UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS
MESTRADO ACADÊMICO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

IVONNE COROMOTO SÁNCHEZ SÁNCHEZ

APRENDIZAGEM GEOMÉTRICA EM TORNO DAS IDÉIAS PRESENTES NA SIMULAÇÃO DE UM MOTOR A DOIS TEMPOS NO GEOGEBRA: UM ESTUDO DE CASO

BELÉM – PA
2020

IVONNE COROMOTO SÁNCHEZ SÁNCHEZ

APRENDIZAGEM GEOMÉTRICA EM TORNO DAS IDÉIAS PRESENTES NA SIMULAÇÃO DE UM MOTOR A DOIS TEMPOS NO GEOGEBRA: UM ESTUDO DE CASO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM), do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI) da Universidade Federal do Pará (UFPA) como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.

Área de concentração: Educação em Matemática.

Linha de pesquisa: História, Filosofia e Estudos Culturais.

Orientador: Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma

BELÉM – PA

2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S211a SÁNCHEZ SÁNCHEZ, IVONNE COROMOTO
APRENDIZAGEM GEOMÉTRICA EM TORNO DAS IDÉIAS PRESENTES NA SIMULAÇÃO DE UM MOTOR A DOIS TEMPOS NO GEOGEBRA: UM ESTUDO DE CASO / IVONNE COROMOTO SÁNCHEZ SÁNCHEZ. — 2020.
85 f.

Orientador(a): Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg
Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2020.

1. Aprendizagem Geométrica. 2. Elaboração de Simuladores com GeoGebra. 3. Processos de Objetivação. 4. Análise multisemiótico. I. Título.

CDD 510

IVONNE COROMOTO SÁNCHEZ SÁNCHEZ

APRENDIZAGEM GEOMÉTRICA EM TORNO DAS IDÉIAS PRESENTES NA SIMULAÇÃO DE UM MOTOR A DOIS TEMPOS NO GEOGEBRA: UM ESTUDO DE CASO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM), do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI) da Universidade Federal do Pará (UFPA) como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.

Data de avaliação: 20/02/2020

Conceito: ______________________.

Membros componentes da Banca Examinadora

____

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma
PPGECM / Universidade Federal do Pará – UFPA

____

Prof. Dr. Elielson Ribeiro de Sales – Membro Interno
PPGECM / Universidade Federal do Pará – UFPA

____

Profa. Dra. Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias – Membro Externo
Universidade do Estado do Pará

____

Profa. Dra. Maria Lucia Pessoa Chave Rocha – Suplente Interno
PPGECM / Universidade Federal do Pará – UFPA

Dedico este trabalho ás pessoas que contribuíram significativamente para minha existência, meus pais: Ivonne Coromoto Sánchez e Jairo Navi Sánchez Niño. Também a um ser muito querido que cuida do céu, meu irmão: Roberth Navi Sáchez Sánchez

AGRADECIMENTOS

Escrever os agradecimentos desta dissertação foi uma tarefa com dificuldade. Pelo fato que muitas pessoas contribuíram com a minha formação acadêmica, pessoal e constituição deste trabalho acadêmico.

Ao professor Dr. Joao Cláudio Brandemberg Quaresma por sua competência, dedicação e rigor acadêmico nesses dois últimos anos (2018-2020). Pelas suas orientações que guiaram os meus passos, pelos conhecimentos compartilhados, sua paciência e confiança depositada em mim, fez compreender e entender o que é ser um pós-graduando e o que é viver numa pós-graduação.

Aos integrantes da banca examinadora da qualificação, Professor Dr. Elielson Ribeiro de Sales (PPGECM / Universidade Federal do Pará – UFPA), Professora Dr. Maria Lucia Pessoa Chaves Rocha (PPGECM / Universidade Federal do Pará – UFPA), Professor Dr. José Augusto Nunes Fernandes (ICEN / Universidade Federal do Pará – UFPA) pelas contribuições valorosas visando o melhoramento do trabalho, por ocasião do exame de qualificação.

Aos integrantes da banca examinadora da defensa, Professor Dr. Elielson Ribeiro de Sales (PPGECM / Universidade Federal do Pará – UFPA), Professora Dr. Maria Alice de Vasconcelos Feio Messias (Universidade do Estado do Pará – UEPA), pelas contribuições valorosas visando o melhoramento do trabalho, por ocasião da defensa de mestrado.

À Professora Dra. Maria Iracilda da Cunha Sampaio, pelo apoio para minha chegada a Belém do Pará.

Ao Professor Elielson Ribeiro de Sales, pela ajuda e orientações para meu começo no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas.

Aos professores do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da UFPA, pelas valorosas contribuições no meu processo formativo.

À Coordenação de aperfeiçoamento de pessoal de nível superior (CAPES), pela bolsa, indispensável para que pudesse empreender esta pesquisa de mestrado.

Aos prezados colegas do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas e em especial, fico muito agradecida com meus colegas do Grupo de Pesquisa: Grupo de Estudos em História e Ensino de Matemática (GEHEM) pelas importantes discussões em sala de aula, contribuições no trabalho acadêmico e pelo companheirismo.

Meus amigos Marielba Salazar, Glides Olivo e Yorgana Yajure, seu apoio, incentivo e força na minha estadia no Belém no processo seletivo foi fundamental, vocês são parte deste sonho materializado.

Um dos meus maiores agradecimentos a meus prezados colegas de *Aprender en Red*, Juan Luis Prieto González, Irene Sánchez, Rafael Gutiérrez e Stephanie Diaz pelo acompanhamento e apoia na minha formação desde a graduação. Por seus conselhos importantes para o meu trabalho e meu crescimento pessoal e profissional.

Aos meus pais, Ivonne Coromoto Sánchez e Jairo Navi Sánchez Niño, que dia a dia na distância são meus pilares que me outorgam coragem e inspiração para ultrapassar os obstáculos na minha vida. Aos meus irmãos Milagros Nohemi Sánchez Sánchez, Ivana Solnay Sánchez Sánchez e Roberth Navi Sánchez Sánchez (que me acompanha desde o céu), pelo apoio e pela preocupação, que ainda de estar separado por uma distância muito longa entre nós o laço fraterno ainda é forte.

Aos meus Sobrinhos Luis Mathias Abreu Sánchez, Ivian Sofia Abreu Sánchez, Cristhian David Mendoza Sánchez e Silvana Patricia Abreu Sánchez, meus pequenos moleques que preenchem minha vida de alegria na distância.

Aos membros da banda sul-coreana Bangtan Seonyondan (BTS), que com sua música me inspiraram e me sustentaram em todos os momentos difíceis nesses dois anos. Suas letras sempre me incentivaram a continuar a todo momento e nunca desistir, mas acima de tudo, a me amar, apesar de todos os meus erros.

Finalmente, e muito especial agradecimento a meu homem, Luis Andrés Castillo Bracho, meu parceiro de vida, que está comigo há mais de 7 anos e sempre esteve ao meu lado, na felicidade, tristeza, no bom e no ruim, sempre juntos. Para você, obrigado me dar forças para me levantar em cada queda, torcendo por mim para alcançar meus objetivos, como foi no mestrado.

RESUMO

SÁNCHEZ, Ivonne Coromoto. **Aprendizagem geométrica em torno das ideias presentes na simulação de um motor a dois tempos no GeoGebra: Um estudo de caso**. 2020. 84 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2020.

Esta pesquisa enfoca a aprendizagem geométrica manifestada por um grupo de futuros professores da Licenciatura Integrada em Ciências, Matemática e Linguagens do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI) e três professores de matemática que participam das atividades de Elaboração de Simuladores com GeoGebra (ESG). Especificamente, na construção de um setor circular no GeoGebra para representar a parte do virabrequim de um motor de dois tempos. Do ponto de vista histórico-cultural da Teoria de Objetivação, essa aprendizagem é analisada com atenção aos processos de objetivação do saber geométrico manifestados durante uma série de atividades realizadas nos momentos de matematização e trabalho matemático, utilizando uma análise multisemiótico. Os resultados destacam alguns aspectos dos processos de objetivação evidenciados no desempenho de professores e alunos em relação às atividades realizadas para representar o setor circular no GeoGebra e os meios semióticos utilizados pelos indivíduos.

Palavras-chave: Aprendizagem Geométrica; Elaboração de Simuladores com GeoGebra; Processos de Objetivação; Análise multisemiótico.

ABSTRACT

SÁNCHEZ, Ivonne Coromoto. **Geometric learning around the ideas present in the simulation of a two-stroke engine in the GeoGebra: A case study**. 2020. 84 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2020.

This research focuses on the geometric learning manifested by a group of future teachers from the Integrated Degree in Science, Mathematics and Languages of the Institute of Mathematical and Scientific Education (IEMCI) and three mathematics teachers who participate in the activities of Simulators with GeoGebra (ESG). Specifically, in the construction of a circular sector in GeoGebra to represent the crankshaft part of a two-stroke engine. From the historical-cultural point of view of the Objectification Theory, this learning is analyzed with attention to the objectification processes of geometric knowledge manifested during a series of activities carried out in the moments of mathematization and mathematical work, using a multisemiotic analysis. The results highlight some aspects of the objectification processes evidenced in the performance of teachers and students in relation to the activities carried out to represent the circular sector in GeoGebra and the semiotic means used by individuals.

Keywords: Geometric apprenticeship; Development of simulators with GeoGebra; Objetivação processes; Multi-semiotic analysis.

RESUMEN

SÁNCHEZ, Ivonne Coromoto. **Aprendizaje geométrico alrededor de las ideas presentes en la simulación de un motor de dos tiempos en el GeoGebra: Un estudio de caso**. 2020. 84 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2020.

Esta investigación se centra en el aprendizaje geométrico manifestado por un grupo de futuros profesores de la Licenciatura Integrada en Ciencias, Matemáticas e Idiomas del Instituto de Educación Matemática y Científica (IEMCI) y tres profesores de matemáticas que participan en las actividades de Simuladores con GeoGebra (ESG). Concretamente, en la construcción de un sector circular en GeoGebra para representar la parte del cigüeñal de un motor de dos tiempos. Desde el punto de vista histórico-cultural de la Teoría de la Objetivación, este aprendizaje es analizado con atención a los procesos de objetivación del conocimiento geométrico manifestado durante una serie de actividades realizadas en los momentos de matematización y trabajo matemático, utilizando un análisis multisemiótico. Los resultados destacan algunos aspectos de los procesos de objetivación evidenciados en el desempeño de docentes y estudiantes en relación a las actividades realizadas para representar el sector circular en GeoGebra y los medios semióticos utilizados por los individuos.

Palabras clave: Aprendizaje Geométrico; Elaboración de Simuladores con GeoGebra; Procesos de objetivación; Análisis multisemiótico.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Tarefas de construção da oficina 49
Tabela 2. Instrumento para a transcrição de episódios..51
Tabela 3. Técnica de construção do setor circular..54

LISTA DE FIGURAS

Figura 1. Objetivo da educação de acordo com Radford (2014a). 24
Figura 2 Singapore Flyer Simulator 34
Figura 3. Exemplo de fenômeno e sua seleção.. 36
Figura 4. Modelo real do eixo central.. 38
Figura 5. Exemplo de um modelo geométrico 39
Figura 6. Modelo computacional obtido.. 40
Figura 7. Ferramenta semicircunferência 42
Figura 8. Momentos no desenvolvimento de simuladores com GeoGebra 47
Figura 9. A caixa de ferramentas e aplicativos do GeoGebra 48
Figura 10. Motor de dois tempos.. 50
Figura 11. Diagrama da análise realizada... 57
Figura 12. E7 explicando os objetos geométricos que identifico sobre o esboço 59
Figura 13. E3 explicando os objetos geométricos que identifico sobre o esboço 60
Figura 14. Discutir a representação do círculo como a melhor opção para representar uma parte do desenho 61
Figura 15. Discutir a representação do semicírculo como a melhor opção para representar uma parte do desenho 63
Figura 16. Indica com o dedo indicador onde uma das extremidades do setor circular deve estar localizada 64
Figura 17. Escreva no quadro os requisitos solicitados pela ferramenta do setor circular para usá-la.. 65
Figura 18. Ele aponta com a mão onde o centro do setor circular deve estar localizado 65
Figura 19. Simulação de movimento virabrequim com suporte a marcadores 66
Figura 20. Aponte a linha reta girada com a mão.. 68
Figura 21. Rotação da linha f em relação ao ponto A e ângulo α 68
Figura 22. Simule o movimento circular com o dedo 69
Figura 23. Aponte as extremidades do setor circular e simule o movimento que você deveria ter 70
Figura 24. Apontar a localização das extremidades do setor circular 70

Figura 25. Desenhando a linha e apontando para as extremidades do setor circular 71
Figura 26. E9 desenha o círculo 72
Figura 27. E9 desenha a linha perpendicular...72
Figura 28. E3 desenha um círculo 73

LISTA DE SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal em Nível Superior
CGGD	Clube GeoGebra pela diversidade
EDUTEC	Associação para o Desenvolvimento de Tecnologia Educacional e Novas Tecnologias Aplicadas à Educação
ESG	Elaboração de Simuladores com GeoGebra
GEHEM	Grupo de Estudos em História e Ensino de Matemática
IEMCI	Instituto de Educação Matemática e Científica
ICEN	Instituto de Ciências Exatas e Naturais
IFPA	Instituto Federal do Pará
LUZ	Universidade do Zulia
PPGECM	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas
TO	Teoria da Objetivação
UFPA	Universidade Federal do Pará

SUMARIO

CARACTERISTICAS GERAIS DA PESQUISA 17
O Problema de pesquisa: A origem 18
Objetivos da pesquisa 20
Objetivos Específicos 21
REFERENCIAL TEÓRICO 22
A Teoria da Objetivação 22
Aprendizagem 27
Atividade 30
Trabalho conjunto 31
A ESG como um conjunto de atividades 33
A produção de desenhos dinâmicos 34
A comunicação da técnica como trabalho conjunto 41
A TO em teses e dissertações: O que dizem? De que tratam? 43
MARCO METODOLÓGICO 46
Participantes e contexto 46
Sessão da oficina 1: Apresentação dos momentos da atividade e Introdução ao uso do software GeoGebra 47
Sessão da oficina 2 e 3: Resolução da primeira tarefa de simulação 49
Levantamento das informações 50
Análise das informações 53
RESULTADOS E DISCUSSÕES 57
Matematização 58
Trabalho matemático 64
Análise Multisemiótico dos Dados 73
REFLEXÕES FINAIS 78
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 81

CAPITULO I

CARACTERISTICAS GERAIS DA PESQUISA

Nos últimos anos o campo da educação matemática tem apresentado importante evolução no desenvolvimento de perspectivas teóricas e/ou abordagens que procuram potenciar o processo de ensino e aprendizagem da matemática (ARTIGUE, 2004). Estas perspectivas têm gerado novas concepções de aprendizagem, ensino e saber, uma vez que concebem a construção do conhecimento matemático como um processo sócio-histórico-cultural, com o qual se pretende reconhecer a influência das estruturas sociais, culturais, econômicas e políticas na aprendizagem e no ensino da matemática (LERMAN, 2000).

Uma destas perspectiva na educação matemática são aquelas de cunho sociocultural, as quais se caracterizam por conceber que o conhecimento é gerado pelos indivíduos no decorrer de práticas sociais inerentes à história e à cultura. Portanto, a produção do conhecimento é orientada por formas culturais de pensamento (estético, político, matemático científico, etc.) que permitem aos indivíduos interpretar e modificar a realidade deles (RADFORD, 2011). Um exemplo dessas perspectivas socioculturais é a Teoria da Objetivação (TO) criada e em atual desenvolvimento pelo Prof. Ph.D. Luis Radford.

À TO é uma teoria histórico-cultural do ensino e aprendizagem da matemática, que se baseia em uma concepção social da aprendizagem, na qual as capacidades intelectuais são formadas enquanto se aprende na interação com outros indivíduos (RADFORD, 2020; 2014a). Além disso, defende uma concepção não mental do pensamento, na qual o pensamento pode ser observado, uma vez que emerge por meio de gestos, movimento corporal, atividade perceptual, artefatos e signos utilizados pelos indivíduos e não como algo inobservável, que só ocorre na cognição do sujeito. Essa teoria mobiliza três conceitos-chave. O primeiro se refere à aprendizagem, que é concebida como o encontro consciente com formas culturais e históricas de reflexão e ação. Referido encontro se manifesta através de processos de objetivação social, sensível e material (RADFORD, 2013). O seguinte conceito-chave é o conhecimento, este é entendido como instanciação ou atualização do Saber, que no caso, acontece ser também o terceiro conceito-chave da teoria. Este é concebido como a configuração a partir de formas historicamente e culturalmente codificadas de reflexão e ação que estão em constante movimento, nos termos de Radford (2013).

Na TO os processos de objetivação são entendidos como processos sociais por meio dos quais os alunos alcançam uma compreensão crítica da lógica cultural com que os objetos de conhecimento foram dotados e, ainda, eles se familiarizam com as formas de ação e pensamento historicamente constituídos (RADFORD, 2008a, 2011). Para poder observar a manifestação dessa compreensão crítica, os processos de objetivação são pesquisados por médio de uma semiose corporal, gestos, linguagem, signos e artefatos presentes na atividade humana que os sujeitos que aprendem colocam em uso ou expressam. Nessa perspectiva, um dos interesses das pesquisas realizadas tanto em nível internacional quanto nacional está voltado para os processos de objetivação, uma vez que se pretende dar conta da forma como esse processo ocorre. Nesse sentido, procura-se identificar as ações dos alunos que os levam a objetivar o conhecimento e a se posicionar como indivíduos críticos, responsáveis e abertos (RADFORD, 2011). Essa objetivação do conhecimento é mediada por ações intencionais que visam tornar visível o objeto cultural matemático.

Nesse Sentido, essas investigações recorrem à identificação e caracterização dos meios semióticos de objetivação que emergem na atividade matemática na sala de aula com o intuito de caracterizar o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da matemática. No entanto, nesta investigação visamos essa caracterização nos processos de ensino e aprendizagem da geometria em uma determinada atividade não convencional que chamamos de Elaboração de Simuladores com GeoGebra (CASTILLO; SÁNCHEZ, 2020; PRIETO; ORTIZ, 2019; SÁNCHEZ; BRANDEMBERG, 2019; SÁNCHEZ; BRANDEMBERG; CASTILLO, 2020)

O Problema de pesquisa: A origem

O problema de pesquisa teve suas raízes em uma atividade não convencional desenvolvida como parte da minha formação na graduação na Licenciatura em Educação menção Matemática e Física da Universidade do Zulia (LUZ, Venezuela). No início de 2012, comecei a fazer parte de um grupo de pesquisa que hoje tem o nome de *Aprender en Red*, composto por dois professores que lecionavam na faculdade de Humanidades e Educação da referida universidade e um coletivo de estudantes para professor de matemática e física. Uma das ações educativas que o referido grupo continua promovendo o uso de tecnologias digitais para o ensino e aprendizagem de matemática. Dessas ações surge o projeto socioeducativo "*Club GeoGebra*" (CG) no Estado Zulia, Venezuela. Em geral, o projeto CG consistiu na formação de pequenos grupos de alunos do ensino médio que, livre e voluntariamente, para realizar atividade Elaboração de Simuladores com o GeoGebra (ESG), com o apoio de um professor de matemática e física que participa no encontro para orientar as ações dos estudantes (PRIETO, 2017).

Em Prieto e Gutiérrez (2015; 2016; 2017) podem ser observados as sistematizações do trabalho dos alunos no CG, uma demonstração de que com a ESG pode ser promovido a aprendizagem matemática. O impacto positivo do projeto CG foi ainda mais visível com o reconhecimento recebido pela Associação para o Desenvolvimento de Tecnologias Educacionais e Novas Tecnologias Aplicadas à Educação (EDUTEC) da Espanha em 2016.

Neste sentido, como grupo de pesquisa empreendemos um caminho que nos levasse a compreender nossa pratica educativa gerenciando esses processos de ensino e aprendizagem da matemática na ESG. Uma primeira produção teve sua origem pelo Rubio, Prieto e Ortiz (2016), a qual teve uma primeira abordagem à modelagem matemática na qual se originou uma sequência de etapas de construção criadas para elaborar um simulador do movimento em queda livre com o GeoGebra. Com o objetivo de desvelar a Matemática implícita nos processos de elaboração de simuladores com o GeoGebra e motivar a criação de outros simuladores com um objetivo semelhante ao mencionado neste trabalho.

Logo, com ideias mais amadurecidas desde a perspectiva da modelagem matemática, Gutiérrez, Prieto e Ortiz (2017), apresentam um trabalho no qual focam nos processos de modelagem através dos quais um grupo de estudantes aprende matemática enquanto participa de uma experiência de ESG. Os autores assumem uma perspectiva cognitiva para analisar os processos matemáticos e o trabalho matemático realizado pelos alunos. Essa perspectiva refere-se ao "ciclo de modelagem" de Blum e Leiβ (2007).

