UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
CURSO DE MESTRADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

PAULO VILHENA DA SILVA

O APRENDIZADO DE REGRAS MATEMÁTICAS: uma pesquisa de inspiração wittgensteiniana com crianças da 4ª série no estudo da divisão

BELÉM - PA

2011

PAULO VILHENA DA SILVA

O APRENDIZADO DE REGRAS MATEMÁTICAS: uma pesquisa de inspiração wittgensteiniana com crianças da 4ª série no estudo da divisão

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.

Orientadora: Profa. Dra. Marisa Rosâni Abreu da Silveira

BELÉM - PA
2011

PAULO VILHENA DA SILVA

O APRENDIZADO DE REGRAS MATEMÁTICAS: uma pesquisa de inspiração wittgensteiniana com crianças da 4ª série no estudo da divisão

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.

Orientadora: Profa. Dra. Marisa Rosâni Abreu da Silveira

Defesa: Belém-PA, 01 de Março de 2011.

COMISSÃO EXAMINADORA

____

Profa. Dra. Marisa Rosâni Abreu da Silveira (Orientadora) – IEMCI/UFPA

____

Profa. Dra. Cristiane Maria Cornelia Gottschalk – FEUSP

____

Prof. Dr. Renato Borges Guerra – IEMCI/UFPA.

____

Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva (Suplente) – IEMCI/UFPA

BELÉM - PA
2011

Dedico este trabalho:

à meus pais:

Raimunda e Manoel

Agradeço

A meus pais, pelo carinho e por proporcionarem a possibilidade e as condições necessárias para a elaboração deste trabalho;

Em especial, à minha mãe, por ser a melhor mãe do mundo;

À Elma pelo apoio durante todo esse tempo. Obrigado amor!;

À minha orientadora, professora Marisa Silveira (UFPA), pela paciência, por tudo que me ensinou e principalmente pela confiança depositada em meu trabalho;

Ao professor Renato Guerra (UFPA) pelas críticas firmes que colaboraram para a conclusão deste trabalho.

À professora Cristiane Gottschalk (USP) pela enorme ajuda na compreensão das idéias de Wittgenstein e pela paciência em me atender inúmeras vezes.

A todos da Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará, em especial à turma onde fiz minha pesquisa e à professora responsável;

Ao Otávio Barros, pela ajuda na coleta dos dados na Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará.

A todos do Grupo de Estudos em Linguagem Matemática (GELIM/UFPA) que sempre colaboram em suas discussões;

A todos os amigos do IEMCI, em especial à todos da turma de Mestrado de 2009;

À Universidade Federal do Pará e ao Instituto de Educação Matemática e Científica por tudo que fazem pelos alunos;

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro a mim cedido.

O que fornecemos são propriamente anotações sobre a história natural do homem; não são curiosidades, mas sim constatações das quais ninguém duvidou, e que apenas deixam de ser notadas, porque estão continuamente perante nossos olhos. (IF, §129).

Resumo

Neste trabalho, investigamos o aprendizado de regras matemáticas no contexto da sala de aula, com ênfase, principalmente, nas discussões sobre a linguagem. Nosso objetivo principal foi pesquisar as dificuldades de ordem lingüística, enfrentadas pelos alunos no decurso do aprendizado das regras matemáticas, em especial, o conceito/algoritmo da divisão. Para tanto, discutimos, entre outras coisas, o tema "seguir regras", proposto pelo filósofo austríaco Ludwig Wittgenstein em sua obra ***Investigações Filosóficas.*** Nosso trabalho e nossas análises foram fundamentadas, principalmente, na filosofia deste autor, que discute, entre outros temas, a linguagem e sua significação e os fundamentos da matemática, bem como nas reflexões do filósofo Gilles-Gaston Granger que analisa as linguagens formais. Realizamos uma pesquisa de campo que foi desenvolvida na Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará, em uma turma da quarta série do ensino fundamental. As aulas ministradas pela professora da turma foram observadas e, posteriormente, foi solicitado aos alunos que resolvessem problemas de divisão verbais e não-verbais, seguido de uma breve entrevista, na qual indagamos, entre outras questões, como os alunos resolveram os problemas envolvendo a divisão. Em nossas análises destacamos algumas dificuldades dos alunos, percebidas nas observações e em seus registros escritos ou orais: alguns alunos, em suas estratégias de resolução, inventam novas "regras matemáticas". Há ainda aqueles que "confundem" os contextos na resolução de problemas matemáticos verbais, bem como a dificuldade de compreensão de problemas que trazem informações implícitas.

PALAVRAS-CHAVE: Linguagem, compreensão de problemas matemáticos, divisão, filosofia de Wittgenstein.

Abstract

In this study, we investigated the learning of mathematical rules in the context of the classroom, emphasizing, primarily, the discussions about language. Our main goal was to investigate the linguistic difficulties, faced by students during the learning of mathematical rules, in particular, the concept / division algorithm. To this end, we discuss, among other things, the theme "following rules" proposed by the Austrian philosopher Ludwig Wittgenstein in his ***Philosophical Investigations***. Our work and our analysis were based primarily on this author, who discusses, among other themes, language and their meaning and foundations of mathematics, as well as the reflections of philosopher Gilles-Gaston Granger who analyzes the formal languages. We conducted a field survey that was developed at the “school of pedagogical application” of the Federal University of Pará, in a class of fourth grade. The lessons taught by the classroom teacher was observed and later the students were asked to solve division problems, verbal and nonverbal, followed by a brief interview in which we ask, among other issues, how students solve problems involving the division. In our analysis we highlight some students' difficulties, perceived in observations and in their written records or oral: some students, in its resolution strategies, invent new “mathematical rules". There are still those who "confuse" the contexts in solving verbal mathematical problems as well as the difficulty of understanding the problems that bring implicit information.

KEY WORDS: Language, understanding of mathematical problems, mathematical division, Wittgenstein's philosophy.

Sumário

Introdução

Os indicadores da eficácia da educação básica em escalas mundial e nacional, como o Programa Internacional de Avaliação de Alunos[1] (PISA) e o Sistema de Avaliação da Educação Básica[2] (SAEB), respectivamente, apontam que a matemática é uma das disciplinas que traz mais dificuldades aos alunos e consequentemente aos professores que a ensinam. A situação parece paradoxal, visto que a despeito das dificuldades encontradas na sua aprendizagem, é um conhecimento presente em vários campos do saber da sociedade.

Neste sentido, algumas teorias de aprendizagem e tendências educacionais tem sido adotadas visando contribuir com o ensino e com a aprendizagem da matemática. Alguns educadores matemáticos discutem sobre a problemática de o aprendiz desempenhar bem seu papel com cálculos no cotidiano e fracassar nas atividades escolares, como também o fato de alguns alunos saberem usar regras e algoritmos de forma abstrata, mas não compreenderem os enunciados dos problemas matemáticos escritos em linguagem natural.

Nesta pesquisa, apostamos na discussão de um tema que recentemente vem chamando a atenção dos estudiosos e professores da educação matemática: a linguagem. A linguagem está imersa em todas as nossas atividades do dia-a-dia, como trabalhar, brincar, estudar, assistir a televisão ou ensinar matemática.

Tanto a linguagem matemática quanto a linguagem natural obedecem a regras; assim, nosso interesse principal é investigar as dificuldades enfrentadas pelos alunos no decorrer do aprendizado e aplicação das regras matemáticas, em especial o aprendizado do conceito de divisão.

O ensino da matemática, como de qualquer outra disciplina, é baseado na comunicação através da linguagem materna, seja nas explicações do professor, nas exposições do livro didático, nos enunciados dos problemas matemáticos ou ainda nas perguntas dos alunos. Assim, cabe questionar se as dificuldades dos alunos, nessa disciplina, não se devem, entre outros fatores, a questões relacionadas à linguagem.

Visto os interesses de nossa pesquisa, parece-nos relevante que discutamos, entre outras coisas, a respeito de linguagem natural e linguagem matemática, bem como suas

[1] Para mais detalhes consulte: http://www.inep.gov.br/internacional/pisa/

[2] Para maiores informações veja: http://www.inep.gov.br/basica/saeb/default.asp

particularidades. Assim, para desenvolver este trabalho, recorreremos, entre outros autores, principalmente às reflexões dos filósofos Gilles-Gaston Granger, no qual buscamos suas idéias a respeito de línguas e linguagens formalizadas, e do filósofo Ludwig Wittgenstein, no qual buscamos algumas de suas reflexões de sua filosofia da linguagem e de sua filosofia da matemática.

Apesar de Granger muitas vezes tratar de temas distintos dos tratados por Wittgenstein, muitas de suas reflexões sobre linguagens formais nos ajudaram a compreender algumas das afirmações de Wittgenstein[3], bem como nos apóiam em algumas de nossas discussões. Inclusive Moreno (2008) aponta como profícua uma “aproximação” da filosofia de Granger à filosofia dos usos das palavras de Wittgenstein.

Wittgenstein trabalhou como professor de ensino fundamental em algumas cidades austríacas e, segundo Chauviré (1991), a experiência pedagógica do filósofo contribuiu para o amadurecimento de sua filosofia posterior.

Conforme relata Moreno (2000), Wittgenstein decidiu tornar-se educador e formou-se professor de ensino fundamental, trabalhando como mestre em cidades do interior da Áustria como Trattenbach, Puchberg-am-Schneeberg e Otterthal. Nesta última escreveu e publicou um dicionário para uso em escolas primárias das aldeias austríacas, com cerca de seis mil palavras. O dicionário explicitava a gramática segundo o dialeto dos estudantes, de acordo como era falado pelas crianças. O filósofo criticava os dicionários tradicionais, pois acreditava que as crianças deveriam compreender o significado das palavras conforme as usavam no seu cotidiano. Para tanto, seria preciso considerar, no processo de aprendizagem, o contexto em que os usos das palavras eram efetivados.

Embora Wittgenstein tenha tido experiências como professor, seus escritos não tinham como tema a educação, nem mesmo suas preocupações eram pedagógicas, mas sim filosóficas. Entretanto algumas questões como: “Como se ensina isso?” ou “Como isto é aprendido?”, que intrigam os filósofos (em especial o filósofo Ludwig Wittgenstein), também são de interesse dos educadores (cf. MACMILLAN, 1995).

Em sua obra mais famosa, as ***Investigações Filosóficas***, Wittgenstein critica a “dieta unilateral” da concepção referencial da linguagem – ou seja, a exigência de um isomorfismo entre linguagem e realidade – que ele mesmo afirmara ser correta no ***Tractatus Logico-Philosophicus,*** livro publicado em 1921, o único editado em vida.

---

[3] Não estamos afirmando que de alguma forma a filosofia de Granger explicite a filosofia de Wittgenstein.

A partir de meados da década de trinta, Wittgenstein observa, entre outras coisas, que usamos frases inteligíveis, sem que, no entanto, as palavras "apontem" para algum objeto no mundo real, como por exemplo, a conhecida frase de Bertrand Russell: "o atual rei da França é careca", de modo que Wittgenstein precisou reconsiderar o seu "velho modo de pensar" e teve de reconhecer "os graves erros que publicara naquele primeiro livro[4]" (IF[5], prefácio).

Baseados nas ideias do filósofo, é que vamos discutir sobre as dificuldades de se ensinar e de se aprender matemática como também algumas concepções e propostas educacionais presentes na prática pedagógica desta disciplina, a saber, a contextualização dos conceitos ensinados e o uso da resolução de problemas nas aulas.

Este trabalho está organizado em cinco capítulos, além da introdução e das considerações finais.

No capítulo um, tratamos do caminho metodológico da pesquisa, no qual expomos como e por que este trabalho foi idealizado; tratamos da pergunta da pesquisa, ou seja, aquilo a que nos propomos a pesquisar/responder; os objetivos, que mostram de que forma responderemos a pergunta da pesquisa; a justificativa que, como o próprio nome esclarece, justifica por que esta pesquisa é pertinente para o campo da Educação Matemática e, por fim, trazemos a descrição da metodologia utilizada, na qual descrevemos e justificamos os procedimentos utilizados para a concretização deste trabalho.

O segundo capítulo aborda noções e algumas características de língua, linguagem, linguagem comum (ou natural), bem como da linguagem matemática, um exemplo de linguagem formal segundo Granger (1974), sobre a qual discutimos a respeito de sua falta de oralidade e sua impregnação com a linguagem natural no sentido apontado por Machado (1993).

No terceiro capítulo, apresentamos algumas ideias e conceitos de Wittgenstein, como ***jogo de linguagem*** e ***semelhanças de família.*** Tratamos do tema "seguir regras", discutimos sobre a natureza das proposições matemática, bem como apresentamos o conceito de compreensão, tal como é visto pelo filósofo. Discutimos, por exemplo, como

---

[4] Em geral nos apoiamos na tradução das ***Investigações Filosóficas*** para o português feita por José Carlos Bruni (coleção os pensadores), exceto nos casos que utilizamos nossa própria tradução da versão em inglês de G.E.M. Anscombe.

[5] Ao citar as obras de Wittgenstein, usaremos uma maneira que talvez não pareça muito comum, mas que é bastante natural entre os comentadores das obras do filósofo. Usamos as iniciais do título da obra para indicá-la (por exemplo, IF para ***Investigações Filosóficas***), seguida do número do aforismo do qual a citação foi retirada (exceto nos casos que citamos trechos de partes não organizadas em aforismos). As siglas utilizadas encontram-se nas referências, logo após o título do livro.

uma mesma palavra pode indicar ações diferentes, como alguém segue regras e o que significa compreender algo.

No capítulo quatro, propomos uma noção e uma sucinta discussão a respeito da solução de problemas matemáticos, visto que o ensino da matemática é pautado, também, em problemas matemáticos. Oferecemos algumas observações sobre as dificuldades linguísticas enfrentadas pelos aprendizes de matemática, pois o ensino da matemática é feito via linguagem natural. Trazemos também algumas considerações sobre o ensino e o aprendizado da matemática, no qual propomos discutir, entre outras coisas, o conceito matemático e seus contextos.

No último capítulo, descrevemos e discutimos a respeito de nossa pesquisa de campo, no qual damos alguns detalhes da sala de aula, dos alunos, da professora e sua prática docente, bem como, obviamente, trazemos os resultados de nossa pesquisa e nossas análises, organizadas em quatro sessões de análise, de acordo com o referencial adotado.

Capítulo 1: O caminho metodológico

1.1 – O “nascimento” da pesquisa

Além da satisfação do aperfeiçoamento profissional, este trabalho nasceu de minhas reflexões e inquietações a respeito das dificuldades de se aprender e de se ensinar matemática. Desde a graduação, percebia que um dos obstáculos, meus e de meus colegas, em disciplinas como Cálculo Diferencial e Integral era compreender as proposições da teoria, bem como a escrita matemática e o enunciado, escrito em linguagem natural, dos exercícios que os professores solicitavam que solucionássemos. Quando o significado das frases matemáticas tornava-se claro, ficava bem mais simples entender a teoria e resolver os exercícios, pois sabíamos o que tínhamos de fazer.

Nas minhas experiências docentes, percebi algo semelhante no que diz respeito à aprendizagem dos alunos. Nos problemas ditos contextualizados – problemas matemáticos, escritos em linguagem natural, que sugerem uma situação real –, os alunos tem dificuldades de compreender o conceito matemático presente no texto. De modo semelhante, no desenvolvimento do conteúdo com as explanações, proposições e teoremas, dados pelo professor ou contidos no material de estudo, os alunos não compreendiam bem o significado das frases devido: a) à linguagem “densa” utilizada; b) por conta de desconhecerem certas palavras; ou ainda por c) confundirem palavras que são usadas no dia-a-dia com significado diferente do utilizado na matemática.

Assim, me preocupava a respeito do ***como*** ensinar os conteúdos matemáticos de forma que os alunos pudessem compreender as explicações, focando os esforços na comunicação. Então, em meu Trabalho de Conclusão de Curso[6] busquei nos teóricos da Modelagem Matemática, da Aprendizagem Significativa e do Contrato Didático, novas alternativas para o ensino da matemática. Discutimos, então, sobre atividades de resolução de situações-problemas matemáticos presentes em situações do cotidiano, geralmente com linguagem mais acessível para os alunos, no qual o diálogo entre professor e alunos era ponto chave para o ensino.

[6] SILVA, Paulo Vilhena da; SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. **Modelagem Matemática em sala de aula:** aprendizagem significativa e contrato didático. Trabalho de conclusão do curso de Licenciatura em matemática. Belém: Universidade Federal do Pará, 2009.

Após terminar a pesquisa do TCC, por intermédio de minha orientadora, tive a oportunidade de conhecer o Grupo de Estudos em Linguagem Matemática do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências Matemáticas da Universidade Federal do Pará (GELIM/IEMCI/UFPA) e percebi que enquanto na Modelagem, uma das tarefas era explicar situações do dia-a-dia por meio do conteúdo matemático, nos estudos de linguagem e linguagem matemática a preocupação é, entre outras, a "tradução" da linguagem simbólica da matemática para a linguagem do cotidiano.

Nas dicussões que participei no GELIM, pude conhecer a literatura a respeito de linguagem e linguagem matemática e suas particularidades, bem como as obras de filósofos como Gilles-Gaston Granger e principalmente as de Ludwig Wittgenstein, cuja filosofia tem grande importância no desenvolvimento e inspiração para este trabalho.

1.2 – Problema de pesquisa

Quais as dificuldades de ordem linguística enfrentadas pelos alunos da 4ª série do ensino fundamental, no aprendizado e aplicação de regras matemáticas, em especial o conceito de divisão?

1.3 – Objetivos

1.3.1 – Objetivo geral

- Discutir o papel da linguagem no aprendizado das regras matemáticas, em especial, o conceito de divisão.

1.3.2 – Objetivos específicos

- Verificar se o uso da linguagem natural no ensino da matemática pode induzir o aluno a seguir regras que entram em conflito com as do ***jogo de linguagem*** da matemática;

- Analisar, por meio das observações e de seus registros, como os alunos compreendem e aplicam as regras matemáticas, em especial o conceito de divisão.

1.4 – Justificatva

A matemática é uma das disciplinas que mais traz dificuldades aos alunos e também uma das mais detestadas por eles, fato evidenciado na pesquisa de Silveira (2000) quando analisa o discurso que afirma que “matemática é dificil” marcado nos fatos históricos da matemática, na voz da mídia, na voz dos professores de matemática e, consequentemente, na voz do aluno, que se torna porta-voz deste discurso pré-construído. Assim, supomos pertinente a busca por informações mais detalhadas a respeito dos fatores que obstaculizam o aprendizado e o ensino da disciplina.

Apostamos nossa discussão principalmente nas dificuldades linguísticas, pois concordamos com autores com vasta experiência docente e acadêmica, como D’Amore (2007) e Dante (1991) quando afirmam que muitas vezes os principais obstáculos dos alunos no aprendizado da matemática estão relacionados com a linguagem.

Escolhemos as séries inicias, pois é onde se dão os primeiros contatos dos alunos com a linguagem matemática. Nessa fase do ensino, no Brasil, e particularmente no estado do Pará, segundo dados do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) o Indíce de Desenvolvimento da Educação Básica[7] (IDEB) está bastante abaixo do desejado. Ainda de acordo o INEP, o índice do Estado do Pará é de 2,8, bem distante da média 6 desejada.

O conceito de divisão foi escolhido porque percebi em minha curta, porém valiosa experiência como docente, que este é um dos conteúdos mais incompreendidos pelos alunos das séries inicias, fato confirmado pela professora da turma na qual realizamos nossa pesquisa de campo, quando contou que sempre que inicia um novo ano letivo, pergunta aos alunos qual o conteúdo matemático que eles menos gostaram/tiveram mais dificuldades no ano anterior (3ª série), e o conceito da divisão é sempre o mais apontado.

Recorremos, como inspiração principal para a escrita deste trabalho, às reflexões do filósofo Ludwig Wittgenstein, pois acreditamos que suas idéias tanto na filosofia da linguagem quanto na filosofia da matemática – originais e bastante interessantes, segundo nosso ponto de vista – podem ajudar a clarificar algumas questões presentes na filosofia da

[7] O Ideb é mais que um indicador estatístico. Ele nasceu como condutor de política pública pela melhoria da qualidade da educação, tanto no âmbito nacional, como nos estados, municípios e escolas. Sua composição possibilita não apenas o diagnóstico atualizado da situação educacional em todas essas esferas, mas também a projeção de metas individuais intermediárias rumo ao incremento da qualidade do ensino. Informações disponíveis no site do Inep: <http://portalideb.inep.gov.br/index.php?option=com_content&task=view&id=1 &Itemid=14>.

educação matemática, por conseguinte ajudando a compreender as dificuldades de se ensinar e de se aprender matemática, atividades realizadas via linguagem.

1.5 – Metodologia

A pesquisa consta de uma discussão teórica a respeito da discussão de linguagem e aprendizagem de matemática e, também a apresentação de algumas idéias do filósofo Ludwig Wittgenstein, principalmente da sua filosofia da linguagem e da sua filosofia da matemática. Esta etapa justifica-se por fundamentar a pesquisa teoricamente e por servir para o conhecimento do material já elaborado relacionado com o nosso trabalho.

Para obtermos dados para o “confronto” com o referencial teórico, engajamo-nos em uma pesquisa de campo, buscando as informações para o trabalho diretamente na escola, mais especificamente, na sala de aula com os alunos e a professora.

Nossa pesquisa teve lugar na Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará, em uma turma da 4ª série do ensino fundamental. A escolha da escola se deu por que esta dispõe de estrutura para receber pesquisas de campo, pois sendo uma Escola de Aplicação, está apta a receber estagiários e pesquisadores interessados em experimentações pedagógicas. Escolhemos as séries iniciais, pois, conforme mencionado na Justificativa deste trabalho, é onde se dão os primeiros contatos dos alunos com a linguagem matemática e nessa fase do ensino, no Brasil, e mais especificamente no Pará, os resultados estão abaixo do desejado.

Já que nossa intenção é observar como os estudantes aprendem, interpretam e aplicam o conceito da divisão, faz-se necessário o uso de métodos adequados que permitam uma análise satisfatória. Conforme sugerem Fiorentini e Lorenzato (2006)

> Se o pesquisador pretende investigar o movimento do pensamento dos alunos na resolução de problemas matemáticos, terá que escolher um instrumento que permita explicitar as estratégias e heurísticas utilizadas pelos alunos. Ou seja, pedir, nesse caso, que os alunos pensem em voz alta durante a resolução do problema, ou registrem no caderno como construíram sua resolução (p. 98-99).

Concordando com o pensamento dos autores, para a pesquisa em sala de aula, observamos as aulas de matemática ministradas pela professora e aplicamos atividades de resolução de problemas, seguidas de entrevistas com os alunos, além de eventuais diálogos com a professora responsável pela turma.

Em conversa com a professora responsável pela turma, ela deixou claro que não se sentiria a vontade se registrassemos suas aulas em áudio e/ou vídeo. Dessa forma, já que não tínhamos a intenção de constranger a professora, e nossa intenção era observar como é ensinado/aprendido e aplicado o algoritmo da divisão, não poderíamos interferir mais que o necessário, sob pena de comprometer a atuação da professora e dos alunos e consequentemente, prejudicar a pesquisa. Assim, os intrumentos utilizados na observação foram papel, caneta e o olhar aguçado na busca de fatos relevantes.

O objetivo da observação foi ter a possibilidade de ver como as regras matemáticas são ensinadas e como estas são compreendidas pelos alunos – sempre com atenção à linguagem utilizada e à comunicação entre alunos e professora –, visto que tivemos a oportunidade de ver as explanações da professora, bem como as dúvidas dos alunos. Foi possível, também, no momento dos exercícios, conversar com os alunos sobre suas dificuldades, quando estes chamavam pedindo auxílio. Além disso, a observação serviu para manter um maior contato com os alunos possibilitando conhecê-los melhor, e para que nos tornássemos mais próximos para o momento da aplicação das outras atividades propostas para a coleta de dados para a pesquisa.

Conforme afirma Gil (2008), a observação justifica-se por constituir elemento fundamental para pesquisas sociais e, por conseguinte, para pesquisas educacionais. Como o pesquisador vai diretamente ao local da pesquisa coletar os dados, “a subjetividade, que permeia todo o processo de investigação social, tende a ser reduzida” (GIL, 2008, p. 100). A observação possibilita obter elementos para um melhor delineamento do problema de pesquisa, bem como pode favorecer a construção de hipóteses acerca do problema em questão. Além disso, a obtenção de informações por meio de observações, ajuda diretamente no processo de análise e interpretação das resoluções apresentadas pelos alunos na aplicação da atividade e em suas respostas nas indagações da entrevista.

Se por um lado as observações são importantes para a interpretação e análise da resolução dos problemas matemáticos e para as respostas dos alunos, a aplicação de atividades pelo pesquisador serve para verificar qual a relação entre as variáveis observadas na classe – forma de ensinar da professora e modo de compreensão de seus ensinamentos pelos alunos –. Como afirmado na citação de Fiorentini e Lorenzato (2006) acima, é necessário um instrumento que permita explicitar o pensamento dos sujeitos.

Para Wittgenstein, o pensamento não implica informações privadas, mas um tipo de linguagem, que é pública, de modo que o critério para o que pensamos é sua exteriorização: “o critério para compreender o que alguém imagina ou pensa é “o que ele diz ou faz”, isto é, a sua descrição é o único modo de eu ter acesso ao o que ele imagina” (HEBECHE, 2002, p. 204). Asssim, pretendemos compreender o pensamento dos alunos, em outras palavras, suas estratégias de resolução, por meio da voz, de seus gestos e da sua produção nas atividades.

Ao entregarmos as atividades, pedimos que registrassem no papel todos os cálculos, idéias e estratégias utilizadas na resolução. Essa é uma etapa que permite, em parte, analisar a compreensão do conceito de divisão por meio da escrita dos alunos.

Para melhor compreendermos as ideias dos alunos, bem como sua compreensão das regras matemáticas, fizemos uso, também, de entrevistas, pois permitem obter informações a cerca do que eles sabem, crêem, sentem etc., como também ouvir as explicações a respeito de fatos precedentes (Gil, 2008), como suas dúvidas e soluções apresentadas na resolução dos problemas. Além disso, há a possibilidade de descobrirmos aspectos que não foram contemplados na observação e na solução das atividades.

Portanto, o objetivo das entrevistas foi dar a oportunidade para que os alunos esclarecessem suas estratégias de resolução e suas dificuldades, de modo que pudéssemos entender sua lógica, bem como entender a relação entre os dados observados, e sua lógica nas estratégias de solução dos exercícios.

Segundo a denominação de Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 121), utilizamos entrevistas semi-estruturadas, nas quais “o pesquisador [...] organiza um roteiro de pontos a serem contemplados durante a entrevista, podendo, de acordo com o desenvolvimento da entrevista, alterar a ordem dos mesmos e, inclusive, formular questões não previstas inicialmente”. Assim, as entrevistas tomaram o curso de um diálogo. Embora tivessemos algumas perguntas gerais, formuladas para todos os alunos, conforme as suas respostas, novos questionamentos eram incluídos.

