UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

Rafael Silva Patrício

As dificuldades relacionadas à aprendizagem do conceito de vetor à luz da teoria dos registros de representação semiótica

Belém

2011

RAFAEL SILVA PATRÍCIO

As dificuldades relacionadas à aprendizagem do conceito de vetor à luz da teoria dos registros de representação semiótica

Dissertação apresentada ao Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito final para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.

Orientadora: Profª. Drª. Marisa Rosâni Abreu da Silveira

Belém

2011

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) – Biblioteca do IEMCI, UFPA

Patrício, Rafael Silva.
As dificuldades relacionadas à aprendizagem do conceito de vetor à luz da teoria dos registros de representação semiótica. / Rafael Silva Patrício, orientadora Profa. Dra. Marisa Rosâni Abreu da Silveira. – 2010.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2010.

1. Matemática – estudo e ensino. 2. Geometria analítica. 3. Cálculo vetorial. 4. Semiótica. I. Silveira, Marisa Rôsani Abreu da, orient. II. Título.

CDD - 22. ed. 510.7

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

Rafael Silva Patrício

As dificuldades relacionadas à aprendizagem do conceito de vetor à luz da teoria dos registros de representação semiótica

Dissertação apresentada ao Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito final para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.

Apresentada em 15 de Outubro de 2010.

Banca Examinadora

____
Profª. Drª. Marisa Rosâni Abreu da Silveira – UFPA – Orientadora

____
Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud – PUC - SP – Membro externo

____
Prof. Dr. Renato Borges Guerra – UFPA – Membro titular interno

____
Prof. Dr. Tadeu Oliver Gonçalves – UFPA – Membro Suplente

Dedico este trabalho:

a Maysa Almeida, pois sem a ajuda dela eu não teria chegada a essa etapa;

a minha amada avó materna, Maria de Nazaré Carvalho dos Santos Tocantins, que em vida, me ensinou o caminho do bem.

AGRADECIMENTOS

Ao Pai maior, Deus.

A Maysa Almeida, pois sem ela eu não conseguiria chegar a essa etapa.

A minha vó, Maria de Nazaré Carvalho dos Santos Tocantins, querida e amada que, quando em vida, me ensinou o caminho do bem.

A minha família, que fez a base de minha educação e me apoiou.

A minha namorada, Valena Oliveira do Vale, pela paciência, compreensão e carinho.

A minha orientadora *Marisa Rosâni Abreu da Silveira*, que foi, conselheira, paciente e soube ter pulso firme para lidar comigo em todos os momentos da orientação dessa pesquisa.

A todos os amigos do Mestrado, em especial, ao Reginaldo de Lima Pereira que me aconselhou por vários momentos e tornou-se um ente querido e a *José Aurimar Angelim*, que é um cara batalhador, vencedor, guerreiro e acima de tudo um espírito iluminado e abençoado por Deus.

A todos os participantes do grupo de estudos GELIM: Alan Gonçalves Lacerda, Evandro dos Santos Paiva Feio, Nelson Pinheiro Coelho de Souza, Paulo Vilhena da Silva, Reginaldo de Lima Pereira, Robson André Barata de Medeiros, Rodolfo Ronaldo Nobre Oliveira e Ronaldo Barros Ripardo.

Aos integrantes da turma de 2009 de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade do Estado do Pará – núcleo do Baixo Tocantins, que contribuíram para esta pesquisa participando das atividades propostas.

Ao Professor Doutor Renato Borges Guerra, pelas inúmeras e valiosas conversas, partilhando assim, seu conhecimento comigo e com vários colegas.

Ao Professor Doutor Saddo Ag Almouloud, por aceitar participar da comissão avaliadora desse projeto, por aconselhar-me e principalmente por suas orientações esclarecedoras.

Ao Instituto de Educação Matemática e Científica.

Tempos Modernos

Eu vejo a vida melhor no futuro
Eu vejo isso por cima de um muro
De hipocrisia que insiste em nos rodear

Eu vejo a vida mais farta e clara
Repleta de toda satisfação
Que se tem direito
Do firmamento ao chão

Eu quero crer no amor numa boa
E que isso valha p'rá qualquer pessoa
Que realizar a força que tem uma paixão

Eu vejo um novo começo de era
De gente fina elegante e sincera
Com habilidade pra dizer mais sim do que não

Hoje o tempo voa amor
Escorre pelas mãos
Mesmo sem se sentir
E não há tempo que volte amor
Vamos viver tudo o que há prá viver
Vamos nos permitir

(Lulu Santos – 1981)

RESUMO

Esta dissertação foi desenvolvida no sentido de contribuir para o ensino e para aprendizagem da Geometria Analítica no ensino superior. Para realizar esta tarefa contamos com o referencial teórico de Raymond Duval - com a teoria dos Registros de Representação Semiótica - em aulas expositivas, atividades em classe e na exploração de um maior número de representações do objeto matemático Vetor. Nosso objetivo foi o de identificar e analisar as dificuldades na produção e no tratamento de representações dos vetores que caracterizam lacunas ao aprendizado do conceito desse objeto. Os sujeitos da pesquisa foram alunos de uma turma de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará – UEPA, Núcleo Regional do Baixo Tocantins – NURBAT localizado em Moju – PA. A pesquisa foi dividida em etapas, onde na primeira, a turma presenciou aulas teóricas com foco principal no estudo de vetores, explorando as várias representações do objeto bem como as operações básicas; a segunda etapa consistiu na resolução de lista de exercícios (atividades 1 e 2), contendo questões retiradas da indicação bibliográfica da disciplina e a avaliação individual. E por último a análise das resoluções feitas pelos sujeitos. Os instrumentos de coleta de dados envolveram questões de representação de vetores nos registros algébrico, figural e da língua natural, assim como, as conversões entre esses registros. Após analisar as resoluções, estas foram agrupadas por categorias as quais: confusão entre coordenadas de ponto e coordenadas de vetor, dificuldade na aplicação da regra do paralelogramo, dificuldade em identificar vetores iguais e conversão entre registros envolvendo o registro geométrico. Ao final das análises apontamos onde os alunos sentem mais dificuldades de acordo com as peculiaridades dos mesmos nas resoluções apresentadas e ainda, propomos a possibilidade de continuidade da pesquisa sobre o mesmo objeto.

Palavras-chave: Representação. Registro de representação semiótica. Vetores. Educação Matemática.

ABSTRACT

This work was developed in order to contribute to teaching and Analytic Geometry for learning in higher education. To accomplish this we rely on the theoretical framework of Raymond Duval - With the theory of the semiotic representation registers - in classes exhibitions, classroom activities and the exploration of a greater number of Vector representations of mathematical object. Our goal was to identify and analyze the difficulties in production and processing representations of the vectors that characterize the learning of loopholes concept of that object. The research subjects were students of a in Mathematics at the University of Pará - UEPA, Regional Center of the Lower Tocantins - NURBAT located in Moju - PA. The research was divided into stages, where at first, the group witnessed lectures focused on the study of vectors, exploiting the various representations of the object as well as basic operations, the second stage the resolution list of exercises (activities 1 and 2), with questions taken from the discipline and recommended reading individual assessment. Finally the analysis of the resolutions made by subjects. The instruments of data collection included questions of representation of vector algebra in the records, and figural language natural as well as conversions between these records. After analyzing resolutions, they were grouped by categories including: confusion between point coordinates and vector coordinates, difficulty in application of the rule of the parallelogram, difficulty in identifying vectors equal and records involving the conversion between geometric registration. By final aim of the tests where students feel more difficulties according to the peculiarities of the resolutions presented and they also suggest the possibility of continuing the research on it object.

Key words: Representation. Registers of semiotic representation. Vectors. Mathematical Education.

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa teve como motivação minha prática docente no ensino superior com a disciplina de Geometria Analítica, em turmas de Licenciatura Plena em Matemática. Ao longo da minha trajetória docente, tive oportunidade de atuar em diversas turmas com esta mesma disciplina. E este contato, freqüente, me levou a observar algumas situações problemáticas relativas à aprendizagem de vetores no nível superior de ensino em turmas de primeiro ano do curso de Licenciatura em Matemática onde esta disciplina é ministrada. Percebi que os alunos têm dificuldades em lidar com a linguagem matemática e em especial com as representações de vetores.

A linguagem matemática é considerada essencial para a aprendizagem de conceitos, propriedades e relações entre objetos matemáticos. Esta linguagem é capaz de apresentar, simbolicamente, objetos e sintetizar relações com um caráter monossêmico, por este motivo foi popularizada entre as ciências por caracterizar o formalismo científico, já que possui regras próprias e uma gramática especial. Neste sentido, em muitas situações, a linguagem matemática é considerada de difícil compreensão.

A ciência que estuda as relações de significação e sentido entre os símbolos e seus objetos é a Semiótica, conhecida como a teoria dos signos. Este trabalho teve como base esta teoria, pela qual se pretendeu estudar, analisar e classificar as dificuldades relacionadas à aprendizagem do conceito de vetor (e as principais operações que o envolvem) à luz da teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Esta dissertação teve como objetivo estudar dificuldades na aprendizagem do conceito de vetores relacionadas à produção, tratamento e conversões de representações presentes no ensino desse conceito e de suas operações. O conceito de vetor está presente em diversos momentos na matemática do ensino superior, especificamente, nos cursos de Licenciatura em Matemática, onde o aluno tem oportunidade de ter contato com vetores em disciplinas que envolvem Cálculo Diferencial, Física e Álgebra Linear, por exemplo, mas apenas como ferramenta para resolver problemas que envolvem outros assuntos. Como objeto de ensino, o vetor pode ser visto em uma disciplina específica ou no estudo da Geometria Analítica.

Vale ressaltar que o conteúdo de Geometria Analítica nos cursos de ensino superior é bastante diferente daquele estudado no Ensino Médio. Esse nível de ensino possui uma apresentação predominantemente plana, ou ainda, o conteúdo de Geometria Analítica abordado fora da universidade, parece tangenciar o conceito de vetor e priorizar suas aplicações em situações-problema. Enquanto isso, na Física do Ensino Médio, o vetor é utilizado como ferramenta essencial no estudo de assuntos como cinemática, estática, dinâmica e ondulatória. Sendo assim, seu conceito é discutido, pela primeira vez, somente em disciplinas específicas de cursos superiores como a Licenciatura em Matemática.

A disciplina de Geometria Analítica está presente nos cursos de licenciatura e bacharelado em Matemática e outros cursos de nível superior. A dificuldade no ensino e na aprendizagem da Geometria Analítica começa com a distinção que se faz nos planejamentos de ensino médio e superior: no primeiro, estuda-se apenas na dimensão dois, ou seja, no R^2, e no segundo, inicia-se com três dimensões, R^3. Nos cursos superiores, os vetores são discutidos no início do capítulo da disciplina.

Encontram-se nas diretrizes curriculares do Ensino Médio as orientações sobre os conteúdos que devem ser abordados dentro da disciplina de Geometria Analítica. Segundo este documento a origem da Geometria Analítica está na ideia do sistema cartesiano e na relação entre Álgebra e Geometria, que ora nos mostra a Álgebra sob um olhar geométrico, ora interpreta a Geometria pela álgebra. Sobre o conteúdo de vetores cuja abordagem nesse nível, geralmente ocorre apenas na Física, o documento orienta que:

> É desejável que o professor de Matemática aborde com seus alunos o conceito de vetor, tanto do ponto de vista geométrico (coleção dos segmentos orientados de mesmo comprimento, direção e sentido) quanto algébrico (caracterizado por suas coordenadas). Em particular, é importante relacionar as operações executadas com as coordenadas (soma, multiplicação por escalar) com seu significado geométrico. A inclusão da noção de vetor nos temas abordados nas aulas de Matemática viria corrigir a distorção causada pelo fato de que é um tópico matemático importante, mas que está presente no ensino médio somente nas aulas de Física (2006, p.77).

Por outro lado, é comum observarmos que as recomendações sobre a abordagem dos vetores só sejam desenvolvidas nos cursos universitários das áreas exatas, como a Matemática, por exemplo. Deste modo, podemos entender que a ausência de um estudo sobre vetores, ainda que introdutório na Geometria Analítica, ao final do ensino médio, pode ocasionar algumas dificuldades na sua aprendizagem no início dos cursos superiores, onde esta mesma disciplina também é ensinada.

Este talvez seja um dos fatores negativos que muitos alunos enfrentam com esta disciplina, sendo considerável o número de alunos que ficam reprovados. Este problema se agrava, pois se tratam de futuros educadores matemáticos e a ênfase dada na Geometria Analítica no R^3 baseia-se na importância que esta tem no aprendizado de outras disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral e Álgebra Linear.

Embora o problema do ensino dos vetores venha sendo bastante discutido, com muitas pesquisas realizadas, por autores como Bittar (2006), Ba (2007), Carneiro (2007), Choukri (2001) que serão aprofundados a seguir na revisão bibliográfica, esperamos com esta pesquisa dar a nossa contribuição na investigação das dificuldades na aprendizagem desse assunto.

A pesquisa está dividida em quatro capítulos. O primeiro destaca os pontos relacionados ao como e porque esta pesquisa foi realizada: a questão que pretendemos responder ao final da pesquisa, os objetivos que pretendemos alcançar com ela, os procedimentos metodológicos da pesquisa e a sua relevância no âmbito da educação matemática.

No segundo capítulo, temos um breve histórico do desenvolvimento dos vetores na matemática e, os principais estudiosos que contribuíram para a formação da análise vetorial e as contribuições de cada um deles para o avanço da Matemática enquanto domínio científico.

No terceiro capítulo, apresentamos a teoria que tomamos como base para tornar esse trabalho relevante e faremos um panorama geral da Semiótica: como nasceu esta ciência, quem foram os seus teóricos de maior visibilidade, e quais os pressupostos que contribuíram para a teoria nos Registros de Representação de Duval sustentar os pressupostos teóricos da nossa pesquisa.

No último capítulo, são expostas as análises dos dados coletados, e as categorias com objetivo de classificar os tipos de dificuldades identificadas. Por fim, apresentamos nossas considerações finais respondendo à questão da pesquisa e mostrando nossas inferências e perspectivas.

1 SOBRE A PESQUISA

A temática desta pesquisa surgiu da minha experiência docente ao lidar com as dificuldades dos alunos na aprendizagem de vetores, bem como de uma necessidade de melhor compreender como este apreende as noções relacionadas ao vetor. Compreendendo algumas dificuldades do aluno, podemos aprimorar o ensino e promover uma aprendizagem eficaz deste assunto.

Em nossos estudos preliminares, encontramos diversos estudos sobre o ensino de vetores e sobre as representações semióticas. A preocupação com vetores surge no contexto das pesquisas que investigaram o ensino e a aprendizagem da Álgebra Linear em vários países como França, Estados Unidos e Canadá. Os autores (Pavlopoulou, Bittar, Harel, Dorier) destacam o caráter formal e generalizador da Álgebra Linear e apontam este como uma das principais fontes de dificuldades à aprendizagem da disciplina.

Do mesmo modo, a linguagem matemática e os registros de representação, por meio da qual essa disciplina é apresentada e explorada, tem recebido especial atenção que se reflete nos trabalhos sobre a temática. Ressaltamos a importância da Geometria Analítica e em particular as noções ligadas ao conceito de vetor e suas operações que estão na base de muitos conceitos da Álgebra Linear, como dependência e independência lineares, combinação linear, base e dimensão.

Dessa forma, a pergunta que buscamos responder nesta pesquisa é:

Quais as dificuldades dos alunos do primeiro ano do Curso de Licenciatura em Matemática ao lidarem com as representações semióticas na aplicação da regra de adição de vetores?

Para responder a essa pergunta é preciso analisar o processo histórico evolutivo da Álgebra que, no início, possuía uma proximidade muito forte com Geometria, pois a maioria das equações era utilizada em associação a uma representação geométrica. Porém para que a Álgebra se estabelecesse como domínio matemático foi necessário romper com o pensamento de uma Álgebra apenas como ferramenta para solucionar problemas geométricos e admitir a existência de estruturas teóricas que prescindem de uma leitura geométrica. Hoje, podemos observar na Álgebra, que a sua evolução caminha com o desenvolvimento de pesquisas e questionamentos puramente geométricos. Não obstante, algumas noções ligadas à Geometria Analítica, que nasceu da união entre geometria com a Álgebra, ainda reserva grande ligação com conceitos geométricos, como é o caso dos vetores. Como objeto de ensino, o vetor continua sendo apresentado a partir da sua representação geométrica: uma flecha dotada de direção e sentido. É assim que pela primeira vez, o aluno tem contato com este objeto matemático.

Dessa forma, esta pesquisa foi realizada na intenção de observar e estudar representações semióticas de vetor produzidas pelos alunos, e a forma como eles utilizam essas representações ao efetuar a adição de vetores. Queremos, então, identificar dificuldades na aprendizagem do conteúdo vetores, que os alunos do Curso de Licenciatura em Matemática enfrentam na disciplina de Geometria Analítica.

1.1 METODOLOGIA E PROCEDIMENTOS

Para a análise dos dados apoiamo-nos em princípios da teoria de estudo de casos que, segundo Yin (2005, p. 32-33):

> […] investiga um fenômeno contemporâneo dentro de seu contexto da vida real, especialmente quando os limites entre o fenômeno e o contexto não estão claramente definidos e […] enfrenta uma situação tecnicamente única em que haverá muito mais variáveis de interesse do que de ponto de dados e, como resultado baseia-se em várias fontes de evidências, com os dados precisando convergir em formato de triângulo e, como outro resultado beneficia-se do desenvolvimento prévio de proposições teóricas para conduzir a coleta e a análise dos dados.

O estudo de caso é a busca de conhecimento aprofundado, por meio de um estudo minucioso, de um objeto. A decisão de se usar o método apropriado depende do que será investigado, trata-se da questão de pesquisa. É fundamental que o pesquisador não influencie os indivíduos pertencentes às fontes de evidência e, não exerça controle nenhum sobre eles.

Os fatores que influenciam na aprendizagem da matemática e o modo como os alunos se relacionam com conteúdos dessa disciplina são elementos observáveis em muitas pesquisas na área da educação matemática. É de forma natural que surge então, o interesse em pesquisar os meios que possibilitam a melhoria do ensino de matemática, assim, o primeiro passo nessa direção é dado com esta investigação que tem como um de seus princípios conhecer de forma sistematizada as situações que dificultam a aprendizagem dos alunos. A seguir descrevemos os sujeitos, a instituição, o instrumento de coleta dos dados e os procedimentos de pesquisa.

A presente pesquisa foi realizada na Universidade do Estado do Pará, sediada em Belém, no bairro do Telégrafo e com dezenove *campi* no interior do Estado. A instituição tem várias modalidades de ensino: presencial regular (cinco aulas diárias de diferentes disciplinas com duração anual), presencial modular (cinco aulas diárias de uma só disciplina até completar a duração total da disciplina) e a modalidade de ensino à distância. O sistema modular é o mais comum nos *campi* do interior, e seu funcionamento depende, na maioria das vezes, de profissionais deslocados da capital do Estado, assim, o contato do professor com as turmas do interior, se dá em breves períodos. Neste sistema são ministrados 5 horas/aula diariamente da mesma disciplina, até a totalização de sua carga horária anual, tomando uma única turma por turno. É de forma intensiva que o ensino ocorre nessas turmas do interior; no entanto, as disciplinas, os conteúdos programáticos e a indicação bibliográfica são as mesmas da capital.

O ambiente escolhido para a realização de nossa investigação foi a sala de aula, a coleta dos dados foi feita em dois encontros ocasião em que foram aplicadas as atividades propostas. Os alunos envolvidos fazem parte de uma turma de Licenciatura em Matemática e nesse período cursavam a disciplina de Geometria Analítica. As atividades foram aplicadas após a primeira unidade de vetores. As questões escolhidas foram retiradas dos livros recomendados pela coordenação na bibliografia dessa disciplina.

A turma escolhida para esta pesquisa foi uma turma de primeiro ano de Licenciatura em Matemática do turno da manhã, formada por 49 alunos, em regime de ensino modular, localizada na cidade de Moju (Campus XIV) para a qual fui designado para ministrar a disciplina de Geometria Analítica. Assim, a investigação foi realizada durante as aulas por mim ministradas.

Ao me apresentar para a turma, os alunos foram consultados sobre a sua participação como sujeitos desta pesquisa de mestrado. A turma foi informada que suas produções escritas de cada atividade aplicada seriam utilizadas para meu estudo e análise, e, que os resultados das análises fariam parte desta dissertação.

As aulas foram ministradas do modo tradicional com exposição do conteúdo e resolução de exercícios tendo como base o programa curricular do curso. As referências indicadas na ementa de Geometria Analítica também foram respeitadas, pois nosso intuito era o de observar a produção dos alunos e identificar dificuldades relativas ao conteúdo de vetores requerido neste nível de ensino.

A turma era composta por alunos que ingressaram no primeiro semestre de 2009, e, mais cinco alunos que estavam repetindo a disciplina (alunos de dependência). Para responder às atividades propostas os alunos foram, então, agrupados em doze equipes, sendo que cada equipe era formada por quatro alunos.

A unidade de vetores que contemplava: segmentos orientados, segmentos eqüipolentes, vetor, operações com vetores, decomposição de um vetor no plano, expressão analítica de um vetor, igualdade, vetor definido por dois pontos e problemas; foi ministrada em duas semanas, e, durante esse período, os alunos foram submetidos a duas atividades. As questões que constam nas atividades propostas foram escolhidas por envolver a representação de vetores, o tratamento de representações e a conversão entre registros.

Assim, as dificuldades que os alunos tiveram para realizar essas tarefas foram observadas e analisadas segundo os pressupostos teóricos que adotamos no referencial. Todas as questões resolvidas durante as aulas foram utilizadas literalmente como nos livros-texto indicados pela instituição – os quais são amplamente utilizados por diversas instituições de ensino superior para a disciplina de Geometria Analítica – bem como as questões integrantes das atividades aplicadas.

Na primeira atividade (em anexo), os enunciados das questões envolvem a representação e a adição de vetores. A língua natural é um dos registros envolvidos, além da representação algébrica e figural.

Nas questões 3, 4, 5, e 6 os alunos deviam observar as figuras em termos de suas propriedades geométricas, como a congruência e/ou o paralelismo entre seus lados. Por isso podemos dizer que são problemas de configuração[1], bastando, então, para resolvê-los, que os vetores iguais sejam identificados para a realização das operações indicadas.

---

[1] Para resolver esse tipo de exercício o aluno deverá interpretar as propriedades geométricas da figura e traduzi-las para a linguagem vetorial. Bittar (2005).

Desta forma, pudemos analisar os registros dos alunos enfatizando dificuldades relativas aos conhecimentos geométricos e em conversões entre os dois registros (língua natural e figural). As doze equipes participaram desta atividade, a qual continha dez questões e as equipes tiveram cinco horas/aula para resolver as questões.

A segunda atividade (em anexo) era composta por oito questões. Nesta, foram incluídas questões que envolviam as coordenadas dos vetores no sistema ortogonal, ou seja, foi exigido o registro gráfico para que se pudessem analisar as dificuldades dos alunos neste tipo de representação. Além disso, foram exigidas conversões entre os dois registros (língua natural e o figural) tanto no plano como também no espaço.

A escolha das questões que fazem parte de cada uma das atividades foi feita tendo por base o conteúdo da disciplina e os livros didáticos mais indicados. As análises foram feitas com base em estudos já realizadas na área de ensino de vetores, acerca das dificuldades relacionadas com a conversão e o tratamento de representações semióticas do vetor, e no nosso referencial teórico, que será discutido no capítulo a seguir. Por intermédio das análises das produções escritas dos alunos, pretendemos obter respostas aos questionamentos feitos nesta pesquisa.

2 UMA BREVE GÊNESE DO VETOR

A noção de vetor é bem mais antiga do que se pode imaginar. É possível que tenha aparecido pela primeira vez, associada a regra do paralelogramo, em um trabalho de Aristóteles (384-322 A.C.). Mas somente no século XIX foi feito um estudo sistemático que trouxe à tona o conceito de vetor.

No âmbito educacional, o interesse em pesquisar aspectos históricos e epistemológicos da origem do vetor vem crescendo nos últimos anos e diversos trabalhos de reconhecida relevância, na área da didática, da matemática têm sido publicados. Jean Luc Dorier é um dos autores de maior importância para se compreender a evolução não só do conceito de vetor, mas de muitos conceitos ligados à Álgebra Linear. Desde os anos oitenta formou-se na França um grupo de pesquisadores, que em seu início foi coordenado por Dorier, e que tem se dedicado a investigar os problemas no ensino e aprendizagem da Álgebra Linear.

Neste sentido trataremos, a seguir, uma breve descrição cronológica das principais obras e ideias, e de seus respectivos autores, que preconizaram o surgimento do cálculo vetorial:

O filósofo, diplomata e matemático alemão Gottfried Leibniz (1646-1716) é apontado como um dos precursores das ideias que levariam à criação de um novo ramo da matemática que daria conta de preencher as lacunas da Àlgebra. A carta enviada por Leibniz (1629-1695) ao matemático, astrônomo e físico norueguês Christiaan Huygens, datada de 1679, é a expressão do seu desejo de criar uma geometria de posição, como se observa no seguinte trecho: “will express situation directly as algebra express magnitude directly” (CROWE, 2008, p.1).

