalta Chevallard (2009b), é para destacar “a opressão do problema da infraestrutura, o aumento correlativo da ilusão superestrutural são o bastante - e um sintoma – dos “tempos normais” da vida praxeológica das pessoas e das instituições”⁹³ (Ibid. p. 41, tradução nossa). Nesse sentido, o autor ainda acrescenta que a saúde do corpo é o silêncio dos órgãos.

Essa compreensão pode ser reiterada a partir do seguinte extrato de texto:

Uma atividade superestrutural pode ser considerada como um detalhe de uma elaboração infraestrutural relativa à utilização dos números complexos em geometria [...] Mas, em todas as atividades humanas, se encontra uma linha de demarcação entre o que é assumido “dado”, que é construído em outro lugar, e o que fazemos *aqui e agora*. Observando, eu particularmente enfatizo que há uma forte tendência entre as pessoas e as instituições, em “*esquecer*” a infraestrutura como um problema, enquanto a exploração rotineira a faz como um meio⁹⁴ (Ibid. p. 41, grifos do autor, nossa).

Assim, a compreensão da MM como uma tarefa superestrutural nos leva a pensar que há a necessidade de se evocar, e/ou invocar, uma infraestrutura matemática. No entanto, parece não estar clara a evocação, e/ou invocação, de uma infraestrutura não matemática.

A ausência da infraestrutura de saberes não-matemáticos para a compreensão da MM parece ficar clara, com o encaminhamento dado pelos professores sobre o problema de investimento tratado na empiria da sessão anterior. Esse tipo de problema parece ter sido interpretado por esses professores quando manifestaram as **PMC** $\ll \wp_1$ e $\wp_2 \gg$ que, postas à prova com a **Situação de Referência** postulada na sessão anterior, mostraram-se inadequadas para responder ao tipo de problema considerado.

⁹² Fragmento do texto: *qui refoule la question des conditions et contraintes infrastructurales des activités superstructurelles.*

⁹³ Fragmento do texto: Le refoulement du problème de l'infrastructure, l'essor corrélatif de l'illusion superstructurelle sont le lot – et le symptôme – des « périodes normales » de la vie praxéologique des personnes et des institutions.

⁹⁴ Fragmento do texto: *une activité superstructurelle peut être regardé comme un détail d'une élaboration infrastructurale relative à l'utilisation des nombres complexes en géométrie [...] Mais, en toute activité humaine, se rencontre une ligne de démarcation entre ce qui est supposé « donné », c'est-à-dire construit ailleurs, et ce que l'on fait hic et nunc. Cela noté, je soulignerai surtout qu'il existe une forte propension, chez les personnes et dans les institutions, à « oublier » l'infrastructure comme problème, tout en l'exploitant de façon routinière comme moyen.*

Nesse sentido, a ausência infraestrutural dos saberes pré-construídos do campo de práticas das instituições financeiras dificultou, senão impediu, que os professores reconhecessem a **PMC** associada ao domínio de realidade relativo ao tipo de problema de investimento enfrentado no processo de estudos. Além desse episódio, reiteramos, em retrospectiva, o episódio da qualidade de relação (CHEVALLARD, 2005) dos professores sobre as praxeologias relativas ao uso da calculadora científica.

Nesse sentido, Chevallard (2009b) assim expressa:

O que domina, nesse caso, pode ser chamado de "silêncio da infraestrutura". Do mesmo pode ser dito (para abreviar um pouco) que a saúde do corpo é o silêncio dos órgãos (René Leriche), o mesmo pode ser dito sobre a saúde praxeológica de uma pessoa ou de uma instituição ser (em princípio) o silêncio da infraestrutura: a saúde é quando a infraestrutura se faz esquecida; é quando prevalece a ilusão superestrutural, que oprime a questão das condições e restrições infraestruturais das atividades superestruturais⁹⁵ (CHEVALLARD, 2009b, p. 41, tradução nossa).

Assim, nos parece que os processos de MM são tomados na escola como atividade superestrutural determinada e, portanto, possuidora de uma resposta praxeológica pronta, ou seja, dotada de uma tarefa matemática e uma técnica ou procedimento matemático que podem ser justificados por uma teoria matemática de modo não questionável. Há o silêncio da infraestrutura.

Em particular, o silêncio da infraestrutura não matemática se faz sentir no ciclo de modelagem apresentado pelo Relatório Nacional do PISA (BRASIL, 2012), pois, frente a um problema em contexto, ele é, supostamente, tomado como dependente apenas do conhecimento matemático, embora dependa objetivamente de saberes não estudados na disciplina Matemática como o do subprocesso de (a) "Formulação de um problema matemático". A disciplina tão somente contempla o subprocesso (b) de "Aplicação da técnica matemática" que produzirá resultados. Esses resultados são encaminhados ao subprocesso de (c) "Interpretação de resultados e validação no contexto", que não são objetos propriamente de ensino da disciplina Matemática na escola básica.

⁹⁵ Fragmento do texto: *Ce qui domine en ce cas est ce qu'on peut appeler le « silence de l'infrastructure ». De même qu'on a pu dire (à peu près) que la santé du corps, c'est le silence des organes (René Leriche), de même on peut dire que la santé praxéologique d'une personne ou d'une institution, c'est (d'abord) le silence de l'infrastructure : la santé, c'est quando l'infrastructure se fait oublier ; c'est lorsque prévaut l'illusion superstructurelle, qui refoule la question des conditions et contraintes infrastructurelles des activités superstructurelles.*

Esses subprocessos do ciclo de MM – o que inclui as técnicas matemáticas e não matemáticas neles envolvidos – são assumidos como dados prévios, facilmente alcançados e, sobretudo, como subprocessos não questionáveis.

Os subprocessos do ciclo, em geral, estão enclausurados na disciplina Matemática e, portanto, são encaminhados como subprocessos de aplicações da matemática em problemas reais. Isso contribui para a invisibilidade da MM como OPC que constitui esse processo e, talvez por isso, a MM pareça ser restrita a um processo de evocação de praxeologias matemáticas.

Se assumirmos, então, que a dificuldade do uso da MM em sala de aula, por alunos e professores, reside no silêncio da infraestrutura, no caso a invisibilidade da organização de saberes, matemáticos e não-matemáticos, que engendram um modelo matemático segundo uma dada situação, então a noção de MM como uma OPC, pode ser paulatinamente construída por meio de um PEPO, podendo mostrar-se como dispositivo capaz de encaminhar uma possível resposta sobre essa dificuldade.

Esse olhar, portanto, contraria o desenvolvimento da MM como uma atividade exclusiva da matemática quando encaminha a didática do PEPO, pois, sob o paradigma de questionamento do mundo, é que ele toma sua forma concreta, chamando para si as praxeologias infraestruturais, matemáticas e não-matemáticas, o que inclui todos os saberes disciplinares e não-disciplinares demandados para o estudo de um domínio de realidade.

Quanto à natureza dos modelos e sua relação com o sistema modelado, não devemos cair na ingenuidade de pensar que um *modelo* é uma cópia ou reprodução fotográfica do sistema que modela, mas é um *acréscimo* a esse sistema, uma *construção artificial*. Ressalta-se que a principal função do modelo não é se assemelhar ao sistema que modela, mas *fornecer conhecimento* sobre o mesmo e fazê-lo da maneira mais econômica e eficiente possível. Para superar essa falsa interpretação, podemos substituir, como propõe Chevallard (1992), a metáfora do modelo como uma *imagem* do sistema para a do modelo como uma *máquina* cujo funcionamento permite produzir conhecimento relativos ao sistema modelado⁹⁶ (FONSECA; GASCÓN; LUCAS, 2014, p. 295, grifos dos autores, tradução nossa).

⁹⁶ Fragmento do texto: *En cuanto a la naturaleza de los modelos y su relación con el sistema modelizado, no debemos caer en la ingenuidad de pensar que un modelo es una copia o reproducción fotográfica del sistema que modeliza, sino que es un añadido a dicho sistema, una construcción artificial. Se enfatiza así que la principal función del modelo no es la de parecerse al sistema que modeliza, sino la de aportar conocimientos sobre él y hacerlo de la forma más económica y eficaz posible. Para superar esta falsa interpretación podemos substituir, como propone Chevallard (1992), la metáfora del modelo como imagen del sistema por la del modelo como máquina cuyo funcionamiento permite producir conocimientos relativos al sistema modelizado.*

Nesse sentido, compreendemos que construções artificiais provisórias ocorrem em ato de confronto com a realidade questionada e se alargam com propósitos de responder ao maior número de questionamentos sobre essa realidade.

Essas construções artificiais não são obras do acaso, atendem uma intencionalidade, ou seja, uma relação do sujeito que modela com o domínio de realidade considerado.

Essa relação pode ainda não estar criada e isso pode impedir o avanço do estudo do domínio de realidade questionada. Assim, torna-se necessário dispor de uma situação de referência artificial, no sentido de não ser problemática para quem modela, mas que permita construir confrontos com o domínio de realidade estudado.

Essa relação mínima “artificial” tem o papel funcional de engendrar o processo de MM, que como o desenvolvimento de um PEPO, não está estrategicamente planejado, no sentido de não podermos afirmar *a priori* que saberes e, como esses saberes, serão mobilizados ou articulados para a obtenção do modelo matemático, aqui compreendido pela tríade:

[*Questão (Q), Situação (St), Praxeologia Matemática Customizada (PMC)*].

Postulamos que a não-clareza das tarefas a serem enfrentadas nesse percurso pode contribuir para o silêncio da infraestrutura, entre elas, o próprio ciclo de MM.

Desse modo, podemos supor que um ciclo que se realiza por meio de tarefas orientadas pelos cinco gestos de uma verdadeira investigação que caracterizam o PEPO, sustentadas pelos gestos genuínos da atividade de MM, mais inclusivos, que se fazem ver, permite encaminhar o desenvolvimento da atividade de MM em sala de aula, não somente como um saber a ser aprendido, mas como saber que pode ser ensinado.