A classe que observamos era composta de 25 alunos, na faixa etária entre 09 e 10 anos. Os professores para as disciplinas de matemática, português etc. eram distintos. A professora de matemática exercia sua autoridade em sala de aula sem impedir a comunicação na classe, permitindo que os estudantes fizessem questionamentos e conjecturas sobre os conteúdos ensinados. Maiores detalhes sobre a pesquisa em sala de aula serão expostos no capítulo da pesquisa em sala de aula.

Capítulo 2: Linguagem, língua, linguagem natural e linguagem matemática

Antes de discutirmos sobre a filosofia de Wittgenstein, julgamos interessante alguns esclarecimentos a respeito de língua, linguagem e linguagem matemática (o que não nos impede de já mencionar algumas de suas reflexões). Tal discussão tem a intenção de trazer noções dos diferentes aspectos de cada uma.

2.1 – Linguagem e língua

Iniciemos nossa empreitada realizando uma sucinta discussão a respeito de língua e linguagem, já que tais termos costumam confundir a nós, não especialistas no assunto. Entendemos ***linguagem*** como ***todo sistema de sinais***[8] ***convencionais que nos permite realizar atos de expressão e comunicação***. Convém destacar que a linguagem é uma instituição humana. As linguagens podem ser classificadas como verbais e não-verbais. A primeira faz uso das palavras, enquanto a segunda utiliza gestos, sons, cores, imagens, sinais etc. Muitas vezes a comunicação é feita utilizando-se os dois "tipos" de linguagem. Podemos citar, a LIBRAS (Linguagem Brasileira de Sinais) como exemplo de linguagem.

A ***língua*** caracteriza-se como um tipo particular de linguagem, constituída de palavras, e comum a um povo, a uma nação, a uma cultura que constitui o seu instrumento de comunicação, falado ou escrito. O português, o francês, o alemão etc. são exemplos de línguas.

Podemos dizer que algumas linguagens são universais, como as cores, sorrisos, sinais etc. Por outro lado, as línguas têm caráter local: fazem parte das práticas de um certo povo ou de quem se dispõe a aprender seus códigos lingüísticos e suas regras gramaticais.

Uma vez que as linguagens constituem produtos da vida em sociedade, são suscetíveis de sofrer mudanças sob pressão de necessidades diversas ao longo do tempo. Como assinala Martinet (1975), as mudanças acontecem essencialmente para satisfazer as necessidades comunicativas de seus utilizadores, adaptando-se da maneira mais

[8] Não se trata apenas do uso de palavras, também usamos gestos, entonação de voz, apontamos para objetos, etc.

econômica. Cabe mencionar ainda, que embora bastante parecida em suas funções, a linguagem difere de comunidade para comunidade, de modo que esta só “funciona” entre os membros de um mesmo grupo.

Segundo Granger (1974, p. 138) a comunicação só pode se tornar possível pela comunhão, mais ou menos imperfeita, de uma experiência entre o locutor e o receptor e enfatiza que essa experiência envolve a técnica lingüística. De forma semelhante, segundo Wittgenstein, entendemos uns aos outros porque compartilhamos um mesmo “universo discursivo”, que envolve nossas instituições, como tradições, hábitos e costumes. Daí o filósofo afirmar que “Se um leão pudesse falar, não poderíamos compreendê-lo” (IF, p. 201), isso porque a vida e hábitos de um leão são bem diferentes dos nossos. Retomaremos a questão dos significados e seus contextos no próximo capítulo.

Um termo que usamos bastante em nosso trabalho é o termo ***linguagem comum***[9]**,** que é a linguagem que usamos para nos comunicar nas mais variadas situações do dia-a-dia, muitas vezes fazendo uso, além das palavras, de gestos, olhares, entonação de voz para indicar uma intenção etc. Chamamo-la de comum em oposição às linguagens formalizadas, como a da lógica ou a linguagem matemática, que são construídas com o intuito de serem o mais abstrato e objetivas possível. De nossa parte essa denominação não se refere a alguma subordinação, hierarquia ou nível de êxito.

Nossa linguagem ordinária em muitas situações é polissêmica, podendo, às vezes, causar confusões, mas isso não as torna imperfeitas. O fato de uma palavra ou conceito ter mais de um sentido ou ser usado para diferentes propósitos em geral é visto como algo natural e até positivo: “a polissemia é um fenômeno comum nas línguas naturais, são raras as palavras que não a apresentam”, é o que diz o dicionário Houaiss (2005). A esse respeito, Machado afirma: “tais características, próprias de nossa linguagem, são responsáveis pela riqueza de expressão possível neste domínio” (1993, p. 105).

Embora as reflexões de Wittgenstein não estivessem relacionadas a uma mera questão de polissemia, ao refletir sobre a vagueza presente em nossa linguagem, o filósofo chama a atenção para o fato de que

> Nossa linguagem ‘está em ordem, tal como está’. Isto é, que nós não ***aspiramos*** a um ideal: como se nossas frases habituais e vagas não tivessem ainda um sentido totalmente irrepreensível e como se tivéssemos primeiramente de construir uma linguagem perfeita (IF, §98).

---

[9] Usaremos, sem distinção, os termos linguagem comum, linguagem ordinária, linguagem natural e linguagem do dia-a-dia.

Em nosso trabalho, mesmo sem ignorar as especificidades de cada língua, intentamos fazer considerações de caráter geral, independente da língua em questão ser o português, inglês, francês ou outra.

2.2 – Linguagem matemática

Tomando como base a definição de linguagem dada no item anterior, intentamos deixar claro nosso uso do termo ***linguagem matemática*** no presente trabalho, com a intenção de servir de alicerce para o que vamos discutir adiante. Assim, como qualquer outra linguagem, a linguagem matemática ***é um sistema de formas, um meio de comunicação, de criação humana, que é utilizado por uma certa comunidade***.

A linguagem matemática dispõe de um conjunto de símbolos próprios ou emprestados da linguagem comum que se relacionam de acordo com determinadas regras. Vejamos dois exemplos de “combinações” dos símbolos dessa linguagem[10]:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$(x + a)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$$

Além da simbologia supracitada, a linguagem matemática também faz uso de representações geométricas e gráficas, tabelas, diagramas, desenhos etc.

A linguagem matemática representa um certo “ganho” em relação à linguagem do dia-a-dia, pois é inegavelmente mais econômica, no sentido de utilizar poucos símbolos para expressar muitos conceitos e ideias. Não devemos entender essa afirmação como uma indicação de superioridade, mas apenas o assentimento de que, em certos domínios, como o científico, tal linguagem é preferida por sua busca pela precisão e universalidade.

Por exemplo, para o Teorema de Pitágoras “$a^2 + b^2 = c^2$” teríamos de enunciar “o quadrado da medida da hipotenusa é igual a soma...”. Além disso, tal linguagem busca a objetividade, de modo a excluir qualquer ambiguidade ou dupla interpretação. Se por vezes

[10] Fórmula de Báskara e Teorema Binomial, respectivamente.

a polissemia é vista com bons olhos no caso da linguagem comum, busca-se excluí-la das linguagens formalizadas.

A linguagem matemática possui algumas especificidades que merecem atenção de nossa parte: sua falta de oralidade, sua impregnação com a linguagem natural e a natureza de suas proposições. Deixemos antecipadamente claro, que não consideramos tais características como problemas, mas características próprias da linguagem em questão.

Quando crianças, aprendemos nossa linguagem comum tal qual um "treino natural". As crianças aprendem a ir buscar bolas, a sentar em cadeiras e assim aprendem, gradativamente, o significado e uso de várias palavras. Nesse período, anterior à escola o oral tem um papel muito importante no aprendizado da língua e configura-se como um degrau natural no aprendizado da escrita. Assim, as palavras na forma escrita já nascem "prenhes" de significação, mesmo que depois aprendamos novos usos.

No caso da matemática, a situação parece bem diferente. Conforme afirma Granger (1974, p. 152), o simbolismo científico, como o da matemática, em certo sentido não é uma língua autônoma, pois não possui oralidade. A propósito da matemática o filósofo dispara: "estranha linguagem essa cuja função comunicativa é freqüentemente apenas virtual e cuja presença é a de uma sombra, ou se se preferir, de uma divindade" (1974, p. 140).

Concebida como linguagem formal, linguagens construídas como opção às "imperfeitas" linguagens naturais, a linguagem matemática caracteriza-se como um sistema simbólico exclusivamente escrito. Miller[11] é enfático ao afirmar que:

> a língua com que sonhava Leibniz, sem equivocação nem anfibiologia, a língua onde tudo o que se diz inteligivelmente é dito a propósito, a língua ***Del Arte Combinatória***, é uma língua sem enunciador possível. É um discurso sem palavras (apud MACHADO, 1993, p. 106).

A linguagem matemática, para ser enunciada oralmente, não pode prescindir da linguagem natural. Em nossas escolas, por exemplo, é também através do oral que os conceitos matemáticos são ensinados. Esse "empréstimo" é um dos motivos que causam a impregnação entre língua materna e matemática nas palavras de Machado (1993). O autor mostra, por exemplo, que quando nos referimos ao tempo, espaço ou negócios usamos nossa linguagem mesclada com a linguagem matemática. Costumamos dizer "São 8 e meia", "hoje é dia 10", "quero 3 quilos", etc.

---

[11] Miller, Jacques-Alain. **Matemas.** Buenos Aires: Manantial, 1987.

Continuando, o autor afirma que "de modo geral, a linguagem ordinária e a matemática utilizam-se de termos "anfibios", ora com origem em uma, ora com origem em outra, que às vezes não percebemos a importância desta relação de troca, minimizando seu significado" (MACHADO, 1993, p. 97). Vejamos alguns exemplos: "Chegar a um ***denominador comum"***, "sair pela ***tangente***", "ver de um outro ***ângulo***", "perdas ***incalculáveis***", "numa ***fração*** de segundo". Esta relação revela-se como uma alimentação recíproca, uma complementação, troca, e não apenas um empréstimo ou prestação de serviços.

Chegado aqui, ainda temos algumas considerações a fazer a respeito da natureza das proposições matemáticas, bem como das condições de seu aprendizado; entretanto, visto que nossa base será a filosofia da matemática de Wittgenstein, julgamos que se torna mais organizado e compreensível se deixarmos sua discussão para o próximo capítulo, em que discutiremos, entre outras coisas, o ato de seguir regras na filosofia de Wittgenstein.

Capítulo 3: Algumas reflexões de Wittgenstein

Neste capítulo, apresentaremos algumas ideias de Wittgenstein que são importantes para o decorrer do trabalho, visto que vamos usá-las em nossos argumentos, bem como nas sessões de análise a respeito das dificuldades dos alunos.

3.1 - Os vários Jogos de linguagem

Como acontece que alguém diga “lajota!” e queira dizer “traga-me uma lajota”? Como ocorre que alguém diga “cinco lajotas” expressando uma informação e não um pedido? E como acontece que o “receptor” das mensagens compreenda as sentenças de uma forma e não de outra? Isto está ligado ao modo de funcionamento de nossa linguagem. Estas são apenas algumas das questões que foram objeto de reflexão do filósofo Wittgenstein. Diria ele: “Apenas numa linguagem posso querer dizer algo com algo” (IF, p. 41). Esclareceremos tal questão.

Em sua chamada segunda filosofia[12], Wittgenstein criticou a concepção referencial de linguagem que ele mesmo havia adotado em sua primeira filosofia no ***Tractatus Logico-Philosophicus.***

No ***Tractatus,*** o filósofo acreditava que tanto a linguagem quanto o mundo tinham uma estrutura lógica subjacente. A linguagem consistia de uma “coleção de proposições”, estas, por sua vez, eram compostas de nomes, os constituintes últimos da linguagem. Era necessário haver uma correspondência entre linguagem e mundo: cada nome na linguagem nomearia (descreveria) um objeto no mundo e assim cada proposição da linguagem descreveria um fato no mundo.

Nessa concepção de linguagem dizer algo é equivalente a descrever (ou nomear) algo. Deste modo, deveria haver uma correspondência “um para um” entre os elementos de uma proposição e aqueles da situação que a proposição descreve.

[12] Em geral costuma-se falar em “primeiro” e “segundo” Wittgenstein. Pode-se dizer que o que é chamado de primeiro Wittgenstein refere-se a sua filosofia no ***Tractatus Logico-Philosophicus***, primeiro livro publicado por Wittgenstein, e o que é chamado de segundo Wittgenstein refere-se aos seus escritos após 1933, época que tem como principal obra as ***Investigações Filosóficas***.

Uma proposição só teria sentido, só significaria algo se descrevesse algo no mundo; assim, caso as proposições não "apontassem" para nada no mundo, as proposições consistiriam de termos sem referência e assim seriam sem sentido[13] (FANN, 1971). As equações matemáticas, por exemplo, eram consideradas pseudoproposições, pois, segundo o ***Tractatus,*** nada dizem a respeito da realidade.

Para a determinação da estrutura subjacente da linguagem (e consequentemente do mundo), suas proposições deveriam ser submetidas à análise lógica[14]. Nesse modelo de análise, se uma proposição é verdadeira, o fato que ela descreve existe; se a proposição é falsa, o fato que ela descreve não existe (FANN, 1971). Interessante notar que no ***Tractatus*** a significação da linguagem é considerada ***a priori***, isto é, independente dos usos feitos pelos seres humanos.

Além disso, um dos pressupostos básicos no ***Tractatus*** é que cada proposição deveria ter um sentido claramente definido: "A proposição exprime de uma maneira determinada, claramente especificável, o que ela exprime: a proposição é articulada" (TLP, §3.251). Isso porque era necessário haver uma configuração precisa de objetos no mundo que a verificasse ou falsificasse: "A realidade deve, por meio da proposição, ficar restrita a um sim ou não" (TLP, §4.023), isto é, assim como não poderia haver objetos (ou fatos) indeterminados na realidade, não poderia haver significado indeterminado para uma proposição.

Nenhuma possibilidade de vagueza era concebível. Qualquer proposição que sob escrutínio mostrava-se incapaz de ser submetida à análise lógica – isto é, se não era possível definir um valor de verdade (sim ou não) para a proposição – era considerada um "absurdo", não era considerada uma proposição de fato (FANN, 1971).

Nas ***Investigações Filosóficas***, Wittgenstein precisou reconsiderar o seu "velho modo de pensar" e teve de reconhecer "os graves erros que publicara naquele primeiro livro" (IF, prefácio), rejeitando a idéia de que a linguagem teria uma natureza única. Por meio de um método que ele chama de "terapia filosófica", o filósofo pretende a "cura" para uma "doença" presente na filosofia, a saber, os equívocos que são consequência do uso

[13] Todos os trechos de língua estrangeira aqui citados terão tradução para o português de nossa autoria.

[14] Em poucas palavras, a análise lógica é o processo pelo qual se decide pela verdade ou falsidade de uma proposição através de uma investigação dos elementos que a compõem. Nesse modelo de análise, uma proposição complexa é decomponível em partes menos complexas, até que, em última instância, chegue-se em elementos indecomponíveis, chamados de simples.

dogmático da concepção referencial de linguagem. Lembrando que para Wittgenstein a principal fonte dos problemas filosóficos é a linguagem, ou melhor, um mal uso dela.

Wittgenstein inicia as ***Investigações*** com uma citação de Santo Agostinho, a qual denota o modelo referencial de linguagem, o mesmo adotado no ***Tractatus***. Podemos destacar a essência dessa concepção através dos seguintes enunciados: a) as palavras da linguagem denominam objetos; b) frases são ligações de tais denominações; c) cada palavra tem um significado, a saber, o objeto que a palavra substitui (IF, §01).

Wittgenstein então argumenta que esse sistema não é tudo aquilo que chamamos de linguagem, pois não a usamos apenas para nomear. Diz ele:

> É como se alguém explicasse: "Jogar consiste em empurrar coisas, segundo certas regras, numa superfície..." – e nós lhe respondêssemos: "Você parece pensar nos jogos de tabuleiro, mas nem todos os jogos são assim. Você pode retificar sua explicação, limitando-a expressamente a esses jogos" (IF, §03).

Wittgenstein então sugere comparar a linguagem com as alavancas de uma locomotiva: todas são mais ou menos parecidas (e por isso podem causar confusões), afinal todas serão manobradas com a mão; entretanto, cada uma tem uma função diferente (IF, §12). Em outro trecho, Wittgenstein compara a linguagem com um conjunto de ferramentas. As ferramentas guardam semelhanças entre si, mas cada uma tem sua função

> Pense nas ferramentas em sua caixa apropriada: lá estão um martelo, uma tenaz, uma serra, uma chave de fenda, um metro, um vidro de cola, cola, pregos e parafusos. – Assim como são diferentes as funções desses objetos, assim são diferentes as funções das palavras. (E há semelhanças aqui e ali.) (IF, §11).

A analogia entre linguagem e ferramentas deve lembrar-nos de que palavras são usadas para diferentes propósitos. A linguagem não é uma ferramenta que serve a um propósito, mas uma coleção de ferramentas, servindo a uma variedade de finalidades. A linguagem não é uma prática ou um instrumento que tem uma função essencial ou que serve a um propósito essencial, mas um conjunto de práticas.

> É interessante comparar a multiplicidade das ferramentas da linguagem e seus modos de emprego, a multiplicidade das espécies de palavras e frases com aquilo que os lógicos disseram sobre a estrutura da linguagem. (E também o autor do Tractatus Logico-Philosophicus.) (IF, §23).

Há inúmeras possibilidades de atividades nas quais empregamos a linguagem. Podemos usá-la para comandar, descrever, relatar, conjecturar, contar histórias, representar teatro, ler, contar piadas, cantar, pedir, agradecer, maldizer, saudar, orar etc. (IF, §23) e cada atividade, cada contexto possui técnicas de aplicação diferentes.

As diversas práticas nas quais a linguagem está inserida, os diferentes contextos de emprego da linguagem, são chamados por Wittgenstein de ***jogos de linguagem***:

> Chamarei também de "jogos de linguagem" o conjunto da linguagem e das atividades com as quais está entrelaçada. O termo "***jogo*** de linguagem" deve aqui salientar que o falar da linguagem é uma parte de uma atividade ou de uma forma de vida. (IF, §07, §23).

Wittgenstein costumava usar o termo "forma de vida" referindo-se à cultura, às nossas práticas, tradições e costumes e mitos; para enfatizar o entrelaçamento entre cultura, visão de mundo e linguagem. Uma forma de vida é uma formação cultural ou social, a totalidade das atividades comunitárias em que estão imersos os nossos jogos de linguagem (GLOCK, 1998).

Assim, o sentido de uma proposição não dependia mais de uma análise exata, nem era necessário que tivesse um significado exato para que pudéssemos entendê-la, afinal inexato não significa inútil (IF, §88), assim como uma delimitação imprecisa não é propriamente delimitação nenhuma (IF, §99). Wittgenstein reconhece que – ao contrário do tratamento dado a linguagem no ***Tractatus*** – o sentido de uma proposição não podia ser dado independente do contexto ou forma de vida na qual ocorre, diz ele: "Estamos falando do fenômeno espacial e temporal da linguagem, não de um fantasma fora do espaço e do tempo" (IF, §108).

O significado de uma expressão linguística, agora, é (na grande maioria dos casos) seu uso na linguagem (IF, §43). O sentido de uma palavra ou expressão lingüística, bem como sua lógica e técnica de uso, depende da atividade em que está envolvida, de nossos hábitos e costumes:

> Não há uma "lógica da linguagem", mas muitas; a linguagem não tem nenhuma essência única, mas é uma vasta coleção de diferentes práticas, cada qual com sua própria lógica. O significado não consiste na relação entre palavras e coisas ou numa relação figurativa entre proposições e fatos; o significado de uma expressão é, antes, seu ***uso*** na multiplicidade de práticas que vão compor a linguagem. Além disso, a linguagem não é algo completo e autônomo que pode ser investigado independentemente de outras considerações, pois ela se entrelaça com todas as atividades e comportamentos humanos; conseqüentemente nossos inúmeros diferentes usos dela recebem conteúdo e significado de nossos afazeres práticos, nosso trabalho, nossas relações com as outras pessoas e com o mundo que habitamos (GRAYLING, 2002, p. 90).

A palavra "água", por exemplo, pode ser usada para referir-se ao elemento natural assim denominado; para ensinar uma criança ou a um estrangeiro sua aplicação como nome; sob a forma de um pedido, quando estamos sedentos; posso usá-la como pedido de rendição a meu adversário; como pedido urgente daquilo que ela denomina, para apagar um incêndio e muitos outros usos que podemos imaginar (MORENO, 2000, p. 55-56).

Por apontar que o significado atribuído a uma expressão linguística depende do contexto de aplicação, tais esclarecimentos sobre o conceito de ***jogo de linguagem*** são bastante importantes para nossa discussão a respeito do contexto de uma regra ou conceito matemático.

Voltando aos nossos primeiros questionamentos, é o jogo de linguagem que determina o que queremos dizer. Como vimos, os jogos de linguagem estão apoiados em atividades, em práticas que envolvem a linguagem. É no uso que as palavras adquirem seus significados, ou seja, dentro de seus contextos, que envolvem tom de voz característico em cada frase, expressões faciais etc. O que nos permite compreender as ações e palavras dos outros é a comunidade linguística que partilhamos, o mesmo universo de atividades e práticas linguísticas que compartilhamos.

Importante notar que, embora um conceito tenha diversos usos isso não pressupõe ambiguidade. O fato de usarmos palavras como água, número ou jogo em diferentes contextos não implica que tenhamos diferentes conceitos de água, jogo ou de número, mas sim diferentes usos desses conceitos. É o que veremos no próximo item.

3.2 – Semelhanças de Família

Segundo o essencialismo – corrente de pensamento segundo a qual a pesquisa científica deve penetrar até a essência das coisas para poder explicá-las –, é necessário haver algo comum a todas as instâncias de um conceito que explique porque elas caem sob esse conceito. Um conceito deveria ser claramente delimitado para que fosse assim chamado. Toda a vagueza deveria ser eliminada. Assim, seria necessário descobrir a natureza, a essência do conceito, motivo pelo qual todos os seus usos caem sob o mesmo conceito. Por exemplo, deveria haver algo comum a tudo aquilo que chamamos de jogo, a essência do conceito de jogo.

Como veremos adiante, através de conceitos como o ***de jogo de linguagem*** e o de ***semelhanças de família***, Wittgenstein atacou a visão essencialista descrita acima, argumentando que não há algo comum a tudo aquilo que chamamos de jogo, em virtude da qual empregamos para todos a mesma palavra.

Wittgenstein costumava usar a expressão “semelhanças de família” para designar a semelhança entre os usos de palavras ou conceitos, não por sua posse comum de um conjunto de características essenciais ou definidoras, mas por uma relação geral de similaridade entre os diferentes usos.

Como vimos, podemos dizer que os ***jogos de linguagem*** são os diferentes contextos de aplicação de uma palavra ou conceito. E diferentes contextos implicam diferentes lógicas e técnicas de aplicação das palavras. Desta maneira, uma mesma palavra pode indicar diferentes ações, dependendo do contexto em que é empregada, dependendo da atividade na qual está envolvida. Entretanto, mesmo que um conceito não possa ser definido por uma característica, por um traço comum a todos os seus diferentes usos, não significa que não tenha ***unidade.***

No §65 das ***Investigações*** Wittgenstein é objetado por seu interlocutor[15]:

> “Você simplifica tudo! Você fala de todas as espécies de jogos de linguagem possíveis, mas em nenhum momento disse o que é o essencial do jogo de linguagem, e portanto da própria linguagem. O que é comum a todos esses processos e os torna linguagem ou partes da linguagem. Você se dispensa pois justamente da parte da investigação que outrora [no ***Tractatus***] lhe proporcionara as maiores dores de cabeça, a saber, aquela concernente à ***forma geral da proposição*** e da linguagem”.

O filósofo então responde:

> E isso é verdade – Em vez de indicar algo que seja comum a tudo aquilo que chamamos de linguagem, digo que não há uma coisa comum há esses fenômenos, em virtude da qual empregamos para todos a mesma palavra, – mas sim que estão aparentados uns com os outros de muitos modos diferentes. E por causa desse parentesco ou desses parentescos, chamamo-los todos de “linguagens”. Tentarei elucidar isso. (IF, §65).

Para exemplificar sua afirmação, Wittgenstein discorre sobre os processos aos quais chamamos de jogos (jogos de tabuleiros, jogos de cartas, de bola etc.):

> Se passarmos agora aos jogos de bola, muita coisa comum se conserva, mas muitas se perdem. – São todos “***recreativos***”? Compare o xadrez com o jogo da amarelinha. Ou há em todos um ganhar e um perder, ou uma concorrência entre os jogadores? Pense nas paciências. Nos jogos de bola há um ganhar e um perder; mas se uma criança atira a bola na parede e a apanha outra vez, este traço desapareceu. Veja que papéis desempenham a habilidade e a sorte. E como é diferente a habilidade no xadrez e no tênis. Pense agora nas cantigas de roda: o elemento de divertimento está presente, mas quantos dos outros traços característicos desapareceram! E assim podemos percorrer muitos, muitos outros grupos de jogos e ver semelhanças surgirem e desaparecerem. E tal é o resultado

[15] Wittgenstein adotou um estilo de escrita a várias vozes. Em muitos de seus trechos o filósofo está dialogando com um de seus interlocutores, ora com Russel, ora com Frege, etc. Estes representam diferentes concepções filosóficas a respeito do tema tratado por Wittgenstein.

> desta consideração: vemos uma rede complicada de semelhanças, que se envolvem e se cruzam mutuamente. Semelhanças de conjunto e de pormenor. Não posso caracterizar melhor essas semelhanças do que com a expressão “semelhanças de família”; pois assim se envolvem e se cruzam as diferentes semelhanças que existem entre os membros de uma família: estatura, traços fisionômicos, cor dos olhos, o andar, o temperamento etc., etc. – E digo: os jogos formam uma família (IF, §66-67).

Um trecho de ***The blue and brown books*** pode ser bastante esclarecedor:

> Estamos inclinados a pensar que deve haver algo em comum a todos os jogos, por exemplo, e que esta propriedade comum é a justificativa para aplicação do termo geral “jogo” para os vários jogos; ao passo que os jogos formam uma ***família***, cujos membros tem semelhanças de família. Alguns deles tem o mesmo nariz, outros as mesmas sobrancelhas e outros, ainda, a mesma maneira de andar, e essas semelhanças se sobrepõem umas às outras (BB, p. 17).

