UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

JEOVÁ PEREIRA MARTINS

Ensino de Simetria por meio de problematização sociocultural

BELÉM - PA

2017

JEOVÁ PEREIRA MARTINS

Ensino de Simetria por meio de problematização sociocultural

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas, área de concentração Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Iran Abreu Mendes

BELÉM - PA

2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) – Biblioteca do IEMCI, UFPA

1980 Martins, Jeová Pereira.

Ensino de simetria por meio de problematização sociocultural / Jeová Pereira Martins, orientador Prof. Dr. Iran Abreu Mendes – 2017.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2017.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Educação – Matemática. 3. Simetria – Matemática. 4. Prática de ensino. I. Mendes, Iran Abreu, orient. II. Título.

CDD - 22. ed. 510.7

JEOVÁ PEREIRA MARTINS

Ensino de Simetria por meio de problematização sociocultural

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas, área de concentração Educação Matemática.

Data da aprovação: ______/______/_________

Banca examinadora

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes - Presidente
(Universidade Federal do Pará - Orientador)

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma
(Universidade Federal do Pará - Membro interno)

Prof. Dr. Daniele Esteves Pereira – Membro externo
(Universidade Federal do Pará - Campus Cametá)

Prof. Dr. Carlos Aldemir Farias da Silva
(Universidade Federal do Pará - Membro interno)

A meus pais Raimundo e Marcinda, a minha esposa
Hemellen e a meus filhos Jonas e Joab.

AGRADECIMENTOS

A Deus pai celestial pelo dom da vida.

Ao meu orientador Prof. Dr. Iran Abreu Mendes pelos ensinamentos para a vida acadêmica, profissional e pessoal. Sua orientação segura me possibilitou cumprir a caminhada do processo de formação com êxito.

À Secretaria de Estado de Educação do Pará (SEDUC), por minha liberação para cursar a pós-graduação.

Ao programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará, pela atenção a mim dispensada por todas as pessoas que dele fazem parte.

Aos professores doutores, Maria dos Remédios de Brito, Marisa Rosani Abreu da Silveira, Renato Borges Guerra, José Messildo Viana Nunes, Elizabeth Gomes, Eduardo Paiva Pontes Vieira e Carlos Aldemir Farias da Silva pelas importantes contribuições acadêmicas durante as disciplinas cursadas.

Aos membros dos grupos de pesquisa GEHEM e GEMAZ, por me ouvirem e compartilharem comigo seus conhecimentos.

A minha família, base sólida sem a qual eu não teria conseguido essa vitória.

Aos professores que depreenderam tempo e energia na leitura de meu trabalho e que contribuíram decisivamente para seu aprimoramento, em especial, professores, Carlos Aldemir Farias da Silva, Osvaldo dos Santos Barros, João Claudio Brandemberg Quaresma, Maria José Costa dos Santos e Daniele Esteves Pereira.

Aos colegas da pós-graduação do Instituto de Educação Matemática e Científica da UFPA com os quais convivi durante o período do mestrado, pelo compartilhamento de experiências, ideias, sentimentos e opiniões.

RESUMO

O ensino de matemática na Educação Básica merece especial atenção de professores e pesquisadores do campo, pois tem como uma de suas funções a formação integral do estudante no que tange aos conhecimentos matemáticos a ela necessários. Este trabalho propõe uma forma de promover essa formação no nível fundamental e objetiva analisar e discutir as estruturas de composição gráfica dos artefatos confeccionados em algumas práticas socioculturais, nas quais fossem identificados padrões geométricos que evidenciassem matrizes de variados casos de Simetria possíveis de serem explorados pedagogicamente nas aulas de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental. Trata-se de uma pesquisa de cunho qualitativo que tem como foco central propor o ensino de Simetria de reflexão, rotação, translação e reflexão deslizante, a partir da estrutura de composição gráfica de artefatos oriundos de algumas culturas. Os dados foram obtidos por meio de pesquisa empírica e bibliográfica e analisados segundo as ideias de Mendes (2014), Farias e Mendes (2014), Lévi-Strauss (2012) e dos PCN de Matemática (1997). Os resultados apontam para uma forte conexão entre a Simetria dos anos finais do Ensino Fundamental e os artefatos estudados, o que poderá favorecer o ensino e a aprendizagem desse assunto de forma mais efetiva e significativa para os estudantes. Por fim, elaboramos propostas de Unidades Básicas de Problematização (UBP) como subsídios didáticos a serem incorporados pelo professor de matemática no ensino de Simetria nos anos finais do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: Educação Matemática. Ensino Fundamental. Simetria. Artefatos socioculturais. Problematização.

ABSTRACT

The teaching of mathematics in Basic Education deserves special attention from teachers and field researchers, since it has as one of its functions the integral formation of the student in what concerns to the mathematical knowledge that it needs. This work proposes a way of promoting this training at the fundamental level and aims to analyze and discuss the graphical composition structures of the artifacts made in some sociocultural practices, in which geometric patterns were evidenced that show matrices of various Symmetry cases that can be explored pedagogically in the math classes in the final years of Elementary School. It is a qualitative research that has as its central focus the teaching of symmetry of reflection, rotation, translation and sliding reflection, from the graphical composition structure of artifacts originating from some cultures. The data were obtained through empirical and bibliographical research and analyzed according to the ideas of Mendes (2014), Farias and Mendes (2014), Lévi-Strauss (2012) and the mathematics NCPs (1997). The results point to a strong connection between the Symmetry of the final years of Elementary School and the artifacts studied, which may favor the teaching and learning of this subject in a more effective and meaningful way for the students. Finally, we elaborate proposals of Basic Units of Problematization (UBP) as didactic subsidies to be incorporated by the teacher of mathematics in the teaching of Symmetry in the final years of Elementary School.

Keywords: Mathematics Education. Elementary School. Symmetry. Sociocultural artifacts. Problematization.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Muitos são os assuntos relacionados à matemática escolar que fazem parte dos currículos da Educação Básica, todos com suas especificidades e importância dentro da formação de seus estudantes. Uns são mais explorados em sala de aula, outros menos, a depender da seleção feita pelo professor no momento do seu planejamento de atividades para uma aula ou uma unidade de ensino. Dentre os que são pouco explorados na sala de aula da escola básica, destacamos os conteúdos concernentes à Simetria, cuja importância é fundamental na construção de outros conceitos matemáticos na formação dos estudantes, em virtude de favorecerem diversas conexões entre tópicos da matemática escolar e, destes, com outros conhecimentos disciplinares em relações socioculturais.

Considero, portanto, que tais conexões são necessárias ao aprendizado de matemática, uma vez que são elas que poderão tornar significativo o conhecimento a ser aprendido pelos estudantes. Neste sentido, admito que conhecer um objeto sem seu contexto de constituição e instituição sociocultural, ou seja, descontextualizado, pode se mostrar como um objeto inútil e sem sentido, e sem evidências da existência de relações internas (intramatemáticas), externas (entre conhecimentos matemáticos e outros conhecimentos) e interculturais, que poderão contribuir para que os estudantes olhem o objeto no mundo que os cerca e interprete-os de maneira a potencializar seu desempenho sociocognitivo e cultural, conforme assevera Vergani (1991, 1995, 2003, 2009).

Com vistas ao estabelecimento de tais conexões e suas implicações para o ensino de matemática, especificamente sobre os conceitos de Simetria, este trabalho teve como objeto de estudo noções de Simetria para os anos finais do Ensino Fundamental, com base na identificação e problematização de padrões geométricos evidenciados em artefatos socioculturais por meio de suas imagens. Tais artefatos foram considerados como produtos de práticas socioculturais históricas, e selecionados de diversas atividades socioculturais como na prática ceramista, na fabricação de azulejos decorados, na pintura corporal indígena, na fabricação de gradis de ferro, dentre outras, que foram tomadas no estudo como um meio de proporcionar ao estudante um exercício de visualização, em sua estrutura gráfica, de elementos que favoreçam a identificação, caracterização, estabelecimento de propriedades e semelhanças geométricas, bem como dinâmicas referentes aos casos de Simetria a serem ensinados aos estudantes da Educação Básica.

Meu envolvimento com esse tema de pesquisa iniciou-se em setembro de 2015, quando participei do X Encontro Paraense de Educação Matemática (EPAEM), ocorrido naquele mês, nas dependências do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará (IFPA), quando participei de várias atividades, dentre as quais uma conferência do Professor Iran Abreu Mendes intitulada "Belém 400 anos: História, Cultura e Educação" que me fez pensar sobre as relações entre matemática e cultura, e seu potencial para o ensino de matemática na Educação Básica. Ainda no evento adquiri os livros, Matematizando o Patrimônio Histórico-Cultural do Pará (MENDES; GIL, 2015) e Padrões Matemáticos na Cultura Amazônica: pesquisa em etnomatemática (BARROS, 2015), produzidos para os minicursos do evento. Estimulado pela palestra e pela leitura dos livros, fiz uma busca por outros trabalhos que tratassem dessa temática e, a partir da leitura desses textos, me interessei pela Simetria, pois, percebi que esse assunto possui uma estreita conexão com vários elementos da cultura e que essa conexão poderia ser feita no ensino de Simetria na Educação Básica.

A participação nas atividades do EPAEM e as leituras de outros textos, relacionados ao tema contribuíram sobremaneira para a estruturação da ideia central do projeto de pesquisa que submeti à seleção do mestrado no Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM) do IEMCI[1], que inicialmente se propunha a abordar a *utilização da cerâmica marajoara e suas réplicas no ensino de conceitos matemáticos*, como proporcionalidade e Simetria, em um projeto de dissertação cujo título inicial era *Padrões Matemáticos na Cerâmica Marajoara*.

O projeto foi aceito pelo Professor Iran Abreu Mendes, que sugeriu uma modificação temática de modo a focalizar o objeto de maneira mais intercultural. Assim, imediatamente começamos a conversar sobre sua reestruturação e, durante as orientações, passamos a ampliar nossa[2] visão sobre o tema em questão e chegamos à conclusão que precisaríamos dar a pesquisa um caráter mais universal

[1] Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará (UFPA).
[2] A partir deste momento que marca o início das orientações sobre a pesquisa, usarei o verbo na primeira pessoa do plural, nós, porque entendo que este texto relata uma pesquisa feita em parceria com o orientador, os membros da banca que com ela contribuíram desde os seminários de orientação e os colegas do grupo de pesquisa GEHEM onde, por mais de uma vez, apresentei este trabalho.

e delimitar nosso objeto de estudo. Decidimos, então, eleger como objeto de pesquisa as noções de Simetria abordadas nos anos finais do Ensino Fundamental e utilizar, além da cerâmica marajoara, outros artefatos de práticas socioculturais como, azulejos decorados, gradis de ferro, pintura de carrocerias de caminhão, etc.

Para complementar as orientações fizemos uma busca, em algumas bibliotecas virtuais e nas bibliotecas da UFPA, por trabalhos relacionados a essa temática, de modo a selecionar e pesquisar o assunto em artigos, livros, teses e dissertações que tratam diretamente do tema ou que tivessem relação com o assunto. O estudo desses trabalhos, foi de fundamental importância, pois nos forneceram subsídios para que fizéssemos a pesquisa com mais segurança, propriedade e domínio de conhecimentos sobre as ideias relacionadas ao tema.

Dessa forma, a pesquisa foi se estruturando e se desenvolvendo e adquiriu o formato atual que ora apresentamos. O seu desenvolvimento exigiu a necessidade de reunir nossos questionamentos em forma de pergunta central e nos objetivos estabelecidos neste relatório de pesquisa em forma de dissertação. Dentre os questionamentos que se originaram desde os primeiros momentos de envolvimento com o tema, até a delimitação deste trabalho, definimos como questão central: Como conectar, pedagogicamente, os objetos geométricos e simétricos evidenciados em artefatos socioculturais ao ensino de Simetria nos anos finais do Ensino Fundamental?

Para responder à questão e definir um ponto de referência seguido no decorrer da pesquisa, estabelecemos como objetivo geral: analisar e discutir as estruturas de composição gráfica de artefatos confeccionados em algumas práticas socioculturais, nas quais fossem identificados padrões geométricos que evidenciassem matrizes que contivessem variados casos de Simetria, possíveis de serem explorados pedagogicamente nas aulas de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental.

Tomando como base o objetivo geral estabelecido para a pesquisa, nosso foco passou a ser as ações que corroborariam para seu alcance. Entendemos, porém, que tais ações deveriam ser orientadas de acordo com os seguintes objetivos específicos:

- Investigar sobre as evidências do pensamento simétrico em algumas culturas, com base em princípios estruturalistas;
- Conectar conhecimento cultural e matemático escolar, tendo como pano de fundo imagens de artefatos socioculturais e os casos de Simetria ensinados nos anos finais do Ensino Fundamental;

- Problematizar o ensino de Simetria a partir da literatura especializada mostrando os pontos de convergências e divergências de suas abordagens em pesquisas, documentos oficiais e livros didáticos de matemática;
- Elaborar propostas de Unidades Básicas de Problematização (UBP), apresentando-as como subsídios didáticos e pedagógicos, a serem incorporados pelo professor de matemática, para o ensino de Simetria nos anos finais do Ensino Fundamental.

Para alcançar os objetivos propostos, foi necessário estabelecer bases teóricas que sustentassem nossos argumentos centrais. Para tanto, buscamos apoio teórico nas ideias de Claude Lévi-Strauss (2012) a respeito da existência de uma estrutura da universalidade do pensamento humano e de uma matriz invariante nas culturas, as quais relacionamos ao pensamento simétrico presente em algumas culturas. Nos fundamentamos, ainda, em Mendes (2012, 2013, 2014) e Farias e Mendes (2014), para melhor compreender e justificar a conexão entre matemática escolar e práticas socioculturais, bem como em Almeida (2010) que advoga a favor da religação entre os saberes culturais e científicos, tomando como ponto de partida para uma reorganização do ensino. Assim, consideramos possível estabelecer conexões entre as evidencias socioculturais presentes nos artefatos explorados e os casos de Simetria a serem abordados pedagogicamente nos anos finais do Ensino Fundamental.

Ressaltamos, porém que esta pesquisa foi realizada a partir de fontes empíricas primárias e secundárias, e fundamentada em alguns trabalhos já feitos por pesquisadores como os citados anteriormente. Trata-se, portanto, de uma pesquisa bibliográfica, que contou, também, com a produção de dados *in loco*, materializados nas fotografias produzidas e utilizadas na análise dos casos de Simetria a serem problematizados para uso nas aulas de matemática.

Durante a produção dos dados, que entendemos como a sua organização e tratamento, buscamos produzir evidências que conectassem os artefatos socioculturais estudados aos casos de Simetria e, que pudessem dar suporte à elaboração de atividades de ensino, com vistas a propiciar uma aprendizagem mais efetiva pelo estudante dos anos finais do Ensino Fundamental. Neste sentido, buscamos não, apenas, verificar quais padrões geométricos são visualizados nas imagens dos artefatos, mas, também, fazer sua conexão com os casos de Simetria e com o ensino de tal conceito no referido nível de ensino.

A questão central que nos propusemos a responder com a pesquisa é predominantemente aberta e os objetivos que buscamos alcançar visaram apontar para uma educação matemática que sustente o ensino de matemática nos elementos da cultura humana em geral. As características da produção de informações, das questões e dos objetivos apontam, para os princípios da pesquisa qualitativa que é a abordagem predominante neste trabalho.

A base epistemológica que adotamos se pautou na investigação e na problematização do conhecimento matemático. Neste sentido, entendemos que a investigação deve ser tomada como um princípio educativo a ser estabelecido desde os anos iniciais até o ensino superior, pois, fomenta o desenvolvimento do espirito inquiridor e pesquisador do estudante lhe imputando habilidades como aprender a aprender e aprender a buscar o conhecimento com dedicação e autonomia, tal como assevera Mendes (2016). A problematização, por sua vez, confere ao conhecimento matemático o caráter intrigante, desafiador, tão valorizado por estudantes, de forma especial os mais jovens, além de possibilitar o estabelecimento de múltiplas conexões entre a matemática e outros temas (MIGUEL; MENDES, 2010).

Seguir essas duas perspectivas epistemológicas, investigação e problematização, nortearam nossas ações no decorrer do planejamento, execução e análise das informações, transversalizadas em todas as etapas da pesquisa. Foram fundamentais na produção e na análise de informações, tendo em vista que “o método tem sua relevância no sentido de organizar e tratar os dados construídos de forma a se conhecer algo ainda não conhecido”, ou seja, de se produzir um conhecimento novo aqui materializado na constatação de que há elementos nos artefatos socioculturais que se conectam à Simetria e podem servir como matrizes para o ensino desse assunto no Ensino Fundamental por meio de atividades de problematização desse conteúdo (SANTOS, 2012, p. 25).

Dessa forma, os principais procedimentos realizados para que os objetivos fossem alcançados foram: pesquisa documental, bibliográfica, e de imagens, observação analítica das imagens dos artefatos, visitas ao *lócus* de alguns artefatos, e principalmente uma incessante bricolagem[3] no tratamento das imagens materializada em um recorte/cole que consistiu em marcações, indicações, montagem, desmontagem, substituição... experimentos que iam sendo testados sem

[3] Trabalho com as mãos onde se utiliza de elementos que dispensam um plano pré-concebido (Lévi-Strauss, 2012).

se ter certeza de seu sucesso, mas, que se concretizaram em um bloco de imagens bastante extenso e de fundamental importância para a compreensão da proposta deste estudo.

Tais procedimentos foram operacionalizados durante a pesquisa e se organizaram por meio das seguintes etapas:

a) Pesquisa documental e bibliográfica

Sabemos que a pesquisa acadêmica demanda uma extensa e rigorosa produção de dados, por isso, iniciamos com a pesquisa documental/bibliográfica que foi de fundamental importância, pois ela nos permitiu reunir informações importantes para discutir a problemática abordada e apontar desdobramentos da mesma. Esta ação se deteve na documentação indireta, para a obtenção de dados primários e secundários.

Nesse momento, nossos ambientes de pesquisa foram as bibliotecas da UFPA, livrarias, banco de teses e dissertações de várias universidades brasileiras e da CAPES, portal da Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM, portal do MEC/ENEM, Portal da SEDUC/PA, sites de revistas e periódicos nacionais e internacionais, base de dados SciELO[4] e base de dados ERIC[5]. Elegemos como critérios de seleção dos textos a relação direta com o tema, a procedência de tais trabalhos e o nível de envolvimento dos autores com a comunidade científica e sua aceitação na mesma

b) Pesquisa por imagens dos artefatos

Tendo em vista que nossa pesquisa se utiliza de fotografias dos artefatos estudados (e não da observação do artefato), para fazer a análise proposta nos objetivos, fizemos inicialmente uma busca por imagens em alguns sites de internet e em um segundo momento, decidimos utilizar, também, fotografias feitas por nós *in loco* o que nos aproximou mais da temática de pesquisa. Assim, visitamos alguns locais para fazer tais fotografias. Utilizamos uma câmera de celular para capturar as imagens. As visitas ocorreram no município de Ponta de Pedras[6] e Belém do Pará[7], tendo como objetivo capturar imagens dos artefatos que utilizamos na pesquisa.

[4] Scientific Electronic Library Online
[5] Education Resources Informtion Center
[6] Cidade localizada no Arquipélago de Marajó ao Norte do estado do Pará, onde sou professor de matemática da Educação Básica desde 2008.
[7] Capital do Estado do Pará localizado no Norte do Brasil.

Alguns locais visitados foram: centro histórico de Belém[8], feira do Ver-o-Peso em Belém, Secretaria de Cultura de Ponta de Pedras e ateliê do artesão Ailson.

c) Seleção, tratamento e análise das imagens

Selecionamos imagens com potencial para fornecer o maior número de dados possíveis para a análise e para a elaboração das atividades didáticas. Procedemos a análise das imagens buscando as conexões com a Simetria e com os pressupostos teóricos estabelecidos. O tratamento e a análise das imagens ocorreram durante toda pesquisa, pois elas ocupam papel central no desenvolvimento do estudo sendo sua presença, marcante nos 4 capítulos da dissertação. Nesse momento, se fez necessário o estudo da maioria dos textos selecionados, que nos exigiu um exercício rigoroso de compreensão e raciocínio. Além disso tratar a imagem, para tornar a proposta mais clara possível, foi um trabalho braçal e intelectual que exigiu muita dedicação, tempo e persistência. Agrupamos as imagens dos artefatos por casos de Simetria.

d) Estudo de livros didáticos

No decorrer da pesquisa percebemos que seria necessário fundamentar ainda mais nossa proposta de ensino de Simetria por meio de um estudo de livros didáticos de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, para identificar os casos de Simetria, suas abordagens e estabelecer, então, pontos de divergências e convergências entre as abordagens propostas pelos documentos oficiais, pelas pesquisas brasileiras sobre a temática e pelos livros didáticos. A partir desse estudo, elaboramos atividades didáticas complementares ao livro didático, visto que ele é distribuído e usado nos sistemas educacionais de todo o Brasil.

e) elaboração de atividades

Diante das informações produzidas, e com base nos fundamentos teóricos e metodológicos da pesquisa, elaboramos 13 atividades para o ensino de Simetria para os anos finais do Ensino Fundamental, com base na utilização de Unidades Básicas de Problematização (UBP), conforme foram propostas por Miguel e Mendes (2010), objetivando fundamentar um ensino de Simetria por meio da problematização, tendo como um dos princípios dessa ação didática, a investigação em sala de aula, conforme salienta Mendes (2009).

[8] Região da cidade que compreende os bairros da Campina e Cidade Velha. Fonte: http://portal.iphan.gov.br. Acesso em 03/05/2017.

Na intenção de formalizar e sistematizar os resultados alcançados na pesquisa, produzimos este texto dissertativo que está estruturado em: introdução, quatro capítulos e as considerações finais, conforme destacamos a seguir.

No capítulo 1, denominado *A Simetria nas culturas*, argumentamos sobre a existência de um pensamento estrutural, invariante, em diferentes culturas, mostramos que nos artefatos socioculturais esse pensamento se revela no pensamento simétrico que conecta as culturas à matemática escolar sob um enfoque estruturalista de ensino.

No capítulo 2, *Simetria: um conceito fundamental em matemática*, trazemos os casos de Simetria em estudo fazendo a análise e discussão desses casos a partir de sua conexão com artefatos socioculturais, por meio de suas imagens e da sua relação com a Simetria dos anos finais do Ensino Fundamental.

No capítulo 3, *Simetria no Ensino Fundamental* apresentamos um estudo feito sobre ensino de Simetria em teses e dissertações brasileiras, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de matemática para o terceiro e quarto ciclos e em livros didáticos de matemática, dos anos finais do Ensino Fundamental.

No capítulo 4, *Simetria por meio de UBP para o Ensino Fundamental,* propomos atividades para a sala de aula de matemática elaboradas com base nas UBP, propostas por Miguel e Mendes (2010). A intenção é oferecer aos professores de matemática (mas também de outras disciplinas) uma proposta de trabalho diferenciada que, poderá redimensionar sua prática docente e elevar o nível de aprendizado de seus estudantes.

Por fim apresentamos nossas considerações finais, nas quais apontamos as principais contribuições desta pesquisa para a o ensino de matemática na Educação Básica, para a área de concentração Educação Matemática e para a formação de professores de matemática (inclusive dos autores).

Com base no que foi mencionado no decorrer desta introdução trataremos, a seguir, da apresentação do texto dissertativo, inicialmente pelo capitulo 1, no qual discorremos sobre as bases filosóficas do pensamento simétrico, a fim de mostrar como ele se materializa em artefatos socioculturais de algumas culturas no sentido de provocar pensamentos e reflexões sobre o ensino e a aprendizagem matemática na Escola Básica.

1 A SIMETRIA NAS CULTURAS

Este capítulo discorre sobre as evidências do pensamento simétrico em algumas culturas, para enfatizar formas de materialização desse pensamento, expressadas nos artefatos produzidos em diversas práticas socioculturais registradas no estudo. Tal ênfase está argumentada na premissa afirmativa acerca da existência de um pensamento estrutural com tendência unificadora, que evidencia padrões recorrentes e convergentes em culturas diversas. De acordo com pressupostos estabelecidos por autores como Claude Lévi-Strauss (2012) e Piaget (2003), há uma relação de convergência de princípios lógico-matemáticos na formulação desse modelo de pensamento, que se materializa nas representações concretas efetivadas para expressar as maneiras de olhar as coisas do mundo e elaborar um pensamento que explicite os modos de ver, ler e explicar como as coisas parecem ser.

É sobre essas relações entre esses modos de exercitar o pensamento e criar matrizes de explicitação por meio de múltiplas linguagens, na perspectiva de estabelecer conexões *artefato-mentefato*, tal como propõe D'Ambrosio (1998), que nos propomos a exercitar nesse trabalho a escrita de sugestões que apontem na direção de um ensino de matemática, especificamente sobre o ensino de Simetria, para o nível fundamental, fundamentados nessas ideias, corroboradas por Almeida (2010), Mendes (2014) e Farias e Mendes (2014) em seus trabalhos.

1.1 Pensamento simétrico expresso nas práticas culturais de algumas sociedades

A aventura humana no planeta Terra remonta aproximadamente há 5 milhões de anos. Nesse tempo, considera-se que os ancestrais do homem passaram por um longo processo de evolução que resultou na extinção da maioria dos hominídeos, reduzidos a restos fósseis e na sobrevivência de uma única espécie do gênero *homo,* denominada *homo sapiens,* e da variedade, *sapiens, sapiens* que teria vivido por volta de 35.000 a 10.000 (a.C.). Nesse processo evolutivo a espécie enfrentou vários obstáculos: glaciações, luta feroz contra animais selvagens, escassez de alimentos, abrigos etc. que contribuíram para o seu desenvolvimento tanto biológico quanto cultural (MARCONI; PRESOTTO, 2011).

Nesse contexto, surgem as primeiras manifestações culturais do homem (Pleistoceno 2 milhões a 10.000 a.C.), pois devido a necessidade de sobrevivência, desenvolveu, de forma *intencional*, instrumentos de pedra, osso e madeira, pele de animais, metal e etc. que ao longo dos tempos, foram sendo aperfeiçoados, com o intuito de exceder os limites do corpo e potencializar suas capacidades. A produção de instrumentos e técnicas culmina no surgimento das primeiras manifestações artísticas do homem a partir do Paleolítico Superior (40.000 a 12.000 a.C.). Práticas de modelação, esculturas e gravuras se materializam em cerâmicas, em estatuetas, como as de vênus[9] e em pinturas rupestres encontradas em algumas regiões do mundo, inclusive no Brasil (MARCONI; PRESOTTO, 2011).

Desde as primeiras manifestações culturais e artísticas da espécie, é possível observar que há uma preocupação com a beleza e com a estética[10]. Isso pode ser constatado, por exemplo, nas pinturas rupestres e corporais, na arte plumária e na cerâmica indígenas nas quais é possível perceber uma preocupação com a organização e harmonização dos elementos que as compõem. Essa preocupação pode ser compreendida como resultado da busca do homem por compreender o mundo que o cercara, o que se materializa nos artefatos socioculturais por ele produzidos. A esse pensamento, por meio do qual o homem interage com o meio, objetivado/materializado nos artefatos e que exprime uma exigência de organização e de beleza chamaremos de pensamento simétrico.

A materialização do pensamento humano revela sua origem comum *(homo sapiens, sapiens)*, pois embora haja manifestações de uma ampla variedade de culturas e de artefatos socioculturais na organização e dinamização dos espaços sociais, é possível perceber características que remetem a uma maneira similar de pensar e organizar suas estruturas, o que converge para um padrão de pensamento. Isso é possível de ser constatado, por exemplo, na observação da estrutura de composição gráfica de adornos corporais como tatuagens e pinturas, dos ornamentos das cerâmicas, dos mosaicos de azulejos decorados como os islâmicos, das cestarias africanas, em que é comum a recorrência de determinados padrões geométricos[11], cujas formas são deslocadas ao longo de toda a superfície do artefato, por meio de algum tipo de movimento.

---

[9] Estatuetas femininas de pequenas dimensões (medindo de 6 cm a 46 cm de altura) feitas de pedra, marfim e osso. Sua origem data de 40.000 a 12.000 a. C (Vídeo Arte da pré-história – estatuetas de vênus. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=zjbqEdGNw5M. Acesso em 03/08/2017).

[10] A estética é o que distingue o objeto artístico das demais manifestações culturais (MARCONI; PRESOTTO, 2011).

[11] O termo padrão geométrico aqui representa toda estrutura gráfica que se repete nos artefatos estudados. Se trata de uma repetição previsível de uma determinada estrutura.

Para mostrar a materialização desse pensamento expressado em práticas socioculturais, aqui denominado de pensamento simétrico, exploramos as imagens referentes a alguns artefatos das culturas *africana, islâmica e brasileira*, cuja escolha se justificou pelo fato de que é marcante nesses ornamentos o uso intensivo de padrões geométricos para criar uma expressão estética e por normalmente estarem diretamente relacionados às principais matrizes étnicas que originaram esses grupos culturais como o brasileiro, o que ocorreu por meio de um processo de miscigenação, iniciado antes mesmo da chegada dos colonizadores ao Brasil em 1500, com a vinda do povo africano, logo em seguida, trazidos como escravos e do seu encontro com os indígenas que aqui já estavam (O POVO BRASILEIRO , 2000).

Neste capítulo a cultura islâmica é tomada como um dos elementos de comentários e reflexões por fazer parte das origens do povo europeu, que tiveram parte de seu território invadido pelos povos árabes por volta do ano de 711, contribuindo de forma contundente com a formação da cultura lusa, trazida para o Brasil pelo colonizador a partir do século XVI. Do mesmo modo, neste capítulo veremos a cultura das formas geométricas decorativas brasileiras, já conjugada com as expressões já presentes nos azulejos históricos de Belém do Pará, nas suas conexões com os islâmicos, inserindo posteriormente as formas geométricas originadas na pintura corporal indígena e na cerâmica decorativa como a marajoara (O POVO BRASILEIRO , 2000).

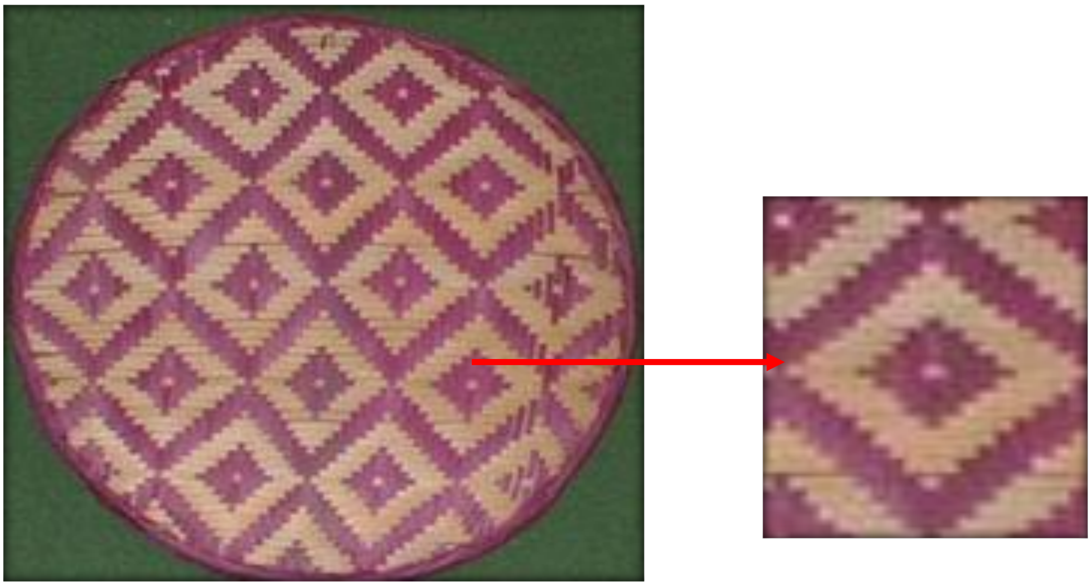
Na cultura africana

A cultura dos povos africanos é uma das mais ricas e diversas dentre as muitas culturas que contribuíram para a composição do nosso cenário cultural. Suas práticas sociais como a produção de artesanato, a pintura corporal, a dança, a maneira de se vestir, a caça e a pesca, se olhadas atentamente, revelam sua maneira de pensar. Destacamos a produção de artesanato e a pintura corporal como meios de expressão do pensamento desse povo.

Lançamos mão, então, da pesquisa do Matemático holandês Paulus Gerdes (1952-2014) que ao longo de vários anos viveu em Moçambique, na África, e desenvolveu um trabalho objetivando resgatar a cultura e a autoestima do povo moçambicano, ora destruídas pela dominação e subjugação impostas pelo colonizador. Desse trabalho destacamos as pesquisas sobre as cestarias produzidas por mulheres moçambicanas da província de Inhambane, no sudeste do país, falantes da língua Tonga[12], cuja marca principal (técnica) é a utilização, nos seus entrançados, de tiras claras e escuras, que segundo Gerdes (2010b), são semelhantes ao sentido positivo e negativo de filmes fotográficos.

Numa direção, as cesteiras falantes da língua Tonga utilizam tiras naturais claras e noutra direção tiras coloridas de forma que onde se vê uma parte clara é um lugar do entrançado onde a tira clara passa sobre a tira escura, se for observada a outra face da peça, nessa mesma região vê-se uma zona escura pois é o inverso da primeira situação. Um dos exemplos das cestarias Tonga são os pratos redondos, feitos de fibras vegetais, usados para servir alimentos e também como peças de decoração retratados na Figura 1. Nela observa-se como as tiras, de duas cores, se entrançam formando a estrutura do prato e seu ornamento (GERDES, 2010b).

Figura 1 – Cestaria Tonga.



Fonte: Google imagens. Acesso em 13/12/2016

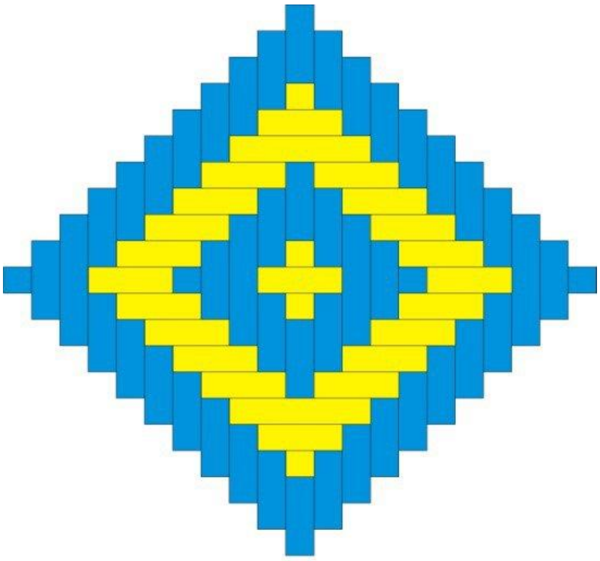
É possível perceber que há, no prato Tonga, pelo menos um padrão geométrico em vários locais de sua superfície. Destacamos esse padrão para que seja melhor visualizado, bem como o movimento por ele executado. Esse movimento de deslocamento do padrão pode ser percebido se considerarmos as direções vertical, horizontal e diagonal. As dimensões de cada padrão geométrico são próximas e, se for construído um molde da peça, esse deslocamento se dará de forma a conservar tais dimensões e distâncias entre eles. A figura 2 retrata uma recriação do padrão

---

[12] Gerdes pesquisou por mais de 30 anos a cestaria produzida pelas mulheres Tonga (GERDES, 2010).

original, presente na figura 1, encontrado por Gerdes (2010b), nas cestarias Tonga ao qual denominou mariposas. Ao movimento realizado pela mariposa no prato Tonga chamamos de deslocamento linear.

Figura 2 – Padrão geométrico mariposa.



Fonte: Google imagens. Acesso em 13/12/2016

A presença do pensamento simétrico é percebida, também, nas pinturas corporais africanas. As pessoas que pertencem a comunidades tradicionais desse continente fazem desenhos por todo o corpo marcando, literalmente, o seu povo e os identificando de acordo com suas crenças e costumes. Utilizam-se de tintas produzidas com elementos da natureza como frutos e argila e dos dedos para fazerem as pinturas que são carregadas de significados e, geralmente, utilizadas para simbolizar os ritos de passagem e a hierarquia dentro dos grupos sociais.

Na figura 3 destacamos o rosto de uma pessoa que parece ter uma pintura em duas etapas: uma base avermelhada e, sobre esta, desenhos em cor branca que se espalham por toda a face. O padrão pode ser percebido se for observado cada lado do rosto tendo como base a linha pontilhada que desce desde a testa até o nariz podendo ser imaginado pelo observador o seu prolongamento até o queixo. Essa linha serve de referência para que se perceba um padrão de desenho, principalmente, nos olhos e na testa da pessoa.

Figura 3 – Pintura corporal africana.

Fonte: Google imagens. Acesso em 13/12/2016.

O uso de padrão na pintura corporal africana pode ser melhor percebido se um espelho for colocado sobre a figura, exatamente, na posição da linha central. Comparando a figura ao seu reflexo no espelho poderia se chegar à conclusão de que o reflexo da figura contida em um dos lados do rosto é semelhante[13] à figura do outro lado. Esse mesmo fato pode ocorrer, se a figura for dobrada ao longo dessa linha. Cortando a imagem ao longo do eixo vertical posto sobre a linha pontilhada da pintura, percebe-se que nos dois lados do rosto as pinturas são semelhantes. Chamamos, inicialmente essa característica (movimento) de reflexo, por ser comparada ao reflexo produzido no espelho.

A pintura corporal e as cestarias africanas, são apenas dois exemplos de artefatos socioculturais, dentre muitos, que refletem a forma de pensar das populações desse continente e a sua vontade de expressar o pensamento simétrico. Reiteramos que a relevância da cultura africana neste trabalho está no fato de ser uma cultura na qual esse pensamento está presente de forma explicita (como demonstramos no trabalho com as figuras) e por ser uma das matrizes da formação do povo brasileiro no qual seus traços (ressignificados) permanecem vivos, perpetuando essa marca na cultura do Brasil.

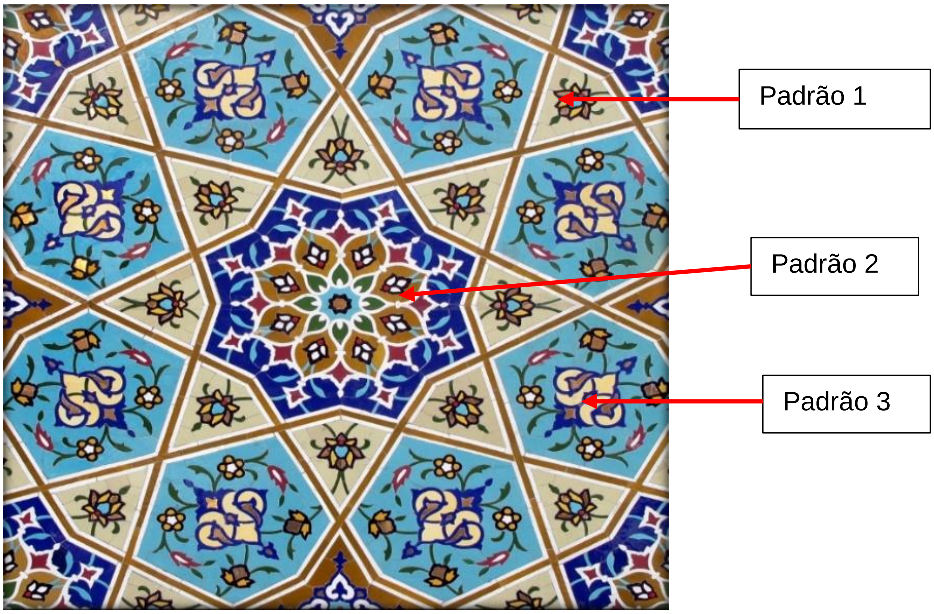
---

[13] Ao longo deste capítulo usamos o termo semelhante. Não nos referimos ao conceito de semelhança da matemática, mas à semelhança no sentido de as figuras terem uma forma aproximadamente iguais.

Na cultura Islâmica

Os países de cultura islâmica como Iran, Índia, Afeganistão, Turquia, entre outros, trazem em sua cultura, vários elementos que são oriundos de práticas sociais antigas como a confecção de cerâmicas e a arquitetura. Prédios antigos como as mesquitas islâmicas têm suas cúpulas e paredes decoradas com azulejos, que formam mosaicos coloridos de diferentes formas e tamanhos. Essa arte, decorativa dos azulejos, tem sua origem na arquitetura assíria, babilônica e aquemeni (do Iran antigo) e é considerada uma das práticas marcantes da cultura islâmica[14]. Isso pode ser visualizado na figura 4 que retrata parte de um mosaico formado por azulejos decorativos. É possível observar que há vários padrões geométricos compondo o ornamento do mosaico.

Figura 4 – Mosaico Islâmico



Fonte: Google imagens[15]. Acesso em: 13/12/2016.

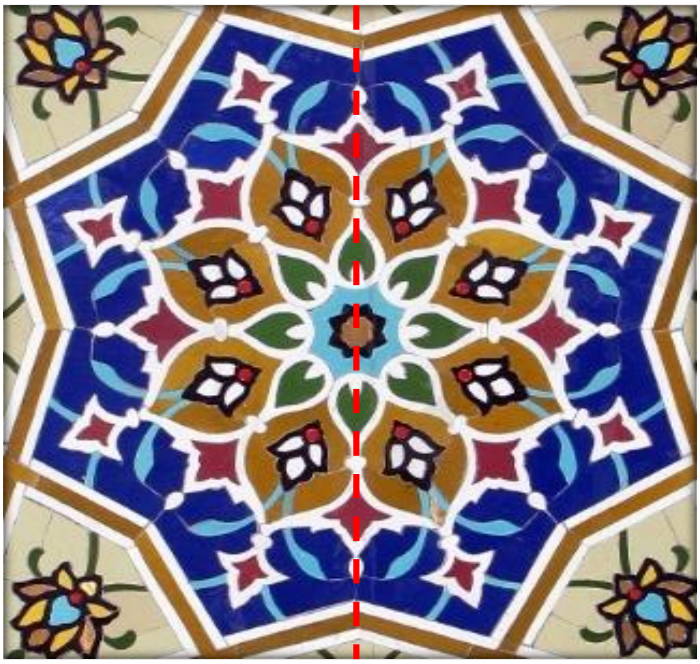
Destacamos três padrões (1, 2 e 3) dentre os que podem ser visualizados na figura. Esses padrões em destaque, que se deslocam por todo o ornamento, servem de base para a compreensão do movimento que realizam na composição do ornamento maior que, a depender da observação, pode variar entre giros em torno de um ponto e espelhamentos em relação a um determinado eixo.

[14] Fonte: Fundação Cultural Oriente. www.islamoriente.com. Acesso em 07/07/2017.
[15] Disponível em: http://fotografia.islamoriente.com/pt-br/content/mosaico-e-azulejos-utilizados-na-decora%C3%A7%C3%A3o-de-mesquitas-uma-arte-isl%C3%A2mica-e-persa-kashi-kari. Acesso em: 07/07/2017.

Considerando o padrão 2 (figura 5), percebe-se que se assemelha a uma flor ou estrela com oito pontas, desde o centro até a parte mais externa. Se traçássemos um círculo circunscrevendo essa figura, ela o tocaria em oito pontos, dividindo-o em oito arcos de mesma medida em graus (45º). Girando a figura em torno do seu centro sob esse ângulo de 45º ou um de seus múltiplos (0º, 45º, 90º, 135º 180º, 225º, 270º, 315º ou 360º), a figura obtida será semelhante à figura original.

