UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM DOCÊNCIA EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS – MESTRADO PROFISSIONAL
TURMA CANAÃ DOS CARAJÁS-PA

VÂNIA FERREIRA BRAGA

ENSINO-AVALIAÇÃO-APRENDIZAGEM DE MULTIPLICAÇÃO NOS ANOS INICIAIS COM O USO DE TAREFAS

Belém-PA
2024

VÂNIA FERREIRA BRAGA

ENSINO-AVALIAÇÃO- APRENDIZAGEM DE MULTIPLICAÇÃO NOS ANOS INICIAIS COM O USO DE TAREFAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGDOC) do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI), da Universidade Federal do Pará (UFPA), como requisito obrigatório à obtenção do título de Mestre em Docência em Educação em Ciências e Matemática.

Orientador(a): Prof.ª Dr.ª Isabel Cristina Rodrigues de Lucena

Belém-PA
2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

B813e Braga, Vânia Ferreira.
ENSINO-AVALIAÇÃO-APRENDIZAGEM DE MULTIPLICAÇÃO NOS ANOS INICIAIS COM O USO DE TAREFAS / Vânia Ferreira Braga. — 2024.
188 f. : il. color.

Orientador(a): Profª. Dra. Isabel Cristina Rodrigues de Lucena
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2024.

1. Ensino-Aprendizagem-Avaliação. 2. Diversificação de tarefas. 3. Campo Conceitual Multiplicativo. 4. Anos iniciais. 5. Produto Educacional. I. Título.

CDD 371.1024

VÂNIA FERREIRA BRAGA

ENSINO-AVALIAÇÃO- APRENDIZAGEM DE MULTIPLICAÇÃO NOS ANOS INICIAIS COM O USO DE TAREFAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGDOC) do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI), da Universidade Federal do Pará (UFPA), como requisito obrigatório à obtenção do título de Mestre em Docência em Educação em Ciências e Matemática, área de concentração: Ensino, Aprendizagem e Formação de professores de Ciências e Matemática.

Linha de pesquisa: Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática para a Educação Cidadã

Data da aprovação: ____/____/______

Conceito: ________________________

BANCA EXAMINADORA

____

Prof.ª Dr.ª Isabel Cristina Rodrigues de Lucena
Professora Orientadora (Presidente) (PPGDOC-IEMCI- UFPA)

____

Prof. Dr. Arthur Gonçalves Machado Júnior (Membro Interno – PPGDOC/UFPA)

____

Prof. Dr. José Ricardo e Souza Mafra (Membro Externo - UFOPA)

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao meu amado esposo, Rogério Natal, às minhas queridas filhas, Izabella e Geovanna e à minha amada mãe, Isabel, que compreenderam os momentos de ausência e me apoiaram incondicionalmente.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus e a Nossa Senhora pela a existência, por me sustentarem em todos os momentos e por terem colocado em meu caminho pessoas que me inspiraram e me apoiaram, e por aquelas que duvidaram e criticaram, todas tiveram seu grau de importância nessa caminhada. Gratidão! Compreendi que “Tudo tem o seu tempo determinado, e há tempo para todo o propósito debaixo do céu.” (Eclesiastes 3). Vejo Deus cuidando de cada detalhes em cada tempo em minha vida, por isso rendo Glória a Ele.

Agradeço à minha família, principalmente ao meu esposo, que soube me compreender e me apoiou incondicionalmente nessa trajetória. Às minhas filhas que entenderam os momentos de ausência e de angústia e me incentivaram a trilhar o caminho da vitória. À minha mãe que sempre acreditou em mim e estive ao meu lado. Família, sem o apoio e compreensão de vocês, isso tudo não seria possível. Essa conquista é nossa!

À minha orientadora, Prof.ª. Dr.ª Isabel Cristina Rodrigues de Lucena, por ter acreditado no meu projeto e que soube orientar na medida e no tempo certo e conduziu os momentos de orientações com muita tranquilidade, carinho, sabedoria, dedicação, com sugestões e muitas revisões. E tudo isso resultou no desenvolvimento deste trabalho.

Ao membro da banca do Seminário de Pesquisas e Produtos Educacionais, Prof. Dr. Arthur Gonçalves Machado Júnior (PPGDOC/UFPA), pelo direcionamento mais qualitativo e objetivo deste trabalho. Aos membros da banca do exame de qualificação e de defesa, Prof. Dr. Arthur Gonçalves Machado Júnior (PPGDOC/UFPA) e o Prof. Dr. José Ricardo e Souza Mafra (ICED/UFOPA) pelo aceite e pelas relevantes contribuições e sugestões para aprimoramento desta investigação. À Prof.ª. Me. Clara Alice Ferreira Cabral, pela disponibilidade em compor a banca de defesa como doutoranda convidada (UFPA) e pelas sugestões feitas para o aperfeiçoamento deste trabalho.

A todos os professores e professoras, do Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGDOC), que contribuíram com a minha formação com ensinamentos valiosos, principalmente ao Prof. Dr. Arthur Gonçalves Machado Júnior que aguçou minha curiosidade e levou-me a “enxergar” o que eu realmente queria com a minha pesquisa. Foi por meio de suas aulas que me apaixonei pela Teoria dos Campos Conceituais e dos tipos de tarefas. Prof. Arthur: você será inesquecível para mim.

Aos meus colegas do Mestrado Profissional em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGDOC) pelos momentos de trocas de conhecimentos, discussões que resultaram em aprendizagens e descontrações que serão lembradas com saudade. Agradeço especialmente a Valéria, Lilian, Andrielly e Mirian por dividirem comigo as angústias e anseios ao longo desta caminhada, por vibrarem por cada conquista e me apoiarem nos desafios.

À professora Claudenici Aparecida M. da Silva e Elineide Neves de Sousa por terem cedido a turma para que a pesquisa fosse aplicada e, também, por ajudarem no desenvolvimento das tarefas. A vocês, meu eterno agradecimento.

Aos pais e alunos da turma do 5º ano B da Escola Francisca Romana dos Santos que aceitaram participar e, assim, puderam contribuir com desenvolvimento deste trabalho. Sem vocês nada aqui seria possível.

À Prefeitura de Canaã dos Carajás-PA, por meio da Secretaria Municipal de Educação, pela parceria com a UFPA que, junto ao Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGDOC), concederam-me a oportunidade de cursar Mestrado em minha cidade.

"Aqueles que usam bem a Teoria dos Campos Conceituais no dia-a-dia são os que voltaram a ela, testaram coisas com seus alunos, cometeram erros, recomeçaram. Só assim é possível dominar o assunto e se sentir seguro na prática."

(VERGNAUD)

RESUMO

Esta pesquisa teve por objetivo investigar, a partir de uma dada proposta de ensino, como as aprendizagens ocorrem em um contexto comum de sala de aula. Foi considerado com mais aprofundamento os processos vivenciados pelos alunos na aprendizagem de conceitos que contemplam as ideias da multiplicação, do que apenas os resultados das respostas das tarefas. O aporte teórico que orienta este estudo está nos debates a respeito da avaliação para a aprendizagem e a diversificação das tarefas no campo multiplicativo, em especial a operação de multiplicação. As tarefas foram desenvolvidas em uma escola da rede de ensino municipal de Canaã dos Carajás-PA, em uma turma do 5º ano, com 32 participantes. O percurso investigativo foi de natureza qualitativa. Os dados foram obtidos por meio de registros, orais e escritos, produzidos por grupos de alunos no momento do desenvolvimento de 6 (seis) tarefas do tipo problema, exercício, investigação e exploração do campo conceitual multiplicativo. Essas tarefas foram pautadas nas habilidades propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) voltadas para o 4º ano do Ensino Fundamental, potencialmente, com o propósito de ensinar, aprender e avaliar. No desenvolvimento das atividades, buscamos estabelecer conexões entre procedimentos aditivos e multiplicativos, regularidades numéricas de múltiplos e os processos envolvidos na resolução do algoritmo da multiplicação. A análise dos dados foi interpretativa dos registros obtidos no desenvolvimento de tarefas, tidas como de ensino-aprendizagem-avaliação, realizadas em sala de aula pelos grupos de alunos. Tomamos como referência a avaliação na perspectiva formativa (Fernandes, 2005, 2006, 2008), a diversificação de tarefas, tipo exercício, problema, investigação e exploração (Ponte, 2005, 2006, 2010, 2014) e a Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1993, 1996, 2003, 2009). A diversificação das tarefas se mostrou propícia para a compreensão e o desenvolvimento de esquemas estratégicos de resolução de situações que envolvem as quatro ideias inerentes à multiplicação. Desse modo, indicamos as tarefas com caminho para articular o ensino-aprendizagem-avaliação, pois elas se configuraram como elementos essenciais em um ambiente de aprendizagem colaborativo, por meio de *feedback* direcionado, para o desenvolvimento do pensamento multiplicativo. A presente pesquisa apontou que as tarefas de caráter investigativo/exploratório ainda são pouco propostas em contexto de sala de aula e o fato de registrar os caminhos que foram percorridos para se chegar à resolução foi tido com algo difícil pelos alunos, por essa não ser uma prática corriqueira em sala de aula. Além desses resultados, a pesquisa gerou o Produto Educacional: Tarefas de ensino-aprendizagem-avaliação de multiplicação: uma proposta para professores que ensinam matemática, que é destinado, principalmente, aos professores do 4º ano do Ensino Fundamental, com o objetivo de direcionar e apoiar esses professores em suas aulas e, assim, contribuir com o processo de ensino-aprendizagem-avaliação.

Palavras-chave: Ensino-Aprendizagem-Avaliação. Diversificação de tarefas. Campo Conceitual Multiplicativo. Anos iniciais. Produto Educacional.

ABSTRACT

This research aimed to investigate, based on a given teaching proposal, how learning occurs in a common classroom context. The processes experienced by students in learning concepts that include the ideas of multiplication were considered in greater depth, rather than just the results of the answers to the tasks. The theoretical framework that guides this study is the debates regarding assessment for learning and the diversification of tasks in the multiplicative field, especially the multiplication operation. The tasks were developed in a school in the municipal education network of Canaã dos Carajás-PA, in a 5th grade class with 32 participants. The investigative path was of a qualitative nature. The data were obtained through oral and written records, produced by groups of students at the time of the development of 6 (six) tasks of the problem, exercise, investigation and exploration type of the multiplicative conceptual field. These tasks were based on the skills proposed by the National Common Curricular Base (BNCC) aimed at the 4th grade of Elementary School, potentially, with the purpose of teaching, learning and evaluation. In developing the activities, we sought to establish connections between additive and multiplicative procedures, numerical regularities of multiples and the processes involved in solving the multiplication algorithm. Data analysis was interpretative of the records obtained in the development of tasks, considered as teaching-learning-evaluation, carried out in the classroom by groups of students. We took as reference the evaluation in the formative perspective (Fernandes, 2005, 2006, 2008), the diversification of tasks, such as exercises, problems, investigation and exploration (Ponte, 2005, 2006, 2010, 2014) and the Theory of Conceptual Fields (Vergnaud, 1993, 1996, 2003, 2009). The diversification of tasks proved to be conducive to understanding and developing strategic schemes for solving situations that involve the four ideas inherent to multiplication. Thus, we indicate the tasks as a way to articulate teaching-learning-evaluation, since they were configured as essential elements in a collaborative learning environment, through targeted feedback, for the development of multiplicative thinking. This research showed that investigative/exploratory tasks are still rarely proposed in the classroom context and the fact of recording the paths that were taken to reach the solution was considered somewhat difficult by the students, since this is not a common practice in the classroom. In addition to these results, the research generated o Educational Product: Multiplication teaching-learning-assessment tasks: a proposal for teachers who teach mathematics, which is intended at teachers who teach mathematics with the objective of guiding and supporting these teachers in their classes and, thus, contributing to the teaching-learning-evaluation process.

Keywords: Teaching-Learning-Evaluation. Task diversification. Multiplicative Conceptual Field. Early years. Educational Product.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE IMAGENS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AFA	Avaliação Formativa Alternativa
BDTD	Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
IBICT	Instituto Brasileiro de Informação em Ciências e Tecnologia
INEP	Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira
MEC	Ministério da Educação
SAEB	Sistema de Avaliação da Educação Básica
TCC	Teoria dos Campos Conceituais
ZDP	Zona de Desenvolvimento Proximal

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O interesse para esse estudo está no fato de vivenciar, na prática docente, em contexto de sala de aula, práticas que exigem dos estudantes uma grande capacidade de memorizar regras e definições, sem se preocupar com a compreensão dos conceitos e procedimentos. Como consequência dessas práticas, observa-se estudantes que saem dos anos iniciais do Ensino Fundamental sem/ou com poucas habilidades dos objetos matemáticos, especialmente com relação ao Sistema de Numeração Decimal e as operações básicas, o que dificulta a progressão das aprendizagens (Ibiapina, 2014; Zonzini, 2016; Silva, 2019).

Ao partir desse contexto que esta pesquisa – intitulada *Ensino-avaliação-aprendizagem da multiplicação nos anos iniciais: com o uso de tarefas* – teve os diferentes tipos de tarefas com as ideias da multiplicação como foco de investigação em uma turma de 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública localizada na cidade de Canaã dos Carajás-PA. Tenho por orientação a seguinte questão de pesquisa: **quais as possibilidades que as diversas tarefas podem gerar para a construção de conceito e desenvolvimento de esquemas da multiplicação de números naturais com alunos do 4º ano do Ensino Fundamental?** Como objetivo geral: investigar, a partir de uma dada proposta de ensino, como as aprendizagens ocorrem em um contexto comum de sala de aula, isso ao considerar com mais aprofundamento os processos vivenciados pelos alunos na aprendizagem de conceitos que contemplam os esquemas de multiplicação dos números naturais, do que apenas os resultados das respostas das tarefas. Como objetivos específicos: analisar os registros (orais e escritos) produzidos pelos alunos; identificar os procedimentos e esquemas mobilizados e utilizados pelos alunos na resolução das diferentes situações/tarefas, que envolvem ideias básicas do conceito de multiplicação; verificar as diferentes soluções encontradas pelos alunos.

Pesquisas têm mostrado a grande dificuldade dos alunos diante da compreensão dos processos e procedimentos das operações aritméticas (Brandt, Guérios, Daniel e Pereira, 2019; Andrade, Colares e Costa, 2018), em especial, entender o conceito de multiplicação dos números naturais, isso tem resultado no fracasso escolar. O reflexo dessa situação também é descrito pelos resultados apresentados pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), em relação aos dados do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) de 2021, no 5º ano, apenas 13,1% dos estudantes encontram-se no nível Adequado, 48,1% no Básico e 38,8% no Insuficiente (INEP, 2023). Mesmo esse sendo um dado de desempenho global dos estudantes nessa avaliação, ele retrata a nível de Brasil, um resultado que se espelha ao que acontece em unidades menores, nas salas de aulas, por exemplo, onde eu faço parte como professora e também como colega de trabalho de muitas outras que discutimos sobre a aprendizagem em Matemática, que nos parece estar longe de ser considerada adequada.

Partimos do entendimento que o conhecimento do professor em relação ao conteúdo Matemática é primordial para que o ensino seja adequado, é necessário a compreensão das particularidades de cada objeto do conhecimento, além de que a prática do profissional docente também tem grande relevância para que os alunos possam desenvolver ou não as habilidades matemáticas. Portanto, ao estar em um curso de Mestrado Profissional em educação matemática, fui tocada por estudos (Vergnaud, 1993, 1996, 2003, 2009; Fernandes, 2005, 2006, 2008 e Ponte, 2005, 2006, 2010, 2014) que apontam às atividades de ensino-aprendizagem-avaliação propostas no cotidiano da sala, de modo investigativo-exploratório, importantes de serem colocadas em prática no cotidiano da sala de aula como possibilidades para a melhoria das aprendizagens.

O interesse inicial para o desenvolvimento da referida pesquisa de Mestrado era de um estudo sobre as quatro operações básicas. No entanto, identificamos que este seria um assunto muito extenso para se desenvolvido em dois anos de estudo, tempo de duração do curso. Assim, ainda com o intuito de pesquisar sobre algo que faz parte das minhas inquietações com a Matemática que acontece em sala de aula e com as aprendizagens dos alunos a partir das práticas de ensino. Neste trabalho, trazemos uma proposta de pesquisa sobre uma temática recorrente em pesquisas em educação matemática e que se encontra na motivação inicial para estudos – que é adentrar sobre as dificuldades na aprendizagem da multiplicação de números naturais no contexto do Ensino Fundamental, em especial nos anos iniciais.

Quanto ao conceito da multiplicação de números naturais, em várias situações de minha prática e de outras colegas professoras, muitos alunos demonstram não entender os processos e as ideias que estão envolvida nesse conceito. E, no momento de resolução de tarefas, questionamentos de qual operação utilizar: se é de “mais”, de “menos”, de dividir ou de “vezes”, o que demonstra não dominarem a significação da operação.

Também é notório, em diversas situações de tarefas onde a exigência é apenas a resolução de uma operação, o que demandaria o conhecimento do algoritmo adequado a dada situação, mas ainda assim muitos alunos expressam dificuldades para encontrar os resultados corretos por não compreenderem todas as etapas percorridas durante o processo das resoluções destes. Visto que demonstram não compreender, por exemplo, a importância do valor posicional de um número e a relação disso com a estrutura que compõe o Sistema

Numérico Decimal. Dessa forma, o nosso interesse é compreender como situações do Campo Conceitual Multiplicativo – mais especificamente àquelas que envolvem o conceito da multiplicação – podem levar os alunos a desenvolverem seus esquemas e, consequentemente, a consolidação desse conceito.

Ao pensar nas dificuldades dos estudantes quanto ao conceito da multiplicação de números naturais, elas decorrem do fato, muitas vezes, de que o trabalho com esse objeto matemático ser pautado somente sob a ótica da adição de parcelas iguais, não sendo abordados as outras ideias inerentes ao campo conceitual multiplicativo (Gerard Vergnaud, 1993, 1996, 2009). Além da não compreensão do funcionamento do Sistema de Numeração Decimal, o que dificulta o entendimento do processo de trocas na operação multiplicativa; bem como a não valorização, por parte dos professores, dos processos que envolvem a estruturação do conceito e algoritmo de multiplicação.

O nosso interesse principal não é com o algoritmo padrão, porém ele é um esquema a ser considerado como caminho para resolução de situações, e também, outros que devem ser considerados. Visto que, assim, "espera-se que os alunos desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos". (Brasil, 2017, p. 268). Entendemos aqui que essas estratégias utilizadas pelos alunos são importantes para a regulação do ensino.

Nesse contexto, entendemos que a diversificação das tarefas sugeridas por Ponte (2005) é uma alternativa para apoiar o trabalho do professor no que se refere ao ensino-aprendizagem-avaliação, pois em uma sala de aula há uma gama de interesse e formas de aprender. Cabe ao professor, por isso, organizar as situações didáticas[1] de aprendizagem levando em consideração a diversidade do seu público e, consequentemente, a diversificação das tarefas (situações) com o propósito de ensinar e avaliar a compreensão de um conceito. Nesse sentido, a Teoria dos Campos Conceituais (TCC), especialmente o Campo Multiplicativo, pode servir como aporte para a compreensão dos problemas enfrentados nesta componente curricular – Matemática –, além de possibilitar o repensar a maneira como os conceitos são abordados em aula. Do mesmo modo, a avaliação formativa desempenha um papel importante, uma vez que é por meio dela que o professor recolhe informação sobre como os estudantes aprendem ou não e estabelece a gerência de sua aula.

[1] Teoria desenvolvida por Guy Brousseau (Almouloud, 2007) com o propósito de criar um modelo para o desenvolvimento dos processos de aprendizagem dos conceitos matemáticos, com interações estabelecidas entre aluno, professor e saber.

Ao considerar a importância do conceito de multiplicação de números naturais para o ensino de Matemática dos anos iniciais e por esse campo conceitual abranger ideias básicas que envolvem situações associadas à ideia de adição de parcelas iguais, de proporcionalidade, de combinatória e de elementos dispostos em configuração retangular, bem como nos interessamos pelas diversas situações que se direcionam para os vários aspectos deste conceito – multiplicação –, cuja apropriação requer um tempo razoavelmente longo e de estruturas mentais presente em cada indivíduo. De acordo com Moreira (2004, p. 38) “o domínio de um campo conceitual ocorre durante longos períodos de tempo, de forma que novos problemas e novas propriedades relacionados com ele devem ser estudados ao longo de vários anos se quisermos que os alunos o dominem progressivamente”.

Para tanto, são as situações/ tarefas que colocam os alunos em ação/atividade, ou seja, é preciso que o discente se envolva cognitivamente na situação e que isso aconteça por meio dos esquemas, que são estruturas cognitivas que dão sentido as situações. Quando se busca compreender o processo de aprendizagem dos conceitos matemáticos e alternativas para melhorar o ensino, é preciso uma organização que seja capaz de possibilitar a Avaliação Formativa. Portanto, a TCC é uma estrutura de estudo que ajuda o professor a organizar suas aulas e analisar a aprendizagem com mais ênfase no desenvolvimento cognitivo dos alunos em relação a um campo conceitual especifico.

Assim, esperamos contribuir com a pesquisa em educação de Matemática no campo do ensino nos anos iniciais, mais especificamente sobre os processos de ensino-aprendizagem-avaliação da multiplicação. Bem como produzir conhecimentos que auxiliem a superação das dificuldades pertinentes ao ensino-aprendizagem de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, em especial ao campo multiplicativo de números naturais tanto para as práticas de professores que atuam nesse nível de ensino, quanto para as aprendizagens dos alunos.

Evidenciamos que a presente dissertação fica, então, deste modo estruturada: no Capítulo 1, apresentamos a introdução que, de maneira geral, expõe uma visão panorâmica de nosso estudo; as minhas inquietações enquanto pesquisadora e professora dos anos inicias; o problema que resultou no desenvolvimento da pesquisa; a pergunta norteadora; o objetivo geral e específico; o *lócus* de pesquisa e as ideias das teorias que sustentam o percurso metodológico, as análises e conclusões. O Capítulo 2 traz os estudos anteriores sobre o ensino-aprendizagem-avaliação de multiplicação dos números naturais, no qual, de maneira breve, as principais pesquisas desenvolvidas, em nível de Mestrado Profissional brasileiro, relativas (correlacionadas) ao nosso objeto de estudo. O Capítulo 3 foi dedicado as reflexões e o aprofundamento das ideias acerca da multiplicação nos anos iniciais, campo conceitual multiplicativo e orientações curriculares. Já o Capítulo 4 apresenta o aprofundamento teórico dos conceitos de aprendizagem-ensino-avaliação por tarefas: avaliar para melhorar as aprendizagens sobre multiplicação. Dando continuidade, o Capítulo 5 foi reservado para a metodologia da pesquisa empírica, em que descrevemos a caraterização da modalidade da pesquisa, o universo pesquisado e o planejamento e a execução das tarefas que resultaram nos dados obtidos. Em sequência, o Capítulo 6 foi reservado aos resultados e discussões dados, no qual descreve as análises das informações oriundas da aplicação dos passos presentes na metodologia – conforme as ideias defendidas pelo suporte teórico. E, por fim, nas Considerações Finais, trazemos um parecer geral sobre as ideias debatidas, suas contribuições para o ensino-aprendizagem-avalição da multiplicação de números naturais, bem como suas limitações, além de trazer sugestões a pesquisas futuras que focalizem a articulação do ensino-aprendizagem-avalição.

Portanto, a presente pesquisa produziu, dentre outros resultados, um produto educacional voltado ao professor que ensina Matemática, com o objetivo de direcionar e apoiar esses professores em suas aulas. E, assim, contribuir com o processo de ensino-aprendizagem-avaliação.

2 ESTUDOS ANTERIORES SOBRE O ENSINO-APRENDIZAGEM-AVALIAÇÃO DE MULTIPLICAÇÃO DOS NÚMEROS NATURAIS

Com o propósito de conhecer e ampliar as questões que norteiam o ponto chave desta pesquisa, “multiplicação dos Números Naturais”, foi que na primeira quinzena do mês dezembro de 2022 acessamos a plataforma Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações – BDTD. A escolha se deu por ter sido desenvolvida e coordenada pelo Instituto Brasileiro de Informação em Ciências e Tecnologia (IBICT) e por ter seu lançamento no ano de 2002 com o objetivo de divulgar teses e dissertações nacionais[2].

Ao partir do primeiro filtro de palavras-chave: “Ensino da multiplicação, aprendizagem de multiplicação e anos iniciais do ensino fundamental”, selecionamos inicialmente somente as dissertações, sem estipular período, pois o propósito foi apreciar o que já havia sido estudado e discutido sobre o tema nos Mestrados brasileiros no período disponibilizado pela plataforma (BDTD). Na primeira busca, obtivemos 349 resultados. Realizamos a leitura dos resumos e apareceram 10 trabalhos relacionados especificamente com o tema ensino e aprendizagem de multiplicação no Ensino Fundamental e que possuem algum alinhamento com os interesses da pesquisa ora em curso. Nos demais trabalhos esta temática não era específica, pois agregava relação com outras temáticas, por exemplo, à formação de professores ou tratando da multiplicação nos anos finais do Ensino Fundamental. Assim, elaboramos quadro a seguir com as 10 dissertações selecionadas a título de informação:

Quadro 1: levantamento bibliográfico de dissertações – BDTD.

Autor (a)	Título	Instituição	Ano
Karina Peres Guimarães. Orientadora Prof. Dra. Rosely Palermo Brenelli	Abstração Reflexiva e Construção da Noção de Multiplicação, via Jogos de Regras: em Busca de Relações	UNICAMP	1998
Vera Lúcia da Silva Orientadora da Profa Dra Anna Franchi.	Ensino e aprendizagem de problemas de produto cartesiano: inter-relações entre diferentes representações	PUC-SP	2006

[2] http://bdtd.ibict.br/vufind/Content/history

Aparecida de Lourdes Bonanno. Orientadora Doutora Célia Maria Carolino Pires.	Um estudo sobre o cálculo operatório no campo multiplicativo com alunos de 5ª série do ensino fundamental	PUC-SP	2007
Poliana Helena Batista Thomaz Orientadora: Profa. Dra. Maria Auxiliadora Bueno Andrade Megid	Perspectivas de um trabalho pedagógico com jogos e a matemática no programa Ler e escrever	PUC-CAMPINAS	2013
Wilter Freitas Ibiapina Orientador: Prof. Dr. John Andrew Fossa	Uso pedagógico do ábaco romano para o ensino do algoritmo de multiplicação	UFRN	2014
Cleudiana dos Santos Feitoza Zonzini Orientador: Prof. Dr. Rui Seimetz	Algoritmos de multiplicação: uma experiência no Ensino Fundamental.	UnB	2016
Sara Rodrigues Ferraz Orientadora da Prof.a Dr.a Ana Cristina Ferreira.	Investigando a aprendizagem de noções associadas ao campo multiplicativo: um estudo com alunos do 6° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG)	UFOP	2016
Ivan Álvaro dos Santos Orientadora: Profa. Dra. Tânia Baier	A história da matemática como recurso pedagógico para a aprendizagem significativa de multiplicação de números naturais	FURB	2018
Lucinéia Barbosa da Silva Orientadora: Samira Zaidan	O ensino-aprendizagem da multiplicação de números naturais no 5º ano do ensino fundamental	UFMG	2019

Adelaide da Silva Carvalho Orientador: Prof. Dr. Wagner Ahmad Auarek.	Resolução de problemas que envolvem a multiplicação e a divisão de números naturais: um estudo das estratégias de estudantes do 5º ano	UFMG	2020

Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 2022.

Inicialmente, citamos o trabalho realizado por Silva (2019) que propôs a investigar a compreensão dos processos de ensino e aprendizagem da multiplicação com números naturais pelos estudantes do 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola de Belo Horizonte – MG. Esse trabalho foi desenvolvido em colaboração com uma Pesquisadora Auxiliar. A autora adotou como metodologia o desenvolvimento de uma sequência didática com 16 horas/aula de duração, na qual a maioria das atividades foram realizadas em grupo/dupla de alunos. Tendo nove atividades diversificadas que envolvem situações problemas com ideia aditiva, de proporcionalidade, de organização retangular e de raciocínio combinatório. O referencial teórico de sua prática pedagógica foram os autores: Caldeira e Zaidan (2010), Smole e Diniz (2001), Cavalcanti (2001) e Conti e Longo (2017). Como instrumentos de coleta de dados, optaram por dois registros em diário de campo, um sob o olhar da pesquisadora e outro sob o olhar da Pesquisadora Auxiliar. Contaram ainda com registros em áudio das opiniões dos alunos em relação às atividades propostas.

As atividades da sequência didática envolveram a multiplicação em sua ideia aditiva em uma reta numérica. Nessa atividade houve a observação da propriedade comutativa da multiplicação e a inclusão do número zero. Outra atividade foi a de desenhar uma bolsinha/estojo de lápis e estimar uma quantidade de lápis a ser guardada. Em seguida, deveriam pensar em quantos lápis caberiam em quatro bolsinhas iguais. Como consequência, foi analisado que dos 19 alunos participantes da pesquisa, 14 responderam, satisfatoriamente, a atividade proposta, mas três não registraram o cálculo.

Foi possível observar, ainda, que tiveram alunos que compreenderam a multiplicação como adição de parcelas iguais, porém não conseguiram realizar a adição corretamente. Na atividade que abordava a ideia aditiva quanto à proporcionalidade, os alunos demostraram muita dificuldade, pois insistiam em utilizar somente a adição de parcelas iguais. Teve, também, uma atividade para o desenvolvimento da compreensão acerca do raciocínio combinatório, o que foi associado à multiplicação, e outro exercício com organização retangular, não sendo necessário contar item por item, o que poderia ser simplificado por uma multiplicação. Em seguida, foi proposto atividade para estimular a compreensão dos alunos acerca das trocas necessárias nas operações no Sistema de Numeração Decimal. Por fim, observamos a importância do ambiente colaborativo para o desenvolvimento das ideias de multiplicação de números naturais, uma vez que compreendemos os seus processos.

A esse respeito, Carvalho (2020) apresenta a resolução de problemas que envolvem a multiplicação e a divisão de números naturais: um estudo das estratégias de estudantes do 5º ano, em uma escola pública de Ibirité-MG. A proposta de atividade teve duração de um mês e teve como objetivo a construção da aprendizagem pelos próprios alunos, no qual eles criaram estratégias próprias para resolver com base nas informações postas nos problemas. A autora adotou como referencial teórico as ideias de Onuchic e Allevato (2014), Nacarato (2009), Smole e Diniz (2001, 2016), Krulik e Reys (1997) e Polya (1997). Como instrumentos de coleta de dados, a pesquisadora fez gravação de áudio, com os diálogos realizados em duplas, sobre a elaboração das estratégias para a resolução de problemas; anotações em diário de campo e das atividades propostas em sala de aula.

No início da ação didática, a pesquisadora utilizou um tabuleiro/trilha de cartas com situações problemas que os alunos pudessem resolver, porém a empolgação dos alunos perante ao jogo inviabilizou a compreensão dos áudios para as análises, tendo que refazer as estratégias de condução das atividades. Assim, para organizar o jogo foram feitas duplas adversárias que necessitavam resolver os problemas em dois minutos e anotar as estratégias usadas por eles na resolução; se acertassem avançariam 5 casas no jogo. Como os alunos apresentaram dificuldades nas resoluções, as atividades foram conduzidas em sala de aula com base na proposta de Onuchic e Allevato (2014).

Com essa pesquisa foi possível observar a resolução de problemas com uma excelente estratégia de ensinar e aprender as operações aritméticas, desde que seguiam os passos adequados na compreensão do que se deseja do problema (Onuchic; Allevato, 2014). Assim como percebemos que a prática da escrita das estratégias usadas produziu reflexões sobre o processo de aprendizagem. Quanto ao jogo, esse deve ter uma intencionalidade pedagógica e não o jogo pelo jogo.

Seguindo o viés do ensino de multiplicação por meio de resolução de problemas e da utilização de jogos, Guimarães (1998) fez um estudo em que analisou como uma intervenção pedagógica, com jogos de regras, seria capaz de construir a noção de multiplicação e relacionou-a com a abstração reflexiva, cuja teoria era a piagetiana. O estudo envolveu 17 alunos da 3ª série do Ensino Fundamental de uma escola cooperativa de São José do Rio Preto, que foram divididos em quatro grupos aleatoriamente. Para isso foi aplicado um pré-teste (no início da intervenção pedagógica) e um pós-teste (no final da intervenção pedagógica). Nos pré e pós-testes foram aplicadas provas de "Abstração Reflexiva: construção de múltiplos comuns (Piaget, 1995)" e "Multiplicação e Divisão Aritmética (Granell, 1983)". No pré-teste, a situação III foi suprimida.

A intervenção pedagógica foi organizada em seis sessões com jogos de Pega-varetas e Argola. Cada sessão teve duração de 60 minutos cada. Para a coleta de dados foi usado o pré e pós-teste e a análise qualitativa constatou que os alunos possuíam conhecimentos multiplicativos. A intervenção pedagógica com os jogos teve seu aspecto positivo, pois 13 alunos, dos 17, apresentaram evolução em pelo menos uma das noções propostas, abstração reflexiva ou construção da noção da multiplicação. Por fim, constatamos, com essa pesquisa, que os jogos são recursos pedagógicos importantes para o ensino, principalmente quando são usados de maneira intencional no contexto escolar.

Quanto aos aspectos relativos ao ensino e aprendizagem das estruturas multiplicativas de números naturais por meio de resolução de problemas, Silva (2006) investigou uma turma de 31 alunos da 4ª série (atual 5º ano) de uma escola estadual de São Paulo, porém devido as faltas e desistência, somente 20 alunos foram analisados para a obtenção do resultado da pesquisa. A proposta de ensino teve como fundamentação a Teoria do Campo Conceitual Multiplicativo de Gerald Vergnaud e ocorreu em 15 encontros com atividades referentes ao raciocínio combinatório na resolução de problemas de produto cartesiano. Para a coleta de dados, a pesquisadora utilizou de registro/anotações, diário de classe, avaliação contínua (avaliação diagnóstica), as discussões e produções dos alunos, entrevista e fotografias.

Para elaborar a proposta de ensino, foi aplicado um teste piloto (avaliação diagnóstica inicial) para verificar como os alunos resolviam os problemas cartesianos e quais eram as dificuldades – os problemas foram de produto cartesiano (A x B), (A x B x C) e divisão. A proposta de ensino contou com atividades de representação de diagrama de árvore, tabelas de dupla entrada. Conforme as análises da pesquisa, foi possível verificar um avanço nas aprendizagens dos alunos e que as atividades com a tabela cartesiana e o diagrama de árvore favoreceram a compreensão/conexão entre as operações matemáticas.

Ao seguir essa mesma perspectiva do ensino da multiplicação por meio de resolução de problemas, estudamos a pesquisa de Bonanno (2007), que investigou como os alunos da 5ª série analisam, interpretam e resolvem situações problemas com diferentes significados multiplicativos e de divisão. Os sujeitos de pesquisa foram 21 alunos com idade de 11 a 12 anos. Para isso, a autora apoiou-se, em especial, Gerald Vergnaud, Constance Kamii e Irma Saiz. A pesquisa foi desenvolvida em quatro momentos distintos, as atividades envolveram situações com problema de multiplicação, com proporção simples e ideia de configuração retangular também de divisão por quota e partição, cálculo mental de multiplicação (dobro e quádruplo), cálculo escrito (técnica operatória) com multiplicação e divisão.

A pesquisa mostrou que o desempenho na resolução de problema foi pouco satisfatório e a situação de multiplicação que teve o melhor desenvolvimento envolve proporção simples, pois contou com 81% de acertos – enquanto isso, as situações que envolveram a divisão tiveram um percentual médio de 30% de acertos. Assim, concluiu-se que os alunos conhecem alguns significados da multiplicação, principalmente os de proporção simples. Quanto à interpretação das situações problemas, muitos alunos têm dificuldades de compreensão o que acarreta a resolução incorreta.

Nesse sentido, Bonanno (2007), Ferraz (2006) desenvolveram seu estudo com base nas tarefas construídas a partir da Teoria dos Campos Conceituais (Gerald Vergnaud) e contribuíram para a aprendizagem de conceitos relacionados à multiplicação e divisão de números naturais de alunos do 6º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG). As tarefas contavam com questões de situações problemas que envolviam multiplicação por proporção simples, proporção múltipla e a organização retangular e divisão por partição e divisão por cotição.

Os resultados desses estudos demonstraram que 75% dos alunos parecem ter compreendido essa classe de problemas multiplicativos de proporção simples de classe “um para muitos” e tiveram facilidade os problemas de divisão por partição. Já nos problemas de classe “muitos para muitos”, os alunos apresentaram dificuldades na interpretação dos enunciados. Já na classe combinatória, a pesquisa evidenciou que os alunos recorreram as estratégias de contagem, pois contaram as possibilidades uma a uma e não realizaram a transição do processo aditivo para o multiplicativo

Em outra perspectiva do ensino e aprendizagem de multiplicação de números naturais, Zonzini (2016) trata em sua pesquisa sobre o ensino dos Algoritmos de multiplicação, na qual desenvolveu uma proposta pedagógica que foi aplicada em três turmas, cada uma com 15 alunos do 6º ano do Ensino Fundamental Distrito Federal. Mesmo as turmas sendo dos anos finais do Ensino Fundamental, o tema nos interessou, visto que queríamos entender como o ensino foi organizado. Essa pesquisa foi desenvolvida com alunos que participavam da Escola Integral, estudavam em turno na sala regular e frequentavam as aulas extras no contraturno, onde participavam de oficinas. Foi durante essas oficinas que a autora aplicou a proposta com duração de 10 encontros com duas horas de duração cada.

Para organizar seus estudos, a autora fez um percurso histórico sobre o algoritmo da multiplicação em algumas civilizações. Ela trouxe o conceito do princípio multiplicativo ou princípio fundamental da contagem. Nos encontros realizados com os sujeitos da pesquisa, a autora propôs atividades com o princípio multiplicativo, atividade de sondagem, além de apresentar os algoritmos de multiplicação usados pelas civilizações ao longo da história. A saber: egípcio, camponeses russos, chineses, indiano – Gelosia, Varas de Napier, gregos. Por fim, fez uma sondagem final e revisão dos algoritmos.

No exercício de sondagem, a intenção era saber como estava o nível de conhecimento da turma em relação à multiplicação. Os estudos mostraram que os alunos sabiam “armar” corretamente a multiplicação, porém não conseguiam efetuar o algoritmo devido à falta de conhecimento quanto o valor posicional. Quando iam multiplicar a dezena do multiplicador pela unidade do multiplicando, colocavam o produto, que é uma dezena, no lugar da unidade. Esse dado revela uma causa importante na não compreensão do algoritmo de multiplicação pelos alunos. Outro fator problemático mostrado pela pesquisa, diz respeito à multiplicação pelo zero, pois muitos alunos ao multiplicarem o 0 por um algarismo, encontraram o algarismo como o produto, quando o correto é o 0. Os alunos apresentaram também dificuldades quanto ao reagrupamento dos algarismos.

Nas atividades propostas na sondagem, 43% apresentaram erros. Após a apresentação dos algoritmos da multiplicação utilizados em algumas civilizações, foi aplicado atividades complementares e o erro caiu para 28%. Assim, observamos, com esse estudo, que o uso do algoritmo da multiplicação trata-se de uma estratégia para o ensino, porém há muitos conteúdos pertinentes ao uso do algoritmo que não foram consolidados – como sistema numérico/valor posicional – e isso faz com que o aluno não consiga operar com os algoritmos.

A pesquisa de Ibiapina (2014), apresentou o uso pedagógico do ábaco romano para o ensino do algoritmo de multiplicação para alunos do 2º ano do Ensino Fundamental de uma escola de Natal-RN, nela foram aplicadas atividades de representação dos números até a multiplicação com o ábaco romano, pois o ábaco romano se assemelha ao algoritmo de adição, subtração e multiplicação que hoje é usado, devido a forma posicional que o número é registrado. A escolha da turma/ano se deu devido ser uma turma de alunos que ainda não não havia estudado o conteúdo de multiplicação.

A pesquisa foi classificada como pesquisa-ação, e embasou principalmente nas concepções de Fossa (2010), no que refere à História da Matemática e à utilização de materiais manipuláveis que facilitam a aprendizagem dos cálculos aritméticos. O estudo teve como instrumentos utilizados para a coleta de dados a observação, o diário de bordo, os questionários, a entrevista e a análise documental. A pesquisa ainda seguiu a tendência da História da Matemática e se deu em sala de aula por meio da contação da origem do ábaco e como foi utilizado por civilizações antigas.

Segundo o autor, a pesquisa se enquadra na perspectiva construtivista, em que o aluno é o centro da ação pedagógica, o trabalho se deu em grupos por meio da interação aluno-aluno-objeto-professor: o aluno constrói seu conhecimento, tendo o professor o papel de organizar as atividades, mostrar o erro e estimular a criação de novos procedimentos; o que remete, assim, a uma avaliação formativa. A avalição formativa é própria da teoria construtivista, uma vez que ela ocorre durante o processo de ensino e aprendizado oriundos das ações realizadas pelo professor.

Para compreender como se dá o processo de aprendizado do algoritmo de multiplicação pelos alunos do 2º ano do Ensino Fundamental a partir de materiais manipuláveis, a pesquisa se constituiu em três etapas: aplicação do questionário, das atividades e da avaliação final. Foram cinco atividades desenvolvidas, desde a construção do ábaco para a realização das tarefas de adição, subtração e multiplicação e a avaliação final. Tais exercícios desenvolveram-se em dupla, com exceção da primeira atividade de multiplicação. De acordo com os dados apresentados, os alunos puderam aprender a multiplicar, inicialmente por meio da adição de parcelas iguais e conseguiam por abstração do resultado. Logo, essa pesquisa contribuiu para comprovar a necessidade da compreensão do sistema numérico decimal para depois introduzir as operações aritméticas, bem como comprovar que o ábaco é um instrumento que ajuda na compreensão da estrutura posicional contida no sistema de numeração decimal.

Santos (2018) pesquisou a história da Matemática como recurso pedagógico para a aprendizagem dos processos de algoritmo da multiplicação de números naturais com alunos do 6º ano de uma escola pública de Blumenau. Para a coleta de dados foram utilizados o diário de campo e as fotografias. Para as análises, usou-se como referência a História da Matemática, a Aprendizagem significativa e a Fenomenologia

Os estudos, de natureza qualitativa, foram analisados de maneira detalhada com oito alunos, de trinta e quatro da turma, porém a intervenção pedagógica foi realizada com todos os alunos. Os oito alunos foram escolhidos para compor a amostra da pesquisa, isso após a aplicação da "avaliação inicial, onde foram identificados os subsunçores dos mesmos, de acordo com os objetivos que havíamos traçado." (Santos, p. 26, 2018). O resultado da avaliação inicial foi categorizado em 5 grupos, conforme os acertos das questões, em que se definiu os sujeitos da pesquisa.

A intervenção pedagógica aconteceu em quinze encontros, de uma hora e meia cada, e teve com proposta a aplicação de atividades com os três métodos de multiplicação usados pelos russos, egípcios e chineses – métodos que não necessitam do uso da tabuada e apoiam nas ideias de dobro/adição e metade do número. A avaliação inicial era composta por questões com cálculos (fechada) e dissertativas (aberta) com o objetivo de verificar o conhecimento quanto à tabuada e à operacionalidade do algoritmo.

Para a introdução dos métodos de multiplicação, seguiu-se a concepção de Organizadores Prévios defendido por Ausubel, Novak e Hanesian (1980). Para tanto, como organizador prévio do método de multiplicação russa, o pesquisador propôs uma pesquisa em site; já para introdução, o método egípcio, nele foi utilizado vídeo; enquanto que os trabalhos sobre a China recorreram a partir de apresentação dos slides.

Ao se tratar do uso de jogos com recurso pedagógico para ensinar Matemática, Thomaz (2013) fez um estudo com 25 alunos crianças do 3º ano do Ensino Fundamental em uma escola estadual de São Paulo, Campinas, que adotou o material do Programa Ler e Escrever e EMAI e apoiou-se nas ideias defendidas por Grando (2004), Nacarato, Mengali e Passos (2009). A pesquisa dividiu-se em dois momentos com um jogo o "Produto com dadinhos" e com um exercício de multiplicação, além de um questionamento em que os alunos puderam expressar se haviam gostado mais do jogo ou do exercício. Em suas análises, a pesquisadora, constatou que a maioria dos alunos gostaram mais do exercício, o que se justificou foram devido a facilidade das respostas.

A pesquisa consistia em analisar os livros PLE e EMAI para o 3º ano do Ensino Fundamental, materiais que foram adotados pelo governo de São Paulo para as escolas estaduais. Conforme a análise apresentada pela autora as atividades e os jogos existentes nesses materiais privilegiam o conteúdo, por isso, os jogos são pouco estimulantes.

Com os estudos realizados, a partir dessa pesquisa na BDTD, foi possível verificar o que já foi estudado e produzido sobre o conceito de multiplicação no Ensino Fundamental em Mestrados brasileiros.

Assim, compreendemos que nossa pesquisa se constitui em um assunto que não se esgota, mas que merece mais estudos. Com esse levantamento bibliográfico, conseguimos visualizar o quanto se tem estudado e debatido sobre o objeto matemático "multiplicação de Números Naturais" e dos processos que envolvem este objeto e as possibilidades para o ensino. O ato de ensinar e aprender multiplicação é complexo, tanto para os alunos quanto para os professores, pois envolve várias possibilidades.

As dissertações analisadas mostraram que as problemáticas que envolvem o ensino da multiplicação são muitas, em especial: o trabalho pautado somente sob a ótica da adição de parcelas iguais, não sendo abordados as outras ideias inerentes a este objeto de conhecimento; a não compreensão do funcionamento do Sistema de Numeração Decimal, o que dificulta o entendimento do processo de trocas na operação multiplicativa; bem como a não valorização, por parte dos professores, dos processos que envolvem a estruturação do algoritmo de multiplicação.

Os estudos analisados se diferem nas metodologias usadas para a solução dessas problemáticas, já que alguns apostaram na resolução de problemas e outros no ensino dos algoritmos. Há distinção, também, nas estratégias de recursos didáticos, porque alguns utilizaram recursos manipuláveis, enquanto outros recorreram a utilização de atividades impressas. Com isso, percebemos que as atividades multiplicativas que são propostas aos alunos precisam ser instigantes e envolver todas as ideias que englobam a multiplicação, além de contribuir para a compreensão do funcionamento do Sistema de Numeração Decimal.

Das pesquisas consideradas nesse levantamento bibliográfico, apenas três pesquisas (Silva, 2006; Ferraz, 2006 e Bonanno, 2007) se embasaram na teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990, 1994, 1995, 1996, 2003). Não identificamos nenhuma pesquisa que seguiu a teoria da avaliação formativa de Fernandes, mas tiveram pesquisas que utilizaram pré e pós-testes (Guimarães, 1998); teste piloto para a avaliação diagnóstica inicial (Silva, 2006); atividade de sondagem inicial e final (Zonzini, 2016; Ibiapina, 2014 e Santos, 2018). Esses procedimentos são contrários à perspectiva da avaliação para as aprendizagens, pois a avaliação formativa visa melhorar as aprendizagens e não as medir. Também não identificamos nenhuma pesquisa que tenha utilizado diretamente a teoria dos tipos de tarefa proposta por Ponte.

Nessa perspectiva, nossa pesquisa se diferencia das demais aqui analisadas, pois pretendeu investigar o potencial das tarefas para a construção do conceito de multiplicação dos números naturais o que abrange as quatro ideias fundamentais: de adição de parcelas iguais, de proporcionalidade, de combinatória e elementos dispostos em configuração retangular. Além de considerar as várias estratégias de resolução, uma vez que inclui as representações pictóricas e os algoritmos como protocolo de resolução com representação numérica. Consequentemente, propusemos uma articulação entre três teorias: a TCC, de Gerárd Vergnaud, que traz o estudo do campo conceitual multiplicativo, os diferentes tipos de tarefas proposta por Ponte e a Avaliação Formativa Alternativa de Fernandes (2008). Essa conexão pode ser confirmada quando Vergnaud fala sobre os três atos importantes do professor: “O primeiro é a escolha de situações [...]. O segundo é o auxílio oferecido ao aluno. O terceiro ato é a avaliação, para que o professor tenha condições de controlar o desenvolvimento das competências que ele objetiva.” (Vergnaud, 2003, p.50, grifo do autor)

Partimos do pressuposto que a prática docente e as situações de ensino-aprendizagem-avaliação propostas no cotidiano da sala de aula são fatores de interesse para a investigação por conta do potencial que elas possuem em contribuir ou não para as aprendizagens sobre a multiplicação. Isso porque desejávamos investigar quais eram as possibilidades que as diversas situações/tarefas poderiam gerar para a construção de conceito e desenvolvimento de esquemas a multiplicação de números naturais com alunos do 4º ano do Ensino Fundamental.

Nessa direção, propomos desenvolver uma pesquisa centrada na resolução de tarefas/sequências de tarefas matemáticas, tipo problemas, exercícios, atividades de investigações e de exploração (Ponte, 2005) com uma turma de 4º ano. Foram propostos os quatro tipos de tarefas para ter um panorama sobre as aprendizagens dos alunos, visto que a diversidade de tarefas pode trazer contribuições diversificadas sobre o que ocorre durante a aprendizagem, pois cada uma tem um propósito de aprendizagem. Ponte (2005) corrobora com essa premissa ao afirmar que:

> a diversificação é necessária porque cada um dos tipos de tarefa desempenha um papel importante para alcançar certos objectivos curriculares: As tarefas de natureza mais fechada (exercícios, problemas) são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático [...]. As tarefas de natureza mais acessível (explorações, exercícios), pelo seu lado, possibilitam [...] o desenvolvimento da sua auto-confiança. As tarefas de natureza mais desafiante (investigações, problemas), [...] são indispensáveis para que os alunos tenham uma efectiva experiência matemática. As tarefas de cunho mais aberto são essenciais para o desenvolvimento de certas capacidades nos alunos, como a autonomia, a capacidade de lidar com situações complexas, etc (Ponte, 2005, p. 17).

Portanto, ao partir dessa concepção, essas tarefas serão construídas a partir da Teoria dos Campos Conceituais, TCC (Gerald Vergnaud, 1993, 1996, 2009), especialmente de estrutura multiplicativa. Desse modo, a aprendizagem será efetivamente construída a partir de uma estratégia que agregue diferentes tipos de tarefas, a fim de explorar diferentes ideias inerentes ao conceito de multiplicação. A avaliação concedida nessa prática didática não será a das aprendizagens, mas para as aprendizagens, pois ela está integrada no processo de ensino e aprendizagem e auxilia o estudante a aprender.

3 MULTIPLICAÇÃO NOS ANOS INICIAIS, CAMPO CONCEITUAL MULTIPLICATIVO E ORIENTAÇÕES CURRICULARES

Como já mencionamos na introdução, o objeto de estudo da nossa pesquisa refere-se ao objeto matemático “multiplicação de números naturais” nos anos iniciais, em uma abordagem que utiliza a diversificação de tarefas que são para ensinar, aprender e avaliar. Para tanto, faz-se necessário ampliar os fundamentos teóricos sobre a Teoria dos Campos Conceituais (TCC), em especial as estruturas multiplicativas que consideramos, principalmente, as ideias de Gerard Vergnaud e como a TCC serve de base para as diretrizes nacional da educação.

3.1 Campos Conceituais segundo Gerard Vergnaud

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) foi desenvolvida pelo psicólogo, pesquisador e professor francês Gerard Vergnaud[3], que buscou nos estudos realizados, principalmente, por Jean Piaget e Lev Vygotsky, ideias para desenvolver sua teoria. Da teoria de Piaget toma como referência as ideias de adaptação, (des)equilibração, (re)equilibração e, principalmente, o conceito de esquema – ela leva em consideração a interação esquema-sujeito ao invés de interação sujeito-objeto. Dos estudos de Vygotsky, ele apoiou-se, principalmente, nas ideias de linguagem (representações), interação social, simbolização e a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP). Gérard Vergnaud definiu a Teoria dos Campos conceituais como:

> [...] uma teoria cognitivista, que busca propiciar uma estrutura coerente e alguns princípios básicos ao estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas, sobretudo as que dependem da ciência e da técnica. Por fornecer uma estrutura à aprendizagem, ela envolve a didática, embora não seja, em si uma teoria didática. Sua principal finalidade é propor uma estrutura que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos, em crianças e adolescentes, entendendo-se por "conhecimentos", tanto as habilidades quanto as informações expressas (Vergnaud, 1993, p. 1).

Nessa perspectiva, a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) é uma teoria que está relacionada com os processos e desenvolvimento de conhecimento e aprendizagem, a qual entende que a conceitualização é o ponto chave de todo desenvolvimento cognitivo, ao

[3]A maioria dos livros e artigos do Gerard Vergnaud estão em língua estrangeria, portanto, foi preciso recorrer a pesquisadores que se dedicaram a estudar suas obras. Assim, o professor Marco Antonio Moreira, do Instituto de Física, UFRGS e a professora Sandra Magina, em parceria com as Dras., Tânia Campos e Verônica Gitirana escreveram sobre as principais ideias da TCC, foram esses os principais materiais adotados.

mesmo tempo que considera que o processo de conceitualização depende das situações que são apresentadas ao sujeito e que dão sentido e significado ao conceito; ou seja, um conceito não subsiste sem um conjunto de situações de natureza diversas. Por conseguinte, o conceito depende das situações.

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) relaciona as dificuldades dos alunos à maneira como o conteúdo especifico de cada campo conceitual é abordado, portanto, ela está diretamente ligada ao conteúdo epistemológico e à análise do domínio desses conteúdos por parte dos alunos. Assim, a TCC fornece parâmetro para a análise da formação e do funcionamento dos conhecimentos de um campo conceitual. Com isso, entendemos que a TCC possibilita ao professor uma melhor organização das aulas em favor da aprendizagem matemática, uma vez que leva em consideração as continuidades e rupturas das aprendizagens dos alunos em função do conteúdo especifico. E essa organização didático-pedagógica acontece a partir das situações que permitem aos alunos desenvolver conceitos, sendo esse um ponto de interesse de nossa pesquisa.

Aprender sobre campos conceituais depende do objeto específico de cada um dos campos das áreas de conhecimento, pois cada eles estão estruturados, em termos de conceitos, de forma diferente (ruptura). No entanto, não se pode imaginar o estudo de um campo conceitual totalmente independente, uma vez que a compreensão dele depende da compreensão anterior de aspectos importantes de outro campo conceitual (filiação); com base nisso, pode haver uma correlação entre certos campos conceituais.

Desse modo, Vergnaud (1993) dedicou-se aos estudos sobre os campos conceituais em Matemática, principalmente aos estudos das estruturas aditivas (situações que requerem uma ou várias adições ou subtrações) e multiplicativas (situações que necessitam de uma ou várias multiplicações ou divisões para serem resolvidas). Contudo, a TCC não se restringe aos objetos matemáticos, pois pode ser aplicada em outras áreas do conhecimento. Nosso interesse principal centra-se nas situações que envolvem as estruturas multiplicativas, mais precisamente no pensamento multiplicativo que abrange as quatro ideias fundamentais na construção do conceito de multiplicação: situações associadas a ideia de adição de parcelas iguais, de proporcionalidade, de combinatória e de elementos dispostos em configuração retangular.

A TCC considera alguns conceitos fundamentais que dão sustentação a sua proposição, como conceito de campo conceitual, de esquema, de situação, de invariantes operatórios (teorema-em-ação ou conceito-em-ação) e próprio conceito de conceito. Assim, Vergnaud (*apud*[4] Moreira, 2002, p. 08) advoga que um Campo Conceitual é "um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição." A TCC entende que a aprendizagem acontece a partir de uma rede de conceitos que estão presentes em diversas situações[5] que se direcionam para os vários aspectos de um mesmo conceito, cuja apropriação requer um tempo razoavelmente longo e de estruturas mentais presentes em cada indivíduo.

