Lígia Françoise Lemos Pantoja

A CONVERSÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ESTUDO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS LINEARES

BELÉM
2008

Lígia Françoise Lemos Pantoja

A CONVERSÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ESTUDO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS LINEARES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico – NPADC/UFPA, orientado pelo professor Dr. RENATO BORGES GUERRA, como exigência parcial para obtenção do grau de MESTRE EM EDUCAÇÃO E M CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS, na área de concentração de Educação Matemática.

BELÉM

2008

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Biblioteca do NPADC, UFPA

PANTOJA, Lígia Françoise Lemos

A conversão de registros de representações semióticas no estudo de sistemas de equações algébricas lineares / Lígia Françoise Lemos Pantoja. – Belém: 2008.
102 f.

Orientador: Renato Borges Guerra

Dissertação (Mestrado) – Núcleo de Pesquisa e Desenvolvimento da Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, 2008.

1. ÁLGEBRA LINEAR. 2. PRÁTICA PEDAGÓGICA. I. Título

CDD: 22. ed. 512.5

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

NÚCLEO PEDAGÓGICO DE A POIO AO DESENVOLVIMENTO CIENTÍFICO

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIENCIAS E MATEMÁTICAS - MESTRADO

A CONVERSÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS NO ESTUDO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS LINEARES

Este exemplar cor responde à versão final a ser apresentada na defesa da dissertação.

Data: 13 / 06 / 2008

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. Renato Borges Guerr a
Universidade Federal do Pará - UFPA

____

Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva
Universidade Federal do Pará - UFPA

____

Prof. Dr. Mauro de Lima Santos
Universidade Federal do Pará - UFPA

BELÉM

2008

AGRADECIMENTOS

Muitos foram os que contribuíram nesta caminhada com palavras de força, incentivos e orações sem as quais, certamente, seria impossível a realização deste trabalho. Por isso quero deixar aqui o meu mais sincer o e profundo agradecimento àqueles que se fizeram notavelmente importantes nesta conquista.

Primeiramente agradeço a Deus pela sua pr esença em minha vida e por ter me possibilitado a oportunidade de cursar o Mestrado e ter mais essa conquista.

Agradeço aos meus pais, Vicente de Paula de Almeida Pantoja e Maria de Nazaré Lemos Pantoja que na luta do dia- a-dia me ensinam a viver e sempre estiveram presentes para que eu pudesse encaminhar minha vida pessoal, profissional e acadêmica.

Ao professor Dr. Renato Borges Guerr a, meu orientador, que dedicou horas de sua paciência e sua competência para me acompanhar na produção deste trabalho sempre indicando a direção a ser tomada nos momentos de maiores dificuldades.

Ao amor da minha vida que sempre me apoiou e deu forças para buscar atingir meus objetivos.

Aos professores Francisco Hermes Santos da Silva, Juaci Picanço da Silva e Mauro de Lima Santos, membros da banca, pela atenção e colaboração dada a esta dissertação.

Aos professores do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas pelo que representaram e contribuíram com seus conhecimentos na minha formação.

Aos meus colegas do mestrado, Dany, Rafaela, Amélia, Aline, Ângela, Silvio Santiago, Iza, Mauro, Nonato, Aluisio, Cristiam e todos os demais pelos bons momentos que passamos juntos, pela excelente relação de amizade que construímos e pelas constantes ajudas dadas uns aos outros.

Aos amigos da UEPA pela compreensão, apoio e por acr editar em no meu trabalho.

Aos alunos da Escola Mar ia Luiza da Costa Rêgo, turma 2j05, por terem aceitado par ticipar da pesquisa.

Aos funcionários do NPADC que me acompanharam nesta jornada, em especial a Dona Deize (Servente do NPADC), a Amanda (Estagiária do Laboratório de Infor mática), a Luciana (Secretária do Programa) e a Kelly (Secretária do curso de Especialização) que tão bem me acolheram no Mestrado.

E finalmente, a todos os amigos, parentes, vizinhos e ao meu irmão Vicente de Paula de Almeida Pantoja Júnior que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho e que de coração desejam e torcem pelo meu sucesso. A todos os meus sinceros agradecimentos.

“Educar não é transmitir conhecimento, é criar possibilidades para sua construção”.

Freire

SUMÁRIO

LISTA DE QUADROS

RESUMO

Este trabalho consiste na proposta de uma seqüência didática para o ensino de Sistemas de Equações Algébricas Lineares na qual estabelecemos uma conexão entre o Método da Substituição e o Método do Escalonamento buscando a conver são de registros de representação. O objetivo da proposta foi verificar se os alunos conseguem r ealizar a conexão entre os dois métodos desenvolvendo a conver são do método da substituição no Método do escalonamento caracterizando assim, o aprendizado do objeto matemático estudado, segundo a teoria de registros de representação semiótica de Raimund Duval. A pesquisa foi r ealizada com alunos do ensino médio em uma escola da rede pública estadual da cidade de Belém e os resultados apontaram para o estabelecimento de uma conexão entre os dois métodos empregados no processo de resolução de sistemas.

Palavras-chave: Sistemas Lineares, Método da Substituição, Método do Escalonamento, Registro de Repr esentação Semiótica e conexão.

ABSTRACT

This work is the proposal of a didactic streak to the teaching of Linear Systems of Algebraic Equations in which sought to establish a connection between the method of substitution and the method of stages through the conver sion of records of representation. The aim of the proposal was to check whether the students can complete the connection between the two methods developing the conver sion of the method of substitution in the method of characterizing staggering thus, the learning of the subject studied math, according to records of representation theory of semiotics Raimund Duval. The r esear ch was conducted with middle school students in a school of public state of the city of Belem and the results pointed to the establishment of a connection between the two methods employed in the process of r esolution of systems.

Key-words: Linear Systems, the substitution method, method of stages, Record of Representation Semiotics and connection.

INTRODUÇÃO

O atual ensino de matemática desenvolvido nas escolas, não raro, tem provocado nos alunos aver são quanto ao estudo dos saberes inerentes à ciência matemática. As causas dessa aversão podem estar associadas a não articulação entre os saberes escolares o que acaba por deixar, na maioria das vezes, os alunos sem a devida compreensão dos significados envolvidos no estudo dos objetos matemáticos.

A não conexão entre os saberes escolares pode conduzir os alunos a um aprendizado mecânico e desprovido de reflexão, uma vez que a falta de ligação entre os saberes pode impedir a articulação entre os conhecimentos aprendidos. Na verdade, o estudo isolado de um tema pode não permitir a exploração do caráter indagador que ele possui, daí, em muitos casos, não possibilitar a construção significativa do conhecimento. A esse respeito os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN's (1999) afirmam que:

> "...se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e profunda, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as idéias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades frente à matemática mostram claramente que isso não é verdade". (Brasil., pp. 86-87)

E mbora os PCN's recomendem que o ensino de matemática seja desenvolvido através do uso de conexões, não somente da matemática com outras áreas do conhecimento, mas que, também, sejam estabelecidas conexões entre os vários temas que compõe a própria matemática, observamos que as temáticas têm sido trabalhadas de for ma isoladas umas das outras; é o que se verifica, por exemplo, diante do ensino de Sistemas de Equações Algébricas Lineares no nível médio quando o assunto é, geralmente, apresentado de forma desconectada do estudado no nível fundamental, como se tudo fosse uma conseqüência natural advinda da teoria de Matrizes e Determinantes.

A perspectiva de que se estabeleça a conexão entre os saberes escolares estudados vai ao encontro de objetivos traçados nos PCN's a fim de melhorar o ensino de matemática, dentre os quais destacamos:

- Estabelecer conexões entre difer entes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
- Reconhecer as representações equivalentes de um mesmo conceito, r elacionando procedimentos associados a diferentes representações;

Os objetivos apresentados demonstram as recomendações dos pr óprios PCN's para que se ensine matemática fazendo uso de conexões entre os saberes escolares, no entanto, ainda encontramos situações de ensino desenvolvidas por meio de fragmentos de conhecimentos, relegando aos alunos a difícil tarefa de montar verdadeiros " quebra-cabeças" , esperando que consigam estabelecer conexões entre as várias peças apresentadas.

Alguns livros didáticos, como o "Matemática: ciência e aplicação" de Gelsson Iezzi et al (2004) , não raro, também apresentam os conteúdos de forma isolada por meio de organizações matemáticas que não buscam conexões com outros saberes intra-matemáticos[1] . De um modo geral, não evocam conexões, embora busquem contextualizar o ensino por meio de situações pr oblemas.

Pais (2006) em seu livro "ensinar e aprender matemática" defende que o ensino de matemática seja desenvolvido através da articulação entre os saberes, uma vez que lançar articulações entre configurações, conceitos, problemas e propriedades é uma das condições necessárias para a expansão dos resultados do ensino e da aprendizagem da matemática. Segundo o autor, "quanto mais intensas forem a interatividade e a ar ticulação, mais significativa será a aprendizagem" (p.52), já que é através delas que os alunos constroem conhecimentos e fazem matemática.

O fazer matemático, compreendido por Chevallard (2001) como sendo o ato de identificar esquemas de ação pr óprios do raciocínio, é marcado por articulações e integr ação de saberes matemáticos, ora explícitos, ora implícitos e este, sempre que possível, precisa ser trabalhado nesse sentido, não somente para atender o que preconiza os PCN's, mas para possibilitar a construção significativa do conhecimento. A tomada de consciência das ar ticulações e integrações de saberes matemáticos e extra-matemáticos, para gerar um novo saber matemático pelo sujeito, parece se impor quando tratamos do ensino de matemática, e é isso que

[1] Denominamos de saberes intramatemáticos a relação estabelecida entre temas matemáticos.

buscamos em nosso trabalho: Construir e avaliar uma seqüência de ensino que promova as articulações e int egrações de saberes matemáticos em busca de verif icar se tais conexões podem promover a aprendizagem de um objeto matemático.

Para isso, propomos e aplicamos uma seqüência de estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares em uma turma do Ensino Médio de uma escola da rede pública de ensino de Belém, buscando privilegiar a conexão entre o tratamento que é dado ao estudo do tema no ensino fundamental com o tratamento que deveria receber no ensino médio. O tratamento dado ao estudo de Sistemas Lineares no ensino fundamental se constitui como saber prévio segundo o qual emerge um novo saber . Mais precisamente, o método de r esolução de sistema através da substituição emerge como o Método de Escalonamento numa conversão de registros semióticos, conforme será mostrado neste trabalho de pesquisa.

Buscamos validar nossa proposta por meio de evidências presentes nas atividades realizadas pelos alunos de conversão de registros semióticos com base no estudo de Raimund Duval, segundo o qual, “el cambio de registros constituye una variable que se revela fundamental en didáctica: facilita considerablemente el aprendizaje, pues ofrece procedimientos de interpretación”. (1999, p.59). As palavras de Duval pressupõem que a aprendizagem de um conceito, seja matemático ou não, está relacionada ao desenvolvimento de coordenações progressivas entre vários sistemas de representação semiótica, assim, o sujeito aprende na medida em que consegue estabelecer conexões entre as r epresentações dos objetos matemáticos estudados uma vez que “... a articulação dos registros se constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática,...” (Duval, 2003, p. 22).

A esse respeito, Pais (2006) corrobora com Duval quando afirma que:

> “No rizoma cognitivo estão contidas diferentes formas de representação da matemática, tais como símbolos, números, tabelas, gráficos, figuras, entre outros. E a expansão da aprendizagem passa por articulações entre esses recursos de comunicação”. (p. 61).

Os saberes matemáticos necessitam ser articulados para possibilitar aos alunos a construção de seus próprios conhecimentos diante dos significados empregados aos objetos estudados. Nesse sentido, é importante que se desenvolva o estudo de um saber através de vários tratamentos, uma vez que o empr ego de um único tratamento pode prejudicar o aprendizado, considerando que cada um demonstra apenas uma parte outra de conceitos ainda desconhecidos. Na verdade, a formação do pensamento matemático está associada à conexão estabelecida entre os inúmeros conceitos matemáticos aprendidos, e cabe ao professor a tarefa de elaborar seqüências de ensino que possibilitem mostrar as múltiplas relações existentes entr e os saberes escolares estudados.

Desenvolver um ensino que prime pela construção do conhecimento implica buscar metodologias que discutam questões relativas ao aprendizado dos alunos e, nesse sentido, a Engenharia Didática apresenta-se como uma viável abordagem metodológica de pesquisa que pode contribuir, inclusive, para o desenvolvimento de um ensino articulado.

No trabalho com a Engenharia Didática o professor faz da sua ação pedagógica um objeto de investigação, através do qual estabelece uma dependência entre saber teórico e saber prático, no sentido de relacionar esses dois saber es através de reflexões realizadas sobre o objeto estudado em meio ao desenvolvimento de um fazer matemático que busca a construção do conhecimento, conforme afirma Pais (2002):

> "A engenharia didática possibilita uma sistematização metodológica para a realização da pesquisa, levando em consideração as relações de dependência entre teoria e pratica. Esse é um dos argumentos que valoriza sua escolha na conduta de investigação do fenômeno didático, pois sem articulação entre a pesquisa e a ação pedagógica, cada uma destas dimensões tem seu significado reduzido". (p. 99)

Sendo a Engenharia Didática entendida como uma proposta metodológica de pesquisa viável ao processo de ensino e aprendizagem, foi adotada a mesma neste trabalho de pesquisa diante do desenvolvimento de uma seqüência didática direcionada ao ensino de Sistemas de Equações Algébricas Lineares seguindo os princípios envolvidos nesta abordagem metodológica.

Assim, pr imeiramente, r ealizamos um estudo preliminar sobre os Sistemas de Equações Algébricas Lineares para verificar a situação atual do ensino deste objeto matemático; em seguida, foi realizada uma análise a priori na qual descrevemos algumas questões referentes ao estudo de sistemas buscando prever soluções para as mesmas; em um terceiro momento, desenvolvemos e analisamos uma seqüência didática voltada ao ensino de Sistemas Lineares, buscando verificar se os alunos conseguiam realizar a conversão entre os dois registros de representação empr egados no estudo do referido objeto matemático com o objetivo de validar a proposta implementada.

Portanto, nesse trabalho de pesquisa, desenvolvemos uma seqüência didática aplicada ao estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares, através da qual estabelecemos uma conexão entre o Método da Substituição e o Método do Escalonamento buscando verificar a conver são de registros de representação semiótica.

CAPÍTULO I

CARACTERIZANDO E PROBLEMATIZANDO A PESQUISA

A pesquisa realizada tratou da conexão de saberes intermediada por um processo de conversão de registros de representação. Nela buscamos enfatizar a necessidade de se trabalhar com a relação entre os temas matemáticos uma vez que o tratamento isolado dado ao estudo dos temas, possivelmente, corrobora para a ocorrência de um aprendizado mecânico e desprovido de significado. Segundo Moreira e Masini (1982): "uma apr endizagem mecânica se dá através da aquisição de informações com pouca ou nenhuma interação com conceitos ou proposições existentes na estrutura cognitiva" (p. 100), e é isso que tem sido observado ao longo do desenvolvimento de algumas práticas educativas que não buscam estabelecer conexões entre os saberes ensinados.

A fragilidade de conexões ou mesmo sua inexistência no estudo dos saber es matemáticos pode prejudicar o aprendizado ao não permitir uma tomada de consciência quanto à construção do conhecimento. Foi à percepção dessa fragilidade, em consonância com as recomendações dos PCN's de se estabelecer um ensino com articulação entre os saberes, que nos conduziu ao desenvolvimento desse trabalho, buscando por em experiência uma situação que demonstrasse, de algum modo, como as conexões podem favorecer o pr ocesso de aprendizagem dos alunos. Para tanto, elaboramos como proposta uma seqüência de ensino sobre Sistemas de Equações Algébricas Lineares, a qual foi aplicada com um grupo de alunos do ensino médio sendo usada a Teoria de Registros Semióticos para fundamentar a seqüência diante de um fazer matemático experimental.

Considerando que o fazer matemático se constitui campo fértil para a Teoria dos Registros Semióticos, já que os objetos matemáticos não existem em realidade concreta ficando restrito às suas representações semióticas, a escolha da referida teoria nos pareceu conveniente por permitir, de modo objetivo e claro, verificar a aprendizagem por meio das conversões de registros de representações. Segundo Duval (1993), o aprendizado ocor re mediante conversões estabelecidas entre registros de representação e isso é importante para o processo de ensino e aprendizagem porque pr oporciona ao professor feedback para continuar desenvolvendo suas atividades de ensino e dá ao aluno segurança quanto ao conhecimento construído.

Dar conta como um todo de observar o momento em que ocorre o aprendizado de todos os objetos matemáticos é algo fora de nosso alcance, por isso, limitamos nossa pesquisa ao estudo de Sistemas de Equações Lineares em meio à proposta de aplicação de uma seqüência didática.

O primeiro contato dos alunos com o estudo de Sistemas de Equações Lineares se dá ainda na sexta série do ensino fundamental, ao serem resolvidas situações-problema envolvendo duas equações com duas incógnitas, que juntas, levam à constituição de um sistema, o qual é resolvido mediante a aplicação de três métodos até então estudados: o Método da Adição, da Comparação e o da Substituição. Esse tema volta a ser estudado no terceiro ano do ensino médio, ou na segunda etapa da EJA, com o número de equações e incógnitas superiores a dois por meio de técnicas matriciais de resolução como a Regr a de Cramer, que envolve o cálculo de determinante, e pelo Método do Escalonamento. Tal temática, resolução de sistemas, por ai não se esgota, pois a mesma volta a ser objeto de estudo nos cursos de graduação e pós-graduação em latu e strito sensu, servindo como tema para monografias, dissertações, teses e artigos científicos que são publicados em revistas científicas de destaque no meio acadêmico matemático como a "Linear Álgebra and its Applications".

O estudo de sistemas no ensino básico e mais precisamente no ensino médio se restringe ao emprego de técnicas oriundas do estudo prévio de matr izes sem conexão com as técnicas estudadas no ensino fundamental, quebrando a seqüência desejável de construção do conhecimento matemático. Mais precisamente, o desenvolvimento histórico e epistemológico do estudo de Sistema Lineares, em sua origem, não envolve o uso da teoria matricial, isto é, a teoria matricial está como uma conseqüência de tal estudo, como pode ser observado em Caley (1858).

Como verificamos, o estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares no ensino médio é isolado do saber prévio do ensino fundamental e se recorre ao uso de técnicas matriciais, recurso natural do ensino superior, que reconhecemos incipiente no ensino médio considerando o elevado nível de abstração, ao nosso ver, para prover o significado de tais técnicas no ensino médio. Na verdade, uma análise dos métodos empregados para resolução de sistemas no ensino médio revela o emprego de técnicas desprovidas de significados que permitam compreender, nesse nível de ensino, como se chega à solução dos sistemas.

Parece, então, natural nos preocuparmos com o ensino dessa temática e mais ainda, buscar os significados para o uso das técnicas do ensino médio por meio de conexões com o tema na forma estudada no ensino fundamental. Nesse sentido, buscamos trabalhos desenvolvidos sobre o ensino do tema em questão, dentre os quais destacamos o de Herrero (2004), que apresentou uma seqüência didática para o ensino de Sistemas Lineares com apenas duas equações e duas incógnitas por meio de diferentes registros de representação.

No desenvolvimento do seu trabalho, Her rero (2004) apontou, inicialmente, algumas dificuldades que os alunos apresentam quando estudam Sistemas Lineares, dentre elas:

- Dificuldades em usar operações aritméticas elementares para resolver problemas verbais envolvendo Equações e Sistemas de Equações;
- Dificuldade em conver ter a linguagem escrita para uma linguagem matemática;
- Os alunos não costumam verificar as respostas encontradas durante o processo de r esolução dos Sistemas e, por isso, não tem clareza do que elas representam.

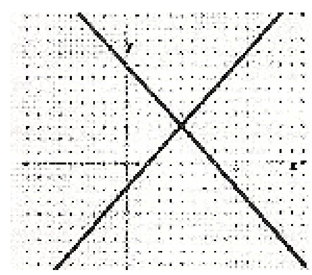
Segundo a autora, essas dificuldades apresentam diversas origens, dentre as quais destaca:

- A complexidade matemática segundo a qual são tratados os elementos básicos que são usados para resolver os Sistemas Lineares;
- A forma abstrata como o conceito de Sistemas de Equações Algébricas Lineares é tr abalhado e a não interpretação do significado das soluções encontradas pelos alunos;
- A ruptura entre o pensamento aritmético e algébrico empregado no ensino de Sistemas, além de outras mais.

Diante das dificuldades observadas no processo de ensino e aprendizagem dos Sistemas de Equações Algébricas Lineares e, ciente das causas que provocam tais dificuldades, Herrero (2004) elaborou e desenvolveu uma seqüência didática enfatizando a articulação entre diferenciadas formas de tratamento que podem ser empregadas durante o estudo desse objeto matemático. Os diferentes tratamentos articulados pela autora foram referentes ao uso da linguagem verbal (apresentação dos Sistemas Lineares em for ma de problemas), os registros algébricos e os registros gráficos usados no processo de resolução de sistemas com apenas duas equações e duas incógnitas buscando enfatizar os fatores que proporcionam a passagem de um tratamento a outro, conforme demonstra o quadr o a seguir:

Quadro 1

Diferentes tipos de registros de representação aplicada ao estudo de sistema

Objeto Matemático	**Representações**		
	Registro verbal	**Registro algébrico**	**Registro Gráfico**
Sistemas de duas equações lineares com duas incógnitas. A solução é um conjunto unitário.	Se os lados de um retângulo se alargam em dois centímetros cada um, o perímetro é 24 centímetros. Sabe-se ainda que a diferença entre as medidas dos lados é 2. Quantos centímetros medem os lados do retângulo?	$2(x + 2) + 2(y + 2) = 24$ $x - y = 2$	

Herrero (2004) mostrou com propriedade a relação existente entre os diferentes tratamentos empr egados no estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares com duas incógnitas desenvolvendo o mesmo sobre diferentes perspectivas como a verbal, a algébrica e a gráfica, cuja conseqüência é o aprendizado natural desse objeto matemático.

Distintamente do trabalho de Her rero, em nossa pesquisa, buscamos também diferentes representações, mas de modo a considerar uma conexão entre o tratamento dado ao estudo de Sistemas Lineares no nível fundamental em consonância com o tratamento dado no ensino médio, evidenciando o fazer do ensino fundamental com sistemas reduzidos como um fazer do ensino médio para sistemas de maior envergadura. Mais pr ecisamente, trabalhamos a conexão entre a aplicação do Método da Substituição, de representação algébrica, e o Método do Escalonamento, de representação matricial e aritmética, por meio de uma conversão dessas representações. A relação existente entr e essas duas formas de tratamentos (Método da Substituição e Método de Escalonamento) consiste numa boa opor tunidade para mostrar o processo de conversão dos chamados registros de representação semiótica, conforme será demonstrado nesse trabalho de pesquisa.