Esses gestos frente a uma situação de referência em conjugação com os gestos genuínos da atividade de MM, somente ao alcance do professor, permitem que possamos falar em ensinar MM para além de um saber somente aprendido pelos alunos.

De outro modo, podemos propor o PEPO para além de um *Ciclo Investigativo de Modelagem Matemática*, como objeto de ensino e, com isso, de aprendizagem, dotado de um sistema de tarefas e técnicas que podem ser acessadas e utilizadas para a construção de novos saberes, em particular, para o estudo e

desenvolvimento de modelos matemáticos, como encaminha o próximo tópico desta sessão.

5.2 Ciclo investigativo de Modelagem Matemática

Propomos o *Ciclo Investigativo de Modelagem Matemática*, ou simplesmente CIMM (SODRÉ; GUERRA, 2018), como uma resposta à problematização do ciclo de MM proposto pelo Relatório Nacional da OCDE/PISA (BRASIL, 2012), ou seja, uma organização praxeológica, que emergiu de análises e sínteses sobre o uso do PEPO pela comunidade de estudo explicitada na sessão anterior, que pode vir a se tornar objeto de ensino e de aprendizagem em MM escolar.

O CIMM se propõe a permitir questionar as tarefas de formular, empregar, interpretar e validar do ciclo de MM encaminhado pelo Relatório Nacional da OCDE/PISA (BRASIL, 2012), dando visibilidade à complexidade do ciclo em ato, em particular, da infraestrutura praxeológica dos saberes, matemáticos e não-matemáticos, necessários ou úteis para seu desenvolvimento.

O CIMM é dotado de seis tarefas sequenciais, nem todas sempre necessárias, e se reinicia, sempre que ajustes são demandados por novos questionamentos sobre as “situações concretas” e artificiais que encaminham o jeito de pensar a situação tomada como referência relacionada ao problema em estudo.

Em última instância, o CIMM é estruturado da seguinte forma:

- **Tarefa H₀: Construir uma Situação de Referência**

Essa tarefa tem objetivo de encaminhar o jeito de pensar inicial e provisório, ou seja, uma situação em relação com o problema estudado.

Essa situação tem o papel de orientar a investigação dos modelos matemáticos pré-existentes na literatura escolar, inclusive na internet, bem como servir de protótipo para a empiria demandada pelas demais tarefas.

A técnica consiste em considerar um problema do mesmo tipo com todos os dados conhecidos, inclusive os dados planejados para serem encontrados, de maneira a prover uma *situação de referência*. Isto pode ser encaminhado por:

- Investigar na literatura um problema do tipo específico considerado, com todos os dados conhecidos, inclusive, os dados que são objetos de questionamento;

- Fazer simulação de uma “situação concreta” em analogia como o contexto do problema com recursos do tipo “micromundo”, no sentido de Rieber (1996), se necessário com dimensões reduzidas de dados, que permita gerar dados empiricamente.

Mais especificamente, uma *situação de referência* é um instrumento de caráter sempre provisório, cuja funcionalidade é permitir aos alunos, inclusive, professores, questionar as praxeologias matemáticas, mais precisamente, desconstruir e reconstruir praxeologias matemáticas que pretendem difundir e defender nessa comunidade de estudo como pertinente para o problema em contexto concreto.

Tarefa H₁: Investigar os modelos matemáticos que vivem na instituição escolar relativo ao problema

Essa tarefa se insere nos gestos G_1 e G_2 com objetivo de encontrar os modelos matemáticos disponíveis na literatura escolar que podem potencialmente ser usados para a situação de referência.

Aqui é preciso ter em conta a complexidade matemática dos modelos matemáticos para o estudo do tipo de problema. Essa é uma questão vital para o estudo, pois maior conhecimento matemático exigido pode implicar, embora não assegure, em melhores condições para o (re)conhecimento de situações sobre a realidade estudada. Além disso, o conhecimento matemático da comunidade de estudo é limitado pela escola por meio de currículos e programas e isso pode se constituir em restrições.

Essa tarefa é necessária fente aos gestos G_1 e G_2 genuínos de modelagem, por levar ao encontro do uso de modelos matemáticos, envolvendo variáveis de situações, embora estas possam não ficar ainda claras.

Situações não imaginadas em um dado contexto podem se revelar com o uso do modelo, principalmente, a partir de modelos matemáticos que governam situações sociais. Por exemplo, o modelo usado para o cálculo do Imposto de Renda Pessoas Física (IRPF) da Receita Federal recorre a cálculos que indicam simplicidade, a sua “variável” esconde complexos sentidos práticos do sistema tributário (ESPÍRITO SANTO, 2018).

Não é raro que usuários caíam em “malha fina” do IRPF por erros na construção do valor numérico dessa “variável”, por não reconhecerem a situação

que se encontram. Antes de usar o modelo matemático, é preciso reconstruí-lo, nesse caso, considerar as variáveis não-matemáticas que conformam a situação específica considerada pelo usuário.

Desse modo, é útil considerar o estudo de situações com matemática disponíveis na literatura escolar para o tipo de situação de referência, pois podem encaminhar sugestões de situações e formulações de modelos matemáticos para o problema em estudo.

De outro modo, é preciso estar alerta que diferentes práticas sociais se desenvolvem segundo modelos matemáticos específicos construídos a partir de conhecidas situações convencionadas socialmente e, como tais, somente podem ser reconhecidas por aqueles que estudam essas situações com suas praxeologias matemáticas customizadas associadas.

Segundo a compreensão adotada pela TAD, quanto maior o conhecimento de uma pessoa sobre situações com matemática, ou seja, situações que admitem praxeologias com matemática, maior será seu equipamento praxeológico e, com isso, sua possibilidade de sucesso em encontrar ou construir uma situação e a praxeologia com matemática associada. Esse é o objetivo da tarefa seguinte, que também atende os gestos G_1 e G_2 .

Tarefa H₂: Encontrar a situação que define a praxeologia matemática

Essa tarefa se insere nos gestos G_1 e G_2 , no que tange a conhecer/reconhecer as questões, situações associados à praxeologia com matemática.

A técnica é a análise, ou seja, desconstruir para reconstruir situações a partir da praxeologia com matemática, o que inclui os tipos de problemas a ela associados.

É preciso também observar que um homem pode ser confrontado com uma situação na qual ele vê apenas determinado aspecto, e que a construção de um modelo pode obrigá-lo a lançar um olhar mais agudo sobre a situação e descobrir características as quais, no início, ele não observara. Saber mais pode ajudar a ver mais⁹⁷ (REVUZ, 1971, p. 50, tradução nossa).

Assim, as desconstruções das praxeologias matemáticas deverão ir desenhando situações por meio do encontro com relações mais profundas entre as

⁹⁷ Fragmento do texto: *One must also remark that a man can be confronted with a situation of which he sees only certain aspects, and that the building of a model may compel him to throw a more acute look on the situation and discover features of which, at the beginning, he was not aware. To know more may help to see more.*

“variáveis”, que, embora sejam tomadas como números, são numerais que designam alguma quantidade de grandezas em contexto e, portanto, são dotadas de sentidos práticos não alcançados pelos saberes matemáticos e que delimitam a região de valores que essa quantidade de grandeza pode assumir.

Para ilustrar o que estamos dizendo, recorreremos a Høyrup (2007) quando este se manifesta sobre a forma algébrica do modelo matemático da redução à unidade usada em uma prática específica de comércio de mercadorias (grãos), contra moeda (denari) apresentada por *Jacopo de Firenze*⁹⁸.

No final, o preço em grãos, é claro, deve ser convertido em denari por meio de uma divisão. A vantagem pode não ser aritmeticamente óbvia para nós. Se o preço de um quintal de N libras for X soldos, o preço de 1 libra é $12X / N$ denari. Em vez de multiplicar por 12 e dividir por N, Jacopo sugere multiplicar por 3 e dividir por $(N / 4)$. Mas se muitos cálculos tiverem que ser feitos com o mesmo N, e se $N / 4$ for um número inteiro, os cálculos se tornam um pouco mais simples. Mais importante ainda, a introdução da unidade fictícia dá um significado concreto tanto ao número $3X$ (o preço de uma libra em grãos) quanto à divisão por $N / 4$ (a conversão da unidade monetária)⁹⁹ (HØYRUP, 2007, p. 69, tradução realizada por Silva (2017)).

O extrato de texto ilustra o que queremos destacar, a praxeologia com matemática poderia expressar uma libra por $\frac{12X}{N}$, mas foi expressa por $\frac{3X}{\frac{N}{4}}$. Esse modo ocorreu por atender à ergonomia do contexto das práticas sociais do comércio, no caso, a relação de troca de libra em grão, que explica o $3x$, e a conversão da moeda, que explica o $\frac{N}{4}$.

A praxeologia com matemática se distingue da praxeologia matemática, principalmente, por suas “variáveis” serem dotadas de sentidos práticos, não-matemáticos. Nesse sentido, a praxeologia $\frac{12X}{N}$, embora mais simples do ponto de vista aritmético, pela economia dos cálculos, perde a razão da prática comercial e com isso se torna como uma prática mágica, como acontece com uso de fórmulas

⁹⁸ “Jacopo de Firenze foi um compilador familiarizado com as práticas de cálculo pouco versado [...] O primeiro livro de ábaco foi escrito por Jacopo de Firenze. Høyrup faz uma análise minuciosa desse tratado, cujo conteúdo é totalmente retórico. [...] O autor conclui que a álgebra pode ter suas raízes em práticas que estavam presentes na área que se estende da península Ibérica até a região de Provença, na França, ambas com ancestrais comuns na Andaluzia e no Magreb. Essa conclusão reside no fato do livro não oferecer provas geométricas, mas somente regras, além de se caracterizar por uma matemática comercial e algébrica, típica da cultura matemática de Andaluzia e do Magreb”. (ROQUE, 2012, p.264).