Em 1799, Caspar Wessel (1745-1818) publicou um ensaio sobre a representação analítica da direção, e foi um dos primeiros a descrever a soma de dois segmentos, porém não conseguiu desenvolver um método analítico para o espaço tridimensional.

No ano de 1806, Jean Robert Argand publicou um ensaio sobre a representação geométrica dos números complexos. Na sua publicação seguinte, de 1813, voltou seus esforços para encontrar um método compatível de análise do espaço tri-dimensional. Nos anos que se seguiram, vários autores tentaram, sem sucesso, encontrar um método consistente para análise do espaço tridimensional.

Auguste Ferdinand Möbius publicou, em 1827, seu estudo sobre *O Cálculo Baricêntrico,* um sistema desenvolvido em torno da ideia de obtenção de um sistema de “pontos pesados”. De acordo com Granger (1974), Mobius parte da ideia de representação de um ponto geométrico por um sistema de números. Inicialmente, são dados três pontos e a partir desses pontos, pode-se tomar um ponto qualquer, em seu plano, de forma que este ponto seja seu centro de gravidade. A ideia é atribuir “pesos”, convenientemente, positivos e negativos, que irão afetar, respectivamente, os pontos da base.

No ano seguinte, 1828, C. V. Mourey e John Warren foram autores, independentemente, de livros que tratavam da representação geométrica dos números complexos. Warren não discute a extensão de seu sistema a três dimensões, enquanto que, Mourey afirmou que um tal sistema é possível mas não publica tal sistema.

Carl Friedrich Gauss publicou, em 1831, a justificação da representação geométrica dos números complexos, na qual, vinha trabalhando desde 1799, alguns anos antes, ele já havia exposto publicamente algumas ideias, nas quais, aparece, implicitamente, a ideia de adição de vetores. Embora seu livro tenha sido apenas a quinta obra publicada sobre o mesmo assunto, foi sua autoridade no meio científico que proporcionou a legitimação e aceitação dos números complexos e de sua representação.

Giusto Bellavitis publicou seu primeiro trabalho sobre o *Sistema de Eqüipolências* em 1835. Realizou cálculos sobre os vetores do plano e suas aplicações geométricas e enunciou regras para a adição e subtração dos vetores. Bellavitis, a exemplo de outros autores que o antecederam, dedicou um longo período na tentativa, sem sucesso, de obter um sistema de análise a três dimensões.

A teoria da extensão linear (*Die lineale Ausdehnungslehre*) foi a primeira exposição completa da teoria de Hermann Günther Grassmann. Ele ampliou a adição dos vetores para espaço a *n* dimensões, definiu a independência de vetores, e, o produto interno e o externo. Embora sua obra não tenha sido reconhecida desde o início, por ser considerada de caráter mais filosófico do que matemático, é a que guarda características mais próximas com a teoria dos espaços vetoriais como hoje é conhecida.

No ano seguinte, em 1836, o conde de Saint-Venant publicou um pequeno artigo intitulado *Mémoire sur les sommes et les différences géométriques, et sur les usage pour simplifier la mécanique,* no qual a diferença é sua interpretação do produto escalar como uma área orientada no espaço.

Apontado como um dos principais difusores das ideias de um moderno sistema de análise vetorial, William Rowan Hamilton foi o primeiro a usar os termos *escalar* e *vetor* para designar a parte real e a parte imaginária, respectivamente, de um *quaternion* – um dos principais sistemas de análise vetorial. Em seu artigo de 1846 ele escreveu sobre um *quaternion* $Q = a + bi + cj + dk$, que poderia ser escrito $Q = Scal.Q + Vect.Q$ ou simplesmente $Q = SQ + VQ$, em outras palavras, $SQ = a$ quando $VQ = bi + cj + dk$. Isto induziu a escrita de equações *quaternionistas*, da maneira como vemos a seguir: se tivermos dois *quaternions* e ambos tiverem a parte escalar igual a zero, $Q = xi + yj + zk$ *e* $Q' = x'i + y'j + z'k$, então, as regras para multiplicação do *quaternion* acima é: $SQQ' = -(xx' + yy' + zz')$ e $VQQ' = i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' + yx')$ o que é importante notar sobre isto é que a parte escalar deste novo *quaternion* pode ser vista, matematicamente, igual ao negativo do moderno produto escalar e a parte vetorial, o que se conhece modernamente como o produto misto. Historicamente, a descoberta dessa estrutura marcou uma fase importante do desenvolvimento da análise vetorial, pois foi ao longo desse caminho que se originou a moderna análise vetorial.

Em 1853, Augustin Cauchy publicou seu “Sur les clefs algébriques” onde apresenta métodos que transferiu para a solução de vários problemas algébricos, por exemplo, encontrar as raízes de uma equação qualquer. Introduziu as noções de *rayon vector* e suas projeções sobre os eixos, definindo raio vetor como a soma de suas projeções. Contribuiu para a popularização do uso dos números complexos e sua representação geométrica.

Ao final do século XIX, a teoria dos quaternions desempenhou um importante papel na física, sendo utilizada principalmente, na simplificação de notações no eletromagnetismo. Entre os anos de 1846 e 1847, Hamilton introduziu a operação $\nabla = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} + \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}} + \mathrm{k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}$, que recebeu especial tratamento no livro *Elementary treatise* of *quaternions* de Peter Guthrie Tait, o mais convicto dos discípulos de Hamilton. Diferentemente de seu mestre, Tait dedicou grande parte dessa obra às aplicações dos quaternions na física. Por esta razão, seu livro está recheado de casos onde figura apenas a parte escalar do produto de quaternions, que corresponde hoje ao negativo do produto do produto escalar.

Com Gibbs (1884) e Heaviside (1893), inspirados pelas publicações de Maxwell sobre eletricidade e magnetismo, a teoria dos quaternions aproximou-se ainda mais do vetor como é conhecido nos dias atuais. Fato que se deve ao abandono da forma completa, em favor da utilização isolada da parte vetorial do *quaternion*. A definição de vetor como um deslocamento de translação no espaço, dada por Gibbs resume o que, de essencial, existe na relação entre matemática e física. Além de expor o produto escalar, o produto misto e o produto vetorial.

Em suas primeiras aparições, a noção de vetor surgiu paralelamente nos trabalhos de matemáticos e estudiosos que buscavam uma nova forma de interpretar geometricamente os números complexos, na busca por uma geometria de posição e ainda, no paralelogramo de forças que é conhecido desde tempos remotos pela física.

Os fatos que destacamos acima, são apenas alguns que demonstram a evolução de uma noção matemática (vetor) com toda multiplicidade do seu uso. Ao buscar sua gênese verifica-se uma ramificação, sua origem não pertence, portanto, a um único ramo da matemática, e seria errôneo destacar apenas um aspecto de sua evolução, algébrico ou geométrico, em seu ensino, pois, é na relação entre esses dois domínios que se podem encontrar os elementos necessários à compreensão global do conceito do vetor na matemática.

Embora o vetor seja apresentado aos estudantes, primeiramente, nos programas de Física, a sua origem não se encontra exclusivamente na geometria ou álgebra, nem na física, antes, como objeto matemático só conseguiu maior atenção após a descoberta de suas aplicações no eletromagnetismo.

Bittar (1998) realizou uma pesquisa sobre ensino de vetores, com base em pesquisas de Dorier realizadas durante vinte anos, no qual mostra que, o cálculo vetorial nasceu de uma crítica ao método analítico: começou em 1679 com Leibniz, e um século mais tarde ele retoma força com o cálculo baricêntrico de Mobius (1827) e com o cálculo das equipolências de Bellavitis (1832-1835). Em 1845, Grassmann retoma a primeira das disputas lançada pela sociedade alemã de matemática para ampliar o trabalho de Leibniz. Ele desenvolveu a teoria das extensões que não foi reconhecida e só passou a ser aceita pelos matemáticos alguns anos mais tarde.

Ela nos revela também, que Dorier mostrou nos estudos que publicou, a partir de uma análise histórica, que a Geometria e a Álgebra Linear desde longo tempo mantiveram alguns vínculos inegáveis.

> Assim, diversos conceitos da Álgebra Linear se originaram através de questões de geometria e uma fase importante da gênese da álgebra linear consistiu na generalização dos conceitos e da linguagem da geometria a espaços mais complexos (1990, p. 456).

Os estudos realizados por estas personalidades, com especial menção aos trabalhos desenvolvidos por Moebius, Hamilton e Grassmann que chegaram quase independentemente à moderna ideia de espaço vetorial, mesmo sem conseguir estender suas descobertas à terceira dimensão, foram decisivos para o surgimento e a delimitação do conceito de vetor. Resgatar o vetor no contexto em que suas primeiras ideias surgiram, trazer à tona as crises e avanços em seu desenvolvimento é atividade de suma importância para compreender sua presença e função nos currículos de alguns cursos ensino superior e a importância de se abordar desde cedo, seus aspectos conceituais, assim como para melhorar a sua abordagem no ensino médio.

3 FUNDAMENTOS TEÓRICOS E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

3.1 UM POUCO DE SEMIÓTICA

Pode-se dizer que a semiótica teve início, quase na mesma época, em três regiões diferentes do mundo: nos Estados Unidos com Charles Sanders Peirce, na União Soviética com A. N. Viesse-lovski A. A. Potiebniá e na Europa Ocidental com Saussure. O fato de ter surgido em locais diferentes e quase sincronizados no tempo se deve à efervescência que se iniciou com a Revolução Industrial. A proliferação das linguagens e códigos, dos meios de reprodução e difusão de informações e mensagens gerou gradativamente e fizeram emergir uma "consciência semiótica" (SANTAELLA, 2007).

A raiz da semiótica que consideramos nesta pesquisa foi a norte-americana representada por Peirce. Santaella afirma que Peirce era antes de tudo um cientista, mas seus estudos abrangeram diversas áreas, como Geodésica, Metrologia e Espectroscopia com contribuições muito importantes.

Peirce foi um profundo estudioso e pesquisador em assuntos bem distintos, seus interesses foram da Biologia à Literatura. Foi considerado um sério estudioso de Geologia e já perto do final de sua vida começou a escrever uma peça para o teatro. Ele foi antes de tudo um cientista, e como cientista sua grande paixão estava na Lógica.

De acordo com Santaella (2007) o interesse de Peirce pela Lógica era inicialmente um interesse na Lógica das Ciências. Entender a Lógica das Ciências, de fato, era entender em primeiro lugar seus métodos de raciocínio. Os métodos podem ser muito diferentes de uma ciência à outra e, de tempos em tempos, dentro de uma mesma ciência. Os pontos em comum entre esses métodos só podem ser estabelecidos, por um estudioso que conheça as diferenças, e que as conheça na prática das diferentes ciências.

Todo o tempo em que Peirce foi um cientista, ele foi também um filósofo. Aos 16 anos de idade, começou a estudar Kant, e alguns anos mais tarde, sabia de cor a *Crítica da Razão Pura.* Peirce estabeleceu um laço indissociável entre a Lógica e a Filosofia. Foi um filósofo que levou para a filosofia o espírito da investigação científica e um cientista que admitiu que as disciplinas filosóficas pudessem se tornar também ciências.

No início, quando Peirce começou a se interessar pela Lógica, ele acreditava que esta era parte de uma teoria mais geral, a Semiótica. E aquilo que hoje conhecemos por Lógica, ele concebia como um ramo da Semiótica. Sua visão do que era Lógica foi crescendo de tal forma, que praticamente englobava todos os tipos possíveis de signo. Em seu sentido geral, Peirce afirmou: “a lógica é, como acredito ter mostrado, apenas outro nome para *semiótica*, a quase-necessária, ou formal, doutrina dos signos”. Portanto, *a semiótica é ciência dos signos* (PEIRCE, 2005, p. 45).

Peirce realizou um minucioso exame do modo como os fenômenos se apresentam à experiência, e, chegou à conclusão de que só há três elementos formais ou categorias universalmente presentes em todos os fenômenos. Essas categorias identificadas por ele recebem nomes diferentes de acordo com o campo ou fenômeno em que tomam corpo. Peirce fixou uma denominação geral, ‘logicamente pura’: *primeiridade, secundidade e terceiridade*. Santaella (2000) nos aponta as ideias a que remetem cada categoria: A primeiridade remete à ideia de indeterminação, acaso, frescor, originalidade, imediaticidade, potencialidade, espontaneidade, mônada; a secundidade, à ação-reação, conflito, esforço e resistência, díada; e a terceiridade está ligada às ideias de generalidade, continuação, crescimento, representação, mediação e tríada.

É esta última categoria que irá corresponder à ideia de signo. A semiótica é o estudo das relações dos signos, a lógica dos signos. Peirce (2005, p.46) afirma que: “um signo, ou *representâmen*, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, cria na mente dessa pessoa um signo equivalente ou talvez um signo mais desenvolvido”. Esta definição, não é única, em toda a obra de Peirce pode haver entre vinte e trinta definições e mais algumas dezenas de variantes para elas. Mas é uma das mais conhecidas.

Embora nessa definição pareça que Peirce entenda como sinônimos há uma pequena diferença entre signo e *representâmen*. Segundo ele: “um signo é um *representâmen* com um interpretante mental” (2005, p. 63). Ele elaborou diversas tríades que explicam o modo como o signo se relaciona com o *representâmen*, consigo mesmo e com o seu objeto. Dentre elas a mais difundida foi esta última.

No estudo do signo, Peirce dedicou maior atenção à classificação e funcionamento do signo classificando-o de três maneiras: ícone, índice e símbolo.

- ✓ O ícone[2] se relaciona com o objeto por uma razão de uma qualidade (primeiridade), pode ser qualquer *representâmen* que se assemelhe com seu objeto e possa substituí-lo. Um diagrama, uma fórmula algébrica são exemplos de ícones.
- ✓ O índice[3] é um *representâmen* que se liga ao objeto por uma relação existencial (secundidade). As letras que indicam os vértices de uma figura geométrica, um relógio são exemplos de índice.
- ✓ O símbolo[4] é um *representâmen* cuja relação se dá com seu objeto por ser uma regra que determinará seu interpretante. É um signo que depende de um hábito (adquirido ou nato).

3.2 AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NA APRENDIZAGEM

Tomamos como temática central desta pesquisa, o estudo das dificuldades na aprendizagem de vetores, que será abordado do ponto de vista da teoria cognitiva dos Registros de Representação Semiótica, do francês Raymond Duval.

Partimos da premissa de que a matemática se diferencia das outras ciências na medida em que reserva uma forte dependência em relação às formas de representação e ao tratamento dos seus objetos. Assim, veremos que o processo de produção de representações sobre um determinado conhecimento e a análise dos sistemas de representação em que essas representações são produzidas, são

---

[2] Um ícone é um signo que possuiria o caráter que o torna significante, mesmo que seu objeto não existisse tal como um risco feito a lápis representando uma linha geométrica (PEIRCE, 2005 p.74).

[3] Índice: Um signo, ou representação que se refere a seu objeto não tanto em virtude de uma similaridade ou analogia qualquer com ele, nem pelo fato de estar associado a caracteres gerais que esse objeto acontece ter, mas sim por estar numa conexão dinâmica (espacial inclusive) tanto com o objeto individual, por um lado, quanto, por outro lado, com os sentidos ou a memória da pessoa a quem serve de signo (PEIRCE, 2005, p.74).

[4] Símbolo: Um signo se constitui em signo simplesmente ou principalmente pelo fato de ser usado e compreendido como tal, quer seja o hábito natural ou convencional e sem se levar em consideração os motivos que originariamente orientaram sua seleção (PEIRCE, 2005 p.76).

temas recorrentes de diversos estudos e pesquisas sobre a aquisição de conhecimento.

As representações assumem um papel decisivo na aprendizagem e no ensino da matemática, muito importante e peculiar, haja vista, os objetos matemáticos serem de natureza abstrata, ou seja, não possuem existência física.

Duval enfatiza a necessidade de se recorrer à noção de representação no estudo dos fenômenos relativos ao conhecimento. Por isso optamos por começar analisando as representações.

De acordo com Duval (2004), não há como um sujeito mobilizar qualquer conhecimento sem realizar uma atividade de representação. Desta forma, a noção de representação torna-se fundamental para qualquer estudo psicológico que investigue a forma como se processa a aquisição de conhecimento e de como se processam transformações de representações.

O autor remete-se às representações, como mostraremos abaixo, em três momentos e concepções diferentes, cabendo a cada uma designar um fenômeno específico, a saber:

1. A primeira noção é a de *representação mental*, que apareceu nos trabalhos de Piaget, no período 1924 a 1926 é relativa às crenças e justificativas dos fenômenos naturais e físicos pelas crianças. Em 1937, a noção de representação surge em Piaget, como uma "evocação de objetos ausentes". Mais tarde, em 1969, é a oposição entre o plano da ação e da representação que passa a centralizar as discussões de sua teoria do desenvolvimento da inteligência.
2. A segunda noção de representação é a concepção de *representação interna ou computacional* apareceu no cenário das teorias que privilegiam o tratamento. As representações internas ou computacionais pertencem a um sistema de informações que permite que sejam produzidas respostas adaptadas. Vista deste modo, a noção de representação nada tem que ver com "crenças" ou com a "evocação de objetos ausentes" e sim com a "codificação da informação".
3. Como *representação semiótica*, a partir da década de 1980. No quadro dos trabalhos sobre a aquisição de conhecimentos matemáticos e sobre os graves problemas que ela provoca. As representações semióticas se diferenciam por

> serem produzidas por um sistema particular de signos, como, por exemplo, a língua, a linguagem algébrica, gráficos cartesianos, e, em poderem ser convertidas em representações "equivalentes" em outro sistema semiótico, o que pode criar a possibilidade do sujeito quem as utiliza atribuir-lhes **significações**[5] diferentes. Assim, a noção de representação semiótica pressupõe a consideração de sistemas semióticos e de uma operação cognitiva de conversão (mudança da forma pela qual um conhecimento é representado) das representações semióticas de um sistema a outro.

Duval (2003) ainda aponta, a importância das representações semióticas para a Psicologia Cognitiva e para a Didática fica evidenciada nas pesquisas em que são mencionadas, essas mesmas pesquisas fazem sempre referência a um ou outro dos três pontos a seguir:

1. A importância da forma em relação ao conteúdo representado;
2. A diversidade das formas do conteúdo representado e;
3. O interesse na mudança de forma da representação por motivos de economia de tratamento.

Porém, essas pesquisas não remetem à importância das representações semióticas na atividade cognitiva, não são evidenciadas em pesquisas das áreas de conhecimento citadas acima (no primeiro parágrafo), quase sempre relegando a estas, unicamente, a função de comunicação, seja para o próprio sujeito que as produz, no caso das representações mentais, seja para terceiros, no caso dos sistemas de representação. O autor explica que este fato ocorre por duas razões: o não reconhecimento de outras duas funções que elas exercem, e que são igualmente primordiais para o fenômeno da compreensão: a da objetivação e a de tratamento; e, por conceber as representações semióticas como um suporte natural e espontâneo para as representações mentais, e a mudança de forma da

[5] Este termo é um dos conceitos-chave da teoria semiótica e pode aparecer nas diferentes posições do campo de problemas que a teoria se propõe tratar. A significação é suscetível designar ora o fazer (a significação como processo), ora o estado (aquilo que é significado), e revela, assim, uma concepção dinâmica ou estática da teoria subjacente. Desse ponto de vista, significação pode ser parafraseada quer como "produção do sentido", quer como "sentido produzido". Significação é também utilizado como sinônimo de semiose (ou ato de significar) e se interpreta, então, quer como reunião do significante com o significado (constitutiva do signo), quer como relação de pressuposição recíproca que define o signo constituído (GREIMAS e COURTÉS, 2008).

representação seria uma operação trivial do ponto de vista cognitivo. Por esta ótica, o conteúdo seria dissociável da representação e ocorreria que a ***noésis***[6] seria independente da ***semiósis***[7].

No entanto, o que se pode observar até hoje, na aprendizagem matemática, é que ”trocar” a forma de representação para muitos alunos dos diferentes níveis de ensino revela-se uma operação difícil, ou até mesmo impossível para alguns. Não se pode dizer que a conversão seja uma operação trivial nem cognitivamente neutra. Neste sentido Damm (2008) afirma que em muitas pesquisas em Educação Matemática constata-se que os estudantes têm dificuldades em transitar entre uma representação e outra. Ou ainda, o fato de saber lidar individualmente com as várias representações de um objeto, não garante uma apreensão significativa. Pois esta se dá a partir do momento que aluno consegue realizar tratamentos e conversões entre as representações de um objeto de forma tão natural quanto possível.

3.3 CLASSIFICAÇÕES DAS REPRESENTAÇÕES

Para compreender melhor as relações existentes entre representações mentais, computacionais e semióticas, bem como o papel que desempenham na cognição, é necessária uma classificação desses diferentes tipos de representação.

Duval recorreu aos autores Le Ny (1985), Paivio (1986) Larkin e Simon (1987) e suas classificações para caracterizar cada representação. Em geral eles recorrem a dois pares clássicos de opostos: o primeiro se refere ao par consciente/não-consciente e o segundo, ao interno/externo. Duval nos alerta para evitar a confusão, ou a ideia de equivalência entre elas, pois estas são partições de fenômenos cognitivos distintos. Vamos ao primeiro par:

A oposição consciente/não-consciente é o par que caracteriza uma tomada de consciência por parte do indivíduo, a mudança de estado do objeto que passa a ser “visto” pelo sujeito. Esta “visão” é algo que não pode dar a saber a outro e que o sujeito só poderá entender por si mesmo. Esta mudança de estado é o

[6] *Noésis*: São os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência (Duval, 2004, p. 14).

[7] *Semiósis*: A apreensão ou a produção de uma representação semiótica (Duval, 2004, p. 14).

produto de um processo de objetivação para o sujeito, no momento em que toma consciência de algo que até então, ele não suspeitava. As representações conscientes, portanto, tem um caráter intencional e cumprem *função de objetivação.*

O par externo/interno é a oposição entre as representações produzidas por um sujeito ou por um sistema semiótico (externas) e aquelas que, pertencendo a um sujeito, não são comunicadas a outro por meio da produção de uma representação externa.

A função mais evidente de uma representação externa parece ser a de comunicação, no sentido de expressão, no entanto, elas cumprem também duas funções cognitivas muito importantes: a função de objetivação e a função de tratamento. Para Duval (2004, p.34):

> La función de objetivación (para sí) casi siempre se asimila a la de expresión (para otro), a pesar de que son independientes. Para un sujeto, no es la misma cosa decir a otro lo que él ya tuvo la ocasión de hacer consciente, que tratar de decirse a él mismo aquello sobre lo cual aún no llega a tomar consciencia. En el primer caso, él debe tener en cuenta las restricciones semióticas y las exigencias sociales de la expresión producida; en el otro caso, esto no solo no es necesario sino que puede ser un estorbo. Con frecuencia, la producción de una representación externa puede responder solo a una de estas dos funciones.

Tabela 1: Classificação das Representações

	INTERNA	EXTERNA
CONSCIENTE	Mental *função de objetivação*	Semiótica *função de objetivação* *função de expressão* *função de tratamento intencional*
NÃO-CONSCIENTE	Computacional *função de tratamento automática ou quase instantânea*	

Fonte: DUVAL, 2004, p. 31

Deste modo pode-se dizer que:

> As representações semióticas, as representações computacionais e representações mentais não são espécies diferentes de representações, mas sim representações que realizam funções diferentes. As representações mentais têm uma função de objetivação. As representações computacionais realizam uma função de tratamento (DAMM, 2008, p. 174).

As representações semióticas são representações conscientes e externas, pois permitem uma percepção do objeto por meio de suas unidades significantes (pontos, traços, caracteres...). Dependendo do sistema a que pertence uma representação, as unidades significantes que a constituem, terão naturezas distintas, porque distintos são os processos de sua produção no interior de cada sistema. No entanto, a **referência**[8] permanece. Sobre as representações semióticas, Damm (2008) citando Duval (1993), afirma que: “são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação o qual tem suas dificuldades próprias de significado e funcionamento” (p. 176).

Pode-se dizer a respeito das representações mentais em relação às representações semióticas, que as primeiras permitem o acesso aos objetos na total ausência de significante perceptível. E acontece, de modo geral, de se atribuir um papel meramente expressivo a estas últimas, como que estabelecendo uma correspondência ou quase equivalência entre estes dois tipos de representações. Sob este ponto de vista, as representações mentais estariam sujeitas aos mesmos tratamentos que as representações semióticas.

Duval (2003) acredita que, na maioria das vezes, as representações mentais são apenas representações semióticas interiorizadas. E ainda, que as representações mentais do sujeito que são necessárias à atividade matemática são sempre representações semióticas desenvolvidas com um tratamento de produção externa de representações semióticas. Dessa forma, o sujeito pode tratar e controlar um número maior de informações de forma externa do que em produção interna, esta, por sua vez, tem como vantagem a maior rapidez na sua realização.

---

[8] (Ogden e Richards apud GREIMAS 2008) propõem um modelo triangular, que visa a explicar a estrutura do signo: o símbolo (ou significante) está ligado ao referente não diretamente, mas por intermédio da referência (ou significado). Em tal interpretação, a referência, em lugar de ser concebida como uma relação, é reificada e transforma em um conceito – ser híbrido, que não é nem lingüístico nem referencial –, expansão sobre uma classe de referentes.