É importante destacar que a seqüência que propomos, também se difere de algumas seqüências didáticas presentes nos livros escolares, uma vez que, quase em geral, os mesmos optam por apresentar o estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares como sendo uma aplicação natural da teoria de Matrizes e Determinantes, enfatizando a apresentação de técnicas que surgem como uma caixa preta na qual estão presentes procedimentos que per mitem, em meio a um passe de mágica, resolver sistemas. A regra de Cramer e as operações elementares com as linhas de uma matriz são exemplos claros do que afirmamos.

Esse tipo de seqüência vem sendo tratada na maioria dos livros didáticos propostos pelo MEC dos quais destacamos: “Matemática: ciência e aplicação” de Gelson Iezzi et al (2004) , livr o usado em muitas escolas públicas, que trata esse assunto apresentando a seguinte organização didática:

- Em um primeiro momento, os autores fazem todo um estudo sobre a teoria de Matrizes partindo da construção de tabelas numéricas para definir matriz, sua representação, os tipos de matrizes, finalizando com as operações matriciais.

- Em seguida, desenvolvem o estudo de Determinantes associando sua definição à teoria de Matrizes, prosseguindo com o cálculo do cofator , propriedades, regras e teoremas que envolvem o estudo desse objeto matemático.

- Após a apresentação das teorias de Matrizes e Determinantes, os autores adentram no estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares enfatizando, inicialmente, a construção de equações; em seguida, associam o estudo de matrizes a um sistema em meio à representação matricial de um sistema partindo para o seu processo de resolução. A resolução de sistemas é trabalhada pelos autores através do Método de Escalonamento sem demonstrar um procedimento sistemático que explique tal tratamento e, também, mediante o uso da regra de cramer, como se o processo de resolução de sistemas necessitasse anteriormente da teoria de Matrizes e Determinantes para acontecer.

A organização didática veiculada nos livros didáticos é adotada pela maioria dos professores de matemática em sala de aula como técnicas canônicas, tor nando a temática complexa de ser compreendida pelos alunos. Essa prática docente, acreditamos ser um reflexo do modo como esse tema é tratado no processo de formação, por meio da teoria matricial sem qualquer vínculo explícito com as técnicas do ensino fundamental, e é dessa forma, que tende a ser adotada como seqüência de ensino pelos acadêmicos do curso de matemática, refletindo-se, posteriormente, em sua futura postura docente; afinal, as metodologias de ensino empregadas tendem a ser as mesmas aprendidas, conforme afirma Silva (2001) apud Gonçalves (2005, p. 68) quando nos fala que: “os futuros pr ofessores tendem a reproduzir os pr ocedimentos didático-pedagógicos de seus formadores”.

E m suma, durante o pr ocesso de ensino de Sistemas Lineares no ensino médio, não são buscados os conhecimentos que os alunos apresentam sobre este assunto. Embora se tenha conhecimento de que os alunos estudaram Sistemas Lineares na sexta série do ensino fundamental, o assunto é apresentado como algo inédito, sem estabelecer uma conexão com o que já foi aprendido.

O ensino de Sistemas Lineares desenvolvido somente através de um tratamento matricial, usando o Escalonamento ou mesmo via cálculo de Determinantes empregando a regra de Cramer, acaba escondendo a verdadeira simplicidade que envolve o estudo desse objeto matemático, uma vez que o processo de resolução de um sistema depende unicamente de manipulações algébricas, conforme será mostrado mais adiante.

O estudo de sistemas desenvolvido somente por Escalonamento Matricial dificulta o aprendizado desse saber matemático por não apresentar um procedimento de sistematização que explique tal tratamento. Durante o processo de Escalonamento são efetuadas operações com os coeficientes das linhas que compõem o sistema sem a devida “consciência” do que está sendo feito. As oper ações realizadas são desenvolvidas, não raro por tentativas, com o único intuito de deixar o sistema em sua for ma triangular sem que se tome consciência da sistematização que automatiza o processo que conduz à solução do mesmo.

O saber existente acerca do Escalonamento Matricial é apenas técnico uma vez que se tem conhecimento de como se escalona um sistema zerando gradativamente os coeficientes das equações, mas não se dispõe de uma tecnologia que o justifique e, por conseguinte não se tem a consciência do fazer matemático envolvido na sistematização que explica tal processo.

As críticas, ora realizadas quanto ao uso do Escalonamento Matr icial no estudo dos Sistemas Lineares, não justificam deixar de abordar esse tratamento com os alunos; pelo contrário, é a busca de significado matemático que nos move a atribuir um sentido ao estudo desse objeto matemático, pois há de haver outras características no Escalonamento Matricial que possibilitem desenvolver seu estudo com significado, tornando-o importante no ensino de Sistemas Lineares. A opção por usar o Método do Escalonamento no estudo de sistemas decorre de limitações verificadas na aplicação do Método da Substituição, embor a a origem desses estudos se constitua em um mesmo fazer. As representações do Método da Substituição e do Método de Escalonamento é que são distintas, tornando-as mais ou menos convenientes de acordo com a situação enfrentada.

A sistematização dos cálculos algébricos nas equações do sistema quando o mesmo é resolvido pelo Método da Substituição nos leva a observar que as equações resultantes podem ser obtidas de modo similar e repetitivo envolvendo somente os coeficientes das incógnitas que, quando vistas de modo sistemático, na presença do pr ocesso de Escalonamento Matricial, torna visível a conexão entre essas duas formas de tr atamento no estudo dos Sistemas de Equações Algébricas Lineares. É essa conexão que vamos tratar nesse trabalho de pesquisa, buscando verificar se os alunos desenvolvem um fazer matemático em busca da conversão de uma forma de tratamento em outra.

Segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymund Duval, a qual apresentaremos mais adiante, quando alguém consegue converter uma forma de tratamento em outra, há a indicação de um aprendizado matemático. É tendo em vista o suporte dessa teoria que validaremos a nossa proposta diante da seqüência de ensino realizada com o grupo de alunos que tomamos como sujeitos investigados. Desse modo, a nossa questão de pesquisa se impõe como: “A conexão entre o Método da Substituição do ensino fundamental e o Método do Escalonamento do ensino médio favorece ~~a conversão de registros~~ semióticos desses métodos?

Quando se conver te o Método da Substituição no Método do Escalonamento, há o desenvolvimento de um outro significado para o estudo dos Sistemas de Equações Algébricas Lineares, pois deixa-se de trabalhar numa perspectiva algébrica para se dar um tratamento aritmético-matricial ao referido estudo, cujas operações envolvidas são de conhecimento e habilidade dos alunos.

O Método do Escalonamento é uma criação do homem de modo a evitar o hercúleo trabalho das manipulações algébricas e, assim, tornar o processo de resolução menos árduo. Parece que isso está bastante claro quando usamos esses métodos e é isso que se deseja discutir com os alunos. As vantagens e desvantagens do Método da Substituição e Escalonamento, e isso requer que conheçamos suas relações.

Foi pensando no ensino de Sistemas de Equações Algébricas Linear es, da forma anterior mente descrita, que elaboramos e desenvolvemos uma seqüência didática para o estudo deste objeto matemático, buscando verificar se os alunos conseguem realizar a conversão entre os dois tratamentos supracitados, assumindo o princípio da conversão de registros como indicador de aprendizado presente na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymund Duval, a qual apresentamos a seguir.

CAPÍTULO II

REFERENCIAL TEÓRICO DA PESQUIS A

Diante da proposta de desenvolver uma seqüência didática destinada ao ensino de Sistemas de Equações Algébrica Lineares, usamos como referencial teórico para sustentar e fundamentar o trabalho realizado, a Teoria de Registro de Representação Semiótica de Raymund Duval, por se tratar de uma abordagem que defende a construção do conhecimento matemático mediante conversões estabelecidas entre os diferentes tratamentos empregados no estudo dos objetos matemáticos. Como temos a intenção de propor uma seqüência de ensino que envolve dois tratamentos no processo de resolução de sistemas, através do Método da Substituição e do Método de Escalonamento, buscando o estabelecimento de conver são entre eles, esse referencial par ece apropriado para o nosso propósito, conforme buscaremos mostrar a seguir.

2.1 - A TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÕE S SEMIÓTICAS

Foi o filósofo e psicólogo francês Raymond Duval (1999)2 o responsável pelo desenvolvimento da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, a qual busca analisar a influência das representações dos objetos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem em matemática. Segundo essa teoria, numa atividade de ensino, pode-se representar um objeto matemático utilizando os registros de representação semiótica, os quais Duval (1993) define como sendo:

> "... produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações os quais têm suas dificuldades próprias de significado e funcionamento". (p.39)

E m sua teoria, Duval explica que os registros de representações são maneiras típicas de representar um objeto matemático, e o sistema no qual podemos representar um objeto matemático, denomina-se, sistema ou registro semiótico. Os registros semióticos são importantes não somente por se constituírem

2 Raymond Duval. Filosofo e psicólogo desenvolveu estudos em psicologia cognitiva no Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM) de Estrasburgo, na França. Atualmente é professor emérito da Université du Litoral Cote d'Opale, França.

num sistema de comunicação, mas também por possibilitarem a organização de informações a respeito do objeto representado.

Um exemplo matemático, no qual pode ser visualizado um objeto destacando seu sistema semiótico e o seu registro de representação, pode ser verificado no estudo da Álgebra Linear diante do uso de registros simbólicos para representar um Sistema de Equações Algébricas Lineares, conforme demonstra o quadro a seguir:

Quadro 2

Representação algébrica de um Sistema de Equações Algébricas Lineares

$$x - 2y = 5$$
$$2x - 4y = 2$$

Objeto matemático: Sistemas Lineares

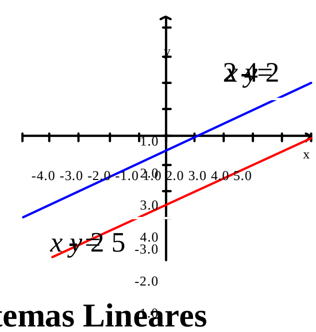
Sistema Semiótico: Simbólico

Representação: Algébrica

O exemplo mostrado no quadro 1 corresponde a apenas uma das possíveis formas de r epresentação, segundo a qual podemos repr esentar o objeto matemático tratado. Existem outros registros semióticos para representar um sistema, entre os quais destacamos o uso do r egistro figural, utilizando a representação geométrica que também evidencia o estudo do mesmo objeto matemático abordado, conforme demonstra o quadro 3.

Quadro 3

Representação geométrica de um Sistema de Equações Algébricas Lineares



Objeto matemático: Sistemas Lineares

Sistema Semiótico: figural

Representação: Geométrica

Nas atividades matemáticas podemos representar um objeto utilizando vários registros de representação e, segundo a teoria de Duval, é a conversão das várias r epresentações manifestadas sobre um objeto de estudo que possibilita a construção do conhecimento. Na realidade, a possibilidade de mudança de registro se constitui uma condição necessária ao processo de aprendizagem conforme evidencia o pensamento a seguir:

> "A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação". (Duval, 2003, p.14)

As representações são consideradas, geralmente, como uma simples maneira de exteriorização das representações mentais para fins de comunicação, todavia, vale ressaltar que essa visão é limitada uma vez que elas exerceram e exercem um papel primordial na construção do pensamento matemático. Duval (2003) destaca a importância dos registr os de r epresentação par a a matemática dizendo que: "o desenvolvimento das representações semióticas foi a condição essencial para a evolução do pensamento matemático" (p.13), ou seja, o desenvolvimento da própria matemática se deu em função dos registros usados para expressar as idéias construídas.

As palavras de Duval descritas acima evidenciam a importância e a necessidade do uso das representações semióticas no processo de estudo dos objetos matemáticos, uma vez que todo pensamento matemático é expresso através de r egistros que devem ser explorados a fim de possibilitar a construção do conhecimento. Na verdade, os objetos matemáticos não são diretamente perceptíveis ou obser váveis sem o uso de registros de representação, conforme afirma Duval (2003):

> "...diferentemente dos outros domínios do conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivelmente ou microscopicamente (microscópio, telescópio, aparelhos de medida, etc.). O acesso aos objetos passa necessariamente por representação semiótica. Além do que, isso explica por que a evolução dos conhecimentos matemáticos conduziu ao desenvolvimento e à diversificação de registros de representação". (p.21)

O acesso aos númer os, por exemplo, não é possível sem a utilização de um sistema de representação que os per mita designar .

Os registros de representação são elementos constitutivos da ciência matemática, e é através deles que são definidos os vários tratamentos que podem ser empregados no estudo dos objetos matemáticos, daí não podermos deixar de reconhecer a importância dos registros para a construção do conhecimento, considerando os conteúdos específicos que cada representação tem. Sobre isso, Duval (2003) diz que:

> “Descartar a importância da pluralidade dos registros de representação leva a crer que todas as representações de um mesmo objeto matemático têm o mesmo conteúdo ou que seus conteúdos respectivos se deixam perceber uns nos outros como por transparência”. (p.14)

Cada registro de representação apresenta um conteúdo próprio que caracteriza parte do objeto estudado e o sujeito se apropria do objeto cada vez que se dá conta dos elementos que o caracteriza. Tomar consciência dos conteúdos existentes em cada registro de representação e estabelecer relações entre eles significa apropriar-se do objeto estudado.

A esse respeito, Morretti (2002) afirma:

> “De um ponto de vista cognitivo, uma representação é parcial em relação aquilo que ela quer representar e que de um registro a outro não são os mesmos conteúdos de uma situação que são representados”. (p.27)

São as representações, segundo a teoria de Duval, que quando convertidas umas nas outras conduzem ao aprendizado dos objetos estudados; nesse sentido, podemos então dizer que o estudo da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Raymund Duval perpassa pela verificação da construção gradativa do conhecimento mediante conversões estabelecidas entre as diversas formas de representação. Sendo assim, quanto mais diversificada é a representação de um objeto, maior é a compreensão que se tem a seu respeito, e a apropriação do seu significado se dá a partir de conversões estabelecidas entre as diversas maneiras de representá-lo.

O acesso aos objetos estudados (conhecimentos científicos institucionalizados) acontece por meio de conversões estabelecidas entre os diferentes registros de representação empregados, por isso, é necessário e importante que sejam desenvolvidas diferentes maneiras de abordar um determinado objeto matemático a fim de verificar as relações existentes entre os registros, buscando a conversão entre eles. A esse respeito Duval (2003) afirma que:

> "Do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão". (p. 22).

E m suma, as palavras de Duval (2003) querem dizer que "a compreensão *em matemática implica na capacidade de mudar de registro" (p.21), daí a necessidade de se desenvolver um ensino que prime em trabalhar com diferentes representações dos objetos matemáticos a serem estudados.*

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica diz que durante o processo de estudo dos objetos matemáticos deve ser dado ênfase a duas transformações de representação semiótica que são radicalmente diferentes: os tratamentos e as conversões.

Os tratamentos são pr ocedimentos de justificação do objeto de estudo baseados em fenômenos congruentes, segundo os quais os r egistros permanecem num mesmo sistema de representação, seja através da escrita, de figuras, gráficos, diagramas, dentre outros; já a conversão é um processo de transformação de um tratamento em outro no qual há mudança de sistema de registro com a conservação da referência ao objeto estudado.

Ao discutir as transformações de tratamento e conversão em sua teoria, Duval (2003) descreve que:

> - "Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro, por exemplo: efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação". (p.16)
>
> - "As conversões são transformações de representação que consistem em mudança de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, reconhecer a escrita algébrica de uma equação em sua representação gráfica". (p.16)

A distinção das duas formas de transformações anteriormente descritas podem ser melhor evidenciadas no quadro a seguir descrito por Duval (2003):

Quadro 4

Distinção entre transformações de tratamento e conversão

Transformação de uma representação semiótica em uma outra representação semiótica	
Permanec endo no mes mo sistema: TRATAMENTO	Mudando de Sistema, mas conservando a referencia aos mesmos objetos: CONVERSÃO
Quas e s empre, é s omente este tipo de transformaç ão que chama a atenção porque ele corresponde a procedimentos de justificaç ão. De um ponto de vista "pedagógico", tenta-se algumas vezes proc urar o melhor registros de representaç ão a ser utiliz ado para que os alunos poss am compreender.	Este tipo de transformação enfrenta os fenômenos de não-congruência. Isso se traduz pelo fato de os alunos não reconhecerem o mes mo objeto através de duas representaç ões diferentes . A capacidade de c onverter implica a coordenaç ão de regis tros mobilizados. Os fatores de não-congruência mudam conforme os tipos de registros entre os quais a conversão é, ou deve ser, efetuada.

E mbora seja visível a diferença entre as duas transformações apresentadas anteriormente, é comum as pessoas confundirem tratamento e conversão ou mesmo reduzirem a conversão a uma atividade de codificação. Esse tipo de confusão deve ser evitado, pois se trata de transfor mações distintas, embora o processo de conver são necessite do uso de tratamentos diferentes para acontecer. Essa confusão fica evidente no pensamento de Duval (2003) quando afirma que:

> "É *comum descrever a conversão como uma associação preestabelecida entre nomes e figuras (como, por exemplo, em geometria) ou reduzi-la a uma codificação.... Passar de uma equação à sua representação gráfica constituiria uma codificação em que seria suficiente aplicar a regra segundo a qual um ponto está associado a um par de números sobre um plano quadriculado por dois eixos graduados. Ou ainda, passar de uma expressão em português - como "o conjunto dos pontos cuja ordenada é superior à abscissa" - à escrita simbólica – no caso, "x>y", seria igualmente uma codificação, como toda escrita literal de relações entre os números. (p.17).*

Os tratamentos estão ligados à forma de representação dos objetos os quais contém conteúdos próprios e não ao estudo do objeto matemático em si; por isso, é um grande equívoco reduzir a conver são a uma forma simplória de tratamento ou mesmo de codificação. Não são regras de corr espondência para passar de um registro a outro ou simplesmente codificações que caracterizam uma conver são, mas sim, a apreensão global e qualitativa que a conversão permite embutir nas mudanças de registros. A esse respeito Duval (2003) diz que:

> "Há por trás da aplicação de uma regra de decodificação para passar de uma equação a um gráfico cartesiano, a necessária articulação entre as variáveis cognitivas que são específicas do funcionamento de cada um dos dois registros. Pois são essas variáveis que permitem determinar quais as unidades de significado pertinentes, que devem ser levadas em consideração, em cada um dos dois registros". (p.17)

Isso justifica, segundo a teoria de Duval, porque a conversão das representações não pode e não deve ser redutível a uma simples forma de tratamento.

Apesar da conversão, sob o ponto de vista matemático, não efetuar nenhum papel intrínseco nos processos de justificação e prova, ela é de fundamental importância, sob o ponto de vista cognitivo, pois interfere diretamente na condução dos mecanismos subjacentes à compreensão. Na realidade, segundo a Teoria dos Registros de Representação, é a atividade de conversão a responsável pela construção do conhecimento, ou seja, pela apropriação do saber.

A distinção a priori dos dois tratamentos abordados neste capítulo se fez necessário para o estudo da Teoria dos Registros de Representação Semiótica por serem elementos constitutivos dessa teoria, por isso procuramos explicitá-los.

Mas, afinal, o que vem a ser a Teoria dos Registros de Representação Semiótica?

Podemos entender a Teoria de Registros de Representações Semióticas como sendo o emprego de signos (gráficos, figuras, fórmulas, escrita), pertencentes a um sistema de representação, constituído de significado e funcionamento, segundo os quais a construção do conhecimento acontece mediante a conversão estabelecida entre duas ou mais formas distintas de registro de representação.

Segundo Duval (1993), essas representações semióticas são externas e *conscientes do sujeito, ou seja, elas representam a compreensão manifestada sobre um objeto, o qual pode ser tratado de diver sas formas. A correspondência existente entre as várias formas de tr atamento de um objeto, ou seja, entre as várias formas de registro de representação, indica a funcionalidade do pensamento humano no, sentido de mostrar a compreensão acerca do objeto estudado.*

Todo tipo de expressão tem sua forma particular de representação r epleta de significados e, sendo a educação um processo intermediado por uma comunicação, seja através do diálogo, gestos ou por meio da escrita, faz-se necessário discutir os diferentes registros de representação empr egados no processo de ensino e aprendizagem dos objetos matemáticos estudados, buscando estabelecer conexão entre eles.

Abordando os termos registros de representação e semiótica em separado, verificamos que o entendimento a respeito dos registros de representação pode ser percebido como sendo, por exemplo, a escrita, a notação, as figuras, os gráficos, diagramas, esquemas, signos e símbolos utilizados para representar um objeto matemático. Assim, a noção de registr o de representação está voltada ao domínio dos sinais que servem para designar um objeto; já a semiótica, consiste numa ciência que busca compreender o significado dos símbolos empregados nos registros representados.

A pr oposição A = B.C, por exemplo, pode r epresentar num dado momento a área de uma figura, mas em outro, a mesma proposição representada pelas formas ***F = M.A ou P = m.g, passa a expressar outros significados, no caso, o estudo de força e peso, respectivamente. Sendo assim, pode-se dizer que as formas de representação de um objeto assumem um significado de acordo com o contexto ao qual está sendo empregado, sendo que, quanto mais diversificada é a visualização desses diferentes contextos e dessas diferentes formas de registro de representação, maior é a compreensão que se tem sobre o objeto estudado.***

O exemplo acima apresentado mostra que as proposições A = B.C, F = M.A e P = m.g correspondem a formas diferenciadas de registros de representações dotadas de significados (semiótica) distintos que são assumidos de acordo com o contexto aos quais são empregados.

A esse respeito, Duval (2003) diz que:

> "...A originalidade da abordagem cognitiva está em procurar inicialmente descrever o funcionamento cognitivo que possibilita a um aluno compreender, efetuar e controlar ele próprio a diversidade dos processos matemáticos que lhes são propostos em situação de ensino...". (p.12)

Desenvolvendo um estudo epistemológico a respeito da palavra semiótica, verificamos que ela é de origem grega e deriva da expressão "semios" que quer dizer “signos”. Dessa derivação podemos, então, dizer que a semiótica nada mais é do que a ciência dos signos e sendo os signos entendidos como linguagem, então, a *semiótica é a ciência de todas as linguagens.*

A semiótica, uma vez entendida como a ciência dos signos, busca em sua essência o estabelecimento da chamada “consciência semio”, ou seja, a consciência da linguagem, onde o sujeito, no momento em que lida com a linguagem, inter preta a mesma e busca compreender o seu significado.

Godino (2003) em seus estudos sobr e a compreensão dos significados dos objetos matemáticos diz que esta compreensão está estreitamente relacionada com a forma de representação dos objetos expressa pelos sujeitos, ou seja, os registros de representação semiótica indicam o significado construído na estrutura cognitiva dos sujeitos a respeito de um objeto estudado.