Como a figura 5 tem a forma próxima a de um quadrado, o giro pode ser de 90º ou um de seus múltiplos e, ainda assim serão originadas figuras semelhantes. Essa mesmo fato ocorre com o mosaico completo (figura 4) que sob um giro de 90º ou um de seus múltiplos (90°, 180º, 270º e 360º) dará origem a figuras semelhantes ao mosaico inicial. Inicialmente, chamamos esse movimento de giro.

Figura 5 – Padrão 2 da figura 5



Fonte: Google imagens. Acesso em: 13/12/2016.

Ainda no padrão central, é possível observar que, traçados eixos sobre a imagem, na horizontal, na vertical ou na diagonal, as partes originadas pelo corte do eixo na figura, são o reflexo uma da outra. Observe na figura 5 como as figuras originadas com o corte são refletidas no eixo central que faz o mesmo efeito de um espelho. Fazendo uma observação bem atenta, a cada detalhe das figuras, pode-se perceber que todos os elementos que estão de um lado do eixo, também, são encontrados no lado oposto.

Observando agora os padrões 1 e 3 destacados na figura 4, percebe-se que eles seguem a mesma construção do padrão 2, pois traçados eixos sobre eles, como indicado na figura 6, as duas “metades” originadas são o reflexo uma da outra em relação ao eixo. Se essas figuras forem dobradas ao longo do eixo, possivelmente irá ocorrer a sua sobreposição como se fossem uma única figura visto que cada par de pontos correspondente do ornamento, estão a uma mesma distância do eixo.

Figura 6 – Reflexo nos padrões 1 e 3.

Fonte: Google imagens. Acesso em: 13/12/2016.

O uso dos padrões no mosaico estudado, também pode ser conectado ao movimento de deslocamento linear da figura, que ocorre quando esta se desloca sobre uma reta em um determinando plano, pois os padrões 1 e 2 percorrem todo o ornamento do mosaico, se deslocando em diversas direções. Assim, tomando como exemplo o mosaico estudado pode-se perceber, pelo menos três tipos de movimentos que concorrem para a formação da sua estrutura gráfica, quais sejam: o reflexo a partir de um eixo, o giro em torno de um ponto central e o deslocamento sobre uma reta. Em suma, esses movimentos caracterizam o pensamento simétrico do povo islâmico já que esse mesmo pensamento pode ser observado em outros artefatos de sua cultura.

Na cultura Brasileira

Muitos estudos históricos, arqueológicos e antropológicos apontam que a cultura brasileira foi constituída a partir de uma dinâmica do encontro cultural no qual é forte o indicativo da fusão de culturas como a lusa, a africana, vinda com os povos escravizados pelo colonizador, e as diferentes culturas dos povos indígenas brasileiros, que aqui já se encontravam antes da chegada dos colonizadores. Dentre os artefatos dessa cultura plural, selecionamos os azulejos históricos de Belém, a cerâmica marajoara e a pintura corporal indígena dos Pataxó.

Do patrimônio cultural de Belém do Pará podemos destacar o centro histórico formado por um conjunto arquitetônico colonial composto por igrejas, resquícios de construções as margens do Rio Guamá, prédios com fachadas decoradas por azulejos portugueses como a Casa do Ferro de Engomar e o Palacete Pinho, dentre outros[16]. Em nossa pesquisa focalizamos imagens de prédios, com fachadas azulejadas decoradas, diretamente relacionadas ao tema de estudo – expressão do pensamento simétrico, que evidencia uma herança cultural que percorreu um longo caminho, mas que se mantem viva na atualidade.

Figura 7 – Azulejos decorados no Palacete Pinho.

Fonte: Acervo do autor

Na figura 7 tem-se uma parte da frente do prédio escolhido – o Palacete Pinho, localizado à Rua Dr. Assis nº 586 no Bairro Cidade Velha. Seus azulejos têm uma riqueza de detalhes na decoração que nos chamou atenção. Destacamos as paredes do Palacete e a sua imagem ampliada onde é possível visualizar os detalhes dos ornamentos. Os azulejos menores se agrupam em 4, formando um pequeno mosaico e estes formam um grande mosaico que corresponde à parede do prédio.

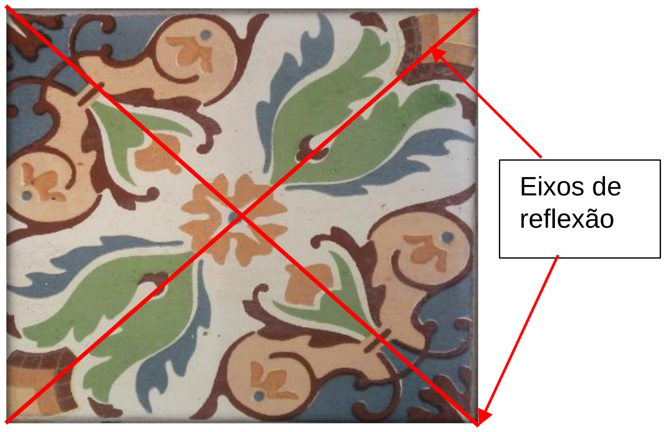
Nesse mosaico maior pode-se visualizar vários padrões geométricos que compõem o seu ornamento se deslocando pela superfície plana. Dentre esses, há

[16] Informações obtidas pelo Autor em visita ao centro histórico de Belém em julho de 2016.

dois, pelo menos, que estão por toda a parede do Palacete se deslocando nas direções horizontal, vertical e diagonal.

Para visualizar com mais cuidado e compreender a composição do ornamento do Palacete, consideramos três padrões geométricos: padrão 1, formado por um único azulejo, padrão 2, formado pelo agrupamento de 4 azulejos e padrão 3, que se origina pelo agrupamento de vários padrões do tipo 2, isso para dizer que a estrutura básica para a formação do ornamento como um todo é um azulejo que chamamos de padrão 1 presente na figura 8.

Figura 8 – reflexão e rotação em azulejo

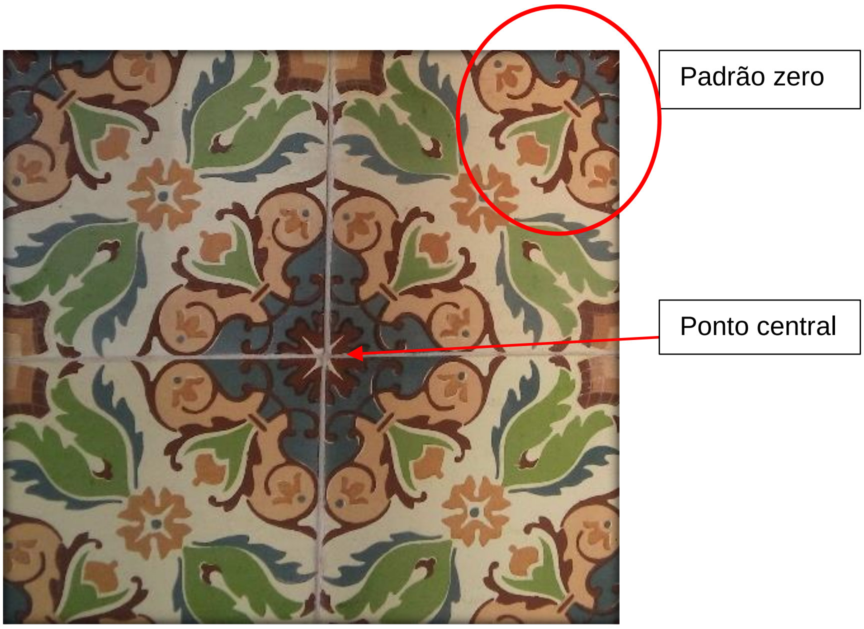


Fonte: Acervo do autor

Para analisarmos o seu ornamento, traçamos dois eixos sobre o azulejo, sobre as suas diagonais, a partir das quais se conclui que as partes determinadas pelas retas são o reflexo uma da outra em relação à esta. Como se trata de figuras planas, a semelhança entre as partes é bem visível.

O agrupamento de 4 padrões do tipo 1 forma o padrão 2 da figura 9. Esse padrão é um mosaico cujo ornamento é composto pelo deslocamento do azulejo menor. O deslocamento pode ocorrer pelo giro da figura em torno de um ponto central. E, por se tratar de um quadrado, cada giro será feito sob um ângulo de 90º ou um de seus múltiplos, para que as figuras se sobreponham. Destacamos o padrão que se encontra bem próximo de cada vértice do quadrado que serve de referência ao movimento proposto. O chamaremos de padrão zero.

Figura 9 – Mosaico do Palacete Pinho.



Fonte: Acervo do autor

Fazendo uma observação mais atenta do padrão 2, percebe-se que ele pode ser formado, também, a partir da reflexão no eixo. Colocamos sobre o padrão, na figura 10, retas para evidenciar a composição do mosaico por reflexão e pelo deslocamento do padrão zero.

Figura 10 – Reflexão em azulejo do Palacete Pinho.

Fonte: Acervo do autor

Dessa forma, o ornamento do mosaico poderia ser descrito da seguinte forma: o padrão zero sofre 4 reflexões sucessivas em relação as diagonais e origina o padrão 1. Este, por sua vez é refletido por 4 vezes, em relação aos eixos horizontais e verticais e origina o padrão 2 que chamamos de mosaico. Este, se desloca por toda a parede sobre retas horizontais, verticais e diagonais compondo o ornamento das paredes do Palacete Pinho (figura 7).

Por meio da observação feita até aqui, percebemos que, considerando um único azulejo, o mosaico formado por quatro deles ou o mosaico maior formado pela parede do prédio, tem-se uma preocupação com a estética, beleza e harmonia, de quem pensou os azulejos, e a sua finalidade decorativa. É a expressão do pensamento simétrico ao qual nos referimos e que identificamos nos artefatos estudados.

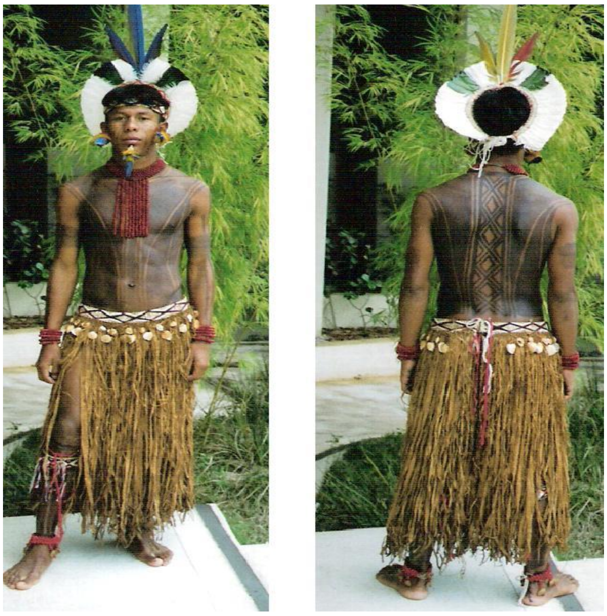
Vale ressaltar que este artefato é fruto das influências árabes, pois os mouros migraram para a península ibérica por volta de 711 e lá ficaram por mais de 800 anos e, mesmo depois de sua "expulsão[17]", seus traços culturais permaneceram vivos, imbricados na cultura daquela região sendo trazidos para o Brasil na memória dos portugueses por ocasião do processo colonizatório. Quando os portugueses se instalaram no Brasil e construíram suas moradias, prédios comerciais, dentre outros, buscaram tais azulejos para decorá-los e os trouxeram de Portugal, mais também de países como Alemanha e Inglaterra, como é o caso dos azulejos decorativos dos palacetes construídos em Belém do Pará. (O POVO BRASILEIRO, 2000).

Para perceber com mais nitidez tal influencia, basta observar os azulejos islâmicos e os de Belém do Pará, para concluir que os mosaicos formados por ambos obedecem aos mesmos movimentos, pois são furtos da mesma forma de pensar. Fizemos questão de colocar as duas culturas para mostrar como essas influências culturais vão sendo passadas de um povo a outro, se resignificam, mas mantêm um ponto em comum que é uma preocupação com a beleza refletida por um tipo de pensamento característico que se materializa em seus artefatos que aqui chamamos de pensamento simétrico.

[17] Colocamos expulsão entre aspas para dizer que, depois de mais de 800 anos de permanência do povo árabe na península, seria quase impossível sua expulsão do ponto de vista cultural, pois seus traços culturais já tinham se misturado de tal forma aos da cultura lusa que passaram a fazer parte integrante dela.

Da mesma forma que os azulejos, a pintura corporal indígena, apresenta elementos que a conectam ao pensamento simétrico. A prática sociocultural de pintar o corpo faz parte da cultura de diversas etnias indígenas brasileiras e retrata elementos simbólicos e estéticos exibidos durantes as festas e rituais. São geralmente usadas em rituais e cerimônias e têm inspirações diversas como, por exemplo, as cores e desenhos presentes nos animais da floresta. As tintas são obtidas de frutos como urucum e jenipapo e da argila. Em épocas remotas, os Tupi, que aqui já estavam em 1500, utilizavam sangue de pássaros e rãs misturados a gorduras de peixes para produzir cores amareladas por meio de um processo que chamavam tapiragem. (MARCONI; PRESOTTO 2011, p. 207).

Figura 11 – Pintura corporal indígena.



Fonte: Campos (2007, p. 21).

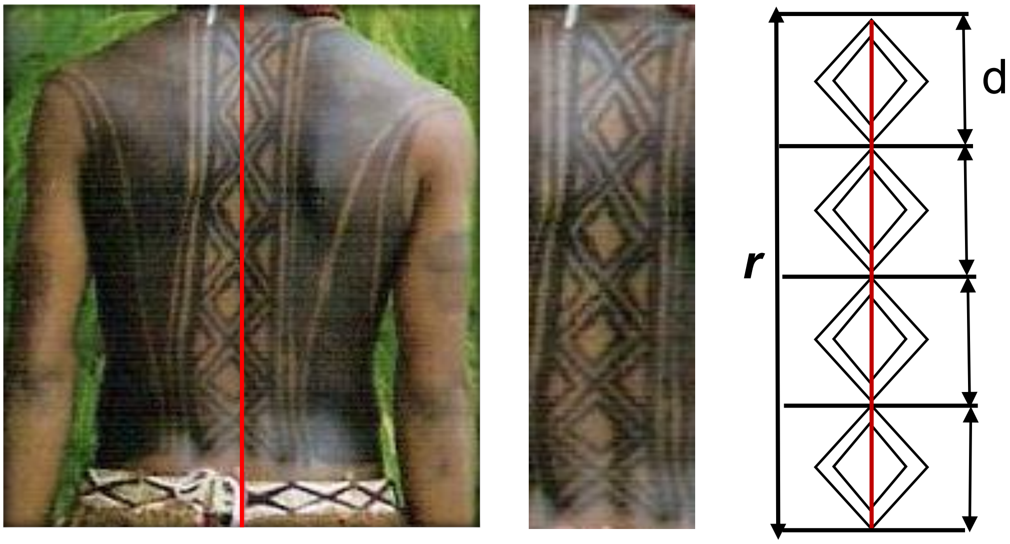
Na figura 11 temos a pintura de um índio pataxó[18], observando-a, percebe-se que todo o tronco do indígena está pintado, mas, para nosso estudo, consideramos, apenas, a parte que fica nas costas do indígena por ser mais rica de detalhes. A tinta usada tem cor escura, provavelmente, feita à base de jenipapo, do qual se extrai um liquido de cor semelhante. A pintura apresenta um detalhe central nas costas do indígena que parece com o trançado das cestarias produzidas por algumas sociedades.

---

[18] Os Pataxó vivem no extremo Sul do Estado da Bahia, em 36 aldeias, e no estado de Minas Gerais distribuídos em sete comunidades. Fonte: https://pib.socioambiental.org/pt/povo/pataxo/2303. Acesso em 05/05/2017.

Como as costas de uma pessoa não é uma superfície plana, a pintura apresenta imperfeições, no entanto, nossa intenção é encontrar nela elementos de ligação com o pensamento simétrico estabelecido na cultura indígena. Para isso, colocamos sobre a foto um eixo vertical e percebemos que ela se aproxima da reflexão no eixo identificada por nós nos artefatos que já estudamos. Tanto na coluna central quanto na parte mais externa da pintura, percebe-se uma semelhança entre as duas figuras originadas a partir do eixo vertical.

Figura 12 – Uso de padrão na pintura indígena



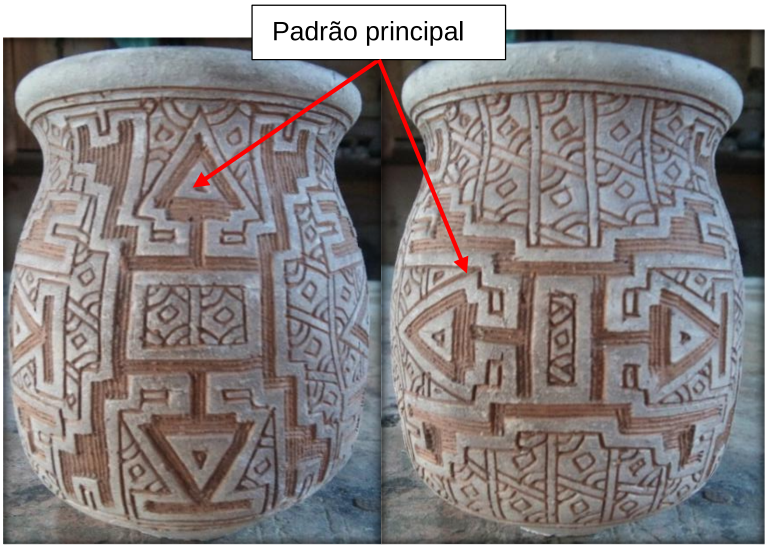
Fonte: Adaptado pelo autor de Campos (2007, p. 21).

Considerando apenas a faixa central da pintura, observamos que um padrão, semelhante a um losango, se desloca verticalmente por toda a faixa. Para melhor visualizar esse deslocamento, fizemos um molde da faixa (figura 12). Nele, é possível perceber, o deslocamento sobre a reta ***r*** que se dá a uma mesma distância ***d*** conservando as dimensões da figura deslocada. Esse movimento ocorre como se o padrão fosse arrastado por toda a superfície plana.

A cultura amazônica é híbrida e plural, em virtude de influências das culturas indígenas, africanas e europeia, que se conectaram, ajustaram e se transformaram no tempo e no espaço geográfico que ocuparam historicamente. Um exemplo representante dessa hibridação cultural pode ser destacado na cerâmica marajoara secular, que durante algumas décadas do século XX foi resgatada e reproduzida por artesãos da cidade de Ponta de Pedras, no arquipélago de Marajó. Essas réplicas são, portanto, o resultado da hibridação das influências das cerâmicas arqueológicas (anteriores à chegada de africanos e lusos ao Brasil) com os traços culturais trazidos para o Brasil durante a colonização.

A peça retratada na figura 13, confeccionada por um artesão de Ponta de Pedras, é uma miniatura com, aproximadamente, 10 cm de altura, mas impressiona pela riqueza de seus ornamentos. Colocamos duas imagens da mesma peça para destacar o padrão geométrico, principal, do ornamento da peça e o movimento que ele faz para compor a sua estrutura gráfica.

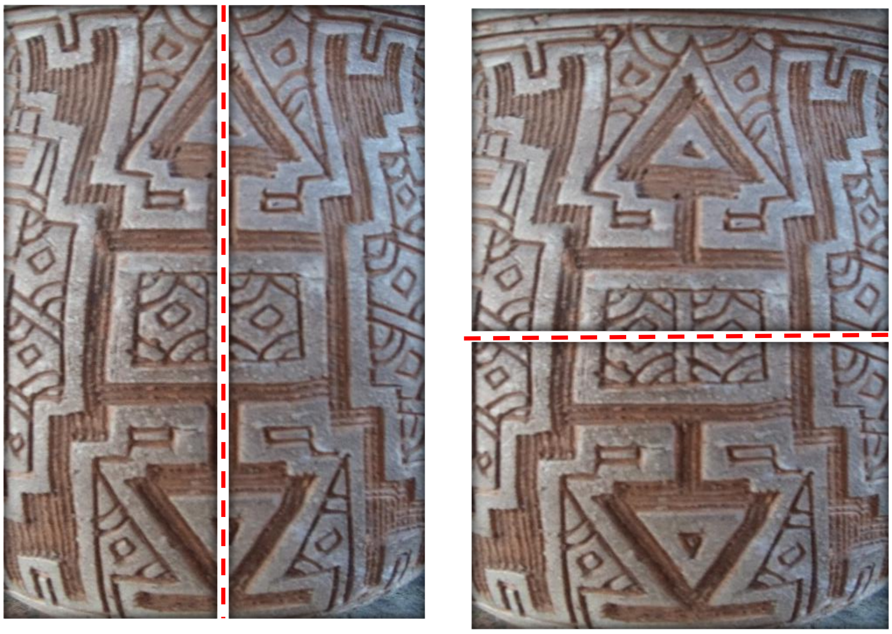
Figura 13 – Réplica da cerâmica marajoara de Ponta de Pedras



Fonte: Acervo do autor

Comparando as duas imagens, percebe-se que o padrão principal indicado sofre um giro sob um ângulo de 90º. Esse movimento se repete até que seja preenchida toda a superfície curva da peça, obtendo-se dois padrões na horizontal e dois na vertical. Se for isolado somente o padrão principal da peça e traçados dois eixos sobre ele, um na horizontal e outro na vertical, percebemos que sua estrutura de composição gráfica é construída com base no reflexo a partir da reta. O corte pode ser na horizontal ou na vertical e está indicado pela linha tracejada. Vejamos como isso ocorre na figura 14.

Figura 14 – Reflexo na cerâmica marajoara de Ponta de Pedras.



Fonte: Acervo do autor

O corte vertical dá origem a duas figuras que compõem o padrão geométrico em destaque. A observação dessas figuras, revela que os detalhes em ambas são os mesmos do ponto de vista gráfico. Se essas figuras forem postas uma sobre a outra, a sobreposição será quase perfeita. Essa mesma análise pode ser feita para o corte na horizontal.

A peça de cerâmica que retratamos aqui é um único exemplar de um número considerável de tipos de cerâmica espalhados por muitas culturas no planeta, visto que a “ocorrência de cerâmica data do Neolítico (10.000 a 4.500 a. C.) ” e se espalhou por todo o globo terrestre levadas pelas populações em suas migrações pela Terra. Nesses artefatos (nos originais ou em suas réplicas) é marcante a presença de ornamentos muito elaborados que refletem a necessidade do homem expressar seus sentimentos e ideias de objetivar seu pensamento por meio das incisões e excisões feitas na argila (MARCONI; PRESOTTO, 2011, p. 88).

Os artefatos socioculturais mencionados anteriormente revelam que por meio de uma estrutura os ornamentos geométricos são compostos, baseados em duas características principais: o uso de padrões geométricos e suas mobilizações em um sistema de eixos imaginários denominados de reflexão, de giro e de deslocamento linear. São essas características as evidências da existência de uma forma similar de pensamento nas diferentes culturas estudadas: o pensamento simétrico, que se materializa nos artefatos das culturas e imprime neles sua marca conferindo a seus elementos uma organização própria. É um pensamento que preza pelo primado da estrutura, ou seja, um pensamento que procura estabelecer padrões de convergência de um princípio generalizante de representação desse pensamento. Cabe, porém, uma questão: esse pensamento é característico apenas das culturas que destacamos? Se considerarmos outros aspectos culturais e outras culturas teremos a evidências de similaridades de pensamento?

1.2 Princípios filosóficos estruturalistas como base da evidência do pensamento simétrico nas culturas

A Antropologia Cultural, área da Antropologia dedicada aos estudos culturais do homem, aborda aspectos que se relacionam com o seu desenvolvimento cultural ao longo de sua história. Dentre estes destacamos: a organização social das populações e suas manifestações culturais materiais e imateriais, como elementos que evidenciam a presença de um pensamento similar, estrutural, mesmo se considerarmos culturas admitidas como opostas (culturas “primitivas” e cultura científica do ditos “civilizados”). Para construir nossa argumentação daremos ênfase a alguns aspectos presentes nas culturas como: a nominação/classificação de seres e elementos da natureza, o pensamento mítico/mágico, as relações de parentesco e o totemismo com seus tabus e regras que são fenômenos, praticamente, universais nas culturas.

Dar nome a pessoas, animais, plantas, fenômenos da natureza e etc. é uma das atribuições da ciência, mas não só dela! Povos espalhados por todo o globo terrestre há milênios já o fazem, se utilizam de sua linguagem, tida por muitos como primitiva, para criar nomes abstratos carregados de significados o que a torna rica do ponto de vista conceitual, pois “a riqueza de nomes abstratos não é unicamente o apanágio das línguas civilizadas”. Dessa forma a “língua primitiva” não pode ser considerada, de alguma forma menor ou inferior a outras línguas “civilizadas” (LÉVI-STRAUSS, 2012, p. 15-17).

Plantas, árvores, serpentes, pássaros, peixes, insetos, mamíferos, formigas, fenômenos da natureza, utensílios domésticos e instrumentos de caça e pesca e etc. são nominados, bem como seus usos. A partir da nominação, esses elementos são ordenados/classificados e, para isso, homens e mulheres dessas populações se utilizaram (e se utilizam) de técnicas como: “provar, cheirar, mastigar, quebrar, observar o *habitat,* o habito dos animais” seu comportamento, sua coloração, seus excrementos, suas pegadas, sua reprodução, do que se alimentam, suas migrações e etc. o que sugere uma relação muito próxima, íntima entre o homem e os seres e coisas ao seu redor (LÉVI-STRAUSS, 2012, p. 19).

Entendemos que esse conhecimento remete a uma sistematização e que foi desenvolvido não somente em função de sua utilidade prática, mas a partir de "exigências intelectuais" impostas ao homem pelo meio que o cercara, pois nem todos os resultados obtidos por esse "empreendimento verdadeiramente cientifico" são utilizáveis de forma imediata. Essa ciência desenvolvida de forma mais próxima ao mundo sensível é cercada de uma "exigência de ordem" que a aproxima das ciências contemporâneas, sendo essa exigência a essência do pensamento "primitivo" (LÉVI-STRAUSS, 2012, p. 26).

Se trata de uma ciência "primeira", conforme expressão de Lévi-Strauss, que no plano técnico é uma espécie de *bricolagem,* que ainda hoje subsiste entre nós e pode ser detectada em populações indígenas de várias regiões do mundo, como as populações indígenas da região do Xingu, no Brasil. Eles armazenam a poupa de pequi em cestos no fundo dos rios para terem, na entressafra, o alimento necessário à sua sobrevivência[19]. "Em nossos dias o *bricoleur* é aquele que trabalha com suas mãos, utilizando meios indiretos se comparados com o do artista". Ele se utiliza de elementos que dispensam um plano pré-concebido. No plano intelectual isso se manifesta por meio do pensamento mítico/mágico que é uma espécie de "bricolagem intelectual", com mecanismos não menos elaborados que os da ciência (LÉVI-STRAUSS, 2012, p. 33).

> O pensamento mítico, esse *bricoleuse,* elabora estruturas organizando fatos ou os resíduos dos fatos, ao passo que a ciência, "em marcha", a partir de sua própria instauração, cria seus meios e seus resultados sob a forma de fatos, graças às estruturas que fabricam sem cessar e que são suas hipóteses e teorias. Mas, não nos enganemos com isso: não se trata de dois estágios ou duas fases da evolução do saber, pois os dois andamentos são igualmente válidos (LÉVI-STRAUSS, 2012, p. 38).

O pensamento mítico reflete na organização social de vários povos ao redor do mundo, dentre os quais boa parte têm o totemismo como pano de fundo. Ele organiza determinada sociedade em grupos familiares com um ancestral comum (os clãs) que pode ser (ou não) um elemento da natureza como um animal ou planta. Existe,

[19] Disponível em http://agriculturapa.blogspot.com.br/2010/01/sabores-do-pequi.html. Acesso em 01/08/2017.

portanto, no totemismo uma associação entre um grupo social e o totem, mas, ela não é real, é simbólica, o que confere a esse fenômeno o caráter intelectual[20]. A relação entre mito e totemismo pode ser percebida na forma como as populações se relacionam com os animais e outros elementos da natureza, pois acreditam, por exemplo que o conhecimento sobre a natureza poderia ter sido adquirido por meio de relações conjugais entre homens e animais e/ou plantas e etc.

> Sabemos o que fazem os animais, quais são as necessidades do castor, do urso, do salmão e das outras criaturas, porque outrora os homens se casavam e adquiriam esse saber de suas esposas animais. Os brancos viveram pouco tempo neste país e não conhecem muita coisa a respeito de animais; nós estamos aqui a milhares de anos e há muito tempo que os próprios animais nos instruíram. Os brancos anotam tudo num livro, para não esquecer; mas nossos ancestrais desposaram os animais, aprenderam todos os seus costumes e fizeram com que esses conhecimentos passassem de geração em geração (JANNESS, 1943, p. 540, apud, LÉVI-STRAUSS, 2012, p. 54).

Esse tipo de organização social foi enfatizado por Lévi-Strauss (2012) por meio de exemplos encontrados em vários povos[21] e culturas dentre os quais destacamos: povos falantes da língua chinuque do noroeste da América do Norte, Hanunoo, Subanun, Pinatubo e Pigmeus das Filipinas, Índios Hopi e Navajo da América do Norte, populações da Rodésia do Norte (atual Zâmbia na África), povos siberianos, os Bororos, Kadiwel e Xerentes do Brasil, Índios do Nordeste dos Estados Unidos e do Canadá (montanhês, naskapi, micmac, malecite, penobscot) e etc. todos com uma estrutura de pensamento similar manifesta nas nominações/classificações de seres e coisas, no pensamento mítico/mágico, nas relações de parentesco e no totemismo.

Dentre esses povos, sejam os de organização totêmica ou não, existem regras comuns que regem as relações sociais, dentre as quais destacamos aquelas que se referem ao casamento e aos tabus alimentares, por estarem presentes em um grande número de culturas espalhadas pelo mundo, inclusive nas ditas civilizadas. Essas regras sociais, dentre outros elementos, são o elo entre a forma de pensar desses homens e mulheres pertencentes a diferentes sociedades "primitivas" e entre eles e as sociedades "civilizadas".

---

[20] Claude Lévi-Strauss cultura para principiantes. Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=EUplgibg4E8. Acesso em 30/07/2017.
[21] Alguns já extintos cujas informações foram obtidas por meio de estudos etnográficos.

Devido a sua necessidade de sobrevivência, os clãs em algum momento precisam fazer alianças afim de evitar conflitos. Essas alianças, são feitas a partir de trocas de seres e coisas, dentre estes as mulheres, dessa forma, o casamento só é permitido entre indivíduos de grupos familiares distintos. Isso determina a estrutura de parentesco que se dá através da aliança entre duas famílias estabelecida a partir do matrimônio. A proibição do casamento dentro do mesmo grupo, a exogamia, dá origem ao tabu do incesto que para Lévi-Strauss é uma imposição cultural e não natural, pois sua função principal é compelir os indivíduos de um grupo a se casarem com membros de outro grupo clânico mantendo assim a aliança e, consequentemente a ordem social. “A partir do tabu do incesto um povo estabelece suas normas e suas proibições, originando uma nova ordem cultural”[22].

O outro fator que destacamos são as proibições alimentares. Povos como os fang, do Gabão, por exemplo, tem como um de seus totens o esquilo que passa boa parte do tempo refugiado em tocas e troncos de árvores. Por esse motivo, as mulheres grávidas desse clã não podem comer sua carne, pois os bebês poderiam imitar o animal e permanecerem dentro de seu ventre dificultando, assim, o parto. Para os índios hopis a “reflexão é inversa”. Como esse animal é um exímio escavador eles consideram que se as mulheres comerem sua carne terão um parto mais rápido, visto que o bebê poderia agir de maneira análoga saindo mais depressa de dentro do seu útero. (LÉVI-STRAUSS, 2012, p. 78-117).

Para Lévi-Strauss (2012) o homem se relaciona com o meio onde vive por meio do pensamento e não de forma instintiva. O homem “primitivo”, então ao observar o mundo concreto, transforma a experiência concreta em ideias abstratas, criando, assim, em sua mente modelos abstratos da realidade, esses modelos são as *estruturas invariantes*. Essa forma de pensamento, que o autor chama de “pensamento selvagem” é análogo ao pensamento das sociedades científicas cujo produto intelectual, a ciência, à sua maneira também tem seus métodos de classificação/ordenação e impõe aos membros do seu grupo regras e normas a serem cumpridas. Assim, tanto o pensamento selvagem como o científico “estão motivados pela vontade de saber”.

---

[22] Vídeo Claude Lévi-Strauss cultura para principiantes (https://www.youtube.com/watch?v=euplgibg4e8 acesso em 30/07/2017).

Portanto, as relações das pessoas entre si e destas com o meio em que vivem (que aqui podemos chamar de pensamento selvagem, pensamento científico ou pensamento simétrico) possuem um aspecto invariante e outro, variante. O que varia são as formas de manifestação desse pensamento (necessidade de ordenação e classificação das coisas e seres, relações de parentesco, proibições alimentares e etc.) e as diversas culturas espalhadas por todo o globo onde ele aparece. Já o invariante é a presença de uma estrutura de pensamento subjacente a todos esses fenômenos que consegue englobar todas essas formas de pensar e materializar tal pensamento. Se trata, portanto, de um padrão de pensamento recorrente nas culturas.

A homologia entre a forma de pensar do homem "primitivo" e do homem "civilizado" pode ser constatada, ainda, ao se observar de forma mais detalhada algumas áreas da ciência, como a matemática, a física, a biologia, a psicologia, a linguística e os estudos sociais, enfatizados por Piaget (2003) como áreas que se aproximam por remeterem, cada uma delas com suas particularidades, à existência de estruturas subjacentes de pensamento que estão no âmago dos conhecimentos que as compõem. Essa ideia reforça nosso discurso sobre as similitudes entre o pensamento selvagem e o civilizado representado pelo pensamento científico.

De maneira especial discorreremos, sucintamente, sobre a matemática (pois o foco desta pesquisa é seu ensino) como um meio onde estruturas se multiplicam em seus diversos domínios como a álgebra, a geometria, a lógica matemática, entre outros. Nesses e em outros campos do conhecimento matemático, uma estrutura que se apresenta com frequência são os grupos (o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos deslocamentos no espaço são exemplos de grupos), eles figuram dentre as mais importantes formas de estruturas matemáticas devido a sua "generalidade e [...] fecundidade extraordinárias". Essas características fizeram com que os grupos adquirissem importância fundamental na matemática figurando como um de seus princípios organizadores (PIAGET, 2003, p. 20).

No nível da matemática escolar, a noção de estrutura se apresenta em alguns assuntos estudados como as funções polinomiais, por exemplo, onde essa noção pode ser percebida em alguns de seus elementos como: na regra que rege essas funções, pois todos os seus tipos são relações entre conjuntos que sejam injetoras, sobrejetoras ou bijetoras, por possuírem uma estrutura abstrata, conhecida como lei de formação, que é invariante considerando cada tipo de função e por possuírem a propriedade de serem representados graficamente por um ente geométrico que, no caso das funções polinomiais de primeiro e segundo grau são a reta e a parábola, respectivamente.

Na função quadrática, por exemplo, a forma geral é $f(x) = ax^2 + bx + c$, é uma regra única com algumas variações controladas por definições iniciais, ela poderá ser posta em correspondência com fenômenos do mundo concreto como o lançamento obliquo que pode ser uma bola chutada por um jogador de futebol em direção ao gol ou uma bala de canhão disparada. Esses fenômenos possuem correspondência com a função quadrática por descreverem uma trajetória curvilínea que recebe o nome de parábola que é o gráfico da função quadrática, daí os fenômenos citados terem uma estrutura comum que pode ser generalizada pela forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Sabemos que nem tudo na matemática pode ser associado ao mundo concreto e que muitos de seus conhecimentos foram desenvolvidos por meio de conexões internas, porém, defendemos neste trabalho que existem conhecimentos matemáticos que se originaram da observação, feita pelo homem do meio físico, e da forma como pensou o mundo ao longo de sua evolução biocultural[23]. Daí decorre a conexão entre a matemática e o pensamento selvagem, pois assim como nas culturas “primitivas”, o homem, a partir de dados sensíveis, cria seus modelos mentais que são estruturas subjacentes aos fenômenos, na matemática, se criam estruturas abstratas que podem ser associadas à fenômenos do mundo concreto/sensível, ou se cria, também, essas estruturas a partir de abstrações do real.

Portanto, há evidências de um pensamento similar que é estrutural se considerarmos várias culturas sejam elas “primitivas” e/ou “civilizadas”, as primeiras representadas pelo pensamento selvagem e as últimas pelo pensamento científico, ambos no cerne da relação do homem com o seu entorno e fruto de sua vontade de conhecer.

O pensamento similar/estrutural que destacamos neste trabalho é o pensamento simétrico que, para nós, surge da sistematização do conhecimento cultural expresso pela vontade de beleza, organização, estética... materializadas nos artefatos socioculturais cujos ornamentos e estrutura tem como característica principal os movimentos de reflexo, giro e deslocamento estudados no início deste capítulo. Aqui, o pensamento simétrico será o elo entre o conhecimento cultural, representado

---

[23] Segundo Hoebel e Frost (1981 p. 77), apud Marconi e Presotto (2011) o desenvolvimento humano foi biológico e cultural ao longo de milênios. Nenhuma tentativa de estudar a humanidade pode ignorar esse fato.

por práticas culturais, e a matemática escolar dos anos finais do Ensino Fundamental que é o foco de nossa proposta.

Mas, como estabelecer a relação entre esses conhecimentos? Quais bases teóricas dão sustentabilidade para que essa relação se efetive na escola?

1.3 Relações entre prática cultural e a matemática escolar sob um enfoque estruturalista de ensino

A cultura é parte da identidade de um povo, pois quando se fala em cultura logo se pensa em vários elementos como costumes, crenças, mitos, histórias, memórias, construções e artefatos antigos, tipos de práticas e etc. que podem ser materiais ou imateriais, é o que caracteriza um determinado grupo social. Para Santos (2012, p. 85), cultura “é a dimensão da sociedade que inclui todo o saber num sentido ampliado e todas as maneiras como esse saber é expresso” sejam esses saberes sistematizados ou não. Assim, toda sociedade é detentora de cultura e, “as diferenças culturais, não evidenciam a inferioridade ou superioridade de uma cultura em relação à outra, pois cada grupo social se adapta de uma forma específica ao meio cultural circundante” utilizando seus saberes no exercício de compreender, se adaptar e atuar na realidade que os cerca (FARIAS E MENDES, 2014, p. 32).

Ao expressar seus saberes um povo produz sua cultura e ao mesmo tempo é produzido por ela pois, ela se impõe e influencia no desenvolvimento cognitivo do indivíduo que se submete às regras e costumes do grupo ao qual pertence. A cultura imprime marcas no indivíduo, inscreve neles seu *imprinting*[24] que, segundo Farias e Mendes (2014, p. 23), “marca os indivíduos em sua maneira de conhecer e se comportar desde a infância e, se aprofunda por meio da educação familiar e, a seguir, pela educação escolar”.

Dessa forma, compreendemos que a educação escolar é uma das expressões da cultura, pois, também é por meio dela que a sociedade educa, prepara, instrui, transmite seus conhecimentos e valores a seus membros. Ela faz parte da cultura e, precisa estar conectada aos conhecimentos culturais. Defendemos neste trabalho que os traços da cultura devem estar imbricados na educação escolar, que os diversos saberes, específicos de uma sociedade, e suas expressões culturais, devem ser

[24] Termo definido em Morin (1999). Antropologia da liberdade.

utilizados pelos professores, na sua prática pedagógica na Educação Básica, como elementos de conexão entre saberes escolares e saberes não escolares.

Farias e Mendes (2014, p. 25), afirmam que são narrativas da cultura “os mitos, a ciência, os saberes da tradição, as manifestações artísticas e folclóricas, entre outras” estão, portanto, ligadas à cultura por um cordão umbilical, mas, segundo os autores (p. 29), “a ciência ocidental, como uma narrativa sobre o mundo, se tornou hegemônica e se distinguiu das outras narrativas da cultura, sobretudo a partir do século XVII” o que é comprovado, também, por Almeida (2010, p. 35) quando afirma que a ciência moderna, “vai, desde a sua gestação, se separando de outros modos de conhecer como a filosofia, a religião, as artes e os saberes milenares das populações tradicionais” em decorrência do status de superioridade que a ciência adquiriu (ou que foi a ela conferido) em relação aos demais saberes.

Para Almeida (2010, p. 51), os saberes da tradição, que tem sua gênese nas ações dos “intelectuais da tradição”, devem ser utilizados para fazer a religação entre a ciência e a cultura uma vez que “os saberes científicos são uma maneira de explicar o mundo, mas existem outras produções de conhecimento, outras formas de saber e conhecer [...]” tão importantes quanto os saberes científicos. Gonçalves-Maia (2011) e Almeida (2010) apontam, em suas obras, para uma renovação/reorganização do conhecimento científico pautada na sua correspondência com sua gênese, na religação com os saberes que foram responsáveis por sua origem.

Essa reorganização do conhecimento científico, segundo Almeida (2010, p. 34), “ora em curso, caminha *pari passu* com um conjunto de ideários e propostas para repensar a educação, as universidades e o ensino”. O que devemos nos perguntar é de que maneira, professores e pesquisadores, farão essa reorganização chegar a sala de aula e refletir positivamente no ensino e, na aprendizagem dos estudantes? Partindo do princípio de que esses conhecimentos são complementares, não se excluem, como essa aliança irá reverberar positivamente no trabalho docente do professor de matemática da Educação Básica, especialmente do Ensino Fundamental? Sem dúvida, será necessário “um esforço comum de teorização” entre professores e pesquisadores, no intuito de propor, experimentar e validar tais conhecimentos mostrando que essa conexão contribui para a formação integral do indivíduo, considerando os aspectos cognitivos, políticos e socioculturais (MENDES, 2014, p 120).

Repensar a educação em especial o ensino de matemática é primordial, pois, para muitos alunos a matemática é uma disciplina escolar de difícil compreensão, repleta de regras e símbolos na qual “é difícil ser aprovado no final do ano”[25] o que pode ser reflexo da forma como ela é apresentada para os alunos que muitas vezes são levados a apenas memorizar regras prontas e aplicá-las nas resoluções de exercícios o que pode ser tido como uma forma obsoleta e desinteressante de ensino que lavaria os alunos a conhecer uma matemática fria que dá pouco espaço para a interação e criação, características muito presentes nos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental (D’AMBROSIO, 1996).

Neste trabalho, propomos como forma de repensar o ensino de matemática a conexão entre artefatos socioculturais e a matemática escolar dos anos finais do Ensino Fundamental. Para isso, utilizamos artefatos produzidos em algumas práticas socioculturais para mostrar como o pensamento simétrico se materializa nos seus ornamentos cuja estrutura gráfica remete aos movimentos de reflexo, giro e deslocamento estudados anteriormente.

As práticas sociais desenvolvidas por um grupo social ou comunidade, ao longo de sua história, são fortemente carregadas de elementos que caracterizam tais grupos. Ao realizarem essas práticas, um grupo ou um único indivíduo, desenvolvem um sentimento de pertença a essa comunidade. Esse pertencimento se dá por tais práticas imprimirem nesses indivíduos as marcas da cultura pelas quais eles serão conhecidos por outros grupos e comunidades. Elas determinam a sua identidade. Para Miguel e Mendes (2010, p. 383),

> [...] Uma Prática social é cultural porque mobiliza sempre objetos da cultura. Por outro lado, uma prática social é social porque, mesmo quando é realizada por uma única pessoa, é sempre ligada a atividades humanas desenvolvidas por comunidades socialmente organizadas.