Essa teoria parte da concepção de que a aprendizagem acontece a partir da compreensão de um conceito; todavia, o ensino-aprendizagem de um conceito não pode ser reduzido a sua definição. Por isso é preciso considerar um conceito dentro de um campo conceitual, assim como entender completamente que um conceito não é um processo simples e requer um período longo de tempo. Vergnaud estabelece três aspectos importantes sobre a aquisição de um conceito dentro de um campo conceitual, a saber:

> 1) um conceito não se forma dentro de um só tipo de situações; 2) uma situação não se analisa com um só conceito; 3) a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo de muito fôlego que se estende ao longo dos anos, às vezes uma dezena de anos, com analogias e mal entendidos entre situações, entre concepções, entre procedimentos, entre significantes (Vergnaud *apud* Moreira, 2002, p. 09).

Tendo o Conceito como o núcleo da Teoria dos Campos Conceituais, Vergnaud adotou como base as noções básicas da função simbólica[6] de Piaget e definiu o conceito como uma tríade de conjunto indissociáveis, C = (S, I, Y), em que:

> S conjunto das situações que dão sentido ao conceito (referência).
> I conjunto das invariantes em que se baseia a operacionalidade dos esquemas (significado).
> Y ***(R)***[7] conjunto das formas de linguagem (ou não) que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (significante) (Vergnaud, 1993, p.1, grifo nosso).

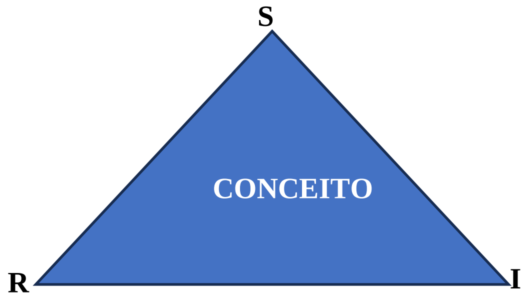
Com isso, percebemos que há uma série de fatores que estão inter-relacionados na aquisição de conceito, como as situações, os invariantes operatórios (significado) e as

---

[4]Utilizou-se *apud* por não ter acesso a obra original Vergnaud.
[5]Vergnaud não toma o conceito de Situação na mesma perspectiva de Guy Brousseau, de Situação Didática, mas com ideia de que com uma combinação de tarefas pode ser resolvida uma situação complexa- tarefa escolar.
[6]A função simbólica de Piaget, faz referência aos três elementos da Semiótica (comunicação): O referente, o significado e o significante. Na definição do Conceito o referente é o objeto – situações; o significado é o sentido do referente/objeto – invariantes operatórios e o significante são os símbolos, signos e sinais – as representações simbólicas.
[7]Muitos pesquisadores utilizam o R para se referirem as representações, enquanto no texto primário do Vergnaud utilizou-se o Y.

representações (significante). Podemos representar o Conceito com uma representação gráfica, como a figura a seguir:

Figura 1: Representação gráfica do Conceito conforme a TCC.



Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 2023.

Desse modo, entendemos que o conceito depende de múltiplos aspectos e ações, em que as situações são as tarefas e/ou problemas que, direcionados aos alunos ou grupo de alunos, ajuda-os a compreender o conceito. São as situações que facilitam a percepção de todas as nuances desse conceito e evocam as estruturas mentais de conhecimentos já existentes envolvidos na resolução das situações. Com isso, a partir de novos dados e informações outras estruturas são adquiridas ou é possível elencar os elementos (significantes) que são necessários para a representação das ações e operações que resultaram na conceitualização, bem como representar o próprio conceito.

Além disso, há dois sentidos que são pertinentes as situações: variedade e história. O sentido de variedade está relacionado às diversas situações presentes em um campo conceitual. Enquanto o sentido de história relaciona-se aos conhecimentos que consolidados pelos alunos diante das situações que dominaram ao longo do tempo.

Portanto, são as situações que colocam os alunos em ação/atividade, ou seja, é preciso que o aluno se envolva cognitivamente na situação e que esse envolvimento aconteça por meio dos esquemas – estruturas cognitivas que dão sentido às situações. Desse modo, os esquemas se referem às situações e o sentido estará nos próprios esquemas. Eles organizam a forma como o aluno desencadeará uma série de ações (explícita ou implícita) ao se deparar como uma variedade de situações do mesmo domínio, isso ao utilizar conhecimentos consolidados e adaptados a novos conhecimentos influenciados por vivências tanto na vida cotidiana como escolar.

O nosso interesse reside nesse ponto da TCC, pois os diferentes tipos de situações que são oferecidas aos alunos, possibilitam a construção de conceitos e evocam esquemas comunicáveis pelas representações. A aquisição de conceitos pelo aluno deve ser observada por meio dos esquemas (invariantes operatórios) que este emprega para solucionar uma situação.

O esquema é um elemento importante no desenvolvimento cognitivo, pois ele organiza as ações de uma atividade em certas situações, pois é “nos esquemas que devem pesquisar os conhecimentos-em-ação do sujeito, isto é, os elementos cognitivos que fazem com que a ação do sujeito seja operatória.” (Vergnaud, 1993, p. 2). Portanto, os esquemas são os componentes cognitivos já adquiridos por situações anteriores.

Além disso, os esquemas podem ser considerados de três tipos: perceptivo-gestuais quando usamos gestos para resolvermos uma situação ou fazemos uso de sistemas escritos; verbais quando fazemos uso dos enunciados orais e os sociais que são comuns a cultura. Quando os esquemas são usados repetidamente são chamados de ordinários.

Para uma melhor compreensão sobre o esquema, há algumas especificações que Vergnaud as definiu em quatro categorias: as metas e antecipações, quando se pode descobrir possíveis finalidades ou esperar certos efeitos; as regras de ação do tipo “Se...então”, que levam o sujeito a gerar ou continuar uma ação a fim de buscar informações ou controlar os resultados; os invariantes operatórios (teoremas-em-ação e conceitos-em-ação), que são os conhecimentos contidos nos esquemas nos quais permitem a obtenção de informação para inferir meta e alcançar as regras de ação; as possibilidades de inferência (ou raciocínios), que permitem "calcular", "aqui e agora" com o objetivo de requerer cálculos em situação Vergnaud (*apud* Moreira, 2002, p. 12).

Ao partir do entendimento que os invariantes operatórios são conhecimentos contidos nos esquemas, entendemos que eles são categorizados como teoremas-em-ação e conceitos-em-ação – sendo que o “Teorema-em-ação é uma proposição tida como verdadeira sobre o real. Conceito-em-ação é um objeto, um predicado, ou uma categoria de pensamento tida como pertinente, relevante.” (Moreira, 2002, p. 14). Logo, mesmo sendo conhecimento-em-ação, um não pode ser confundido com o outro, há uma relação dialética entre eles, ou seja, eles têm natureza distintas, pois o teorema é uma proposição (na qual pode ser falsa ou verdadeira) e o conceito está relacionado aos conceitos matemáticos implícitos para realizar a ação.

Toda ação didática-pedagógica necessita ser analisada e interpretada, o professor precisa saber o que o aluno já consegue fazer sozinho e o que ainda necessita de ajuda, para que assim possa introduzir outro raciocínio referente ao conceito em estudo. Portanto, é por meio dos esquemas que é possível realizar a análise da atividade. Vergnaud diz que a avaliação serve para “dar subsídios ao professor para que ele reconheça aqueles alunos que compreenderam, os que compreenderam mais ou menos e os que nada compreenderam. Isso lhe permite escolher as próximas atividades". (Vergnaud, 2003, p. 49). É nesse contexto que surge a avaliação integrada a aprendizagem-ensino, aquela que apoia as aprendizagens (Fernandes, 2008). Para solucionar uma situação o aluno evoca o conhecimento em suas duas formas: predicativa (explicar) e operatória (fazer). Então, é papel do professor propor situações que ajudem o aluno a desenvolver ambas as formas de conhecimento.

Dessa forma, a TCC é uma estrutura de estudo que ajuda o professor a organizar suas aulas e analisar a aprendizagem com ênfase no desenvolvimento cognitivo dos alunos em relação a um campo conceitual especifico, uma vez que leva em consideração as continuidades e descontinuidades entre os campos conceituais. Para tanto, ao planejar uma ação didática, o professor precisa de um conjunto de situações para dá conta da construção de um conceito, na qual o aluno seja capaz de representar, descrever, explicitar e formalizar conceitos e teoremas em ação. Sendo esta ação um desafio para o professor e para o aluno, pois a aprendizagem e o desenvolvimento cognitivo ocorrem com a modificação dos esquemas ao lidar com certas situações.

Nesse bojo da Teoria dos Campos Conceituais, na qual o Campo Conceitual é unidade de estudo que vai dar sentido às dificuldades dos alunos na conceitualização do objeto matemático, é que a nossa pesquisa está focada; isto é, nas estruturas multiplicativas, em especial, a multiplicação dos números naturais, por vivenciar na prática cotidiano em sala de aula essas dificuldades. Assim, as situações (tarefas) de naturezas diversas que envolvem as ideias da multiplicação: ideia de adição de parcelas iguais, raciocínio combinatório, organização retangular e proporcionalidade serão o objeto específico de ensino ou de aprendizagem.

A TCC possui uma articulação importante com as outras bases teóricas que dão sustentação a este estudo, no que se refere os diferentes tipos de tarefas proposta por Ponte e a Avaliação Formativa Alternativa de Fernandes (2008). Essa conexão pode ser confirmada quando Vergnaud fala sobre os três atos importantes do professor:

> O primeiro é a escolha de situações [...] mesmo se o professor sozinho não puder dar conta dessa atividade, isto é, se ele se servir da produção de pesquisadores na área. O segundo é o auxílio oferecido ao aluno quando ele entra na situação. Isso ninguém pode fazer pelo professor e exige muito discernimento, muita fineza, muita atenção para aqueles sinais manifestados pelo aluno em termos de compreensão ou não-compreensão. O terceiro ato é a avaliação, para que o professor tenha condições de controlar o desenvolvimento das competências que ele objetiva (Vergnaud, 2003, p. 50, grifo do autor).

Portanto, a articulação entre os elementos da TCC que oferecem referência e significado ao objeto matemático – multiplicação e os diferentes tipos de tarefas –, uma vez que contribuem para a construção de um conceito e servem para ensinar, aprender e avaliar. Essa conexão se dá devido às situações (tarefas) de diferentes naturezas relacionadas ao objeto matemático – multiplicação – que leva o aluno a evocar esquemas para o tratamento e operacionalidade das ideias inerentes à multiplicação. Isso possibilita a construção do conceito. Durante a execução da situação o professor explica, ensina procedimentos e regula o nível de ensino, pois observa os avanços e retrocessos dos alunos. Os esquemas são comunicáveis pelas representações que são informações para a Avaliação Formativa Alternativa, em que esses servirão de elementos para o planejamento do professor.

3.2 Campo Conceitual Multiplicativo

Gerárd Vergnaud centrou sua pesquisa principalmente em dois campos conceituais da Matemática, isso porque tinha o propósito de esclarecer os processos de conceitualização progressiva das estruturas aditivas e multiplicativas. Porém sua teoria não é exclusiva desses campos e nem tão pouco da Matemática, visto que a TCC se aplica em outras áreas do conhecimento. Neste trabalho, concentramo-nos nas estruturas multiplicativas, que é o nosso foco principal.

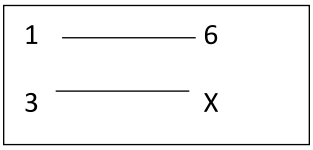
Vergnaud definiu o Campo Conceitual Multiplicativo como:

> [...] o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias multiplicações ou divisões, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações: proporção simples e proporção múltipla, função linear e n-linear, razão escalar direta e inversa, quociente e produto de dimensões, combinação linear e aplicação linear, fração, razão, número racional, múltiplo e divisor, etc (Vergnaud, 1993, p. 10).

Para os problemas do tipo multiplicativo, Vergnaud (2009) classifica-os em duas grandes categorias: isomorfismo de medidas e produto de medidas, o primeiro com uma relação quartenária[8] entre duas grandezas de natureza distintas e o outro com uma relação ternária[9] entre dois elementos, de mesma natureza ou grandeza. As classes de problemas se diferem também quanto aos diferentes tipos de multiplicação e divisão ou ao grau de complexidade em função das propriedades dos números utilizados (inteiros, decimais, números pequenos ou grandes, números inferiores a um).

[8] Que liga quatro elementos entre si, em que dois elementos correspondem a um tipo de medida e os outros dois de outro tipo de medida.
[9] Que liga três elementos entre si, sendo um é o produto dos outros dois.

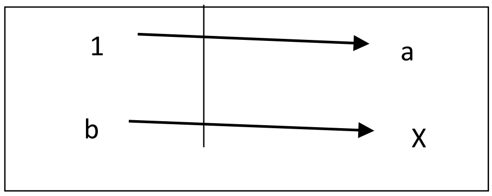
A classe de problemas, que apresenta o isomorfismo de medidas, envolve quatro quantidades de medidas e uma dessas medidas é igual a uma medida, ou seja, é igual a um. Essa classe de problemas é a mais explorada em sala de aula e, geralmente, é ensinada com uma multiplicação de adição de parcelas iguais. Por exemplo, um soverte custa R$ 6,00, quanto custará 3 sovertes?



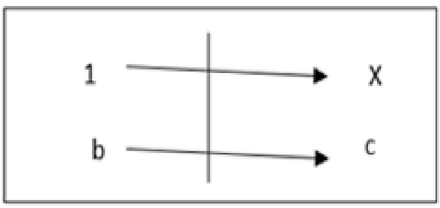
O isomorfismo de medidas apresenta três classes de problemas, em que uma medida igual a um e a busca de uma outra (X). Veja os esquemas propostos por Vergnaud (2009).

Figura 2: classes de problemas de isomorfismo de medidas

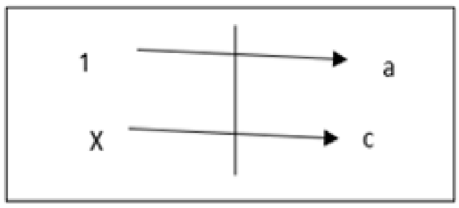
- Multiplicação



Divisão: busca do valor unitário



Divisão: busca da quantidade de unidades

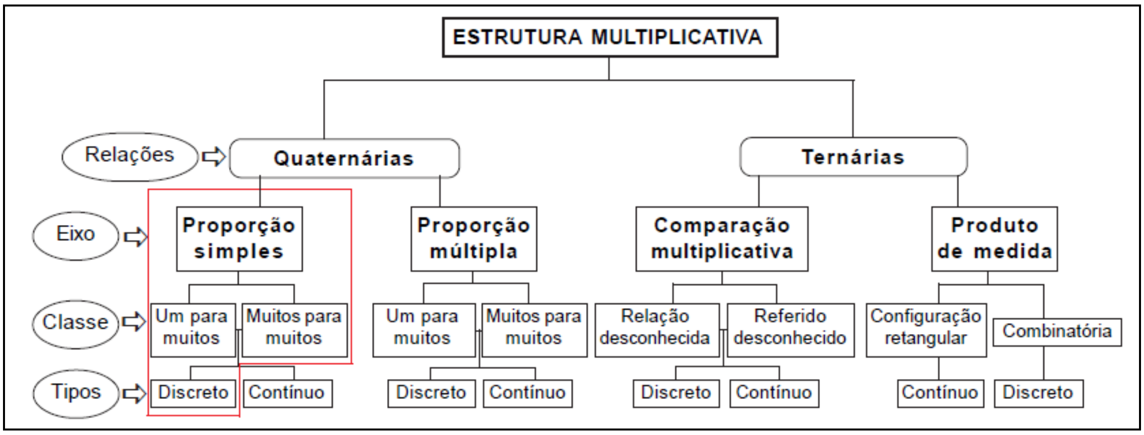


Fonte: Vergnaud (2009, p. 261).

Quanto à classe de problemas tipo produto de medidas ou produto cartesiano, segunda grande forma de relação multiplicativa, ela apresenta uma relação ternária com três quantidades – sendo uma o produto das outras. O produto de medidas (produto cartesiano) envolve o raciocínio combinatório e a ideia de organização retangular e apresenta duas classes de problemas: a multiplicação, em que se pode encontrar a medida-produto, quando se conhece as medidas elementares; e a divisão, em que é possível encontrar as medidas elementares ao conhecer a outra e a medida produto (Vergnaud, 2003, p. 264), para efeito de nossa pesquisa, centraremos nossa atenção para a multiplicação.

Vejamos o exemplo que envolve o raciocínio combinatório: 5 meninos e 3 meninas querem dançar. Cada menino quer dançar com cada menina e cada menina quer dançar com cada menino. Quantos casais são possíveis formar? (Vergnaud, 2003, p. 253). Para sintetizar a Teoria dos Campos Conceituais das estruturas multiplicativas, que envolvem as classes de problemas com as relações (quartenária e ternária), os eixos, as situações e os tipos discreto e contínuo, vejamos o quadro organizado por por Magina, Santos e Merlini (2014).

Figura 2: Esquema da estrutura multiplicativa da TCC.



Fonte: Magina, Santos e Merlini, 2014.

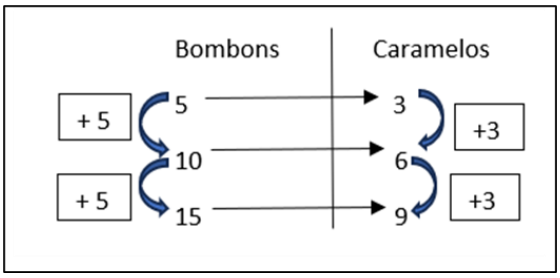
Neste trabalho, exploramos o isomorfismo de medidas, o produto de medidas da multiplicação e as subclasses de problemas com números naturais. Isso devido ao propósito da pesquisa e ano de escolaridade (4º ano) a que essa pesquisa se destina.

Quando se tem o propósito de estudar o processo de conceitualização de um objeto de conhecimento, a primeira ação a realizar é determinar quais são as ideias básicas envolvidas. Para a construção do conceito de multiplicação, que é o nosso objeto de conhecimento, são de fundamental importância as ideias de adição reiteradas, combinatória, proporcionalidade, organização retangular. Para tanto, propomos as tarefas do tipo exercícios, problemas, investigação e exploração do domínio multiplicativo.

A classe de problemas que compreende o eixo de proporção simples é uma relação entre quantidades de duas naturezas distintas (pessoas e objetos, objetos e preços) e há duas relações de correspondências: um para muitos e muitos para muitos, na primeira correspondência as relações entre as quantidades são conhecidas. A exemplo: o soverte custa R$ 6,00, quanto custará 3 sovertes?, há uma relação de um para três. Já na segunda correspondência, muitos para muitos, a relação entre as quantidades não são todas conhecidas, Magina *et al*, esclarece que temos que considerar duas situações nessa correspondência:

> Na primeira situação, é possível chegar à relação um para muitos (exemplo: Três carros têm 12 rodas, quantas rodas têm 5 carros?). Já a segunda é aquela na qual não faz sentido se obter a relação um para muitos (exemplo: *A cada cinco bombons comprados, a loja Boa Compra dá três caramelos de brinde. Se Ana comprar 15 bombons, quantos caramelos ela ganhará?) (*Magina; Santos; Merlini, 2014, p. 522, grifo dos autores).

Percebe-se que, na correspondência muitos para muitos, da primeira situação, quando para obter uma relação um para muitos é preciso a operação de divisão, reiteramos que a divisão não é o foco da nossa pesquisa. Já a segunda situação pode ser usada como estratégia o quadro das correspondências entre duas espécies/grandezas de quantidades (os bombons e os caramelos), isso quando usamos a soma da quantidade equivalentes proporcionais, pois para cada 5 bombons ganha-se 3 caramelos. Ou seja, em uma coluna há o aumento de cinco em cinco; na outra, de três em três. Pode-se usar a regra três que compõe o campo da álgebra que, pela BNCC, completa os objetos de conhecimento a partir do quinto ano.



O Eixo da proporção múltipla compreende a classe de situações que envolvem uma relação entre mais de duas medidas, o que relaciona duas a duas. Assim como a proporção simples, a proporção múltipla envolve a correspondência um para muitos e a correspondência muitos para muitos. Vejamos o exemplo de correspondência de um para muitos: uma pessoa deveria beber em média 5 litros de água em dois dias. Qual é o consumo mensal (30 dias) de 5 pessoas? (Magina; Santos; Merlini, 2014, p. 523).

Agora observaremos um exemplo adaptando de Moreira (2002): o consumo de farinha é, em média, 4 kg por semana para dez pessoas. Qual a quantidade de farinha necessária para 50 pessoas durante 28 dias? Resposta de um aluno: 5 vezes mais pessoas, 4 vezes mais dias, 20 vezes mais farinha; logo, 4 x 20 = 80 kg. Há uma relação de proporcionalidade constante entre as quantidades.

Nesse sentido, o eixo da comparação multiplicativa compreende as situações que envolvem relação entre duas quantidades de mesma natureza (peso e peso, idade e idade), como a relação de dobro, triplo e de metade. Isto é, envolve tanto operação de multiplicação como divisão. Sendo que esse eixo se divide em classes: relação desconhecida e referente desconhecido.

O eixo do produto de medidas é aquele que envolve as situações com ideia de configuração retangular e de combinatória. A primeira ideia refere-se às situações em que os elementos do conjunto estão dispostos na vertical e na horizontal de uma forma retangular. Enquanto a segunda ideia diz respeito às situações que necessitam de combinações entre pares de elementos de conjuntos distintos.

Contudo, ao abordamos as estruturas multiplicativas, restringimos ao conjunto dos números naturais – foco deste trabalho – e reiteramos que, para efeito de nossa pesquisa, concentramo-nos na operação de multiplicação. Isso porque não temos a pretensão de esgotar as possibilidades de situações que envolve esse objeto matemático; mas, sim, explorar as situações que para sua resolução demandam de uma multiplicação.

3.3. Campo Conceitual Multiplicativo na BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um balizador da prática pedagógica da Educação Básica no Brasil, que compreende da Educação Infantil ao Ensino Médio. A BNCC elenca objetos de conhecimentos gerais que devem ser trabalhados em todos os sistemas de ensino e escolas brasileiras. Na introdução do documento diz que a BNCC é

> [...] um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) (Brasil, 2017, p.7).

A BNCC é um documento do Ministério da Educação (MEC) que descreve as aprendizagens essenciais que devem ser desenvolvidos, pelos estudantes, durante da Educação Básica. Para isso, as aprendizagens são organizadas tendo base as competências e habilidades com objetivo de uma formação humana integral. As competências dizem respeito à mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos) e as habilidades são as práticas (atitudes e valores) cognitivas ou socioemocionais para o exercício pleno da cidadania.

As competências são desenvolvidas à medida em que os estudantes são estimulados a buscar informações para resolver uma questão estimulante, a fim de atribuir significado e organização dos conhecimentos adquiridos com base nos aprendizados anteriores. A organização do ensino com tarefas instigantes, que provocam a investigação, estimula a reflexão crítica e o desenvolvimento da capacidade de negociar significados.

A versão final da BNCC foi promulgada em 2017 e no que refere às aprendizagens de Matemática para o Anos iniciais, que é o foco deste trabalho, está dividida em 5 (cinco) unidades temáticas: números, álgebra, geometria, grandezas e medidas, probabilidade e estatística. Cada unidade temática apresenta objetos de conhecimento (conteúdos) que podem ser entendidos como os conceitos a serem trabalhados e habilidades (objetivos de aprendizagem) para serem desenvolvidos com os estudantes ao longo dos anos de escolarização de maneira articulada/progressiva.

Os objetos de conhecimento que integram as unidades temáticas são complementares e progressivos, ou seja, é necessário a consolidação de um conhecimento que serve de base para as aprendizagens posteriores, além de serem articulados. A progressão do conhecimento matemático também está relacionada aos anos de escolaridade, pois é percurso contínuo de aprendizagem.

A BNCC evidencia, na terceira competência específica de Matemática para o Ensino Fundamental, a importância do conceito dentro de um campo da Matemática e dos procedimentos para o desenvolvimento ou aplicação dos conhecimentos matemáticos, de forma a levar o aluno a

> Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções (Brasil, 2017, p. 267).

Segundo a BNCC, para o Ensino Fundamental dos Anos Iniciais em Matemática, na unidade temática números, é fundamental que os alunos desenvolvam habilidade de resolver problemas com diferentes significados das operações com números naturais e racionais, que saibam argumentar e justificar os procedimentos adotados. Quanto aos procedimentos de cálculos "espera-se que os alunos desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos e uso de calculadoras" (Brasil, 2017, p. 268).

A BNCC reconhece a importância dos algoritmos das operações, mas defende que o ensino não fique restrito à sua utilização, uma vez que é necessário que envolva "a habilidade de efetuar cálculos mentalmente, fazer estimativas, usar calculadora e, ainda, para decidir quando é apropriado usar um ou outro procedimento de cálculo." (Brasil, 2017, p. 276) O documento ainda orienta para diversificação dos recursos didáticos como "malhas quadriculadas, ábacos, jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica".

O objeto de conhecimento multiplicação na BNCC encontra-se na unidade temática números e está contemplada a partir do 2º ano do Ensino Fundamental de forma contínua, bem como envolve os quatro significados da multiplicação: adição de parcelas iguais, proporcionalidade, configuração retangular e combinação. Vejamos o quadro 2, que sintetiza o Campo Conceitual Multiplicativo nos anos iniciais e as habilidades que o contempla.

Quadro 2: Campo Conceitual Multiplicativo na BNCC

Ano	Objetos de conhecimento (conteúdos)	Habilidades (objetivos de aprendizagem)
2º	Problemas envolvendo adição de parcelas iguais (multiplicação)	(EF02MA07) Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4 e 5) com a ideia de adição de parcelas iguais por meio de estratégias e formas de registro pessoais, utilizando ou não suporte de imagens e/ou material manipulável.
	Problemas envolvendo significados de dobro, metade, triplo e terça parte	(EF02MA08) Resolver e elaborar problemas envolvendo dobro, metade, triplo e terça parte, com o suporte de imagens ou material manipulável, utilizando estratégias pessoais.
3º	Construção de fatos fundamentais da adição, subtração e multiplicação	(EF03MA03) Construir e utilizar fatos básicos da adição e da multiplicação para o cálculo mental ou escrito.
	Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, repartição em partes iguais e medida	(EF03MA07) Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4, 5 e 10) com os significados de adição de parcelas iguais e elementos apresentados em disposição retangular, utilizando diferentes estratégias de cálculo e registros.
4º	Composição e decomposição de um número natural de até cinco ordens, por meio de adições e multiplicações por potências de 10	(EF04MA02) Mostrar, por decomposição e composição, que todo número natural pode ser escrito por meio de adições e multiplicações por potências de dez, para compreender o sistema de numeração decimal e desenvolver estratégias de cálculo.

	Propriedades das operações para o desenvolvimento de diferentes estratégias de cálculo com números naturais	(EF04MA04) Utilizar as relações entre adição e subtração, bem como entre multiplicação e divisão, para ampliar as estratégias de cálculo.
		(EF04MA05) Utilizar as propriedades das operações para desenvolver estratégias de cálculo.
	Problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação e da divisão: adição de parcelas iguais, configuração retangular, proporcionalidade, repartição equitativa e medida	(EF04MA06) Resolver e elaborar problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, organização retangular e proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
	Problemas de contagem	(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.
5º	Problemas: multiplicação e divisão de números racionais cuja representação decimal é finita por números naturais	(EF05MA08) Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.
	Problemas de contagem do tipo: "Se cada objeto de uma coleção A for combinado com todos os elementos de uma coleção B, quantos agrupamentos desse tipo podem ser formados?"	(EF05MA09) Resolver e elaborar problemas simples de contagem envolvendo o princípio multiplicativo, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra coleção, por meio de diagramas de árvore ou por tabelas.

Fonte: Sistematizado pela pesquisadora, 2023.

Ao observarmos os objetos de conhecimento (conteúdo/conceito) e as habilidades (objetivos de aprendizagem) propostas na BNCC para os anos iniciais do Ensino

Fundamental, é possível verificarmos a progressão ano a ano das situações do Campo Conceitual Multiplicativo. Desse modo, ao final dessa etapa de escolaridade abordou-se todos os significados da multiplicação dos números naturais.

É importante aos professores, ao planejarem as situações de aprendizagens, considerar a proposta curricular que norteia o trabalho da série/ano. Sendo assim, ao pensar nas situações multiplicativas, elas deverão estar relacionadas aos quatro significados da multiplicação: adição de parcelas iguais, proporcionalidade, configuração retangular e combinação – referenciados no documento da BNCC, para os anos iniciais do Ensino Fundamental. Portanto, entendemos que a nossa pesquisa está em consonância com as orientações atuais da educação para os anos iniciais do Ensino fundamental, a BNCC, a qual traz as abordagens do Campo Conceitual Multiplicativo (Gerard Vergnaud, 1993, 1996, 2003, 2009), a diversificação das tarefas (Ponte, 2005).

4 APRENDIZAGEM-ENSINO-AVALIAÇÃO POR TAREFAS: AVALIAR PARA MELHORAR AS APRENDIZAGENS

Ao partir das minhas inquietações, enquanto professora dos anos iniciais, em propor estratégias de ensino-aprendizagem que ajudassem os alunos a superarem as dificuldades na aprendizagem da multiplicação de números naturais no contexto do Ensino Fundamental e ao estar em um curso de Mestrado Profissional em Educação Matemática fui tocada por estudos de Ponte e Fernandes. Eles apontam que as tarefas de ensino-aprendizagem-avaliação são importantes de serem colocadas em prática no cotidiano da sala de aula como possibilidades para a melhoria das aprendizagens. Assim, faz-se necessário um aprofundamento mais teórico sobre as tarefas que servem para ensinar, aprender e avaliar.

4.1 Tarefas de aprendizagem-ensino

Os estudos evidenciam que a aprendizagem em Matemática resulta, principalmente, dos tipos de tarefas que são propostas e a maneira como estas são exploradas em sala de aula pelo professor e o aluno. As tarefas precisam ser organizadas a fim de garantir uma reflexão sobre as propriedades do objeto matemático, de servir de discussão e partilha, de levar o aluno a justificar suas conclusões e contrapor ou apoiar as colocações dos colegas. Vale ressaltar que cabe ao professor intervir, avaliar e orientar os argumentos para a consolidação da aprendizagem do objeto matemático, pois a aprendizagem decorre sobretudo da "reflexão realizada pelo aluno a propósito da actividade que realizou" (Ponte, 2005, p. 15).

Nessa perspectiva, a diversificação de tarefas e modo como são trabalhadas em sala de aula constitui uma estratégia importante para apoiar o ensino-aprendizagem-avaliação. A seleção de tarefas mais adequada não é um trabalho fácil para o professor, porque ao escolher o tipo de tarefa mais apropriado para o processo de desenvolvimento do ensino-aprendizagem-avaliação é preciso levar em consideração alguns fatores, como as características dos alunos, as condições de recursos que a escola disponibiliza, além das orientações curriculares. Nesse sentido, Ponte (2005, p. 11) adverte que "diversificar, só por si, não constitui uma orientação clara sobre as tarefas a selecionar". Mas para ensinar um conceito é interessante diversificar raciocínio/ideias de um mesmo conceito; ou melhor, propor situações que envolvam raciocínios distintos. Nesse sentido, nossa proposta é a diversificação de tarefas que envolve a multiplicação de números naturais.

Muitos são os fatores envolvidos no ato de ensinar e aprender, alguns desses estão além do domínio do professor, como os fatores de contexto social. Porém o professor tem ao seu alcance a gestão de sala de aula, assim, ao planejar as aulas e selecionar tarefas, ele pode determinar, de maneira implícita ou explicita, o seu papel e de seus alunos durante o trabalho. Nesse viés, o professor estabelece estratégias de gerencia da aula, tendo como referência o tipo de ensino que desenvolverá, o que pode ser o "ensino directo" ou o "ensino-aprendizagem exploratório"[10]. Para cada abordagem de ensino há um tipo de tarefa que se sobressai na prática de sala de sala.

No "ensino direto" o professor é o detentor do conhecimento e é ele que expõe para o aluno as informações que considera pertinentes sobre o objeto de conhecimento. Geralmente essa exposição acontece no início da aula e a tarefa é proposta no final; ao aluno cabe apenas menorizar e reproduzir o que lhe foi transmitido. Nessa perspectiva de ensino, o professor faz questionamentos aos alunos sobre o objeto de conhecimento dando um aspecto de ambiente participativo, contudo, "tais perguntas não presumem da parte dos alunos um envolvimento especial, cabendo-lhes essencialmente seguir por onde o professor os conduz" (Ponte, 2005, p. 13). A resolução de exercícios é a tarefa central nessa abordagem de ensino.

O "ensino-aprendizagem exploratório" surge com base em outro viés, já que o professor também realiza explicações, mas deixa que os alunos tenham a oportunidade de levantar hipóteses e testá-las; então, o docente conduz sua aula dando ênfase às descobertas dos discentes. Nessa perspectiva, o professor propõe outros tipos de tarefas, além da resolução de exercícios de fixação do objeto de conhecimento, pois não é o tipo de tarefa que ele sugere esporadicamente que definirá o estilo de ensino, mas, sim, aquela que é oferecida pontualmente.

Sobre isso, Ponte assevera que no

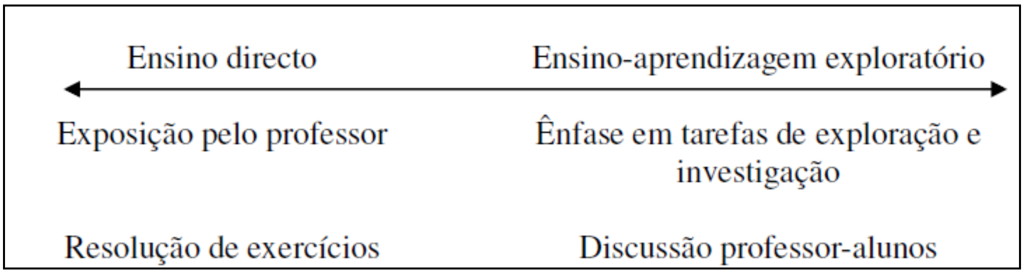
> Ensino-aprendizagem exploratório não significa que tudo resulta da exploração dos alunos, mas sim que esta é uma forma de trabalho marcante na sala de aula. Ou seja, não é a realização ocasional de um outro tipo de tarefa que define o carácter geral do ensino, mas a tendência geral do trabalho desenvolvido (Ponte, 2005, p. 14).

Ao panejar a aula, o professor definirá as estratégias, como acontecerá a introdução da informação, bem como esclarecerá qual é o papel do professor e do aluno na aula e as tarefas que serão propostas. Essas escolhas que serão decisivas na abordagem de ensino que ele seguirá. Ponte apresenta um esquema com as abordagens de ensino.

---

[10] Termos usados por Ponte (2005). O "ensino directo" é aquele que o professor é transmissor do conhecimento para o aluno, por vezes é chamado de "ensino expositivo", enquanto o "ensino-aprendizagem exploratório"

Figura 3: Diversas estratégias de ensino, de acordo com do papel do professor e dos alunos e a ênfase das tarefas.



Fonte: Ponte (2005).

A gestão que professor promove em sua sala de aula a partir do tipo de tarefa selecionada marcará o tipo de ensino adotado por ele, além do impacto na aprendizagem dos alunos, pois a condução da resolução das tarefas em sala de aula poderá colocar o aluno em “atividade” ou não. Assim, a aprendizagem matemática é resultante da atividade que o aluno realiza a partir das tarefas propostas, uma vez que cada de tipo de tarefa pode desencadear um tipo de atividade com maior ou menor potencialidade para a aprendizagem.

É importante salientar que o conceito de tarefa e atividade, por muitas vezes, é usado no contexto educacional como sinônimo. Outras vezes, o termo tarefa deixou de ser usado por ser compreendido como a realização de um simples exercício repetitivo sem propósito de colocar o aluno em atividade. Sobre isso, Ponte (2014) esclarece que

> O termo “atividade” ocupa um lugar de grande evidência no vocabulário da educação matemática. A sua aceitação está certamente relacionada com a ideia que o aluno deve desempenhar um “papel ativo” no processo de aprendizagem. [...] Uma atividade pode incluir a execução de numerosas tarefas [...] Pelo seu lado, a tarefa representa apenas o objetivo de cada uma das ações em que a atividade se desdobra (Ponte, 2014, p.14)

Ao complementar a distinção entre o conceito de tarefa e atividade, Lamonato (2007, p. 75) afirma que “tarefa é a proposta de trabalho e atividade é a ação de quem se propõe a desenvolvê-la”. Por sua vez, Danczuk (2016, p. 45) também estabelece distinção quando diz que as “Atividades são estritamente neurais, devem partir do aluno, sendo interno a ele, uma vez que as Tarefas são externas, constituindo um conjunto de elementos concretos ou não, que partem como proposta do professor ao aluno, a fim de colocar o aluno em atividade.”

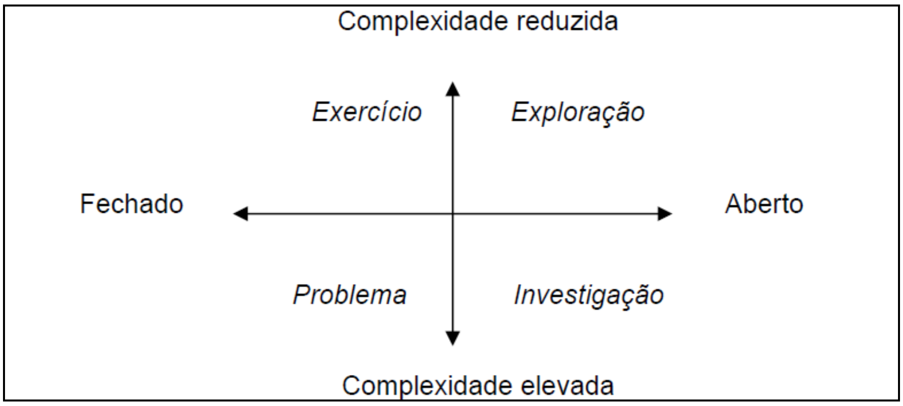
A concepção de tarefa nesse trabalho é assumida como uma proposição, oral ou escrita, em o professor lança para o aluno ou para um grupo de alunos, e a partir dessa proposição os intervenientes se colocam em movimentos, físico e/ou cognitivo, para solucioná-la. E é a partir da mobilização de esquemas que o professor poderá analisar ou avaliar a construção do conhecimento/conceito.

Toda ação didática é carregada de intencionalidade, desse modo, cada tipo de tarefas tem seu valor e seu objetivo. Ponte destaca que as tarefas possuem diferentes finalidades, por isso não é viável priorizar um tipo e desprezar o outro.

> Assim, existem tarefas cuja principal finalidade é apoiar a aprendizagem, outras que servem para verificar o que aluno aprendeu (tarefas para avaliação), outras, ainda, que servem para compreender de modo aprofundado as capacidades, processos de pensamento e dificuldades dos alunos (tarefas para investigação) (Ponte, 2014, p.14).

Desse mesmo modo, Ponte (2014, p. 2010) classifica as tarefas em quatro principais dimensões: grau de desafio, de estrutura, o contexto e o tempo disponível para a resolução da tarefa. Para a primeira dimensão, ele classifica em desafio “reduzido” e “elevado”; já a outra dimensão varia entre os polos “aberto” e “fechado”. Vejamos o quadrante organizador com os tipos de tarefas e as duas primeiras dimensões:

Figura 4- Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura.



Fonte: Ponte (2010, p. 21**)**

De acordo com o esquema, tendo em conta as duas primeiras dimensões temos quatro tipos básicos de tarefa: (i) Exercício é uma Tarefa fechada e de desafio reduzido; (ii) Problema é uma Tarefa fechada e com desafio elevado; (iii) Exploração é uma Tarefa aberta e desafio reduzido; (iv) Investigação é uma Tarefa aberta com desafio elevado. Contudo, o limite que separa os tipos de tarefa é tênue, pois cada uma pode se constituir um problema para um aluno e um exercício para outro e isso depende do nível de conhecimento prévio desse aluno sobre o que está sendo proposto. Do mesmo modo, são as tarefas de investigação e exploração o que as diferem é o grau de complexidade, isso depende também do nível de conhecimento prévio do grupo de aluno que a tarefa está sendo proposta.

Com base nessa prerrogativa, Vergnaud advoga que

> Uma flagrante complexidade didática deriva do fato que os alunos não se desenvolvem todos da mesma maneira. Há alunos que compreendem bem umas coisas e outras não, o que implica uma individualização da ajuda por parte do professor. Provavelmente, esse é hoje o desafio mais importante ao magistério em todos os países do mundo (Vergnaud, 2003, p.50).

Desse modo, o planejamento do professor deve contemplar as diversas tipologias de tarefas a fim de ampliar as possibilidades de aprendizagem de um conceito, já que essa depende do nível de conhecimento dos alunos – o que é variado. Com isso, o professor oferece condições para que o discente consiga aprender conceitos matemáticos, dentro de sua capacidade cognitiva e, assim, possa prosseguir na construção de outros aspectos do conceito em estudo. Esse é o ponto central da nossa pesquisa, analisar as potencialidades dos diferentes tipos de tarefas/situações para a construção do conceito de estruturas multiplicativas com alunos do 4º ano dos anos iniciais.

Além do mais, compreendemos em acordo com Ponte (2005) que a exploração de somente um tipo de tarefa em demasia não contribui positivamente na aprendizagem é preciso oferecer aos estudantes diferentes tipos de tarefas, pois cada uma tem um propósito de aprendizagem. Ponte (2005) afirmar que:

> a diversificação é necessária porque cada um dos tipos de tarefa desempenha um papel importante para alcançar certos objectivos curriculares: As tarefas de natureza mais fechada (exercícios, problemas) são importantes para o desenvolvimento do raciocínio matemático [...]. As tarefas de natureza mais acessível (explorações, exercícios), pelo seu lado, possibilitam [...] o desenvolvimento da sua auto-confiança. As tarefas de natureza mais desafiante (investigações, problemas), [...] são indispensáveis para que os alunos tenham uma efectiva experiência matemática. As tarefas de cunho mais aberto são essenciais para o desenvolvimento de certas capacidades nos alunos, como a autonomia, a capacidade de lidar com situações complexas, etc. (p.17)

É importante destacar também as dimensões do contexto e da duração. “No que se refere à duração, a realização de uma tarefa matemática pode requerer poucos minutos ou demorar dias, semanas ou meses” (Ponte, 2005, p. 9). Uma tarefa tipo exercício é de curta duração, já os problemas, a investigação e exploração são de média duração, enquanto os projetos são de longa duração. A dimensão do tempo de duração de uma tarefa é um fator que requer uma atenção especial, pois uma tarefa com uma duração longa precisa ser bem organizada/estruturada; senão pode correr o risco de os alunos perderem o interesse por ela durante o percurso. Sobre a duração das tarefas/situações para o desenvolvimento de competências de um campo conceitual, Vergnaud afirma que

> [...] a duração da aprendizagem é necessariamente longa. [...] É preciso anos, mas, por outro lado, o professor, no seu trabalho em sala de aula, precisa refletir sobre duração menores - uma semana ou um mês, por exemplo. Quando o professor organiza suas atividades de leitura prevê uma evolução, espera uma progressão, pois essa atividade não é planejada para um dia, mas também não o é para anos e anos (Vergnaud, 2003, p.53).

Quanto à dimensão do contexto há tarefas que se apresentam na realidade ou na "semi-realidade"[11] e outras que trazem um contexto "puramente matemáticos" (Ponte, 2005). As tarefas com contexto da realidade são importantes para que os alunos percebam como a Matemática é aplicada nas mais diversas situações; enquanto que as tarefas em contexto de Matemática pura podem ser tão desafiadoras como as de contexto da realidade. Isso porque os alunos são levados a compreender como é o trabalho de um matemático profissional e as suas descobertas. Com base nisso, percebemos que os tipos de tarefas podem transitar por todos os contextos.

O trabalho do professor para atender a demanda de elementos necessários para construção da aprendizagem matemática, ou melhor, de um conceito, vai além da diversificação de tarefa. As tarefas não podem acontecer de maneira isolada, precisam agregar elementos de evolução sequenciada e gradativa dos objetos de conhecimento para que possam alcançar o propósito de aprendizagem. Sobre isso, Ponte (2005) assegura que as tarefas precisam oportunizar um percurso de aprendizagem coerente para a construção dos conceitos fundamentais e procedimentos; além das representações matemáticas e suas conexões. É preciso oportunizar diferentes tipos de situações que requeiram raciocínio distintos de um mesmo conceito.

Uma tarefa por mais simples que seja, se for bem planejada de acordo com o nível de conhecimento prévio dos alunos e se for bem conduzida na resolução, dando oportunidade para a negociação de significado e para as reflexões sobre as ações desenvolvidas pode se constituir como uma proposta de ensino promissora de conceitos matemáticos. No nosso caso, foi utilizado o conceito de multiplicação.

Ademais, em uma sala de aula há uma diversidade de interesse, de nível de conhecimento e de contexto social, por isso o professor precisa ponderar todos esses elementos de forma equilibrada, dando oportunidade as necessidades e interesses de todos. (Ponte, 2005). Assim, é durante a realização das tarefas que o professor recolhe essa informação, principalmente para a regulação das ações dos autores envolvidos na tarefa.

[11] Ponte (2005), atribui esse contexto a Skovsmose (2000), que apresentou esse conceito como sendo intermediário entre a realidade e o contexto de Matemática pura.

Entendemos que todos os tipos de tarefa trazem um propósito de aprendizagem e tem sua validade para a construção do conhecimento matemático, desde as tarefas do tipo exercício de fixação, que de certo modo têm sua relevância, até as tarefas de caráter aberto. É nesse sentido que apostamos em uma proposta de ensino com diversificação das tarefas/situações com potencialidade de ensinar e avaliar e com níveis de dificuldade variada, para o ensino-aprendizagem-avaliação das ideias inerentes ao conceito de multiplicação dos números naturais em uma turma do 4º ano do Ensino Fundamental.

4.2 Avaliação integrada a aprendizagem-ensino

Devido suas múltiplas terminologias, funções e conceitos distintos, a avaliação tem sido alvo de reflexões, considerações e investigações nos últimos anos em vários contextos pedagógicos, sociais e políticos, tanto ao nível nacional (Demo, 1996; Hoffmann, 2005; Luckesi, 1995; Vasconcellos, 2005) como internacional (Abrantes, 2002; Torres, 1996; Fernandes, 2006a, 2006b, 2007a, 2007b). Sustentadas, assim, por bases teóricas e práticas sobre as aprendizagens dos alunos.

Apesar de muitos estudos desenvolvidos sobre o tema é efetivo que, nos contextos educacionais brasileiros, quando se fala em avaliação, imediatamente, remete-se aos testes e às provas internas e externas do próprio ambiente escolar – talvez por ser essa uma prática antiga e comum no cotidiano das escolas: avaliação como sinônimo de prova. As avaliações externas, que diretamente estão ligadas às políticas educacionais, têm um forte poder de organizar as práticas educativas e avaliativas que se dão em muitos contextos escolares brasileiros. Tais como: treinamento dos alunos para conseguirem um bom resultado nesses testes; das questões de provas que são realizadas de maneira pontual nas escolas, principalmente nos finais dos bimestres ou trimestres, seguirem o modelo das provas de avaliação externa; (Borralho; Lucena; Brito, 2015); além, de implantação de “clube” de estudo e sistema de avaliação municipal para averiguar e treinar os alunos para a realização das avaliações de larga escala nacionais e internacionais. Sendo essas as experiências vividas por mim em minha experiência docente.

Muitos são os fatores que contribuem para gerar essa concepção e prática de avaliação em muitos educadores brasileiros em que as estratégias avaliativas servem para coletar dados com a finalidade de classificar, ordenar, selecionar, aprovar e certificar. Tais como: a prática pedagógica e avaliativa adotada pelos sistemas de ensino; a concepção de ensino e avaliação seguida; a falta de definição clara de critérios de avaliação no currículo e a falta de clareza nos significados e práticas de avaliação. As estratégias de avaliação com a finalidade de classificação servem, essencialmente, para a obtenção de notas. Na concepção de avaliação com a finalidade de classificação, o “erro” é algo que merece punição com a perca de pontos. É evidente que essa prática não ajuda a melhorar as aprendizagens dos alunos, pois primeiro é necessário se preocupar com as aprendizagens cotidiana que, consequentemente, a classificação virá.

Por outro lado, há outra concepção de avaliação que permeia os contextos educacionais brasileiros de forma mais tímida, a avaliação integrada à aprendizagem-ensino, que tem o foco na melhoria das aprendizagens. Nela, o professor e o aluno têm um papel a desempenhar conforme os objetivos estabelecidos, na qual as dificuldades dos alunos são identificadas durante o processo de ensino-aprendizagem e o professor as interpreta e ajuda os alunos a superá-las. “Por essa concepção entendemos que o aluno elabora seus conhecimentos a partir da interação com suas aprendizagens.” (Borralho; Lucena; Brito, 2015, p.18)

A avaliação integrada à aprendizagem-ensino leva o aluno a ter compromisso com o que está aprendendo, porque por meio da interação com os seus pares ele é levado a refletir sobre o que aprendeu e o que ainda não aprendeu. Nessa perspectiva, o erro “assume um sentido basilar para as tomadas de decisões do professor a fim de regular o ensino que faz em função do alcance da melhoria das aprendizagens.” (Borralho; Lucena; Brito, 2015, p. 19) O erro está a serviço da reflexão do professor, já que o leva à tomada de decisão em relação ao ensino. Essa é a perspectiva de avaliação adotada neste trabalho.

No percurso do processo qualitativo de aprendizagem, que acontece diariamente nas salas de aulas, o professor consegue recolher muitas informações e evidências sobre como acontece a construção do conhecimento por meio da interação e observação. Assim, no processo avaliativo, a prova não deve ser a única estratégia para colher informações e evidências de aprendizagem – mesmo ainda sendo a estratégia mais valorizada e utilizada pelos professores.

> É comum elaborarmos diagnósticos de aprendizagens de nossos alunos no decorrer das aulas por meio da observação de atitudes, olhares, falas, gestos, registros, enfim manifestações diversas dos alunos que nos permitem inferir sobre o andamento das aprendizagens cotidianamente (Borralho; Lucena; Brito, 2015, p. 18).

A prova como estratégia de avaliação possui suas vantagens e desvantagens a depender do objetivo e da forma como ela é proposta. (Borralho, Lucena e Brito, 2015) Quando proposta de forma escrita, não avalia o desempenho oral dos alunos; quando individual não mostra a capacidade dos alunos aprenderem uns com os outros; sem consulta, não avalia a capacidade de buscar informações para a realizar uma tarefa complexa (investigação e exploração); sendo com tempo determinado, não avalia a disposição de persistência, gosto, empenho e aptidão para resolver uma tarefa de investigação. Nesse sentido, Vergnaud (2003) assegura que o conhecimento se manifesta de duas formas: a forma predicativa (explicar, dizer) e a forma operatória (fazer), portanto, "é importante propor situações de avaliação que permitam verificar o desenvolvimento das competências, tanto do fazer como do dizer". (Vergnaud, 2003, p. 49)

Sobre as vantagens da prova como avaliação de natureza formativa, Borralho, Lucena e Brito (2015) fazem menção dela poder ser realizada em duas fases, sendo uma realizada aos moldes da prova "tradicional"; a outra, em casa com os comentários do professor e consulta sendo possível, inclusive, de desenvolver tarefas de investigação. Esse tipo de prova tem como finalidade a classificação a fim de ponderar as duas fases, mas é uma avalição de natureza formativa que possibilita aos alunos reflexões sobre as tarefas realizadas e a interação entre os alunos e professores. Assim, "parece óbvio que os testes, como quaisquer instrumentos ou técnicas utilizadas no contexto de avaliações sumativas, podem ser utilizados para desenvolver tarefas de natureza formativa." (Fernandes, 2008, p. 360)

Nessa perspectiva de avaliação, temos a Avaliação Formativa Alternativa (AFA) proposta por Fernandes (2008, p. 356) como aquela que "deve permitir que, num dado momento, se conheçam bem os saberes, as atitudes, as capacidades e o estádio de desenvolvimento dos alunos, ao mesmo tempo que lhes deve proporcionar indicações claras acerca do que é necessário fazer para progredir." Com isso, percebemos que a AFA é uma avaliação orientada com indicações claras para que aos alunos possam aprender mais. Para isso, o *feedback* é importante, pois por meio dele o professor identifica se os alunos estão ou não em evolução nas aprendizagens e, assim, ajudá-los a progredir. Isso porque o *feedback* é um retorno em que o aluno dá ao professor sobre os processos de aprendizagem e serve para regular/controlar as interações em sala de aula. Da mesma forma, o *feedback* deve acontecer do professor para o aluno, com a explícita intenção de ajudá-lo a superar a dificuldade. Um *feedback* tipo "certo" ou "errado", sem nenhuma indicação por qual caminho trilhar, não possui grande relevância para a superação do "erro", porque o aluno precisa de orientações claras sobre seu desempenho, bem como indicações de seu progresso e de pontos que merecem mais atenção.

Antes de prosseguirmos, vamos esclarecer o significado do termo Avaliação Formativa Alternativa (AFA) que é usado por Fernandes (2008). Ele faz uma revisão na literatura sobre o assunto e cita várias trabalhos e terminologias conceituais de avaliação, inclusive a de natureza formativa como aquelas que, de certo ponto, foge da “matriz psicométrica, behaviourista e algo técnica” e que não atendem ao que se pretende com uma avaliação formativa – como o apoio às aprendizagens do aluno.

A partir das análises da literatura, Fernandes (2008) usa o termo “alternativa” para designar que essa avaliação é a junção dos principais conceitos de avaliação formativa das tradições teóricas anglo-saxónica e francófona. Da primeira tradição tem-se o conceito de *feedback* como ponto de maior destaque no processo de ensino-aprendizagem, seguido da relevância das interações sociais e culturais que se dão em contexto de sala de aula; nelas, professor tem um papel importante da condução do processo de produção de *feedback*. Já da tradição francófona tem-se como conceito básico a regulação, assim, o aluno assume um papel fundamental: o de regular sua aprendizagem apoiado nos processos cognitivos e metacognitivos, a partir da produção de *feedback*.

> Ao destacar as designações *Formativa* e *Alternativa*, sublinha-se o facto de estarmos perante uma avaliação cuja função é melhorar as aprendizagens e o ensino e que é verdadeiramente alternativa à avaliação formativa de inspiração behaviourista e a todo o tipo de avaliações indiferenciadas ditas de *intenção* ou de *vontade* formativa. (Fernandes, 2008, p. 55, grifos do autor)

Logo, a Avaliação Formativa Alternativa associa os conceitos de *feedback* e de regulação para fortalecer o princípio básico da avaliação formativa que é apoiar as aprendizagens dos alunos durante o processo de ensino-aprendizagem. Neste trabalho, utilizamos os termos avaliação formativa e avaliação integrada à aprendizagem-ensino embasados nas concepções de Avaliação Formativa Alternativa de Fernandes (2008).

Fernandes (2008) traz algumas características relevantes sobre a AFA, tais como: é uma avalição que produz *feedback* inteligente, frequente e de elevada qualidade para apoiar e orientar os alunos nos processos de aprendizagem; o *feedbac*k é importante para ativar os processos cognitivos e metacognitivos dos alunos; a interação entre alunos e professores é primordial; os alunos são envolvidos nos processos de ensino-aprendizagem e responsabilizados pelas suas aprendizagem; as tarefas precisam integrar ensino-aprendizagem-avaliação e o ambiente de avaliação das salas de aula deve ser baseado no princípio de que todos os alunos podem aprender.