Para o autor, não é difícil entender a confusão gerada em torno da relação entre representações mentais e semióticas, ora, ambas caracterizam-se pela intencionalidade e realizam papel na objetivação. Duval afirma ainda que o sujeito pode concluir o processo de objetivação sem concretizar a sua expressão de forma adequada, ou seja, sem produzir uma representação semiótica adequada. Isto porque a objetivação é um processo de formação de novas representações mentais. Este fato sempre vem acompanhado da produção de uma representação semiótica que pode, ou não, ser satisfatória do ponto de vista expressivo.

3.4 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Os sistemas semióticos são sistemas de representação que cumprem três atividades cognitivas de toda representação. A primeira é a **formação** de uma marca, que possa ser identificada como representação de um objeto, a segunda, o **tratamento**, é a transformação da representação, uma mudança de forma, mas preservando as características próprias do sistema onde foi criada. E a terceira, a possibilidade de **conversão** da representação com sua passagem a outro sistema, mas mantendo o mesmo objeto de referência.

Os sistemas de representação que possibilitam estas três atividades chamam-se *registros de representação semiótica*. Estes registros possibilitam ao sujeito, tanto concluir um processo de objetivação, como para simplesmente comunicar-se com um interlocutor.

Na teoria de Duval a aprendizagem em matemática ocorre dependendo da aquisição e da coordenação de pelo menos dois tipos de registros. De acordo com o autor podemos entender que a utilização dos registros de representação semiótica é importante na matemática por atuar no processo cognitivo do sujeito. Seu papel está ligado à atividade de representação dos objetos, seja para si mesmo como é caso da função de objetivação, seja para os outros, no caso da função de comunicação, ou ainda a realização de tratamentos, neste caso funciona tanto para objetivar como para comunicar. Assim, a aprendizagem ocorre quando o sujeito realiza a produção de representações em nível de funcionamento consciente.

3.5 A ATIVIDADE MATEMÁTICA DO PONTO DE VISTA COGNITIVO

De acordo com Duval (2003) as mais simples ou mais elaboradas atividades envolvendo matemática, requerem uma certa complexidade ao funcionamento cognitivo. E muitas análises acerca da compreensão matemática evocam as complexidades epistemológicas dos conceitos, mas estas podem ser explicadas pela história de suas descobertas. Ainda aponta duas características que fazem diferença entre a atividade requerida pela atividade matemática e a requerida nos domínios do conhecimento, embora todas exijam um conjunto de conceitos com certo grau de complexidade. São elas:

1. A importância que as representações semióticas têm para a matemática; primeiro porque, as operações de cálculo, por exemplo, dependem do sistema de representação utilizado; segundo pelo fato de os objetos necessitarem de um sistema de representação que lhes permitam serem acessados.
2. A grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática: os sistemas de numeração, as figuras geométricas, escritas algébricas e formais, as representações gráficas e a língua natural mesmo quando ela não é utilizada no seu uso comum.

Em matemática há uma multiplicidade de representações, ou seja, existem diversos registros, que possibilitam a mobilização simultânea de várias representações de um objeto e a troca entre essas representações, a qualquer momento, de acordo com a necessidade. A originalidade da atividade matemática está justamente nessas características. Sabe-se que em determinadas ocasiões um tipo de registro pode ser colocado em evidência, mas deve existir sempre a possibilidade de passar de um registro a outro.

Tabela 2: Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • Argumentação a partir de observações, de crenças...; • Dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configuração em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • Apreensão operatória e não somente perceptiva; • Construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • Numéricas (binária, decimal, fracionária...); • Algébricas; • Simbólicas (línguas formais) Cálculo.	Gráficos cartesianos. • Mudanças de sistema de coordenadas; • Interpolação, extrapolação

Fonte: DUVAL, 2003, p. 14

3.6 OS DOIS TIPOS DE TRANSFORMAÇÃO DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Ao discutir os registros de representação, apontamos os dois tipos de transformação que pode sofrer uma representação: O tratamento, que consiste em mudar a forma, mantendo-se, contudo, no mesmo sistema; e a conversão, na qual a mudança de forma acarreta uma mudança de registro. Muitas vezes, não se atenta para a distinção destas atividades durante as atividades de sala de aula ou ao analisar as produções dos alunos. Veremos como elas apresentam diferenças bem marcantes.

O tratamento, como afirmamos, caracteriza-se por uma transformação com a permanência no mesmo registro, podemos apontar que é a mais comum de se observar nas atividades propostas aos alunos, como é caso das resoluções algébricas e das operações numéricas e algorítmicas. Quase sempre, é privilegiado um determinado registro que, supostamente, permita uma compreensão mais clara e que aumente as possibilidades de acerto.

A respeito da atividade matemática dentro da teoria dos registros de representação Duval postula que a atividade matemática pressupõe a mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação e/ou a possibilidade de passar de um registro a outro o tempo todo. Embora em algum momento, durante uma resolução de problema, seja privilegiado de forma explícita um tipo de registro é desejável que exista sempre a possibilidade de troca de registro.

Devido a isso, Duval (2003) nos antecipa a hipótese de que a compreensão em matemática envolve necessariamente a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica.

Podemos destacar que, a aprendizagem teria, portanto, uma ligação direta com a capacidade de efetuar operações dentro de um registro e também a combinação e escolha entre registros (conversão).

A conversão é - das operações entre registros - a menos requerida por sua complexidade e seu caráter aparentemente de lateralidade, contudo, é a mais fundamental do ponto de vista cognitivo. Um exemplo de conversão é a passagem de uma equação para sua representação gráfica.

Em suma, os tratamentos são transformações de representações internamente a um dado registro, enquanto que, a conversão é uma transformação de representação na qual o objeto denotado permanece, mas em registros diferentes. Além disso, existem duas questões envolvendo as conversões: a ocorrência (ou não) da congruência e a heterogeneidade dos dois sentidos de uma conversão. Pavlopoulou (1994) em sua tese de doutorado teve como objeto de estudo a coordenação entre registros de representação semiótica no ensino de Álgebra Linear. De acordo com Dorier (1998) o trabalho desta autora é uma aplicação da teoria de Duval no contexto do ensino de Álgebra Linear, na qual os alunos apresentaram uma dificuldade em converter registros e uma confusão implícita entre o objeto e o que seria sua representação.

Ao se observar e comparar a representação no registro de partida com a representação terminal no registro de chegada, duas situações podem ocorrer: na primeira, temos o caso em que se tem a transparência entre as duas, ou seja, próximo a uma situação de codificação então há congruência e, na segunda, quando não ocorre uma correspondência de maneira explícita entre as representações, e então, não existe a congruência na operação de conversão.

Com relação à heterogeneidade do sentido, podemos dizer que nem sempre um sentido da conversão terá o mesmo caráter que o sentido inverso. Podemos ter contrastes muito fortes entre os acertos apenas invertendo da conversão.

Duval (2003) esclarece que em geral, privilegiamos um determinado sentido na conversão, por acreditar que o treinamento do sentido oposto será contemplado automaticamente. Em seguida, ele afirma que o sentido é escolhido de maneira instintiva, evidentemente em forma de exemplos de congruência. Este autor postula que os maiores bloqueios de aprendizagem em matemática acontecem quando os alunos se deparam com operações não-congruentes de conversão e, que, o sucesso dos alunos em matemática é verificado nos casos de monoregistros. Mas alerta para o perigo de um “enclausuramento” de registros que impeça os alunos de avançar adquirindo novos conhecimentos e por fim, que isso se torne um empecilho à sua compreensão de aprendizagem matemática.

Assim, a compreensão em matemática implica em adquirir capacidade de mudar de registro. Isso porque, de acordo com Duval: “não se deve jamais confundir um objeto e sua representação.” (2005, p. 21). A teoria de Duval tem como pressuposto que uma aprendizagem significativa ocorre quando o aluno adquire a capacidade de mudar de registro e, além disso, consegue diferenciar um objeto de sua representação.

No quadro a seguir, temos um exemplo de tratamento entre vetores. No enunciado, foram dados três pontos A, B e C e se pede calcular o ponto D para que a condição do problema fosse verdadeira. Os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são obtidos sem sair do registro em que foram apresentados, ou seja, na representação analítica (com suas componentes numéricas) e em seguida, pela resolução de um sistema de equações, as componentes do vetor foram calculadas. Assim, a tarefa do enunciado foi realizada por meio de cálculo internamente ao registro dado, foi um procedimento algorítmico realizado totalmente num único registro de representação, sem necessidade de recorrer a outro registro.

Dados os pontos A(-1, 2), B(3,-1), C(-2, 4), determinar D (x, y) de modo que $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Solução:

$\overrightarrow{CD} = D - C = (x, y) - (-2, 4) = (x + (+2), y + (-4)) = (x + 2, y - 4)$

$\overrightarrow{AB} = B - A = (3, -1) - (-1, 2) = \big(3 + (+1), -1 + (-2)\big) = (4, -3)$

Logo:

$(x + 2, y - 4) = \frac{1}{2}(4, -3)$

$(x + 2, y - 4) = (2, -\frac{3}{2})$

Pela condição de igualdade de dois vetores:

$$\begin{cases} x + 2 = 2 \\ y - 4 = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Sistema cuja solução é $x = 0 \;\; e \;\; y = \frac{5}{2}$.

Por conseguinte:

D (0, $\frac{5}{2}$)

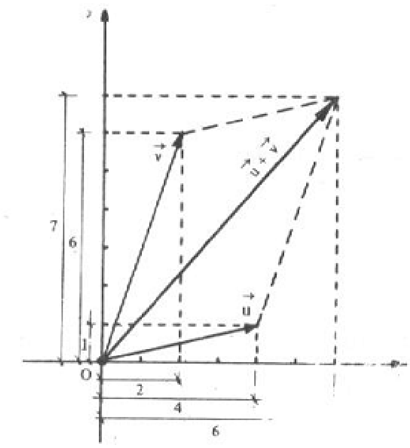
Quadro 1: Exemplo de tratamento no interior do registro
Fonte: Steinbruch e Winterle. Geometria Analítica.p. 24
Nota: item 2.4.1 problema resolvido n^{o}3

Na conversão, é comum que o aluno encontre mais dificuldade, nesse momento precisará decidir entre as representações, e escolher a que melhor se adequa à situação - em termos de tratamento - e então, fazer a transformação para o registro requerido no enunciado da questão.

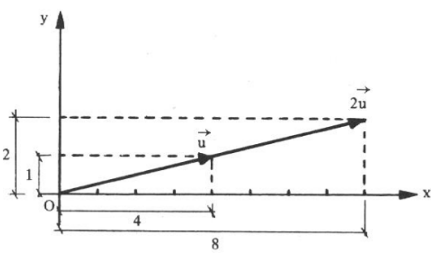
O primeiro problema é continuar reconhecendo o mesmo objeto em mais de uma representação, e, o segundo, mudar a forma da representação, isto é, realizar a conversão, tarefa que exige muito mais do sujeito, pois o conteúdo de uma representação depende do registro em que esta foi produzida, nesse caso a troca entre representações não admite o uso de regras de codificação ou de tradução.

Neste quadro, um exemplo de situação de conversão do registro vetorial (representação analítica) para o registro figural (representação gráfica). A soma de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, do $\mathbb{R}^2$, de coordenadas (4, 1) e (2, 6), respectivamente, que deve ser representada graficamente no sistema cartesiano, em seguida, a representação dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e o vetor soma (6, 7) no gráfico.

Dados os vetores $\vec{u} = (4,1) e\ \vec{v} = (2,6), calcular\ \vec{u} + \vec{v}\ e\ 2\vec{u}.$
A figura mostra, geometricamente, que $\vec{u} + \vec{v} = (4,1) + (2,6) = (4+2, 1+6) = (6,7)$



E que $2\vec{u} = 2.(4,1) = (8,2)$



Quadro 2: Exemplo de conversão do registro numérico para o registro gráfico.
Fonte: Steinbruch e Winterle. Geometria Analítica. P. 20
Nota: item 2.3.2 Operações. Exemplo 01

A natureza cognitiva da atividade de conversão pode ser observada nos dois tipos de fenômeno que ela provoca: as variações de congruência e não-congruência e a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão.

Ao estudar a atividade de conversão é necessário fazer uma comparação entre dois registros, o registro de partida e o de chegada. Ao comparar a representação inicial com a representação terminal duas situações podem ocorrer:

1) pode existir a congruência entre as representações de partida e de chegada, que é caracterizada por uma “correspondência” das unidades semânticas constitutivas de cada representação. Dessa forma a conversão aproxima-se de uma simples codificação.

2) caso as representações não apresentem um certo grau de equivalência ou correspondência semântica entre as unidades de significado, será uma conversão não congruente.

Damm (2008, p. 181) ressalta que:

> não podemos confundir a conversão com duas atividades que estão muito próximas dela, que são a ação de codificar e a interpretação. A Interpretação requer uma mudança de quadro teórico ou modificação de contexto, não implicando mudança de registro. A ação de codificar é a transcrição de uma representação em outro sistema semiótico, diferente daquele onde ela é dada.

O segundo fenômeno está relacionado ao sentido da conversão. Quando se inverte o sentido da conversão, a relação de correspondência entre os registros de partida e chegada pode vir permeada por contrastes muito fortes.

Os estudantes, em sua maioria, parecem deixar de reconhecer a situação apresentada na representação apenas mudando o sentido em que a conversão deve ser realizada, e o resultado é que, a taxa de desempenho modifica-se significativamente de uma situação para outra.

3.7 PESQUISAS SOBRE A APRENDIZAGEM DE VETORES

Nos últimos trinta anos, muitos autores na área da educação voltaram suas atenções para o ensino e aprendizagem da Álgebra Linear, na busca de melhor compreender os aspectos mais importantes na sua evolução. No cenário internacional podemos citar inúmeros autores e seus trabalhos na área da epistemologia e didática desta disciplina. Na França, Jean-Luc Dorier, Marc Rogalski, Aline Robert, Jacqueline Robinet; nos Estados Unidos, G. Harel e ainda Joel Hillel, Anna Sierpinska e Kallia Pavlopoulou para citar alguns.

Dorier em um artigo de 1998 faz um apanhado de diversos trabalhos dos autores acima citados, que apresentam como temática central o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear. A importância de se falar nesses trabalhos faz-se pela estreita relação entre o desenvolvimento da Álgebra Linear com a Geometria Analítica, e, principalmente, por uma noção inerente aos dois domínios, que emerge no centro desta discussão, respeitando-se suas especificidades, o vetor, cuja aprendizagem é um dos elementos centrais deste projeto.

Em seu artigo, Dorier (1998) destaca no trabalho de Harel, os três princípios necessários para o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear: o da concretização, o da necessidade e o da possibilidade de generalização.

Segundo Harel, o estudo da geometria a duas e três dimensões proporciona aos estudantes uma melhor compreensão do conceito de espaço vetorial e destaca a importância de aplicar a Álgebra Linear dentro de um sistema geométrico, como condição para a realização da primeira fase do aprendizado. Esta fase é o que corresponde ao primeiro dos princípios:

> Para que um estudante seja capaz de abstrair uma estrutura matemática de um modelo no interior desta estrutura, os elementos deste modelo devem ser entidades conceituais na visão dos estudantes; isto é, os estudantes devem possuir alguns processos cognitivos que possam tomar estes objetos como dados de entrada (1988, p. 195).

Sobre o princípio da necessidade o autor fala de uma necessidade intelectual, ou ainda, para que o aluno apreenda um conceito este deve deparar-se em uma situação em que precise desse conceito. Este princípio pode ser enquadrado na teoria de Piaget que discute as situações didáticas que provocam desequilíbrios na estrutura cognitiva dos aprendizes como ferramenta de ensino. Ao se deparar com tais situações o aluno tem a oportunidade de buscar novas estratégias de resolução, reorganizando assim, seus conhecimentos.

Por último, a possibilidade de generalização decorre da ocorrência da concretização de um modelo por parte do aluno, e é complementar aos dois primeiros princípios.

Para Dorier, o trabalho de Harel é baseado, portanto, em uma progressão gradual na generalização. Ele se apóia sobre o domínio da geometria sintética para introduzir os espaços analíticos R^1, R^2, R^3 e em seguida, R^n. Porém, praticamente não é abordada a necessidade de separar o vetor da álgebra linear e sua representação analítica.

Outro autor estudado por Dorier é K. Pavlopoulou (1993), que incluiu em seu trabalho um estudo das representações presentes nos livros didáticos. A autora distingue três tipos de registros de representação semiótica: o registro gráfico, o simbólico e o tabular. Em particular, a autora mostra que, geralmente, os autores dos livros didáticos privilegiam um tipo de registro e, que frequentemente este registro é o simbólico. Além disso, o autor mostra em sua pesquisa, que as conversões não são tratadas de forma sistematizada.

Por fim, o estudo de Pavlopoulou colocou em evidência que o sentido da conversão determina o grau de dificuldade da sua realização. Em sua pesquisa, a maior parte dos estudantes não teve dificuldades em estabelecer a conversão no sentido do registro tabular para o registro gráfico. Já no sentido contrário, do registro gráfico para o tabular, o número de acertos foi bastante reduzido, esta mudança nos resultados é explicado pela autora, ao fenômeno da heterogeneidade do sentido da conversão.

Sobre as pesquisas de Hillel e Sierpinska, Dorier mostra que estes autores associam a dificuldade dos alunos à complexidade das relações entre os diversos tipos de linguagens próprias da Álgebra Linear, são elas: a linguagem abstrata, a linguagem algébrica e a geométrica. Eles se apóiam nas noções de níveis de reflexão intra, inter e trans-operacional, apoiados nos trabalhos de Piaget e Garcia.

Outra característica encontrada no trabalho desses autores é que as representações dos vetores e dos operadores lineares implicam em uma tradução de um nível de descrição a outro, ou uma tradução no interior de um mesmo nível. A compreensão desse processo é pré-requisito fundamental a uma boa compreensão dos problemas de diagonalização e de colocação na forma canônica.

Hillel e Sierpinska, citados por Dorier (1998), apontam que as noções específicas relacionadas ao R^n não representam um complicador ao estudante, tendo em vista que várias questões são resolvidas utilizando a noção central de sistema linear, porém os autores entendem que, trabalhar neste nível algébrico de descrição, torna-se um obstáculo a aprendizagem da teoria geral, assim como também, a aceitação de outras categorias de objetos como vetores, por exemplo: as funções, as matrizes e os polinômios. Para superar esse obstáculo, eles afirmam que é necessário que a compreensão se dê no nível trans-operacional, isto requer do estudante que seja capaz de estabelecer conversões de registros de representações, além de um pensamento crítico em relação a suas produções.

Castro (2001) desenvolveu um trabalho que tem como foco a noção de vetor, tomando por base os resultados da tese de K. Pavlopoulou com alunos do DEUG (primeiro ano universitário na França). Com o objetivo de desenvolver uma seqüência didática, Castro realizou um teste diagnóstico com alunos do primeiro ano de uma escola de engenharia que estavam cursando ou tinham terminado a disciplina de Geometria Analítica e Vetores.

A sequência concebida por Castro abordou três tipos de registros: o simbólico, o figural e o da língua natural. E onde os alunos deveriam realizar conversões entre as representações de vetores do plano e do espaço. Como resultados, a autora identificou que os alunos demonstraram dificuldades em realizar conversões entre as representações de vetores, principalmente quando essa conversão envolvia o registro gráfico. Ainda, que, a dificuldade era maior quando o registro gráfico era solicitado no registro de chegada.

Bittar (1998) realizou um estudo sobre o ensino de vetores no sistema secundário francês. O trabalho desta autora abrange por um lado, uma análise da apresentação da noção de vetor na escola, e, de outro, um estudo de algumas dificuldades que os alunos encontram na aprendizagem desta noção. Além disso, foi feito um estudo detalhado de livros didáticos com o qual constatou que a maioria dos autores introduz a noção de vetor geometricamente. Bittar (1998) constatou que, nesta fase do ensino, os vetores são tratados como ferramentas para resolução de problemas geométricos de configuração, sendo que o aspecto *objeto*[9] deste conceito é quase ausente, além disso, a autora verificou que os livros didáticos omitem a possibilidade de decomposição do vetor no plano, a partir de dois vetores não-colineares. Com isso, a autora afirma que esses fatores mais tarde, vão gerar dificuldades para os alunos, ao estudar vetores no curso superior de Álgebra Linear.

Em sua tese, Cissé Ba (2007) elaborou um estudo epistemológico e histórico a respeito da ligação entre o vetor e as grandezas vetoriais e sobre a translação e o movimento de translação. Sua pesquisa analisou os diferentes papéis destes conceitos nos programas de Física e de Matemática e as mudanças sofridas a partir de 1852, com isto a autora pretende resgatar as condições históricas e epistemológicas que conduziram a forma de ensino atual do vetor nas disciplinas de Física e Matemática e as relações possíveis entre uma e outra.

---

[9] Nesse sentido, diz-se que um conceito é ferramenta quando sua utilização é necessária para a resolução do problema, porém em nossa pesquisa utilizamos essas duas noções do ponto de vista do ensino, ou seja, dizemos que um conceito é *ferramenta* desde que ele seja usado para resolver um problema, ainda que ele não consista obrigatoriamente na única possibilidade de resolução do problema; e um conceito é *objeto* quando a noção estudada (neste caso, a noção de vetor) é objeto de estudo do problema.

Para isso a autora investigou algumas instituições no Senegal e na França (evolução dos vetores no ensino secundário). Ba (2007) percebeu que com esse estudo o vetor , tem tido nos últimos anos um papel crescente como ferramenta para modelizar grandezas físicas. Apesar de ser visto claramente como um objeto que pertence à matemática e que é regido por suas leis e relações, a tendência no ensino francês é privilegiar o aspecto experimental (aplicações na física), tornando-o cada vez mais distante da matemática.

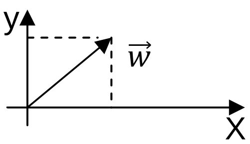
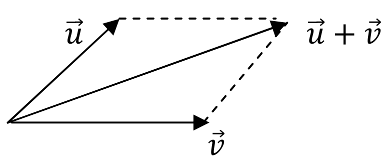
Portanto o vetor como objeto de ensino é apresentado de formas diferentes nas duas disciplinas, não só por causa das diferenças entre os processos de transposições didáticas de Física e de Matemática em questão, mas também pelas exigências curriculares próprias de cada uma. Embora as instituições imponham aos autores uma abordagem interdisciplinar entre vetores e grandezas vetoriais, e entre o movimento de translação e a translação matemática, os programas disciplinares exploram com mais intensidade os aspectos experimentais, no caso da Física, e não o que estes objetos de ensino possuem em comum.

4 OBJETIVOS DAS QUESTÕES E ANÁLISE DOS DADOS

A seguir serão apresentadas as questões que constam nas atividades com seus respectivos objetivos, tendo em vista que a análise dos registros dos alunos participantes nesta pesquisa terá base na possibilidade de utilização dos múltiplos registros e representações semióticas, bem como, o tratamento e a conversão de registros.

A tabela adiante mostra a classificação que utilizamos para discriminar e analisar os tipos de registros e as representações mais freqüentes no ensino de vetores, e que serão utilizadas em nossas análises. A referida tabela tem fundamento em Karrer (2006, p. 64) e na sua classificação dos registros de representações, algumas adaptações foram necessárias, pois o trabalho dessa autora estava voltado para o ensino de Álgebra Linear.

Tabela 3: Classificação dos tipos de registros e as representações mais frequentes

<table>
<tr><th>Tipo de registro</th><th>Representações</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Registro Algébrico</td><td>Representação numérica: expressa vetores juntamente com suas coordenadas (parte numérica), geralmente utilizada em operações de soma.
Ex.: $\vec{u} = (-2, 5)$, $\overrightarrow{AB} = (4, -1)$</td></tr>
<tr><td>Representação Vetorial: geralmente utilizada quando o vetor é definido por dois pontos (inicial e final).
Ex.: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CG}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Registro Figural</td><td>Representação Gráfica: presença de desenho, utilizando-se como suporte o sistema cartesiano (eixo).
</td></tr>
<tr><td>Representação Geométrica: presença de desenho sem a utilização do eixo cartesiano.
Ex.:
</td></tr>
<tr><td>Registro da Língua Natural</td><td>Representação da Língua Natural: utilização de palavras da língua vigente.
Ex.: Calcule a soma dos seis vetores que têm por representantes segmentos orientados com origem em cada um dos vetores, e extremidade no centro de um mesmo hexágono regular.</td></tr>
</table>

4.1 SOBRE AS QUESTÕES DA ATIVIDADE 01

A partir daqui, faremos uma discussão sobre as questões da Atividade 01 com base na tabela acima, analisaremos os registros envolvidos no enunciado, os registros de chegada, os tratamentos e conversões necessárias à resolução, bem como as possíveis dificuldades dos alunos para resolver cada questão.

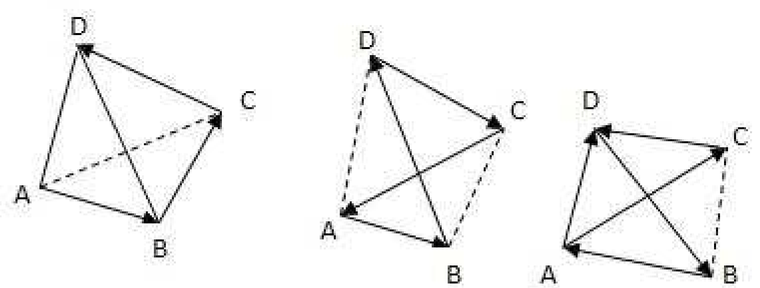
> 1) Prove que o oposto de $\vec{u} + \vec{v}$ é $-\vec{u} - \vec{v}$.

