UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

PATRICIA SHEILA FIGUEIREDO PEREIRA

POTENCIALIDADES DIDÁTICAS DE TEXTOS E PROBLEMAS HISTÓRICOS EGÍPCIOS E BABILÔNICOS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Belém-PA
2022

PATRICIA SHEILA FIGUEIREDO PEREIRA

POTENCIALIDADES DIDÁTICAS DE TEXTOS E PROBLEMAS HISTÓRICOS EGÍPCIOS E BABILÔNICOS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao programa de pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto de Educação Matemática e Científica -IEMCI da UFPA, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em educação em ciências e matemática, sob orientação do Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg.

Belém-PA
2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pela autora

P436p Pereira, Patricia Sheila Figueiredo.
Potencialidades didáticas de textos e problemas históricos egípcios e babilônicos para o ensino de matemática na educação básica / Patricia Sheila Figueiredo Pereira. — 2022.
101 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg
Coorientação: Profª. Dra. Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós- Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2022.

1. História da matemática. 2. Textos históricos. 3. Potencial didático. 4. Ensino de matemática. 5. Educaçãobásica. I. Título.

CDD 510.9

PATRICIA SHEILA FIGUEIREDO PEREIRA

POTENCIALIDADES DIDÁTICAS DE TEXTOS E PROBLEMAS HISTÓRICOS EGÍPCIOS E BABILÔNICOS PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao programa de pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto de Educação Matemática e Científica -IEMCI da UFPA, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em educação em ciências e matemática, sob orientação do Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg.

Data da avaliação: 26. 05. 2022
Conceito: Aprovada

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg
Orientador (Presidente) - UFPA

____
Profª. Dra. Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha
Membro Titular Interno (Coorientadora) - UFPA

____
Prof. Dr. Elielson Ribeiro de Sales
Membro Titular Interno - UFPA

____
Profª. Dra. Maria Alice de Vasconcelos Feio
Membro Titular Externo – UEPA

A minha mãe, Joana Januária Figueiredo, que me incentivou a estudar e deixou construído o melhor caminho para eu seguir.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por estar presente em minha vida e por permitir a saúde dos meus familiares neste período de pandemia.

A minha filha, Jamily Hevila Pereira da Silva, por compreender meu momento de estudo e proporcionar momentos de felicidades.

Ao meu filho, João Pedro Figueiredo de Jesus, por me auxiliar no momento de estudo, pelo carinho e amor dedicado a mim.

Ao meu esposo, Jailson Miranda de Jesus, por me incentivar a estudar.

Ao meu orientador, João Cláudio Brandemberg, por ser sempre solícito nos momentos que necessitei de orientação, pela paciência e dedicação depositadas no desenvolvimento da pesquisa.

A minha coorientadora, Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha, pela orientação no decorrer da pesquisa e por ter me incentivado a cursar pós-graduação.

Aos membros da banca examinadora, Maria Alice de Vasconcelos Feio e Elielson Ribeiro de Sales, pelas contribuições valiosas durante a qualificação desta Dissertação.

As minhas queridas irmãs, Alessandra Figueiredo e Sabrina Kelle, pelos muitos incentivos e carinho.

A minha sobrinha, Kesia Ananda, pelo incentivo e por ficar feliz pela realização desta pesquisa.

A minha sobrinha, Glícia Campos, por dedicar seu tempo quando solicitei e pelo incentivo e carinho.

A todos os integrantes do Grupo de Estudos e Pesquisa em História e Educação Matemática (GEHEM), pelas contribuições durante a realização desta pesquisa.

“Conhecer, historicamente, pontos altos da matemática de ontem poderá, na melhor das hipóteses, e de fato faz isso, orientar no aprendizado e desenvolvimento da matemática de hoje”.

(D’ AMBRÓSIO, 2009, p. 30).

RESUMO

Nesta pesquisa, objetivou-se investigar quais textos e problemas históricos presentes na matemática do Egito e da Babilônia apresentam potencialidades didáticas a serem exploradas no ensino de matemática. Para tanto, realizou-se uma pesquisa bibliográfica na literatura de Boyer (1974) e de Eves (2011), os quais forneceram o contexto histórico da matemática, tal como revelaram diversas formas de resolução de problemas matemáticos antigos e que esses são possíveis de serem solucionados por meio da notação atual. Ao estudar a História da Matemática, identificou-se nos textos e problemas históricos diversas potencialidades que possibilitam o desenvolvimento de habilidades matemáticas, essas foram evidenciadas de acordo com os argumentos de Miguel (1997) e os estudos de Mendes e Chaquiam (2016), Brandemberg (2020) e Brandemberg (2021), que corroboram a relevância da história no ensino de matemática. A partir deste estudo, foi possível selecionar os textos da Tábua Plimpton 322, os problemas históricos do Papiro de Rhind e os da Tábua BM 13901 como fontes de/com potencialidades, as quais são: viabilizar o desenvolvimento conceitual da equação polinomial do 1º grau; possibilitar o desenvolvimento do conceito da equação quadrática; oportunizar ao aluno desenvolver novos discursos sobre o teorema de Pitágoras e, com isso, possibilitar o desenvolvimento de habilidades previstas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Além disso, foi sugerida, por meio de atividades didáticas, uma forma de o professor utilizar os textos e os problemas históricos no ensino da matemática escolar. Desse modo, pode-se aduzir que os textos e problemas históricos selecionados dispõem de potencialidades que contribuem para a construção do conhecimento matemático, bem como foi evidenciado que podem ser empregados no processo de ensino e aprendizagem de matemática na Educação Básica.

Palavras-chaves: História da Matemática; Textos históricos; Potencial didático; Ensino de Matemática.

ABSTRACT

This research aimed to investigate which texts and historical problems present in the mathematics of Egypt and Babylon have didactic potentialities to be explored in the teaching of mathematics. For this, a bibliographical research was carried out in the literature of Boyer (1974) and Eves (2011), which provided the historical context of mathematics, as revealed several forms of solving ancient mathematical problems and that these are possible to be solved through the current notation. When studying the History of Mathematics, several potentialities that enable the development of mathematical skills were identified in the texts and historical problems that enable the development of mathematical skills, which were evidenced according to the arguments of Miguel (1997) and the studies of Mendes and Chaquiam (2016), Brandemberg (2020) and Brandemberg (2021), which corroborate the relevance of history in mathematics teaching. From this study, it was possible to select the texts of the Plimpton Table 322, the historical problems of the Rhind Papyrus and those of The BM Table 13901 as sources of/with potentialities, which are: to enable the conceptual development of the polynomial equation of the 1st degree; enable the development of the concept of the quadratic equation; to provide the student with new discourses on pythagoras' theorem and, with this, enable the development of skills foreseen in the National Common Curriculum Base (BNCC). In addition, it was suggested, through didactic activities, a way for the teacher to use the texts and historical problems in the teaching of school mathematics. Thus, it can be inferred that the selected texts and historical problems have potentialities that contribute to the construction of mathematical knowledge, as well as it was evidenced that they can be used in the process of teaching and learning mathematics in Basic Education.

Keywords: History of mathematics; Historical texts; Didactic potential; Mathematics teaching**.**

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O planejamento para desenvolver a pesquisa sobre o tema iniciou a partir da vivência na graduação, quando ocorreu o contato com a disciplina "História da Matemática" e com as participações em projeto de extensão e eventos científicos, como o II Encontro de Iniciação à Docência do PIBID/IFPA-EINID, o X Encontro Paraense de Educação Matemática – EPAEM (2015), e a prática docente vivenciada no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência-PIBID/Matemática, do IFPA/Campus – Belém, cujas experiências passo a detalhar.

Nas aulas de História da Matemática, surgiu a oportunidade de conhecer as teorias acerca da importância da história para o processo de ensino e aprendizagem, ou seja, ensinar matemática com auxílio da história do desenvolvimento das ideias matemáticas. À vista disso, fortaleci o pensamento de estudar os conhecimentos que envolvem a Educação Matemática e sua relevância na prática educativa. De modo igual, participei da comissão organizadora do "X Encontro da Educação Matemática", realizado no IFPA, em 2015, o qual abordou o tema "Belém-400, História educação e Cultura" e, no decorrer do evento, foi oportunizado conhecer as vertentes da Educação Matemática e os valores essenciais da História da Matemática para a construção de conhecimento matemático dos discentes.

Ademais, a maior inspiração em desenvolver a pesquisa em História da Matemática, manifestou-se durante o período de desenvolvimento de experiência profissional no PIBID/Matemática, no decurso de 2 anos de vivência em sala de aula, quando desenvolvi a prática docente como bolsista em atividades de ensino, pesquisa e extensão em escolas públicas da Educação Básica. Nesse período, percebi que, para se desenvolver um ensino adequado, há necessidade de aplicar estratégias educacionais que incentivem o aluno a estudar. Para tal fim, identifiquei que a História da Matemática pode ser um recurso pedagógico relevante para a prática de ensino em sala de aula.

Nesse sentido, ao buscar um documento atual que orienta a prática pedagógica do conteúdo escolar, encontrei na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) argumentos evidenciando que a História da Matemática possui potencial didático-pedagógico para o ensino-aprendizagem de conteúdos matemáticos. Desse modo, consolidei o pensamento que a história é uma fonte de conhecimento matemático essencial para o desenvolvimento da habilidade matemática.

A Base Nacional Comum Curricular traz, em seu texto a importância de incluir a "História da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar Matemática" (BRASIL, 2017, p.298). Sendo assim, realizar um estudo acerca do uso da História da Matemática na Educação Básica é fundamental para entender as relações entre a teoria e a prática de ensino, e, a partir de então, saber como se pode aprimorar a prática educativa.

Para alcançar tal finalidade, busquei orientação junto ao Grupo de Estudos e Pesquisa em História e Ensino de Matemática (GEHEM)[1], da Universidade Federal do Pará (UFPA), no qual obtive excelente orientação para desenvolver a pesquisa acerca de textos e problemas históricos da matemática do Egito e da Babilônia. À vista disso, a partir desse momento, passo a discorrer em primeira pessoa do plural a redação desta dissertação, muito em função do trabalho interativo objetivado e constituído nas ações do grupo.

Ao desenvolvermos a pesquisa, depreendemos que o conhecimento matemático teve sua origem nos primórdios das civilizações, organizando-se nas culturas da antiguidade. A matemática é uma resposta à busca de sobrevivência acumulada e transmitida ao longo das gerações desde a pré-história. Essa resposta em permanente transformação é a “estratégia desenvolvida pelo ser humano para responder às pulsões de sobrevivência e transcendência” (D’ AMBRÓSIO, 2013, p.14).

Nesse sentido, a História da Matemática é uma fonte de conhecimento que apresenta estratégias de sobrevivência, pois, conforme D’Ambrósio (2013):

> as estratégias de sobrevivência e de transcendência são organizadas intelectualmente e compartilhadas socialmente, graças a um sofisticado sistema de comunicação característico da espécie humana. Constituem os sistemas de conhecimento. Esses consistem de explicações e de estratégias de lidar com fatos e fenômenos, que possibilitam sobreviver e transcender nas situações típicas do ambiente natural e social específico, compartilhados por famílias, comunidades, uma população (D’AMBRÓSIO, 2013, 15).

Diante disso, percebemos que o desenvolvimento histórico matemático se constitui de organização cultural e social e esclarece processos, fenômenos e problemas matemáticos de uma população. Nessa perspectiva, a história traz o conhecimento do passado para o presente e demonstra que a matemática contribui para o desenvolvimento da humanidade.

Desse modo, para fundamentar nossa pesquisa, buscamos estudos que abordaram a relevância da história para o ensino de matemática e encontramos em Miguel (1993), Mendes e Chaquiam (2016), e Brandemberg (2014) argumentos que evidenciam a contribuição da história na construção do conhecimento matemático.

---

[1] O grupo realiza pesquisas acerca da História da Matemática com a finalidade de disponibilizar trabalhos (artigos, dissertações, teses) que possam contribuir para o aprimoramento da formação de professores e do ensino-aprendizagem de Matemática na Educação Básica. O GEHEM foi instituído em 2012 e está inserido no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas – PPGECM do Instituto de Educação matemática e Científica – IEMCI da Universidade Federal do Pará –UFPA.

Segundo Miguel (1993), a história tem um importante papel a ser considerado na Educação Básica, pois as ideias do conhecimento matemático são recursos que o professor pode fazer uso em sala de aula para incentivar o aluno a estudar, além disso, a história torna-se um instrumento de compreensão, "superação e reorientação das formas de ação, isto é, transformação" (MIGUEL, 1993, p. 32).

Nesse sentido, Mendes e Chaquiam (2016) argumentam que inserir o conhecimento do passado, como a história, pode ser uma dinâmica interessante para abordar um conteúdo matemático em sala de aula:

> [...] tendo em vista que o aluno pode reconhecer a Matemática como uma criação humana que surgiu a partir da busca de soluções para resolver problemas do cotidiano, conhecer as preocupações dos vários povos em diferentes momentos e estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemático do passado e do presente (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 79).

Diante do exposto, depreendemos que a história contribui para a construção do conhecimento matemático, visto que oferece conteúdos culturais que ajudam o aluno a relacionar diversas culturas e contextos socioeconômicos com a matemática, ampliando, dessa forma, o conhecimento dos envolvidos. Além disso, a inserção da história em situações de ensino promove uma possibilidade ao discente de aprender e compreender os conceitos matemáticos (BRANDEMBERG, 2014).

Nesse caso, em acordo com Brandemberg (2014), não é proposto que o professor domine toda a História da Matemática, mas, sim, que utilize textos ou problemas históricos que auxiliem a construir o conhecimento matemático a ser aplicado em sala de aula.

> O Professor de Matemática não precisa ser um especialista em História da Matemática. No entanto, conhecer a história dos conteúdos a serem ensinados permite, ao professor, um maior controle na profundidade da abordagem, assim como na representação dos mesmos. Permite, também, ao professor, por exemplo, trabalhar um determinado conteúdo, considerando, de forma adequada, os aspectos intuito, algorítmico e formal em sua prática (BRANDEMBERG, 2014, p.3).

Partindo desses pressupostos, inferimos que a história pode contribuir para facilitar o aprendizado da matemática, constituindo-se numa "fonte" que incentiva o educando a pesquisar o conteúdo discutido na escola. Assim, podemos afirmar que os contextos matemáticos de textos e problemas históricos podem ser utilizados no ensino de matemática.

Por conseguinte, buscamos, na literatura de Boyer (1974) e Eves (2011), textos e problemas históricos matemáticos que apresentassem potencialidades didáticas que possam contribuir para o aprimoramento do processo de aprendizagem da matemática escolar.

Para construir nossa pesquisa de forma viável, delimitamos nosso estudo em textos e problemas históricos da matemática do Egito e da Babilônia. Dessa forma, encontramos em Miguel (1997), Brandemberg (2017a), Brandemberg (2020) argumentos que reforçam a potencialidade didática da História da Matemática, bem como fundamentamos nos estudos de Serrão (2014), Guimarães Filho (2018) e Brandemberg (2021) que os textos e problemas históricos são fontes de conhecimento que podem ser utilizados no ensino de conteúdos matemáticos.

Ademais, investigamos na BNCC (2017) quais são as orientações atuais que norteiam o ensino e aprendizagem das escolas que desenvolvem o processo educacional na Educação Básica, para assim relacionarmos os textos e problemas históricos da matemática com o conteúdo escolar.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), como vimos, é o documento normativo que orienta as propostas pedagógicas das escolas públicas e privadas da Educação Básica que regulamenta os conteúdos a serem trabalhados em sala de aula, com a finalidade de garantir o desenvolvimento pleno de todos os alunos. Diante disso, para discorrermos a respeito de conteúdos didático-pedagógicos, é necessário que consideremos as orientações que esta dispõe.

Assim, considerando o estudo realizado na literatura de Boyer (1974) e Eves (2011), e com base nos estudos dos pesquisadores referenciados, constatamos que os textos e problemas históricos antigos do Egito e da Babilônia contribuem para o ensino de conteúdos matemáticos.

Contudo, para ampliar nosso conhecimento, fizemos o seguinte questionamento: **Quais potencialidades didáticas se evidenciam dos textos e problemas históricos matemáticos do Egito e da Babilônia para o ensino de matemática da Educação Básica?** Com a finalidade de responder nosso questionamento, objetivamos: **Investigar as potencialidades didáticas de problemas históricos nos contextos egípcio e babilônico para o ensino de matemática nas séries finais do Ensino Fundamental.**

Para alcançar tal objetivo, pleiteado em nossa pesquisa de cunho essencialmente bibliográfico, em uma abordagem qualitativa, realizamos as seguintes etapas de objetividades específicas:

- Selecionar textos e problemas históricos da matemática do Egito e da Babilônia que possam ser utilizados com fins didáticos nas séries finais do Ensino Fundamental;
- Identificar as potencialidades didáticas dos textos e problemas históricos egípcios e babilônicos para o ensino de matemática;
- Propor atividades para o ensino de matemática nas séries finais do Ensino Fundamental da Educação Básica a partir dos textos e problemas históricos selecionados.

Após definirmos os objetivos, organizamos o nosso estudo em três momentos: no primeiro momento, fizemos uma pesquisa bibliográfica em estudos que abordaram o potencial didático da História da Matemática para o ensino na Educação Básica; com isso, construímos o referencial teórico acerca do tema. Da mesma forma, buscamos em Boyer (1974) e Eves (2011) o contexto matemático dos textos e problemas históricos que podem contribuir no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Desse modo, reunimos os documentos que julgamos necessários para investigar quais os textos e problemas históricos da matemática do Egito e da Babilônia possuem potencial didático.

No segundo momento, investigamos e identificamos quais textos e problemas históricos da matemática do Egito e da Babilônia podem ser utilizados no ensino de matemática, encontrando viabilidade de uso em diversos documentos. Para nosso estudo, destacamos o **Papiro de Rhind, a Tábua BM 13901, a Tábua BM 85196, a Tábua YBC 4663, a Tábua YBC 7289 e a Tábua Plimpton 322.**

A partir desses textos, analisamos como eram desenvolvidas as soluções da matemática em textos e problemas históricos, descobrimos que as resoluções eram realizadas de maneira aritmética; com isso, verificamos se era possível solucioná-los pelo método atual, ou seja, de forma algébrica. Assim, ao conseguirmos solucionar algebricamente, selecionamos os textos e problemas históricos desse período e apresentamos a solução pelo método dos antigos matemáticos e pela forma que é utilizada no ensino escolar. Dessa maneira, conseguimos selecionar e apresentar os textos e problemas histórico egípcios e babilônicos com o contexto matemático em que estão inseridos.

No terceiro momento, fizemos um estudo das pesquisas dos autores que abordaram o tema potencial didático da História da Matemática no ensino de conteúdo matemático para compreendermos melhor quais potencialidades os textos e problemas históricos possuem. Por conseguinte, a partir da análise e do estudo no contexto matemático do Egito e da Babilônia, indicamos as potencialidades dos textos e problemas históricos e sugerimos uma possível forma de como ser utilizados na Educação Básica.

Posteriormente, relacionamos a matemática presente nos textos e problemas históricos ao conteúdo escolar conforme as orientações da BNCC. Essa metodologia nos possibilitou construir três capítulos, os quais estão descritos a seguir.

No capítulo 1, apresentamos o levantamento bibliográfico referente à relevância da história no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Nesse sentido, fundamentamos nosso trabalho nos estudos de D’Ambrósio (1999a), D’Ambrósio (1999a), Mendes e Chaquiam (2016), Brandember (2017a), além disso, o embasamento teórico a respeito das potencialidades didáticas foi realizado a partir das pesquisas de Libâneo (2006), Miguel (1997), Brandemberg (2020).

A fundamentação quanto à potencialidade de textos e problemas históricos do Egito e da Babilônia, buscamos em Serrão (2014), Guimarães (2018), Brandemberg (2021). Ademais, apresentamos uma pesquisa sobre as orientações pedagógicas da BNCC para o ensino de matemática na Educação Básica.

No capítulo 2, discorremos acerca do contexto matemático de textos e problemas históricos do Egito e da Babilônia, fundamentado na literatura de Boyer (1974) e Eves (2011). Descrevemos como foi desenvolvida a matemática nessas civilizações, o tipo de material que era utilizado em suas escritas e como eram tratadas as soluções dos problemas matemáticos presente nesse período.

No capítulo 3, indicamos as potencialidades didáticas presentes nos textos e problemas históricos da matemática do Egito e da Babilônia investigados e sugerimos uma forma de como a História da Matemática pode ser utilizada em sala de aula. Necessariamente, construímos atividades a serem utilizadas no ensino de matemática a partir dos textos e problemas selecionados. Em seguida, para evidenciar que os textos e problemas históricos têm potencialidades de desenvolver habilidades prevista na BNCC, visualizamos os objetos de conhecimento e as habilidades a eles relacionadas.

Desse modo, iniciamos, no capítulo seguinte, nossa apresentação acerca do levantamento teórico dos estudos anteriormente selecionados, os quais abordam a contribuição da história no ensino de matemática na Educação Básica.

1 ESTUDOS QUE ABORDAM A POTENCIALIDADE DIDÁTICA DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Neste capítulo, apresentamos a relevância da História da Matemática para o ensino de conteúdos matemáticos e os estudos que abordam o potencial didático pedagógico de textos e problemas históricos. Nesse sentido, buscamos em pesquisas realizadas argumentos que favorecem o uso da História da Matemática no contexto escolar para que assim pudéssemos obter o conhecimento necessário para indicar as potencialidades didáticas dos textos e problemas históricos egípcios e babilônicos.

Fundamentamos nossa pesquisa referente à história no ensino de matemática em D'Ambrosio (1999a), D'Ambrosio (1999b), Mendes e Chaquiam (2016)) e Brandemberg (2017a); o conceito de didática em Libâneo (2006), e as potencialidades didáticas da História da Matemática nos estudos de Miguel (1997), Serrão (2014), Guimarães Filho (2018), Brandemberg (2020) e Brandemberg (2021), pois, a partir das discussões realizadas, acreditamos que esses autores certificam que a história contribui para um ensino de matemática significativo em sala de aula.

1.1 História no ensino de matemática

A História da Matemática tem um importante papel no ensino, pois dispõe de conhecimentos que contribuem para a explicação da construção histórico, social e cultural dos conceitos matemáticos, bem como revela quais foram as necessidades de diferentes povos que os levaram a recorrer à matemática para dar respostas aos problemas que se apresentavam. Sendo assim, a história permite estabelecer comparações entre os conceitos matemáticos do passado e do presente de diferentes culturas e momentos históricos, possibilitando o aluno a entender as diversas construções matemáticas e, assim, a utilizar a mais favorável ao seu aprendizado.

Para D'Ambrosio (1999a, p.97), oportunizar ao aluno conhecer ideias matemáticas do passado é um fato importante para apresentar um objeto matemático em sala de aula. Da mesma forma que "é praticamente impossível discutir a educação sem recorrer aos fundamentos históricos, e a interpretações" dos mesmos.

> As ideias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégia de ação para lidar com ambiente, criando e desenhando instrumento para esse fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência (D'AMBROSIO, 1999a, p. 97).

Dessa maneira, a história apresenta ideias que contribuem para o processo de ensino-aprendizagem de matemática e resgatam a importância da matemática no desenvolvimento da sociedade desde a Antiguidade até hoje. Além disso, a história possui dados que, ao serem exteriorizados, justificam a presença da matemática no contexto escolar.

De acordo com D'Ambrósio (1999b, p. 122), a História da Matemática disponibiliza o conhecimento para alunos, professores, pais e público em geral, visto que possui finalidade de situar a matemática como uma "manifestação cultural de todos os povos em todos os tempos, como a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos, e como tal diversificada nas suas origens e na sua evolução". Ademais, a história pode ser utilizada para:

> mostrar que a Matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de Matemática desenvolvida pela humanidade; saber que desde então a Matemática foi incorporada aos sistemas escolares das nações colonizadas, tornou-se indispensável em todo o mundo em consequência do desenvolvimento científico, tecnológico e econômico, e avaliar as consequências socioculturais dessa incorporação (D'AMBRÓSIO, 1999b, p. 122).

Assim, conforme D'Ambrósio (1999b), a História da Matemática no ensino deve ser empregada sobretudo pelo seu valor de motivação para o estudo de Matemática, a fim de fornecer curiosidades, fatos que poderão motivar o aluno a estudar matemática. Desse modo, a história constitui-se numa fonte considerável de conhecimento que contribui para um ensino significativo de matemática na Educação Básica.

Nesse sentido, Mendes e Chaquiam (2016) realizaram um estudo acerca do uso da História da Matemática no ensino, os quais objetivaram propor uma forma de abordar a matemática na Educação Básica, na qual seja possível integrar partes do desenvolvimento histórico no conteúdo matemático a ser ministrado em sala de aula. Os autores propõem aos professores de matemática desse nível de ensino um encaminhamento didático que possa contribuir nas ações docentes.

A matemática é parte da cultura da sociedade, a qual é produzida para solucionar os problemas que surgiram no decorrer do cotidiano das civilizações. Essa produção está inserida num contexto histórico, o qual apresenta fatos, ideias que viabilizam um ensino adequado de matemática. Desse modo, a História da Matemática é construída com ideias, problemas, explicações, constituindo-se numa fonte valiosa de conhecimento para a utilização no ensino em sala de aula.

A História da Matemática que deve ser aproveitada no ensino de conceito matemático escolar é a história das "explicações e compreensões sobre os objetos existentes no mundo e das construções de realidades que podem ser estruturadas e reestruturadas na medida em que a sociedade reflete, se reinventa e redireciona seu modo de ser" (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 14). Dessa forma, a História da Matemática apropriada para o ensino é a que possui conhecimento que explica o desenvolvimento da sociedade no âmbito social e cultural, a fim de oportunizar o aluno compreender o meio em que está inserido.

> A história da qual argumentamos ser favorável a sua inserção em sala de aula, refere-se à histórias no plural, pois estão conectadas, integradas ou mesmo tecidas em meio a outras histórias das mais diversas qualidades. Logo, podemos considerar que se trata de histórias sobre as produções de ideias matemáticas e suas materializações em múltiplas linguagens representativas e talvez também seja dessa multiplicidade que surge a característica plural dessas histórias (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 17).

Tais autores consideram que a história propícia para o ensino-aprendizagem de matemática em sala de aula é aquela que explica a organização conceitual das matemáticas produzidas no decorrer do tempo. Segundo Mendes e Chaquiam (2016), essa história pode ser tomada como contribuição para esclarecimentos de cunho epistemológico e didático que poderão contribuir para o professor explicar e orientar uma organização das matemáticas ensinadas nas escolas. Logo, a história adequada para ser inserida no ensino é a que se refere:

> diretamente ao desenvolvimento epistemológico das ideias, conceitos e relações matemáticas ensinadas e aprendidas na Educação Básica e no Ensino Superior. Trata-se, mais concretamente, das histórias relacionadas aos aspectos matemáticos em seu processo de criação, reinvenção e organização lógica, estabelecido no tempo e no espaço com a finalidade de sistematizar soluções de problemas de ordem sociocultural, científica e tecnológica, em todos os tempos e lugares (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 19).

