



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E
MATEMÁTICAS - IEMCI/UFPA

GUILHERME MOTTA DE MORAES

MODELO EPISTEMOLÓGICO META – ANALÍTICO RELATIVO À
NOÇÃO DE RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

Orientador: Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes

BELÉM-PA
2022

GUILHERME MOTTA DE MORAES

**MODELO EPISTEMOLÓGICO META – ANALÍTICO RELATIVO À
NOÇÃO DE RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de Educação Matemática e Científica, da Universidade Federal do Pará, como requisito à obtenção do título de Doutor em Educação em Ciências e Matemática.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a)
autor(a)

M827m Moraes, Guilherme Motta de Moraes.
MODELO EPISTEMOLÓGICO META – ANALÍTICO
RELATIVO À NOÇÃO DE RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO /
Guilherme Motta de Moraes Moraes. — 2022.
258 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes
Nunes
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará,
Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de
Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas,
Belém, 2022.

1. Meta-Análise Qualitativa. 2. Noção de Raciocínio
Combinatório. 3. Modelo Analítico. I. Título.

CDD 370

GUILHERME MOTTA DE MORAES

**MODELO EPISTEMOLÓGICO META – ANALÍTICO RELATIVO À
NOÇÃO DE RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO**

Banca Examinadora

Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes (Presidente)

Prof. Dr. Elielson Ribeiro de Sales (Membro Interno)

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud (Membro Interno)

Prof. Dr. José Carlos de Sousa Pereira (Membro Externo)

Prof^a. Dr^a. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho (Membro Externo)

À minha Família, por sempre se fazerem presentes e reconhecendo a importância de minha trajetória. Em especial a minha mãe, Maria de Nazaré Brito Motta e meu pai, Moises Maria de Sousa de Moraes, pelo sacrifício da criação e irrestrito apoio em minha trajetória acadêmica, a minha esposa, Cristiana Marcela de Moraes que tanto me incentivou e as minhas filhas Ana Beatriz de Moraes e Ana Cristina de Moraes, minha inspiração para a finalização dessa tese.

Tudo que faço e conquisto é por vocês, minha família!

AGRADECIMENTOS

A Deus, por tudo que tem feito e ainda fará por mim e pela minha família na minha vida.

Ao PPGECEM, pelo acolhimento e a oportunidade, os quais me permitiram ampliar minha compreensão sobre a Educação, Ciências e Matemática.

A Coordenação e Secretaria do PPGECEM, pelo apoio e suporte técnico para o desenvolvimento dessa pesquisa.

Ao Professor Dr. José Messildo Viana Nunes, por sua orientação, carisma, sabedoria e paciência durante a relação professor / orientação / saber. Obrigado Doutor.

Ao Professor Titular. Renato Borges Guerra, pelas suas considerações sobre o trabalho durante nossas conversas, além disso, sua participação nas reuniões do grupo de pesquisa GEDIM, foram muito valiosas para a minha formação como pesquisador.

Ao Professor Dr. José Carlos de Souza Pereira, o qual contribuiu significativamente para o aprimoramento desta pesquisa com sua participação na qualificação e defesa.

Ao Professor Dr. Elielson Ribeiro de Sales, por sua orientação, o qual contribuiu significativamente para o aprimoramento desta pesquisa com sua participação na qualificação e defesa.

Ao Professora Dr. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, por ter aceitado o convite para participar da banca examinadora da qualificação e defesa da tese e por suas contribuições para o desenvolvimento de minha pessoa.

Ao Professor Dr. Saddo Ag Almouloud, por ter aceitado o convite para participar da banca examinadora da qualificação e defesa da tese e por sua colaboração no desenvolvimento desta pesquisa.

Ao Professora Dr. Emília Pimenta Oliveira, por sua colaboração no desenvolvimento desta pesquisa.

Aos meus amigos da graduação, da especialização, do mestrado e do doutorado com quem pode compartilhar conhecimentos.

E aos professores do Curso de Especialização e aos professores do Curso de Mestrado e Doutorado do PPGECEM/UFP/ IEMCI, que lutam diariamente pela educação, meu muito obrigado.

*“Lembra de onde você veio
E aonde você chegou
Lembra de todos os livramentos
Que você já passou*

*Nem era pra você tá aqui
Mas Deus falou assim
Esse aí, vou levantar
E onde colocar a mão,
Eu vou abençoar”
(Amanda Vanessa)*

RESUMO

A presente pesquisa tem por objetivo desenvolver um estudo epistemológico sobre noções de raciocínio combinatório nas teses e dissertações defendidas entre os anos de 1998 e 2019, resultantes de pesquisas de mestrado e doutorado, no Brasil, a partir da Meta-Análise Qualitativa, a qual será utilizada para construir e analisar teses e dissertações, a partir de um Modelo Analítico para a Noção de Raciocínio Combinatório. Toma-se como referencial teórico e metodológico a Meta-Análise Qualitativa, associada à Teoria Antropológica do Didático (TAD), tendo como base as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular e as propostas de Fischbein. A tese está organizada em dois grandes momentos: os estudos do problema docente e da dimensão epistemológica e os estudos das dimensões econômico-institucional e ecológica. O resultado obtido com a pesquisa demonstra que o Modelo Analítico e a Noção de Raciocínio Combinatório possuem um papel importante para compreender os problemas associados à contagem, em três Níveis: Nível I – Ausência de Sistematização Multiplicativa: nesse nível, os sujeitos contextualizam suas respostas, embora sem indícios de raciocínio combinatório em seu esforço para encontrar a solução do problema; Nível II – Início da Sistematização Multiplicativa: nesse nível, os sujeitos são capazes de ordenar e seriar adequadamente as variáveis, mas não conseguem dissociá-las, fazendo-as variar, ao mesmo tempo, o que torna impossível a verificação correta da solução; e Nível III – Sistematizações Generalizadoras: nesse nível, a principal propriedade do pensamento formal é a inserção da realidade como subconjunto de um conjunto maior de possibilidades. Em lugar de teorizar sobre dados empíricos (concretos), o pensamento formal permite que o sujeito teorize sobre possibilidades. O estudo bibliográfico atrelado ao Modelo Analítico aplicado a duas coleções de livros didáticos possibilitou uma estruturação mínima de critérios para analisar materiais didáticos, mais especificamente, livros didáticos, com a abordagem praxeológica da TAD, possibilitando inserir essa análise em uma das categorias do Modelo Analítico.

Palavras-chave: Meta-Análise Qualitativa, Noção de Raciocínio Combinatório, Modelo Analítico.

ABSTRACT

This research aims to develop an epistemological study on notions of combinatorial reasoning in theses and dissertations defended between 1998 and 2019, resulting from masters and doctoral research, in Brazil, based on Qualitative Meta-Analysis, which will be used to build and analyze theses and dissertations, based on an Analytical Model for the Notion of Combinatorial Reasoning. Qualitative Meta-Analysis, associated with the Anthropological Theory of Didactics (TAD), is taken as a theoretical and methodological reference, based on the guidelines of the National Common Curricular Base and Fischbein's proposals. The thesis is organized into two major moments: studies of the teaching problem and the epistemological dimension and studies of the economic-institutional and ecological dimensions. The result obtained from the research demonstrates that the Analytical Model and the Notion of Combinatorial Reasoning play an important role in understanding the problems associated with counting, in three Levels: Level I - Absence of Multiplicative Systematization: at this level, subjects contextualize their answers, though without hints of combinatorial reasoning in his effort to find the solution to the problem; Level II – Beginning of Multiplicative Systematization: at this level, subjects are able to properly order and rank the variables, but cannot dissociate them, making them vary at the same time, which makes it impossible to verify the correct solution; and Level III – Generalizing Systematizations: at this level, the main property of formal thinking is the insertion of reality as a subset of a larger set of possibilities. Instead of theorizing about (concrete) empirical data, formal thinking allows the subject to theorize about possibilities. The bibliographical study linked to the Analytical Model applied to two collections of textbooks allowed a minimum structuring of criteria to analyze didactic materials, more specifically, textbooks, with the praxeological approach of TAD, making it possible to insert this analysis in one of the categories of the Analytical Model.

Keywords: Qualitative Meta-Analysis, Notion of Combinatorial Reasoning, Analytical Model.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1	Quantos diferentes arranjos, incluindo repetições, podem ser feitos com três números, usando apenas os números 1 e 2?.....	70
FIGURA 2	Encontrar o número de permutações possíveis com três elementos...	71
FIGURA 3	Evolução das publicações científicas internacionais (indexadas PubMed) e nacionais (indexadas Scielo), tratando de Meta-Análise, de 1980 a 2006.....	88
FIGURA 4	Quadrado mágico.....	100
FIGURA 5	Lo Shu e o quadrado mágico.....	101
FIGURA 6	Quadrado mágico de ordem 4, 5 e 6.....	101
FIGURA 7	Um recorte da obra “A Melancolia” para retratar o quadrado mágico..	102
FIGURA 8	A melancolia.....	103
FIGURA 9	Trigramas.....	103
FIGURA 10	Hexagramas.....	104
FIGURA 11	O triângulo aritmético de Pascal da maneira como foi desenhado, em 1303, por Chu Shi - kié.....	104
FIGURA 12	Stomachion.....	106
FIGURA 13	Princípios de Dirichlet.....	108
FIGURA 14	Guia do livro didático 2020: Matemática – Anos Iniciais do EF.....	131
FIGURA 15	Guia do livro didático 2022: Matemática – Anos Iniciais do EF. Para “A Conquista da Matemática”.....	132
FIGURA 16	Guia do livro didático 2020: Matemática – Anos Iniciais do EF. Para “Porta Aberta”.....	133

FIGURA 17	Guia do livro didático 2022: Matemática – Anos Iniciais do EF. Para “Porta Aberta”.....	133
FIGURA 18	Atividade do livro do 1º Ano, Capítulo 2, p. 30.....	137
FIGURA 19	Atividade do livro do 1º Ano, Capítulo 7, pag. 57.....	138
FIGURA 20	Atividade do livro do 2º Ano, Unidade 7, pag.196.....	141
FIGURA 21	Atividade do livro do 3º Ano, Unidade 5, pag.133.....	143
FIGURA 22	Atividade do livro do 4º Ano, Unidade 6, pag.180.....	145
FIGURA 23	Atividade do livro do 5º Ano, Unidade 4, pag.100.....	148
FIGURA 24	Atividade do livro do 1º Ano, Unidade 1, pag.21.....	154
FIGURA 25	Atividade do livro do 1º Ano, Unidade 2, pag. 34.....	156
FIGURA 26	Atividade do livro do 3º Ano, Unidade 3, pag. 81.....	158
FIGURA 27	Atividade do livro do 3º Ano, Unidade 3, pag.173.....	160
FIGURA 28	Atividade do livro do 4º Ano, Unidade 3, pag. 66.....	162
FIGURA 29	Atividade do livro do 5º Ano, Unidade 3, pag. 69.....	164
FIGURA 30	Atividade do livro do 5º Ano, Unidade 3, pag. 81.....	165

LISTA DE FLUXOGRAMAS, GRÁFICOS E TABELAS

FLUXOGRAMA 1	Passos para uma revisão sistemática como meta-análise.....	18
FLUXOGRAMA 2	Tessitura de um modelo produto do estudo histórico-epistemológico sobre noção de raciocínio combinatório..	109
FLUXOGRAMA 3	Evolução da tessitura do modelo analítico, após a leitura dos trabalhos de Fischbein, Pampu e Minzat (1970), Fischbein (1975) até Rocha (2006).....	182
FLUXOGRAMA 4	Modelo analítico em evolução.....	185
FLUXOGRAMA 5	Modelo analítico em evolução.....	189
FLUXOGRAMA 6	Modelo analítico sofrendo reformulação.....	191
FLUXOGRAMA 7	Modelo analítico remodelado.....	194
FLUXOGRAMA 8	Modelo analítico para a noção de raciocínio combinatório em aperfeiçoamento.....	216
FLUXOGRAMA 9	Modelo analítico para a noção de raciocínio combinatório.....	217
FLUXOGRAMA 10	Modelo analítico para a noção de raciocínio combinatório.....	223
FLUXOGRAMA 11	Modelo analítico.....	237
GRÁFICO 1	Trabalhos selecionados após ficha catalográfica, no período de 1998 – 2019, coletados no Banco de Dados da Capes.....	171

TABELA 1	Componentes de uma praxeologia ou organização matemática.....	46
TABELA 2	Relevância da análise do livro didático.....	124
TABELA 3	Número de teses e dissertações sobre combinatória produzidas no Banco de dados da Capes, no período de 1998 a 2019, atrelado a essas pesquisas o trabalho de Fischbein (1975).....	221
TABELA 4	Dissertações e tese que apresentam investigação na Educação Básica ou na formação continuada.....	224
TABELA 5	Dissertações e tese que apresentam análise de livros.....	227
TABELA 6	Dissertações e teses que utilizam questionário de tarefas ou resoluções de problemas.....	230
TABELA 7	Dissertações e teses conforme a utilização de recursos didáticos.....	234

LISTA DE SIGLAS

GEDIM	Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática da Matemática
OD	Organização Didática
OM	Organização Matemática
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PER	Percurso de Estudo e Pesquisa
TAD	Teoria Antropológica do Didático
UFPA	Universidade Federal do Pará
IEMCI	Instituto de Educação Matemática e Científica
LDB	Lei e Diretrizes e Bases da Educação
NPADC	Núcleo de Pesquisa e Apoio ao Desenvolvimento Científico
PPGECM	Programa de Pós-Graduação em Educação, Ciências e Matemática.
LIECML	Licenciatura Integrada em Educação em Ciências, Matemática e Linguagem.
EP	Equipamento Praxeológico
NRC	Noção de Raciocínio Combinatório
MMM	Movimento da Matemática Moderna
OMD	Organização Matemática e Didática
PNLD	Plano Nacional do Livro Didático
LD	Livro Didático

SUMÁRIO

CAPÍTULO I – PREÂMBULO.

1.1	Apresentação.....	17
1.2	Motivações da Pesquisa – O Problema Docente.....	21
1.3	Hipótese da Tese.....	38
1.4	Justificativa da Pesquisa.....	40

CAPÍTULO II – UM ESTUDO EPISTEMOLÓGICO DOS PROBLEMAS ASSOCIADOS À CONTAGEM.

2.1	Estudo da Dimensão Epistemológica.....	52
2.2	Fischbein e a Noção de Raciocínio Combinatório.....	59
2.3	A Teoria Antropológica do Didático (TAD)	78
2.4	Modelo Epistemológico de Referência (MER).	83
2.5	A Meta – Análise Qualitativa como Metodologia de Pesquisa.....	87
2.6	Dimensões do Problema Didático.....	95
2.7	Estudo Histórico – Epistemológico	99

CAPÍTULO III – ESTUDO DA DIMENSÃO ECONÔMICO – INSTITUCIONAL

3.1	Dimensão Econômico-Institucional.....	113
3.2	Análise de Livros Didáticos.....	124
3.3	Análises de Duas Coleções de Livros Didáticos do 1º ao 5º Ano do Ensino Fundamental.....	129
3.4	Análises da Coleção “A Conquista da Matemática: Alfabetização Matemática” – Livro Didático 1 – LD1.....	135
3.5	Análises da Coleção “Porta Aberta: Alfabetização Matemática” – Livro Didático 2 – LD2.....	151
3.6	Resultados da Análise LD1 e LD2.....	166
3.7	Estudo Bibliográfico a partir da Meta – Análise Qualitativa.....	170
3.8	Um estudo Meta – Análise nos trabalhos de Fischbein.....	173

CAPÍTULO IV – ANÁLISES DOS TRABALHOS: A PARTIR DO MODELO ANALÍTICO PARA NOÇÃO DE RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO.

4.1	Estudo da Dimensão Ecológica.....	218
4.2	Constituição dos Trabalhos da Literatura.....	221
4.3	Análises dos Dados.....	224
4.4	Categorização do Estudo Bibliográfico.....	237

CONCLUSÃO

REFERÊNCIAS

CAPÍTULO I – PREÂMBULO

Nesta pesquisa, realizamos uma Meta-Análise Qualitativa ¹ dos referenciais teóricos que sustentam² as pesquisas brasileiras, publicadas no período de 1998 a 2019, a respeito do tema Noção de Raciocínio Combinatório, mais especificamente, dos problemas associados à contagem nos anos iniciais de escolarização, na formação de professores e na Educação Superior, com o olhar da Teoria Antropológica do Didático³. Neste preâmbulo, apresentaremos a hipótese da tese e sua justificativa, o processo de escolha do quadro teórico e o objetivo da pesquisa.

1.1 – Apresentação

Esta tese insere-se na linha de pesquisa “Percepção Matemática, Processos e Raciocínio Lógico, Saberes e Valores” e no Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática da Matemática – GEDIM, do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas – PPGECM, do Instituto de Educação Matemática e Científica – IEMCI, da Universidade Federal do Pará – UFPA.

Inicialmente, foi construída uma investigação dos referenciais teóricos que sustentam as pesquisas nacionais, publicados entre 1998 a 2019, a respeito da Noção de Raciocínio Combinatório, nos Anos Iniciais de escolarização, na formação de professores e na Educação Superior, mais especificamente os trabalhos que tinham em seu bojo as palavras-chave: combinatória, permutação, probabilidade, estatística, tratamento da informação, educação estatística, pensamento combinatório, ideias combinatórias, noções de raciocínio combinatório, contagem e princípio fundamental da contagem.

¹ O termo Meta-Análise Qualitativa será empregado para destacar a evolução da metodologia dos trabalhos. A Meta-Análise Qualitativa enfatiza nessa metodologia técnicas de descrição, narração e interpretação, pois residem nessas técnicas as fontes de evidência para organizar o crescente número de pesquisas, intervenções e informações científicas, substituindo as informações primárias, para as tomadas de decisão futuras.

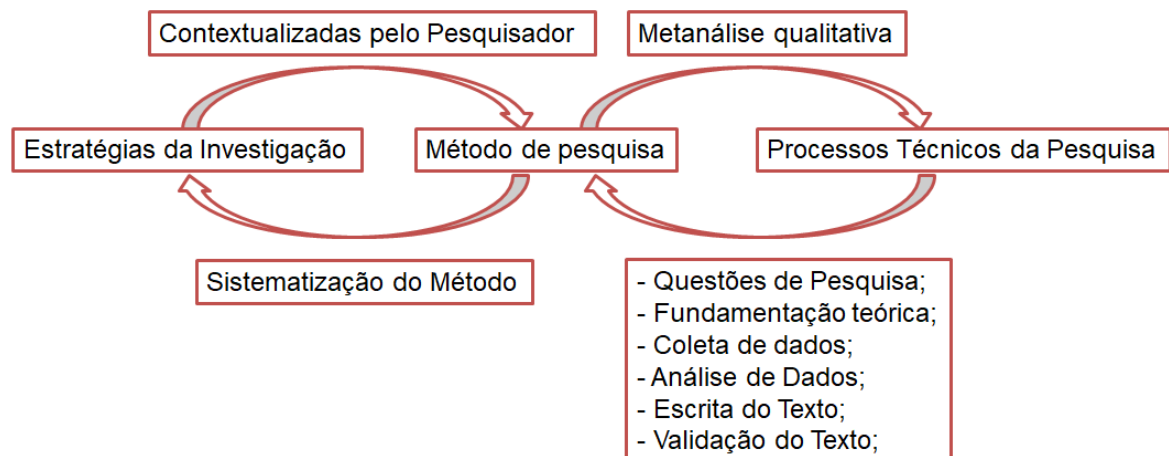
² Em nossa pesquisa, consideraremos referenciais teóricos que sustentam pesquisas aqueles que aparecem pelo menos no problema (quadro teórico) e na análise das pesquisas.

³ Utilizaremos a Teoria Antropológica do Didático, descrita por Yves Chevallard, mais especificamente o Modelo Praxeológico. No entanto, esse não é o único autor que aparecerá nos referenciais teóricos utilizados pelas pesquisas selecionadas.

Para a execução deste estudo, realizamos uma Meta-Análise Qualitativa, pelo fato de possibilitar um conjunto de procedimentos de estudos importantes para as pesquisas qualitativas (BICUDO, 2014), além de ampliar a visibilidade do tema e listar os inúmeros trabalhos da literatura, reduzindo esforços no sentido de sintetizar estudos qualitativos futuros, vistos como essenciais para atingir proposições analíticas mais elevadas e acrescentar a generalização da pesquisa qualitativa. Nesse viés, abre-se caminho para a teorização dos temas estudados, pois esta investigação possibilita a obtenção de resultados profundos, integrativos, cruzados e amplos. (CRESWELL, 2007).

Baseados nos conceitos de Creswell (2007), este tipo de pesquisa qualitativa é considerado puramente interpretativo, pois é por meio do pesquisador que se faz a estratégia de investigação, o método de pesquisa e os processos de pesquisas, para propor a interpretação dos dados com a identificação de temas ou categorias e, por fim, tirar conclusões sobre seu significado e filtrar dados através de uma lente pessoal, situada em um determinado período, a partir da proposta de um modelo de análise de pesquisa. (Fluxograma 1).

FLUXOGRAMA 1: Passos para uma revisão sistemática com Metanálise Qualitativa.



FONTE: Construção do autor (2022).

Desta forma, para se construir esta investigação, foi feita a busca de trabalhos no Banco de Teses e Dissertações da Capes, utilizando como palavras-chave: combinatória, probabilidade, estatística, educação estatística, estocástica e bloco de tratamento da informação. Além disso, usamos um filtro de busca com as palavras: anos iniciais de escolarização, formação de

professores da Educação Básica e formação de professores da Educação Superior, para construir um olhar da evolução da Noção de Raciocínio Combinatório, desde os Anos Iniciais de escolarização até a formação de professores da Educação Básica.

Ao realizar este planejamento de investigação, tivemos como resposta dos bancos de dados e repositórios 963 trabalhos. Como tratamento e procedimentos, nesse primeiro momento, buscou-se observar os referenciais teóricos, a metodologia da pesquisa e os resultados, para se combinar resultados provenientes de diferentes estudos.

Ao observar os referenciais teóricos e as metodologias, teremos em mão a sustentação das investigações, assim como as informações primárias das pesquisas, para as tomadas de decisões futuras para a escrita da tese.

Assim, a tese encontra-se organizada da seguinte forma:

Um capítulo I, preâmbulo, para situar o leitor em relação à hipótese da Tese, ao objetivo da pesquisa, à justificativa e ao processo de escolha do quadro teórico-metodológico da pesquisa.

No capítulo II, “Um estudo epistemológico dos problemas associados à contagem”, apresentaremos uma síntese dos estudos da Análise Combinatória e, mais especificamente, dos problemas associados à contagem, apresentando um estudo histórico-epistemológico dos problemas que permeiam o desenvolvimento do conhecimento humano.

Essa revisão da literatura e de estudos correlatos destaca a síntese do estudo bibliográfico e da pesquisa qualitativa dos trabalhos, em ordem cronológica, publicados em Educação e/ou em Educação Matemática, que envolvem direta ou indiretamente a Noção de Raciocínio Combinatório, na Educação Básica.

Em especial, essa síntese apresenta os elementos que usaremos dos trabalhos correlatos como proposta de um Modelo Analítico para a Noção de

Raciocínio Combinatório, para fundamentar e analisar pesquisas futuras sobre o tema.

No capítulo III, trataremos do “Estudo da Dimensão Econômica-Institucional”. Essa dimensão visa a responder à pergunta: como as praxeologias relacionadas aos problemas associados à contagem se comportam em uma determinada instituição, na BNCC, nos Parâmetros Curriculares, nos livros didáticos etc.? Nessa dimensão, precisamos estudar as questões relativas às condições que regulam a organização e o funcionamento de tais praxeologias na instituição de referência, ou seja, as questões relativas ao sistema de regras, princípios e leis (normas) que regem a sua vida institucional.

No capítulo IV, descreveremos as “Análises dos trabalhos: a partir do Modelo Analítico para a Noção de Raciocínio Combinatório”. Esse capítulo buscar apresentar a dimensão ecológica que, de acordo com Gascón (2011), inclui as dimensões epistemológica e econômica-institucional, porque se preocupa com o estudo da ecologia institucional das praxeologias matemáticas e didáticas.

Por fim, a conclusão da pesquisa.

1.2 – Motivações da pesquisa⁴

A questão da relação com o saber pode ser colocada quando se constata que certos indivíduos, jovens ou adultos, têm desejo de aprender, enquanto outros não manifestam esse mesmo desejo. Uns parecem estar dispostos a aprender algo novo, são apaixonados por este ou por aquele tipo de saber, ou, pelo menos, mostram uma certa disponibilidade para aprender. Outros parecem pouco motivados para aprender, ou para aprender isso ou aquilo, e, às vezes, recusam-se explicitamente a fazê-lo. (CHARLOT, 2001, p. 15).

O Problema Docente

Para tecer minha trajetória na posição de aluno, na Educação Básica e na formação inicial, procuro fundamentos em Charlot (2001), ao desenvolver pesquisas com alunos menos favorecidos economicamente. A partir de seus estudos, evidenciou-se que, em muitos casos, situações sociais desfavoráveis ao sucesso na escola são superadas por alunos de baixa renda que conseguem a ascensão social.

Nesse viés, Charlot (2001) é um autor que se dedica a estudar a educação e as relações sociais que permeiam esse universo. Em sua obra, o autor desenvolve pesquisas com alunos menos favorecidos economicamente, buscando entender como os processos educacionais afetam esses indivíduos e como a escola pode ser mais inclusiva e eficiente. Neste preâmbulo, exploraremos os fundamentos teóricos de Charlot e como eles podem ajudar a solucionar o problema docente na educação.

Um dos principais problemas da educação é a falta de equidade e inclusão. Muitos alunos menos favorecidos economicamente enfrentam dificuldades em acompanhar o ritmo da sala de aula, muitas vezes, por falta de recursos e apoio em casa. Isso pode levar a um ciclo vicioso de desigualdade e exclusão social, perpetuando a pobreza e a marginalização desses indivíduos.

Para Charlot, a solução para esse problema passa por uma mudança na forma como a escola é estruturada e como os professores se relacionam com os

⁴Ressaltamos que esta seção será escrita na primeira pessoa do singular, por se tratar da minha formação profissional e experiência pessoal, para melhor compreensão do leitor sobre minha identidade de professor de Matemática, inclusive de pesquisador no Programa de Pós-Graduação em Educação, Ciências e Matemáticas, do IEMCI.

alunos. Em vez de uma abordagem tradicional, em que o professor é o detentor do conhecimento e os alunos são meros receptores, Charlot propõe uma abordagem mais colaborativa e inclusiva.

Essa abordagem envolve a criação de um ambiente de aprendizagem mais interativo, em que os alunos sejam incentivados a participar ativamente do processo de ensino e aprendizagem. Isso pode ser feito por meio de atividades práticas, discussões em grupo e projetos colaborativos, que permitem aos alunos explorar suas habilidades e interesses de maneira mais efetiva.

Além disso, Charlot também enfatiza a importância da empatia e da compreensão por parte dos professores. Muitos alunos menos favorecidos economicamente enfrentam dificuldades em casa e na comunidade, o que pode afetar sua capacidade de aprendizagem e seu comportamento na sala de aula. É importante que os professores estejam cientes dessas dificuldades e sejam capazes de oferecer apoio e orientação aos alunos, ajudando-os a superar esses obstáculos.

No entanto, para que essas mudanças sejam efetivas, é necessário que os professores também sejam apoiados e capacitados adequadamente. Muitos professores enfrentam dificuldades em lidar com alunos menos favorecidos economicamente, muitas vezes por falta de treinamento e recursos. É importante que as instituições de ensino ofereçam suporte e capacitação adequada aos professores, para que eles possam desenvolver as habilidades necessárias para lidar com esses desafios.

Dessa forma, Charlot oferece uma perspectiva valiosa sobre como a educação pode ser mais inclusiva e eficiente para alunos menos favorecidos economicamente. Sua abordagem colaborativa e empática pode ajudar a criar um ambiente de aprendizagem mais acolhedor e produtivo, permitindo que esses alunos alcancem seu potencial máximo. No entanto, para que essas mudanças ocorram, é necessário que haja um compromisso sério por parte das instituições de ensino e dos professores, para que possam trabalhar juntos em prol de uma educação mais justa e equitativa.

Nos últimos anos, muito tem se discutido sobre o problema docente e a importância do capital cultural para a formação dos professores. Nesse contexto, a concepção de maior capital cultural de Bourdieu (1979) e a obra de Charlot (2001) são fundamentais para entendermos a relação entre esses dois temas.

Segundo Bourdieu (1979), o capital cultural é um conjunto de conhecimentos, habilidades e valores que uma pessoa adquire ao longo da vida e que são valorizados pela sociedade. Esse capital pode ser dividido em três categorias: o capital cultural incorporado, que é adquirido por meio da socialização primária e da educação formal; o capital cultural objetivado, que se refere a bens culturais como livros, obras de arte e instrumentos musicais; e o capital cultural institucionalizado, que é reconhecido e valorizado pelas instituições sociais, como diplomas e certificados.

No contexto da formação docente, o capital cultural incorporado e o capital cultural institucionalizado são especialmente relevantes. Os professores precisam ter um conhecimento sólido em sua área de atuação, adquirido por meio da formação acadêmica e da experiência profissional, e também precisam estar familiarizados com as normas e valores que regem a prática docente.

É nesse ponto que a obra de Charlot se torna relevante. Em seu livro "O problema docente", o autor analisa a formação dos professores no Brasil e aponta diversas deficiências no sistema educacional. Uma das principais críticas de Charlot é que a formação docente muitas vezes não leva em conta o capital cultural dos futuros professores, o que pode levar a uma desconexão entre a teoria e a prática.

Por exemplo, muitos professores aprendem teorias pedagógicas abstratas na universidade, mas não têm a oportunidade de colocá-las em prática em situações reais de ensino. Isso pode levar a uma sensação de desamparo e insegurança por parte dos professores, que não se sentem preparados para lidar com os desafios do cotidiano escolar.

Além disso, Charlot aponta que muitos professores não têm acesso a um capital cultural institucionalizado adequado. Isso pode se manifestar de diversas

formas, como a falta de reconhecimento e valorização por parte da sociedade e das instituições educacionais, a baixa remuneração e a falta de oportunidades de formação continuada.

Diante desse cenário, é fundamental que os gestores educacionais e os formadores de professores levem em conta a importância do capital cultural na formação docente. É preciso oferecer uma formação que leve em conta não apenas as teorias pedagógicas, mas também as práticas concretas do cotidiano escolar. Além disso, é preciso valorizar e reconhecer o trabalho dos professores, oferecendo remuneração adequada e oportunidades de formação continuada.

Em resumo, a concepção de maior capital cultural de Bourdieu e a obra de Charlot são fundamentais para entendermos o problema docente e as deficiências do sistema educacional brasileiro. É preciso levar em conta o capital cultural na formação dos professores e valorizar o trabalho desses profissionais, oferecendo condições adequadas para que possam desempenhar seu papel de forma eficaz e satisfatória.

Nesse sentido, levando em consideração a concepção de maior capital cultural de Bourdieu (1979) e a Obra de Charlot (2001), eu teria poucas chances de sucesso escolar, pois meus pais não tinham condições financeiras e não possuíam uma boa escolaridade para a época. Eles me matricularam em uma escola pública – a qual considerava minha segunda casa – que me formou cidadão, deu-me os ensinamentos de que necessitava para viver e trabalhar, neste mundo de evolução, orientando-me para a vida.

Isso só aconteceu porque as escolas que frequentei sempre mostraram a importância de cada indivíduo e de seu papel na sociedade e ensinaram-me a ser uma pessoa consciente de meus direitos e deveres. Proporcionaram as condições para me inserir no meio social, mesmo com todas as dificuldades que a sociedade impõe, como a enorme desigualdade social. Mas, independentemente da situação financeira, a escola me ensinou a buscar conhecimentos, não só na sala de aula, como também fora dela, ou seja, em todo o meio em que vivia.

A respeito dessa relação com os saberes, nas reflexões teóricas de Charlot (2001), valoriza-se o entendimento das relações entre o saber e o aprender de forma mais abrangente, considerando a tríade de relações que o sujeito estabelece com o mundo, com o outro e com ele mesmo. Devido às experiências vivenciadas na prática e as reflexões, com base nas literaturas pesquisadas, compreendo que o saber e o aprender requerem o estabelecimento de relação com os outros. Tal relação percebi valorizada no processo de estudo de Matemática e foi por meio dessa relação com os colegas de classe que busquei compartilhar os meus conhecimentos.

Minha formação inicial tem seu começo na Escola Estadual de Ensino Fundamental Monsenhor Azevedo (EEEFMA), em nível fundamental, na cidade de Belém-Pará, nos anos de 1992 a 2000. Foram importantes os estudos que desenvolvi nas disciplinas de Matemática: lembro-me da facilidade que tinha em aprender Matemática, que trazia dificuldades para a turma em geral, a qual demonstrava dificuldades em se apropriar dos conceitos estudados. Por esse motivo, os colegas me pediam para ensinar-lhes o que aprendia. Procurava compartilhar com eles, da forma mais simples e menos técnica, os assuntos abordados. Em troca, eles me ensinavam outras disciplinas nas quais eu tinha dificuldade, as de Linguagem e as de Ciências Humanas e Sociais.

Ainda na minha formação inicial, na Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio Edgar Pinheiro Porto (EEEFMEPP), em nível Médio, na cidade de Belém-Pará, nos anos de 2001 a 2003, nas disciplinas de Matemática, Física e Química, em especial – destaco essas três pela afinidade com as ciências exatas e naturais –, ressalto a grande facilidade que tinha de aprender, desde o Ensino Fundamental, a Matemática, e, no nível médio, as Ciências Exatas.

Nessa relação de ensino prematuro e acontecimentos no Ensino Fundamental e Médio, cheguei à conclusão de que “profissão” queria seguir: ser professor. Mas para isso tinha que continuar meus estudos em uma universidade. No ano de 2004, em que prestei o vestibular, inscrevi-me no curso de Matemática, na Universidade Estadual do Pará-UEPA, e, no curso de Física, na Universidade Federal do Pará-UFPA. A escolha desses cursos deu-se por ter

melhor relação com conteúdo da área de exatas. Nesse contexto, fui aprovado no curso de Física.

No ano de 2004, passei para fazer Licenciatura Plena em Física, na UFPA. Tive meu primeiro encontro com as disciplinas de Metodologia do Ensino de Física, Didática Geral, Psicologia da Educação, Tendências em Educação em Ciências. Dentre essas, destaco a disciplina Metodologia do Ensino de Física, que me mostrou novos modos de entender e ensinar os conteúdos da Física na Educação Básica.

Desde o início da faculdade, ingressei como bolsista no Laboratório de Nanotecnologia, Óptica e Eletrônica, para estudar propagação de onda no interior de uma fibra óptica. Nesse mesmo período, já atuava como professor em algumas escolas de Ensino Médio e cursinhos pré-vestibulares, que me prepararam para o mercado de trabalho e para a docência na Educação Básica e Superior.

No final do ano de 2008, conclui o curso de Licenciatura Plena em Física, e, em 02 de junho de 2008, tornei-me pai de uma linda menina chamada Ana Beatriz dos Santos de Moraes. Nesse mesmo ano, realizei a prova para o Mestrado em Engenharia Elétrica, no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE), da Universidade Federal do Pará (UFPA). Fui aprovado na área de Telecomunicações, para trabalhar com propagação de onda em meios dielétricos, para construir uma memória totalmente baseada em luz, a partir de uma guia de onda com fundamentos em cristal fotônico e teoria de grupo.

Os anos de pesquisa foram efêmeros no PPGEE. Os estudantes que compunham o grupo de pesquisa em Nanotecnologia, em sua maioria, eram profissionais que já atuavam em suas áreas de conhecimento, em empresas públicas ou privadas. Esses colegas de mestrado foram aprovados em concursos públicos pelo Brasil, pelo fato de serem, na maioria das vezes, a excelência em suas áreas de atuação, como engenheiros elétricos, civis, mecânicos, de telecomunicações, de computação. No final, desistiam da pós-graduação e saíam do Programa.

Nesse período, fiquei, a maioria das vezes, em volta de livros, artigos, programas e simulações, para dar andamento às pesquisas no laboratório.

Com um ano de trabalho e com meu orientador em tratamento médico, em seu país de nascimento, Rússia, continuei a orientação à distância. Meu orientador encaminhava-me os artigos e os livros que deveria estudar, assim como as disciplinas.

Dei continuidade aos estudos de tudo o que era publicado na área de propagação de ondas em cristais, tentando reproduzir no laboratório, refazendo as medidas. Foram dois anos muito férteis para meus conhecimentos em cálculo, simulação, física, teoria de grupo e programação etc.

No final de 2010, tinha texto para defender, porém o trabalho era financiado por uma empresa de tecnologia e não podia ser publicado, por ter que passar por uma patente inicialmente e, naquele momento, não foi possível apresentar a pesquisa. Não tendo mais forças emocionais por estar ali, resolvi deixar o Programa, sendo que teria a vaga garantida para o doutorado no ano seguinte – até hoje recebo e-mail do Programa e de meu orientador, a respeito da possibilidade de retornar para o Programa e concluir uma nova pesquisa, não mais de mestrado, mais sim de doutorado.

No início de 2011, sou convidado a participar como professor horista da Universidade do Estado do Pará (UEPA), no curso de Ciências Exatas E Naturais, possibilitando colocar em prática tudo o que estudei de Física e Matemática avançada, no PPGEE, nas minhas aulas com os alunos da graduação e pós-graduação.

No decorrer das aulas na graduação, nos cursos de Licenciatura em Matemática, Física, Química, Biologia e Engenharia de Produção, os alunos não apresentavam base em Matemática para problemas simples de contagem ou operações iniciais.

Pensando nessas dificuldades, planejava as aulas para que ocorressem da melhor forma possível, mas acabavam ficando incompletas, principalmente,

pelo fato uma parcela da turma não acompanhar as abstrações e as construções matemáticas.

Essas observações das dificuldades matemáticas viriam a persistir durante o período em que fui professor na Instituição. Com essa dificuldade constante, percebi que esse problema poderia estar atrelado à formação inicial desse aluno ou à própria formação inicial de seu professor da Educação Básica.

Pensando nisto, no ano de 2011, busquei no Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI), da Universidade Federal do Pará (UFPA), e em conversas com meus amigos que faziam mestrado no referido Programa, possibilidades de minimizar tais barreiras de ensino e aprendizagem que surgiram no decorrer da minha atuação como professor na Educação Superior.

A partir desses diálogos no interior do IEMCI, com discentes e professores do PPGECM, emergiu a necessidade de adaptações para os saberes instituídos, por exemplo, os saberes acadêmicos, adquiridos ao longo da formação, que são transferidos, combinados e recombinaados.

Sendo assim, ao longo da formação acadêmica, os estudantes são expostos a uma série de saberes que são transferidos, combinados e recombinaados em diferentes contextos. Essa dinâmica de transferência de conhecimento é o que Chevallard (1991) chama de Transposição Didática.

A Transposição Didática é um conceito que se refere à transformação do conhecimento acadêmico em saberes práticos, que são utilizados em diferentes contextos. Essa transformação envolve a adaptação do conhecimento para diferentes públicos, contextos e objetivos. Em outras palavras, trata-se da capacidade de aplicar o conhecimento adquirido na academia em diferentes situações da vida.

Um exemplo prático de Transposição Didática pode ser visto na área da educação. Professores precisam adaptar o conhecimento acadêmico para diferentes faixas etárias, níveis de escolaridade e realidades socioeconômicas. Para isso, é necessário que eles sejam capazes de combinar diferentes saberes e adaptá-los para as necessidades de cada grupo de alunos.

Outro exemplo de Transposição Didática pode ser visto na área da saúde. Profissionais da saúde precisam combinar diferentes saberes para diagnosticar e tratar pacientes com diferentes doenças e condições. Eles precisam adaptar o conhecimento acadêmico para as necessidades de cada paciente, levando em consideração fatores como idade, histórico médico e estilo de vida.

A Transposição Didática também é importante na área da tecnologia. Desenvolvedores precisam combinar diferentes saberes para criar soluções tecnológicas que atendam às necessidades dos usuários. Eles precisam adaptar o conhecimento acadêmico para as necessidades de cada projeto, levando em consideração fatores como usabilidade, segurança e eficiência.

A Transposição Didática é uma dinâmica fundamental na formação acadêmica e na aplicação do conhecimento em diferentes contextos. Ela envolve a combinação e adaptação de diferentes saberes para atender às necessidades de diferentes públicos e objetivos. É uma habilidade essencial para profissionais de diversas áreas, que precisam ser capazes de aplicar o conhecimento adquirido na academia em situações práticas da vida. Essas relações são tratadas por Chevallard (1991), em termos de Transposição Didática:

Um conteúdo de saber que tenha sido definido como saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O “trabalho” que faz de um objeto de saber a ensinar, um objeto de ensino, é chamado de transposição didática. (CHEVALLARD, 1991, p.39).

Segundo Chevallard (1991), a noção de transposição didática envolve, especificamente, a compreensão de dois tipos de transposição: a interna e a externa.

A transposição didática é um processo fundamental na construção do conhecimento, especialmente na educação. Ela consiste em transformar um conhecimento científico em um conhecimento escolar, tornando-o acessível e compreensível aos alunos. Existem dois tipos de transposição: a interna e a externa.

A transposição interna é a transformação que ocorre dentro do conhecimento científico, quando ele é adaptado para se tornar um conhecimento escolar. Essa adaptação é feita de acordo com as características dos alunos e do contexto escolar, tornando o conhecimento mais acessível e compreensível. Por exemplo, em uma aula de matemática, a transposição interna pode envolver a simplificação de fórmulas complexas para torná-las mais fáceis de entender.

Já a transposição externa é a transformação que ocorre quando o conhecimento é levado do ambiente científico para o ambiente escolar. Essa transformação envolve a adaptação do conhecimento para o contexto escolar, levando em consideração as limitações do ambiente escolar e as características dos alunos. Por exemplo, em uma aula de biologia, a transposição externa pode envolver a utilização de exemplos práticos para tornar o conteúdo mais interessante e acessível para os alunos.

Ambos os tipos de transposição são importantes para a construção do conhecimento escolar. A transposição interna permite que o conhecimento científico seja adaptado para o contexto escolar, tornando-o mais acessível e compreensível para os alunos. Já a transposição externa permite que o conhecimento seja adaptado para o ambiente escolar, levando em consideração as limitações e características desse ambiente.

No entanto, é importante lembrar que a transposição didática não deve ser vista como uma simples adaptação do conhecimento científico para o ambiente escolar. Ela envolve um processo complexo de transformação e adaptação, que deve ser realizado com cuidado e atenção aos detalhes. Além disso, é importante lembrar que a transposição didática não deve ser vista como um processo unidirecional. Os alunos também têm um papel importante nesse processo, pois são eles que irão construir o conhecimento a partir das informações que lhes são apresentadas.

A transposição didática é um processo fundamental na construção do conhecimento escolar. Ela envolve dois tipos de transposição: a interna e a externa. Ambas são importantes para tornar o conhecimento científico acessível e compreensível para os alunos, adaptando-o para o ambiente escolar. No

entanto, é importante lembrar que a transposição didática é um processo complexo e que deve ser realizado com cuidado e atenção aos detalhes.

A transposição didática externa é caracterizada pela passagem do saber sábio ao saber a ensinar, operado por uma estrutura denominada de noosfera. A noosfera, para Chevallard (1991, apud MELZER, 2015, p. 463), é uma instância da transposição didática que não ficou bem delimitada conceitualmente, sendo compreendida como a esfera em que se pensa e faz a transposição didática externa:

Para esta instância sugeri o nome paródico de noosfera. É na noosfera, que os representantes do sistema de ensino, com ou sem mandato (desde o presidente de uma associação de professores até o simples professor militante), se encontram, direta ou indiretamente (através de uma pesquisa, restringindo a demanda, no projeto transacional, debates ensurdecedores de projetos transacionais de uma comissão ministerial), com os representantes da sociedade (os pais de alunos, os especialistas que militam em torno do ensino, os emissários de um órgão político). (CHEVALLARD, 1991, p. 28.).

A transposição interna ocorre no planejamento e na execução do texto de saber construído pelo professor cuja realização desencadeia o saber aprendido, em sala de aula (SILVA; NUNES; GUERRA, 2016), em um contexto de estreita relação entre professor/aluno/saber, em que esses elementos interagem a partir de mecanismos que lhe são próprios, denominado, por Chevallard (1991), de “funcionamento didático”, esquematizado no triângulo didático.

No decorrer dessas conversas, no final do ano de 2011, surgiu a possibilidade de fazer uma especialização. Assim, os princípios que estão na base desta pesquisa surgiram durante o Curso de Especialização em Educação Matemática, no ano de 2012, promovido pelo Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI), da Universidade Federal do Pará (UFPA), a partir do momento em que passei a conviver e a frequentar o Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática da Matemática (GEDIM).

Nesse ano, 2012, assumo a disciplina Probabilidade de Estatística, para uma turma de Licenciatura plena em Matemática.

A disciplina de Probabilidade de Estatística é um dos principais pilares para os alunos das Ciências Exatas. Com uma abordagem teórica e prática, a

disciplina apresenta conceitos e técnicas para a análise e interpretação de dados, além de ser fundamental para a compreensão de outras áreas da Matemática, como a Estatística Inferencial.

A Probabilidade é uma área da Matemática que estuda a chance de ocorrência de eventos aleatórios. É uma ferramenta essencial para a análise de dados, pois permite a quantificação da incerteza e a previsão de resultados futuros. Na disciplina de Probabilidade de Estatística, os alunos aprendem a calcular probabilidades de eventos simples e compostos, a utilizar a distribuição binomial e normal, além de outras técnicas para a análise de dados.

Nessa disciplina, surgiram diversas dificuldades a respeito do assunto e principalmente das situações envolvendo arranjo, princípio fundamental da contagem, combinações e permutações. Dificuldades essas que fui trazendo para o campo da pesquisa em Educação Matemática.

Nesse viés, emerge a formulação do problema que considero da profissão, Problema Docente (P_0), mas que inicialmente se apresenta como particular.

Chamamos problemas docentes aqueles que se apresentam ao professor como tal quando tem que ensinar um tema matemático a seus alunos. Os problemas docentes são formulados com as noções disponíveis na cultura escolar, que muitas das vezes são importadas dos documentos curriculares (por exemplo, as noções de motivação, aprendizagem significativa, individualização do ensino, aquisição de um conceito, abstração ou competência). Ambas as noções e as ideias dominantes da cultura escolar não são questionadas. (GASCÓN, 2011, p. 207, tradução nossa).

Nesse mesmo período, minha filha começa a estudar e em seu material didático estavam descritas atividades de combinar formas, combinar cores, organizar objetos, selecionar por tamanho, agrupar os semelhantes, contar etc. Essa percepção, com o olhar de educador matemático, possibilitou o início da pesquisa em Educação Matemática.

Esse tipo de situações leva ao questionamento dos tipos de problemas “ P_0 que tenho que ensinar aos meus alunos e como tenho que ensinar a propósito (GASCÓN, 2011, p. 207, tradução nossa)”.

Por exemplo, da Combinatória?

Esses conteúdos estão descritos nos PCN (BRASIL, 1997) como:

- Coleta, organização e descrição de dados.
 - Exploração da ideia de probabilidade em situações-problema simples, identificando sucessos possíveis, sucessos seguros e as situações de “sorte”.
 - Utilização de informações dadas para avaliar probabilidades.
 - Identificação das possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e de contabilizá-las usando estratégias pessoais.
- (BRASIL, 1997, p.61-62)

Desta forma, entendemos o P_0 desempenha um papel fundamental no desenvolvimento da compreensão de conceitos matemáticos, por estar associado ao princípio fundamental de contagem, às ideias de contagem, a descrições de formação de conjuntos e à descrição de possibilidades.

Em conversas com professores do Programa de Pós-Graduação no IEMCI, fiquei motivado para estudar as crianças no ciclo de alfabetização, em especial, o *saber-fazer* das tarefas descritas, no ano ao qual a atividade se destina.

Para tentar compreender a pesquisa, início o estudo, que intitulei de bibliográfico, para buscar na literatura uma forma de compreender esse objeto, que inicialmente chamei de Combinatória.

Durante esse ano de 2012, ficava dividido entre família, estudo e trabalho, e, no final do ano de 2013, realizei o processo seletivo para ingressar no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM), no qual fui aprovado e selecionado como aluno na linha de pesquisa “Percepção Matemática, Processos e Raciocínio Lógico, Saberes e Valores”. A partir de então, busquei prosseguir com minhas pesquisas iniciadas no Curso de Especialização, já agora no mestrado.

No início do ano de 2014, apresentei minha monografia de especialização ao PPGECM, a qual possibilitou também meu primeiro encontro com o tema Noção de Raciocínio Combinatório (NRC). Aqui nesta pesquisa descrita pelas noções de estatísticas, noções de probabilidade e noções de combinatória, que

juntos devem possibilitar a mobilização saberes nos anos iniciais de escolarização como noções de sequência, noções de ordenação, noções de agrupamentos, noções de classificação, noções de enumeração e ideias de contagem.

Desde então, continuei investigando as propostas e as sugestões dos documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), as Leis de Diretrizes e Base da Educação (LDB), o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), Prova Brasil e Avaliação Nacional da Alfabetização (ANA) e os periódicos disponíveis no Banco de Dados da Capes. Essa investigação permitiu constatar o destaque que a NRC tem no Ensino Fundamental, no Brasil, por ser o cerne do pensamento combinatório ou da Noção de Raciocínio Combinatório na Educação Básica, possibilitando aos discentes a compreensão do pensamento lógico-dedutível, desde os anos iniciais de escolarização até o Ensino Médio.

O pensamento combinatório é um dos fundamentos da matemática e está presente em diversas situações do nosso dia a dia. Desde os Anos Iniciais de escolarização até o Ensino Médio, é importante que os discentes desenvolvam a noção de raciocínio combinatório, pois isso possibilita a compreensão do pensamento lógico-dedutível.

O cerne do pensamento combinatório consiste na contagem de possibilidades. Por exemplo, se temos 3 camisas e 2 calças, quantas combinações diferentes podemos fazer? A resposta é 6: camisa 1 com calça 1, camisa 1 com calça 2, camisa 2 com calça 1, camisa 2 com calça 2, camisa 3 com calça 1 e camisa 3 com calça 2. Esse tipo de problema é muito comum em jogos de tabuleiro, na organização de eventos e na resolução de problemas matemáticos.

Ao trabalhar o pensamento combinatório na Educação Básica, os discentes aprendem a pensar de forma sistemática e organizada. Eles desenvolvem habilidades como a análise de possibilidades, a identificação de padrões e a resolução de problemas complexos. Além disso, o pensamento

combinatório estimula a criatividade e a imaginação, pois é necessário pensar fora da caixa para encontrar soluções inovadoras.

Na Educação Básica, é possível trabalhar o pensamento combinatório de diversas formas. Desde os anos iniciais, os discentes podem ser estimulados a criar padrões com objetos, a contar objetos e a identificar combinações possíveis. No Ensino Fundamental, é possível trabalhar com problemas mais complexos, envolvendo a combinação de elementos diferentes e a análise de possibilidades. Já no Ensino Médio, é possível trabalhar com problemas mais abstratos, envolvendo a teoria dos conjuntos e a probabilidade.

Em suma, o pensamento combinatório é um dos fundamentos da matemática e é essencial para o desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutível. Desde os anos iniciais de escolarização até o Ensino Médio, é importante que os discentes desenvolvam essa habilidade, pois ela é fundamental para a resolução de problemas complexos em diversas áreas da vida. Ao trabalhar o pensamento combinatório na Educação Básica, os discentes desenvolvem habilidades importantes como a análise de possibilidades, a identificação de padrões e a resolução de problemas complexos.

Em fevereiro de 2015, realizei a seleção para Professor Substituto da Universidade Federal do Pará, na Faculdade de Ciências Exatas e Naturais, na qual fui aprovado. Nesse mesmo ano, concomitantemente, termino o mestrado e sou professor da graduação, novamente vislumbrando a possibilidade de propor um olhar diferenciado para a formação profissional na Educação Básica.

No final do ano de 2016, apresentei meu trabalho de mestrado ao PPGEEM, intitulado “Organizações Didáticas nos Livros Didáticos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: O Caso da Noção de Raciocínio Combinatório”. A pesquisa permitiu evidenciar a noção praxeológica, relativa ao objeto NRC do 1º ao 5º ano do EF, nas tarefas descritas e analisadas, a partir de duas coleções de livros didáticos utilizados no Ensino Fundamental e nas escolas de Educação Básica do Estado do Pará, município de Belém. Levou-me a notabilizar as propriedades da Noção de Raciocínio Combinatório que possui lugar nesse nível

de ensino da Educação Básica, ou seja, nos anos iniciais de escolarização, do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental.

Ainda neste mesmo período de 2016, realizei a seleção para o doutorado na qual fui aprovado. Quando fui cursar o doutorado, já atuava como professor de Física e Matemática, no Ensino Médio e superior.

No decorrer do ano de 2016, início as atividades acadêmicas de professor da disciplina Física Estatística para uma turma de licenciatura em Física, surgindo as mesmas dificuldades já observadas anteriormente no ano de 2011-2012, na UEPA, dificuldades a respeito do assunto e principalmente das situações envolvendo arranjo, princípio fundamental da contagem, combinações, permutações, aleatoriedade e estatística. Dificuldades essas que trago para o bojo da pesquisa.

Em conversas com meu orientador, Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes, no início de ano de 2017, a respeito das dificuldades dos alunos da graduação, e de não renovar o contrato para pleitear uma bolsa no programa de pós-graduação, descobrimos a possibilidade de conseguirmos, na Pró-Reitoria de Pós-Graduação da UFPA, uma bolsa de demanda social, a qual passei a receber em junho de 2017. Tornei-me bolsista do Programa, no Laboratório de Estudo, Pesquisa e Desenvolvimento de Educação Matemática (LABEMAT), espaço esse coordenado pelo Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes.

Voltando aos estudos no curso de doutorado e às dificuldades percebidas na Educação Superior, em conversa com o orientador, percebemos que nosso interesse estava voltado para a formação continuada de professores da Educação Básica, o que poderia nos permitir conhecer mais profundamente a formação docente, como o que foi discutido na disciplina base epistemológico das ciências, com as diversas obras apresentadas e comentadas. Aqui destaco a importância desta disciplina para a formação continuada dos professores que ingressaram no doutorado, a qual ocasionou uma reflexão sobre minhas ações docentes e a busca de subsídios teóricos, metodológicos e práticos para a compreensão e os desafios de suas pesquisas futuras.

No ano de 2018, realizo diversas investigações paralelas à minha pesquisa, possibilitando a produção de trabalhos de conclusão de curso como: *“Investigando o conhecimento de professores sobre formas geométricas e suas habilidades para o ensino nos Anos Iniciais, segundo o modelo de Van Hiele”*; *“Representações de estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental sobre multiplicação e divisão em meio a situações multiplicativas”*; e *“Tarefas com materiais didáticos alternativos na abordagem de noções do raciocínio combinatório nos Anos Iniciais de Escolarização”*. Houve também a escrita e a publicação de capítulo de livro, com o trabalho *“Noções de estatística os estudantes dos Anos Iniciais: articulações e representações de tabelas e gráficos num contexto interdisciplinar”*, na obra intitulada **“EDUCAÇÃO, DIVERSIDADES E INCLUSÃO: travessias pedagógicas e sociais em tempos de pandemia”** e a publicação do livro realizado no XII Encontro Paraense de Educação Matemática – XII EPAEM, com o título *“A noção do raciocínio combinatório nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental a partir da teoria antropológica do didático”*, o que demonstra a evolução da pesquisa.

No final do ano de 2019, surge a oportunidade de realizar concurso para professor do Colégio Militar de Belém – CMBel. Inicialmente, conversei com meu orientador, pois estava no final da produção acadêmica da tese e, dessa forma, ficaria sem a bolsa. Como sempre, ele foi compreensivo e entendeu meus motivos para realizar o concurso. Era uma vaga para minha área de Física, com candidatos do Brasil inteiro, mas no final fui aprovado e tive que ficar ausente por seis meses para a instrução militar. Nesse período, em 18 de dezembro de 2019, realizo a qualificação da pesquisa e passo a dedicar-me ao fechamento do texto e à minha função de professor militar em uma organização militar de ensino.

No ano de 2020, no período da pandemia, tinha minha função de pesquisador e de militar e acabei me dedicando mais à vida militar para ajudar a sociedade que estava passando por grandes dificuldades, deixando a pesquisa em segundo plano, mas sem abandonar os estudos do doutorado.

No ano de 2021, retorno às atividades de pesquisa para fechar o texto final da tese. No subitem, a seguir, apresento a justificativa da pesquisa.

1.3 – Hipótese da Tese

Apoiado no que está sendo apresentado até o momento, nossa questão de pesquisa encontra-se situada nos problemas associados à contagem, dando ênfase às ideias de contagem, em volta do princípio fundamental da contagem: em que medida um Modelo Analítico sobre a Noção de Raciocínio Combinatório baseado nos estudos Fischbein possibilita análises de pesquisas que enfocam na Noção de Raciocínio Combinatório?

Para responder ao questionamento proposto, elegemos como objetivo geral analisar as produções científicas defendidas entre os anos de 1998 e 2019, em pesquisas de nível de mestrado e doutorado no Brasil, utilizando a Meta – Análise Qualitativa, para construir e analisar as teses e dissertações, a partir de um Modelo Analítico para a Noção de Raciocínio Combinatório.

Para alcançarmos nosso objetivo, a metodologia de investigação utilizada foi a Meta – Análise Qualitativa, com a produção dos dados sendo feita no repositório nacional, no Banco de Teses e Dissertações, da Coordenação de aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, no qual foram selecionadas as pesquisas do período de 1998 a 2019, obtendo 867 pesquisas, 609 dissertações e 258 teses. Os textos foram organizados tendo como referência o ano de publicação e o tipo de trabalho. Para análise dos dados construídos, baseamos nas pesquisas de Fischbein (1975) para construção de um Modelo Analítico.

A pesquisa realizada por Fischbein em 1975 foi um marco na área de educação matemática, especialmente no que se refere ao trabalho de raciocínio combinatório. O estudo tinha como objetivo investigar como os alunos resolviam problemas de combinação e permutação, e quais eram as estratégias utilizadas por eles.

Para tanto, Fischbein selecionou um grupo de estudantes de diferentes níveis de escolaridade e apresentou a eles uma série de problemas envolvendo combinações e permutações. Durante a resolução dos problemas, os alunos foram observados e entrevistados, a fim de que fosse possível identificar as estratégias utilizadas por eles.

Os resultados da pesquisa foram surpreendentes. Fischbein identificou que muitos alunos utilizavam estratégias intuitivas, baseadas em tentativa e erro, para resolver os problemas. Além disso, muitos deles apresentavam dificuldades em compreender as regras básicas de combinação e permutação, o que os levava a cometer erros na resolução dos problemas.

Diante desses resultados, Fischbein propôs uma série de estratégias de ensino que poderiam ajudar os alunos a desenvolver um trabalho de raciocínio combinatório mais eficiente. Entre essas estratégias, destacam-se a utilização de exemplos concretos na resolução dos problemas, a exploração das propriedades básicas de combinação e permutação, e a utilização de atividades que estimulem o pensamento lógico e a criatividade dos alunos.

Passados mais de 40 anos desde a realização da pesquisa de Fischbein, é possível perceber que suas contribuições ainda são relevantes para a educação matemática. Ainda hoje, muitos alunos apresentam dificuldades em compreender as regras de combinação e permutação, e muitos professores ainda utilizam uma abordagem intuitiva e pouco sistemática na resolução desses problemas.

Por isso, é importante que os educadores conheçam o trabalho de Fischbein e suas estratégias de ensino, a fim de que possam ajudar seus alunos a desenvolver um trabalho de raciocínio combinatório mais eficiente. Somente assim será possível formar cidadãos capazes de compreender e utilizar a matemática de forma crítica e criativa.

Deste modo, elencaremos nossa proposição de tese da seguinte forma: Para realizarmos o estudo bibliográfico sobre a questão de pesquisa, verificamos que, desde o início da humanidade, existem situações – problemas que estão em volta da Noção de Raciocínio Combinatório. Nesse viés, buscamos apreensões de saberes que tangem os problemas associados à contagem para revelar a institucionalização do saber em uma determinada instituição, a partir de um Modelo Analítico para a Noção de Raciocínio Combinatório.

Diante do exposto, faremos a apresentação da justificativa da pesquisa.

1.4 – Justificativa da pesquisa

Foi no decorrer do curso do doutorado que uma antiga questão foi compreendida como suficientemente problemática para assumir definitivamente a posição de professor de Matemática em formação e, por isso, talvez, determinar a vida acadêmica atual de pesquisador do Programa: *como podemos organizar um estudo sobre a Noção de Raciocínio Combinatório mediante um modelo?*

No início desse percurso de formação acadêmica no IEMCI, no ano de 2012, jamais levantaria questões sobre os saberes ou práticas matemáticas ou mesmo modelos de referência, pois a Matemática era e, às vezes, ainda é inquestionável.