Dessa forma, as práticas socioculturais podem fornecer elementos de ligação entre os seus conhecimentos e os conhecimentos matemáticos escolares. Para isso, tais práticas e seus artefatos, devem ser alvo de múltiplos olhares, por professores e pesquisadores na busca de identificar elementos que poderão servir de subsídios aos professores na elaboração de suas atividades de ensino de matemática na Educação Básica, em especial no Ensino Fundamental. Não podemos olhar as práticas socioculturais, apenas, como parte da identidade cultural de uma comunidade, como

[25] Expressão muito comum entre os alunos da Educação Básica.

um saber estático, mas, como possibilidade de fomentar uma aprendizagem por meio da cultura.

> O olhar do professor, pesquisador para as atividades matematizantes pode oportunizar um exercício de um processo de apreensão cultural para aprender a olhar; aprender a pensar; aprender a imaginar; aprender a (re)criar; aprender (re)ver, e pensar a matemática como um veículo da criatividade humana (FARIAS; MENDES, 2014, p. 42).

Essa apreensão cultural, a que os autores se referem, seria a aprendizagem de uma matemática cultural que busca nas práticas socioculturais de uma comunidade matrizes fundamentais à compreensão, dos conteúdos matemáticos e que revela uma matemática até então desconhecida. Para isso, o aluno precisa ser conduzido pelo professor para que perceba por meio do olhar os elementos culturais que têm relação direta com os conteúdos matemáticos da escola básica. Essa percepção poderá ocorrer por um processo de educação do olhar fomentada pela visualização de vários elementos que remetam a um determinado conteúdo. Ou seja, o professor educa seu olhar para as práticas e seus artefatos e passa a educar o olhar de seus alunos.

Porém um ensino de matemática pautado no enfoque cultural requer que ela seja concebida como uma criação viva fruto dos esforços cognitivos de várias civilizações em compreender os fenômenos naturais e socioculturais, se desenvolver e conviver em sociedade. É preciso que se pense a matemática como uma herança cultural cuja busca por conexões entre práticas socioculturais e tópicos de matemática escolar, é uma forma de mantê-la viva, repassando-a a quem de direito, no nosso caso, os alunos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Estamos cada vez mais convencidos de que é preciso explorar as "Matemáticas escondidas" (GERDES, 1985) nas práticas socioculturais para que o aluno, a partir dessa conexão entre matemática cultural e escolar, possa construir significados sobre os assuntos estudados. Temos ciência de que o objeto matemático é abstrato, mas, que a correspondência real com o mundo concreto poderá potencializar no aluno as "abstrações e generalizações" necessárias à formalização do conceito em questão (RÊGO et al, 2006).

Hoje, as práticas socioculturais, ainda estão desconectadas da matemática escolar. Nosso esforço neste trabalho é para apontar uma possibilidade de se fazer essa conexão. Para isso, levamos em consideração uma das características fortes da matemática que é a existência de estruturas como um dos seus princípios organizadores e que estão presentes em várias de suas áreas, como já enfatizamos anteriormente. Essa característica pode ser percebida pela presença de padrões matemáticos que são perceptíveis, por exemplo, na geometria. As contribuições que os padrões trazem para o ensino dessa disciplina são evidenciadas nos resultados de estudos e pesquisas realizados por Ferrete (2005); Gaspar e Mauro (2003); Mendes (2007; 2008; 2012) e em materiais didáticos como propostos por Barros (2015) e Mendes e Bezerra (2009).

O material didático proposto por Mendes e Bezerra (2009), por exemplo, destaca a importância do desenvolvimento de uma educação geométrica por considerarem que:

> A geometria é um exemplo característico dessa leitura de mundo, pois suas linhas, formas e padrões geométricos configuram expressões poliformais que comunicam e evidenciam aspectos sociocognitivos e culturais de cada grupo social que os elaborou. As relações matemáticas presentes nos ornamentos geométricos nos oferecem possibilidades pedagógicas de uso da arte no ensino de Geometria. É importante explorarmos os ornamentos geométricos visando perceber os padrões geométricos na arte da cerâmica, nas rendas, na tapeçaria, nos trançados em fibras vegetais (cipós e palha), pois os mesmos evidenciam um domínio de saberes que caracterizam a cultura dos ornamentos geométricos (MENDES; BEZERRA, 2009, p. 01)

Em seus estudos os autores destacam, ainda que os movimentos de Simetria presentes na criação de ornamentos geométricos, geralmente utilizados na elaboração de trabalhos artesanais como bordados, rendas, vasos cerâmicos decorados, tapetes, gradis de ferro, entre outros, podem e devem ser tomados como matrizes de exploração didática dos professores em sala de aula por conterem, em si, princípios sobre Simetria como os casos de translação, rotação, e outras transformações geometrias, expressas nas formas de tecer os artesanatos e que contêm a força criativa do pensamento e da imaginação espacial de quem os criou.

Assim, os padrões matemáticos, como característica marcante da matemática, podem ser usados como uma ferramenta facilitadora do aprendizado da matemática escolar. Mas, para isso, as situações de repetição devem ser exploradas de forma dinâmica e não mecânica pelo professor e uma das formas de fazê-lo é pôr o aluno em contato visual com as estruturas que se repetem em determinado artefato. No campo da geometria, por exemplo, os padrões podem ser percebidos na arquitetura antiga, na estrutura de gradis de ferro, em azulejos decorativos e etc. que são alguns exemplos a serem utilizados como forma de visualização de padrões geométricos no mundo concreto.

> A existência de padrões geométricos foi observada em diversos contextos sociohistórico-culturais. Há uma diversidade imensa de matemáticas que emanam das práticas socioculturais, fruto do esforço da humanidade em ler, interpretar, compreender e explicar as realidades natural, social e cultural com vistas a sua sobrevivência no planeta (MENDES 2013, p 105).

Essa diversidade de matemáticas, que se conectam às práticas socioculturais e a seus artefatos, pode ser melhor evidenciada se a matemática for entendida como uma das formas de expressão do pensamento humano, seja ele cultural, selvagem, científico ou, em se tratando de nosso trabalho, simétrico. Para que essas matemáticas sejam utilizadas na Educação Básica, é preciso conectá-las aos tópicos de matemática aí ensinados. Aqui, para fazermos essa conexão, não nos utilizamos (de forma direta) das práticas socioculturais e sim de alguns artefatos oriundos de práticas, propondo que a educação do olhar do aluno poderá ser potencializada pela visualização de artefatos advindos de algumas culturas e que tenham como característica principal o uso de padrões geométricos que remetam aos movimentos do pensamento simétrico.

Esse pensamento, sistematizado e formalizado pela matemática, remete aos casos de Simetria ensinados nos anos finais do Ensino Fundamental, quais sejam: reflexão, rotação, translação e uma composição de Simetrias aqui chamada de reflexão deslizante[26] cujo tratamento dado neste trabalho, tem sua gênese nas características variantes e invariantes das culturas e das matemáticas.

Do ponto de vista das Simetrias, mostramos o caráter variante quando apresentamos artefatos de várias culturas, de diferentes partes do globo terrestres, de culturas ditas civilizadas ou primitivas, confeccionados por homens e mulheres de diferentes etnias e falantes de diferentes línguas, mas, que possuem como característica comum e, portanto, invariante, uma forma singular de ornar esses artefatos com desenhos diversos, mas que têm como estrutura subjacente movimentos de padrões geométricos semelhantes aos movimentos de reflexão, rotação e translação que originam as Simetrias matemáticas do Ensino Fundamental, cujo estudo será aprofundado no capítulo seguinte.

[26] Termo utilizado em materiais disponíveis em portais da internet dentre eles: http://www.pucsp.br/tecmem/Artista/simetria.htm#translação . Acesso em 5/10/2017.

2 SIMETRIA: UM CONCEITO FUNDAMENTAL EM MATEMÁTICA

Neste capítulo**,** trazemos as Simetrias de reflexão, rotação, translação e reflexão deslizante, de acordo com a matemática escolar, evidenciando que há elementos que as conectam aos ornamentos de artefatos produzidos por algumas culturas. Nosso objetivo é conectar conhecimento cultural e matemático, da escola básica, tendo como pano de fundo artefatos socioculturais e os casos de Simetria ensinados nos anos finais do Ensino Fundamental.

2.1 Casos de Simetria estudados

A Simetria é um conceito matemático cuja noção tem relação com diversas áreas da matemática. Ela pode ser percebida, por exemplo, na aritmética, com a noção de números simétricos, na álgebra, com a função quadrática que possui um eixo de Simetria que divide a parábola em duas partes simétricas, na trigonometria, com as funções seno, cosseno e tangente, cujos gráficos são curvas que têm como um de seus princípios a Simetria e na noção de figuras geométricas planas congruentes (figuras simétricas são congruentes). Essa conexão que a Simetria tem com outros assuntos da matemática faz com que seu aprendizado sirva de base para que se aprendam tais assuntos.

Nos currículos de matemática da escola básica o estudo de Simetria está previsto no Ensino Fundamental, tanto nos anos iniciais (1º ao 5º ano) quanto nos anos finais (6º ao 9º ano). No Ensino Médio, o ensino de Simetria não está previsto, porém, como já destacamos, suas noções servem de base para um entendimento mais completo de assuntos estudados nesse nível como o estudo de funções, por exemplo. Já na matemática universitária, a Simetria é encontrada como grupos de Simetria que requer um estudo mais profundo que tem intercessão com outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1997).

Nosso estudo foca os casos de Simetria que são ensinados nos anos finais do Ensino Fundamental, por isso, trataremos da Simetria em termos de transformações no plano, como orientam os PCN de matemática desse nível. Por se tratar de uma pesquisa de mestrado, buscamos alguns elementos dos grupos de Simetria para dar um caráter mais formal ao tratamento, sem, no entanto, se distanciar de nossa proposta.

Na geometria, a Simetria define-se em termos de isometrias que estão dentro do grupo das transformações geométricas pois, nem todas as transformações geométricas são isometrias. Essas transformações podem se dar na reta, no plano euclidiano e no espaço. Nosso estudo se restringe às transformações no plano euclidiano e dentre estas, especificamente as isometrias.

Uma transformação no plano é um movimento que provoca mudança de posição de uma dada figura geométrica, ou seja, todos os elementos dessa figura são deslocados de um lugar a outro do plano originando uma nova figura. Tais movimentos podem, ou não, manter a forma e o tamanho da figura transformada.

Definição 1. Uma correspondência, isto é, uma aplicação T: $\beta \longrightarrow \beta$ que associa cada ponto P do plano β a outro ponto P' = T(P) do mesmo plano, chamado imagem de P, é uma transformação no plano β se for bijetora, ou seja, para todo ponto $P' \in \beta$, existe um único ponto $P \in \beta$ tal que T(P) = P'.

Definição 2. Isometria é uma transformação bijetora no plano. Ela ocorre por meio de um movimento rígido[27], ou seja, há uma mudança de posição, porém preservam-se a forma e o tamanho da figura.

Transformações isomórficas[28] são transformações provenientes de movimentos que conservam a forma da figura, mas não o seu tamanho. As homotetias são transformações desse tipo e ocorrem por ampliação ou redução do tamanho da figura geométrica mantendo, porém, as suas características principais como a forma e os ângulos. Assim, podemos dizer que as figuras obtidas por hometetia são figuras semelhantes.

Definição 3: Dado um ponto $O \in \beta$, a transformação T :$\beta \longrightarrow \beta$, que tem centro na origem O e razão $k \in$ IR e associa a cada ponto P do plano β, o ponto P', sedo que P' = T(P) e OP' = k.OP, é chamada homotetia de centro O e razão k denotada por T(O, k). Portanto, para se definir uma homotetia são necessários dois elementos bases, o centro O e a razão k.

Segundo Ledergerber-Ruoff (1982, p. 31), a depender do valor da K, teremos 7 diferentes casos de homotetias. Neste estudo mostraremos dois casos, apenas, que são quando $0 < k \neq 1$ e $0 > k \neq -1$.

Na figura 15, temos o caso em que $0 < k \neq 1$. Nela temos como centro o ponto O e como seguimentos proporcionais OA e OP, sendo que OP = K.OA. O triângulo

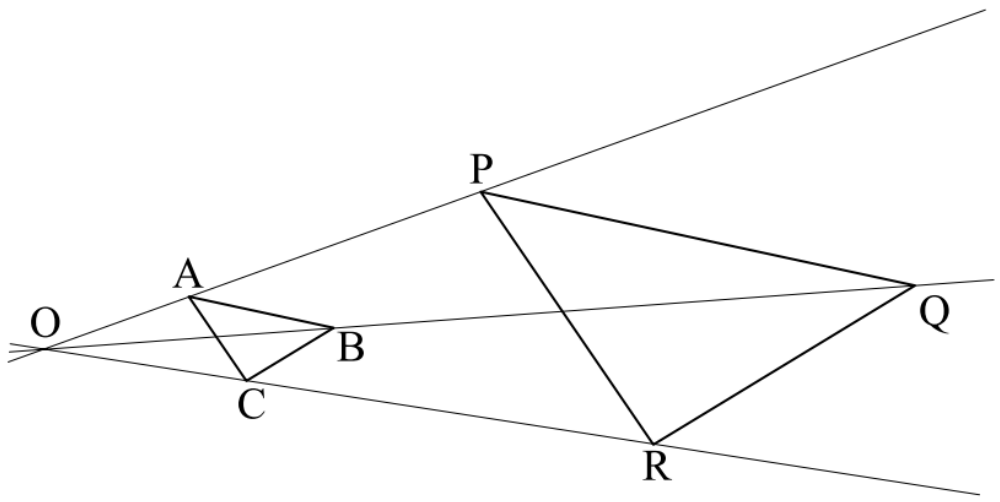
---

27 Segundo Farmer (1999) "um movimento rígido do plano é qualquer maneira de mover todos os pontos do plano de modo que a distância relativa entre pontos permaneça a mesma e a posição relativa dos pontos permaneça a mesma".

28 Nosso estudo foca as isometrias, porém, é válido trazer outro tipo de transformação para que se compreenda melhor, por comparação, o que se pretende ensinar.

PQR é, pela transformação, uma ampliação do triângulo ABC e, portanto, semelhante ao primeiro.

Figura 15 – Homotetia caso 1.



Fonte: Google imagens. Acesso em 20/11/2016.

Como já definimos ponto O é o centro da transformação. Por ele passarão todas as retas que tocam as figuras homotéticas em seus vértices correspondentes.

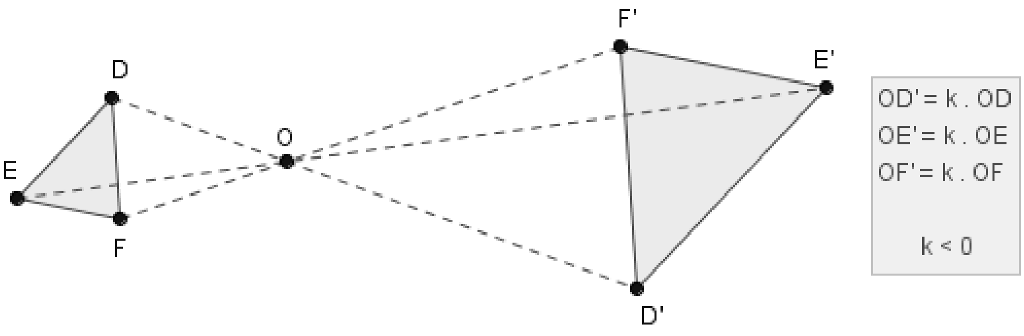
Obs. 1. A razão k, será a razão entre os seguimentos OA e OP, OB e OQ e OC e OR, ou seja, OA/OP = OB/OQ = OC/OR = k.

Obs. 2. Os lados da figura ampliada são dois a dois paralelos. AB//PQ, AC//PR e BC//QR.

Obs. 3. Os lados paralelos são proporcionais à mesma razão k.

Vejamos agora, na figura 16, o caso em que 0 > K ≠ -1. Para isso, observe que há uma mudança em relação ao centro de rotação. Nesse caso ele se posiciona entre a figura original e a figura obtida pela transformação.

Figura 16 – Homotetia caso 2



Fonte: Google imagens. Acesso em 20/11/2016

Obs. 4. Se 0 > K ≠ -1, a todo ponto F∈ β corresponde um ponto F’ pela transformação T(O, k). Esse ponto F’ está na semi-reta oposta à semi-reta de origem no ponto *O* que contem F.

Obs. 5. O centro de homotetia, ponto *O*, fica em um ponto situado entre afigura original e a figura obtida pela transformação. Ele é o ponto de intersecção dos seguimentos de reta que unem os vértices correspondentes das figuras.

Obs. 6. A transformação T(O, k) com 0 > K ≠ -1, provoca na figura, além de sua ampliação/redução, uma rotação.

Reflexão, translação, rotação e reflexão deslizante

Vimos, de acordo com a Definição 2, que toda transformação rígida é uma isometria. Em uma isometria, o tamanho e a forma da figura são conservadas, diferente do que ocorre na homotetia que conserva apenas a forma do objeto analisado pois, quanto ao tamanho, pode haver uma ampliação ou redução.

Dessa forma, concluímos que uma transformação isométrica quando aplicada a qualquer figura geométrica, conserva as distâncias entre quaisquer de seus pontos correspondentes, ou seja, cada parte da figura transformada é congruente a sua parte correspondente da figura original, seja qual for a transformação ocorrida.

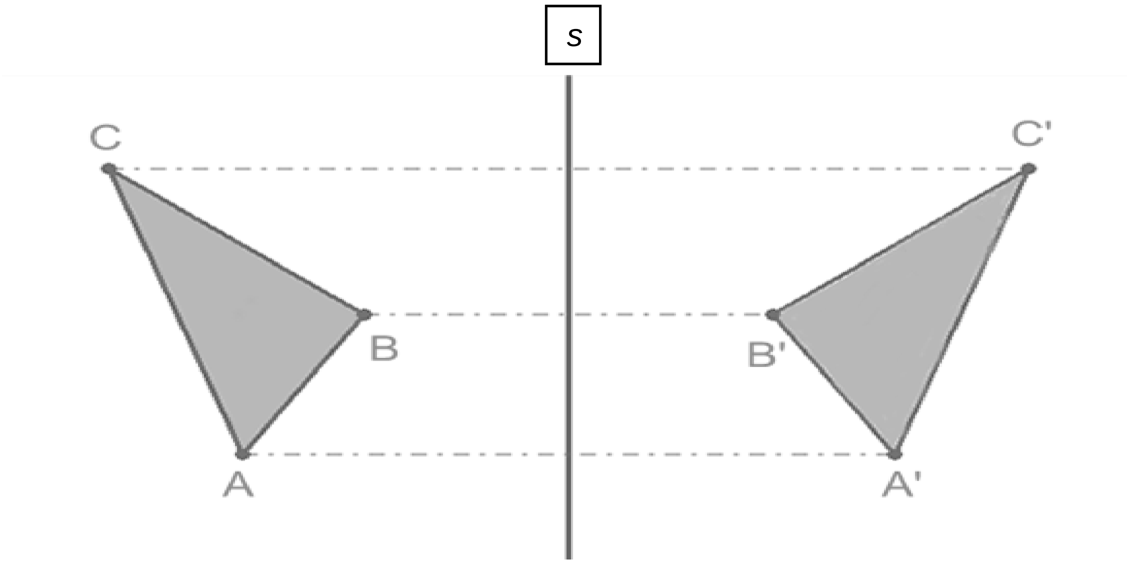
As isometrias são classificadas como translação, rotação, reflexão ou uma composição entre essas isometrias que aqui chamaremos de reflexão deslizante. Cada tipo de isometria origina um tipo de Simetria. Assim, analisar a Simetria de uma figura nos remete a investigar se há isometrias que a deixam invariantes.

Definição 4: Dada uma reta *s* ∈ β, a transformação bijetora T:β $\longrightarrow$ β, que preserva distâncias e faz corresponder a cada ponto P do plano β, o ponto P’ que é a imagem de P, sedo que P’ = T(P), é chamada *reflexão* de centro *s*.

Obs. 7. A reta *s* é chamada eixo de Simetria, é perpendicular a qualquer um dos seguimentos cujas extrmidades são pontos correspondentes nas figuras e, como a reta *s* passa pelo ponto médio desses seguimentos, ela é também a sua mediatriz.

No caso da figura 17 *s* é a mediatriz dos seguimentos definidos por AA’, BB’ e CC’. Assim, esses pontos são equidistantes do eixo de Simetria. Além desses, há outros pontos com essa característica e, para obtê-los, basta traçar outros seguimentos nas mesmas condiçoes de AA”, por exemplo, e que toquem em algum ponto das figuras. Esses pontos serão equidistantes de *s* e, ainda, correspondentes.

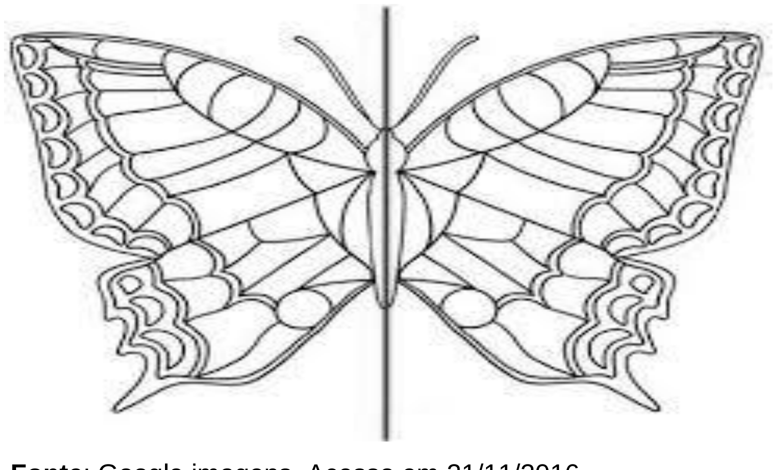
Figura 17 – Reflexão na reta.



Fonte: Google imagens. Acesso em 21/11/2016

O eixo de Simetria pode ou não pertencer à figura. No primeiro caso (figura 17), ele não pertence, ou seja, não possui pontos incomum à esta, já no segundo (figura 18) , o eixo “corta a figura ao meio” determinando duas partes simetricas em relação ele.

Figura 18 – Reflexão na reta.



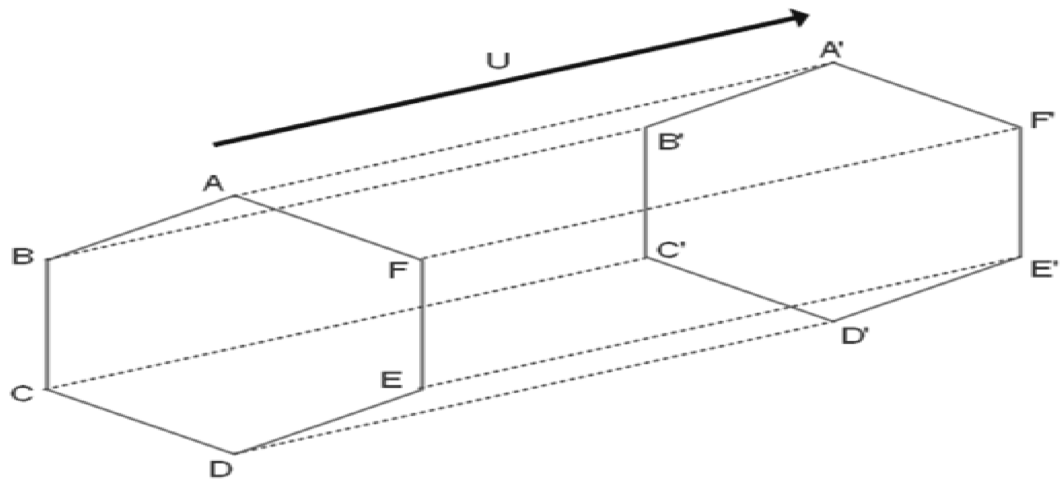
Fonte: Google imagens. Acesso em 21/11/2016

Para comprendermos melhor a Simetria de reflexão, imagine uma das duas figuras acima numa folha de papel. Observe que se a folha for dobrada exatamente na reta *s*, as duas partes da figura vão se sobrepor. Além disso, se for colocado um espelho sobre a reta *s* será possivel perceber que a parte refletida corresponde aquela que completa a figura, daí esse tipo de Simetria ser chamado, também, de espelhamento.

Definição 5. *Simetria de translação* é uma transformação bijetora no plano β, que associa cada ponto P do plano β ponto P’ ∈ β onde T(P) = P’ = P + *u.*

Obs. 8. Numa translação, a figura é movida pela mesma distância e na mesma direção. A distância, corresponde ao comprimento do vetor *u* e a direção do movimento é a mesma de *u*.

Figura 19 – Translação



Fonte: Google imagens. Acesso em 21/11/2016.

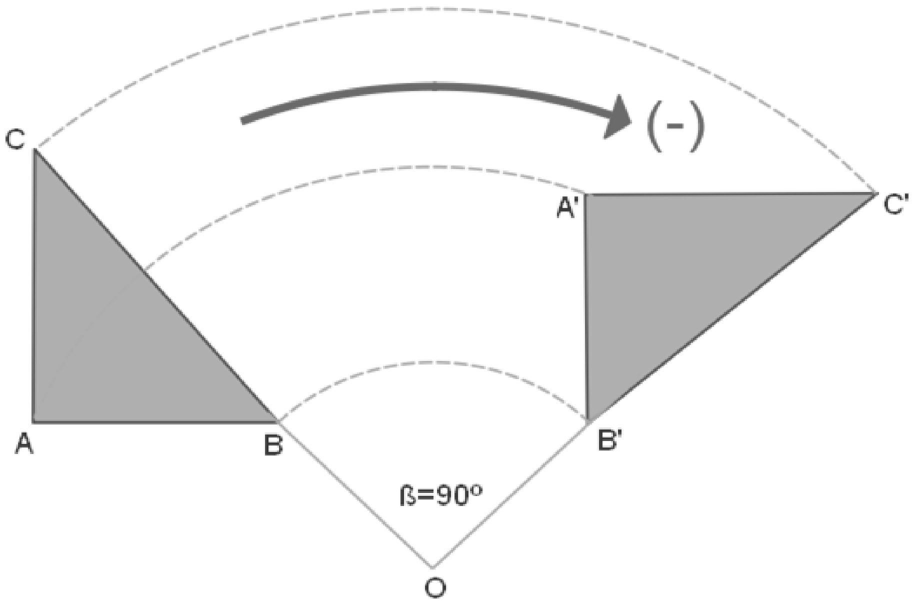
Na figura 19, o deslocamento ocorre de forma inclinada. Mas poderá ocorrer também na horizontal ou vertical. Esse movimento faz com que a figura seja arrastada pela superfície fazendo com que esta seja preenchida com várias figuras de mesmo formato e dimensões.

Definição 6. Seja O um ponto do plano β e α um ângulo orientado. A transformação bijetora T: β ⟶ β que tem O como ponto fixo e transforma todo ponto B ≠ O no ponto B’, tal que o ângulo BOB’ = α e OB = OB’, chama-se *rotação* de centro O e ângulo α, sendo denotada por T(O, α).

Na figura 20 temos um triângulo ABC, que podemos chamar de figura original, e o triangulo A’B’C’ que foi obitido por meio da transformação T(O, α). O ângulo α está orientado no sentido horário que se convenciona ser o sentido negativo, sendo o anti-horário o positivo.

No caso específico da figura 22, β = 90º, no entanto, esse ângulo pode assumir outros valores.

Figura 20 – Rotação.

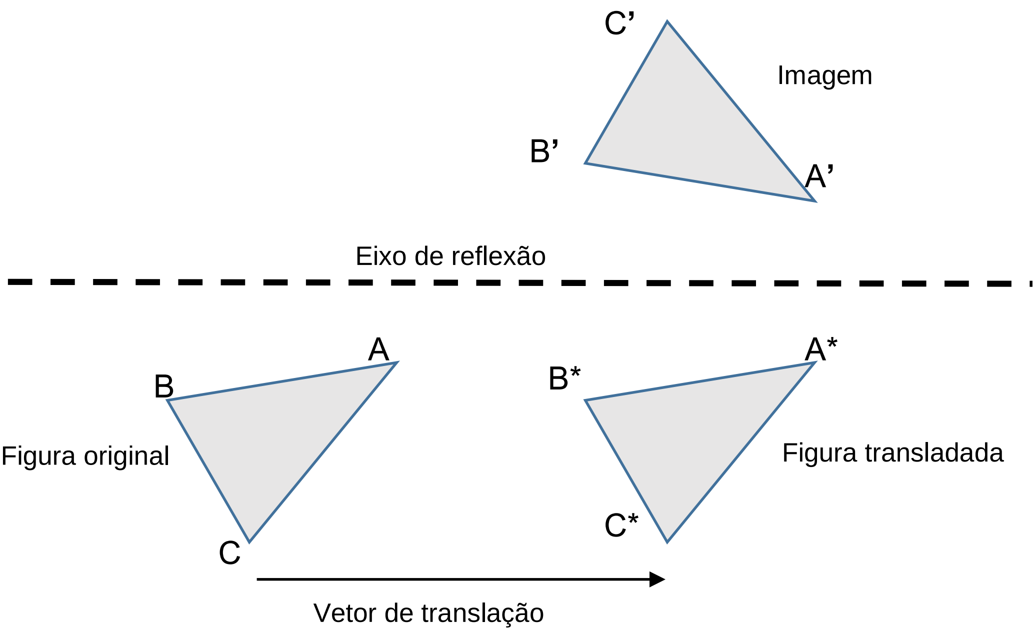


Fonte: Google imagens. Acesso em 21/11/2016.

Assim, o triangulo ABC é simétrico por rotação sob o angulo de 90º à sua imagem, triangulo A'B'C'.

Definição 7. Toda transformação bijetora T: $\beta \longrightarrow \beta$ que resulta da composição de uma reflexão na reta *s* com uma translação (ou vice-versa) e cujo vetor *v* tem direção paralela a *s*, é chamada *reflexão deslizante*.

Figura 21. – Reflexão deslizante.



Fonte: Criação do autor

Observando a figura 21, descrevemos o caminho percorrido pelo triângulo ABC até a sua forma final A'B'C.

A primeira transformação sofrida pela figura original, triângulo ABC, leva seus pontos A, B e C aos pontos A*, B* e C* por translação, na mesma direção e à distância correspondente ao módulo do vetor translação, resultando no triângulo A*B*C* (figura transladada). Em seguida, o triangulo A*B*C* é transformado no triangulo A'B'C', por reflexão, em relação ao eixo de reflexão dado.

Após vermos os principais casos de Simetria definidos pela geometria, veremos no tópico seguinte, como esses casos podem ser conectados à artefatos de diversas práticas socioculturais por meio de suas imagens.

2.2 Simetrias observadas em artefatos socioculturais

A geometria é, sem dúvida, uma importante área da matemática e também uma das mais antigas pois sua origem se confunde com a própria origem da matemática. Tem como característica a correspondência íntima com o mundo concreto, suas formas e figuras encontram forte semelhança com as encontradas no mundo que nos cerca, por isso, “a geometria é considerada uma ferramenta para a compreensão, descrição e inter-relação com espaço em que vivemos” (FAINGUELERNT, 2009).

Dessa forma, defendemos que essa característica da geometria é uma forte aliada do professor no ensino de seus assuntos, de maneira especial, nos anos finais do Ensino Fundamental onde os alunos, demonstram ter a necessidade de buscar uma utilidade prática para os conhecimentos que adquirem na escola, ou seja, buscam materializar os entes matemáticos (especificamente) relacionando-os com coisas concretas que têm formato aproximado para que eles lhes sejam mais familiares e, dessa forma, assimilados com significado.

Assim, usamos a linguagem gráfica de artefatos construídos em diversas práticas socioculturais para mostrar a conexão entre os casos de Simetria estudados no tópico anterior e os ornamentos encontrados nesses artefatos. Essa conexão é possível porque os ornamentos desses artefatos possuem propriedades próximas aquelas dos tipos de Simetria estudados pela matemática que fazem parte do conteúdo a ser ensinado nos anos finais do Ensino Fundamental.

Como somos professores de matemática, olhamos os artefatos, a partir da matemática que conhecemos. Porém, não somente para “matematizá-los”, o que seria uma forma de torná-los secundários neste trabalho, mas reforçar a ideia (já posta no capítulo 1) de que a forma como esses ornamentos foram pensados, elaborados e executados e a sua recorrência em várias práticas e culturas contribuiu para a sistematização e formalização da Simetria matemática.

A conexão entre *Simetria de reflexão* (ou Simetria axial ou espelhamento) e os artefatos de práticas socioculturais, é um fator que poderá favorecer o ensino desse assunto nos anos finais do Ensino Fundamental. Aqui afirmaremos essa conexão utilizando: azulejos históricos e gradis de ferro de Belém, cerâmica marajoara produzida em Ponta de Pedras e as comercializadas no mercado do Ver-o-Peso que são produzidas em Icoarací[29], nas rendas de bilro, no crochê de Ponta de Pedras, no artesanato comercializado na feira do Ver-o-Peso, nas pinturas de carroceria de caminhões de Belém e de barcos da Amazônia e em tatuagens.

Temos ciência que o objeto matemático não é aquele presente no mundo concreto, pois é perfeito, o que não se tem na realidade. O que faremos são aproximações com o intuito de educar o olhar dos alunos para que, no momento que se deparem com a Simetria, possam estabelecer relações com os artefatos socioculturais e assimilarem os casos de Simetria com significado.

A figura 22 retrata a fachada de um prédio localizado no centro histórico de Belém. A fachada e recoberta por azulejos históricos que formam um enorme mosaico que decora toda a parte externa do prédio.

Figura 22 – Azulejo histórico em fachada de prédio de Belém.

Fonte: Acervo do autor

Nela (figura 22) visualizamos a parede do prédio e no detalhe (ampliado) como cada azulejo se movimenta para compor a decoração. Abaixo temos um desses

[29] Icoarací é um Distrito que faz parte do município de Belém do Pará.

azulejos cujo ornamento remete à Simetria de reflexão. Os eixos postos sobre a figura servem de base para que a conexão seja feita de forma mais clara.

Figura 23 – Simetria de reflexão em azulejo histórico de Belém.

Fonte: Acervo do autor

Observando o eixo horizontal, vemos que a figura que está acima dele é refletida dando origem a parte que está abaixo completando a figura. Essa observação pode ser repetida levando em consideração os demais eixos indicados na figura o que levará à constatação de que as figuras "cortadas" pelo eixo originam duas partes onde uma delas pode ser obtida pelo reflexo da outra como em um espelho, por exemplo.

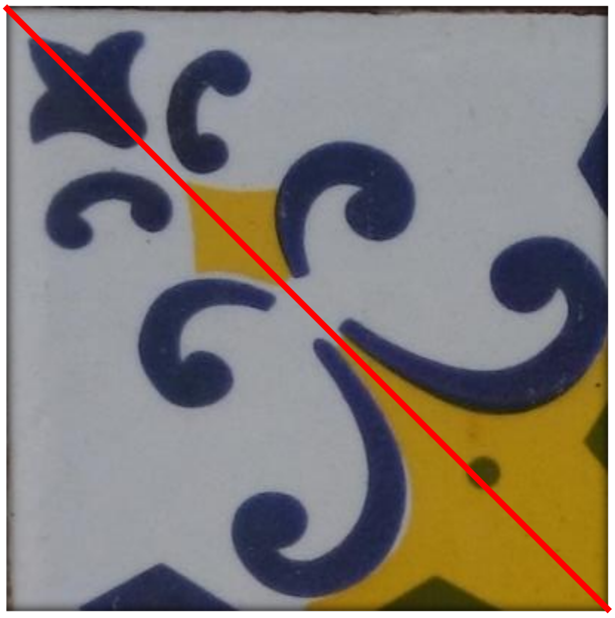
Para que a visualização seja feita com maior facilidade, dividimos o azulejo "ao meio", na figura 24. Percebe-se, a partir dela, como as "duas metades" do azulejo são o reflexo, uma da outra, em relação ao eixo vertical que funciona como um espelho.

Figura 24 – Espelhamento no eixo de simetria.

Fonte: Adaptação do autor.

Observando atentamente o azulejo, constatamos a existência de padrões que se repetem e constituem seu ornamento. Na figura 25 destacamos um desses padrões e mostramos que ele também pode ser conectado à Simetria de reflexão.

Figura 25 – Reflexão no padrão principal

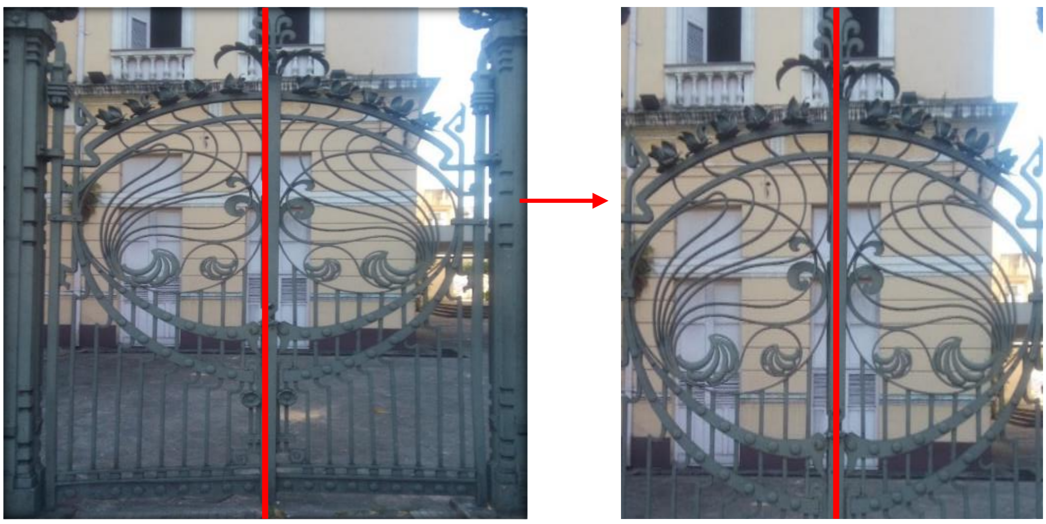


Fonte: Acervo do autor

A construção desse padrão que destacamos, se dá por reflexão. Se ele for dobrado no eixo em diagonal, as duas partes poderão se sobrepor. Assim, todo o ornamento desse azulejo decorativo remete à Simetria de reflexão

Na figura 26 temos uma grade de ferro que serve como portão de entrada de uma escola tradicional[30] de Belém.

Figura 26 – Simetria de reflexão em gradis de ferro em Belém.



Fonte: Acervo do autor

[30] Instituto de Educação do Pará (IEP)

Se for colocado sobre a imagem um eixo vertical, que a divide ao meio, percebemos que há um espelhamento em relação ao eixo.

Destacamos a figura central do portão de ferro onde percebemos “o corte feito” pelo eixo. Destacamos nesse padrão as curvas que partem de um ponto comum e se projetam em direção ao eixo sendo refletidas por ele e mudando de direção em um determinado ponto. Se as duas partes do portão separadas pelo eixo forem dobradas sobre ele, ocorrerá uma sobreposição próxima do que se tem na Simetria de reflexão, evidenciando conexão com esse caso de Simetria.

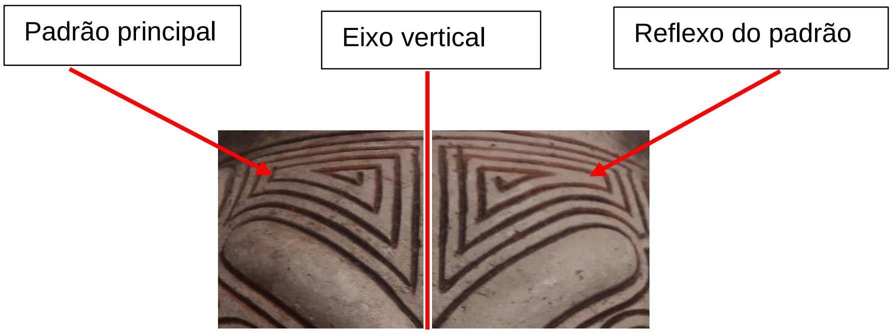
Nos ornamentos das réplicas de cerâmica marajoara produzida em Ponta de Pedras, também é possível observar a conexão com a Simetria de reflexão. Na peça retratada a seguir, verifica-se que a figura central, semelhante a uma face, tem traços que remetem à reflexão. Colocamos um eixo vertical sobre a figura e a dividimos “ao meio” destacando um dos padrões gráficos que compõe seu ornamento para que a conexão, aqui proposta, seja melhor visualizada.

Figura 27 – Simetria de reflexão em cerâmica de Ponta de Pedras.

Fonte: Acervo do autor.

Na figura 28 destacamos um dos padrões do ornamento da peça para que a visualização contribua para uma compreensão mais completa. Dividimos o padrão em duas partes com um eixo vertical. Não podemos afirmar que as partes são simétricas, mas é possível perceber a proximidade do ornamento com o que ocorre na Simetria de reflexão. Essa visualização é que vai ajudar o aluno a compreender como o movimento de reflexão ocorre e quais suas propriedades.

Figura 28 – Padrão de reflexão em cerâmica de Ponta de Pedras.



Fonte: Acervo do autor

Nos ornamentos da cerâmica de Icoaraci, comercializada na feira do Ver-o-Peso, também, pode ser visualizada a conexão com a Simetria de reflexão. A figura 29 retrata uma peça que é uma espécie de prato circular cujos ornamentos se concentram na parte interna, por isso, essa cerâmica, atualmente é muito utilizada como uma peça decorativa. Seu ornamento é constituído de muitos padrões gráficos que se deslocam pela superfície curva do prato. Destacamos parte central do ornamento.

Figura 29 – Simetria de reflexão em cerâmica do Ver-o-Peso.

Fonte: Acervo do autor.

Considerando, apenas, a figura central da cerâmica, percebemos que os lados determinados pelo eixo vertical podem ser obtidos por reflexão no eixo. Se estes forem dobrados ao longo do eixo, a sobreposição será quase total. Estes elementos que destacamos, conectam a cerâmica de Icoaraci, à Simetria de reflexão ensinada nos anos finais do Ensino Fundamental.

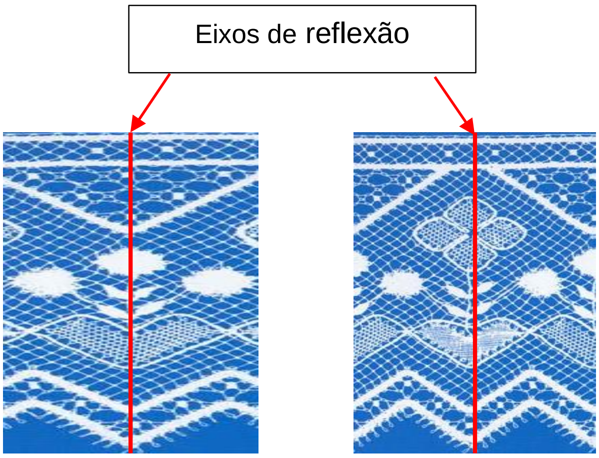
A Simetria de reflexão tem relação, ainda, com as rendas de bilro confeccionada por rendeiras do Ceará. Na renda retratada pela figura abaixo, pode-se visualizar o uso de padões que são responsáveis pela composição da estrutura da renda, dentre os quais, destacamos dois que são semelhantes a uma flor.

Figura 30 – Simetria de reflexão em renda de bilro.

Fonte: Google imagens. Acesso em 05/05/2016

Os padrões em destaque podem ser conectados à Simetria de reflexão se traçarmos um eixo vertical sobre cada um deles. Os lados determinados pelos eixos são o reflexo um do outro. Se no lugar do eixo fosse colocado um espelho, o reflexo produzido seria igual a outra metade da figura.

