

***Radiação emitida por uma carga elétrica orbitando um buraco negro de Schwarzschild segundo teoria quântica de campos***

***Rodrigo Murta de Andrade Figueira***

*Orientador: Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino*

**Banca Examinadora**

**Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino (Orientador)**

**Prof. Dr. George Emanuel Avraam Matsas**

**Prof. Dr. Jorge Castiñeiras Rodríguez**

**Prof. Dr. Danilo Teixeira Alves (Suplente)**

**Prof. Dr. Van Sérgio da Silva Alves (Suplente)**

*Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Pará para obtenção do Título de Mestre em Física*

***Belém  
Dezembro de 2004.***



## Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Luís Carlos Bassalo Crispino pela orientação contínua e paciente, sempre solícito e atencioso.

A minha mãe Cláudia Murta, cuja existência é fundamental para minha linha de mundo, por tudo que me proporcionou.

A minha avó Maria, por ser a melhor avó.

Aos meus irmãos Márcio e Daniel, e aos pais Ivan e Alípio, por todo o apoio.

A Liane, inestimável companheira, por todo o apoio, por sempre ter acreditado em mim e ouvido minhas descobertas com atenção e carinho.

Aos meus professores do Colégio Piracicabano pela educação diferenciada, em especial Edivaldo Bortoleto, Estela Vieira e James Rogado.

A Carl Sagan, Richard Feynman e Carlos Murta por fomentarem minha curiosidade científica, em uma sociedade que ainda não a valoriza adequadamente.

A meus tios Carlos e Felipe Murta, pelo apoio e por me mostrarem novos horizontes, além dos de eventos, possibilitando aplicar minha forma física de pensar em outros campos, que não o de teoria.

Aos professores Van Sérgio Alves, João dos Santos Protázio, Jessé Costa, Danilo Alves, Paulo de Tarso e José Maria Filardo Bassalo pela participação fundamental em minha formação.

Aos professores Sérgio Vizeu e Marcelo Lima pela atenção incansável em nossas discussões físico-filosóficas, sempre dispostos a debater fundamentos e paradoxos, tornando assim minha física mais clara e interessante.



# Resumo

Desenvolvemos a quantização do campo vetorial não massivo no espaço-tempo de Minkowski e no espaço-tempo de Schwarzschild, e calculamos a potência irradiada por uma carga elétrica em órbita circular em torno de um objeto com massa  $M$  em ambos os espaços-tempos. Em Minkowski é encontrada a expressão analítica da potência irradiada utilizando teoria quântica de campos e assumindo gravitação newtoniana. O resultado obtido é equivalente ao resultado clássico, dado que o cálculo é realizado em nível de árvore. Dadas as dificuldades matemáticas encontradas ao se tentar obter soluções expressas em termos de funções especiais conhecidas, em Schwarzschild o problema é abordado de duas formas: solução analítica no limite de baixas frequências, e resolução numérica. O primeiro caso serviu como cheque de consistência para o método numérico. Em Schwarzschild o cálculo também é realizado utilizando teoria quântica de campos em nível de árvore, e a expressão da potência é encontrada analiticamente na aproximação de baixas frequências e através de método numérico. Após a comparação dos resultados, concluímos que, para uma mesma velocidade angular de rotação da carga (medida por observadores estáticos assintóticos), a potência irradiada em Minkowski é maior que a potência irradiada em Schwarzschild.

Palavras chave: Teoria quântica de campos, espaços-tempos curvos, buraco

negro, radiação eletromagnética.

Áreas de conhecimento: 1.05.01.02-9, 1.05.01.03-7, 1.05.02.01-7, 1.05.03.01-3.

# Abstract

We perform the quantization of the massless vector field in Minkowski and Schwarzschild spacetimes, and calculate the radiated power by an electric charge in a circular orbit around an object with mass  $M$  in both spacetimes. In the Minkowski case we find the analytical expression for the radiated power using quantum field theory and assuming Newtonian gravity. It coincides with classical Larmor's result, since the calculations are performed at the tree level. Since in the Schwarzschild case it is not possible to express the solution of the radial equation in terms of well known special functions, we adopt the following two approaches: analytical approximation in the low frequency limit and numerical computing. The first approach was used as a consistency check for the numerical one. We also use quantum field theory at tree level in the Schwarzschild case, and the radiated power is obtained both in the low frequency limit as well as numerically. After comparing the results, we conclude that for the same angular velocity of the charge (as measured by asymptotical static observers), the radiated power in Minkowski spacetime is bigger than in Schwarzschild case.

Keywords: Quantum field theory, curved spacetimes, black hole, electromagnetic radiation.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Quantização do campo eletromagnético no espaço-tempo de Minkowski</b>	<b>4</b>
2.1 Soluções clássicas em Minkowski . . . . .	5
2.2 Normalização das soluções clássicas em Minkowski . . . . .	9
2.3 Quantização de Gupta-Bleuler em Minkowski . . . . .	13
<b>3 Quantização do campo eletromagnético no espaço-tempo de Schwarzschild</b>	<b>18</b>
3.1 Soluções clássicas em Schwarzschild . . . . .	19
3.2 Soluções físicas clássicas em Schwarzschild no limite assintótico . . .	22
3.3 Soluções físicas clássicas em Schwarzschild no limite de baixas frequências . . . . .	24



3.4	Normalização das soluções físicas clássicas em Schwarzschild no limite assintótico . . . . .	25
3.5	Normalização das soluções físicas clássicas em Schwarzschild no limite de baixas frequências . . . . .	28
3.6	Quantização de Gupta-Bleuler em Schwarzschild . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Radiação eletromagnética emitida por uma carga girando ao redor de um objeto estelar</b>	<b>33</b>
4.1	Potência irradiada segundo teoria clássica de campos em Minkowski, assumindo gravitação newtoniana . . . . .	34
4.2	Potência irradiada usando teoria quântica de campos em Minkowski, assumindo gravitação newtoniana . . . . .	35
4.3	Potência irradiada usando teoria quântica de campos em Schwarzschild, assumindo relatividade geral . . . . .	39
4.3.1	A relação entre $R_S$ e $\Omega$ , segundo a relatividade geral . . . . .	39
4.3.2	Cálculo da potência irradiada no limite de baixas frequências	43
4.3.3	Cálculo numérico da potência irradiada . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Análise e comparação dos resultados</b>	<b>49</b>
<b>6</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>58</b>
<b>A</b>	<b>Cálculo numérico e gráficos</b>	<b>60</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Um dos grandes desafios da ciência no século XXI tem sua origem nos tempos de Euclides. Trata-se da compreensão da natureza do espaço. Como a geometria pode contribuir para esclarecer a natureza do espaço e do tempo? Qual a geometria do nosso universo?

Com a percepção pelos matemáticos da não necessidade do quinto postulado de Euclides para a construção de uma geometria coerente, novas possibilidades surgiram para a descrição do espaço-tempo em que vivemos. Os físicos passaram a se questionar a respeito de qual seria a real geometria do nosso universo. Por meio de experimentos como lentes gravitacionais, estrelas binárias, medição da dilatação Shapiro do tempo [1] e a comparação da passagem do tempo em relógios atômicos terrestres e em órbita da Terra (Gravity Probe A [2]), constatações inusitadas, se comparadas com o que se esperaria pela geometria euclidiana, foram comprovadas. Atualmente, através de experimentos em desenvolvimento como o LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) [3], Gravity Probe B [2] e mensuração da interação gravitacional a distâncias submilimétricas, muitos esforços

vêm sendo feitos para tentar extrair mais informações a respeito da geometria espaço-temporal do universo, assim como testar o domínio de validade da teoria da relatividade geral de Einstein.

Uma das consequências da teoria da relatividade geral é a possibilidade de existência de buracos negros. Uma das propriedades mais intrigantes destes objetos, é sem dúvida o fato de levar a teoria da relatividade geral ao extremo, mostrando os limites teóricos do nosso conhecimento acerca do espaço-tempo. Aqui abordaremos o fenômeno da irradiação de energia eletromagnética por uma carga orbitando um buraco negro de Schwarzschild seguindo os preceitos da teoria quântica de campos em espaços curvos (TQCEC). Por TQCEC, entende-se uma teoria quântica de campos utilizando-se o espaço-tempo fornecido pela relatividade geral como pano de fundo para o desenrolar das interações quânticas. Mesmo tratando-se de uma teoria quântica de campos efetiva, não podendo ser aplicada para o regime extremo da escala de Plank, a TQCEC tem em seu arcabouço importantes previsões como a criação de partículas em universos em expansão [4], a radiação térmica mensurada por observadores acelerados [5] (efeito Fulling-Davies-Unruh), e a evaporação de buracos negros ocasionada por efeito quântico [6].

A quantização do campo eletromagnético em coordenadas polares esféricas no espaço-tempo de Minkowski é desenvolvida analiticamente. Já no espaço-tempo de Schwarzschild, algumas dificuldades foram encontradas ao tentar determinar analiticamente a expressão radial dos modos normais associados a este campo. Para que fosse possível dar continuidade no desenvolvimento do problema, utilizamos duas estratégias de resolução no caso em Schwarzschild. Primeiramente, encontramos as soluções dos modos nos limites assintóticos, nos quais a coordenada radial  $r$  se encontra ou muito próxima do horizonte de eventos do buraco negro

ou muito distante deste, para em seguida encontrar a solução dos modos para o caso de baixas frequências. A segunda estratégia foi a determinação numérica dos modos através do programa de computação Mathematica versão 5.0. Após termos as soluções das equações de campo nos respectivos espaços-tempos em questão, desenvolvemos o cálculo da potência irradiada para cada um dos casos, assim como medida por observadores estáticos assintóticos.

No capítulo 2 calcularemos as soluções clássicas do campo eletromagnético em Minkowski, para em seguida encontrarmos as constantes de normalização e efetuarmos a quantização, expandindo os modos em função de operadores criação e aniquilação. No capítulo 3 seguiremos o mesmo procedimento do capítulo antecedente, com a diferença que estaremos lidando com o espaço-tempo de Schwarzschild. Em seguida, no capítulo 4, calcularemos a potência irradiada pela carga elétrica nos espaços-tempos estudados acima, para no capítulo 5 fazermos uma análise dos resultados obtidos. No capítulo 6 concluiremos o trabalho, e possíveis desdobramentos serão apresentados.

Iremos adotar neste trabalho o sistema natural de unidades, no qual  $c = G = \hbar = 1$ , assim como a assinatura  $(+, -, -, -)$ .

## Capítulo 2

# Quantização do campo eletromagnético no espaço-tempo de Minkowski

Para que possamos efetivar a quantização do campo eletromagnético em Minkowski, o primeiro passo será a determinação das soluções clássicas das equações de Maxwell neste espaço-tempo. Após encontrarmos as soluções clássicas iremos normalizá-las e assim estaremos aptos a quantizar o campo eletromagnético em Minkowski.

Os resultados aqui obtidos serão utilizados posteriormente para que possamos encontrar a potência emitida pela carga elétrica girante no espaço-tempo de Minkowski.

## 2.1 Soluções clássicas em Minkowski

O elemento de linha do espaço-tempo plano, também denominado elemento de linha de Minkowski, é expresso em coordenadas polares esféricas pela forma

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.1)$$

De (2.1) obtemos que as componentes da métrica em questão nas coordenadas definidas acima são dadas por

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag} (1, -1, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta). \quad (2.2)$$

Consideremos nesta geometria um campo vetorial livre não massivo, cuja ação clássica invariante é dada por

$$S = \int d^4x \mathcal{L},$$

onde

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{\zeta}{2} (\nabla^\mu A_\mu)^2 \right], \quad (2.3)$$

é a densidade de lagrangiana modificada *à la* Fermi e  $g = \det(g_{\mu\nu})$ , de forma que  $d^4x \sqrt{-g}$  é o elemento de volume (quadrídimesional) invariante do espaço-tempo de Minkowski. Vamos adotar a escolha de Feynman  $\zeta = 1$  (também conhecida como gauge de Feynman).

Aplicando à (2.3) a equação de Euler-Lagrange, temos que as equações de campo serão  $\nabla_\nu F^{\nu\mu} + \nabla^\mu \nabla^\nu A_\nu = 0$ . Se usarmos a relação  $F^{\mu\nu} = \nabla^\mu A^\nu - \nabla^\nu A^\mu$  e

que no vácuo as equações de Einstein são  $R_{\mu\nu} = 0$  [7], teremos que as equações de campo assumirão a forma

$$\nabla_\nu \nabla^\nu A^\mu = 0. \quad (2.4)$$

Definindo  $i$  como sendo o índice das variáveis angulares na 2-esfera unitária  $S^2$  com métrica  $\tilde{\eta}_{ij}$  ( $d\tilde{s}^2 = -d\theta^2 - \sin^2\theta d\phi^2$ ), e tendo  $\tilde{\nabla}_i$  como derivada covariante em  $S^2$ , concluímos que (2.4) tem como componentes as equações

$$\partial_t^2 A_t - \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r A_t) + \frac{1}{r^2} \tilde{\nabla}^2 A_t = 0, \quad (2.5)$$

$$-\partial_t^2 A_r + \partial_r \left[ \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 A_r) \right] - \frac{1}{r^2} \tilde{\nabla}^2 A_r - \partial_r \left( \frac{1}{r^2} \right) \tilde{\nabla}^i A_i = 0, \quad (2.6)$$

$$\partial_t^2 A_i - \partial_r^2 A_i + \frac{1}{r^2} \left[ \tilde{\nabla}^j (\tilde{\nabla}_j A_i - \tilde{\nabla}_i A_j) + \partial_i \tilde{\nabla}^j A_j \right] + \frac{2\partial_i A_r}{r} = 0. \quad (2.7)$$

Para resolvermos as equações acima, adotaremos a condição de Lorenz, a saber

$$\nabla^\mu A_\mu = 0. \quad (2.8)$$

As soluções de (2.4) serão classificadas segundo suas polarizações  $\varepsilon$ . Denominaremos de modos puro-gauge  $\varepsilon = G$ , as soluções que satisfizerem a condição de Lorenz (2.8) e puderem ser escritas como  $A_\mu^{G\omega lm} = \nabla_\mu \Lambda^{\omega lm}$ . Os modos físicos  $\varepsilon = I$  e  $II$ , serão aqueles que satisfizerem as equações (2.4) e a condição (2.8) porém não sendo puro-gauge, enquanto que os modos não físicos  $\varepsilon = NF$  serão as soluções que não

satisfizerem a condição de gauge. Assim definido, podemos escrever os modos como

$$A^{I\omega lm} = (0, R_{\omega l}^I(r) Y_{lm}, \frac{1}{l(l+1)} \frac{d}{dr} [r^2 R_{\omega l}^I(r)] \partial_{\theta} Y_{lm}, \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{l(l+1)} \frac{d}{dr} [r^2 R_{\omega l}^I(r)] \partial_{\phi} Y_{lm} e^{-i\omega t},$$

$$A^{II\omega lm} = (0, 0, R_{\omega l}^{II}(r) Y_{\theta}^{lm}, R_{\omega l}^{II}(r) Y_{\phi}^{lm}) e^{-i\omega t}, \quad (2.10)$$

$$A^{NF\omega lm} = (R_{\omega l}^{NF}(r) Y_{lm}, 0, 0, 0) e^{-i\omega t}, \quad (2.11)$$

$$A_{\mu}^{G\omega lm} = \nabla_{\mu} \Lambda^{\omega lm}, \quad (2.12)$$

com  $\omega > 0$ ,  $\Lambda^{\omega lm} = \frac{i}{\omega} R_{\omega l}^{NF}(r) Y_{lm} e^{-i\omega t}$ ,  $Y_{lm}$  sendo harmônicos esféricos escalares definidos na 2-esfera com  $\tilde{\nabla}^2 Y_{lm} = -l(l+1) Y_{lm}$ , onde  $l = 0, 1, 2, \dots$  e  $m$  assume valores de  $-l$  a  $l$  [8] e  $Y_j^{lm} = \epsilon_{ji} \partial^i Y_{lm} / \sqrt{l(l+1)}$  são os harmônicos esféricos vetoriais [9], que satisfazem  $\tilde{\nabla}^i Y_i^{lm}(\theta, \phi) = 0$ , com  $l \geq 1$ , onde  $\epsilon_{\theta\phi} = -\epsilon_{\phi\theta} = \text{sen}(\theta)$  e  $\epsilon_{\theta\theta} = \epsilon_{\phi\phi} = 0$ . Note que os modos físicos (2.9) e (2.10) são tais que  $l \geq 1$ , pois a condição de Lorenz dada em (2.8) não é satisfeita para  $l = 0$ . Definindo o potencial em Minkowski

$$V_M = \frac{l(l+1)}{r^2}, \quad (2.13)$$

temos que  $R_{\omega l}^I(r)$  satisfaz a equação



$$(\omega^2 - V_M) R_{\omega l}^I(r) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2}{dr^2} [r^2 R_{\omega l}^I(r)] = 0, \quad (2.14)$$

$R_{\omega l}^{II}(r)$  satisfaz a equação

$$(\omega^2 - V_M) R_{\omega l}^{II}(r) + \frac{d^2}{dr^2} R_{\omega l}^{II}(r) = 0, \quad (2.15)$$

e  $R_{\omega l}^{NF}(r)$  satisfaz a equação

$$(\omega^2 - V_M) R_{\omega l}^{NF}(r) + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d}{dr} R_{\omega l}^{NF}(r) \right) = 0. \quad (2.16)$$

$R_{\omega l}^{II}(r)$  possui relações muito simples com  $R_{\omega l}^I(r)$  e  $R_{\omega l}^{NF}(r)$  expressas por

$$R_{\omega l}^{II}(r) = r^2 R_{\omega l}^I(r),$$

$$R_{\omega l}^{II}(r) = r R_{\omega l}^{NF}(r).$$

As soluções  $R_{\omega l}^{II}(r)$ , assim como as de  $R_{\omega l}^I(r)$  e  $R_{\omega l}^{NF}(r)$ , podem ser expressas através das funções de Bessel esféricas  $j_l$  e  $\eta_l$  [8]. No caso de  $R_{\omega l}^{II}(r)$  temos

$$R_{\omega l}^{II}(r) = r C_{l\omega}^{II} j_l(\omega r) + r D_{l\omega}^{II} \eta_l(\omega r).$$

Dado que a solução  $\eta_l$  é não normalizável por meio do produto interno de Klein-Gordon generalizado a ser definido na próxima seção, podemos descartá-la, sobrando assim somente a contribuição  $j_l$ . Temos então

$$R_{\omega l}^I(r) = \frac{C_{l\omega}^I}{r} j_l(\omega r), \quad (2.17)$$

$$R_{\omega l}^{II}(r) = C_{\omega l}^{II} r j_l(\omega r), \quad (2.18)$$

$$R_{\omega l}^{NF}(r) = C_{\omega l}^{NF} j_l(\omega r), \quad (2.19)$$

nas quais  $C_{\omega l}^{II}$ ,  $C_{\omega l}^I$  e  $C_{\omega l}^{NF}$  são as constantes de normalização, que serão obtidas a partir do produto interno de Klein-Gordon mencionado anteriormente.