Depois, ao redor do 2017, compreendemos que as perspectivas socioculturais, especificamente a Teoria da Objetivação, pode nutrir ainda mais nossa compreensão sobre o ensino e aprendizagem da matemática, pelo fato de entender que o conhecimento colocado em jogo é considerado, mas também as pessoas envolvidas nas atividades e as interações entre os sujeitos. Nesse sentido, Sánchez e Prieto (2019) na sua pesquisa dão conta da aprendizagem geométrica de alunos que participam em atividades de ESG desde esta perspectiva sociocultural. Isto é um fato interessantes, já que uma boa parte das pesquisas desenvolvidas com a TO tem como foco o pensamento algébrico em alunos de ensino fundamental.

Um dos resultados da referida pesquisa de Sánchez e Prieto (2019) é que professor tem um papel de muita importância no momento de gerenciar os processos de ensino e aprendizagem geométrica. Porém os professores estão em condições suficientes para gerenciar atividades de ESG? Que características tem que ter uma formação para desenvolver nos futuros professores de matemática estas competências, o em termos de Prieto e Ortiz (2019) o saber gerenciar processos de ensino e aprendizagem geométrica em atividades da ESG?

Levando em consideração o anteriormente exposto, é plausível evidenciar a necessidade de desenvolver um estudo pesquise que de informações que possam ser tratadas para responder essas questões de modo que desvelem além do anterior, os recursos semióticos mobilizados pelos futuros professores de matemática quando estão evolvidos na resolução de tarefas na ESG. Com o propósito de que eles sejam cientes de todo o que intervêm durante os processos de objetivação do conhecimento geométrico ao longo da ESG.

Destacando que ao responder esta questão de pesquisa se quer contribuir ao campo da educação matemática e, especificamente, aquelas pesquisas que giram em torno ao estudo de processo de ensino e aprendizagem da geometria a partir de abordagens semelhantes a esta. Neste contexto, o desenvolvimento desta presente pesquisa acreditamos que é pertinente devido ao crescente interesse que atualmente se apresenta na educação matemática, pelas teorias socioculturais da aprendizagem matemática.

Objetivos da pesquisa

Com base no que foi exposto anteriormente, esclarecemos que nosso estudo teve como objetivo de pesquisa Analisar a aprendizagem geométrica que surge durante a simulação de um motor a dois tempos com o GeoGebra através dos meios semióticos de objetivação usada por futuros professores da Licenciatura Integrada em Ciências, Matemática e Linguagens para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental**.** Para conseguir isto, nos traçamos os seguintes objetivos específicos.

Objetivos Específicos

- Interpretar o discurso usado por futuros professores da Licenciatura Integrada em Ciências, Matemática e Linguagens para comunicar suas ideias geométricas durante a Elaboração de um Simulador com o GeoGebra.
- Descrever os meios semióticos manifestados por futuros professores da Licenciatura Integrada em Ciências, Matemática e Linguagens quando comunicam suas ideias geométricas na Elaboração de Simuladores com o GeoGebra.

Nos seguintes teremos mais esclarecimentos, do que é a Elaboração de simuladores com GeoGebra (ESG) e fases nela. Além disso, se trouxe um exemplo da atividade da ESG para maior compressão do contexto a ser pesquisado, bem como, da teoria que susterão as bases epistêmicas desta pesquisa e dos procedimentos metodológicos.

CAPITULO II

REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, é abordado o fundamento teórico que sustenta esta pesquisa, bem como os procedimentos metodológicos. No nosso caso, a teoria sociocultural da aprendizagem matemática proposta por Luis Radford denominada Teoria da Objetivação.

A Teoria da Objetivação

A Teoria da Objetivação (TO) emergiu como uma resposta à necessidade de repensar o ensino e a aprendizagem da matemática em termos diferentes daqueles propostos pelas teorias individualistas, cujo propósito fundamental era a transmissão do conhecimento, essa perspectiva dominando a educação matemática até a década de 1990 (RADFORD, 2014a). No entanto, alguns pesquisadores da época já tinham manifestados algumas produções cientificas com o intuito de compreender a influência da cultura, história e sociedade na aprendizagem dos alunos (BARTOLINI-BUSSI, 1991; LERMAN, 1992; BOERO et al., 1995). Uma questão que segundo Radford, (2018) que ainda persiste hoje e que está longe de ter sido respondido de forma clara e definitiva pelos pesquisadores, porém, se vem construindo avanços em tal compressão.

Diante dessa necessidade, a TO surge como uma alternativa que oferece novas possibilidades para pensar e levantar de forma diferenciada o ensino e a aprendizagem da matemática nas salas de aula, para isso, a TO encaminha o objetivo da educação matemática a partir de uma abordagem histórico-cultural. Nesse sentido, essa teoria baseia-se em dois princípios fundamentais de natureza ontológica[1] e epistemológica e dois princípios associados ao propósito da educação matemática, um educacional e outro ético, os quais serão detalhados no próximo apartado (RADFORD, 2006, 2013, 2014a).

A partir da posição ontológica, a Teoria da Objetivação concebe o saber como um movimento codificado, um agenciamento de processos de reflexão e ação cultural e historicamente constituído e ao mesmo tempo como uma mera possibilidade de algo que está ali (conceitos ou objetos culturais). Eles são apresentados através do trabalho humano dentro de

1 Pertencendo à ontologia, isto é, ao ramo da filosofia metafísica que estuda a natureza do ser como ser.

práticas sociais que definem um conjunto de formas historicamente e culturalmente codificadas de fazer, pensar e refletir. Para que o saber surja na existência e se torne realidade (conhecimento), este deve ser instanciado através de uma atividade (RADFORD, 2013). Por outro lado, o fundamento epistemológico da teoria propõe que o conhecimento é o conteúdo conceitual concreto e só pode aparecer através de uma atividade. Então desde esta perspectiva o conhecimento é teorizado como a instanciação ou atualização do saber (RADFORD, 2013, p. 16), um fato que segundo ele, faz entender que o saber é pura possibilidade e que não pode ser igualado a nenhuma de suas instanciações ou atualizações.

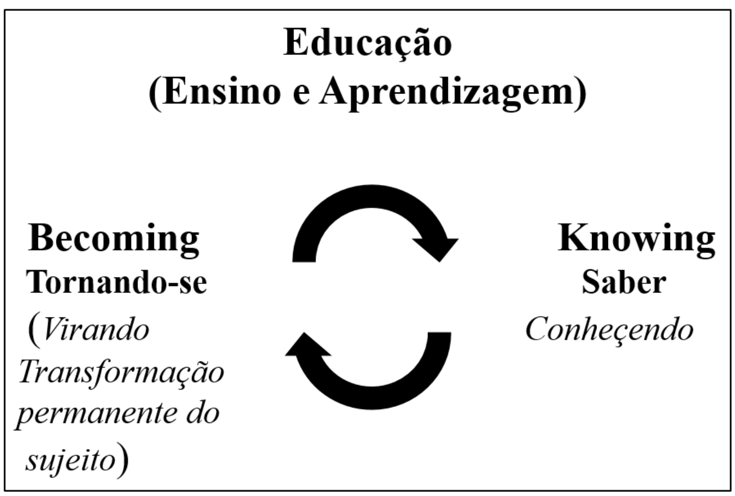
Da mesma forma, o conhecimento é considerado como o produto de uma atividade humana, isto é, o resultado de ações e reflexões dos sujeitos sobre o mundo que são orientados por formas culturais e históricas, nos referimos então às formas de argumentar, testar, pensar e validar que são enquadrados pela atividade de cada cultura de acordo com o momento histórico em que está imerso. Radford (2013) afirma que "o particular como atividade marca a maneira pela qual o conhecimento requer o saber", ou seja, cada atividade realizada na sala de aula de matemática dá sua própria marca ao conhecimento. O precedente dependerá de meios e artefatos culturais que sejam revelados durante a atualização do saber.

O princípio educacional da TO permite estabelecer o ensino e aprendizagem como um trabalho conjunto de cooperação, participação e interação entre professor e alunos que não busca apenas compreender o conteúdo matemático (saber), mas também o ser (RADFORD, 2011, 2014ª, 2020). Ou seja, sob este princípio assume-se que o ser se transforma durante a interação com o outro e os artefatos culturais devido à posição crítica que assume durante os discursos e práticas sociais associadas às formas de expressão, ação e reflexão com a matemática em que está imerso.

Neste sentido, Radford (2006) argumenta que a aprendizagem "não consiste em construir ou reconstruir conhecimento. Trata-se de dar sentido aos objetos conceituais que o aluno encontra em sua cultura " (p. 113). A aquisição de conhecimento faria então um processo social, sensível e material teorizado na TO como uma objetivação na qual "o estudante alcança um entendimento crítico, através da dotação de significados, objetos culturais matemáticos e a lógica cultural destes " (RADFORD, 2011, p. 45). Por outro lado, o ensino consiste em “colocar e manter em movimento atividades contextuais, localizadas no espaço e no tempo, que levam a um padrão fixo de atividade reflexiva embutida na cultura" (RADFORD, 2006, p. 115).

Ao respeito do princípio ético, na TO se reconhece o caráter histórico-cultural do sujeito, isto é, concebe e tem consciência da dimensão do ser, que não se reduz apenas a um ser que pensa e produz, mas como sujeito que está imerso em um contexto social e cultural. A articulação desses quatro princípios permite repensar o objetivo da educação matemática. Nesse sentido, a partir da TO afirmasse que no ensino e aprendizagem das matemáticas devem ser estudados os **saberes** (teorias, atividades, etc) e os **seres** (a constituição do ser que participa da atividade). Mais especificamente, como sugerido esquematicamente por Radfod (2014a) na Figura 1, "no ensino e na aprendizagem devem estudar tanto os conhecimentos em jogo (ou seja, o **conhecimento** ou "*knowing*" dos alunos), como a formação do aluno como sujeito humano (ou seja, o **tornar-se** ou "becoming", ou seja, a transformação perpétua do sujeito) (p.135).

Figura 1 Objetivo da educação de acordo com Radford (2014a).



Fonte: Radford (2014, p. 135)

A partir da Figura 2, podemos observar um relacionamento entre Tornar-se e Conhecer, a Teoria da Objetivação faz um convite para repensar a educação como uma tarefa centrada além do saber, em que **ser** e **conhecimento** a partir de uma concepção ontológica são encontrados em uma relação dialética na qual não se pode ocorrer sem o outro e sem que a educação (ensino e aprendizagem) seja reduzida à outra (Radford, 2014a). Em termos gerais, a TO eleva o objetivo da educação matemática como um esforço político, social, histórico e cultural cuja finalidade é a criação de indivíduos éticos e reflexivos que se posicionam criticamente em práticas matemáticas historicamente e culturalmente constituídas, através de um trabalho conjunto (RADFORD, 2006, 2013, 2018a).

Três conceitos-chave da Teoria da Objetivação

A teoria histórico-cultural do ensino e aprendizagem da matemática, a teoria da objetivação tem três conceitos-chave, os quais são, **Saber, Conhecimento** e **Aprendizagem**. Lembrando que a TO tem como base a ideia fundamental que a aprendizagem é sobre *conhecer* e *ser* (tornar-se) (RADFORD, 2013). Em outras palavras, a aprendizagem inclui o eixo do *conheciment*o e também o eixo do *ser*.

Radford argumenta que, se as teorias da educação matemática buscam oferecer explicações adequadas sobre a aprendizagem, elas devem primeiro esclarecer o que entendem por *saber* e *conhecimento*. De fato, a aprendizagem é sempre relativa a alguma coisa (por exemplo, a aprendizagem de probabilidade, das propriedades geométricas das figuras etc.). Como resultado, não podemos entendê-lo se falharmos em dar uma explicação satisfatória sobre o objeto da aprendizagem e a natureza desse objeto (RADFORD, 2017b).

Pelo exposto, é evidente que a TO trouxe uma concepção histórico-cultural do *saber* e *conhecimento*. A ideia é considerar o saber não como um objeto que é construído ou transmitido, mas como uma possibilidade, ou seja, algo potencial que emerge da atividade humana e que está incorporado em um processo de movimento - para se tornar, para ser mais preciso - materializar ou expressar conhecimento. Na teoria da objetivação, o saber é concebido como uma entidade geral que, ontologicamente falando, já está na cultura quando nascemos.

Uma maneira melhor de abordar o problema do saber é retornar a Aristóteles e seu distinção entre *potencialidade* e a *atualidade*. Potencialidade (δύναμις, dunamis) para Aristóteles, designa a fonte do movimento. Como o nome sugere, potencialidade é um conceito dinâmico. Potencialidade é uma capacidade de fazer alguma coisa. A atualidade (ἐνέργεια, energia) é a ocorrência ou o desenrolar concreto daquilo que, até antes de se mover, até antes de ser atualizado, não passava de uma simples potencialidade (RADFORD, 2017a).

Esse é o caso do *Saber* é isso: *potencialidade*. O saber algébrico, por exemplo, é um potencial incorporado à cultura: possibilidades oferecidas aos indivíduos para pensar, refletir, colocar e resolver problemas de uma certa maneira. Para esclarecer melhor as ideias, vamos definir o saber da seguinte forma: “o saber é um sistema codificado de processos corporais, sensíveis e atitudinais de ação e reflexão, constituídos histórica e culturalmente” (RADFORD, 2017a, p. 14). No caso da aritmética, esses processos podem ser de reflexão, expressão e ação que emergiram na Mesopotâmia a partir de atividades humanas específicas, como contar gado ou grãos ou medir campos. No caso da geometria, esses processos podem ser de construção, argumentação e reflexão que surgiram no Egito a partir de atividades humanas específicas, como medir terras perto do rio Nilo, medir pirâmides, etc.

Os adjetivos corporais, sensíveis e materiais mencionados na definição anterior significam que os processos de ação a que nos referimos não são cogitações mentais que ocorrem dentro da cabeça, mas ações de indivíduos específicos que agem e vivem no mundo social e cultural. Essas ações são constituídas através do corpo, dos sentidos humanos e do uso de objetos físicos e artefatos culturais.

Ao respeito do *conhecimento* é concebido como a atualização ou materialização do saber. Ou seja, para que ela surja na existência (é uma mera possibilidade), o saber precisa-se materializar através de um processo de atualização. Devemos ter em mente que afirmar que o saber é algo geral significa que o conhecimento não pode ser identificado com nenhuma de suas materializações ou atualizações. É afirmar o que dissemos antes: que o saber é pura possibilidade. A possibilidade de encontrar uma propriedade das sequências aritméticas ou o termo 100 em uma determinada sequência. Essa possibilidade como possibilidade é simplesmente algo inexistente, pura potencialidade que "ainda não surgiu" (HEGEL, 2001, p. 36). Para que ele possa existir, o conhecimento precisa se materializar através de um processo de atualização.

O termo atualização evoca a temporalidade adequada. Já existe algo lá, mas isso é simplesmente potencialidade, que ainda não emergiu e que, para surgir, deve ser acionada e aparecer: ela deve se tornar atual; tem que ser atualizado. Esse processo pelo qual o saber é atualizado é a *atividade*: para se materializar, o saber precisa se mostrar na atividade pela qual adquire seu conteúdo (RADFORD, 2018b). Nas palavras de Radford, o geral (saber) não tem o poder de aparecer por si mesmo. É importante mencionar que a atividade imprime sua marca na atualização do conhecimento.

A atualização do saber é, como mencionado acima, o *conhecimento*, ou seja, o conhecimento é o conteúdo conceitual concreto no qual o saber é manifestado ou atualizado ou materializado ou corporificado. Seu conteúdo conceitual aparece apenas em uma atividade que é mediada por alguns meios e imprime sua própria marca, ou seja, a atividade demarca o modo pelo qual o saber se manifesta no conhecimento. Em outras palavras, a maneira pela qual você conhece alguma coisa é consubstancial às especificidades do processo de conhecimento. A atividade mediadora exerce sua mediação através de artefatos, formas de usar artefatos e também através de formas e modos de interação humana, que são históricos e culturais (RADFORD, 2006).

A relação entre *saber*, *atividade* e *conhecimento* pode ser vista da seguinte forma: o conhecimento é uma maneira do saber: uma de suas formas desenvolvidas de forma única. Essa forma desenvolvida que a atividade mediadora possibilita, coloca o saber em movimento e o atualiza ou materializa. O saber (algébrico, geométrico etc.) não é uma entidade sensível em si. Podemos sentir, perceber ou pensar a própria álgebra? Não. Nós não podemos. Pensar algebricamente já é algo que ocorre naquele processo que chamamos de atividade momento atrás. E o que está sendo revelado à consciência no curso dessa atividade não é todo o conhecimento algébrico, mas uma forma exclusivamente desenvolvida: sua materialização ou atualização, ou seja, conhecimento. Somente como tal, o conhecimento pode ser um objeto sensível do pensamento e, como tal, ser modificado e expandido.

Aprendizagem

Em oposição ao paradigma individualista, a TO propõe uma (re)conceptualização da aprendizagem matemática, não como resultado da ação do sujeito que constrói seu próprio conhecimento, mas como “um processo coletivo, cultural e historicamente situado que destaca o papel do trabalho social humano, o corpo, as emoções e o mundo material” (RADFORD, 2018a). Nessa perspectiva, as práticas sociais "criam novos indivíduos capazes de refletir matematicamente criticamente as questões urgentes de suas comunidades e seu mundo"

(RADFORD, 2017c, p. 141). Para a TO, a aprendizagem tem que ver com o saber escolar matemático, mas também com aqueles seres que transformam e reafirmam como sujeitos da educação na busca por esse conhecimento. Radford (2018b) refere-se ao saber matemático como arquétipos de pensamento, reflexão e ação constituídos histórica e culturalmente.

Para estudar a aprendizagem matemática, a TO introduz duas categorias conceituais na forma de processos de objetivação e subjetivação. Enquanto os processos de objetivação dão conta da maneira pela qual o saber aparece na aprendizagem, os processos de subjetivação têm a ver com o sujeito da aprendizagem e suas formas de colaboração. Em atenção ao objetivo do estudo, nesta parte, nos referimos à aprendizagem matemática em termos de processos de objetivação. Já em trabalhos anteriores, percebemos o outro aspecto da aprendizagem matemático em um contexto de ESG.

O significado da objetivação na TO é diferente do significado da reificação da experiência humana, assumida por Wenger (2001, p. 83) e outros teóricos sociais. Segundo Radford (2018b, p.233), os indivíduos desde o nascimento entram em contato com situações, entidades ou coisas que se opõem a eles, que parecem estranhas e desconhecidas, mas que fazem parte do repertório de sistemas de expressão, ação e pensamento, constituído histórica e culturalmente. A objetivação é justamente esse processo social, corporal, material e simbólico que implica:

> Tornar-nos, progressiva e criticamente, conscientes de uma forma codificada de pensamento e ação - algo que notamos gradualmente e ao mesmo tempo adquire significado. Processos objetivos são aqueles atos de perceber significativamente algo que é revelado à consciência por meio de nossa atividade corporal, sensorial e artefato (RADFORD, 2017b, p. 121).

A maneira de entender a objetivação proposta pelo TO revela dois elementos desse processo que são fundamentais para entender como a aprendizagem geométrica ocorre durante o ESG. Por um lado, a objetivação é um processo subjetivo, emocional e afetivo de conscientização de algo que constitui o saber. Portanto, a consciência é um reflexo do modo como cada indivíduo reconhece o mundo objetivo (que o transcende) e é orientado / posicionado criticamente dentro dele, dentro de uma dinâmica de encontro dialético com as formas codificadas de reflexão, ação e pensamento.

Essa consciência não é contemplativa, porque, através da consciência individual, são formadas sensibilidades culturais para refletir, entender, discordar, objetar e sentir os outros, a si mesmo e ao mundo (RADFORD, 2017b). Portanto, para que ocorra a conscientização, é necessário que uma determinada atividade seja implementada, de modo que as reflexões e ações dos alunos nele levem a formas de instanciação do saber matemático que, a princípio, possam aparecer como algo estranho para nós, como uma espécie de alteridade. Em outras palavras, a aprendizagem é definida como o resultado de processos de objetivação. Como se pode notar, as abordagens acima emergem duas ideias fundamentais para a compreensão da aprendizagem matemática: **consciência** e **atividade**.

A TO considera por consciência a reflexão subjetiva e o próprio posicionamento no mundo externo levado a cabo por alguns sujeitos. Consideramos a consciência como um processo subjetivo, emocional e afetivo, por meio do qual cada um de nós, como indivíduo, reflete sobre o mundo e é guiado por ele. Essa reflexão não é contemplativa. A consciência individual é uma forma especificamente humana de reflexão subjetiva sobre a realidade concreta, durante a qual formamos sensibilidades culturais para ponderar, refletir, compreender, discordar, objetar e sentir os outros, a nós mesmos e a nosso mundo. Para que haja uma consciência em que processos não-alienantes de objetivação são promovidos, é necessário criar uma atividade onde não apenas o conhecimento escolar seja mobilizado, mas também formas de interação social.