⁹⁹ Fragmento do texto: *In the end, the price in grains of course has to be converted into denari by means of a division. The advantage may not be arithmetically obvious to us. If the price of a quintal of N pounds is x soldi, then the price of 1 pound is 12x/N denari. Instead of multiplying by 12 and dividing by N, Jacopo suggests to multiply by 3 and to divide by N/4. But if many calculations have to be made with the same N, and if N/4 is an integer, then computations become somewhat simpler. More important, the introduction of the fictitious unit gives a concrete meaning both to the number 3x (the price of one pound in grains) and the division by N/4 (a conversion of the monetary unit).*

que produzem resultados que, para serem alcançados por empiria, demandariam tempo substancial e grandes esforços físicos.

O modelo matemático de uma libra $= \frac{3X}{N}$, tem objetivo claro para os sujeitos que fazem parte desse campo de práticas os coeficientes, variáveis, e relações entre si, que constituem a formulação de um modelo matemático encaminham o que se pretende, a questão e, em consequência, o que define a situação.

Outro exemplo que revela o que queremos dizer foi extraído de Castela (2016), quando trata da reconstrução de um modelo matemático para práticas da engenharia da automação.

Especificamente, a reconstrução consistiu em transformar expressões algébricas, incomum às práticas da matemática escolar, de modo que as variáveis matemáticas fossem interpretadas como variáveis não matemáticas da situação considerada. Castela (2016) afirma que:

O único ponto que é especificado é que o denominador de $F(p)$ deve ser escrito na seguinte forma canônica $(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)(1+\tau_3p)\dots$ com a diminuição de dois valores τ_i . Por exemplo, $3p + 2$ é transformado em $2.(1+1,5p)$ e não em $3.(p+2/3)$. Esta é uma mudança importante em uma técnica matemática original. Motivação (razão de ser) desta fatoração especial: Se a $F(p) = 1/(1+1,5p)$, uma função original correspondente é a $f(t) = K(1 - e^{-t/1,5})$. 1,5 se chama o tempo constante da função $f(t)$ ¹⁰⁰ (CASTELA, 2016, p. 22, tradução nossa).

É possível depreender desse extrato de texto a expressão $(3p+2)$ escrita na forma de $2.(1+1,5p)$, em vez de $3.(p+2/3)$, como seria esperado em outra instituição como a matemática escolar, por exemplo. Os coeficientes do modelo expressam grandezas não-matemáticas da situação prática considerada.

Em resumo, nesse exemplo, pode-se chegar a situações a partir da praxeologia com matemática e isso exige conhecer/reconhecer o contexto das práticas, que encaminha o conhecimento/reconhecimento de variáveis e as relações entre si como movimentos de saberes não matemáticos em contexto.

A análise das praxeologias com matemáticas encaminha o encontro com as situações, como uma formulação reversa, no sentido de que vai da praxeologia com matemática à situação que a formulação representa.

¹⁰⁰ Fragmento do texto: *El único punto que él especifica es que el denominador de $F(p)$ tiene que ser escrito de la siguiente forma canónica $(1+\tau_1p)(1+\tau_2p)(1+\tau_3p)\dots$ con la disminución de los valores de τ_i . Por ejemplo, $3p+2$ es transformado en $2(1+1.5p)$ y no en $3(p+2/3)$. Esto es un cambio significativo a la técnica matemática original. Motivación (razón de ser) de esta factorización especial: Si la $F(p) = 1/(1+1.5p)$, la función original correspondiente es la $f(t) = K(1 - e^{-t/1.5})$. 1.5 es un tiempo, se llama el tiempo constante de la función $f(t)$.*

Tarefa H₃: Avaliar os modelos matemáticos

Essa tarefa se insere no gesto G_2 como parte final do estudo de modelos matemáticos. A avaliação é realizada assumindo como critérios a adequabilidade e a multivalência desses modelos. Ambas são avaliadas frente à situação de referência.

A técnica é encaminhada pelas seguintes subtarefas interconectadas:

Subtarefa H₃₁: Avaliar a adequação das situações reconstruídas frente ao problema

A adequação do modelo matemático não é uma questão matemática, mas é uma questão vital para o estudo da realidade que trata o tipo de problema em contexto, pois se alguém usa um modelo um tanto inadequado, por causa de sua conveniência, simplicidade, por exemplo, sem observar sua inadequação, é preciso estar ciente do perigo de tirar conclusões sobre a realidade a partir do estudo de tal modelo (REVUZ, 1971, p. 49).

A inadequação do modelo matemático pode decorrer por diferentes motivos, sobretudo por se limitar a situações que não têm em conta as variáveis e as relações entre elas admissíveis que não são “facilmente” observadas. Nesse caso, corre-se o risco de encontrar respostas até absurdas para a realidade em estudo.

Para exemplificar o que estamos dizendo, recorreremos ao modelo para o cálculo populacional que busca responder à questão de estimar a população futura de um dado espaço social que admite que sua população cresce sem qualquer restrição, ignorando a existência de fatores que podem influenciar seu crescimento, tais como: epidemias, guerras, fome, entre outros, ou seja, que o número total de indivíduos varia com o tempo, dependendo apenas da quantidade presente em cada instante (LEITE; SILVA; SOUSA, 2011, p. 932).

Nesses termos, a população N em um dado tempo futuro t , tendo em conta a população presente N_0 , com taxa de crescimento populacional r , poderá ser prevista pela seguinte praxeologia com matemática:

$$N = N_0 \cdot e^{rt}$$

Mas o pensar do desenvolvimento populacional não depender de outros fatores, além do tempo, pode se mostrar inadequado em populações com inibição de crescimento populacional, particularmente em longo prazo. Sobre isso acrescentam que:

Em muitas situações, é razoável considerar que o crescimento da população é inibido por fatores como: falta de espaço, escassez de alimentação etc. Em outras palavras, pode-se supor que a taxa de crescimento populacional diminui com o crescimento da população, e que existe uma capacidade máxima sustentável para essa população (LEITE; SILVA; SOUSA, 2011, p. 934).

Embora não se possa assegurar a existência de um modelo matemático que abarque todas as situações que possam ser imaginadas e possíveis em um dado contexto concreto, o que caracteriza a incompletude dos modelos matemáticos como ferramenta para descrever realidades, deve-se considerar os modelos matemáticos que dão conta de diferentes situações sobre a realidade estudada. No caso, isso implica em considerar a potencialidade da praxeologia com matemática para enfrentar outras situações, inclusive, em outros contextos.

Subtarefa H₃₂: A multivalência da praxeologia com matemática e situações associadas frente ao tipo do problema

São preferíveis as praxeologias com matemáticas que dão conta de diferentes tipos de situações e, em consequência, diferentes questões sobre a realidade considerada, em lugar de praxeologias com matemáticas que somente dão conta de uma situação particular específica.

Os questionamentos derivados do questionamento sobre a realidade que encaminhou o problema e, cuja resposta é o objetivo da MM, à luz das situações reconstruídas e das **PMC** associadas, permitem checar a multivalência dessa **PMC**. Quanto mais questões a **PMC** puder associar maior será sua multivalência.

Em resumo, os modelos matemáticos avaliados que encaminhem situações e **PMC** como adequadas e com maior multivalência relativa à **situação de referência**, devem ser encaminhados à tarefa seguinte.

Tarefa H₄: Desenvolver o modelo matemático

Essa tarefa se insere no gesto **G₃** e, portanto, se dedica a manter, modificar ou criar um modelo matemático a partir dos modelos matemáticos até então estudados nas tarefas anteriores.

A resposta a essa tarefa é produto das respostas das tarefas anteriores, de modo que pode resultar:

- 1 - Manter um dos modelos estudados como o modelo matemático;

2 - De modificações, inclusive de customização, de um dos modelos matemáticos anteriores;

3 - De articulação e integrações praxeológicas, o que inclui as situações associadas.

Nesse sentido, é preciso ter em conta o objetivo do modelo matemático, as situações e praxeologias matemáticas adequadas e com boa multivalência é mais adequada para o modelo, pois nem sempre há regras para fazer uma escolha.

A experiência da comunidade de estudo é determinante para o desenvolvimeto do modelo, além da influência, nem sempre clara, dos níveis de codeterminação didática como recursos materiais disponíveis e usados, por exemplo, calculadoras e ou computadores, que condicionam, em geral, a comunidade de estudo na execução da tarefa superestrutural de MM.

Vale observar, que a formulação do modelo matemático começa com as tarefas anteriores, a Tarefa H_1 se desenvolve nas Tarefas H_2 e H_3 e com o amadurecimento da situação com matemática relativa à **situação de referência** que atinge a Tarefa H_4 e, se consolida, na Tarefa H_5 seguinte.

Tarefa H_5 : Difundir e defender o modelo matemático desenvolvido

Essa tarefa se insere no gesto G_3 e tem como objetivo difundir o modelo matemático desenvolvido com sua defesa em situação.

