



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS
DOUTORADO ACADÊMICO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

LUIS ANDRÉS CASTILLO BRACHO

História da Geometria para o Ensino fundamentada na Ideografia Dinâmica

Belém
2025

LUIS ANDRÉS CASTILLO BRACHO

História da Geometria para o Ensino fundamentada na Ideografia Dinâmica

Tese doutoral apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas.

Área de concentração: Educação Matemática.

Linha de pesquisa: História, Filosofia e Estudos Culturais.

Orientador: Prof. Dr. Iran Abreu Mendes

Belém
2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

C352 Castillo Bracho, Luis Andrés.
História da Geometria para o Ensino fundamentada na
Ideografia Dinâmica / Luis Andrés Castillo Bracho. — 2025.
161 f. : il. color.

Orientador(a): Prof. Dr. Iran Abreu Mendes
Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de
Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em
Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2025.

1. Ideografia Dinâmica. 2. História da Matemática. 3.
Tecnologias Digitais. 4. Ensino de Geometria. I. Título.

CDD 371.102

LUIS ANDRÉS CASTILLO BRACHO

História da Geometria para o Ensino fundamentada na Ideografia Dinâmica

Tese doutoral apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas.

Data de avaliação: 25/02/2025

Banca Examinadora

Prof. Dr. Iran Abreu Mendes – Presidente/Orientador (UFPA)

Prof^a. Dr^a. Daise Lago Pereira Souto (UNEMAT)

Prof^a. Dr^a. Jesús Victoria Flores Salazar (PUC-Peru)

Prof. Dr. Dailson Evangelista Costa (UFT)

Prof. Dr. Carlos Aldemir Farias da Silva (UFPA)



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

ATA DE DEFESA DE TESE

Aos vinte e cinco dias do mês de fevereiro dois mil e vinte e cinco, às quatorze horas, reuniu-se a Banca Examinadora aprovada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, composta pelos professores doutores: Iran Abreu Mendes (Presidente), Carlos Aldemir Farias da Silva (membro interno), Daise Lago Pereira Souto (membro externo – UNEMAT), Jesus Victoria Flores Salazar (membro externo – PUC/Peru), e Dailson Evangelista Costa (membro externo – UFT). Sob a presidência do primeiro, procederam à Defesa de Tese do discente **LUIS ANDRÉS CASTILLO BRACHO**. Após a apresentação do trabalho intitulado “**História da Geometria para o Ensino fundamentada na Ideografia Dinâmica**”, a Banca reuniu-se em separado para a Avaliação e apresentou o seguinte parecer:

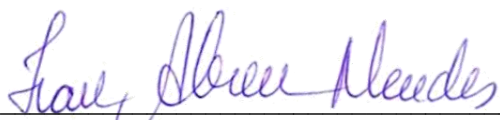
O tema é atual e relevante no que concerne às pesquisas em História da Matemática para o ensino de Matemática focada nas interrelações com as tecnologias digitais para o ensino de Geometria, com destaques para dois pontos que fortalecem a tese: 1) a relevância da História da Matemática para o ensino em sala de aula em conexão com as tecnologias digitais e 2) a validação da pesquisa por meio de uma epistemologia fundamentada na ideografia dinâmica e suas conexões com o desenvolvimento histórico-conceitual da Matemática. Reitera-se a relevância do trabalho para a área da história da Matemática para o ensino, notadamente por ter se proposto a interconectar epistemologias, fundamentos metodológicos de pesquisa e suas implicações na produção de encaminhamentos didáticos argumentadores da tese sustentada. Destaca-se que o trabalho contempla o objetivo anunciado no início do texto da tese e condiz com o que foi apresentado em todo o trabalho, possibilitando ao leitor, posteriormente fazer novos encaminhamentos de pesquisa e incorporação no ensino de geometria, bem como pesquisar a respeito desse modo de abordagem do tema tratado na tese. Não há dúvidas que o presente trabalho resulta no desenvolvimento de artigos científicos, capítulos de livros e encaminhamentos didáticos para a formação de professores de Matemática, bem como para o ensino de Matemática. Assim, a banca também sugere a publicação parcial de partes da tese na forma de artigos. Para finalizar, conclui-se pela aprovação da tese apresentada.

Assim, o discente é considerado **APROVADO** neste Exame de Defesa de Tese.

A aprovação na defesa **não representa a conclusão do curso**, que somente será efetivada mediante a homologação do Colegiado do programa, após o cumprimento no prazo de até 60 (sessenta) dias, da entrega da Versão Final e demais exigências regimentais, quando será concedido o título de **Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas** – área de concentração: **Educação em Matemática**.

E, para constar, a presente ata foi lida e assinada por todos os membros da Banca Examinadora.

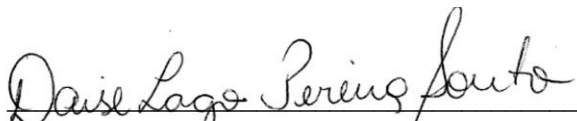
Belém, 25 de fevereiro de 2025.



Prof. Dr. Iran Abreu Mendes



Prof. Dr. Carlos Aldemir Farias da Silva



Profa. Dra. Daise Lago Pereira Souto



Profa. Dra. Jesus Victoria Flores Salazar



Prof. Dr. Dailson Evangelista Costa

*Dedico este trabalho a Ivonne Coromoto
Sánchez Sánchez, minha fonte de motivação e
superação na jornada acadêmica e pessoal.*

Agradecimentos

Nesta seção de agradecimentos, expresso minha profunda gratidão

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio e financiamento aos Programas de Pós-Graduação, que têm sido essenciais para a formação de pesquisadores e o avanço do conhecimento no país;

À Fundação Amazônia de Amparo a Estudos e Pesquisas (FAPESPA) e à Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação (PROPEP) da Universidade Federal do Pará (UFPA), por meio de sua Diretoria de Pós-Graduação (DPG) pela concessão da bolsa de Doutorado no âmbito do Programa de Ações Afirmativas da Pós-Graduação (PAF-PG) via o Edital 14/2021 com vigência de 2022-2024;

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM) da Universidade Federal do Pará, meu reconhecimento pelas valiosas contribuições ao meu desenvolvimento acadêmico;

À Universidade Federal do Pará e ao Instituto de Educação Matemática e Científica expresso minha gratidão pelo inestimável suporte físico e estrutural que proporcionou ao longo de nossa jornada acadêmica. Destacamos o comprometimento exemplar do corpo docente, técnicos administrativos, bibliotecários, e demais funcionários que realizam seu trabalho com diligência e dedicação na universidade e instituto ao serviço da comunidade discente;

À banca examinadora, composta pelos Professores doutores, Daise Lago Pereira Souto (UNEMAT), Jesús Victoria Flores Salazar (PUC-Peru), Dailson Evangelista Costa (UFT) e Carlos Aldemir Farias da Silva (UFPA), e meu reconhecimento pela avaliação cuidadosa, contribuições e provocações nas etapas de qualificação do trabalho;

Aos líderes do Grupo de Pesquisa Práticas Socioculturais e Educação Matemática (GPSEM), expresso minha sincera gratidão pelo cuidado especial e pela dedicação em proporcionar espaços formativos excepcionais, marcados por um elevado padrão intelectual. Destaco as valiosas iniciativas, como as Escolas de Estudos Avançados sobre Pesquisa em Cultura, História e Educação, Ciclo de Palestras, Seminários, lançamentos de livros, e a leitura e discussão de textos acadêmicos. Essas atividades não apenas com meu capital intelectual, mas também oferecem uma base teórica sólida para compreender as complexidades da pesquisa científica na pós-graduação. O comprometimento dos professores líderes do GPSEM em criar

ambientes propícios ao aprendizado e ao debate acadêmico é verdadeiramente inspirador, contribuindo significativamente para o aprimoramento intelectual de todos os membros do grupo;

Ao Professor doutor Iran Abreu Mendes pelos 7 anos de trabalho conjunto sob sua orientação (2018-2024), sua competência, dedicação e rigor acadêmico foram fundamentais. Agradeço por suas orientações, conhecimentos compartilhados, paciência e confiança, que me proporcionaram compreender os signos e protocolos da pós-graduação e da carreira intelectual;

Ao Professor Doutor Carlos Aldemir Farias da Silva pelas valiosas contribuições durante minha formação na pós-graduação, pelas sempre enriquecedoras conversas e discussões compartilhando experiências sobre a vida e o que deve ser um profissional competente para a gestão de atividades de ensino, pesquisa e extensão;

Aos meus pais, Irio Benito Castillo Mejias e Euniria Benita Bracho Cabrera, a minha sogra Ivonne Cormoto Sánchez, aos meus irmãos, Leuniris Marierys Castillo Bracho e Jorge Luis Castillo Bracho, e demais familiares meu agradecimento pelo apoio e motivação constantes;

A minha esposa Ivonne Coromoto Sánchez Sánchez, um agradecimento especial, por ser meu pilar fundamentado de jornada de luta, tanto no âmbito pessoal e acadêmico;

Finalmente, aos colegas e amigos da jornada doutoral, José Erildo Lopes Junior e José dos Santos Guimarães Filho, pelos momentos de alegrias, conversas partilhadas, palavras de encorajamento e força em diversos momentos desta viagem formativa.

A matemática fornece uma estrutura para lidar precisamente com noções de “o que é”. A computação fornece uma estrutura para lidar precisamente com noções de “como fazer”¹
(Abelson; Sussman; Sussman, 1996, p. xxiii)

¹ Tradução nossa do texto original: *Mathematics provides a framework for dealing precisely with notions of “what is.” Computation provides a framework for dealing precisely with notions of “how to”.*

Resumo

Neste trabalho, faz-se uma descrição reflexiva de uma pesquisa centrada na Ideografia Dinâmica como um fundamento integrador entre a História da Matemática e as Tecnologias Digitais no ensino de geometria. O estudo parte da seguinte questão central: como a História, se utilizada para o ensino da geometria com fundamentação na Ideografia Dinâmica, pode contribuir para uma nova compreensão do desenvolvimento e da sistematização da matemática, promovendo o ensino e a aprendizagem da geometria? A pesquisa tem como objetivo geral explorar a Ideografia Dinâmica como um fundamento que articula a História da Matemática e as Tecnologias Digitais, ampliando as possibilidades de ensino e aprendizagem na geometria. Para isso, foi necessário (i) identificar principais tendências, contribuições e lacunas existentes na produção acadêmica e científica – em âmbito nacional e internacional – relacionada às interações entre História da Matemática e Tecnologias Digitais; (ii) compreender a trajetória histórica das tecnologias na condição de artefatos culturais que influenciaram a cognição, a representação e a comunicação de ideias matemáticas, desde as ideografias estáticas até as dinâmicas; (iii) caracterizar os fundamentos teóricos da História para o Ensino da Matemática e da Ideografia Dinâmica; e (iv) caracterizar a obra de Oliver Byrne – com seus diagramas coloridos aplicados aos Elementos de Euclides – e a obra de Jay Hambidge, com sua abordagem de simetria dinâmica, destacando o modo como esse tipo de material histórico pode ser dinamizado por meio do GeoGebra e do Manim. Ao integrar perspectivas históricas com abordagens tecnológicas, a pesquisa busca sustentar a premissa de que a Ideografia Dinâmica pode transformar o ensino da geometria, promovendo uma compreensão mais dinâmica e interativa dos conceitos matemáticos. Dessa forma, o estudo contribui para a reflexão sobre novas metodologias de ensino, enfatizando o potencial das representações dinâmicas no desenvolvimento do pensamento geométrico e na sistematização da matemática ao longo da história.

Palavras-chave: Ideografia Dinâmica; História da Matemática; Tecnologias Digitais; Ensino de Geometria.

Abstract

This paper presents a reflective description of a research project focused on Dynamic Ideography as an integrative foundation between the History of Mathematics and Digital Technologies in the teaching of geometry. The study starts from the following central question: how can History, if used for teaching geometry based on Dynamic Ideography, contribute to a new understanding of the development and systematization of mathematics, promoting the teaching and learning of geometry? The general objective of the research is to explore Dynamic Ideography as a foundation that articulates the History of Mathematics and Digital Technologies, expanding the possibilities of teaching and learning in geometry. To this end, it was necessary to (i) identify the main trends, contributions and gaps in academic and scientific production – at national and international levels – related to the interactions between the History of Mathematics and Digital Technologies; (ii) understand the historical trajectory of technologies as cultural artifacts that influenced the cognition, representation and communication of mathematical ideas, from static to dynamic ideographies; (iii) to characterize the theoretical foundations of History for the Teaching of Mathematics and Dynamic Ideography; and (iv) to characterize the work of Oliver Byrne – with his colored diagrams applied to Euclid's Elements – and the work of Jay Hambidge, with his approach to dynamic symmetry, highlighting how this type of historical material can be dynamized through GeoGebra and Manim. By integrating historical perspectives with technological approaches, the research seeks to support the premise that Dynamic Ideography can transform the teaching of geometry, promoting a more dynamic and interactive understanding of mathematical concepts. In this way, the study contributes to the reflection on new teaching methodologies, emphasizing the potential of dynamic representations in the development of geometric thinking and in the systematization of mathematics throughout history.

Keyword: Dynamic Ideography; History of Mathematics; Digital Technologies; Geometry Teaching.

Resumen

En este trabajo se realiza una descripción reflexiva de investigaciones centradas en la Ideografía Dinámica como fundamento integrador entre la Historia de las Matemáticas y las Tecnologías Digitales en la enseñanza de la geometría. El estudio parte de la siguiente pregunta central: ¿cómo puede la Historia, si se utiliza para enseñar geometría basada en la Ideografía Dinámica, contribuir a una nueva comprensión del desarrollo y la sistematización de las matemáticas, promoviendo la enseñanza y el aprendizaje de la geometría? La investigación tiene como objetivo general explorar la Ideografía Dinámica como fundamento que articula la Historia de las Matemáticas y las Tecnologías Digitales, ampliando las posibilidades de enseñanza y aprendizaje en geometría. Para lograrlo, fue necesario (i) identificar las principales tendencias, aportes y vacíos en la producción académica y científica – nacional e internacional – relacionados con las interacciones entre la Historia de las Matemáticas y las Tecnologías Digitales; (ii) comprender la trayectoria histórica de las tecnologías como artefactos culturales que influyeron en la cognición, representación y comunicación de ideas matemáticas, desde ideografías estáticas hasta dinámicas; (iii) caracterizar los fundamentos teóricos de la Historia para la Enseñanza de las Matemáticas y la Ideografía Dinámica; y (iv) caracterizar el trabajo de Oliver Byrne – con sus coloridos diagramas aplicados a los Elementos de Euclides – y el trabajo de Jay Hambidge, con su enfoque de simetría dinámica, destacando la forma en que este tipo de material histórico puede racionalizarse a través de GeoGebra y Manim. Al integrar perspectivas históricas con enfoques tecnológicos, la investigación busca respaldar la premisa de que la Ideografía Dinámica puede transformar la enseñanza de la geometría, promoviendo una comprensión más dinámica e interactiva de los conceptos matemáticos. De esta manera, el estudio contribuye a la reflexión sobre nuevas metodologías de enseñanza, enfatizando el potencial de las representaciones dinámicas en el desarrollo del pensamiento geométrico y la sistematización de la matemática a lo largo de la historia.

Palabras clave: Ideografía Dinámica; Historia de las Matemáticas; Tecnologías Digitales; Enseñanza de la Geometría.

Lista de Figura

Figura 1	Ocre de Blombos e a reconstrução do seu traçado	75
Figura 2	Ossos de Ishango	76
Figura 3	Tablete de argila Plimpton 322	76
Figura 4	O Papiro Rhind	77
Figura 5	Artefato criado por Napier	79
Figura 6	O computador mecânico de Charles Babbage	80
Figura 7	A máquina de Turing "Bombe"	80
Figura 8	Representação dos eixos da História da Matemática como pesquisa, disciplina e método de ensino	88
Figura 9	Conexões dimensionais entre os eixos da História da Matemática	89
Figura 10	A dimensão entre os eixos da História da Matemática	90
Figura 11	Representações numéricas	95
Figura 12	Prova geométrica da Proposição I do livro I dos Elementos de Euclides	96
Figura 13	Modelo de relações entre História e Tecnologias para o Ensino da Matemática	109
Figura 14	Exemplar dos Elementos de Euclides de Théon (888 d.C.)	114
Figura 15	Folhas das Obras de Byrne e Mackay	117
Figura 16	Capa do Livro de Byrne (1847)	118
Figura 17	Retrato de Oliver Byrne	119
Figura 18	Conjunto de Cores, Linhas e Espessuras na obra de Byrne	120
Figura 19	Exemplo da paleta de cores e estilos na obra de Byrne	120
Figura 20	homepage Digital Mathematics Archive	122
Figura 21	homepage Oliver Byrne's Edition of Euclid	122
Figura 22	Explorando o Livro I	123
Figura 23	Comparando a Obra de Byrne e Joyce	124
Figura 24	Reprodução da Obra de Byrne e Joyce via LATEX	125
Figura 25	Tradução russa da obra de Byrne	125
Figura 26	Fragmento da capa do livro Envisioning Information	126
Figura 27	Design tradicionais e alternativos para símbolos matemáticos	126
Figura 28	Produção de textos usando o pacote Byrne no METAPOST e LATEX	127
Figura 29	Página inicial do projeto de Euclides de Byrne	127
Figura 30	Proposição I no projeto de Euclides de Byrne	128
Figura 31	Euclides de Byrne desde diferentes dispositivos	129
Figura 32	Proposição XXXIV do Livro I da edição de Byrne	131
Figura 33	Elementos do Diagrama da Proposição XXXIV do Livro I de Byrne	132
Figura 34	Solução geométrica de uma equação cúbica de Omar Khayyam	133
Figura 35	Cores, Linhas e Espessuras da obra de Byrne no GeoGebra	135
Figura 36	Escolha de cores no GeoGebra	135
Figura 37	Construção e Demonstração da proposição XXXIV no GeoGebra	136
Figura 38	Representação Geometria da hipótese da Proposição XXXIV	137
Figura 39	Representação geométrica da tese da Proposição XXXIV	137
Figura 40	O Quadrado e sua diagonal e o quadrado e sua diagonal pela metade	142
Figura 41	O Quadrado e sua diagonal e o quadrado e sua diagonal pela metade em movimento	142
Figura 42	O Quadrado e sua diagonal e o quadrado e sua diagonal pela metade superpostos	143

Figura 43	Circunferência com raio cada diagonal dos quadrados	144
Figura 44	Construção de todos os retângulos de raiz	145
Figura 45	Animação da construção todos os retângulos de raiz	145
Figura 46	Progressão linear dos quadrados raízes	147
Figura 47	Animação da progressão raiz dois e raiz três	147
Figura 48	Construções dos retângulos raízes inscritos no quadrado unidade	148
Figura 49	Construções dos retângulos raízes inscritos no quadrado unidade dinamicamente	149

Lista de Quadros

Quadro 1	Papéis da tecnologia no ensino e aprendizagem da Matemática	33
Quadro 2	Papéis da tecnologia no ensino e aprendizagem da Matemática na BNCC	33
Quadro 3	Papéis da tecnologia na BNCC e Habilidade	34
Quadro 4	Categorias do uso e mediação das Tecnologias Digitais	35
Quadro 5	Produção científica internacional selecionada	36
Quadro 6	Categorização da produção em função do uso da História e Tecnologias	40
Quadro 7	Teses e Dissertações no CREPHIMat (1990 – 2022)	43
Quadro 8	Teses e Dissertações que usam Tecnologias Digitais no CREPHIMat	44
Quadro 9	Trabalhos sobre História da Matemática e Tecnologias Digitais no CREPHIMat	45
Quadro 10	Objetivos e unidade de síntese	46
Quadro 11	Constituição dos objetos de pesquisa	49
Quadro 12	Frequência dos objetos de pesquisa	50
Quadro 13	Uso das Tecnologias, da História e Mediação	52
Quadro 14	Uso das Tecnologias, da História e Mediação dos Trabalho do HTEM	61
Quadro 15	Uso das Tecnologias, da História e Mediação no SNHM	69

Lista de Siglas

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior

CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

CREPHIMat - Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática

GPSEM - Grupo de Pesquisa Práticas Socioculturais e Educação Matemática

HEdM - História da Educação Matemática

HEnM - História para o Ensino da Matemática

HEpM - História e Epistemologia da Matemática

HTeM - Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática

SBHMat - Sociedade Brasileira de História da Matemática

SNHM - Seminário Nacional de História da Matemática

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	17
Apresenta-se uma síntese da trajetória acadêmica e a motivação para a pesquisa. Logo, se faz a abertura da temática pesquisada, abordando a justificativa, a questão central, a tese a sustentar, o objetivo geral e os objetivos específicos, além do percurso metodológico que orientou a pesquisa e a redação do trabalho doutoral.	
 1. A PRODUÇÃO CIENTÍFICA SOBRE RELAÇÕES ENTRE TECNOLOGIAS DIGITAIS E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA.....	 25
Revisão de literatura nacional e internacional sobre as relações entre Tecnologias Digitais e História da Matemática, destacando tendências e lacunas a partir de pesquisas acadêmicas, incluindo as disponíveis no Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática – CREPHIMat.	
 2. DOS RABISCOS NO OSSO AOS TOQUES NA TELA.....	 71
Percurso histórico das tecnologias, desde os primeiros artefatos rudimentares até as humanidades digitais, enfatizando a evolução das representações estáticas para as dinâmicas na Matemática e nas comunicações humanas.	
 3. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO E IDEOGRAFIA DINÂMICA.....	 87
Exploração das bases teóricas e epistemológicas para integrar Ideografia Dinâmica e História da Matemática no ensino.	
 4. A GEOMETRIA EM MOVIMENTO: DAS CORES DE BYRNE À DINÂMICA DE HAMBIDGE.....	 111
Análise das obras de Byrne e Hambidge, explorando suas contribuições e seu potencial no ensino da Geometria. A partir do GeoGebra e do Manim, essas ideias ganham dinamismo, permitindo novas abordagens visuais e interativas.	
 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	 152
 BIBLIOGRAFIA REFERENCIADA.....	 156

INTRODUÇÃO

[...] não nos devemos contentar em utilizar as máquinas para transmitir os antigos conteúdos programáticos mas sim para aproveitar ao máximo, as novas possibilidades pedagógicas oferecidas pela informática (Lévy, 1995, p. 31).

A epígrafe para abertura deste relatório de pesquisa doutoral, remete à escolha do tema desta pesquisa doutoral que teve uma ligação com a minha trajetória acadêmica. Mesmo antes de concluir a Licenciatura em Educação menção Matemática e Física na Universidad del Zulia, na Venezuela (2011-2016), já havia despertado para o campo relacionado ao uso das Tecnologias Digitais. Contudo, no decorrer da formação inicial, fui incorporando aspectos pedagógicos com vistas a me constituir em um professor que faria uso de Tecnologias Digitais na docência.

A consciência de utilizar tais tecnologias como um meio possível de dinamizar o ensino de Matemática não surgiu por acaso, e me aproximou de um grupo de professores e colegas, com interesses comuns em reforçar o uso dos recursos tecnológicos para o contexto educativo. O *Grupo TEM: Tecnologías en la Educación Matemática* me possibilitou aprimorar competências e habilidades concernentes ao uso das Tecnologias Digitais para o ensino da Matemática, por meio de autoformações, discussões de artigos e comunicações científicas referentes ao tema de estudo do Grupo TEM, entre outras atividades desenvolvidas entre 2013 e 2017.

No Brasil, durante a formação no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM) do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI) da Universidade Federal do Pará (UFPA) (2018 –2020), como mestrando fui inserido em um movimento investigativo acionado por dois projetos de pesquisa coordenados pelo professor Iran Abreu Mendes². Os projetos tinham o propósito de investigar os modos, sentidos e modalidades de abordagem dos trabalhos acadêmicos (mestrado e doutorado) que versavam

² Uma história das pesquisas em História da Matemática no Brasil: produções, disseminações e contribuições à Formação de Professores de Matemática e História para o Ensino de Matemática na Formação de Professores e na Educação Básica: uma Análise da Produção Brasileira (1997 - 2017).

sobre a História da Matemática e suas propostas para uso didático nas aulas de Matemática. A pesquisa do professor Iran também abarcava artigos de periódicos, anais, produtos educacionais referentes à História da Matemática.

No trabalho de mestrado teve como objetivo a materialização virtual do Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática (CREPHIMat). Nesse trabalho, faz-se uma descrição reflexiva de uma pesquisa centrada na materialização do ambiente virtual interativo CREPHIMat (Castillo, 2020). Além disso, avaliar o impacto dessa criação pela comunidade acadêmica, com vistas a apontar suas contribuições na divulgação e disseminação das pesquisas em História da Matemática, desenvolvidas no Brasil entre 1990 e 2018, sem desprezar a ampliação do acervo de produções que poderá advir dos estudos futuros nesse campo. Importante ressaltar que uma parte do levantamento e da classificação da produção nesse campo já haviam sido realizados por um grupo de pós-graduandos (mestrado e doutorado), sob a coordenação do professor Iran Mendes (2014, 2015, 2018a, 2018b)

Além dessas ações, também foi realizada uma avaliação do impacto inicial do ambiente virtual do CREPHIMat junto à comunidade acadêmica, desde o seu lançamento em agosto de 2019. O resultado apontou indicativos favoráveis à implementação de uma diversidade de atividades nesse ambiente como contribuição ao trabalho do professor e do pesquisador dessa seara, assim como para os graduandos e pós-graduandos em Educação Matemática. O trabalho de mestrado de Castillo (2020), finalizou com encaminhamentos voltados à exploração do ambiente por toda a comunidade acadêmica engajada na temática da pesquisa, bem como a potencialidade de atividades formativas para os professores da rede de ensino, na forma de palestras, oficinas, cursos de aperfeiçoamento, dentre outros.

Atualmente, o CREPHIMat pode ser considerado como o maior acervo digital no Brasil de produções acadêmico-científicas sobre História da Matemática, bem como se consolidou como um espaço de colaboração com a comunidade acadêmica, de maneira a agregar sugestões didáticas e orientações a alunos, professores e pesquisadores em formato de produtos educacionais, como também, especificamente no ensino da Matemática, por meio dos arquivos disponibilizados, fontes de consulta também para a pesquisa de História da Matemática em geral e nas suas dimensões epistemológica, pedagógica e patrimonial.

Nesse contexto de pesquisa, compreendeu-se como a História da Matemática no Brasil se consolidou como campo de investigação, disciplina acadêmica e fundamento de apoio para a abordagem didática no ensino de Matemática. Trata-se de um campo em constante

desenvolvimento, pautado por fundamentos epistemológicos, métodos e práticas construídos ao longo de mais de três décadas de trajetória acadêmica, que defendem o uso da História no e para o ensino de Matemática(Mendes, 2022a).

Observou-se que a Matemática, enquanto disciplina escolar, foi historicamente apresentada como um conhecimento pronto e acabado, sugerindo que seu desenvolvimento sempre ocorreu da mesma forma como é descrito nos livros didáticos. No entanto, a História da Matemática demonstra que, ao contrário, os conhecimentos matemáticos passaram e ainda passam por um contínuo processo de sofisticação, desde suas primeiras formulações até as inovações que ainda podem surgir. Esse processo de criação matemática teve início no pensamento humano e, à medida que o raciocínio se tornou mais sofisticado, surgiu a necessidade de expandi-lo para além da mente. Dessa forma, meios tangíveis foram sendo desenvolvidos para ampliar os processos de oralidade e escrita, levando à criação de artefatos e suportes para a extensão do pensamento matemático. Ao longo dos séculos, esses suportes foram aprimorados, desde os tabletas de argila e os escritos em papiros até a imprensa de Gutenberg e, mais recentemente, os aplicativos em dispositivos eletrônicos.

Com o avanço das Tecnologias Digitais de Comunicação e Informação, diversas práticas humanas foram incorporadas às sociedades modernas, incluindo aquelas presentes nas escolas e nos processos de ensino e aprendizagem. O desafio, entretanto, reside no fato de que as tecnologias mais recentes passaram a ser utilizadas da mesma forma que as tradicionais, promovendo apenas uma mudança de meio, sem alterar significativamente a mensagem (McLuhan, 1969).

Nesse sentido, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), já afirmam o pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Desse modo, recursos didáticos, como malhas quadriculadas; ábacos; jogos; livros; vídeos; calculadoras; planilhas eletrônicas e *softwares* de Geometria dinâmica têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas (Brasil, 2017, p. 276).

Porém, na práxis do campo educativo, a realidade é outra. Os professores (de Matemática), muitas vezes, substituem a escrita e o desenho no quadro branco com pincel por slides projetados no *Datashow* em suas aulas. Isso significa que o professor apenas poupa o tempo de escrever mais na classe; porém, sua aula segue sendo a mesma. Esse é um assunto contraditório, pois, assim que muda o meio de comunicação, a mensagem se reconfigura para

ter novos significados (McLuhan, 1969). Nesta era digital, as telas não são mais estáticas; ao contrário, esses novos suportes informatizados propiciam uma nova dinâmica.

Sendo assim, encontramos diversas problemáticas. Uma delas é a carência da compreensão, por parte da comunidade dos professores de Matemática, do desenvolvimento histórico e epistemológico da Matemática e dos artefatos que apoiaram esse processo, o que pode dificultar inserir nas salas de aula situações que propiciem a reflexão, contribuindo para a sistematização e a formalização dos conceitos matemáticos.

Consideramos que tal cenário poderia ser superado por meio da compreensão e do uso consciente e crítico das Tecnologias Digitais para uma nova de escrever a História Matemática no ensino, propiciando aos professores melhores condições conceituais sobre os conteúdos matemáticos e outras opções didáticas, para reorganizar suas ações docentes em sala de aula.

Essa nova escrita poderia ser fundamentada na Ideografia Dinâmica que, de modo geral, pode ser considerada como uma forma de escrita nas Tecnologias Digitais atuais. Assim pode ser o fundamento de uma nova forma de representação, figurativa e animada de modelos mentais idealizada por Pierre Lévy no fim da década de 1980. Para Lévy (1997; 2004), a Ideografia Dinâmica possibilita a operacionalização do pensamento por meio das tecnologias da informação e comunicação. Esse avanço só se tornou viável com o surgimento e a aplicação das Tecnologias Digitais, que se concretizaram por meio dos ideogramas, os quais passaram a representar um novo processo de construção informacional. Com isso, abriu-se espaço para que a escrita ideográfica dinâmica se consolidasse como um verdadeiro alfabeto da tecnologia digital, com caráter transversal e aplicável a diversas áreas do conhecimento — incluindo a Matemática e o seu ensino.

Nesse cenário, questionamos que a Ideografia Dinâmica pode ser um fundamento da História da Geometria para o ensino, associada aos meios digitais. Sendo assim, a presente pesquisa doutoral procura **sustentar a tese** de que a História da Geometria para o ensino fundamentada na Ideografia Dinâmica, tem possibilidades de uma nova forma de compreender o desenvolvimento e sistematização da matemática para promover ensino e aprendizagem.

Temos a seguinte **pergunta de pesquisa**: Como História para o ensino da Geometria fundamentação na Ideografia Dinâmica, pode contribuir para uma nova compreensão do desenvolvimento e sistematização da matemática, promovendo o ensino e aprendizagem da Geometria?

Para responder a essa questão, traçamos o seguinte **objetivo geral**: Explorar a Ideografia Dinâmica como um fundamento que articula a História da Matemática e as Tecnologias Digitais, ampliando as possibilidades de ensino e aprendizagem na Geometria Euclidiana.

Para atingir nosso objetivo geral de pesquisa, traçamos os seguintes objetivos específicos:

- Identificar principais tendências, contribuições e lacunas existentes na produção acadêmica e científica, em âmbito nacional e internacional, relacionada às interações entre História da Matemática e Tecnologias Digitais;
- Compreender a trajetória histórica das tecnologias enquanto artefatos culturais que influenciaram a cognição, representação e comunicação de ideias matemáticas, desde as ideografias estáticas até as dinâmicas;
- Caracterizar os fundamentos teóricos da História para o Ensino da Matemática e Ideografia Dinâmica;
- Caracterizar a obra de Oliver Byrne, com seus diagramas coloridos aplicados ao Elementos de Euclides, e obra de Jay Hambidge, com sua abordagem de simetria dinâmica, destacando como esses tipo de material histórico pode ser dinamizado por meio de Tecnologias Digitais.

Procedimentos Metodológicos

A metodologia adotada nesta pesquisa baseia-se em uma abordagem qualitativa, utilizando a pesquisa bibliográfica como principal método de levantamento e tratamento das informações (Gil, 2008). Segundo Severino (2013), a pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em registros existentes – originados de investigações anteriores – presentes em documentos impressos, como livros, artigos, teses, entre outros. Esse tipo de pesquisa utiliza dados ou categorias teóricas já exploradas por outros estudiosos e devidamente documentadas.

Assim, o referido movimento metodológico foi cíclico, pois refere-se a uma reflexão dinâmica – são necessárias idas e vindas entre as etapas da pesquisa para a sua consecução, com o objetivo de garantir a maior cientificidade possível. Isso acontece devido ao fato de o pesquisador nesse movimento ampliar a teoria acerca de seu tema de pesquisa, recriando o tempo todo as conexões conceituais necessárias para dar maior sustentação à pesquisa desenvolvida.

Nesse sentido, foram realizados diversos levantamentos de artigos, anais de congressos, teses e dissertações – entre outras fontes que contribuíram para as reflexões – para o fortalecimento da sustentação teórica da pesquisa e o estabelecimento das relações entre História da Matemática e Tecnologias Digitais.

A primeira etapa refere-se a levantamento, seleção e estudo da bibliografia especializada da área da pesquisa – foram contempladas tanto a História da Matemática como as Tecnologias Digitais, ambas para o ensino. O objetivo do levantamento bibliográfico foi identificar, analisar e estudar a produção científica relevante e o mais semelhante possível ao objeto de estudo, pois, como destacamos desde o início deste texto, é campo emergente e pouco se tem produzido sobre o assunto.

Para a busca, foram utilizadas diversas plataformas digitais, tais como: Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática (CREPHIMat), Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), repositórios institucionais, revistas científicas, anais de congressos, entre outras fontes disponíveis na internet, permitindo ultrapassar as fronteiras físicas e estender nossas buscas em outros países além do Brasil.

A segunda etapa buscou compreender o modo como a humanidade exercitou o processo de criação e uso de tecnologias, desde os rabiscos nos ossos de animais selvagens até a sofisticação dessa atividade por meio de telas interativas. O capítulo tem seu alicerce na teoria da Filosofia das Tecnologias e em outras obras literárias conectadas com esse campo, como a obra de Lévy, *Ideografia dinâmica*.

Na terceira etapa, assentamos as bases teóricas que sustentam a pesquisa, para partir do diálogo com o Capítulo 3, que contém os fundamentos epistemológicos, métodos e práticas da História para o Ensino de Matemática, propostos por Mendes (2020, 2021, 2023), de maneira a estabelecermos um modelo para conectar com a obra de Lévy (1997, 2004), *Ideografia dinâmica*.

A quarta etapa tomou como referência duas obras para mostrar exemplos da Ideografia Dinâmica. De início, a primeira a edição de Byrne (1847). Ao reinterpretarmos o esquema visual proposto por Byrne com a Ideografia Dinâmica, as figuras geométricas ganham um dinamismo que amplia significativamente as possibilidades pedagógicas e epistemológicas no ensino da geometria. A utilização do GeoGebra como um gerador de ideogramas dinâmicos não apenas respeita a essência visual do trabalho de Byrne, mas também oferece novas formas de interação

com os conceitos geométricos, permitindo que os alunos explorem, em tempo real, as transformações e relações entre elementos como ângulos, segmentos e polígonos.

A obra seguinte é de Hambidge (2025), *Elementos da Simetria Dinâmica*, na qual foram realizadas animações das figuras geométricas baseadas na referida obra, utilizando o Manim como um gerador de ideogramas dinâmicos. Com isso foi possível revelar as potentes capacidades técnicas dessa biblioteca de Python para o ensino da matemática. Com recursos avançados de animação e uma sintaxe baseada em Python, o Manim permite não apenas criar representações visuais de conceitos matemáticos, mas também dinamizá-los, demonstrando processos e interações de forma clara e envolvente. Ao animarmos os princípios da Simetria Dinâmica, tornou-se possível ilustrar, em tempo real, o modo como proporções harmônicas se manifestam, representando conceitos geométricos.

Assim sendo, cada etapa da pesquisa está presente nos capítulos que são descritos, de maneira sucinta, a seguir.

Após termos apresentado a síntese da trajetória acadêmica do autor deste trabalho e a motivação para a pesquisa, a abertura da temática pesquisada, a justificativa, a questão central, a tese a sustentar, o objetivo geral e os objetivos específicos e o percurso metodológico que orientou a pesquisa e a redação do trabalho doutoral, seguem os capítulos que passamos a descrever.

O Capítulo 1, intitulado “A produção científica sobre relações entre Tecnologias Digitais e História da Matemática”, descreve uma abrangente revisão de literatura sobre a produção acadêmico-científica, proveniente tanto de fontes internacionais como de fontes nacionais – especificamente dos Anais do Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática (HTEM), do Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM) e das teses e dissertações do Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática –, visando a uma análise para descrever as principais tendências e lacunas identificadas nesse corpo de literatura.

O Capítulo 2, denominado “Dos Rabiscos no Osso aos Toques na Tela”, apresenta um percurso histórico da necessidade de a humanidade expandir sua cognição por meio de artefatos, desde os rudimentares ossos, que representavam os primeiros esforços tecnológicos da humanidade, até as sofisticadas interações nas humanidades digitais da era atual.

Esse capítulo se divide em duas seções: na primeira, traçamos um panorama abrangente da história das tecnologias, destacando não apenas suas criações, mas também as reinvenções que moldaram a sociedade ao longo dos séculos. Na segunda seção, concentramo-nos no percurso da

ideografia, revelando as diferentes fases do uso das tecnologias na representação e escrita de ideias e pensamentos.

Destacamos a transição da humanidade das representações estáticas para as dinâmicas na escrita e na comunicação matemáticas, capturando a metamorfose das formas de expressão ao longo do tempo. Ao descrevermos esse processo de mudança, almejamos não apenas compreender o passado, mas também lançar luz sobre as tendências e os desafios que moldarão o futuro das tecnologias e sua influência nas dinâmicas sociais e culturais.

No Capítulo 3, chamado de “Tecnologias Digitais e História da Matemática para o Ensino”, o foco é direcionado para a interseção entre as duas áreas de interesse no contexto do ensino da matemática: as Tecnologias Digitais e a História da Matemática. Sob um fundamento que busca alicerçar-se em princípios epistemológicos da Ideografia Dinâmica, exploramos as bases teóricas que sustentam a integração dessas disciplinas. As relações intrínsecas entre as Tecnologias Digitais e a História da Matemática serão empreendidas com o objetivo de desenvolver um modelo teórico, capaz de orientar práticas educacionais inovadoras e eficazes. Nesse cenário, a conjunção desses elementos revela-se pertinente para a construção de ações pedagógicas mais enriquecedoras e alinhadas com as demandas curriculares do ensino da matemática.

O Capítulo 4, intitulado “A Geometria em Movimento: das Cores de Byrne à Dinâmica de Hambidge”, explora a transição histórica e epistemológica da geometria estática para a dinâmica, destacando dois exemplos notáveis de ideografias dinâmicas. Primeiramente, analisamos a obra de Byrne (1924, 2025), que revolucionou a apresentação dos Elementos de Euclides ao substituir letras por formas e cores, trazendo acessibilidade visual ao ensino da geometria. Esse método é ampliado, dinamizando as figuras originais, oferecendo uma experiência interativa e imersiva. Na sequência, abordamos a obra de Hambidge (1924, 2025) sobre simetria dinâmica, conectando seus conceitos às proporções harmônicas presentes na arte, na natureza e na arquitetura. Por meio da animação de suas figuras no Manim, demonstramos o potencial dessa ferramenta para transformar ideias geométricas em movimentos que ilustram os processos por trás das formas. O capítulo evidencia o modo como tecnologias contemporâneas ampliam as fronteiras do ensino de geometria, tornando-a mais interativa, interdisciplinar e relevante para os desafios educacionais da atualidade.

Finalmente, este relatório de pesquisa doutoral encerra o ciclo com as considerações finais advindas da pesquisa realizada, para favorecer a abertura de novos ciclos.

1

A PRODUÇÃO CIENTÍFICA SOBRE TECNOLOGIAS DIGITAIS E HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

[...] a informática não apareceu, como um meteorito, do desconhecido absoluto para se abater sobre o social [...] bem como seus efeitos sobre os hábitos mentais e a ligação com o mundo [...] (Lévy, 1995, p. 45).

[...] a Matemática construída pela sociedade foi difundida culturalmente, mantida viva por estudiosos sobre o assunto, selecionada e reorganizada de acordo com a necessidade da ciência [...] (Mendes, 2023a, p. 96).

Estas epígrafes na abertura do capítulo, tem um ponto em comum, tanto a Informática como a Matemática surgem num contexto sociocultural, em recorrência de atender as necessidades contemporaneas. Assim, nos questionamos: Quais principais tendências, contribuições e lacunas na produção acadêmica e científica sobre possíveis relações entre História da Matemática e Tecnologias Digitais em contextos nacional e internacional? Portanto, objetivamos identificar principais tendências, contribuições e lacunas existentes na produção acadêmica e científica, em âmbito nacional e internacional, relacionada às interações entre História da Matemática e Tecnologias Digitais.

A literatura internacional revela uma variedade de abordagens para integrar Tecnologias Digitais na pesquisa História da Matemática e ensino. Dentre as tendências observadas, destaca-se o uso de simulações computacionais para recriar contextos históricos matemáticos, proporcionando aos estudantes uma experiência mais imersiva e dinâmica. Além disso, a aplicação de métodos computacionais tem permitido uma compreensão mais profunda de

padrões e desenvolvimentos históricos, abrindo novas perspectivas para a interpretação de documentos e obras matemáticas antigas.

Com isso, busca-se compreender as diversas maneiras pelas quais as Tecnologias Digitais e a História da Matemática têm sido integradas no ensino da Matemática. A contextualização nacional e internacional permite identificar lacunas de pesquisa e desafios comuns, proporcionando uma base sólida para futuros estudos e desenvolvimentos no campo. A revisão de literatura aqui apresentada serve, portanto, como uma fundação crítica para a análise subsequente e as conclusões a serem extraídas no decorrer deste capítulo.

Antes de começar a caracterização da produção científica, descrevemos as perspectivas teóricas adotadas para a classificação das publicações, tanto para o uso da História da Matemática no ensino, quanto em relação à mediação pedagógica das Tecnologias Digitais. Sobre o primeiro assunto, encontramos na literatura especializada, por um lado, Jankvist (2009), que descreve o uso da História como recurso e objetivo e, pelo outro lado, Mendes (2023a, 2023b, 2023c), que considera a História como um reorganizador cognitivo ou agente de cognição matemática.

Sobre o uso da tecnologia, incluindo as digitais, queremos focar na ação cognitiva de refletir, e não apenas para realizar o trabalho procedimental, como expressam Cuoco e Goldenberg (1996). Assim sendo, Cullen, Hertel e Nickels (2020) caracterizam quatro papéis da tecnologia na Educação Matemática, quais sejam: promover ciclos de prova; apresentar e conectar múltiplas representações; apoiar o raciocínio, e atuar como tutela. Porém, não só devemos caracterizar pelo uso, senão, também é necessário perceber a dimensão da mediação, da intervenção entre sujeito-tecnologia-professor.

Na escolha da distinção entre categorias de mediações, temos duas que são focalizadas na literatura: as epistêmicas e as pragmáticas. Essa distinção entre epistêmico e pragmático foi exemplificada por Artigue (2002) há cerca de 20 anos, para o estudo do trabalho técnico e conceitual com Tecnologias Digitais no ensino e aprendizagem das matemáticas. Para finalizarmos, destaque-se um terceiro tipo de mediação associado a essa distinção, as chamadas, por Misfeldt e Jankvist (2018), de mediações justificativas, devido ao uso das Tecnologias Digitais no ensino de matemática.

1.1 Usos da História da Matemática

Para Jankvist (2009), usar a História como recurso parte de um interesse de natureza motivacional, pedagógica ou conceitual. Um exemplo desse uso de natureza motivacional é quando os professores usam anedotas, biografias (de matemáticos) com o objectivo de agregar um extra ao ensino da Matemática. Também o uso da História da Matemática pode aprofundar a compreensão conceitual dos alunos quanto à introdução de conceitos matemáticos abstratos e definições de natureza conceitual. No que respeita ao uso da História no sentido pedagógico, é movido pelos argumentos evolutivos, guiando o ensino da Matemática pelo desenvolvimento histórico e epistemológico dessa ciência.

A utilização da História como objetivo, segundo Jankvist (2009), preocupa-se com as questões mais abrangentes relacionadas à Matemática como disciplina. Esse enfoque transcende os limites convencionais, explorando os movimentos que impulsionam o desenvolvimento da Matemática. Esses movimentos incluem a interação da Matemática com a sociedade, seu vínculo com outras disciplinas científicas, suas manifestações em diversas culturas ao longo do tempo e no espaço. Além disso, busca-se destacar para os alunos que a Matemática não é um conhecimento inato, mas sim um produto que emergiu por meio das atividades humanas.

Nesta mesma direção temática Mendes (2006, 2023a), argumenta sobre a História como um reorganizador cognitivo ou agente de cognição matemática oferece, tanto ao professor quanto ao estudante, a oportunidade de renovar e expandir sua compreensão em relação a conceitos específicos, propriedades e relações matemáticas que se desenvolveram ao longo da história e da epistemologia. Isso ocorre por meio de processos criativos, que têm o potencial de ampliar os exercícios cognitivos, promovendo uma compreensão relacional, com destaque para a importância da ampliação de esquemas relacionados à representação de um conceito matemático para a formação desse tipo de compreensão (Mendes, 2023c).

Assim, podemos considerar que implicações da história da Matemática no ensino incluem a promoção de uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos, ao contextualizar o conhecimento em um desenvolvimento histórico-epistemológico. Isso permite que os alunos reflitam sobre as conexões entre diferentes conceitos e desenvolvam habilidades cognitivas criativas. Além disso, a história atua como um reorganizador cognitivo, ajudando os estudantes a reconfigurarem suas compreensões e a integrar novos conhecimentos de forma mais significativa (Mendes, 2023a, 2023c).

Para Mendes (2023c) a história da Matemática pode promover novas apropriações e reorganizações cognitivas ao contextualizar conceitos matemáticos em suas origens históricas, permitindo que os alunos vejam a evolução e a relevância desses conceitos. Essa abordagem estimula a reflexão crítica e a conexão entre diferentes áreas do conhecimento, incentivando a criatividade e a interpretação múltipla. Além disso, ao utilizar fontes históricas e artefatos culturais, entre estes as tecnologias digitais, os estudantes são desafiados a formular conjecturas e a explorar representações diversas, enriquecendo sua compreensão matemática.