É por isso que o TO coloca no centro de sua abordagem ao conceito de **atividade**, entendido como "um evento criado por uma busca comum, ou seja, uma busca que é, ao mesmo tempo, cognitiva, emocional e ética" (RADFORD, 2017, p. 125). Um dos pontos importantes da atividade é que ela é essencialmente social, essa característica social não desaparece quando trabalhamos sozinhos (por exemplo, quando um aluno resolve tarefas de construção). Você pode estar fisicamente sozinho, mas estamos recorrendo a recursos históricos, culturais e sociais (computador, calculadora, lápis, linguagem, escrita, etc.), que tornam a atividade uma atividade social. Na TO, esses sinais e artefatos são chamados de **meios semióticos de objetivação** (RADFORD, 2003).

Nos processos de objetivação, os alunos e o professor recorrem ao corpo, a sinais, artefatos e gestos para fazer o objeto aparecer e atingir formas relativamente estáveis de consciência dos significados culturais com os quais foram dotados, uma vez que os objetos não eles podem ser totalmente expostos no mundo concreto. Esses recursos que são usados na atividade matemática são chamados meios semióticos de objetivação. Nos termos de Radford, os meios semióticos de objetivação são definidos como:

> Todos os meios usados por indivíduos que estão em processo de produção de significado, para alcançar uma forma estável de consciência, apresentar suas intenções e organizar suas ações e assim adquirir os objetivos de suas ações (RADFORD, 2003, p.41).

É através da mobilização dos meios semióticos de objetivação na atividade matemática escolar que objetos matemáticos podem ser acessados, permitindo que eles estejam presentes, dando-lhe uma certa forma tangível e corpórea de conhecimento (RADFORD, 2003). Arzarello (apud VERGEL, 2014) afirma que é necessário na pesquisa detectar e analisar como os meios semióticos surge e evolui no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que estas emergem na atividade matemática como fatores indispensável na constituição e manifestação do pensamento matemático, ou seja, não reconhecer esses meios implicaria na falta de um arsenal de aspectos matemáticos corpóreos que podem fornecer informações sobre o desenvolvimento do pensamento dos alunos (VERGEL, 2014).

Atividade

Na teoria da objetivação o que torna possível a aprendizagem é uma atividade humana, sensual e prática. Neste sentido o conceito de atividade proposto a partir da TO foca muito mais do que pessoas interagindo umas com as outras. É mais do que um meio de interação com pessoas e artefatos. É um modo de vida, algo orgânico e sistêmico, um evento criado por uma pesquisa comum - ou seja, uma pesquisa com outras pessoas - da solução para um problema colocado, uma pesquisa cognitiva, emocional e ética. Para que a aprendizagem ocorra, o escopo do possível ou potencial deve aparecer em uma manifestação concreta na consciência dos alunos. Isso requer uma atividade específica que faça com que o saber geométrico apareça no mundo concreto, para que o saber seja dotado de um conteúdo conceitual específico.

É uma atividade que exige que o professor e os alunos se envolvam em algum tipo de reflexão e ação que apresente o conteúdo conceitual geométrico que se busca, para que o potencial se materialize de maneira conceitualmente forte. Para investigar a objetivação, devemos, portanto, investigar a atividade na qual ela é incluída. No entanto, a atividade:

> [...] Tätigkeit em alemão e deyatel'nost 'em russo, refere-se a um sistema dinâmico orientado para a satisfação de necessidades coletivas. Portanto, a atividade como Tätigkeit / deyatel'nost 'não deve ser confundida com a atividade como Aktivität / aktivnost'; isto é, como simplesmente estar ocupado com alguma coisa (Roth e Radford 2011). A atividade como Tätigkeit / deyatel'nost 'é uma forma social de esforço conjunto, através do qual os indivíduos produzem seus meios de subsistência enquanto se produzem como seres humanos. Inclui noções de auto-expressão, desenvolvimento racional e alegria estética (Donham 1999). Mais precisamente, a atividade como Tätigkeit / deyatel'nost 'é um modo de vida (RADFORD, 2018a, p. 12, tradução nossa).

Para evitar confusão com outros significados da atividade, Radford (2016) decidiu chamar "**trabalho conjunto**" na teoria da objetivação à atividade como Tätigkeit / deyatel'nost

Trabalho conjunto

Radford coloca o trabalho conjunto como a principal categoria da teoria da objetivação. Ele se apoia nas ideias de Spinoza (1989), onde “os seres humanos são considerados parte da natureza: são seres naturais. Como todos os outros seres vivos naturais, os seres humanos são seres necessitados que encontram satisfação em objetos fora de si” (RADFORD, 2018b, p. 12, *tradução nossa*). Para atender às suas necessidades (necessidades de sobrevivência, da aprendizagem e outras necessidades criadas pela / na sociedade), os seres humanos são ativamente lançados no mundo. Eles se expõem e, se expondo, produzem. O que esses indivíduos produzem para atender às suas necessidades ocorre em um processo social que é, ao mesmo tempo, o processo de registrar indivíduos no mundo social e produzir sua própria existência.

Colocar o trabalho conjunto como uma categoria ontológica e epistemológica da teoria da objetivação nos leva a considerar a atividade em sala de aula como a unidade de análise (RADFORD, 2018a). No entanto, não podemos descartar o papel da linguagem, dos signos, dos artefatos e do corpo nos processos de objetivação. Na TO, a linguagem, os signos, os artefatos e o corpo sensível são entendidos não como mediadores, mas como parte da atividade dos indivíduos, parte de seu pensamento.

O conceito de trabalho conjunto permite conceber o ensino e a aprendizagem em na sala de aula não como duas atividades separadas, uma realizada pelo professor (atividade do professor) e outra pelo aluno (atividade do aluno), mas como uma atividade única: o trabalho conjunto de professores e alunos. No trabalho conjunto, o professor não aparece como possuidor de saberes que está entregando ou transmitindo aos alunos; ou como alguém que ajuda os alunos a definir estratégias de aprendizagem. Os alunos também não aparecem como contribuintes que recebem conhecimento. A atividade busca promover que:

> O professor e os alunos trabalham juntos para a produção do que Hegel (2001) chamou de "trabalho comum" - por exemplo, a aparência sensual na sala de aula de uma maneira algébrica co-variacional de pensar em sequência numérica ou de pensar em espaço euclidiana ou projetivamente. (RADFORD, 2018b, p. 12, tradução nossa).

No ambiente escolar, essa busca comum é entendida precisamente como “o que professores e alunos produzem juntos na sala de aula, trabalhando lado a lado (por exemplo, uma ou várias maneiras de apresentar e / ou resolver um problema, demonstrar etc.) ” (Radford, no prelo). Hegel (2001) refere-se a essa busca comum através da expressão obra comum, no qual Radford (2018b) afirma o seguinte:

> É na produção dessa obra comum que ocorre o encontro de estudantes com conhecimentos culturais e históricos. Esse encontro consiste em uma conscientização progressiva, material e sensível ao conhecimento, de modo que o aprendizado não é mais nem menos que a refração na consciência do aluno daquele trabalho comum que ele ou ela contribuiu para fazer aparecer na sala de aula. (p. 14).

Para trazer essas ideias para o contexto do ensino e aprendizagem de matemática no ensino médio, vamos imaginar que um professor, motivado pela necessidade de favorecer a aprendizagem dos procedimentos de construção de polígonos com uma régua e um compasso, peça aos alunos que construam de um triângulo equilátero do lado 5 cm. Nessas circunstâncias, a atividade seria o evento de produção conjunta do professor e dos alunos de um desenho geométrico particular do triângulo que atenda às condições especificadas. Nesta atividade, o desenho geométrico seria o trabalho comum e a aprendizagem seu processo de construção, o motivo da atividade.

A atividade que ocorre na sala de aula de matemática tem um objeto. Esse objeto é identificado, a priori, pelo projeto didático do professor. Esse objeto pode ser, por exemplo, o encontro de estudantes com formas de pensar culturalmente codificadas algebricamente sobre sequências. Também pode ser o encontro de formas de pensar culturalmente codificadas matematicamente sobre movimento, frações etc. Em todos os casos, enquanto o saber é pura possibilidade, a atividade que o medeia é um passo em direção à realização desse saber. A atividade (que é um sistema em movimento) se move em direção ao seu objeto (RADFORD, 2017b).

Para que a atividade se desdobre na direção de seu objeto, é conveniente identificar um ou mais objetivos. Etos podem ser, se continuarmos com o exemplo de álgebra, resolver problemas sobre sequências algebricamente. Para atingir os objetivos da atividade, é apropriado que tarefas específicas sejam concebidas. Estes podem aparecer como uma sequência de problemas relacionados, de crescente dificuldade conceitual. No caso da teoria da objetivação, "*momentos*" foram identificados na atividade em que as tarefas são apresentadas e a atualização do saber é iniciada por meio das interações entre alunos e professores e os artefatos culturais usados. A objetivação ocorre quando os alunos e o professor, por meio de sua atividade prática conjunta, revelam o saber, ou seja, eles o transformam de saber "em si" em conhecimento, ou seja, em saber "para si mesmo". Em outras palavras, quando aparecem no singular materializado pela conceitual idade procurada do conhecimento (RADFORD, 2017b).

A seguir se faz uma descrição da ESG, considerando a estrutura da atividade proposta a partir da teoria da objetivação.

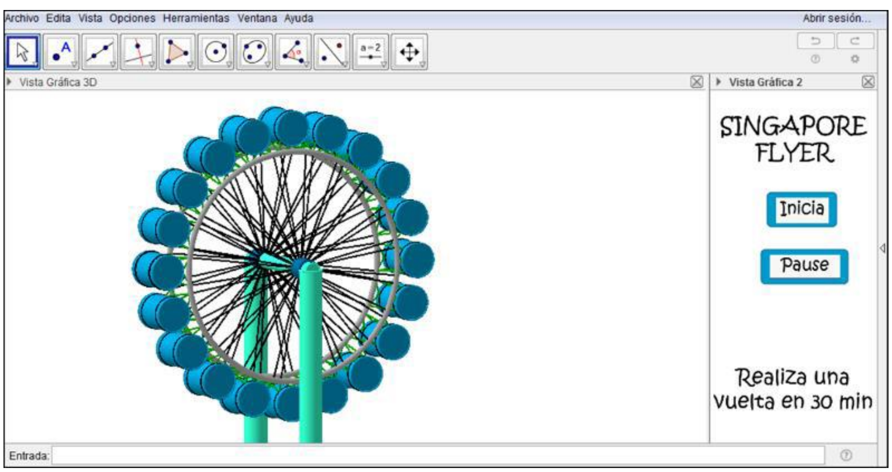
A ESG como um conjunto de atividades

Considerando as ideias teóricas anteriores, definimos o ESG como um conjunto de atividades criadas pela necessidade de promover a aprendizagem geométrica dos alunos participantes dessa atividade e motivadas por a produção de desenhos dinâmicos com o software GeoGebra (CASTILLO; PRIETO, 2018; SÁNCHEZ; SÁNCHEZ-N, 2020; SÁNCHEZ-N, I. V. et al, 2020), a ESG não se concentra em um único trabalho comum. De fato, o ESG é composto por diferentes tipos de atividades. Nas subseções a seguir, são explicadas as duas principais atividades realizadas durante a elaboração de um simulador. São explicadas as duas principais atividades realizadas durante o desenvolvimento de um simulador. Destes dois, os alunos que participaram deste estudo realizaram o procedimento para a primeira atividade.

A produção de desenhos dinâmicos

As primeiras atividades da ESG são motivadas pela produção de desenhos dinâmicos com o software GeoGebra. Um desenho dinâmico é um desenho geométrico produzido por meio de um software de geometria dinâmico, de forma que preserva as propriedades espaciais que lhe foram impostas na construção quando é movido ou arrastado por qualquer de seus elementos livres (LABORDE, 1997). Concordamos em chamar ao conjunto de desenhos dinâmicos criados com o software GeoGebra que nos permite modelar ou representar esse fenômeno da realidade de interesse dos alunos, de simulador. A Figura 2 mostra um simulador de roda de fortuna do Singapore Flyer elaborado com o GeoGebra na sua versão 5.0.

Figura 2 Singapore Flyer Simulator



Fonte: CUEVA; ISEA, (2018, p. 116)

A produção desse tipo de simulador implica na concepção de uma sequência de atividades que decidimos classificar em dois (02) tipos, de acordo com o trabalho comum realizado na atividade (GUTIÉRREZ; PRIETO; ORTIZ, 2017). O primeiro tipo são as atividades que visam a tradução, em termos geométricos, do rascunho de alguma parte que compõe o fenômeno da simulação. Nesse caso, o trabalho comum se manifesta no modelo matemático produzido durante a atividade e no estabelecimento de uma sequência de construções com o GeoGebra que são tratadas nas demais atividades. O segundo tipo consiste nas atividades transformam aquele rascunho da primeira atividade em um desenho dinâmico. Usamos o termo matematização para nos referir ao primeiro tipo de atividades e ao trabalho matemático para o segundo tipo.

Para produzir o modelo matemático nas atividades de matematização e decidir como ele seria representado com o software, os indivíduos realizam uma série de ações (tarefas), incluindo: (i) escolha o fenômeno da simulação, (ii) identifique as partes do fenômeno com movimento, (iii) decidir qual dessas partes integrará o simulador e em que ordem elas serão representadas, (iv) desenhar um esboço da primeira parte selecionada, (v) identificar objetos geométricos nesse esboço, (vi) estabelecer uma sequência de tarefas de construção para esses objetos e (vii) execute novamente as últimas três ações para a próxima peça escolhida.

Para produzir o desenho dinâmico correspondente ao modelo matemático nas atividades matemáticas de trabalho e decidir como eles serão construídos no GeoGebra e quais ferramentas eles devem usar do software, os indivíduos realizam uma série de ações (tarefas), dentre elas: (i) selecione a ferramenta do GeoGebra a ser utilizado, (ii) estabelecer uma técnica de construção, (iii) implementar a técnica de construção e (iv) execute novamente as últimas três ações para a próxima peça escolhida. As atividades do ESG são realizadas em quatro momentos.

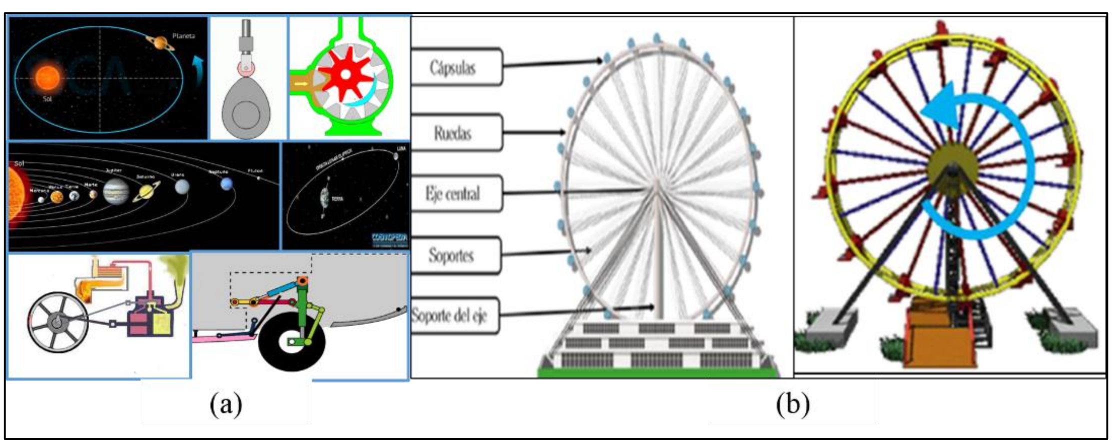
As atividades da ESG possuem quatro momentos que podem ser assistidos em mais de uma sessão de trabalho com os alunos. Ao longo da descrição dos momentos, um exemplo do desenvolvimento de um simulador feito por dois alunos será explicado e poderá ser consultado em Cueva e Isea (2017). O primeiro momento se chama fenômeno real, neste os alunos selecionam de uma grande variedade de fenômenos naturais ou artificiais aquele que seja de seu interesse para ser representado no GeoGebra. Para fazer a seleção, os jovens devem considerar por um lado, estudar aspectos do fenômeno real, como seu histórico, seus componentes, funcionamento, utilidade no cotidiano, entre outros e por outro lado, selecionar referências gráficas do fenômeno, quer dizer, uma imagem onde mostra muitos detalhes do fenômeno.

Esses referentes das imagens são importantes na medida em que permitiram aos alunos, em primeiro lugar, observar a estrutura e o funcionamento do fenômeno e, em segundo lugar, ter uma ideia do produto final (o simulador) que pode ser obtido no GeoGebra no final da atividade. Nesse momento, há uma série de tarefas que os alunos devem resolver antes de passar para o segundo momento (PRIETO; ORTIZ, 2019). As tarefas são as seguintes:

1. Selecione um fenômeno natural ou artificial a partir de vários fenômenos apresentados.
2. Estudar aspectos do fenômeno selecionado, como sua história, seus componentes, funcionamento, utilidade no cotidiano, entre outros.
3. Selecione referências gráficas do fenômeno, quer dizer, uma imagem onde mostra muitos detalhes do fenômeno.
4. Faça um desenho ou esboço (por mão levantada) daquela parte do fenômeno pelo qual decidiram iniciar a elaboração de seu simulador.

De todos os fenômenos apresentados (ver Figura 3a), os alunos resolveram sua primeira tarefa selecionando a roda da fortuna, alegando que isso despertou seu interesse em comparação com os outros fenômenos. Durante a resolução da segunda tarefa do primeiro momento, os alunos encontraram informações importantes sobre seu fenômeno, como sua história, capacidade e altura das rodas das fortunas. Esse último aspecto levou-os a selecionar a roda da fortuna de Cingapura por ser a mais alta até agora e buscar informações sobre essa roda da fortuna em particular, encontrando suas referências gráficas (ver Figura 3b).

Figura 3. Exemplo de fenômeno e sua seleção



Fonte: Cueva e Isea (2017, p. 120)

Depois de selecionar o fenômeno e determinar as imagens correspondentes, os alunos enfrentam a terceira tarefa e, para isso, passam por um processo chamado problematização. Este processo consiste em identificar as situações problemáticas que devem ser resolvidas para alcançar a representação do fenômeno real no software. Essas situações estão diretamente relacionadas à representação de cada uma das partes que compõem o fenômeno, dando origem a um conjunto de tarefas de simulação. Uma tarefa de simulação é entendida como uma proposta de ação que exige a representação de uma parte que compõe o fenômeno real.

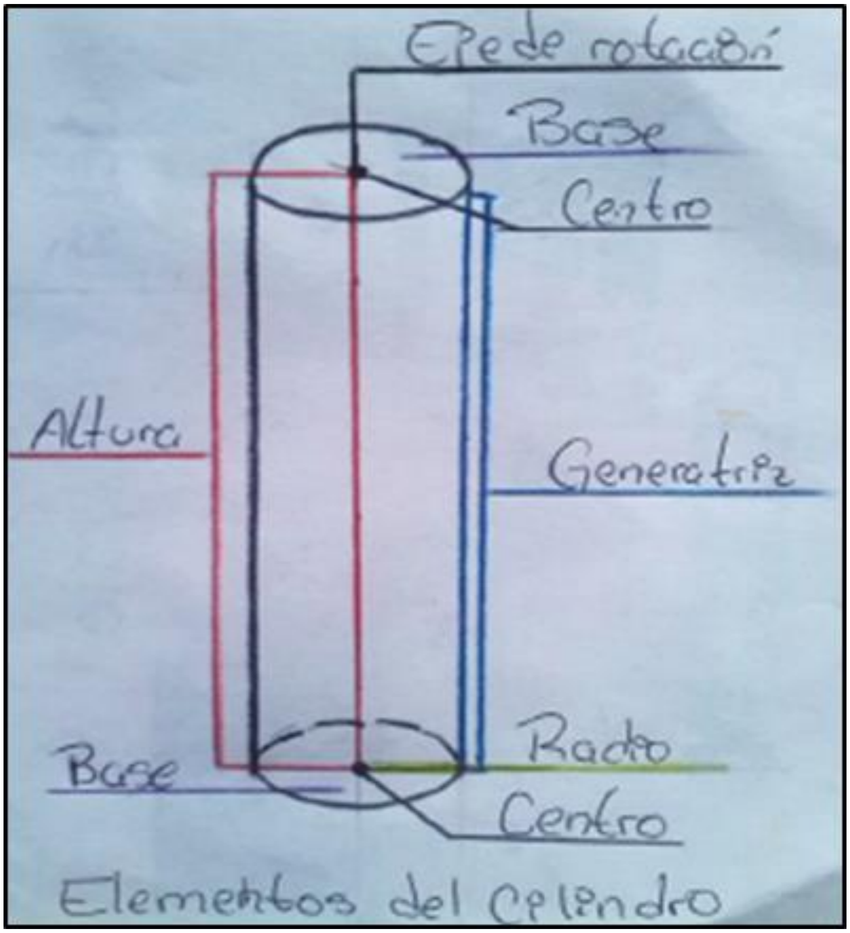
O processo de problematização culmina quando os alunos elaboram um desenho ou esboço (por mão levantada) daquela parte do fenômeno pelo qual decidiram iniciar a elaboração de seu simulador, de acordo com a sequência de resolução estabelecida. No segundo momento chamado mundo real, os alunos prestam atenção única e exclusivamente nessa parte do fenômeno já selecionado e onde foi decidido começar. Por ser uma representação que se refere a um objeto existente em "realidade", esse esboço é chamado de modelo real. Em geral, esse modelo é obtido como resultado de acordos alcançados pelos alunos envolvidos na atividade.