Com a definição das funções de  $R_{\omega l}^I(r)$ ,  $R_{\omega l}^{II}(r)$  e  $R_{\omega l}^{NF}(r)$  através das expressões (2.17)-(2.19), assim como de suas respectivas constantes de normalização, teremos as soluções clássicas das equações modificadas de Maxwell homogêneas no espaço-tempo de Minkowski completamente determinadas.

## 2.2 Normalização das soluções clássicas em Minkowski

Para executarmos a normalização dos modos, iremos lançar mão do produto interno de Klein-Gordon generalizado [10]. Antes de defini-lo, é importante conhecermos o momento generalizado associado ao campo, dado por

$$\Pi^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\nabla_\mu A_\nu]} = - [F^{\mu\nu} + \eta^{\mu\nu} \nabla^\lambda A_\lambda]. \quad (2.20)$$

Definiremos a corrente

$$W^\mu [A^i, A^j] \equiv i \left[ \overline{A_\nu^i} \Pi^{j\mu\nu} - \overline{\Pi^{i\mu\nu}} A_\nu^j \right], \quad (2.21)$$

onde agora os índices  $i$  e  $j$  representam todo o conjunto de números quânticos que indexam os modos, e a barra superior denota o complexo conjugado. O produto interno de Klein-Gordon generalizado é então definido como

$$(A^i, A^j) \equiv \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma_\mu^{(3)} W^\mu [A^i, A^j], \quad (2.22)$$

onde  $d\Sigma_\mu^{(3)} \equiv d\Sigma^{(3)} n_\mu$ , sendo que  $d\Sigma^{(3)}$  é o elemento de tri-volume invariante da superfície de Cauchy  $\Sigma$  e  $n^\mu$  é um vetor unitário normal a esta superfície dirigido para o futuro.

Para o caso particular do espaço-tempo de Minkowski em coordenadas polares esféricas, manipulando (2.22) encontramos que para uma superfície  $t = \text{constante}$ , o produto interno de Klein-Gordon generalizado assume a forma [11]

$$(A^i, A^j) \equiv i \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi r^2 \sin \theta \eta^{\mu\nu} \left[ \overline{A_\mu^i} \partial_t A_\nu^j - A_\nu^i \partial_t \overline{A_\mu^j} \right]. \quad (2.23)$$

Para os modos satisfazendo a condição de Lorenz ( $\nabla_\mu A^\mu = 0$ ), teremos de (2.20) que  $\Pi^{i\mu\nu} = -F^{i\mu\nu}$  e o produto (2.22) pode ser escrito como

$$(A^i, A^j)_{inv} \equiv i \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma_\mu^{(3)} \left[ \overline{A_\nu^i} F^{j\nu\mu} - \overline{F^{i\nu\mu}} A_\mu^j \right]. \quad (2.24)$$

Podemos mostrar que o produto (2.24) é invariante por uma transformação de gauge. Fazendo  $A_\nu^i \rightarrow A_\nu^{\prime i} = A_\nu^i + \nabla_\nu \Phi^i$ , temos

$$(A^{\prime i}, A^{\prime j})_{inv} - (A^i, A^j)_{inv} = (\nabla \Phi^i, \nabla \Phi^j)_{inv} + (A^i, \nabla \Phi^j)_{inv} + (\nabla \Phi^i, A^j)_{inv}, \quad (2.25)$$

o que nos leva a  $(A^i, A^j)_{inv} = (A^i, A^j)_{inv}$ , dada a nulidade dos termos do lado direito de (2.25), que pode ser obtida usando

$$(\nabla\Phi^i, A^j)_{inv} \equiv i \int_{\Sigma^{(3)}} d\Sigma_\mu^{(3)} \left[ \overline{\nabla_\nu \Phi^i} F^{j\nu\mu} \right],$$

que assume a forma

$$(\nabla\Phi^i, A^j) \equiv i \int_\Sigma d\Sigma_\mu \left[ \overline{\nabla_\nu \Phi^i} F^{j\nu\mu} \right] = 0, \quad (2.26)$$

na qual realizamos uma integração por partes, utilizamos que  $\nabla_\nu F^{\varepsilon\mu\nu} = 0$ , a antisimetria de  $F^{\varepsilon\mu\nu}$  e que os campos são nulos na fronteira de  $\Sigma^{(3)}$ .

Sendo então (2.24) invariante por uma transformação de gauge, mostraremos abaixo que para quaisquer números quânticos  $n, \omega, l, m$  obteremos

$$(A^G, A^I) = (A^G, A^{II}) = (A^G, A^G) = 0. \quad (2.27)$$

Novamente, dado que os modos físicos e puro gauge acima satisfazem  $\nabla^\mu A_\mu = 0$ , temos  $\Pi^{\mu\nu} \equiv -F^{\mu\nu}$  e  $\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 0$  para estes modos. Para o produto entre modos puro-gauge, a propriedade acima é facilmente demonstrada, dado que  $F^{\mu\nu} = 0$ . Para os produtos entre os modos físicos e os modos puro-gauge, se usarmos  $A_\mu^G = \nabla_\mu \Lambda$  e  $\lambda = I, II$  teremos

$$(A^G, A^\lambda) \equiv i \int_\Sigma d\Sigma_\mu \left[ (\nabla_\nu \bar{\Lambda}) F^{\lambda\nu\mu} \right] = 0, \quad (2.28)$$

como pode ser visto em (2.26). Para mostrar a ortogonalidade entre os modos  $I$  e  $II$ , partimos de (2.23), onde teremos para os modos físicos

$$(A^I, A^{II}) \equiv i \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin \theta \eta^{\mu\nu} \left[ \overline{A}_\mu^I \partial_t A_\nu^{II} - A_\nu^{II} \partial_t \overline{A}_\mu^I \right]. \quad (2.29)$$

Dada a invariância por transformação de gauge do produto interno de Klein-Gordon generalizado para modos satisfazendo  $\nabla_\mu A^\mu = 0$ , podemos somar à (2.9) uma quadridivergência da forma  $\nabla^\mu \Lambda$ , obtendo um novo modo  $A^{I\omega lm}$ , no qual as duas últimas componentes são nulas. Dado que as duas primeiras componentes de  $A^{I\omega lm}$  são nulas, obtemos assim que

$$\eta^{\mu\nu} \overline{A}_\mu^I \partial_t A_\nu^{II} = \eta^{\mu\nu} \overline{A}_\mu^{II} \partial_t A_\nu^I = 0. \quad (2.30)$$

Através de (2.29) e (2.30) temos então que

$$(A^I, A^{II}) = 0.$$

Desenvolvendo-se os demais produtos internos entre os modos pode-se mostrar que

$$(A^{\varepsilon\omega lm}, A^{\varepsilon'\omega'l'm'}) = M^{\varepsilon\varepsilon'} \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega'), \quad (2.31)$$

com a matriz  $M^{\varepsilon\varepsilon'}$  dada por

$$M^{\varepsilon\varepsilon'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

na qual linhas e colunas são dispostas na ordem I, II, G e NF.

A ortogonalidade entre os modos I e II, e o modo não físico pode ser facilmente visualizada, dado que os modos I e II só possuem componentes espaciais, enquanto o modo NF possui apenas uma componente temporal, fazendo assim  $\eta^{\mu\nu} \overline{A_{\mu}^{NF}} \partial_t A_{\nu}^{\lambda} = \eta^{\mu\nu} A_{\nu}^{\lambda} \partial_t \overline{A_{\mu}^{NF}} = 0$  em (2.23), similarmente ao ocorrido em (2.30). Aplicando o produto interno dado por (2.23) aos modos I, II, G e NF, obtemos que as constantes de normalização  $C_{\omega l}^I$ ,  $C_{\omega l}^{II}$ ,  $C_{\omega l}^{NF}$  e  $C_{\omega l}^G$ , a menos de uma fase arbitrária, possuem a forma

$$C_{\omega l}^I = \sqrt{\frac{l(l+1)}{\pi\omega}} \text{ e } C_{\omega l}^{II} = C_{\omega l}^{NF} = C_{\omega l}^G = \sqrt{\frac{\omega}{\pi}}. \quad (2.33)$$

## 2.3 Quantização de Gupta-Bleuler em Minkowski

Uma vez obtidos os modos normalizados, vamos agora quantizar o campo eletromagnético no espaço-tempo de Minkowski utilizando o método de Gupta-Bleuler [11] [12] [13]. Vamos impor as relações de comutação a tempos iguais

$$\left[ \hat{A}_{\mu}(\mathbf{x}, t), \hat{A}_{\nu}(\mathbf{x}', t) \right] = \left[ \hat{\Pi}_{\mu t}(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}_{\nu t}(\mathbf{x}', t) \right] = 0, \quad (2.34)$$

$$\left[ \hat{A}_{\mu}(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}^{t\nu}(\mathbf{x}', t) \right] = \frac{i\delta_{\mu}^{\nu}}{\sqrt{-g}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.35)$$

onde  $\hat{\Pi}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \left[ \nabla_{\mu} \hat{A}_{\nu} \right]}$ ,  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{x}'$  representam todas as coordenadas espaciais.

Expandindo o campo quantizado  $\hat{A}_{\mu}$  em termos dos modos de frequência positiva  $A_{\mu}^{\varepsilon\omega lm}$  e negativa  $\overline{A_{\mu}^{\varepsilon\omega lm}}$  temos

$$\hat{A}_\mu = \sum_{\varepsilon=I,II,G,NF} \sum_{l=0}^{l=\infty} \sum_{m=-l}^{m=+l} \int_0^\infty d\omega \left[ \hat{a}_{(\varepsilon\omega lm)} A_\mu^{\varepsilon\omega lm} + \hat{a}_{(\omega\ell lm)}^\dagger \overline{A_\mu^{\varepsilon\omega lm}} \right], \quad (2.36)$$

onde  $\hat{a}_{(\varepsilon\omega lm)}^\dagger$  e  $\hat{a}_{(\varepsilon\omega lm)}$  são os operadores de criação e aniquilação, respectivamente.

Iremos agora encontrar as relações de comutação entre  $\hat{a}_{(\varepsilon\omega lm)}$  e  $\hat{a}_{(\varepsilon\omega lm)}^\dagger$ . Utilizando (2.22) e as relações (2.34)-(2.35), se denotarmos todos os índices discretos  $(\varepsilon, l, m)$  em Minkowski por  $\kappa$ , podemos mostrar que

$$\left[ \left( A^{\kappa\omega}, \hat{A} \right), \left( \hat{A}, A^{\kappa'\omega'} \right) \right] = \left( A^{\kappa\omega}, A^{\kappa'\omega'} \right) = M^{\kappa\kappa'} \delta(\omega - \omega'), \quad (2.37)$$

com

$$M^{\kappa\kappa'} \equiv M^{\varepsilon\varepsilon'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

Por outro lado, usando (2.22) e (2.36) temos

$$\left[ \left( A^{\kappa\omega}, \hat{A} \right), \left( \hat{A}, A^{\kappa'\omega'} \right) \right] = \sum_{\kappa'', \kappa'''} M^{\kappa\kappa''} \left[ \hat{a}_{(\kappa''\omega)}, \hat{a}_{(\kappa'''\omega')}^\dagger \right] M^{\kappa'''\kappa'}. \quad (2.38)$$

Comparando (2.38) com (2.37) concluímos que

$$\left[ \hat{a}_{(\kappa\omega)}, \hat{a}_{(\kappa'\omega')}^\dagger \right] = (M^{-1})_{\kappa\kappa'} \delta(\omega - \omega'), \quad (2.39)$$

onde  $(M^{-1})_{\kappa\kappa'}$  é a matriz inversa de  $M^{\kappa\kappa'}$ . Assim temos que os comutadores não nulos são

$$\left[ \hat{a}_{(I\omega lm)}, \hat{a}_{(I\omega' l' m')}^\dagger \right] = \left[ \hat{a}_{(II\omega lm)}, \hat{a}_{(II\omega' l' m')}^\dagger \right] = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega'), \quad (2.40)$$

$$\left[ \hat{a}_{(G\omega lm)}, \hat{a}_{(G\omega' l' m')}^\dagger \right] = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega'), \quad (2.41)$$

$$\left[ \hat{a}_{(G\omega lm)}, \hat{a}_{(NF\omega' l' m')}^\dagger \right] = \left[ \hat{a}_{(NF\omega lm)}, \hat{a}_{(G\omega' l' m')}^\dagger \right] = -\delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega'). \quad (2.42)$$

Sendo a condição de Lorenz para o operador  $\hat{A}_\mu$ ,  $\nabla^\mu \hat{A}_\mu = 0$ , e a quantização canônica incompatíveis, dado que  $[\nabla_\mu \hat{A}^\mu, \hat{A}^\nu] \neq 0$  por (2.35), precisamos então de uma formulação mais fraca do vínculo de Lorenz, conhecida como condição de Gupta-Bleuler, dada por

$$\nabla^\mu \hat{A}_\mu^{(+)} |EF\rangle = 0, \quad (2.43)$$

que restringe o espaço de Hilbert dos estados físicos  $|EF\rangle$ , onde  $\hat{A}_\mu^{(+)}$  é a parte de frequência positiva do operador  $\hat{A}_\mu$  definido em (2.36). Uma vez que  $\nabla^\mu \hat{A}_\mu^{(+)}$  só é não nula para  $A_\mu^{NF\omega lm}$ , segue que a condição (2.43) equivale a

$$\hat{a}_{(NF\omega lm)} |EF\rangle = 0 \quad (2.44)$$

Os estados do espaço de Hilbert são obtidos pela aplicação dos operadores de criação no vácuo de Minkowski  $|0\rangle_M$ , que é definido requerendo que o mesmo seja aniquilado por todos os operadores  $\hat{a}_{(\varepsilon\omega lm)}$ , ou seja,



$$\hat{a}_{(\varepsilon\omega lm)} |0\rangle_M = 0, \quad (2.45)$$

com  $\varepsilon = I, II, G, NF$ . Aplicando-se ao vácuo de Minkowski os operadores de criação  $\hat{a}_I^\dagger$ ,  $\hat{a}_{II}^\dagger$ , e  $\hat{a}_{NF}^\dagger$ , iremos obter os estados físicos do sistema que satisfazem (2.44). Observe que o operador  $\hat{a}_G^\dagger$  não foi mencionado acima, pois sua aplicação a um estado físico  $|EF\rangle$ , não levará a outro estado físico. Temos assim que  $\hat{a}_G^\dagger$  leva estados físicos em estados não físicos do sistema, pois de (2.42) e (2.44) temos

$$\hat{a}_{(NF\omega\kappa)} \left[ \hat{a}_{(G\omega'\kappa')}^\dagger |EF\rangle \right] = -\delta_{l'l'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega') |EF\rangle \neq 0.$$

É importante ressaltar que dado

$$\left[ \hat{a}_{(NF lm\omega)}, \hat{a}_{(NF\omega'l'm')}^\dagger \right] = 0, \quad (2.46)$$

concluimos que estados físicos na forma  $\hat{a}_{NF}^\dagger |EF\rangle$  têm norma nula, ou seja,

$$\langle EF | \hat{a}_{(NF lm\omega)} \hat{a}_{(NF lm\omega)}^\dagger |EF\rangle = \langle EF | \hat{a}_{(NF lm\omega)}^\dagger \hat{a}_{(NF lm\omega)} |EF\rangle = 0, \quad (2.47)$$

onde utilizamos (2.44) para obter a última igualdade acima. Além disso, de (2.39), temos que

$$\left[ \hat{a}_{(NF lm\omega)}, \hat{a}_{(I\omega'l'm')}^\dagger \right] = \left[ \hat{a}_{(II m \omega)}, \hat{a}_{(NF\omega'l'm')}^\dagger \right] = 0,$$

$$\left[ \hat{a}_{(NF lm\omega)}, \hat{a}_{(II\omega'l'm')}^\dagger \right] = \left[ \hat{a}_{(III m\omega)}, \hat{a}_{(NF\omega'l'm')}^\dagger \right] = 0.$$

Concluimos então que os estados físicos na forma  $\hat{a}_{NF}^\dagger |EF\rangle$  são ortogonais a quaisquer outros estados físicos. Sendo assim, um estado físico  $|EF_1\rangle$  pode ser considerado equivalente à qualquer outro estado físico na forma  $|EF_1\rangle + \hat{a}_{NF}^\dagger |EF_2\rangle$ . Consequentemente, os estados físicos representativos são aqueles obtidos aplicando-se  $\hat{a}_{(\lambda m \omega)}^\dagger$ , com  $\lambda = I, II$  ao vácuo de Minkowski  $|0\rangle_M$ , definido acima.

## Capítulo 3

# Quantização do campo eletromagnético no espaço-tempo de Schwarzschild

Neste capítulo seguiremos os mesmos procedimentos básicos do capítulo anterior. Encontraremos as soluções clássicas que definem o campo eletromagnético no espaço-tempo de Schwarzschild para em seguida normalizá-las e assim quantizar este campo. A diferença entre o caso de Minkowski e Schwarzschild é dada pela forma da métrica, que, como veremos a diante, introduzirá dificuldades adicionais para o último caso, não nos possibilitando encontrar soluções analíticas expressas por funções especiais conhecidas para as equações que determinam os modos do campo.

Não dispondo das expressões analíticas para a normalização, para que possamos avançar neste caso, iremos utilizar duas alternativas de resolução do problema em Schwarzschild: resolveremos as equações de campo para o caso de baixas frequências, e por método numérico, com o auxílio do programa Mathematica.