Um exemplo a respeito das idéias de Godino pode ser observado na construção do conceito de quadrado mostr ado, a seguir, a partir do esquema triangular de compreensão proposto por Ogdem e Richards[3]:

Quadro 5

Esquema triangular de compreensão

A

A = Signo (representante)
B = Conceito (Referencia/Interpretante)
C = Significado (Referente)

B C

Um signo, ou representante, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. Este signo cria na mente de quem o recebe um segundo signo, denominado de Interpretante, que pode ser mais desenvolvido do que o primeiro. A coisa repr esentada recebe o nome de objeto e tem um significado para o sujeito que a representa.

3 Ogdem, C. K. e Richards, J. A. O. Significado de significado. Rio de Janeiro. Zahar, 1972.

No esquema triangular de compreensão acerca do conceito de quadrado, pode-se dizer que existe a idéia r epresentativa de quadrado, ou seja, existe um signo que indica a noção de quadrado que pode ser expressa por meio de um desenho, uma fór mula ou outra forma de repr esentação qualquer. Além da idéia representativa a respeito do quadrado, existe um conceito interno ao sujeito que indica sua compreensão a respeito de quadrado, o qual pode ou não estar em consonância com o conceito formal/científico sobre quadrado.

Sierpinska apud Godino (2003) , diante de suas pesquisas também acerca da compreensão dos significados dos objetos, estabeleceu uma associação entre a idéia de significado e a compreensão dos conceitos, afir mando que "compreender um conceito consiste no ato de captar seu significado" (p.27), onde os significados são atos de compreensão através dos quais se constrói o conhecimento.

No estudo de Sistemas Lineares, por exemplo, diante dos diferentes **tratamentos que podem ser dados ao estudo deste objeto matemático, ou seja, através das diversas formas de registro de representação semiótica empregadas no processo de resolução de um sistema, está inserida a percepção de características próprias do objeto tais como suas pr opriedades que se manifestam na construção gradativa de cada conceito. Os conceitos conduzem a uma tomada de consciência do objeto estudado na medida em que per mitem a apropriação dos seus significados. Assim, ao se aplicar o Método da Substituição no processo de resolução de um sistema, no uso deste tratamento está inserida a lógica que permite compreender as operações realizadas com os coeficientes das equações quando se resolve o sistema aplicando o Método de Escalonamento. A visualização dessa lógica no estudo de sistemas é uma prova de que a apropriação de um conhecimento se dá mediante o estudo de conceitos outros que o compõe, conforme será mostrado mais adiante.**

Ainda falando sobre o significado dos objetos matemáticos, Dummett apud Godino (2003), afirma que: "uma teoria do significado é uma teoria da compreensão, isto é, aquilo que uma teoria do significado tem que dar conta é o que alguém conhece quando conhece sua linguagem, isto é, quando conhece os significados das expressões e or ações da linguagem"; daí, então, se dizer que o estudo dos registros de representações semióticas é de fundamental importância para a compreensão não só da matemática, mas também do mundo de um modo geral.

E mbora o pensamento dos pesquisadores anteriormente abordados tr ate da compreensão dos significados envolvidos dentro do processo de representação dos objetos matemáticos, podemos destacar, nessa discussão, a existência de dois paradoxos: o paradoxo da compreensão em matem ática e o paradoxo da aprendizagem, conforme mostramos a seguir.

Considerando a Teoria dos Registr os de Representação, segundo a qual a compreensão dos objetos acontece mediante a articulação de ao menos dois registros, Duval (2003) chama atenção para a for ma de acesso aos objetos matemáticos estudados, dizendo que isso só é possível por meio de suas representações; todavia, ressalta que usar um registro para r epresentar um objeto não significa estar tratando do objeto em si, embora seja isso que possa parecer. Diante dessas questões, ou seja, mediante a diferenciação entre representação e objeto, Duval (2003) elaborou o que chamou de paradoxo da compr eensão em matemática através do seguinte questionamento: Como podemos não confundir um objeto e a sua representação se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio de sua representação? (p.21)

O paradoxo da compreensão em matemática de Duval causa inquietação porque nos remete à seguinte situação: como podemos não quer er que os alunos confundam os objetos com as r epresentações se só reconhecem os objetos pelas representações?

Foi buscando r esponder as questões acima evidenciadas que Duval (2003) destacou em sua teoria a necessidade de não identificarmos os objetos representados com o conteúdo das representações que o torna acessível, ou seja, as representações correspondem a meios para se chegar ao objeto, e não o objeto em si.

Assim, por exemplo, se alguém deseja evidenciar, junto a um aluno, a compreensão da definição de quadr ado, seja através de uma expressão algébrica do tipo x2 ou mesmo através da r epresentação geométrica de um quadrado de lado

x, possivelmente, só vai conseguir caso este consiga demonstrar articulação entre as várias formas de representações deste objeto matemático. O conhecimento das várias representações não significa apropriar-se do objeto em si, mas, sim, tomar conhecimento dos conteúdos específicos de cada representação que conduzem à tomada de consciência do objeto estudado, ou seja, do seu aprendizado. Quando um aluno não consegue associar a expressão x2 à área de um quadrado de lado x, e

a identifica somente como uma equação do 2º grau incompleta ou mesmo como uma função, significa, segundo a teoria de Duval, que não há o estabelecimento de congr uência entr e as formas de registros apresentadas, ou seja, tem-se a presença de monorr egistros na estrutura cognitiva do aluno o que, de certa forma, prejudica o aprendizado, uma vez que praticamente impossibilita o sujeito de estabelecer relações do que está apr endendo com o que já conhece.

A esse respeito Duval (2003) afirma que:

> “Existe como que um “enclausuramento” de registros que impede o aluno de reconhecer o mesmo objeto matemático em duas de suas representações bem diferentes. Isso limita consideravelmente a capacidade dos alunos de utilizar os conhecimentos já adquiridos e suas possibilidades de adquirir novos conhecimentos matemáticos, fato esse que rapidamente limita sua capacidade de compreensão e aprendizagem”. (p.21)

Além do paradoxo do conhecimento em matemática discutido por Duval (2003), podemos também chamar atenção para a existência do paradoxo da aprendizagem associado à idéia de construção do conhecimento segundo a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. A referida teoria diz que a construção do conhecimento acontece através de conversões de registros, todavia, no processo de ensino e aprendizagem, na maioria das vezes, é apresentado ao aluno um único tratamento e mesmo assim, este consegue aprender, ou seja, consegue construir significado para os objetos matemáticos estudados. Como isso é possível se, segundo a teoria, os alunos aprendem com a conversão de registros? Talvez esse fato seja possível devido à associação que o sujeito faz do único tratamento que lhe é apresentado aos conhecimentos existentes na sua estrutura cognitiva, ou seja, com o conhecimento que adquiriu ao longo de sua vida.

E mbora se evidencie a construção de conhecimento mediante a apresentação de monorregistros, conforme indica o paradoxo da aprendizagem, não é recomendável que se ensine desta for ma, pois isso significa delegar ao aluno a responsabilidade de estabelecer por si mesmo conexões para as quais podem nem sempre estar preparados. Na verdade, isso dificulta o processo de aprendizagem, conforme afirma (Silva, 2004) quando diz que:

> “Uma das principais dificuldades apresentadas por alunos, é a construção de uma visão globalizada, tendo em vista o modo de organização disciplinar que eles vivenciam. São oferecidos fragmentos de conhecimentos e cobra-se deles a difícil tarefa de

> montar um verdadeiro quebra cabeças buscando conexões entre as várias peças. A esse respeito cabe uma pergunta: não seria mais fácil, para o professor, tentar esses encaixes e trabalhar buscando fazer os alunos perceberem as relações? (p.24)

O aprendizado de um objeto matemático está associado ao estabelecimento de relações entre os conteúdos presentes nos conceitos estudados que juntos caracterizam o objeto de estudo; todavia, quando se faz das atividades de ensino atividades essencialmente conceituais apresentando aos alunos um tratamento único e fechado, desconsidera-se o caráter cognitivo de formação do pensamento humano uma vez que se descaracteriza a construção do próprio conhecimento. A apresentação de monorregistros conduz o aluno a um processo de memorização dos conceitos referentes ao objeto de estudo, e não a um processo de tomada de consciência do seu significado.

A respeito da conceituação dos objetos matemáticos é importante lembrar que o ato de conceituar é inerente ao processo de ensino e aprendizagem, uma vez que partimos deles para construir novos conceitos; todavia, deve-se estabelecer articulação entre os conceitos para que os alunos se apropriem dos significados. O conceito, prioristicamente estabelecido, prejudica a aprendizagem já que impossibilita a significação pelo sujeito do objeto; nesse sentido, é importante desenvolvermos o estudo dos objetos matemáticos tendo em vista suas diversas formas de representação, visto que a conseqüência natural desse processo é a compreensão de seu significado necessário à constr ução do conhecimento. Quando estabelecemos um conceito como algo já realizado, podemos estar tirando a opor tunidade do sujeito de significar .

A esse respeito Catto (2000) destaca que:

> "Para uma grande maioria de alunos, o conteúdo fica restrito a um único registro de representação, o que acaba limitando os tratamentos possíveis. Essa falta de reconhecimento do representante[4] e as diferentes formas de representação, levam os alunos a um trabalho desconexo de significação, a ponto de deixarem de estabelecer ligações entre os registros". (p. 30)

Ao se estabelecer uma relação entre a semiótica e o processo de ensino e aprendizagem, podemos dizer que a essência do processo de ensino e aprendizagem está inserida nas idéias subjacentes a esta ciência, pois educar

4 Catto (2000) chama de representante o objeto matemático tratado no estudo desenvolvido.

significa formar sujeitos autônomos capazes de construir seu próprio conhecimento, e isso acontece quando se tem compreensão dos significados envolvidos nos tratamentos dados aos objetos estudados em meio às formas de r egistrar as suas representações.

Do ponto de vista pedagógico temos, na maioria das vezes, que procurar o melhor registro a ser usado para que os alunos possam "aprender" matemática mudando apenas os sistemas de representação, mas mantendo as referências ao objeto estudado. Isso acontece por que os alunos não reconhecem o objeto estudado diante de repr esentações diferentes, conforme afirma Duval (2003): "...o sucesso para a grande maioria dos alunos em matemática ocorre no caso dos monorregistros" (p.21). No estudo de matriz, por exemplo, os alunos não associam este objeto matemático ao estudo de sistemas; quando são efetuadas as operações com os coeficientes das linhas de uma matriz não se enxerga relação com a aplicação do Método da Substituição; o aluno não associa o Método de Escalonamento ao Método da Substituição no processo de resolução de um sistema; etc. Embora sejam tratamentos distintos dados ao estudo de um mesmo objeto matemático, eles são apresentados de maneira única e isolada, sem estabelecer uma relação de conversão.

No ensino de matemática é impor tante destacar que não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa, sem o auxílio de uma r epresentação. Os objetos abstratos tratados dentro da matemática não são diretamente acessíveis à percepção se não por meio de representações, daí ser necessário para a sua apreensão o uso de registr os.

Para Duval, a relação entr e os diferentes tipos de registros de representação implica numa interpretação semiótica dos objetos essencial ao processo de ensino e aprendizagem e é durante a relação estabelecida entre os registros que os significados aparecem originando a construção do conhecimento.

A for ma como se registra um objeto, segundo Duval apud Catto (2000, p. 28), se dá de acordo com as representações mentais5 que se tem a seu respeito, ou seja, os registros são frutos de uma interiorização realizada sobre as formas de

5 Catto (2000) define representações mentais como sendo as imagens ou concepções que os indivíduos têm a respeito de um objeto as quais nem sempre são expressas por meio de registros de representação adequados. Essas representações mentais são inerentes aos sujeitos e acontecem porque cada indivíduo constrói ou mentaliza

representações semióticas. Nesse sentido, os alunos representam a compr eensão que tem a respeito de um objeto de acordo com o significado construído sobre o mesmo, daí ser necessário toda uma atenção diante da forma como se pretende tratar um determinado estudo para não se “repassar” elementos que conduzam a uma formação equivocada do seu significado.

No decorrer das manifestações dos diferentes tipos de registros de representações é desenvolvido um processo de investigação diante da prática exercida sobre o objeto, pois há toda uma lógica empregada no processo de representação que deve ser amplamente discutida e analisada em sala de aula uma vez que essa lógica emana dos significados formados sobre os objetos.

Segundo Duval (1992), para que um registro de representação se converta em um sistema semiótico, o mesmo deve permitir que seja desenvolvida três atividades cognitivas fundamentais ligadas a semioses:

1ª) – Diante de uma situação, faz-se necessário criar uma represent ação **Identificável, a qual deve ser vista como a imagem de um registro, segundo a qual a representação de um objeto deve ser compreendida como uma representação mental e particular do mesmo. Nessa representação identificável do objeto deve-se selecionar um conjunto de caracteres e de dados do conteúdo a ser representado, obedecendo ao uso de regras que assegurem o reconhecimento das representações apresentadas.**

Durante a representação de um objeto é importante perceber que cada forma de registro expressa uma compr eensão ou um ponto de vista em relação ao que está sendo representado.

No estudo de uma mesma parábola, por exemplo, é possível identificar várias formas de r epresentação:

a) $y = x^2 - 4x + 3$

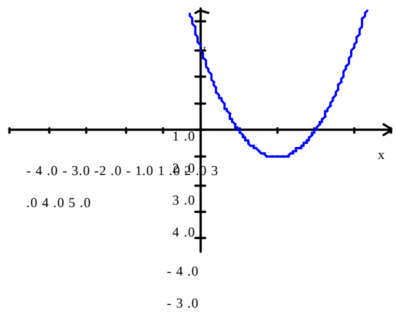
b) $y = -1 + (x - 2)^2$

c) $y = (x - 3)(x - 1)$

---

na sua estrutura cognitiva um modelo de representação para expressar o saber estudado de acordo com a

d) Esboço da parábola no plano cartesiano



Essas representações não oferecem as mesmas possibilidades de interpretação, já que são percebidas de maneiras diferentes, embora tratem de um mesmo objeto matemático. A linguagem textual a r espeito do objeto parábola não oferece a mesma possibilidade de compreensão que pode oferecer uma figura, um diagrama ou mesmo uma equação, daí, então, se dizer que de um ponto de vista cognitivo, uma representação é sempre parcial em relação aquilo que se pretende representar.

Moretti (2002), numa análise acerca do exemplo acima especificado, diz que cada uma dessas representações possui, em sua integralidade, as mesmas informações do objeto matemático referido. No entanto, do ponto de vista cognitivo, um certo tipo de informação sobressai mais em uma do que em outra forma: Na representação (c) do referido exemplo se obser va claramente as raízes; em (b), as coordenadas do ponto da parábola; em (d), a r epresentação em um sistema semiótico diferente dos anteriores mas que de qualquer forma expressa a parábola tratada.

A respeito da pluralidade das representações, Duval (1999) diz que:

> “As representações diferentes de um mesmo objeto, não têm evidentemente o mesmo conteúdo. Cada conteúdo é comandado por um sistema pelo qual a representação foi produzida. Daí a conseqüência de que cada representação não apresenta as mesmas propriedades ou as mesmas características do objeto. Nenhum sistema de representação pode produzir uma representação cujo conteúdo seja completo e adequado ao objeto apresentado” (p.18).

2ª) – Tendo representado um objeto, essa representação necessita de um **tratamento que cor responde a uma transformação dessa r epresentação dentro do próprio r egistro onde ela foi formada. No estudo de oper ações com números racionais, por exemplo, ao se efetuar uma adição, a mesma pode ser representada**

---

compreensão que teve a seu respeito.

de diferentes maneiras, cada uma com sua for ma particular de tratamento. É possível se adicionar dois números racionais de duas ou mais maneiras diferentes da seguinte forma:

a) $0,25 + 0,25 = 0,5$ (representação decimal, envolve um tratamento decimal)

b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ (representação fracionária, envolve um tratamento fracionário)

Ao se tratar um r egistro é necessário se considerar que existem regras de tratamento próprias a cada tipo de registro cuja natureza e forma de tratamento variam de um registro a outro. Diante de um tratamento adequado, dado ao estudo de um objeto, é possível transfor mar a sua for ma de representação permanecendo o conteúdo do objeto matemático tratado. No caso da adição de números racionais mostrada no exemplo acima, os tratamentos dados foram ligados à forma e não ao conteúdo do conhecimento matemático abordado.

A respeito da forma de tratamento e o estudo do conteúdo do objeto matemático tr atado, Duval (1999) diz que não se deve confundir o conteúdo explicito da representação e o objeto que a mesma representa uma vez que este conteúdo depende do sistema que permite produzir a representação e não o objeto.

Dentro do processo de tratamento é importante destacar que cada forma de registro de representação apresenta seu grau par ticular de dificuldade (indica um custo cognitivo diferente), e isso deve ser percebido quando se ensina.

3ª) – Por fim, a ultima atividade cognitiva necessária para que um registro de representação se transforme em um sistema semiótico é a conversão, que nada mais é do que a coordenação existente entre as variadas formas de registro. A conver são acontece quando há a transformação de uma forma de registro em outro conser vando uma parte da totalidade do objeto matemático. É importante que não se confunda a conversão com o tratamento, pois o tratamento se estabelece dentro de registro e a conversão se dá entr e a troca de registros.

Usando o mesmo exemplo de adição de números racionais, pode-se dizer que a conver são acontece quando o sujeito que desenvolve a operação de adição percebe que os diferentes tipos de registros de representação usados na resolução tratam de um mesmo objeto matemático. Diante de tal evidência, o sujeito que lida com o desenvolvimento da operação consegue perceber que 0, 25 (representação decimal de um número racional) corresponde a 14 (representação fracionária de um número racional), tendo condições e elementos suficientes para concluir que 0,25 = 14, considerando a coordenação existente entr e as duas formas de registros representadas.

A esse respeito, Duval (1993) afirma que: “O que garante a apreensão do objeto matemático, a conceitualização, não é a determinação de representações ou várias representações possíveis de um mesmo objeto mas, sim, a coordenação entre esses vários registros de representação” (p. 51).

Somente quando o aluno perpassa pelas três atividades cognitivas descritas é que o objeto matemático se consolida enquanto conhecimento.

Das tr ês atividades cognitivas ligadas à semióses, quase sempre, somente as duas primeiras são usadas quando se ensina, ou seja, dentro do processo de ensino e aprendizagem as representações são usadas como imagens de registros que sofrem tratamentos de acordo com as regras pertencentes a cada tipo de registro, mas que não são levadas a um processo de conversão. Diante de um objeto de estudo alguns alunos até que conseguem representar o mesmo de diversas formas, todavia encontram dificuldades de passar de um registro para o outro, ou seja, os alunos conseguem fazer tratamentos em diferentes registros de representação de um mesmo objeto, porém, são incapazes de fazer as conversões necessárias para a apreensão do mesmo. Esse fato se deve, possivelmente, à forma como os professores trabalham os saberes escolares, pois, na maioria das vezes, os alunos não têm a oportunidade de estudar os assuntos, tendo acesso a tratamentos diferenciados, quanto mais vivenciar o processo de conversão dos diferentes tipos de registros de r epresentação, condição fundamental para a compreensão dos objetos.

Herrero (2004), em seu trabalho sobre Sistemas de Equações Algébricas Lineares, afirma que toda forma de representação é parcialmente cognitiva sobre o que se pretende repr esentar; além do que, de um registro a outro, não são os mesmos aspectos considerados a respeito do objeto estudado, daí, então, dizer que as representações são complementares, e para que se compreenda um objeto, faz-se necessário coordenar os registros de representação que o envolve.

A conversão de um registro a outro algumas vezes é natural e outras não, isso depende da congruência existente entre os diferentes registros, ou seja, depende da possibilidade de um registro de partida se conver ter em um registro de chegada. Dentro do estudo dos Sistemas de Equações Lineares essa passagem acontece de forma natural, conforme demonstra o exemplo a seguir :

A solução do sistema abaixo pode ser desenvolvida pelo emprego de métodos distintos e cada método corresponde a um tipo de tratamento, conforme mostramos a seguir:

Diante do sistema

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+2z=2 \\ x+2y+2z=1 \end{cases}$$

O mesmo pode ser resolvido por, pelo menos, quatro tipos de tratamentos distintos.

1 - Resolução do sistema usando o Método da Substituição:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \quad \text{(I)} \\ x+y+2z=2 \quad \text{(II)} \\ x+2y+2z=1 \quad \text{(III)} \end{cases}$$

(I) $x+y+z=1$

$x=1-y-z$

(II) $x+y+2z=2$

$1-y-z+y+2z=2$

$z=1$

(III) $x+2y+2z=1$

$1-y-z+2y+2z=1$

$y+z=0$

$y=-z=-1$

Reconstruindo o sistema e determinando o valor de x

$x+y+z=1 \quad x=1-y-z$

$z=1 \quad x=1-(-1)-1$

$y=-1 \quad x=1$

Solução do sistema: (1, -1, 1)

Aqui o sistema é resolvido pela manipulação das equações e, portanto, pelo emprego de registros algébricos estudado no ensino fundamental.

2 - Resolução do sistema empregando a Regra de Cramer :

$x\ y\ z$ = 1
$x\ y\ z$ + + = 2 2
$x\ y\ z$
2 2 1
+ + =

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \quad x = -1 \quad X = 1 \quad = = \quad x = \frac{1}{-1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad y = 1 \quad Y = 1 \quad = = - \quad y = \frac{1}{-1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad z = -1 \quad Z = 1 \quad = = \quad z = \frac{1}{-1}$$

Solução do Sistema: (1, -1, 1)

Na resolução 2 apresentada, novos registros são evocados para a resolução do sistema; no caso, o uso da regra de Cramer. Esse é o tratamento mais evocado no ensino médio por meio do estudo da teoria de matrizes e determinantes.

3 - Resolução do sistema por escalonamento:

$x\ y\ z$ = 1
$x\ y\ z$ + + = 2 2
$x\ y\ z$
2 2 1
+ + =

1 1 1 1
1 1 2 2
1 2 2 1

-L1 + L2 e
-L1 + L3

1 1 1 1
0 0 1 1
0 1 1 0

Permutando
L2 e L3

1 1 1 1
0 1 1 0
0 0 1 1

Sistema Escalonado

$x\ y\ z$ = 1
0 0 $x\ y\ z$ + =
0 0 1 $x\ y\ z$
+ + =

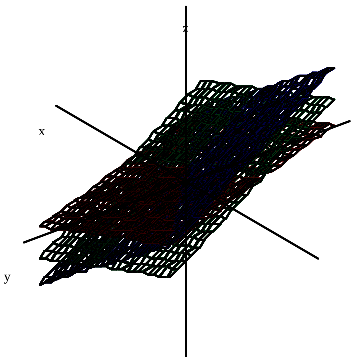
De onde se tem que: 1*x* = , 1*y* = - *e* 1 *z* =

Solução do sistema: (1, -1, 1)
Com o escalonamento, o sistema inicial se transformou no sistema equivalente:

No processo de resolução por escalonamento, o sistema é visto como uma matriz; no entanto, os registros evocados são as linhas da matriz que são manipuladas, operando-as como se fossem matrizes linhas. Em suma, os registros são matriciais, perdendo o sistema o registro algébrico das equações e, não raro, o significado como conjunto de equações.