Ao partir dessa concepção, a Avaliação Formativa Alternativa vai depender do *feedback* produzido pelos alunos, pois ela é, por natureza, diagnóstica com ênfase nas aprendizagens. Com a intenção de identificar, assim, que conhecimento já foi consolidado, bem como conduzir os alunos na busca da aprendizagem que ainda não foi concretizada – e não há a intenção de declarar se aprendeu ou não. Dessa forma, essa avaliação trata-se uma avaliação para as aprendizagens, com o propósito de organizar todo o processo pedagógico e didático com vista na construção do conhecimento e melhoria das aprendizagens. A Avaliação Formativa Alternativa não precisa ser necessariamente individual – como acontece nas avaliações pontuais –, pois vai depender da tarefa e da estratégia de organização da ação pedagógica e didática, a fim de considerar a complexidade do processo.

Nesse sentido, a avaliação de natureza formativa com foco na aprendizagem deve ser o cerne da ação pedagógica e didática, sendo orientada e interativa. Para isso, o professor analisa o trabalho dos alunos, seja por meio de *feedback* escrito ou oral e identifica dificuldades, bem como traça estratégias para melhorar as aprendizagens, como apontamentos em função levar o aluno a compreensão da situação que está posta para a resolução. Isso implica diálogo, assim, “Ensinar exige disponibilidade para o diálogo.” (Freire, 1996, p. 50)

Não queremos aqui endeusar uma modalidade de avaliação e desprezar a outra, pois ambas servem para avaliar o que os alunos sabem e o que conseguem fazer, porém cada uma tem forma, natureza, conteúdo, prática, relação com o ensino-aprendizagem e propósitos distintos; além do contexto em que se realiza. “Basta pensarmos no papel e na participação dos alunos e dos professores num e noutro caso, no tipo de conhecimento que é gerado por uma e por outra e nos processos que geram esse mesmo conhecimento.” (Fernandes, 2008, p. 364), diante disso, cada uma produz resultado diferente. A avaliação formativa deve prevalecer nas práticas educativas cotidianas de sala de aula, pois acompanha os processos de aprendizagem.

A avalição integrada ao aprendizagem-ensino ou AFA tem o compromisso com a aprendizagem que é possível a cada aluno e não há espaço para a padronização, mas isso não quer dizer que não seja necessário seguir um parâmetro de quais competências e habilidades que são necessárias a desenvolver por todos em cada etapa de ensino. Muito pelo contrário, a avaliação formativa é criteriosa e deve seguir os objetivos definidos no planejamento sob a ótica do currículo. Dessa maneira, a avaliação não é um ato à parte ao processo de ensino-aprendizagem, mas é uma prática em que o professor avalia e integra o ensino-aprendizagem, de tal modo que, ensinar, aprender e avaliar são ações conjuntas com foco no avanço da aprendizagem de todos. Com isso, “Uma adequada integração entre estes três processos permite, ou deve permitir, regular o ensino e a aprendizagem, utilizar tarefas que, simultaneamente, são para ensinar, aprender e avaliar e contextualizar a avaliação.” (Fernandes, 2005, n.p)

No contexto de educação matemática, tendo em vista que os alunos aprendem a partir das tarefas que são propostas e o modo como são exploradas em sala de aula. Logo, as tarefas são instrumentos importantes no processo de avaliação integrada a aprendizagem-ensino, pois elas podem gerar reflexões sobre a aprendizagem do conceito do objeto matemático e subsidiar o processo avaliativo. Vergnaud corrobora com esse pensamento ao afirmar que "Uma questão fundamental para o professor é de que instrumento de avaliação ele dispõe para valer, não os institucionais já existentes, mas os que subsidiem sua ação com seus alunos". (Vergnaud, 2003, p. 47) Em suma, é preciso propor situações que permita avaliar o processo de aquisição e desenvolvimento de um conceito. Aqui reside um ponto de interesse de nossa pesquisa.

Ao partir dessa perspectiva, faz-se necessário refletir sobre estratégias e procedimentos de avaliação formativa. É sabido que para uma avalição mais eficaz e consciente, devido aos diversos interesses e conhecimentos prévios que os alunos apresentam, é necessário a diversificação de procedimentos de recolha dos dados/informações acerca dos processos de aprendizagens dos alunos; assim sendo, somente as provas escritas não é suficiente. Essa coleta pode acontecer "através de relatórios, de pequenos comentários, de observações mais ou menos estruturadas, de conversas (entrevistas) mais ou menos formais, mais ou menos estruturadas ou de trabalhos e produtos realizados pelos alunos de diversa natureza." (Fernandes, 2008, p. 19) Como já foi exposto, a diversificação de tarefas de aprendizagem contribui para a diversificação de estratégias avaliativas de natureza formativa.

Ao seguir esse pensamento, cada um dos autores envolvido no processo de construção do conhecimento desempenha um papel importante e específico, no qual o professor organiza o ensino a partir dos tipos de tarefas que oportunizam a produção de *feedbac*k de qualidade que tem potencialidades de melhorar o ensino e a aprendizagem. Enquanto o aluno tem seu lugar de destaque na responsabilidade de construir e melhorar seus conhecimentos, bem como sua autoavaliação ou autorregulação. Sobre isso, Fernandes (2008) evoca que

> os professores poderão ter um papel que deve ser preponderante em aspectos tais como a selecção de tarefas ou a organização e distribuição do processo de feedback, enquanto os alunos poderão ter um papel mais activo no desenvolvimento dos processos que se referem à auto-avaliação e à auto-regulação do que têm que aprender (Fernandes, 2008, p. 357).

O processo de avaliação formativa perpassa pela tríade: professor-tarefa/situação-aluno, o professor promove um ensino que envolver um ambiente que seja propício à participação ativa dos alunos na execução de tarefas, que foram cuidadosamente selecionadas com o propósito de ensinar, aprender e avaliar um conceito. No caso de nossa pesquisa, situações que envolvam o raciocínio multiplicativo, para isso é preciso ter clareza dos objetivos que se pretende alcançar com a realização de cada tarefa de aprendizagem/avaliação. Sendo assim, esses critérios devem ser de conhecimentos dos alunos ou até mesmo discutidos com eles, para que, com isso, os alunos possam organizar seus estudos e saber o que deve ser essencialmente necessário desenvolver em uma determinada tarefa para, consequentemente, realizar sua autoavaliação. Então, “as tarefas, os professores e os alunos são três elementos fundamentais que ocupam os vértices de uma espécie de triângulo em cujo interior estão os contextos de ensino, de aprendizagem e de avaliação gerados pelas interacções entre aqueles três elementos.” (Fernandes 2008, p. 367) Nessa perspectiva, as tarefas de natureza mais aberta são mais recomendada por apresentarem vantagens, como: permite ao professor analisar as estratégias usadas pelo aluno na resolução e permite avaliar as interações, as negociações de significados ou as comunicações de resultados.

Esse trabalho tem foco na diversificação de tarefas que cumprem o papel de ensinar e avaliar o ensino-aprendizagem do conceito de multiplicação de números naturais. Consequentemente, a avaliação será integrada aos processos de ensino-aprendizagem quando utiliza diversas estratégias avaliativas como o objetivo de interpretar, apoiar, dialogar e orientar o caminho mais seguro para que ocorra a compreensão de processo de funcionamento do conceito de multiplicação. Bem como a constituição do algoritmo da multiplicação com os elementos essenciais.

4.3 Avaliar para melhorar a aprendizagem sobre multiplicação

Como já citado nos tópicos acima, a avaliação somativa ainda é a que predomina em muitos contextos escolares brasileiros, porém é valido lembrar que tanto a avaliação formativa quanto a somativa tem função e resultado diferente. Desse modo, de acordo com Borralho, Lucena e Brito (2015) é em contexto de sala de aula que as práticas de avaliações, seja formativa ou somativa, revelam-se e cada uma tem seu efeito.

> A avaliação somativa tem como resultante descrever a aprendizagem alcançada em um determinado momento para informar resultados aos pais ou responsáveis, a outros professores, aos próprios alunos e, em forma concisa, a outras partes interessadas, tais como direção ou conselhos escolares. Tem um papel importante na educação global no que diz respeito ao progresso dos alunos, mas não no ensino do dia a dia, como faz a avaliação formativa. O desafio maior é articular esses propósitos importantes à educação global com a melhoria de aprendizagens por meio da prática da avaliação formativa (Borralho; Lucena; Brito, 2015, p.31).

Face ao exposto, ao articular os propósitos para uma educação global é que a avaliação para melhorar a aprendizagem em multiplicação de números naturais deve sempre iniciar com a definição clara dos objetivos que se pretende alcançar com a tarefa. Com isso, a depender dos objetivos que se pretende alcançar é que se defini os instrumentos ou formas de avaliar, vale ressaltar que esses instrumentos não são os já institucionalizados para a avaliação classificatória, mas aqueles que servem para uma interpretação sobre quais objetivos foram ou não alcançados. Logo, o professor traça novos caminhos em função das aprendizagens.

Com esse propósito, que as práticas de avaliação formativa em sala de aula devem estar sempre na direção de melhorar as aprendizagens, se assim não for, perder o sentido de ser. Desse modo, avaliar em Matemática, especialmente em multiplicação, vai além de memorizar regras, fórmulas, efetuar algoritmo ou seguir um roteiro predefinido de resolução-habilidade nas técnicas operatórias. É imprescindível verificar o nível de compreensão dos estudantes quanto ao conceito ou ideia da multiplicação que está sendo empregada, depois disso, compreenderão quando e para que as fórmulas e os algoritmos servem, consequentemente, conseguem escolher e aplicar o procedimento mais adequado.

A avaliação, para melhorar as aprendizagens em multiplicação, deve ser orientada para a compreensão dos processos utilizados pelos estudantes, a fim de analisar, por meio dos registros de natureza oral e/ou escrito, o desenvolvimento de esquemas estratégicos por eles empregados, tanto em grupos ou individualmente. Desse modo, no processo de aprendizagem da multiplicação interessa mais o modo como se chegou em um determinado resultado, do que somente o resultado correto, ou não. Por isso o professor deve encorajar o estudante a expressar o modo com pensou para determinar o resultado. Essa avaliação é criteriosa e possui seus instrumentos, técnicas e estratégias de avaliação que ajudam o professor a interpretar como acontece a aprendizagem, ou não, dos alunos por meio de *feedbacks.*

Sobre esse ponto de vista, Borralho, Lucena e Brito (2015) trazem alguns instrumentos avaliativos para a realização de avaliação com vista a melhorar as aprendizagens, que podem e devem ser usados no ensino de multiplicação, tais como: a prova escrita realizada em duas fases, a primeira em sala de aula e a segunda em casa; os relatórios escritos, individual ou em grupo, onde os alunos a expressam suas aprendizagens por meio de texto em relação a realização de uma determinada tarefa, o que os faz refletir sobre seu processo; as composições matemáticas que são produção escritas curtas (resposta restrita) ou extensas (ensaios); o portifólio que é um instrumento que traz as aprendizagens do aluno de um determinado período e as rubricas, “uma matriz onde conste os indicadores e respectivos critérios de qualidade de desempenho dos alunos perante uma tarefa” (p. 42).

Há tantos outros instrumentos ou técnicas que podem ser utilizadas e visam a melhoria constante do processo de ensino-aprendizagem-avaliação em multiplicação, como as produções orais, por meio do diálogo entre alunos-alunos e entre alunos-professor; seminários e a autoavaliação. Na ação docente, esses instrumentos podem ser complementares e não excludentes, mas o que determinará o uso de um, ou mais, são as escolhas das tarefas de ensino-aprendizagem-avaliação de multiplicação em função dos objetivos almejados, pois elas proporcionam a produção de *feedbacks*. A depender do tipo de tarefa, um instrumento é mais apropriado que outro como, por exemplo, o relatório para as tarefas investigativas.

Para a produção de relatórios de aprendizagem é preciso dar indicações claras aos alunos do que se espera deles, o que pode disponibilizar um roteiro predefinido e discutido em sala. O quadro abaixo foi adaptado de Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) e apresenta a síntese de um roteiro para a elaboração de um relatório.

Quadro 3: Roteiro para a elaboração de um relatório.

Na elaboração do relatório pode ter em conta, entre outros, os seguintes aspectos: • Identificação do aluno ou grupo de alunos Titulo Objetivo do trabalho incluindo as questões iniciais *(Introdução*) •Descrição do processo de investigação (incluindo tabelas e/ou esquemas, esboços de gráficos, organização dos dados recolhidos...), das tentativas realizadas e das dificuldades encontradas. *(Desenvolvimento)* Conclusões: A sua apreciação crítica da tarefa proposta *Autoavaliação*: Apreciação autocrítica da sua intervenção no trabalho

Fonte: Adaptado de Ponte; Brocardo; Oliveira, (2006) (grifo nosso)

Para tanto, é preciso esclarecer aos estudantes que o relatório é uma descrição mais detalhada dos passos percorridos na realização de uma tarefa, que é preciso fazer anotações durante a realização da tarefa, anotar o que fez, de forma clara e organizada – o que pode apresentar desenhos, gráficos e tabelas. Além disso, é possível apresentar as ideias e/ou tentativas que foram desprezadas por serem consideradas incorretas e explicar o motivo disso. (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006) Por fim, produzir um texto de forma resumida de todo o processo de aprendizagem, que siga uma estrutura de introdução, desenvolvimento e conclusão. O relatório pode ser produzido em grupo ou individual, pois os estudantes podem refletir sobre "o modo como organizam os dados, as conjecturas provadas e não provadas, os procedimentos usados para validação das conjecturas etc." (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006, p. 106).

O relatório, como um instrumento de avaliação, precisa ter critérios de avaliação e o professor deve fazer comentários que são "pistas" concretas para melhorar a exploração apresentada. Procura-se que os alunos percebam os aspectos que podem ser melhorados e sugerem-se algumas possibilidades para o fazê-lo. (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006, p. 119) Esses autores trazem algumas sugestões de aspectos que farão parte da avaliação e os estudantes precisam ter ciência disso. Tais como: "organização do trabalho; descrição e justificação dos procedimentos utilizados; correção e clareza dos raciocínios; correção dos conceitos matemáticos envolvidos; correção e clareza da linguagem utilizada; criatividade". (p. 117)

Outra forma de avaliação para as aprendizagens, são as apresentações orais na qual devem incluir momentos em que os estudantes possam interagir, apresentar seus resultados, debater e partilhar ideias; assim, poderão identificar, falhar e reorganizar raciocínio em prol de uma aprendizagem mais eficaz. As apresentações orais foram utilizadas na presente pesquisa com meio de produzir *feedbacks* para a condução da avalição para as aprendizagens.

> As apresentações orais permitem avaliar uma variedade de objetivos, incluindo as atitudes e valores, a compreensão do processo de investigação, a pertinência das estratégias, os processos de raciocínio, o uso de conceitos, as competências de cálculo e a capacidade de comunicação oral (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006, p. 125).

A avaliação voltada a melhorar as aprendizagens possuem inúmeros instrumentos avaliativos, como a observação dos estudantes enquanto realização de uma determinada tarefa. A observação oportuniza ao professor recolher informações sobre as atitudes dos estudantes, como eles pensam e mobilizam os esquemas para a construção dos conceitos matemáticos. Durante a observação, o professor pode fazer perguntas a fim de conduzir o estudante a expressar o que fez e pensou. Em suma, para efeito desta pesquisa os instrumentos e técnicas utilizados foram os *feedbacks* produzidos pelos alunos nos momentos de discussões nos grupos e nas apresentações orais; as justificativas escritas solicitadas nas tarefas e a autoavaliação – o relatório não foi um instrumento utilizado devido o tempo disponível para a realização deste estudo.

5 ABORDAGEM METODOLÓGICA

Após um percurso de autoformação no que se refere à Teoria dos Campos Conceituais, especialmente quanto à multiplicação, à avaliação integrada ao processo de ensino-aprendizagem e ao uso de diferentes tipos de tarefas é que traçamos uma proposta de ensino com o intuito de conjugar essas teorias na prática de sala de aula. Desse modo, a metodologia da pesquisa segue a abordagem qualitativa em que a ideia é analisar, a partir de uma dada proposta de ensino, como as aprendizagens ocorrem em um contexto comum de sala de aula, a fim de considerar com mais aprofundamento os processos vivenciados pelos alunos na aprendizagem de conceitos que abordam as ideias de multiplicação, do que apenas os resultados corretos ou incorretos das respostas das tarefas.

Nessa perspectiva, Bogdan e Biklen (1994, p. 16) consideram que as investigações qualitativas "privilegiam, essencialmente, a compreensão dos comportamentos a partir da perspectiva dos sujeitos da investigação". Minayo (2009, p. 22), esclarece que a pesquisa qualitativa "aprofunda-se no mundo dos significados das ações e relações humanas", sendo assim "os significados e as ações são contextuais. A pesquisa interpretativa procura analisar criticamente cada significado em cada contexto." (Moreira, 2003, p. 24) Assim, o interesse da pesquisa qualitativa interpretativa, no campo do ensino está relacionado ao ensino que acontece em contexto comum de sala de aula e "que significados têm as ações e os eventos de ensino, aprendizagem, avaliação, currículo, para os indivíduos que deles participam." (Moreira, 2003, p. 24)

Por se tratar de significação das ações, a realidade não está totalmente posta, pois é necessário ser analisada e interpretada a partir de dados recolhidos em que o pesquisador pode usar de alguns procedimentos para conseguir esses dados. Tais como: anotações de "tudo o que acontece nesse ambiente, registrando eventos – talvez através de audioteipes ou de videoteipes- coletando documentos tais como trabalhos de alunos, materiais distribuídos pelo professor". (Moreira, 2003, p.24)

A presente pesquisa surgiu de uma inquietação que advém de minha própria experiência docente com alunos dos anos iniciais, como já citei na introdução. Assim, consideramos os aspectos levantados até aqui, temos por orientação a seguinte questão de pesquisa: **Quais as possibilidades que as diversas tarefas podem gerar para a construção de conceito e desenvolvimento de esquemas da multiplicação de números naturais com alunos do 4º ano do Ensino Fundamental?**

Dessa feita, o objetivo geral desta pesquisa em nível de Mestrado Profissional é investigar, a partir de uma dada proposta de ensino, como as aprendizagens ocorrem em um contexto comum de sala de aula, a fim de considerar, com mais aprofundamento, os processos vivenciados pelos alunos na aprendizagem de conceitos que contemplam as ideias de multiplicação, do que apenas os resultados das respostas das tarefas. Como objetivos específicos, tivemos de analisar os registros (orais e escritos) produzidos pelos alunos; identificar os procedimentos e esquemas mobilizados e utilizados pelos alunos na resolução das diferentes situações/tarefas que envolvam ideias básicas do conceito de multiplicação; verificar e analisar as diferentes soluções encontradas pelos alunos.

Para tanto, propomos um conjunto de seis (06) tarefas[12], composta por situações[13] que propiciam o envolvimento dos alunos e a partilha dos conhecimentos, tanto os já consolidados como os que serão adquiridos. Por isso, escolhemos tarefas em que os estudantes possam realizar em grupos e, com isso, possam interagir e serem ativos no processo de construção do conhecimento. Vale ressaltar que as tarefas foram organizadas tendo as habilidades propostas para 4º ano dos anos inicias, previstas para serem desenvolvidas na segunda quinzena de novembro de 2023 – mas que foram aplicadas em uma turma do 5º ano, devido ao período letivo no qual foi possível realizar a experiência, no início do ano letivo 2024, – devido os alunos não terem tido contato ainda com os objetos de conhecimento do 5º ano e se encontrarem no nível de aluno de 4º ano. Isso porque é prática na rede municipal de ensino ter em média três semanas de aula para o diagnóstico inicial, em que são trabalhadas habilidades do ano escolar anterior.

5.1 Universo da pesquisa

A instituição escolhida foi a Escola Municipal de Ensino Fundamental Francisca Romana dos Santos, em Canaã dos Carajás-PA, onde a pesquisadora atuava como professora regente[14] no 4º ano dos anos inicias até junho de 2022. A escola foi criada oficialmente em 10 de fevereiro de 2006 por meio do Decreto nº 191/2006 – GP/PMCC. A referida situa-se na Rua Lírio Branco s/n, Bairro Parque dos Ipês, em Canaã dos Carajás-Pará. Recebeu esse

---

[12] Nesta pesquisa, tarefa é a proposta de situações que colocaram os alunos em atividade mental e física.

[13] Situação, que por várias vezes denominamos item, é cada uma das propostas que os alunos desempenharam, portanto, os termos situação e item são sinônimo.

[14] Professora que leciona todas as disciplinas do currículo para o ano mencionado, exceto a disciplina de Educação Física.

nome em homenagem à professora Francisca Romana dos Santos, nascida aos 07 de fevereiro de 1945 em Buriti Alegre- Goiás.

Hoje a escola funciona nos turnos matutino e vespertino, sendo que o primeiro turno funciona de 07h as 11h25min e o segundo de 13h as 17h25min, além de atender 640 alunos do 1º ao 5º ano do Ensino fundamental. A escola conta com 31 professores. Desses, 3 estão de licença para estudo; 3, em processo de readaptação[15]; 1 é diretor; outro tem a função de coordenador pedagógico; 2 têm orientação educacional e outro está na Sala de Recursos Multifuncional.

O espaço da escola conta com dez (10) salas de aula, sendo que quatro (04) dessas funcionam em container[16]. Há uma sala Multifuncional para Atendimento Educacional Especializado onde se realizam atividades específicas para os alunos com necessidades especiais no contraturno. O espaço externo às salas é arborizado possui uma quadra coberta com arquibancadas, biblioteca, secretaria escolar, sala de direção, sala dos professores, sala de coordenação, sala de orientação escolar, banheiros, depósitos, cozinha e refeitório.

Imagem 1: Escola Francisca Romana dos Santos.

Fonte: Arquivo da pesquisadora, 2023.

[15]Professor que estão exercendo outra função na escola por motivo de problemas de saúde.
[16]É uma caixa de metal parecida aos equipamentos destinados ao transporte de mercadorias, na referida escola ele ganhou uma cobertura com telhas e piso, porém não tem uma boa acústica emitindo muito barulho ao receber uma pisada com mais intensidade ou quando há conversas, interferir na concentração e aprendizagem.

A escola conta com uma coordenadora pedagógica que atende todos os professores das turmas do 1º ao 5º ano. As reuniões de planejamento ou de formação em trabalho acontecem nas quintas-feiras das 17h30min às 20h30min.

A organização pedagógica da escola apresenta diferenças entre os anos escolares oferecidos. Do 1º ao 3º ano, os alunos têm contato com duas professoras diferentes, uma só para Educação Física e a outra para os demais componentes curriculares. Nas turmas de 4º e 5º ano as aulas são divididas por áreas do conhecimento, divididas da seguinte forma: P1[17] – Língua Portuguesa e Artes; P2 – Matemática e Ciências e P3 – História, Geografia e Ensino Religioso. Há também uma professora exclusiva para Educação Física.

A escolha do ano escolar – 4º ano – e da turma se deu em função do objetivo da pesquisa e do objeto de conhecimento – multiplicação de números naturais –, e por ser o ano/série que a pesquisadora estava trabalhando anteriormente. Portanto, a pesquisadora não é a professora da turma, mas realizará a pesquisa com a professora titular. Como já apontado, o desenvolvimento da proposta aconteceu em uma turma de 5º ano devido ao período da aplicação das tarefas ser no início do ano letivo, mas a proposta é direcionada aos alunos do 4º ano com habilidades selecionadas para esse período de escolaridade. A turma funciona no turno matutino e é composta por 32 alunos – dos quais, 16 são meninos e 16 são meninas – os quais foram os participantes desta pesquisa.

5.2 Caminho metodológico

A parte empírica da pesquisa foi realizada em três etapas básicas: 1ª) Elaboração e/ou seleção/adaptação de um conjunto tarefas com diversificação de tipos tarefas do campo multiplicativo; 2ª) Execução da proposta ensino-aprendizagem-avaliação de multiplicação de números naturais; 3ª) Análise dos procedimentos adotados pelos alunos durante a realização das tarefas.

Para a realização da primeira etapa foi organizado um conjunto de tarefas do tipo exercícios, problemas, investigação e exploração (Ponte, 2005), (ver quadro 04) que foram desenvolvidas pelos alunos. Tarefas essas que envolveram ideias inerentes ao raciocínio multiplicativo as quais trazem as noções da multiplicação em seu aspecto conceitual de ideia aditiva, proporcionalidade, organização retangular e raciocínio combinatório, (Gerard Vernaud, 1993, 1996, 2003, 2009). Além de tarefas com o uso exclusivo de algoritmo de

---

[17] P é abreviatura da palavra professor.

multiplicação, todas com a finalidade de compreender que conhecimentos os alunos mobilizam para resolver às proposições. Para isso, utilizamos site e/ou outros livros para a busca/seleção de tarefas que cumprem com o propósito didático – tudo isso foi adaptado pela pesquisadora conforme o objetivo da pesquisa.

É importante ressaltar que os exercícios e problemas aparecem com mais frequência nas tarefas propostas, pois são as mais usadas em contexto de sala de aula, além de explorar os diferentes significados da multiplicação. Para tanto, organizamos 2 itens que comtemplam cada uma das ideias da multiplicação. Enquanto há investigação e exploração, são propostos 2 itens menos propostos, de modo geral, em contexto de sala de aula brasileira e 2 itens com o uso exclusivo do algoritmo de multiplicação.

Quadro 4: Tarefas de ensino-aprendizagem-avaliação.

Situações que envolvem multiplicação	**Habilidades ou parte delas**	**Ideia de multiplicação**	**Natureza**
1) Tereza organizou 10 pacotes com docinhos para seus sobrinhos. Em cada pacote ela colocou 12 docinhos. Quantos docinhos ela usou ao todo? Resolva e explique como pensou para resolver.	(EF04MA04) Utilizar as relações entre adição [...] multiplicação [...] para ampliar as estratégias de cálculo. (EF04MA06) Resolver [...] problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, [...]), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.	Adição de parcelas iguais.	Exercício ou Problema
2) Para o seu aniversário Livia convidou 12 coleguinhas e encomendou 8 salgadinhos para cada um. Quantos salgadinhos foram preparados? Resolva e explique como pensou para	(EF04MA04) Utilizar as relações entre adição [...] multiplicação [...] para ampliar as estratégias de cálculo. (EF04MA06) Resolver [...] problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação (adição de parcelas iguais, [...]), utilizando estratégias diversas,	Adição de parcelas iguais.	Exercício ou Problema

resolver.	como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.		
3) Com um metro de tecido uma costureira faz 4 fantasias. Quantos metros ela precisará para fazer 12 fantasias? Como pensou para resolver.	(EF04MA06) Resolver [...] problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação ([...] proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.	Proporcionalidade.	Exercício ou Problema
4) Para fazer um bolo, umas das instruções é: para cada 2 xícaras de açúcar adicione 5 xícaras de farinha. Quantas xícaras de farinhas serão necessárias para fazer três bolos? Como pensou para resolver.	(EF04MA06) Resolver [...] problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação ([...] proporcionalidade), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.	Proporcionalidade.	Exercício ou Problema
5) Alice levou para sua viagem 3 *shorts* (um verde, um preto e um amarelo) e 4 blusas (uma vermelha, outra azul, uma rosa e a outra amarela). De quantas maneiras diferentes Alice pode combinar essas peças durante a viagem? Como pensou para resolver. (pode fazer desenho se preferir).	(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.	Raciocínio combinatório.	Exercício ou Problema
6) Para a festa de São João, na escola, tem 2 meninos (Pedro e João) e 4 meninas	(EF04MA08) Resolver, com o suporte de imagem e/ou material manipulável, problemas simples de	Raciocínio combinatório.	Exercício ou Problema

(Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados? (Brasil, 2014, p. 41)[18] Como pensou para resolver (pode fazer desenho se preferir).	contagem, como a determinação do número de agrupamentos possíveis ao se combinar cada elemento de uma coleção com todos os elementos de outra, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.		
7) Na sala de aula do 4º ano as carteiras são organizadas em 5 filas com 7 carteiras em cada. Quantas carteiras há na sala? Como pensou para resolver (pode fazer desenho se preferir).	(EF04MA06) Resolver [...] problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação ([...] organização retangular [...]), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.	Organização retangular.	Exercício ou Problema
8) André organizou sua coleção de carrinhos em 13 fileiras com 4 carrinhos em cada. Quantos carrinhos há na coleção de André? Resolva e explique como pensou para resolver (pode fazer desenho se preferir).	(EF04MA06) Resolver [...] problemas envolvendo diferentes significados da multiplicação ([...] organização retangular [...]), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.	Organização retangular.	Exercício ou Problema
9) 1º Escreve em coluna os 10 primeiros resultados da	(EF04MA04) Utilizar as relações entre adição [...] multiplicação [...] para ampliar as estratégias de		Exploração/ investigação

[18] Retirada do material do PNAIC - Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa. Educação Estatística. Caderno 07/Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. – Brasília: MEC, SEB, 2014.

multiplicação do 5. 2º Repara nos dígitos das unidades e das dezenas. Encontras algumas regularidades? (tarefa com adaptação de linguagem. Ponte, 2010, p. 15)	cálculo. EF04MA05 - Utilizar as propriedades das operações para desenvolver estratégias de cálculo.		
10) Investiga o que acontece com os 20 primeiros resultados da multiplicação do 6. (tarefa adaptada de Ponte. 2010, p. 15)	(EF04MA04) Utilizar as relações entre adição [...] multiplicação [...] para ampliar as estratégias de cálculo. EF04MA05 - Utilizar as propriedades das operações para desenvolver estratégias de cálculo.	Utilizar procedimentos operatórios variados	Exploração/ investigaçã o
11) 13 X 5	(EF04MA04) Utilizar as relações entre adição [...] multiplicação [...] para ampliar as estratégias de cálculo. EF04MA05 - Utilizar as propriedades das operações para desenvolver estratégias de cálculo.	Utilizar procedimentos operatórios variados	Exercício/A lgoritmo
12) 130 X 14	(EF04MA04) Utilizar as relações entre adição [...] multiplicação [...] para ampliar as estratégias de cálculo. EF04MA05 - Utilizar as propriedades das operações para desenvolver estratégias de cálculo.	Utilizar procedimentos operatórios variados	Exercício/A lgoritmo

Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 2023.

Os itens de 1 a 8 foram categorizados, quanto à natureza, como exercícios ou problemas por apresentar os dados e objetivos de forma clara e apresentar uma estrutura fechada – já o grau de desafio depende do conhecimento prévio do aluno. Enquanto os itens 9 e 10 foram categorizados como investigação/exploração por apresentar uma dimensão aberta e grau de desafio depende do conhecimento do aluno. Já os itens 11 e 12 apresentam cunho mais fechado e a intenção de observar a resolução por meio exclusivo do algoritmo de multiplicação.

Os itens 1 e 2 trazem situações de multiplicação com ideias de adição de parcelas iguais, porém o item 1 tem um grau de desafio maior, por se trata de uma multiplicação de dezenas, o aluno precisará acionar esquema sobre a organização do Sistema Decimal; para, assim, efetuar as trocas ou fazer a decomposição das dezenas. Já os itens 3 e 4 envolvem a ideia de proporcionalidade na multiplicação. No item 3 temos uma situação (tarefa) em que o aluno deve perceber que precisará de 4 vezes (quádruplo) mais tecido para confeccionar as 12 (doze) fantasias. Já o item 4, o aluno perceberá que se tem 3 (três) vezes (triplo) a quantidade de bolo, então, precisará de 3 (três) vezes da quantidade de açúcar e de farinha.

Os itens 5 e 6 contêm situações que abrangem a ideia de raciocínio combinatório de multiplicação, o que podem ser resolvidas com algoritmo da multiplicação ou outras estratégias – como lista, desenho, tabela ou árvores de possibilidades. Enquanto, os itens 7 e 8 envolvem o sentido de organização retangular ou disposição espacial retangular na multiplicação, já que necessita da contagem dos grupos de elementos, dispostos em colunas e linhas ou algoritmo de multiplicação.

Para a resolução da tarefa de natureza investigativa/exploratória, itens 9 e 10, os alunos precisarão de conhecer o conceito de coluna/tabuada, visto que pode resolver na adição de 5 e 6 unidades no resultado anterior. Para o item 9 espera-se que eles identifiquem que o algarismo das unidades será sempre 0 ou 5 e que cada algarismo da dezena se repete duas vezes (1-1; 2-2; 3-3...), mas serão livres para encontrar outros padrões. Quanto ao item 10, o algarismo das unidades é sempre 0, 6, 2, 8 e 4 e que são pares.

Os itens 11 e 12 têm como objetivo identificar exclusivamente os procedimentos de resolução de algoritmos de multiplicação, se há conhecimento da organização do Sistema Decimal em relação as trocas e a multiplicação do algarismo 0, pois "um algoritmo é uma regra (ou uma conjunção de regras) que permite, diante de todo problema ou de uma classe dada de antemão, de conduzir à sua solução, se dele existe uma, ou, em caso de insucesso, de mostrar que não há uma solução" (Vergnaud, 2009, p. 309).

Vejamos a distribuição com mais detalhes com planejamento no quadro 5.

Quadro 5: Síntese do planejamento dos encontros.

ENCONTRO	TAREFA	OBJETIVO DE APRENDIZAGEM	ESTRATÉGIAS	MATERIAIS	PROCEDIMENTOS DE AVALIAÇÃO
1º encontro	Itens 1 e 2	• Reconhecer os dados relevantes da situação. • Utilizar as ideias e as propriedades da adição a fim de estabelecer relação com a multiplicação.	Formar grupos; distribuir as tarefas impressas em folha de papel A4, a cada grupo de alunos, para serem respondidas mediante à discussão grupal. No final, as folhas respondidas foram recolhidas, para a verificação das justificativas e dos procedimentos, dos esquemas mobilizados e utilizados. Além disso, promover a comunicação oral coletivamente e realizar a auto avaliação.	*Smartphone* e tarefas impressas.	*Feedbacks* nos grupos, apresentação oral coletiva e autoavaliação.
2º encontro	Itens 3 e 4	• Reconhecer os dados relevantes da situação. • Resolver situação com ideias de proporcionalidade, com o objetivo de	Formar grupos; distribuir as tarefas impressas em folha de papel A4 a cada grupo de alunos para serem respondidas a partir da discussão no grupo. No final, as folhas respondidas foram recolhidas, para a verificação das justificativas, dos procedimentos, dos esquemas	*Smartphone* e tarefas impressas.	*Feedbacks* nos grupos, apresentação oral coletiva e autoavaliação.

		compreender os cálculos multiplicativos.	mobilizados e utilizados. Assim como promover a comunicação oral coletivamente e realizar a autoavaliação.		
3º encontro	Itens 5 e 6	• Reconhecer os dados relevantes da situação. • Utilizar estratégias de cálculo/contagem, tabelas e árvore para determinar as combinações possíveis, para compreender a multiplicação.	Formar grupos; distribuir as tarefas impressa em folha de papel A4, a cada grupo de alunos, para serem respondidas a partir da discussão no grupo e registrar como pensaram. No final, as folhas respondidas foram recolhidas, para a verificação das justificativas e os procedimentos e esquemas mobilizados e utilizados. A depender da turma é possível distribuir as imagens de vestimentas (Apêndice H); além de promover a comunicação oral coletivamente e realizar a autoavaliação.	*Smartphone*, tarefas impressas.	*Feedbacks* nos grupos, apresentação oral coletiva e autoavaliação.
4º encontro	Itens 7 e 8	• Reconhecer os dados relevantes da situação.	Formar grupos; distribuir as tarefas impressas em folha de papel A4, a cada grupo de alunos, para serem	*Smartphone*, tarefas impressas e	*Feedbacks* nos grupos, apresentação oral coletiva e

		• Reconhecer a multiplicação nas situações de organização retangular.	respondidas mediante à discussão no grupo. No final, as folhas respondidas foram recolhidas para a verificação das justificativas, dos procedimentos, dos esquemas mobilizados e utilizados. Bem como promover a comunicação oral coletivamente e realizar a auto avaliação.	réguas.	autoavaliação.
5º encontro	Itens 9 e 10	• Levantar hipóteses; • investigar e checar os resultados obtidos na multiplicação. • Identificar as regularidades afim de determinar uma regra geral.	Formar grupos; distribuir as tarefas impressas em folha de papel A4, a cada grupo de alunos, para serem respondidas mediante à discussão no grupo. No final, as folhas respondidas foram recolhidas para a verificação das justificativas, dos procedimentos, dos esquemas mobilizados e utilizados. Além disso, promover discussão sobre a elaboração do relatório e socializar os resultados obtidos.	*Smartphone*, tarefas impressas e réguas.	*Feedbacks* nos grupos, apresentação oral coletiva e autoavaliação.
6º encontro	Itens 11 e 12	• Reconhecer os procedimentos de	Formar grupos; distribuir as tarefas impressa em folha de papel A4, a cada	Smartphone e tarefas	*Feedbacks* nos grupos, apresentação

		trocas do SND. • Compreender a multiplicação do algarismo 0.	grupo de aluno, para serem respondidas mediante à discussão no grupo. No final, as folhas respondidas foram recolhidas para a verificação das justificativas, dos procedimentos, dos esquemas mobilizados e utilizados. Além de promover a comunicação oral coletivamente e realizar a autoavaliação.	impressas.	oral coletiva e autoavaliação.

Fonte: Elaborado pela pesquisadora, 2024.

Para que a realização da 2ª etapa da pesquisa, execução da proposta ensino-aprendizagem-avaliação de multiplicação de números naturais, apresentamos a proposta da pesquisa para direção da escola que prontamente aceitou a realização. Para tanto, foi entregue o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (Apêndice A) a fim de solicitar, formalmente, a autorização, bem como informar os objetivos e a metodologia da pesquisa.

Para iniciar o trabalho com os alunos foi apresentado à professora a proposta e o roteiro das tarefas a serem desenvolvidas, assim como combinar os dias e horários favoráveis para a realização das práticas de aprendizagem-ensino-avaliação em sala de aula. Sendo disponibilizado os primeiros de horários (07:00h às 08:40h) de terça à sexta na penúltima semana do mês de fevereiro, o que contabilizou quatro encontros. Os dois últimos encontros aconteceram na segunda e terça-feira da última semana de fevereiro de 2024, como mostra o quadro 6, a seguir:

Quadro 6: Cronograma de realização das tarefas.

Tarefa	**Dia**
Tarefa 1:	20/02/2024
Tarefa 2:	21/02/2024
Tarefa 3:	22/02/2024
Tarefa 4:	23/02/2024
Tarefa 5:	26/02/2024
Tarefa 6:	27/02/2024

Fonte: Pesquisadora, 2024.

Para execução da proposta de aprendizagem-ensino-avaliação, os alunos foram organizados em cinco (05) grupos, como pode ser observado no Anexo A. A pesquisadora e a professora da turma acompanharam as discussões nos grupos, o que oportunizou a produção de *feedback*s tão importantes e necessários para autoavaliação e/ou avaliação para a aprendizagem. Foram reservados momentos para a comunicação coletiva (ver no Anexo B) em que aconteceram as apresentações orais e o confronto de resolução.

Assim, foi possível a identificação das compreensões dos alunos sobre a tarefa a fim de orientar novas aprendizagens, a sistematização das aprendizagens da tarefa e a realização de autoavaliação. Para tanto, foi utilizado uma ficha individual na qual os alunos apontaram suas aprendizagens ao finalizar a tarefa – ficha no apêndice I. Desse modo, a avaliação com ênfase nas aprendizagens veio integrada ao processo de ensino, com o propósito de melhorar e apoiar as aprendizagens em multiplicação de números naturais, isso por meio de *feedbacks* produzidos durante a ação didática – a partir de objetivos estabelecidos.

As tarefas que foram desenvolvidas em cada encontro, foram organizadas conforme o quadro 6, sendo que o encontro teve a duração de 2 aulas de 50 minutos/cada (07:00h às 08h40min). Com exceção da tarefa 5, que contempla as tarefas de exploração/investigação de regularidade numérica que teve a duração de 3 aulas de 50 minutos (07:00h às 09h30min). Durante a prática didática, as tarefas realizadas pelos alunos foram recolhidas e os momentos de discussão ocorridos nos grupos, para o cumprimento da tarefa, gravamos em áudio, com o celular da pesquisadora, para compor as fontes de dados. De posse dos dados é que se deram as análises tendo como base as teorias que sustentaram esta pesquisa.

5.3 Caminho metodológico para o tratamento dos dados

A partir da recolha dos dados, seguimos para o tratamento deles em uma experiência específica, uma turma de 5º ano de uma escola pública de Canaã dos Carajás-PA, mas que representa características comuns a tantas outras turmas brasileiras. Assim sendo, com o objetivo de preservar a identidade dos alunos, foi necessário realizar a codificação. Para tanto, identificamos os alunos pela letra A (inicial da palavra aluno) seguida pelo número que representa a quantidade de integrantes dos grupos (A1, A2, A3, A4, A5 e A6). Já os cinco grupos foram identificados pela letra G (inicial da palavra grupo) seguida pelo número que correspondente à quantidade de grupos formados para os encontros (G1, G2, G3, G4 e G5).

Após cada encontro, registrei minhas observações em meu caderno de anotações e as transcrições dos áudios. Já para a sistematização dos resultados, foram utilizadas as tarefas respondidas em grupo e os recortes dos diálogos constituídos durante a resolução das tarefas, o que compreende as falas dos componentes dos grupos e da pesquisadora. Visto que para Moreira, (p. 25, 2003) “o pesquisador enriquece sua narrativa com [..] excertos de suas anotações, vinhetas, exemplos de trabalhos de alunos, entremeados de comentários interpretativos”. Assim, foi feito destaque das manifestações das ideias da multiplicação em negrito ou itálico nos recortes dos diálogos e acrescentada imagens das tarefas com as justificativas escritas dos alunos.

Em certos trechos da exposição dos resultados, utilizarei a primeira pessoa ou a palavra pesquisadora. Empregamos, ainda, na transcrição dos áudios uma formatação diferente, o texto, dos trechos dos diálogos, será em espaçamento simples, com fonte 10 sem parágrafo. Utilizamos esses destaques na expectativa de favorecer a compreensão do leitor.

De posse do material resultante dos encontros, pensou-se em um quadro para os procedimentos das análises tendo a base teórica que sustenta a pesquisa com guia principal e, em seguida, com os indicadores apontados nos dados recolhidos. Com isso, foram analisadas individualmente as respostas dos grupos, os procedimentos adotados e as justificativas de cada tarefa por grupo, a fim de compreender os esquemas utilizados pelos alunos para resolver as situações. Nossas análises foram baseadas nos procedimentos realizados pelos alunos para resolver as tarefas propostas. Esforçamo-nos em tratar a forma como os alunos procederam para resolver as situações, atentamo-nos em compreender o entendimento dos alunos sobre as ideias da multiplicação; por isso, não há uma preocupação em categorizar os resultados. Logo, como aponta Yin que o procedimento de análises dos dados "pode (mas não precisa) ser acompanhado por uma atribuição de novos rótulos, ou "códigos", aos fragmentos ou elementos." (2016, sp)

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Apresentaremos, agora, uma análise interpretativa da experiência de ensino com as tarefas do tipo exercício, problema, investigação e exploração para o ensino-aprendizagem-avaliação da multiplicação dos números naturais em uma turma de 5º ano dos anos iniciais. Nossas análises foram pautadas no modo como os alunos mobilizaram os conhecimentos para resolveram o que foi proposto, bem como as interações entre eles.

Primeiramente, serão apresentadas as tarefas do tipo exercício e/ou problema (tarefa 1, 2, 3, e 4), depois a do tipo investigação e/ou exploração (tarefa 5) e por último a 6 que explora o algoritmo de multiplicação. Elas foram analisadas tendo a base teórica adotada neste trabalho.

6.1 Tarefa 1: Situações de comparação entre razões com ideia de adição de parcelas iguais (um para muitos)

Essa tarefa é do tipo exercício ou problema e contempla situações de multiplicação com ideias de adição de parcelas iguais. Sendo que essas situações são classificadas com um problema que apresenta o isomorfismo de medidas com uma relação quaternária, pois envolve quatro quantidades de medidas e uma dessas medidas é igual a uma medida; ou seja, é igual a um (Vergnaud, 2009). Nessa perspectiva, o objetivo dessa tarefa é encontrar o valor da medida desconhecida, que usa a adição reiterada e estabelece relação com a multiplicação.

Figura 5: Tarefa 1.

1) Tereza organizou 10 pacotes com docinhos para seus sobrinhos. Em cada pacote ela colocou 12 docinhos. Quantos docinhos ela usou ao todo? **Resolva e explique como pensou para resolver.**

2) Para o seu aniversário Livia convidou 5 coleguinhas e encomendou 8 salgadinhos para cada um. Quantos salgadinhos foram preparados?

Resolva e explique como pensou para resolver.

Fonte: A pesquisadora, 2023.

A realização da tarefa aconteceu no dia (20) vinte do mês de fevereiro, no primeiro encontro, das 7:00h às 8h40min com (24) vinte e quatro alunos. Primeiramente, foi apresentado o objetivo da tarefa e esclarecido com a turma o motivo do uso do celular para a gravação dos áudios, mas mesmo assim, no início, ficaram receosos e até tímidos em socializarem comigo as suas conjecturas, só que depois não se incomodaram mais. Os alunos foram organizados em quatro (4) grupos com cinco (5) alunos em cada e um (1) grupo com quatro (4) alunos.

Após isso, foi entregue uma cópia da tarefa e começaram a exploração da tarefa. Nesse momento, a pesquisadora realizou uma leitura coletiva da tarefa a fim de explorar os dados da situação com os alunos a partir de questionamentos. Tais como: quantos pacotes Tereza organizou?; quantos docinhos ela colocou em cada pacote?; qual a quantidade de convidados de Lívia?; quantos salgadinhos ela preparou para cada um?.

Vejamos a seguir como cada grupo prosseguiu com a resolução.

6.1.1 Item 1 – Grupo G1

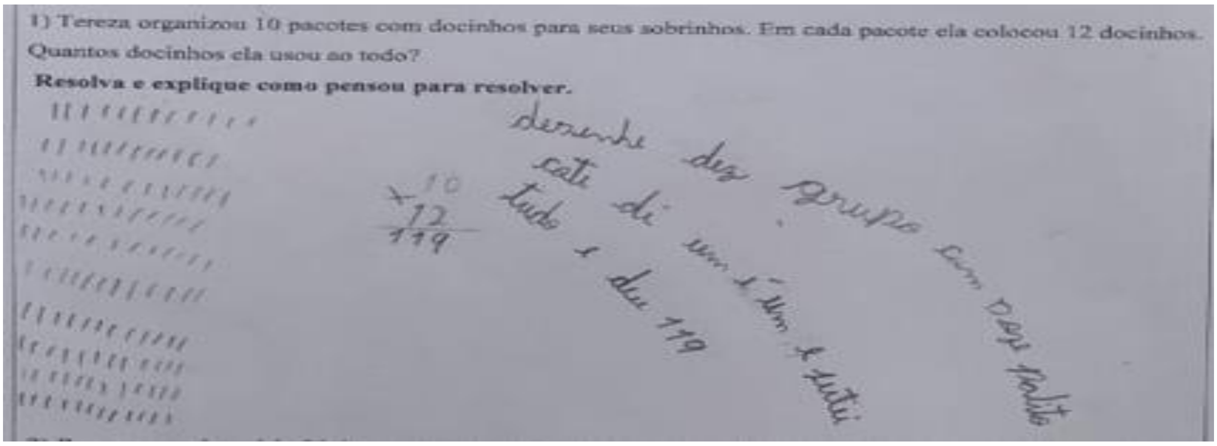
1) Tereza organizou 10 pacotes com docinhos para seus sobrinhos. Em cada pacote ela colocou 12 docinhos. Quantos docinhos ela usou ao todo? **Resolva e explique como pensou para resolver.**

Inicialmente, o grupo tentou resolver por meio do algoritmo de multiplicação, subtração e adição, além de fazerem várias tentativas sem sucesso, pois os membros do grupo não chegavam em acordo sobre o resultado e a operação, conforme o excerto abaixo:

Pesquisadora: Se é de multiplicação, como vocês vão fazer?
A3: ***10 vezes 12***
Pesquisadora: Vocês vão fazer 10 vezes 12, como vocês vão responder?
A3: ***2 vezes 0***... 2
A5: 1
Pesquisadora: É 1? Ou 2 vezes 0 são 2?
A5: é 1 tia.
[...]
Pesquisadora: Primeiro você fez como aqui com o 2, explica pra mim.
A3: O ***2 eu multipliquei*** (aluno aponta para o 0) e ai dá 2, já o ***2 vez 1*** dá 1.
Pesquisadora: E agora?
A3: botar o 1.
Pesquisadora: Agora você vai multiplicar o 1 do 12, o 1 do 12 é a dezena. Você vai multiplicar por qual agora:
A3: Pelo o 1.
[...]
Pesquisadora: Você fez 10 vezes 12 e deu 212. Vocês acham que está certo?
A4: Acho que está.
A1: Não.
[...]
Pesquisadora: E agora, como vocês responderam?
A1: Foi de menos.
Pesquisadora: Foi de menos. Como você fez?
A1: 10 menos 12.
Pesquisadora: Você fez 10 menos 12 e deu quanto?
A1: 121
[...]

A2: Divisão, “tô” falando que é.
[...]
A1: Tia, eu preciso só de uma resposta. Estou em dúvida se essa continha é de vezes ou de mais.
Professora da turma: É você lendo aqui que você vai descobri se é vezes ou mais.
[...]
A1: Eu fiz ***10 vezes 12***. Aí eu fiz 10 aqui (apontando para os traços) ***10 grupos de 12***.
Pesquisadora: Aí você fez o que mais depois que desenhou?
A1: Eu resumi e coloquei aqui o resultado.
Pesquisadora: E como foi que você resumiu:
A1: ***Eu contei tudinho, ajuntei os 10 grupos de 12 e deu esse resultado***. (apontando para o 119).

Imagem 2: Protocolo de resolução item 1 – Tarefa 1 – Grupo 1.



Justificativa do grupo 1: Desenhei ***dez grupos com doze palitos contei de um em um e juntei tudo*** e deu 119.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

Os diálogos mostram que, no início, o grupo ainda não havia compreendido o que a tarefa pedia, sem saber qual operação utilizar: “Tia, eu preciso só de uma resposta. Estou em dúvida se essa continha é de vezes ou de mais.” (A1), esse questionamento é uma característica da cultura escolar de que só basta saber que operação realizar para conseguir resolver uma situação. Isso demonstra que o aluno teve essa experiência nos anos anteriores e ficou marcado: que desenvolver um problema é identificar a operação e pronto! No entanto, o conceito por detrás da situação não foi debatido, porque não conseguiu identificar que a situação poderia ser resolvida quando feita a soma da quantidade de docinhos de cada pacote.

No início do diálogo, notamos a dificuldade com o algoritmo da multiplicação. Há uma tendência de não reflexão sobre o que se teve de resultado quando se multiplicou 2x0. Parece que esse resultado foi decorado, de forma equivocada, quando a resposta dada foi 1 ou 2. Então, demonstra que não houve compreensão sobre o que ocorre quando se multiplica qualquer quantidade por zero, porém não houve a devida compreensão efetiva sobre multiplicações por 0.

O grupo recebeu alguns *feedbacks* da pesquisadora que contribuíram para refletir sobre o caminho que faziam, como: “Você fez 10 vezes 12 e deu 212. Vocês acham que está certo?”, os alunos resolveram tentar a representação pictórica e o processo de contagem como recurso para solução – mesmo não encontrando a resposta correta. Logo, “o *feedback* é determinante para activar os processos cognitivos e metacognitivos dos alunos, que, por sua vez, regulam e controlam os processos de aprendizagem” (Fernandes, 2008, p. 356)**.**

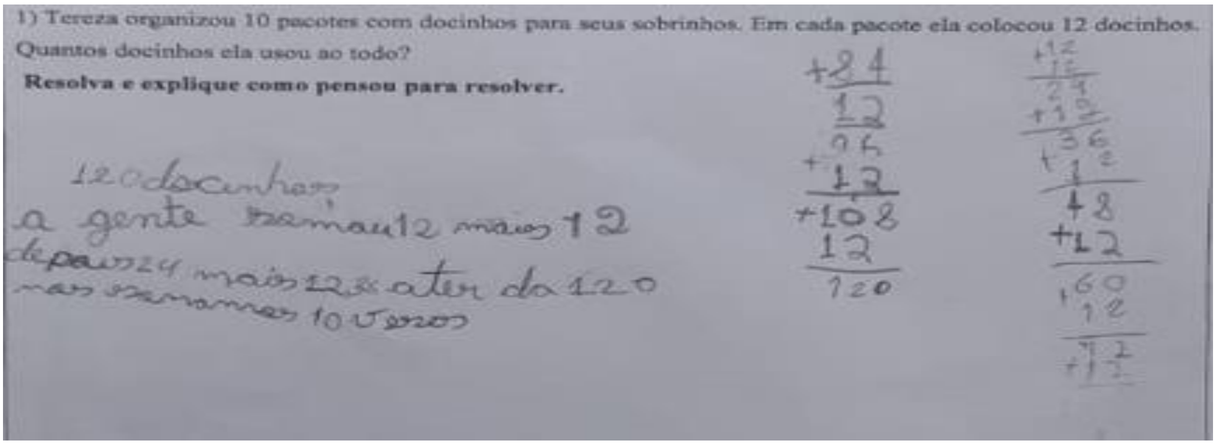
6.1.2 Item 1 – Grupo G2

1) Tereza organizou 10 pacotes com docinhos para seus sobrinhos. Em cada pacote ela colocou 12 docinhos. Quantos docinhos ela usou ao todo? **Resolva e explique como pensou para resolver.**

Os alunos compreenderam rápido o que solicitava a situação e, por meio da adição repetida, encontraram a resposta esperada. Observe:

Pesquisadora: O que foi que vocês entenderam?
A1: Eu entendi que tem que fazer ***12 mais 12*** e “aí” depois eu ainda vou pensar (o aluno estava se referindo no resultado da adição).
[...]
Pesquisadora: Me explica como vocês fizeram?
A3: ***12 mais 12 é 24, 24 mais 12*** e assim ***foi somando***.

Imagem 3: Protocolo de resolução item 1–Tarefa 1 – Grupo 2.



Justificativa do grupo 2: 120 docinhos. A gente ***somou 12 mais 12***, depois ***24 mais 12, 36 até dá 120***. Nós ***somamos 10 vezes***.

Fonte: A pesquisadora (2024).

O grupo compreendeu o que a situação solicitava, fizeram a resolução por meio da adição de parcelas iguais. O momento inicial da tarefa pode ter contribuído para a compreensão, já que é uma fase importante para o trabalho com as tarefas (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006). Notamos que os alunos relacionaram a situação, mesmo que de modo implícita, com a multiplicação: “Nós ***somamos 10 vezes***”. Assim, a multiplicação como adição reiterada de uma mesma quantidade (12) faz do multiplicando (12) uma medida, e do multiplicador (10) um simples operador sem dimensão física. (Vergnaud, 2009)

É possível observar, no processo de adição, que na última parcela, o grupo não segue a organização padrão do algoritmo da adição ao colocar a unidade na ordem das unidades, mas no lugar da dezena. E, consequentemente, a dezena na ordem das centenas.