Com a inserção da história da Matemática em sala de aula pode afetar os processos cognitivos dos alunos ao engajar práticas experimentais e manipulativas, que tornam o aprendizado mais dinâmico e interativo. Essa abordagem estimula a curiosidade e a investigação, permitindo que os alunos façam conexões entre conceitos matemáticos e suas aplicações históricas. Além disso, a exploração de contextos históricos ajuda os estudantes a desenvolverem um entendimento mais profundo e relacional, promovendo uma aprendizagem significativa e duradoura (Mendes, 2023a).

A história da Matemática pode ser integrada ao ensino por meio da inclusão de episódios históricos relevantes que ilustrem o desenvolvimento de conceitos matemáticos, permitindo que os alunos compreendam a evolução do conhecimento matemático. Atividades que incentivem a pesquisa e a discussão sobre esses desenvolvimentos históricos e epistemológicos ajudam os estudantes a refletirem sobre as influências sociais e culturais na Matemática, promovendo uma aprendizagem contextualizada. Além disso, o uso de projetos interdisciplinares que conectem a Matemática a outras áreas do conhecimento pode facilitar a reorganização cognitiva, estimulando a criatividade e a interpretação crítica (Mendes, 2023a, 2023c).

1.2 Usos das Tecnologias Digitais

A preocupação com o impacto e o uso das tecnologias digitais na Educação Matemática não é um assunto recente. Na literatura especializada, encontramos o artigo de autoria de Cuoco e Goldenberg (1996), intitulado *A Role for Technology in Mathematics Education* (Um Papel para a Tecnologia na Educação Matemática). Nesse artigo, os autores começam problematizando o avanço tecnológico da sociedade, cenário no qual as pessoas são seduzidas a pensar que a “Era de Ouro” da tecnologia na Educação Matemática está ao virar da esquina.

Assim sendo, questionam se, de fato, existe um papel para a tecnologia na Educação Matemática.

Cuoco e Goldenberg (1996) expressam que os objetos matemáticos são objetos da imaginação e, portanto, se questionam: como as pessoas podem mexer nesses sistemas ou nos objetos matemáticos que os compõem? Para responder a essa questão, refletem sobre o potencial que os ambientes computacionais permitem para criar modelos de estruturas algébricas, funções, sistemas continuamente variáveis e enumerações combinatórias. Cuoco e Goldenberg (1996, p. 18) exemplificam, dizendo que isso ocorre “Quando os alunos constroem modelos computacionais em linguagens como *Logo*, *ISETL* ou *Mathematica*, planilhas eletrônicas, ou construções no *Geometer's Sketchpad* ou *Cabi II* - eles estão revisando, expressando e tendo a chance de examinar seus próprios ideais sobre essas estruturas matemáticas”.

Nesse sentido, temos que distinguir esse tipo de uso da tecnologia, cujo fim não é só o de reduzir o trabalho a lápis e papel para o computacional. Cuoco e Goldenberg (1996, p. 18) argumentam que “o propósito da calculadora serve para reduzir o trabalho penoso dentro de um problema, mas o único propósito do problema era obter a resposta, então pressionar os botões é tudo o que é necessário”. Nesse contexto, pressionar botões fará com que o aluno não veja a matemática que está por trás dessa ação. Isso pode ser aplicado para sistemas de álgebra computacional (CAS), *softwares* de Geometria Dinâmica (SGD) e outros ambientes computacionais. Segundo esses autores, o uso da tecnologia, incluindo a digital, deve ser para focar na ação cognitiva de refletir, e não para só realizar o trabalho procedimental.

Nesse cenário exposto por Cuoco e Goldenberg (1996), duas décadas depois, o artigo de autoria de Cullen, Hertel e Nickels (2020), intitulado *The Roles of Technology in Mathematics Education* (Os Papéis da Tecnologia na Educação Matemática). Esse artigo teve como objetivo sistematizar, a partir de uma revisão de literatura, os usos da tecnologia no ensino/aprendizagem da Matemática, para destacar quatro papéis do uso eficaz da tecnologia, quais sejam: promover ciclos de prova; apresentar e conectar múltiplas representações; apoiar o raciocínio, e atuar como um professor particular.

Promover Ciclos de Prova

Neste papel as tecnologias são usadas para explorar um fenômeno matemático; gerar hipóteses ou conjecturas baseadas na exploração; testar e revisar as conjecturas e, finalmente, provar a conjectura. Para exemplificar, pensemos no uso de um *software* de Geometria Dinâmica para verificar se a construção de um retângulo é consistente, e dizer se foi construído tendo em conta suas propriedades elementares. Nesse sentido, temos a conjectura que, por ser retângulo, os seus lados consecutivos formam um ângulo de 90° . Para verificar tal conjectura, podemos arrastar alguns dos seus vértices e, se os segmentos mantiverem essa relação e perpendicularidade, é de fato um retângulo, senão, podemos dizer que é um quadrilátero que não pertence à classe dos paralelogramos nem ao conjunto dos retângulos.

Apresentar e Conectar Múltiplas Representações

Este uso foca na capacidade da tecnologia em gerar representações matemáticas. Por exemplo, apresentar e vincular representações podem ser úteis no ensino e na aprendizagem de Geometria, álgebra, cálculo, estatística, entre outros, pelo fato de as tecnologias permitirem visualizar um mesmo objeto matemático em suas diferentes representações. Além disso, apresentar essas representações simultaneamente em sua interface. Preiner (2008) chama essa função de Conexão Bidirecional. Essa função é percebida nos *softwares* de matemática dinâmica, nos quais se estabelece uma relação bidirecional da Geometria dinâmica e da álgebra computacional para as representações de objetos matemáticos serem conectadas dinamicamente, permitindo que o *software* adapte cada representação às modificações levadas a cabo pelo sujeito. Um exemplo desse uso é quando as tecnologias são empregadas para estudar padrões, visualizar e explorar funções, entre outros temas. Assim sendo, esse uso da tecnologia para apresentar e conectar múltiplas representações é frequentemente descrito na literatura, de maneira que se alinha com o primeiro papel da tecnologia, ou seja, promover ciclos de prova, pelo fato de também formar e testar conjecturas.

Apoiar o Raciocínio

A utilização da tecnologia, de forma a apoiar o raciocínio, pode ser considerada de três maneiras. A primeira para gerar dados (por exemplo, simulando um experimento aleatório, construindo figuras geométricas dinâmicas). Em segundo lugar, pode ser usada para coletar

dados (por exemplo, usando sondas de medição, utilizando uma planilha eletrônica para inserir dados). E a terceira forma usa a tecnologia para organizar, representar e analisar dados (por exemplo, utilizando um pacote de *software* estatístico). Tal como nos dois primeiros papéis da tecnologia, há sobreposição entre o papel de apoiar do raciocínio com as anteriores. Em outras palavras, a tecnologia pode servir como um trampolim para uma prova formal, fornecendo aos alunos as ferramentas necessárias para desenvolver conjecturas iniciais. Isso naturalmente leva os alunos a começarem a conjecturar de forma mais abstrata sobre os padrões observados nos dados e a envolvê-los em ciclos de prova, à medida em que testam e modificam as conjecturas.

Servindo como tutela

A quarta e última maneira de utilização eficaz da tecnologia é como tutora. Esse uso foi identificado pela primeira vez por Taylor (1980), ao observar o papel cada vez mais importante que os computadores desempenharão na aprendizagem humana. Em seu livro, Taylor introduziu uma estrutura (tutor/ferramenta/tutela) para classificar toda a computação educacional como uma forma de ajudar os leitores a entenderem um novo campo na intersecção da computação e da educação, que, na época, era caótico.

Mais de 40 anos depois, ainda vemos valor nessa estrutura e optamos por recorrer à sua terceira categoria, tutela, para descrever o nosso último papel da tecnologia. Segundo Nickels e Cullen (2017), *Logo e Turtle Geometry*, e, mais recentemente, Scratch, Lego, Mindstorms são exemplos de tecnologias como tutela, onde aluno ou professor se comunicam em uma linguagem de programação que a tecnologia possa entender e compilar.

A utilização das tecnologias digitais no ensino da Matemática apresenta múltiplos papéis, três dos quais – promover ciclos de prova, apresentar e conectar múltiplas representações e apoiar o raciocínio – são particularmente alinhados ao nosso trabalho, pois refere-se à representação visual e interativa de conceitos matemáticos, permitindo a exploração ativa de suas propriedades e relações.

No papel de promover ciclos de prova, as tecnologias possibilitam a formulação e teste de conjecturas, proporcionando um ambiente experimental que favorece a validação dinâmica de relações matemáticas. Isso se conecta diretamente à Ideografia Dinâmica, pois a interação visual permite compreender a estrutura interna de um conceito matemático por meio da manipulação interativa de suas representações.

A capacidade de apresentar e conectar múltiplas representações amplia as possibilidades da Ideografia Dinâmica ao estabelecer vínculos entre diferentes formas de expressão matemática – geométrica, algébrica, gráfica ou estatística. A conexão bidirecional entre essas representações, possibilitada por softwares interativos, reforça a ideia de que a compreensão matemática se dá não apenas pela abstração, mas também pela visualização dinâmica das estruturas subjacentes.

Já o papel de apoiar o raciocínio fortalece a construção do conhecimento matemático ao permitir que dados sejam gerados, coletados e analisados de maneira interativa. O uso de tecnologias como simuladores, planilhas e ferramentas estatísticas auxilia no desenvolvimento de padrões de pensamento matemático, conectando a abstração à experimentação visual.

Embora o uso da tecnologia como tutela seja relevante para o ensino, ele se distancia da Ideografia Dinâmica, pois enfatiza um modelo instrucional mais estruturado, em que o estudante interage com a tecnologia como um tutor, e não como um meio para a construção ativa e interativa do conhecimento.

Dessa forma, a Ideografia Dinâmica encontra nas três primeiras abordagens um suporte fundamental para a aprendizagem matemática, pois permite que os estudantes manipulem, visualizem e interajam com conceitos matemáticos de maneira significativa, tornando a cognição matemática um processo mais exploratório, intuitivo e conectado com a experimentação visual e interativa.

No Quadro 1, a seguir, sintetizamos esses usos das tecnologias baseados nas ideias de Cullen, Hertel e Nickels (2020), vinculadas nos Princípios e Padrões para a Matemática Escolar (NCTM, 2000) do Conselho Nacional de Professores de Matemática dos Estados Unidos da América.

Quadro 1: Papéis da tecnologia no ensino e aprendizagem da Matemática

Papel da promoção da tecnologia	Descrição	Exemplo de tarefa	Princípios e Padrões do NCTM
Promover Ciclos de Prova	Usar a tecnologia para explorar tópicos matemáticos, gerar conjecturas, testar e revisar essas conjecturas e, por fim, prová-las.	Explorando quadráticas	Raciocínios e prova
Apresentar e conectar múltiplas representações	Usar a tecnologia para exibir pelo menos duas formas de representação diferentes para o mesmo objeto matemático.	Comparação de perímetro e área	Representações
Apoiar o Raciocínio	Usar a tecnologia para gerar, organizar ou analisar dados.	Problema de série e tarefa de resolução	Resolução de problemas
Servindo como tutela	Usar a tecnologia como um aprendiz para seus alunos ensinarem.	O Excel pode resolver quadráticas	Comunicação

Fonte: Cullen, Hertel e Nickels (2020, p. 6)

Para trazer ao contexto das orientações curriculares atuais no Brasil, fizemos uma reformulação do Quadro 1, em função da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), especificamente, a área de Matemática e suas Tecnologias. Esse documento tem como propósitos, nessa área, que os estudantes devem desenvolver habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas. Para tanto, eles devem mobilizar seu modo próprio de realizar as seguintes ações: raciocinar, representar, comunicar e argumentar (Brasil, 2017, p. 529).

Quadro 2: Papéis da tecnologia no ensino e aprendizagem da Matemática na BNCC

Papel da promoção da tecnologia	Descrição	Exemplo de Atividade	BNCC
Promover Ciclos de Prova	Usar a tecnologia para explorar tópicos matemáticos, gerar conjecturas, testar e revisar essas conjecturas e, por fim, prová-las.	Investigar os efeitos de mudanças dos coeficientes em classes de funções. Exemplo: Função quadrática do tipo: ax^2+bx+c	Raciocinar
Apresentar e Conectar múltiplas representações	Usar a tecnologia para exibir pelo menos duas formas de representação diferentes para o mesmo objeto matemático.	Comparação da representação tabular, algébrica e geométrica de uma função afim.	Representar
Apoiar o Raciocínio	Usar a tecnologia para gerar, organizar ou analisar dados.	Problema de probabilidade e frequência	Argumentar
Servindo como tutela	Usar a tecnologia como um aprendiz para seus alunos ensinarem.	Um software de álgebra computacional pode resolver equações	Comunicar

Fonte: Elaboração pelo autor (2023) com Base na BNCC

Em nossa leitura da BNCC, identificamos algumas que apoiam o uso das tecnologias, especificamente as digitais, nas quais podemos observar os papéis descritos anteriormente. No

Quadro 3, agrupamos os usos das tecnologias, os princípios da BNCC para a área de Matemática e suas tecnologias, e alguns exemplos das habilidades promovidas por esse uso.

Quadro 3: Papéis da tecnologia na BNCC e Habilidade

Papel da promoção da tecnologia	BNCC	Habilidade
Promover Ciclos de Prova	Raciocinar	(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de Tecnologias Digitais.
Apresentar e Conectar múltiplas representações	Representar	(EM13MAT402) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e Geometria dinâmica, entre outros materiais.
Apoiar o Raciocínio	Argumentar	(EM13MAT406) Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de softwares que inter-relacionem estatística, Geometria e álgebra.
Servindo como tutela	Comunicar	(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Fonte: Elaboração pelo autor (2023) com Base na BNCC

Nesse sentido, temos que a BNCC (Brasil, 2017, p. 276) orienta-se pelo pressuposto de que a aprendizagem em Matemática está intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações. Os significados desses objetos resultam das conexões que os alunos estabelecem entre eles e os demais componentes, entre eles e seu cotidiano, e entre os diferentes temas matemáticos. Desse modo, recursos didáticos, como malhas quadriculadas; ábacos; jogos; livros; vídeos; calculadoras; planilhas eletrônicas e *softwares* de Geometria dinâmica desempenham um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas.

Entretanto, esses materiais precisam estar integrados a situações que levem à reflexão e à sistematização, para que se inicie um processo de formalização. Assim sendo, a partir do uso das tecnologias, precisamos esclarecer o tipo de mediação que é possível, já que, entre o sujeito e a tecnologia, há a intervenção de uma terceira parte para facilitar processos ou resolver as atividades, ou seja, o professor³. Assim sendo, na seguinte subseção, são descritos os tipos de mediações que surgem nos usos supracitados.

³ A única intenção, ao empregar a forma masculina neste texto, é simplificar a redação.

1.3 Mediações relacionadas ao uso das Tecnologias Digitais

Nesta subseção serão descritas o que consideramos mediações epistêmicas, pragmáticas e justificadas. Segundo Thomsen; Jankvist; Clark (2022), as mediações epistêmicas são aquelas direcionadas a mudanças dentro do sistema cognitivo do sujeito. Essas mudanças podem ocorrer quando os estudantes utilizam as Tecnologias Digitais como apoio para a sua compreensão de questões matemáticas específicas, como empregar uma determinada forma de resolver uma tarefa ou se comportar em uma situação matemática específica.

As mediações pragmáticas são aquelas direcionadas a fenômenos externos ao sistema cognitivo do sujeito. Tais mediações podem surgir quando as Tecnologias Digitais são utilizadas como uma forma eficaz de agir em uma determinada situação matemática, por exemplo, na resolução de problemas, sem focar particularmente na compreensão dos conceitos, dos procedimentos matemáticos envolvidos etc.

As mediações justificadas, segundo Misfeldt e Jankvist (2018), têm relação no estabelecimento de segurança de uma proposição ou teorema, independente do próprio sistema cognitivo; ou seja, o uso da tecnologia digital é caracterizado por uma preocupação com a verificação e a justificativa de tais provas e demonstrações. Assim sendo, as mediações dessa natureza não desempenham o papel de resolver um problema nem de aprofundar a compreensão. Portanto, podemos considerar que, quando há o uso da tecnologia digital em relação a provas e demonstrações matemáticas, toda mediação justificacional pode ser, às vezes, epistêmica e, às vezes, pragmática, mas não ao contrário.

Finalmente, fazemos uma síntese no Quadro 4, para organizar as lentes e fornecer uma visão sobre possíveis interações entre História da Matemática e Tecnologias Digitais nas publicações mapeadas nas seguintes seções.

Quadro 4: Categorias do uso e mediação das Tecnologias Digitais

Uso	Mediação
Promover Ciclos de Prova	Epistêmica e Justificacional
Apresentar e Conectar múltiplas representações	Pragmática e Justificacional
Apoiar o Raciocínio	Epistêmica, Pragmática e Justificacional
Servindo como tutela	Justificacional

Fonte: Elaboração pelo autor (2023)

1.4 Caracterização da Produção Científica Internacional

O critério geral para incluir publicações na revisão foi que elas deveriam preocupar-se com a interação entre o uso da História da Matemática e as Tecnologias Digitais. Além disso, as publicações incluídas deveriam ser artigos revisados por pares, e consideramos apenas publicações em inglês. Para realizar a revisão, utilizamos os termos de pesquisa "history of mathematics", "dynamic geometry system", "dynamic geometry environment", "dynamic geometry software", DGS, CAS, Cabri e GeoGebra, em bases de dados e acervos de produção científica internacional, como *Education Resources Information Center (ERIC)*, *Scopus*, *Web of Science*, *Springer*, *Directory of Open Access Journals (DOAJ)*.

Neste estudo, não apenas as publicações foram examinadas sem restrições temporais, mas também se empregou a técnica conhecida como Snowball, ou Bola de Neve. Segundo Bockorni e Gomes (2021), essa abordagem tem sido cada vez mais utilizada em pesquisas qualitativas nos últimos anos, principalmente devido à sua capacidade de identificar trabalhos pouco conhecidos ou de difícil acesso, permitindo a identificação de publicações pioneiras na área por meio de redes de referências dos artigos mapeados.

As produções selecionadas tiveram como critério apresentar um fundamento possível da temática. As publicações identificadas foram selecionadas pela primeira triagem de títulos e resumos e, se consideradas relevantes, os artigos completos foram explorados. No Quadro 5 foram organizadas as produções levantadas de maneira cronológica e de maneira decrescente, do ano mais atual para o mais antigo.

Quadro 5: Produção científica internacional selecionada

#	Ano	Autor/Título	Assunto Histórico Abordado	Tecnologia Digital Usada
1	1995	David Dennis e Jere Confrey / Functions of a Curve: Leibniz's Original Notion of Functions and Its Meaning for the Parabola	Noção de função desenvolvida na matemática do final do século XVII	Geometer's Sketchpad
2	1997	David Dennis e Jere Confrey / Drawing Logarithmic Curve with Geometer's Sketchpad: A Method Inspired by Historical Sources	A Geometria de Descartes – Apendice do Discurso do Método	Geometer's Sketchpad
3	1998	Masami Isoda / Developing the Curriculum for Curves Using History and Technology	A Geometria de Descartes – Apendice do Discurso do Método	Software de Geometria Dinâmica e LEGO
4	2000	Masami Isoda / Inquiring mathematics with history and software	A Geometria de Descartes – Apendice do Discurso do Método	Software de Geometria Dinâmica e LEGO

5	2000	Masami Isoda / The Use of Technology in Teaching Mathematics with History - Teaching with modern technology inspired by the history of mathematics	A Geometria de Descartes – Apendice do Discurso do Método	Software de Geometria Dinâmica e LEGO
6	2000	Masami Isoda e Kazuhiro Aoyama / Mathematics History Is Another Door for Using Technology in Education: The change of belief in mathematics via exploring historical text with technology in the case of undergraduates	Problema de Peso do L'Hospital; Problemas, Textos e Instrumentos de natureza Histórica	Software de Geometria Dinâmica e CAS
7	2001	Ivy Kidron / Teaching Euler's methods in a calculus laboratory	Obra de Euler's <i>Introductio in Analysin Infinitorum</i> (1748)	CAS
8	2001	Ivy Kidron, Nurit Zehavi e Esther Openhaim / Teaching the limit concept in a CAS environment: Students' dynamic perceptions and reasoning	Polinômios de Taylor; Conceito de limite	Software de Geometria Dinâmica e CAS
9	2004	Masami Isoda / Why we use historical tools and computer software in Mathematics Education: Mathematics activity as a human endeavor project for secondary school	A Geometria de Descartes – Apendice do Discurso do Método e Regras para a Direção do Espírito; Amabas obras de Rene Descartes	Cabri e LEGO
10	2004	Ivy Kidron / Polynomial approximation of functions: historical perspective and new tools	Obra de Euler's <i>Introductio in Analysin Infinitorum</i> (1748)	CAS
11	2006	Arthur Bakker e Koeno P. E. Gravemeijer / An historical phenomenology of mean and median	História da Estatística	Minitool 2
12	2007	Ferdinando Arzarello, Federica Olivero, Domingo Paola e Ornella Robutti / The transition to formal proof in geometry	Problemas Geométricos	Cabri
13	2008	Fulvia Furinghetti e Luis Radford / Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics	A obra <i>Methodus ad disquirendam maximam et minimam</i>	Cabri
14	2009	Adnan Baki e Bulent Guven / Khayyam with Cabri: experiences of pre-service mathematics teachers with Khayyam's solution of cubic equations in dynamic geometry environment	Solução das equações cúbicas de Khayyam	Cabri

15	2009	Maurice J. Burke and Elizabeth A. Burroughs / Using CAS to Solve Classical Mathematics Problems	Método algébrico para encontrar os zeros da função polinomial de Newton, Raphson, Lagrange e Euler.	CAS
16	2010	Maria G. Bartolini Bussi, Daina Taimina e Masami Isoda / Concrete models and dynamic instruments as early technology tools in classrooms at the dawn of ICMI: from Felix Klein to present applications in mathematics classrooms in different parts of the world	Obra de Schooten <i>De organica Conicarum Sectionum Construction</i>	Software de Geometria Dinâmica
17	2013	Ioannis Papadopoulos / How Archimedes Helped Students to Unravel the Mystery of the Magical Number Pi	O método de exaustão de Arquimedes para calcular o número π	Cabri
18	2015	Roman Hasek, Jan Zahradnik / Study of historical geometric problems by means of CAS and DGS	Problemas geométricos sobre cônicas e lugares geométricos de um livro didático do século XVIII	wxMaxima e GeoGebra
19	2015	Mario Sánchez Aguilar e Juan Gabriel Molina Zavaleta / The difference as an analysis tool of the change of geometric magnitudes: the case of the circle	Elementos históricos da gênese do cálculo para o estudo relações existentes entre o raio, a área e a circunferência de um círculo.	GeoGebra
20	2015	Renaud Chorlay / Making (More)Sense of the Derivative by combining Historical Sources And ICT	Elementos de Euclides: Livro III proposições 5, 16,17 e 32; Livro I proposição 20; Elementos de Geometria de Alexis Clairaut; Tablete YBC 7289; BM 96957 e IVA 6598; Os Elementos de Álgebra de Euler; método de aproximação de Newton-Raphson	GeoGebra
21	2015	Deborah Kent e Milan Sherman / A GeoGebra Rendition of One of Omar Khayyam's Solutions for a Cubic Equation	Soluções de Omar Khayyam para uma equação cúbica	GeoGebra
22	2015	Ivy Kidron e David Tall / The roles of visualization and symbolism in the potential and actual infinity of the limit process	Polinômios de Taylor; Conceito de limite	Software de Geometria Dinâmica e CAS
23	2016	Gunhan Caglayan / Exploring the lunes of Hippocrates in a dynamic geometry environment	Métodos para resolver a quadratura de Lunulas, usando o método de conservação de área e	GeoGebra

			similaridade de Hipócrates de Quios	
24	2016	Tunde Kántor e Anna Toth / Teaching of old historical mathematics problems with ICT tools	O problema de Viviani, propriedade do triângulo equilátero e com variações das condições	GeoGebra
25	2018	Yılmaz Zengin / Incorporating the dynamic mathematics software GeoGebra into a history of mathematics course	O método de exaustão de Arquimedes para calcular o número π ; Soluções de equações quadráticas e cúbicas de Omar Khayyam; Al lúnulas de Hipócrates para demonstrar o Teorema de Pitágoras	GeoGebra
26	2019	Uffe Thomas Jankvist e Eirini Geraniou / Digital Technologies as a way of making Original Sources accessible to Students	Proposição 20 do Elementos de Euclides	GeoGebra
27	2019	Uffe Thomas Jankvist, Kathleen Michelle Clark e Reidar Mosvold / Developing mathematical knowledge for teaching teachers: potentials of history of mathematics in teacher educator training	Uso de um trecho da fonte original na resolução de equações; conceito de função através do uso da história	GeoGebra
28	2019	Uffe Thomas Jankvist, Morten Misfeldt e Mario Sánchez Aguilar Tschirnhaus' Transformation Mathematical Proof, History and CAS	Transformação de Tschirnhaus de 1683, sugerindo um método presumido para resolver problemas de n graus equações algébricas	CAS
29	2020	Marianne Thomsen e Uffe Thomas Jankvist / Reasoning with digital technologies - counteracting students' technauthoritarian proof schemes	Os primeiros 5 postulados do Livro I e as proposições 6 e 7 do Livro IV dos Elementos de Euclides	GeoGebra
30	2021	Michelle Meadows e Joanne Caniglia / That Was Then... This is Now: Utilizing the History of Mathematics and Dynamic Geometry Software	Trissecção arquimediana de um ângulo	GeoGebra
31	2021	Uffe Thomas Jankvist e Eirini Geraniou / "Whiteboxing" the Content of a Formal Mathematical Text in a Dynamic Geometry Environment	Proposição 41 do Elementos de Euclides	GeoGebra
32	2021	Marianne Thomsen / Working with Euclid's geometry in GeoGebra – experiencing embedded discourses	Proposição 6 e 7 do Livro IV dos Elementos de Euclides	GeoGebra

33	2021	Marianne Thomsen e Uffe Thomas Jankvist / Mathematical thinking in the interplay between historical original sources and GeoGebra	Proposição 6 do Livro IV dos Elementos de Euclides	GeoGebra
----	------	---	--	----------

Fonte: Elaboração pelo autor (2023)

Do Quadro 5 percebemos que os assuntos mais tratados nas produções mapeadas giram em torno do uso de fontes primárias ou secundárias, focalizando tratados matemáticos históricos, como obras de matemáticos ou de problemas históricos relevantes na produção do conhecimento matemático. Exemplo disso é o apêndice do *Discurso do Método*, *A Geometria* de René Descartes e *Os Elementos* de Euclides, também o uso de alguns pocesos na solução de problemas, como o *O método de exaustão* de Arquimedes para calcular o número π , e as soluções de equações quadráticas e cúbicas de Omar Khayyam, os problemas de Quadratura, especificamente, das lúnulas, entre outros assuntos.

Sobre as Tecnologias Digitais se percebe um predomínio dos *softwares* de Geometria Dinâmica, com destaque do primeiro trabalho com plausíveis relações entre o uso da História da Matemática e Tecnologias Digitais, que usou o Geometer's Sketchpad. Na ordem cronológica, podemos observar que o Cabri tomou conta do cenário. Após 2014, de fato a relevância do GeoGebra se faz presente em trabalhos que abordam assuntos que têm relação tanto com a Geometria quanto com a Álgebra. Podemos inferir que esse potencial do *software* resultou em sua presença nos diversos trabalhos supracitados.

Quadro 6: Categorização da produção em função do uso da História e Tecnologias

#	Uso da História	Uso da Tecnologia	Mediação
1	Recurso	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações	Epistêmica
2	Recurso	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações	Epistêmica
3	Recurso, Objetivo	Apresentar e Conectar múltiplas representações	Epistêmica
4	Recurso, Objetivo	Promover Ciclos de Prova;	Epistêmica, Justificacional
5	Recurso	Promover Ciclos de Prova;	Pragmatica, Epistêmica
6	Recurso, Objetivo	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações	Epistêmica
7	Recurso	Promover Ciclos de Prova	Epistêmica
8	Recurso	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações	Pragmatica, Epistêmica, Justificacional
9	Recurso, Objetivo	Promover Ciclos de Prova	Epistêmica

10	Recurso	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações	Pragmatica, Epistêmica
11	Recurso	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações; Apoiar o Raciocínio	Pragmatica, Epistêmica
12	Recurso	Promover Ciclos de Prova	Pragmatica, Epistêmica
13	Recurso, Objetivo	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações	Epistêmica
14	Recurso, Objetivo	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações	Epistêmica
15	Recurso	Promover Ciclos de Prova; Apoiar o Raciocínio	Pragmatica, Epistêmica
16	Recurso	Promover Ciclos de Prova	Epistêmica
17	Recurso, Objetivo	Promover Ciclos de Prova; Apoiar o Raciocínio	Pragmatica, Epistêmica
18	Recurso	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações	Pragmatica, Epistêmica, Justificacional
19	Recurso, Objetivo	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações; Apoiar o Raciocínio	Epistêmica
20	Recurso	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações	Epistêmica
21	Recurso	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações	Pragmatica, Epistêmica
22	Recurso	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações	Pragmatica, Epistêmica, Justificacional
23	Recurso	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações	Pragmatica, Epistêmica
24	Recurso	Promover Ciclos de Prova	Pragmatica, Epistêmica
25	Recurso	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações	Epistêmica, Justificacional
26	Recurso	Promover Ciclos de Prova	Epistêmica
27	Recurso	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações	Epistêmica
28	Recurso	Promover Ciclos de Prova	Epistêmica, Justificacional
29	Recurso	Promover Ciclos de Prova	Pragmatica, Epistêmica, Justificacional
30	Recurso, Objetivo	Promover Ciclos de Prova	Epistêmica
31	Recurso	Promover Ciclos de Prova	Pragmatica, Epistêmica, Justificacional
32	Recurso	Promover Ciclos de Prova	Pragmatica, Epistêmica, Justificacional
33	Recurso	Promover Ciclos de Prova	Pragmatica, Epistêmica

Fonte: Elaboração pelo autor (2023)

Nos trabalhos do Quadro 6, observa-se que o uso da história como recurso é perceptível nas 33 publicações, ou seja, o uso da história é accionado por um interesse de natureza motivacional, pedagógica ou conceitual. Foi possível constatar que a natureza da maioria dos trabalhos é conceitual, pois buscam aprofundar a compreensão conceitual dos alunos ou professores, dependendo dos sujeitos, e objetivam a introdução de conceitos matemáticos abstratos. Não foi possível identificar nos trabalhos a história como um reorganizador cognitivo, pois na produção não ficam evidentes os processos criativos que têm o potencial de ampliar os exercícios cognitivos, promovendo assim a compreensão relacional, destacando a importância da ampliação de esquemas relacionados à representação de um conceito matemático para a formação desse tipo de compreensão (Mendes, 2023a, 2023c).

O uso das tecnologias na produção, na sua quase totalidade, foi por meio de promover ciclos de prova. A tecnologia foi usada para explorar tópicos matemáticos; gerar conjecturas; testar e revisar essas conjecturas e, por fim, prová-las. Esse uso está alinhado, também, na maioria de casos, com apresentar e conectar múltiplas representações. Nesse caso, para exibir pelo menos duas formas de representação diferentes para os objetos matemáticos. Em alguns casos, esses usos foram acompanhados de apoiar o raciocínio; ou seja, para gerar, organizar ou analisar dados. Não foi identificado o quarto uso das tecnologias como tutela, provavelmente em função do tipo de Tecnologias Digitais usadas nesses trabalhos, que foram os *softwares* de Geometria Dinâmica.

Sobre as mediações, conseguimos perceber que a maioria dos trabalhos apresenta mediações no uso das tecnologias, de tipo epistêmicas, aquelas direcionadas às mudanças dentro do sistema cognitivo do sujeito. Também a maioria está alinhada com a mediação pragmática, aquelas direcionadas a fenômenos externos ao sistema cognitivo do sujeito. Em menor ocorrência, há a presença das duas anteriores em conjunto com as mediações justificacionais, as quais têm relação no estabelecimento de segurança de uma proposição ou teorema, independente do próprio sistema cognitivo; ou seja, o uso da tecnologia digital é caracterizado por uma preocupação com a verificação e a justificativa de tais provas e demonstrações.

Nesse cenário, podemos considerar que as pesquisas mapeadas se centram por promover um uso de História da Matemática em combinação com Tecnologias Digitais, propiciando aos sujeitos as ações de raciocinar, representar e argumentar.

1.5 Caracterização da Produção Científica *Stricto Sensu* Brasileira

As teses e dissertações foram levantadas do Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática (CREPHIMat)⁴. A justificativa de escolher o CREPHIMat é pelo fato de o referido centro disponibilizar as produções de pesquisas em História da Matemática produzidas no Brasil, dentre outras informações e materiais sobre essa temática. É por isso que esse centro virtual se concebe como um repositório digital com o maior acervo digital de produções acadêmico-científicas brasileiras sobre História da Matemática (Castillo, Mendes, 2020)

Realizamos o levantamento das produções disponíveis no CREPHIMat nas modalidades de História e Epistemologia da Matemática (HEpM), História da Educação Matemática (HEdM) e História para o ensino da Matemática (HENM). Organizamos a contagem das produções conforme se observa na Tabela 1.

Quadro 7: Teses e Dissertações no CREPHIMat (1990 – 2022)

Nível	Modalidades de Pesquisa em História da Matemática			Total
	HEpM	HEdM	HENM	
Doutorado	55	136	20	211
Mestrado Acadêmico	73	245	65	383
Mestrado Profissional	5	53	76	134
Total	133	434	161	728

Fonte: CREPHIMat (2023)

Da tabela anterior, podemos inferir que as produções de pesquisa em História para o ensino da Matemática (HENM), uma dimensão da pesquisa em História da Matemática, tiveram um crescimento desde o ano 2018 nos níveis de pós-graduação. Após lermos títulos, resumos e as palavras-chave, para podermos realizar a filtragem daquelas produções, destacamos alguma menção sobre o uso de alguma tecnologia digital na pesquisa e/ou na materialização dela. A organização e distribuição desse grupo de produções se ilustra na Quadro 8.

⁴ Para maiores informações, acesse: <<http://www.crephimat.com.br>>.

Quadro 8: Teses e Dissertações que usam Tecnologias Digitais no CREPHIMat

Nível	Modalidades de Pesquisa em História da Matemática			Total
	HEpM	HEdM	HEnM	
Doutorado	0	0	4	4
Mestrado Acadêmico	1	0	5	6
Mestrado Profissional	0	0	13	13
Total	1	0	22	23

Fonte: CREPHIMat (2023)

A informação mostrada na Quadro 8 permite perceber que, na modalidade de História e Epistemologia da Matemática (HEpM), há apenas um trabalho que faz menção ao uso das Tecnologias Digitais. Esse era um resultado percebido a priori, já que as produções nessa modalidade estão ligadas tanto à vida quanto à obra de matemáticos, bem como ao desenvolvimento das suas ideias matemáticas e ao desenvolvimento de conceitos matemáticos ao longo do tempo.

Nas produções em História da Educação Matemática (HEdM) nenhum trabalho cita o uso das Tecnologias Digitais. Era um resultado esperado porque essas produções geralmente abordam estudos com relação à história de instituições; (auto)biografias de professores de matemática; coleta de documentos; memórias e o patrimônio da Educação Matemática.

Bem destacado é o número de produções em História para o Ensino da Matemática (HEnM) que apresentam o uso das Tecnologias Digitais, talvez pelo fato de as produções nessa modalidade de pesquisa da História da Matemática serem caracterizadas pelas propostas e ações centradas nos usos das informações históricas com fins pedagógicos, como uma estratégia para o ensino da Matemática, bem como para a elaboração de materiais didáticos para ensinar Matemática, baseados em fontes históricas.

No seguinte Quadro 9 apresentamos as teses e dissertações que apresentam uma possível relação entre História da Matemática com Tecnologias. Destacamos que cada produção foi codificada com a letra P seguida de dígitos para numerar, isto para que nos quadros seguintes a identificação dos trabalhos seja mais objetiva.

Quadro 9: Trabalhos sobre História da Matemática e Tecnologias Digitais no CREPHIMat

#	Ano	Autor	Título	IES	Tipo
P1	2019	Alison Luan Ferreira da Silva	História da matemática, Tecnologias Digitais e investigação matemática no ensino de unidades temáticas de matemática da BNCC para o 8º ano	UFRN	D
P2	2019	Ranúzy Borges Neves	uma introdução ao estudo das funções trigonométricas com recursos artísticos e Seminários sobre a história da matemática no 2º ano do ensino médio	UFSCar	D
P3	2019	Verusca Batista Alves	um estudo sobre os conhecimentos matemáticos mobilizados no manuseio do instrumento círculos de proporção de William Oughtred	IFCE	D
P4	2018	Elisangela Dias Brugnera	O Uso da História da Matemática e do GeoGebra para o Ensino e Aprendizado da Geometria Analítica Com ênfase no Estudo de Retas	UFMT	T
P5	2018	Gilson Abdala Prata Filho	Teorema de Pitágoras a partir da história da matemática: análises epistemológicas de atividades em turmas do 9º ano da rede pública	IFES	D
P6	2017	Luciana Vieira Andrade	História da matemática e tecnologias da informação e da comunicação no ensino de função	UFRN	D
P7	2017	Lucas Ferreira Gomes	Vídeos didáticos e atividades baseadas na história da Matemática: uma proposta para explorar as Geometrias não euclidianas na formação docente	UTFPR	D
P8	2017	Fabiana de Souza Bomfim	História da Matemática e Cinema: O caso da criptografia na introdução do ensino de Álgebra	USP	D
P9	2016	Luiz Felipe Araujo Mod	O objeto matemático triângulo em teoremas de Regiomontanus: um estudo de suas demonstrações mediado pelo GeoGebra	PUC-SP	D
P10	2015	Juliana Maria Schivani Alves	Dos mínimos quadrados à regressão linear: atividades históricas sobre função afim e estatística usando planilhas eletrônicas	UFRN	D
P11	2014	José Damião Souza de Oliveira	A Geometria do compasso (1797) de Mascheroni (1750 – 1800) em atividades com o GeoGebra	UFRN	D
P12	2014	Eduardo Jesus Dias	O uso dos tablets nas aulas de matemática no ensino médio	UNICSUL	D
P13	2013	Viviane Chitolina Mainardi	A Geometria dos mosaicos: uma proposta contextualizada na História da matemática	URI	D
P14	2013	Michelle da Costa Barros Coelho Guimarães	Números complexos e suas aplicações geométricas no ensino superior	CEFET/RJ	D
P15	2013	Lidiane Schimitz Lopes	A História da Matemática e o Blog na formação inicial do professor	UFPeI	D

P16	2013	Rita Sidmar Alencar Gil	Formação de professores de matemática: conexões didáticas entre matemática, história e arquitetura	UFRN	T
P17	2011	Tatiana de Camargo Waldomiro	Abordagem histórico - epistemológica do Ensino da Geometria fazendo uso da Geometria dinâmica	USP	D
P18	2011	Luciano Ferreira	Uma proposta de ensino de Geometria hiperbólica: “construção do plano de poincaré” com o uso do Software GeoGebra	UEA	D
P19	2011	Rafael Rix Geronimo	Elaboração e Proposta de um RPG (Role Playing Game) a partir do Papiro de Rhind	PUC-SP	D
P20	2011	Benedito Fialho Machado	Video-aula de história da matemática – uma possibilidade didática para o ensino de matemática	UFRN	D
P21	2010	Maria José de Freitas Mendes	Possibilidades de exploração da História da Ciência na formação do professor de matemática: Mobilizando saberes a partir da obra de Nicolau Copérnico <i>De Revolutionibus Orbium Coelestium</i>	UFRN	T
P22	2010	Maria Deusa Ferreira da Silva	Problemas e modelos que contribuíram com o Desenvolvimento do cálculo diferencial e integral: dos Gregos a Newton	UFRN	T
P23	2008	Leda Maria Bastoni Talavera	Parábola e catenária: história e aplicações	USP	D

Fonte: Elaboração a partir do CREPHIMat (2023)

A partir da seleção dos trabalhos, continuamos na exploração das produções acadêmicas. Assim sendo, focamos na leitura dos trabalhos, de maneira a extrair e organizar os objetivos de cada um, para depois fazermos uma unidade de síntese do referido objetivo, extraíndo a sua “essência”, como podesse ser observado Quadro 4.

Quadro 10: Objetivos e unidade de síntese

#	Objetivo	Síntesis
P1	Propor um produto educacional articulando a História da Matemática (HM), as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) e a Investigação Matemática (IM) para abordagem das unidades temáticas de Matemática da Base Nacional Comum Curricular, para as turmas do 8º ano do Ensino Fundamental.	História da Matemática e GeoGebra para abordagem das unidades temáticas de Matemática
P2	Investigar se o uso de metodologias artísticas contribui efetivamente para motivar os estudantes das turmas de 2º ano do Ensino Médio Integrado Técnico em Automação Industrial e Informática do Instituto Federal Catarinense - Campus São Bento do Sul a aprenderem os conceitos ligados à Matemática, em particular o conteúdo de Funções Trigonométricas fazendo uso de recursos como lousa, livro didático, slides, vídeos, listas de exercícios e software/aplicativo GeoGebra, acessado pelo celular ou computador.	História da Matemática e uso de recursos como lousa, livro didático, slides, vídeos, listas de exercícios e software/aplicativo GeoGebra para abordagem conteúdos de Funções Trigonométricas
P3	Desenvolver um estudo por meio da construção de uma interface entre a história e o ensino de matemática, escolheu-se o instrumento círculos de proporção, descrito em <i>The Circles of Proportion and the Horizontal Instrvment</i> (1633), do inglês William Oughtred (1574-1660). apresentada através do recurso do GeoGebra.	Uso de software de Geometria dinâmica para a construção do pensamento geométrico

P4	Analisar e compreender estratégias que licenciandos em matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso utilizam a partir da experiência com a História da Matemática e com o software GeoGebra para resolver determinados problemas que possam viabilizar uma melhor compreensão ou ressignificação dos conceitos de ponto, coordenadas e equação da reta	História da Matemática e GeoGebra para abordagem dos conceitos de ponto, coordenadas e equação da reta
P5	Analisar as contribuições de um fundamento metodológica, no ensino fundamental, utilizando a História da Matemática e situações problemas via GeoGebra no estudo do Teorema de Pitágoras, tendo como princípio a produção de significados como aspecto central para aprendizagem, baseando no Modelo dos Campos Semânticos, proposto por Romulo Lins	História da Matemática e situações problemas via GeoGebra no estudo do Teorema de Pitágoras
P6	uma pesquisa em que se apresentam concepções norteadoras do uso da História da Matemática (HM) no ensino de Função, a qual recorre a elementos da utilização das Tecnologias da Informação e da Comunicação (TIC) e da Investigação Matemática (IM) na sala de aula. Abordando o conceito de Função desenvolvido ao longo da história, usando como apoio o software GeoGebra à luz da IM.	Abordando o conceito de Função desenvolvido ao longo da história, usando como apoio o software GeoGebra
P7	Realizar a produção de vídeos didáticos e atividades baseadas na História da Matemática, sobre tópicos das Geometrias não euclidianas que podem ser utilizados na formação continuada de professores.	Produção de vídeos didáticos e atividades baseadas na História da Matemática, sobre tópicos das Geometrias não euclidianas
P8	Descreve uma proposta de aprendizagem significativa e contextualizada social e culturalmente na introdução do ensino de Álgebra por meio da utilização do filme Jogo da Imitação, que traz elementos da História da Matemática, em especial da História da Criptografia.	História da Matemática com filme para a construção do pensamento algébrico
P9	Investigar os teoremas de Regiomontanus sobre triângulos, com a utilização do software GeoGebra. As demonstrações de alguns destes teoremas são analisadas pela mediação dos movimentos dinâmicos do GeoGebra na perspectiva das funções da demonstração segundo Villiers	História da Matemática e Geogebra para demonstrações de teoremas
P10	Construir atividades pautadas na História da Matemática, executadas por meio da Investigação Matemática e das Tecnologias de Informação e Comunicação para abordar, de forma contextualizada, os conceitos de Função Afim e Estatística no Ensino Médio. Esta sequência é composta de duas atividades históricas investigativas auxiliadas por um software de planilhas eletrônicas	Uso de software de planilhas eletrônicas para a construção do pensamento Estatístico
P11	Mostrar uma possibilidade de relação entre o uso da História da Matemática e o das Tecnologias da Informação e da Comunicação (TIC) no ensino de Matemática, por meio de atividades com construções geométricas da “Geometria do Compasso” (1797), de Lorenzo Mascheroni (1750 - 1800) usando o software GeoGebra.	Uso de software de Geometria dinâmica para a construção do pensamento geométrico
P12	Explorar e avaliar algumas propostas de utilização dos tablets no Ensino Médio, mais especificamente nas aulas de Matemática utilizando dois aplicativos gráficos – o Meplot-Free e o Mathlab Calculato e a elaboração de um projeto interdisciplinar que envolveu outros professores da instituição comprovam que essa ferramenta é fundamental na mediação e na interação do contexto matemático.	História da Matemática e uso dos aplicativos Meplot-Free e o Mathlab Calculato com o intuito de evidenciar um entendimento álgebra-geométrico
P13	Apresentar possibilidades do uso da História da Matemática como alternativa de apoio pedagógico ao professor para serem trabalhadas em sala de aula produzindo um Objeto de Aprendizagem (OA) sobre a Geometria dos Mosaicos.	História da Matemática e Objeto de Aprendizagem (OA) para o ensino de Geometria
P14	Visando mostrar uma maneira mais eficaz de compreensão dos números complexos, além da associação e aplicação dos mesmos à Geometria e, diretamente, à trigonometria, com a elaboração de uma	Uso do Software Régua e Compasso para relacionar aspectos álgebra e Geometria dos números complexos

	proposta de trabalho usando questionários e teste mediados pelo Software Régua e Compasso, um software de Geometria dinâmica.	
P15	Trabalhar a disciplina História e Filosofia da Matemática utilizando a História da Matemática e a tecnologia, em especial os blogs, como recursos pedagógicos potenciais para a construção de uma aprendizagem significativa, consideram-se indispensáveis suas abordagens em cursos de formação de professores.	História da Matemática e Blogs
P16	Investigar a possibilidade de uso de um fundamento didática para o ensino de tópicos matemáticos como Geometria, medidas, simetria e proporcionalidade, apoiada em proposta de atividades de construção com régua e compasso, de manipulação de plantas ligadas e exploração de programas computador (Geogebra), a fim de desenvolver a percepção dos objetos do plano e do espaço e conexões da Geometria com outras áreas da Matemática, com o intuito de atingir nosso objetivo de relacionar os métodos estudados as temáticas do patrimônio histórico de Belém e as obras de Antonio José Landi.	História da Matemática e patrimônio histórico em propostas de atividades de construção com régua e compasso, de manipulação de plantas ligadas e exploração de programas computador (GeoGebra)
P17	Investigar e analisar os efeitos de uma articulação entre o ensino da história da matemática e o uso de ferramentas computacionais como solução para as dificuldades apresentadas no Ensino de Geometria, principalmente no Ensino Médio	História da Matemática e produção/criação de diferentes recursos didáticos
P18	Elaborar uma Organização Didática e identificar possíveis obstáculos que aparecem durante a construção do modelo do plano de Poincaré com o uso do software GeoGebra em um minicurso de Geometria Hiperbólica aplicado a alunos do 4º ano de licenciatura em Matemática de Universidade Pública do Paraná	Utilização do Geogebra como instrumento para a construção do modelo do plano de Poincaré
P19	Elaborar um RPG (Role Playing Game), inspirado no Papiro de Rhind, para introduzir a noção de incógnita para alunos do sétimo ano do ensino fundamental.	História de matemática e Gamificação na abordagem da noção de incógnita
P20	Investigar as possibilidades didáticas do uso de video-aulas baseadas em informações históricas acerca do desenvolvimento histórico e epistemológico da Matemática e Avaliar a possibilidade do uso de video-aulas de História da Matemática com um grupo de professores do ensino fundamental, tendo em vista contribuir para inclusão da História da Matemática como uma perspectiva didática de melhorada ação docente.	Proposta de ensino utilizando a História da Matemática e Vídeos
P21	Analisar as implicações que o conhecimento de uma obra importante para a História da Ciência, como “ <i>De revolutionibus orbium coelestium</i> ”, de Nicolau Copérnico, pode trazer para a formação do professor de Matemática.	Uso de software GeoGebra para a construção do pensamento geométrico
P22	Fazer uma (re)construção histórica do desenvolvimento Conceitual do Cálculo Diferencial e Integral olhando-o como uma construção de modelos, dos gregos a Newton.	Uso de software GeoGebra para a construção do pensamento geométrico
P23	Este trabalho tem como objetos de pesquisa a curva catenária e a parábola no âmbito da educação e da história da matemática. Portanto, este estudo é sobre a aplicação da matemática – particularmente analisando o caso da catenária e da parábola – na arquitetura e engenharia de pontes pensadas, usando o software gráfico Winplot para construir as curvas catenária e parábola e pudemos visualizar as diferenças ou similaridades entre elas.	Uso de software de Geometria dinâmica para a construção do pensamento geométrico

Fonte: Elaboração a partir do CREPHIMat (2023)

Mediante a dinâmica do Quadro 10 e consultas ao *corpus*, foi possível evidenciar quais Tecnologias Digitais estão presentes nos trabalhos elencados, como apresenta o Quadro 5. Em seguida, tem-se a constituição dos objetos de pesquisas. Nesse passo, deve-se classificar as ideias semelhantes, ou seja, trazer uma expressão-chave que emerge da unidade de síntese.