### 3.1 Soluções clássicas em Schwarzschild

O elemento de linha do espaço-tempo de um buraco negro estático sem carga, também denominado elemento de linha de Schwarzschild, é expresso em coordenadas polares esféricas na forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = f(r) dt^2 - f(r)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (3.1)$$

onde  $f(r) = 1 - 2M/r$ . De (3.1) obtemos que as componentes da métrica em questão, nas coordenadas definidas acima, são dadas por

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} (f, -f^{-1}, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta). \quad (3.2)$$

Consideremos nesta geometria um campo vetorial livre não massivo, cuja ação clássica invariante é

$$S = \int d^4x \mathcal{L}, \quad (3.3)$$

onde agora, para o caso de Schwarzschild, temos

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} G^2 \right]. \quad (3.4)$$

$\mathcal{L}$  é a densidade de lagrangiana do campo eletromagnético no gauge de Feynman modificado,  $g = \det(g_{\mu\nu})$  de forma que  $d^4x \sqrt{-g}$  é o elemento de volume (quadridimensional) invariante do espaço-tempo de Schwarzschild e  $G \equiv \nabla^\mu A_\mu + K^\mu A_\mu$ , onde  $K^\mu$  é um quadrivetor independente de  $A^\mu$ , definido por

$$K^\mu = \left( 0, \frac{df}{dr}, 0, 0 \right).$$

Aplicando à (3.4) a equação de Euler-Lagrange, temos que as equações de campo são

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} + \nabla^\mu G - K^\mu G = 0. \quad (3.5)$$

Separando em componentes as equações acima temos

$$\frac{1}{f} \partial_t^2 A_t - \frac{f}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r A_t) + \frac{1}{r^2} \tilde{\nabla}^2 A_t = 0, \quad (3.6)$$

$$-\frac{1}{f} \partial_t^2 A_r + \frac{1}{f} \partial_r \left[ \frac{f^2}{r^2} \partial_r (r^2 A_r) \right] - \frac{1}{r^2} \tilde{\nabla}^2 A_r - \frac{1}{f} \partial_r \left( \frac{f}{r^2} \right) \tilde{\nabla}^i A_i = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{f} \partial_t^2 A_i - \partial_r (f \partial_r A_i) + \frac{1}{r^2} \left[ \tilde{\nabla}^j (\tilde{\nabla}_j A_i - \tilde{\nabla}_i A_j) + \partial_i \tilde{\nabla}^j A_j \right] + r^2 \partial_r \left( \frac{f}{r^2} \right) \partial_i A_r = 0. \quad (3.8)$$

Para resolvermos as equações acima, adotaremos a condição de gauge

$$G = 0. \quad (3.9)$$

Assim como no caso em Minkowski, as soluções de (3.5) serão classificadas segundo suas polarizações  $\varepsilon$ . Denominaremos de modo puro-gauge  $\varepsilon = G$ , as soluções que satisfizerem a condição de gauge (3.9) e puderem ser escritas como  $A_\mu^{Gwnlm} =$

$\nabla_\mu \Lambda^{\omega n l m}$ . Os modos físicos  $\varepsilon = I, II$ , serão aqueles que satisfizerem as equações (3.5) e a condição (3.9) porém não sendo puro-gauge, enquanto que os modos não físicos  $\varepsilon = NF$  serão as soluções que não satisfizerem a condição de gauge. O índice  $n$  denota os dois modos possíveis em Schwarzschild, um deles proveniente do infinito ( $\leftarrow$ ) e o outro proveniente do horizonte de eventos do buraco negro ( $\rightarrow$ ). Assim definido, podemos escrever os modos como

$$A^{In\omega lm} = (0, R_{\omega l}^{In}(r) Y_{lm}, \frac{f}{l(l+1)} \frac{d}{dr} [r^2 R_{\omega l}^{In}(r)] \partial_\theta Y_{lm}, \quad (3.10)$$

$$\frac{f}{l(l+1)} \frac{d}{dr} [r^2 R_{\omega l}^{In}(r)] \partial_\phi Y_{lm} e^{-i\omega t},$$

$$A^{II\omega lm} = (0, 0, R_{\omega l}^{II n}(r) Y_\theta^{lm}, R_{\omega l}^{II n}(r) Y_\phi^{lm}) e^{-i\omega t}, \quad (3.11)$$

$$A^{NF\omega lm} = (R_{\omega l}^{NF n}(r) Y_{lm}, 0, 0, 0) e^{-i\omega t}, \quad (3.12)$$

$$A_\mu^{G\omega lm} = \nabla_\mu \Lambda^{\omega n l m}, \quad (3.13)$$

onde  $\omega > 0$  e  $\Lambda^{\omega n l m} = \frac{i}{\omega} R_{\omega l}^{NF n}(r) Y_{lm} e^{-i\omega t}$ . Note que, assim como no caso de Minkowski, os modos físicos (3.10)-(3.11) são tais que  $l \geq 1$ , pois a condição de gauge dada em (3.9) não é satisfeita para  $l = 0$ . Definindo o potencial em Schwarzschild

$$V_S = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{l(l+1)}{r^2}, \quad (3.14)$$

temos que  $R_{\omega l}^{In}(r)$  satisfaz a equação

$$(\omega^2 - V_S) R_{\omega l}^{In}(r) + \frac{f}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ f \frac{d}{dr} [r^2 R_{\omega l}^{In}(r)] \right] = 0, \quad (3.15)$$

$R_{\omega l}^{II n}(r)$  satisfaz a equação

$$(\omega^2 - V_S) R_{\omega l}^{II n}(r) + f \frac{d}{dr} \left[ f \frac{d}{dr} R_{\omega l}^{II n}(r) \right] = 0, \quad (3.16)$$

e  $R_{\omega l}^{NF n}(r)$  satisfaz a equação

$$(\omega^2 - V_S) R_{\omega l}^{NF n}(r) + \frac{f^2}{r^2} \frac{d}{dr} \left[ r^2 \frac{d}{dr} R_{\omega l}^{NF n}(r) \right] = 0. \quad (3.17)$$

Desta forma, conseguimos obter, assim como para o caso anterior em Minkowski, as equações que regem os modos.

## 3.2 Soluções físicas clássicas em Schwarzschild no limite assintótico

Encontraremos agora as soluções físicas das equações obtidas na seção anterior nos limites de  $r \rightarrow 2M$  (horizonte de eventos do buraco negro) e  $r \rightarrow +\infty$ . Utilizando as transformações  $R_{\omega l}^{II n}(r) = r q_{\omega l}^{II n}(r)$  e  $R_{\omega l}^{In}(r) = \frac{1}{r} q_{\omega l}^{In}(r)$ , a partir de (3.15) e (3.16) obteremos que  $q_{\omega l}^{\lambda n}$  satisfaz a equação

$$(\omega^2 - V_S) r q_{\omega l}^{\lambda n}(r) + f \frac{d}{dr} \left[ f \frac{d}{dr} r q_{\omega l}^{\lambda n}(r) \right] = 0, \quad (3.18)$$

onde  $\lambda = I$  e  $II$ .

Através da coordenada de Wheeler  $x = r + 2M \ln \left( \frac{r}{2M} - 1 \right)$ , podemos rees-

crever (3.18) como uma equação tipo Schrödinger para  $q_{\omega l}^{\lambda n}$  na forma

$$(\omega^2 - V_s) r q_{\omega l}^{\lambda n}(x) + \frac{d^2}{dx^2} (r q_{\omega l}^{\lambda n}(x)) = 0. \quad (3.19)$$

Para os limites assintóticos ( $x \rightarrow \pm\infty$  e portanto  $V_s \rightarrow 0$ ), a equação acima assume a forma

$$\omega^2 (r q_{\omega l}^{\lambda n}(r)) + \frac{d^2}{dx^2} (r q_{\omega l}^{\lambda n}(r)) = 0,$$

que possui soluções

$$r q_{\omega l}^{\lambda \rightarrow}(r) = \begin{cases} B_{\omega l}^{\lambda \rightarrow} (e^{i\omega x} + R_{\omega l}^{\lambda \rightarrow} e^{-i\omega x}) & (x \ll -1), \\ B_{\omega l}^{\lambda \rightarrow} T_{\omega l}^{\lambda \rightarrow} i^{l+1} \omega x h_l^{(1)}(\omega x) & (x \gg 1), \end{cases} \quad (3.20)$$

$$r q_{\omega l}^{\lambda \leftarrow}(r) = \begin{cases} B_{\omega l}^{\lambda \leftarrow} T_{\omega l}^{\lambda \leftarrow} e^{-i\omega x} & (x \ll -1), \\ B_{\omega l}^{\lambda \leftarrow} \left( (-i)^{l+1} \omega x h_l^{(1)*}(\omega x) + R_{\omega l}^{\lambda \leftarrow} i^{l+1} \omega x h_l^{(1)}(\omega x) \right) & (x \gg 1), \end{cases} \quad (3.21)$$

nas quais (3.20) é uma solução proveniente do horizonte passado  $H^-$ , e (3.21) é uma solução proveniente do infinito passado tipo luz  $I^-$ . Vale lembrar que  $h_l^{(1)}$  é a função esférica de Hankel ou função esférica de Bessel do terceiro tipo [8], definido como  $h_l^{(1)}(x) = j_l(x) + i\eta_l(x)$ . Ressalte-se ainda que  $h_l^{(1)}(x) \approx (-i)^{l+1} e^{ix}/x$ , para  $|x| \gg 1$ .  $B_{\omega l}^{\lambda n}$  são as constantes de normalização, e

$$|R_{\omega l}^{\lambda n}|^2 \text{ e } |T_{\omega l}^{\lambda n}|^2, \quad (3.22)$$

são os coeficientes de reflexão e transmissão, respectivamente.



### 3.3 Soluções físicas clássicas em Schwarzschild no limite de baixas frequências

Fazendo a mudança de coordenadas  $z = \frac{r}{M} - 1$ , na equação (3.18), teremos que  $q_{\omega l}^{\lambda n}(z)$  satisfaz a equação [11]

$$\frac{d}{dz} \left[ (1 - z^2) \frac{dq_{\omega l}^{\lambda n}(z)}{dz} \right] + \left[ l(l+1) - \frac{2}{z+1} - \omega^2 M^2 \frac{(z+1)^3}{z-1} \right] q_{\omega l}^{\lambda n}(z) = 0,$$

que, para  $\omega \rightarrow 0$ , assume a forma

$$\frac{d}{dz} \left[ (1 - z^2) \frac{dq_{\omega l}^{\lambda n}}{dz} \right] + \left[ l(l+1) - \frac{2}{z+1} \right] q_{\omega l}^{\lambda n} \approx 0, \quad (3.23)$$

e tem como soluções independentes [14]

$$q_{\omega l}^{\lambda \rightarrow}(z) \approx C_{\omega l}^{\lambda \rightarrow} \left[ Q_l(z) - \frac{(z-1)}{l(l+1)} \frac{dQ_l(z)}{dz} \right] \quad (3.24)$$

e

$$q_{\omega l}^{\lambda \leftarrow}(z) \approx C_{\omega l}^{\lambda \leftarrow} \left[ P_l(z) - \frac{(z-1)}{l(l+1)} \frac{dP_l(z)}{dz} \right], \quad (3.25)$$

nas quais  $l \geq 1$ .  $P_l(z)$  e  $Q_l(z)$  são funções de Legendre de primeiro e segundo tipo [15]-[16] e  $C_{\omega l}^{\lambda n}$  as constantes de normalização a serem determinadas na seção 3.4 através do produto interno de Klein-Gordon generalizado.

Sendo  $P_l(z) \approx z^l$  e  $Q_l(z) \approx z^{-l-1}$  para  $z \gg 1$ , e  $P_l(z) \approx 1$  e  $Q_l(z) \approx -\log \sqrt{z-1}$  para  $z \approx 1$ , obtemos de (3.24) e (3.25) que  $q_{\omega l}^{\lambda \rightarrow}$  diverge em  $H^-$  e

permanece finita em  $I^-$ , enquanto que  $q_{\omega l}^{\lambda\leftarrow}$  diverge em  $I^-$  e permanece finita em  $H^-$ . Esta é a razão pela qual associamos  $Q_l(z)$  e  $P_l(z)$  com os modos movendo-se para a direita e para a esquerda, respectivamente. Em seguida, usamos que [17]  $P_l(z)|_{z \gg 1} \approx [(2l)!z^l] / [2^l (l!)^2]$ , e  $Q_l(z)|_{z \approx 1} \approx \left(1 - \frac{x}{2M}\right) / 2 - \sum_{k=1}^l 1/k$ , na qual  $x = M(z+1) + 2M \ln\left(\frac{z}{2} - \frac{1}{2}\right)$  é a coordenada de Wheeler, e obtemos de (3.24) e (3.25) para  $\omega$  pequeno que

$$r q_{\omega l}^{\lambda\rightarrow}(z) \approx -C_{\omega l}^{\lambda\rightarrow} \frac{x}{2}, \quad (3.26)$$

para  $x \ll -1$ , e

$$r q_{\omega l}^{\lambda\leftarrow}(z) \approx C_{\omega l}^{\lambda\leftarrow} \frac{l(2l)!x^{l+1}}{(2M)^l (l+1)(l!)^2}, \quad (3.27)$$

para  $x \gg 1$ .

### 3.4 Normalização das soluções físicas clássicas em Schwarzschild no limite assintótico

Assim como foi feito para o caso em Minkowski, para ortonormalizar as soluções (3.10)-(3.11) utilizaremos o produto interno de Klein-Gordon generalizado (2.22), onde agora, o momento generalizado assumirá a forma

$$\Pi^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\nabla_\mu A_\nu]} = - [F^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} G]. \quad (3.28)$$

Analogamente a Minkowski, manipulando (2.22), teremos que para o caso particular do espaço-tempo de Schwarzschild em coordenadas polares esféricas (para

uma superfície  $t = \text{constante}$ ), o produto interno de Klein-Gordon generalizado assume a forma

$$(A^i, A^j) \equiv i \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi f^{-1} r^2 \sin \theta g^{\mu\nu} \left[ \overline{A_\mu^i} \partial_t A_\nu^j - A_\nu^i \partial_t \overline{A_\mu^j} \right]. \quad (3.29)$$

Fazendo o produto (3.29) para os modos físicos, utilizando (3.10)-(3.11), e utilizando as relações  $R_{\omega l}^{In} = r q_{\omega l}^{In}$  e  $R_{\omega l}^{In} = \frac{1}{r} q_{\omega l}^{In}$  chegamos a

$$\left( A^{In \ \omega \ l \ m}, A^{In \ \omega' \ l' \ m'} \right) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \frac{(\omega' + \omega) e^{it(\omega - \omega')}}{l(l+1)} \omega^2 \underbrace{\int dr f^{-1} r q_{\omega l}^{In*}(r) r q_{\omega' l'}^{In'}(r)}_{I_{\omega\omega'}^{Inn'}} \quad (3.30)$$

e

$$\left( A^{II n \ \omega \ l \ m}, A^{II n \ \omega' \ l' \ m'} \right) \equiv \delta_{ll'} \delta_{mm'} (\omega + \omega') e^{it(\omega - \omega')} \underbrace{\int dr f^{-1} r q_{\omega l}^{II n*}(r) r q_{\omega' l'}^{II n'}(r)}_{I_{\omega\omega'}^{II n n'}} \quad (3.31)$$

Tendo as integrais  $I_{\omega\omega'}^{\lambda n n'}$  a forma

$$\begin{aligned} \int dr f^{-1} r^2 q_{\omega l}^{\lambda n*}(r) q_{\omega' l'}^{\lambda n'}(r) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx (r q_{\omega l}^{\lambda n*}) (r q_{\omega' l'}^{\lambda n'}) \\ &= \frac{1}{(\omega^2 - \omega'^2)} \left( (r q_{\omega l}^{\lambda n*}) \frac{d}{dx} (r q_{\omega' l'}^{\lambda n'}) - (r q_{\omega' l'}^{\lambda n'}) \frac{d}{dx} (r q_{\omega l}^{\lambda n*}) \right)_{-\infty}^{+\infty}, \end{aligned}$$

na qual utilizamos (3.19). Usando  $|R_{\omega l}^{\lambda n}|^2 + |T_{\omega l}^{\lambda n}|^2 = 1$  e  $T_{\omega l}^{\lambda \rightarrow*} R_{\omega l}^{\lambda \leftarrow} + T_{\omega l}^{\lambda \leftarrow} R_{\omega l}^{\lambda \rightarrow*} = 0$ ,

além de (3.20) e (3.21), obtemos

$$I_{\omega\omega'}^{\lambda n} = 2\pi |B_{\omega l}^{\lambda n}|^2 \delta(\omega - \omega') \delta_{nn'}.$$

Substituindo a integral acima nos produtos internos de Klein-Gordon (3.30) e (3.31) temos

$$\left( A^{In \ \omega \ l \ m}, A^{In \ \omega' \ l' \ m'} \right) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega') \delta_{nn'} \frac{\omega^2 2\pi (\omega' + \omega) e^{it(\omega - \omega')}}{l(l+1)} |B_{\omega l}^{In}|^2$$

e

$$\left( A^{II n \ \omega \ l \ m}, A^{II n \ \omega' \ l' \ m'} \right) \equiv \delta_{ll'} \delta(\omega - \omega') \delta_{nn'} \delta_{mm'} e^{it(\omega - \omega')} (\omega + \omega') 2\pi |B_{\omega l}^{II n}|^2.$$

Impondo a condição de normalização

$$(A^I, A^{II}) \equiv (A^{II}, A^{II}) \equiv \delta(\omega - \omega') \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'},$$

obteremos então, a menos de uma fase multiplicativa arbitrária, que as constantes de normalização dos modos assintóticos serão

$$|B_{\omega l}^{In}| = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\sqrt{4\pi\omega^3}}, \quad (3.32)$$

$$|B_{\omega l}^{II n}| = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}}. \quad (3.33)$$

### 3.5 Normalização das soluções físicas clássicas em Schwarzschild no limite de baixas frequências

Se expandirmos  $rq_{\omega l}^{II\rightarrow}(r)$  para  $x \ll -1$ , dado em (3.20), para  $|\omega x| \ll 1$ , obtemos

$$rq_{\omega l}^{II\rightarrow}(r) \approx \frac{2i\omega x}{\sqrt{4\pi\omega}},$$

onde utilizamos que  $|R_{\omega l}^{\lambda\rightarrow}|_{\omega \approx 0} \approx -1 + O(\omega)$ . Comparando com  $rq_{\omega l}^{II\rightarrow}(r) = -C_{\omega l}^{II\rightarrow} \frac{x}{2}$  dado em (3.26) chegamos a

$$C_{\omega l}^{II\rightarrow} = -\frac{2i\omega}{\sqrt{\pi\omega}}. \quad (3.34)$$

Utilizando o mesmo procedimento, temos  $rq_{\omega l}^{I\rightarrow} \approx \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\sqrt{4\pi\omega^3}} (2i\omega x)$ , e obtemos

$$C_{\omega l}^{I\rightarrow} = \frac{-2i\sqrt{l(l+1)}}{\sqrt{\pi\omega}}. \quad (3.35)$$

De forma semelhante para  $rq_{\omega l}^{I\leftarrow}$  e  $rq_{\omega l}^{II\leftarrow}$  chegamos a

$$C_{\omega l}^{I\leftarrow} = \frac{\sqrt{l(l+1)} (2M)^l (l+1) (l!)^2 2(-i\omega)^{l+1}}{\sqrt{4\pi\omega^3} l(2l)! (2l+1)!!} \quad (3.36)$$

e

$$C_{\omega l}^{II\leftarrow} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} \frac{(2M)^l (l+1) (l!)^2 2(-i\omega)^{l+1}}{l(2l)! (2l+1)!!}. \quad (3.37)$$

## 3.6 Quantização de Gupta-Bleuler em Schwarzschild

Assim como foi efetuado para o caso em Minkowski, para quantizarmos o campo  $A_\mu$ , vamos impor as relações de comutação a tempos iguais

$$\left[ \hat{A}_\mu^S(\mathbf{x}, t), \hat{A}_\nu^S(\mathbf{x}', t) \right] = \left[ \hat{\Pi}_{\mu t}^S(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}_{\nu t}^S(\mathbf{x}', t) \right] = 0, \quad (3.38)$$

$$\left[ \hat{A}_\mu^S(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}^{S\nu t}(\mathbf{x}', t) \right] = \frac{i\delta_\mu^\nu}{\sqrt{-g}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (3.39)$$

Se expandirmos o campo quantizado  $\hat{A}^S$  em termos dos modos de frequência positiva  $A_\mu^{\varepsilon\omega nlm}$  e negativa  $\overline{A_\mu^{\varepsilon\omega nlm}}$  temos

$$\hat{A}_\mu^S = \sum_{\varepsilon=I,II,G,NF} \sum_{n=\leftarrow,\rightarrow} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=+l} \int_0^\infty d\omega \left[ \hat{a}_{(\varepsilon\omega nlm)} A_\mu^{\varepsilon\omega nlm} + \hat{a}_{(\varepsilon\omega nlm)}^\dagger \overline{A_\mu^{\varepsilon\omega nlm}} \right]. \quad (3.40)$$