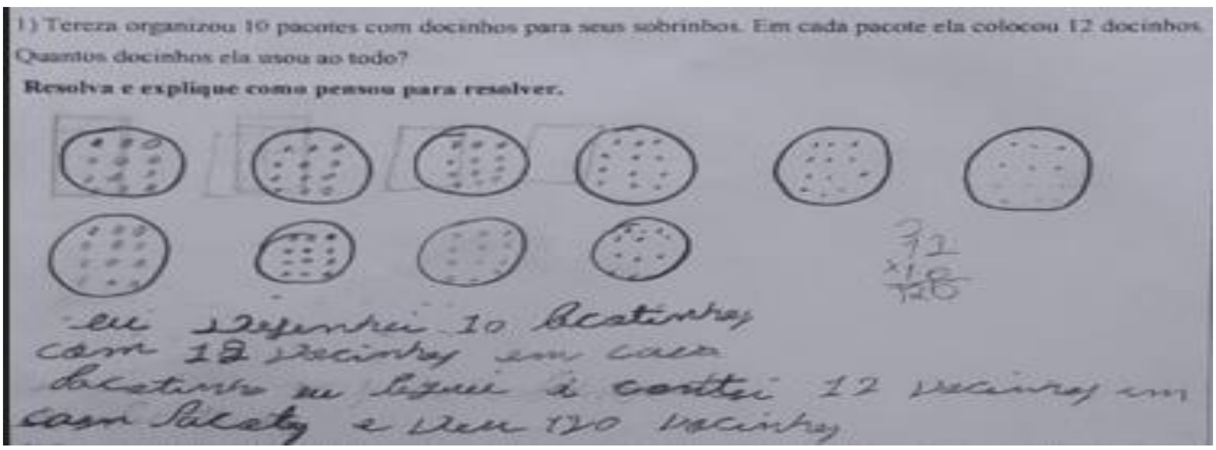
6.1.3 Item 1 – Grupo G3

1) Tereza organizou 10 pacotes com docinhos para seus sobrinhos. Em cada pacote ela colocou 12 docinhos. Quantos docinhos ela usou ao todo? **Resolva e explique como pensou para resolver.**

O grupo demostra que está em processo de construção de conceitos da multiplicação, ao utilizar vários procedimentos na busca da solução, tal como apontam os excertos abaixo:

Pesquisadora: Como vocês estão fazendo para resolver?
A1: Eu estou fazendo os pacotes aqui e os 12 docinhos.
Pesquisadora: Ah, então, você fez quantos pacotes:
A1: Eu fiz 10 pacotes.
Pesquisadora: Por que?
A1: Porque é o que “tá” pedindo.
[...]
Pesquisadora: E depois, o que você vai fazer?
A1: Vou dividir.
[..]
Pesquisadora: Como foi que vocês fizeram a “cotinha”?
A2: Ô tia, a gente fez ***10 vezes 2 deu 20*** a gente botou o 0 e subiu o 2 e aí a gente fez ***10 vezes 1 que deu 10 e juntou com o 2 que deu 12, depois juntou com o 0 e deu 120***.

Imagem 4: Protocolo de resolução item 1 – Tarefa 1 – Grupo 3.



Justificativa do grupo 2: Eu desenhei 10 pacotinhos com 12 docinhos em cada pacotinhos eu peguei e contei 12 docinhos em cada pacote e deu 120 docinhos.

Fonte: A pesquisadora (2024).

O grupo tentou vários meios para chegar à resposta dada, inclusive o algoritmo da multiplicação. Nos diálogos é possível observar que o grupo tentou a decomposição do número 12: “a gente fez ***10 vezes 2 deu 20*** a gente botou o 0 e subiu o 2 e aí a gente fez 10 vezes 1 que deu 10 e juntou com o 2 que deu 12, depois juntou com o 0 e deu 120.” (A2). Sendo assim, acreditamos que a estratégia usada foi da memorização de passos do algoritmo, pois nessa parte “junto com o 0 e deu 120” dá a impressão que essa é uma fórmula para multiplicações quando o “0” aparece na ordem das unidades. Consequentemente, não fica claro se há compreensão de quais dezenas, ao se multiplicarem, resultarão em centenas. A compreensão do conceito matemático sobre o campo das operações dentro de um Sistema, parece não estar garantido.

Ao observar a representação dos docinhos nos “pacotes” é interessante a estratégia de formação dos docinhos, em todos os “pacotes” formaram quatro linhas com 3 “docinhos” em cada. Essa organização está associada à ideia de organização retangular da multiplicação, mas na explicação no protocolo de resolução, o grupo esclarece que utilizou os procedimentos de contagem “contei 12 docinhos em cada pacote e deu 120 docinhos”.

6.1.4 Item 1 – Grupo G4

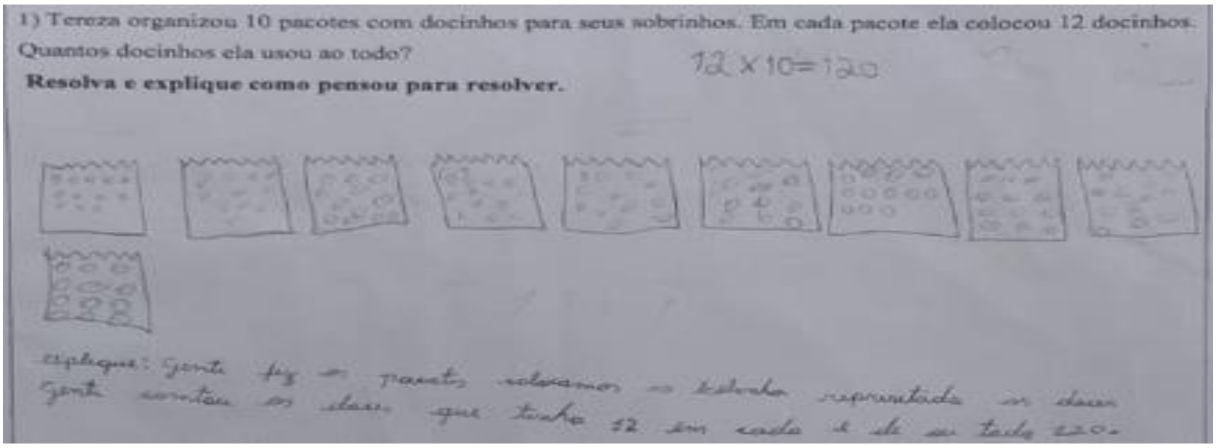
1) Tereza organizou 10 pacotes com docinhos para seus sobrinhos. Em cada pacote ela colocou 12 docinhos. Quantos docinhos ela usou ao todo? **Resolva e explique como pensou para resolver.**

Os alunos encontraram dificuldades para se chegar em uma estratégia que considerassem apropriada para a resolução:

Pesquisadora: Como estão pensando pra resolver?
A3: Tia, a gente ainda não sabe.
A1: A gente só sabe fazer em desenho.
A3: A gente não sabe se é de mais ou de menos ou de dividir.
A2: A tia não pode falar, é a gente que tem que ler e achar o resultado.
Pesquisadora: Primeiramente, vocês precisam ler para entender o que a situação está pedindo, leiam e discutam como você podem responder, vamos lá? (um aluno começou a ler em voz alta).
A4: Ah, é de somar.
Pesquisadora: Vocês vão somar o que?
A4: Tipo, ia somar a quantidade que ela botou, separando pra botar no pacote.

Pesquisadora: Então faz essa estratégia que você está pensando. Em cada pacote ela está colocando quantos docinhos:
A2: 12
Pesquisadora: Então, vocês vão somar como?
A4: Eu ia botar ***10 saquinhos e ia botando de 12 em 12 em cada*** saco.
[...]
A1: A gente ***contou todos os docinhos***.
Pesquisadora: Vocês também fizeram de multiplicar, me explicar como fizeram
A1: Eu coloquei a continha ***12 vezes 10***.
Pesquisadora: Como você resolveu:
A1: Multipliquei ***2 vezes 10*** aí deu 20 depois ***multipliquei 1 vezes 10 ai os 2*** que ficou aqui (apontando para o algoritmo) e ***somei e deu 12***

Imagem 5: Protocolo de resolução item 1 – Tarefa 1– Grupo 4.



Justificativa do grupo 4: Gente fez os pacotes colocamos as bolinhas (para) representar os doces, gente contou os doces que tinha 12 em cada e deu ao todo 120.

Fonte: A pesquisadora (2024).

O grupo estava mais preocupados em saber o tipo de operação utilizar do que compreender a ideia da situação: “A gente não sabe se é de mais ou de menos ou de dividir” (A3). Essa é uma atitude que pode estar associada ao modo como o ensino das operações vêm sendo conduzidas nas salas de aula, que basta saber qual operação usar e pronto. Então, o *feedback* da pesquisadora ajudou-os a refletir sobre o que a situação solicitava, pois “o *feedback* é determinante para activar os processos cognitivos e metacognitivos dos alunos,” (Fernandes, 2008, p. 356); assim, os alunos utilizaram a representação pictórica e a contagem dos elementos como estratégia de resolução com resposta esperada, além do algoritmo da multiplicação por meio da decomposição do número 12 (10 + 2) “Multipliquei 2 vezes 10 aí deu 20 depois multipliquei 1 vezes 10 aí os 2 que ficou aqui (apontando para o algoritmo) e somei e deu 12” (A1). Ainda não compreenderam totalmente a formação dos números ou o processo de reagrupamento, uma vez que a dezena do número 12 foi considerada com uma unidade.

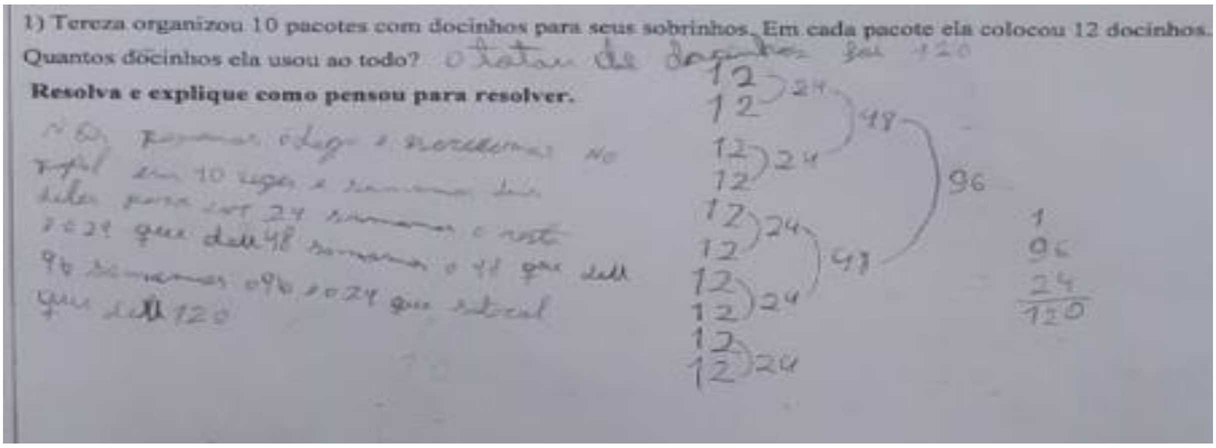
6.1.5 Item 1 – Grupo G5

1) Tereza organizou 10 pacotes com docinhos para seus sobrinhos. Em cada pacote ela colocou 12 docinhos. Quantos docinhos ela usou ao todo? **Resolva e explique como pensou para resolver.**

O grupo reconheceu a ideia da multiplicação contida na situação e utilizou a adição repetida para determinar o resultado.

Pesquisadora: Como vocês estão pensando para responder?
A1: Comecei a perceber que são 10 pacotes pros sobrinhos dela, só que teria mais sentido pra mim se tivesse quantos sobrinhos ela tem, porque eu saberia como dividir os pacotes com os sobrinhos dela.
Pesquisadora: Mas continua a leitura.
A1: Em cada pacote ela colocou 12 docinhos. Quantos docinhos ela usou ao todo?
[...]
A1: A gente pegou aqui ***12 e colocou aqui 10 vezes*** ele, escreveu ele ***10 vezes*** no papel e pegou somou e deu 24 (apontando para os dois primeiros 12 que eles anotaram) e pegou os outros e deu 24. Depois ***somou os 24*** e deu 48 e aí a gente pegou e deixou um aqui (apontando pro 24 sem par) e somou os dois 48 aí 96 e pegou o 24 (que estava sozinho) e deu 120.

Imagem 6: Protocolo de resolução item 1 – Tarefa 1 – Grupo 5.



Justificativa do grupo 5: Nós pegamos o doze e escrevemos no papel em 10 vezes e somamos dois deles para dar 24, somamos o resto e o 24 que deu 48, somamos o 48 que deu 96, somamos o 96 e o 24 que sobrou que deu 120.

Fonte: A pesquisadora (2024).

Percebe-se, no início dos diálogos, que o grupo não compreendia a situação por falta de leitura: “só que teria mais sentido pra mim se tivesse quantos sobrinhos ela tem, porque eu saberia como dividir os pacotes com os sobrinhos dela.” (A1). Após a leitura mais atenta, reconheceram a ideia da multiplicação solicitada na situação, de modo implícito, “10 vezes e somamos” e utilizaram a adição repetida para determinar o resultado. Dessa forma, fizeram do multiplicando (12) uma medida, e do multiplicador um simples operador sem dimensão (Vergnaud. 2009)

No algoritmo da adição explicitado na resolução é possível identificar o reconhecimento das estruturas do Sistema de Numeração Decimal, visto que fizeram o processo de reagrupamento com a troca das unidades para a dezena (6 unidades com 4 unidades resultaram em 1 dezena) e adicionou as outras dezenas (9 e 2). Esse conhecimento é importante para a execução com sucesso do algoritmo da multiplicação, pois “Se as crianças ainda têm dificuldades com a reserva da adição, podem-se esperar fracassos piores com a multiplicação”. (Vergnaud, 2009, p. 185)

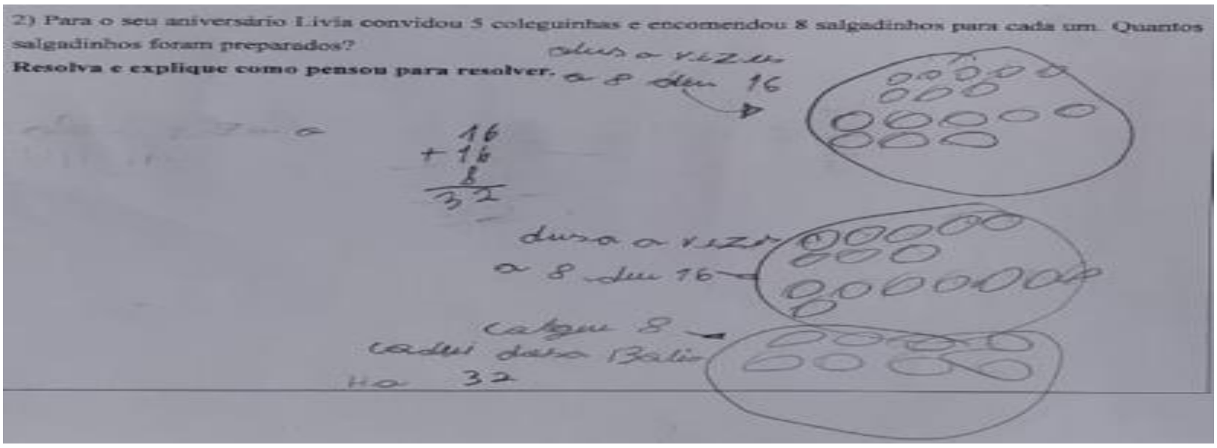
6.1.6 Item 2 – Grupo G1

2) Para o seu aniversário Livia convidou 5 coleguinhas e encomendou 8 salgadinhos para cada um. Quantos salgadinhos foram preparados? **Resolva e explique como pensou para resolver.**

O procedimento de compreensão do item 2 foi mais fácil para o grupo. Tal como observado nos diálogos a seguir:

Pesquisadora: O que você fez?
A4: Bolinhas com ***8 que deu 16, aí coloquei mais 8*** aqui (apontando para o segundo círculo) que deu...
A2: 16
A1: ***mais 16***
A4: ***mais 16***, aí depois que deu mais 8, aí ***16 mais 16 mais é 32***.

Imagem 7: Protocolo de resolução item 2 – Tarefa 1 – Grupo 1.



Justificativa do grupo 1: ***Duas vezes o 8 deu 16***. ***Duas vezes o 8 deu 16***. Coloquei 8. Contei todas bolinhas. 32.

Fonte: A pesquisadora (2024).

É possível observar que o grupo reconheceu com mais facilidade que a situação solicitava a ideia de adição de parcelas iguais, mesmo sendo esse processo por meio da contagem de elementos nos grupos que usavam a representação pictórica e o processo de contagem como caminho para a resolução – mesmo sem encontrar o resultado correto (40). É notável que o grupo não adicionou a última parcela ao resultado parcial (32) das duas primeiras parcelas, mas conseguiram estabelecer, de modo implícito, a relação com a multiplicação: “Duas vezes o 8 deu 16”.

6.1.7 Item 2 – Grupo G2

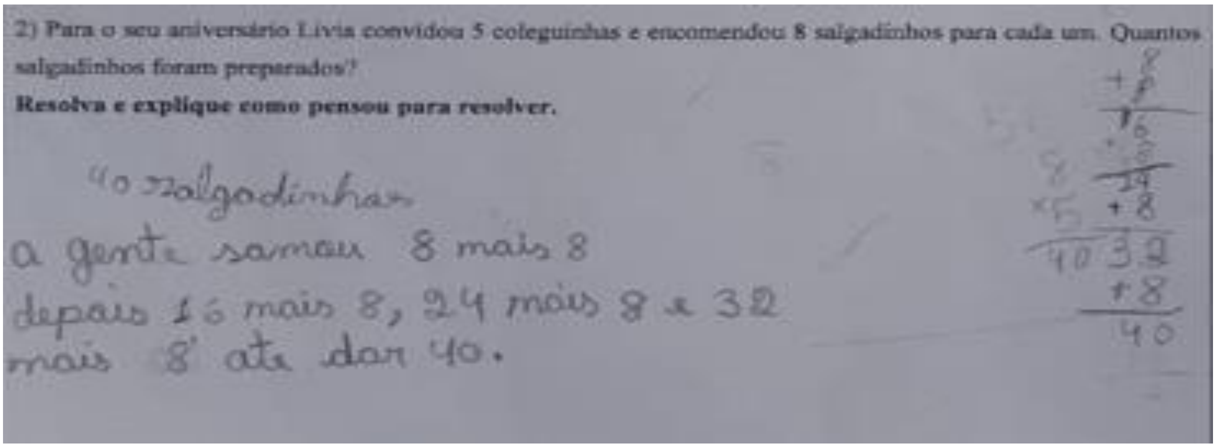
2) Para o seu aniversário Livia convidou 5 coleguinhas e encomendou 8 salgadinhos para cada um. Quantos salgadinhos foram preparados?

Resolva e explique como pensou para resolver.

O grupo demostrou compreensão da situação:

Pesquisadora: Como vocês fizeram?
A1: A gente fez ***8 vezes 5 é deu 40***.
Pesquisadora: Mas como vocês fizeram para encontrar o 40:
A3: Nós “usou***” 8 mais 8 igual a 16 indo com 8 mais 8***. [..]
Pesquisadora: E quantas vezes vocês usaram o 8?
A3: 5

Imagem 8: Protocolo de resolução item 2 – Tarefa 1 – Grupo 2.


2) Para o seu aniversário Livia convidou 5 coleguinhas e encomendou 8 salgadinhos para cada um. Quantos salgadinhos foram preparados?
Resolva e explique como pensou para resolver.

40 salgadinhas
a gente samou 8 mais 8
depois 16 mais 8, 24 mais 8 e 32
mais 8 até dar 40.

Justificativa do grupo 2: 40 salgadinhos. A gente ***somou 8 mais 8*** depois ***16 mais 8***, ***24 mais 8*** e ***32 mais 8*** até dar 40.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

Os membros do grupo compreenderam o que solicitava a situação. Isso pode ser resultado da faze inicial da tarefa (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006); assim, não demostraram dificuldade em utilizar a estratégia da adição repetida. Já que fizeram do multiplicando uma medida e do multiplicador um operador sem dimensão (Vergnaud, 2009), sendo essa a estratégia mais comum em sala (Bigode; Frant, 2011)[19]. Ao observar no uso dos dois algoritmos, um de multiplicação e o outro de adição, é possível deduzir que eles relacionaram a adição de parcelas iguais com a multiplicação, sendo esta uma filiação dessas operações. (Vergnaud, 2009)

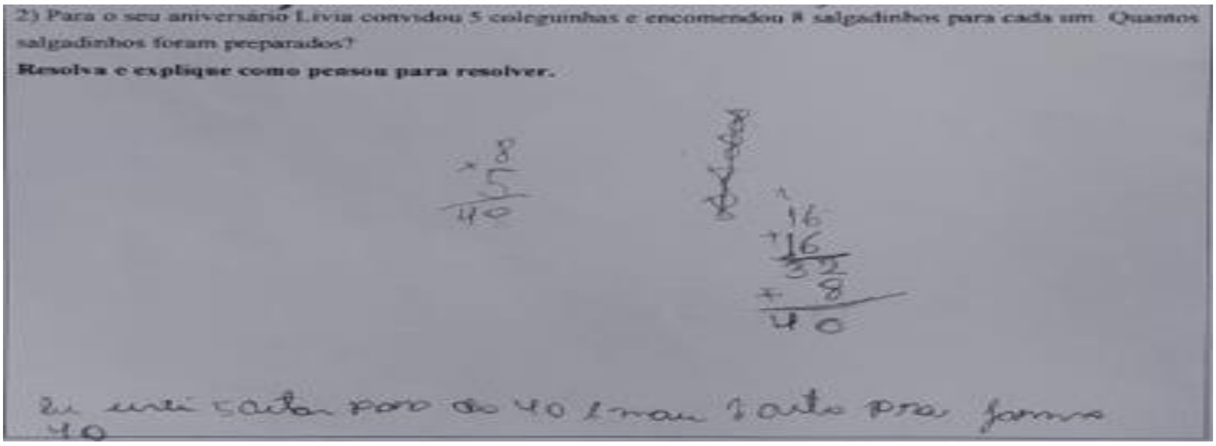
6.1.8 Item 2 – Grupo G3

2) Para o seu aniversário Livia convidou 5 coleguinhas e encomendou 8 salgadinhos para cada um. Quantos salgadinhos foram preparados? **Resolva e explique como pensou para resolver.**

Os alunos compreenderam a ideia que a situação pedia e tentaram o uso do algoritmo de multiplicação e adição reiterada para verificar resultado. Vejamos:

A3: Eu pensei... Porque como as cinco colegas que a Livia convidou para o aniversário dela, eu fiz ***5 vezes 8*** porque cada uma delas ia receber 8 salgadinhos e meu resultado deu 40.
Pesquisadora: Como você pensou no 5 vezes 8 para encontrar o 40?
A3: Na minha mente eu fiz ***8 mais 8 que deu 16***, aí ***eu fiz mais 16 que é dos 4 oito*** que foi, que deu (o aluno ficou pensando) e sobrou 1 oito... deu 34.
[..]
Pesquisadora: O que vocês estão fazendo agora?
A3: ***16 mais 16*** que é pra dá...pra ver se estou certo que é pra dá o mesmo resultado daqui (apontado para o algoritmo de multiplicação) pra ver se "tá" certo.
Pesquisadora: Você já fez quantos 8?
A3: 4, só falta um pra dá o resultado certo.

Imagem 9: Protocolo de resolução item 2 – Tarefa 1 – Grupo 3.



Justificativa do grupo 3: *Eu contei 5 oito para dá 40* e mais 1 oito para formar 40.

Fonte: A pesquisadora (2024).

[19] Não fizeram parte do aporte teórico desta pesquisa, mas devido os resultados da pesquisa foram citados.

Os integrantes do grupo entenderam a ideia envolvida na situação e fizeram o uso da técnica algorítmica de multiplicação como estratégia de resolução e a adição de parcelas iguais para verificar o resultado do fato básico da multiplicação. É possível inferir que a adição repetida ainda é a estratégia mais segura para eles e por ser a mais difundida nos contextos de sala de aula (Bigode; Frant, 2011) e por estar no processo de aquisição do pensamento multiplicativo. Na última parcela da adição, os alunos fizeram o processo de reagrupamento correto: conhecimento necessário para a aquisição das regras operatórias da multiplicação. (Vergnaud, 2009)

Os alunos ainda estavam tímidos em socializarem suas conjecturas, por vezes, apreciam receosos por não estarem seguros quantos aos seus procedimentos estarem certos, sendo que mais socializou com a pesquisadora foi o aluno A3. Esse comportamento pode estar vinculado à maneira como o ensino está sendo desenvolvido nos contextos escolares, em que interação entre aluno e professor ainda é tímida, diferentemente do que acontece na perspectiva da avaliação formativa em que “a natureza da interacção e da comunicação entre professores e alunos é central porque os professores têm que estabelecer pontes entre o que se considera ser importante aprender e o complexo mundo dos alunos” (Fernandes, 2008, p. 356)

Outro fator que chama a atenção, mesmo não sendo o foco principal desse trabalho, é a dificuldade do trabalho em equipe. Tal como pode ser observado nos diálogos e na justificativa no protocolo de resolução por meio do uso da primeira pessoa do singular: “Eu contei”.

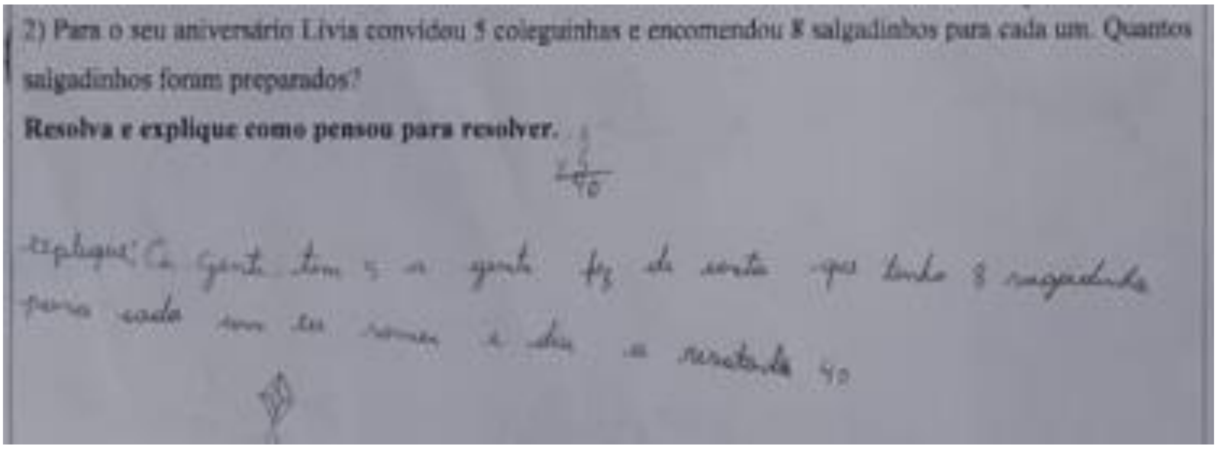
6.1.9 Item 2 – Grupo G4

2) Para o seu aniversário Livia convidou 5 coleguinhas e encomendou 8 salgadinhos para cada um. Quantos salgadinhos foram preparados? **Resolva e explique como pensou para resolver.**

O grupo estabeleceu a relação entre adição e multiplicação ao usar a estratégia prática com a quantidade de membros do grupo, observe:

A1: A Livia convidou 5 colegas dela, aí estou pensando como a gente tem cinco (se referindo ao grupo) aí finge que tem oito salgadinho aqui (dedos das mãos), aí estou ***somando 8 mais 8*** com cada um dos colegas e aí deu 32. É como se cada um tivesse 8, eu oito, ela oito, ele oito.
A4: É 40.
A1: Tem certeza?
A4: 40 tenho certeza, ***8 mais 8 mais 8 mais 8 mais 8*** (apontando para os membros do grupo).

Imagem 10: Protocolo de resolução item 2 – Tarefa 1 – Grupo 4.


2) Para o seu aniversário Livia convidou 5 coleguinhas e encomendou 8 salgadinhos para cada um. Quantos salgadinhos foram preparados?

Resolva e explique como pensou para resolver.

Justificativa do grupo 4: A gente tem 5 a gente fez de conta que tinha 8 salgadinhos para cada um, eu somei e deu o resultado 40.

Fonte: A pesquisadora (2024).

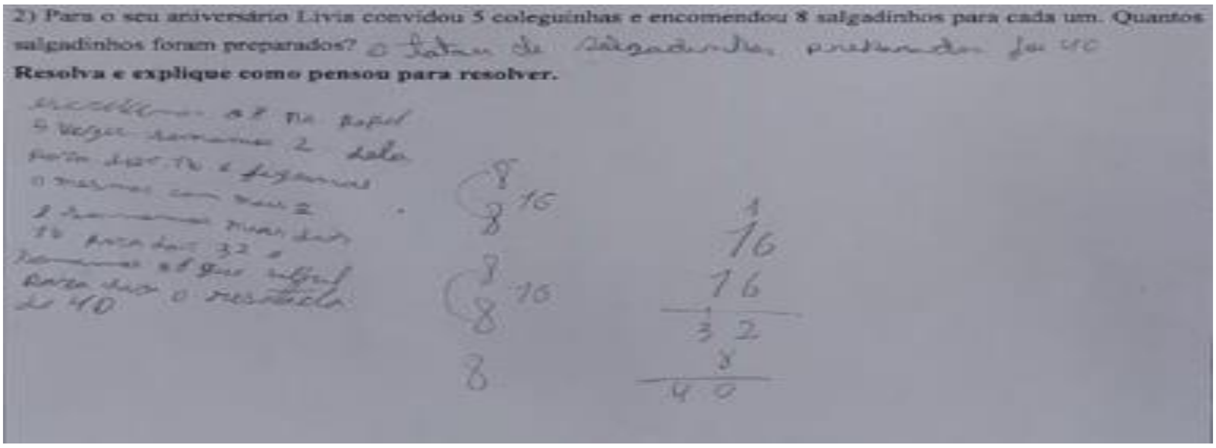
O grupo pautou a resolução ao fazer a comparação da situação dada com a quantidade de integrantes do grupo, “É como se cada um tivesse 8, eu oito, ela oito, ele oito” (A1), propuseram uma conjectura em que cada membro do grupo ganharia 8 e validou essa ideia com a comparação da adição repetida. Durante a realização de uma tarefa é importante dar aos alunos “oportunidades para elaborarem as suas respostas e para partilharem o que e como compreenderam.” (Fernandes, 2008, p. 356) Para tanto “o professor precisa estar atento a todo esse processo de formulação e teste de conjecturas, para garantir que os alunos vão evoluindo.” (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006, p. 36) Com isso, no protocolo de resolução, vemos que o grupo utilizou o algoritmo de multiplicação, além de fazer a relação entre a adição e a multiplicação.

6.1.10 Item 2 – Grupo G5

2) Para o seu aniversário Livia convidou 5 coleguinhas e encomendou 8 salgadinhos para cada um. Quantos salgadinhos foram preparados?
Resolva e explique como pensou para resolver.

A1: A gente dividiu o 8 aqui (apontando para os cinco 8 escritos) e foi ***somando 8 mais 8 dezesseis, e aqui mais dezesseis*** (os outros dois 8) pegou o resultado daqui (os dois 16) e ***somou 16 mais 16 e deu o resultado de 32 e somou mais 8 que sobrou e vimos que é 40*** salgados.

Imagem 11: Protocolo de resolução item 2 – Tarefa 1 – Grupo 5.



Justificativa do grupo 5: Escrevemos o 8 no papel 5 vezes somamos 2 deles para dar 16 e fizemos o mesmo com mais 2 e somamos mais dois 16 para dar 32 e somamos o 8 que sobrou para dar o resultado de 40.

Fonte: A pesquisadora (2024).

O grupo reconheceu os dados e a ideia da situação e seguiu o procedimento de adição de parcelas iguais, o que fez do multiplicando (8) uma medida e multiplicando (5) um operador sem dimensão (Vergnaud, 2009). No algoritmo da adição, observamos o reconhecimento do Sistema de Numeração decimal e o procedimento de reagrupamento ao realizarem a troca das unidades (6 + 6), visto que colocaram a dezena (10+2) na ordem das dezenas, da mesma forma com 8 + 2 = 10 na ordem das dezenas. Esse reconhecimento é importantíssimo para operar em multiplicação com reserva, pois “se as crianças ainda têm dificuldades com a reserva da adição, podem-se esperar fracassos piores com a multiplicação.” (Vergnaud, 2009, p. 185)

6.1.11 Fechamento e considerações sobre a tarefa 1

Notamos pelos diálogos e pelas justificativas nos protocolos de resolução que os grupos evidenciaram estratégias diferentes para resolver a tarefa, mesmo sendo uma de cunho fechado e os meios de resolução variados. É possível observar, em alguns diálogos, que é característica da cultural escolar o pensamento de que para resolver uma situação problema basta saber que operação realizar e efetuá-la. Possivelmente, esse pensamento também faz parte do universo dos profissionais docentes.

As manifestações apresentadas pelos alunos demonstraram que estão em processo de aquisição do pensamento multiplicativo, especialmente da multiplicação, pois conseguiram associar a adição reiterada ou o processo de contagem com a multiplicação. Quanto às representações nos processos de resolução, a pictórica prevalece sobre a numérica ou há a associação das duas representações. Um grupo relatou: “A gente só sabe fazer em desenho”. Logo, na A1G4 ficou evidente que para a comunicação matemática[20] os alunos podem utilizar diferentes estratégias, além de ser importante o trabalho com o algoritmo e com o posicional. Vale ressaltar que todas as formas de comunicação dos resultados devem ser encorajadas.

O grupo 1 se equivocou nas respostas dos dois itens da tarefa, mesmo ao receber alguns *feedbacks* da pesquisadora, que contribuíram para refletir sobre o caminho em que estavam, como: “Você fez 10 vezes 12 e deu 212. Vocês acham que está certo?”. Isso ainda não foi suficiente para que se determinassem a resposta correta, porém no item 2 percebemos que houve reconhecimento da relação da adição com a multiplicação. Os demais grupos, após receberem *feedbacks,* reorganizaram os raciocínios e determiram o resultado esperado.

Com a realização dessa tarefa, foi possível observar a necessidade de intensificar o trabalho em grupo, pois eles queriam dividir entre si a realização da tarefa e em outros momentos da tarefa começou a formação de liderança nos grupos. Alguns alunos tomavam para si a responsabilidade com a tarefa, pois fizeram o grupo “centrar-se em certas ideias”. (Ponte; Brocardo; Oliveira 2006, p. 30)

O momento da comunicação oral coletiva dos grupos, anexo B, foi uma fase nova para a maioria, então, os representantes de cada grupo comunicaram seus resultados para os demais. Momento em que a pesquisadora teve de fazer algumas intervenções, uma vez que para eles bastavam dizer o resultado e a operação que haviam realizado, com os apontamentos foram detalhados os percursos percorridos que os levaram ao resultado.

Ao final da tarefa os alunos preencheram a ficha de autoavaliação, apêndice I. De acordo com as informações do quadro 7, quase 54% dos alunos disseram que conseguiram resolver com facilidade.

Quadro 7: Autoavaliação da Tarefa 1.

Quantidade de alunos participantes	**Consegui facilmente**	**Consegui com dificuldades**	**Ainda não consegui**
24 alunos	13 alunos	10 alunos	01 aluno

Fonte: Pesquisadora, 2024.

[20] Ponte (2005).

De acordo com as manifestações dos alunos em sala, percebemos que a maioria deles conseguiu com dificuldades e precisou de alguns apontamentos da pesquisadora para traçarem caminhos que os conduzissem a resolução. Esse resultado revela que, possivelmente, é cultural “dizer” que aprendeu ou que não teve dificuldade; uma vez que não se admite o erro com a possibilidade para aprender mais. Essa concepção distancia da perspectiva da avaliação formativa, porque o erro “assume um sentido basilar para as tomadas de decisões do professor a fim de regular o ensino que faz em função do alcance da melhoria das aprendizagens.” (Borralho; Lucena; Brito, 2015, p. 19)

6.2 Tarefa 2: Situações de comparação entre razões com ideia de proporcionalidade (um para muitos)

A tarefa 2 é de natureza exercício ou problema, a depender do grau de conhecimento do aluno, pois exibe os dados e objetivos de forma clara, bem como apresenta uma estrutura fechada. (Ponte, 2010) ela é considerada um problema de isomorfismo de medidas visto que envolve quatro quantidades e uma dessas é igual a um (Vergnaud, 2009) com ideia de proporcionalidade. E tem por objetivo estabelecer uma relação de proporcionalidade entre as medidas em uma relação fixa de proporção. O que aumenta, assim, uma medida e, consequentemente, a outra também.

Figura 6: Tarefa 2.

1) Com um metro de tecido uma costureira faz 3 fantasias. Quantos metros ela precisará para fazer 12 fantasias? **Resolva e explique como pensou para resolver**.
2) Para fazer um bolo, umas das instruções é: para cada 2 xícaras de açúcar adicione 5 xícaras de farinha. Quantas xícaras de farinhas serão necessárias para fazer 3 bolos? **Como pensou para resolver.**

Fonte: A pesquisadora, 2023.

A realização da tarefa aconteceu no dia (21) vinte e um do mês de fevereiro, no segundo encontro, das 7:00h às 8h40min com (28) vinte e oito alunos. Inicialmente, foi apresentado o objetivo da tarefa. Em seguida, os alunos foram organizados em grupos, junto aos mesmos componentes da tarefa anterior. Foram inseridos nos grupos alunos que não estavam presentes no primeiro encontro, o que resultou nesta organização grupal: três (3) grupos com seis (6) alunos em cada e dois (2) grupo com cinco (5) alunos. Desta feita, foi entregue uma cópia da tarefa e começaram a exploração da tarefa e a resolução dela.

Vejamos a seguir como cada grupo avançou com a resolução.

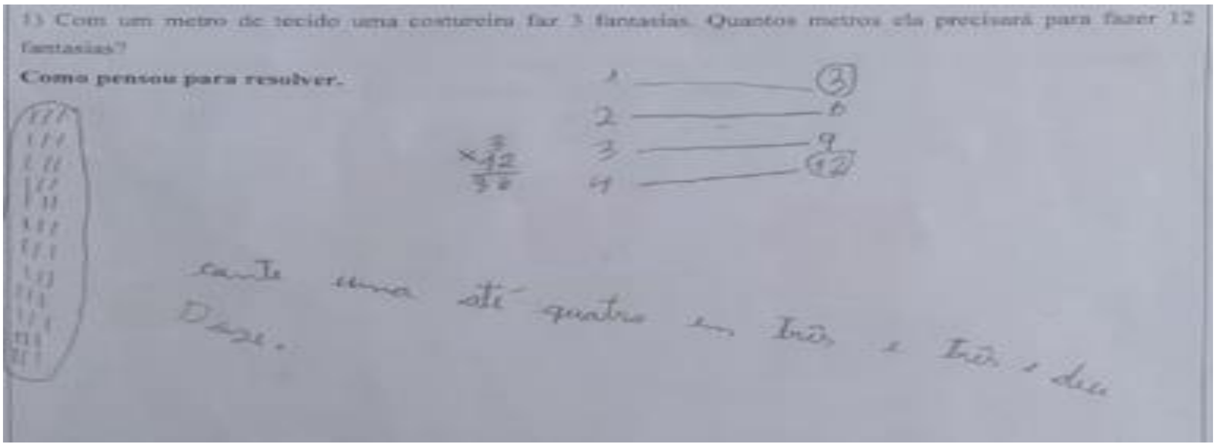
6.2.1 Item 1 – Grupo G1

1) Com um metro de tecido uma costureira faz 3 fantasias. Quantos metros ela precisará para fazer 12 fantasias? **Resolva e explique como pensou para resolver**.

O grupo não compreendeu o que a situação solicitava, por isso encontraram dois resultados. Vejamos:

A2: Fazendo os palitinhos.
Pesquisadora: E como vocês encontraram *o **3 vezes 12**?*
A2: Está aqui (apontando para enunciado da situação).
Pesquisadora: Humm, leiam novamente a questão.
[...]
Pesquisadora: Me explica o esquema que vocês fizeram.
A6: Fiz de ***3 em 3*** até 12.

Imagem 12: Protocolo de resolução item 1 – Tarefa 2 – Grupo 1.



Justificativa do grupo 1: Contei uma até quatro em três e três e deu doze.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

Os membros do grupo sentiram dificuldade em reconhecer os dados e o sentido da situação para a resolução, podem ter ocorrido falhas no momento do arranque da aula (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006); ou ainda esse tipo de tarefa ainda é proposto com pouca frequência nas salas de aula. Essa dificuldade pôde ser confirmada quando utilizaram o algoritmo de multiplicação 3 x 12 ao usar apenas os dados numéricos contidos no enunciado, sem compreender bem a situação. E, assim, encontram o 36 por meio da adição, como pode ser observado a representação por "palitinhos". Com os momentos de discussão, por meio do *feedback* produzido pela pesquisadora resolvem refazer a estratégia, quando determinaram o resultado correto por meio de um esquema de relação entre as quantidades: "Fiz de ***3 em 3*** até 12". (A6), esse esquema é denominado por Vergnaud (2009) como tabela da correspondência.

Segundo Vergnau, essa estratégia "está centrada na noção operador-escalar (sem dimensão), a qual permite passar de uma linha à outra em uma mesma categoria de medidas." (2009, p. 247). E passa de 1 metro de tecido para dois, três e 4 metros de tecido ao multiplicar 1 por 2, por 3 e por 4. Da mesma forma que passa de 3 fantasias para 6, 9 e 12 se multiplicar o 3 por 2, 3 e 4. Porém, ao analisar o procedimento do grupo, observamos que eles utilizaram o pensamento aditivo "Contei uma (um) até quatro em três e três e deu doze", entretanto, é possível verificar a aplicação da proporcionalidade entre as quantidades (metro x fantasia).

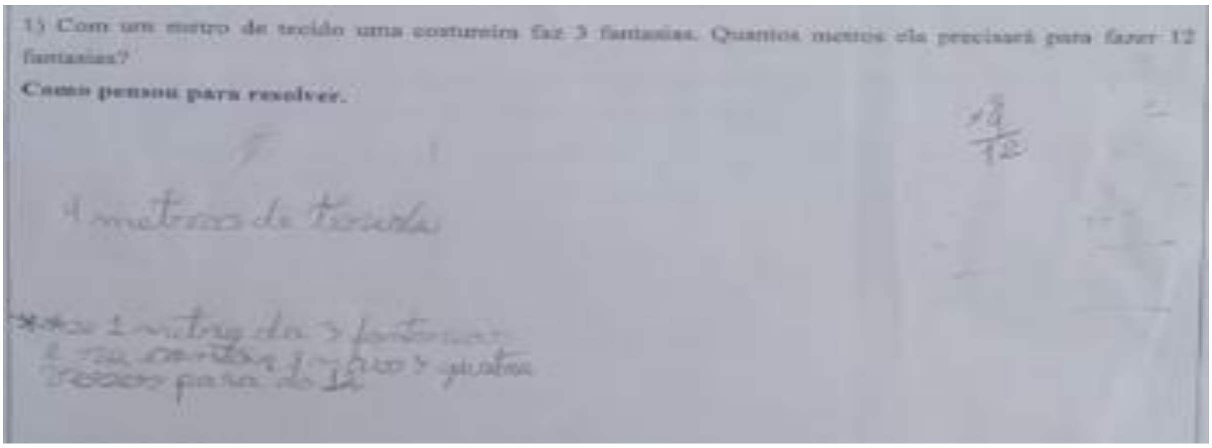
6.2.2 Item 1 – Grupo G2

1) Com um metro de tecido uma costureira faz 3 fantasias. Quantos metros ela precisará para fazer 12 fantasias? **Resolva e explique como pensou para resolver**.

O grupo conseguiu estabelecer uma relação de proporcionalidade entre as medidas (metros de tecidos e fantasias), por meio do pensamento aditivo. Vejamos:

A3: Nós "está" ***indo de 3 mais 3*** "tá indo".
Pesquisadora: Por que está indo de 3 em 3?
A2: Não. está errado.
Pesquisadora: Por que está errado?
A2: Vou pensar.
Pesquisadora: Então, discutem em grupo e vejam como podem responder.
[...]
A2: ***1 metro dá 3, 2 metros dá 6, 3 metros dá 9 e 4 metros dá 12***.
Pesquisadora: Então, vocês foram somando a quantidade de fantasias
A2: Sim.

Imagem 13: Protocolo de resolução item 1 – Tarefa 2 – Grupo 2.



Justificativa do grupo 2: Se 1 metro dá 3 fantasias e só contar 3 mais 3 quatro vezes para dá 12.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

Ao analisar o diálogo e a justificativa do grupo, percebe-se que os alunos conseguiram compreender os dados da situação que os levaram a resultado correto. Isso porque estabeleceram uma relação de proporcionalidade, entre as medidas em uma associação fixa de 3 fantasias (3 x 4).

Notamos, pelos diálogos, que a "interacção e da comunicação entre professores e alunos é absolutamente central porque os professores têm de estabelecer pontes entre o que se considera ser importante aprender e o complexo mundo dos alunos" (Fernandes, 2008, p. 356), pois só a partir da comunicação entre a pesquisadora e os alunos que estes sentiram confiança para expressarem a conjectura. Bem como apresentaram o modo como a validaram "1 metro dá 3, 2 metros dá 6, 3 metros dá 9 e 4 metros dá 12." (A2) ao utilizar o pensamento aditivo.

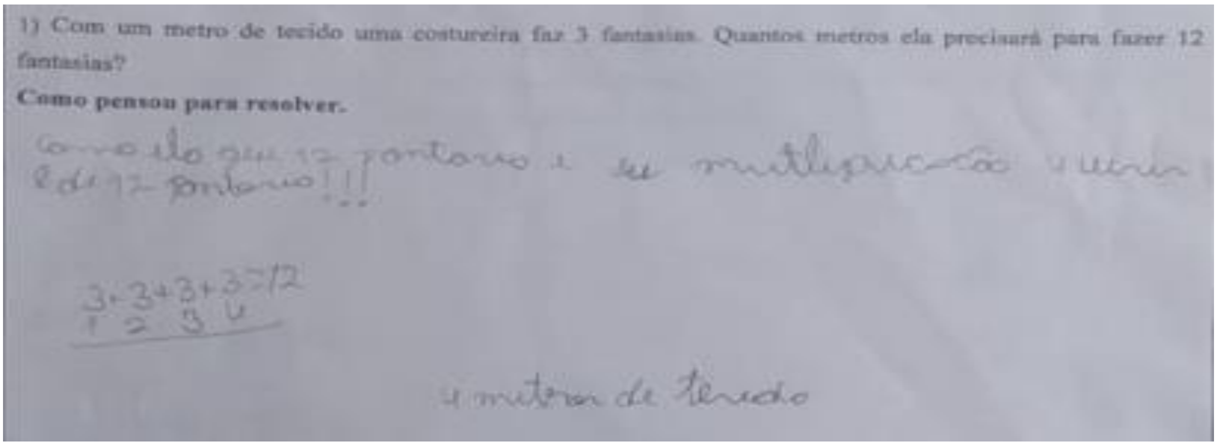
6.2.3 Item 1 – Grupo G3

1) Com um metro de tecido uma costureira faz 3 fantasias. Quantos metros ela precisará para fazer 12 fantasias? **Resolva e explique como pensou para resolver**.

Os membros do grupo reconheceram a relação fixa (3) e determinaram a resposta correta por meio da adição repetida. Vejamos:

Pesquisadora: Como vocês pensaram para responder?
A2: Como ela, tia, é 12 fantasias **eu *multipliquei 4 vezes de 3 para ver se ia dá certo e deu, porque 3 mais 3 deu 6 e outro 3 mais 3 deu outro 6 e 6 mais 6 12*.** Aí deu 4, 4 metros de tecidos que ela precisava pra fazer 12 fantasias.

Imagem 14: Protocolo de resolução item 1 – Tarefa 2 – Grupo 3.


1) Com um metro de tecido uma costureira faz 3 fantasias. Quantos metros ela precisará para fazer 12 fantasias?

Como pensou para resolver.

3+3+3+3=12
1 2 3 4

4 metros de tecido

Justificativa do grupo 3: Como ela quer 12 fantasias e eu multipliquei 4 três e deu 12 fantasias.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

Por mais que os membros do grupo explicitaram que fizeram por meio da multiplicação, “multipliquei 4 vezes de 3”, vemos no protocolo de resolução um esquema que estabelece uma relação de quantidade de metro de tecidos com a quantidade de fantasias. Por uma quantidade fixa (3), esse esquema horizontal nos remete ao quadro da correspondência proposto por Vergnaud (2009). Porém aponta para o uso a adição repetida e não para o uso de operador-escalar (sem dimensão) – mesmo o operador-escalar sendo indicando verbalmente pela palavra “vezes”.

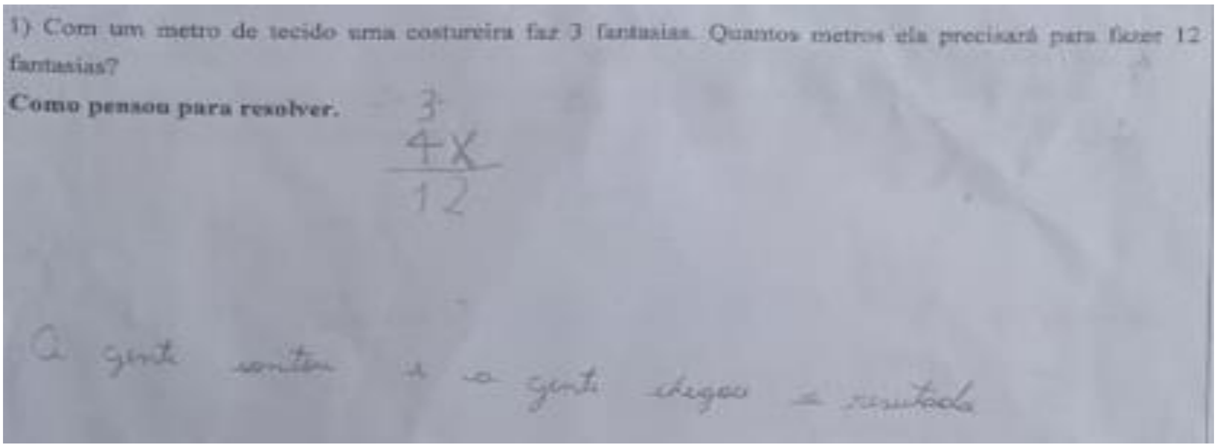
6.2.4 Item 1 – Grupo G4

1) Com um metro de tecido uma costureira faz 3 fantasias. Quantos metros ela precisará para fazer 12 fantasias? **Resolva e explique como pensou para resolver**.

O grupo compreendeu a sentido da situação identificando a relação fixa (3) e estabeleceu o resultado da situação. Vejamos:

A5: A gente contou nos dedos.
Pesquisadora: E a multiplicação 3 vezes 4 onde vocês encontraram esse 4? (apontando para o algoritmo no protocolo de resolução).
A2: É com ele. Porque precisa de 4 tecido.
Pesquisadora: Mas aqui no “problema” está escrito isso?
A4: Não. Mas com 4 faz a formação certa.

Imagem 15: Protocolo de resolução item 1 – Tarefa 2 – Grupo 4.



Justificativa do grupo 4: A gente contou e a gente chegou o resultado.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

No protocolo de resolução, os alunos não souberam explicar os passos que os levaram à resolução correta da situação, porém no diálogo é possível observar que o esquema utilizado por eles foi o corporal, "A gente contou nos dedos." (A5). Isso estabelece uma relação fixa de 3, por meio do processo de contagem.

O esquema corporal é uma forma de comunicar matematicamente as conjecturas ou os resultados, quando não conseguem uma formulação explícita verbalizada ou visual da conjectura, então, recorrem a "uma linguagem gestual que completa aquilo que não é dito" (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006, p. 33). Por isso dizemos que essa situação, solucionada com procedimentos "não canônicos", "revelam, às vezes, [...], uma boa compreensão da situação e, desse modo, preparam a descoberta de soluções canônicas." (Vergnaud, 2009, p. 211-212).

O diálogo mostra que a comunicação em sala de aula deve "estabelecer pontes entre o que se considera ser importante aprender e o complexo mundo dos alunos (o que eles são, o que sabem, como pensam, como aprendem, o que sentem, como sentem, etc.) (Fernandes, 2008, p. 356). Portanto, podemos observar o movimento de pensamento do grupo até a validação: "Porque precisa de 4 tecido."

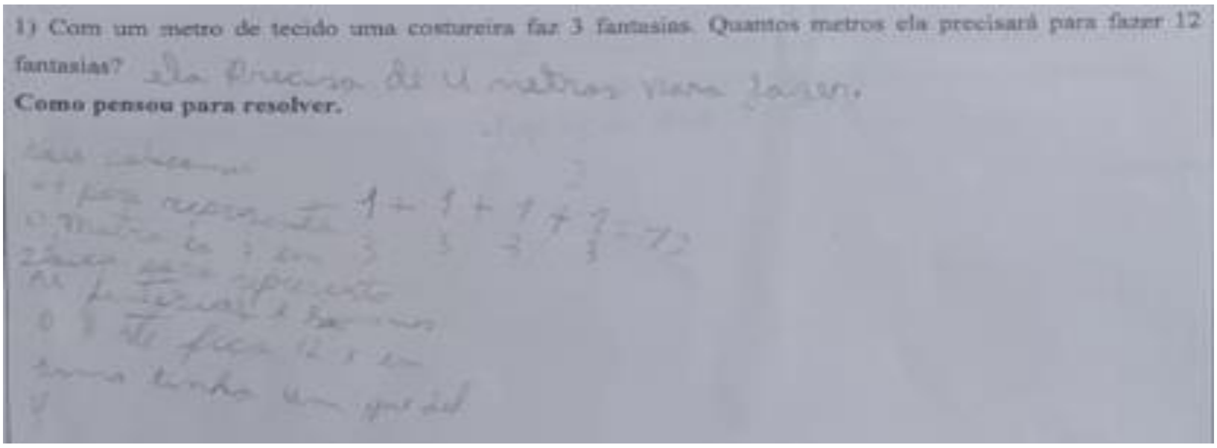
6.2.5 Item 1 – Grupo G5

1) Com um metro de tecido uma costureira faz 3 fantasias. Quantos metros ela precisará para fazer 12 fantasias? **Resolva e explique como pensou para resolver**.

Os alunos conseguiram compreender o sentido da situação e fizeram a correspondência da quantidade de tecido com a quantidade de fantasias, conforme informações abaixo:

A1: A gente pensou assim: ***Se 1 metro a gente pode colocar o metro aqui*** (apontando para esquema do protocolo de resolução) e o ***3 embaixo quando aqui embaixo dá 12 e o tanto de metro aqui em cima.***
Pesquisadora: Então, vocês foram relacionando 1 metro faz 3 mais 1 metro faz mais 3, foi isso?
A1: É. A gente somou aqui embaixo dá 12.
Pesquisadora: O 3 está representando metro ou fantasias?
A1: Fantasias. ***A gente pegou o 1 para representar o metro e o 3 para representar as fantasias e foi somando.***

Imagem 16: Protocolo de resolução item 1 – Tarefa 2 – Grupo 2.


1) Com um metro de tecido uma costureira faz 3 fantasias. Quantos metros ela precisará para fazer 12 fantasias?
Como pensou para resolver.