Principalmente, porque no princípio das investigações os saberes estão organizados em obras⁵ como de Andrade (2012), Pereira (2012; 2017), Silva (2014), Moraes (2016), Assunção (2016), Silva (2017), Matos (2017), Mesquita (2017). Dessa forma, os objetos eram obtidos em pesquisas e essas traziam no seu bojo uma ecologia dos objetos, e, nesse viés, tínhamos que apreendê-los, compreendê-los, interpretá-los e, assim, construir um estudo, que, inicialmente, encontra-se em fase de conclusão no doutorado.

A partir dessas leituras, foi possível construir compreensões sobre modelos epistemológicos de referência, modelos epistemológicos alternativos e das dinâmicas de pesquisas de perguntas e respostas, anunciadas por Chevallard (2001), para enfrentar o problema de ensino monumentalista, a partir do questionamento do mundo.

Pois o ensino monumentalista é um problema que afeta muitas instituições de ensino em todo o mundo. Esse modelo de ensino é caracterizado pela transmissão de informações de forma mecânica, sem levar em consideração as necessidades e vivências dos alunos. É um modelo que não incentiva a reflexão crítica e o questionamento do mundo. Para enfrentar esse

⁵ Não uso o termo na perspectiva chevallariana e sim no sentido lato sensu.

problema, é necessário adotar uma abordagem diferente, que leve em consideração a complexidade do mundo e a diversidade dos alunos.

Uma das principais referências para enfrentar o problema do ensino monumentalista é o sociólogo francês Yves Chevallard. Em seus estudos, Chevallard propõe uma abordagem que leva em consideração a complexidade do mundo e a diversidade dos alunos. Ele argumenta que o ensino deve ser orientado para a construção de conhecimentos significativos, que permitam aos alunos compreender e transformar a realidade em que vivem.

Essa abordagem parte do pressuposto de que o conhecimento não é algo pronto e acabado, mas sim uma construção social e histórica. O papel do ensino é, portanto, ajudar os alunos a construir esse conhecimento de forma crítica e reflexiva. Para isso, é necessário adotar uma metodologia que leve em consideração as necessidades e vivências dos alunos, permitindo que eles sejam agentes ativos na construção do conhecimento.

Uma das principais estratégias propostas por Chevallard é a abordagem didática da escola inclusiva. Essa abordagem parte do pressuposto de que todos os alunos têm o direito de aprender e que o ensino deve ser adaptado às necessidades e capacidades de cada um. Isso significa que os professores devem estar preparados para lidar com a diversidade dos alunos, criando estratégias que permitam a inclusão de todos.

Outra estratégia proposta por Chevallard é a abordagem didática da transposição didática. Essa abordagem parte do pressuposto de que o conhecimento não pode ser transmitido diretamente do professor para o aluno, mas deve ser adaptado às necessidades e capacidades dos alunos. Isso significa que o professor deve ser capaz de transpor o conhecimento de uma linguagem para outra, adaptando-o às necessidades dos alunos.

Sendo assim, para enfrentar o problema do ensino monumentalista, é necessário adotar uma abordagem que leve em consideração a complexidade do mundo e a diversidade dos alunos. A abordagem proposta por Chevallard é uma referência importante nesse sentido, pois propõe estratégias concretas para

lidar com a diversidade dos alunos e construir conhecimentos significativos. É necessário que as instituições de ensino sejam capazes de adotar essa abordagem, criando um ambiente propício para a construção do conhecimento crítico e reflexivo.

Para tanto, partimos da necessidade de questionar as organizações praxeológicas identificadas e buscar compreendê-las para assim sugerir prováveis ajustes tomando como base um modelo praxeológico de referência que, por sua vez, deve considerar as complexidades que envolvem as condições e restrições institucionais, o *milieu*, a ecologia dos saberes nas instituições e nos alunos, orientando novas condições que ratifiquem a razão de ser desses saberes dentro de uma racionalidade epistemológica.

Nesse sentido, Chevallard (2009a) afirma que “a didática é a ciência das condições e restrições da difusão social de praxeologias” e, nesse sentido, fundamentados na TAD, podemos estudar e compreender as condições e restrições de tal conteúdo matemático.

Em que medida um modelo analítico sobre a Noção de Raciocínio Combinatório, baseado nos estudos Fischbein, possibilita análises de pesquisas teses e dissertação que enfocaram a NRC?

Esses questionamentos foram gestados e desdobrados em outros questionamentos, ao longo desses dez anos, e não aconteceram por obra do acaso.

Parece que a origem não se deu enquanto discente da especialização, tampouco no mestrado e nem nos primeiros passos como aluno do curso de doutorado. Essas premissas foram surgindo nos desdobramentos das pesquisas realizadas, ora como professor do Ensino Médio, ora como professor do Ensino Superior, fomentadas em conversas com o orientador ou em diálogos com professores da pós-graduação e com professores em formação continuada no PPGECM e no GEDIM.

Como pesquisador, passei a questionar as tarefas e as técnicas matemáticas ligadas ao objeto NRC. Comecei a buscar – em meu tempo escolar

na Educação Básica e inclusive na graduação – como conceberia a resolução de uma determinada tarefa ligada ao objeto NRC.

Na vida pessoal, profissional e acadêmica, reúno uma memória didática, memórias das aprendizagens ou característica de uma sequência de procedimentos e métodos ligados a tais questionamentos, que acionava meu equipamento praxeológico. Esse equipamento considera todas as praxeologias de que a pessoa dispõe, para destacar que, assim como há uma história da pessoa como sujeito, existe uma dinâmica cognitiva, em que alguns objetos desaparecem do universo cognitivo da pessoa, enquanto outros aparecem. Em correspondência, há uma dinâmica praxeológica em que o equipamento praxeológico da pessoa muda, no sentido de que algumas partes desse equipamento perdem suas características de operação, enquanto outras partes são remodeladas e que novos elementos são adicionados ao longo do tempo (MESQUITA, 2011). Essa remodelação das características operacionais são os instrumentos ligados a um modelo praxeológico, direcionado, estruturado e organizado:

[...] em torno de um tipo de tarefas T , que encontramos em princípio, um triplete formado de uma técnica (pelo menos), τ , de uma tecnologia de τ , θ e uma teoria de θ , Θ . O conjunto, denotado $[T / \tau / \theta / \Theta]$, constitui uma praxeologia específica, este qualificador significa que se trata de uma praxeologia relacionada a um único tipo de tarefas, T . Essa praxeologia - ou organização praxeológica - portanto, consiste em um bloco técnico prático, $[T / \tau]$, e um bloco tecnológico-teórico, $[\theta / \Theta]$. (CHEVALLARD, 1998, p. 5, tradução nossa).

Esse modelo praxeológico $[T; \tau; \theta; \Theta]$ pode dar suporte para enfrentar tal tarefa, a partir de uma prática já consolidada, através da noção de *habitus*⁶ expressa como:

[...] sistemas de disposições duráveis, estruturas estruturadas predispostas a funcionar como estruturas estruturantes, que dizer, enquanto princípio de geração e de estruturação de práticas e de representações que podem ser objetivamente “reguladas” e “regulares” sem que, por isso, sejam o produto da obediência a regras, objetivamente adaptadas a seu objetivo sem supor a visada consciente dos fins e o domínio expresso das operações necessárias para atingi-las e, por serem tudo isso, coletivamente orquestradas sem ser o

⁶Bourdieu (1997): *habitus* enquanto produtores de conhecimento nas instituições de ensino e ensino-pesquisa.

produto da ação combinadas de um maestro. (BOURDIEU, 2007a, p. 41).

A noção de *habitus*, proposta pelo sociólogo francês Pierre Bourdieu em 1997, tem sido amplamente discutida e aplicada em diversas áreas do conhecimento, como a sociologia, a antropologia e a psicologia social. O conceito de *habitus* se refere aos padrões de comportamento, crenças e valores que são internalizados pelos indivíduos ao longo do tempo, a partir da sua experiência social e cultural.

De acordo com Bourdieu, o *habitus* é uma espécie de “estrutura estruturante”, ou seja, uma forma de estrutura social que molda a maneira como os indivíduos percebem e agem no mundo. O *habitus* é, portanto, um elemento central na compreensão das desigualdades sociais, uma vez que ele influencia as escolhas e as oportunidades que os indivíduos têm ao longo da vida.

Uma das principais características do *habitus* é a sua natureza inconsciente. O *habitus* não é algo que os indivíduos escolhem ou decidem conscientemente, mas sim algo que é internalizado de forma gradual e natural. Por isso, muitas vezes as pessoas não têm consciência de que estão agindo de acordo com o seu *habitus*, e podem até mesmo acreditar que suas escolhas e comportamentos são fruto de uma decisão consciente.

Outra característica importante do *habitus* é a sua relação com o campo social. Bourdieu argumenta que o *habitus* é moldado pelas condições objetivas do campo social em que os indivíduos estão inseridos, ou seja, pelas estruturas e relações de poder que existem nesse campo. Por exemplo, um indivíduo que cresceu em um ambiente de pobreza e exclusão social tende a desenvolver um *habitus* que valoriza a sobrevivência e a adaptação a condições difíceis, enquanto um indivíduo que cresceu em um ambiente de privilégio e prestígio tende a desenvolver um *habitus* que valoriza a competição e a busca por status social.

Apesar de ser uma noção complexa e multifacetada, o conceito de *habitus* tem sido aplicado em diversas áreas do conhecimento, como a educação, a saúde, a cultura e a política. Por exemplo, na educação, o *habitus* pode influenciar as escolhas dos alunos em relação às suas carreiras e às suas

expectativas em relação ao futuro. Na saúde, o *habitus* pode influenciar os hábitos alimentares e de atividade física dos indivíduos, bem como a maneira como eles lidam com doenças e tratamentos médicos. Na cultura, o *habitus* pode influenciar as preferências estéticas e culturais dos indivíduos, bem como a sua participação em atividades culturais. Na política, o *habitus* pode influenciar as escolhas dos eleitores em relação aos candidatos e partidos políticos, bem como a sua participação em movimentos sociais e atividades políticas.

Em resumo, a noção de *habitus* proposta por Bourdieu é uma ferramenta importante para a compreensão das desigualdades sociais e das práticas culturais e sociais dos indivíduos. O *habitus* é uma forma de estrutura social que influencia a maneira como os indivíduos percebem e agem no mundo, e que é moldada pelas condições objetivas do campo social em que eles estão inseridos. Por isso, é fundamental levar em conta o *habitus* na análise das práticas sociais e culturais, bem como nas políticas públicas e nas intervenções sociais.

Desta forma, esse tipo de investigação pode se valer de ferramentas de um único componente curricular (monodisciplinar) ou de um conjunto de ferramentas de várias componentes (codisciplinar) na elaboração da resposta, tendo como o referencial teórico principal a análise das praxeologias⁷ [T; T; θ; Θ], pois TAD situa a atividade Matemática e a consequência da atividade do estudo da Matemática, no conjunto das atividades humanas e sociais (CHEVALLARD, 1999), podendo ser modelada em noções de praxeologias, as quais são chamadas de Praxeologias Matemáticas (PM) ou Organizações Matemáticas (OM).

Chevallard introduziu a noção de Praxeologia Ou Organização Matemática (PM ou OM), que atualmente representa um dos pontos-chave da TAD (CHEVALLARD, 1996, 1999, 2002a e 2002b). Uma praxeologia (*praxis* + *logos*) permite considerar em simultâneo, atribuindo-lhes importância equivalente, tanto à dimensão teórica quanto à dimensão prática do saber. Assim, considera-se a praxeologia como a unidade mínima que pode descrever

⁷ [...] A palavra praxeologia é formada por dois termos gregos, *praxis* e *logos*, que significam, respectivamente, prática e razão [...] (ALMOULOU, 2007, p. 117).

a atividade matemática traduzida em duas vertentes que devem coexistir de forma indissociável e articulável:

- A *praxis* (a prática ou o “saber fazer”) engloba as tarefas propostas e as técnicas utilizadas para resolvê-las;
- O *logos* (a teoria ou o “saber”) envolve os discursos que descrevem, explicam e justificam as técnicas usadas. Esses discursos designam-se por tecnologias que, por sua vez, são descritas e justificadas pelas teorias.

Resumindo, uma praxeologia é um sistema formado por quatro componentes, divididos em dois blocos, como sugere a Tabela1:

Tabela 1: Componentes de uma Praxeologia ou Organização Matemática

Componentes	Bloco		Praxeologias Específicas
Tarefa	Prático – Técnico	Saber Fazer	[T / τ]
Técnica			
Tecnologia	Tecnológico – Teórico	Saber	[θ / Θ]
Teoria			

Fonte: Construção do autor.

Uma grande parte das praxeologias matemáticas (PM), que são habitualmente estudadas no Ensino Fundamental, já perdeu a sua razão de ser (ou seja, desapareceram dessa instituição escolar as questões às quais as ditas PM poderiam vir a dar resposta) e, conseqüentemente, o seu estudo na citada instituição deixou de fazer sentido. Mais recentemente, têm emergido investigações, apoiadas na TAD, cujo principal objetivo reside em criar possíveis razões de ser das PM, de tal forma que seja exequível responder a certas questões.

Gascón (2004) considera que qualquer tentativa de incidir sobre o fenômeno da desarticulação das Matemáticas escolares deverá basear-se numa reformulação radical da epistemologia dominante nas instituições escolares, caracterizada pela separação do matemático do didático.

Assim, propôs a integração das razões de ser das Praxeologias Ou Organizações Matemáticas nos programas oficiais, sob a forma de questões

geratrizes do processo de estudo das PMs, em vez de surgirem como meros elementos decorativos.

Nesse cenário, em volta das praxeologias, é possível perceber que as práticas matemáticas associadas com o objeto NRC são distintas de três aspectos particulares: do problema da desarticulação dos currículos de Matemática, na passagem do Ensino Fundamental para o Médio e desse para o Ensino Universitário, abrindo caminhos para:

- A transição da formação do professor da Educação Básica;

Salientamos que o primeiro aspecto que constituirá a perspectiva de investigação deste estudo está na prática de organizar um estudo da Noção de Raciocínio Combinatório, em volta dos problemas associados à contagem, embora se pretenda explorar os demais aspectos com a construção de um modelo analítico.

Posto isso e partindo da noção de organização matemática pontual, local e regional (FONSECA, 2004), enunciamos uma conjectura geral como base para reformular o problema docente como um verdadeiro problema de investigação didática no âmbito do Programa Epistemológico de Investigação em Didática da Matemática (GASCÓN, 2003).

É importante destacar que devem existir modelos que possam dar suporte para compor seu discurso em sala de aula, em especial, o professor de Matemática do Ensino Básico.

Diante deste posicionamento, busca-se o discurso que justifique o professor de Matemática, um discurso adequado e compreensível a quem quer e precisa compreender, com início, meio e fim, possuidor de saberes necessários para a compreensão de quem não aprende o objeto matemático, mas compreende a sua ecologia.

Pois essa atitude de quem tem o dever de ensinar algo a alguém cabe ao professor, ou seja, é o professor quem cria as condições, as restrições, as

combinações e as alterações que tornam o ensino e com ele a aprendizagem, possível.

Pesquisas centradas no âmbito da Educação Básica tomaram as descontinuidades como uma manifestação de um problema didático global que afeta todo o ensino das Matemáticas e que se torna mais evidente na passagem de um determinado nível educativo para outro mais avançado (GARCÍA, 2005; RUIZHIGUERAS et al, 2007).

Buscando-se a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1991), mais precisamente os conceitos de organização praxeológica, o ensino e a aprendizagem da Matemática são considerados como aprendizagem de práticas dessa atividade humana, realizadas no enfrentamento de situações em conformidades com o jeito de pensar e de fazer regulados objetivamente, ou não, por uma instituição ou por um grupo social, entendidos como um espaço social em que se produz, usa, ensina e difunde (transpõe) práticas com Matemática.

O termo práticas com Matemática pode ser compreendido como uma prática que envolve objetos socialmente reconhecidos como objetos matemáticos condicionados pela instituição Matemática, de modo que pode apresentar regularidades ou regras que escapam à compreensão dos matemáticos. Claro que essa denominação também se refere à prática matemática, no sentido de ser dos especialistas matemáticos.

Falar em situação é falar de uma prática realizada por um sujeito que possui uma "razão de ser" ou que é dotado de uma racionalidade do objeto. Nessa linha de compreensão, a racionalidade é relativa, no sentido do que parece natural ou possível para uma instituição ou campo pode ser estranho para outras instituições ou campo.

Assim, quando falo em instituição, estou me referindo ao espaço social que encaminha e limita a realização de práticas nele instituídas. Nesse sentido, os sujeitos realizam práticas em conformidade com a instituição em que estão inseridos, de modo que os sujeitos e as instituições se codeterminam e se especificam mutuamente.

De forma apressada, pode-se pensar que falar sobre a trajetória de vida escolar de uma pessoa é falar das práticas das instituições escolares, em um dado tempo que se vivenciou. Mas, sob o contexto teórico ora assumido, estaria falando de um sujeito de uma instituição e não de uma pessoa.

As instituições e grupos sociais provêm a inculcação ou a incorporação na pessoa de subsistemas de práticas e percepções, que são parte de um sistema social ainda maior, que se influenciam mutuamente em macrocampo. Na perspectiva de Bourdieu (1983), infere diretamente nas regras específicas de cada campo, portanto, prescreve-se uma formação que vislumbre *habitus* que permitam lutar e permanecer nas sociedades capitalistas.

Nesse pensar, enquanto pessoa, sou uma multitude de sujeitos de diferentes instituições que influenciam minhas práticas com Matemática. Vivida em diferentes instituições desde a escola básica e superior, em diferentes modalidades, entre elas, as escolas de Ensino Fundamental, Médio, a graduação e pós-graduação, até a família e outros espaços sociais que me causam sentimentos de pertencimento, mesmo que não os tenha percebido em práticas com Matemática.

Assim, posso imaginar que a minha história de vida no IEMCI possui diferentes trajetórias de vidas institucionais, o que inclui as trajetórias da vida escolar, em suas diferentes modalidades, que se cruzam e interagem, se assim posso dizer, e que ganham forma segundo o meu modo de vida, mesmo que vagamente, mas sem perder relevância, em minhas memórias didáticas. Essas condicionam minhas práticas pessoais com Matemática, entre elas, a de discente do Programa de Pós-Graduação do IEMCI.

Portanto, quando falo de minha trajetória de formação discente, falo de trajetórias que, em tempos diferentes, se influenciam mutuamente, de modo que não posso afirmar que estou falando de determinadas práticas, em determinados tempos, mesmo quando situada em instituição determinada, mas sim de dinâmicas em volta dessas práticas que buscam produzir a coerência deste texto.

Em resumo, deparamo-nos com vestígios que constituem uma possível trajetória, ainda que parcial, de meus encontros com práticas de Matemática que me constituíram professor de Matemática em formação, afetando as minhas práticas, às vezes, ratificando, outras vezes, modificando, e, portanto, constituindo o que está a ser constituído, a minha identidade de professor formador, inclusive de pesquisador do Programa de Pós-Graduação do IEMCI.

Para tanto, elegemos o Programa Epistemológico de Investigação em Didática da Matemática (GASCÓN, 2003), pois esse Programa toma como base de análise didática um modelo de estrutura e dinâmica da atividade Matemática escolar. Parte do pressuposto de que a origem do problema da Educação Matemática está na própria Matemática e como resposta à insuficiência dos modelos desenvolvidos pela epistemologia clássica é que ganha relevância no âmbito da Didática da Matemática o programa epistemológico de investigação.

A característica principal do programa epistemológico de investigação (BOSCH, 2003) consiste em considerar que o objeto primário de investigação da didática é a atividade Matemática, tal como se realiza nas distintas instituições da sociedade. Nesse programa, não se considera o conhecimento matemático de um ponto de vista psicológico, como um processo mental de indivíduos isolados e sim como o produto da atividade humana nas instituições sociais, o que, de certa forma, é um problema antropológico.

A abordagem antropológica inscreve-se no programa epistemológico de investigação em Didática da Matemática.

Gascón (1998, 2003), Godino et al (2003) situam o estudo do homem aprendendo e ensinando Matemática como uma problemática de investigação na perspectiva da antropologia cognitiva.

É importante destacar que os modelos epistemológicos dos saberes matemáticos, na Didática da Matemática, devem elaborar seus próprios modelos didáticos de referência para a análise dos processos didáticos. Uma das funções essenciais do uso desses modelos é a de constituir, para o investigador em

didática, um instrumento de emancipação em relação às diferentes instituições como a sala de aula, a escola, a sociedade (CHEVALLARD et al, 2001).

Neste viés, a pesquisa tem como objetivo de estudo desenvolver um estudo epistemológico sobre noções de raciocínio combinatório nas produções científicas, defendidas entre os anos 1998 e 2019, em pesquisas de nível de mestrado e doutorado no Brasil, a partir da Meta-Análise Qualitativa, para construir e analisar teses e dissertação, a partir de um Modelo Analítico para a Noção de Raciocínio Combinatório.

A escrita da tese encontra-se, dessa forma, organizada em capítulos, os quais retratam os momentos vivenciados durante o desenvolvimento desta pesquisa.

CAPÍTULO II – UM ESTUDO EPISTEMOLÓGICO DOS PROBLEMAS ASSOCIADOS À CONTAGEM

Na formulação de qualquer problema didático, a didática sempre usa, mesmo que apenas implicitamente, uma descrição e uma interpretação — isto é, um modelo epistemológico — do campo matemático que está em jogo. O TAD enfatizou desde o início a necessidade de explicar esse modelo e usá-lo como referência para analisar os fatos didático-matemáticos (Gascón, 1993, 1994, 1998, 1999a, 2001a). Atualmente é chamado de modelo epistemológico de referência (MER) e é sempre provisório. Com base no MER, o professor pode desconstruir as praxeologias cuja difusão intra-institucional e inter-institucional pretende analisar. (GASCÓN, 2011, p. 208, tradução nossa).

Neste capítulo, apresentamos uma síntese dos estudos da Análise Combinatória e, mais especificamente, dos problemas associados à contagem, apresentando um estudo histórico-epistemológico dos problemas que permeiam o desenvolvimento do conhecimento humano, desde a Antiguidade até a Modernidade.

Nesse viés, a formulação do problema didático é uma tarefa complexa que exige habilidades específicas dos professores. Segundo Gascón (2011), a formulação de problemas didáticos envolve a seleção de um conteúdo relevante, a escolha de um formato apropriado e a criação de um ambiente de aprendizagem adequado. Nesta tese, vamos apresentar a formulação de um problema didático e as principais estratégias para fazê-lo.

2.1 – ESTUDO DA DIMENSÃO EPISTEMOLÓGICA

A dimensão epistemológica é um conceito fundamental dentro da filosofia da ciência. Ela se refere ao estudo dos fundamentos do conhecimento científico, das suas origens, dos seus métodos e das suas limitações. É uma área de estudo que tem sido desenvolvida por diversos filósofos ao longo da história, como Kant, Popper, Kuhn e Feyerabend, entre outros.

Um dos pensadores mais importantes na área da dimensão epistemológica é o francês Yves Chevallard. Ele foi um dos pioneiros na análise dos processos de construção do conhecimento científico, propondo uma abordagem que leva em conta tanto os aspectos cognitivos quanto os sociais e culturais envolvidos nesse processo.

De acordo com Chevallard, a construção do conhecimento científico envolve uma série de etapas, que vão desde a identificação de um problema até a formulação de uma teoria. Cada uma dessas etapas é influenciada por diversos fatores, como as teorias e métodos já existentes, as normas e valores da comunidade científica, as condições históricas e sociais, entre outros.

Além disso, Chevallard chama a atenção para o fato de que o conhecimento científico não é absoluto nem definitivo. Ele é sempre provisório e sujeito a revisões e críticas. Isso significa que as teorias científicas não são verdades absolutas, mas sim modelos que servem para explicar os fenômenos observados de forma mais ou menos adequada.

Outro aspecto importante da abordagem de Chevallard é a ideia de que o conhecimento científico é sempre construído a partir de uma perspectiva particular, que é influenciada pelas condições culturais e sociais em que ele é produzido. Isso significa que diferentes comunidades científicas podem ter perspectivas diferentes sobre o mesmo fenômeno, e que essas perspectivas podem mudar ao longo do tempo.

Dessa forma, a dimensão epistemológica é uma área de estudo fundamental para compreendermos como o conhecimento científico é produzido, quais são as suas limitações e como ele evolui ao longo do tempo. A abordagem proposta por Chevallard é uma contribuição importante para essa área, pois leva em conta tanto os aspectos cognitivos quanto os sociais e culturais envolvidos no processo de construção do conhecimento científico.

Sendo assim, o estudo da dimensão epistemológica permite o acesso às investigações já realizadas sobre os processos de ensino e aprendizagem do objeto matemático em questão, pois a dimensão epistemológica procura descrever e interpretar o modelo epistemológico no âmbito da Matemática.

Vale salientar que a dimensão epistemológica reflete o modo como podemos descrever um dispositivo didático para a análise combinatória, especialmente ligada aos problemas associados à contagem, por meio de um modelo compatível com o modelo epistemológico da atividade matemática.

Nesse cenário, visando a proporcionar um modelo de referência que não esteja no paradigma monumentalista, como afirma Chevallard (2004), mas no paradigma do questionamento do mundo, buscamos um Modelo Epistemológico De Referência (MER) que permite a investigação didática através de questionamentos. A TAD possibilita ao pesquisador a liberdade para abrangência das condições e restrições institucionais; a partir disso, propicia a construção de um modelo que pode proporcionar a (re)construção de praxeologias, a fim de desenvolver a atividade matemática (BOSCH; GASCÓN, 2005; GASCÓN, 2011).

O MER, apesar de constituir um modelo, é considerado uma ferramenta de trabalho teórico e experimental, conforme Pereira (2012), alternativo e provisório, colocado à prova durante todo o processo de experimentação da pesquisa. Como declarado anteriormente, o MER faz parte da dimensão epistemológica, sendo essencial ser revelado, já que permite o entendimento de alguns caminhos da investigação, como ressalta Gascón (2011).

O MER deve abranger os fenômenos didáticos que serão visíveis ao investigador, os tipos de problemas que podem surgir na pesquisa e nas tentativas de explicação que podem ser propostas, ou seja, as soluções consideradas admissíveis.

Exporemos neste capítulo uma proposta de Modelo Epistemológico e Analítico sobre os problemas associados à contagem, baseados no estudo histórico. Advertimos que o Modelo está pautado em elementos levantados no estudo histórico-epistemológico e na razão de ser dos problemas associados à contagem; nas condições e restrições levantadas no modelo dominante; e parte do contexto extramatemático para o intramatemático, abordando a modelação de fenômeno.

Sendo assim, o objetivo deste capítulo - além de situar o objeto matemático Análise Combinatória, no rol das construções humanas, ao longo da história - é identificar e estabelecer um comparativo entre as diferentes situações de contagem abordadas pelos vários povos, encontradas na literatura.

Na literatura, a análise combinatória é descrita na área da Matemática como uma função que estuda a quantidade de agrupamentos que podem ser formados a partir de um conjunto de elementos, tendo como foco os tipos de agrupamento (permutação, a combinação e o arranjo). Cada tipo tem aplicações associado à Análise Combinatória e determina o que deve ser usado em situações que envolvam os problemas associados à contagem, tomando, como ponto de partida inicial, descrever o termo Análise Combinatória, nos documentos oficiais.

Assim, em vez de formular os problemas didáticos em termos do que fazer para que uma determinada noção, atividade ou problemática possa ser ensinada ou assimilada de forma mais eficaz e de procurar estratégias para superar as dificuldades que surgem no processo de ensino e aprendizagem, a TAD investiga as condições que permitem, facilitam ou favorecem o desenvolvimento de determinadas atividades didático-matemáticas numa dada instituição.

Por outras palavras, com a TAD, pretendemos descobrir quais são os obstáculos ou imposições que teremos que ultrapassar para “fazer viver” as atividades didáticas numa determinada instituição. Esse tipo de pesquisa e reflexão, a priori, poderá permitir que o estudo árduo da construção sucessiva de novas, criativas, motivadoras e cativantes atividades didático-matemáticas úteis, possíveis e realizáveis.

Para modelar a atividade matemática, iniciaremos a construção do modelo epistemológico, a partir dos pontos-chaves da Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1996, 1999, 2002a e 2002b), introduzindo a noção de Praxeologia Ou Organização Matemática. Para Almouloud (2010, p. 156), a análise epistemológica tem por base o desenvolvimento histórico que permite identificar as diferentes formas de concepções de um determinado objeto matemático que poderão favorecer a análise didática. E a Meta – Análise tem início após a análise da qualidade metodológica, na qual se verifica se os estudos são comparáveis ou não.

O estudo epistemológico de referência para a noção de raciocínio combinatório é um tema de grande importância para a área da matemática.

Diversos autores contribuíram para o desenvolvimento dessa temática, como Chevallard, Gascón e Fichbein.

De acordo com Chevallard, o raciocínio combinatório é uma forma de pensamento que permite a manipulação de objetos a partir de um conjunto de regras. Essas regras são estabelecidas a partir de uma estrutura de conhecimento prévia, que permite a realização de operações mentais complexas.

Gascón, por sua vez, destaca a importância da abordagem construtivista para o ensino do raciocínio combinatório. Essa abordagem valoriza a experiência do aluno e sua capacidade de construir conhecimento a partir da interação com o ambiente e com os demais alunos.

Já Fichbein defende a importância do uso de modelos para o ensino do raciocínio combinatório. Esses modelos permitem a visualização de padrões e regularidades, facilitando a compreensão dos conceitos envolvidos e a realização de operações mentais.

Em conjunto, esses autores contribuem para a construção de uma abordagem epistemológica para o ensino do raciocínio combinatório. Essa abordagem valoriza a construção do conhecimento a partir da interação com o ambiente e com os demais alunos, bem como o uso de modelos para a visualização de padrões e regularidades.

Dessa forma, é possível afirmar que o estudo epistemológico de referência para a noção de raciocínio combinatório é fundamental para o desenvolvimento da matemática e para o ensino dessa disciplina. A partir das contribuições de autores como Chevallard, Gascón e Fichbein, é possível construir uma abordagem pedagógica que valorize a experiência do aluno e sua capacidade de construir conhecimento a partir da interação com o ambiente e com os demais alunos.

O estudo epistemológico de referência é uma abordagem teórica que busca compreender como os conhecimentos são produzidos e disseminados em

uma determinada área de estudo. Essa abordagem é amplamente utilizada na área da educação, em especial no ensino de ciências e matemática.

Em seus estudos Chevallard, propôs que a produção do conhecimento é influenciada por fatores sociais, culturais e históricos, além de ser mediada pela linguagem e pelos instrumentos utilizados para a sua produção.

Segundo Chevallard, os conhecimentos são construídos a partir de um processo de seleção e organização de informações, que são filtradas por meio de diferentes critérios. Esses critérios, por sua vez, são influenciados por fatores sociais e culturais, como a tradição, os valores e as crenças de uma determinada comunidade científica.

Além disso, Chevallard propôs que os conhecimentos são estruturados em diferentes níveis de abstração, que são organizados de forma hierárquica. Esse processo de estruturação é mediado pelas práticas de ensino e aprendizagem, que são influenciadas pelas concepções epistemológicas dos professores e pelos modelos pedagógicos adotados pelas instituições de ensino.

Nesse sentido, o estudo epistemológico de referência é uma abordagem fundamental para o desenvolvimento de práticas de ensino e aprendizagem mais efetivas e significativas. Ao compreender como os conhecimentos são produzidos e organizados, é possível desenvolver estratégias de ensino que levem em conta as características dos alunos e as demandas do mundo contemporâneo.

Sendo assim, o estudo epistemológico de referência é uma abordagem teórica essencial para a compreensão do processo de produção e disseminação do conhecimento em diferentes áreas de estudo. A contribuição de Chevallard é fundamental para o desenvolvimento dessa abordagem, que tem se mostrado fundamental para o desenvolvimento de práticas de ensino e aprendizagem mais significativas e efetivas.

Na próxima seção, trataremos alguns conceitos referentes ao autor Fischbein, conhecido por sua abordagem cognitiva do ensino de matemática, que se concentra na compreensão dos processos mentais envolvidos na

resolução de problemas matemáticos. Em seus estudos sobre raciocínio combinatório, ele se interessou pela forma como os indivíduos abordam problemas de contagem e como a estruturação do problema afeta a sua resolução. Este pesquisador Fischbein dedicou grande parte de sua carreira ao estudo da noção de raciocínio combinatório e suas implicações na educação matemática

2.2 – Fischbein e a Noção de Raciocínio Combinatório

O raciocínio combinatório é uma habilidade matemática fundamental que permite a resolução de problemas que envolvem a combinação de elementos. Essa habilidade é desenvolvida desde a infância, por meio de atividades lúdicas e desafios que estimulam o pensamento lógico e a criatividade. Um dos estudiosos que se dedicou ao estudo do raciocínio combinatório foi o matemático israelense David Fischbein.

Fischbein nasceu em 1926, em Tel Aviv, e dedicou sua vida à pesquisa em educação matemática. Ele é conhecido por seu trabalho pioneiro na área de psicologia cognitiva da matemática, que busca entender como as pessoas aprendem e resolvem problemas matemáticos. Em seus estudos sobre raciocínio combinatório, Fischbein propôs uma abordagem que considera a natureza dos elementos que estão sendo combinados, bem como as restrições e possibilidades de cada situação.

Baseados nos dados de sua pesquisa e nos trabalhos de Piaget e Inhelder (1951, 1954), Fischbein pode concluir que as operações combinatórias não estão disponíveis até o nível do pensamento formal.

Em seu livro “La genese de l’idée de hasard chez l’enfant”, Piaget e Inhelder descreveram experimentos relacionados com combinações, permutações e arranjos. Em seu livro “De la logique de l’enfant à la logique de l’adolescent (1951)” eles também consideraram os problemas dos conceitos de possível e o necessário, de acaso e probabilidade, e operações combinatórias.

Segundo Piaget e Inhelder, mesmo a lógica das proposições – que é estabelecido em adolescentes - baseia-se em "uma síntese combinatória de elementos" (PIAGET & INHELDER, 1955, p. 95). Ao nível do concreto operações, existem apenas simples 'conexões' das classes e relações da lógica concreta.

O raciocínio hipotético-dedutivo não opera estabelecendo relações cada vez mais estreitas, colapsando classes juntas, desde o início ponto de certos fatos expressos nas premissas. Pelo contrário, o raciocínio opera com

possibilidades que são descobertas, formuladas, avaliadas e articuladas por meio da 'síntese combinatória' dos quais Piaget e Inhelder escreveram.

As operações combinatórias representam, portanto, algo muito mais importante do que um ramo da matemática. Eles representam um esquema com um caráter tão geral quanto o dos esquemas de proporcionalidade e correlação, que surgem simultaneamente após os 12-13 anos de idade.

A estreita relação entre habilidade combinatória e pensamento lógico sugeriu a alguns autores a possibilidade de usar tarefas combinatórias para testar o desenvolvimento intelectual (CLAPAN & DUBOSSON, 1957; LANGEOT, 1968). O uso de tais testes com crianças de diferentes idades (DUBOSSON, 5-9 anos; LANGEOT, 9-16 anos) apresentou melhora no desempenho com idade.

Langeot (1968) também estudou o efeito de transferência da instrução matemática (no conceito de produto cartesiano) na capacidade combinatória (permutações) em adolescentes.

Em 1951, Piaget e Inhelder realizaram a seguinte série de experimentos em combinações, permutações e arranjos.

Em Combinações, os participantes foram mostradas várias pilhas de fichas coloridas; uma pilha branca, uma pilha vermelha e assim por diante. Eles foram solicitados a fazer tantos possíveis pares de cores diferentes.

As crianças no primeiro estágio de desenvolvimento (6-7) conseguiram encontrar alguns dos pares possíveis. Estes foram alcançados por tentativa e erro, e não por meio de um procedimento sistemático, incluindo um inventário de todos os pares possíveis.

As crianças do segundo estágio (8-11) tentaram vários métodos, mas ainda não chegou a um procedimento exaustivo. A razão para esta falha estava no fato de que esses assuntos ainda tendiam a se limitar a justaposições (AB, CD ou AB, BC, CD) e simetrias (A e F, etc.)

Na terceira fase (após 11-12 anos) alguns sujeitos descobriram o método, pelo qual eles poderiam obter todos os pares possíveis. Por exemplo, um assunto primeiro de tudo faz uma linha de cinco fichas amarelas (A) (sendo seis

pilhas ao todo) e associa cada ficha a uma das outras cores, B, C, O, E, F. Posteriormente, uma linha de cinco contadores azuis é feita e assim por diante.

Como explicar o fato de, na segunda fase, as crianças ainda não conseguem encontrar todos os pares possíveis, embora o façam neste estágio possui a operação de colocação de itens em correspondência?

Segundo Piaget e Inhelder (1951) a explicação é que a combinação não é justaposição de correspondências, mas uma operação única que envolve a coordenação de duas outras operações – seriação e correspondência. A combinação é, portanto, uma operação sobre operações e, portanto, característica do nível do pensamento formal.

Em 1955, Piaget e Inhelder descreveram outro experimento combinatório operações. Quatro frascos, rotulados de 1 a 4, continham e substâncias inodoras: (1) ácido sulfúrico diluído, (2) água, (3) hidrogênio peróxido, (4) tiosulfato. Um quinto frasco (g) continha gotas de potássio iodeto. Se os líquidos nos frascos 1, 3 e g fossem combinados, dava uma mistura de cor amarela. Se a água fosse adicionada, não haveria mudança; mas se o tiosulfato do frasco 4 fosse adicionado, a mistura tornava-se incolor.

O experimentador produziu dois copos. Um continha uma mistura de ácido sulfúrico diluído e peróxido de hidrogênio, e o outro continha água. O sujeito adicionou gotas de iodeto de potássio aos dois copos (desconhecendo o seu conteúdo) e foi-lhe pedido que anotasse as diferentes reações.

O sujeito foi então solicitado a reproduzir a cor amarela, usando qualquer das cinco garrafas. No nível IIA, os sujeitos nada mais fizeram do que adicionar gotas de líquido g para outras quatro garrafas. No nível IIB, as crianças tentaram várias combinações, mas não usou uma abordagem sistemática. Foi apenas no nível IIIA, e então apenas (observe que este é o estágio das operações formais) que o que Piaget e Inhelder chamam de 'une combinatoire systematique' emerge - isto é, uma sistemática método de encontrar todas as diferentes combinações possíveis do cinco líquidos (INHELDER & PIAGET, 1955, pp. 97-98).

Experimentos sobre permutações (PIAGET & INHELDER, 1951). a criança é recebeu duas fichas, A e B, de cores diferentes, e pediu para mostrar

em quantas maneiras diferentes eles podem ser arranjados. A criança é então convidada a coloque dois pares de fichas, AB e BA, de modo que um par fique em uma linha abaixo do outro. Três pilhas de fichas, nas cores A, B, C são então apresentado, e a criança pediu para formar permutações com os elementos A, B, C, selecionando um contador de cada vez e fazendo linhas de permutações um abaixo do outro. Se isso for feito com sucesso com três elementos, a tarefa progride para quatro elementos.

No nível IA (antes de 7-8), a criança tem dificuldade em compreender o problema, e ao perceber que diferentes permutações podem ser obtidas com os mesmos elementos. No nível IB, a criança consegue fazer algumas permutações, e até descobre algumas regularidades (por exemplo, inverter as posições de dois dos elementos), mas não progride para uma generalização estratégica. O sujeito que ainda não possui mobilidade operacional, em para encontrar todas as permutações possíveis, teria que fazer uso de descentralizações que são característicos de 'intuições articuladas' (p. 191). Sem Nessa mobilidade intuitiva, a ordem inicial dos elementos é vista como a único possível.

No nível IIB, a criança encontra várias permutações possíveis, mas ainda não não fazer a descoberta de um método. Na verdade, é claro, as permutações são todos deriváveis uns dos outros, e isso implica referência ao princípio de reversibilidade, entre outros.

A falta de conhecimento da reversibilidade impede a criança de descobrir um método sistemático para fazer todas as permutações possíveis. cada mudança de posição deve ser entendida como reversível, caso contrário pode haver nenhum conceito de permutação, ou qualquer compreensão de que as permutações são derivados um do outro, e que o ponto de partida pode sempre ser devolvido.

No segundo estágio, as crianças fazem a descoberta empírica de um procedimento, primeiro para três elementos (no nível IIA) e depois para quatro elementos (no nível IIB) ou seja, após os 10 anos de idade, quando generalizam o procedimento usado com três elementos. No entanto, crianças nessa idade

(10-12) ainda fazem não chegar a um procedimento verdadeiramente geral para fazer permutações.

No final do nível IIB, mas apenas por pouco, as crianças podem generalizar o procedimento para 2 e 3 elementos para permutações com 4, 5 e 6 elementos. Eles agora são capazes de realizar o cálculo $2 \times 3 \times 4 \times 5$ diretamente. Piaget e Inhelder insistem no fato de que há um intervalo de vários anos entre a aquisição de combinações e a aquisição de permutações. Crianças de 11 a 12 anos podem resolver sistematicamente problemas de combinação, mas é apenas na idade de 14-15 anos que os problemas de permutação começam a ser tratado com sucesso.

A explicação deles é a seguinte: "As combinações consistem simplesmente em todos os associações possíveis, enquanto as permutações, que são muito mais numerosas, implicam uma disposição segundo um sistema móvel e reversível de referência" (PIAGET & INHELDER, 1951, p. 207).

Na verdade, porém, o projeto do experimento que eles realizaram não permitem tal comparação. No caso de combinações, eles não pediram aos sujeitos que fizessem mais do que formar combinações de n elementos (com um máximo de 6) que sempre foram apresentados em pares, o que representa um caso especial e é muito simplificado. Uma verdadeira comparação entre combinações e permutações teriam exigido passar para combinações de n elementos, tomados 2 por 2, 3 por 3, e assim por diante. Se a pergunta realmente ou seja, se o processo de aquisição dessas operações está concluído durante a fase de operações formais, uma comparação válida deve abordar destina-se à aquisição generalizada das respectivas operações.

Além disso, Piaget e Inhelder demonstraram combinações apenas em alguns, não todos, de seus súditos (*ibid.*, p. 183), o que também reduz a validade de sua comparação. Não se pode, portanto, concluir definitivamente que as combinações são adquiridas antes das permutações.

Uma crítica final ao experimento de Piaget e Inhelder é importante, em visão de pontos que faremos mais tarde: no caso de permutações, o próprio método de investigação introduziu um fator de aprendizado. O método começou

com dois elementos e progrediu para três, quatro e assim por diante. Depois de as duas permutações possíveis com A e B (AB e BA) foram resolvido, o terceiro elemento, C, pode ser colocado em três posições possíveis (no início, no meio ou no fim) em relação aos dois originais permutações - assim CAB, ACB, ABC; CBA, BCA, BAC.

Permutações com um maior número de elementos são obtidos generalizando este procedimento. É nossa opinião que, ao progredir de poucos para um número maior número de elementos, o método usado por Piaget e Inhelder foi vinculado para envolver um efeito de aprendizagem. Isso significa que seu paradigma experimental é incapaz de determinar a extensão inicial de aquisição de permutações.

Permutações, como combinações, representam para Piaget e Inhelder operações de segunda ordem - operações sobre operações - o que explica por que eles não são adquiridos até o estágio de operações formais. Se a mudança de ordem é, em si, uma operação elementar (ou 'concreta'), a multiplicação de mudanças de ordem não é mais uma operação simples, pois é uma operação sobre outras operações, ou seja, uma operação de segunda ordem ("a la seconde puissance") (ibid., p. 206).

Nesta experiência com arranjos, Piaget e Inhelder (1951), produziram experimentos, onde os materiais consistiam em cartões com os números 1, 2 ou 3 impressos em eles; ou, para as crianças menores, fotos de locomotivas (f), vagões de passageiros (w) ou vagões de mercadorias (m). A tarefa era formar todos os possíveis arranjos de dois elementos dos três elementos dados.

O experimento teve três etapas: (a) A criança tinha que inventar arranjos selecionando cartas de três pacotes separados. (b) Todas as cartões foram empilhados ao acaso na frente da criança, que foi solicitada a pegar dois, e prever o terceiro. Cada arranjo assim obtido foi registrado. (c) A tabela de arranjos registrados foi analisada, e a criança foi solicitado a dizer se, caso o número de cartões fosse aumentado, a irregularidade da distribuição dos arranjos diminuiria ou aumentaria.

As crianças no estágio de desenvolvimento I utilizaram um procedimento aleatório, sem tentando encontrar um método sistemático. Eles pegaram duas cartas ao acaso e eliminou quaisquer pares que já haviam sido obtidos. No caso do pilha aleatória de cartas, eles mostraram uma crença em um contínuo ordem de surgimento das cartas, que se baseava em ocorrências repetidas do mesmo cartão, ou em alguma consideração moral. Previsões conformado ao padrão encontrado em experimentos anteriores; perseverança, efeitos de recência e assim por diante. A lei dos grandes números, aparentemente, não afetou os julgamentos. Multiplicando o número de elementos levou a alguns efeitos curiosos, envolvendo regularidades do tipo 11, 22, 33, etc.

As crianças no estágio de desenvolvimento II buscavam um procedimento sistemático, como no caso de combinações e permutações. Os protocolos mostram diferentes estágios progressivos na aquisição dos arranjos. Através tentativa e erro, as crianças descobrem alguns procedimentos empíricos de eficiência na construção de arranjos. A ideia de mistura é melhor entendido em termos da operação do acaso. A lei dos grandes números, com seu efeito 'padronizador' nas distribuições, parece operar apenas para conjuntos pequenos. Quando grandes conjuntos de elementos são usados, como nos experimentos anteriores, as crianças são incapazes de prever que a distribuição se tornará mais equilibrado.

Dois níveis devem ser distinguidos dentro do estágio de desenvolvimento III. No nível IIIA (11-12 anos) as crianças podem completar o inventário de todos os arranjos de 3 e 4 elementos, tomados 2 por 2, e ainda chegar ao resultado n^2 , embora eles sejam incapazes de dar conta explicitamente disso resultado. No nível IIIB (12-13 anos) as crianças compreendem o princípio da construindo arranjos com repetições, e operando com a fórmula n^2 .

Em termos gerais, então, o relato de Piaget e Inhelder é que durante o crianças do período pré-operatório experimentam diferentes associações aleatórias de elementos sem procurar um sistema; durante o período de concreto operações, as crianças começam a procurar um método sistemático de estabelecer o inventário de todos os agrupamentos possíveis, mas eles não progridem além procedimentos empíricos com resultados limitados. Não é até o

período de operações formais que as crianças chegam a procedimentos sistemáticos de construção todos os agrupamentos possíveis de elementos obtidos por permutações, arranjos ou combinações.

Uma análise mais detalhada dos resultados obtidos por Piaget e Inhelder traz à tona os seguintes aspectos de desempenho no nível de formal operações.

Em primeiro lugar, nem todos os sujeitos nesta idade são capazes de descobrir o método de construção de combinações. Não sabemos qual a percentagem do total esses sujeitos representam. Os sujeitos não são capazes de lidar satisfatoriamente com arranjos até os 13 anos, e não encontram um método para lidando com permutações, embora isso pareça ser uma maneira mais simples operação, até a idade de 14-15 anos. Tudo isso indica que, durante o estágio de operações formais (12-15 anos) as capacidades intelectuais exigidas para operações combinatórias continuam gradualmente a se desenvolver, e esse desenvolvimento não é, de fato, concluído durante esse estágio.

Em segundo lugar, como vimos, o desenho experimental usado por Piaget e Inhelder incorporou um fator de aprendizado, já que o aumento gradativo da o tamanho do conjunto de elementos sugeriu um método particular para os sujeitos.

Portanto, é bastante natural imaginar o que aconteceria se alguém interviesse no processo de desenvolvimento (que, em sua forma natural, parece ser bastante lento e trabalhoso) oferecendo ao adolescente uma combinação sistemática técnica.

Pois as criança que vão adquirir uma técnica combinatória devem, portanto, já possuir um conjunto de esquemas intelectuais, ou seja, hipotético - dedutivo raciocínio, generalização indutiva e a capacidade de combinar essas duas abordagens em um único procedimento iterativo - um processo infinitamente recursivo método de gerar uma sequência ilimitada de resultados a partir de um dado definido, que está sujeito a um controlo rigoroso.

Teoricamente, essas operações implicam em uma arquitetura de operação e esquemas que não está disponível até o nível das operações

formais. Podemos perceber ao longo da pesquisa de Fischbein, que essa arquitetura conceitual é adquirida ao longo de um período de vários anos, a partir dos 12 anos.

O autor Fischbein, estava interessado, no seguinte problema: é possível que a instrução sistemática poderia acelerar essa aquisição? Um importante aspecto deste processo seria que ele exigiria a aquisição de estruturas, e não de informações específicas ou procedimentos.

Vimos que, ao nível das operações concretas, as crianças não se contentam necessariamente com associações aleatórias de elementos, mas tentará descobrir procedimentos para formar todas as combinações possíveis. Eles são, de fato, às vezes bem-sucedidos em descobrir procedimentos, embora de eficiência limitada.

Por outro lado, se uma criança de 9 a 10 anos pode assimilar tais procedimentos, é possível que operações envolvendo o conceito de probabilidade começam a ser adquiridos durante a fase de operações concretas.

Segundo Bruner (1966), a principal relevância está na hipótese que uma estrutura pode ser concretizada em cada um dos três modos fundamentais de representação – o enativo, o icônico e o simbólico – sem alterar as características essenciais da estrutura de qualquer forma (BRUNER, 1966, p. 1 - 67).

Se as crianças aprenderem um jogo em que são usados objetos concretos (como contadores coloridos, formas geométricas, etc.) podem, ao mesmo tempo, assimilar uma estrutura de grupo matemático, ou um espaço vetorial, e também certas operações lógicas, se as regras do jogo incorporarem as correspondentes propriedades.

Na realidade, porém, as coisas não são tão simples.

Em primeiro lugar, um concreto a incorporação de uma estrutura pode ser um veículo para esta estrutura – mas não necessariamente o comunica, pois pode haver “ruído” presente das outras propriedades objetivas do objeto que representa (particular cor, tamanho e assim por diante) que podem interferir na

percepção de seu aspectos estruturais. É por isso que, em geral, é necessário apresentar o mesma estrutura em várias concretizações diferentes.

Dienes (1963) chamou isso “o princípio da variabilidade perceptiva” ou, mais geralmente, “o princípio de múltiplas concretizações” (DIENES, 1963). Com múltiplas concretizações de uma mesma estrutura, seja em uma única modalidade, como o icônico, ou em todas as modalidades - enativas, icônicas e simbólicas - o intelecto extrai a característica comum, ou seja, a estrutura lógico-matemática além e acima a 'variabilidade perceptiva'.

As múltiplas concretizações usadas no ensino de certos conceitos adquirir um significado que vai muito além da antiga noção de intuição.

Desta forma, podemos ver que este não é um método de ensino simples e unidirecional. A estrutura - da intuição à abstração - mas que a interação de as três modalidades de representação devem ser levadas em consideração.

Em segundo plano, não é um método tático local em que a estrutura é abstraída a partir de exemplos concretos, mas sim uma estratégia de ensino muito geral que abrange períodos inteiros de desenvolvimento intelectual.

A prefiguração de estruturas é uma estratégia geral de ensino, que expressa a necessidade (não apenas a possibilidade) de se preparar para a assimilação de estruturas abstratas ao prefigurar essas estruturas no estágio anterior da desenvolvimento àquele em que são normalmente assimilados, mas que utiliza os métodos adequados a esta fase prévia. Cada estágio sucessivo de desenvolvimento começa pela consolidação das aquisições dos anteriores estágios, que são então integrados com os recursos específicos do novo palco (PIAGET, 1956).

O que Bruner (1966) acrescenta a esse relato é que, usando métodos adequados de prefiguração, é possível não só se preparar para a próxima etapa da desenvolvimento, mas para acelerar o desenvolvimento em direção ao novo estágio (um ponto ponto de vista do qual é sabido que Piaget discorda).

Segundo Gonseth (1936), um esquema tem as seguintes características essenciais: (a) consiste em uma descrição mínima, (b) é perfectível, (c) é possui

sua própria estrutura intrínseca, e (d) tem um referente externo ou denotação (GONSETH, 1936, p. 14).

Segundo Servais (1970, p. 436), “operar com um esquema é de fato usar a estrutura que o esquema representa em qualquer situação. O esquema é assim, um sistema concreto com um uso abstrato.”

O esquema desempenha uma função essencial no pensamento produtivo, que é fertilizar o abstrato com o concreto. O esquema, que é uma simplificação e destilação do concreto, prepara o base para a conceituação, dando às relações abstratas uma representação espacial, significado dinâmico e, conseqüentemente, um sentido construtivo e criativo potencial.

Uma maneira de observar esses esquemas é através de um modelo, um modelo generativo. O termo "generativo" em esse contexto tem um significado semelhante ao sugerido pelo uso de Chomsky (1957) de o termo em seus escritos sobre gramática gerativa. Por generativo, queremos dizer para expressar as seguintes propriedades:

- i - Por analogia com a competência gramatical, que nos permite construir um número ilimitado de sentenças com um número finito de regras, um modelo é genuinamente útil no pensamento produtivo se, com um número limitado de elementos e regras para sua combinação, pode representar corretamente uma número ilimitado de situações diferentes. Na verdade, um modelo que não preencher esta condição não é, a rigor, um modelo, mas simplesmente um modelo empobrecido e representação distorcida de alguma realidade particular.
- ii - Um modelo deve ser heurístico; ou seja, deve, por si só, levar a soluções que devem ser válidas para o original como resultado da isomorfismo genuíno entre as duas realidades envolvidas (ou seja, o modelo e o original).
- iii - Para que um modelo seja generativo, ele deve ser capaz de auto-reprodução, na medida em que sua codificação de conceito de imagem é suficientemente geral para que ela possa sugerir novos modelos. Isso significa que um modelo adaptado para representar uma determinada classe de situações deve ser capaz de sugerir transições para outros modelos que representam classes mais gerais de situações. (CHOMSKY, 1957, p. 420-460)

Desta forma, um modelo necessita de um sistema de regras que permite especificar exclusivamente a estrutura do modelo original representam o que pode ser chamado de sintaxe do modelo.

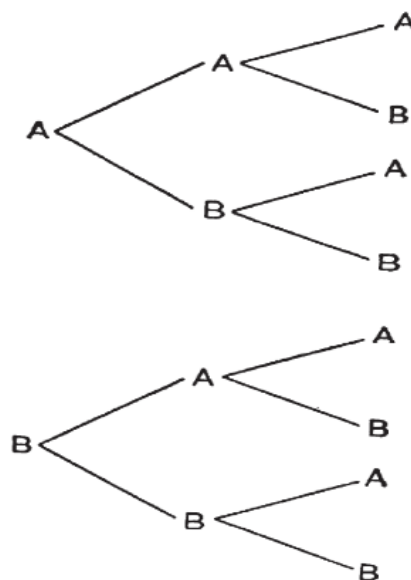
O código para tradução de qualquer maneira (do modelo para o original e do original para modelo) e as regras de construção devem ser automatizadas

para o grau em que conferem o caráter de intuições às decisões do modelo relativo a interpretações e abordagens de soluções.

Um bom exemplo de tal modelo é o diagrama de árvore usado em análise combinatória. Por exemplo, quantos diferentes arranjos, incluindo repetições, podem ser feitos com três números, usando apenas os números 1 e 2?

O diagrama abaixo mostra a solução.

FIGURA 1: Quantos diferentes arranjos, incluindo repetições, podem ser feitos com três números, usando apenas os números 1 e 2?



FONTE: Construção do autor

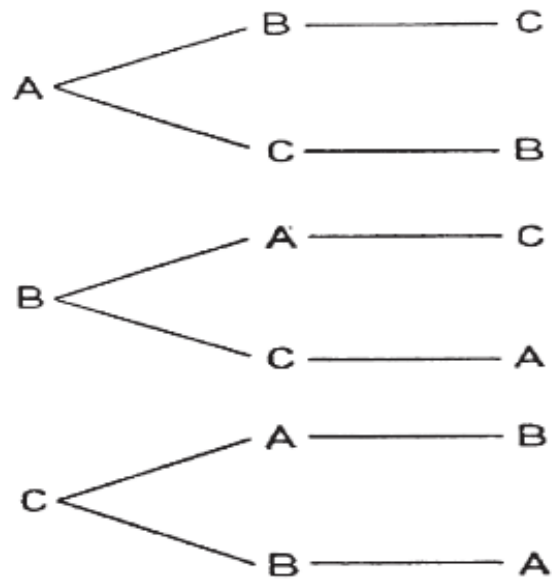
Mas um diagrama como este também possui uma série de qualidades que são essenciais para a produtividade do raciocínio combinatório. Uma vez que a correspondência entre os elementos do diagrama e a operação de formação de grupos é compreendida, ou seja, uma vez que a lógica de construção do diagrama é visto, pode ser generalizado sem limite, não importa quão grande seja o número de elementos.

Essa qualidade pode ser chamada generalização iterativa (que, em matemática, tomaria a forma de indução matemática). Além disso - e isso é essencial - quando o alterações do problema e outro método de construção de um diagrama é necessário, é possível que a nova técnica seja sugerida

espontaneamente pela experiência com o anterior - isso seria construtivo generalização.

O problema, por exemplo, é encontrar o número de permutações possíveis com três elementos.

FIGURA 2: Encontrar o número de permutações possíveis com três elementos.



FONTE: Construção do autor

O método de construção do diagrama é diferente, mas o princípio geral é o mesmo. Crianças de 10 anos, com quem temos experimentado, entendeu o princípio de construção do primeiro diagrama, e também foram capazes de construir o segundo.

O princípio do diagrama de árvore foi, portanto, assimilado como um modelo generativo, uma vez que não apenas ilustrava uma operação particular, mas também permitia: (a) por meio de generalização iterativa, a solução de problemas semelhantes na natureza ao primeiro, mas com um número diferente de elementos; (b) por meio de generalização construtiva, a construção de novos modelos capazes de resolver problemas anteriormente não resolvidos, de natureza diferente do primeiro, mas relacionado.

As fórmulas matemáticas derivadas de tais modelos devem, portanto, incorporar algo muito mais do que um esquema de trabalho para uma determinada tarefa.

Eles incorporam um princípio construtivo que, por um lado dá-lhes uma relevância muito próxima de situações reais, e por outro por outro lado, dá-lhes a possibilidade de transferência muito fácil para novas situações.

A noção básica que gostaríamos de transmitir é a de que um modelo, no sentido que usamos esta frase, possui mesmo no nível figural a capacidade de sugerir e inculcar a generalidade construtiva que é característico do raciocínio recursivo, ou seja, noção de raciocínio combinatório.

Ao aprender a usar um diagrama de árvore, as crianças estão de fato assimilando uma lei de construção. Os recursos indutivos do modelo são evidentes: as sucessivas etapas de raciocínio dentro do modelo ocorrem indutivamente, e quase diretamente.

Pode-se objetar que o aspecto demonstrativo está ausente; as matérias chegar ao princípio de construção por indução, e por progressiva aproximações a partir deste ponto eventualmente descobrem a regra de cálculo, mas eles não estão estritamente falando usando demonstração recursiva.

Nossa visão, no entanto, é que mesmo que o controle dedutivo não seja explícito, ele ocorre no processo construtivo, e é plenamente evidente na simbólica modalidade.

Nenhuma construção dedutiva pode prescindir completamente de um apelo à intuição, já que a intuição está envolvida na seleção de axiomas e de direções do raciocínio. Há até intuições de rigor, generalidade, e da não contradição de um sistema conceitual, intuições que pode ser verdadeiro ou falso.

Ao educar as crianças no pensamento matemático, pensamento crítico, pensamento combinatório, essas intuições devem ser sistematicamente formadas antes da estrutura de suporte conceitual do raciocínio correspondente pode ser assimilado.

Os modelos generativos figurativos que discutimos podem cumprir precisamente essa função. A sua utilidade não reside simplesmente na transmissão de um procedimento particular (que é o que aconteceria se as crianças só aprendessem a fórmula de cálculo), mas em comunicar no nível intuitivo um método essencialmente matemático de construção. Isso é então entendido e assimilado como uma técnica rigorosa e infinitamente produtiva.

Foi feito estudos nos trabalhos de Fischbein, Pampu e Minzat (1970) e Fischbein (1975), sobre até que ponto a assimilação das crianças de tais modelos generativos pode acelerar sua aquisição de operações combinatórias.

Os sujeitos das pesquisas foram alunos entre 10, 12 e 14 anos, a investigação obteve estimativas subjetivas das crianças de como muitas permutações eram possíveis com 3, 4 e 5 elementos. Os resultados mostraram uma forte tendência a subestimar as crianças em todas as idades.

Pelo fato de crianças de 14 anos, estimam que com 5 objetos é possível têm (em média) 16 permutações (120 sendo o número correto). Essas subestimações tornam-se mais impressionantes à medida que o número de elementos é aumentou.

Na segunda parte da investigação desta pesquisa, os autores, procuramos ensinar essas mesmas crianças a técnica do diagrama de árvore para fazer inventários de arranjos (com repetição) de dois objetos, tomados 3 por 3 e 4 por 4, e de permutações de 3, 4 e 5 objetos.