Nesta questão há um registro de partida, o registro algébrico na sua representação vetorial, e dois registros de chegada, o figural na representação geométrica e o registro no qual foi dado.

Para atender ao que é solicitado no enunciado pode-se efetuar tratamentos na representação vetorial do registro algébrico. E utilizando cálculos algébricos demonstrar que o oposto da soma é a soma dos opostos, ou ainda, realizar a conversão para a representação geométrica do registro figural, na qual a soma dos vetores efetuar-se-á pela regra do paralelogramo. Ainda, pode o aluno utilizar-se das propriedades geométricas para proceder à adição dos vetores opostos por meio da regra de Chasles na configuração do paralelogramo.

Por envolver implicitamente, uma atividade de troca de registro, espera-se que os alunos apresentem uma considerável dificuldade na passagem para o registro figural e para efetuar a soma. No tratamento algébrico acreditamos que haverá poucos problemas.

> 2) Determine a soma dos vetores indicados em cada caso nas figuras.



Na segunda questão, tem-se um registro de partida, o registro figural, na representação geométrica, e um registro de chegada, o algébrico na representação vetorial. A solução deverá ser feita efetuando-se a conversão da representação geométrica para a representação vetorial e realizando os tratamentos necessários utilizando a regra de Chasles. Esperamos que os alunos não encontrem grandes dificuldades na resolução, pelo fato de o registro de chegada ser o algébrico na representação vetorial.

3) Obtenha a soma dos vetores indicados em cada caso.

a) ABCDEFGH é um paralelepípedo.

b) ABCDEFGH e EFGHIJLM são cubos de arestas congruentes

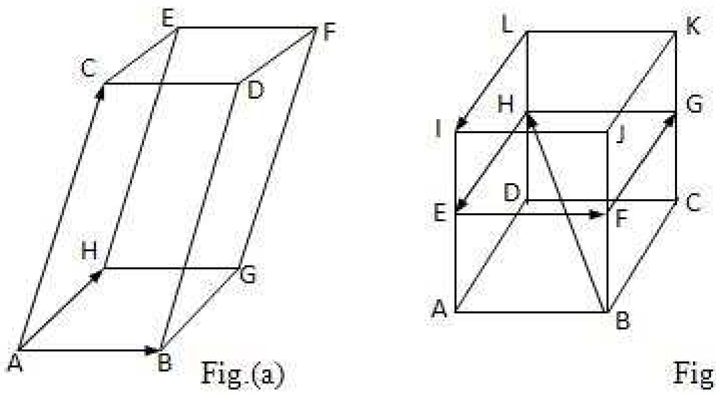


Fig.(a) Fig.(b)

Na terceira questão, tem-se um registro de partida, o registro figural na sua representação geométrica. No registro de chegada tem-se registro algébrico na representação vetorial e o próprio registro no qual foi dado. Para obter a solução, pode-se realizar a conversão da representação geométrica para a representação algébrica e realizar os tratamentos adequados, tendo como base a regra de Chasles, nesta configuração também é possível usar a regra do paralelogramo.

Como se trata de um problema de configuração, possivelmente os alunos podem confundir-se com vetores presentes na figura ou com as escolhas de propriedades geométricas e/ou vetoriais que terão que utilizar na resolução. Com relação à conversão, poderão não encontrar tanta dificuldade, pois para isso precisam apenas identificar os vetores da figura passando a sua representação

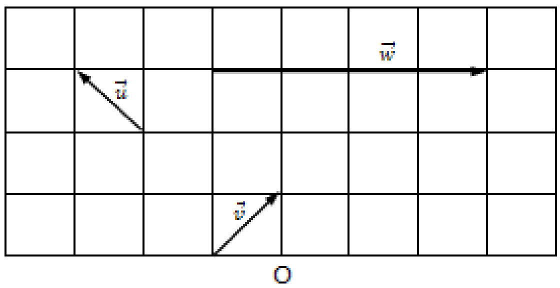
4) Utilizando a figura (a) da questão acima determine o vetor $\vec{x}$ para os casos abaixo.

a) $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{HE} - \overrightarrow{FE}$ b) $\vec{x} = \overrightarrow{HD} - \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BE}$

c) $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD}$

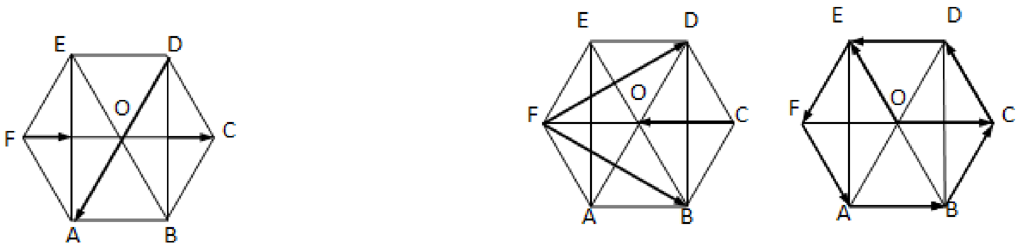
Na quarta questão há dois registros de partida, o algébrico na representação vetorial e o figural, sendo que a figura utilizada faz parte da questão anterior. A solução pode ser encontrada por meio de tratamentos utilizando a regra de Chasles na maioria dos casos, ou ainda, realizando substituições de alguns vetores por outros representantes mais adequados. Dada a configuração também é possível utilizar a regra do paralelogramo, tendo a figura como registro principal. A resposta deve ser dada no registro simbólico. Como o registro figural não é o foco nesta tarefa, espera-se um bom desempenho dos alunos na busca da solução algébrica.

5) Sendo $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ representados na figura abaixo, represente $\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{v} + 5\vec{w}/4$ por uma flecha de origem O.



Na quinta questão, temos como registros de partida, o algébrico na representação vetorial e o figural na representação geométrica. A resolução deve ser feita utilizando as propriedades da figura, já que os vetores dados $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ foram representados tendo como suporte uma malha quadriculada e o enunciado pede um vetor em sua representação geométrica. A resposta pode ser encontrada realizando o tratamento na figura com base nas operações indicadas no enunciado. Como o registro de chegada é o figural, pode haver uma maior dificuldade na soma dos vetores, pois envolve uma conversão no sentido algébrico para o figural, que não é muito comum, justamente pelo grau maior de dificuldade que envolve do que o sentido inverso, ou seja, do registro figural para o algébrico.

6) Abaixo, os hexágonos são regulares. Em cada caso, determine a soma dos vetores indicados.



Na sexta questão o registro de partida é o figural na representação geométrica e o de chegada é o algébrico. Para obter a solução deve se proceder ao tratamento no registro algébrico observando as propriedades geométricas da configuração dada, assim, será necessário realizar a conversão da representação geométrica para a representação vetorial, onde então o tratamento será efetuado e a resposta será dada.

7) Calcule a soma dos seis vetores que têm por representantes segmentos orientados com origem em cada um dos vetores, e extremidade no centro de um mesmo hexágono regular.

Na sétima questão o enunciado é feito completamente na língua natural e faz alusão a uma figura regular, o hexágono. Para a resolução, tem-se que efetuar a conversão passando do registro da língua natural para o registro figural geométrico, e em seguida, a conversão da representação geométrica para o registro algébrico, no qual os tratamentos poderão ser efetuados. O registro de chegada é, portanto, o algébrico vetorial.

Assim, são necessárias duas conversões, pois para chegar ao registro final, deve-se passar primeiro para a representação dos vetores na configuração enunciada no registro de partida. Esta conversão, embora intermediária, é essencial para se chegar ao registro algébrico vetorial, pois pode determinar o uso da regra da soma que será utilizada. Acreditamos que os alunos poderão encontrar dificuldades para resolver esta questão pelo fato de haver duas conversões tendo como partida apenas o registro da língua natural.

8) Quais são a origem e a extremidade de um representante do vetor $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{FB}$? Você não vai precisar de nenhuma figura para chegar à resposta certa.

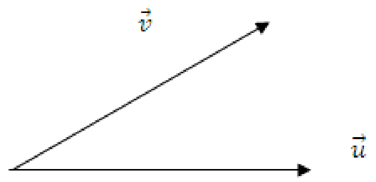
Nesta questão tem-se como registro de partida o registro algébrico na representação vetorial que também é o de chegada. Desta forma, o resultado pode ser encontrado realizando o tratamento no registro em que foram expressos os vetores. Pelo fato de requerer apenas o tratamento na representação vetorial é uma questão que possui grau de dificuldade pequeno.

9) O hexágono ABCDEF é regular, de centro O. Prove que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AO}$.

Temos aqui dois registros de chegada, a língua natural e o algébrico. A resolução deve ser realizada na representação vetorial do registro algébrico, tendo como registro intermediário, o registro geométrico. Assim, para proceder à resolução necessita-se realizar a conversão do enunciado, que foi dado em dois registros, para a representação geométrica do registro figural, no qual, as propriedades geométricas e vetoriais possam ser observadas e exploradas e posteriormente no registro simbólico sejam calculadas as somas.

10) Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ abaixo, mostrar, em um gráfico, um representante do vetor:

a) $\vec{u} - \vec{v}$
b) $\vec{v} - \vec{u}$
c) $-\vec{v} - 2\vec{u}$
d) $2\vec{u} - 3\vec{v}$



No enunciado da décima questão tem-se a representação vetorial do registro algébrico e a representação geométrica do registro figural como registros de partida. A resolução pede que se conheça a multiplicação de um número por um vetor e adição com vetores opostos. Para encontrar a solução é necessário fazer a conversão do registro algébrico para o figural e realizar as somas pela regra do paralelogramo ou pela regra de Chasles.

4.2 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS REGISTROS DOS ALUNOS

Os dados coletados, os registros escritos dos alunos, foram analisados e organizados de forma que, ao final, pudemos identificar alguns tipos comuns de dificuldades e erros presentes nas atividades resolvidas pelos alunos.

Dessa forma, os resultados obtidos por meio de análises e reflexões serão apresentados nesta seção. Traremos as dificuldades e erros mais relevantes para responder ao estudo proposto nesta pesquisa, organizados em quatro categorias: confusão entre coordenadas de ponto e coordenadas de vetor, dificuldade na aplicação da regra do paralelogramo, dificuldade em identificar vetores iguais e dificuldade na conversão entre registros quando estão envolvidos registros geométricos.

A estrutura da apresentação das análises ficará da seguinte maneira: em primeiro lugar, falaremos sobre a categoria que será abordada e explicitaremos a abrangência da dificuldade envolvida nessa categoria. Discutiremos as possíveis explicações, baseadas no referencial teórico que foi adotado e, em alguns momentos, confrontando com os resultados de estudos feitos anteriormente, como mostrado na revisão bibliográfica. Assim, passaremos, então, a mostrar alguns registros produzidos por alunos com respectivas descrições e análises logo em seguida.

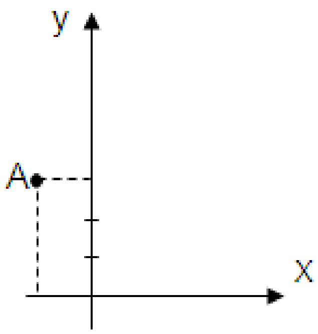
4.2.1 Categoria 1: Confusão entre coordenadas de ponto e coordenadas de vetor

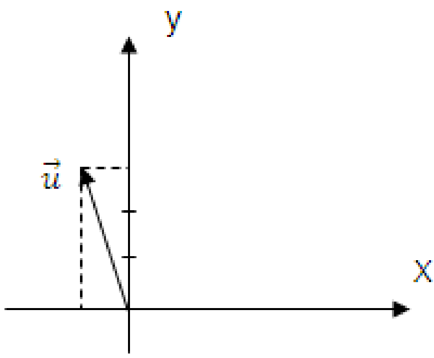
A confusão entre coordenadas de ponto e coordenadas de vetor ocorre quando, dadas as coordenadas de um vetor, o aluno as representa como se fossem coordenadas de um ponto. Esta dificuldade está relacionada com a forma de representar o vetor no registro numérico que é bastante semelhante à representação das coordenadas de um ponto. A diferença é que, para representar um ponto, geometricamente, basta localizar as coordenadas indicadas no sistema cartesiano, enquanto que, para se representar o vetor é necessário considerar um ponto de origem e um ponto de extremidade.

Quando um vetor é representado por um par ordenado ou por uma terna ordenada, sua representação é feita admitindo que essas coordenadas correspondem a sua extremidade. Temos então, duas informações subtendidas: a primeira, que as coordenadas do vetor dão a localização da sua extremidade e a segunda, que nesse caso, sua origem será a origem do sistema adotado.

Desta forma, a abordagem tradicional geométrica utilizada para a representação de vetores, em que vetores são representados por seus pontos de extremidade, pode levar o aluno a estabelecer relações mal interpretadas entre o comportamento das coordenadas de um ponto e a representação de vetor. O exemplo abaixo ilustra a diferença entre as representações gráficas de um ponto e a de um vetor.

Ex.: A (-1, 3) é um ponto do plano $\vec{u}$ = (-1, 3) representa vetor do plano





Observamos que o ponto A representado geometricamente acima, possui uma única localização no plano, já o vetor $\vec{u}$ possui infinitos representantes que satisfazem as coordenadas (-1, 3) e que podem ser localizadas em qualquer quadrante do sistema cartesiano, mostradas na figura a seguir.

Portanto, a figura da seta, no exemplo, é apenas um representante do vetor $\vec{u}$, não devendo ser confundida com o objeto vetor. Um vetor pode ter diversos representantes, desde que sejam respeitados seu tamanho, direção e sentido.

A seguir, uma figura ilustrativa traz o vetor $\vec{u}$ e algumas das diversas representações que se pode fazer dele, todos os representantes nessa ilustração possuem mesmo tamanho, direção e o mesmo sentido, assim, dessa forma, caracterizam representações do mesmo objeto conceituado como vetor.

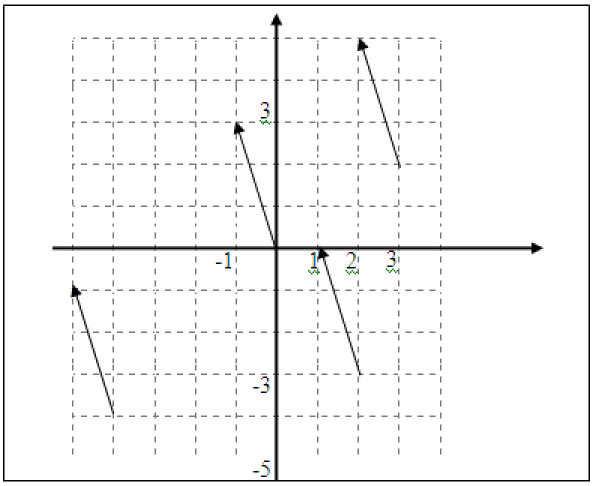


Figura 1: Representantes de um mesmo vetor.

4.2.1.1 Descrição das questões de acordo com a categoria 1

Abaixo, temos o enunciado da segunda questão, em seguida os registros das resoluções das equipes, seguidos da descrição de como os alunos procederam na busca do resultado desta questão, e após isso, as análises das produções feitas por eles de acordo com a categoria na qual se enquadram. Os parâmetros utilizados para analisar os registros serão extraídos dos pressupostos teóricos expostos no capítulo anterior.

Questão 02: Sejam os pontos P(2, 3), Q(4, 2) e R(3 5). a) representar em um mesmo gráfico os vetores posição de $\vec{u}, \vec{v}\ e\ \vec{w}$ de modo que Q = P + $\vec{u}$, R = Q + $\vec{v}$ e P = R + $\vec{w}$. b) determinar $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

Quadro 3: Enunciado da 2ª questão da atividade 02

A seguir, veremos as figuras que trazem algumas das resoluções feitas pelas equipes, após cada figura teremos a descrição dos passos seguidos pelos alunos para encontrar a solução da questão.

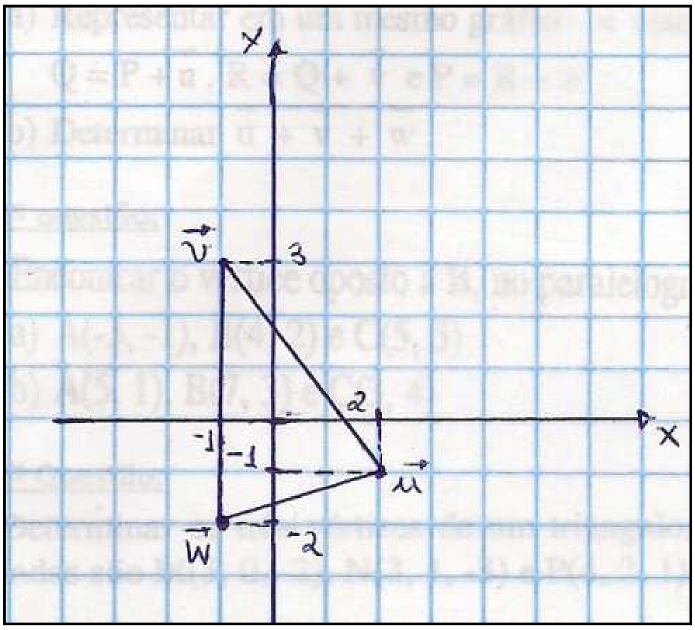


Figura 2: Registro da resolução apresentada pela equipe 01 para a questão 02 da atividade 02.

Observamos na figura 02 acima, que os alunos determinaram os vetores $\vec{u}, \vec{v}\ e\ \vec{w}$ corretamente**,** subtraindo os pontos Q **-** P, R **-** Q e P **-** R, respectivamente. A seguir, a equipe marcou as coordenadas dos vetores $\vec{u}, \vec{v}\ e\ \vec{w}$ como pontos. Outro tipo de erro foi por não terem observado que no enunciado da questão pedia o vetor posição (determinados o ponto de origem e a extremidade) e não o vetor livre (com ponto inicial na origem do sistema). Assim, além de terem confundido a representação de vetores com a representação de pontos, confundiram vetor posição com vetor livre. A conversão adequada não foi realizada.

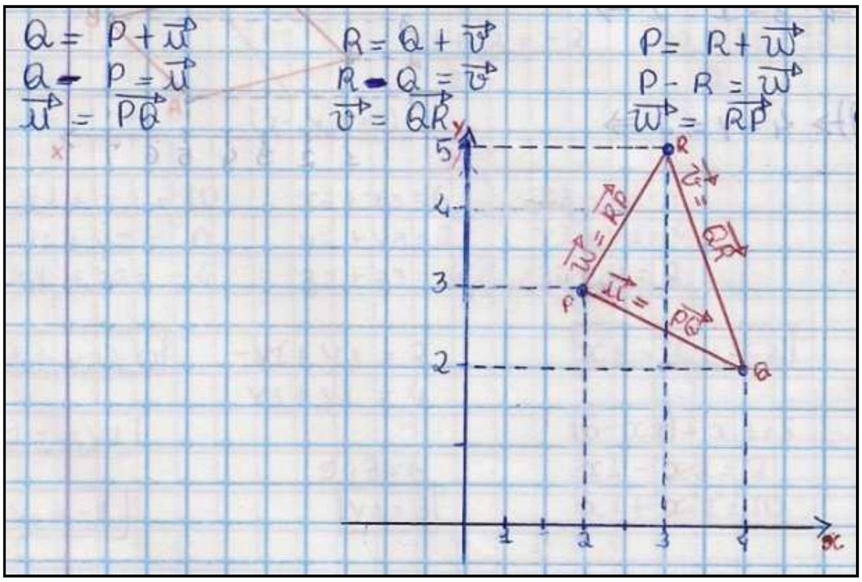


Figura 3: Registro da resolução apresentada pela equipe 06 para a questão 02 da atividade 02.

Na figura 03 acima, mais uma vez temos um gráfico com pontos representado, semelhante ao da equipe anterior, mas com a diferença de que representaram os pontos P, Q e R corretamente. Nesta resolução o erro foi que, ao invés de vetores, há apenas segmentos, embora no registro simbólico, a equipe tenha determinado que os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$, $\vec{v} = \overrightarrow{QR}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{RP}$**,** deixando apenas implícito o sentido dos vetores.

Desta forma, temos outra situação em que a representação dos vetores foi dificultada pela semelhança entre coordenadas de ponto e de vetor, pois a confusão gerada foi bem semelhante no caso das duas equipes (01 e 06), sendo que a primeira tentou representar os vetores livres correspondentes e a segunda, tentou seguir o enunciado que pedia os vetores posição correspondentes.

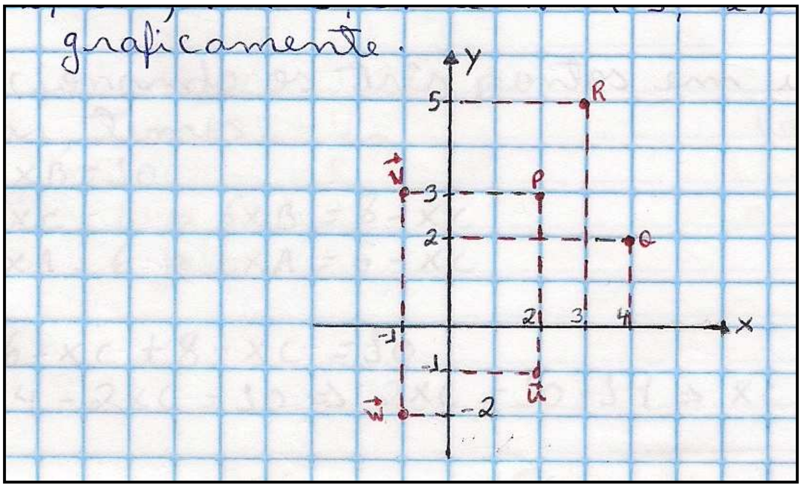


Figura 4: Registro da resolução apresentada pela equipe 09 para a questão 02 da atividade 02.

Na figura 04, a equipe (09) considerou e representou graficamente, as coordenadas dos pontos P, Q e R e as coordenadas dos vetores livres $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}, \vec{v} = \overrightarrow{QR}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{RP}$ representando apenas os pontos extremidade de cada vetor. Diferentemente das equipes anteriores, esta equipe teve mais dificuldades, parece não ter identificado nem mesmo os segmentos que correspondem aos vetores livres e aos vetores posição.

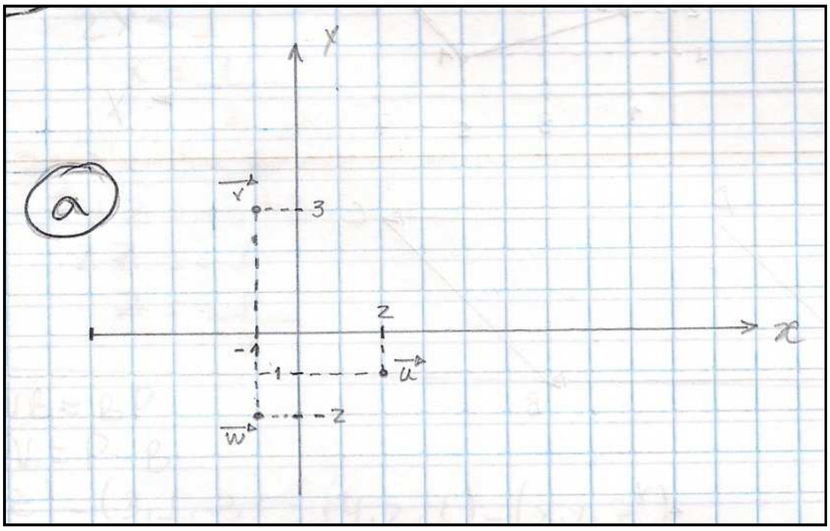


Figura 5: Registro da resolução apresentada pela equipe 10 para a questão 02 da atividade 02.

A equipe (10) tomou as coordenadas do vetor livre representando-as como pontos, no lugar de vetores. A equipe localizou no gráfico os pontos de extremidade dos vetores encontrados. Embora o procedimento seja válido, o objetivo da questão era a busca do vetor posição. A resolução apresentada foi bem semelhante àquela mostrada pela equipe 09.

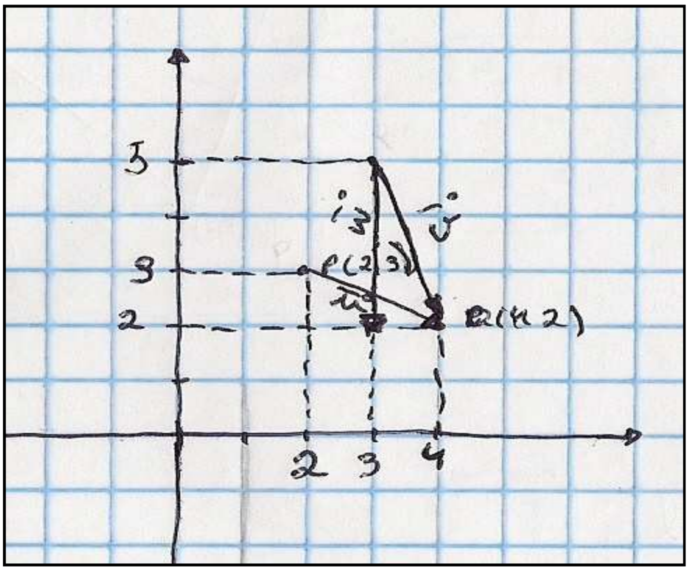


Figura 6: Registro da resolução apresentada pela equipe 11 para a questão 02 da atividade 02.