Justificativa do grupo 5: Nós colocamos o 1 para representar o metro e o 3 embaixo para representar as fantasias e somamos o 3 até ficar 12 e em cima tinha 1 que deu 4.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

Ao analisar a resolução do grupo, é possível constar que os alunos conseguiram estabelecer a relação de proporcionalidade entre as medidas, e que essas foram repetidas em linhas de correspondência e depois somadas – o que os fez alcançar o resultado esperado. Pelos diálogos, notamos que o grupo fez levantamento de conjecturas e a validação “A gente pensou assim: Se 1 metro a gente pode colocar o metro aqui (apontando para esquema do protocolo de resolução) e o 3 embaixo quando aqui embaixo dá 12 e o tanto de metro aqui em cima.” (A1)

É preciso considerar as várias estratégias utilizadas pelos alunos como caminhos possíveis e frutíferos. Assim, com auxílio do *feedback* da pesquisa – “vocês foram relacionando 1 metro faz 3 mais 1 metro faz mais 3, foi isso?” – foi possível fazê-los refletir sobre sua correspondência. Para Vergnaud: “É indispensável fazer as crianças observarem essa pluralidade de caminhos para evitar que elas imaginem haver uma, e somente uma solução.” (2009, p. 282)

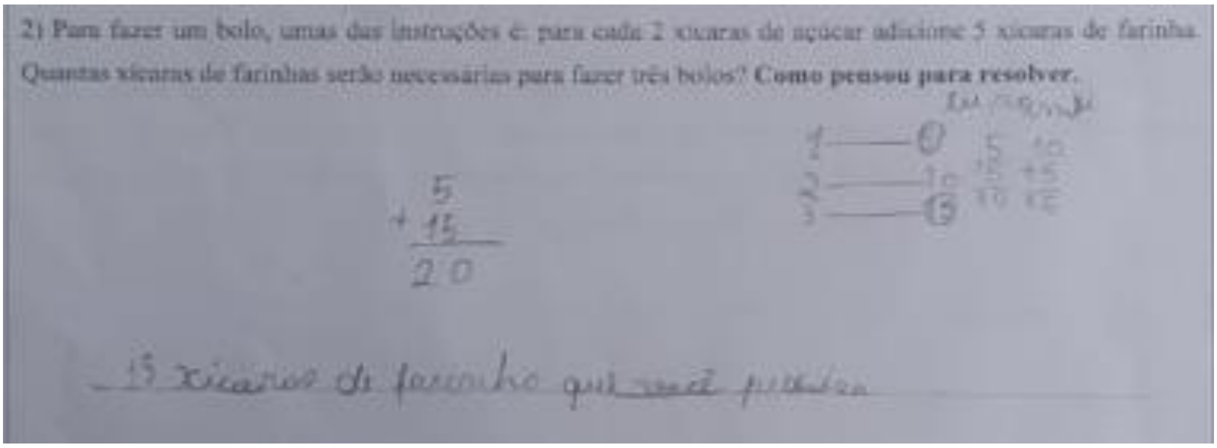
6.2.6 Item 2 – Grupo G1

2) Para fazer um bolo, umas das instruções é: para cada 2 xícaras de açúcar adicione 5 xícaras de farinha. Quantas xícaras de farinhas serão necessárias para fazer 3 bolos? **Como pensou para resolver.**

O grupo conseguiu estabelecer a proporcionalidade entre as medidas, pois usaram a tabela de correspondência:

Pesquisadora: Como vocês pensam pra responder?
A6: ***De 5 em 5***. Porque aqui (apontando pro enunciado) fala cinco xícaras de farinha. E quantas são necessárias pra fazer três bolos?
Pesquisadora: De 5 em 5 quantas vezes?
A6: Três.
[...]
Pesquisadora: Como vocês fizeram para encontrar o 20?
A3: Porque 5 mais 10 dá 10 e 15 mais 5 dá 20.
Pesquisadora: Se é de 5 em 5, por que é 5 mais 10?
A3: Ah!
A6: Tá errado!

Imagem 17: Protocolo de resolução item 2 – Tarefa 2 – Grupo 1.



Justificativa do grupo 1: 15 xícaras de farinha que você precisa

Fonte: A pesquisadora, 2024.

A resolução do grupo mostra que os alunos estavam confusos quanto ao resultado, pois há o algoritmo 5 + 15 = 20. O *feedback* disposto pela pesquisadora foi “determinante para activar os processos cognitivos e metacognitivos dos alunos” (Fernandes, 2008, p. 356). Isso os levou a traçarem outro procedimento de resolução, além de utilizarem a tabela de correspondência, que segundo Vergnaud, (2009) é “A forma mais simples de preencher essas tabelas é, evidentemente, descobrir a regra que permite passar de uma coluna à outra. (p. 285).

Nesse caso, os alunos estabeleceram uma regra dobrar e triplicar as quantidades pela adição. É possível verificar, ainda, pela justificativa, que o resultado definido pelo grupo foi 15 xícaras e que o grupo estabeleceu uma relação de proporcionalidade entre as medidas; isto é, quando uma medida aumenta a outra também aumenta.

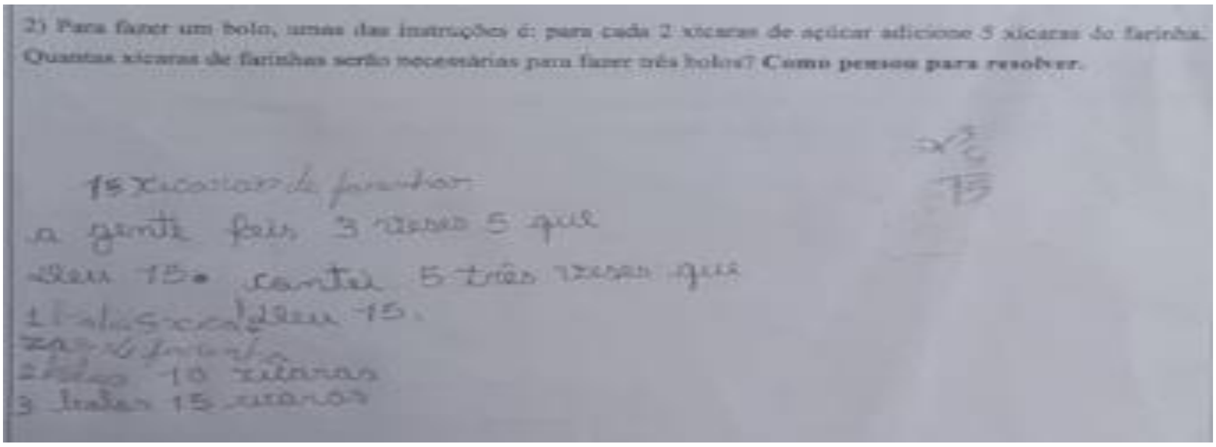
6.2.7 Item 2 – Grupo G2

2) Para fazer um bolo, umas das instruções é: para cada 2 xícaras de açúcar adicione 5 xícaras de farinha. Quantas xícaras de farinhas serão necessárias para fazer três bolos? **Como pensou para resolver.**

O grupo reconheceu o sentido da situação e determinou a proporcionalidade entre os tipos de medidas (bolo x farinha) e reconheceram a multiplicação como caminho possível para a resolução:

Pesquisadora: Como vocês encontraram 15 xícaras de farinha?
A3: ***3 vezes 5.***
Pesquisadora: Mas, como vocês sabem que 3 vezes 5 dá 15?
A3: Nós contamos o ***5 três vezes***.

Imagem 18: Protocolo de resolução item 2 – Tarefa 2 – Grupo 2.


2) Para fazer um bolo, umas das instruções é: para cada 2 xícaras de açúcar adicione 5 xícaras de farinha. Quantas xícaras de farinhas serão necessárias para fazer três bolos? Como pensou para resolver.

Justificativa do grupo 2: A gente fez 3 vezes 5 que deu 15. Contei 5 três vezes que deu 15. 1 bolo 5 xícaras de farinha, 2 bolos 10 xícaras. 3 bolos 15 xícaras.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

É possível observar as diferentes estratégias de resolução pensadas pelos alunos: o algoritmo de multiplicação em que eles denunciam que fizeram por contagem: “Nós contamos o *5 três vezes*.” (A3) e o esquema de correspondência para estabelecer relação, “1 bolo 5 xícaras de farinha, 2 bolos 10 xícaras. 3 bolos 15 xícaras.” (Justificativa) Desse modo, o grupo estabeleceu a relação de proporcionalidade entre as medidas (bolo x farinha) por meio do dobro e triplo, porque utilizaram da adição e relacionaram-na com a multiplicação, característica da filiação entre os Campos Conceituais (Vergnaud, 1993).

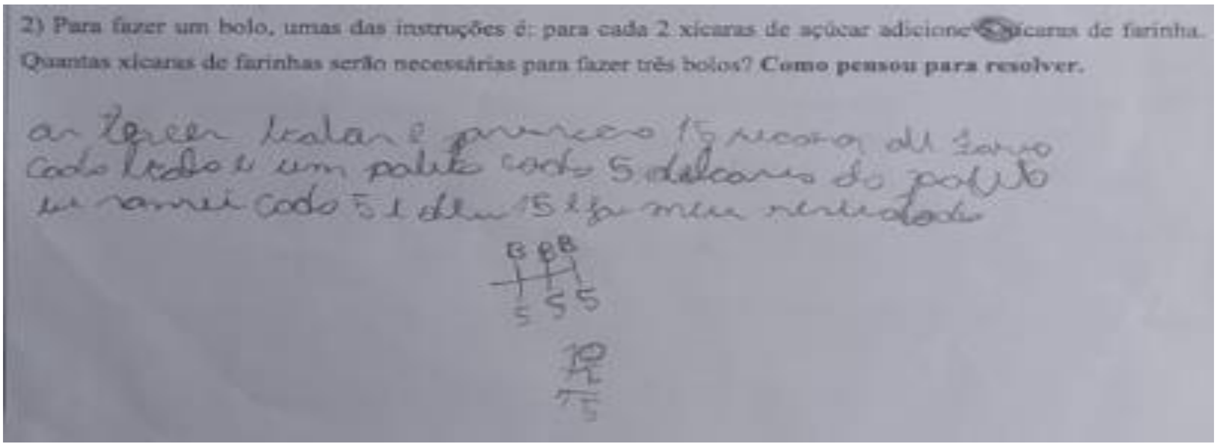
6.2.8 Item 2 – Grupo G3

2) Para fazer um bolo, umas das instruções é: para cada 2 xícaras de açúcar adicione 5 xícaras de farinha. Quantas xícaras de farinhas serão necessárias para fazer três bolos? **Como pensou para resolver.**

O grupo compreendeu a situação e conseguiu determinar o resultado correto ao utilizar a adição sem estabelecer relação com a multiplicação. Conforme abaixo:

A2: Como cada bolo é 5 é só ***fazer 5 mais 5 mais 5 que faz 15.***
Pesquisadora: Por que é 5?
A1: Porque tia. (Aluno A2 interrompeu)
A2: Porque como são (é) ***três bolo e cada bolo precisa de 5 xicaras***, olha aqui (apontando para o esquema escrito no protocolo de resolução) ***5, 10,15.***

Imagem 19: Protocolo de resolução item 2 – Tarefa 2 – Grupo 3.


2) Para fazer um bolo, umas das instruções é: para cada 2 xícaras de açúcar adicione 5 xícaras de farinha. Quantas xícaras de farinhas serão necessárias para fazer três bolos? **Como pensou para resolver.**

Justificativa do grupo 3: Os três bolos são (é) precisos 15 xícaras de farinha, cada bolo é um palito cada 5 debaixo do palito eu somei cada 5 e deu 15 e foi meu resultado.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

Durante a discussão grupal, os alunos foram envolvidos no processo do ensino-aprendizagem, pois se responsabilizaram por seus conhecimentos ao comunicarem suas conjecturas e seus resultados: “Como cada bolo é 5 é só fazer 5 mais 5 mais 5 que faz 15” (A2). Visto que demonstraram a compreensão da situação “como são (é) três bolo e cada bolo precisa de 5 xicaras” (A2), e estabeleceram relação entre a quantidade de bolos e a de xícaras de farinha.

Os alunos utilizaram, como recurso para a solução, o esquema com representação de "palitos" para exercer a ligação entre os bolos e as xícaras de farinha. Esse esquema nos lembra a tabela de correspondência de Vergnaud, (2009) que, segundo o autor, é a maneira mais simples de determiná-la e descobrir a regra que se pode passar de uma linha a outra. No caso da resolução do grupo, a regra foi pela adição reiterada das quantidades de bolo e farinha. Não há indícios que o grupo utilizou a adição e de que fez relação dessa com a multiplicação.

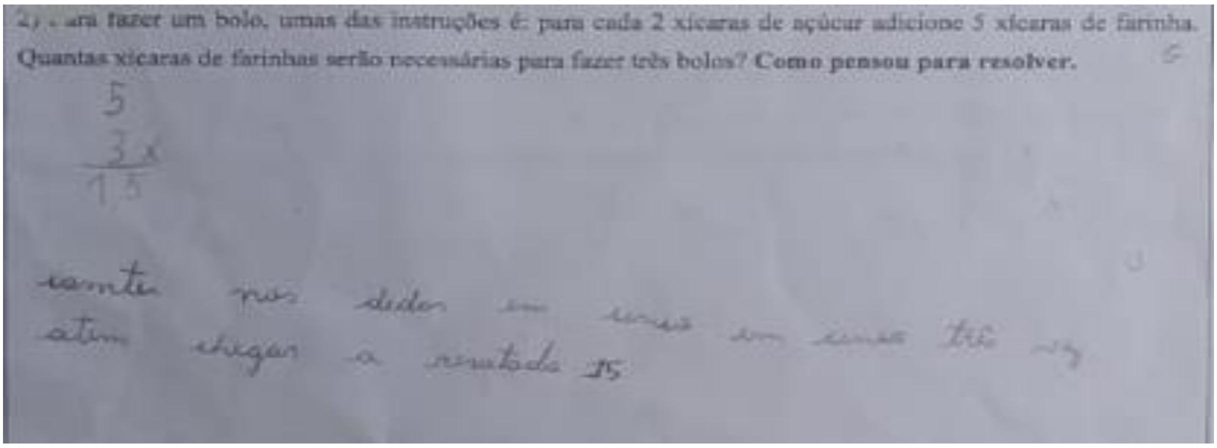
6.2.9 Item 2 – Grupo G4

2) Para fazer um bolo, umas das instruções é: para cada 2 xícaras de açúcar adicione 5 xícaras de farinha. Quantas xícaras de farinhas serão necessárias para fazer três bolos? **Como pensou para resolver.**

O grupo determinou o resultado correta da situação, uma vez que utilizou do algoritmo de multiplicação e resolveu por meio da adição repetida:

Pesquisadora: Como vocês fizeram?
A1: Foi contando nos dedos, igual da outra vez. Aí chegou no resultado de 15.
Pesquisadora: O que vocês contaram nos dedos?
A2: ***De 5 em 5, três vezes***.
Pesquisadora: Por que três?
A1: Porque são 3 bolos.

Imagem 20: Protocolo de resolução item 2 – Tarefa 2 – Grupo 4.


2) ara fazer um bolo, umas das instruções é: para cada 2 xícaras de açúcar adicione 5 xícaras de farinha. Quantas xícaras de farinhas serão necessárias para fazer três bolos? **Como pensou para resolver.**

5
3 x
15

contei nos dedos em cinco em cinco três vez
até chegar a resultado 15

Justificativa do grupo 4: Contei nos dedos em cinco em cinco três vezes até chegar o resultado 15.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

Observamos que o grupo comunicou matematicamente o seu levamento de conjecturas, isso encontra eco em Fernandes (2008, p. 356) quando aponta que uma das funções da avaliação formativa alternativa é que se tenham alunos “envolvidos no processo do ensino-aprendizagem, responsabilizando-se pelas suas aprendizagens”. Assim, o grupo determinou o resultado ao utilizar membros do corpo para apoiar seu raciocínio “Foi contando nos dedos, igual da outra vez. Aí chegou no resultado de 15.” (A1) Essa linguagem gestual consiste em apoiar o que estar no pensamento “completa aquilo que não é dito.” (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006, p. 33)

O grupo compreendeu a situação e resolve-a por meio da adição. Por mais que os alunos utilizam o algoritmo de multiplicação é possível verificar que fazem uso da adição reiterada, visto que estabelece a continuidade da adição na multiplicação nos processos de proporcionalidade. (Vergnaud, 1993) Fato este, que evidencia que os alunos ainda não dominam os fatos básicos da multiplicação.

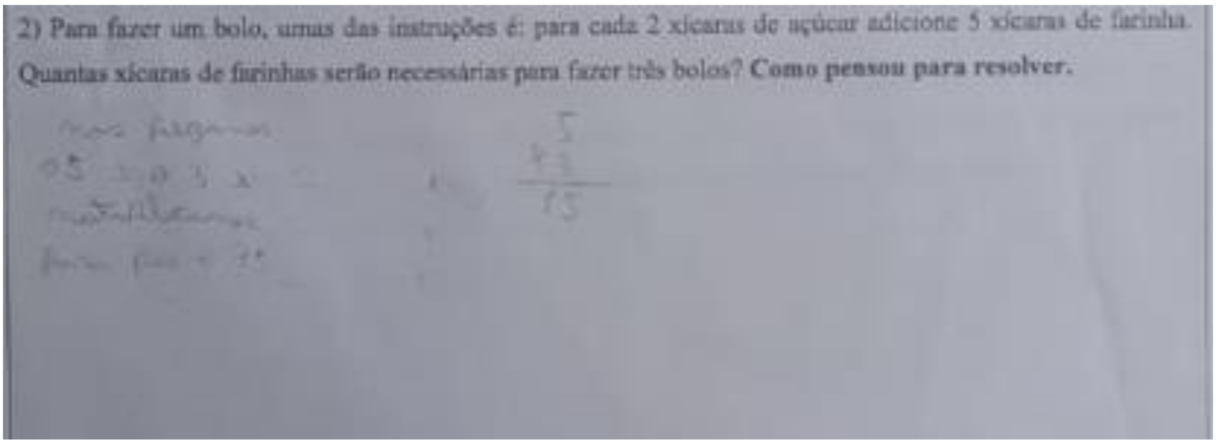
6.2.10 Item 2 – Grupo G5

2) Para fazer um bolo, umas das instruções é: para cada 2 xícaras de açúcar adicione 5 xícaras de farinha. Quantas xícaras de farinhas serão necessárias para fazer três bolos? **Como pensou para resolver.**

O grupo reconheceu a multiplicação com meio mais adequado para determinar a proporcionalidade entre as medidas (bolo x farinha). Segundo as evidências abaixo:

A1: A gente pensou assim: se for ***5 xícaras e é pra fazer 3 bolos, são 3 “cincos***”. Então, a gente resolver fazer a conta de vezes.
[..]
A1: Aí fizemos ***5 vezes 3 que dá o 15.***

Imagem 21: Protocolo de resolução item 2 – Tarefa 2 – Grupo 5.


2) Para fazer um bolo, umas das instruções é: para cada 2 xícaras de açúcar adicione 5 xícaras de farinha. Quantas xícaras de farinhas serão necessárias para fazer três bolos? **Como pensou para resolver.**

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 3 \\ \hline 15 \end{array}$$

Justificativa do grupo 5: Nós pegamos o 5 e o 3 e multiplicamos para dar o 15.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

O grupo reconheceu os dados relevantes que favoreceram a resolução da situação, ao focar na quantidade de farinha e de bolo e ao estabelecer uma relação de proporcionalidade entre essas medidas. Observamos que os integrantes do grupo comunicaram matematicamente em linguagem natural suas conjecturas e seus resultados e identificaram a taxa de proporcionalidade (5) que relaciona as duas medidas, conforme o excerto: "A gente pensou assim: se for *5 xícaras e é pra fazer 3 bolos, são 3 "cincos*". Então, a gente resolver fazer a conta de vezes." (A1) Com isso, percebemos a importância da comunicação em sala de aula entre aluno e professor, pois isso tece relações entre o que o docente espera e como os discentes pensam ou agem em função de cumprir uma determina tarefa. (Fernandes, 2008)

6.2.11 Fechamento e considerações sobre a tarefa 2

Na tarefa 2, mesmo sendo de estrutura fechada, foi possível a utilização de estratégias variadas pelos alunos. Ela teve por objetivo estabelecer uma relação de proporcionalidade entre as medidas em uma relação fixa de proporção. Nela, constatamos que: os alunos estão em processo de construção do conceito de multiplicação, uma vez que apenas o grupo 3 não evidenciou o reconhecimento da multiplicação no item 2 da tarefa, porém se serviu exclusivamente do pensamento aditivo; os alunos utilizaram mais a representação numérica do que a pictórica, só que prevalece o processo de contagem; quanto ao uso da tabela de correspondência; o grupo 1 e 3 utilizou-a nos dois itens; o grupo 4 comunicou matematicamente suas conjecturas e resultados com esquema corporal nos dois itens: "A gente contou nos dedos." (A5G4)

Após a conclusão da tarefa, discutimos sobre as respostas e os procedimentos adotados dos alunos, anexo B, no sentido de consolidar e esclarecer possíveis equívocos quanto às aprendizagens do conceito de multiplicação que contemplam a ideia de proporcionalidade de multiplicação. Momento em que foi dando ênfase nos procedimentos do grupo 3, por utilizarem na comunicação de conjecturas e resultados o esquema corporal e a tabela de correspondência (Vergnaud, 2009). Feito isso, foi entregue a ficha de autoavaliação, apêndice I.

De acordo com as informações do quadro 8, quase 65% dos alunos relataram que conseguiram resolver com facilidade.

Quadro 8: Autoavaliação da Tarefa 2.

Quantidade de alunos participantes	Consegui facilmente	Consegui com dificuldades	Ainda não consegui
28 alunos	18 alunos	10 alunos	

Fonte: Pesquisadora, 2024.

Vemos pelas comunicações que eles encontram obstáculos na resolução das tarefas, pois precisaram de *feedbacks* que os ajudassem a compreender os caminhos que os levariam à solução. É possível que esse resultado revele uma prática comum de sala de aula: “dizer” que aprendeu ou que não teve dificuldade.

6.3 Tarefa 3: Situações de multiplicação com raciocínio combinatório

Essa tarefa é considerada consideradas por Verganud (2009) com um problema de produto de medidas ou produto cartesiano em que oferecem uma relação entre três medidas, sendo uma o produto/resultado das outras. Nessas situações, todos os elementos de um grupo (de *shorts* ou de meninos) devem ser combinados com todos os elementos do outro grupo (de blusas ou de meninas), em que a ordenação não é determinante o que há é a necessidade de esgotar as possibilidades de combinações, o número de possibilidades é igual ao produto do número de elementos de grupo pelo número elementos do outro grupo. (Vergnaud, 2009) Essa tarefa tem por objetivo levar os alunos a esgotem todas as possibilidades de combinações relacionadas às estratégias de combinação com pensamento multiplicativo.

Figura 7: Tarefa 3.

1) Alice levou para sua viagem 3 *shorts* (um verde, um preto e um amarelo) e 4 blusas (uma vermelha, outra azul, uma rosa e a outra amarela). De quantas maneiras diferentes Alice pode combinar essas peças durante a viagem?

Resolva e explique como pensou para resolver.

(Pode fazer desenhos se preferir)

2) Para a festa de São João, na escola, tem 2 meninos (Pedro e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados? (BRASIL, 2014, p. 41)[21]
Resolva e explique como pensou para resolver.
(Pode fazer desenhos se preferir)

Fonte: A pesquisadora, 2023.

A realização da tarefa aconteceu no dia (22) vinte e dois do mês de fevereiro, no terceiro encontro, das 7:00h às 8h40min com (28) vinte e oito alunos. Para dar início ao encontro, os discentes foram organizados em grupos, só que permaneceram os mesmos componentes da tarefa anterior, apenas foram inseridos nos grupos os alunos que não estavam presentes no primeiro encontro. No final, ficou esta organização: três (3) grupos com seis (6) alunos em cada e dois (2) grupo com cinco (5) alunos.

Desta feita, foi apresentado o objetivo da tarefa e contextualizadas algumas situações do cotidiano, como montar um lanche com algumas opções de alimentos, como: pão, queijo, presunto, ovos, manteiga, suco (laranja, caju). Após isso, foi entregue uma cópia da tarefa para cada grupo e começaram a exploração e a resolução.

No decorrer da tarefa, alguns alunos relacionaram a combinação com aquilo que ficava bonito ou não, se uma cor combinava, esteticamente, com a outra ou não. Porém demonstraram a falta de conhecimento com a ideia da multiplicação e, também, queriam saber se poderiam repetir alguma peça. Foi necessário esclarecer que nos interessava saber de quantas maneiras diferentes cada peça (*short* x blusa) poderia ser vestida com outra, o que poderia peça ser repetida – mas não combinações.

Vejamos, a seguir, os principais momentos da realização da tarefa.

6.3.1 Item 1 – Grupo G1

1) Alice levou para sua viagem 3 *shorts* (um verde, um preto e um amarelo) e 4 blusas (uma vermelha, outra azul, uma rosa e a outra amarela). De quantas maneiras diferentes Alice pode combinar essas peças durante a viagem? **Resolva e explique como pensou para resolver. (Pode fazer desenhos se preferir)**

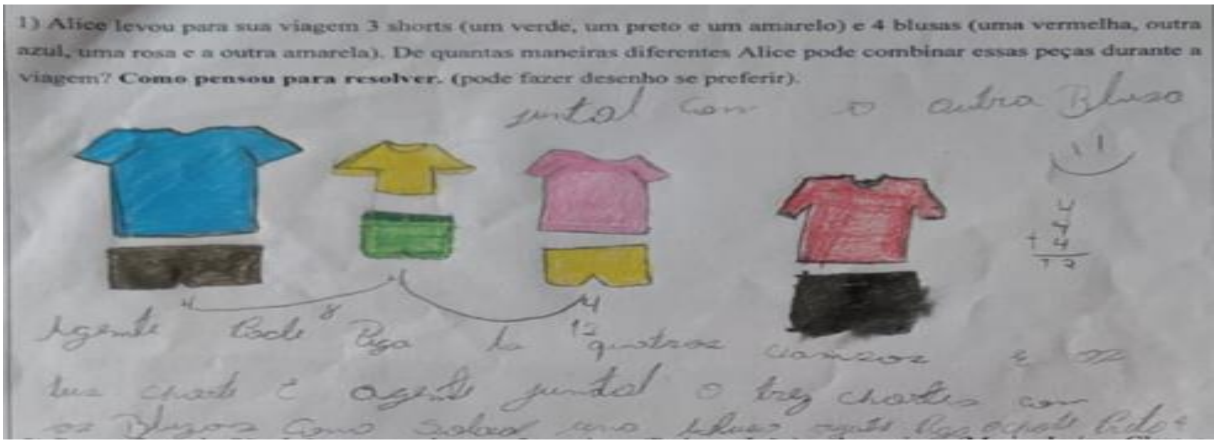
[21] Retirada do material do PNAIC - Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Educação Estatística /Caderno 7, 2014.

O grupo sentiu muita dificuldade para determinar as possíveis combinações, sendo necessário *feedbacks* da pesquisadora no grupo para se chegar ao resultado correto. Vejamos:

A7: A gente vai fazer as 4 blusas e 3 *shorts* embaixo das blusas.
Pesquisadora: E depois?
A7: Formar os *looks*
[..]
Pesquisadora: São 4 *shorts*?
A1: Não
A2: Eu falei que não era.
A6: No caso como aqui era 4 blusas e 3 *shorts*, a gente pegou o *short* preto para fazer com a vermelha.
Pesquisadora: Então, vocês fizeram dois *shorts* preto e o *short* preto só pode combinar com a vermelha?
A6: Não. Pode combinar com a amarela, com a rosa e a azul.
[...]
Pesquisadora: Ela disse que são 4 possibilidades, ele disse que dão 20 e vocês pensam que pode dar quantas possibilidades?
A1: Deu 20 mesmo.
Pesquisadora: Vamos confirmar se são 20 mesmo. Vamos pensar juntos, primeiro vamos pensar só no short preto, o *short* preto ela pode usar com a blusa azul?
A7: Pode.
Pesquisadora: Dar quantas possibilidades aqui? (se referindo ao *short* preto e a blusa azul).
A6: Duas.
Pesquisadora: Não. Quero saber a possibilidade de uso.
A7: Uma.
Pesquisadora: Uma né. Ela pode usar esse mesmo *short* preto e usar com a amarela?
A6: Pode.
Pesquisadora: Então, já dá mais quantas possibilidades?
A6: Duas.
Pesquisadora: Então, só com o *short* preto ela já teve quantas possibilidades?
A7: Duas.
Pesquisadora: E ela (Alice) pode usar esse *short* preto com a rosa (blusa)?
A6: Pode.
Pesquisadora: já deu quantas possibilidades?
A6: Três.
Pesquisadora: Ela pode usar o *short* preto com a vermelha?
Todos: Sim.
Pesquisadora: Deu quantas possibilidades?
Todos: Quatro.
Pesquisadora: Só com o *short* preto deu quantas possibilidades?
Todos: Quatro.
Pesquisadora: Ainda tem possibilidades dela (Alice) usar o *short* preto com alguma outra blusa?
Todos: Não
Pesquisadora: Marcam o 4 aqui. (apontando para o espaço abaixo do *short* preto). Agora, pensam com o short verde e amarelo. O *short* verde quais as possibilidades de uso?
A2: Ela pode usar com a azul.
A6: Três.
Pesquisadora: Três...por que ela só pode usar com a azul, amarela e a rosa?
A2: Não. Azul, amarela, rosa e vermelha.
Pesquisadora: Com o *short* verde são quantas as possibilidades:
A2: Quatro.
Pesquisadora: E com o *short* amarelo, são quantas possibilidade?
Todos: Quatro.
Pesquisadora: Ela tem dois *shorts* preto?
Todos: Não.
Pesquisadora: A gente vai poder fazer a possibilidade com esse outro *short* preto. (apontando para o segundo *short* preto do esquema representado por eles)
Todos: Não.
Pesquisadora: Por que?
A6: Já foi usado.

Pesquisadora: Ao todo, quantas possibilidades ela tem?
A7: Doze.
Pesquisadora: Como vocês pensaram para encontrar o doze?
A6: Contando.
Pesquisadora: Contando como?
A2: ***4 mais 4 dá 8 mais 4 dá 12***. (apontando para os quatro abaixo dos *shorts*)

Imagem 22: Protocolo de resolução item 1 – Tarefa 3 – Grupo 1.



Justificativa do grupo 1: A gente pode pegar as quatro camisas (se referindo as blusas) e os três *shorts* e a gente juntou os três *shorts* com as blusas, como sobrou uma blusa a gente pegou o *short* preto e juntou com a outra blusa.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

Nota-se que os alunos tiveram dificuldades na compreensão da situação, o que pode ser decorrente a fase de arranque não ter sido compreendida (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006) ou por esse tipo de situação não ser apresentada para os alunos com tanta frequência, “Uma consequência disso é que eles têm mais dificuldades para resolver os problemas combinatórios”. (Bigode; Frant, 2011, p. 56)

Por conta disso, foram necessários vários *feedbacks* da pesquisadora, no grupo, para que eles pudessem entender a proposta da tarefa, uma vez que o *feedback* é responsável “por activar os processos cognitivos e metacognitivos dos alunos.” (Fernandes, 2008, p. 356) No entanto, não foi possível observar que eles estabeleceram uma relação dessa situação com o pensamento multiplicativo, só que relacionaram a adição “4 mais 4 dá 8 mais 4 dá 12” (A2).

A forma com dispuseram a representação pictórica não colaborou com a organização dos pensamentos para se chegar aos números de combinações possíveis. Assim, é possível que o desenho não constituiu uma forma natural para a solução da situação, pois não é somente a soma de elementos iguais, pois é necessário associar elementos de um grupo com do outro grupo e verificar todas as possibilidades de combinações.

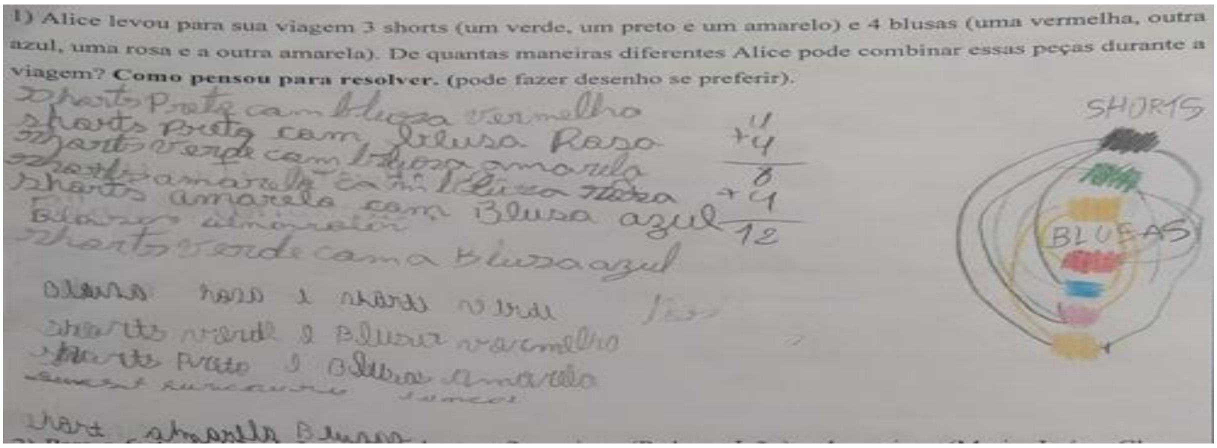
6.3.2 Item 1 – Grupo G2

1) Alice levou para sua viagem 3 *shorts* (um verde, um preto e um amarelo) e 4 blusas (uma vermelha, outra azul, uma rosa e a outra amarela). De quantas maneiras diferentes Alice pode combinar essas peças durante a viagem? **Resolva e explique como pensou para resolver. (Pode fazer desenhos se preferir)**

O grupo reconheceu os dados relevantes para a resolução e determinou o número de combinação. Contudo, não evidenciou a multiplicação como caminho possível de solução:

A2: Agora, a gente vai pegar cada *short* e vai colocar com as blusas.
[...]
A2: Por exemplo: ***O short verde ela pode usar vermelha uma hora, outra hora pode com a azul, com a rosa e com a amarela.***
Pesquisadora: Até agora vocês fizeram com o *short* verde. E os *shorts* preto e amarelo ela vai usar ou não?
A3: Vai

Imagem 23: Protocolo de resolução item 1 – Tarefa 3 – Grupo 2.



Justificativa do grupo 2: *Short* preto com blusa vermelha; *short* preto com blusa rosa; short verde com amarela; *short* amarelo com blusa rosa; short amarelo com blusa azul, blusa amarela; *short* verde com blusa azul, blusa rosa e *short* verde, *short* verde e blusa vermelha, *short* preto e blusa amarela; (não foi possível compreender a escrita) *short* amarelo blusa.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

De acordo com os diálogos houve o reconhecimento do sentido da situação "O *short* verde ela pode usar vermelha uma hora, outra hora pode com a azul, com a rosa e com a amarela" (A2), o que expressou as combinações por linguagem natural. O grupo fez a correspondência entre as peças de roupas por meio de lista e desenho, mas é possível observar que a ela está confusa e que, provavelmente, a resolução se deu mais por meio do desenho.

Todavia, não houve evidências do reconhecimento da operação de multiplicação como caminho possível de solução.

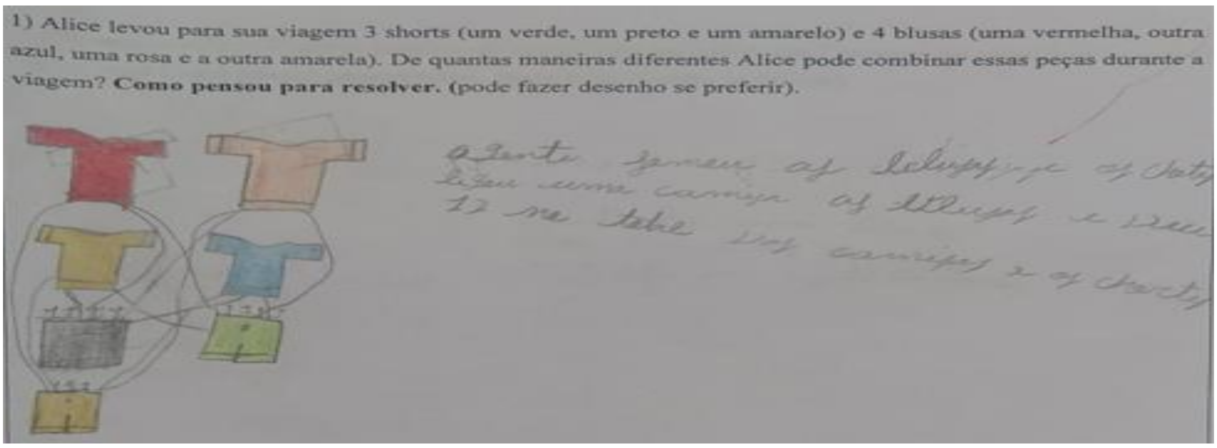
6.3.3 Item 1 – Grupo G3

1) Alice levou para sua viagem 3 *shorts* (um verde, um preto e um amarelo) e 4 blusas (uma vermelha, outra azul, uma rosa e a outra amarela). De quantas maneiras diferentes Alice pode combinar essas peças durante a viagem? **Resolva e explique como pensou para resolver. (Pode fazer desenhos se preferir)**

Os alunos entenderam o sentido da situação e por meio da representação pictórica determinaram as possíveis combinações das peças. Vejamos:

A1: Estamos desenhando 4 blusas e três *shorts.*
Pesquisadora: Com a blusa rosa ela pode usar com quais *shorts*?
A1: Ela pode usar com o amarelo. (o aluno fez o traço ligando a blusa rosa com o *short* amarelo).
Pesquisadora: E ela não pode usar com o verde?
A1: Pode. (o aluno fez o traço ligando a blusa rosa com o *short* verde)
Pesquisadora: E com o preto?
A1: Pode. (o aluno fez o traço ligando a blusa rosa com o *short* preto).
Pesquisadora: E com a blusa azul, ela pode usar com quais *shorts*?
A1: Ela pode usar com verde, preto e amarelo.
[...]
Pesquisadora: E agora, o que vocês vão fazer?
A1: Vamos somar.
Pesquisadora: Somar o quê?
A1: Uma camisa com 3 *shorts*.
Pesquisadora: E deu quanto?
A2: Quatro.
Pesquisadora: Quatro o quê?
A1: Não. Três combinações.
Pesquisadora: Então, vocês vão somar as possibilidades de cada blusa, né?
A1: Sim. ***Vou somar com a vermelha, amarela e a azul com os 3 shorts***.

Imagem 24: Protocolo de resolução item 1 – Tarefa 3 – Grupo 3.



Justificativa do grupo 3: A gente somou as blusas e os *shorts*, ligou uma camisa as blusas e deu doze no total das camisas e os *shorts*.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

Para descobrir as possíveis combinações, os alunos optaram pelo desenho com estratégia de resolução, o que demonstrou que compreenderam a ideia da situação – mesmo sem evidenciar o reconhecimento da operação de multiplicação com meio de resolução. O *feedback* da pesquisadora foi importante para o grupo, pois com ele foi possível compreender que não era para somar as peças de roupas, mas as possibilidades de uso: “Pesquisadora: E deu quanto? A2: Quatro. Pesquisadora: Quatro o quê? A1: Não. Três combinações.” Entendemos que o papel do professor nessa etapa é o de apoiar a aprendizagem, ou seja, “ajudar os alunos a aprender melhor, a aprender com compreensão.” (Fernandes, 2005, p. 66). Nota-se que conseguiram encontrar o resultado por meio do processo de contagem.

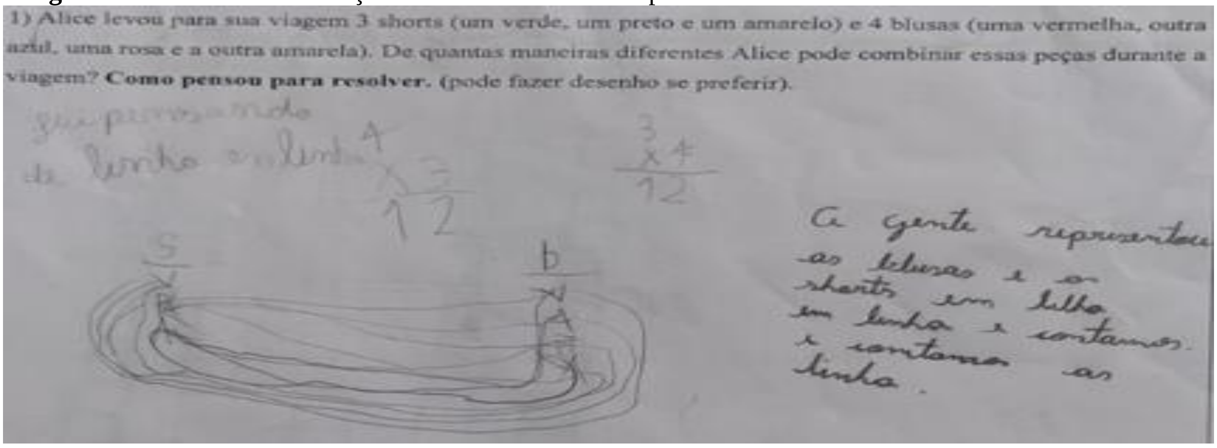
6.3.4 Item 1 – Grupo G4

1) Alice levou para sua viagem 3 *shorts* (um verde, um preto e um amarelo) e 4 blusas (uma vermelha, outra azul, uma rosa e a outra amarela). De quantas maneiras diferentes Alice pode combinar essas peças durante a viagem? **Resolva e explique como pensou para resolver. (Pode fazer desenhos se preferir)**

Os alunos sentiram dificuldades em compreender o processo de resolução. E só a partir do *feedback* da pesquisadora, conseguiram proceder com a resolução e reconhecer a multiplicação, que visa a possibilidade de solução. Vejamos:

A6: Tive uma ideia.
Pesquisadora: Qual?
A6: Vou ajuntando com a linha (se referindo ao enunciado da situação) depois vou apagando. O preto (*short*) com amarelo (blusa).
Pesquisadora: Vamos organizar os pensamentos. O *short* preto ela poderia combinar com qual? Com a amarela que você falou?
A6: Claro.
Pesquisadora: O *short* preto ela poderia combinar com a rosa?
A6: Pode.
Pesquisadora: O *short* preto ela poderia com a azul e com a vermelha?
A6: Pode
Pesquisadora: Então, só com o *short* preto ela pode combinar de quantas maneiras?
A6: Quatro.
Pesquisadora: Até agora, ela só usou o *short* preto e os demais?
A6: ***E só fazer 4 vezes 3.***
Pesquisadora: Por que 4 vezes 3?
A6: ***Porque tem 3 shorts e 4*** blusas

Imagem 25: Protocolo de resolução item 1 – Tarefa 3 – Grupo 4.


1) Alice levou para sua viagem 3 shorts (um verde, um preto e um amarelo) e 4 blusas (uma vermelha, outra azul, uma rosa e a outra amarela). De quantas maneiras diferentes Alice pode combinar essas peças durante a viagem? **Como pensou para resolver.** (pode fazer desenho se preferir).

4 x 3 = 12

3 x 4 = 12

A gente representou as blusas e os shorts em linha em linha e contamos e contamos as linha.

Justificativa do grupo 4: A gente representou as blusas e os *shorts* em linhas em linhas e contamos e contamos as linhas.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

Os diálogos e as marcas apagadas no protocolo revelam a grande dificuldade enfrentada pelos alunos para resolver essa situação. Possivelmente, a etapa de apresentação da tarefa (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006) não tenha sido esclarecedora ou esse tipo de questão (raciocínio combinatório) ainda é pouco explorado para este ano de escolaridade (Bigode; Frant, 2011).

Nesse sentido, foram necessários alguns *feedbacks* com direcionamentos de combinações de algumas peças (*short* e blusa) para que eles compreendessem o sentido de combinações: “Vamos organizar os pensamentos. O *short* preto ela poderia combinar com qual? Com a amarela que você falou?”. Assim, fica evidente que “o *feedback* é determinante para activar os processos cognitivos e metacognitivos dos alunos.” (Fernandes, 2008, p. 356) Há evidências de reconhecimento da multiplicação como procedimento de resolução: “E só fazer 4 vezes 3” (A6).

Percebe-se que os alunos utilizaram a propriedade comutativa da multiplicação ao resolverem por 3 x 4 = 12 e 4 x 3 = 12. As situações de combinações partem de duas grandezas diferentes (blusas e *shorts*) e encontrará outra grandeza (pares de roupas/combinações). Com isso, para cada *short* terá 4 possibilidades de blusa, resultado em 12 combinações, o que pode resolver com 3 x 4 = 12 ou para cada blusa terá 3 possibilidades de *shorts*. Logo, resulta em 12 combinações e solucionará com 4 x 3 = 12. Em ambos algoritmos provêm de combinações. (Gitirana; Campos; Magina; Spinillo, 2014)

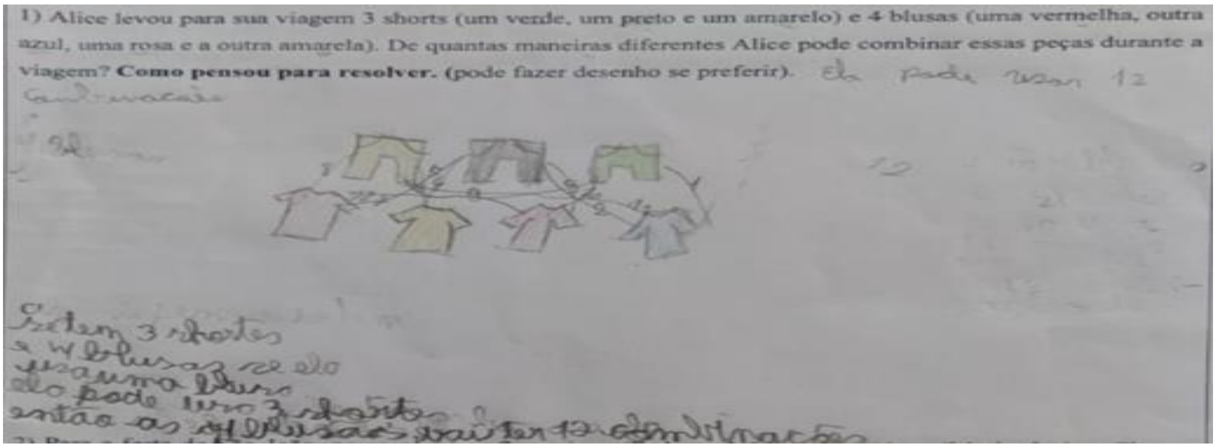
6.3.5 Item 1 – Grupo G5

1) Alice levou para sua viagem 3 *shorts* (um verde, um preto e um amarelo) e 4 blusas (uma vermelha, outra azul, uma rosa e a outra amarela). De quantas maneiras diferentes Alice pode combinar essas peças durante a viagem? **Resolva e explique como pensou para resolver. (Pode fazer desenhos se preferir)**

Os alunos encontram dificuldades em entender o sentido da situação sendo necessário encaminhamentos da pesquisadora em função da compreensão da situação. Todavia, conseguiram evidenciar o reconhecimento da multiplicação, mesmo que modo implícito. Conforme pode ser visto abaixo:

A1: Vamos ligar, pra ver se a gente consegue fazer. A preta e a rosa, e também a preta e a vermelha. E falta ligar as outras ainda.
Pesquisadora: Para ela usar o *short* preto já teve quantas possibilidades:
A1: Quatro.
[...]
A5***: Se são 4 possibilidades pra um short, e então são 4 4 4 (se referindo 4+4+4). Os 3 shorts são 12***.

Imagem 26: Protocolo de resolução item 1 – Tarefa 3 – Grupo 5.


1) Alice levou para sua viagem 3 shorts (um verde, um preto e um amarelo) e 4 blusas (uma vermelha, outra azul, uma rosa e a outra amarela). De quantas maneiras diferentes Alice pode combinar essas peças durante a viagem? **Como pensou para resolver.** (pode fazer desenho se preferir).

Justificativa do grupo 5: Se ela tem 3 *shorts* e 4 blusas, se ela usa (r) uma blusa ela pode usar 3 *shorts*, então, as 4 blusas vai (vão) ter 12 combinações.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

Pela "sombra" de respostas no protocolo de resolução, percebemos que os membros do grupo tiveram bastante dificuldades. Isso pode estar relacionado ao fato de que esse tipo de tarefa não ocorre com frequência em sala de aula. "Uma consequência disso é que eles têm mais dificuldades para resolver os problemas combinatórios." (Bigode; Frant, 2011, p. 56) Desse modo, foi necessária a distribuição de *feedback* por parte da pesquisadora para definirem uma estratégia que julgassem adequada para encontrar a solução. Visto que ele os ajudou a estimular os conhecimentos que dominam e a organizar os raciocínios para o novo.

De acordo com a justificativa apresentada pelo grupo, houve reconhecimento da ideia multiplicação, mesmo que de modo não explicito, porque fizeram relação de quatro medidas em que uma dessas é igual a um: "se ela usa (r) uma blusa ela pode usar 3 *shorts*, então, as 4 blusas vai(ão) ter 12 combinações."

6.3.6 Item 2 – Grupo G1

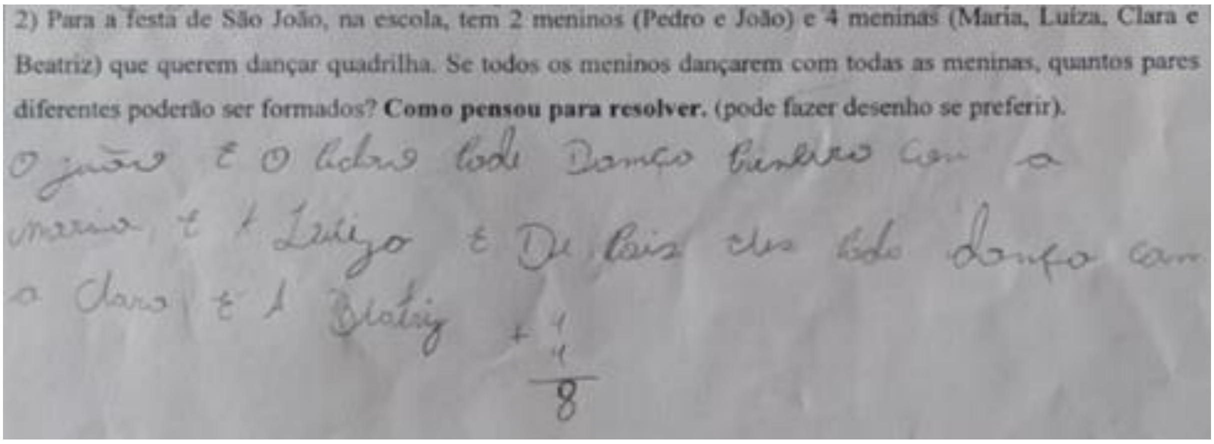
2) Para a festa de São João, na escola, tem 2 meninos (Pedro e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados? **Resolva e explique como pensou para resolver. (Pode fazer desenhos se preferir)**

O grupo determinou a quantidade pares possíveis por meio da adição, só que não relacionaram à multiplicação:

A7: Eu pensei que eles só têm dois e quatro meninas, aí pensei no João e no Pedro dança com duas e depois dançar com as outras duas, pra não ficar duas meninas que já dançou e duas que não dançou fora.
Pesquisadora: Então, Pedro só dançaria com duas e João só dançaria com duas?
A7: É (balançado a cabeça)
Pesquisadora: Vocês concordam?
A2: Eu pensei o Pedro dançaria com as duas primeiras e as duas últimas, aí o João dançaria com as 4 meninas.
Pesquisadora: Assim, o Pedro dançaria com as 4 meninas e João também?
A2: Sim.
[..]
A6: Cada um dançar só com uma.
A2: Mas eles têm que dançar com todas no total.
Pesquisadora: Lembra que aqui (enunciado) fala assim: quantos pares diferentes poderão ser formados? Precisa ver todas as possibilidades, se um menino dançar só com uma menina, as outras três vão ficar sem dançar com esse menino. Temos que pensar na formação de pares possíveis.
[..]
Pesquisadora: Se for pensar que o Pedro vai dançar só com a Maria e a Luíza vai formar quantos pares?
A7: Quatro
Pesquisadora: Não. Pedro vai dançar só com a Maria e a Luíza vai formar quantos pares?
A7: Dois
Pesquisadora: Dois. Depois o João vai dançar com a Clara e a Beatriz forma mais quantos pares:
A4: Dois.
Pesquisadora: Dois pares formados com Pedro e dois formados com João deu quantos pares?
A7: Quatro.
Pesquisadora: Mas, vamos pensar mais. O Pedro não vai poder dançar com a Clara e a Beatriz?
A2: Pode.
Pesquisadora: Então como podemos formar todos os possíveis pares? Vamos pensar, o Pedro pode dançar com a Maria, com a Luíza, com a Clara e com a Beatriz?
A2: Pode.
Pesquisadora: Só com o Pedro a gente consegue formar quantos pares?
A7: Quatro
Pesquisadora: E com o João quantos pares podemos formar?
A2: Quatro também.

[...]
Pesquisadora: Se com o Pedro formamos 4 pares e com João formamos 4 pares. Quantos pares no total?
A7: Oito

Imagem 27: Protocolo de resolução item 2– Tarefa 3 – Grupo 1.


2) Para a festa de São João, na escola, tem 2 meninos (Pedro e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados? **Como pensou para resolver.** (pode fazer desenho se preferir).

$$\begin{array}{r} 4 \\ +\ 4 \\ \hline 8 \end{array}$$

Justificativa do grupo 1: O João e o Pedro podem dançar primeiro com a Maria e a Luíza e depois eles podem dançar com a Clara e a Beatriz.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

O grupo inicialmente estava pensando mais na formação de pares que podia ser formado ao mesmo tempo e não na possibilidade de formação. A partir das tentativas apresentadas pelo grupo, a pesquisadora lançou um *feedback* que contribuiu para a reflexão de novas possibilidades relacionadas à formação de pares: “Precisa ver todas as possibilidades, se um menino dançar só com uma menina, as outras três vão ficar sem dançar com esse menino. Temos que pensar na formação de pares possíveis”. No processo de aprendizagem-avaliação-ensino, o trabalho do professor “deve proporcionar indicações claras acerca do que é necessário fazer para progredir.” (Fernandes, 2008, p. 356)

Percebe-se que não houve evidencia de compreender essa situação com a operação de multiplicação, mas sim com uma adição. O que demostra, assim, a continuidade entre a adição e a multiplicação. (Vergnaud, 2009)

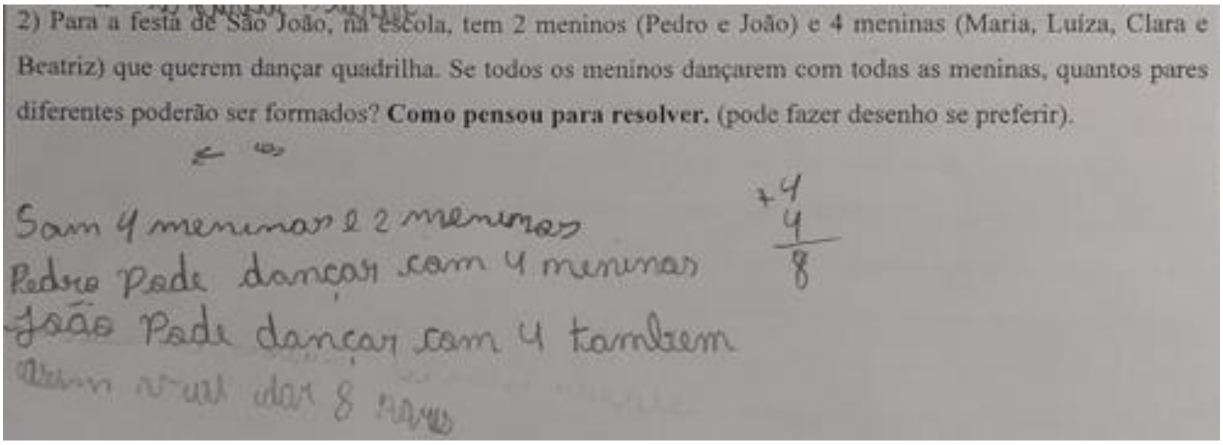
6.3.7 Item 2 – Grupo G2

2) Para a festa de São João, na escola, tem 2 meninos (Pedro e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados? **Resolva e explique como pensou para resolver. (Pode fazer desenhos se preferir)**

O grupo reconheceu o significado da situação e determinou o número de pares sem dificuldades:

A2: ***Se são 4 meninas e 2 meninos, cada menino pode dançar com as 4***.
Pesquisadora: E vocês somaram?
A2: Sim. ***Somamos o 4 duas vezes***.