No início do experimento, encontramos diferenças entre os três níveis de idade. Mas à medida que a sessão avançava, essas diferenças diminuía e mesmo as crianças de 10 anos foram capazes de entender e usar os diagramas e assim responder corretamente a problemas combinatórios.

A prova essencial da estruturalidade dessa aquisição é o fato de que, em todas as faixas etárias, havia evidência de transferência por generalização iterativa, e mesmo de transferência por generalização construtiva. Uma criança (mesmo com 10 anos) que teve aprendeu a técnica de estabelecer um inventário dos arranjos de 2 objetos tomados 3 a 3 com a ajuda do diagrama de árvore

foram imediatamente capazes de resolver o mesmo problema para 4 objetos, e assim por diante.

Esses resultados são especialmente importantes em relação ao nível de concreto (10 anos de idade) porque demonstram que um método instrucional adequado, em particular o uso de uma linguagem generativa adaptada modelo, pode conseguir dar um salto espetacular na evolução intelectual desenvolvimento.

No âmbito deste trabalho, os seguintes factos parecem-nos especialmente interessante. (a) Mesmo no nível das operações formais, combinações técnicas não são adquiridas espontaneamente. A instrução é necessária. (b) Mesmo ao nível das operações concretas, é possível induzir as crianças assimilar facilmente técnicas combinatórias com ajudas figurativas.

O fato de um bom modelo generativo poder avançar rapidamente compreensão de um procedimento conceitual (como é mostrado pela transferência) leva nos leva ao cerne do problema de como uma intuição é formada.

Para o adolescente, a descoberta fundamental sobre as operações combinatórias é que diferentes coleções (arranjos, permutações, etc.) gerado pela multiplicação sucessiva de possibilidades. Esta é uma nova intuição, e não é adquirido espontaneamente (em sua forma generalizada) mesmo na fase das operações formais.

Baseamos esta afirmação nos resultados de algumas pesquisas realizadas por Fischbein, (1974), sobre a aprendizagem de operações lógicas por adolescentes. O sujeito está sentado em um console no qual está montado um circuito, composto por uma bateria, uma lâmpada e dois ou três interruptores.

As conexões não são visíveis, experimentando os interruptores e observando o efeito na lâmpada, o sujeito tem que determinar se o circuito é conectado em série, em paralelo ou em um sistema misto. Não entraremos aqui nos detalhes desta pesquisa, mas o que foi impressionante foi a dificuldade que as crianças tinham, mesmo as de 14 anos, em raciocinar sobre causas conjuntas, a fim de calcular o número de possíveis situações.

O fato de os três interruptores (cada um com dois possíveis posições) contribuiu para oito combinações possíveis não foi facilmente visto. A decisão espontânea foi 3×2 (ou $2 + 2 + 2$) = 6.

O tipo normal de raciocínio em tais situações (que continua de fato ao longo da vida, a menos que instrução específica é dada) é um raciocínio aditivo. Se, no entanto, um diagrama foi introduzido no experimento, o desempenho mudou. O sujeito começou a visualizar a operação multiplicativa.

Uma nova intuição estava sendo formado. O que o diagrama fornecia era um princípio de construção que indução e dedução sintetizadas em uma única operação – uma fórmula que era ao mesmo tempo um esquema conceitual e cognitivo.

A extrapolação decorre naturalmente de tal esquema; decorre da própria fórmula de trabalho, mas não da fórmula matemática que dela deriva, e que apenas formaliza uma verdade aceita.

O princípio de construção do diagrama é, portanto, um programa de ação que serve diretamente à ação, mas é ao mesmo tempo uma aquisição cognitiva, relativamente autônoma em relação à ação.

Isso é um programa flexível, porque pode ser facilmente adaptado a todos os tipos de operações combinatórias. É, portanto, adaptável a qualquer situação particular, sem ter que modificar de forma alguma o princípio a partir do qual deriva.

Em resumo, Fischbein defende que o raciocínio combinatório envolve três etapas principais: a identificação dos elementos que serão combinados, a determinação das restrições e possibilidades de cada combinação e a contagem das combinações possíveis. Ele desenvolveu uma série de atividades e problemas que ajudam a desenvolver essas habilidades em crianças e jovens, como jogos de cartas, quebra-cabeças e desafios de lógica.

Uma das contribuições mais importantes de Fischbein para o estudo do raciocínio combinatório foi a sua abordagem qualitativa, que considera não apenas a quantidade de combinações possíveis, mas também a qualidade

dessas combinações. Ele propôs que as pessoas devem ser capazes de avaliar a qualidade das combinações que fazem, levando em conta critérios como a relevância, a originalidade e a eficiência.

A abordagem de Fischbein para o estudo do raciocínio combinatório tem sido amplamente utilizada em pesquisas e práticas educacionais, em todo o mundo. Seus estudos contribuíram para o desenvolvimento de novas estratégias de ensino e aprendizagem da matemática, que buscam estimular a criatividade e o pensamento crítico dos estudantes. Além disso, seus trabalhos têm inspirado novas pesquisas em áreas como a inteligência artificial, que buscam replicar as habilidades cognitivas humanas em máquinas.

Um dos principais conceitos desenvolvidos por Fischbein é o de "objetos de contagem", que se refere aos elementos que estão sendo contados em um problema de raciocínio combinatório. Ele argumenta que a compreensão dos objetos de contagem é fundamental para a resolução eficaz de problemas de contagem. Além disso, Fischbein enfatiza a importância da estruturação do problema, que pode afetar a forma como os indivíduos abordam a contagem dos objetos.

Outro aspecto importante dos estudos de Fischbein sobre raciocínio combinatório é a sua abordagem experimental. Ele realizou uma série de experimentos para investigar como os indivíduos resolvem problemas de contagem e como a estruturação do problema afeta a sua resolução. Esses experimentos envolveram a apresentação de diferentes tipos de problemas de contagem e a análise das estratégias utilizadas pelos participantes para resolvê-los.

Os estudos de Fischbein sobre a noção de raciocínio combinatório têm implicações importantes para a educação matemática. Ele argumenta que os professores devem se concentrar na compreensão dos objetos de contagem e na estruturação do problema ao ensinar raciocínio combinatório. Além disso, ele enfatiza a importância da prática e da resolução de problemas para o desenvolvimento das habilidades de raciocínio combinatório.

Desta forma, os estudos de Fischbein sobre a noção de raciocínio combinatório são uma contribuição valiosa para a compreensão dos processos mentais envolvidos na resolução de problemas matemáticos. Sua abordagem cognitiva e experimental oferece insights importantes para a educação matemática e pode ajudar os professores a ensinar raciocínio combinatório de forma mais eficaz.

Nessa vertente embrionária de elaboração de um modelo, é necessário questionar o Modelo descrito nas instituições de ensino, sendo que, neste trabalho, investigaremos as relações institucionais acerca do objeto matemático Análise Combinatória, a partir de análises das teses e dissertações que constam no estudo bibliográfico.

Na fase de análise preliminar, é preciso fazer o estudo das dimensões do problema didático do objeto matemático em jogo, isto é, a dimensão epistemológica que permite construir um Modelo Epistemológico, a dimensão económica e a dimensão ecológica, as quais permitem a identificação do Modelo Epistemológico de Referência, para o estudo dos problemas associados à contagem.

A elaboração de um modelo tornou-se uma etapa incontornável da maior parte dos trabalhos desenvolvidos, no âmbito da TAD. O Modelo Analítico para a Noção de Raciocínio Combinatório é em si um resultado didático e uma ferramenta para conduzir análises didáticas.

Na próxima seção, trataremos alguns conceitos referentes à Teoria Antropológica do Didático e da Meta-Análise Qualitativa, sua utilização, bem como a proposição de um modelo de análise, quando tratamos da Noção de Raciocínio Combinatório.

2.3 – A Teoria Antropológica do Didático (TAD)

A Teoria Antropológica do Didático (TAD), segundo Chevallard (1999), estuda o homem perante o saber matemático, e, mais especificamente, perante as situações Matemáticas. A TAD foi construída como uma ampliação dessas duas abordagens, introduzindo alguns termos primitivos: objeto, pessoa, instituições e relação pessoal ou institucional.

Um objeto O existe para uma pessoa X se existe uma relação pessoal $R(X, O)$, da pessoa X com o objeto O . Do mesmo modo, o objeto O existe para a instituição I se existe uma relação institucional, $RI(O)$, de I com O . Duplamente, diremos que X (ou I) conhece O se existe uma relação $R(X, O)$ de X com O (respectivamente, uma relação do $RI(O)$ de I com O). (CHEVALLARD, 1991, p. 161).

Um motivo para utilização do termo “antropológico” é que a TAD situa a atividade Matemática e, em consequência, o estudo da Matemática dentro do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais. Nesta perspectiva, a TAD considera como elementos primitivos Instituições (I), Indivíduos (X) e Objeto (O). As Relações Pessoais $R(X, O)$ e as Relações Institucionais $RI(O)$ são noções básicas nessa teoria. Na pesquisa, as instituições I são aqui exemplificadas pelas dissertações e teses.

A relação institucional descreve o que é feito em uma dada instituição I com o objeto O , como esse objeto é posto em cena. Para cada um dos sujeitos de I , que ocupam uma posição p , existe uma relação institucional com o objeto O , expressa por: $RI(p, O)$. Essa relação institucional constitui o sistema essencial de condições e restrições sob as quais se forma e evolui uma segunda relação: a relação pessoal de um indivíduo X com o objeto O .

Segundo Almouloud (2007, p.114),

[...] a Relação Institucional que se estabelece entre uma Instituição (I) e um Objeto (O) depende das posições que estes ocupam nessa Instituição e do conjunto de tarefas que essas pessoas devem cumprir usando determinadas técnicas.

A relação pessoal de um indivíduo X com um objeto O é o conjunto de interações, sem exceção, que X possa ter com O : segurá-lo, usá-lo, falar sobre ele, sonhar com ele... Ele especifica a maneira como X conhece O . Para

Chevallard, a noção de relação pessoal é, ao mesmo tempo, um conceito abrangente, mas também unificador de aspectos fragmentados sobre os quais descrevemos comumente o conhecimento.

Um indivíduo X pode ter, sobre um objeto do saber dado, Os, apenas uma relação pessoal, a qual emerge de um sistema de relações institucionais (tal como a relação didática), relações ternárias nas quais o indivíduo X entra em relação com o objeto do saber Os e com um ou mais agentes da instituição I. Dessa relação pessoal releva, em particular, tudo o que a gente acredita ordinariamente poder dizer - em termos de "saber", "saber-fazer", de "concepções", de "competências", de "domínio", de "imagens mentais", de "representações", de "atitudes", "de fantasias", etc... - de X sobre Os. Tudo o que se pode afirmar - com ou sem razão, pertinente ou não - deve ser realizado (na melhor das hipóteses) sobre um aspecto da relação pessoal de X com Os. O conceito de relação (pessoal) aparece para abranger aspectos fragmentários dos quais normalmente o dissociamos. (CHEVALLARD, 1989, p. 226-227).

Nesse contexto, a aprendizagem é uma modificação da relação de um indivíduo X com O. Ou essa relação começa "a existir" (se ela ainda não existia), ou essa relação é modificada (se ela já existia). Essa aprendizagem muda a pessoa (não o indivíduo).

A relação institucional com o objeto O, de uma instituição, constitui o sistema essencial de condições e restrições sob as quais se forma e evolui a relação pessoal de um indivíduo X com o objeto O, quando ele se torna sujeito da instituição I. Essa relação institucional depende da posição p que a pessoa ocupa em I: estudante ou professor. Podemos então falar de um bom ou mal sujeito de uma instituição relativo a essa restrição.

Chevallard (1999) concebe uma Relação Institucional, quando um O existe para pelo menos uma I; já a relação pessoal, quando um Objeto O existe para pelo menos um indivíduo X. Podemos afirmar que há distintas relações de pessoas (professores/alunos) com o Objeto (Análise Combinatória) que fazem parte das diferentes Instituições (documentos oficiais, teses, dissertações, por exemplo, usados nesta pesquisa). Assim, nesta pesquisa, focamos o nosso olhar nas praxeologias como forma de fazer pensar.

Conforme evidenciam Bosch e Chevallard (1999), a noção de relação com o saber coloca a didática no terreno da antropologia do conhecimento (ou antropologia cognitiva).

Assim: O conhecimento - e o saber como uma certa forma de organização do conhecimento - entra então em cena com a noção de relação: um objeto existe se existe uma relação com esse objeto, isto é, se um sujeito ou uma instituição o "(re)conhece" como um objeto. Dado um objeto (por exemplo, um objeto do saber) e uma instituição, a noção de relação leva às práticas sociais que ocorrem na instituição e que envolvem o objeto em questão, ou seja, "o que é feito na instituição com esse objeto". Conhecer um objeto é ter o que fazer com - e muitas vezes ter de lidar com - esse objeto. O saber matemático, como uma forma particular de conhecimento, é o resultado da ação humana institucional: é algo que se produz, se utiliza, se ensina ou, mais geralmente, se transpõe em instituições. Mas a Matemática ainda é um termo primitivo, hipóstase de certas práticas institucionais - as práticas sociais em Matemática. O que falta é o desenvolvimento de um método para analisar as práticas institucionais que permitem a descrição e estudo das condições de realização. Os últimos desenvolvimentos da teorização vêm preencher esta lacuna. O conceito-chave que aparece então é a de organização praxeológica ou praxeologia. (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 85).

Assim, para descrever a relação institucional que condiciona a relação pessoal de um sujeito com um objeto do saber, a teoria propõe o modelo. Esse modelo foi então introduzido respondendo a uma necessidade metodológica: a de descrever um discurso com a ideia de praxeologia como uma forma de pensar um Modelo Analítico para a Noção de Raciocínio Combinatório.

Segundo Almouloud et al. (2018, p.6),

"um modelo epistemológico - estreitamente relacionado com uma conceituação concreta do que se entende por "ensinar e aprender Matemática" em cada momento histórico, em cada tradição cultural e em cada instituição: o que podemos considerar como um modelo didático." Para os autores quando os modelos didáticos "se apresentam como se não necessitassem de nenhum tipo de justificativa nem fundamentação explícita, além de critérios genéricos que emanam, principalmente, do senso comum, diremos que se trata de modelos didáticos espontâneos."

Os autores sugerem então modelos específicos que seriam elaborados para análise e desenhos didáticos considerados relativos e provisórios para o investigador.

Bosch e Chevallard (1999) propuseram um modelo como ferramenta de descrição da relação institucional.

A relação institucional a um objeto para uma determinada posição institucional, é moldada e re-moldada por um conjunto de tarefas que devem cumprir, por meio de determinadas técnicas, as pessoas que ocupam essa posição. Assim, é o cumprimento de diferentes tarefas que a pessoa se vê levada a realizar ao longo de sua vida em diversas

instituições, nas quais ele é sujeito sucessivamente ou simultaneamente, que conduzirá a emergir sua relação pessoal ao objeto considerado. (BOSCH; CHEVALLARD, 1999, p. 85)

A TAD considera que, em última instância, toda atividade humana consiste em resolver uma tarefa t de algum tipo T , por meio de uma técnica τ , justificada por uma tecnologia θ que permite simultaneamente pensá-la, produzi-la e que, por sua vez, é justificada por uma teoria Θ . Ela parte, assim, do postulado de que toda atividade humana implementa uma organização praxeológica, a qual Chevallard (1999) chama de praxeologia ou organização praxeológica, simbolizada por $[T, \tau, \theta, \Theta]$.

Falamos sobre Praxeologia Matemática ou Organização Matemática (OM) – quando os tipos de tarefas T vêm da Matemática – e de Praxeologia Didática ou Organização Didática – quando os tipos de tarefas T são tipos de tarefas de estudo.

A palavra praxeologia enfatiza a estrutura da organização $[T, \tau, \theta, \Theta]$: em grego práxis significa "prática", referente ao bloco prático-técnico (ou práxis) $[T, \tau]$, e logos significa "razão", "discurso fundamentado", referente ao bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$. Chevallard (1999) designa uma praxeologia $[T, \tau, \theta, \Theta]$ como uma organização do saber. Diz-se que $[T, \tau, \theta, \Theta]$ é uma praxeologia pontual para indicar que essa é uma praxeologia relativa a um único tipo de tarefas.

Geralmente, em uma determinada instituição I , uma teoria Θ responde a várias tecnologias θ_j , cada uma delas, por sua vez, justifica e torna inteligíveis várias técnicas τ_{ij} , correspondendo a muitos tipos de tarefas T_{ij} . As organizações pontuais vão assim se agregar, primeiro em organizações locais, $[T_i, \tau_i, \theta, \Theta]$, centradas em uma tecnologia θ específica, em seguida, em organizações regionais, $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$, formadas em torno de uma teoria Θ . Além disso, Chevallard (1998) chama de organização global o complexo praxeológico $[T_{ijk}, \tau_{ijk}, \theta_{jk}, \Theta_k]$ obtido, em uma determinada instituição, pela reunião de várias organizações regionais correspondentes a várias teorias Θ_k .

Segundo Bosch e Gascón (2004), é necessário que a Organização Matemática a ser ensinada constitua um modelo praxeológico do currículo da

Matemática, que é obtido a partir de programas e de livros didáticos. A identificação dessas OM a ensinar passa pela caracterização dos tipos de tarefas institucionais e é uma (re)construção do pesquisador, a partir da análise dos livros didáticos e dos programas curriculares.

Daí a necessidade de adicionar um modelo epistemológico, permitindo caracterizar e analisar praxeologias como forma de fazer pensar.

2.4 – Modelo Epistemológico de Referência (MER)

O Modelo Epistemológico de Referência (MER) é uma abordagem que tem sido amplamente utilizada por pesquisadores em diversas áreas do conhecimento. Segundo Farras, Bosch e Gascón (2013), o MER é um conjunto de pressupostos teóricos que orientam a investigação científica, fornecendo um quadro conceitual para a análise dos dados e a interpretação dos resultados.

Uma das principais características do MER é a sua ênfase na natureza construtivista do conhecimento. De acordo com esse modelo, o conhecimento é construído a partir da interação entre o sujeito e o objeto de estudo, sendo influenciado pelas experiências e crenças prévias do sujeito. Assim, o MER valoriza a subjetividade do pesquisador e reconhece que a sua perspectiva pode afetar a forma como os dados são interpretados.

Outra característica importante do MER é a sua abordagem integrativa. Segundo Farras, Bosch e Gascón (2013), o modelo busca integrar diferentes perspectivas teóricas e metodológicas, a fim de obter uma compreensão mais completa e abrangente do fenômeno em estudo. Dessa forma, o MER valoriza a multidisciplinaridade e a colaboração entre pesquisadores de diferentes áreas do conhecimento.

Além disso, o MER enfatiza a importância da reflexividade na pesquisa científica. Segundo Farras, Bosch e Gascón (2013), os pesquisadores devem estar constantemente cientes das suas próprias crenças e pressupostos teóricos, a fim de evitar a influência desses fatores na análise dos dados. Assim, o MER valoriza a transparência e a objetividade na pesquisa científica.

O Modelo Epistemológico de Referência é uma abordagem importante na pesquisa científica, que enfatiza a natureza construtivista do conhecimento, a abordagem integrativa e a reflexividade. Embora o modelo tenha suas limitações, ele continua a ser uma ferramenta valiosa para pesquisadores em diversas áreas do conhecimento.

Gascón (2011) argumenta que a modelação matemática pode ser usada como uma ferramenta para a construção do MER. O autor propõe que a modelação matemática seja usada para ajudar os alunos a entender a relação

entre a matemática e a sociedade, bem como a natureza da matemática aplicada. Ele sugere que a modelação matemática seja usada para ensinar aos alunos como a matemática pode ser aplicada a situações da vida real e como ela pode ser usada para resolver problemas do mundo real.

Partiremos do problema didático da Modelação Matemática, no âmbito da TAD, segundo Gascón (2011b apud FARRAS; BOSCH; GASCÓN, 2013), podendo ser descrito pelo seguinte esquema heurístico: $\{[(P_0 \otimes P_1) \hookrightarrow P_2]P_3\} \hookrightarrow P_\delta$, sendo P_0 a formulação do problema inicial, denominado problema docente P_0 e o problema didático P_δ , que contém as três dimensões: dimensão epistemológica P_1 ; a dimensão econômica – institucional P_2 ; e a dimensão ecológica P_3 . O símbolo \otimes refere-se a P_0 por ser incompleto, sendo necessário adicionar ao menos a dimensão epistemológica P_1 para ser considerado um problema.

O símbolo \hookrightarrow não deve ser interpretado como uma inclusão. Esse indica que cada uma das dimensões P_i é logicamente anterior às dimensões P_{i+1} ou pelo menos P_i vem antes de P_{i+1} em um desenvolvimento hipotético do problema. Dizemos que para uma formulação completa de P_{i+1} requer certa formulação prévia, mesmo que implicitamente, de P_i .

Por fim, P_δ é denominado problema didático e definido como uma formulação, contendo as três dimensões fundamentais, as relações entre elas e, algumas questões novas que não aparecem em nenhuma das dimensões anteriores.

Em função de uma série de pesquisas realizadas sobre o objeto Análise Combinatória enunciadas anteriormente, direcionamos o nosso trabalho acerca da seguinte questão: “em que medida um modelo analítico sobre a Noção de Raciocínio Combinatório, baseado nos estudos de Fischbein, possibilita análises de pesquisas que enfocam na NRC?”.

O MER é uma ferramenta importante para a compreensão da natureza e do papel da matemática na sociedade. Ele se baseia na ideia de que a matemática é uma disciplina que se desenvolveu ao longo do tempo, em

resposta às necessidades da sociedade. O MER procura descrever a natureza da matemática, a sua relação com outras disciplinas e a sua importância para a sociedade.

A modelação matemática é uma abordagem que se baseia na ideia de que a matemática pode ser aplicada a situações da vida real. Ela envolve a formulação de modelos matemáticos que descrevem a relação entre variáveis em uma situação específica. A modelação matemática é uma ferramenta importante para a compreensão da matemática aplicada e para a resolução de problemas do mundo real.

No entanto, a aplicação da modelação matemática no ensino de matemática ainda é um desafio para muitos professores. Isso se deve, em parte, à falta de compreensão do MER. Para aplicar a modelação matemática de forma eficaz, os professores precisam entender a relação entre a matemática e a sociedade, bem como a natureza da matemática aplicada.

Farras, Bosch e Gascón (2013) argumentam que a modelação matemática pode ser usada como uma ferramenta para a construção do MER. Eles propõem que a modelação matemática seja usada para ajudar os alunos a entender a relação entre a matemática e a sociedade, bem como a natureza da matemática aplicada. Eles sugerem que a modelação matemática seja usada para ensinar aos alunos como a matemática pode ser aplicada a situações da vida real e como ela pode ser usada para resolver problemas do mundo real.

Para aplicar a modelação matemática de forma eficaz, os professores precisam ter uma compreensão clara do MER. Eles precisam entender a relação entre a matemática e a sociedade e a natureza da matemática aplicada. Eles também precisam ter habilidades em modelação matemática e ser capazes de ensinar aos alunos como aplicar a modelação matemática para resolver problemas do mundo real.

Desta forma, o problema didático da modelação matemática para a formulação do MER é um tema importante que tem sido discutido por muitos pesquisadores. A modelação matemática pode ser usada como uma ferramenta

para a construção do MER, mas os professores precisam ter uma compreensão clara do MER e habilidades em modelação matemática para aplicá-la de forma eficaz. A modelação matemática é uma ferramenta importante para a compreensão da matemática aplicada e para a resolução de problemas do mundo real.

A seguir, abordaremos a Meta-Análise Qualitativa como metodologia de pesquisa, bem como a proposição de um modelo de análise, quando tratarmos da Noção de Raciocínio Combinatório.

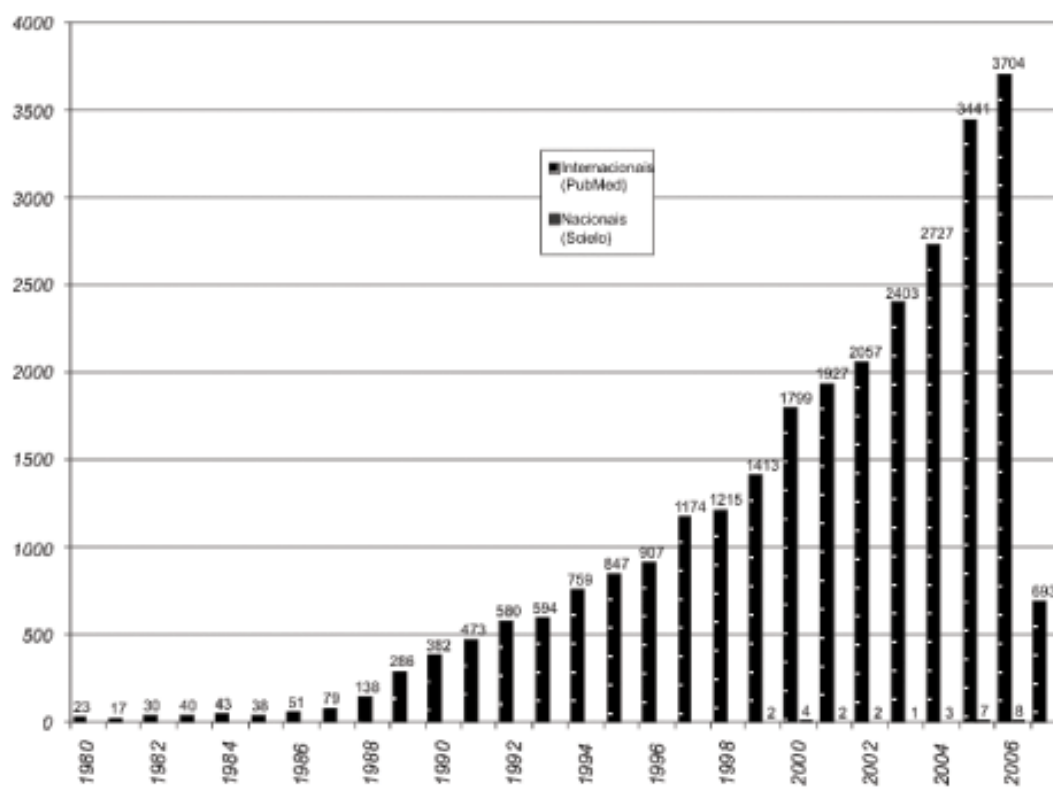
2.5 – A Meta-Análise Qualitativa como Metodologia de Pesquisa

Em 1952, Hans J. Eysenck concluiu que a psicoterapia não tinha nenhum efeito benéfico, o que desencadeou grande debate entre os profissionais dessa área. Vinte anos de pesquisa e avaliação de centenas de estudos não resolveram os problemas levantados por esse debate. Para provar que Eysenck estava errado, Smith e Glass (1977) agregaram estatisticamente resultados de 375 pesquisas em psicoterapia e concluíram que a psicoterapia tem efeitos. Smith e Glass chamaram esse método de Meta- Análise.

A Meta-Análise desenvolveu-se inicialmente nas Ciências Sociais, na Educação, na Medicina e, mais tarde, na Agricultura. Os fundamentos da Meta-Análise são muito anteriores às observações de Smith e Glass. Fisher (1935) afirmou que ao realizar testes de probabilidades independentes, um ou nenhum pode ser significativo, mas a associação deles dá a impressão de que as probabilidades são em geral mais baixas que se fossem obtidas por acaso. Mas, desde 1932, Fisher propunha um método para combinar os valores de p . Isso traz à tona a ideia de valores de probabilidade acumulativos. Os primeiros trabalhos que se interessaram pela problemática da combinação dos resultados de vários experimentos independentes foram realizados por Cochran (1954). O método publicado por Mantel e Haenszel (1959) tornou-se um dos principais nessa área. Muitos pesquisadores acham que isso serviu como base estatística da moderna Meta-Análise.

Mas foi recentemente que o interesse pela Meta-Análise se intensificou. A Figura 3 mostra a evolução nos últimos 26 anos das publicações científicas internacionais (indexadas PubMed) e nacionais (indexadas Scielo) tratando de meta – análise. Em nível internacional, houve uma evolução exponencial das publicações, passando de 23, em 1980, para mais de 3.700, em 2006. O cenário nacional não seguiu essa tendência. Os primeiros artigos sobre o tema surgiram em 1999, alcançando, em 2006, oito publicações.

FIGURA 3: Evolução das publicações científicas internacionais (indexadas PubMed) e nacionais (indexadas Scielo) tratando de Meta – Análise, de 1980 a 2006.



FONTE: Lovatto et al (2007, p. 287).

Esse método de revisão tem como objetivo extrair informações de trabalhos publicados com ou sem (mais comum) análises estatísticas. Quando são realizadas análises estatísticas, os testes usados, às vezes, não são adequados por serem dependentes do tamanho da amostra. Isso pode fazer com que resultados não significativos não tenham o mesmo peso que os significativos.

A Meta-Análise muda o enfoque, a direção e a magnitude dos efeitos entre os estudos. Outro aspecto crítico das revisões é que elas ignoram as diferenças de condições experimentais aplicadas nos estudos.

A Meta-Análise possibilita uma estimativa imparcial do efeito de tratamento, com um aumento da precisão. Devido aos efeitos conflitantes, os estudos individualizados produzem estimativas de associações que divergem de abordagens mais sistêmicas.

Nesta situação, a Meta-Análise melhora o poder analítico do modelo, aumentando as chances de evidenciar diferenças entre os tratamentos (caso existam).

Vemos a Meta-Análise como a interação possível na investigação qualitativa em Educação, uma vez que o resultado de uma Meta-Análise terá significado aplicado somente se os estudos que a compõem forem o resultado de uma revisão sistemática, pelo fato de a estrutura do protocolo de uma Meta-Análise ser semelhante ao de uma revisão sistemática da literatura, Fluxograma 1, presente na página 12, desta pesquisa.

A respeito do Fluxograma 1, no primeiro momento, propusemos as estratégias da investigação, ou seja, as palavras-chave, pois foram elas que, nos sites de buscas oficiais de pesquisas, nortearam todo o mapeamento aqui em questão, para se alcançar a questão de pesquisa, a fundamentação teórica, a coleta e a análise dos dados, a escrita e a rescrita do texto e, ao final, a sistematização do método.

Esse primeiro momento está associado à dimensão epistemológica com a intenção de situar o leitor sobre aquilo que é matemático, no coração do problema.

Para Gascón (1999), um problema didático pode surgir de inquietações docentes quanto ao que ensinar, como ensinar e por que ensinar um conteúdo matemático, que não é suficiente para ser considerado como uma dimensão do problema didático. Para ser assim considerado, é necessário que se acrescente pelo menos a dimensão epistemológica, que busca a razão ou razões de ser de um determinado saber matemático, por um estudo histórico que busca seu desenvolvimento.

Sobre a proposta metodológica em questão, Coutinho (2015, p. 377) destaca que “as meta-análises ocupam hoje um lugar de destaque na investigação social mesmo com o aumento do volume da investigação educativa produzida”. Numa questão logística, as leituras sobre meta-análises nos levam a concluir que reunir num único trabalho as proposições, caminhos de pesquisa

e resultados das mesmas, pode garantir o atual “status do conhecimento sobre determinado problema de pesquisa” (FILHO; PARANHOS et. al., 2014, p. 207).

Nessa pesquisa, esse problema está centrado na ação de situar o lugar dos problemas associados à contagem em dissertações e teses brasileiras. Desta forma, a Meta-Análise Qualitativa propõe sintetizar uma determinada quantidade de conclusões num estudo específico (ROSCOE e JENKINS, 2005), no sentido de responder à seguinte inquietação: em que medida um modelo analítico sobre a Noção de Raciocínio Combinatório, baseado nos estudos de Fischbein, possibilita análises de pesquisas que enfocam a Noção de Raciocínio Combinatório?

Sabemos que A Noção de Raciocínio Combinatório é um tema que tem sido objeto de estudo de diversos pesquisadores ao longo dos anos. Dentre eles, destaca-se o pesquisador Fischbein, que desenvolveu um modelo analítico sobre a Noção de Raciocínio Combinatório. Esse modelo possibilita análises de pesquisas que enfocam a Noção de Raciocínio Combinatório de forma mais aprofundada.

Fischbein é um renomado pesquisador que se dedicou ao estudo da aprendizagem da matemática. Seus estudos sobre a Noção de Raciocínio Combinatório foram fundamentais para o desenvolvimento de um modelo analítico que possibilita a análise de pesquisas nessa área. O modelo de Fischbein é baseado em três componentes: o componente cognitivo, o componente afetivo e o componente didático.

O componente cognitivo se refere à capacidade do indivíduo de compreender as relações entre os elementos combinatórios. O componente afetivo se refere à motivação e à atitude do indivíduo em relação ao raciocínio combinatório. Já o componente didático se refere ao papel do professor na transmissão do conhecimento sobre o raciocínio combinatório.

A partir desse modelo, é possível realizar análises de pesquisas que enfocam a Noção de Raciocínio Combinatório. Por exemplo, uma pesquisa que investiga a eficácia de uma determinada estratégia de ensino do raciocínio

combinatório pode ser analisada a partir dos três componentes propostos por Fischbein. É possível avaliar se a estratégia está sendo efetiva em relação ao componente cognitivo, se está motivando os alunos em relação ao componente afetivo e se está sendo bem transmitida pelo professor em relação ao componente didático.

Além disso, o modelo de Fischbein também possibilita a identificação de possíveis dificuldades que os alunos possam estar enfrentando em relação ao raciocínio combinatório. Por exemplo, se uma pesquisa identifica que os alunos estão tendo dificuldades em compreender as relações entre os elementos combinatórios, é possível analisar essa dificuldade a partir do componente cognitivo do modelo de Fischbein e, a partir disso, desenvolver estratégias de ensino mais efetivas.

Em síntese, o modelo analítico proposto por Fischbein é uma importante ferramenta para a análise de pesquisas que enfocam a Noção de Raciocínio Combinatório. Esse modelo possibilita uma análise mais aprofundada dos três componentes que influenciam a aprendizagem do raciocínio combinatório: o componente cognitivo, o componente afetivo e o componente didático. Com isso, é possível identificar possíveis dificuldades dos alunos e desenvolver estratégias de ensino mais efetivas.

Esse estudo realizado por Fischbein conduz à elaboração de um modelo provisório, que será utilizado como parâmetro para estudo e análise do conteúdo pretendido.

Para Almouloud (2010, p. 156), a análise epistemológica tem por base o desenvolvimento histórico que permite identificar as diferentes formas de concepções de um determinado objeto matemático que poderão favorecer a análise didática.

A outra dimensão é a econômico-institucional, que trata da gestão didática, segundo Gascón (2011). Nela se estudam, em uma determinada instituição, a organização e o funcionamento das Organizações Matemáticas e das Organizações Didáticas envolvidas no problema didático.

Essa dimensão está fortemente descrita no processo técnico de pesquisa, pois não há estudo de fenômenos ou problemas didáticos que se referem a uma relação pessoal, porque ela está determinada e pode ser explicada a partir da relação institucional. O estudo da dimensão econômica visa a responder a seguinte pergunta: como as praxeologias relacionadas aos problemas associados à contagem se comportam em uma determinada instituição, na BNCC, nos Parâmetros Curriculares, nos livros didáticos etc.?

A dimensão ecológica, de acordo com Gascón (2011), inclui as dimensões epistemológica e econômico-institucional, porque se preocupa com o estudo da ecologia institucional das praxeologias matemáticas e didáticas, podendo ser entendida como a sistematização do método, descrito pelo fluxograma 1, página 12, que descreve os passos para uma revisão sistemática com Meta-Análise Qualitativa.

Na fase de “Contextualização-análise preliminar”, é preciso fazer um estudo das dimensões do problema didático e epistemológico do objeto matemático em jogo.

A dimensão do problema didático apresenta as características que fornecem as compreensões dos fenômenos didáticos, pois destaca o ponto de partida, que consiste em um olhar específico que oferece ao investigador possibilidades metodológicas únicas para a investigação em didática.

Segundo (GASCON, 2003), na dimensão epistemológica, toda investigação solicita que o pesquisador fique atento às concepções concernentes à realidade do investigado, abrindo campo para a compreensão do solo em que os procedimentos serão desdobrados.

Na dimensão epistemológica, procuramos descrever e interpretar o modelo epistemológico do âmbito matemático que está em pauta, buscando investigar conforme o grau de confiança que transcende as análises apenas baseadas em cálculos e em explicações de procedimentos metodológicos, permitindo acessar as investigações já realizadas sobre os processos de ensino e aprendizagem do objeto matemático em questão.

Na fase de Meta-Análise e Sistematização, respectivamente, na dimensão econômica e na dimensão ecológica, estuda-se sistematicamente e experimentalmente modelos teóricos.

Nessa primeira fase, o estudo epistemológico permite a procura das razões ou razão de ser do objeto matemático investigado, tentando responder aos seguintes questionamentos: em que medida um modelo analítico sobre a Noção de Raciocínio Combinatório baseado, nos estudos Fischbein, possibilita análises de pesquisas que enfocam a Noção de Raciocínio Combinatório?

O estudo epistemológico é uma ferramenta importante para a compreensão das razões que impulsionam a investigação matemática. Através dele, é possível explorar a natureza dos objetos matemáticos e entender como eles se relacionam com o mundo real. Nesse sentido, os estudos de Fischbein são uma referência importante para a construção de modelos analíticos sobre a NRC.

A NRC é um tema central na educação matemática. Ela tem como objetivo desenvolver a capacidade dos alunos de compreender e utilizar os conceitos matemáticos relacionados a números, proporções e relações. No entanto, muitas vezes, a NRC é ensinada de forma mecânica, sem que os alunos compreendam a sua natureza e a sua importância.

Fischbein propõe uma abordagem diferente para o ensino da NRC. Ele argumenta que é necessário compreender a natureza dos objetos matemáticos antes de utilizá-los. Para isso, desenvolveu um modelo epistemológico que permite analisar as razões que impulsionam a investigação matemática.

O modelo de Fischbein é baseado em três fases: a fase intuitiva, a fase empírica e a fase formal. Na fase intuitiva, o aluno desenvolve uma compreensão intuitiva dos objetos matemáticos. Na fase empírica, ele utiliza essa compreensão para investigar os objetos matemáticos no mundo real. Na fase formal, ele utiliza a linguagem matemática para formalizar as suas descobertas.

A abordagem de Fischbein tem sido utilizada com sucesso no ensino da NRC. Ela permite que os alunos desenvolvam uma compreensão profunda dos

conceitos matemáticos, em vez de apenas memorizá-los. Além disso, ela incentiva a curiosidade e a investigação, o que pode levar a descobertas matemáticas importantes.

Consequentemente, o estudo epistemológico é uma ferramenta importante para a compreensão dos objetos matemáticos. Os estudos de Fischbein são uma referência importante para a construção de modelos analíticos sobre a NRC. Sua abordagem permite que os alunos desenvolvam uma compreensão profunda dos conceitos matemáticos, o que pode levar a descobertas matemáticas importantes. Portanto, é importante que os educadores utilizem essa abordagem no ensino da NRC, a fim de garantir que os alunos compreendam a natureza e a importância dos conceitos matemáticos.

Dessa forma, a dimensão econômica-institucional permeia a dimensão ecológica, uma vez que o “nascimento”, a “vida” e a possibilidade de “fenecimento” e/ou “ressurgimento” prescindem das condições econômicas. A dimensão ecológica permite, por exemplo, situar, do ponto de vista didático, os habitats e nichos do objeto matemático investigado no ecossistema do ensino considerado. Sendo assim, a seguir, trataremos do problema didático.

2.6 – Dimensões do Problema Didático

O problema didático é uma questão complexa e multifacetada que tem sido objeto de estudo e reflexão de muitos teóricos da educação. Entre esses teóricos, destaca-se Chevallard, que propôs uma abordagem que considera quatro dimensões do problema didático: a dimensão epistemológica, a dimensão antropológica, a dimensão sociopolítica e a dimensão técnica.

A dimensão epistemológica do problema didático refere-se ao conhecimento que se pretende ensinar. Segundo Chevallard, cada disciplina escolar tem uma lógica própria que deve ser respeitada no processo de ensino. Isso significa que o professor deve conhecer profundamente a disciplina que leciona e compreender as relações entre seus conceitos e procedimentos. Além disso, é preciso levar em conta que o conhecimento não é estático, mas sim construído socialmente e historicamente. Portanto, o professor deve ter uma visão crítica e reflexiva sobre o conhecimento que transmite aos alunos.

A dimensão antropológica do problema didático refere-se aos sujeitos envolvidos no processo de ensino-aprendizagem. Nessa dimensão, é importante considerar as características dos alunos, como idade, nível de desenvolvimento cognitivo, interesses e expectativas. O professor deve adaptar sua prática pedagógica às necessidades e potencialidades de cada aluno, buscando criar um ambiente de aprendizagem que seja acolhedor e desafiador ao mesmo tempo. Além disso, é preciso levar em conta que os alunos não são apenas receptores passivos do conhecimento, mas sim sujeitos ativos que constroem seu próprio conhecimento.

A dimensão sociopolítica do problema didático refere-se ao contexto social e político em que se insere o processo de ensino-aprendizagem. Nessa dimensão, é importante considerar as desigualdades sociais e culturais que afetam o acesso ao conhecimento e a qualidade da educação. O professor deve estar atento às diferenças culturais e linguísticas dos alunos, buscando criar um ambiente de respeito e valorização da diversidade. Além disso, é preciso levar em conta que a educação não é neutra, mas sim um campo de disputa ideológica e política. Portanto, o professor deve ter uma visão crítica e reflexiva sobre os valores e interesses que estão presentes na prática pedagógica.

Por fim, a dimensão técnica do problema didático refere-se às estratégias e recursos utilizados pelo professor para transmitir o conhecimento aos alunos. Nessa dimensão, é importante considerar as diferentes metodologias e tecnologias disponíveis, buscando selecionar aquelas que melhor se adaptam às características dos alunos e aos objetivos da disciplina. Além disso, é preciso levar em conta que a prática pedagógica não é uma receita pronta, mas sim um processo criativo e dinâmico que exige constante reflexão e adaptação.

Em síntese, as quatro dimensões do problema didático propostas por Chevallard permitem uma abordagem mais ampla e integrada da prática pedagógica. Ao considerar o conhecimento, os sujeitos, o contexto social e político e as estratégias pedagógicas, o professor pode criar um ambiente de aprendizagem mais significativo e efetivo para seus alunos. No entanto, é preciso lembrar que a prática pedagógica não é uma ciência exata, mas sim uma arte que exige sensibilidade, criatividade e compromisso com a formação integral dos alunos.

Apresentamos os recursos que utilizamos para o estudo e investigação de cada dimensão: na dimensão epistemológica, realizamos um estudo do ponto de vista da História da Matemática, o que implica identificar a “Razão de Ser” do objeto matemático. Também analisamos as contribuições dos documentos oficiais, investigando, a partir dos trabalhos de pesquisadores, a razão de ser do objeto matemático Análise Combinatória.

Dessa forma, Monteiro (2010) destaca que os elementos que serão comparados dependem diretamente da pergunta da pesquisa ou das hipóteses estabelecidas no início da revisão.

Essas comparações são descritas no protocolo de pesquisa, porém, após o levantamento dos dados, é possível fazer modificações, por exemplo, se forem identificadas variações importantes no efeito da intervenção. As mesmas considerações feitas para elaborar a pergunta de pesquisa são usadas para definir as comparações, os acontecimentos que podem ser combinados e quais características mais importantes (desenho de estudo, participantes, intervenção

e acontecimentos de interesse) que devem ser tidas em conta na avaliação da variação dos efeitos da intervenção (heterogeneidade).

A Meta-Análise tem início após a análise da qualidade metodológica, na qual se verifica se os estudos são comparáveis ou não. Se forem comparáveis, é possível fazer a análise estatística, isto é, a Meta – Análise.

A Meta-Análise combina os resultados dos diferentes estudos para obter uma estimativa global do efeito da intervenção, possibilitando a análise da heterogeneidade (SOUSA, 2008).

Nessa vertente, Farras, Bosch e Gascón (2013) definem que a dimensão epistemológica de um problema didático é considerada uma dimensão central, uma vez que impregna e condiciona fortemente as outras dimensões do problema didático.

Como já comentado anteriormente, segundo Farras, Bosch e Gascón (2013), no domínio da TAD, o problema de investigação surge de um problema inicial, que denominamos de problema docente P_0 . No âmbito desta pesquisa, o problema docente é: qual a importância da formação inicial docentes em Análise Combinatória, em razão da influência que os saberes docentes exercem na construção do conhecimento combinatório dos alunos?

Os pesquisadores Farras, Bosch e Gascón (2013) compreendem que para transformar um problema docente em um problema de investigação em didática, no âmbito da TAD, é necessário questionar a forma de interpretar o MED, não somente nas instituições escolares, mas também na noosfera. Nesse caso, com relação à dimensão epistemológica P_1 , propomos a seguinte questão de pesquisa: em que medida um modelo analítico sobre a Noção de Raciocínio Combinatório, baseado nos estudos Fischbein, possibilita análises de pesquisas que enfocam na Noção de Raciocínio Combinatório?

No processo de investigação acerca da dimensão epistemológica, investigamos aspectos referentes à História da Matemática, no sentido de estabelecer a razão de ser deste objeto matemático e conseguir responder à questão de pesquisa.

A dimensão econômica está centrada nas questões relativas às condições que regulam a organização, o funcionamento de tais praxeologias, na instituição de referência, ou seja, as questões relativas ao sistema de regras, aos princípios e às leis (normas) que regem a sua vida institucional.

Para estudar as dimensões econômicas e ecológicas da problemática didática, o pesquisador usa inevitavelmente – como referência – um modelo (embora implícito) das Praxeologias Matemáticas que estão em jogo, isto é, um modelo epistemológico do campo da atividade matemática em questão.

A análise ecológica de um objeto de saber é organizada em torno de dois conceitos: o habitat que significa o lugar onde o objeto vive e ambiente conceitual deste objeto de saber e o nicho que se refere à função desse objeto no sistema de objetos com os quais interage.

Essas evidências permitem situar, em termos da Didática da Matemática, os habitats e nichos do objeto matemático investigados no ecossistema de ensino considerado.

A seguir, iniciamos a construção da síntese das abordagens histórico-epistemológica.

2.7 – Estudo Histórico – Epistemológico

As necessidades de sobrevivência da humanidade até os dias de hoje têm na contagem um ente importante. Por não ter posses individuais, o ser humano primitivo não via o porquê do uso de processos contabilísticos, mas com a sua fixação em locais favoráveis ao cultivo da terra e da criação de animais, essa história mudou. O desenvolvimento de processos de contagem, bem como de outros conhecimentos matemáticos, acompanha o desenvolvimento das técnicas de agricultura, de pecuária, de divisão das terras, de observação dos astros e a própria evolução social do ser humano.

O que passamos a descrever é resultado de uma pesquisa acerca dos problemas associados à contagem nas civilizações egípcia, hindu, chinesa, grega, hebraica e árabe, contudo, consideramos uma ordem cronológica.

São contemplados também por este estudo os matemáticos europeus que precederam a importância dos problemas associados à combinatória, como indicadores para a Teoria das Probabilidades, como Blaise Pascal e Pierre Fermat.

É difícil saber ao certo qual foi o primeiro problema que levou ao surgimento da Análise Combinatória ou dos problemas associados à contagem. De acordo com Morgado *et al.* (2006, p. 02), “o desenvolvimento do binômio $(1 + x)^n$ está entre os primeiros problemas estudados ligados ao tema”.

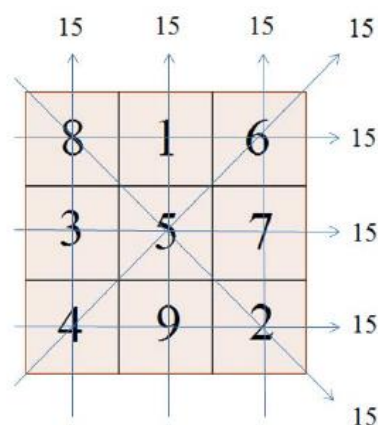
O caso $n = 2$ pode ser encontrado nos Elementos de Euclides, em torno de 300 a.C. Os demais casos estão intimamente ligados ao triângulo de Pascal, que, por sua vez, já era conhecido por Shih - Chieh, na China, (em torno de 1300 a.C) e antes disso pelos hindus e árabes.

Sabe-se que o matemático hindu Báskhara (1114 – 1185) sabia calcular o número de permutações, de combinações e de arranjos de n objetos. No entanto, segundo Wieleitner (1928, p. 183-184), o problema mais antigo relacionado à Teoria dos Números e à Análise Combinatória “é o da formação dos quadrados mágicos”.

Conhecemos como quadrados mágicos (*de ordem n*) um grupo ordenado de números $1, 2, 3, \dots, n^2$ dispostos em um quadrado $n \times n$ de forma que cada linha, coluna ou diagonal deste quadrado possua a mesma soma.

Tais quadrados aparecem na história com diversos significados e certamente já foram apresentados aos nossos alunos algum dia. Pelo menos, o caso $n = 3$ que é o mais conhecido, demonstrado na Figura 4, por Oliveira (2015):

FIGURA 4 – QUADRADO MÁGICO



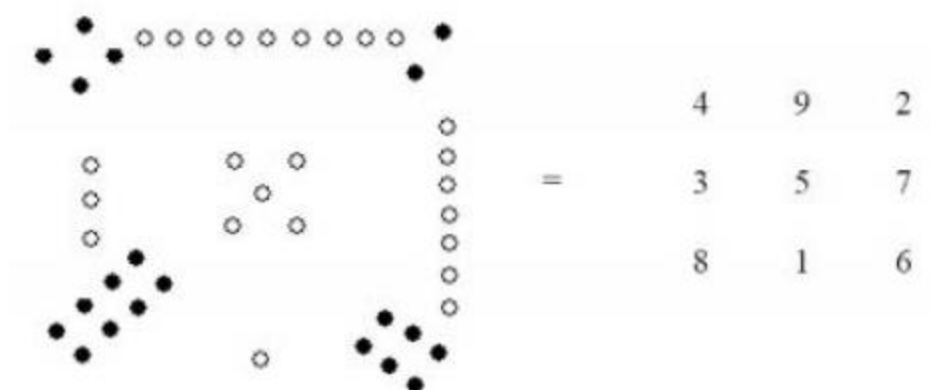
FONTE: Oliveira (2015, p. 20)

O primeiro quadrado mágico conhecido é o Lo Shu e é usado como talismã pelo povo Chinês. Segundo Needham (1959, p. 58) “data de aproximadamente do século I d.C.”, mas pode ser mais antigo, a ponto de ter sido escrito por volta de 2000 a.C. (BERGE, 1971).

Aliás, é, dessa época, na História da China, uma lenda que diz que uma nobre tartaruga apareceu no lendário Rio Lo, carregando nas suas costas nove números ordenados em uma grelha. Os nove números estão posicionados de tal maneira que, quando somados na horizontal, na vertical ou na diagonal, o resultado é sempre 15, que é o número de dias que a Lua Nova leva para tornar-se Lua Cheia.

Os chineses sempre acreditaram que o universo é baseado em princípios matemáticos e números. Eles são a chave para as forças invisíveis que governam o céu e a terra. A representação do Lo Shu pode ser vista na Figura 5, descrita por Vazquez (2011):

FIGURA 5 – LO SHU E O QUADRADO MÁGICO

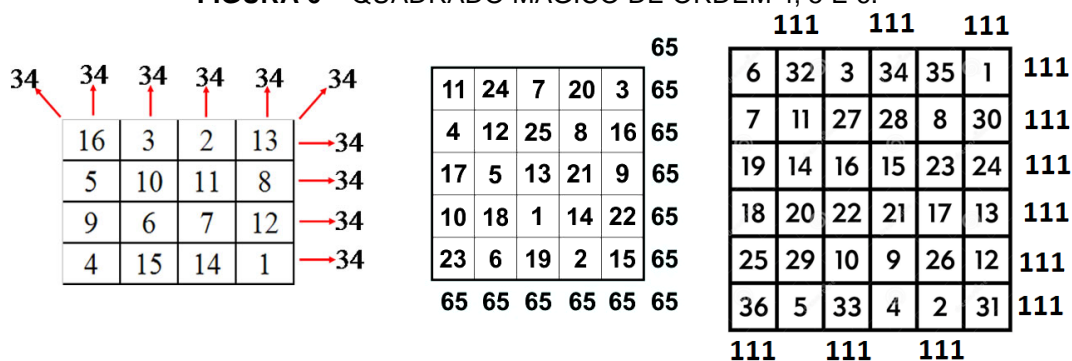


FONTE: Vazquez (2011, p. 2)

O diagrama de Lo Shu está associado as nove salas do palácio mítico de Ming Thang. Segundo Vazquez (2011). Esse quadrado foi uma inovação da época, pois nela a produção de qualquer aritmética simples era motivo de euforia.

Acredita-se que a ideia dos quadrados mágicos chegou até os árabes pelos chineses e que esses fizeram grandes contribuições e construíram quadrados mágicos de ordem 3, 4, 5 e 6, respectivamente, Figuras 6, 7, 8 e 9.

FIGURA 6 – QUADRADO MÁGICO DE ORDEM 4, 5 E 6.



FONTE: Construção do autor.

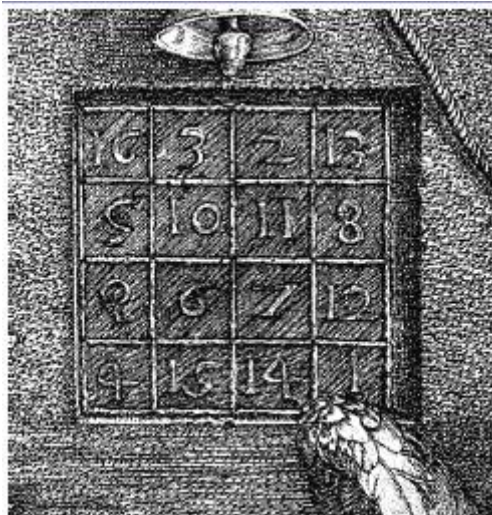
Além de criar os quadrados de ordem superior ao de Lo Shu, os árabes criaram regras para a construção de quadrados de uma determinada ordem. Regras para a construção de quadrados das demais ordens também foram apresentadas durante a história.

Os quadrados mágicos não foram admirados apenas pelas suas atribuições místicas e misteriosas. Muitos foram os matemáticos que se

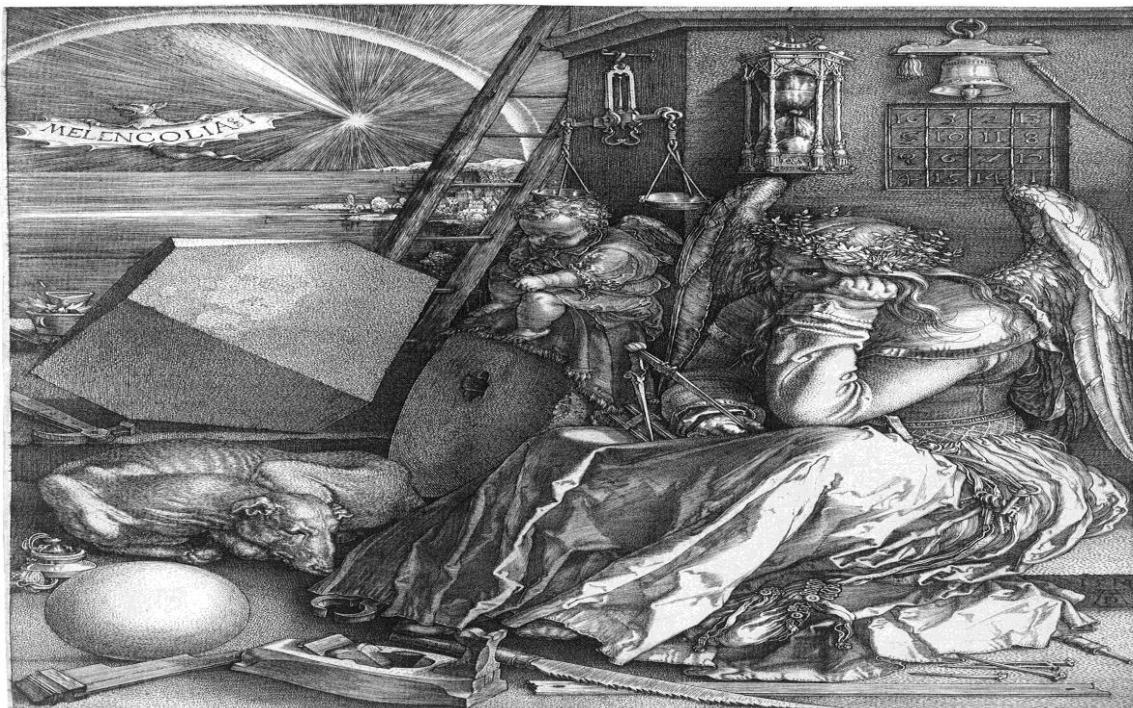
admiraram com as combinações numéricas e se empenharam na busca de procedimentos que levassem a construção desses maravilhosos objetos.

Um grande avanço aconteceu no desenvolvimento dos quadrados mágicos nos séculos X e XI, chegando a ter métodos de construção por volta do século XII. Nesse período, os estudiosos usavam técnicas que, entre outras, partiam de um quadrado mágico original para posteriormente criar outros de mesma ordem. Contudo, mais tarde, chegaram a métodos para criar quadrados mágicos sem a necessidade do original. (VAZQUEZ; NOGUTI, 2004). As Figuras 6 e 7, respectivamente, a seguir, trazem uma pintura do século XIV, feita por Albrecht Durer, em sua obra “A Melancolia”. Com atenção, vemos um quadrado mágico de ordem quatro no canto direito superior.

FIGURA 7 – UM RECORTE DA OBRA “A MELANCOLIA” PARA RETRATAR O QUADRADO MÁGICO



FONTE: <http://galleryhip.com/melancholia-albrecht-durer.html>, visita em 29/01/2021.

FIGURA 8 – A MELANCOLIA

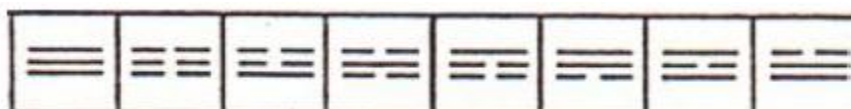
FONTE: <http://galleryhip.com/melancholia-albrecht-durer.html>, visita em 29/01/2021.

Mas o que tem os quadrados mágicos com os problemas associados à contagem? Não é difícil perceber que aqueles trazem exemplos bem antigos de um importante ramo da Análise Combinatória, que é fixar condições para contagem dos arranjos (modos em que se podem colocar os números).

Outra ocorrência da aplicação da Combinatória, na China antiga, pode ser observada no sistema “I Ching” (Yi Jing) (1182–1135 a.C.), um dos trabalhos mais antigos dos chineses.

Esse pode ser compreendido e estudado tanto como um oráculo quanto como um livro de sabedoria. Na própria China, é alvo do estudo diferenciado, realizado por religiosos, eruditos e praticantes da filosofia de vida taoísta. Este sistema baseia-se em 2 símbolos: Yang (linhas inteiras) e Yin (linhas partidas)

São combinados em Trigramas (conjunto de três símbolos) ou Hexagramas (conjunto de seis símbolos), Figura 9 e 10, respectivamente.

FIGURA 9 – TRIGRAMAS

FONTE: Oliveira (2015, p. 22)

FIGURA 10 – HEXAGRAMAS



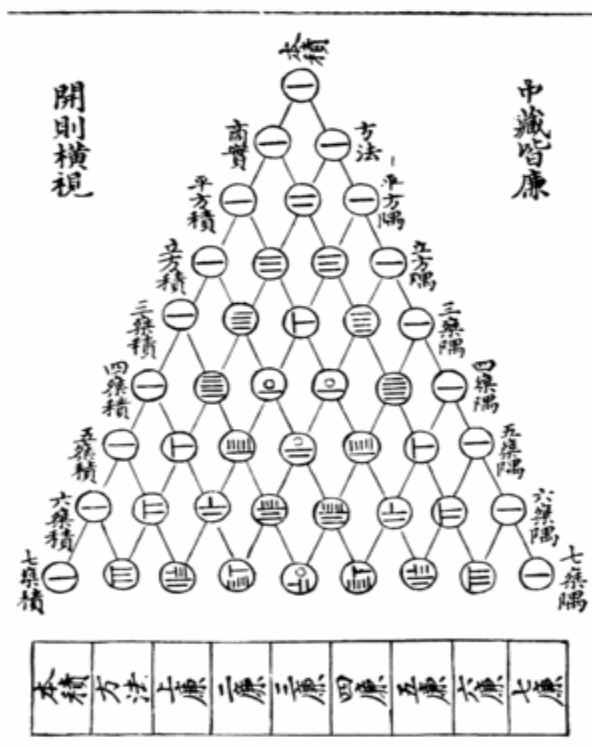
FONTE: Oliveira (2015, p. 22)

A cada um desses símbolos é atribuído um significado. Os chineses sabiam que existiam 8 trigramas e 64 hexagramas diferentes.

Também, por volta do ano 100 ou 200 d.C, o povo chinês já conhecia as propriedades do triângulo aritmético de Pascal, usando-as no cálculo de raízes quadradas e cúbicas, Figura 11.