Em algumas ocasiões, esse modelo é elaborado no quadro negro da sala de aula por todos os participantes. Em outros, os alunos fazem o esboço em seu caderno. A escolha de uma forma ou de outra depende de vários fatores, incluindo as condições do espaço físico que abriga a atividade, a lógica predominante de produção e o estilo do promotor e dos estudantes. As tarefas que os alunos devem resolver antes de passar para o terceiro momento são as seguintes:

1. Identifique figuras geométricas que podem representar partes da peça para simular.
2. Selecione uma ordem para a construção das figuras geométricas identificadas.

A Figura 5 mostra a resolução da quinta tarefa, ou seja, o modelo real associado ao eixo central de uma roda de fortuna, feito por dois estudantes (ver Figura 4). Para resolver a sexta tarefa, os alunos passam pelo processo de matematização, que é reconhecer o modelo real desses objetos geométricos que dão "sentido matemático" para as formas e movimentos da peça que decidiu representar o GeoGebra. Cada um dos objetos geométricos que são evocados durante a matematização "modela" algum aspecto do esboço realizado.

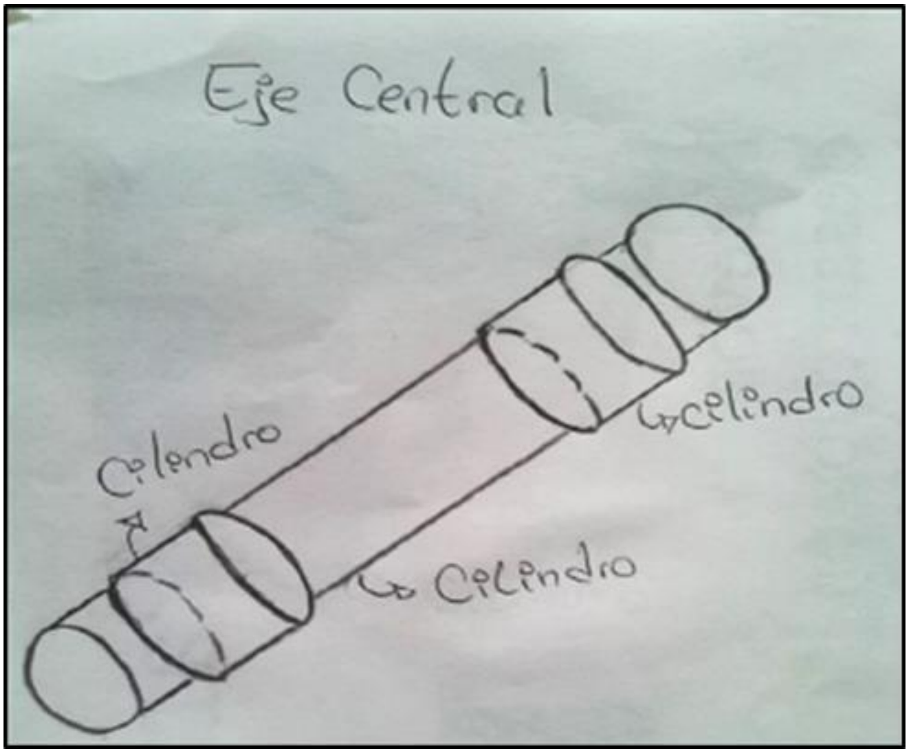
Figura 4. Modelo real do eixo central



Fonte: Cueva e Isea (2017, p. 120)

Nesse sentido, o conjunto de objetos geométricos que são reconhecidos pelos alunos dá lugar a um modelo geral de natureza matemática, que pode ser assumido como o reflexo da teoria com a qual se decidiu "olhar" o modelo real da peça. Para ser representado. A matematização do modelo real culmina quando os alunos reconhecem esses objetos geométricos consideradas necessárias para representar a parte selecionada no GeoGebra e também empregam discursos através do qual manifestam um certo nível de consciência da presença desses objetos no modelo real. Como resultado do processo de a matematização, os alunos alcançam o terceiro momento da atividade com um modelo matemático estabelecido. Como já mencionado, este modelo é dado pelo conjunto de objetos geométricos que foram reconhecidos pelos estudantes e promotores para representar as formas e movimentos presentes na peça que foi decidida representar no software (ver Figura 5).

Figura 5. Exemplo de um modelo geométrico



Fonte: Cueva e Isea (2017, p. 120)

Como é possível notar, o modelo matemático e o modelo real correspondem ao mesmo desenho. A relação entre os dois é que o modelo matemático é o resultado de uma "tradução" do modelo real em termos matemáticos. Os alunos devem construir no GeoGebra cada um dos objetos geométricos que compõem seu modelo matemático. Isto dá origem a tarefas de construção, isto é, uma série de tarefas matemáticas cuja resolução é mediada pelo uso de software de geometria dinâmica.

Continuando com o exemplo que está sendo mostrado, as tarefas de construção que, neste caso, coincidem com:

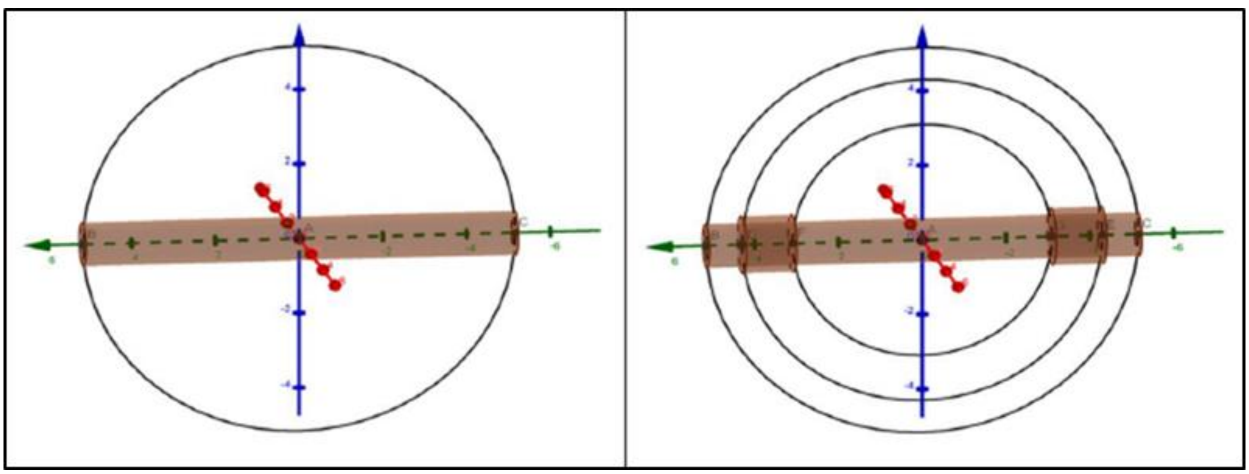
3. Construir três cilindros no GeoGebra

É importante esclarecer que o número de tarefas neste momento dependerá da quantidade e das formas dos objetos geométricos que devem ser construídos no GeoGebra. A resolução de cada uma dessas tarefas é mediada por um processo chamado trabalho matemático.

Neste processo, os alunos estabelecem determinados procedimentos de construção geométrica (que chamamos de técnicas) que são executados por meio das ferramentas de construção e medição do GeoGebra, bem como suas funcionalidades dinâmicas. Essas técnicas são geradas por estudantes e promotores (professores) a partir de uma análise geométrica que considera questões relacionadas à construção do objeto geométrico que você deseja fazer no software.

A validade de uma técnica está em correspondência com as habilidades dos alunos para estabelecer correspondências entre as propriedades espaciais do modelo real e as propriedades dos objetos geométricos que compõem o modelo matemático. O produto obtido após o uso efetivo de uma determinada técnica é um desenho dinâmico representativo do objeto geométrico que foi decidido a ser construído no GeoGebra. Este desenho dinâmico dá lugar ao quarto momento da atividade da ESG chamada modelo computacional, neste momento os alunos conseguem o modelo computacional corresponde ao desenho dinâmico obtido após trabalhar matematicamente (ver Figura 6).

Figura 6. Modelo computacional obtido



Fonte: Cueva e Isea (2017, p. 121)

Para completar o quarto momento, é necessário que os alunos realizem um processo de interpretação em que buscam reconhecer o grau de fidelidade do modelo computacional obtido em relação ao funcionamento do fenômeno que é representado no GeoGebra. Em geral, esse processo é realizado comparando o modelo computacional obtido e os referentes gráficos do fenômeno real (imagens animadas, vídeos, entre outros). Caso o processo de interpretação seja positivo, os alunos retomam a sequência de tarefas de simulação.

A comunicação da técnica como trabalho conjunto

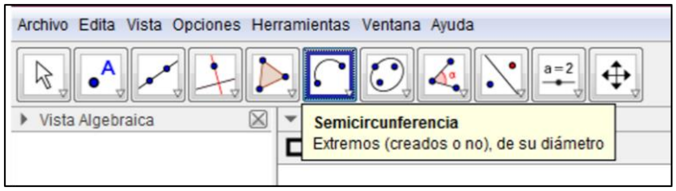
Durante as atividades da ESG, a consciência do conhecimento geométrico escolar pode acontecer nos processos de matematização e trabalho matemático descritos anteriormente. Durante o processo de trabalho matemático, os alunos e professores produzem desenhos dinâmicos que modelam as qualidades de forma, dimensão e movimento presentes nos objetos de geometria que eles mesmos identificam e que, por sua vez, são modelos de objetos da realidade (GUTIÉRREZ; PRIETO; ORTIZ, 2017). Lembrando que por desenho dinâmico na ESG nos referimos ao desenho criado com o GeoGebra que mantem as propriedades espaciais que explicam as propriedades geométricas declaradas em sua construção (ACOSTA, 2010; LABORDE, 1997).

Esse modo de construir o desenho dinâmico torna-se "uma instanciação concreta da figura como um conceito geométrico" (SÁENZ-LUDLOW; ATHANASOPOULOU, 2012). Durante a produção de um desenho dinâmico, dois elementos práticos do trabalho realizado estão envolvidos: a tarefa de construção e sua técnica correspondente (SÁNCHEZ; PRIETO, 2017). Nesse sentido, por um lado, entendemos a tarefa de construção é como aquele problema matemático (declarado ou não) que os alunos enfrentam durante o desenvolvimento do simulador com o GeoGebra. Por outro lado, consideramos que a técnica de construção associada a esta construção se refere ao procedimento utilizado pelos alunos para produzir o desenho dinâmico que responde à tarefa de construção.

Assim como o desenho dinâmico está relacionado ao objeto geométrico que ele tenta modelar, a técnica de construção de um desenho dinâmico pode ser entendida como a instanciação concreta de um modo culturalmente codificado de pensar um objeto geométrico (modelado pelo desenho) criado com o GeoGebra. Neste sentido, o GeoGebra desempenha um papel fundamental, pois, sendo um artefato cultural, fornece ao usuário uma série de conteúdos conceituais na forma de construção, medição e outras opções, bem como o espaço de trabalho conjunto conceitualmente estruturado para o usuário experimentar as categorias conceituais e produzir novas formas de construir os desenhos dinâmicos (RADFORD, 2014b).

Para exemplificar a carga conceitual que as ferramentas do GeoGebra têm, teremos a seguinte atividade. Imaginemos que se quer desenhar uma Semicircunferência na janela de visualização do GeoGebra, a ferramenta Semicircunferência sugere ao usuário uma forma de construção deste objeto geométrico cuja demanda envolve informar o software quais são as extremidades (criadas ou não) do seu diâmetro (ver Figura 7).

Figura 7. Ferramenta semicircunferência



Fonte: Elaborada pela autora (2019)

Portanto, a ferramenta Semicircunferência é portadora de um conteúdo conceitual particular (uma forma de entender a semicircunferência de sua construção) com a qual é possível materializar uma forma de construção semicircular que se espera que seja aprendida pelos alunos. Nesse sentido, assumimos que o uso deliberado de ferramentas de construção do GeoGebra pode afetar o significado dos conteúdos conceituais que esses recursos carregam "sugerindo linhas potenciais de desenvolvimento cognitivo e social" (RADFORD, 2014a, p. 414).

Com base na minha experiência na ESG com os alunos, considero necessário especificar que o fato de uma técnica de construção reproduzir um desenho com a consistência geométrica esperada não garante que os alunos reconheçam o desenho como um significante de um objeto geométrico. De fato, os estudantes muitas vezes têm dificuldade em entender os passos da técnica em termos das relações entre o desenho construído e seu referencial teórico (PRIETO; ORTIZ, 2019). A esse respeito, Laborde (1997) nos diz que “o reconhecimento visual das propriedades espaciais associadas às propriedades geométricas não é espontâneo e deve ser objeto de aprendizagem” (p. 46).

O anterior explica o fato de que os alunos em situação de elaboração de simuladores com GeoGebra que empregam técnicas consistentes nem sempre são capazes de dar uma explicação plausível de seus procedimentos construtivos, revelando as dificuldades que têm para vincular as ações com o conhecimento geométrico incorporado no uso das ferramentas utilizadas. Para que o conhecimento geométrico subjacente ao uso do GeoGebra seja revelado à consciência, é necessário que os conteúdos conceituais embutidos nas ferramentas apareçam durante a reflexão conjunta sobre a técnica de construção associada.

A este respeito, a comunicação de uma técnica de construção é um trabalho típico do ESG através do qual professores e alunos expressam uma variedade de conhecimentos geométricos que não são apenas baseados em discursos clássicos baseados em percepção visual ou teoria geométrica (LABORDE, 1997), mas também incluem outras formas de reflexão e expressão específicas para a atividade humana (RADFORD, 2006, p. 101). Consideramos que este posicionamento teórico fornece os insumos necessários para o estudo da aprendizagem geométrica em experiências ESG, a partir de uma caracterização dos processos de objetivação em torno do conhecimento geométrico que se revela aos indivíduos em um momento-chave da atividade.

A TO em teses e dissertações: O que dizem? De que tratam?

Para esta pesquisa, foi realizada uma revisão da literatura com o objetivo de apresentar um panorama geral das pesquisas cujo tema central foram os processos de objetivação e os meios semióticos de objetivação para seu estudo. De forma que esses trabalhos possam dar contribuições para o presente estudado no que se refere à análise e resultados desta pesquisa. A decisão de considerar esses dois tópicos para tal revisão vem das ideias de Radford, que, para dar conta dos processos de objetivação e subjetivação e, portanto, da aprendizagem, é necessário levar em consideração o material, o corporal e o intelectual que os sujeitos usam quando participam da atividade. Esses meios são chamados por Radford (2008a), meios semióticos de objetivação, entendidos como os recursos através dos quais os sujeitos organizam suas ações na atividade, com o objetivo de tornar presentes suas intenções e adquirir formas estáveis de consciência. Formas constituídas cultural e historicamente, uma vez que a atividade reflexiva das gerações passadas é consignada através dos meios semióticos de objetivação. Dada a importância dos meios semióticos de objetivação para dar conta da aprendizagem, destaca-se nos resultados desta pesquisa o papel desempenhado por tais meios durante o processo de objetivação do conhecimento matemático.

Entre os trabalhos que abordaram esse interesse e que são norteados pela Teoria Cultural da Objetivação no contexto nacional, está a tese de Gómez (2013), onde ele identifica, descreve e analisa os meios semióticos de objetivação mobilizados por estudantes de décima série do ensino médio e os processos de objetivação que eles desenvolvem quando confrontados com tarefas de generalização de padrões de sequências figurativas e numéricas. A partir da análise das produções do grupo focal com o qual a pesquisa foi realizada e dos resultados obtidos, evidencia-se como o estudo da semiótica e dos processos de objetivação desenvolvidos pelos alunos permite uma maior compreensão do desenvolvimento do pensamento algébrico. Além disso, destaca-se a importância desse tipo de pesquisa na conscientização de como os meios semióticos mobilizados pelos alunos podem ser relevantes no aprendizado da matemática.

Por outro lado, a dissertação de Cisneros (2014), estudou a objetivação do número racional a partir do processo de mediação, onde magnitudes contínuas e discretas são incluídas nas atividades de geração do significado do número racional como razão. O processo de objetivação do número racional realizado pelos alunos teve origem em cada uma das ações mediadas por artefatos e ações que permitiram aos alunos dar sentido ao número racional. Em seus resultados, Cisneros enfatiza que um dos meios mais utilizados por esses foram gestos e linguística.

No caso da dissertação de Gustin (2017), questiona-se os meios semióticos de objetivação que surgem nos alunos da sétima série e quais processos de objetivação eles desenvolvem quando enfrentam tarefas de generalização de padrões. Sua pesquisa aponta que, durante o desenvolvimento de cada tarefa, o uso e a combinação de vários recursos, como sinais e dispositivos linguísticos, pelos estudantes através dos quais eles organizaram suas ações para tomar consciência das características comuns dos termos de as sequências apresentadas.

A tese de Vergel (2014), visa estudar as formas de pensamento algébrico precoce que emergem nos alunos da quarta e quinta série do ensino fundamental (9 a 10 anos), como resultado de sua participação na atividade matemática da sala de aula, especificamente em tarefas de generalização de padrões. A partir da coleta de informações e análises multimodais, ficou evidente que as formas primitivas de pensamento algébrico e contextual emergiram como possibilidades que os alunos materializaram e concretizaram na atividade.

Em termos gerais, esta pesquisa fornece conhecimentos relacionados ao ensino e aprendizagem de álgebra escolar, mais especificamente às estratégias utilizadas pelos alunos na resolução de tarefas de generalização de padrões e à caracterização do desenvolvimento do pensamento algébrico em estudantes dessas idades. Além disso, esta pesquisa contribui para a reflexão sobre a concepção de que a aprendizagem dos alunos se deve unicamente ao memorial, mecânico, descontextualizado, estático (Vergel, 2014). Assim, deve-se notar que nas manifestações de aprendizagem dos alunos (recursos semióticos) emergem a corporalidade de ações, gestos e o uso de signos e artefatos. Manifestações subjacentes ao significado que os alunos estão desenvolvendo em suas atividades matemáticas e que lhes permitem objetivar o conhecimento colocado em jogo.

Por outro lado, destaca-se a Dissertação de Villanueva (2012), cujo objetivo geral é identificar, descrever e analisar os meios semióticos emergentes de objetivação em alunos da primeira série, quando enfrentam tarefas em sequências figurativas. Dessa forma, através da análise multimodal das produções dos alunos, a identificação e evolução dos meios semióticos de objetivação utilizados, o potencial e as vantagens que estes apresentam no processo de objetivação do conhecimento sem a necessidade de ir para o puramente comportamental. Além disso, com base nos resultados, reconhece a importância de gerar pesquisas em pensamentos que não sejam algébricos, para observar e analisar o potencial de meios semióticos (artefatos, gestos, palavras, símbolos) no processo de objetivação do conhecimento.

Até o momento, as produções que tem relação com a teoria da objetivação que encontramos têm como participantes da investigação a estudantes do ensino médio. Nesse contexto de pesquisa, não há relato sobre os processos de objetivação e os meios semióticos de objetivação em futures professores de matemática. Um diferenciar que esta pesquisa trouxe e comparação com as levantadas anteriormente.

CAPITULO III

MARCO METODOLÓGICO

Nesta secção, dedica-se a explicar o próprio quadro metodológico a partir do qual o trabalho de investigação é abordado. Adotou-se a metodologia de pesquisa qualitativa, considerando a investigação como um de estudo de caso é uma análise multisemiótico dos dados que onde foi evidenciado os processos de objetivação do conhecimento geométrico. Segundo Bogdan e Biklen (2007), a pesquisa qualitativa tem as seguintes características: (i) o ambiente natural é a fonte direta dos dados, (ii) os resultados têm um forte componente descritivo, (iii) os pesquisadores qualitativos estão mais preocupados com processos do que com produtos, (iv) a análise de dados é usualmente feita de forma indutiva, e (v) o significado é de importância vital nessa abordagem. A presente investigação é realizada em um contexto sociocultural específico, no qual são considerados as características acima e os modos e meios semióticos de objetivação utilizados pelos alunos na resolução de tarefas de construção com o GeoGebra.

Participantes e contexto

Os participantes desta pesquisa foram 18 futuros professores Licenciatura Integrada de Ciências, Matemática e Linguagens para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI), que participaram da disciplina Tendências de pesquisa em Educação em Ciências, Matemática e Linguagens I do terceiro período. Em algumas aulas dessa disciplina, os alunos participaram na atividade chamada "Construção de desenhos dinâmicos com o GeoGebra" realizada nos meses de maio e junho do ano de 2019. Para manter o anonimato dos participantes da pesquisa, serão chamados com o acrônimo En, sendo n uma numeração para diferenciar as participação no discurso deles. Para os professores que gerenciaram a atividade foi designado a letra P.