Imagem 28: Protocolo de resolução item 2– Tarefa 3 – Grupo 2.


2) Para a festa de São João, na escola, tem 2 meninos (Pedro e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados? **Como pensou para resolver.** (pode fazer desenho se preferir).

Sam 4 meninas e 2 meninos
Pedro Pode dançar com 4 meninas
João Pode dançar com 4 tambem
assim vai dar 8 pares

$$\begin{array}{r} +4 \\ 4 \\ \hline 8 \end{array}$$

Justificativa do grupo 2: São 4 meninas e 2 meninos. Pedro pode dançar com 4 meninas. João pode dançar com 4 também. Assim vai dar 8 pares.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

O grupo entendeu o sentido da situação e conseguiu proceder até a resolução de maneira satisfatória; portanto, esgotaram todas as possíveis formação de pares por meio de estratégias próprias com processo de contagem. Podemos inferir que as tarefas que são propostas com o objetivo de aprender, avaliar e ensinar, precisam ser pensadas e determinadas seguido uma orientação curricular, mas sobretudo, que "activam os processos mais complexos do pensamento". (Fernandes, 2008, 357)

Notamos, ainda, o reconhecimento da multiplicação como possibilidade de resolução, mesmo que de modo implícito: "Somamos o 4 duas vezes" (A2). Como aponta Vergnaud (2009), a palavra "vezes" indica o operador escalar, pois estabelece a relação entre os meninos e meninas por meio do operador 2. A expressão linguística "vezes" está culturalmente presente nas salas de aulas com indicação da operação de multiplicação.

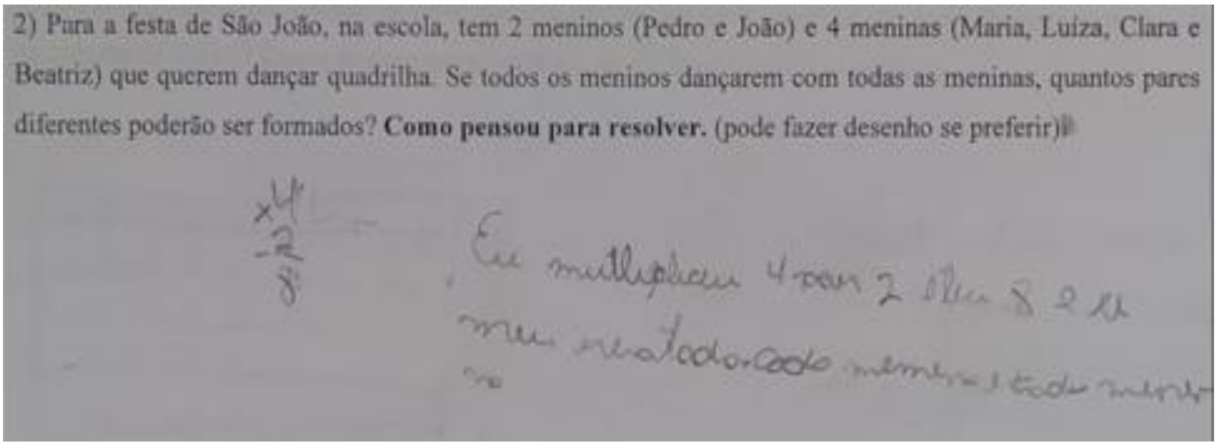
6.3.8 Item 2 – Grupo G3

2) Para a festa de São João, na escola, tem 2 meninos (Pedro e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados? **Resolva e explique como pensou para resolver. (Pode fazer desenhos se preferir)**

O grupo conseguiu esgotar as possibilidades de formação de pares com estratégias de esquemas gestual e relacionou com a multiplicação. Tal como se vê abaixo:

Pesquisadora: Como vocês pensaram que poderia multiplicar o 4 por 2:
A1: Porque como cada menino ia ficar com cada menina, eu fiz o quê? Eu botei 4 dedos. (apontando para uma das mãos-representando as meninas e na outra mão ele separou dois dedos-representando os meninos), e contei assim, uma, duas e fui trocando de lugar, de dedo, aí deu quatro em uma (mão) e 4 na outra. Aí falei, ***eu posso multiplicar por 2, que é as quatro meninas e 2 meninos*** era pra ver se minha conta "tava" certo, aí deu 8 meu resultado.

Imagem 29: Protocolo de resolução item 2– Tarefa 3 – Grupo 3.


2) Para a festa de São João, na escola, tem 2 meninos (Pedro e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados? **Como pensou para resolver.** (pode fazer desenho se preferir)

Justificativa do grupo 3: Eu multipliquei 4 por 2 e deu 8 é o meu resultado. Cada menino e toda menina.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

O grupo reconheceu os dados relevantes da situação, bem com o seu sentido. Consequentemente, o grupo conseguiu determinar todas as possibilidades de formação de pares, visto que reconheceu a multiplicação como "caminho" possível para resolver esse tipo de situação.

Vale ressaltar a representação simbólica e corporal diante da ação: "Eu botei 4 dedos. (apontando para uma das mãos-representando as meninas e na outra mão ele separou dois dedos-representando os meninos), e contei assim, uma, duas e fui trocando de lugar, de dedo, aí deu quatro em uma (mão) e 4 na outra." Isso é apontado por Vergnaud como "A solução de problemas muito novos é impossível sem a linguagem". (1993, p. 25-26), Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) apontam, ainda, que a linguagem gestual verbalizada completa uma formulação de uma conjectura implícita.

Observamos, também, a dificuldade de trabalhar em grupo, pois, por várias vezes, foi necessário chamar a atenção para esse aspecto junto à turma. Houve a impressão, inclusive, de que apenas um aluno resolvia as tarefas e de que dois tinham, de fato, a liderança, porque levavam "o grupo centrar-se em certas ideias" (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006, p. 30). Foi possível observar também que, em alguns momentos, fazia-se o uso apenas da primeira pessoa do singular.

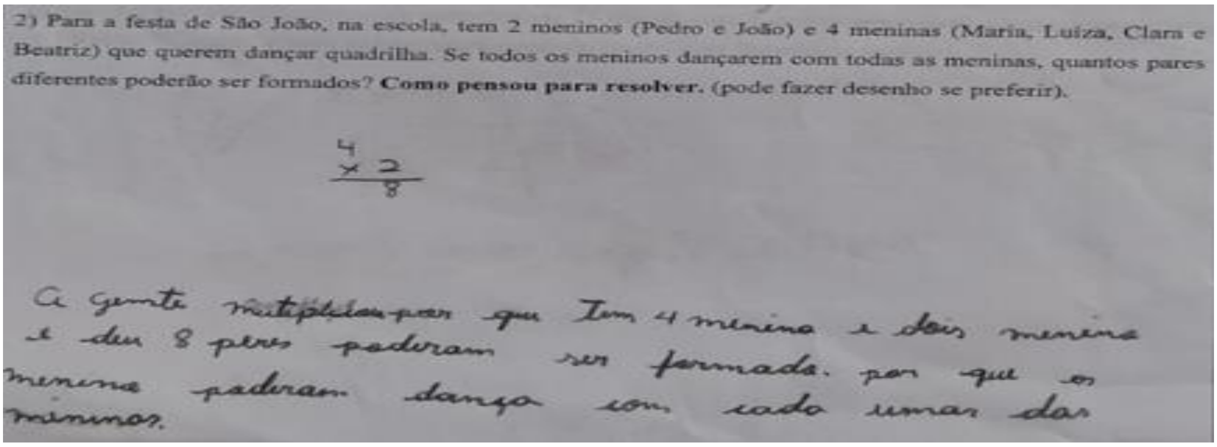
6.3.9 Item 2 – Grupo G4

2) Para a festa de São João, na escola, tem 2 meninos (Pedro e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados? **Resolva e explique como pensou para resolver. (Pode fazer desenhos se preferir)**

O grupo reconheceu a ideia da multiplicação e determinou o número de pares possíveis:

A1: Tem 2 meninos e 4 meninas, então, se todos os meninos dançarem com todas as meninas "soma de vezes' que dá 8.
Pesquisadora: Por que é vezes?
A4: Por causa que cada menino com cada menina é só fazer de vezes e ***soma 4 com 4*** que dá o resultado.

Imagem 30: Protocolo de resolução item 2 – Tarefa 3 – Grupo 4.


2) Para a festa de São João, na escola, tem 2 meninos (Pedro e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados? **Como pensou para resolver.** (pode fazer desenho se preferir).

$$\begin{array}{r} 4 \\ \times 2 \\ \hline 8 \end{array}$$

A gente multiplicou por que Tem 4 menina e dois menino e deu 8 pares poderam ser formada. por que os menino poderam dança com cada umas das meninos.

Justificativa do grupo 4: A gente multiplicou por que tem 4 menina (s) e dois menino(s) e deu 8 pares poderam (ão) ser formando (s), porque os menino(s) poderam (ão) dança (r) com cada uma das meninas.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

Notamos que o grupo reconheceu o sentido da situação e da multiplicação como estratégia mais adequada para solução, mesmo com confusão na nomeação das operações – “soma de vezes” que dá 8.” (A1) – e resolveram a multiplicação por meio da adição repetida, conforme constatamos na fala de um integrante do grupo: “***soma 4 com 4*** que dá o resultado”. (A4). O grupo procedeu conforme Vergnaud aponta “Um casal consiste na associação de um elemento do primeiro conjunto com um elemento do segundo. O número de casais é igual ao produto do número de rapazes pelo número de moças.” (2009, p. 255)

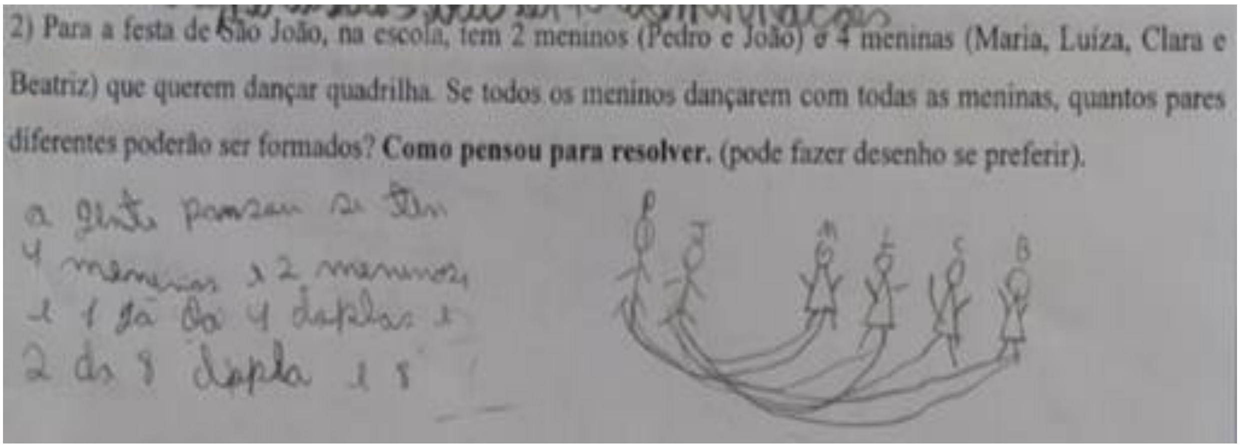
6.3.10 Item 2 – Grupo G5

2) Para a festa de São João, na escola, tem 2 meninos (Pedro e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados? **Resolva e explique como pensou para resolver. (Pode fazer desenhos se preferir)**

Os alunos utilizaram representações pictóricas para auxiliar na resolução da situação; além de evidenciar o pensamento multiplicativo:

Pesquisadora: Vocês conseguiram encontrar quantos pares diferentes:
A5: Oito
Pesquisadora: Por que?
A5: ***Porque se um menino dançar com as 4 vai ser 4 pares diferentes e se o outro dançar com as 4 vai ser 8.***

Imagem 31: Protocolo de resolução item 2 – Tarefa 3 – Grupo 5.


2) Para a festa de São João, na escola, tem 2 meninos (Pedro e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados? **Como pensou para resolver.** (pode fazer desenho se preferir).

a gente pensou se tem 4 meninas x 2 meninos e 1 já dá 4 duplas e 2 dá 8 dupla e 8

Justificativa do grupo 5: A gente pensou se tem 4 meninos e 2 meninas e 1 já dá 4 duplas e 2 dá 8 duplas e 8.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

O grupo identificou o sentido da situação e procedeu a solução com a representação pictórica dos pares, já que utilizaram as inicias dos nomes dos meninos e das meninas. Eles relacionaram o sentido da palavra pares com duplas. Ficou evidente, pela sombra de resposta, que fizeram a tentativa de resposta por meio do algoritmo de multiplicação (2 x 4), o que indicou que estavam no processo de construção da ideia de multiplicação. Além disso, pensaram o procedimento com a ideia de quatro grandezas – sendo uma grandeza igual a um – “A gente pensou se tem 4 meninos e 2 meninas e 1 já dá 4 duplas e 2 dá 8 duplas e 8”.

6.3.11 Fechamento e considerações sobre a tarefa 3

A tarefa teve por objetivo esgotar todas as possibilidades de combinações relacionado às estratégias de combinação com pensamento multiplicativo. Os grupos evidenciaram várias estratégias de resolução e determinaram a resposta correta, assim constamos que: no item 1 os grupos 4 e 5 e no item 2 os grupos 3, 4 e 5 evidenciaram o pensamento multiplicativo, alguns de modo implícito; enquanto os demais grupos não relacionaram a multiplicação como operação para solucionar as situações; os grupos associaram as representações pictóricas com a numéricas como procedimentos; os alunos tiveram dificuldades em determinarem um “caminho” que os levassem à resposta.

Ao término do trabalho em grupos houve a apresentação oral, no qual os alunos expuseram os procedimentos e as respostas determinadas pelos grupos, anexo B. Isso foi feito com o propósito de consolidar e esclarecer possíveis equívocos quanto às aprendizagens do conceito de multiplicação que contemplam a ideia de raciocínio combinatório. Momento em que foi dando ênfase no levantamento de conjecturas e validação do grupo 3, que utilizou o esquema gestual com dedos da mão: “Eu botei 4 dedos. (apontando para uma das mãos-representando as meninas e na outra mão ele separou dois dedos-representando os meninos), e contei assim, uma, duas e fui trocando de lugar, de dedo, aí deu quatro em uma (mão) e 4 na outra. Aí falei, eu posso multiplicar por 2, que é as quatro meninas e 2 meninos era pra ver se minha conta ‘tava’ certo”.”

Após isso, os alunos preencheram a ficha de autoavaliação da tarefa 3, apêndice I. De acordo com as informações do quadro 9, quase 29% dos alunos relataram que conseguiram resolver com facilidade.

Quadro 9: Autoavaliação da Tarefa 3.

Quantidade de alunos participantes	**Consegui facilmente**	**Consegui com dificuldades**	**Ainda não consegui**
28 alunos	08 alunos	17 alunos	3 alunos

Fonte: Pesquisadora, 2024.

As informações do quadro acima, corroboram com Bigode e Frant (2011) quando apontam que a ideia de raciocínio combinatório ainda é pouco explorada nos contextos de sala de aula – enquanto que a ideia de adições sucessivas é a mais difundida.

6.4 Tarefa 4: Situações de multiplicação por organização retangular

Assim como a tarefa anterior, esta traz situações que apresentam uma relação ternária com três quantidades sendo uma o produto das outras, em situações de organização retangular (Vergnaud, 2009). A tarefa tem por objetivo levar os alunos a estabelecerem uma relação entre as medidas conhecidas (filas x carteiras, fileiras x carrinhos) cujo resultado é o produto da relação dessas medidas; ou melhor, determinar a medida desconhecida. Para a resolução desse tipo de problema “O esquema mais natural para representar essa forma de relação é aquele da tabela cartesiana porque, de fato, é a noção de produto cartesiano de conjuntos que explica a estrutura do produto de medidas”. (Vergnaud, 2009, p. 254)

Figura 8: Tarefa 4.

1) Na sala de aula do 4º ano as carteiras são organizadas em 5 filas com 7 carteiras em cada. Quantas carteiras há na sala?

Resolva e explique como pensou para resolver (pode fazer desenho se preferir).

2) André organizou sua coleção de carrinhos em 13 fileiras com 4 carrinhos em cada. Quantos carrinhos há na coleção de André? **Resolva e explique como pensou para resolver (pode fazer desenho se preferir).**

Fonte: A pesquisadora, 2023.

A realização da tarefa aconteceu no dia (23) vinte e três do mês de fevereiro, sendo o quarto encontro, das 7:00h às 8h40min com (29) vinte e nove alunos. Inicialmente, os alunos foram organizados em grupos, mas permaneceram os mesmos componentes da tarefa anterior, inserimos nos grupos apenas os alunos que não estavam presentes nos outros encontros. Por isso ficou um grupo com sete alunos e os demais foram organizados assim: dois (2) grupos com seis (6) alunos em cada e dois (2) grupos com cinco (5) alunos.

Desta feita, procedeu a apresentação do objetivo da tarefa com situações de vida cotidiana deles: vocês conhecem alguém que tem alguma coleção? Como é organizada? É mais fácil saber quantos têm quando está organizada ou isso não interfere? Como é essa organização?

Foi entregue uma cópia da tarefa e começaram a exploração e a resolução dela. Vejamos, a seguir, como cada grupo conduziu com a resolução.

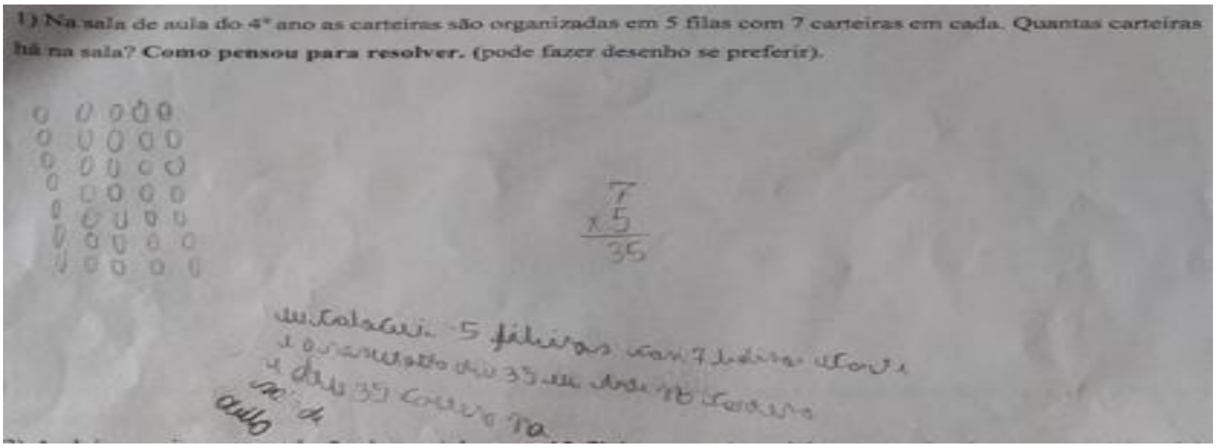
6.4.1 Item 1 – Grupo G1

1) Na sala de aula do 4º ano as carteiras são organizadas em 5 filas com 7 carteiras em cada. Quantas carteiras há na sala? **Resolva e explique como pensou para resolver (pode fazer desenho se preferir).**

O grupo entendeu o sentido da situação e reconheceu a multiplicação com meio de resolução:

Pesquisadora: Estão conseguindo? Como estão fazendo:
A2: Eu fiz ***5 filas com 7 bolinhas cada uma, aí fui contando*** até dá o número certo.
Pesquisadora: As bolinhas estão representando o quê?
A2: As carteiras

Imagem 32: Protocolo de resolução item 1– Tarefa 4 – Grupo 1.



Justificativa do grupo 1: Eu coloquei 5 fileiras com 7 bolinhas e contei e o resultado deu 35, eu botei na continha e deu 35 carteira(s) na sala de aula.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

Por meio da representação pictórica, observa-se que o grupo compreendeu o sentido da situação e a fase inicial da tarefa pode ter contribuído para o entendimento (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006). Os alunos representaram, com linhas e colunas, as carteiras e as fileiras da sala de aula o que resultou em 35 carteiras. Esse tipo de representação é denominado, por Vergnaud (2009), de tabela cartesiana que, segundo o autor, é a forma mais natural de representação para esse tipo de situação que envolve a relação de três medidas. Nota-se que os alunos utilizaram o algoritmo de multiplicação (7 x 5 = 35) como forma de respaldar o resultado da representação. Logo, há evidências que houve o entendimento da ideia da multiplicação envolvida na situação retangular.

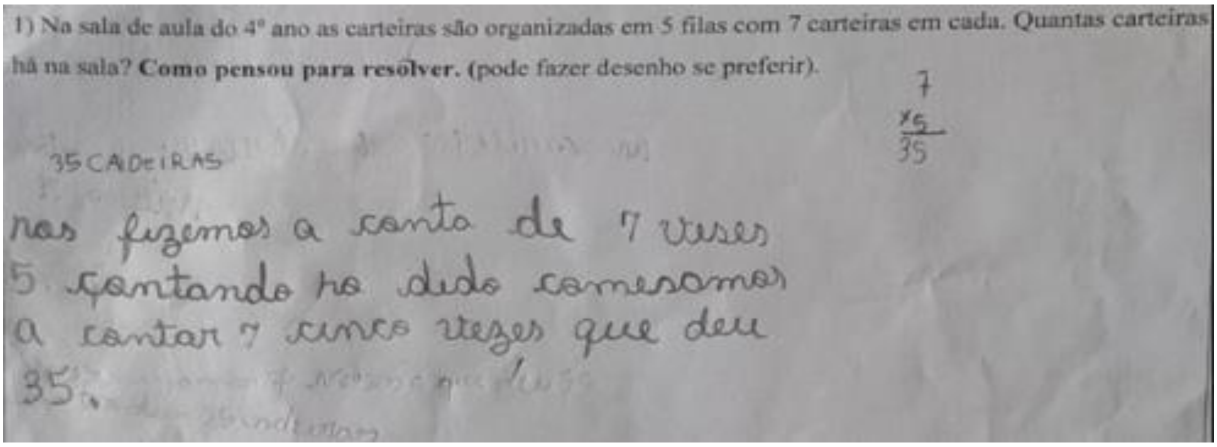
6.4.2 Item 1 – Grupo G2

1) Na sala de aula do 4º ano as carteiras são organizadas em 5 filas com 7 carteiras em cada. Quantas carteiras há na sala? **Resolva e explique como pensou para resolver (pode fazer desenho se preferir).**

O grupo resolveu a situação pelo algoritmo da multiplicação, o que evidenciou o reconhecimento da ideia da multiplicação. Vejamos:

A6: A gente pegou o ***7 e colocou vezes 5*** dando o resultado de 35.
[...]
Pesquisadora: Por que vocês fizeram de multiplicar?
A2: A gente até pensou de fazer ***de mais 7 mais 7 até cinco***, mas a gente preferiu fazer a assim que a conta é menor.

Imagem 33: Protocolo de resolução item 1– Tarefa 4 – Grupo 2.



Justificativa do grupo 2: Nós fizemos a conta de 7 vezes 5 contando no dedo começamos a contar 7 cinco vezes que deu 35.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

Para se chegar à estratégia e ao resultado, os alunos fizeram algumas tentativas sem sucesso – como se pode observar pelas escritas apagadas no protocolo de resolução. Esse percurso de tentativas, dentro do grupo, é importante para o processo de aprendizagem, pois é na interação que a construção do conceito é consolidada. “É somente quando se dispõem a registrar as suas conjecturas que os alunos se confrontam com a necessidade de explicitarem as suas ideias e estabelecerem consensos e um entendimento comum quanto às suas realizações”. (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006, p. 33)

O grupo reconheceu o sentido da situação ao proceder a resolução pela multiplicação e reconhecer que o algoritmo da multiplicação se tornar mais ágil e sintético diante do processo de solução (Bigode; Frant, 2011): “A gente até pensou de fazer ***de mais 7 mais 7 até cinco***, mas a gente preferiu fazer a assim que a conta é menor.” (A2). Entretanto, resolveram o algoritmo pelo processo de contagem e demonstraram o não conhecimentos dos fatos básicos da multiplicação (tabuada). Há, apenas, evidências do reconhecimento da ideia da multiplicação.

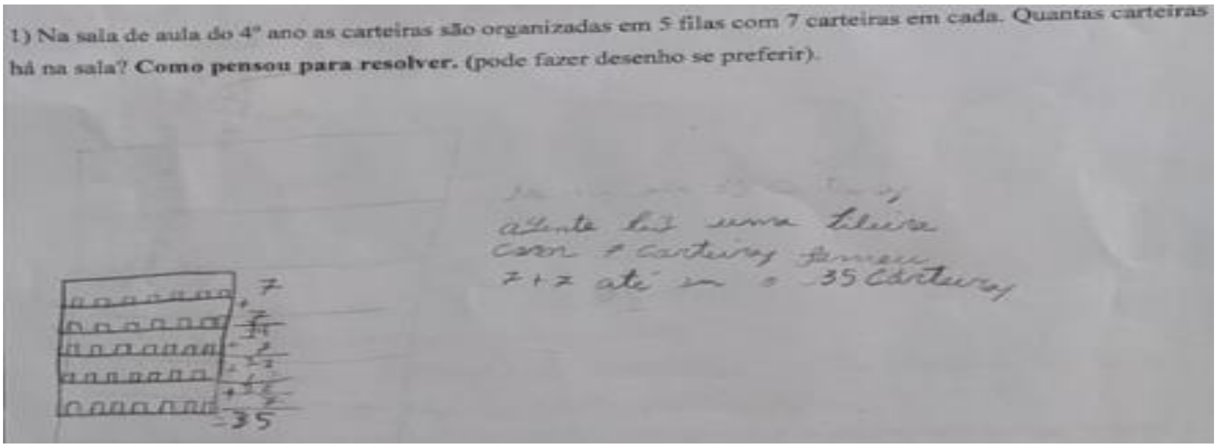
6.4.3 Item 1 – Grupo G3

1) Na sala de aula do 4º ano as carteiras são organizadas em 5 filas com 7 carteiras em cada. Quantas carteiras há na sala? **Resolva e explique como pensou para resolver (pode fazer desenho se preferir).**

O grupo procedeu a resolução por meio de uma tabela que representou as carteiras e somou, sem evidenciar a multiplicação, como alternativa de resolução:

Pesquisadora: Como vocês pensaram para encontrar esse resultado?
A1: A gente imaginou uma sala de aula e a gente fez as fileiras aqui (apontando para o esquema representado no protocolo de resolução) com 7 carteiras em cada e foi ***somando 7 mais 7 que deu 14 mais 7 que deu 23 mais 7 vinte oito mais 7 trinta e cinco.***

Imagem 34: Protocolo de resolução item 1 – Tarefa 4 – Grupo 3.



Justificativa do grupo 3: A gente fez uma fileira com 7 carteiras somou 7 + 7 até dá 35 carteiras.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

Os alunos utilizaram o conhecimento da realidade: “A gente imaginou uma sala de aula” (A1). Segundo Bigode e Frant (2011), o ensino da multiplicação deve privilegiar situações do universo dos alunos – sendo assim, eles tentaram visualizar a sala de aula como eles conhecem.

Desse modo, construíram uma representação com linhas e colunas com 5 fileiras por 7 colunas, o que resultou em 35. Esse tipo de resolução é tido com a maneira mais comum para essa situação, pois o objetivo era encontrar a relação das três medidas: duas conhecidas e uma não. (Vergnaud, 2009). Não há indícios de reconhecimento da ideia da multiplicação, visto que os alunos procederam com contagem de elementos.

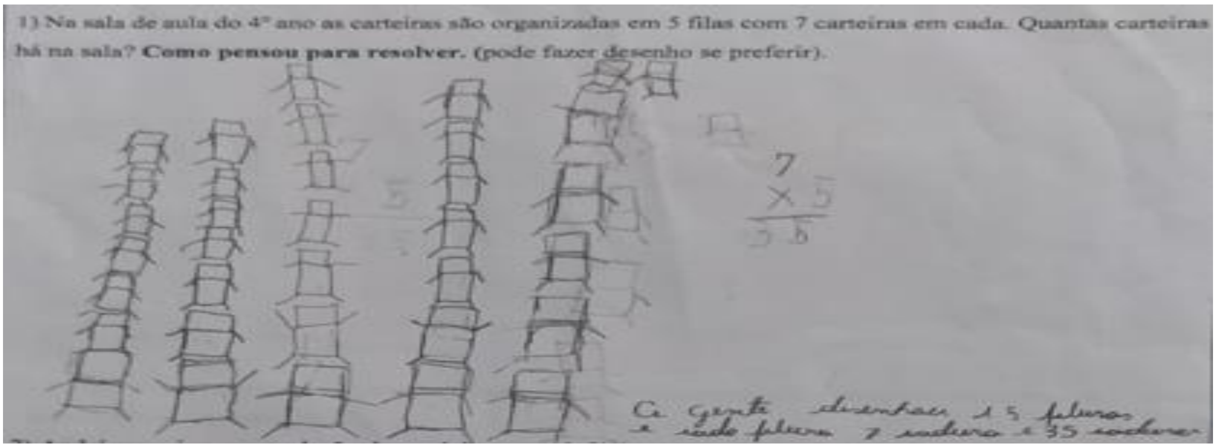
6.4.4 Item 1 – Grupo G4

1) Na sala de aula do 4º ano as carteiras são organizadas em 5 filas com 7 carteiras em cada. Quantas carteiras há na sala? **Resolva e explique como pensou para resolver (pode fazer desenho se preferir).**

Os alunos utilizaram representação com desenhos para facilitar o processo de contagem dos elementos e reconheceram a multiplicação com operação mais adequada para a resolução. Vejamos abaixo:

A1: Não. A gente colocou ***5 fileiras se colocou em cada uma das fileiras 7 cadeiras***.
[...]
Pesquisadora: Como vocês vão fazer para encontrar a quantidade de carteiras?
A1: ***Vou contar*** né!

Imagem 35: Protocolo de resolução item 1 – Tarefa 4 – Grupo 4.



Justificativa do grupo 4: A gente desenhou 5 fileiras e cada fileira 7 cadeira (s) e 35 cadeiras.

Fonte: A pesquisadora (2024).

Nesse caso, os alunos esbouçaram uma representação com “5 fileiras se colocou em cada uma das fileiras 7 cadeiras.” (A1) e também 35 carteiras pelo processo de contagem. Esse tipo de representação para essa situação é considerado, por Vergnaud (2009), a forma mais natural. Há índicos de reconhecimento da ideia da multiplicação, uma vez que utilizaram o algoritmo como uma maneira de solução, mas pelo diálogo notamos que os alunos ainda não dominam os fatos básicos da multiplicação: “Vou contar né!” (A1) – a ideia de multiplicação pode estar no entendimento do que seja a contagem.

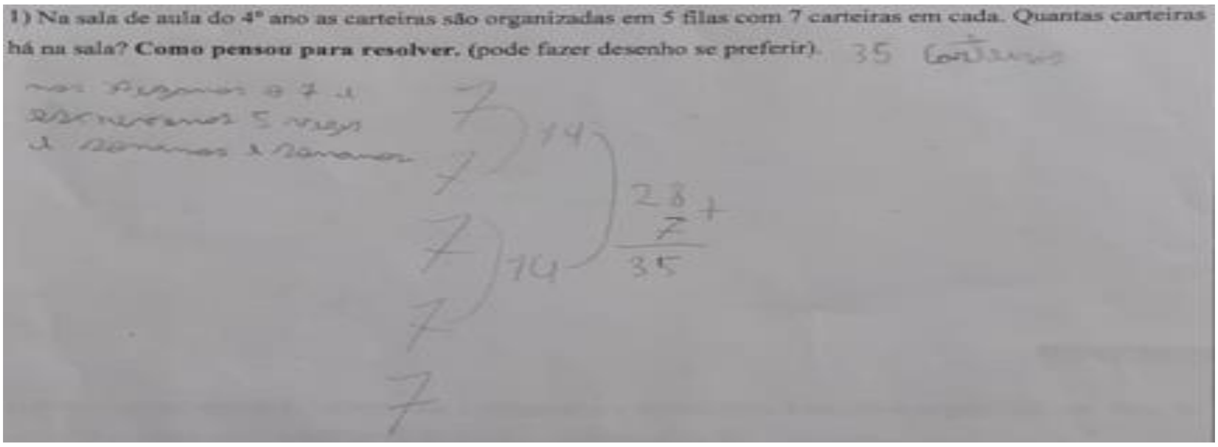
6.4.5 Item 1 – Grupo G5

1) Na sala de aula do 4º ano as carteiras são organizadas em 5 filas com 7 carteiras em cada. Quantas carteiras há na sala? **Resolva e explique como pensou para resolver (pode fazer desenho se preferir).**

Os membros do grupo procederam a resolução pela soma de parcelas iguais:

A1: A gente pegou o 7 e dividiu em 5 fileiras e contou eles, ***7 mais 7 quatorze, e aí 14*** (apontando para a outra adição do protocolo), ***somou os dois 14 que deu 28 e pegou o 7 que sobrou e somou mais ele e deu 35.***

Imagem 36: Protocolo de resolução item 1 – Tarefa 4 – Grupo 2.



Justificativa do grupo 5: Nós pegamos o 7 e escrevemos 5 vezes e somamos e somamos.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

O grupo entendeu o sentido e procedeu a resolução pela adição repetida, uma vez que se distancia da estratégia mais comum para esse tipo de situação, que é a tabela cartesiana. (Vergnaud, 2009). Porém por se tratar de uma situação que pertence ao cotidiano deles é bem provável que representaram mentalmente a sala de aula, visto que demonstraram o reconhecimento da ideia de multiplicação presente na situação. Mesmo sem esboçar o algoritmo de multiplicação, conforme a justificativa apresentada pelo grupo: “Nós pegamos o 7 e escrevemos 5 vezes e somamos”, o que indica a somatória da quantidade de carteiras com carteiras e não filas com filas.

6.4.6 Item 2 - Grupo G1

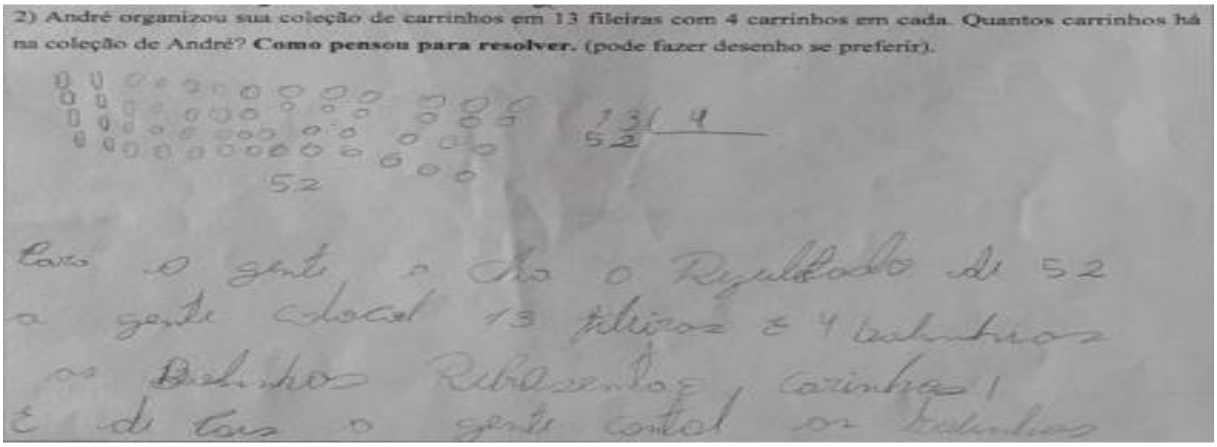
2) André organizou sua coleção de carrinhos em 13 fileiras com 4 carrinhos em cada. Quantos carrinhos há na coleção de André? **Resolva e explique como pensou para resolver (pode fazer desenho se preferir).**

O grupo não reconheceu a multiplicação com a operação apropriada para resolução, no entanto conseguiram encontrar o resultado correto com a representação pictórica. Tal como pode ser visto abaixo:

Pesquisadora: Como vocês chegaram ao resultado 52?
A7: A gente começou tentando fazer só a “continha” sem as fileiras, aí não “tava” dando certo. Então, a gente foi fazendo as fileiras, ***colocando 13 fileiras com 4 carrinhos***.
[...]

A7: A gente contou.

Imagem 37: Protocolo de resolução item 2 – Tarefa 4 – Grupo 1.


2) André organizou sua coleção de carrinhos em 13 fileiras com 4 carrinhos em cada. Quantos carrinhos há na coleção de André? **Como pensou para resolver.** (pode fazer desenho se preferir).

Justificativa do grupo 1: Para a gente acha (r) o resultado de 52 a gente colocou 13 fileiras e 4 bolinhas, as bolinhas representa (m) carrinhos! E depois a gente contou as bolinhas.

Fonte: A pesquisadora (2024).

Percebe-se a tentativa de resolver a situação pelo algoritmo da divisão, como não chegaram em um resultado ou não conseguiram resolver, decidiram tentar outra maneira: “A gente começou tentando fazer só a “continha” sem as fileiras, aí não “tava” dando certo.” (A7). É por meio dos registros de “suas conjecturas que os alunos se confrontam com a necessidade de explicitarem as suas ideias e estabelecerem consensos e um entendimento comum quanto às suas realizações.” (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006, p. 33). Entretanto, a partir do registro das bolinhas, para representar as carteiras, distribuídas em filas e colunas, os alunos conseguiram chegar ao resultado esperado pelo processo de contagem.

A representação pictórica demonstra que essa forma de resolução se constitui uma maneira mais fácil de resolução para esse tipo de situação, assim como Vergnaud (2009) assegura que esse esquema é a forma mais natural de representação. Não há evidência do reconhecimento da ideia de multiplicação envolvida na situação, uma vez que fizeram o algoritmo de divisão 13 ÷ 4 = 52.

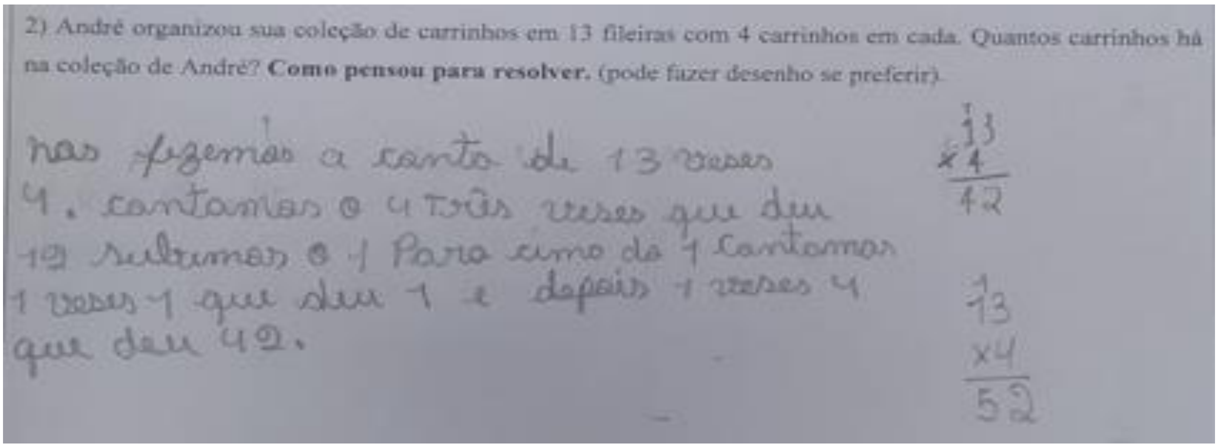
6.4.7 Item 2 – Grupo G2

2) André organizou sua coleção de carrinhos em 13 fileiras com 4 carrinhos em cada. Quantos carrinhos há na coleção de André? **Resolva e explique como pensou para resolver (pode fazer desenho se preferir).**

O grupo reconheceu o algoritmo da multiplicação com a maneira mais eficaz de resolução da situação, porém estão em processo de aprendizagem das regaras algorítmicas. Vejamos:

A2: Nós fizemos a conta de 13 vezes 4 que deu 42.
Pesquisadora: Como vocês resolveram a continha?
A1: 4 vezes 3 deu 12, aí puxou 1 pra cá (apontando pra ordem das dezenas), aí 1 vezes 1 é 1 e 1 vezes 4 é 4, aí dá 42.
Pesquisadora: Vamos repetir a “continha”.
A2: Vamos.
Pesquisadora: Vamos multiplicar o 4 pelo 3 que os dois são unidades. 4 vezes 3?
A1: Doze
Pesquisadora: O 12 é formado pelo 10 da dezena mais...
A1: Dois
Pesquisadora: Dois da unidade. Vamos deixar a unidade aqui na ordem da unidade e dezena vai para a “casa” da dezena. Agora, não podemos somar as dezenas antes de multiplicar, primeiro multiplica depois soma. Vamos fazer assim: 4 unidades vezes 1 dezena?
A1: Quatro
Pesquisadora: Quatro dezenas mais uma dezena que veio do 12.
A2: Deu 50.
Pesquisadora: 50, as 5 dezenas.

Imagem 38: Protocolo de resolução item 2 – Tarefa 4 – Grupo 2.



Justificativa do grupo 2: Nós fizemos a conta de 13 vezes 4. Contamos o 4 três vezes que deu 12 e subimos o 1 para cima do 1, contamos o 1 vezes o 1 que deu 1 e depois o 1 vezes o 4 que deu 42.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

Observamos que o grupo afastou-se do procedimento da tabela cartesiana (Vergnaud, 2009) e apostou no algoritmo da multiplicação como meio mais apropriado ou que proporciona mais agilidade na resolução da situação (Bigode; Frant, 2011). Porém não dominam as regras do algoritmo da multiplicação com reserva, em que a dezena do número 12 deveria ser acrescida ao produto da ordem das dezenas e não somado antes de multiplicar. Entendemos que os alunos estão em processo de construção da aprendizagem do algoritmo de multiplicação com reserva, pois “desde os inícios da aprendizagem da multiplicação, o problema da reserva inevitavelmente aparece.” (Vergnaud, 2009, p.185)

O professor precisa estar atento ao trabalho que acontece em sala de aula para garantir que a aprendizagem seja construída, pois somente após o *feedback* da pesquisadora para o grupo é que se chegaram à resposta esperada. Logo, o *feedback* é importante “para activar os processos cognitivos e metacognitivos dos alunos, que, por sua vez, regulam e controlam os processos de aprendizagem.” (Fernandes, 2008, p. 356)

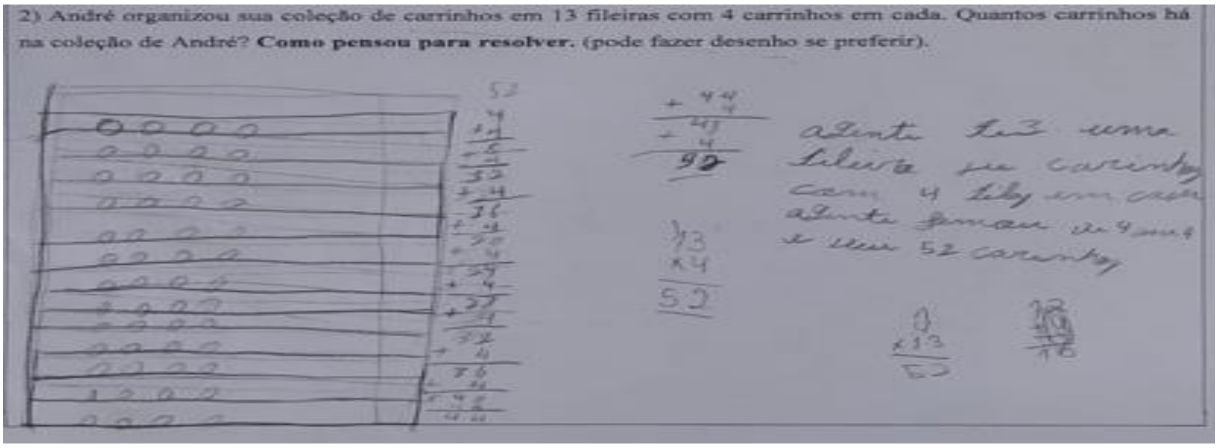
6.4.8 Item 2 – Grupo G3

2) André organizou sua coleção de carrinhos em 13 fileiras com 4 carrinhos em cada. Quantos carrinhos há na coleção de André? **Resolva e explique como pensou para resolver (pode fazer desenho se preferir).**

O grupo resolveu a situação ao usar a representação de tabela e o algoritmo de multiplicação:

A2: A gente desenhou ***13 fileiras cada uma das fileiras a gente botou 4 carrinhos*** e foi ***somando 4 + 4***. A gente também podia fazer de vezes que dá a mesma coisa.
[...]
A2: A gente podia fazer de vezes que ia dá a mesma coisa. ***13 vezes 4*** ia dá o mesmo resultado mesmo sendo de outra forma, porque vezes é a mesma coisa de somar.
Pesquisadora: Então, como seria a multiplicação?
A2: Seria ***13 vezes 4*** (o aluno esquematiza o algoritmo), vou contar o ***3 quatro vezes dá 12,*** vou colocar o 2 (colocou na ordem das unidades no resultado do algoritmo) aqui e subir o 1 (colocando na ordem das dezenas), 4 com 1 que ia dá o 5, aliás que dá 4 com o 1 que veio do 12 dá 5, por isso que falei que é a mesma coisa que somar tudo.
Pesquisadora: Você multiplicou 13 vezes 4, o 13 está representando fileiras ou carrinhos?
A1: As 13 fileiras que ele guarda os carrinhos.
Pesquisadora: Então, o 13 está representando as fileiras, quando você faz 13 vezes 4 você encontrou 52 fileiras e não 52 carrinhos, porém o sentido do problema não é esse, por que a pergunta é quantos carrinhos há na coleção de André?
A2: Ah...
Pesquisadora: Então, para encontrar a quantidade de carrinhos como seria a multiplicação?
A2: É ao contrário.
Pesquisadora: Como seria?
A2: 4 vai em cima e o 13 vai embaixo (representando) ***3 vezes 4 que dá 12***. (foi colocando os números conforme está no protocolo de resolução).
[...]
Pesquisadora: Vamos recapitular o pensamento. Quando vocês multiplicam 13 vezes 4 vocês estão multiplicando fileiras, encontraram 52 fileiras, mas perguntava quantas fileiras?
A2: Não. Quantos carrinhos.
Pesquisadora: Então, para encontrar a quantidade de carrinhos, como é a multiplicação correta.
A2: ***4 vezes 13***, por cada fileira de 4 carrinhos.

Imagem 39: Protocolo de resolução item 2 – Tarefa 4 – Grupo 3.



Justificativa do grupo 3: A gente fez uma fileira de carrinhos com 4 filas em cada, a gente somou em 4 e deu 52 carrinhos.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

O grupo apresentou duas estratégias de resolução, em forma de tabela e em algoritmo. Vergnaud (2009) aponta que "é indispensável fazer as crianças observarem essa pluralidade de caminhos para evitar que elas imaginem haver uma, e somente uma solução". (p. 282). Os alunos representaram a situação por meio de um retângulo e fez a distribuição dos carrinhos, representados pelas bolinhas e realizou a soma, o que evidenciou que compreenderam o significado da situação. Segundo Vergnaud (2009), o meio de representação usado pelos alunos é o mais comum para proceder com a resolução desse tipo de situação.

Os alunos relacionaram o sentido da situação a operação de multiplicação como um processo mais ágil para a solução (Bigode; Frant, 2011): "A gente também podia fazer de vezes que dá a mesma coisa". (A2) No entanto, ao proceder com o procedimento do algoritmo, vimos que eles se preocupavam mais com o resultado do que com o sentido, pois ao multiplicar as quatro unidades com a dezena (do 13) o resultado em 4 dezenas é somar com a dezena das doze unidades. Só que o aluno não soube explicar o procedimento: "4 com 1 que ia dá o 5, aliás que dá 4 com o 1 que veio do 12 dá 5." (A2). Isso evidenciou que o grupo ainda não compreendeu o Sistema de Numeração Decimal.

Portanto, o resultado correto do algoritmo se deu em função da representação pictórica com o processo de adição reiterada. Após o *feedback* da pesquisadora "o 13 está representando as fileiras, quando você faz 13 vezes 4 você encontrou 52 fileiras e não 52 carrinhos, porém o sentido do problema não é esse, por que a pergunta é quantos carrinhos há na coleção de André?". Nesse sentido que "A avaliação é deliberadamente organizada em estreita relação com um f*eedback* [...] tendo em vista apoiar e orientar os alunos no processo de aprendizagem” (Fernandes, 2008, p. 356). Houve o reconhecimento que a troca dos fatores no algoritmo de multiplicação muda o sentido da situação, mesmo que o resultado seja o mesmo.

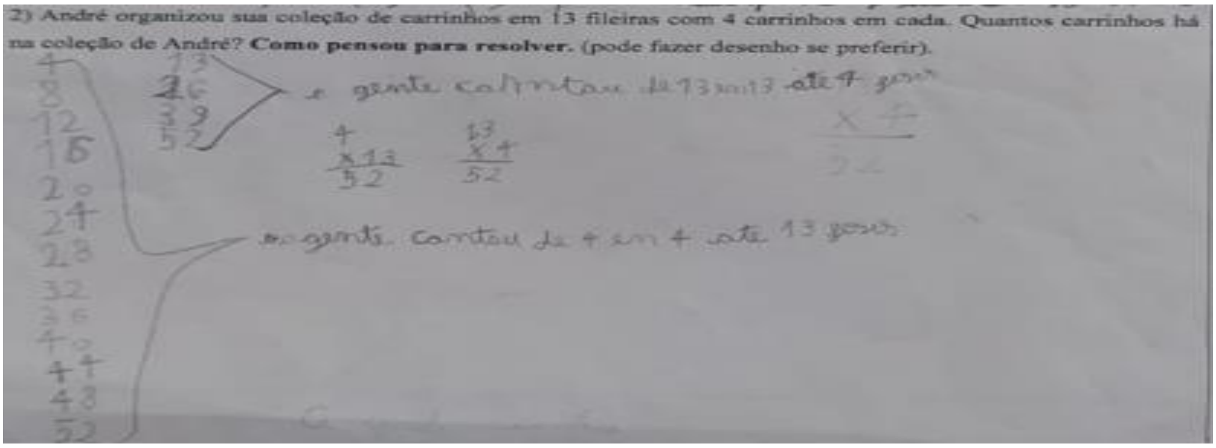
6.4.9 Item 2 – Grupo G4

2) André organizou sua coleção de carrinhos em 13 fileiras com 4 carrinhos em cada. Quantos carrinhos há na coleção de André? **Resolva e explique como pensou para resolver (pode fazer desenho se preferir).**

Os alunos resolveram a situação por adição repetida e associaram as adições com a multiplicação. Contudo, não compreendiam que, na multiplicação, a mudança dos fatores não altera o resultado numérico e sim o sentido da situação. Conforme descrito abaixo:

A6: ***Eu contei, fui colocando 4 e depois somando 4 com 8 a fui somando, somando até*** que deu isso. (apontando para o resultado do protocolo)
[...]
A6: ***É aqui eu somei de 13 até 4.*** **(**se referindo que somou 13 quatro vezes). Porque não importa o que eu faça, posso fazer de ***4 vezes o 13 ou 13 vezes 4***.
[..]
Pesquisadora: Quando você soma 4 mais 4 mais 4..., você está somando carrinhos ou fileira?
A6: Carrinhos.
Pesquisadora: E quando você soma 13 mais 13 mais 13 mais 13, 13, 26, 39 e 52 você está somando carrinhos ou fileiras?
A6: Fileiras.
Pesquisadora: Então, agora vamos retornar a pergunta. Quantos carrinhos há na coleção de André? Quando você encontrou 52 ao somar 13 mais 13... você encontrou 52 carrinhos ou fileiras?
A6: Fileiras.
[...]
Pesquisadora: Então, para vocês encontrar a quantidade de carrinhos o correto é somar fileiras com fileiras ou carrinhos com carrinhos?
A6: Carrinho.
Pesquisadora: Embora o resultado seja 52, o número, porém a pergunta é quantos carrinhos. O correto é somar carrinhos com carrinhos.
A6: O correto é deixar só está. (apontando para o primeiro esquema)

Imagem 40: Protocolo de resolução item 2 – Tarefa 4 – Grupo 4.



Justificativa do grupo 4: A gente contou de 13 em 13 até 4 vezes. A gente contou de 4 4m 4 até 13 vezes.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

O grupo decidiu por longas adições reiteradas verticalmente de duas maneiras: na primeira, cada parcela representa a quantidade de carrinhos em cada fileira e na segunda, cada parcela representa a quantidade de fileiras. Essa não é uma estratégia natural para resolução desse tipo de situação, para Vergnaud (2009) uma maneira mais comum de resolução é a utilização da tabela cartesiana. No entanto, o procedimento empregado pelo grupo na resolução é uma estratégia muito comum nos contextos de sala de sala de aula, adição de parcelas iguais.

Fica evidente que, inicialmente, a propriedade comutativa da multiplicação foi aplicada no plano numérico e não no plano dos significados: “Porque não importa o que eu faça, posso fazer de 4 vezes o 13 ou 13 vezes 4.” (A6). Esse encontro evoca em Vergnaud (2009, p.184) “no plano numérico permite realmente inverter o papel do multiplicador e o do multiplicando.” Possivelmente, esse entendimento da propriedade comutativa esteja associado à concepção de professores e, consequentemente, os alunos replicam o que aprenderam.

No entanto, para que os alunos pudessem compreender o que esses números representam foi necessário a distribuição de *feedbacks* em função de levá-los a entender que o que não muda é o resultado numérico, mas o sentido não permanece o mesmo nos dois procedimentos adotados: “Quando você soma 4 mais 4 mais 4..., você está somando carrinhos ou fileira? ... “E quando você soma 13 mais 13 mais 13 mais 13, 13, 26, 39 e 52 você está somando carrinhos ou fileiras? (Pesquisadora).

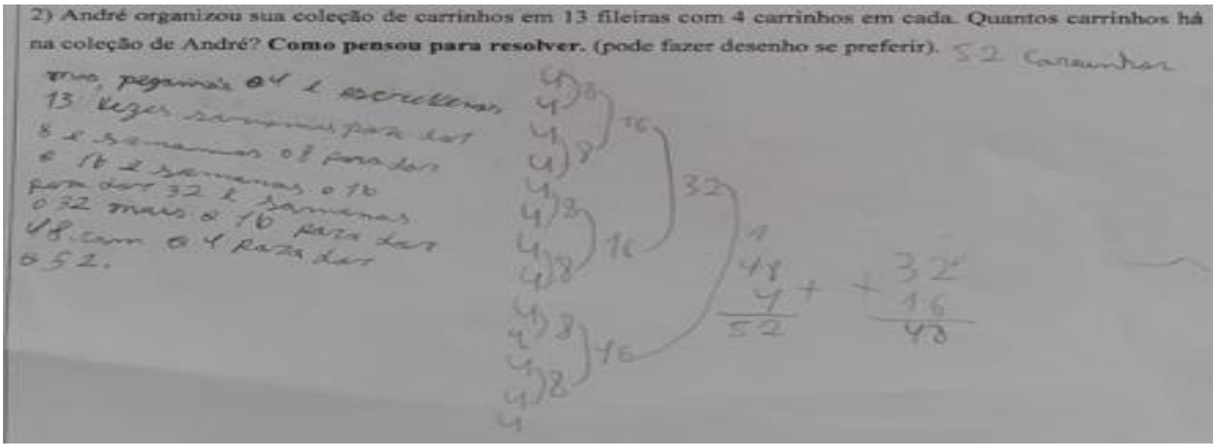
6.4.10 Item 2 – Grupo G5

2) André organizou sua coleção de carrinhos em 13 fileiras com 4 carrinhos em cada. Quantos carrinhos há na coleção de André? **Resolva e explique como pensou para resolver (pode fazer desenho se preferir).**

O grupo determinou o resultado por meio da adição reiterada:

A1: A gente imaginou a prateleira com ***4 carrinho(s) e somou***, quando a gente ***somou a primeira vez deu 48 e a gente observou que tinha um 4 faltando e somou 48 mais 4.***

Imagem 41: Protocolo de resolução item 2 – Tarefa 4 – Grupo 5.