Wittgenstein rejeitava a ideia de vários significados diferentes, ainda que relacionados, para um mesmo conceito. Mesmo que este não possa ser definido por uma característica, por um traço comum a todos os seus diferentes usos, não significa que não tenha ***unidade.*** Os jogos, por exemplo, formam uma família (IF, §67) e é em virtude dessa unidade que falamos do conceito de jogo, do conceito de número etc. (IF, §68, 70). Em se tratando de conceitos definidos por semelhanças de família, é a unidade de uma família de usos que nos permite falar do conceito de “tal e tal coisa”.

Cada situação de emprego do conceito revela uma parcela, um aspecto do significado. Os usos que fazemos a tudo que chamamos de número, por exemplo, seja número real, racional, número de canetas ou metros, cada um, revelam um uso diferente do conceito de número (embora se possa definir de forma bem delimitada o conceito de número real, racional etc.).

Embora conceitos definidos por semelhanças de família tenham diferentes usos, isso não significa que sejam ambíguos ou polissêmicos. Em geral, não temos problemas no emprego da linguagem; a despeito de seus diversos usos, sabemos usar palavras como “jogo” e “número” em seus diversos contextos de aplicação sem confusões.

Wittgenstein reconhece que usamos muitos conceitos sem uma definição precisa, que “conceito” é um conceito vago, mas salienta que isso não nos causa problemas no emprego da linguagem. O conceito de “jogo”, por exemplo, possui contornos imprecisos (IF, § 71). A esse respeito o interlocutor de Wittgenstein então pergunta: ““Mas, um conceito impreciso é realmente um ***conceito***?””, e o filósofo responde: “Uma fotografia pouco nítida é realmente a imagem de uma pessoa? Pode-se substituir com vantagem uma imagem pouco nítida por uma nítida? Não é a imagem pouco nítida justamente aquela de que, com freqüência, precisamos?" (IF, §71).

Um conceito definido por semelhanças de família pode adquirir novos usos, mas isso não muda o conceito; este é "alargado" com o acréscimo de novos membros à família. O conceito de "arte", por exemplo, expandiu-se para incluir novos parentes como o cinema, a fotografia e o balé, sem nenhuma mudança no significado da palavra "arte" (BAKER & HACKER, 2005, p. 214).

Algo semelhante pode ser dito de alguns conceitos matemáticos. O conceito de número, por exemplo, foi expandido com a inclusão de novos membros, como os números imaginários. Mesmo que os números tenham sido pensados "puros" ou abstratos, sua aplicação no empírico não implica um novo conceito, mas sim o "alargamento" do conceito de número. De forma mais geral, mesmo que um conceito matemático não tenha sido criado com vistas ao empírico, sua aplicação prática não é um novo conceito, mas sim uma nova "cara", um novo uso do conceito. O uso "civil" da matemática é uma das "caras" da disciplina.

Na ***Observações sobre os Fundamentos da Matemática,*** Wittgenstein chama a atenção para o fato de que a matemática é um fenômeno antropológico, exercendo várias funções com diferentes objetivos em nossas práticas comunitárias. A respeito dos vários usos que o cálculo pode desempenhar ele nos convida a refletir se "Seria alguma surpresa se a técnica de cálculo tivesse uma família de aplicações?" (RFM, V, §08). O que chamamos de matemática, diz o filósofo, é uma família de atividades com uma família de propósitos (RFM, V, §15).

Feitos tais esclarecimentos sobre os diferentes usos de um conceito ou expressão lingüística, vejamos mais de perto o que diz Wittgenstein a respeito de "seguir regras", em especial regras matemáticas. Semelhante às expressões linguísticas, um signo matemático, como veremos, não carrega ***em si*** sua aplicação, é no uso que ele adquire significado. Esta é uma das questões que discutiremos no próximo item.

3.3 – As regras na filosofia de Wittgenstein

A discussão sobre regras na filosofia de Wittgenstein refere-se ao ato de seguir regras em geral: regras matemáticas, regras no uso das palavras, obedecer a comandos, guiar-se por uma placa de orientação (como as de transito) etc. A discussão sobre a atividade de seguir regras é um dos temas centrais na filosofia do chamado segundo Wittgenstein e, embora seus esclarecimentos e exemplos sejam bastante interessantes, discutiremos apenas as questões que julgamos relevantes para nossos propósitos.

Em seus trabalhos, Wittgenstein parecia interessado em saber como alguém é capaz de compreender e seguir regras; como uma regra (ou ordem) poderia implicar sua aplicação, pois qualquer modo de agir poderia, de alguma forma, ser interpretado como de acordo com a regra (IF, §201).

Tomemos o exemplo dado pelo filósofo austríaco. Se estamos ensinando alguém a construir séries numéricas do tipo "0, n, 2n, 3n...", esperamos que ele seja capaz de construir séries como "0, 1, 2, 3..." ou "0, 2, 4, 6...". Uma questão que poderíamos colocar é: "Como deve o aprendiz, em um determinado ponto, reagir à ordem "some 2", se ele dispõe apenas de exemplos e explicações finitas, ao contrário da série que é infinita?

Estamos inclinados a pensar que a regra contém em si mesma todas suas possibilidades de aplicação, como se um signo (uma palavra, frase, gesto etc.) carregasse seu significado independente da aplicação feita por seus usuários, independente do contexto no qual ocorre. No caso da série numérica, temos a tendência de achar que uma vez dada a ordem "+n", todas as passagens já estariam antecipadas:

> Sua idéia foi a de que aquela significação da ordem tinha já, ao seu modo, feito todas aquelas passagens: seu espírito como que voava adiante, ao dar significação, e fez todas aquelas passagens antes que você tivesse chegado corporalmente a esta ou àquela. Você tendia a empregar expressões tais como: "As passagens ***realmente*** já estão feitas mesmo antes que eu as faça por escrito, oralmente ou mesmo em pensamento". E parecia como se fossem já predeterminadas de um modo ***peculiar***, como se fossem antecipadas (IF, §188).

Entretanto, como afirma Wittgenstein, "Todo signo ***por si só*** parece morto", ou seja, não carrega em si próprio seu sentido, não tem significação independente do uso que fazemos dele, da situação na qual está inserida. Assim, o filósofo conclui: "O ***que*** lhe da vida? No uso ele ***vive*** (IF, §432).

Então, como sei o que fazer em cada passo? Como a regra pode implicar sua aplicação? Wittgenstein faz questionamentos semelhantes: "O que tem a ver a expressão da regra – digamos o indicador de direção – com minhas ações? Que espécie de ligação existe aí?" e então responde "Ora, talvez esta: ***fui treinado para reagir de uma determinada maneira a este signo e agora reajo assim***". [...] alguém somente se orienta por um indicador de direção na medida em que haja um uso constante, um hábito (IF, §198, nosso itálico). Portanto, o critério para como a ordem, a regra etc. é significada depende da prática comum de aplicação da regra, ***da forma como fomos ensinados a usá-la***. Decorre disso sabermos o que fazer em cada passo diferente (IF, §190)

Wittgenstein esclarece sua posição quando salienta que seguir regras é mais uma das atividades que fazem parte de nossa vida, é uma instituição humana, faz parte de nossos hábitos e costumes, como comer com talheres da forma que comemos, sentar em cadeiras da forma que sentamos etc., como ele afirma nas ***Investigações*** §199:

> O que chamamos "seguir uma regra" é algo que apenas ***uma*** pessoa pudesse fazer apenas ***uma*** vez na vida? [...] Não pode ser que apenas uma pessoa tenha, uma única vez, seguido uma regra. Não é possível que apenas uma única vez tenha sido feita uma comunicação, dada ou compreendida uma ordem etc.

Este trecho merece algum esclarecimento. Conforme explica Fann (1971), a preocupação de Wittgenstein não é empírica, mas lógica. Obviamente, podemos imaginar que alguém invente uma regra, a siga apenas uma vez e não a use mais. Mas se há a possibilidade de isso acontecer, é porque já existem regras e a prática de segui-las: "É claro que eu poderia inventar um jogo de tabuleiro hoje, o qual nunca seria realmente jogado. Eu simplesmente o descreveria. Mas isso só é possível porque já existem outros jogos semelhantes, isto é, porque esses jogos ***são jogados"*** (RFM, VI, §32). Ou seja, jogos, assim como a linguagem, o ato de seguir regras etc. são instituições humanas: "Seguir uma regra, fazer uma comunicação, dar uma ordem, jogar uma partida de xadrez são ***hábitos*** (costumes, instituições)" (IF, §199). Seguir regras pressupõe uma sociedade, uma forma de vida.

Assim, Wittgenstein salienta o fato de o que constitui uma regra é nosso uso coletivo dela. Seguir regras é uma prática geral estabelecida pela concordância, pelo hábito, pelo treino. A própria prática de seguir uma regra define o que está de acordo ou desacordo com a mesma, ou seja, temos critérios públicos para julgar a aplicação de uma regra como correta ou incorreta.

A prática de seguir regras está pautada na regularidade das ações: por isso o autor das ***Investigações*** argumenta que as palavras "acordo" e "regra" são aparentadas. Wittgenstein salienta que é da maior importância que todos ou a grande maioria de nós estejamos de acordo em certas coisas: "posso estar completamente seguro, por exemplo, de que a maioria dos seres humanos que vejam esse objeto chamariam 'verde' sua cor" (RFM, VI, §39). Isto é, se não houvesse um uso ***estabelecido*** das palavras entre seus usuários, não poderíamos nos comunicar.

Para ser mais enfáticos, podemos dizer que se o pano de fundo do costume (prática, regularidade) de seguir uma regra fosse removido, a própria regra desapareceria (FANN, 1971). Vejamos um exemplo dado por Wittgenstein nas ***Investigações***:

"Como acontece que a seta ⟶ aponte? Não parece já trazer em si algo além de si mesma?" (IF, §454).

Wittgenstein então argumenta que sua significação não reside em algo acontecer em nossa mente ou num passe de mágica:

"Este apontar ***não*** é um passe de mágica que apenas a alma pode realizar. A seta aponta apenas na aplicação que o ser vivo faz dela" (IF, §454).

Se em nossas atividades diárias (hábitos, costumes) não houvesse aplicações para a seta, ela ainda apontaria? Se não houvesse a convenção de como usar um indicador de direção (uma placa de trânsito, por exemplo), se cada um de nós o interpretássemos de um modo particular, ele ainda serviria para indicar a direção? Cremos que a resposta é negativa. De forma semelhante, não poderíamos chamar isto e aquilo de vermelho se não concordássemos em relação ao nome das cores, tampouco poderíamos calcular se cada um de nós contasse de uma forma diferente. De nossa exposição seguem algumas consequências, todas interligadas.

Em Primeiro lugar, como a regra não contém em si mesma suas aplicações, estas não são de forma alguma óbvias ao aprendiz, ou seja, precisam ser ensinadas ou aprendidas[16]. Se "a conexão entre uma fórmula aritmética e sua aplicação não é diretamente visível. Então como pode o aprendiz saber o que queremos dizer? Por meio de nossas explicações e instruções!" (GLOCK, 1998, p. 316).

Em vários de seus escritos de sua segunda filosofia, Wittgenstein deixa claro sua opinião de que é necessário o treino e o uso de exemplos para o ensino de algo. O treino é o fundamento da explicação (Z, §419), de seguir regras (IF, §143) e do cálculo matemático (LFM, p. 58). Diz ele: "São necessárias, para estabelecer uma prática, não só regras, mas também exemplos. Não consigo descrever como (em geral) aplicar regras, exceto ***ensinando-te, treinando-te*** a aplicar regras (DC, §139; Z, §318).

---

[16] Conforme aponta Macmillan (1995), Wittgenstein salienta que em certas situações aprendemos muitas coisas mesmo que não haja a intenção do ensino. As informações são "engolidas" sem explicações. Por exemplo, quando uma criança que está aprendendo sua linguagem sente dores, ela vai expressar essa dor de alguma forma, chorando por exemplo. Seus pais então vão dizer (ou indagar) que seu filho está com dores e assim a criança aprende este uso da palavra dor.

Talvez tais afirmações a respeito da relação entre ensino e aprendizado pareçam, em um primeiro momento, triviais, mas como veremos mais adiante, temos como consequência algumas importantes reflexões para a Educação Matemática.

Em segundo lugar, visto que uma regra não contém em si mesma sua aplicação, esta, seja qual for o caso – uma regra jurídica, uma regra gramatical, um sinal de trânsito, uma regra matemática etc. – não pode estar imune a mal-entendidos ou erros em seu emprego.

Analisando a vagueza de nossa linguagem (que apesar de muitas vezes ser vaga, está em ordem) Wittgenstein salienta que nenhuma explicação pode estar imune a mal-entendidos. Em um dos trechos, nas ***Investigações,*** ele afirma:

> Quando digo a alguém: "Pare mais ou menos aqui", – Pode essa elucidação não funcionar perfeitamente? E qualquer outra não pode também falhar? [...] ***Um*** ideal de exatidão não está previsto; não sabemos o que devemos nos representar por isso (IF, §88).

De forma semelhante, nenhuma regra está isenta de desvios no emprego, nem mesmo as da matemática. Segundo Wittgenstein, pode sempre haver situações nas quais surjam dúvidas de como aplicá-la (IF, §186). Em outro trecho ele afirma: "Uma regra se apresenta como um indicador de direção. [...] algumas vezes deixa dúvidas, outras não. E isto não é mais nenhuma proposição filosófica, mas uma proposição empírica" (IF, §85). O fato de termos segurança na aplicação de uma regra em um determinado contexto não garante que saberemos aplicá-la em um novo contexto.

Para o filósofo austríaco, inclusive, muitas vezes seguimos regras de forma mecânica, "sem refletir" (o que não significa que a compreensão seja algo mecânico (GF, §42)). Entretanto, se muitas vezes não temos dúvidas quando seguimos regras, isto é reflexo de nosso treino, nossa prática, de nossa habilidade na atividade em questão:

> Não é assim? Primeiro, as pessoas usam uma explicação, uma tabela, consultando-a; mais tarde, por assim dizer, consultam-na na cabeça (trazendo-na para diante do olho interior ou algo assim) e, finalmente, trabalham sem a tabela, como se nunca tivesse existido (GF, §43).

Seria penoso se fosse necessário uma nova interpretação ou reflexão todas as vezes que tivéssemos que usar a regra "+ 2" ou adicionar "2 + 2", por exemplo. Para que se torne eficiente é preciso fazê-lo de forma rápida e razoavelmente sem dúvidas, é necessário tornar-se um hábito, algo rotineiro. Parafraseando Wittgenstein, preciso excluir a tabela de meu jogo, pois se continuo recorrendo a ela sou como um homem cego recorrendo ao sentido do tato (GF, §43). Nossa prática é tal, em algumas atividades, que temos total segurança em seguir certas regras, como, por exemplo, continuar uma série numérica, mas sempre pode haver uma situação na qual surjam dúvidas.

Importa-nos, ainda, apontar algumas características de um tipo particular de regra, a saber, as regras matemáticas, tal como Wittgenstein as vê.

3.4 – As regras matemáticas

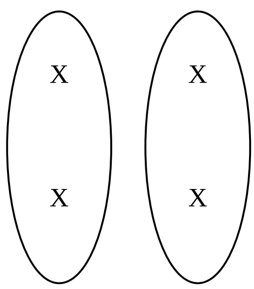
De forma semelhante ao aprendizado e uso de nossa linguagem e nossa prática de seguir regras, a concordância, a regularidade, enfim, os hábitos e asserções de nossa forma de vida são imprescindíveis para os resultados na matemática e também para seu aprendizado. Na parte II das ***Investigações*** Wittgenstein afirma:

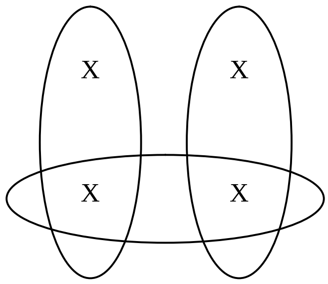
> Esta reflexão [a respeito da concordância entre os homens] deve valer também para a matemática. Se não houvesse essa total concordância, os homens não aprenderiam a matemática que aprendemos. Seria mais ou menos diferente da nossa, até o ponto de ser irreconhecível (IF, II, p. 203).

Assim, Wittgenstein visa mostrar que nossas proposições matemáticas são convencionais, ou seja, dependem também de nossa visão de mundo, e não de uma "realidade matemática" transcendental. Decorre que, de forma semelhante ao aprendizado de nossa linguagem, as proposições matemáticas precisam ser ensinadas, não são aprendidas naturalmente nem são óbvias ao aprendiz.

Nas ***Observações sobre os Fundamentos da Matemática,*** Wittgenstein evoca alguns procedimentos, como métodos de medida e de cálculo, que a nós parece aberrante, entretanto, poderia muito bem fazer parte dos costumes de outra comunidade diferente da nossa. Por exemplo, o filósofo afirma que para uma outra comunidade, 4 poderia ser o resultado de "2+2+2" e não de "2+2":

> "Basta que contemples a figura



> para ver que 2+2=4". Então me basta ver a figura
>
> 
>
>
> para ver que 2+2+2=4 (RFM, I, §38).

Wittgenstein mostra que nossas proposições matemáticas são convencionais, não possuem uma "essência", não descrevem nenhuma realidade ou fatos mundanos. Dizemos que um homem sabe que "1 + 1 = 2" porque ele expõe esse resultado em concordância com o restante de nós (LFM, p. 30) e não porque esta proposição se refere a alguma realidade, seja no mundo sensível ou em qualquer outro que possamos imaginar.

As proposições matemáticas são normativas, não descrevem "entidades", nem objetos, sejam eles empíricos, abstratos ou mentais, não descrevem ***nada*** (embora possuam inúmeros ***usos*** descritivos), e sim expressam normas, regras a serem seguidas.

Para explicar o que afirmamos, julgamos bastante esclarecedora a afirmação de Wittgenstein de que todas as proposições matemáticas são ***regras gramaticais.*** Propomos, através de esclarecimentos sobre essa afirmação, apontar a natureza das proposições matemáticas. Diz Wittgenstein:

> Lembremo-nos de que, em matemática, estamos convencidos de proposições ***gramaticais***; a expressão, o resultado desse convencimento é, portanto, que ***aceitamos uma regra***. Estou tentando dizer algo como isto: mesmo que a proposição matemática demonstrada pareça referir-se a uma realidade fora de si mesma, esta é apenas a expressão da aceitação de uma nova medida (da realidade) (RFM, III, §26-27).

O filósofo não usa o termo "gramática" no seu sentido usual, visto que ele incluiria como pertencente à gramática regras que um linguísta não incluiria. A gramática, tal como Wittgenstein a usa, define o modo como as expressões lingüísticas são usadas, descreve as regras de uso da linguagem, define o que faz e o que não faz sentido dizer e especifica quais combinações (de palavras ou expressões linguísticas) são possíveis ou não, isto é, regras gramaticais são padrões para o uso correto de expressões lingüísticas.

É nesse sentido que Wittgenstein costuma falar na gramática de certas palavras ou conceitos, visto que aquela governa o uso destes. A gramática da palavra “xadrez”, por exemplo, é constituída pelas regras deste jogo, regras que permitem algumas ações e proíbem outras. Se ao jogar uso outras regras, não estou jogando xadrez. Se é função da gramática definir as regras da linguagem, pode-se falar, como o faz Wittgenstein, na gramática de certos conceitos ou palavras, como a “gramática do xadrez”.

Já as ***proposições gramaticais,*** tais como: “2 + 2 = 4”, “todos os homens solteiros não são casados”, “bebês não podem fingir”, “O vermelho existe”, são proposições que expressam regras gramaticais, estas se diferenciam de enunciados empíricos, pois nada descrevem, nada dizem a respeito do mundo, apenas nos fornecem regras para o uso de palavras ou conceitos, estabelecem relações internas entre conceitos (entre “solteiro” e “não casado”, por exemplo), nos permitem transformações de proposições empíricas: de “Wittgenstein era solteiro” para “Wittgenstein não era casado” (GLOCK, 1996, p. 202).

Entretanto, é preciso notar que uma mesma proposição pode ser empírica ou gramatical, dependendo do contexto no qual ocorre, do uso que fazemos dela. Uma mesma proposição pode ser usada para a) descrever o próprio uso das palavras e b) descrever objetos:

> uma mesma afirmação, como “isto é branco”, pode ter, ora uma função descritiva, ora uma função normativa, dependendo do contexto da enunciação. Se for uma resposta à pergunta “o que é branco?” estará sendo empregada normativamente [uso a)], enquanto que em um outro contexto, pode estar sendo empregada simplesmente para descrever a cor de um determinado objeto [uso b)] (GOTTSCHALK, 2077, p. 117).

Gottschalk, a partir de Wittgenstein, nos mostra um uso a) e um uso b) da proposição “isto é branco”. No uso a), ao apontar uma “amostra” da cor branca, não estamos falando de objetos, mas explicitando nossa convenção linguística de chamar “branco” a tal cor; no uso b), a frase “isto é branco” está sendo usada para descrever um objeto de cor “branco”.

Segundo Wittgenstein, a dificuldade em distinguir o uso gramatical e o uso descritivo das proposições é uma das causas das confusões e problemas filosóficos (dificuldade essa que também confundiu o autor do ***Tractatus***). Muitas vezes, acreditamos estar descrevendo algo com certa proposição quando na verdade é uma convenção lingüística que está sendo proposta[17].

Proposições gramaticais não são verdadeiras nem falsas, estas são anteriores a verdade ou falsidade, definem o que faz sentido chamar de verdadeiro ou falso. A proposição “2 + 2 = 4” não é verdadeira nem falsa, mas estabelece que é falso dizer, por exemplo, que “dois mais dois é igual a 3”, ou seja, que há algum erro no cálculo. Além disso, proposições gramaticais não podem ser verificadas empiricamente. Não há como verificar empiricamente, por exemplo, que “o branco é mais claro que o preto” analisando objetos das referidas cores. Esta proposição exprime uma regra aceita tacitamente quando falamos das cores branco e preto, conforme explica Moreno:

> A diferença que existe entre essas duas cores, e que independe da linguagem, é recuperada linguisticamente sob a forma de atribuições de nomes e de relações entre conceitos – atribuições que são convencionais e não necessárias. Assim, a relação “mais claro que” não reproduz uma relação entre fatos, mas institui uma relação entre conceitos, o branco e o preto. Não é possível verificar empiricamente que o branco é mais claro que o preto, mas apenas postular essa relação entre dois conceitos de cor, ou ainda usar esses conceitos segundo aquela relação. Da mesma maneira, com maior evidência intuitiva, os fatos também não podem negar essa relação entre as duas cores (1995, p. 77).

Proposições gramaticais são enunciados que usamos com inteira certeza, conforme diz Wittgenstein “Aceitar uma proposição como inabalavelmente certa significa usá-la como uma regra gramatical” (RFM, III, §39), são proposições que não conseguimos imaginar de outra forma. Se alguém nos diz que um bebê pode fingir, nossa reação não é dizer que não é verdade, mas que é um absurdo, pois, de acordo com nossas atuais regras linguísticas não faz nenhum sentido dizer que um bebê pode fingir. O mesmo se pode dizer de “2 + 2 = 4”. Quando usamos esta proposição matemática para nossos cálculos, não nos perguntamos por sua verdade, mas a tomamos como base, a tomamos como certa.

Todas as proposições da matemática, como já havíamos adiantado, são proposições gramaticais. A proposição matemática “2 + 2 = 4” não descreve nada, não diz respeito a fatos empíricos, tem na verdade um papel prescritivo: ***estabelece que quatro é o resultado correto quando somamos dois mais dois***. Se o resultado não for quatro, o cálculo realizado foi outro, ou então foi realizado de forma incorreta.

Talvez se questione esta afirmação apontando, corretamente, que algumas proposições matemáticas, hoje aceitas como regras, eram usadas no cotidiano de algumas

[17] Segundo Gottschalk (2004a), confusões semelhantes acontecem nas orientações para o ensino de matemática. Ao invés de compreender (e ensinar) as proposições matemáticas como normas, tomam-nas como descrevendo algo ou alguma realidade.

comunidades, mesmo antes de sua demonstração. Como, por exemplo, segundo Granger (1955, p. 92), o Teorema de Pitágoras que era utilizado pelos egípcios antes mesmo de sua demonstração.

Wittgenstein nunca negou as raízes (ou razões) empíricas de algumas proposições matemáticas; ao contrário, a atividade matemática é considerada parte da história natural dos homens (RFM, I, §142). – Uma das contribuições de Wittgenstein à filosofia da matemática, inclusive, foi apontar a natureza social da matemática –. Entretanto, depois de estruturados na linguagem matemática, os conceitos tornam-se independentes, são ***aceitos*** como regras linguísticas que independem de confirmação empírica: "nós talvez tenhamos adotado que 2 + 2 = 4 porque duas bolas mais duas bolas [em uma balança] equilibram quatro. Porém depois de adotado, este fato não diz respeito à experiência, está petrificado" (LFM, pg. 98). O filósofo usava afirmações como esta para mostrar que um cálculo matemático não é um experimento.

Ora, os jogos de linguagem são dinâmicos, de modo que uma proposição empírica pode tornar-se gramatical, assim como uma proposição gramatical pode tornar-se empírica:

> Poderíamos imaginar que algumas proposições da forma das proposições empíricas foram endurecidas e funcionaram como canais para tais proposições empíricas não endurecidas, mas fluidas; e que essa relação se alterava com o tempo, de forma que as proposições fluidas se endureciam, e as endurecidas tornavam-se fluidas (DC, §96).

Conforme Glock (1996, p. 211), a afirmação "O ouro tem 79 prótons" era uma descoberta empírica, mas agora é uma regra linguística que faz parte do uso da palavra ouro, em especial pelos cientistas. Wittgenstein indica como uma asserção empírica pode tornar-se uma proposição normativa:

> Qualquer proposição da experiência pode servir como regra se, como uma peça de uma máquina, verifica-se imobilidade [***made immovable***], de modo que agora toda representação gire em torno dela e ela se torne [...] independente dos fatos (RFM, VII, §74).
>
> É como se tivéssemos endurecido a proposição empírica e convertido-a em regra. ***O que temos então, agora, não é uma hipótese verificável pela experiência, mas um paradigma com o qual comparamos e julgamos a experiência, e, portanto um novo tipo de julgamento*** (RFM, VI, §22, nosso itálico).

Importante notar o que implica o último trecho da citação acima. Segundo Wittgenstein, proposições normativas, como as da matemática, mesmo que "extraídas" do empírico, não podem ser verificadas pela experiência. Tomemos outro exemplo, presente em Gottschalk (2004b), que ilustra muito bem o fato acima citado: a afirmação "a água ferve a 100 ºC" inicialmente descrevia um fato. Com o tempo, passou a ser um critério para o ponto de ebulição da água. Em outras palavras, a afirmação agora é normativa. O fato de colocarmos água para ferver e esta não entrar em ebulição sob a temperatura de 100 ºC não invalida a afirmação acima. Outros fatores serão investigados para explicá-lo, tais como a pressão local ou algum outro elemento que possa ter sido misturado à água. Como argumentou Wittgenstein, o novo paradigma confronta e julga os fatos da experiência.