Diante do exposto, consideramos que a história constituída de desenvolvimento de conceito e dos objetos matemáticos que estão relacionados à construção da sociedade é a que está apropriada para ser utilizada no ensino de matemática em sala de aula. Uma história permite ao professor obter aspectos epistemológicos da matemática que viabilizam ao aluno compreender os conceitos matemáticos.

De fato, para Mendes e Chaquiam (2016, p. 26), são as informações históricas, como problemas extraídos de fontes primárias ou mesmo de modelos matemáticos criados ou reformulados em determinadas épocas, ou das diferentes formas de demonstrar um teorema ou justificar a existência de uma propriedade matemática, que viabilizam esta compreensão. Nessa perspectiva, os autores, em seu estudo, apresentam um exemplo de como a História da Matemática pode ser inserida como agente promotora do processo de ensino.

Além disso, Mendes e Chaquiam (2016) indicam como temas históricos a serem utilizados na Educação Básica as principais contribuições matemáticas das civilizações do

Egito e da Babilônia, que sejam relacionados aos conteúdos matemáticos. Dessa forma, o professor pode utilizar a história dos seguintes tópicos matemáticos:

> sistemas de numeração; aritmética egípcia antiga; aritmética hindu; números figurados; números primos; crivo de Eratóstenes; números abundantes; números deficientes; o número Pi; geometria na Babilônia; história dos calendários; quadrados mágicos; matemática e arte; matemáticas e jogos; matemática e literatura; história das medidas; teorema de Pitágoras; ternos Pitagóricos; números quadrados; simetria, entre outros (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 70).

Do mesmo modo, Brandemberg (2017a, p. 167) aborda que a utilização de aspectos históricos relacionados ao conteúdo é essencial para se conhecer o desenvolvimento de conceitos matemáticos. O autor realizou um estudo com o objetivo de apresentar uma possibilidade de "aprendizagem efetiva por meio da inclusão da História da Matemática como componente metodológico no ensino de equações algébricas" a partir da utilização de problemas de cunho histórico.

Nesse enquadramento, uma história empregada com uma abordagem didática que parte da apresentação de atividades envolvendo problemas de cunho histórico pode, segundo Brandemberg (2017a, p. 182), "propiciar aos estudantes, e sobretudo, aos professores que atuam na Educação Básica, um material que lhes permita relacionar as estruturas conceituais envolvidas e os processos de ligação entre o conhecimento atual e o antigo".

Assim, conforme Brandemberg (2017a, p. 185), a utilização da História da Matemática como "componente metodológica viabiliza a relação entre o que se ensinou, o que se ensina e o que se pretende ensinar de conhecimento matemático na escola". Por conseguinte, percebemos que a História da Matemática tem um campo amplo de conhecimento que integrado ao conteúdo matemático escolar, é possível de utilizá-lo em sala de aula.

Com a abordagem histórica Brandemberg (2009), em seu estudo, buscou relacionar as estruturas conceituais envolvidas e os processos de ligação entre o conhecimento atual e o antigo, construindo a relação da história com os conteúdos matemáticos escolares. Nesse sentido, o autor apresenta o contexto em que foram desenvolvidos a álgebra e diversos exemplos de problemas de cunho histórico que podem ser aplicados no ensino de matemática.

Portanto, os autores referenciados evidenciam que a História traz importantes contribuições para o ensino-aprendizagem de matemática. Nessa perspectiva, concordamos que utilizar a história no ensino possibilita a construção de um conhecimento matemático que favorece o aluno adquirir um aprendizado significativo. Sendo assim, a seguir, apresentamos estudos que reforçam a presença de potencialidade didática na História da Matemática para o ensino de conceitos matemáticos.

1.2 Argumentos que evidenciam o potencial didático da História da Matemática no ensino

Ao realizarmos o estudo acerca das potencialidades, primeiramente, buscamos compreender o conceito de potencial didático pedagógico. Para tanto, constatamos que a didática está presente no desenvolvimento de métodos de ensino que são utilizados para aprender um determinado conteúdo matemático e é parte integrante da ciência pedagógica que estuda o processo de ensino-aprendizagem.

De acordo com Libâneo (2006), a didática é um ramo da pedagogia que estuda:

> o processo de ensino tomado em seu conjunto, isto é, os objetivos educativos e os objetivos de ensino, os conteúdos científicos, os métodos e as formas de organização ensino, as condições e meios que mobilizam o aluno para o estudo ativo e seu desenvolvimento intelectual (LIBÂNEO, 2006, p.71).

Desse modo, depreendemos que a didática se constitui na investigação de condições e formas de efetivação do ensino, pois a essa cabe converter objetivos sociopolíticos e pedagógicos em objetivos para prática educativa, selecionando conteúdos e métodos para estabelecer um vínculo entre ensino e aprendizagem (LIBÂNEO, 2006).

Assim, ao considerarmos que a didática possibilita a organização de métodos e formas de ensino, acreditamos que os textos históricos matemáticos possuem potencial didático-pedagógico para a aprendizagem da matemática. Nesse sentido, com o delineamento do conceito de didática, vamos apresentar, a seguir, os estudos que discorrem a respeito da potencialidade da História da Matemática para o ensino.

A História da Matemática traz importantes contribuições para o ensino-aprendizagem de matemática e promove a ampliação de conceitos matemáticos. Dessa maneira, buscamos em Miguel (1997) e Brandemberg (2020) argumentos que apontam a História da Matemática como um potencial didático para o desenvolvimento da prática de ensino.

O estudo desenvolvido por Miguel (1997) objetivou destacar e analisar os argumentos que revelam as potencialidades da História da Matemática para o ensino de conteúdos matemáticos. O autor cita como argumento que a história é uma fonte de objetivos para o ensino da matemática, pois esta pode conduzir os alunos a atingirem objetivos pedagógicos que os levam a compreender: "a matemática como uma criação humana; as razões pelas quais as pessoas fazem matemática; as necessidades práticas sociais, econômicas e físicas que servem de estimulo ao desenvolvimento das ideias matemáticas..." (MIGUEL, 1997, p.77).

Ademais, Miguel (1997, p. 77) menciona diversos argumentos que reforçam a História da Hatemática como potencial didático, a exemplo de "a história constitui-se numa fonte de métodos adequados de ensino de matemática". Nesse viés, para Miguel (1997), poderíamos buscar apoio na História da Matemática para escolhermos os métodos didáticos para a abordagem de conteúdos a serem estudados, por exemplo, entre outros, a resolução de equações, e assim promover um ensino de matemática adequado.

Um ponto de vista que, segundo Miguel (1997), já era defendido desde o século XVIII, depreende-se que a História da Matemática se constitui em uma fonte de métodos de ensino para a abordagem pedagógica de assuntos matemáticos. Com isso, o autor nos traz a ideia de que o aluno pode desenvolver o conhecimento matemático por meio da resolução e da análise das soluções de problemas históricos. Tal proposta baseia-se no pressuposto de que se "a resolução de um problema constitui-se, por si só, numa atividade altamente motivadora, o fato de esse problema poder vincular-se a história elevaria, quase que automaticamente seu potencial motivador" (MIGUEL, 1997, p. 81).

Diante disso, podemos mencionar que os textos e os problemas históricos são potencialmente ricos de conhecimentos matemáticos que contribuem para um aprendizado significativo. De acordo com Miguel (1997):

> o resgate dos aspectos estéticos inerentes a algumas demonstrações, soluções de problemas, métodos e processos também poderia subsidiar uma Educação Matemática de tendência não-tecnicista, possibilitando o desenvolvimento de atividades ao domínio afetivo que estimulassem a imaginação e a criatividade (MIGUEL, 1997, p. 102).

Dessa forma, o uso de problemas históricos no ensino de matemática possibilita o aluno desenvolver habilidades que auxiliam na aquisição de conhecimento matemático (BRANDEMBERG; MENDES, 2005).

Conforme Miguel (1997, p. 102), somente uma História da Matemática pedagogicamente orientada, ou seja, uma história esclarecedora e dinâmica, pode constituir-se em ponto de referência para a prática pedagógica de ensino. Logo, em suas palavras, uma História da Matemática pedagogicamente orientada tem potencial de "prestar grande auxílio para os professores intencionados em contrapor-se a uma tal tendência tecnicista do ensino". Dessa maneira, observamos que os argumentos indicam as potencialidades pedagógicas da história da matemática e direcionam para o processo de ensino e aprendizagem em sala de aula.

Do mesmo modo, Brandemberg (2020) objetiva apresentar uma proposta para o uso da história no ensino de matemática a partir de problemas de cunho histórico e busca transmitir que a História da Matemática, nessa ação, se constitui em uma componente do processo de ensino-aprendizagem, corroborando que é importante discutir a respeito das potencialidades didáticas da História da Matemática para o ensino, tendo em vista a elaboração de uma proposta de ensino de conteúdos matemáticos com a utilização de problemas históricos para trazer significado aos conceitos estudados.

De acordo com Brandemberg (2020, p. 282), os potenciais didáticos da História da Matemática se multiplicam, caso seja considerada a diversidade do lugar no qual se ensina e aprende matemática. À vista disso, o autor afirma que ocorre "uma matemática 'culturalmente inovadora' que transforma e produz tecnologias em novas práticas didático-pedagógicas que permitem a ampliação em processos educativos".

Ademais, Brandemberg (2020, p. 282) entende que os textos históricos se constituem em um material didático-pedagógico que pode ser empregado no ensino de matemática para proporcionar aos estudantes "novas" formas de resolver problemas matemáticos em sala de aula e em suas práticas do cotidiano. Dessa maneira, os argumentos apresentados reforçam que a História da Matemática é composta de potencial didático possível ser explorado no ensino de matemática.

Nessa continuidade de buscar as potencialidades do uso da Histórica da Matemática no ensino, apresentamos, seguidamente, os estudos de Serrão (2014), Guimarães Filho (2018) e Brandemberg (2021), que abordam o potencial didático de textos e problemas históricos para o ensino escolar de matemática.

1.3 Textos e problemas históricos e as potencialidades para o ensino na Educação Básica

Os textos e os problemas históricos são partes da História da Matemática que já estão estabelecidos socialmente desde o período em que se originaram e podem ser utilizados no processo de ensino-aprendizagem de matemática, fornecendo conhecimento que motiva o aluno a estudar, visto que apresentam diversas estratégias de resolver problemas matemáticos e, como isso, incentivam a busca de diferentes formas de soluções matemática. Desse modo, possuem potencialidades que contribuem para o aluno desenvolver habilidades matemáticas que serão usadas na construção de conhecimento matemático.

Nessa perspectiva, Serrão (2014) reitera que a resolução de problemas matemáticos de cunho histórico pode possibilitar o aluno a mobilizar conhecimentos e, com isso, desenvolver a capacidade para gerenciar as informações que estão ao seu alcance dentro e fora da sala de aula. Nesse sentido, concordamos com o autor quando diz que, assim, os alunos terão oportunidade de obter conhecimento mais amplo acerca de conceitos matemáticos.

O estudo realizado por Serrão (2014) teve como um dos objetivos oferecer aos professores da Educação Básica sugestão para o uso de problemas de cunho histórico tendo em vista superar dificuldades na aprendizagem em sala de aula. Assim, para o autor, a resolução de problemas históricos poderá despertar no aluno o espírito investigativo e possibilitar o entendimento dos conceitos envolvidos mediante o estudo sociocultural de cada época. Da mesma forma que trabalhar a construção dos conceitos envolvidos nos problemas da Antiguidade, considerando os aspectos históricos e socioculturais, pode minimizar as dificuldades que ocorrem atualmente no ensino da matemática na Educação Básica.

Ensinar o conceito matemático com o auxílio de uma abordagem histórica, a qual passe pelos possíveis estágios de evolução da matemática, pode contribuir para a construção do pensamento algébrico em direção à formalização da linguagem simbólica, dimunuindo, assim, as dificuldades relativas à abstração matemática. “À medida que a linguagem algébrica se torna familiar ao aluno, ele pode compreender a função da generalização para a solução de situações problema” (SERRÃO, 2014, p.111). Ainda, segundo o autor, os problemas históricos podem contribuir para a reelaboração de conceitos matemáticos, tal como permitem reflexões que auxiliam tanto na formação do professor, quanto no processo de aprendizagem do aluno.

Serrão (2014) certifica que a história é essencial para o professor de matemática, pois, mesmo que as informações históricas não tenham aplicação direta em sala de aula, estas levam à compreensão do desenvolvimento histórico dos conceitos que influencia positivamente as práticas pedagógicas. Dessa maneira, as atividades inspiradas em problemas históricos da matemática motivam os alunos a buscar o aprendizado e contribuem para a compreensão dos conteúdos.

Do mesmo modo, Guimarães Filho (2018, p 106) realizou um estudo com o objetivo de analisar os problemas contidos no *Liber Quadratorum* de Leonardo Fibonacci (1170-1240) para buscar possíveis potenciais didático-pedagógicos. Após as análises, o autor indicou a presença de prováveis potencialidades, por exemplo, “a construção de diversas formas de encontrar as ternas pitagóricas e atividades de potenciação”. À vista disso, menciona que os problemas históricos podem prestar auxílio ao professor que busca atender às necessidades matemáticas do aluno.

Os problemas históricos presentes no *Liber Quadratorum*, segundo o autor, são ricos potenciais didáticos para o ensino e aprendizagem de matemática, uma vez que possibilitam a construção de proposta pedagógica que viabiliza a efetivação de habilidades indicadas pelo currículo de matemática, obtendo, com isso, uma resposta mais satisfatória na prática de ensino escolar.

Com o estudo, Guimarães Filho (2018, p. 107) apontou como uma das potencialidades didáticas dos problemas históricos a construção de “atividade com potenciação de índice dois” e indicou que essa é viável de ser explorada no ensino de matemática. Nesse ponto de vista, Guimarães Filho e Brandemberg (2017) reforçam que utilizar as potencialidades da História da Matemática em sala de aula pode ser um ótimo auxílio para o professor que busca traçar caminhos educacionais que atendam às necessidades do aluno.

Da mesma forma, Brandemberg (2021) retorna e aprofunda as discussões sobre potencialidades do uso de textos históricos para o ensino de matemática no contexto escolar. O autor realizou um estudo acerca de "textos históricos e o ensino de conteúdos matemáticos", em que são abordadas potencialidades didáticas de textos e problemas históricos com o intuito de indicar a implementação de uma proposta de ensino de conteúdos matemáticos.

Segundo Brandemberg (2021, p.24), os textos devem ser selecionados e adaptados, em "atividades problematizadas e interativa, para ocorrer maior aproximação e significado aos conceitos estudados" em sala de aula. Desse modo, utiliza-se a história no ensino de matemática a partir de textos e problemas históricos, os quais facilitam e promovem a aprendizagem de conteúdos matemáticos.

> Com isso, é possível inferirmos uma ampliação nos conhecimentos matemáticos de professores e alunos que ocorra, mediante ao uso da História da Matemática, com a oportunização da apropriação de novos enunciados, usos e aplicações dos conceitos (processos, conteúdos) matemáticos em uma interação que vise garantir, impulsionar ou estimular o gosto pela Matemática (BRANDEMBERG, 2021, p. 24).

Nesse seguimento, Brandemberg (2021) ressalta que, diante da constituição de um contexto de práticas sociais que transformam e produzem novas tecnologias e novas práticas didático-pedagógicas, ampliando o conhecimento matemático, busca-se no estudo dos textos e dos problemas históricos, uma maior compreensão dos conteúdos matemáticos e a possibilidade de aplicação desses nos processos de ensino e aprendizagem.

> Associar aspectos históricos ao conteúdo se faz importante para conhecermos o desenvolvimento de conceitos matemáticos, uma importância se acentua, quando discutimos um ensino de matemática que visa a contextualização dos conteúdos estudados. Com nossa abordagem utilizando "textos históricos" queremos visualizar e relacionar as estruturas conceituais envolvidas nos processos de resolução dos problemas e fazer a ligação (ou mesmo, para comparação de estratégias de resolução) entre o conhecimento atual e o antigo (BRANDEMBERG, 2021, p.26).

Nessa linha, Brandemberg (2021, p.26) propõe a elaboração de atividades a partir de "textos históricos, que sejam preparadas considerando o conteúdo a ser estudado e organizadas estruturalmente com temas e objetivos referente ao conhecimento matemático, direcionado a um ou mais conceitos especificados". Dessa forma, o autor infere que os textos históricos são essenciais ao processo de ensino e aprendizagem, em virtude de possuir material para a elaboração de atividades voltadas ao ensino de conteúdos matemáticos.

O uso de textos históricos na prática do ensino de matemática contribui para o aluno ampliar o conhecimento relacionado ao conceito matemático estudado. Diante disso, ao realizarmos o estudo, buscamos entender o que pode ser considerado "textos históricos":

> Consideramos então, como texto histórico um documento que, composto (impressão, pictografia, escrita) de formatos e materiais (argila, papiro, pergaminho, bambu, papel) variados em algum momento da história, nos permite acessar de maneira implícita e explícita elementos do contexto de sua composição e da relevância de seu conteúdo com vistas ao entendimento do conhecimento matemático, de sua produção, desenvolvimento e divulgação (BRANDEMBERG, 2021, p. 28).

Conforme Brandemberg (2021, p. 31), na construção do conhecimento matemático o texto histórico pode ser caracterizado pelo "contexto sociocultural de sua produção, tornando-se o elemento principal nessa abordagem e trazendo todo esse contexto em suas referências explicitas ou implícitas". Sendo assim, indica-se a possibilidade de utilizar um texto histórico que atenda aos aspectos socioculturais, trazendo um enfoque histórico-epistemológico às práticas escolares institucionalizadas no ensino de matemática.

Por conseguinte, ao realizarmos o estudo voltado para o ensino de matemática no âmbito da educação escolar, pesquisamos os documentos que orientam a prática pedagógica no contexto atual, nesse caso, buscamos no texto da BNCC (2017) quais são as orientações normativas a serem atendidas nas propostas pedagógicas da Educação Básica. Dessa forma, apresentamos, em seguida, a relação da História da Matemática com as competências e as habilidades previstas na BNCC (2017).

1.4 História da matemática e a relação com a BNCC

A BNCC é um documento importante para o ensino e aprendizagem de matemática na escola, já que direciona o desenvolvimento das práticas pedagógicas do professor. Esse documento normativo traz competências e habilidades organizadas nas unidades de conhecimento de área como Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística.

De acordo com a BNCC (2017), o conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas contribuições na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais. Nesse sentido, a matemática do Ensino Fundamental, mediante a articulação dos conteúdos, tem a finalidade de garantir que o aluno relacione observações empíricas do mundo real a representações, como tabelas, figuras, esquemas e, associe essas representações a conceitos matemáticos, construindo induções e conjecturas.

> Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental (BRASIL, 2017, p. 265).

O conhecimento matemático é essencial para a compreensão e a atuação na sociedade e tem aspecto que favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e pensamento crítico, além disso estimula a investigação para se obter a resposta de um problema proposto em sala de aula ou do cotidiano. Dessa maneira, contribui para o aluno desenvolver habilidades matemáticas, que são fundamentais para o desempenho escolar e para a atuação no mundo.

Ao analisar as situações da vida cotidiana e as diversas áreas do conhecimento, percebe-se que o desenvolvimento de habilidade está relacionado às diversas formas de organização matemática. Considerando esses pressupostos, o componente curricular da matemática da Educação Básica busca garantir aos alunos o desenvolvimento de competências específicas. Logo, apresentamos algumas competências presentes na BNCC, que podem ser desenvolvidas pelo aluno caso o professor faça o uso de textos e problemas históricos de matemática.

> 1) Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo. 2) Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes (BRASIL, 2017, p. 267).

Para indicar as competências, a BNCC (2017) orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem está relacionada à compreensão dos conceitos matemáticos e às aplicações no cotidiano.

A BNCC do Ensino Médio é organizada em continuidade ao que foi proposto para o Ensino Fundamental, visa a obtenção de competência e desenvolvimento de habilidades e orienta-se pelo princípio da educação integral. As aprendizagens estão organizadas por áreas de conhecimento, como “Matemática e suas tecnologias”, que contêm competências específicas articuladas às do Ensino Fundamental com adequações para atender às características próprias da formação do aluno no Ensino Médio.

No Ensino Médio, na área de Matemática e suas Tecnologias, os estudantes devem “consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração” (BRASIL, 2017, p.471). Além disso, busca-se que o aluno construa uma visão mais integrada da Matemática com outras áreas do conhecimento e desenvolva a habilidade de aplicar a Matemática à realidade.

A BNCC da área de Matemática e suas Tecnologias propõe consolidar e ampliar as aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio, o foco é a matemática integrada e aplicada em diferentes contextos, considerando as vivências cotidianas dos estudantes. Diante disso, esta área tem a responsabilidade de aproveitar o potencial constituído pelo aluno para promover ações que ampliem o conhecimento matemático. Isso significa que diferentes conhecimentos específicos "devem estimular processos mais elaborados de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar que permitam aos estudantes formular e resolver problemas em diversos contextos com mais autonomia e recursos matemáticos" (BRASIL, 2017, p.529).

Na matemática do Ensino Médio uma das competências a ser desenvolvida pelo aluno é a utilização de "estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas..." (BRASIL, 2017, p. 535). Tendo em consideração isso, acreditamos que os textos e os problemas históricos egípcios e babilônicos podem auxiliar no desenvolvimento dessa competência, visto que são ricos em estratégias e procedimentos diferenciados de resolução de problemas.

Segundo a BNCC (2017), a resolução de problemas deve contemplar os contextos diversos referentes à matemática e às outras áreas do conhecimento.

> Não é demais destacar que, também no Ensino Médio, os estudantes devem desenvolver e mobilizar habilidades que servirão para resolver problemas ao longo de sua vida - por isso, as situações propostas devem ter significado real para eles. Nesse sentido, os problemas cotidianos têm papel fundamental na escola para o aprendizado e a aplicação de conceitos matemáticos, considerando que o cotidiano não se refere apenas às atividades do dia a dia dos estudantes, mas também às questões da comunidade mais ampla e do mundo do trabalho (BRASIL, 2017, p. 535).

Nesse sentido, os textos e os problemas de cunho histórico possuem objetos de conhecimentos que oportunizam a aquisição de estratégia de resolver problemas matemáticos, com isso viabilizam o aluno a desenvolver habilidades matemáticas e, assim, obter as competências previstas na BNCC (2017).

Diante do estudo realizado, acreditamos que a História da Matemática contribui para o aluno construir um conhecimento matemático significativo. Desse modo, apresentamos, a seguir, o contexto histórico da matemática do Egito e da Babilônia e a organização dos problemas e textos históricos selecionados que podem ser utilizados no processo de ensino-aprendizagem de matemática na Educação Básica.

2 CONTEXTO HISTÓRICO DOS TEXTOS E PROBLEMAS DA MATEMÁTICA DO EGITO E DA BABILÔNIA

No decorrer deste capítulo, apresentamos a construção histórica da matemática do Egito e da Babilônia, a qual fundamentamos na literatura de Boyer (1974) e Eves (2011), em que buscamos o desenvolvimento matemático desde o início da escrita de cada civilização. Portanto, a partir da identificação desse período passamos a evidenciar o conteúdo matemático desenvolvido em cada região. Dessa maneira, primeiramente apresentamos o contexto histórico do antigo Egito com a identificação dos problemas, posteriormente, o da Babilônia com os textos e problemas matemáticos.

2.1 Desenvolvimento histórico da matemática do Egito

A civilização do antigo Egito de aproximadamente 3000 a.C. desenvolveu-se no Vale do rio Nilo, área que atualmente pertence ao Egito. Nesse período, as necessidades do cotidiano foram um dos incentivos para o desenvolvimento da matemática egípcia, uma vez que era necessário realizar medições, cálculos, construir pirâmides e outros monumentos importantes para época. Por conseguinte, as práticas diárias, as diversas construções exigiram conhecimento matemático da civilização egípcia, e essa desenvolveu uma matemática que contribuiu para a humanidade.

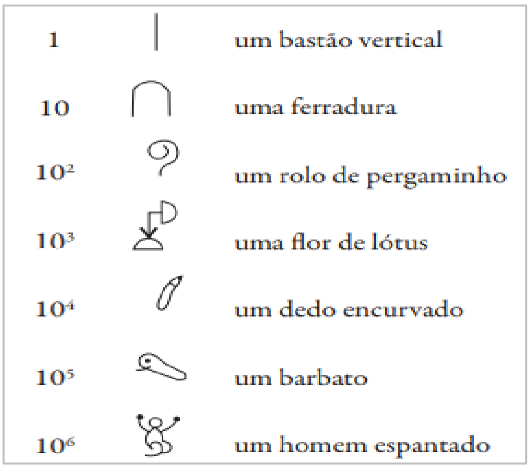
Os egípcios, além de desenvolver conhecimento matemático estudavam astronomia, e consequentemente construíram um calendário solar e desta forma:

> Os egípcios começaram cedo a se interessar pela astronomia e observaram o que a inundação anual do Nilo tinha lugar pouco depois que Sirius, a estrela do cão, se levantava a leste logo antes do sol. Observando que esses surgimentos heliacais de Sirius, o anunciador da inundação, eram separados por 365 dias, os egípcios estabeleceram um bom calendário solar feito de doze meses de trinta dias cada um e mais cinco dias de festa (BOYER, 1974, p. 9).

O calendário solar estava de acordo com as estações em 139 d.C., entretanto sua origem data aproximadamente em 2773 a.C. Os calendários e a astronomia da época contêm informações matemáticas, todavia, eram limitadas, pois a matemática é muito mais do que contar e medir, esse aspecto foi encontrado em inscrições hieroglíficas (BOYER, 1974, p. 9).

Os matemáticos do Egito utilizavam no ano 3000 a.C., possivelmente a primeira escrita que abrangia a numeração hieroglífica na base 10, figura 01, em que usavam símbolos diferentes para a primeira meia dúzia de dez, e uma unidade era representada por um traço vertical, por exemplo, “um osso de calcanhar invertido indicava 10, um laço como uma letra C maiúscula valia 100, uma flor de lótus 1000, um dedo dobrado 10000, um peixe era usado para indicar 100000 e uma figura ajoelhada (talvez Deus do sem-fim) 1000000” (BOYER, 1974, p.8).