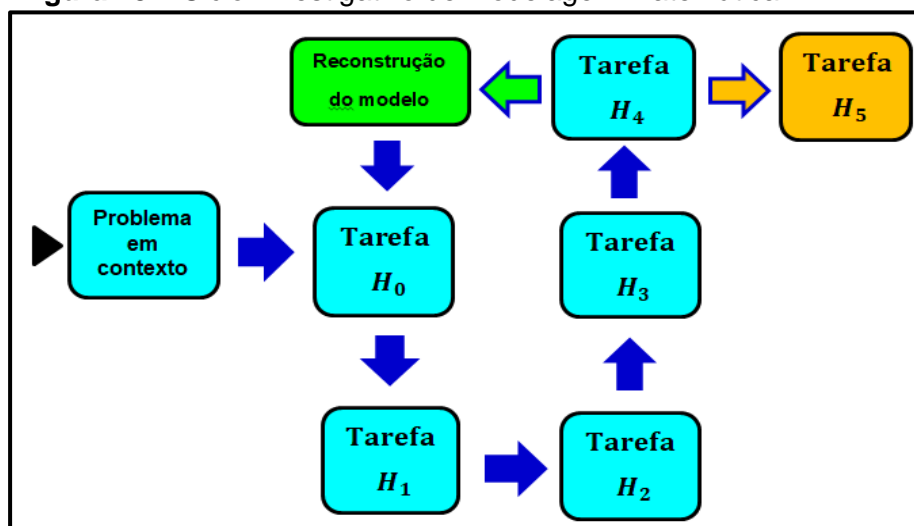
A técnica para essa tarefa consiste em duas fases:

I - “Aplicar” o modelo matemático desenvolvido na situação de referência, se possível com diferentes conjuntos dados, mas considerando como desconhecidos os dados de interesse do problema em estudo. A demonstração da consistência das respostas obtidas pelo modelo com a resposta conhecida legitima o modelo matemático para a situação de referência;

II - “Aplicar” o modelo matemático desenvolvido ao problema real com os dados originais. A razoabilidade das respostas obtidas com a repetição do uso do modelo com diferentes dados possíveis para o contexto do problema encoraja a legitimidade do modelo matemático para o tipo de problema em estudo.

O sucesso alcançado simultaneamente nas duas fases legitima provisoriamente o modelo matemático como resposta para o tipo de problema em estudo. A falha em uma delas evidencia o insucesso do modelo e, isso, demanda ajustes na situação de referência e, novo ciclo deve ser iniciado, não necessariamente, da primeira tarefa, como parece claro na Figura 28.

Figura 28 – Ciclo Investigativo de Modelagem Matemática



Fonte: Elaborada pelo autor (2019)

É importante destacar que a iteratividade dos ciclos quando estacionária indica o momento do encontro do modelo matemático procurado, ou que novas condições devem ser introduzidas, como o estudo de obras matemáticas ou não matemáticas, por exemplo, que permitam dar continuidade a iteratividade até a avaliação considerada final da comunidade de estudo.

5.3 Considerações

A compreensão da MM escolar como uma OPC a partir dos elementos teóricos da TAD nos permite dar uma “razão de ser” ao processo cíclico de MM apresentado pelo Relatório Nacional do Pisa (BRASIL, 2012), de modo a tornar essa prática destituída de procedimentos mágicos (ECO, 2002) e, sobretudo, exequíveis nas instituições escolares para o enfrentamento de problemas em contextos concretos.

Sob a TAD, Garcia *et al.* (2006), Bosch, Chevallard e Gáscon (2006), por exemplo, não criticam o ciclo de MM, mas o transpõem sob um arcabouço teórico sólido, de modo que essa noção é tomada como problemática nas pesquisas em

Educação Matemática, tanto na linha epistemológica em que se insere a TAD, quanto na perspectiva cognitivista.

Esses autores consideram que a pesquisa deve se concentrar em questões cruciais, com origem ou não em problemas matemáticos, que possam gerar um amplo conjunto de organizações matemáticas interpretando assim, o ciclo de MM como organizações matemáticas em conexões com outras organizações matemáticas de maior complexidade (GARCIA et al., 2006; BOSCH, CHEVALLARD; GÁSCON, 2006).

Essa compreensão, no entanto, restringe o processo de MM, ou ciclo de MM, ao estrito âmbito das atividades matemáticas contrastando com a concepção aqui adotada desse processo como uma organização praxeológica com matemática em ato e, portanto, necessariamente complexa.

Sob a mesma égide teórica da TAD e, com viés da perspectiva crítica da MM, Burgermeister (2007; 2010; 2012) considera o processo de MM inspirado no processo descrito por Chevallard (1989c) em três etapas. Na perspectiva proposta por Burgermeister (2007; 2010; 2012), o processo de MM é descrito em seis passos em busca de uma resposta para uma questão Q. Essa descrição em seis passos é definida de modo a ser implementado nas aulas, ou seja, como um estudo organizado que viabiliza esse processo, da seguinte forma:

1. Definimos o sistema que pretendemos estudar, especificando os aspectos pertinentes em relação à questão Q, ou seja, o conjunto de variáveis relevantes pelas quais se divide o domínio de realidade onde ele aparece.
2. Procuramos então os modelos M_1, M_2, \dots, M_n , baseando-se cada um desses modelos em certas hipóteses complementares (a serem definidas), construídas a partir do estabelecimento de um certo número de relações entre as variáveis consideradas na primeira etapa, um modelo do sistema a ser estudado consistindo de um conjunto de tais relações.
3. Buscamos as respostas R_1, R_2, \dots, R_n que os modelos M_1, M_2, \dots, M_n fornecem para a questão Q.
4. A adequação desses modelos ao sistema estudado é comparada com a pertinência das respostas obtidas.
5. Desenvolvemos uma resposta R^* (que pode ser baseada em um dos modelos examinados ou em uma síntese de diferentes modelos).
6. Defender a escolha do modelo proposto e a resposta obtida¹⁰¹ (BURGERMEISTER, 2012, p. 641, grifos do autor, tradução nossa).

¹⁰¹ Fragmento do texto:

1. *On définit le système que l'on entend étudier, en précisant les aspects pertinents par rapport à la question Q, soit l'ensemble des variables pertinentes par lesquelles on le découpe dans le domaine de réalité où il nous apparaît.*

2. *On recherche alors des modèles M_1, M_2, \dots, M_n , chacun de ces modèles étant fondé sur certaines hypothèses complémentaires (à définir), puis construit en établissant un certain nombre de relations entre les variables prises en compte dans la première étape, un modèle du système à étudier étant constitué d'un ensemble de telles relations.*

O extrato de texto parece destacar que Burgermeister (2007; 2010; 2012) encaminha o processo de MM como um percurso investigativo que se distingue do PEP por ser orientado *a priori* por essas etapas. Essa compreensão postulada pelo autor contrasta com a concepção aqui adotada sobre a atividade de MM, pois:

- O processo de modelagem se assenta sobre um aspecto da atividade de MM, isto é, considera apenas o processo de modelagem fundamentado nas etapas de modelagem apresentadas por Chevallard (1989c). Por outro lado, a atividade MM em nossa proposta, orienta-se por três gestos mais inclusivos aqui interpretados como gestos genuínos da atividade de MM escolar: G_1 , G_2 e G_3 ;
- Considera que uma questão Q pode levar ao estudo de diferentes modelos matemáticos, não necessariamente em conexões matemáticas, enquanto que em nossa proposta, não é assumido *a priori* e, assim, se pode chegar a vários modelos por meio de uma situação, bem como a várias situações em contextos concretos a partir de um modelo matemático no sentido posto por Revuz (1971);
- O processo de modelagem adotado por Burgermeister (2007; 2010; 2012) é tomado como atomístico assentado sobre a noção aqui proposta da tarefa de avaliar o modelo matemático, isto é, centrado na adequação de um modelo para uma situação. O autor considera como resposta a questão Q, a resposta produzida pelo modelo utilizado. Entretanto, na perspectiva aqui adotada, a atividade de MM busca considerar o processo de modelagem de forma holística, bem como o modelo matemático como sendo a resposta desejada no estudo de problemas em contextos. Em última análise:
- Burgermeister (2007; 2010; 2012), além de considerar a **PMC** como sendo o próprio modelo matemático, contribui para invisibilidade do processo de modelagem ao deixar claro nas etapas desse processo, a presença de pré-construídos (CHEVALLARD, 2005) por meio de termos assertivos, tais

3. On cherche les réponses R_1, R_2, \dots, R_n que les modèles M_1, M_2, \dots, M_n fournissent à la question Q.

4. On analyse comparativement l'adéquation de ces modèles au système étudié et la pertinence des réponses obtenues.

5. On développe une réponse R^* (qui pourra s'appuyer soit sur un des modèles examinés soit sur une synthèse de différents modèles).

6. On défend le choix du modèle proposé et la réponse obtenue.

como: “o conjunto de variáveis pertinentes”; “relações entre variáveis”; “todo modelo pressupõe ser dotado de gerar uma resposta”; sem, entretanto, considerar que essas assertivas só são possíveis para quem conhece o tipo de problema em contexto passível de matematização.

No entanto, na concepção de MM aqui adotada, consideramos que um modelo matemático não se reduz à **PMC**, pois o modelo é aqui compreendido pela tríade: {Questão (Q), Situação (St), Praxeologia Matemática Customizada **PMC**}. Além disso, o CIMM orientado, por exemplo, busca tirar a invisibilidade das etapas do processo de MM e das relações entre si, mantidas, no ciclo da OCDE/Pisa (BRASIL, 2012) que oprime a infraestrutura praxeológica de saberes necessária, ou pelo menos útil, para o desenvolvimento da MM em sala de aula.

Além disso, é preciso considerar que as características do processo investigativo do CIMM o credenciam, em potencialidade, como um percurso de formação docente em MM, mais precisamente, no sentido do problema de formação formal ou informal. Anunciado por Chevallard (2009b), este consiste em encontrar o que nas práticas de professores, e com isso, nas suas relações com essas práticas sobre a MM, pode apoiar uma mudança na qualidade dessas relações.

O CIMM que inclui os cinco gestos de um PEP e é orientado pelos gestos genuínos da modelagem G_1 , G_2 e G_3 , tomados como gestos mais inclusivos dessa atividade, além de fazer uma visita às condições e restrições, nem sempre explícitas, que acompanham os professores à mudanças, no caso, o uso das práticas de MM como uma OPC.

É claro que mudanças podem não ter sido alcançadas, mas qualquer alteração a este respeito é aqui tomada como uma mudança das práticas do professor, cujo custo pode ser, por exemplo, suscitar alterações adequadas na relação particular com as práticas tradicionais de MM.