As sessões de trabalho da oficina foram dirigidas pela pesquisadora que solicitou a colaboração do professor da disciplina para fazer a oficina com seus alunos. Como pesquisadora, tinha a responsabilidade de projetar e implementar as *tarefas de simulação*, bem como coletar informações relacionadas às produções matemáticas dos alunos para análise posterior.

No início, foram planejadas 6 reuniões com os alunos; no entanto, devido ao tempo que o professor responsável pela disciplina organizou para a oficina, foram realizadas apenas três reuniões. Durante essas reuniões da oficina, foram realizadas 4 atividades.

Sessão da oficina 1: Apresentação dos momentos da atividade e Introdução ao uso do software GeoGebra

A primeira sessão com os participantes, teve como objetivo familiarizar aos sujeitos com a atividade de simuladores com GeoGebra. Portanto, s sessão foco em apresentar os processos matemáticos associados à resolução da simulação, isto é, explicar cada momento pelo qual os participantes transitar para elaborar o simulador com GeoGebra. Os momentos que foram explicados na terceira seção deste trabalho (Figura 8)

Figura 8. Momentos no desenvolvimento de simuladores com GeoGebra

Fonte: Gutierrez (2017)

Em seguida, foi feita uma primeira abordagem ao software GeoGebra, onde foram anunciados os pontos mais importantes, quem foi o criador, a comunidade que o acompanha e os materiais disponíveis para uso nas salas de aula. A seguir, foram apresentadas aos alunos a interface do GeoGebra, as áreas que o compõem e as caixas de ferramentas de construção que o software pode disponibilizar aos usuários. (Ver figura 9).

Figura 9. A caixa de ferramentas e aplicativos do GeoGebra

Fonte: Elaborada pela autora (2020)

Dentro de cada caixa de ferramentas há uma série de ferramentas relacionadas a alguns objetos geométricos, como linhas retas, segmentos, polígonos, circunferências, entre outros. Na área central e mais ampla que o software possui, as visões onde as construções feitas com as ferramentas serão localizadas, o GeoGebra tem pré-determinadas visualizações algébricas e gráficas uma vez iniciado.

Os aplicativos estão localizados no lado direito do GeoGebra. Nele estão localizadas as visões que o GeoGebra possui, variando de geometria, CAS, a estatística e probabilidade. Mais abaixo na parte inferior é o campo de entrada onde você pode colocar estruturas algébricas e alguns comandos oferecidos pelo GeoGebra para construir algum objeto geométrico.

Após a apresentação, foram designadas 10 tarefas de construção geométricas elementares no ambiente no GeoGebra, objetivando uma maior familiarização no uso da ferramenta de geometria dinâmica, bem como na preparação dos alunos para lidar com os objetos geométricos provenientes da simulação com o motor de dois tempos.

Tabela 1. Tarefas de construção da oficina

Tarefas de construção	
Nº	**Descrição da tarefa**
1	Construa um triângulo cujos lados medem $6, 8$ e 12.
2	Um lado de um triângulo mede 6 e a altura correspondente a este lado mede 5. Construa o triângulo.
3	Construa um triângulo isósceles cuja base mede 7 e a altura correspondente às medidas de base 4.
4	Defina dois pontos A e B na visualização gráfica do GeoGebra. Desenhe o segmento $(\overline{AB})$ e meça seu comprimento.
5	Construa um segmento de comprimento de 5 cm que esteja contido em qualquer linha reta. Verifique se sua construção é válida arrastando.
6	Construa a mediatriz de um segmento $(\overline{AB})$ usando as ferramentas do programa GeoGebra.
7	Construa uma linha $(\overleftrightarrow{AB})$ e, em seguida, determine um ponto C que não pertença à linha. Em seguida, desenhe uma linha paralela à linha $(\overleftrightarrow{AB})$ que passei por C.
8	Construa um retângulo cujas diagonais medem 6 cm e um lado 3 cm.
9	As diagonais de um losango medem 7 cm e 2 cm, constroem o losango a partir delas.
10	Desenhe um quadrado cujos lados medem 5 cm.

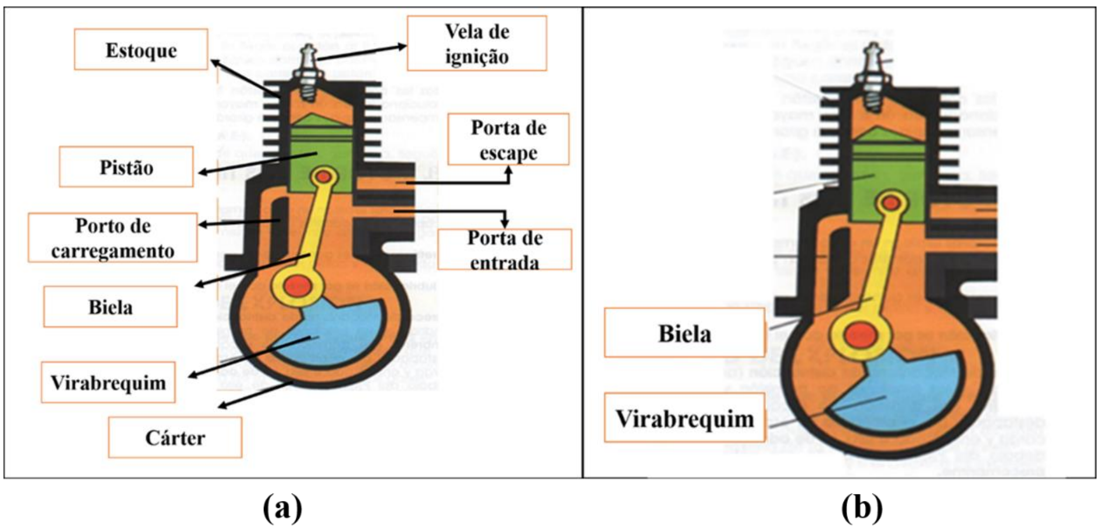
Fonte: Elaborada pela autora (2020)

Sessão da oficina 2 e 3: Resolução da primeira tarefa de simulação

A segunda e terceira sessão de trabalho estavam diretamente relacionadas ao desenvolvimento de simuladores com o GeoGebra. Por razões de tempo, o fenômeno foi selecionado pela pesquisadora, o qual foi um motor de dois tempos (Figura 10a).

Para sua simulação no GeoGebra foi necessário que os partiicipantes soubessem que o motor de 2 tempos é um motor de combustão interna com um ciclo de quatro fases de admissão, compressão, combustão e escape, como as 4 vezes, mas todas realizadas em apenas 2 vezes, isto é, em dois movimentos do pistão.

Figura 10. Motor de dois tempos



Fonte: Adaptado pela autora a partir http://images.slideplayer.es/8/2261628/slides/slide_4.jpg

Depois de todas as informações sobre o fenômeno, os participantes simularam a manivela na janela de visualização do GeoGebra (veja imagem 10b). No total, 18 estudantes de graduação e três outros professores participaram. Um desses professores é o autor deste trabalho.

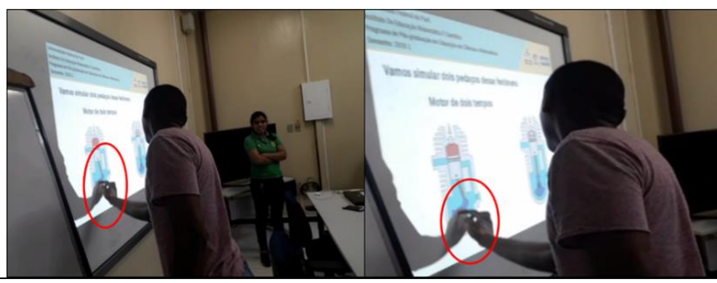
Levantamento das informações

Os dados do estudo vêm da discussão gerada pelos participantes sobre a construção do virabrequim no GeoGebra. Esta discussão foi gravada com uma câmera de vídeo, com o objetivo de captar a realidade natural e complexa do trabalho conjunto realizado pelos participantes, ao passar pelo "trabalho matemático" descrito nas seções anteriores. No vídeo, se pode ver os recursos semióticos que os participantes usam para comunicar suas ideias. O vídeo foi transcrito “na íntegra” em um processador de texto, utilizando um instrumento semelhante ao apresentado na Tabela 1. Também foram considerados como dados de pesquisa as escritas e desenhos feitos por alunos e professores no quadro e em seus cadernos, além do desenho dinâmico gerado no

GeoGebra ao salvar as construções realizadas. A tabela a seguir mostra um exemplo de como foram transcritos os vídeos gravados das sessões de trabalho.

Tabela 2. Instrumento para a transcrição de episódios

<table>
<tr><td colspan="3">Momento No.: 1.1
Título: Identificação da primeira parte que possui movimento na imagem de referência do motor a dois tempos
Número do vídeo: 1
Duração da linha: (00: 00) - (1:00)
Linhas: (1-8)</td></tr>
<tr><th>No. Line</th><th>Conteúdo da transcrição</th><th>Comentários interpretativos</th></tr>
<tr><td>1</td><td>Professor 1: quantas peças [quem tem movimento] vocês reconhecem ali [no quadro]? Comparando as duas imagens [mostrado no quadro].</td><td rowspan="8">Neste primeiro momento, há uma discussão para reconhecer na imagem de referência quantas peças têm movimento</td></tr>
<tr><td>2</td><td>E1: o pistão.</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Professor 1: Qual seria o pistão? Poderia acontecer e sinalizar para seus companheiros de equipe reconhecê-lo.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>E1: para mim seria essa parte daqui [move a mão para cima e para baixo verticalmente (veja a Figura 31)].
</td></tr>
<tr><td>5</td><td>Professor 1: é este aqui [aponta para uma parte do quadro].</td></tr>
<tr><td>6</td><td>E1: isso.</td></tr>
<tr><td>7</td><td>Professor 2: esse é o pistão.</td></tr>
<tr><td>8</td><td>E1: para o meu sério ou pistão.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Momento No.: 1.2
Número do vídeo: 1
Título: Discussão sobre a observação apenas das peças que possuem movimento
Hora: (01: 00) - (04:20)
Duração da linha: (9-36)</td></tr>
<tr><td>9</td><td>Professor 1: está bom, esse é um. Então já temos o pistom. Agora só tenho o pistom? Não tem outro?... Não importa se você não sabe o nome, apenas olhando para a imagem.</td><td rowspan="2">No momento da discussão, os alunos mencionam algumas peças que não têm movimento. Portanto, a intervenção dos</td></tr>
<tr><td>10</td><td>Professor 2: reconhecer outra parte.</td></tr>
</table>

11	E2: aquela amarela.	professores é conveniente porque conscientiza os alunos da importância de reconhecer primeiro as peças que possuem movimento, pois serão as primeiras a serem simuladas no GeoGebra.
12	Professor 2: qual?	
13	Professor 1: a manivela.	
14	Professor 2: essa [aponta para uma parte da imagem amarela].	
15	E2: isso.	
16	Professor 2: essa e outra peça. Mas tenho que fazer a diferença, essa peça tem movimento?	
17	E2: não.	
18	Professor 2: aí, primeiramente a gente tem que ficar atenção nas partes que tem movimento. Ai o E1 falou que esse que está aqui [colorido] cinza é o pistão. Tem outras peças que tem movimento?	
19	Professor 1: você dá a cor da peça, aquelas que têm movimento.	
20	E2: a [de cor] verde.	
21	Professor 1: ok, esse é outra peça, já temos duas peças que tem movimento.	
22	E2: aquela peça que está aqui [aponta para uma peça azul. 	
23	Professor 2: essa de cor azul?	
24	E2: sim.	
25	Professor 2: sim, ela tem movimento.	
26	Professor 1: ok, já temos três peças que tem movimento.	
27	Professor 2: tem outras?	
28	E3: tem outra lá encima.	
29	Professor 3: mas essa não tem movimento, tem que ter [movimento].	
30	Professor 2: a principal coisa a reconhecer [as peças] nesse fenômeno são [as peças] que têm movimento.	
31	Professor 1: aquelas [peças que não têm movimento] também fazem parte [da simulação]. No entanto, devemos primeiro olhar para aqueles que têm movimento porque são os primeiros a serem construídos.	
32	E4: têm outro que se parece com uma caixa.	

33	Professor 2: Então tem quatro peças que tem movimento.	
34	Professor 1: No GeoGebra essas quatro peças são as primeiras que devemos simular [construir]. Então, isso significa que, se tivermos quatro peças, significa que temos quatro tarefas de simulação. Uma tarefa para a virabrequim, outra para vieiras, outra para o pistão e outra para a válvula de admissão.	
35	Professor 2: cada tarefa [simulação] está relacionada a uma peça [que possui movimento]. Isso está claro? Devemos fazer uma tarefa [de simulação] para cada peça. Porque não podemos começar a fazer tudo ao mesmo tempo.	
36	Professor 2: cada tarefa [simulação] está relacionada a uma peça [que possui movimento]. Isso está claro? Devemos fazer uma tarefa [de simulação] para cada peça. Porque não podemos começar a fazer tudo ao mesmo tempo.	

Análise das informações

A análise das informações foi realizada em etapas. Na etapa 1, fizemos uma primeira leitura das transcrições com o objetivo de identificar, discutir e descrever o processo de construção do setor circular e a técnica de construção empregada por alunos e professores (Tabela 2). O objetivo desta etapa foi reconhecer as particularidades do trabalho geométrico realizado durante todo o processo de construção da referida figura com o software, especialmente o conteúdo geométrico que foi mobilizado nessa construção e sua relação com a técnica utilizada. Esta técnica de construção (Tabela 3) consiste em etapas e ações. Enquanto as etapas da técnica marcam a progressão das operações para a obtenção do desenho esperado (de acordo com os requisitos de uso da ferramenta selecionada pelos participantes), as ações incluem os atos específicos realizados por alunos e professores com o software para concluir cada passo.

Tabela 3. Técnica de construção do setor circular

Tarefa de construção: Construir um setor circular a partir de um ponto externo (ponto A)

Ferramenta utilizada: Setor Circular

Definição da ferramenta: Selecione o centro e, depois, dois pontos.

Paso 1: Determinar as extremidades do setor circular

1.1 Foi criado uma linha $\boldsymbol{f}$ foi traçada paralela ao $\boldsymbol{eixoY}$ no ponto $\boldsymbol{A}$.

1.2 Foi criado um controle deslizante do número do tipo, com valores mínimo e máximo de $\mathbf{1}$ e $\mathbf{5}$, respectivamente, e um aumento de $\mathbf{0.01}$. Esse controle deslizante foi chamado padrão.

1.3 Foi criado um controle deslizante de ângulo $\boldsymbol{\alpha}$, com valores mínimo e máximo de $\mathbf{0}°$ e $\mathbf{360}°$, respectivamente, e um aumento de $\mathbf{1}°$.

1.4 A linha $\boldsymbol{f}$ foi girada em relação ao ponto $\boldsymbol{A}$ um ângulo $\boldsymbol{\alpha}$ e no sentido horário, gerando a linha $\boldsymbol{f}'$.

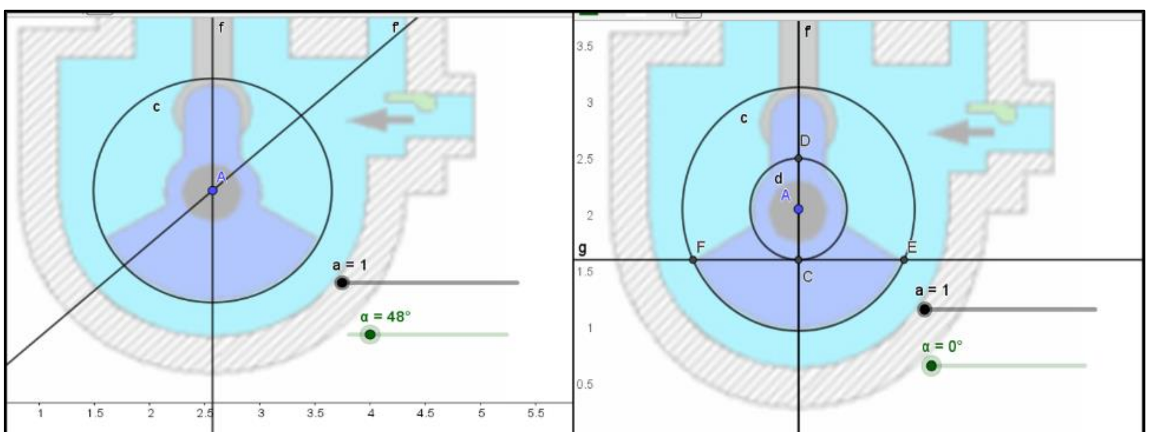
1.5 Um círculo $\boldsymbol{c}$ com centro no ponto $\boldsymbol{A}$ e raio igual a $\mathbf{1,08} * \boldsymbol{padr}$ã$\boldsymbol{o}$ foi desenhado**.**

1.6 Um círculo $\boldsymbol{d}$ com centro no ponto $\boldsymbol{A}$ e raio igual a $\mathbf{0,45} * \boldsymbol{padr}$ã$\boldsymbol{o}$ foi desenhado.

1.7 A linha $\boldsymbol{f}'$foi interceptada com o círculo $\boldsymbol{d}$, gerando os pontos $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$.

1.8 Uma linha g foi desenhada, perpendicular à linha f ', que passará pelo ponto C.

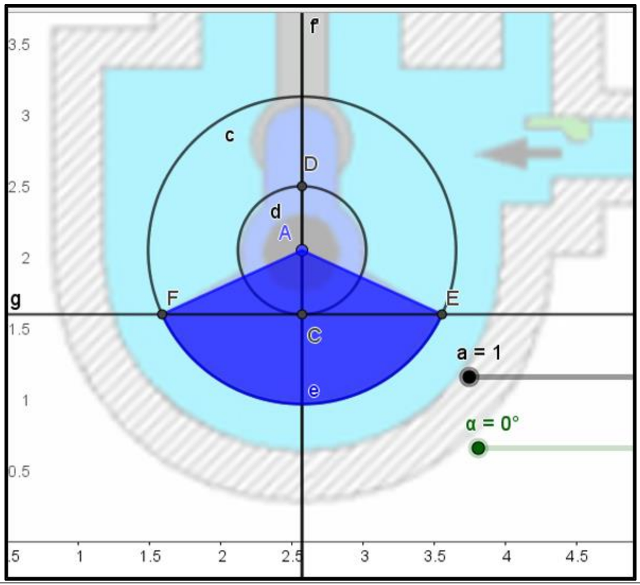
1.9 A linha $\boldsymbol{g}$ foi interceptada com o círculo $\boldsymbol{c}$, gerando os pontos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{F}$.



(a) (b)

Paso 2: Aplique a ferramenta setor circular

2.1 Se O setor circular e do centro A e as extremidades E e F foi desenhado.



Na segunda etapa, se fez um transito pelas transcrições para detectar fragmentos da discussão dos participantes que pareciam mostrar evidências da consciência de algum objeto geométrico subjacente na comunicação da técnica. Cada fragmento é um segmento proeminente (RADFORD, 2015, p. 561) que reflete um momento particular na explicação da técnica instanciada. Para identificar os segmentos, focamos a atenção nas mudanças de foco ao longo da discussão, considerando as etapas e ações da técnica. Na terceira etapa, realizamos uma análise multisemiótico (RADFORD, 2015, SABENA, ROBUTTI, FERRARA E ARZARELLO, 2012), a fim de identificar nos segmentos a variedade de significados e meios semióticos desempenhados pelos participantes durante o trabalho de comunicação

Assumindo que a cognição tem uma natureza multimodal (ARZARELLO, 2006; RADFORD, EDWARDS E ARZARELLO, 2009), focamos na maneira como os participantes combinaram diferentes signos e artefatos para tentar tornar aparente a conceptualização de quais as ferramentas do GeoGebra são usadas. Chamamos o nó semiótico a cada forma em que os participantes combinaram diferentes meios semióticos para alcançar um estado mais ou menos estável de consciência sobre algum objeto geométrico subjacente à comunicação da técnica.

Radford (2003, p. 56) define os nós semióticos como "pedaços da atividade semiótica do aluno, onde ação, gestos e palavras trabalham juntos para alcançar a objetivação do conhecimento".

A observação dos nós semióticos nos segmentos implicou em um retorno aos vídeos, a fim de identificar outros meios semióticos utilizados, além da linguagem oral. Com isso, podemos enriquecer as transcrições, incorporando imagens que refletem a variedade de signos e artefatos que foram integrados ao discurso oral dos participantes. Esse tipo de análise permitiu reconhecer tanto os significados geométricos emergentes quanto sua evolução ao longo do trabalho conjunto. Essas questões são o que molda os resultados da investigação.