As proposições matemáticas diferem de proposições empíricas porque são atemporais e permitem generalizações. Quando demonstramos uma proposição matemática, sobre um triângulo retângulo, por exemplo, estamos demonstrando uma propriedade que é valida para ***todos*** os triângulos que possuam a propriedade de ser retângulo, independente se é aqui ou em outro país, hoje ou amanhã – ou seja, independem de fatos contingentes, como é o caso das proposições empíricas –, desde que estejamos falando do mesmo sistema de regras.

Segundo Wittgenstein, as regras matemáticas – como proposições gramaticais que são – não podem ser verificadas empiricamente: "Se alguém me diz que há duas cadeiras nesta sala e duas em outra, e nós as contamos e constatamos que há quatro cadeiras, não tomamos isso como uma confirmação de que 2 + 2 = 4 (LFM, p. 200). Tampouco podem ser falseadas por fatos contingentes: aceitamos os cálculos matemáticos como corretos e, se uma ponte construída sobre a base destes cálculos cai, não dizemos que afinal a regra matemática estava errada; procuramos outras causas, dizemos, por exemplo, que foi a vontade de Deus (RFM, VII, §34), ou a ação da natureza, tal qual uma enchente ou inundação. Da mesma forma, se ao somar os ângulos de um triângulo, o resultado não é 180 graus, supomos que houve um erro na medição e não que a proposição matemática "a soma dos ângulos de um triângulo é 180 graus" estava errada (GF, p. 252).

Não são os fatos empíricos que nos dizem como seguir as regras matemáticas, ao contrário, ***são as proposições matemáticas que nos dizem como agir em suas possíveis aplicações***, é através das convenções linguísticas ***aceitas por nós –*** como as regras matemáticas – que apreendemos os fatos sensíveis. Não dizemos que "2 + 2" é igual a quatro porque um par de sapatos mais um par de sapatos resultam quatro sapatos; ao contrário, é por meio da regra matemática "2 + 2 = 4" que estamos autorizados a passar de "Vejo dois pares de sapatos" para "Vejo quatro sapatos". Para Wittgenstein, as proposições matemáticas fornecem um "quadro de referência" para descrições (RFM, VII, §02). Assim, as proposições da matemática são paradigmas para proposições empíricas, são normas de substituição que descrevem fatos empíricos: com “2 + 2 = 4”, estamos autorizados a passar de “Há dois pares de maçãs na cesta” para “Há quatro maçãs na cesta”. De forma semelhante, as proposições geométricas são regras para a descrição das formas dos objetos e de suas relações espaciais, regulamentam o uso de expressões como “comprimento”, “comprimento igual” etc. (GLOCK, 1998, p. 243).

As demonstrações no jogo de linguagem da matemática nos mostram como aplicar as regras linguísticas, nos dizem o que faz e o que não faz sentido dizer:

> A demonstração me conduz a dizer: isto ***deve*** ser assim. [...] Recorro à regra e digo: “sim, é assim que ***deve*** ser; devo estabelecer o uso de minha linguagem dessa forma”. Quero dizer que o ***deve*** é como um caminho que estabeleço na linguagem. Pois a proposição matemática tem que mostrar-nos o que faz SENTIDO dizer[18] (RFM, III, §28, 30).

Deste modo, a regra gramatical expressa pela inequação “4 > 3” nos diz que não há sentido em dizer frases como “esse trio é maior (em número) que esse quarteto”.

Se as proposições matemáticas são convencionais, cabe perguntar: por que a matemática parece tão inexorável para nós? Um dos motivos é que seus conceitos são construídos por uma demonstração, um procedimento lógico, algo que aceitamos como verdadeiro, isento de dúvidas. Além disso, as “leis” matemáticas são nosso próprio padrão de correção, adequam-se perfeitamente ao uso da linguagem com o qual estamos familiarizados (RFM, VII, §73). Isso devido aos inúmeros usos diários e aplicações práticas que a matemática possui em nossa vida:

> é essencial à matemática que signos sejam também empregados ***à paisana***. É o uso fora da matemática, e portanto o ***significado*** dos signos, que transforma o jogo de signos em matemática. [...] Não há matemática ***pura*** sem ***alguma*** matemática aplicada. A matemática ***seria*** apenas um jogo se não desempenhasse algum papel em nosso raciocínio empírico (Wittgenstein In: GLOCK, 1998, p. 244-245).

Nossa “necessidade matemática” se deve ao papel especial que o jogo de linguagem matemático desempenha em nossas vidas. A matemática não é um conjunto de cálculos isolados de nossos usos ou auto-contidos em alguma “realidade matemática”, mas uma atividade humana, um conjunto de jogos de linguagem, relacionados uns com os outros que estão incorporados em nossa forma de vida (GERRARD, 1991).

---

[18] Embora as preocupações de Wittgenstein fossem outras, podemos fazer uma relação entre suas palavras e o que diz Machado (1993) a respeito da simbiose entre matemática e linguagem materna. Se por um lado a matemática precisa da linguagem natural para ser enunciada devido sua falta de oralidade, as regras matemáticas (proposições gramaticais) moldam o uso de nossa linguagem, nos dizem “qual caminho seguir” em nossas expressões do dia-a-dia.

Bouveresse (1973) observa que há muito deixamos de pensar que nossa maneira de pintar, esculpir ou compor fosse ***a*** verdadeira. Mas não conseguimos desfazer-nos da idéia de que nossa maneira de calcular corresponda a algo de verdadeiro, isso devido aos diversos usos empíricos que a matemática desempenha em nosso dia-a-dia. Assim, parece essencial para nós que haja diferentes maneiras de pintar ou compor, porém, no outro extremo, julgamos ser necessário calcularmos todos da mesma maneira, pois é assim que nos "formamos" com esses conceitos.

3. 5 – O conceito de compreensão em Wittgenstein

Ao longo do nosso trabalho, usaremos bastante o conceito de compreensão, como em "compreender as explicações da professora", "compreender uma regra matemática" ou "compreender um problema matemático". Assim, interessa que mostremos, ainda que em linhas gerais, o conceito de compreensão tal como Wittgenstein o concebe.

Uma das versões do modelo referencial da linguagem considera a consciência como algo privado, na qual representaríamos a realidade. A linguagem seria apenas o "veículo" de nossas representações mentais, ou seja, descreveria nossas ideias ou objetos mentais. Nesse modelo, a compreensão é tomada tal qual um processo mental privado, conforme nos apresenta Hebeche (2002, p. 194):

> Tem-se aí a noção de que apreender o sentido do que é dito envolve algo mental ou anímico (***etwas Seelishes***), algo que ocorre ou está guardado na memória de alguém e que pode, a qualquer momento, tornar-se manifesto pela linguagem. O que ocorre na mente é distinto da sua expressão lingüística. A linguagem é como um porta-voz daquilo a que antecipadamente já se tem acesso na mente. A consciência observa o que está dentro de si e, depois, o expressa pela linguagem.

Nesse modelo, informar algo a alguém é reproduzir na mente do sujeito o mesmo que se passa na mente de quem informa. Assim, compreender algo é ter algo como uma imagem mental que representa o que se compreende.

Baker & Hacker, analisando as ideias de Wittgenstein dizem que, se procurássemos o "local" onde se localiza a compreensão, esta estaria junto das habilidades (2005, p. 380).

Para Wittgenstein, a compreensão não é um processo mental, compreender algo é ter uma habilidade. Por isso ele sugere que "a gramática da palavra "saber" está, evidentemente, intimamente aparentada com a de "poder", "ser capaz de[19]". Mas também

[19] Assim, quando digo "eu sei", esta expressão é aparentada com "sou capaz de fazer certas coisas".

estreitamente aparentada com a da palavra "compreender". (‘Domínio’ de uma técnica)” (IF, §150). Quem compreende algo é capaz de fazer certas coisas. Por exemplo, quem compreende o uso de uma palavra é capaz de empregá-la, de ensiná-la a alguém etc.

Uma habilidade que às vezes é confundida com algo mental ou anímico é o “cálculo de cabeça”. O fato de que em geral o cálculo de cabeça leve menos tempo que o cálculo no papel nos faz pensar que o cálculo de cabeça é menos real que o feito no papel, reforçando a ideia de que algo misterioso aconteceu: um processo mental que, de alguma forma, antecipa o resultado.

Segundo Wittgenstein, conforme explicita Hebeche (2002), o cálculo de cabeça não é uma atividade mental, mas o domínio de uma técnica, uma versão do cálculo feito no papel:

> O cálculo de cabeça, porém, é um modo de seguir regras publicamente aprendidas. Aprender a calcular de cabeça é um modo de seguir as regras das operações matemáticas. Se as fazemos com ou sem o auxílio do papel, não altera a natureza da operação. [...] Calcular de cabeça é uma habilidade – uma instituição. O cálculo de cabeça (ou no papel) coincide com a práxis de seguir a regra, por isso ele não é uma atividade mental, mas o domínio de uma técnica (HEBECHE, 2002, p. 195-196).

Calcular de cabeça é uma habilidade que podemos desenvolver, habilidade esta que de fato se diferencia do cálculo feito no papel. Ora, usamos várias técnicas para calcular. Para a adição, por exemplo, podemos contar nos dedos, usar o algoritmo etc. O cálculo de cabeça é mais uma técnica de cálculo que se diferencia do cálculo no papel, assim como se diferencia de outras técnicas como o contar nos dedos.

Naturalmente, podemos ter mais habilidade no uso de uma técnica do que no uso de outras: é possível ter mais habilidade e segurança no cálculo feito no papel que no cálculo de cabeça e vice-versa, mas ambas são maneiras diferentes de seguir regras públicas, técnicas diferentes que são ***aprendidas.***

De forma semelhante à compreensão, segundo Wittgenstein, a incompreensão de algo não significa um estado anímico: “Quando digo: "Não conheço bem o cálculo" – não me refiro a um estado mental, mas a uma incapacidade de fazer algo” (RFM, III, §80), ou seja, não tenho tal habilidade, não domino esta técnica.

Processos mentais e outros acontecimentos podem ***acompanhar*** a compreensão de uma frase, de uma fórmula matemática etc.: pode ocorrer que tenhamos a imagem de algo na mente, um girassol, se alguém nos solicita uma flor amarela, por exemplo; podemos ter uma variedade de pensamentos passando por nossa cabeça; podemos ter uma sensação de bem-estar quando o que foi compreendido nos lembra algo agradável etc. Entretanto, não é nem necessário, nem suficiente, que algo deste tipo ocorra, pois é possível que alguém tenha uma imagem mental ou sinta algo e ainda assim não compreenda.

> Representemo-nos o exemplo seguinte: A anota séries de números; B observa e procura encontrar uma lei na seqüência dos números. [...] "B compreende o sistema da série" não significa simplesmente: a fórmula "a_n = ..." vem ao espírito de B. Pois é perfeitamente imaginável que a fórmula lhe venha ao espírito e que no entanto ele não a compreenda. "Ele compreende" deve conter mais que: a fórmula lhe vem ao espírito (IF, §152).

Algumas vezes, ao subitamente compreender algo, como a lei de uma série numérica, por exemplo, dizemos "agora eu sei", "agora eu compreendo" ou ainda "agora eu posso!" e temos a impressão de que algo misterioso aconteceu em nossa mente. Como vimos, a compreensão não é um processo mental. Na verdade, compreender algo de repente marca uma mudança: da incompreensão à compreensão, portanto de não ser capaz de fazer certas coisas a ser capaz de fazer certas coisas. "Agora eu compreendo" ou "agora sei como continuar" representa o ***"nascimento" de uma habilidade*** (BAKER & HACKER, 2005). Assim Wittgenstein afirma:

> Representar-se algo com uma proposição é tão pouco essencial para a compreensão desta quanto esboçar um desenho a partir dela (IF, §396).
> Compreender uma frase significa compreender uma linguagem. Compreender uma linguagem significa ***dominar uma técnica*** (IF, §199, nosso itálico).

Compreender um tema musical, uma fórmula matemática, um jogo etc., assim como seguir regras, está relacionado à nossa participação em complicadas práticas linguísticas (que envolvem compreender e seguir regras) de nossa forma de vida, da maneira como vivemos e agimos.

A propósito de nossa discussão a respeito do conceito de ***semelhanças de família,*** vimos que nas ***Investigações*** §532 Wittgenstein observa que usamos a palavra compreensão para mais de um caso, dependendo do "objeto de compreensão". Assim, podemos pensar nas diferenças entre compreender um poema ***nonsense***[20], compreender uma sentença da língua portuguesa fora do contexto, compreender a mesma sentença no contexto, compreender o que se quer dizer (expressar) com ela etc. (BAKER & HACKER, 2005), de forma semelhante é possível pensar em vários casos de falta de compreensão, como o faz Wittgenstein (apud BAKER & HACKER, 2005, p. 384):

[20] Um poema ***nonsense*** é um tipo de verso que utiliza expressões surreais, "absurdas" ou ainda palavras sem significado, sem nexo. Como exemplo, podemos citar os trabalhos ***nonsense*** de Lewis Carroll.

Não entendo você, fale mais alto
Não entendo você, isso é pura bobagem
Não entendo você, eu não falo alemão
Não entendo você, o que você disse é muito complicado

As quais os autores incluem, entre outras:

Eu compreendi o que ele disse, mas não compreendo a piada

Julgamos que este último caso é interessante para uma comparação com a compreensão de um problema matemático escrito em linguagem comum. Em alguns casos, quando não entendemos uma piada é porque não sabemos o que aquelas palavras querem indicar, pois em geral fazem alusão a algo que pode ser engraçado. Compreendemos a frase escrita, mas não compreendemos a que ela se refere.

É de forma semelhante que, em geral, falaremos em nosso trabalho da dificuldade de compreensão de um problema matemático, visto que podemos compreender o que está escrito sem compreender qual conceito matemático está associado a situação descrita no problema. Vimos, a propósito do tema "seguir regras", que não há nenhuma relação direta entre uma regra (matemática ou não) e sua aplicação, nós as criamos; não há, por conseguinte, uma relação direta entre os dados fornecidos em um problema matemático verbal e sua resolução: "as relações entre as proposições matemáticas e os diversos contextos em que são utilizadas são convencionais. Não há um vínculo "natural", "intrínseco" entre matemática e realidade" (GOTTSCHALK, 2004b, p. 06). Como qualquer outro jogo de linguagem, este também precisa ser aprendido.

Capítulo 4: Algumas reflexões para o ensino de matemática

4.1 – O uso de problemas verbais no ensino da matemática

Embora este trabalho não discuta exatamente o tema "resolução de problemas[21]", não podemos desconsiderar que o uso destes faz parte das atividades de ensino de matemática em nossas escolas, assim, não poderíamos deixar de utilizar problemas em nossa pesquisa, bem como tratar este tema aqui. Trataremos das atividades escritas em linguagem natural, que trazem uma situação ou problema que exige conhecimentos matemáticos para sua solução.

A resolução de problemas é geralmente utilizada no ensino de matemática como forma de aplicar os conhecimentos matemáticos aprendidos anteriormente de forma abstrata, para verificar se os alunos são capazes de aplicar o conceito aprendido de forma "genérica". Na maioria das vezes, os problemas são contextualizados, ou seja, remetem a alguma situação real, com a intenção de aproximar o conteúdo matemático com a vivência dos alunos.

Por uma questão de organização e fluência textual, adotaremos a denominação "verbal" e "não-verbal" para designar os problemas matemáticos. Os problemas matemáticos verbais são problemas nos quais predomina o uso de termos e expressões da língua materna que, em geral, pretendem "apontar" para situações reais, do dia-a-dia. Um exemplo de um problema matemático verbal é o seguinte: "João comprou três cadernos e gastou R$ 6,00. Quanto custa cada caderno?" Os problemas matemáticos não-verbais são problemas nos quais predomina o uso de símbolos matemáticos (numerais, letras, representações geométricas etc.), lidando com generalizações e problemas mais abstratos, não inseridos em situações ditas reais, por exemplo os exercícios do tipo "calcule", "resolva", "efetue", "prove que", "demonstre que" seguidos de uma expressão simbólica estritamente matemática.

[21] Não estamos nos referindo à estratégia ou método de ensino de mesmo nome incentivado pelo matemático húngaro George Polya. Estamos nos referindo ao uso, no ensino de matemática, de problemas matemáticos escritos em linguagem comum, por vezes chamados "contextualizados" por fazerem referência a alguma situação real.

Podemos dizer que nos problemas não-verbais[22], a ordem para sua resolução está dada, está explícita. Expressões como “resolva”, “calcule”, “efetue” etc. seguidas de expressões como “24 ÷ 3” são enunciados que deixam claro que a operação a ser realizada é uma divisão (estamos julgando nesse caso, é claro, que o aprendiz saiba o significado das palavras “calcule”, “efetue” etc.). Se o aprendiz souber como efetuar a divisão, ele obterá sucesso na solução do exercício.

Diferente dos problemas não-verbais, um problema matemático verbal traz a necessidade da compreensão e emprego de um conceito, uma regra ou alguns procedimentos matemáticos, muitas vezes implícitos no enunciado escrito em linguagem natural, de modo que o aprendiz, para resolver satisfatoriamente à questão, precisa compreender o enunciado do problema. E essa compreensão é mais do que uma simples leitura, é preciso compreender qual ou quais conteúdos matemáticos estão relacionados à resolução da questão. Mesmo um problema simples como o mencionado abaixo:

João comprou três cadernos e gastou R$ 6,00. Quanto custa cada caderno?

traz a necessidade da compreensão de um conceito matemático implícito, pois não está dito o que deve ser feito para que se chegue a resposta do problema, diferente de “cálcule: 6 ÷ 3”, na qual a ordem está dada de forma mais explícita. Assim, mesmo que o aluno razoavelmente domine a técnica da divisão, fracassará em um problema verbal se tiver dificuldades em compreendê-lo[23]. Em uma atividade como esta, é necessário (embora em alguns casos o aluno possa resolver de outras formas, com o uso de desenhos, por exemplo) passar da linguagem natural para a linguagem matemática, neste caso, compreender a situação e chegar a expressão “6 ÷ 3”, ou seja, encontrar o conceito matemático implícito no enunciado para sua posterior resolução.

Embora para nós professores pareça tão natural esse processo, é preciso que saibamos que para os alunos esse processo de “tradução” não tem nada de simples. Ora, como vimos – a propósito do conceito de semelhanças de família –, os jogos de linguagem, ainda que aparentados, não possuem uma “essência”, não há necessariamente um traço comum aos contextos verbal e não-verbal que permita visualizar a relação entre os dois.

---

[22] Doravante utilizaremos as expressões “problemas verbais” e “problemas não-verbais” para nos referirmos, respectivamente, aos problemas matemáticos verbais e aos problemas matemáticos não-verbais.

[23] Lembremos aqui a comparação que fizemos no capítulo 3 a propósito do conceito de compreensão em Wittgenstein entre compreender uma piada e compreender um problema matemático verbal.

Vimos também que os diferentes jogos de linguagem possuem lógicas diferentes e exigem habilidades (técnicas) diferentes.

Devemos ter em mente que ensinar através de problemas matemáticos não é um método de ensino direto, sob pena de obtermos um efeito contrário ao esperado. Gómez-Granell (2003, p. 276) observa que "o processo habitual de ensino costuma ser ensinar um conceito ou algoritmo e depois expor um problema [verbal] para comprovar se este foi adquirido ou não". Como vimos, não há uma ligação direta entre uma regra matemática e sua aplicação prática. Portanto, a técnica de resolução de problemas verbais é uma habilidade que precisa ser desenvolvida pelo/no aluno, obviamente sob a orientação do professor.

Para a utilização de problemas verbais no ensino da matemática, vários são os motivos apontados, a saber: tornar as aulas mais interessantes e significativas, motivar os alunos, desenvolver o raciocínio lógico do aprendiz e proporcionar a oportunidade do sujeito se envolver com as aplicações práticas da matemática. Por conseguinte, os alunos podem desenvolver uma atitude positiva em relação a seus deveres de estudo em sala de aula, podendo sentir-se desafiados e mais motivados, visto que as situações descritas são, em parte, comuns aos alunos, desenvolvendo atitudes de curiosidade, aumentando sua participação nas atividades de ensino. Acreditamos que tais fatores são importantes, pois um aluno motivado provavelmente se dedicará mais a aprender em comparação a um aluno que não vê motivos para estudar o que o professor deseja ensinar.

Adicionalmente, acreditamos que muitas das dificuldades enfrentadas pelos alunos, no decurso do aprendizado da matemática, e consequentemente na resolução de problemas verbais, estão relacionadas com o uso da linguagem. Embora o ensino não seja feito propriamente por meio da linguagem matemática, também não é, absolutamente, feito via linguagem ordinária, pelo menos não a linguagem que é comum ao dia-a-dia de nossos alunos. Portanto, propomos discutir algumas das dificuldades de ordem linguística que nossos alunos algumas vezes enfrentam.

4.2 – A linguagem no ensino da matemática

Sabemos que nossa linguagem ordinária é polissêmica, e seu uso no ensino da matemática pode oferecer diferentes sentidos ao aluno. Afirmava Wittgenstein, que mal-entendidos surgem quando tentamos assemelhar expressões que tem funções bastante distintas na linguagem. Segundo o filósofo, essas distinções causam problemas na própria filosofia: "Se lhe perguntassem se, até agora, os filósofos disseram contra-sensos, pode-se responder: não, eles somente deixaram de notar que estão usando uma palavra com sentidos inteiramente diferentes" (OF, §09).

Para Wittgenstein, o que nos confunde é a aparente uniformidade das palavras quando nos defrontamos com elas, pois seu emprego não nos é claro, visto que muitas vezes guardam certas semelhanças:

> Com efeito, o que nos confunde é a uniformidade da aparência das palavras, quando estas nos são ditas, ou quando com elas nos defrontamos na escrita e na imprensa. Pois seu ***emprego*** não nos é tão claro. E especialmente não o é quando filosofamos (IF, §11).

Se não atentarmos para os diferentes usos de uma palavra ou conceito – seja em diferentes contextos ou, como vimos, a propósito das proposições gramaticais, seu uso ora normativo ora descritivo – podemos nos confundir se tentamos entender uma expressão isoladamente dos jogos de linguagem em que ela normalmente "faz seu trabalho". Vale ressaltar que esses mal-entendidos não são exclusividade dos aprendizes: muitos intelectuais ficaram chocados quando a expressão "números imaginários" foi introduzida. Afirmavam que de fato não poderia haver números que fossem imaginários, quando lhes foi explicado que "imaginário" não estava sendo usado no seu sentido usual o mal entendido foi esclarecido (LFM, p.18).

Os alunos precisam aprender o vocabulário matemático e como ele é usado, uma vez que este possui termos especializados, com sentidos bem diferentes daqueles da linguagem ordinária que os alunos estão acostumados. Na linguagem do dia-a-dia, não usamos expressões como "seja um número ***x...***" ou palavras como "sucessor". Na sala de aula, temos números que são primos, outros são naturais, há ainda aqueles que são racionais.

A palavra "mais", por exemplo, usada no dia-a-dia pode significar adicionar ou algo de quantidade superior, porém em matemática, pode indicar também uma subtração, como no problema seguinte: "Cláudio tem 5 canetas e André tem 8 canetas. Quantas canetas André tem a mais em comparação a Cláudio?". Situações semelhantes a esta podem confundir os alunos, se não estiverem preparados.

Esse é mais um uso da palavra "mais" que o aprendiz precisa aprender, afinal, por que seria óbvio ao aluno que esta palavra ora indica uma ação, ora indica outra? O problema, assim nos parece, é o uso exclusivista, se assim podemos chamá-lo, quando dizemos aos nossos alunos que “quando tem ‘mais’ é de somar”. É resolvendo questões semelhantes e por meio das instruções do professor que o aluno vai aprendendo as diferentes possibilidades das questões. Chamamos a atenção para esse assunto, pois, para nós professores tal uso parece tão natural que não nos damos conta de que não há nada de natural para os alunos.

Atualmente, em alguns trabalhos discute-se que as dificuldades dos alunos na aprendizagem da matemática, em parte, estão relacionadas às dificuldades linguísticas. Alguns pesquisadores da Educação Matemática, com grande experiência docente, afirmam que muitas vezes a dificuldade dos alunos está em compreender e projetar sentido na linguagem em que o conhecimento matemático lhes é apresentado. Para exemplificar citamos os trabalhos de D’Amore (2007) e Silveira (2008b).

As dificuldades dos alunos não se resumem a compreensão da linguagem simbólica da matemática, mas também a compreensão da linguagem “natural” utilizada nos problemas, pelo professor e pelos livros didáticos. Usamos “natural”, com aspas, por que, de fato, a linguagem utilizada no ensino da matemática não é propriamente a mesma do jogo de linguagem do dia-a-dia dos aprendizes. Smole & Diniz afirmam:

> Há uma especificidade, uma característica própria na escrita matemática que faz dela uma combinação de sinais, letras e palavras que se organizam, segundo certas regras para expressar idéias. Além dos termos e sinais específicos, existe na linguagem matemática uma organização de escrita nem sempre similar àquela que encontramos nos textos de língua materna, o que exige um processo particular de leitura (2001, p. 70).

Nesse jogo de linguagem que o aluno precisa aprender, palavras novas são vistas e palavras já conhecidas adquirem sentidos diferentes daqueles do cotidiano deles, com lógicas diferentes de uso, inclusive com construções linguísticas bem diferentes do habitual. A esse respeito, D’Amore comenta que “o livro de Matemática é o único que utiliza construções do tipo “diz-se” (no lugar de “se diz), “passando” (no lugar de “que passa”), “interceptando” ... e que é tão abundante em gerúndios” (2007, p. 250).

No domínio da matemática, letras são usadas para “nomear” objetos, como pontos e retas, para representar valores em equações etc; entretanto, as mesmas letras podem ser usadas em outras ocasiões, com outras funções. Por exemplo, ao escrever “[***a*, *b***[” não estamos apenas designando o intervalo, ao contrário, são dadas várias informações. Diz-se, por exemplo, que o intervalo contém “***a***” mas não contém “***b***”. Assim, uma das características do texto matemático é sua complexidade em transmitir informações; seja com sua simbologia própria, seja na utilização da língua comum em matemática, com poucas palavras são dadas muitas informações.

Silveira (2008b) observa que a escrita matemática é bastante compacta. Por exemplo, o símbolo de integral $\int$ ou uma expressão como $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, engendram conceitos e várias relações. A situação é bem parecida no caso de uma sentença escrita em linguagem natural, como: "seja ***t*** a reta tangente ao círculo ***C*** de raio ***r***, no ponto ***m...***". Tal proposição traz de forma "concentrada", implícita, muitos conceitos e muitas relações possíveis, que só são claros para quem está familiarizado com eles e com essa linguagem.