Figura 1 - Numeração hieroglífica na base 10

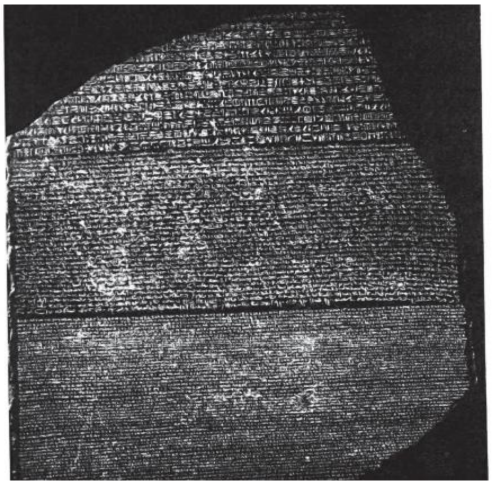


Fonte: Eves (2011, p. 31)

Os hieróglifos egípcios ofertavam um sistema de agrupamento simples, e eram usados para inscrições em diversos materiais principalmente em pedras. A numeração hieroglífica foi decifrada, após a descoberta da Pedra de Rosetta pela expedição de Napoleão no Egito, em 1799.

A pedra possui uma mensagem escrita em três línguas, as quais são grega, demótica e hieroglífica, essa última foi decifrada por Jean François Champollion, na França e Thomas Young, na Inglaterra, os quais comunicaram que os hieróglifos são “inscrições sagradas” egípcios. Dessa forma, a pedra de Rosetta, figura 02, foi de grande relevância para se fazer a leitura da escrita do antigo Egito, contudo a maior parte de fonte matemática, encontra-se escrita em papiros.

Figura 2 - Pedra de Rosetta (196 a. C.)

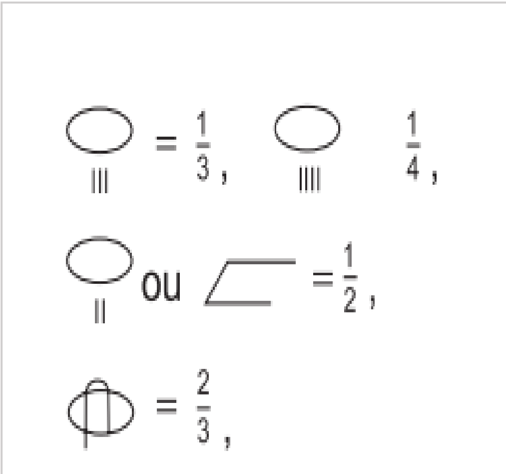


Fonte: Eves (2011, p.71)

A escrita hieroglífica, considerada como uma das primeiras escritas, era, também, usada em materiais como papiro, madeira, rocha. No entanto, os egípcios desenvolveram escritas mais adequadas para escrever nesses materiais, a saber, a *hierática* e a *demótica.* A escrita *demótica*, que se encontra na Pedra de Rosetta, originou-se a partir da *hierática*, por sua vez essa derivou-se da hieroglífica. Todavia, o sistema de numeração tanto o hierático, quanto o demótico não faz parte da matemática de agrupamento simples.

Os egípcios empregavam uma notação especial para as frações unitárias, o 1 era representado por um sinal oval alongado. As frações $2/3$ e o $1/2$ eram representadas por símbolos diferentes na notação hieroglífica. Esses símbolos hieroglíficos estão na figura 3, junto com os números na notação atual.

Figura 3 - Frações numéricas hieroglíficas e atual

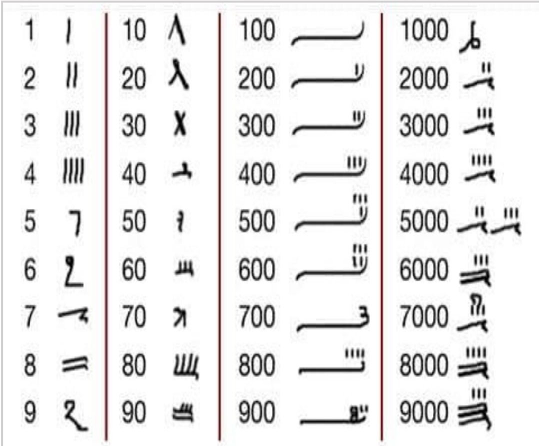


Fonte: Eves (2011, p. 73)

As frações unitárias eram demandadas das atividades práticas dos egípcios, pois atendiam os trabalhos contábeis relacionados as divisões de recursos e as coletas de impostos. O número oval alongado da fração unitária foi substituído, na notação hierática, por um ponto colocado sobre a cifra para o inteiro correspondente. A título de exemplo, no Papiro de Rhind, a fração $1/8$ foi escrita na forma “hierática como $\doteq$ e a $1/20$ deste modo $\underset{\wedge}{\dot{-}}$, frações unitárias iguais a essas eram manipuladas livremente” e no período de Ahmes, mas a fração geral parece ter sido um enigma para os egípcios (BOYER, 1974, p. 10).

A numeração hierática que derivou da hieroglífica foi constituída de novas formas de escrita, nesse caso havia nove símbolos diferentes para as unidades, as dezenas e centenas e assim sucessivamente como observamos na figura 4, a seguir.

Figura 4 - Número egípcio hierático

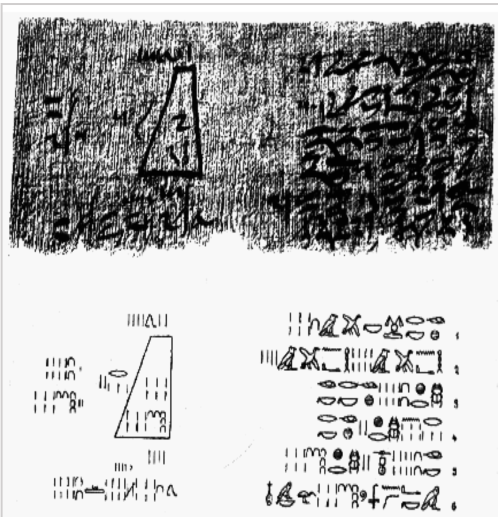


Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao.htm

Por conseguinte, a numeração hierática permitia uma economia no tempo no momento que o escriba escrevia e calculava os problemas matemáticos. Desta forma, o número 25 na numeração hieroglífica era escrito como ∩∩ |||||, já na forma hierática escrevia-se com, apenas, estes dois símbolos ⋏ 7, com isso os egípcios escreviam de modo mais rápido seus conhecimentos matemáticos.

Segundo Boyer (1974, p. 14), nos papiros foi encontrada a maior parte das informações da matemática egípcia, o Papiro de Rhind ou de Ahmes é o mais amplo registro matemático do antigo Egito. Entretanto, há papiros como “Papiro Kahun, Papiro de Berlim, Papiro Golonishev ou Moscou”, figura 5. Além desses, também, possui conhecimento matemático duas pranchas de madeiras de Karin (Cairo) datadas de 2000 a.C. e um rolo de couro contendo listas de frações unitárias.

Figura 5 - Reprodução de uma parte do Papiro Moscou



Fonte: Boyer (1974, p. 7)

O Papiro Moscou é um texto que revela 25 problemas matemáticos, foi comprado por Golonishev em 1983, no Egito. “Tem cerca de 18 pés[2] de comprimento por cerca de três polegadas de altura, encontra-se atualmente no Museu de Bela-Artes de Moscou (EVES, 2011, p. 69)”. Os 25 problemas do Papiro Moscou estão relacionados a vida prática, mas há problema que apresenta dados matemáticos geométricos que podem ser relacionados com a fórmula para calcular o volume do troco de uma pirâmide, que atualmente é empregada em sala de aula da Educação Básica. Segundo Boyer (1974), esse problema, classificado como o 14, pergunta:

> qual o volume de um tronco de pirâmide quadrada com altura de seis unidades se as arestas das bases superiores e inferiores medem respectivamente duas e quatros unidades. Para a resolução o escriba indica que se deve tomar os quadrados dos números dois e quatro e adicionar à soma desses quadrados o produto de dois por quatro o resultado sendo vinte e oito. Esse é então multiplicado por um terço de seis, e o escriba conclui com as palavras, “veja, é 56, você achou-a corretamente” (BOYER, 1974, p. 14).

Concordamos com Boyer (1974), quando diz que o cálculo do volume do tronco da pirâmide pode ser realizado por meio da fórmula atual $V = h\ (a^2 + ab + b^2)/3$, em que h é a altura e $a\ e\ b$ são os lados das bases quadradas. Nesse sentido, o problema é mais um dentre outros que pode ser relacionado com conteúdo matemático escolar e solucionado pelo método atualmente utilizado em sala de aula.

A matemática do antigo Egito é demonstrada em diversas fontes, entretanto vamos dar ênfase ao conhecimento matemático do Papiro de Rhind, o qual analisamos os problemas históricos como possíveis potencial didático-pedagógico. Logo, a partir deste momento, iremos nos aprofundar o estudo nesse documento.

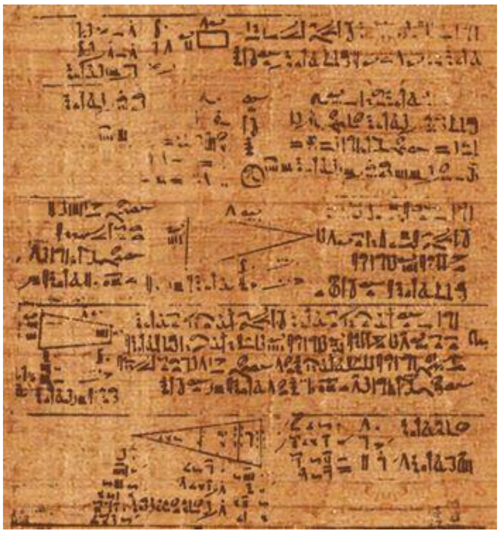
O Papiro de Rhind é uma fonte ampla de conhecimento da matemática egípcia antiga, foi comprado, em 1858, pelo escocês Henry Rhind, em uma cidade próxima ao rio Nilo e é datado aproximadamente em 1650 a. C. atualmente encontra-se no Museu Britânico localizado em Londres, Estados Unidos. O papiro tem 5 metros de comprimento por 33 cm de largura, é conhecido, também, como papiro Ahmes, em consideração ao escriba que o copiou em escrita hierática .

O papiro, figura 6, contém métodos dos egípcios de divisão, multiplicação, aplicação de fração unitária e possivelmente o uso da regra de falsa posição. O texto histórico dispõe de 85 problemas matemáticos que foram desenvolvidos por meio aritmético, no entanto há os que podem ser relacionados à álgebra e à geometria, uma vez que é possível serem solucionados pelos métodos algébrico e geométrico.

---

[2] 1 (um) pé equivale a 30,48 cm (EVES, 2011, p. 59).

Figura 6 - Papiro de Rhind



Fonte: Eves (2011)

O Papiro de Rhind foi confeccionado a partir de uma planta proveniente do Egito, cujo caule era cortado em tiras finas, em seguida posicionadas uma ao lado da outra de maneira cruzada para formar uma folha. As folhas passavam por um processo para compor um tipo de papel, eram humedecidas, depois prensadas e colocadas ao sol para secar, dessa forma, formava-se um papel, no qual os egípcios registravam os conhecimentos da época.

No Papiro de Rhind, encontra-se símbolos representando o sinal "*Mais* $(+)$ e o *Menos'* $(-)$, para o primeiro há um par de pernas caminhando para a direita, o sentido normal da escrita egípcia e para *Menos* um par de pernas caminhando da direita para a esquerda, em sentido contrário à escrita egípcia. Igualmente, empregavam-se símbolos, ou ideogramas, para o sinal "*igual* e para a *incógnita"* (EVES, 2011, p. 74).

Os números gravados no Papiro de Rhind foram escritos numa forma mais cursiva, conhecida como hierática "sagrada". A numeração continha decimal, no entanto foi introduzido na escrita sinais especiais para representar dígitos e múltiplos de potência de dez. Esse princípio de ciferização contido no Papiro de Rhind e construído pelos Egípcios há quatro mil anos, representou uma importante contribuição à numeração (BOYER, 1974, p. 9).

No antigo Egito, embora a operação fundamental ser a adição, era usada a multiplicação e a divisão como sucessiva duplicação chamadas naquela época de "duplações", por exemplo:

> Uma multiplicação de, digamos, 69 por 19 seria efetuada somando 69 com ele mesmo para obter 138, depois adicionando a si próprio para alcançar 278, novamente duplicando para obter 552 e mais uma vez, dando 1104, que é naturalmente dezesseis vezes 69. Como $19 = 16 + 2 + 1$, o resultado da multiplicação de 69 por 19 é $1104 + 138 + 69$, isto é, 1311. Ocasionalmente usava-se também uma multiplicação por dez, pois isto é natural na notação hieroglífica decimal. Multiplicação de combinações de frações unitárias também era parte da aritmética egípcia (BOYER, 1974, p. 11).

A duplicação foi a forma empregada para resolução de um produto encontrada no Papiro de Rhind, o qual está no problema 13, que solicita o produto de $1/16 + 1/112$ por $1 + 1/2 + 1/4$, a resolução foi realizada corretamente por meio de duplicação, sendo obtido o resultado $1/8$. Quanto a divisão, para resolução é invertido o processo da duplicação, o divisor é dobrado sucessivamente. Dessa forma, fica evidenciado no Papiro de Rhind que os egípcios atingiram a excelência no processo de duplicação e no conceito de fração unitária.

Há problemas históricos matemáticos no Papiro de Rhind passíveis de serem resolvidos por meio da regra de três, como os que mostram sua origem prática, cotidiana, ao se relacionar com questões acerca de pão, cerveja, rações para gado e aves domésticas, armazenamento de grãos, a exemplo os problemas 72 e 63. O primeiro pergunta: qual é o número de pães de força 45 que são equivalentes a 100 de força 10? A solução é dada como $100/10 \times 45$ ou 450 pães. O segundo solicita que sejam repartidos 700 pães entre quatro pessoas, sendo que as quantias de recebimento devem estar na proporção de $2/3 : 1/2 : 1/3 : 1/4$, a solução é encontrada calculando o quociente de 700 pela soma das frações na proporção. Nesses problemas sobre "pães ou cerveja, a força ou *pesu* é o inverso da densidade de grão, sendo o quociente do número de pães dividido pela quantidade de grão" (BOYER, 1974, p.12).

Além desses, o Papiro de Rhind tem problemas que podem ser solucionados de maneira algébrica e não se referem a objetos específicos como pães e cerveja. A resolução para esses problemas pode ser efetuada mediante a uma equação linear, mas a solução empregada pelo escriba tem característica do método de falsa posição[3]. Nos problemas, a incógnita utilizada era chamada de "aha", por exemplo o problema 24 é "aha, mais seu sétimo, fazem 19", a resposta foi encontrada da seguinte forma:

> No problema 24 o valor tentado para a incógnita é 7, de modo que $x + x/7 = 8$, em vez de 19 como se queria. Como $8(2 + 1/4 + 1/8) = 19$, deve-se multiplicar 7 por $2 + 1/4 + 1/8$ para obter a resposta: Ahmes achou $16 + 1/7 + 1/8$. Então conferiu sua resposta mostrando que se a $16 + 1/7 + 1/8$ somarmos um sétimo disto (que é $2 + 1/4 + 1/8$) de fato obteremos 19 (BOYER, 1974, p. 12).

Pode-se dizer que a solução do problema 24 foi desenvolvida pelo método da falsa posição, pois considerando a incógnita "aha" como x, assume-se um valor qualquer para x e a partir desse busca-se a solução do problema. Assim, percebemos que os matemáticos egípcios geralmente atribuíam como valor falso o número do denominador do problema e com esse

[3] A falsa posição consiste em atribuir um valor falso para o número desconhecido do problema, no caso o "aha", com isso as operações à esquerda do sinal da igualdade são efetuadas a partir desse número, então a resposta do cálculo é comparada com o resultado que se pretende obter, e em seguida encontra-se a resposta correta por meio de proporções.

buscavam a resposta correta. Além dos problemas que podem ser solucionados algebricamente foi encontrado no papiro problemas geométricos.

A geometria egípcia pode ter surgido diante da necessidade de redistribuir as terras cultiváveis entre seus proprietários, após as inundações do rio Nilo. Por essa razão, os conhecimentos dos “esticadores de corda”[4] eram usados para remarcar as propriedades para que todos continuassem com a mesma quantidade de área e manter suas produções.

No Papiro de Rhind, o problema 51 mostra que a área do triângulo isósceles era encontrada multiplicando-se a base pela altura. O escriba Ahmes justifica sua forma de calcular a área, sugerindo que o “triângulo isósceles pode ser pensado como dois triângulos retos, sendo que muda-se a posição de um, para que juntos formem um retângulo” (BOYER, 1974, p. 13).

Segundo Boyer (1974), a resolução do problema 52 é semelhante com a anterior, nesse pede-se a área do trapézio isósceles, sabendo-se que a base maior mede 6, a menor possui 4 de medida e a distância entre elas é 20. Para encontrar a área, Ahmes marcava a metade das bases de modo a fazer um retângulo e em seguida multiplicava a soma disso por 20. Nessas transformações, observa-se o início de uma teoria de congruência e a ideia de prova, todavia, o conhecimento matemático que tem sido considerado um dos maiores sucessos deste período é a regra egípcia para encontrar a área do círculo:

> No problema 50, o escriba Ahmes assume que a área de um campo circular com diâmetro de nove unidades é a mesma de um quadrado com lado de oito unidades. Comparando com a fórmula moderna $A = \pi r^2$ vemos que a regra egípcia equivale a aproximadamente a atribuir a π o valor $3\ 1/6$, uma aproximação bastante elogiável, mas não há sinal de que Ahmes soubesse que as áreas de seu círculo e seu quadrado não eram exatamente iguais (BOYER, 1974, p. 13).

A aproximação de π, na matemática egípcia, sendo $3\ 1/6\ ou\ 256/81$ equivale na notação atual a $3{,}16$, esse valor era utilizado para realizar todos os problemas que necessitavam do π, como o cálculo da área do círculo e o volume do cilindro. Os egípcios encontravam o volume, multiplicando a área da base pela altura e usavam a fórmula $V = \left(\frac{1}{3}\right) Bh$, considerando V (volume), B (área da base) e h (altura) para calcular o volume da pirâmide. Geralmente, as áreas, volumes, eram usadas pelos matemáticos egípcios com a finalidade de saber a quantidade de material necessário para a construção de monumentos e outros objetos.

O valor de π que Ahmes usava foi, também, empregado em cálculos por diversos egípcios, isso é observado no rolo de papiro da décima-segunda dinastia, o Papiro Kahum, o

[4] Eram trabalhadores que remarcavam as terras dos agricultores que habitavam as margens do rio Nilo. Os esticadores de corda redistribuíam as terras quando ocorria a cheia do rio Nilo, após o rio baixar novamente era remarcado os terrenos.

qual encontra-se em Londres. Kahum mostra o cálculo do volume de um “cilindro sendo realizado por meio da multiplicação da altura pela área da base, e essa que é determinada pela regra de Ahmes” (BOYER, 1974, p. 14). À vista disso, percebemos que a forma de calcular de Ahmes era muito útil e bastante utilizada pelos egípcios.

Diante do estudo realizado, concordamos que os papiros indicavam as tendências do ensino neste período, pois parecem que eram utilizados como exercício de matemática para ser praticado por estudante. Desse modo, inferimos que a matemática do Egito antigo contribui imensamente para a construção do conhecimento matemático, em sala de aula. Nesse sentido, vamos apresentar os problemas históricos selecionados do texto matemático do Papiro de Rhind, que foram solucionados e podem ser empregados no ensino de matemática escolar.

2.2 Problemas históricos do Papiro de Rhind

A construção histórica da matemática do Egito é um campo rico em problemas e textos matemáticos com potencial didático para ser empregados na prática de ensino. Sendo assim, selecionamos e apresentamos os problemas matemáticos do Papiro de Rhind, os quais a resolução foi realizada primeiramente mediante o método da falsa posição dos antigos matemáticos que era desenvolvida de maneira aritmética, depois solucionamos por meio da falsa posição com o uso da álgebra, em seguida na notação atual, com isso é possível saber as diversas formas que a resposta pode ser encontrada.

A resolução por meio da falsa posição dos antigos matemáticos consistia em supor uma solução falsa e atribuir um valor numérico qualquer para “aha” e, assim, a partir desse número para encontrar a resposta eram efetuadas as operações. Todos os problemas solucionados por esse método, nessa seção, estão relacionados com o conteúdo matemático equação polinomial do primeiro grau, com exceção do problema de número 52 que é geométrico.

Ressaltamos que, a partir do segundo problema histórico as soluções serão apresentadas, apenas, pelo método da falsa posição com o uso da álgebra e por meio atual utilizado na escola da Educação Básica. Dessa maneira, os problemas estão organizados nessa sequência. Além disso, no desenvolvimento da resolução seguimos as concepções de Serrão (2014) e Brandemberg (2020).

2.2.1 Problema 24: “aha, seu sétimo, fazem 19”.

Esse problema pode ser escrito como: qual é o número, que adicionado a sua sétima parte seja igual a 19?

Resolução:

Nessa forma de solucionar o problema, vamos assumir uma solução falsa e atribuir o valor 7 para aha. Para entendermos a solução indicamos x para o valor a ser encontrado.

1ª etapa: identificamos os dados do problema e atribuímos x ao número desconhecido aha

$$aha = x$$

$$seu\ sétimo = \frac{x}{7}$$

$$\text{"aha, seu sétimo, fazem 19”} = x + \frac{x}{7} = 19\ (1)$$

2ª etapa: Utilizamos a equação (1)

$$x + \frac{x}{7} = 19$$

3ª etapa: Substituímos a incógnita x pelo valor falso 7 na equação (1),encontramos a soma 8

$$7 + \frac{7}{7} = 8$$

4ª etapa: Verificamos quantos 8 cabe em 19

$$2\ .8 + \frac{1}{4}\ .8 + \frac{1}{8}\ .8 = 19$$

$$16 + 2 + 1 = 19$$

Na escrita dos antigos matemáticos temos:

$$2\ .8 + \frac{1}{4}\ .8 + \frac{1}{8}\ .8 = 19$$

$$8\ .(2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}) = 19$$

$$8(2\overline{4}\,\overline{8}) = 19$$

5ª etapa: Para encontrarmos a solução multiplicamos o valor 7 pelo valor encontrado, no caso por:

$$2 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} \text{ ou } 2\overline{4}\,\overline{8}$$

$$7(2\overline{4}\,\overline{8}) = 16\overline{4}\,\overline{8} = 16{,}625$$

O número procurado é $16\overline{4}\,\overline{8}$ ou $16{,}625$

Resolução pelo método de falsa posição atual:

Para a resolução indicamos x para o valor a ser encontrado. Da mesma maneira, vamos solucionar os demais problemas.

1ª etapa: Identificamos os dados do problema e atribuímos x ao número desconhecido aha

$$aha = x$$

$$seu\ sétimo = \frac{x}{7}$$

$$\text{"aha, seu sétimo, fazem 19”} = x + \frac{x}{7} = 19\ (1)$$

2ª etapa: Utilizamos a equação (1)

$$x + \frac{x}{7} = 19$$

3ª etapa: Substituímos a incógnita x pelo valor falso 7 na equação (1), encontramos a soma 8

$$7 + \frac{7}{7} = 8$$

$$7 + 1 = 8$$

4ª etapa: Dividimos o valor real da igualdade que é 19 pelo valor falso 8 da igualdade

$$19 : 8 = 2{,}375$$

5ª etapa: Multiplicamos o valor $2{,}375$ por 7, que resultou no número procurado

$$2{,}375 \,.\, 7 = 16{,}625$$

O número desconhecido é $16{,}625$.

Para provar que a resposta está correta, os antigos matemáticos somavam o resultado $16{,}625$, com o valor da divisão de $19{:}\,8$, dessa forma resultava-se: $16{,}625 + 2{,}375 = 19$, assim consideravam como adequada a resposta. Podemos, também, substituir o valor $16{,}625$ na incógnita x da equação (1), que vamos encontrar o valor da igualdade $19.$ Logo, observamos que, de fato, por meio do método da falsa posição obtém-se um resultado correto.

Resolução pela álgebra atual:

1ª etapa: Identificamos os dados do problema e atribuímos x ao número desconhecido aha

$$aha = x$$

$$seu\ sétimo = \frac{x}{7}$$

$$\text{"aha, seu sétimo, fazem 19”} = x + \frac{x}{7} = 19\ (1)$$

2ª etapa; Utilizamos a equação (1) e realizamos o cálculo

$$x + \frac{x}{7} = 19$$

$$7x + x = 19.7$$

$$8x = 133$$

$$x = \frac{133}{8}$$

$$x = 16{,}625$$

A resposta encontrada é $16{,}625$, ou seja, o resultado foi o mesmo da soluções anteriores.

2.2.2 Problema 25: “aha, seu meio, fazem 16”.

Esse problema pode ser escrito como: qual é o número, que adicionado a sua metade seja igual a 16?

Resolução pelo método de falsa posição atual:

1ª etapa: identificamos os dados do problema e atribuímos x ao número desconhecido aha

$$aha = x$$

$$seu\ meio = \frac{x}{2}$$

$$\text{"aha, seu meio, fazem 16''} = x + \frac{x}{2} = 16\ (1)$$

2ª etapa: Utilizamos a equação (1)

$$x + \frac{x}{2} = 16$$

3ª etapa: Substituímos a incógnita x pelo valor falso 2 na equação (1), encontramos a soma 3

$$2 + \frac{2}{2} = 3$$

$$2 + 1 = 3$$

4ª etapa: Dividimos o valor real da igualdade que é 16 pelo valor falso 3 da igualdade

$$16 : 3 \cong 5{,}33$$

5ª etapa: Multiplicamos o valor $5{,}33$ por 2, que resultou no número procurado

$$5{,}33.2 \cong 10{,}66$$

O número desconhecido é $10{,}66$. Para verificarmos que a resposta está correta efetuamos $10{,}66 + 5{,}33\ \cong 16$, logo o resultado é válido.

Resolução pelo método atual:

1ª etapa: Identificamos os dados do problema e atribuímos x ao número desconhecido aha

$$aha = x$$

$$seu\ meio = \frac{x}{2}$$

$$\text{"aha, seu meio, fazem 16''} = x + \frac{x}{2} = 16\ (1)$$

2ª etapa: Utilizamos a equação (1) e realizamos o cálculo

$$x + \frac{x}{2} = 16$$

$$2x + x = 16.2$$

$$3x = 32$$

$$x = \frac{32}{3}$$

$$x \cong 10{,}66$$

O número procurado é aproximadamente $10{,}66$.

2.2.3 Problema 26 do papiro: “aha, seu quarto, fazem 15”.

Esse problema pode ser escrito como: qual é o número, que adicionado a sua quarta parte seja igual a 15?