A equipe (11) quase conseguiu realizar a representação gráfica dos três vetores, porém houve um erro quanto à localização de um dos pontos de extremidade do vetor $\vec{w}$.

Das doze equipes, este foi o mais próximo que os alunos conseguiram chegar do resultado esperado. O que mostra uma enorme dificuldade na representação de vetores quando se utiliza a forma gráfica.

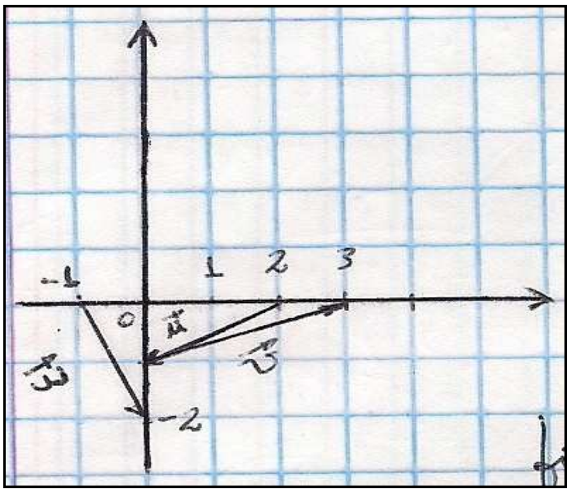


Figura 7: Registro da resolução apresentada pela equipe 12 para a questão 02 da atividade 02.

A maior dificuldade foi encontrada na resolução da equipe 12, pois nesse registro identificamos que nem mesmo os pontos foram localizados corretamente. Mas vê-se que os alunos tentaram encontrar uma forma de representar os vetores utilizando as coordenadas dos vetores livres. No entanto, o vetor $\vec{u} = (2, -1)$ foi representado com origem no ponto (2, 0) e extremidade em (0, -1), ou seja, a abscissa foi transformada em origem e a ordenada em extremidade. Dessa mesma forma, foram representados os outros dois vetores.

4.2.1.2 Análise dos registros para a categoria 1

Esta categoria surgiu de uma dificuldade percebida na tarefa de representar os vetores graficamente, dadas as suas coordenadas. A dificuldade se deu na maioria dos registros e nenhuma das equipes conseguiu realizar corretamente a representação dos três vetores. Em alguns casos, pudemos perceber que até mesmo a representação dos pontos no sistema cartesiano foi fator de dificuldade. Embora os pontos de origem e extremidade dos vetores tenham sido dados no enunciado e pedido o vetor posição – onde são definidas origem e extremidade –

aconteceu que as representações produzidas pelos alunos nos mostraram que esta tarefa não foi tão simples para eles.

No trabalho de Bittar (1998), a autora também se refere à dificuldade na representação gráfica de vetores, segundo seus estudos, uma das causas está na abordagem predominantemente geométrica dada ao ensino dos vetores. “En effet, la présentation géométrique des vecteurs, très liée à leurs points extrémités, ne favorise pas à ce que l'élève fasse la distinction entre les caractéristiques d'un point et les caractéristiques d'un vecteur” (BITTAR, 1998, p.03).

Os registros dos alunos mostram que eles parecem familiarizados com o cálculo das coordenadas do vetor, mas encontram dificuldades para representar o vetor no sistema cartesiano, fato que corrobora com o pensamento de Bittar.

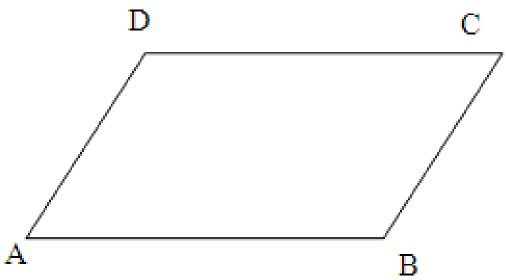
A maioria das equipes mostrou dificuldade em decidir o que fazer com os pontos no gráfico, alguns dos alunos conseguiram representar os segmentos, mas não conseguiram determinar o sentido. Com isso, podemos inferir que os alunos ficaram presos a conceitos geométricos, sem conseguir dominar a representação gráfica.

Segundo Duval, o sucesso de boa parte dos alunos ocorre com os monorregistros, ou seja, no caso de sistemas de escritas e de gráficos cartesianos, por exemplo. Como nesta atividade em que o aluno tem a representação numérica dos pontos e precisa representar esses pontos num gráfico para obter os vetores, mas segundo o autor, pode ocorrer o enclausuramento do registro. Este fenômeno pode estar ligado à predominância de um tipo de registro e ao privilégio de um sentido de conversão no ensino de um objeto. Isto impede que aluno reconheça o mesmo objeto matemático em duas de suas representações diferentes. Neste caso, os alunos não atentaram para a diferença entre a representação do vetor posição e o vetor livre.

A ênfase dada às características geométricas do vetor é um dos fatores que limita consideravelmente a capacidade dos alunos de utilizar os conhecimentos já adquiridos para a plena construção do seu conceito, pois não se discute suas características enquanto elemento de um espaço vetorial, dessa forma, sua possibilidade de ampliar seus conhecimentos nessa área fica bastante reduzida.

4.2.2 Categoria 2: Dificuldade na aplicação da regra do paralelogramo

A dificuldade na aplicação da regra do paralelogramo ocorre quando as propriedades vetoriais do paralelogramo não são exploradas. Pode ser que para o aluno as propriedades geométricas da figura e as propriedades vetoriais presentes não sejam imediatamente percebidas, ou ainda, que eles as desconheçam. Especialmente no paralelogramo é necessário ver todas essas propriedades, as quais são a base para a definição geométrica da soma entre dois vetores. Assim, em um paralelogramo ABCD:



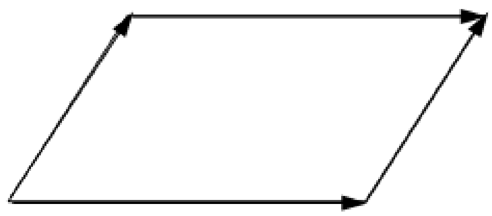
$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

$m(\overline{AB}) = (\overline{DC})$

$m(\overline{AD}) = (\overline{BC})$

Propriedades Geométricas do Paralelogramo



$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ $\quad$ $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$

ou

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\quad$ $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

Propriedades Vetoriais

Quando os vetores são dados no registro geométrico, a regra do paralelogramo é utilizada para efetuar a adição. Outra forma de realizar uma adição entre dois vetores é utilizando a regra de Chasles. Porém, nesta categoria o foco será a utilização da regra do paralelogramo.

4.2.2.1 Descrição das questões de acordo com a categoria 2

No quadro 4, veremos o enunciado da primeira questão da Atividade 01 , que será uma das tarefas analisadas nesta categoria, em seguida as resoluções apresentadas por algumas equipes, seguidos da descrição de como procederam na busca do resultado desta questão. Da mesma maneira, a terceira questão também será analisada dentro desta categoria, e após isso, as análises das produções feitas por eles de acordo com as dificuldades que abrangem a categoria 2 e observando os pontos centrais da teoria em questão.

Questão 01: Prove que o oposto de $\vec{u}+\vec{v}$ é $-\vec{u}-\vec{v}$.

Quadro 4: Enunciado da 1ª questão da Atividade 01

A seguir, veremos as figuras que trazem algumas das resoluções feitas pelas equipes, após cada figura teremos a descrição dos passos seguidos pelos alunos para encontrar a solução da questão.

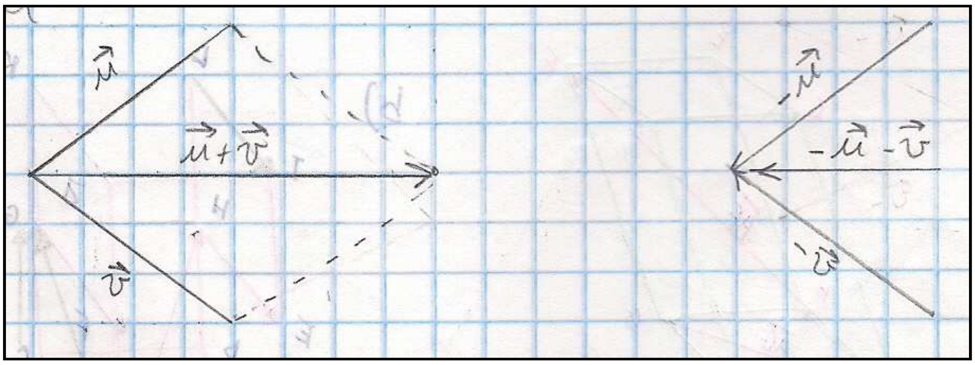


Figura 8: Registro da resolução apresentada pela equipe 06 para a questão 01 da Atividade 01.

A equipe 6 representou em uma figura os dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sem indicar os sentidos das setas – por falta de atenção acreditamos – a serem somados de forma que suas origens estão no mesmo ponto, a partir daí, completaram a figura com os outros dois lados, formando um paralelogramo. Traçando a diagonal da figura, formou-se o vetor $\vec{u}+\vec{v}$, seguindo a regra do paralelogramo, ou seja, a conversão do enunciado em linguagem algébrica para uma representação geométrica foi razoavelmente bem sucedida.

Mas ao partir da soma de $\vec{u}+\vec{v}$ para chegar ao oposto dessa soma por meio da regra do paralelogramo, não conseguiram utilizar a regra para demonstrar o que se pede no enunciado, e adotam apenas uma figura na qual os vetores envolvidos aparecem com os sentidos invertidos, e na qual foi dispensado o desenho do paralelogramo. Assim, está caracterizada a deficiência desta equipe em operar a regra do paralelogramo, na situação em que foi dada e que a compreensão da mesma não se deu de modo completo.

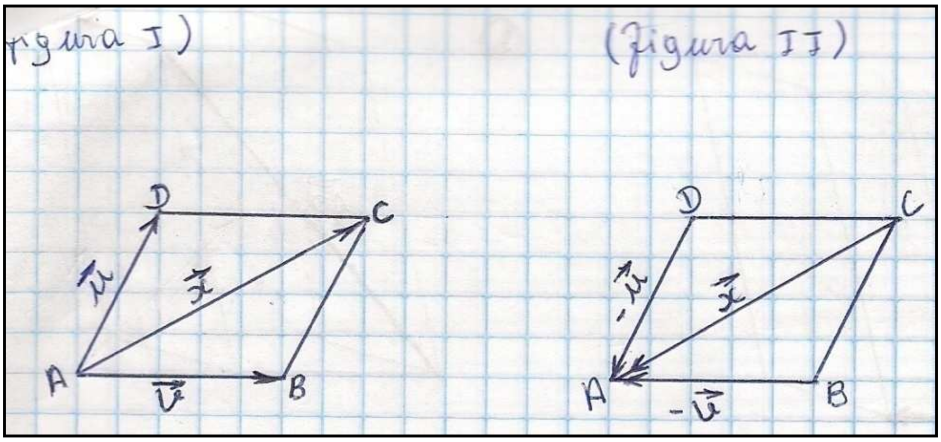


Figura 9: Registro da resolução apresentada pela equipe 12 para a questão 01 da atividade 01.

Na resolução apresentada pela equipe 12 na figura (09) acima, pudemos observar a grande semelhança com a equipe (06) anterior, mas com a diferença de que percebemos o elemento paralelogramo, mas não o uso da regra de adição associada ao desenho geométrico, incorrendo no mesmo equívoco da equipe 06.

Nas duas equipes, chama atenção o fato de que o maior problema na resolução está relacionado ao fato da ausência de compreensão clara da regra de adição pela figura do paralelogramo, e nem tanto, pela conversão do enunciado para a figura geométrica, que seria o registro de chegada para esta tarefa. Tal fato deixa ainda mais claro a dificuldade que a equipe encontrou para chegar ao resultado, utilizando os procedimentos da regra do paralelogramo, de forma semelhante à equipe anterior.

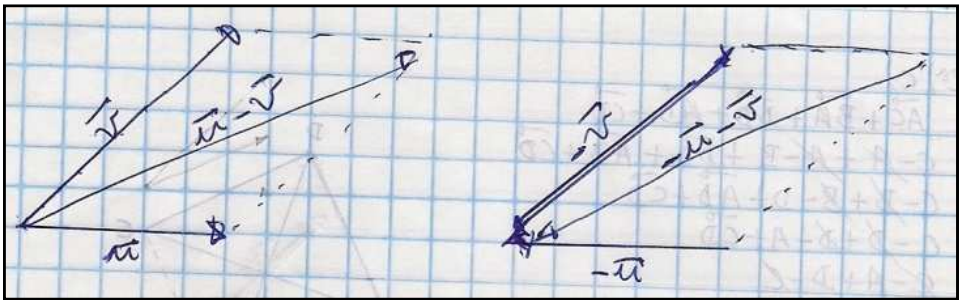


Figura 10: Registro da resolução apresentada pela equipe 08 para a questão 01 da atividade 01.

A resolucão desta equipe (08) reforça ainda mais a nossa visão de que a regra do paralelogramo, embora possa ser percebida e ensinada para facilitar a regra da soma é um fator que pode causar o efeito contrário, pois não basta fazer o desenho dos vetores e do paralelogramo , e sim, levar o aluno a compreender de que forma se opera a relação entre a figura geométrica e a adicão de dois vetores associadas a ela.

Para finalizar a seção de descrição de algumas resoluções sobre a questão 01 da atividade 01, mostraremos abaixo, duas figuras de outra duas equipes que diferem das anteriores, apenas no fato de terem abandonado, completamente, o uso do desenho do paralelogramo. Isso nos leva a conjeturar que as equipes dispensaram a figura geométrica por não a perceberem como parte integrante da resolução e pelo desconhecimento de como funciona a adição de vetores por essa regra.

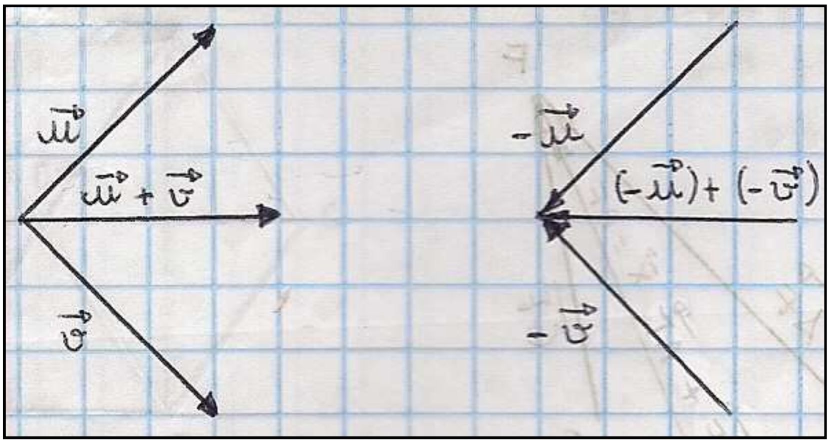


Figura 11: Registro da resolução apresentada pela equipe 07 para a questão 01 da atividade 01.

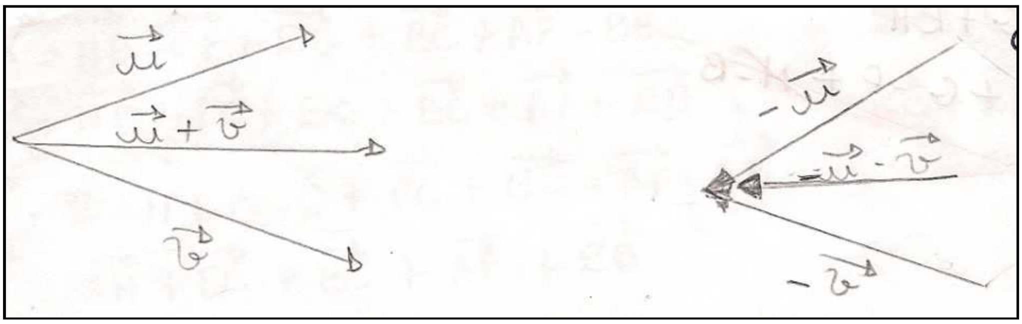
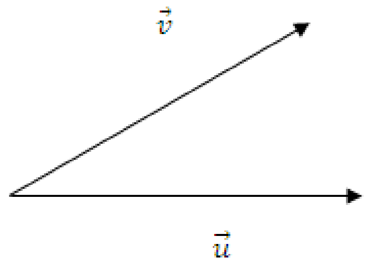


Figura 12: Registro da resolução apresentada pela equipe 01 para a questão 01 da atividade 01.

10) Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ abaixo, mostrar, em um gráfico, um representante do vetor:

a) $\vec{u} - \vec{v}$
b) $\vec{v} - \vec{u}$
c) $-\vec{v} - 2\vec{u}$
d) $2\vec{u} - 3\vec{v}$



Quadro 5: Enunciado da 10ª questão da Atividade 01

A seguir, veremos as figuras de algumas das resoluções feitas pelas equipes, após cada figura teremos a descrição dos procedimentos tomados pelas equipes na busca de encontrar uma solução para a questão 10.

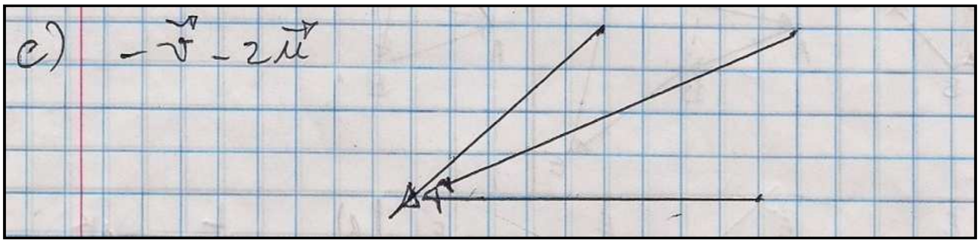


Figura 13: Registro da resolução apresentada pela equipe 01 para a questão 10(c) da Atividade 01.

Encontramos acima (figura 13), a resolução da equipe 01, que utilizou o mesmo procedimento das outras equipes na resolução da questão 01 (citado anteriormente) para adicionar dois vetores, apenas inverteu o sentido dos vetores, sendo que nesse caso, um deles deveria ter seu tamanho em dobro ($2\vec{u}$). Porém, nenhum desses procedimentos foi identificado na resolução da equipe, que se limitou a representar três vetores sem indicar qual deles era o que representava a soma pedida. A conversão não foi realizada a contento, e mais uma vez, um aspecto, o sentido dos vetores, foi priorizado em detrimento da regra matemática envolvida.

Estas equipes, 1, 12, 6, 7 e 8, citadas até aqui – nesta seção - representaram a forma como vêem a regra do paralelogramo, ou seja, à sua maneira, isto mostra a interpretação peculiar que cada equipe dá à regra do paralelogramo e são bem semelhantes.

Com base nos registros escritos dos alunos, pudemos observar que dispensaram a figura do paralelogramo, além disso, que os vetores opostos são representados apenas invertendo os sentidos, e sem recorrer a igualdade de vetores presente no paralelogramo.

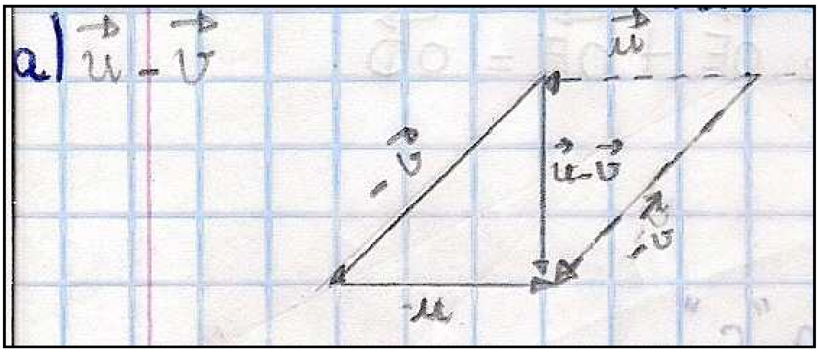


Figura 14: Registro da resolução apresentada pela equipe 02 para a questão 10(a) da Atividade 01.

Na resolução da equipe 2, mostrada na figura(14) acima, os componentes da equipe tentaram proceder pela regra do paralelogramo, mas, no decorrer da resolução, tiveram dificuldade ao escolher os vetores corretamente. Mesmo tendo chegado mais próximo da resposta que se esperava, houve um erro envolvendo o vetor $\vec{u}$, pois o mesmo vetor aparece ora como $\vec{u}$, ora $-\vec{u}$, o que impossibilita identificar qual deles é o correto.

Além disso, pudemos notar que a regra do paralelogramo é utilizada de forma equivocada, semelhantemente às equipes anteriores. A diagonal converge para o mesmo ponto de extremidade dos vetores que estão sendo somados.

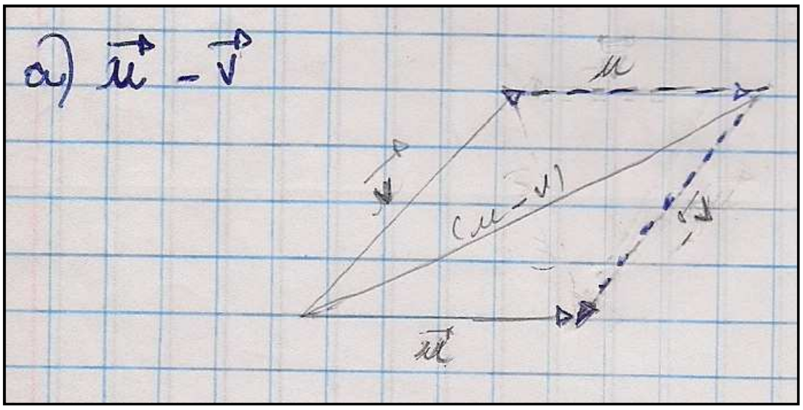


Figura 15: Registro da resolução apresentada pela equipe 03 para a questão 10(a) da Atividade 01.

Esta equipe (03) resolveu de forma semelhante à equipe 2, porém neste caso os alunos não deram sentido à diagonal, ou seja não indicaram o sentido do vetor, outro erro, e o mais grave,foi que o resultado seria o vetor correspondente à outra diagonal do paralelogramo. Esta equipe foi uma das que mais demonstrou dificuldade em operar a regra da soma de dois vetores pelas propriedades de um paralelogramo. Percebemos mesmo, que nesse caso, nem o uso da figura serviu de auxílio, pois não houve compreensão do procedimento com os próprios vetores envolvidos.

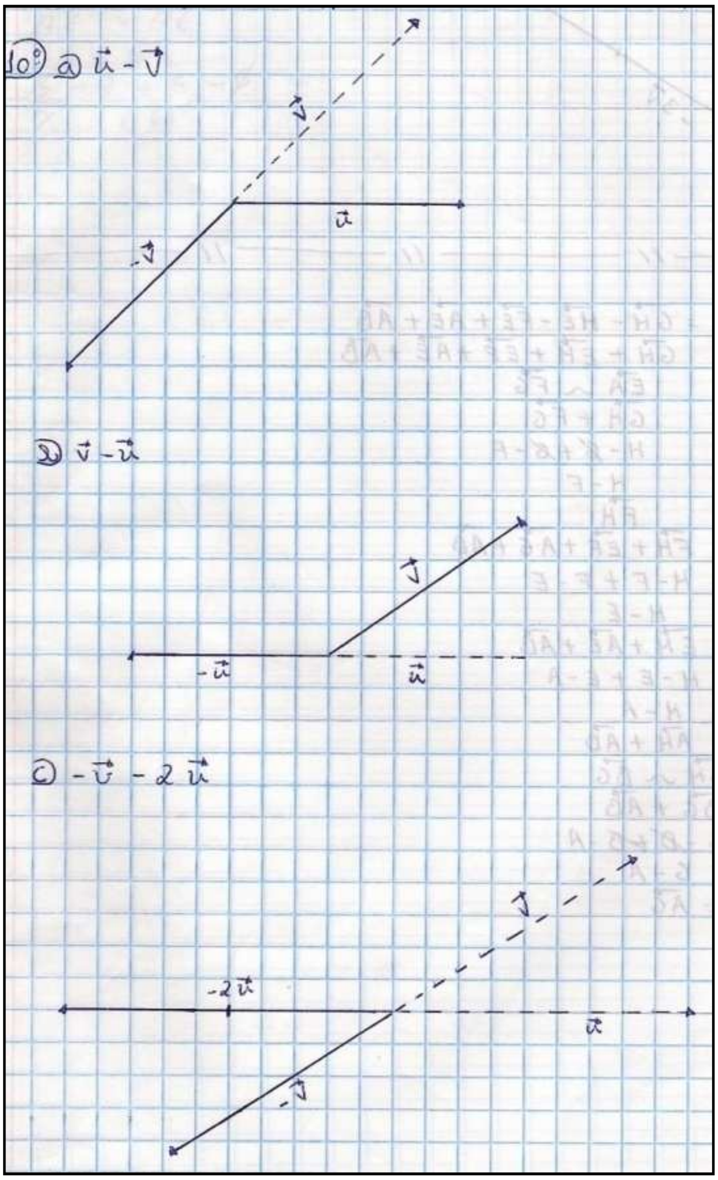


Figura 16:Registro da resolução apresentada pela equipe 09 para a questão 10(a, b, c) da Atividade 01.