Figura 31 – Padrão de reflexão em renda de bilro.



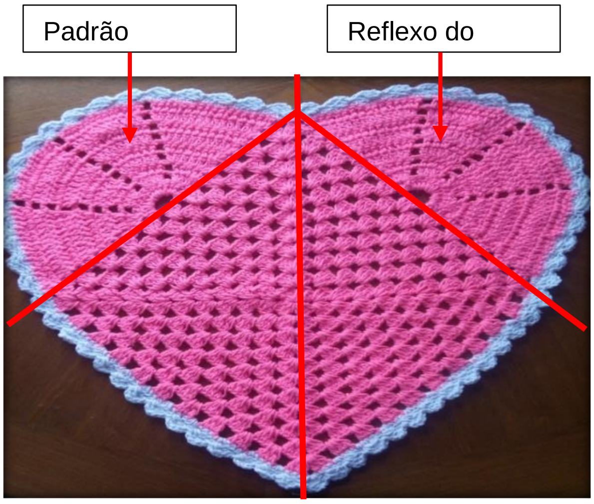
Fonte: Adaptado pelo autor

No tapete de crochê confeccionado por uma artesã de Ponte de Pedras, retratado na figura 32, também percebemos a correspondência com a Simetria de reflexão. Os lados, que são refletidos pelo eixo central (vertical), são simétricos[31] em relação a ele o que pode ser constatado se o referido tapete for dobrado ao meio. O

[31] Por todo o texto iremos repetir expressões como esta. Nos referimos a Simetria que se percebe do ponto de vista da estrutura gráfica dos ornamentos, ou seja, por meio de uma visão cultural. Esse é o princípio que nos serve de base para a conexão com a Simetria que se ensina no Ensino Fundamental.

padrão em destaque semelhante a um semicírculo (na parte superior do tapete delimitada pela linha preta), que se repete nos dois lados da figura, serve de base para que observemos a conexão com a Simetria de reflexão.

Figura 32 – Simetria de reflexão em tapete de Ponta de Pedras.



Fonte: Acervo do autor.

A figura 33 retrata uma peça de artesanato encontrada na feira do Ver-o-Peso, esta peça é confeccionada por uma fibra vegetal da região amazônica e serve de base para que se coloque panelas ou outras vasilhas que estejam quentes com comida sobre a mesa durante as refeições. Como se pode ver ela é formada por duas estruturas circulares circundadas por uma tira que serve de amarração, dando firmeza, e ao mesmo tempo decorando a peça.

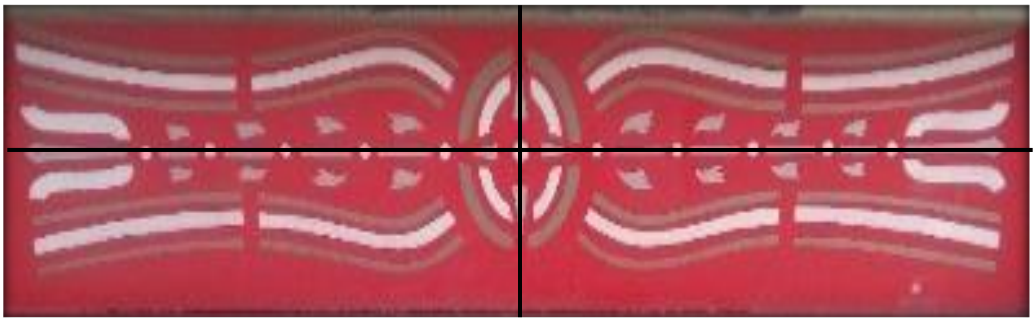
Figura 33 – Simetria de reflexão no artesanato do Ver-o-Peso.

Fonte: Acervo do autor

Se a peça for “cortada” ao meio por um eixo vertical, sua conexão com a Simetria de reflexão será evidenciada pois, as partes definidas pelo eixo serão simétricas em relação a ele.

A Simetria de reflexão também encontra conexão com os arabescos[32], das pinturas em carrocerias de caminhão de Belém. A figura 34 foi obtida isolando-se o padrão principal do ornamento da carroceria[33]. Os dois eixos, vertical e horizontal, que cortam a figura determinam lados simétricos em relação a eles. Considerando, por exemplo o eixo horizontal, percebe-se que as partes acima e abaixo dele são o reflexo uma da outra. É como se estes estivessem “se olhando no espelho”.

Figura 34. Simetria de reflexão em pintura de caminhão.



Fonte: Acervo do autor

Os padrões de Simetria contidos nas pinturas das carrocerias de caminhão, como o destacado acima, “podem servir como ponto de partida para o aluno construir uma série de conceitos” matemáticos, com ênfase para o conceito de Simetria pois, como descrevemos, apresentam uma forte conexão com os principais casos de Simetria a serem tratados nos anos finais do Ensino Fundamental. E, a depender da metodologia empregada pelo professor, “desenvolver determinadas habilidades e atitudes” necessárias para o aprendizado da matemática ensinada nesse nível educacional (REGO et. al., 2006, p. 145).

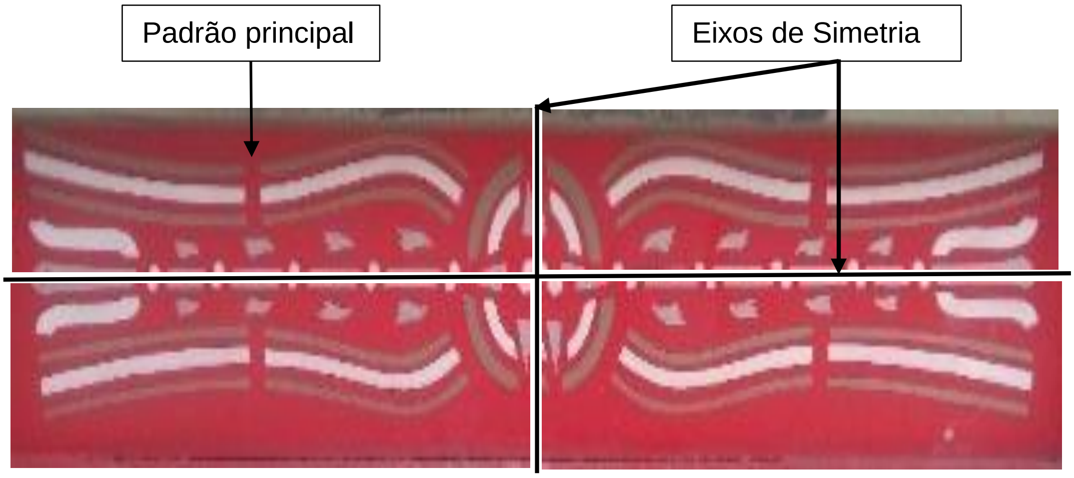
---

[32] O termo surgiu na língua italiana, durante o século XVII, com o significado “à moda árabe”. Suas formas são quase sempre abstratas, com raríssimas exceções figurativas (geralmente flores, frutas e plantas entrelaçadas). Isso porque – apesar de ter se originado com os artesãos helênicos da Ásia Menor, em torno do século III a.C. – esse estilo decorativo foi adaptado e consagrado pelos artistas árabes que o adotaram a partir do século XI d.C. O motivo dessa restrição é essencialmente religioso, obedecendo à lei islâmica que proíbe qualquer representação da figura do homem e de outros animais como idolatria, um pecado gravíssimo. Segundo o Alcorão, somente Alá tem o poder de dar forma aos seres vivos. Disponível em http://super.abril.com.br/cultura/o-que-sao-os-arabescos/ Acesso em 24/11/2016.

[33] A imagem completa está na figura 46

A figura 35 evidencia a conexão dessa prática sociocultural, com a Simetria de reflexão a ser ensinada nos anos finais do Ensino Fundamental, pois as quatro partes da figura determinadas pelos eixos (horizontal e vertical), duas a duas são simétricas por reflexão ou espelhamento.

Figura 35– Simetria de reflexão em carroceria de caminhão.



Fonte: Adaptado pelo autor.

Assim como os caminhões, um meio de transporte muito utilizado em várias regiões do Brasil (e de outros países) são os barcos, principalmente em regiões banhadas por águas como é o caso da Região Amazônica. Esses barcos apresentam os princípios da Simetria na sua construção e também na sua pintura. Percebe-se que os dois lados do barco apresentam correspondência entre cores e formas. As cores se alternam sempre na mesma ordem assim como as linhas que acompanham as curvas da construção.

A Figura 36, retrata a pintura de um barco do município de Ponta de Pedras na Ilha de Marajó. Essa embarcação é muito utilizada para o transporte de cargas entre os diversos municípios da região. A parte do barco fotografada é a proa[34] e o eixo traçado sobre ela a divide ao meio. A Simetria é, na verdade, um dos princípios da construção desse tipo de embarcações por conferir o equilíbrio necessário para que ela navegue com segurança pelos rios da Amazônia.

---

[34] A proa é a parte da frente do barco. Tem a forma “afiada” para “cortar a agua” quando este navega. Isso diminui a área de contato com a água e facilita a seu movimento de navegação.

Figura 36 – Simetria de reflexão em pintura de Barco.

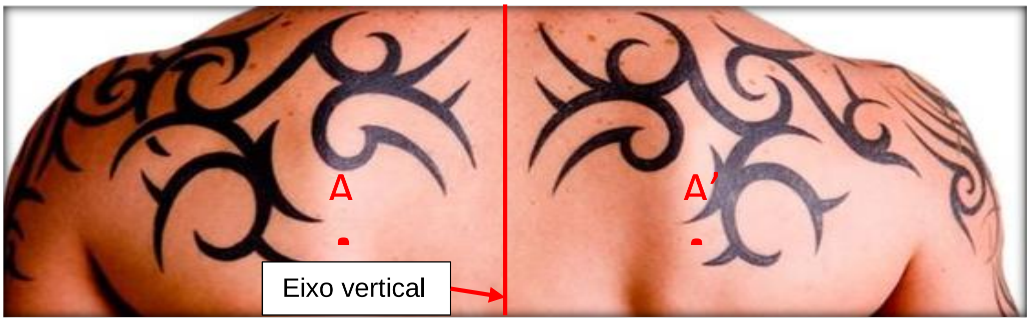
Fonte: Acervo do autor.

No aspecto visual, a Simetria também é percebida nas embarcações. Observando a figura 36, percebemos que esta tem forte correspondência com a Simetria de reflexão. O eixo, que está na vertical, possibilita que se perceba o espelhamento na pintura do barco.

Por se tratar de um meio de transporte bastante tradicional (pois as embarcações estão entre os primeiros meios de transportes utilizados pela humanidade) e pela sua forte presença em várias regiões geográficas do Brasil, com destaque para a região amazônica, as embarcações são um exemplo que pode ser muito bem aceito pelos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental no ensino de Simetria. Por isso elencamos sua pintura como uma das práticas socioculturais a serem analisadas afim de evidenciar sua conexão com os casos de Simetria.

Nas tatuagens que decoram os corpos das pessoas, também observamos elementos que podem servir de meios para a conexão com os casos de Simetria ensinados nos anos finais do Ensino Fundamental. A Figura 37 mostra uma tatuagem feita nas costas de um homem e o eixo vertical sobre ela, serve para a conectar à Simetria de reflexão.

Figura 37 – Simetria de reflexão em tatuagem.



Fonte: Google imagens. Acesso em 13/12/2016.

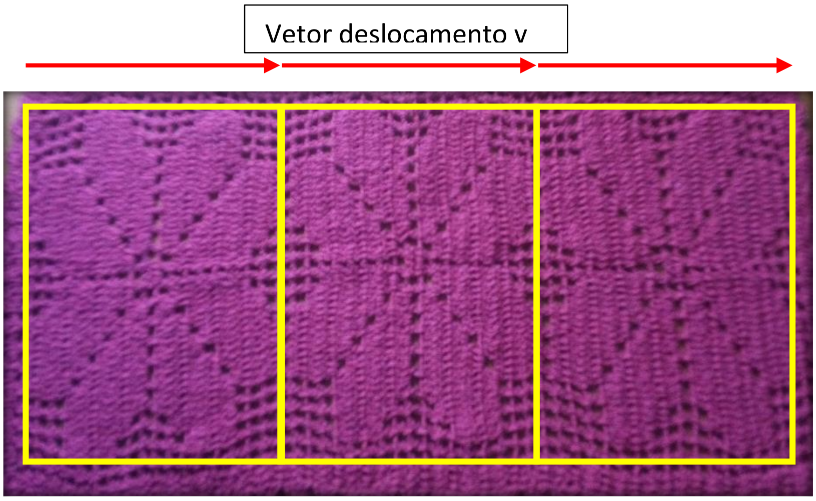
Percebemos que as duas partes da figura que compõe a tatuagem são simétricas em relação ao eixo vertical. Tomados quaisquer dois pontos correspondentes da figura, como os pontos A e A’ indicados, verificamos que estão a uma mesma distância do eixo de Simetria e que são simétricos em relação ao eixo vertical o que contribui para que essa prática sociocultural seja conectada à Simetria de reflexão.

Neste primeiro momento estudamos artefatos de algumas culturas tendo como foco a estrutura gráfica de seus ornamentos. Essas estruturas diferem de uma cultura a outra em vários aspectos como, por exemplo, a forma, o tamanho, o tipo de material usado, a técnica de confecção (pinturas, desenhos feitos por meio de incisões, estruturas de ferro ou de fibra vegetal, etc.), no entanto, apresentam uma característica que é comum a todas, qual seja, o movimento descrito por determinados padrões na composição desse ornamento. Em todos os artefatos estudados, há a prevalência de um movimento semelhante ao movimento de reflexão definido matematicamente e, esse é o elemento de conexão entre os artefatos e a Simetria de reflexão ensinada nos anos finais do Ensino Fundamental. E quanto à translação, há artefatos que se conectam a esse caso de Simetria?

A *Simetria de translação*, que ocorre quando uma determinada figura se desloca por uma superfície, mantendo sua forma e a uma mesma distância, poderá ser melhor apreendida pelo aluno se este puder reunir elementos que lhe dê suporte para a compreensão deste assunto. Assim, a visualização de padrões presentes em situações concretas, que remetem a Simetria de translação pode fornecer esses elementos. Aqui, mostramos a Simetria de translação no crochê produzido em Ponta de Pedras, nas rendas de bilro, no artesanato africano, no artesanato do Ver-o-Peso, nas réplicas da cerâmica marajoara de Ponta de Pedras e da feira do Ver-o-Peso, nos azulejos históricos de Belém do Pará, nos gradis de ferro de Belém, nas redes de dormir e nas pinturas de carroceria de caminhões.

Na figura 38 temos um tapete de crochê onde algumas figuras se deslocam por sua superfície. Selecionamos uma para exemplificar esse deslocamento. Veja que a figura em questão se desloca na direção do vetor *v*.

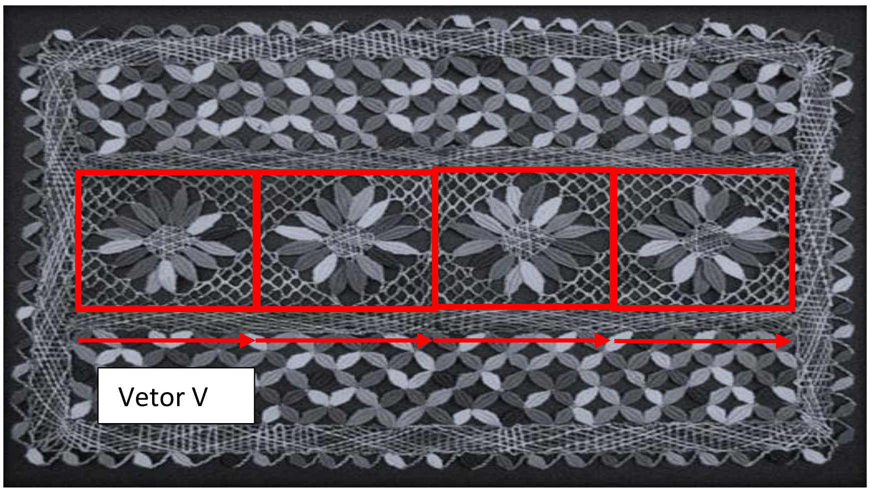
Figura 38 – Simetria de translação no crochê.



Fonte: Acervo do autor.

Nas rendas de bilro podemos encontrar vários padrões que remetem ao conceito de Simetria de translação. Na tira central da renda (figura 39) identificamos a figura que tem a forma de uma rosa e se desloca horizontalmente pela superfície da renda sobre uma reta e na direção do vetor *v*. Aqui, não levamos em consideração o colorido da renda, por isso, alteramos a cor da fotografia.

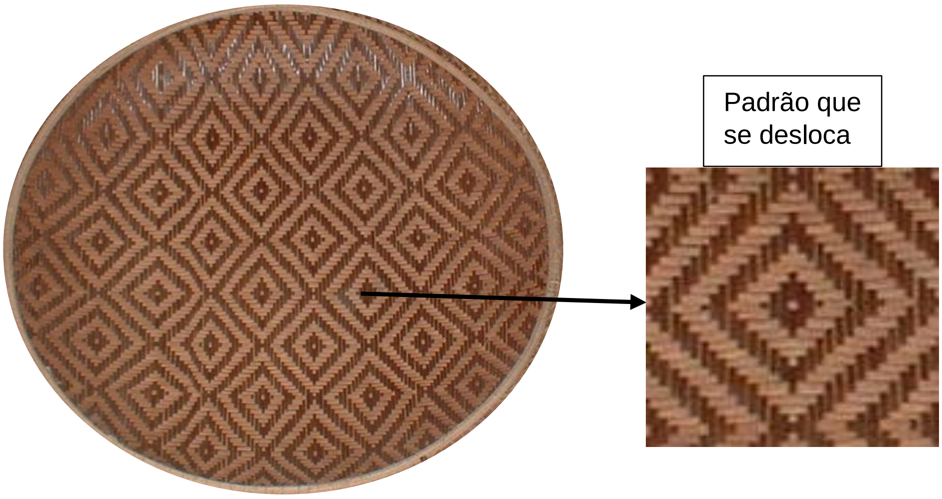
Figura 39 – Simetria de translação na renda de bilro.



Fonte: Google imagens. Acesso em 05/05/2016

Nas cestarias produzidas pelas mulheres moçambicanas, podemos visualizar, bem explicitamente, padrões que se repetem deslocando-se pela superfície das peças produzidas. A figura 40 retrata uma espécie de prato feito de uma fibra vegetal usado para servir alimentos e para decoração.

Figura 40 – Simetrias de translação na cestaria Tonga.

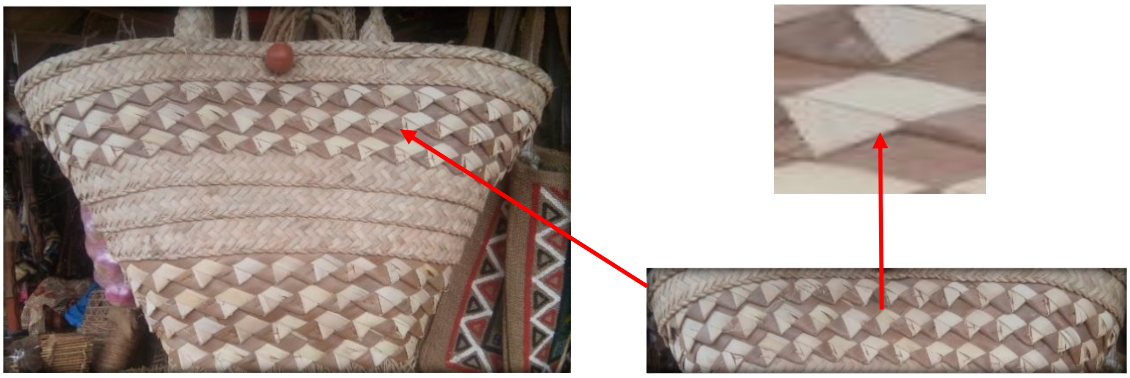


Fonte: Google imagens. Acesso em 05/05/2016

Perceba que a figura em destaque se desloca no prato nas direções vertical, horizontal e de forma inclinada em relação a uma dada direção. A superfície curva do artefato contribui para que na imagem planificada, as figuras tenham tamanhos diferentes, porém, enfatizamos que o efeito visual provocado pelos ornamentos da figura, remete à ideia de repetição e deslocamento de uma estrutura e, isso pode ser usado para que a conexão seja feita sem prejuízos ao aprendizado dos alunos.

No artesanato comercializado na feira do Ver-o-Peso em Belém do Pará, encontramos elementos que poderão ser utilizados no ensino do conceito de Simetria. A imagem selecionada (figura 41) retrata uma bolsa feita de uma fibra vegetal encontrada na região amazônica.

Figura 41 – Simetria de translação no artesanato do Ver-o-Peso.



Fonte: Acervo do autor.

Na faixa em destaque temos uma figura (cuja forma se aproxima da forma de um trapézio) se deslocando na direção vertical, na horizontal e de forma inclinada em relação a uma dessas direções.

Nas réplicas da cerâmica marajoara, comercializadas no Ver-o-Peso, é bem visível a repetição de vários padrões geométricos. Por toda a superfície da cerâmica é possível observar que tais padrões se repetem de forma harmoniosa e formam um único conjunto um todo. Isso pode ser observado na figura 42.

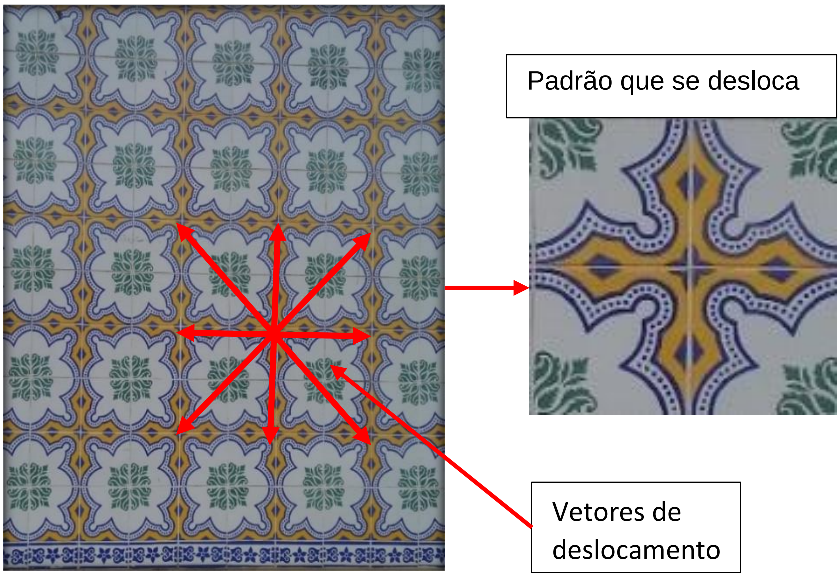
Figura 42 – Simetria de translação na cerâmica do Ver-o-Peso

Fonte: Acervo do autor.

É possível verificar que os ornamentos da peça se dividem em tiras horizontais e que essas tiras se alternam verticalmente pela superfície da peça. Encontramos dois tipos de tiras que se destacam e, nessas tiras verifica-se o deslocamento horizontal de, pelo menos, uma figura. Se considerarmos o deslocamento vertical também encontramos figuras se deslocando nessa direção. Na figura 42 destacamos um padrão com o intuito de que o movimento de translação sofrido por essa figura sirva de matriz para que o aluno compreenda a Simetria de translação.

Nos azulejos antigos que decoram paredes e fachadas de prédios espalhados pela cidade de Belém do Pará, além da beleza e harmonia de seus padrões geométricos, verificamos que estes, de forma isolada ou formando mosaicos, apresentam padrões que são recorrentes por toda a superfície que recobrem. Na figura 43 o mosaico em destaque, formado por 4 azulejos, caracteriza uma das figuras repetitivas. Esta figura se desloca em várias direções como indicamos pelas setas que representam os vetores de deslocamento.

Figura 43 – Simetria de translação em azulejos decorados.



Fonte: Acervo do autor.

Os gradis de ferro, que servem de proteção para residências e outros tipos de prédios, também são feitas de forma a embelezar tais prédios. Essa beleza se deve, em parte, a repetição de certas figuras, que neste trabalho chamamos padrões geométricos. Ao visualizar uma grade de ferro o aluno, poderá perceber que há uma repetição desse padrão o que poderá favorecer a conexão entre essa repetição e um determinado caso de Simetria.

A figura 44 retrata uma grade de ferro localizada em Belém. Nela é possível perceber (com certa facilidade) que há a repetição de uma figura geométrica. Destacamos essa figura para melhor visualizá-la e mostrar o seu deslocamento por toda a superfície da grade. Ela se desloca em várias direções (horizontal, vertical e na direção inclinada em relação a estas). Esse deslocamento fornece elementos para a conexão com a Simetria de translação.

Figura 44 – Simetria de translação em gradis de ferro.

Fonte: Acervo do autor.

A rede de dormir além de ser de grande utilidade e proporcionar momentos de descanso também pode ser atraente por seus ornamentos. Esses ornamentos, a princípio, remetem a beleza e conforto, no entanto, um olhar mais cuidadoso revela que vários motivos decorativos das redes são padrões que se repetem.

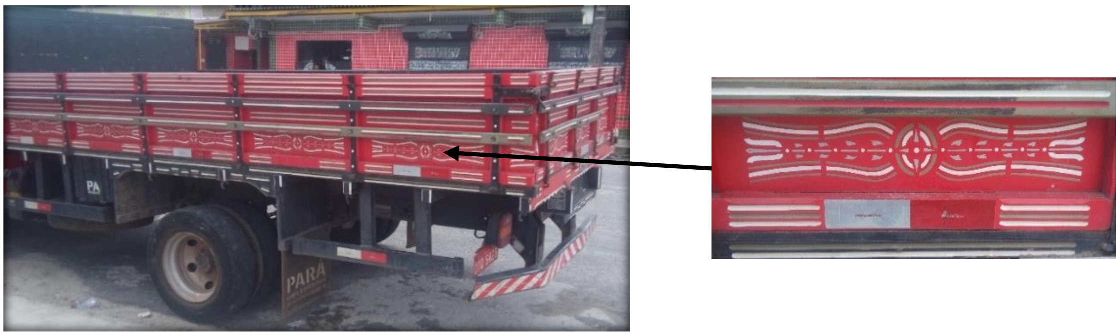
Figura 45 – Simetria de translação em rede de dormir.

Fonte: Acervo do autor.

Observando as bordas da rede retratada na figura 45, percebe-se que nas duas laterais existe uma faixa decorativa e, essa faixa é composta por figuras que se deslocam horizontalmente. Destacamos uma dessas figuras para que sirva de base para tal deslocamento se aproxime do movimento de translação que ocorre na Simetria de translação.

As pinturas em carrocerias de caminhão já foram objeto de estudo de Rêgo (et. al. 2006). Nesse trabalho os autores mostraram em detalhes essa prática sociocultural e apontaram metodologias para a sua utilização no ensino de Simetria na Educação Básica. Essas pinturas são carregadas de símbolos, em sua maioria arabescos que se deslocam por todas as laterais das carrocerias de caminhão. Essas figuras e seus deslocamentos que enfeitam as carrocerias, têm forte correspondência com casos de Simetria. Na figura 46, podemos visualizar uma figura em destaque, se deslocando na horizontal pela lateral da carroceria.

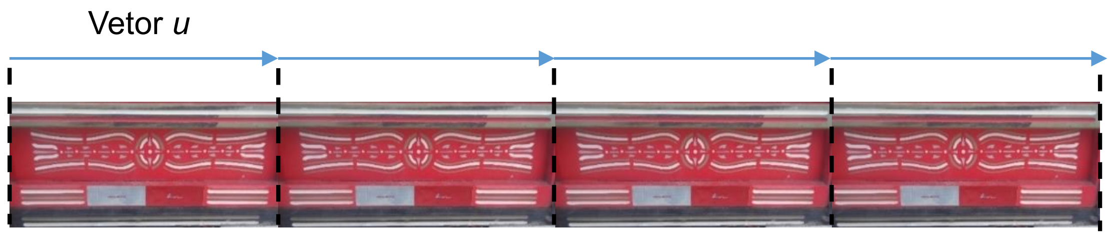
Figura 46 – Simetria de translação em pinturas de carroceria de caminhão.



Fonte: Acervo do autor.

A figura em destaque é limitada por duas hastes de madeiras na horizontal e na vertical. Essas hastes, chamadas de réguas em Rêgo (et. Al, 2006), geralmente preservam as distancias entre elas o que nos leva a concluir que os retângulos que contém o ornamento são semelhantes. Dessa forma o movimento horizontal que desloca o arabesco pela lateral da carroceria preserva as distâncias entre seus pontos e, portanto, suas medidas o que caracteriza a Simetria de translação. Observe como isso ocorre na figura 47.

Figura 47 – Simetria de translação em carroceria de caminhão.



Fonte: Acervo do autor

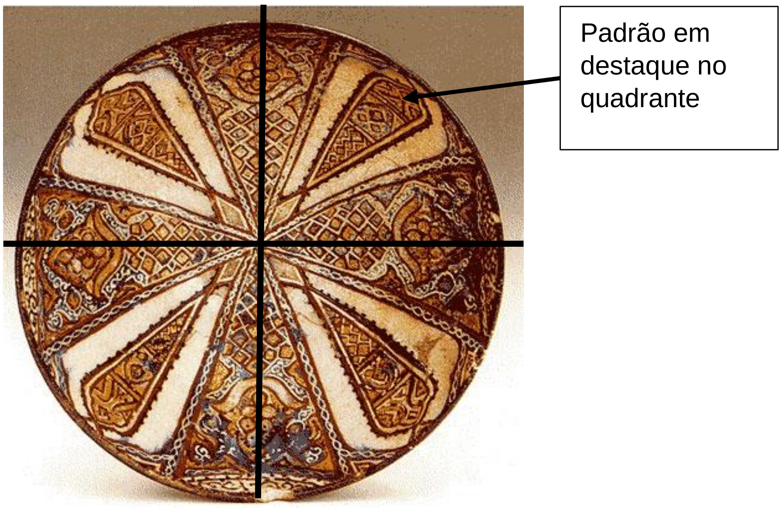
O vetor *u* é o que determina o movimento da figura. Ela se desloca na mesma direção de u e à mesma distância do módulo de *u*, preservando, assim, visualmente sua forma e tamanho o que caracteriza a sua conexão com as isometrias e consequentemente com a Simetria de translação.

Portanto, o movimento de translação que origina figuras simétricas por meio do deslocamento linear destas, pode ser conectado aos artefatos estudados (e a outros) se forem observados os ornamentos desses artefatos e em alguns casos a sua estrutura, como os gradis de ferro, por exemplo. Isso poderá servir de ponto de partida para o ensino desse caso de Simetria no Ensino Fundamental. Mas, assim como reflexão e translação, a rotação também é assunto desse nível de ensino. Mas, ela pode, a exemplo das outras, ser conectada a artefatos socioculturais?

A *Simetria de rotação*, já definida anteriormente, pode ser percebida nos ornamentos de artefatos de várias práticas socioculturais. Aqui, mostraremos esse caso de Simetria na cerâmica islâmica, nas rendas de bilro, nas réplicas da cerâmica marajoara de Ponta de Pedras e da feira do Ver-o-Peso, nos azulejos históricos de Belém do Pará, no artesanato do Ver-o-Peso, nos gradis de ferro de Belém, no crochê produzido em Ponta de Pedras e em tatuagens.

A figura 48 retrata um exemplar da cerâmica islâmica produzida no Iran nos séculos 13 e 14. Se essa figura girar em torno do seu centro (ponto onde os eixos se cruzam), no sentido horário ou anti-horário, a figura gerada poderá coincidir com a figura original. O ângulo de giro se aproxima de 90º, que ocorreria em uma situação ideal. Dessa forma, as figuras simétricas seriam obtidas por rotações de 0º, 90º, 180º, 270º e 360º.

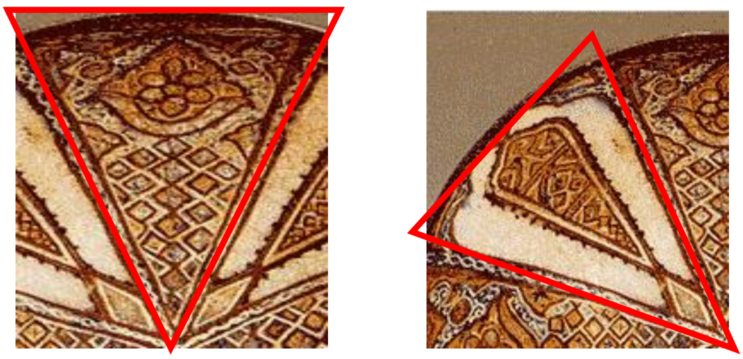
Figura 48 – Simetria de rotação em cerâmica islâmica.



Fonte: http://www.raulmendessilva.com.br/brasilarte/internacional/islamica08.html

Os eixos colocados sobre a figura são perpendiculares e evidenciam o ângulo sob o qual a figura é rotacionada. Em cada um dos quadrantes é possível perceber a existência de um padrão gráfico que é um dos ornamentos que se destaca na cerâmica. Além desse, outro padrão, com formato semelhante ao primeiro, tem destaque na figura. São duas formas semelhantes a um triangulo que estão em destaque na figura 49.

Figura 49 – Padrões triangulares.

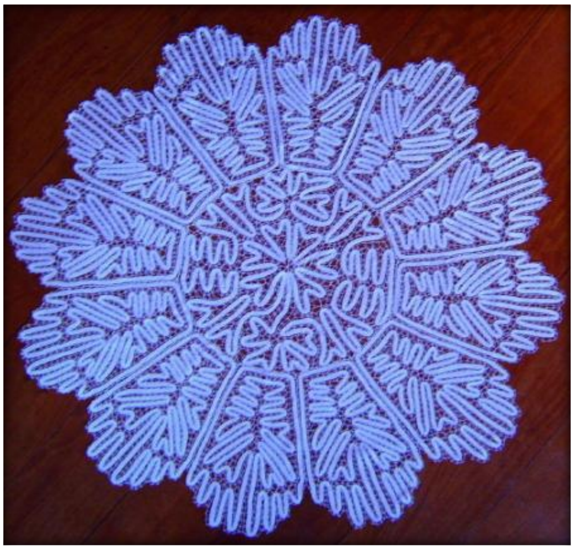


Fonte: Google imagens. Adaptado pelo autor.

Os dois padrões em destaque servem de matrizes para que se conecte a Simetria à referida figura uma vez que, girada a figura sob um ângulo múltiplo de 90º, esses padrões serão sobrepostos e a figura obtida por rotação coincidirá com a figura original caracterizando a Simetria de rotação. Vale ressaltar que a cerâmica é um artefato que se encontra em várias culturas pelo mundo inteiro, sendo uma das manifestações culturais mais antigas da humanidade, por isso, conectar esse artefato à Simetria de rotação é uma forma de alertar os alunos do Ensino Fundamental para o valor histórico e sociocultural que as cerâmicas têm para a humanidade. É uma forma de fazê-los compreender que é preciso cuidar desse patrimônio para que ele permaneça "vivo" em nosso meio.

A arte das rendeiras é, como as cerâmicas, um patrimônio cultural do Brasil, merecendo, portanto, ser "descoberto" e conhecido por todos os brasileiros. Um dos artefatos produzidos pelas mãos habilidosas das rendeiras são as rendas de bilro que, também é possível conectar à Simetria de rotação. A figura 50, que é uma renda conhecida como tramoia[35].

Figura 50 – Renda de bilro



Fonte: http://www.geocities.ws/estreladomartes/Rendasdebilro.html. Acesso em 05/05/2016

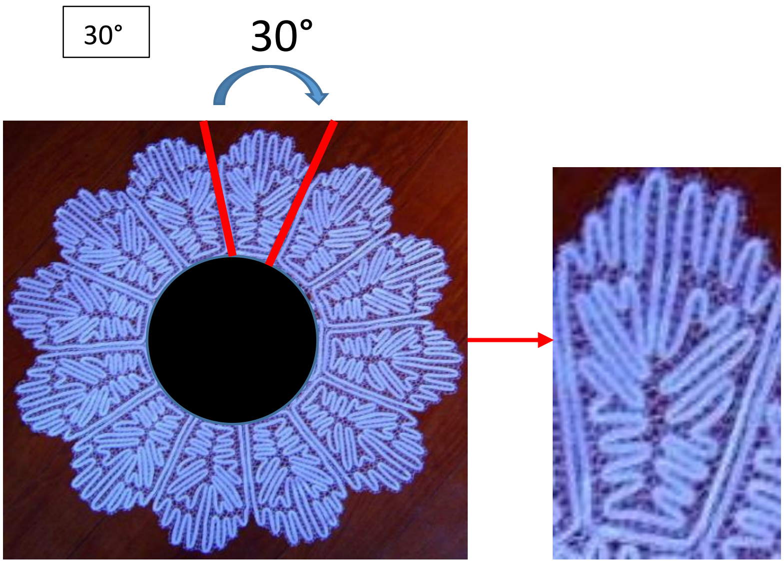
Para que tal conexão seja melhor visualizada, isolamos a figura considerada e o padrão que irá caracterizá-la na figura 51.

Considerando a parte externa da figura observamos que o padrão em destaque se repete 12 vezes. Se traçarmos um círculo onde a renda fique inscrita, este poderá ser dividido em 12 arcos, cada um medindo 30°. Esse será o ângulo de rotação da figura que irá originar as Simetrias. Cada rotação de 30º ou de um de seus múltiplos

[35] A tramoia é uma renda exclusiva da Ilha de santa Catarina, antes era conhecida como puxada. É tecida com sete pares de Bilro e, geralmente, com uma linha fina e outra grossa. Fonte: http://www.geocities.ws/estreladomartes/Rendasdebilro.html. Acesso em 05/05/2017.

irá dar origem a uma figura simétrica à figura original. Dessa forma serão obtidas figuras simétricas por meio de uma rotação de 0°, 30°, 60º, 90º, 120º, 150º, 180º, 210º, 240º, 270º, 300º, 330º e 360°.

Figura 51 – Simetria de rotação na renda de bilro



Fonte: Adaptado pelo autor.

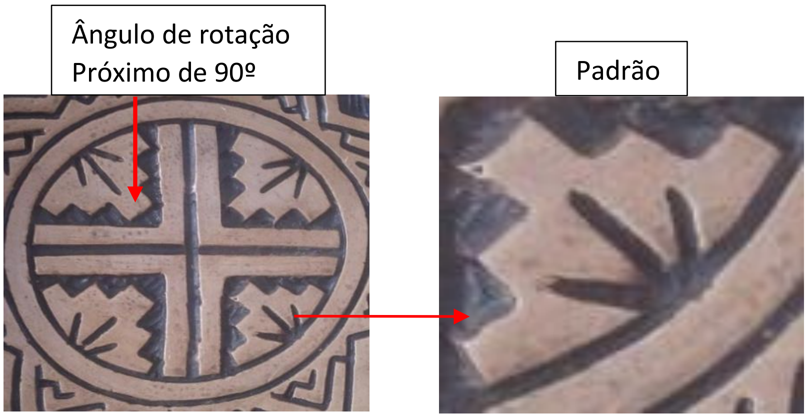
A figura 52 retrata uma réplica da cerâmica marajoara encontrada na feira do Ver-o-Peso em Belém do Pará. Trata-se de uma espécie de prato que atualmente é utilizado, principalmente, como ornamento decorativo.

Figura 52 – Cerâmica do Ver-o-Peso.

Fonte: Acervo do autor

Nessa peça da cerâmica marajoara, pode-se perceber, pelo menos duas situações onde se tem a Simetria de rotação. A primeira situação ocorre isolando a figura central do prato. O ornamento da cerâmica possui dois eixos centrais que dividem a figura em quatro quadrantes, cada um medindo, aproximadamente, 90º.

Figura 53. Simetria de rotação na cerâmica do Ver-o-Peso

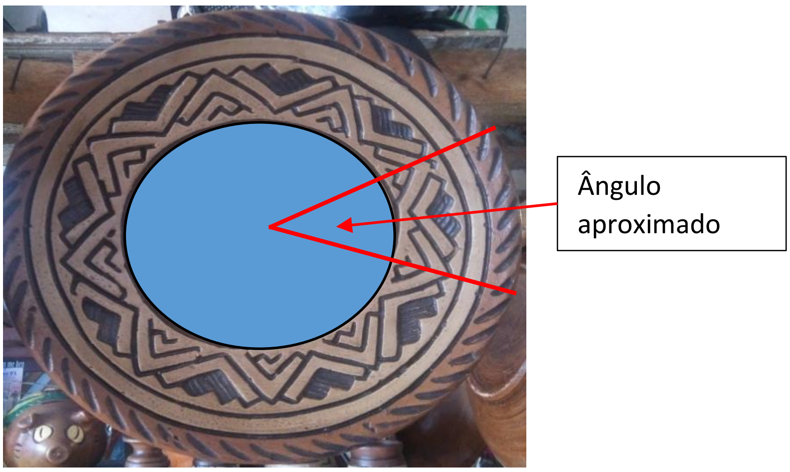


Fonte: Acervo do autor.

Em cada quadrante, encontra-se um padrão que se repete, conforme indicado na figura 55. Se a figura for rotacionada sob um ângulo de 90º ou um de seus múltiplos, a figura originada será simétrica à primeira. Isso poderá ser visualizado tendo como base o padrão em destaque acima. Assim poderão ser obtidas figuras simétricas por rotação de 0°, 90°, 180º, 270º e 360°.

A segunda situação onde se pode perceber a Simetria, ocorre quando consideramos somente a parte externa do prato, como mostra a figura 54.

Figura 54 – Padrão externo

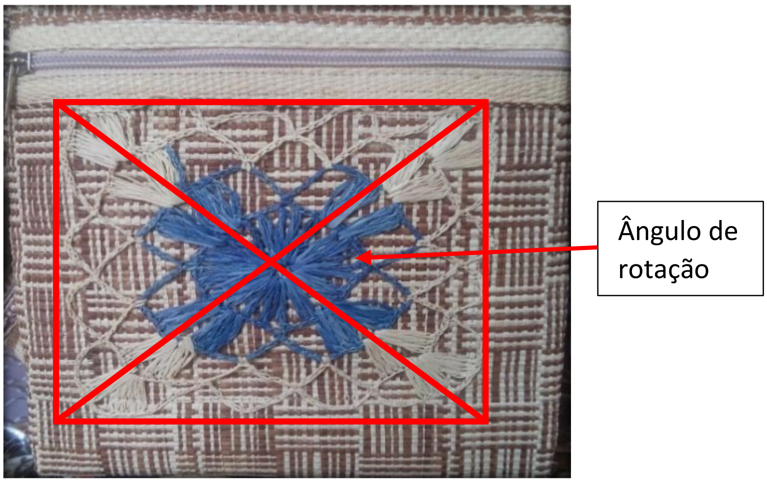


Fonte: Acervo do autor

O ornamento que compõe a parte externa fica numa região semelhante a uma coroa circular e pode ser comparada a uma estrela de 9 pontas. Dividindo a circunferência que a circunscreve em 9 partes de mesma medida, obtemos um arco de 40º. O giro da figura sob um ângulo de 40º ou sub um de seus múltiplos, irá originar figuras simétricas. Nesse caso, a Simetria ocorre girando a figura em 0º, 40º, 80º, 120º, 160, 200º, 240º, 280º, 320º e 360º em torno do ponto central (vértice do ângulo).

O artesanato encontrado na feira do Ver-o-Peso em Belém do Pará tem em seus ornamentos mais uma fonte que remete a Simetria. Na figura 55, a Simetria de rotação é observada no enfeite da bolsa feita de uma fibra típica da região amazônica.

Figura 55 – Artesanato do Ver-o-Peso.