As mudanças das práticas docentes alcançadas pelo PEPO nos levam a encaminhá-lo como resposta à questão de investigação **Q₀ (MM)** da profissão docente, assim anunciada sob a ótica da TAD por Barquero, Bosch e Gascón (2011):

Q₀ (MM): O que tenho que ensinar a meus alunos em relação à MM e como tenho que ensiná-los?

Pressupomos que o PEPO constitui uma resposta parcial que se aperfeiçoa no CIMM. Este se constitui como sistema de tarefas, **H₀**, **H₁**, **H₂**, **H₃**, **H₄** e **H₅**,

dotadas de técnicas exequíveis, que responde sobre *o que e como ensinar* de MM na escola, enquanto processo de modelagem.

Assim, a noção de OPC revela o alcance do nosso objetivo geral de reconstruir noções teóricas e metodológicas à luz da TAD para o enfrentamento da problemática **Q₀ (MM)** da profissão docente.

Pesquisas empíricas futuras tornam-se necessárias de modo a melhor ratificar o CIMM, sobretudo, o seu alcance na formação inicial de professores, inclusive, de diferentes licenciaturas, sem que se abandone a formação continuada, de modo a delimitar, se possível, as condições favoráveis às práticas em sala de aula.

REFERÊNCIAS

- ABRANTES, P. Project Work in School Mathematics. *In: DELANGE, J. et al. (ed.). Innovation in Maths Education by Modelling and Applications*. Chichester: Horwood, 1993. p. 355-364.
- ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, H. C. A matematização em atividades de modelagem matemática. *Alexandria*, Florianópolis, v. 8, n. 3, p. 207-227, 2015.
- ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; ZANIN, Ana Paula Lorin. Competências dos alunos em atividades de modelagem matemática. *Educ. Matem. Pesq.*, São Paulo, v. 18, n. 2, p. 759-782, 2016.
- BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem e modelos matemáticos na educação matemática. *Alexandria - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 69-85, jul. 2009.
- BARQUERO, B. *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*. 2009. Tesis doctoral. Departament de Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona. 2009. Disponível em: http://www.tesisenxarxa.net/TESIS_UAB/AVAILABLE/TDX-0615110-153200/. Acesso em: 14 de setembro de 2018.
- BARQUERO, B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las Ciencias Experimentales. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, v. 29, n. 3, p. 339-352, 2011.
- BARQUERO, B.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. The ecological dimension in the teaching of mathematical modelling at university. *Recherches en Didactique de Mathématiques*, v. 33, n. 3, p. 307-338, 2013.
- BARQUERO, B.; BOSCH, M.; ROMO, A. Mathematical modelling in teacher education: Dealing with institutional constraints. *ZDM Mathematics Education*, v.50(1-2), p. 31-43, 2018. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0907-z>.
- BARROS, Ana Paula Rodrigues Magalhães de. *Contribuições de um micromundo composto por recursos do Geogebra e da coleção M³ para a aprendizagem do conceito de volume de pirâmide*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação, Campinas, SP: 2013.
- BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia*. 2. ed. São Paulo: Contexto, 2002.
- BIEMBENGUT, Maria Salett. Modelagem Matemática & resolução de problemas, projetos e etnomatemática: pontos confluentes. *Alexandria - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 197-219, nov. 2014. ISSN 1982-5153 197.

BISSCHOP, J. *AIMMS: optimization modeling. Introduction to optimization modeling.* Paragon Decision Technology, 2019.

BLOMHØJ, M.; HØJGAARD JENSEN, T. What's all the fuss about competencies? In BLUM, W.; GALBRAITH, P. L.; HENN, H.-W.; NISS, M. (ed.). *Modelling and applications in Mathematics education: The 14th ICMI study.* New York: Springer, 2007. p. 45-56.

BLOMHØJ, M.; JENSEN, T. H. Developing mathematical modeling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications*, v. 22, n. 3, p. 123-139, 2003.

BLUM, W.; LEIß, D. Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe. *Mathematik Lehren*, v. 128, p. 18-21, 2005.

BLUM, W. Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. *Mathematische Semesterberichte*, v. 32, n. 2, p. 195-232, 1985.

BLUM, W. ICMI study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, v. 51, p. 149-171, 2002.

BLUM, W. Can modelling be taught and learnt? some answers from empirical research. In: KAISER, G.; BLUM, W.; BORROMEO FERRI, R.; STILLMAN, G. A. (ed.). *Trends in teaching and learning of Mathematical modelling.* ICTMA14. Dordrecht: Springer, 2011. p. 15-30.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: CHO, S. J. (ed.). *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education.* Dordrecht: Springer, 2015. p. 73-96.

BLUM, W.; LEIß, D. How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? The example sugarloaf and the DISUM project. In: HAINES, C.; GALBRAITH, P. L.; BLUM, W.; KHAN, S. (ed.). *Mathematical modelling (ICTMA 12). Education, engineering and economics.* Chichester: Horwood, 2007. p. 222-231.

BLUM, W.; BORROMEO FERRI, R. Mathematical modelling: can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, v. 1, n. 1, p. 45-58, 2009.

BORROMEO FERRI, R. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM—The International Journal on Mathematics Education*, v. 38, n. 2, p. 86-95, 2006.

BOSCH, Marianna, CHEVALLARD, Yves. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19/1, 77-124, 1999.

BOSCH, Marianna; CHEVALLARD, Yves; GASCÓN, Josep. Science or magic? The use of models and theories in didactics of mathematics. *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2006.

BOSCH, Marianna; GARCÍA, Francisco Javier; GASCÓN, Josep; RUIZ HIGUERAS, Luisa. La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática*, México, v. 18, n. 2, p. 37-74, ago. 2006.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. Fundamentos antropológicos das organizações didáticas: das "oficinas de práticas matemáticas" às "rotas de estudo e pesquisa". In: BRONNER, A.; LARGUIER, M.; ARTAUD, M.; BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y.; CIRADE LADAGE, G. C. (ed.) *Difusor los Mathematiques (et les autres savoirs) comme d'outils de connaissance et acção*. Montpellier, França: IUFM de l'Académie de Montpellier, 2010. p. 49-85.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. *Las prácticas docentes del profesor de matemáticas*. XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques que se celebró en agosto de 2001.

BOURDIEU, P. *Coisas ditas*. Tradução: Cássia R. da Silveira e Denise Moreno Pegorim. São Paulo: Editora Brasiliense, 2004.

BOURDIEU, Pierre. *Economia das trocas simbólicas*. Introdução, organização e seleção: Sérgio Miceli. São Paulo: Perspectiva, 2007.

BOURDIEU, P. *Esboço de uma teoria da prática: precedido de três estudos de etnologia kabila*. Oeiras: Celta, 2002 [1972].

BOURDIEU, P. *Le sens pratique*. Paris: Editions de Minuit, 1980.

BOURDIEU, P. *Meditações pascalianas*. Tradução: Sergio Miceli. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2001.

BOURDIEU, Pierre. *O poder simbólico*. Rio de Janeiro: Editora Bertand Brasil, 1989.

BOURDIEU, Pierre. *Razões práticas: sobre a teoria da ação*. Tradução: Mariza Correa. Campinas-SP: Papyrus. 1996.

BRASIL. *Relatório Nacional Pisa 2012: Resultados brasileiros*. Brasília: OECD; Fundação Santillana; INEP, 2012. 64 p.

BURGERMEISTER, P. F. *La didactique de la modélisation mathématique dans l'enseignement secondaire d'heir et d'aujourd'hui*. Communication au 2ème Colloque International sur la Théorie Antropologique du Didactique, Uzès 31 oct-2 nov 2007.

BURGERMEISTER, P. F. La posture du héron crabier. In: DORIER, J.-L.; COUTAT, S. (ed.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012 (Actes EMF2012 – GT10)*. Université de Genève. 2012. P. 1295-1305,

BURGERMEISTER, P. F. Modélisation mathématique de problèmes extramathématiques au lycée – Vers une praxéologie consistante de la modélisation.

In: KUZNIAK, A.; SOKHNA, M. (ed.). *Enseignement des mathématiques et développement*: enjeux de société et de formation. Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone EMF2009, Numéro spécial de la Revue Internationale Francophone, 2010. p. 638-646.

CASTELA, Corine. Cuando las praxeologías viajan de una institución a otra: una aproximación epistemológica del “boundary crossing”. *Educación Matemática*, v. 28, n. 2, ago. 2016.

CHARLOT, B. O sujeito e a relação com o saber. In: BARBOSA, Raquel Lazzari Leite (Org.). *Formação de educadores: desafios e perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP, 2003. p.23-33.

CHEVALLARD, Y. *Arithmétique, algèbre, modélisation, étapes d'une recherche*. Publication de l'IREM d'Aix-Marseille. 1989b.

CHEVALLARD, Y. *Éléments de didactique du développement durable – Leçon 1: Enquête codisciplinaire & EDD*. 2013a.

CHEVALLARD, Y. Fundamental concepts in didactics: Perspectives provided by an anthropological approach. In: DOUADY, R.; MERCIER, A. (ed.). *Research in Didactique of Mathematics*, Selected Papers. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1992. p. 131-167.

CHEVALLARD, Y. *L'analyse des pratiques enseignantes em théorie anthropologique du didactique, recherches em didactiques des mathématiques*. Grenoble. La Pensée Sauvage Éditions, 1999. v. 19.2, p. 221-265.

CHEVALLARD, Y. La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponses à partir de la TAD. In: MARGOLINAS, C. et al. (org.): *En amont et en aval des ingénieries didactiques, XV^a École d'Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme)*. Recherches em Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage, 2009b. v. 1, p. 81-108.

CHEVALLARD, Y. *La TAD face au professeur de mathématiques*. UMR ADEF, Toulouse, 2009a.

CHEVALLARD, Y. *La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. 2. ed. 3. reimp. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2005.

CHEVALLARD, Y. *Las matemáticas en la escuela: por una revolución epistemológica y didáctica*. 1. ed. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2013a.