Resolução pelo método da falsa posição atual:

1ª etapa: Identificar os dados do problema e atribuímos x ao número desconhecido aha

$$aha = x$$

$$seu\ quarto = \frac{x}{4}$$

$$\text{"aha, seu quarto, fazem 15”} = x + \frac{x}{4} = 15\ (1)$$

2ª etapa: Utilizamos da equação (1)

$$x + \frac{x}{4} = 15$$

3ª etapa: Substituímos a incógnita x pelo valor falso 4 na equação (1)

$$4 + \frac{4}{4} = 5$$

$$4 + 1 = 5$$

4ª etapa: Dividimos o valor real da igualdade que é 15 pelo valor falso 5 da igualdade

$$15 : 5 = 3$$

5ª etapa: Multiplicamos o valor 3 por 4, que resultou no número procurado

$$3.4 = 12$$

O número procurado é 12. Para provar que a resposta está correta os matemáticos antigos somavam os dois valores a seguir: $12 + 3 = 15$.

Resolução pelo método atual:

1ª etapa: Identificamos os dados do problema e atribuímos x ao número desconhecido aha

$$aha = x$$

$$seu\ quarto = \frac{x}{4}$$

$$\text{"aha, seu quarto, fazem 15”} = x + \frac{x}{4} = 15\ (1)$$

2ª etapa: Utilizamos a equação (1) e realizamos o cálculo

$$x + \frac{x}{4} = 15$$

$$4x + x = 15.4$$

$$5x = 60$$

$$x = \frac{60}{5}$$

$$x = 12$$

O número desconhecido é 12.

2.2.4 Problema 27: “aha, seu quinto, fazem 21”.

Esse problema pode ser escrito como: qual é o número que, adicionado a sua quinta parte seja igual a 21?

Resolução pelo método da falsa posição atual:

1ª etapa: Identificamos os dados do problema e atribuímos x ao número desconhecido aha

$$aha = x$$

$$seu\ quinto = \frac{x}{5}$$

$$\text{"aha, seu quinto, fazem 21”} = x + \frac{x}{5} = 21\ (1)$$

2ª etapa: Utilizamos a equação (1)

$$x + \frac{x}{5} = 21$$

3ª etapa: Substituímos a incógnita x pelo valor falso 5 na equação (1)

$$5 + \frac{5}{5} = 6$$

$$5 + 1 = 6$$

4ª etapa: Dividimos o valor real da igualdade que é 21 pelo valor falso 6 da igualdade

$$21 : 6 = 3{,}5$$

5ª etapa: Multiplicamos o valor 3,5 por 5, que resultou no número procurado

$$3{,}5\ .\ 5 = 17{,}5$$

O número desconhecido é 17,5.

Prova que a resposta está correta: $17{,}5 + 3{,}5 = 21$

Resolução pelo método atual:

1ª etapa: Identificamos os dados do problema e atribuímos x ao número desconhecido aha

$$aha = x$$

$$seu\ quinto = \frac{x}{5}$$

$$\text{"aha, seu quinto, fazem 21”} = x + \frac{x}{5} = 21\ (1)$$

2ª etapa: Utilizamos a equação (1) e realizamos o cálculo

$$x + \frac{x}{5} = 21$$

$$5x + x = 21.5$$

$$6x = 105$$

$$x = \frac{105}{6}$$

$$x = 17{,}5$$

O número procurado é 17,5.

Perante o estudo, podemos assegurar que os problemas acima solucionados possuem potencialidades didático-pedagógicas que serão apontadas no capítulo 3. Esses problemas podem ser relacionados a equação polinomial do primeiro grau, já o problema seguinte é referente à geometria.

2.2.5 Problema 52 do Papiro de Rhind.

O problema geométrico tem o seguinte enunciado: o trapézio isósceles possui a base maior 6 unidades, a menor 4 e a distância entre elas é 20, qual é sua área?

Esse é um problema que segundo Boyer (1974,p. 13), o escrita Ahmes solucionou da seguinte forma: tomou a metade da soma das bases de modo a fazer um retângulo, depois multiplicou por 20 para achar a área, essa multiplicação resultou em 100. “Em transformações como essa, em que triângulos e trapézio isósceles são transformados em retângulo, vemos o início de congruência e da ideia de prova em geometria...” (BOYER, 1974, p.13).

Resolução pelo método geométrico atual:

1ª etapa: Identificamos os dados do problema

Base maior : $B = 6$ unidades ou metros

Base menor : $b = 4$ unidades ou metros

Distância: $d = 20$

Área : $A = ?$

2ª etapa: Consideramos a fórmula $A = \frac{(B+b).d}{2}$ para calcular a área do trapézio

$$A = \frac{(B + b).d}{2}$$

3ª etapa: Utilizamos a fórmula, substituímos os valores e encontramos a área

$$A = \frac{(B + b).d}{2}$$

$$A = \frac{(6 + 4).20}{2}$$

$$A = \frac{(10).20}{2}$$

$$A = \frac{200}{2}$$

$$A = 100$$

A partir do resultado podemos dizer que o trapézio isósceles possui $100\ m^2$ de área.

Esse problema de geometria, assim como os demais apresentados podem ser relacionados a situação do cotidiano e empregados no ensino de matemática em sala de aula. Nesse sentido, além dos problemas históricos egípcios, estudamos o conhecimento matemático da Babilônia que é uma fonte valiosa para a pesquisa, logo a partir deste momento iremos apresentar o contexto da matemática dessa civilização.

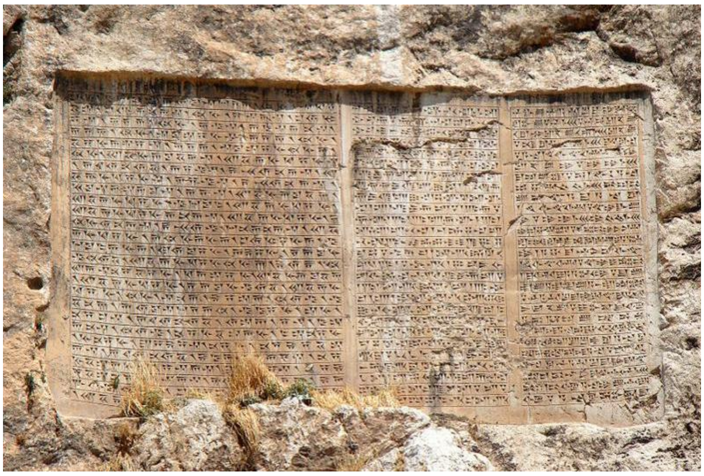
2.3 Desenvolvimento histórico da matemática da Babilônia

A Babilônia antiga fez parte de um conjunto de povos como sumérios, caldeus, acadianos, assírios que viviam nas áreas férteis próximas aos rios Tigres e Eufrates, na região da Mesopotâmia, que corresponde atualmente à região do Iraque, da Turquia, da Síria e do Irã. Na Mesopotâmia uma das cidades que se destacava era a Babilônia, cujo ápice ocorreu aproximadamente entre 1800 a.C. e 1500 a.C. Logo, talvez seja por isso que a civilização mesopotâmica é mencionada como babilônica.

A escrita desenvolvida na Babilônia denomina-se cuneiforme, a qual consiste ser letras babilônicas compostas por cunhas, que eram utilizadas para registrar o conhecimento em tábuas de barro. Tais tábuas eram moldadas de forma arredondada ou retangular em diversas medidas e com espessura de 2 cm. Para conservar as escritas, cozinhava-se as tábuas em fornos ou ao sol, dessa maneira ganhavam durabilidade, talvez seja por essa razão que muitas datam por volta de 4000 anos e estão presentes até os dias atuais. Na região da Babilônia já foram desenterradas mais de meio milhão de tábuas de barro, das quais identificaram aproximadamente 400 de conteúdo matemático. Atualmente, as tábuas se encontram na Universidade Yale, Columbia, localizadas nos Estados Unidos, nos museus de Berlin, Paris e Londres.

No período em que as tábuas foram encontradas, a escrita não foi decifrada logo de imediato, permanecendo em silêncio por um século. No ano de 1846, houve um progresso na decifração da escrita cuneiforme babilônica, com a descoberta da rocha Behistun, figura 7, a qual tem uma narração de Dário, rei dos persas, em três línguas, a saber, persa, elamita e babilônica. A rocha Behistun é composta de calcáreo e situa-se perto da aldeia de Behistun, região do atual Irã, a escrita das três línguas é em cuneiforme e a descrição traz uma declaração da vitória de Dário sobre Cambises.

Figura 7 - Rocha Behistun



Fonte: giro total: a rocha de behistum (girototal1.blogspot.com)

A rocha Behistun foi a chave para decifrar a escrita cuneiforme babilônica, todavia, a decifração das tábuas de conhecimento matemático avançou lentamente. Só no segundo quarto do século vinte que a percepção das contribuições da matemática da Babilônia, tornou-se apreciável, devido à grande "obra de François Thureau-Dang[5] (1872-1944), na França, e Otto Eduard Neugebauer[6] (1899-1999**)**, na Alemanha" (BOYER, 1974, p.8). Desse modo, as tábuas foram sendo decifradas e seus conteúdos matemáticos vieram a ser excelentes fontes para analisar o conhecimento da civilização da Babilônia.

Além dos babilônios, os sumérios também desenvolveram a escrita cuneiforme, a qual utilizaram "durante o quarto milênio", ademais, pode ser a mais antiga forma de comunicação escrita encontrada em tábuas de argila (BOYER, 1974, p. 18). A decifração da escrita trouxe enormes contribuições à compreensão de como se desenvolveu a matemática babilônica. A partir desse momento, vamos chamar todos os povos da Mesopotâmia de babilônios, visto que por convenção foi sancionado o nome Babilônia para tal região, cujas atividades eram desenvolvidas no período de 2000 até 600 a.C., pois aproximadamente em 538 a.C., o império babilônico terminou. Entretanto, a matemática continuou no período selêucida na Síria até próximo o início do cristianismo. Dessa forma, iremos considerar como da Babilônia as tábuas matemáticas encontradas dos sumérios, acadianos, assírios, caldeus e os demais que habitavam a região.

[5] Foi arqueólogo, assiriólogo e epígrafo francês, sendo um dos fundadores da assiriologia na Europa. François Thureau-Dangin desempenhou um papel importante na decifração das línguas suméria e acadiana.

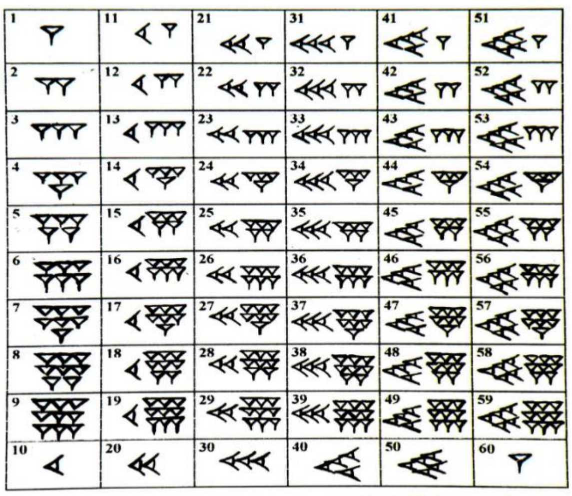
[6] Foi matemático e historiador da ciência, que se tornou conhecido por suas pesquisas acerca da história da astronomia e das ciências exatas. Otto Eduard Neugebauer estudou as tábuas de argila e descobriu que os antigos babilônios possuíam um conhecimento considerável de matemática e de astronomia.

As tábuas com a escrita cuneiforme possuem registros de impostos, estórias, lições de escola, cartas pessoais, conteúdos matemáticos. O material de tais documentos felizmente é menos vulnerável à destruição que os papiros egípcios, por isso atualmente há mais documento da matemática da babilônia que a do Egito. O uso da escrita na Babilônia é comprovado por “centenas de tábuas encontradas em Urak, que datam cerca de 5000 anos” (Boyer, 1974, p. 19).

O conteúdo matemático presente nas tábuas envolve cálculo e medida de característica algorítmica e aritmética, bem como pode ser usado em problema de natureza econômica. As tábuas também possuem conhecimento matemático de geometria, álgebra, com raízes quadradas, raízes cúbicas, progressões geométricas, tabelas de multiplicações e de seus recíprocos, conversão de pesos e medidas e sequência de potência de números. Os antigos matemáticos babilônicos sabiam encontrar o apótema de um polígono regular, tinham o conhecimento de que o ângulo inscrito num semicírculo é reto. Logo, as tábuas revelam que os babilônios possuíam um amplo conhecimento matemático.

Os babilônios utilizavam o sistema de numeração sexagesimal posicional, no qual cunhas posicionadas à esquerda representavam valores maiores. Os números 1 e 10 eram representados por símbolos diferentes, em que a combinação dos dois geravam os números até 60. Ao chegar ao número 60, repetia-se o procedimento na posição à esquerda dos números anteriores, assim, qualquer número podia ser escrito pelos dois símbolos. A figura 8 contém os números cuneiformes de 1 a 60.

Figura 8 - Números cuneiformes de 1 a 60



Fonte:https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao.htm

O sistema numérico presente nas tábuas de aproximadamente 1700 a.C., não apresenta símbolo para o zero, os babilônios deixavam um espaço para representar o número. No decorrer do século III a.C., passaram a empregar um símbolo, o qual era duas cunhas inclinadas a direita para preencher o espaço, assim criaram o número zero mais antigo da matemática.

Os antigos babilônios perceberam que seus dois símbolos da unidade e da dezena eram suficientes para representar qualquer número, ou seja, seus símbolos podiam ter função dupla, tripla ou qualquer grau. A exemplo temos as cunhas que representam o número cinquenta e nove, que são agrupados juntos de modo a formar um único número. Para diferenciar os números, os babilônios "deixavam um espaço adequado entre os grupos de cunha para determinar posições, lidas da direita para a esquerda, que correspondem a potência crescente da base 60, assim cada grupo tem um valor que depende da sua posição" (BOYER, 1974, p. 20).

O princípio da posição sexagesimal foi estendido às frações, os babilônios usavam a notação em cunha tanto para escrever $2(60) + 2$ como para $2 + 2(60)^{-1}$ e outras frações. Além disso, uma tábua babilônica antiga da coleção de Yale de nº 7289, figura 9, mostra que os matemáticos desse período calcularam a raiz quadrada de dois e indicaram como resposta 1;24,51,10, nesse número o ponto e vírgula separa a parte inteira da fracionária e a vírgula separa as posições sexagesimais. O valor babilônico para "$\sqrt{2}$ é 1,414212, diferente do valor verdadeiro por aproximadamente 0,00008. Isso significa que a civilização babilônica dominava o poder de computação que a notação decimal nos confere" (BOYER, 1974, p.20).

Figura 9 - Tábua Yale nº 7289, com a tradução dos números cuneiformes

Fonte: https://trueddotorg.wordpress.com/blog/

A Tábua Yale apresenta um quadrado cujo o comprimento é 30 de lado, e a diagonal com os valores $1; 24{,}51{,}10$ e $42; 25{,}35$, escritos na notação sexagesimal, os quais são iguais a $\sqrt{2} = 1{,}41421297$ e $30\sqrt{2} = 42{,}42638$, respectivamente. O cálculo realizado na potência de

60 para o valor da raiz quadrada de dois foi: $1 + 24.60^{-1} + 51.60^{-2} + 10.60^{-3} = 1{,}41421297$. Sabemos que, ao calcularmos a diagonal de um quadrado encontraremos a fórmula $d = l\sqrt{2}$, logo, utilizando essa podemos encontrar o valor da diagonal de qualquer quadrado. À vista disso, é possível dizer que os babilônios teriam conhecimento de como realizar o cálculo com o teorema de Pitágoras, pois não só encontraram o valor aproximado da $\sqrt{2}$, como também calcularam o valor da diagonal do quadrado.

Os matemáticos da Babilônia foram excelentes no desenvolvimento de processos algorítmico, a exemplo, a forma de encontrar a raiz quadrada de um número. Era usado o método de aproximação, assim, para $x = \sqrt{a}$, a primeira aproximação era a_1, a segunda aproximação era b_1 obtida pela equação $b_1 = a/a_1$. Caso a_1 seja menor que o valor procurado para $\sqrt{a}$, então, b_1é maior que esse valor e vice-versa. Seguidamente, a nova aproximação é calculada por meio da média aritmética $a_2 = {}^1\!/_2\,(a_1 + b_1)$. E o processo continua com $b_2 = a/a_2$, tendo como aproximação seguinte a média aritmética $a_3 = {}^1\!/_2\,(a_2 + b_2)$, e com tal característica o processo segue sucessivamente. Os babilônios com esse método encontraram o valor de $\sqrt{2}$ em a_3, sendo $a_1 = 1;30$. “No algoritmo, para a raiz quadrada tem-se um procedimento interativo que poderia ter levado os matemáticos antigos a descobrir processos infinitos, todavia não levavam adiante a pesquisa das implicações de tais problemas” (BOYER, p.1974, p.21).

Além do mais, nas tábuas babilônicas foram encontrados problemas matemáticos que podem ser interpretados como equações de primeiro e segundo graus, em que era usada linguagem retórica com característica geométrico, por exemplo, o quadrado era identificado com x^2, seu lado de x, e o nome para duas incógnitas num mesmo problema denominava-se comprimento e largura. Assim, compreendemos que da geometria os babilônios conheciam a área do triângulo retângulo, do trapézio, do retângulo, calculavam o volume do cilindro e do paralelepípedo e a circunferência do círculo.

Em outras tábuas, há tabelas de potência sucessiva de um certo número, similar às logarítmicas atuais. As tabelas logarítmicas ou exponenciais, da Babilônia, apresentam as dez primeiras potências para as bases $9, 16, (1{,}4)\ e\ (3{,}45)$, sendo os números $1{,}4 = 100$ e $3{,}45 = 225$. Essas tabelas antigas ajudavam os babilônios a responder problemas como “a que potência deve ser elevado um certo número para fornecer um número dado?” Esse problema é semelhante ao nosso, por exemplo, qual o logaritmo de um número dado num sistema com um certo número como base? (BOYER, 1974, p. 22). A matemática dessa tabela é equivalente a a^n para n de 1 a 10 e $a = 9, 16, 100, 225$, dessa forma podemos solucionar equações exponenciais referente a $a^x = b$. Assim, percebemos que os babilônios utilizavam a tabela logarítmica de forma análoga a dos matemáticos atuais.

Os matemáticos babilônicos resolviam equações quadradas por meio aritmético ou pelo método de completar quadrado. A solução de equação quadrática apresentada nos problemas revela que os babilônios sabiam transportar termos em uma equação somando iguais a iguais e multiplicavam ambos os membros por quantidades iguais para remover frações ou eliminar fatores.

Diversas fórmulas de fatoração atuais parecem que eram de conhecimento dos babilônios, já que algumas formas de resoluções podem ser interpretadas como a soma de $4ab$ a $(a-b)^2$ que é possível encontrar $(a+b)^2$. Nos problemas possíveis de serem solucionados de maneira algébrica, os babilônios usavam palavras como peso, mão, *mina*, área, volume para quantidades desconhecidas, por exemplo um problema solicita: o peso de uma pedra se $(x + x/7) + (1/11)x + x/7$ é uma *mina*, a resposta é dada como $48; 7{,}30\, gin$, em que 60 *gin* formam uma *mina*. Em outro problema há equações lineares simultâneas com duas incógnitas denominadas respectivamente de "primeiro anel de prata" e "segundo anel de prata". Então, ao atribuirmos $x\ e\ y$ ao problema as equações formadas na nossa notação são $x/7 + y/11 = 1$ e $6x/7 = 10y/11$, a resposta, considerando a regra, é dada como $x/7 = (11/(7+11)) + 1/12$ e $y/11 = (11/(7+11)) - 1/12$ (BOYER, 1974, p. 23). Observamos que, a maneira como eram solucionados os problemas na Babilônia tem similaridade com a forma como organizamos a equação algébrica na notação atual e a quantidade de problema que apresenta essa semelhança é surpreendente.

Nessa continuidade, uma tábua possui um problema com a seguinte equação "$1/4\ da\ largura + comprimento = 7 mãos$e o $comprimento + largura = 10\, mãos$", a solução foi encontrada por um método semelhante a uma eliminação por combinação. Esse problema na notação atual pode ser escrito por x e y para comprimento e largura, respectivamente, os quais podem gerar as equações $(y/4) + x = 7$ e $x + y = 10$, então subtraindo a segunda da primeira ocorre o resultado $x = 6\, mãos\ ou\ 30\, dedos$ e $y = 4\, mãos\ ou\ 20\, dedos$. Dessa forma, podemos dizer que o método algébrico atual de resolução é adequado para solucionar problema igual a esse. Além disso, as tábuas babilônicas revelam problemas de equação quadrática, os quais apresentamos seguidamente.

De acordo com Boyer (1974), resolver uma equação quadrática com três termos para os egípcios foi difícil, mas o matemático Neugebauer, em 1930, revelou que tal equação foi desenvolvida eficientemente pelos babilônios. Um dos problemas de uma tábua identificada como BM 13901 solicita “o lado de um quadrado se a área menos o lado dá 14,30", a resolução dada foi: *Tome a metade de 1, que é 0;30, e multipliquei 0;30 por 0,30 o que dá 0;15, some isto a 14,30, o que dá 14,30;15. Isto é o quadrado de 29;30. Agora some 0;30 a 29;30 e o resultado é 30, o lado do quadrado”.* Esse problema pode ser representado pela equação $\mathrm{x}^2 - \mathrm{x} = 870$, em que $870 = 14{,}30$. O método de resolução dos babilônios é equivalente à fórmula $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \left(\frac{p}{2}\right)$ para uma raiz da equação $\mathrm{x}^2 - \mathrm{px} = \mathrm{q} - \mathrm{a}$, essa é a fórmula quadrática empregada na prática de ensino de matemática, atualmente.

Na Tábua BM 13901, figura 10, que se encontra no Museo Britânico de Londres, há diversos problemas semelhantes como “adicionei a área e o lado de um quadrado, obtive 0,45", na notação atual podemos escrevê-lo como $x^2 + x = 0{,}45$, a solução foi dada do mesmo modo que o anterior. Dessa maneira, constatamos que os babilônios desenvolveram eficiente e admiravelmente seu método de solução para equação quadrática com três termos.

Figura 10- Tábua babilônica BM 13901

Fonte: http://hist1039.omeka.fas.harvard.edu/items/show/165

Os textos da Babilônia antiga de aproximadamente 4000 mil anos trazem equações do tipo $x^2 + px = q$, $x^2 = px + q$ e $x^2 + q = px$. As duas primeiras equações foram aplicadas nos problemas acima citados, já a terceira está presente em texto de problemas matemáticos, no qual é tratada como equivalente ao sistema simultâneo $x + y = p$ e $xy = q$. A quantidade de problemas em que é solicitado para encontrar o resultado de dois números dados ou a soma ou a diferença é imensa, que parece ter sido simples para os babilônios a redução das equações quadráticas.

Ademais, os babilônios utilizavam transformações de equações simultâneas, as quais foram muito usadas nos problemas. Para os antigos matemáticos da Babilônia parecia ser comum transformar equações. Segundo Boyer (1974), o texto de uma tábua escrita em cuneiforme, da coleção de Yale identificada como YBC 4663, apresenta a solução para o sistema $x + y = 6;30$ e $xy = 7;30$. As instruções do escriba para a resolução foram:

> Primeiro ache $\frac{x+y}{2} = 3;15$, depois $(\frac{x+y}{2})^2 = 10;33{,}45$. Então $(\frac{x+y}{2})^2 - xy = 3;3{,}45$ e $(\frac{x+y}{2})^2 - xy = 1;45$. Daí $\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x-y}{2}\right) = 3;15 + 1;45$ e $\left(\frac{x+y}{2}\right) - \left(\frac{x-y}{2}\right) = 3;15 - 1;45$. Das últimas equações é evidente que $x = 5$ e $y = 1\ 1/2$. Como as quantidades x e y entram simetricamente nas equações dadas, pode-se interpretar os valores de x e y como as duas raízes das equações quadráticas $x^2 + 7;30 = 6;30x$ (BOYER, 1974, p. 24).

Ao analisarmos a forma de resolução e os dados, concordamos com Boyer (1974) quando indica que o valor do y é 1,5 e o x possui o valor 5, pois esses atendem como resultado da equação $x^2 - 6;30x + 7;30 = 0$. Nesse sentido, segundo Boyer (1974) os antigos babilônios desenvolveram uma matemática admirável e possuíam um conhecimento algébrico surpreendente, considerando que:

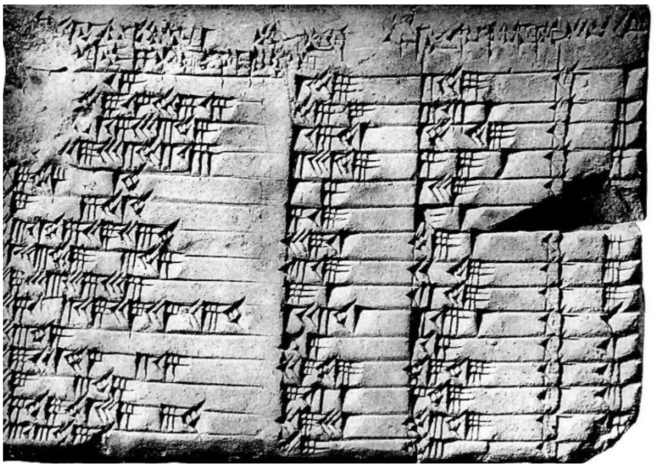
> a redução babilônia de uma equação quadrática da forma $ax^2 + bx = c$ à forma normal $y^2 + by = c$ pela substituição $y = ax$ mostra o grau extraordinário de flexibilidade da álgebra mesopotâmia. Essa facilidade, junto com a ideia de valor posicional, explica em grande parte a superioridade dos babilônios em matemática. Não há registro no Egito de uma equação cúbica, mas entre os babilônios há muitos exemplos. Cúbicas puras, como $x^3 = 0;7{,}30$ eram resolvidas por referência direta às tabelas de cubos e raízes cúbicas, onde a solução $0;30$ era encontrada. A interpolação linear dentro das tabelas era usada para achar aproximações para valores não constantes na tabela. As cúbicas mistas na forma padrão $n^3 + n^2 = a$ eram resolvidas de modo semelhante, por referência às tabelas disponíveis, que davam valores para a combinação $n^3 + n^2$ para valores inteiros de n entre 1 a 30 (BOYER, 1974, p. 24).

As tabelas construídas pelos babilônios auxiliavam na resolução de equações, uma vez que com a tabela os matemáticos antigos sabiam de imediato que a solução de $x^3 + x^2 = 4;14$ é igual a 6. De fato, a matemática babilônica é extraordinária e pode contribuir de forma significativa para o ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos em sala de aula.