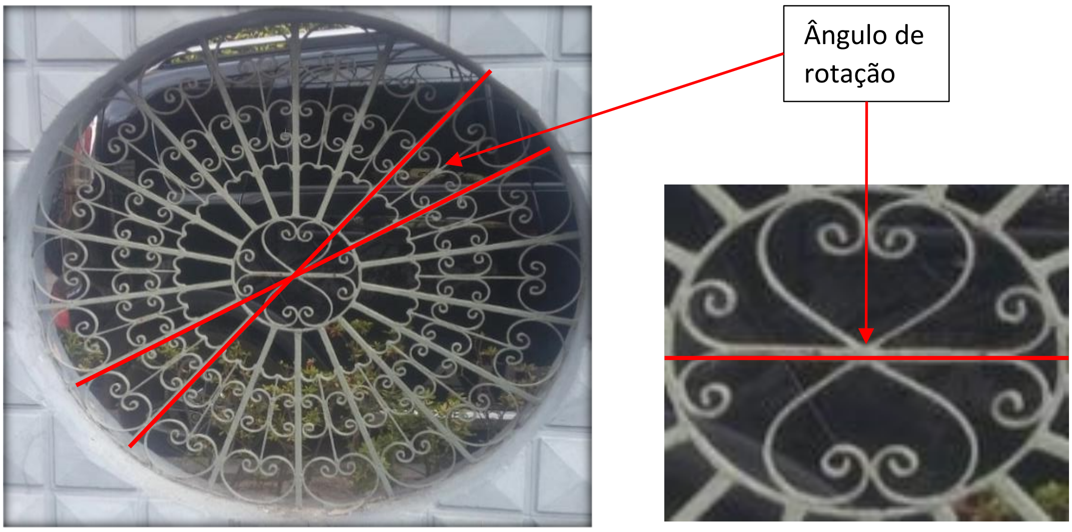


Fonte: Acervo do autor.

Isolando a penas a figura correspondente ao enfeite da bolsa e considerando os eixos colocados sobre a figura, pode-se perceber que há um ângulo de rotação próximo de 90º por se tratar de um retângulo. Isso faz com que, cada giro de 90º ou um de seus múltiplos, origine figuras simétricas.

Em nossa pesquisa *in loco*, fotografamos diversos gradis de ferro em prédios espalhados pelas ruas de Belém do Pará como o retratado na figura 56.

Figura 56 – Simetria de rotação em grade de ferro de Belém.



Fonte: Acervo do autor

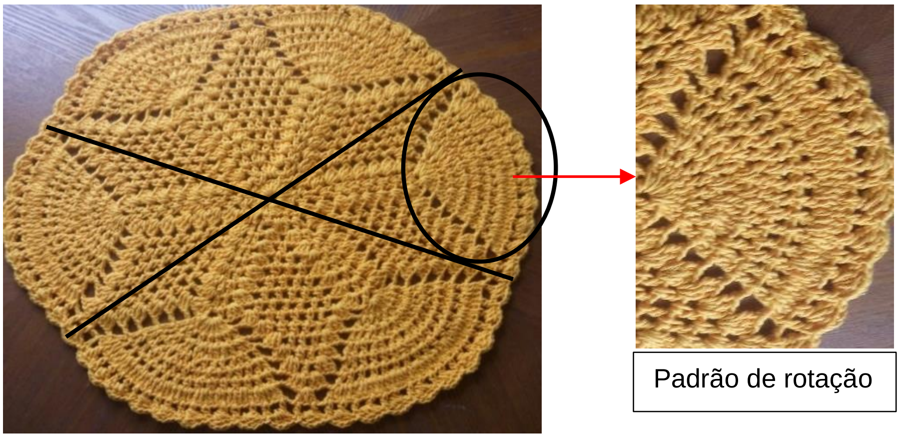
Verifica-se nesses gradis, a correspondência com a Simetria de rotação definida pela matemática. A figura 56 será analisada em dois momentos primeiro, isolando-se a parte correspondente ao círculo central e, depois considerando-se a parte externa a esse círculo que é semelhante a uma coroa circular. Por se tratar de uma figura circular, a Simetria vista na parte central da grade é a de rotação. Se, fizermos uma rotação de 180º, afigura obtida coincidirá com a figura inicial. Dessa forma, a Simetria ocorrerá por uma rotação de 0º, 180º e 360º.

Mas, isolando-se a parte da figura externa ao círculo central, teremos também a Simetria de rotação. Porém, agora a figura simétrica será obtida por rotação sob um angulo diferente do primeiro.

Colocamos dois eixos sobre duas das hastes metálicas correspondente ao diâmetro do círculo maior. Percebe-se ainda, que esses eixos irão dividir o círculo em 20 partes e, como o círculo tem 360º, cada parte corresponderá a um ângulo de 20º. Esse angulo será o angulo sob o qual serão obtidas figuras simétricas por rotação. Dessa forma, serão obtidas figuras simétricas por uma rotação de 0º, 20º, 40º, 60º 80º, 100º, 120º, 140º, 160º, 180º, 200º, 220º, 240º, 260º, 280º, 300º, 320º, 340º e 360º.

Ainda com o objetivo de familiarizar o aluno dos anos finais do Ensino Fundamental com o estudo de Simetria de rotação, apresentamos uma arte comumente praticada e encontrada em Belém e no interior do estado do Pará. Na figura 57 temos um tapete de crochê produzido por uma artesã do município de Ponta de Pedras no Marajó.

Figura 57. Simetria de rotação em tapete de crochê.



Fonte: Acervo do autor

Os eixos servem de base para a rotação da figura em torno do centro de rotação. O ângulo formado entre os eixos é de 60º, por isso, serão obtidas figuras simétricas a cada rotação de 60º ou múltiplo desse ângulo, ou seja, 60º, 120°, 180º, 240º, 300º e 360º pois com essa rotação a figura obtida coincidirá com a figura original.

A visualização do movimento do padrão em destaque é o que irá possibilitar a relação com o movimento de transformação de uma figura em outra no plano e, consequentemente, com o ensino de Simetria de rotação nos anos finais do Ensino Fundamental.

Um povo carrega consigo as marcas de sua cultura como já mencionamos anteriormente. Essas marcas caracterizam a identidade dos indivíduos e são como um rótulo que diz o lugar de pertencimento desses indivíduos. Muitos povos e “tribos” fazem questão de marcar literalmente seu corpo mostrando dentre outros seus costumes, convicções e crenças.

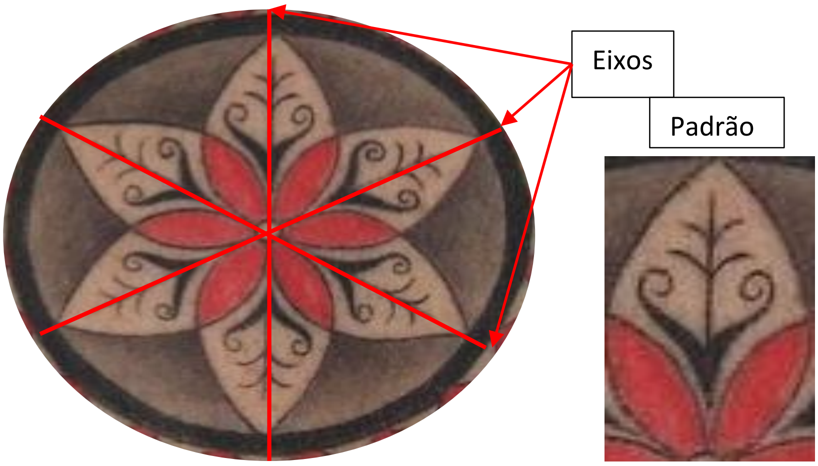
A imagem a ser analisada retrata uma tatuagem que fica nas costas de uma mulher. Por ser uma superfície irregular não se pode ter a exata correspondência com a Simetria no plano, no entanto, os elementos que compõe essa tatuagem têm uma forte conexão com a Simetria de rotação como mostramos na figura 58.

Figura 58 – Tatuagem.

Fonte: Google imagens. Acesso em 13/12/2016.

Para analisarmos a Simetria da tatuagem, a dividiremos em duas partes, destacando os principais padrões que compõe seu ornamento. Primeiro isolamos a parte central da tatuagem (figura 59) e depois a parte externa a esta (figura 60). Ambas consistem em figuras semelhantes a uma flor. Figuras desse tipo são conceituadas por Biembengut e Hein (2014) como rosetas que é “um ornamento limitado, composto em um círculo. A Simetria fundamental para sua composição é a rotação", mas, outros tipos de Simetria também podem ser observados nas rosetas.

Figura 59 – Simetrias de rotação em tatuagem

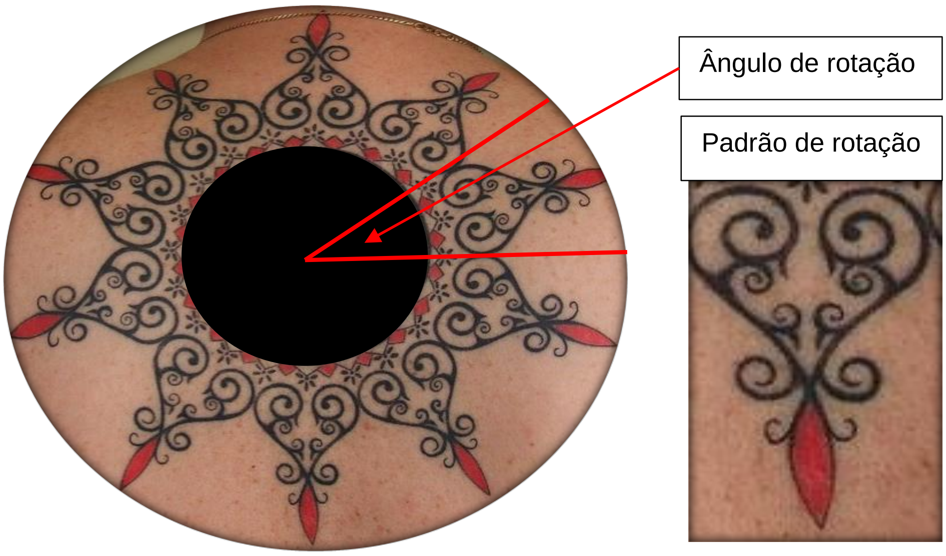


Fonte: Adaptado pelo autor.

Observando o padrão em destaque, que é o principal na composição do ornamento, percebe-se que ele se movimenta por rotação para compor a roseta. Os eixos tocam o círculo em seis pontos determinado seis arcos que medem 60º que é o ângulo de rotação. Assim, rotacionando a roseta sob esse ângulo ou um de seus múltiplos (0º, 60º, 120º, 180º, 240º, 300º e 360º) a figura obtida será simétrica à figura original.

Para que nossa análise fique mais completa, olhemos agora para a outra parte do ornamento da tatuagem que é a roseta externa à primeira. Os movimentos de composição são os mesmos, mas há mudanças quanto ao ângulo de rotação que é, aproximadamente, 36º.

Figura 60 – Simetria de rotação em tatuagem.

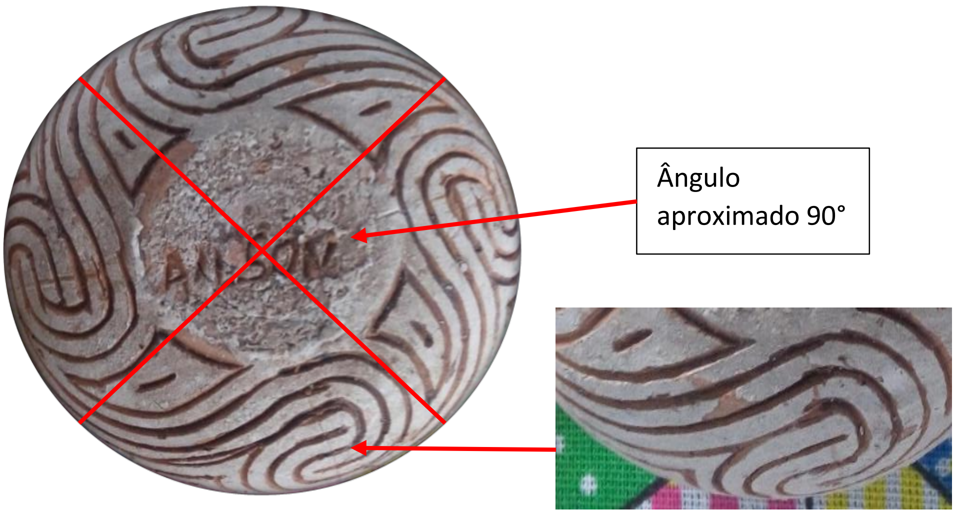


Fonte: Adaptado pelo autor.

Iniciamos o estudo da Simetria de rotação nos artefatos socioculturais com uma cerâmica islâmica destacando sua importância como patrimônio histórico e sociocultural da humanidade. Para finalizar o bloco sobre esse caso de Simetria utilizamos a imagem de uma réplica de cerâmica marajoara confeccionada por um artesão de Ponta de Pedras cujos ornamentos, têm como base o movimento de rotação que remete à rotação matemática. A figura 61 retrata a parte de baixo de uma peça de cerâmica que possui como destaque no seu ornamento, um padrão feito por meio de curvas e que aparece 4 vezes na peça.

Os eixos colocados sobre a figura evidenciam a repetição do padrão ao qual nos referimos. A imagem remete a uma circunferência cujo centro seria o ponto de intersecção dos eixos cujas extremidades dividem a circunferência em 4 arcos que medem aproximadamente 90º. A rotação da circunferência sob esse ângulo fará com que a figura originada coincida com a figura original. Esse movimento é o que conecta o artefato a Simetria de rotação.

Figura 61 – Simetria de rotação em cerâmica de Ponta de Pedras.



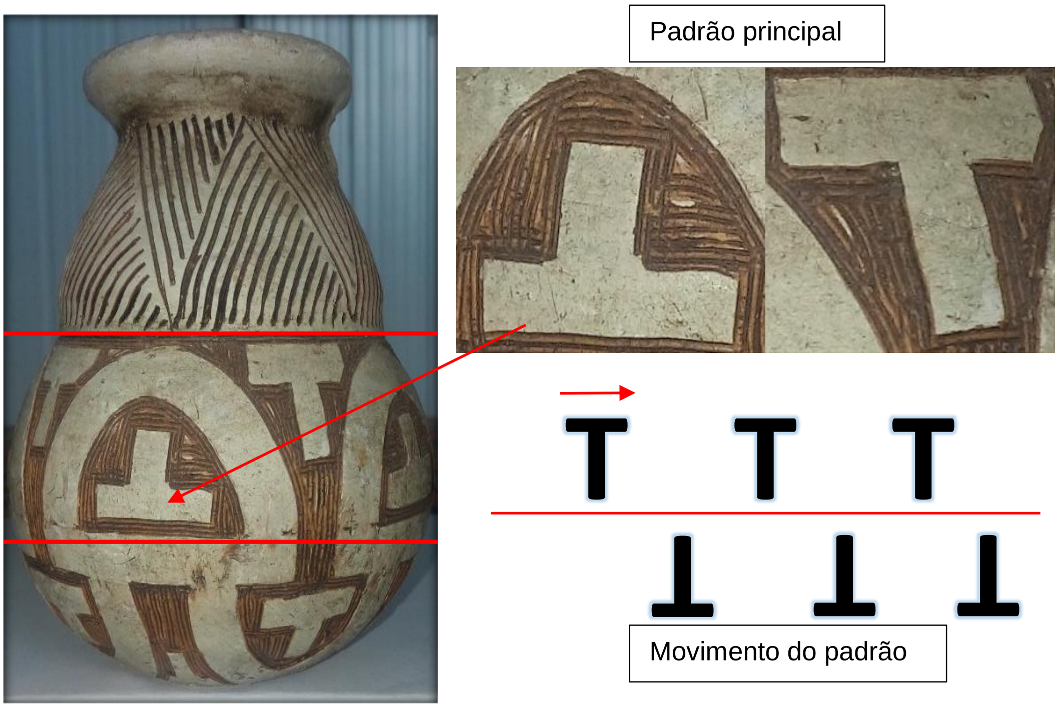
Fonte: Acervo do autor

Assim, todos artefatos estudados anteriormente, possuem ornamentos geométricos que remetem à Simetria de rotação do Ensino Fundamental. Sua utilização no ensino de Simetria pode contribuir para melhoria no ensino-aprendizagem de matemática, em especial a Simetria. Um outro fator que poderá contribuir para um aprendizado mais completo dos casos de Simetria é elevar um pouco o nível de complexidade das aulas por meio da composição de Simetrias que, também poderá ser conectada aos artefatos socioculturais.

A *Simetria de reflexão deslizante*, que é uma composição de Simetrias, agrega dois movimentos, reflexão e translação, não necessariamente nessa ordem. Este caso de Simetria pode ser percebido, também, em alguns artefatos de práticas socioculturais. Mostramos aqui que tal conceito pode ser percebido nos ornamentos das réplicas da cerâmica marajoara de Ponta de Pedras, nas cerâmicas de Icoaraci, comercializados na feira do Ver-o-Peso em Belém e no artesanato africano.

A cerâmica retratada na figura 62 foi confeccionada por um artesão de Ponta de Pedras. Observando seus ornamentos, vemos que existe uma figura, semelhante a uma letra **T**, que se movimenta por toda a superfície da peça. Percebe-se que esse padrão aparece em dois sentidos um no sentido normal da letra **T** e o outro como se a referida letra estivesse de "cabeça para baixo".

Figura 62 – Simetria de reflexão deslizante. Cerâmica Marajoara.



Fonte: Acervo do autor

A transformação sofrida pelo padrão **T** consiste na composição de dois movimentos: O primeiro é um giro de 180º o, que faz com ele fique de ponta cabeça, caracterizando uma reflexão em relação ao eixo horizontal, e o segundo movimento é um deslocamento (translação) na horizontal. Essa composição ocorre em duas faixas da cerâmica como indicado na figura. Esse movimento de reflexão e deslocamento (translação) é o que remete à Simetria de reflexão deslizante.

Nas réplicas da cerâmica marajoara produzidas em Icoaraci e comercializadas no Ver-o-Peso, também pode-se encontrar elementos que remetem ao caso de Simetria de reflexão deslizante. Destacamos um padrão na figura 63 que sofre esses dois movimentos.

A exemplo do que ocorre na figura 63 o padrão destacado na figura 64 sofre uma reflexão e se desloca horizontalmente em faixas que recobrem toda a superfície da peça. Esse movimento é semelhante ao movimento de reflexão deslizante definido pela matemática escolar e ensinado nos anos finais do Ensino Fundamental.

Figura 63. Simetria de reflexão deslizante. Cerâmica do Ver-o-Peso.

Fonte: Acervo do autor

O artefato retratado na figura 64, é um cesto confeccionado em fita por mulheres moçambicanas falantes da lingua tonga. As fitas, em duas cores (clara e escura) se entrelaçam dando forma ao cesto e a seus ornamentos. Como se pode observar, a superfície do cesto possui um padrão principal que se desloca por ela formando seu ornamento. Esse padrão principal se desloca em faixas horizontais e se movimenta em relação ao eixo horizontal e ao eixo vertical. Na direção horizontal, é transladado e, na vertical, refletido.

Figura 64 – Cesto Tonga**.**

Fonte: Google imagens. Acesso em 13/12/2016.

Na figura 65 destacamos uma dessas faixas, bem como o padrão que a compõe. A reta *r* é a base para o movimento de reflexão e o vetor *V* para o movimento de translação. O padrão é refletido na reta *r* e deslocado na direção de *V.*

Figura 65 – Simetria de reflexão deslizante. Cesto Tonga.

Fonte: Adaptado pelo autor.

É possível concluir por meio da imagem que os deslocamentos do padrão em destaque, têm correspondência com o movimento de composição entre Simetrias, aqui nomeado de reflexão deslizante, pois, sofre reflexão e depois translação percorrendo toda a superfície curva do cesto até dar uma volta completa.

O estudo que fizemos até aqui, mostra que as Simetrias e os artefatos possuem uma conexão que pode ser percebida com certa facilidade por observadores, desde que sejam orientados e conduzidos para isso. Nossa posição é que ao visualizar um número considerável de artefatos, os alunos poderão compreender que há duas estruturas implícitas nesses artefatos, uma variante e outra invariante. O que varia são as culturas, os artefatos, o formato, o material e, o que não varia, é a estrutura que está "por traz" dos ornamentos, o padrão de elaboração, de construção deles, que é a Simetria, ou melhor, o pensamento simétrico.

Para concluir nosso pensamento sobre as Simetrias e sua conexão com os artefatos socioculturais, queremos reforçar a nossa proposta para o ensino de Simetria nos anos finais do Ensino Fundamental. Ela consiste, basicamente, em tomar os artefatos como base para o ensino-aprendizagem desse assunto e pode ser operacionalizada, pelo professor por meio da apresentação de imagens de alguns artefatos aos estudantes que remetam aos casos de Simetria, e, posteriormente, pela discussão em sala de aula proporcionada por atividades de problematização que propomos no capítulo 4.

Antes de concretizarmos esta proposta, com as atividades de problematização, é necessário dizer que temos ciência de que nossa pesquisa não é a única que trata do ensino dos casos de Simetria vistos anteriormente, há no campo da educação matemática outras pesquisas que abordam essa temática. Além disso, como estamos direcionando nosso foco para os anos finais do Ensino Fundamental, é preciso, ainda, olhar para os documentos oficiais e para os livros didáticos que tratam de Simetria nesse nível de ensino para responder as seguintes questões: Como esses casos de Simetria são tratados nos documentos oficiais de ensino e nas pesquisas no Brasil? Os livros didáticos usados pelos professores nos anos finais do Ensino Fundamental contemplam esse tratamento? Quais os pontos de convergências e divergências entre pesquisas, documento oficiais e livros didáticos?

3 SIMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Neste capítulo apresentamos os resultados de um estudo exploratório realizado acerca do ensino de Simetria, presentes em teses e dissertações brasileiras, nas propostas dos Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática para o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental, bem como nos modos de abordagem do assunto em livros didáticos de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental adotados na rede pública de ensino. Nossa finalidade foi verificar pontos de convergência e divergência entre as propostas identificadas nos materiais didáticos pesquisados, concernentes ao ensino de Simetria, e as ideias e regulações presentes nos documentos e pesquisas brasileiras.

3.1 Estudos sobre Simetria em dissertações e teses produzidas no Brasil

Apresentamos aqui o resultado de um levantamento feito no banco de teses e dissertações da CAPES com a finalidade de encontrar teses e dissertações que tratassem do ensino de Simetria no Ensino Fundamental a partir de elementos da cultura. Para buscar os trabalhos, utilizamos palavras-chave como isometria, Simetria e Ensino Fundamental e as ferramentas da plataforma que permitem filtrar por área de conhecimento (selecionamos Ciências Humanas) área de concentração e nome do programa (selecionamos Educação e Educação Matemática). Após esse procedimento chegamos a um total de 46 trabalhos.

Procedemos a leitura dos textos para verificar se tratavam dos casos de Simetria do Ensino Fundamental e se propunham ensiná-los por meio de elementos culturais. Assim, selecionamos dois trabalhos: a dissertação de mestrado de Rodrigo Bozi Ferrete, “Práticas etnomatemáticas no liceu do Paracuri: a propósito dos ornamentos geométricos das cerâmicas”, defendida em 2005 e a tese de Maria José Costa dos Santos, “Geometria e Simetria nas rendas de bilro: contribuições para a matemática escolar”, defendida em 2012, ambos desenvolvidos no Programa de Pós-graduação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN).

A pesquisa de Ferrete (2005) é caracterizada pelo autor como uma pesquisa de campo de cunho qualitativo e etnográfico. Foi realizada no Bairro do Paracurí, situado no distrito de Icoaraci em Belém do Pará onde o autor utilizou como ambientes (físicos) de pesquisa, A Escola Liceu de Artes e Ofícios Mestre Raimundo Cardoso e olarias de produção de cerâmica icoaraciense. Nesses ambientes os agentes pesquisados foram: Mestres-artesãos, professores, alunos e coordenadores da escola.

Segundo Ferrete, a Escola Liceu de Artes e Ofícios Mestre Raimundo Cardoso, popularmente conhecida como Liceu do Paracuri (fundada em 1996) é uma escola de Ensino Fundamental e oferece, aos seus alunos, por meio do seu Núcleo de Artes, oficinas de confecção de cerâmica icoaraciense e arqueológica. A proposta inicial construída pelo Projeto Político Pedagógico (PPP) da escola, era de integrar os conhecimentos oriundos das oficinas de confecção de cerâmica e os do currículo do Ensino Fundamental, mas, isso não ocorreu, de forma efetiva no trabalho pedagógico da escola, salvo algumas tentativas isoladas.

A não efetivação da metodologia proposta inicialmente, foi um dos fatores que levaram o autor a realizar a pesquisa, buscando, entre outras coisas, identificar os fatores que impediam a efetivação da proposta com vistas a apontar meios para efetivá-la. Assim, o autor investigou o processo de fabricação de cerâmica icoaraciense, principalmente a sua ornamentação, para identificar elementos que pudessem ser um elo entre as oficinas de cerâmica, ministradas pelos mestres-artesãos aos alunos do Liceu, e as aulas de matemática do currículo escolar ministradas para esses mesmos alunos.

Os conhecimentos matemáticos identificados pelo autor ao fazer a pesquisa junto aos ceramistas foram: noções de espaço, a proporção e as Simetrias que, mesmo sem relacionar com os conhecimentos matemáticos sistematizados, os mestres-artesãos mostraram conhecer e os aplicam, naturalmente, quando da fabricação das peças de cerâmica, principalmente dos seus ornamentos.

O autor define as Simetrias de reflexão, rotação e translação e analisa os ornamentos das cerâmicas descrevendo como esses casos de Simetria podem ser “visualizados” nos ornamentos. Quando se trata da Simetria, Ferrete (2005) demostra preocupação com o pensamento do artesão quando este fabrica uma peça de cerâmica pois, comenta como o artesão pesou e executou as ações que levaram à confecção do ornamento. Enfatiza bastante o pensamento do artesão quando cria o ornamento a vai relacionando com os casos de Simetria.

Dentre as conclusões apresentadas por Ferrete (2005), destacamos que os conhecimentos (etno)matemáticos identificados têm relação com os conceitos de proporcionalidade e Simetria que fazem parte dos assuntos ensinados na escola de Ensino Fundamental e que a identificação das proporções e Simetrias nos ornamentos da cerâmica icoaraciense abrem caminho para a utilização desses conhecimentos no ensino de matemática no Liceu do Paracuri.

Visando contribuir, de forma mais prática, para a integração entre os saberes dos mestres-artesão e dos professores de matemática (e de outras disciplinas) e, consequentemente para a efetivação do PPP do Liceu do Paracuri, Ferrete sinaliza alguns caminhos a serem seguidos pela Escola:

> 1) A discussão de um plano de trabalho conjunto entre os mestres-artesãos e os professores de matemática (e das outras disciplinas), considerando os resultados deste estudo;
> 2) O exercício de uma abordagem mais transversal para a matemática, considerando os aspectos socioculturais da comunidade, principalmente no que diz respeito às práticas desenvolvidas pelos artesãos em cada uma das oficinas do liceu;
> 3) Elaboração e testagem de atividades de ensino que envolvam as práticas artesanais conectadas com os conteúdos matemáticos da sala de aula;
> 4) Planejamento, execução e avaliação de oficinas conjuntas entre os mestres-artesãos, professores e alunos de modo a promover a integração do grupo e o processo de construção cognitiva ampliada dos conceitos matemáticos. (FERRETE, 2005, p. 195-196)

A pesquisa do autor tem relevância para a educação por fomentar uma discussão sobre a valorização dos saberes não escolares e a sua integração a estes últimos. Mostrou-nos por meio de seu relatório o quanto é importante essa parceria pois, tem dupla função: a de manter viva a cultura de um povo, nesse caso os artesãos de Icoarací, e a de estimular a elaboração de métodos de ensino que aproximem as disciplinas escolares do seu contexto de aplicação.

A relevância da pesquisa se dá também no campo da Educação Matemática por relacionar uma prática específica a assuntos de matemática do Ensino Fundamental, produzindo elementos que podem servir de base para a elaboração de atividades de ensino e aprendizagem nas aulas de matemática da escola pesquisada. Apesar de a pesquisa ter tratado de um contexto específico, entendemos que suas ideias podem se expandir para outros contextos escolares.

Ressaltamos, ainda, a importância e contribuição da pesquisa de Ferrete (2005) para a nossa pesquisa. Destacamos que a leitura do seu trabalho nos proporcionou aprendizados, principalmente, quanto: à elaboração de um relatório de pesquisa, ao seu referencial teórico na relação deste com o objeto de pesquisa, à história da cerâmica, pois acrescentou informações as quais já tínhamos e às conexões feitas entre a Simetria e a cerâmica de Icoarací.

Portanto, a pesquisa de Ferrete (2005) possui semelhanças com a nossa pesquisa, por tratar uma cultura específica e por relacionar os conhecimentos dessa cultura ao ensino de Simetria no Ensino Fundamental, mas, também diverge em alguns pontos que mencionaremos mais à frente.

A pesquisa de Santos (2012), que culminou com sua tese de doutorado se deu basicamente em duas frentes: a pesquisa empírica, realizada pela autora no Estado do Ceará, onde fez visitas ao Centro das Rendeiras de Prainha, no município de Aquiraz, e ao Museu do Ceará e a pesquisa bibliográfica, feita com base em textos que compunha o seu aporte teórico e sua fonte de informações históricas sobre as rendas de bilro.

Foi desenvolvida pela autora de forma a reunir os elementos necessários à comprovação de sua tese, enunciada logo no início do texto. Dentre esses elementos, destaco: o estudo histórico e sociocultural do tema da pesquisa (relação das rendas de bilro com a matemática escolar), feito com base em uma pesquisa bibliográfica que reuniu textos nacionais e internacionais, a fundamentação teórica necessária à sua argumentação, a análise matemática das rendas de bilro e a propostas de atividades para a sala de aula.

A autora propõe relacionar o processo de criação das rendas de bilro a conteúdos matemáticos da Educação Básica como geometria, isometrias, Simetrias, área e perímetro de figuras planas afim de melhorar o ensino e a aprendizagem desse conteúdo. Para isso, faz uma pesquisa sociocultural e histórica sobre as rendas de bilro onde destaca o processo histórico de origem das rendas de bilro e como se deu sua entrado no Brasil, por volta do século XVIII.

Essa história sociocultural lhe forneceu elementos para que compreendesse significativamente o processo de criação das rendas e os movimentos feitos pelos bilros na confecção das rendas identificando padrões geométricos presentes em diversas rendas para, posteriormente, os relacionar a conteúdos de geometria da Educação Básica, em especial aos casos de Simetria de reflexão, rotação e translação.

A relação entre matemática escolar e matemática cultural foi feita pela autora de forma clara e efetiva quando ela: destacou os padrões geométricos de várias rendas de bilro, criou (com auxílio de tecnologia) modelos desses padrões e os associou à Simetria de reflexão, rotação e translação, mostrando que o movimento realizado, pelos padrões geométricos das rendas de bilro, é semelhante aos movimentos das isometrias que originam as Simetrias, conteúdo ensinado na Educação Básica brasileira.

Para mostrar como essa relação pode favorecer o ensino e a aprendizagem de Simetria na Educação Básica, a autora propõe 19 atividades para a sala de aula organizadas em níveis crescentes de complexidade, distribuídas em três blocos, sendo o primeiro denominado de atividades de pré-Simetria. As atividades utilizam as rendas de bilro para que o aluno, inicialmente, perceba a existência de padrões e a sua repetição, os movimentos feitos pelo padrão para compor a renda e, finalmente, a percepção de que esses movimentos remetem aos movimentos isométricos que originam as Simetrias estudas na Educação Básica.

Em suas conclusões a autora indica as contribuições para a educação matemática e para o ensino de matemática deixando o estudo em aberto para outras discussões e "novos olhares" a serem lançados sobre a pesquisa.

Dentre os resultados apontados pela autora destacamos:

> As atividades didáticas elaboradas na tese podem ser usadas pelos professores nas salas de aula de Matemática para o ensino de geometria e Simetria, principalmente e, [...] a tese apresentada contribui para o campo da Educação Matemática quando faz a relação transversal entre a Matemática e a renda de bilro, para uso na escola (SANTOS, 2012, p. 178-180).

A pesquisa de Santos (2012) traz contribuições importantes para a Educação e de forma mais específica, para a Educação Matemática pois, reforça o campo com uma proposta clara e fundamentada para o ensino de matemática na Educação Básica além de fazer um resgate histórico das rendas de bilro, como prática sociocultural histórica e propor um método de ensino, com base em elementos culturais, objetivando proporcionar um ensino com significado aos alunos da Educação Básica.

Considerando a forma como a autora elaborou e organizou as atividades, destacamos duas características: a primeira é o nível crescente de complexidade, respeitando o ritmo de aprendizagem dos alunos da Educação Básica, uma vez que estamos falando de crianças, adolescentes e jovens, em sua maioria; a segunda é o fato de as atividades conduzirem o aluno a descobrir o objeto matemático, aos poucos. Essa segunda característica é, ao nosso ver, o ponto chave das atividades pois, entendemos que, no momento em que o aluno descobre o objeto, constatamos que houve aprendizagem, por isso, os alunos precisam ser conduzidos a essa descoberta e as atividades em questão demostram ter esse caráter.

3.2 Propostas de abordagem sobre Simetria nos PCN[36] de Matemática

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental são resultado de um esforço conjunto de vários entes que compõem o sistema educacional do Brasil. Um de seus objetivos é propor “uma revisão dos currículos, que orientam o trabalho cotidianamente realizado pelos professores e especialistas em educação do nosso país” afim de que tal educação forme jovens capacitados para o mercado de trabalho e cidadãos conhecedores de seus direitos e deveres frente à sociedade (BRASIL, 1998, p. 7).

Sua elaboração teve como guia o respeito às “diversidades regionais, culturais e políticas” e a necessidade de “construir referências nacionais comuns ao processo educativo” nacional objetivando, assim, prover o acesso dos jovens ao conjunto de conhecimentos elaborados pela sociedade e reconhecidamente necessários ao exercício pleno da cidadania (BRASIL, 1998, p. 7).

Os PCN organizam as oito séries do Ensino Fundamental da seguinte forma: primeiro ciclo 1ª e 2ª séries; segundo ciclo 3ª e 4ª séries; terceiro ciclo 5ª e 6ª séries e quarto ciclo 7ª e 8ª séries. As orientações curriculares estão dispostas em dois volumes um que contempla os dois primeiros ciclos e outro, os dois últimos ciclos do Ensino Fundamental[37]. Nosso estudo se restringe aos PCN de matemática para o terceiro e quarto ciclos que organizam os conteúdos em 4 blocos: números e operações, espaço forma, grandezas e medidas e tratamento da informação. “Adotam como critérios para seleção dos conteúdos sua relevância social e sua contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno, em cada ciclo” (BRASIL, 1998, p. 16).

Os Parâmetros enfatizam que a matemática tem se configurado como um filtro social que seleciona e determina os alunos que irão ou não concluir o Ensino Fundamental, sendo, dessa forma, um obstáculo para que galgue níveis mais elevados na esfera educacional, quadro que precisa ser revertido. Isso poderá acontecer à medida que os conteúdos matemáticos, trabalhados no Ensino Fundamental, sejam abordados de maneira esclarecedora, possibilitando sua compreensão e assimilação, com significado, pelo aluno.

---

[36] Orientações curriculares para as disciplinas da base curricular comum da educação básica publicadas pelo Ministério da Educação do Brasil (MEC) nas décadas de 1990 e 2000. Fonte: www.mec.gov.br

[37] A partir da LEI Nº 11.274, de 6 de fevereiro de 2006, o Ensino Fundamental passou de oito para nove anos e a nomenclatura “série” foi substituída para “Ano”. Os ciclos se organizaram da seguinte forma: primeiro ciclo com 1º, 2º e 3º anos; segundo ciclo com 4º e 5º anos; terceiro ciclo com 6º e 7º anos e quarto ciclo com 8º e 9º anos. Fonte: www.mec.gov.br

A atribuição de significado pelo estudante, ao conhecimento matemático aprendido, poderá ser estimulada pelas conexões desse conhecimento com outros, tidos como não-formais e, que em muitos casos, já fazem parte da gama de conhecimentos do estudante, como os conhecimentos culturais, por exemplo. Isso fica evidente quando os PCN enfatizam a importância de se conectar a matemática com conteúdos relacionados aos temas transversais, dentre os quais se encontra a “Pluralidade Cultural”. Nos objetivos para o Ensino Fundamental a valorização da cultura, com sua gama de conhecimentos, tem destaque quando falam da importância de o aluno,

> Conhecer e valorizar a pluralidade do patrimônio sociocultural brasileiro, bem como aspectos socioculturais de outros povos e nações, posicionando-se contra qualquer discriminação baseada em diferenças culturais, de classe social, de crenças, de sexo, de etnia ou outras características individuais e sociais (BRASIL, 1998, p. 7).

Tal objetivo aponta para a necessidade de que sejam inseridas, no Ensino Fundamental, discussões sobre a pluralidade cultural brasileira e de outros povos, provendo o acesso dos alunos a esse conhecimento por meio do estabelecimento de conexões destes com o conhecimento formal, sistematizado a ser ensinado na escola básica. Dessa forma, a matemática, antes tida como um mecanismo de seleção e até de discriminação, poderá ser vista (quando conectada à elementos culturais) como uma forma de combater qualquer tipo de discriminação provocada pelas diferenças sociais, culturais, políticas e etc.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais o bloco espaço forma “contempla não apenas o estudo das formas, mas também as noções relativas a posição, localização de figuras e deslocamentos no plano” que ocorrem quando uma figura é transformada em outra podendo, esta última ser simétrica à figura que a originou (BRASIL, 1998, p. 51).

Portanto, dentre os conteúdos de Geometria, que fazem parte do currículo de matemática para os anos finais do Ensino Fundamental, deve ser inserido o estudo da Simetria que é tratado, inicialmente, como transformações geométricas: as isometrias. Dessa forma, espera-se que os livros didáticos adotados nas salas de aula de matemática desse nível de ensino, sigam a essa orientação trazendo dentre seus conteúdos tópicos de Simetria.

Os Parâmetros apontam, também, para o tratamento que deve ser dado ao conteúdo do bloco espaço forma orientando seu ensino a partir da exploração de elementos como obras de arte e desenhos para introduzir a ideia inicial de cada tópico abordado e auxiliar o aluno no aprendizado desse conteúdo.

> [...]. É fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1998, p. 51).

Por fazer parte do referido bloco, o estudo da Simetria, poderá ser introduzido por meio dos elementos que fazem parte da cultura brasileira e de outros povos espalhados pelo mundo. Isso, para possibilitar ao aluno fazer as conexões entre a Simetria e a realidade, o que poderá ampliar, seu repertório de conhecimentos culturais e matemáticos e, consequentemente, sua visão de mundo.

Abordar as transformações geométricas a partir da cultura é uma das orientações previstas pelos PCN de matemática. Sobre o trabalho com as transformações geométricas os parâmetros preconizam o seguinte:

> As atividades que envolvem as transformações de uma figura no plano devem ser privilegiadas nesses ciclos, porque permitem o desenvolvimento de conceitos geométricos de uma forma significativa, além de obter um caráter mais dinâmico para este estudo. [...]. Tais atividades podem partir da observação e identificação dessas transformações em tapeçarias, vasos, cerâmicas, azulejos, pisos, etc. (BRASIL, 1998, p. 124).

A observação dos PCN, nos leva a concluir que, introduzir o estudo de um dado assunto em matemática, é algo que merece a atenção dos professores dessa disciplina. Entendemos que a ideia inicial de cada assunto deve ser apresentada de forma a fazer sentido para o aluno. Com relação ao estudo das transformações no plano, este poderá ser introduzido tendo como ponto de partida “tapeçarias, vasos, cerâmicas, azulejos, pisos e etc.” que servirão de meios para que o aluno possa visualizar as transformações, que encontram correspondências com a sua estrutura ou com os seus ornamentos. Isso poderá favorecer a compreensão do aluno e a formação de uma ideia mais completa sobre as transformações (BRASIL, 1998, p. 124).

Quando se referem especificamente as Simetrias os Parâmetros, também seguem essa mesma linha de pensamento, no que diz respeito à forma como os casos poderão ser tratados.

> As Simetrias centrais e de rotação também surgem em diversos situações: desenhos de flores, logotipos de empresas, desenhos de peças mecânicas que giram, copos, pratos, bordados etc. Os exemplos de translação também são fáceis de encontrar: grades de janelas, cercas de jardins, frisos decorativos em paredes, azulejos decorados etc. (BRASIL, 1998, p. 124).

Fica claro que os elementos mencionados acima servirão de meios para que o aluno possa estabelecer conexões com os casos de Simetria. A atribuição de significado pelo estudante poderá ocorrer a medida que um grande número desses elementos for a ele apresentado para que perceba as regularidades, os padrões que se repetem e, em seguida, os relacione aos casos de Simetria.

O tratamento dado ao ensino de Simetria, segundo nossa visão apoiados nos PCN, significa usar tapeçarias, vasos, cerâmicas, pisos, bordados, gradis de ferro, cercas de jardins, frisos decorativos, azulejos, pinturas corporais (entre outros elementos culturais) para auxiliar o aluno na formação inicial da ideia, por meio da apresentação de vários elementos que remetam a um determinado caso de Simetria, na compreensão das definições e na resolução de atividades sobre Simetria completando-se assim um ciclo de estudos. Dessa forma, os elementos da cultura devem estar presentes em todas as etapas de estudo dos casos de Simetria: apresentação, definição e atividades. Mas essas orientações são contempladas pelos livros didáticos de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental?

3.3 Abordagem sobre Simetria em livros didáticos de matemática do Ensino Fundamental

O livro didático tem papel importante no ensino de matemática. Como já mencionamos anteriormente, é tido em muitas situações de ensino, como o único material didático a dar suporte ao professor em sua ação pedagógica cotidiana. Por isso, depreendemos este estudo de algumas coleções no que concerne ao tratamento dado para a Simetria. Nosso estudo incluiu cinco coleções de livros didáticos de matemática, cada uma com quatro livros (totalizando 20) referentes aos 6º, 7º, 8º e 9º, anos do Ensino Fundamental, todos aprovados pelo Programa Nacional do Livro

Didático (PNLD)[38]. Uma coleção aprovada pelo PNLD de 2014 (livros utilizados em 2014, 2015 e 2016) e quatro coleções pelo PNLD de 2017 (livros que serão utilizados no triênio 2017,2018 e 2019). Os livros foram obtidos junto à Secretaria Municipal de Educação de Ponta de Pedras a título de doação.

Para fazer o estudo dos livros elaboramos três questões norteadoras utilizadas como critérios: *Quais os casos de Simetria presentes nos livros didáticos de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental? Os livros didáticos de matemática, dos anos finais do Ensino Fundamental, tratam da Simetria com base na cultura? Esse tratamento permite que o aluno estabeleça conexões entre Simetria e cultura? P*rocedemos, então o estudo dos livros didáticos e, constatamos que, dentre os 20 livros que compõem o estudo, 11 trazem a Simetria dentre os seus conteúdos. Além dessa constatação, outras foram obtidas e estão sintetizadas no Quadro 1, a seguir.

Quadro 1 - síntese dos dados produzidos pelo estudo dos livros didáticos.