FIGURA 11 – O TRIÂNGULO ARITMÉTICO DE PASCAL DA MANEIRA COMO FOI DESENHADO EM 1303 POR CHU SHI - KIÉ.

圖方蔡七法古



FONTE: Campos (2011, p. 30)

Esse povo usava um manual de Matemática, denominado Jiuzhang Suanshu – Os nove capítulos da Arte Matemática –, que traz, no seu quarto capítulo, procedimentos e técnicas para resolver os problemas que envolviam a extração de raízes quadradas e cúbicas.

Eis alguns deles problema:

Agora, dada uma área de 55 225 *bu* [quadrados]. Diz: qual é o valor do lado do quadrado? **Solução:** 235 *bu*.

Dada de novo uma área de 3 972 150 625 *bu* [quadrados]. Diz: qual é o valor do lado do quadrado? **Solução:** 159 *bu*.

Dado um campo circular de 1518³/₄ *bu* [quadrados]. Diz: qual é o perímetro? **Solução:** 135 *bu*.

Agora, dado um volume 1 860 867 *chi* [cúbico]. Diz: qual é o lado do cubo? **Solução:** 123 *chi*.

Agora, dado um volume 19531/8 *chi* [cúbico]. Diz: qual é o lado do cubo? **Solução:** 12 1/2 *chi*.

(CAMPOS, 2011, p. 30)

Junto a esses, outros problemas antigos carregavam de forma implícita o raciocínio da contagem.

O velho problema do lobo, da cabra e do repolho (cerca de 775 d.C) é atribuído a Alcuíno de York e hoje é estudado na teoria dos Grafos. Tal problema diz:

"Certo homem tinha que transportar para o outro lado de um rio, um lobo, uma cabra e um repolho. O único barco que encontrou podia carregar somente duas coisas de cada vez. Por esta razão ele procurou por um plano que pudesse levar todos para o outro lado totalmente ilesos. Diga a ele, quem é o competente, como pode ser possível transportá-los seguramente" (VAZQUEZ, 2011, p.27)

A poesia infantil, de tempos remotos, com autor desconhecido, carrega traços de um problema associado à contagem,

"Quando eu estava indo para St. Ives, eu encontrei um homem com sete mulheres, Cada mulher tem sete sacos, Cada saco tem sete gatos, Cada gato tem sete caixas, Caixas, gatos, sacos e mulheres, Quantos estavam indo para St. Ives?" (BIGGS, 1979, p.110)

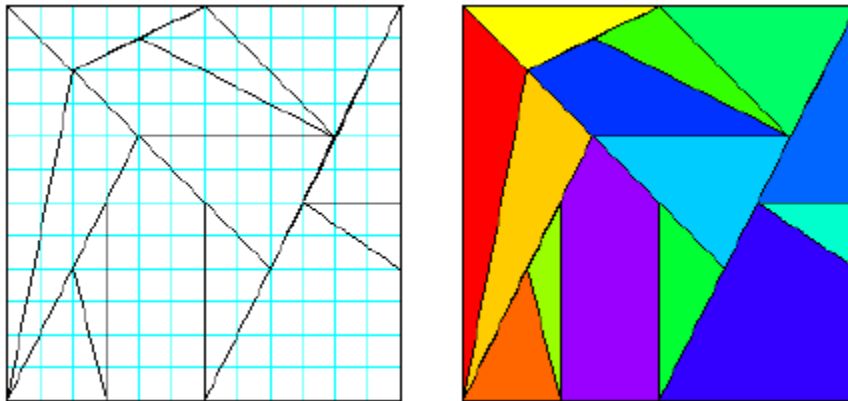
O problema 79, do Papiro Egípcio de Rhind (cerca de 1650 a.C), é semelhante ao proposto com o poema anterior,

"Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete medidas de grãos; quantos itens há ao todo?"(VAZQUEZ, 2011, p.15)

Mesmo Arquimedes de Siracusa (287 a.C. – 212 a.C.), um dos maiores matemáticos de toda a antiguidade, publicou entre todos os trabalhos uma espécie de "quebra-cabeça" que intrigou matemáticos e historiadores.

Conhecido como Stomachion (pronuncia-se: sto-mock-yon), aparentemente, um jogo, semelhante ao conhecido Tangran, é um arranjo de quatorze peças que formam um quadrado (Figura 12). O objetivo consistia em mover tais peças formando o quadrado. De certo, Arquimedes deveria saber que de várias formas isso poderia ser feito.

FIGURA 12 – STOMACHION



FONTE: <http://mathworld.wolfram.com/news/2003-11-19/stomachion/>, acesso em 30/01/2021

Em 14 de dezembro de 2003, o jornal americano *The New York Times*, publicou um artigo de título *In Archimedes Puzzle, A New Eureka Moment*, sobre os resultados da pesquisa do historiador de Matemática, Dr. Reviel Next, da Universidade de Stanford, Califórnia, em que ele afirma que o Stomachion não era um mero passatempo, mas um objeto executado por Arquimedes, para fins de Análise Combinatória.

Mais especificamente, a conclusão de Next é que Arquimedes desejava determinar de quantas formas distintas poderiam ser encaixadas as 14 peças para formar o quadrado, um problema associado à contagem.

Next, com sua equipe, encontrou uma resposta recentemente provada dessa questão, podendo ser 17152 ou, desprezando as soluções simétricas, 268, que parece mais plausível. Não se sabe ao certo se o próprio Arquimedes obteve essa resposta.

De qualquer forma, o fato fundamental é que a origem da Análise Combinatória talvez não estivesse no estudo do binômio de Newton, como se acreditava, mas bem antes, em problemas desse tipo, como nesse caso que

remonta à genialidade de um homem que sempre esteve à frente do seu tempo, Arquimedes.

A Análise Combinatória se enraizou realmente na Matemática, por volta do século XVII. Novamente, de acordo com Wieleitner (1928, p. 184), “o estudo da teoria da Combinatória só apareceu separado da teoria dos números, no final desse século juntamente com o cálculo de probabilidades”.

Nessa época, surgiram, em um curto espaço de tempo, três publicações: *Traité du triangle arithmétique* (escrito em 1654 e publicado em 1665), de Pascal, *Dissertatio de arte combinatoria* (1666), de Leibniz, e *Ars magna sciendi sive combinatoria* (1669) de Athanasius Kircher. Além disso, foram divulgados trabalhos de Wallis (1673), Frénicle de Bessy (1693), J. Bernoulli (1713) e De Moivre, em seu *Doctrine of chances* (LONDRES, 1718), que tinham um caráter análogo.

Os resultados mais importantes proporcionados pela Teoria Combinatória foram as fórmulas para a transformação de séries e as fórmulas de Lagrange para as funções estudadas, por Rothe, em 1795, e por Juan Federico Pfaff, em 1797. (WIELEITNER, 1928, p. 188).

Segundo Vazquez (2011, p. 24), em 1666, Leibniz descreveu a Combinatória como sendo “o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos”, enquanto Nicholson, em 1818, definiu-a como “o ramo da Matemática que nos ensina a averiguar e expor todas as possíveis formas através das quais um dado número de objetos pode ser associados e misturados entre si”, ou seja, problemas associados à contagem.

Sendo assim, os problemas associados à contagem constituem uma parte dos tipos de problemas discutidos por esse ramo da Matemática, tendo o objetivo de “contar e classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas”. (MORGADO, 1991, p.2).

Na Matemática, existem também os problemas de existência que, como o próprio nome sugere, têm por objetivo “demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas

condições” (MORGADO, 1991, p.2). Aqui se inserem os Princípios de Dirichlet (ou da casa dos pombos, ou das gavetas) e de Inclusão e Exclusão, “se $n+1$ pombos são colocados em n gaiolas, pelo menos uma gaiola deverá conter no mínimo dois pombos”, Figura 13.

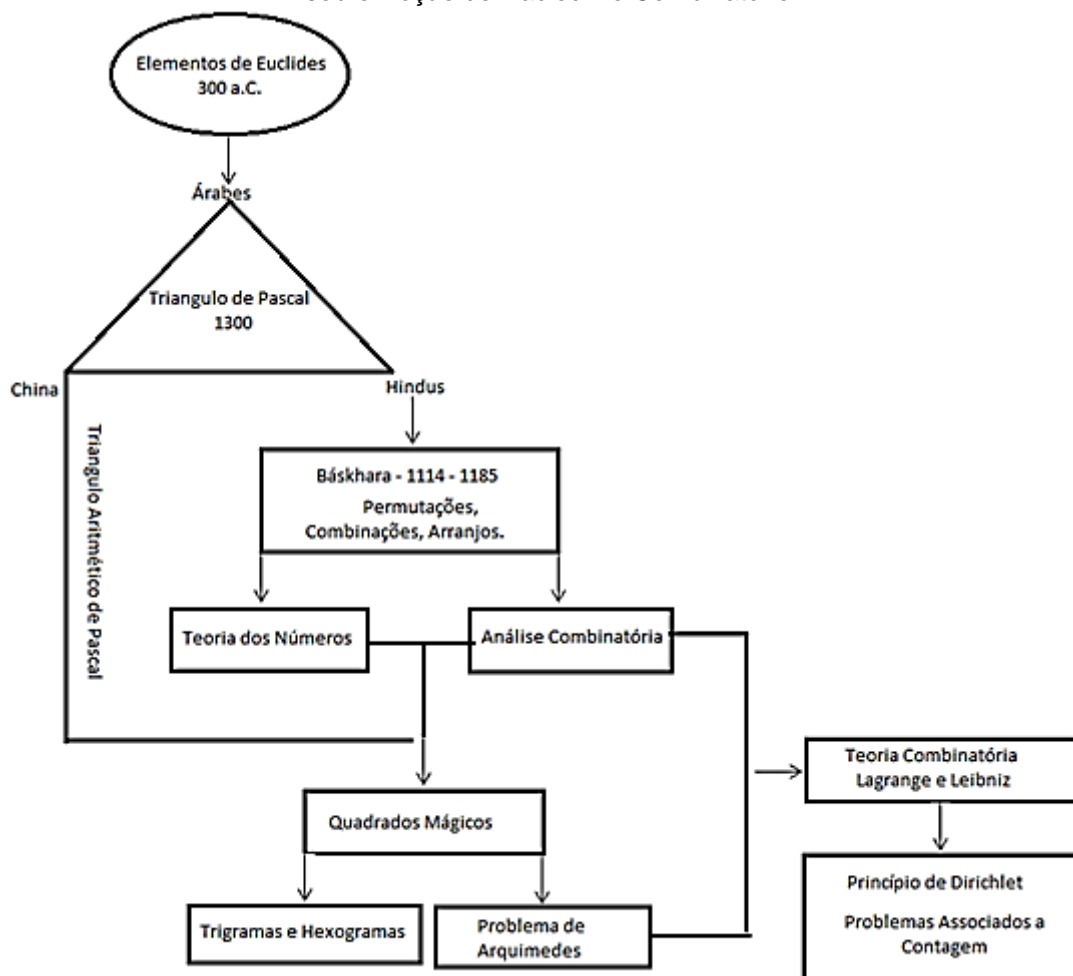
FIGURA 13 – PRINCÍPIOS DE DIRICHLET



FONTE: Morgado e Carvalho (2014, p. 30)

O Fluxograma 2 apresenta um desenho de organização Matemática, a partir dos vestígios revelados no estudo histórico-epistemológico de uma possível Praxeologia Matemática.

FLUXOGRAMA 2: Tessitura de um Modelo Produto do Estudo Histórico – Epistemológico sobre Noção de Raciocínio Combinatório.



FONTE: Construção do autor.

O estudo realizado a respeito do marco evolutivo sobre a análise combinatória, associados aos problemas de contagem, revelou vestígios de rupturas epistemológicas no processo mencionado. Algumas dessas rupturas, de acordo com a análise dos trabalhos de Wieleitner (1928), Berge (1971), Morgado (1991), Noguti (2004), Morgado (2006), Campos (2011), Vazquez (2011), Morgado (2014) e Oliveira (2015), representam os problemas associados à contagem, descrevendo a passagem do problema geométrico para o algébrico, que sofreu durante a linha de tempo investigada.

No mesmo caminho da tessitura do Modelo Histórico-Epistemológico, temos os problemas que envolvem as funções geradoras, as relações de recorrência, o princípio da reflexão, as permutações caóticas e os lemas de Kaplansky, que constituem, juntamente com os arranjos, permutações e combinações simples e com repetição, os problemas associados à Contagem.

Esses últimos, porém, são, em geral, abordados em Matemática, na Educação Básica.

Os autores Morgado *et al.* (1991) consideram que um dos motivos de se privilegiar o ensino de permutações, arranjos e combinações na Educação Básica é o fato de serem mais simples e terem um uso mais amplo, possibilitando resolver uma grande quantidade de problemas associados à Combinatória.

Seguindo os passos de Morgado *et al.* (1991), Pessoa (2009) busca em sua pesquisa analisar o desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica, com alunos do 2º ano do Ensino Fundamental até o 3º ano do Ensino Médio. A autora define o raciocínio combinatório como um tipo de pensamento que envolve os problemas associados à contagem, mas que vai além da enumeração de elementos de um conjunto.

Na Combinatória, segundo Pessoa (2009, p.72), “contam-se, baseando-se no raciocínio multiplicativo, grupos de possibilidades, através de uma ação sistemática”, seja pelo uso de fórmula, seja pelo desenvolvimento de uma estratégia que dê conta de atender aos requisitos desses tipos de problemas, como a constituição de agrupamentos, a determinação de possibilidades e sua contagem.

Assim, os problemas associados à combinatória podem ser resolvidos utilizando diversas estratégias com o objetivo de realizar a contagem. As estratégias de resolução, como a listagem ou utilização de fórmulas, são utilizadas baseadas no raciocínio multiplicativo, raciocínio aditivo, árvore de possibilidades, princípio fundamental da contagem, os quais devem ser o foco no trabalho com os alunos, na Educação Básica.

De acordo com os documentos oficiais do Brasil, a Análise Combinatória deve ser trabalhada desde os primeiros anos da Educação Básica, de modo intuitivo, com situações-problema que envolvem o conteúdo, sem a necessidade da formalização dos conceitos ou fórmulas.

No contexto dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997), no momento da apresentação do conteúdo de multiplicação, presente nos

primeiros ciclos do Ensino Fundamental, deve-se trabalhar com todos os seus significados, sendo um deles o raciocínio combinatório.

Desta forma, o trabalho com a Análise Combinatória com os alunos fornece elementos para o desenvolvimento de competências necessárias, não somente para o ambiente escolar, mas para o convívio social do cidadão. Tal fato é anunciado nos PCN (BRASIL, 1998), quando se atribui a necessidade de desenvolver tais conteúdos na Educação Básica, para que o aluno consiga tratar as informações do cotidiano como dados estatísticos e ideias relativas à probabilidade e à combinatória.

Além dessas necessidades relatadas, os problemas que envolvem a combinatória que não estão restritas aos problemas de arranjo, permutações com e sem repetições e combinações simples, podem possibilitar aos alunos desenvolver competências relacionadas à organização, à criatividade, à autonomia, no processo de resolução, além do raciocínio combinatório.

Problemas desse tipo podem levar os alunos a mobilizar diversas estratégias, como: a contagem dos casos, a representação de diagramas de árvores, a tabela de dupla entrada e a utilização do Princípio Multiplicativo (MORAES, 2016).

Dessa forma, podemos dizer que os problemas associados à contagem, são uma parte da Análise Combinatória voltada à análise de estruturas e de relações discretas, estando em volta de regras como ordenação, sequência, enumeração, contagem, entre outros cálculos de agrupamentos, como forma de chegar-se aos resultados.

Após essa análise epistemológica da literatura e de posse desses resultados, podemos construir uma correlação entre as pesquisas para compor o modelo epistemológico. Segundo Bosch e Gascón (2010, p. 56), o ensino escolar pode ser organizado de várias maneiras de acordo com alguma interpretação para a Matemática “um *modelo epistemológico de referência*–estritamente relacionado com uma conceituação concreta do que se entende

por ensinar e aprender Matemática”, em cada momento histórico, em cada tradição cultural e em cada instituição de referência.

Os autores supracitados definem que “toda organização ou praxeologia [...] que vive em uma determinada instituição é sustentada e fortemente condicionada pelo modelo epistemológico da Matemática dominante em tal instituição” (Ibid, p. 60). Sugerem então modelos epistemológicos específicos que seriam elaborados para a análise e desenhos didáticos considerados relativos e provisórios para o investigador.

Assim, apresentamos uma questão de estudo: em que medida um modelo analítico sobre a Noção de Raciocínio Combinatório, baseado nos estudos de Fischbein, possibilita análises de pesquisas que enfocam a Noção de Raciocínio Combinatório? Tal pergunta gerará outras questões e respostas que darão sentido à investigação.

Entendemos, desse modo, que precisamos construir um modelo epistemológico de referência alternativo para a construção da resposta possível e esperada, que poderá encaminhar e justificar possíveis organizações didáticas para o ensino baseadas em atividades de estudo e pesquisa, construídos a partir dos trabalhos correlatos.

Nesse cenário, realizaremos, a princípio, uma pesquisa acerca de trabalhos publicados no Banco de Dados da CAPES, no período de 1998 - 2019, partindo de uma pesquisa externa realizada por Fischbein (1975), a respeito dos problemas associados à contagem, destacando a relevância de estudar as investigações sobre os problemas associados a contagem, no intuito de apontar como está posto, atualmente, o tema, e, em especial, a necessidade da pesquisa sobre a temática em foco. Em seguida, prosseguiremos com a análise dos documentos norteadores para o ensino da Matemática elementar, a fim de abranger as restrições e condições para o estudo dos problemas de contagem e responder à problemática docente, em torno do nosso objeto do saber, descritos no capítulo III, na sequência.

CAPÍTULO III – ESTUDO DA DIMENSÃO ECONÔMICO-INSTITUCIONAL

De forma coloquial, podemos dizer que a dimensão econômico-institucional de um problema didático inclui questões que giram em torno da questão como estão as coisas (o OM e o OD) na contingência institucional? Com isso, engloba o sistema de regras e princípios que regulam – em uma determinada instituição – a organização e o funcionamento das OMs e ODs envolvidas no problema didático. (GASCÓN, 2011, p. 213, tradução nossa).

Nesse capítulo, apresentamos uma síntese do estudo bibliográfico e da pesquisa qualitativa dos trabalhos em ordem cronológica publicados em Educação e/ou em Educação Matemática que envolvam direta ou indiretamente a Noção de Raciocínio Combinatório, associados aos problemas de contagem, na Educação Básica. Em especial, destaca-se os elementos que usaremos dos trabalhos correlatos como quadro teórico-metodológico, para fundamentar a pesquisa, na direção de construir e analisar teses e dissertações, a partir de um Modelo Analítico para a Noção de Raciocínio Combinatório.

3.1 – Dimensão Econômico-Institucional

A dimensão econômico-institucional despersonaliza a problemática didática. Essa afirmação pode parecer um pouco complexa, mas, na verdade, ela é muito simples de entender. De acordo com o sociólogo francês Yves Chevallard a dimensão econômico-institucional refere-se às normas, regras e estruturas que são impostas aos indivíduos pela sociedade em que vivem.

Na área da educação, isso significa que as políticas educacionais, os sistemas de avaliação e outros aspectos institucionais têm um grande impacto na forma como os professores ensinam e os alunos aprendem. Em outras palavras, a dimensão econômico-institucional pode limitar a capacidade dos professores de personalizar o ensino para atender as necessidades individuais dos alunos.

Por exemplo, se uma escola está focada em melhorar seus resultados em testes padronizados, os professores podem se sentir pressionados a ensinar para o teste, em vez de adaptar o ensino para as necessidades de cada aluno. Essa abordagem pode levar a uma despersonalização do ensino, no qual os

alunos são vistos como números em uma planilha, em vez de indivíduos únicos com necessidades e habilidades diferentes.

Além disso, a dimensão econômico-institucional também pode afetar a forma como os professores são treinados e avaliados. Se as políticas educacionais enfatizam a importância dos resultados em testes padronizados, os programas de treinamento de professores podem se concentrar em técnicas de ensino que visam a melhorar esses resultados, em vez de desenvolver habilidades de ensino personalizadas.

Em última análise, a despersonalização do ensino pode ter um impacto negativo na qualidade da educação. Os alunos podem se sentir desmotivados ou desinteressados e os professores podem ficar frustrados com a falta de flexibilidade em seu trabalho. Para combater essa tendência, é importante que as políticas educacionais e as estruturas institucionais sejam projetadas para apoiar a personalização do ensino e o desenvolvimento de habilidades de ensino adaptáveis.

Sendo assim, a dimensão econômico-institucional pode ter um impacto significativo na forma como a educação é estruturada e ensinada. É importante que as políticas educacionais e os sistemas de avaliação sejam projetados para apoiar a personalização do ensino e o desenvolvimento de habilidades de ensino adaptáveis. Somente assim, poderemos garantir que cada aluno tenha a oportunidade de receber uma educação de qualidade e personalizada que atenda às suas necessidades individuais.

Desta forma, a dimensão econômica-institucional despersonaliza a problemática didática e delimita a unidade mínima de análise dos processos de estudo.

Para estudar as dimensões econômico-institucionais da problemática didática, o pesquisador usa inevitavelmente – como referência – um modelo (que pode ser implícito) das praxeologias matemáticas que estão em jogo, isto é, um MER do campo da atividade Matemática em questão. Quando falamos de MER, referimo-nos a formas de interpretar e descrever um campo conceitual de um objeto matemático que pertence a um setor e a uma área que é predominante

nas instituições escolares, mas também na noosfera e nas instituições que produzem conhecimento matemático. Assim, o MER é o instrumento com o qual o didata pode desconstruir e reconstruir as praxeologias cuja divulgação intrainstitucional e interinstitucional pretende analisar e é essencial para estudar o conhecimento matemático antes de ser transformado para ser ensinado.

Quando o MER é aberto e explicitamente exposto à crítica e ao contraste empírico, ele constitui um instrumento de emancipação (da didática e ciência didática), no que diz respeito ao MED na instituição (GASCÓN, 2014). Em coerência com esse MER e com base nele, o pesquisador utiliza (e, eventualmente, constrói) um modelo didático do que significa «aprender» conhecimentos matemáticos do referido campo, em nosso caso, problemas associados à contagem.

Nesse cenário, iniciamos nosso estudo do objeto, em 1950, pois as reformas curriculares causadas pelo desenvolvimento econômico e pelos avanços tecnológicos, nos países desenvolvidos, implantaram o Movimento da Matemática Moderna (MMM), introduzido muito claramente como política de formação a serviço da modernização (FIORENTINI, 1995; PIRES, 2008), o que provocou mudanças significativas no *Currículo Oficial de Matemática* das escolas, em muitos países, inclusive no Brasil, inserindo no Currículo Oficial conteúdos matemáticos que, até aquela época, não faziam parte do programa escolar como, por exemplo, estruturas algébricas, teoria dos conjuntos, topologia e transformações geométricas. (WIELEWSKI, 2008).

Diante de tal contexto, é de fundamental importância conhecer as condições enfrentadas ao apresentar o currículo oficial, passando a analisar de forma pontual, consciente as compreensões, condições de produção de registros, comunicação de conteúdos escolares da Matemática e de suas consequências didáticas, como motor de difusão de praxeologias.

Nesse período, o grande empenho era aproximar o ensino escolar da ciência, ter uma Matemática útil à técnica, útil à ciência e útil à economia moderna. No entanto, nas etapas correspondentes à Educação Básica e nos Anos Iniciais, a intenção de unificar a linguagem e possibilitar ao aluno a

construção de noções matemáticas, levava-o, na realidade, a descrever situações pseudoconcretas e imaginárias.

Na Educação Básica, principalmente no Ensino Fundamental, o raciocínio sobre objetos matemáticos, dos quais o aluno poderia inclusive ignorar o sentido, foi cultivado como uma virtude. Assim, o que se colocou em prática estava distante de ser um ensino renovado e democrático da Matemática, preparando o aluno para a compreensão da ciência. Tratava-se de um ensino formalizado ao extremo, deçado de todo suporte intuitivo, apresentado a partir de situações artificiais e, além de tudo, bastante seletivas. (FIORENTINI, 1995; PIRES, 2008).

Contra-pondo-se a esse cenário da educação brasileira, apresentamos o trabalho de Piaget e Inhelder (1951), o qual mostra que a intuição existe em cada indivíduo normal e civilizado.

A questão principal do trabalho é saber se a intuição de crianças de 4 a 12 anos é “nativa ou adquirida” e, se for adquirida, qual é o mecanismo de aquisição. Ao chegar ao final desse trabalho, os autores apresentam pressupostos de que os mecanismos de aquisição de intuição das crianças são adquiridos, e ainda mais, se os *“sujeitos não possuem capacidade de adquirir o raciocínio combinatório, eles/elas não são capazes de utilizar as ideias de probabilidade, exceto com experimentos aleatórios muito elementares”* (PIAGET; INHELDER, 1951, p. 45).

A importância de iniciarmos nossa pesquisa com o trabalho de Piaget e Inhelder (1951) decorre do contexto no qual o Brasil está inserido, por apresentar questões inerentes ao processo de ensino e aprendizagem, impulsionados por diversas correntes teóricas que têm ampla influência no campo educativo, como o modelo racionalista e o modelo sócio-histórico.

Após atravessar uma longa jornada ditatorial, a sociedade brasileira, no período de 1980, encontrava-se em um período de redemocratização claramente marcado pela elaboração e aprovação da Constituição Federal (1988),

favorecendo, com isso, substanciais mudanças educacionais e alterações políticas, além de uma reestruturação dos movimentos sociais.

No período de 1990, importantes documentos oficiais tornam viáveis significativas transformações no contexto da *Educação Brasileira*, influenciando políticas públicas do país relacionadas, inclusive, os livros didáticos.

Após a *Conferência Nacional de Educação para Todos*, é elaborado no Brasil, pelo Ministério da Educação (MEC), o Plano Decenal de Educação para Todos (1993 – 2003), que, em consonância com o que estabelece a Constituição de 1988,

afirma a necessidade e a obrigação de o Estado elaborar parâmetros claros no campo curricular capazes de orientar as ações educativas do ensino obrigatório, de forma a adequá-lo aos ideais democráticos e à busca da melhoria da qualidade do ensino nas escolas brasileiras. (BRASIL, 1997, p.14).

O documento respondia “*ao dispositivo constitucional que determina eliminar o analfabetismo e universalizar o Ensino Fundamental nos próximos dez anos*” (BRASIL, 1994, p.14). Para tanto, situa a Educação Básica, no contexto econômico, social e político do Brasil, daquela época, para, em seguida, destacar pontos críticos e dificuldades a enfrentar diante dos objetivos e metas traçados, além das linhas de ação estratégica voltadas à educação fundamental. Acentuava-se, inclusive, a necessidade da implantação de uma nova política do livro didático, na qual se enfatizasse o aspecto qualitativo, incluindo a distribuição dos livros.

O Plano afirma que, nos programas direcionados aos livros didáticos vigentes na época, havia desajustes no processo de aquisição, o que vinha impedindo que o livro estivesse disponível na escola no início do ano escolar. Afirma-se, ainda, que “*o livro didático constitui um dos principais insumos da instituição escolar*” (IBIDEM, p.25) e assume-se, como estratégias para alcance das metas e objetivos, dentre muitas outras, a melhoria na qualidade do livro didático e a descentralização progressiva dos programas relacionados a ele.

Ainda, neste período de 1990, é aprovada a nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB 9394/96), além de Diretrizes Curriculares para o Ensino Fundamental, emanadas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE).

Em 1996, segundo Mandarino (2010, p. 201), “os *Parâmetros Curriculares, 1996, propõem a inclusão, nos currículos de Matemática, de um novo bloco de conteúdo denominado Tratamento da Informação – (BTI)*”, valorizando os conhecimentos de Estatística, Probabilidade e Combinatória, que anteriormente não era trabalhado pelos professores e pouco explorado nos livros didáticos desse período, década de 1950. Nesse sentido, os PCN de Matemática (BRASIL, 1997 e 1998) orientam para os ciclos de alfabetização, no BTI que os discentes devem saber e sua estrutura pode ser objetivada pela relação direta com o currículo oficial. No que tange esse último aspecto, o currículo oficial constituiu-se momento para se criar um espaço próprio para o ensino do pensar o tema NRC, pois:

Relativamente aos problemas Noção de Estatística, Noção de Probabilidade e Noção de combinatória, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades e estatísticas. (BRASIL, 1998, p. 52).

Essa capacidade pode estar relacionada às etapas descritas na Teoria de Piaget (1970), “Epistemologia Genética”, nas quais as crianças no Estágio I utilizam procedimentos aleatórios, sem tentar encontrar uma sistemática estratégia. No Estágio II, eles usam de tentativa e erro, descobrindo alguns procedimentos empíricos com poucos elementos. Após o período de operações formais, adolescentes descobrem procedimentos sistemáticos de construção de pensamentos combinatórios.

Ainda de acordo com Piaget e Inhelder (1951), podemos dizer que existe um modo de pensar sobre o fazer Matemática. Ao considerar o movimento educacional nesse período, apresenta indícios de um modelo epistemológico para o raciocínio combinatório, ou seja, um *Modelo Analítico*, pois, ao se trabalhar com atividades de combinações simples – Ordenação, Enumeração, Contagem, Sequência, Comparação, Classificação; com ideias de arranjos com

ou sem repetição e com ideias de permutações com ou sem repetição, surgem os conceitos de oportunidade.

Segundo os moldes do Modelo Analítico, é possível construir uma sequência de tarefas com ideias de permutação e, a partir da compreensão das ideias de permutação, construir as ideias para a compreensão das estimativas para chegar às ideias de probabilidades, desenvolvendo em conjunto a correção para o desenvolvimento do conceito de combinação. Ao final desse processo, chegamos ao algoritmo de contagem, uma formalização, através de atividades rotineiras.

Essas ideias agregam mecanismos pelos quais podem ser mobilizados conceitos que justifiquem suas decisões para garantir uma preparação adequada, tanto histórica quanto epistemológica, do ensino da *Análise Combinatória*. A Combinatória envolve a coordenação de seriação e correspondência. As Permutações implicam em um arranjo de acordo com um sistema de comunicações móveis e reversível de referência, portanto, são operações sobre operações, características do nível de pensamento formal da criança, podendo levar à conclusão de um desenvolvimento do NRC, associado meramente ao desenvolvimento do pensamento lógico matemático, ou seja, indícios de um Modelo Analítico associado aos problemas de contagem.

Dessa relação, a concepção acerca da Matemática a ser ensinada nas escolas nesse período, 1950, era a Lógica, pela sujeição ao Modelo, modelo tecnicista, pois para se alcançar níveis de compreensão mais amplos, assume a repetição como instrumento de Modelização da Matemática, descrito no Trabalho de Piaget e Inhelder (1951). Segundo Gascón (2003), parte-se de uma técnica algorítmica que serve como treinamento para se chegar a dominar a técnica.

Ainda nesse trabalho, Piaget e Inhelder (1951) apresentam dois passos que são fundamentais para tornar o aprendizado desse assunto “*mais fácil*”:

- “a) entender a natureza dos erros dos alunos na resolução de problemas combinatória;
 - b) identificar as variáveis que podem influenciar esta dificuldade”.
- (PIAGET; INHELDER, 1951, p. 54)

Com esses dois passos, Piaget e Inhelder (1951) efetuaram inúmeras investigações sobre a influência do raciocínio combinatório no desenvolvimento do pensamento formal. Segundo esses autores, a capacidade combinatória é uma componente fundamental do raciocínio formal, pois o raciocínio hipotético-dedutível opera através das operações combinatórias que se aplicam sobre um conjunto de possibilidades (um conjunto de atividades) que devem ser examinadas e enumeradas até se chegar a uma conclusão, ou seja, atingindo o período das operações formais. Mais à frente, na adolescência, os jovens descobrem espontaneamente procedimentos sistemáticos de enumeração, ordenação, sequência, seriação, classificação, contagem, combinações e algoritmos, descritos nos PCN (BRASIL, 1997), caracterizando ainda mais os traços do Modelo, presentes no PCN, como:

- Coleta, organização e descrição de dados.
- Exploração da ideia de probabilidade em situações-problema simples, identificando sucessos possíveis, sucessos seguros e as situações de “sorte”.
- Utilização de informações dadas para avaliar probabilidades.
- Identificação das possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e de contabilizá-las usando estratégias pessoais. (BRASIL, 1997, p.61-62)

Dessa forma, entendemos que a NRC como Modelo desempenha um papel fundamental no desenvolvimento da compreensão de conceitos matemáticos, por estar associada ao princípio fundamental de contagem, às ideias de contagem, a descrições de formação de conjuntos, à descrição de possibilidades.

Surge, assim, a importância do livro didático como instrumento de reflexão dessa situação particular, atendendo dupla exigência: de um lado, os procedimentos, as informações e os conceitos propostos nos manuais; de outro lado, os procedimentos, as informações e conceitos, que devem ser apropriados à situação didático-pedagógica a que se destinam a NRC.

Na LDB 9394/1996, há menções ao “*material didático-escolar*”, por diversas vezes, inclusive no Art. 4, quando a Lei trata das garantias para a efetivação do dever do Estado com a educação escolar pública, mencionando aspectos quanto ao atendimento ao educando. Cabe destacar que essa mesma ideia está presente nos artigos 54 e 208 da Lei nº 8069, de 13 de julho de 1990,

que institui o Estatuto da Criança e do Adolescente (ECA) e no projeto de Lei do Plano Nacional de Educação mais atual (PNE – 2011/2020). Nesse projeto, essa ideia toma a forma de uma estratégia para atingir as médias nacionais do IDEB – Índice de Desenvolvimento da Educação Básica.

Ainda na LDB 9394/1996, no Art. 70, a despesa com “*material didático-escolar*” é reconhecida e inserida nos objetivos básicos das instituições educacionais de todos os níveis, porém, em nenhum momento, na Lei 9394/1996 é mencionada a expressão “*livro didático*”, mas há várias referências a “*material didático-escola*” que demonstram o reconhecimento do livro didático como parte desse conceito.

Os PCN (BRASIL, 1997) que oferecem “*metas de qualidade que ajudem o aluno a enfrentar o mundo atual como cidadão participativo, reflexivo e autônomo, conhecedor de seus direitos e deveres*” (p. 8). Para a aplicação dessas metas, os Parâmetros indicam que os professores utilizem o documento como suporte em diversas situações, inclusive na análise do “*material didático*”:

Estamos certos de que os **Parâmetros** serão instrumento útil no apoio às discussões pedagógicas em sua escola, na elaboração de projetos educativos, no planejamento das aulas, na reflexão sobre a prática educativa e na análise do material didático. E esperamos, por meio deles, estar contribuindo para a sua atualização profissional – um direito seu e, afinal, um dever do Estado (p. 8).

Nas recomendações presentes nos PCN de Matemática, é possível identificar a busca por uma atitude diferenciada quando do uso do livro didático. Os livros, assim como os jogos, vídeos e calculadoras são caracterizados pelos PCN de Matemática como *recursos didáticos* que, apesar de exercerem um papel importante no processo de ensino e aprendizagem, “*precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base da atividade Matemática*” (BRASIL, 1997, p. 19). Mais à frente, ainda é dito que os livros “*infelizmente, são muitas vezes de qualidade insatisfatória*” (BRASIL, 1997, p. 22).

Assim, os PCN vão além de uma abordagem a respeito dos livros e de sua qualidade, tratando também das práticas quando do uso desse recurso. Elegem os problemas da formação docente como uma justificativa para o fato de

as práticas em sala de aula ter como base os livros didáticos. Vinculam-se, ainda, à essa “*falta de formação profissional qualificada*” a “*existência de concepções pedagógicas inadequadas*” que dificultam a implantação de propostas inovadoras (BRASIL, 1997, p. 22).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de grande importância para a educação no Brasil. Ele define as aprendizagens essenciais que devem ser alcançadas pelos estudantes em todas as etapas da educação básica. Entre as habilidades e competências que a BNCC busca desenvolver, destaca-se a Noção de Raciocínio Combinatório.

O raciocínio combinatório é uma habilidade matemática que envolve a capacidade de contar e organizar elementos em diferentes configurações. Ele é fundamental para a resolução de problemas que envolvem arranjos, permutações e combinações. Além disso, o raciocínio combinatório é essencial para a compreensão de conceitos como probabilidade e estatística.

A BNCC reconhece a importância do raciocínio combinatório e busca desenvolvê-lo em todas as etapas da educação básica. Na educação infantil, por exemplo, as crianças são estimuladas a contar objetos e a perceber padrões em sequências. Já no ensino fundamental, os estudantes aprendem a calcular o número de possibilidades em situações simples, como a escolha de roupas ou a organização de eventos.

No Ensino Médio, o raciocínio combinatório é aprofundado e aplicado em situações mais complexas, como a resolução de problemas envolvendo permutações e combinações. Além disso, os estudantes aprendem a calcular probabilidades e a interpretar dados estatísticos.

É importante destacar que o desenvolvimento da Noção de Raciocínio Combinatório não se limita à disciplina de Matemática. Ele também está presente em outras áreas do conhecimento, como a Biologia, a Física e a Química. Por exemplo, na Biologia, o raciocínio combinatório é utilizado para calcular a probabilidade de ocorrência de mutações genéticas. Já na Física, ele é aplicado na resolução de problemas envolvendo a combinação de grandezas físicas.

Dessa maneira, a Base Nacional Comum Curricular reconhece a importância da Noção de Raciocínio Combinatório para a formação dos estudantes e busca desenvolvê-la em todas as etapas da educação básica. Isso é fundamental para que os estudantes possam compreender e resolver problemas em diferentes áreas do conhecimento, além de desenvolver habilidades que serão importantes ao longo de suas vidas.

A seguir, trataremos da análise do livro didático, a partir de documentos oficiais e de pesquisas na área.

3.2 – Análise de Livros Didáticos

Nesta parte do estudo econômico-institucional, buscamos revelar o que está “posto” nas instituições de referência (obras, livros, documentos oficiais), como são apresentadas as tarefas nos sistemas de ensino e qual o papel que o objeto matemático (NRC) desempenha nas instituições analisadas, tomando como referência as pesquisas de Menssouri (1994), Delgado (2006) e Pinheiro (2008) e as instituições de referência para construir a análise de duas coleções de livros didáticos do 1º e 5º Ano do Ensino Fundamental.

Diversos estudos, como os de Menssouri (1994), Delgado (2006) e Pinheiro (2008), nas últimas décadas, buscam justificar a estrutura e funcionalidade do livro didático, tornando-o objeto de estudo e de debate nas comunidades científicas, em busca de sua legitimação diante da educação escolar (Tabela 2). Para iniciar, indicamos autores que buscaram revelar a forma de fazer e pensar em livros didáticos, com referência ao NCR.

Tabela 2: Relevância da Análise do Livro Didático

AUTOR / ANO	OBRA	SÍNTESE DO ESTUDO
MENSSOURI (1994)	TESE	O livro didático “submetido ao olhar e ao julgamento público, e representativo da realidade da classe.
DELGADO (2006)	TESE	“O livro didático pode ser definido, como um produto cultural composto, híbrido, da cultura, da pedagogia, da produção editorial e da sociedade” (p. 108)
PINHEIRO (2008),	TESE	A importância da história do livro didático (p. 42).

FONTE: Construção do autor.

Nos últimos anos, alguns autores têm se dedicado a estudar a estrutura e a funcionalidade do livro didático, tornando-o um objeto de estudo e de debate nas comunidades científicas.

Menssouri (1994) realizou um estudo econômico-institucional nas instituições de referência, analisando a produção, a distribuição e o uso do livro

didático. Segundo o autor, o livro didático é um instrumento importante para a democratização do acesso ao conhecimento, uma vez que é um recurso que pode ser utilizado em diferentes contextos educacionais, desde as escolas públicas até as instituições privadas.

Delgado (2006), por sua vez, argumenta que o livro didático é um elemento fundamental para a construção do conhecimento, uma vez que permite a sistematização e a organização dos conteúdos a serem ensinados. Além disso, o autor destaca a importância do livro didático como um instrumento de mediação entre o professor e o aluno, que pode ajudar a estabelecer uma relação mais próxima e efetiva entre eles.

Já Pinheiro (2008) enfatiza a importância do livro didático como um elemento que pode contribuir para a formação crítica dos alunos. Segundo o autor, o livro didático deve ser visto como um recurso que não apenas apresenta os conteúdos a serem ensinados, mas que também estimula a reflexão e o debate sobre os temas abordados.

Diante dessas reflexões, podemos concluir que o livro didático é um elemento fundamental no processo de ensino-aprendizagem, que pode contribuir para a democratização do acesso ao conhecimento, para a construção do conhecimento e para a formação crítica dos alunos. Por isso, é importante que os educadores e as instituições de ensino valorizem e utilizem o livro didático de forma adequada, buscando explorar todo o potencial que esse recurso pode oferecer.

No estudo bibliográfico, ficou evidente a importância do livro didático no processo de ensino e aprendizagem, pois ele auxilia, orienta e até mesmo direciona a prática escolar e o processo de ensino aprendizagem.

Nesse sentido, sabemos que o livro didático, na maioria das vezes, é o único material utilizado pelo professor e pelos alunos. Ainda notamos que, para muitos professores, ele é visto como verdadeiro e correto, o que faz com que seu uso seja feito de forma ingênua.

Antes de utilizar o livro didático como um material de apoio nas aulas, o professor precisa conhecê-lo previamente: conhecer sua estrutura, sua proposta e possibilidades de trabalho com ou através dele. É necessário analisá-lo cuidadosamente.

Nesse viés, Menssouri (1994) destaca que, se quisermos conhecer como se apresenta um determinado saber em uma instituição de ensino, é necessário efetuar a análise dos livros didáticos, pois são os livros didáticos que constituem uma realização efetiva e objetiva do ensino realizado em classe, realização essa que é submetida ao olhar e ao julgamento público e representativa da realidade da classe. (MENSSOURI, 1994, p.46, tradução nossa).

Ainda em relação à esta pesquisa, os livros didáticos são as fontes de informações da realidade da classe muito importantes. (MENSSOURE, 1994).

Pinheiro (2008) destaca um pouco da história do livro didático. Dentre as leituras feitas na sua pesquisa sobre livro didático, destacamos o artigo “O livro didático ao longo do tempo: a forma do conteúdo” (p.42), das autoras Freitas e Rodrigues (2007). As autoras apresentam essa história com muita propriedade e, por isso, vamos nos limitar apenas a fazer um resumo das inúmeras formas experimentadas pelos governantes para levar o livro didático à escola, desde 1929, com a criação de um órgão específico para legislar sobre políticas do livro didático até a política de execução do Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), pelo Fundo Nacional do Desenvolvimento da Educação (FNDE).

Há muitas décadas, o Ministério da Educação (MEC) se preocupa com a presença do livro didático na escola. Isso começou, em 1929, com a criação do Instituto Nacional do Livro (INL), que contribuía para a legitimação do livro didático nacional e auxiliava o aumento de sua produção.

Em 1938, foi instituída a Comissão Nacional do Livro Didático (CNLD), que tratava da produção, do controle e da circulação das obras; em 1945, o Estado consolida a legislação sobre as condições de produção, importação e utilização do livro didático, restringindo ao professor a escolha do livro a ser utilizado pelos alunos; em 1966, o MEC e a Agência Norte-Americana para o

Desenvolvimento Internacional (USAID) realizam um acordo que permitia a criação da Comissão do Livro Técnico e Livro Didático (COLTED) para coordenar as ações referentes à produção, edição e distribuição do livro didático, o qual terminou em 1971. Nesse ano, foi extinta a COLTED e o INL passou a desenvolver o Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental (PLIDEF), assumindo as atribuições administrativas e de gerenciamento dos recursos financeiros.

Em 1976, foi extinto o INL e a Fundação Nacional do Material Escolar (FENAME) torna-se responsável pela execução do PLIDEF, ano em que o governo iniciou a compra dos livros com recursos do FNDE e com as contribuições dos estados; em 1983, foi extinta a FENAME e criada a Fundação de Assistência ao Estudante (FAE), que incorpora vários programas de assistência do governo, incluindo o PLIDEF. Já, nessa época, propôs-se a participação dos professores na escolha dos livros e a ampliação do programa, com a inclusão das demais séries do Ensino Fundamental, que antes atendia até a quarta série. Em 1985, o PLIDEF foi extinto e, por meio do decreto 91542/85, foi criado o PNLD. (BRASIL, 2008).

Somente em 1996 os livros inscritos no PNLD passaram a ser avaliados pelo MEC. O processo de avaliação passou por vários aperfeiçoamentos até chegar ao que temos hoje. As obras passam pela avaliação de vários especialistas de universidades brasileiras, seguindo um edital criterioso. Os livros aprovados são apresentados aos diretores das escolas públicas de todo o país, os quais têm o papel de promover os debates entre os professores, no sentido de que eles possam fazer uma boa escolha. Posteriormente à escolha, as editoras ficam com a responsabilidade de enviar para cada escola os livros didáticos que serão utilizados durante três anos.

Atualmente, os livros didáticos chegam à escola após uma escolha feita pelos seus professores. A escolha do livro para cada disciplina é feita pelos seus professores tendo como ajuda o Guia do Livro Didático que traz uma síntese da avaliação feita pelos especialistas; os professores têm a oportunidade de escolher os livros de sua preferência para serem por eles trabalhados por um

período de três anos; o livro escolhido só poderá ser substituído por outro título na próxima avaliação do livro didático pelo PNLD.

Todo esse processo traz uma responsabilidade a mais para a escola e para o professor, pois ambos devem responder favoravelmente a esse investimento, em especial, o professor, que necessita fazer com que o livro se torne um constante aliado seu e dos seus alunos. Isso parece, de certa forma, ter alterado a relação do professor com o livro didático, aumentou a sua responsabilidade com a escolha: ele necessita escolher um livro que o auxilie fortemente em seu trabalho de sala de aula e por isso deve fazer uma escolha qualificada de um livro adequado.

Percebemos a grande importância que os programas voltados para materiais didáticos possuem. Notamos que é constante sua consolidação e que estão sempre sendo expandidos.

Segundo Delgado (2006), o livro didático ainda ocupa um papel central no universo escolar atual. Mesmo coexistindo com diversos outros materiais, como quadros, mapas, enciclopédias, recursos tecnológicos, ele é um dos principais e essenciais materiais do ensino e da aprendizagem no contexto escolar. O livro didático faz parte da cultura e da memória visual de muitas gerações e pode ser definido como um produto cultural híbrido, que se encontra no “cruzamento da cultura, da pedagogia, da produção editorial e da sociedade”.

Delgado (2006) destaca que o livro didático tem a função de contribuir para o ensino aprendizagem; é considerado como sendo “um interlocutor, isto é, um componente que dialoga tanto com o professor quanto com os alunos” (p. 62). Ele é, de fato, uma fonte indispensável de mediação do conhecimento.

A seguir, faremos a análise de duas coleções de livros didáticos do 1º ao 5º Ano do Ensino Fundamental.

3.3 – Análises de Duas Coleções de Livros Didáticos do 1º ao 5º Ano do Ensino Fundamental

Esta parte é dedicada ao tema NRC, presente na coleção de livros didáticos do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental e nos manuais do professor 1º ao 5º ano, dos cinco volumes de cada uma das coleções, com o intuito de detectar e estudar a marca inicial da introdução formal do Modelo Analítico para a NRC, Também visa a observar o que é privilegiado, como são feitas as escolhas e verificar a forma como é apresentada no capítulo os entes numéricos da NRC, nos exercícios resolvidos e propostos, tanto no livro do aluno, quanto no manual do professor.

Com o intuito de estudar nosso objeto de pesquisa – NRC –, ou seja, as habilidades do raciocínio combinatório ligado às ideias de contagem, sequência, ordenação, grupamentos, combinações, possibilidades, enumeração, seriação e classificação, pautamo-nos em especial nos programas, tais como o PNLD, no PCN, nas Matrizes de Referência do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), da Prova Brasil, ANA e nos livros didáticos da Coleção “A Conquista da Matemática”, “Porta Aberta: Alfabetização Matemática”. O ponto de partida foi uma minuciosa pesquisa na rede de educação do Ensino Fundamental da cidade de Belém do Pará, buscando, na secretaria de educação municipal, quais as matérias didáticas, ou seja, quais os livros didáticos aprovados para a Educação Básica do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental, nas escolas do Estado do Pará.

Recorremos à secretaria e aos programas, pois neles são definidos os objetos a ensinar, as expectativas em relação às recomendações e às exigências, bem como as finalidades do ensino. Também recorremos aos livros didáticos, pois eles apresentam os objetos a ensinar, de acordo com as orientações dos programas, parâmetros e matrizes de referência da educação brasileira e com o nível adequado a cada ano a ser trabalhado.

O PNLD, os PCN, a SAEB, a ANA e os *livros didáticos* são fontes de dados. Menssouri (1994, p. 46) julga que o último item são fontes de dados objetivados de um determinado saber em uma instituição de ensino, “submetida ao olhar e ao julgamento público, e representativo da realidade da classe”.

Quando propomos esta investigação, aos moldes do Programa Epistemológico de Investigação, lançamos à análise o contexto ideal que associasse as temáticas no livro didático, tendo como entremeio a NRC, a partir da TAD, mais precisamente a OM e OD. Então, por estarmos vivenciando uma proposta de estudo e pesquisa, achamos satisfatório lançarmos mão de analisar, a partir de conteúdos, tarefas e situações-problemas específicas dessa temática, tomando como referência a percepção do desenvolvimento da NRC do 1º ao 5º ano do EF.

Para realizar nossa investigação, utilizamos duas coleções, aprovadas pelo PNLD (BRASIL, 2013; 2016), por terem uma grande presença na Educação Básica, principalmente no Ensino Fundamental menor, por comporem o cenário da Educação Básica do Estado do Pará. Em pelo menos uma delas, foi observada uma postura diferente em relação ao ensino da NRC – “A Conquista da Matemática” –, visando a alcançar uma maior abrangência e eficácia dos elementos de respostas obtidos em nossas análises.

É importante destacar que os dados relativos aos livros didáticos aqui apresentados foram conseguidos através da ida à instituição responsável por pedir e enviar o material didático as escolas, ou seja, a Secretaria Municipal de Educação – SEMEC e também a ida a pelo menos em cinco instituições de Educação Básica, no Município de Belém, dentre as quais podemos destacar: Escola Monsenhor Azevedo, Silvio Nascimento, Rotary, Amalia Paumgarten e Padre Leandro Pinheiro.

Sendo assim, a partir dessa constatação, foi possível olhar a fundo o principal papel do material didático na educação, nos Anos Iniciais de escolarização, principalmente, nos materiais didáticos usados nestas instituições de ensino.

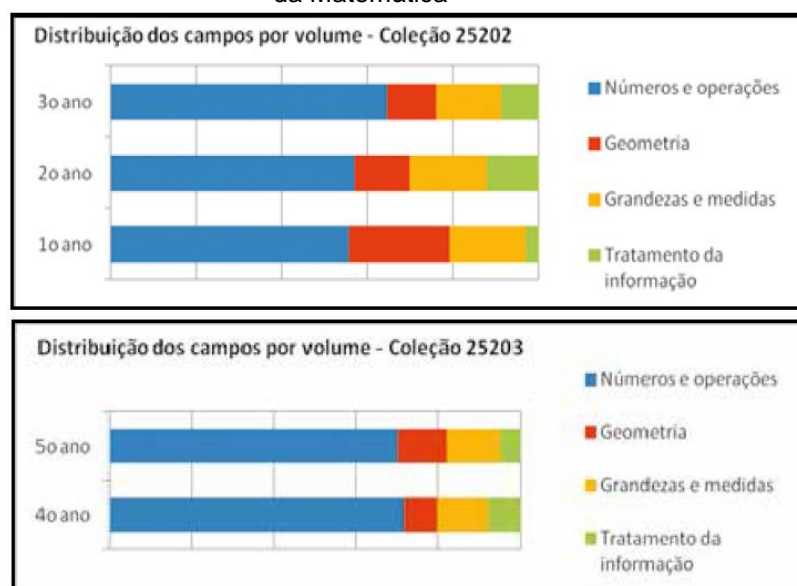
Nos manuais dessas coleções, o objetivo é analisar de que modo a NRC é constituída pelo autor, por meio do discurso presente no livro didático, e compreender o que se deseja ensinar, realizando o estudo das OM e OD e identificando que tipo de tarefas/técnicas são contemplados na constituição dos capítulos estudados.

Neste viés, a pesquisa foi realizada por meio da identificação das atividades presentes na coleção de livros didáticos, com o intuito de identificar os tipos de tarefas t e as respectivas técnicas τ de resolução apresentadas, bem como os elementos tecnológicos θ e teóricos Θ a elas relacionados.

As escolhas dos autores relativas à apresentação e ao desenvolvimento do assunto são retratadas pela análise da OM e OD, presente naquele capítulo do manual do professor, podendo ser verificadas nas Figuras de 12 a 15, na distribuição dos campos: Números e operações, Geometria, Grandezas e medidas e Tratamento da Informação, no guia do livro didático de Matemática de 2020 e 2022, das coleções “A Conquista da Matemática” e “Porta Aberta”.

Na Figura 14, as p.31 e p. 150, no guia do livro didático de Matemática, de 2020, para a coleção “A Conquista da Matemática” apresentam a distribuição dos campos da Matemática para cada volume.

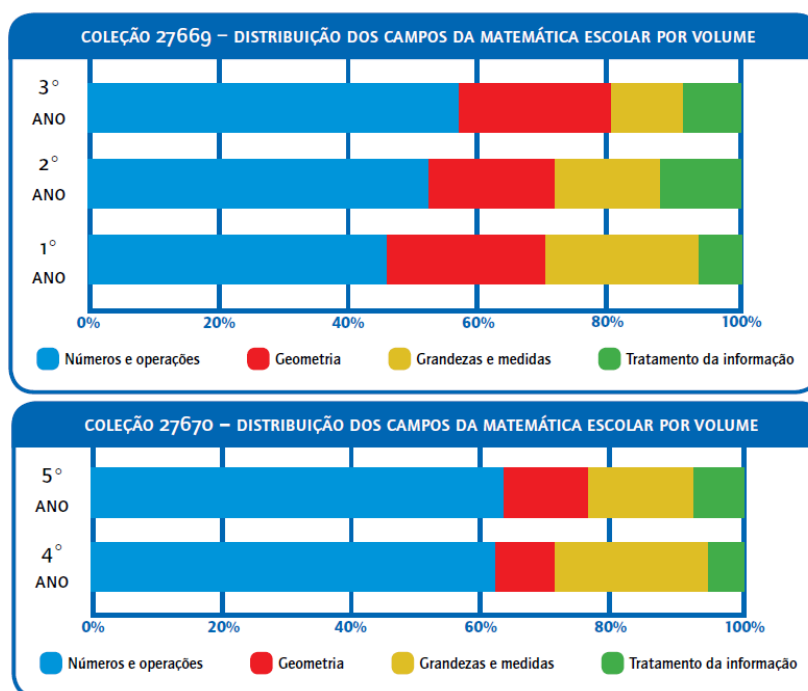
FIGURA 14 - Guia do livro didático 2020: Matemática – Anos Iniciais do EF. Para “A Conquista da Matemática”



FONTE: BRASIL (2020, p. 31 e 150).

Na Figura 15, as p.77 e p. 219, no guia do livro didático de Matemática de 2022, para a coleção “A Conquista da Matemática”, apresentam a distribuição dos campos da Matemática para cada volume.

FIGURA 15 - Guia do livro didático 2022: Matemática – Anos Iniciais do EF. Para “A Conquista da Matemática”

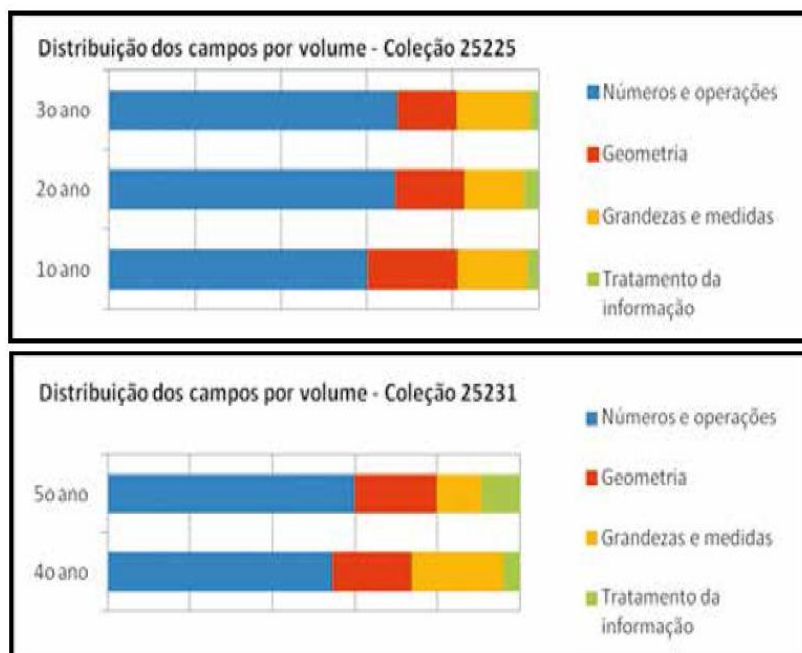


FONTE: BRASIL (2022, p. 77 e 219)

É preciso destacar, no entanto, que o PNLD 2018 a 2022 sofreu várias modificações as quais viabilizaram um maior destaque do BTI nos livros didáticos da Coleção “A Conquista da Matemática”, no 1º e 5º Ano do Ensino Fundamental, possibilitando ao livro didático exercer um maior diálogo entre o saber NRC na perspectiva sobre o saber a ser estudado e sobre o modo mais eficaz.

Na Figura 16, as p.51 e p. 160, no guia do livro didático de Matemática de 2018, para a coleção “Porta Aberta”, apresentam a distribuição dos campos da Matemática para cada volume.

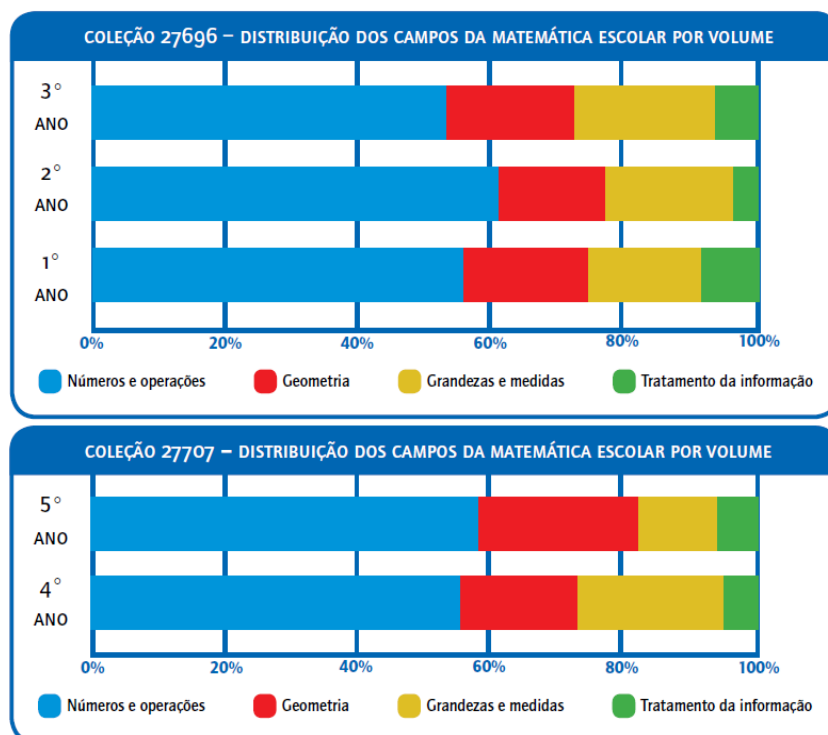
FIGURA 16 - Guia do livro didático 2020: Matemática – Anos Iniciais do EF. Para “Porta Aberta”



FONTE: BRASIL (2020, p. 51 e 160)

Na Figura 17, a p.94 e a p. 230, no guia do livro didático de Matemática de 2022, para a coleção “Porta Aberta”, apresentam a distribuição dos campos da Matemática para cada volume.

FIGURA 17 - Guia do livro didático 2022: Matemática – Anos Iniciais do EF. Para “Porta Aberta”



FONTE: BRASIL (2022, p. 94 e 230)

Nas Figuras 14 a 16, avalia-se a distribuição por volume de cada um dos campos da Matemática Escolar, destacando as articulações entre o objeto NRC, as tarefas e conteúdos por cada volume da coleção. A partir desta imagem, podemos destacar que o campo do tratamento da informação é o que possui um menor destaque e é o campo responsável pelo desenvolvimento da marca inicial da NRC.

As tarefas foram retiradas das coleções de livros didáticos do 1º ao 5º ano do EF, aprovado no PNLD (BRASIL, 2020; 2022), responsável por oferecer informações para servirem de apoio ao processo de ensino e aprendizagem. Essa avaliação vem sendo realizada, desde o ano de 1996, para o Ensino Fundamental I e Fundamental II, tendo iniciado em 1999, e serve de referência para aquisição e distribuição do material às escolas públicas. (BARBOSA; LINS, 2010).