CHEVALLARD, Y. Le passage de l'arithmétique a l'algebrique dans l'enseignement des mathématiques au college. Troisième partie. Voies diattaque et problemes didactiques. *Petit X*, n. 23, p. 5-38, 1989a.

CHEVALLARD, Y. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires: la notion de modélisation. *Petit X*, n. 19, p. 43-72, 1989c.

CHEVALLARD, Y. Sobre a teoria da transposição didática: algumas considerações introdutórias. *Revista de Educação, Ciências e Matemática*, Rio de Janeiro, v. 3, n. 2, p. 1-14, maio/ago. 2013. ISSN 2238-2380.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. *Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CRISTENSEN, O. R.; SKOVSMOSE, O.; YASUKAWA, K. The Mathematical state of world explorations into the characteristics of mathematical descriptions. *Alexandria - Revista de Educação em Ciências e Tecnologia*, v.1, n.1, p. 77-90, mar 2008.

DATTA, B. SINGH, A. N. *History of Hindu mathematics*. Asia Publishing House; Bombay, 1938.

DELGADO, Tomás Ángel Sierra. *lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes*. 2006. Memoria para optar al Grado de Doctor. Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Educación, Departamento de Didáctica y Organización Escolar, Madrid, 2006.

ECO, U. El mago y el científico. *El País*, Madrid, 15 dez. 2002, p. 13-14.

ESPÍRITO SANTO, C. A. F. do. *O papel dos saberes não matemáticos na modelagem matemática: o estudo do cálculo do imposto de renda*. 2018. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.

FERNANDES, J. A. N. *Ecologia do saber: o ensino de limite em um curso de engenharia*. 2015. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2015.

FONSECA, Cecilio; GASCÓN, Josep; LUCAS, Catarina. Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, v. 17, n. 3, p. 289-318, nov. 2014.

FREJD, P.; ÄRLEBÄCK, J. B. First results from a study investigating Swedish upper secondary students' mathematical modelling competencies. In: KAISER, G.; BLUM, W.; BORROMEO FERRI, R.; STILLMAN, G. (ed.). *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*. Dordrecht: Springer, 2011. p. 407-416.

FREJD, P.; BERGSTEN, C. Professional modellers' conceptions of the notion of mathematical modelling – Ideas for education. *ZDM Mathematics Education*, v.50 (1-2), p. 117-127, 2018. <https://doi.org/10.1007/s1185> .

GALBRAITH, P.; CLATHWORTHY, N. Beyond standard models – Meeting the challenge of modelling. *Educational Studies in Mathematics*, v. 21, n. 2, p. 137-163, 1990.

GARCÍA, F. J. *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar*. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales. 2005. Tese (Doutorado em Matemática) - Departamento de Didáctica de las Ciencias (Experimentales, Matemáticas y Sociales, Universidad de Jaén (Espanha), 2005.

GARCIA, F.; GASCÓN, J.; HIGUERAS, L.; BOSCH, M. Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM Mathematics Education*, v. 38, n. 3, p. 226-246, 2006.

GEBAUER, G. *O pensamento antropológico de Wittgenstein*. Tradução: Milton Camargo Mota. São Paulo: Loyola, 2013.

GREEFRATH, G. *Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Springer Spektrum, 2010.

GREEFRATH, G., KAISER, G., BLUM, W., e BORROMEO FERRI, R. Mathematisches Modellieren— Eine Einführung in theoretische und didaktische Hintergründe. In: R. Borromeo Ferri, G. Greefrath, G. Kaiser (Eds.). *Mathematisches Modellieren für Schule und Hochschule*. Theoretische und didaktische Hintergründe. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2013.

GREEFRATH, G.; VORHÖLTER, K. *Teaching and learning mathematical modelling: approaches and developments from german speaking countries*. ICME-13 TOPICAL SURVEY. Cham: Springer, 2016.

GUERRA, R. B.; SILVA, F. H. S. Reflexões sobre modelagem matemática crítica e o fazer matemático da escola. *Perspectivas da Educação Matemática*, Campo Grande-MS, v. 2, n. 3, p. 95-119, 2009.

HENN, H.-W.; MAAß, K. Standardthemen im realitätsbezogenen Mathematikunterricht. In: HENN, H.-W.; MAAß, K. (ed.). *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker, 2003. p. 1-5. (Bd. 8 (ISTRON))

HOUSTON, K.; NEILL, N. Assessing modeling skills. In: LAMON, S. J.; PARKER, W. A.; HOUSTON, S. K. (ed.). *Mathematical modelling: a way of life – ICTMA 11*. Chichester: Horwood, 2003. p. 155-164.

HØYRUP, J. *Jacopo da Firenze's Tractatus algorismi and early Italian abacus culture*. Springer Science & Business Media, 2007.

INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. *Metodologia das estimativas das populações residentes nos municípios brasileiros para 1 de julho de 2008: uma abordagem demográfica para estimar o padrão histórico e os níveis de subenumeração de pessoas nos censos demográficos e contagens da população*. Rio de Janeiro: IBGE, 2008. 30p.

IVERSEN, Steffen M.; LARSON, Christine J. Simple Thinking using Complex Math vs. Complex Thinking using Simple Math: a study using Model Eliciting Activities to compare students' abilities in standardized tests to their modelling abilities. *ZDM*, v. 38, n. 3, p. 281-292, jun. 2006.

JULIE, C. Making relevance in Mathematics teacher education. *In: VAKALIS, I.; HUGHES HALLETT, D.; QUINNEY, D.; KOUROUNIOTIS, C. (comp.). Proceedings of 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics*. New York: Wiley, 2002. CD-ROM.

KAISER, G. Modelling and modelling competencies in school. *In: HAINES, C.; GALBRAITH, P.; BLUM, W.; KHAN, S. (ed.). Mathematical modelling (ICTMA 12). Education, engineering and economics*. Chichester: Horwood, 2007. p. 110-119.

KAISER, G.; BRAND, S. Modelling competencies: Past development and further perspectives. *In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; SALETT BIEMBENGUT, M. (ed.). Mathematical modelling in education research and practice*. Cham: Springer International Publishing, 2015. p. 129-149

KAISER, G.; SRIRAMAN, B. A global survey of international perspectives on modelling mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, v. 38, n.3, 2006.

KAISER-MEßMER, G. *Anwendungen im Mathematikunterricht*. Band 2 – Empirische Untersuchungen. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, 1986.

KAISER-MESSMER, G. Application-oriented Mathematics teaching. *In: Blum, W. et al. (ed.). Applications and modelling in learning and teaching Mathematics*. Chichester: Horwood, 1987. p. 66-72.

LEITE, Maria Beatriz Ferreira; SILVA, Gabriella Helena Jorge da; SOUSA, Livia Fernandes de. Modelos matemáticos para o crescimento da população do estado de são paulo e a exploração de diferentes taxas de crescimento. *Ciência & Educação*, v. 17, n. 4, p. 927-940, 2011.

MAAß, K. Modelling in Class: What do we Want the Students' to Learn? *In: HAINES, C. et al. (ed.), Mathematical modelling: Education, Engineering and Economics*. Chichester: Horwood, 2007. p. 63-78.

MAAß, K. What are modelling competencies? *ZDM*, v. 38, n. 2, p.113-142, 2006.

MADEIRA, J. L.; SIMÕES, C. C. S. Estimativas preliminares da população urbana e rural segundo as unidades da Federação, 1960/1980: por uma nova metodologia. *Revista Brasileira de Estatística*, Rio de Janeiro, v. 33, n. 129, p. 3-11, 1972.

NISS, M. Prescriptive modeling - challenges and opportunities. *In: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (ed.). Mathematical modelling in education research and practice: cultural, social and cognitive influences*. Cham: Springer, 2015. p. 67-79.

PERRENET, J.; ZWANEVELD, B. The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, v. 1, n. 6, p. 3-21, 2012.

REVUZ, A. The position of geometry in mathematical education. *Educational Studies in Mathematics*, v. 4, p. 48-52, 1971.

RIEBER, L. P. Seriously considering play: designing interactive learning environments based on the blending of microworlds, simulations, and games. *Educational Technology Research & Development*, New York, v. 44, n. 2, p. 43-58, 1996.

RUIZ-MUNZÓN, N. *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. 2010 Tese (Doutorado em Matemática) - Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, 2010.

SCHUKAJLOW, S.; KAISER, G.; STILLMAN, G. Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: a survey on the current state-of-the-art. *ZDM - Mathematics Education*, v. 50(1-2), p. 5-18, 2018. Doi 10.1007/s11858-018-0933-5

SIERPINSKA, A.; LERMAN, S. Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In: BISHOP, A. J. et al. (ed.). *International Handbook of Mathematics Education*. Trad.: Juan D. Godino. Dordrecht, HL: Kluwer, A. P. 1996. p. 827-876.

SILVA, Denivaldo Pantoja da. *A invariável prática da regra de três na escola*. 2017. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2017.

SILVA, Denivaldo Pantoja da. *Regra de três: prática escolar de modelagem matemática*. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2011.

SILVA, Sani de Carvalho Rutz Da; DESSBESEL, Renata da Silva; BASNIAK, Maria Ivete. Modelización en la enseñanza de matemáticas: un análisis de las contribuciones de software en la enseñanza superior. *Revista Paradigma*, Maracay, Venezuela, v. 39, n. 1, p. 282-300, jun. 2018.

SODRÉ, G. J. M.; GUERRA, R. B. O ciclo investigativo de modelagem matemática. *Educ. Matem. Pesq.*, São Paulo, v. 20, n. 3, p. 239-262, 2018. <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i3p239-262>.

TURNER, R.; DOSSEY, J.; BLUM, W.; NISS, M. Using mathematical competencies to predict item difficulty in PISA: A MEG Study. In: PRENZEL, M.; KOBARG, M.; SCHÖPS, K.; RÖNNEBECK, S. (ed.). *Research on PISA – research outcomes of the PISA Research Conference 2009*. New York: Springer, 2013. p. 23-37.