Livro	Ano	Casos de Simetria	Há Abordagem cultural?	Imagem de artefatos	Estimula conexões ?
Matemática, teoria e contexto	6º ano	Reflexão	Não	----	Não
Matemática, teoria e contexto	7º ano	Reflexão e rotação	Não	Fotografia do Taj Mahal	Não
Projeto araribá	6º ano	Reflexão	Não	Desenho *Quioco e* Taj Mahal	Não
Projeto araribá	8º ano	Reflexão, rotação e translação	Sim	Obra de Escher	Sim.
Convergências	6º ano	Reflexão	Não	Pintura	Não
Convergências	7º ano	Reflexão, rotação e translação	Sim	Azulejos históricos	Sim.
Vontade de saber	6º ano	Reflexão	Não	----	Não
Vontade de saber	7º ano	Reflexão e rotação	Não	----	Não
Vontade de saber	9º ano	Translação e rotação	Não	Obras de Escher	Não
Projeto teláris	7º ano	Reflexão	Não	----	Não
Projeto teláris	9º ano	Translação, reflexão e rotação	Não	Obra de Escher	Não

Fonte: Elaboração própria

[38] Programa Nacional de Livros Didáticos do Brasil criado pelo Decreto nº 91.542, de 19/8/85.

A análise dos dados produzidos tem como ponto de partida as questões que elencamos como critérios para o estudo dos livros didáticos. Está organizada em três momentos referentes a cada uma das questões.

Quais os casos de Simetria presentes nos livros didáticos de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental?

Considerando o 3º ciclo, os dados produzidos mostram que a Simetria está presente em oito livros dentre os onze que trazem o estudo de Simetria. Os casos de Simetria presentes são reflexão, rotação e translação. No entanto, somete um dos oito livros do ciclo trouxe o estudo dos três casos indicados. Com relação ao quarto ciclo os livros contemplam os três casos de Simetria que devem ser estudados. Porém, dentre os 11 livros que tratam do conceito, somente três são do quarto ciclo. Dessa forma concluímos que os alunos do terceiro e do quarto ciclo, podem estar sendo desfavorecidos por não terem acesso ao estudo de Simetria de forma completa o que pode comprometer a formação desse conceito pelo aluno, uma vez que os PCN, orientam que nos dois ciclos devem ser trabalhadas as Simetrias de reflexão, rotação e translação

Se considerarmos, agora às coleções estudadas, percebemos que quatro dentre as cinco, trazem dentre os seus conteúdos, reflexão, rotação e translação. Apenas uma coleção, não trouxe o estudo de translação. Essa coleção foi aprovada pelo PNLD 2014, cujos livros foram utilizados nos anos de 2014, 2015 e 2016 por alunos de todo o Brasil. Consideramos isso uma falha, que poderá desfavorecer os alunos que a utilizaram em seus estudos. Como a maioria das coleções trouxe o estudo dos três casos de Simetria já citados, fica claro que os autores preferem considerar mais importante que tais casos sejam contemplados levando em consideração a coleção como um todo e não a divisão por ciclos.

Diante do exposto a classificação por ciclo deve ser priorizada nos livros, ou seja, os três casos de Simetria (reflexão, rotação e translação) devem ser tratados tanto no terceiro ciclo quanto no quarto ciclo. O que poderá diferir de um ciclo para outro é o nível de complexidade da abordagem desses assuntos.

Além de reflexão, rotação e translação, já mencionados anteriormente, a composição entre essas transformações é prevista para o estudo de Simetria no quarto ciclo. As composições ocorrem quando uma figura sofre uma transformação e, em seguida sofre uma outra de outro tipo. Uma figura, por exemplo, pode sofrer reflexão seguida de rotação. A reflexão deslizante[39], que consiste em uma reflexão seguida de uma translação dando origem a figuras simétricas, é um exemplo de composição (BRASIL, 1998, p. 89).

Os dados sintetizados no Quadro 1 mostram, que dentre os onze livros que trouxeram o estudo de Simetria, nenhum trata da composição de transformações estando, portanto, em desacordo com os PCN de matemática o que pode ser desfavorável ao aluno, que deixará de ter acesso a esse que é um nível mais elevado de tratamento dos casos de Simetria. Para nós há uma necessidade de adequação dos livros didáticos de matemática do terceiro e quarto ciclo segundo esse aspecto.

Outra constatação que os dados revelam é que 6 dentre os 11 livros, trazem o estudo de um só caso de Simetria, a reflexão, não mencionam os estudos posteriores dos demais casos, dessa forma o aluno ao ter acesso a esse livro pode formar a ideia de que o único caso de Simetria existente é a reflexão. Isso leva a pensar que, quando os demais casos de Simetria forem apresentados aos alunos, estes ficariam surpresos podendo se expressar da seguinte forma, *“Mas Simetria não era só quando a figura possuía um eixo que a dividia ao meio? ”* Ou *“a Simetria não ocorre só quando se tem uma figura com duas metades iguais? ”*.

Assim, o livro teria que mencionar qual caso de Simetria está tratando deixando claro que este não é o único caso e que os demais seriam abordados nos anos seguintes. Sabemos que o professor é corresponsável em informar esses detalhes ao aluno, mas, o livro deve ter uma organização clara de forma que não confunda o entendimento, pelo estudante, dos assuntos apresentados

Os livros didáticos de matemática, dos anos finais do Ensino Fundamental, tratam da Simetria com base na cultura?

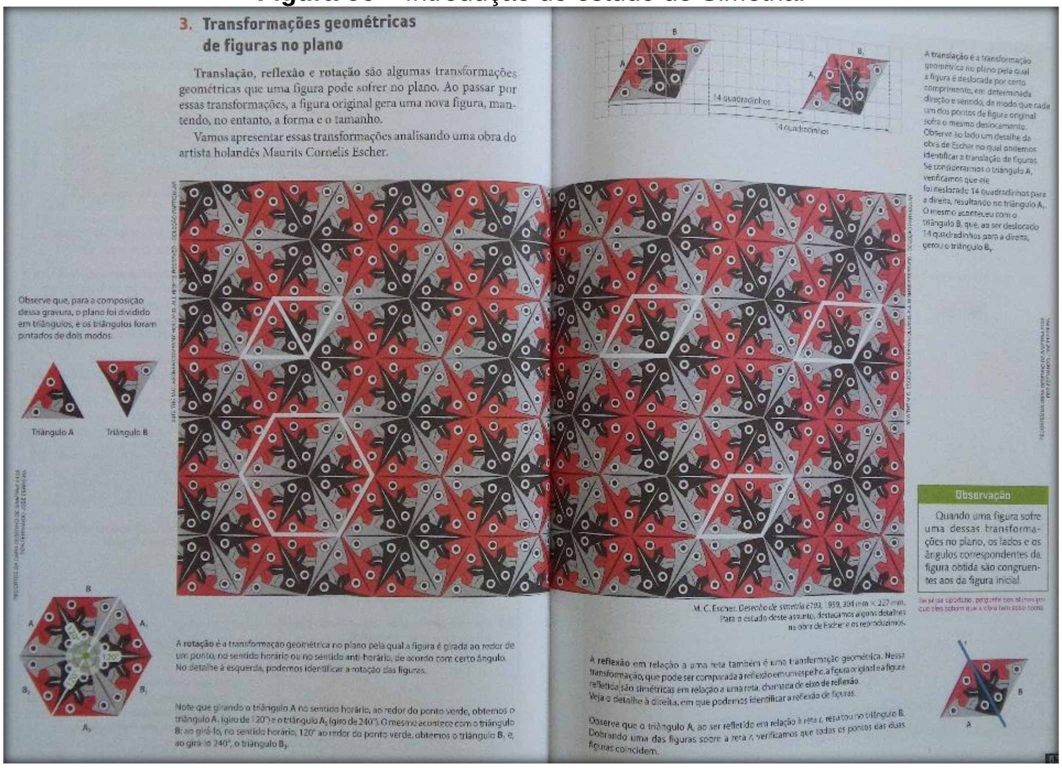
De acordo com o que foi observado nos livros didáticos analisados, (terceira coluna do Quadro 1) dos onze livros que abordam o conceito de Simetria, apenas dois (Projeto Araribá 8º Ano e Convergências 7º Ano), tratam de Simetria com base na cultura quando utilizam elementos culturais para introduzir e definir os casos de Simetria. Um utiliza azulejos portugueses e o outro uma obra de Escher para introduzir e definir reflexão, rotação e translação. O fazem de maneira organizada e clara. Porém, utilizam somente um elemento cultural na introdução do estudo e, nas

[39] Já definimos no capítulo 2.

atividades propostas, nenhum dos elementos, quebrando, dessa forma, a ideia proposta inicialmente.

O livro do 8º ano do Projeto Araribá traz um texto inicial que classifica translação, reflexão e rotação como “transformações geométricas que uma figura pode sofrer no plano”. Destaca o fato de que tais transformações dão origem a uma nova figura “mantendo, no entanto, a forma e o tamanho” da figura inicial. Em seguida é apresentada a obra de M. C. Escher (1898-1972)[40] *“desenho de Simetria E103 de 1959”*, a partir da qual são conceituados os três tipos de transformações Gay (2014c, p. 83).

Figura 66 – Introdução do estudo de Simetria.



Fonte: Gay (2014c, p. 82-83).

Como se pode ver na figura 66 (do lado esquerdo da página do livro) são destacados dois triângulos que servem de base para a composição de toda a obra de arte. Os triângulos formam losangos e hexágonos que se deslocam pela superfície plana. A ideia é mostrar que a figura maior pode ser formada por meio do deslocamento desses triângulos e que esses deslocamentos caracterizam os

[40] Artista gráfico holandês, conhecido pelos trabalhos em litogravuras que representavam várias perspectivas geradoras de ilusões de ótica no receptor. Fonte: https://www.ebiografia.com/m_c_escher/. Acesso em 05/05/2017.

movimentos de rotação, reflexão e translação. O livro destaca o fato de que a figura originada por meio das transformações possui lados e ângulos congruentes.

No livro Convergências, Matemática 7º Ano o tópico “Simetria: reflexão, rotação e translação” é introduzido pelo autor com um texto onde ele fala do interesse da humanidade, desde tempos remotos, “por objetos, construções e elementos da natureza que apresentam padrões simétricos”. Ele traz uma fotografia de uma pintura dos índios *Kayapó* do Pará e outra da fachada de um prédio antigo, da cidade de São Luiz do Maranhão, recoberta por azulejos portugueses, conforme a figura 67 (CHAVANTE, 2015b, p. 182).

Figura 67 – Introdução à Simetria no Livro do 7º ano, convergências.

Simetria: reflexão, rotação e translação

A humanidade, desde os tempos mais remotos, se interessa por objetos, construções e elementos da natureza que apresentam padrões simétricos. A ideia de simetria está ligada à arte e à estética, fazendo com que artistas dos mais variados ramos busquem essa harmonia em suas obras e produções.

Pintura de figura geométrica em tecido feita por indígena da etnia Kayapó da aldeia Moykarakô, em São Félix do Xingu (PA). Fotografia tirada em jan. 2015.

Padrões simétricos são utilizados, por exemplo, em azulejos decorativos, como os que cobrem a fachada de alguns prédios em São Luís, capital do estado do Maranhão.

Fachada coberta por azulejos decorativos. A cidade de São Luís (MA) recebeu em 1997 o título de Patrimônio Mundial. Faz parte desse patrimônio o centro histórico da capital maranhense, com suas construções e arquitetura com forte influência portuguesa. Fotografia tirada em jun. 2007.

Veja na parte inferior da página, um exemplo em que podemos observar padrões de simetria em uma faixa de azulejos decorativos. Note que essa faixa decorativa é composta de azulejos com o mesmo desenho.

Considerando apenas a imagem de um dos azulejos dessa faixa, podemos observar que se trata de uma figura refletida em relação ao eixo **e**. Nesse caso, ocorre uma **simetria de reflexão** ou **simetria axial**.

Agora, tomando a imagem de um dos azulejos dessa faixa como referência, podemos girá-la em torno do ponto O, obtendo os padrões simétricos que compõem essa faixa decorativa.

Nesse caso, ocorrerá a **simetria de rotação**, que é uma transformação geométrica plana na qual uma figura é rotacionada, ou girada, ao redor de um ponto (**ponto de rotação**), de acordo com certo ângulo (**ângulo de rotação**). A forma e o tamanho da figura são mantidos após a rotação.

Rotação em relação ao ponto O de 90°, no sentido anti-horário.

Rotação de 180° em relação ao ponto O, no sentido horário ou anti-horário.

Rotação de 90° no sentido horário em relação ao ponto O.

- **Um giro de 90° no sentido horário equivale a um giro de quantos graus no sentido anti-horário?**

Outra transformação geométrica plana que uma figura pode sofrer é a **simetria de translação**. Nesse tipo de simetria, uma figura é deslocada considerando três aspectos: **distância**, **direção** e **sentido**. Após o deslocamento, a forma e o tamanho da figura são mantidos.

Deslocamento de 8 quadradinhos (distância) na horizontal (direção) para a direita (sentido).

8 quadradinhos

Fonte: Chavante (2015b, p. 182-183).

Como pode ser visto na Figura 67, a borda inferior das duas páginas do livro, onde o autor introduz a Simetria, traz uma faixa decorativa desses azulejos. Dessa faixa o autor destaca um dos azulejos, traça o seu eixo de Simetria e conclui que se trata da Simetria de reflexão ou axial, mostra que a rotação desse azulejo em torno de um dado ponto *O* origina uma parte da faixa, definindo Simetria de rotação. Define Simetria de translação por meio do deslocamento desse mesmo azulejo sobre a superfície. Nesses dois últimos casos de Simetria o autor evidencia que se trata de transformações onde a forma e o tamanho da figura são mantidos.

A ideia de Simetria é introduzida de forma clara pelo autor com a utilização dos azulejos apesar deste utilizar apenas duas páginas, de um total de oito, para definir os casos de Simetria. Com exceção da Simetria de reflexão, os dois outros casos, quando conceituados, são vinculados às transformações geométricas que conservam a forma e o tamanho das figuras. O fato de o autor trazer os três principais casos de Simetria no mesmo volume pode contribuir para a formação mais completa da ideia de Simetria pelo aluno.

Com relação às atividades propostas, no entanto, em nenhuma ele explora os azulejos ou a pintura indígena que utilizou na introdução do estudo, o que mostra um descompasso entre a forma como a Simetria foi definida e como está sendo cobrado do aluno nas atividades. Isso pode ser desfavorável à formação da ideia de Simetria pelo aluno. Assim, o tratamento dado pelo livro aos casos de Simetria se aproximou bastante do que entendemos por tratar da Simetria com base na cultura, favorecendo as conexões entre o conhecimento cultural e o matemático. Porém, este tratamento poderia ser mais aprofundado se fossem utilizados outros elementos, além dos azulejos portugueses e se as atividades seguissem a proposta da introdução do assunto.

Outros cinco livros, dos onze, trazem imagens de elementos culturais para tratar de Simetria, porém, isso não é feito de forma consistente. Os livros trazem fotografias de obras de arte, de prédios antigos, mas não tratam das imagens de forma a conectá-las aos casos de Simetria. Em muitos casos somente questionam os alunos para que façam as relações sem dar informações suficientes para tal. Seria necessário que as imagens tivessem marcações e recortes (como nos dois livros destacados) sugerindo qual caso de Simetria tem relação com a situação dada. Isso poderia facilitar a visualização e uma compreensão melhor da ideia de Simetria pelo aluno.

Percebemos, ainda, de acordo com os dados (quarta coluna do Quadro 1) que os elementos culturais utilizados se repetem. Dois deles usaram fotografias da fachada do Mausoléu Indiano Taj Mahal e quatro pinturas de Escher. Isso mostra que os autores não diversificaram os elementos utilizados e priorizaram obras de arte mais sofisticadas, em detrimento da arte popular como o bordado, a renda, o artesanato em geral, gradis de ferro, dentre outros artefatos socioculturais que fazem parte do dia a dia dos estudantes.

Esse tratamento permite que o aluno estabeleça conexões entre Simetria e cultura?

Dentre os objetivos do Ensino Fundamental para o ensino de matemática, destacamos: “estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares”, como um fator importante para que o aluno compreenda os conteúdos matemáticos de forma significativa (BRASIL, 1998, p. 48).

De acordo com os dados produzidos, em somente dois dos onze livros que tratam de simetria, o estudante foi estimulado a estabelecer conexões entre a Simetria e o conhecimento cultural. Isso considerando somente a introdução da ideia de Simetria e as definições pois, as atividades propostas por esses livros, não utilizaram os elementos culturais usados nas definições o que não está de acordo com as orientações dos PCN, pois na proposta de se trabalhar com os temas transversais fica evidente a necessidade de que sejam estabelecidas relações para facilitar a compreensão dos alunos.

> O estabelecimento de relações é fundamental para que o aluno compreenda efetivamente os conteúdos matemáticos, pois, abordados de forma isolada, eles não se tornam uma ferramenta eficaz para resolver problemas e para a aprendizagem/construção de novos conceitos (BRASIL, 1998, p. 37).

Diante disso, inferimos que é o tratamento dado aos conteúdos matemáticos que irá possibilitar o estabelecimento de conexões pelo aluno e, que essas conexões poderão permitir que os conteúdos sejam apreendidos de forma efetiva. A Simetria é um desses conteúdos que, a depender desse tratamento, pode ser conectado à elementos culturais para que seja compreendida pelo aluno a ponto de auxiliá-lo na solução de problemas e na interpretação de situações por ele vivenciadas.

Mas, de acordo com os dados produzidos com o estudo dos livros didáticos, a maioria dos livros examinados (nove dentre os onze) introduzem e definem os casos de Simetria de forma rápida, por mostrarem poucas situações onde se pode perceber a Simetria, e direta, pois as situações apresentadas estão desconectadas do contexto cultural dos estudantes e, dessa forma não estimulam as conexões o que pode dificultar o ensino e a aprendizagem de Simetria.

Portanto, os livros de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, em sua maioria não abordam a Simetria tendo como fundamento a utilização de elementos da cultura como os que destacamos. Quando apresentam artefatos socioculturais não os conectam de forma clara aos casos de Simetria, dificultando para o estudante o estabelecimento de conexões entre conhecimentos, o que seria necessário para que o aprendizado tenha significado, de acordo com os PCN. Espera-se que autores e editoras, ao elaborarem os livros, levem em consideração esses aspectos afim de que seus livros possam contribuir, de forma mais efetiva com o ensino-aprendizagem de matemática, em especial de Simetria.

3.4 Convergências e divergências entre as propostas dos PCN, dos livros didáticos e as pesquisas sobre Simetria na pós-graduação brasileira

Falemos um pouco sobre as aproximações e distanciamentos entre as pesquisas de Santos (2012) e Ferrete (2005). Já comentamos sobre a relevância das pesquisas, mencionadas anteriormente, e suas contribuições para a educação, educação matemática e para o ensino de matemática na Educação Básica pois, ambas, apresentam resultados e propostas, ao nosso ver, viáveis de serem implementadas nesse nível de ensino.

Comparando as duas pesquisas, observamos que os principais pontos de convergência entre elas são: têm como foco o ensino de matemática na Educação Básica, propõem esse ensino a partir de elementos da cultura brasileira (uma com as rendas de bilro de Ceará e a outra com as cerâmicas de Icoaraci no Pará), analisam artefatos de práticas socioculturais históricas identificando neles padrões geométricos, fazem relação entre o processo de criação dos artefatos e seus padrões geométricos e a matemática escolar e ambas pesquisam uma única prática sociocultural.

As divergências que detectamos entre as pesquisas são: A pesquisa de Santos (2012) traz uma proposta mais completa para a sala de aula por ter elaborado atividades de ensino do conteúdo estudado, já a pesquisa de Ferrete (2005) deu pistas para isso, mas, não o fez; Santos (2012) elenca como conteúdos matemáticos, Simetria, isometria, área, perímetro, entre outros e Ferrete (2005) proporção e Simetria e o fato de a pesquisa de Ferrete ter como foco os alunos de uma escola específica, o Liceu do Paracuri, o que não ocorre na outra pesquisa.

As duas pesquisas se aproximam da nossa proposta em alguns pontos dentre eles, a conexão de práticas socioculturais e o ensino de matemática na Educação Básica e objeto matemático “Simetria” que é estudado nas três pesquisas. Nossa pesquisa, porém, se diferencias das de Santos (2012) e Ferrete (2005) por trazer um público alvo mais específico, que são os alunos dos anos finais do Ensino

Fundamental, por trazer um objeto matemático definido, a Simetria, e por fazer o estudo de diversas práticas socioculturais ao invés de uma única prática.

Nossa intenção em trazer o estudo de pesquisas já feitas, para compor esta pesquisa, não é de enfatizar qual delas é mais ou menos relevante para o campo ou muito menos pormenorizá-las, é, porém, dar visibilidade para esses trabalhos destacando sua relevância para a educação matemática e enriquecer nossa pesquisa com seus dados e, principalmente, com as propostas por elas apresentadas, pois entendemos que é a partir do estudo de outras pesquisas que firmamos os “pés no chão para caminhar com mais confiança” na direção de uma proposta possível de ensino de matemática.

Os trabalhos citados acima fazem referência a matemática como conhecimento historicamente construído ao longo do tempo e do espaço e em contextos culturais diversos, defendem a existência de uma matemática cultural produzida no seio das práticas socioculturais e sua utilização no ensino de conceitos matemáticos o que está em consonância com as orientações dos PCN e com a presente pesquisa. No entanto, não é o que se observa para os livros didáticos de matemática.

Uma das ações necessárias, para que a escola comece a inserir, conhecimentos de cunho cultural conectados aos conteúdos de matemática, na sua dinâmica cotidiana, é a melhoria da qualidade do material didático utilizado pelo professor de matemática, do Ensino Fundamental, em suas aulas, pois a falta de condições para que o professor aprimore sua formação e, até, a escassez de outros materiais didáticos, que deem suporte para a prática diária do professor nas aulas de matemática do Ensino Fundamental, faz com ele se apoie “quase exclusivamente nos livros didáticos, que, muitas vezes, são de qualidade insatisfatória” (BRASIL ,1998, p. 21).

Dentre outras finalidades os PCN “visam à construção de um referencial que oriente a prática escolar” da qual as aulas de matemática são parte importante. Dessa forma, “poderão [...] orientar a produção de livros e de outros materiais didáticos, contribuindo dessa forma para a configuração de uma política voltada à melhoria do Ensino Fundamental” (BRASIL, 1998, p. 15).

Portanto, o livro didático de matemática a ser utilizado pelo professor do Ensino Fundamental, deve se adequar no intuito de seguir as orientações curriculares dos Parâmetros, para melhor auxiliar o professor, no planejamento e execução das aulas, e o estudante no estabelecimento de conexões entre matemática e outros conhecimentos do mundo que o cerca, como é o caso dos conhecimentos culturais já mencionados

O estudo que depreendemos neste capítulo, possibilitou identificar os casos de Simetria que devem ser ensinados nos anos finais do Ensino Fundamental. Vimos que de acordo com os PCN, tanto no terceiro quanto no quarto ciclos, as Simetrias devem ser ensinadas em termos de transformações de figuras no plano, quais sejam, reflexão, rotação e translação que recebem o nome de isometrias. Vimos também que quarto ciclo a composição de Simetrias deve fazer parte dos conteúdos de matemática a serem ensinados.

Em nossa pesquisa partimos das transformações no plano[41] pois, as Simetrias são obtidas por meio de um tipo específico de transformação, as isometrias. Apesar de não serem nosso objeto de estudo, mostramos as homotetias que são movimentos de ampliação ou redução de figuras e, portanto, não geram figuras simétricas. Porém seu estudo é necessário para que possa ser feita, a partir da comparação, a diferenciação das transformações que geram Simetrias e as que não geram. Optamos por trazer o estudo organizado dessa forma, para complementar os livros didáticos que não seguem as orientações dos PCN, pois somente três livros (um do 7º, um do 8º e um do 9º, anos) definem Simetria em termos de transformações geométricas no plano;

Diante disso, enfatizamos que a presente pesquisa, tem relevância por apresentar uma proposta clara e completa para o ensino de Simetria. Completa por trazer em seu estudo todos os casos de Simetria a serem estudado nos anos finais do Ensino Fundamental e clara por encadear de forma coerente as principais definições envolvidas no estudo de Simetria.

Mas o fato de se fazer um estudo claro e completo dos casos de Simetria, nos termos por nós definidos, é suficiente para que o aluno aprenda efetivamente? Não podemos responder tal questão, pois o aprendizado é algo particular, mas, o que podemos afirmar é que o tratamento dado a esse conteúdo poderá implicar em um aprendizado mais ou menos efetivo de cada um dos casos bem como na formação da ideia de Simetria.

Apoiados nos Parâmetros Curriculares Nacionais, constatamos que para que o aluno aprenda os conteúdos matemáticos com significado e os utilize como

[41] Ver estudo completo no capitulo 2.

ferramenta de resolução de problemas, deve estabelecer conexões desses conteúdos com os de outras áreas do currículo. Uma das formas de promover essas conexões é o trabalho com os temas transversais dentre os quais destacamos a “Pluralidade cultural” que preconiza o trabalho dos tópicos de matemática a partir de elementos da cultura brasileira e de outros povos ao redor do mundo.

De forma especial, em momentos diferentes, os Parâmetros destacam que a Simetria tem conexão com elementos da cultura sugerindo, ainda, alguns desses elementos como tapeçarias, vasos, cerâmicas, azulejos e bordados, dentre outros. Esses elementos podem ser da cultura brasileira e da cultura de outros povos ampliando os conhecimentos dos alunos, também no aspecto cultural.

Como vimos em nossa análise, a maioria dos livros didáticos de matemática dos anos finais, usados por professores e alunos de todo o Brasil, não contemplam a orientação dos Parâmetros e não tratam da Simetria com base na cultura, principalmente no que se refere às atividades propostas. Somente dois se aproximam do que preconizam os PCN, mas, de forma incompleta. Outros trazem alguns elementos culturais, mas não dão condições para que o aluno faça as conexões necessárias.

Isso revela que alguns autores de livros didáticos não estão atentando para as pesquisas brasileiras sobre Simetria nem para os PCN de matemática. As pesquisas que trouxemos propõe o ensino de Simetria (e de outros conteúdos matemáticos) a partir de práticas socioculturais e seus artefatos, quais sejam rendas de bilro e cerâmicas, foram realizadas em 2005 e 2012, mas, os livros elaborados em 2014/2015 não observam tais orientações. Por isso, é preciso que se trabalhe para fornecer ao professor de matemática outras ferramentas de ensino. Mas, o que fazer com os livros didáticos?

Diante das constatações mencionadas, apresentaremos posteriormente, como resultado refletido na pesquisa, um corpo de recomendações para o ensino dos conceitos de Simetria apoiado na problematização de elementos culturais, no sentido de complementar a abordagem presente nos livros didáticos adotados nas escolas. Dessa maneira de pensar no uso das informações geradas na pesquisa, abordamos os casos de Simetrias de reflexão, rotação, translação e reflexão deslizante com base em artefatos da cultura, brasileira e de outros povos, com vistas a potencializar o ensino deste assunto nos anos finais do Ensino Fundamental**.** Desde a introdução da ideia de Simetria às atividades propostas para os alunos. Isso por considerar que essa proposta favorece o estabelecimento de conexões tendo como consequência o aprendizado significativo da Simetria pelo estudante.

Todavia, embora sabemos que muitos trabalhos já buscaram estabelecer conexões entre os conceitos de Simetria e as expressões estéticas nas manifestações dos artefatos produzidos pela cultura humana, bem como em suas relações com objetos da natureza, neste trabalho consideramos ser de extrema relevância apresentar mais variações didáticas que possibilitem outras maneiras mais concretas e aproximadas das culturas dos estudantes e professores, para que possam operacionalizar tais conexões em sala de aula, que se traduzam em atividades didáticas nas aulas de matemática.

Assim, nossa proposta, portanto, é fornecer um bloco de atividades didáticas que possam levar o professor de matemática a explorar diretamente múltiplos elementos culturais e matemáticos suficientes para colocar tais atividades em prática nas aulas sobre Simetria. Desse modo, propomos que essas atividades tenham como base as ideias lançadas por Miguel e Mendes (2010) a respeito da elaboração e uso de “Unidades Básicas de Problematização” (UBP), sobre as quais discorreremos no próximo capítulo desta dissertação, como uma contribuição final advinda de nosso estudo.

4 SIMETRIA POR MEIO DE UBP PARA O ENSINO FUNDAMENTAL

As atividades propostas pelo professor em sala de aula, merecem uma atenção especial por parte dele, pois implicam de forma direta na aprendizagem matemática dos estudantes. Assim, precisam ser planejadas e executadas tomando como princípio central sua participação ativa no processo de aprender por meio de seu próprio investimento cognitivo e ativo, ou seja, aprender a aprender, conforme os ideários já lançados e estabelecidos por teóricos como John Dewey, Celentin Freinet, Paulo Freire e Ubiratan D’Ambrosio, cada um a partir de suas áreas de pertencimento. Diante disso, apresentamos neste capítulo, nosso entendimento sobre problematização, unidade básica de problematização seu uso no ensino de matemática para ao final descrever, a nosso modo, 13 Unidades Básicas de Problematização – UBP cuja finalidade é oferecer aos professores de matemática (mas também de outras disciplinas) uma proposta de trabalho diferenciada que, poderá redimensionar sua prática docente e elevar o nível de aprendizado de seus alunos.

Faremos também uma discussão em torno de argumentos favoráveis às UBP e, apresentaremos pistas para o trabalho com essa abordagem metodológica de ensino. Todavia, se faz necessário inicialmente esclarecer o questionamento norteador deste capítulo: o que é uma UBP? Do que trata o assunto?

4.1 Sobre as UBP

Muitas são as práticas socioculturais que mobilizam cultura matemática. Nos capítulos 1 e 2 deste trabalho citamos algumas delas evidenciando sua conexão com os casos de Simetria e enfatizamos a sua importância para o ensino desse assunto no Ensino Fundamental. Diante disso nos resta responder as seguintes questões: Que tipo de atividades de ensino o professor pode elaborar para que a conexão entre os artefatos socioculturais e a Simetria seja feita pelos alunos? Quais atividades poderão desenvolver nos alunos as habilidades de pesquisar, discutir e propor, dentro da sala de aula de matemática?

Nossa proposta é que essas atividades devem ter como princípio a problematização do conhecimento matemático sendo propostas para serem desenvolvidas em sala de aula (e para além dela) envolvendo as matemáticas mobilizadas pelas práticas socioculturais conectadas às matemáticas que estão presentes nas práticas escolares. Deverão ter como objetivo o ensino do conceito de Simetria, e como base metodológica as “Unidades Básicas de Problematização”, UBP, propostas por Miguel e Mendes (2010, p 386). Segundo os autores,

> Uma UBP nada mais é do que um *flash discursivo memoralistico* que descreve uma prática sociocultural situada em um determinado campo de atividade humana, e que teria sido de fato realizada para se responder a uma necessidade (ou desejo) que teria se manifestado a um ou mais integrantes de uma comunidade de prática, em algum momento do processo de desenvolvimento dessa atividade na história (tradução livre).

A UBP, como o próprio nome define, é uma unidade que serve de base para a problematização. Ela em si não é a problematização. A partir da descrição da prática sociocultural, da sua análise e identificação dos conceitos ou elementos que se deseja estudar é que se deve problematizar, por meio de diferentes questões que levem o estudante a praticar uma ação, podendo gerar novos questionamentos e estes discutidos com os demais participantes da atividade. Todo esse processo é o que leva o estudante a ter contato com o objeto de estudo e a apreender os conceitos a ele relacionados (MIGUEL; MENDES, 2010).

Em suma uma UBP é materializada por um texto sucinto e claro que descreve uma prática sociocultural, preservando seus aspectos históricos e técnicos, bem como a autoria de tais técnicas. Essa prática histórica é recriada por esse relato e conectada, por meio de uma série de questionamentos propostos pelo professor, a práticas da atualidade presentes no contexto escolar.

Esses questionamentos são postos pelo professor aos seus alunos, de forma a instigá-los na busca por soluções criativas. As matemáticas utilizadas para tal solução devem ser as mesmas utilizadas nas práticas originais, ou seja, uma das características fundamentais de uma UBP é resolver um problema da atualidade utilizando-se das matemáticas que foram utilizadas na solução de problemas do passado. Mas, aqui o faremos de outra forma, visto que não tratamos de práticas socioculturais e sim dos produtos dessas práticas que são os artefatos materiais.

Para ficar mais claro vamos exemplificar: um dos artefatos que usamos, aqui é a cerâmica. A prática sociocultural é o ato de confeccionar a cerâmica desenvolvido pelo artesão e o produto desse ato (prática) é a cerâmica (artefato). Não estamos tratando neste trabalho do processo de confecção da cerâmica e da matemática envolvida nesse processo e sim do artefato, olhando seus ornamentos por meio de imagens na busca de identificar pontos que os relacione à matemática escolar, particularmente a Simetria

Consideramos que os artefatos aqui estudados têm uma matemática original “do passado” pois essa matemática é a precursora da matemática de hoje que praticamos na escola, ou seja, a matemática como a conhecemos hoje foi obtida a partir de sistematizações e generalizações dessa matemática do passado. Para ficar bem claro, entendemos que as Simetrias são fruto da sistematização de movimentos como os que ocorrem na composição dos ornamentos dos artefatos que analisamos e outros como eles. Assim, consideramos que estamos usando a matemática do passado para resolver um problema do presente, qual seja, o ensino de Simetria no Ensino Fundamental que também é uma prática social, porém, do presente.

As UBP, não devem ser vistas ou tratadas como uma lista de exercícios convencionais a serem resolvidos, Mas como um momento de problematização, discussão, troca de ideias, interação, formulação de hipóteses, um convite a uma aula onde todos têm a oportunidade de se expressar, propor soluções e novas questões. Elas propiciam um ambiente onde as pessoas são colocadas em movimento na busca por soluções aos problemas (MIGUEL; MENDES, 2010).

Esse tipo de atividade se faz necessária no ambiente escolar por ser urgente um ensino que ultrapasse os muros da escola, que coloque professores e alunos em movimento, que os mobilize no sentido de provocar neles um desequilíbrio os tirando de sua zona de conforto e os levando para o confronto de ideias, de diferentes formas de pensar e agir. Dessa forma a diversidade riquíssima presente na sala de aula será explorada podendo tornar o aprendizado mais significativo para o aluno.

Nossa experiência na Educação Básica nos permite inferir que as atividades propostas aos estudantes não estimulam o exercício de criatividade, que estão quase sempre restritas, limitadas às paredes da sala de aula. Nessas atividades eles pouco questionam e acabam por aceitar de forma passiva os assuntos que lhes são transmitidos, não participam ativamente do processo de ensino e aprendizagem da matemática escolar.

Por outro lado, observamos que, nas oportunidades que têm de expressar suas opiniões e mostrar sua criatividade, o fazem muito bem. Em atividades desenvolvidas em equipes como para as feiras de ciências e matemática, por exemplo, os estudantes pesquisam, estudam sobre os temas, criam apresentações como cartazes, peças de teatro, mobilizam a comunidade em volta da escola e explicam tal assunto para o público externo de tal forma que estes compreendem a mensagem a ser passada pelos alunos. Dedicam horas e horas para esse trabalho e o fazem depreendendo uma enorme quantidade de energia. Fazem tudo o que nem sempre conseguimos ver em nossas “aulas expositivas”.

Então, se eles são capazes de praticar ações criativas e eficazes acerca de um determinado tema, em uma atividade episódica na escola, porque não os levar a terem essa mesma postura na sala de aula de matemática, em todo o cotidiano escolar ao longo do período letivo? Quais atitudes o professor deve tomar para que isso aconteça de fato?

Precisamos, como professores, intervir nessa realidade e contribuir com a sua mudança, para um ensino de matemática que explore com mais eficiência os diversos tipos de saberes, as potencialidades e a criatividades de nossos alunos. Vemos em atividades como às problematizações propostas pelas UBP, a possibilidade de mudança nesse quadro uma vez que abrem espaço para o diálogo franco, de igual par igual, para o questionamento e discussão sobre o tema em questão. Com as UBP, o aluno poderá visualizar e manipular os elementos matemáticos buscando a solução dos problemas a ele propostos.

Nossos argumentos sobre elaboração de atividades com base nas UBP, encontram sustentação em outros estudos e pesquisas já realizados sobre o tema. Após a publicação do artigo *Mobilizing histories in mathemtics teacher education: memories, social practices, and discursives games* (Mobilizando histórias na formação do professor de matemática: memórias, práticas sociais e jogos discursivos. Tradução livre), em 2010, por Miguel e Mendes, vários trabalhos foram desenvolvidos com base nesses fundamentos teórico-práticos.

Como exemplo, podemos citar o trabalho de Mendes e Lima Filho (2014), originado do projeto de pesquisa intitulado “Investigação histórica de práticas sociais: outras histórias da matemática na formação de professores”[42]. O Recorte estabelecido por Mendes e Lima Filho (2014), consistiu da leitura, tradução e discussão de uma obra antiga, o livro *Instrumentos Nuevos de Geometria*, de 1606 de Andres Cespedes, visando subsidiar a elaboração de UBP para a matemática do Ensino Fundamental e médio. Tiveram como ponto de partida a investigação dos modos como a matemática

[42] Projeto financiado pelo CNPq em 2010, com vigência entre 2011 e 2013, coordenado por Iran Abreu Mendes.

(das práticas descritas no livro) poderia ser utilizada em problematizações da atualidade para a matemática escolar.

De acordo com Mendes e Lima Filho (2014, p. 260-261), o livro de Cespedes trata, ao longo de 21 capítulos, de temas variados. Descreve várias práticas sociais e as técnicas necessárias para o enfrentamento e solução de problemas práticos vivenciados naquele período. Trata, por exemplo de como encontrar e transportar água de um lugar a outro transpondo obstáculos como montes e vales, mostra como construir um instrumento (quadrante geométrico) para cálculo de alturas, o método de construção e a utilização da balestilha utilizada na navegação e trata, ainda de como formar e conduzir esquadrões no campo de batalha.

Nesse trabalho, destaca-se esta última prática que foi utilizada pelos autores como base para a formulação de UBP. Os autores inicialmente elaboraram dois pequenos textos intitulados *Esquadrão Quadrado de Terreno* e *Esquadrão Quadrado de Gente* que descrevem suscintamente a pratica social de como formar e conduzir esquadrões no campo de batalha, encontrado no livro de Cespedes. Nesse texto os autores tomaram todo o cuidado para que essa descrição não descaracterizasse a referida prática, falaram com linguagem acessível porem, mantendo as técnicas tal qual como foram desenvolvidas e descritas no livro de 1606.

A problematização consistiu em conectar tal prática com os desfiles das escolas de samba que ocorrem no sambódromo do Rio de Janeiro. Os autores elaboraram um texto contendo informações históricas e técnicas sobre o sambódromo e as escolas de samba. Em seguida, apresentaram várias problematizações como:

É possível organizar o desfile com alas no formato triangular ao invés do formato retangular? Defina um termo geral para a formação de uma ala triangular em função da largura da pista destinada ao desfile. Defina um termo geral para a formação de alas triangulares de uma escola de samba em função do número de componentes e da largura da pista destinada o desfile.

> Quem foi Andres Cespedes e por que teria se interessado em estabelecer uma tabela para formar esquadrões?
> Enuncie e resolva problemas envolvendo comemorações, abertura de eventos e outros em condições adversas tais como pequenas larguras de ruas.
> As orientações encontradas no livro de Cespedes para a formação de esquadrões mostrou-se adequado para cumprir essa atividade? Discuta a adequação dessa prática, seus fundamentos, bem como as possíveis maneiras como teriam sido enfrentados os problemas que se manifestaram durante o processo de composição de esquadrões com os recursos disponíveis naquela época (MENDES e LIMA, 2010p. 286-287).

Nas problematizações acima, podemos perceber duas características fundamentais nas UBP descritas por Miguel e Mendes (2010) que são o caráter aberto e indisciplinar da atividade. Os questionamentos acima nos fazem imaginar várias formas criativas e não apenas uma forma de resolve-los. Além disso sempre convidam os participantes a discussão, à investigação e a fazerem um mergulho no passado, imaginado como de fato essa prática ocorreu, como elas foram úteis para as pessoas da época.

Quando os autores perguntam “Quem foi Andres Cespedes...” imagino que isso faria com que os alunos depreendessem diversas pesquisas, utilizando a internet ou até mesmo fontes fornecidas pelo professor como artigos e livros. Isso colocaria os alunos em movimento desenvolvendo neles a habilidade de como fazer uma pesquisa, onde procurar, quais as fontes seguras de informação. Toda essa movimentação, orientada pelo professor, em torno da solução de uma única questão poderia certamente ser mais formativa e ao mesmo tempo despertar um interesse maior do aluno pelo ato de estudar que, sem dúvida é um entrave muito presente na Educação Básica hoje.

Quando os autores questionam “É possível organizar o desfile com alas no formato triangular? ” e pedem para definir um termo geral levando em consideração a largura da pista, número de componentes de uma ala e etc., nos levam a transportar esses questionamentos para a sala de aula de matemática da Educação Básica e descrever diversos conhecimentos que seriam acessados pelos alunos na busca por soluções inéditas e criativas para tais problemas.

Tratando de conhecimentos matemáticos poderíamos destacar, cálculos aritméticos, equação, noção de função, área e perímetro de figuras planas termo geral de progressões entre outros. Além disso, outros conhecimentos mais gerais como capacidade de reflexão, raciocínio lógico, capacidade de abstração e de transposição de uma prática do passado para a resolver um problema da atualidade e a capacidade de resolver problemas reais e atuais.

Esse tipo de atividade, capaz de mobilizar a diversidade e o potencial criativo e investigativo de nossos alunos da Educação Básica só será possível se o professor de matemática tiver um olhar capaz de compreender e intervir no processo de ensino, um olhar que aponte para a efetivação de uma ação docente pautada na elaboração e implementação de atividades que façam o aluno vivenciar uma pratica educativa instigante, contextualizada sacio-culturalmente e reflexiva.

Nesse sentido, defendemos que é preciso que se desenvolva um ensino de matemática capaz de fomentar no aluno habilidades suficientes para que este enfrente com possibilidade de sucesso, os problemas reais que venha a enfrentar no campo educacional, intelectual e profissional em um futuro próximo. Defendemos que essas habilidades são desenvolvidas em atividades, como as UBP propostas por Miguel e Mendes (2010) que se utilizam da matemática, fruto da ação humana sobre o meio, para fazer com que os alunos conheçam e compreendam a matemática escolar. É o que faremos no tópico seguinte onde trazemos algumas UBP como proposta para as aulas de Simetria nos anos finais do Ensino Fundamental.

4.2 Sugestões de UBP para as aulas de Simetria

Caros Professores para utilizar as UBP em sua aula sugerimos algumas orientações. Não é necessário que sejam seguidas à risca, pois entendemos que cada grupo de estudantes (turma) é um universo particular, contendo características próprias que precisam ser levadas em consideração no planejamento e execução das atividades de ensino-aprendizagem. Dessa forma, as orientações poderão ser adaptadas para atenderem da melhor forma às exigências da turma visando o melhor aproveitamento possível, ou seja, o aprendizado do que se propõe por todos os alunos da turma.

A atividade com as UBP pode ser organizada seguindo o seguinte roteiro:

1) Apresentação da atividade.

Prepare uma apresentação que diga de forma breve no que consiste a atividade e quais os momentos da mesma que devem ser: realização da atividade em grupo, apresentação dos resultados e discussão na sala de aula, avaliação em grupo e individual. Tem que ficar claro para os alunos o que eles vão precisar fazer para cumprir com a atividade, para isso faça sua exposição e peça para os alunos tirarem suas dúvidas. Não fale qual conteúdo matemático será abordado, pois a ideia principal aqui defendida é que ele apareça depois.

2) Formação de grupos.