No item a seguir, daremos ênfase à análise da coleção “A Conquista da Matemática: Alfabetização Matemática”.

3.4 – Análises da Coleção “A Conquista da Matemática: Alfabetização Matemática” – Livro Didático 1 – LD1

A coleção de livros didáticos “A Conquista da Matemática”, de forma geral, é organizada em unidades que sempre iniciam com histórias em quadrinhos, retratando situações do cotidiano referentes ao conteúdo a ser estudado. Em sequência, há uma seção denominada *explorando*, destinada ao levantamento do conhecimento prévio dos alunos.

Ao longo dos capítulos, encontram-se as seções “*vamos resolver*”, “*assim também se aprende*” e “*os quadros curiosidades, desafios e interdisciplinaridade*”. Esta coleção traz, também, “a seção *falando de...*”, com projetos anuais sobre os temas: “*falando de você*”. No final do volume, há sugestões de leitura para o aluno, bibliografia da obra e peças para recortar, além de um glossário.

No livro do 1º ano, os conteúdos são apresentados por meio de atividades em que a participação dos alunos é incentivada; nos capítulos seguintes, são feitas breves explicações dos conteúdos, acompanhadas de exemplos e seguidas por atividades que devem ser resolvidas pelos alunos, por meio da aplicação do que foi ensinado. Na obra, procura-se retomar os conhecimentos prévios dos alunos e os conceitos/procedimentos são abordados e retrabalhados sucessivamente.

O livro do 1º ano é dividido em 20 capítulos, dentre os quais podemos destacar 14, a saber: Capítulo 2 – Noção de grandezas; Capítulo 3 – Noção de Posição; Capítulo 7 - Sequências; Capítulo 8 – Classificação; Capítulo 10 – Quantos (Quantificar)?; Capítulo 11 – Sequência dos números de 0 a 9; Capítulo 12 – Quem é o Primeiro?; Capítulo 13 – Juntar é mais!; Capítulo 14 – Tirar é menos!; Capítulo 16 – Tabelas e Gráficos; Capítulo 17 – Quanto mede?; Capítulo 18 – Quanto pesa? Qual é a maior massa? e Capítulo 19 – Quanto cabe? dedicados a tópicos dos campos da Matemática escolar, ou seja, de Álgebra Elementar, compostos por sequências de atividades. Para diálogo com o leitor, recorre-se a um conjunto de personagens infantis. Os capítulos incluem, também, as seções “*agora é com você*” e “*assim também se aprende*”.

Sendo assim, neste momento da pesquisa, buscaremos estudar a Organização Praxeológica e identificar essa organização do saber NRC nos

Livros Didáticos do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental. Ou seja, buscaremos em nosso estudo identificar como “vive”, qual o “lugar” e quais os saberes associados à NRC estão presentes nos livros didáticos do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental. Em uma Organização Praxeológica, identificamos: tarefas, técnicas, tecnologias e teorias.

O estudo do volume 1 permitiu, durante a coleta de dados, identificar 15 tarefas da OM e OD no volume 1 e presentes no manual do professor sobre “Como ensinar o tema NRC, através das ideias de contagem, sequência, ordenação, grupamentos, enumeração, seriação e classificação”, que trataremos como pontual.

Como, por exemplo, a Figura 18, na p. 134, mostra o momento do primeiro encontro com a tarefa t_1 , da OM e OD. Ocorre quando o autor apresenta no livro didático o subtítulo: “*Números Naturais*”, seguido do enunciado do exercício, que exige leitura de dados explícitos, exigindo um nível cognitivo de compreensão e exige também, habilidade de comparar quantidades e inclui a interpretação e integração dos dados ao gráfico, requerendo um grau de inferência lógica e coerente. (CURCIO, 1989).

Esta atividade permite que os alunos atinjam um nível de compreensão gráfica de leitura e inferência, por meio de uma aprendizagem gradual, pois entendemos que o ensino desse tipo de representação, quanto à sua construção e leitura, exerce um papel importante na instrução formal do aluno, tanto da inferência na comunicação. Essas características compõem a marca inicial da NRC, pois carregam a ideias de contagem, agrupamentos, sequencias enumeração, posição etc.

O Manual do Professor sugere que o aluno já teve o seu primeiro encontro via experimentação, ou seja, realizando uma apreensão operatória em atividades anteriores, sugerindo algumas atividades com intuito de explorar a NRC envolvendo objetos concretos. O momento do reencontro se dá pela visualização da tarefa apresentada resolvida, como descrito acima, e enriquecido pela demonstração Matemática formal dada em detalhe, na Figura 16.

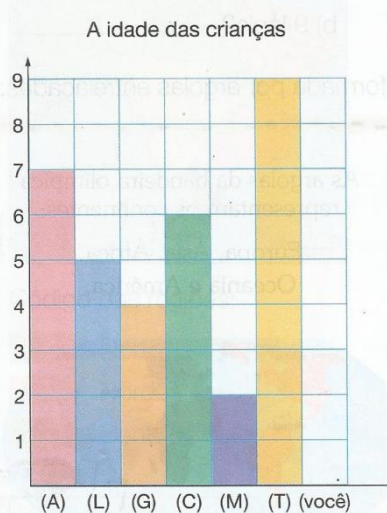
FIGURA 18: Atividade do livro do 1º Ano, Capítulo 2, p. 30.

11 Para indicar a idade de seus sobrinhos, Bárbara coloriu os abaixo.

Cada vale 1 ano.

Os sobrinhos de Bárbara são:

André (A), Luciana (L), Gisela (G), Cristina (C), Mariana (M) e Tiago (T).



Quantos anos tem:

a) André? _____

b) Luciana? _____

c) Gisela? _____

d) Cristina? _____

e) Mariana? _____

f) Tiago? _____

Pinte a sua idade nesse gráfico, colorindo os quadradinhos.

FONTE: A conquista da Matemática (BRASIL, 2018, p.30).

Já os elementos que compõem esta atividade são definidos por Chevallard (1998) como uma organização praxeológica pontual, pois esse tipo de tarefa se encontra em torno de um *trio* formado por *uma técnica, uma tecnologia e uma teoria* e isso constitui o que se chama *praxeologia pontual*. Dessa forma, a atividade da figura 15 representa um tipo de tarefa que leva o discente a pensar uma maneira de contabilizar os quadradinhos do gráfico de cores, podendo ser descrita dentro do bloco prático – teórico [T, T]. Esse bloco gerencia o que chamamos de saber comum e, dessa forma, para que essa tarefa possa ser executada, é necessária uma técnica, ou seja, o “como fazer” a tarefa, sendo possível de ser realizada mediante a técnica de enumerar os quadradinhos, a partir da ordenação e/ou da sequência numérica, caracterizada como a tecnologia.

Essa atividade representa um padrão de sequências de cores que nos permitiu identificar uma tarefa da OMD descrita nessa coleção sobre o conteúdo de “Como Ensinar Noções de Enumeração e Contagem”.

A utilização das várias representações de um determinado objeto matemático deve fazer parte dos recursos didáticos, para que a aprendizagem

seja mais significativa, pois a aprendizagem matemática deve levar em conta os conteúdos matemáticos e o funcionamento cognitivo do aluno, visando a uma maior compreensão dos objetos.

Constatamos ainda a ausência de sistematização multiplicativa, nesse nível; os sujeitos não contextualizam suas respostas, porém esta atividade apresenta indícios da Noção de Raciocínio Combinatório.

Mais adiante, no Capítulo 7, é apresentado um padrão de sequências, que nos permitiu identificar uma tarefa da OD e OM descritas nessa coleção sobre o conteúdo de “Como Ensinar Noções de Possibilidades de Sequência”. A utilização das várias representações de um determinado objeto matemático deve fazer parte dos recursos didáticos e deve compor o equipamento praxeológico do aluno, para que a aprendizagem seja mais significativa: a aprendizagem matemática deve levar em conta os conteúdos matemáticos e o funcionamento cognitivo do aluno, visando a uma maior compreensão dos objetos (Figura 19).

FIGURA 19: Atividade do livro do 1º Ano, Capítulo 7, pag. 57.



FONTE: A conquista da Matemática (BRASIL, 2018, p.57)

Da mesma forma que na Figura 18, os elementos que compõem a atividade destacada pela Figura 19 podem ser definidos por Chevallard (1998) como uma Organização Praxeológica pontual, pois a atividade representa um tipo de tarefa que leva o discente a pensar uma maneira de identificar um padrão, descrita dentro do bloco prático – teórico [T, T]. Sendo assim, para que essa tarefa possa ser executada, é necessária uma técnica, que, por sua vez, seria

sequenciar as formas. Partindo dessa sequência, é possível caracterizar a tecnologia que seria a ordenação.

O Manual do Professor sugere que o aluno já teve o seu primeiro encontro via manipulação de uma figura concreta, ou seja, realizando uma apreensão operatória em atividades anteriores e sugerindo algumas atividades com intuito de explorar a NRC envolvida em diversas sequências. O momento do reencontro se dá pela visualização da tarefa apresentada resolvida, como descrito acima, e enriquecida pela demonstração Matemática formal dada em detalhe.

Identificamos que diferentes saberes são manipulados para realização da forma como as atividades da seção *explorando* são apresentadas e resolvidas, como, por exemplo: apresentando a contagem, a ordenação, o agrupamento, a sequência, a enumeração etc.

Essa atividade representa um padrão de sequências, que nos permitiu identificar uma tarefa da OMD descrita nessa coleção sobre o conteúdo de “Como Ensinar Noções de Possibilidades de Sequência”, pois a utilização das várias representações de um determinado objeto matemático deve fazer parte dos recursos didáticos, para que a aprendizagem seja mais significativa. A aprendizagem matemática deve levar em conta os conteúdos matemáticos e o funcionamento cognitivo do aluno, visando a uma maior compreensão dos objetos.

Neste momento, o Modelo Analítico está presente na atividade no Nível I, passando para o Nível II, início da sistematização multiplicativa. Nesse nível, os sujeitos são capazes de ordenar e seriar adequadamente as variáveis.

Já o livro do 2º ano é organizado em 10 unidades, que começam com histórias em quadrinhos retratando situações do cotidiano referentes ao conteúdo a ser estudado, seguidas da seção *explorando*, destinada ao levantamento do conhecimento prévio dos alunos. Ao longo dos capítulos, encontram-se as seções *vamos resolver*, *assim também se aprende* e os quadros *curiosidades*, *desafios* e *interdisciplinaridade*. Os livros do 2º ano trazem, também, a seção *falando de...*, com projetos anuais sobre os temas: *falando de você*. No final do volume, há sugestões de leitura para o aluno, bibliografia da obra e peças para recortar, além de um glossário, presente no livro do 2º ano.

O livro do 2º ano é dividido em 10 unidades, dentre os quais, podemos destacar 3, ou seja, Unidade 1 – Números Naturais; Unidade 4 – Sistema de Numeração Decimal e Unidade 7 – Multiplicação e Divisão com números Naturais, dedicados a tópicos dos campos da Matemática escolar, ou seja, de Álgebra Elementar e é composto por sequências de atividades.

A Figura 20, na p. 141, mostra o momento do encontro com a tarefa **T**, da OM e OD e ocorre quando o autor apresenta no livro didático o subtítulo: “Multiplicação com Números Naturais: Ideias de multiplicação e Ideias da divisão”, seguido do enunciado do exercício.

O Manual do Professor sugere que o aluno já teve o seu primeiro encontro via manipulação de uma figura concreta, ou seja, realizando uma apreensão operatória na página 190, *na seção explorando*, destinada ao levantamento do conhecimento prévio dos alunos, procedimento no qual o aluno realizou por uma sentença Matemática e por experiências empíricas. O momento do reencontro se dá pela visualização da tarefa apresentada e resolvida e enriquecido pela demonstração Matemática formal dada em detalhe.


Identificamos que diferentes saberes são manipulados para realização da forma como as atividades da seção explorada são apresentadas e resolvidas, como por exemplo: apresentando a contagem, a ordenação, os agrupamentos, a sequência, a enumeração e a Noção do Princípio Multiplicativo da Contagem de elementos que compõem a NRC.

É importante destacar que no desenvolvimento de uma OM e OD não ocorre, necessariamente, em uma ordem cronológica, pois os objetos matemáticos precisam ser reconhecidos pela pessoa **X** ou pela instituição **I**.


FIGURA 20: Atividade do livro do 2º Ano, Unidade 7, pag.196.

10 Uma equipe de vôlei tem:

- duas camisas coloridas diferentes — verde e amarela;



- três calções de cores diferentes — branco, azul e amarelo.



a) Se a equipe usar a camisa verde, quantos uniformes diferentes poderá formar? _____ uniformes

b) Se a equipe usar a camisa amarela, quantos uniformes diferentes poderá formar? _____ uniformes

c) Usando a multiplicação, calcule quantos uniformes diferentes a equipe pode formar. _____

FONTE: A conquista da Matemática (BRASIL, 2018, p.196).

Da mesma forma que na Figura 19, os elementos que compõem a atividade, destacada pela Figura 20, podem ser definidos, por Chevallard (1998), como uma organização praxeológica pontual, pois a atividade representa um tipo de tarefa que leva o discente a pensar uma maneira de agrupar os elementos “camisas e calções”, sendo descrita dentro do bloco prático – teórico [T, T]. Para que esta tarefa possa ser executada, é necessária uma técnica que por sua vez seria enumerar os conjuntos de combinações; partindo da enumeração, é possível caracterizar a tecnologia que seria ordenar ou sequenciar os grupos formados.

Identificamos que diferentes saberes são manipulados para realização dessa atividade da seção, como por exemplo: apresentando a contagem, a ordenação, a agrupação, a sequência, a enumeração e a Noção do Princípio Multiplicativo da Contagem de elementos que compõem a NRC.

Neste momento, é importante destacar que o Nível II, início da sistematização multiplicativa é alcançado, com a proposta de sistematização, a partir da resolução da tarefa, com diferentes possibilidades.

É importante frisar que no desenvolvimento de uma OMD não ocorre, necessariamente, em uma ordem cronológica, pois os objetos matemáticos precisam ser reconhecidos pela pessoa **X** ou pela instituição **I**.

Passando para o *livro do 3º ano*, percebemos que é organizado em 9 unidades. As unidades começam com histórias em quadrinhos, que retratam situações do cotidiano referentes ao conteúdo a ser estudado, seguidas da seção *explorando*, destinada ao levantamento do conhecimento prévio dos alunos. Ao longo das unidades, encontram-se as seções *vamos resolver*, *assim também se aprende*, e os quadros *curiosidades*, *desafios* e *interdisciplinaridade*. O livro do 3º ano traz, também, a seção *falando de...*, com projetos anuais sobre o tema: *falando de higiene e saúde*. No final do volume, há sugestões de leitura para o aluno, bibliografia da obra e peças para recortar, além de um glossário, presente no livro do 3º ano.

O livro do 3º ano é dividido em 9 unidades, dentre os quais podemos destacar 4, ou seja, Unidade 1 – Sistema de Numeração Decimal; Unidade 4 – As Operações Fundamentais; Unidade 6 – Multiplicação com Números Naturais e Unidade 7 – Divisão com Números Naturais, dedicados a tópicos dos campos da Matemática escolar, ou seja, de Álgebra Elementar e é composto por sequências de atividades.

A Figura 21, na p.143, mostra que o momento o encontro com a tarefa **T**, da OM e OD, ocorre quando o autor apresenta no livro didático o subtítulo: “As Operações Fundamentais”, seguido do enunciado do exercício.

O Manual do Professor sugere que o aluno já teve o seu primeiro encontro via adição de números, ou seja, realizando uma apreensão operatória na página 133, na seção *atividade*, destinada a procedimento de identificação das propriedades e operações aritméticas fundamentais.

FIGURA 21: Atividade do livro do 3º Ano, Unidade 5, pag.133.

2. Calcule mentalmente e complete.

Os alunos devem perceber que o número a ser preenchido em cada ilustração de bloco é o resultado da adição dos números que aparecem nas ilustrações dos dois blocos ilustrados logo abaixo daquele a ser preenchido.

• Depois, use uma calculadora para conferir seus cálculos.

FONTE: A conquista da Matemática (BRASIL, 2018, p.133).

Da mesma forma que na Figura 20, os elementos que compõem a atividade destacada pela Figura 21 podem ser definidos, por Chevallard (1998), como uma organização praxeológica pontual, pois a atividade representa um tipo de tarefa que leva o discente a pensar uma maneira de identificar as regularidades, sendo descrita dentro do bloco prático – teórico [T, T]. Para que esta tarefa possa ser executada, é necessária uma técnica que, por sua vez, seria somar os cubinhos; partindo da soma, é possível caracterizar a tecnologia que seria a contabilização dos elementos agregados.

Identificamos que diferentes saberes são manipulados para realização da forma como as atividades são apresentadas e resolvidas, como por exemplo: “os alunos devem perceber que os números a ser preenchido em cada ilustração de bloco são o resultado da adição dos números que aparecem nas ilustrações dos dois blocos ilustrados logo abaixo daquele o ser preenchido”. Esses são saberes que se mostram associados à NRC.

Identificamos que diferentes saberes são manipulados para realização da forma como as atividades são apresentadas e resolvidas, como por exemplo: “os alunos devem perceber que os números a ser preenchido em cada ilustração de bloco são o resultado da adição dos números que aparecem nas ilustrações dos dois blocos ilustrados logo abaixo daquele o ser preenchido”.

No *livro do 4º ano*, contextualiza-se os conteúdos a serem estudados e articula-se os novos conhecimentos àqueles já adquiridos pelos alunos; a

interação em sala de aula é bastante incentivada. No livro do 4º ano, é enfatizado o estudo das operações com números naturais, apresentadas sob seus diversos aspectos e com diferentes estratégias/possibilidades de cálculo.

O livro do 4º ano está estruturado em unidades e essas em capítulos, alguns dos quais se subdividem em tópicos. Na abertura das unidades, há uma história em quadrinhos relacionada ao conteúdo a ser estudado, intitulada *explorando*, destinada ao levantamento do conhecimento prévio do aluno. Os capítulos contêm explicações e exercícios resolvidos além das seções *atividades*; assim também se aprende; e *vamos resolver*, também incluem alguns dos boxes, com conteúdo diversificado: desafios, curiosidades e interdisciplinaridade. Ao final de cada unidade, encontram-se as seções falando de jogos e brincadeiras, que trazem projetos a serem abordados durante o respectivo ano letivo; no final do volume, está disponível um glossário, sugestões de leitura para o aluno e a bibliografia da obra.

O livro do 4º ano é dividido em 7 unidades, dentre as quais, podemos destacar 3, ou seja, Unidade 2 – Os Números Naturais: Sistema de Numeração Decimal; Unidade 3 – Operações com os Números Naturais: Adição e Subtração; e Unidade 4 – Operações com os Números Naturais: Multiplicação e Divisão, dedicados a tópicos dos campos da Matemática escolar, ou seja, de Álgebra Elementar e é composto por sequências de atividades.

A Figura 22, na p. 145, mostra que o momento do encontro com a tarefa **T**, da OM e OD, ocorre quando o autor apresenta no livro didático o subtítulo: “As Operações com Números Naturais: Multiplicação e Divisão”, seguido do enunciado do exercício.

O Manual do Professor sugere que o aluno já teve o seu primeiro encontro via manipulação de uma figura concreta, ou seja, realizando uma apreensão operatória na página 98, na seção *explorando*, destinada a procedimento de identificação das propriedades e operações aritméticas fundamentais de fazer combinações.

Identificamos que diferentes saberes são manipulados para realização da forma como as atividades são apresentadas e resolvidas, como, por exemplo:

“possibilidades diferentes; multiplicação de quantidades; sanduíches diferentes”. Esses são saberes que se mostram associados ao objeto de estudo NRC.







É importante notar que, ao resolver os problemas relacionados a essa situação de “combinação de possibilidades”, percebemos que essas atividades possuem uma gama considerável de situações diferentes entre si, que podem ter semelhança em vários campos do livro didático e em outras atividades.

FIGURA 22: Atividade do livro do 4º Ano, Unidade 6, pag.180.

3ª situação: Numa sorveteria, podemos escolher entre:

- 2 tipos de sorvete: palito e casquinha.
- 3 sabores:
 - morango
 - chocolate
 - abacaxi

Quantas escolhas diferentes de sorvete podemos fazer?
Acompanhe:

Sorvete de palito	 morango	 chocolate	 abacaxi
Sorvete de casquinha	 morango	 chocolate	 abacaxi

$2 \times 3 = 6$

Resposta: Podemos fazer 6 escolhas diferentes de sorvete.

Quando combinamos possibilidades, usamos a operação de multiplicação.

FONTE: A conquista da Matemática (BRASIL, 2018, p.180).

Da mesma forma que na Figura 19, os elementos que compõem a atividade destacada pela Figura 22 podem ser definidos, por Chevallard (1998), como uma organização praxeológica pontual, pois a atividade representa um tipo de tarefa que leva o discente a pensar uma maneira de agrupar os sorvetes de casquinha e palito, junto com os sabores, sendo descrita dentro do bloco prático – teórico [T, T]. Para que esta tarefa possa ser executada, é necessária uma técnica que por sua vez seria enumerar os conjuntos de possibilidade de combinações; partindo da enumeração; é possível caracterizar a tecnologia que seria a contabilização dos elementos que constituem as combinações possíveis,

descrevendo por sua vez o que conhecemos como Princípio Fundamental da Contagem.

Identificamos que diferentes saberes são manipulados para realização da forma como as atividades são apresentadas e resolvidas, como por exemplo: “possibilidades diferentes; multiplicação de quantidades; sanduíches diferentes”. Esses são saberes que se mostram associados ao objeto de estudo NRC.

É importante notar que, ao resolver problemas relacionados a este objeto, por possuir uma gama considerável de situações diferentes entre si, eles podem ter semelhança com varios campos apresentados em outros volumes.

No *livro do 4º ano*, contextualizam-se os conteúdos a serem estudados e articulam-se os novos conhecimentos com aqueles já adquiridos pelos alunos e a interação em sala de aula é bastante incentivada. No *livro do 5º ano*, é enfatizado o estudo das operações com números naturais, sistemas de numeração e tabelas apresentadas sob seus diversos aspectos e com diferentes estratégias /possibilidades de cálculo.

O *livro do 5º ano* é organizado em unidades, compostas por capítulos que contêm as seguintes seções: Explorando, com atividades de preparação para o conteúdo a ser estudado; Chegou a sua vez! que oferecem atividades de aplicação; Exercícios; Desafios; Tratando a informação; Brasil real, em que são feitas conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento; e Retomando o que aprendeu, com exercícios de síntese dos conteúdos da unidade, que podem servir para a avaliação. No final do volume, encontram-se: Projetos Pedagógicos interdisciplinares; Indicações de leitura; Glossário; Respostas e Bibliografia.

A ênfase no BTI está nos conceitos relacionados à combinatória, probabilidade e estatística. São resolvidas e sugeridas atividades de organização e de leitura de dados em tabelas ou gráficos de barras, setores e segmentos, explorados em situações interessantes. Há também propostas de coleta de dados, cálculo de medidas de tendência central, desvio padrão, cálculo de possibilidades e a noção de probabilidade na obra.

A Figura 23, na p. 148, mostra que o momento do encontro com a tarefa T, da OM e OD, ocorre quando o autor apresenta no livro didático o subtítulo:

“Naturais: operações, propriedades, algoritmos – gráfico de: barras, linhas; tabelas de dupla entrada”, seguido do enunciado do exercício.

O Manual do Professor sugere que o aluno já teve o seu primeiro encontro via manipulação de uma figura concreta, ou seja, realizando uma apreensão operatória na página 95, na seção *explorando*, destinada a procedimento de identificação das propriedades e operações aritméticas fundamentais de fazer combinações.







Identificamos que diferentes saberes são manipulados para realização da forma como as atividades são apresentadas e resolvidas, como, por exemplo: “possibilidades diferentes; multiplicação de quantidades; sanduíches diferentes”. Esses são saberes que se mostram associados ao objeto de estudo NRC.

É importante notar que, ao resolver problemas relacionados a esse objeto, por possuir uma gama considerável de situações diferentes entre si, eles podem ter semelhança com vários campos que foram apresentados em outros volumes.















FIGURA 23: Atividade do livro do 5º Ano, Unidade 4, pag.100.

Para fazer sanduíches, uma casa de lanches tem 2 tipos de pão e 4 tipos de recheio. Quantos sanduíches diferentes essa casa de lanches vende, combinando 1 tipo de pão e 1 tipo de recheio? **8 sanduíches diferentes.**

Escolha seu lanche

Pão		Pão de forma.		Pão francês.	
Recheio		Queijo.		Salame.	
				Presunto.	
					Mortadela.

Combinações de pães e recheios

Com o pão de forma, podemos fazer 4 combinações diferentes de lanche. O mesmo ocorre com o pão francês. Logo, temos 8 combinações (4 + 4).

Para responder à pergunta, podemos também multiplicar a quantidade de tipos de pão pela quantidade de tipos de recheio, ou seja, efetuar a **multiplicação 2×4** . Também podemos multiplicar a quantidade de tipos de recheio pela quantidade de tipos de pão, ou seja, 4×2 .

- Calcule, no caderno, quantas possibilidades diferentes teríamos para combinar um tipo de pão e um tipo de recheio, se tivéssemos 3 tipos de pão e 2 tipos de recheio disponíveis. **6 possibilidades diferentes (3×2 ou 2×3).**

FONTE: A conquista da Matemática (BRASIL, 2018, p.100).

Da mesma forma que na Figura 22, os elementos que compõem a atividade destacada pela Figura 23 podem ser definidos por Chevallard (1998) como uma organização praxeológica pontual, pois a atividade representa um tipo de tarefa que leva o discente a pensar uma maneira de agrupar os pães e os recheios, sendo descrita dentro do bloco prático – teórico [T, T]. Sendo assim, para que essa tarefa possa ser executada, é necessária uma técnica que por sua vez seria enumerar os conjuntos de possibilidade de combinações; partindo da enumeração, é possível caracterizar a tecnologia que seria a contabilização dos elementos que constituem as combinações possíveis, descrevendo por sua vez o que conhecemos como Princípio Fundamental da Contagem.

Apresentamos o estudo relativo de cada um dos livros dos anos iniciais do EF dos objetos de estudo que envolvem a NRC, anunciados e descritos na coleção “A Conquista da Matemática”.

A aceitação da técnica que será associada à resolução das tarefas suscitada acima é uma reflexão sobre o que diz Chevallard (1992, p. 127, Apud ALMOULOUD, 2007, p. 115):

Um objeto existe a partir do momento em que uma pessoa X ou uma instituição I o reconhece como *existente* (para ela). Mais precisamente, podemos dizer que o objeto o existe para X (respectivamente para I) se existir um objeto o , que denotaremos pela **Relação Pessoal $R(X,o)$** , que é chamada de **Relação Pessoal de X com o** e respectivamente **$R_I(o)$** , *relação de I com o* .

Pela citação acima, o objeto matemático precisa ser reconhecido pela pessoa X ou pela instituição I . No caso desta pesquisa, X está associado ao professor de Matemática e/ou àquele que ensina Matemática. As instituições I são aqui exemplificadas pelas obras O , ou seja, pelos livros didáticos, PNLD, PCN, artigos, TCC, Monografias, Dissertações, Teses etc.

Os tipos de tarefas T e a técnica τ que estruturam o bloco prático-técnico $[T, \tau]$ tem sua justificativa nos dois primeiros postulados da TAD:

1º Toda prática institucional pode ser analisada, sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas bem delineadas;

2º O cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica” (ALMOULOUD, 2007, p. 114).

Esses dois postulados desempenham um papel crucial na relação da pessoa X com o objeto matemático O . Neste caso, a pessoa X reconhece o objeto matemático O , propõe tarefas do tipo T , mas a elaboração destas tarefas está condicionada as técnicas τ reconhecidas pela instituição I . Assim, para um tipo de tarefas T pode existir uma única técnica ou número limitado de técnicas τ reconhecidas institucionalmente. (ALMOULOUD, 2007).

O que se pretende com os tipos tarefas T reconhecidas nas instituições I_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) é que elas se tornem rotineiras, ou seja, os problemas que envolvem esses tipos de tarefas precisam ser superados e eles só são superados quando se obtém pelo menos uma técnica τ que funcione regularmente nas instituições I_i .

A legitimação das técnicas τ que solucionam os tipos de tarefas T passa pelas condições e restrições institucionais I . Deste modo, se o professor de Matemática conceber uma técnica τ que facilite a resolução de tipos de tarefas

T de “*noções de possibilidades de sequência*”, no primeiro ano do Ensino Fundamental, devo observar as condições e restrições da instituição escolar de Educação Básica. Isso expressa às relações institucionais que conduzem a prática docente em seu desenvolvimento profissional.

Outra observação importante é que toda tarefa deve ser resolvida por meio de uma ou de várias técnicas, o que a torna executável; cada técnica é ligada a uma tecnologia que a justifica, e, por fim, esta tecnologia é justificada por uma teoria. Porém, nem sempre um tipo de tarefa é resolvido com a sua utilização ou das mesmas técnicas. (BOSCH; CHEVALLARD, 2001).

Em nossa pesquisa, estudamos as completudes das organizações matemáticas e organizações didáticas em torno da NRC ou, ao contrário, a rigidez em torno de um tipo de tarefa **t**. Bosch e Chevallard (2001) propõem as seguintes condições para que uma organização matemática local seja relativamente completa: integração dos tipos de tarefas **t**; diferentes técnicas τ , ou variações de uma mesma técnica para realizar alguns tipos de tarefas; independência dos ostensivos que integram as técnicas; existência de tarefas e de técnicas “inversas” como, por exemplo, para a tarefa direta: representar as possíveis soluções da NRC a partir de sua de uma tabela de dupla entrada, a tarefa “inversa” é achar a expressão algébrica a partir da tabela; um discurso tecnológico para a interpretação do funcionamento das técnicas e de seu resultado, que pode ser verificada nas Figuras 19, 20 e 21, nas páginas 96, 98 e 101 dessa pesquisa.

Mais adiante, daremos ênfase às considerações que podem ser feitas a respeito da coleção “A Conquista da Matemática: Alfabetização Matemática”, a partir do Modelo Analítico para NRC.

3.5 – Análises da Coleção “Porta Aberta: Alfabetização Matemática” – Livro Didático 2 – LD2

A coleção de livros didáticos “Porta Aberta: Alfabetização Matemática”, de uma forma geral é organizada em capítulos que sempre começam com uma apresentação do que será trabalhado, seguido de tópicos com atividades e das seções *Desafio*; *Bate-papo*, que incentiva a discussão entre alunos e professor; *Você sabia que ...*; *Vamos Ler?*; *Você vai gostar!* com sugestões de leituras; e *Brincando também se aprende*, que oferece atividades lúdicas. Ao final de cada capítulo, encontram-se as seções: *Vamos ver de novo?*, composta por atividades de revisão; e *O que estudamos*, em que há uma sistematização dos principais conteúdos abordados e orientações para a família. Encerram os volumes, as seções: Mensagem de fim de ano; *Você terminou o livro!*, seguidas de um *Glossário e a Bibliografia*. Há, ainda, alguns capítulos especiais denominados *Matemática, brinquedos e brincadeiras*, no 1º volume, *Matemática e animais*, no 2º, e *Matemática e esportes*, no 3º volume. Cada livro tem um encarte com materiais para serem recortados.

Ao longo dos capítulos, encontram-se as seções “*Vamos resolver*”, “*Assim também se aprende*”, e “*Os quadros curiosidades, desafios e interdisciplinaridade*”. Esta coleção traz, também, a seção “*Falando de...*”, com projetos anuais sobre os temas: “*Falando de você*”. No final do volume, há sugestões de leitura para o aluno, bibliografia da obra e peças para recortar, além de um glossário.

No livro do 1º ano, os conteúdos são apresentados por meio de atividades em que a participação dos alunos é incentivada. Nos capítulos seguintes, são feitas breves explicações dos conteúdos, acompanhadas de exemplos e seguidas por atividades que devem ser resolvidas pelos alunos por meio da aplicação do que foi ensinado. Na obra, procuram-se retomar os conhecimentos prévios dos alunos e os conceitos/procedimentos são abordados e retrabalhados sucessivamente.

O livro do 1º ano é dividido em 08 capítulos, dentre os quais podemos destacar 7 dos 8 capítulos, ou seja, Capítulo 1 – Localização e deslocamento:

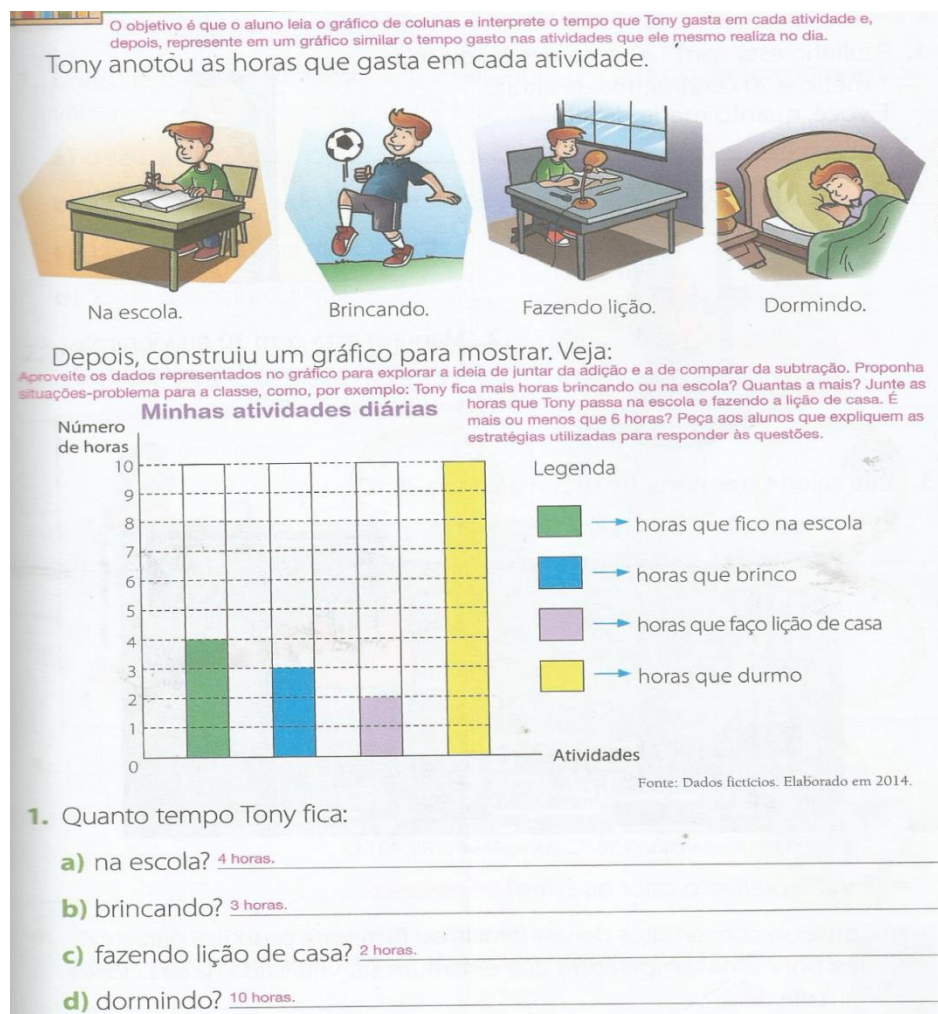
nomenclatura de posição, sentido – uso de símbolos – sequências lógicas e padrões - direita e esquerda; Capítulo 2 – Números até 10: ideia, usos, contagem, registros, comparação - triângulo, quadrado - tabela, gráfico de colunas - dia, semana - cubo; Capítulo 3 - Números até 10: contagem, registro, ordenação, comparação, antecessor, sucessor, ordinais; Capítulo 5 – Valor monetário: cédulas, moedas, composição, registro e comparação de quantias; Capítulo 6 – Adição com números até 10: ideias, registros, procedimentos; subtração com números até 10: ideias, registros, procedimentos – gráfico de barras - adição e subtração como operações inversas; Capítulo 7 – Números até 99: contagem, registro, comparação, ordenação, dezena, dúzia, meia dúzia – possibilidades – tempo: dia, semana, mês, ano - adição e subtração; números: dezena, unidades, 100 - tabela; Capítulo 8 – Grandezas e medidas: registros, comparação, instrumentos de medida; comprimento: unidades não convencionais, centímetro, metro; massa: quilograma, grama; capacidade: unidades não convencionais, litro; tempo: leitura e registro de horas – tabela, gráfico de colunas, dedicados a tópicos dos campos da Matemática escolar, ou seja, de Álgebra Elementar e é composto por sequências de atividades. Para diálogo com o leitor, recorre-se a um conjunto de personagens infantis. Os capítulos incluem, também, as seções “*Agora é com você*” e “*Assim também se aprende*”.

Sendo assim, neste momento da pesquisa, buscaremos estudar a Organização Praxeológica e identificar essa organização do saber NRC, nos Livros Didáticos de 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental. Ou seja, buscaremos em nosso estudo identificar como “vive”, qual o “lugar” e quais os saberes sobre de referente a NRC estão presentes nos livros didáticos da 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental. Em uma Organização Praxeológica identificamos: tarefas, técnicas, tecnologias e teorias.

O estudo do volume 1 permitiu durante a coleta de dados identificar 15 tarefas da OM e OD presentes no manual do professor sobre “Como ensinar o tema NRC, através das ideias de contagem, sequência, ordenação, grupamentos, enumeração, seriação e classificação”, que trataremos como tarefa pontual.

Como, por exemplo, a Figura 24, na p. 154, do livro do 1º ano, mostra o momento do **primeiro encontro com a tarefa t**, da OM e OD, ocorre quando o autor apresenta no livro didático o subtítulo: “**Os Números em Muitos Usos**”, seguido do enunciado contando, medindo, ordenando e codificando, juntamente com exercício, que exige leitura de dados explícitos, exigindo um nível cognitivo de compreensão e exige também, habilidade de comparar quantidades e inclui a interpretação e integração dos dados ao gráfico, requer um grau de inferência lógica e coerente (CURCIO, 1989). Nesta mesma unidade, são trabalhados os números como códigos, os números que indicam ordem, os números nas medidas de tempo e os números em outras medidas, permitindo assim que os alunos atinjam um nível de compreensão gráfica de leitura e inferência, por meio de uma aprendizagem gradual, pois concluímos que o ensino desse tipo de representação, quanto à sua construção e leitura, exerce um papel importante na instrução formal do aluno.

O Manual do Professor sugere que sejam trabalhadas perguntas que estimulem a resgatar conhecimentos adquiridos e despertem a curiosidade sobre os temas que serão trabalhados. Nessa unidade, o aluno deve identificar o emprego dos números em diversas situações do cotidiano, como código, como medida e como contagem, buscando consolidar os conhecimentos prévios dos alunos, sugerindo algumas atividades com intuito de explorar a NRC envolvendo objetos concretos. O momento do reencontro se dá pela visualização da tarefa apresentada resolvida, como descrita acima, e enriquecida pela demonstração Matemática formal dada em detalhe.

FIGURA 24: Atividade do livro do 1º Ano, Unidade 1, pag.21.

FONTE: Porta Aberta: Alfabetização Matemática (BRASIL, 2022, pag.21).

Os elementos que compõem essa atividade são definidos por Chevallard (1998) como uma organização praxeológica pontual. Sendo assim, a atividade da Figura 24 representa um tipo de tarefa que leva o discente a pensar uma maneira de contabilizar os quadradinhos do gráfico de cores, podendo ser descrita dentro do bloco prático – teórico [T, T]. Esse bloco gerencia o que chamamos de saber comum. Dessa forma, para que essa tarefa possa ser executada é necessária uma técnica, ou seja, o “como fazer” a tarefa, sendo possível de ser realizada mediante a técnica de enumerar os quadradinhos, a partir da ordenação e/ou da sequência numérica, podendo ser caracterizada como a tecnologia.

Essa atividade representa um padrão de sequências de cores, que nos permitiu identificar uma tarefa da OMD descrita nessa coleção sobre o conteúdo de “Como Ensinar Noções de Enumeração e Contagem”.

A utilização das várias representações de um determinado objeto matemático deve fazer parte dos recursos didáticos, para que a aprendizagem seja mais significativa, pois a aprendizagem Matemática deve levar em conta os conteúdos matemáticos e o funcionamento cognitivo do aluno, visando a uma maior compreensão dos objetos.

O livro do 2º ano é dividido em 08 unidades, dentre os quais podemos destacar a unidade 2: Espaço e Forma. Nesta unidade, buscaremos estudar a Organização Praxeológica e identificar essa organização do saber NRC, nos Livros Didáticos do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental.

O estudo do volume 2 nos permitiu durante a coleta de dados identificar 10 tarefas da OM e OD presentes no manual do professor sobre “Como ensinar o tema NRC, através das ideias de sequência, ordenação e enumeração – Brincando com o Percurso” que trataremos como tarefa pontual.

Como por exemplo, a Figura 25 na p. 156, do livro do 2º ano, mostra o momento do **reencontro com a tarefa t**, da OM e OD, que ocorreu quando o autor apresenta no livro didático o subtítulo: “**Brincando com o percurso**”, seguido do enunciado noções de contagem, noções de direção e sentido identificados pelas sequencias de figuras geométricas. Sendo assim, essa atividade explora a ordenação a codificação de figuras geométricas, juntamente com exercício, que exige leitura de dados explícitos, exigindo um nível cognitivo de compreensão e exige também, habilidade de comparar quantidades e inclui a interpretação e integração dos dados a sequência, requer um grau de inferência lógica e coerente (CURCIO, 1989).

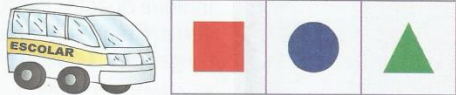
O Manual do Professor sugere que sejam trabalhadas perguntas que estimulem a resgatar conhecimentos adquiridos e despertem a curiosidade sobre os temas que serão trabalhados, nesta unidade como: a observação, a construção de sequências, a construção da ordenação, explorarem o contorno

das figuras geométricas de forma a auxiliar o aluno a perceber semelhanças e diferenças entre as elas e levem o aluno a compreender o processo de coleta e organização de informações, posteriormente, em um gráfico de barras, consolidando assim esse conhecimento.

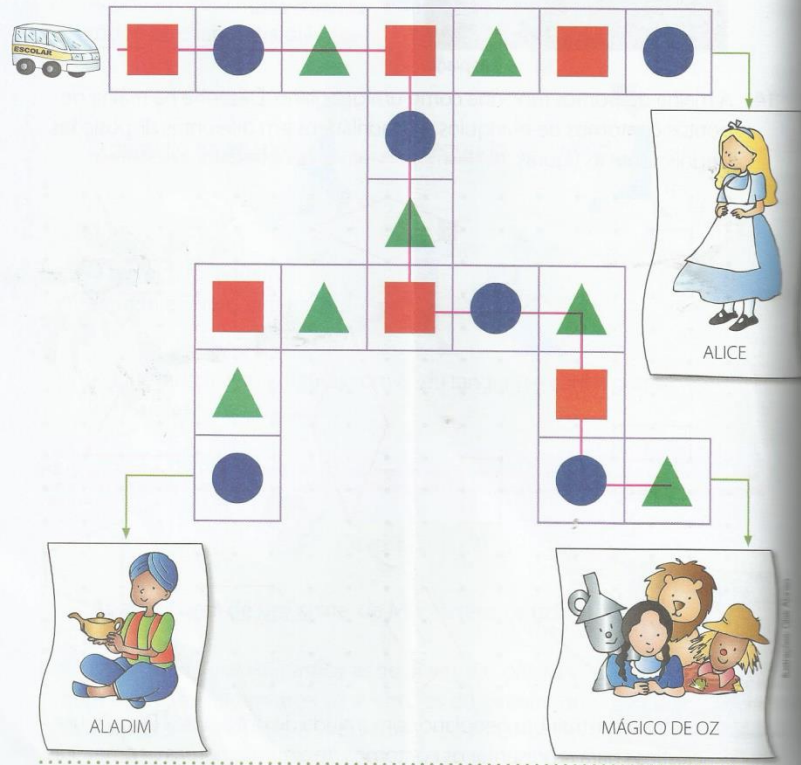
FIGURA 25: Atividade do livro do 1º Ano, Unidade 2, pag. 34.

O objetivo da atividade é levar o aluno a construir noções de direção e sentido, traçando um percurso de acordo com o padrão indicado pela sequência de figuras geométricas planas.

Este ônibus vai levar alguns alunos ao teatro para assistir a uma peça infantil. O caminho que o ônibus fará deve obedecer à seguinte sequência.



- Trace o caminho e descubra qual foi a peça escolhida. *Mágico de Oz.*



FONTE: Porta Aberta: Alfabetização Matemática (BRASIL, 2022, pag.34).

Os elementos que compõem essa atividade são definidos, por Chevallard(1998), como uma organização praxeológica pontual. Sendo assim, essa atividade da Figura 25 representa um tipo de tarefa que leva o discente a pensar uma maneira de sequenciar os elementos geométricos, levando o aluno a construir a noção de direção e sentido, traçando um percurso de acordo com o padrão indicado na sequência. Essa tarefa pode ser executada mediante a técnica de enumerar os quadradinhos, a partir da ordenação e/ou da sequência numérica, podendo ser caracterizada como a tecnologia.

Identificamos que diferentes saberes são manipulados para realização da forma como as atividades da seção Explorando são apresentadas e resolvidas, como, por exemplo: apresentando a contagem, a ordenação, o agrupamento, a sequência, a enumeração etc.

Essa atividade representa um padrão de sequências, que nos permitiu identificar uma tarefa da OMD descritos nessa coleção sobre o conteúdo de “Como Ensinar Noções de Possibilidades de Sequência”.

Pois a utilização das várias representações de um determinado objeto matemático deve fazer parte dos recursos didáticos, para que a aprendizagem seja mais significativa, pois a aprendizagem matemática deve levar em conta os conteúdos matemáticos e o funcionamento cognitivo do aluno, visando a uma maior compreensão dos objetos.

Passando para o *livro do 3º ano*, percebemos que ele é organizado em unidades, subdivididas em 9 partes. As unidades começam com histórias em quadrinhos, que retratam situações do cotidiano referentes ao conteúdo a ser estudado, seguidas da seção *Explorando*, destinada ao levantamento do conhecimento prévio dos alunos.

O livro do 3º ano é dividido em 9 unidades, dentre os quais, podemos destacar 4, ou seja, Unidade 1 – Os Números em seus Muitos Usos; Unidade 2 – Espaço e Forma – Figuras planas; Unidade 3 – Sequência Numérica e situações de Adição e Subtração, Unidade 4 – Espaço e Forma – figuras espaciais, Unidade 5 - Sequência Numérica: As Centenas, Unidade 6 – As ideias de Multiplicação e da Divisão, Unidade 7 – Grandezas e Medidas, Unidade 8 – Trocando Ideias e Unidade 9 – Um pouco Mais, dedicados a tópicos dos campos da Matemática escolar, ou seja, de Álgebra Elementar e é composto por sequências de atividades.

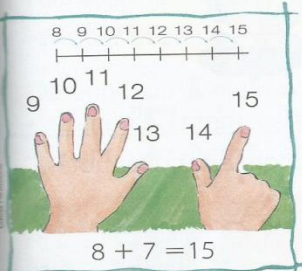
A Figura 26, na p. 158, no livro do 3º ano, mostra que o momento o encontro com a tarefa T, da OM e OD, ocorre quando o autor apresenta no livro didático o subtítulo: “Revedo as ideias de adição: juntar e acrescentar”, seguido do enunciado do exercício: “Trabalhando com o Cálculo Mental”.

O Manual do Professor sugere que o aluno já teve o seu primeiro encontro via adição e subtração de números naturais, ou seja, realizando uma apreensão operatória na página 64, na seção *atividade*, destinada a procedimento de identificação das propriedades e operações aritméticas fundamentais de composição e decomposição de números naturais.

FIGURA 26: Atividade do livro do 3º Ano, Unidade 3, pag. 81.

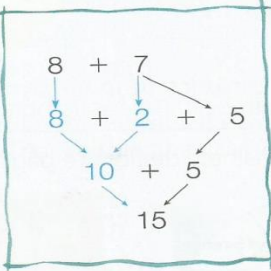
Os diferentes tipos de cálculo relacionam-se e complementam-se. Exploram-se aqui algumas estratégias utilizadas no cálculo mental.
Veja os diferentes modos de obter a soma de $8 + 7$.

Usando a contagem a partir do 8.

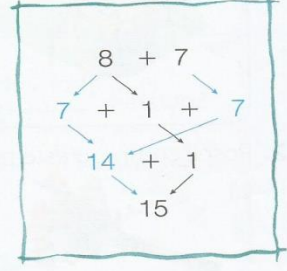


$8 + 7 = 15$

Completando 1 dezena.



Usando parcelas iguais.



a) Calcule a soma de $8 + 5$ desses três modos. _____ 13

b) Use uma dessas estratégias da atividade anterior ou invente outra para calcular mentalmente:

- $16 + 13 =$ _____ 29
- $21 + 37 =$ _____ 58

Incentive os alunos a construir outras estratégias de modo a ampliar os procedimentos sugeridos. Socialize as diversas maneiras apresentadas. Proponha outras situações similares para que os alunos possam resolver mentalmente.

FONTE: Porta Aberta: Alfabetização Matemática (BRASIL, 2022, pag.81).

Os elementos que compõem a atividade destacada pela Figura 26 podem ser definidos, por Chevallard (1998), como uma organização praxeológica pontual, pois a atividade representa um tipo de tarefa que leva o discente a pensar uma maneira de identificar as regularidades. Sendo assim, para que esta tarefa possa ser executada é necessária uma técnica, que por sua vez poderia ser usar a contagem a partir dos numerais ou poderia ser completar a dezena e/ou usar a soma de parcelas iguais; partindo da soma, é possível caracterizar a tecnologia que seria a contabilização dos elementos agregados.

Percebemos que diferentes saberes são manipulados para realização da forma como as atividades de cálculo mental são apresentadas e resolvidas, como por exemplo: “os alunos devem usar a decomposição das parcelas e logo em seguida agrupados em dezenas e unidades, para se chegar ao resultado”. Esses são saberes que se mostram associados à NRC, pois o aluno é estimulado a fazer arredondamentos para se estimar uma soma. Sendo assim, esta atividade proposta pelo livro contribui para que o aluno, por meio da

observação, da construção e socialização de diferentes resultados de estratégias de cálculo mental, aumente o seu próprio equipamento praxeológico, o que contribui para a sua autonomia na resolução de outras situações problemas que tratem direta ou indiretamente dessa situação descrita.

Identificamos que diferentes saberes são manipulados para realização da forma como as atividades são apresentadas e resolvidas, como por exemplo: “os alunos devem perceber que os números a ser preenchido em cada ilustração de bloco são o resultado da adição dos números que aparecem nas ilustrações dos dois blocos ilustrados logo abaixo daquele o ser preenchido”. Esses são saberes que se mostram associados à NRC.

Identificamos que diferentes saberes são manipulados para realização da forma como as atividades são apresentadas e resolvidas, como, por exemplo: “os alunos devem perceber que os números a ser preenchido em cada ilustração de bloco são o resultado da adição dos números que aparecem nas ilustrações dos dois blocos ilustrados logo abaixo daquele o ser preenchido”.

Estes são saberes que se mostram associados à NRC, retratando o Nível II, início de sistematização multiplicativa. Nesse nível, os sujeitos das pesquisas contextualizam suas respostas, com indícios de raciocínio combinatório e multiplicativo, também sendo verificado o princípio aditivo da Matemática.

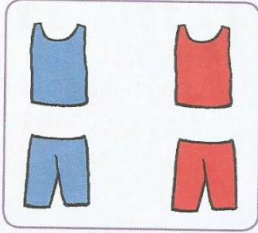
A Figura 27, na p.160, no livro do 3º ano, mostra o momento do encontro com a tarefa **T**, da OM e OD, que trata de “ideias de multiplicação”. Ocorre quando o autor apresenta no livro didático o subtítulo: “As ideias da Multiplicação e da Divisão”, seguido do enunciado do exercício: “A Ideias de Combinatória”.

FIGURA 27: Atividade do livro do 3º Ano, Unidade 3, pag.173.

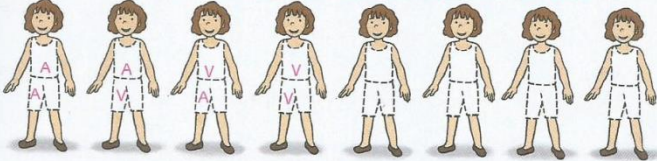
Use-se aqui a ideia combinatória da multiplicação. Para que os alunos descubram o total de possibilidades, sugerimos que use as blusas e as bermudas, mostrando as combinações possíveis.

A ideia combinatória

No circo, o espetáculo já vai começar. Adriana, a trapezista, está em dúvida sobre que roupa vestir para o número de hoje. Veja as blusas e bermudas que ela pode escolher.



a) Pinte apenas os modelos necessários para mostrar as diferentes formas que Adriana tem de combinar as blusas e bermudas.
O aluno deverá pintar a roupa de 4 modelos com as combinações de cores indicadas abaixo.



b) Quantas são as cores:

- das blusas? 2
- das bermudas? 2

c) Qual é o total de combinações possíveis?

$2 \times 2 = 4$; 4 combinações.

Ilustrações: Izomar e João Anselmo

FONTE: Porta Aberta: Alfabetização Matemática (BRASIL, 2022, pag.173).

Percebemos que diferentes saberes são manipulados para realização da forma como as atividades de “ideias de combinatórias” são apresentadas e resolvidas, como, por exemplo: “os alunos devem usar ideias de adicionar parcelas iguais, para se chegar as ideias de formação de agrupamentos, mais adiante perceber a possibilidade de explorar noções de dobro, triplo, quádruplo, metade, até se chegar as Ideias de proporcionalidade, para que afinal os alunos cheguem ao algoritmo da divisão”. Esses são saberes que se mostram associados à NRC, pois o aluno é estimulado formar grupos ou estimar parcelas para ser somado, contabilizar os grupos ou as parcelas somas, determinando a quantidades de elementos deste agrupamento. Essa atividade proposta pelo livro contribui para que o aluno, por meio da observação, da construção e socialização de diferentes resultados de estratégias de cálculo, desenvolva habilidades ligadas a NRC, para a construção de ideias de combinatórias e ideias de proporcionalidade, para se chegar ao algoritmo da multiplicação e, posteriormente, ao da divisão, aumente assim o seu próprio equipamento praxeológico, o que contribui para a sua autonomia na resolução de outras situações problemas que tratem direta ou indiretamente dessa situação descrita.

Identificamos que diferentes saberes são manipulados para realização da forma como as atividades são apresentadas e resolvidas, como, por exemplo: “possibilidades diferentes; multiplicação de quantidades; diferentes combinações de roupas”. Estes são saberes que se mostram associados ao objeto de estudo NRC.

É importante notar que, ao resolver problemas relacionados a este objeto, por possuir uma gama considerável de situações diferentes entre si, eles podem ter semelhança em vários campos que foram apresentados em outros volumes.

O livro do 4º ano é dividido em 9 unidades, dentre os quais podemos destacar 3, ou seja, Unidade 3 – Números que usamos no dia a dia; Unidade 4 – Adição e Subtração com Números Naturais; Unidade 6 – Multiplicação e Divisão com Números Naturais; e Unidade 7: Números Fracionários, dedicados a tópicos dos campos da Matemática escolar composto por sequências de atividades.

A Figura 28, na p. 162, do livro do 4º ano, mostra que o momento do encontro com a tarefa **T**, da OM e OD, ocorre quando o autor apresenta no livro didático o subtítulo: “Contar, codificar, medir e ordenar”, seguido do enunciado do exercício.

O Manual do Professor sugere que o aluno retome os diversos empregos do número no dia a dia, explorando procedimento de identificação dos diversos empregos dos números.

FIGURA 28: Atividade do livro do 4º Ano, Unidade 3, pag. 66.

Nesta Unidade, retomam-se com o aluno os diversos empregos do número no dia a dia: como código, em contagens, em medida e em ordenação.

Contar, codificar, medir e ordenar

1. No dia a dia, os números são usados com mais de uma finalidade: contar quantidades, servir como código, representar o resultado de uma medida, indicar a ordem dos elementos em uma fila, a ordem em que fatos ocorrem etc.

Pensando no jogo de futebol, qual a finalidade do número em cada caso abaixo?

a) A quantidade de jogadores em campo. <small>Contar.</small>	c) O tempo que dura a partida. <small>Medir.</small>
b) Números nas camisas dos jogadores. <small>Codificar.</small>	d) O primeiro gol da partida. <small>Ordenar.</small>

FONTE: Porta Aberta: Alfabetização Matemática (BRASIL, 2022, pag.66).

Identificamos que diferentes saberes são manipulados para realização da forma como as atividades são apresentadas e resolvidas, como, por exemplo: “ideias de contagem, ideias de codificação, ideias de grandezas e medida; e ideias de ordenação”. Esses são saberes que se mostram associados ao objeto de estudo NRC.

Identificamos que diferentes saberes são manipulados para realização da forma como as atividades da seção *Explorando* são apresentadas e resolvidas, como, por exemplo: apresentando a contagem, a ordenação, o agrupamento, a sequência, a enumeração etc.

A utilização das várias representações de um determinado objeto matemático deve fazer parte dos recursos didáticos, para que a aprendizagem seja mais significativa, pois a aprendizagem matemática deve levar em conta os conteúdos matemáticos e o funcionamento cognitivo do aluno, visando a uma maior compreensão dos objetos.

É importante notar que, ao resolver problemas relacionados a este objeto, por possuir uma gama considerável de situações diferentes entre si, eles podem ter semelhança com vários campos que foram apresentados em outros volumes.

O livro do 5º ano é organizado em unidades, dentre os quais podemos destacar quatro: Unidade 2 – Sistema de numeração decimal; Unidade 3 – Operações: Cálculos do dia a dia e Unidade 6 – Múltiplos e Divisores de um

número natural; dedicados a tópicos dos campos da Matemática escolar composto por sequências de atividades.

A ênfase no BTI está nos conceitos relacionados à combinatória, probabilidade e estatística. São resolvidas e sugeridas atividades de organização e de leitura de dados em tabelas ou gráficos de barras, setores e segmentos, explorados em situações interessantes. Há também propostas de coleta de dados, cálculo de medidas de tendência central, desvio padrão, cálculo de possibilidades e a noção de probabilidade na obra.

A Figura 29, na p. 164, mostra que o momento do encontro com a tarefa T, da OM e OD, ocorre quando o autor apresenta no livro didático o subtítulo: “Operações: Cálculos do dia a dia”, seguido do enunciado do exercício.





O Manual do Professor sugere que o aluno já teve o seu primeiro encontro via manipulação de uma figura concreta, ou seja, realizando uma apreensão operatória na página 67, revendo ideias, destinada a procedimento de identificação das propriedades e operações aritméticas fundamentais de fazer combinações.

Identificamos que diferentes saberes são manipulados para realização da forma como as atividades são apresentadas e resolvidas, como, por exemplo: “contagem, enumeração, ordenação, classificação, conjunto dos semelhantes”. Estes são saberes que se mostram associados ao objeto de estudo NRC.

É importante notar que, ao resolver problemas relacionados a esse objeto, por possuir uma gama considerável de situações diferentes entre si, eles podem ter semelhança com vários campos que foram apresentados em outros volumes.

FIGURA 29: Atividade do livro do 5º Ano, Unidade 3, pag. 69.

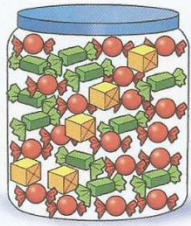
Qual é a chance?

Uma pessoa, sem olhar, vai retirar uma bala do vidro. Dentre estas opções, , ,  e , qual é a cor do papel da bala:

a) **mais provável** de ser retirada do vidro? *Vermelha, pois há em maior quantidade.*

b) **menos provável** de ser retirada do vidro? *Amarela, pois é a que há em menor quantidade.*

c) **impossível** de ser retirada do vidro? *Azul.*



FONTE: Porta Aberta: Alfabetização Matemática (BRASIL, 2022, pag.69).

A Figura 30, na p. 165, mostra que o momento do encontro com a tarefa **T**, da OM e OD, ocorre quando o autor apresenta no livro didático o subtítulo: “Operações: Cálculos do dia a dia”, seguido do enunciado do exercício.

O Manual do Professor sugere que o aluno já teve o seu primeiro encontro via manipulação de uma figura concreta, ou seja, realizando uma apreensão operatória na página 79, na revido ideias, destinada a procedimento de identificação das propriedades e operações aritméticas fundamentais de fazer combinações.

Identificamos que diferentes saberes são manipulados para realização da forma como as atividades são apresentadas e resolvidas, como por exemplo: “contagem, enumeração, ordenação, classificação, conjunto das soluções, princípio fundamenta da contagem”. Esses são saberes que se mostram associados ao objeto de estudo NRC.

É importante notar que, ao resolver problemas relacionados a esse objeto, por possuir uma gama considerável de situações diferentes entre si, eles podem ter semelhança com vários campos que foram apresentados em outros volumes.