A escrita matemática garante concisão, precisão e objetividade em seus resultados, mas a "profundidade" da informação transmitida é considerável, o que se configura como uma particularidade notável no aprendizado da disciplina: "de fato, a complexidade das expressões formais torna-se rapidamente tão exorbitante que excede as possibilidades de memorização e de síntese de qualquer espírito; o que se ganha em rigor, perde-se radicalmente em eficácia" [24] (GRANGER, 1974, p. 139).

Certamente, não é possível entender uma expressão matemática como as do exemplo dado acima, sem fazer uso, de modo intenso, de muitas competências matemáticas. O aluno precisa familiarizar-se com a linguagem, os símbolos e a lógica, próprios desse componente curricular, encontrando sentido no que lê, compreendendo o significado das proposições matemáticas, percebendo como funciona sua gramática e como expressa informações. Se o aprendiz não sabe ou não lembra o uso de um símbolo, palavra etc. presente numa frase matemática, encontrará dificuldades na compreensão desta.

Diante das dificuldades linguísticas que os alunos enfrentam, pesquisadores como Smole & Diniz (2001) e Vázquez et al (2008) sugerem que também deve ser tarefa do professor de matemática desenvolver as habilidades de leitura e escrita em seus alunos. É comum a ideia, por parte dos professores de matemática, de que essa responsabilidade é apenas do professor de língua materna. De nossa parte, argumentamos que é uma concepção ingênua, pois conforme discutimos anteriormente, trata-se de jogos de linguagem distintos, com conceitos, lógicas e habilidades diferentes envolvidas. O professor de língua materna, por mais competente que seja, em geral não domina tão bem o jogo de linguagem da matemática, quanto o próprio professor da disciplina.

---

[24] A perda de eficácia que o filosófo destaca refere-se à possibilidade de comunicação usando-se sistemas formais, como o da matemática.

O professor de matemática precisa ensinar o vocabulário matemático, explicitar a escrita específica da matemática (mesmo escrita em linguagem natural) e trabalhar a compreensão de problemas matemáticos. Embora talvez não pareça tão óbvio, os professores de matemática necessitam sim se preocupar com a linguagem e com a comunicação, pois é por meio desta que as informações, os conceitos, são expostos em sala de aula. Nós professores talvez não nos demos conta, mas somos profissionais da comunicação por meio da linguagem.

4.3 – O conceito e seus contextos

Se a matemática possui dificuldades intrínsecas para seu aprendizado, como seu alto grau de abstração, falta de oralidade etc., apreender sua sintaxe e aplicar satisfatoriamente suas regras é uma tarefa que, de certa forma, regula a criatividade do aluno. O rigor na sintaxe da linguagem matemática é uma diferença significativa com relação à linguagem ordinária.

Salienta Granger (1974, p. 172) que, ao contrário das linguagens formais:

> As expressões de uma linguagem [comum] podem, ao contrário, afastar-se da norma sem, no entanto, cair no sem sentido; e que, bem ao contrário, a considerável redundância sintática das línguas usuais torna possível, numa certa medida, a violação das suas regras, constituindo esses desvios e inobservâncias um aspecto importante do seu próprio uso.

Assim, enquanto na linguagem comum a violação das regras, em certa medida, parece ser algo natural e próprio, na linguagem matemática nos encontramos no outro extremo. A construção matemática é visada na sua mais completa exatidão, na qual a aplicação das regras é “severa”, rígida. Não há a possibilidade de violação de regras sem entrar em desacordo, sem cometer erros. Esta dificuldade motivada pela “exatidão” e “complexidade” é visível inclusive na fala dos alunos em pesquisas sobre o ensino de matemática, como, por exemplo, no depoimento de um estudante em Silveira (2000):

“Eu acho a matemática **difícil**, porque **são muitas regras**, **muitas fórmulas**, e também porque **se você erra um sinal ou qualquer outro erro a conta já estará totalmente errada** [...]” (p. 112, grifo nosso).

De fato, não é novidade que a matemática é vista como complicada, complexa, difícil etc. e analisando aqueles que dizem ter certo sucesso na disciplina é porque prestam bastante atenção, praticam muito, esforçam-se etc., mas derivar o insucesso dos alunos à falta de atenção nas aulas e a falta de hábitos de estudos seria incorrer em injustiças, pois muitos alunos dizem-se interessados, dedicam várias horas ao estudo, mas não conseguem boas notas (SILVEIRA, 2000).

Como sugestão de alternativas de ensino para as dificuldades de se aprender e de se ensinar a disciplina, muitos estudiosos da educação matemática, como em Gómez-Granel (2003) sugerem ***contextualizar os conteúdos, ensinar através de resolução de problemas, uso de material concreto***, entre outros. Entretanto, tais tentativas de dar significação ao conteúdo matemático ensinado podem, ao contrário, deturpar o aprendizado se alguns pontos não forem levados em consideração.

Visto que a matemática tem raízes empíricas e inúmeras aplicações práticas, os professores podem confundir-se achando que só o que pode ser contextualizado deve ser ensinado, ou que as atividades contextualizadas ou experimentações empíricas (com material concreto, por exemplo) ***por si só*** podem trazer o aprendizado dos conceitos formais e normativos da matemática.

Conforme vimos, a linguagem matemática não descreve a realidade empírica (embora possa ser usada para descrevê-la), não descreve objetos concretos, nem abstratos, nem mentais etc. Experimentações empíricas, como o uso de material concreto, não podem garantir o aprendizado, visto que não é o empírico que determina a matemática, ao contrário, as proposições matemáticas são condição de sentido para as aplicações práticas.

Muitas vezes, essa confusão é encorajada pelo fato de alguns alunos desempenharem bem seu papel com cálculos no cotidiano. Porém, as atividades matemáticas vivenciadas pelo aluno no cotidiano tem natureza diferente das atividades referentes ao conteúdo matemático que estudam em sala de aula.

Segundo Gottschalk (2004b):

> A matemática utilizada no cotidiano [tem] outro significado para o aluno. Não há uma transposição imediata de contextos do cotidiano para o escolar. Os raciocínios empregados no cotidiano estão ligados a contextos específicos e são de natureza diferente dos raciocínios empregados na matemática escolar, e, por conseguinte, os significados de proposições ou termos matemáticos podem diferir radicalmente em função dos contextos lingüísticos ou empíricos em que estão sendo usados (GOTTSCHALK, 2004b, p. 06)

Chamamos a atenção para este ponto, pois muitos de nós professores não estamos conscientes de que resolver uma “conta”, por exemplo, de divisão, é uma atividade distinta de resolver um problema que envolva o conceito de divisão. Pesquisadores da educação matemática como Dante (1991), Silveira (2005) e D’Amore (2007) afirmam que muitas vezes os alunos sabem usar as regras matemáticas de forma abstrata, mas não sabem ou tem grandes dificuldades em aplicar a mesma regra na resolução de problemas e vice-versa. Silveira, analisando as ideias de Wittgenstein indica que na perspectiva do aprendiz, quando muda o contexto, muda o conceito:

> No cotidiano, como consumidor ou vendedor, um cálculo errado significa perder dinheiro. Na escola, como aluno, um cálculo errado significa seu fracasso como aprendiz. A escola e o comércio têm lógicas e contextos diferentes. Um problema matemático vivido e experienciado no cotidiano é diferente de uma sentença em linguagem matemática (2005, p. 84).

As atividades e as ideias matemáticas utilizadas no cotidiano referem-se a um contexto de natureza diferente do contexto das aulas de matemática, e esperar que haja uma transposição imediata do cotidiano para o contexto escolar é um erro. Este fato aponta que a certeza de que os alunos sabem lidar com problemas de matemática no cotidiano não pressupõe seu sucesso em sala de aula, ou seja, não é garantia de que saberão lidar com a linguagem matemática.

Para Wittgenstein, aprendemos os significados gradualmente e assim nos tornamos capazes de aplicá-los em novos e diferenciados jogos de linguagem (contextos). Atividades como resolução de problemas e atividades contextualizadas são uma ferramenta importante, inclusive como fator de motivação, porém configuram apenas mais um dos contextos dos quais os alunos devem aprender a aplicar as regras matemáticas, não substituindo em absoluto o ensino formal dos conceitos e regras matemáticas.

A introdução de novos conteúdos pode, inclusive, ser feita por meio de atividades contextualizadas, mas sem deixar de lado o ensino das regras. Em outras palavras, é preciso ficar claro que tornar os alunos capazes de passar dos procedimentos intuitivos e não formais às expressões abstratas próprias da matemática e vice-versa não é um processo automático, como muitas vezes se crê: "em geral se pensa que se os alunos entendem o significado dos conceitos e procedimentos matemáticos, não têm nenhuma dificuldade de dominar a linguagem formal" (GÓMEZ-GRANELL, 2003, p. 267).

Bacquet salienta que "os problemas não ensinam o que é, "matematicamente" falando, uma divisão" (2001, p. 97). Em consonância com Bacquet, Stella Baruk (1996) argumenta que, muitas vezes, forçam-se as crianças a enxergarem o que ninguém nunca viu, que se aprenda por experimentação conceitos obtidos por demonstração, conceitos que dizem respeito à lógica interna da matemática e não ao empírico. Vale lembrar que os conceitos matemáticos são obtidos através de dedução e não por indução.

Sem dúvida, os alunos precisam tratar, também, de situações contextualizadas, no sentido de aprenderem os usos e as funções que a matemática desempenha em nossa sociedade, para que a matemática não se torne uma simples manipulação de regras abstratas. Por outro lado é essencial o ensino das proposições abstratas e formais, próprias da disciplina, pois a exclusividade do ensino conceitual ou empírico pode ser problemática.

Granger parece corroborar nossa visão quando afirma que o demasiado apego ao concreto é prejudicial:

> Não tendo efetuado a conversão de pensamento que o desígnio abstrato das estruturas tomadas nelas mesmas exige, o aprendiz matemático certamente encontra um apoio nas representações "geométricas" intuitivas, por exemplo, as que constituem interpretantes exteriores, significações possíveis para os esquemas abstratos. Mas se seu pensamento permanece fixado neste gênero de desígnio que só convém acidentalmente ao simbolismo matemático, ele se torna bloqueado, procurando em vão no sensível dos interpretantes (GRANGER, 1974, p. 141).

Já que a passagem das regras às suas aplicações não é automática, é importante mostrar as aplicações da matemática, pois queremos que nossos alunos saibam aplicar os conceitos matemáticos que aprenderam para resolver problemas do dia-a-dia que requeiram tais conteúdos, afinal não ensinamos matemática apenas para que os alunos resolvam exercícios e problemas em sala de aula, mas sim para que aprendam os conteúdos tidos como importantes pela sociedade para que possam gozar de seus conhecimentos na vida prática.

4.4 – Faz ou não faz sentido: um conceito vago

O que ocorre quando as ideias dos alunos não correspondem ao que afirmam as regras matemáticas? O que o professor deve fazer nessas situações? Muitas vezes, a lógica das ideias dos alunos, não coincide com a lógica da matemática. Provavelmente, cada educador matemático tenha pelo menos um caso para contar.

Nas aulas de matemática, os alunos trazem conhecimentos de suas vivências que podem não estar de acordo com as regras da matemática. Estas são de natureza convencional e mantém entre si relações internas, ou seja, uma propriedade ou regra matemática não remete a algo no mundo empírico. Por exemplo, dizemos que "***2a + 3a = 5a***" não porque duas canetas mais três canetas resultam cinco canetas (como vimos, o que ocorre é o inverso), mas que a proposição é verdadeira porque está de acordo com a propriedade distributiva:

$$2a + 3a = (2 + 3)a = 5a.$$

Trazemos um episódio mencionado por Wittgenstein (LFM, p. 135) quando tentara mostrar que o cálculo não é um experimento: um aluno que aprendia a multiplicação por zero afirmava que, por exemplo, 3 x 0 = 3. Ele argumentava que se tenho três vacas e as multiplico por zero, de fato nada fiz com as vacas, e, portanto, os animais não desapareceriam, logo o resultado não poderia ser zero.

Ora, como sabemos, as regras matemáticas não descrevem o mundo empírico, a proposição “3 x 0 = 0” não descreve nada, ela ***estabelece*** que zero é o resultado correto quando tal multiplicação é realizada. Conforme dissemos anteriormente, a matemática tem regras próprias, regras convencionadas. Entretanto, o argumento do aluno, embora difira da regra matemática, de certa forma é pertinente, não é ilógico. Segundo Wittgenstein:

> Não há critérios absolutos a respeito de 'senso' ou 'contra-senso'. – Quando dizemos "Isto não faz sentido" nós sempre queremos dizer "Isto não faz sentido ***neste jogo*** [***de linguagem***] ***particular***" (apud FANN, 1971, p. 83)
> ‘Senso' e 'contra-senso' são expressões vagas na linguagem ordinária (apud FANN, 1971, p. 85).

No contexto da matemática os critérios são bem delimitados, mas talvez nem sempre sejam claros, especialmente para aqueles que a estão aprendendo.

Segundo Guerra[25] (2009) esse tipo de confusão pode algumas vezes ser causada por que o professor não esclarece ao aluno que se trata de uma ***regra*** (que ***deve*** ser seguida), afinal nem sempre é possível “justificar” uma regra matemática, a não ser matematicamente. Dessa forma, o professor pode esclarecer que a ideia do aluno faz sentido, mas estas não estão de acordo com a lógica da matemática.

Mais uma vez chamamos a atenção para a importância da interação entre professor e alunos, pois é por meio da comunicação, do diálogo, que os interlocutores podem compartilhar de um mesmo universo discursivo e dar significação aos conteúdos matemáticos. Assim, a subjetividade do aluno e a objetividade da matemática podem chegar a um ponto comum. Caso o aluno cometa um erro, o professor deve abrir espaço para a fala do estudante, logo, poderá entender sua lógica e mostrar que esta é refutada pela lógica da matemática, uma lógica que segue regras próprias, as quais o aluno deve aprender, “o professor deve ser criativo, no sentido de buscar compreender as diferentes lógicas dos alunos, e é por meio do diálogo que essas lógicas podem convergir para a lógica da Matemática” (SILVEIRA, 2009b, p. 05).

[25] GUERRA, Renato Borges. Notas de aula (2009).

Capítulo 5: A pesquisa em sala de aula

5.1 – A sala de aula: os alunos e a professora

Nesse capítulo, antes de iniciarmos nossas análises e conclusões a respeito dos dados obtidos, aproveitamos para destacar algumas das características dos sujeitos de nossa pesquisa. Embora nossa atenção principal se dê na aprendizagem das regras matemáticas por parte dos alunos, não poderíamos deixar de verificar como se dá o ensino da docente, visto que este certamente influencia no aprendizado dos alunos. Assim, descreveremos também a forma de atuação da professora.

5.1.1 – Os alunos

A classe em que foram feitas as observações era composta de vinte e cinco alunos, na faixa etária entre nove e dez anos. Os professores para as disciplinas de matemática, português etc. eram distintos.

Para a aprendizagem de qualquer disciplina, a atenção é algo muito importante. Para a matemática esta importância parece maior, visto que seu ensino é linear –, isto é, seu desenvolvimento é sequencial. Nas aulas observadas percebemos que, mesmo com o esforço da professora para manter a atenção dos alunos, alguns deles deixaram de compreender certas explicações por não prestarem atenção na exposição da docente. Por muitas vezes, eles estavam anotando, conversando com os colegas, manuseando revistas ou álbuns de figuras etc. e por isso não conseguiam resolver uma atividade que a professora havia acabado de explicar. Cabe uma reflexão: porque há o desinteresse por parte dos alunos em estudar?

5.1.2 – A professora

A professora da turma que observamos sabia usar sua autoridade, sem ser autoritária. Quando precisava pedir silêncio e atenção sabia ser firme, entretanto, não os impedia de perguntar, tirar dúvidas, propor sugestões para a solução de problemas matemáticos, de modo que ela e os alunos mantinham um clima bastante amigável, no qual, até onde pudemos perceber, todos tinham o direito e a oportunidade de falar, desde que no momento adequado.

Essa atitude marcava a forma de ensinar de Joana[26], que, segundo suas próprias palavras, ***não dava nada pronto aos alunos, mas fazia com que construíssem seus próprios conceitos.*** Parece-nos necessário que esclareçamos o que a professora quis dizer quando afirmou que os alunos construíam seus conceitos. Ao ensinar um novo conteúdo, ela apresentava-o por meio de atividades, sugerindo que os alunos tentassem resolvê-lo, fazendo conjecturas, propondo estratégias de resolução, opinando sobre o que estaria certo e o que estaria incorreto, mesmo que as ideias dos aprendizes não estivessem sempre corretas. Por exemplo, para introduzir a comutatividade na multiplicação, ao invés de enunciar a propriedade, ela propunha resolver duas multiplicações invertendo a ordem dos fatores (“5 x 12” e “12 x 5” por exemplo), sugerindo que os alunos notassem o que havia ocorrido no resultado das duas multiplicações.

A ideia era dar voz ao aluno e propor a comunicação entre professor e aprendizes. Não podemos negar que nosso ensino é linear, de modo que, ***algumas vezes***, os alunos tem sucesso em suas conjecturas usando o que aprenderam nas aulas anteriores. Todavia, quando estavam errados, a professora mostrava onde estava o erro para poder prosseguir com as explanações a respeito do conteúdo.

Em resumo, quando a professora disse que os alunos construíam seus conceitos, ela queria dizer que os alunos tem voz na apresentação de um novo conteúdo ou na resolução de um problema, que eles podem dizer como estão projetando sentido no que lhes é apresentado, de modo que a professora podia verificar quais dúvidas os alunos tinham e inclusive refletir sobre como melhor ensinar. Essa atitude marcava a prática da professora, que tentava manter os alunos participativos em todas as aulas, inclusive pedindo a eles que fossem ao quadro para resolver exercícios.

Ao trabalhar um problema verbal, a professora discutia a situação com os alunos, pedindo que lessem a questão e que dissessem como a interpretaram, que apontassem o que não foi compreendido e que mencionassem as palavras que não conheciam, pois, segundo suas próprias palavras, sabe que a habilidade de resolver problemas escritos em linguagem natural não é imediata. No caso de uma palavra desconhecida para os alunos, Joana utilizava o dicionário quando necessário; mesmo que o significado presente no

[26] Todos os nomes usados para a identificação dos sujeitos da pesquisa são fictícios.

dicionário não fosse exatamente o usado na matemática, ela utilizava as semelhanças entre os usos para mostrar o significado pertinente à situação.

Na avaliação, quando ainda havia tempo, a professora dava a chance de os alunos refazerem as questões que erraram no momento que entregavam o teste. A professora diz reconhecer que, muitas vezes, os alunos sabem como resolver, mas por falta de atenção, ou por dificuldades no entendimento do enunciado, eles erram. Assim, através de suas instruções, ela dava a chance de o aluno reconhecer seu erro e resolver novamente a questão que errou.

5.2 – As observações em sala de aula

No capítulo do caminho metodológico mencionamos nossos objetivos nas observações e também como procedemos para tal. Neste item, propomos mostrar alguns fatos interessantes que observamos, fatos que se referem às dificuldades de aprendizagem da matemática pelos alunos.

Logo no primeiro encontro observamos uma instrução valiosa dada pela professora: na subtração, quando um dos algarismos do minuendo é menor do que o seu "correspondente" no subtraendo, não devemos dizer que emprestamos "um" do algarismo ao lado, devemos dizer que "pedimos", devemos dizer que o algarismo "doou" um e não que emprestou, porque, segundo a experiência que os alunos trazem de casa, quando empresta, é necessário devolver, o que acarretaria erro no algoritmo da subtração.

Indagada sobre o porquê de sua fala nesse caso, a professora contou que, com sua experiência docente, já percebeu que os alunos trazem muitos raciocínios do dia-a-dia que se mostram incorretos na matemática. Podemos ver que, algo que parece simples pode confundir os alunos e dificultar sua aprendizagem, de modo que o professor precisa estar atento aos usos das palavras, precisa estar avisado de que os alunos trazem lógicas de outros contextos, outros jogos de linguagem, que não se prestam bem ao jogo de linguagem da matemática, justamente porque quando mudamos de contexto, mudamos o uso das palavras, mudando assim sua lógica de emprego.

Ao observamos o ato de ensinar/revisar o algoritmo da multiplicação por parte da professora, percebemos algumas dificuldades de alguns alunos: quando resolviam uma multiplicação na qual os fatores possuíam dois (ou mais) algarismos, digamos 72 x 34, eles costumavam cometer erros ao agrupar os produtos parciais e consequentemente ao adicioná-los:

$$
\begin{array}{r}
72\ \text{x} \\
34\phantom{\ \text{x}} \\
\hline
288\ + \\
216 \\
\hline
504
\end{array}
$$

Pelo o que foi percebido através das conversas com alguns dos alunos que calculavam dessa forma, o erro se dava porque, quando aprenderam a armar as contas de adição eles precisavam organizar “unidade em baixo de unidade”, “dezena em baixo de dezena” etc., de modo que, ao adicionar os produtos parciais 288 e 216, era necessário armar a conta, ou seja, agrupá-los da maneira como aprenderam. Entretanto, como se sabe, não se trata do algoritmo da adição e sim do algoritmo da multiplicação.

Com a intenção de solucionar esta situação, embora não tenha explicado o motivo, a professora lhes disse que, após multiplicar pelo primeiro algarismo do multiplicador, era necessário por um zero debaixo da unidade do primeiro produto parcial – no exemplo que demos acima, deveríamos colocar um zero abaixo do oito – para então multiplicar pelo seu segundo algarismo:

$$
\begin{array}{r}
72\ \text{x} \\
34\phantom{\ \text{x}} \\
\hline
288\ + \\
216\mathbf{0}\ \longleftarrow \\
\hline
2448
\end{array}
$$

O problema parecia solucionado, entretanto, ao aprenderem a multiplicação por dez, cem e mil, o problema reapareceu. Na multiplicação por 100, por exemplo, ao multiplicarem pelo segundo zero, novamente não “andavam” uma casa para a esquerda. Como o resultado da multiplicação por zero é zero, o zero que a professora pediu que colocassem, segundo o depoimento de alguns alunos, já apareceria “naturalmente”, o que mostra que não entenderam satisfatoriamente o que a professora pretendia ensinar. Quando indagados sobre o zero que precisariam colocar eles respondiam “já está aí”. Ao que parece, a “regra” dada pela professora acabou gerando certa confusão aos alunos.

Mesmo que a multiplicação tenha sido ensinada em séries anteriores, não se pode fechar os olhos para as dificuldades dos alunos. Quando uma dificuldade como esta é notada é necessário que o professor aproveite a oportunidade para tirar as dúvidas dos alunos, ainda que seja algo ensinado em uma série anterior.

Outro equívoco observado no aprendizado das multiplicações por dez, cem e mil era achar que o resultado seria sempre igual ao outro fator da multiplicação. Os alunos argumentavam que quando multiplicamos por zero o resultado é zero e que o número um é o elemento neutro da multiplicação, de modo que uma multiplicação como “100 x 25” teria 25 como solução. Baruk (1985, p. 305) percebeu erros semelhantes cometidos pelos alunos franceses, por exemplo, ao adicionar “10 + 3” chegavam ao resultado “4”, pois o zero “não vale nada” e assim a adição era reduzida a “1 + 3”.

Em primeiro lugar, talvez se diga, como já observamos acima, que a explicação ou instrução de por um zero, dada pela professora não foi satisfatória porque deixou dúvidas. Ou ainda, talvez se diga que a explicação da professora não foi “completa”, isto é, não abrangeu todos os casos da multiplicação, pois deixou dúvidas para a aplicação da regra em um novo contexto, como o da multiplicação por múltiplos de dez.

Entretanto, segundo Wittgenstein, nem sempre é possível exibir explicações completas a respeito do significado ou do emprego de uma regra ou expressão linguística. Conforme vimos, alguns conceitos, como o de jogo, são vagos, não tem uma definição rígida, de modo que não poderia haver uma explicação que abrangesse todos seus usos nos diferentes contextos. Mesmo uma explicação completa – nos casos em que há uma – não garante que não haverá mal-entendidos (BAKER & HACKER, 2005, p. 38). Não existe tal coisa como uma explicação do significado ou uma regra para o uso de uma expressão que esteja imune a equívocos.

Obviamente não estamos afirmando que, caso uma explicação falhe, o professor nada pode fazer. Ao contrário, outras muitas explicações podem ser dadas a fim de corrigir possíveis mal-entendidos ou dúvidas. Dependendo da ocasião, podemos formular novas explicações, apontar para objetos, usar gestos, dar exemplos etc.

Em segundo lugar, parece-nos que os alunos não “atualizam” as regras aprendidas. Nas duas situações descritas acima, a professora tentava fazê-los reconhecer seus erros argumentando através do que lhes foi ensinado anteriormente a respeito de nosso sistema de numeração decimal e de nosso modo de contagem (classe das unidades simples, classe dos milhares, classe dos milhões etc.), mostrando, por exemplo, que o “1” do número cem equivale a uma unidade de centena, ou que o “6” do número “216” (na multiplicação “72 x 34”) equivale a 6 dezenas e que devemos somar unidade com unidade, dezena com dezena etc., mas isso não era claro para os alunos. Eles deveriam ou não notar que também deveriam usar tal regra nesse contexto? Mas por quê tal aplicação deveria ser óbvia ao aluno?

Antes de propor uma resposta, vejamos um exemplo semelhante. Imaginemos a seguinte situação: o professor ensina o Teorema de Pitágoras para o aprendiz. O professor resolve exemplos com vários triângulos retângulos diferentes, com diferentes medidas, mostra que, por meio deste Teorema ele pode, dependendo do caso, calcular a hipotenusa, ou os catetos etc. E suponhamos que o aprendiz compreenda de forma satisfatória as explicações do professor e seja capaz de resolver exercícios semelhantes.

Agora o professor deseja que o aprendiz, por meio dos ensinamentos que recebeu sobre o Teorema de Pitágoras, a propósito dos triângulos retângulos, calcule a diagonal de um retângulo de base “a” e altura “h”. Entretanto, ao solicitar que o aluno resolva tal questão, este mostra que não sabe bem o que fazer. O aluno inclusive pode dizer ao professor que este não lhe ensinou tal conteúdo, não mostrou como calcular a diagonal do retângulo etc. E se pensarmos bem, o aluno parece ter razão.

Algo semelhante a essa situação já deve ter acontecido com muitos de nós professores de matemática. Poderíamos nos perguntar: “Por que tal coisa acontece?”, “Parece tão claro o que ele deve fazer, por que ele não percebe?”. Bem, será que então não seria oportuno também perguntar por que um uso diferente de uma regra deveria ser óbvio ao aprendiz?