Quadro 11: Constituição dos objetos de pesquisa

#	Síntesis	Tecnologias	Objetos de pesquisa
P1	História da Matemática e GeoGebra para abordagem das unidades temáticas de Matemática	GeoGebra	Softwares de Geometria Dinâmica
P2	História da Matemática e uso de recursos como lousa, livro didático, slides, vídeos, listas de exercícios e software/aplicativo GeoGebra para abordagem conteúdos de Funções Trigonométricas	GeoGebra	Softwares de Geometria Dinâmica
P3	Uso de software de Geometria dinâmica para a construção do pensamento geométrico	GeoGebra	Softwares de Geometria Dinâmica
P4	História da Matemática e GeoGebra para abordagem dos conceitos de ponto, coordenadas e equação da reta	GeoGebra	Softwares de Geometria Dinâmica
P5	História da Matemática e situações problemas via GeoGebra no estudo do Teorema de Pitágoras	GeoGebra	Softwares de Geometria Dinâmica
P6	Abordando o conceito de Função desenvolvido ao longo da história, usando como apoio o software GeoGebra	GeoGebra	Softwares de Geometria Dinâmica
P7	Produção de vídeos didáticos e atividades baseadas na História da Matemática, sobre tópicos das Geometrias não euclidianas	Vídeos	Vídeos
P8	História da Matemática com filme para a construção do pensamento algébrico	Filme	Filmes
P9	História da Matemática e Geogebra para demonstrações de teoremas	GeoGebra	Softwares de Geometria Dinâmica
P10	Uso de software de planilhas eletrônicas para a construção do pensamento Estatístico	Planilhas eletrônicas	Softwares de Planilha eletrônica
P11	Uso de software GeoGebra para a construção do pensamento geométrico	GeoGebra	Softwares de Geometria Dinâmica
P12	História da Matemática e uso dos aplicativos Meplot-Free e o Mathlab Calculato com o intuito de evidenciar um entendimento algébrico-geométrico	Meplot-Free, Mathlab Calculato	Softwares de computação algébrica simbólica (CAS)
P13	História da Matemática e Objeto de Aprendizagem (OA) para o ensino de Geometria	PREZI	Plataformas digitais
P14	Uso do Software Régua e Compasso para relacionar aspectos álgebra e Geometria dos números complexos	Software Régua e Compasso	Softwares de Geometria Dinâmica
P15	História da Matemática e Blogs	Blogs	Plataformas digitais
P16	História da Matemática e patrimônio histórico em propostas de atividades de construção com régua e compasso, de manipulação de plantas ligadas e exploração de programas computador (GeoGebra)	Régua e compasso, GeoGebra e matérias em concreto	Softwares de Geometria Dinâmica
P17	História da Matemática e produção/criação de diferentes recursos didáticos	Cabri	Softwares de Geometria Dinâmica
P18	Utilização do GeoGebra como instrumento para a construção do modelo do plano de Poincaré	GeoGebra	Softwares de Geometria Dinâmica
P19	História de matemática e Gamificação na abordagem da noção de incógnita	RPG (Role Playing Game)	Sistema de Jogos
P20	Proposta de ensino utilizando a História da Matemática e Vídeos	Vídeos	Vídeos

P21	Uso de software GeoGebra para a construção do pensamento geométrico	GeoGebra	Softwares de Geometria Dinâmica
P22	Uso de software GeoGebra para a construção do pensamento geométrico	GeoGebra	Softwares de Geometria Dinâmica
P23	Uso de software GeoGebra para a construção do pensamento geométrico	Winplot	Softwares de Geometria Dinâmica

Fonte: Elaboração pelo autor (2023)

A partir das informações do quadro anterior, foi possível estabelecer 7 objetos de pesquisa sobre as tecnologias usadas nos trabalhos pesquisados, conforme Quadro 6, em que os *softwares* de Geometria dinâmica estão presentes em 65% dos trabalhos.

Quadro 12: Frequência dos objetos de pesquisa

Trabalhos	Objetos de pesquisa	Frequência	%
P8	Filmes	1	4%
P13, P15	Plataformas digitais	2	9%
P19	Sistema de Jogos	1	4%
P12	Softwares de computação algébrica simbólica (CAS)	1	4%
P1, P2, P3, P4, P5, P6, P9, P11, P14, P16, P17, P18, P21, P22, P23,	Softwares de Geometria Dinâmica	15	65%
P10	Softwares de Planilha eletrônica	1	4%
P7, P20	Vídeos	2	9%
Total		23	100%

Fonte: Elaboração pelo autor (2023)

Com o cenário representado no quadro anterior, descrevemos cada categoria de análise em função dos trabalhos nelas agrupados.

Em relação a Filmes, o trabalho P08 propõe utilizar o filme *Jogo da Imitação* na introdução do ensino de Álgebra, usando os elementos da História da Matemática, em especial da História da Criptografia colocado no cenário pelo filme.

Com a Plataformas digitais, o P13 usa a plataforma *Prezi* para tornar as aulas de Matemática diferentes e atrativas, a partir da apresentação não linear que a plataforma possibilita, com diversos vídeos que trazem elementos históricos da Matemática e *links* com jogos envolvendo atividades relacionadas aos mosaicos, figuras geométricas que possibilitam a visualização do conteúdo e conceitos do tema abordado. Já no P15, com a plataforma *Blogspot*, criou-se o Blog História da Matemática, utilizado como recurso pedagógico. Nesse *blog*, a professora disponibilizava materiais para encontros presenciais da disciplina de História e Filosofia da Matemática. Além disso, o espaço virtual foi usado pelos graduandos como um

portfólio digital coletivo, para a construção de intervenções entre graduandos, e professores e graduandos.

Sobre o Sistema de Jogos, o P19 propôs a elaboração de um RPG (*Role Playing Game*) inspirado no Papiro de Rhind, com o objetivo de introduzir a noção de incógnita aos alunos do sétimo ano do ensino fundamental. O sistema do jogo se baseia na aplicação do método de falsa posição presente no Papiro de Rhind, que é brevemente apresentado, considerando suas partes, organização e conteúdo matemático. A proposta visa incorporar problemas elaborados a partir desse método no contexto do jogo, oferecendo um fundamento lúdica e engajadora para a introdução da noção de incógnita.

Nos *Softwares* de Computação Algébrica Simbólica (CAS), o P12 trabalhou com o *tablet*, que se revelou uma ferramenta valiosa no estudo, fazendo parceria com dois aplicativos gráficos notáveis, o Meplot-Free e o Mathlab Calculator, e um projeto intrigante que explorava a história da Matemática. Destaque-se que, nessa pesquisa, os elementos históricos da Matemática despertaram o interesse dos alunos em relação ao conteúdo tradicionalmente ensinado na escola. O contato mais íntimo com as origens e conceitos dessa disciplina estimulou um engajamento renovado.

Nos *Softwares* de Geometria Dinâmica, há 15 produções, das quais o GeoGebra aparece em 13; 1 software Régua e Compasso; 1 o Cabri e 1 Winplot. Esses *softwares* foram utilizados com as seguintes finalidades: em P1, com o *software* GeoGebra foi abordado o conceito de simetria e seus tipos; em P2 e P6 é abordado o conceito de Função desenvolvido ao longo da história, usando como apoio o *software* GeoGebra. A diferença entre P2 e P6, é que este último focaliza o estudo das funções trigonométricas nas suas representações algébrica e geométrica. Em P3 explora-se o estudo e a representação da Matemática do instrumento círculos de proporção de William Oughtred na interface do GeoGebra; em P4 o *software* GeoGebra é usado para resolver determinados problemas que possam viabilizar uma melhor compreensão ou ressignificação dos conceitos de ponto, coordenadas e equação da reta.

Continuando com P5 e P9, o uso do GeoGebra serve para dinamizar as demonstrações. O primeiro para demonstrar o Teorema de Pitágoras por Euclides e Lenordao Da Vinci, e o segundo sobre os teoremas de Regiomontanus sobre triângulos. Já o P11 usa o Geogebra para mediar atividades de resolução de problemas de Geometria presentes na obra “Geometria do Compasso” (1797), de Lorenzo Mascheroni (1750 - 1800). O P18 usa o GeoGebra para uma proposta de ensino de Geometria hiperbólica, construindo o plano de Poincaré.

Os trabalhos P16, P21 e P22 não focam no uso do GeoGebra como objeto principal, mas percebemos que esse *software* foi usado na representação do Elementos Matemáticos estudados nos respectivos trabalhos no desenvolvimento histórico e epistemológico realizado.

O P14 usa o *software* Régua e Compasso para relacionar aspectos da álgebra e da Geometria dos números complexos. O P17 usa o Cabri como um meio para realizar a demonstração da primeira proposição do livro I dos Elementos de Euclides. Finalmente, o P23 usou o *software* gráfico Winplot para construir as curvas catenária e parábola, e podemos visualizar as diferenças ou similaridades nos contextos da arquitetura e engenharia de pontes pênséis.

Nos *Softwares* de Planilha eletrônica, temos que P10 elaborou uma sequência composta de duas atividades históricas investigativas, auxiliadas por um *software* de planilhas eletrônicas, abordando de forma contextualizada os conceitos de Função Afim e Estatística no Ensino Médio.

Finalmente, no que respeita à Vídeos, P7 realizou a produção de vídeos didáticos e atividades baseadas na História da Matemática, sobre tópicos das Geometrias não euclidianas, que podem ser utilizados na formação continuada de professores. O P20, além de produzir videoaulas baseadas em informações históricas acerca do desenvolvimento histórico e epistemológico da Matemática, procedeu a avaliação desses recursos por um grupo de professores do ensino fundamental, tendo em vista contribuir para a inclusão da História da Matemática como uma perspectiva didática de melhoria da ação docente.

Nesse cenário, agrupados os trabalhos no Quadro 12, conseguimos caracterizar objetos de pesquisas dos trabalhos em função dos usos da Tecnologia, História e Mediação, a seguir no Quadro 13.

Quadro 13: Uso das Tecnologias, da História e Mediação

Trabalhos	Objetos de pesquisa	Uso da Tecnologia	Mediação	Uso da História
P8	Filmes	Promover Ciclos de Prova	Epistêmica e Justificacional	Recurso, Objetivo
P13, P15	Plataformas digitais	Promover Ciclos de Prova	Epistêmica	Recurso, Objetivo
P19	Sistema de Jogos	Promover Ciclos de Prova	Epistêmica	Recurso, Objetivo
P12	Softwares de computação	Promover Ciclos de Prova	Epistêmica, Pragmática	Recurso

	algébrica simbólica (CAS)			
P1, P2, P3, P4, P5, P6, P9, P11, P14, P16, P17, P18, P21, P22, P23,	Softwares de Geometria Dinâmica	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações; Apoiar o Raciocínio	Epistêmica, Pragmática e Justificacional	Recurso, Objetivo
P10	Softwares de Planilha eletrônica	Apoiar o Raciocínio	Pragmática e Justificacional	Recurso
P7, P20	Vídeos	Promover Ciclos de Prova	Epistêmica	Recurso, Objetivo

Fonte: Elaboração pelo autor (2023)

Nesse panorama nacional da produção analisada, se percebe o padrão do que foi analisado a nível internacional. Destacamos que não foi possível identificar nos trabalhos o uso da História como um reorganizador cognitivo, pois na produção não ficaram evidentes os processos criativos que têm o potencial de ampliar os exercícios cognitivos, promovendo a compreensão relacional, destacando a importância da ampliação de esquemas relacionados à representação de um conceito matemático para a formação desse tipo de compreensão.

Ao que respeita do uso das tecnologias como servindo como tutela, tampouco foi possível perceber nesses trabalhos, do mesmo modo que na literatura internacional, na nacional não se tem pesquisas na junção de História da Matemática com Tecnologias que possam ser programáveis para interagir.

Ao que atinge as mediações, conseguimos perceber que a maioria dos trabalhos apresenta mediações no uso das tecnologias, de tipo epistêmicas, ou seja, aquelas direcionadas a mudanças dentro do sistema cognitivo do sujeito. Nesse cenário, podemos considerar que as pesquisas mapeadas se centram por promover um uso de História da Matemática em combinação com as Tecnologias Digitais para promover nos sujeitos as ações de raciocinar, representar e argumentar por meio ciclos de prova e apresentando e conectando múltiplas representações dos objetos e conceitos matemáticos advindos da História da Matemática

1.6 Caracterização da Produção Científica em Anais de Congresso

1.6.1 Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática – HTEM

Nos seguintes parágrafos teremos o levantamento e descrição comentada dos trabalhos mapeados no Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática – HTEM (2002 –

2013). Assim sendo, começamos por compreender o desenvolvimento das pesquisas que foram apresentadas durante a realização dos HTEM. Queremos destacar que em nenhum momento temos a pretensão de avaliar as produções, senão, ter um panorama das pesquisas e relatos de experiências que possam vislumbrar possíveis relações entre a História e Tecnologias para o Ensino da Matemática. Portanto, nosso objetivo aqui é identificar quais as abordagens nessas produções acadêmicos-científicas do uso da História da Matemática e as Tecnologias, incluindo as digitais, no ensino da Matemática. A seguir, a descrição e análise dos trabalhos sobre História e Tecnologias para o Ensino da Matemática.

Em relação aos anais do I HTEM constatou-se duas (02) comunicações que tratam sobre História e Tecnologias para o Ensino da Matemática. A primeira, intitulada *História da Matemática no Ensino Superior*, escrita por Antonio Carlos Brolezzi, apresenta uma proposta de disciplina História da Matemática que aborda o acesso às fontes, o valor didático e o uso de Tecnologias Digitais. O autor defende a premissa de que as Tecnologias Digitais têm a possibilidade de melhorar o acesso e o uso da História para o Ensino de Matemática. Para isso, expressa que se deve considerar a Matemática e seu ensino à luz da História, não necessariamente usando fatos da História nas aulas de Matemática como simples ornamento, deve ir além disso. A proposta apresentada tem sua origem da Universidade Federal de Ouro Preto, na disciplina História da Matemática, a qual buscou incluir no seu programa a questão do acesso às fontes, do uso didático da História e da relação entre História e Tecnologias.

A segunda comunicação, de autoria de Francisco Mattos e intitulada *Problemas Clássicos e sua solução por Dobraduras Origami*, introduz um conjunto de axiomas formulados por *Humiaki Huzita*, justificando a realização de construções geométricas por meio de dobraduras no papel ou construções origami. Foi introduzido o corpo dos números origami como uma extensão do corpo dos números construídos com régua não marcada e compasso. O corpo dos números origami coincide com os números obtidos das interseções de cônicas; isto é, o corpo obtido de números racionais por adição de raízes quadradas e cúbicas e seus conjugados. A apresentação e resolução um conjunto de problemas elementares, incluindo alguns que não podem ser resolvidos com régua não marcada e compasso, mas que podem ser resolvidos através das construções por dobraduras, são realizados em ambientes de Geometria dinâmica.

Nos anais do II HTEM identificamos seis (06) trabalhos que tratam sobre História e Tecnologias para o Ensino da Matemática. O primeiro foi a comunicação de autoria de Helena

Noronha Cury e Carlos Eduardo Mathias Motta, intitulada *História e Estórias da Matemática: uma entrevista com Heron nos dias atuais*. Nesse trabalho, apresenta-se uma proposta de uso da História da Matemática e de Tecnologias Computacionais para o ensino de conteúdos de Geometria na Educação Básica. A proposta consta de trechos de uma conversa hipotética que tiveram os autores com Heron, na qual surgem informações históricas sobre a constituição da fórmula para o cálculo da área de um triângulo e as propriedades dos triângulos de Heron. A respeito das tecnologias, os autores expressam que podem ser alternos os questionamentos e os recursos, trabalhando com Geometria (altura de triângulos), com a possibilidade de usar *softwares* de Geometria Dinâmica, como o *Cinderella*, para construir e explorar os triângulos e determinar lados e áreas.

O segundo trabalho foi a comunicação intitulada *Uma demonstração a partir de exemplos, inspirada pela Geometria dinâmica*, escrito por Silvana Marini R. Lopes. Nesse trabalho é explorado o teorema de Napoleão num ambiente de Geometria Dinâmica chamado *Geometry Expert*. Por meio dessa tecnologia digital, é apresentada uma nova construção, baseada nas rotações do triângulo de Napoleão. A demonstração apresentada no manuscrito via *software* possibilita uma investigação Matemática, pelo fato de que todos os pontos envolvidos na construção do triângulo de Napoleão dependem do triângulo inicial. Essa exploração do teorema de Napoleão, via Geometria dinâmica, resulta na identificação de diversos exemplos nos quais o teorema se cumpre.

O terceiro trabalho, de autoria de Danusa Chini Gani e Elizabeth Belfort, intitulado *As Ovais de Maxwell em Geometria Dinâmica*, apresenta as curvas ovais encontradas no trabalho do físico escocês *James Clerk Maxwell*, baseando-se no “processo do jardineiro”, que permite traçar a elipse utilizando uma corda fixa nos focos por seus extremos. A intenção é estudar um processo generalizado o qual resulta numa série de ovais. Os autores utilizam o tratado *On the Description of Oval Curves* de Maxwell como fundamentação Matemática do seu estudo, e programas de Geometria Dinâmica para a construção e exploração dos ovais, pois os ambientes computacionais permitem modelar tais curvas como lugares geométricos.

A comunicação publicada por Luiz Carlos Guimarães, intitulada *Reflexões acerca do problema de Alhazen*, tem uma proposta para utilizar um ambiente de Geometria Dinâmica para propiciar um “passeio” pelas ideias introduzidas por *Alhazen*, *Huygens*, *Dandelin* e outros, ao estudar o referido problema. O ponto de vista adotado é estritamente geométrico, mas vemos que a linguagem do Cálculo, assim como a da álgebra, aparece necessariamente na descrição

das estruturas evidenciadas pelo problema. Na opinião desse autor, a forma em que diversos conteúdos de Matemáticas “elementares” e aplicações à Física se juntam nesse problema, o torna um assunto especialmente adequado para atividades de exploração destinadas, por um lado, para a formação conceitual dos professores de Matemática e, pelo outro, para potencializar as aulas de Matemática na nova leitura que esses conteúdos têm nos *softwares* de Geometria Dinâmica.

O resumo intitulado *Uma visão Geométrica do Teorema Fundamental do Cálculo*, de autoria de Ana Cristina Vieira e Luiz Mariano Carvalho, a partir do livro *Lectiones Geometricae* (1670), apresenta uma visão geométrica para a demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo concebida pelo professor de Matemática em Cambridge Isaac Barrow. As autoras pretenderam construir no *software* Cabri a demonstração proposta por Barrow para algumas funções elementares, como, por exemplo, as funções quadrática, exponencial e logarítmica.

O último trabalho identificado foi o resumo intitulado *Análise do Problema de Apolônio via Geometria Dinâmica*, de autoria de André Luis Trevisan e Sandra A. Santos. Esses autores tiveram o intuito de analisar um problema clássico de Geometria, o Problema de Apolônio. Foi realizada nesse trabalho uma pesquisa histórica do problema, baseada na obra de Viète *Opera Mathematica recognita: Francisci a Schooten procuramos*, e analisar o problema desde uma perspectiva de aprendizagem oferecida por ambientes informatizados. Os autores propõem explorar as soluções de Viète para o problema de Apolônio. Inicialmente realizadas com régua e compasso, foram interpretadas e reconstruídas com o auxílio de *softwares* de Geometria Dinâmica, particularmente o *Tabulæ* e o *Cabri*.

Em relação ao III HTEM, constatou-se que havia quatro (04) comunicações que abordavam assuntos sobre História e Tecnologias no Ensino da Matemática. O primeiro deles, intitulado *Um fundamento de ensino de problemas de Geometria em nível básico com história e tecnologia*, escrito por Yuriko Yamamoto Baldin, apresenta um fundamento no uso de informações históricas de um problema explorado com as Tecnologias Digitais. Fundamenta-se numa metodologia que aponta para um ambiente de laboratório de ensino/aprendizagem em que visualização, simulação, construção de soluções e confirmação podem ser integradas de maneira organizada, auxiliando a resolução de um problema da *Matemática experimental*. O aspecto histórico permite conectar os conceitos geralmente ensinados sem ideia concreta das suas importâncias.

A segunda comunicação, *Infinito potencial & infinito atual no ensino de cálculo diferencial integral*, de autoria de Antonio Luis Mometti, objetiva enfatizar a importância da história do conceito de infinito, em especial, dos conceitos de infinito potencial e atual para a aula do professor de Cálculo. Para isso, o autor apresenta uma revisão histórica sobre os conceitos de infinito potencial e infinito atual e extrai tarefas para sua aplicação numa turma de alunos. Posteriormente, esses conteúdos são discutidos por um grupo de professores de Cálculo. As resoluções dessas tarefas baseadas em informações históricas foram abordadas com auxílio do *software Cabri Géomètre II*, no qual os alunos tiveram que construir uma sequência de polígonos inscritos num círculo e responder a diversos questionamentos provocadores de reflexões e discussões dos conhecimentos matemáticos emergidos no processo de resolução.

A outra comunicação, de autoria de Ana Paula Jahn e de Vincenzo Bongiovanni, tem por título *Geometria hiperbólica na formação inicial de professores de Matemática: perspectiva histórica em um ambiente de Geometria dinâmica*. Os autores pretenderam mostrar de que modo era possível a integração do ambiente de Geometria dinâmica *Cabri-Géomètre* para viabilizar um fundamento experimental dedutiva da Geometria, baseados em informações históricas dos modelos das Geometrias não Euclidianas, especificamente construções elementares da Geometria hiperbólica no modelo plano do disco e semiplano de Poincaré, numa formação inicial de professores de Matemática. Como resultado dessa proposta, os autores afirmam que o uso desse *software* de Geometria dinâmica no estudo das Geometrias não euclidianas, por um lado, possibilitou visualizar inúmeros resultados da Geometria euclidiana não válidos na Geometria hiperbólica e, pelo outro lado, auxiliou os estudantes a romperem com definições associadas a imagens mentais, constituindo um verdadeiro instrumento de exploração, manipulação, visualização e concretização.

A quarta comunicação tem por título *Cálculo II via Quadratura da Parábola*, e foi escrita pelos autores Sandra Santos, Vera Figueiredo e Margarida Mello. São abordados conceitos de cálculo de uma variável e Geometria analítica que surgem dos estudos de Arquimedes sobre a quadratura da parábola. Os autores destacam que essa abordagem, considerando as informações históricas na resolução da quadratura da parábola por Arquimedes, promove uma sistematização do raciocínio por meio da comunicação matemática escrita, bem como a provocação visual por meio de ilustrações elaboradas por ambientes informatizados, propiciando nos estudantes a elaboração de conjecturas e proposição de

problemas relacionados, que favorecem o ensino dos conteúdos próprios da disciplina Cálculo II.

Nos anais do IV HTEM, identificamos duas (02) comunicações que tratam sobre História e Tecnologias para o Ensino da Matemática. A primeira, intitulada *Atividades no GeoGebra sobre demonstrações de Arquimedes e Barrow*, escrita por Luiz Antônio Jacyntho e Luiz Mariano Carvalho. Apresenta-se a demonstração de que a área de qualquer círculo é equivalente à de um determinado triângulo retângulo, prova elaborada por Arquimedes. Os autores fizeram a referida demonstração através de um *software* de Geometria Dinâmica, o *GeoGebra*, pelo qual é possível obter visualizações e, conseqüentemente, uma melhor compreensão da demonstração. Além disso, também é possível entender casos particulares do Teorema Fundamental do Cálculo, explorados por Barrow. Os autores afirmam que o uso de textos históricos e o *software* de Geometria Dinâmica têm o intuito de aumentar o interesse dos alunos pelo desenvolvimento da Matemática, acentuando diferenças, similaridades, limitações entre várias épocas do desenvolvimento do pensamento matemático.

A segunda comunicação, escrita por Wanderley Moura Rezende e intitulada *Galileu e as Novas Tecnologias no estudo das funções polinomiais no Ensino Básico*, apresenta uma proposta para o ensino das funções polinomiais, exponenciais e logarítmicas. Faz uma discussão sobre as possibilidades de articular as ideias e ferramentas intelectuais que antecedem o desenvolvimento do cálculo infinitesimal, o espírito científico de Galileu e o uso de novas tecnologias, tendo como meta uma intervenção didática na Educação Básica, no que se refere ao estudo do comportamento variacional das funções, tendo como apoio as planilhas eletrônicas.

Ao verificar os anais do V HTEM, foi possível identificar uma comunicação e um pôster que abordam assuntos sobre História e tecnologias no ensino da Matemática. O trabalho tem por título *O Cálculo e as Tecnologias: perspectivas Histórica e de Ensino e Aprendizagem* e foi escrito por Marco Antonio Escher e Rosana Giaretta Sguerra Miskulin. Os autores descrevem um cenário de investigação baseado em dimensões teóricas e metodológicas, as quais apresentam as influências, limites e potencialidades do uso das TIC no Cálculo Diferencial e Integral, sob uma perspectiva histórica e de ensino e aprendizagem, tendo o intuito de evidenciar as possíveis inter-relações no desenvolvimento histórico do Cálculo e as Tecnologias de Informação e Comunicação, de maneira tal a destacar a importância dessa

aliança para elaborar estratégias didático-pedagógicas-tecnológicas, baseadas em informações históricas para preparar e ministrar as aulas.

O pôster intitulado *Videoaulas de história da Matemática como Possibilidade didática para a Educação Básica*, de autoria de Benedito Fialho Machado e Iran Abreu Mendes, discute as possibilidades do uso didático de videoaulas sobre história da Matemática por professores do ensino Fundamental e Médio. A elaboração das videoaulas foi baseada em estudos histórico-epistemológicos já realizados por outros pesquisadores sobre o desenvolvimento de conceitos e ideias matemáticas. A respeito do uso das tecnologias de informação e comunicação, as videoaulas foram sustentadas nas diretrizes da informática educativa, bem como nas propostas de ensino de Matemática por atividades e na investigação histórica. Segundo os autores, com os resultados preliminares obtidos foi possível identificar outras possibilidades de estabelecer um fundamento mais lúdica, autoexplicativa e que se tornasse mais atrativa aos alunos de licenciatura de Matemática.

Finalmente, nos anais do VI HTEM foi possível identificar dois (02) trabalhos que tratam sobre História e Tecnologias para o Ensino da Matemática. Uma comunicação escrita por Maria Deusa Ferreira da Silva, intitulada *Os métodos para calcular áreas e volumes de Eudoxo e Arquimedes: um olhar sob a perspectiva histórica fazendo o uso das novas tecnologias*, que apresenta os métodos utilizados por Eudoxo e Arquimedes para determinar áreas e volumes de regiões curvas, para o desenvolvimento conceitual do Cálculo Integral apoiado pelo uso de ferramentas tecnológicas. Mostra que é possível associar a História da Matemática fazendo uso de *softwares* de Matemática. Para isso, a autora apresenta alguns dos métodos desenvolvidos pelos antecessores do Arquimedes e, em seguida, coloca em cena os métodos da Arquimedes para calcular áreas e volumes, para finalizar mostrando que esses métodos podem ter uma nova leitura quando utilizamos novas tecnologias.

Na segunda comunicação, de título: *Sobre a Matemática das medidas no planeta terra: dos gregos às novas tecnologias*, de José Antonio Salvador e João Carlos Vieira Sampaio, os autores tiveram como objetivo propor uma maneira de abordar didaticamente alguns aspectos históricos de medições e cálculos realizados na Terra ao longo dos tempos. Na descrição histórica e Matemática dos eventos de medições, emprega-se conceitos elementares de Geometria euclidiana e o surgimento da trigonometria. Métodos engenhosos, tais como os empregados por *Eratóstenes de Cirene* e *Aristarco de Samos*, foram baseados em conhecimentos de Geometria euclidiana e construções geométricas por instrumentos clássicos,

a régua e o compasso. Na atualização das técnicas, podemos explorar conhecimentos de Geometria euclidiana e construções, desenhos ou esquemas dos objetos a serem calculados com *softwares* modernos de Geometria Dinâmica como o GeoGebra.

Consideramos que a produção acadêmica em formato de comunicações, resumos e pôsteres publicados nos Anais do Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática – HTEM, acontecidos no Rio de Janeiro em 2004; em São Paulo em 2006; no Rio de Janeiro em 2008; em Recife em 2010, e em São Carlos em 2013 teve o objetivo de identificar e destacar os primeiros sinais de pesquisas sobre as possíveis relações entre História e Tecnologias no Ensino da Matemática.

Do mapeamento dos 269 trabalhos levantados nas cinco edições do HTEM, mais da metade das produções, especificamente, cento e sessenta e duas (172) abordam assuntos sobre o uso das tecnologias. Em segundo lugar, ocupam os trabalhos referidos a assuntos da História da Matemática, com uma representação de 74 trabalhos. Os restantes trabalhos foram organizados como estudos e pesquisas na Educação Matemática, pelo fato de não apresentarem conteúdos referentes à História da Matemática ou de alguma tecnologia para o Ensino da Matemática.

Baseados nas informações levantadas, podemos afirmar que a relação de trabalhos que apresentam abordagens para o uso das Tecnologias para o Ensino da Matemática é nove vezes maior em relação aos trabalhos que têm aparentemente relações com o uso da História e Tecnologias para o Ensino da Matemática. A porcentagem dos primeiros é de 90%, e os restantes, 10% para aqueles trabalhos que atendem aos pressupostos do HTEM. Em nossa consideração, apenas dezesseis (16) trabalhos têm sistematizações plausíveis sobre as relações de uso de História e Tecnologias para o Ensino da Matemática.

Retomando o primeiro questionamento: Em que termos é refletido nas produções acadêmico-científicas a relação História da Matemática e Tecnologias Digitais? A respeito das tecnologias usadas nos trabalhos descritos na seção anterior, o predomínio de *softwares* de Geometria dinâmica é evidente. Entre eles, estão o *Tabulae*, *Cabri II Plus*, *Cabri 3D*, *C.a.R.* (*Compass and Ruler*), *CaRmetal*, *Geometer's*, GeoGebra e outros próprios do Cálculo Computacional (CAS) e calculadoras gráficas.

No quadro 14, sistematizamos a partir da leitura e descrição comentada dos trabalhos, os Usos e Mediação da Tecnologia e a História.

Quadro 14: Uso das Tecnologias, da História e Mediação dos Trabalho do HTEM

Edição	Uso da Tecnologia	Mediação	Uso da História
I HTEM	Prova de Ciclos	Epistêmica	Recurso
	Prova de Ciclos	Epistêmica	Recurso
II HTEM	Prova de Ciclos	Epistêmica	Recurso, Objetivo
	Prova de Ciclos	Epistêmica	Recurso
	Prova de Ciclos	Epistêmica; Pragmática	Recurso
	Prova de Ciclos	Epistêmica	Recurso
	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações	Epistêmica; Pragmática	Recurso, Objetivo
	Prova de Ciclos	Epistêmica	Recurso
III HTEM	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações	Epistêmica; Pragmática	Recurso, Objetivo
	Prova de Ciclos	Epistêmica	Recurso
	Prova de Ciclos	Epistêmica; Pragmática	Recurso
	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações	Epistêmica; Pragmática	Recurso
IV HTEM	Prova de Ciclos	Epistêmica; Pragmática	Recurso
	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações	Epistêmica; Pragmática	Recurso
V HTEM	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações	Epistêmica; Pragmática	Recurso
	Promover Ciclos de Prova	Epistêmica	História como um Reorganizador Cognitivo
VI HTEM	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações	Epistêmica; Pragmática	História como um Reorganizador Cognitivo
	Promover Ciclos de Prova	Epistêmica; Pragmática	Recurso, Objetivo

Fonte: Elaboração pelo autor (2023)

Na produção analisada dos Anais do HTEM, se percebe novamente o cenário do contexto nacional e internacional com as teses e dissertações; porém, com um destaque que diferencia. Foi possível identificar dois trabalhos com o uso da História como um reorganizador cognitivo. O primeiro, tendo como coautor o professor Iran Abreu Mendes, o precursor desse

uso da História para o Ensino da Matemática. O segundo trabalho, embora não tenha referido o pesquisador como coautor, deriva de uma tese de doutorado orientada por Mendes.

O emprego de tecnologias na produção, em sua quase totalidade, foi conduzido por meio da implementação de ciclos de prova, isto é, a tecnologia foi utilizada para explorar tópicos matemáticos, gerar conjecturas, testar e revisar essas conjecturas, culminando na etapa final de prová-las. Esse método de utilização alinha-se, na maioria dos casos, com a apresentação e conexão de múltiplas representações, buscando exibir pelo menos duas formas distintas de representação para os objetos matemáticos. Alguns casos específicos dessas abordagens incluíram a utilização para apoiar o raciocínio, isto é, gerar, organizar ou analisar dados. É interessante notar a ausência de uso como tutela, o que inferimos ser decorrente do tipo de tecnologia digital empregada nesses trabalhos, como os *softwares* de Geometria Dinâmica.

No que tange às mediações, observa-se que, na maioria dos trabalhos, são predominantemente de natureza epistêmica, direcionadas a alterações no sistema cognitivo do sujeito, geralmente alinhadas com a mediação pragmática, voltada para fenômenos externos ao sistema cognitivo do sujeito. Em alguns casos, há uma presença menor das duas anteriores, em conjunto com mediações justificacionais, as quais têm relação com o estabelecimento de segurança em uma proposição ou teorema, independente do sistema cognitivo. Dessa forma, o uso da tecnologia digital é caracterizado por uma preocupação com a verificação e a justificação de tais provas e demonstrações.

Nesse cenário, é possível considerar que as pesquisas mapeadas se concentram na promoção do uso da História da Matemática em combinação com Tecnologias Digitais, visando estimular nos sujeitos às ações de raciocinar, representar e argumentar, ampliando as fronteiras do conhecimento matemático.

Na próxima seção, apresenta-se um panorama geral dos trabalhos publicados no Seminário Nacional de História da Matemática – SNHM (1995 – 2021), seguindo a mesma forma de tratamento dos anais do HTEM. No conjunto dos anais do SNHM, encontramos catorze (14) trabalhos, referentes à História da Matemática e as Tecnologias Digitais. Descrevemos as principais informações obtidas por meio da leitura das produções levantadas, nos parágrafos a seguir.

1.6.2 Seminário Nacional de História da Matemática – SNHM

Adiante, descrevemos cada produção das Tecnologias e História da Matemática para o Ensino encontrados nos trabalhos publicados nos anais do SNHM. Tendo como objetivo identificar as possíveis interconexões que os autores fazem dessas temáticas.

O primeiro trabalho que aborda as possíveis interconexões das Tecnologias e História da Matemática para o Ensino é de autoria de Emília Cuyabano, Daltron Ricaldes, Celso da Cruz e Jairo Alves da Silva, intitulado *Do Teatro ao Computador: mostrando a evolução do conhecimento matemático*, publicado nos anais do 3º SNHM, no ano de 1999. Os autores tiveram como objetivo descrever uma contribuição teórico-metodológica no âmbito da História da Matemática, via elaboração de diferentes recursos didáticos, como *softwares*, peças de teatro e computador.

As propostas pedagógicas descritas pelos autores foram desenvolvidas em curso de formação de professores, pelo fato de que, naquele tempo, os Parâmetros Curriculares Nacionais incluíam dentro do *corpus* de recomendações a utilização da História da Matemática para a sala de aula. Nesse sentido, no trabalho se enfatiza a necessidade de articular nas metodologias de ensino o conhecimento da história do conteúdo matemático a ser ensinado. A respeito do uso das tecnologias descrito no trabalho nessa articulação, é um meio para materializar uma atividade sobre a evolução dos números, objetivando um ensino dirigido aos alunos do Ensino Fundamental. Outro exemplo é na confecção de um computador DMR, que opera em diferentes bases, mostrando a base binária, base cinco e base dez, trabalhadas desde um contexto histórico, de maneira a fazer um percurso pelas diferentes bases numéricas.

O segundo trabalho, de autoria de Leda Maria Bastoni Talavera e Antonio Carlos Brolezzi, intitulado *Geometria Dinâmica e a Reconstrução do Pensamento Geométrico Grego na sala de aula*, encontra-se nos anais do 5º SNHM de 2003. Objetiva encontrar na história informações argumentativas para mostrar que o uso de *software* de Geometria Dinâmica é um fator decisivo para a construção dos alunos de um pensamento geométrico instituído desde os tempos da Grécia.

Nesse trabalho, os autores fazem uma breve historiografia do desenvolvimento da Geometria plana e como, ao longo desse percurso, os saberes técnicos foram influenciando na evolução epistêmica dos saberes teóricos. Nesse sentido, na atualidade essas técnicas estão cada vez mais

informatizadas e mediadas por diversos *softwares*, os quais são herdeiros de uma construção histórica na qual as tecnologias do momento são usadas como técnicas e ferramentas para apoiar o raciocínio abstrato dos sujeitos que as usam e praticam.

Nessa experiência, os autores apoiaram seus argumentos por meio de problemas resolvidos por Apolônio e Arquimedes, usando o *software* Cabri, num processo de construção de diversos testes, comprovando propriedades e validando as hipóteses na exploração das referidas construções.

O terceiro trabalho, de autoria de Maria Maroni Lopes, é intitulado *Análise das potencialidades e limitações do software Geometricks na aprendizagem dos conceitos básicos de trigonometria*, publicado em 2009 nos anais do 8º SNHM. A autora teve como objetivo investigar as potencialidades e limitações do *software Geometricks* na aprendizagem dos conceitos básicos de Trigonometria.

Esses conceitos abordados na experiência foram extraídos da história da Trigonometria de civilizações antigas, como a babilônica, egípcia e grega. A autora elaborou uma proposta de ensino utilizando a História da Matemática e as potencialidades do *software Geometricks*, construindo um bloco de atividades, que foram aplicadas e testadas com os alunos de uma turma de 2º ano do Ensino Médio de uma escola pública do Rio Grande do Norte. A autora destaca que as atividades promovem um diálogo permanente entre as Tecnologias, História da Matemática e o Construtivismo, por meio da investigação matemática.

O quarto trabalho, de autoria de Jesus Victoria Flores Salazar, Talita Carvalho Silva de Almeida e Saddo Ag Almouloud, intitulado *Transformações Geométricas: um fundamento histórica mediada pelo Cabri 3D*, foi publicado em 2009 nos anais do 8º SNHM. Os autores têm o propósito observar e identificar, por meio de uma sequência de atividades, como os estudantes aprendem as transformações geométricas no espaço, mediados pelo ambiente de Geometria dinâmica Cabri 3D.

As sequências de atividade foram fundamentadas na História da Matemática para compreender como esse conhecimento se construiu e se consolidou ao longo dos tempos. Assim, apresentam quatro momentos históricos nos quais as transformações geométricas se destacam: antiguidade grega (Elementos de Euclides), Renascimento Italiano, Geometria Projetiva (século XVI) e com Félix Klein (século XIX). Isso, com o intuito de resgatar o conhecimento

sobre transformações geométricas no espaço como conteúdo de ensino e aprendizagem, e tendo como suporte os recursos do *Cabri 3D*.

O quinto trabalho é de autoria de Talita Carvalho Silva de Almeida, Jesus Victoria Flores Salazar e Maria José Ferreira da Silva e intitulado *Sólidos Arquimedianos e Cabri 3D: um fundamento histórico com o uso de tecnologia*, publicado no de 2009 nos anais do 8º SNHM. Objetiva elucidar questões acerca dos sólidos arquimedianos, tanto no que se refere à sua evolução histórica e às suas construções, quanto ao seu atual campo de ação. O recorte desse trabalho buscou, por meio de uma sequência de atividades, explorar esses sólidos, no que tange às suas construções no ambiente *Cabri 3D*.

Na sequência de atividades também os autores abordaram os poliedros semirregulares, os quais foram definidos como poliedros de faces poligonais regulares, de no mínimo dois tipos, com todas as arestas e ângulos poliédricos congruentes. Os autores acreditam que a utilização desse ambiente e as informações históricas possam contribuir para o estudo desses sólidos, bem como resgatá-los como conteúdo de ensino, pouco a pouco relegado do Ensino da Geometria Espacial, talvez pela difícil visualização e construção em ambientes bidimensionais.

O sexto trabalho, de autoria de Francisco Regis Vieira Alves, tem como título *Discussão dos Métodos Árabes para a Resolução da Cúbica com suporte computacional*, foi publicado nos anais do 9º SNHM, no ano de 2011. Nesse trabalho apresenta-se uma história sobre a evolução dos métodos árabes para a resolução predominantemente geométrica da equação geral da cúbica, descrita analiticamente por $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

Logo, aplicam-se e exemplificam-se abordagens para a exploração desse relevante problema, no qual se identifica a importante contribuição dos matemáticos árabes *Al-Khwārizmī*, *Saraf al-Din al-Tusi*, *Al Quhi*. Os métodos matemáticos árabes são discutidos e significados no texto com uso de *softwares* computacionais para a compreensão da natureza das raízes da cúbica, inclusive no caso em que comparecem raízes de grandezas negativas.

O sétimo trabalho, de autoria de Francisco Regis Vieira Alves e Rui Eduardo Brasileiro, intitulado *História e Tecnologia no Ensino: sobre o Teorema Fundamental da Álgebra – TFA*, está publicado nos anais do 11º SNHM no ano 2015. Esse trabalho objetivou rever uma discussão do Teorema Fundamental da Álgebra – TFA, com propósitos pedagógicos. Para isso, os

autores apoiam suas ações com tecnologias, de tal maneira a promover processos de visualização para uma compreensão geométrica desse conteúdo.

Os autores descrevem um cenário com a intenção de conduzir processos de ensino e aprendizagem sobre a compreensão do comportamento de funções do tipo $f(z)$ de variável complexa, desde uma perspectiva geométrica a modo de representar, com o arrimo de dois *softwares*, as visualizações de suas partes real e imaginária. Isso, para demonstrar via exemplo, que o ensino que considera a tecnologia caminha no mesmo fluxo daquele característico da evolução histórica dos conceitos matemáticos.

O oitavo trabalho, de autoria de Rui Eduardo Brasileiro e Francisco Regis Vieira Alves, que tem por título *Redescobindo Ceva e Menelaus em dimensão três*, foi publicado nos anais do 11º SNHM de 2015. Nesse trabalho, os autores colocam num cenário dois teoremas clássicos da Geometria Euclidiana Plana e sua aplicação no contexto em dois problemas de contexto.

Nesse cenário, destacam-se as possibilidades da exploração dos teoremas por meio das tecnologias. Também descrevem processos de ensino nos quais provam e/ou realizam demonstração matemática, com arrimo do *software* GeoGebra, especificamente da interface 2D e 3D. Essa abordagem, fundamentada em elementos de ordem histórica, permitiu estruturar um cenário de investigação histórica e matemática, de maneira a proporcionar o que os autores chamam de “redescoberta” dos teoremas de Ceva e o de Menelaus em sala de aula ou no laboratório de ensino de Matemática.

Os autores sinalizam que, no ensino de Matemática que contemple o componente histórico-epistemológico e as tecnologias da atualidade, os professores têm a possibilidade de “fugir” do ritual estruturante e formal, e abordar esses teoremas de uma maneira mais dinâmica.

O nono trabalho, de autoria de Ivonne C. Sánchez S. e João Cláudio Brandemberg, intitulado *História da Matemática com tecnologia digitais: uma aliança possível para o ensino do teorema de Pitágoras*, está publicado nos anais do 13º SNHM, no ano de 2019. Teve como objetivo descrever duas demonstrações do Teorema de Pitágoras efetuadas pelos matemáticos Bhâskara e Perigal.

As referidas demonstrações foram dinamizadas com o GeoGebra, um *software* de matemática dinâmica. O motivo de fazer as demonstrações com o GeoGebra é que o *software* tem

o potencial de apresentar o registro algébrico, bem como o geométrico do teorema de maneira simultânea, permitindo a abordagem do mesmo conteúdo em dois diferentes registros de representação matemática.

Os autores argumentam que esse fato impacta positivamente na atividade cognitiva dos sujeitos nas demonstrações do Teorema de Pitágoras, abordadas a partir de um ambiente dinâmico. Expressam que essa experiência é um exemplo concreto no processo de integração da História da Matemática e das tecnologias em interconexões para o ensino de Matemática na sala de aula.

O décimo trabalho é de autoria de Giancarlo Secci de Souza Pereira e Cristiane Ruiz Gomes, intitulado *Teorema de Carnot uma validação com Geometria dinâmica*. Teve o objetivo de apresentar um fundamento do teorema de Carnot para triângulos acutângulos em conjunto com um *software* de Geometria dinâmica, especificamente o GeoGebra, como ferramenta para demonstrar o teorema. Para a constituição dessa abordagem, os autores destacam que foi preciso fazer uma pesquisa bibliográfica para compor uma historiografia sucinta do matemático Lazaret Carnot, como também uma revisão literária sobre o uso da Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC's), em especial, sobre o uso do GeoGebra no ensino da Matemática.