Justificativa do grupo 5: Nós pegamos o 4 e escrevemos 13 vezes somamos pra dar 8 e somamos o 8 para dar 16 e somamos 16 para dar 32 e somamos o 32 mais 16 para dar 48 com 4 para dar o 52.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

Segundo Bigode e Frant (2011), esse tipo de situação pertence a contexto reais dos alunos e uma das estratégias pode ser a tentar visualizar a situação: “A gente imaginou a prateleira” (A1). Percebemos que o grupo compreendeu o significado da situação ao utilizar a adição repetida, porque relacionou cada parcela à quantidade de carinhos e associaram ao pensamento multiplicativo “13 vezes” (justificativa). Apesar dessa estratégia não ser a mais comum para resolver esse tipo de situação (Vergnaud, 2009).

6.4.11 Fechamento e considerações sobre a tarefa 4

O objetivo da tarefa foi estabelecer uma relação entre as medidas conhecidas (filas x carteiras, fileiras x carrinhos) cujo resultado é o produto da relação dessas medidas, ou melhor, resolver as situações com ideias de organização retangular com diferentes estratégias. Com a realização dessa tarefa, verificamos que: apenas o grupo 3 no item 1 não evidenciou o reconhecimento da multiplicação e que todos os grupos chegaram ao resultado esperado ao utilizar diferentes procedimentos; houve mais a utilização de representações pictórica do que numérica ou a associação das duas; o esquema de tabela cartesiana foi o procedimento mais comum entre os grupos, pois é a forma mais natural para a resolução destas situações. (Vergnaud, 2009); determinaram a quantidade de elementos pelo processo de contagem e não pela multiplicação; houve discussão sobre a propriedade comutativa da multiplicação com dois grupos, além do valor posicional.

Ao finalizar a tarefa nos grupos, passou-se para as apresentações orais, anexo B, em que os alunos puderam expor seus procedimentos e respostas ao confrontar suas ações com as colegas, uma vez que perceberam, assim, novas possibilidades de resolução. O que também pode reorganizar os raciocínios equivocados quanto ao conceito de multiplicação com ideia de organização retangular.

Feito isso, os alunos realizaram a autoavaliação da tarefa 4, apêndice I. De acordo com as informações do quadro 10, quase 45% dos alunos relataram que conseguiram resolver com facilidade.

Quadro 10: Autoavaliação da Tarefa 4

Quantidade de alunos participantes	Consegui facilmente	Consegui com dificuldades	Ainda não consegui
29 alunos	13 alunos	16 alunos	

Fonte: Pesquisadora, 2024.

Conforme o exposto no quadro acima, percebemos que é preciso propor mais esse tipo de situação e que, provavelmente, ainda não é muito explorada em contexto de sala de aula. O que corrobora com Bigode e Frant (2011) de que a ideia de adições sucessivas é a mais difundida.

6.5 Tarefa 5: Regularidades numéricas de múltiplos

Essa tarefa é do tipo exploratório-investigativa que teve por objetivo explorar regularidades numéricas para que os alunos reconhecessem, ainda que espontaneamente, os diferentes tipos de padrões de repetições nos múltiplos de 5 e 6 para a obtenção de regularidades e enunciassem, em linguagem natural, uma regra geral.

Figura 9: Tarefa 5.

1) Escreva em coluna os 10 primeiros resultados da multiplicação do 5. Repara nos dígitos das unidades e das dezenas. Encontras algumas regularidades? (tarefa com adaptação de linguagem. Ponte, 2010, p.15) 2) Investiga o que acontece com os 20 primeiros resultados da multiplicação do 6. Reparando os dígitos das unidades. (tarefa adaptada de Ponte, 2010, p.15)

Fonte: A pesquisadora, 2023.

A realização da tarefa aconteceu no dia (26) vinte e seis do mês de fevereiro, sendo esse o quinto encontro, das 7:00h às 9h30min. Devido ser uma tarefa investigativa os alunos levaram muito tempo para levantar as hipóteses e formular conjecturas. Vinte e três (23) alunos participaram da atividade, eles foram organizados em grupos, nos quais permaneceram os mesmos componentes da tarefa anterior, cuja organização final ficou:[22] três (3) grupos com quatro (4) alunos em cada; um (1) grupo com cinco (5) alunos; e um (1) grupo com seis (6). Após a entrega da cópia da tarefa, começaram a exploração dela.

Durante os momentos de investigação, foi feito um momento coletivamente para esclarecer aos alunos o significado das palavras "Coluna", "Regularidade" e "Dígito", pois são palavras que não fazem parte do cotidiano deles, apesar que quando começou a discussão sobre a palavra "Dígito" muitos relacionaram ao ato de digitar, especialmente, no celular. Depois os grupos iniciaram o desenvolvimento da tarefa. No decorrer da dela, foi observado que muitos grupos não conseguiram resolvê-la satisfatoriamente. Então, ao final a pesquisadora promoveu um momento coletivo com discussões em que ela anotou no quadro branco as observações apontadas pelos grupos a fim de, com isso, ajudar a turma a encontrar as regularidades numéricas, ver anexo C.

A seguir serão apresentadas as estratégias e análises das resoluções dos grupos.

6.5.1 Item 1 – Grupo G1

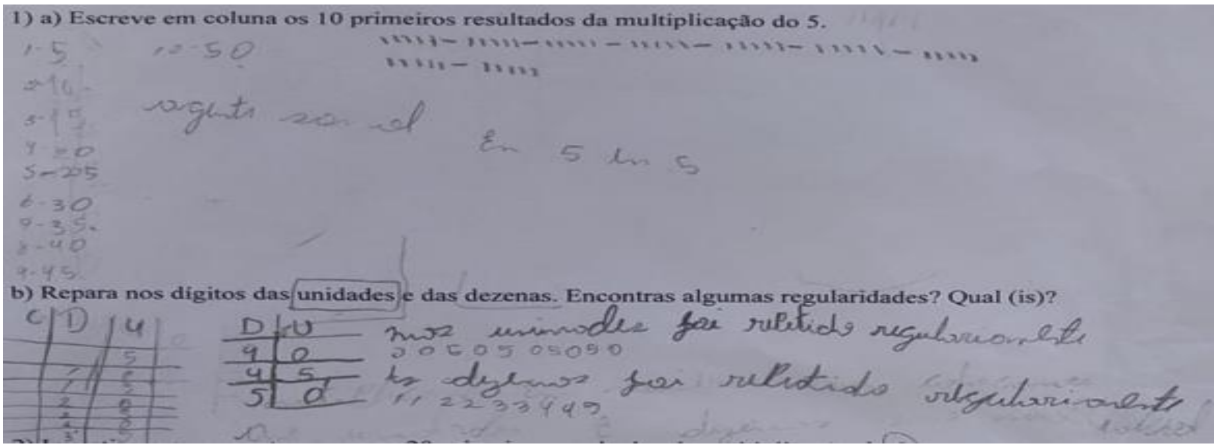
1) a) Escreve em coluna os 10 primeiros resultados da multiplicação do 5. b) Repara nos dígitos das unidades e das dezenas. Encontras algumas regularidades? Qual (is)? (tarefa com adaptação de linguagem. Ponte, 2010, p.15)

[22] A organização grupal ficou desta forma, pois faltaram alguns integrantes de alguns grupos e queríamos que permanecessem sempre os mesmos integrantes nos grupos.

O grupo encontrou padrão de repetição para as unidades e padrão de crescimento para as dezenas. Vejamos:

Pesquisadora: Aqui tem **5, 10, 15, 20, 10, 30....**
A2: Ocha!!!
Pesquisadora: O que foi?
Pesquisadora: Tem algo errado ou está tudo certo?
A2: Está certo.
Pesquisadora: Olham com mais cuidado, tem algo que não está correto e alguns de vocês já perceberam.
A2: O 10, tem que ser o 25.
Pesquisadora: Por que tem que ser 25
A2: Porque está multiplicando 5 vezes 5.
[...]
Pesquisadora: Então, a partir de agora vocês vão olhar somente os resultados e nos resultados vocês vão olhar os dígitos das unidades somente as unidades de cada número e depois as dezenas de cada número. Vocês colocaram que o 5 e 1 são dígitos das unidades. Nos resultados onde tem a unidade 1?
A7: No 10
Pesquisadora: E o 1 do número dez está na ordem das unidades?
A7: Acho que sim.
[...]
Pesquisadora: Então, vocês vão reparar os números que estão na ordem das unidades e das dezenas. Todos sabem o que é unidade e dezena?
Todos: Sim.
Pesquisadora: Vamos observar o resultado do 5 vezes 7 o 35, qual digito está na ordem das dezenas?
A5: O 5
A3: O 3
Pesquisadora: É o 3 ou o 5?
A2: Eu acho que é o 5.
Pesquisadora: O que é dezena:
A7: Significa o número 10.
Pesquisadora: Então, a cada 10 tem uma dezena. Agora olham os resultados que são o 5, 10 até o 50.
[...]
Pesquisadora: Agora que vocês separam os dígitos dos resultados em unidade e dezena, vão ver, por exemplo no 10 qual dígito ficou na ordem das unidades?
A7: 0
Pesquisadora: No 15 qual dígito está na unidade?
A7: 5
[...]
Pesquisadora: O que aconteceu só no dígito das unidades? Primeiro vocês têm qual dígito?
A2: 5
Pesquisadora: Depois?
A7: 0
Pesquisadora: Depois?
A3: 5
[...]
Pesquisadora: O que aconteceu? (silêncio) Quais números que aparecem nas unidades?
A2: 5,0,5,0,5,05,0...
Pesquisadora: Isso é uma regularidade? Acontece com frequência aí? Primeiro o 5 depois o 0, depois o 5, depois o 0 e assim até terminar?
A7: Sim.
[...]
Pesquisadora: O que aconteceu com os dígitos das dezenas?
A3: 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5

Imagem 42: Protocolo de resolução item 1 – Tarefa 5 – Grupo 1.



Regularidade do grupo 1: Nas unidades foi repetido regularmente 5, 0, 5, 0, 5, 0, 5, 0, 5, 0. As dezenas foi repetido regularmente 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5

Fonte: A pesquisadora, 2024.

Nota-se nos diálogos que o grupo apresentou dificuldades com a tarefa e uma delas está relacionada às características do Sistema de Numeração Decimal, uma vez que as discussões se encaminharam para o estabelecimento das ordens: unidade e dezena. Para obter os múltiplos de 5, o grupo fez uso da adição: “a gente somou em 5 em 5” e utilizaram a representação de “palitos” com estratégia de cálculo. Portanto, não reconhecem os fatos básicos da multiplicação.

Para o desenvolvimento dessa tarefa foi necessário a intervenção da pesquisadora em vários momentos, pois esse tipo de tarefa (exploratório/investigativo) não é comum nos contextos de sala de aula em Matemática. “O professor precisa estar atento a todo esse processo de formulação e teste de conjecturas, para garantir que os alunos vão evoluindo na realização de investigações.” (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006, p. 36) Assim, o *feedback* foi no sentido de “colocar questões aos alunos que os estimulem a olhar em outras direções e os façam refletir sobre aquilo que estão a fazer.” (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006, p. 36).

O grupo estabeleceu uma regularidade numérica e identificou padrões de repetição para as unidades “Nas unidades foi repetido regularmente 5, 0, 5, 0, 5, 0, 5, 0, 5, 0” e para as dezenas um padrão de crescimento “As dezenas foi repetido regularmente 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5”. Conforme as justificativas do grupo, os alunos perceberam que seria possível definir outros termos da sequência ao seguir o mesmo padrão.

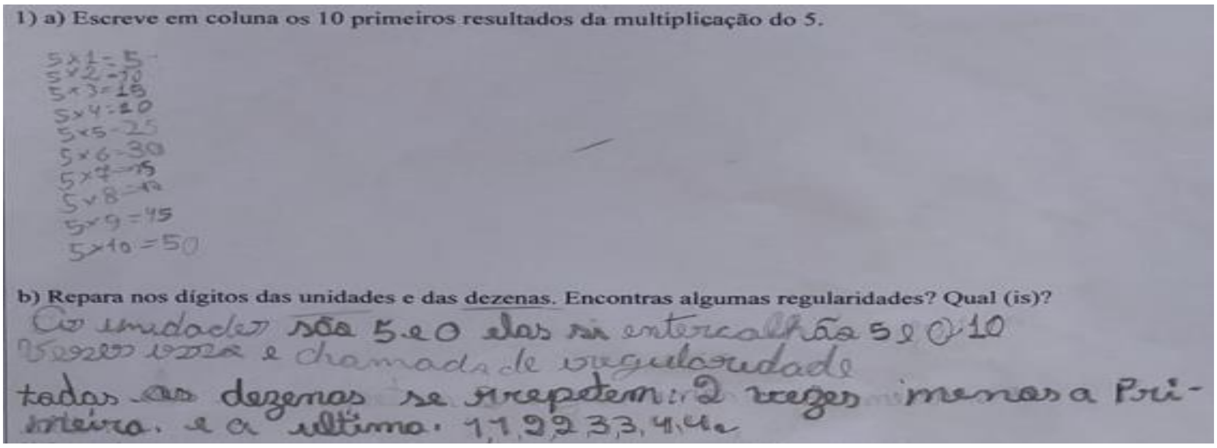
6.5.2 Item 1 – Grupo G2

1) a) Escreve em coluna os 10 primeiros resultados da multiplicação do 5.
b) Repara nos dígitos das unidades e das dezenas. Encontras algumas regularidades? Qual (is)? (tarefa com adaptação de linguagem. Ponte, 2010, p.15)

O grupo encontrou padrão de repetição para as unidades e padrão de crescimento para as dezenas. Contudo, não definiram se o padrão crescimento poderia ser aplicado em outros termos da sequência de múltiplos de 5. Conforme abaixo:

Pesquisadora: Como vocês estão fazendo?
A2: 5 vezes 1, 5 vezes 2, assim por diante.
A3: Nós fez (fizemos) 5 vezes 1, 5 vezes 2 até dá o resultado 50.
[...]
Pesquisadora: Agora reparam os resultados e identifiquem os dígitos das unidades e dezenas. Por exemplo, no número 45 qual é o dígito da unidade?
A2: O primeiro, 4.
Pesquisadora: O 4 representa o 4 ou qual outro número.
A2: A dezena.
Pesquisadora: Se são 4 dezenas, o 4 vale quanto nesse lugar?
A2: 40
[...]
Pesquisadora: Qual o dígito da unidade no 45?
A6: 5.
[...]
A2: o 0 e o 5 estão repetindo aqui em tudo.
Pesquisadora: E eles repetem em que ordem?
A2: Primeiro o 5, depois o 0, de novo o 5, 0, 5, 0, 5, 0, 5, 0.
Pesquisadora: Agora, observe os dígitos das dezenas.

Imagem 43: Protocolo de resolução item 1 – Tarefa 5 – Grupo 2.


1) a) Escreve em coluna os 10 primeiros resultados da multiplicação do 5.
5x1=5
5x2=10
5x3=15
5x4=20
5x5=25
5x6=30
5x7=35
5x8=40
5x9=45
5x10=50
b) Repara nos dígitos das unidades e das dezenas. Encontras algumas regularidades? Qual (is)?
As unidades são 5 e 0 elas se intercalhão 5 e 0 10
vezes isso e chamado de iregularidade
todas as dezenas se repetem 2 vezes menos a Pri-
meira. e a última. 1,1,2,2,3,3,4,4.

Regularidade do grupo 2: As unidades são 5 e 0 elas se intercalam 5 e 0 dez vezes, isso é chamado de (i)regularidade. Todas as dezenas se repetem 2 vezes menos a primeira e a última 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

Os alunos conseguiram compreender o comando da tarefa e determinaram os múltiplos de 5 (a tabuada), o que pode estar relacionado o trabalho da primeira etapa de uma atividade exploratória/investigativa (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006). Houve reconhecimento das ordens do Sistema de Numeração Decimal.

Ponte (2010) aponta que nesse tipo de tarefa, “o professor fornece *Feedback*, fechando o ciclo, quer confirmando ou rejeitando a resposta dada... outros padrões de discurso que podem ser seguidos na sala de aula”. Assim, o *feedback* da pesquisadora para o grupo foi de conduzir a realização da tarefa a fim de leva-los à reflexão das regularidades.

O grupo estabeleceu uma regularidade numérica e identificaram padrões de repetição para as unidades: “As unidades são 5 e 0 elas se intercalam 5 e 0 dez vezes, isso é chamado de (i)regularidade”. E para as dezenas um padrão de crescimento: “Todas as dezenas se repetem 2 vezes menos a primeira e a última 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4”. Só que não foi possível identificar qual seria a primeira dezena que não se repetiu. Conforme a justificativa/regularidade do grupo, os alunos não perceberam que seria possível definir outros termos da sequência ao seguir o mesmo padrão, “menos a primeira e a última”.

6.5.3 Item 1 – Grupo G3

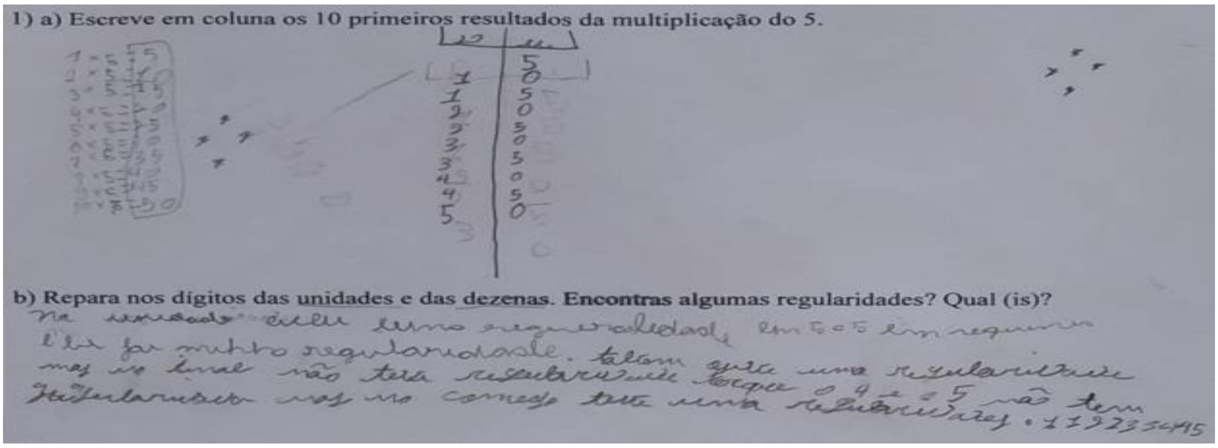
1) a) Escreve em coluna os 10 primeiros resultados da multiplicação do 5. b) Repara nos dígitos das unidades e das dezenas. Encontras algumas regularidades? Qual (is)? (tarefa com adaptação de linguagem. Ponte, 2010, p.15)

O grupo encontrou padrão de repetição para as unidades, mas não conseguiu definir um padrão de crescimento para as dezenas:

Pesquisadora: O que estão fazendo?
A1: Estamos fazendo a tabuada.
[...]
Pesquisadora: Observem nos resultados os dígitos das unidades e das dezenas. Vocês sabem o que é unidade e dezena?
A1: A unidade é de 9 a 0 e dezena é de 10 a 90
A2: É de 90 até 10.
Pesquisadora: Então, 193 não tem dezena?
A1: Tem
Pesquisadora: Qual?
A2: O 1 vale a centena, depois o 9 que vale a dezena e três que vale a unidade.
[...]
Pesquisadora: Agora reparem nos resultados os dígitos das unidades e das dezenas. Por exemplo, no número 10, qual o dígito das unidades?
A1: 0
A2: Agora eu entendi.
Pesquisadora: O que você entendeu:

A2: Vou pegar as unidades e colocar de um lado e as dezenas do outro.
[..]
Pesquisadora: O que aconteceu na ordem das unidades?
A2: Teve uma sequência de 5 zero, 5 zero, 5 zero, 5 zero.

Imagem 44: Protocolo de resolução item 1– Tarefa 5 – Grupo 3.



Regularidade do grupo 3: Na unidade houve uma regularidade em 5, 0 ,5 em sequência e (essa foi minha regularidade). Tabem (Também) (h)ouve uma regularidade, mas no final não teve regularidade porque o 4 e o 5 não tem regularidade, mas no começo teve uma regularidade 1,1,2,2,3,3,4,4,5.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

No início do diálogo, percebemos que o grupo relacionou o comando da tarefa com a tabuada o que estabeleceu os múltiplos por meio dos fatos básicos da multiplicação. Somente a partir do *feedback*, os alunos compreenderam o sentido da segunda parte da tarefa: “Agora eu entendi.” (A2). A compreensão das ordens numéricas ainda é limitada para eles: “a unidade é de 9 a 0 e dezena é de 10 a 90” (A1). Porém, depois do *feedback*, conseguiram identificá-las nos resultados da multiplicação do 5.

Para Ponte (2010, p. 24), na aprendizagem exploratória “Os alunos são encorajados a discutir com os colegas”. Desse modo, os alunos determinaram a regularidade de repetição para as unidades, porém a definição da sequência de crescimento para as dezenas está confusa. No entanto, é possível verificar que eles encontraram a regularidade de crescimento, mesmo sem perceber que essa repetição pode ser aplicada em outros termos da sequência dos múltiplos de 5: “mas no final não teve regularidade porque o 4 e o 5 não tem regularidade.” (justificativa)

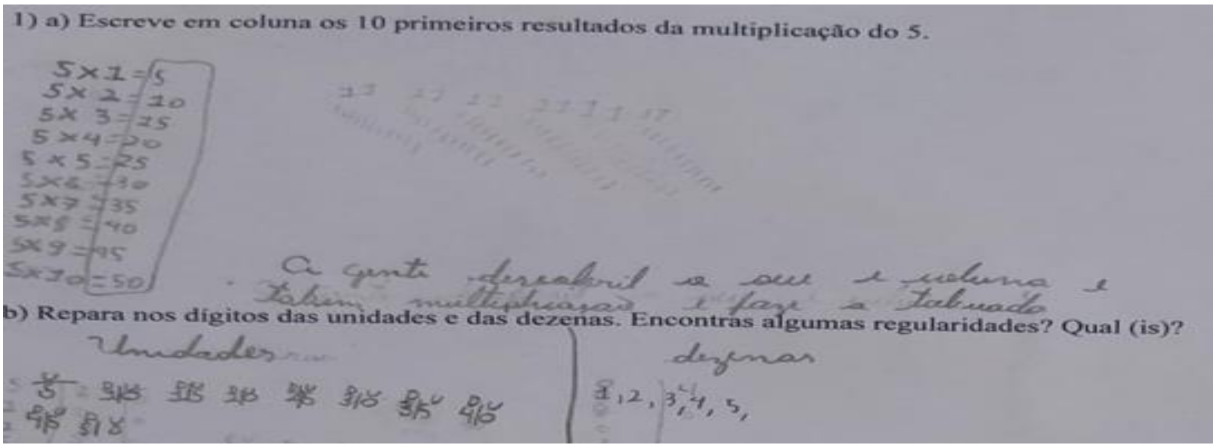
6.5.4 Item 1 – Grupo G4

1) a) Escreve em coluna os 10 primeiros resultados da multiplicação do 5. b) Repara nos dígitos das unidades e das dezenas. Encontras algumas regularidades? Qual (is)? (tarefa com adaptação de linguagem. Ponte, 2010, p.15)

O grupo não expressou, na linguagem natural, os padrões de repetições e de crescimento propostos pela tarefa. Tal como visto abaixo:

Pesquisadora: Vocês sabem o que é dezena e unidade?
A1: Mais o menos.
[...]
Pesquisadora: O que acontece com os dígitos das unidades? o que acontece sempre?
A1: Sempre vai aparecer o 0.
Pesquisadora: Sempre! Em todos os resultados?
A1: Não. Tipo... em alguns.

Imagem 45: Protocolo de resolução item 1 – Tarefa 5 – Grupo 4.



Regularidade do grupo 4: A gente descobriu o que é coluna e tabem (também) multiplicação e faze (fizemos) a tabuada.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

É possível observar um outro esquema (apagado) em forma de "palitos" com números foi outra tentativa sem sucesso de encontrar os fatos básicos da multiplicação do 5. Ao levar em consideração a alternativa b, o grupo não compreendeu o que solicitava a tarefa, o que pode ser por causa de falhas na primeira etapa da tarefa. (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006)

No diálogo, nota-se a tentativa em encontrar as regularidades das unidades "Sempre vai aparecer o 0. [...] Não. Tipo... em alguns" (A1), enquanto que no protocolo, apenas distribuiu os resultados segundo a ordem da unidade e dezena. Por várias vezes, durante o trabalho no grupo, a pesquisadora manteve o diálogo com apontamentos, uma vez que a função do professor nesse tipo de tarefa é de “conduzir a discussão colectiva” (Ponte, *et al*, 1998)

Os *feedbacks* não foram suficientes para o grupo desenvolver o pensamento em função de observar as regularidades, pois ao definir as regularidades das dezenas apenas listou a sequência de 1 a 5. Portanto, o grupo não reconheceu, de modo explícito, as regularidades de padrões de repetições para as unidades e nem o padrão de crescimento das dezenas.

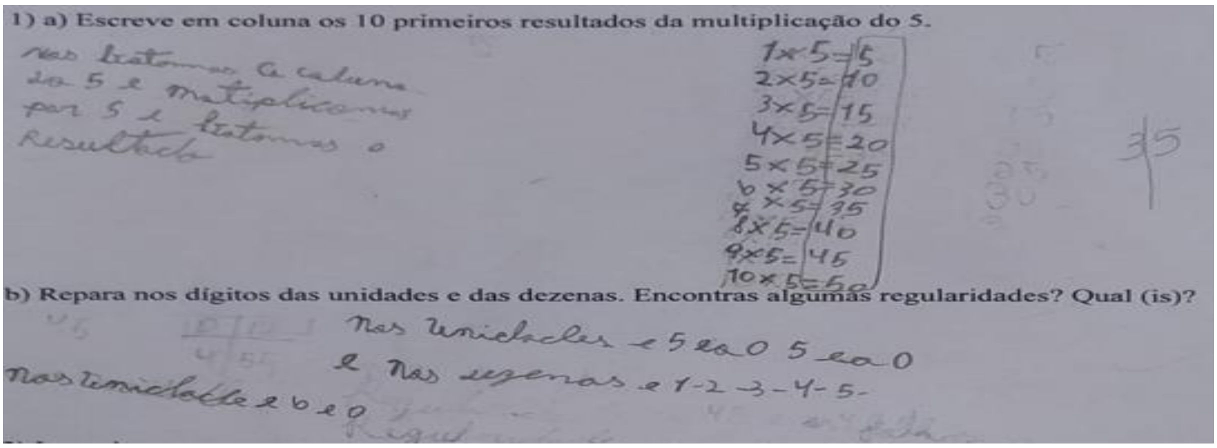
6.5.5 Item 1 – Grupo G5

1) a) Escreve em coluna os 10 primeiros resultados da multiplicação do 5. b) Repara nos dígitos das unidades e das dezenas. Encontras algumas regularidades? Qual (is)? (tarefa com adaptação de linguagem. Ponte, 2010, p.15)

O grupo encontrou regularidade de repetição nas unidades e de um padrão de repetição de crescimento nas dezenas. Vejamos:

Pesquisadora: No primeiro resultado vocês disseram que a unidade é o 5.
A3: Sim
Pesquisadora: No segundo resultado, qual dígito é a unidade?
A5: Zero
Pesquisadora: No terceiro resultado?
A3: Cinco
Pesquisadora: Depois?
A3: 0, 5, 0, 5, 0, 5, 0.
[...]
Pesquisadora: O que vocês repararam de regularidade nas dezenas:
A1: Em que que têm uma sequência, cada um se repete.
Pesquisadora: Como cada um se repete?
A1: o 1 se repete duas vezes, o 2 se repete duas vezes, o 3 se repete duas vezes, o 4 se repete duas vezes.
Pesquisadora: Se vocês continuassem multiplicando 5 x 11, 5 x 12 vocês acham que cada número iria se repetir duas vezes?
A1: Ia.

Imagem 46: Protocolo de resolução item 1 – Tarefa 5 – Grupo 5.



Regularidade do grupo 5: Nas unidades e 5 e o 0 e nas dezenas e 1-2-3-4-5.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

O grupo não teve dificuldades em encontrar os dez primeiros múltiplos de 5. Pelos diálogos notamos que os alunos encontraram uma sequência de repetição dos dígitos das unidades: “0, 5, 0, 5, 0, 5, 0.” (A3). Além de conseguirem perceber como ocorreu a repetição de crescimento nas dezenas: “o 1 se repete duas vezes, o 2 se repete duas vezes, o 3 se repete duas vezes, o 4 se repete duas vezes.” (A1).

O papel da pesquisadora foi no sentido de “intervenção na construção e validação do conhecimento dos alunos.” (Ponte, *et al*, 1998) Assim, a partir do *feedback* que serviu para “activar os processos cognitivos e metacognitivos dos alunos” (Fernandes, 2008, p. 356), o grupo reconheceu que o padrão de crescimento de repetição da dezena pode ser aplicado em outros termos da sequência dos múltiplos de 5, “Se vocês continuassem multiplicando 5 x 11, 5 x 12 vocês acham que cada número iria se repetir duas vezes?” (pesquisadora).

6.5.6 Item 2 – Grupo G1

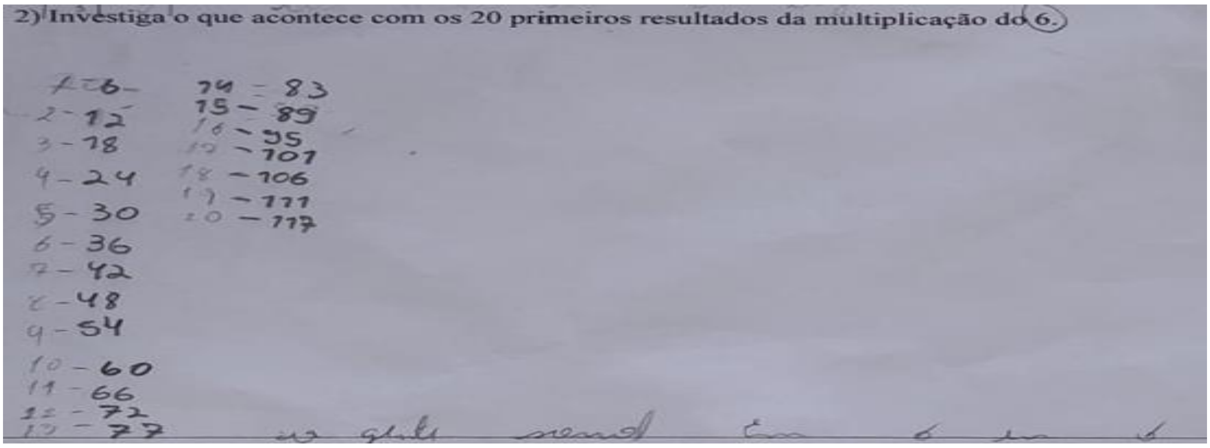
2) Investiga o que acontece com os 20 primeiros resultados da multiplicação do 6. (tarefa com adaptação de linguagem. Ponte, 2010, p.15)

O grupo não conseguiu estabelecer uma regularidade de repetição para as unidades e nem um padrão de crescimento para as dezenas, uma vez que o resultado da multiplicação não estava correto. Conforme descrito abaixo:

Pesquisadora: O que vocês encontram de regularidade?
A7: Que eles foram repetindo de 2 em 2.
Pesquisadora: Os dígitos das dezenas?
A7: Hahan Hahan
Pesquisadora: O um repetiu 2 vezes, e o 2?
A7: Uma vez.
Pesquisadora: Então, os dígitos das dezenas não repetem de 2 em 2, né? O 2 só repetiu uma vez. E o 3 repetiu 2 vezes?
A7: Sim
Pesquisadora: E o 4?
A7: Duas vezes.
Pesquisadora: E o cinco repetiu duas vezes?
A7: Uma vez.
[..]
Pesquisadora: Nas dezenas tem regularidade?
A7: Tem
Pesquisadora: Mas todos os algarismos foram repetiram duas vezes?
A7: Não
[...]
Pesquisadora: O que vocês perceberam sobre as unidades?

A7: Vem primeiro o 2, 8, 4, 0, 6, 2, 8, 4, 0, 6, 2, 7.
Pesquisadora: Observe o que vocês fizeram se vem essa sequência até no final. Porque nos resultados de vocês há 3, 9, 5.
[...]
A7: Daqui pra cá (apontando para os resultados do 6 x 1 até 6 x 12) repete na sequência, depois ele vai mudando.

Imagem 47: Protocolo de resolução item 2 – Tarefa 5 – Grupo 1.



Regularidade do grupo 1: A gente somou em 6 em 6.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

O grupo encontrou os múltiplos de 6 por meio da adição repetida “a gente somou em 6 em 6”, o que demonstrou que ainda não dominam os fatos básicos da multiplicação. Observamos o protocolo de resolução a partir da multiplicação do 6 x 13 que os resultados não estão corretos, porque em vez de realizar a soma de 72 + 6 fizeram 72 + 5, o que resultou em 77. Bigode e Frant (2011), esclarece que esse tipo “erro” pode estar relacionado à falta do sentido numérico e ao descuido com o valor posicional. Assim, para a avaliação das aprendizagens o erro “assume um sentido basilar para as tomadas de decisões do professor a fim de regular o ensino que faz em função do alcance da melhoria das aprendizagens.” (Borralho; Lucena; Brito, 2015, p. 19).

A distribuição de *feedback* não foi suficiente para o grupo estabelecer uma regularidade numérica com padrões de repetição adequados para as unidades, uma vez que o resultado da multiplicação não estava correto, “foi repetindo (referindo as unidades) em sequência até 6 x 12 e depois foi mudando”. Enquanto a regularidade das dezenas eles expressaram em linguagem natural: “foi repetindo em dois em dois e um”.

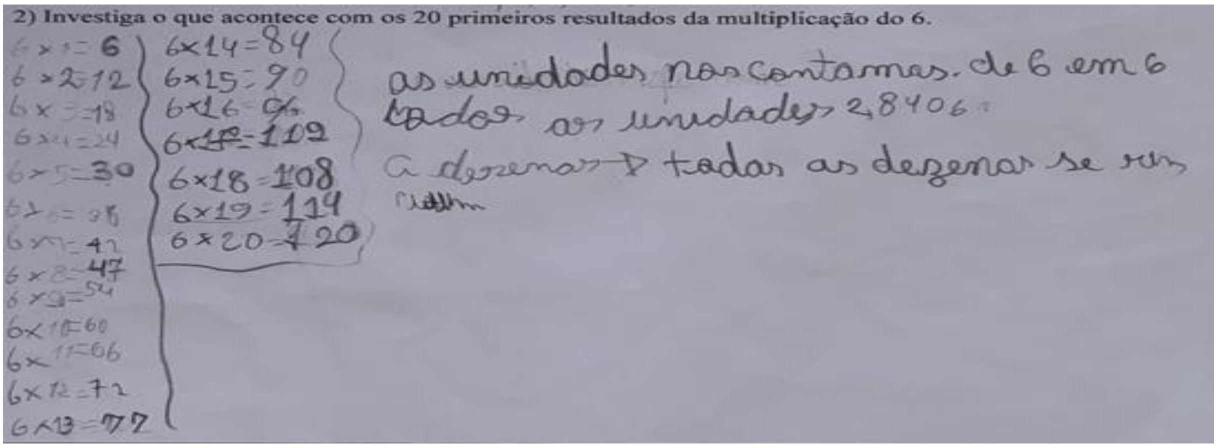
6.5.7 Item 2 – Grupo G2

2) Investiga o que acontece com os 20 primeiros resultados da multiplicação do 6. (tarefa com adaptação de linguagem. Ponte, 2010, p.15)

O grupo não determinou corretamente os vinte (20) primeiros múltiplos de 6 e não definiu com sucesso da sequência de repetição para as unidades e para as dezenas:

A3: A gente tá indo de 6 em 6.
A2: A gente tá somando.
[...]
Pesquisadora: 6 vezes 12 deu 72 e como vocês fizeram o 6 vezes 13 para dá 102.
A2: A gente contou, mas não sei se tá certo, vamos contar de novo.
[...]
Pesquisadora: Agora, observem se encontra alguma regularidade, se algum número se repete ou se não repete, se tem alguma regularidade e se não há regularidade.

Imagem 48: Protocolo de resolução item 2 – Tarefa 5 – Grupo 2.



Regularidade do grupo 2: As unidades nos contamos de 6 em 6 cada, as unidades 2, 8 4 0 6. A dezenas todas as dezenas se repetem.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

O grupo determinou os múltiplos de 6 por meio da adição, "A gente tá somando" (A2), o que evidenciou a falta de domínio dos fatos básicos da multiplicação. Inclusive o resultado de 6 x 8 está incorreto, assim como 6 x 13 e 6 x 17. Os alunos não se atentaram que no resultado de 6 x 17 (112) obtiveram um resultado maior que na multiplicação de 6 x 18 (108). Isso pode ter ocorrido pela falta de compreensão da formação dos números a partir da terceira ordem ou por descuido.

Durante a realização da tarefa houve vários momentos de comunicação entre os alunos e a professora, para Ponte (2010, p. 24) "A forma como o professor interage com os alunos de um grupo é também de grande importância", pois esses momentos servem para negociar significados. Desse modo, a produção de *feedbacks* foi com o propósito de orientar e melhorar a aprendizagem (Fernandes, 2005), como: "6 vezes 12 deu 72 e como vocês fizeram o 6 vezes 13 para dá 102" (pesquisadora). Somente após diálogo é que o grupo observou que a resposta anterior não estava correta, porém a próxima continuou errada, mas com um resultado mais aproximado.

As regularidades encontradas pelo grupo não estão de acordo com os múltiplos encontrados por eles. Nas unidades, não especificaram a sequência que acontecem, uma vez que não houve uma sequência regular nos resultados definidos por eles, “as unidades 2, 8 4 0 6”. Nas dezenas, afirmaram que “todas as dezenas se repetem”, mas isso não é verídico; logo, não houve reconhecimento de regularidade numérica com padrões de repetição e crescimento.

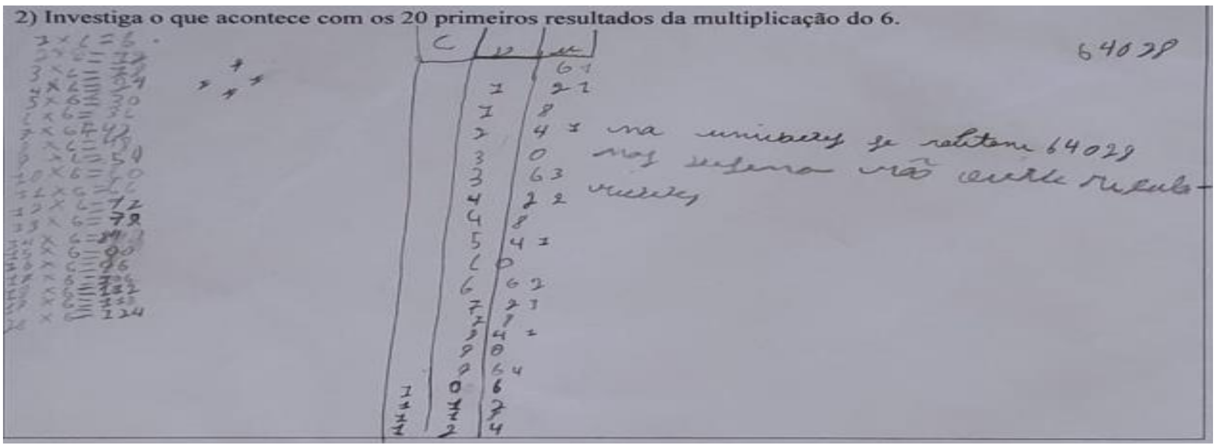
6.5.8 Item 2 – Grupo G3

2) Investiga o que acontece com os 20 primeiros resultados da multiplicação do 6. (tarefa com adaptação de linguagem. Ponte, 2010, p.15)

O grupo não conseguiu determinar o resultado correto de todos os múltiplos de 6 solicitados na tarefa e, consequentemente, a regularidade de repetição das unidades não poderia ser aplicada nos resultados por eles encontrados. Assim como, não encontraram uma regularidade de repetição e crescimento para as dezenas. Segundo descrito abaixo:

A1: Acho que não dá pra colocar o 106 aqui.
Pesquisadora: Por que?
A1: Porque aqui nos não colocamos a centena.
Pesquisadora: Acrescenta a centena.
A1: Tipo... faz outra do lado da dezena.
[...]
Pesquisadora: Como vocês observaram a regularidade das dezenas?
A1: 1, 1
A2: Repete o 1 duas vezes, o 3 duas vezes, o 4 duas vezes e 5 duas vezes.
Pesquisadora: Vamos pensar assim: o 1 repete duas vezes, depois o 2 uma vez, depois o 3 duas vezes e o 4 duas vezes, o 5 uma vez. Vocês perceberam alguma regularidade?

Imagem 49: Protocolo de resolução item 2– Tarefa 5 – Grupo 3.



Regularidade do grupo 3: Na unidade se repetem 64028, nas dezenas não ouve (houve) regularidade.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

O grupo entendeu o que solicitava a situação e definiram os múltiplos de 6, porém a partir da multiplicação 6 x 17 o resultado não foi correto. No início do diálogo, notamos que os alunos hesitaram em colocar no quadro das ordens o resultado 106, pois observaram que ele apresenta uma ordem a mais daquelas solicitadas na tarefa “Acho que não dá pra colocar o 106 aqui. [...] Porque aqui nós não colocamos a centena” (A1). Isso demostra a fragilidade no conhecimento do valor posicional, consequentemente, esse é um dos fatores que acarretam os “erros” na multiplicação (Bigode; Frant, 2011).

O grupo determinou uma regularidade numérica com um padrão de repetição para as unidades “As unidades se repetem 6 4 0 2 8”, porém os alunos não se atentaram ao resultado da multiplicação 6 x 17 que está incorreto; sendo assim, essa regularidade não é possível para o resultado que eles determinaram. Mesmo com o *feedback* da pesquisadora “vamos pensar assim: o 1 repete duas vezes, depois o 2 uma vez, depois o 3 duas vezes e o 4 duas vezes, o 5 uma vez. Vocês perceberam alguma regularidade?”, os alunos não conseguiram formular uma regularidade para as dezenas. Não foi possível identificar a finalidade dos números 1, 2, 3 e 4 colocados ao lado dos resultados.

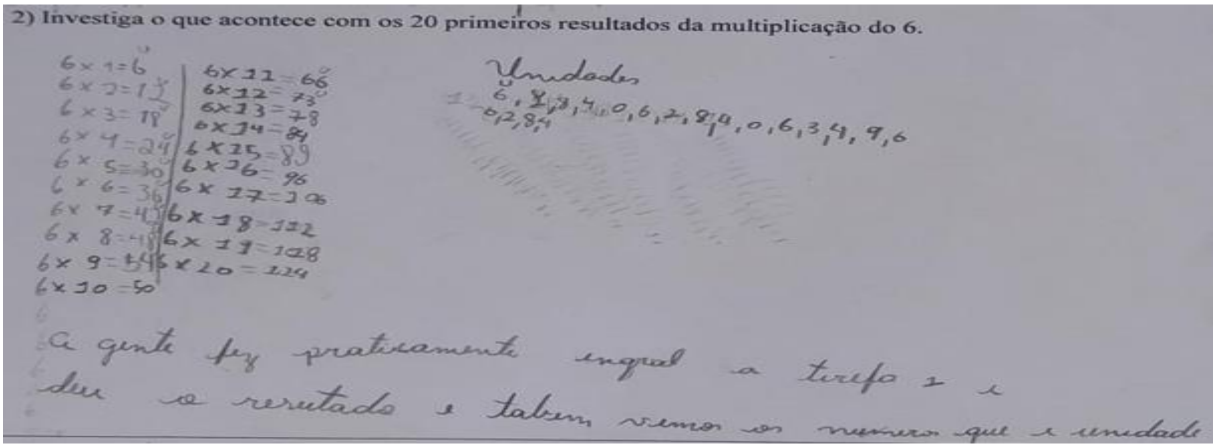
6.5.9 Item 2 – Grupo G4

2) Investiga o que acontece com os 20 primeiros resultados da multiplicação do 6. (tarefa com adaptação de linguagem. Ponte, 2010, p.15)

Os alunos não definiram em linguagem natural as regularidades, apenas listou os algarismos dos resultados que pertencem a ordem das unidades. Vejamos:

Pesquisadora: Agora, verifique as regularidades, primeiro verifique os números das unidades com que frequência eles repetem?
A1: Como assim?
Pesquisadora: Como os números vão se repetir?
A1: 62840628 e assim.
[...]
Pesquisadora: Agora, observem as dezenas. Se tem, digam qual e se não tem digam que não tem.

Imagem 50: Protocolo de resolução item 2– Tarefa 5 – Grupo 4.



Regularidade do grupo 4: A gente fez praticamente ingral (igual) a tarefa 1 e deu o resultado e tabem (também) vimos os números que é unidade.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

O grupo utilizou a ideia vista na alternativa anterior (a), em que considerou o conceito de coluna para organizar os resultados da multiplicação e a identificação dos algarismos da unidade. O grupo apresentou o mesmo equívoco de outros nos resultados a partir da multiplicação 6 x 12, o que demonstrou a dificuldade que os alunos apresentam com a multiplicação que envolve dois algarismos. Sendo assim, o grupo não mostrou, de modo explícito, as regularidades e os padrões de sequência para os resultados da multiplicação do 6. Fica evidente que a dificuldade dos alunos está para a determinação dos resultados da multiplicação do propriamente determinar as regularidades.

6.5.10 Item 2 – Grupo G5

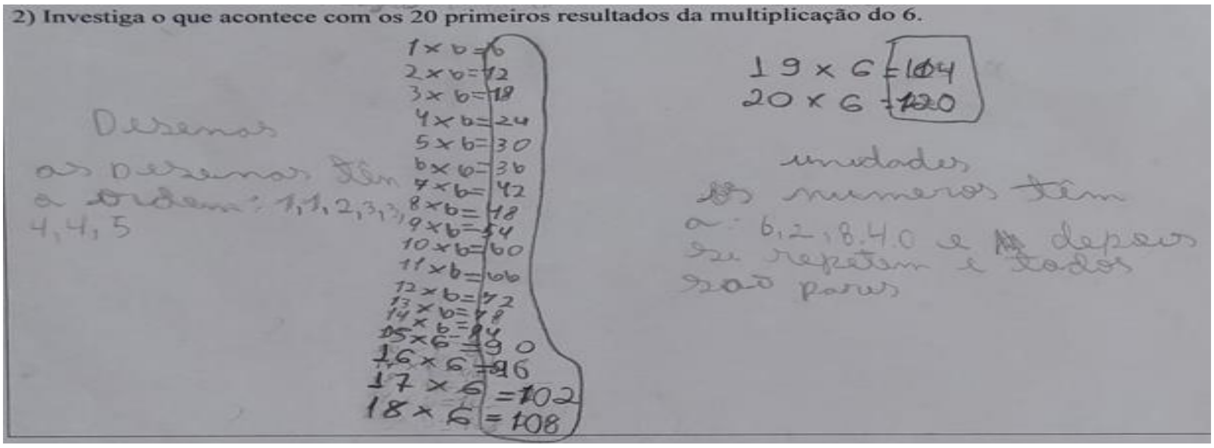
2) Investiga o que acontece com os 20 primeiros resultados da multiplicação do 6. (tarefa com adaptação de linguagem. Ponte, 2010, p.15)

O grupo encontrou a sequência de regularidade de repetição das unidades e que os números são pares, descobriu a repetição de crescimento das dezenas e formularam uma regra em linguagem natural. Tal como descrito abaixo:

Pesquisadora: Que regularidades vocês encontraram nas unidades?
A1: Eu vi que aqui começa (apontando para o 6 até ao 4) aí depois vem o zero e depois recomeça, aí vem o zero e recomeça na mesma sequência de 6, 2, 8, 4, 0.
Pesquisadora: Além, da repetição das unidades, 6, 2, 8, 4, 0 esses números eles têm algo em comum. O que eles têm em comum?
A5: São pares.
[...]

Pesquisadora: O que vocês observaram nas dezenas?
A1: O 1 se repetiu duas vezes, o 2 já não se repetiu. Então é assim a sequência, um se repete ou outro não se repete...(aluno ficou pensativo) Eita.
Pesquisadora: Observem aí direito. Um se repete ou outro não repete, será que está correto?
A1: Mas ele repete, esse aqui repete já esse aqui não repete.
[...]
A1: Um (número aleatório) não se repete, outro se repete e o outro também se repete cada um, um número se repete e o outro também se repete e o outro não se repete [...] tipo o um, ele se repete, o 2 não se repete, o 3 e o 4 eles se repetem, aí vem o 5 ele não se repete e o 6 e o 7 eles se repetem.
Pesquisadora: Então, como podemos formular uma regra?
A1: A cada um número que não se repete vem dois que se repetem.

Imagem 51: Protocolo de resolução item 2– Tarefa 5 – Grupo 5.



Regularidade do grupo 5: Dezenas, as dezenas têm a ordem 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5... As unidades têm 6, 2, 8, 4, 0 e depois se repetem em todos. São pares.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

O grupo encontrou uma sequência de repetição para as unidades 6, 2, 8, 4, 0. É possível observar que eles perceberam que poderiam aplicar em sequência em outros resultados dos múltiplos de 6: “aí depois vem o zero e depois recomeça, aí vem o zero e recomeça na mesma sequência de 6, 2, 8, 4, 0” (A1). Com o *feedback* da pesquisadora “além, da repetição das unidades, 6, 2, 8, 4, 0 esses números eles têm algo em comum. O que eles têm em comum?”, eles descobriram outra característica dos dígitos das unidades, “são pares.” (A5), sendo o único grupo que conseguiu determinar essa característica. A comunicação no grupo é “o momento em que as principais ideias relacionadas com a tarefa são clarificadas, formalizada e institucionalizadas como novo conhecimento”. (Ponte, 2010, p. 23)

O grupo reconheceu um padrão de repetição de crescimento para as dezenas dos múltiplos de 6, porém só a partir do *feedback* da pesquisadora: “observem aí direito. Um se repete ou outro não repete, será que está correto? conseguiram reorganizar o raciocínio e determinara uma regra: “A cada um número que não se repete vem dois que se repetem.” (A1).

6.5.11 Fechamento e considerações sobre a tarefa 5

As tarefas do tipo exploratório-investigativa, por serem abertas, não têm uma única resposta correta, por isso os alunos precisavam explorar possibilidades de repetições numéricas dos múltiplos de 5 e 6 para a obtenção de padrões de repetições. Com a realização desse exercício foi possível verificar que a segunda parte dela, que era justamente a de encontrar as regularidades, não fazia sentido para os alunos, pois, para eles, em tarefa de Matemática é preciso "perguntas para responder com o uso de contas". O que pode ser considerado um aspecto da cultura escolar. Para que a realização fosse possível, foi necessário a organização e diversificação de *feedbacks* nos grupos para estimulá-los a encontrarem as regularidades.

A partir da proposta desta tarefa, constatamos que, no item 1, apenas o grupo 4 não determinou a regularidade de repetição das unidades. Enquanto os grupos 3 e 4 não determinaram um padrão de repetição de crescimento para as dezenas, somente os grupos 1 e 5 reconheceram que o padrão de crescimento das dezenas poderia ser aplicado em outros termos da sequência de múltiplos de 5.

Para o item 2, os grupos 2, 3 e 5 indicaram a regularidade de repetição para as unidades, já para o padrão de repetição de crescimento das dezenas, apenas o grupo 5 determinou corretamente. O grupo 5 conseguiu perceber que a regularidade de repetição das unidades pode ser aplicada nos demais termos da sequência: "Eu vi que aqui começa (apontando para o 6 até ao 4) aí depois vem o zero e depois recomeça, aí vem o zero e recomeça na mesma sequência de 6, 2, 8, 4, 0." (A1). Também determinaram uma regra para repetição das dezenas: "A cada um número que não se repete vem dois que se repetem." (A1). Além de que encontram uma característica dos algarismos das unidades que não era solicitada: "São pares" (justificativa).

É possível que a dificuldade dos grupos em explorarem as regularidades se deu em função de não conseguirem determinar corretamente os resultados dos múltiplos de 6, sendo que apenas o grupo 5 conseguiu. Isso revela que os alunos ainda não dominam os fatos básicos da multiplicação.

Ao finalizar o trabalho nos grupos, aconteceu momento coletivo em que a pesquisadora foi "escriba" para realizar as anotações das conjecturas dos alunos no quadro branco e conduziu as discussões a fim de ajudar a turma a encontrar as regularidades numéricas; assim, puderam sistematizar suas ideias, ver anexo C. Essa fase é indispensável no trabalho com investigações, pois é o momento em que os alunos podem "desenvolver a capacidade de comunicar matematicamente e de refletir sobre o seu trabalho e o seu poder de argumentação." (Ponte; Brocardo; Oliveira, 2006, p. 41)

Após esta etapa, os alunos preencheram a ficha de autoavaliação da tarefa 5, apêndice I. De acordo com as informações do quadro 11, apenas 2 alunos dos 23 que realizaram a tarefa relataram que conseguiram resolver com facilidade.

Quadro 11: Autoavaliação da Tarefa 5.

Quantidade de alunos participantes	Consegui facilmente	Consegui com dificuldades	Ainda não consegui
23 alunos	02 alunos	12 alunos	09 alunos

Fonte: Pesquisadora, 2024.

Ao partir das informações do quadro acima, observamos o quanto esse tipo de tarefa ainda é pouco explorado em sala de aula, talvez o caráter investigativo-exploratório das tarefas matemáticas ainda seja algo novo para a maioria dos profissionais docentes dos anos iniciais.

6.6 Tarefa 6: Técnicas algorítmicas

A apropriação de conceitos envolve diferentes formas de representação, entre elas, o registro numérico, portanto as técnicas algorítmicas tem seu lugar no processo de construção do conceito de multiplicação, desde que exploradas as suas estruturas e consideradas as propriedades do Sistema de Numeração Decimal. Desse modo, ao propor a resolução de algoritmo disponibilizamos repertório de procedimentos e representações acessíveis, visto que os algoritmos são esquemas a ser considerados na construção de conceitos, pois apresentam um conjunto de regras (Vergnaud, 1993). Não podemos esquecer que se a complexidade de uma situação aumenta, em termos de valores numéricos, os algoritmos são estratégias importantes na condução da solução.

Figura 10: Tarefa 6.

1) Revolva:	
a) 13 X 5	b) 130 X 14

Fonte: A pesquisadora, 2023.

A realização da tarefa aconteceu no dia (27) vinte e sete do mês de fevereiro, no sexto encontro, das 7:00h às 8h40min com (29) vinte e nove alunos. Os alunos foram organizados em grupos, só que permaneceram os mesmos componentes das tarefas anteriores. Sendo assim a organização final: dois (2) grupos com seis (6) alunos em cada; dois (2) grupo com cinco (5) alunos; e um (1) grupo com sete (7) alunos. Após a entrega da cópia da tarefa, eles começaram a exploração e a resolução dela.