3 - Resolução gráfica do sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+z=2 \\ x+2y+2z=1 \end{cases}$$



O gráfico azul expressa a equação $x+y+z=1$

O gráfico vermelho expressa a equação $2x+y+z=2$

E o gráfico verde expressa a equação $x+2y+2z=1$

P = (1, -1, 1)

Aqui, cada equação é vista como um ente geométrico que buscamos esboçar de acordo com o sistema apresentado, em que P representa a solução do sistema e os planos em verde, vermelho e azul, correspondem às equações. Os registros evocados, nesse caso, são do tipo gráfico.

Evidentemente, cada registr o constitui uma representação do objeto Sistema de Equações, e se inscrevem em tratamentos teóricos distintos e, portanto com significados distintos para o sujeito. Cada representação propicia olhares e compreensões distintas, sendo mais ou menos conveniente para a análise do objeto matemático Sistema de Equações em jogo. Assim, por exemplo, os registros gráficos apresentam a óbvia limitação para análise e resolução de sistemas que possuam mais de três incógnitas; já o registro matricial, para manipulação das linhas, embora possa ser aplicado sem limitação para o número de incógnitas e numero de equações do sistema, torna opaca a compreensão de tais operações com as linhas para a busca da solução do sistema. Tais limitações, no entanto, não tornam dispensáveis esses registros, pois estes fazem compreender o objeto matemático Sistema de Equações de forma a não confundi-lo com suas representações, como destaca Duval apud Godino (2003):

> "Não pode haver compreensão em matemática se não se distingui um objeto de sua representação. Não se deve confundir nunca os objetos matemáticos (números, funções, retas, sistemas lineares, etc) com suas representações (escritas decimais ou fracionárias, os símbolos, os gráficos, os traçados de figuras, etc), pois um mesmo objeto matemático pode apresentar-se através de representações muito diferentes". (p. 56)

No estudo sobre Sistema de Equações Algébricas Lineares fica claro o objeto matemático tratado e as formas de representação que o mesmo pode apresentar; todavia, no processo de resolução de um Sistema de Equações Algébricas Lineares é importante que os alunos percebam e saibam usar os registros distintos de representação. Não basta oferecer aos estudantes uma bater ia de problemas a serem resolvidos para se ter "segurança" quanto ao aprendizado daquele objeto matemático; embora os alunos consigam resolver os pr oblemas propostos, caso não sejam trabalhadas diferentes formas de registros de representação semiótica, os discentes ainda não estarão conscientes do tratamento dado ao objeto matemático sobre o qual estudam. Somente com o trabalho sobre diferentes formas de registros semióticos, em meio ao desenvolvimento de conversões, é que os alunos passam a desenvolver com consciência o estudo a respeito de Sistemas Lineares.

O emprego de diferentes registros semióticos no estudo de um objeto matemático, mediante o estabelecimento de passagens naturais entre os registros, possibilita ao aluno examinar suas idéias e contr olar os resultados encontrados.

Na Teoria dos Registr os de Representações Semióticas os alunos agem sobre os objetos matemáticos estudados, no caso aqui tratado - os Sistemas de Equações Algébricas Lineares – através de um fazer matemático que leve a apropriação desse saber em meio a um processo de r eflexão efetuado sobre o objeto.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica, em meio ao uso de tratamentos distintos empregados sobre os objetos de estudo buscando o estabelecimento de conversões entre eles, se apresenta como um referencial teórico apropriado para ser utilizado no processo de ensino e aprendizagem, uma vez que possibilita desenvolver a construção do conhecimento. É essa construção do conhecimento desenvolvido através da conversão de registr o que buscamos desenvolver em nosso trabalho de pesquisa, daí termos usado essa teoria como supor te.

CAPÍTULO III

METODOLOGIA DA PESQUISA

A metodologia assumida na pesquisa foi a Engenharia Didática caracterizada por apresentar um esquema experimental desenvolvido em sala de aula que articula investigação e ação didática, cujo objeto de pesquisa é a pr ópria prática educativa.

O desenvolvimento da proposta aconteceu segundo os princípios da Engenharia Didática, acompanhando as fases que compõem a própria metodologia empregada. As referidas fases são: 1 – A análise preliminar, na qual fizemos uma análise epistemológica, didática e cognitiva do objeto matemático em estudo; 2 – A análise a priori, onde descrevemos questões r eferentes ao objeto estudado e prevemos soluções para as mesmas; 3 – A fase de experimentação, onde a aplicamos uma seqüência didática e por último, a fase 4 - A análise a posteriori, onde fizemos o tratamento e a validação das informações obtidas na fase experimental.

A validação ou não da seqüência didática partiu da evidência da conversão dos registros de representação empregados no processo de resolução dos Sistemas de Equações Algébricas Lineares trabalhados. Assim, foi verificado se os alunos realizariam a conversão dos registros algébricos usando o Mét odo da Substituição em regist ros aritméticos através do Escalonamento Matricial no processo de resolução de Sistemas Lineares.

Neste capítulo, além de assumirmos a Engenharia Didática como metodologia empregada na pesquisa, descrevemos o lócus e a dinâmica segundo a qual a seqüência didática foi desenvolvida destacando os sujeitos investigados, os instrumentos de coleta de dados e a forma de análise dos resultados obtidos.

3.1 - A ENGENHARIA DIDÁTICA COMO REFERENCIAL METODOLÓGICO DA PESQUIS A.

A Engenharia Didática é uma das abordagens tratadas na Didática da Matemática que se caracteriza como uma forma particular de organizar os procedimentos metodológicos de pesquisas desenvolvidas no contexto de sala de aula.

Ao se desenvolver uma pesquisa no campo da Educação Matemática, tendo como principio metodológico de pesquisa a Engenharia Didática, articula-se a construção do saber matemático a uma prática reflexiva investigativa diante de uma seqüência didática6 experimental. Artigue (1988) caracteriza a Engenharia Didática como sendo: "...um esquema experimental baseado sobre 'realizações didáticas' em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de uma seqüência de ensino". (p.27)

As praticas educativas desenvolvidas a partir dos princípios da Engenharia Didática devem ser compreendidas como praticas de investigação. À medida que os professores vão trabalhando os saberes escolares, estes são colocados em dúvida e discutidos para que os alunos tenham consciência da complexidade que os envolvem. É através dessa dinâmica que o processo de ensino e aprendizagem vai sendo conduzido, ao mesmo tempo que serve de objeto de investigação para quem o desenvolve.

No trabalho com a Engenharia Didática o professor faz da sua ação pedagógica um objeto de investigação através do qual estabelece uma dependência entre saber teórico e saber prático na busca da construção de conhecimento, conforme afirma Pais (2002):

> "A engenharia didática possibilita uma sistematização metodológica para a realização da pesquisa, levando em consideração as relações de dependência entre teoria e pratica. Esse é um dos argumentos que valoriza sua escolha na conduta de investigação do fenômeno didático, pois sem articulação entre a pesquisa e a ação pedagógica, cada uma destas dimensões tem seu significado reduzido". (p. 99)

A origem desta abordagem metodológica está na preocupação com uma certa "ideologia de inovação" presente no campo educativo, que abre caminho para qualquer tipo de experiência na sala de aula, " deslocada" de fundamentação científica. Ao mesmo tempo, está relacionada com o movimento de valorização do saber prático do professor com a consciência de que as teorias desenvolvidas fora da sala de aula são insuficientes para captar a complexidade do processo de ensino e aprendizagem. Nessa per spectiva, a questão consiste em afirmar a possibilidade de agir de forma racional, com base em conhecimentos matemáticos e didáticos,

6 Chamamos de seqüência didática os procedimentos de ensino usados pelos professores em sala de aula para desenvolver determinado conteúdo escolar.

destacando a impor tância da realização didática na sala de aula como prática de investigação.

Através da Engenharia Didática o professor tem a oportunidade de refletir e avaliar a sua ação educativa, e é diante desse pr ocesso de reflexão que redireciona e resignifica o trabalho que desenvolve. Isso é possível porque através da Engenharia Didática o professor desenvolve um trabalho de investigação da sua própria prática e não existe ninguém melhor que o próprio professor para entender a complexidade dos fatos ocorridos em sala de aula. Na verdade, não existe ninguém melhor que o professor para entender as dúvidas e dificuldades que os alunos expressam ao longo das aulas realizadas, por isso, é ele quem deve buscar entender os motivos que impedem o aprendizado dos alunos, investigando e refletindo as próprias ações educativas desenvolvidas em sala de aula.

O uso da Engenharia Didática enquanto abordagem metodológica no ensino de matemática ou em outra área qualquer do conhecimento, perpassa por quatro fases: Análise preliminar, concepção e análise a prior i, aplicação de uma seqüência didática e, por ultimo, é feito uma análise a posteriori da seqüência aplicada, seguida de uma possível validação.

Na análise preliminar é feito um levantamento sobre fatos que envolvem o objeto matemático estudado. São feitas consider ações a respeito do quadro teórico didático ger al e sobre os conhecimentos didáticos referentes ao assunto em questão; faz-se uma análise epistemológica dos conteúdos contemplados pelo ensino; se analisa como vem sendo desenvolvido atualmente o ensino do assunto tratado e seus efeitos; faz-se uma análise da concepção dos alunos, das dificuldades e obstáculos que apresentam diante do saber apresentado e, também, obser va-se os entraves didáticos pedagógicos que dificultam o processo de ensino e aprendizagem.

A respeito da analise preliminar, Pais (2002) diz que:

> "Para melhor organizar a análise preliminar, é recomendável proceder a uma descrição das principais dimensões que definem o fenômeno a ser estudado e que se relacionam como o sistema de ensino, tais como a epistemologia cognitiva, pedagógica, entre outras. Cada uma dessas dimensões participa na constituição do objeto de estudo" (p. 101).

No estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares, tema proposto para ser desenvolvido em nosso tr abalho, foi desenvolvido a formação de uma epistemologia a partir da construção empírica do saber matemático. Na seqüência didática desenvolvida, os alunos estudar am sistemas desenvolvendo um fazer matemático prático mediante a aplicação do Método da Substituição através do qual perceberam a automação do processo de r esolução e desenvolveram a construção científica do referido objeto de estudo chegando a um tratamento via Escalonamento Matricial. Cada uma das formas de registro de representação empregadas, seja pelo uso do Método da Substituição ou pelo processo de Escalonamento Matricial, tem um significado que, quando relacionados, podem conduzir ao apr endizado, conforme mostraremos mais adiante.

O tratamento dado ao estudo dos Sistemas de Equações Lineares em meio à tr ansposição didática[7] realizada pelos pr ofessores em sala de aula é diferente em cada um dos níveis de ensino. Quando trabalhado no ensino fundamental, o estudo de sistemas é desenvolvido através do uso do Método da Substituição; no ensino médio, recebe um tratamento Matricial via uso da Regra de Cramer, sendo raras as vezes em que o processo de escalonamento é trabalhado uma vez que, quase sempre, é somente na graduação que tal tratamento é evidenciado. Não há uma interligação entre essas formas de tratamento; os diferentes processos de resolução são apr esentados de forma independente como, se houvesse uma forma única e específica de tratamento para cada nível de ensino, sem a mínima possibilidade de relação entre elas.

Desenvolver o estudo de Sistemas Lineares através do tratamento que é dado no ensino fundamental, partindo da aplicação do Método da Substituição, não significa desconsiderar seu caráter cientifico e tão pouco indica baixar o nível de complexidade na abordagem deste assunto; ao contrário, ensinar Sistemas Lineares at ravés do Método da Substituição significa buscar as bases de desenvolvimento desse estudo, aproximando o mesmo do tratamento científico que recebe na graduação sem que haja uma desconexão entre os diferentes registros de representações empregados no estudo desse objeto matemático.

O ensino de Sistemas Lineares é desenvolvido nas escolas, pela maioria dos professores, da mesma forma como é abordado nos livros didático, ou seja, numa seqüência que tem inicio nos estudos de matrizes, perpassando pelos determinantes e por fim chegando aos sistemas como se esse último assunto fosse

7 Chevallard (1991) define transposição didática como sendo um conjunto de transformações adaptativas que sofre um conteúdo a ser ensinado até que ele se transforme em objeto de ensino.

uma conseqüência natural dos dois primeiros. Não há uma preocupação com relação à apr esentação de outros tratamentos e tão pouco, procur a-se desenvolver o estudo de sistema dentro de um processo de conversão entre os registros de representação. Diante de tal tratamento didático, os alunos são, então, conduzidos a um pseudo-aprendizado referente ao estudo de sistemas que embora possa parecer um assunto de simples compreensão, acaba se tornando mais um complexo tema matemático estudado sem que se compreenda o seu significado.

E mbora no meio acadêmico o estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares seja desenvolvido através do pr ocesso de Escalonamento, os cálculos efetuados com os coeficientes das incógnitas para se definir a construção de uma matriz triangular não repr esentam que haja uma tomada de consciência quanto ao processo envolvido nessa forma de abordar o assunto. Os alunos não compreendem o significado das operações efetuadas com os coeficientes das linhas que compõem o sistema e acabam operando com as mesmas de for ma aleatória até que se consiga escalonar o sistema e encontrar a solução desejada. Até mesmo as respostas encontradas para os sistemas não tem seu significado claro para os estudantes, uma vez que a grande maioria não consegue perceber que elas correspondem a valores que derivam de combinações lineares realizadas entre as equações do sistema original cujas soluções satisfazem as equações de qualquer sistema equivalente.

A análise preliminar feita sobre o estudo dos Sistemas de Equações Lineares acenou par a uma série de pontos que necessitam ser discutidos, principalmente, quanto à questão do apr endizado que precisa ser desenvolvido de modo a r elacionar as formas de registro de representação; daí a preocupação deste trabalho de pesquisa em elabor ar e desenvolver uma seqüência didática relacionando dois tratamentos (o Método da Substituição e o Escalonamento Matricial), buscando verificar o processo de conversão entre estes.

A segunda fase da Engenharia Didática consiste em uma análise a priori que se faz sobre o saber em estudo; nela estão presentes duas etapas que são a de descrição do objeto e outra de previsão de melhorias para o seu processo de ensino e aprendizagem.

Na primeira etapa são apontadas problemáticas referentes ao objeto de estudo e, em seguida, são construídas hipóteses que serão verificadas na prática investigativa da seqüência didática a ser elaborada e desenvolvida. A elaboração das hipóteses se constitui elemento importante no trabalho com a Engenhar ia Didática, pois são elas que serão comparadas com os resultados finais da seqüência didática para verificar a validação ou não da mesma.

Na primeira fase da engenharia já foram apontadas algumas questões a respeito do estudo dos Sistemas de Equações Algébricas Lineares, entr e as quais destacamos a forma como esse conhecimento vem sendo tratado nas escolas. A linearidade matemática sem o uso de conexões entre os assuntos que envolvem o estudo de sistemas pouco tem levado os alunos ao seu aprendizado, por isso, o emprego de outros tratamentos é necessário, bem como a relação entre eles. O ensino de Sistemas Lineares através do Método da Substituição, tal como o mesmo é trabalhado no ensino fundamental, se apresenta como uma boa abordagem metodológica a ser desenvolvida em sala de aula uma vez que através dela é possível estabelecer relações com outras formas de registros de representação. Diante dessa per cepção, estabelecemos como hipótese para o trabalho de pesquisa aqui apresentado assumir que o aprendizado do Método do Escalonamento se dá mediante a conversão de registro por meio do Mét odo da Substituição. É isso que buscar emos mostrar na proposta apresentada.

A terceira fase da Engenharia Didática trata da aplicação da seqüência didática onde entra em prática o saber didático do professor e todo o seu arcabouço teórico. Nessa fase, a seqüência didática proposta deverá ser desenvolvida através de uma abor dagem metodológica que privilegie a criticidade e a reflexão, numa perspectiva de construção de um saber consciente e indagador em meio a uma praxiologia desenvolvida sobre o objeto matemático em estudo.

A elaboração de uma seqüência didática exige toda uma preparação, conforme mostra Pais (2002):

> “Uma seqüência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática. Essas aulas são também denominadas sessões, tendo em vista o seu caráter especifico para a pesquisa. Em outros termos, não são aulas no sentido da rotina da sala de aula. Tal como acontece na execução de todo projeto, é preciso estar atento ao maior número possível de informações que podem contribuir no desvelamento do fenômeno investigatório” (p.102).

A respeito da fase experimental da Engenharia Didática, Artigue apud Machado (1999) diz que antes da realização da seqüência didática, faz-se necessário deixar claro os seguintes pontos:

- Explicitar os objetivos e condições de r ealização da pesquisa: No caso da pesquisa desenvolvida neste trabalho, o objetivo da mesma foi verificar se os alunos conseguem desenvolver a conversão do Método da Substituição no Método da Eliminação Gaussiana, mais conhecido por Escalonamento Matricial. As condições de realização da mesma estão descritas no sub-item 3.2 a seguir evidenciado;

- Estabelecer um contrato didático: Segundo Brousseau (1986), o contrato didático consiste num "conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos dos alunos que são esperados pelo professor. É o conjunto de regras que determinam uma pequena par te explicitamente, mas, sobretudo, implicitamente, o que cada parceiro da relação didática deverá gerir e aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro".

Na pesquisa realizada ficou estabelecido que seria apresentado aos alunos um conjunto de questões envolvendo o estudo de sistemas, os quais deveriam ser resolvidas aplicando o Método da Substituição até que os alunos se dessem conta da automação do processo de resolução. Paralelamente a isso, seriam realizadas reflexões diante das respostas apresentadas buscando a compreensão do objeto matemático estudado.

Foi acordado que não haveria aula expositiva diretamente e que no decorrer da resolução das questões apresentadas, as mesmas iriam sendo socializadas estando corretas ou não, sem que houvesse desrespeito diante dos resultados apresentados.

O importante er a que os alunos demonstrassem a compreensão que estavam tendo a respeito do estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares mediante a aplicação do Método da Substituição, e partissem dessa compreensão par a construção do seu própr io conhecimento em meio a um fazer matemático reflexivo;

- Aplicação dos instr umentos de coleta de dados: No caso da pesquisa realizada os instrumentos usados foram as próprias questões de Sistemas Lineares apresentadas aos alunos em sala de aula e que foram resolvidas por eles;

- Registrar as observações feitas durante a experimentação: Foram registradas as soluções dos alunos nas folhas de papel que continham as questões sobre sistemas e, também, foram gravadas algumas conver sas a respeito das reflexões realizadas durante o processo de resolução dos sistemas.

A terceira fase da Engenharia Didática, que corresponde à fase experimental da seqüência didática, está apresentada no capítulo V desta dissertação, onde a variável de observação da proposta esteve centrada em verif icar a conversão dos registros de representação.

A última fase de análise a posteriori e de validação da seqüência didática foi apoiada sobre todos os dados colhidos durante a experimentação constante das obser vações realizadas durante cada sessão de ensino, bem como das produções dos alunos no processo de resolução dos sistemas. Nessa fase é verificado se o aprendizado foi consolidado determinando, assim, a validação, ou não, da seqüência didática empregada.

Na Engenharia Didática a fase de validação da seqüência didática é feita durante todo o processo de desenvolvimento da proposta em meio a uma constante confrontação entre os dados obtidos na análise a priori e na análise a posteriori, onde é observado se as hipóteses levantadas no inicio da pesquisa foram confirmadas.

Considerando a seqüência didática a ser descrita e analisada no capítulo V, a validação ou não da mesma foi obser vada a partir da conversão dos registros de representação semiótica em meio ao emprego do Método da Substituição que, possivelmente, dever á ser convertido no Método de Escalonamento no processo de resolução de Sistemas de Equações Algébricas Lineares.

Diante do conhecimento das fases que delineiam a Engenharia Didática, é possível perceber o novo horizonte que esta abor dagem metodológica pode dar as práticas educativas desenvolvidas em sala de aula tendo em vista a possibilidade de considerar a própria prática de ensino como objeto de investigação sujeita a mudanças na medida em que são observados os resultados alcançados.

O novo horizonte acima referido pode ser confirmado pelas palavras de Pais (2002) quando diz que:

> "Trata-se de uma sistematização da pesquisa de maneira que ciência e técnica são mantidas articuladas, estabelecendo melhores condições de fluxo entre as fontes de influencia descritas pela transposição didática. Nesse caso, o saber acadêmico é constituído pelos resultados da pesquisa, enquanto que suas constatações práticas estão relacionadas com o saber a ser ensinado. A estrutura proposta pela engenharia didática mantém um elo de aplicação entre esses dois saberes, aproximando a academia das práticas escolares". (p.104)

Portanto, a Engenharia Didática constitui-se um referencial metodológico importante e viável para desenvolver pesquisas que tratem do processo de ensino e aprendizagem uma vez que permite compreender os efeitos causados pelas práticas docentes realizadas em sala de aula.

3.2 – CONHECENDO O LÓCUS E A DINÂMICA DE DESENVOLVIMENTO DA SEQUENCIA DIDÁTICA PROPOSTA NA PESQUISA

A seqüência didática proposta na pesquisa foi desenvolvida com 24 alunos que estavam cur sando a 2ª etapa do ensino médio da EJA em uma escola da rede pública estadual de ensino, do município de Belém, no segundo semestre de 2006 ao longo de três meses de trabalho.

A escolha de uma turma da EJA para desenvolver a proposta se deu em função de dois motivos:

1 – Era uma turma com a qual tínhamos contato.

2 – Era uma turma que ainda não havia estudado Sistemas de Equações Algébricas Lineares e que poderia estar aprendendo o assunto através da conversão de registro de representação.

Mas quem são os alunos da EJA?

Antes de especificar quem são os alunos da EJA, é importante e necessário ter clareza de que não são quaisquer jovens e adultos que participam dessa modalidade de ensino. Em sua grande maioria são trabalhadores, pobres, negros, desempregados, subempregados, oprimidos e excluídos que retornam aos bancos escolares em busca de uma formação que os ajudem a superar as dificuldades financeiras ou mesmo sociais, nas quais geralmente se encontram.

Hage (2004) caracteriza os alunos da EJA da seguinte forma:

> “São jovens e adultos que na idade própria tiveram negado o direito de realizar o seu processo de escolarização com sucesso e que depois de um longo tempo sem contato com os estudos voltam a estudar mesmo diante das dificuldades que serão enfrentadas ao longo do processo de ensino e aprendizagem. (p.3)

A heterogeneidade que permeia a constituição dos alunos da EJA desafia os educadores a elaborarem propostas de intervenção diferenciadas, face às distintas realidades e especificidades dos sujeitos, o que acaba por justificar , mais ainda, a escolha da EJA para a realização da seqüência didática desenvolvida nesse trabalho de pesquisa.

Durante o desenvolvimento da seqüência didática, houve a interrupção das atividades durante vários momentos devido a problemas de reformas estrutur ais realizadas na escola e, também, em decorrência do período das eleições Federais e Estaduais que acontecer am naquele mesmo instante.