Segundo os autores, após esse movimento, foi possível compor uma visão dinâmica do teorema de Carnot em sete etapas no GeoGebra. Os autores destacaram que a proposta metodológica apresenta interconexões para o uso das tecnologias e História da Matemática para o ensino, de maneira a motivar os estudantes por meio de problemas desafiadores, como o teorema de Carnot e a exploração das demonstrações com o uso do GeoGebra.

O décimo primeiro trabalho, de autoria de Janaina Silveira Nascimento, Larissa Rodrigues Mendonça e Rodrigo Bastos Daude, intitulado *A importância da História da Matemática no ensino da álgebra Mediada pelo Objeto Virtual de Aprendizagem (OVA)*, teve como objetivo refletir sobre o ensino de álgebra mediado pelo objeto virtual de aprendizado (OVA) baseado em informações históricas do desenvolvimento da Matemática.

Por meio do contexto histórico no ensino de álgebra, abordado pelo uso do OVA, mostram as possíveis necessidades em se abordar esse conceito atualmente. Para os autores, o uso da História da Matemática na sala de aula tem o potencial de promover tarefas e discussões aos estudantes, de modo a provocar reflexões sobre esse objeto matemático. O trabalho contribuiu

para a reconstrução histórica do conhecimento, utilizando a tecnologia investigativamente, colocando os conceitos da álgebra através da história mediados pelas tecnologias da atualidade.

O décimo segundo trabalho, de autoria de Anna Beatriz de Andrade Gomes, intitulado *Temas para Atividades-Históricas-com-Tecnologias*, foi publicado nos anais do 14° SNHM em 2021. A autora teve como objetivo apresentar possíveis temas a serem tratados em atividades-históricas-com-tecnologias. Para isso, realizou um mapeamento no site *Mactutor History of Mathematics*, o qual tem um *corpus* de livros de História da Matemática, História da Ciência, tratados de Matemática etc. A partir dos documentos que estão disponíveis no referido site, foram organizados os temas para produzir atividades investigativas que apresentassem problemas históricos apoiados pelas tecnologias, as chamadas atividades-históricas-com-tecnologias.

O décimo terceiro trabalho, de autoria de Francisco Neto Lima de Souza e Giselle de Costa Sousa, publicado nos anais 14° SNHM, em 2021, é intitulado *Al-Biruni (973–1050) e o caso da lei dos senos na trigonometria triangular esférica: vislumbrando uma proposta de atividade-histórica-com-tecnologia direcionada ao ensino superior*. O objetivo foi apresentar resultados preliminares sobre cinco casos da lei dos senos aplicados à trigonometria esférica num documento escrito por Al-biruni (973–1048), fazendo uma apreciação preliminar do conteúdo da carta, bem como a apresentação de informações relativas à versão da tradução do documento histórico base dessa pesquisa.

O estudo teve o intuito de compor um cenário propício para desvelar as condições epistêmicas, conceituais e didáticas para a construção de um produto educacional, na forma de um caderno de atividades, que expressasse interconexões entre a História da Matemática, as Tecnologias de Informação e Comunicação e a Investigação Matemática.

No quadro 15, sistematizamos, a partir da leitura e descrição comentada dos trabalhos, os Usos e Mediação da Tecnologia e a História do SNHM.

Quadro 15: Uso das Tecnologias, da História e Mediação no SNHM

Edição	Uso da Tecnologia	Mediação	Uso da História
III SNHM	Promover Ciclos de Prova	Epistêmica	Recurso
V SNHM	Promover Ciclos de Prova	Epistêmica	Recurso, Objetivo
VIII SNHM	Promover Ciclos de Prova	Epistêmica	Recurso, Objetivo
	Promover Ciclos de Prova	Epistêmica; Pragmática	Recurso
	Promover Ciclos de Prova	Epistêmica; Pragmática	Recurso
IX SNHM	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações	Epistêmica; Pragmática	Recurso, Objetivo
XI SNHM	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações	Epistêmica; Pragmática	Recurso, Objetivo
	Promover Ciclos de Prova	Epistêmica; Pragmática	Recurso
XIII	Promover Ciclos de Prova	Epistêmica	Recurso
	Promover Ciclos de Prova	Epistêmica	Recurso
	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações	Epistêmica; Pragmática	Recurso
XIV	Promover Ciclos de Prova;	Epistêmica	Recurso, Objetivo
	Promover Ciclos de Prova; Apresentar e Conectar múltiplas representações	Epistêmica; Pragmática	Recurso

Fonte: Elaboração pelo autor (2023)

Após a descrição analítica dos trabalhos, foi possível identificar que o primeiro com indícios de interconectar as Tecnologias com História da Matemática para o Ensino é de 1999 no 3º SNHM, e que a ocorrência desse tipo de trabalho foi aumentando a partir do 8º SNHM.

Na produção analisada dos Anais do SNHM, se percebe novamente o mesmo cenário do contexto nacional e internacional com as Teses e Dissertações; porém, com um destaque que diferencia. Foi possível identificar dois trabalhos com o uso da História como um reorganizador cognitivo; um primeiro evidente, por ter como coautor o professor Iran Abreu Mendes, o precursor desse uso da História para o Ensino da Matemática. O segundo trabalho, embora não

tenha ao referido pesquisador como coautor, deriva de uma tese de doutorado orientada por Mendes.

O uso de tecnologias na produção foi conduzido por meio da implementação de ciclos de prova. Em alguns casos, alinha-se com a apresentação e conexão de múltiplas representações, buscando exibir pelo menos duas formas distintas de representação para os objetos matemáticos.

No que tange às mediações, observa-se que, na maioria dos trabalhos, são predominantemente de natureza epistêmica, direcionadas a alterações no sistema cognitivo do sujeito; em alguns casos, a mediação pragmática acompanhou de maneira passiva. Nesse cenário, é possível considerar que as pesquisas mapeadas se concentram na promoção do uso da História da Matemática em combinação com Tecnologias Digitais, visando estimular nos sujeitos as ações de raciocinar e representar.

É importante ressaltar que, nesta fase de revisão de literatura da pesquisa, não tivemos a intenção de avaliar os trabalhos publicados nos anais do HTEM, SNHM, Tese e Dissertações no CREPHIMat, nem os artigos de nível nacional e internacional mapeados. Ao contrário, buscou-se modelos epistemológicos ou metodológicos para o uso conjunto das Tecnologias e História da Matemática para o ensino.

De fato, percebe-se sementes das possíveis relações entre essas temáticas; evidenciando que a relação entre tecnologia e matemática não é apenas instrumental, mas epistemológica. Ao investigar essa relação, busca-se não apenas caracterizar a influência histórica dos artefatos tecnológicos, mas também fundamentar teoricamente o uso da Ideografia Dinâmica como um meio para potencializar a cognição e a comunicação matemática na contemporaneidade.

Diante desse cenário, nos questionamos: Como as tecnologias, enquanto artefatos culturais, influenciaram a cognição, a representação e a comunicação de ideias matemáticas ao longo da história, desde as ideografias estáticas até as dinâmicas? Para dar resposta à referida pergunta, temos o seguinte objetivo compreender a trajetória histórica das tecnologias enquanto artefatos culturais que influenciaram a cognição, representação e comunicação de ideias matemáticas, desde as ideografias estáticas até as dinâmicas. Assim, não apenas compreenderemos o papel das tecnologias na construção do conhecimento matemático, mas também podemos refletir sobre suas implicações pedagógicas, especialmente no que diz respeito do ensino e aprendizagem mediados por representações dinâmicas.

2

DOS RABISCOS NO OSSO AOS TOQUES NA TELA

[...] Nós entramos na era das máquinas “pensantes” e da automação. Coleções organizadas de hardware, feitas principalmente de metal e vidro, realizam atividades que costumavam ser o monopólio do cérebro humano vivo. Elas fazem cálculos longos e complexos, ponderam possíveis cursos de ação em situações complicadas e exercem funções de orientação e controle. Além disso, elas fazem essas coisas mais rapidamente e com mais precisão do que o cérebro desassistido pode fazer⁵ [...] (Adler, 1961, p. 9)

Como sinaliza a epígrafe na era das máquinas “pensantes”, tais máquinas podem fazer tarefas mais rapidamente e com mais precisão do que o nosso cérebro desassistido. Portanto, temos que as máquinas entre suas funções diversas encontramos estender nossa cognição limitada biologicamente.

Assim sendo, temos uma relação entre sujeitos e objetos, um processo cognitivo que é resultado de redes complexas nas quais interagem fatores sociais e biológicos com técnicos, é o que chamamos de pensamento. Para Lévy (2010, p. 137), nesse processo cognitivo, “o pensamento se dá em uma rede na qual, neurônios, módulos cognitivos, humanos, instituições de ensino, línguas, sistemas de escritas, livros e computadores se interconectam, transformam e traduzem as representações”. Portanto, podemos considerar que a cognição humana é coletiva e influenciada por tecnologias. Mas o que compreendemos por tecnologias? Quando o humano

⁵ Tradução nossa do trecho original: *We have entered the age of “thinking” machines and automation. Organized collections of hardware, made mostly of metal and glass, carry out activities that used to be the monopoly of the living human brain. They make long and involved calculations, weigh possible courses of action in complex situations, and exercise functions of guidance and control. What is more, they do these things faster and more accurately than the unaided brain can do them.*

começa a usar, criar e pensar através das tecnologias? Nos seguintes parágrafos, vamos discutir sobre essas inquietações.

Em primeiro lugar, Lewis Mumford no seu livro *Techics and Civilization* (1955) nos faz refletir sobre a trajetória da tecnologia desde quando o ser humano começa a desenvolver utensílios que aprimoram suas atividades diárias. Esse avanço não apenas aperfeiçoa suas habilidades de caça, resultando em uma alimentação mais substancial, mas também fortalece sua capacidade de autodefesa contra predadores e, conseqüentemente, estendendo sua expectativa de vida. Esse desenvolvimento está intrinsecamente relacionado à evolução da humanidade nas diferentes épocas até os dias atuais.

À medida em que a criatividade humana se expandia, surgiam criações cada vez mais sofisticadas. Isso viabilizava a permanência dos seres humanos em locais fixos por períodos mais longos, um marco significativo que contribuía para o desenvolvimento da linguagem e da cultura. Assim sendo, a história da tecnologia se inicia como uma busca por garantir a sobrevivência da espécie, evoluindo progressivamente para abranger todas as facetas da vida da civilização (Mumford, 1955).

Para entendermos o conceito de tecnologia, evocaremos as ideias de Carl Mitcham, no seu livro *Thinking through Technology: The Path between Engineering and Philosophy* (1994), no qual o referido autor faz uma discussão argumentativa sobre as fontes e utilizações da tecnologia em geral, construindo o mapa das mudanças do significado de tecnologia desde os tempos antigos até a última década do século XX. Nesse mapeamento, Mitcham analisa a tecnologia tal como ela é vivenciada na vida cotidiana - como **objetos materiais** (de utensílios básicos, exemplo de cozinha, a computadores); como **conhecimento** (incluindo receitas, regras, teorias e "saber-fazer" intuitivo); como **atividade** (projeto, construção e uso), e como **volição** (saber usar a tecnologia e compreender suas conseqüências).

Nesse sentido, é comum nossa compressão de tecnologia como objetos materiais, mas Carl Mitcham (1994) nos faz refletir que a extensão do conceito de tecnologia é muito mais. Isso se deve às abordagens identificadas na análise crítica da tecnologia por parte do autor, que são: a abordagem da engenharia, que assume a centralidade da tecnologia na vida humana; e a abordagem das humanidades, que se preocupa com as suas fronteiras morais e culturais.

A discussão sobre as tecnologias como **objetos materiais, conhecimento, atividade e volição** é um tema muito amplo para o nosso objetivo traçado com este capítulo. Portanto, vamos focalizar no assunto de quando os humanos começam a usar, criar e pensar através das tecnologias, na perspectiva de objetos materiais. Para isso, dialogamos com as ideias de Marc J. Vries (2005), publicadas no livro *Teaching about Technology: An Introduction to the Philosophy of Technology for Non-philosophers*. Nessa obra sobre o ensino tecnológico, desde a Filosofia da Tecnologia para Não-Filósofos, Marc J. Vries, no capítulo sobre Artefatos Tecnológicos, discorre que esses objetos materiais podem ser classificados como objetos naturais, instrumentos, ferramentas e artefatos.

Vries (2005) faz uma discussão via exemplos de como podemos distinguir artefatos técnicos de outros objetos ao nosso redor, e como eles ocupam seu lugar nesse mundo da vida e interação conosco; em outras palavras, de como pensamos e agimos com esses artefatos. Um primeiro exemplo que Vries expressa é o seguinte:

Suponha que alguém ande pela floresta e pegue um *galho* grosso para se apoiar. Com um pouco de fantasia, poderíamos chamar isso de um exemplo muito simples de tecnologia. Afinal, um ser humano usou um objeto para um propósito prático. E a maioria das pessoas concordaria que este é o cerne daquilo que chamamos de tecnologia. Mas, ao mesmo tempo, não gostaríamos de equiparar o *galho* a um *bastão* que outro caminhante da floresta comprou numa loja e levou consigo quando saiu para passear. Embora o *galho* e a *bastão* [ou bengala] sejam hoje *usados para o mesmo propósito*, eles têm uma história diferente (2015, p. 11, grifos nossos).

Nesse exemplo temos dois objetos cujo começo foi o mesmo, ambos nasceram como parte de uma árvore. Porém, a bengala foi consideravelmente modificada para poder cumprir sua função, enquanto galho encontrado na floresta não passou por esse processo de refinamento. Essa diferença é destacada por Vries (2005) para ser usada como uma característica que distingue os objetos naturais e ferramentas. Assim sendo, o referido autor parte de que um objeto natural é caracterizado como um instrumento quando o usamos para um propósito prático sem passar por um processo de transformação. Nesse sentido, uma ferramenta seria um objeto natural que um ser humano modificou para que se torne adequado para servir a um determinado propósito prático.

Vries (2005), no seus estudos, encontra um terceiro tipo de objeto no mundo das tecnologias, o denominado artefato. Para o autor, um artefato não só é um objeto que foi modificado para servir a um propósito prático, mas que tal transformação é realizada de uma

maneira que o objeto modificado exiba para o sujeito a sua funcionalidade. Essa é a grande diferença entre ferramenta e artefato. Pelo fato de o conceito de artefato ser uma extensão do conceito de ferramenta, Marc J. Vries considera, para qualquer objeto natural que tenha sido modificado, independentemente de exibir ou não aquilo para o qual foi modificado, a denominação de artefato.

Retomemos o exemplo do galho e a bengala. Inicialmente, eles servem de suporte para as pessoas se apoiarem, e para tal propósito prático podemos usar o termo *função*, um termo que é amplamente utilizado no contexto tecnológico. No processo criativo do momento de modificar um objeto, tal modificação é norteadas por uma pergunta comumente realizada: qual será a função desse artefato? Pensemos em Matemática, contexto no qual as funções têm a ver com transformações, vejamos o exemplo de uma função quadrática do tipo $f(x) = x^2 + 2x + 1$. Substituindo o número 0 na função, se obtém como resultado o número 1; podemos dizer que a função transformou o 0 em 1.

No caso do galho e a bengala, ambos transformam a maneira de andar das pessoas, inicialmente dificuldades de andar de maneira ereta e de costas curvadas possivelmente, a um jeito de andar com segurança e correção da postura. Outro exemplo: uma cafeteira cumpre a função de fazer café, no sentido de colocar no artefato matéria-primas, café e água, e obtemos os resultados para a qual a máquina foi projetada. Vamos em uma outra função produzida pelo carro, bicicleta ou outro artefato com a função de transportar-nos entre localidades, cumprem a função de transformar o nosso estado atual (estar em certo lugar, exemplo: nossa casa) em um estado a desejar, ir às compras no mercado, e assim por diante outros exemplos podem surgir.

Nesse cenário exposto por Vries (2005), podemos considerar que a função técnica dos artefatos provoca a mudança de uma situação ou estado para outro. O primeiro estado é aquele em que nos encontramos quando sentimos necessidade de utilizá-lo. O artefato nos permite realizar uma ação necessária para atingir o estado desejado. Nesse sentido, as funções estão intimamente relacionadas às intenções e necessidades humanas. Retomando o questionamento inicial: O que compreendemos por tecnologias? Por meio dos argumentos tecidos até o momento, podemos compreender a tecnologia como todo objeto material produzido pela invenção humana cuja função depende no cumprimento de uma necessidade ou intencionalidade.

Nos seguintes parágrafos, vamos trazer argumentos no intuito de ter base para responder quando o humano começa a usar, criar e pensar através das tecnologias? Consideramos começar nosso diálogo por meio de exemplos advindos do desenvolvimento histórico e epistemológico da Matemática, por ser nossa área de conhecimento; outros podem abordar a mesma pergunta desde outras áreas de conhecimento.

Começamos por objetos naturais, como pedras, ossos e argila, que foram usados como vestígios no estudo das origens de ideias matemáticas de alguns povos pré-históricos. Segundo Albertí (2015), em 2003, um fragmento de ocre de cerca de 72 mil anos atrás foi encontrado na caverna de Blombos, na África do Sul, o qual havia sido esculpido no que podemos considerar como um desenho geométrico. É um desenho com cerca de 60 mm de comprimento e largura máxima de cerca de 2 mm. O seu caráter geométrico provém das duas séries de triângulos que o compõem e que resultam do desenho de uma série de retas paralelas, conforme a figura a seguir.

Figura 1. Ocre de Blombos e a reconstrução do seu traçado



Fonte: Almeida (2023)

Para Albertí (2015), talvez a superfície irregular da pedra e um artefato geométrico pouco desenvolvido certamente tenham impedido o autor de esculpir com maior rigor e precisão, o que o observador moderno descreveria como uma grade triangular. Outro exemplo dos primeiros esforços humanos de usar artefato, neste caso para representar números eram, sem dúvida, rudimentares: os Ossos de Ishango. Essas representações eram basicamente séries de traços feitos em materiais frágeis como ossos para indicar quantidades. Esse registro numérico, que é conhecido, parte de um osso da perna de um babuíno que apresenta conjuntos de marcas, datado de aproximadamente 37.000 anos de antiguidade. Esse artefato foi descoberto em uma caverna nas montanhas Lebombo, localizadas na fronteira entre a África do Sul e a Suazilândia (Aires, 2018).

Figura 2. Ossos de Ishango



Fonte: Aires (2018).

Nesse cenário, percebemos a necessidade de o homem usar artefatos que possibilitem um tipo de escritura para expressar formas e quantidades. A humanidade iria se encaminhar para o surgimento da escrita com/em artefatos. Para Rey Pastor e Babini (2006), uma hipótese plausível sobre a origem da escrita tem relações diretas com essas práticas aritméticas e geométricas. Para esses autores, a escrita nasceu em meados de 4000 anos a.C. na Baixa Mesopotâmia, no seio da cultura dos sumérios. A cultura suméria começou a escrever sua língua com ideogramas, hoje chamada de escrita cuneiforme, exemplo: a seguir o tablete de argila Plimpton 322.

Figura 3. Tablete de argila Plimpton 322



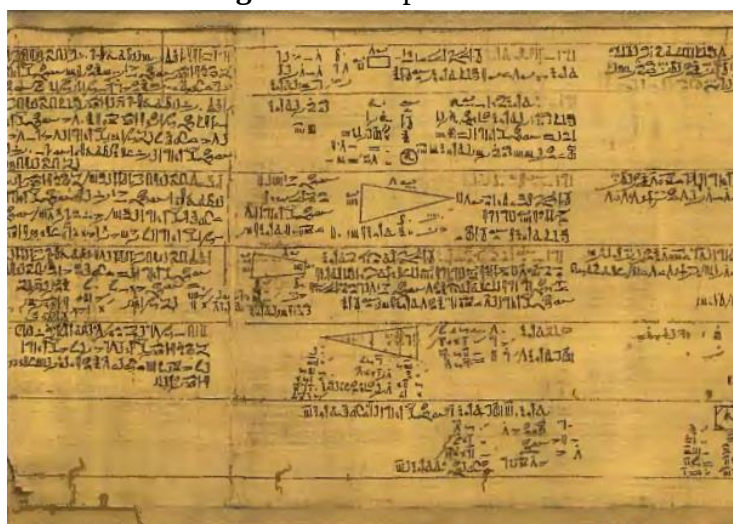
Fonte: Aires (2018).

Para Pickover (2009), a Plimpton 322 refere-se a um tablete de argila de origem babilônica que contém várias figuras em escrita cuneiforme, dispostas em quatro colunas e quinze linhas. Os babilônios escreviam em argila úmida com um estilete ou cunha. Sendo assim, já essa civilização usava uma combinação de artefatos para cobrir as necessidades de registros de quantidades.

Avançando para a civilização egípcia, nos deparamos com outro artefato, os papiros, elaborados a partir de um objeto natural transformando a matéria-prima de uma planta da

região. O mais famoso artefato com fins matemáticos é o papiro Rhind, batizado em homenagem a Henry Rhind. Esse artefato, segundo Jackson (2016), nos dá um vislumbre do mundo matemático dos antigos egípcios. O documento às vezes também é conhecido como Papiro Ahmes, em homenagem ao escriba que o copiou entre 1650 e 1500 a.C. O antigo documento apresenta tabelas de referência para auxiliar nos cálculos e soluções de mais de 80 problemas matemáticos.

Figura 4. O Papiro Rhind



Fonte: Jackson (2016)

A cultura do papiro se estende para a civilização greco-romana, permitindo à referida civilização continuar com o desenvolvimento do conhecimento matemático, por meio dessa forma de registro, a escrita. Nesse contexto, percebemos que, além do artefato onde seja possível preservar conhecimento sistematizado, se tem vestígios de outros artefatos para construir representações mentais em tangíveis. Por exemplo, quando Eves (1994) expressa que foi Platão que sinaliza que as construções explicadas nos três primeiros postulados dos Elementos de Euclides devem ser realizadas apenas com o uso de uma régua sem escalas e um compasso. Temos a presença de artefatos que materializam figuras, que até certo momento só estavam no imaginário coletivo e que, por meio deles podem ser exteriorizadas. Com esses exemplos, percebemos que desde tempos antigos a humanidade vem acompanhando seu desenvolvimento social, cultural e intelectual com tecnologias; em outras palavras, é na necessidade de a humanidade continuar preservando a espécie que usa, cria e pensa com tecnologia. À medida em que passa o tempo, aperfeiçoa esse artefato segundo as necessidades da época, tornando a tecnologia mais complexa.

Avançando para civilizações mais atuais, temos o exemplo de um artefato usado para fazer contas, o ábaco, como o conhecemos hoje em dia. Segundo Pickover (2009), é um artefato com contas que se movem ao longo de fios, que já era usado na China por volta de 1200 a.C., onde era conhecido como suan-pan. No Japão, o ábaco é chamado de soroban. O ábaco pode ser considerado de alguma forma o antecessor do computador, pois é usado como uma ferramenta para realizar cálculos rápidos no comércio e na engenharia. Os ábacos ainda são usados na China, no Japão, em partes da antiga União Soviética e na África. Também são usados às vezes por pessoas cegas, com variações leves no design. Embora o ábaco seja geralmente usado para adições e subtrações rápidas, um usuário mais experiente poderia multiplicar, dividir e calcular raízes quadradas.

O ábaco moderno com contas e fios, usado para contar, tem suas raízes em antigos instrumentos, como a tabuleta de Salamis, a mais antiga tabela de contagem que conhecemos, utilizada pelos babilônios por volta de 300 a.C. Essas tabelas eram geralmente feitas de madeira, metal ou pedra, e tinham linhas ou sulcos ao longo dos quais as contas ou pedras se moviam. Por volta do ano 1000 a.C., os astecas inventaram o *nepohualtitzin* (conhecido pelos entendidos como o "ábaco asteca"), um mecanismo semelhante ao ábaco que usava grãos de milho em compartimentos de madeira para facilitar a realização de operações.

Nos diferentes contextos, seguindo a linha do ábaco, encontramos um fio condutor de invenções humanas com uma necessidade em comum, computar cálculos cada vez mais rápidos e precisos. Em outras palavras, criar artefatos que possam amplificar nossa cognição. O ábaco é um desses artefatos, o fóssil das calculadoras mecânicas, eletrônicas, gráficas até artefatos digitais mais modernos, produzidos pelas humanidades digitais. Antes de chegar no nosso atual, devemos passar por uma série de artefatos que possibilitaram chegar de uma maneira direta ou indireta às telas iterativas que temos hoje.

Um desses exemplos vem de John Napier, o matemático escocês que deve sua fama à invenção e promoção de logaritmos em seu livro *A Description of the Marvelous Rule of Logarithms*, de 1614. Desde então, esse método contribuiu para inúmeros avanços científicos, pois permitiu realizar cálculos muito difíceis em tempos mais ágeis. Napier inventou um artefato conhecido como as barras de Napier, barras esculpidas em madeira, marfim ou outros materiais, nas quais números eram gravados em sequências especiais. Cada barra tinha uma

série de números gravados em um arranjo específico, que facilitava cálculos de multiplicação e divisão.

Figura 5. Artefato criado por Napier



Fonte: Pickover (2009)

Seguindo mais em frente, já no século XIX, o primeiro artefato com o nome de computador é de invenção de Charles Babbage (1792-1871), analista e estatístico inglês. Sua fama se deve, em particular, à concepção de uma enorme máquina de calcular, ancestral dos computadores modernos. Babbage acreditava que o dispositivo seria muito útil para gerar tabelas matemáticas, mas estava preocupado com possíveis erros humanos ao transcrever os resultados das trinta e uma rodas metálicas de saída. Hoje se percebe que Babbage estava quase um século à frente dos seus contemporâneos (Pickover, 2009).

O motor diferencial de Babbage, que ele começou a construir em 1822, mas nunca terminou, foi projetado para calcular valores de funções polinomiais usando vinte e cinco mil peças mecânicas. Ele também tinha planos de criar um computador mais versátil, o mecanismo analítico, que pudesse ser programado com cartões perfurados e teria áreas separadas para armazenamento e cálculo de números. Segundo estimativas de especialistas, uma máquina analítica capaz de armazenar mil números de cinquenta dígitos teria que medir mais de trinta metros de comprimento.

Figura 6. O computador mecânico de Charles Babbage



Fonte: Google Images

Na história, Alan Turing é considerado o pai da computação moderna. Em sua obra principal, *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungs Problem*, publicada em 1936, demonstrou que máquinas de Turing (dispositivos que funcionavam com símbolos abstratos) poderiam resolver qualquer problema matemático que fosse representado com um algoritmo. Esses artefatos ajudaram os cientistas a compreenderem melhor os limites da computação. Em 1939, Turing inventou uma máquina eletromecânica que poderia ajudar a decifrar os códigos nazistas criados por sua máquina de codificação Enigma. A máquina de Turing, chamada "Bombe", foi aprimorada pelo matemático Gordon Welchman e se tornou a principal ferramenta para decifrar as comunicações da Enigma (Pickover, 2009).

Figura 7. A máquina de Turing "Bombe"



Fonte: Pickover (2009)

Um fato relevante é que, do computador de Babbage até Turing produzir a “Bombe”, passou um pouco mais de um século. Já no século XX, com a segunda revolução industrial, a

qual introduz a eletrônica na invenção de diversos artefatos, os processos ganham uma aceleração em sua produção. Isso podemos perceber com o surgimento do ENIAC, sigla para *Electronic Numerical Integrator And Computer*, que foi criado na Universidade da Pensilvânia pelos cientistas norte-americanos John Malichly e J. Presper Eckert em 1946, como uma versão mais avançada da máquina de Turing e não levou uma década para ser desenvolvida.

Segundo Pickover (2009), esse artefato foi o primeiro computador eletrônico digital reprogramável que poderia ser usado para resolver uma ampla variedade de problemas de cálculo. O objetivo original do ENIAC era calcular tabelas de tiro de artilharia para os militares dos Estados Unidos de América, embora sua primeira aplicação importante esteja relacionada ao projeto da bomba de hidrogênio. O contexto do surgimento desses artefatos foi em um período de guerra mundial. Uma vez mais se destaca o argumento de que a invenção desses artefatos tecnológicos se dá em função de satisfazer um estado de necessidade.

Nesse cenário, esses tipos de artefato que chegaram em um ápice, tinham algumas desvantagens, entre elas, não eram manipuláveis por qualquer pessoa, era necessário ser especialista para programar as máquinas e obter as respostas do processamento de dados. É assim que começa uma revolução dentro do campo da computação, tanto no desenho como na funcionalidade desses artefatos. Isso acontece com o processo de miniaturização dos computadores e com o desenvolvimento de interfaces gráficas (Turing, 2019). Essa revolução estava vinculada ao fato de que o uso do computador deveria ser uma experiência intuitiva para os usuários. Para isso, foram desenvolvidos, além do monitor e do teclado, outros periféricos como o *mouse*, com o qual o sujeito podia interagir com a interface do computador.

Com o percurso sobre a História da Computação de Dermot Turing (2019), podemos compreender que essas transformações pela miniaturização dos equipamentos levou os computadores a artefatos pessoais de fácil mobilidade, chegando à era dos *laptops* (*notebooks*) na década de 1990. Esses artefatos tiveram um ápice de popularidade. Os *laptops* foram uma verdadeira revolução, oferecendo a portabilidade e a conveniência que os desktops ou computadores de escritório não podiam igualar. O sucesso do IBM *ThinkPad* em 1992 marcou o início da era dos laptops e, desde então, eles se tornaram uma ferramenta indispensável no cotidiano das pessoas.

Esses dispositivos apresentavam a incorporação de telas de maior qualidade, teclados físicos, mouse e poder de processamento suficiente para realizar tarefas do dia a dia, como

navegar na internet, criar documentos e enviar e-mails. A capacidade de trabalhar em trânsito e acessar informações em qualquer lugar fizeram dos laptops uma ferramenta essencial, tanto para profissionais quanto para estudantes.

O início do século XXI testemunhou a próxima grande transformação: a revolução dos *smartphones*. O lançamento do iPhone pela Apple em 2007 marcou o início de uma nova era. Os *smartphones* unificaram a funcionalidade de um telefone, um notebook e um dispositivo de entretenimento em um único dispositivo. Equipados com telas sensíveis ao toque, conectividade à internet constante e uma ampla variedade de aplicativos, esses dispositivos redefiniram a forma como vivemos, trabalhamos e nos comunicamos.

Os *smartphones* se tornaram uma extensão de nossa identidade, desempenhando um papel central em nossas vidas cotidianas. Eles evoluíram rapidamente, oferecendo recursos como câmeras de alta qualidade, assistentes virtuais, reconhecimento facial e pagamentos móveis. Além disso, a capacidade de personalização por meio de aplicativos tornou-os altamente versáteis.

A partir desse cenário, podemos perceber a necessidade de a humanidade expressar suas ideias nesses artefatos, mas como é esse processo de comunicação por meio de artefatos? Lévy (2010) expressa dois momentos no processo de comunicação da humanidade, o primeiro com a oralidade e a escrita, que caracteriza como tecnologias da inteligência. O segundo não suprimiu o primeiro, nos termos de McLuhan (1972), na sua teoria tetrádica podemos interpretar que a escrita é um aperfeiçoamento da oralidade a partir de novos meios que permitem um processo de comunicação ao longo do tempo e do espaço, transcendendo as limitações da oralidade. Com a escrita, as informações podem ser registradas, armazenadas e transmitidas para gerações futuras, abrindo caminho para a criação de sistemas de conhecimento mais complexos, a Matemática sendo um desses.

Esses meios, mídias ou tecnologias em termos do Lévy (1995) são um produto da cultura e têm um papel fundamental na transformação da cultura em si. Ele defende que a tecnologia não é apenas um suporte, mas uma forma de pensar e agir que molda a maneira como interagimos com o mundo e os sujeitos que vivem ao nosso redor. Nessa interação, Marshall McLuhan (1972) desenvolveu o conceito de *aldeia global*, para explicar a tendência de evolução do sistema midiático como elo entre os indivíduos num mundo cada vez menor, perante o efeito das tecnologias da comunicação (Mendes, 2023b).

O referido conceito de McLuhan está no livro *A Galáxia de Gutenberg: a formação do homem tipográfico*, no qual apresentava uma análise sobre as transformações da cultura escrita da Antiguidade até a Idade Média. McLuhan fez reflexões sobre como a evolução das tecnologias dessas épocas foi modificando a cultura da escrita do manuscrito até chegar nas folhas reproduzidas pela impressão, com a máquina de *Gutenberg*, da cultura manuscrita até a tipográfica (Mendes, 2023b). Isso, com a intenção de argumentar sobre as potencialidades da reprodução das ideias por meio da cultura tipográfica, que criava um objeto que reproduzia – de maneira mais acelerada – o processo de comunicação que a anterior cultura manuscrita.

Segundo Mendes (2023b), esse movimento do manuscrito ao impresso gerou “uma transformação cultural de representação e uso da cultura oral anterior, em direção às suas representações escritas”. Nesse sentido, Lévy (2010) expressa que, com a cultura tipográfica, o tema do progresso adquiriu uma nova importância, pelo fato de que essa cultura da impressão pela invenção de *Gutenberg*, transformou de maneira radical o artefato de comunicação nos grupos socioculturais.

Graças à impressão, Kepler e Tycho Brache puderam servir-se de compêndios de observações antigas ou modernas que eram exatos e estavam disponíveis, assim como tabelas numéricas precisas. Sem o ambiente cognitivo fornecido pela impressão, sem a possibilidade de comparar com certeza séries de números, sem mapas celestes uniformes e detalhados, a astronomia e a cosmologia sem dúvida jamais teriam passado pela revolução [...] (Lévy, 2010, p. 99).

O excerto destacado na citação anterior deixa evidenciado que a invenção dessa nova mídia da cultura tipográfica permitiu que novas formas de pensar, comunicar e interatuar fossem estabelecidas a partir daquele momento. Nos termos de Lévy (2010), diz respeito a um hábito intelectual da Idade Média, que era a discussão verbal, e, com a cultura tipográfica, se estabeleceu o que chama de demonstração visual como centro da atividade científica, na qual é possível a exploração de mapas, de esquemas, de gráficos, de tabelas, entre outras produções na impressão.

Até esse século, a escrita na cultura tipográfica possibilitou explorar as possibilidades de uma nova forma de representação gráfica de ideias e conhecimentos, que integra diferentes linguagens, imagens e textos, uma forma de escrita ideográfica em suportes estáticos.

Esse mesmo movimento, que aconteceu com a invenção da imprensa, no decorrer nos períodos seguintes, sofre aperfeiçoamentos à medida em que o tempo passa, e tem pontos de ignição nas revoluções industriais no século XVIII e XIX, e a revolução digital a partir de 1990 (Barros, 2023). Nesse sentido, Mendes (2023b) destaca que, com o advento das revoluções tecnológicas e as suas transformações processadas ao longo do mesmo século, foi ampliado por novos meios de representação da cultura digital e a (re)invenção das formas orais e escritas da sociedade, que posteriormente foram materializados pelos primeiros computadores de escritório até aos atuais *smartphones*.

É assim como chegamos ao que Lévy (2010) se refere como o terceiro tempo do espírito, o tempo digital, que surge com a ascensão das Tecnologias Digitais e da internet. Isso leva a uma transformação radical na forma como conhecimento, cultura e comunicação são gerados, compartilhados e acessados. No tempo digital, o conhecimento se torna mais fluido, dinâmico e descentralizado. A conectividade global permite a colaboração em escala global e a criação de espaços virtuais para compartilhar ideias e informações.

Mendes (2023b, p. 7) afirma que:

No caso da Matemática, a criação, assimilação e interiorização das tecnologias dos alfabetos matemáticos expressos pela aritmética, álgebra, Geometria, funções, etc., até a primeira metade do século XX, constituíram o aparato tecnológico necessário para uma primeira tentativa de diálogo entre o conhecimento produzido historicamente e as tecnologias de informação e comunicação, estabelecidas após a segunda guerra mundial, possibilitando uma nova (re)criação, assimilação e interiorização e renovação dos mesmos alfabetos matemáticos, por meio de outras linguagens advindas dessas tecnologias de informação e comunicação – novas escritas ideográficas e o surgimento de ideogramas.

Com o excerto mencionado anteriormente, podemos entender que a escrita desses alfabetos matemáticos tem evoluído de maneiras inovadoras, explorando novos territórios matemáticos que antes eram impossíveis ou inviáveis nas mídias estáticas. Para entendermos esses estágios de transformação das mídias estáticas às dinâmicas, Moreno-Armella, Hegedus e Kaput (2008) propõem uma transição evolutiva dos meios estáticos para os dinâmicas, na qual as novas formas de pensamento podem ser compreendida por cinco estágios de desenvolvimento.

Estágio 1: Estático e imutável, podemos interpretar que nesse estágio a escrita matemática está "solidificada" ou "fundida" ao meio no qual é apresentada ou nele contida.

Embora historicamente tenha sido a maneira de preservar escritas antigas, como a arte cuneiforme ou inscrições em ossos – formas antigas de escritas ideográficas. Esses primeiros meios para o desenvolvimento da escrita matemática podem até incluir tinta em pergaminho, especialmente a caligrafia, que é uma forma de arte da escrita, visto que alterar a escrita após ter sido "fundida" ao papel era extremamente difícil. Nesse contexto, podemos interpretar que a escrita ideográfica matemática é estática.

Estágio 2: Estático Cinestésico/Estético nesse estágio, surgem meios nos quais se insere a propriedade apagável da escrita. Ou seja, é (re)inventada ou, em termos de McLuhan, são aperfeiçoadas as mídias do estágio 1, de maneira tal, que agora há a propriedade de serem reutilizáveis; em outras palavras, um estágio caracterizado pela capacidade de apagar. Como exemplo, temos caixas de areia que os gregos usavam para seus desenhos nos estudos da Geometria. Seu aperfeiçoamento seria o quadro de um material que tanto o giz e pincel são apagáveis, permitindo uma escrita ideográfica matemática mais fluida, visto que as informações representadas são temporárias. Moreno-Armella, Hegedus e Kaput (2008) expressam que ainda esse estágio permitia uma escrita mais cinestésica, devido à facilidade de movimentação no meio da representação, que segue sendo estática. Outra característica desse estágio é a inserção da uma propriedade estética, a cor, na qual as representações dos objetivos ganham uma diferença visual.

Estágio 3: Estático Computacional, quando a mídia tem um aperfeiçoamento pela segunda revolução industrial e começo da revolução digital, mencionadas anteriormente. Nesse estágio, as escritas ideográficas matemática são resultado de procedimentos computacionais de ações humanas intencionais. Um exemplo das mídias que pertencem a esse estágio, é a das simples calculadoras de bolso até as calculadoras gráficas, na qual a escrita ideográfica matemática é expressa em ideogramas, como tabelas, gráficos e funções, que são geradas pelo meio informatizado e apresentada como uma representação estática das entradas ou interações do sujeito com o meio.

Estágio 4: Dinâmica Discreta, que representa o aperfeiçoamento do anterior, devido à expansão das capacidades computacionais. Nesse estágio, as mídias permitem expressar ideogramas mais flexíveis e maleáveis, possibilitando interações mais fluidas com o sujeito. Assim sendo, nesse estágio as conexões entre o sujeito e o meio se tornam evidentes em um processo de apresentação e exploração que é discreto. Um exemplo é uma planilha eletrônica, tipo aquela oferecida pelo Excel, um ambiente no qual um sujeito pode representar diversos

conjuntos de informações por meio de ações intencionais. Essas ações intencionais podem ser "criar uma" lista, "desenhar um" gráfico, entre outras. A diferença das mídias do estágio 3 é que elas são de caráter dinâmico, pelo fato de permitirem alterações nas entradas e a observação, de maneira simultânea, as transformações no ideograma. O caráter discreto nessas transformações é que elas se apresentam como se fossem diversos frames, e não um passo a passo.

Estágio 5: Dinâmica Contínua nessa etapa, baseada no estágio anterior, a escrita ideográfica matemática é sensível a interações cinestésicas ou coações, incorporando a dimensão física e gestual no espaço e no tempo. Isso, pelo fato de que certos *softwares* permitem ao sujeito tanto explorar por meio de movimentos contínuos de periféricos externos, como o *mouse*, reorientar ou alterar propriedades dos ideogramas em ações intencionadas, bem como, com gestos por meio de telas sensíveis a interações cinestésicas.

Com essa perspectiva histórica da tecnologia e os diversos estágios das mídias nos processos de escrita ideográfica matemática, temos uma janela para a compreensão da transição de um estado de pensar na Matemática com suportes estáticos, que preserva a o seu desenvolvimento histórico e epistemológico, para uma forma dinâmica de se comunicar matematicamente (Moreno-Armella; Hegedus; Kaput, 2008). Em apoio a esse raciocínio, temos os argumentos de Mendes (2023b), expressando que esse movimento histórico da criação, (re)invenção das mídias, permitiu a inserção de “novas representações matemáticas em uma escrita ideográfica dinâmica, por meio das Tecnologias Digitais”, proposta por Pierre Lévy (1997, 2004) acerca da ideografia dinâmica.

Nesse contexto, torna-se fundamental compreender os fundamentos teóricos que sustentam tanto a História para o Ensino da Matemática quanto a Ideografia Dinâmica. Como essas bases conceituais podem ser articuladas para aprimorar a compreensão no ensino da Matemática? Essa questão orienta o próximo capítulo, que se dedica a caracterizar os fundamentos teóricos da História da Matemática no ensino e da Ideografia Dinâmica, examinando suas interconexões e contribuições.

3

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA NO ENSINO E IDEOGRAFIA DINÂMICA

[...] lápis, calculadoras e computadores são equipamentos, ferramentas que podem ser usadas para todos os tipos de finalidades. Na educação e em outros lugares (mas especialmente na educação), muitas ferramentas são utilizadas de forma particularmente negativa. A tecnologia pode ser usada para manter os estudantes afastados dos tipos de trabalho que precisam realizar para construir ideias para si próprios, e pode ser usada para dar aos estudantes falsas impressões sobre a natureza da matemática como um empreendimento intelectual⁶ (Cuoco; Goldenberg, 1996, p. 31).

A epígrafe deste capítulo traz uma problemática em si, como fazer com que os estudantes compreendam a natureza da Matemática por meio do uso das tecnologias, para a construção de ideias próprias, os saberes dessa ciência. Nas ideias de Mendes (2023a), entendemos que a Matemática é um conhecimento gerado socialmente e, ao longo do tempo e espaço, ampliando-se de forma não linear, em conteúdo, escrita e representação, por meio de diversos movimentos políticos, sociais, culturais e de outras índoles no decorrer da sua história.

Assim sendo, para diminuir esse afastamento do tipo de trabalho que os estudantes precisam realizar para construir ideias para si próprios, e evitar usar as tecnologias, entre essas as digitais, para evitar falsas impressões sobre a natureza da Matemática, precisamos que, como assevera Mendes (2023a), inserir a História da Matemática nesse entremeio, como agenciador da Matemática historicamente constituída.

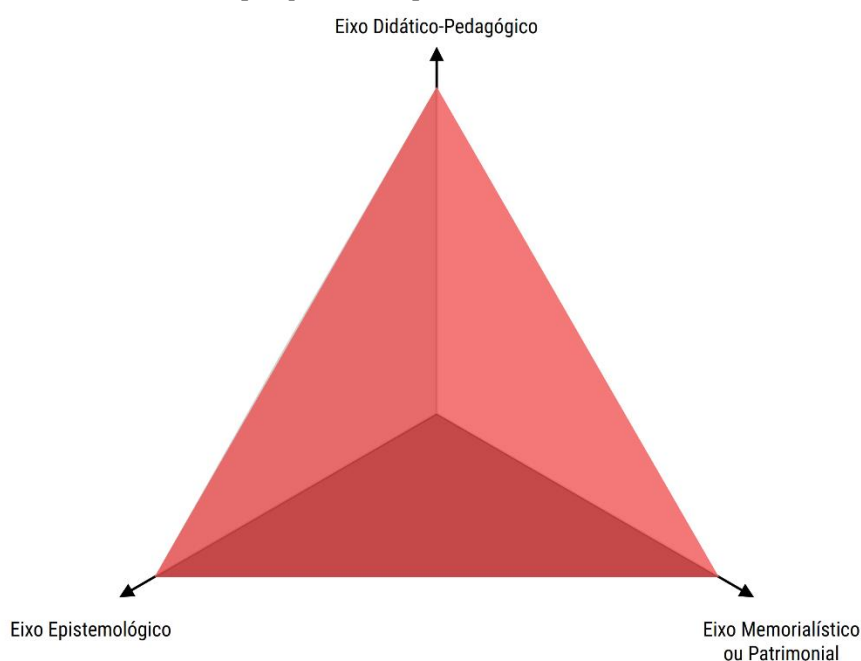
⁶ Tradução nossa do trecho: *pencils, calculators, and computers are pieces of equipment, tools that can be used for all kinds of purposes. In education and elsewhere (but especially in education), many tools are put to particularly bad uses. Technology can be used to keep students away from the kinds of work they need to do in order to construct ideas for themselves, and it can be used to give students false impressions about the nature of mathematics as an intellectual endeavor.*

Nesse cenário, este capítulo tem por objetivo sistematizar fundamentos epistemológicos, métodos e práticas sobre a História para/no ensino da Matemática, em busca de subsídios para um fundamento conceitual e didática para/em sala de aula. Assim sendo, buscamos constituir uma discussão para tecer argumentos favoráveis ao ensino da Matemática na Educação Básica. Levantamos os seguintes questionamentos: Qual história e qual Matemática devemos abordar? Qual é a História da Matemática para o Ensino? Qual História no Ensino da Matemática? Como colocar essas histórias da Matemática na sala de aula para que, mais à frente, possam ser organizadas de tal maneira a ter uma relação com o uso simbiótico com as Tecnologias Digitais?

3.1 História da Matemática no Ensino

Antes de nos dedicarmos a responder os questionamentos supracitados, devemos entender que a História para/no Ensino da Matemática (HENM) surge de um movimento de pesquisa, tanto sobre História da Matemática, bem como da Educação Matemática, em relação a objetos, objetivos e métodos que se localizam em um sistema de três eixos, denominados por Mendes (2020) como eixo epistemológico, eixo didático-pedagógico e eixo memorialístico ou patrimonial (Figura 8).