Sugerimos que os grupos contenham 5 ou 6 alunos. Escolha o critério que julgar melhor para a formação dos grupos. Pense antecipadamente, considerando a quantidade de alunos na turma e as relações de amizade destes, para que ninguém fique ou se sinta excluído.

Diga a seus alunos que, para cumprirem a tarefa, eles podem riscar as figuras, recortar, fazer colagem com as partes, buscar fotografias de outros artefatos que tenham a mesma propriedade, criar figuras originas que tenham as propriedades dos artefatos estudados e etc. deixe claro que eles têm uma variedade de métodos a seguir no intuito de apresentar sua atividade de forma mais clara possível objetivando que seus colegas consigam compreender o que foi feito.

Para que eles fiquem mais livres no momento de fazerem a atividade, o ideal é que tenham várias fotografias impressas (duas ou três cópias da cada fotografia) para que eles possam fazer os seus experimentos sem restrição.

A atividade com as UBP pode ser dividida em momentos presencias e à distância, pois as pesquisas e parte do trabalho em equipe pode ser feio sem a presença do professor objetivando que os alunos ganhem autonomia e comecem a ter iniciativa para buscarem o conhecimento. Porém, essas ações devem ser muito bem orientadas pelo professor para que os alunos compreendam o que fazer.

Para que se ganhe tempo, cada grupo formado poderá trabalhar com uma UBP diferente, assim, se forem formados 5 grupos, serão resolvidas 5 UBP diferentes. Como haverá a discussão sobre a atividade, todos terão acesso aos conhecimentos de cada UBP. Se a UBP conter figuras a impressão deve ser colorida para que se percebem os detalhes das figuras. A tarefa pode ser feita dentro da escola ou fora dela, pois alguns questionamentos requerem pesquisas externas, que, aliás, é um dos pontos fortes das UBP por desenvolver nos alunos a habilidade de buscar o conhecimento e a autonomia. Os alunos precisarão de orientação quando estiverem fazendo a tarefa em sala de aula. Esse feedback e de extrema importância.

Inicialmente, as pesquisas podem ser feitas na internet, ao passo que os estudantes forem se familiarizando com o assunto, podem ser feitas pesquisas de campo onde eles tenham oportunidade de fotografar artefatos que tenham relação com determinado caso de Simetria. Esse momento pode ser planejado e orientado pelo professor. A pesquisa de campo poderá se transformar em uma aula passeio, por exemplo. Não elaboramos uma UBP especificamente com esse propósito, mas a pesquisa é estimulada em todas as atividades propostas.

3) Distribuição/ataque da tarefa.

Cada grupo de UBP pode ser trabalhado em 6 tempos de aula (de 45 min.), sedo: dois tempos para as orientações, dois para a apresentação dos resultados e discussão e dois para a avaliação. Após a orientação os alunos farão a pesquisa e o trabalho em equipe fora da escola, mas o professor pode reorganizar a atividade de forma que os alunos façam uma parte do trabalho durante a aula.

Para que o trabalho tenha melhor desenvolvimento, será necessário que as equipes tenham: lápis, borracha, caneta, lápis de cor, transferidor de 180º e 360º, um espelho pequeno (10 ou 15 cm), tesoura, cola, alfinete, compasso e régua. Além desses materiais outros poderão ser usados caso seja necessário.

4) Apresentação e discussão dos resultados

Esse é um momento muito rico e deve ser planejado e executado de forma a dar espaço para que todos se manifestem. Cada grupo apresenta as suas propostas e depois é aberto o espaço para que os colegas comentem o resultado das outras equipes. A troca de experiências deve ser o principal objetivo dessa etapa, pois com ela os estudantes poderão aprender a respeitar outras opiniões e não terem somente a sua como corretas. Aqui não deve haver certo e errado ou melhor e pior. Todas as propostas devem ser igualmente válidas e isso deve ficar claro nas orientações iniciais.

5) apresentação do conteúdo

O conteúdo de Simetria (UBP 13) deve ser apresentado como última atividade, após o trabalho com as UBP de 1 a 12, para que o aluno estabeleça as conexões com o conhecimento sociocultural e matemático apreendido durante sua realização.

6) Avaliação

A avaliação poderá ocorrer em dois momentos, um individual e outro grupal. O professor pode pedir para que os alunos registrem em um papel suas impressões sobre atividade (isso pode ser feito em casa). O que eles gostaram ou não, quais as dificuldades que tiveram, o que acharam do trabalho e grupo, quais os aprendizados que tiveram e etc. A outra parte da avaliação deve ser em grupo e pode acontecer na mesma aula após o final da apresentação e discussão das tarefas.

Outras orientações específicas serão inseridas nas UBP. Terão como legenda o ícone #.

UBP 1: Valorização do patrimônio histórico-cultural

Objetivos: Conhecer e valorizar o patrimônio histórico-cultural de Belém do Pará e de outros locais estabelecendo relações com a ideia de Simetria.

A cidade de Belém, capital do Estado do Pará, atualmente com aproximadamente, 1.446.042 habitantes, completou no ano de 2016, 400 anos de fundação. Já recebeu o nome de Santa Maria do Grão-Pará, Santa Maria de Belém do Grão-Pará e, finalmente Belém. Possui um vasto patrimônio cultural como a arquitetura antiga, culinária, cestarias, cerâmicas e etc. A arquitetura antiga da cidade possui construções que impressionam pela beleza e imponência, como a Catedral da Sé, o Palacete Bolonha e o mercado do Ver-o-Peso. Belém se localiza, bem na entrada do rio amazonas e, por isso, já foi considerada um ponto militar estratégico e “presenciou” alguns conflitos que ficaram marcados na história nacional. Assim como Belém, cidades vizinhas se localizam às margens dos rios e suas populações têm como um de seus principais meios de transporte embarcações que navegam pelos rios, furos e igarapés da região transportando pessoas e cargas como: alimentos, materiais de construção, equipamentos eletrônicos, veículos, combustível e etc. usam os rios da região como verdadeiras ruas, pelas quais transitam diariamente. Dentre esses alimentos, um se destaca: o açaí, ele é um símbolo do Pará, é uma marca conhecida internacionalmente, como enfatizado na música Garota do Tacacá de Pinduca “quem vai ao Pará, parou, tomou açaí, ficou! ”.

Figura 68 – Catedral da Sé

Fonte: Google imagens. Acesso em 18/08/2017.

Figura 69 – Belém do Pará

Fonte: http://www.amazonianarede.com.br/mobilidade-urbana-tambem-e-desafio-em-belem-pa/. Acesso em 18/08/2017.

1. Faça uma leitura do texto e destaque a relação das imagens com a parte escrita.

2. O texto traz alguns elementos culturais do Pará. Dentre eles, quais os lhe chamaram mais a atenção? Por que?

3. Quais elementos culturais de sua cidade têm semelhança com os do texto?

4. Esses elementos que você destacou na questão 3, sem dúvida são importantes para a cultura de seu município. Na sua opinião por que eles são importantes?

5. O mercado do Ver-o-Peso citado no texto, é um importante patrimônio cultural do Pará. Qual a sua história? Ele é feito de que material, ferro, madeira, barro, cimento, tijolo? Quem o construiu? Na época que ele foi construído qual era a sua importância? E atualmente? Ele está preservado? Qual a importância de se preservar esse patrimônio?

Figura 70 – Barco navegando

Fonte: http://www.skyscrapercity.com/showthread.php?t=1706853. Acesso em 18/08/2017

6. Na sua opinião o que é cultura? Qual a relação entre a cultura e seu povo?

7. Qual a importância de se preservar o patrimônio cultural de um povo?

8. Faça uma pesquisa sobre a arquitetura antiga de Belém do Pará e selecione imagens desses prédios. Observe as imagens e verifique qual é a característica física, aparente que é comum a todos eles?

9. Faça uma pesquisa sobre as capitais dos estados brasileiros e identifique elementos que fazem parte da cultura dessas cidades. Relacione tais elementos com os de Belém do Pará destacando semelhanças e diferenças entre eles.

10. Observe atentamente a figura 68. Olhe a figura da esquerda para a direita e depois da direita para a esquerda. Quais elementos se repetem na fachada retratada? Indique na figura um ponto que seja referência para essa repetição.

Espera-se que os estudantes comecem a perceber as repetições presentes nas fachadas dos prédios antigos e façam a relação com a ideia de Simetria de reflexão.

11. Pesquise por outros prédios antigos de Belém e de outas cidades brasileiras que tenham a mesma característica da figura 68. Faça marcações nas figuras para mostrar qual relação há entre elas.

12. O texto traz a imagem de um barco navegando "ele corta a agua com sua proa afiada". Há alguma relação aparente entre a forma do barco e a figura 68? E com as figuras que você encontrou ao fazer a questão 11?

UBP 2: A ideia sociocultural de Simetria

Objetivos: constatar que a ideia de Simetria está presente em algumas sociedades e culturas e assimilar a ideia de Simetria a partir de comportamentos, fatos sociais e fenômenos da natureza.

Na sociedade é comum a presença de situações que lembram muito a ideia de oposição, equilíbrio e complementariedade. Essas situações podem ser fenômenos da natureza ou fenômenos culturais que se manifestam entre povos espalhados por todo o mundo. Na cultura chinesa, por exemplo, um princípio que rege a vida e as relações interpessoais é a busca pelo equilíbrio entre elementos tidos como opostos. Se trata de uma forma de vida, um modo de ver e compreender as coisas materiais e imateriais que nos rodeiam. Podemos dizer que é uma filosofia de vida que é representada por um símbolo mundialmente conhecido, no que se refere a sua imagem, mas um pouco menos conhecido do ponto de vista do seu significado. Trata-se do Yin Yang onde Yin é o lado esquerdo do símbolo na cor preta que representa o princípio passivo, feminino, noturno, escuro e frio; já o Yang, lado direito de cor branca, significa o princípio ativo, masculino, diurno, luminoso e quente. Além desses, outros significados opostos são atribuídos a Yin Yang. As principais ideias dessa filosofia é que as coisas opostas da vida são complementares, a permanência delas em um mesmo ser é o que o mentem vivo e a felicidade corresponde ao equilíbrio perfeito entre todos os opostos[43].

Figura 71 – Yin Yang

Fonte: https://www.significados.com.br/ying-yang/. Acesso em 18/08/2017

[43] Texto elaborado pelo autor com base na fonte: https://www.significados.com.br/ying-yang/ e http://brasilescola.uol.com.br/filosofia/yin-yang.htm. Acesso em 18/08/2017.

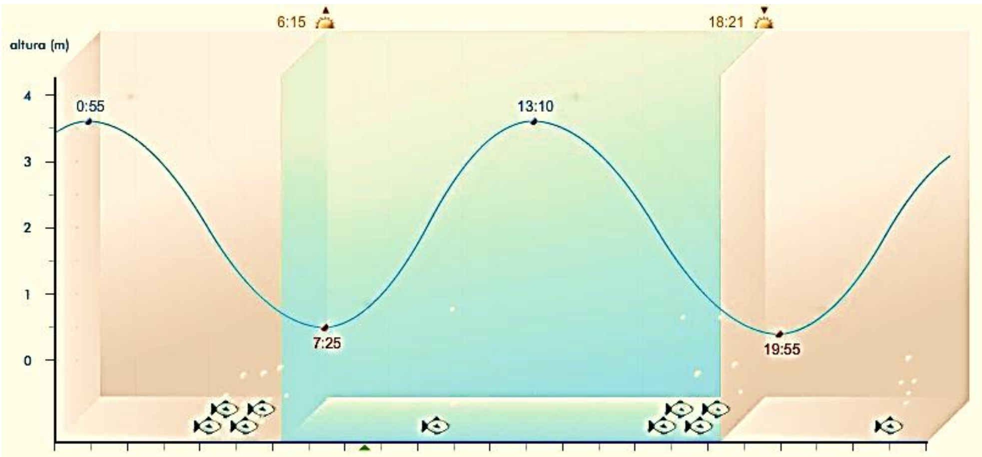
Outro exemplo semelhante ao anterior vem da cultura indiana no que se refere a sua religião. Se trata do Yoga[44] que é uma das escolas componentes da religião Hindu. Algumas traduções da palavra yoga são: união, conjunção e concentração, se referem a união que pode se estabelecer entre o ser individual e o ser cósmico universal. Assim como o Yin Yang, o Yoga é uma filosofia de vida que busca o equilíbrio entre copo e mente, entre o material e o imaterial. Na figura 72 está retratada uma pessoa praticando Yoga.

Figura 72 – pessoa praticando Yoga

Fonte: http://www.temploholistico.com.br/tag/equilibrio/. Acesso em 18/08/2017

Existem alguns fenômenos naturais que são universais como, por exemplo o fenômeno das marés presente em todo o globo terrestre. Na maioria das regiões ocorrem duas marés altas (preamar) e duas baixas (baixa-mar) no decorrer do dia e o intervalo de tempo entre uma maré alta e outra é de, aproximadamente, 12 horas.

Figura 73 – Gráfico das marés



Fonte: http://www.tabuademares.com/br/para/belem. Acesso em 18/08/2017.

---

[44] Fonte http://www.namu.com.br/filosofia/yoga/o-que-e. Acesso em 18/08/2017.

A figura 73 traz um gráfico que mostra o nível e os horários das marés alta e baixa em um determinado dia. Na cultura amazônica esse fenômeno tem relação direta e importante com a vida das pessoas, principalmente aquelas que moram às margens dos rios, os ribeirinhos.

Para eles que desenvolvem atividades de caça, pesca, extrativismo e outras, as marés é que, em parte, definem o “ritmo da vida”: existe maré boa e ruim para a pesca e para a caça; só se pode chegar em alguns lugares com a maré alta e em outros com a maré baixa; com a maré alta as embarcações são elevadas para manutenção que é feita com a maré baixa e, após concluída, se espera outra maré alta para retirar a embarcação; não se rema contramaré isso deve ser feito a favor dela, pois quando a maré cresce, “corre” para um lado, e quando “vaza”, “corre” para o outro lado... são muitas situações da vida dessas e de outras pessoas que estão intimamente ligadas às marés[45].

1. Observe as três imagens do texto. Considerando o aspecto visual, quais características as tornam semelhantes? E quais as tornam distintas?
2. Considere, agora a significado das imagens. Quais as diferenças e semelhanças entre elas?
3. Assim como o Yin Yang, o Yoga e o fenômeno das marés, quais outros exemplos culturais, com o mesmo princípio, você poderia nos mostrar? Faça uma pesquisa e dê exemplos.
4. Existem outras imagens que tenham características próximas às apresentadas? Quais? Faça uma pesquisa e dê exemplos.
5. Você já ouviu falar de palavras chamadas palíndromos? De exemplos e diga: qual a relação delas com o texto?
6. Observe os números: 121, 1234321, 4321234 e 5430345. Componha outros números com essa mesma característica e diga: qual a relação deles com os palíndromos e com o texto?
7. Dia e noite, cheia e seca, ir e voltar, positivo e negativo, etc. são palavras que remetem a coisas ou ideais opostas ou complementares. Além delas, existem outras com o mesmo princípio de oposição ou complementariedade? Quais? Faça uma tabela contendo tais palavras.

[45] Texto produzido a partir dos conhecimentos dos autores e da fonte: http://www.tabuademares.com/br/para/belem. Acesso em 18/08/2017.

8. Sabemos que você já conseguiu compreender a ideia central do texto, assim, faça um desenho que expresse essa ideia e explique qual a sua relação com o texto.
9. Observe atentamente a figura 72. Olhe a figura da esquerda para a direita e depois da direita para a esquerda. Quais elementos remetem a ideia de complementariedade ou de repetição? Faça marcações na figura indicando esses elementos.
10. faça uma pesquisa e encontre outras imagens que tenham a mesma característica da figura 72.
11. Ainda há muito a saber do Yin Yang, do Yoga e do fenômeno das marés. Escolha um deles e faça uma pesquisa para destacar quais informações importantes não estão presentes no texto.
12 O texto fala de equilíbrio emocional, espiritual etc. Pesquise por imagens de elementos da cultura brasileira e de outros povos que remetam a ideia de equilíbrio. Faça marcações nas imagens que deixem clara essa ideia.
A ideai principal proposta é que a aluno relacione a ideia de simetria ao equilíbrio e à harmonia presente nessas práticas socioculturais e visualize tal ideias nas imagens a elas relacionadas.

UBP 3: Simetria de reflexão

Objetivos: Identificar nas figuras elementos que remetem à Simetria de reflexão; desenvolver noções de ponto médio, reta, direção e sentido.

A feira do Ver-o-Peso, importante entreposto comercial de Belém do Pará, é um dos pontos turísticos mais visitados da cidade. Construções antigas e a diversidade de produtos comercializados e de serviços oferecidos são atrativos desse lugar que recebe diariamente, visitantes do Brasil e do exterior.

Figura 74 – Feira do Ver-o-Peso

Fonte: http://viagemeturismo.abril.com.br/atracao/mercado-ver-o-peso/

Fazendo um tour pelo Ver-o-Peso, você irá encontrar alimentos como peixe frito com açaí, maniçoba, tacacá, bebidas diversas, artesanato, atrações culturais como grupos de carimbó, ervas medicinais, dentre outros. Um dos cartões postais da feira é o mercado de peixe (figura 74) que é “a cara do Ver-o-Peso”, mas, além dele, o mercado de carnes se destaca por sua construção e arquitetura muito particular. Continuando o seu passeio você pode visitar as barracas de artesanato que têm vários tipos de peças, dentre eles as cestarias (figura 75) e cerâmicas (Figura 76).

Figura 75 – Artesanato do Ver-o-Peso

Fonte: Google imagens

As cestarias são, geralmente, confeccionadas com fibras vegetais extraídas de arvores da Amazônia, como o Buriti, por exemplo. São chapéus, bolsas, porta prato, abanos (leques), balaios, cestos e peneiras.

Figura 76 – Cerâmica do Ver-o-Peso

Fonte: http://viagem.estadao.com.br/blogs/viagem/

As cerâmicas, feitas em barro e decoradas a mão pelos artesãos, vêm de vários lugares do estado como Ponta de Pedras, Soure, Icoarací, dentre outros, e são comercializadas no Ver-o-Peso. Possuem utilidades diversas e, assim como as cestarias, são muito usadas como objetos de decoração. São encontradas por várias regiões do mundo e sua origem teria ocorrido a pelo menos, 7 mil anos, segundo pesquisadores da área. Seus ornamentos possuem uma riqueza de detalhes que impressiona pela beleza e precisão.

Abaixo são dadas 4 fotografias. As questões de 1 a 7 devem ser repetidos para cada uma delas.

1. Olhe a figura da esquerda para a direita e da direita para a esquerda. Há elementos se repetindo nela? Quais elementos se repetem?
2. Fazendo marcações na figura, identifique um ponto central que a divida ao meio e trace uma reta vertical passando por esse ponto. Agora direcione seu olhar partindo da reta para a direita e para a esquerda. O que você conclui dessa observação?

é preciso que o professor conduza o aluno para que ele possa traçar o eixo de simetria da figura.

3. A reta vertical divide a figura em duas partes iguais? Faça medições para comprovar tal fato.
4. Meça a figura e trace um segmento de reta horizontal em sua base que represente o comprimento da figura retratada. Divida esse segmento ao meio e marque um ponto indicando a metade. Esse ponto coincide com a reta vertical que você traçou?
5. Chamamos de correspondentes os elementos que estão se repetindo do lado esquerdo e direito da reta vertical. Identifique com letras ou números (iguais) os elementos correspondentes formando pares. Quantos pares de elementos você identificou?
6. Tome um desses pares de elementos correspondentes. Meça a distância de um deles até a reta vertical e depois do outro e compara essas distâncias. Elas são iguais ou aproximadas? Repita esse procedimento para os outros pares de elementos complementares.
7. Pegue um espelho e coloque-o sobre a reta vertical de forma que este fique perpendicular à foto e com a parte espelhada para a sua esquerda. Vamos chamar de A o lado da figura que está à esquerda do espelho e de B o lado que está à direita. Observe a figura refletida no espelho. Qual a relação do lado A com o reflexo no

espelho? E do lado B? Repita o procedimento virando a parte espelhada para o outro lado.

As questões de 8 a 12 devem ser resolvidas após a observação das imagens do quadro 2.

8. Na sua opinião é possível identificar uma característica que seja comum à as imagens estudadas? Descreva essa característica.
9. Dê um nome para a característica que você encontrou e que é comum para todas as imagens estudadas.
10. Além dos artefatos retratados nas imagens é possível que existam outros, em sua cidade, com essa mesma característica? Faça uma pesquisa e dê exemplos.
11. Assim como o povo de Belém do Pará, outros povos espalhados pelo mundo possuem grades feiras como a do Ver-o-Peso. Faça uma pesquisa por elementos que são comercializados nesses lugares e que tenham a característica que você identificou nos elementos do Ver-o-Peso.
12. A cultura dos povos da África é diversificada e possui semelhanças coma a cultura do Brasil, um exemplo disso são as cestarias africanas que possuem traços semelhantes às brasileiras. Pesquise por imagens de cestarias africanas e brasileiras. Compare essas imagens para destacar semelhanças e diferenças. Essas imagens possuem a característica que você nomeou na questão 9? Caso contrário, busque imagens que a tenham.

Quadro 2 – UBP sobre reflexão

Figura	Anotações
Figura 77 – Mercado de ferro  **Fonte**: Google imagens	# Na observação desta figura, deve ser considerada somente a fachada do mercado de ferro.

Figura 78 – Artesanato do Ver-o-Peso  **Fonte**: Acervo do autor	
Figura 79 – Grade de ferro de Belém  **Fonte**: Acervo do autor	# Para uma análise mais completa desta figura, devem se traçados os eixos vertical horizontal.
Figura 80 – Azulejo decorado  **Fonte**: Acervo do autor	# Para uma análise mais completa desta figura, devem ser traçados os eixos vertical, horizontal e as diagonais.

Fonte: Elaboração própria

UBP. 4: Simetria de translação

Objetivo: Assimilar a ideia de Simetria de translação por meio de elementos encontrados nos artefatos socioculturais.

Oriente seus alunos para observarem as figuras do quadro e resolverem as questões de 1 a 4 repetindo os procedimentos para as três imagens. As questões de 5 a 9

necessitam de pesquisa para serem resolvidas. Sugerimos que essa pesquisa seja feita na internet.

1. Observe atentamente a figura. Há, na figura, algum elemento que se repete? Qual? Identifique esse elemento! Considerando as direções horizontal, vertical e inclinada (diagonal), em quais direções esse elemento está se deslocando? Indique a direção do deslocamento por setas. A partir de agora passe a chamar o elemento que se repete de padrão.

2. Escolha dois padrões que sejam consecutivos em qualquer direção. Marque um ponto no centro de cada padrão e os chame de ponto A e ponto B. trace o segmento AB e meça o seu comprimento. Repita o procedimento para outros dois padrões consecutivos chamando os pontos de C e D. os segmentos AB e CD têm a mesma medida? Agora para dois padrões consecutivos chamaremos de pares de padrão. Repita esse procedimento para outros pares de padrão. O que você conclui sobre as medidas dos seguimentos?

3. Trace uma reta (r) horizontal ou vertical que passe pelo centro de vários padrões e indique todos os centros por pontos (K, L, M, N, O...). Agora trace pequenos segmentos de reta determinados pelos pontos indicados e que sejam perpendiculares à reta r. Assim, a reta r será dividida em várias partes (segmentos). Qual a relação entre esses segmentos? Como esses segmentos interferem no deslocamento do padrão?

4. Passe a chamar os centros dos pares de padrão de pontos correspondentes (são aqueles que originam os segmentos (AB, CD...). Além dos centros, quais são os outros pontos correspondentes nos padrões? As observações que você fez, com relação aos comprimentos de AB, CD, KL, MN,... são válidas para esses novos pontos que você descobriu? Por que?

Espera-se que os estudantes possam concluir que os padrões se deslocam sob uma reta e em uma determinada direção e sentido e que esse deslocamento se dá a uma mesma distância, considerando padrões consecutivos.

As questões de 5 a 9 são de caráter aberto e requerem pesquisa que pode ser feita na internet ou em locais onde os artefatos possam ser fotografados.

5. Faça uma pesquisa e conte um pouco sobre os três artefatos retratados nas figuras.
6. Segundo o estudo que você fez há um padrão que se movimenta sobre a superfície das figuras. Dê um nome para esse movimento.
7. Encontre fotografias de outros artefatos socioculturais de quaisquer sociedades que tenham as mesmas propriedades dos que você estudou aqui e demostre para seus colegas como essas propriedades funcionam.
8. Agora solte a imaginação e a criatividade e crie uma figura onde ocorra a repetição de um padrão com as mesmas características encontradas nas figuras que você estudou.
9. No quadro temos três imagens que retratam: prato Tonga, renda de bilro e uma grade de ferro. Segundo o estudo que você fez até aqui essas figuras possuem uma característica comum. Faça uma pesquisa e encontre outros exemplos de cestarias, rendas (ou outros trançados como crochê e bordados) e grades de ferro que possuam a mesma característica das figuras do quadro.

Quadro 3: UBP sobre translação

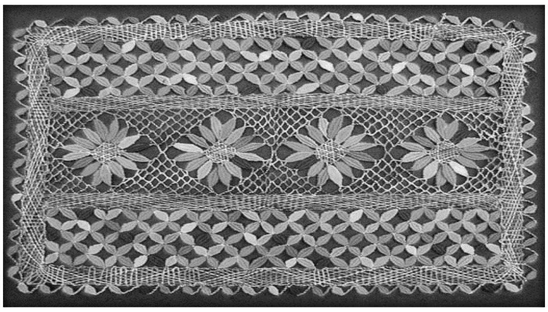
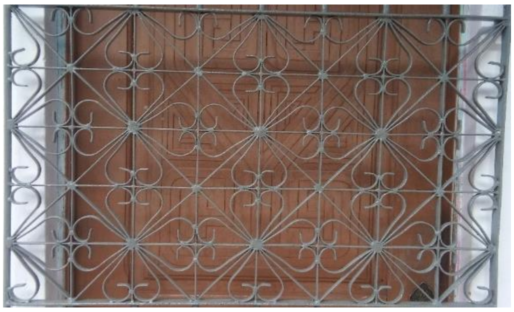
Figura	Anotações
Figura 81 – Cesto Tonga  **Fonte**: Google imagens	
Figura 82 – Renda de bilro  **Fonte**: Google imagens	

Figura 83 – Grade de ferro de Ponta de Pedras  **Fonte**: Acervo do autor	

Fonte: Elaboração própria

UBP 5: Simetria de rotação

Objetivo: Identificar o padrão e o ângulo que serve de base para o movimento de rotação.

Será necessário para esta atividade o material: régua, caneta lápis, borracha, transferidor, compasso e duas figuras de cada tipo impressas separadamente.

Formulamos 9 questões para o estudo das figuras de forma que, para cada figura, há um grupo de questões especificas a serem resolvidas indicadas na coluna ao lado desta. As questões 1 e 9 são de caráter geral. Para respondê-las será necessária uma pesquisa na internet.

1. No quadro 4 tem-se 4 figuras que retratam: cerâmica islâmica, grade de ferro, azulejo decorado e tatuagem. Faça uma pesquisa na internet e fale um pouco sobre cada um desses artefatos destacando aspectos culturias, históricos e geográficos.

2. Identifique o padrão principal da figura! Esse padão tem a forma aproximada de qual figura geométrica plana? Ele aparece quantas vezes na figura?

3. Além desse padrão há outro na figura?

4 A figura possui linhas que se encontram em um ponto central, com sua caneta e sua regua, reforce essas linhas de forma que ultrapasem a figura em 1,0 cm. Fixe a figura colocando um alfinete no centro. Gire a figura lentamente e observe. Gire novamente no outro sentido. O que você conclui dessa observação com relação aos padrões que voce destacou?

5. Retire o alfinete e coloque o compasso no centro. Abra o compasso até que a sua ponta móvel ultrpasse (em 1,0 cm) a borda da figura. Trace um círculo. Retire a fotografia. As linhas que voce traçou no passo anterior dividiram o circulo em quantos

arcos? De quantos graus cada um? Recoloque a fotografia. Gire-a tendo como referência o ângulo e os padrões que você encontrou. O que você conclui?

6. A figura possui linhas que se encontram no seu centro com sua caneta e sua régua, reforce essas linhas. Marque um ponto em cada vértice da figura. Fixe o compasso no centro da figura e a ponta móvel em um dos vértices. Trace uma circunferência. Os vertices da figura dividem a circunferênca em quantos arcos? De quantos graus? Fixe a figura colocando um alfinete no centro. Gire a figura lentamente e observe. Gire novamente no outro sentido. O que voce conclui dessa observação com relação aos padrões que você destacou?

7. Identifique dois padrões principais na figura. Trace sobre ela os eixos cordenados de forma que a origem dos eixos coincida com o centro da figura. Gire a figura sob um ângulo de 90º. O que ocorre com os padrões? Em algum momento eles coincidem?

A partir da questão 8 o aluno poderá perceber que o giro da figura sob um ângulo determinado e em um dos dois sentidos (horário ou anti-horário) fará com que ela coincida com a figura fixa.

8. Agora voce irá trabalhar com duas figuras (do mesmo tipo). Coloque uma sobre a outra de forma que os padrões fiquem sobrepostos. Deixe uma fixa e gire a outra lentamente. Em algum momento os padrões voltam a se sobrepor? Que relação essa sobreposição tem com o ângulo de giro?

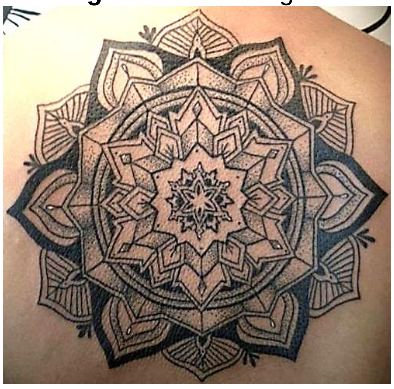
9. Faça uma pesquisa sobre cerâmica de várias sociedades (do Brasil e de outros países). Selecione imagens que tenham como característica o movimento identificado por você no estudo.

Quadro 4: UBP sobre rotação

Figura 84 – Cerâmica Islâmica  **Fonte**: Google imagens	Faça 2, 3, 4, 5 e 8

<table>
<tr><td>Figura 85 – Grade de ferro de Belém

Fonte: Acervo do autor</td><td>Faça 2, 3, 4, 5 e 8</td></tr>
<tr><td>Figura 86 – Azulejo decorado de Belém

Fonte: Acervo do autor</td><td>Faça 2, 3, 6 e 8</td></tr>
<tr><td>Figura 87 – Tatuagem

Fonte: Google imagens</td><td>Faça 2, 3 e 7</td></tr>
</table>

Fonte: Elaboração própria

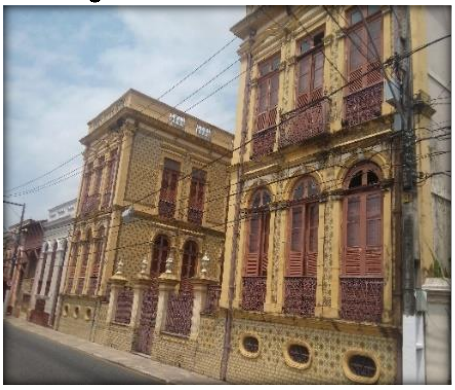
No quadro a seguir há um bloco de UBP que, na sequência, irão remeter aos três casos de Simetria: reflexão, rotação e translação.

Quadro 5 – Bloco de UBP

UBP 6. Conhecer e valorizar o patrimônio histórico/cultural**.** # No texto chamaremos as figuras 88, 89, 90, 91 e 92 de imagem 1, 2, 3, 4 e 5, respectivamente.

A imagem 1 retrata parte da fachada do Palacete Pinho, prédio histórico de Belém do Pará. Faça uma pesquisa na internet buscando informações sobre tal edificação. Crie um pequeno texto falando sobre as principais características do Palacete. Com base nesse texto e em suas observações pessoais, busque respostas às questões: 1. Onde se localiza o Palacete? 2. Qual a data de fundação e o objetivo de sua construção? 3. Por que ele recebeu esse nome? 4. Atualmente o Palacete é usado de que maneira? 5. Esse prédio é considerado um patrimônio histórico paraense, por quê? 6. Você é favorável à preservação e restauração de prédios históricos como esse? 7. Na sua opinião o quê o Palacete Pinho representa para a cultura do Pará e do Brasil? 8. Quais as principais características da arquitetura do Palacete? 9. Dentre essas características qual a mais marcante?

Figura 88 – Palacete Pinho



Fonte: Acervo do Autor

UBP 7. Identificação de padrões e regularidades.

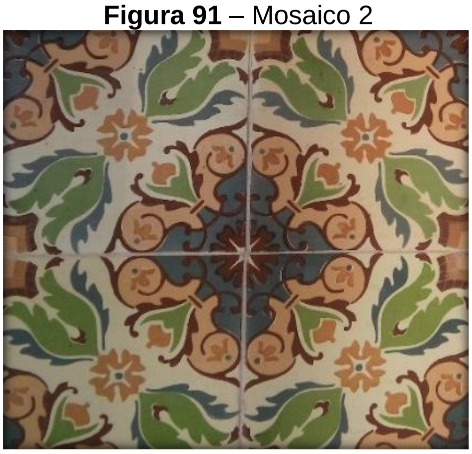
Observe atentamente a imagem 2.

1. Você consegue perceber alguma repetição nela? Descreva qual! 2. Identifique, marcando na imagem, um elemento que seja a base para essa repetição! 3. Esse elemento está se repetindo de forma organizada? 4. Existe uma regularidade? 5. Descreva como o elemento se organiza para ornamentar a parede do Palacete! A partir daqui dê a esse elemento o nome de padrão. 6. Ao observar a fotografia você lembra de alguma outra imagem ou objeto onde você percebe um padrão? Dê exemplos!

Figura 89 – Azulejo decorado

Fonte: Acervo do autor

UBP 8. Compor o mosaico principal para introduzir a ideia deslocamento no plano e de isometria.

1. Qual a relação entre as imagens 3 e 2? 2. O padrão que você identificou anteriormente aparece nesta imagem? Identifique-o! 3. Faça um desenho do padrão e descreva quais elementos o compõe. 4. Esse padrão é formado por partes repetidas? 5. Como elas estão organizadas? 6. A imagem passa a ideia de que esse padrão está se movimentando pela superfície da parede? 7. Como seria esse movimento? 8. Com o auxílio de uma régua meça as distancias entre os padrões que se repetem na horizontal, na vertical e em diagonal. Você pode fazer isso marcando um ponto no centro de cada padrão e medir o comprimento do segmento de reta determinado pelos pontos. Anote os resultados. 9. Com essa medição você percebeu alguma regularidade? 10. Os padrões repetidos têm as mesmas dimensões?   **Figura 90** – Mosaico 1  **Fonte**: Acervo do autor
UBP 9. Espelhando, girando e recortando o padrão   1. Qual a relação entre esta figura e a anterior? 2. O padrão que você identificou aparece aqui também? Caso contrário, identifique outro padrão nesta imagem. 3. Em cada lado da figura retangular marque o ponto que divide o lado ao meio! Trace duas retas unindo esses pontos. Coloque um espelho plano sobre a reta horizontal de forma que este forme com a fotografia um ângulo reto. Repita isso para a reta vertical! O que você percebe? 4. Coloque o espelho em outras posições sob as quais o mesmo fenômeno é observado. Quais as suas conclusões sobre essa observação? 5. Fixe um ponto no centro da figura com um alfinete e gire-a. O que você percebe? 6. Existe a possibilidade desse giro não alterar a figura formada? 7. Como isso pode acontecer? 8. Esse fato tem relação com o ângulo do giro? Qual? 9. Corte a figura sobre as linhas verticais e horizontais. Você obteve 4 partes. Que semelhanças visuais apresentam? 10. Compare as imagens 4 e 3. Qual a relação entre elas?   **Figura 91** – Mosaico 2  **Fonte**: Acervo do autor

UBP 10. O padrão base

1. Compare as imagens 5 e 4 e identifique os padrões que aparecem em ambas. 2. Trace sobre a fotografia 5 uma reta unindo dois dos vértices do retângulo. 3. Observe as duas partes originadas, a partir da reta, e descreva as semelhanças percebidas por você. Repita o procedimento para os outros dois vértices.

Figura 92 – Padrão Principal

Fonte: Acervo do autor

4. A imagem 4 pode ser obtida por meio de um agrupamento de várias do tipo 5? 5. Quantas imagens do tipo 5 serão necessárias para que se obtenha uma do tipo 4? 6. Compare agora as imagens 5 e 3. Que relações você percebe entre elas? 7. Qual a relação da imagem 5 com o ornamento das paredes do Palacete Pinho (imagem 1)? 8. Considerando a imagem 5 como um padrão, como ele se movimenta para compor o ornamento das paredes do Palacete? Descreva alguns desses movimentos!

UBP 11. Tomamos como exemplo para o estudo feito, o Palacete Pinho, prédio histórico de Belém do Pará. Faça uma pesquisa para encontrar outros prédios históricos que sejam decorados com azulejos e desenvolva um estudo semelhante ao que você fez com os azulejos do Palacete Pinho. Essa pesquisa pode ser feita na internet o que possibilitará a você "visitar" prédios do Brasil e de outros países.

Fonte: Elaboração própria

UBP 12. Reflexão deslizante.

Objetivo: Aprofundar o conhecimento adquirido sobre reflexão e translação por meio de pesquisa e observação de imagens.

Esta atividade trata de uma composição entre reflexão e translação, por isso, orientamos que ela seja feita depois das atividades que tratam desses dois casos de simetria.

Dentre as diversas expressões culturais de povos espalhados pelo globo terrestre, destacamos aquelas que se referem à cultura material, ou seja, elementos culturais tangíveis, os artefatos. Alguns desses artefatos já fazem parte da cultura humana há bastante tempo, como é o caso das cerâmicas, cuja origem teria ocorrido há, pelo menos 7 mil anos. As cestarias, também se destacam por sua origem histórica e por sua importância em algumas culturas como é o caso da cultura africana e brasileira. Destacamos as cerâmicas e cestarias como representantes da cultura material por estarem presentes em grupos culturais diferentes no Brasil e em outros países.

1. Faça uma pesquisa sobre cestarias e cerâmicas e crie um pequeno texto onde tenha destaque aspectos históricos, culturais e geográficos. Nesse texto insira imagens para exemplificar o que você fala.

Observe a figura 93. Trata-se de um cesto africano feito de uma fibra vegetal. Nele é possível observar a presença de um padrão de cor escura que se desloca por sua superfície.

Figura 93 – Cesto Tonga

Fonte: Acervo do autor

Esse deslocamento, dá origem a faixas horizontais que circulam todo o cesto. Observe a faixa que destacada na figura 94. Visualize o movimento que o padrão realiza para compor o ornamento do cesto.

Figura 94 – Padrão Principal

Fonte: Acervo do autor

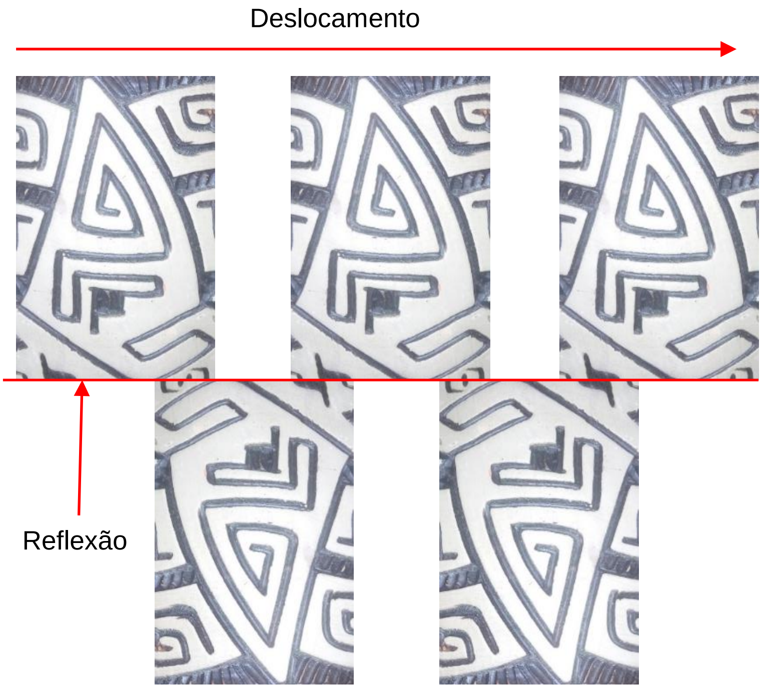
2. Observe as figuras para descrever o movimento que o padrão faz na superfície do cesto.

3. À esquerda da figura 96 trace um eixo vertical e, abaixo, um eixo horizontal. Tome esses eixos como referência e observe o movimento do padrão. Que movimento o padrão está fazendo na horizontal? E na vertical? Descreva esses movimentos.
4. Recorte alguns desses padrões e crie uma faixa horizontal semelhante à que você vê na imagem do cesto. Use uma reta horizontal para dividir a faixa ao meio. Observe a parte que fica acima e, depois, abaixo da reta horizontal. Que movimento o padrão está realizando em relação e essa reta?
5. Observe a figura 95. Trata-se de uma réplica de cerâmica marajoara comercializada na feira do Ver-o-Peso em Belém do Pará. Repita, para ela, os procedimentos das questões 2, 3 e 4.
Aqui apresentamos as figuras 95 e 96, porém, o estudante deve ter acesso primeiro à figura 95 e, por meio dos procedimentos indicados, deve criar uma faixa como a da figura 96. Espera-se que o aluno crie tal faixa e perceba que o padrão realiza dois movimentos (reflexão e translação) para compor o ornamento da cerâmica.

Figura 95. Cerâmica do Ver-o-Peso

Fonte: acervo do autor

Figura 96. Faixa



Fonte: acervo do autor

5. O estudo que você fez das imagens dos artefatos, permitiu a você tirar algumas conclusões sobre o movimento do padrão. Com base em tais conclusões, é possível afirmar que o padrão realiza dois movimentos para compor os ornamentos? Ou ele realiza apenas um movimento? Explique e dê nome para esse movimento!

6. Pesquise e busque outros artefatos que cujos ornamentos seguem a mesma característica dos que você estudou. Faça um estudo semelhante ao que indicamos com os procedimentos para alguns desses artefatos que você encontrou por meio da pesquisa.

UBP 13 O conteúdo de Simetria dos anos finais do Ensino Fundamental.

Objetivo: apresentar e problematizar os casos de Simetria para que o estudante assimile a noção de Simetria e os conhecimentos matemáticos adjacentes a tais casos.

A ideia é o professor fomentar um diálogo inicial sobre Simetria para que os estudantes comecem a "entrar no clima da aula" para isso, ele pode iniciar com uma fala como a que colocamos a seguir e fazer alguns questionamentos para ir instigando os estudantes a pensarem sobre o tema da aula.

Você já deve ter estudado algo sobre simetria durante o Ensino Fundamental, pois esse assunto faz parte do conteúdo dos anos iniciais. Você lembra algo sobre Simetria? Quando você houve a palavra Simetria o que vem em sua mente? O que é Simetria para você? Como ela ocorre? Dê exemplos!

Para você compreender um pouco a noção de simetria, imagine o reflexo de uma figura qualquer em um espelho de vidro ou no espelho d'agua como ocorre na figura 97. Observe atentamente a figura! O que você conclui dessa observação? A imagem retratada tem duas partes iguais? Existe algo que divide essa figura ao meio? O que é? Um ponto? Uma reta? Mostre como isso corre na figura!