De acordo com a perspectiva da Teoria Cultural da Objetivação (RADFORD, 2006, 2013), a análise dos dados é baseada em uma concepção multimodal do pensamento humano (ARZARELLO, 2006). Essa concepção multimodal do pensamento humano afirma que a análise dos dados deve levar em consideração a relação entre os diferentes sistemas semióticos mobilizados pelos estudantes no curso da atividade (o sistema semiótico da linguagem escrita, a linguagem falada, a de gestos, ações, etc.). É por esse motivo que nem a escrita, nem a fala, nem a gestão dos alunos são analisadas isoladamente, pelo contrário, essas formas de reflexão, expressão e ação são estudadas como partes constitutivas dos processos de objetivação. Neste sentido no seguinte capitulo se descrevem e detalham os resultados da pesquisa sob a luz do referencial teórico descrito.

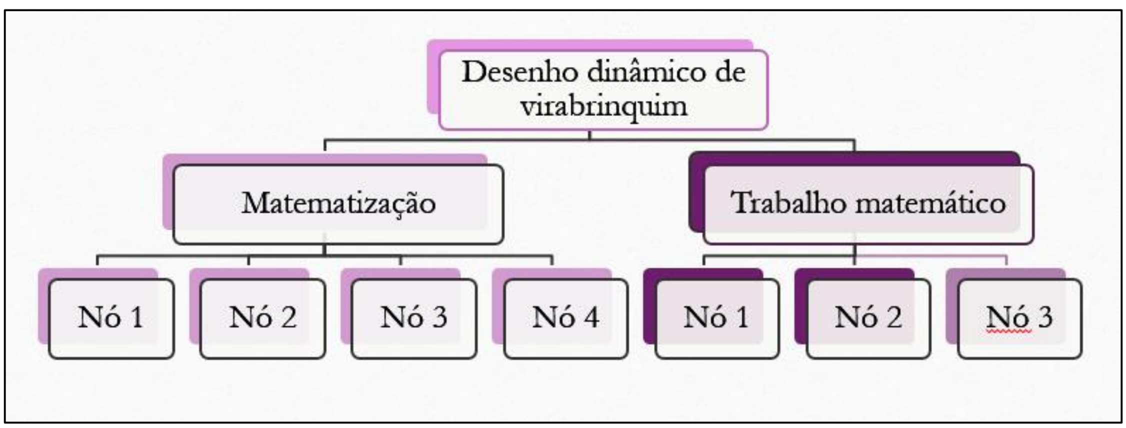
CAPITULO IV

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo apresenta os resultados obtidos a partir da análise multisemiótico realizada nos dados da pesquisa para descrever a aprendizagem geométrico que surge durante a simulação de um motor a dois tempos com o GeoGebra, especificamente a representação do virabrequim no software. Para tal descrição, era essencial considerar os meios semióticos de objetivação (fala, linguagem corporal, gestos, desenhos, etc.) usado por estudantes de uma turma da licenciatura em Ciências, Matemática e Idiomas integrado para comunicar suas ideias geométricas.

Os resultados serão estruturados pelas duas atividades principais que os alunos realizaram, matemática e trabalho matemático. Em cada uma dessas subseções, foram detalhados os nós semióticos que surgiram na discussão de alunos e professores, esses nós estão agrupados em torno das ideias geométricas que surgiram na discussão. No total, 4 nós semióticos foram reconhecidos durante a matematização e 3 nós semióticos durante o trabalho matemático (ver figura 11)

Figura 11. Diagrama da análise realizada



Fonte: Elaboração própria (2020)

Matematização

Esta primeira atividade do desenvolvimento de simuladores com o GeoGebra identificou-se quatro nó semióticos que respondem por diferentes objetos geométricos que surgiram durante o trabalho conjunto.

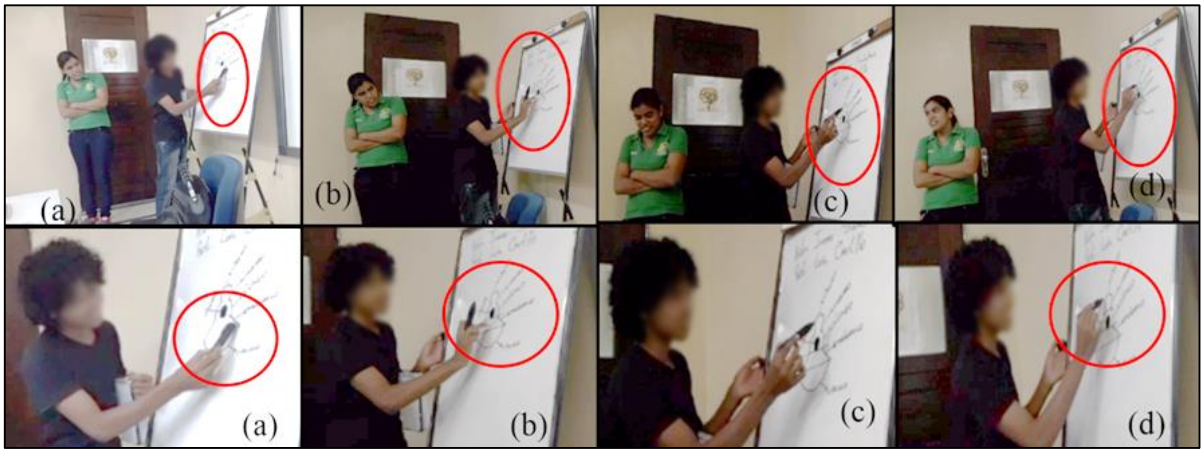
Nó 1. A ideia de setor circular

Esse primeiro nó é dividido em duas partes; em uma primeira parte do nó, foi feita uma discussão depois que os participantes identificaram os objetos geométricos no desenho do virabrequim, sobre esses objetos identificados e sua ordem de construção no GeoGebra. A discussão é única quando o Professor 1 pede a E7 que explique aos colegas quais são os objetos geométricos que ele identificou no desenho.

E7 usa seu discurso oral de maneira coordenada com os gestos, apontando que, na parte inferior do esboço, ele reconheceu que poderia representá-lo com seu círculo e depois no topo desse triângulo. Seu discurso é interrompido por E3, indicando verbalmente que a parte que E7 indicou para representá-lo, pois E3 é um trapézio. No entanto, o E7 escolhe a palavra para continuar sua explicação, comunicando que o que resta do esboço pode ser representado como um retângulo e um círculo.

61	*Porfessor1:* aponte cada objeto geométrico que você reconheceu no desenho.
62	Daqui para baixo [indica uma parte específica do desenho (Figura 12a)] é o círculo. Esta parte daqui [aponta para a parte do meio do desenho (Figura 12b)] é o triângulo.
63	É trapézio [refere-se ao objeto indicado acima].
64	Acima está o retângulo e o círculo (Figura 12c e 12d).

Figura 12. E7 explicando os objetos geométricos que identifico sobre o esboço



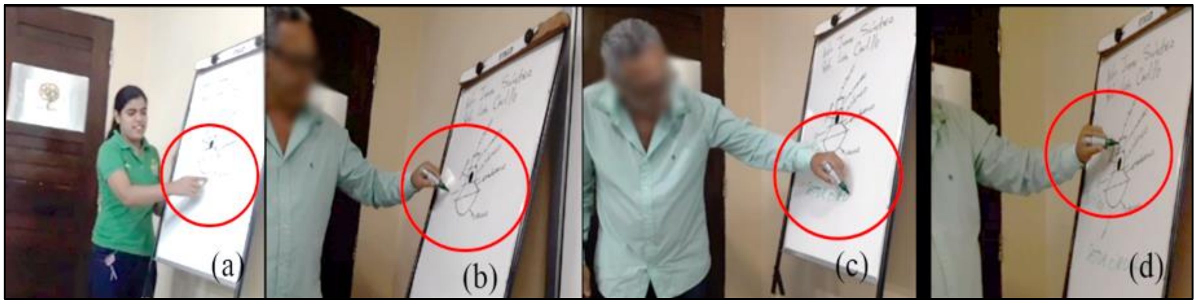
Fonte: elaborada pela autora (2020)

Para chegar a um acordo com os participantes da atividade sobre quais são os objetos que serão representados no GeoGebra, o Professor 1 inicia uma discussão com os alunos participantes sobre a parte inferior do desenho. O professor 1 coordena a palavra e os gestos de maneira coordenada para perguntar aos alunos se eles concordam em representar a parte inferior do desenho (aponte para o dedo indicador) como um círculo. Em resposta à pergunta E3, ele responde que, para ele, pode ser representado como um setor circular.

E3 se aproxima do quadro onde o deseho do virabrequim é desenhado e usa fala e gestos de maneira coordenada para indicar os objetos geométricos que ele reconheceu no esboço. Como existem algumas diferenças entre objetos geométricos, o Professor 1 propõe fazer uma discussão sobre os já identificados e chegar a um acordo para sua construção.

65	*Professor 1:* A seguir, discutiremos sobre os objetos geométricos que [Aluno 7] identificaram. Ele explicou que isso [aponta para o final do desenho (ver Figura 13a)] é um círculo, alguém concorda com ele?
66	Não, para mim é um setor circular.
67	Para você é um sector circular.
68	Na minha visão, vejo um setor circular, um trapézio, depois um círculo, se alguém fizer a projeção, um quadrado e um círculo lá encima [desenhe o círculo no desenho (ver Figura 13b, 13c e 13d)].
69	Agora vamos falar sobre as diferentes figuras geométricas que E3 e E7 identificaram sobre o desenho. Vamos começar com o triângulo, como está sua representação gráfica? Desenhe um triângulo [peça para E7 desenhá-lo].

Figura 13. E3 explicando os objetos geométricos que identifico sobre o esboço



Fonte: Elaborada pela autora (2020)

Na segunda parte deste nó, o trabalho conjunto é orientado a considerar o setor de ciclismo como a melhor opção para representar a parte inferior do desenho de virabrequim. Para fazer isso, o Professor 1 argumenta em seu discurso que, seria mais fácil usar o setor de ciclismo, pois teríamos que construir apenas um único objeto geométrico, enquanto que com os outros precisaríamos de mais de um.

O Professor 2 apoia a ideia do Professor 1 comentando sua participação de que, uma coisa importante na simulação é representar o fenômeno com o menor número possível de objetos geométricos. Essa reflexão ajuda os alunos a tomar consciência disso e decidir usar o setor circular para representar essa parte do virabrequim.

96	*Professor 1:* Agora, esta parte de baixo [aponta para uma parte do desenho], podemos construí-la [no GeoGebra] com um setor circular, portanto, apenas precisamos desenhar um único objeto geométrico e não dois para poder representar essa parte.
97	Queremos representar esta peça com a menor quantidade de objetos geométricos, por isso será um pouco mais fácil representá-la.
98	Em seguida, representaremos um setor circular, que seria um único objeto geométrico.
99	Então, todos concordamos em usar o setor circular para representar essa parte da peça?
100	Sim, nós concordamos

Nó 2. A ideia de círculo

O trabalho continua e a discussão para esse momento gira em torno da ideia de um círculo e da representação desse objeto geométrico em um plano de duas dimensões e três dimensões. O professor 1, por meio do discurso oral, reconhece que, devido à maneira como uma grande parte do esboço pode ser representada usando um círculo, é necessário que todos os alunos concordem com seus outros dois parceiros que já participaram.

Para fazer isso, o Professor 1 pergunta aos alunos se essa parte do esboço pode ser representada como um círculo, para que eles associem parte da forma do esboço à forma do círculo. No começo, todos pareciam concordar, no entanto, a participação do E3 deixa clara a dúvida que ele tem sobre a representação geométrica de dois objetos geométricos, referindo-se a que parte do esboço pode ser desenhada como uma esfera, porque está cheia e não com um circo.

Todos na sala compreendem a confusão que E3 apresenta naquele momento e é a participação de E2 que, através de seu discurso oral, faz com que E3 toma consciência que os objetos geométricos que estão sendo usados para representar a virabrequim estão no plano. E2 é mais específico, mesmo quando comunica que são necessários dois círculos para representar essa parte do virabrequim.

71	Professor 1: Se continuarmos subindo no desenho, o que se segue é um círculo [Figura 14a].
71	E4: sim
73	Professor1: Todos nós concordamos?
74	Todos: dá certo.
75	E3: na verdade, essa parte preta pode ser uma esfera porque está cheia [indicar com o dedo a forma da esfera no ar, Figura 14b]
76	E2: não, não é uma esfera porque estamos com figuras planas. É um círculo e um círculo.
77	E3: mmm, é verdade, você está certo
78	Professor 1. É verdade, então teremos que representar dois círculos. Se continuarmos com o desenho, o E3 disse que poderia ser representado com um quadrado. Se olharmos novamente para a imagem de referência, ela pode ser um quadrado ou um retângulo.

Figura 14. Discutir a representação do círculo como a melhor opção para representar uma parte do desenho

Fonte: Elaborada pela autora (2020)

Nó 3. A ideia do retângulo

Neste momento da discussão, o trabalho é direcionado ao reconhecimento do retângulo no esboço. Contudo, o desenho feito no quadro não foi muito útil para indicar qual figura geométrica usar, se o retângulo ou um quadrado, de modo que o professor 1 pergunta aos outros alunos qual deve ser o objeto que deve ser representado na figura. GeoGebra E5 responde imediatamente usando um discurso oral que, para ele, é um retângulo, pois, olhando a imagem de referência (e não o esboço feito), dois dos lados são mais longos que os outros dois.

A explicação de E5 parece ser suficiente para que seus pares tomem consciência dessa identificação de um dos elementos que define um retângulo e, portanto, é a figura que deve ser representada quando E8 participa da discussão que concorda com E5 sobre representa essa parte do esboço com um retângulo.

78	*Professor 1:* Se olharmos novamente para a imagem de referência, ela pode ser um quadrado ou um retângulo.
79	*E5:* Eu acho que é um retângulo e não um quadrado.
80	*Professo1:* Por que você acha que é um retângulo?
81	*E5:* O quadrado tem todos os seus lados iguais, enquanto o retângulo tem apenas os lados opostos. Se olharmos para a imagem de referência, existem dois lados um pouco mais longos que os outros dois, então é um retângulo.
82	*E6:* É verdade, apenas que o desenho não pode ser visto bem porque é muito pequeno, mas se vemos a imagem de referência, é um retângulo [o que temos que construir].
83	*Professor 1:* Então, ficamos com [construir] um retângulo.
84	*Todos:* sim.

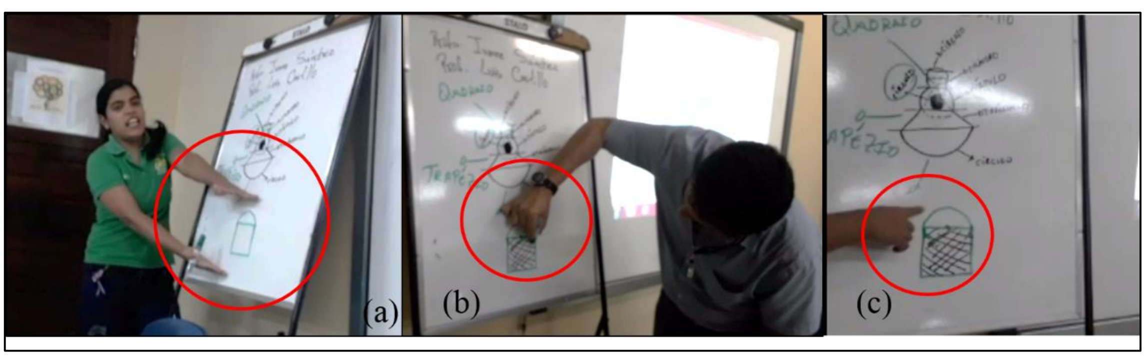
Nó 4. A ideia do semicírculo

Nesta última parte do trabalho conjunto, é direcionado o reconhecimento do semicírculo como a opção mais relevante para representar o topo do desenho. Isso, levando em consideração a forma curva do esboço na parte superior e a representação geométrica do semicírculo no plano. A discussão começa quando E2 comenta que ele observa que essa parte pode ser representada como um círculo e que está por trás da forma retangular que pode ser vista no desenho.

A dúvida por parte do professor 1 faz com que o aluno se levante e desenhe no quadro o círculo que está observando para representar essa parte do virabrequim. Ao observar o desenho feito pelo aluno, o Professor 1 concorda que ele pode ser representado como esse objeto geométrico. No entanto, ele pede aos alunos que observem apenas a parte que foi desenhada no desenho. O objetivo disso é que os alunos tenham consciência de que, se apenas a parte que foi desenhada for levada em consideração, ela poderá ser representada como um semicírculo, pois sua representação gráfica é muito semelhante. A reflexão feita pelo professor 1 ajuda os alunos a alcançar um certo grau de consciência e decidir construir um semicírculo.

85	*Professor 1:* Falta a última parte do desenho [Ele aponta o quadro-negro com as mãos, figura 15a].
86	*E2:* Eu vejo um círculo atrás do retângulo.
87	*Professor 1:* um círculo?
88	*E2:* se, eu vejo um círculo sobreposto aqui [E2 desenha o círculo acima do retângulo, figura 15b].
89	*Professor 1:* É verdade, mais, se olharmos para a parte que só é vista no desenho, podemos representá-la com um semicírculo [aponta o dedo indicador, Figura 15c], lebra-se?
90	*E3:* se.
91	*Professor 1:* Então podemos construir esta parte [aponta para uma parte do novo desenho] com um semicírculo e não com um círculo.
92	*E2:* É por isso que eu disse um círculo, porque se você sobrepuser [o retângulo sobre o círculo] a mesma figura será observada.
93	*Professor 1:* É verdade, mas a técnica de construção dos dois objetos não é a mesma. Existe uma diferença na técnica de construção entre um círculo e um semicírculo. Então, construímos um círculo ou um semicírculo?
94	*E3 y E8:* semicírculo.

Figura 15. Discutir a representação do semicírculo como a melhor opção para representar uma parte do desenho



Fonte: Elaborada pela autora (2020)

Trabalho matemático

A partir das atividades desenvolvidas no trabalho de matemática pelos alunos e professores, foram identificados três nós semióticos que dão conta da discussão em torno de um objeto geométrico a ser construído no setor circular. Poderíamos dizer que esses nós estão em correspondência com as etapas e ações da técnica de construção mostradas na seção de metodologia.

A objetivação de alunos e professores em tais objetos geométricos responde ao conceito da ferramenta na construção de um setor circular.

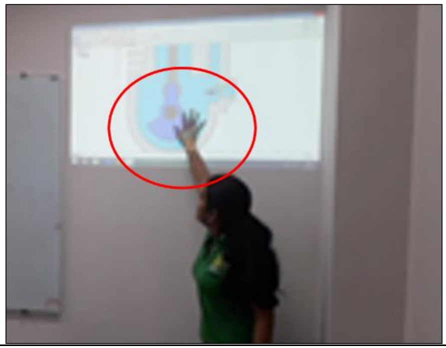
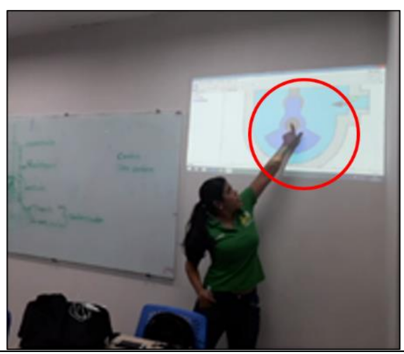
Nó 1. O centro do setor circular

O nó começa quando o Professor 1 inicia uma discussão sobre o primeiro elemento que deve ser construído no GeoGebra para iniciar a construção do setor circular. Isso lembra aos alunos que, para usar a ferramenta do setor circular, é necessário determinar o centro e suas extremidades. Para não esquecer esses requisitos, o Professor 1 confia na escrita quando, no quadro, escreve esses requisitos.

O professor 1 aponta com o dedo, onde eles devem colocar o primeiro ponto na visualização gráfica do GeoGebra. O Professor 2 decidiu intervir para apoiar a idéia do Professor 1 quando em seu discurso ele comunica que, como não há objeto geométrico construído, o mais simples começará, neste caso, o ponto e que será estrategicamente colocado onde for mais conveniente para eles para a construção.

O Professor 2 quer garantir que os alunos estejam cientes da localização do ponto que eles colocaram na visualização gráfica ao perguntar, de acordo com o que estão observando, que esse ponto pode ser considerado o centro do setor circular ou o final dele. A resposta da E3 mostra uma clara consciência desse ponto A desenhado e como esse seria o centro do setor circular.