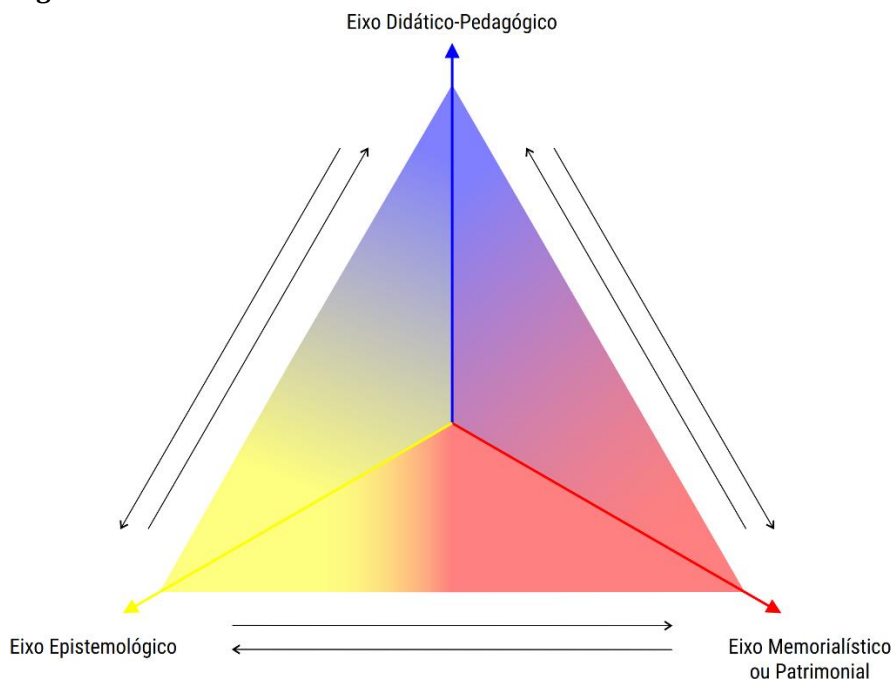
Figura 8. Representação dos eixos da História da Matemática como pesquisa, disciplina e método de ensino



Fonte: Mendes (2020)

Segundo Mendes (2020) entre os eixos da Figura 8, são conceitualizados planos que se estendem pela abrangência das conexões entre os eixos desse sistema, onde se institucionalizam saberes referentes a processos históricos da Matemática. Na Figura 9, representamos as dimensões delimitadas pelos eixos epistemológico, didático-pedagógico e memorialístico ou patrimonial.

Figura 9. Conexões dimensionais entre os eixos da História da Matemática



Fonte: Mendes (2020)

Segundo Mendes (2020), na dimensão entre os eixos epistemológicos e didático-pedagógico temos uma região que abrange saberes matemáticos, tanto da História da Matemática, bem como da Educação Matemática, que podem se relacionar com propósitos para promover aprendizagem matemática em estudantes, sempre e quando o professor consiga sistematizar informações do desenvolvimento epistemológico da Matemática, ao longo do tempo, com possibilidades de exploração didática.

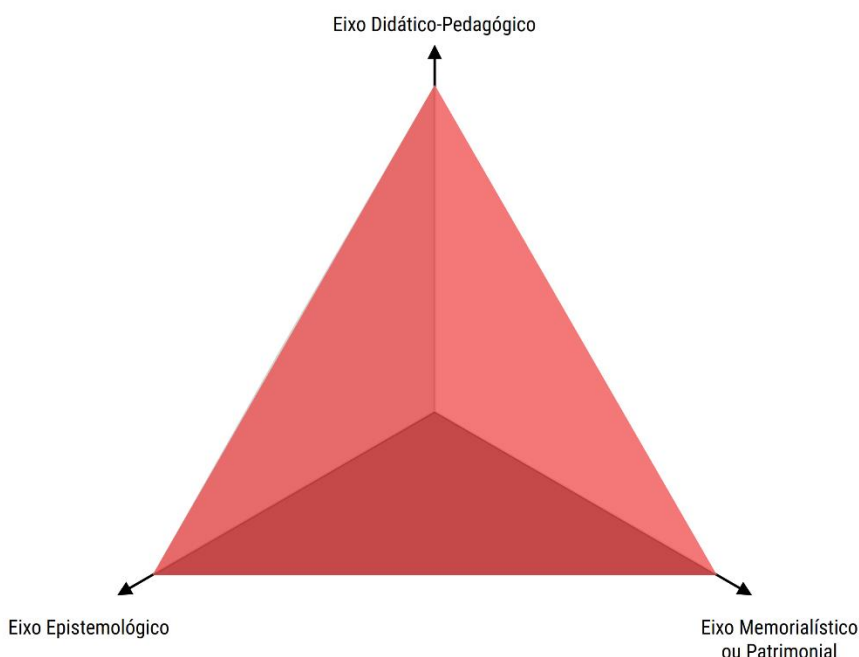
Para Mendes (2020) a segunda dimensão se encontra demarcada entre os eixos epistemológico e memorialístico ou patrimonial. Essa região abrange saberes matemáticos que emergem da exploração de fontes, como manuscritos de memórias, tanto de profissionais da docência, de pessoas que influenciaram movimento educativos, documentos institucionais, manuais escolares, entre outras fontes semelhantes, de maneira tal a compreender os modos com que foram abordados conceitos e princípios matemáticos no sistema educativo de

determinado período de espaço e tempo, por sujeitos vinculados ao referido sistema, para poder usá-los no ensino da Matemática.

Na terceira dimensão, situada entre os eixos memorialístico ou patrimonial e didático-pedagógico, ocorre um processo de exploração das possibilidades inerentes às informações históricas contidas na dimensão anterior. Essas informações são transformadas em um ciclo contínuo de reinvenção, de modo a subsidiar metodologias de ensino mais dinâmicas e contextualizadas.

Retomando a metáfora do tetraedro, as faces já foram caracterizadas, mas há uma base (Figura 10) delimitada pelos três eixos. Nessa configuração, identifica-se uma região em que os diversos saberes se articulam de forma integrativa, abrangendo as três dimensões anteriores. Esse processo favorece a potencialização de aspectos epistemológicos, patrimoniais, didáticos e pedagógicos, tanto no ensino da Matemática em sala de aula quanto na formação inicial e continuada de professores.

Figura 10. A dimensão entre os eixos da História da Matemática



Fonte: Mendes (2020)

Essa dimensão mencionada anteriormente, é a mais abrangente no que respeita à História para/no Ensino da Matemática (HENM). Começa a ter suas primeiras abordagens surgidas no Brasil em meados da última década do século XX, com as pesquisas de Miguel (1993) e Mendes (1997, 2001), sendo que esse último aprofundou as reflexões a respeito dessa dimensão histórica a ser inserida na atividade escolar para e no ensino da Matemática. Assim, tomaremos como referência a produção acadêmico-científica de Mendes (2006, 2009, 2012,

2013, 2015, 2017, 2018c, 2020a, 2020b, 2022b, 2022a, 2022c, 2023a) para responder aos questionamentos apresentados no início do capítulo. Retomando a primeira questão: qual história e qual Matemática devem ser abordadas nesta dimensão? Mendes (2017; 2020) defende uma abordagem histórica centrada nas explicações e compreensões sobre os objetos no mundo e na construção das realidades. Trata-se, portanto, de uma história com caráter cultural, que fundamenta a sociedade ao longo do tempo, permitindo a instituição, constituição e institucionalização de formas e modos de pensar e produzir conhecimento, tanto individual quanto coletivamente, servindo como base para a construção social da realidade.

Além disso, Mendes (2020) argumenta que a Matemática a ser abordada deve ser compreendida como uma expressão da cultura matemática. Essa perspectiva enfatiza a Matemática como uma produção sociocultural que se desenvolve ao longo da história, variando de acordo com os contextos espaço-temporais da humanidade. Nesse sentido, a Matemática não se limita a um conjunto fixo de conceitos e técnicas, mas emerge continuamente como uma criação cultural, científica e tecnológica, possibilitando novas formas de explicar, interpretar e compreender os fenômenos da realidade.

Nesse cenário, a história a ser inserida na sala de aula deve ter um caráter plural, isto é, histórias sobre a produção de ideias ou conceitos matemáticos e suas representações nas diversas linguagens da multiplicidade cultural e social que o ser humano produz ao longo do tempo no mundo. Nesse fio condutor, Mendes (2017, 2020) sinaliza que essa pluralidade sociocultural das histórias, a qual enriquece essa abordagem deve ser concebida como transversal, integrada ou contextualizada para a Matemática a ensinar.

Essa é a História da Matemática para o Ensino, histórias cujo foco de abrangência são a sistematização do desenvolvimento epistemológico das matemáticas ao longo do tempo e espaço, incluindo outros fatores que influenciaram esse percurso, tais como, personagens, sistemas políticos e filosóficos. Nesse sentido, essas histórias para o ensino da Matemática podem ser usadas para contribuir na ampliação da compreensão do sujeito envolvido em atividades de ensino Matemática, baseadas nessas informações históricas, bem como, de quem as orienta, podendo fortalecer a compreensão epistêmica e didática no exercício da docência (Mendes, 2017, 2020).

Até este ponto, podemos observar que essa proposta da inserção das histórias em sala de aula para promover ensino e aprendizagem. Portanto, podemos considerar que na História para o Ensino da Matemática, são consideradas aquelas histórias do desenvolvimento epistemológico de ideias, noções e conceitos matemáticos, e a História no Ensino da

Matemática, são consideradas aquelas histórias sistematizadas no processo anterior, e que são reinventadas, transformadas e mobilizadas pedagogicamente nas ações dos professores, com o objetivo do desenvolvimento conceitual dos estudantes.

Para mobilizar essas Histórias da Matemática na sala de aula, devemos considerar que o conhecimento matemático se origina de problematizações estabelecidas na interação entre sociedade, cultura e cognição⁷, na tentativa de encontrar soluções para as situações problemáticas surgidas no contexto. Nesse sentido, em função de passarmos a conhecer e compreender esse movimento da produção de conhecimento, apreendemos novos meios de interpretar e explicar o objeto de estudo em si. Segundo Mendes (2006), esse movimento é um procedimento típico do desenvolvimento Histórico e Epistemológico da Matemática, por isso, é que as informações históricas inseridas na sala de aula podem agir como um agente de cognição no desenvolvimento da aprendizagem dos sujeitos (Mendes, 2006, 2015, 2017).

O uso da História no ensino da Matemática nessa perspectiva, tem como principal finalidade promover processos de ensino e aprendizagem que permitam aos envolvidos na atividade construir novas representações sobre a realidade, estabelecendo vínculos com aspectos matemáticos. Mendes (2006, 2009, 2015, 2020a) admite que isso é possível por meio da investigação histórica nas aulas de Matemática, de tal maneira que, nessa perspectiva investigatória, se perceba uma melhoria nas transformações dos conhecimentos matemáticos e aprendizagem nos estudantes, pelo fato de acreditar que, no movimento investigativo na sala de aula, implica o resgate do saber e fazer histórico na ação cognoscitiva dos estudantes (Mendes, 2006).

Para Mendes (2009), a investigação histórica no ensino e aprendizagem da Matemática pressupõe um modelo didático a partir de atividades que dialoguem de maneira integrativa entre as ideias, noções e conceitos matemáticos, desenvolvidos epistemológica e historicamente, os saberes matemáticos escolarizados nos livros didáticos e os sujeitos envolvidos na atividades, professor e alunos. Nessa perspectiva, a investigação histórica, segundo o referido autor, deve focalizar experiências práticas e/ou teóricas para serem vivenciadas pelos estudantes e orientadas pelo professor.

O uso da investigação histórica na sala de aula de Matemática pressupõe, assim, a construção do conhecimento matemático por meio de atividades caracterizadas por promover a

⁷ Para ampliar as ideias sobre essas interações, ver Mendes (2022c).

compreensão relacional da matemática escolar (Mendes, 2009). Para que isso seja efetivado, é necessário resgatar informações históricas em fontes primárias (tratados originais, documentos ou outros artefatos históricos), fontes secundárias ou terciárias, e compor o que Mendes (2021) denomina de Movimento Sequencial Histórico (MSH).

Mendes (2021) caracteriza o Movimento Sequencial Histórico (MSH) como uma organização sistemática de um processo histórico-conceitual de um objeto epistemológico, nesse caso matemático, que se processa de maneira não linear, ou seja, não obedece a uma temporalidade de ordem cronológica ou espacial (geográfico), cuja recriação desse objeto é orientada em função da intenção do trabalho a ser desenvolvido.

Para Mendes (2021) um exemplo de MSH pode ser encontrado no problema da quadratura do círculo, no qual seja organizado e sistematizado seu desenvolvimento epistemológico e histórico e as repercussões que teve para a sofisticação e criação de outros conhecimentos matemáticos, de questões respondidas e outras em aberto, que foram surgindo ao longo do tempo e em diversos espaços (Mendes, 2021).

Para o uso desses MSH em sala de aula, Mendes (2021) sinaliza que deve ter apoio em algum tipo de abordagem didática que incorpore o referido MSH, de maneira tal que cada aspecto conceitual nesse movimento seja explorado em sala de aula em vista de os estudantes ressignificarem os conhecimentos matemáticos desenvolvidos historicamente, conectados com os contextos atuais. Para isso, Mendes (2021) ressalta que os professores podem considerar como aliados: atividades didáticas elaboradas previamente; projetos de investigação temática; encaminhamentos de investigações de temas em aberto; atividades com a utilização das Tecnologias Digitais de informação e comunicação (TDICs), entre outros.

3.2 A ideografia Dinâmica

Antes de refletir sobre a ideografia dinâmica, é importante evocar as ideias no livro *A Máquina Universo: Criação, Cognição e Cultura Informática*, publicado originalmente 1987 na França, em Portugal no 1995 e, finalmente no Brasil, em 1998. Reiteramos que seu autor, Pierre Lévy, no referido livro já apresentava indícios desse projeto de ideografia dinâmica, quando expressa o seguinte:

[...] A maior parte das atividades cognitivas assistidas por computador beneficiarão de um acompanhamento e de uma ilustração icônica, eventualmente holográfica. Devemos também pensar a mutação cultural

ligada à informatização na perspectiva desta nova ideografia [...] induzem uma nova forma de ver (Lévy, 1995, p. 27).

Na citação mencionada anteriormente, vemos que Pierre Lévy está em consonância com a ideia de representação holográfica de McLuhan (1972)⁸. Para Mendes (2023b), uma representação denominada de tipo holográfica, concernente a uma representação tipográfica envolvendo imagens em três dimensões - construção de uma imagem tridimensional - produzida por um holograma. Podemos compreender esse holograma em termos de Lévy (1995, p. 22), como uma imagem digital essencialmente dinâmica, pela possibilidade de o sujeito controlar todos os parâmetros da imagem, entre eles, cores, iluminação, ampliações, rotações, translações, etc. Nesse movimento, se percebe que a cultura holográfica faz emergir um novo tipo de comunicação e de tratamento visual, um pensamento imagético artificial.

Para Lévy (1995), com a criação dessas imagens digitais, o sujeito inventa uma linguagem base, contemplando volumes geométricos, funções, operações algorítmicas e elementares. Em outras palavras, a construção desse tipo de entidade digital passa por algumas etapas obrigatórias. Nesse sentido, o domínio efetivo e simbólico da nova ideografia necessitará, sem dúvida, por parte do sujeito, de um mínimo de familiarização de conhecimentos das diversas áreas.

Nessa linha de raciocínio, podemos entender que essa imagem digital é dinâmica, pelo fato de estar em constante metamorfose, já que ela está em um plano puramente conceitual, mental, onde seus atributos designados na construção são moduláveis separadamente porque não são mais do que variáveis. Esse dinamismo sem fim só é possível na virtualidade do meio computacional, imagens que são geradas segundo funções matemáticas, das mais simples até as mais complexas, para conseguir certos efeitos de animação, de transformação e alteração do ponto de vista.

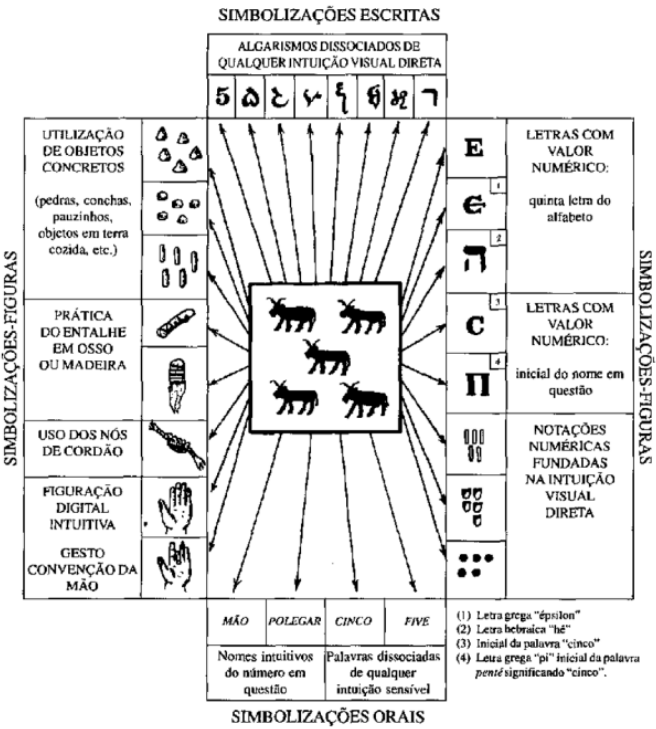
Podemos observar como, desde meados da década de 1980, Lévy projetava uma proposta de um fundamento teórica original da dinâmica da linguagem e do pensamento, a qual, segundo Mendes (2023b, p. 7), só a “partir do fim da década de 1990 foi lançada [...] uma proposta de materialização das operações computacionais ligadas à [...] escrita ideográfica em suporte fixo às telas interativas, para possibilitar novas expressões visuais do pensamento em processo”.

⁸ Na leitura das obras de Lévy, estudadas para a pesquisa, não foi possível identificar referências às obras de McLuhan.

A Ideografia Dinâmica surgiu como um programa de investigação voltado para o futuro, concebido como complemento ao programa de pesquisa sobre inteligência artificial vinculado à informática, desenvolvido por Pierre Lévy. Nessa perspectiva, a ideografia dinâmica é concebida como um novo meio processual, capaz de constituir um universo de convivência simbólica, com representações de objetos e movimentos (Mendes, 2023b).

Essa longa tradição mencionada refere-se a formas de comunicação utilizadas pela humanidade desde os períodos pré-históricos — representações de ações, objetos e fenômenos, inicialmente registradas nas pinturas rupestres, passando pelas transformações dos manuscritos até a invenção da tipografia. Tais formas de expressão contribuíram para estruturar diversas modalidades de representação presentes no campo conceitual da Matemática. Nesse contexto, Mendes (2023b) expressa que “ao longo da nossa história, a escrita da Matemática registrou uma diversidade de ações, muitas delas no campo da aritmética, como mostra Georges Ifrah” na figura 11, a seguir:

Figura 11. Representações numéricas ao longo do tempo



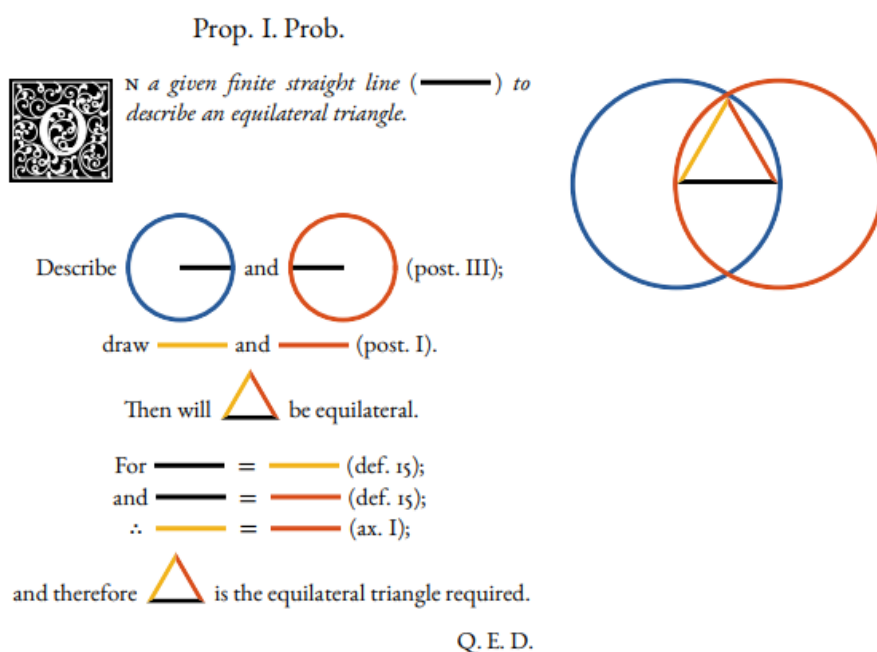
Fonte: Ifrah, 1997, p. 46

Nos dois volumes que Mendes (2023) cita as obras de Ifrah, explicita como um exemplo de uma ampla variedade de representações relativamente às representações pictóricas, gráficas e simbólicas (por meio de signos linguísticos) dos números e os mais diversos algoritmos concernentes às operações aritméticas.

Um exemplo adicional dessas expressões pode ser encontrado na Geometria euclidiana. Ao abordarmos a evolução das suas primeiras representações até o estado atual, torna-se evidente a presença de recorrências no desenvolvimento de múltiplas representações das formas lineares, planas e espaciais, bem como das relações geométricas-aritméticas e geométricas-algébricas. Para Mendes (2023), essas recorrências desempenharam um papel criativo na ampliação das abordagens relacionadas aos objetos matemáticos, tornando-se interpretações significativas para elementos do mundo real.

Nesse contexto histórico discutido por Mendes (2023), emerge a importância das escritas ideográficas que se interligaram para formar um sistema semiológico na Matemática. Esse sistema expressa uma linguagem materializada através da escrita ideográfica, resultado de um processo contínuo de aprimoramento das expressões que combinam pensamentos, práticas e linguagens (Figura 12).

Figura 12. Prova geométrica da Proposição I do livro I dos Elementos de Euclides



Fonte: Byrne (1847)

Segundo Mendes (2023), esses exemplos e outros possíveis advindos do desenvolvimento histórico e epistemológico da Matemática, oferecem pistas valiosas para compreender a origem da matéria-prima subjacente aos códigos, símbolos, princípios, métodos, linguagens e lógicas. Esses elementos fundamentais servem como a base a partir da qual emergem novas formas de escrita ideográfica e uma infinidade de ideogramas, destinados a habitar e perpetuar seu domínio no mundo virtual.

Com a chegada do computador, esses códigos, símbolos, princípios, métodos, linguagens e lógicas, nos seus diversos níveis de complexidade, permitiram ser explorados pelos sujeitos de outro modo, além das representações gráficas estáticas ou fórmulas à base de signos algébricos e aritméticos. Lévy (1998) defende que ideografia dinâmica pode oferecer a possibilidade de uma interação sensório-motora de estilo contínuo com representações de objetos matemáticos. Desse modo se teria um raciocínio com base num modelo ou, nos termos da ideografia dinâmica, de um ideograma. Isso, pelo fato de que a ideografia dinâmica combina os traços clássicos da ideografia estática sobre suporte de papel. Adiantando um pouco o tema, o autor expressa que a finalidade última da ideografia dinâmica é produzir imagens e animações destinadas a serem lidas por intérpretes humanos.

Segundo Lévy (1998), essas imagens e movimentos são englobados em uma unidade da ideografia dinâmica denominado como ideograma, o qual é sustentado por um objeto de informática autônoma, capaz de trocar mensagens com outros. Portanto, um ideograma ou um conjunto deles de maneira estruturada pode ser considerado como um modelo, que inclui as propriedades e regras a guiar suas interações tela do computador. Para interagir com o(s) ideograma(s), podemos utilizar diversos mecanismos de interação, como, por exemplo, acrescentar ou suprimir um objeto ou modificar seus parâmetros fundamentais, por meio do Gerador de Ideogramas (GI), o qual é um dos principais elementos da materialização da ideografia dinâmica.

Lévy (1998) define ao Gerador de Ideogramas como aquele artefato que permite construir e modificar modelos de diversos domínios do conhecimento, a Matemática sendo um deles. Por exemplo, o termo “hipotenusa” só tem sentido no domínio cognitivo “triângulo retângulo”, por isso, como diz ele, é impossível separar determinado conceito de seu contexto ou de seu domínio cognitivo. Nesse sentido, Lévy (1998) afirma que toda predicação é relativa a um domínio cognitivo. Esse tipo de domínio é um espaço de representação ou um “campo de potencial conceitual”, que deveria sempre (mediante codificação) poder ser representado numa tela.

Compreendemos que esse processo de codificação se faz pelo gerador de ideogramas. Além disso, para ele, um nome designa uma coisa; provoca a imagem mental de uma região, eventualmente fechada, num campo. Na ideografia dinâmica, esse nome corresponderá a um ideograma (a um objeto) e certos aspectos de seu campo de ação, por exemplo, a palavra diagonal na Matemática tem sentido no domínio cognitivo retângulo, pentágono, hexágono,

entre outros polígonos convexos de mais de três lados. Porém, encontramos sentido naquelas linhas oblíquas no tabuleiro de xadrez, em posicionamento geográfico, entre outros domínios de conhecimentos. Lévy (1998) diz que o número de campos cognitivos suscitado pela interpretação de uma palavra é potencialmente infinito.

Nesse sentido, a ideografia dinâmica oferece uma linguagem de imagens em movimento, no qual a ordem e a disposição dos ideogramas na tela e sua maneira de se deslocar terão uma significação intrínseca e, portanto, com as explorações dos ideogramas em geral na tela, desencadeará diversos processos cognitivos de interpretação, ou de dotação de sentido. Por isso é que Lévy (1998) argumenta que, ao condensar o sentido nos signos, a ideografia dinâmica possibilita a abstração e autoriza também a composição de novos signos nos sujeitos a partir dos antigos.

Lévy (1998) considera que a ideografia dinâmica poderia servir como *kit* de simulação, mais particularmente nessa obra, que a ideografia dinâmica pode ser usada como um meio de comunicação; como tecnologia intelectual simbólica de auxílio ao raciocínio, como instrumento de modelagem de dados e simulação para grande número de campos do saber, e de subsídio pedagógico.

O potencial da ideografia dinâmica é que permite explorar até o limite as possibilidades semióticas e cognitivas oferecidas pela plasticidade indefinida das representações digitais produzidas por ela. Uma imagem não só aminada como aquelas do cinema, mas, uma representação digital “mais interativa”, com a qual, além de poder fazer desfilar a imagem a uma velocidade pretendida, parar ou voltar atrás, interagir com ela em tempo real sobre seus parâmetros, por cores, tamanho, entre outros, em processo dialético entre o Gerador de Ideogramas e o Diretor, o qual permite explorar e simular um modelo em meio à multitude de narrativas ou cenários visuais.

Para Lévy (1998), um campo de conhecimento pode ser representando por vários modelos ou muitos repertórios de ideogramas alternativos por meio do gerador de ideogramas. Se nos referirmos à Matemática como um desses campos, a ideografia dinâmica poderia representar os referidos conceitos por meio do gerador de ideogramas. Isso no sentido de que a Matemática é uma forma de representar e comunicar a realidade e, com a ideografia dinâmica, o homem teria um novo instrumento de comunicar e de representar os conceitos matemáticos, sem se reduzir à combinação de conceitos ou de unidades semânticas elementares; ao contrário, permitiria gerar indefinidamente novos conceitos.

Entanto, a Matemática, como um campo de conhecimento em sentido amplo, desdobrará necessariamente em muitos campos cognitivos ligados entre si, como vimos no exemplo da hipotenusa e do triângulo retângulo e outros. Na ideografia dinâmica teríamos esse mesmo campo só que, em vez de representações estáticas dos diversos campos cognitivos, esse estaria composto por um repertório de ideogramas, ou seja, a ideografia dinâmica possibilita a atualização do campo anterior que poderíamos denominar de Matemática Dinâmica.

Isso no sentido de poder visualizar os movimentos e transformações das representações dos conceitos matemáticos na tela do computador, um exemplo disto, podemos emprestar do é no conceito de limite, quando uma secante a uma curva, quando a distância entre esses pontos diminui de tal maneira que eles se superpõem e a secante se transforma numa tangente, ou quando se diz que a área de um cubo aumenta o dobro, na verdade o que acontece é que as coordenadas de três vértices variam segundo uma proporção, ou que o quadrado primeiro passou por uma homotetia a determinada razão. Sem dúvida, essas premissas denotam movimento, variação ou transformações sobre as representações matemáticas, ou seja, há um dinamismo sobre eles. A questão é: como visualizar esses movimentos? Em que termos esse dinamismo faz sobre o sujeito mudanças no ponto de vista cognitivo?

Nessas questões, Lévy (1998) diz que a ideografia dinâmica não tem apenas a ambição explícita de traduzir tanto quanto possível o imaginário mental de seus usuários. Além disso, ela deveria permitir uma interação sensório-motora com os modelos por ela representados. Ou seja, a ideografia dinâmica deve propor um meio para visualizar esse dinamismo, pelo gerador de ideogramas como vimos anteriormente, e, segundo a ideografia dinâmica, não só materializa o modelo mental do sujeito, senão, que além disso o atualiza.

Destaque-se que, nessa atualização da representação dos conceitos matemáticos, agora dinâmicos, só terá efeito sobre os sujeitos se eles interagirem, tanto dentro do modelo como sobre ele, por certos instrumentos de deslocamentos no hiperespaço conceitual. Lévy (1998) indica que um dos eixos de deslocamento corresponderá a uma mudança de escala ou de grau de detalhe dentro do mesmo espaço cognitivo, e para isso, serão utilizadas as funções de *zoom in* e *zoom out*, traduzindo em ampliação ou redução, sendo um modo de interagir de maneira externa. Então, como poderíamos agir de maneira interna?

Lévy (1998) expressa que, para modificar a definição de um ideograma (objeto informático subjacente) muda-se a lei que comanda o seu comportamento e as variações de seu aspecto. Mas é possível transformar o conteúdo de um ideograma sem tocar em sua

apresentação estática. Para exemplificar essa situação na Matemática, lembramos daquela reta secante que pode se transformar em uma reta tangente, ajustando certas leis e propriedades na construção, o ideograma reto segue intato ou muda a relação que tem com outro ideograma, ou seja, seu campo de ação.

Pelo exposto anteriormente, Lévy (1998) alerta que o mesmo significante ideográfico pode não ter exatamente o mesmo significado. Nesse sentido, ele considera a ideografia dinâmica tecnologia intelectual de grande flexibilidade, pela possibilidade de definir e redefinir indefinidamente um conceito sem mudar seu significante.

Tudo isso é possivelmente materializado pelo suporte informático e a interatividade na tela, que permitem ultrapassar as insuficiências clássicas das ideografias estáticas. De maneira que esse tipo de ideografia poderia permitir a seus usuários desenvolverem uma inteligência sobre os signos visuais em movimento. No caso das representações das matemáticas, um pensamento mais flexível ou dinâmico para quem as representa.

Nesse contexto, nos perguntamos: em que termos Lévy associa a ideografia dinâmica no desenvolvimento cognitivo em relação à imaginação, ao raciocínio e à comunicação? Lévy (1998) afirma que a ideografia em geral pode ser considerada como *técnica* de auxílio à imaginação, ao raciocínio e à comunicação. Isso pelo fato que, segundo ele, a espécie humana internaliza sistemas de comunicação para torná-los instrumentos-de-pensamento.

Para Lévy (1998), o objetivo da ideografia dinâmica é tão somente abrir novos domínios ao pensamento e à expressão. Assim como no seu momento, a chegada da câmera permitisse a invenção do cinema com as imagens animadas. Instrumentos ou técnicas inéditas trazem consigo novas “coisas”, que possibilitam abrir um espaço cognitivo desconhecido até então. O mesmo acontece com a chegada do computador na contemporaneidade e, atualmente, com outras tecnologias informáticas. Nos próximos parágrafos, focamos na atenção no que esse autor traz de premissa sobre a influência da ideografia dinâmica sobre a imaginação, o raciocínio e a comunicação, nessa mesma ordem.

A respeito da imaginação, Lévy restringe a discussão à modelagem e à simulação por computador, pela tese de que o uso crescente dessas técnicas poderia contribuir para redefinir a apreensão da *imaginação* nos sujeitos por meio do computador. Lévy (1998) sustenta essa tese pelo efeito que o computador nos permite manipular e simular modelos com facilidade, por

sua capacidade de memória, sua potência de cálculo e poder de figuração visual, permitindo ultrapassar as nossas limitações da nossa memória de curto prazo.

Nesse sentido, a ideografia dinâmica permite ao sujeito uma interface homem/máquina de *feedback* entre o que mostra a tela do computador, a interação com o ideograma e ajustes em nossos modelos mentais (objetos da imaginação). Em termos de uma comunicação aparentemente cíclica, à medida em que avança o número de ciclos, o conteúdo da mensagem é cada vez mais sofisticado, com o fim de enriquecer nossa imaginação. Por isso é que Lévy (1998) defende que a ideografia é uma tecnologia intelectual de auxílio à imaginação.

Essa comunicação sujeito/coletivo e a máquina está impregnada de processos de tradução, semiotização e reificação dos quase-objetos indeterminados da imaginação, nos quais ajustará ou fabricará signos destinados a serem introjetados e retomados pela atividade imaginante dos envolvidos no processo. A atividade cognitiva está ativa para quem *constrói* ou *modifica* de modo explícito um modelo pela ideografia dinâmica; porém, Lévy (1998) enfatiza que aquele que *explora* um modelo também se encontra na mesma atividade de quem o constrói.

Lévy (1998) finaliza a seção da imaginação, estabelecendo duas funções dialeticamente ligadas de quem usa a ideografia dinâmica. A primeira é a função de traduzir visualmente e comunicar modelos mentais “preexistentes” a seu uso (idealmente, as representações construídas mediante a ideografia dinâmica seriam homólogas – a identidade sendo impossível – à representação dos modelos mentais internos). A segunda, como ponto de apoio a novos tipos de representações mentais e raciocínios sobre essas representações. Trata-se, nesse caso, de fornecer novos signos à atividade mental. Isso faz considerar a ideografia dinâmica como uma base de um modo representação mental-figurativa e dinâmica de dado domínio do conhecimento, como a Matemática.

Quanto ao raciocínio, Lévy (1998) diz que a ideografia dinâmica deveria fornecer auxílio à compressão e ao sentido, como um instrumento para modelar informações de campos de conhecimentos, e para representar figurativamente relações de implicação entre proposições e modificações de modelos. No que chamamos de Matemática dinâmica, teríamos aqui um instrumento para modelagem de grandes dados, para estudo e previsão de fenômenos por meio da generalização de expressões algébricas e probabilidades estadísticas, assuntos figurativos, relações entre variações de funções, visualizando simultaneamente os registros, a demonstração figurativa de teoremas e outras premissas próprias dos diferentes tipos de Geometrias.

Um assunto que percebemos na obra de Lévy é a ênfase ao pensamento ou raciocínio por imagens, pelo fato de que é mais fácil racionar a partir de representações figurativas, pelo potencial que elas têm de conter um grande número de leis, propriedades, premissas, que são muito mais facilmente retidas na memória operacional do que numa forma de texto, ou seja, de uma proposição explícita. Isso não é por acaso, no livro referência que tem experimentos em psicologia cognitiva, demonstra-se que quando os problemas estão na forma figurativa, os sujeitos chegam a resolver maior número do que se tivessem sido submetidos a uma representação verbal deles.

Tais experimentos, possivelmente suportados nas técnicas da escrita, da grafia e do cálculo em papel, já demonstram vantagens, e a ideografia dinâmica permitirá ir além disso, abrindo as portas a novas maneiras de visualizar, a qual será dinâmica e interativa, possibilitando releituras de conteúdos já existentes. A ideografia dinâmica leva consigo novas formas de ensino nos diferentes domínios de conhecimento. Isso é possível por meio do suporte informático, que propõe um armazenamento externo de representações de modelos mentais, sem fazer que se percam, fazendo da ideografia dinâmica uma alternativa à lógica de auxílio ao raciocínio.

Onde é que se materializa esse armazenamento externo na ideografia dinâmica? Segundo Lévy (1998), o gerador de ideogramas destina-se precisamente a esse fim. Um exemplo disso é quando *softwares* para o estudo de conteúdos da Matemática permitem guardar processos de resolução/estudo de teoremas, funções, entre outros, para serem explorados ou concluídos posteriormente, sem a necessidade de começar desde o zero. Podemos considerar que o gerador de ideograma, além de produzir e permitir explorar o mesmo assunto em um pacote informático, também permite colocar dentro desse pacote parte exteriorizada da nossa cognição.

Lévy (1998) afirma que o ato de comunicar por meio da ideografia dinâmica permitiria, no caso de a imagem animada ser mais eficaz do que a língua fonética, reduzir a margem de indeterminação que, por vezes, dificulta a comunicação funcional, um assunto que, separado da imaginação e do raciocínio, foi discutido quando remetemos ao pensamento por imagens. Aqui o autor reflete que comunicação, na ideografia dinâmica, materializa esse processo por meio da *iconização* das ideias, conceitos ou saberes mais abstratos.

Na ideografia dinâmica, a compressão de um conceito “*por sua definição*” corresponde a três direções de exploração: (1) o ideograma representa de maneira imagética a significação

do conceito e dá a primeira apreensão global dele; (2) a posição do ideograma nas diversas redes semânticas do repertório de ideogramas exprime diagramaticamente suas relações taxionômicas com os demais conceitos do mesmo campo; (3) podemos analisar o objeto informático subjacente ao ideograma e determinar suas qualidades, suas variáveis e suas funções que regem emissões e recepções de mensagens.

Nesse ponto, até mesmo o leitor mais experiente pode confundir a ideografia dinâmica como um *software*, mas ela não é um instrumento, é mais representativa para uma orientação de pesquisa, podendo bifurcar em vários produtos: interfaces informáticas; interfaces de sistemas de comunicação; instrumentos de modelagem de dados e engenharia do conhecimento; dispositivos de formação; realidades virtuais; hologramas para uso em cenários.

Esses cenários, na ideografia dinâmica, estão compostos por um repertório de superobjetos que, por sua vez, contém objetos menores, que se regem pelas leis e propriedades em relação a seus elementos constituintes e novas condições que os fazem representantes de classes-de-objetos ou objetos complexos por ideogramas. Para esclarecer isso, tomemos um exemplo da Matemática, especificamente da Geometria euclidiana plana. Os superobjetos são os polígonos; todo polígono possui $n - \text{vértices}$, $n - \text{lad os}$, $n - \text{ângulos}$, etc., minimamente $n \geq 3$, um representante dessa classe: os triângulos, os quais herdam as propriedades do superobjeto, porém, trazem alguns ajustes no que se refere ao número de vértices e demais propriedades. Nesse sentido, todo triângulo só possui 3 vértices, 3 lados, 3 ângulos internos etc. Mas, se vamos dentro desse objeto, encontramos outros objetos focalizados, por exemplo a classe de triângulos isósceles, que contém os triângulos equiláteros.

Vemos uma lógica de pensar em superobjetos e objetos que se organizam em classes, e se relacionam pela herança que uma geração herda da anterior. Se colocamos em contexto essa maneira de pensar e organizar, no caso da Matemática, entendemos por que todo triângulo equilátero é isóscele, mas não que todo triângulo isóscele é equilátero. Seguindo esses exemplos, teremos que, na ideografia dinâmica, o conceito corresponde ao objeto em geral, e o ideograma à representação do primeiro na tela do computador por meio do gerador de ideograma.

Nesse momento, nos dedicaremos a abordar o tão citado produto obtido pelo gerador nesse tipo de ideografia, o *ideograma dinâmico*. Primeiramente, não se deve pretender que é apresentando da mesma forma que o predecessor, no ideograma estático, que só funciona como fonte de inspiração, nos termos de Lévy. A diferença dos ideogramas produzidos por técnicas

tradicionais, como o desenho a lápis e papel, e os que são realizados na tela do computador são de morfologia variável, pelas razões expostas anteriormente. Para Lévy (1998), o ideograma dinâmico atualiza e amplia a ideia de interface chamada “ícone”, do mesmo jeito que os ideogramas representam entidades, relações ou ações da maneira mais evidente e mais intuitiva.

As diversas transformações no ideograma dinâmico, segundo Lévy (1998), podem ser consideradas em diferentes ordens, por exemplo aquelas que alteram a estrutura própria do ideograma, como a forma e tamanho; outras que afetem de maneira externa, como o lugar, direção ou velocidade. As referidas transformações são realizadas pelo explorador dos ideogramas com a intenção de entender o objeto (conceito) representado pelo ideograma (signo), pelo fato de o objeto ser a dimensão interior, a alma da ideografia dinâmica.

Se objeto é a dimensão interior, portanto, seu signo (o ideograma) corresponde à dimensão exterior, o corpo expressivo da ideografia, pelo fato de ser a realidade semiótica aparente. Em termos semióticos, Lévy (1998) considera o par objeto/ideograma o significado/significante. Por outro lado, certos efeitos visuais (*zooms*, iluminação, ângulos de visão...) no gerador de ideogramas, ainda que independam do plano dos objetos, podem ter significados importantes.

Para Lévy (1998), o signo na ideografia dinâmica não mais é somente signo de um sentido, mas signo de transformação virtual, pela qualidade dinâmica que o suporte informático proporciona. Portanto, no ideograma que visualizamos na tela, bifurcam duas linhas semióticas divergentes. Uma delas segue passo a passo em direção aos processos materiais, conectando os signos às coisas, sem passar por representações mentais; a outra reorienta o processo ininterrupto de construção e simulação de modelos mentais, que se desenvolvem no espírito do usuário.

Talvez para determinados objetos precisaremos de mais ideogramas que interatuem entre si. Sobre essas vinculações, Lévy refere-se aos *campos-de-ação*, que são as vias mediante as quais os ideogramas enviam as mensagens. Esse aspecto da dimensão de simulação e experimentação da ideografia dinâmica permaneceria limitado. Essas mensagens, segundo Lévy (1998), são enviadas por um **objeto A** e só serão recebidas por um **objeto B** se o **ideograma de B** encontrar-se no interior do *campo-de-ação* do **ideograma A**. Um exemplo na Matemática são as relações de posição entre duas retas no plano, teríamos dois ideogramas semelhantes que representam as retas, se **A** corta a **B**, denota uma mensagem que $A \cap B = (a, b)$, também que o ângulo entre elas pode ser agudo, reto ou obtuso.

Os diversos exemplos que nossas reflexões suscitam, para auxiliar nas exemplificações da ideografia dinâmica na Matemática, são de sentido geométrico. Talvez isso não seja errado, pois Lévy (1998) afirma que o eixo fundamental da representação adotada pela ideografia dinâmica é o espaço geométrico bidimensional ou tridimensional. Isso não quer dizer que não possam ser utilizados outros, segundo nossas considerações em escolher o gerador de ideogramas, do qual iremos detalhar nos parágrafos seguintes.

Lévy (1998) denomina “Gerador de Ideogramas” um centro de criação e transformação de redes semânticas e ideogramas-objetos, de suporte computacional. Podemos concebê-lo como ambiente de formação ou para modelar esse ou aquele fenômeno por meio de ideogramas. Cada objeto se deve representar por um ideograma, que tem as propriedades herdadas daqueles superobjetos supracitados. Por isso, Lévy sinaliza sobre a hierarquia de níveis de representação na ideografia dinâmica.

Para finalizarmos esta seção, queremos esclarecer que o campo de ação da ideografia dinâmica nos sujeitos ocorre na cognição, na interface homem/máquina, pelo fato de tentar formalizar e traduzir – tanto quanto possível – em mídia informática, certas capacidades e modelos mentais humanos. Por isso, na ideografia dinâmica os conceitos são modificados direta e explicitamente pelos exploradores de ideogramas (os intérpretes humanos). Sem nossa interação sensório-motora por meio do gerador de ideograma, essa ideografia não tem efeito nenhum.

3.3 História no ensino Matemática com suporte nas Tecnologias Digitais

Tomando esse fio de atividades, com a utilização das Tecnologias Digitais de informação e comunicação (TDICs) junto à MSH, nos surgem os seguintes questionamentos: Quais seriam os princípios ou fundamentos teóricos no uso das TDICs para mobilizar MSH no ensino da Matemática?

Para se concretizar um fundamento de ensino de Matemática centrada em interconexões que envolvam a história da Matemática, associada a suportes tecnológicos via meios digitais, tomamos em consideração três domínios de conhecimento conceitualizados por Mendes (2023b). O autor em questão enfatiza a grande importância de os professores analisarem minuciosamente os elementos que sustentam essas conexões. Nesse sentido, é crucial que os professores, como ponto de partida, considerem a história da Matemática, as maneiras de

explorar essas histórias e o conjunto de Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) que compõem as ferramentas digitais utilizadas em cada abordagem histórica e em cada fase do ensino. Faremos uma apresentação de cada um desses conhecimentos

a) Domínio do conhecimento sobre o desenvolvimento histórico do conteúdo matemático

Aqueles que desejam desenvolver um trabalho docente que integre a história da Matemática com o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) em ambientes digitais devem, primeiramente, compreender que o desenvolvimento histórico das ideias matemáticas se reflete nas formas de representação escrita dos conceitos, propriedades e relações epistemológicas de cada tema ao longo do tempo e em diferentes contextos culturais. Essa perspectiva evidencia que a construção do conhecimento matemático está intimamente ligada aos registros e formas de expressão utilizados em cada período histórico, moldando não apenas a compreensão dos conceitos, mas também suas aplicações e significados.

Além disso, torna-se essencial que os docentes e pesquisadores se apropriem dos processos cognitivos derivados dos agenciamentos proporcionados pelos fatos matemáticos históricos. Essa apropriação permite que novas interpretações e reorganizações cognitivas emergjam, auxiliando na construção significativa dos objetos matemáticos pelos estudantes ao longo de sua formação. A imersão nesses processos favorece uma abordagem didática que não apenas contextualiza o conhecimento matemático, mas também amplia as possibilidades de ensino, tornando-as mais dinâmicas e conectadas às experiências dos alunos.

Outro aspecto fundamental para aqueles que buscam aprofundar-se nesse campo é o investimento no estudo da historiografia da Matemática, explorando fontes primárias, secundárias e terciárias. O acesso e análise dessas fontes possibilitam a construção de um conhecimento mais sólido sobre cada conceito matemático e seu percurso histórico. Somente por meio dessa apropriação crítica e aprofundada será possível organizar sequências didáticas que respeitem o desenvolvimento conceitual previsto nos programas escolares e nos livros didáticos, garantindo um ensino mais estruturado e historicamente embasado.

Por fim, o domínio da história da Matemática permite identificar quais TICs são mais adequadas para criar processos ideográficos dinâmicos que favoreçam estratégias inovadoras de ensino. A escolha apropriada dessas ferramentas tecnológicas possibilita a criação de ambientes digitais interativos, alinhados às atualizações de problematizações extraídas das

fontes históricas. Dessa forma, a articulação entre a História da Matemática e as TICs não apenas enriquece o ensino da disciplina, mas também potencializa a compreensão e a construção do conhecimento matemático em um cenário dinâmico e contextualizado.

b) Domínio do conhecimento sobre o desenvolvimento das Tecnologias Digitais

Um segundo aspecto essencial para viabilizar a implementação de um projeto didático que integre as Tecnologias da Informação e Comunicação (TICs) como meio de inserção da história da Matemática no ensino da disciplina é a necessidade de apropriação, por parte do educador, dos recursos disponíveis. Isso permitirá a associação entre as sequências históricas da construção matemática e os conteúdos abordados nos livros didáticos, em conformidade com os programas de ensino estabelecidos para cada etapa da educação matemática.