Vejamos a seguir como cada grupo avançou com a resolução.

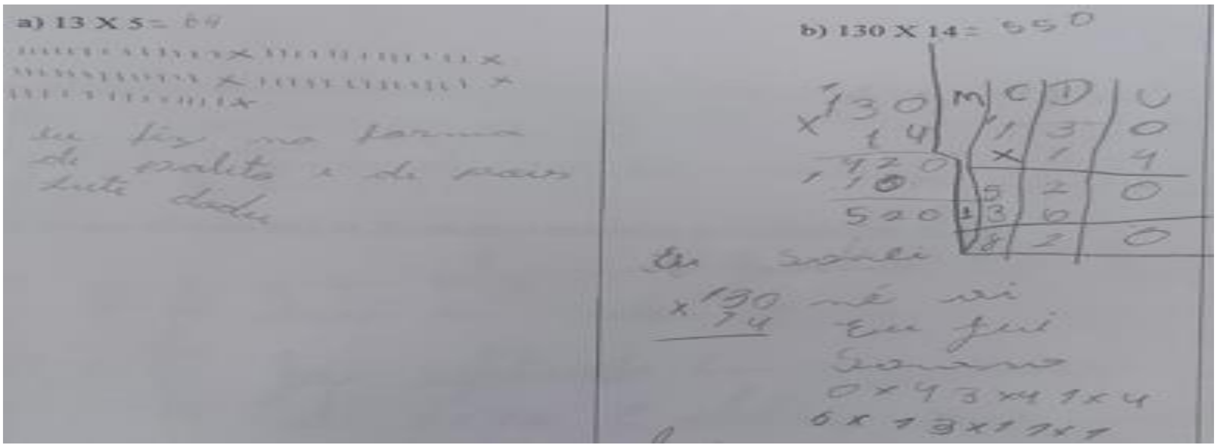
6.6.1 – Grupo G1

1) Revolva:	
a) 13 X 5	b) 130 X 14

Item A:
A4: A gente tá fazendo o cálculo.
Pesquisadora: Como vocês encontraram o 64?
A4: Contamos os palitos.
Item B:
Pesquisadora: Quando você multiplicou o 4 por 130 encontrou 420?
A1: Sim
Pesquisadora: Depois vocês conferem essa multiplicação, tem algo errado. Agora, você multiplica 1 vezes 130 ou 10 vezes 130?
A3: Dez eu acho.
A1: É 1
A2: É 1.
Pesquisadora: Cento e trinta vezes quatorze, o algarismo 1 do 14 vale quanto nessa posição?
Todos: Dez.
Pesquisadora: Isso, porque quatorze tem 1 dezena mais quatro unidades. Então, o 1 (do 14) vale 10 porque está na ordem das dezenas. Quando você multiplica 10 vezes zero, o zero (do resultado) tem que vim pra cá (ordem das dezenas).
A7: Por isso que eu disse que estava errado.
A2: Eu também falei.
A3: Eu falei.
[...]
Pesquisadora: Pessoal, vocês estão tendo dificuldades com a organização, organizem um quadro com as ordens.
[...]
Pesquisadora: A ordem das unidades fica a direita ou a esquerda?
A7: A direita.
Pesquisadora: Então, arruma aí. Agora coloca o 130 no quadro.
[...]
Pesquisadora: Vocês vão multiplicar primeiro as unidades ou a dezena?
A7: As unidades.
Pesquisadora: Quanto é 4 vezes 0?
A1: Quatro
A7: Zero
A3: Zero
A4: Quatro
Pesquisadora: Todo número multiplicado por zero é igual a zero.
A7: Eu sabia
A3: Eu sabia
Pesquisadora: 4 vezes 30?
A 4: Não tia, é 4 vezes 3.
Pesquisadora: Mas o 3 aqui é vale quanto?
A7: 30.
[...]

Pesquisadora: Agora, vamos multiplicar o 1 que está na ordem das dezenas. Quanto vale o 1?
Todos: Dez.
[...]
Pesquisadora: Já multiplicou, agora faz o quê?
A7: Soma de mais.
[...]
Pesquisadora: 5 centenas com 3 centenas.
A7: 8 centenas
Pesquisadora: O 1 que está na ordem do milhar
A7: Desce ele.

Imagem 52: Protocolo de resolução Tarefa 6 – Grupo 1.



Justificativa do grupo 1: Item a, eu fiz na forma de palito e de pois (depois) jute (juntei) dodu (tudo). Item b, eu domei né! Ai eu fui somano (somando) 0x4, 3x4, 1x4 0x1, 3x1, 1x1 foi assim que eu achei meu resultado.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

No item A, o grupo não fez uso do algoritmo convencional, nota-se que a estratégia que eles sentem segurança ainda é a com representação pictórica. Visto que não houve indício de outras tentativas, mesmo que esta não os tenha levado ao resultado correto.

No item B, no primeiro algoritmo (o que está fora do quadro das ordens) o grupo não fez o reagrupamento da centena (1 que resultou da multiplicação de 4 x 3). O 1 foi elevado para casa das centenas, logo, compreendemos que os alunos não realizam a multiplicação com um processo ininterrupto. E, por isso, não ficou evidente o processo que eles utilizaram na obtenção do resultado 10 da multiplicação dezena por 130. Somente a partir do *feedback*, com orientações, foi possível se chegar ao resultado esperado, pois os *feedbacks* “regulam e controlam os processos e aprendizagem, assim como para melhorar a sua motivação e autoestima.” (Fernandes, 2008, p. 356)

6.6.2 – Grupo G2

1) Revolva:

a) 13 X 5 b) 130 X 14

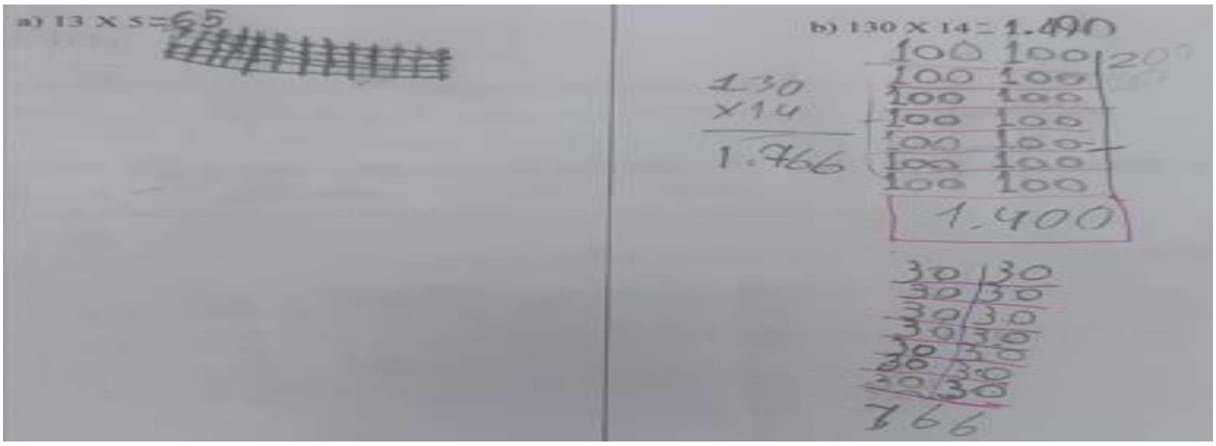
Item A:

A4: 65
Pesquisadora: Como você fez?
A4: Como a tia (professora titular) me ensinou, tipo faz os riscos 5 linhas depois os 13 depois vai contando as encruzilhadas, contando os cantos.
Pesquisadora: Agora, você explica pros colegas seu método.

Item B:

Pesquisadora: Como vocês encontraram 1490?
A2: Nós “somou”.
A3: Tipo 100 vezes 14 e depois nós tiramos o 30.
A2: O 30 quatorze vezes.
[...]
Pesquisadora: Vocês fizeram 100 vezes 14 e deu 1400. E aqui (apontando para os trinta) vocês fizeram como?
A2: Do mesmo jeito só que com o trinta. E deu 366.
Pesquisadora: Será que está certo?
A1: Eu acho.
[...]
Pesquisadora: Por que não fizeram essa aqui (130 x14) da mesma forma que fizeram essa (13 x 5)?
A4: Porque é muito grande, ia dar muitos risquinhos 130 assim (indicando na posição horizontal) e 14 assim (vertical)

Imagem 53: Protocolo de resolução Tarefa 6 – Grupo 2.

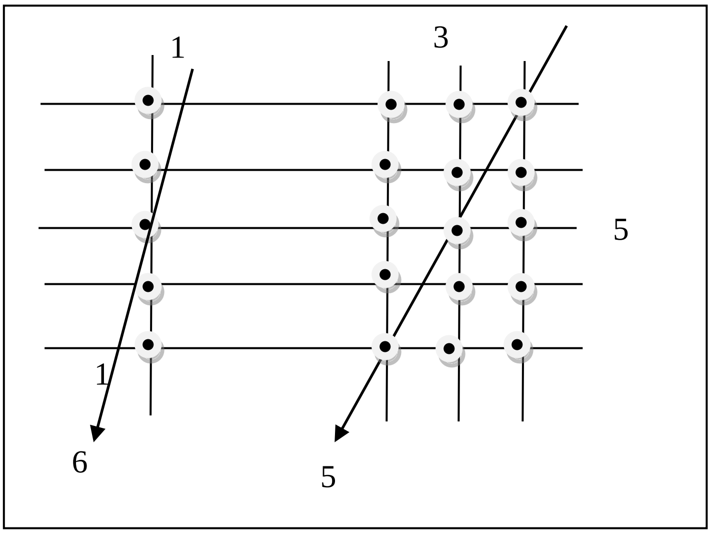


Justificativa do grupo 2: Não houve.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

No item A, o grupo utilizou linhas 13 linhas verticais e 5 horizontais e contou os pontos de intersecção, sendo uma representação pictórica que consiste em processo de contagem ao mesmo tempo, o que lembra o método de multiplicação chinesa. Porém eles não seguiram os passos do método chines, em que na representação de linhas as dezenas devem vir um pouco distante das unidades e depois soma-se os pontos de intersecção das diagonais da direita para a esquerda e o resultado de cada grupo de intersecção, se houver mais de um dígito, deve ser acrescido a próxima ordem, processo este semelhante ao algoritmo padrão. Vejamos:

Figura 11- Método Chinês.



Fonte: A pesquisadora, 2024.

Como o algoritmo é uma forma de simplificar o processo de contagem, esse método não deve ser proposto como substituição ao algoritmo usual, haja vista que no tradicional, a organização de valores, na composição dos números, necessita obedecer às ordens numéricas. Contudo, esse método pode ser usado como um complemento, dando ao aluno a oportunidade de testar diferentes abordagens.

No item B, o grupo não utilizou a estratégia do item anterior por perceberem que iria ser um percurso demorado, "Porque é muito grande, ia dar muitos risquinhos 130 assim (indicando na posição horizontal) e 14 assim (vertical)" (A4). Então, a decomposição do número 130 em centena e dezena foi a estratégia escolhida, no entanto, não conseguiram encontrar a resposta correta. Notamos que ainda não dominam plenamente a multiplicação por 100, uma vez que somaram o 100 por 14 vezes e com o trinta procederam da mesma forma.

6.6.3 – Grupo G3

1) Revolva:	
a) 13 X 5	b) 130 X 14

Item B:

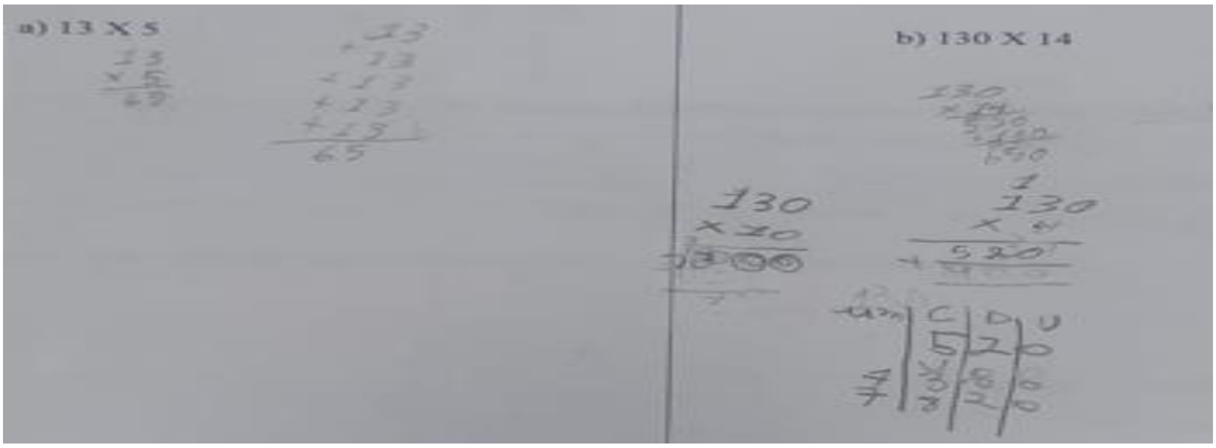
Pesquisadora: Esse resultado não está certo. Quando você faz a multiplicação do 1 ele está representando a dezena ou a unidade?

A2: A dezena

A1: A dezena

Pesquisadora: Ela vai ser quanto?
A1: Ah...Dez
A2: Dez.
Pesquisadora: Vocês podem multiplicar o 130 pela unidade e depois pela dezena.
[...] Primeiro Vocês vão multiplicar o 130 pela unidade ou pela dezena?
A1: Dezena
A2: Dezena
Pesquisadora: Então façam. Depois o 130 vai ser multiplicando por quanto?
A2: Quatro
A1: Unidade 4
Pesquisadora: Depois que multiplicar pela dezena e unidade faz o quê?
Todos: Soma.
Pesquisadora: 130 vezes 10 deu 4000. Como vocês fizeram?
A1: Eu multipliquei 10 vezes 0 que deu 0, dez vezes 3 que deu 30, aí eu subi o 3 e coloquei o 0 embaixo aí em multiplico 10 vezes 4.
Pesquisadora: Por que 4?
A1: Porque já tinha 1 aqui e subi 3 pra cima.
Pesquisadora: Não. O 1 ele vale 100 porque ele está na "casa" das centenas, primeiro você multiplica depois soma o 3 que são centenas.

Imagem 54: Protocolo de resolução Tarefa 6 – Grupo 3.



Justificativa do grupo 3: Não houve.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

No item A, algoritmo em que um dos fatores é composto só por unidade, o grupo preferiu usar a adição reiterada, talvez seja essa a estratégia que mais apresentada para eles. Só que podemos observar que para responder o algoritmo B eles não optaram por essa estratégia, talvez por perceberem que ia ser mais demorado e trabalhoso, já que o algoritmo é uma forma mais rápida de realizar a adição sucessiva. (Bigode; Frant, 2011)

Na primeira tentativa de resolução do algoritmo B, percebemos o não domínio do valor posicional, pois os alunos não consideram a casa das unidades ao multiplicar pelo número da dezena (130 x10 =130). Consideraram o algarismo 1, do número 10, como sendo unidade e iniciaram a colocação do resultado na casa da unidade; porém essa resposta não é a correta.

Pode-se verificar nos diálogos que o aluno A1 e A2 foram os que interagiram com a pesquisadora. Isso porque “a comunicação que ocorre entre os alunos pode variar fortemente. Por vezes, há uma verdadeira troca de ideias e argumentos. Noutros casos, apenas um ou dois alunos se envolvem activamente no trabalho” (Ponte, 2010, p. 24).

Após as discussões, os alunos iniciaram um novo método, pois fizeram a multiplicação de 130 por uma dezena e 130 por 4 unidades e depois o produto da dezena foi adicionado ao produto das unidades. O último processo utilizado pelo grupo resultaria na resposta correta, entretanto, ao adicionar o resultado da multiplicação da dezena com o das unidades, adicionaram sete unidade de milhar quando, na verdade, era somente uma unidade de milhar.

6.6.4 – Grupo G4

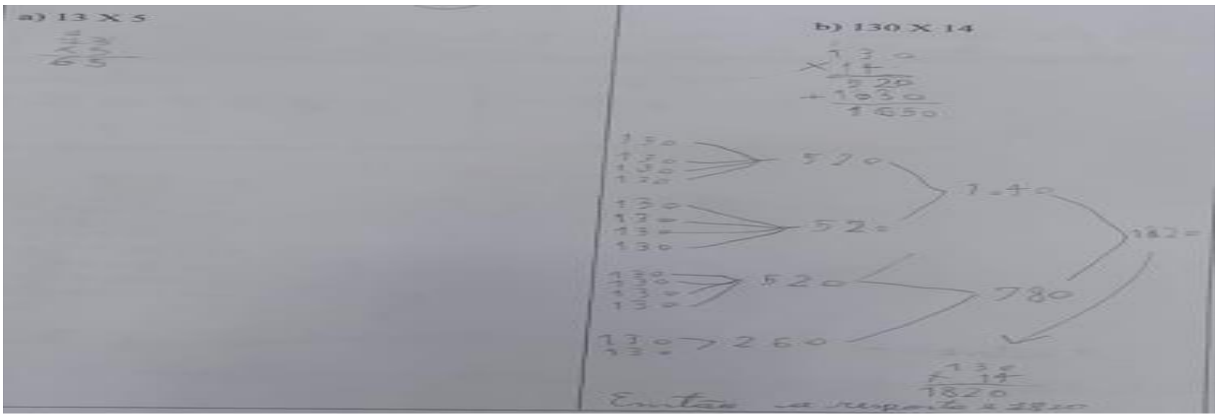
1) Revolva:

a) 13 X 5 b) 130 X 14

Item B:

A6: Tenho certeza que tá errado (referindo ao algoritmo), mas não achei.
Pesquisadora: Como foi que vocês fizeram?
A6: Eu fiz o 4 vezes o resto e depois eu fiz o 1 vezes o resto.
Pesquisadora: E o 10 vezes o 130 deu 1030, foi?
A6: Não.
A6: Eu tinha encontrado esse resultado (referindo a 130) aí pensei tem que colocar outro zero, porque esse daqui (apontando para o 130) tinha esse zero e tinha que ter outro zero.
[...]
Pesquisadora: Vocês fizeram vários 130?
A 1: Sim.
Pesquisadora: Vocês acharam fácil fazer assim?
Todos: Muito.
Pesquisadora: Vocês acham que seria fácil fazer 130 vezes 1000 desse jeito aqui?
Todos: Não.

Imagem 55: Protocolo de resolução Tarefa 6 – Grupo 4.



Justificativa do grupo 4: Não houve.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

No item A, o grupo ao multiplicar 13 por 5 fez uso do registro formal do algoritmo da multiplicação, pois o produto de 5 x 3 resultou em uma dezena e 5 unidades. Registraram a unidade no produto da sua ordem e a dezena foi para a ordem que ela pertence sendo adicionada às outras dezenas do produto, quando multiplicaram as 5 unidades pela dezena.

Para resolverem o item B, o grupo sentiu mais dificuldade, talvez por ser um algoritmo em que um dos fatores possui três algarismos e o outro, dois. Contudo, percebemos que a aprendizagem está em processo de construção, mas que o valor posicional ainda não está consolidado para eles: "Tenho certeza que tá errado (referindo ao algoritmo), mas não achei. [...] Eu tinha encontrado esse resultado (referindo a 130) aí pensei tem que colocar outro zero, porque esse daqui (apontando para o 130) tinha esse zero e tinha que ter outro zero." (A6). Eles sabiam que ao multiplicarem pela dezena precisavam acrescentar o zero na ordem da unidade ou deslocar para a ordem das dezenas; porém não conseguiram organizar os pensamentos nessa direção. Sendo assim, resolveram seguir o método que sentiam mais confiança, o de adição sucessivas.

6.6.5 – Grupo G5

1) Revolva:	
a) 13 X 5	b) 130 X 14

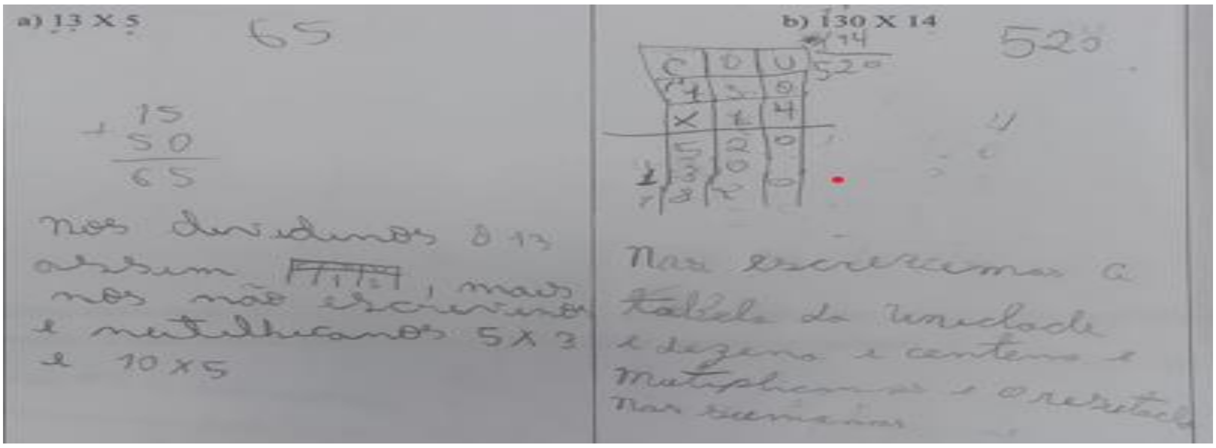
Item A:

Pesquisadora: Vocês fizeram 15 mais 50 de onde vocês conseguiram esses números?
A1: Peguei o ***5 vezes 3*** que já sei que é 15 que "decorei" ***e o 5 vezes 10 que é 50*** e aí eu somei eles. Porque se for somar tudo logo vai ser mais difícil pra mim, então, eu dividi igual eu aprendi, esse aqui como se fosse 3 a unidade 3 e esse a dezena pra multiplicar com o 5.

Item B:

Pesquisadora: O resultado de vocês deu 520?
A1: Sim
Pesquisadora: Será que está certo?
[...]
Pesquisadora: Vamos organizar esse algoritmo no quadro das ordens.
[...]
Pesquisadora: Aqui o 1 é uma centena, aqui o 4 vezes um, na verdade é 4 unidades vezes 1 centena que vai dá 4 centenas mais uma centena do 120 vão dá 5 centenas.
[...]
Pesquisadora: O 1 que é uma dezena (a dezena do 14)
A1: Vale 10.
Pesquisadora: Se ele é dezena, o resultado deve iniciar embaixo da ordem das dezenas, então na "casa" das unidades vou deixar o zero da dezena. Então, 10 vezes zero?
A1: Zero
Pesquisadora: O zero coloco em qual ordem?
A1: Das dezenas.
[...]
Pesquisadora: Agora que vocês já multiplicaram, o que vão fazer?
A1: Somar esses dois. (Se referindo as parcelas que resultaram da multiplicação)

Imagem 56: Protocolo de resolução Tarefa 6 – Grupo 5.



Justificativa do grupo 5: Item a, Nós dividimos o 13 assim...(quadro das ordens), mas nós não escrevemos e multiplicamos 5x3 e 10x5. Item b, nós escrevemos a tabela da unidade, dezena e centena e multiplicamos e o resultado nos somamos.

Fonte: A pesquisadora, 2024.

No item A, é possível observar que os alunos, ao realizarem a multiplicação, optaram pelo método de decomposição e de adição dos valores anteriormente obtidos: “Peguei o 5 vezes 3 que já sei que é 15 que ‘decorei’ e o 5 vezes 10 que é 50 e aí eu somei eles.” Notamos, nesse processo realizado pelo grupo, no qual consiste em multiplicar cada algarismo de cada fator sem se preocupar por qual ordem iniciar, que os alunos estabeleceram relação ao valor posicional.

Inicialmente no item B, o grupo havia considerado apenas a multiplicação da unidade (130 x 4), mas havia feito várias tentativas como se pode observar nas tentativas apagadas, mas não considerou o valor posicional da dezena no número 14. Isso porque quando iniciava o produto da dezena (14) pela unidade (130) não considerava que o resultado obtido é em dezenas; portanto, a ordem da unidade, nesse momento, deve ser deixada vazia ou completada por zero. Somente após as discussões que os alunos conseguiram organizar os resultados no quadro das ordens, pois eles precisam ter ideia das ordens das grandezas dos números que opera.

6.6.6 Fechamento e considerações sobre a tarefa 6

Após a conclusão da tarefa nos grupos, passamos para o momento de discussão coletiva a fim de socializar os procedimentos e as conjecturas levantadas pelos alunos, com o propósito de confirmar as aprendizagens e desfaz os equívocos. Nessa fase, devido ao tempo disponível para a realização da tarefa, a pesquisadora selecionou o grupo 2 e 5 para apresentar seus métodos de resolução e a justificativa de suas escolhas.

A seleção dos grupos se deu em função dos procedimentos de resolução diferenciarem dos demais, principalmente do item 1 – mesmo o resultado do item 2 do grupo 2 está incorreto. Esse momento serviu para o grupo organizar seu raciocínio a fim de esclarecer o equívoco.

Mesmo relembrando o objetivo da tarefa, de disponibilizar repertório de procedimentos e representações acessíveis para a resolução de situações que envolvem a multiplicação, o algoritmo é um procedimento importante para tal ação. Destacamos as seguintes considerações: os alunos ainda estão conectados à ideia da adição reiterada para resolver a multiplicação, porém já percebem que, em certos algoritmos com valores numéricos altos, essa estratégia não é viável; não há o domínio dos fatos básicos da multiplicação; o valor posicional ainda não está consolidado.

Feito isso, a ficha autoavaliação da tarefa 6, apêndice I, foi preenchida pelos alunos. De acordo com as informações do quadro 12, apenas 06 alunos dos 29 que realizaram a tarefa relataram que conseguiram resolver com facilidade.

Quadro 12: Autoavaliação da Tarefa 6.

Quantidade de alunos participantes	**Consegui facilmente**	**Consegui com dificuldades**	**Ainda não consegui**
29 alunos	06 alunos	17 alunos	06 alunos

Fonte: Pesquisadora, 2024.

Observamos, a partir das informações do quadro acima, o quanto os alunos ainda possuem dificuldades na resolução dos algoritmos, mesmo em que um dos fatores seja composto por um dígito. Não que o algoritmo seja indispensável para a construção do conceito de multiplicação, porém ele é um caminho a ser considerado para a resolução de situação de multiplicação.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao me encontrar em contexto de sala de aula, muitas angústias e inquietações me levaram ao Mestrado Profissional na busca de alternativas e propostas que pudessem apontar soluções para as dificuldades na aprendizagem da multiplicação de números naturais no contexto do Ensino Fundamental, em especial nos anos iniciais. Agora, na reta final dessa trajetória, depois de um longo percurso de autoformação, sei que essa busca é constante, que não há uma receita pronta; o que existe, na verdade, são teorias associadas às práticas que fazem do professor um pesquisador de seu próprio fazer. E, consequentemente, ajudam o profissional docente a transitar e mediar o processo de ensino-aprendizagem-avaliação em contexto comum de sala de aula, ao levar em consideração as peculiaridades da turma. Por isso é necessário pôr a teoria e a prática em diálogo constante, pois essa ação é crucial para entendermos os problemas e identificarmos a melhor solução.

Nesse tocante, o foco principal deste estudo foi investigar, a partir de uma dada proposta de ensino, como as aprendizagens ocorrem em um contexto comum de sala de aula, foi considerado, com mais aprofundamento, os processos vivenciados pelos alunos na aprendizagem de conceitos que contemplam as ideias de multiplicação, do que apenas os resultados das respostas das tarefas. Para tanto, as tarefas do tipo exercício, problema, investigação e exploração foram o guia principal para entendermos como o conceito de multiplicação pode ser gerado em alunos do 4º ano no processo de ensino-aprendizagem-avaliação.

Reforçamos que Vergnaud (1993, 1996, 2003, 2009) nos apontou o Campo Conceitual, em especial o Campo Conceitual Multiplicativo com as ideias da multiplicação, além de auxiliar-nos nas escolhas das diversas situações de multiplicação, pois um conceito não pode ser construído somente com um tipo de situação. Declaramos que os estudos de Ponte (2005, 2010 e 2014), de Fernandes (2005, 2006 e 2008) e de Borralho, Lucena e Brito (2015) foram essenciais para organização das diversas tarefas que foram propostas para os alunos com a finalidade de apoiar a aprendizagem, pois são os tipos de tarefas que oportunizam a produção de *feedbac*k de qualidade que têm potencialidades de melhorar o ensino e a aprendizagem. Assim, pudemos organizar um conjunto de tarefas com as habilidades propostas pela BNCC para o 4º ano do Ensino Fundamental que foram desenvolvidos por alunos do 5º ano, uma vez que a pesquisa foi aplicada no início do ano letivo de 2024.

Nesse foco, o desenvolvimento das tarefas aconteceu com os alunos organizados em cinco (5) grupos, em que puderam expressar coletivamente seus procedimentos de resolução e observar a estratégia utilizado pelos colegas; isso propiciou para que novas aprendizagens fossem construídas. Assim, a função da pesquisadora foi mais em conduzir a interação dos membros dos grupos e observar como eles articulavam as estratégias ou se mobilizavam na resolução das tarefas. A fim de fazer apontamentos para que pudessem melhorar a compreensão do conceito de multiplicação que estava sendo trabalhado.

Nesse contexto, a avaliação formativa tinha a função de auxiliar a aprendizagem, uma vez que a pesquisadora observava o que o grupo já tinha conhecimento e o que ainda não havia compreendido. Desse modo, as diversas tarefas se mostraram essenciais para verificarmos a importância do ensino-aprendizagem-avaliação como práticas integradas no momento da aula. A avaliação tem o papel de orientar o aluno para as novas tomadas de decisões em relação aos procedimentos adotados nas tarefas a partir de *feedbacks* do professor. Assim, o docente usa a avaliação com a intenção de conhecer o que o aluno sabe e o que precisa ser feito para ajudá-lo a superar as dificuldades ou melhorar suas aprendizagens.

Durante a prática pedagógica, os grupos apresentaram diferentes procedimentos e estratégias de resolução, pois as respostas se deram em função das discussões coletivas e interações constantes entre alunos e pesquisadora; portanto a distribuição de *feedbacks* foi contínua, como propósito de levá-los a superar as dificuldades. Vale ressaltar que, devido à quantidade de alunos, houve uma dificuldade na distribuição de *feedback* pelos grupos. Enquanto havia o acompanhamento de um grupo, os outros de dispersavam com facilidade. Outro fator que merece atenção foi o tempo disponível para realização das tarefas: para alguns grupos o tempo não foi o suficiente para que completassem com êxito a tarefa. Assim, o *feedback* disponibilizado a eles não foi o suficiente para que desenvolvessem o pensamento multiplicativo.

Vale pôr em evidência que, por diversas vezes, foi preciso uma conversa sobre trabalho em equipe, pois os alunos queriam dividir entre eles a responsabilidade de resolver as tarefas – o que pode ser notado em algumas justificativas e diálogos apresentados pelos grupos ao fazerem uso da primeira pessoa do singular. Vale apontar, que o fato de ter que justificar por escrito como pensaram para responder as tarefas foi novo para os alunos e classificaram como algo difícil, pois a prática não faz parte da cultura escolar, como expressou um aluno: "foi difícil dizer com é que faz, porque a gente não faz normalmente". (A1G5).

A análise das tarefas se deu de forma qualitativa, visto que identificaram o desenvolvimento de esquemas estratégicos empregados pelos alunos, em que mostram os processos com eles pensam, que dificuldades eles têm e as diferentes representações que eles se organizam. Com a análise, foi possível constatar que os sujeitos utilizam muito mais as representações pictóricas do que as numéricas ou associam as duas para a proceder com as resoluções. Enquanto ao uso do algoritmo de multiplicação, como meio de resolução, foi o menos usado pelos grupos de alunos. Essa é uma característica da cultura escolar, resultado de experiência nos anos anteriores.

No decorrer da realização da tarefa de investigação-exploração, notamos que ela demanda disponibilização de tempo adicional, porque nessa experiência foram (50) cinquenta minutos a mais do o previsto. Esse tipo de tarefa envolve três etapas importantes, a saber: o arranque no qual o professor procura envolver os alunos; desenvolvimento da tarefa em que acontece a exploração, pois os alunos levantam hipóteses, as testam e as justificam, essas ações requerem uma negociação de resultados o que demanda tempo; e por fim, a conclusão que os alunos chegaram. Nesse processo o professor tem a função de estimular o diálogo em prol de discussões coletivas.

Durante a tarefa de investigação-exploração, os alunos tiveram muita dificuldade em determinar o significado das palavras dígitos e regularidade e em reconhecer as unidades e dezenas. O que aponta que o Sistema de Numeral Decimal precisar ser trabalhado com mais afinco com os alunos, para que se apropriem desse conceito e, assim, progridam na aprendizagem do conceito de multiplicação. Outro aspecto que merece atenção foi que essa atividade apresentava uma novidade para a turma: "para responder não precisa fazer contas", o que aponta para o quanto esse tipo de tarefa ainda é pouco explorado nos contextos de sala de aula; uma vez que para a pesquisadora é uma experiência nova. Assim, para um crescimento profissional, o professor precisar pensar em tipos de tarefas que vai além do habitual.

Os algoritmos de multiplicação foram propostos com a intenção de analisar os procedimentos utilizados pelos alunos em exercício que já denunciam o uso da multiplicação, em que não necessitam de uma compreensão do sentido da situação. O que observamos foi grupos que ainda se serviram da adição de parcelas iguais, representação pictórica com contagem, para o processo de decomposição dos fatores

Nesse tocante, a proposta de trabalho da multiplicação de números naturais tendo a diversificação com os diferentes tipos de tarefas é propicia para conjugar ensino-aprendizagem-avaliação em sala de aula. Isso porque pudemos constatar, nesta pesquisa, a construção de novas aprendizagem, ao observamos as discussões e justificativas dos grupos, com a organização e distribuição de *feedbacks*. Dessa maneira, a avaliação desempenhou, neste contexto, a função de apoiar as aprendizagens e não de classificar.

Assim, essa experiência sintetiza os momentos que me levaram a refletir muito sobre o papel do professor enquanto pesquisador de sua prática, pois sei que o trabalho do docente dever ser guiado pela literatura, que norteia os caminhos a serem percorridos, tudo ajustado ao seu contexto. Antes de adentrar nesse universo de estudo não conhecia o real sentido da avaliação integrada ao ensino-aprendizagem, de ser um momento destinado a construção da aprendizagem e que com ela o professor recolhe informações pertinentes à aprendizagem, ou não, dos alunos e pode traçar os passos futuros de sua prática pedagógica sempre tendo as aprendizagens como norte de suas escolhas.

Contudo, o foco deste estudo não é esgotar e nem discutir todas as potencialidades das diversas situações do campo conceitual multiplicativo, principalmente porque a multiplicação pode propiciar para o desenvolvimento das aprendizagens ao articular as práticas de ensino-aprendizagem-avaliação. Além de poder suscitar futuras reflexões.

Ao pensar em possibilidades de pesquisa futura e considerar as tarefas de investigativas-exploratórias no processo de ensino-aprendizagem-avaliação, temos o relatório como um instrumento potencial para proceder a avaliação formativa. Em nossa pesquisa o relatório não foi proposto devido o tempo de entrega da dissertação, em que para propor o relatório demanda um tempo a mais na condução de elaboração dele pelos alunos. Isso porque é preciso indicar para eles o que se espera deles com essa produção.

Logo, no processo de ensino-aprendizagem-avaliação os instrumentos avaliativos são criteriais e contínuos, por isso os relatórios precisam apresentar critérios de avaliação que podem ser elaborados com a participações dos alunos. Dessa forma, o professor necessita dar *feedbacks* com indicações claras sobre que aspectos os alunos precisam melhorar para avançar na aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, Wendel Melo. COLARES, Getuliana Sousa. COSTA, Maria Rosilane da. Uma análise sobre as dificuldades dos alunos nas operações fundamentais. V CONEDU-Congresso Nacional de Educação, 2018. **Anais.** Disponível em: https://www.editorarealize.com.br/editora/anais/conedu/2018/TRABALHO_EV117_MD1_SA13_ID5749_09092018144501.pdf. Acesso em: 24 de mar. de 2023.

BERTINI, F. L.; PASSOS, C. L. B. Dificuldades de aprendizagem em aritmética nas séries iniciais. In: XVII ENCONTRO REGIONAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA, 2003, Campinas. **Anais**... Disponível em: http://alb.org.br/arquivomorto/edicoes_anteriores/anais16/sem15dpf/sm15ss08_02.pdf. Acesso em: 24 de mar. de 2023.

BIGODE, Antônio José Lopes; FRANT, J. B. Multiplicação: ideias e conceitos - representações que ajudam a entender as ideias multiplicativas. In.: ________. **Matemática: soluções para dez desafios do professor:** 1º ao 3º ano do Ensino Fundamental. 1ª ed. São Paulo: Ática Educadores, 2011, p. 56 a 71. Disponível em: https://pt.scribd.com/document/637826043/Matematica-Solucoes-para-10-desafios-doProfessor. Acesso em: 09 de abr. de 2024.

BOGDAN, Robert Charles; BIKLEN, Sara Knopp. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1994. Disponível em: https://www.academia.edu/6674293/Bogdan_Biklen_investigacao_qualitativa_em_educacao Acesso em: 15 de jan. de 2024.

BONANNO, Aparecida de Lourdes. **Um estudo sobre o cálculo operatório no campo multiplicativo com alunos de 5ª série do ensino fundamental**. 2007. 129 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11490. Acesso em: 15 de jan. de 2024.

BORRALHO, António Manuel Águas. LUCENA, Isabel Cristina Rodrigues. BRITO, Maria Augusta Raposo de Barros. **Avaliar para melhorar as aprendizagens em matemática**. Organizado por Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha, Maria José de Freitas Mendes e Miguel Chaquiam. Belém: SBEM-PA, 2015 (Coleção Educação Matemática na Amazônia, 4).

BRANDT, Célia Finck. GUÉRIOS, Ettiène. DANIEL, Jane Eletra Serafini. PEREIRA, Ana Lúcia. Reflexões Sobre A Aprendizagem Das Operações Aritméticas Elementares Por Alunos Das Séries Iniciais Do Ensino Fundamental À Luz Da Teoria Dos Campos Conceituais De Gérard Vergnaud. **REVEMAT**, Florianópolis (SC), v.14, n.1, p.1-16, 2019. DOI: Disponível em: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2019.e65454 .Acesso em: 05 mai. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 05 mai. 2022.

BRASIL. **Press Kit Resultado Saeb**. 2023. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb/resultados . Acesso em: 05 mai. 2022.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa:** Educação Estatística / Ministério da Educação. Brasília: MEC, SEB, 2014.

CARVALHO, Adelaide da Silva. **Resolução de problemas que envolvem a multiplicação e a divisão de números naturais: um estudo das estratégias de estudantes do 5º ano**. 2020. 171f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação e Docência- PROMESTRE). Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2020. Disponível em: http://hdl.handle.net/1843/38038. Acesso em: 05 mai. 2023.

CUNHA, Maria Helena. Saberes profissionais de professores de matemática: Dilemas e dificuldades na realização de tarefas de investigação. **Revista Millenium on line**, n. 17, 2000. Disponível em: https://repositorio.ipv.pt/handle/10400.19/929. Acesso em: 05 mai. 2023.

CUNHA, Helena; OLIVEIRA, Hélia; PONTE, João Pedro da. Investigações matemáticas na sala de aula. In: ABRANTES, Paulo; LEAL, L. C.; PONTE, João Pedro da (Ed.). **Investigar para aprender matemática.** Lisboa: Projecto MPT e APM, 1996. Disponível em: https://docplayer.com.br/24847490-Investigacoes-matematicas-na-sala-de-aula-helena-cunha-helia-oliveira-joao-pedro-da-ponte.html. Acesso em: 05 mai. 2023.

DANCZUK, Fabulo Eugenio. **Diversificação de tarefas como proposta metodológica no ensino dos números inteiros.** 2016. 194 f. Dissertação (Mestrado) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Mestrado Profissional em Matemática. Pato Branco, 2016. Disponível em: https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/1854. Acesso em: 25 abr. 2023.

FERNANDES, D. Avaliação Alternativa: Perspectivas Teóricas e Práticas de Apoio. In Futuro Congressos e Eventos (Ed.), **Livro do 3.º Congresso Internacional Sobre Avaliação na Educação,** pp. 79-92. Curitiba: Futuro Eventos, 2005.

FERNANDES, D. Para uma teoria da avaliação no domínio das aprendizagens. **Estudos em Avaliação Educacional**, São Paulo, v. 19, n. 41, p. 347–372, 2008. DOI: 10.18222/eae194120082065. Disponível em: https://publicacoes.fcc.org.br/eae/article/view/2065. Acesso em: 2 abr. 2023.

FERRAZ, Sara Rodrigues. **Investigando a aprendizagem de noções associadas ao campo multiplicativo: um estudo com alunos do 6° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG)**. 2016. 267 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2016. Disponível em: http://www.repositorio.ufop.br/handle/123456789/8707. Acesso em: 2 abr. 2023.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, v. 3, n. 1, 1995. Disponível em: https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646877/15035. Acesso em: 23 de março de 2023.

GITIRANA, V. *et al*. **Repensando a multiplicação e divisão:** contribuições da Teoria dos Campos Conceituais. São Paulo: PROEM, 2014.

GUIMARÃES, Karina Perez. **Abstração Reflexiva E Construção Da Noção De Multiplicação, Via Jogos De Regras: Em Busca De Relações.** 1998. 199f. Dissertação de mestrado. Universidade Estadual de Campinas. Campinas/SP. 1998. Disponível em: https://hdl.handle.net/20.500.12733/1586526. Acesso em: 2 abr. 2023.

IBIAPINA, Wilter Freitas. **Uso pedagógico do ábaco romano para ensino do algoritmo de multiplicação**. 2014. 100f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) - Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/jspui/handle/123456789/19492. Acesso em: 5 abr. 2023.

MAGINA, Sandra et al. Repensando adição, subtração: contribuições da teoria dos campos conceituais. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2001.

MAGINA, S.; SANTOS, a.; MERLINI, V. Quando e como devemos introduzir a divisão nas séries iniciais do ensino fundamental? Contribuição para o debate. **Em Teia: revista de educação matemática e tecnológica iberoamericana,** Recife, (v. 1, n. 1), (p. 1-23), 2010. Disponível em: https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/2186. Acesso em: 02 de ago. de 2023.

MAGINA, S.; SANTOS, a.; MERLINI, V. O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações das estruturas multiplicativas. **Ciência & Educação** (Bauru), (v. 20, n. 2). 2014. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ciedu/a/QrTnTjTzRVW576mbqMH7cMd/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 03 de ago. de 2023.

MINAYO, M.C.S. Ciência, técnica e arte: o desafio da pesquisa social. In: DESLANDES, S.F.; GOMES, R.; MINAYO, M.C.S. (Org.). **Pesquisa social:** teoria, método e criatividade. Petrópolis: Vozes, 2009. p. 9-29. Disponível em: https://wp.ufpel.edu.br/franciscovargas/files/2012/11/pesquisa-social.pdf. Acesso em: 15 de jan. de 2024.

MOREIRA, Marco Antonio. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências** – V7(1), pp. 7-29, 2002. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/141212/000375268.pdf. Acesso em: 30 de mai. de 2023.

MOREIRA, Marco Antonio. **Pesquisa em ensino:** aspectos metodológicos. Universidade Federal do Rio Grande do Sul Instituto de Física. Porto Alegre, Brasil. 2003. http://moreira.if.ufrgs.br/pesquisaemensino.pdf. Acesso em: 30 de mai. de 2023.

NARDI, Roberto. A pesquisa em ensino de Ciências e Matemática no Brasil. **Ciência & Educação** (Bauru), v. 21, p. I-V, 2015. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/277897902_A_pesquisa_em_ensino_de_Ciencias_e_Matematica_no_Brasil. Acesso em: 24 de mar. de 2023.

PASSOS, Cármen Lúcia Brancaglion; NACARATO, Adair Mendes. Trajetória e perspectivas para o ensino de Matemática nos anos iniciais. **Estudos Avançados**, v. 32, p. 119-135, 2018.

Disponível em: https://www.scielo.br/j/ea/a/VqMq5VmXSk45CKXtvFmZZrN/?lang=pt#. Acesso em: 24 de mar. de 2023.

PONTE. J. P. Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular** (pp. 11-34). Lisboa: APM. 2005. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/handle/10451/3008. Acesso em: 02 de fev. de 2023.

PONTE, J. P., BROCARDO J., OLIVEIRA H**. Investigações matemáticas na sala de aula**. 1ª ed., 2ª reimp. - Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PONTE, J. P. Explorar e investigar em Matemática: Uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem. Unión - **Revista Iberoamericana de Educación Matemática** (ISSN: 1815-0640), 2010. 21, 13-30. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3043/1/10-Ponte-Union_21.pdf. Acesso em: 08 mai. 2023.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M., & Ferreira, C. **O trabalho do professor numa aula de investigação matemática.** Quadrante, 7(2), 41-70. 1998.

PONTE, J. P. Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In: PONTE, J. P. (Org.). **Práticas profissionais dos professores de matemática.** Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2014. (pp. 13-27). Disponível em: https://www.researchgate.net/profile/Joao-Ponte-2/publication/275409996_Tarefas_no_ensino_e_na_aprendizagem_da_Matematica/links/553c10ff0cf245bdd76674b4/Tarefas-no-ensino-e-na-aprendizagem-da-Matematica.pdf. Acesso em: 02 de fev. de 2023.

SANTOS, Ivan Álvaro dos. **A História Da Matemática Como Recurso Pedagógico Para a Aprendizagem Significativa De Multiplicação De Números Naturais.** 2018. 190f. Dissertação de mestrado. Universidade Regional de Blumenau, Blumenau/SC. 2018. Disponível em: http://www.bc.furb.br/docs/DS/2018/366254_1_1.pdf. Acesso em: 08 mai. 2023.

SILVA, Lucinéia Barbosa da. **O ensino-aprendizagem da multiplicação de números naturais no 5º ano do ensino fundamental.** 2019. 201f. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação e Docência- PROMESTRE). Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizinte, MG. 2019. Disponível em: https://repositorio.ufmg.br/handle/1843/33368. Acesso em: 08 mai. 2023.

SILVA, Vera Lucia da. **Ensino e aprendizagem de problemas de produto cartesiano: inter-relações entre diferentes representações**. 2006. 160 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/11105. Acesso em: 08 mai. 2023.

THOMAZ, Poliana Helena Batista. **Perspectivas De Um Trabalho Pedagógico Com Jogos E a Matemática No Programa Ler E Escrever**. 2013. 148f. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica de Campinas, Campinas/SP. 2013. Disponível em:

http://repositorio.sis.puc-campinas.edu.br/xmlui/handle/123456789/15501. Acesso em: 08 mai. 2023.

VERGNAUD, G. A gênese dos campos conceituais. In: GROSSI. E.P. **Por que ainda há quem não aprende? A teoria.** Petrópolis. Editora Vozes, 2003. p. 21-64.

VERGNAUD, G. **A criança, a matemática e a realidade**: problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: Ed. UFPR, 2009.

VERGNAUD, G. **Teoria dos campos conceituais**. CRS e Université René Descartes. Palestra proferida no I Seminário Internacional de Educação Matemática, UFRJ, Porto Alegre, 1993. Disponível em: http://www.mat.ufrgs.br/~mbasso/textos/Teoria_do_Campo_Conceitual_G.Vergnaud.pdf. Acesso em: 17 de jul. de 2023.

Yin, Robert K. **Pesquisa qualitativa do início ao fim [recurso eletrônico]**. Tradução: Daniel Bueno. Revisão técnica de Dirceu da Silva. Porto alegre, RS: Penso, 2016.

ZONZINI, Cleudiana dos Santos Feitoza. **Algoritmos de multiplicação: uma experiência no Ensino Fundamental**. 2016. 67f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). Universidade de Brasília, Brasília, 2016. Disponível em: http://repositorio.unb.br/handle/10482/21399. Acesso em: 17 de jul. de 2023.

APÊNDICE A –TCLE- GESTOR ESCOLAR

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE)

Prezado (a) Gestor (a) da Escola Municipal Francisca Romana dos Santos,

A mestranda Vânia Ferreira Braga, do curso de Mestrado Profissional em Docência em Educação em Ciências e Matemática (PPGDOC) da Universidade Federal do Pará - UFPA/Belém- PA, estará desenvolvendo, a Pesquisa intitulada *Ensino-avaliação-aprendizagem da multiplicação nos anos iniciais com o uso de tarefas* sob a orientação da Prof.ª Dr.ª Isabel Cristina Rodrigues de Lucena.

O objetivo principal da pesquisa é desenvolver práticas de ensino-aprendizagem-avaliação por meio de tarefas do tipo exercício, problema, investigação-exploração em uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental. Por essa razão, solicitamos sua colaboração para podermos realizar as práticas pedagógicas em sala de aula e a permissão para fazermos registros de áudio, vídeo e fotografias que constituirão os dados da pesquisa.

Esclarecemos que sua participação é voluntária e, portanto, o (a) senhor (a) não é obrigado (a) a fornecer as informações e/ou colaborar com as atividades solicitadas pela Pesquisadora. Caso decida não autorizar o estudo, ou resolver a qualquer momento desistir do mesmo, não sofrerá nenhum dano. Estaremos à disposição da escola para qualquer esclarecimento que considere necessário em qualquer etapa da pesquisa.

____

Assinatura da pesquisadora

E-mail: vania.braga@ilc.ufpa.br

Telefone para contato: (94) 99185-3279

Considerando, que fui informado dos objetivos e da relevância do estudo proposto, de como será minha participação. Declaro o meu consentimento em participar da pesquisa, como também concordo que os dados obtidos na investigação sejam utilizados para fins científicos (divulgação em eventos e publicações). Estou ciente que receberei uma via desse documento.

Canaã dos Carajás-PA, ___de ______________________ de 2024.

____

Assinatura do participante ou responsável legal

APÊNDICE B –TCLE- PAIS/RESPONSÁVEIS

TCLE - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO/ PAIS/RESPONSÁVEIS

Prezados pais e/ou responsáveis pelo(a) aluno(a) ________________________ ______________________________ do 5º ano da turma _____ da Escola Municipal de Ensino Fundamental Francisca Romana dos Santos

Eu, Vânia Ferreira Braga, mestranda do curso de Mestrado Profissional em Docência em Educação em Ciências e Matemática (PPGDOC) da Universidade Federal do Pará - UFPA/Belém- PA, temos o prazer de convidá-lo(a) a participar da pesquisa intitulada: *Ensino-avaliação-aprendizagem da multiplicação nos anos iniciais com o uso de tarefas* sob a orientação da Prof.ª Dr.ª Isabel Cristina Rodrigues de Lucena.

O objetivo principal da pesquisa é desenvolver práticas de ensino-aprendizagem-avaliação por meio de tarefas de multiplicação do tipo exercício, problema, investigação-exploração em uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental. Por essa razão, solicitamos sua colaboração para podermos realizar as práticas pedagógicas em sala de aula e esperamos que os alunos possam compreender e aprender melhor.

No desenvolvimento das tarefas, iremos gravar, em áudio ou vídeo, as aulas. Permanecerá em nossa sala de aula, a Professora ______________________________.

Informamos que os dados coletados serão confidenciais e utilizados, unicamente, para fins dessa pesquisa, podendo ser divulgados em congressos, simpósios, seminários, revistas, livros e nas dissertações do(a)s pesquisadores(as). Nenhum aluno será identificado, pois os nomes serão codificados.

Caso você concorde com a participação de seu (sua) filho(a) na pesquisa, como parte do conjunto de alunos da turma, solicitamos assine este documento.

Desde já, agradecemos sua colaboração.

____

Assinatura dos pais/responsável

Canaã dos Carajás-PA, ___ de ________________________ de 2024

APÊNDICE C –Tarefa 1

Turma: 5º Ano B

Pesquisadora: Vânia F. Braga

Alunos (as):____

____

____

Tarefa 1

1) Tereza organizou 10 pacotes com docinhos para seus sobrinhos. Em cada pacote ela colocou 12 docinhos. Quantos docinhos ela usou ao todo? Resolva e explique como pensou para resolver.

2) Para o seu aniversário Livia convidou 5 coleguinhas e encomendou 8 salgadinhos para cada um. Quantos salgadinhos foram preparados?
Resolva e explique como pensou para resolver.

APÊNDICE D – Tarefa 2

Turma: 5º Ano B

Pesquisadora: Vânia F. Braga

Alunos (as): ____

____

____

Tarefa 2

1) Com um metro de tecido uma costureira faz 3 fantasias. Quantos metros ela precisará para fazer 12 fantasias?

Resolva e explique como pensou para resolver.

2) Para fazer um bolo, umas das instruções é: para cada 2 xícaras de açúcar adicione 5 xícaras de farinha. Quantas xícaras de farinhas serão necessárias para fazer 3 bolos? Como pensou para resolver.

APÊNDICE E – Tarefa 3

Turma: 5º Ano B

Pesquisadora: Vânia F. Braga

Alunos (as):____

____

____

Tarefa 3

1) Alice levou para sua viagem 3 *shorts* (um verde, um preto e um amarelo) e 4 blusas (uma vermelha, outra azul, uma rosa e a outra amarela). De quantas maneiras diferentes Alice pode combinar essas peças durante a viagem?

Resolva e explique como pensou para resolver. (Pode fazer desenhos se preferir)

2) Para a festa de São João, na escola, tem 2 meninos (Pedro e João) e 4 meninas (Maria, Luíza, Clara e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Se todos os meninos dançarem com todas as meninas, quantos pares diferentes poderão ser formados?

Resolva e explique como pensou para resolver. (Pode fazer desenhos se preferir)

APÊNDICE F – Tarefa 4

Turma: 5º Ano B

Pesquisadora: Vânia F. Braga

Alunos (as):____

____

____

Tarefa 4

1) Na sala de aula do 4º ano as carteiras são organizadas em 5 filas com 7 carteiras em cada. Quantas carteiras há na sala?

Resolva e explique como pensou para resolver (pode fazer desenho se preferir).

2) André organizou sua coleção de carrinhos em 13 fileiras com 4 carrinhos em cada. Quantos carrinhos há na coleção de André?

Resolva e explique como pensou para resolver (pode fazer desenho se preferir).

APÊNDICE G – Tarefa 5

Turma: 5º Ano B

Pesquisadora: Vânia F. Braga

Alunos (as):____

Tarefa 5

1) a) Escreve em coluna os 10 primeiros resultados da multiplicação do 5.

b) Repara nos dígitos das unidades e das dezenas. Encontras algumas regularidades? Qual (is)?

2) Investiga o que acontece com os 20 primeiros resultados da multiplicação do 6.

APÊNDICE H – Tarefa 6

Turma: 5º Ano B

Pesquisadora: Vânia F. Braga

Alunos (as):____

____

____

Tarefa 6

1) Revolva:

a) 13 X 5

b) 130 X 14

APÊNDICE I – Autoavaliação

NOME:			
TAREFA	**CONSEGUI FACILMENTE**	**CONSEGUI COM DIFICULDADES**	**AINDA NÃO CONSEGUI**
Tarefa 1			
Tarefa 2			
Tarefa 3			
Tarefa 4			
Tarefa 5			
Tarefa 6			

Fonte: Adaptada de Borralho, Lucena e Brito, 2015

ANEXO A – TRABALHO EM GRUPO

ANEXO B – APRESENTAÇÕES ORAIS DOS GRUPOS

ANEXO C–DISCUSSÃO COLETIVA-TAREFA INVESTIGATIVA/EXPLORATÓRIA


COMBINADOS