Identificamos que diferentes saberes são manipulados para realização da forma como as atividades são apresentadas e resolvidas, como, por exemplo: “possibilidades diferentes; multiplicação de quantidades; sanduíches diferentes”. Estes são saberes que se mostram associados ao objeto de estudo NRC.

Ao resolver os problemas relacionados a esse objeto, por possuir uma gama considerável de situações diferentes entre si, eles podem ter semelhança em vários campos que foram apresentados em outros volumes. Essa situação apresenta indícios de uma sistematização multiplicativa, com a proposta a partir da resolução da tarefa, com diferentes possibilidades.

FIGURA 30: Atividade do livro do 5º Ano, Unidade 3, pag. 81.

Platamam-se aqui, em atividades diversificadas, situações associadas à multiplicação: ideia de combinatória, de organização retangular, de proporcionalidade, de adição de parcelas iguais.

Multiplicação: revendo ideias

1. Os meninos do time de futebol de salão estão escolhendo o uniforme da equipe.



DE QUE COR VOCÊS QUEREM O UNIFORME?

POR FAVOR, NÓS QUEREMOS ESCOLHER UM UNIFORME PARA O NOSSO TIME.

NOSSO TIME QUER A CAMISA E O CALÇÃO COM CORES DA BANDEIRA BRASILEIRA.

ESTAS SÃO AS CORES QUE TEMOS NO ESTOQUE.

AGORA É SÓ ESCOLHER A COMBINAÇÃO DE CORES.

VAMOS DECIDIR JUNTO COM O TIME!

a) O time de futebol de salão tem 5 jogadores. Cada jogador deve ter 2 uniformes completos, quantas peças (calções e camisas) devem ser adquiridas no total?

b) Quantos uniformes diferentes (1 calção e 1 camisa) o time poderá compor com as opções de cores fornecidas pelo vendedor?

Esta é a ideia de adicionar quantidades iguais.

Combinando cada cor de camisa com as diferentes cores de calção ($3 \times 3 = 9$), temos 9 uniformes diferentes. Se os alunos sentirem dificuldades em calcular o total de combinações, sugira a eles que desenhem as possibilidades.

ESTA É A IDEIA DAS COMBINAÇÕES.

	
amarela	azul
verde	amarela
branca	verde

c) Desenhe e pinte em seu caderno para mostrar como você montaria seu uniforme.

FONTE: Porta Aberta: Alfabetização Matemática (BRASIL, 2022, pag.81).

É importante notar que, ao resolver problemas relacionados a esse objeto, por possuir uma gama considerável de situações diferentes entre si, eles podem ter semelhança em vários campos que foram apresentados em outros volumes. Nesta situação, destaca-se o Nível II, Início da sistematização multiplicativa, com a proposta de sistematização a partir da resolução da tarefa, com diferentes possibilidades.

3.6 – Resultados da Análise LD1 e LD2

Na análise realizada nos livros didáticos, buscamos verificar como o conteúdo de Noção de Raciocínio Combinatório é desenvolvido em tais obras e enfatizamos como são apresentados os exercícios propostos e os exercícios resolvidos.

Nesse sentido, Almouloud (20015, p. 16-17), citando Chevallard (1999), aponta uma estruturação mínima como critérios que podem ser considerados para se analisar materiais didáticos, mais especificamente livros didáticos, com a abordagem praxeológica da TAD:

1. Para a avaliação de tipos de tarefas (T), Chevallard sugere os seguintes critérios:

a) Critério de identificação: verificar se os tipos de tarefas estão postos de forma clara e bem identificados;

b) Critério das razões de ser: verificar se as razões de ser dos tipos de tarefas estão explicitadas ou ao contrário, esses tipos de tarefas aparecem sem motivos válidos;

c) Critério de pertinência: verificar se os tipos de tarefas considerados são representativos das situações matemáticas, mais frequentemente encontradas e se são pertinentes tendo em vista as necessidades matemáticas dos alunos.

2. Para a avaliação das técnicas (t):

A avaliação de técnicas apoia-se nos mesmos critérios discutidos na avaliação de tipos de tarefa. Além disso, é preciso responder as seguintes questões:

a) As técnicas propostas são efetivamente elaboradas, ou somente esboçadas?

b) São fáceis de utilizar?

c) Sua importância é satisfatória?

d) Sua confiabilidade é aceitável sendo dadas suas condições de emprego?

e) São suficientemente inteligíveis?

3. Com relação ao bloco tecnológico-teórico (θ): Podemos fazer observações análogas a propósito do bloco tecnológico-teórico. Assim, sendo dado um enunciado, o problema de sua justificação é somente posto ou ele é considerado tacitamente como pertinente, evidente, natural ou ainda bem conhecido?

a) As formas de justificação utilizadas são próximas das justificativas matematicamente válidas?

b) Elas são adaptadas ao problema colocado?

Em nossas análises, identificamos os seguintes tipos de tarefas presentes nos LD1 e LD2:

A Tarefa 1, Figura 16, na p.133, e Figura 22, na p. 145, representa um tipo de tarefa que leva o discente a pensar uma maneira de contabilizar os quadradinhos do gráfico de cores, podendo ser descrita dentro do bloco prático

– teórico [T, τ]. Este bloco gerencia o que chamamos de saber comum. Desta forma, para que esta tarefa possa ser executada é necessária uma técnica, ou seja, o “como fazer” a tarefa, sendo possível de ser realizada mediante a técnica de enumerar os quadradinhos, a partir da ordenação ou da sequência numérica, ou da contagem, podendo ser caracterizada como a tecnologia.

Tarefa 01: Efetuar a contabilização dos quadrinhos do gráfico

A Tarefa 2, Figura 17, na p.133, e Figura 23, na p. 148, representa um tipo de tarefa que leva o discente a pensar uma maneira de identificar um padrão, sendo descrita dentro do bloco prático – teórico [T, τ]. Sendo assim, para que esta tarefa possa ser executada é necessária uma técnica, que por sua vez seria sequenciar as formas; partindo dessa sequência, é possível caracterizar a tecnologia que seria a ordenação.

Tarefa 02: Identificar o padrão e completar a sequência

O Manual do Professor sugere que o aluno já teve o seu primeiro encontro via manipulação de uma figura concreta, ou seja, realizando uma apreensão operatória em atividades anteriores, sugerindo algumas atividades com intuito de explorar a NRC envolvida em diversas sequências.

Identificamos que diferentes saberes são manipulados para realização da forma como as atividades da seção *explorando* são apresentadas e resolvidas, como, por exemplo: apresentando a contagem, a ordenação, os agrupamentos possíveis e as sequências possíveis.

A Tarefa 3, Figura 18, 20, 21, 25 e 28, nas páginas 137, 141, 143, 156, 162, representa um tipo de tarefa que leva o discente a pensar uma maneira de agrupar os elementos “camisas e calções”, sendo descrita dentro do bloco prático – teórico [T, τ]. Sendo assim, para que essa tarefa possa ser executada é necessária uma técnica que por sua vez seria enumerar os conjuntos de combinações; partindo da enumeração, é possível caracterizar a tecnologia que seria a ordenar ou sequenciar os grupos formados.

Tarefa 3: Quantos combinações podem ser formadas

Ainda em relação a essa tarefa 3, podemos identificar a tarefa 4. Para que essa tarefa possa ser executada, é necessária uma técnica que por sua vez seria enumerar os conjuntos de possibilidade de combinações; Partindo da enumeração, é possível caracterizar a tecnologia que seria a contabilização dos elementos que constituem as combinações possíveis, descrevendo por sua vez o que conhecemos como Princípio Fundamental da Contagem.

Tarefa 4: Quantas combinações são possíveis usando a Operação de Multiplicação

Identificamos que diferentes saberes são manipulados para realização dessa atividade da seção, como, por exemplo: apresentando a contagem, a ordenação, a agrupação, a sequência, a enumeração e a Noção do Princípio Multiplicativo da Contagem os quais compõe à NRC.

Neste momento, é importante destacar que o Nível II, início da sistematização multiplicativa, é alcançado, com a proposta de sistematização a partir da resolução da tarefa, com diferentes possibilidades e utilizando a sistematização pelo princípio multiplicativo.

A Tarefa 5, Figura 19 e 24, p. 138 e p. 154, representa um tipo de tarefa que leva o discente a pensar uma maneira de identificar as regularidades, sendo descrita dentro do bloco prático – teórico [T, T]. Sendo assim, para que essa tarefa possa ser executada, é necessária uma técnica que por sua vez seria somar os cubinhos; partindo da soma, é possível caracterizar a tecnologia que seria a contabilização dos elementos agregados, ou seja, caracteriza o princípio aditivo da contagem.

Tarefa 5: Identificar a união dos elementos de dois ou mais conjuntos

Identificamos que diferentes saberes são manipulados para realização da forma como as atividades são apresentadas e resolvidas, como, por exemplo: “os alunos devem perceber que os números a ser preenchido em cada ilustração de bloco são o resultado da adição dos números que aparecem nas ilustrações

dos dois blocos ilustrados logo abaixo daquele o ser preenchido”. Esses são saberes que se mostram associados à NRC.

Identificamos que diferentes saberes são manipulados para realização da forma como as atividades são apresentadas e resolvidas, como, por exemplo: “os alunos devem perceber que os números a ser preenchido em cada ilustração de bloco são o resultado da adição dos números que aparecem nas ilustrações dos dois blocos ilustrados logo abaixo daquele o ser preenchido”.

A Tarefa 6, Figura 27, na p.160, representa um tipo de tarefa que leva o discente a pensar uma maneira a possibilidade de ocorrência de um evento, sendo descrita dentro do bloco prático – teórico [T, T], representa ideias de chance e possibilidades, destinada a procedimento de identificação das propriedades e operações aritméticas fundamentais de fazer da NRC.

Tarefa 6: Identificar a ocorrência de um evento

De modo geral, nos LD1 e LD2 analisados, é possível perceber que os autores utilizam a mesma linha de pensamento em relação aos tipos de tarefas e às técnicas utilizadas, centradas em procedimentos algébricos ou aritméticos.

A seguir, destacaremos o estudo bibliográfico, a partir da Meta-Análise Qualitativa.

3. 7 – Estudo Bibliográfico a partir da Meta-Análise Qualitativa

Para levar em conta a dimensão epistemológica, institucional e ecológica de um problema didático, a didática deve construir efetivamente — e, de preferência, explicitamente — um MER relativo ao campo de atividade matemática que está em jogo no referido problema. Este MER, de âmbito local ou regional, deve ser compatível com o modelo epistemológico geral da atividade matemática que, no caso do TAD, é formulado em termos de organizações praxeológicas ou praxeologias. (GASCÓN, 2011, p. 212, tradução nossa).

Neste viés, o estudo bibliográfico, atrelado às pesquisas e aos documentos oficiais, é importante para compor a dimensão epistemológica, institucional e ecológica de um problema didático.

Em primeiro lugar, o estudo buscou construir o levantamento dos trabalhos da literatura, tendo como base teses e dissertações, no Catálogo de Teses e Dissertações, da Plataforma da CAPES.

Inicialmente, para a pesquisa no Banco de dados da CAPES, foi construído o filtro:

- a) Busca – Noção de Raciocínio Combinatório;
- b) Tipo de Trabalho –Tese e Dissertações;
- c) Ano – 1998 a 2019;
- d) Grande Área de Conhecimento – Multidisciplinar;
- e) Área de Conhecimento – Ensino de Ciências e Matemática;
- f) Área de Avaliação – Ensino e;
- g) Área de Concentração – Educação Matemática.

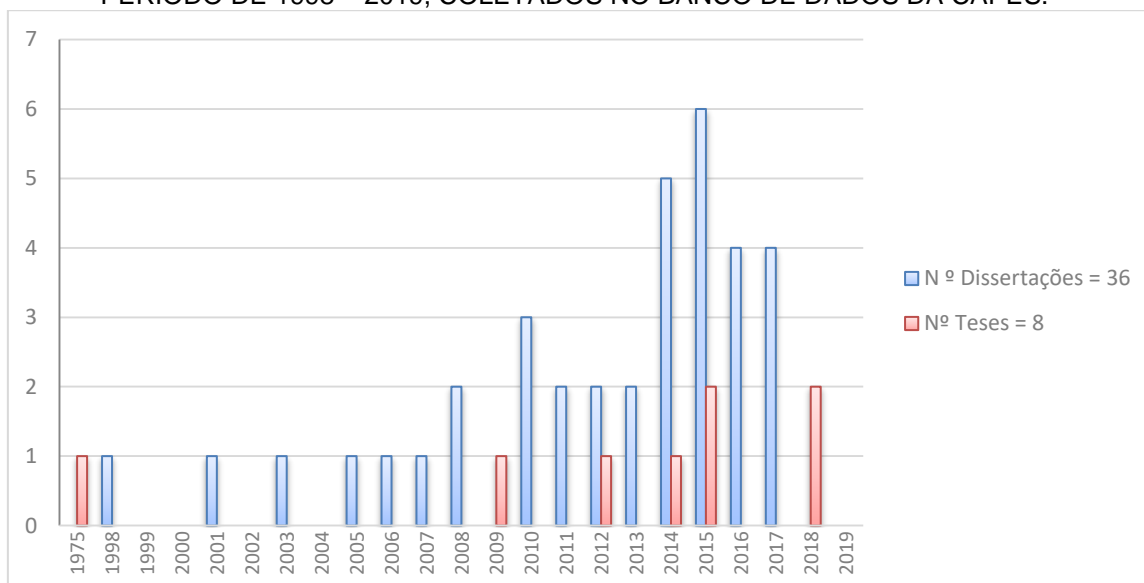
A partir desse filtro inicial, foram detectados 867 trabalhos, entre esses, 609 dissertações e 258 teses. Os textos foram organizados, tendo como referência o ano de publicação e o tipo de trabalho.

Desse estudo bibliográfico inicial, Noção de Raciocínio Combinatório, foi construída uma ficha catalográfica que teve a finalidade de crivar ainda mais os trabalhos, tendo por base o título do trabalho, o resumo, as palavras chaves, o objeto de pesquisa, o foco da pesquisa, a questão de pesquisa, a fundamentação teórica, a metodologia e os resultados.

Com a utilização da ficha catalográfica, foi possível selecionar 36 dissertações e 8 teses, olhando para o foco da pesquisa, para o objeto de pesquisa, para os resultados, que tratam diretamente da proposta de investigação da tese, que é construir um Modelo Analítico para Noção de Raciocínio Combinatório, com a utilização das pesquisas publicadas nos bancos de dados nacionais.

Para tanto, foi construído o Gráfico 1, que retrata a construção do estudo bibliográfico com a utilização da ficha catalográfica.

GRÁFICO 1 - TRABALHOS SELECIONADOS APÓS A FICHA CATALOGRÁFICA NO PERÍODO DE 1998 – 2019, COLETADOS NO BANCO DE DADOS DA CAPES.



FONTE: Elaborado pelo autor.

É possível observar, no Gráfico 1, a relevância do tema desta investigação, pelo crescente número de publicações de dissertação, no ano 2016, e um notório destaque para as teses defendidas, no ano de 2015.

Não podemos deixar de ressaltar que o tema possui grande destaque, principalmente, pela presença de pelo menos uma publicação em cada ano levantado no banco de dados da CAPES.

3.8 – Um estudo Meta-Análise nos trabalhos de Fischbein

Fischbein (1975) é um dos principais nomes quando se trata da noção de raciocínio combinatório. Em seu trabalho, ele propõe uma abordagem que visa a entender como as pessoas resolvem problemas que envolvem a combinação de elementos. Vamos explorar um pouco mais sobre a teoria de Fischbein e como ela pode ser aplicada na educação.

O raciocínio combinatório é uma habilidade cognitiva que permite a uma pessoa combinar elementos de diferentes maneiras para resolver um problema. Por exemplo, se tivermos três camisas e duas calças, quantas combinações diferentes podemos fazer? Essa é uma questão de raciocínio combinatório. E é exatamente isso que Fischbein (1975) estudou em seu trabalho.

Para Fischbein, o raciocínio combinatório é uma habilidade que pode ser aprendida e desenvolvida. Ele propõe que a compreensão dessa habilidade é fundamental para o desenvolvimento de outras habilidades cognitivas, como a capacidade de resolução de problemas e a criatividade.

Além disso, Fischbein (1975) argumenta que a compreensão do raciocínio combinatório é importante para a educação matemática. Ele acredita que a capacidade de combinar elementos é fundamental para a compreensão de conceitos matemáticos mais avançados, como a probabilidade e a estatística.

Para aplicar a teoria de Fischbein na educação, é necessário criar atividades que estimulem o raciocínio combinatório. É possível criar jogos, quebra-cabeças e problemas que envolvam a combinação de elementos. Essas atividades podem ser adaptadas para diferentes níveis de ensino, desde o ensino fundamental até o ensino superior.

A teoria de Fischbein (1975) sobre o raciocínio combinatório é uma contribuição importante para a educação matemática. Ele propõe uma abordagem que visa a entender como as pessoas resolvem problemas que envolvem a combinação de elementos e argumenta que a compreensão dessa habilidade é fundamental para o desenvolvimento de outras habilidades cognitivas. Para aplicar essa teoria na educação, é necessário criar atividades que estimulem o raciocínio combinatório.

A teoria de Fischbein (1975) sobre o raciocínio combinatório é uma abordagem interessante para entender como as pessoas resolvem problemas de combinação e permutação. Essa teoria se concentra na ideia de que os indivíduos constroem representações mentais das situações-problema e usam essas representações para chegar a uma solução.

De acordo com Fischbein (1975), o raciocínio combinatório envolve a manipulação de objetos e a construção de arranjos e combinações. Ele argumenta que as pessoas usam diferentes estratégias para resolver problemas de combinação e permutação, dependendo da complexidade do problema e do grau de experiência do indivíduo.

Uma das principais contribuições da teoria de Fischbein (1975) é a distinção entre duas estratégias de resolução de problemas: a estratégia de contagem e a estratégia de construção. A estratégia de contagem envolve a contagem de objetos e a aplicação de fórmulas matemáticas para chegar a uma solução. Já a estratégia de construção envolve a construção de arranjos e combinações por meio de representações mentais.

Fischbein (1975) também argumenta que o raciocínio combinatório é influenciado por fatores contextuais, como o grau de familiaridade com o problema e a forma como o problema é apresentado. Por exemplo, os indivíduos podem ter mais facilidade em resolver problemas de combinação e permutação quando os objetos são apresentados visualmente em vez de verbalmente.

Sinteticamente, a teoria de Fischbein (1975) sobre o raciocínio combinatório é uma abordagem útil para entender como as pessoas resolvem problemas de combinação e permutação. Essa teoria destaca a importância das representações mentais na resolução de problemas e destaca a influência de fatores contextuais no raciocínio combinatório.

Desta forma, partiremos da análise da pesquisa realizada por Fischbein (1975), que não se encontra nos bancos de dados da CAPES, porém, após a leitura das dissertações e teses a pesquisas supracitadas, apresentou enorme relevância para a dimensão institucional do problema didático, demonstrando assim sua importância para essa pesquisa.

Iniciaremos a síntese dos trabalhos a partir das pesquisas realizadas por Fischbein, Pampu e Minzat (1970) e Fischbein (1975), que defendem que a capacidade de resolução de problemas combinatórios não pode ser alcançada sem o ensino formal, pois as operações combinatórias representam algo muito mais importante do que um ramo da Matemática. Representam um esquema tão geral como os esquemas da proporcionalidade ou da correlação que emergem simultaneamente, depois dos 12-13 anos, devido às relações intrínsecas entre a capacidade combinatória e o pensamento lógico matemático.

Fischbein, Pampu e Minzat (1970) e Fischbein (1975) foram pesquisadores que se dedicaram a estudar a capacidade de resolução de problemas combinatórios em estudantes. Em suas pesquisas, eles defenderam que essa habilidade não pode ser alcançada sem o ensino formal.

Para entender melhor o que é um problema combinatório, podemos pensar em situações cotidianas, como a escolha de roupas para vestir. Se temos três camisas e duas calças, quantas combinações diferentes podemos fazer? Essa é uma questão combinatória, que envolve a análise de possibilidades e a aplicação de fórmulas matemáticas.

Os estudos de Fischbein e de seus colegas mostraram que, embora muitos estudantes possam resolver problemas combinatórios simples, eles têm dificuldades com questões mais complexas. Isso ocorre porque a capacidade de resolução de problemas combinatórios requer um conhecimento específico e sistemático, que não pode ser adquirido apenas por meio da experiência cotidiana.

De acordo com Fischbein, Pampu e Minzat (1970) e Fischbein (1975), o ensino formal é fundamental para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas combinatórios. Isso porque o ensino formal fornece aos estudantes um conjunto de conceitos, técnicas e estratégias que os ajudam a lidar com problemas mais complexos.

Além disso, o ensino formal permite que os estudantes pratiquem a resolução de problemas combinatórios em diferentes contextos, o que ajuda a

consolidar o conhecimento adquirido. Por exemplo, os estudantes podem resolver problemas combinatórios, em sala de aula, em casa, em competições ou em jogos.

De maneira sucinta, os estudos de Fischbein, Pampu e Minzat (1970) e Fischbein (1975) mostram que a capacidade de resolução de problemas combinatórios é uma habilidade complexa que requer um ensino formal específico e sistemático. Portanto, é importante que os professores incluam o ensino de problemas combinatórios em suas aulas de matemática, a fim de ajudar os estudantes a desenvolverem essa habilidade essencial.

Em outras pesquisas com esse pensamento, como o trabalho de Fischbein, Pampu e Minzat (1970), que conduziram uma investigação com alunos do 4º ano (10-11 anos), do 6º ano (12-13 anos) e do 8º ano (14-15 anos), para avaliarem o impacto da idade e da instrução sobre a capacidade combinatória em atividades propostas.

Nessas pesquisas, os autores verificaram que, antes de qualquer instrução e com o aumento da idade as estimativas do número de operações, em média, aproximaram-se mais dos valores concretos, obtendo-se maiores diferenças entre idades, pois, quanto maior o número de elementos envolvidos na operação, maior será a dificuldade. Mas, em relação à natureza dos objetos considerados, ou seja, números, letras e formas geométricas, não se destacaram diferenças significativas, nesta pesquisa.

Desta forma, a partir das leituras realizadas nas obras de Fischbein, Pampu e Minzat (1970) e Fischbein (1975), podemos afirmar que a idade não apresenta relação direta com as estimativas, mais sim com o grau de instrução.

Já em relação ao ensino, os autores Fischbein, Pampu e Minzat (1970) concluem que pode ser ensinado com êxito certo número de procedimentos combinatórios aos adolescentes de idades compreendidas entre os 10-15 anos, após uma análise detalhada sobre os resultados apresentados no trabalho, observando que o número de operações possíveis, aumenta à medida que aumenta o número de objetos considerados.

Sendo assim, podemos inferir das pesquisas que, nessa faixa etária, as crianças são capazes de usar o diagrama de árvore de possibilidades, que podem ser justificadas a partir das noções que envolvem os objetos não ostensivos evocados ou invocados em dialética com a manipulação adequada de certos objetos ostensivos associados.

Esta dialética conduz a um mecanismo de ostensividades, para a compreensão de um determinado objeto matemático, como recurso didático para resolver problemas de arranjos com ou sem repetição, combinações e permutações.

Retornando ao estudo bibliográfico a partir da Meta-Análise Qualitativa, temos em síntese, que, a partir dos estudos de Fischbein, Pampu e Minzat (1970) e Fischbein (1975), podemos depreender que é possível que as crianças obtenham sistematicamente Noções de Raciocínio Combinatório – problemas associados à contagem, através de problemas que permitam desenvolver outros mais complexos, ou seja, a apresentando características que se aproximam das organizações de complexidade crescente de Fonseca (2004).

A partir da pesquisa de Fonseca (2004), surge a proposta de um design de um Modelo Epistemológico de Referência, através de atividades de complexidade crescentes até um determinado número de elementos que pode variar dentro da faixa etária do indivíduo. Nesse modelo, essas atividades devem seguir um grau de dificuldades hierárquico, que pode conduzir a uma modelização, envolvendo a articulação de tarefas pontuais – locais – regionais, que certamente não levariam a uma sistematização da articulação das tarefas em graus de dificuldades crescentes.

Segundo Moraes (2016), esses tipos de organizações praxeológicas cumprem um papel importante na compreensão de um saber. Assim, “o saber é considerado como uma organização praxeológica particular que lhe permite funcionar como um aparelho de produção de conhecimento [...]” (COSTA, 2008, p. 19). Nas palavras de Almouloud (2007, p. 117): “um saber diz respeito a uma organização praxeológica particular, com certa ‘generalidade’ que lhe permite funcionar como uma máquina de produção de conhecimento [...]”.

Retornando ao estudo bibliográfico, não identificamos dissertações ou teses publicadas no período anterior a 1997. Os resultados são decorrentes dos filtros e, logo, só temos o trabalho de Lopes (1998), o qual desenvolveu inúmeros estudos no sentido de identificar quais tarefas podem ser enfrentadas na educação elementar, destacando as diferentes construções de agrupamentos e os tipos de tarefa de combinatórias, que podemos denotar por tarefas de Noção de Raciocínio Combinatório utilizadas nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, sem necessariamente sistematizá-los e/ou formalizá-los.

Novamente, deparamo-nos com a necessidade da dialética da manipulação, associada à construção de um mecanismo ostensivo, partindo de diferentes formas de agrupamentos, combinações e permutação, para se construir um conjunto de atividades, que podem ser utilizadas nos anos iniciais de escolarização. Tais atividades podem ser compreendidas, a partir de Organizações Praxeológicas de Complexidade Crescente, sem necessariamente ser formalizadas, descrevendo um Modelo Epistemológico de Referência.

Nesta pesquisa também identificamos a necessidade de se trabalhar diferentes formas de agrupamentos, pois, para cada uma dessas possibilidades “ n ”, pode ser realizada de “ m ” maneiras distintas.

Então, o número de possibilidades que se deve efetuar pela ação completa é dado por $n \times m$. Esse princípio pode ser generalizado para ações constituídas de mais de duas etapas sucessivas. Essa reescrita da atividade por outro caminho pode contribuir para ampliar o equipamento praxeológico do indivíduo, pelo fato das diferentes formas de articulações que podem surgir, indicando quais atividades possibilitam maiores condições para a resolução de determinado problema e quais atividades causam maior dificuldades ou restrições para se chegar a um determinado número de agrupamentos, combinações, arranjos, permutação. Devem, assim, apresentar indicativos de um Modelo Epistemológico de Referência.

Diferentemente da pesquisa realizada por Lopes (1998), Esteves (2001) evidência que ao iniciar o trabalho com Análise Combinatória, no Ensino

Fundamental, é necessário fazer uso de construções com diferentes agrupamentos, sem necessariamente sistematizar e/ou formalizar o seu estudo, pois acreditamos que contribuem para que o sujeito construa uma boa relação com o saber e torne as tarefas rotineiras, podendo em níveis mais avançados de ensino facilitar a sua abordagem de ensino em espiral.

Novamente a pesquisa de Esteves (2001) apresenta a necessidade de trabalhar com diferentes construções, diferentes agrupamentos, sem necessariamente sistematizar ou até mesmo formalizar.

Essa constatação entrelaça com o propósito de se obter um conjunto de atividades para se alcançar uma abordagem partindo de uma sequência, podendo ser denotada por um conjunto de tarefas que podem dar origem a um modelo epistemológico.

Costa (2003) aplicou três questões do trabalho de Esteves (2001) com professores do Ensino Fundamental e Médio, professores de Matemática e que ensinam Matemática, em um projeto de formação continuada. Obteve o resultado que já se esperava, constatando a dificuldade que os professores têm ao tentar estabelecer um procedimento sistemático, até mesmo formal, na resolução de determinada atividade.

Desta forma, não justificar as respostas construídas ou não fazer uso de representações ou mesmo utilizar pouco as representações ou ter grande dificuldade para reconhecer a formar agrupamentos com ou sem ordem, necessitam partir de um estudo com diferentes formas de agrupamentos.

Esse estudo de formas de agrupamentos é alcançado por um conjunto de atividades, no sentido de se construir um modelo de referência, para ser obter uma dialética com a manipulação de certos objetos ostensivos, para se construir uma boa relação com o objeto matemático.

Costa (2003) e Fischbein (1975) descrevem em suas pesquisas, desde 1970, a real necessidade da instrução e do ensino formal, apresentando indícios da ênfase na formação do profissional da Educação Básica.

Seguindo essa espiral do estudo bibliográfico, percebe-se a importância do trabalho de Esteves (2001), pela potencialidade da pesquisa de Boga Neto (2005), que apresenta uma proposta de utilização da história da Matemática, como organizador prévio, para o ensino da análise combinatória e da probabilidade. O objetivo é desenvolver os conhecimentos subsunçores, presentes na estrutura cognitiva dos alunos, para que possa ocorrer, de forma significativa, a aprendizagem dos conceitos e dos tópicos da Matemática.

Novamente, as pesquisas apontam para a necessidade de fazer uso de diferentes atividades para se alcançar determinado objeto matemático. Parte-se de conhecimento específico, existente na estrutura de conhecimentos do indivíduo, que permite dar significado a um novo conhecimento, que lhe é apresentado ou é por ele descoberto, que pode ser mais ou menos abrangente, de acordo com a frequência com que ocorre aprendizagem significativa em um conjunto com um dado subsunçor.

Rocha (2006) propõe uma investigação com licenciandos de Matemática em duas etapas: na primeira etapa, investigar essa aprendizagem, quando os alunos foram submetidos a uma prática tradicional; e, na segunda etapa, a partir de uma organização de ações que conduzam os alunos ao planejamento do ensino e à apresentação de uma aula de combinatória, agindo como os professores da turma.

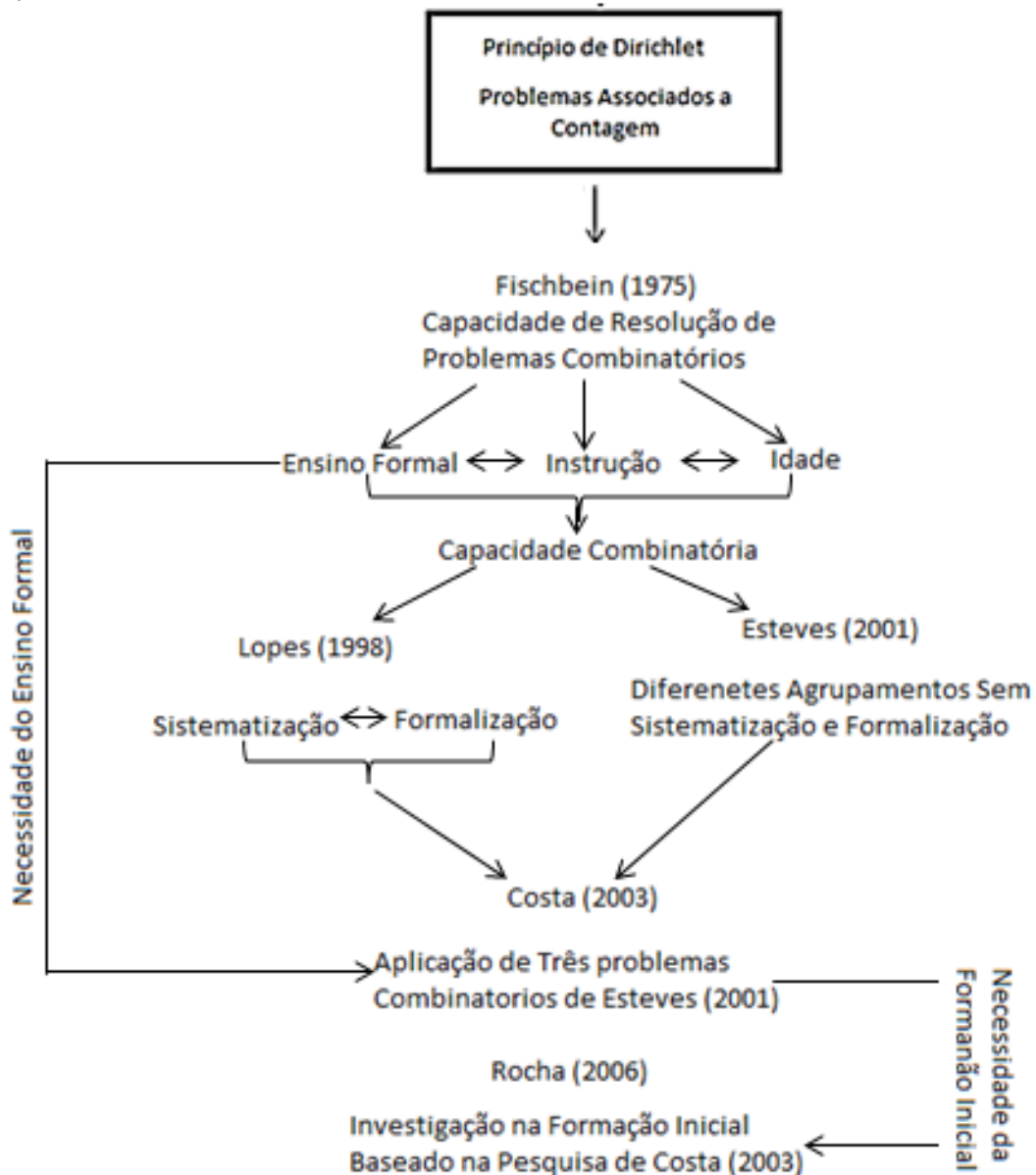
A pesquisa de Rocha (2006), assim como a de Costa (2003), destaca as dificuldades que os discentes apresentam na resolução de problemas combinatórios, pelo fato de os resultados apontarem para a pouca aprendizagem durante a prática tradicional.

Os resultados também mostram que a sala de aula invertida possibilitou o uso de uma sequência de procedimentos, atividades e teorias, incorporadas para possibilitar práticas que induzissem ao raciocínio reflexivo por parte dos alunos e a interação entre eles.

Mais ainda, ao conduzir a aula, os discentes elaboraram um planejamento, uma metodologia, um plano de ensino para uma aula de combinatória.

Nesse sentido, para modelação de um modelo epistemológico, é preciso considerar conceitos descritos na pesquisa de Fischbein (1975), que serão explicitados na seção sobre a organização matemática e didática do MER. Antes, contudo, faz-se necessário abordar a modelização matemática desses fenômenos, através do modelo exposto no Fluxograma 03, esquema a seguir.

FLUXOGRAMA 3: EVOLUÇÃO DA TESSETURA DO MODELO ANALÍTICO APÓS A LEITURA DOS TRABALHOS DE FISCHBEIN, PAMPU E MINZAT (1970), FISCHBEIN (1975) ATÉ ROCHA (2006).



FONTE: Construção do autor

É possível perceber que as pesquisas realizadas por Fischbein, Pampu e Minzat (1970) e de Fischbein (1975) apresentam regras para a construção de um Modelo Analítico alternativo aos modelos epistemológicos, nas instituições de ensino.

Os estudos de Lopes (1998), Esteves (2001), Costa (2003) Boga Neto (2005) e Rocha (2006) fundamentam-se nas pesquisas de Fischbein, Pampu e Minzat (1970) e Fischbein (1975) e ressaltam a necessidade da ênfase na

formação continuada do professor para a construção de um processo contínuo de ensino e aprendizagem.

Esses autores destacam também a necessidade de se trabalhar com diferentes formas de agrupamentos para se obtenha noção de organização praxeológica que, de acordo com Chevallard (1999), acrescenta-se às noções de tarefa, técnica, tecnologia e teoria.

Para Chevallard, tais noções vão permitir modelizar as práticas sociais, em geral, as atividades matemáticas, em torno do modelo de referência.

Retornando ao estudo bibliográfico, Friolani (2007) apresenta uma pesquisa que teve como objetivo verificar qual a organização descrita nos livros didáticos do Ensino Fundamental (5ª a 8ª série), tendo como referente o tema “Tratamento da Informação” e se essa organização favorece a construção do pensamento estocástico, referência ao ensino de combinatória, estatística e probabilidade, para o desenvolvimento da capacidade de interpretação do aluno, relacionando as problemáticas desenvolvidas no âmbito escolar e extraescolar.

Para tanto, a pesquisa foi construída tendo o livro didático como principal apoio pedagógico dos professores (LAJOLO, 1996; DANTE, 1996); foi feita a análise de três coleções de livros didáticos, segundo a Organização Praxeológica (CHEVALLARD, 1995), em que o autor buscou identificar as tarefas, as técnicas e o discurso teórico-tecnológico, bem como o nível de letramento estatístico, combinatório e probabilístico, que, segundo Shamos (1995), se classifica em cultural, funcional e científico.

Porém, os resultados dessa pesquisa indicam a pouca exploração, por parte dos autores, em relação ao tema “Tratamento da Informação”, um dos componentes essenciais para a construção dos objetos da estatística, da combinatória e da probabilidade.

Corroborando a pesquisa de Friolani (2007), temos o trabalho de Pinheiro (2008), o qual apresenta os resultados de uma investigação sobre os conceitos básicos de Análise Combinatória.

Para viabilizar esse estudo, foi aplicada uma sequência didática, com ênfase na resolução de problemas como ponto de partida, com alunos da segunda série do Ensino Médio. A opção metodológica de pesquisa fundamentou-se nos Princípios da Engenharia Didática, de Artigue (1996). Realizou-se um breve estudo sobre a resolução de problemas, o uso de jogos no Ensino da Matemática e das pesquisas acerca do ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

Os resultados da pesquisa indicam que a sequência didática proporciona condições favoráveis à aprendizagem, com o intuito de os alunos desenvolverem as habilidades básicas da Análise Combinatória.

Novamente, é destacada a necessidade de se trabalhar, a partir de um conjunto de atividades ou por intermédio de uma sequência didática, ressaltando as pesquisas de Fischbein (1975), Lopes (1998), Esteves (2001), Costa (2003) Boga Neto (2005) e Rocha (2006), as quais apresentam indicativos de um Modelo Epistemológico de Referência Alternativo.

Filho (2008) investigou a aquisição e o desenvolvimento de noções introdutórias do raciocínio combinatório com crianças entre sete e oito anos de idade. Nesse estudo, construiu uma sequência de atividades, fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990) e na Teoria dos Registros de Representação (DUVAL, 1993), partindo de situações concretas.

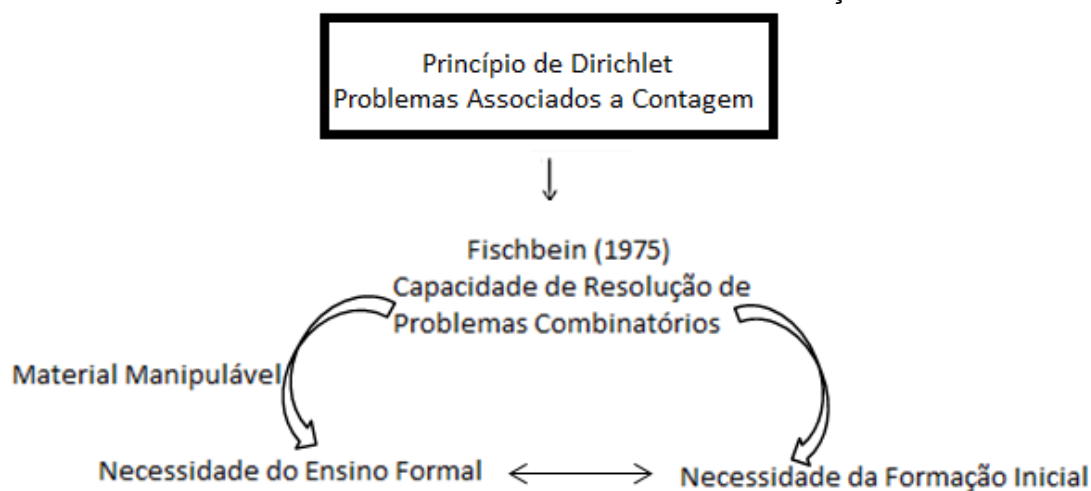
O desenvolvimento desta pesquisa segue os pressupostos de uma Engenharia Didática (DOUADY, 1987), ou seja, inicialmente foi construída uma breve introdução histórica e um levantamento do que encontramos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) e em livros didáticos, no que se refere ao tema, além de uma visita a duas publicações diretamente relacionadas ao foco do estudo.

Os resultados da pesquisa evidenciaram que o uso de material manipulável e o trabalho em duplas favorecem não só o interesse pelo estudo proposto, mas, também, o desenvolvimento de ideias de organização, de leitura, de contagem, de visualização de resultados e dos primeiros passos na relação

entre os campos aditivos e multiplicativos, fundamentais para o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

O Fluxograma 4 retrata a evolução do Modelo Alternativo, após a inserção de novas obras.

FLUXOGRAMA 4: MODELO ANALÍTICO EM EVOLUÇÃO.



FONTE: Construção do autor.

Podemos destacar que a capacidade combinatória está associada à necessidade da formação inicial e do ensino formal. Pessoa (2009) traz uma pesquisa que vai ao encontro da proposta de Modelo de se trabalhar na ênfase da formação continuada com professor.

No estudo de Pessoa (2009), foi analisado o desempenho e as estratégias de alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio (11 anos de escolaridade), em relação à resolução de problemas que envolvem raciocínio combinatório, focando as dimensões apontadas por Vergnaud (1990): significados, invariantes e representações simbólicas.

Para tal, participaram da pesquisa 568 alunos de quatro escolas de Pernambuco, duas públicas e duas particulares. Os alunos resolveram oito problemas com os quatro significados da Combinatória (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano), dois de cada tipo.

Na análise de resultados, foi verificado o desempenho dos alunos por gênero, tipo de escola, nível de ensino, ano de escolarização, significado dos

problemas e ordem de grandeza dos números nas respostas. Além disso, foram verificados os tipos de respostas e as estratégias desenvolvidas pelos alunos para resolver os problemas.

A análise evidencia que o gênero não influencia o desempenho dos alunos, porém o tipo de escola que frequentam no período de escolarização, o tipo de problema combinatório que estão resolvendo (e implicitamente as propriedades e relações envolvidas em cada tipo de problema), a forma de representação simbólica utilizada para a resolução e a ordem de grandeza dos números envolvidos são fatores que interferem no desempenho.

Além disso, observou-se que alunos dos anos iniciais e dos anos finais do Ensino Básico são capazes de compreender problemas que envolvem raciocínio combinatório e que, mesmo não chegando ao final da resolução, mesmo não conseguindo encontrar a resposta correta, desenvolvem estratégias e utilizam representações simbólicas que demonstram compreensão dos significados e invariantes implícitos nos problemas.

Nessa linha de raciocínio é que Pessoa (2009) e Filho (2010) utilizam a história da Matemática como organizador prévio de conhecimento ligado à construção de um jogo eletrônico educacional, assim como Boga Neto (2005).

Ao final da pesquisa, Filho (2010) conclui que os alunos constroem novos conhecimentos matemáticos ao relembrem os conceitos anteriores, assim como podem entender o significado do princípio multiplicativo, aplicando, analisando e avaliando o raciocínio combinatório a partir de problemas de análise combinatória.

Lima (2010) apresenta um estudo sobre a compreensão dos alunos da Educação de Jovens e Adultos, em processo de escolarização, sobre problemas de estrutura multiplicativa, mais especificamente os que envolvem o raciocínio combinatório.

Participaram da pesquisa 150 alunos de cinco instituições (uma municipal, duas estaduais, uma federal e uma mantida pelo Serviço Social do Comércio (SESC)).

Os alunos resolveram dezesseis questões envolvendo problemas de estrutura multiplicativa, incluindo os de raciocínio combinatório de naturezas distintas (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano).

Na análise dos resultados, verificamos o desempenho em relação às variáveis série e tipo de problema (variáveis controladas), faixa etária, atividades profissionais e estratégias apresentadas pelos alunos (variáveis não controladas experimentalmente).

Das variáveis trabalhadas na pesquisa de Lima (2010), a única que não exerceu influência no desempenho dos educandos foi a faixa etária, assim como percebido por Fischbein (1975), pois a idade não apresenta relação direta com as estimativas, mais sim com o grau de instrução.

Observamos também na pesquisa de Lima (2010) que os alunos dessa modalidade de ensino resistem a usar representações não formais para a resolução dos problemas combinatórios. Uma justificativa para esse resultado pode ser a faixa etária dos indivíduos da pesquisa.

Percebemos ainda, na pesquisa de Lima (2010), que o trabalho do educador no auxílio com os alunos no processo de construção desses conceitos é fundamental para o desenvolvimento dos conhecimentos de combinatória, sendo essencial que o professor reconheça como válidos os conceitos já adquiridos pelos alunos, antes mesmo da sua formalização, para que assim se possa ampliar e aprofundar o raciocínio combinatório dos estudantes.

Ainda em relação à pesquisa de Lima (2010), o autor aponta que nem a maturidade nem a escolarização, de modo geral, são suficientes para o amplo desenvolvimento do raciocínio combinatório, apresentando um resultado distinto do observado por Fischbein (1975), ressaltando a necessidade da formação continuada com professor.

Silva (2010) aponta que os problemas de produto cartesiano são mais difíceis de serem resolvidos por crianças de 8-9 anos do que outros problemas multiplicativos, como os de isomorfismo de medidas. Vergnaud (2014), em seus estudos sobre Campo Conceitual Multiplicativo, distingue duas grandes

categorias de problemas que são as relações quaternárias e ternárias. Nessa pesquisa, o isomorfismo de medidas está presente na multiplicação, na estrutura de uma classe que respeita a relação um – para – muitos, seguindo o caráter discreto ou contínuo das quantidades em jogo ou segundo a propriedade dos números utilizados.

A dificuldade atribuída a esses problemas pode ser justificada pelo fato de a correspondência um – para – muitos estar implícita, pelo fato de Silva (2010) apontar a necessidade de propor problemas aritméticos complexos aos estudantes em busca de levá-los a vivenciar situações que não se reduzam a apenas uma única relação, segundo Vergnaud (2014).

O grande desafio da pesquisa é carência de estudos que examinem as relações que marcam a natureza dos problemas de produto cartesiano, na vertente da correspondência um – para – muitos, para auxiliar as crianças na resolução de problemas de raciocínio combinatório do tipo produto cartesiano.

Para tanto, foram produzidas possibilidades de atividades para essa correspondência um – para – muitos, problemas deste tipo foram apresentados em situações implícita ou até mesmo explícita.

As crianças foram solicitadas a resolver 12 problemas de produto cartesiano, divididos em três situações: Situação 1, problemas em que a correspondência um – para – muitos estava implícita; Situação 2, problemas que explicitavam a correspondência acompanhados de representação gráfica; e Situação 3, problemas que explicitavam a correspondência acompanhados dos princípios invariantes do raciocínio combinatório.

Em cada situação, dois tipos de problemas foram apresentados: problemas de trajés (combinar peças de vestuário) e problemas de percurso (combinar entradas e saídas).

Os resultados mostraram que as crianças tiveram um desempenho significativamente melhor nos problemas em que as relações um – para – muitos estavam explícitas (Situação 2 e 3), em relação aos problemas implícitos (Situação 1), adotando inclusive estratégias mais elaboradas de resolução.

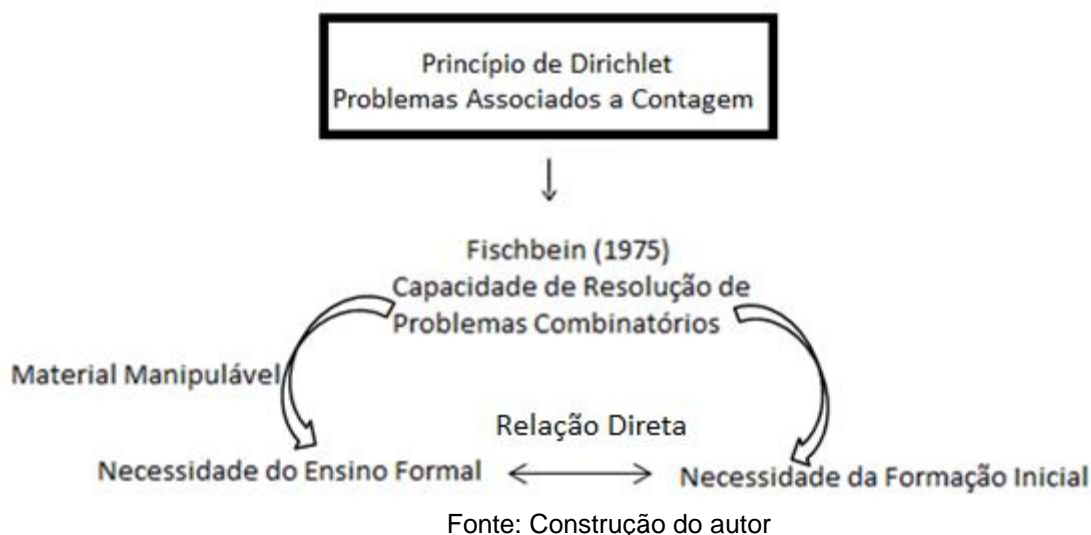
Em vista desse resultado, Silva (2010) realizou um segundo estudo em que as crianças resolviam primeiro os problemas nas situações explícitas (Situação 2 e 3) e depois na situação implícita (Situação 1).

Os resultados mostram que a sequência explícito/implícito favoreceu consideravelmente o desempenho nos problemas da Situação 1, considerados difíceis no primeiro estudo.

Silva (2010) conclui que a explicitação da correspondência uns – para – muitos têm efeito na resolução de problemas de produto cartesiano, efeito este que se traduz tanto em um melhor desempenho como no uso de estratégias de resolução mais sofisticadas.

O presente estudo aponta que crianças pequenas podem apresentar início do raciocínio combinatório, destacando a necessidade e possibilidade de ensinar esses problemas de correspondência um – para – muitos desde cedo nas escolas de Educação Básica, descritos na pesquisa, pelo modelo de referência alternativo após adaptações, Fluxograma 5, a seguir.

FLUXOGRAMA 5: MODELO ANALÍTICO EM EVOLUÇÃO.



Esse modelo pode ser verificado na pesquisa de Campos (2011), um estudo centrado no ensino e na aprendizagem de análise combinatória, mais precisamente nos problemas de contagem.

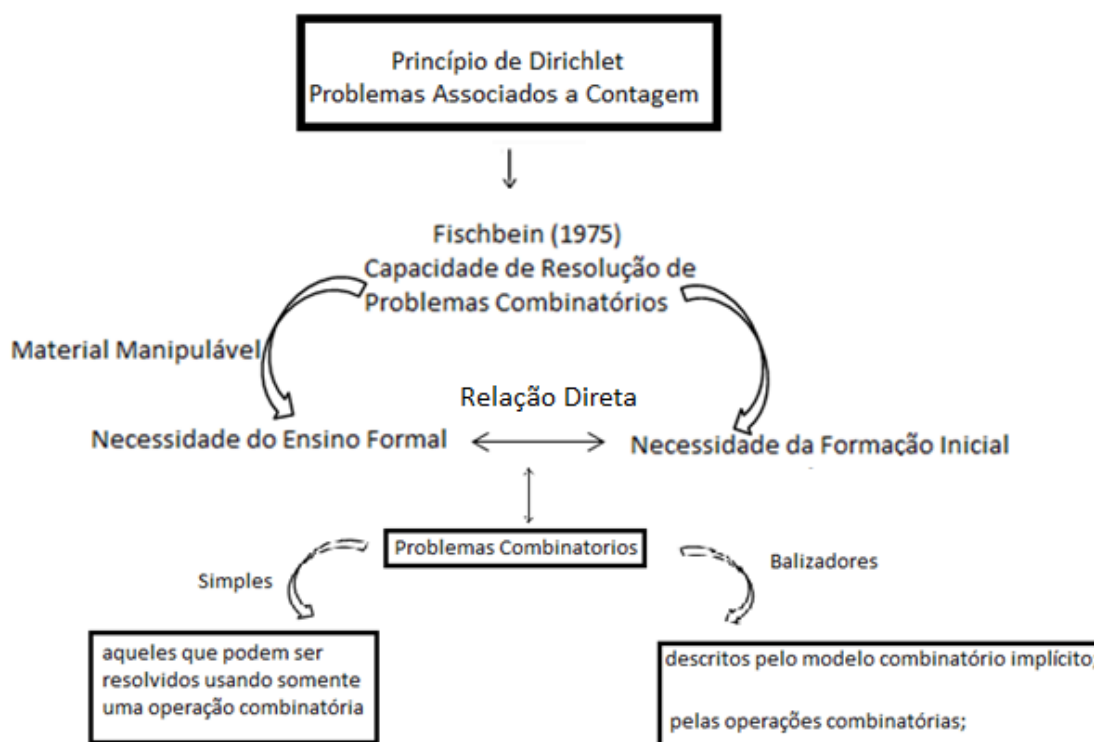
A pesquisa trata de um relatório minucioso de estudo documental, ou seja,

da análise de material didático e, sobretudo, dos procedimentos metodológicos utilizados nessa modalidade de investigação.

O objetivo dessa investigação foi avaliar os tipos de problemas de contagem, que figuram no caderno do aluno do 3º bimestre do 2º ano do Ensino Médio, da Rede Estadual Paulista de Ensino, com vistas à formação do raciocínio combinatório, levando em conta o pressuposto da proposta curricular para os alunos do Ensino Médio, partindo da resolução de problemas como uma abordagem que desenvolva os conceitos combinatórios.

Na pesquisa de Campos (2011), os problemas estudados são entendidos e classificados como: a) simples - aqueles que podem ser resolvidos usando somente uma operação combinatória; b) os balizadores da análise de conteúdo usados por Batanero e Navarro-Pelayo, descritos pelo modelo combinatório implícito, pelas operações combinatórias, pela natureza dos elementos que se combinam e pelos valores dados associados aos parâmetros m e n , identificando a necessidade de se trabalhar diferentes formas de agrupamentos, para cada uma dessas possibilidades " n ", podendo ser realizada de " m " maneiras distintas.

Surge aqui uma nova reformulação do modelo, podendo ser reescrito na forma do Fluxograma 6, a seguir.

FLUXOGRAMA 6: MODELO ANALÍTICO SOFREDO REFORMULAÇÃO.

Fonte: Construção do autor.

Franchi (1999) assinala que um dos pressupostos básicos dessa Teoria dos Campos Conceituais está na constituição e no desenvolvimento do conhecimento ao longo do tempo, graças às adaptações provenientes da interação entre o sujeito e as situações que ele experimenta.

Nosso estudo bibliográfico levou-nos a constatar que, mesmo com um número tão elevado de problemas, muitos deles envolviam situações semelhantes de operações combinatórias.

No estudo histórico, deparamo-nos com a pesquisa de Rocha (2011), que apresenta uma investigação que buscou analisar os conhecimentos que professores do Ensino Fundamental e Médio têm sobre a combinatória no seu ano de escolarização. Essa investigação está baseada na experiência das práticas docentes, através das evidências, descritas nas dificuldades de trabalhar com problemas de combinatória, tendo como compromisso despertar curiosidades e participação da turma no ensino de operações combinatórias.

Analisando com profundidade a pesquisa de Rocha (2011), é notório o número crescente de erros cometidos pelos alunos na resolução de situações combinatórias, o que indica a grande dificuldade que o professor possui e principalmente que os alunos têm em relação aos conteúdos combinatórios.

Nesse sentido, a pesquisa de Rocha (2011) buscou analisar os conhecimentos que professores do Ensino Fundamental e Médio têm sobre a Combinatória e seu ensino.

A pesquisa de Rocha (2011) revelou que, apesar das diferentes formações, quase todos os professores apresentaram dificuldades na diferenciação de problemas de arranjo e combinação, tanto na leitura do enunciado do problema quanto na correção de estratégia do aluno, denotando desconhecimento de situações nas quais o invariante do conceito de ordenação implica ou não em possibilidades distintas.

Constatou-se também, nessa investigação, que os professores dos Anos Iniciais, principalmente na análise dos tipos de problemas, elegeram a forma do enunciado como diferenciador, enquanto os professores de formação plena em Matemática apontaram apenas os aspectos de suas estruturas como as dificuldades dos alunos.

No que diz respeito às estratégias priorizadas pelos professores para a resolução de problemas combinatórios, por alunos dos diferentes níveis, há indícios na pesquisa de Rocha (2011) que essas são determinadas em função do nível de dificuldades do problema por eles concebidas e das suas expectativas em relação aos alunos inseridos nos diferentes anos de escolaridade.

Portanto, as respostas dos professores na pesquisa de Rocha (2011) indicam uma articulação entre suas experiências de formação e de prática docente. Podemos destacar que, para a condução de um trabalho que permita maior desenvolvimento do raciocínio combinatório pelos alunos, é necessário, por parte dos professores, um maior aprofundamento no nível de conhecimento das estruturas combinatórias, nos níveis de conhecimento dos alunos e nas suas

estratégias de resolução, ressaltando a necessidade de mais propostas científicas que busquem auxiliar professores em seus conhecimentos de conteúdo e pedagógico referentes à combinatória.

O estudo realizado por Barreto (2012), com estudantes da Educação de Jovens e Adultos (EJA), teve por objetivo observar a influência de diferentes tipos de representação simbólica no desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Participaram do estudo 24 estudantes da EJA, em anos escolares correspondentes ao 4º e 5º anos do Ensino Regular, distribuídos em três grupos: G1 foi instruído resolvendo metade dos problemas com listagens e a outra metade com árvores de possibilidades; G2 foi instruído resolvendo todos os problemas com árvores de possibilidades; e G3 foi instruído resolvendo todos os problemas por meio de listagens.

Nos três grupos, chamavam a atenção as propriedades de cada tipo de situação combinatória, ressaltando os aspectos de escolha de elementos, de ordenação dos mesmos e a necessidade de levantar todas as possíveis combinações.

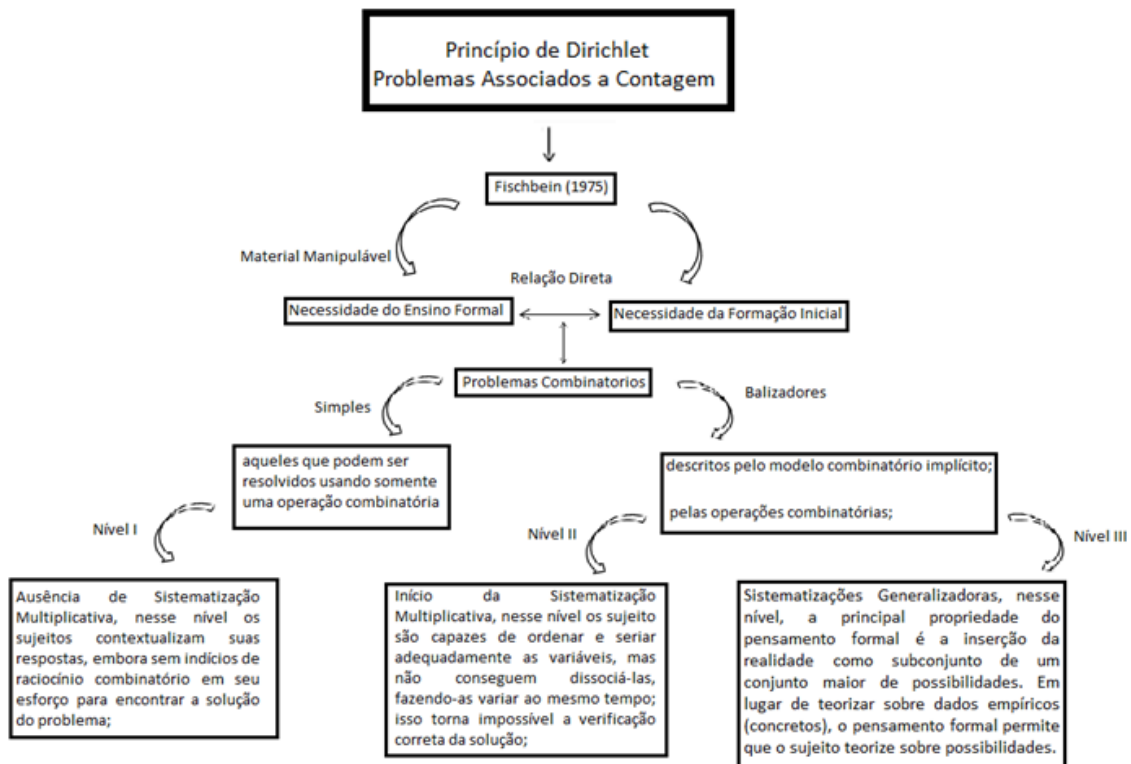
A pesquisa de Fischbein (1975) serviu de alicerce para Barreto (2012). É assim como Lopes (1998), Esteves (2001), Boga Neto (2005), Campos (2007), Friolani (2007), Filho (2008), Pinheiro (2009), Pessoa (2009), Filho (2010), Lima (2010), Campos (2011) e Rocha (2011), podemos afirmar, apoiados nas reflexões e nas movimentações sofridas pelo modelo de referência alternativo, que existe uma necessidade de se trabalhar com diferentes técnicas para uma mesma atividade combinatória, para que os alunos possam compreender as propriedades, sem necessariamente formalizá-las ou sintetizá-las, mas incorporá-las nas situações que envolvem práticas combinatórias.

O trabalho de Duro (2012) representa uma pesquisa para se compreender a psicogênese do pensamento combinatório, com base na teoria utilizada da Epistemologia Genética de Jean Piaget. O autor destaca que essa teoria traz subsídios para compreender com a NRC é construída pelo sujeito.