Nesse contexto, é fundamental reconhecer que esse domínio não se limita a um conjunto fixo de ferramentas, mas sim a um espaço dinâmico e criativo. Nele, a combinação estratégica de diferentes tecnologias pode ser essencial para estruturar um modelo híbrido de ensino, no qual a articulação entre a evolução histórica da Matemática, os conteúdos curriculares e a maneira como esses temas são abordados nos livros didáticos seja realizada de forma eficaz. O professor, portanto, assume o papel de mediador desse processo, organizando sua proposta pedagógica de modo a integrar diferentes perspectivas e promover uma aprendizagem mais significativa.

Além disso, o uso das TICs deve sempre considerar os fluxos de evolução e revisitação dos conceitos matemáticos ao longo da história, possibilitando uma abordagem que contemple tanto o passado quanto o presente. Essa visão dialoga diretamente com a teoria tetrádica de McLuhan (1972), segundo a qual toda nova mídia recupera, aprimora, obsoleta e reconfigura aspectos das mídias anteriores. Assim, ao planejar estratégias didáticas que incorporem a história da Matemática por meio das TICs, é fundamental explorar diferentes combinações e adaptações tecnológicas, garantindo que a construção dos objetos matemáticos ocorra de maneira acessível e estimulante para os estudantes. Dessa forma, possibilita-se uma apropriação mais profunda das transformações conceituais da Matemática ao longo do tempo, contemplando suas propriedades, relações intramatemáticas e interconexões com outras áreas do conhecimento.

c) Domínio do conhecimento teórico-prático dos aplicativos disponíveis a serem acessados, conforme os objetivos do usuário

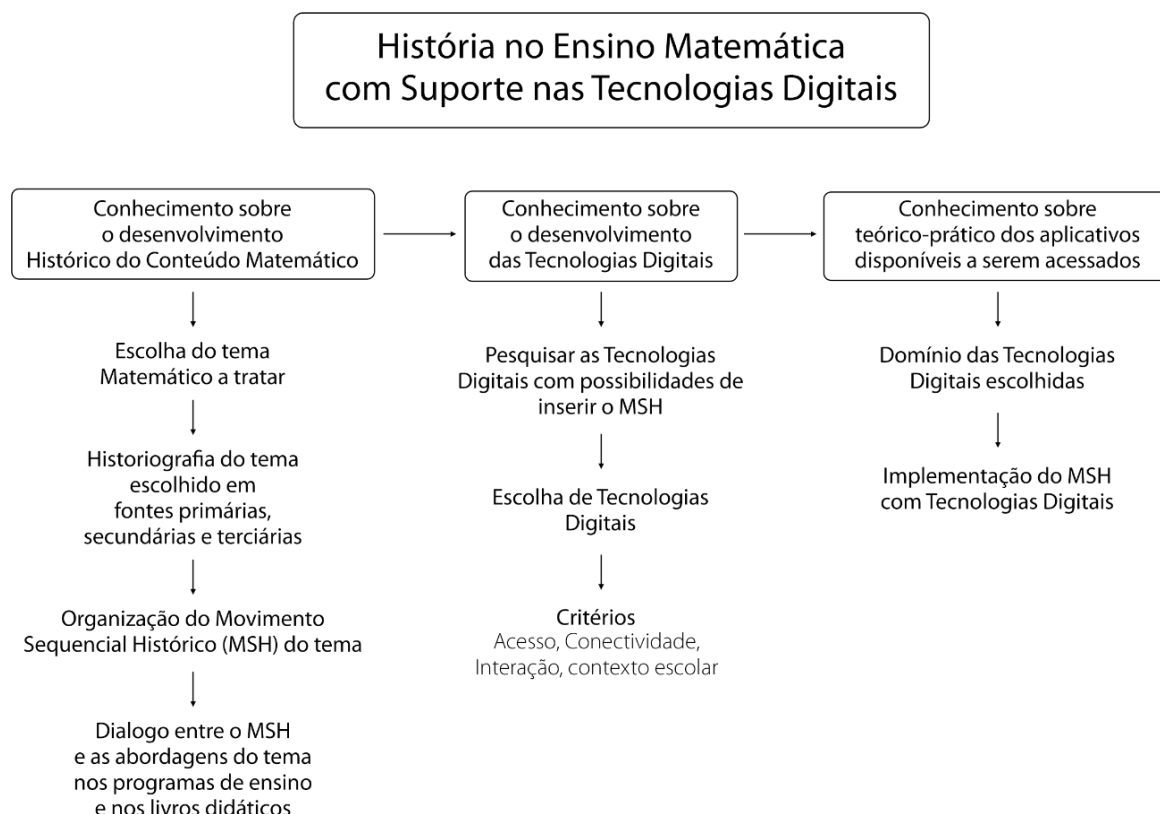
Para alcançar os objetivos de ensino e aprendizagem por meio das conexões entre a história da Matemática e os meios digitais, com suporte na ideografia dinâmica, é fundamental que o professor possua um domínio abrangente dos aplicativos disponíveis para a implementação de seu projeto pedagógico. Esse domínio implica não apenas o conhecimento técnico sobre o funcionamento dessas ferramentas, mas também uma compreensão teórico-prática que possibilite a escolha dos aplicativos mais adequados ao contexto dos alunos, ao conteúdo matemático a ser explorado e ao nível de desenvolvimento histórico-conceitual abordado em sala de aula.

Um exemplo clássico e amplamente conhecido dessas relações entre tecnologia e ensino de Matemática é o uso da calculadora para a abordagem de conceitos históricos, como os valores de π e os números irracionais em geral. Além disso, a digitalização de processos matemáticos históricos pode ser potencializada pelo uso de softwares dinâmicos, como o GeoGebra, que permite a visualização e manipulação interativa de conceitos matemáticos, favorecendo a inserção de temas e processos históricos na prática educativa.

Na prática, o professor pode estruturar Movimentos Sequenciais Históricos (MSH) para tratar de diferentes temas, como os números irracionais, a quadratura das curvas e seus desdobramentos conceituais, os indivisíveis de Cavalieri, o desenvolvimento do conceito de variável, funções e cálculo diferencial e integral, os números complexos, a evolução da Geometria analítica antes e depois dos estudos de René Descartes, o método das fluxões de Isaac Newton e Colin Maclaurin, e a trigonometria das cordas, semicordas e triângulos planos e esféricos. Esses exemplos, descritos por Mendes (2020), demonstram a riqueza da história da Matemática como suporte para a compreensão de conceitos matemáticos contemporâneos.

Para que esses MSH sejam efetivos, é essencial organizá-los de maneira lógica e coerente, permitindo sua integração aos suportes digitais por meio da escrita ideográfica dinâmica. Essa abordagem possibilita a (re)escrita das histórias da Matemática em conexão com os programas de ensino, funcionando como um complemento explicativo que amplia a compreensão dos conteúdos escolares. Dessa forma, ao destacar os processos de transformação conceitual ao longo do tempo, busca-se proporcionar aos estudantes uma visão mais aprofundada do desenvolvimento da Matemática e de suas inter-relações com diferentes contextos históricos e culturais. A Figura 13 apresenta um modelo esquemático desse processo.

Figura 13. Modelo de relações entre História e Tecnologias para o Ensino da Matemática



Fonte: Elaboração Baseada em Mendes (2023)

Até este ponto, desenvolvemos um modelo que estabelece conexões entre a História e as Tecnologias Digitais para o Ensino da Matemática. Esse modelo busca integrar abordagens históricas ao uso de artefatos tecnológicos, promovendo uma aprendizagem mais dinâmica, interativa e compreensiva. No capítulo seguinte, teremos duas obras com as quais vamos a exemplificar essa transformação — a edição colorida de *Os Elementos de Euclides* de Oliver Byrne (1847) e *Elementos da Simetria Dinâmica* de Jay Hambidge (1924, 2025). Ambas as obras revelam como a Geometria pode ser explorada de forma inovadora, utilizando representações visuais, e fundamentando na Ideografia Dinâmica serão transformadas em uma forma dinâmica para facilitar a compreensão de conceitos geométricos.

Nesse contexto, buscamos responder à seguinte questão de pesquisa: De que maneira as obras de Oliver Byrne e Jay Hambidge podem ser dinamizadas por meio de Tecnologias Digitais, e quais são seus potenciais contribuições para o ensino e aprendizagem da Matemática?

Como parte desse esforço, caracterizamos a obra de Oliver Byrne, destacando seus diagramas coloridos aplicados aos Elementos de Euclides, bem como a obra de Jay Hambidge, que introduz a abordagem da simetria dinâmica. Exploramos como esses materiais históricos podem ser revitalizados e incorporados ao ensino por meio de tecnologias digitais, possibilitando novas formas de visualização, experimentação e compreensão dos conceitos matemáticos. Para isso alinhamos a pergunta ao seguinte objetivo específico: Caracterizar a obra de Oliver Byrne, com seus diagramas coloridos aplicados ao Elementos de Euclides, e obra de Jay Hambidge, com sua abordagem de simetria dinâmica, destacando como esses tipo de material histórico pode ser dinamizado por meio de Tecnologias Digitais.

Dessa maneira, ao combinarmos história, tecnologia e ensino, pretendemos oferecer uma perspectiva inovadora para a aprendizagem matemática, alinhando tradição e modernidade na construção do conhecimento.

4

A Geometria em Movimento: Das Cores de Byrne à Dinâmica de Hambidge

[...] a revolução digital pode ser abordada como um caminho que se tornou possível a partir da conquista de um novo patamar de tecnologia e de compreensão do mundo (Barros, 2023, p. 18).

A epígrafe que abre este capítulo sinaliza que a sofisticação das transformações tecnológicas do momento são frutos do aperfeiçoamento contínuo ao longo da história. Em outras palavras, Barros (2023) nos oferece uma reflexão para ultrapassar uma forma de ver o passado de uma Era a outra, não como mero substituto, mas sim como revoluções tecnológicas que evocam a ideia de sucessivas eras tecnológicas, num sentido polifônico, no qual cada Era acrescenta sucessivos acordes que compõem uma melodia que se aperfeiçoa ao longo do tempo.

Assim sendo, podemos olhar a Geometria, que ao longo dos séculos, evoluiu de um domínio de figuras estáticas e demonstrações fixas para um campo dinâmico que reflete interações, mudanças e transformações. Essa transição é especialmente evidente na introdução de métodos visuais e narrativos que enfatizam processos em vez de estados finais. Este capítulo aborda duas obras que exemplificam essa transformação — a edição colorida de *Os Elementos de Euclides* de Oliver Byrne (1847) e *Elementos da Simetria Dinâmica* de Jay Hambidge (1924, 2025). Ambas as obras revelam como a Geometria, enquanto disciplina, pode transcender sua função descritiva tradicional para se tornar uma ferramenta interpretativa capaz de dialogar com contextos históricos, sociais e culturais.

A edição colorida de *Os Elementos de Euclides* por Oliver Byrne marca um divisor de águas na abordagem didática da Geometria. Substituindo as letras que tradicionalmente codificam ângulos e formas por cores e diagramas, Byrne transforma a aprendizagem geométrica em uma experiência visual e intuitiva. Essa abordagem torna-se mais do que uma

ferramenta educacional; ela antecipa o papel das representações gráficas no pensamento contemporâneo, onde a cor e a forma atuam como etiquetas cognitivas que transcendem a linguagem.

Jay Hambidge (1924) oferece uma perspectiva revolucionária da simetria ao apresentar um paradigma dinâmico em vez de estático. *Elementos da Simetria Dinâmica* conecta as proporções geométricas às forças naturais e culturais, mostrando que a simetria não é apenas um atributo fixo, mas um processo em constante evolução. A tradução da obra por Iran Abreu Mendes e Larissa Mendes Cavalcante (2025) destaca sua relevância no contexto brasileiro, celebrando o centenário do trabalho visionário de Hambidge e abrindo caminhos para novas aplicações educacionais e epistemológicas.

Ao colocar como exemplo as contribuições de Byrne e Hambidge, este capítulo explora como a Geometria pode ser transformada em uma ideografia dinâmica, ao reinterpretar figuras, cores e simetrias, essas obras não apenas educam, mas também provocam uma reflexão sobre a maneira como a matemática pode ser integrada a fenômenos artísticos, culturais e tecnológicos.

4.1 Os Elementos de Euclides: do manuscrito ao écran

Começamos a seção com uma descrição de um percurso histórico da primeira obra matemática que usa, de forma sistemática, diagramas e símbolos de maneira lógica, de autoria de Euclides de Alexandria (325-265 a.C.) e intitulada *Elementos* (Stewart, 2014). Para o Stewart (2014) nos *Elementos* de Euclides está plasmada uma filosofia que versa sobre a premissa que qualquer afirmação em termos matemáticos deveria ser provada de maneira lógica antes de ser assumida como uma verdade.

Garciadiego (2007), respondendo à indagação: Que tanto sabemos de Euclides?, expressa que, exageradamente, existe um desconhecimento histórico da sua figura. Tanto que, durante a antiguidade e ainda até ao século XVI, o autor dos *Elementos* foi confundido com Euclides de Mégara (450-380 a.C.), discípulo de Sócrates e fundador da escola Megárica, a tal medida que várias edições dos *Elementos* levam o nome do Euclides de Mégara. Segundo esse autor, foi Federigo Commandino, em sua tradução ao latim dos *Elementos* em 1572, o primeiro a corrigir o erro, distinguindo os dois Euclides.

Esclarecemos que não é nossa intenção refletir sobre quem foi Euclides, mas sim, sobre sua obra de natureza filosófica/científica e, muito particularmente, em torno de ideias matemáticas herdadas da cultura grega, nos chamados de *Elementos*. A seguir, será apresentado um percurso sucinto, em forma de narrativa, sobre a transmissão da obra ao longo dos tempos e espaços, considerando as diversas traduções e adaptações realizadas em diferentes línguas.

De maneira robusta, Garciadiego (2007) expressa que *Elementos* são divididos em treze livros, dos quais, os quatro primeiros (I-IV) contêm a teoria da Geometria plana, ou seja, o estudo das propriedades matemáticas de triângulos, quadrados e círculos, entre outras. Em seguida, o quinto e o sexto (V e VI) discutem a teoria das proporções. Os livros de aritmética continuam (VII, VIII e IX). Os livros V e VII são aparentemente tão semelhantes que alguns pensaram que Euclides havia se enganado e duplicado o material. O livro X, como já mencionado, é o mais complexo, do ponto de vista técnico da Matemática, e oferece uma tentativa de esclarecer dificuldades surgidas dois séculos antes, ou seja, a partir do ano 490 a.C., aproximadamente. Por fim, dos livros XI ao XIII apresentam a teoria da Geometria do espaço, ou seja, discutem propriedades e construção de esferas, cubos e outras figuras de três dimensões.

Diferente da categorização anterior, Sánchez (2012, p. 12) caracteriza a obra *Elementos* segundo certos aspectos, além do conteúdo explícito encontrado em cada uma das proposições dos livros. Assim sendo, a autora divide os treze livros agrupando-os em cinco grandes temas, a seguir: construções com régua e compasso; Álgebra Geométrica; Teoria das proporções; Teoria dos Números e a Geometria do Espaço e os Sólidos Platônicos.

Na Obra dos *Elementos* de Euclides pode-se encontrar a construção de vários polígonos regulares: com três e quatro lados no livro I; de cinco, seis e quinze lados no livro IV; a proposição I-11 diz como as perpendiculares são desenhadas, e a I-27 como as paralelas são desenhadas. Também descobrimos como inscrever e circunscrever polígonos em um círculo. Todas as construções necessárias para as demonstrações são feitas com a régua e a compasso euclidiana (os três primeiros postulados).

No segundo livro de *Elementos* são apresentados vários problemas e teoremas. na "aplicação de áreas", que consiste em encontrar uma figura com a mesma área de outra dada. A aplicação de áreas recebeu, desde 1886 pelo matemático danês Hieronymus Zeuthen (1839-1920), o nome de álgebra geométrica que, embora problemática, por ter mais de uma interpretação, busca estabelecer a tradução dos teoremas do Livro II em expressões algébricas.

Os livros VII, VIII e IX tratam da teoria elementar dos números. O livro VII começa com a definição de número: "um número é uma multiplicidade de unidades", e com o que hoje conhecemos como Algoritmo de Euclides. No IX encontramos uma proposição equivalente ao teorema fundamental da aritmética (Proposição 14) e a prova da infinitude dos números primos (Proposição 20). O livro X é sobre irracionais e é chamado de cruz dos matemáticos por causa do nível de dificuldade.

Os livros XI, XII e XIII contêm a Geometria do espaço; a construção e algumas propriedades dos poliedros, chamados sólidos platônicos: tetraedro, cubo, octaedro, icosaedro e dodecaedro. O livro XIII culmina com a demonstração da inexistência de qualquer outro poliedro regular.

Pode-se dizer que esse texto atingiu a maioria, pois circula há quase dois mil e trezentos anos. Há um número provisório das diferentes edições dessa obra, que foram publicadas no mundo ocidental desde a invenção da imprensa. Segundo Montoito e Garnica (2014) a edição original de Euclides não mais existe. As cópias mais antigas sobreviventes são um exemplar (datado de 888 d.C.) da biblioteca do bispo Aretas de Cesareia⁹ (na Capadócia) (Figura 14), baseado numa edição com comentários e acréscimos de Têon de Alexandria (um grego do século IV) que viveu quase 700 anos depois do tempo de Euclides.

Figura 14. Exemplar dos *Elementos* de Euclides de Théon (888 d.C.)



Fonte: biblioteca do bispo Aretas de Cesareia

Segundo Eves (2011), "Segundo Eves (2011), as edições modernas da obra têm como base a revisão de Têon, que, até o início do século XIX, era considerada a mais antiga versão conhecida dos Elementos. No entanto, em 1808, por ordem de Napoleão, manuscritos valiosos

⁹ <<https://digital.bodleian.ox.ac.uk/objects/d4a23501-0b98-4aff-acd6-fe06fe9b62e3/surfaces/06cfa3b7-2aad-465e-88ac-0ebe3f2b5d13/#>>

foram recolhidos de bibliotecas italianas e enviados a Paris. Durante esse processo, F. Peyrard descobriu, na Biblioteca do Vaticano, uma cópia do século X de uma edição da obra anterior à revisão de Têon.

Segundo Garciadiego (2007), pelo menos nos últimos três séculos e até hoje, o conteúdo de alguns dos 'capítulos', particularmente aqueles relativos ao estudo da Geometria plana, tem sido material de estudo obrigatório nas escolas primárias. Portanto, em muitas culturas e épocas diferentes, parte do conteúdo dos *Elementos* foi apresentado em muitos livros didáticos diferentes.

A organização de os *Elementos* foi tão valorizada que, por muito tempo, os livros foram utilizados como texto-base para a aprendizagem de Matemática nas escolas. Euclides não criou um livro didático ou qualquer outro tipo de material para ser utilizado como instrumento de ensino, e sim, compilou as ideias que existiam na época de um modo mais científico. Talvez por ser uma obra aclamada e considerada como uma referência para muitos matemáticos, tornou-se referência também para o ensino.

Nesse sentido, centramos nossa atenção nas produções de traduções e adaptações dos *Elementos* no século XIX em idioma inglês, os quais tinham uma característica em comum: a sua abordagem referia-se aos primeiros seis livros dos *Elementos*, pelo fato de que, no século XIX na Inglaterra, o ensino da Geometria nas escolas secundárias significava geralmente o ensino direto dos *Elementos* de Euclides. O valor dos *Elementos* na educação era treinar a capacidade dos alunos no raciocínio lógico (Fujita, 2001). Embora Montoito e Garnica (2014) ressaltem que os estudantes tinham diversas dificuldades, as quais poderiam estar relacionadas, por exemplo, à falta de uma preparação para estudar os *Elementos*, ao tratamento das paralelas e dos incomensuráveis.

O contexto dessas dificuldades é perceptível ao entender que a obra de Euclides, mesmo se tratando de uma Matemática elementar, não foi criada para esse fim. Nesse sentido, teve uma adaptação dos *Elementos* que passou despercebida no século XIX. Na publicação do livro de Edward R. Tufte (1990), intitulado *Envisioning Information*, o autor na sua obra expressa que o mundo é complexo, dinâmico, multidimensional e o papel é estático, plano, portanto, como representaremos o rico mundo visual da experiência e medição em mera planície? (Tufte, 1990).

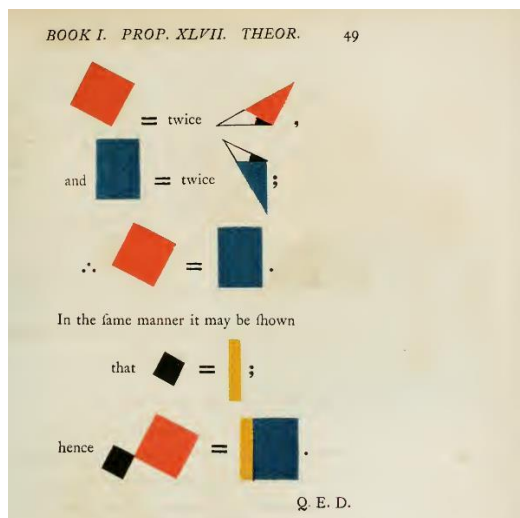
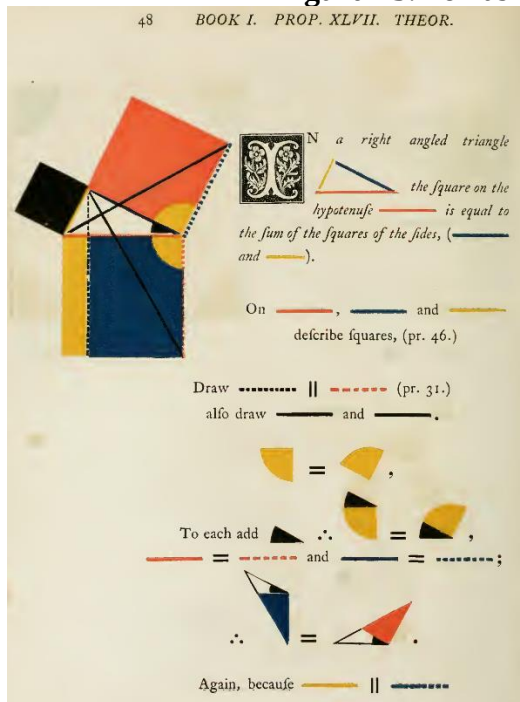
Para responder tal questionamento, o referido autor descreve o que chama de fugas de terras planas, apresentando várias centenas de exibições soberbas de dados complexos. Revela,

assim, estratégias de *design* para aumentar a dimensionalidade e a densidade dos retratos e das técnicas de informação, exemplificadas em mapas; manuscritos de Galileu; horários; anotações que descrevem movimentos de dança; fotografias aéreas; o Memorial dos Veteranos do Vietnã; eletrocardiogramas; desenhos de Calder e Klee; visualizações de computador e um livro de texto da Geometria de Euclides.

Nosso interesse é nesse livro de Geometria de Euclides, descrito no capítulo intitulado *Color and Information*. Nesse capítulo, Tufte afirma que a COR serve como um rótulo mais nobre de todos na edição de Oliver Byrne de 1847 da Geometria de Euclides. Esse Euclides verdadeiramente visual descarta a codificação nativa de letras dos textos de Geometria. Em uma prova, cada elemento nomeia a si mesmo por forma, cor e orientação consistentes; em vez de falar sobre o ângulo DEF, o ângulo é mostrado - apropriadamente o suficiente para a Geometria. Abaixo, vemos uma marcha ortodoxa pelo teorema de Pitágoras. Muito tempo deve ser gasto intrigado com um macarrão alfabético de 63 links codificados entre o diagrama e a prova. Na extrema direita, o visual Pitágoras. Um olhar mais atento, no entanto, indica que o projeto de Byrne esclarece o excessivamente indireto e complicado Euclides, pelo menos para certos leitores.

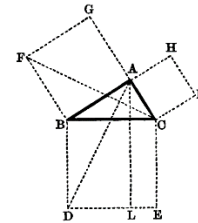
Tufte compara uma clássica demonstração do teorema de Pitágoras de um livro de Geometria elemental de 1936, com a adaptada na obra de Byrne (1847). Nós preferimos fazer a comparação com uma obra do mesmo século, especificamente de autoria de John Sturgeon Mackay, intitulada *The Elements of Euclid Books I. to VI. With Deductions, Appendices, and Historical Notes* publicado em 1884, a seguir na Figura 15.

Figura 15. Folhas das Obras de Byrne e Mackay



90 EUCLID'S ELEMENTS. [Book I.
two circles intersecting at D ; and join BD, DC . $ABDC$ is a square.
5. Describe a square having a given diagonal.

PROPOSITION 47. THEOREM.
The square described on the hypotenuse of a right-angled triangle is equal to the squares described on the other two sides.*



Let ABC be a right-angled triangle, having the right angle BAC :
it is required to prove that the square described on BC = square on BA + square on AC .

On AB, BC, CA describe the squares GB, BE, CH ; I. 46
through A draw $AL \parallel BD$ or CE ; I. 31
and join AD, CF .

Because $\angle BAC + \angle BAG = 2$ rt. $\angle$ s,
 $\therefore GA$ and AC form one straight line. I. 14
Similarly, HA and AB form one straight line.

* This theorem is usually attributed to Pythagoras (580—510 B.C.).

Book I.] PROPOSITION 47. 91

Now $\angle DBC = \angle FBA$, each being right.
Add to each $\angle ABC$;
 $\therefore \angle ABD = \angle FBC$.

In $\triangle$ s ABD, FBC , $\begin{cases} AB = FB & \text{I. Def. 32} \\ BD = BC & \text{I. Def. 32} \\ \angle ABD = \angle FBC; & \text{Proved} \end{cases}$
 $\therefore \triangle ABD = \triangle FBC$. I. 4

But $\square BL$ = twice $\triangle ABD$, being on the same base BD , and between the same $\parallel$ BD, AL ; I. 41
and square BG = twice $\triangle FBC$, being on the same base BF , and between the same $\parallel$ BF, CG ; I. 41
 $\therefore \square BL$ = square BG .

Similarly, if AE, BK be joined, it may be proved that $\square CL$ = square CH ;
 $\therefore \square BL + \square CL$ = square BG + square CH ,
that is, square on BC = square on BA + square on AC .
[It is usual to write this result $BC^2 = BA^2 + AC^2$; but see p. 113.]

COR.—The difference between the square on the hypotenuse of a right-angled triangle and the square on either of the sides is equal to the square on the other side.

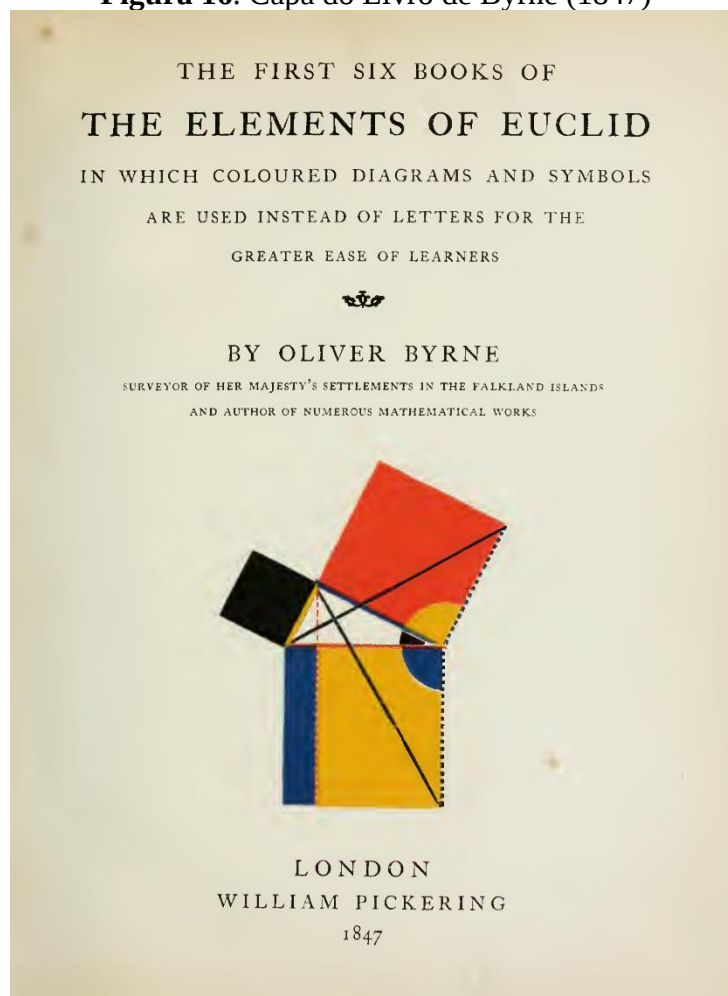
For since $BC^2 = BA^2 + AC^2$,
 $\therefore BC^2 - BA^2 = AC^2$,
and $BC^2 - AC^2 = BA^2$.

Fonte: Composição do autor a partir de Byrne (1847, p. 48–49) e Mackay (1884, p. 90–91)

Na Figura 14, podemos observar o mesmo raciocínio lógico para chegar na demonstração que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa, porém, de abordagens diferentes. Para Tufte (1990), as cores de Byrne têm em mente o conhecimento a ser comunicado, ou seja, a cor é um meio para comunicar, e portanto, o uso das cores primárias e do preto fornece diferenciação máxima (não há quatro cores que diferem mais). Na análise do referido autor, nos diagramas de Byrne a cor menos usada é o preto, e ela é cuidadosamente evitada para elementos grandes e sólidos — aumentando a coerência geral das provas ao

silenciar contrastes desnecessários. A entrelinha espaçosa ajuda na integração de texto e figura e unifica a página criando linhas de tipo (em vez das massas sólidas geralmente formadas por corpos de texto reto) semelhantes em presença visual às linhas e formas geométricas. Não por acaso, esse diagrama foi escolhido por Byrne para a capa dessa obra (Figura 16), à qual Ruan McLean (1963) descreveu como um dos livros mais estranhos e belos de todo o século XIX.

Figura 16. Capa do Livro de Byrne (1847)



Fonte: Byrne (1847)

Neste momento é propício levantar alguns questionamentos sobre Oliver Byrne: onde e quando nasceu? Além dos *Elementos*, escreveu outras obras? Qual é a grande contribuição de Byrne à Matemática e ao seu ensino? Baseados na biografia extensa que Hawes e Kolpas (2015) fizeram de Oliver Byrne, conseguimos resposta às inquietações supracitadas. Oliver Byrne (Figura 17) nasceu em 31 de julho de 1810 na vila de mineração de cobre de Vale de Avoca, no condado de Wicklow, Irlanda. Morreu em 9 de dezembro de 1880 e foi enterrado em

Maidstone, Kent, Inglaterra. Na sua trajetória profissional¹⁰, foi matemático, educador e engenheiro civil.

Figura 17. Retrato de Oliver Byrne



Fonte: Hawes e Kolpas (2015)

Hawes e Kolpas (2015) relatam que Oliver Byrne fez sua estreia como autor em Dublin com *A Treatise on Diophantine Algebra*. Embora mais frequentemente referenciado como *Treatise on Algebra*, publicado por Allen and Co., Dublin, 1830. Em segundo lugar, ele publicou *A Pamphlet on the Teaching of Geometry by Coloured Diagrams etc.; Applied to the First Book of Euclid*, em 1831. Esse panfleto foi a base para a posterior obra de Byrne, que foi finalmente publicada em 1847 em Londres, pela William Pickering.

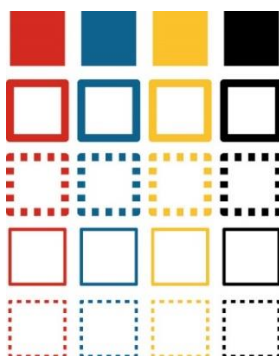
Segundo Hawes e Kolpas (2015), Byrne afirmou ter conduzido experiências mostrando que os *Elementos* de Euclides poderiam ser compreendidos usando esse método de cor “em menos de um terço do tempo normalmente empregado”. Seu objetivo expresso era “ensinar as pessoas como pensar e não o que pensar”. Além disso, na sua inscrição final no *Royal Literary Fund*¹¹ em 1880, Byrne expressou que têm um objetivo maior do que a mera ilustração; não apresenta cores com o propósito estético ou lúdico; ao contrário, fez isso para auxiliar a mente em suas pesquisas pela verdade, para aumentar as facilidades de instrução e para difundir o conhecimento permanente dos *Elementos*.

¹⁰ Para uma biografia mais extensa sobre a trajetória profissional de Byrne, escrita por O'Connor e Robertson, publicada em 2010 de maneira on-line, acessar: <<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Byrne/>>.

¹¹ Byrne, Oliver, Applications to Royal Literary Fund, 1839-1881, case number 987, Archives of Royal Literary Fund, London. Nineteenth Century Collections Online: "British Theatre, Music, and Literature: High and Popular Culture" Collection.

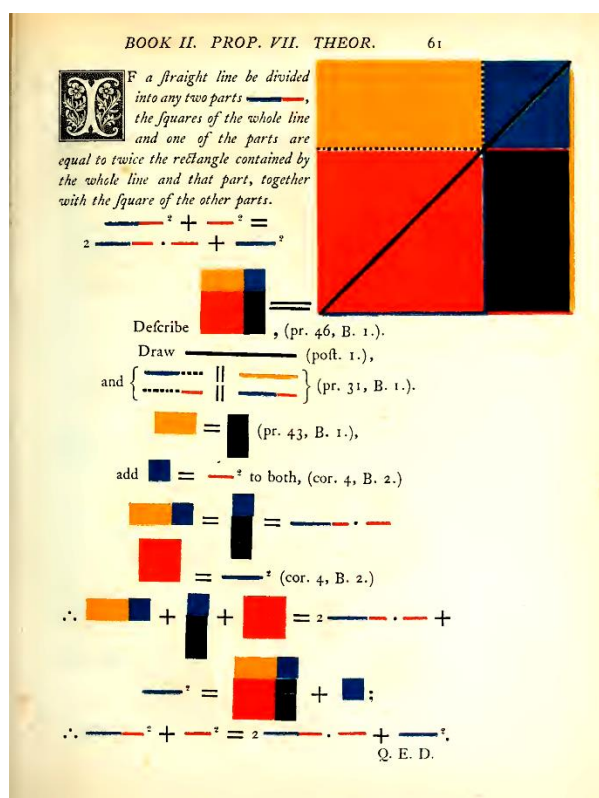
Byrne reformulou em cores brilhantes não apenas as ilustrações das figuras geométricas que estava prestes a provar, mas também os detalhes das provas. Nesse sentido, usou ao longo do livro apenas quatro cores (vermelho, azul, amarelo e preto), dois estilos de linha (sólido e tracejado) e duas espessuras de linha (grosso e fino) combinados. Isso criou 16 opções diferentes (Figura 18) para diagramas de coloração - mais do que suficiente para ilustrar os conceitos necessários desses seis primeiros livros dos elementos, como exemplo colocamos a Figura 19.

Figura 18. Conjunto de Cores, Linhas e Espessuras na obra de Byrne



Fonte: Rougeux (2018)

Figura 19. Exemplo da paleta de cores e estilos na obra de Byrne



Fonte: Byrne (1847)

Segundo Alexanderson (2010), a obra de Byrne na sua época foi praticamente ignorada por seus contemporâneos na Matemática. Augustus de Morgan foi particularmente desdenhoso, provavelmente encorajando Florian Cajori a chamar Byrne de “uma curiosidade”. Parece não haver menção de Byrne na história do ensino da matemática de Cajori, naquele período na América ou em seu clássico *History of Mathematics*, e apenas uma breve menção em seu livro sobre notação matemática de outra obra de Byrne, a intitulada *Dual Aritmética*.

Embora na sua época foi uma obra despercebida, Rougeux (2018) expressa que ganhou interesse renovado a partir da última década do século XX, em parte devido a uma menção de Edward Tufte, como foi mencionado anteriormente, e pela recente reprodução de Taschen, publicada em 2010.

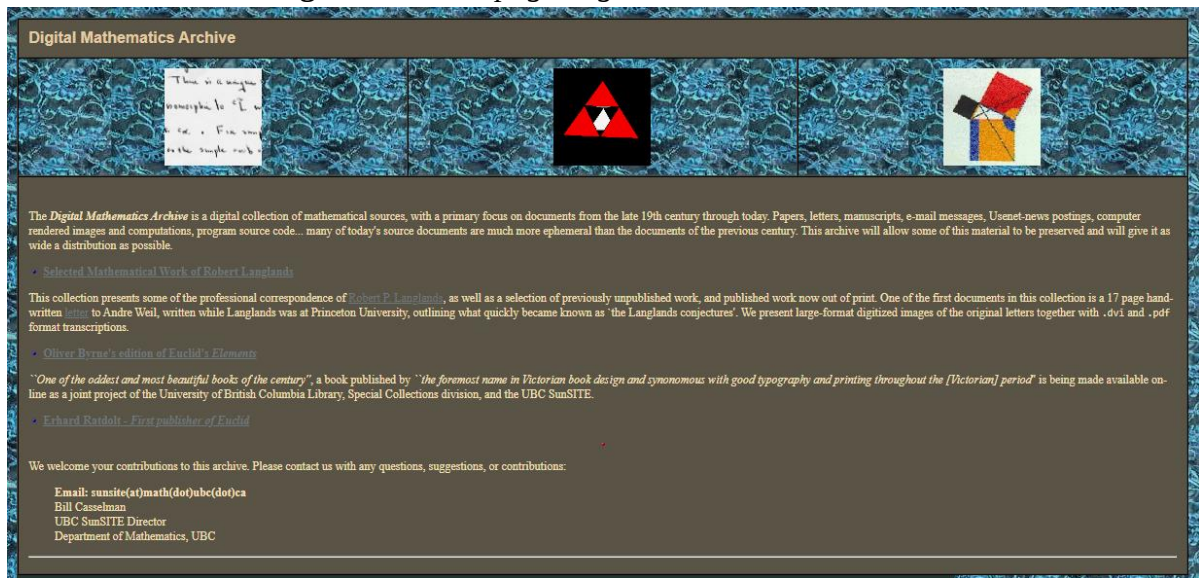
Alexanderson (2010), no seu *review* dessa reprodução pela editora Taschen, expressa que é uma edição suntuosa em que as páginas originais, antes de serem fotografadas, foram “lavadas” para remover evidências de *foxing*¹². O novo papel é ligeiramente esbranquiçado, o que se aproxima do papel que se pode esperar de um livro de arte de alta qualidade. Alexanderson (2010) afirma que, na atualidade, os exemplares da obra de Byrne em feiras internacionais de livros têm um valor entre US\$ 20.000 e US\$ 25.000. Podemos perceber que essa obra se tornou um livro altamente desejável e valioso em sua forma original. Mas a reprodução da Taschen agora torna possível que praticamente qualquer pessoa possua um por um preço mais acessível, para quem quiser a obra no seu formato impresso.

Bill Casselman, em caráter de diretor do Departamento de Matemática, na Universidade da Colúmbia Britânica (*University of British Columbia*), Canadá, em 1997, no seu projeto SunSITE, cria um repositório virtual chamado de *Digital Mathematics Archive*¹³ (Figura 20) no qual define como uma coleção digital de fontes matemáticas, com foco principal em documentos do final do século XIX até o momento, tanto de fontes impressas, como artigos, cartas, manuscritos, e outros em suporte eletrônico, como mensagens de e-mail, postagens de notícias da *Usenet*, imagens e cálculos renderizados por computador, código-fonte de programas, entre outros.

¹² O *foxing* é frequentemente descrito como pequenas manchas circulares e irregulares dispersas aleatoriamente na superfície do papel, variando em termos de tonalidade entre o castanho avermelhado e o castanho amarelado, que aparecem em diferentes tipos de papel datados entre o século XVI e XX.

¹³ <<http://sunsite.ubc.ca/DigitalMathArchive/>>.

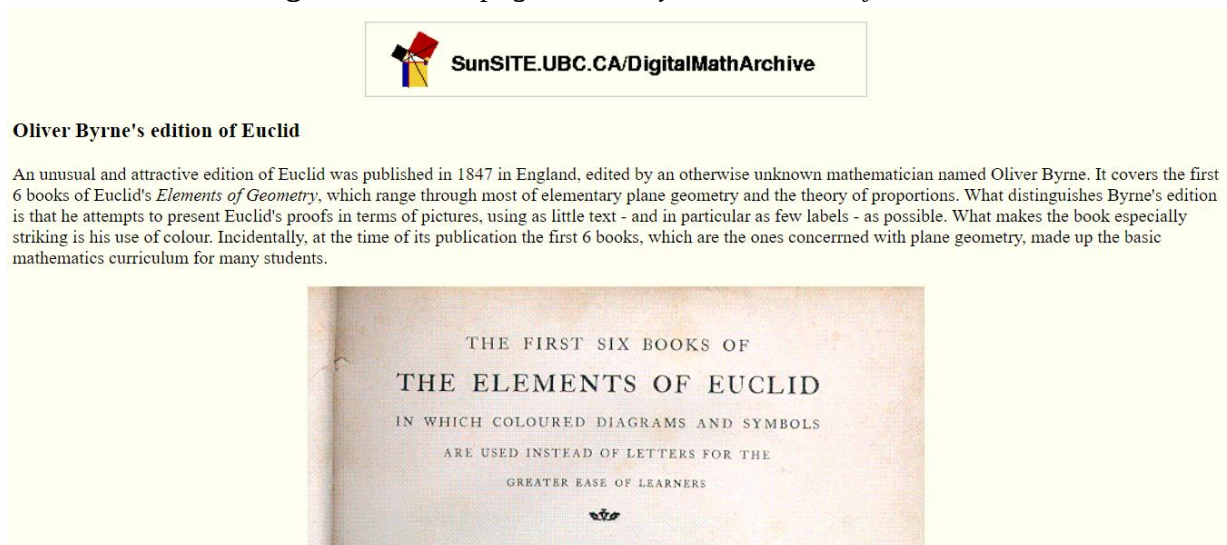
Figura 20. Homepage Digital Mathematics Archive



Fonte: Print do site *Digital Mathematics Archive*

Como podemos observar na figura, o referido arquivo on-line possui uma seção para a obra de Byrne, intitulada de *Oliver Byrne's edition of Euclid's Elements*. Nessa exploração, percebemos que o projeto não deu continuidade na manutenção do arquivo e o remeteu para o endereço eletrônico: <http://www.math.ubc.ca/~cass/Euclid/byrne.html>. No referido *siteweb* (Figura 21) se encontra primeiramente uma apresentação da obra de Byrne, com detalhes da sua origem, publicação e outras informações do contexto; uma breve biografia de Byrne e um menu em forma de *hiperlinks* para explorar as folhas escaneadas da obra.

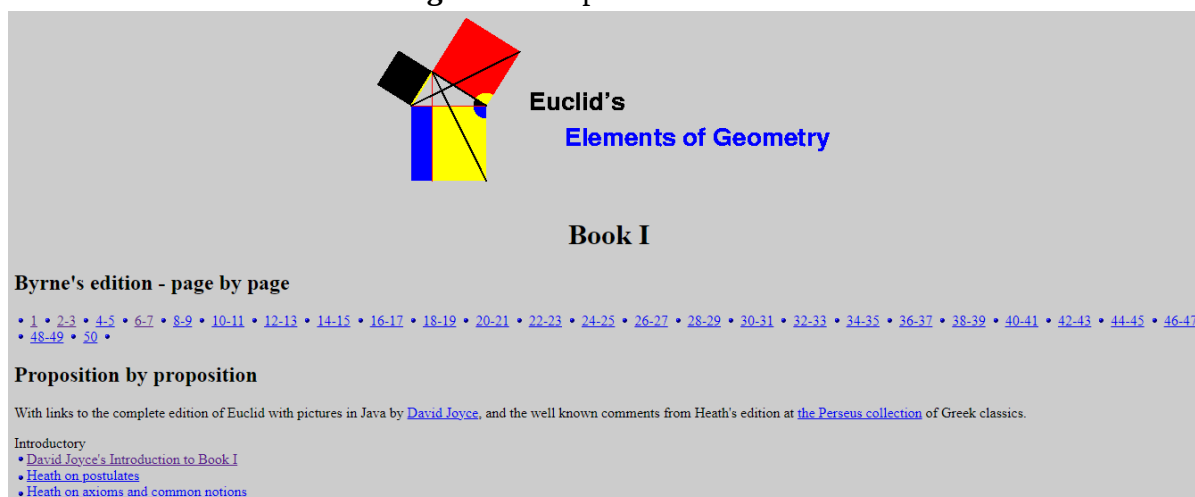
Figura 21. Homepage *Oliver Byrne's Edition of Euclid*



Fonte: Print do site *Oliver Byrne's Edition of Euclid*

Na primeira exploração pelo material nesse formato, percebemos que, além de organizar um menu (Figura 22), que leva em certos casos à primeira página de cada livro dos *Elementos* ou a cada par delas, os autores desse projeto tiveram a intenção de dar possibilidades aos usuários de comparar a mesma informação da obra de Byrne com a edição completa de Euclides com imagens em Java¹⁴ de David Joyce¹⁵ em idioma inglês (Figura 23), e os conhecidos comentários da edição de Heath na coleção Perseus¹⁶ de clássicos gregos. Essas correlações podem ser ampliadas para quem for fluente no idioma português, já que ainda é possível encontrar uma outra reprodução parcial dos *Elementos* de Euclides¹⁷ de um original publicado em 1855 pela Universidade de Coimbra (Pinto, 2023). Em síntese, pode-se observar como em diversos locais e tempo no mundo se teve um interesse em comum: o resgate da obra dos *Elementos* para dar um salto do físico e tangível do manuscrito para uma versão virtual, por meio de uma digitalização de exemplares; um salto de alto comprimento para as tecnologias da época.

Figura 22. Explorando o Livro I



Fonte: Print do site *Oliver Byrne's Edition of Euclid*

¹⁴ Java é uma linguagem de programação e plataforma de computação liberada pela primeira vez pela Sun Microsystems em 1995.

¹⁵ <<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/>>.

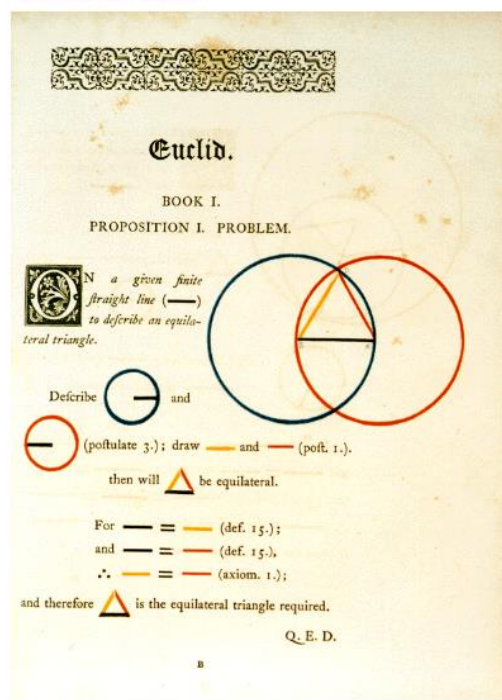
¹⁶ <<http://www.perseus.tufts.edu/hopper/text?doc=Perseus:text:1999.01.0086>>.