Dentro da pr ogramação estava pr evisto a proposta de ser desenvolvida no máximo em 20 aulas, mas como isso não foi possível dentro do espaço de tempo predisposto pela escola, e em função dos problemas vivenciados, foi necessário ser providenciado um outro momento e espaço para a realização das atividades.

Como os alunos estavam cientes do que estava sendo desenvolvido com eles, ou seja, sabiam que estavam participando de uma pesquisa para a qual estavam motivados a participar, devido à maneira como o trabalho vinha sendo conduzido, partindo de um processo dialógico e reflexivo frente ao saber estudado, conforme o especificado no contrato didático, ficou fácil solucionar a questão da falta de tempo e espaço necessários para desenvolver as atividades. Diante do problema, os alunos aceitaram a proposta de estudar aos sábados o que permitiu desenvolver, com uma certa tr anqüilidade, a pesquisa.

No primeiro momento de desenvolvimento da pesquisa foi aplicada uma série de problemas do 1º grau com uma e até duas incógnitas para verificar o conhecimento que os alunos tinham quanto à forma de resolver sistema empregando o Método da Substituição, conforme lhes havia sido ensinado na sexta série do ensino fundamental. Todos os problemas foram r esolvidos em grupos constituídos de quatro ou cinco pessoas, os quais foram formados de maneira espontânea pelos próprios alunos. O propósito de se trabalhar em grupo foi o de conduzir os alunos a desenvolverem um aprendizado colaborativo8 através do qual teriam a oportunidade de desenvolver e compartilhar um objetivo comum; socializar o entendimento e o processo de resolução dos problemas apresentados, bem como tentariam resgatar juntos os conhecimentos prévios existentes a respeito da resolução de Sistema de Equações Algébricas Lineares, conforme lhes havia sido ensinado na sexta série do ensino fundamental.

Mesmo nos grupos, alguns alunos ainda se sentiam inibidos em participar do processo de resolução dos sistemas apresentados. Alguns fatores que justificam as limitações observadas podem estar ligados a:

1 – Dificuldade de comunicação em matemática;
2 – Dificuldade com a leitura e interpr etação dos problemas matemáticos apresentados;
3 – Não domínio das quatro operações;
5 – Alguns alunos não lembravam como se r esolvia sistema aplicando o Método da Substituição;
4 – Medo de errar, possível efeito da relação de poder existente em sala de aula; etc.

No decorrer da realização da seqüência didática, os limites apresentados pelos alunos foram sendo trabalhados diante de reflexões realizadas sobr e as próprias respostas apresentadas. Assim, gr adativamente, os problemas envolvendo sistemas foram sendo estudados partindo, inicialmente, do estudo de equações, perpassando pela constr ução de sistemas com duas incógnitas até chegar aos sistemas mais complexos, conforme será mostrado no capítulo V.

8 Aprendizagem cooperativa ou colaborativa é um process o no qual os membros do grupo ajudam e confiam uns nos outros para atingir um objetivo acordado. O termo “aprendizagem colaborativa” deve ser compreendido aqui com o sendo fruto do trabalho cooperativo entendido como o desempenho de uma tarefa com um único objetivo

A resolução dos sistemas foi tr abalhada através da aplicação do Método da Substituição tendo, como justificativa para o uso intenso do referido método fazer com que os alunos automatizassem o seu pr ocesso para que pudessem, a partir dele, chegar ao Método de Escalonamento, ou seja, queríamos que os alunos realizassem a conversão de registros de representação. A esse respeito, Duval (2003) diz que:

> "Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado pela idéia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido". (p.20)

Desde o primeiro momento, a ação educativa desenvolvida em sala de aula vinha sendo objeto de investigação, pois à medida que os alunos iam estudando as Equações e os Sistemas de Equações Algébricas Lineares aplicando o Método da Substituição tinham a oportunidade de manifestar a compreensão a respeito do objeto estudado, bem como apresentar as dúvidas inerentes ao mesmo, as quais passavam por um processo de análise, discussão e reflexão até que os alunos se dessem conta da sua compreensão, ou seja, até que apreendessem os significados do que estava sendo estudado.

Assim que os alunos manifestaram "segurança" quanto ao uso do Método da Substituição no processo de resolução dos sistemas, ou seja, quando demonstraram ter automat izado o processo de resolução, o referido método foi aplicado no estudo de sistemas genéricos para que os alunos percebessem uma

regularidade matemática existente entre os coeficientes das incógnitas que compunham os sistemas apresentados. A percepção dessas regularidades possibilitaria desenvolver a solução de sistemas atr avés de um outro tratamento matemático, no caso, o Método do Escalonamento, caracterizando a conversão de registro de representação.

Foi seguindo essa trajetória que nossa pesquisa foi desenvolvida tendo como referencial para as análises realizadas os estudos da Teoria de Registros de Representações Semióticas de Raimund Duval.

---

em comum onde todo conhecimento é construído em conjunto e negociado, havendo um fluxo contínuo de comunicação. Ver Espinosa (2003).

CAPÍTULO IV

O MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO E O MÉTODO DO ESCALONAMENTO NA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES ALGÉB RICAS LINEARES

Resolver um Sistema de Equações Algébricas Lineares significa envidar esforços sistemáticos para encontrar uma solução do sistema. Entre os esforços sistematizados, que denominamos de métodos, destacamos dois, através dos quais estabelecemos conexões buscando a conversões de registr os de representação. O primeiro método evidenciado, que é objeto do ensino fundamental, foi o Método da Substituição e o segundo, objeto de estudo no ensino médio, foi o Método do Escalonamento. A percepção da conexão existente entre os r eferidos métodos se constitui parcela importante para consecução de nosso objetivo, daí tratarmos dos mesmos neste capítulo.

4.1 – O MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO.

O Método da Substituição, ou Método da Substituição e Eliminação, consiste em escolher e escrever uma incógnita em função das outras a partir de uma equação fixada e substituir nas demais equações, com o propósito de eliminá-la nessas equações, obtendo- se, assim, um novo sistema mais simples de resolução que o sistema anterior. Caso a primeira substituição de uma incógnita nas demais equações não tenha sido suficiente para encontrar a solução do sistema, continua-se o processo escolhendo e fixando nova incógnita e equação para substituição, e conseqüente eliminação da incógnita nas demais equações até que a solução seja alcançada.

Tal procedimento, como o descrito anteriormente, é facilmente sistematizado e permite a análise e resolução de sistemas com um número qualquer de equações e de variáveis por meio de manipulações algébricas elementares, conforme mostramos por meio de exemplos a seguir.

Considerando o sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 & (1) \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 & (2) \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 4 & (3) \end{cases}$$

Fixando a primeira equação e escrevendo essa equação evidenciando a incógnita x_1 par a eliminar nas demais equações, segue que:

$$x_1 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3$$

Substituindo x_1 nas equações 2 e 3 temos:

$$2\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3\right) - 3x_2 + x_3 = 4 \quad \Rightarrow \quad -\frac{13}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 = \frac{2}{3}$$

e

$$\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3\right) - 4x_2 + 2x_3 = 4 \quad \Rightarrow \quad -\frac{14}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 = \frac{7}{3}$$

Dessa primeira substituição e eliminação da incógnita x_1 no sistema, resulta o novo sistema, que é mais simples que o sistema original;

Se $x_1 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3$, então

$$\begin{cases} -\frac{13}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 = \frac{2}{3} \\ -\frac{14}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Observamos nas duas últimas equações do sistema acima que a incógnita x_1 não aparece por ter sido eliminada com o processo de substituição. No entanto, a solução ainda não se mostra evidente, o que nos exige selecionar e fixar nova incógnita e equação para repetir o processo tomando as novas equações reduzidas encontradas, ou seja, a segunda e ter ceira equações. Assim, fixando a segunda equação no novo sistema e evidenciando nessa equação a segunda incógnita, encontramos a expressão abaixo.

$$x_2 = -\frac{2}{13} + \frac{5}{13}x_3$$

A expressão definida para x_2, ao ser substituída na terceira equação, resulta em:

$$-\frac{14}{3}-\frac{2}{13}-\frac{5}{13}x_3+\frac{3}{7}x_3=\frac{3}{7} \quad \frac{28}{39}-\frac{70}{39}x_3+\frac{39}{39}x_3+\frac{3}{7} \quad \frac{7}{3} \quad \frac{21}{39}x_3=\frac{63}{39}$$

Dessa nova substituição se evidencia o novo sistema ainda mais simples a seguir.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \\ x_2 = \frac{2}{13}x_3 + \frac{5}{13} \\ \frac{21}{39}x_3 = \frac{63}{39} \end{cases}$$

Como pode ser observado, a solução do sistema é evidenciada, a começar pela terceira equação que explicita o valor da terceira incógnita $x_3 = 3$. Substituindo esse valor na segunda equação encontramos o valor da segunda incógnita.

$$x_2 = -\frac{2}{13}x_3+\frac{5}{13} = -\frac{2}{13}\times 3+\frac{5}{13} \quad 1 \quad x_2 =$$

Com esses valores encontrados, substituímos na primeira equação para encontrar a primeira incógnita.

$$x_1 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}\times 2 + \frac{1}{3}\times 3 \quad 1\ 3 \quad x_1 =$$

Com isto, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$ é a solução procurada, ou seja, esse resultado corresponde a valores que satisfazem as equações do sistema.

De modo geral, o Método da Substituição transforma um sistema de m equações e n variáveis, a partir de uma série de substituições convenientes de incógnitas nas equações posteriores, com o propósito de obter um sistema que evidencie a solução, e isso é obtido pelo arranjo das fixações das equações e substituições de incógnitas de modo conveniente no sentido de se obter um sistema mais triangular possível.

A seqüência de sistemas encontrada nesse processo tem como propriedade possuir uma mesma solução, pois as substituições assumem que as incógnitas substituídas venham a satisfazer, garantida a existência de solução, todas as equações dos sistemas gerados por esse processo. De fato, se denotarmos o sistema na forma abaixo.

3x 2x 5x 3x 2x 5x E 0 = =

2x 3x 4x 2x 3x 4x E 0 - = =

x x 4x 2x 4x 4 2 4 0 E = 0

Podemos, então, escrever o novo sistema como segue. Evidenciando a primeira incógnita na primeira equação.

x x x x x x E x = - = (5 2 1 1 / 3 3 3 3)

Substituindo a primeira incógnita na segunda equação.

2 3 4 0 2 x x x - + - + - + - = (5 2 1 / 3 3 3) ... (5 2 1 6 / 3 3 3 3) x x x x x x 2 3 4 0

(13 5 2 2 0 / 3 3 3 3) x x E E - + =

e substituindo a primeira incógnita na terceira equação.

(5 2 1 / 3 3 3) x x x x x x 4 2 4 0 - + - = ... (5 2 1 3 / 3 3 3 3) 4 2 4 0

(14 7 7 1 0 / 3 3 3 3) x x E E - + =

para obter:

$$E_1' = E_1 \qquad x_1 = -\frac{1}{30}E_1$$
$$E_2' = E_2 - \frac{200}{30}E_1$$
$$E_3' = E_3 - \frac{10}{3}E_1$$

ou de forma geral

$$E_1 = 0$$
$$E_k' = E_k - a_k E_1 = 0,$$

em que a_k *denota a razão entre os coeficiente da primeira incógnita* presentes na equação k e na primeira equação, respectivamente.

Assim, se $E_1 = E_2 = E_3 = 0 \Rightarrow E_k' = E_k - a_k E_1 = 0$, ou seja, a solução do sistema anterior é solução do novo sistema e reciprocamente a solução do novo sistema é solução do sistema anterior, pois se $E_1' = E_1 = 0$, $E_k = E_k' + a_k E_1 = 0$, $k = 2, 3$.

De modo similar, podemos mostrar que o segundo sistema obtido tem a mesma solução do primeiro e, portanto, a mesma solução do sistema original; reciprocamente, a solução do sistema original é solução do primeiro e, portanto, solução do segundo.

Das expressões acima, podemos observar que esse raciocínio pode ser facilmente estendido para mostrar a equivalência dos sistemas obtidos pelo Método da Substituição quando aplicado a sistemas com um número qualquer de equações e incógnitas, conforme mostraremos no capítulo V.

4.2 – O MÉTODO DE ESCALONAMENTO.

A intenção do Método de Escalonamento consiste em transformar o sistema inicial em outro equivalente, isto é, com o mesmo conjunto de soluções, com a forma mais triangular possível, de forma a permitir facilmente a análise e evidenciar a solução procurada quando existir. Como se observa, a intenção é a mesma do Método da Substituição.

Para se obter a for ma mais triangular possível no Método de Escalonamento, r ecorre-se às operações elementares com as equações, que na forma descrita por Steinbr uch (1987) podem ser postas como:

1 – Permutação entre duas equações;

- Tomando como exemplo o sistema considerado anteriormente, ou seja:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 & E_1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 & E_2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2 = 0 & E_3 \end{cases}$$

É possível permutar a primeira e terceira equações, ou seja, E_1 e E_3, e r eescrever o sistema:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

Aqui destacamos que permutar duas equações não modifica a solução do sistema, visto que permanece o mesmo conjunto de equações e, portanto, tais sistemas são equivalentes.

2 – Multiplicação de uma equação por um número r eal diferente de zero;

- Quando se deseja multiplicar a primeira equação, por exemplo, por $\frac{1}{3}$, se escreverá assim:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{5}{3}x_3 = 0 & \frac{1}{3}E_1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 0 & E_2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2 = 0 & E_3 \end{cases}$$

Observamos que o sistema obtido pela multiplicação de um número real não nulo em uma das equações do sistema anterior tem o mesmo conjunto solução já que $E'_k = aE_k = 0 \Leftrightarrow E_k = 0$. Novamente a equivalência dos sistemas envolvidos é verificada.

3 – Substituição de uma equação por sua soma com outra equação previamente multiplicada por um número real diferente de zero.

- Quando se deseja substituir a segunda equação, por exemplo, pela soma dela com a 1ª equação, previamente multiplicada por $-\frac{2}{3}$, se escreverá:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad E_2 = E_2 - \frac{2}{3}E_1 \quad \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ \ldots = 0 \\ \ldots \end{cases}$$

A terceira operação elementar definida por $E_2 = E_1 - \frac{2}{3}E_1$, como pode ser notada, pode ser vista como a substituição da primeira variável na segunda operação já evidenciada para mostrar que o Método da Substituição gera um sistema equivalente e, portanto, tal operação elementar constitui o próprio Método da Substituição em que se opera somente com os coeficientes das incógnitas.

Todos os sistemas acima apresentados nos exemplos são equivalentes e, portanto, apresentam a mesma solução. Assim, é possível pensarmos uma seqüência de operações elementares com as equações de modo a obter um sistema mais triangular possível, buscando evidenciar uma solução, caso exista.

É necessário, entretanto, cuidados quanto ao uso das operações elementares para eliminar uma incógnita, pois sua inadequação pode levar a catástrofe significativa na resolução de um sistema como exemplificamos a seguir.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} E_2 = E_2 - E_1 \\ E_3 = E_3 - E_1 \end{matrix} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ \ldots \end{cases}$$

A terceira operação elementar citada por Steinbruch (1987) quando aplicada simultaneamente envolvendo as mesmas equações, embora elimine a primeira variável na segunda e ter ceira equações, produz um sistema obviamente não equivalente ao sistema original.

Situações como a descrita acima têm contribuído para a soma de insucessos dos alunos mediante a resolução de sistemas pelo Método de Escalonamento, evidenciando, então, que o domínio do uso das operações elementares não é suficiente para a resolução do sistema. Há a necessidade de se estabelecer critério que assegure a obtenção de sistemas equivalentes e isso consiste em não realizar, num mesmo sistema, oper ações elementares simultaneamente que envolvam o mesmo par de equações. A não observância desse critério pode levar o método a se reduzir à simples tentativas de tornar o sistema mais triangular possível, como, não r aro, observamos em sala de aula nas ações de nossos alunos.

Acreditamos que o abandono das incógnitas nesse processo constitui uma perda do significado da manipulação algébrica nas equações do sistema, já que se oper a somente com os coeficientes delas, e que é agravado por regras operatórias entre as equações estabelecidas a priori, sem significado direto com a ação algébrica de resolução do sistema, mas de torná-lo mais triangular possível e que podem levar a insucessos como o acima descrito.

O processo abstrai as incógnitas, desvinculando a resolução do sistema de seu significado primeiro que é o de encontr ar essas incógnitas. Assim, o Método do Escalonamento é formulado por meio da manipulação dos coeficientes das incógnitas usando as operações elementares das linhas de uma matriz que representa o sistema. A matriz é uma abstração do sistema, visto que tal representação desvincula o sistema de qualquer situação contextual que por ventura esteja associada.

Para mostrar isso, consideramos o sistema do exemplo adotado no Método de Escalonamento e sua representação matricial abaixo.

3 2 x 5 x 3 x = 2 -1 5

2 3 x 4 x 2 x 1 1 4

x x - x 4 = 2 4 1 4 -2 4

O método é então empregado usando as operações elementares com as linhas, na forma posta por Steinbruch (1987), por exemplo, de modo a tornar o numero de zeros das linhas da matriz, tomados da esquerda para a direita e em posições sucessivas nas linhas, maior ou igual ao numero de zeros da linha anterior disposto como descrito. Em outras palavras, tornar a matriz mais triangular possível como mostramos a seguir .

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} E_2 - \frac{2}{3}E_1 \\ E_3 - \frac{1}{3}E_1 \end{array}$$

a terceira operação elementar definidas aqui pelas relações $E_2 - \frac{2}{3}E_1$ e $E_3 - \frac{1}{3}E_1$ foi aplicada simultaneamente, mas não envolvendo o mesmo par de linhas. A primeira linha é fixada e combinada com as demais de modo a tornar nulo o primeiro coeficiente das demais linhas, assegurando que cada uma dessas operações, quando executadas isoladamente, levam à mesma matriz que seria obtida pela aplicação consecutiva das operações indicadas e, portanto, preservando a equivalência do sistema or iginal com o novo sistema associado dessa matr iz. A matriz resultante após as operações indicadas é mostrada a seguir.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{14}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$ cujo sistema associado é $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 0x_1 - \frac{13}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 = \frac{2}{3} \\ 0x_1 + \frac{14}{3}x_2 - \frac{7}{3}x_3 = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Continuando, repetimos o processo a partir da segunda linha e segunda coluna, agindo como se não existisse a primeira linha e a primeira coluna. Assim, em relação à matriz posta a operação $E_3 - \frac{14}{13}E_1$ busca tornar nulo o segundo elemento da linha abaixo da segunda linha.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \quad E_3 - \frac{14}{13}E_1$$

que resulta

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{21}{39} & \frac{63}{39} \end{bmatrix}$$

Continuando o processo, agimos como se não existissem as duas primeiras linhas e duas primeiras colunas, ou seja, a partir da ter ceira linha e terceira coluna. Como não há linhas abaixo da terceira linha, o processo é dado por encerrado e escreve-se o sistema que pode estar associado a essa matriz, a seguir :

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 0x_1 - \frac{13}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 = \frac{2}{3} \\ 0x_1 + 0x_2 + \frac{21}{39}x_3 = \frac{63}{39} \end{cases}$$

O método acima exposto pode ser sistematizado como segue:

1- Se o primeiro coeficiente da primeira linha for nulo, então, previamente, a partir da primeira linha E_1, tomada como linha de referencia, escolha a linha E_s que tem na primeira coluna, tomada como coluna de referência, coeficiente diferente de zero e permutamos com a primeira, assumindo que a nova primeira linha é a linha s E e que a nova linha s E é a antiga linha 1 E.

2- Substituímos cada linha k E, abaixo da linha 1 E, por nova linha $E'_k = E_k - a_k E_1$, em que a_k denota a razão entre o primeiro coeficiente presente na linha k e na primeira linha, respectivamente.

3- Repetimos esse procedimento após cada etapa, eliminando as linhas e colunas já referenciadas nas etapas anteriores até que não haja mais linhas abaixo da nova linha de referência.

Tal procedimento pode ser mecanizado, ou melhor, automatizado e tem permitido encontrar a solução de sistemas lineares por meio de computadores desde o ultimo século, mas tal aplicação por computadores ou por meio do fazer manual do lápis e papel é desprovido do significado das equações pela abstr ação das matrizes e operações elementares com suas linhas que surgem como num passe de mágica, previamente definidas.

No entanto, como podemos observar, as operações elementares podem ser vistas claramente como decorrentes da sistematização do Método de Substituição como fica evidenciado quando buscamos justificar a equivalência dos sistemas obtidos pelo Método da Substituição e o desenvolvimento do Método do Escalonamento.

De fato, as operações de permutação correspondem à permutação, quando conveniente, de duas equações. O produto de um número real não nulo por uma linha da matriz ganha significado quando associado ao de multiplicar uma equação por um número real não nulo. Não teria significado multiplicar uma equação por zero, pois eliminaria tal equação do sistema. Essas operações se apresentam, ora explicitamente e ora implicitamente, no Método das Substituições. A terceira oper ação elementar corresponde à substituição de uma incógnita em outra equação, como mostramos a seguir .

Na k-ésima etapa do Método da Substituição, iremos substituir a k-ésima incógnita nas equações que estão abaixo dela. Para efetuarmos essa substituição, alertamos que a k-ésima equação do sistema equivalente ao sistema or iginal é da forma a seguir.

$0 \ldots 0 \; a_{kk}x_k + a_{k,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{kn}x_n = b_k$

e para a i-ésima equacao sera da forma

$0 \ldots 0 \; a_{ik}x_k + a_{i,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{in}x_n = b_i$

assim, substituir x na i-ésima equacao é

() 4.56 () /F4 15.285 f 1 0 0 1 63.85 626.36 616.77 µ 15.285 S 0 G /F4 15.285 f 1 0 0 1 341.04 616.77 µ 15.285 ()

() 0 0 0 G 290.4 568.53 µ 305.52 568.53 S 0 G /F4 15.285 f 1 0 0 1 462 564.69 µ 15.285 ()

foi isso que desenvolvemos na seqüência didática realizada neste tr abalho de pesquisa, cientes de que o processo de automação dos tratamentos favorece o processo de conversão dos registros, conforme afir ma Duval (2003): “Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado pela idéia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido” (p.20).

Diante dessa percepção, trabalhamos com os alunos a mecanização do uso do Método da Substituição para, em seguida, verificar se eles conseguiriam estabelecer uma conexão com o Método do Escalonamento, conforme descrevemos no capítulo a seguir.

CAPÍTULO V

DESENVOLVIMENTO E ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA: o Método da Substituição e o processo de conversão de registros de representações semióticas.

O Método da Substituição e Eliminação constitui o eixo da nossa seqüência didática com o propósito de levar os alunos a tomarem consciência do processo de resolução de um sistema de tal forma que consigam desenvolvê-lo sistematizando-o e operando somente com os coeficientes das incógnitas, ou variáveis, como ocorre no processo de resolução através do Método de Escalonamento.