Ao longo do trabalho de Duro (2012), é apresentada a coleta de dados que caracteriza o pensamento dos sujeitos e suas semelhanças a partir de três níveis: Nível I – Ausência de Sistematização Multiplicativa. Nesse nível, os sujeitos contextualizam suas respostas, embora sem indícios de raciocínio combinatório em seu esforço para encontrar a solução do problema; Nível II – Início da Sistematização Multiplicativa. Nesse nível, os sujeitos são capazes de ordenar e seriar adequadamente as variáveis, mas não conseguem dissociá-las, fazendo-as variar ao mesmo tempo; isso torna impossível a verificação correta da solução; e Nível III – Sistematizações Generalizadoras. Nesse nível, a principal propriedade do pensamento formal é a inserção da realidade como subconjunto de um conjunto maior de possibilidades. Em lugar de teorizar sobre dados empíricos (concretos), o pensamento formal permite que o sujeito teorize sobre possibilidades.

Duro (2012) apresenta indícios da remodelação do modelo, podendo ser reescrito na forma do Fluxograma 07, a seguir.

FLUXOGRAMA 7: MODELO ANALÍTICO REMODELADO.



FONTE: Construção do autor.

Desta forma, os sujeitos do nível II, diferentemente dos do nível I, não ficam limitados apenas à ação prática e buscam interiorizar os mecanismos utilizados nessa ação, na medida em que se apropriam das próprias ações; no nível III, os sujeitos são capazes de relacionar variáveis, utilizando-se da experimentação (ou não), apenas para testar, sobre um padrão sistemático, se suas hipóteses se mantêm verdadeiras. Esse raciocínio, que relaciona proposições e não conteúdos caracteriza-se como hipotético-dedutivo. Essa capacidade de pensar formalmente permite ao jovem discutir, adotando hipóteses e analisando as consequências dessas implicações, julgando-as, para poder fazer inferências.

A pesquisa de Duro (2012) apresenta importante constatação, descrita em Fischbein (1975), corroborada por Lopes (1998), Esteves (2001), Boga Neto (2005), Campos (2007), Friolani (2007), Filho (2008), Pinheiro (2009), Pessoa (2009), Filho (2010), Lima (2010), Campos (2011), Rocha (2011) e Barreto (2012).

A investigação de Fonseca (2012) apresenta um estudo voltado para analisar se uma estratégia de ensino baseada em situações-problemas contribui para a aprendizagem da análise combinatória, pelos alunos da Educação de Jovens e Adultos.

Para tanto, Fonseca (2012) elaborou e realizou uma sequência de atividades que evocavam o cotidiano dos alunos e não dependiam de fórmulas previamente estudadas, já mostrando indícios da não necessidade de formalização das atividades trabalhadas inicialmente.

Porém, a ordem como as atividades foram propostas na pesquisa de Fonseca (2012) apontou para uma formalização do princípio multiplicativo, como recurso a ser utilizado na resolução de problemas de contagem, como descrito no modelo anterior nível II.

A pesquisa de Fonseca (2012) foi desenvolvida sob a ótica de um estudo de caso, com uma turma de alunos dos cursos PROEJA Agroindústria e PROEJA Informática, do Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete – e

teve como aportes teóricos a teoria do desenvolvimento cognitivo de Piaget e a teoria dos campos conceituais de Vergnaud, podendo ser percebidos, na investigação, os subsídios para a compreensão do desenvolvimento do raciocínio combinatório e das dificuldades apresentadas pelos alunos nas resoluções de problemas combinatórios.

O trabalho de Fonseca (2012) mostrou que é possível a aprendizagem de conteúdos de análise combinatória, pelos alunos do PROEJA, através da realização de uma sequência de ensino, baseada na resolução de problemas, frente aos quais os alunos construíram diferentes estratégias de resolução que favoreceram o desenvolvimento do seu raciocínio combinatório, através de um ensino em espiral, reforçando a existência do modelo de referência alternativo.

No estudo epistêmico, fica evidente que a pesquisa de Fischbein (1975) e as de Lopes (1998), Esteves (2001), Boga Neto (2005), Campos (2007), Friolani (2007), Filho (2008), Pinheiro (2009), Pessoa (2009), Filho (2010), Lima (2010), Campos (2011), Rocha (2011), Barreto (2012) e Fonseca (2012) apontam para a real necessidade que os professores têm de desenvolver problemas de contagem, os quais exigem um pensamento combinatório mais elementar, apontando para a necessidade de trabalhar com diferentes estratégias, para construir um conjunto de atividades que possa nortear o ensino e aprendizagem da Noção de Raciocínio Combinatório, na Educação Básica.

A pesquisa de Melo (2012) parte da investigação de Silva (2010) como proposta de investigação das implicações da explicitação dos princípios invariantes em resolução de problemas de produto cartesiano por crianças.

Os resultados da pesquisa de Melo (2012) evidenciam que as explicitações desses princípios provocam efeitos facilitadores sobre a resolução desses problemas, favorecendo o uso de estratégias mais adequadas. Diante disso, alguns questionamentos da pesquisa de Melo (2012) são os seguintes:

- (i) Será que se os princípios invariantes da combinação forem explicitados nos enunciados dos problemas de combinação

ocorrerá o mesmo fenômeno que aquele apresentando no estudo de Silva (2010)?

- (ii) (ii) Quais estratégias as crianças adotam na resolução de problemas de combinação, quando há explicitação dos princípios invariantes?

Para responder a esses questionamentos, Melo (2012) propõe uma investigação baseada em duas etapas. A Etapa I teve como objetivo examinar o desempenho dos estudantes nos problemas de combinação e nos de produto cartesiano. Dessa investigação, participaram 60 crianças, com 8 anos de idade, de ambos os sexos, alunos do 3º ano do Ensino Fundamental de escolas particulares do Recife. Esses alunos foram oriundos de dois grupos distintos: Grupo 1 - participantes do estudo de Silva e Spinillo (2010), que resolveram problemas de produto cartesiano; e Grupo 2 - estudantes que compõem o banco de dados da investigação de Melo (2012).

As crianças do Grupo 1 foram solicitadas a resolver 8 problemas de produto cartesiano e as do Grupo 2 a resolver 8 problemas de combinação. Ambos os tipos de problemas foram distribuídos em duas situações: Situação I, problemas sem explicitação dos princípios invariantes; e Situação II, problemas com explicitação dos princípios invariantes.

A Etapa II Investigou o efeito da explicitação dos princípios invariantes sobre a resolução de problemas de combinação. Participaram desse estudo 90 crianças, de ambos os sexos, com idade entre 8 e 10 anos, alunas do 3º (mesmos estudantes do Grupo 2, da Etapa 1), 4º e 5º anos do Ensino Fundamental de escolas particulares da região metropolitana do Recife. A Etapa II foi composta por três situações: Situação I, problemas sem explicitação dos princípios invariantes; Situação II, problemas com explicitação dos princípios invariantes; e Situação III, explicitação dos princípios invariantes acompanhado de desenhos e de figuras recortadas.

Os resultados da Etapa I mostraram que problemas de produto cartesiano são mais facilmente resolvidos do que os de combinação. Ademais, a

explicitação dos princípios invariantes nos problemas de combinação não favoreceu uma melhora no desempenho nos alunos do 3º ano.

Os resultados referentes à Etapa II indicaram que apenas o desempenho dos alunos do 4º ano melhorou diante das Situações II e III. Por outro lado, as Situações II e III favoreceram o uso de estratégias mais apropriadas para os estudantes de todas as séries. Observou-se também que os problemas com pares numéricos que geravam grupos de tamanho pequeno eram mais facilmente resolvidos e promoviam o uso de estratégias mais elaboradas.

Sendo assim, a pesquisa de Melo (2012) encontra-se em pleno acordo com os trabalhos de Fischbein (1975), com os estudos de Lopes (1998), Esteves (2001), Boga Neto (2005), Campos (2007), Friolani (2007), Filho (2008), Pinheiro (2009), Pessoa (2009), Filho (2010), Lima (2010), Campos (2011), Rocha (2011), Barreto (2012) e Fonseca (2012). No que tange esse resultado, podemos destacar, ao olhar o modelo de referência, no nível I, que as crianças e os jovens são capazes de desenvolver estratégias de resolução de problemas combinatórios, arranjos e permutações, sendo possível trabalhar esses conteúdos nas séries iniciais/Anos Iniciais do Ensino Fundamental, a partir de determinadas atividades. Para o caso de se alcançar o nível II, é necessário introduzir problemas balizadores através de operações combinatórias. E, para se chegar ao nível III, buscar a sistematização de modelos implícitos para uma sistematização e generalização, a fim de se chegar a uma teorização.

Corroborando os autores supracitados, temos a investigação realizada por Souza (2013), a qual apresenta um ensaio que trata da composição de instrumentos de pesquisas e de discussão teórica, que visa a identificar os conhecimentos mobilizados pelos alunos em tarefas que envolvem a Noção de Raciocínio Combinatório.

Como complementação à pesquisa de Souza (2013), trazemos o estudo realizado por Silva (2014), que apresenta como objetivo de pesquisa buscar compreensões acerca da relação do professor com o saber matemático análise combinatória, bem como identificar os conhecimentos mobilizados em sua

prática, desde os primeiros anos do Ensino Fundamental, tendo o percurso de formação desenvolvido à luz da Teoria Antropológica do Didático (TAD).

É importante frisar que um dos pontos relevantes da discussão da pesquisa de Silva (2014) é o de que o autor conseguiu estabelecer com os sujeitos participantes, nos percursos de formação, a relação do professor com o saber matemático à luz da TAD. Isso porque o autor apresentou a partir de um conjunto de ferramentas e instrumentos que contribuíram e permitiram uma análise ampliada sobre o objeto de ensino análise combinatória, como a materialização de um saber, ou seja, como uma problemática enfrentada pela profissão em difundir seu conhecimento.

Seguindo a vertente de Souza (2013) e Silva (2014), Azevedo (2013) realizou estudo com 40 crianças do 5º ano do Ensino Fundamental, divididos em quatro grupos: G1 – construiu árvores de possibilidades por intermédio de um software (Diagramas de Árbol); G2 – construiu árvores de possibilidades em lápis e papel; G3 – resolveu, por desenhos, problemas multiplicativos, mas não combinatórios e G4 – não passou por nenhuma instrução específica em Combinatória. Os grupos instruídos em Combinatória (G1 e G2) avançaram de modo estatisticamente significativo, quando comparados os desempenhos antes e após a instrução, já os dois outros grupos não melhoraram seus desempenhos. O primeiro grupo obteve avanços estatisticamente superiores ao G4, mas o segundo grupo avançou em relação aos desempenhos tanto do G3 quanto do G4.

Fazendo uma análise detalhada da pesquisa de Azevedo (2013), partindo dos trabalhos de Fischbein (1975), Lopes (1998), Esteves (2001), Boga Neto (2005), Campos (2007), Friolani (2007), Filho (2008), Pinheiro (2009), Pessoa (2009), Filho (2010), Lima (2010), Campos (2011), Rocha (2011), Barreto (2012) e Fonseca (2012), à luz do modelo de referência descrito, através de Níveis, chegou-se à constatação de que a construção de árvores de possibilidades é uma forma eficiente de desenvolvimento de resolução de situações combinatórias para os alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, estando de acordo com o nível I: problemas simples que podem ser desenvolvidos por apenas uma operação combinatória.

É importante ressaltar que tanto Barreto (2012) quanto Azevedo (2013) construíram sessões de ensino com estudantes – crianças, jovens e adultos. O primeiro estudo, de Barreto (2012), com estudantes da EJA, em anos escolares correspondentes aos 4º e 5º anos do Ensino Regular, e o segundo estudo, de Azevedo (2013), com crianças do 5º ano do Ensino Fundamental. Os investigados aprenderam a pensar situações combinatórias, por meio de representações simbólicas eficientes, árvores de possibilidades, listagens e aprenderam a lidar com variados tipos de problemas de combinatória.

As pesquisas de Barreto (2012) e Azevedo (2013) apresentam indícios para se chegar a Nível II, através da sistematização, aprendendo a lidar com problemas combinatórios com diferentes técnicas, sem se alcançar uma teorização.

Esse resultado da pesquisa de Campos (2007) reforça que a instrução e a idade, segundo Fischbein (1975), devem possibilitar o desenvolvimento do raciocínio e do pensamento combinatório, para que o ensino/aprendizagem seja feito com sucesso.

Saindo um pouco do Ensino Fundamental e partindo para o Ensino Médio, Albuquerque (2014) desenvolveu uma investigação cujo objetivo geral consistiu em investigar – à luz da Teoria dos Modelos Mentais de Johnson-Laird (1983) – os principais fatores que podem influenciar o raciocínio combinatório dos estudantes e, em razão disso, levá-los a resultados divergentes dos conceitualmente esperados na resolução de problemas de contagem.

A pesquisa é de natureza exploratória, quali-quantitativa, com predominância qualitativa, tendo sido executada no segundo semestre de 2012, em duas turmas de 2º ano da Escola Estadual de Ensino Médio Fazenda Vilanova/RS.

Basicamente, foram coletados dados a partir de entrevistas, com professores, e testes de sondagem foram aplicados aos estudantes das turmas investigadas. Outras informações foram obtidas a partir de questionários e por intermédio de uma gincana Matemática realizada em um blog (desenvolvido pelo

autor para favorecer debates entre professores e estudantes sobre a resolução de problemas matemáticos, em especial, de contagem).

Dentro do contexto estabelecido, foi confirmada a hipótese de que a construção de modelos mentais inadequados é um dos principais fatores de influência que podem levar o pensamento combinatório dos estudantes para resultados divergentes dos conceitualmente esperados. Nesse ano escolar, fica evidente a necessidade de se trabalhar problemas combinatórios balizadores, para se chegar a uma sistematização dos problemas de contagem.

Assim como Filho (2008) e Fonseca (2012), Assis (2014) apresenta uma análise baseada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986), sobre o efeito do processo de formação continuada do objeto matemático análise combinatória, para constituir um tripé formado por situações, invariantes e representações simbólicas dos problemas combinatórios.

O processo foi realizado com um grupo de professoras de uma escola, contudo, a pesquisa traz as inferências realizadas a partir das reflexões de práticas de uma professora.

A pesquisa constituiu-se de uma entrevista inicial e individual com a professora, de seis encontros para formação, nos quais também se incluem duas observações de aula ministrada pela professora e de uma entrevista final, também individual, com a professora participante.

As entrevistas iniciais e finais realizadas com a professora foram baseadas nas entrevistas realizadas por Rocha (2011), nas quais Assis (2014) buscou verificar o efeito dessa formação nos conhecimentos da docente pesquisada, a partir das contribuições de Shulman (2005), de Ball e seus colaboradores (2008), especificamente, no conhecimento especializado do conteúdo e no conhecimento didático desse conteúdo, no caso, da Combinatória.

Os resultados apontam para uma dificuldade no reconhecimento e no trabalho com objeto matemático análise combinatória. No entanto, durante e após as intervenções, há o reconhecimento, pela professora, das dificuldades

apresentadas, mais detalhadamente nas situações e em seus respectivos invariantes, assim como nas representações simbólicas e no desenvolvimento do raciocínio combinatório pelos alunos.

O autor destaca também que a docente reconhece o material manipulável como uma forma de validação das representações para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem dos alunos e, ao longo do processo de formação, faz uso desses instrumentos de manipulação, ao ministrar aulas sobre análise combinatória, sendo estas aulas bastante dinâmicas.

Assis (2014) constata que há uma ressignificação da docente participante quanto a seus conhecimentos, especificamente, o conhecimento especializado da combinatória e o conhecimento didático da combinatória.

Contribuindo com a pesquisa de Assis (2014), o pesquisador Gerdenits (2014) apresenta um estudo que tem por objetivo principal a confecção de um material manipulável para trabalhar sequências de atividades, introduzindo de maneira intuitiva e natural a noção de Análise Combinatória no Ensino Fundamental, nos anos finais, sem a utilização de fórmulas, incentivando o uso do Princípio Multiplicativo, do diagrama de árvore de possibilidades e da enumeração das possibilidades, como uma ferramenta importante para a resolução de vários problemas.

Inicialmente, a pesquisa realizou uma descrição dos documentos curriculares vigentes na Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, seguida de um panorama histórico e de fundamentação teórica do tema.

A pesquisa foi desenvolvida com a aplicação de três atividades, com alunos da/do 5ª série/6º ano a 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental de uma Escola Pública Estadual da cidade de Sorocaba/SP.

Essas atividades foram elaboradas com o objetivo de constatar as dificuldades dos alunos no desenvolvimento de problemas que envolvem o raciocínio combinatório e para propor materiais manipulativos, de baixo custo, que auxiliem na construção e compreensão desse conteúdo, considerados de difícil entendimento por grande parte de alunos e professores.

Novamente, os trabalhos encontram-se de forma corroborativa ao modelo descrito em nossa pesquisa, Fluxograma 07, chegando à constatação que a construção do princípio multiplicativo, do diagrama de árvore de possibilidades e da enumeração das possibilidades é eficiente no desenvolvimento de resolução de situações combinatórias para os alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, ideias primeiras descritas nos trabalhos de Fischbein (1975) e desenvolvidas ao longo das décadas pelos pesquisados como Lopes (1998), Esteves (2001), Boga Neto (2005), Campos (2007), Friolani (2007), Filho (2008), Pinheiro (2009), Pessoa (2009), Filho (2010), Lima (2010), Campos (2011), Rocha (2011), Barreto (2012), Fonseca (2012) e Assis (2014).

Assim como Filho (2008), Fonseca (2012) e Assis (2014), Oliveira (2014) apresenta uma análise baseada na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986), buscando identificar os invariantes operatórios dos professores que lecionam nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, mobilizados de forma estável, durante a análise de situações envolvendo combinatória.

Os dados foram obtidos por meio de questionário e entrevista semiestruturada que visaram a responder a questão norteadora dessa pesquisa: Quais invariantes operatórios os professores que lecionam nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental mobilizam de forma estável, durante a análise de situações envolvendo Combinatória?

É importante destacar que a Teoria dos Campos Conceituais fundamentou as análises dos invariantes operatórios mobilizados, mas foi a Teoria Antropológica do Didático quem embasou a análise dos livros didáticos utilizados pelos sujeitos dessa pesquisa.

O trabalho também investigou o conhecimento dos professores-colaboradores sobre Combinatória e Letramento Combinatório. A pesquisa revelou certo desconhecimento dos professores sobre o currículo prescrito do conteúdo de combinatória.

Quanto ao uso do livro didático, os docentes foram unânimes em concordar ser ele um recurso fundamental para suas aulas, mesmo que alguns deles buscassem outras fontes.

Quanto aos invariantes operatórios mobilizados pelos docentes, as análises apontaram que eles possuem conceitos restritos sobre combinatória, porque mobilizam mais o invariante operatório da enumeração das possibilidades do que os meios para generalizar o princípio multiplicativo.

Oliveira (2014) ressalta que, em situações que envolvam mais de duas etapas e que tenham um número maior de possibilidades, esses invariantes não serão válidos. Dessas constatações, emergiu a necessidade de um curso de formação que contemple a discussão tanto de conhecimentos didáticos quanto matemáticos, o que deve redundar em reflexão criteriosa sobre prática docente.

Ainda baseado na Teoria dos Campos Conceituais, assim como Filho (2008), Fonseca (2012), Assis (2014) e Oliveira (2014), Vega (2014) apresenta um estudo que tem por objetivo analisar a influência do número de etapas de escolha na resolução dos diversos tipos de problemas combinatórios (produto cartesiano, arranjo, combinação e permutação), defendendo a existência de três dimensões fundamentais, significado, invariantes e representações simbólicas.

Essas pesquisas descritas por Filho (2008), Fonseca (2012), Assis (2014), Oliveira (2014) e Vega (2014) apresentam indícios de um novo *design* baseado na existência de três dimensões fundamentais, significado, invariantes e representações simbólicas, diferentemente do descrito por Fichbein (1975), atrelado à organização de atividades crescentes.

A pesquisa de Vega (2014) também se fundamentou em outros autores, entre eles, Pessoa e Borba (2009), que abordam os diversos significados presentes na combinatória e Borba (2010) que trata do raciocínio combinatório.

O presente estudo entende por etapa de escolha as variáveis presentes em uma situação combinatória e defende que o número de etapas de escolha pode influenciar na resolução de problemas combinatórios.

Para essa investigação, participaram 128 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, dos quais todos responderam a um teste de sondagem.

Ao comparar o problema de produto cartesiano que, segundo as pesquisas anteriores (PESSOA; BORBA, 2009, 2010; CORREIA; OLIVEIRA, 2011, e AZEVEDO 2012; BORBA, 2012) era tido como o problema de mais fácil resolução para os alunos, com os problemas de permutação, percebeu-se uma inversão do que havia sido constatado anteriormente, na qual a permutação passou a ser mais fácil que o produto cartesiano quando se controlou o número de etapas de escolha.

Quando se observou as estratégias de resolução, não se verificou a relação entre a representação simbólica, as estratégias utilizadas nem os tipos de problemas, muito menos as etapas de escolha, indicando que as utilizações das estratégias podem estar relacionadas a escolhas pessoais.

O Modelo Analítico atrelado à pesquisa de Fischbein (1975) e os trabalhos de Lopes (1998), Esteves (2001), Boga Neto (2005), Campos (2007), Friolani (2007), Filho (2008), Pinheiro (2009), Pessoa (2009), Filho (2010), Lima (2010), Campos (2011), Rocha (2011), Barreto (2012), Fonseca (2012), Assis (2014), Oliveira (2014) e Vega (2014) revelam que, ao se trabalhar com variados tipos de situações combinatórias, é preciso considerar diferentes etapas de escolha em cada tipo de problema desde o Ensino Fundamental, passando pelo Ensino Médio até chegar ao Ensino Superior e à Formação Continuada.

Almeja-se, assim, com essa pesquisa, contribuir para a reflexão sobre aspectos a serem considerados de ensino da combinatória, desde os Anos Iniciais de escolarização até o Ensino Médio e como deve ser pensada uma sequência de atividades que possam subsidiar o processo de ensino e aprendizagem da Noção de Raciocínio Combinatório.

Temos o trabalho de Caberlin (2015) que propõe o desenvolvimento do um processo de aprendizagem para a probabilidade.

Para tal pesquisa, Caberlin (2015) baseou-se inicialmente nos conteúdos de documentos oficiais e nas pesquisas que abordavam o ensino e/ou a aprendizagem da probabilidade.

A pesquisa de Caberlin (2015) desenvolveu-se buscando relacionar os invariantes operatórios, identificados com os elementos do letramento probabilístico, quando a aprendizagem da probabilidade mobilizava os elementos da probabilidade geométrica, articulando-os com o enfoque clássico e com o enfoque frequentista da probabilidade. O objetivo traçado na pesquisa de Caberlin (2015) estava em articular a Teoria dos Campos Conceituais aos princípios do letramento probabilístico.

Para se alcançar o objetivo traçado por Caberlin (2015), o autor desenvolveu uma sequência de atividades, composta por três situações didáticas adaptadas de pesquisa anterior, desenvolvida em nosso grupo de pesquisa, denominadas “A-Urna de Bernoulli”, “B-Urna de Pixels” e “C-O jogo Franc-Carreau” e essas situações foram aplicadas com um grupo de alunos voluntários, que estavam cursando o terceiro ano do Ensino Médio de uma escola da rede privada da cidade de São Paulo.

A análise dos protocolos construídos pelo autor permitiu identificar que os alunos mobilizavam invariantes operatórios, que possibilitavam aos alunos estimar a probabilidade, articulando o enfoque clássico e frequente que é feito dela, confirmando hipótese de desenvolvimento do letramento probabilístico.

Fazendo uma análise detalhada da pesquisa de Caberlin (2015), é possível observar que não foram todos os alunos que atingiram o letramento probabilístico pleno, o que propunha a resolução de problemas no domínio abstrato, segundo um esquema proposto pelo autor, para um processo de abstração a ser percorrido durante a aprendizagem. A pesquisa de Caberlin (2015) reforça a necessidade de se trabalhar com atividades diferenciadas com discentes, articulando e mobilizando outros saberes necessários para responder tarefas mais complexas.

Em completude à pesquisa de Caberlin (2015), Cunha (2015) propõe uma análise no domínio conceitual de professores sobre os invariantes de problemas combinatórios, baseado na Teoria dos Campos Conceituais, a partir da elaboração de problemas, tendo como objetivo identificar dificuldades e possibilidades de professores em elaborar problemas, envolvendo o raciocínio combinatório e verificando se os professores aplicam os invariantes presentes nos problemas de permutação, arranjo, combinação e produto cartesiano.

Quanto ao processo de elaboração de problemas combinatórios, segundo a pesquisa de Cunha (2015), os professores elaboraram corretamente, porém, a partir das situações que envolviam os invariantes associados a conceito. Tanto Caberlin (2015) quanto Cunha (2015) destacam a necessidade de trabalhar com atividades diferenciadas o tema raciocínio combinatório. Pelo modelo descrito em nossa pesquisa, partiriam de problemas simples no Nível I e para se chegar ao Nível II, através de problemas balizados.

Ainda na vertente da Teoria dos Campos Conceituais, Lima (2015) propõe uma pesquisa para investigar os aspectos da construção dos conceitos de combinatória de alunos do curso de licenciatura em Matemática, quando resolvem problemas associados à combinatória.

Para tanto, Lima (2015) utilizou como aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais, que fornece um quadro teórico acerca do desenvolvimento cognitivo do sujeito diante de situações de aprendizagem e a atrelou esse quadro à Teoria das Situações Didáticas, proposta por Brousseau, baseada em situações adidáticas.

As análises da pesquisa de Lima (2015) evidenciam que, de modo geral, os alunos têm dificuldades em resolver problemas combinatórios, em especial, na classificação das diferentes situações, e conseqüentemente, acabam utilizando fórmulas combinatórias inadequadas durante a resolução.

Isso reforça o Modelo de Referência Alternativo que é necessário no ensino formal associado aos problemas de contagem para se chegar ao ensino básico, com possibilidades de contextualizar respostas Nível I, tendo indícios

que reforçam a necessidade da sistematização, capazes de ordenar ou seriar adequadamente uma resposta.

Em relação aos resultados da pesquisa de Lima (2015), destacamos a importância da lista de possibilidades apresentada na resolução dos problemas combinatórios pelos alunos, por ser uma estratégia que mobiliza outras aprendizagens, podendo ser utilizada em um processo de educação em espiral, um mecanismo de validação dos problemas combinatórios: uma estratégia combinatória mobilizar diferentes conjecturas, que podem ser utilizadas na formalização de fórmulas combinatórias, para se chegar ao Nível II do modelo alternativo.

Além disso, é notória a mobilização pelos discentes da pesquisa de Lima (2015), do princípio fundamental da contagem nos problemas que envolvem arranjo, permutação e produto cartesiano. Os problemas de combinação, os alunos optaram por outras estratégias, como a listagem de possibilidades e a utilização de fórmulas.

Esse resultado reforça a necessidade de trabalhar com diferentes problemas, chamados problemas balizados, para se chegar à sistematização e generalização.

Em relação à pesquisa de Lima (2015), observamos que os alunos apresentaram incorporação de novas estratégias combinatórias, como a utilização do Princípio Fundamental da Contagem e através de conjectura para se chegar a indícios de uma formalização.

Pinheiro (2015) produz uma investigação, explorando as tarefas, as técnicas e os discursos tecnológico-teóricos associados à Noção de Raciocínio Combinatório, identificando os conteúdos em sete livros didáticos, editados no período de 1895 a 2009.

O autor destaca que, nos livros editados entre 1940 e 1960, o enfoque estava na resolução de problemas, principalmente, com a intenção de treinar fórmulas de arranjo simples, de permutação simples e de combinações simples.

Nos anos 60, revelou que a principal finalidade dos problemas combinatórios era o desenvolvimento do binômio de Newton e a resolução de potências de polinômios.

Entre os anos de 1960 e 1980, os livros didáticos apresentavam as técnicas usadas para calcular arranjos simples, arranjos com repetição e permutações simples, marcados pelo uso do princípio multiplicativo, aditivo, da inclusão-exclusão e da árvore de possibilidades na solução de certos tipos de problemas.

No período de 1980 a 2009, destaca o fato de os livros didáticos apresentarem grande uso na resolução de problemas, envolvendo árvore de possibilidades e o princípio multiplicativo.

O destaque da pesquisa de Pinheiro (2015) está nos inúmeros estudos realizados nos livros didáticos de 1895 a 2009, identificando quais tarefas podem ser enfrentadas na educação elementar, destacando as diferentes construções de agrupamentos e os tipos de tarefa de Noção de Raciocínio Combinatório que podem ser utilizadas na Educação Básica, sem necessariamente sistematizá-los e/ou formalizá-los. Esses resultados apontam para o Nível I, do Modelo de Referência Alternativo, descrito nesta pesquisa.

Guimarães (2015) propõe analisar as interações que emergem quando estudantes do 4º ano do Ensino Fundamental, mediados pela Maquete Tátil, solucionam tarefas envolvendo conceitos básicos de Probabilidade.

Foi utilizado como alicerce teórico para a construção desta pesquisa o modelo de letramento probabilístico, proposto por Gal e a Teoria da Instrumentação, proposta por Rabardel.

Os resultados da análise instrumental apontam que foi importante a utilização da maquete para motivar os estudantes, para auxiliar o registro dos resultados, facilitando os processos de descobertas, a memorização de procedimentos e as percepções de propriedades.

Esses resultados corroboram o Modelo Analítico que retrata o mecanismo do material manipulável para a inserção dos problemas combinatórios no ensino formal.

Ressalte-se também que a análise instrumental, a partir do olhar sobre as interações, conhecer de forma mais ampla todos os polos da pesquisa, constatando que as escolhas iniciais da maquete tátil, enquanto instrumento mediador no processo de aprendizagem.

Também é percebido na pesquisa que os conceitos básicos de probabilidade como objeto matemático que foram investigados, por intermédio dos estudantes do quarto ano do Ensino Fundamental, foram realmente adequados, bem como atestar a viabilidade do uso desta maquete nas escolas da rede pública de ensino e em sala de aula regular, incorporando as modificações sugeridas ou indicadas por essa pesquisa.

Espera-se que os resultados do estudo de Guimarães (2015), juntamente com as pesquisas de Fischbein (1975), atreladas aos trabalhos de Lopes (1998), Esteves (2001), Boga Neto (2005), Campos (2007), Friolani (2007), Filho (2008), Pinheiro (2009), Pessoa (2009), Filho (2010), Lima (2010), Campos (2011), Rocha (2011), Barreto (2012), Fonseca (2012), Assis (2014), Oliveira (2014), Vega (2014) e Pinheiro (2015), modelem o estudo bibliográfico e juntamente com a proposta do Modelo de Referência Alternativo, construído na pesquisa epistemológica, possam contribuir para a construção de um modelo epistemológico de referência, visando ao desenvolvimento da Noção de Raciocínio Combinatório, no âmbito da Educação Matemática para a formação continuadas de professoras da Educação Básica.

Na pesquisa de Schmidt (2016), o objetivo é investigar como são empregados os registros de representação semiótica, nas investigações stricto sensu, produzidas por instituições brasileiras, que abordam o desenvolvimento do raciocínio combinatório, por meio de atividades didáticas, através da participação de alunos do Ensino Médio.

O estudo de Schmidt (2016) está baseado na meta-análise qualitativa, que pode ser entendida como a realização de uma revisão sistemática de um conjunto de pesquisas com a intenção de culminar em uma síntese interpretativa por meio da análise e dos dados primários destas (BICUDO, 2014).

Foi observado na pesquisa que a mobilização dos registros de representação semiótica, na resolução de atividades de cunho combinatório, não visa somente à apreensão dos objetos matemáticos, mas, principalmente, a um suporte para a resolução desse tipo de problemas.

A pesquisa de Schmidt (2016) corrobora os trabalhos de Fischbein (1975), Lopes (1998), Esteves (2001), Boga Neto (2005), Campos (2007), Friolani (2007), Filho (2008), Pinheiro (2009), Pessoa (2009), Filho (2010), Lima (2010), Campos (2011), Rocha (2011), Barreto (2012), Fonseca (2012), Assis (2014), Oliveira (2014), Veja (2014), Pinheiro (2015) e Guimarães (2015), apontando para o Modelo Analítico, para a necessidade de se trabalhar com diferentes tipos de problemas combinatórios.

Silva (2016a) realizou um estudo que buscava analisar as abordagens, das orientações curriculares, das orientações documentos sobre o objeto análise combinatória, em livros didáticos de Matemática destinados à Educação Básica.

Para tal investigação, Silva (2016a) construiu um estudo bibliográfico, a partir da análise de artigos publicados em periódicos, em eventos científicos e o levantamento das orientações curriculares, em documentos oficiais, para o ensino da combinatória na Educação Básica.

Assim como Pinheiro (2015), Silva (2016a) destaca a potencialidade do estudo da Noção de Raciocínio Combinatório, identificando quais tarefas podem ser enfrentadas na educação elementar, a partir das análises documentais e apoiadas nas pesquisas que destacam a utilização de diferentes construções e diferentes tipos de tarefa para se chegar à Noção de Raciocínio Combinatório, sem necessariamente sistematizá-los ou até mesmo formalizá-los. Esses resultados vão ao encontro do Nível I, descrito no modelo, nesta pesquisa.

Seguindo a proposta de Pinheiro (2015) e Silva (2016a), Silveira (2016) descreve uma pesquisa que buscou construir uma abordagem em sala de aula via Resolução, Exploração e Proposição de problemas, que podem contribuir/potencializar o ensino-aprendizagem de Análise Combinatória.

Para a construção da pesquisa, o autor realizou uma revisão de literatura, com o intuito de compreender as contribuições de outros pesquisadores acerca do tema pesquisado, para que se pudesse perceber o que é possível aprofundar e/ou acrescentar para a comunidade científica, no que diz respeito ao processo de ensino-aprendizagem da Análise Combinatória.

Além disso, a pesquisa foi realizada através de uma entrevista com professores de Matemática, com o intuito de conhecer as suas ideias acerca do ensino-aprendizagem de combinatória.

Os resultados da pesquisa de Silveira (2016) evidenciam que, através da abordagem via Resolução, Exploração e Proposição de problemas, foi possível acompanhar o crescimento dos alunos, que criaram suas próprias ideias para resolver os problemas, e, conseqüentemente, encontraram múltiplas estratégias de resolução; e, posteriormente, justificaram suas soluções, participando efetivamente da construção do seu conhecimento em sala de aula.

Aliás, os alunos engajaram-se em atividades de exploração Matemática a qual lhes possibilitaram a apreensão de ideias essenciais de Análise Combinatória, como também assumiram o papel de investigadores em sala de aula, fazendo generalizações, formulando novos problemas e, em seguida, os resolvendo.

Essa pesquisa permitiu concluir que os alunos podem ser potencializados para resolução de problemas de Análise Combinatória com foco não apenas na busca da solução do problema, mas no processo da resolução e podendo ir muito além da formalização, como a realização de um trabalho de proposição e exploração de novos problemas.

Acompanhando a proposta de investigação de Silveira (2016), Ambrozi (2018) desenvolve uma pesquisa baseada no ensino voltada para aprimorá-lo, o

raciocínio combinatório, através da utilização de jogos no planejamento, na aplicação e na avaliação de uma sequência didática inspirada nas orientações de Zabala, para subsidiar a prática docente no ensino de Análise Combinatória.

A pesquisa é fundamentada na visão construtivista do fazer e compreender, de Piaget, e resultou como produto desse trabalho uma sequência didática denominada Dinâmica Combinatória, que integra as atividades dinamizadas numa sequência de ensino com ações direcionadas para a compreensão dos conceitos combinatórios.

Juntamente com esse processo de compreensão, construiu-se um espaço para os alunos explorarem, com orientação do professor, toda a simbologia que contempla o conteúdo de Análise Combinatória, a fim de que conhecessem as fórmulas que integram as técnicas de contagem.

A análise dos dados obtidos com a pesquisa de Ambrozi (2018) foi qualitativa e avaliou-se formulários, diários de anotações, registros fotográficos, entre outros, revelando uma aprendizagem que envolve os estudantes para além das expectativas do pesquisador.

Sendo assim, a Dinâmica Combinatória, proposta por Ambrozi (2018), tornou-se um recurso didático com grande potencial para a aprendizagem e para o desenvolvimento da Noção de Raciocínio Combinatório, por proporcionar um processo de ensino e aprendizagem de Análise Combinatória dinâmica e atrativa para a Educação Básica.

Assim como Pinheiro (2015), Silva (2016a), Silveira (2016), Ambrozi (2018), Magalhães (2017) apresenta uma investigação baseada nas estratégias metodológicas voltadas ao ensino da Noção de Raciocínio Combinatório, especialmente voltados para os anos iniciais de escolarização.

Magalhães (2017) propõe realizar uma pesquisa qualitativa e documental, utilizando como instrumentos de pesquisa uma lista de problemas que envolvem os significados de combinatória e um questionário contendo questões que envolvem o trabalho com esse tipo de problema.

Os resultados da pesquisa de Magalhães (2017) revelam que boa parte das professoras pesquisadas, de um universo de seis (06), possui um conhecimento incipiente sobre o ensino desses tipos de problemas, apresentando dúvidas com relação às suas representações e seus invariantes.

Na pesquisa de Magalhães (2017), os professores pesquisados não demonstraram o conhecimento didático necessário para ensinar esse conteúdo, pelo fato de suas respostas nos questionários revelarem contradições.

Apesar de os professores não trabalharem com representações que possibilitam melhor aprendizagem do conteúdo em questão, as professoras apresentaram indícios de certo conhecimento sobre o currículo, quando afirmaram que esse tipo de conteúdo deve ser trabalhado nos anos iniciais de escolarização.

Para contribuir com a pesquisa de Magalhães (2017), Azevedo (2017) relata a experiência didática de uma professora que optou por apresentar problemas de contagem no Ensino Fundamental.

Propondo um trabalho investigativo cujo principal objetivo era analisar como alunos do Ensino Fundamental solucionam problemas simples da análise combinatória – não conhecendo suas definições, conceitos e fórmulas – e, a partir desta investigação, novas formas de trabalhar esse tema com alunos mais novos.

O Modelo Analítico está em acordo com as pesquisas de Fischbein (1975) e os trabalhos de Lopes (1998), Esteves (2001), Boga Neto (2005), Campos (2007), Friolani (2007), Filho (2008), Pinheiro (2009), Pessoa (2009), Filho (2010), Lima (2010), Campos (2011), Rocha (2011), Barreto (2012), Fonseca (2012), Assis (2014), Oliveira (2014), Vega (2014), Pinheiro (2015), Guimarães (2015) e Schmidt (2016) e apresenta formas de se trabalhar o tema Noção de Raciocínio Combinatório na Educação Básica.

Reforçando as pesquisas supracitadas e o modelo, Martins (2018) destaca o entendimento de que o ensino de combinatória está centralizado em definições e fórmulas, em detrimento do desenvolvimento do raciocínio

estratégico, não favorece a aprendizagem e a capacidade de resolver problemas.

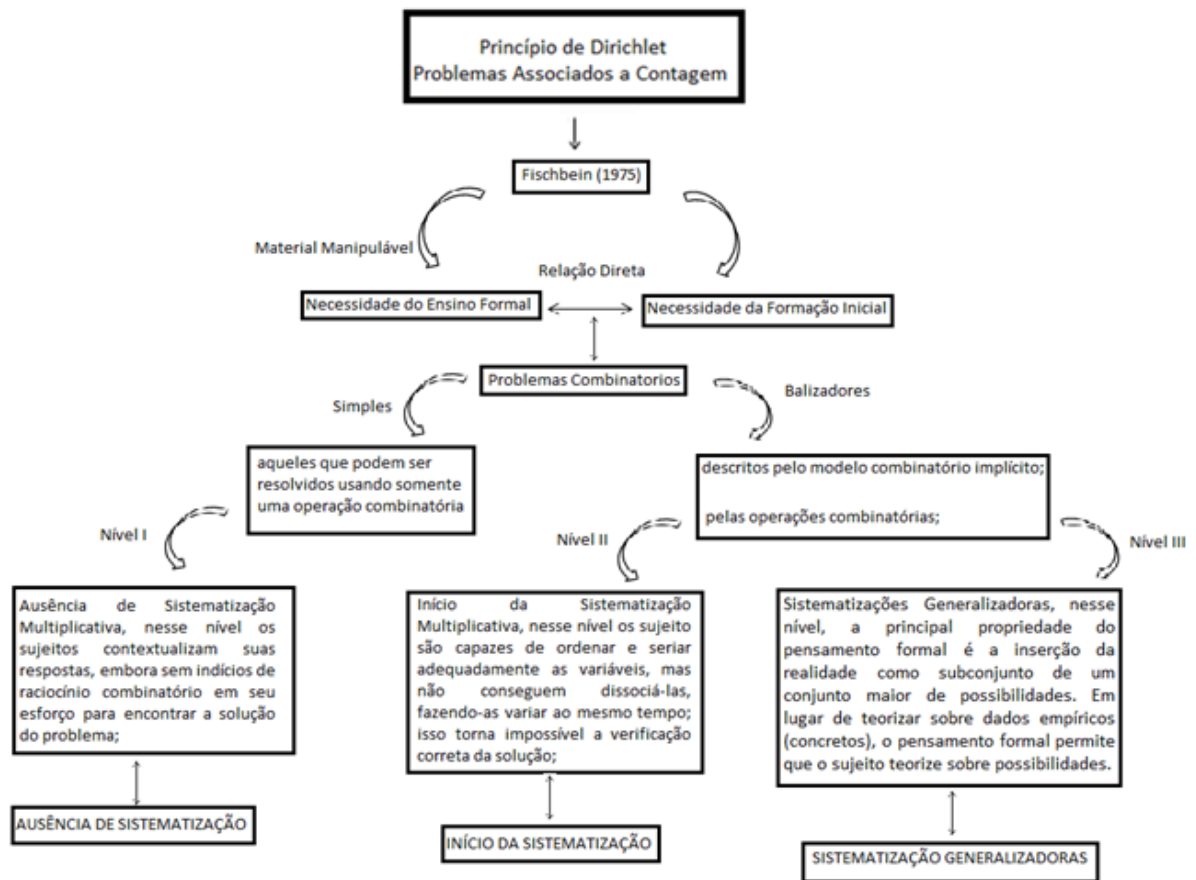
Esse estudo exploratório-descritivo foi realizado, ao longo dos anos 2016 e 2017, especificamente, nas análises das representações dos professores relativas à combinatória, por meio dos pressupostos da História Cultural, baseados nas representações prática e nas apropriações.

A pesquisa constata que a maioria dos professores considera que a Análise Combinatória é um dos tópicos mais difíceis de ensinar no Ensino Médio e declara que o tema não foi devidamente estudado na sua formação inicial ou na formação continuada. Além disso, para suprir essa carência, eles utilizam apenas o livro didático e a internet. Os professores pesquisados também não se apercebem da autonomia que possuem em meio às relações de estratégia e tática, no contexto escolar.

Esta triagem foi construída a partir de 1998 – 2019 e dos trabalhos de Fischbein et al. (1970) e Fischbein (1975), dos sites dos programas de pós-graduação de universidades brasileiras e internacionais (grande área Multidisciplinar, área de Ensino de Matemática) e do Banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

Podemos destacar que a pesquisa de Fischbein (1975), a qual apresenta indícios de um modelo epistemológico de referência alternativo, baseado na organização praxeológica de complexidade crescentes, acrescida do estudo epistêmico, pode configurar um modelo epistemológico de referência alternativo, baseado na existência de três Níveis: Nível I – Ausência de Sistematização; Nível II – Início da Sistematização; e Nível III – Sistematização Generalizadoras.

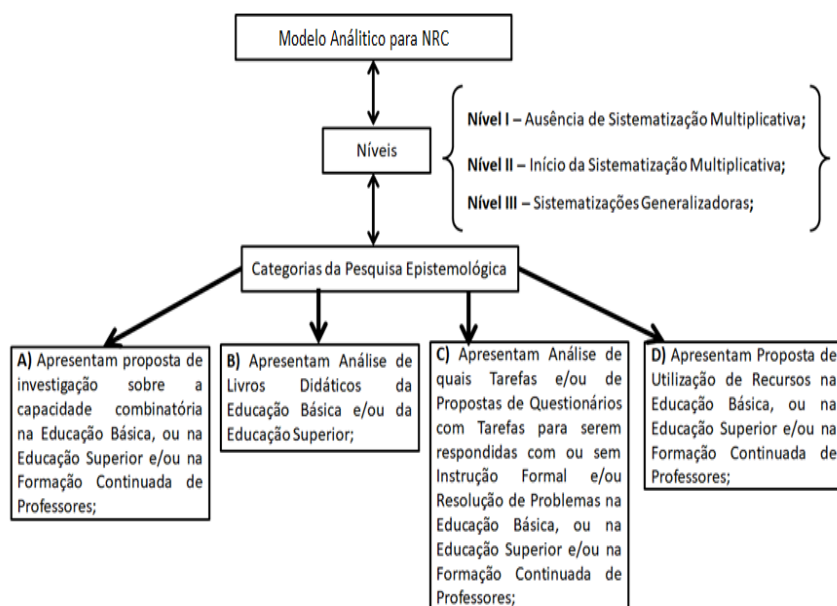
FLUXOGRAMA 8: MODELO ANALÍTICO PARA A NOÇÃO DE RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO EM APERFEIÇOAMENTO.



FONTE: Construção do autor.

Estes pontos preliminares foram analisados e foram importantes para se construir as categorias que serão utilizadas no capítulo III, uma proposta de Modelo Analítico para a Noção de Raciocínio Combinatório, Fluxograma 9, a seguir:

FLUXOGRAMA 9: MODELO ANALÍTICO PARA A NOÇÃO DE RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO.



Categorias	Descrição
Apresentam proposta de investigação sobre a capacidade combinatória na Educação Básica, ou na Educação Superior e/ou na Formação Continuada de Professores.	A capacidade combinatória pode ser entendida como um tipo de pensamento ligado à contagem que segue além da enumeração de elementos de um conjunto e se estende à contagem de grupos de objetos, ou seja, de subconjuntos, tendo o raciocínio multiplicativo como base.
Apresentam Análise de Livros Didáticos da Educação Básica e/ou da Educação Superior	Evidencia uma variedade de situações combinatórias presentes em coleções de livros didáticos, mas em quantidade muito reduzida, quando comparados ao total de problemas de multiplicação e contagem.
Apresentam Análise de quais Tarefas e/ou de Propostas de Questionários com Tarefas para serem respondidas com ou sem Instrução Formal e/ou Resolução de Problemas na Educação Básica, ou na Educação Superior e/ou na Formação Continuada de Professores.	Apresenta como ponto central a resolução de problemas, o conhecimento matemática ganha sentido quando os alunos se deparam com situações desafiadoras e são motivados para encontrar diferentes estratégias de resolução, produzindo conhecimentos e desenvolvendo habilidades ligadas ao raciocínio multiplicativo.
Apresentam Proposta de Utilização de Recursos na Educação Básica, ou na Educação Superior e/ou na Formação Continuada de Professores.	Apresenta a associação com o modelo estudado para a utilização de recursos materiais, para se obter um número maior de decisões, e ainda assim, permitindo assim que estas decisões se tornem suas.

FONTE: Construção do autor.

CAPÍTULO IV – ANÁLISES DOS TRABALHOS: A PARTIR DO MODELO ANALÍTICO PARA NOÇÃO DE RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO

De uma forma muito simplificada, pode-se dizer que a dimensão ecológica de um problema didático contém as questões que giram em torno da seguinte questão: por que as coisas (OMs e ODs) são como são na contingência institucional e quais são as condições que elas exigiriam para ser de outra forma dentro do universo do possível?

(GASCÓN, 2011, p. 217, tradução nossa).

Nesse capítulo, apresentaremos a organização da pesquisa, após elencarmos quatro categorias que emergiram, a partir das pesquisas encontradas durante a produção dos dados desta investigação. A primeira categoria foi elencada como: **A)** Apresentam proposta de investigação sobre a capacidade combinatória na Educação Básica, ou na Educação Superior e/ou na Formação Continuada de Professores; **B)** Apresentam Análise de Livros Didáticos da Educação Básica e/ou da Educação Superior; **C)** Apresentam Análise de quais Tarefas e/ou de Propostas de Questionários com Tarefas para serem respondidas com ou sem Instrução Formal e/ou Resolução de Problemas na Educação Básica ou na Educação Superior e/ou na Formação Continuada de Professores; **D)** Apresentam Proposta de Utilização de Recursos na Educação Básica ou na Educação Superior e/ou na Formação Continuada de Professores;

4.1 – ESTUDO DA DIMENSÃO ECOLÓGICA

O estudo da dimensão ecológica é fundamental para a compreensão da relação entre seres humanos e o meio ambiente. Nesse sentido, a abordagem Gascón é uma das mais relevantes, pois busca integrar a ecologia com a psicologia e a sociologia.

A perspectiva Gascón se baseia na ideia de que a ecologia não pode ser compreendida apenas a partir de uma análise biológica ou física, mas deve levar em conta as dimensões psicológicas e sociais do comportamento humano. Assim, a ecologia é vista como um sistema complexo, em que as interações entre os seres humanos e o meio ambiente são influenciadas por fatores psicológicos e sociais.

Um dos principais conceitos da abordagem Gascón é o de "identidade ecológica", que se refere à forma como os indivíduos se identificam com o meio ambiente e como essa identidade influencia suas atitudes e comportamentos em relação à natureza. Segundo Gascón, a identidade ecológica pode ser influenciada por fatores como a cultura, a educação e a experiência pessoal.

Outro aspecto importante da abordagem Gascón é a análise das relações entre os seres humanos e outros seres vivos. Nesse sentido, a perspectiva Gascón destaca a importância da empatia e da solidariedade com os outros seres vivos, bem como a necessidade de reconhecer a interdependência entre todas as formas de vida.

Além disso, a abordagem Gascón também enfatiza a importância da participação da sociedade na gestão e conservação do meio ambiente. Segundo Gascón, a ecologia deve ser vista como uma responsabilidade coletiva, e não apenas como uma questão individual.

Sendo assim, o estudo da dimensão ecológica é fundamental para a compreensão da relação entre seres humanos e o meio ambiente. A abordagem Gascón é uma das mais relevantes nesse sentido, pois busca integrar a ecologia com a psicologia e a sociologia, destacando a importância da identidade ecológica, da empatia com outros seres vivos e da participação da sociedade na gestão e conservação do meio ambiente.

É importante destacar que a dimensão ecológica é uma das quatro dimensões propostas por Chevallard para a análise dos processos de ensino e aprendizagem. Essa dimensão está relacionada à compreensão das relações entre os seres vivos e seu ambiente, e como essas relações influenciam a sobrevivência e a evolução das espécies.

Uma das principais abordagens utilizadas no estudo da dimensão ecológica é a ecologia de comunidades, que se concentra na análise das interações entre diferentes espécies em um mesmo ambiente. Essa abordagem leva em consideração fatores como a competição por recursos, a predação, a simbiose e outros processos que influenciam a dinâmica das comunidades.

Outra abordagem importante é a ecologia de paisagem, que se concentra na análise dos padrões espaciais e temporais das interações entre os seres vivos e seu ambiente. Essa abordagem leva em consideração fatores como a distribuição das espécies, a conectividade entre os habitats e a influência das mudanças climáticas na dinâmica das paisagens.

Além disso, a dimensão ecológica também está relacionada à conservação da biodiversidade e à gestão dos recursos naturais. Nesse sentido, a ecologia aplicada tem um papel fundamental na identificação e implementação de estratégias para a conservação das espécies e dos ecossistemas.

Por fim, é importante destacar que o estudo da dimensão ecológica é essencial para a compreensão dos processos que sustentam a vida na Terra e para a identificação de estratégias para a conservação da biodiversidade e dos recursos naturais. Através de abordagens como a ecologia de comunidades e a ecologia de paisagem, é possível compreender as interações entre os seres vivos e seu ambiente e identificar formas de promover a sustentabilidade e a conservação dos ecossistemas.

Na dimensão ecológica, buscamos verificar se foram feitos avanços na compreensão das condições necessárias para o estudo desse objeto, problemas associados à contagem, e se foram elucidadas a origem e natureza das restrições que atualmente impedem que o objeto matemático referido exista, por intermédio do programa epistemológico de investigação (GASCÓN, 2003).

Como a criação didática para institucionalização do saber, para análise do estudo bibliográfico e corpus da pesquisa que compõem o Modelo Analítico para a Noção de Raciocínio Combinatório.

4.2 - Constituição dos Trabalhos da Literatura

Essa pesquisa deu-se em duas etapas e foi realizada usando como fonte de pesquisa o catálogo de teses e dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES.

Primeiramente, a partir da digitação da expressão Análise Combinatória foram identificados 898 relatórios de pesquisa, entre teses e dissertações, com publicação a partir do ano de 1998 até 2019. Alguns desses relatórios, porém, não se referiam a investigações envolvendo a combinatória numa perspectiva educacional o que exigiu uma segunda etapa. Nesta, a seleção foi feita a partir dos títulos de cada trabalho. Chegou-se, assim, ao número de 44 relatórios.

A Tabela 3 resume como se deu, em termos de quantidade, a distribuição dessas produções, no período de 1998 a 2019.

Tabela 3: Número de teses e dissertações sobre combinatória produzidas no Banco de dados da Capes no período de 1998 a 2019, atrelado a essas pesquisas o Trabalho de Fischbein (1975).

Ano	Número de Dissertações	Número de Teses	Total de produções
1975		1	1
1998 - 2004	3		3
2005 - 2009	5	1	6
2010 - 2014	14	2	16
2015 - 2019	14	4	18
Total	36	8	44

Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir os dados apresentados na tabela 2, dois pontos são observados. O primeiro deles é o número de 18 trabalhos, concluídos entre 2015 e 2019, o que corresponde a aproximadamente 40,9% das produções levantadas na segunda seleção. O segundo é que, dentre essas 18 produções, quatro delas são teses defendidas em 2015 e em 2019. Além delas, a tabela 2 apresenta uma tese entre os anos de 2005 a 2009 e duas teses entre 2010 a 2014. Por conta dessas observações, a princípio essas 44 produções constituiriam o corpus dessa pesquisa.

A distribuição dos trabalhos, apresentada na tabela 2, revela uma prevalência de produções oriundas do mestrado. As características desse tipo

de pós-graduação lato e *stricto sensu* podem justificar esse dado. De acordo com o Portal da CAPES, o mestrado profissional e o acadêmico têm por objetivo capacitar os profissionais das diferentes áreas do conhecimento, a fim de atenderem a necessidades do mercado de trabalho.

Das 36 dissertações levantadas, 33 eram oriundas do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Trata-se de um programa de mestrado com abrangência nacional na modalidade semipresencial. De acordo com o seu *site*, faz parte desse Programa uma rede de instituições de ensino superior, no contexto da Universidade Aberta do Brasil/CAPES, sob a coordenação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e com o apoio do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA). Esse Programa procura oferecer aprimoramento profissional a professores de Matemática que atuam na Educação Básica, sobretudo os das redes públicas de ensino, com atenção maior à formação Matemática para a prática docente.

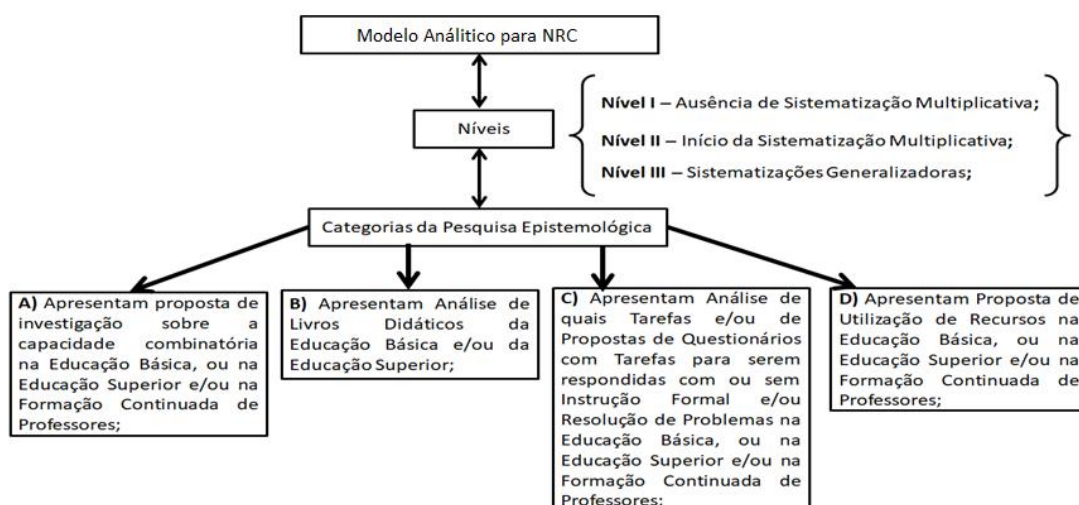
De acordo com Silva (2015), as dissertações provenientes desse programa se diferenciam do modelo científico do mestrado acadêmico por permitir ao mestrando a apresentação dos resultados de seus estudos como relatos de experiências:

Mesmo mantendo o modelo científico de dissertação, o trabalho final de curso a ser apresentado pelo mestrando que cursa o PROFMAT se diferencia da do Mestrado Acadêmico. O mestrando pode apresentar o relato de uma experiência de implementação de novos produtos ou estratégias na área educacional, com a finalidade de melhorar a qualidade do ensino em uma área específica de Matemática. (SILVA, 2015, p.29).

Por se tratar de produções que trazem esse diferencial, optou-se por limitar o corpus desse estudo a 44 produções: 36 dissertações de mestrado e 8 teses de doutorado.

O próximo passo foi desenhar o cenário das produções sobre o ensino da combinatória, considerando quatro grupos de perspectivas investigativas, tendo por referência o Modelo de Referência Epistemológico Alternativo, fluxograma a seguir, para propor quatro categorias que podem ser utilizadas para agrupar e construir uma compreensão das pesquisas.

FLUXOGRAMA 10: MODELO ANALÍTICO PARA A NOÇÃO DE RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO.



FONTE: Construção do autor.

Passamos a apresentar os trabalhos por categoria, Tabela 4, destacando de cada um deles o seu autor, seu título, a instituição onde foi realizado e o ano de sua publicação. Em seguida, são tecidas as análises concernentes a cada categoria.

4.3 – Análises dos Dados

4.3.1 – Apresentam proposta de investigação sobre a capacidade combinatória na Educação Básica, ou na Educação Superior e/ou na Formação Continuada de Professores

A capacidade combinatória pode ser entendida como um tipo de pensamento ligado à contagem que segue além da enumeração de elementos de um conjunto e se estende à contagem de grupos de objetos, ou seja, de subconjuntos, tendo o raciocínio multiplicativo como base.

Foram analisadas 12 dissertações e 2 teses, conforme a tabela 4.

Tabela 4: Dissertações e tese que apresentam investigação na Educação Básica ou na formação continuada.

AUTOR	TÍTULO	INSTITUIÇÃO	ANO
ESTEVES	Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do Ensino Fundamental.	PUC SP	2001 D
BOGA NETO	Uma proposta para ensinar os conceitos da análise combinatória e de probabilidade: uma aplicação do uso da história da Matemática, como organizador prévio e dos mapas conceituais.	UFPA	2005 D
ROCHA	Investigando a aprendizagem da resolução de problemas combinatórios em licenciatura em Matemática	UEPB	2006 D
PINHEIRO	O ensino de análise combinatória a partir de situações problema	UEPA	2008 D
PESSOA	Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio.	UFPE	2009 T
ROCHA	Formação docente e ensino de problemas combinatórios - diversos olhares, diferentes conhecimentos	UFPE	2011 D
DURO	Análise Combinatória e Construção de Possibilidades: O Raciocínio Formal no Ensino Médio.	UFRGS	2012 D
SILVA	A Relação do Professor com o Saber Matemático e os Conhecimentos Mobilizados em sua Prática.	UFPA	2014 T

ALBUQUERQUE	Uma investigação no Ensino Médio sobre raciocínio combinatório	UNIVATES	2014 D
ASSIS	Conhecimentos de combinatória e seu ensino em um processo de formação continuada reflexões e prática de uma professora	UFPE	2014 D
DIAS	Proposta de Atividades Potencialmente Interdisciplinares Envolvendo Noções de Análise Combinatória e Probabilidades	UNIGRANRIO	2015 D
TREVIZAN	Ensinando Matemática por meio de situações potencialmente adidáticas: estudo de casos envolvendo análise combinatória.	USP	2015 D
SCHMIDT	Raciocínio combinatório: uma metanálise a partir dos registros de representações semiótica	UFSM	2016 D
SILVA	Raciocínio Combinatório e Criatividade Matemática no Ensino Médio	UESC	2017 D

FONTE: Elaboração do autor

De um modo geral, as produções dessas categorias propunham intervenções (propostas de ensino ou investigações ou formação continuada ou sequências didáticas), baseadas na metodologia da resolução de problemas, dando ênfase ao uso do princípio multiplicativo, Nível I - Ausência de Sistematização Multiplicativa. Nesse nível, os sujeitos das pesquisas contextualizam suas respostas, embora sem indícios de raciocínio combinatório.