Figura 97. Reflexão no espelho d'água

Fonte: Google imagens

O professor deve conduzir o diálogo de forma a esclarecer todos os estudantes da turma sobre a ideia de Simetria. Isso deve ser feito de forma a conduzi-los às descobertas e, não dar respostas prontas para eles. Várias questões podem ser colocadas nesse momento e, também, várias imagens, se possível impressas para que possam manipular, riscar, anotar e fazer suas conjecturas. Como eles já passaram pelas atividades anteriores, poderão ter certa facilidade em estabelecer relações.

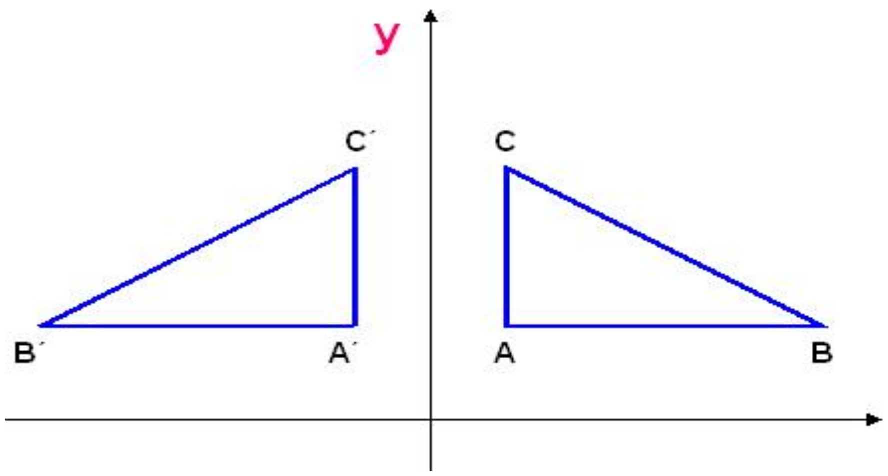
Em Matemática, a Simetria é um dos assuntos da Geometria e definem-se em termos de isometrias que são transformações geométricas. Uma transformação no plano é um movimento que provoca mudança de posição de uma dada figura geométrica, ou seja, todos os pontos dessa figura são deslocados de um lugar a outro do plano originando uma nova figura. Tais movimentos podem, ou não, manter a forma e o tamanho da figura transformada. No caso das isometrias a forma e o tamanho da figura são preservadas o que caracteriza que as figuras são simétricas.

Os casos de Simetria que iremos estudar são reflexão, translação, rotação e reflexão deslizante.

Reflexão

Quando uma figura é refletida em um eixo imaginário, o conjunto formado pela figura original e por seu reflexo caracteriza a reflexão, ou seja, a figura e sua imagem são simétricas por reflexão. Ao eixo imaginário chamamos eixo de simetria. Observe a figura 98.

Figura 98. Simetria de reflexão



Fonte: Google imagens

Por meio da reflexão no eixo de simetria *y* o triângulo ABC é refletido originando o triângulo A'B'C' simétrico ao primeiro.

O professor pode lançar algumas questões aos estudantes e conduzi-los para que assimilem a ideia de reflexão e os conhecimentos a ela relacionados como: ponto médio, perpendicularismo, ângulo, segmentos de reta, sobreposição, imagem etc.

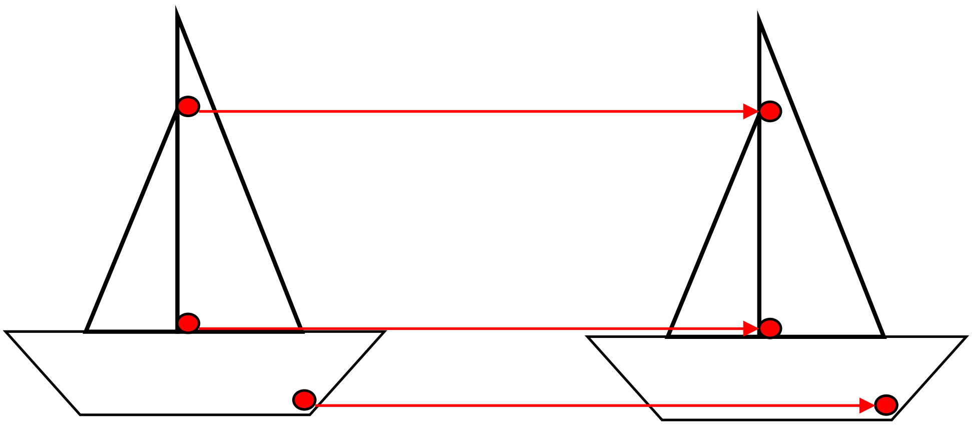
1. Com o auxílio de uma régua, trace os segmentos de reta AA', BB' e CC'.
2. Meça com um transferidor o ângulo formado por cada segmento com eixo de simetria. Qual a medida dos ângulos?
3. Meça a distância de cada ponto correspondente ao eixo de simetria. Qual a conclusão?
4. Dobre a figura sob o eixo de simetria e observe o que ocorre com os pontos correspondentes. O que você conclui?
5. Crie um desenho onde a reflexão pode ser observada.
6. Existem variações da Simetria de reflexão? Faça uma pesquisa e verifique quais.
7. O movimento de reflexão pode ser visualizado nos artefatos socioculturais? Dê um exemplo?

Espera-se que os estudantes relacionem a Simetria de reflexão ao estudo feito com as imagens dos artefatos socioculturais.

Translação

Na Simetria de translação, todos os pontos de uma determinada figura se deslocam na mesma direção, no mesmo sentido e a mesma distância. Esse deslocamento está associado a um vetor. Assim, a figura é deslocada no plano como se fosse arrastada gerando novas figuras simétricas à primeira por translação.

Figura 99. Simetria de translação



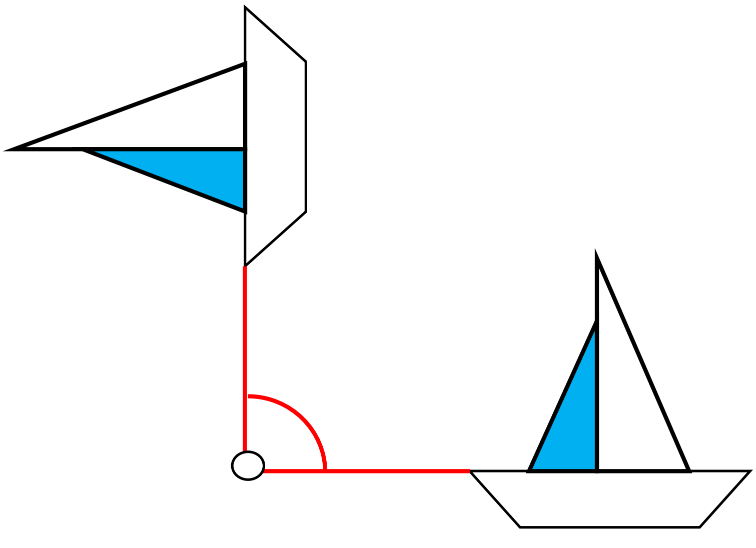
Fonte: criação do autor

1. Observe a figura 99. Descreva o movimento que a figura fez.
2. Qual a direção e o sentido do movimento? Identifique o vetor deslocamento.
3. Meça com régua as distâncias entre os pontos destacado na figura. O que você conclui?
4. Houve alteração no tamanho e na forma da figura? Demonstre sua resposta manipulando a figura.
5. A figura pode se deslocar em outra direção e sentido? Como seria esse movimento?
6. Faça um desenho que contenha o movimento de translação e mostre como isso ocorre!
7. Considerando o estudo feito anteriormente sobre os artefatos socioculturais, mostre a translação em um desses artefatos usando suas imagens.

Rotação

A Simetria de rotação consiste em se obter figuras simétricas por meio do giro dessa figura em torno de um ponto central, sob um ângulo determinado. A cada giro sob o mesmo ângulo, serão obtidas novas figuras simétricas à figura original. Observe a figura 100.

Figura 100. Simetria de rotação



Fonte: criação do autor

É importante questionar o estudante para que ele perceba e assimile os conhecimentos envolvidos neste caso de Simetria.

1. Identifique o centro de rotação e o angulo de rotação.

2. Use a régua para medir a distância de cada figura ao centro de rotação. Marque pontos correspondentes nas figuras e verifique a distância entre eles e o centro de rotação.

3. Com o transferidor meça o angulo de rotação.

5. Usando régua e compasso, crie um desenho onde ocorre a Simetria de rotação.

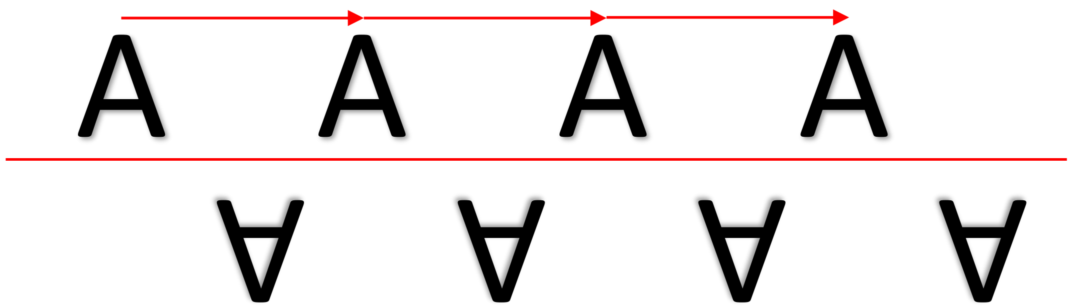
6. Relacione este caso de Simetria aos artefatos socioculturais.

7. faça uma pesquisa com o tema *resetas* e relcione com a Simetria de rotação.

Reflexão deslizante

Toda transformação que resulta da composição de uma reflexão na reta *s* com uma translação (ou vice-versa) e cuja direção de translação é paralela a *s*, é uma reflexão deslizante.

Figura 101. Simetria de reflexão deslizante



Fonte: criação do autor

Observe a figura 101 onde ocorre a composição entre reflexão e translação.

1. O movimento se dá em qual sentido e direção?

2. identifique o eixo de reflexão. Ele é horizontal ou vertical? E o vetor deslocamento?

3. Se esse movimento ocorresse e outro sentido e outra direção, poderia originar figuras simétricas por reflexão deslizante?

4. Faça um desenho que remeta a esse caso de Simetria.

6. Pesquise sobre composição de simetrias e verifique se existem outras possibilidades de se combinar reflexão, rotação e translação de forma a se obter figuras simétricas por tal método.

As questões seguintes se referem a todos os casos de Simetria estudados.

7. Verifique qual a relação entre Simetria e congruência de figuras geométricas planas.

8. Há alguma relação entre Simetria e semelhança de figuras geométricas planas?

9. O que é homotetia? Qual a sua relação com a Simetria?
10. Identifique três conteúdos matemáticos do Ensino Fundamental onde a Simetria é um dos princípios.
11. Faça uma pesquisa com um dos seguintes temas: cerâmicas arqueológicas e suas réplicas, gradis de ferro, rendas de bilro, adornos corporais (tatuagem, pintura corporal etc.), pinturas de meios de transporte, cestarias, azulejos decorativos, bordados e arquitetura histórica. Busque imagens desses artefatos no lugar onde você reside e na internet para relacioná-los aos casos de Simetria estudados. Explore, ainda aspectos sociais, históricos, culturais e geográficos para elaborar um texto explicativo sobre o tema.
A proposta da questão 11 é fazer uma culminância do estudo feito para que o estudante estabeleça as relações entre conhecimento matemático e histórico-cultural a partir dos casos de Simetria e dos artefatos socioculturais. Podem ser propostos outros temas para estudo, inclusive pelos próprios estudantes. O professor pode organizar uma exposição na escola dos trabalhos elaborados para que os estudantes partilhem com todos da comunidade escolar o trabalho que desenvolveram.

Nosso intuito neste capítulo foi mostrar que é possível conectar as práticas socioculturais que mobilizam culturas matemática, à matemática escolar por meio de atividade de problematização fomentadas pelas UBP. Elaboramos um número considerável de atividades que podem ser utilizadas pelo professor de matemática em suas aulas de Simetria, mas, que também podem servir de ponto de partida para que o professor possa incorporar essa metodologia de ensino em sua prática docente

As 13 atividades elaboradas podem ser feitas seguindo a ordem que o professor julgar conveniente, porém temos duas ressalvas: a UBP 13 deve ser a última a ser trabalhada com os estudantes, pois a proposta desta pesquisa é que o aluno possa, primeiro, visualizar e manipular várias imagens que remetem aos casos de Simetria e, depois, tenham acesso ao conteúdo matemático; as UBP de 6 a 10 estão em uma sequência lógica que deve ser seguida pelos alunos para que os estudantes compreendam como a decoração do prédio é composta e qual a relação com reflexão, rotação e translação.

Reiteramos que as atividades aqui postas são sugestões para a sala de aula de matemática e que foram elaboradas para que se atingissem os objetivos desta pesquisa, assim, considerando o contexto de sala de aula, o professor pode fazer as adaptações que julgar necessárias para atingir seus objetivos de ensino e aprendizagem com relação a Simetria. As UBP foram elaboradas para o ensino-aprendizagem de Simetria nos anos finais do Ensino Fundamental, porém, podem ser adaptadas para outros níveis de ensino e outros conteúdos curriculares de Matemática.

A seguir apresentaremos nossas considerações finais concernente à pesquisa e a escrita da dissertação, de modo a manifestarmos o aprendizado alcançado, os objetivos que foram possíveis alcançar, as questões respondidas pela pesquisa bem como as contribuições para o ensino de matemática. Assim, nos posicionaremos sobre nossa aprendizagem acerca da realização de uma pesquisa em Educação Matemática, destacando as contribuições deste trabalho para o ensino de matemática na Educação Básica, para a formação de professores e para nossa formação pessoal.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados obtidos, com esta pesquisa, comprovam que os artefatos das práticas socioculturais de diferentes culturas, possuem conexão com os casos de Simetria a serem ensinados nos anos finais do Ensino Fundamental. Essa conexão foi por nós evidenciada por meio de uma análise matemática da estrutura de composição gráfica dos artefatos que apresentaram padrões, cujos movimentos, são semelhantes aos movimentos que ocorrem nas transformações de figuras geométricas no plano, as isometrias.

De forma mais específica, mostramos essa conexão, isolando alguns desses padrões geométricos, e descrevendo como os movimentos por eles executados (para compor o ornamento de determinado artefato) se aproximam daqueles estudados pela matemática escolar. Os artefatos estudados, têm conexão com às Simetrias de reflexão, rotação, translação e reflexão deslizante. De posse desse resultado argumentamos favoravelmente a inserção dessa conexão no ensino de matemática na Educação Básica pelo professor de matemática.

Outro resultado que obtivemos é quanto as bases filosóficas que evidenciam a existência do pensamento simétrico. Nosso intuito, não foi somente de matematizar os artefatos socioculturais, mas também de enfatizar a importância de nossas heranças culturais para a composição desse corpo de conhecimentos teóricos, de extrema importância, que hoje chamamos de matemática. Nosso estudo evidenciou que o pensamento simétrico (que pode ser observado desde as primeiras manifestações artísticas da humanidade, podendo ser anterior aos primórdios da matemática) faz parte de uma estrutura subjacente e invariante de pensamento presente na quase totalidade das culturas. A existência desse pensamento estrutural é o que justifica, vários artefatos de diferentes culturas, terem na estrutura gráfica de seus ornamentos, elementos que remetam ao pensamento simétrico e, por conseguinte à Simetria.

Para finalizar a exposição dos resultados da pesquisa, trazemos o estudo dos livros didáticos que revelou, por meio do contraponto com as pesquisas sobre ensino de Simetria e com os PCN de matemática, a inadequação da abordagem do conteúdo de Simetria nesses livros, pois tanto as pesquisas quanto os PCN apontam para a abordagem cultural desse assunto o que não se observa para a maioria dos livros que analisamos. Como proposta complementar ao livro didático de matemática, elaboramos as atividades de UBP, para que sejam usadas de forma a complementarem o livro didático no que tange às suas fragilidades na abordagem de Simetria.

Ante o exposto, concluímos que atingimos o objetivo geral e os quatro específicos desta pesquisa. Mas, a comprovação dos objetivos propostos é uma realização pessoal para os autores da pesquisa, sendo necessário, ainda, apontar suas contribuições. Faremos isso apontando as contribuições para: o campo da Educação Matemática, para a formação de professores de matemática, para a formação geral do estudante e para o ensino-aprendizagem de matemática no Ensino Fundamental. Apresentamos, ainda, as contribuições para a formação pessoal dos autores e as perspectivas para ações futuras.

- ✓ Contribuições para o campo da educação matemática

A pesquisa em educação matemática tem se desenvolvido e ganhado força no Brasil há algumas décadas, de forma especial, a partir da década de 1980 quando surgiram as primeiras organizações e programas de pós-graduação na área. Hoje, pode-se dizer que a educação matemática é um campo em pleno crescimento e que caminha para sua consolidação pois se configura como um corpo de conhecimentos técnicos-científicos que servem de base para a realização de novas pesquisas e para a implementação de ações educativas em todos os níveis de ensino e aprendizagem de matemática.

Nesse cenário, a realização de pesquisas, que aliem o conhecimento teórico à proposição de metodologias de ensino claras e possíveis para o ensino de matemática, contribui sobremaneira para o crescimento e fortalecimento do campo. Isto por entendermos que umas das principais funções da educação matemática é o desenvolvimento de ações educativas que sejam capazes de imputar nos estudantes a capacidade de conhecer os objetos matemáticos, com os quais se deparam, a ponto de, deles se utilizar, para se inserir de forma contundente na sociedade que os rodeia.

Nossa pesquisa tem esse caráter teórico-prático. Ela se fundamenta em teóricos de renome nacional e internacional, da própria área e de outras como as Ciências Sociais (que, vale ressaltar, é de quem a educação matemática toma de empréstimo alguns de seu métodos e teorias) para mostrar uma face da matemática bem conhecida, porém pouco vista pelas pesquisas da forma como a vimos, que é a existência das estruturas matemáticas. A partir daí estabelece conexões entre o saber cultural, e a matemática escolar da Educação Básica.

Diante disso, podemos dizer que nossa pesquisa apresenta contribuições para o campo da educação matemática que muito já avançou nos últimos anos, é verdade, mas que ainda precisa de pesquisas que apresentem propostas fundamentadas para o ensino-aprendizagem de matemática na Educação Básica, de forma especial o Ensino Fundamental. Consideramos ser este nível de ensino o lugar onde são dados os primeiros passos da caminhada do conhecimento e que pode ser decisivo para que se continue ou que se interrompa tal caminhada.

Por isso enfatizamos as contribuições para o campo por lançarmos um olhar para os anos finais do Ensino Fundamental considerando dois de seus atores principais: o professor e o aluno, mostrando para estes que é possível desenvolver um trabalho colaborativo na sala de aula de matemática, afim de que se evite, dentre outras coisas, uma relação traumática entre professor e aluno, entre aluno e aluno e entre aluno e matemática (e porque não dizer entre professor de matemática e a matemática) que em grande parte é a responsável pelas interrupções na caminhada do conhecimento, fazendo com que sonhos de infância fiquem pelo caminho.

Destacamos, ainda, como contribuição para o campo, a forma como tratamos do objeto matemático em nossa proposta, vendo-o não como pronto e acabado, mas como produto da relação cognitiva do homem com o meio ao longo de milênios. Entendemos, portanto, que problematizamos o conhecimento matemático o colocando como uma das formas de compreensão e registro do conhecimento produzido, mas não a única, pois, o pensamento simétrico, que é uma estrutura invariante em diversas culturas e pode se materializar nos seus artefatos socioculturais, é anterior à Simetria da forma como a conhecemos matematicamente, portanto anterior ao conhecimento matemático. Olhar o objeto matemático de forma problemática, questionadora, como um conhecimento dentre muitos, para nós, é provocar pensamentos e reflexões sobre nosso trabalho como educadores matemáticos que, talvez sejam as maiores contribuições que uma pesquisa possa trazer aos seus pares.

- ✓ Contribuições para a formação de professores de matemática

Outra função importante da educação matemática é a formação de professores de matemática, dessa forma, as pesquisas em educação matemática devem se preocupar com tal formação. Em nossa pesquisa não trouxemos muitos teóricos que escrevem sobre formação de professores, não fizemos uma discussão sobre o tema e nem tampouco tomamos os professores da Educação Básica como colaboradores ou sujeitos da pesquisa. Então, pode-se se dizer que nossa pesquisa contribui para a formação de professores? Entendemos que sim!

Formar um professor de matemática, para nós, dentre outras coisas, é equipá-lo com ferramentas que possa utilizar no exercício da docência que o ajude a planejar e executar ações de ensino-aprendizagem que tenham êxito e atinjam positivamente todos os alunos da turma alvo de tal ação. O que queremos dizer é que o professor de matemática, por meio da formação, tem que se tornar um organizador de situações de aprendizagem e não um simples reprodutor do livro didático, o que transformaria seus alunos em meros receptores, expectadores dentro da sala de aula de matemática, onde são atores principais.

Nossa contribuição para essa formação é bem clara quando, em nossas propostas de atividades para o ensino de Simetria, não somente mostramos as atividades, mas tivemos a preocupação de deixar, como sugestão, um planejamento de todos os passos a serem dados, bem como orientações, para que sua execução tenha sucesso. Esse planejamento não é uma receita que deve ser seguida à risca (como enfatizamos no próprio planejamento) mas é uma forma de planejar, não só uma atividade com UBP, mas qualquer atividade de ensino-aprendizagem de matemática que tenha caráter semelhante, e isso é formativo, uma vez que esse tipo de planejamento não é comumente ensinado em cursos de licenciatura em matemática.

Por outro lado, as atividades em si são um aspecto que contribui para a formação de professores de matemática. Elas foram elaboradas com base em dois princípios que estão intimamente ligados, a problematização e a investigação que devem ser princípios formativos de todo professor. A problematização é um meio de se relacionar com o conhecimento de forma ativa, dinâmica, questionando-o, manipulando-o, inferindo sobre ele e sugerindo. Para isso, deve se lançar em busca de respostas, investigar, que como um princípio, é o que deve fazer o professor de matemática quando estiver diante de uma daquelas situações “sem solução” que constantemente se apresentam a ele na sua atividade docente cotidiana. Ele não pode se acomodar, precisa buscar uma solução. Mas isso, provavelmente só vai acontecer, se este tiver em sua constituição profissional o espírito investigador.

Mas, se as UBP que foram propostas são para alunos do Ensino Fundamental e não para professores em formação, elas irão despertar no professor a habilidade de problematizar e investigar? Essa é nossa aposta com este trabalho, visto que não temos como prever a reação dos leitores deste texto, mas diante de nossa experiência como professores pesquisadores, podemos dizer que, muitos professores, em formação continuada ou inicial, ao ter contato com nossa proposta de UBP terão a intenção de utilizar essa metodologia, outros buscarão mais informações sobre o assunto e outros, além disso, implementarão as UBP em suas aulas de Simetria e de outros tópicos de matemática.

O professor de matemática, brasileiro, atualmente, tem como um de seus principais materiais didáticos (em muitos casos o único) os livros didáticos de matemática distribuídos pelo PNLD nas redes públicas de ensino do país. Isso se deve a alguns fatores como, falta de recursos para adquirir outro material e o comodismo de muitos professores. Não somos contra a utilização dos livros didáticos, pelo contrário, defendemos o uso do livro que custa uma fortuna para os cofres públicos anualmente. Mas, o conteúdo do livro é de boa qualidade? Esse conteúdo atinge os objetivos do ensino de matemática para o nível proposto? Ele é adequado ao público alvo, considerando fatores culturais, sociais, políticos das diversas regiões do país? O que está no livro é uma verdade absoluta?

As questões que colocamos são necessárias, mas, em muitos casos, o livro é sim uma verdade absoluta, pois não é posto sob suspeita pelo professor. E como reverter essa situação? Bem nossa proposta é que o livro didático seja olhado pelos professore de forma consciente e crítica. É preciso que se faça, no momento da escolha e da utilização do livro, um estudo deste para trazer à tona seus aspectos relevantes, detectar suas falhas e atuar com propostas de complementação desse material.

Em nossa pesquisa, trazemos, também, contribuições nesse sentido. Fizemos um estudo de livros didáticos de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental. Para isso, estabelecemos critérios prévios com base nos PCN de matemática e mostramos que os livros, em sua maioria, não atendem a tais critérios, não abordam os conteúdos da forma como os PCN orientam. Consideramos ser essa análise, formativa por pretender, despertar no professor o olhar analítico para o livro didático e não somente contemplativo que o leva a reprodução dos assuntos de matemática da mesma forma como se apresentam. É preciso que os professores de matemática dediquem um tempo para essa atividade de análise e complementação do livro, isso deve fazer parte de seu planejamento para que adequações sejam feitas considerando tanto o contexto interno da matemática como o contexto sociocultural de sua turma e de seus alunos.

- ✓ Contribuições que o estudo poderá trazer para a formação geral do estudante e para o ensino-aprendizagem de matemática no Ensino Fundamental.

O ensino de matemática no nível fundamental é de extrema importância para a formação matemática do aluno. Nessa fase da vida escolar os estudantes possuem como características marcantes a curiosidade e a disposição para estarem sempre em movimento. É nisso que o professor deve se apoiar para propor atividades que exijam dos alunos colocar em prática tais características e às vincular ao ato de aprender matemática (entre outras disciplinas). Caso isso não seja feito nessa fase, talvez no futuro, eles acabem perdendo essa disposição ou, mesmo continuando com ela, não a relacionem com o aprendizado de matemática.

Nesse sentido, apontamos como uma forma de aliar as características dos estudantes à aprendizagem de matemática, a implementação das UBP pelo professor em suas atividades de ensino na sala de aula de matemática. Como contribuições gerais do uso dessa metodologia, destacamos três fatores: o desenvolvimento do espírito pesquisador, a habilidade de realizar trabalho em equipe, a educação do olhar para o mundo que o cerca; como contribuições específicas para o aprendizado de matemática destacamos a forma de o aluno se relacionar com o conhecimento matemático e dele se apropriar.

Assim como destacamos a pesquisa como formadora para o professor, para o aluno, é de suma importância e vai o ajudar em toda a sua trajetória estudantil. Essa habilidade de se lançar em busca do conhecimento é que leva o estudante a aprender de forma mais rápida e significativa, pois ele vai descobrindo coisas e compondo um conceito aos poucos. A coisa não é apresentada pronta, ela vai se constituindo no ritmo de cada um, que vale ressaltar, é único. O ato de pesquisar é uma habilidade que poderá ser acionada, não só na educação, mas em outros aspectos da vida da pessoa. Assim, é preciso desenvolver ações de pesquisa, desde a Educação Básica como propomos neste trabalho.

É consenso atualmente, o fato de vivermos em uma sociedade cada vez mis individualista, egoísta e egocêntrica e pouco colaborativa. Isso muito em decorrência das imposições do regime capitalista que visa o lucro a qualquer custo e impulsiona as pessoas em uma corrida desenfreada e desrespeitosa com o outro. Isso aliado ao mal-uso das tecnologias de comunicação contribui para o individualismo e para o isolamento, pois há um excesso de comunicação à distância e as palavras ditas “cara-a-cara” são cada vez mais escassas. São situações cotidianas retratam o individualismo e o isolamento, principalmente. O fato é que tais situações podem gerar situações de depressão, dependência, desvalorização da pessoa e da vida humana em detrimento do capital financeiro ou de um equipamento eletrônico, dentre outras coisas.

Assim, quando propomos o trabalho em equipe com as UBP, pretendemos fomentar ações colaborativas entre os alunos, que se unem para alcançar um objetivo comum, desenvolver neles o respeito pelo outro, principalmente, pela opinião do outro, quando da discussão de diferentes pontos de vista na sala de aula, proporcionar-lhes conhecer melhor seus colegas de classe, seu professor e, talvez, acabar com preconceitos, dar-lhes oportunidade e a capacidade de dialogarem. Esse é um tipo de formação na qual precisamos investir esforços, pois, para além do aprendizado em matemática, essas ações capacitam nossos alunos para estabelecerem uma boa relação com o outro, pautada no saber ouvir e falar, no respeito a si e ao outro, na ética.

Educar o olhar para o mundo concreto é outra habilidade que pretendemos desenvolver nos estudantes, pois em nossa proposta, apresentamos uma maneira de ver a matemática e vê-la em “lugares” até então onde não era vista despertando nos alunos sentimentos traduzidos por frases como “eu já conhecia isso, mas não sabia que era matemática” (REGO et. al., 2006). Nosso trabalho traz uma proposta de atividade que pretende levar o aluno a visualizar várias representações gráficas de diferentes culturas que remetem a uma mesma situação o que poderá desenvolver neles a capacidade de abstração e generalização que é fundamental em matemática além da habilidade de interpretar e ressignificar fatos, coisas e situações que a eles se apresentem e as utilizem a seu favor quando necessário.

De forma mais específica o trabalho com as UBP sugere uma outra forma de o aluno se relacionar com o conhecimento matemático. Essa relação não é mais aquela onde o aluno é somente o receptor do conhecimento, ele passa a ser produtor do conhecimento, pois tem com este uma relação mais próxima, real e dinâmica. As várias questões propostas pelas UBP vão conduzindo o aluno ao encontro com o objeto matemático que se pretende que ele aprenda. Não se mostra o objeto pronto para que o aluno assimile seus conceitos, relações e propriedades, elas vão sendo construídas pelo aluno ao longo da realização da atividade e, esse processo culmina com a formação do conceito pelo aluno.

Portanto, essas são as possibilidades de contribuições para o ensino-aprendizagem no Ensino Fundamental. Usamos o termo possibilidades por entendermos que para que tais contribuições se efetivem, será necessário que o professor possa implementar essa metodologia em sua sala de aula.

- ✓ Contribuições para a formação pessoal

Um outro aspecto que queremos destacar como relevante de nossa pesquisa são as contribuições para a formação pessoal dos autores. Para percorrermos o caminho até aqui, muitos passos foram dados, dentre eles destacamos os estudos que fizemos de vários textos que nos auxiliaram na composição desta dissertação. Essas leituras foram decisivas para o nosso crescimento intelectual e para a composição do presente texto pois, temos a consciência que, ao se fazer uma pesquisa deste nível, é preciso lançar mão de outros trabalhos já feitos e que tenham objetos e objetivos próximos dos que guiam nossa pesquisa.

O exercício de ler, reler, interpretar, escrever, reescrever e propor é no que consiste o estudo teórico que culmina com o crescimento cognitivo dos envolvidos na pesquisa. No nosso caso, esse exercício, contribuiu de forma decisiva para o bom desenvolvimento deste trabalho. Vemos todos os textos que consultamos até aqui como uma fonte de conhecimentos, incentivo e inspiração para persistirmos em nosso propósito de fazer uma pesquisa de qualidade que pudesse cumprir com o seu papel de lançar luzes sobre o ensino-aprendizagem de matemática.

A presente pesquisa, nos proporcionou, também, imergir em culturas até então desconhecidas. Isso nos levou a conhecê-las e valorizá-las como um patrimônio cultural universal. Essa formação cultural que tivemos com a pesquisa, nos fez projetar ações que visem a divulgação dessas culturas, para que mais pessoas às conheçam, verdadeiramente, e a preservação desse patrimônio que está ameaçado pelo descaso e desrespeito. Vele ressaltar, que algumas dessas culturas estavam próximas de nós, porém de certa forma invisível aos nossos olhos.

✓ As ações futuras

Para concluir queremos enfatizar que temos o sentimento de que cumprimos o nosso papel como professores pesquisadores, pois os resultados obtidos foram satisfatórios e estão em consonância com as projeções que fizemos no início deste trabalho. Comprovamos que os artefatos socioculturais podem ser conectados à Simetria e propomos uma forma de ensinar esse conteúdo por meio da conexão estabelecida.

Pretendemos dar continuidade a este trabalho futuramente, aprofundando o tema devido sua amplitude e relevância para o campo de pesquisa. Esperamos que outros pesquisadores possam contribuir com este trabalho, ampliando as discussões e propostas aqui levantadas, pois defendemos a ideia de que a pesquisa é pública e deve ser acessada por todos os que por ela se interessarem, abrindo assim possibilidades para outras visões e interpretações dos resultados que obtivemos.

Esperamos contribuir com a formação de todos aqueles que lerem este texto, se não pela utilização imediata da proposta e de seus resultados, mas pelo fato de, a partir dessa leitura, pensarem e repensarem sua prática docente objetivando sua inovação, complementação e/ou ressignificação. De forma especial, esperamos atender as expectativas dos professores de matemática do Ensino Fundamental, por uma metodologia que promova o aprendizado que desejam para seus alunos com nossa proposta metodológica para o ensino de Simetria. Contando com adequação das atividades propostas para outros conteúdos matemáticos, outros níveis de ensino e, porque não, para outras disciplinas do currículo escolar.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Maria da Conceição de. **Complexidade, saberes científicos, saberes da tradição**. São Paulo: Ed. Livraria da Física, 2010 (Coleção contextos da ciência).

BARROS, Osvaldo dos Santos. **Padrões matemáticos na Amazônia:** pesquisa em etnomatemática. In: ROCHA, M. L. P. C., MENDES, M. J. F., CHANQUIAM, M. (org.). Belém: SBEM – PA, 2015. (Coleção Educação Matemática na Amazônia 4).

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 5. Ed., 4ª reimp. São Paulo: Contexto, 2014.

BLANCO, M. F. B.; HARRIS, A.L.N.C. **Symmetry groups in the Alhambra**. VISUAL MATHEMATICS, v. 13, p. 1-42, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino de Matemática** de 1ª a 4ª séries, PCN. 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino de Matemática** de 5ª a 8ª séries, PCN. 1998.

CAMPOS, Maria Cristina Rezende de. **O corpo emana:** elementos da plástica corporal xavante. Dissertação (Mestrado em Artes). Programa de Pós-graduação em Artes. Instituo de Artes. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2007.

CÉNTURION, M.; JAKUBOVIC, J. **Matemática teoria e contexto, 6º ano**. São Paulo: Saraiva, 2012.

CÉNTURION, M.; JAKUBOVIC, J. **Matemática teoria e contexto, 7º ano.** São Paulo: Saraiva, 2012.

CÉNTURION, M.; JAKUBOVIC, J. **Matemática teoria e contexto, 8º ano.** São Paulo: Saraiva, 2012.

CÉNTURION, M.; JAKUBOVIC, J. **Matemática teoria e contexto, 9º ano.** São Paulo: Saraiva, 2012.

CHAVANTE, E. R. **Convergências: Matemática, 6º ano**. São Paulo: Edições SM, 2015.

CHAVANTE, E. R. **Convergências: Matemática, 7º ano**. São Paulo: Edições SM, 2015.

CHAVANTE, E. R. **Convergências: Matemática, 8º ano**. São Paulo: Edições SM, 2015.

CHAVANTE, E. R. **Convergências: Matemática, 9º ano**. São Paulo: Edições SM, 2015.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação matemática:** Da teoria à pratica. 8 ed. Campinas: Papirus, 2001.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Educação matemática: da teoria à prática. Campinas, SP: Papirurs, 1996. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática)

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação para uma sociedade em transição** – 3. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2016. (Coleção contextos da ciência).

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade**. 5 ed.; 1. reimp.- Belo Horizonte: Autentica, 2015.

D’AMBROSIO, Ubiratan. **Etnomatemática**: arte ou técnica de explicar ou conhecer. 5 ed. São Paulo: Ática, 1998.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris, Matemática 6º ano**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris, Matemática 7º ano**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris, Matemática 8º ano**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris, Matemática 9º ano**. 2. ed. São Paulo: Ática, 2015.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação matemática**: representação e construção em geometria. Porto Alegre: Artes Médicas Sul,1999.

FARIAS C. A.; MENDES, I. A. As culturas são as marcas das sociedades humanas. In: MENDES, I. A.; FARIAS C. A. (org.). **Práticas socioculturais e educação matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014. (Coleção contextos da ciência). P 15 – 48.

FARMER, D. W. **Grupos e Simetria**: um guia para descobrir a matemática. Tradução Cristina Izabel Januário. Lisboa: Galvina, 1999.

FERRETE, Rodrigo Bosi. **Práticas etnomatemáticas no liceu do paracurí**: a propósito dos ornamentos geométricos da cerâmica. Dissertação (Mestrado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação. Centro de Ciências Sociais Aplicadas. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2005.

GARZÓN,S. M. U., FORERO , Ó. L. C., MARTÍNEZ , J. F. B. Teselaciones para niños: una estrategia para el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial de los niños. In. **Educación Matemática**. v. 26, núm. 2, p. 135-160, 2014.

GAY, M. R. G. (Ed.) **Projeto Araribá. Matemática 6º ano**. 4 ed. São Paulo: Moderna, 2014.

GAY, M. R. G. (Ed.) **Projeto Araribá. Matemática 7º ano**. 4 ed. São Paulo: Moderna, 2014.

GAY, M. R. G. (Ed.) **Projeto Araribá. Matemática 8º ano**. 4 ed. São Paulo: Moderna, 2014.

GAY, M. R. G. (Ed.) **Projeto Araribá. Matemática 9º ano**. 4 ed. São Paulo: Moderna, 2014.

GERDES, Paulus. **Da etnomatemática a arte-design e matrizes cíclicas**. Belo Horizonte: Autentica Editora, 2010a. - (Tendências em Educação Matemática, 19).

GERDES, Paulus. **Etnomatemática – Cultura, Matemática, Educação:** Colectânea de Textos 1979-1991. Moçambique. Impressão e distribuição: www.lulu.com, 2012.

GERDES, Paulus. **Geometria dos trançados bora na Amazônia peruana**. – São Paulo: Editora livraria da Física, 2010b. (Coleção contextos da ciência).

GONÇALVES-MAIA, Raquel. **Ciência, pós-ciência, metaciência**. Tradição, inovação e renovação. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011 (Coleção contextos da ciência).

LEDERGERBER-RUOFF, Erika Brigitta. **Isometrias e ornamentos do plano euclidiano.** São Paulo, SP. Atual, 1982.

LÉVI-STRAUSS, Claude. **O pensamento Selvagem**. 2. ed. Tradução Tânia Pellegrini. Campinas: Papirus, 1997.

MARCHIS, Iuliana. **Symmetry and Interculturality.** Acta Didactica Napocensia, v. 2, p. 57-62, 2009.

MARCONI, Marina de Andrade; PRESOTTO, Zelia Maria Neves. **Antropologia**: uma introdução. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2011.

MAURO; S. GASPAR, T. **Explorando a geometria através da história da Matemática e da etnomatemática**. Rio Claro: SBHMat, 2003. (Coleção História da Matemática para Professores).

MENDES, I. A. Investigação, formação de professores e ensino de matemática. In: CUNHA, E. R., SOARES, M. G., SÁ, P. F. (Org.). **Formação de professores**: teorias e práticas cotidianas. Belém: EDUEPA, 2016. p. 67-104

MENDES, I. A. Da arte geométrica na cerâmica marajoara e suas potencialidades didáticas. In: MENDES, Iran Abreu; LUCENA, Isabel Cristina Rodrigues de (org.). **Educação matemática e cultura amazônica**: fragmentos possíveis. Belém: Editora Açaí, 2012.

MENDES, I. A. Da arte indígena aos ornamentos geométricos: conceitos, medidas e Simetria. In: **Arte e Educação Física na educação escolar indígena**. Natal: UFRN/PAIDÉIA/MEC, 2007, p. 54-67. (Coleção Cotidiano Escolar, n. 02, v. 03).

MENDES, I. A. **Ensino de conceitos geométricos, medidas e Simetria**: por uma educação (etno)matemática com arte. **Revista Cocar**, v.2, n.4, dez. 2008. Belém: eduepa, 2008.

MENDES, I. A. **Matemática e investigação em sala de aula:** tecendo redes cognitivas na aprendizagem. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. (Coleção contextos da ciência).

MENDES, I. A. Práticas culturais históricas e construção de significados nas aulas de matemática. In: FLORES, C. R.; CASSIANI S. (org.). **Tendências contemporâneas nas pesquisas em educação matemática e científica**: sobre linguagens e práticas culturais. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2013.

MENDES, I. A. Práticas sociais históricas no ensino de matemática. In: MENDES, I. A.; FARIAS C. A. (org.). **Práticas socioculturais e educação matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014. (Coleção contextos da ciência).

MENDES, I. A.; LIMA FILHO, R. R. C. Práticas matemáticas históricas: significados conceituais e metacognitivos. In: MENDES, I. A.; FARIAS C. A. (org.). **Práticas socioculturais e educação matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2014. (Coleção contextos da ciência).

MENDES, Iran Abreu; BEZERRA, José Querginaldo. Explorando Simetrias em práticas escolares. In: MENDES, Iran Abreu; BEZERRA, José Querginaldo. **Instrumentação para o Ensino de Matemática**. Natal: EDUFRN, 2009.

MIGUEL, Antonio; MENDES, Iran Abreu. Mobilizing histories in mathematics teacher education: memories, social practices, and discursive games. In: **ZDM Mathematics Education**. v. 42. p. 381 – 392, 2010.

MORIN, Edgar. **Antropologia da liberdade**. Tradução Anthropologie de la Liberté, GRASCE Entre Systémique et Complexité, Chemin Faisant Mécanges [cf.] en l'Honneur du Professor Jean-Louis Le Moigne. Paris: Presses Universitaires de France, 1999, págs. 157-170. Disponível em: http://docslide.com.br/documents/morin-edgar-1999-antropologia-da-liberdade.html

O POVO BRASILEIRO. Documentário baseado na obra de Darcy Ribeiro. Direção: Isa Grinspum Ferraz. Distribuidora: Versátil Home Vídeo. Coprodução: GNT e TV Cultura. DVD. Colorido. 2000.

PIAGET, Jean. **O estruturalismo**. Tradução Moacir Renato de Amorim. Rio de Janeiro: DIFEL, 2003.

RÊGO. R. G. et. al. **Padrões de Simetria**: do cotidiano à sala de aula. João Pessoa: Editora Universitária/UFPB, 2006.

SANTOS, Maria José C. dos. **Geometria e Simetria nas rendas de bilro**: Contribuições para a Matemática escolar. Tese (Doutorado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação. Centro de Ciências Sociais Aplicadas. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2012.

SOUZA, J. R. de.; PATARO, P. R. M. **Vontade de saber matemática, 6º ano**. 3 ed. São Paulo: FTD, 2015.

SOUZA, J. R. de.; PATARO, P. R. M. **Vontade de saber matemática, 7º ano**. 3 ed. São Paulo: FTD, 2015.

SOUZA, J. R. de.; PATARO, P. R. M. **Vontade de saber matemática, 8º ano**. 3 ed. São Paulo: FTD, 2015.

SOUZA, J. R. de.; PATARO, P. R. M. **Vontade de saber matemática, 9º ano**. 3 ed. São Paulo: FTD, 2015.

VERGANI, Teresa. **A criatividade como destino**: transdisciplinaridade, cultura e educação. (Org. Carlos Aldemir Farias da Silva, Iran Abreu Mendes e Maria da Conceição de Almeida). São Paulo: Editora Livraria da física, 2009.

VERGANI, Teresa. **A surpresa do mundo:** ensaios sobre cognição, cultura e educação. (Org. Carlos Aldemir Farias da Silva e Iran Abreu Mendes). Natal: Flecha do Tempo, 2003.

VERGANI, Teresa. **Educação etnomatemática: o que é?** Natal: Flecha do Tempo, 2007.

VERGANI, Teresa. **Excrementos do sol.** A propósito de diversidades culturais. Lisboa: Pandora, 1995. (Olhos do Tempo).

VERGANI, Teresa. **O zero e os infinitos.** Uma experiência de Antropologia e Educação Matemática intercultural. Lisboa: Minerva, 1991.