Iremos agora encontrar as relações de comutação entre os operadores criação e aniquilação. Utilizando (2.22) devidamente adaptada para o momento generalizado dado em (3.28) e as relações de comutação acima, se denotarmos os índices discretos  $(\varepsilon, n, l, m)$  em Schwarzschild por  $\tau$ , podemos mostrar que

$$\left[ \left( A^{\tau\omega}, \hat{A}^S \right), \left( \hat{A}^S, A^{\tau'\omega'} \right) \right] = \left( A^{\tau\omega}, A^{\tau'\omega'} \right) = M^{\tau\tau'} \delta(\omega - \omega'), \quad (3.41)$$

com

$$M^{\tau\tau'} \equiv M^{\varepsilon\varepsilon'} \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}.$$

Onde  $M^{\varepsilon\varepsilon'}$  foi definido em (2.32). Usando (2.22) e (3.40) temos

$$\left[ \left( A^{\tau\omega}, \hat{A}^S \right), \left( \hat{A}^S, A^{\tau'\omega'} \right) \right] = \sum_{\tau'', \tau'''} M^{\tau\tau''} \left[ \hat{a}_{(\tau''\omega)}, \hat{a}_{(\tau'''\omega')}^\dagger \right] M^{\tau''\tau'}. \quad (3.42)$$

Comparando (3.42) com (3.41) concluímos que

$$\left[ \hat{a}_{(\tau\omega)}, \hat{a}_{(\tau'\omega')}^\dagger \right] = (M^{-1})_{\tau\tau'} \delta(\omega - \omega'),$$

onde  $(M^{-1})_{\tau\tau'}$  é a matriz inversa de  $M^{\tau\tau'}$ . Assim temos que os comutadores não nulos são

$$\left[ \hat{a}_{(I\omega nlm)}, \hat{a}_{(I\omega' n'l'm')}^\dagger \right] = \left[ \hat{a}_{(II\omega nlm)}, \hat{a}_{(II\omega' n'l'm')}^\dagger \right] = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega'), \quad (3.43)$$

$$\left[ \hat{a}_{(G\omega nlm)}, \hat{a}_{(G\omega' n'l'm')}^\dagger \right] = \delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega'), \quad (3.44)$$

$$\left[ \hat{a}_{(G\omega nlm)}, \hat{a}_{(NF\omega' n'l'm')}^\dagger \right] = \left[ \hat{a}_{(NF\omega nlm)}, \hat{a}_{(G\omega' n'l'm')}^\dagger \right] = -\delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega'). \quad (3.45)$$

Sendo a condição de gauge  $\hat{G} = 0$  e a quantização canônica incompatíveis para o operador  $\hat{A}_\mu^S$ , dado que  $[\nabla_\mu \hat{A}_S^\mu, \hat{A}_S^\nu] \neq 0$  em (3.39), precisamos uma vez mais de

uma condição mais fraca do que um vínculo sobre os operadores, conhecida como condição de Gupta-Bleuler, na qual

$$\hat{G}^{(+)} |EF\rangle = 0, \quad (3.46)$$

que restringe o espaço de Hilbert dos estados físicos  $|EF\rangle$ . Uma vez que  $\hat{G}^{(+)}$  só é não nula para  $A_{\mu}^{NF\omega nlm}$ , segue que a condição (3.46) equivale a

$$\hat{a}_{(NF\omega nlm)} |EF\rangle = 0. \quad (3.47)$$

O vácuo de Boulware  $|0\rangle_B$  [18], é definido requerendo que o mesmo seja aniquilado por todos os operadores  $\hat{a}_{(\varepsilon\omega nlm)}$ , ou seja,

$$\hat{a}_{(\varepsilon\omega nlm)} |0\rangle_B = 0, \quad (3.48)$$

com  $\varepsilon = I, II, G, NF$ . Aplicando-se ao vácuo de Boulware os operadores de criação  $\hat{a}_I^{\dagger}$ ,  $\hat{a}_{II}^{\dagger}$ , e  $\hat{a}_{NF}^{\dagger}$ , iremos obter os estados físicos do sistema que satisfazem (3.47). Observe que o operador  $\hat{a}_G^{\dagger}$  não foi mencionado acima, pois sua aplicação a um estado  $|EF\rangle$ , não levará a um estado físico. Temos assim que  $\hat{a}_G^{\dagger}$  leva estados físicos em estados não físicos do sistema, pois de (3.45) e (3.47) temos

$$\hat{a}_{(NF\omega nlm)} \left[ \hat{a}_{(G\omega' n' l' m')}^{\dagger} |EF\rangle \right] = -\delta_{nn'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega') |EF\rangle \neq 0.$$

É importante ressaltar que dado

$$\left[ \hat{a}_{(NF\omega nlm)}, \hat{a}_{(NF\omega' n' l' m')}^{\dagger} \right] = 0, \quad (3.49)$$



concluimos que estados físicos na forma  $\hat{a}_{NF}^\dagger |EF\rangle$  têm norma nula, ou seja,

$$\langle EF | \hat{a}_{(NF\omega nlm)} \hat{a}_{(NF\omega nlm)}^\dagger |EF\rangle = \langle EF | \hat{a}_{(NF\omega nlm)}^\dagger \hat{a}_{(NF\omega nlm)} |EF\rangle = 0,$$

onde utilizamos (3.47) para obter a última igualdade acima. Além disso, de (3.49), temos que

$$\left[ \hat{a}_{(NF\omega nlm)}, \hat{a}_{(I\omega' n' l' m')}^\dagger \right] = \left[ \hat{a}_{(I\omega nlm)}, \hat{a}_{(NF\omega' n' l' m')}^\dagger \right] = 0,$$

$$\left[ \hat{a}_{(NF\omega nlm)}, \hat{a}_{(II\omega' n' l' m')}^\dagger \right] = \left[ \hat{a}_{(II\omega nlm)}, \hat{a}_{(NF\omega' n' l' m')}^\dagger \right] = 0.$$

Analogamente a Minkowski, concluimos que os estados físicos na forma  $\hat{a}_{NF}^\dagger |EF\rangle$  são ortogonais a quaisquer outros estados físicos. Sendo assim, um estado físico  $|EF_1\rangle$  pode ser considerado equivalente à qualquer outro estado físico na forma  $|EF_1\rangle + \hat{a}_{NF}^\dagger |EF_2\rangle$ . Conseqüentemente, os estados físicos representativos são aqueles obtidos aplicando-se  $\hat{a}_{(\lambda\omega nlm)}^\dagger$ , com  $\lambda = I, II$  ao vácuo de Boulware  $|0\rangle_B$ , definido acima.

## Capítulo 4

# Radiação eletromagnética emitida por uma carga girando ao redor de um objeto estelar

Agora que temos em mãos os resultados dos campos quantizados e normalizados para os casos em Minkowski e Schwarzschild, o próximo passo a ser desenvolvido neste capítulo será o cálculo da potência irradiada pela carga elétrica girante, em ambos os espaços-tempos em questão.

O cálculo da potência emitida será abordado em três situações. No espaço-tempo de Minkowski, tanto usando teoria quântica de campos clássica de campos quanto teoria quântica de campos em nível de árvore, assumindo gravitação newtoniana, e no espaço-tempo de Schwarzschild usando teoria quântica de campos e assumindo relatividade geral (sendo este último cálculo realizado tanto numericamente quanto no limite de baixas frequências). Após encontrá-los, iremos fazer a análise dos resultados obtidos através de gráficos, para que possamos entender qual relação se estabelecerá entre as potências de cada caso.

## 4.1 Potência irradiada segundo teoria clássica de campos em Minkowski, assumindo gravitação newtoniana

Nesta seção iremos assumir os resultados já estabelecidos na literatura para encontrarmos a fórmula da potência irradiada em Minkowski assumindo gravitação newtoniana. No sistema de unidades aqui utilizado a potência emitida por uma carga elétrica em movimento circular uniforme (M. C. U.) é dada por [19] [14]

$$W_C = \frac{q^2 \gamma_M^4}{6\pi} |\vec{a}|^2,$$

onde  $|\vec{a}|$  é o módulo da aceleração centrípeta da carga e

$$\gamma_M = \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - (R_M)^2 \Omega^2}}. \quad (4.1)$$

Sendo para um corpo em M. C. U. o módulo da aceleração centrípeta fornecido por  $|\vec{a}| = R_M \Omega^2$ , onde  $R_M$  é o raio em Minkowski, temos para o caso em questão que

$$W_C = \frac{q^2 \gamma_M^4}{6\pi} R_M^2 \Omega^4. \quad (4.2)$$

Se utilizarmos a terceira lei de Kepler aplicada a uma trajetória circular, teremos que  $R_M$  e  $\Omega$  se relacionam pela expressão

$$R_M = \left( \frac{M}{\Omega^2} \right)^{1/3},$$

que substituída em (4.2) leva a

$$W_C = \frac{q^2 M^{2/3} \Omega^{8/3} \gamma^4}{6\pi}.$$

Substituindo  $\gamma_M$  dado por (4.1) na expressão acima, temos para a potência clássica irradiada em função de  $\Omega$  a expressão

$$W_C = \frac{q^2 M^{2/3} \Omega^{8/3}}{6\pi \left(1 - (M\Omega)^{2/3}\right)^2}. \quad (4.3)$$

## 4.2 Potência irradiada usando teoria quântica de campos em Minkowski, assumindo gravitação newtoniana

Nesta seção iremos calcular a potência irradiada por uma carga elétrica em órbita circular em torno de um corpo massivo, sendo que a órbita é estabelecida segundo a gravitação newtoniana, e o cálculo da potência é efetuado utilizando teoria quântica de campos em nível de árvore.

A corrente clássica, normalizada, associada a uma fonte descrevendo uma trajetória circular no plano  $\theta = \pi/2$  com raio  $R_M$  e com velocidade angular  $\Omega > 0$  (assim como medida por estáticos neste espaço-tempo plano), e dado por

$$j^\mu(x^\nu) = \frac{q}{R_M^2} \delta(r - R_M) \delta(\theta - \pi/2) \delta(\phi - \Omega t) (1, 0, 0, \Omega), \quad (4.4)$$

onde  $q$  determina a magnitude do acoplamento entre a fonte e o campo. Com normalizada, queremos dizer que  $\int d\sigma_\mu^{(3)} j^\mu(\mu^\nu) = q$ , onde  $d\sigma_\mu^{(3)}$  é o elemento de

trivolume ortogonal à quadrivelocidade  $u^\mu$  da carga que, nas coordenadas polares esféricas definidas por (2.1), é dada por  $u^\mu(\Omega, R_M) = (\gamma_M, 0, 0, \Omega\gamma_M)$ .

A interação entre a corrente  $j^\mu(x^\nu)$  e o campo  $\hat{A}_\mu(x^\nu)$  será dada pelo acoplamento mínimo

$$\hat{S}_I = \int d^4x \sqrt{-g} j^\mu(x^\nu) \hat{A}_\mu(x^\lambda). \quad (4.5)$$

Sendo a amplitude de emissão

$$E^{\varepsilon\omega lm} = \langle 1, \varepsilon, \omega, l, m | i\hat{S}_I | 0 \rangle, \quad (4.6)$$

substituindo (4.5) e (2.36) na equação acima, e utilizando as propriedades da seção 2.3 temos

$$E^{\varepsilon\omega lm} = i \int d^4x \sqrt{-g} j^\mu(x^\nu) A_\mu^{\varepsilon\omega lm}(x^\lambda). \quad (4.7)$$

Substituindo em (4.7) as expressões de  $j^\mu(x^\nu)$  dada em (4.4), e  $A_\mu^{\varepsilon\omega lm}(x^\lambda)$  dada

em (2.9) e (2.10), e resolvendo a integral, temos

$$E^{I\omega lm} = \frac{-\Omega m q}{l(l+1)} \frac{d}{dr} [r^2 R_{\omega l}^I(r)]_{r=R} Y_{lm}(\pi/2, 0) 2\pi \delta(\omega - m\Omega) \quad (4.8)$$

e

$$E^{II\omega lm} = -iq\Omega R_{\omega l}^{II} Y_{\phi}^{lm}(\pi/2, 0) 2\pi \delta(\omega - m\Omega). \quad (4.9)$$

A potência total tem a forma

$$W_M = \sum_{\varepsilon=I,II,NF,G} W_M^\varepsilon = \sum_{\varepsilon=I,II,NF,G} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \int_0^{+\infty} d\omega \frac{\omega}{T} |E^{\varepsilon\omega lm}|^2, \quad (4.10)$$

onde

$$T = 2\pi\delta(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt$$

é o tempo total medido por observadores estáticos. Para os modos puro-gauge  $G$  a contribuição para a amplitude de emissão se anula, pois temos a partir de (4.7) que

$$\int d^4x \sqrt{-g} j^\mu \nabla_\mu \Lambda = \underbrace{\int d^4x \sqrt{-g} \nabla_\mu (j^\mu \Lambda)}_A - \underbrace{\int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\mu j^\mu) \Lambda}_B.$$

Utilizando o teorema de Gauss e a propriedade dos campos de se anularem no infinito, teremos que a integral  $A$  é nula. Já a integral  $B$  é nula pela conservação da corrente. Os modos não físicos  $NF$  também não contribuem para a amplitude de emissão por terem norma nula, ver (2.47). Note que a presença do termo  $\delta(\omega - m\Omega)$  em (4.8) e (4.9) indica que somente serão emitidas partículas com frequência  $\omega = m\Omega$ , e que dado  $\omega > 0$  e  $\Omega > 0$ , teremos  $m > 0$ . Assim chegamos a

$$W_M = \sum_{\lambda=I,II} W^\lambda = \sum_{\lambda=I,II} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \int_0^{+\infty} d\omega \frac{\omega}{T} |E^{\lambda\omega lm}|^2. \quad (4.11)$$

A potência total irradiada  $W_M$  será a soma de  $W_M^I$  e  $W_M^{II}$  dadas por

$$W_M^I = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \frac{2\pi (\Omega m)^3 q^2}{l^2 (l+1)^2} \left[ \frac{d}{dR_M} [r^2 R_{(\Omega m)l}^I (R_M)] \right]^2 |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2$$

e

$$W_M^{II} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l 2\pi m q^2 \Omega^3 [R_{(\Omega m)l}^{II} (R_M)]^2 |Y_{\phi}^{lm}(\pi/2, 0)|^2.$$

Substituindo as soluções de  $R^I$  e  $R^{II}$  fornecidas em (2.17) e (2.18), e utilizando as constantes de normalização (2.33) teremos que a potência total emitida será

$$W_M = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \frac{2\Omega^2 m^2 q^2}{l(l+1)} \left[ \frac{d}{dR_M} [R_M j_l(m\Omega R_M)] \right]^2 |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2 + \quad (4.12)$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \left\{ \frac{2 [m\Omega]^2 [q\Omega R_M]^2}{l(l+1)} [j_l(m\Omega R_M)]^2 |\partial_{\theta} Y^{lm}(\pi/2, 0)|^2 \right\}.$$

É importante ressaltar que até o presente momento, nenhuma relação foi feita entre  $\Omega$  e  $R_M$  na expressão (4.12). Para obtermos esta relação, iremos assumir a gravitação newtoniana, na qual temos

$$R_M = \left( \frac{M}{\Omega^2} \right)^{1/3}.$$

Desta forma (4.12) pode ser expressa em função de  $\Omega$  como

$$W_M = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \frac{m^2 q^2}{l(l+1)} \frac{9\Omega^{16/3}}{2M^{2/3}} \left[ \frac{d}{d\Omega} \left[ \left( \frac{M}{\Omega^2} \right)^{1/3} j_l \left( m (\Omega M)^{1/3} \right) \right] \right]^2 |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2 +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \left\{ \frac{2(m\Omega)^2 q^2 (\Omega M)^{2/3}}{l(l+1)} \left[ j_l \left( m (\Omega M)^{1/3} \right) \right]^2 \left| \partial_{\theta} Y^{lm} (\pi/2, \theta) \right|^2 \right\}. \quad (4.13)$$

### 4.3 Potência irradiada usando teoria quântica de campos em Schwarzschild, assumindo relatividade geral

#### 4.3.1 A relação entre $R_S$ e $\Omega$ , segundo a relatividade geral

Para que possamos comparar os resultados obtidos anteriormente com os que iremos obter nesta seção, é importante encontrar a relação entre a coordenada radial em Schwarzschild  $R_S$  e a velocidade angular  $\Omega$  da carga girante, segundo a teoria quântica de campos relatividade geral [14].

Iremos considerar uma carga elétrica em movimento circular no espaço-tempo de Schwarzschild, com elemento de linha (3.1), localizada em  $r = R_S$  com velocidade angular  $\Omega > 0$  (quando medida por observadores estáticos assintóticos), restrita ao plano  $\theta = \pi/2$ , descrita por

$$j_S^{\mu} (x^{\mu}) = \frac{q}{\sqrt{-g}u^0} \delta(r - R_S) \delta(\theta - \pi/2) \delta(\varphi - \Omega t) u^{\mu}, \quad (4.14)$$

com  $g = \det(g_{\mu\nu})$  e  $u_S^{\mu}$  a quadrivelocidade da carga dada por

$$u^{\mu} (\Omega, R_S) = \left[ \frac{1}{\sqrt{f(R_S) - R_S^2 \Omega^2}}, 0, 0, \frac{\Omega}{\sqrt{f(R_S) - R_S^2 \Omega^2}} \right]. \quad (4.15)$$



Considerando que a carga segue uma trajetória do tipo tempo, teremos que a equação  $u^\mu u_\mu = 1$  para o caso de um movimento equatorial na geometria de Schwarzschild se expressa como

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = (1 - 2M/r) \left( \frac{dt}{d\tau} \right)^2 - (1 - 2M/r)^{-1} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = 1. \quad (4.16)$$

Assumindo que a carga está seguindo uma geodésica, temos duas constantes de movimento. Uma delas é a energia total (incluindo a energia potencial gravitacional) por unidade de massa de repouso da carga elétrica, com relação a um observador estático no infinito

$$\varepsilon = g_{\mu\nu}\xi^\mu u^\nu = (1 - 2M/r) \left( \frac{dt}{d\tau} \right), \quad (4.17)$$

na qual  $\xi^\mu = (\partial/\partial t)^\mu = (1, 0, 0, 0)$  denota o campo de Killing estático tipo tempo. A outra é o momento angular por unidade de massa de repouso da carga elétrica,

$$L = -g_{\mu\nu}\psi^\mu u^\nu = r^2 \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right), \quad (4.18)$$

na qual  $\psi^\mu = (\partial/\partial\varphi)^\mu = (0, 0, 0, 1)$  denota o campo de Killing rotacional tipo espaço. Substituindo (4.18) e (4.17) em (4.16) e manipulando de forma devida, obtemos a equação da geodésica do tipo tempo, para a carga representada por  $j_S^\mu$  no espaço-tempo de Schwarzschild, em movimento no plano equatorial, dada por

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left( \frac{L^2}{r^2} + 1 \right) = \frac{1}{2} \varepsilon^2, \quad (4.19)$$

escrita em termos das constantes do movimento geodésico  $\varepsilon$  e  $L$ . A equação anterior

nos mostra que o movimento radial da carga massiva seguindo uma geodésica em Schwarzschild é o mesmo do de uma partícula de massa unitária, com energia  $\varepsilon^2/2$ , submetida ao potencial efetivo

$$V = \frac{1}{2} - \frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3}, \quad (4.20)$$

analisado segundo a mecânica unidimensional não relativística usual. Um eventual movimento radial da carga é determinado pelo potencial efetivo acima, enquanto que o seu movimento angular e a mudança na coordenada temporal  $t$  são obtidos das equações (4.18) e (4.17) acima, respectivamente.