Como vimos, a regra por si só não comporta suas aplicações, ela não nos diz ***quando*** aplicá-la. Em geral, não nos são óbvias novas possibilidades de aplicação de uma regra. McGinn analisando a discussão a respeito de “seguir regras” proposta por Wittgenstein nas ***Investigações*** argumenta que não há um “link superlativo” entre uma regra e suas aplicações:

> Só nos tornamos conscientes da possibilidade de usar uma regra de modo diferente, quando alguém nos indica um uso diferente como uma aplicação desta. Normalmente, a possibilidade dessas outras aplicações nem mesmo nos ocorrem; nós simplesmente aplicamos a regra da forma como fomos treinados - em consonância com a nossa prática de usá-la - e nada que nos incomode ocorre (MCGINN, 2002, p. 104).

Quando ensinamos uma regra em um dado contexto, muitas vezes, ingenuamente, acreditamos que o aprendiz saberá aplicá-la em um novo contexto matemático, em um novo conteúdo. Se para nós professores a aplicação de algumas regras matemáticas é clara, isso se deve a nossa prática, nossa habilidade adquirida aos poucos, com o ensino que recebemos, com o treino em resolver questões semelhantes etc.

Estas reflexões, ao que parece, colocam em questão algumas orientações pedagógicas para o ensino da matemática. Muitas vezes, diz-se que o aluno deve, ele mesmo, construir seu conhecimento. O professor não deve "adiantar" o conteúdo, sob pena de destituir os conceitos de seus significados. Tal discussão é de grande importância para a pesquisa em Educação Matemática, entretanto não haveria espaço para uma discussão de tal magnitude em um trabalho como este. Para uma discussão mais detalhada a respeito do tema o leitor pode consultar o trabalho de Gottschalk[27] (2004a).

Segundo Wittgenstein, é no uso que a regra adquire sentido, esta por si só parece vazia. Isso aponta para o fato de que, embora os usos das regras tenham semelhanças, quem aprende em geral não faz relação entre os contextos espontaneamente. É preciso a prática, concomitante a um aprendizado.

Para Silveira (2008a), é no movimento de fazer e refazer exercícios que o aluno vai aprimorando sua interpretação de uma regra matemática, e assim seu conceito vai se modificando. Não há generalização automática da regra nem transposição para novos contextos, mesmo que seus usos sejam aparentados:

> O sujeito faz analogias, porém não transpõe conhecimentos, não generaliza automaticamente, justamente porque não existe generalização espontânea. A relação entre um conhecimento e suas aplicações está à mercê de fatos contingentes. No processo de aplicação da regra, o aluno se depara com contextos diferentes e a regra que deveria ser a mesma, passa por transformações e é modificada (SILVEIRA, 2008a, p. 102).

Isso parece evidenciar que nem sempre os alunos fazem as relações entre as regras ensinadas separadamente. Ou seja, se o professor não mostra ao aluno que uma regra aprendida em um contexto pode e deve ser aplicada em outro contexto, não é garantido que o aprendiz note a relação sozinho (o professor, também, não pode prever todos os contextos de aplicação de uma regra).

Observamos também que, em geral, embora não possamos generalizar, os alunos que tem dificuldades no aprendizado da matemática são aqueles que não tem hábitos de estudo em casa, em consequência, ao que parece, da falta de participação/preocupação da

---

[27] Em seu trabalho a autora busca apontar alguns equívocos presentes na prática pedagógica do ensino de matemática. Segundo a autora, tais equívocos são causados pela adoção de uma concepção referencial da linguagem matemática.

família. Quando os alunos tinham dever de casa, ou quando havia prova marcada eles não estudavam/faziam os exercícios e isto faz falta para o domínio das técnicas matemáticas.

Segundo a fala dos próprios alunos, eles não faziam suas atividades de matemática ou não estudavam para os testes por que tiveram de ir a alguma festa, ou porque foram à “piscina”, tiveram de sair para comprar roupas, calçados, comprar um presente para alguém etc. Podemos fazer uma comparação entre o que percebemos e a pesquisa de Sarrasy[28] (2002, apud SILVEIRA 2009a). Em seu trabalho, o autor percebeu que quanto menos rígidas são as regras familiares, maiores são as dificuldades dos alunos em seguir as regras matemáticas.

Chegado o momento de trabalhar a divisão, a professora partia de exemplos para revisar o que os alunos já sabiam e para ensinar-lhes novas regras. Por exemplo, Joana partiu de exercícios de divisão para mostrar que quando se baixa dois números do dividendo seguidamente é necessário colocar um zero no quociente, embora não tenha explicado aos estudantes o motivo de pôr o zero. A professora poderia ter “justificado” essa regra realizando uma divisão decompondo o dividendo:

$$714 \div 7 \Longrightarrow 700 + 10 + 4 \;\; \underline{|\,7 \qquad\quad}$$
$$3+4=7 \qquad 100 + 1 + 1 = 102$$

Assim, os alunos poderiam verificar que a resposta da divisão “714 ÷ 7” não poderia ser “12” (resultado que se obteria ao “esquecer” de por o zero no quociente), mas sim 102. No momento oportuno, veremos que os alunos tiveram dificuldades quando precisaram aplicar essa regra.

Para fazê-los praticar o algoritmo da divisão, a professora propôs uma lista de exercícios “disfarçada” de dominó em uma folha de papel, no qual a correspondência entre as peças era feita entre a divisão proposta e seu resultado. Exemplificando, a peça com a divisão “15 ÷ 3” deveria ser posta em correspondência com a peça de resultado “5”. Para que “guardassem” a correspondência entre as peças do dominó, os alunos deviam pintá-las da mesma cor.

Portanto, para que descobrissem a relação entre as peças era necessário efetuar todas as divisões propostas na folha de papel com o dominó, exercitando assim o seu

[28] SARRASY, Bernard. Pratiques d’éducation familiale et sensibilité au contrat didactique dans l’enseignement des mathématiques chez des élèves de 9-10 ans. ***Revue Internationale de l'Education Familiale.*** Vol. 6, n° 1. pp. 103-130. França: 2002.

aprendizado a respeito do algoritmo da divisão. A professora esclareceu que, de modo geral, os alunos não gostam de listas de exercícios e inclusive não fazem as atividades propostas para casa, por isso ela propõe jogos, como o dominó que descrevemos, para ajudar os alunos a praticar o que aprenderam.

5.3 – A primeira avaliação de matemática

Antes de iniciar o ensino/revisão do algoritmo da divisão, a professora aplicou um teste (anexo A) a respeito dos conteúdos que havia ensinado/revisado, a saber, a adição, subtração, multiplicação e sistema decimal (classe das unidades simples, classe dos milhares, classe dos milhões e classe dos bilhões). O teste foi resolvido pelos alunos em dois dias, mais exatamente em uma mais duas (1 + 2) aulas de 45 minutos.

Nos dias de prova, foi possível observar os alunos e inclusive atuar esclarecendo suas dúvidas quando solicitavam. Aproveitava-se a oportunidade, então, para tentar entender seu raciocínio. Gentilmente, ao final, a professora nos cedeu cópia das provas dos alunos, para que pudéssemos aqui mostrar algumas das dificuldades enfrentadas por eles, observadas tanto nas discussões nos dias de prova (quando chamavam para tomar esclarecimentos) quanto no registro dos alunos contido nas cópias das provas.

Os principais erros dos alunos na prova ocorreram nas questões 2 e 3. Assim, concentraremos nossas observações no que diz respeito as mesmas. Julgamos interessante notar que estas questões que causaram dificuldades são questões que envolvem a compreensão da linguagem natural, o que provavelmente não se trata de coincidência, mas a evidência de que muitas das dificuldades dos alunos nas provas de matemática se devem a compreensão dos enunciados.

Comecemos então pelas observações a respeito das dificuldades da segunda questão. Alguns alunos não compreenderam que “pelas cestas” em “Quanto tia Ana/tia Vera pagou pelas cestas que comprou?” indicava que o que estava sendo solicitado era o total gasto na compra das cestas, de modo que respondiam indicando o preço de uma única cesta. Depois de orientados, por mim ou pela professora, alguns alunos conseguiram resolver a questão satisfatoriamente, pois sabiam efetuar as multiplicações.

Outro aluno, ao invés de efetuar as multiplicações do número de cestas pelo valor das cestas, adicionou “27 + 8” e “25 + 7”, o que mostra que não compreendeu corretamente o problema, ou que operou aleatoriamente com os números, talvez por não ter compreendido a questão.

Ainda na segunda questão, uma aluna mostra uma forma “curiosa” de efetuar as multiplicações “8 x 27” e “25 x 7”. Ela arma a conta corretamente, mas parece “misturar” o algoritmo da multiplicação com o da adição:

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 27 \times \\ 8 \\ \hline 115 \end{array}$$

Ao invés de multiplicar 8 por 7, a aluna aplica uma adição, coloca 5 no resultado e “sobe” uma dezena. Ela faz o mesmo para o número 2, soma-o com o 8, soma a dezena que “subiu” e “desce” o 11 para o resultado, obtendo 115 como resultado final. Isso evidencia que provavelmente a aluna compreendeu a situação, ela sabia que poderia resolver a questão através da multiplicação que armou, mas fracassou no uso do algoritmo. Se por um lado a correta compreensão do problema é indispensável, o sucesso do aluno na sua resolução também depende de saber usar a regra matemática de forma adequada. Essa aluna também demonstrou dificuldades nas multiplicações da questão 4, embora não tenha multiplicado da mesma forma.

No terceiro item da segunda questão, os alunos não associavam a palavra “diferença” ao resultado de uma subtração. Eles entendiam a palavra em seu uso comum, seu uso no jogo de linguagem do dia-a-dia, procurando, de fato, as diferenças existentes entre os números. Conversando com um dos alunos sobre esse item, ele dizia: “A diferença? É óbvio! Um custa R$ 276,00 e o outro R$ 175,00”. Quando objetado sobre sua resposta, ou seja, quando lhe foi dito que esta não era a resposta esperada pela professora, ele continuou: “É por que um é maior que o outro?”, “É por que um é par e outro é ímpar?” etc. Todas as afirmações do aluno estão corretas, mas nenhuma responde a questão proposta.

Vejamos outras respostas dos alunos:

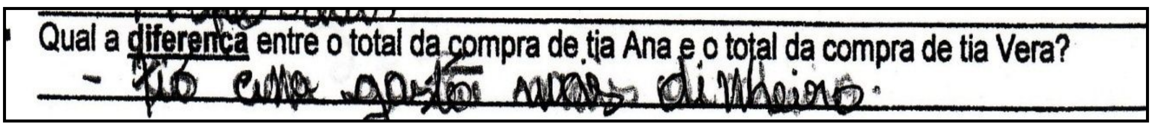


Figura 1: (Tia ‘ana’ gastou ‘mas’ dinheiro) exemplo de que o aluno não sabe o uso da palavra diferença no jogo de linguagem da matemática

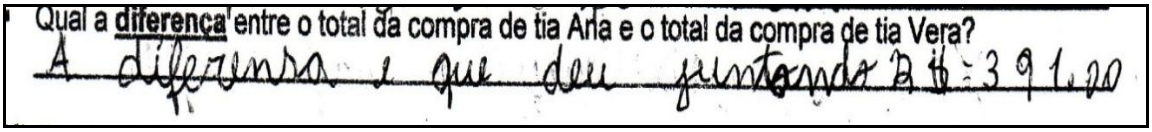


Figura 2: exemplo de que o aluno não sabe o uso da palavra diferença no jogo de linguagem da matemática

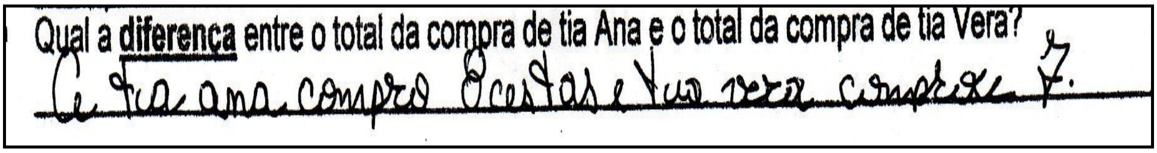


Figura 3: exemplo de que o aluno não sabe o uso da palavra diferença no jogo de linguagem da matemática

O último recorte aponta para uma formulação não adequada da pergunta, pois parece não ter ficado claro se se tratava do total em dinheiro ou do total das cestas, afinal ambos dizem do total da compra. Entretanto, essa não parece ter sido a maior dificuldade dos alunos, visto que a maioria deles entendeu que se tratava do total em reais, mas não sabia do que se tratava a “diferença” indagada na questão. Um deles, inclusive, como podemos ver na figura 2, realizou uma adição entre os valores. A professora poderia ter escrito, por exemplo, “Qual a diferença **em reais**...”, porém isso não garantiria o sucesso dos alunos, uma vez que estes mostraram não saber o uso da palavra “diferença” no contexto da matemática.

Pimm (1998) exibe exemplos de natureza semelhante ao acima citado, inclusive um bastante semelhante (p. 33) – obtido em conversas entre alunos e professores – a respeito da palavra “diferença” que indica subtração em contexto matemático. À pergunta “qual a diferença entre 24 e 9?”, um dos alunos responde: “um tem dois algarismo e o outro apenas um”. Em outro exemplo (p. 44) o professor pergunta ao aprendiz “Quantos 4 há em 24?” e o aluno responde “um”. Talvez se diga que, para corretamente indicar a operação de divisão, o professor deveria ter usado o verbo “caber” ao invés de “haver”. Entretanto, se o aluno não souber que esse “caber” usado na matemática indica divisão (assim como no exemplo da palavra “diferença” que indica subtração), este provavelmente não obterá sucesso em sua resposta. Em mais uma conversa entre mestre e aprendiz (p.45) o professor diz “Seja ***n*** um número...” e o aluno rebate “mas ***n*** é uma letra!”.

Em todos os casos, assim nos parece, os equívocos ocorrem porque os sujeitos não sabem o uso de tais expressões linguísticas no contexto da matemática e, não custa nada lembrar, estas são ***regras gramaticais***, nada descrevem.

Como vimos, compreender uma linguagem é dominar uma técnica, é saber seguir regras, e estas precisam ser aprendidas. Antes de aprender a jogar xadrez, por exemplo, é preciso aprender suas regras. Dizer “este é o rei do xadrez” não esclarece o uso dessa peça no jogo, a menos que eu conheça a “gramática” dessa peça: “Essa elucidação [“Este é o rei”] ensina-lhe o uso da figura apenas porque, como poderíamos dizer, já estava preparado o lugar no qual ela foi colocada” (IF, §31).

De modo semelhante, antes que possamos reconhecer objetos vermelhos, verdes, azuis etc. é preciso que aprendamos, por meio de um treino, o nome das cores:

> Começar por ensinar a alguém <<Isto parece vermelho>> não tem sentido. [O aprendiz] Tem de o dizer espontaneamente quando tiver aprendido o que significa <<vermelho>>, isto é, quando tiver aprendido a técnica de utilizar a palavra (Z, §418).

Ora, aprendemos o nome das cores por meio de um treino. Dizemos ao aprendiz frases como: “a esta cor chamamos ...”. Nenhuma descrição (explicação, pergunta etc.) sobre objetos vermelhos pode ser feita antes de um treino preliminar a respeito do nome das cores. Lembremo-nos de que: “Toda a explicação tem o seu fundamento no treino (Os educadores deviam lembra-se disso)” (Z, §419). Antes que possamos falar de objetos vermelhos ao aprendiz ou solicitar que este traga um certo objeto vermelho, ele precisa ***aprender*** o uso da palavra vermelho.

Seguindo o mesmo raciocínio, no caso de nossos exemplos, o aprendiz só saberá que “diferença” indica subtração se ***aprender*** esta informação, se o professor ***ensinar-lhe*** esta regra. Do mesmo modo, o aluno só saberá que há ou cabem seis 4 em 24, se ***lhe for dito*** que as palavras “haver” ou “caber”, nesse contexto, indicam a operação de divisão. E só saberá, também, que a letra “n” em “seja ***n*** um número...” ***representa*** um número, se ***o professor disser*** aos alunos que em matemática usamos letras para representar números. O aluno não saberá resolver uma equação do tipo “$n^2 + n + 2$” antes de aprender que “n”, na referida equação, representa um número, tampouco poderá exibir a diferença entre dois números antes de aprender que se trata de uma subtração, antes que seu “lugar” esteja preparado no jogo de linguagem.

Não é óbvio para o aluno, como talvez possa parecer para nós professores, o uso das palavras no contexto da matemática se ele ainda não o aprendeu. Mesmo que a expressão linguística seja também usada no dia-a-dia, isto não garante sucesso nas aulas de matemática, pois, como sabemos, os usos das palavras são diferentes em diferentes jogos de linguagem, e saber usar uma regra linguística em um contexto não garante saber usá-la em um ***novo*** contexto.

Além disso, em geral, os professores não exercitam tal regra. Segundo Joana, referindo-se à professora da série anterior, a professora apenas diz apenas ***uma vez*** o nome dos termos aos alunos e não os faz praticar, nem mesmo retoma tal questão.

Assim, nesse caso, não se trata apenas de um uso adequado das palavras, mas do aprendizado do "vocabulário matemático", do uso das palavras no jogo de linguagem específico da matemática, e o professor precisa ensinar esse uso, esse vocabulário. Como se trata de uma turma da quarta série, o esperado é que os alunos já tivessem aprendido o uso da palavra "diferença" no contexto da subtração.

Tratando agora da terceira questão, muitos alunos comunicaram não saber o significado da palavra "altera", de modo que não poderiam julgar se a alternativa era falsa ou verdadeira. Esse é mais um exemplo da importância da compreensão da linguagem natural no contexto da matemática, pois é por meio dela que a matemática é ensinada e consequentemente aprendida.

Ainda na questão três, vários alunos tiveram dificuldades em reconhecer que "5 x 3 = 3 x 5", marcando-a como falsa. Ao reescrever a alternativa de forma correta (ainda na questão três), em geral os alunos diziam que "5 x 3 = 15" e não igual a "3 x 5". Vejamos um recorte:

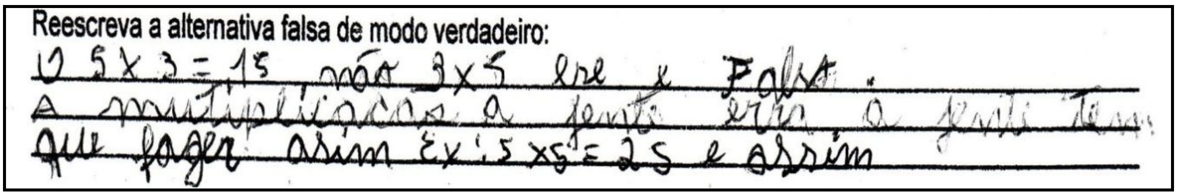


Figura 4: exemplo que mostra a dificuldade dos alunos em reconhecer que 5x3 = 3x5

Aparentemente, a preocupação dos alunos, como mostra o recorte acima, é multiplicar. Se há o sinal de multiplicação, parece que o correto é multiplicar: assim o aluno diz que "5x3 = 15" e não poderia ser "3x5".

Curiosamente, nas ***Observações Filosóficas,*** Wittgenstein afirma que "na escola, as crianças certamente aprendem que 2 x 2 = 4, mas não que 2 = 2" (§163). No aprendizado da multiplicação aprendemos várias técnicas de cálculo, como o algoritmo da multiplicação, por exemplo. Já no caso de expressões como "2 = 2", esta é uma proposição que é “engolida” ao longo do aprendizado de outras proposições, é uma igualdade que é ***aceita.***

No caso de proposições como “2 x 2 = 4”, podemos “verificar” sua veracidade por meio de nossas técnicas, seja contando nos dedos ou usando o algoritmo da multiplicação, já a igualdade “2 = 2” não. Essa proposição é aprendida (aceita) de forma semelhante ao aprendizado do nome das cores: ***é assim.*** São regras linguísticas convencionadas.

Parece claro que, se não todos, a grande maioria dos alunos sabe que “3 x 5” também é igual a quinze. Ao que parece, o que causou estranheza aos alunos foi a forma como a sentença estava escrita, e não em reconhecer que os valores eram iguais; eles sabiam que “5 x 3 = 15” e também que “3 x 5 = 15”, mas daí não conseguiram chegar a conclusão de que “5 x 3 = 3 x 5”.

Segundo nossa compreensão, os alunos seguiam outra regra: o que fica à direita do sinal de igualdade deve ser um resultado, um número e não outra operação, o que os impossibilitava de reconhecer que “5 x 3 = 3 x 5”.

5.4 – A atividade proposta aos alunos

Após as observações já descritas, propomos uma atividade para que os alunos resolvessem (anexo B). Antes de aplicarmos a atividade, exibimos as questões à professora responsável pela turma, procedimento solicitado pela escola[29]. Além disso, a professora pôde avaliar se as questões estavam de acordo com o que foi ensinado aos alunos e se o tempo reservado para o teste condizia com o número de questões propostas.

A atividade foi realizada em um dia com duas aulas de quarenta e cinco minutos. No início da aula, foi explicado aos alunos sobre a atividade de que gostaríamos que resolvessem e sobre a posterior entrevista que faríamos com alguns deles, a respeito da resolução das questões. Assim, entregamos aos alunos a folha com as questões para que resolvessem, bem como foram dadas as orientações a respeito das questões (a leitura das questões por alunos e pesquisador), prática realizada pela professora para saber se algo não havia sido entendido. A escolha dos sujeitos para a entrevista foi aleatória.

[29] Conforme a orientação recebida, como se trata da Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará, não é necessário solicitar autorização aos pais ou responsáveis para que os alunos participem de atividades de experimentação pedagógica, pois estes, os pais ou responsáveis, estão cientes dessa possibilidade. Bastando, portanto, que todas nossas atividades previstas passassem por uma avaliação prévia por parte da coordenação das séries iniciais e pela professora responsável pela turma.

Do total de 25 alunos da turma, escolhemos sete para a entrevista, feita individualmente. Para a entrevista, tínhamos um roteiro geral de perguntas (Anexo C) que foram feitas a todos os entrevistados. Entretanto, dependendo dos registros dos alunos e das respostas dadas nas perguntas gerais, novas indagações eram incluídas para que pudéssemos melhor entender a interpretação e a resolução dos alunos. As entrevistas foram registradas em áudio.

Com exceção da primeira indagação, todas se referiam às atividades que os alunos haviam acabado de resolver. Nossa intenção com a primeira pergunta da entrevista foi saber como os alunos procedem na resolução de um problema matemático, como sabem qual operação ou procedimento precisam realizar para solucioná-lo.

5.5 – Análise a respeito das respostas dos alunos

Antes de tratar dos casos que chamaram mais atenção – que distribuímos em quatro sessões de análise –, analisaremos de uma forma geral as respostas e dificuldades dos alunos diante das questões propostas, tanto dos registros escritos na folha de questões, quanto na fala dos alunos, nas entrevistas e nos momentos em que pediam alguma orientação quanto à resolução das atividades.

Na primeira questão todos identificaram que a operação correta a ser realizada para sua resolução era uma divisão. Em geral, quando perguntamos "Como você sabe o que precisa fazer para resolver um problema matemático?", todos responderam que uma leitura atenta do enunciado da questão era importante, além da percepção de algumas palavras que indicam as operações ou procedimentos que devem ser feitos, como mostra a fala de um dos alunos:

Eu leio a pergunta...tipo assim: "eles vão dividir 5 pirulitos", então eu tenho que dividir. É..."eu tenho dez pirulitos e minha mãe vai me dar mais dez", aí eu já sei que é de mais. "Meu pai ganhou dez...e eu vou ganhar o dobro", então é o dobro de dez e eu já sei que é de vezes.

Na questão de número um, além da compreensão da situação, os alunos apontaram as palavras "repartiram" e "igualmente" como responsáveis pela indicação de que a operação correta a ser realizada seria uma divisão. Como veremos adiante, não é suficiente uma correta compreensão da situação se o aluno não tem habilidade em usar o algoritmo da divisão.

Na segunda questão das atividades propostas, embora a maioria tenha compreendido que se tratava de um problema de divisão, os alunos mostraram um pouco mais de dificuldade em tal compreensão, talvez pela falta de uma palavra chave que indicasse a operação a ser realizada. Um sujeito, inclusive, tentou realizar uma multiplicação, o que indica que não compreendeu a situação.

A grande dificuldade dos alunos na questão 2 foi perceber que os dois alunos restantes na divisão de 114 por 8 (de resultado 14 e resto 02) implicava mais uma viagem do motorista da van, sendo necessário, portanto, 15 viagens, e não 14 como a grande maioria respondeu. Como veremos, um dos motivos da dificuldade dos alunos foi a "confusão" entre os contextos e a falta de experiência na resolução de exercícios semelhantes. Embora o problema trate de uma situação do dia-a-dia, traz indagações novas aos alunos.

A partir dos registros de alguns alunos, vimos que não é suficiente compreender problemas matemáticos caso não se saiba operar com o algoritmo da divisão (ou outra técnica passível de emprego) de maneira satisfatória. Observação essa que pode parecer óbvia, mas que, como mostra D'Amore (2007), não é tão óbvia para muitos dos professores.

Uma aluna, por exemplo, apesar de ter interpretado que os problemas verbais tratavam-se de problemas de divisão, errou todas as divisões, inclusive as dos problemas não verbais. Em uma pesquisa interessante, Lautert e Spinillo (2002) mostram que muitas crianças tem uma concepção matemática correta do conceito de divisão, entretanto, sem a instrução escolar, fracassam na resolução de problemas verbais de divisão.

Ao analisarmos os registros dos alunos na resolução da terceira questão, letra "a)", verificamos que alguns alunos não sabiam que "qualquer número dividido por 1 resulta o mesmo número", pois estes dividiam usando os passos do algoritmo – dividindo 2 por 1, 1 por 1 e 6 por 1 –, o que não implica problema se o sujeito usar corretamente o algoritmo. Mas, nem todos conseguiram resolver corretamente essa questão que parecia ser uma das mais fáceis. Veremos que um dos motivos dessa dificuldade foi o novo caso de aplicação do algoritmo da divisão (divisão), que difere do habitual.