Além disso, os babilônios não só desenvolveram conhecimentos que podem ser interpretados de maneira algébrica, como também desenvolveram conceitos geométricos e trigonométricos. Numa tábua denominada Plimpton 322, de 13cm de comprimento e 9 cm de largura, é revelado que os babilônios desenvolviam tabelas trigonométricas e é possível que conheciam os ternos pitagóricos. A Plimpton 322, figura 11, foi escrita aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C. e descoberta no início do século XX, ao sul do atual Iraque, pelo arqueólogo

Edgar Banks, o qual a vendeu ao americano George Plimpton e este a doou para a Universidade Columbia, Estados Unidos.

Figura 11 - Tábua Plimpton 322



Fonte: Eves (2011, p.65)

A Plimpton 322 é considerada a tábua mais antiga trigonométrica, a qual mostra que os babilônios foram os primeiros matemáticos a sistematizar a trigonometria. A tábua possui quinze linhas e quatro colunas de números escritos em cuneiforme com uso de sistema sexagesimal. A Plimpton 322 não está completa, provavelmente, foi quebrada a parte que tinha uma quarta coluna, mas com seus dados foi possível saber os valores da coluna que falta. O texto da Plimpton 322, figura 12, está traduzido, em função disso podemos saber quais números a tábua possui.

Figura 12 - Dados da Tábua de Plimpton traduzidos na base 60

1,59,0,15	1,59	2,49	1
1,56,56,58,14,50,6,15	56,7	1,20,25	2
1,55,7,41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
1,53,10,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
1,48,54,1,40	1,5	1,37	5
1,47,6,41,40	5,19	8,1	6
1,43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
1,41,33,59,3,45	13,19	20,49	8
1,38,33,36,36	8,1	12,49	9
1,35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10
1,33,45	45,0	1,15,0	11
1,29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
1,27,0,3,45	2,41	4,49	13
1,25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
1,23,13,46,40	56	1,46	15

Fonte: Boyer (1974, p. 25)

De acordo com Boyer (1974), a tábua contém uma tabela com hipotenusa e um cateto de triângulos retângulos, com quatro exceções, mas acredita-se que foi apenas um erro do escriba no momento de escrever os dados. Assim, considerando os lados $a, b, c,$ de um triângulo retângulo, sendo a, b catetos e c hipotenusa, então se os números da segunda e terceira coluna da esquerda para a direita forem considerados como lados a, c respectivamente, a primeira coluna contém o quadrado da razão de c para b, ou seja, c^2/b^2, assim podemos dizer que possui os valores de sec^2. Logo, nota-se que os números da primeira coluna decrescem de cima para baixo.

> Além disso, o primeiro número é muito próximo da $sec^2 45°$, e o último número na coluna é aproximadamente $sec^2 31°$, os números intermediários sendo próximos dos valores de $sec^2 A$ quando A decresce por graus de $45°$ a $31°$. Isso evidentemente não pode ser fruto do acaso. Não só o arranjo foi cuidadosamente planejado, mas as dimensões do triângulo também seguem uma regra. Os que construíram a tabela evidentemente começaram com dois inteiros sexagesimais regulares que chamaremos $p\ e\ q$, com $p > q$, então formaram a tripla de números $p^2 - q^2$e $2pq$ e $p^2 + q^2$. Os três inteiros assim obtidos formam um triângulo pitagórico, em que o quadrado do maior é igual à soma dos quadrados dos outros dois. Portanto, esses números podem ser usados com dimensões do triângulo retângulo ABC, com $a = p^2 - q^2$, $b = 2pq$ e $c = p^2 + q^2$ (BOYER, 1974, p. 26).

Nesse caso, os valores de p são menores que 60 e os de q equivale a $1 < p/q < 1 + \sqrt{2}$, ou seja, correspondente a triângulos retângulos para os quais $a < b$. Desse modo, acreditamos que os babilônios verificaram que havia 38 pares de valores de $p\ e\ q$ satisfazendo às condições, e formavam as "38 correspondentes triplas pitagóricas, todavia só 15 primeiras encontram-se na tabela, as quais estão em ordem decrescente para o quociente $(p^2 + q^2)/2pq$" (BOYER, 1974, p. 26).

Para exemplificar o emprego de triplos pitagóricos na Tábua Plimpton, construímos a tabela 1, com os valores traduzidos de c^2/b^2, identificamos os valores de $b = 2pq$, os quais não estão na tabela escrita em cuneiforme, e inserimos os números $p\ e\ q$, dos ternos pitagóricos para cada triângulo a ser formado. Sendo assim, concordamos que os primeiros ternos pitagóricos do primeiro triângulo podem ser obtidos a partir de $p = 12$ e $q = 5$, assim, geram os valores de $a = 119, b = 120$ e $c = 169$, então os números de a e c são os que estão na segunda e na quarta coluna, da esquerda para direita**,** e a razão de c^2/b^2 está na primeira coluna que é igual ao número $1{,}983402$, em que $c^2/b^2 = 169^2/120^2 = 28561/14400 = 1{,}9834027$. Dessa maneira, ocorre a mesma relação nas quatorze linhas, onde os valores da coluna c^2/b^2 estão até a sexta casa.

Tabela 1 - Dados da Tábua Plimpton 322 traduzidos e os valores de p e q

c^2/b^2	$a = p^2 - q^2$	$b = 2pq$	$c = p^2 + q^2$	Linha	p	q
1,983402	119	120	169	1	12	5
1,949158	3367	3456	4825	2	64	27
1,918802	4601	4800	6649	3	75	32
1,886247	12709	13500	18541	4	125	54
1,815007	65	72	97	5	9	4
1,785192	319	360	481	6	20	9
1,719983	2291	2700	3541	7	54	25
1,692709	799	960	1249	8	32	15
1,642669	481	600	769	9	25	12
1,586122	4961	6480	8161	10	81	40
1,562500	45	60	75	11	2	1
1,489416	1679	2400	2929	12	48	25
1,460017	161	240	289	13	15	8
1,430238	1771	2700	3229	14	50	27
1,387160	56	90	106	15	9	5

Fonte: Elaborado pela autora a partir de Boyer (1974) e Eves (2011).

O quadro traz a tradução dos valores da hipotenusa c, do cateto a, da razão de c^2/b^2, tal como apresenta o números de linha, os valores do cateto b e os de p e q que geram os ternos pitagóricos. A partir dos estudos na tábua concordamos com Boyer (1974), que parte da Plimpton 322, a qual não foi encontrada pode possui mais colunas com os valores de p, q e $2pq$ os quais chamaríamos de sec^2A.

Além da geometria e trigonometria contida na Plimpton 322, há outros conceitos matemáticos presentes em tábuas babilônicas. Como por exemplo, uma tábua apresenta “a soma da progressão geométrica $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9$ e em outra é encontrada a soma dos quadrados $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots 10^2$”. Provavelmente, os babilônios conheciam as fórmulas gerais da soma de uma progressão geométrica e a soma dos n primeiros quadrados perfeitos, possivelmente perceberam que a soma dos n primeiros cubos perfeito é igual ao quadrado da soma dos n primeiros inteiros (BOYER, 1974, p.27).

No decorrer do ano de 1936, diversas tábuas foram desenterradas em Susa, essas possuem tabelas e listas com resultados geométricos significativos. Uma das tábuas traz a comparação das áreas e os quadrados dos lados de polígonos regulares de três, quatro, cinco, sete lados, tal como:

> A razão da área do pentágono, por exemplo, para o quadrado do lado é dada como $1;40$, um valor que está correto a dois algarismo significativos. Para o hexágono e heptágono as razões são expressas como $2;37{,}30$ e $3;41$ respectivamente. Na mesma

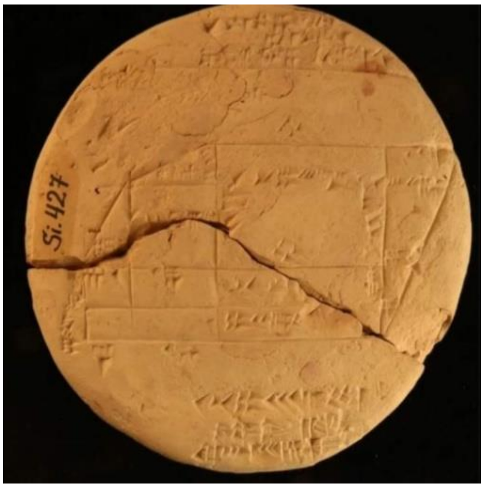
> tábua o escriba dá $0;57,36$ como razão entre o perímetro do hexágono regular e a circunferência do círculo circunscrito, e disso podemos concluir imediatamente que o escriba babilônio tinha tomado $3;7,30$ ou $3\ 1/8$ como aproximação para π. Isso é pelo menos tão bom quanto o valor adotado no Egito (BOYER, 1974, p. 28).

Além disso, o contexto em que foi encontrado o valor de π é mais elaborado do que no Egito, sendo assim a tábua de Susa contém texto que é um bom exemplo de comparação sistemática de figuras geométricas.

Mais um exemplo das relações geométricas podemos verificar na tábua babilônica BM 85196 que contém o problema matemático: “uma escada de comprimento $0;30$ está apoiada a uma parede, a questão é, de quanto a extremidade inferior se afastará da parede se a superior escorregar para baixo de uma distância de $0;6$ unidades?” Problemas iguais a esse, mil e quinhentos anos depois ainda estavam sendo resolvidos na região da Babilônia, a título de exemplo temos o texto de uma tábua selêucida que propõe o seguinte problema: “uma vara está apoiada a uma parede. Se o topo escorrega de três unidades quando a extremidade inferior se afasta da parede de nove unidades, qual o comprimento da vara?” A resposta dada foi de 15 unidades, nesses problemas é possível empregar o teorema de Pitágoras na resolução (BOYER, 1974, p 29). As respostas e as resoluções dos problemas não estão expressas nos textos estudados, mas as soluções são simples se utilizarmos as fórmulas atuais.

Recentemente, foi descoberta mais uma aplicação da geometria num texto babilônio antigo que está numa tábua, figura 13, identificada como Si 427, a qual foi encontrada em Bagdá, no final do século 19, na atual região do Iraque. Atualmente, a tábua está em um museu em Istambul, cidade da Turquia.

Figura 13 - Tábua Si 427



Fonte: Mansfield (2020)

O texto antigo matemático, traduzido por Daniel Mansfield[7], contém dados relacionados a conhecimentos jurídicos e geométrico da aquisição de um terreno específico, que foi dividido antes de ser vendido. O conteúdo da Tábua Si 427 reforça que os antigos matemáticos conheciam os ternos pitagóricos, isso é possível ser visualizado nos cálculos, dos ângulos retos nos terrenos, realizados pelos babilônios. Desse modo, acredita-se que esta apresenta uma das origens da geometria na babilônia, a qual era utilizada para estabelecer limite nos terrenos após a compra.

Diante do exposto, consideramos que a matemática antiga é um conhecimento importante para o ensino-aprendizagem na Educação Básica. Portanto, a partir do estudo, apresentamos, a seguir, textos e problemas históricos selecionados da matemática da Babilônia que podem compor um material didático pedagógico para o ensino escolar, os quais foram solucionados por meio do método antigo e do atual.

2.4 Textos e problemas históricos da Babilônia

A matemática antiga da Babilônia é uma fonte considerável de conhecimento com potencialidades que podem ser exploradas na prática educativa. Por esse motivo, apresentamos a seguir textos e problemas matemáticos e as suas resoluções. Alguns foram solucionas tanto pelo método dos antigos matemáticos, quanto pela forma atual, mas outros foram resolvidos somente pela forma utilizada atualmente, visto que não havia resolução antiga nos livros estudados.

A solução primeiramente será desenvolvida pelo método antigo e depois o contemporâneo. Dessa forma, apresentamos os textos e problemas históricos nesta sequência, primeiro os dois problemas da Tábua BM 13901, seguido do texto matemático da Plimpton 322, da YBC 4663, da YBC 7289 e da BM 85196, os quais foram solucionados pelo método usado na babilônia e pela notação atual.

2.4.1 Problemas da Tábua BM 13901

A tábua identificada como BM 13901 possui diversos problemas matemáticos, dos quais selecionamos dois e solucionamos para apresentarmos. Para tanto, construímos tabelas com números na base dez e sessenta para identificarmos quais valores são equivalentes em ambos sistemas de numeração.

---

[7] Dr. Daniel Mansfield é professor de matemática na Universidade de Nova Gales do Sul, localizada na Austrália. Desenvolve trabalho na área de matemática de culturas antigas.

Os dois primeiros problemas históricos foram solucionados pelos babilônios na base sessenta, diferentemente do método atual. A solução pode ser desenvolvida algebricamente, porém os matemáticos, deste período, solucionaram de forma aritmética. Sendo assim, identificamos o problema e o solucionamos primeiro por meio aritmético, no sistema sexagesimal, depois elaboramos quadros com os cálculos dos dados do problema na base 60 e na 10 para auxiliar na compreensão da resolução babilônica, posteriormente, encontramos o resultado do problema mediante a equação quadrática.

Problema 1: “Adicionei a área e o lado de um quadrado, obtive $0;45$”

Solução dos matemáticos da Babilônia.

1. Tome a metade de 1, que é $0;30$
2. Multiplique $0;30$ por $0;30$, que dá $0;15$
3. Some isto a $0;45$, que dá 1
4. Isto é o quadrado de 1
5. Subtraia $0;30$ de 1, que dá $0;30$
6. $0;30$ é o lado do quadrado
7. O resultado obtido foi $0;30$, que é o lado do quadrado

Para entender o modo de resolução da Babilônia, devemos considerar a base sexagesimal, então para que seja compreendido o cálculo realizado pelos matemáticos antigos, construímos a tabela 2, a seguir, com cálculos de fração, adição e subtração, no sistema de numeração decimal e sexagesimal.

Tabela 2 - Cálculo de fração, adição e subtração no sistema decimal e sexagesimal

	Sistema de numeração		
Número	Decimal	Sexagesimal	Cálculo na base 60
$\frac{1}{2}$	$0,5$	$0;30$	$0,5\,.\,0,6 = 0;30$
$\frac{1}{4}$	$0,25$	$0;15$	$0,25\,.\,0,6 = 0;15$
$\frac{3}{4}$	$0,75$	$0;45$	$0,75\,.\,0,6 = 0;45$
$0,15 + 0,45$	$0,60$	1	$0;15 + 0;45 = 1$
$1 - 0,5$	$0,5$	$0;30$	$1 - 0;30 = 0;30$

Fonte: Elaborado pela autora.

Os dados do quadro acima vão auxiliar no entendimento dos cálculos posteriores referente ao problema histórico, bem como saber que $0;45$ na base sexagesimal é igual a $0,75$

na base decimal. Então, para melhor compreensão, reescrevemos a resolução do problema no quadro 1, numa linguagem mais clara e escrevemos os dados na notação decimal. No quadro, da esquerda para a direita, a primeira coluna apresenta a solução na linguagem babilônica, na segunda há a solução numa linguagem mais atual, a terceira contém a solução na base sessenta e a quarta a solução foi desenvolvida no sistema decimal.

Quadro 1 - Problema da Babilônia com resolução na notação sexagesimal e decimal

Problema: Adicionei a área e o lado de um quadrado, obtive 0;45				
Etapas da resolução da babilônia		Modificação da linguagem	Sistema de numeração	
			Sexagesimal	Decimal
1	Tome a metade de 1, que é $0;30$	Divida o 1 por 2, que resulta em $0;30$	$\frac{1}{2} = 0;30$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$
2	Multiplique $0;30$ por $0;30$, que dá $0;15$	Multiplique o resultado $0;30$ por $0;30$, que dá $0;15$	$0;30 \,.\, 0;30 = 0;15$	$0{,}5 \,.\, 0{,}5 = 0{,}25$
3	Some isto a $0;45$, que dá 1	Some o resultado $0;15$ a $0;45$, que resulta em 1	$0;15 + 0;45 = 1$	$0{,}25 + 0{,}75 = 1$
4	Isto é o quadrado de 1	O resultado 1 é o quadrado de 1	$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{1} = 1$
5	Subtraia $0;30$ de 1, que dá $0;30$	Subtraia $0;30$ do resultado 1, que dá $0;30$	$1 - 0;30 = 0;30$	$1 - 0{,}5 = 0{,}5$
6	$0;30$ é o lado do quadrado	Logo, o resultado $0;30$ é o lado do quadrado	$0;30$ é o lado do quadrado	0,5 é o lado do quadrado

Fonte: Elaborado pela autora a partir de Boyer (1974).

O resultado tanto no sistema sexagesimal, quanto no decimal são os mesmos, e o método da solução foi somente o aritmético. No entanto, apresentamos a partir da resolução babilônica uma fórmula algébrica para ser usada na solução do problema. Conforme Boyer (1974), esta fórmula faz parte da equação quadrática: $ax^2 + bx = c$, em que $a = 1,\ b = 1$, logo $c = 0;45$, com isso a fórmula se encontra na última linha da segunda coluna, da esquerda para direita, no quadro 2.

Quadro 2 - Substituição algébrica no método de resolução da Babilônia

Resolução pelo método da Babilônia		Substituição algébrica no método de resolução da Babilônia
1	Tome 1	Tome b
2	Tome a metade de 1, que é $0;30$	Tome a metade de b, que é $\frac{b}{2}$
3	Multiplique $0;30$ por $0;30$, que dá $0;15$	Multiplique $\frac{b}{2}$ por $\frac{b}{2}$ que dá $(\frac{b}{2})^2$

4	Some isto a $0;45$, que dá 1	Some $(\frac{b}{2})^2$ a c que resulta em $(\frac{b}{2})^2 + c$
5	Isto é o quadrado de 1	Isto $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$ é 1^2, logo temos $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} = 1$
6	Subtraia $0;30$ de 1, que resulta em $0;30$	Subtraia $\frac{b}{2}$ de $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} \Longrightarrow \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$
7	$0;30$ é o lado do quadrado	Ao substituir os valores dos coeficientes na fórmula $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$, encontra-se o lado

Fonte: Elaborado pela autora a partir de Boyer (1974).

A fórmula encontrada na notação atual a partir dos comandos da resolução dos babilônios, permite solucionar o problema matemático antigo. Por conseguinte, para solucionar devemos seguir as etapas do processo de resolução dos babilônios, sendo assim temos $b = 1$ e $c = 0;45$, em que o valor $\frac{3}{4}$ é igual a $0;45$, no sistema de numeração da babilônia, ou seja, na base 60.

Resolução:

1ªetapa: Identificamos os valores

$$b = 1, c = \frac{3}{4} = 0;45$$

2ª etapa: Utilizamos a fórmula encontrada

$$\sqrt{(\frac{b}{2})^2 + c} - \frac{b}{2} \quad (1)$$

3ª etapa: Substituímos os valores na fórmula (1)

$$\sqrt{(\frac{b}{2})^2 + c} - \frac{b}{2}$$

$$\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\frac{4}{4}} - \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1} - \frac{1}{2}$$

$$1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2}$$

Encontramos o resultado $\frac{1}{2}$, que é igual à resposta dada pelos matemáticos babilônicos, logo a partir do valor do lado do quadrado podemos verificar se a resposta está correta. Para isso, concordamos com Boyer (1974) quando indica que o problema pode ser escrito como a equação quadrática $x^2 + x = 0;45$, então apresentamos abaixo um tipo de prova, ou seja, um meio para saber se, de fato, o quadrado possui $\frac{1}{2}$ de lado.

Resolução:

1ª etapa: Identificamos a equação e o lado

$$\text{Equação quadrática: } x^2 + x = 0;45 \quad (1)$$

$$\text{Lado} = x = 0;30$$

2ª etapa: Utilizamos a equação (1) e substituímos o valor do lado

$$x^2 + x = 0;45$$

$$(0;30)^2 + 0;30 = 0;45$$

$$0;15 + 0;30 = 0{,}45$$

$$0;45 = 0;45$$

Com a igualdade da equação, confirmou-se que o resultado está correto. Entretanto, a resposta dada pelos babilônios foi encontrada de forma aritmética, toda via apresentamos, a seguir, o problema resolvido por meio da notação algébrica atual, ou seja, solucionada a partir da equação $ax^2 + bx - c = 0$, com a fórmula quadrática $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Resolução:

1ª etapa: Identificamos os dados do problema e atribuímos x ao valor desconhecido

$$\text{Adicionei a área} = x^2$$

$$\text{Lado de um quadrado} = x$$

$$\text{Obtive } 0;45 = c$$

$$\text{Na notação sexagesimal } \frac{3}{4} = 0;45$$

$$\text{Equação quadrática: } ax^2 + bx - c = 0 \quad (1)$$

$$\text{Fórmula quadrática: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2)$$

2ª etapa: Construímos a equação do problema com os dados

$$x^2 + x = \frac{3}{4} \quad (3)$$

3ª etapa: Desenvolvemos a equação (3) e encontramos a (4)

$$x^2 + x = \frac{3}{4} \quad (3)$$

$$4x^2 + 4x = 3 \quad (4)$$

4ª etapa: Relacionamos a equação quadrática (1) com a (4)

$$ax^2 + bx - c = 0$$
$$4x^2 + 4x = 3$$
$$4x^2 + 4x - 3 = 0$$

5ª etapa: Identificamos os valores dos coeficientes, que são $a = 4, b = 4, c = -3$

6ª etapa: Substituímos os valores dos coeficientes na fórmula (2) e realizamos os cálculos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.4.(-3)}}{2.4}$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8}$$
$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{8}$$
$$x = \frac{-4 \pm 8}{8}$$
$$x_1 = \frac{-4 + 8}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$
$$x_2 = \frac{-4 - 8}{8} = \frac{-12}{8} = \frac{-3}{2}$$

O resultado é o valor do $x_1 = \frac{1}{2}$.

Diante da resolução, podemos dizer que o método algébrico atual, também, é adequado para ser aplicado ao problema matemático da Babilônia. Para ratificarmos que a resposta é válida, encontramos a equação do problema por meio da fatoração do trinômio polinomial do segundo grau. A forma fatorada da equação do segundo grau ou quadrática é $a(x - x_1).(x - x_2) = 0$, então com os valores das raízes e do coeficiente a, apresentamos o cálculo que gera a equação do problema, e, assim, comprovamos que a solução anterior está exata. Isto posto, a seguir, vamos obter a equação $x^2 + x = \frac{3}{4}$, mediante a forma fatorada $a(x - x_1).(x - x_2) = 0$.

Resolução:

1ª etapa: Identificamos as raízes, o coeficiente a da equação fatorada

Raiz: $x_1 = \frac{1}{2}$

Raiz: $x_2 = \frac{-3}{2}$

Coeficiente $a = 1$

Equação fatorada: $a(x - x_1).(x - x_2) = 0$ (1)

2ª etapa: Substituímos os valores das raízes e do coeficiente a na equação fatorada e efetuamos os cálculos

$$a(x - x_1).(x - x_2) = 0 \quad (1)$$

$$1\left(x - \frac{1}{2}\right).\left(x - \frac{-3}{2}\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right).\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$x^2 + \frac{3x}{2} - \frac{x}{2} - \frac{3}{4} = 0$$

$$x^2 + \frac{2x}{2} = \frac{3}{4}$$

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

A resposta encontrada foi a equação quadrática do problema estudado, isso corrobora que os resultados dos cálculos anteriores desenvolvidos nas soluções estão exatos. A seguir, apresentamos o segundo problema histórico que, também, foi solucionado pelos antigos matemáticos por meio aritmético e que pode ser escrito como uma equação quadrática de três termos.

Problema 2: Qual é o lado de um quadrado se a área menos um lado dá $14,30$?

Solução dos matemáticos da babilônia:

1. Tome 1
2. Tome a metade de 1, que é $0;30$
3. Multiplique $0;30$ por $0;30$, que dá $0;15$
4. Some isto a $14{,}30$, que dá $14,30;15$
5. Isto é o quadrado de $29;30$
6. Some $0;30$ a $29;30$, que dá 30
7. 30 é o lado do quadrado

O resultado obtido foi que o lado do quadrado é 30.

Da mesma forma que, elaboramos o quadro para auxiliar na compreensão do problema decorrido, construímos o quadro 3, abaixo, com a mesma finalidade, ou seja, contribuir para o entendimento do desenvolvimento da solução aritmética babilônica.

Quadro 3 - Problema da Babilônia com resolução na notação sexagesimal e decimal

Problema: Qual é o lado de um quadrado se a área menos um lado dá $14,30$?				
Etapas da solução da babilônia		Solução escrita numa linguagem mais atual	Sistema de numeração	
			Sexagesimal	Decimal
1	Tome 1	Tome 1	1	1

2	Tome a metade de 1, que é $0;30$	Divida o 1 por 2 que resulta em $0;30$	$\frac{1}{2} = 0;30$	$\frac{1}{2} = 0{,}5$
3	Multiplique $0;30$ por $0;30$, que dá $0;15$	Multiplique o resultado $0;30$ por $0;30$, que resulta em $0;15$	$0;30 \,.\, 0;30 = 0;15$	$0{,}5 \,.\, 0{,}5 = 0{,}25$
4	Some isto a $14{,}30$, que dá $14,30;15$	Some o resultado $0;15$ a $14{,}30$ que dá $14,30;15$	$0;15 + 14{,}30 = 14,30;15$	$0{,}25 + 870 = 870{,}25$
5	Isto é o quadrado de $29;30$	O resultado $14{,}30;15$ é o quadrado de $29;30$	$14{,}30;15 = (29;30)^2$	$870{,}25 = (29{,}5)^2$
6	Some $0;30$ a $29;30$, que dá 30	Some $0;30$ ao resultado $29;30$, que dá 30	$0;30 + 29;30 = 30$	$0{,}5 + 29{,}5 = 30$
7	30 é o lado do quadrado	Logo, 30 é o lado do quadrado	30 é o lado do quadrado	30 é o lado do quadrado

Fonte: Elaborado pela autora a partir de Boyer (1974).

O resultado tanto no sistema sexagesimal, quanto no decimal são os mesmos, e o método da solução foi somente aritmético. Do mesmo modo que, indicamos no problema 1 uma fórmula algébrica baseada na resolução babilônica para ser usada na solução, vamos apresentá-la neste problema. Conforme Boyer (1974), esta fórmula faz parte da equação quadrática: $ax^2 + bx = c$, em que $a = 1$, $b = 1$, logo $c = 14{,}30$. Desse modo, a fórmula se encontra na última linha da segunda coluna, da esquerda para direita, no quadro 4.