¹⁷ <<https://www.mat.uc.pt/~jaimecs/euclid/elem.html>>.

Figura 23. Comparando a obra de Byrne e Joyce

Byrne's Euclid - pages 1 - 2

[Book 1 - Main page | pages 2 - 3]



Euclid's Elements

Book 1

Proposition 1

To construct an equilateral triangle on a given finite straight line.

Let AB be the given finite straight line.



It is required to construct an equilateral triangle on the straight line AB .

Describe the circle BCD with center A and radius AB . Again describe the circle ACE with center B and radius BA . Join the straight lines CA and CB

from the point C at which the circles cut one another to the points A and B .

Now, since the point A is the center of the circle CDB , therefore AC equals AB . Again, since the point B is the center of the circle CAE , therefore BC equals BA .

But AC was proved equal to AB , therefore each of the straight lines AC and BC equals AB .

And things which equal the same thing also equal one another, therefore AC also equals BC .

Therefore the three straight lines AC , AB , and BC equal one another.

Therefore the triangle ABC is equilateral, and it has been constructed on the given finite straight line AB .

Q.E.F.

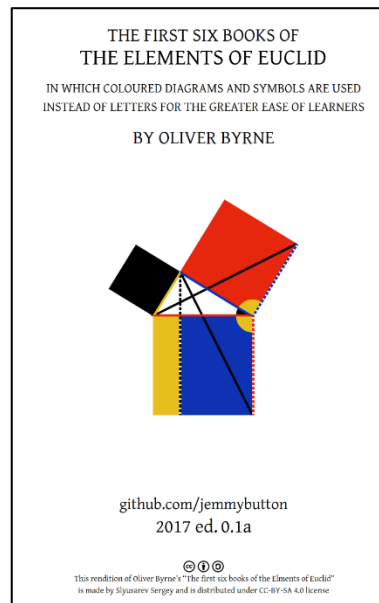
Fonte: Print do site *Oliver Byrne's Edition of Euclid*

Após esse movimento relatado, o interesse pela obra de Byrne deu uma esfriada, até que, recentemente, teve um certo renascimento e, a partir do início de 2017, os seis primeiros livros reeditados (Figura 24) no ConTEXt¹⁸ foram publicados no GitHub¹⁹ por Sergey Slyusarev, com uma primeira edição 0.1a.

¹⁸ ConTEXt é um sistema de produção de documentos baseado, tal qual o LaTeX, no sistema TeX de composição tipográfica. Enquanto o LaTeX isola o escritor de detalhes tipográficos, o Context adota uma abordagem complementar, fornecendo interfaces estruturadas para lidar com tipografia, incluindo suporte extensivo para cores, planos de fundo, hiperlinks, apresentações, integração de texto e figura e compilação condicional.

¹⁹ <<https://github.com/jemmybutton/byrne-euclid/>>.

Figura 24. Reprodução da obra de Byrne e Joyce via LATEX

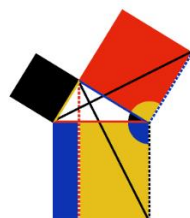


Fonte: Sergey Slyusarev (2017)

Slyusarev (2017), ainda não conformado com o primeiro resultado, foi aperfeiçoando esse modelo e criando outras edições, aprimorando os detalhes dos vetores dos diagramas coloridos de Byrne e dos detalhes do livro para a reprodução o mais fiel possível digitalmente da obra do referido autor. Nas versões do 0.1a. até 0.3a foram corrigidos erros de digitação. Esse processo foi datado entre janeiro e maio de 2017. Já para junho, Slyusarev (2017), além de continuar com o aperfeiçoamento da obra em inglês, produziu uma tradução russa adicionada da obra de Byrne (Figura 25)

Figura 25. Tradução russa da obra de Byrne

ПЕРВЫЕ ШЕСТЬ КНИГ
НАЧАЛ ЕВКЛИДА
В КОТОРЫХ ИСПОЛЗУЮТСЯ ЦВЕТНЫЕ СХЕМЫ И ЗНАКИ
ВМЕСТО БУКВ ДЛЯ БОЛЬШЕГО УДОБСТВА ОБУЧАЮЩИХСЯ
ОЛИВЕРА БИРНА



github.com/jemmybutton
2017 изд. 0.1

Эта редакция и перевод книги Оливера Бирна «The first six books of the Elements of Euclid»
подготовлены Сергеем Слысаревым и распространяются под лицензией CC-BY-SA 4.0



Книга I

Предл. I. Задача

На данной ограниченной прямой AB
построить равносторонний треуголь-
ник.

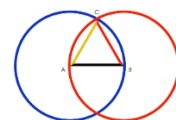
Опишем $\odot A$ и $\odot B$ (пост. III);
проведем AC и BC (пост. I).

Тогда $\triangle ABC$ равносторонний.

Поскольку $AB = AC$ (опр. 15);
и $AB = BC$ (опр. 15);
 $\therefore AC = BC$ (акс. 1);

и значит $\triangle ABC$ и есть искомый треугольник.

Ч. т. д.



Fonte: Sergey Slyusarev (2017)

Como podemos perceber na figura anterior, a tradução russa se destaca do inglês, pelo fato de incluir as letras que a obra original não contempla. Podemos perceber que Slyusarev (2017) materializou o que Edward R. Tufte, no seu livro *Envisioning Information* (1990), tinha vislumbrado na capa desse livro para tratar da obra de Byrne no seu capítulo *Color and Information* (Figura 26).

Figura 26. Fragmento da capa do livro *Envisioning Information*



Fonte: Tufte (1990)

Nas reedições de Slyusarev (2017), há um detalhe sobre os *designs* alternativos exclusivos para símbolos matemáticos comuns, como maior que ($>$), menor que ($<$), paralelo ($\parallel$), entre outros, que não conseguiram ser reproduzidos nessas obras em LATEX. Na Figura 27 temos, na parte superior, os desenhos tradicionais e, na parte inferior, os alternativos propostos por Byrne.

Figura 27. *Designs* tradicionais e alternativos para símbolos matemáticos



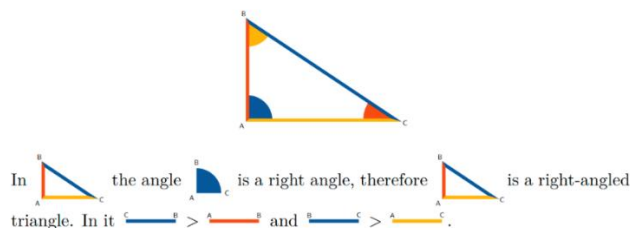
Fonte: Nicholas Rougeux (2018)

O trabalho de Slyusarev (2017) se prolongou por quatro anos, conseguindo aprimorar essas edições da obra de Byrne via ConTEXt, disponibilizando em 2021 a versão 0.8a20 em inglês e a versão 0.5a21 traduzida para o russo. Essa transformação digital dos *Elementos*, repensando Byrne, por um lado, contribuiu para o resgate da obra e, pelo outro, Slyusarev (2022) gerou uma forma de produzir texto ao estilo de Byrne nos pacotes METAPOST e LATEX (Figura 28).

²⁰ <https://github.com/jemmybutton/byrne-euclid/releases/download/Current/byrne_context.pdf>.

²¹ <https://github.com/jemmybutton/byrne-euclid/releases/download/Current/byrne_ru_context.pdf>.

Figura 28. Produção de textos usando o pacote Byrne no METAPOST e LATEX



The construction above is described like this:

```
\usepackage{byrne}

\defineNewPicture{ % MetaPost code to describe the main diagram is placed inside
  textLabels := true; % This turns text labels on
  pair A, B, C;
  A := (0, 0);
  B := (0, 2cm);
  C := (3cm, 0);
  byAngleDefine(C, B, A, byyellow, 0); % This defines a yellow angle CBA
  byAngleDefine(B, A, C, byblue, 0);
  byAngleDefine(A, C, B, byred, 0);
  draw byNamedAngleResized(); % Draws angles.
  byLineDefine(A, B, byred, 0, 0); % This defines a red line AB.
  byLineDefine(B, C, byblue, 0, 0);
  byLineDefine(C, A, byyellow, 0, 0);
  draw byNamedLineSeq(1)(AB,BC,CA); % Draws joint lines in sequence
  draw byLabelsOnPolygon(A, B, C)(0, 0); % Draws text labels
}
\drawCurrentPicture % Draws the diagram

In
\drawFromCurrentPicture[middle][triangleABC]{
  startAutoLabeling;
  draw byNamedLineSeq(0)(AB,BC,CA);
  stopAutoLabeling;
}
the angle \drawAngle{A} is a right angle, therefore \triangle ABC is
a right-angled triangle. In it $\drawUnitLine{CB} > \drawUnitLine{AB}$
and $\drawUnitLine{BC} > \drawUnitLine{AC}$.
```

Fonte: Slyusarev (2022)

Seguindo o percurso das transformações da obra de Byrne, no final de 2018, uma versão interativa²² (Figura 29) da obra foi publicada na internet por Nicholas Rougeux (2018), no inglês original da obra, no inglês moderno, em espanhol e em grego. Essa reprodução da célebre obra de Oliver Byrne, de 1847, contém diagramas interativos e referências cruzadas com definições, axiomas e teoremas.

Figura 29. Página inicial do projeto de Euclides de Byrne

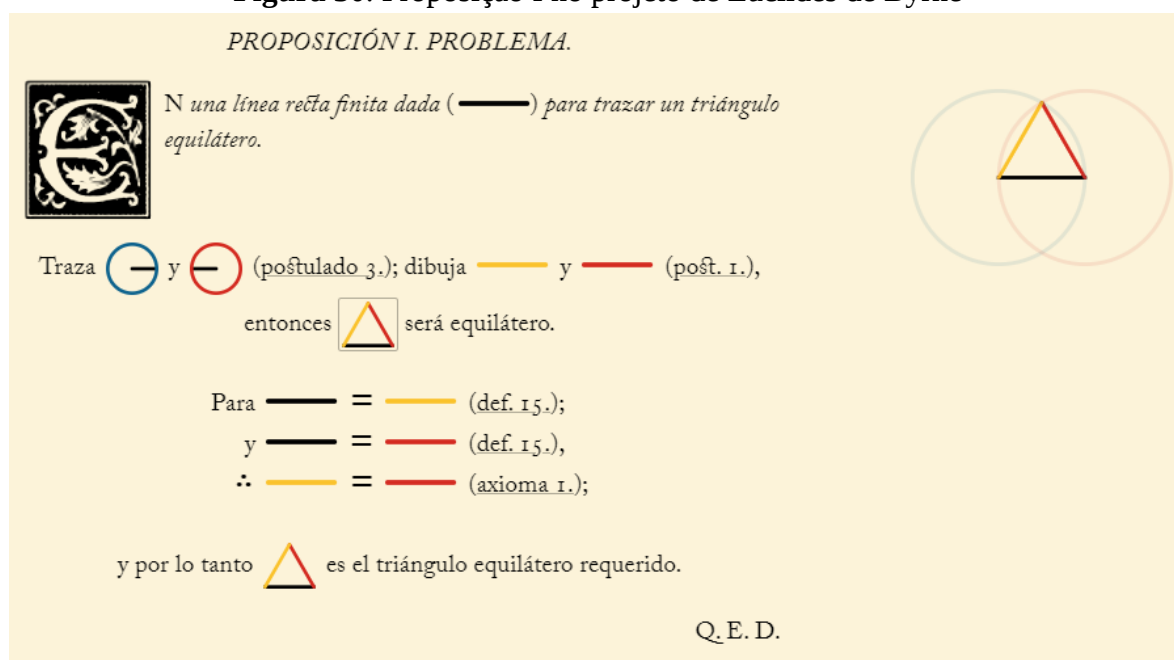


Fonte: Site Euclides de Byrne

²² <<https://www.c82.net/euclid/es/>>.

Segundo Rougeux (2018), essa obra interativa foi criada para dar vida à colorida edição de Byrne, disponibilizando-a para um público moderno, reproduzindo todo o livro de maneira on-line para torná-lo acessível a qualquer pessoa, com equipamentos modernos e um *design* flexível e o mais fiel possível ao original. Cada diagrama foi criado traçando os originais e garantindo que suas dimensões e relações permanecessem fiéis aos princípios geométricos de Euclides. As demonstrações que acompanham cada diagrama foram aprimoradas com formas clicáveis para ajudar a compreender as formas referenciadas. Como exemplo, na Figura 30, ao clicar no diagrama do triângulo equilátero na demonstração, na figura de análise ele se mantém com cores vivas, e aos elementos restantes se atribui uma transparência, um efeito, como se a cor deles fosse apagada.

Figura 30. Proposição I no projeto de Euclides de Byrne



Fonte: Site Euclides de Byrne

A diferença da reprodução de Slyusarev (2017) e a edição interativa de Rougeux (2018) conseguiu recriar a simbologia²³ alternativa proposta por Byrne na sua obra. Além disso, essa interatividade²⁴ adicionada aos diagramas é uma potencialidade que o meio das tecnologias do *design*, a linguagem de marcação, como o HTML, e a linguagem de Folhas de Estilo em Cascata, convergem para dar essa vida aos diagramas e ajudar na sua compreensão. Essa

²³ <<https://www.c82.net/euclid/es/symbols/>>.

²⁴ Para visualizar essa interatividade, ver o vídeo: <<https://c82.net/images/euclid/interactive.mp4>>.

possibilidade surgiu a Rougeux pela própria dificuldade que ele teve em entender algumas partes do livro original.

O site está organizado em algumas seções principais: Livros 1 a 6 e material auxiliar (sobre símbolo, glossário e pôsteres). No site, cada livro tem sua própria página, organizada na mesma ordem da obra de Byrne. No topo de cada livro há um menu para facilitar o salto para qualquer outro livro. Esse menu também mostra miniaturas de cada diagrama para adicionar algum interesse visual e diferenciar as proposições.

Cada proposição, definição, axioma e postulado tem seu próprio identificador, o ID. Portanto, links diretos também estão disponíveis e clicar em uma miniatura em qualquer um dos menus direciona para essa proposição, definição, axioma ou postulado. O resultado é uma reprodução completa do livro de Byrne de 1847, agora disponível on-line com melhorias, como diagramas interativos, referências cruzadas e capacidade de resposta para que possa ser visualizado em qualquer dispositivo (Figura 31).

Figura 31. Euclides, de Byrne, em diferentes dispositivos



Fonte: Rougeux (2018)

Até o momento, temos esclarecido o percurso histórico da obra de Byrne e os resgates realizados para a difusão da obra. Além dessas obras digitais, em 2019 teve um redesenho

moderno pelo editorial Kronecker Wallis²⁵, a qual, juntamente com uma equipe de especialistas em Matemática, professores universitários e pós-doutorados reproduziram e ampliaram o trabalho de Oliver Byrne para todos os treze livros dos *Elementos* de Euclides.

Assim sendo, não se tem registro de como Byrne usou essa obra para o ensino, porém, na introdução de seus escritos, temos alguns vestígios da maneira de como idealizou para ser usada. Sobre o argumento de que o ensino das proposições, definições, axiomas e postulados na época era feito por “repetições intermináveis e desconcertantes, que não conferem grande precisão ao raciocínio, tornam as provas complexas e confusas e ocultam a coleta de evidências da visão do aluno” (Byrne, 1847, p. viii), Byrne faz essa obra com o objetivo de apresentar um método de ensino da Geometria, o qual declara que foi altamente aprovado por muitos cientistas neste país (Inglaterra), bem como na França e na América (Estado Unidos).

A linguagem na obra de Byrne consiste em signos representativos, e esses signos são os melhores que cumprem seus propósitos com a maior precisão e rapidez no apelo do visual. Para Byrne (1847, viii), os diagramas geométricos são materiais da Geometria e cujo objetivo é mostrar as quantidades relativas de suas partes por meio de um processo de raciocínio denominado demonstração. Byrne sinaliza que, ao longo do tempo e espaço, esse raciocínio tem sido geralmente realizado com palavras, letras e diagramas pretos ou sem cor. Nesse contexto, Byrne baseia sua obra como o uso de símbolos, sinais e diagramas coloridos, para tornar o processo desse raciocínio, a demonstração, mais preciso e a realização mais rápida.

Nesse sentido, Digregorio (2020) expressa que a obra de Byrne faz uma hibridização entre as notações e diagramas coloridos, de maneira tal que produz uma configuração não linear, em que o raciocínio é demonstrado através da dedução visual. Segundo Hauk *et al.* (2013), esse tipo de dedução visual onde o colorido não é apenas ilustrativo, usa as cores para aprimorar processos de raciocínio em Geometria. Para o referido autor, há muitas maneiras pelas quais o uso da cor pode reduzir a dificuldade de uma situação problemática, sem diminuir sua complexidade cognitiva.

A utilização de diagramas faz que as fontes individuais de informação sejam visualmente integradas. Portanto, a aprendizagem dos estudantes é melhorada. Isso, pelo fato de que os estudantes devem dirigir a sua atenção para cada fonte individual, codificar as peças

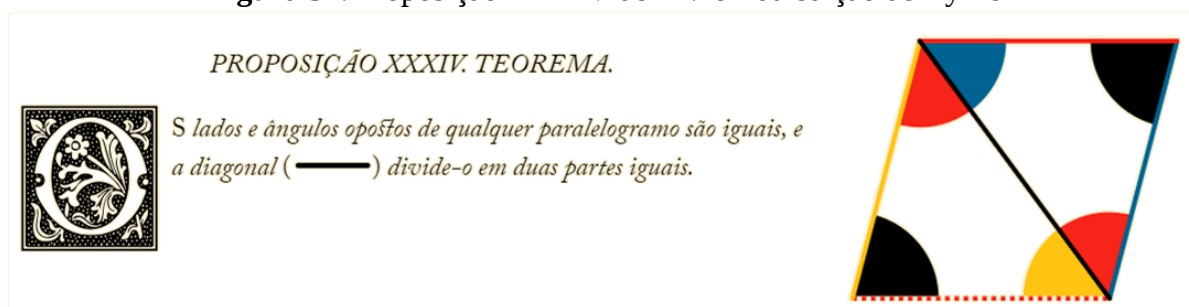
²⁵ <<https://www.kroneckerwallis.com/product/euclids-elements-completing-oliver-byrnes-work/>>.

separadas de informação e depois gerir as informações armazenadas para fazer conexões significativas (Hauk *et al.*, 2013).

Com o trabalho de Hauk *et al.* (2013) sobre o uso de diagramas coloridos, podemos entender a obra de Byrne com dois argumentos que ele expõe e sustenta por meio da experimentação em sala de aula. Os dois argumentos são: a *Cor como ferramenta de representação* e *Cor como ferramenta de compreensão*. Essas maneiras de usar a cor permitem representar fatos e compreender os relacionamentos entre os elementos. Assim sendo, podemos entender que essa codificação por cores pode ajudar os estudantes a “empacotar” e “desempacotar” informações e a gerenciar a complexidade das provas e comprovações.

Para compreender melhor esses argumentos, coloquemos como exemplo a demonstração da proposição XXXIV do Livro I da edição de Byrne (Figura 32), a qual diz que: *Os lados e ângulos opostos de qualquer paralelogramo são iguais, e que a diagonal o divide em duas partes iguais.*

Figura 32. Proposição XXXIV do Livro I da edição de Byrne



Fonte: Tradução da edição de Rougeux (2018)

Como podemos observar na figura anterior, já na própria proposição, Byrne usa a cor como ferramenta de representação para sinalizar qual dos segmentos coloridos é a diagonal. Além disso, o diagrama colorido reforça esse argumento. Os ângulos da mesma cor comunicam que são iguais em medida; os segmentos com uma cor diferente comunicam que são diferentes até demonstrar o contrário, lembrando que Byrne usa só quatro cores. O quinto segmento repete a cor vermelha; porém, seu desenho é descontínuo para comunicar que é diferente do seu oposto em posição.

No processo da demonstração no método de Byrne, se percebe a cor como ferramenta de compreensão. Byrne, a partir do diagrama colorido para levar a cabo seu raciocínio na demonstração, começa a “desempacotar” o diagrama em outros menores; em outras palavras, codifica os significados de cada peça separadamente de maneira a estabelecer as relações entre

elas, tendo assim seis ângulos e cinco segmentos (Figura 33), de maneira a demonstrar que os

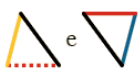
triângulos  são congruentes.

Figura 33. Elementos do Diagrama da Proposição XXXIV do Livro I de Byrne



Fonte: Elaboração pelo autor (2023)

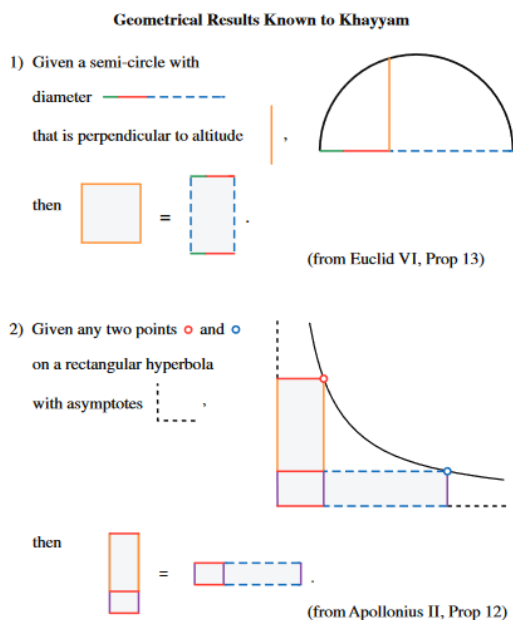
Logo, na demonstração Byrne agrupa os digramas segundo o que pode ser demonstrado de imediato. Nesse caso,  =  =  por serem ângulos alternos internos,  é comum a ambos os triângulos. Continuando com o raciocínio, temos que,  = ,  = , e  = ; em função dessas informações, se determina que  = . Portanto, os lados e ângulos opostos do paralelogramo são congruentes, e como os triângulos  são congruentes em todos os elementos, a diagonal divide o paralelogramo em duas partes iguais.

Com esse exemplo, podemos exemplificar o método de ensino de Geometria de Byrne, em função dos argumentos apresentados por Hauk *et al.* (2013) do uso das cores como uma ferramenta de representação, informações e de compreensão de relacionamentos. Pesquisas, como a desenvolvida por Rizos e Foykas (2023), revelam algumas vantagens do uso da obra de Byrne para o ensino da Geometria, entre elas, temos: assimilação de conceitos geométricos básicos; aumento do envolvimento da aprendizagem na resolução geométrica de problemas; compreender os principais pontos de uma prova geométrica; envolvimento ativo de todos os estudantes da turma em resolver problemas geométricos usando cores.

Nesse sentido, Rizos e Foykas (2023) chegam à conclusão que usar o livro dos *Elementos* de Byrne melhora o desempenho matemático dos estudantes a respeito da percepção visual e habilidades metacognitivas, como a solução de problemas. Pelos argumentos do uso desse método de ensino no uso de diagramas coloridos, Byrne tem inspirado a abordagem de outro tipo de problema ao estilo da sua obra. Por exemplo, temos Kent e Muraki (2016), quando exploram uma solução geométrica de uma equação cúbica (Figura 32) de Omar Khayyam, na

qual usam diagramas coloridos, seguindo o método de Byrne para um fundamento de maior compreensão.

Figura 34. Solução geométrica de uma equação cúbica de Omar Khayyam



Fonte: Kent e Muraki (2016, p. 155)

Nos anos mais recentes, com o uso de *softwares* de Geometria Dinâmica no ensino e na aprendizagem, Byrne é intensamente estudado, pelo menos desde o início do século. Tanto numa perspectiva teórica como experimental, nessas perspectivas encontramos como foi revisitada com GeoGebra a obra de Byrne. Bolondi e Luigini (2019) descrevem um experimento de ensino baseado na edição de Oliver Byrne dos *Elementos*. O referido experimento foi desenvolvido em duas turmas do ensino fundamental, com o intuito de combinar a obra de Byrne a utilização de um *software* de Geometria dinâmica, especificamente o GeoGebra.

Bolondi e Luigini (2019) descrevem que foram desenvolvidas construções manipulativas com GeoGebra no estilo de Byrne, tanto pelos professores quanto pelos estudantes, e usadas como ferramenta para exploração de propriedades e discussões de ideias matemáticas, especificamente do campo da Geometria. Além disso, as construções no GeoGebra foram usadas como uma ferramenta para tornar explícita a compreensão e a aprendizagem da Geometria euclidiana pelos estudantes.

Seguindo o contexto do uso do GeoGebra na exploração da obra de Byrne, temos o trabalho de Arnal-Baileraio e Oller-Marcén (2020), no qual pesquisam a realização com o GeoGebra de três procedimentos de construção feitos a partir das instruções apresentadas em

duas edições diferentes dos *Elementos* de Euclides: a clássica e a menos conhecida de Oliver Byrne. O estudo focaliza os sistemas de representação do mesmo conteúdo matemático, nessas obras radicalmente diferentes.

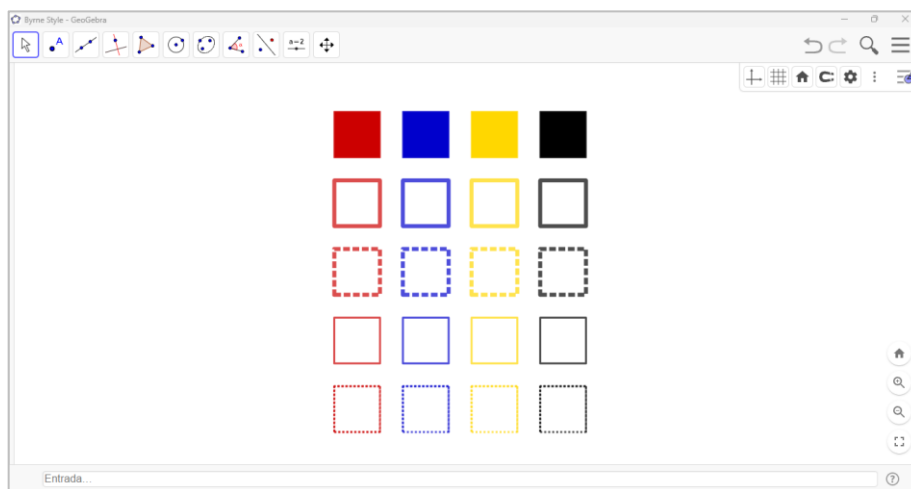
Nos resultados, após a análise das informações sobre as representações nessas obras por licenciandos em Ensino Básico, foi constatado que o sistema de representação não influencia o cumprimento das instruções para realizar os diagramas, mas, no caso da produção de construções corretas, a influência do sistema de representação está associada à tarefa concreta (Arnal-Bailera; Oller-Marcén, 2020).

Podemos considerar que o GeoGebra, em ambas as experiências relatadas, foi usado de maneira instrumental, como um conjunto de ferramentas para a construção das figuras no *software*, semelhante ao *kit* geométrico. Não foi possível constatar outras intenções de levar a obra de Byrne em um nível de dinamismo maior, que pode ser atribuído com esse *software* de Geometria dinâmica.

Neste ponto, a partir dos conceitos vinculados à Ideografia Dinâmica, já discutida em um capítulo anterior, iremos descrever alguns exemplos de como produzir esse tipo de escrita ideográfica com a obra de Byrne. Usaremos ideogramas coloridos dinâmicos *como ferramenta de representação* e *como ferramenta de compreensão*. Nesse sentido, utilizaremos o GeoGebra como um meio para produzir uma ideografia dinâmica baseada nos ideogramas coloridos da obra de Byrne, com o propósito de acrescentar movimento nesse processo de “desempacotar” e “empacotar” informações nos *Elementos* de Byrne.

A escolha do GeoGebra se deve à possibilidade de reproduzir o conjunto de cores, linhas e espessuras da obra de Byrne na interface do *software*, pelo fato de possuir funcionalidades que permitem variar a cor, o tipo de linha e a espessura da linha dos objetos representados geometricamente na janela de visualização (Figura 35). Então, isso nos faz refletir que, na produção da ideografia dinâmica em Matemática, temos que considerar que o gerador de ideograma consiga reproduzir o tipo de ideograma base que vem das fontes históricas, neste caso, a obra de Byrne.

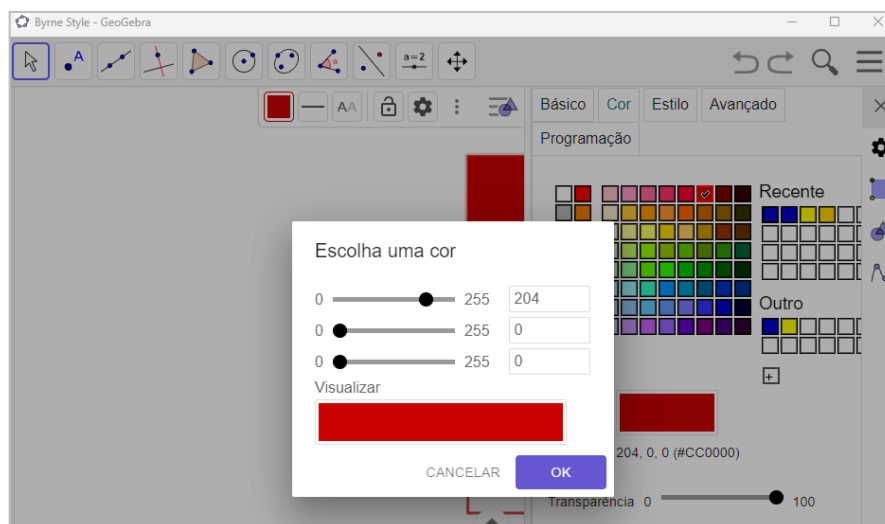
Figura 35. Conjunto de Cores, Linhas e Espessuras da obra de Byrne no GeoGebra



Fonte: Elaboração pelo autor (2023)

Para reproduzir o estilo de Byrne no GeoGebra, foram escolhidas as cores no sistema RGB²⁶, que é o modo de determinar uma cor em específico no *software*. Assim sendo, temos o vermelho (204, 0, 0) (Figura 36) e o azul (0, 0, 204) com o mesmo valor da respectiva escala para manter a tonalidade, uma característica que, no amarelo (255, 215, 0), tivemos que procurar uma escala diferente, pois o valor (204, 204, 0) resultava numa cor verde amarelada, e, finalmente, o preto (0, 0, 0).

Figura 36. Escolha de cores no GeoGebra



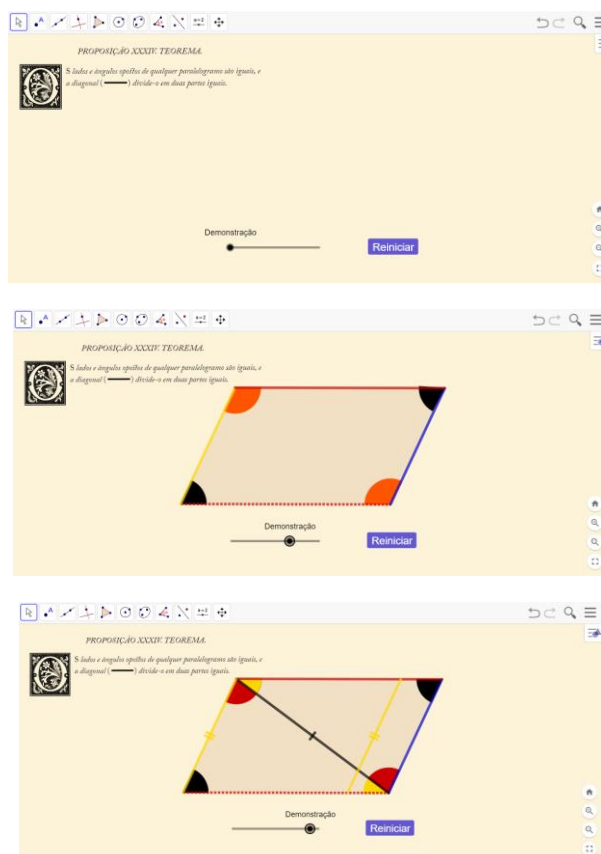
Fonte: Elaboração pelo autor (2023)

²⁶RGB é a abreviatura de um sistema de cores aditivas em que o vermelho, o verde e o azul são combinados de várias formas, de modo a reproduzir um largo espectro cromático. O sistema de cores RGB é encontrado em monitores de computador, televisão, câmeras digitais, entre outros. As cores são atingidas com a mistura das três cores primárias em um número definido numa escala de 0 a 255.

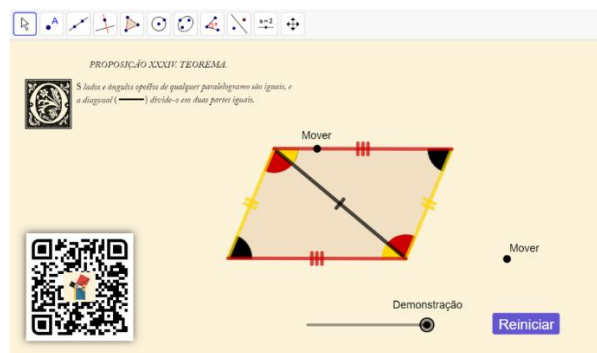
No GeoGebra as espessuras de linhas têm uma escala de 0 a 13. No nosso caso, escolhemos o valor de 12 para as linhas mais grossas e 6 para as mais finas. Para o formato das linhas, o *software* oferece 5 tipos que vão desde o mais contínuo ao mais discreto. Para reproduzir o estilo de Byrne, decidimos usar a primeira opção para linhas de traço contínuo, a terceira opção para as descontínuas de maior espessura e a quarta opção para as descontínuas de menor espessura.

Agora, tendo todas as considerações de aspecto visual da obra de Byrne sistematizada para ser usada no GeoGebra, retomemos o exemplo da Proposição XXXIV²⁷ (Figura 37) do Livro I da edição de Byrne citado anteriormente, de maneira a produzir no GeoGebra a demonstração, não apenas construindo os objetos geométricos seguindo o raciocínio de Byrne, indo além disso para criar uma demonstração dinâmica, em movimento, simulando esses processos de descompactar e empacotar as informações por meio dos ideogramas dinâmicos.

Figura 37. Construção e Demonstração da proposição XXXIV no GeoGebra



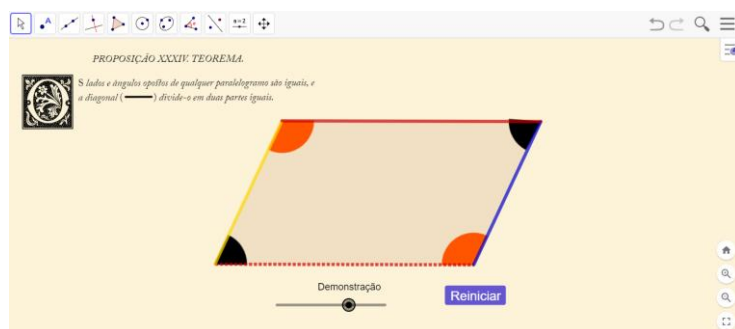
²⁷ Para efeitos da qualificação da pesquisa, não é possível tornar o arquivo público no site do GeoGebra; portanto, foi gravado um vídeo manipulando a demonstração no seguinte *link* privado no Youtube: <<https://youtu.be/HwaKAHTUKwg>>.



Fonte: Elaboração pelo autor (2023)

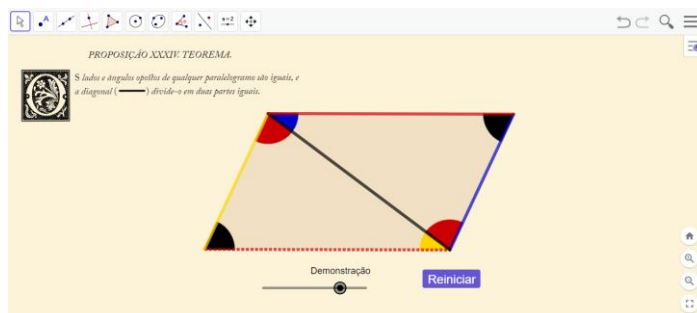
Como pode ser observado na Figura 37, se apresenta um exemplo de ideografia dinâmica materializada no GeoGebra a partir das informações históricas da obra de Oliver Byrne (1847). Nesse exemplo, foi possível ampliar as informações presentes na obra de Byrne em dois momentos. O primeiro se refere à construção da figura que será usada na análise (Figura 36), a qual apresenta as informações da hipótese, e não é contemplada na obra de Byrne. Logo, continuando com o movimento no ideograma, se chega na Figura 38, que é a original obra de Byrne. Após vem todo um movimento que faz o percurso da demonstração da tese na proposição XXXIV (Figura 39).

Figura 38. Representação geométrica da hipótese da Proposição XXXIV



Fonte: Elaboração pelo autor (2023)

Figura 39. Representação geométrica da tese da Proposição XXXIV



Fonte: Elaboração pelo autor (2023)

Ao reinterpretar o esquema visual proposto por Oliver Byrne com o uso do GeoGebra, as figuras geométricas ganharam um dinamismo que amplia significativamente as possibilidades pedagógicas e epistemológicas no ensino da Geometria. A utilização do GeoGebra não apenas respeita a essência visual do trabalho de Byrne, mas também oferece novas formas de interação com os conceitos geométricos, permitindo que o aprendiz explore, em tempo real, as transformações e relações entre elementos como ângulos, segmentos e polígonos. Por exemplo, ao dinamizar um triângulo retângulo em movimento, é possível observar, de maneira fluida, como a relação entre os lados é mantida de acordo com o teorema de Pitágoras. Essa abordagem transforma a Geometria de um estudo estático para um campo interativo, no qual a visualização dos processos torna-se tão importante quanto o resultado.

Além do GeoGebra, outros softwares de Geometria dinâmica, como o Desmos e o Cabri Geometry, também podem ser explorados para expandir a proposta visual e interativa de Byrne. Cada ferramenta oferece recursos únicos que permitem a manipulação e a experimentação com figuras geométricas, proporcionando uma experiência mais rica e acessível para diferentes perfis de estudantes. Ao incorporar essas tecnologias no ensino, cria-se um ambiente em que a Geometria deixa de ser vista como um conjunto de proposições abstratas para se tornar um espaço de descobertas e conexões ativas.

Esse movimento de trazer a obra de Byrne para a era digital, utilizando softwares de Geometria dinâmica, destaca não apenas a relevância atemporal de sua abordagem visual, mas também sua capacidade de inspirar novas formas de pensar e ensinar matemática. Ao integrar a Geometria com tecnologias contemporâneas, reafirma-se o papel da visualização dinâmica como uma ponte entre o pensamento matemático clássico e os desafios pedagógicos e epistemológicos da contemporaneidade.

É indudável o quanto Byrne revolucionou a Geometria clássica ao integrar cor e forma como ferramentas cognitivas. Nessa jornada, e tal vez contemporaneamente Jay Hambidge sistematizava uma visão dinâmica e processual da simetria. Sua obra, *Elementos da Simetria Dinâmica*, conecta proporções geométricas a forças naturais e culturais, demonstrando como a simetria pode ser compreendida como um fenômeno vivo, em constante transformação. A seguinte seção explora as contribuições de Hambidge, destacando como os Elementos da Simetria Dinâmica redefinem a Geometria não apenas como um estudo de formas, mas como uma ferramenta interpretativa para compreender e articular as estruturas fundamentais do mundo ao nosso redor.

4.2 Elementos da Simetria Dinâmica

[...] A Geometria não é estática como na época de Euclides, é dinâmica²⁸ (Alsina; Pérez; Ruiz, 1999, p. 15)²⁹

Uma interpretação dessa epígrafe poderia encapsular a transição histórica e epistemológica que será explorada nesta seção, como mais um exemplo da ideografia dinâmica para o ensino da Geometria por meio de informações advindas da história da matemática. Em tempos clássicos, a Geometria era compreendida como o estudo de formas estáticas, delineadas por proposições e demonstrações imutáveis. Contudo, com o avanço do pensamento matemático e tecnológico, a Geometria moderna deslocou-se para um paradigma dinâmico, onde simetrias não são apenas estados finais, mas processos em contínua transformação.

Nesta seção, exploraremos a jornada “da simetria estática à simetria dinâmica”, analisando como essa mudança reflete uma perspectiva mais ampla de compreender o mundo. A simetria, que antes era vista como uma propriedade fixa de figuras e objetos, passa a ser percebida como uma interação fluida entre elementos, revelando novas possibilidades na visualização e no entendimento geométrico. Essa perspectiva dinâmica dupla, por um rumo conceitual e outro tecnológico que abrem caminhos para conectar a Geometria a fenômenos naturais, sociais e culturais, redefinindo sua relevância na contemporaneidade.

Para isso, temos como ponto de partida a Obra *Os Elementos da Simetria Dinâmica* de Jay Hambidge a qual foi traduzida no Brasil pelos professores Iran Abreu Mendes e Larissa Mendes Cavalcante (2025)³⁰ em homenagem no centenário de Hambidge.

Para Alsina, Pérez e Ruiz (1999) a simetria dinâmica é o estudo de um dos aspectos mais deslumbrantes e úteis do mundo geométrico, pelo ato de contemplar as transformações. Ao contemplar o ambiente natural, o homem percebe intuitivamente o que se move, gira, semirrota ou se deforma [...] o desejo de descrever e se apropriar da essência desse mundo em movimento dá origem à simetria para falar, calcular e representar [...] o mundo das transformações, incluindo a simetria, é essencial no processo educacional.

²⁸ Tradução nossa do texto original: “*La geometría no es estática como en tiempos de Euclides, es dinámica*”

²⁹ ALSINA, Claudi; PÉREZ, Rafael; RUIZ, Ceferino. *Simetría Dinámica*. Madrid: Editorial Síntesis S.A., 1999.

³⁰ HAMBIDGE, Jay. *Elementos da Simetria Dinâmica* (trad. Iran Abreu Mendes Larissa Mendes Cavalcante). São Paulo: LF Editorial, 2025

Neste sentido, Mendes e Cavalcante (2025) expressam que se deve estudar simetria dinâmica como um processo de inovação matemática operacionalizado nas transformações dos objetos geométricos euclidianos em suas relações analógicas com o objetivo de apresentar o mundo em transformação natural, social e cultural, a partir de suas propriedades e combinações de formas e posições.

Segundo Mendes e Cavalcante (2025) a obra de Jay Hambidge foi publicada originalmente em inglês no ano de 1920, este livro apresenta uma linguagem moderna e didática para sua época, com o objetivo de explorar a simetria dinâmica como um exercício de aprendizado matemático aplicado à expressão estética. A obra investiga como as transformações geométricas contribuem para a construção estética de imagens e formas geométricas, que hoje são fundamentais para interpretar manifestações artísticas visuais. Exemplos dessas manifestações incluem cestarias, pinturas corporais, azulejos decorativos, ornamentos em rendas e bordados, fachadas arquitetônicas e diversas outras expressões artísticas que integram esse rico acervo estético.

O tema central da obra de Jay Hambidge explora a ideia de simetria dinâmica, destacando como é possível criar uma sensação de movimento entre formas para dar significado e expressão estética à arte visual, através de uma interpretação matemática, o caminho conceitual. Sob essa perspectiva, a simetria dinâmica é apresentada como um estudo focando nas transformações – ou seja, nos processos de translação, rotações e reflexos de imagens de objetos, tanto no plano quanto no espaço tridimensional.

Esses conceitos de translação, rotações e reflexos de imagens de objetos tenham sido usadas na linguagem coloquial, elas são termos com uma definição abstrata, são objetos matemáticos criados para organizar fenômenos que aparentemente não têm nada a ver uns com os outros. Assim sendo a transformação, como um todo, englobando todos esses processos de movimentos. Em cada caso, há um espaço cujos pontos, todos ao mesmo tempo, sofrem uma transformação. Portanto, o estudo da simetria dinâmica é de interesse no ambiente escolar.

Na versão original, o livro estava estruturado em duas partes: a primeira com lições numeradas de 1 a 12 e a segunda com lições de 1 a 9. Na edição brasileira, as lições foram reorganizadas em sequência contínua, totalizando 21 lições. É nessas lições que encontramos formas delineadas por proposições e figuras imutáveis, é dizer, estáticas no meio que foram produzidas, porém, com uma mensagem que é capaz de produzir o movimento na cognição dos leitores. Embora, com mídias contemporâneas possam ser produzidas ideografias dinâmicas

que possibilitem animar tais figuras estáticas de maneira tal, que possamos explicitar tal simetria dinâmica na obra de Jay Hambidge.

Para isso tomamos como base na lição 1, utilizando o potencial tecnológico do Manim para transformar essas ideias em animações matemáticas dinâmicas e interativas. A escolha pelo Manim como ferramenta para dinamizar as figuras da obra de Hambidge está fundamentada em suas capacidades técnicas, que permitem criar animações detalhadas e precisas, alinhadas às exigências pedagógicas e estéticas dessa proposta. A partir de scripts programados em Python, o Manim possibilita representar não apenas formas e proporções, mas também seus processos de construção e transformação ao longo do tempo. Isso enriquece a experiência de aprendizado ao permitir que os conceitos de simetria dinâmica sejam explorados de maneira visual, interativa e envolvente.

Lição 1: O quadrado (1 ou Unidade)

A Lição 1 introduz os conceitos fundamentais de simetria dinâmica, examinando sua manifestação tanto na natureza quanto na arte grega, sem recorrer a exemplos específicos. A proposta é explorar os alicerces teóricos que sustentam essa temática, com enfoque na Geometria como base de organização e harmonia visual.

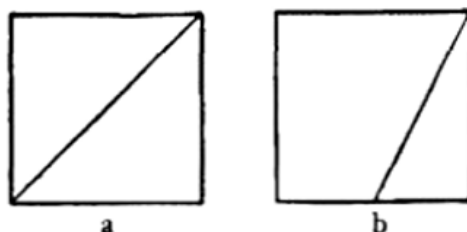
O quadrado, considerado a unidade fundamental, desempenha um papel central no estudo da simetria dinâmica. Sua estrutura simples e equilibrada serve como ponto de partida para a geração de formas mais complexas, como os retângulos raiz, derivados pela construção geométrica baseada na diagonal do quadrado. Além disso, a divisão dessa diagonal ao meio revela uma série de formas notáveis, que não apenas influenciam o design arquitetônico, mas também delineiam proporções na representação da figura humana.

A abordagem enfatiza o papel do quadrado como um elemento primordial na organização do espaço e na criação de proporções harmônicas. Essa relação intrínseca entre Geometria e estética reflete a busca pela ordem e beleza, elementos centrais tanto na observação da natureza quanto na produção artística das civilizações clássicas. Por meio dessa análise, a lição destaca como a simetria dinâmica é mais do que um princípio matemático, sendo também um recurso criativo que fundamenta a expressão artística e a concepção arquitetônica.

Assim sendo, as Bases da Simetria Dinâmica (Figura 40) são o quadrado e sua diagonal e o quadrado e sua diagonal pela metade. Isto, pelo fato de O quadrado e sua diagonal originam

a sequência dos retângulos de raiz. Quando a diagonal é dividida ao meio, surge uma série de formas significativas que fundamentam tanto o planejamento arquitetônico quanto as proporções da figura humana.