Na resolução da equipe 9 para a décima questão, observamos, além da ausência do paralelogramo, que houve uma preocupação excessiva com a representação gráfica dos vetores descritos na representação vetorial, porém, a tarefa era somar os vetores por uma das duas regras de adição. E no entanto, ao invés de representar o vetor $-\vec{v} - 2\vec{u}$, são representados dois vetores, o vetor $-\vec{v}$ e o vetor $-2\vec{u}$, e ao que nos pareceu, esse foi o resultado encontrado pela equipe.

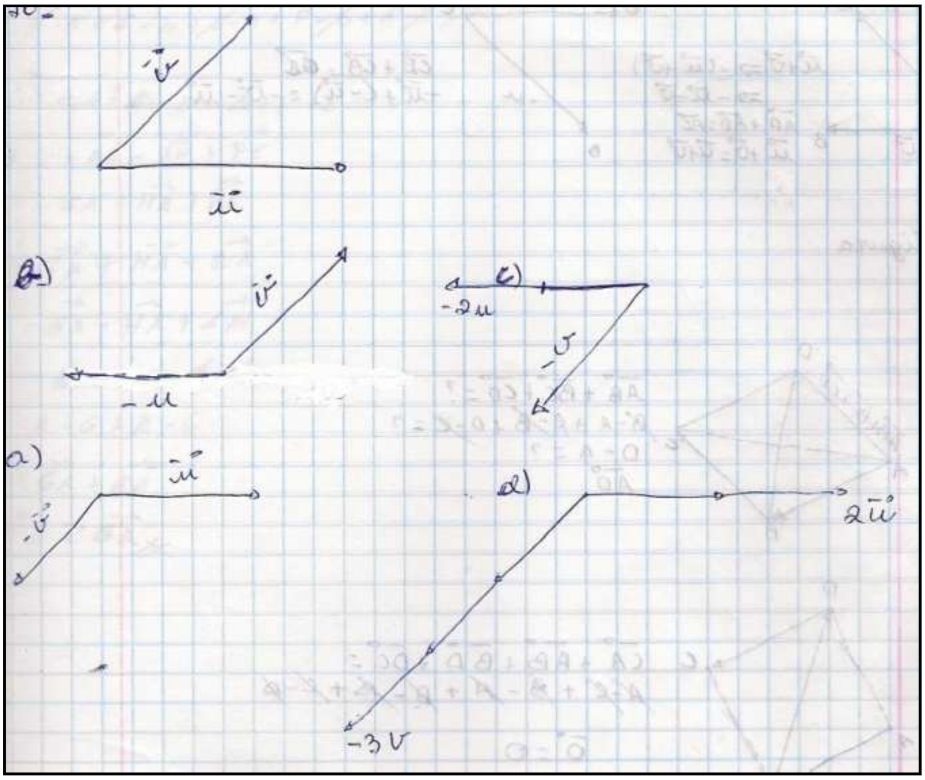


Figura 17: Registro da resolução apresentada pela equipe 11 para a questão 10(a,b,c,d) da Atividade 01.

A exemplo da equipe anterior, esta também desprezou os vetores resultantes, apenas os vetores que deveriam ser adicionados. É possivel que não tenham realizado a adição entre os vetores por não conseguirem aplicar uma das regras de adição, ou porque não acharam necessário recorrer a uma regra. Não há o desenho do paralelogramo na configuração, por outro lado, nos itens a, b e d poderia também ser utilizada a regra de Chasles.

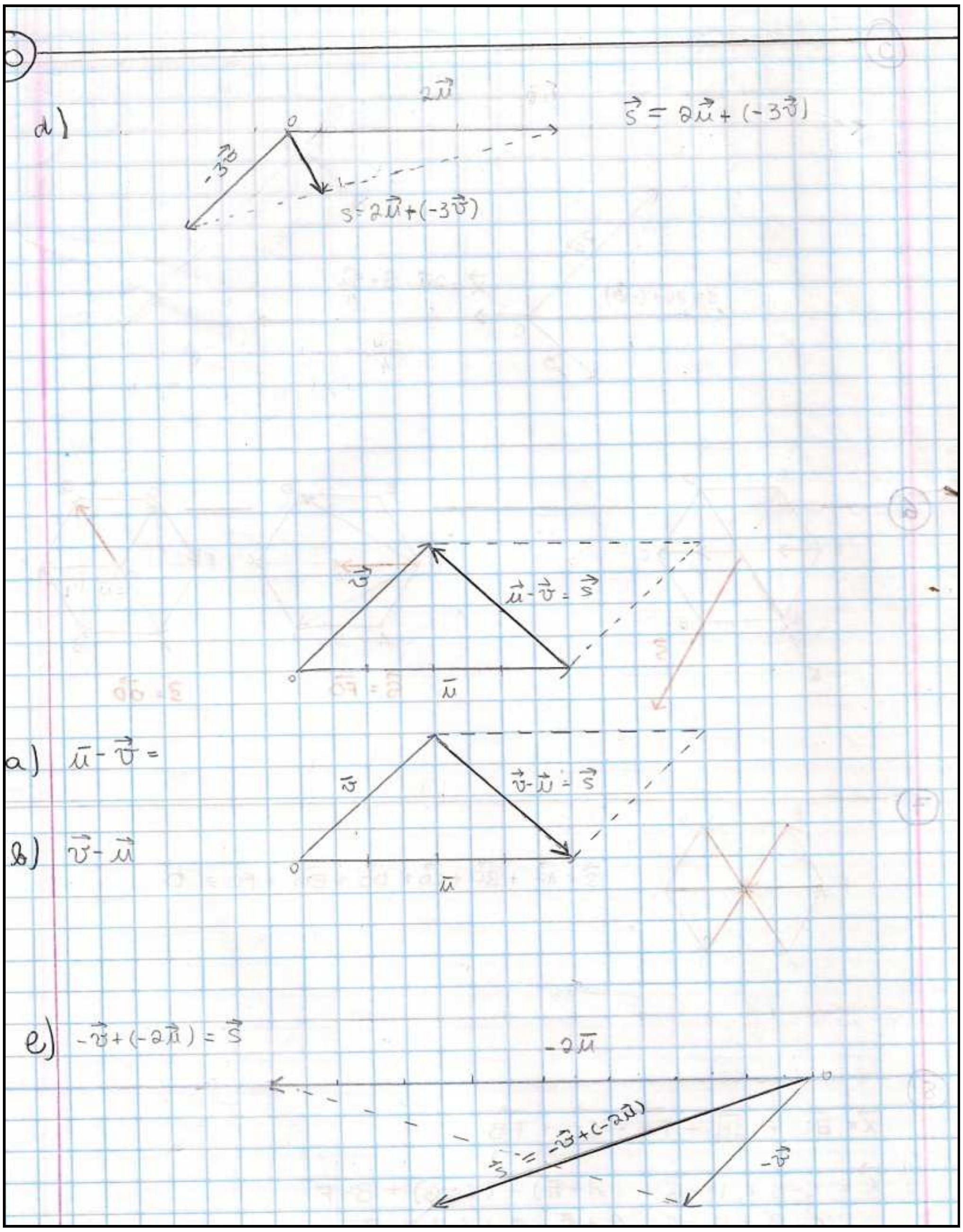


Figura 18: Registro da resolução apresentada pela equipe 06 para a questão 10(a,b,c,d) da Atividade 01.

Uma resolução diferente para a décima questão foi a da equipe 6 (figura 19), em dois dos quatro itens o erro foi claro, a equipe não conseguiu aplicar a regra do paralelogramo, primeiro porque formaram um triângulo ao invés de um paralelogramo, e segundo porque ao tentarem achar o vetor resultante, não conseguiram determinar nem o tamanho nem a direção corretamente.

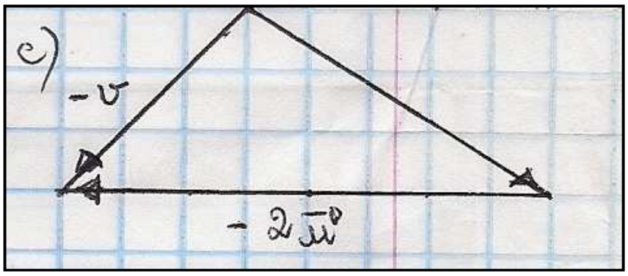
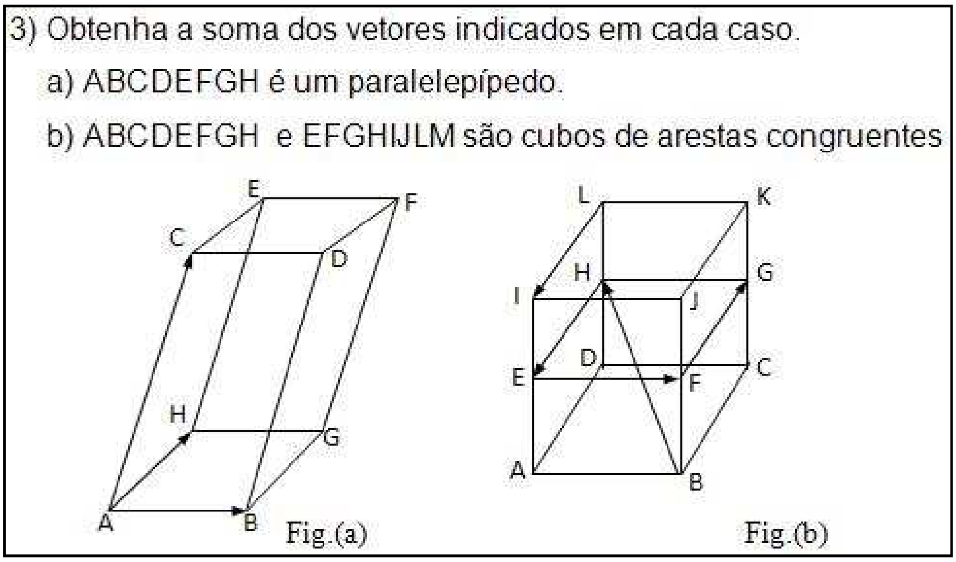


Figura 19: Registro da resolução apresentada pela equipe 07 para a questão 10(c) da Atividade 01.

Neste caso, da equipe 07 (figura 19) aparentemente a regra do paralelogramo foi completamente ignorada, mas o modo como fecharam a figura formando um triângulo nos faz inferir que houve uma “confusão” com a regra de Chasles, na qual a soma de um vetor que se encontra com extremidade na origem do outro, com qual deve ser somado, é dada pelo vetor com origem no primeiro e extremidade no segundo. Porém, analisando a figura19, os vetores a serem somados, $-\vec{v}$ e $-2\vec{u}$, não se encontram em posicão para a aplicação da regra. Fechar o triângulo não basta para realizar esta operação corretamente, pois necessita que os vetores estejam numa dada posição para que o vetor soma tenha a direção e sentidos corretos.

As dificuldades apresentadas nesta categoria também se configuraram na resolução da questão 03.


3) Obtenha a soma dos vetores indicados em cada caso.

a) ABCDEFGH é um paralelepípedo.

b) ABCDEFGH e EFGHIJLM são cubos de arestas congruentes

Quadro 6: Enunciado da 3ª questão da Atividade 01

A seguir, veremos a figura da resolução feita pela equipe 03, após a figura teremos a descrição dos procedimentos tomados pela equipe 03 na busca de encontrar uma solução para a questão 03.

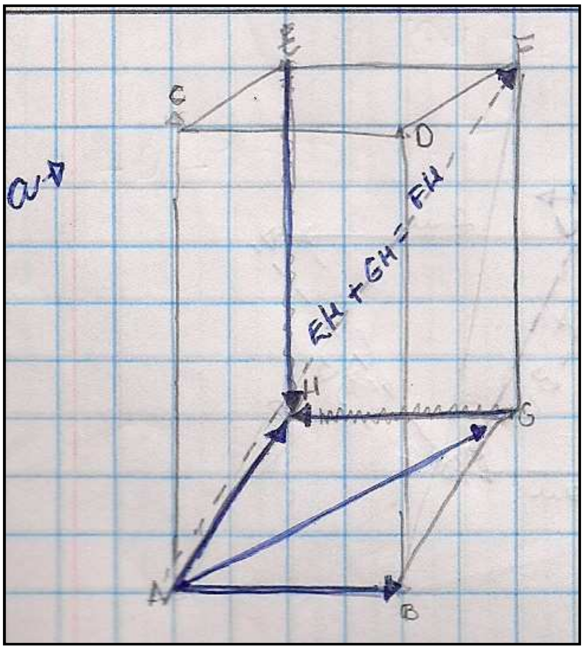


Figura 20: Registro da resolução apresentada pela equipe 03 para a questão 03(a) da Atividade 01.

Nesta questão, trazemos o exemplo de uma equipe diferente, a equipe 3, (figura 20), embora seja uma configuração diferente das anteriormente mostradas, tem-se que os vetores a serem adicionados pertencem a um paralelepípedo, que por sua vez é formado por seis paralelogramos. E de modo análogo ao das demais equipes estudadas, observamos que os alunos não recorrem aos vetores presentes na figura do paralelogramo, mas sim, à *regra* que faz convergir o vetor da diagonal $\overrightarrow{FH}$ como resultado de $\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{GH}$.

4.2.2.2 Análise dos registros para a categoria 2

Nesta categoria entitulada *Dificuldade na aplicação regra do paralelogramo*, pudemos reconhecer tal dificuldade nas questões 01, 10 e 03 da Atividade 01. Na décima questão ficou evidenciado, pelos registros das equipes, que a regra do paraleogramo não é uma ferramenta de simples execução. Por essa regra, dois vetores de mesma origem são adicionados obtendo como soma a diagonal do paralelogramo formado com base nesses dois vetores. Porém, a adição de vetores opostos é um fator que dificulta no momento de efetuar as operações e a sua utilização em situações diferentes das já observadas.

Pelas observações das respostas podemos verificar três tipos de erro. O primeiro consiste em apenas inverter o sentido dos vetores. Em alguns casos, o paralelogramo nem aparece no registro dos alunos. Consideramos aqui, a importância de se compreender como o aluno concebe e aplica uma regra, nesse caso, a regra do paralelogramo para adição de vetores. O paralelogramo é uma figura geométrica dotada de algumas propriedades particulares, assim a compreensão da regra que o envolve depende da compreensão do seu conceito, das suas propriedades geométricas e da sua representação.

Quanto à interpretação dada pelos alunos, entendemos que este é um processo inerente a apreensão de um conceito, uma regra ou uma relação matemática. O olhar do sujeito está ligado ao modo de apresentação, representação, mobilização e visualização (quando possível) do objeto. Associa-se a isso, a situação em torno da representação do objeto e aos conhecimentos anteriores que o sujeito possui. Esse processo é subjetivo e mutável, sofrendo adaptações e modificações a cada nova situação com a qual o sujeito se depara.

De acordo com Silveira (2008a) para o aluno a interpretação da regra depende do contexto, mas do ponto de vista lógico, a regra continua sempre a mesma. Os professores devem perceber neste fato, que a regra que ele ensina pode ter um sentido diferente para o aluno e que a mudança de contexto pode determinar mudança de compreensão de uma regra.

Ainda neste sentido, Silveira (2008b) nos remete a teóricos como Piaget e Granger que concordam que a matemática possui uma estrutura que lhe é própria e autônoma. Assim, é possível por intermédio do automovimento da matemática, prever alguns resultados, ou ainda, sob certo aspectos a matemática é dotada de uma previsibilidade que permite ao aluno experimentar um determinado conceito e reconstruí-lo seguindo uma lógica que o leve ao resultado que está previsto, embora nem sempre essa lógica que o aluno utiliza coincida com a lógica matemática.

A autonomia desenvolvida pelas equipes fica clara quando se percebe que os mesmos criaram o seu próprio caminho para chegar ao resultado esperado. Contudo, nem sempre a lógica adotada era a correta, acarretando certos erros conceituais e operacionais.

Para encontrar o oposto da soma de $\vec{u}$ com $\vec{v}$ algumas equipes utlizaram a regra do paralelogramo posicionando os dois vetores, e, ao prever que o sentido da diagonal ficaria invertido, inverteram também os sentidos dos outros vetores para obter esse resultado. Pequenas diferenças nos registros mostram que a interpretação foi semelhante para estas equipes, mas cada uma ao seu modo, tentando adequar seu procedimento à regra matemática, algumas tentaram desenhar o paralelogramo e outras não, como se procurassem atribuir significado à regra matemática por meio da subjetividade.

Nesse momento, para os alunos, parece importar mais o resultado que o rigor com a representação dos vetores e das figuras. Mas em outras figuras, a regra do paralelogramo simplesmente foi ignorada, e a preocupação foi com o sentido dos vetores, sempre com os opostos sobre a mesma reta, ou seja na mesma direção, como se não pudessem ter a mesma direção e pertencerem a retas diferentes.

Na maioria dos casos os alunos parecem ter conhecimento da adição de vetores pela regra do paralelogramo, mas na situação em que precisaram utilizar, houve falhas seja pela dificuldade no domínio da representação da figura, seja pela interpretação dada à regra da operação.

Em todo caso, os erros encontrados podem estar relacionados à necessidade de encontrarem um “novo sentido” para a regra matemática. As tentativas de chegar num possível do resultado utilizando regras matemáticas mas com uma leitura própria do aluno, apontam para o fato de que o processo de objetivação ainda não ocorreu, satisfatoriamente, do ponto de vista lógico.

4.2.3 Categoria 3: Dificuldade em identificar vetores iguais

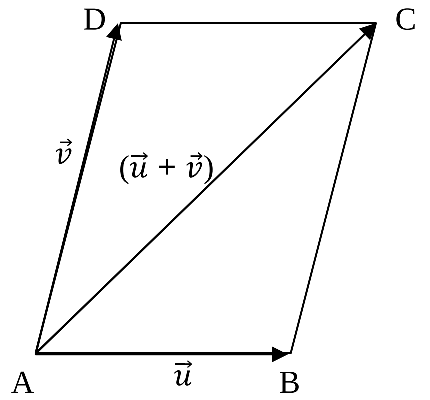
A dificuldade dos alunos em identificar vetores iguais ocorre quando não se consegue escolher, dentro de uma configuração, representantes de vetores que sejam convenientes para a realização das operações indicadas. De modo que se possam adicionar os vetores em questão, seja pela regra de Chasles ou pela regra do paralelogramo.

Os problemas que envolvem a adição entre vetores em uma configuração, caracterizam-se pela presença de figuras ou poliedros regulares possibilitando serem decompostos em figuras mais simples, onde seja possível identificar vetores iguais e aplicar a regra do paralelogramo por meio do conhecimento de propriedades geométricas e vetoriais, ou ainda a regra de Chasles.

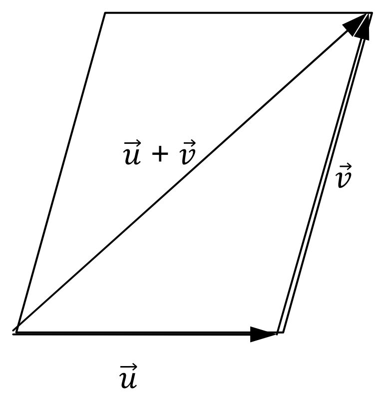
Dado que já discutimos em seção anterior o funcionamento da regra do paralelogramo, passaremos agora, a uma descrição da segunda regra para a adição de vetores, a regra de Chasles.

A regra de Chasles é muito conhecida e pode ser enunciada da seguinte maneira: Dados três pontos quaisquer A, B e C é verdadeira a relação: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Assim, a regra de Chasles pode ser utilizada, na adição de dois vetores, sempre que o ponto de extremidade de um vetor coincidir com o ponto de origem do outro, no qual a soma será o vetor que terá a origem no primeiro vetor e extremidade do segundo, formando uma figura triangular, na ilustração a seguir, colocamos dois exemplos de como dois vetores podem ser somados, primeiro, mostraremos o procedimento pela regra do paralelogramo, segundo conforme a Regra de Chasles, para que se observem como cada uma possui um funcionamento diferente.

1. Adição de $\vec{u}$ + $\vec{v}$: (regra do paralelogramo)



2. Adição de $\vec{u}$ + $\vec{v}$: (regra de Chasles)



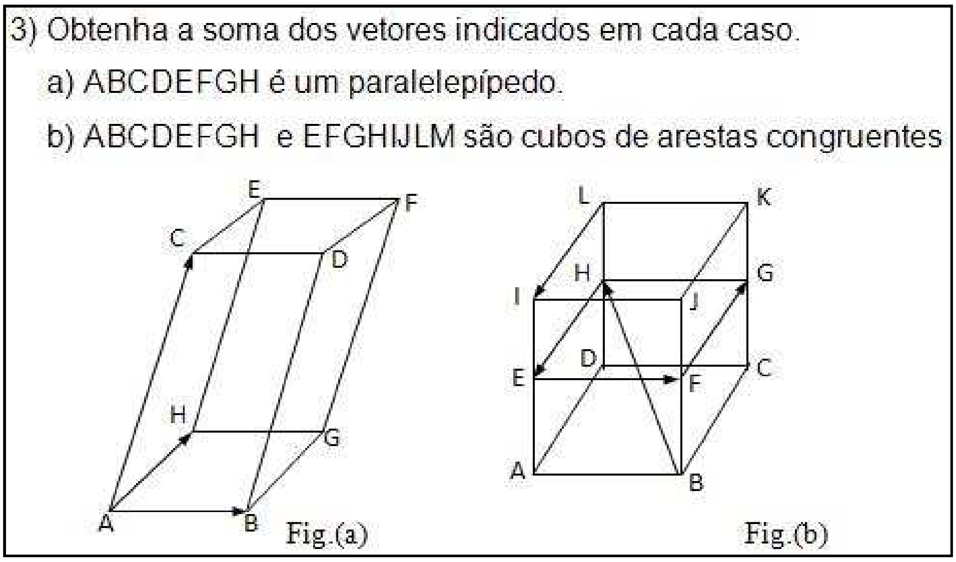
Na relação anterior, os dois vetores têm a mesma origem, em seguida, toma-se um representante de $\vec{v}$ ($\overline{BC}$ no lugar de $\overline{AD}$) com origem em B, assim, pode-se, pela regra de Chasles encontrar a soma $\overline{AC}$ (Triângulo inferior). Observemos que, tomando-se o mesmo vetor $\vec{v}$, e um representante de $\vec{u}$ ($\overrightarrow{DC}$), também encontra-se o resultado. Isto é possível devido às propriedades geométricas e vetoriais do paralelogramo.

A não identificação correta dos vetores em uma dada configuração, a interpretação errônea das propriedades geométricas e/ou vetoriais contribuem para muitos equívocos, pois nos casos em que a regra parece bem compreendida, é a escolha errada dos vetores que impossibilita os alunos de resolverem corretamente a tarefa.

A seguir, apresentamos alguns registros em que a dificuldade com a igualdade entre vetores, dados em uma configuração foi decisiva no insucesso do resultado dos alunos.

4.2.3.1 Descrição das questões de acordo com a categoria 3

Abaixo, veremos o enunciado da terceira questão da Atividade 01 , que será uma das tarefas analisadas nesta categoria, em seguida algumas resoluções apresentadas pelas equipes envolvidas na pesquisa, seguidas da descrição de como procederam na busca do resultado desta questão. Da mesma maneira, a sexta, sétima e nona questão também serão analisadas dentro desta categoria, e após isso, as análises das produções feitas pelos alunos de acordo com as dificuldades que abrangem esta categoria e observando os pontos centrais da teoria em questão.



Quadro 7: Enunciado da 3ª questão da Atividade 01

Veremos agora a figura da equipe 01 que mostra a resolução da questão 03 da Atividade 01 .

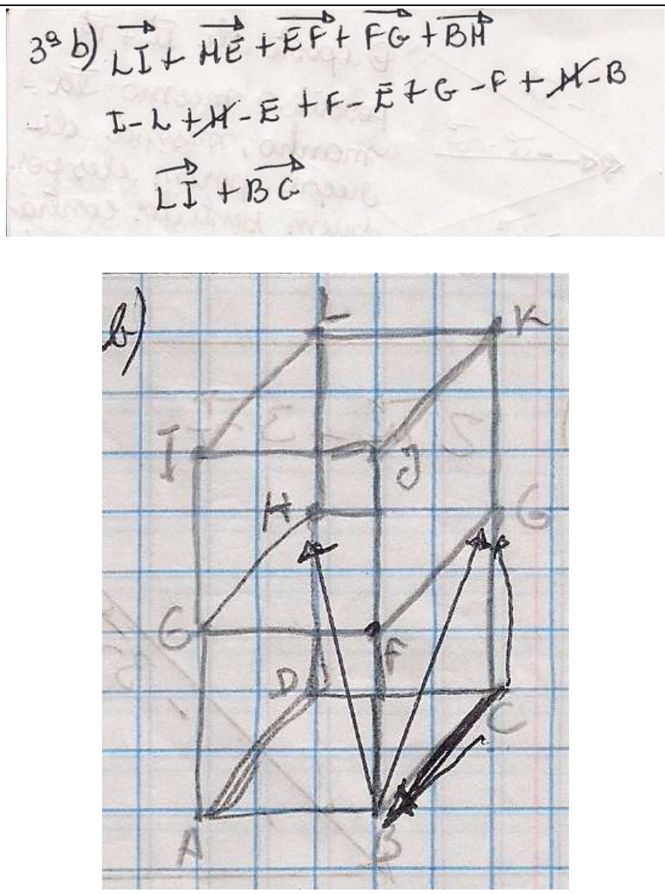


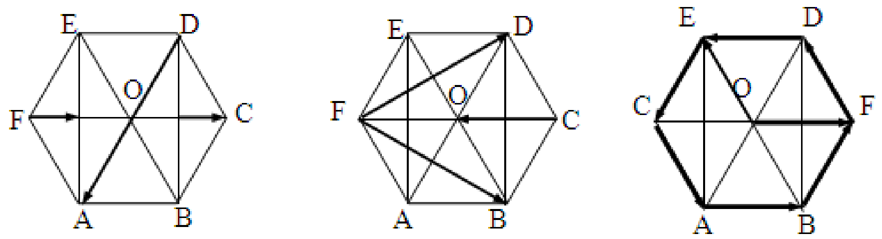
Figura 21: Registro da resolução apresentada pela equipe 01 para a questão 03(b) da Atividade 01.