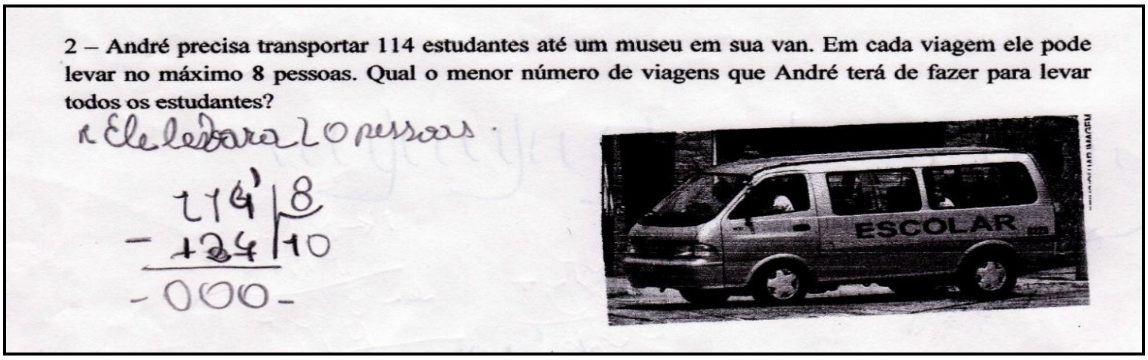
No item "b)" da terceira questão – que inclusive era uma divisão idêntica a que poderia ser usada na resolução da primeira questão –, com exceção dos erros de falta de atenção, os alunos não apresentaram grandes dificuldades, embora tenha ocorrido que alguns tenham acertado a divisão da questão 3 e errado a mesma divisão na primeira questão. No item “b)” da terceira questão a ordem “estava dada”, diferente da primeira questão, na qual é necessário compreender o enunciado para identificar a operação matemática implícita.

Finalmente, no último item, na letra “c)” da terceira questão, além de alguns erros na execução dos passos do algoritmo – subtrações, por exemplo –, o principal erro dos alunos foi não saber, ou esquecer de colocar o zero no quociente ao “baixar” o “1” e o “6”. Segundo nossa análise, percebemos que os alunos pensam estar seguindo as regras do algoritmo corretamente, por isso não se dão conta dos erros.

5.5.1 – As “estratégias” utilizadas pelos alunos

Algo curioso que notamos nos registros de alguns alunos é que eles parecem ter inventado maneiras diferentes de operar com o algoritmo da divisão – provavelmente semelhante a algo que viram nas aulas de matemática – com o intuito, aparentemente, de tornar as atividades mais simples. Pedro e Silvia, por exemplo, deram um “jeitinho” em suas contas para que todas dessem um resultado exato, ou seja, sem resto. Dessa forma, nos problemas verbais, não era necessário pensar no que seria feito com o resto da divisão, tornando a resolução da questão mais fácil.

Vejamos um recorte da folha de atividades de Pedro:



2 – André precisa transportar 114 estudantes até um museu em sua van. Em cada viagem ele pode levar no máximo 8 pessoas. Qual o menor número de viagens que André terá de fazer para levar todos os estudantes?

R Ele levara 20 pessoas.

114 | 8
- 124 | 10
-000-

Figura 5: exemplo de que os alunos inventam maneiras diferentes de operar com o algoritmo da divisão.

No recorte acima, Pedro parece inventar uma forma de calcular para que o resultado seja exato. Como a escolha dos sujeitos para a entrevista foi aleatória e como a presente análise foi feita depois da sessão de entrevistas, não nos é possível esclarecer as "estratégias" utilizadas pelos estudantes.

Segundo Baruk (1996), para o aluno, existe uma conexão entre os cálculos e a magia. Já que muitas vezes os alunos não compreendem satisfatoriamente as regras matemáticas, eles as interpretam com um significado de magia, como algo misterioso.

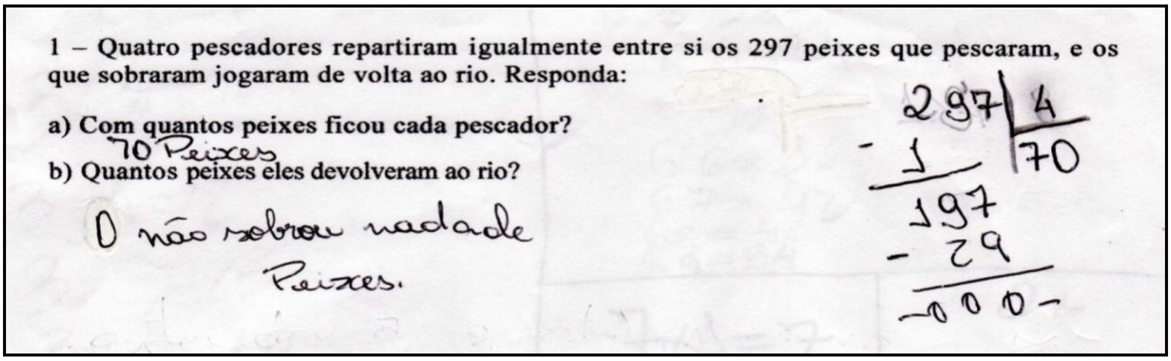
Nas ***Observações sobre os fundamentos da matemática,*** Wittgenstein pergunta: "uma operação de cálculo não é uma espécie de cartomancia?" (RFM, apêndice II, §05). Diferente de uma experiência, ou de um fato contingente, um cálculo matemático segue o imperativo "tem de ser assim!", "2 + 2" ***é*** igual a quatro. Mas se o aluno não entende as "regras do jogo", ele tem a impressão de que se trata de algo estranho, interpretando os cálculos como um tipo de mágica. Fato também verificado em Silveira (2005).

Baruk dá-nos um exemplo de "lógica da magia" no cálculo matemático:

$$\frac{7}{4}+\frac{5}{3}=\frac{(7+3)+\ (4+5)}{(4+3)}=\frac{18}{7}$$

O correto nesse cálculo seria usar a multiplicação, mas como o aluno não compreende a regra, não faz nenhum sentido para ele multiplicar se a operação entre as frações é uma adição. Baruk dá outros exemplos das "invenções" dos alunos: $\frac{1}{2}$ pode ser igualado a 2, e $\frac{a+b}{a+c}$ pode ser igualado a $\frac{b}{c}$**.** A autora dá exemplos de erros de alunos franceses, mas estes são semelhantes aos erros dos alunos brasileiros.

Semelhante a Pedro, Silvia parece criar um modo diferente de operar com o algoritmo da divisão:


1 – Quatro pescadores repartiram igualmente entre si os 297 peixes que pescaram, e os que sobraram jogaram de volta ao rio. Responda:

a) Com quantos peixes ficou cada pescador?

70 Peixes

b) Quantos peixes eles devolveram ao rio?

O não sobrou nada de Peixes.

297 | 4
-1 | 70
197
-29
-000-

Figura 6: exemplo de que os alunos inventam maneiras diferentes de operar com o algoritmo da divisão.

Estes exemplos nos fazem perceber o quanto podem ser “obscuras” as regras matemáticas para os alunos. Como tudo é vago e sem sentido, os resultados das contas parecem algo mágico e então – assim nos parece – eles acham que também podem produzir “regras matemáticas” a sua vontade.

Outro aluno, ao resolver a segunda questão da atividade proposta, trocou 114 por 144. Pode ter sido apenas uma falta de atenção, mas pode ser, também, que ele tenha trocado 114 por 144 porque, nesse caso, a conta é exata.

5.5.2 – O contexto no aprendizado de regras

No terceiro capítulo, vimos, a partir das reflexões de Wittgenstein, que não existe regra que esteja imune a desvios em seu emprego. Mesmo que tenhamos grande habilidade e segurança em aplicar uma determinada regra, pode sempre surgir uma situação na qual temos dúvidas. Neste item, pretendemos apresentar duas diferentes situações que podem ser interpretadas como dificuldades referentes ao contexto de emprego de regras/técnicas, na solução de uma atividade de matemática.

O primeiro caso diz respeito a “confusão” entre o contexto do dia-a-dia e o contexto matemático, que pode ser causada ao solucionar um problema que remete a uma situação real, ou seja, problemas chamados de contextualizados, que aqui chamamos de verbais.

Um dos motivos apontados para a utilização de problemas verbais no ensino da matemática é a possibilidade de aproximar o conteúdo matemático às situações do dia-a-dia do aluno, de modo a contextualizar o ensino. Entretanto, muitas vezes, não nos damos conta de que, mesmo tratando de uma situação do dia-a-dia, um problema matemático nem sempre trata exatamente do mesmo contexto do dia-a-dia, pois a solução dada a um problema do cotidiano nem sempre é a mesma esperada como resposta para um problema matemático.

Os contextos são diferentes e, portanto, a lógica, bem como as técnicas utilizadas para a resolução dos problemas também são diferentes em cada contexto (fato também apontado em Silveira 2005 e em Gottschalk 2004b).

Alguns alunos, ao resolverem problemas verbais, propuseram soluções que parecem perfeitamente cabíveis no contexto do dia-a-dia, mas que não estão de acordo com os “limites” impostos pelas regras matemáticas e pelos dados presentes nas questões.

Borba e Selva[30] (2006) parecem corroborar nossa argumentação ao observarem que ao resolver um problema verbal de divisão inexata, os sujeitos dão um novo fim ao resto, ou seja, apresentam opções não mencionadas no enunciado da questão.

A respeito do novo fim dado ao resto na resolução de problemas matemáticos de divisão inexatos, Borba e Selva (2006) salientam que:

> o novo fim em geral consiste em dar o resto a um recipiente não mencionado no enunciado do problema: “ficava pra mim”, “eu comia”, “dava para a minha professora”, “eu como porque eu gosto muito de pizza”, “eu dou pra minha mãe pois eu não gosto de morango”, “guardava”, “botava no fruteiro”, dentre muitos outros fins descritos pelas crianças (p. 12).

De forma semelhante, na resolução da segunda questão da atividade proposta aos alunos – ***André precisa transportar 114 estudantes até um museu em sua van. Em cada viagem ele pode levar no máximo 8 pessoas. Qual o menor número de viagens que André terá de fazer para levar todos os estudantes?*** –, ao tratar do resto da divisão de 114 por 08, alguns alunos diziam que os dois alunos restantes poderiam ir ao museu de ônibus, que poderiam ir na próxima viagem etc.

De forma semelhante às respostas dadas pelos alunos na pesquisa de Borba e Selva (2006), as respostas dos alunos poderiam ser apropriadas se se tratasse do contexto do dia-a-dia, mas inadequadas no contexto da situação do problema matemático. Ao que parece, nesses casos, a situação real se sobressai às regras matemáticas. Assim como nos exemplos de Borba e Selva (2006), aqui parece que a preocupação do aluno é resolver o problema da forma mais cabível, mais simples etc., e não de acordo com os dados do problema. Afinal, por que utilizar novamente a van, que pode transportar até oito pessoas para levar apenas dois alunos?

Um problema matemático impõe certos limites para sua solução, pois, como sabemos, as regras matemáticas são rigorosas. A respeito do rigor da matemática, Granger (1989) observa a presença de regras constrangedoras[31] e uma grande severidade na aplicação destas e que apesar da “inesgotável vitalidade da imaginação matemática, da abundância ininterrupta, há três milênios ao menos de suas criações” (GRANGER, 1989, p. 69-70), tudo é feito dentro do sistema de regras matemáticas legitimadas pela comunidade em questão.

---

[30] Os autores não fazem a mesma análise que fazemos aqui, apenas utilizamos alguns trechos que julgamos de interesse para o nosso trabalho.

[31] Constranger no sentido de tolher a liberdade.

De certo que o filósofo não está se referindo à matemática escolar, mas este rigor também acompanha, pelo menos em parte, a matemática que é ensinada em nossas escolas. Por exemplo, na segunda questão da atividade proposta aos alunos, dispomos apenas da van para transportar os alunos, não se pode usar um ônibus além da van, o problema impõe que no máximo oito alunos podem ir em cada viagem etc.

Não custa nada lembrar, também, que as regras matemáticas não descrevem fatos, de modo que nem sempre a resposta dada pelo aluno, baseada nos fatos do dia-a-dia, está de acordo com as regras matemáticas.

Não estamos querendo afirmar que não se deve usar problemas contextualizados em sala de aula, mas apenas chamar a atenção para os cuidados que o professor deve ter. Talvez uma boa sugestão seja trabalhar a solução de problemas matemáticos com os alunos em sala de aula, enfatizando a observação dos dados da questão que determinam certos limites para a resolução.

O segundo caso diz respeito ao uso de uma regra em contextos diferentes. Alguns alunos erraram a resolução do item "a)" da questão número 3 (216 dividido por 1) e quando perguntados diziam não sabiam como realizar divisões por 1, como mostra a figura abaixo:

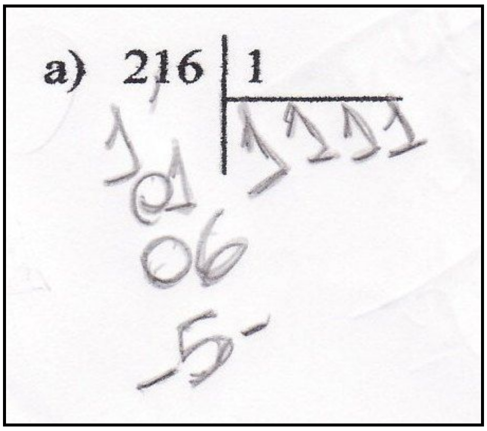


Figura 6: exemplo de erro na divisão por 1

Ora, embora tal divisão possa ser feita utilizando a mesma técnica de uma divisão de divisor maior que 1, a divisão pela unidade difere das atividades habituais que pressupõem um divisor maior que 1. Em geral o professor ensina ao aluno que "qualquer número dividido por 1 resulta este mesmo número" e apresenta alguns exemplos. Não há, em geral, uma "prática" em atividades de dividir por um. A ênfase nos exercícios é sempre em atividades com divisor maior que um e talvez por isso tal atividade que parecia ser a mais simples causou alguma confusão aos alunos em sua resolução.

Neves (2007) ao pesquisar sobre as dificuldades dos alunos com relação ao algoritmo da divisão também notou a dificuldade com relação a divisão por 1. Embora as situações com as quais se deparou o autor sejam diferentes das nossas, julgamos interessante seus resultados. Em seu trabalho o pesquisador observou que no cotidiano o aluno não se depara com situações nas quais "dividir" significa "não dividir" (divisão por 1). Em sua pesquisa, a respeito da dificuldade em dividir por 1, alguns alunos faziam as seguintes indagações e afirmações: "se eu tô dividindo, como é que pode dar a mesma coisa?" e "eu não posso dividir só pra um!""

Ora, já vimos que a matemática não é determinada pelo empírico, a regra de dividir por 1 não descreve nenhum fato, é uma convenção linguística; mas isso não significa que essa diferença entre os contextos não possa causar dificuldades aos alunos.

5.5.3 – A compreensão de problemas verbais

Outra dificuldade dos alunos que pudemos perceber diz respeito à compreensão do enunciado de problemas verbais. Comparando a primeira e a segunda questão da atividade proposta aos alunos (Anexo B) e de acordo com a própria afirmação dos alunos, podemos dizer que a questão 2 foi de mais difícil compreensão em comparação com a primeira questão. Nesta, as palavras "repartiram" e "igualmente", segundo o próprio depoimento dos alunos, indicavam que a operação matemática correta a ser realizada era a divisão:

Eles querem repartir igualmente, e quando eles querem repartir eles querem dividir um pouquinho pra cada um (aluna Patrícia).

Adicionalmente a isso, na primeira questão estava razoavelmente claro como proceder caso a divisão fosse inexata – a letra "b)" da questão 1 indicava que o restante seria devolvido ao rio –, diferente da questão 2, na qual não estava explícito como proceder caso a divisão fosse inexata – ou seja, que implicaria mais uma viagem.

Essa foi a maior dificuldade dos alunos nessa questão. Embora a maioria tenha realizado a divisão corretamente, apenas um deles indicou a resposta correta.

Como vimos, segundo Wittgenstein, a ligação entre uma regra e sua aplicação não é direta, é uma criação humana, e esta precisa ser ***aprendida***. De modo semelhante, também não há uma ligação "natural" ou óbvia entre um problema matemático e as regras matemáticas que estão envolvidas na sua resolução. Como já havíamos observado, este é mais um jogo de linguagem (que não é comum ao cotidiano dos alunos) que também precisa ser aprendido.

Assim, um problema escrito em linguagem natural, mesmo que faça referência a uma situação cotidiana, nem sempre requer uma solução já conhecida. Propomos usar algumas das reflexões do filósofo Gilles-Gaston Granger no intuito de esclarecer nossa afirmação. Importante deixar claro que não estamos sugerindo que as ideias de Granger expliquem as afirmações de Wittgenstein que mencionamos acima. Apenas queremos sustentar, por meio das ideias de Granger, que um problema matemático dito contextualizado, mesmo que remeta a uma situação comum ou cotidiana, nem sempre requer uma solução já conhecida ou alguma vez pensada.

Como argumentamos anteriormente, a comunicação (e aqui podemos incluir a leitura de um problema verbal) é satisfatória pela experiência comum entre os que se comunicam. Para Granger "a língua usual é essencialmente um instrumento de comunicação, sendo o conteúdo desta comunicação normalmente tomado de empréstimo do que já denominamos experiência" (1974, p. 134). Entretanto, embora nossa linguagem seja o "produto" de um trabalho que organiza a experiência, mesmo que guarde traços de um vivido[32], não podemos negar, segundo Granger, que em certo grau é abstrata:

> Ora, uma língua é evidentemente um sistema de formas; por mais próximo que se queira reconhecê-las da experiência vivida, estas formas estão organizadas e o menos "estruturalista" dos linguístas não pode deixar de admitir que constituem, pelo menos, esboços de estruturas abstratas que remetem, pois, a um trabalho de construção e retificação de um vivido (1974, p. 133).

Assim, conforme esclarece Granger, o significado remete a informações que ultrapassam a estrutura, que "escapam" à linguagem: "voltemos a noção de "significação", enquanto remissão ao que escapa a uma certa estruturação manifesta, numa experiência [...]. Esta estrutura ordena-se a uma certa experiência que a ultrapassa" (1974, p. 134-135). Esta significação que escapa à linguagem é uma informação que precisa ser reenviada por

---

[32] "Denominamos experiência um momento ***vivido como totalidade***, por um sujeito ou por sujeitos formando uma coletividade. Totalidade não deve ser aqui compreendida de modo místico; o caráter de totalidade de uma experiência não se erige de modo algum num absoluto; é simplesmente um certo fechamento, circunstancial e relativo comportando horizontes, primeiros planos, lacunas. [...] Toda prática poderia ser descrita como uma tentativa de transformar a unidade da experiência em unidade de uma estrutura, mas essa tentativa comporta sempre um resíduo. A significação nasceria das alusões a este resíduo" (GRANGER, 1974, p. 134-135).

um vivido, em outras palavras, um signo (uma palavra, por exemplo) só pode nos significar algo se sabemos como ele é empregado[33].

Diante disso, o conceito ou regra matemática implícita em um problema verbal não é percebido se o aluno não tem experiência, não só relativa à situação descrita no problema, mas vivências na resolução de problemas semelhantes. Mesmo que o problema sugira uma situação comum ao aluno, muitas vezes, as perguntas solicitadas aos alunos remetem a situações e questionamentos novos. Portanto o papel do professor é muito importante nessa mediação, pois ele esclarecerá possíveis dúvidas do aprendiz.

Quando perguntados a respeito dos dois alunos restantes (o resto da divisão 114 ÷ 8), boa parte dos alunos, após pensarem um pouco na situação, souberam responder corretamente que seriam necessárias 15 viagens e não 14. O que parece mostrar que, embora o problema sugerisse uma situação do dia-a-dia, trouxe questionamentos novos aos alunos. A atividade de resolver problemas, como qualquer outra também envolve, de forma natural, erros e acertos, é um processo vagaroso de aprendizagem.

5.5.4 – Erros cometidos no seguimento das regras do algoritmo da divisão

O algoritmo da divisão, mesmo que possa parecer simples, depende também do conhecimento da adição, subtração e multiplicação, tornando o algoritmo da divisão um procedimento um tanto complexo para quem aprende.

As regras matemáticas – poderíamos dizer – de certa forma regulam a ação do aluno, regulam sua criatividade. Embora seja importante dar certa autonomia e levar em consideração os procedimentos próprios do raciocínio do aluno, as regras matemáticas são rígidas, constrangedoras, buscam a exatidão.

Uma questão que provavelmente surja e, mesmo que não apareça, deve ser explicada aos alunos é a seguinte: "o que significa baixar um algarismo?" ou "por que baixamos tal algarismo?". Muitas dos alunos fazem esse procedimento mecanicamente e isso pode causar confusões e erros. A professora da turma que observamos, quando trabalhou a divisão, não explicitou aos alunos o que significa esse "baixar".

---

[33] Cabe esclarecer que esta relação entre signo e seu significado, como o próprio filósofo aponta em (1973), não se baseia em psicologismos, nem em uma relação direta do tipo nome-objeto; o que dá significação ao signo é um vivido. Assim, concordamos com Moreno (2008) quando julga feliz a "aproximação" entre as filosofias de Granger e Wittgenstein.

É de grande importância deixar claro que o “mecanicamente” que estamos rejeitando aqui é diferente do “mecanicamente” defendido anteriormente. Antes que o aluno possa agir mecanicamente em uma atividade rotineira, ele precisa compreender o funcionamento do algoritmo, aí sim ele pode agir de forma direta, “sem refletir”, ou seja, sem se preocupar novamente com o que significa esse “baixar”. Portanto não é descartada a explicação e exemplificação do professor a respeito do funcionamento do algoritmo.

Assim como as regras sociais ou as regras jurídicas, as regras matemáticas não devem ser burladas, sob pena de erros, o que implica o insucesso, no caso dos alunos. Embora algumas vezes os algoritmos sofram críticas por serem sistemáticos, “mecânicos”, “automáticos”, não podemos negar sua importância, essa foi a maneira mais prática, otimizada, até hoje criada pela humanidade, para economia de tempo e pensamento.

Segundo Wittgenstein, quando domino a técnica de algo sou compelido em minhas ações futuras desta técnica. Conforme esclarece McGinn (2002), esse “forçar” se refere ao treinamento que recebemos. Afinal, nada me impede de empregar a técnica da maneira que quiser, tampouco a regra me força a aplicá-la de uma maneira particular. Quando emprego uma técnica ou uma regra, como continuar uma série numérica, reajo sem hesitação porque domino está técnica; sou compelido a fazer tal e tal coisa devido ao treinamento que recebi: “Se compreendi a regra sou compelido no que faço adiante. Naturalmente, isso apenas significa que sou compelido em meu julgamento a respeito do que está de acordo com a regra e do que não está” (RFM, VI, §27). Assim, é importante que o aprendiz tenha uma compreensão satisfatória do que deve fazer, para que possa julgar o que está e o que não está de acordo.

Gómez-Granell (2003, p. 266) oferece-nos um exemplo de um erro muito comum:

> Outro erro típico consiste, por exemplo, em somar quantidades sem considerar o procedimento de “vai um”:
>
> $$\begin{array}{r} 24 \\ +\ 48 \\ \hline 612 \end{array}$$
>
> É evidente que qualquer aluno de oito anos sabe, de cabeça, que o resultado de 24 + 18 não pode ser 612. No entanto, sem se ater ao significado, ele respeita a aplicação do procedimento que domina – somar sem utilizar a técnica do “vai um” – e o aplica fazendo a extrapolação ou supervalorização de uma regra.

Algo semelhante ao apontado por Gómez-Granell (2003) foi percebido em nossa pesquisa. Ao resolverem o item “c)” da terceira questão (212 dividido por 2). Alguns alunos chegaram à resposta “16”, ao invés de “106” que era a correta, isso porque esqueciam ou não sabiam que deveriam colocar o zero no quociente ao “baixar” duas casas decimais (1 e 2) seguidamente.

Rebeca, por exemplo, com exceção do zero que “esqueceu” de colocar, segue corretamente todos os passos do algoritmo, inclusive na construção da “tabela de multiplicação”, por isso acredita ter resolvido corretamente a questão e o resultado que pode nos parecer discrepante lhe parece normal:

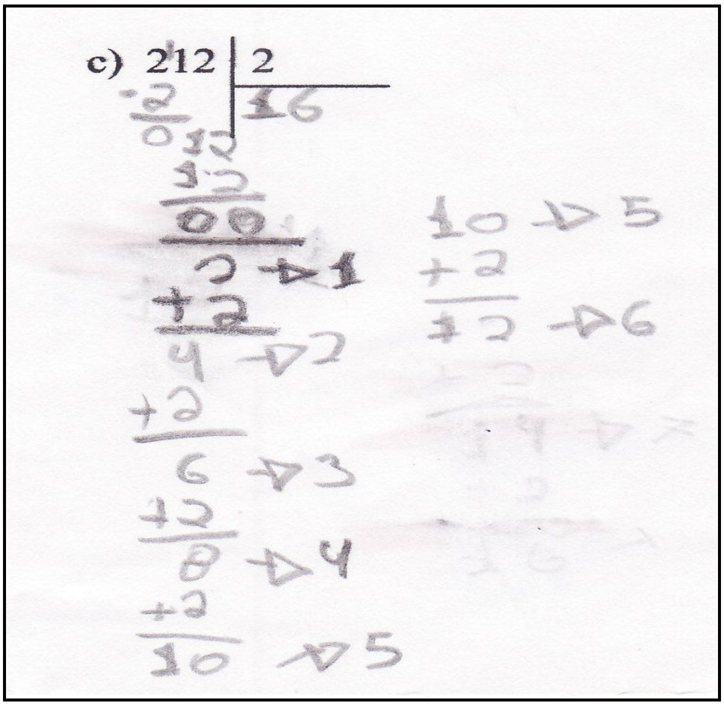


Figura 7: exemplo de erro de um aluno ao utilizar o algoritmo da divisão

Quando perguntados sobre “quanto é 16 + 16”, ou “2 x 16”, todos os alunos, sem grande hesitação, sabiam responder que a resposta era 32 e não 212 e respondiam que de fato “212 ÷ 2” não poderia resultar 16, mas ao seguirem os passos do algoritmo “esquecendo” o zero chegavam no resultado errado.

Embora aparentemente não tenha ficado claro para os alunos o porquê desse zero, a professora os ensinou que quando baixamos dois números do dividendo seguidamente, é preciso por o zero no quociente. Atrevemo-nos a sugerir que a professora poderia ter instruído seus alunos a verificar, em casos como esse, por meio da multiplicação entre quociente e divisor, se a divisão estava correta ou não.

Em casos como este, o aluno pensa estar seguindo a regra corretamente e a aplica da forma que a domina, da forma que a compreendeu, ou seja, acaba seguindo outro procedimento que não está de acordo com a regra matemática, de modo que o resultado discrepante não lhe chama a atenção. Diria Wittgenstein: "quando sigo a regra não escolho. Sigo a regra ***cegamente***" (IF, §219). Assim, mesmo um resultado "absurdo" pode não incomodar o aprendiz, pois ele pensa estar seguindo a regra da divisão corretamente, e seu resultado naturalmente tem de estar certo.

5.6 – O caso de Luciana

Embora não esteja entre nossos objetivos, um caso de uma aluna nos chamou a atenção. Luciana se mostra sempre bastante desanimada nas aulas de matemática, uma voz que quase não se ouve, com pouco interesse em resolver os exercícios, inclusive a atividade que entregamos aos alunos para nossa pesquisa.