VERONEZ, Michele Regiane dias; CASTRO, Élide Maiara Velozo de; MARTINS, Márcio André. Uma investigação acerca do problema em atividades de modelagem

matemática. *VIDYA*, Santa Maria-RS, v. 38, n. 1, p. 223-235, jan./jun. 2018. ISSN 2176-4603.

WINTER, H. Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, n. 61, p. 37-46, 1996.

WITTGENSTEIN, L. *De la certitude*. Paris. Gallimard: 1976.

WITTGENSTEIN, L. *Investigações filosóficas*. Tradução: José Carlos Bruni. São Paulo: Editora Nova Cultural, 1999 (Coleção Os Pensadores).

ZAIS, T.; GRUND, K.-H. Grundpositionen zum anwendungsorientierten Mathematikunterricht bei besonderer Berücksichtigung des Modellierungsprozesses. *Der Mathematikunterricht*, v. 37, n. 5, p. 4-17, 1991.

APÊNDICE



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
PRÓ-REITORIA DE ENSINO DE GRADUAÇÃO DIRETORIA DE PROJETOS EDUCACIONAIS
PAPIM 2016 - PROGRAMA DE APOIO A PROJETOS DE INTERVENÇÃO METODOLÓGICA

Estrutura do Projeto: Unidade Instituto de Educação Matemática e Científica

Título: Modelagem Matemática Crítica como Questionamento de Mundo

Justificativa

A inserção de sujeitos sociais em questionamentos pertinentes à sociedade tem se configurado como uma das competências desafiadoras na instituição escolar que deve criar condições mínimas de ensino para atingir o enfrentamento de problemáticas salutaras ao desenvolvimento de cidadãos críticos e reflexivos no sentido proposto pela educação matemática crítica postulada por Skovsmose (1992; 2001; 2007), consoante com as pretensões anunciadas pela *Organisation for Economic Co-operation and Development/Programme for International Student Assessment* (OCDE/Pisa) (BRASIL, 2012).

Dentre estas condições evidencia-se a prática com modelagem matemática crítica e conseqüentemente de modelos como construção dos desejos humanos permeados por interesses e intenções de grupos sociais que nem sempre se mostram visíveis, tal como as estruturas ideológicas que regulam a sociedade como aponta Skovsmose (1992). Para citar alguns exemplos, destacamos o modelo usado para o cálculo do Imposto de Circulação de Mercadorias e Serviços (ICMS), em particular na composição das tarifas de energia elétrica, os Fundos de Participação Estaduais e Municipais, a projeção populacional estimada com o modelo assumido pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) com reflexos diretos nos Fundos de Participação de Estados e Municípios, o financiamento de um bem e o modelo legitimado pelo Sistema Eleitoral Brasileiro definido como quociente eleitoral.

Estes modelos, além de emergirem de situações concretas e compartilhadas socialmente, revelam-se passíveis de discussão no ensino escolar, pois além de

política os modelos também orientam políticas que incidem diretamente na sociedade ao trazer em seu bojo traços para incursão de práticas com modelagem pautadas pela educação financeira ao manifestar modelos como “caixa-preta” ao conterem pontos cegos que deixam de fora emendas ou rasuras não se constituindo uma adequação ou decisão matemática, contudo de interesses de grupos sociais a quem interessa o modelo. Skovsmose (2007, p. 121) pontua “Quer os modelos macroeconômicos estejam ou não aptos a descreverem, de fato eles são usados, e esse uso é de importância crítica para compreender política e tomada de decisões econômica” (grifos do autor).

Tais discussões suscitam reflexões imprescindíveis no ambiente escolar por meio da prática com modelagem matemática como processos de estudos e investigação, em particular, ao engendrar como objeto de estudo a educação financeira permeada de modelos matemáticos que por não raro despistam uma “racionalidade” própria envolvida nas situações orientadas por uma lógica nem sempre acessível aos não especialistas, incluindo alunos da educação básica. A construção e a discussão de modelos dessa natureza se tornam relevantes para o desenvolvimento de valores e competências necessários para julgar as oportunidades e os riscos neles envolvidos ao escamotear interesses outros incrustados ao modelo. Perrenoud (2002) alude que ensinar direitos e deveres sem mudança de pensamento e tomada de ação não é suficiente para formar cidadãos. O exercício da cidadania é ingrediente indispensável da construção de uma sociedade democrática e justa, e a educação financeira articulada à prática com modelagem matemática crítica assume papel importante para a formação de cidadãos críticos e reflexivos ao desvelar elementos da organização social em torno do mundo financeiro, em geral cheio de armadilhas.

Em que pese a complexidade das discussões reiteramos a necessidade de inserção de discussões da educação financeira articulada ao fazer regular da prática com modelagem matemática crítica no ambiente escolar em função da fecunda e imensa complexidade de um problema novo: o da necessidade de tornar inteligível a não-especialistas, segundo infere Burgermeister (2007; 2010) e como um bom exercício para a competência democrática e para inserção da atividade matemática em si como construção do saber ao revelar-se como processo de estudos e investigação imbricado a dinâmica da pedagogia de questionamento de mundo e sobre o mundo, incluindo o mundo dos saberes, como destaca Chevallard (2009).

Objetivo geral

Diante das discussões fomentadas sobre a prática com modelagem matemática crítica como processo de estudos e investigação no contexto escolar articulado a educação financeira o objetivo do projeto está pautado em contribuir com o processo de ensino aprendizagem da matemática escolar por meio de práticas com modelagem matemática como questionamento de mundo articulado ao uso de computadores e calculadoras no fazer de previsões.

Objetivos específicos

- Evidenciar processos de aprendizagem dos alunos da Educação de Jovens Adultos por meio de práticas com modelagem matemática articulada à educação financeira como um exercício para a atividade matemática e competência democrática;
- Elaborar materiais didáticos por meio de livretos com uso de temáticas pautadas na educação financeira para informação e difusão de conhecimentos imprescindíveis à formação de cidadãos críticos e reflexivos;
- Promover momentos de socialização das atividades por meio de workshop para diálogos e reflexões envolvendo a tríade ensino, pesquisa e extensão.

4 Estratégias

4.1 Descrição da experiência

Considerando a prática com modelagem matemática como meio de acesso ao saber se constituir a partir de problematizações de situações intra ou extramatemáticas, esta proposta será pautada em situações do mundo concreto compartilhadas socialmente no contexto da educação financeira mais os elementos internos à prática com matemática como a discussão do trabalho de técnicas de maior alcance, isto é, o exercício da atividade matemática em jogo, tal como postulam Chevallard, Bosch e Gascón (2001), ao situar que grande parte da atividade matemática pode ser interpretada como atividade de modelagem. Ou seja, as problematizações de complexidade crescente constituem a “razão de ser” do processo de estudos e investigação passíveis de questionamentos de modelos

matemáticos providos por interesses e intencionalidades de grupos sociais a quem interessa o modelo.

As atividades serão desenvolvidas sob a égide de um percurso de estudos e investigação por meio de encontros presenciais ao longo do período cronológico previsto para desenvolvimento do projeto conduzido por um professor na condição de diretor de estudos responsável por construir condições de estudos por meio das problematizações que leve aos alunos a possibilidade de construção do saber. Nesta perspectiva epistemológica o fazer com modelagem matemática se manifesta sempre em construção. A classe ou clientela a que se destinam as intenções deste projeto são alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA) da Unidade de Ensino Básico Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará.

Ademais, como parte integrante do processo com modelagem as atividades serão desenvolvidas nos espaços de Laboratórios da Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará (EA/UFPa) e do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI/UFPa), a saber: Laboratório de Matemática e Laboratório de Tecnologias da Informação e Comunicação a fim de se fazer uso de instrumentos imprescindíveis no fazer de previsão e projeções providas por modelos matemáticos, tais como calculadoras científicas e computadores, por exemplo.

Estes instrumentos, enquanto partes das condições propostas para construção de saberes no processo de percurso de estudos e investigação são fundamentais no desenvolvimento da prática com modelagem matemática não como elementos motivacionais em si, todavia como integrantes do processo com modelagem. Nesse sentido, é possível sinalizar possibilidades de articulação de diferentes práticas com matemática no universo escolar como a produção de gráficos e tabelas, pertinente ao estudo de funções, progressões, noções de matemática financeira envolvendo cálculo de juros, capitalização e descapitalização, cálculo do valor numérico de polinômios por meio de situações articuladas com matemática financeira, dentre outras práticas que poderão emergir no processo de estudos. Portanto, tais práticas com Matemática escolar serão norteadas por meio da prática com Modelagem Matemática como processos de estudos e investigação articulado à temática da educação financeira.

4.2 Plano para formação continuada para professores

Em função da pertinência deste projeto em promover discussões e questionamentos salutareos no ambiente escolar como parte da formação dos alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA) da Unidade de Educação Básica Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará, manifesta-se como possibilidade de articulação para formação continuada de professores ao disponibilizar o material didático produzido nesse projeto para o público da EJA a fim de serem usados em cursos de formação continuada em nível de minicurso, aperfeiçoamento ou especialização oferecido pelo Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI/UFPA). Ademais, o projeto intenciona promover reflexões sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática com alunos da Graduação na função de bolsista e da pós-graduação ao integrar-se como parte de estudos em desenvolvimento de pesquisas de mestrado e doutoramento.

4.3 Planejamento e avaliação das atividades acadêmicas no período de execução do projeto

Considerando a proposta do projeto por meio da prática com modelagem matemática crítica articulada à temática educação financeira voltada para alunos da Educação de Jovens e Adultos as atividades serão norteadas metodologicamente pelo percurso de estudos e investigação, sob o enquadramento das seguintes temáticas:

- i) Cálculos percentuais por meio de problemáticas passíveis de discussão envolvendo modelos matemáticos compartilhados socialmente;
- ii) Como poupar para o futuro?;
- iii) Discussão de modelos matemáticos, em particular, dos Fundos de Participação Estaduais e Municipais que regulam nossas vidas ao incluir políticas de repercussão de natureza financeira.