Esta equipe teve dificuldade inicialmente no registro algébrico, e essa dificuldade refletiu-se no registro figural. Ao fazer a conversão para a representação vetorial, a equipe utilizou a regra de Chasles e realizando tratamentos chegou à soma entre dois vetores de forma que a regra de Chasles não poderia mais ser aplicada. Então, ao observarmos mais detalhadamente a representação geométrica feita pelos alunos, percebemos que os vetores presentes são os da última linha que foi representada algebricamente, sendo que no lugar do vetor $\overrightarrow{LI}$ foi tomado o vetor $\overrightarrow{CB}$ e este foi adicionado a $\overrightarrow{BG}$, dando como resultado o vetor $\overrightarrow{CG}$. Porém, os alunos erraram ao incluir na figura outro vetor, o vetor $\overrightarrow{BH}$ que já havia sido adicionado, anteriormente no registro algébrico.

A representação geométrica envolve operações que são peculiares a esse registro e, segundo Duval (2004), realizar essas operações depende da produção de interpretações da figura e se dão em termos de apreensões. A apreensão operatória é a que ocorre sobre uma figura dada, pelas modificações possíveis nessa figura e na reorganização das suas partes. Essas modificações podem se dar, graficamente, mentalmente ou psiquicamente. A operação de organização ou análise de figuras ou subfiguras de uma dada figura está ligada a reconfiguração e permite os tratamentos necessários, e a identificação de propriedades.

Além da operatória, há ainda, a apreensão discursiva. A apreensão discursiva tem relação com a interpretação dos elementos da figura a partir da articulação dos enunciados (dados, medidas, por exemplo) criando uma rede semântica de propriedades do objeto. A apreensão operatória é a que permite fazer as mudanças na figura e a discursiva permite, a partir do enunciado do problema, produzir interpretações que proporcionam a apreensão da própria figura no contexto do enunciado.

QUESTÃO 06: Abaixo, os hexágonos são regulares. Em cada caso, determine a soma dos vetores indicados.



Quadro 8: Enunciado da 6ª questão da Atividade 01

A seguir, veremos as figuras da resolução feitas pelas equipes 06 e 08, para a questão 06, após a figura teremos a descrição dos procedimentos tomados na busca de encontrar uma solução.

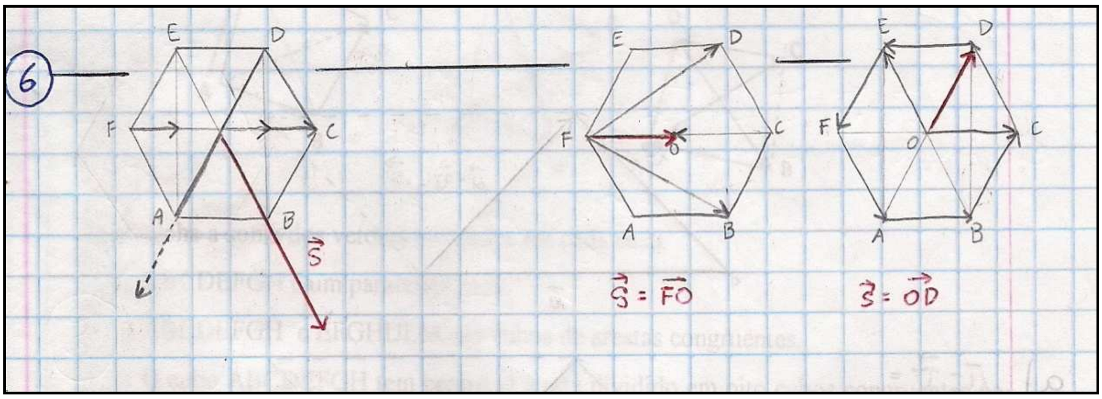


Figura 22: Registro da resolução apresentada pela equipe 06 para a questão 06 da Atividade 01.

Na resolução da equipe (06), é evidente a tentativa do uso da regra do paralelogramo, porém, pela configuração, essa escolha não proporcionou nenhum avanço na busca do resultado e os alunos parecem não ter cogitado uma outra forma de resolução, ou seja, substituir os vetores por outros que pudessem ser adicionados ou vetores opostos.

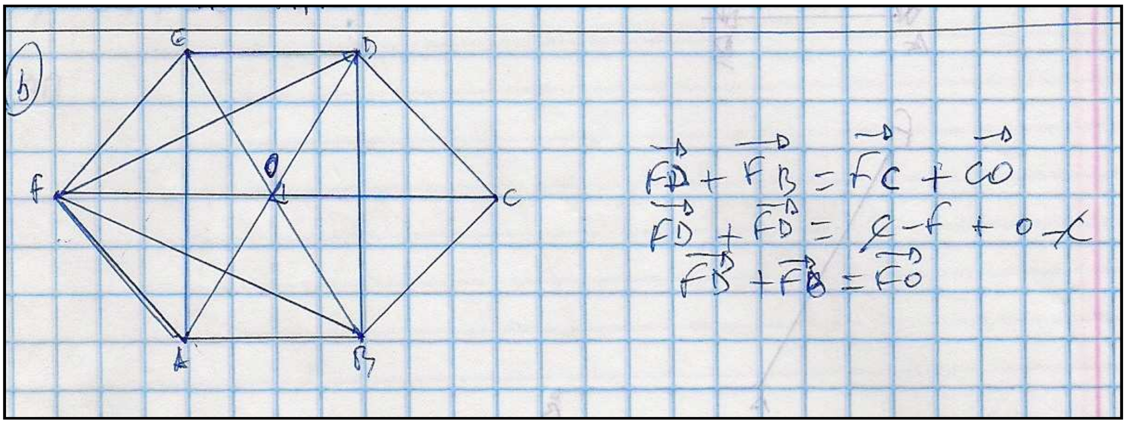


Figura 23: Registro da resolução apresentada pela equipe 08 para a questão 06 da Atividade 01.

Mais uma vez, a regra do paralelogramo foi a opção para resolver a soma dos vetores, porém os alunos da equipe 08 não observaram que BCDF não é um paralelogramo e portanto, não cabe o uso dessa regra nesta situação, ou seja, os alunos aplicaram uma regra em contexto em que não poderia ser aplicada.

7) Calcule a soma dos seis vetores que têm por representantes segmentos orientados com origem em cada um dos vetores, e extremidade no centro de um mesmo hexágono regular.

Quadro 9: Enunciado da 7ª questão da Atividade 01

A seguir, veremos a figura da resolução feita pela equipe 05, para a questão 07, após a figura teremos a descrição dos procedimentos tomados na busca de encontrar uma solução.

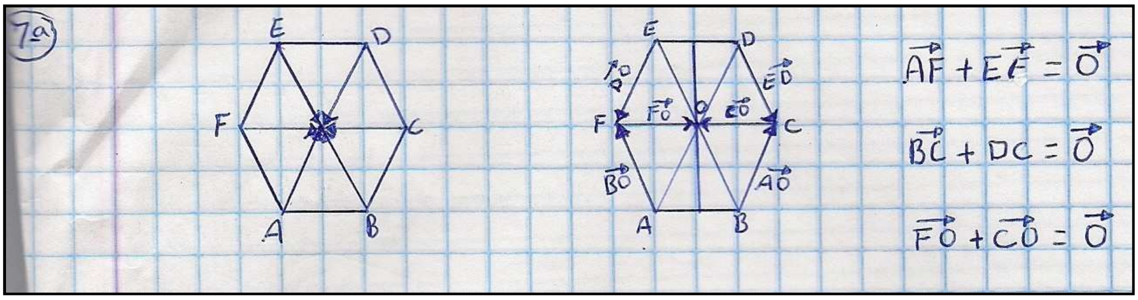


Figura 24: Registro da resolução apresentada pela equipe 05 para a questão 07 da Atividade 01.

A equipe (05) teve um raciocínio interessante, não fosse pela escolha equivocada dos vetores. Isto porque os pares identificados como sendo opostos, na realidade, não possuem sequer a mesma direção. Ainda assim, esta equipe foi a que mais se aproximou da resposta certa. Erraram justamente, por não conseguirem identificar os pares de vetores opostos, por meio das propriedades seja da primeira figura ou da segunda figura construída. Ou seja, não foi possível, por meio da configuração, identificar os vetores com mesma direção, sentido e tamanho. Apenas conseguiram isso, no terceiro par de vetores ($\overrightarrow{FO} + \overrightarrow{CO} = 0$).

9) O hexágono ABCDEF é regular, de centro O. Prove que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AO}$.

Quadro 10: Enunciado da 9ª questão da Atividade 01

A seguir, veremos a figura da resolução feita pela equipe 01, para a questão 09, após a figura teremos a descrição dos procedimentos tomados.

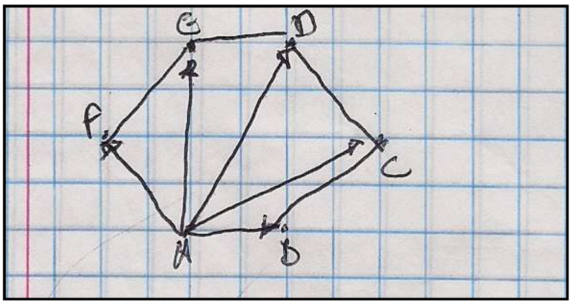


Figura 25: Registro da resolução apresentada pela equipe 01 para a questão 09 da atividade 01.

Nesta questão, nenhuma equipe que participou da pesquisa avançou muito na resolução, nem chegou ao resultado correto. As equipes que representaram graficamente os vetores não efetuaram a soma que poderia ser obtida escolhendo-se e substituindo-se os vetores adequados, ou seja, dificuldades na obtenção e identificação de vetores iguais.

4.2.3.2 Análise dos registros para a categoria 3

Nesta categoria foram agrupados os erros ou dificuldades relativas à identificação, obtenção e substituição de vetores iguais para resolver adições entre vetores.

As questões analisadas não permitiam a utilização de uma regra de adição de forma direta. Por isso, antes de tudo, existe a necessidade de encontrar os pares de vetores os quais se possam adicionar via uma das regras conhecidas. As equipes parecem ter uma visão estática do objeto vetor e dos procedimentos que envolvem nas operações de soma e/ou subtração de vetores, e mostram muita dificuldade em utilizar vetores iguais, para tanto seria necessário os alunos terem claras as características que formam um vetor: módulo (norma ou tamanho), direção (relativo a ângulo ou inclinação) e sentido (de cima para baixo, da esquerda para direita ou outros). Quando esta fundamentação não está clara ou solidificada, fica difícil para o aluno relacionar parâmetros de igualdade e/ou proporcionalidade; as propriedades vetoriais e geométricas quando a figura não é o paralelogramo, como aqui no caso do hexágono.

A apresentação essencialmente geométrica dos vetores também contribui para que o aluno tome a representação do vetor em lugar do próprio objeto, que é confundido com um segmento determinado por dois pontos. Dessa forma, ao se deparar com dois vetores dados por outros pontos, acredita-se estar diante de outro vetor. De acordo com Duval (2003), essa é uma condição que deve ser evitada para que não se inviabilize o processo de compreensão em matemática, segundo o autor a dificuldade encontra-se no fato de que o objeto representado não pode ser identificado com o conteúdo da representação que o torna acessível.

Tal é a dificuldade de se obter os vetores pela igualdade, que em certos momentos (figura 22) os representantes dos vetores extrapolam a configuração e impede que os alunos prossigam em sua resolução, pois sem a figura não podem avaliar as propriedades geométricas que permitem decidir em que situação existe a igualdade entre os vetores e quais são os vetores iguais.

Essas dificuldades podem ser inerentes aos diferentes tipos de registros de uma figura. Especificamente no que diz respeito à articulação entre os dois tipos de apreensões, a operatória e a discursiva. Sem a qual não é possível realizar os tratamentos, pois sem a interpretação correta as transformações realizadas na figura não fazem sentido, ou ainda, não respondem ao problema em questão

4.2.4 Categoria 4: Conversão entre registros envolvendo o registro geométrico

Nesta categoria incluiremos as produções dos alunos que contenham erros relativos aos problemas de conversão entre registros, onde um dos registros é o figural, seja na sua representação geométrica ou na representação gráfica.

A conversão para Duval (2003) é essencial para a atividade matemática, pois para ele, a compreensão se dá com a aquisição da capacidade de mudar de registro, mas, no entanto, é preciso entender que passar de um registro a outro não é simplesmente mudar o modo de tratamento, é preciso também, explicar as propriedades ou aspectos diferentes de um mesmo objeto, observando que o conteúdo das representações depende muito mais do registro no qual é produzida do que do objeto que se deseja representar.

Segundo Dorier (1998), Pavlopoulou (1993) estudou a conversão de registros envolvendo vetores, tendo identificado entre os alunos franceses, a dificuldade na realização das conversões entre registros onde o registro gráfico estava presente – a autora classifica as representações que envolvem figuras sem discriminar a presença ou não do sistema cartesiano – seja no registro de partida ou no registro de chegada. Dorier mostra que a autora ainda obteve como resultado, ainda, que a dificuldade possui graus diferentes quando se analisa o sentido de realização da conversão.

Além disso, segundo Dorier, Pavlopolou constatou a existência de uma dificuldade implícita entre o objeto e sua representação e apontou a identificação de um vetor com sua representação gráfica (figura da seta) como principal fonte de problemas ao aprendizado dos alunos.

4.2.4.1 Descrição das questões de acordo com a categoria 4

Nesta categoria elegemos algumas resoluções da sétima e nona questões para mostrar aqui, por terem apresentado dificuldades significativas do ponto de vista da teoria usada em nossa análise, mas ressaltamos que diversas dificuldades na atividade de conversão foram observadas em todos os registros analisados.

7) Calcule a soma dos seis vetores que têm por representantes segmentos orientados com origem em cada um dos vetores, e extremidade no centro de um mesmo hexágono regular.

Quadro 11: Enunciado da 7ª questão da Atividade 01 .

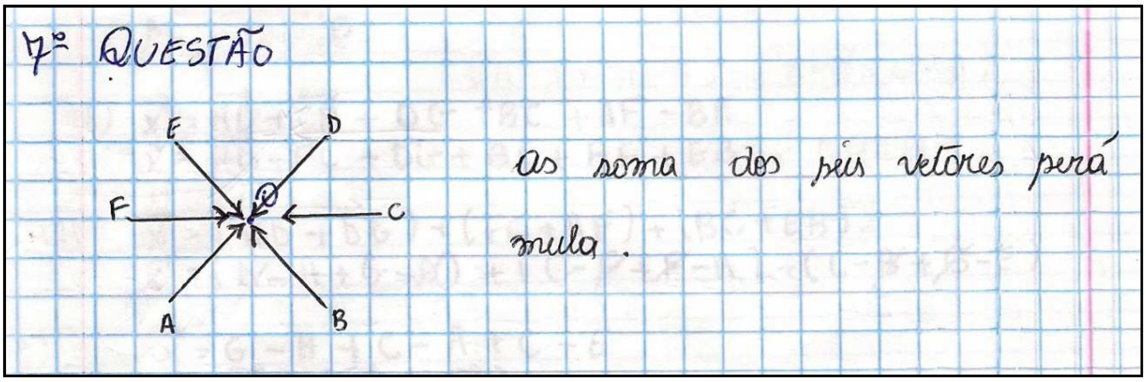


Figura 26: Registro da resolução apresentada pela equipe 04 para a questão 07 da atividade 01.

A conversão do registro da língua natural para o registro geométrico foi realizada parcialmente, pois apenas os vetores foram representados, o hexágono que é a base da figura, o que poderia ter facilitado proporcionando a visualização mais clara de suas propriedades geométricas. Nota-se também, que não foi realizada a conversão do registro geométrico para o registro algébrico, no qual se esperava que fossem feitas as somas dos vetores opostos e com isso chegaria ao resultado nulo.

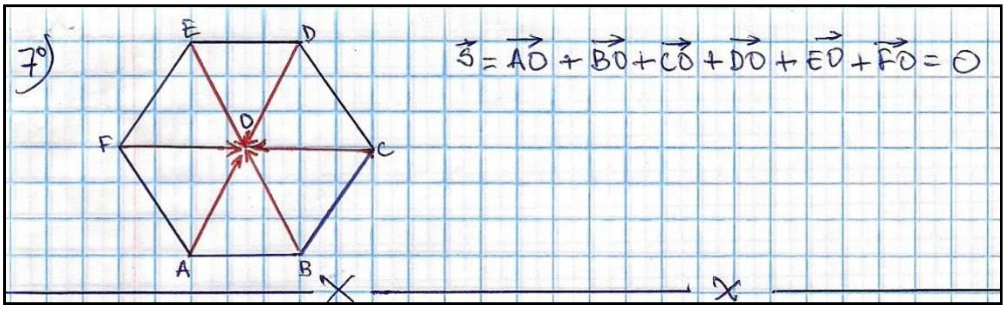


Figura 27: Registro da resolução apresentada pela equipe 09 para a questão 07 da atividade 01.

Em mais um registro percebemos que os alunos realizam a conversão para o registro figural tranquilamente, mas ao converter para o registro algébrico, não é realizado nenhum tratamento. Não justificam sua resposta, seja por meio das propriedades geométricas e vetoriais da figura, seja via utilização de regras de adição. A relação necessária entre as propriedades vetoriais e geométricas parece ser um grande entrave para os alunos desta equipe.

9) O hexágono ABCDEF é regular, de centro O. Prove que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AO}$.

Quadro 12: Enunciado da 9ª questão da Atividade 01 .

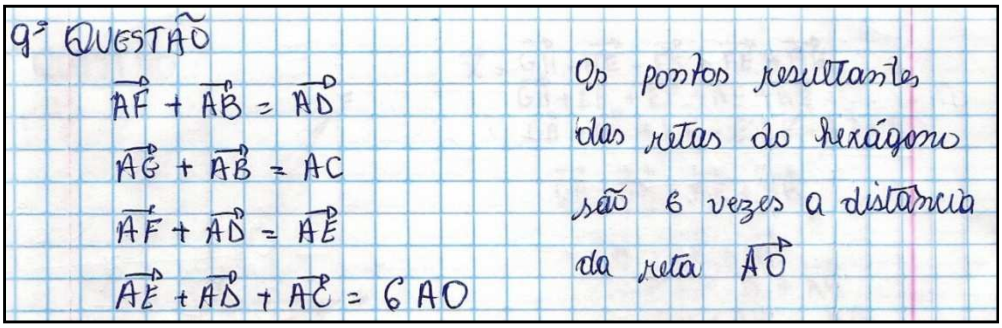


Figura 28: Registro da resolução apresentada pela equipe 04 para a questão 09 da atividade 01.

Não observamos a conversão para o registro geométrico nesta questão. Os alunos foram direto ao registro algébrico e na soma dos vetores associaram pares que não há como analisar sem a figura, pode ser que tenham se baseado em alguma, mas não a registraram.

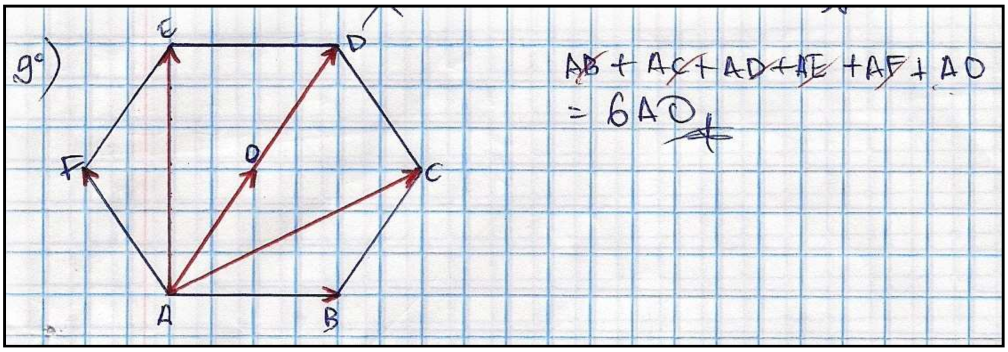


Figura 29: Registro da resolução apresentada pela equipe 09 para a questão 09 da atividade 01.

A atividade de conversão pressupõe a capacidade de troca de registro, nas questões 7 e 9, temos exemplos da dificuldade dos alunos com este tipo de operação entre representações. Notamos que os alunos conhecem a figura hexágono, no entanto, na busca para chegar ao resultado correto, não conseguem fazer a necessária relação entre as propriedades vetoriais e geométricas, na configuração enunciada na questão, para realizar a soma dos vetores.

4.2.4.2 Análise dos registros para a categoria 4

As duas questões analisadas têm em comum o fato de que foram enunciadas na língua natural e tem como registro de chegada o registro algébrico. Porém, a conversão imediata entre os registros não é possível, é preciso ir além do que a figura oferece.

A visualização da figura adquire um papel imprescindível para a utilização e percepção de propriedades que permitem o tratamento algébrico, infere-se que pela falta dessa possibilidade, muitas equipes tenham cometido erro na conversão de registros.

As dificuldades encontradas neste tipo de conversão foram tão grandes que nenhuma equipe conseguiu realizar a conversão do figural para o algébrico, e muitas nem chegaram a desenhar a figura. Assim, podemos perceber que a presença do registro figural em uma atividade de conversão é um fator que causa enorme dificuldade para o aluno e exige mais do que uma simples visualização dos vetores. É necessário que o aluno compreenda que em cada representação o conteúdo não é mesmo e que não há uma correspondência direta entre os elementos contidos em cada tipo de representação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Estudos anteriores realizados principalmente na França (DORIER, 1998; BITTAR, 1998; BA, 2007) e alguns no Brasil (CASTRO, 2001; KARRER, 2006; SICA, 2007) mostraram resultados que convergem no que diz respeito a dificuldades relacionadas aos tipos de registros presentes no ensino de vetores. Com a presente pesquisa pudemos confirmar algumas dessas dificuldades e também observar algumas particularidades. Entre as dificuldades em comum, a conversão envolvendo os registros figurais, tanto na representação geométrica como na representação gráfica.

No trabalho de Bittar (1998), a análise feita dos livros didáticos franceses indicou uma forte concepção do vetor definido por dois pontos contribuindo para que os alunos construam a ideia de que ao mudar os pontos, muda-se o vetor. Outra característica forte no ensino francês é a de vetor como ferramenta essencial na resolução de problemas de geometria.

Nesta pesquisa, observamos de um modo geral que a abordagem feita sobre vetor é pequena e limita-se à definição a algumas propriedades. Os exercícios nos livros didáticos de Geometria Analítica ora privilegiam um tipo de registro, ora privilegiam um registro diferente, ou seja, não se trabalha a articulação entre os vários registros envolvidos. Assim como os livros didáticos franceses, os livros didáticos adotados no Brasil também dão bastante ênfase à obtenção de vetores a partir de pontos. Os exercícios que envolvem a conversão entre registros ocorrem isolados, ou de forma aleatória entre os demais exercícios, e não recebem nenhuma atenção especial.

Em comum, além da forte abordagem geométrica dos livros-didáticos franceses e brasileiros, a limitação no que diz respeito igualdade de vetores, que é baseada nos pontos de extremidade do vetor, o que traz dificuldades em representar vetores no gráfico. Em alguns casos, o vetor é representado como ponto.

As questões históricas e epistemológicas também são fatores a se considerar na abordagem do vetor, pois, influenciam no processo de aprendizagem à medida que trazem à tona problemas na apresentação inicial que é feita aos alunos, e, na definição matemática atribuída ao vetor construída de forma maciça sobre atributos geométricos – ênfase na representação do vetor como segmento dotado de direção, sentido e comprimento.

O fato de o vetor ter sido descoberto quase que acidentalmente, tendo a contribuição de vários cientistas e estudiosos, com a tentativa de se representar os números complexos, com a geometria de posição idealizada por Leibniz e somando-se a teoria dos *quaternions* e dos espaços vetoriais e aos estudos desenvolvidos em diferentes áreas da Física, nos faz ver que esse objeto híbrido carrega consigo uma enorme possibilidade de aplicações, mas também a dificuldade de se delimitar como objeto de estudo, porque em cada área o vetor é um objeto diferente, exigindo uma didática adequada. O vetor da Física não é o mesmo que se tem na Geometria Analítica, e nem na Álgebra Linear. E, ainda assim, possuem aproximações que precisam ser esclarecidas e levadas em conta para seu ensino.

As contradições e conflitos, que permearam a história do surgimento do vetor na matemática, parecem emergir em sala de aula, porém, ignorados e suprimidos em meio a uma didática consolidada do assunto. O professor, embora perceba problemas advindos dessa didática, precisa atender às exigências conservadoras das instituições de ensino superior que se estendem aos livros didáticos.