E aparentemente a aluna tinha "sede" de falar e queria muito ser ouvida, precisava (e talvez ainda precise) que alguém a escutasse. Mais de uma vez, a aluna deixou transparecer que seu desânimo era em decorrência de suas dificuldades na matemática, segundo a estudante, adquiridas a partir da terceira série. De acordo com as palavras de Luciana, que era repetente, ela era uma aluna exemplar na primeira e segunda séries do ensino fundamental, acertando todos os exercícios sem grandes dificuldades:

Quando eu passei pra terceira [série] eu comecei a errar tudo [...]. Eu era a melhor da sala, na primeira [série] eu era ótima em matemática, era a melhor da sala toda [...], na primeira e na segunda [séries], em todos os lugares, eu acertava, mas quando eu cheguei na terceira eu comecei a errar tudo.

Perguntada sobre o porquê de seus fracassos, Luciana exibiu como resposta a afirmação que, segundo seus próprios esclarecimentos, recebeu de uma antiga professora: "eu não me desenvolvi". Embora as situações sejam diferentes, podemos fazer uma comparação com "A História de Bruna", relatada por Canibal (1996).

Bruna nasceu prematura, teve complicações no parto e teve uma lesão cerebral. Por conta disso, tinha dificuldades de locomoção e apresentava uma aprendizagem mais lenta em relação aos outros alunos de sua classe. Avaliada por um especialista, aos 7 anos, Bruna recebeu um laudo que afirmava um "acentuado retardamento do desenvolvimento da inteligência" (CANIBAL, 1996, p. 122).

Segundo consta em Canibal (1996), a professora de Bruna, ao saber do conteúdo do laudo, "abandonou" a aluna nas aulas. Provavelmente, a professora não estivesse preparada para lidar com uma aluna que, segundo o laudo recebido, necessitava de cuidados especiais, mas isto não justifica a atitude de “desistir” da aluna, isto é o que nos choca e que poderia, inclusive, traumatizar Bruna de alguma forma.

Semelhante à Bruna, Luciana também recebeu um tipo de abandono quando ouviu de sua professora a frase “você não se desenvolveu”. Provavelmente a professora disse a frase ingenuamente, mas aparentemente, de certa forma, acabou “bloqueando” Luciana para o aprendizado da matemática. Não nos sentimos capazes de analisar se a aluna se desenvolveu ou não, apenas nos cabe chamar a atenção para uma de tantas das dificuldades que alunos e professores enfrentam em sala de aula.

Cabe-nos esclarecer que tais palavras não tem a intenção, em absoluto, de ser uma crítica a algum professor, escola etc., mas apenas uma sucinta reflexão.

Quanto à Bruna, ela trocou de escola e foi acolhida por uma professora que lhe dava a atenção merecida, como qualquer outro aluno. Já que possuía uma lesão cerebral, sua aprendizagem de fato era mais lenta que a dos outros alunos de sua idade, mas com a atenção que recebeu, aos poucos Bruna se alfabetizou e se integrou aos demais.

Considerações Finais

Esta pesquisa teve como objetivo principal investigar a respeito das dificuldades, em especial as de ordem linguística, enfrentadas pelos alunos no decorrer do aprendizado e emprego das regras matemáticas, dando ênfase no conceito de divisão.

As pesquisas na área da linguagem crescem a cada dia e demonstram a preocupação dos estudiosos com a linguagem empregada no ensino da matemática. Autores como D’Amore (2007) e Smole & Diniz (2001) enfatizam que, muitas vezes, as dificuldades de nossos alunos no aprendizado da matemática estão relacionadas com dificuldades em compreender a linguagem empregada no ensino da disciplina.

Vimos algumas características, tanto da linguagem matemática quanto da linguagem natural. Quanto à primeira, observamos, entre outras coisas, que esta não possui oralidade própria e que, mesmo na escrita, ela se vale de termos da linguagem do dia-a-dia. Este fato pode trazer algumas confusões no aprendizado da disciplina, visto que algumas palavras são usadas na linguagem natural e também são usadas na linguagem matemática, entretanto, com sentidos bem distintos. Como sabemos, as palavras tem usos bastante diferenciados em diferentes contextos.

A respeito da linguagem natural, vimos que esta é polissêmica, mas que isto não se trata exatamente de um problema, mas uma característica que permite a variedade de expressão linguística que tal linguagem possui. Ora, nossa linguagem está em ordem como está. Embora algumas vezes seja imprecisa, sabemos o que queremos dizer com nossas expressões vagas do dia-a-dia. Apesar da polissemia da linguagem natural, em geral, nossa comunicação é satisfatória.

Em nossos estudos a respeito das reflexões de Wittgenstein em sua filosofia da linguagem, pudemos perceber que conforme muda o contexto de uso de palavras e conceitos, mudam os sentidos dos mesmos. Assim, no contexto da sala de aula, os alunos e principalmente o professor – que é quem tem a responsabilidade de ensinar – precisa estar atento aos percalços de linguagem que podem atrapalhar o ensino, como os diferentes significados em diferentes contextos (como o uso no dia-a-dia e no jogo de linguagem da matemática).

Ao tratar do tema “seguir regras”, proposto por Wittgenstein nas ***Investigações,*** foi possível tirar algumas importantes conclusões para a Educação Matemática: a) a forma como compreendemos e aplicamos regras (seja regras de uso de uma palavra ou uma regra matemática) depende da maneira como fomos ***ensinados*** a usá-la. Se dissermos a uma criança “Não, chega de açúcar” e tiramos o açúcar da frente dela, ela aprenderá esse uso da palavra “não”. Se ao invés disso lhe damos um pouco de açúcar, a palavra “não” terá outro significado (GF, §28). De modo semelhante, o uso feito por uma regra matemática depende também de como é ensinada pelo professor; b) a ligação entre a regra e sua aplicação não é diretamente visível, esta precisa ser ***ensinada***. Como, então, o aluno saberá aplicá-la se sua aplicação não é óbvia? Ora, responderia Wittgenstein: “Como, então, o professor interpreta a regra para o aluno? [...] Como, senão por meio de palavras e de treinamento?” (RFM, VII, §47); percebemos também que c) saber usar uma regra matemática em um contexto não implica saber usá-la em outro contexto – seja em um novo contexto matemático ou no uso dessa regra no cotidiano –, as aplicações também precisam ser ***aprendidas***. Como pudemos ver, os itens “a)”, “b)” e “c)” apontam para a responsabilidade do professor em sala de aula, visto que uma regra não carrega em si sua aplicação.

No caso das regras matemáticas, vimos que estas são regras gramaticais, nada descrevem. Uma proposição matemática não descreve a realidade sensível, mas pode ser ***usada*** para descrevê-la. Os significados dos conceitos matemáticos aplicados no cotidiano são ***dados por nós***, no sentido de que não há uma ligação intrínseca entre as proposições da matemática e o empírico.

Assim, relativizam-se algumas orientações presentes na prática pedagógica da matemática, como: “só o que pode ser contextualizado deve ser ensinado” e “o aluno aprende experimentando no concreto”.

No senso comum (e inclusive na academia) é possível escutar, também, que a matemática não é exata porque quando a usamos no cotidiano, ela não nos dá resultados precisos. Aí temos – assim parece – uma confusão causada pela adoção do modelo referencial da linguagem, na qual se acredita que a linguagem sempre descreve algo.

Vimos, também por meio das reflexões de Wittgenstein, que a compreensão não é um processo mental. Compreender algo, seja um tema musical, uma equação matemática etc., não é ter uma ideia ou representação privada, mas possuir uma habilidade, sendo capaz de fazer certas coisas.

A respeito da discussão da possibilidade de uma linguagem privada, Hebeche (2002) coloca uma questão bem interessante: se quando me faço compreender – de acordo com a concepção de que compreender algo é ter uma imagem ou representação mental – é por que o receptor da mensagem tem a mesma imagem mental ou idéia que tenho, como eu poderia comparar nossas representações, a fim de ter certeza que compartilhamos o mesmo entendimento? Ora, como senão por meio da exteriorização? O que o receptor da mensagem diz ou faz são nossos critérios para julgarmos sua compreensão, e tais critérios são ***públicos***.

Vimos, ainda, que não temos critérios absolutos para "senso" e "contra-senso". Apenas em contextos particulares possuímos uma definição precisa de um conceito, de modo que algo que parece um absurdo em um contexto pode ser correto em outro contexto. A partir disso, discutimos que muitas das ideias dos alunos que não se "adéquam" ao contexto tem sentido em outro contexto, como o contexto do dia-a-dia.

Em nossas análises a respeito dos dados obtidos em nossa pesquisa em sala de aula, seja nas observações feitas em sala, seja nos registros escritos e orais dos alunos, pudemos perceber algumas das dificuldades enfrentadas por eles. Vimos, por exemplo, que o "vocabulário matemático" precisa ser aprendido. Saber usar palavras como "diferença" e "caber" no cotidiano não implica saber usá-las em contexto matemático. Apesar de guardarem semelhanças, seus usos são distintos.

Constatamos também a dificuldade de aplicação de uma regra a novos contextos (ocasionada, algumas vezes por acreditarmos que se o aluno aprende a regra em um contexto saberá aplicá-la em outro).

Em nossas "sessões de análise" a respeito das dificuldades encontradas na resolução das atividades de divisão que propomos, vimos que os alunos inventam "regras matemáticas", devido à conexão que os alunos fazem entre as regras e a magia. Como muitas vezes as regras matemáticas não são claras para os alunos, eles as compreendem como algo misterioso, mágico.

Verificamos também a "confusão" entre contextos por parte dos alunos. Nesse caso, entre o contexto matemático e o contexto do dia-a-dia. Os alunos usam a lógica do cotidiano no contexto da matemática escolar. Nessas situações, a experiência linguística dos alunos sugere soluções que não se adéquam ao rigor das regras matemáticas.

Adicionalmente, verificamos dificuldades na compreensão de problemas matemáticos escritos em linguagem natural. Embora os problemas tragam situações do dia-a-dia, muitas vezes, sua solução não é uma solução cotidiana, ou seja, os problemas trazem indagações novas, mesmo que a situação proposta no problema seja conhecida.

Além disso, vimos que é importante que os alunos saibam compreender problemas matemáticos, entretanto, esta habilidade não é suficiente para o sucesso dos alunos em matemática, pois estes precisam aplicar corretamente as regras, conceitos e procedimentos matemáticos na resolução das atividades.

Deparamo-nos ainda com um caso que não estava dentre aqueles que nos propomos a discutir, mas que nos serviu como reflexão: o caso de Luciana. A aluna recebeu de uma professora a desagradável informação de que não teria se desenvolvido, e assim, ao que parece, perdeu o interesse pelo estudo.

Diante do que analisamos e discutimos, nos arriscamos a sugerir algumas medidas para uma aprendizagem mais proveitosa para alunos e um ensino mais satisfatório para os professores. Se as principais dificuldades que analisamos dizem respeito à linguagem, o próprio uso adequado da linguagem no processo de ensino é nossa sugestão para diminuir tais obstáculos, ou seja, a comunicação entre os participantes da sala de aula.

Lembrando que é pela linguagem que nossos alunos são ensinados e aprendem, apontamos a comunicação como sugestão de alternativas às dificuldades nas aulas de matemática. O professor pode dar voz ao aluno para que este possa esclarecer suas dúvidas e inquietações ao professor. O professor por sua vez, ao ouvir os alunos, pode rever a forma como está ensinando, visando que todos desfrutem de um mesmo entendimento no aprendizado dos conceitos matemáticos.

Fazendo uma comparação da reflexão de Wittgenstein a respeito dos mal-entendidos na filosofia, presente nas ***Observações filosóficas***, § 09, e as dificuldades em sala de aula, diríamos que os alunos e professores quando erram, nem sempre dizem contra-sensos, apenas usam conceitos, em certos contextos, que tem significado diferente daquele esperado por quem os usa.

Logo, quando afirmamos que os alunos “confundem” os contextos ou usam lógicas que não estão de acordo com a lógica da matemática, não se trata de apontar algum tipo de hierarquia entre os conhecimentos científicos e do dia-a-dia, mas apenas mostrar que são diferentes e que, portanto, requerem soluções com lógicas e técnicas diferentes para seus problemas.

As reflexões que fizemos a partir de algumas ideias de Wittgenstein indicam alguns caminhos para mudanças no panorama do ensino e do aprendizado de matemática. Por exemplo, vimos que a linguagem matemática não descreve fatos empíricos – e de fato ela não descreve nada – assim relativiza-se a ideia de que os alunos precisam aprender por meio de experimentações empíricas, como apontado em Gottschalk (2004a).

Mesmo que o interesse pelas idéias de Wittgenstein em benefício da Educação Matemática venha crescendo, ainda dispomos de poucos trabalhos, de modo que este ainda é um campo vasto e, a nosso ver, profícuo para pesquisas. Esperamos que nosso trabalho, de alguma forma contribua para novas pesquisas.

Por fim gostaria de apontar o quanto essa pesquisa contribuiu para meu engrandecimento profissional, seja como professor, seja como pesquisador. Pudemos perceber, entre outras coisas, o quanto é importante ouvir os alunos e dar atenção às suas palavras, pois assim podemos compreender o que estão compreendendo. Dessa forma professor e alunos se respeitam mais, visto que cada um pode ter espaço para se expressar.

Referências Bibliográficas

ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de filosofia.** São Paulo: Martins Fontes, 1998.

BACQUET, Michelle. **Matemática sem dificuldades:** ou como evitar que ela seja odiada por seu aluno. Tradução de Maria E. Schneider. Porto Alegre: ARTMED Editora, 2001.

BAKER, Gordon. P. & HACKER, Peter. M. S. **Wittgenstein:** understanding and meaning – part I. Oxford: Blackwell, 2005.

BARUK, Stella. **Insucesso e Matemáticas**. Tradução de Manoel Alberto. Lisboa: Relógio D'Água Editores, 1996.

BARUK, Stella. **L'âge du capitaine:** De l'erreur en mathématiques. Paris: Editions du Seuil, 1985.

BORBA, Rute Elizabete de S. Rosa; SELVA, Ana Coelho Vieira. **Alunos de 3ª e 5ª séries resolvendo problemas de divisão com resto diferente de zero:** o efeito de representações simbólicas, significados e escolarização. Anais da 29ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (ANPEd), Caxambú-MG, 2006.

BOUVERESSE, Jacques. Linguagem ordinária e filosofia. In: SUMPF, J; GRANGER, G; BOUVERESSE, J & GAUVIN, J. **Filosofia da linguagem.** Tradução de Manuel Reis. Coimbra: Almedina, 1973 (1971). pp. 71-138.

CANIBAL, Maria Júlia. A história de Bruna. **Revista do GEEMPA**. nº. 4, Porto Alegre, jul 1996.

CHAUVIRÉ, Christiane. **Wittgenstein.** Tradução de Maria Luiza X. de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1991

D'AMORE, Bruno. **Elementos de didática da Matemática.** São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da resolução de problemas de matemática:** 1a. a 5a. series, para estudantes do curso de magisterio e professores de 1º grau. São Paulo: Ática, 1991.

FANN, K. T. **Wittgenstein's Conception of Philosophy.** California: Blackwell, 1971.

FIORENTINI, Dário. LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

GERRARD, Steve. **Wittgenstein's philosophies of mathematics**. Synthese, n. 87, Kluwer Academic Publishers, 1991. pp. 125-142.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** São Paulo: Atlas, 2008.

GLOCK, Hans-Johann. **Dicionário Wittgenstein.** Tradução de Helena Martins. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.

GLOCK, Hans-Johann. Necessity and normativity. In: SLUGA, Hans; STERN, David G. (edit). **The Cambridge Companion to Wittgenstein.** Cambridge: Cambridge University Press, 1996. pp. 198-225.

GOTTSCHALK, Cristiane. A Natureza do Conhecimento Matemático sob a Perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência,** Campinas**,** série 3, v. 14, n. 2, p. 305-334, jul-dez. 2004a.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. **Reflexões sobre Contexto e Significado na Educação Matemática.** In: VII Encontro Paulista de Educação Matemática (EPEM). São Paulo, 2004b. Disponível em: <http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/Comunicacoes_Orais%5Cco0055.doc>. Acesso em: 03 fev 2009.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. Três Concepções de Significado na Matemática: Bloor, Granger e Wittgenstein. In: MORENO, Arley Ramos. (Org.). **Wittgenstein:** aspectos pragmáticos. Campinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2007, v. 49, p. 95-133 (Coleção CLE).

GÓMEZ-GRANELL, Carmem. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, Ana; TOLCHINSKY, Ana. **Além da alfabetização:** a aprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. São Paulo: Editora Ática, 2003. p. 257-282.

GRANGER, Gilles-Gaston. Língua e sistemas formais. In: SUMPF, J; GRANGER, G; BOUVERESSE, J & GAUVIN, J. **Filosofia da linguagem.** Tradução de Manuel Reis. Coimbra: Almedina, 1973. pp. 139-171.

GRANGER, Gilles-Gaston. **Filosofia do estilo.** Tradução de Scarlett Zerbetto Marton. São Paulo: Perspectiva, ed. da universidade de São Paulo, 1974 (coleção estudos).

GRANGER, Gilles-Gaston. **Lógica e filosofia das ciências.** São Paulo: Melhoramentos, 1955.

GRANGER, Gilles-Gaston. **Por um conhecimento filosófico.** Tradução de Constança Marcondes Cesar e Lucy Moreira Cesar. Campinas: Papirus, 1989.

GRAYLING, A. C. **Wittgenstein.** Tradução de Milton Camargo Mota. São Paulo: Loyola, 2002 (Coleção mestres do pensar).

HEBECHE, Luiz. **O mundo da consciência:** ensaio a partir da filosofia da psicologia de L. Wittgenstein. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002.

INSTITUTO ANTÔNIO HOUAISS. **Dicionário Houaiss.** Versão 2.0a (software). Abril de 2007, CD-ROM.

LAUTERT, Síntria Labres; SPINILLO, Alina Galvão. As Relações Entre o Desempenho em Problemas de Divisão e as Concepções de Crianças Sobre a Divisão. **Psicologia:** teoria e prática. Brasília, Set-Dez 2002, vol. 18 no. 3, pp. 237-246.

MACHADO, Nilson José. **Matemática e língua materna:** análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez, 1993.

MACMILLAN, C. J. B. "How not to Learn: Reflections on Wittgenstein and Learning". In: **Philosophy and Education:** Accepting Wittgenstein's Challenge. Eds.: Paul Smeyers e James D. Marshall, vol. 6, Kluwer Academic Publishers, 1995, pp.161-169.

MARTINET, André. **Elementos de lingüistica geral.** Tradução de Jorge Morais Barbosa. Lisboa: Martins fontes, 1975.

MCGINN, Marie. Rules and rule-following. In: MCGINN, Marie. **Wittgenstein and the Philosophical Investigations.** London: Routledge, 2002. pp. 73-112.

MORENO, Arley Ramos. Pensamento formal e descrição dos usos das palavras. In: MORENO, Arley Ramos (org). **Alguns aspectos do pensamento formal:** homenagem a Gilles-Gaston Granger. Campinas: UNICAMP, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2008. pp. 95-123 (Coleção CLE).

MORENO, Arley Ramos. **Wittgenstein:** os labirintos da linguagem - ensaio introdutório. Campinas: Editora da UNICAMP, 2000 (Coleção Logos).

MORENO, Arley Ramos. **Wittgenstein** - Através das Imagens. Campinas: Editora da UNICAMP, 1995

NEVES, Richardi Ferreira. **Dificuldades de ensino e de aprendizagem do algoritmo da divisão.** Trabalho de conclusão do curso de licenciatura plena em Matemática da Universidade Federal do Pará. Belém: UFPA, 2007.

PIMM, David. **El lenguaje matemático en el aula**. Madrid: Morata, 2003.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. **A interpretação da Matemática na escola, no dizer dos alunos:** ressonâncias do sentido de “dificuldade”. Porto Alegre: UFRGS, 2000. Dissertação (Mestrado em Educação).

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. **A interpretação de textos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem.** In: XI Evento Internacional MATECOMPU: “La Enseñanza de la Matemática y la Computación”. Matanzas-Cuba, 2009a.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. Aplicação e interpretação de regras matemáticas. **Revista Educação Matemática Pesquisa.** São Paulo: vol 10, nº 1. 2008a. pp. 93-113

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. **Interpretação e comunicação em Matemática.** Anais do 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Recife, 2008b

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. **Linguagem Matemática e linguagem natural:** interpretação de regras e de símbolos. In: VI Congresso Iberoamericano de Educación Matemática. Puerto Montt-Chile, 2009b.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. **Produção de sentidos e construção de conceitos na relação ensino/aprendizagem da matemática**. Porto Alegre: UFRGS, 2005. Tese (Doutorado em Educação).

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez (org). **Ler, escrever e resolver problemas:** habilidades básicas para aprender matemática. Porto Alegre: Artmed, 2001.

VÁZQUEZ, Patricia sastre; BOUBÉE, Carolina; REY, Graciela; DELORENZI, Olga. La compresión: proceso lingüístico e matemático. **Revista Iberoamericana de Educación.** nº 46/8, agosto de 2008.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Da certeza (DC).** Tradução de Maria Elisa Costa. Lisboa: Edições 70, 2000.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Fichas (Zettel) (Z).** Tradução de Ana Berhan da Costa. Lisboa: Edições 70, 1989.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Gramática filosófica (GF).** Tradução de Luís Carlos Borges. São Paulo: Loyola, 2003.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Investigações filosóficas (IF).** Tradução de José Carlos Bruni. São Paulo: Nova cultural, 1999 (coleção os pensadores) / **Philosophical Investigations (IF).** Oxford: Blackwell, 1997.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Observações filosóficas (OF).** Tradução de Adail sobral e Maria Stela Gonçalves. São Paulo: Loyola, 2005.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Remarks on the foundations of mathematics (RFM).** Org. G. H. Von Wright, R. Rhees e G. E. M. Ascombe. Oxford: Blackwell, 1998.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **The Blue and Brown books (BB).** Oxford: Blackwell, 1998.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Tractatus Logico-philosophicus (TLP).** Tradução de Luiz Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: Edusp, 1993.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics, Cambridge 1939 (LFM).** Das anotações de R. G. Bosanquet, N. Malcolm, R. Rhees e Y. Smythies. Org. Cora Diamond. Hassocks: Harvester Press, 1976.

Anexos

ANEXO A – 1ª AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA (Folha 1)

Escola de Aplicação da UFPA
Professora:
Estudante:
Série: Turma: Data: ____ / ____ / ____

AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA (6,0pt)

Leia com atenção as informações abaixo:

DEPÓSITO DE LIXO

- 35 bilhões de toneladas de lixo são despejadas anualmente no meio ambiente.
- São produzidos por ano 80 milhões de toneladas de plástico, material que não se decompõe na natureza. Há cinqüenta anos não chegava a 5 milhões de toneladas.
- Só o Brasil tem 100 milhões de pneus abandonados.

Veja, p. 80, 21 ago.

1ª) Com base nas informações do texto faça o que se pede: (0,4)

a) Responda:

Você concorda com o título que foi dado ao texto? Por que? (0,2)

____
____
____

O que você faz para conservar o ambiente em que você vive? (0,2)

____
____
____

b) Escreva em símbolos numéricos no Q.V.L. (Quadro Valor de Lugar): (0,6)

b.1) O número que representa as **toneladas de lixo** que são despejadas anualmente no meio ambiente

b.2) O número que representa as **toneladas de plástico** que são produzidas por ano.

b.3) O número que representa os **pneus abandonados** no Brasil.

	CLASSE DOS			CLASSE DOS			CLASSE DOS			CLASSE DAS UNIDADES SIMPLES		
	C	D	U	C	D	U	C	D	U	C	D	U
b.1												
b.2												
b.3												

c) Observando o 1º número do Q.V.L. responda: (1,5)

c.1) Quantas **ordens** ele possui?

____
____

c.2) Quantas **classes**? Quais são?

____
____

ANEXO A – 1ª AVALIAÇÃO DE MATEMÁTICA (Folha 2)

c.3) Qual o **valor posicional** do algarismo 5 nesse número?

c.4) Qual a sua **ordem** de **grandeza**?

c.5) Escreva-o por extenso.

2ª) Resolva a situação – problema: (1,8)

Para ajudar pessoas carentes tia Ana comprou 8 cestas básicas por R$ 27,00 cada uma e tia Vera comprou 7 cestas por R$ 25,00 cada uma.

- Quanto **tia Ana** pagou pelas cestas que comprou?
- Quanto **tia Vera** pagou pelas cestas que comprou?
- Qual a **diferença** entre o total da compra de tia Ana e o total da compra de tia Vera?

3ª) Escreva (V) para as alternativas VERDADEIRAS e (F) para as FALSAS: (0,6)

a) ( ) 5 x 3 = 3 x 5 por que a ordem dos fatores não altera o produto.
b) ( ) O número 1 é o elemento neutro da multiplicação. Ex: 8 x 1 = 8
c) ( ) Todo número multiplicado por 0 o resultado é 0.
d) ( ) Numa multiplicação, quando associamos os fatores de forma diferente o resultado se altera.

Reescreva a alternativa falsa de modo verdadeiro:

4ª) Resolva as operações e identifique os resultados com a letra de cada questão. (1,1)

A	2000 – 765	15000	
B	95 x 10	9800	
C	278 x 15	4.170	
D	150 x 100	1235	
		950	

ANEXO B – ATIVIDADE PROPOSTA AOS ALUNOS[34]

Escola de Aplicação da UFPA

Aluno(a): ____

1 – Quatro pescadores repartiram igualmente entre si os 297 peixes que pescaram, e os que sobraram jogaram de volta ao rio. Responda[35]:

a) Com quantos peixes ficou cada pescador?

b) Quantos peixes eles devolveram ao rio?

2 – André precisa transportar 114 estudantes até um museu em sua van. Em cada viagem ele pode levar no máximo 8 pessoas. Qual o menor número de viagens que André terá de fazer para levar todos os estudantes?

3 – Calcule:

a) 216 | 1

b) 297 | 4

c) 212 | 2

---

[34] Com exceção da 3ª questão que é de autoria do pesquisador, as questões presentes nesta atividade foram retiradas do seguinte livro: GUELLI, Oscar. **Matemática –** Caderno de atividades (livro do professor). 3ª edição. São Paulo: Ática, 1996 (Coleção Quero Aprender).

[35] Desta questão foi suprimida uma figura que mostrava um pescador devolvendo dois peixes ao rio, pois poderia influenciar os alunos na resposta da letra “b)”.

ANEXO C – ROTEIRO GERAL DE PERGUNTAS PARA A ENTREVISTA COM OS ALUNOS

1 – Como você sabe o que precisa fazer para resolver um problema matemático?

2 – Como você soube que esses problemas da atividade eram de divisão?

3 – Você teve dificuldades na resolução de alguma das questões? Qual(is) questão(ões)? Qual(is) dificuldade(s)?

4 – Tente explicar como você procedeu na resolução de cada questão.