99	*Professora 1:* Começaremos a construção do setor circular. Vamos começar essa construção a partir de um ponto, pois na [visualização gráfica do] GeoGebra não temos [objeto geométrico construído]. Localizaremos um primeiro ponto em que é melhor desenhar o setor circular no GeoGebra [aponta para a imagem de referência, Figura 16]. Figura 16. Indica com o dedo indicador onde uma das extremidades do setor circular deve estar localizada

	
100.	*Professora 1:* Lembre-se de que, para usar a ferramenta do setor circular, a ferramenta nos pergunta: O centro e dois pontos, que seriam os extremos do setor circular [liste no quadro os requisitos da ferramenta para usá-la]. Figura 17. Escreva no quadro os requisitos solicitados pela ferramenta do setor circular para usá-la 
101.	*Professora 1:* Então colocaremos o primeiro ponto aqui [aponta para a tela]. Figura 18. Ele aponta com a mão onde o centro do setor circular deve estar localizado 
102.	Professor 2: Ou seja, como não temos nenhum objeto geométrico localizado na visualização gráfica do GeoGebra, devemos começar com o objeto mais simples que é o ponto. Nós o construímos no local mais conveniente, neste caso, onde estão localizados o centro do setor circular e os círculos que vamos construir. Vamos ver, eu criei o ponto A apenas clicando na tela. Dependendo da localização que eles podem observar, como podemos tomá-lo, como um centro ou como um extremo?
103.	E3: como centro

Nó 2. A ideia de rotação

A discussão entre professores e participantes para esse momento gira em torno do reconhecimento de como o objeto matemático pode representar o movimento da peça do virabrequim. O professor 1, em uma primeira tentativa, para que os alunos se conscientizem desse objeto, confiam no marcador em suas mãos para simular o movimento que a peça está fazendo, ao mesmo tempo, solicita aos jovens que identifiquem que movimento estão simulando.

A resposta de alguns alunos parece correta, mas eles não têm o foco de atenção que o professor 1 procurava quando ele solicita que os alunos concentrem sua atenção na matemática; por isso, ele menciona as transformações no plano. O discurso, mas o movimento da mão pelo professor 1, faz com que E8 saiba que esse movimento pode ser representado através de uma rotação.

O professor 1 considera o aluno quando afirma que o movimento do setor circular pode ser representado no GeoGebra por meio de uma rotação.

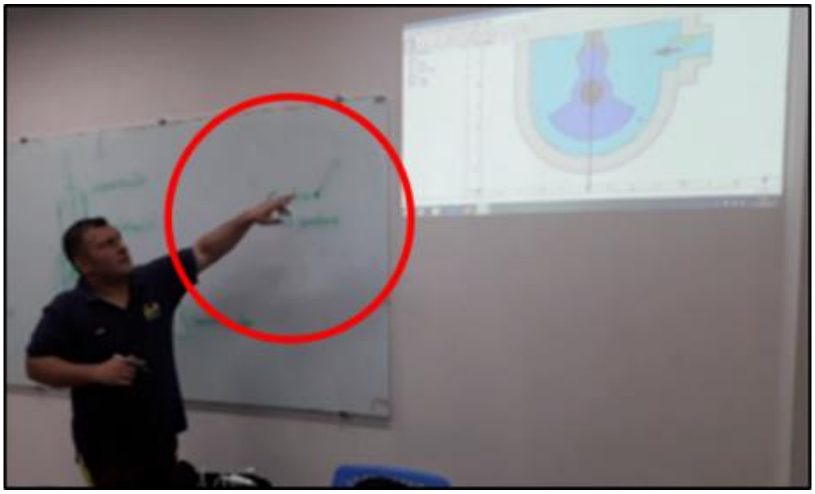
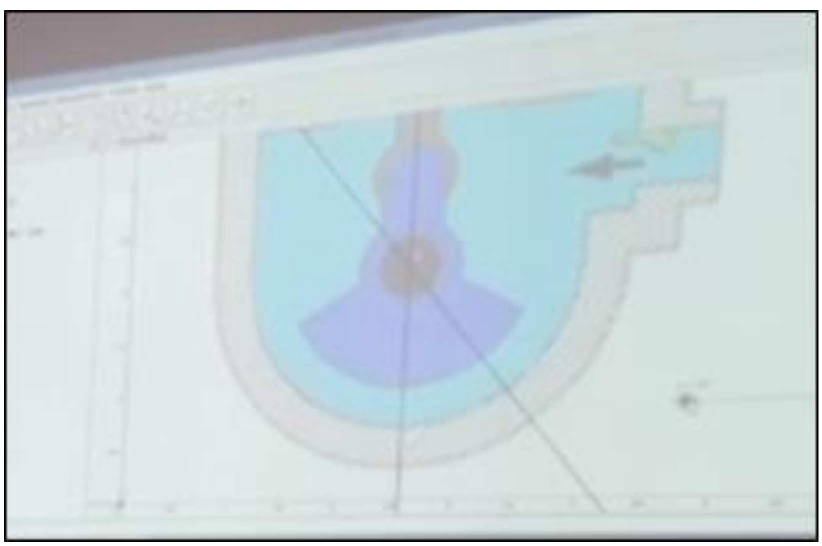
112.	*Professor 1:* Agora, vamos imaginar que o marcador que tenho na minha mão é o virabrequim, que movimento está fazendo neste momento [mova o marcador na sua mão]. Figura 19. Simulação de movimento virabrequim com suporte a marcadores 
113.	*E3, E6, E5 y E7:* Está girando
114.	*Professora 1:* Está girando, é verdade. Mas se pensarmos como representar essa mudança matematicamente, como poderemos reprimi-la? Lembre-se das transformações sobre as quais conversamos. Simetria axial, rotação.
115.	*E8:* Com uma rotação
116.	*Professora 1:* É verdade que podemos simular o movimento do setor circular com uma rotação.

Para que os alunos se conscientizem da ideia de rotação, eles devem considerar a teoria matemática por trás da ferramenta Rotação. Ou seja, para considerar que os alunos aprenderam sobre a ideia de rotação, eles tiveram que reconhecer qual o objeto a ser girado, o centro de rotação e o ângulo de rotação. Elementos essenciais necessários para usar a ferramenta, em outras palavras, para poder executar a rotação.

Nesse sentido, os alunos conseguiram identificar, sem problemas, que o objeto que seria girado é a linha já desenhada na visualização gráfica anteriormente. Da mesma forma, eles não tiveram problemas em comunicar o centro de rotação seria o ponto A. No entanto, ao identificar o ângulo de rotação, os alunos tiveram problemas em reconhecer que esse valor seria estático (linha 134).

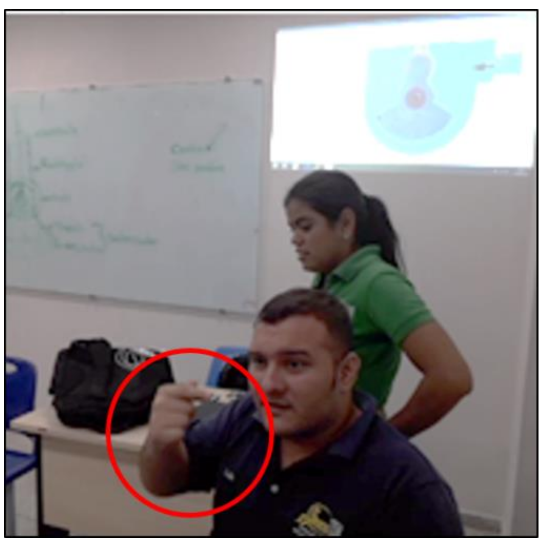
O Professor 2 aproveita a resposta desse aluno para mostrar a ele com a ajuda do GeoGebra que, não é possível considerar um ângulo único nesta ocasião, mas sim uma família de ângulos que podem ser representados com a ferramenta controle deslizante e que teriam um valor mínimo de $0°$ e como valor máximo $360°$. Após essa explicação, o Professor 1 mostrou a rotação considerando agora um controle deslizante de ângulo α com os valores mencionados, obtendo a linha necessária.

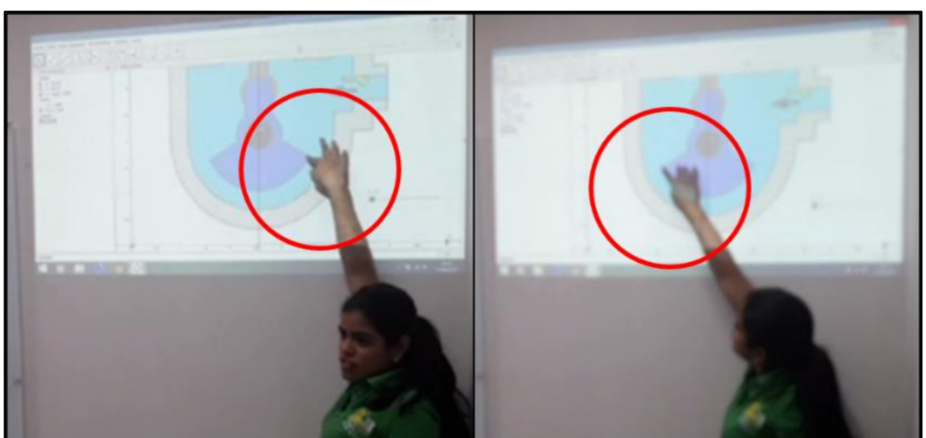
127.	*Professor 2:* A ferramenta de rotação solicita o objeto a ser rotado, o centro de rotação e um ângulo de rotação. Qual seria o objeto para girar?
128.	*E4:* A linha que desenhamos
129.	*Professor 2:* Ok, e o centro de rotação? Você precisa confiar nos objetos que são criados na visualização gráfica.
130.	*E6:* Então seria o ponto A, que é o único ponto lá
131.	*Professor 2:* E qual seria o ângulo de rotação?
132.	*E3:* Então temos uma linha acima do já desenhar em movimento?
133.	*Professor 2:* Assim é
134.	*E3:* Bem, se eu estivesse pensando na virada dessa linha, seria 360°
135.	*Professor 2:* Bem, o professor 1 fará a rotação, clique na linha, depois no ponto A e, em seguida, na janela coloque 360°. Em seguida, temos uma linha f ', que foi girada em um ângulo de 360° [Figura 20].

	Figura 20. Aponte a linha reta girada com a mão 
136.	*Professor 2:* Mas essa rotação não nos ajuda porque não se move, precisamos fazer uma rotação com um ângulo dinâmico, que varia de 0° a 360°. No GeoGebra, podemos fazer isso criando um controle deslizante.
137.	*Professor 1:* Eu já criei o controle deslizante, com um valor mínimo de 0° e máximo de 360°. Agora vou girar a linha f, em relação ao ponto A e no valor do ângulo, colocarei o nome do controle deslizante. Agora podemos ver a rotação da linha. Figura 21. Rotação da linha f em relação ao ponto A e ângulo α 
138.	*E1, E9, E7, E8, y E3:* Que bom

Nó 3: As extremidades do setor circular

O trabalho conjunto neste momento da discussão é direcionado para determinar a localização dos extremos do setor circular. O professor 2 inicia a discussão comentando que esses pontos também devem ter movimento, assim como a linha reta já girou. Esses pontos não podem ser construídos arbitrariamente, sua localização deve estar relacionada à linha girada. O professor, com a ajuda das marcações, mostra aos alunos como deve ser o movimento dos pontos e indica com as mãos onde eles devem estar localizados. Esse professor deixa uma pergunta aos alunos sobre como eles podem determinar esses pontos, considerando o uso da regra e das bússolas.

104.	*Professor 2:* Então, se já temos um dos pontos solicitados pela ferramenta, que é o centro, quais são os outros dois pontos que eu preciso?
105.	*E2:* Os extremos
106.	*Professor 2:* Exatamente, então eu sei que devemos construir as extremidades, que exatamente serão localizadas aqui [aponta com a flecha da mause] e aqui [aponta uma parte na tela]. Mas esses dois pontos não consigo construí-lo clicando e clicando.
107.	*E3:* Assim como o ponto anterior foi feito
108.	*Professor 2:* Sim. Esses [pontos devem ser construídos com outras construções auxiliares] e também que propiciam esse dinamismo [move uma de suas mãos em círculo, figura 22]. Figura 22. Simule o movimento circular com o dedo 
109.	*E3:* Para propiciar esse movimento circular.

110.	*Professor 1:* Porque se já temos um ponto de viragem [para simular o movimento circular], então eu faço as demais construções a partir deste ponto e é isso.
111.	*Professor 1:* Bem, devemos localizar [no GeoGebra] esses dois pontos [aponte as extremidades do setor circular desenhadas no quadro, Figura 23a]. Esses pontos fazem esse movimento [com a ajuda de um marcador, mostram o movimento que os pontos deveriam ter, Figura 23b]. Então devemos fazer outras construções para determinar esses dois pontos. Figura 23. Aponte as extremidades do setor circular e simule o movimento que você deveria ter  (a) (b)
139.	*Professor 1:* Agora, a partir desta linha, precisamos determinar este ponto [aponta com o dedo indicador] e este ponto [aponta com o dedo indicador]. Figura 24. Apontar a localização das extremidades do setor circular  (a) (b)

140.	*Professor 1:* Agora, se formos ao desenho que temos no quadro. Nós temos essa linha agora [desenhe a linha, Figura 25a]. Como eu determino esse ponto [aponte o ponto com a mão, Figura 25b] e esse ponto [aponte o ponto com a mão, Figura 25c], usando régua e compasso? Figura 25. Desenhando a linha e apontando para as extremidades do setor circular  (a) (b) (c)

E9 decide participar e mostrar a seus colegas de equipe como ele determinaria esses pontos. Para isso, o aluno confia no desenho para desenhar um círculo que passa onde os extremos devem estar localizados. Em seguida, o desenho é suportado novamente para desenhar uma linha perpendicular à linha f '(linha girada). No entanto, ao não incluir em seu discurso como eu determino essa linha, ele faz com que o professor intervenha e pergunte a ele como desenhar essa linha. Desde que você deve saber primeiro o ponto em que essa linha vai passar.

O aluno E9 mostra sinais de confusão e falha em dar uma resposta ao professor; portanto, seu parceiro E3 decidiu intervir para ajudar, explicando que uma circunferência pode ser criada centrada no ponto A e que ele chega ao ponto em que deve passar a linha. Os professores concordam com a técnica de construção discutida e decidem realizá-la no GeoGebra para construir o setor circular e resolver a tarefa.

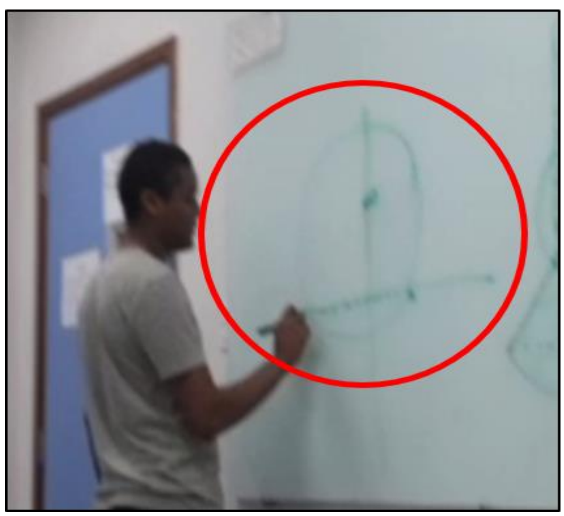
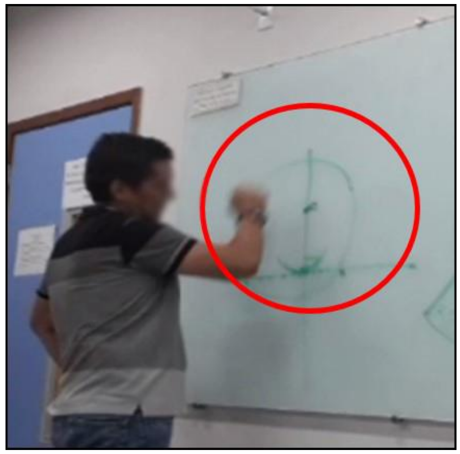
141.	*E9:* Primeiro eu faria um círculo centrado no ponto A e passava pelas extremidades do setor circular [desenhe o círculo]. Figura 26. E9 desenha o círculo 
142.	*Professor 2:* Bem, eu sei que esses pontos estão nessa circunferência. Agora, como eu os determino?
143.	*E9:* Eu criaria outra linha aqui [desenhe a linha, Figura 27]. a linha cruza com a circunferência e então eu determino os pontos. Figura 27. E9 desenha a linha perpendicular 
144.	*Professor 1:* Mas como você esclareceu isso? Porque você deve primeiro localizar um ponto e depois desenhar a linha que deve estar relacionada à que já foi criada. Eu acho que a linha que você desenhou é perpendicular à que já temos.
145.	*E3:* Podemos criar outro círculo cujo centro é o ponto A e atinge o ponto em que a linha perpendicular passa [E3 desenha um círculo, Figura 28].

	Figura 28. E3 desenha um círculo 
146.	*Professor 1:* Ok, com isso podemos determinar as extremidades do setor circular. Agora vamos levar isso que discutimos aqui para o GeoGebra.

Análise Multisemiótico dos Dados

Nesta pesquisa, contamos com uma perspectiva histórico-cultural do aprendizado de matemática para explicar os processos de objetivação em torno de certos conhecimentos geométricos mobilizados por estudantes e professores de matemática durante o trabalho de construção de um virabrequim no GeoGebra. Através de uma análise multisemiótico, conseguimos identificar alguns nós semióticos que nos fornecem informações sobre certas descobertas dos processos de objetivação do conhecimento geométrico que ocorreram nas experiências ESG. Esses achados estão relacionados à atividade semiótica exibida.

A atividade semiótica exibida

Os resultados revelaram a variedade de sinais (palavras, gestos, desenhos) e artefatos (lápis, papel e lousa) que compõem os diferentes nós semióticos implantados no trabalho de construção de um motor de duas temperaturas com o GeoGebra. Com relação a gestos e desenhos, descobrimos que esses recursos cumpriram uma importante função mediadora nos processos de objetivação, enquanto foram produzidos de maneira sincronizada com o discurso oral para revelar as ideias geométricas durante a atividade de matematização e a teoria geométricas implícitas nas ferramentas de construção GeoGebra usadas pelo aluno.

O conjunto de signos e suas relações em cada momento da discussão é um exemplo do que Arzarello (2006) chama de pacote semiótico. No âmbito da atividade semiótica implantada nos nós semióticos, os gestos foram utilizados por alunos e professores, tanto para indicar ou indicar os objetos geométricos no desenho feito no quadro do virabrequim quanto para recriar certos movimentos relacionados à peça.

Meios semióticos cenestésicos

Os sinais emitidos por alunos e professores têm como objetivo mostrar o objeto geométrico a que se referem. Essa sinalização pode muito bem ser para indicar a localização no desenho de algum objeto geométrico, alguma ferramenta do GeoGebra. Você também pode indicar alguma parte do fenômeno que foi simulado. Em relação ao primeiro, ao longo das evidências, observa-se que este é um dos meios semióticos mais utilizados, por exemplo, no nó 2 das atividades de matematização, o Professor 2 e os alunos apontam onde no desenho do quadro pode ser representado com um círculo.

Enquanto no trabalho matemático observou-se que os meios de sinalização foram utilizados para indicar as localizações do centro do setor circular e suas extremidades. Do mesmo modo, esse meio foi recorrente durante as discussões sobre as peças de motor de dois tempos que têm movimento.

Os movimentos, que representam esse movimento no ar ou em alguma superfície, no papel ou no quadro, também foram utilizados por professores e alunos. Esse deslocamento estava relacionado à forma de algum objeto geométrico, como foi o caso de E3 que, com o dedo, desenhou a forma da esfera no ar. Os professores também fizeram uso desse meio semiótico usando-o para indicar o movimento circular do setor circular e a direção de uma linha perpendicular durante o trabalho matemático.

As inscrições feitas pelos participantes e professores durante as atividades de matematização e matemática foram mais um meio semiótico. Isso se caracteriza por deixar um registro (que pode ser escrito ou desenhado), do que é considerado relevante durante o desenvolvimento da atividade. Como foi o caso de E7 e E3, que escreveram no quadro os objetos geométricos que eles consideravam representar algumas partes do desenho, que podem ser vistos no nó 1 da matematização. Enquanto um dos professores deixou um registro no quadro dos elementos que a ferramenta exige para poder usá-lo, durante o nó 1 do trabalho matemático.

Os desenhos feitos por alunos e professores também são considerados meios semióticos de objetivação, na medida em que permitem acesso ou funcionam como representação de objetos geométricos, relações geométricas, entre outros. Seu uso permite que eles tragam para o plano material o que não pode ser expresso com palavras ou gestos e que desejam mostrar aos outros participantes da atividade. Esses desenhos são sinais usados intencionalmente para mostrar, por exemplo, a direção de uma linha, como foi o caso do professor. Ou para completar a forma de uma figura, assim como E2 fez ao desenhar um círculo sobreposto à figura, assim como E9 também desenhou círculos e linhas durante sua explicação para determinar as extremidades do setor circular.

Meios Linguísticos Semióticos

Entre as expressões linguísticas utilizadas por alunos e professores para complementar e sincronizar gestos espaciais, surgiram algumas expressões linguísticas como essa, ali ou aqui. Isso é usado pelos alunos para indicar um objeto geométrico específico que é desenhado no quadro. O lá ou aqui é usado durante as atividades de matematização e trabalho matemático para indicar a localização de algum objeto geométrico, como, por exemplo, a localização do centro e as extremidades do setor circular e todas as figuras geométricas identificadas pelos alunos no desenho da a lousa.