Procuramos com esta pesquisa constatar alguns tipos de dificuldades por parte dos alunos envolvidos na investigação com relação à aprendizagem de Geometria Analítica na unidade que trata de vetores, em especial, suas representações e operações de adição. Algumas regularidades nas realizações das tarefas, relacionadas às representações e interpretações de vetores, também foram destacadas com intenção de relatar o que conseguimos inferir com a presente investigação.

As duas atividades propostas aos sujeitos que participaram desta pesquisa foram apresentadas sob a forma de tarefa em grupo. A primeira atividade constitui-se de dez questões que envolvem, desde o seu enunciado, os registros vetorial, figural e a língua natural, seja individualmente ou combinadas. Todas as questões da Atividade 01 envolviam a soma de vetores livres e exigiam o tratamento das representações, ou a conversão entre elas.

O material distribuído aos alunos constava de folhas de papel sem pauta e papel quadriculado, além da folha de questões. Sobre a Atividade 01 podemos salientar que os grupos, em geral, conseguiram realizar a soma de forma satisfatória. Algumas questões eram compostas de figuras no seu enunciado, como paralelepípedos e quadriláteros regulares entre outros, servindo como suporte para visualização e manipulações dos vetores no espaço e no plano. Os casos em que foram utilizadas de forma direta as regras de Chasles e/ou do paralelogramo obtiveram maior número de acertos, pois se tratava apenas de seguir uma regra, um algoritmo. Quando se fazia necessário antes da aplicação da regra, uma substituição do vetor por um representante seu – nas figuras regulares a presença de paralelismo e congruência entre os lados remetia à igualdade entre vetores – notamos uma dificuldade bem maior.

Embora se tenha observado uma predominância do registro vetorial, muitas das equipes mobilizaram o registro figural como meio de confirmação dos resultados ou como registro auxiliar. Em menor escala, encontramos equipes que reuniram em suas resoluções a conversão, como troca de registro e também a utilização em paralelo entre registros de acordo com sua conveniência. Porém, a maioria da equipes optou em realizar o tratamento apenas na representação algébrica.

Com relação ao uso das regras, algumas equipes confundiram a regra do paralelogramo e a regra de Chasles. Algumas questões admitem o uso de apenas uma delas, como na questão 2 da Atividade 01 . Em muitos casos as duas regras foram utilizadas como se fosse a mesma regra, mas o problema é que aparentemente, os alunos parecem não distinguir uma da outra ou não conseguem escolher a que melhor se aplica a cada situação.

O registro figural (sob suas duas formas representadas: Gráfica e Geométrica) foi um dos maiores motivos de dificuldade para os sujeitos pesquisados, algumas das figuras foram abandonadas e a resolução foi feita apenas na representação algébrica. Outras equipes mudaram a figura, simplificando sua forma, porém esta atitude induziu-as ao erro. Acreditamos que em parte, esta dificuldade advém de conceitos geométricos incompletos ou inapropriados adquiridos no ensino básico. Assim, muitas equipes não conseguiram avançar em algumas questões que exigiam conhecimento das propriedades das figuras e sólidos geométricos.

Por outro lado, inferimos também que, tal dificuldade em manipular as figuras geométricas está diretamente ligada ao fato de ser o registro figural classificado por Duval como um registro multifuncional, o autor expõe a natureza distinta dos tipos de registro, ou seja, cada registro de representação possui particularidades na formação das suas representações, e que, os plurifuncionais, como por exemplo, o geométrico, são os que provocam maiores dificuldades na operação de tratamento.

Observamos ainda, que na sétima e nona questões da Atividade 01 cujos enunciados não trazem figuras, a dificuldade foi bem maior em relação às demais. Na maioria das resoluções as equipes não conseguiram construir a figura geométrica correspondente. Embora o tratamento tenha sido feito na representação algébrica sem o auxílio da figura tornou-se inviável a conversão do enunciado, que foi dado na língua natural, para o vetorial. Duval (2003) afirma que assim como os tratamentos dentro de registros multifuncionais tem um custo cognitivo maior, a conversão entre registros monofuncionais e plurifuncionais torna-se ainda mais complexa.

No intuito de melhor organizar e apresentar estas inferências, as dificuldades mais presentes foram organizadas em quatro categorias: 1) confusão entre coordenadas de ponto e coordenadas de vetor, 2) dificuldade na aplicação da regra do paralelogramo, 3) dificuldade em identificar vetores iguais e 4) conversão entre registros envolvendo o registro geométrico.

A primeira categoria, confusão entre coordenadas de ponto e coordenadas de vetor, nos revelou que abordagem predominantemente geométrica presente no programa de Geometria Analítica, favorece as dificuldades relativas às representações dos vetores. Em muitos casos, observamos que os estudantes recorrem às figuras planas, segmentos e pontos quando não conseguem produzir uma representação adequada para os vetores.

O que percebemos também é que os estudantes, em geral, não demonstraram problemas para realizar operações envolvendo as coordenadas dos vetores, ou seja, o tratamento no registro vetorial (representação numérica) não se constitui em entrave na aprendizagem de operações com vetores, mas quando o aluno precisa representar o resultado em um sistema de coordenadas depara-se com a semelhança entre as coordenadas do vetor e as de um ponto. Porém, os vetores podem ser descritos, conhecendo-se seus pontos de origem e extremidade ou apenas pelo seu ponto final.

Os casos de sucesso do aluno envolvendo a representação gráfica ocorrem quando estão definidas origem e extremidade do vetor, pois basta, representar os dois pontos e ligar as extremidades. Quando o aluno subtrai os dois pontos e chega às coordenadas do vetor, o que percebemos é que boa parte dos envolvidos na pesquisa, representou apenas um ponto, ou um segmento ao invés de um vetor.

Na segunda categoria, dificuldade na aplicação da regra do paralelogramo, as dificuldades relatadas são aquelas relativas à operacionalização da regra do paralelogramo na adição de vetores e, nela expomos, inicialmente, como as representações feitas pelos alunos foram demasiadamente negligenciadas e até mesmo distorcidas em alguns casos.

Inferimos que, além do desconhecimento de características próprias de figuras planas e/ou espaciais, houve o uso incorreto de regras matemáticas e adaptações das mesmas, sugerindo, assim, generalizações ineficazes na resolução dos problemas propostos.

Na terceira categoria, dificuldade em identificar vetores iguais, em algumas configurações ficou evidenciada a dificuldade em identificar as propriedades da figura e a escolha dos representantes de vetores a serem somados. Caracterizando assim, a importância de observar as propriedades da igualdade de vetores na figura dada, principalmente em configurações onde não é possível aplicar regras diretas para adicionar os vetores em questão. Remete-se aqui, às peculiaridades do vetor como: módulo, direção e sentido.

Na quarta categoria, conversão entre registros envolvendo o registro geométrico, observamos as dificuldades relativas à representação geométrica na atividade de conversão. Talvez esta tenha sido a dificuldade mais expressiva, na qual identificamos que o registro geométrico é um dos mais complexos para os alunos, pois necessita ser trabalhado em paralelo com um registro discursivo para se realizar os tratamentos. Assim, a conversão de um registro geométrico para outro tipo de registro, o algébrico, por exemplo, é necessária para a realização de adições de vetores.

Além das dificuldades já citadas, percebemos que a questão da interpretação do conceito de vetor influencia fortemente nas escolhas dos sujeitos sob dois aspectos. Primeiro, pela característica polissêmica da língua natural e os problemas advindos da subjetividade, a qual acompanha a comunicação na sala de aula, e que (às vezes) se confronta com a estrutura matemática dos enunciados, posto que as questões não ocorram apenas na linguagem matemática. Assim, consideramos a língua natural como um registro de representação. E, segundo, porque a matemática possui uma lógica e esta, não raro, é disjunta da lógica do aluno que, mesmo conhecendo a regra “correta”, pode sentir a necessidade de adaptar regras para que estas possam se adequar a uma nova situação.

Tendo em vista os resultados obtidos por meio desta pesquisa, acreditamos que este trabalho possa dar base para a elaboração de uma proposta de ensino para vetores, servindo como ponto de partida para construir novos objetivos de aprendizagem e que vise a dirimir as dificuldades identificadas em relação às representações, em particular, do registro figural. Além de procurar aliar, ao seu ensino, aspectos históricos que possam minimizar o efeito causado pelos obstáculos existentes na aprendizagem de vetores.

REFERÊNCIAS

BA, Cissé. **Etude épistémologique et didactique de l'utilisation du vecteur en mathématiques et en physique – lien entre mouvement de translation et translation mathématique**. France: 2007. These de doctorat – l'Universite Claude Bernard – Lyon 1.

BITTAR, Marilena. **Les vecteurs dans l'enseignement secondaire. Grenoble 1**, 1998. Tese (doutorado em educação matemática) – Université Joseph Fourier.

BITTAR, Marilena. O ensino de vetores e os registros de representação. In: MACHADO, Silvia D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas: Papirus, 2005. p.71- 94.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de educação básica. **Orientações curriculares para o ensino médio:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília, 2006, vol. 2, 135 p.

CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. **Geometria Analítica um tratamento vetorial**. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

CASTRO, Samira C. **Os vetores do plano do espaço e os registros de representação.** São Paulo: 2001. Dissertação (Mestrado em educação matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

CROWE, M. J. **A history of vector analisys**. [?]: [s/e], 2008.

DAMM, Regina F. Registros de Representação. *In:* MACHADO, Silvia Dias Alcântara *et al*. **Educação Matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 2008. p. 135 - 153.

DORIER, J. L. État de l'Art de la recherche em didactique. A propos de l'enseignement de l'Algébre Linéaire à l'université. **Recherches em didactique dês Mathématiques**. França, v. 18, n.2, p. 191- 230, 1998.

DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: MACHADO, Sílvia D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática:** registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2005, p.11- 33.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y pensamiento humano**: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Trad. de Myriam Vega Restrepo. Merlin I. D. Cali – Colômbia, 2004.

GRANGER, Guilles G. **Filosofia do estilo**. Trad. Scarlet Zerbetto Marton. São Paulo: Perspectiva, 1974.

GREIMAS, A. J.; COURTÉS, J. **Dicionário de semiótica**. São Paulo: Contexto, 2008.

KARRER, Mônica. **Articulação entre Álgebra Linear e Geometria**: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica. São Paulo: 2006. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

PEIRCE, Charles S. **Semiótica**. Coleção estudos. Trad. de José Teixeira Coelho Neto. São Paulo: Perspectiva, 2005.

SANTAELLA, Lucia. **A teoria geral dos signos**: como as linguagens significam as coisas. São Paulo: Pioneira, 2000.

SANTAELLA, Lucia. **O que é Semiótica**. São Paulo: Brasiliense, 2007.

SILVEIRA, Marisa R. A. Interpretação e comunicação em matemática. *In:* Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2, 2008. Recife/PE. **Anais**, 2008. p. 1- 12.

SILVEIRA, Marisa R. A. Wittgensttein e a matemática. *In*: Congresso Brasileiro de Etnomatemática – CBEm, 3, 2008, Niterói. **Etnomatemática**: novos desafios teóricos e pedagógicos. p. 1 -13.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. 2. ed. **Geometria Analítica**. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.

WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Makron Books, 2000.

YIN, Robert K. **Estudo de caso**: planejamento e métodos. 3. ed. Trad. Daniel Grassi. Porto Alegre: Bookman, 2005.

ANEXOS

Anexo A:

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E INFORMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

DISCIPLINA: GEOMETRIA ANALITICA
COD: DMEI 0309 **CARGA HORÁRIA**: 120 h/a.

EMENTA:

Sistemas de Coordenadas. Estudo do Ponto, da Reta e do Plano em coordenadas. Estudo das Cônicas e Quadráticas. Estudo da equação geral do 2º Grau. Vetores no Plano e no Espaço. Estudo Vetorial da Reta e do Plano.

OBJETIVO GERAL:

Conhecer e aplicar resultados da Geometria Analítica que servirá de base para disciplinas específicas do curso bem como propiciar ao formando construir e desenvolver ideias e conceitos matemáticos atribuindo-lhes significado a partir de situações-problemas, permitindo a integração entre os eixos das unidades de ensino para que possa suscitar o encadeamento da multidisciplinaridade na resolução de situações do cotidiano.

CONTEÚDO PROGRAMÁTICO.

I - UNIDADE: VETORES

1 - Conceitos;

1.2 - Coordenadas;

1.3 - Módulo, direção e sentido;

1.4 - Adição;

1.5 - Multiplicação por um escalar;

1.6 - Produto escalar;

1.7 - Produto Vetorial;

1.8 - Produto Misto.

II – UNIDADE: SISTEMA DE COORDENADAS

2.1- Sistema de coordenadas no plano;

2.2- Sistema de coordenadas no espaço.

III – UNIDADE: DISTÂNCIAS

3.1- Distancia entre ponto, reta e plano.

IV- UNIDADE: RETA E PLANO

4.1- Equações da reta no plano;

4.2- Equações da reta no espaço;

4.3- Equações do plano.

V – UNIDADE: LUGARES GEOMÉTRICOS

5.1- Definição;

5.2- Cônicas;

5.1- Circunferência;

5.2- Elipse;

5.3- Parábola;

5.4- Hipérbole.

VI – UNIDADE: SUPERFÍCIES

6.1. Conceitos.

<u>III – BIBLIOGRAFIA:</u>

BOULOS, P. **Geometria Analítica.** SP: Pearson, 2000;

CARMO, M.P. **Geometria Diferencial de curvas e superfícies.** RJ: SBM, 2005;

IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática Elementar.** Vol. 7 SP: Atual 2003;

LIMA, E.L. **Coordenadas no plano.** RJ: SBM 2002;

LIMA, E.L. **Coordenadas no Espaço.** RJ: SBM 2002;

LIMA, E.L. **Álgebra Linear e Geometria Analítica.** RJ: IMPA 2000

STEINBRUCH,Alfredo;WINTERLE,Paulo.**Geometria Analítica**.SP.Makron Books, 1987.

REIS/SILVA**,Geometria Analítica.**4ª ed. Goiânia:Cegraf, 1993.

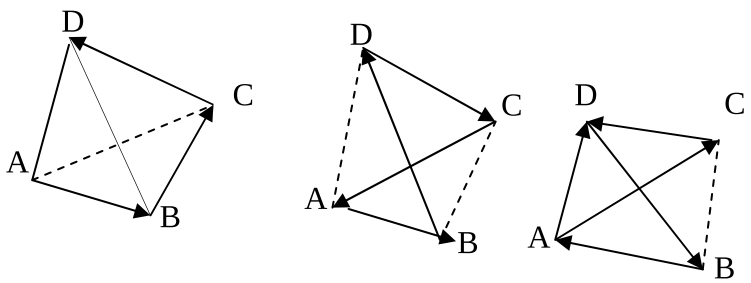
Anexo B:

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ - UFPA
NÚCLEO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS
REDE NACIONAL DE FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES (SEB/MEC)
CENTRO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA

ATIVIDADE 01

1) Prove que o oposto de   é   .

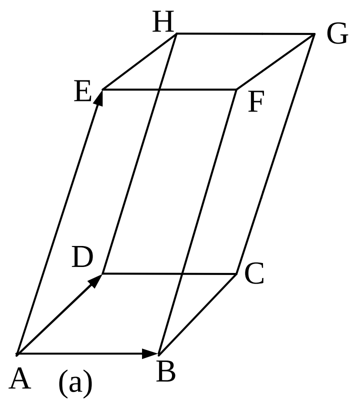
2) Determine a soma dos vetores indicados em cada caso nas figuras.



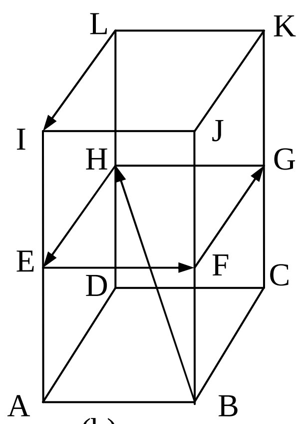
3) Obtenha a soma dos vetores indicados em cada caso.

a) ABCDEFGH é um paralelepípedo.

b) ABCDEFGH e EFGHIJLM são cubos de arestas congruentes.



(a)



(b)

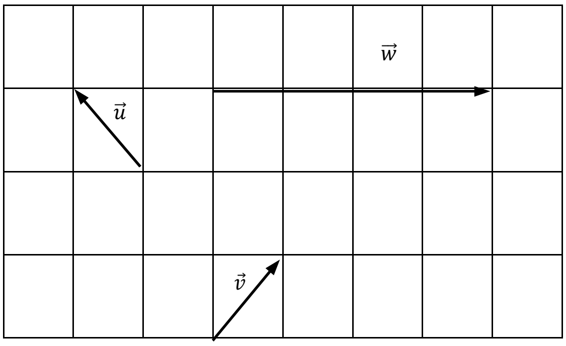
4) Utilizando a figura (a) da questão acima determine o vetor   para os casos abaixo.

a)

b)

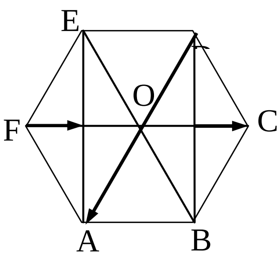
c) $\vec{x} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BD}$

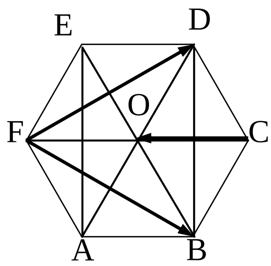
5) Sendo $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ representados na figura abaixo, represente $\vec{x} = 2\vec{u} - \vec{v} + 5\vec{w}/4$ por uma flecha de origem O.

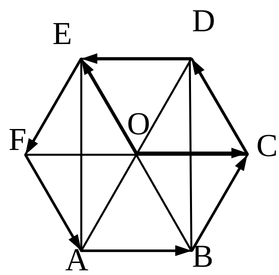


O

6) Abaixo, os hexágonos são regulares. Em cada caso, determine a soma dos vetores indicados.







7) Calcule a soma dos seis vetores que têm por representantes segmentos orientados com origem em cada um dos vetores, e extremidade no centro de um mesmo hexágono regular.

8) Quais são a origem e a extremidade de um representante do vetor $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{FB}$? Você não vai precisar de nenhuma figura para chegar à resposta certa.

9) O hexágono ABCDEF é regular, de centro O. Prove que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 6\overrightarrow{AO}$.

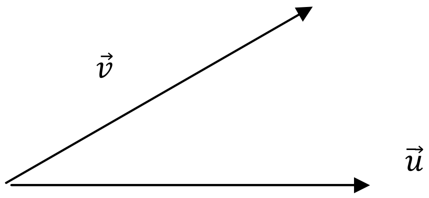
10) Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ abaixo, mostrar, em um gráfico, um representante do vetor

a) $\vec{u} - \vec{v}$

b) $\vec{v} - \vec{u}$

c) $-\vec{v} - 2\vec{u}$

d) $2\vec{u} - 3\vec{v}$



Anexo C:

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
NÚCLEO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS
REDE NACIONAL DE FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES (SEB/MEC)
CENTRO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA

ATIVIDADE 01 I

EQUIPE Nº_____

1ª questão:

Qual o ponto inicial do segmento orientado que representa o vetor $\vec{v} = (-1, 3)$, sabendo que sua extremidade está em (3, 1)? Representar graficamente este segmento.

2ª questão:

Sejam os pontos P(2, 3), Q(4, 2) e R(3, 5).

a) Representar em um mesmo gráfico os vetores posição de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ de modo que $Q = P + \vec{u}$, $R = Q + \vec{v}$ e $P = R + \vec{w}$.

b) Determinar $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

3ª questão:

Encontrar o vértice oposto a B, no paralelogramo ABCD, para

a) A(-3, -1), B(4, 2) e C(5, 5)

b) A(5, 1), B(7, 3) e C(3, 4)

4ª Questão:

Determinar os três vértices de um triângulo, sabendo que os pontos médios de seus lados são M(5, 0, -2), N(3, 1, -3) e P(4, 2, 1).

5ª questão:

Dados os pontos A(1, -1, 3) e B(3, 1, 5), até que ponto se deve prolongar o segmento AB, no sentido de A para B, para que seu comprimento quadruplique de valor?

6ª questão:

Dado o vetor $\vec{w} = (3, 2, 5)$, determinar a e b de modo que os vetores $\vec{u} = (3, 2, -1)$ e $\vec{v} = (a, 6, b) + 2\vec{w}$ sejam paralelos.

7ª questão:

Sabendo que o ponto P(m, 4, n) pertence à reta que passa pelos pontos A(-1, -2, 3) e B(2, 1, -5), calcular m e n.

8ª questão:

Determinar o valor de n para que o vetor $\vec{v} = (n, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ seja unitário.

Anexo D:

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ - UFPA
NÚCLEO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS
REDE NACIONAL DE FORMAÇÃO CONTINUADA DE PROFESSORES (SEB/MEC)
CENTRO DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ

ATIVIDADE 01 II

EQUIPE Nº ____

QUESTÃO 01

Determinar os ângulos internos ao triângulo ABC, sendo A(3, -3, 3), B(2, -1, 2) e C(1, 0, 2).

QUESTÃO 02

Sejam A(2, 1, 3), B(m, 3, 5) e C(0, 4, 1) vértices de um triângulo (Figura 2.18).

a) Para que valor de m o triângulo ABC é retângulo em A?

c) Determinar o ponto H, pé da altura relativa ao vértice A.

d) Mostrar que $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$.

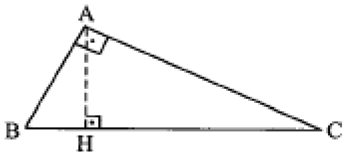


Figura 2.18

QUESTÃO 03

Determinar a distância do ponto P(5, 1, 2) à reta r que passa por A (3, 1, 3) e B (4, -1, 1).

QUESTÃO 04

Mostrar que o quadrilátero ABCD de vértices A(4, 1, 2), B(5, 0, 1), C(-1, 2, -2) e D (-2, 3, -1) é um paralelogramo e calcular sua área.

QUESTÃO 05

Verificar se os pontos A(1, 2, 4), B(-1, 0, -2), C (0, 2, 2) e D(-2, 1, -3) estão no mesmo plano.

QUESTÃO 06

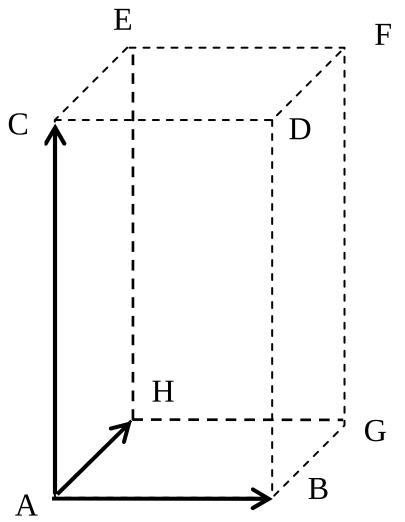
O ponto A(1, -2, 3) é um dos vértices de um paralelepípedo e os três vértices adjacentes são B(2, -1, -4), C(0, 2, 0) e D(-1, *m*, 1). Determinar o valor de *m* para que o volume deste paralelepípedo seja igual ao 20 u.v. (unidades de volume).

Anexo E:

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ – UEPA
CENTRO DE CIÊNCIAS SOCIAIS E EDUCAÇÃO – CCSE
NÚCLEO UNIVERSITÁRIO REGIONAL DO BAIXO TOCANTINS – NURBAT – CAMPUS XIV
CURSO: LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA
DISCIPLINA: GEOMETRIA ANALÍTICA
PROFESSOR: RAFAEL SILVA PATRÍCIO
DATA: 15/05/2009
ALUNO (A): ______________________________________ TURMA: _________

1ª AVALIAÇÃO

01. Na figura abaixo, sejam $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AH}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$. Obtenha representantes dos vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ tais que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} = \vec{0}$ e $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{y} = \vec{0}$.



02. Decidir se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações, justifique com suas palavras.

a) Se $\vec{u} = \vec{v}$, então $|\vec{u}| = |\vec{v}|$.
b) Se $|\vec{u}| = |\vec{v}|$, então $\vec{u} = \vec{v}$.
c) Se $\vec{u} \,//\, \vec{v}$, então $\vec{u} = \vec{v}$.
d) Se $\vec{u} = \vec{v}$, então $\vec{u} \,//\, \vec{v}$.
h) $|5\vec{v}| = |-5\vec{v}| = 5|\vec{v}|$.
i) Os vetores $3\vec{v}$ e $-4\vec{v}$ são paralelos e de mesmo sentido.
j) Se $\vec{u} \,//\, \vec{v}$, $|\vec{u}| = 2$ e $|\vec{v}| = 4$, então $\vec{v} = 2\vec{u}$ ou $\vec{v} = -2\vec{u}$.

03. Sendo A (2,1) e B (5,2) vértices consecutivos de um paralelogramo ABCD e M(4,3) o ponto de intersecção das diagonais, determinar os vértices C e D.

04. Calcular a área do triângulo de vértices A(1,-2, 1), B(2, -1, 4) e C(-1, -3, 3).

05. Dados os vetores $\vec{a}$ = (3, 4, 2) e $\vec{b}$ = (2, 1, 1), obter um vetor de módulo 3 que seja ao mesmo tempo ortogonal aos vetores $(2\vec{a} - \vec{b})$ e $(\vec{a} + \vec{b})$.