Os extremos do potencial efetivo (4.20) são obtidos da equação

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{(Mr^2 - L^2r + 3ML^2)}{r^4} = 0,$$

cujas raízes são

$$R_{\pm} = \frac{L^2 \pm \sqrt{L^4 - 12L^2M^2}}{2M}. \quad (4.21)$$

Se  $L^2 < 12M^2$ , não há pontos extremos no potencial. Se  $L^2 = 12M^2$ , há uma ponto de inflexão no potencial em  $R_+ = R_- = 6M$ , ao qual está associada uma órbita circular geodésica instável da carga. Finalmente, se  $L^2 > 12M^2$ , há um ponto de mínimo de potencial  $V$  em  $R_+$  e um máximo em  $R_-$ . Sendo assim concluímos que, para a carga massiva com valores suficiente grandes do momento angular  $L$ , existem órbitas circulares estáveis para  $R_S > 6M$ , e órbitas circulares instáveis para  $3M < R_S \leq 6M$ . Pode-se ainda mostrar que a luz pode permanecer em uma órbita circular instável em  $r = 3M$ .

A corrente  $j_S^\mu$ , que representa a carga em movimento circular uniforme, dada pela equação (4.14) na geometria de Schwarzschild, emitirá fótons com frequência  $\omega = m\Omega = \frac{mL}{R_S^2 u_S^0}$ , devido à interação com o campo vetorial quântico  $\hat{A}(x^\mu)$  (na verdade, a carga também emite ondas gravitacionais, mas este efeito não será levado em conta aqui). Devido à reação da radiação (cujos detalhes não serão tratados aqui) a carga se desviará ligeiramente do movimento geodésico. Considerando a carga representada por  $j_S^\mu$  como estando localizada originalmente em  $R_S > 6M$ , com  $L^2 > 12M^2$ , ela deverá espiralar lentamente até raios cada vez menores, perdendo energia através da emissão de radiação escalar, permanecendo em órbitas circulares, aproximadamente, até ela atingir o raio orbital  $R_S = 6M$ . Naquele ponto, a órbita se tornará instável e a carga deverá cair rapidamente na singularidade localizada em  $r = 0$ .

Usamos então (4.21) e que

$$L = r^2 \left( \frac{d\varphi}{d\tau} \right) = r^2 \left( \frac{d\varphi}{dt} \right) \left( \frac{dt}{d\tau} \right) = r^2 \Omega u^0,$$

com  $u^0$  dado em (4.15), para obter, segundo a relatividade geral, que as órbitas circulares estáveis são tais que

$$R_S = \left( \frac{M}{\Omega^2} \right)^{1/3}. \quad (4.22)$$

Como podemos notar, esta expressão é formalmente idêntica àquela obtida para a coordenada radial da carga girante em Minkowski sob a ação da gravitação newtoniana.

### 4.3.2 Cálculo da potência irradiada no limite de baixas frequências

Tendo calculado as constantes de normalização dos modos físicos para o caso de baixas frequências, assim como a relação entre  $\Omega$  e  $R$ , podemos agora encontrar a potência irradiada associada a esta situação. Os passos serão muito semelhantes aos tomados na seção 4.2.

A corrente normalizada associada à carga será dada por (4.14). Seguindo os mesmos passos tomados em Minkowski, mostra-se que os modos físicos são os únicos a contribuir. Teremos assim que a potência total irradiada no caso de Schwarzschild, no limite de baixas frequências, será

$$W_{S_\omega} = \sum_{\lambda=I,II} W_{S_\omega}^\lambda = \sum_{\lambda=I,II} \sum_{n=\leftarrow,\rightarrow} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \int_0^{+\infty} d\omega \frac{\omega}{T} |E^{\lambda\omega lm}|^2, \quad (4.23)$$

onde

$$T = 2\pi\delta(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt$$

é o tempo total medido por observadores estáticos assintóticos. As diferenças de

(4.23) para com (4.11) é que agora teremos que levar em consideração a somatória em  $n$ , os fatores de  $f$  e que as funções  $R_{\omega l}^{\lambda n}(r)$  em questão serão as obtidas analiticamente para baixas frequências em Schwarzschild por meio de (3.24)-(3.25), e com o auxílio das relações  $R_{\omega l}^{II n}(r) = r q_{\omega l}^{II n}(r)$  e  $R_{\omega l}^{In}(r) = \frac{1}{r} q_{\omega l}^{In}(r)$ . Para os modos  $I$  e  $II$ , respectivamente, teremos que, para baixas frequências, a potência irradiada será

$$W_{S_\omega}^I = \sum_{n=\leftarrow,\rightarrow} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \left(1 - \frac{2M}{R_S}\right)^2 \frac{2\pi m \Omega (\Omega m q)^2}{(l(l+1))^2} \times \quad (4.24)$$

$$\times \left[ \frac{d}{dR_S} [R_S q_{\omega l}^{In}(R_S)] \right]^2 |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2$$

e

$$W_{S_\omega}^{II} = \sum_{n=\leftarrow,\rightarrow} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l 2\pi m q^2 \Omega^3 [R_S q_{\omega l}^{II n}(R_S)]^2 |Y_{\phi}^{lm}(\pi/2, 0)|^2. \quad (4.25)$$

Substituindo as soluções de  $rq_{\omega l}^\lambda$  fornecidas em (3.24) e (3.25), e utilizando as constantes de normalização (3.34)-(3.37) teremos a potência total emitida como

$$W_{S_\omega} = W_{S_\omega}^I + W_{S_\omega}^{II}. \quad (4.26)$$

Assim como em Minkowski, nenhuma relação foi feita entre  $\Omega$  e  $R_S$  até aqui. Na subseção anterior, temos a relação entre  $R_S$  e  $\Omega$  na relatividade geral, para uma órbita circular ao redor do buraco negro de Schwarzschild, dada por  $R_S = \left(\frac{M}{\Omega^2}\right)^{1/3}$ . Assim, a potência total será obtida usando esta relação em (4.24)-(4.25). Temos então

$$W_{S_\omega} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l (1 - 2\Omega^{2/3} M^{2/3})^2 \frac{2\pi (\Omega m)^3 q^2}{(l(l+1))^2} \times$$

$$\times \left[ \frac{-3\Omega^{5/3}}{2M^{1/3}} \frac{d}{d\Omega} \left[ \frac{M^{1/3}}{\Omega^{2/3}} q_{\omega l}^{I\rightarrow}(M^{1/3}\Omega^{-2/3}) \right] \right]^2 |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l (1 - 2\Omega^{2/3} M^{2/3})^2 \frac{2\pi m \Omega (\Omega m q)^2}{(l(l+1))^2} |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2 \times \\
& \quad \times \left[ \frac{d}{d\Omega} \left[ \frac{M^{1/3}}{\Omega^{2/3}} q_{\omega l}^{I\leftarrow} (M^{1/3} \Omega^{-2/3}) \right] \right]^2 + \\
& + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l 2\pi m q^2 \Omega^3 \left[ \frac{M^{1/3}}{\Omega^{2/3}} q_{\omega l}^{II\rightarrow} (M^{1/3} \Omega^{-2/3}) \right]^2 |Y_{\phi}^{lm}(\pi/2, 0)|^2 + \\
& \quad + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l 2\pi m q^2 \Omega^3 |Y_{\phi}^{lm}(\pi/2, 0)|^2 \times \\
& \quad \times \left[ \frac{M^{1/3}}{\Omega^{2/3}} q_{\omega l}^{II\leftarrow} (M^{1/3} \Omega^{-2/3}) \right]^2. \tag{4.27}
\end{aligned}$$

### 4.3.3 Cálculo numérico da potência irradiada

Como vimos na subseção anterior, a potência total  $W_S$  é dada pela soma das potências  $W_S^I$  e  $W_S^{II}$  fornecidas por

$$\begin{aligned}
W_S^I & = \sum_{n=\leftarrow, \rightarrow} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l \left(1 - \frac{2M}{R_S}\right)^2 \frac{2\pi q^2 (\Omega m)^3}{(l(l+1))^2} \times \\
& \quad \times \left[ \frac{d}{dR_S} \left[ R_S^2 R_{\Omega m, l}^{In}(R_S) \right] \right]^2 |Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2
\end{aligned} \tag{4.28}$$

e

$$W_S^{II} = \sum_{n=\leftarrow,\rightarrow} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l 2\pi m \Omega [q\Omega]^2 [R_{\Omega m, l}^{II n}(R_S)]^2 \left| \frac{\partial_\theta Y_{lm}(\pi/2, 0)}{\sqrt{l(l+1)}} \right|^2. \quad (4.29)$$

Para que possamos determinar  $W_S$  será necessário conhecer as funções  $R_{\Omega m, l}^{\lambda n}$ . Não podendo expressar  $R_{\Omega m, l}^{\lambda n}(r)$  em termos de funções analíticas conhecidas, iremos partir para uma abordagem numérica para o problema.

Dado que as equações diferenciais de  $R_{\Omega m, l}^{\lambda n}(r)$  (3.15) e (3.16) são equações de segunda ordem em  $r$ , para que possamos encontrar soluções numéricas, será necessário conhecer condições iniciais para a função  $R_{\Omega m, l}^{\lambda n}(r)$ . Para tal fim utilizaremos as soluções assintóticas encontradas na seção 3.2.

Para o caso em que  $\lambda = II$  e  $n = \leftarrow$ , a partir de (3.21) temos como solução assintótica mais simples aquela que se encontra na região  $x \ll -1$ , que possui a forma

$$R_{\Omega m, l}^{II \leftarrow}(r) = r q_{\Omega m, l}^{II \leftarrow} \alpha e^{-i\omega x}.$$

Definimos a função assintótica transmitida com módulo unitário como sendo

$$\chi_{\omega l}^{II \leftarrow}(x_E) = e^{(-i\omega x_E)},$$

para  $x_E \ll -1$  e para um valor fixo de  $\omega$ . Em seguida podemos evoluir numericamente esta função através da equação diferencial (3.16). Por meio de (3.21) temos que a solução será da forma

$$\chi_{\omega l}^{II \leftarrow}(x_D) = C_{\omega l}^{II \leftarrow} e^{-i\omega x_D} + D_{\omega l}^{II \leftarrow} e^{i\omega x_D},$$

para  $x_D \gg 1$ , onde  $|C_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 - |D_{\omega l}^{\leftarrow}|^2 = 1$ . Calculando a derivada de  $\chi_{\omega l}^{II\leftarrow}(x)$  com relação a  $x$  no ponto  $x_D$ , obtemos

$$\frac{d\chi_{\omega l}^{II\leftarrow}}{dx}(x_D) \approx -i\omega C_{\omega l}^{II\leftarrow} e^{-i\omega x_D} + i\omega D_{\omega l}^{II\leftarrow} e^{i\omega x_D}.$$

Assim temos que

$$|C_{\omega l}^{II\leftarrow}|^2 = \frac{1}{4} \left( |\chi_{\omega l}^{II\leftarrow}(x_D)|^2 + \frac{1}{\omega^2} \left| \frac{d\chi_{\omega l}^{II\leftarrow}}{dx}(x_D) \right|^2 \right) + \frac{1}{2}$$

e

$$|D_{\omega l}^{II\leftarrow}|^2 = \frac{1}{4} \left( |\chi_{\omega l}^{II\leftarrow}(x_D)|^2 + \frac{1}{\omega^2} \left| \frac{d\chi_{\omega l}^{II\leftarrow}}{dx}(x_D) \right|^2 \right) - \frac{1}{2}.$$

Dado que a função  $\chi_{\omega l}^{II\leftarrow}$  não está normalizada, vamos agora multiplicá-la por uma constante de normalização  $K_{\omega l}^{II\leftarrow}$

$$K_{\omega l}^{II\leftarrow} \chi_{\omega l}^{II\leftarrow} = \begin{cases} K_{\omega l}^{II\leftarrow} e^{-i\omega x} \\ K_{\omega l}^{II\leftarrow} C_{\omega l}^{II\leftarrow} e^{-i\omega x} + K_{\omega l}^{II\leftarrow} D_{\omega l}^{II\leftarrow} e^{i\omega x} \end{cases}. \quad (4.30)$$

Para que possamos determinar  $K_{\omega l}^{II\leftarrow}$ , vamos requerer que as condições de contorno assintóticas de (4.30) sejam compatíveis com (3.21), que pode ser reescrita como

$$R_{\Omega m, l}^{II\leftarrow}(r) = \begin{cases} B_{\omega l}^{\lambda\leftarrow} T_{\omega l}^{\lambda\leftarrow} e^{-i\omega x} & (x \ll -1), \\ B_{\omega l}^{\lambda\leftarrow} (e^{-i\omega x} + R_{\omega l}^{\lambda\leftarrow} e^{i\omega x}) & (x \gg 1), \end{cases} \quad (4.31)$$

Comparando as expressões (4.30) e (4.31) temos



$$K_{\omega l}^{II\leftarrow} = B_{\omega l}^{\lambda\leftarrow} T_{\omega l}^{II\leftarrow},$$

$$C_{\omega l}^{II\leftarrow} = \frac{1}{T_{\omega l}^{II\leftarrow}},$$

$$D_{\omega l}^{II\leftarrow} = \frac{R_{\omega l}^{II\leftarrow}}{T_{\omega l}^{II\leftarrow}},$$

de onde concluimos que

$$R_{\Omega m, l}^{II\leftarrow}(r) = B_{\omega l}^{II\leftarrow} T_{\omega l}^{II\leftarrow} \chi_{\omega l}^{II\leftarrow}.$$

Procedimentos análogos são efetuados para que possamos encontrar os  $R_{\omega l}^{\lambda n}(r)$  restantes. Após encontrarmos numericamente todos os  $R_{\omega l}^{\lambda n}(r)$ , podemos descobrir qual a potência total  $W_S$ . No apêndice A exibimos o algoritmo utilizado, com o auxílio do programa Mathematica versão 5.0, para o cálculo numérico. Os resultados obtidos serão analisados no próximo capítulo.

É importante lembrar que sendo o erro numérico tanto menor quanto maiores os módulos de  $x_E$  e  $x_D$ , para os resultados aqui obtidos utilizamos  $x_E$  e  $x_D$  tais que o potencial  $V_S$  (3.14) seja sempre menor ou igual a 1,5% de  $\omega^2$ , de forma que as exponenciais  $e^{\pm i\omega x}$  sejam de fato boas aproximações para  $rq_{\omega l}^{\lambda n}(x)$ .

## Capítulo 5

# Análise e comparação dos resultados

Analisaremos aqui a potência irradiada pela carga girante em cada um dos casos obtidos no capítulo 4. O fato de termos expressado as potências em função da velocidade angular  $\Omega$ , nos permitirá comparar os diferentes resultados, onde  $\Omega$  é medida segundo observadores estáticos assintóticos.

Primeiramente, comparando o resultado clássico para a potência irradiada  $W_C$  dada por (4.3) com o resultado obtido via teoria quântica de campos em Minkowski  $W_M$  dado por (4.13), obtivemos numericamente que para  $l \rightarrow \infty$ ,  $W_M$  converge para  $W_C$ , como pode-se observar na figura 5.1. Este resultado era esperado, tendo em vista que  $W_M$  foi calculado em nível de árvore e portanto deve ser equivalente ao cálculo clássico.

Na figura 5.2 fazemos a comparação entre  $V_M$  e  $V_S$  para  $l = 1$ . Na figura 5.3, comparamos a expressão da potência irradiada obtida para baixas frequências em Schwarzschild  $W_{S_w}$  com a solução numérica  $W_S$ . Notamos que os valores das potências totais irradiadas, quando computadas por observadores estáticos assintóticos, convergem na região  $\Omega \rightarrow 0$ , o que vem a confirmar a consistência dos resultados

obtidos através do método numérico utilizado.

Na figura 5.4 comparamos a potência irradiada pela carga orbitando o objeto massivo no espaço-tempo de Minkowski  $W_M$ , dada por (4.13), com a potência irradiada pela carga orbitando um buraco negro de Schwarzschild, tanto para o caso de baixas frequências  $W_{S\omega}$ , dada por (4.27), quanto para o resultado numérico  $W_S$  calculado na seção 4.3.3. Como era esperado, dado que a métrica de Minkowski se reduz a métrica de Schwarzschild para  $r \rightarrow \infty$  (o espaço-tempo de Schwarzschild é assintoticamente plano), temos que em ambos os casos (numérico e de baixas frequências), para  $\Omega \rightarrow 0$ , a razão entre as potências tende a 1. Já para as regiões próximas ao horizonte de eventos ( $R_S \approx 6M$ ), nossos cálculos numéricos mostram que a potência irradiada em Schwarzschild é aproximadamente 30% menor que a potência em Minkowski.

Para calcularmos o quanto da potência irradiada é observada assintoticamente em Schwarzschild,  $W_S^{obs}$ , utilizaremos as expressões das potências (4.28)-(4.29), juntamente com os coeficientes de reflexão e transmissão adequados, dados em (3.22). Teremos então [20]

$$W_S^{obs} = W_{S_T}^{I\rightarrow} + W_{S_R}^{I\leftarrow} + W_{S_T}^{II\rightarrow} + W_{S_R}^{II\leftarrow}, \quad (5.1)$$

onde

$$W_{S_T}^{I\rightarrow} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l |T_{\omega l}^{I\rightarrow}|^2 \left(1 - \frac{2M}{R_S}\right)^2 \frac{2\pi q^2 (\Omega m)^3}{(l(l+1))^2} \left[ \frac{d}{dR_S} [R_S^2 R_{(\Omega m)l}^{I\rightarrow}(R_S)] \right]^2 \times \quad (5.2)$$

$$|Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2,$$

$$W_{S_R}^{I\leftarrow} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l |R_{\omega l}^{I\leftarrow}|^2 \left(1 - \frac{2M}{R_S}\right)^2 \frac{2\pi q^2 (\Omega m)^3}{(l(l+1))^2} \left[ \frac{d}{dR_S} [R_S^2 R_{(\Omega m)l}^{I\leftarrow}(R_S)] \right]^2 \times \quad (5.3)$$

$$|Y_{lm}(\pi/2, 0)|^2,$$

$$W_{S_T}^{II\rightarrow} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l |T_{\omega l}^{II\rightarrow}|^2 2\pi m \Omega [q\Omega]^2 [R_{\Omega m, l}^{II\rightarrow}(R_S)]^2 \left| \frac{\partial_{\theta} Y_{lm}(\pi/2, 0)}{\sqrt{l(l+1)}} \right|^2, \quad (5.4)$$

$$W_{S_R}^{II\leftarrow} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^l |R_{\omega l}^{II\leftarrow}|^2 2\pi m \Omega [q\Omega]^2 [R_{\Omega m, l}^{II\leftarrow}(R_S)]^2 \left| \frac{\partial_{\theta} Y_{lm}(\pi/2, 0)}{\sqrt{l(l+1)}} \right|^2. \quad (5.5)$$

Assim, utilizando (5.1)-(5.5), a figura 5.5 mostra que no caso em que a carga está em órbita circular no espaço-tempo de Schwarzschild, a potência absorvida pelo buraco negro é muito pequena se comparada com a potência irradiada, sendo a potência observada assintoticamente,  $W_S^{obs}$ , cerca de 97% da potência irradiada  $W_S$ .