Meios semióticos físicos e tecnológicos

Durante as atividades de matemática e trabalho matemático, estudantes e professores às vezes usavam seus cadernos para desenhar um quadro do virabrequim e do quadro para fazer uma discussão geral e todos podiam contribuir. Também durante essas atividades, eles usaram o GeoGebra como recurso tecnológico para representar os objetos geométricos identificados.

Comparação de nossas descobertas com outras pesquisas

Esses indivíduos usavam as mãos (acompanhadas pelo lápis ou não) para indicar ou apontar para qualquer parte do esboço, localizar pontos, linhas, curvas ou ângulos no desenho à mão livre e também para simular o movimento de algumas partes do fenômeno. Esses tipos de gestos utilizados por alunos e professores estão em correspondência com algumas das categorias de gestos teorizadas por McNeill (1992), especificamente com os gestos icônicos e deitíticos.

Seguindo esse autor, podemos concluir que estava presente a dimensão icônica do trabalho conjunto, pois para os estudantes e os professores alguns gestos se assemelhavam visualmente às entidades que pretendiam descrever. Especificamente, destaca uma cena do segundo nó semiótico no qual E3 faz um movimento de sua mão em alusão à forma da esfera. Outra dimensão identificada é a dêitico, referente à maneira como os sujeitos indicaram um objeto geométrico específico (ou alguns de seus aspectos característicos) representados no espaço do papel.

Ambas as dimensões foram relatadas nos estudos de Gómez (2013) e Pantano (2014), embora com denominações diferentes. No caso de Gomez, ele os inclui em uma categoria chamada sinais cenestésicos. Por outro lado, o Pantano é mais específico quando se refere a eles como sinais de dedos ou lápis.

Os desenhos também foram recorrentes durante a construção do setor circular. Segundo Laborde (1997), a interpretação de desenhos em geometria é uma prática que favorece o reconhecimento de propriedades espaciais associadas às propriedades geométricas do objeto que o desenho tenta modelar. Em nossa pesquisa, descobrimos que os professores fizeram grandes esforços para direcionar a discussão para pontos de encontro entre o visual e o teórico, garantindo que cada toque que compõe o desenho significasse alguma qualidade de um objeto geométrico.

O papel mediador do professor

Este trabalho pode ser observado à medida que o professor se torna parte da atividade a partir de uma posição em que considera as ideias e contribuições dos alunos e não nessa posição em que é considerado o único que conhece o conhecimento e que isso só deve ser transmitido. Seu papel mediador durante todas as atividades realizadas, durante a resolução das tarefas de construção na primeira fase do escritório ou durante as atividades matemáticas e o trabalho matemático, foi de grande ajuda para a objetivação do conhecimento geométrico que surgia em ambas as atividades.

REFLEXÕES FINAIS

Em base nas atividades desenvolvidas em busca de analisar a aprendizagem geométrica que surge durante a Elaboração de Simuladores com GeoGebra, tendo o caso da simulação de um motor a dois tempos por futuros professores em formação na Licenciatura Integrada em Ciências, Matemática e Linguagens para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, considero necessário apontar alguns aspectos reflexivos sobre o trabalho realizado, conforme se expressa nos seguintes parágrafos.

Começo esclarecendo que desenvolver a atividade da ESG com futuros professores foi um desafio profissional, pois, além de ter uma longa experiência levando a cabo esta atividade tanto com alunos de ensino médio, como com professores já formados, foi a primeira vez que planejava este tipo de atividade com futuros professores com foco no Ensino Fundamental. Este desafio foi transcendido, depois de um estudo do currículo Brasileiro que permitisse compreender o ensino da matemática neste nível de ensino, de maneira tal que pudesse adequar a ESG para uma proposta de oficina para os participantes da pesquisa, os quais se estariam sendo formados para trabalhar neste nível de ensino.

Este esforço realizado de adequar a oficina teve uma dupla intenção, o primeiro para poder coletar os dados da pesquisa realizada, e a outra, foi minha sensibilidade dirigida a estes futuros professores em poder brindar-lhes uma atividade que promove o ensino da matemática de uma maneira, diferenciada usando tecnologias digitais, como o GeoGebra o qual é uma ferramenta com muito potencial para o tratamento de conteúdo matemático.

Outro aspecto a destacar, é o crescimento profissional e a oportunidade de continuar minha formação por meio destas oficinas, o desenvolvimento das partes da oficina permitiram um intercambio tanto de conteúdo, cultura e linguagem entre participantes e mesma pesquisadora que no momento assumiu o papel de professora. Destaco isto, pelo fato de ser de um pais vizinho de Brasil, o qual a língua materna é o espanhol latino-americano, o nome tanto do fenômeno selecionado, como das suas peças são totalmente diferentes ao meu contexto do pais de origem, Venezuela. Então, o diálogo entre professores e participantes deu para emergir aristas de conhecimento de conteúdo matemático, físico, mecânico (automotriz), social e cultural.

Em quanto ao estudo da Teoria da Objetivação, esta pesquisa me permitiu aprofundar minha compressão e entendimento desta basta teoria histórico-cultural do ensino da matemática que ainda continua em desenvolvimento e contribuindo com a Educação Matemática, tanto como campo de pesquisa e didático. A revisão de literatura com foco em pesquisa nesta temática permitiu perceber que ainda as pesquisas são bem reduzida e que se precisa um esforço continuo em investir em assuntos relacionados com o estudo da subjetividade, o qual é o outro eixo na TO, pois, considerando que esta teoria tem uma bagagem de insumos para pesquisar o tornar-se em atividades de ensino da matemática, considero que devemos realizar pesquisa que permitam indagar essa componente social do ensino da matemática.

Ao respeito da coleta de informações, esta pesquisa permitiu, e me dou a liberdade de expressar da seguinte maneira: me sentir uma pesquisadora em construção e formação, pelo fato de passar por várias etapas no desenvolvimento de coleta de informação. Neste sentido a experiências de planejar uma oficina tanto como espaço de formação e como laboratório de pesquisa, adequar o espaço com os equipamentos para captar as informações, logo desenvolver as competências para o tratamento das informações, de maneira que depois foi um processo de sistematizar e refinar essa montagem de dados que permitisse dar conta dos objetivos planteados ao início da pesquisa.

Pelo antes expressado, considero que foi possível alcançar o objetivo da pesquisa, o qual foi analisar a aprendizagem geométrica que surge durante a simulação de um motor a dois tempos com o GeoGebra através dos meios semióticos de objetivação usada por futuros professores da Licenciatura Integrada em Ciências, Matemática e Linguagens para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Queremos destacar que a TO foi essencial para organizar as informações, para depois à luz dos Nó semióticos interpretar o discurso usado por futuros professores da Licenciatura Integrada em Ciências, Matemática e Linguagens para comunicar suas ideias geométricas durante a Elaboração de um Simulador com o GeoGebra.

Neste sentido, foi possível verificar que a aprendizagem geométrica pode ocorrer nos participantes das atividades da Elaboração Simuladores com o GeoGebra. Esse tipo de atividade tem sido mostrado como uma maneira de "aprender matemática" com um olhar diferente, que transcende a abordagem tradicional de ensino e aprendizagem, permitindo que os alunos assumam um papel ativo e participativo em seus treinamentos. Além do exposto, no desenvolvimento da atividade, reflete-se o compromisso mútuo que alunos e professores adquiriram ao realizar todas as sessões de trabalho da oficina.

Outro aspecto que devo destacar é o GeoGebra teve um papel fundamental porque, dessa forma, os desenhos dinâmicos foram construídos. No entanto, uma das coisas que gostaríamos de destacar é a consideração teoria matemática por trás das ferramentas de construção de software pelos participantes durante a resolução das tarefas de construção e a representação do setor circular no GeoGebra. Considerar essa teoria matemática significou uma mudança na objetivação de saber construir um retângulo ou um setor circular.

Não podemos deixar de lado os artefatos do lápis e do papel, e o quadro usado pelos alunos e professores e que foram um meio recorrente durante as discussões nas atividades realizadas durante o trabalho de matematização e matemática.

A aprendizagem matemática, em especial a geométrica que ocorreu durante as atividades de matematização pode explicar um conjunto de objetos geométricos, onde é discutida sua representação gráfica, ou seja, o desenho, sua definição e elementos. Enquanto o aprendizado nas atividades do trabalho matemático está relacionado, em primeiro lugar, às formas de construção dos objetos geométricos discutidos acima. Por estar em um ambiente dinâmico, tem um papel fundamental e, portanto, a teoria matemática de cada ferramenta de construção é considerada fundamental, onde é definido de outra maneira como a construção do referido objeto geométrico pode ser entendida.

Apesar dos achados, é necessário continuar desenvolvendo estudos sobre esse problema que demonstrem maiores níveis de profundidade no suporte teórico e metodológico para a análise da aprendizagem que ocorre em atividades relacionadas na ESG.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACOSTA, M. Dificultades de los profesores para integrar el uso de Cabri en clase de geometría. Experiencias de un curso de formación docente. **Tecné, Episteme y Didaxis**, v. 28, p. 57-72, 2010.

ARTIGUE, M. Problemas y desafíos en educación matemática: ¿Qué nos ofrece hoy la didáctica de la matemática para afrontarlos? **Educación Matemática**, v. 16, n. 3, p. 5-28, 2004.

ARZARELLO, F. Semiosis as a multimodal process. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Special Issue on Semiotics, Culture, and Mathematical Thinking (Guest Editors: L. Radford & B. D'Amore), p. 267-299, 2006.

BARTOLINI-BUSSI, M. Social interaction and mathematical knowledge. (F. FURUNGHETTI, Ed.) 15th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. **Anais**. Assisi: PEM, 1991.

BLUM, W., LEIß, D. How Do Students and Teachers Deal with Modelling Problems? En: C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (eds.). **Mathematical Modelling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics. Chichester**, p. 222-231, UK: Horwood, 2007.

BOERO, P; DAPUETO, C; FERRARI, P; FERRERO, E; GARUTI, R; LEMUT, E; PARENTI, L. E SCALIET, E. Aspects of the mathematics-culture relationship in mathematics teaching and learning in compulsory school. En L. MEIRA Y D. CARRAHER (Eds.), Proceedings of the 19th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. **Anais…** p. 151-166, Recife, Brasil: PME, 1995.

BOGDAN, R; BIKLEN, S. K. **Qualitative Research for Education. Na Introduction to Theory and Methods** (5.ª ed.). Boston, MA: Pearson, 2007.

CASTILLO, L. A.; PRIETO G., J. L. El uso de comandos y guiones en la elaboración de simuladores con GeoGebra. UNION, n. 52, p. 250–262, 2018.

CASTILLO, L. A.; PRIETO G., J. L.; SÁNCHEZ, I. C.; GUTIÉRREZ, R. E. Uma experiência de elaboração de um simulador com GeoGebra para o ensino do movimento parabólico. **PARADIGMA**, v. 40, n. 2, p. 196–217, 2019. DOI: 10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2019.p196-217.id764.

CASTILLO, L. A.; SÁNCHEZ, I. C. As formas de colaboração humana na elaboração de um simulador com o GeoGebra. **Revista Thema**, v. 17, n. 3, p. 572–583, 2020. DOI: 10.15536/thema.V17.2020.572-583.1110.

CISNEROS, J. **La objetivación del número racional a partir del processo de mediación.** (Tesis de maestría no publicada). Universidad de Antioquia, Colombia, 2014.

CUEVA, E; ISEA, J. La Geometría 3D en el Simulador del Singapore Flyer. En (J. L. PRIETO; R. GUTIÉRREZ, Eds.) Memorias del III Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia. **Anais…**p. 118-127, Maracaibo, Venezuela: Asociación Civil Aprender en Red, 2017.

DONHAM, D. L. **History, power, ideology: Central issues**. in Marxism and anthropology. Berkeley: University of California Press. 1999.

GÓMEZ, J. **La generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas: Un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de grado décimo** (Tesis de maestría no publicada). Universidad Pedagógica Nacional, Colombia, 2013.

GUSTIN, J. **Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de grado séptimo al abordar tareas de generalización de patrones.** (Tesis de maestría no publicada). Universidad Pedagógica Nacional, Colombia, 2017.

GUTIÉRREZ, R.; PRIETO, J. L.; ORTIZ, J. Matematización y trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. **Educación Matemática**, v. 29, n. 2, p. 37-68, 2017.

HEGEL, G. **The philosophy of history. Kitchener**, ON: Batoche Books. (Original work published 1837), 2001.

LABORDE, C. Cabri-Geómetra o una nueva relación con la Geometría. In: PUIG, L. (Ed.). **Investigar y enseñar. Variedades de la educación matemática**, p. 33-48, Madrid: Una Empresa Docente, 1997.

LERMAN, S. The function of language in radical constructivism: A vygotskian perspective. (W. GEESLIN, K. GRAHAM, Eds.). Proceedings og 16th conference of international group for the psychology of mathematics education. **Anais…**p. 40-47, Durham, NH: PME , 1992.

LERMAN, S. The social turn in mathematics education research. **Multiple perspectives on mathematics teaching and learning**, p. 19-44, 2000.

MCNEILL, D. **Hand and mind: What gestures reveal about thought**. Chicago, IL: University of Chicago Press, 1992.

PANTANO, O. **Medios semióticos y procesos de objetivación en estudiantes de tercer grado de primaria al resolver tareas de tipo aditivo en los naturales**. (Tesis de maestría no publicada). Universidad Pedagógica Nacional, Colombia, 2014.

PRIETO, J. L. Saberes docentes referidos a la gestión del trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. En (J. L. PRIETO; R. GUTIÉRREZ, Eds.) Memorias del III Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia. **Anais…**p. 300-319, Maracaibo, Venezuela: Asociación Civil Aprender en Red, 2017.

PRIETO, J. L.; GUTIÉRREZ, R. (Org). **Memorias del I Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia**. Maracaibo, Venezuela: Asociación Civil Aprender en Red, 2015.

PRIETO, J. L.; GUTIÉRREZ, R. (Org). **Memorias del II Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia**. Maracaibo, Venezuela: Asociación Civil Aprender en Red, 2016.

PRIETO, J. L.; GUTIÉRREZ, R. (Org). **Memorias del III Encuentro de Clubes GeoGebra del Estado Zulia**. Maracaibo, Venezuela: Asociación Civil Aprender en Red, 2017.

PRIETO, L, J.; ORTIZ, J. Saberes necesarios para la gestión del trabajo matemático en la elaboración de simuladores con GeoGebra. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 33, n. 65, p. 1276-1304, 2019.

RADFORD, L. Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semioticcultural approach to students' types of generalization. **Mathematical Thinking and Learning**, v. 51, n. 1, p. 37-70, 2003.

RADFORD, L. Elementos de una teoría cultural de la objetivación. **Revista Latinoamericana de Investigación n Matemática Educativa**, v. 9, n. Número especial, p. 103-129, 2006.

RADFORD, L. The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In L. RADFORD; G. SCHUBRING; F. SEEGER (Eds.), **Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom, and culture**, p. 215-234, 2008a.

RADFORD, L. Iconicity and contraction: A semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. **ZDM**, v. 40, n. 1, p. 83-96, 2008b.

RADFORD, L., EDWARDS, L. Y ARZARELLO, F. Introduction: Beyond words. **Educational Studies in Mathematics**, v. 70, n. 3, p. 91-95, 2009.

RADFORD, L. The evolution of paradigms and perspectives in research. The case of mathematics education. In J. VALLÈS; D. ÁLVAREZ; R. RICKENMANN (Eds.). Teacher's activity: Intervention, innovation, research. **Anais…**p. 33-49, Girona, Spain, 2011.

RADFORD, L. Three Key Concepts of Theory of Objectification: Knowledge, Knowing, and Learning. **Journal of Research in Mathematics Education**, v. 2, n.1, p.7-44, 2013.

RADFORD, L. De la teoría de la objetivación. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**, v. 7, n. 2, p. 132-150, 2014a.

RADFORD, L. On the role of representations and artefacts in knowing and learning. **Educational Studies in Mathematics**, v. 85, n. 3, p. 405-422, 2014b.

RADFORD, L. Methodological aspects of the theory of objectification. **Revista Perspectivas da Educação Matemática**, v. 8, n. 18, p. 547-567, 2015.

RADFORD, L. **Mathematics Education as a Matter of Labor**. In M. A. Peters (Ed.), Encyclopedia of Educational Philosophy and Theory. Section: Mathematics education philosophy and theory. Singapore: Springer. DOI 10.1007/978-981-287-532-7_518-1. 2016.

RADFORD, L. Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. En B. D' AMORE Y L. RADFORD (Eds.), **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y culturales**, p. 115-136, Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017a.

RADFORD, L. Aprendizaje desde la perspectiva de la teoría de la objetivación. En B. D' AMORE Y L. RADFORD (Eds.), **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y culturales**, p. 97-112. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017b.

RADFORD, L. Ser, subjetividad y alienación. En B. D' AMORE Y L. RADFORD (Eds.), **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y culturales**, p. 139-165, Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017c.

RADFORD, L. Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación. **PNA**, v.12, n. 2, p. 61-79, 2018a.

RADFORD, L. Saber, aprendizaje y subjetivación en la teoría de objetivación. En (MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. Org), Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. **Anais…**p. 1-22, Belem- Pará, Brasil: SBEM-PA, 2018b.

RADFORD, L. Un recorrido a través de la teoría de la objetivación. In: GOBARA, S. T.; RADFORD, L. (org.). **Teoria da Objetivação: Fundamentos e aplicações para o ensino e aprendizagem de ciências e matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2020. p. 15–42.

ROTH, W.-M.; RADFORD, L. **A cultural historical perspective on teaching and learning. Rotterdam**: Sense Publishers. 2011.

RUBIO, L.; PRIETO, J. L.; ORTIZ, J. La matemática en la simulación con GeoGebra. Una experiencia con el movimiento en caída libre. **International Journal of Educational Research and Innovation**, v. 2, p. 90-111, 2016.

SABENA, C.; ROBUTTI, O.; FERRARA, F.; ARZARELLO, F. The development of a semiotic frame to analyse teaching and learning processes: Examples in preand post-algebraic contexts. En L. Coulange; J-P. Drouhard; J-L. Dorier; A. Robert (Eds.), **Recherches en Didactique des Mathématiques, Numéro spécial hors-série, Enseignement de l'algèbre élémentaire: bilan et perspectives**, p. 231-245, Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage, 2012.

SÁENZ-LUDLOW, A.; ATHANASOPOULOU, A. (2012). The GSP as a technical and psychological-symbolic tool: The case of a lateral entry teacher. En C. E. Vasco, C. A. Álvarez, O. León, A. Athanasopoulou, A. Sáenz-Ludlow, B. D'Amore (Eds.), **Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas**, p. 167- 188. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

SÁNCHEZ, I. C.; BRANDEMBERG, J. C. Aprendizagem geométrica e semiótica na matematização Com GeoGebra: O caso do virabrequim. **REMATEC**, n. 32, p. 212–230, 2019. DOI: 10.37084/REMATEC.1980-3141.2019.n32.p212-230.id213.

SÁNCHEZ, I. C.; BRANDEMBERG, J. C.; CASTILLO, L. A. La objetivación de la noción de sector circular en el trabajo matemático con GeoGebra. Paradigma, v.41, n. Extra 2, p. 448–475, 2020. DOI: 10.37618/paradigma.1011-2251.0.p448-475.id924.

SÁNCHEZ, I. C.; PRIETO, J. L. Procesos de objetivación alrededor de las ideas geométricas en la elaboración de un simulador con GeoGebra. **PNA**, v. 14, n. 1, p. 230-251, 2019.

SÁNCHEZ, I. V.; PRIETO, J. L. Características de las prácticas matemáticas en la elaboración de simuladores con GeoGebra. **Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas**, v. 96, p. 79-101, 2017.

SÁNCHEZ, I. C.; SÁNCHEZ-N, I. V. Elaboración de un simulador con GeoGebra para la enseñanza de la física. El caso de la ley de coulomb. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, v. 8, n. 2, p. 40–56, 2020. DOI: 10.26571/reamec.v8i2.9557.

SÁNCHEZ-N, I. V.; SÁNCHEZ, I. C.; GUTIÉRREZ, R. E.; DÍAZ-URDANETA, S.; PRIETO G., J. L.; CASTILLO, L. A. Proyecto Club GeoGebra: Una respuesta a la necesidad de constitución como actores de la educación matemática. **Pesquisas e Práticas Educativas**, v. 1, p. e202019, 2020. DOI: 10.47321/PePE.2675-5149.2020.1.e202019.

SPINOZA, B. **Ethics including the improvement of the understanding**. (R. Elwes, Trans.). Buffalo: Prometheus. (Original work published 1667), 1989.

VERGEL, R. **Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de educación básica primaria (9-10 años)**. Tesis doctoral, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá D.C. Colombia. 2014.

VILLANUEVA, J. **Medios semióticos de objetivación emergentes en estudiantes de primer grado escolar cuando se enfrentan a tareas sobre secuencias figurales.** (Tesis de maestría no publicada). Universidad Pedagógica Nacional, Colombia, 2012.

WENGER, E. **Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad**. Madrid, España: Paidós, 2001.