Nesse sentido, inicialmente, buscamos evocar a conversão de registro da língua natural para o registro matemático algébrico em meio a resolução de sistemas contextualizados envolvendo situações da vida real, a fim de despertar a atenção dos alunos para a presença, mesmo que implícita, do nosso objeto de estudo nas formulações de diferentes situações problemas.

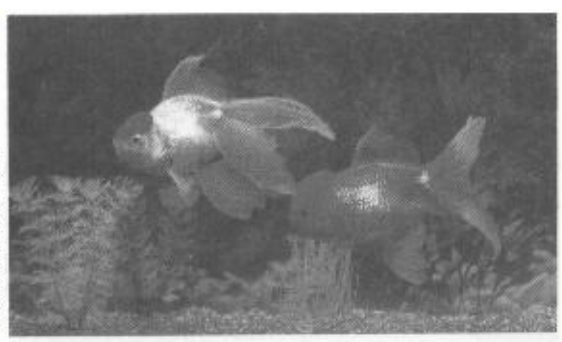
Assim, começamos enfrentando várias situações-problema envolvendo a resolução de equações lineares entre as quais destacamos:

Situação Problema 1

- Veja o preço de cada peixe para o aquário:

- Veja o preço de cada peixe para o aquário:

Espécie A: Cada peixe custa x reais.



Espécie B: Cada grupo de 5 peixes custa $(x + 3)$ reais.

- Se eu quiser montar um aquário com 5 peixes da espécie A e 10 peixes da espécie B, vou gastar R$ 48,00. Qual é o preço de cada peixe?

(Fonte: NAME, Miguel. Tempo de Matemática. 6ª série, 1996, p.89)

Uma for mulação esperada para a situação problema apresentada anteriormente seria:

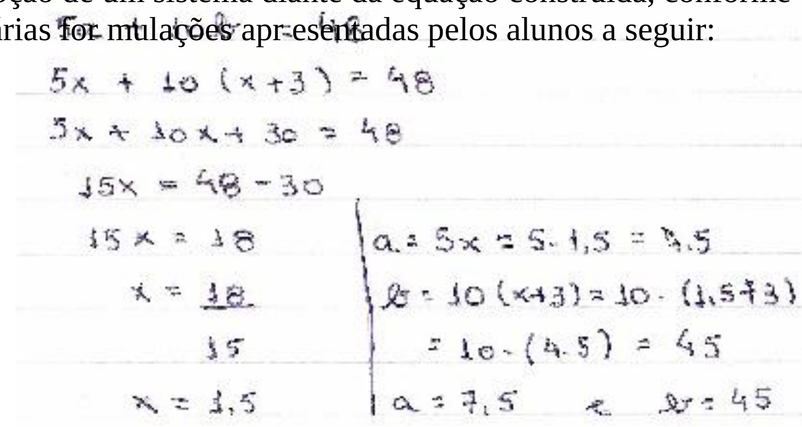
$A = x$, *sendo* A o *preço do peixe da espécie A*
$5B = x + 3$ e B o *preço do peixe da espécie B*
$5A + 10B = 48$

Observamos que tal problema constitui um sistema de três equações com três incógnitas, e que pode ser reduzido a uma equação por meio de substituições na ter ceira equação das incógnitas A e B, isoladas na primeira e segunda equações, respectivamente, ou seja,

$A = x,\quad 5B = x + 3 \qquad 5x + 10\,\frac{x+3}{5} = 48$

$5x + 2(x + 3) = 48$ /F4 15.871 f 1 0 0 1 188.88 499.65 µ ()

Normalmente, questão como a acima apresentada é visualizada e resolvida diretamente através da construção de uma única equação, ficando implícita a percepção de um sistema diante da equação construída, conforme demonstra uma das várias for mulações apr esentadas pelos alunos a seguir:

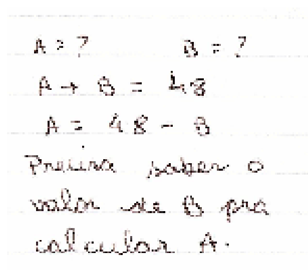


Aqui o sistema se apresenta de forma implícita, pois o aluno buscou formular o problema como uma única equação para, em seguida, explicitar as outras incógnitas A e B solicitas no enunciado. Isso acontece, não raro, na formulação de problemas quando a substituição é feita implicitamente e se explicita já a equação final, o que pode levar à formulação algébrica não congruente com o enunciado do problema, como se observa acima. Acr editamos que a atitude do aluno pode decor rer da omissão, ou não explicitação, de relações existentes entre as grandezas envolvidas no problema, o que constitui, sem dúvida, um err o de fazer matemático na formulação de situações problemas. Tais erros de fazer podem ser induzidos pelo fazer escolar do professor que formula situações-problema com tais substituições sem explicitá-las, omitindo-as de quem assiste a formulação, o aluno. Julgamos que tal atitude do professor pode ser decorr ente da busca de situar os problemas como o de uma equação por estar em processo de estudo o objeto equação de uma variável, por exemplo, ou ainda, para evitar o uso de sistemas de equações por considerá-los de maior complexidade.

Mesmo que o objeto de estudo seja equação com apenas uma variável, devemos trabalhar a visualização do mesmo como um sistema quando for o caso, pois, geralmente, a construção de uma equação emerge de outras que podem ser associadas numa só, e isso precisa ser mostrado aos alunos.

Quando não trabalhamos a constr ução de equações da forma descrita acima, acabamos por desconsider ar supostos conhecimentos algébricos que os alunos do ensino médio apresentam e que permitem for mular a situação problema como um sistema, conforme o observado anterior mente.

No processo de resolução da situação pr oblema 1 apresentada, os alunos além de não visualizarem dir etamente a construção da equação como um sistema, revelaram outras dificuldades como a de realizar a conversão do registro escrito na língua natural, enunciado apresentado, para o registro algébrico das equações, conforme demonstra a solução a seguir.



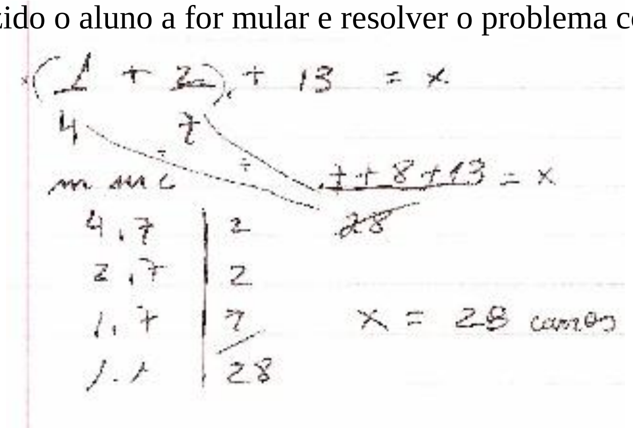
Aqui, além dos alunos não terem conseguido realizar a conversão de registros, omitiram por completo as relações entr e as incógnitas que permitem encontrar as soluções do problema enunciado.

A dificuldade de conversão de registro, bem como o estabelecimento de relações entre as incógnitas no processo de resolução de equações, não aconteceu somente no enfrentamento da situação problema 1, se mostrou, também, evidente no processo de resolução da situação pr oblema 2 apresentada a seguir:

Situação Problema – 2

- Em uma prova do Campeonato Mundial de Fórmula 1, 14 dos carr os bateram logo no início e ficaram fora da corrida. Durante a corrida, 27 dos carros tiveram de abandonar a prova por defeitos mecânicos. Apenas 13 carros terminaram a corrida. Quantos carros iniciaram a prova?

A situação problema 2 é um exercício típico de aritmética e, portanto pode ter induzido o aluno a for mular e resolver o problema como segue.



A não congruência do enunciado da situação problema 2 com a for mulação matemática é evidente e revela a dificuldade do aluno em expr essar, por meio de registros algébricos, e mesmos numér icos fracionários, o enunciado do problema. Tal problema, quando formulado algebricamente, se encaixa no mesmo tipo do problema anterior, ou seja, pode ser formulado como um sistema explicitando as relações entre as grandezas envolvidas, por exemplo:

x é o número total de carros

$B = \frac{1}{4}x$ *o número de carros que bateram*

$A = \frac{2}{7}x$ *o número de carros que abandoram a corrida*

$C = x - B$, *C o número efetivo de carros na corrida*

$C - A = 13$

É evidente que o processo de resolução da situação problema 2 se põe como um sistema de equações, mas que por substituições convenientes pode ser reduzido a uma equação.

$$x - B - A = 13 \qquad x - \frac{1}{4}x - \frac{2}{7}x = 13$$

$$\left(1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{7}\right)x = 13 \qquad \frac{13}{28}x = 13$$

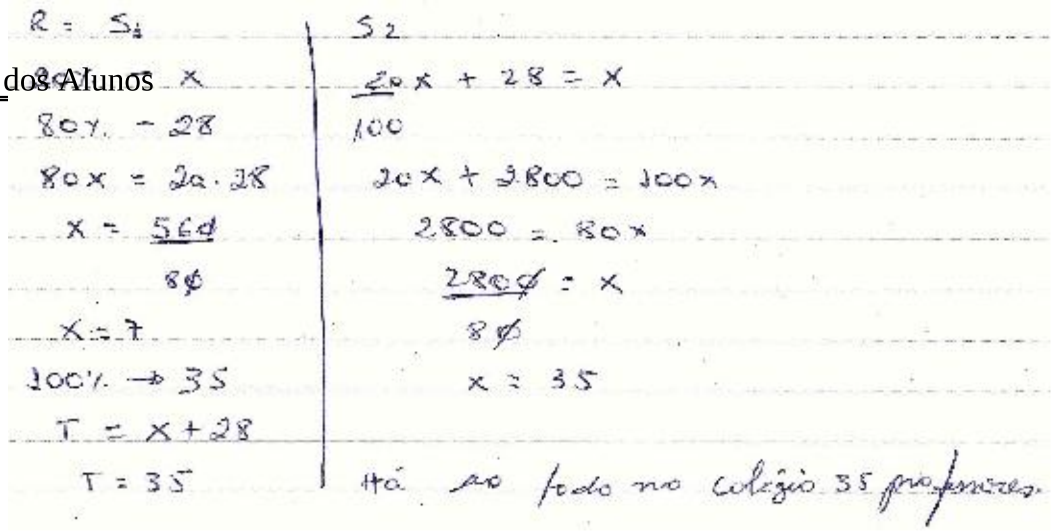
Todas as observações feitas quanto à omissão das relações entr e as grandezas envolvidas para a situação anterior (situação problema 1) também se aplicam aqui; sendo que a evidência do sistema nessa nova situação foi ocultada devido à camuflagem de perguntas como: Quantos carros iniciaram a prova? Se o enunciado solicitasse “Quantos carros bateram?” ou “Quantos carros abandonaram a corrida?”. A presença dessas perguntas na situação problema em questão tornaria inevitável a evidência do sistema bem como, possivelmente, possibilitaria aos alunos uma melhor percepção e compreensão quanto ao uso dos registros necessár ios para resolver o problema.

Como podemos observar, nas duas situações problemas anteriormente apresentadas, os alunos sentiram dificuldades para estabelecer a comunicação entre registros de representação na língua natural e algébrica empregados no estudo de equações; todavia, diante das reflexões r ealizadas em sala de aula, frente às questões estudadas, a comunicação entre os registros de representação empregados, tornou-se para eles, paulatinamente, evidente ao serem discutidas as situações problemas nos grupos formados em sala de aula, como evidencia a resolução da situação problema a seguir .

Situação problema 3

- Em um colégio 20% dos professores ensinam matemática. Sabendo que o colégio tem mais 28 professores que ensinam outras matérias, quantos professores há ao todo nesse colégio?

Solução dos Alunos



A resolução da situação problema acima mostrou que os alunos passar am a estabelecer corretamente a conversão do registr o na língua natural para o registro algébrico. Vale observar, também, que os alunos exibiram claramente as relações entre as gr andezas envolvidas na primeira resolução, evidenciando um sistema de equações. Além das relações estabelecidas corretamente, os alunos buscaram mostrar outra formulação na qual tais relações foram omitidas reduzindo diretamente a formulação da reposta para o problema apresentado a uma única equação, conforme se evidencia na solução S2 apresentada. As duas soluções realizadas demonstraram a compreensão dos alunos acerca da situação problema enfrentada.

A partir dessa primeira conversão da linguagem natural para a linguagem algébrica que os alunos conseguiram desenvolver, podemos dizer, segundo a Teoria dos Registros de Representação, que se iniciou um processo de compreensão acerca do objeto matemático estudado.

A respeito da conversão de registro Duval (1993) destaca a importância de se tr abalhar diferentes registros de representação, pois são nesses registros que se encontram as idéias dos alunos quanto à compreensão que estão tendo a respeito do objeto matemático estudado. No momento em que o aluno consegue converter um registro de representação em outro, ele demonstra a capacidade que tem de expressar, sobre diferentes formas, a sua percepção acerca do objeto matemático estudado. Esse é, sem dúvida, o caminho para a apropriação do conhecimento; saber tratar o objeto em estudo das mais variadas maneiras de representação estabelecendo conexões entre os diferentes registros empregados.

O processo de ensino e aprendizagem, quando desenvolvido por meio de conexões entre registros de representação, possibilita ao aluno examinar suas próprias idéias e contr olar os resultados obtidos, já que tais conexões oferecem procedimentos de análise e interpretação, além de redimensionar a responsabilidade, não mais como única e exclusiva do professor, no processo de aprendizagem dos alunos. O aluno, nessa perspectiva, é visto como sujeito da sua formação e cabe a ele, diante de orientações e reflexões realizadas juntamente com o professor , investigar o que está apr endendo.

Foi na perspectiva de promover conversões de registros de representações que buscamos desenvolver nossa proposta diante do estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares restringindo, em especial, o foco à conversão de dois tipos de registros: o registro algébrico presente no Método da Substituição para o registro aritmético (numérico) próprio do Método de Escalonamento. Embora nossa atenção estivesse direcionada para a conversão dos dois métodos já citados, os alunos fizeram, também, uso do registro na língua natural à medida que transformavam em equações ou em sistemas de equações os pr oblemas contextualizados enfrentados.

Conforme podemos observar, as situações-problema até então apresentadas, embora pudessem ter sido trabalhadas no sentido de levar os alunos a construírem sistemas de equações, limitaram os mesmos ao simples estudo de equações; por isso, continuamos nossa seqüência didática apresentando aos alunos sistemas de equações oriundos de problemas contextualizados, os quais também foram resolvidos aplicando o Método da Substituição com o propósito de sistematizar a técnica do referido método. A seguir, apresentamos alguns dos Sistemas, em forma de problemas contextualizados, que foram trabalhados com os alunos:

Problema contextualizado 1

- Devo entregar 48 maçãs em caixas de dois tamanhos diferentes. Posso entregar 2 caixas grandes e 4 pequenas ou 3 caixas grandes e 2 pequenas. Quantas maçãs vão em cada caixa gr ande e em cada caixa pequena?

Na resolução do problema contextualizado 1 os alunos interpretaram sem dificuldade os significados das incógnitas e alguns grupos, inclusive, usaram letras diferentes das habituais para repr esentar as equações conforme evidenciam os registros a seguir.

Enquanto uns grupos representaram o problema pelo sistema:

$$2x + 4y = 48$$
$$3x + 2y = 48$$

Outros representaram o problema pelo sistema:

$$2G + 4P = 48$$
$$3G + 2P = 48$$

A mbas representações algébricas expressam o problema contextualizado enfrentado, entretanto, os grupos que representaram as equações usando as incógnitas G e P, parecem querer expressar na representação algébrica os significados das grandezas que envolvem o problema, ou seja, G = númer o de maçãs que caberão na caixa Grande e P = Número de maçãs que caberão na caixa

Pequena.

É importante ressaltar que o fato de alguns grupos representarem as incógnitas apenas pelas convencionais letras x e y, não indica, necessariamente, que não saibam o que as mesmas significam. Em alguns casos, podemos dizer inclusive, que essa forma “mais abstrata” de representação das incógnitas pode indicar um grau de complexidade mais elevado em que o pensamento dos sujeitos se encontra.

E m que pese a importância da forma como os alunos expressaram os registros de representação, nosso propósito er a observar se os alunos aplicariam corretamente, sem erros e equívocos, o Método da Substituição na resolução do sistema, o que parece ter ocorr ido, conforme evidencia os r egistros de um dos alunos a seguir.

① $2g + 4P = 48$
$3g + 2P = 48$

1º) $2g + 4P = 48$
$2g = 48 - 4P$
$g = \frac{48}{2} - \frac{4P}{2}$
$g = 24 - 2P$

2º) $3g + 2P = 48$
$3.(24 - 2P) + 2P = 48$
$72 - 6P + 2P = 48$
$72 - 48 = 4P$
$\frac{24}{4} = P$
$P = 6$

$g = 24 - 2P$
$g = 24 - 2.6$
$g = 24 - 12 = 12$

Na seqüência, o Problema contextualizado 2 a seguir evidencia a aplicação do Método da Substituição com um refinamento, como o da possibilidade de se permutar equações.

Problema contextualizado 2

- Paguei no mercadinho A R$ 12,00 por cinco quilos de arroz e dois pacotes de café. Já no mer cadinho B, três pacotes do mesmo café e um kg do mesmo arroz paguei R$ 5,00. Quanto paguei por cada quilo de arroz e cada pacote de café?

O sistema acima, embor a do mesmo tipo do problema 1, promoveu maior interesse dos alunos por tratar de uma situação mais próxima do cotidiano. Levando em consideração que a r esolução do problema 1 foi socializada e, destacando o uso de letras no pr ocesso de representação que apresentam um significado mais ou menos direto das grandezas envolvidas, podemos dizer que a solução do pr oblema 2 recebeu influencia direta do primeiro na forma de representar as equações com incógnitas que expressem o sentido do que está sendo solicitado no sistema proposto.

O sistema construído pelos alunos foi:

$$\begin{cases} 5A + 2c = 12 \\ A + 3c = 5 \end{cases}$$

Diante do sistema construído alguns alunos perguntaram se havia problema isolar primeiramente a incógnita A da segunda equação para depois substituir na primeira equação, pois, segundo os alunos, isso evitaria o contato com cálculos “mais complicados” envolvendo números fr acionários. Foi sugerido, então, aos alunos que efetuassem a resolução do sistema das duas formas, ou seja, isolando num primeiro momento uma incógnita da primeira equação e depois da segunda equação a fim de que eles mesmos pudessem verificar e analisar as respostas encontradas. Assim, os alunos resolveram o sistema das seguintes formas:

$$\begin{cases} 5A + 2C = 12 & (I) \\ A + 3C = 5 & (II) \end{cases} \rightarrow A = \frac{12}{5} - \frac{2C}{5}$$

1 - Solução do sistema isolando a incógnita A da primeir a equação.

substituindo A na eq. II

$A + 3C = 5$

$\frac{12}{5} - \frac{2C}{5} + 3C = 5 \rightarrow -\frac{2C}{5} + 3C = 5 - \frac{12}{5}$

$\rightarrow \frac{13C}{\cancel{5}} = \frac{13}{\cancel{5}} \rightarrow C = \frac{13}{13} \rightarrow C = 1$

$A = \frac{12}{5} - \frac{2C}{5} \rightarrow A = \frac{12}{5} - \frac{2 \cdot 1}{5}$

$A = \frac{12 - 2}{5}$

$A = \frac{10}{5} \rightarrow A = 2$

$$\begin{cases} 5A + 2C = 12 & (I) \\ A + 3C = 5 & (II) \end{cases} \rightarrow A = 5 - 3C$$

2 - Solução do sistema isolando a incógnita A da segunda equação.

substituindo o valor de A na eq. I

$5A + 2C = 12$

$5 \cdot (5 - 3C) + 2C = 12$

$25 - 15C + 2C = 12$

$-13C = 12 - 25$

$-13C = -13$

$C = \frac{-13}{-13}$

$C = 1$

$A = 5 - 3C$

$A = 5 - 3 \cdot 1$

$A = 5 - 3$

$A = 2$.

Os alunos ficaram surpresos com a obtenção da mesma resposta para ambas as formas de resolução do sistema. No entanto, na opinião deles, a segunda forma de resolução foi mais fácil que a primeira pela simplicidade dos cálculos efetuados. Essa segunda forma de r esolução, na verdade, mostrou aos alunos que durante a aplicação do Método da Substituição, a ordem segundo a qual a incógnita é isolada fica a critério de quem está resolvendo o sistema. Aqui, obviamente, a permutação de equações foi motivada pela simplicidade dos cálculos, mas se constitui num bom momento para evidenciar que tais permutações são permitidas pelo método, apontando o fato como uma operação dita elementar com as equações de um sistema.

As duas soluções apresentadas pelos alunos mostraram que, após escolhida a incógnita, pode-se isolar a mesma em qualquer equação e substituí-la nas demais equações que produzirá um sistema mais simples que o original até que se encontre o valor de uma das incógnitas com a continuidade do processo.

Ao final da resolução do problema contextualizado 2, depois de discutido o significado das respostas encontradas com os alunos, alguns estudantes ainda fizeram a seguinte observação:

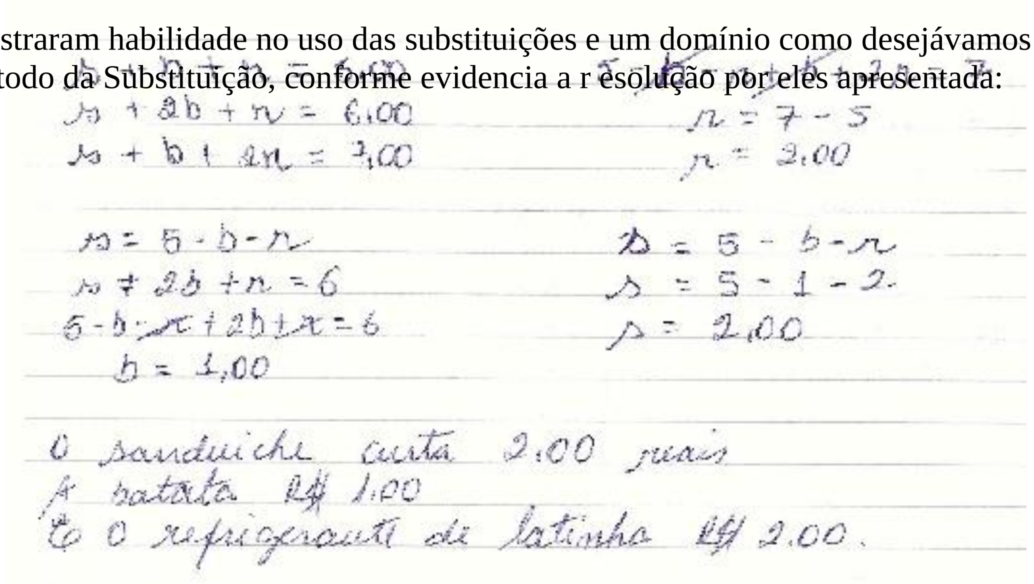
“ Pr ofessora, pelo preço encontrado para o arroz, podemos até dizer que ele é *de mar ca boa, mas já o preço do café, hum.....Nós pensaríamos duas vezes antes de prová-lo!”.*

Dando continuidade à nossa seqüência didática, propomos o problema contextualizado 3, a seguir, envolvendo um maior numero de incógnitas.