Similarmente ao cálculo anterior, na aproximação analítica de baixas frequências temos que a potência observada assintoticamente é

$$W_{S_{\omega}}^{obs} = W_{S_{\omega T}}^{I\rightarrow} + W_{S_{\omega R}}^{I\leftarrow} + W_{S_{\omega T}}^{II\rightarrow} + W_{S_{\omega R}}^{II\leftarrow} \quad (5.6)$$

na qual utilizaremos em (5.2)-(5.5) os valores de  $R_{\omega l}^{\lambda n}$  nas aproximações de baixas frequências. Para encontrarmos os coeficientes de transmissão  $|T_{\omega l}^{\lambda \rightarrow}|^2$  a baixas frequências, iremos comparar a expressão (3.20) para valores de  $x \gg 1$ , com a expressão (3.24). Substituindo [14]

$$Q_l \approx \frac{2^l (l!)^2}{(2l+1)!} z^{-l-1} \text{ para } z \gg 1,$$

em (3.24) temos

$$r q_{\omega l}^{\lambda \rightarrow}(z) \approx C_{\omega l}^{\lambda \rightarrow} \frac{(l+1) 2^l (l!)^2}{l (2l+1)!} \frac{x^{-l}}{M^{-l-1}}.$$

Comparando a expressão acima com (3.20), usando que  $h_l^{(1)}(k) \approx \eta_l(k) \approx \frac{-(2l)!}{2^l l!} k^{-l-1}$ , temos

$$T_{\omega l}^{\lambda \rightarrow} = \frac{\omega^l (l+1) 2^{2l} (l!)^3}{M^{-l-1} (2l)! l^{l+1} l (2l+1)!} \frac{C_{\omega l}^{\lambda \rightarrow}}{B_{\omega l}^{\lambda \rightarrow}}.$$

Utilizando  $|R_{\omega l}^{\lambda \leftarrow}|^2 = |R_{\omega l}^{\lambda \rightarrow}|^2 = 1 - |T_{\omega l}^{\lambda \rightarrow}|^2$ , determinamos o coeficiente restante. O resultado obtido para  $W_{S_{\omega}}^{obs}$  dado por (5.6) pode ser observado na figura 5.5.

É importante ressaltar que os resultados obtidos confirmam a necessidade de se levar em consideração os efeitos de curvatura do espaço-tempo quando se está trabalhando com fenômenos astrofísicos ocorrendo na vizinhança de buracos negros envolvendo comprimentos de onda da ordem do raio de Schwarzschild, ou, especificamente no caso abordado aqui, quando analisamos a radiação emitida por uma carga elétrica girando ao redor de um buraco negro, próximo de seu horizonte de eventos.

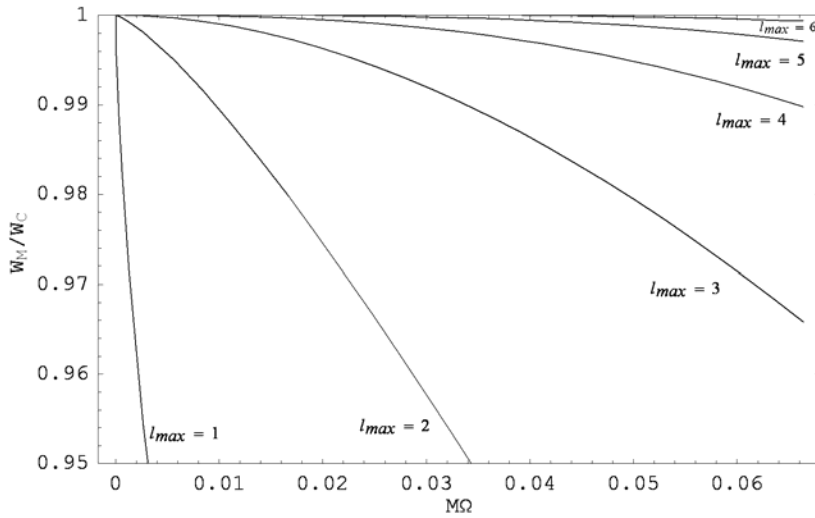


Figura 5.1: Mostramos a razão  $W_M/W_C$  em função de  $M\Omega$  (sendo  $\Omega$  medido por observadores estáticos assintóticos), quando consideramos um número cada vez maior de contribuições do momento angular  $l$ , desde unicamente  $l = 1$ , até  $l = 1, 2, 3, 4, 5$  e  $6$ .  $W_M$  é a potência total irradiada calculada segundo teoria quântica de campos em Minkowski em nível de árvore, dada por (4.13), enquanto  $W_C$  é calculada a partir da eletrodinâmica clássica, dada por (4.3). A razão tende a 1 quando as contribuições de  $l$  tendem a  $\infty$  para qualquer valor de  $M\Omega$ .

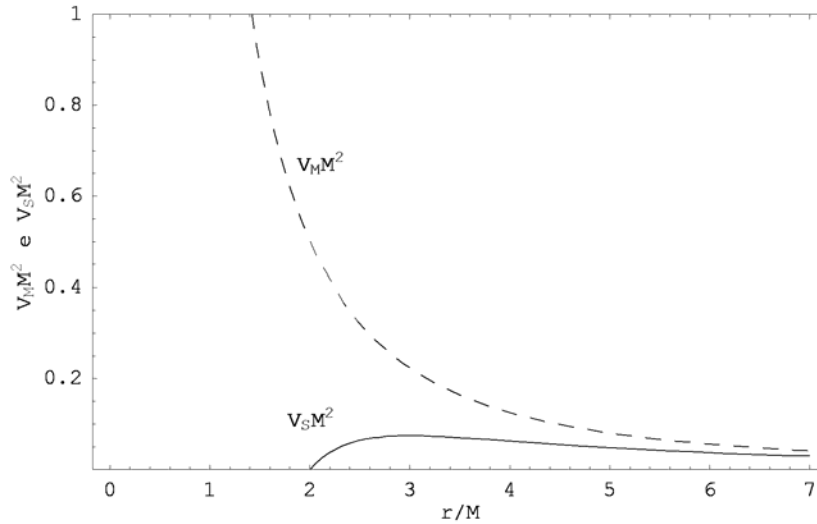


Figura 5.2: Mostramos os potenciais  $V_S$  e  $V_M$  dados em (3.14) e (2.13), respectivamente, em função de  $r/M$ , onde  $r$  é a coordenada radial em Schwarzschild e em Minkowski e  $M$  a massa do objeto estelar. Note que assintoticamente ambos os potenciais caem com  $1/r^2$ . O potencial em Schwarzschild, devido ao horizonte de eventos, é limitado à região  $r > 2M$ . Em Minkowski esta limitação não existe, podendo assim  $r$  assumir quaisquer valores  $r > 0$ . Tomamos aqui o caso  $l = 1$ .

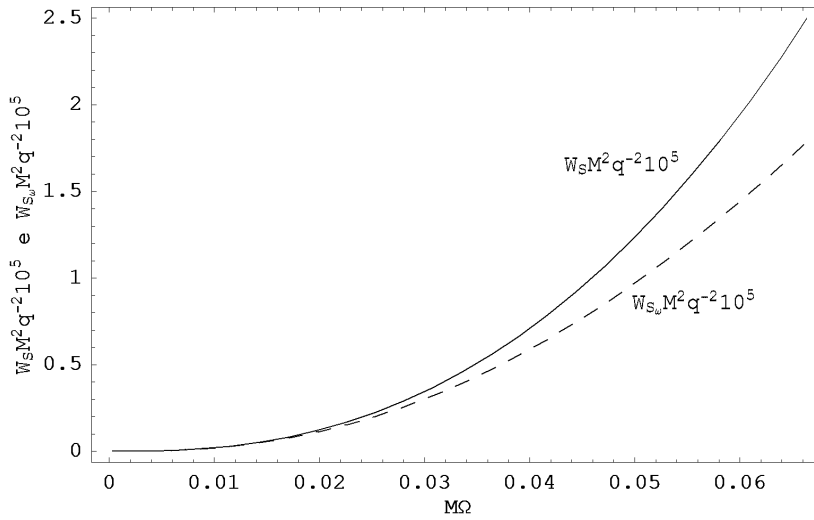


Figura 5.3: Exibimos aqui a potência total irradiada para Schwarzschild quando calculada numericamente,  $W_S$ , e quando calculada analiticamente para baixas frequências,  $W_{S_w}$ , em função de  $M\Omega$ , onde  $M$  é a massa do buraco negro e  $\Omega$  a velocidade angular de rotação da carga, assim como medida por observadores estáticos assintóticos. Consideramos a somatória do momento angular até  $l = 6$ , e  $\Omega$  até 0.068, por ser este o valor limite para para as órbitas circulares estáveis, segundo a relatividade geral.



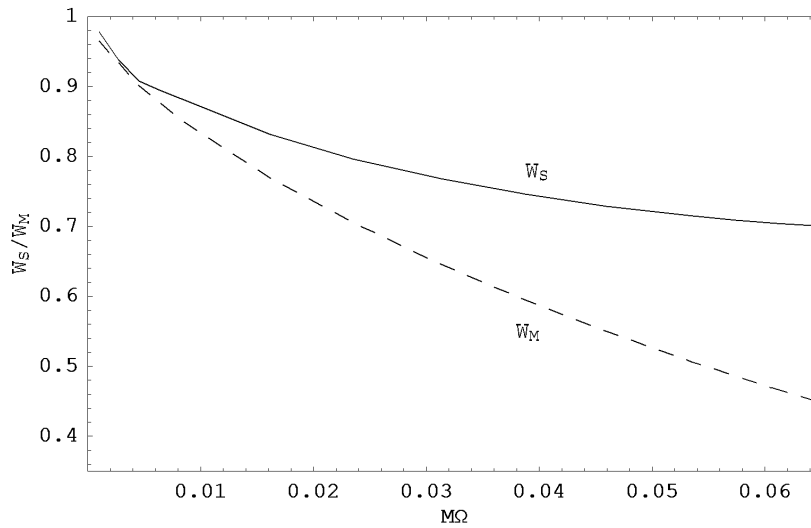


Figura 5.4: Na figura acima, exibimos as razões  $W_S/W_M$  e  $W_{S_w}/W_M$  em função de  $M\Omega$ . Aqui consideramos contribuições até  $l = 6$  nas somatórias, e velocidade angular máxima  $\Omega = 0.068$ . Observamos que quanto maior  $\Omega$  menor a potência irradiada em Schwarzschild com relação à irradiada em Minkowski.

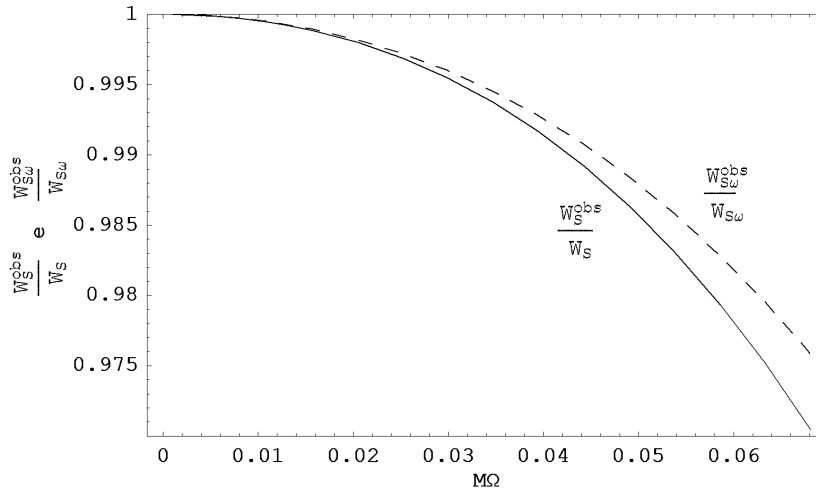


Figura 5.5: Acima mostramos a razão entre a potência observada assintoticamente  $W_S^{obs}$  dada na seção 5.1 e a potência irradiada em Schwarzschild  $W_S$  dada em (4.3.3), assim como a razão entre  $W_{S\omega}^{Obs}$  e  $W_{S\omega}$ , fornecidas em (5.6) e (4.23), respectivamente. Vemos que a razão para o caso numérico se encontra muito próxima de 1, concluindo que mais de 97% da energia irradiada não é absorvida pelo buraco negro.

# Capítulo 6

## Conclusões e perspectivas

Neste trabalho apresentamos a quantização do campo do fóton nos espaços-tempos de Schwarzschild e Minkowski, calculamos a potência irradiada por uma carga elétrica em órbita circular em torno de um objeto estelar de massa  $M$  nos dois espaços-tempos em questão. Os passos principais para chegarmos a esses resultados foram encontrar as soluções clássicas das equações de campo em Minkowski e Schwarzschild, quantizar o campo pelo método de Gupta-Bleuler e encontrar as constantes de normalização utilizando o produto interno de Klein-Gordon generalizado.

Em Minkowski as soluções das equações clássicas foram encontradas analiticamente, e a forma analítica das constantes de normalização foi também determinada. Já em Schwarzschild, dado que as soluções das equações radiais de campo não podem ser expressas em termos de funções especiais conhecidas, para que fosse possível tratá-las, adotamos a aproximação analítica de baixas frequências e a resolução numérica. Para as constantes de normalização, foi possível encontrar sua forma analítica no limite de baixas frequências, bem como determiná-las através do método numérico por nós utilizado. Com estas soluções em mãos foi possível o cálculo da potência irradiada para cada um dos casos em questão.

Após o cálculo das potências, ao compararmos os resultados obtidos, mostramos que há diferenças significativas das potências irradiadas em Minkowski e Schwarzschild, quando medidas por observadores estáticos assintóticos, da ordem de até 30%, dependendo do valor da velocidade angular  $\Omega$  da carga girante. Mostrou-se também que é desprezível a quantidade de radiação que é absorvida pelo buraco negro. Estes resultados confirmam a importância dos efeitos da curvatura do espaço-tempo nos fenômenos astrofísicos ocorrendo na vizinhança de buracos negros, especialmente quando estamos lidando com partículas de comprimento de onda da ordem do raio de Schwarzschild.

Uma possível variação deste trabalho seria o cálculo da potência irradiada por uma carga orbitando no espaço-tempo ao redor de uma estrela relativística, cujo resultado poderia ser comparado com o da potência em Schwarzschild aqui obtido. Outra forma de dar prosseguimento aos estudos aqui realizados seria a mudança da carga girante escolhida por uma corrente mais complexa que pudesse representar melhor os discos de acreção ao redor de buracos negros.

# Apêndice A

Exibiremos aqui como o cálculo numérico da potência irradiada em Schwarzschild foi efetivado através do programa *Mathemática* versão 5.0, e mostraremos a construção dos gráficos exibidos no corpo da tese. Definição das notações

Com o intuito de facilitar a leitura do algoritimo, declaramos uma lista de símbolos a serem utilizados posteriormente.

```
<< Utilities`Notation`
Off[Symbolize::bsymbexs]; (*desliga erro do Symbolize*)
Off[General::spell1];

Symbolize[R+I]; Symbolize[R-I]; Symbolize[R+II]; Symbolize[R-II];
Symbolize[RT+I]; Symbolize[RR-I]; Symbolize[RT+II]; Symbolize[RR-II];
Symbolize[B+I]; Symbolize[B-I]; Symbolize[B+II]; Symbolize[B-II];
Symbolize[C+I]; Symbolize[C-I]; Symbolize[C+II]; Symbolize[C-II];
Symbolize[χ+I]; Symbolize[χ-I]; Symbolize[χ+II]; Symbolize[χ-II];
Symbolize[P+I]; Symbolize[P-I]; Symbolize[P+II]; Symbolize[P-II];
Symbolize[PT+I]; Symbolize[PR+I]; Symbolize[PT+II]; Symbolize[PR+II];

Symbolize[q+I]; Symbolize[q-I]; Symbolize[q+II]; Symbolize[q-II];
Symbolize[Cω+I]; Symbolize[Cω-I]; Symbolize[Cω+II]; Symbolize[Cω-II];
Symbolize[Pω+I]; Symbolize[Pω-I]; Symbolize[Pω+II]; Symbolize[Pω-II];
Symbolize[Rω+I]; Symbolize[Rω-I]; Symbolize[Rω+II]; Symbolize[Rω-II];
Symbolize[PTω+I]; Symbolize[PRω-I]; Symbolize[PTω+II]; Symbolize[PRω-II];

Symbolize[PMII]; Symbolize[PMI]; Symbolize[RMI]; Symbolize[RMII];

Symbolize[PSTot]; Symbolize[PMTot]; Symbolize[PGreen];
Symbolize[PωTot]; Symbolize[PωObs]; Symbolize[PSObs];

Notation[∂xn f- ⇒ D[f-, {x-, n}]]];
```

## Constantes e funções comuns

$r_E = 2.000001$ ;  $r_D = 2000$ ;  $Sr_E = 1$ ;  $M = 1$ ;  $\Phi = 0$ ;  $l_{min} = 1$ ;  $q = 1$ ;

$$DSr_D[\omega_-] := \left( \frac{-i \omega}{\left(1 - \frac{2M}{r_D}\right)} \right); \quad DSr_E[\omega_-] := \left( \frac{-i \omega}{\left(1 - \frac{2M}{r_E}\right)} \right);$$

$$V_S[r_-, l_-] := \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{1(1+1)}{r^2}\right); \quad f[r_-] := \left(1 - \frac{2M}{r}\right);$$

$$Y[l_-, m_-] := \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{(-1)^m}{2^{l+1} l!}} (1-x^2)^{m/2} \partial_x^{l+m} (x^2-1)^l / . x \rightarrow \text{Cos}[\theta];$$