Algumas dessas pesquisas buscaram agregar outras perspectivas como a necessidade em se trabalhar com diferentes construções, diferente agrupamentos, sem necessariamente sistematizar ou até mesmo formalizar (ESTEVES, 2011; PINHEIRO, 2008; PESSOA, 2009; ROCHA, 2011; DURO, 2012; ALBUQUERQUE, 2014), com a criatividade Matemática (SILVA, 2017), a história da Matemática (BOGA NETO, 2005), a interdisciplinaridade (DIAS, 2015), a formação de professores (ROCHA, 2006; ROCHA, 2011; SILVA, 2014, ASSIS; 2014) e as situações adidáticas (TREVIZAN, 2015). Arelados às perspectivas, estão os quadros teóricos como a Resolução de Problemas segundo Onuchic e Allevado (2011), a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, o Registro de Representações Semióticas de Duval, as ideias de Vale, Gontijo e Pinheiro (2008) sobre Criatividade Matemática e a Zona de Desenvolvimento Proximal, concebida por Vygotsky.

Nas produções (10), as intervenções se deram em turmas do segundo ano do Ensino Médio de redes públicas de ensino. As exceções foram Rocha (2006), Rocha (2011); Silva (2014), Assis (2014) Dias (2015), que realizaram aplicações com professores. Sobre os resultados, todos os autores relataram que as intervenções conduzidas se mostraram eficazes no que diz respeito à aprendizagem dos conceitos relacionados à análise combinatória.

Em todos esses trabalhos analisados, parece haver um sentimento comum de que o ensino da análise combinatória, baseado em classificação de problemas e o respectivo uso de fórmulas, é pouco eficaz e que é necessário buscar meios de se propiciar um ensino que garanta a construção do raciocínio combinatório. Esse justifica um número maior de produções que apresentam propostas de intervenções baseadas na resolução de problemas e no uso do princípio multiplicativo, voltados à formação de professores para a Educação Básica.

Contudo, há ainda necessidade de se ampliar as discussões dos resultados obtidos por essas investigações, analisando mais profundamente outras questões como as de ordem epistemológica e didática inerentes ao ensino e à aprendizagem da combinatória.

E, nesse sentido, torna-se importante o investimento em pesquisas que envolvam estudantes de diferentes níveis de ensino, a começar dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, a fim de se compreender os processos de formação do raciocínio combinatório do aluno, ao longo de sua vida (BORBA, 2016; PESSOA; BORBA, 2010; PLACHA; MORO, 2009) e um olhar para a formação continuada de professor da Educação Básica.

4.3.2 – Apresentam Análise de Livros Didáticos da Educação Básica e/ou da Educação Superior

Essa categoria evidencia que há uma variedade de situações combinatórias presentes em coleções de livros, mas em quantidade muito reduzida, quando comparada ao total de problemas de multiplicação.

Foram analisadas 4 dissertações e 2 teses, conforme a Tabela 5.

Tabela 5: Dissertações e tese que apresentam análise de livros.

Autor	Título	Instituição	Ano
LOPES	A probabilidade e a estatística no Ensino Fundamental: uma análise curricular.	UNICAMP	1998 D
FRIOLANI	O Pensamento Estocástico nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental.	PUC – SP	2007 D
PINHEIRO	Análise Combinatória. Organizações Matemática e Didáticas nos livros escolares no período entre 1895 e 2009.	PUC – SP	2015 T
SILVA	A combinatória: abordagem em documentos oficiais, em resultados de pesquisas e em livros didáticos do Ensino Fundamental	UFPE	2016 D
MORAES	Organizações Matemáticas nos livros didáticos nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: o caso da Noção de Raciocínio Combinatório	UFPA	2016 D
MELO	Ecologia do Saber: o caso da análise combinatória em documentos oficiais e livros didáticos da Educação Básica	UFPE	2018 T

FONTE: Elaboração do autor

As investigações dessa categoria – todas de natureza bibliográfica documental – tiveram por objetivo os diferentes contextos e abordagens da combinatória nos livros didáticos e nos documentos curriculares brasileiros, ao longo dos anos.

Pinheiro (2015) e Moraes (2016) focaram na identificação de características de inserção dos saberes da Análise Combinatória no universo escolar brasileiro, por meio dos livros didáticos. Lopes (1998) e Melo (2018), por sua vez, procuraram estudar esses conteúdos em momentos importantes para a educação brasileira: nas reformas educacionais de Campos e Capanema, nos

programas mínimos de Simões Filho, no movimento da Matemática moderna e na educação Matemática. Silva (2016) objetivou analisar as abordagens da combinatória — e as possíveis consonâncias entre elas — presentes em documentos oficiais, em pesquisas sobre o conhecimento dos alunos e o ensino deste tema e em livros didáticos. Friolani (2007) investigou a organização descrita nos livros didáticos do Ensino Fundamental (5ª a 8ª série), tendo como referente o tema “tratamento da Informação” e se essa organização favorece a construção do pensamento estocástico, referência ao ensino de combinatória, estatística e probabilidade, para o desenvolvimento da capacidade de interpretação do aluno, relacionando às problemáticas desenvolvidas no âmbito escolar e extraescolar.

As duas teses e a dissertação analisadas se apoiaram na Teoria Antropológica do Didático – TAD de Chevallard. Pinheiro (2015) e Moraes (2016) consideraram, além da TAD, os Modelos Didáticos de Gascón, enquanto Melo (2018) apoiou-se em outros dois conceitos bem próximos à TAD: a Transposição Didática e a Ecologia do Saber. No estudo de Silva (2016), a análise dos dados foi conduzida a partir dos pressupostos da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, sobretudo, na fase de análise de livros didáticos.

Os resultados de Pinheiro (2015), Moraes (2016) e Melo (2018) sugerem que, durante um longo período, a maneira como os livros didáticos abordaram a análise combinatória sofreu pouca variação, sendo apresentada como parte do conteúdo do 2º ano do Ensino Médio. Com a implementação de documentos curriculares, como os Parâmetros Curriculares Nacionais, nos idos da década de 1990, e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), no final de 2017, os livros didáticos passaram a inserir a combinatória já nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

As investigações de Silva (2016) tiveram por objetivo analisar o tema análise combinatória, presente em documentos curriculares, em livros didáticos e em pesquisas, a fim de observar possíveis convergências nas abordagens desse conteúdo. Os dados coletados levaram-na a considerar haver congruência entre o tratamento que livros didáticos dão à combinatória e o tratamento dado por pesquisas e documentos oficiais sobre esse mesmo tema. A pesquisadora

pondera, porém, que há necessidade de atenção maior aos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e de orientações mais concisas nos livros didáticos visando a auxiliar o professor em suas aulas.

Por esses estudos, observa-se que o livro didático continua sendo o principal recurso usado pelo professor no ensino de análise combinatória. Por esse motivo, entende-se haver espaço para programar investigações que envolvam, por exemplo, as relações entre o professor que ensina combinatória e o uso dos recursos.

4.3.3 – Apresentam Análise de quais Tarefas e/ou de Propostas de Questionários com Tarefas para serem respondidas com ou sem Instrução Formal e/ou Resolução de Problemas na Educação Básica, ou na Educação Superior e/ou na Formação Continuada de Professores

Essa categoria apresenta como ponto central a resolução de problemas, o conhecimento da Matemática ganha sentido quando os alunos se deparam com situações desafiadoras e são motivados para encontrar diferentes estratégias de resolução, produzindo conhecimentos e desenvolvendo habilidades ligadas ao raciocínio multiplicativo.

Foram analisadas 17 dissertações e 3 teses, conforme a Tabela 6.

Tabela 6: Dissertações e tese utilizam questionário de tarefas ou resoluções de problemas.

Autor	Título	Instituição	Ano
FISCHBEIN	The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children, Reidel, Dordrecht.	UNIVERSIDADE DE GRANADA	1975 T
COSTA	Possibilidades de articulação dos ostensivos e não ostensivos no ensino da noção de sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas.	UNIBAN – SP	2003 D
FILHO	Uma experiência de introdução do raciocínio combinatório com alunos do primeiro ciclo do Ensino Fundamental: (7-8 anos)	PUC – SP	2008 D
LIMA	O raciocínio combinatório de alunos da Educação de Jovens e Adultos: do início da escolarização até o Ensino Médio.	UFPE	2010 D
SILVA	O efeito da explicitação da correspondência um-para-muitos na resolução de problemas de produto cartesiano por crianças	UFPE	2010 D
CAMPOS	Análise combinatória e proposta curricular paulista - um estudo dos problemas de contagem	PUC - SP	2011 D
MELO	O efeito da explicitação dos princípios invariantes na resolução de problemas de combinação por crianças	UFPE	2012 D
FONSECA	Discontinuidades Matemáticas y didácticas entre la secundaria y la universidad.	UV - ESPANHA	2012 T

SOUZA	Análise Combinatória apoiada na Metodologia de Ensino- Aprendizagem– Avaliação de Matemática através da resolução de problemas.	UNESP	2013 D
AZEVEDO	Alunos de Anos Iniciais construindo árvores de possibilidades: é melhor no papel ou no computador?	UFPE	2013 D
OLIVEIRA	Raciocínio combinatório na resolução de problemas nos Anos Iniciais do EF - um estudo com professores	PUC – SP	2014 D
VEJA	Qual mais fácil resolver com 2, 3 ou 4 etapas de escolha produto cartesiano, arranjo, combinação, ou permutação	UFPE	2014 D
FONSECA	O ensino da Análise Combinatória: um estudo de registro de representações semióticas por meio de sequências didáticas.	UFS	2015 D
CABERLIN	Letramento probabilístico no Ensino Médio: um estudo de invariantes operatórios mobilizados por alunos.	PUC – SP	2015 D
CUNHA	Elaboração de Problemas Combinatórios por professores de Matemática do Ensino Médio	UFPE	2015 D
LIMA	Princípio Fundamental da Contagem: conhecimentos do Professores de Matemática sobre seu uso na resolução de situações-problema.	UFPE	2015a D
LIMA	Problemas de Combinatória: um estudo de conhecimentos mobilizados por licenciandos em Matemática Campo Grande – MS.	UFMS	2015b D
SILVEIRA	Análise combinatória em sala de aula	UEPB	2016 D
MAGALHÃES	Conhecimento de professores do 5º ano do Ensino Fundamental sobre o trabalho com resolução de problemas que envolvem o raciocínio combinatório	UCS	2017 D
MARTINS	Ensino De Análise Combinatória: Um Estudo Das Representações De Professores De Matemática Do Ensino Médio Público De São Mateus.	UFES	2018 T

FONTE: Elaboração do autor

Essas pesquisas buscaram estudar: a) os professores e a elaboração de problemas combinatórios (FISCHBEIN, 1975; FILHO, 2008; SOUZA, 2013; CUNHA, 2015; CABERLIN, 2015; MAGALHÃES, 2017); b) os licenciandos em Matemática e os conhecimentos combinatórios (COSTA, 2003; LIMA, 2015a); c)

os professores e suas representações sobre combinatória (FONSECA, 2012; OLIVEIRA, 2014; MARTINS, 2018); d) os professores e estratégias de resolução de problemas combinatórios (LIMA, 2010; SILVA, 2010; CAMPOS, 2011; MELO, 2012; AZEVEDO, 2014; VEGA, 2014; FONSECA, 2015, LIMA, 2015b, SILVEIRA, 2016).

É importante destacar que essas pesquisas já apresentam indícios da passagem do Nível I, Ausência de Sistematização Multiplicativa, para o Nível II, Início da Sistematização Multiplicativa, pois os sujeitos já apresentam contextualização em suas respostas com indícios de raciocínio combinatórios.

Em relação às perspectivas teóricas, os pesquisadores se apoiaram nos estudos de Ball, Thames e Phelps, sobre o domínio de conhecimentos necessários aos professores de Matemática; nos pressupostos da História Cultural (representação, prática e apropriação, propostos por Roger Chartier; estratégias e táticas, por Michel De Certeau; cultura escolar, por Dominique Julia e disciplinas escolares, por André Chervel); na Teoria das Situações Didáticas de Brousseau; e na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

A coleta dos dados foi realizada por meio de protocolos provenientes da aplicação de sequências didáticas e de testes, de entrevistas semiestruturadas gravadas em áudio, de questionários e de observações sobre os participantes da pesquisa.

Os resultados dessas investigações sugerem que:

1º - Tanto estudantes de licenciatura em Matemática quanto professores em exercício apresentam dificuldades em lidar com situações de combinatória.

2º - Professores até se utilizam do princípio multiplicativo, mas não explicitam e/ou não estabelecem relação entre esse princípio e as fórmulas de arranjo, permutação e combinação nem com estratégias de resolução de problemas combinatórios baseadas no diagrama de árvores, no raciocínio recursivo, entre outras.

3º - A elaboração de problemas combinatórios pelo próprio professor permite que ele possa refletir sobre os conceitos em jogo, nas diferentes situações combinatórias, bem como pensar em aspectos pedagógicos e curriculares relacionados a esse objeto matemático.

Esses resultados reforçam a importância da formação inicial e continuada dos docentes em combinatória, em razão da influência que os saberes docentes exercem na construção do conhecimento combinatório dos alunos (BORBA et al., 2015; ROCHA et al., 2015; SABO, 2010), apontando diretamente para o direcionamento do Modelo Analítico, construído na pesquisa.

4.3.4 – Proposta de Utilização de Recursos na Educação Básica ou na Educação Superior e/ou na Formação Continuada de Professores

Essa categoria apresenta a associação com o modelo estudado para a utilização de recursos materiais, para se obter um número maior de decisões, e ainda assim, que essas se tornem suas.

Foram analisadas 5 dissertações e 1 tese conforme Tabela 7.

Tabela 7: Dissertações e tese conforme a utilização de recursos didáticos.

Autor	Título	Instituição	Ano
FILHO	Jogo eletrônico educacional como um objetivo de aprendizagem visando a aprendizagem significativa: uma experiência com análise combinatória	UFS	2010 D
GERDENITS	Raciocínio combinatório - uma proposta para professores de EF	UFSCAR	2014 D
GUIMARÃES	Estudo das interações entre estudantes do 4º ano do Ensino Fundamental e noções de probabilidade mediada pela maquete tátil	UNIVERSIDADE ANHANGUERA DE SÃO PAULO	2015 T
AMBROZI	Jogos em uma sequência didática para o ensino de análise combinatória	UCS	2017 D
TAVARES	Ensino da Análise Combinatória por meio de um aplicativo para Android.	PUC -MG	2017(a) D
TAVARES	Raciocínio Computacional no Ensino de Análise Combinatória e Probabilidade: o Uso da Linguagem de Programação R e do Construtivismo na Educação Básica.	UFBA	2017(b) D

Fonte: Elaboração do autor.

As investigações dessa categoria procuraram: a) estudar o uso de jogos no planejamento, na aplicação e na avaliação de uma sequência didática para o ensino de combinatória (FILHO, 2010; AMBROZI, 2017); b) desenvolver um aplicativo para o ensino de análise combinatória (TAVARES, 2017a); c) estudar as contribuições do raciocínio computacional no ensino de combinatória (TAVARES, 2017b).

Os recursos abordados nessas produções foram associados a sequências ou atividades didáticas e aplicados a professores, alunos e licenciandos em Matemática em estudos de pesquisa-ação (TAVARES, 2017a; AMBROZI, 2017; GERDENITS, 2014) e de estudo de caso com abordagem qualitativa e quantitativa (TAVARES, 2017b; GUIMARÃES, 2015).

Essas pesquisas se enquadram no Nível II - Início de Sistematização Multiplicativa: nesse nível, os sujeitos das pesquisas contextualizam suas respostas, com indícios de raciocínio combinatório.

A respeito dos aportes teóricos, identificamos no trabalho de Ambrozi (2017) referência aos estudos de Piaget como fundamentação teórica de sua investigação e de Zabala para embasar a construção de uma sequência didática.

Os resultados dessas pesquisas apontaram para: a potencialidade do recurso didático empregado pelo pesquisador no ensino e na aprendizagem da combinatória (AMBROZI, 2017); a possibilidade de contribuição de recursos baseados nas Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) para ensino de Matemática, em especial da análise combinatória (TAVARES, 2017a); a necessidade de aprofundamento e de aplicação de linguagens de programação na formação inicial e contínua de professores, bem como na Educação Básica (TAVARES, 2017b).

Observa-se, pois, haver uma preocupação dos pesquisadores em se considerar recursos didáticos que sejam capazes de motivar e prender a atenção dos alunos, que facilitem a construção do conhecimento combinatório e que tornem o aprendizado desse conteúdo mais prazeroso. Porém, nas dissertações observadas, constatou-se a ausência de quadros teóricos que auxiliassem os pesquisadores na análise dos dados obtidos, considerando os recursos empregados. A esse respeito, Almouloud e Silva (2019, p. 78) pontuam:

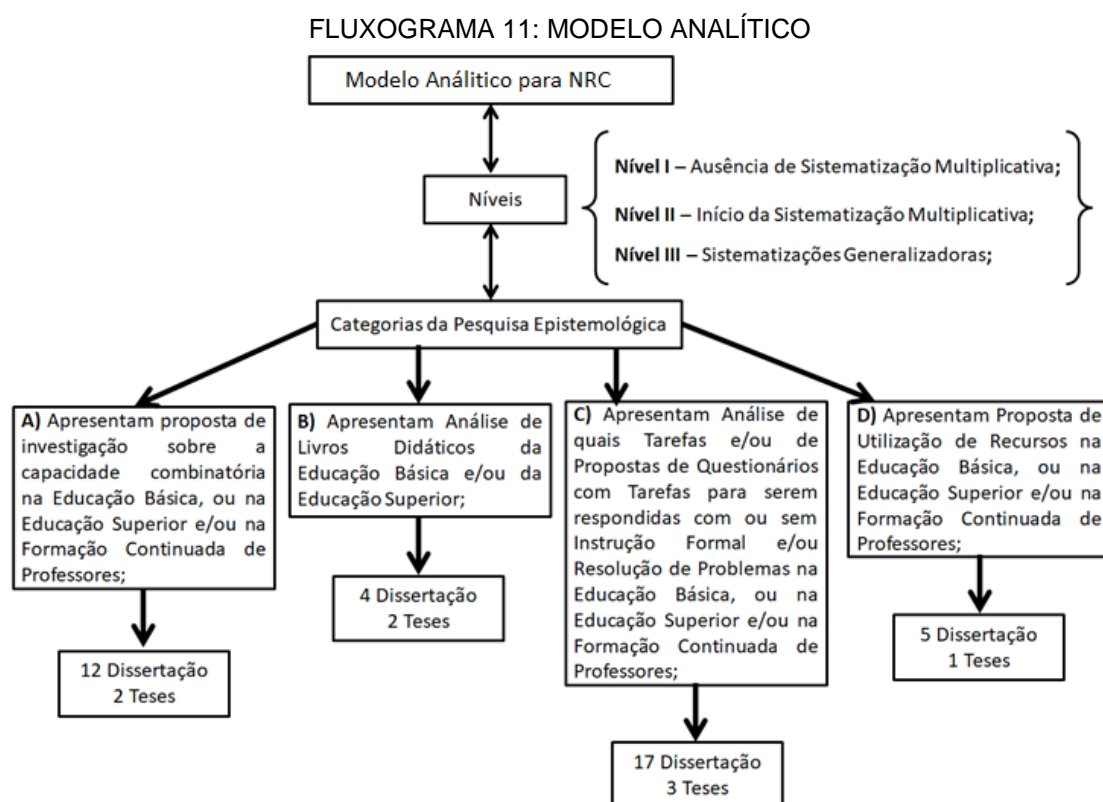
O referencial teórico, juntamente com outros elementos constitutivos de uma pesquisa, fundamenta a razão de ser da mesma. Sua importância pode ser evidenciada na fase de análise dos achados, mas também nas conclusões da pesquisa.

Logo, a questão da relação entre os professores e os recursos didáticos de um modo geral e, particularmente, no ensino da combinatória merece aprofundamento tanto teórico quanto metodológico. Um construto teórico que tem se constituído um referencial importante na análise dessa relação para o ensino da Matemática é a Abordagem Documental do Didático (TROUCHE et al., 2020).

O ponto central dessa abordagem é a busca por compreender de que maneira os professores selecionam e modificam recursos no preparo de suas aulas e de que maneira eles próprios são modificados por esses recursos no que tange suas práticas docentes. Espíndola (2019), por exemplo, usou esse construto teórico como um dos referenciais na identificação do sistema de recursos de um professor para o ensino da combinatória, em uma turma do 2º ano do nível médio.

4.4 – Categorização do Estudo Bibliográfico

Foram apresentados os dados de um estudo bibliográfico, após a atividade de estudo e pesquisa, que visou a identificar sob quais perspectivas investigativas o ensino e aprendizagem da combinatória vêm sendo estudado. Usou-se como fonte o Banco de Teses e Dissertações da CAPES, sendo selecionadas 44 produções, das quais 8 eram teses e as demais dissertações, como pode ser observado no Fluxograma 11, a seguir:



FONTE: Construção do autor.

Foram identificadas seis perspectivas investigativas: as propostas de ensino e/ou sequências didáticas sobre análise combinatória; a análise combinatória presente em documentos curriculares e nos livros didáticos; a análise combinatória e a formação do professor; os recursos para o ensino da análise combinatória; as estratégias de resolução de problemas combinatórios. As propostas de ensino e/ou sequência didáticas para o ensino da combinatória foram as que mais figuraram. De um modo geral, essas propostas de intervenção foram baseadas na metodologia da resolução de problemas e no uso do princípio multiplicativo como forma de resolução e tinham como público-alvo alunos da

Educação Básica. Os resultados apresentados sugerem que essas intervenções foram eficazes no propósito de construção do raciocínio combinatório.

No entanto, há espaço para que outras questões possam ser aprofundadas, tais como a importância da necessidade da formação inicial e continuada dos docentes em combinatória, em razão da influência que os saberes docentes exercem na construção do conhecimento combinatório dos alunos, pela necessidade de se ampliar as discussões dos resultados obtidos nessa investigação, analisando mais profundamente outras questões como as de ordem epistemológica e didática inerentes ao ensino e à aprendizagem da combinatória.

As produções que se ocuparam de investigar o professor – conhecimento e prática – em relação à análise combinatória evidenciaram que as dificuldades enfrentadas por licenciandos e docentes, com esse tema, esbarram na sua formação, quer inicial, quer continuada. Por esse motivo, tornam-se relevantes pesquisas que discutam a maneira como a combinatória se faz presente em cursos de formação de professores de Matemática (ou que ensinam matemática) ou, ainda, que pesquisadores e professores se articulem em estudos de natureza colaborativa, visando à construção do conhecimento conjuntamente. Assim, espera-se que os resultados aqui apresentados possam contribuir para a ampliação das investigações sobre o ensino e a aprendizagem da combinatória, considerando as perspectivas descritas e outras que venham a surgir.

A pesquisa aqui desenvolvida teve como objetivo mapear as produções científicas defendidas entre os anos 1998 e 2019, no Catálogo de Teses e Dissertações, da plataforma da CAPES, investigando os referenciais teóricos que sustentam as pesquisas brasileiras, publicadas de nesse período, a respeito do tema Noção de Raciocínio Combinatório, a partir da Meta-Análise Qualitativa, amparada nos estudos preliminares sobre o Modelo Epistemológico de Referência, mediante atividade de estudo e pesquisa.

Para tanto, foram elencadas 44 pesquisas que tratavam das seguintes categorias:

- ✓ Apresentam proposta de investigação sobre a capacidade combinatória na Educação Básica, ou na Educação Superior e/ou na Formação Continuada de Professores;
- ✓ Apresentam análise de livros didáticos da Educação Básica e/ou da Educação Superior;
- ✓ Apresentam análise de quais tarefas podem ser ensinadas na Educação Básica ou na Educação Superior e/ou na Formação Continuada de Professores;
- ✓ Apresentam proposta de questionário com tarefas para serem respondidas com ou sem instrução formal na Educação Básica, ou na Educação Superior e/ou na Formação Continuada de Professores;
- ✓ Apresentam proposta de investigação de resolução de problemas na Educação Básica, ou na Educação Superior e/ou na Formação Continuada de Professores. (MORAES, 2016, p. 41).
- ✓ Apresentam proposta de utilização de recursos alternativos na Educação Básica, ou na Educação Superior e/ou na Formação Continuada de Professores.

Após a efetivação e a validação do modelo analítico de obras referentes à Noção de Raciocínio Combinatório no capítulo anterior, é possível organizar as pesquisas nessas categorias e analisá-las à luz do modelo ajustado/validado.

As perspectivas delineadas pelas categorias foram construídas em consonância com o referencial teórico abordado por nós, para que ocorresse a interlocução entre cada uma dessas pesquisas e essa interlocução aponta para a necessidade da formação inicial que busca atender às necessidades emergentes na fase inicial da carreira docente.

A análise desse estudo sinaliza o preenchimento de lacunas apontadas nos estudos selecionados para compor o estudo bibliográfico, preenchendo lacunas, com pesquisas concluídas e análise da produção dos pesquisadores experientes da área, apontando os avanços em relação à produção focalizada nesta tese.

É importante salientar que os estudos selecionados não podem e não devem ser analisados como retratos fiéis da realidade da formação de professores em nosso País. Com isso, afirmamos que eles expressam um recorte de um determinado aspecto da realidade, sujeitos a interpretações e a análises de seus pesquisadores.

Outro adendo importante é a respeito do procedimento mais utilizado nos textos considerados: a Meta-Análise. Esse procedimento revela a execução do estudo bibliográfico que realizamos, que possibilitou construir um conjunto de procedimento de estudos importantes para as pesquisas qualitativas, além de ampliar a visibilidade do tema e listar os inúmeros trabalhos da literatura, reduzindo esforços no sentido de sintetizar estudos qualitativos futuro, visto como essenciais para atingir proposições analíticas mais elevadas. Acrescenta-se a generalização da pesquisa qualitativa, nesse viés, abrindo caminhos para a teorização de temas investigados, pelo fato de obtermos resultados profundos, integrativos, cruzados e amplos.

A principal questão a que procuramos responder com a análise dos 44 estudos selecionados foi a seguinte: em que medida um modelo analítico sobre a Noção de Raciocínio Combinatório, baseado nos estudos de Fischbein, possibilita análises de pesquisas que enfocam a Noção de Raciocínio Combinatório?

Os estudos selecionados corroboram a pesquisa, pelo fato de apontarem os desafios a que os estudos buscaram responder: a) os professores e a elaboração de problemas combinatórios (FISCHBEIN, 1975; FILHO, 2008; SOUZA, 2013; CUNHA, 2015; CABERLIN, 2015; MAGALHÃES, 2017); b) os licenciandos em Matemática e os conhecimentos combinatórios (COSTA, 2003; LIMA, 2015a); c) os professores e suas representações sobre combinatória (FONSECA, 2012; OLIVEIRA, 2014; MARTINS, 2018); d) os professores e estratégias de resolução de problemas combinatórios (LIMA, 2010; SILVA, 2010; CAMPOS, 2011; MELO, 2012; AZEVEDO, 2014; VEGA, 2014; FONSECA, 2015, LIMA, 2015b, SILVEIRA, 2016).

Em síntese, teses e dissertações analisadas contemplaram aspectos importantes da aprendizagem da docência, como, por exemplo: as potencialidades formativas de atividades de inserção em contexto escolar e de parcerias escola-universidade para a formação inicial do professor; a formação inicial de professores, sob a ótica da trajetória profissional e do uso de recursos alternativos na Educação Básica.

Por outro lado, análises apresentadas sugerem que, apesar de haver publicações relevantes para a área, a formação em contexto, caracterizada por experiências que vão além da utilização de sequência de tarefas, ou resolução de problemas combinatórios ou utilização de recursos alternativos, a temática está inserida no cenário acadêmico de modo representativo e aponta a necessidade da formação inicial que busca atender às necessidades da carreira docente na Educação Básica.

Averiguou-se ainda que as pesquisas analisadas versam sobre programas institucionais e que em nenhuma delas foi possível identificar a criação de um espaço formativo, caracterizado também enquanto intervenção da pesquisa. A análise de programas institucionais já existentes é de grande importância e um dos possíveis indicadores da qualidade dos cursos de formação inicial oferecidos em instituições públicas.

No entanto, nosso estudo indica a carência de construção, implementação e análise de novos programas. De espaços formativos concebidos sob a perspectiva híbrida ou virtual, por exemplo, tão em voga na atualidade, visando à formação inicial que busca atender às necessidades da carreira docente.

A inserção da Noção de Raciocínio Combinatório ocorre na formação continuada de professores. De acordo com que foi constatado, nos estudos selecionados, ocorre como treinamento ou preparação ou capacitação desconectada da realidade.

Com isso, verificamos que, tanto na formação inicial quanto na continuada, a partir dos resultados dos textos selecionados, a inserção da Noção

de Raciocínio Combinatório dá-se através de problemas combinatórios simples e balizadores.

O Modelo Analítico conduz a uma análise dos documentos institucionais para o ensino e para a formação continuada de professores, uma análise do processo de institucionalização do objeto matemático, nas diferentes instituições na Educação Básica e de formação de professores, para a observação das categorizações, a partir das diferentes construções de pesquisas em torno do objeto matemático Análise Combinatória.

Acreditamos que o Modelo Analítico é o elemento central da pesquisa e revela uma importante questão na formação docente, a partir da análise dos estudos selecionados, baseada em pressupostos teóricos da promoção de uma formação docente como mola propulsora de uma educação pautada nos problemas associados à contagem.

O caminho a ser percorrido para a formação docente é grande, pois discutir formação de professores em uma instituição, a partir de um modelo, é um desafio, valorizando as atividades de ensino e extensão que tenham como público-alvo a formação docente.

Ao observar as pesquisas aqui elencadas (FISCHBEIN, 1975; FILHO, 2008; LIMA, 2010; SILVA, 2010; CAMPOS, 2011; MELO, 2012; FONSECA, 2012; SOUZA, 2013; AZEVEDO, 2014; VEGA, 2014; OLIVEIRA, 2014; FONSECA, 2015, LIMA, 2015b; CUNHA, 2015; CABERLIN, 2015; SILVEIRA, 2016; MAGALHÃES, 2017; MARTINS, 2018), foi possível construir o Modelo Analítico associado ao problema de contagem.

Nesta pesquisa, a análise institucional perpassa, nesse sentido, o estudo dos documentos institucionais, as pesquisas científicas, o estudo das práticas que são desenvolvidas nas instituições em pauta, em torno de objetos da aprendizagem da área e nas relações institucionais e pessoais referentes a esses objetos. (CHEVALLARD, 1999).

O estudo é sustentado pelas necessidades das civilizações, especialmente, por se fazer presente nas atividades humanas, uma vez que

diferentes povos desenvolveram maneiras de combinar os elementos. No âmbito da sociedade, esse tema caracteriza-se por sua forte relevância social devido a seu caráter prático e utilitário e pela possibilidade de variadas conexões com outras áreas do conhecimento.

Fica evidente, nas pesquisas, a necessidade da formação inicial de professores. Afinal, ao considerarmos que se trata do primeiro momento formal de aprendizagem da docência, ela demanda pesquisa e maior visibilidade no interior de programas de pós-graduação.

CONCLUSÃO

Esta pesquisa surgiu da inquietude deste autor, ao se deparar com situações de ensino em sala de aula, sendo motivada pela preocupação com o aprendizado de alunos oriundos da Educação Superior, fazendo suscitar questões referentes aos paradigmas existentes entre o saber e o saber-fazer docente. Nesse sentido, houve necessidade de pesquisar a causa do fracasso escolar dos discentes referentes ao aprendizado da Análise Combinatória, relacionadas aos problemas associados à contagem.

Em vista disso, a busca apresentou indícios que partem da problemática oriunda da formação inicial dos docentes que atuam na Educação Básica, ocasionando dificuldades no processo de transposição didática, provocando desse modo, restrições e combinações no ensino e aprendizagem dos objetos matemáticos.

Nessa direção, por meio do estudo epistemológico, esta pesquisa teve como objetivo geral desenvolver um estudo epistemológico sobre noções de raciocínio combinatório nas produções científicas, defendidas entre os anos de 1998 e 2019, resultantes de pesquisas de mestrado e doutorado, no Brasil, a partir da Meta-Análise Qualitativa, para construir e analisar as teses e dissertações, a partir de um Modelo Analítico de Noção de Raciocínio Combinatório.

Para se alcançar a constituição de um Modelo Analítico, consideramos os aspectos do trabalho de Fischbein (1975) e Fischbein et al (1970), que forneceram características importantes à composição desse modelo híbrido para tratar dos problemas associados à contagem.

O trabalho teve como base teórica-metodológica a Meta-Análise Qualitativa e a Teoria Antropológica do Didático (TAD), de Yves Chevallard, que impulsionaram a construção do Modelo Analítico, lançado, nesse primeiro momento, como uma proposição prospectiva, a fim de que, em estudos futuros, ajude na percepção das praxeologias matemáticas existentes nos livros utilizados pelos docentes da rede de ensino da Educação Básica, mediante um

estudo mais aprofundado da dimensão epistemológica, econômico-institucional e ecológica.

Por meio de análises da revisão da literatura, foi possível observar uma forte relação entre os trabalhos e o Modelo Analítico, que demonstrou ser profícuo na construção do pensamento matemático, podendo impulsionar o pensamento crítico, sendo capaz de subsidiar o ensino e a aprendizagem, por meio da construção e reflexão teórico-conceitual da Matemática.

A pesquisa proposta neste trabalho diferencia-se das demais por trazer como proposta a constituição de Modelo Analítico, voltado à formação inicial e continuada de professores da Educação Básica, por meio de três níveis de problemas combinatórios, não tendo sido detectado, nas buscas realizadas em plataformas nacionais, até o momento, nenhum trabalho com essa perspectiva.

O estudo epistemológico e a constituição do Modelo Analítico, nesta pesquisa, foram os pontos chave do aspecto metodológico, pois possibilitaram uma análise da dimensão epistemológica, da dimensão institucional e da dimensão ecológica do problema didático, que, por sua vez, conduziu a pesquisa a algumas inferências, detectando falhas relativas aos objetos matemáticos descritos, mostrando de forma parcial como esses objetos vivem nas instituições de ensino.

Portanto, mediante a natureza do estudo proposto, neste trabalho, de forma breve e parcial, na qual as dimensões epistemológicas, econômico-institucionais e ecológicas do problema didático foram tratados, pretende-se, em estudos futuros, retomar novamente as análises em documentos oficiais, focando principalmente em alguns livros didáticos da Educação Básica. Vislumbra-se entender se esses livros possuem uma sequência lógica com um grau de complexidade crescente capaz de potencializar o entendimento sobre os objetos matemáticos supracitados. Nesse sentido, pretende-se saber também se o material didático utilizado pelos docentes apresenta descontinuidade, causando descompasso no ensino e na aprendizagem.

Chevallard (2009) assevera que o livro didático corresponde, na maioria dos casos, à opção didática da qual o professor extrai os conteúdos a serem abordados em sala de aula. Destaca também que a prática docente é a maior fonte de aquisição de saber por parte dos alunos e, mesmo havendo fontes alternativas ligadas às tecnologias digitais, boa parte dos professores adota o livro didático como o principal material de apoio.

Dessa forma, na análise das coleções de livros didáticos do Ensino Fundamental, do 1º ao 5º Ano, identificamos que o tópico dos capítulos inicia com uma breve apresentação do objeto, seguida da proposição de atividades dirigidas aos alunos. Essa forma de apresentação do livro didático levou-nos a supor que, para o autor do livro, a produção do conhecimento deve ser realizada pela ação do aluno, por meio da resolução de exercícios. Supomos que o autor considera, como Vergnaud (1991), que, para o aluno, um conceito está fortemente associado à atividade de resolução de problemas e que é através da resolução dos exercícios que se percebe se os significados dos conceitos são entendidos. Esse princípio embasa a organização praxeológica concebida nessa coleção. No “Manual Pedagógico do Professor”, confirmamos essa visão do autor.

Os volumes trazem um número bem reduzido de explicações, pois priorizam a atividade do aluno, estimulando a reflexão, a experimentação e a resolução de problemas, com o objetivo de auxiliar a produção de significados, a NRC.

Desta forma, a tônica desta coleção é ajudar o aluno a construir, desenvolver, pensar, raciocinar e aplicar ideias e conceitos matemáticos, sempre compreendendo e atribuindo significado ao que está fazendo, dentro dos níveis descritos no Modelo Analítico.

O estudo do “Manual Pedagógico do Professor” permitiu identificar outros elementos da noção de praxeologia matemática:

- ✓ Uma intenção de proporcionar ao aluno uma aprendizagem significativa, através das experimentações ou manipulação;

- ✓ Uma intenção de realizar uma abordagem dos conteúdos na qual o aluno aprende fazendo, manipulando, comparando, descobrindo semelhanças e diferenças, regularidades e propriedades, isto é, praxeologias matemáticas particulares. Neste momento, iniciamos o aluno no raciocínio dedutivo, estimulando-o a fazer pequenas e simples deduções ou demonstrações lógicas. O raciocínio dedutivo será retomado e aperfeiçoado no ano seguinte. Percebemos que a intenção é de desenvolver um ensino em espiral, aprofundando o estudo de um capítulo a outro e de um volume para outro. Por essa razão, os conceitos são retomados várias vezes e pouco a pouco ampliados, aprofundados e sistematizados.

O estudo permitiu-nos visualizar a Noção Praxeológica, relativa ao objeto NRC, do 1º ao 5º ano, do Ensino Fundamental. Levou-nos a evidenciar as propriedades do Pensamento Combinatório, que tem lugar, nesse nível de ensino, a partir das tarefas:

Tarefa 01: Efetuar a contabilização dos quadrinhos do gráfico.

Tarefa 02: Identificar o padrão e completar a sequência.

Tarefa 3: Quantos combinações podem ser formadas

Tarefa 4: Quantas combinações são possíveis usando a Operação de Multiplicação.

Tarefa 5: Identificar a união dos elementos de dois ou mais conjuntos.

Tarefa 6: Identificar a ocorrência de um evento.

No livro didático, devido à exigência de cumprimento integral da coleção pelas escolas, as instituições optam por não tratar o ensino da NRC, na perspectiva experimental, seguindo sequencialmente os capítulos do livro, reduzindo o ensino destas NRC à abordagem teórica.

Isso nos leva a acreditar que a formação e a profissão docente apontam para uma revisão da compreensão da prática pedagógica do professor, que é tomado como mobilizador de saberes profissionais. Considera-se, assim, que o docente, em sua trajetória, constrói e reconstrói seus conhecimentos, conforme a necessidade de utilização, suas experiências, seus percursos formativos e profissionais.

Dessa forma, resgata a importância de se considerar o professor em sua própria formação, num processo de autoformação, de reelaboração dos saberes iniciais em confronto com sua prática vivenciada. Assim, seus saberes constituem-se a partir de uma reflexão na e sobre a prática.

A análise dos livros didáticos traz os valores e os princípios de ação que norteiam o trabalho dos professores e novas luzes sobre nossa compreensão, acerca dos fundamentos do trabalho docente em sala de aula.

Portanto, reitera-se um estudo mais aprofundado da dimensão econômico-institucional, futuramente, a fim de perceber de forma mais eficaz as relações institucionais existentes no entorno do ensino dos problemas associados à contagem, já que essa dimensão é capaz de revelar o Modelo Analítico nas instituições de ensino, além de mostrar como essas praxeologias vivem e se comportam nas instituições.

Sendo assim, buscamos discutir, à luz da Meta-Análise Qualitativa e da Teoria Antropológica do Didático, particularmente, do Modelo Analítico, o que pode inspirar diversos tipos de organizações didáticas e matemáticas, principalmente, as baseadas em atividades de estudos e pesquisa, que, por sua vez possibilitariam ir ao encontro das sugestões dos PCN e da Formação continuada de professores da Educação Básica e Superior.

Verificamos que diferentes culturas, sociedades, tradições e diferentes níveis educativos manifestam um comportamento semelhante, ao responder a certas praxeologias matemáticas ligadas à Noção de Raciocínio Combinatório, o que nos induz a acreditar que os tipos de atividade matemática propõem um Modelo.

A pesquisa teve contato com diversos modelos e os resultados que geraram hipótese conduziram a um Modelo Analítico, descrito no capítulo II e no capítulo III. Tal ação conduz a uma condição que garante a construção do modelo pretendido que pode responder por meio das categorias à construção e à análise das percepções dos estudos.

A princípio, cada categoria foi composta por dissertações e teses. Cada pesquisa está descrita no interior de um modelo, que pode estar contido na região de um Modelo Epistemológico, que busca as relações que devem ser consideradas para compor e caracterizar os diversos tipos de construções.

Além disso, as atividades de estudo e pesquisa baseadas no Modelo aqui apresentado podem gerar outras com novos questionamentos, que podem emergir das características de cada categoria da pesquisa.

Outro ponto a ser considerado foi à utilização da Meta-Análise como ferramenta de construção de análise documental. Sem ela, as dificuldades de construção do estudo epistêmico seriam imensas e cansativas. Por outro lado, estudos futuros podem ser realizados, com outros tipos de metodologia.

É importante salientar que a análise dos resultados das categorias não se destina a avaliar o nível de conhecimentos matemáticos, mas a analisar o tipo de tarefas e de técnicas institucionais propostas no estudo da atividade matemática do ensino. Temos a intenção de apenas mostrar as relações existentes entre as pesquisas, a partir de uma análise cronológica dos fatos, por meio da atividade de estudo e pesquisa, um fenômeno que tem origem institucional, na estrutura das praxeologias matemáticas, refletindo-se posteriormente no comportamento do objeto de estudo na sociedade.

Neste sentido, é de fundamental importância compreender que os processos de aprendizado e de desenvolvimento estão condicionados à aquisição de estruturas elementares, primordiais para ampliar o conhecimento dos estudantes.

As reflexões que desenvolvemos mostram proposições teóricas no contexto da TAD e revelam elementos importantes para o programa de investigação em Didática da Matemática.

Diante das reflexões expostas, destacamos a importância do papel da pesquisa e, conseqüentemente, de uma visão ampliada do pesquisador em Didática, por meio da TAD, no que diz respeito a trazer à luz uma análise dos fenômenos de ensino e aprendizagem no âmago da razão de ser de sua existência, a partir das praxeologias matemáticas e didáticas, que vivem nas Instituições e entre as Instituições explicitadas por intermédio das relações entre os Sujeitos-Instituição-Saber.

Pesquisar a partir da perspectiva da TAD é repleto de possibilidades de caminhos de investigação, no que diz respeito a questões intrínsecas às praxeologias matemáticas propriamente ditas e a questões intrínsecas às praxeologias didáticas, relativas à formação de professores, chegando assim ao Modelo Analítico para a Noção de Raciocínio Combinatório.

REFERÊNCIA

ALMEIDA, A. L. e FERREIRA, A. C. **APRENDENDO ANÁLISE COMBINATÓRIA ATRAVÉS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: um estudo com classes de 9º ano do Ensino Fundamental e 2º ano do Ensino Médio.** 2009. - O Repositório Institucional da Universidade Federal de Ouro Preto

ALMOULLLOUD, A. S. **Fundamentos da didática da Matemática.** Curitiba: UFPR, 2007.

ANDRADE, R. C. D. **A noção de Tarefa Fundamental como Dispositivo Didático para um Percorso de Formação de Professores: o caso da geometria.** Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas). Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica. Belém, 2012. Repositório Institucional da Universidade Federal do Pará

ANDRADE, R.C. D. e GUERRA, R. B. **Tarefa fundamental em um percurso de estudo e pesquisa: um caso de estudo para o ensino da Geometria Analítica.** Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.16, n.4, pp. 1201-1226, 2014. Revista da PUC

BATANERO, C., GODINO, J. D. and NAVARRO-PELAYO, V. **Razonamiento combinatorio.** Ed. Sintesis. Madrid. 1996. Repositório Institucional da Universidade de Granada. Internacional

BATANERO, C., GODINO, J. D. and NAVARRO-PELAYO, V. **'The use of implicative and correspondence analysis for assessing pupils' combinatorial reasoning'**, in R. Gras (Ed), Actes du colloquem 'ethodesd' analyses statistiques multidimension nelle sen Didactiquesdes Mathematiques. IRMAR, Rennes, p. 245–256. 1995. Repositório Institucional da Universidade de Granada. Internacional

BATANERO, NAVARRO-PELAYO e GODINO. **Efeito do Modelo Combinatório Implícito no Raciocínio Combinatório em Alunos do Ensino Secundário.** Educational Studies in Mathematics 32, 181–199, 1997. Repositório Institucional da Universidade de Granada. Internacional

BARRETO, F.; AMARAL, F. e BORBA, R. **Como o raciocínio combinatorio tem sido apresentado em livros didáticos de séries iniciais.** Caderno de Trabalhos de Conclusão de Curso de Pedagogia, Recife: UFPE, 2007, v. 2, p.1-21. Repositório Institucional da Universidade Federal de Pernambuco.

BARRETO, F. e BORBA, R. **Como o Raciocínio Combinatório tem sido Apresentado em Livros Didáticos de Anos Iniciais.** X Encontro Nacional de Educação Matemática. Bahia. 2010. Repositório Institucional da Universidade Federal de Pernambuco.

BOGA NETO, F. R. **Uma proposta para o ensinar os conceitos da análise combinatoria e de probabilidade: uma aplicação do uso da história da**

Matemática, como organizador prévio e dos mapas conceituais. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Belém, 2005. Repositório Institucional da Universidade Federal do Pará

BOLEA CATALÁN, P. **El proceso de algebrización de organizaciones Matemáticas escolares.** Zaragoza: Prensas Universitarias de Zaragoza: Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza, 2003. Repositório Institucional da Universidade de Granada. Internacional

BORBA, R., PESSOA, C. e SANTOS, R. **Analisando o ensino das estruturas aditivas a partir do livro didático de 1ª a 4ª série.** Anais do XIII Encontro de Pesquisas Educacionais do Nordeste. Natal, RN, 1997. Portal de periódicos da Universidade Federal de Santa Catarina.

BORBA, R. e PESSOA, C. **Estratégias de resolução de problemas de raciocínio combinatório por alunos de 1ª à 4ª série.** Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática. 2007. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

BORBA et al. **A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL PARA O ENSINO DA COMBINATÓRIA.** RPEM, Campo Mourão, Pr, vol. 3, nº 4, jan.-jun. 2014. Revista Paraense de Educação Matemática.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Las prácticas docentes del profesor de Matemáticas.** Versión provisional. Presentación parcial en el marco de las XI École d'Été de Didactique des Mathématiques, 2001. Repositório Institucional da Universidade de Granada. Internacional

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **La praxeología local como unidade de análisis de los procesos didácticos,** 2004. Disponível em:
<http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/madrid>>. Acesso em 07 abril. 2015.
<http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas13SEIEM/SEIEMX>
Repositório Institucional da Universidade de Granada. Internacional

BOSCH, M. GASCÓN, J. **Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de Matemáticas de Secundaria.** En González, M.J., González, M.T. y Murillo, J. (Eds.) Investigación en Educación Matemática XIII. (pp. 89-113), 2009.
Repositório Institucional da Universidade de Granada. Internacional

BOURDIEU, P. e PASSERON, J. C. **La Reproduction,** Paris, Minuit.1997

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental).** Brasília: SEF/MEC, 1997.

_____, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental)**. Brasília: SEF/MEC, 1998.

_____, Secretaria da Educação Básica. **Guia do livro didático 1997: Matemática – séries/Anos Iniciais do Ensino Fundamental**. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 1997.

_____, Secretaria da Educação Básica. **Guia do livro didático 2013: Matemática – séries/Anos Iniciais do Ensino Fundamental**. Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2013.

CAMPOS, C. R. **A Educação Estatística: Uma Investigação Acerca dos Aspectos Relevantes à Didática da Estatística em Cursos de Graduação**. Tese (doutorado). – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro : [s.n.], 2007. Repositório Institucional da Universidade Estadual Paulista

CORREIA, P. F. e FERNANDES, J. A. **Estratégias intuitivas de alunos do 9º ano de escolaridade na resolução de problemas de combinatória**. Livro de Actas do Congresso Internacional Galego-Português de Psicopedagogia. A. coruña / Universidade de Coruña: Revista Galego-Portuguesa de Psicologia e Educación, 2007. Repositório Institucional da Universidade Minho. Internacional

CORREA, J e OLIVEIRA, G. **A escrita do problema e sua resolução: o entendimento intuitivo acerca da combinatória**. *Educar em Revista, Curitiba, Brasil, Editora UFPR, n° Especial 1/2011, p. 77-91, 2011*. Repositório Institucional da Universidade Federal do Paraná.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique**. Grenoble. La pensée Sauvage Éditions, 1991.

_____. **Familère et prolématique, la figure du professeur**. Recherches em didatique des mathématiques, 17 (3), 17 – 54, 1997.

_____. **El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico**. Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

_____. **Organiser l'étude. 1. Structures & fonctions**, Cours à la XI École d'été de Didactique des Mathématiques, pendiente de publicación, 2001a.

_____. **Aspectos problemáticos de la formación docente**, XVI Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Huesca, 2001b. <http://yves.chevallard.free.fr>.

_____. **Organiser l'étude 1. Structures et fonctions**. In Dorier, J.-L. & alii. (eds), Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques – Corps- 21-30 Août 2001, (pp. 3-22). Grenoble : La Pensée Sauvage. 2002a.

_____. **Organiser l'étude 3**. Ecologie et régulations. In Dorier, J.-L. & alii. (eds), Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques – Corps- 21-30 Août 2001, (pp. 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage. 2002b.

CHEVALLARD, Y. **Symposium: “Didactique de l'enquête codisciplinaire et des parcours d'étude et de recherche”**. In: Colloque international “Efficacité et Équité en Éducation”. 2008.

Disponível em:

<http://ent.bretagne.iufm.fr/efficacite_et_equite_en_education/programme/symposium_chevallard.pdf>. Acesso em: 20 outubro 2013.

_____. **La TAD face au professeur de mathématiques**, Toulouse, 29 de abril, 2009a.

Acessado em 8 de out. 2014.

<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161>.

_____. **Didactique et formation des enseignants**, Poitiers, 13 de maio, 2009b, Disponível e acessado 8 dezembro 2014

<http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161>.

CHEVALLARD, Y e BOSCH, M. **La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs Objet d'étude et problematique**. Recherches en Didactiques des Mathématiques. vol 19, no 1, p.77-124, 1999.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemática: o elo perdido entre o ensino e aprendizagem**. Tradução: Dayse Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

COSTA, M. C. **Possibilidades de articulação dos ostensivos e não ostensivos no ensino da noção de sistemas de duas equações lineares a duas incógnitas**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNIBAN/SP. São Paulo, 2008. Disponível em:

<<http://www.uniban.br/pos/educamat/pdfs/teses/Mariza%20Canjirano%20da%20Costa.pdf>>. Acesso em: 03 mai. 2014.

DELGADO, T. Á. S. **Lo Matemático en el Diseño y Analisis de Organizaciones Didácticas: los sistemas de numeración y la medida de magnitudes**. Memoria para optar al Grado de Doctor. Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Educación, Departamento de Didáctica y Organización Escolar. Madrid, 2006.

DURO, M. L. **Análise Combinatória e Construção de Possibilidades: O Raciocínio Formal no Ensino Médio**. UFRS, PPGE, Porto Alegre, 106f, 2012. Repositório Institucional da [Universidade](http://www.ufrs.br) Federal do Rio Grande do Sul.

EIZENBERG, M. M. and ZASLAVSKY, O. **“Undergraduate student’s verification strategies of solutions to combinatorial problems”**. In: COCKBURN, A. D. e NARDI, E. (eds.). Proceedings of the 26th. Annual Conference of the PME, vol. 2. Norwich, UEA/PME, p. 321-328. 2002. Repositório internacional

ESTEVEES, I. **Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do Ensino Fundamental**. 2001. 203 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, SP, 2001. Repositório Institucional da Universidade Católica de São Paulo.

FERREIRA, M. N. P. e SELVA, A. C. V. **Compreendendo o Raciocínio Multiplicativo de Crianças da 3ª Série do Ensino Fundamental: o que Compreendem? Que Dificuldades Apresentam?**, XVI Congresso de Iniciação Científica da UFPE, 2008. Católica de São Paulo. Repositório Institucional da Universidade Federal de Pernambuco.

FISCHBEIN, E., PAMPU, L. AND MINZAT, I. **'Effect of Age and Instruction on Combinatorial Ability in Children.'** British Journal of Educational Psychology 40, 261–270. 1970. Repositório Institucional da Universidade de Granada. Internacional

FISCHBEIN, E. **The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children**, Reidel, Dordrecht. 1975. Repositório Institucional da Universidade de Granada. Internacional

FISCHBEIN, E. and GAZIT, A. **'The Combinatorial Solving Capacity in Children and Adolescents'**, Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik vol. 5, p. 193–198. 1988. Repositório Institucional da Universidade de Granada. Internacional

FONSECA, C. **Discontinuidades Matemáticas y didácticas entre la secundaria y la universidad**. Tese de doutorado. Universidade de Vigo, Espanha, 2004. Repositório Institucional da Universidade de Vigo. Internacional

FRANT, J. B.; CASTRO, M. R. e LIMA, T. **Pensamento Combinatório: Uma análise baseada na Estratégia Argumentativa**. Anais da 24ª Reunião Anual da ANPED, 2001. Catalogo do ANPED.

FRIOLANI, L. C. **O Pensamento Estocástico nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental**. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, PUC/SP, 2007. Repositório Institucional da Universidade Católica de São Paulo.

FONT, V. **Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas**. Revista EMA, 7 (2), 127-170. 2002. Repositório internacional CORE

FIORENTINI, D. **Alguns modos de ver e conceber a Matemática no Brasil**. Zetetikê, v. 3, n. 4, 1995. Revista de Educação Matemática Zetetikê.

GARCIA, J. BOSCH, M., GASCÓN, J. e RUIZ HIGUERAS. L. **Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics**. Zentral blattfür Didaktik der Mathematik, v.38(3), p.226-246, 2006. Repositório Institucional da Universidade Católica de São Paulo.

GARCÍA, J.; BOSCH, M., GASCÓN, J. **El Álgebra como Instrumento de Modelización**. Articulación del Estudio de las Relaciones funcionales en la Educación Secundaria. In: **Investigación en Educación Matemática**, v. XI, p. 71-90, 2007. Disponível em: <www.dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2696957.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2015. Rede de Revistas Científicas da América Latina e do Caribe, Espanha e Portugal, Sistema de Informação Científica.

GASCÓN, J. **Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico**. El caso del álgebra elemental, RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, ISSN 1665-2436, Vol. 14, n. 2, p.203-231, 2011. Rede de Revistas Científicas da América Latina e do Caribe, Espanha e Portugal, Sistema de Informação Científica.

GASCÓN, J. **Del Problem Solving a los Recorridos de Estudio e Investigación**. Crónica del viaje colectivo de una comunidad científica. Revista Iberoamericana de Educación Matemática (UNIÓN), Nº 22, p. 9-35, 2010. Rede de Revistas Científicas da América Latina e do Caribe, Espanha e Portugal, Sistema de Informação Científica.

GASCÓN, J. **Incidencia del modelo epistemológico de las Matemáticas sobre las prácticas docentes**. RELINE. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, México, v. 4, n. 2, p. 129,159, 2001. Rede de Revistas Científicas da América Latina e do Caribe, Espanha e Portugal, Sistema de Informação Científica.

GASCÓN, J. **Efectos del “autismo temático” sobre el estudio de la Geometría en Secundaria: Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometría**. Parte I. Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, nº 44, pp. 25 - 34 , 2003 .

GIL, A. **Como elaborar projetos de pesquisa**. Atlas: São Paulo, 2007.

GAY, M. R. G. **O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO ESTATÍSTICO NOS LIVROS DIDÁTICOS DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL**. Monografia (Especialização). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2008. Repositório Institucional da [Universidade Católica de São Paulo](http://www.pucsp.br).

GONÇALVES, H. J. L. e NUNES, J. M. V. **Obstáculos Didáticos e Epistemológicos no Ensino de Noções de Análise Combinatória, Probabilidades e Estatística**. Sinergia, São Paulo, v. 11, n. 1, p. 86-94. 2010. Portal de periódicos da Universidade Federal de Goiás.

IANNECE, D.; NAZZARO, P. e TORTORA, R. **“From naïve drawing to Cartesian representation”**. In: COCKBURN, A. D. e NARDI, E. (eds.). Proceedings of the 26th Annual Conference of the PME, vol. 1. Norwich, UEA/PME, p. 323. 2002. Repositório Institucional da UNESP.

INHELDER, B. and PIAGET, J. **De la lógica del niño a la lógica del adolescente**. Trad. M. T. Cevasco. Buenos Aires, Paidós (originalmente publicado em 1955). 1955 - 1972 - 1976. Repositório Institucional da UNESP.

KAMIYA, K. M. e DIAS, M. A. **NÍVEIS DE CONHECIMENTO ESPERADOS DOS ESTUDANTES: Análise dos Três Níveis de Conhecimento Esperados dos Estudantes em Análise Combinatória e Cálculo de Probabilidades**. Revista PIBIC, vol. 2, p. 133-141, 2005.

KAPUR, J. N. **'Combinatorial Analysis and School Mathematics'**. Educational Studies in Mathematics. Vol. 3, 111 - 127, 1970.

LIMA, J. S. e NUNES, J. M. V. **Tratamento da Informação: um Desafio para os Professores dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**. Artigo apresentado à Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção de Grau no Curso de Licenciatura Integrada em Educação em Ciências, Matemática e Linguagem na Universidade Federal do Pará. 2014.

LOPES, C. A E. **A probabilidade e a estatística no Ensino Fundamental: uma análise curricular**. Dissertação (Mestrado). Campinas: Unicamp, 1998.

LOPES, J. M. e REZENDE, J. C. **Um Novo Jogo para o Estudo do Raciocínio Combinatório e do Cálculo de Probabilidade**. Bolema, Rio Claro, SP, vol. 23, nº 36, p. 657 a 682, agosto 2010.

MANDARINO, M. C. F. **A Análise de Soluções dos Alunos na Formação de Professores que Ensinam Matemática**. In: Anais 33ª ANPED –Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação. 2010.

MENSSOURI, D. **Essai de délimitation em termes de problématiques des effets de contrat et de transposition: les cas de relations entre droites et équations dans les classes de second et Première**. Thèse. Grenoble: Université Joseph Fourier. 1994.

MORGADO, A., PITOMBEIRA DE CARVALHO, J., PINTO DE CARVALHO, P. e FERNANDEZ, P. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Grafix, 1991.

MORAES, G. M. **Abordagem do raciocínio de análise combinatória nos livros didáticos no primeiro e segundo ciclo do Ensino Fundamental**. SBPC. 2013a.

MORAES, G. M. **O papel do livro didático no despertar do raciocínio de análise combinatória no primeiro e segundo ciclo do Ensino Fundamental**. EPAEM. 2013b.

MORAES, G. M. **A noção do raciocínio combinatório em livros didáticos dos Anos Iniciais: uma análise praxeológica**. Monografia (Especialização). Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica,

Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Belém, 2014.

MORIN, E. **O método IV**. As ideias: a sua natureza, vida, habitat e organização. Portugal: Publicações Europa-América, 1992.

MORO, M. L.; SOARES, M. T. **Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental**. Educação Matemática Pesquisa, vol. 8, nº 1, p. 99-124, 2006.

NIWA, S. **Uma justificativa para se ensinar Análise Combinatória a partir do Princípio Fundamental da Contagem**. São Paulo: IFSP, 2011.

OLIVEIRA, E. G. e COUTINHO, C. Q. S.. **UM ESTUDO SOBRE SABERES DE PROFESSORES DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL: COMBINATÓRIA**. Anais do Encontro de Produção Discente PUCSP/Cruzeiro do Sul. São Paulo. p.1-8. 2012.

OLIVEIRA, J.B. e RIBEIRO, L. M. **MATEMÁTICA X LEITURA: Contando Histórias para Introduzir Noções de Combinatória e Probabilidade**. UBM – Projeto Fundação – IM/UFRJ, 2004.

PEREIRA, J. C. S. **Análise Praxeológica de Conexões entre Aritmética e Álgebra no Contexto do Desenvolvimento Profissional do Professor de Matemática**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Belém, 2012.

PESSOA, C. A. S.; SILVA, C. A. da e MATOS FILHO, M. A. S. **Uma análise sobre a resolução de problemas multiplicativos por alunos de 3ª e 5ª série**. Anais do XVII Encontro de Pesquisa Educacional do Norte Nordeste. Belém: UFPA-EPENN, 2005a.

PESSOA, C., SILVA, C. A. da e MATOS FILHO, M. **Como os alunos de 3ª e 5ª série resolvem os problemas de estrutura multiplicativa?** Anais do XI Encontro Baiano de Educação Matemática, Salvador, 2005b.

PESSOA, C. e MATOS FILHO, M. **Estruturas multiplicativas: como os alunos compreendem os diferentes tipos de problemas?** Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Recife, 2006a.

PESSOA, C. e MATOS FILHO, M. **Raciocínio combinatório: uma análise dos livros didáticos de Matemática de 1ª a 4ª séries**. Anais da VII Reunião de Didática da Matemática do Cone Sul, Águas de Lindóia, 2006b.