Problema contextualizado 3

- Uma lanchonete da cidade de Belém resolveu ofertar quites promocionais de lanche. O quite com 1 sanduíche, 1 batata frita e 1 refrigerante custa R$ 5,00; já o quite contendo 1 sanduíche, 2 batatas fritas e 1 refrigerante custa R$ 6,00 e o quite com 1 sanduíche, 1 batata frita e 2 refrigerantes sai por R$ 7,00. Qual o valor de cada item presente nos quites de lanche promocional?

O problema contextualizado 3, por apresentar um número maior de equações e incógnitas exigiu um pouco mais de atenção dos alunos. Ao resolverem o sistema, se deram conta que, independentemente do número de equações, era possível aplicar o Método da Substituição. Ao resolverem esse sistema, os alunos demonstraram habilidade no uso das substituições e um domínio como desejávamos do Método da Substituição, conforme evidencia a r esolução por eles apresentada:



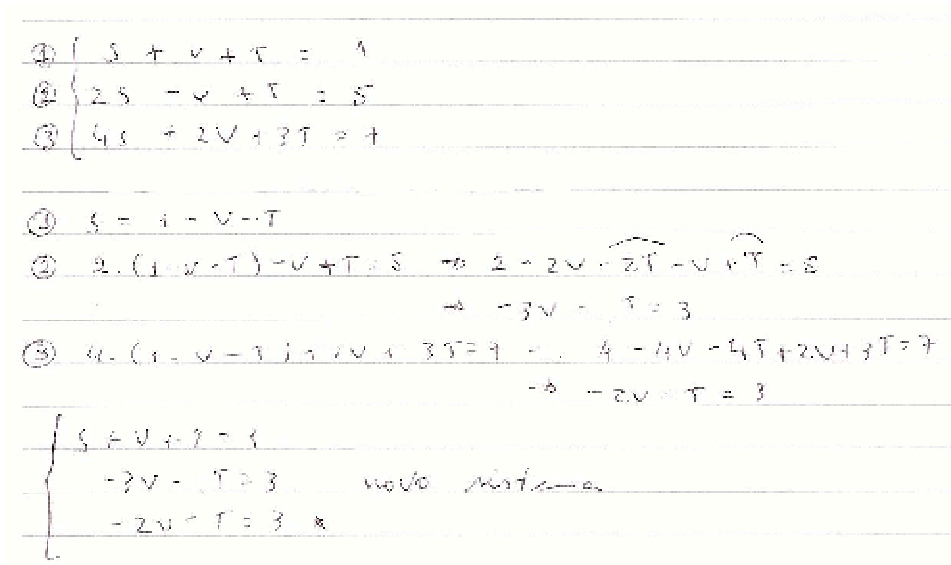
Em todos os problemas os alunos conseguiram construir os sistemas, ou seja, conseguiram converter os registros lingüísticos em registros algébricos e empregaram adequadamente o Método da Substituição. Ao resolverem os Sistemas contextualizados diante de situações que se aproximavam da realidade perceberam com mais facilidade o significado das repostas encontradas.

Depois do enfrentamento dos vários Sistemas Lineares através de situações problemas contextualizadas, desenvolvemos o estudo de sistemas em forma de problemas não contextualizados envolvendo vários números de equações e incógnitas. O nosso objetivo de continuar o estudo de r esolução de sistemas com os alunos usando o Método da Substituição foi buscar sistematizar o processo de resolução com o referido método, independente de relações que os problemas apresentados pudessem ter com a vida cotidiana. Desejávamos que os alunos estivessem totalmente seguros quanto ao uso do Método da Substituição, para que pudéssemos levá-los, em seguida, a aplicá-lo no estudo de sistemas abstratos, a fim de identificar r egularidades matemáticas existentes no processo de resolução que possibilitariam estabelecer a conversão do registro algébrico para o registro aritmético. Nesse sentido, propomos aos alunos os sistemas não contextualizados a seguir os quais foram resolvidos por eles.

Problema 1

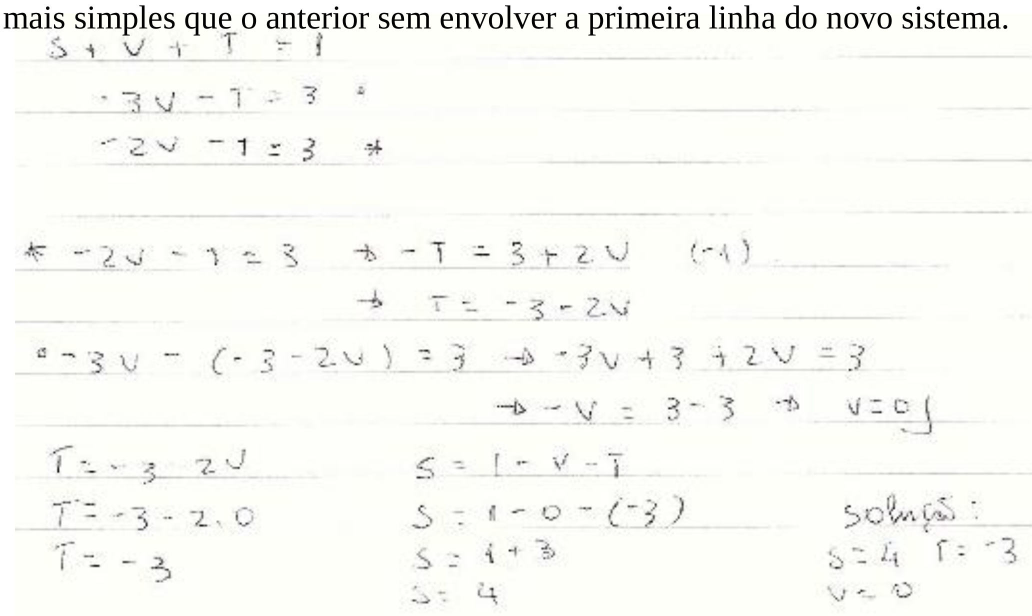
$$\begin{cases} s + v + t = 1 \\ 2s - v + t = 5 \\ 4s + 2v + 3t = 7 \end{cases}$$

Como esperávamos, não foram obser vadas dificuldades quanto ao emprego do Método da Substituição no processo de resolução do sistema. Sendo assim, continuamos o processo de resolução de sistemas aplicando o referido método com o objetivo de que fossem observadas algumas regularidades matemáticas, as quais permitiriam estabelecer a conversão de registros. A seguir, apresentamos a solução de alguns alunos:



Ao escreverem as novas equações do novo sistema, os alunos se deram conta de que a incógnita s isolada a partir da primeira equação, ao ser substituída nas demais equações, “sumia”. O “ sumiço” da incógnita s observada pelos alunos foi discutido buscando a sua compreensão. Assim, dialogamos com os alunos de modo a levá-los a observar que a incógnita s havia sido isolada da primeira equação e, quando substituída em uma outra equação, isso determinava sua eliminação, pois tinha sido substituída. A partir daquele momento, a incógnita s constaria apenas na primeira equação.

Continuando o pr ocesso, já que a solução ainda não havia sido encontrada, os alunos aplicaram novamente o Método da Substituição, mas agora, em um novo sistema mais simples que o anterior sem envolver a primeira linha do novo sistema.



$S + V + T = 1$

$-3V - T = 3$ °

$-2V - T = 3$ *

* $-2V - T = 3 \rightarrow -T = 3 + 2V \quad (-1)$

$\rightarrow T = -3 - 2V$

° $-3V - (-3 - 2V) = 3 \rightarrow -3V + 3 + 2V = 3$

$\rightarrow -V = 3 - 3 \rightarrow V = 0$

$T = -3 - 2V$

$T = -3 - 2 \cdot 0$

$T = -3$

$S = 1 - V - T$

$S = 1 - 0 - (-3)$

$S = 1 + 3$

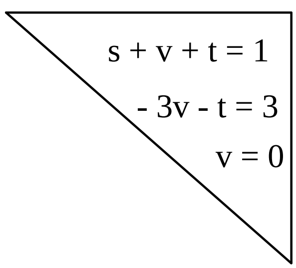
$S = 4$

solução:

$S = 4 \quad T = -3$

$V = 0$

Os alunos ao substituírem as incógnitas na resolução do sistema se davam conta que gradativamente as incógnitas iam sendo eliminadas e foi nesse momento que alertamos os alunos para per ceberem que tal modo de agir conduz o sistema estudado a um novo sistema com uma formação triangular característica de um sistema dito escalonado, como mostramos a seguir.



O desenvolvimento da proposta de resolver sistemas lineares usando o Método da Substituição busca revelar que este método corresponde ao Método de Escalonamento quando abstraída as variáveis, embora isso não seja evidenciado nas organizações didáticas presentes nos livros escolares.

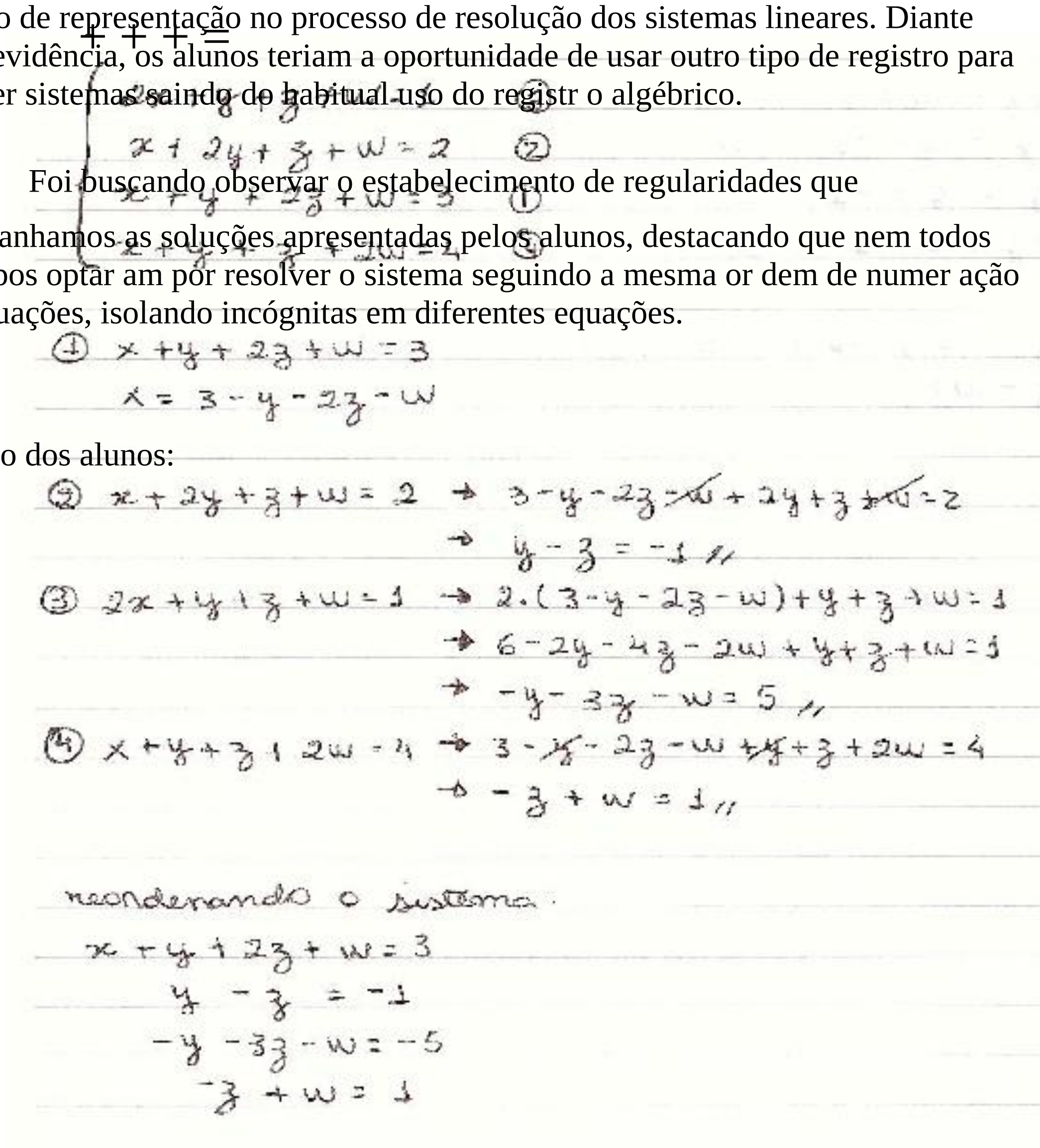
Continuando a busca e observação de regularidades matemáticas no processo de resolução, pr opomos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + z + w = 1 \\ x + 2y + z + w = 2 \\ x + y + 2z + w = 3 \\ x + y + z + 2w = 4 \end{cases}$$

A percepção das regularidades matemáticas evidenciaria um outro tipo de registro de representação no processo de resolução dos sistemas lineares. Diante de tal evidência, os alunos teriam a oportunidade de usar outro tipo de registro para resolver sistemas saindo do habitual uso do registr o algébrico.

Foi buscando observar o estabelecimento de regularidades que acompanhamos as soluções apresentadas pelos alunos, destacando que nem todos os grupos optar am por resolver o sistema seguindo a mesma or dem de numer ação das equações, isolando incógnitas em diferentes equações.

Solução dos alunos:



Neste momento foi perguntado aos alunos se haveria uma outra forma de arrumar o sistema encontrado e por quê? Foi quando eles ratificar am a independência de ordem das equações no sistema, uma vez que o importante é encontrar o valor das incógnitas que satisfazem todas as equações. Com este pensamento arrumaram as mesmas de modo a colocá-las numa or dem decrescente quanto ao número de incógnitas das equações do sistema ficando:

$$
\begin{aligned}
x + y + 2z + w &= 3 \\
-y - 3z - w &= -5 \\
y - z &= -1 \\
-z + w &= 1
\end{aligned}
$$

O episódio evidenciado mostrou que os alunos tinham consciência do porque era permitido realizar a permutação entre as equações que compunham o sistema.

Diante do sistema reor denado construído, já que o mesmo ainda não havia sido resolvido, os alunos continuaram a resolução aplicando novamente nova substituição.

$$
\begin{aligned}
x + y + 2z + w &= 3 \\
-y - 3z - w &= -5 \quad 1 \\
y - z &= -1 \quad 2 \\
-z + w &= 1 \quad 3
\end{aligned}
$$

$$1 \quad -y - 3z - w = 5 \rightarrow y = -5 + 3z + w$$

$$2 \quad -y - z = -1 \rightarrow -5 - 3y - w - z = -1 \rightarrow 2z + w = 4$$

No momento em que os alunos iam fazer a substituição do valor de y na equação 3, depararam-se com a inexistência daquela incógnita na equação, daí, então, não terem alterado a mesma.

Assim, o mais novo sistema construído ficou definido da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
x + y + 2z + w &= 3 \\
-y - 3z - w &= -5 \\
2z + w &= 4 \quad 1 \\
-z + w &= 1 \quad 2
\end{aligned}
$$

Mesmo sendo empregada duas vezes a substituição, não foi encontrada a solução do sistema, daí a necessidade de continuar o processo.

$$2z + w = 4 \quad (1)$$
$$-z + w = 1 \quad (2)$$

$$2z + w = 1 \rightarrow 2.1 + w = 4$$
$$\rightarrow 2 + w = 4$$
$$w = 2$$

Diante do resultado de uma incógnita, os alunos calcularam as demais substituindo os valores encontrados.

$$-y - 3z - w = -5 \rightarrow -y - 3.1 - 2 = -5$$
$$\rightarrow -y - 5 = -5$$
$$\rightarrow y = 0$$

$$x + y + 2z + w = 3 \rightarrow x + 0 + 2.1 + 2 = 3$$
$$\rightarrow x + 4 = 3$$
$$x = -1$$

$$x = -1 \qquad y = 0 \qquad z = 1 \qquad w = 2$$

Durante a aplicação do Método da Substituição, os alunos não conseguiram descrever algebricamente a relação existente entr e os coeficientes das incógnitas dos sistemas relacionados durante o processo de substituição e eliminação. No entanto, quando indagados a esse r espeito, responderam que o cálculo dos coeficientes das novas equações formadas eram determinados a partir dos valores dos coeficientes presentes nas equações anteriores, ou seja, os alunos embora não tenham conseguido descrever a relação matemática existente entre os coeficientes das incógnitas, perceberam que existe uma r elação entre elas, uma vez que ao ser aplicado o Método da Substituição, uma incógnita é eliminada e novos coeficientes são calculados.

É a relação estabelecida entre os coeficientes correspondentes das incógnitas presentes nos sistemas anterior es e posteriores ao processo de substituição e eliminação que permite revelar a estreita relação entre o Método da Substituição e o Método de Escalonamento, este último como uma abstração do primeiro. As r eferidas r elações matemáticas aqui tratadas serão visualizadas a seguir.

Até o presente momento, a resolução de Sistemas Lineares foi desenvolvida por manipulação algébrica das equações por meio de substituições e este método, acreditamos, possibilitará r esolver os sistemas de forma numérica caracterizando a chamada conversão dos r egistros de r epresentação proposta neste trabalho.

5.1 - O PROCESSO DE CONVERSÃO DO MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO NO MÉTODO DO ESCALONAMENTO NO ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES.

E m busca de encontrar as relações matemáticas estabelecidas entre os coeficientes das incógnitas de um sistema, trabalhamos com os alunos a aplicação do Método da Substituição em um sistema genérico, cujo resultado final revelaria as relações procuradas. Num primeir o momento, os alunos sentiram dificuldades em expressar tais relações devido à insegurança com cálculos envolvendo somente o uso de letras; por isso, tais relações matemáticas foram construídas em conjunto com o pr ofessor em sala de aula, inicialmente sendo evidenciadas em um sistema abstrato com quatro equações e quatro incógnitas. As relações encontradas, também chamadas aqui por nós de regularidades matemáticas, após a substituição e eliminação da primeira incógnita no sistema genérico de ordem 4x4, foram:

$$
\begin{cases}
a_1x + b_1y + c_1z + d_1w = k_1 \\
\left(b_2 - a_2.\frac{b_1}{a_1}\right)y + \left(c_2 - a_2.\frac{c_1}{a_1}\right)z + \left(d_2 - a_2.\frac{d_1}{a_1}\right)w = k_2 - a_2.\frac{k_1}{a_1} \\
\left(b_3 - a_3.\frac{b_1}{a_1}\right)y + \left(c_3 - a_3.\frac{c_1}{a_1}\right)z + \left(d_3 - a_3.\frac{d_1}{a_1}\right)w = k_3 - a_3.\frac{k_1}{a_1} \\
\left(b_4 - a_4.\frac{b_1}{a_1}\right)y + \left(c_4 - a_4.\frac{c_1}{a_1}\right)z + \left(d_4 - a_4.\frac{d_1}{a_1}\right)w = k_4 - a_4.\frac{k_1}{a_1}
\end{cases}
$$

Depois de construídas juntamente com os alunos, as relações que definem os coeficientes em um sistema abstrato, solicitamos que eles observassem, sem nossa ajuda, as mesmas relações empregando o Método da Substituição em sistemas abstratos com duas incógnitas e equações e, também, para três incógnitas e tr ês equações. O objetivo de tal pedido foi fazer com que os alunos se dessem conta da regularidade matemática estabelecida entre os coeficientes, e isso aconteceu conforme demonstram os apêndices dos Sistemas Genéricos de ordem 2x2 e 3x3 desenvolvidos pelos alunos.

A partir do momento em que foram estabelecidas as relações acima referidas e os alunos passaram a resolver os sistemas empregando tais relações, desenvolveu-se um outro tratamento no estudo de sistemas. A evidência das relações mediante a aplicação do Método da Substituição caracterizava a conversão estabelecida entre dois tipos de registros de representação; no caso, o Método da Substituição estava sendo convertido no Método de Escalonamento o que, segundo Duval (1993), demonstra o aprendizado do objeto matemático estudado, conforme indica a sua afir mação:

> "A compreensão (integral) de um conteúdo repousa na coordenação de ao menos dois registros de representação e esta coordenação manifesta-se pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão". (p.51).

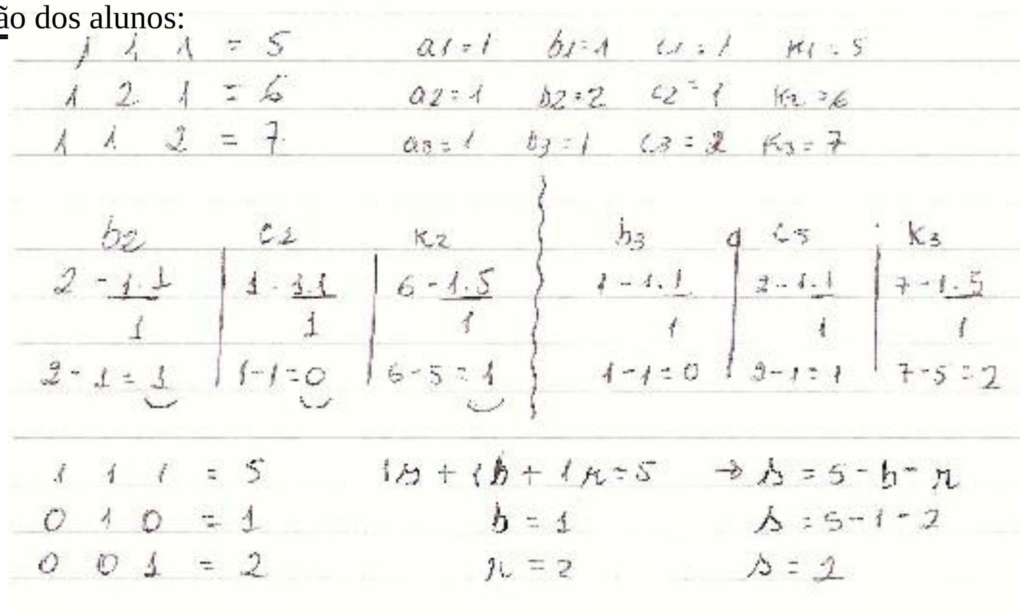
Depois de estabelecidas as relações para os coeficientes e evidenciada a regularidade matemática existente nelas, os alunos passaram a resolver Sistemas empregando tais relações, desenvolvendo, assim, a conversão de registros de representação.

A seguir, apresentamos alguns Sistemas que foram resolvidos pelos alunos aplicando as relações encontradas.