## Expressões das Potências Numéricas em Schwarzschild Modo II indo para o $\infty$

$$B_{\rightarrow}^{\text{II}}[\omega_{-}] := \frac{1}{\sqrt{4 \pi \omega}};$$

$$\chi_{\rightarrow}^{\text{II}}[\omega_{-}, l_{-}] := R[r] /.$$

$$\text{First}[\text{NDSolve}[\{(\omega^2 - V_s[r, l]) R[r] + f[r] \partial_r (f[r] \partial_r R[r]) = 0, R[r_D] = 1, \\ R'[r_D] = \text{DSr}_D[\omega]\}, R, \{r, r_E, r_D\}, \text{MaxSteps} \rightarrow 1000000]]];$$

$$C_{\rightarrow}^{\text{II}}[\omega_{-}, l_{-}] := \sqrt{\left(\frac{1}{4} (\text{Abs}[\chi_{\rightarrow}^{\text{II}}[\omega, l]])^2 + \frac{(f[r])^2}{4 \omega^2} (\text{Abs}[\partial_r \chi_{\rightarrow}^{\text{II}}[\omega, l]])^2 + \frac{1}{2}\right)} / . r \rightarrow r_E;$$

$$R_{\rightarrow}^{\text{II}}[\omega_{-}, l_{-}] := (C_{\rightarrow}^{\text{II}}[\omega, l])^{-1} B_{\rightarrow}^{\text{II}}[\omega] \chi_{\rightarrow}^{\text{II}}[\omega, l];$$

$$P_{\rightarrow}^{\text{II}}[l_{\text{max}}, \Omega_{-}] :=$$

$$\sum_{l=1}^{l_{\text{max}}} \left( \sum_{m=1}^1 2 \pi m \Omega (q \Omega)^2 (\text{Abs}[R_{\rightarrow}^{\text{II}}[m \Omega, l]])^2 \left( \text{Abs}\left[\frac{\partial_{\theta} Y[l, m]}{\sqrt{1 (1+1)}} / . \theta \rightarrow \pi/2\right] \right)^2 \right) / . \\ r \rightarrow \left(\frac{M}{\Omega^2}\right)^{1/3}$$

$$P_{\rightarrow}^{\text{II}}[l_{\text{max}}, \Omega_{-}] := \sum_{l=1}^{l_{\text{max}}} \left( \sum_{m=1}^1 (\text{Abs}[C_{\rightarrow}^{\text{II}}[m \Omega, l]])^{-2} 2 \pi m \Omega (q \Omega)^2 \right.$$

$$\left. (\text{Abs}[R_{\rightarrow}^{\text{II}}[m \Omega, l]])^2 \left( \text{Abs}\left[\frac{\partial_{\theta} Y[l, m]}{\sqrt{1 (1+1)}} / . \theta \rightarrow \pi/2\right] \right)^2 \right) / . r \rightarrow \left(\frac{M}{\Omega^2}\right)^{1/3}$$

(\*Plot[P<sub>→</sub><sup>II</sup>[2, Ω], {Ω, 6<sup>-3/2</sup>, r<sub>D</sub><sup>-3/2</sup>}, PlotDivision→4, PlotPoints→15]//Timing\*)

(\*Plot[P<sub>→</sub><sup>II</sup>[2, Ω], {Ω, 6<sup>-3/2</sup>, r<sub>D</sub><sup>-3/2</sup>}, PlotDivision→4, PlotPoints→15]//Timing\*)

## Modo II indo para o horizonte

$$B_{\leftarrow}^{\text{II}}[\omega_{-}] := \frac{1}{\sqrt{4 \pi \omega}};$$

$$\chi_{\leftarrow}^{\text{II}}[\omega_{-}, l_{-}] := R[r] /.$$

$$\text{First}[\text{NDSolve}[\{(\omega^2 - V_s[r, l]) R[r] + f[r] \partial_r (f[r] \partial_r R[r]) = 0, R[r_E] = 1, \\ R'[r_E] = \text{DSr}_E[\omega]\}, R, \{r, r_E, r_D\}, \text{MaxSteps} \rightarrow 1000000]]];$$

$$C_{\leftarrow}^{\text{II}}[\omega_{-}, l_{-}] := \sqrt{\left(\frac{1}{4} (\text{Abs}[\chi_{\leftarrow}^{\text{II}}[\omega, l]])^2 + \frac{(f[r])^2}{4 \omega^2} (\text{Abs}[\partial_r \chi_{\leftarrow}^{\text{II}}[\omega, l]])^2 + \frac{1}{2}\right)} / . r \rightarrow r_D;$$

$$R_{\leftarrow}^{\text{II}}[\omega_{-}, l_{-}] := (C_{\leftarrow}^{\text{II}}[\omega, l])^{-1} B_{\leftarrow}^{\text{II}}[\omega] \chi_{\leftarrow}^{\text{II}}[\omega, l];$$

$$P_{\leftarrow}^{\text{II}}[l_{\text{max}}, \Omega_{-}] :=$$

$$\sum_{l=1}^{l_{\text{max}}} \left( \sum_{m=1}^1 2 \pi m \Omega (q \Omega)^2 (\text{Abs}[R_{\leftarrow}^{\text{II}}[m \Omega, l]])^2 \left( \text{Abs}\left[\frac{\partial_{\theta} Y[l, m]}{\sqrt{1 (1+1)}} / . \theta \rightarrow \pi/2\right] \right)^2 \right) / . \\ r \rightarrow \left(\frac{M}{\Omega^2}\right)^{1/3}$$

$$P_{\leftarrow}^{\text{II}}[l_{\text{max}}, \Omega_{-}] := \sum_{l=1}^{l_{\text{max}}} \left( \sum_{m=1}^1 (1 - (\text{Abs}[C_{\leftarrow}^{\text{II}}[m \Omega, l]])^{-2}) 2 \pi m \Omega (q \Omega)^2 \right.$$

$$\left( \text{Abs}[R_c^{\text{II}}[m \Omega, 1]] \right)^2 \left( \text{Abs}\left[ \frac{\partial_\theta Y[1, m]}{\sqrt{1(1+1)}} \ /. \theta \rightarrow \pi/2 \right] \right)^2 \ /. \ r \rightarrow \left( \frac{M}{\Omega^2} \right)^{1/3}$$

(\*Plot[P<sub>c</sub><sup>II</sup>[2, Ω], {Ω, r<sub>D</sub><sup>-3/2</sup>, 6<sup>-3/2</sup>}, PlotDivision→4, PlotPoints→15]\*)

(\*Plot[P<sub>Rc</sub><sup>II</sup>[2, Ω], {Ω, r<sub>D</sub><sup>-3/2</sup>, 6<sup>-3/2</sup>}, PlotDivision→4, PlotPoints→15]\*)

### Modo lindo para o horizonte

$$B_c^{\text{I}}[\omega_-, 1_-] := \frac{\sqrt{1(1+1)}}{\sqrt{4\pi\omega^3}};$$

$$C_c^{\text{I}}[\omega_-, 1_-] := \sqrt{\left( \frac{1}{4} (\text{Abs}[\chi_c^{\text{II}}[\omega, 1]])^2 + \frac{(f[r])^2}{4\omega^2} (\text{Abs}[\partial_r(\chi_c^{\text{II}}[\omega, 1])])^2 + \frac{1}{2} \right)} \ /. \ r \rightarrow r_D;$$

$$R_c^{\text{I}}[\omega_-, 1_-] := (C_c^{\text{I}}[\omega, 1])^{-1} B_c^{\text{I}}[\omega, 1] r^{-2} \chi_c^{\text{II}}[\omega, 1];$$

$$P_c^{\text{I}}[l_{\text{max}_-}, \Omega_-] := \sum_{l=1}^{l_{\text{max}}} \left( \sum_{m=1}^1 \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^2 \frac{2\pi q^2 (m\Omega)^3}{l^2 (1+1)^2} (\text{Abs}[\partial_r(r^2 R_c^{\text{I}}[m\Omega, 1])])^2 \right. \\ \left. (\text{Abs}[Y[1, m] \ /. \ \theta \rightarrow \pi/2])^2 \right) \ /. \ R \rightarrow \left( \frac{M}{\Omega^2} \right)^{1/3} \ /. \ r \rightarrow \left( \frac{M}{\Omega^2} \right)^{1/3}$$

$$P_{Rc}^{\text{I}}[l_{\text{max}_-}, \Omega_-] := \sum_{l=1}^{l_{\text{max}}} \left( \sum_{m=1}^1 \left( 1 - (\text{Abs}[C_c^{\text{I}}[m\Omega, 1]])^{-2} \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^2 \frac{2\pi q^2 (m\Omega)^3}{l^2 (1+1)^2} \right. \right. \\ \left. \left. (\text{Abs}[\partial_r(r^2 R_c^{\text{I}}[m\Omega, 1])])^2 (\text{Abs}[Y[1, m] \ /. \ \theta \rightarrow \pi/2])^2 \right) \right) \ /. \ R \rightarrow \left( \frac{M}{\Omega^2} \right)^{1/3} \ /. \ r \rightarrow \Omega^{-2/3}$$

(\*Plot[P<sub>Rc</sub><sup>I</sup>[2, Ω], {Ω, 6<sup>-3/2</sup>, r<sub>D</sub><sup>-3/2</sup>}, PlotDivision→4, PlotPoints→15, PlotRange→{0, 5 10<sup>-5</sup>}]//Timing\*)

(\*Plot[P<sub>c</sub><sup>I</sup>[2, Ω], {Ω, 6<sup>-3/2</sup>, r<sub>D</sub><sup>-3/2</sup>}, PlotDivision→4, PlotPoints→15, PlotRange→{0, 5 10<sup>-5</sup>}]//Timing\*)

### Modo lindo para o ∞

$$B_\infty^{\text{I}}[\omega_-, 1_-] := \frac{\sqrt{1(1+1)}}{\sqrt{4\pi\omega^3}};$$

$$C_\infty^{\text{I}}[\omega_-, 1_-] := \sqrt{\left( \frac{1}{4} (\text{Abs}[\chi_\infty^{\text{II}}[\omega, 1]])^2 + \frac{(f[r])^2}{4\omega^2} (\text{Abs}[\partial_r(\chi_\infty^{\text{II}}[\omega, 1])])^2 + \frac{1}{2} \right)} \ /. \ r \rightarrow r_E;$$

$$R_\infty^{\text{I}}[\omega_-, 1_-] := (C_\infty^{\text{I}}[\omega, 1])^{-1} B_\infty^{\text{I}}[\omega, 1] r^{-2} \chi_\infty^{\text{II}}[\omega, 1];$$

$$P_\infty^{\text{I}}[l_{\text{max}_-}, \Omega_-] := \sum_{l=1}^{l_{\text{max}}} \left( \sum_{m=1}^1 \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^2 \frac{2\pi q^2 (m\Omega)^3}{l^2 (1+1)^2} (\text{Abs}[\partial_r(r^2 R_\infty^{\text{I}}[m\Omega, 1])])^2 \right. \\ \left. (\text{Abs}[Y[1, m] \ /. \ \theta \rightarrow \pi/2])^2 \right) \ /. \ R \rightarrow \left( \frac{M}{\Omega^2} \right)^{1/3} \ /. \ r \rightarrow \left( \frac{M}{\Omega^2} \right)^{1/3}$$

$$P_{R_\infty}^{\text{I}}[l_{\text{max}_-}, \Omega_-] := \sum_{l=1}^{l_{\text{max}}} \left( \sum_{m=1}^1 (\text{Abs}[C_\infty^{\text{I}}[m\Omega, 1]])^{-2} \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^2 \frac{2\pi q^2 (m\Omega)^3}{l^2 (1+1)^2} \right. \\ \left. (\text{Abs}[\partial_r(r^2 R_\infty^{\text{I}}[m\Omega, 1])])^2 (\text{Abs}[Y[1, m] \ /. \ \theta \rightarrow \pi/2])^2 \right) \ /. \ R \rightarrow \left( \frac{M}{\Omega^2} \right)^{1/3} \ /. \ r \rightarrow \Omega^{-2/3}$$

(\*Plot[P<sub>∞</sub><sup>I</sup>[1, Ω], {Ω, 6<sup>-3/2</sup>, r<sub>D</sub><sup>-3/2</sup>}, PlotDivision→4, PlotPoints→15]\*)

(\*Plot[P<sub>R∞</sub><sup>I</sup>[1, Ω], {Ω, 6<sup>-3/2</sup>, r<sub>D</sub><sup>-3/2</sup>}, PlotDivision→4, PlotPoints→15]\*)

## Expressão das potências totais em Schwarzschild, quando calculada numericamente

```

PSTot[lmax_, Ω_] := P←I[lmax, Ω] + P→I[lmax, Ω] + P←II[lmax, Ω] + P→II[lmax, Ω];
PSObs[lmax_, Ω_] := PR←I[lmax, Ω] + PR→I[lmax, Ω] + PR←II[lmax, Ω] + PR→II[lmax, Ω]
(*Plot[{PSObs[3, Ω]/PSTot[3, Ω]}, {Ω, 0.001, 6-3/2},
  PlotDivision→4, PlotPoints→15, Frame→True, ImageSize→{288, 288},
  PlotRange→{0.97, 1}, FrameLabel→{Ω, "WSObs(Ω)/WS(Ω)"}]; //Timing*)
(*Plot[PSTot[2, Ω], {Ω, (200)-3/2, 6.1-3/2}, PlotDivision→2, PlotPoints→15]; //Timing*)

(*Plot[{PωObs[2, Ω]/PωTot[2, Ω], PSObs[2, Ω]/PSTot[2, Ω]},
  {Ω, 0.001, 6-3/2}, PlotDivision→4, PlotStyle→{{Dashing[{0.02]}}, {}},
  PlotPoints→10, Frame→True, ImageSize→{288, 288},
  PlotRange→{0.985, 1}, FrameLabel→{"MΩ", "WSObs/WS e WSωObs/WSω"}]; //Timing*)

```

## Expressões das potências em Minkowski

Yh = SphericalHarmonicY[l, m, θ, Phi];

$$\text{Gam} = \frac{1}{\sqrt{1 - (M\Omega)^{2/3}}}; \quad P^{\text{Green}} = \frac{(q^2 M^{2/3} \Omega^{8/3} \text{Gam}^4)}{6\pi};$$

$$R_M^I = \sqrt{\frac{1(1+1)}{\pi m \Omega}} \sqrt{\frac{\pi}{2 m \Omega R}} \frac{1}{R} \text{BesselJ}[1 + 1/2, m \Omega R];$$

$$R_M^{II} = \sqrt{\frac{m \Omega}{\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{2 m \Omega R}} R \text{Abs}[\text{BesselJ}[1 + 1/2, m \Omega R]];$$

$$P_M^I[lmax\_] := \sum_{l=1}^{lmax} \left( \sum_{m=1}^l \frac{2\pi \Omega^3 m^3 q^2}{l^2 (1+1)^2} (\text{Abs}[\partial_R (R^2 R_M^I)])^2 (\text{Abs}[Yh])^2 \right);$$

$$P_M^{II}[lmax\_] := \sum_{l=1}^{lmax} \left( \sum_{m=1}^l 2\pi \Omega^3 m q^2 (R_M^{II})^2 \left( \frac{\partial_\theta Y[l, m]}{\sqrt{1(1+1)}} \right)^2 \right);$$

## Potência total em Minkowski

$$P_M^{\text{Tot}}[lmax\_] := (P_M^I[lmax] + P_M^{II}[lmax]) /. R \rightarrow \left( \frac{M}{\Omega^2} \right)^{1/3} /. \theta \rightarrow \pi/2;$$

```

(*Plot[{PMTot[1], PMTot[2], PMTot[3], PMTot[4], PGreen},
  {Ω, (200)-3/2, 6.1-3/2}, Frame→True, PlotStyle→
  {{Dashing[{0.01]}}, {Dashing[{0.01]}}, {Dashing[{0.01]}}, {Dashing[{0.01]}}, {}}]*)

```

## Expressões das potências em Schwarzschild para baixo ω

Modo l indo para o ∞

$$C_{\omega \rightarrow}^I[\omega_, l_] := \frac{-i 2 \sqrt{1(1+1)}}{\sqrt{\pi \omega}};$$

$$q_{\rightarrow}^I[\omega_, l_, \Omega_] :=$$

$$C_{\omega \rightarrow}^I[\omega, l] \left( \text{LegendreQ}[1, 0, 3, z] - \frac{(z-1)}{1(1+1)} \partial_z \text{LegendreQ}[1, 0, 3, z] \right) /. z \rightarrow \frac{\Omega^{-2/3}}{M} - 1;$$

$$R_{\omega \rightarrow}^I[\omega_, l_, \Omega_] := \frac{1}{r} q_{\rightarrow}^I[\omega, l, \Omega];$$



$$P_{\omega \rightarrow}^I[lmax\_ , \Omega\_ ] := \sum_{l=1}^{lmax} \left( \sum_{m=1}^1 \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^2 \frac{2\pi q^2 (m\Omega)^3}{l^2 (1+1)^2} \right. \\ \left. (\text{Abs}[\partial_x (r^2 R_{\omega \rightarrow}^I[m\Omega, l, \Omega])])^2 (\text{Abs}[Y[l, m] /. \theta \rightarrow \pi/2])^2 \right) /. R \rightarrow \Omega^{-2/3} /. r \rightarrow \Omega^{-2/3}$$

$$P_{T\omega \rightarrow}^I[lmax\_ , \Omega\_ ] := \sum_{l=1}^{lmax} \left( \sum_{m=1}^1 \text{Abs} \left[ \left( \frac{(m\Omega)^1 2^{2^1} (1+1) (1!)^3}{M^{(-1-1)} (2l)! (\dot{\mathbf{i}})^{1+1} l ((2l+1)!)} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \frac{C_{\omega \rightarrow}^I[m\Omega, l] \sqrt{4\pi (m\Omega)^3}}{\sqrt{l(1+1)}} \right)^2 \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^2 \frac{2\pi q^2 (m\Omega)^3}{l^2 (1+1)^2} \right. \\ \left. (\text{Abs}[\partial_x (r^2 R_{\omega \rightarrow}^I[m\Omega, l, \Omega])])^2 (\text{Abs}[Y[l, m] /. \theta \rightarrow \pi/2])^2 \right) /. R \rightarrow \Omega^{-2/3} /. r \rightarrow \Omega^{-2/3}$$

(\*Plot[ P<sub>ω→</sub><sup>I</sup>[1,Ω], {Ω,6<sup>-3/2</sup>,(200)<sup>-3/2</sup>},PlotDivision→4,PlotPoints→15]\*)  
(\*Plot[{P<sub>Tω→</sub><sup>I</sup>[3,Ω],P<sub>ω→</sub><sup>I</sup>[3,Ω]}, {Ω,6<sup>-3/2</sup>,r<sub>D</sub><sup>-3/2</sup>},PlotDivision→4,PlotPoints→15]//Timing\*)