Quadro 4 - Substituição algébrica no método de resolução da Babilônia

Resolução pelo método da Babilônia		Substituição algébrica no método de resolução da Babilônia
1	Tome 1	Tome b
2	Tome a metade de 1, que é $0;30$	Tome a metade de b, que é $\frac{b}{2}$
3	Multiplique $0;30$ por $0;30$ que dá $0;15$	Multiplique $\frac{b}{2}$ por $\frac{b}{2}$ que dá $(\frac{b}{2})^2$
4	Some isto a $14{,}30$, o que dá $14,30;15$	Some $(\frac{b}{2})^2$ a c que resulta em $(\frac{b}{2})^2 + c$
5	Isto é o quadrado de $29;30$	Isto $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$ é 1^2, logo temos $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} = 1$
6	Some $0;30$ a $29;30$ e o resultado é 30	Some $\frac{b}{2}$ a $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2}$
7	30 é o lado do quadrado	Ao substituir os valores dos coeficientes na fórmula $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2}$ encontra-se o valor do lado

Fonte: Elaborado pela autora a partir de Boyer (1974).

A fórmula encontrada na notação atual a partir dos comandos da resolução dos babilônios é a mesma do problema 1, a qual permite solucionar os problemas matemáticos antigos. Por conseguinte, para a solução devemos seguir as etapas do processo de resolução dos babilônios, então temos $b = 1$ e $c = 14{,}30$, em que o valor 870 é igual a $14{,}30$ no sistema de numeração da babilônia, ou seja, na base 60.

Resolução:

1ª etapa: Identificamos os valores

$$b = 1,\ c = 870$$

2ª etapa: Utilizamos a fórmula encontrada

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} + \frac{b}{2} \quad (1)$$

3ª etapa: Substituímos os valores na fórmula e efetuamos o cálculo

$$\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 870} + \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4} + 870} + 0{,}5$$

$$\sqrt{\frac{1 + 3480}{4}} + 0{,}5$$

$$\sqrt{\frac{3481}{4}} + 0{,}5$$

$$\sqrt{870{,}25} + 0{,}5$$

$$29{,}5 + 0{,}5 = 30$$

Encontramos o resultado 30, que é igual à resposta dada pelos matemáticos babilônicos, logo a partir do valor do lado do quadrado podemos verificar se a resposta está correta. Para tanto, concordamos com Boyer (1974) quando indica que o problema pode ser escrito como a equação quadrática $x^2 - x = 14{,}30$, então apresentamos abaixo um tipo de prova, ou seja, um meio para saber se, de fato, o quadrado possui 30 de lado.

Resolução:

1ª etapa: utilizamos a equação

$$x^2 - x = 14,30$$

2ª etapa: Substituímos o valor do lado e realizamos o cálculo.

$$30^2 - 30 = 14{,}30$$

$$900 - 30 = 14{,}30$$

$$870 = 14{,}30$$

3ª etapa: Substituímos o valor 870 por 14,30

$$14{,}30 = 14{,}30$$

Como a igualdade da equação, confirmou-se que o resultado está correto, sendo assim apresentamos, a seguir, o problema resolvido por meio da notação algébrica atual, ou seja, solucionamos pela a equação $ax^2 + bx - c = 0$, e utilizamos a fórmula quadrática $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Resolução:

1ª etapa: Identificamos os dados do problema e atribuímos x ao valor desconhecido

Qual é o lado de um quadrado $= x$

A área menos um lado $= 14{,}30 = 870$

área $= x^2$

Equação quadrática: $ax^2 + bx - c = 0$ (1)

Fórmula quadrática: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (2)

2ª etapa: Construímos a equação do problema com os dados

$$x^2 - x = 870 \quad (3)$$

3ª etapa: Relacionamos a equação (3) com a quadrática (1)

$$ax^2 + bx - c = 0$$

$$x^2 + x = 870$$

$$x^2 - x - 870 = 0$$

4ª etapa: Identificamos os valores dos coeficientes, que são:

$$a = 1, b = -1, c = -870$$

5ª etapa: Substituímos os valores dos coeficientes na fórmula quadrática (2) e realizamos os cálculos

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-870)}}{2.1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 3480}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{3481}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 59}{2}$$

$$x' = \frac{1 + 59}{2} = \frac{60}{2} = 30$$

$$x'' = \frac{1 - 59}{2} = \frac{-58}{2} = -29$$

O resultado é o valor do $x' = 30$.

Diante da resposta correta, podemos dizer que o método algébrico atual, também, é adequado para ser aplicado na solução de problema matemático babilônico. À vista disso, usamos os valores das raízes e do coeficiente a, para encontrarmos a equação do problema por meio da equação quadrática fatorada. Dessa maneira, a seguir, obtemos a formação da equação $x^2 + x = 14{,}30$, mediante a forma fatorada $a(x - x_1).(x - x_2) = 0$.

Solução:

1ª etapa: Identificamos as raízes, o coeficiente a da equação do problema e a forma fatorada

Equação quadrática na forma fatorada: $a(x - x_1).(x - x_2) = 0$ (1)

$$x_1 = 30,\ x_2 = -29 \text{ e } a = 1$$

2ª etapa: Utilizamos a equação fatorada (1) e efetuar os cálculos

$$a(x - x_1).(x - x_2) = 0$$

$$1(x - 30).(x - (-29)) = 0$$

$$(x - 30).(x + 29) = 0$$

$$x^2 + 29x - 30x - 870 = 0$$

$$x^2 - x = 870$$

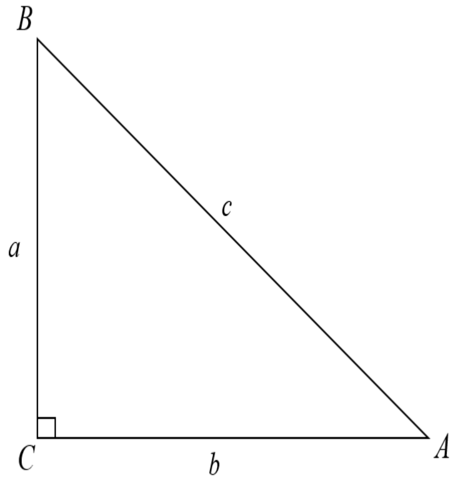
$$x^2 - x = 14{,}30$$

A equação do problema obtida com a utilização das raízes constata que é pertinente empregar a equação quadrática para solucionar problemas históricos. A seguir, apresentamos o texto matemático histórico da Tábua Plimpton 322, bem como identificamos com qual conteúdo de matemática a Plimpton 322 pode ser relacionada.

2.4.2 Texto matemático da Tábua Plimpton 322.

A Plimpton 322 possui um texto de conhecimento de trigonometria, geometria, os quais estão presentes nos conceitos matemáticos atuais. De acordo com Boyer (1974) e Eves (2011), a tábua revela uma tabela em que sua primeira coluna, da esquerda para direita, são os valores do quadrado da secante A, Sec^2A, ou seja, os valores de c^2/b^2, considerando a figura 14. Não há evidência e nem documento, o qual, comprove que os babilônios tinham conhecimento de cálculos com medida de ângulo moderno trigonométrico, entretanto acredita-se que a coluna apresenta uma sequência de secante para ângulos de aproximadamente $45° a\ 31°$, em posições decrescentes de cima para baixo, formada mediante triângulos retângulos.

Figura14 - Triângulo retângulo



Fonte: Elaborado pela autora

Segundo Boyer (1974), o primeiro número da coluna de c^2/b^2, da tabela 3, aproxima-se de $Sec^2 45°$, que é 1,983402, e o último de $Sec^2 30°$, logo essa organização matemática foi planejada trigonometricamente. Provavelmente, a elaboração da tabela iniciou-se com dois números inteiros sexagesimais regulares, que podem ser representados por $p\ e\ q$, com $p > q$, os quais formam o terno pitagórico $a = p^2 - q^2, b = 2pq$ e $c = p^2 + q^2$. Os três números obtidos a partir desses inteiros sexagesimais compõem os ternos pitagóricos. Diante disso, acreditamos que os babilônios não só conheciam o teorema de Pitágoras, como utilizavam no desenvolvimento matemático.

Para melhor compreensão do texto matemático da tábua, construímos a tabela 3 com mais três colunas, as quais identificam os possíveis números regulares de $p\ e\ q$ e o valor de $b = 2pq$ que a Plimpton possui. Dessa forma, escuremos as colunas que possuem os dados originais para diferenciá-las das colunas com os dados inseridos.

Tabela 3 – Dados da Tábua Plimpton 322 traduzidos e os valores de $p\ e\ q$

c^2/b^2	$a = p^2 - q^2$	$b = 2pq$	$c = p^2 + q^2$	Linha	p	q
1,983402	119	120	169	1	12	5
1,949158	3367	3456	4825	2	64	27
1,918802	4601	4800	6649	3	75	32
1,886247	12709	13500	18541	4	125	54

1,815007	65	72	97	5	9	4
1,785192	319	360	481	6	20	9
1,719983	2291	2700	3541	7	54	25
1,692709	799	960	1249	8	32	15
1,642669	481	600	769	9	25	12
1,586122	4961	6480	8161	10	81	40
1,562500	45	60	75	11	2	1
1,489416	1679	2400	2929	12	48	25
1,460017	161	240	289	13	15	8
1,430238	1771	2700	3229	14	50	27
1,387160	56	90	106	15	9	5

Fonte: Elaborado pela autora a partir de Boyer (1974) e Eves (2011).

Perante o exposto, a seguir, apresentamos os cálculos com os possíveis números regulares de $p\ e\ q$, da Plimpton 322, que formam os ternos pitagóricos dos triângulos retângulos. Para isso, consideramos, a figura 14, o triângulo anterior, e escolhemos os números regulares das linhas, $1, 2, 5, 6\ e\ 9$, da tabela 3 para efetuarmos o desenvolvimento do cálculo.

Linha 1: Os números regulares da Tábula Plimpton 322 são $p = 12\ e\ q = 5$

Resolução: para $p = 12\ e\ q = 5$

1ª etapa: Cálculo do valor do a

$$a = p^2 - q^2$$

$$a = 12^2 - 5^2$$

$$a = 144 - 25$$

$$a = 119$$

2ª etapa: Cálculo do valor do b

$$b = 2.p.q$$

$$b = 2.12.5$$

$$b = 120$$

3ª etapa: Cálculo do valor do c

$$c = p^2 + q^2$$

$$c = 12^2 + 5^2$$

$$c = 144 + 25$$

$$c = 169$$

O terno pitagórico formado foi $(119, 120, 169)$, em que $a = 119, b = 120, c = 169$.

Linha 2: Os números regulares da Tábua Plimpton 322 são $p = 64\ e\ q = 27$

Resolução: para $p = 64\ e\ q = 27$

1ª etapa: Cálculo do valor do a

$$a = p^2 - q^2$$

$$a = 64^2 - 27^2$$

$$a = 4096 - 729$$

$$a = 3367$$

2ª etapa: Cálculo do valor do b

$$b = 2.p.q$$

$$b = 2.64.27$$

$$b = 3456$$

3ª etapa: Cálculo do valor do c

$$c = p^2 + q^2$$

$$c = 64^2 + 27^2$$

$$c = 4096 + 729$$

$$c = 4825$$

O terno pitagórico formado foi $(3367, 3456, 4825)$, em que $a = 3367, b = 3456, c = 4825$.

Linha 5: Os números regulares da tábula Plimpton 322 são $p = 9\ e\ q = 4$

Resolução: para $p = 9\ e\ q = 4$,

1ª etapa: Cálculo do valor do a

$$a = p^2 - q^2$$

$$a = 9^2 - 4^2$$

$$a = 81 - 16$$

$$a = 65$$

2ª etapa: Cálculo do valor do b

$$b = 2.p.q$$
$$b = 2.9.4$$
$$b = 72$$

3ª etapa: Cálculo do valor do c

$$c = p + q^2$$

$$c = 9^2 + 4^2$$

$$c = 81 + 16$$

$$c = 97$$

O terno pitagórico formado foi $(72, 65, 97)$, em que $a = 65, b = 72, c = 97.$

Linha 6: Os números regulares da tábula Plimpton 322 são $p = 20\ e\ q = 9$

Resolução: para $p = 20\ e\ q = 9$

1ª etapa: Cálculo do valor do a

$$a = p^2 - q^2$$

$$a = 20^2 - 9^2$$

$$a = 400 - 81$$

$$a = 319$$

2ª etapa: Cálculo do valor do b

$$b = 2.p.q$$

$$b = 2.20.9$$

$$b = 360$$

3ª etapa: Cálculo do valor do c

$$c = p^2 + q^2$$

$$c = 20^2 + 9^2$$

$$c = 400 + 81$$

$$c = 481$$

O terno pitagórico formado foi $(319, 360, 481)$,em que $a = 319, b = 360, c = 481.$

Linha 9: Os números regulares da tábula Plimpton 322 são $p = 25\ e\ q = 12$

Resolução: para $p = 25\ e\ q = 12$, temos:

Cálculo do valor do a

$$b = p^2 - q^2$$

$$b = 25^2 - 12^2$$

$$b = 625 - 144$$

$$b = 481$$

Cálculo do valor do b

$$a = 2.p.q$$

$$a = 2.25.12$$

$$a = 600$$

Cálculo do valor do c

$$c = p^2 + q^2$$

$$c = 25^2 + 12^2$$

$$c = 625 + 144$$

$$c = 769$$

O terno pitagórico formado foi $(481, 600, 769)$ em que $a = 481, b = 600, c = 769.$

Diante do cálculo realizado e os ternos pitagóricos obtidos, pode-se discorrer que a Plimpton 322 apresenta conhecimento pitagórico mil anos antes de Pitágoras. Além disso, os documentos babilônicos evidenciam que os ternos foram usados amplamente pelos Babilônios.

2.4.3 Texto matemático da Tábua YBC 4663

O texto matemático está numa tábua que faz parte da coleção da Universidade de Yale, localizada nos EUA, identificada pela sigla YBC e o número 4663. A tábua possui conhecimento matemático que relaciona geometria e a álgebra e pode ser interpretada por meio da equação quadrática de três termos. O texto matemático solicita que sejam encontrados os lados de um retângulo, cuja a soma do comprimento e da largura é 6;30 e a área é 7;30, na base sexagesimal. Para responder, primeiramente solucionamos pelo método de resolução dos antigos matemáticos da Babilônia, em seguida, mediante a equação $ax^2 + bx - c = 0$.

Resolução dos matemáticos da Babilônia:

1. Divida $6; 30$ em 2, que resulta em $3; 15$
2. Multiplique $3; 15$ por $3; 15$, que o resultado é $10; 33{,}45$
3. Subtraia $7; 30$ de $10; 33{,}45$, que resulta em $3; 3{,}45$
4. Isto $3; 3{,}45$ é o quadrado de $1; 45$
5. Some $3; 15$ a $1; 45$, que resulta em 5, o comprimento do retângulo
6. Subtraia $1; 45$ de $3; 15$, que resulta em $1; 30$ que é a largura do retângulo

Resolução pelo método atual:

1ª etapa: Identificamos os dados do problema e atribuímos x ao valor desconhecido

$$\text{Comprimento do retângulo} = x$$

$$\text{Largura do retângulo} = \ y$$

$$\text{Soma do comprimento e da largura} = 6; 30 = 6{,}5 \text{ na notação decimal}$$

$$\text{Área} = 7;30 = 7{,}5 \text{ na notação decimal}$$

$$\text{Equação quadrática: } ax^2 + bx - c = 0 \quad (1)$$

$$\text{Fórmula quadrática: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2)$$

$$\text{Equação: } x + y = 6{,}5 \quad (3)$$

$$\text{Equação: } xy = 7{,}5 \quad (4)$$

2ª etapa: Organizamos o sistema com as equações (3) e (4)

$$x + y = 6{,}5$$

$$xy = 7{,}5$$

3ª etapa: Isolamos o y da equação (3) e formamos a equação (5)

$$y = 6{,}5 - x \ (5)$$

4ª etapa: Substituímos o valor do y da equação (5) na equação (4) e formamos a equação (6)

$$xy = 7{,}5 \ (4)$$

$$x.(6{,}5 - x) = 7{,}5$$

$$6{,}5x - x^2 = 7{,}5$$

$$-x^2 + 6{,}5x - 7{,}5 = 0 \ \ (-1)$$

$$x^2 - 6{,}5x + 7{,}5 = 0 \ \ (6)$$

3ª etapa: Relacionamos a equação quadrática (1) com a equação (6)

$$ax^2 + bx - c = 0 \ \ (1)$$

$$x^2 - 6{,}5x + 7{,}5 = 0 \ \ (6)$$

4ª etapa: Identificamos os valores dos coeficientes da equação (6) que são:

$$a = 1, b = -6{,}5,\ c = 7{,}5$$

5ª etapa: Substituímos os valores dos coeficientes na fórmula quadrática (2) e realizamos o cálculo

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-6{,}5) \pm \sqrt{(6{,}5)^2 - 4.1.(7{,}5)}}{2.1}$$

$$x = \frac{6{,}5 \pm \sqrt{42{,}25 - 30}}{2}$$

$$x = \frac{6{,}5 \pm \sqrt{12{,}25}}{2}$$

$$x = \frac{6{,}5 \pm 3{,}5}{2}$$

$$x_1 = \frac{6{,}5 + 3{,}5}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{6{,}5 - 3{,}5}{2} = \frac{3}{2}$$

O comprimento x mede 5 e a largura é obtida com a equação (5)

$$y = 6{,}5 - x$$

$$y = 6{,}5 - 5$$

$$y = 1{,}5$$

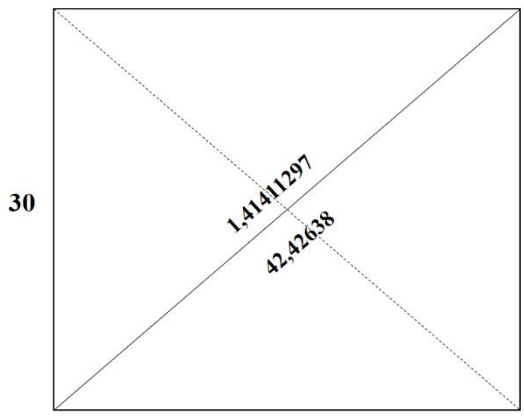
A partir do resultado, certificamos que o problema histórico é possível de ser solucionado por meio algébrico. A seguir, discorremos a respeito de um texto matemático em que pode ser empregar o teorema de Pitágoras para encontrar a diagonal de um quadrado.

2.4.4 Texto matemático da Tábua YBC 7289

O texto matemático está numa Tábua da coleção de Yale identificada pelo número 7289, o qual foi escrito aproximadamente em 1600 a.C. Esse revela que os babilônios calcularam o valor, $1{,}41421297$ como resposta para $\sqrt{2}$ e o número, aproximado, $42{,}42638$ para a diagonal de um quadrado de lado 30. Sendo assim, realizamos o cálculo para encontrar a diagonal, mas para isso, construímos o quadrado, figura 15, com os dados matemáticos da tábua na nossa notação, e calculamos a diagonal com o valor $1{,}41421297$ da $\sqrt{2}$, dado pelos babilônios e logo após calculamos a diagonal só com o valor 30 do lado.

Resolução:

Figura 15 - Dados traduzido da Tábua YBC 7289



Fonte: Elaborada pela autora a partir de Boyer (1974)

Cálculo da diagonal com os valores dados pelos babilônios.

Resolução:

1ª etapa: Identificamos os dados para encontrar o valor da $\sqrt{2}$

$$\text{Lado do quadrado} = l = 30$$

$$\text{Diagonal} = d$$

2ª etapa: aplicamos o teorema de Pitágoras

$$d^2 = l^2 + l^2$$

$$d^2 = 2l^2$$

$$d = \sqrt{2l^2}$$

$$d = l\sqrt{2}$$

3ª etapa: Inserimos o valor 30 do lado e da $\sqrt{2}$ dada pelos babilônios e calculamos a diagonal

$$d = l\sqrt{2}$$

$$d = 30\ .\ 1{,}41421297$$

$$d \cong 42{,}42638$$

Cálculo da diagonal com o valor 30 do lado do quadrado:

1ª etapa: Aplicamos o teorema de Pitágoras e realizamos o cálculo

$$d^2 = l^2 + l^2$$

$$d^2 = 30^2 + 30^2$$

$$d^2 = 900 + 900$$

$$d^2 = 1800$$

$$d = \sqrt{1800}$$

$$d \cong 42{,}426406$$

Os resultados obtidos após o desenvolvimento dos cálculos são quase semelhantes, à vista disso, podemos dizer que a matemática da Babilônia tem potencial didático-pedagógico para contribuir com a construção de conhecimento matemático. De acordo com Boyer (1974), o conhecimento babilônico a respeito do teorema de Pitágoras, não se limita ao triângulo retângulo isósceles, uma vez que o texto matemático da Tábua BM 85196 revela a possibilidade de aplicação do teorema na solução do problema.

2.4.5 Problema matemático da Tábua BM 85196

Segundo Boyer (1974), a Tábua BM 85196 tem o seguinte problema matemático: uma escada de 0;30 unidades de comprimento está apoiada a uma parede. Qual é a medida que a extremidade inferior se afastará da parede se a superior escorregar para baixo a uma distância de 0;6 unidades? A resposta, primeiramente foi apresentada pelo método aritmético dos matemáticos babilônicos, no sistema de numeração sexagesimal, logo após foi solucionado o problema por meio do teorema de Pitágoras, na base 10, para tal elaboramos um triângulo, figura16, com os dados do texto matemático.

Solução dos matemáticos da babilônia:

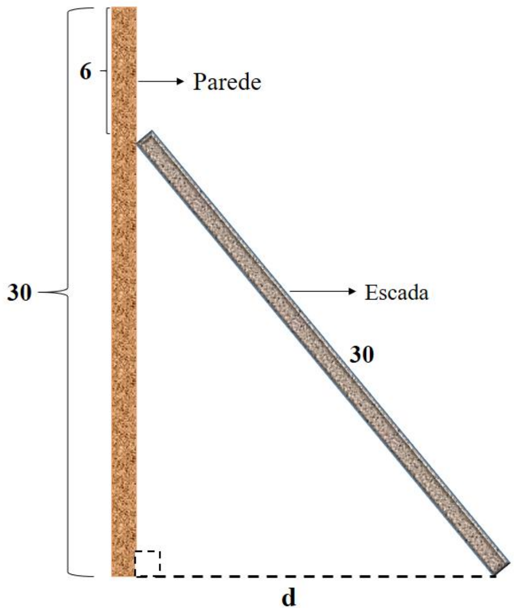
1. Multiplique $0;30$ por $0;30$, que dá $0;15$
2. Subtraia $0;6$ de 0;30, que dá $0;24$
3. Multiplica $0;24$ por $0;24$, que dá $0;9{,}36$
4. Subtraia $0;9{,}36$ de $0;15$, que dá $0;5{,}24$
5. A raiz quadrada de $0;5{,}24$ é $0;18$

A resposta encontrada pelos babilônios foi $0;18$, que podemos interpretar como 18 unidades. Seguidamente, apresentamos a resolução do problema por meio do Teorema de Pitágoras.

Solução pelo método do teorema de Pitágoras:

1ª etapa: Construímos a figura geométrica a partir do texto matemático

Figura 16 - Triângulo retângulo construído a partir dos dados da Tábua BM 85196



Fonte: Elaborada pela autora

2ª etapa: Identificamos os valores do texto matemático e construímos a equação

$$\text{Comprimento da escada: } c = 30$$

$$\text{Altura da parede: } p = 30 - 6$$

$$\text{Distância inferior afastada da parede} = d$$

$$\text{Equação: } c^2 = p^2 + d^2 \quad (1)$$

3ª etapa: Aplicamos o teorema de Pitágoras e realizamos o cálculo

$$c^2 = p^2 + d^2 \qquad (1)$$

$$30^2 = (30 - 6)^2 + d^2$$

$$900 = 24^2 + d^2$$

$$900 = 576 + d^2$$

$$d^2 = 900 - 576$$

$$d^2 = 324$$

$$d = \sqrt{324}$$

$$d = 18$$

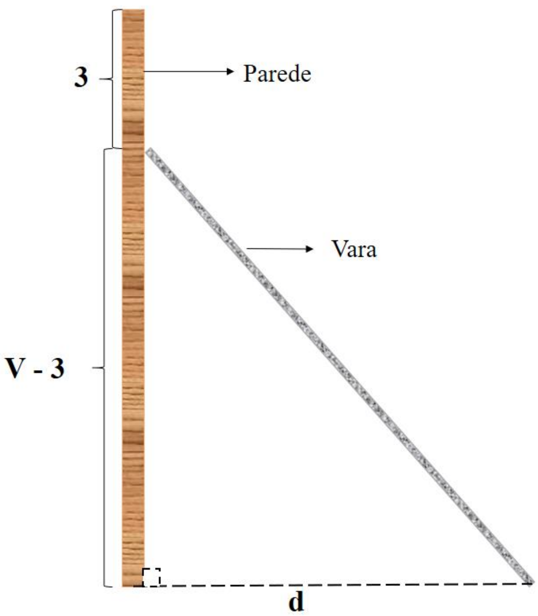
A resposta encontrada foi que a parte inferior se afastará em 18 unidades da parede. Texto matemático como esse, continuaram sendo resolvidos 1500 anos depois na região da Babilônia, por exemplo, numa tábua selêucida foi encontrada o seguinte problema matemático: uma vara está apoiada a uma parede, seu topo escorrega de três unidades quando a extremidade inferior se afasta da parede de nove unidade, qual é o comprimento da vara? A resposta dada pelos babilônios foi de 15 unidades.

Assim, realizamos o cálculo com uso do teorema de Pitágoras, e construímos o triângulo retângulo, figura 17, com base nos dados do texto matemático.

Resolução:

1ª etapa: Construímos a figura geométrica a partir dos dados do texto matemático

Figura 17: Triângulo retângulo construído a partir dos dados da tábua selêucida



Fonte: Elaborada pela autora

2ª etapa: Identificamos os valores do texto matemático e formamos a equação

$$\text{Comprimento da vara} = v$$

Unidade que desceram da parede $= v - 3$

Distância inferior afastada da parede $d = 9$

Equação construída a partir do teorema de Pitágoras: $v^2 = (v-3)^2 + d^2$ (1)

3ª etapa: Utilizamos a equação (1) e desenvolvemos o cálculo

$$v^2 = (v-3)^2 + d^2$$

$$v^2 = (v-3)^2 + 9^2$$

$$v^2 = v^2 - 2.v.3 + 9 + 81$$

$$v^2 = v^2 + 6v + 90$$

$$v^2 - v^2 = 6v + 90$$

$$0 = 6v + 90$$

$$6v = -90$$

$$v = \frac{90}{6}$$

$$v = 15$$

O comprimento da vara é de 15 unidades, esse foi o resultado dado pelos babilônios e está exato.

Perante o exposto, acreditamos que os problemas históricos matemático tanto do Egito quanto da Babilônia são constituídos de potencialidades didáticas e por essa razão podem ser inseridos na prática de ensino de matemática. Sendo assim, apresentaremos no capítulo seguinte, as potencialidades dos textos e problemas históricos da matemática do Egito e da Babilônia.