Ademais, o projeto tem a intenção de construção de materiais didáticos em consonância ao envolvimento de bolsista ao longo do processo, de modo a contribuir com uso desses materiais didáticos em processos de formação continuada, bem como integrar-se como meio de realização de estudos e pesquisa no âmbito da pós-graduação articulada a educação básica com contribuições ao ensino da Matemática escolar.

A avaliação como componente imprescindível do processo pretendido pelo projeto será desenvolvida ao longo das atividades previstas ao considerar repercussões no processo de formação ao engendrar ao ensino, à pesquisa e à extensão.

4.4 Efetiva participação de discentes da Unidade Escolar (informar a clientela a que se destina o projeto)

As pretensões do projeto por meio de práticas com Modelagem Matemática como processo de estudos e investigação articulado à educação financeira evidenciam amplitude significativa no contexto de formação para além dos alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA) da Unidade de Educação Básica Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará e do professor como diretor de estudos, ao contar com a participação de alunos da graduação na função de bolsista neste projeto em processo de formação inicial serão integrados ao processo para auxiliar o encaminhamento das atividades previstas, bem como reflexões sobre o fazer docente no exercício da profissão.

4.5 Especificação de métodos e procedimentos de integração das atividades curriculares

Considerando a dinamicidade da prática com Modelagem Matemática como processo de estudo e investigação articulado à temática da educação financeira, o projeto contará com condições de ensino pautadas no uso de computadores e calculadoras científicas como instrumentos integrantes do processo na projeção do fazer de previsões, imprescindíveis à prática com modelagem no contexto escolar. As atividades curriculares que serão consideradas no projeto em atendimento à EJA serão pautadas em Matemática Financeira, estudo de polinômios e a temática do estudo de funções como processos de estudos articulados por meio de problematizações para o ensino. Os procedimentos de ensino contarão com a modelagem matemática como prática de ensino para construção do saber articulado aos instrumentos como calculadoras e computadores como parte integrante do processo.

4.6 Integração com atividades de pesquisa e extensão

A integração do projeto ocorrerá notoriamente com atividades de pesquisa ao articular os processos de estudos emergentes das atividades a serem desenvolvidas

com pesquisas de mestrado e doutoramento em desenvolvimento, pautada na promoção de contribuições para o ensino da Matemática escolar da EJA.

As pesquisas de mestrado e doutoramento em desenvolvimento buscam contribuir com o ensino de Matemática, em particular, para os alunos da Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará (EA/UFPA), por meio da inserção de práticas com Modelagem Matemática ao desvelar a atividade matemática em jogo e decisões políticas providas por modelos matemáticos e que como tais, além de políticas orientam outras decisões que nem sempre são discutidas no espaço escolar pela naturalização que os modelos são assumidos por discursos ingênuos de que “é a matemática que determina”. Nesse sentido, a produção das pesquisas da equipe proponente (professores colaboradores do projeto) estará em prática para os estudantes da EJA da EA/UFPA, ao articular algo mais: a realização de workshop no período de um dia dedicado às licenciaturas que formam professores para o ensino de Matemática e professores que atuam na Educação de Jovens e Adultos para socializar as aprendizagens, os resultados, divulgar o material didático elaborado e ouvir os interlocutores a fim de vislumbrar novas atividades em contextos educacionais.

4.7 Adoção de metodologias de interação entre os níveis de ensino e a melhoria do processo de ensino aprendizagem

Como proposta de metodologias para melhoria do processo de ensino aprendizagem das práticas com matemática na EJA da EA/UFPA evidencia-se o próprio percurso de estudos e investigação como elemento propulsor de encaminhamento das atividades de ensino adicionado pelo uso de calculadoras e computadores não como recursos motivacionais ou metodológicos em si, mas como instrumentos integrantes do processo. Ou seja, o percurso de estudos e investigação com problematizações de situações concretas, além da promoção das atividades de estudos, configura-se como metodologia para o ensino das práticas com Matemática.

A proposta de metodologia baseada no percurso de estudo e investigação suscita elementos pertinentes a serem considerados no desenvolvimento do projeto com a articulação das pesquisas em desenvolvimento de membros da equipe proponente, reflexões sobre o processo de ensino aprendizagem de Matemática com o bolsista em processo de formação inicial e a educação básica por meio da

EJA integrantes do processo para ampliação de saberes para além do universo escolar.

Resultados esperados

Especificação dos resultados esperados

Dentre os resultados esperados ao longo do desenvolvimento do projeto destaca-se:

a) A promoção da melhoria do processo de ensino aprendizagem da Matemática escolar por meio da prática com modelagem matemática crítica articulada à temática de educação financeira passíveis de desvelar o quanto de modelos agem em nossas vidas com políticas de interesses e intencionalidades nem sempre discutidas no contexto escolar;

b) Evidenciar processos de aprendizagem dos alunos da Educação de Jovens Adultos por meio de registros conceituais, fotográficos e de filmagens com uso da prática com modelagem matemática como um exercício para a atividade matemática em jogo e a competência democrática permeada por questionamentos salutares à constituição de cidadãos críticos e reflexivos;

c) Produção de material didático, por meio de livretos, para evidenciar situações didáticas com o desenvolvimento de temáticas tais como propõem as intenções deste projeto, notadamente pela necessidade de informação e difusão de conhecimentos da educação financeira em debate;

d) Realização do workshop com duração de um dia para socialização das atividades em discussão ao articular ensino, pesquisa e extensão.

Infraestrutura disponível - Discriminar local e todo material permanente pela unidade para execução do projeto, como contrapartida

O projeto contará com os espaços físicos das dependências da Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará (EA/UFGPA), elencando laboratório de informática, sala de aula, sala de multimídia e biblioteca como elementos imprescindíveis para desenvolvimento das atividades previstas pelo projeto passíveis de modificações, caso necessário. Ademais, contará com espaços do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI/UFGPA) ao longo das atividades a serem desenvolvidas pelo projeto.

Cronograma do projeto

Terceira etapa	
Início: 1º Mês	Término: 2º Mês
Descrição: Desenvolvimento da temática envolvendo Cálculos percentuais.	

Primeira etapa	
Início: 1º Mês	Término: 6º Mês
Descrição: Levantamento de problemáticas para o ensino escolar e produção de materiais didáticos.	

Segunda etapa	
Início: 1º Mês	Término: 6º Mês
Descrição: Construção de situações didáticas	

Quarta etapa	
Início: 3º Mês	Término: 4º Mês
Descrição: Abordagem da temática "Como poupar para o futuro?".	

Quinta etapa	
Início: 6º Mês	Término: 8º Mês
Descrição: Discussão de modelos matemáticos que regulam nossas vidas com repercussão de natureza financeira.	

Sexta etapa	
Início: 9º Mês	Término: 10º Mês
Descrição: Socialização das atividades desenvolvidas por meio de Workshop como fomento para integração e diálogos entre Ensino, Pesquisa e Extensão previsto pelo projeto.	

Bolsa

<p>Plano de Atividades: Descrição do plano de atividades e o cronograma de desembolso de cada bolsista</p> <p>Dentre as atividades previstas para bolsistas passíveis de desenvolvimento ao longo do projeto destaca-se:</p> <p>i) Acompanhamento das atividades previstas tais como: reunião de equipe, reuniões do grupo de pesquisa, elaboração de materiais didáticos, divulgação das ações de extensão ao longo do processo de execução do projeto;</p> <p>ii) Colaboração na articulação das atividades a serem planejadas ao longo do projeto;</p> <p>iii) Elaboração de relatórios que destaque atividades planejadas, os estudos e práticas realizadas, as aprendizagens ocorridas elencando dificuldades enfrentadas e as soluções encontradas ao longo do processo.</p> <p>Para tanto, a participação de bolsistas deverá contar com auxílio da Bolsa de Iniciação Acadêmica no período previsto para realização do projeto: de Março/2016 a Dezembro/2016.</p>
Desembolso: 10 Mes(es)

<p>Plano de Atividades: Descrição do plano de atividades e o cronograma de desembolso de cada bolsista</p> <p>Dentre as atividades previstas para bolsistas passíveis de desenvolvimento ao longo do projeto destaca-se:</p> <p>i) Acompanhamento das atividades previstas tais como: reunião de equipe, reuniões do grupo de pesquisa, elaboração de materiais didáticos, divulgação das ações de extensão ao longo do processo de execução do projeto;</p> <p>ii) Colaboração na articulação das atividades a serem planejadas ao longo do projeto;</p> <p>iii) Elaboração de relatórios que destaque atividades planejadas, os estudos e práticas realizadas, as aprendizagens ocorridas elencando dificuldades enfrentadas e as soluções encontradas ao longo do processo.</p> <p>Para tanto, a participação de bolsistas deverá contar com auxílio da Bolsa de Iniciação Acadêmica no período previsto para realização do projeto: de Março/2016 a Dezembro/2016.</p>
Desembolso: 10 Mes(es)

Material de Consumo

Descrição	Qtd	Unidade	Valor Unitário	Ano	Valor Total
Pastas	100	Itens	1.8	2016	180
Caixa com Canetas esferográficas	2	Caixa	34	2016	68
Banner	2	Itens	80	2016	160
Caixa de papel A-4	1	Caixa	150	2016	150

Orçamento do Projeto

Rubrica	Valor
Bolsa	8.000,00

Diárias	0,00
Material de Consumo	558,00
Obrigações Patronais	0,00
Passagens	0,00
Serviço de Terceiro Pessoa Fisica	0,00
Serviço de Terceiro Pessoa Juridica	0,00
TOTAL	8.558,00