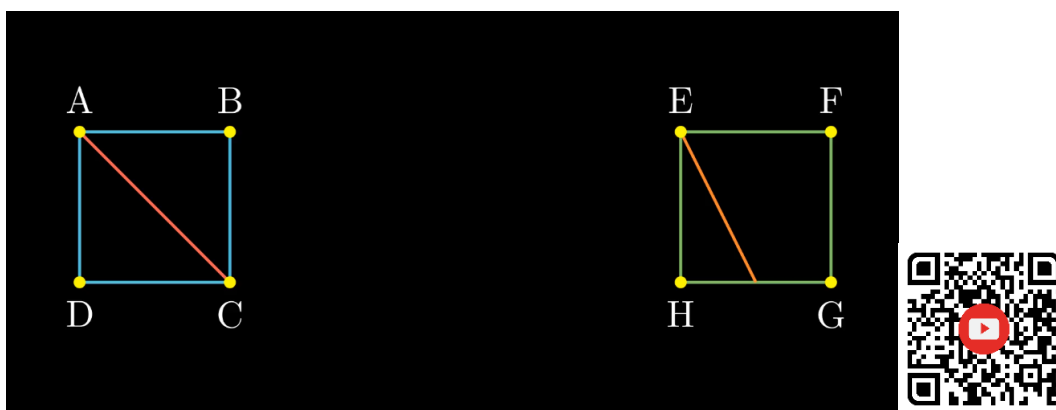
Figura 40. O Quadrado e sua diagonal e o quadrado e sua diagonal pela metade



Fonte: Hambidge (2025)

Embora, as explicações que justificam o fato do quadrado ser considerado a unidade fundamental e desempenha um papel central no estudo da simetria dinâmica, uma imagem estática, como a anterior, não reflete o argumento explanado por Hambidge. Compreendemos que a capacidade de imaginação do Hambidge, poderia estar além do seu tempo, e ele conseguia imaginar tais movimentos que são discutidos ao longo da obra. E assim, que materializamos por meio das Tecnologias Digitais, dar vida à figura 40 de maneira tal incluir outros elementos matemáticos na referida figura e ampliar possíveis discussão matemáticas a partir da nova dinâmica na figura 41.

Figura 41. O Quadrado e sua diagonal e o quadrado e sua diagonal pela metade em movimento



Fonte: Elaboração pelo autor (2025)

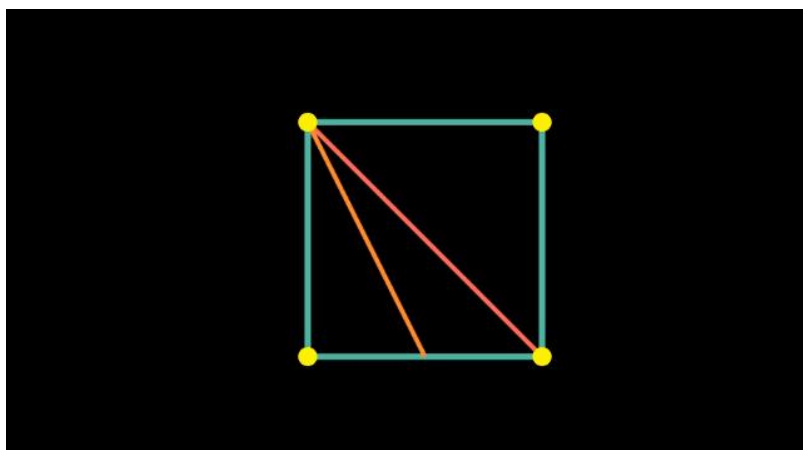
Na dinâmica Figura 41³¹ são definidos dois quadrados ABCD e EFGH unidade, é dizer de lado igual a 1, cada um com uma cor de borda diferente (azul para o primeiro quadrado e verde para o segundo), omitimos o preenchimento do quadrado para dar destaque à diagonal de

³¹ https://youtu.be/EhibNf_XLQA

cada um deles. Logo as Diagonais são criadas para os quadrados. A primeira diagonal é uma linha vermelha que vai do vértice A até C. A segunda diagonal é uma linha laranja que vai do canto vértice E até o ponto médio da base (segmento HG) desse quadrado.

Na animação temos o movimento dos Quadrados para uma nova posição, os quadrados e as diagonais são movidos para novas posições na tela, mantendo uma distância entre eles. Os pontos e rótulos também se movem para manter as relações espaciais dos quadrados. Após os quadrados se moverem para suas novas posições, os rótulos de alguns pontos são desfeitos com animações de desvanecimento (Figura 42), de maneira a centralizar a visão com objetivo de constatar que ambos quadrados se superpõem univocamente, de maneira tal que podemos agora centramos nas diagonais, outro elemento importante na simetria dinâmica.

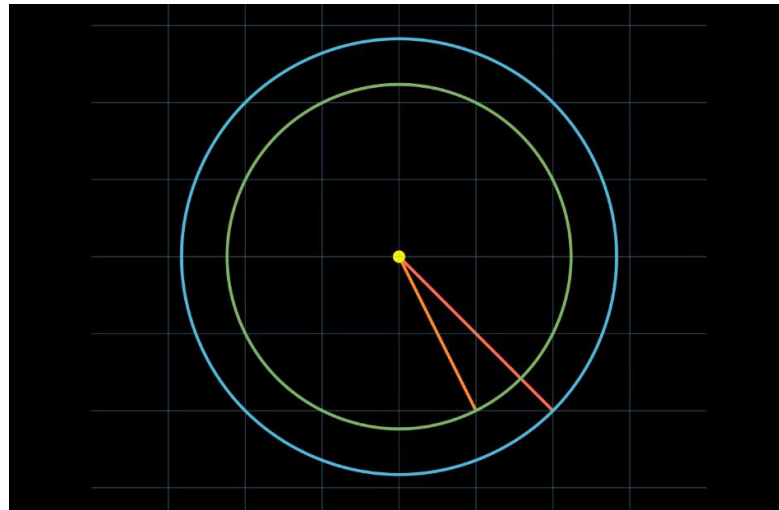
Figura 42. O Quadrado e sua diagonal e o quadrado e sua diagonal pela metade superpostos



Fonte: Elaboração pelo autor (2025)

Para isso, na animação deixarmos só o vértice A e E, de onde partem as diagonais e que estavam inicialmente em suas respectivas posições nos quadrados, são movidos para a origem (0, 0), centro da tela. Logo, um plano cartesiano é criado, sem eixos, apenas com uma malha. Depois, duas circunferências são criadas um em torno do ponto A (com o raio igual ao comprimento da primeira diagonal) e outro em torno do ponto E (com o raio igual ao comprimento da segunda diagonal) (Figura 43).

Figura 43. Circunferência com raio cada diagonal dos quadrados

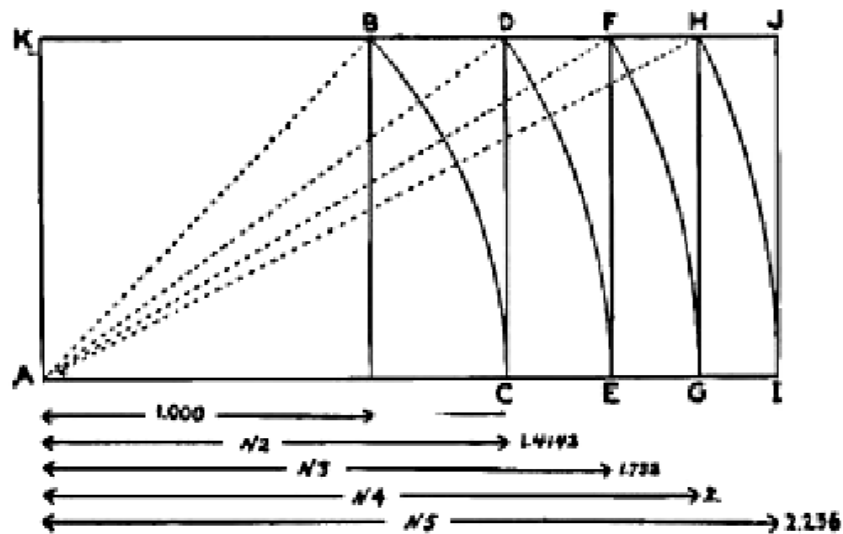


Fonte: Elaboração pelo autor (2025)

A animação termina com a visualização dessas circunferências, demonstrando que a diagonal do quadrado ABCD é maior que do quadrado EFGH. A animação de movimento dos quadrados, suas diagonais e pontos cria uma sensação de dinamismo e interação entre os elementos geométricos, que pode ser explorada para mobilizar outros conceitos geométricos, como relações entre retas, perpendicularidade, paralelismo, relação de posição entre circunferências, bem como outras transformações, como homotetia. Considerando o fator da homotetia como uma razão entre os comprimentos dos raios das circunferências.

Continuando na lição 1, Hambidge expressa que a relação entre o quadrado unidade e sua diagonal origina a série dos retângulos raiz, destacando o “raiz cinco”, no qual a razão entre a extremidade e o lado é equivalente a $1:\sqrt{5}$ (1:2,2360). Por ser a raiz quadrada de cinco uma fração infinita, essa relação é considerada irracional, embora os gregos a compreendessem como mensurável no contexto da área, não da linha. Essa abordagem permitiu aos artistas gregos explorarem diversas formas harmoniosas, inacessíveis ao design moderno. No retângulo raiz cinco, o quadrado na extremidade corresponde exatamente a um quinto da área do quadrado no lado, conferindo-lhe propriedades que permitem divisões em formas menores proporcionais. A construção desses retângulos pode ser visualizada de maneira simples, conforme demonstrado na figura 44.

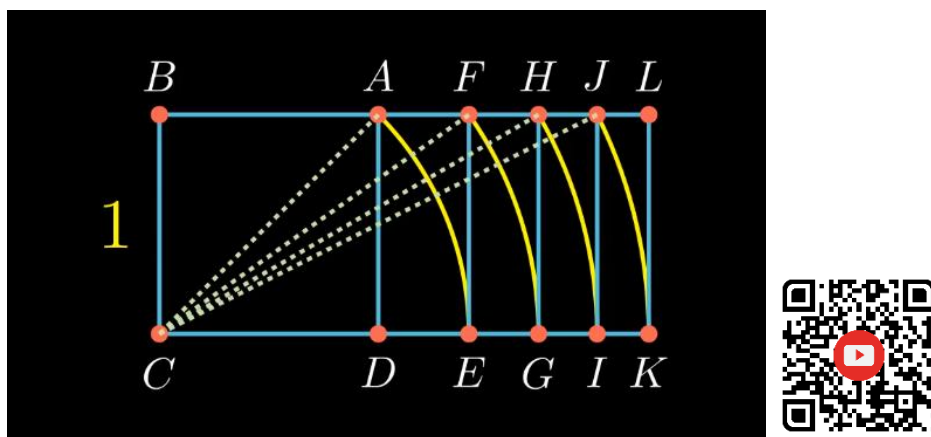
Figura 44. Construção de todos os retângulos de raiz



Fonte: Hambidge (2025)

Hambidge se refere-se que este método é simples para construir todos os retângulos de raiz, embora no seu livro como na tradução brasileira não seja descrito o caminho para a construção dos retângulos raiz. Para sanar tal lacuna, consideramos dinamizar a figura X4, a modo de simular os movimentos do lápis, régua e compasso para poder entender como é realizada a construção de tais retângulos, como pode ser observada na Figura 45³²

Figura 45. Animação da construção todos os retângulos de raiz



Fonte: Elaboração pelo autor (2025)

A animação apresenta uma sequência para explorar conceitos geométricos relacionados à construção do quadrado unidade e retângulos baseados em raízes quadradas sucessivas. Inicialmente, são introduzidos quatro vértices do quadrado unidade, os pontos surgem com uma

³² <https://youtu.be/avcUcO7YnCI>

transição suave, acompanhados por rótulos animados que indicam suas respectivas identificações, denominados A, B, C e D.

O quadrado unidade é então desenhado ao conectar os pontos com segmentos, exibidos com uma cor azul sem preenchimento³³. Após sua criação, o quadrado, seus vértices e rótulos são deslocados para uma nova posição no plano, por meio de uma translação. Em seguida, medidas dos lados e diagonais do quadrado são destacadas. Linhas pontilhadas representam as diagonais, enquanto pequenos *ticks* e setas duplas são animados para indicar os comprimentos, acompanhados de rótulos matemáticos que aparecem e são destacados com movimentos sutis.

A animação avança para explorar as diagonais, introduzindo o conceito de números irracionais associados à Geometria. Cada diagonal é traçada como uma linha pontilhada verde, e arcos são criados. Um ponto animado percorre cada arco, demonstrando graficamente as relações entre os comprimentos e a construção de novos vértices. Esses novos vértices são posicionados ao longo do plano e rotulados, expandindo a figura inicial.

À medida que novos pontos são introduzidos, a construção de retângulos com dimensões crescentes é realizada. Cada retângulo é formado por linhas animadas conectando os novos vértices, enquanto suas medidas são indicadas com precisão. Este processo é iterado, construindo figuras baseadas nas raízes quadradas $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ destacando a progressão geométrica e o crescimento das formas.

A animação culmina com a apresentação visual de retângulos sucessivamente maiores, construídos de forma dinâmica e acompanhados por elementos visuais que reforçam conceitos de proporção, simetria e relações matemáticas. Esta abordagem combina movimentos suaves e transições fluidas, criando uma experiência visual que conecta ideias matemáticas.

Embora, tanto na animação como no desenho original de Hambidge, chegasse até a construção do retângulo raiz cinco, esse processo pode ser repetido indefinidamente. Mas para fins práticos, não há necessidade de considerar retângulos além do retângulo de raiz cinco, isto é argumentado pelo referido autor, pelo fato de que na arte grega, é raro encontrar um retângulo que ultrapasse as proporções do retângulo de raiz cinco. Quando tal retângulo é encontrado, ele quase sempre é formado como uma composição, resultante da soma de dois retângulos menores. Um exemplo disso, quando temos o retângulo raiz quatro, ele resulta da soma de dois quadrados

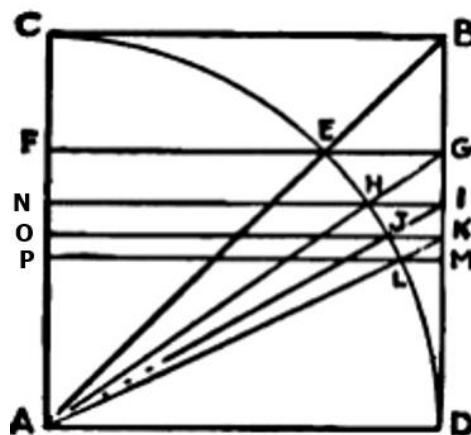
³³ Entendemos que todo polígono é constituído pela linha poligonal cerrada e pela área que esta delimita, no caso da animação, temos omitido tal área apenas para chamar atenção para os lados do quadrado e da diagonal.

Na animação podemos contemplar que a unidade o quadrado ABCD. Logo a diagonal dessa unidade a divide em dois triângulos retângulos, sendo que um deles está destacado com linhas mais espessas. Como a área de cada um dos quadrados formados pelos lados é igual a 1, a área do quadrado sobre a hipotenusa é 2. Assim, o comprimento do lado desse quadrado (a diagonal da unidade quadrada) é igual à raiz quadrada de 2. Como o lado da unidade quadrada mede 1, a proporção linear $1:\sqrt{2}$ é estabelecida.

Seguidamente, a diagonal da unidade quadrada é usada como a base de um retângulo cujos lados têm comprimentos iguais a 1 e $\sqrt{2}$. Este retângulo é chamado de retângulo raiz dois. Sua diagonal também divide a figura em dois triângulos retângulos, sendo um deles destacado por linhas mais fortes. Os quadrados dos dois lados menores desse triângulo têm áreas iguais a 1 e 2, respectivamente. Portanto, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dessas áreas: $1 + 2 = 3$. O comprimento do lado do quadrado sobre a hipotenusa (ou seja, a diagonal do retângulo raiz dois) é igual à raiz quadrada de 3. Dessa forma, a proporção linear $1:\sqrt{3}$ é estabelecida. Destacando que o processo para obter as demais progressões é análogo, com cada novo quadrado gerado é a base para construir as demais progressões e é um processo que se estende infinitamente.

Outra forma para construir estas progressões segundo Hambidge, na Figura 48, temos o quadrado ABCD, com CD representando um arco de um quarto de circunferência, cujo raio é AC. A diagonal AB do quadrado intercepta o arco no ponto E. A partir de E, traça-se a linha FG, paralela ao lado AD. Isso forma o retângulo ADFG, conhecido como retângulo de proporção raiz dois, contido dentro do quadrado ABCD.

Figura 48. Construções dos retângulos raízes inscritos no quadrado unidade

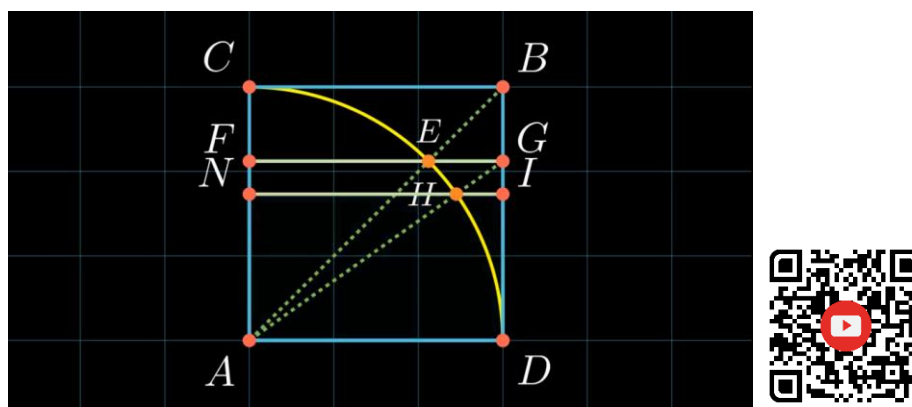


Fonte: Hambidge (2025)

O processo segue reiteradamente, agora com a diagonal do retângulo de proporção raiz dois, AG, intercepta o arco no ponto H. A partir de H, traça-se outra linha similar à anterior, resultando no retângulo de proporção raiz três, ADIN. Em seguida, a diagonal do retângulo de raiz três, AI, cruza o arco no ponto J, definindo o retângulo ADKO, com proporção raiz quatro.

Prosseguindo, a diagonal do retângulo de raiz quatro, AK, encontra o arco no ponto L. Traçando uma linha a partir de L, obtém-se o retângulo ADMP, que apresenta proporção raiz cinco. Esse processo pode ser continuado construindo retângulos com proporções baseadas nas raízes sucessivas. Além desse método, existem várias outras formas de construir retângulos de proporções baseadas em raízes, tanto dentro quanto fora de um quadrado unidade. O referido método é materializado dinamicamente na Figura 49³⁴.

Figura 49. Construções dos retângulos raízes inscritos no quadrado unidade dinamicamente



Fonte: Elaboração pelo autor (2025)

Assim, podemos considerar que a produção de ideografias dinâmicas das figuras geométricas na obra de Jay Hambidge utilizando o Manim revela as potentes capacidades técnicas dessa biblioteca para o ensino dinâmico da Matemática. Com recursos avançados de animação e uma sintaxe baseada em Python, o Manim permite não apenas criar representações visuais de conceitos matemáticos, mas também dinamizá-los, demonstrando processos e interações de forma clara e envolvente. Ao animar os princípios da *Simetria Dinâmica*, tornou-se possível ilustrar, em tempo real, como proporções harmônicas se manifestam em formas naturais, artísticas e arquitetônicas, conectando abstrações geométricas à realidade concreta.

O Manim destaca-se por sua flexibilidade e precisão, possibilitando a construção de animações detalhadas que exploram desde simples transformações geométricas até interações

³⁴ <https://youtu.be/7Eb1YznxBzw>

complexas entre elementos visuais e textuais. Esse dinamismo enriquece a compreensão de conceitos que, de outra forma, poderiam parecer abstratos ou estáticos para os aprendizes. Além disso, a possibilidade de integrar legendas, textos explicativos e cores personalizadas diretamente no fluxo da animação torna o Manim uma ferramenta poderosa para criar materiais didáticos de alta qualidade.

A produção de animações matemáticas com o Manim representa um marco na transição do ensino da Geometria estática para um fundamento dinâmica e interdisciplinar. Este capítulo descreveu as etapas desse processo, desde o aprendizado do Manim e sua sintaxe até a criação de roteiros didáticos que integrem conceitos matemáticos com aplicações práticas. Destacou-se que, embora o aprendizado inicial do Python e do Manim possa representar um desafio, esse obstáculo é superado por uma abundância de recursos online, incluindo tutoriais, cursos e manuais em português, o que facilita a adoção da ferramenta por professores brasileiros.

O roteiro, como elemento central na produção de animações, foi igualmente discutido, enfatizando a necessidade de um equilíbrio entre rigor matemático e criatividade pedagógica. Esse processo permite que professores construam conexões significativas entre os conceitos ensinados e aplicações práticas, enriquecendo a experiência de aprendizado tanto para si próprios quanto para os estudantes.

Portanto, a Geometria deixou de ser estática como na época de Euclides para se transformar em um campo dinâmico e interdisciplinar. A *Simetria Dinâmica* emerge como um tema riquíssimo para atividades escolares que interligam matemática, natureza, arte e ciência, permitindo aos alunos interpretar conceitos geométricos em múltiplos contextos históricos e culturais. Nesse sentido, a abordagem de Hambidge, aliada ao potencial técnico do Manim, não apenas redefine a relevância da Geometria na contemporaneidade, mas também aponta para um futuro no qual o ensino matemático está profundamente integrado à tecnologia e à criatividade interdisciplinar.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

[...] É verdade que "o pensamento e a linguagem são interdependentes... às vezes o pensamento busca nas linguagens uma forma que lhe convém, e às vezes a linguagem se encontra encenada no pensamento". Mas a linguagem em particular é um meio de comunicação, permitindo que o contato entre humanos ocorra de acordo com um código predefinido (Ifrah, 2001, p. 348)³⁵

A epígrafe de Georges Ifrah convida a refletir sobre a profunda interdependência entre pensamento e linguagem, especialmente no contexto da matemática. Ao longo deste trabalho, exploramos o modo como as linguagens visuais e dinâmicas proporcionadas por ferramentas tecnológicas contemporâneas têm o poder de transformar a maneira como concebemos, comunicamos e aprendemos matemática. Assim como a linguagem verbal é um código que conecta os humanos, as representações dinâmicas tornam-se pontes que conectam ideias, noções e conceitos, ampliando as fronteiras da comunicação no ensino e na aprendizagem de diversas áreas de conhecimento, entre estas a Matemática.

Nesse cenário a pesquisa desenvolvida teve como foco a Ideografia Dinâmica como um fundamento da História para o Ensino da Matemática, especificamente com o estudo da geometria euclidiana, com vistas a mostrar a potencialização de uma nova dinâmica que as tecnologias como GeoGebra e Manim podem outorgar às representações de ideias, noções e conceitos geométricos, para o alcance de um processo de ensino e aprendizagem mais significativo desse assunto – e assim fortalecer a compreensão dos conceitos necessários no estudo da geometria nos cursos de Licenciatura em Matemática.

No preâmbulo deste relatório doutoral foi apresentada uma síntese da trajetória acadêmica do autor e a motivação para a pesquisa. Logo, fizemos a abertura da temática pesquisada, abordando a justificativa, a questão central, a tese a sustentar, o objetivo geral e os objetivos específicos e o percurso metodológico que orientou a pesquisa e a redação do trabalho doutoral.

³⁵ IFRAH, Georges. (2001). The Universal History of Computing: From the Abacus to the Quantum Computer. Estado Unidos de America: John Wiley & Sons, Inc.

Destacamos a revisão analítica abrangente sobre a produção acadêmico-científica, proveniente tanto de fontes internacionais como de fontes nacionais, especificamente dos Anais do HTEM e do SNHM. Foram examinadas as contribuições dessa produção para a compreensão abrangente do tema em questão. Além disso, a pesquisa estendeu-se para incluir teses e dissertações disponíveis no CREPHIMat, visando ao reconhecimento das principais tendências e lacunas identificadas nesse *corpus* de produções.

Foi possível estabelecer um percurso histórico da necessidade de a humanidade expandir sua cognição por meio de artefatos, desde os rudimentares ossos, que representavam os primeiros esforços tecnológicos da humanidade, até as sofisticadas interações digitais da era atual. No primeiro movimento, foi traçado um panorama abrangente da história das tecnologias, destacando não apenas suas criações, mas também as reinvenções que moldaram a sociedade ao longo dos séculos. No segundo movimento, concentramo-nos no percurso da ideografia, revelando as diferentes fases do uso das tecnologias na representação e escrita de ideias e pensamentos. Esse movimento destaca a transição da humanidade das representações estáticas para as dinâmicas na escrita e na comunicação matemáticas, capturando a metamorfose das formas de expressão no decorrer do tempo. Ao descrevermos esse processo de mudança, almejamos não apenas compreender o passado, mas também lançar luz sobre as tendências e os desafios que moldarão o futuro das tecnologias e sua influência nas dinâmicas sociais e culturais.

Foi realizada a conjunção entre duas áreas de interesse no contexto do ensino da matemática: as Tecnologias Digitais e a História da Matemática, sob um fundamento que busca alicerçar-se em princípios epistemológicos da Ideografia Dinâmica, explorando as bases teóricas que sustentam a integração dessas disciplinas. As relações intrínsecas entre as Tecnologias Digitais e a História da Matemática foram empreendidas com o objetivo de desenvolver um modelo teórico, capaz de orientar práticas educacionais inovadoras e eficazes. Nesse cenário, a conjunção desses elementos revela-se pertinente para a construção de ações pedagógicas mais enriquecedoras e alinhadas com as demandas curriculares do ensino da matemática.

Foram explorados dois exemplos de possíveis ideografias dinâmicas a partir de fontes históricas e *softwares* como GeoGebra e Manim. Primeiramente, foi caracterizada a obra de Byrne (1847), que revolucionou a apresentação dos Elementos de Euclides ao substituir letras por formas e cores, trazendo acessibilidade visual ao ensino da geometria. Esse método é

ampliado com o uso do GeoGebra, que dinamiza as figuras originais, oferecendo uma experiência interativa e imersiva. Na sequência, abordamos a obra de Hambidge (1924, 2025) sobre Elementos da Simetria Dinâmica, conectando seus conceitos às proporções harmônicas presentes na arte, na natureza e na arquitetura. Por meio da animação de suas figuras com Manim, demonstramos o potencial dessa ferramenta para transformar ideias geométricas em movimentos que ilustram os processos por trás das formas. Assim, foi evidenciado o modo como tecnologias contemporâneas ampliam as fronteiras do ensino de geometria, tornando-a mais interativa, interdisciplinar e relevante para os desafios educacionais da atualidade.

Conforme descrito nos parágrafos anteriores, ficou evidente que os resultados alcançados na pesquisa mostraram, portanto, que as formas de escrever e comunicar o pensamento matemático não são mais estáticas como nas épocas de artefatos primitivos como os ossos, ou seus aperfeiçoamentos em forma de tabletes, pergaminhos e até mesmo o quadro nos tempos atuais. Com as revoluções tecnológicas, a humanidade foi aprimorando seus meios de comunicação como extensões da sua cognição, uma atividade totalmente dinâmica.

Além disso, verificamos na pesquisa que a maioria das investigações no ensino e na aprendizagem da matemática integram Tecnologias Digitais e História da Matemática; e que é relevante o uso de *softwares* de geometria dinâmica – entre os mais presentes encontra-se o GeoGebra. A partir de 2023, com o auge da programação em Python e a proliferação de vídeos digitais e animações matemáticas com Manim, tem sido percebido um aumento no interesse da pesquisa na elaboração e no uso de vídeos digitais no ensino da matemática.

Nessa mesma direção de reflexão conclusiva, notamos que o estudo reafirma que os exemplos de ideografias dinâmicas baseadas nas obras de Byrne (1847) e Hambidge (1924, 2025) são apenas fios de uma grande rede de possíveis exemplos que podem ser usados para trazer à vida novas formas de representar e abordar conteúdos matemáticos. Os exemplos tratados apontam abordagem para o ensino de geometria – e, portanto, usamos *softwares* com potencialidades para essa área de conhecimentos. Essas que citamos não são as únicas obras sobre a temática, e o GeoGebra e o Manim não são as únicas Tecnologias Digitais para criar ideografias dinâmicas.

Além de tudo o que foi dito, a pesquisa desenvolvida sobre a Ideografia Dinâmica buscou direcionar uma nova proposta de abordagem para o estudo de ideias, noções e conceitos matemáticos, conectando aspectos históricos e epistemológicos do assunto, com viés prático para se compreenderem os encaminhamentos teóricos relacionados a essa temática no processo

de ensinar geometria euclidiana tanto na educação básica como no curso de Licenciatura em Matemática.

Sendo assim, é possível assegurar que alcançamos nosso objetivo geral, respondemos à nossa pergunta de pesquisa e sustentação da tese. Nossa afirmação tomou como base os resultados obtidos em cada um dos capítulos citados deste trabalho.

Por fim, queremos destacar a frase atribuída a Ivan Pavlov: “Quem quiser ter ideias novas, leia livros velhos”. A referida frase diz que a leitura de clássicos pode inspirar novas soluções para os desafios contemporâneos. Foi assim que a leitura das obras *A ideografia dinâmica: rumo a uma imaginação artificial?* (Lévy, 1997, 2004); e *A máquina universo: criação, cognição e cultura informática* (Lévy, 1995) fez refletir sobre o problema da escrita e comunicação das ideias nos tempos digitais. As obras de Lévy eram utopia – atualmente são nossa realidade.

BIBLIOGRAFIA REFERENCIADA

- ABELSON, Harold; SUSSMAN, Gerald Jay; SUSSMAN, Julie. **Structure and Interpretation of Computer Programs**. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1996.
- AIRES, Luís M. **Uma História da Matemática. Dos Primeiros Agricultores a Alan Turing, dos Números ao Computador**. 2ª ed. Lisboa: Edições Sílabo, 2018. Disponível em: <https://static.fnac-static.com/multimedia/PT/pdf/9789726189305.pdf>. Acesso em: 8 set. 2023.
- ALBERTÍ, Miquel. **Planeta matemático: un viaje numérico por el mundo**. España: RBA Coleccionables, 2015.
- ALSINA, Claudi; PÉREZ, Rafael; RUIZ, Ceferino. **Simetría Dinámica**. Madrid: Editorial Síntesis S.A., 1999.
- ALEXANDERSON, Gerald L. Reviewed of The First Six Books of the Elements of Euclid |. **Mathematical Association of America**, 2010. Disponível em: <https://www.maa.org/publications/maa-reviews/the-first-six-books-of-the-elements-of-euclid>. Acesso em: 15 ago. 2023.
- ALMEIDA, Manoel de Campos. Dos rabiscos às figuras geométricas: proto-estética ou protos-símbolos? Visões da Neurociência. In: XIV Seminário Nacional de História da Matemática. 2023, Maceió. **Anais [...]**. Maceió: SBHMat, 2023. p. 1–15.
- ARNAL-BAILERA, Alberto; OLLER-MARCÉN, Antonio M. Construcciones geométricas en GeoGebra a partir de diferentes sistemas de representación: un estudio con maestros de primaria en formación. **Educación Matemática**, v. 32, n. 1, p. 67–98, 2020. <https://doi.org/10.24844/EM3201.04>.
- ARTIGUE, Michèle. Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, v. 7, n. 3, p. 245–274, 2002. <https://doi.org/10.1023/A:1022103903080>.
- BARROS, José D’Assunção. A trama Polifônica das grandes Revoluções Tecnológicas – da revolução agrícola às revoluções industriais e à revolução digital. **REMATEC**, Belém, v. 18, n. 44, p. e2023002, 2023. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n44.pe2023002.id505>.
- BOCKORNI, Beatriz Rodrigues Silva; GOMES, Almiralva Ferraz. A amostragem em Snowball (bola de neve) em uma pesquisa qualitativa no campo da administração. **Revista de Ciências Empresariais da UNIPAR**, v. 22, n. 1, 2021. <https://doi.org/10.25110/receu.v22i1.8346>.
- BOLONDI, Giorgio; LUIGINI, Alessandro. Byrne’s Euclidean Geometry Revisited with Geogebra. In: COCCHIARELLA, Luigi (org.). **ICGG 2018 - Proceedings of the 18th International Conference on Geometry and Graphics**. Advances in Intelligent Systems and Computing Cham: Springer International Publishing, 2019. v. 809p. 1468–1473. https://doi.org/10.1007/978-3-319-95588-9_129.
- BRASIL. **Ministério da Educação. Base Nacional Curricular Comum – BNCC**. Brasília, 2017.

BYRNE, Oliver. **The first six books of the elements of Euclid, in which coloured diagrams and symbols are used instead of letters for the greater ease of learners**. London: William Pickering, 1847. <https://doi.org/10.5479/sil.317414.39088000863027>.

CASTILLO, Luis Andres. **Contribuições de um ambiente virtual para a divulgação das pesquisas em história da matemática no Brasil**. 2020. 187 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Belém, 2020.

CASTILLO, Luis Andrés; MENDES, Iran Abreu. El uso del ambiente virtual CREPHIMAT para promover la historia en la enseñanza de la matemática. **Paradigma**, v. 41, Número Extra 1, p. 88–115, 2020. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2020.p88-115.id833>

CULLEN, Craig J.; HERTEL, Joshua T.; NICKELS, Megan. The Roles of Technology in Mathematics Education. **The Educational Forum**, v. 84, n. 2, p. 166–178, 2020. <https://doi.org/10.1080/00131725.2020.1698683>.

CUOCO, Albert A.; GOLDENBERG, E. Paul. A Role for Technology in Mathematics Education. **The Journal of Education**, v. 178, n. 2, p. 15–32, 1996.

DEBORAH A. KENT; DAVID J. MURAKI. A Geometric Solution of a Cubic by Omar Khayyam ... in Which Colored Diagrams Are Used Instead of Letters for the Greater Ease of Learners. **The American Mathematical Monthly**, v. 123, n. 2, p. 149, 2016. <https://doi.org/10.4169/amer.math.monthly.123.2.149>.

DIGREGORIO, Maria Rosaria. When Everything goes wrong Make a Diagram. In: CECCARELLI, Nicolò; JIMÉNEZ-MARTÍNEZ, Carlos (org.). **2CO Communicating Complexity. Contributions from the 2017 Tenerife Conference**. [s.l.] : Vicerrectorado de Docencia. Universidad de La Laguna. Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Laguna, 2020. <https://doi.org/10.25145/b.2COcommunicating.2020>.

EVES, Howard. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula**. São Paulo: Editora Atual, 1994.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. 5. ed. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

FUJITA, Taro. The order of theorems in the teaching of Euclidean geometry: Learning from developments in textbooks in the early 20th Century. **Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**, v. 33, n. 6, p. 196–203, 2001. <https://doi.org/10.1007/BF02655671>.

GARCIADIEGO, Alejandro R. Los Elementos de Euclides, una introducción. **Revista Brasileira de História da Matemática**, p. 333–348, 2007. <https://doi.org/10.47976/RBHM2007vn25>.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

HAUK, Shandy; SLATEN, Allison; PETERS, Elisabeth; SLATEN, Kelli. Color work to enhance proof-writing in geometry. **Journal of the California Mathematics Project**, v. 6, n. 1, p. 12–12, 2013.

HAMBIDGE, Jay. **Elementos da Simetria Dinâmica**. (trad. Iran Abreu Mendes Larissa Mendes Cavalcante). São Paulo: LF Editorial, 2025

HAMBIDGE, Jay. **The elements of dynamic symmetry**. Courier Corporation, 1924.

HAWES, Susan M.; KOLPAS, Sid. Oliver Byrne: The Matisse of Mathematics. **Mathematical Association of America**, 2015. Disponível em: <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/oliver-byrne-the-matisse-of-mathematics-biography-1810-1829>. Acesso em: 14 ago. 2023.

ISODA, Masami. Developing the Curriculum for Curves Using History and Technology. (W. C. Yang, K. Shirayanagi, S. C. Chu, G. Fitz-Gerald, Org.) 1998, **Anais [...]**. [s.l: s.n.] p. 82–89.

JACKSON, Tom. **Matemáticas. Una Historia Ilustrada de los Números**. 1ª edição ed. Librero, 2016.

JANKVIST, Uffe Thomas. A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. **Educational Studies in Mathematics**, v. 71, n. 3, p. 235–261, 2009. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9174-9>.

KIDRON, Ivy. Polynomial Approximation of Functions: Historical Perspective and New Tools. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**, v. 8, n. 3, p. 299–331, 2003. <https://doi.org/10.1023/B:IJCO.0000021793.71677.cd>.

LÉVY, Pierre. **A Máquina Universo: Criação, Cognição e Cultura Informática**. Lisboa: Instituto Piaget, 1995.

LÉVY, Pierre. **Ideografia Dinâmica: Para uma imaginação artificial?** Lisboa: Instituto Piaget, 1997.

LÉVY, Pierre. **A ideografia dinâmica: rumo a uma imaginação artificial?** São Paulo: Edições Loyola, 2004.

LÉVY, Pierre. **As tecnologias da inteligência: O futuro do pensamento na era da informática**. São Paulo: Editora 34, 2010.

MACKAY, John Sturgeon. **The Elements of Euclid, books I to VI., with deductions, appendices and historical notes**. London: W. & R. Chambers, 1884. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=7QMFAAAAQAAJ>.

MCLUHAN, Marshall. **A Galáxia de Gutenberg: a formação do homem tipográfico**. São Paulo: EdUSP, 1972.

MCLUHAN, Marshall. **Os Meios de Comunicação Como Extensões do Homem**. São Paulo: Editora Cultrix, 1969.

MENDES, Iran Abreu. A investigação Histórica como Agente de Cognição Matemática na sala de aula. In: MENDES, Iran Abreu; FOSSA, John; NÁPOLES VALDÉS, Juan E. (org.). **A História como um Agente de Cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Editora Sulina, 2006. p. 79–136.

MENDES, Iran Abreu. **Investigação Histórica no Ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009.

MENDES, Iran Abreu. Pesquisa em história da Matemática na Pós-graduação Brasileira e suas dimensões epistemológica, sociológica e pedagógica. **UNIÓN**, n. 30, p. 187–190, 2012.

MENDES, Iran Abreu. Cognição e Criatividade na Investigação em História da Matemática : contribuições para a Educação Matemática. **ALEXANDRIA - Revista de Educação em Ciência e Tecnologia**, v. 6, n. 1, p. 185–204, 2013.

MENDES, Iran Abreu. **Cartografias da produção em História da Matemática no Brasil: um estudo centrado nas dissertações e teses defendidas entre 1990-2010**. 2014. Relatório de Pesquisa - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

MENDES, Iran Abreu. **História da matemática no ensino: Entre trajetórias profissionais, epistemológicas e pesquisas**. São Paulo: Livraria da Física/SBHMate, 2015.

MENDES, Iran Abreu. História para o ensino da matemática: uma reinvenção didática para a sala de aula. **Revista COCAR**, Belém, v. Edição Esp, n. 3, p. 145–166, 2017.

MENDES, Iran Abreu. **Uma História das pesquisas em História da Matemática no Brasil: produções, disseminações e contribuições à formação de professores de Matemática**. 2018a. Projeto de Pesquisa - Universidade Federal do Pará, Belém, 2018a.

MENDES, Iran Abreu. **História para o Ensino de Matemática na Formação de Professores e na Educação Básica: uma Análise da Produção Brasileira (1990 – 2018)**. 2018b. Projeto de Pesquisa - Universidade Federal do Pará, Belém, 2018b.

MENDES, Iran Abreu. Pesquisa sobre história da Matemática nas dissertações e teses. *In*: MENDES, Iran Abreu; MOREY, Bernadete (org.). **Debates Temáticos sobre Pesquisa em História da Matemática e da Educação Matemática**. São Paulo: Livraria da Física, 2018c. p. 135–176.

MENDES, Iran Abreu. Histórias para o Ensino de Matemática em saberes multidimensionais. *In*: VALENTE, Wagner Rodrigues (org.). **Ciências da Educação, campos disciplinares e profissionalização: Saberes em debate para a formação de professores**. São Paulo: Livraria da Física, 2020a.

MENDES, Iran Abreu. History for the Teaching of Mathematics: Transformation and Mobilization of Mathematical Knowledge for School. **Pedagogical Research**, v. 5, n. 3, p. em0072, 2020b. <https://doi.org/10.29333/pr/8284>.

MENDES, Iran Abreu. Sobre processos criativos nas histórias da criação matemática. *In*: PEREIRA, Ana Carolina Costa; MARTINS, Eugeniano Brito (org.). **Investigações científicas envolvendo a história da matemática sob o olhar da pluralidade**. Curitiba: Editora CRV, 2021. p. 63–74.

MENDES, Iran Abreu. História para o ensino de matemática: fundamentos epistemológicos, métodos e práticas. **COCAR**, Belém, v. Edição Esp, n. 14, p. 01–26, 2022a.

MENDES, Iran Abreu. **Usos da História no Ensino de Matemática: reflexões teóricas e experiências**. São Paulo: Livraria da Física, 2022b.

MENDES, Iran Abreu. Society, Culture, and Cognition: Interconnections in Mathematics Education. **PARADIGMA**, v. XLIII, n. 2, p. 870–897, 2022c. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2022.p870-897.id1256>.

MENDES, Iran Abreu. A Investigação Histórica como Agente de Cognição Matemática na Sala de Aula. *In: A Histórica como um Agente de Cognição na Educação Matemática*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2023a.

MENDES, Iran Abreu. Sobre escritas ideográficas dinâmicas da história da Matemática. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, Belém, v. 18, n. 44, p. e2023011, 2023b. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n44.pe2023011.id515>.

MENDES, Iran Abreu. História como um agente cognitivo de aprendizagem matemática compreensiva. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 25, n. 2, p. 329–355, 2023c. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i1p329-355>.

MENDES, Iran Abreu. História no Ensino da Matemática: trajetórias de uma epistemologia didática. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura - REMATEC**, v. 8, n. 12, p. 66–85, 2013.

MISFELDT, Morten; JANKVIST, Uffe Thomas. Instrumental Genesis and Proof: Understanding the Use of Computer Algebra Systems in Proofs in Textbook. *In: BALL, Lynda; DRIJVERS, Paul; LADEL, Silke; SILLER, Hans-Stefan; TABACH, Michal; VALE, Colleen (org.). Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education*. ICME-13 MonographsCham: Springer International Publishing, 2018. p. 375–385. https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4_22.

MITCHAM, Carl. **Thinking through Technology: The Path between Engineering and Philosophy**. 1ª ed. Chicago: The University of Chicago Press, 1994.

MONTOITO, Rafael; GARNICA, Antonio Vicente Marafioti. Ecos de Euclides: notas sobre a influência d’Os Elementos a partir de algumas doutrinas filosóficas. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 16, n. 1, 2014. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/16736>. Acesso em: 14 ago. 2023.

MORENO-ARMELLA, Luis; HEGEDUS, Stephen J.; KAPUT, James J. From static to dynamic mathematics: Historical and representational perspectives. **Educational Studies in Mathematics**, v. 68, n. 2, p. 99–111, 2008. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9116-6>.

MUMFORD, Lewis. **Techics and Civilization**. 7. ed. London: Routledge & Kegan Paul LTD, 1955

NCTM. **Principles and Standards for School Mathematics**. Reston: The National Council of Teachers of Mathematics, 2000.

NICKELS, Megan; CULLEN, Craig J. Mathematical Thinking and Learning Through Robotics Play for Children With Critical Illness: The Case of Amelia. **Journal for Research in**

Mathematics Education, v. 48, n. 1, p. 22–77, 2017. <https://doi.org/10.5951/jresemathe-duc.48.1.0022>.

PAPADOPOULOS, Ioannis. How Archimedes Helped Students to Unravel the Mystery of the Magical Number Pi. **Science & Education**, v. 23, n. 1, p. 61–77, 2014. <https://doi.org/10.1007/s11191-013-9643-0>.

PASTOR, J. Rey; BABINI, J. **Historia de la matemática. Volumen 1**. Barcelona: Gedisa, 2006.

PICKOVER, Clifford A. **El libro de las matemáticas. De Pitágoras a la 57ª dimensión**. Trad. Miguel Serrano Larraz, Sonia Saura Martinez, Joaquín Loste Ramos. Nueva York: Sterling Publishing Co., 2009.

PINTO, Hélder. Os Elementos de Euclides para o século XXI, um “upgrade” tecnológico em imagens interativas. **REMATEC**, v. 18, n. 44, p. e2023009, 2023. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2023.n44.pe2023009.id513>.

PREINER, Judith. **Introducing Dynamic Mathematics Software to Mathematics Teachers: the Case of GeoGebra**. 2008. 265f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Paris Lodron de Salzburgo, Salzburgo, 2008.

RIZOS, Ioannis; FOYKAS, Evaggelos. Utilization of “Byrne’s Euclid” in the Teaching of Geometry to Students with Special Learning Difficulties: A Qualitative Research. **European Journal of Education and Pedagogy**, v. 4, n. 2, p. 139–148, 2023. <https://doi.org/10.24018/ejedu.2023.4.2.623>.

ROUGEUX, Nicholas. **Making of Byrne’s Euclid**. 2018. Disponível em: <https://www.c82.net/blog/?id=79>. Acesso em: 15 ago. 2023.

SÁNCHEZ, Clara Helena. La historia como recurso didáctico: el caso de los Elementos de Euclides. **Tecné Episteme y Didaxis: TED**, n. 32, 2012. <https://doi.org/10.17227/ted.num32-1860>.

SEVERINO, Antônio Joaquim. **Metodologia do trabalho científico** [livro eletrônico]. 1. ed. São Paulo: Cortez, 2013.

SLYUSAREV, Sergey. **MetaPost + ConTeXt rendition of Oliver Byrne’s ”The first six books of the Elements of Euclid”**. 2017. Disponível em: <https://github.com/jemmybutton/byrne-euclid>. Acesso em: 16 ago. 2023.

SLYUSAREV, Sergey. **“Byrne” v. 0.2.2 package for METAPOST and LATEX**. 2022. Disponível em: <https://github.com/jemmybutton/byrne-latex>.

STEWART, Ian. **Em busca do infinito: Uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos**. 1ª edição ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2014.

TAYLOR, Robert. **The Computer in the School: Tutor, Tool, Tutee**. New York, 1980

THOMSEN, Marianne; JANKVIST, Uffe Thomas; CLARK, Kathleen Michelle. The interplay between history of Mathematics and Digital Technologies: a review. **ZDM – Mathematics Education**, 2022. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01368-0>.

TUFTE, Edward. **Envisioning Information**. Graphics Pr, 1990. Disponível em: https://www.edwardtufte.com/tufte/books_ei. Acesso em: 13 ago. 2023.

TURING, Dermot. **A História da Computação**. 1ª ed. São Paulo: M.Books, 2019.

VRIES, Marc J. De. **Teaching about Technology: An Introduction to the Philosophy of Technology for Non-philosophers: vol. 27**. 2005ª edição ed. Dordrecht: Springer, 2005.