3 POTENCIAL DIDÁTICO DE TEXTOS E PROBLEMAS HISTÓRICOS DO EGITO E DA BABILÔNIA

Os textos e os problemas históricos matemáticos do Egito e da Babilônia constituem uma fonte valiosa de potenciais didáticos para a prática educativa em sala de aula. À vista disso, inferimos que a História da Matemática pode estar presente na prática docente, pois a aplicação do desenvolvimento histórico de conteúdos matemáticos resgata a identidade cultural da sociedade e fornece dados que contribuem para um aprendizado significativo. Dessa forma, selecionamos os problemas do Papiro de Rhind da matemática do Egito e os problemas da Tábua BM 13901 e da Plimpton 322 da matemática da Babilônia para identificar e indicar as potencialidades didáticas que possuem. Nessa linha, construímos atividades didáticas que possibilitam a exploração das potencialidades do uso da História da Matemática no ensino de matemática na Educação Básica.

3.1 Identificação das potencialidades didáticas dos textos e problemas históricos

Ao realizarmos o estudo, constatamos que os textos e os problemas históricos da matemática do Egito e da Babilônia dispõem de potencial didático que contribui para o ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos escolares. Ademais, os problemas históricos podem ser utilizados como estratégia pedagógica no ensino e aprendizagem em sala de aula.

Brandemberg (2017b) apresenta como estratégia abordagens para o uso da História da Matemática como componente metodológico. As abordagens podem ser cronológicas, tópicos selecionados ou evolução de conceitos, buscando-se, na história da matemática, a descrição de fatos, fenômenos e “eventos de cunho cultural e social, na forma escrita, oral ou arqueológica” (BRANDEMBERG, 2017b, p.22).

Conforme Brandemberg (2020), os aspectos como facilitar, promover e ampliar o conhecimento matemático, relacionados ao uso da História da Matemática como componente metodológico, são os que devem ser considerados e trabalhados na sala de aula.

> O aspecto facilitador se institui das possibilidades de resolução de problemas matemáticos utilizando mais de um método, dos desenvolvidos historicamente, que permitem o uso, a adequação e a comparação das estratégias de resolução quando confrontados. O aspecto promotor se estabelece das possibilidades que a história nos traz de transitarmos, via conteúdos (objetos, processos) matemáticos, entre os universos acadêmico, escolar e cotidiano do conhecimento matemático (BRANDEMBERG, 2020, p. 268).

A ampliação dos conhecimentos matemáticos é promovida por meio do uso da História da Matemática, sendo oportunizado ao professor e ao aluno conhecer “diferentes enunciados, usos e aplicações de conceitos matemáticos” (BRANDEMBERG, 2020, p.268).

Segundo Mendes e Chaquiam (2016), a História da Matemática é uma possível "abordagem didática" que pode ser utilizada por meio de atividade no ensino em sala de aula.

> Umas das maneiras de fazer isso é revisar da melhor forma os momentos históricos que envolvem os personagens que conceberam as noções matemáticas que se pretende ensinar, de modo a desafiar a capacidade dos alunos para exercitarem estudos, pesquisas e problematizações que estimulem suas estratégias de pensamento e, daí culminar na sua produção de conhecimento durante a atividade de estudar (MENDES; CHAQUIAM, 2016, p. 12).

Tal abordagem possibilita ao aluno conhecer o contexto em que a matemática foi produzida, ampliando, assim, o conhecimento, obtendo explicação dos conceitos matemáticos que o discente deve aprender.

Considerando o exposto, percebemos que a História da Matemática é potencialmente viável de ser utilizada no ensino-aprendizagem de conceitos matemáticos escolares. Nesse sentido, concordamos com Brandemberg (2021) em incentivar um ensino de conteúdos matemáticos que "considere a exploração de aspectos teóricos e metodológicos, resgatados de textos históricos, configuradas em atividades de apresentação e resolução de problemas, trabalhadas de forma objetiva com nossos estudantes" (BRANDEMBERG, 2021, p.32).

Do mesmo modo, Brandemberg (2017b, p. 28) ressalta que uma forma de realização dessa prática é elaborar atividades de "cunho histórico" que possuem aspectos do conceito de função, conceito do teorema de Pitágoras, problemas do Papiro de Rhind, dentre outros.

Assim, de acordo com os argumentos de Miguel (1997), Mendes e Chaquiam (2016), Brandemberg (2017b), Brandemberg (2020) e Brandemberg (2021), foi possível percebermos a presença de múltiplas potencialidades, contudo, aqui destacamos e indicamos quatro das potencialidades investigadas e identificadas dos textos e dos problemas históricos da matemática do Egito e da Babilônia:

1. Viabilizam o desenvolvimento do conceito da equação Polinomial do 1º grau;
2. Possibilitam o desenvolvimento do conceito da equação quadrática;
3. Oportunizam o aluno a desenvolver o conceito do teorema de Pitágoras;
4. Viabilizam o desenvolvimento de habilidades previstas na BNCC.

A primeira potencialidade, "viabilizam o desenvolvimento do conceito da equação polinomial do 1º grau", está presente em diversos problemas históricos, no entanto vamos destacar no Papiro de Rhind. A segunda potencialidade, "possibilitam o desenvolvimento do conceito da equação quadrática", é evidenciada nos problemas históricos da Tábua BM 13901, a qual apresenta a solução dos matemáticos babilônicos realizada por meio aritmético. A terceira potencialidade, "oportunizam o aluno a desenvolver o conceito do teorema de

Pitágoras", percebemos em vários textos e problemas histórico, contudo destacamos a presença no texto matemático da Tábua Plimpton 322, que possui diversos ternos pitagóricos.

A quarta potencialidade, "viabilizam o desenvolvimento de habilidades prevista na BNCC", foi construída de acordo com o estudo realizado na História da Matemática do Egito e da Babilônia, em que verificamos que os textos e os problemas possuem conhecimento matemático que pode ser relacionado com ao conteúdo escolar presente na BNCC. Por conseguinte, essas potencialidades estão em conformidade com os argumentos histórico-pedagógicos apresentados pelos autores, que referenciamos, com isso, concordamos com esses quando corroboram que inserir a História da Matemática no processo de ensino-aprendizagem viabiliza a compreensão e a significação do conhecimento matemático.

Diante disso, a seguir, apresentamos as relações das potencialidades com os textos e problemas históricos e as sugestões de atividades que podem ser aplicadas no ensino de matemática na Educação Básica.

3.2 Potencialidade didática dos problemas históricos do Papiro de Rhind

O Papiro de Rhind é um texto matemático que possui problemas históricos aritméticos, algébricos e geométricos. Os problemas aritméticos são de diferentes tipos, há os que são referentes às frações; os algébricos podem ser interpretados pela equação polinomial do primeiro grau, regra de três, sistema linear, dentre outros, e os geométricos são referentes ao cálculo de área, volume e alturas.

No período que o Papiro de Rhind foi escrito, eram medidas alturas de triângulo e de monumentos, calculada a área de quadrado e de círculo, tanto que os matemáticos egípcios igualaram a área do quadrado de lado $8/9$ à de um círculo de raio 1, o que ficou conhecido, posteriormente, como a "Quadratura do Círculo". Desenvolvimento matemático semelhante a esse que se buscava calcular ad medidas de comprimento, de área, e encontrar valor desconhecido está presente no contexto histórico da matemática do antigo Egito. Dessa forma, vamos relacionar a "potencialidade de viabilizar o desenvolvimento do conceito da equação polinomial do 1º grau" aos problemas que possuem a palavra *aha* para um número desconhecido, a qual foi atribuída pelos matemáticos egípcios.

A potencialidade de viabilizar o desenvolvimento do conceito da equação polinomial do 1º grau está presente tanto nos problemas históricos do Egito, quanto nos da Babilônia, no entanto, vamos destacá-la nos problemas do Papiro de Rhind, os quais são: "aha, seu sétimo, fazem 19"; "aha, seu meio, fazem 16"; "aha, seu quarto, fazem 15"; "aha, seu quinto, fazem 21" (BOYER, 1974, p.12). Esses problemas históricos foram solucionados pelos antigos matemáticos egípcios de forma aritmética equivalente ao denominado "Método de Falsa Posição"; tais problemas apresentam valores desconhecidos (incógnitas) que devem ser encontrados, com isso, a resposta está em função de encontrar essas incógnitas, e esse fato permite que os problemas sejam solucionados mediante o uso de um processo que atualmente equivale a resolver uma equação polinomial do primeiro grau.

São problemas históricos que conduzem o aluno a pesquisar e a buscar o valor desconhecido, assim, são meios que oportunizam ao estudante a desenvolver habilidade que contribui para a construção do conhecimento matemático. Dessa forma, apresentamos, a seguir, uma atividade que o professor pode utilizar no ensino de matemática em sala de aula.

3.2.1 Atividade a partir dos problemas históricos do Papiro de Rhind

Os problemas históricos do Papiro de Rhind podem ser usados diretamente relacionados ao conteúdo da matemática escolar. Sendo assim, para mostrarmos de que forma o docente pode explorar a potencialidade em sala de aula, propomos a possibilidade de o professor utilizar os problemas quando for ministrar o conteúdo equação polinomial do 1º grau. Para tal, o educador pode construir uma atividade com um texto baseado na história dos problemas do papiro de Rhind e relacioná-lo ao conteúdo matemático escolar.

Construímos um tipo de atividade, no quadro 5, que pode ser inserida no ensino de matemática na escola. Para elaborar a atividade, optamos pela estratégia pedagógica de utilizar um tema de cunho histórico, nesse caso, intitulada como: "Equação no Papiro de Rhind", cujo texto, inicialmente, revela informações acerca do papiro.

Quadro 5 - Atividade com texto matemático histórico do Papiro de Rhind

Atividade
Equação no Papiro de Rhind O Papiro de Rhind é considerado uma fonte de matemática egípcia antiga, o qual é um texto matemático que contém 85 problemas copiados pelo escriba Ahmes, que escreveu-o aproximadamente em 1650 a.C. O Papiro é uma planta de origem do Egito, cujo seu caule era cortado em tiras finas, que eram posicionadas uma ao lado da outra de forma cruzada para formar uma folha. As folhas passavam por um processo para compor um tipo de papel, eram humedecidas e depois prensadas e colocadas ao sol para secar, dessa forma, formava-se um papel no qual eram realizados os registros da época. O Papiro de Rhind possui alguns problemas matemáticos que podem ser solucionados algebricamente por meio de equação, e contém a palavra egípcia "aha" que na notação atual significa uma quantidade. A fase da álgebra desse período era retórica, isto é, no estudo, não eram utilizados símbolos. Vejamos alguns problemas da época. 1) Resolva os problemas históricos do Papiro de Rhind de forma aritmética por meio do método da falsa posição e pela forma atual com o auxílio da álgebra.

a) Problema 24 do papiro: “aha, seu sétimo, fazem 19”.
b) Problema 25 do papiro: “aha, seu meio, fazem 16”.
c) Problema 26 do papiro: “aha, seu quarto, fazem 15
d) Problema 27 do papiro: “aha, seu quinto, fazem 21”.

Fonte: Elaborado pela autora a partir de Boyer (1974).

Para a aplicação da atividade, propomos que o professor siga as seguintes etapas: primeiro apresente aos alunos um problema histórico, a exemplo, “aha, seu sétimo, fazem 19”, nesse momento, pergunte aos discentes como o problema pode ser solucionado, explicando o que é uma incógnita, e informe-os que o problema histórico é possível de ser resolvido por meio de equação, mas que os antigos matemáticos solucionavam de forma aritmética. Em seguida, aborde o contexto histórico da matemática do Egito e apresente o conteúdo equação polinomial do 1º grau, aos alunos, logo após aplique a atividade.

Ao entregar a atividade numa apostila para o aluno exercitar, o professor explica o texto histórico do papiro e solicita que o discente escreva em cada problema como ele pode ser representado na forma atual, em seguida, comunica-o que resolva os problemas pelo método de falsa posição e pela forma atualmente utilizada em sala de aula. Dessa maneira, o docente poderá, com o aluno, discutir qual é o método de resolução mais fácil e se há outras formas de solução.

Após a discussão, o docente pode solicitar ao estudante que elabore e resolva problemas iguais aos do papiro e utilize a linguagem dos antigos matemáticos na elaboração, ou seja, a palavra “aha” para representar a quantidade desconhecida. Assim, o discente desenvolverá habilidades de elaboração e resolução de problemas, assim como enriquecerá o conhecimento matemático com o contexto histórico dos problemas (BRANDEMBERG, 2020).

Diante disso, acreditamos que os problemas históricos têm potencial para promover a apreensão de significados matemáticos para serem usados em outros contextos, uma vez que possuem relações que podem ser utilizadas na construção de conhecimentos. Nesse sentido, o discente pode desenvolver habilidades de reflexão, questionamento e construção de problemas matemáticos a partir da História da Matemática, que pode ser a base para elaboração de “novos” problemas em sala de aula, com novas “roupagens” na elaboração. Para exemplificar, construímos e organizamos, no quadro 6, problemas do cotidiano atual com base nos dados contidos nos problemas históricos.

Quadro 6 - Problemas matemáticos do cotidiano atual construídos a partir de dados do Papiro de Rhind

Problemas construídos		
Problema Históricos	Contexto utilizado	Problema construído do cotidiano atual
Aha, seu sétimo, fazem 19	Compra de açaí em paneiro	Pedro foi comprar 19 paneiros de açaí, mas, ao chegar ao local da compra, havia apenas certa quantidade. Para completar o total, Pedro comprou do vendedor João mais um sétimo dessa quantidade. Qual era a quantidade existente?
Aha, seu meio, fazem 16	Venda de comidas típicas	Maria comprou um tacacá no valor de R$ 16,00, ao pagar, descobriu que na sua carteira, havia uma quantia, cujo valor não era suficiente para o pagamento. Para completar o preço do tacacá, ainda faltava a metade da quantia que possuía. Qual era a quantia que Maria possuía?
Aha, seu quarto, fazem 15	Feira de venda de frutas	Joana encomendou 15 cupuaçus ao João, quando foi buscar as frutas na barraca da feira, o vendedor entregou uma quantia menor que a do encomendado. Joana percebeu que, para completar o total de cupuaçu, faltava um quarto da quantia que recebeu. Qual foi a quantia que João entregou?
Aha, seu quinto, fazem 21	Meios de transporte do cotidiano do estudante	Um passageiro solicitou no aplicativo *UBER* uma corrida, a qual teve o valor de R$ 21,00. Quando o cliente chegou ao seu destino, percebeu que havia na carteira uma quantia inferior ao da corrida, para completar o pagamento, faltava mais um quinto dessa quantia. Quanto o passageiro tinha na carteira?

Fonte: Elaborado pela autora a partir de Boyer (1974).

Os problemas matemáticos do cotidiano, elaborados a partir dos problemas históricos validam que a História da Matemática possui potencial didático que pode ser explorado no processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos na Educação Básica.

Como Brandemberg (2020) ressalta, a elaboração e a resolução de atividades de cunho histórico envolvendo problemas práticos e “deve nos permitir em época de discussão educativa voltada para a postura de um cidadão consciente de sua participação efetiva na sociedade, maior identificação com as problematizações do século XXI” (BRANDEMBERG, 2020, p. 282).

Desse modo, consideramos que a própria História da Matemática pode direcionar o desenvolvimento da prática educativa escolar, ou seja, fazer parte do ensino em sala de aula. Assim, com essa motivação, elaboramos uma orientação, nos moldes do tratado por Mendes e Chaquiam (2016) e Brandemberg (2020), buscando explicar como o docente pode usar os problemas históricos no ensino de matemática.

A orientação, no quadro 7, encontra-se dividida em etapas, todavia, como exemplo, identificamos o ano do Ensino Fundamental que os problemas podem ser utilizados, a unidade temática com seu objeto de conhecimento, a habilidade a ser desenvolvida, o possível recurso didático e o meio de avaliação.

Quadro 7 - Orientação de como o professor pode utilizar os problemas históricos do Papiro de Rhind no ensino de matemática

Nível: Ensino Fundamental	Ano : 7º
História da Matemática	Problemas históricos do Papiro de Rhind
Unidade temática	Álgebra
Objeto de conhecimento	Equação polinomial do 1º grau
Habilidades	(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade.
Recurso didático	Apostila com textos históricos e o conteúdo a ser ministrado, projetor multimídia e outros.
Desenvolvimento da aula	
Como o docente pode usar os problemas históricos em sala de aula	
1ª etapa	Iniciar a aula com um problema histórico. Neste momento, perguntar aos estudantes de que forma o problema pode ser resolvido, e reforçar o que é uma incógnita. Discorrer acerca da História da Matemática relacionada ao conteúdo e comunicar aos alunos que o problema pode ser representado por uma equação.
2ª etapa	Abordar o conteúdo equação polinomial do 1º grau. Apresentar o assunto e mostrar aos alunos como os problemas históricos podem ser solucionados por meio de uma equação. Explicar que os antigos matemáticos solucionavam os problemas pelo método da falsa posição.
3ª etapa	Entregar ao aluno a apostila com os problemas históricos e solicitar que os resolva pelo método da falsa posição e o atual. Após a resolução, incentivar o aluno a elaborar problemas semelhantes aos da apostila e requisitar que os resolva da forma que lhe agradar.
4ª etapa	Solicitar que o discente elabore problemas do cotidiano atual baseados nos dados e nas relações matemáticas dos problemas históricos.
Avaliação	Realizar por meio da atividade proposta .

Fonte: Elaborado pela autora.

A nossa orientação é uma possibilidade de uso dos problemas históricos na prática de ensino em sala de aula, a qual, também, indica de que forma é possível realizar a avaliação escolar. Nesse sentido, na primeira etapa, a aula pode ser iniciada com problema histórico, para que assim possa ser introduzida a História da Matemática e relacionada ao conteúdo proposto. No decorrer desse momento, o professor discorre a respeito dos problemas históricos, relaciona-os com o assunto equação polinomial do 1º grau e ainda pode realizar uma revisão do que é uma incógnita.

No segundo momento, o professor abordará o conteúdo equação polinomial do 1º grau, visto que os alunos já foram, na primeira etapa, estimulados a saber o que é o conteúdo e assim o docente resolve um problema histórico por meio de equação e explica ao aluno que os antigos matemáticos solucionavam os problemas pelo método da falsa posição. Em seguida, o docente soluciona o problema de acordo com esse método e propõe exercícios com problemas históricos.

Na terceira etapa, o docente entrega ao aluno a apostila com atividades acerca dos problemas e o texto histórico associado ao conteúdo ministrado e solicita-o que resolva os problemas pelos métodos estudados. Depois de o aluno concluir as resoluções, o professor elabora, em sala de aula, problemas semelhantes aos apresentados e solicita que os discentes façam o mesmo, com isso, eles desenvolverão a habilidade de resolver e elaborar problemas matemáticos.

Nessa perspectiva, Brandemberg (2017b) corrobora que o estudante deve exercitar a elaboração e a prática de atividades de cunho histórico, as quais podem ser elaboradas com tema e objetivos ligados à obtenção do conhecimento matemático e “devem sim, ser conectadas aos aspectos cotidianos, escolares e acadêmicos da cultura matemática” (BRANDEMBERG, 2017b, p. 28).

Dessa maneira, no quarto momento da aula, o professor incentiva o discente a elaborar problemas do cotidiano atual baseado nos dados e nas relações matemáticas dos problemas históricos, assim o aluno desenvolverá autonomia e habilidade de construção de conhecimento.

Para motivar o aluno a construir o seu conhecimento, o docente elabora um problema em sala de aula semelhante aos que estão no quadro 6 e, em seguida, solicita ao discente que faça o mesmo e depois resolva-os. Essa prática permitirá o discente perceber que a matemática é parte do seu cotidiano. A avaliação, nesse caso, é formativa, ou seja, o aluno é avaliado durante a aula, no desempenho de suas atividades em sala. Nesse momento, o professor, também, avalia-se, verificando no decorrer da aula se os objetivos estão sendo alcançados, para saber se deve utilizar outra estratégia de ensino ou não.

Diante do exposto, os problemas históricos têm potencialidade de direcionar a prática de ensino de matemática, pois são conhecimentos matemáticos que viabilizam a construção e a resolução de problemas do cotidiano atual para serem usados em sala de aula. Dessa maneira, concordamos com Brandemberg (2020) quando afirma:

> incentivamos um ensino de conteúdos matemáticos que considere a exploração de aspectos metodológicos, resgatados de fontes históricas, na configuração de atividades de resolução de problemas a serem trabalhadas de forma objetiva com nossos estudantes e que considere o uso de textos históricos como elementos de destaque nos processos de ensino (BRANDEMBERG, 2020, p. 282).

Por conseguinte, os problemas históricos da matemática do Egito podem ser empregados no ensino-aprendizagem de matemática na Educação Básica. Assim, do mesmo modo que discorremos a respeito do Papiro de Rhind, apresentamos, a seguir, a relação das potencialidades com os textos e os problemas históricos da Tábua BM 13901.

3.3 Potencialidade didática dos problemas históricos da Tábua BM 13901

A potencialidade de viabilizar o desenvolvimento do conceito da equação quadrática é destacada nos problemas históricos da Tábua BM 13901, pois os dados matemáticos que a tábua contém são possíveis de serem interpretados e escritos na forma de equação quadrática. A exemplo, os problemas históricos: "Qual é o lado de um quadrado se a área menos um lado dá 14, 30?" e o "Adicionei a área e o lado de um quadrado, obtive 0,45", possuem a potencialidade indicada. Diante disso, utilizar os problemas históricos no ensino de matemática em sala de aula e ensinar a resolução que os matemáticos antigos da Babilônia praticavam oportunizará ao aluno aprender a solucionar esses tipos de problemas não só de forma algébrica, mas também por meio aritmético.

Portanto, os problemas históricos da Tábua BM 13901 dispõem de potencialidades que contribuem para o ensino e aprendizagem escolar, sendo assim, vamos apresentar, a seguir, uma sugestão de atividade didática para aula de matemática na Educação Básica.

3.3.1 Atividade a partir dos problemas históricos da Tábua BM 13901

A atividade elaborada a partir do texto matemático histórico BM 13901 menciona uma das diversas formas que os problemas históricos podem ser utilizados em sala de aula. Para tanto, a aplicação da atividade deve ser realizada depois que o professor explanar, em sala aula, quais são os problemas da Tábua BM 13901 e de que forma eram solucionados pelos matemáticos da Babilônia. Essa explanação pode ocorrer por meio de recurso didático como apostila ou livro com o conteúdo, que o aluno pode ter o acesso para assim pesquisar sobre o objeto de conhecimento proposto.

O recurso didático preferencialmente deve conter elementos do contexto histórico da matemática da Babilônia, com a forma que era realizada a resolução dos problemas pelos babilônios e a informação que esses utilizavam como auxílio na resolução as tábuas com tabelas de cálculos de quadrados, de multiplicação e de inversos multiplicativos.

No momento da aula, o professor explica como os matemáticos da Babilônia, por meio aritmético, solucionavam a equação quadrática de três termos, bem como desenvolve a forma que atualmente é utilizada na escola. Sendo assim, a atividade, no quadro 8, a seguir, é uma possibilidade que pode ser empregada no ensino de matemática relacionado à equação quadrática.

Quadro 8- Atividade com problemas históricos da Tábua BM 13901

Atividade
Equação quadrática da tábua BM 13901 A Tábua BM 13901 faz parte de uma coleção de tábuas de textos matemáticos que datam aproximadamente em 1800 a.C. A matemática presente nas tábuas da Babilônia envolve cálculo e medidas que podem ser usados em problemas de natureza econômica ou em problemas de característica algorítmica e aritmética. Os textos históricos também possuem conhecimento matemático de: geometria; álgebra, com raízes quadradas, raízes cúbicas; progressões geométricas; tabelas de multiplicações e de seus recíprocos; conversão de pesos e medidas; sequência de potência de números. Os matemáticos babilônicos resolviam equações quadradas por meio aritmético e possivelmente pelo método de completar quadrado. O desenvolvimento da solução dos problemas revela que os babilônios tinham facilidade em utilizar a álgebra e sabiam transportar termos em uma equação somando iguais a iguais, ademais, multiplicavam ambos os membros por quantidades iguais para remover frações ou eliminar fatores. O conteúdo matemático da BM 13901 pode ser interpretado através de equação quadrática, sendo assim, vamos solucionar os seguintes problemas históricos: a) O lado de um quadrado se a área menos o lado dá 14,30. b) Adicionei a área e o lado de um quadrado, obtive 0,45. c) Subtraí o terço da área e depois somei o terço do lado do quadrado à área restante, obtive 0; 20. d) Somei sete vezes o lado do meu quadrado e onze vezes a sua superfície, obtive 6;15.

Fonte: Elaborado pela autora a partir de Boyer (1974).

Essa atividade, também contribuirá para o aluno desenvolver habilidades de resolução de problema e fazer comparação das estratégias de resolução aritmética e algébrica. Além disso, o discente terá oportunidade de conhecer diferentes formas de resolução de equação quadrática e selecionar para fazer uso a forma de solução que melhor se adapta.

Nessa atividade, o contexto a respeito da matemática da Babilônia desempenha o papel de fazer referência e atualizar o aluno sobre qual conhecimento matemático será trabalho em sala de aula. Assim, ao empregar o contexto na atividade antes dos problemas históricos, o professor incentiva o aluno a obter mais conhecimento acerca da matemática da Babilônia.

Nesse seguimento, apresentamos, posteriormente, o potencial didático do texto histórico da Tábua Plimpton 322, a qual é um excelente texto matemático que o professor pode utilizar no contexto escolar.

3.4 Potencialidade didática do texto matemático da Tábua Plimpton 322

O texto matemático da Tábua Plimpton 322 pode ser interpretado e descrito matematicamente como ternos pitagóricos, com isso, é possível dizer que a tábua tem potencialidade de possibilitar que o aluno desenvolva o conceito do teorema de Pitágoras. Dessa maneira, utilizar o texto matemático no ensino escolar de matemática, viabilizará o aluno relacionar o conteúdo da tábua ao teorema de Pitágoras.

Considerando exposto, a Plimpton 322 pode ser utilizada na prática educativa quando o professor for ministrar aula de geometria em que estiver relacionada ao teorema de Pitágoras. Diante disso, há possibilidade de empregar o texto matemático tanto no Ensino Médio, quanto no Ensino Fundamental, nesse sentido, elaboramos, em seguida, uma atividade de como o docente pode utilizar os textos no ensino de matemática em sala de aula.

3.4.1 Atividade a partir do texto matemático da Tábua Plimpton 322

A atividade foi elaborada com texto matemático da Tábua |Plimpton 322 relacionado aos ternos pitagóricos, a estratégia pedagógica adotada foi construir a atividade com tema de cunho histórico intitulado: A Tábua Plimpton 322 e o ternos de Pitágoras. Sendo assim, organizamos a atividade, no quando 9, com o tema e as questões que foram construídas a partir do conteúdo matemático que se encontra no texto histórico.