### Modo I indo para o horizonte

$$C_{\omega \leftarrow}^I[\omega\_ , l\_ ] := \frac{\sqrt{l(1+1)}}{\sqrt{4\pi\omega^3}} \frac{(2M)^1 (1+1) (1!)^2}{l((2l)!)} \frac{2(-\omega \dot{\mathbf{i}})^{1+1}}{(2l+1)!!};$$

$$q_{\leftarrow}^I[\omega\_ , l\_ ] := C_{\omega \leftarrow}^I[\omega, l] \left( \text{LegendreP}[1, z] - \frac{(z-1)}{1(1+1)} \partial_z \text{LegendreP}[1, z] \right) /. z \rightarrow \frac{r}{M} - 1;$$

$$R_{\omega \leftarrow}^I[\omega\_ , l\_ ] := \frac{1}{r} q_{\leftarrow}^I[\omega, l];$$

$$P_{\omega \leftarrow}^I[lmax\_ , \Omega\_ ] := \sum_{l=1}^{lmax} \left( \sum_{m=1}^1 \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^2 \frac{2\pi q^2 (m\Omega)^3}{l^2 (1+1)^2} \right. \\ \left. (\text{Abs}[\partial_x (r^2 R_{\omega \leftarrow}^I[m\Omega, l])])^2 (\text{Abs}[Y[l, m] /. \theta \rightarrow \pi/2])^2 \right) /. R \rightarrow \Omega^{-2/3} /. r \rightarrow \Omega^{-2/3}$$

$$P_{R\omega \leftarrow}^I[lmax\_ , \Omega\_ ] := \sum_{l=1}^{lmax} \left( \sum_{m=1}^1 \left( 1 - \text{Abs} \left[ \left( \frac{(m\Omega)^1 2^{2^1} (1+1) (1!)^3}{M^{(-1-1)} (2l)! (\dot{\mathbf{i}})^{1+1} l ((2l+1)!)} \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \frac{C_{\omega \rightarrow}^I[m\Omega, l] \sqrt{4\pi (m\Omega)^3}}{\sqrt{l(1+1)}} \right)^2 \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^2 \frac{2\pi q^2 (m\Omega)^3}{l^2 (1+1)^2} \right. \\ \left. (\text{Abs}[\partial_x (r^2 R_{\omega \leftarrow}^I[m\Omega, l])])^2 (\text{Abs}[Y[l, m] /. \theta \rightarrow \pi/2])^2 \right) /. R \rightarrow \Omega^{-2/3} /. r \rightarrow \Omega^{-2/3}$$

(\*Plot[{P<sub>Rω←</sub><sup>I</sup>[2,Ω]/P<sub>←</sub><sup>I</sup>[2,Ω],P<sub>Rω←</sub><sup>I</sup>[1,Ω]/P<sub>ω←</sub><sup>I</sup>[1,Ω]}, {Ω,6<sup>-3/2</sup>,r<sub>D</sub><sup>-3/2</sup>}, PlotDivision→4,PlotPoints→15,PlotRange→{0.999999985,1} //Timing\*)  
(\*Plot[{P<sub>Rω←</sub><sup>I</sup>[1,Ω],P<sub>ω←</sub><sup>I</sup>[1,Ω]}, {Ω,6<sup>-3/2</sup>,r<sub>D</sub><sup>-3/2</sup>},PlotDivision→4,PlotPoints→15]//Timing\*)

### Modo II indo para o ∞

$$C_{\omega \rightarrow}^{II}[\omega\_ ] := \frac{-2 \dot{\mathbf{i}} \omega}{\sqrt{\pi \omega}};$$

$$q_{\rightarrow}^{II}[\omega\_ , l\_ ] :=$$

$$C_{\omega \rightarrow}^{II}[\omega] \left( \text{LegendreQ}[1, 0, 3, z] - \frac{(z-1)}{1(1+1)} \partial_z \text{LegendreQ}[1, 0, 3, z] \right) /. z \rightarrow \frac{r}{M} - 1;$$

$$R_{\omega \rightarrow}^{II}[\omega\_ , l\_ ] := r q_{\rightarrow}^{II}[\omega, l];$$

$$P_{\omega \rightarrow}^{II}[\text{lmax}_-, \Omega_-] := \sum_{l=1}^{\text{lmax}} \left( \sum_{m=1}^l 2 \pi m \Omega (q \Omega)^2 (\text{Abs}[R_{\omega \rightarrow}^{II}[m \Omega, 1]])^2 \left( \text{Abs} \left[ \frac{\partial_{\theta} Y[1, m]}{\sqrt{1 (1+1)}} \right] /. \theta \rightarrow \pi/2 \right)^2 \right) /. r \rightarrow \Omega^{-2/3}$$

$$P_{T\omega \rightarrow}^{II}[\text{lmax}_-, \Omega_-] := \sum_{l=1}^{\text{lmax}} \left( \sum_{m=1}^l \text{Abs} \left[ \left( \frac{(m \Omega)^1 2^{2^1} (1+1) (1!)^3}{M^{(-1-1)} (2l)! (\dot{a})^{1+1} 1 ((2l+1)!)} C_{\omega \rightarrow}^{II}[m \Omega] \sqrt{4 \pi m \Omega} \right)^2 2 \pi m \Omega (q \Omega)^2 (\text{Abs}[R_{\omega \rightarrow}^{II}[m \Omega, 1]])^2 \left( \text{Abs} \left[ \frac{\partial_{\theta} Y[1, m]}{\sqrt{1 (1+1)}} \right] /. \theta \rightarrow \pi/2 \right)^2 \right) /. r \rightarrow \Omega^{-2/3}$$

```

(*Plot[P_{\omega \rightarrow}^{II}[2, \Omega], {\Omega, 6^{-3/2}, (200)^{-3/2}}, PlotDivision \to 4, PlotPoints \to 15] *)
(*Plot[{P_{T\omega \rightarrow}^{II}[2, \Omega], P_{\omega \rightarrow}^{II}[2, \Omega]}, {\Omega, 6^{-3/2}, r_D^{-3/2}}, PlotDivision \to 4, PlotPoints \to 15] // Timing *)

```

### Modo II indo para o horizonte

$$C_{\omega \leftarrow}^{II}[\omega_-] := \frac{1}{\sqrt{4 \pi \omega}} \frac{(2M)^1 (1+1) (1!)^2}{1 ((2l)!)^1} \frac{2 (-\omega \dot{a})^{1+1}}{(2l+1)!!};$$

$$q_{\leftarrow}^{II}[\omega_-, 1_-] := C_{\omega \leftarrow}^{II}[\omega] \left( \text{LegendreP}[1, z] - \frac{(z-1)}{1 (1+1)} \partial_z \text{LegendreP}[1, z] \right) /. z \rightarrow \frac{r}{M} - 1$$

$$R_{\omega \leftarrow}^{II}[\omega_-, 1_-] := r q_{\leftarrow}^{II}[\omega, 1];$$

$$P_{\omega \leftarrow}^{II}[\text{lmax}_-, \Omega_-] := \sum_{l=1}^{\text{lmax}} \left( \sum_{m=1}^l 2 \pi m \Omega (q \Omega)^2 (\text{Abs}[R_{\omega \leftarrow}^{II}[m \Omega, 1]])^2 \left( \text{Abs} \left[ \frac{\partial_{\theta} Y[1, m]}{\sqrt{1 (1+1)}} \right] /. \theta \rightarrow \pi/2 \right)^2 \right) /. r \rightarrow \Omega^{-2/3}$$

$$P_{R\omega \leftarrow}^{II}[\text{lmax}_-, \Omega_-] := \sum_{l=1}^{\text{lmax}} \left( \sum_{m=1}^l \left( 1 - \text{Abs} \left[ \left( \frac{(m \Omega)^1 2^{2^1} (1+1) (1!)^3}{M^{(-1-1)} (2l)! (\dot{a})^{1+1} 1 ((2l+1)!)} C_{\omega \leftarrow}^{II}[m \Omega] \sqrt{4 \pi m \Omega} \right)^2 2 \pi m \Omega (q \Omega)^2 (\text{Abs}[R_{\omega \leftarrow}^{II}[m \Omega, 1]])^2 \left( \text{Abs} \left[ \frac{\partial_{\theta} Y[1, m]}{\sqrt{1 (1+1)}} \right] /. \theta \rightarrow \pi/2 \right)^2 \right) \right) /. r \rightarrow \Omega^{-2/3}$$

```

(*Plot[P_{\omega \leftarrow}^{II}[2, \Omega], {\Omega, (200)^{-3/2}, 6^{-3/2}}, PlotDivision \to 4, PlotPoints \to 15] *)
(*Plot[{P_{R\omega \leftarrow}^{II}[2, \Omega], P_{\omega \leftarrow}^{II}[2, \Omega]}, {\Omega, 6^{-3/2}, r_D^{-3/2}}, PlotDivision \to 4, PlotPoints \to 15] // Timing *)

```

### Expressão das potências totais em Schwarzschild para baixo $\omega$

$$P_{\omega}^{\text{Tot}}[\text{lmax}_-, \Omega_-] := P_{\omega \rightarrow}^I[\text{lmax}, \Omega] + P_{\omega \leftarrow}^I[\text{lmax}, \Omega] + P_{\omega \rightarrow}^{II}[\text{lmax}, \Omega] + P_{\omega \leftarrow}^{II}[\text{lmax}, \Omega];$$

$$P_{\omega}^{\text{Obs}}[\text{lmax}_-, \Omega_-] := P_{T\omega \rightarrow}^I[\text{lmax}, \Omega] + P_{R\omega \leftarrow}^I[\text{lmax}, \Omega] + P_{T\omega \rightarrow}^{II}[\text{lmax}, \Omega] + P_{R\omega \leftarrow}^{II}[\text{lmax}, \Omega];$$

```

(*Plot[{P_{\omega}^{\text{Obs}}[3, \Omega], P_{\omega}^{\text{Tot}}[3, \Omega]}, {\Omega, 6^{-3/2}, r_D^{-3/2}}, PlotDivision \to 4, PlotPoints \to 15] // Timing *)
(*Plot[P_{\omega}^{\text{Tot}}[3, \Omega], {\Omega, (200)^{-3/2}, 6^{-3/2}}, PlotDivision \to 4, PlotPoints \to 15] // Timing *)

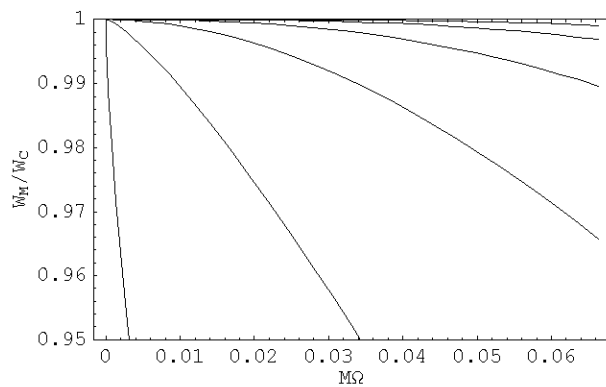
```

## Plotagem dos gráficos exibidos no corpo da tese

**Figura 5.1**

```
figMinkGreen = Plot[{PMTot[1] / PGreen, PMTot[2] / PGreen, PMTot[3] / PGreen, PMTot[4] / PGreen,
  PMTot[5] / PGreen, PMTot[6] / PGreen}, {Ω, 0, 6.1-3/2}, Frame -> True, PlotRange -> {0.95, 1},
  ImageSize -> {288, 288}, FrameLabel -> {"MΩ", "WM/WC"}, Frame -> True];
```

```
(*Export["figMinkowskiGreen.bmp",
  figMinkGreen, ImageResolution->300, ImageSize->{370, 300}];*)
```



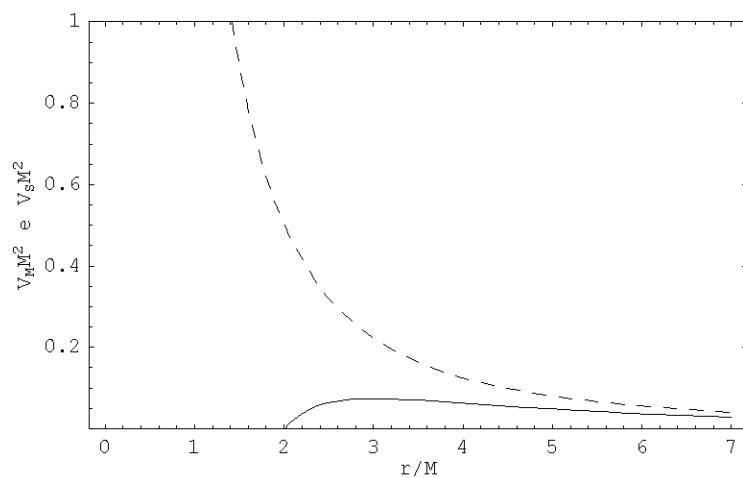
**Figura 5.2**

$M = 1;$

$$V_s[r_, l_] := \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{1(1+l)}{r^2}\right);$$

$$V_M[r_, l_] := \left(\frac{1(1+l)}{r^2}\right);$$

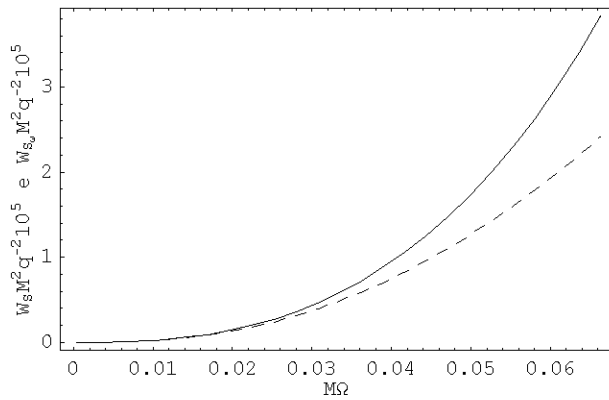
```
grafico1 = Plot[{V_s[r, 1], V_M[r, 1]}, {r, 0.01, 7}, Frame -> True,
  FrameLabel -> {"r/M", "V_M M^2 e V_s M^2"}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> {0, 1},
  PlotStyle -> {{}, {Dashing[{0.02}]}}, ImageSize -> {350, 350}]; // Timing
Export["grafico1.bmp", grafico1, ImageResolution -> 300, ImageSize -> {370, 300}];
```



{0.016 Second, Null}

**Figura 5.3**

```
grafico2 = Plot[{105 PoTot[6, Ω], 105 PsTot[6, Ω]}, {Ω, (200)-3/2, 6.1-3/2},
  ImageSize → {288, 288}, FrameLabel → {"MΩ", "WsM2q-2105 e WoM2q-2105"},
  Frame → True, PlotStyle → {{Dashing[{0.02}]}, {}}]; // Timing
Export["grafico2.bmp", grafico2, ImageResolution → 300, ImageSize → {370, 300}]; // Timing
```



```
{892.5 Second, Null}
```

```
{3.547 Second, Null}
```

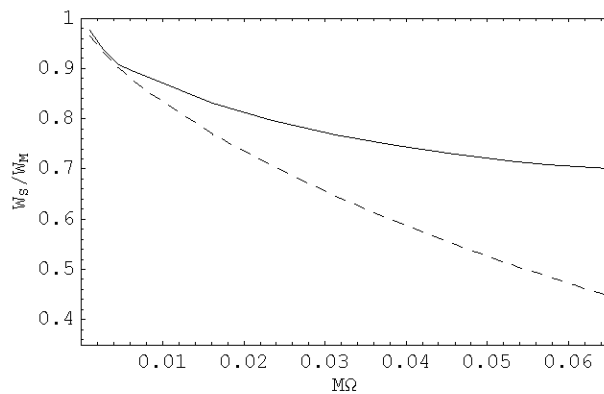
**Figura 5.4**

grafico3 =

```

Plot[{PsTot[6, Ω] / PMTot[6],  $\frac{P_s^{\text{Tot}}[6, \Omega]}{P_M^{\text{Tot}}[6]}$ }, {Ω, 0.001, 6-3/2}, FrameLabel → {"MΩ", "Ws/WM"}
Frame → True, PlotStyle → {{Dashing[{0.02}]}, {}}, PlotDivision → 3, PlotPoints → 10
Frame → True, PlotRange → {{0, 0.065}, {0.35, 1}}, ImageSize → {288, 288}]; // Timing
Export["grafico3_b.bmp", grafico3, ImageResolution → 300, ImageSize → {370, 300}]; //
Timing

```

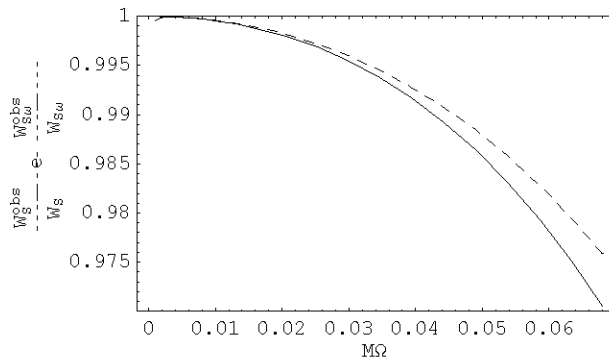


Out[85]= {356.891 Second, Null}

Out[86]= {4.781 Second, Null}

**Figura 5.5**

```
grafico5 = Plot[{PωObs[6, Ω] / PωTot[6, Ω], PSObs[6, Ω] / PSTot[6, Ω]},
  {Ω, 0.001, 6-3/2}, PlotDivision → 4, PlotStyle → {{Dashing[{0.02}]}, {}},
  PlotPoints → 15, Frame → True, ImageSize → {288, 288},
  PlotRange → {0.97, 1}, FrameLabel → {"MΩ", " $\frac{W_S^{obs}}{W_S}$  e  $\frac{W_{S\omega}^{obs}}{W_{S\omega}}$ "}]; // Timing
Export["grafico5_b.bmp", grafico5, ImageResolution → 300, ImageSize → {370, 300}]; //
Timing
```



Out[83]= {1221.88 Second, Null}

Out[84]= {4.718 Second, Null}

# Referências Bibliográficas

- [1] I. I. Shapiro, Phys. Rev. Lett. **13**, 789 (1964).
- [2] <http://einstein.stanford.edu>
- [3] <http://www.ligo.caltech.edu>
- [4] N. D. Birrel e P. C. W. Davies, *Quantum field in curved space* (Cambridge University Press, 1982).
- [5] S. A. Fulling, Phys. Rev. D **7**, 2850 (1997). P. C. W. Davies, J. Phys. A **8**, 609 (1975). W. G. Unruh, Phys. Rev. D **14**, 870 (1976).
- [6] S. W. Hawking, Nature **248**, 30 (1974).
- [7] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity* (Oxford University Press Inc, 1992).
- [8] G. B. Arfken e H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physics* (Academic Press, 1995).
- [9] A. Higuchi, Class. Quant. Grav. **4**, 721 (1987).
- [10] L. C. B. Crispino, A. Higuchi e G. A. Matsas, Phys. Rev. D **58**, 084027 (1998).
- [11] L. C. B. Crispino, A. Higuchi e G. E. A. Matsas, Phys. Rev. D **63**, 124008 (2001).
- [12] C. Itzykson e J. -B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill Inc., 1980).
- [13] W. Greiner e J. Reinhardt, *Field Quantization* (Springer-Verlag, 1996).
- [14] L. C. B. Crispino, *Quantização a Baixas Freqüências de Campos Bosônicos no Espaço-Tempo de Schwarzschild e Aplicações*, Tese de Doutorado, IFT-UNESP (2001).



- [15] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, 1980).
- [16] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publications, 1965).
- [17] A. Higuchi, G. E. A. Matsas e D. Sudarsky, Phys. Rev. D **56**, R6071 (1997); **58**, 104021 (1998).
- [18] D. G. Boulware, Phys. Rev. D **11**, 1404 (1975).
- [19] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3rd ed. (John Wiley & Sons Inc., 1999).
- [20] L. C. B. Crispino, A. Higuchi e G. E. A. Matsas, Class. Quantum Grav. **17**, 19 (2000).