Quadro 9 - Atividade com texto matemático da Tábua Plimpton 322

Atividade
A Tábua Plimpton 322 e o ternos de Pitagóricos A matemática da Babilônia possui conhecimento que utilizamos atualmente em sala de aula. Em uma das cidades da Babilônia antiga, localiza ao sul do Iraque, foi encontrada uma tábua de argila chamada Plimpton322, escrita entre 1900 e 1600 a.C., que contém resultados de cálculos semelhantes aos ternos pitagóricos. A Plimpton 322 é considerada a mais antiga tábua trigonométrica, a qual mostra que os babilônios foram os primeiros matemáticos a sistematizar a trigonometria, podem ter calculado os ternos pitagóricos e possivelmente conheciam o teorema de Pitágoras. O texto matemático possui quinze linhas e quatro colunas de números escritos em cuneiforme, com uso do sistema sexagesimal, e revela que os

babilônios formavam os triângulos retos por meio de uma trigonometria baseada no conceito de razão matemática e não em ângulos e circunferência, ou seja, utilizavam somente relações geométricas. Acredita-se que os matemáticos da Babilônia já usavam os ternos pitagóricos 1000 anos antes do Pitágoras, nesse sentido, faz-se acreditar que a matemática grega pode ter herdado conceitos matemáticos da Babilônia. Desse modo, podemos dizer que os ternos pitagóricos são ternos babilônicos? Para encontrar os valores numéricos da Tábua Plimpton 322, vamos calcular os ternos babilônicos ou pitagóricos por meio dos números regulares apresentados nas questões abaixo.

1. Calcule os ternos pitagóricos da Tábua Plimpton 322 nas questões abaixo com p, q e $p > q$, em que $a = p^2 - q^2$, $b = 2pq$ e $c = p^2 + q^2$.

a) Encontre os ternos babilônicos de $p = 12\ e\ v = 5$ e verifique na figura se o resultado está correto.
b) Encontre os ternos babilônicos de $p = 9\ e\ q = 4$ e verifique na figura se o resultado está correto
c) Encontre os ternos babilônicos de $p = 25\ e\ q = 12$ e verifique na figura se o resultado está correto.
d) Encontre os ternos babilônicos de $p = 20\ e\ q = 9$ e verifique na figura se o resultado está correto.

Fonte: Elaborado pela autora a partir de Boyer (1974) e Eves (2011).

A atividade pode ser empregada quando o professor for ensinar as relações métricas do triângulo retângulo, nesse caso, com o teorema de Pitágoras. Esse exemplo de atividade que propomos, permite que o docente inicie a aula com o tema indicado relacionado a Tábua Plimpton 322, pois os dados matemáticos da tábua viabilizam o estudo tanto dos ternos pitagóricos, quanto do teorema de Pitágoras. À vista disso, o docente pode iniciar com o questionamento: os ternos de pitagóricos podem ser considerados babilônicos? Seguidamente, são apresentados o contexto histórico, o tema e o texto matemático referentes à tábua com a imagem e os dados matemáticos, logo depois explica-se o conceito do teorema de Pitágoras, com exemplos dos ternos pitagóricos da Plimpton 322.

A imagem da Tábua Plimpton 322 com os dados traduzidos é importante estar presente na atividade, pois o aluno pode utilizá-la para confirmar se as respostas estão corretas. Nesse caso, após as explicações do conteúdo, o docente solicita ao estudante que resolva as questões e verifique se o resultado corresponde com aos valores matemáticos do texto histórico. Dessa maneira, acreditamos que é possível explorar as potencialidades do texto matemático histórico, visto que ocorre a possibilidade de o aluno desenvolver habilidades em matemática.

Ressaltamos que, ao perguntar se os ternos pitagóricos podem ser ternos babilônicos, o docente incentivará o pensamento crítico e reflexivo do aluno, fazendo-o analisar o conceito histórico dos ternos e do teorema de Pitágoras, dessa forma, construirá sua própria conclusão a respeito do conteúdo. Além disso, o professor pode enfatizar que a Tábua Plimpton 322 é o documento mais antigo que contém cálculos referentes aos ternos pitagóricos, e por essa razão é possível considerar que os babilônios foram os primeiros a desenvolver o conceito matemático pitagórico. Portanto, com o estudo da Plimpton 322, certificamos que o texto antigo apresentado é composto de potencialidades que contribuem para a construção do conhecimento matemático.

Perante o exposto, acreditamos que as atividades elaboradas são formas que permitem ao docente explorar as potencialidades dos textos e dos problemas históricos, dado que, tais atividades foram elaboradas de acordo com os argumentos de Miguel (1997), Brandemberg (2017a), Brandemberg (2020), Brandemberg (2021), os quais ressaltam que, para as histórias da matemática serem pedagogicamente úteis, é essencial que sejam escritas sob o ponto de vista do educador matemático. Assim, nesta sequência de discorrer a respeito de potencial didático, apresentamos seguidamente a potencialidade relacionada à BNCC.

3.5 Potencialidade didática dos textos e problemas históricos da matemática do Egito e da Babilônia relacionada à BNCC

A História da Matemática do antigo Egito e da Babilônia possuem potencialidades que podem ser exploradas de acordo com as orientações de ensino e aprendizagem da BNCC, pois a história revela conhecimento que pode ser empregado na prática de ensino. Dessa forma, relacionar textos e problemas históricos aos objetos de conhecimento matemático da BNCC irá contribuir para o aluno desenvolver habilidade matemática.

Os textos e os problemas históricos da matemática do Egito e da Babilônia “viabilizam o desenvolvimento de habilidades previstas na BNCC” e tem como competência “reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos...” (BNCC, 2017, p. 267).

Além disso, esses dispõem de potencialidade que conduz o discente a utilizar a linguagem algébrica para solucionar o problema proposto, dessa maneira, contribuem para o desenvolvimento de aprendizagem. Como prediz a BNCC (2017):

> [...] a aprendizagem em Matemática no Ensino Fundamental – Anos Finais também está intrinsecamente relacionada à apreensão de significados dos objetos matemáticos. Esses significados resultam das conexões que os alunos estabelecem entre os objetos e seu cotidiano, entre eles e os diferentes temas matemáticos e, por fim, entre eles e os demais componentes curriculares. Nessa fase, precisa ser destacada a importância

> da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação (BRASIL, 2017, p. 298).

Por conseguinte, entendemos que a história possibilita relacionar objetos matemáticos ao cotidiano, portanto, oportuniza ao discente desenvolver habilidades relacionadas à álgebra e a outros conceitos da matemática. Sendo assim, aduzimos que textos e problemas matemáticos históricos estão em conformidade com as orientações da BNCC, visto que podem ser sistematizados e aplicados na prática de ensino em sala de aula.

Diante disso, para apresentarmos uma das formas de como as potencialidades dos textos e problemas históricos de matemática podem ser exploradas no ensino, relacionamos os problemas com o objeto matemático previsto na BNCC (2017), uma vez que, segundo o estudo realizado, como apontado por Brandemberg (2020), para que a história da matemática seja apropriada:

> é importante que as abordagens históricas utilizadas em sala de aula estejam vinculadas ao conteúdo a ser estudado, procurando encontrar justificativas, para a importância e a necessidade de ensino do mesmo, motivando, ativando e aguçando a curiosidade dos estudantes (BRANDEMBERG, 2020, p. 281).

Dessa forma, apresentamos, em sequência, os problemas históricos do Papiro de Rhind da civilização egípcia, os problemas da Tábua BM 13901 e o texto matemático da Plimpton 322 da Babilônia, que podem ser utilizados no ensino-aprendizagem de matemática. Para tanto, relacionamos os textos matemáticos à unidade temática, ao objeto de conhecimento e à habilidade prevista na BNCC. Os textos e os problemas históricos podem ser empregados no ensino da Educação Básica, entretanto, vamos relacioná-los ao Ensino Fundamental.

Os problemas do Papiro de Rhind têm potencialidades que podem ser exploradas mediante desenvolvimento de atividades associadas ao conteúdo matemático escolar do Ensino Fundamental. Diante disso, pesquisamos na BNCC a que objeto de conhecimento os problemas do texto histórico podiam ser relacionados, nessa busca, conseguimos identificar a relação com a unidade temática álgebra e com as habilidades previstas na BNCC.

Ressaltamos que, na BNCC, os conteúdos matemáticos a serem estudados do Ensino Fundamental estão divididos em cinco unidades temáticas, sendo: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística, cada uma com seus objetos de conhecimento e habilidades a serem desenvolvidas. Desse modo, apresentamos, no quadro 10, alguns problemas do texto matemático Papiro de Rhind associados à unidade temática, ao objeto de conhecimento e às habilidades da BNCC, e a indicação de qual ano do Ensino Fundamental é possível o uso dos problemas.

Quadro 10: Problemas históricos do Papiro de Rhind relacionados à BNCC

<table>
<tr><td>Problemas Históricos</td><td colspan="4">a) Problema 24 do papiro: “aha, seu sétimo, fazem 19”.
b) Problema 25 do papiro: “aha, seu meio, fazem 16”.
c) Problema 26 do papiro: “aha, seu quarto, fazem 15”.
d) Problema 27 do papiro: “aha, seu quinto, fazem 21</td></tr>
<tr><td rowspan="4">BNCC</td><td>Ano</td><td>Unidade temática</td><td>Objeto de conhecimento</td><td>Habilidades</td></tr>
<tr><td>6º</td><td>Álgebra</td><td>Propriedade da igualdade</td><td>(EF06MA14) Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.</td></tr>
<tr><td>7º</td><td>Álgebra</td><td>Linguagem algébrica: variável e incógnita</td><td>(EF07MA13) Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita.</td></tr>
<tr><td>7º</td><td>Álgebra</td><td>Equações polinomiais do 1º grau</td><td>(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma ax + b = c, fazendo uso das propriedades da igualdade.</td></tr>
</table>

Fonte: Elaborado pela autora a partir de Boyer (1974).

Os problemas históricos do Papiro de Rhind estão relacionados à unidade temática álgebra do 6º ano, porque apresentam propriedade de igualdade e conhecimento matemático que pode ser desenvolvido por meio da álgebra. Quanto à habilidade referente ao objeto de conhecimento, é possível o discente desenvolver, pois os problemas históricos possuem relações que possibilitam encontrar um número desconhecido. Portanto, a utilização dos problemas históricos no 6º ano do Ensino Fundamental viabiliza o desenvolvimento da habilidade do aluno.

A aplicação dos problemas históricos no 7º ano do Ensino Fundamental referente ao objeto de conhecimento “linguagem algébrica” oportuniza ao aluno desenvolver habilidade como compreender a ideia de incógnita representada por letra ou símbolo, visto que os problemas apresentam valores desconhecidos que devem ser encontrados, logo induzem o aluno a buscar representação para eles. Quanto ao emprego dos problemas históricos associado ao objeto de conhecimento “equações polinomiais do 1º grau”, é viável, já que os problemas podem ser representados por equação e contêm conhecimento matemático que promove o desenvolvimento de habilidade de resolver e elaborar problemas.

Perante o exposto, certificamos que a matemática do antigo Egito é um conhecimento que pode ser utilizado em sala de aula, visto que a BNCC já destaca em seu texto a relevância da utilização de desenvolvimento histórico matemático na prática de ensino. Segundo a BNCC (2017), para a aprendizagem de certo conteúdo ou procedimento, é essencial haver um contexto significativo aos alunos não necessariamente do cotidiano, mas de outras áreas do conhecimento e da própria História da Matemática.

> No entanto, é necessário que eles desenvolvam a capacidade de abstrair o contexto, apreendendo relações e significados, para aplicá-los em outros contextos. Para favorecer essa abstração, é importante que os alunos reelaborem os problemas propostos após os terem resolvido. Por esse motivo, nas diversas habilidades relativas à resolução de problemas, consta também a elaboração de problemas (BRASIL, 2017, p. 299).

Logo, os problemas históricos, com seus contextos, podem contribuir para um ensino de matemática mais completo, uma vez que trazem informações de como a matemática se desenvolveu e por que está presente até os dias atuais. Desse modo, seguidamente, apresentamos a relação matemática dos problemas e textos antigos da Babilônia com a BNCC. Os problemas históricos da Babilônia, assim como os do Egito, possuem potencialidades possíveis de serem exploradas na prática educativa em sala de aula.

Por conseguinte, organizamos os dois primeiros problemas matemáticos da Tábua BM 13901, no quadro 11, e relacionamos com à unidade temática, ao objeto de conhecimento e às habilidades previstas na BNCC, indicando em que ano do Ensino Fundamental é possível o uso dessa História da Matemática.

Quadro 11 - Problemas históricos da Tábua BM 13901 relacionados à BNCC

Problemas matemáticos da Babilônia	1. Qual é o lado de um quadrado se a área menos um lado dá $14,30$? 2. Adicionei a área e o lado de um quadrado, obtive 0,45.			
BNCC	Ano	Unidade temática	Objeto de conhecimento	Habilidades
	9º	Álgebra	Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis	(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau
			Resolução de equações	(EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base

			polinomiais do 2º grau por meio de fatorações	em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau

Fonte: Elaborado pela autora a partir de Boyer (1974).

Os problemas históricos da Tábua BM 13901 estão relacionados com a unidade temática álgebra do 9º ano, porque são problemas que podem ser interpretados por equações polinomiais do segundo grau. Quanto à habilidade referente ao objeto de conhecimento "fatoração de expressões algébricas" é possível o discente desenvolver, já que podemos fatorar as equações dos problemas em expressões algébricas.

Nessa linha, há possibilidade de o aluno desenvolver as habilidades atinentes ao objeto de conhecimento e à resolução de equações polinomiais do 2º grau, uma vez que, conhecendo as raízes e o coeficiente a dos problemas históricos, torna-se possível efetuar cálculos com a equação fatorada. Portanto, acreditamos que empregar problemas históricos da Babilônia no ensino de matemática em conformidade com a BNCC é uma excelente estratégia pedagógica para desenvolver as habilidades do discente relacionadas ao conteúdo matemático.

Além dos problemas históricos, há textos matemáticos da Babilônia que são constituídos de potencialidades didáticas relacionadas à BNCC. Sendo assim, em seguida, discorremos a respeito dos textos matemáticos da Tábua de Plimpton 322.

A Tábua Plimpton 322 é um texto matemático com potencial didático que viabiliza o desenvolvimento de habilidades do aluno do Ensino Fundamental. A matemática da Plimpton 322 é uma fonte de potencialidade que possibilita o ensino e a aprendizagem dos ternos pitagóricos e do teorema de Pitágoras, por essa razão, relacionamos o conteúdo matemático do texto histórico ao objeto de conhecimento e às habilidades previstas na BNCC. Dessa maneira, no quadro 12, está o ano do Ensino Fundamental no qual o texto histórico pode ser empregado, assim como a unidade temática, o objeto de conhecimento e as habilidades referentes à BNCC.

Quadro 12 - Texto matemático da Tábua Plimpton 322 relacionado à BNCC

Exemplos de texto matemático: ternos pitagóricos da Plimpton 322			(119, 120, 169) (3367, 3456, 4825) (65, 72, 97)	
	Ano	Unidade temática	Objeto de conhecimento	Habilidades
	9º	Geometria	Relações métricas no triângulo retângulo	(EF09MA13) Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre

BNCC				elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.
			Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstrações	(EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Fonte: Elaborado pela autora a partir de Boyer (1974).

O texto matemático da Tábua Plimpton 322 está relacionado à unidade temática geometria do 9º ano, porque os dados que a compõem são ternos pitagóricos de diversos triângulos retângulos. Quanto à habilidade referente ao objeto de conhecimento é possível o discente desenvolver, pois os dados matemáticos da tábua possibilitam o professor, bem como o aluno, fazer relação com teorema de Pitágoras.

Uma das formas que o docente pode utilizar o texto histórico é quando for ministrar aula de geometria, especificamente o teorema de Pitágoras. Desse modo, o texto matemático da Plimpton 322 pode ser utilizado com conteúdo da matemática escolar e, assim, serem exploradas as potencialidades que dispõe.

Portanto, considerando o estudo realizado na matemática do antigo Egito e da Babilônia, na qual foram pesquisados os textos e problemas históricos e evidenciadas as potencialidades que esses possuem, apresentamos, a seguir, nossas considerações, tal como a expectativa, em relação à possibilidade de aplicação em sala de aula das atividades exemplificadas nesta pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao realizarmos o estudo, certificamos que os textos e os problemas históricos matemáticos são fontes de potencial didático que possibilitam contribuições ao aprendizado de matemática na Educação Básica, uma vez que há argumentos que ratificam a presença de potencialidades da História da Matemática que devem levar o aluno a construir "seu" conhecimento matemático. Nesse sentido, o contexto histórico dos textos e problemas nos revelou que a matemática do Egito e da Babilônia é um campo amplo de conhecimento que fornece conceitos, processos de solução, fortalecendo a ideia de que a matemática é essencial no ensino escolar.

O método de solução dos problemas históricos do Papiro de Rhind, da Tábua BM 13901, e da YBC 4663 era realizado pelos antigos matemáticos por meio aritmético, entretanto, a solução pode ser efetuada algebricamente. Dessa maneira, o modo de solução dos problemas matemáticos desse período nos proporcionou conhecer diferentes formas de resolução matemática, com isso, foi possível compreendermos que a matemática egípcia e babilônica possui potencialidade didática que contribui no ensino de conteúdos matemáticos na Educação Básica.

Diante disso, podemos responder à questão objetivada e investigada que norteou nosso estudo e que reescrevemos como: **Quais potencialidades didáticas se evidenciam dos textos e problemas históricos matemáticos do Egito e da Babilônia para o ensino de matemática da Educação Básica?** Para responder, podemos mencionar que encontramos diversos textos e problemas históricos constituídos de potencialidades que viabilizam a construção do conhecimento matemático em sala de aula, dentre esses, no decorrer do estudo, percebemos que os problemas históricos do Papiro de Rhind, da Tábua BM 13901 e o texto matemático da Tábua de Plimpton 322 apresentam as potencialidades de: viabilizar o desenvolvimento do conceito da equação polinomial do 1º grau; possibilitar o desenvolvimento do conceito da equação quadrática; oportunizar o aluno a desenvolver o conceito do teorema de Pitágoras, e viabilizar o desenvolvimento de habilidades prevista na BNCC.

Nesse caso, podemos dizer que "viabilizar o desenvolvimento do conceito da equação polinomial do 1º grau" é uma potencialidade que está presente nos problemas históricos do Papiro de Rhind, o qual é constituído de problemas aritméticos, geométricos e algébricos, que são possíveis de serem interpretados por meio da equação polinomial do 1º grau.

Da mesma forma, relacionamos os problemas históricos da Tábua BM 13901 ao conteúdo de equação quadrática, em que solucionamos os problemas de forma algébrica, a qual é utilizada atualmente na escola da Educação Básica. Sendo assim, possuem a potencialidade de "possibilitar o desenvolvimento do conceito da equação quadrática".

Na continuidade de buscar o potencial didático em textos e problemas históricos, encontramos na Tábua Plimpton 322 dados matemáticos que podem constituir o conceito matemático dos ternos pitagóricos, à vista disso, é visível a potencialidade de "oportunizar o aluno a desenvolver o conceito do teorema de Pitágoras".

Assim, considerando os argumentos de Miguel (1997), Mendes e Chaquiam (2016), Brandemberg (2020) e Brandemberg (2021), que ratificam as potencialidades dos textos e problemas históricos, foi possível sugerir e construir as atividades didáticas voltadas para o ensino de matemática em sala de aula. A sugestão da atividade surgiu a partir da necessidade de exemplificar como o docente pode utilizar os problemas históricos no ensino da matemática e foi nesse sentido que apresentamos, no capítulo 3, uma das diversas formas que o professor pode fazer uso da História da Matemática no contexto escolar.

A elaboração das atividades de cunho histórico não é uma tarefa simples, pois precisamos buscar fontes confiáveis, selecionar e sistematizar os conteúdos para serem ministrados em sala de aula. Por conseguinte, a demanda de muito tempo na pesquisa em literaturas de História da Matemática pode ser um entrave para a seleção e sistematização de conteúdo matemático histórico a ser empregado na prática de ensino. Entretanto, após a organização do conhecimento matemático, esse pode ser utilizado de diferentes maneiras e ser adaptado de acordo com o conteúdo escolar. Assim, em acordo com Brandemberg (2017a), inferimos que a utilização de atividades de cunho histórico na prática de ensino deve viabilizar no aluno o desenvolvimento de habilidades específicas que contribuam para a construção do seu conhecimento matemático.

Na continuação de indicar os possíveis potenciais didáticos, indicamos a potencialidade de "viabilizar o desenvolvimento de habilidades prevista na BNCC" presente nos textos e nos problemas históricos estudados, visto que todos apresentam dados históricos que se relacionam com os conteúdos matemáticos da BNCC, à vista disso, é possível de serem inseridos no processo de ensino e aprendizagem. Dessa maneira, os textos e os problemas históricos articulados com a BNCC fornecem ao aluno meios de desenvolver habilidade que contribui para a construção do conhecimento matemático.

Nesse sentido, o Papiro de Rhind possibilita ao aluno desenvolver habilidade de "compreender a ideia de variável representada por letra ou símbolo" e "resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau", já que os problemas históricos são constituídos de dados matemáticos que podem ser relacionados ao objeto de conhecimento referente a essas habilidades.

Os problemas históricos da Tábua BM 13901 podem ser solucionados por meio da equação quadrática, uma vez que possibilitam o desenvolvimento de habilidade de "compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau", a qual está relacionada ao objeto de conhecimento, álgebra, da BNCC (2017).

O texto matemático da Tábua Plimpton 322 propicia ao aluno desenvolver habilidade de resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras, visto que os dados matemáticos da tábua são ternos pitagóricos que podem ser empregados diretamente articulados ao conteúdo teorema de Pitágoras.

Desse modo, acreditamos ter alcançado os objetivos almejados, já que conseguimos identificar os textos e os problemas históricos da matemática do Egito e da Babilônia que podem ser utilizados no ensino em sala de aula no contexto escolar, assim como indicamos as potencialidades didáticas desses textos e problemas, as quais podem ser exploradas no processo de ensino e aprendizagem de matemática na Educação Básica.

Podemos, então, indicar que tanto os textos e problemas matemáticos históricos do antigo Egito, quanto os da Babilônia, possuem potencial didático que viabilizam o processo de ensino e aprendizagem em sala de aula. Dessa forma, de acordo com nossas referências e o desenvolvimento de nossa pesquisa, inferimos que, a partir da história, é amplo o campo de conhecimento matemático que pode ser utilizado pelo docente para desenvolver no aluno habilidades matemáticas.

Ao finalizarmos este relatório de dissertação, sabemos que ainda há muita História da Matemática a ser estudada, selecionada e sistematizada, para o uso em sala de aula, em razão disso esperamos que este trabalho possa contribuir com estudos futuros. Além disso, temos a expectativa que este texto incentive pesquisas no âmbito da Educação Básica, pois há diversos textos e problemas matemáticos que dispõem de potencialidades didático-pedagógicas que podem contribuir para o ensino-aprendizagem de matemática.

REFERÊNCIAS

BOYER, C. B. **História da matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRANDEMBERG, J. C.; MENDES, I. A. **Problemas Históricos e Ensino de Matemática.** Anais do III EPAEM: Encontro Paraense de Educação Matemática . Belém, 2005.

BRANDEMBERG, J. C. **Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2009.

BRANDEMBERG, J.C. **Entrevista feita pelo: Boletim Cearense de Educação e História Matemática**. Fortaleza: BOCEHM, 2014.

BRANDEMBERG, J. C. Sobre o uso da história da matemática no ensino de equações algébricas. **Revista Cocar**, Belém, UEPA, n. 3, p. 167-186, 2017a.

BRANDEMBERG, J. C. História e Ensino de Matemática. **Revista Exitus** (online), Santarém (UFOPA), v. 7, n. 2, p. 16-30, 2017b.

BRANDEMBERG, J.C. Uma proposta para o uso da história no ensino da matemática: sobre a potencialidade didática de textos histórico e desenvolvimento de conceito. **Revista Paradigma,** v. XLI, p. 266 – 284, abril, 2020.

BRANDEMBERG, J.C. Sobre textos históricos e o ensino de conteúdos matemáticos. **Revista investigações científicas envolvendo a história da matemática sob o olhar da pluralidade**, p. 23 – 34, Curitiba: editora CRV, 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 17 de janeiro de 2020.

D'AMBROSIO, U. A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. V.(org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas,** São Paulo (UNESP), p. 97-115, 1999a.

D'AMBROSIO, U. A interface entre história e matemática: uma visão histórico-pedagógica. In: BICUDO, M. A. V.(org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**, São Paulo (UNESP), p. 116-143, 1999b.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 17ª ed.. São Paulo: Papirus, 2009.

D'AMBROSIO, U. Por que e como ensinar história da matemática**. Rematec**, Natal, ano 8, p. 7-21, 2013.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. trad. Hygino H. Domingues. Campinas – SP: Unicamp, 2011.

GUIMARÃES FILHO, J.; BRANDEMBERG, J. C. Um estudo do Liber Quadratorum (1225) e suas potencialidades para o ensino de Matemática**. Revista de Educação Matemática e Cultura – REMATEC**, ano 12, n. 26, p.71-85, 2017.

GUIMARÃES FILHO, J. **Um estudo do Liber Quadratorun (1225) de Leonardo Fibonacci (1180-1250) e suas potencialidades para o ensino de matemática.** 2018. 111 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2018.

LIBÂNEO, J. C. **Didática**. São Paulo: editora Cortez, 2006.

MACDUFF. R. C. *The nature of numbers.* ***Cognitive instruction in modeling math*** *and physics: thinking and reasonig are the pillars of understanding*, 10 abr. 2014. Disponível em: https://trueddotorg.wordpress.com/blog/. Acesso em: 3 set. 2020.

MANSFIELD, D. F. Perpendiculares lines and diagonal triples in old Babylonian surveying. **Journal of cuneiforme studies**, UNSW, Australia, v. 72, p. 87-99, 2020.

MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. **História nas aulas de matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores**. 1ª ed. Belém: SBHMat, 2016.

MIGUEL, A. **Três Estudos Sobre História e Educação Matemática.** 1993. 246 f.Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 1993.

MIGUEL, A. As Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática em Questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Zetetiké**, Campinas, v. 5, n. 8, p 73-102, 1997.

OLIVEIRA, R. R. Sistema de Numeração. **Mundo Educação**. Disponível em: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao.htm. Aceso em: 13 set. 2021.

SERRÃO, M. M. **Problemas Matemáticos da antiguidade como estratégia para o ensino de matemática na Educação Básica**. 2014. 124 f. Dissertação, (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2014.