Sistema 1

Uma lanchonete da cidade de Belém resolveu ofertar quites pr omocionais de lanche. O quite com 1 sanduíche, 1 batata frita e 1 refrigerante custa R$ 5,00; já o quite contendo 1 sanduíche, 2 batatas fritas e 1 refrigerante custa R$ 6,00 e o quite com 1 sanduíche, 1 bata frita e 2 refrigerantes sai por R$ 7,00. Qual o valor de cada item presente no quite de lanche promocional?

Resolução dos alunos:



A solução do sistema 1 desenvolvida pelos alunos indicou que eles conseguiram usar as relações matemáticas estabelecidas para os coeficientes das equações realizando a conversão do Método da Substituição no Método de Escalonamento. Dizemos que a conver são do Método da Substituição no Método do Escalonamento foi estabelecida porque os alunos passaram a dar um tratamento aritmético ao estudo dos Sistemas o que, segundo Grande (2006), caracteriza a conver são entre registros uma vez que:

> “As conversões de registro são transformações de representações que consistem na mudança de um determinado registro em outro registro distinto. Na conversão de registro, altera-se a forma de apresentar o conteúdo, conservando-se a referencia do mesmo objeto”. (p.71)

Os alunos deixaram de resolver sistemas mediante um tratamento algébrico e adotar am o tratamento aritmético para resolver Sistemas.

Somente após vários outros sistemas r esolvidos, aplicando as relações estabelecidas, é que foi dito aos alunos que aquele “novo” processo de resolução consistia em um outro tratamento segundo o qual poderia ser desenvolvido o estudo de sistemas.

Assim que o sistema foi resolvido pelo Método do Escalonamento, foi solicitado aos alunos que compar assem os resultados obtidos com os resultados verificados na resolução do mesmo sistema quando este foi resolvido pelo Método da Substituição. Para a sur presa dos alunos, o resultado encontrado foi o mesmo.

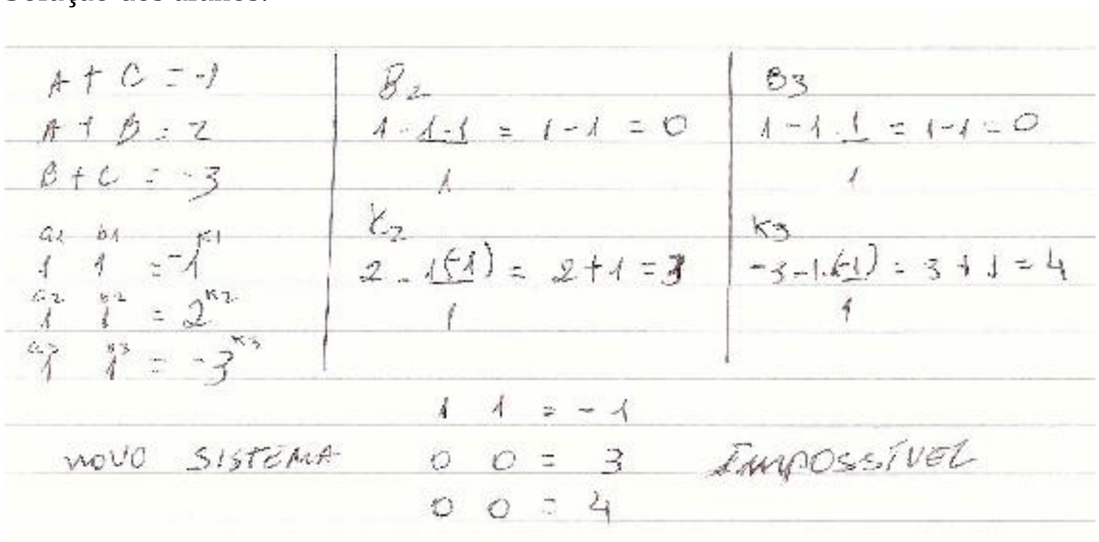
Resolver sistema através do Método de Escalonamento acabou se tornando mais simples para os alunos, por envolver somente operações numér icas desenvolvidas a partir das relações já estabelecidas que permitiram calcular novos coeficientes para as incógnitas. No entanto, o uso das relações sem a devida atenção de que estas se originam no Método da Substituição, podem gerar dificuldades como mostramos a seguir.

<u>Sistema 2</u>

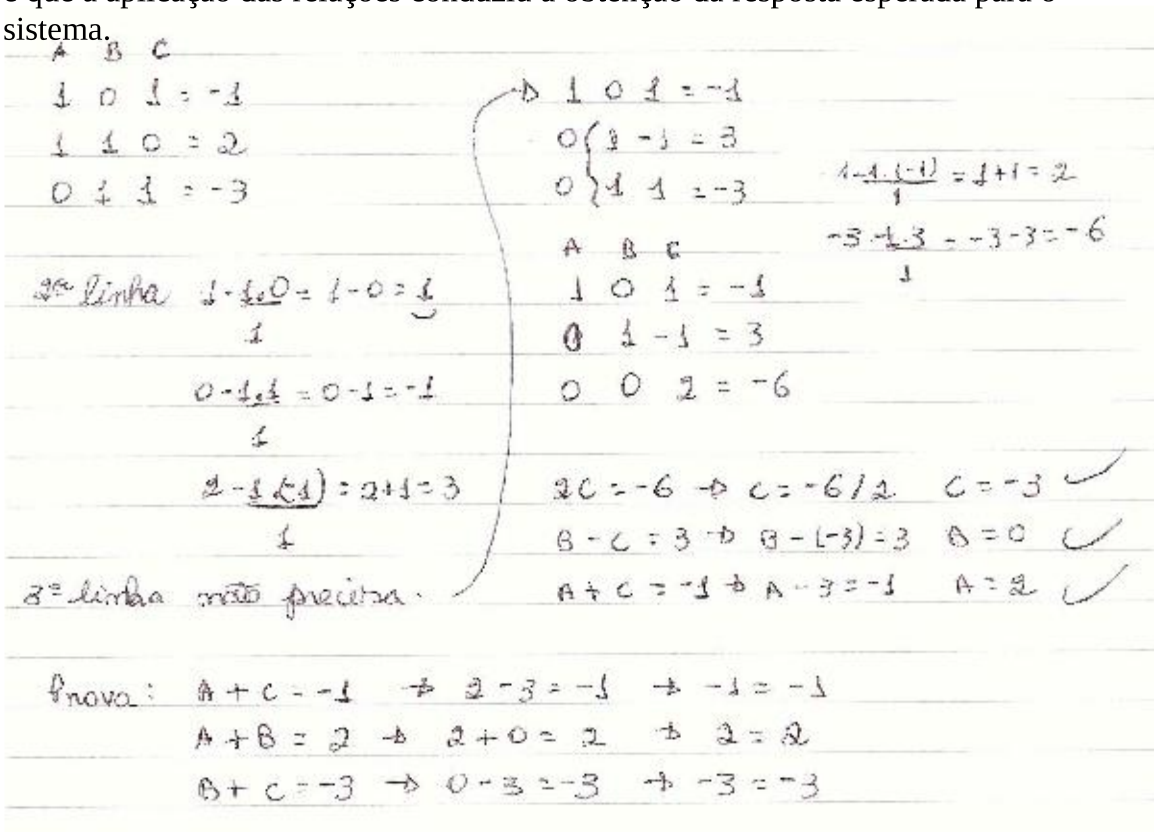
$$\begin{cases} a + c = -1 \\ a + b = 2 \\ b + c = -3 \end{cases}$$

A resolução desse sistema exigiu um pouco mais de atenção dos alunos, uma vez que alguns coeficientes não estavam claros devido à “inexistência” de algumas incógnitas nas equações. No momento da resolução do Sistema, os alunos não conseguiram per ceber a falta de alguns coeficientes e ficaram confusos diante da solução encontrada.

Solução dos alunos:



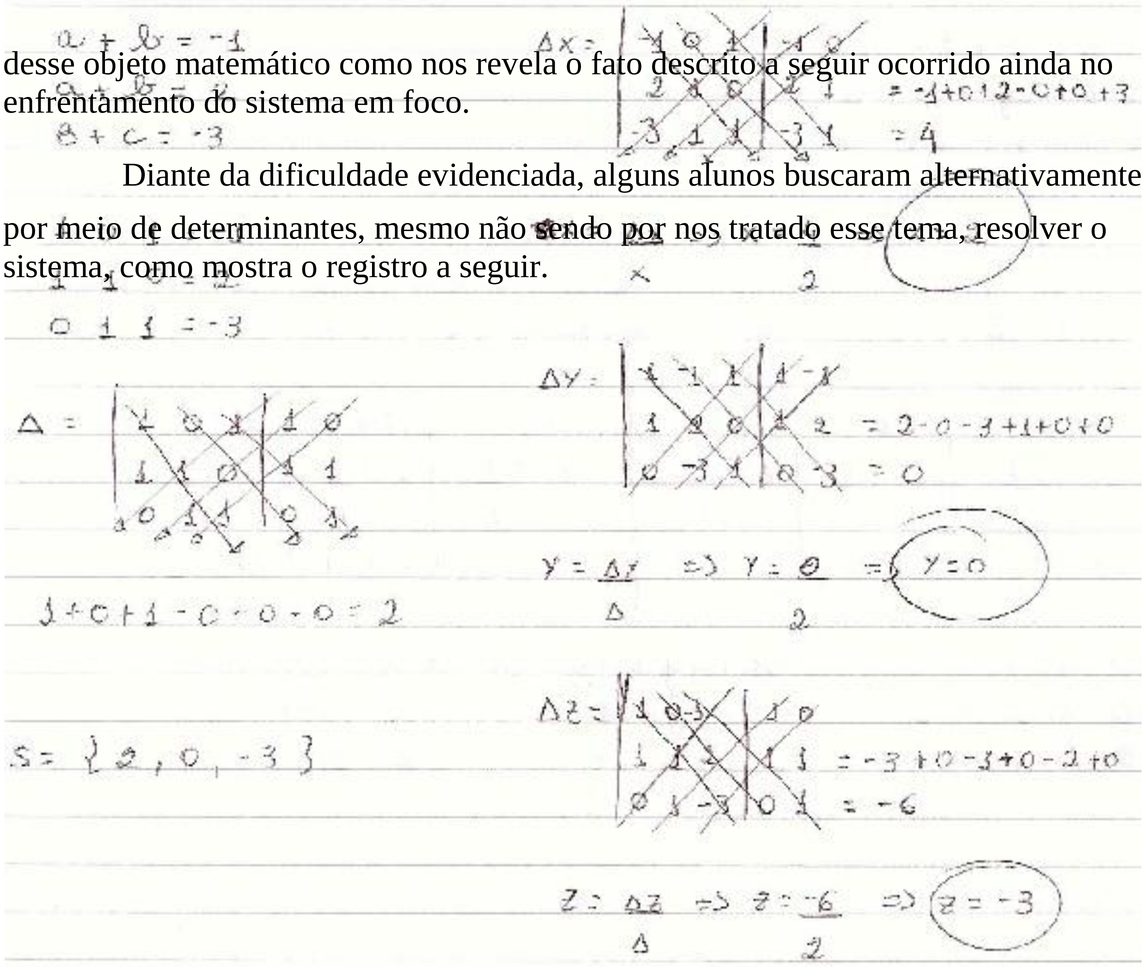
Diante da resposta encontrada, alguns alunos chegaram a afirmar que o sistema não tinha solução, pois o mesmo era impossível de ser resolvido. Neste momento foi necessário discutir o fato ocorrido até que os alunos se dessem conta da ausência de algumas incógnitas e, portanto de seus coeficientes nas equações do sistema. Assim, solicitamos aos alunos que descrevessem as incógnitas pertencentes ao sistema e seus respectivos coeficientes. Os alunos apontaram perfeitamente as incógnitas A, B, C que compunham o sistema, mas não souberam indicar os coeficientes das incógnitas que estavam ausentes. Daí, então, afirmamos que quando não aparece uma incógnita no sistema, então o valor do coeficiente dela é zero. Somente depois de tomada a devida consciência da ausência das incógnitas é que a aplicação das relações conduziu à obtenção da resposta esperada para o sistema.



É importante destacar que o incidente ocorrido na primeira tentativa de resolver o sistema 2 não implica dizer que os alunos tiveram dificuldade em aplicar o Método do Escalonamento. Ao contrário, a aplicação do método a partir do uso das relações foi feita corretamente como se evidencia acima, mas usando os coeficientes incorretamente.

A situação problema acima evidencia que a automatização do uso das relações encontradas não associa essas relações ao procedimento algébrico que as originou, perdendo, portanto, a conexão com o Método da Substituição. Essa falta de conexão pode levar à perda dos significados das ações do algoritmo como, por exemplo, permutar equações ou mesmo per ceber a presença de coeficientes nulos quando a incógnita não está presente em uma equação, como aqui verificamos. A ausência de significados matemáticos para os alunos em métodos de resolução de sistemas constitui, em nosso julgamento, uma das causas de dificuldades no estudo desse objeto matemático como nos revela o fato descrito a seguir ocorrido ainda no enfrentamento do sistema em foco.

Diante da dificuldade evidenciada, alguns alunos buscaram alternativamente por meio de determinantes, mesmo não sendo por nos tratado esse tema, resolver o sistema, como mostra o registro a seguir.



Diante do fato, per guntamos aos alunos por que eles haviam resolvido o sistema usando determinantes? A resposta foi a de que o professor de matemática do ano anterior, com o qual haviam ficado em dependência9, tinha lhes ensinado daquela forma, e, então, resolveram verificar se as respostas encontradas seriam iguais às resolvidas pelo método anter ior. Disseram que o Método do Escalonamento era bem mais simples, pois só envolvia “continhas”; enquanto que resolver sistemas, conforme o pr ofessor lhes havia ensinado, exigia que lembrassem da forma como o determinante era calculado, além de terem que “decorar” as relações estabelecidas para x, y e z

, que não r aro lhes causavam confusão.

Como se observa, a resolução de sistemas pelo processo de determinantes é vista como um procedimento destituído de significado algébrico das equações, e se mostra difícil por envolver cálculos de determinantes e relações que os alunos não são capazes de justificar por intuição ou por manipulações algébricas. O

9 Estar em dependência significa que o aluno foi reprovado em uma dada disciplina.

procedimento é puramente mecânico e técnico sem preocupação com a visualização dos conceitos ou mesmo com a construção dos significados envolvidos no estudo do objeto matemático trabalhado, por isso, o processo de resolução através do cálculo de determinantes resume-se ao conhecimento da técnica.

Esse fato veio confirmar a análise a priori realizada na pesquisa segundo a qual os alunos estudam sistemas linear es aplicando o registro de representação mais utilizado nos livr os didáticos através do estudo da teoria de matrizes e determinantes, e que tal estudo prioriza um fazer técnico desprovido de significados algébricos no processo de resolução de sistemas.

Mediante a pr oposta desenvolvida, podemos evidenciar que os alunos encontraram significados para o Método do Escalonamento por meio do Método da Substituição estabelecendo a conexão entre esses métodos e, evidentemente, entre os níveis de ensino fundamental e médio, com significativa habilidade no uso dos dois tipos de registros de representação no processo de resolução dos Sistemas de Equações Algébricas Lineares. No entanto, ela também nos revelou que a conver são desejada, no sentido da espontaneidade cognitiva da transformação de registros, ainda não foi alcançada como chegamos a vislumbrar em alguns momentos de nossa seqüência.

Acreditamos que os alunos tomaram consciência de que o Método do Escalonamento é uma transformação do Método da Substituição bem como evidenciaram a conexão existente entre ambos mediante as relações matemáticas estabelecidas. A percepção de tais relações for am fundamentais para a compreensão dos significados envolvidos no estudo de sistemas quando este é desenvolvido através do escalonamento, evitando assim, o uso mecânico do referido tratamento. Estudar escalonamento matricial de forma automatizada pode promover o abandono da compreensão do seu significado no processo de r esolução de sistemas, indicando que esse tratamento merece reparos, por isso, propomos seu estudo da forma como apresentamos.

Achamos importante e necessário que os alunos resolvam sistemas partindo da aplicação do Método da Substituição, pois é na aplicação deste método que está a compreensão das operações elementares que são realizadas no processo de Escalonamento conforme foi mostrado. Ao longo da seqüência didática desenvolvida, os alunos demonstr aram parcialmente a visualização de algumas dessas operações no momento em que explicitaram a per mutação das equações em alguns sistemas resolvidos.

E mbora a seqüência didática tenha evidenciado a relação entre os coeficientes correspondentes das incógnitas no processo de substituição e eliminação, objetivando verificar a conver são de registros, como de fato mostrou; de certa forma, parece também ter incentivado o uso automatizado das relações entre os coeficientes, uma vez que não mostrou as vantagens e limitações quanto ao uso de um ou de outro registro no processo de resolução de sistemas.

Os aspectos positivos da seqüência didática desenvolvida nos motivam a dar seguimento em nossa pesquisa, mas sem perder de vista os aspectos negativos mencionados, decorrentes de nossas reflexões sobre nossos fazeres docentes. Assim, naturalmente, uma nova questão se põe sobre essa temática como: “Que aspectos do Método da Substituição favorecem a transformação deste para o Método do Escalonamento?” e outr as relacionadas como: “A intencionalidade da forma tr iangular expressa o fazer matemático de formular problemas a uma única equação?

As questões acima levantadas, entre outras mais, se trabalhadas com cuidado, ajudariam a dar um outro enfoque ao processo de ensino e aprendizagem dos Sistemas de Equações Algébricas Lineares, tornando significativo o estudo desse objeto matemático.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A seqüência didática desenvolvida neste trabalho de pesquisa nos mostrou que é possível desenvolver o estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares através de vários tratamentos, estabelecendo conexões entre os registros de representação empregados.

No caso da proposta realizada, os registros de representação usados no estudo de Sistemas de Equações Algébricas Linear es foram o Método da Substituição e o Método do Escalonamento, através dos quais buscamos evidenciar a construção de significado matemático para o uso do método do escalonamento por meio do método da substituição, estabelecendo a conexão entre esses tratamentos.

Na verdade, a resolução de Sistemas de Equações Algébricas Lineares desenvolvida através do Método da Substituição se converte na própria aplicação do Método do Escalonamento, mediante a evidência e aplicação de regularidades matemáticas que permitem articular os dois métodos empregados, conforme foi mostrado no capítulo V deste trabalho de pesquisa.

Ao longo da nossa proposta, desenvolvemos com os alunos o estudo de Sistema partindo da aplicação do Método da Substituição, buscando estabelecer uma conexão matemática com o Método do Escalonamento. Essa articulação entre os tratamentos tornou o aprendizado do objeto matemático abordado significativo uma vez que partiu do que os alunos já conheciam; além disso, possibilitou o desenvolvimento do pensamento reflexivo à medida que ampliou as idéias através da religação entre os saberes.

É desejável que se ensine matemática através da religação entre os saber es, uma vez que essa forma de abordar os conteúdos propicia a formação do pensamento complexo e abrangente, evitando, assim, a desarticulação e isolamento dos temas matemáticos; afinal, os saberes estão interligados e fazem parte de um sistema orgânico, conforme afirma Morin (2000) : “...tudo o que está separado em nosso universo é ao mesmo tempo inseparável”. (p. 60), daí não podermos aceitar que o ensino de matemática aconteça de forma desconectada, ou seja, sem articulação com outros saberes.

Os próprios PCN’s, conforme observamos ao longo do trabalho, recomendam aos professor es que ensinem matemática relacionando os saberes. Isso fica evidente quando orienta que deve-se “estabelecer conexões entre os temas *matemáticos ...", todavia, ressaltamos que, na maioria das práticas educativas, é desenvolvido um ensino que tr ata os temas de maneira isolada, prejudicando, assim, o aprendizado do aluno.*

> "Para levar o aluno a se envolver com o saber é preciso desenvolver atividades que multipliquem as articulações possíveis internamente entre os diferentes temas da matemática, entre as várias maneiras de representar o conhecimento, entre o saber escolar e os conhecimentos do cotidiano e assim por diante". (Pais, 2006, p.31)

Tratar de um objeto matemático através de vários registros e estabelecer conexões entre eles significa dar oportunidade aos alunos de enriquecer seus próprios processos de pensamento a partir de idéias já desenvolvidas. Foi isso que buscamos desenvolver com os alunos neste trabalho frente ao estudo de Sistemas, acreditando que integrar as idéias e os conceitos significa favorecer a aprendizagem.

O propósito do nosso trabalho de pesquisa foi verificar se os alunos conseguiam desenvolver a conexão entre os métodos da Substituição e do Escalonamento através da conversão de registros de representação. Podemos dizer que o processo de conversão por nós desejado, no sentido da espontaneidade cognitiva da transformação de registros, não foi alcançada da forma como chegamos vislumbrar, todavia, acreditamos que os alunos tomaram consciência que o Método do Escalonamento é uma transfor mação do Método de Substituição.

E mbora algumas dificuldades em aplicar o Método da Substituição tenham sido observadas no início do desenvolvimento da proposta em decorrência da insegurança, por parte dos alunos, em manipular alguns entes matemáticos, os mesmos conseguiram automatizar o uso do referido Método, o que permitiu que a seqüência didática fosse realizada. Os alunos dominaram a aplicação do Método da Substituição, todavia, diante da necessidade de aplicá-lo em um sistema genérico, viram-se inseguros diante das oper ações algébricas necessárias ao seu desenvolvimento. Na verdade, os alunos sentiram-se temerosos diante dos cálculos envolvendo somente letra, o que foi resolvido diante das relações matemáticas estabelecidas, as quais envolviam somente cálculos aritméticos, tal como se apresentou no uso das relações para resolver os sistemas.

De modo geral, podemos dizer que a seqüência didática desenvolvida foi válida e pode ser vir de proposta para outros educadores que por ventura queiram ensinar Sistemas Lineares estabelecendo conexão entre os tratamentos que podem ser empregados no estudo do referido objeto matemático, buscando a conversão entre os registros.

REFERÊNCIA S:

BRASIL, Ministério da Educação. Parâmetr os curriculares nacionais: ensino m édio. Brasília, 1999.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e métodos da didática da matemática. 1986.

CALEY, Arthur. A memoir on the theory of matrices, philosophical transactions of the r oyal sociaty of London. 1858. pp. 17 – 37.

CATTO, Gloria Garrido. Registro de representação e o número racional. São Paulo: PUC, 2000.

CHEVALARD, Yves. La transposition didactique: del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique, 1991.

__________ et al. Estudar matemática: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Ar tmed, 2001.

D'AMORE, Bruno. Epistemologia e didática da matemática. São Paulo: escritura editor a, 2005.

DOURIER, Jean Luc. A general outline of the gênesis of vector space thory. 1995.

DUVAL, R. Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? RDM, v 16, n3, p. 349-382. 1996.

__________ Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et Sciences Cognitives. Strasbourg: IREM – ULP, vol. 5, p. 37- 65. 1993.

__________ Semioses et Noésis. Conferérence APMEP, (1992).

__________..Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D.A. (Org.). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p.11-33.

__________. Écarts sémantiques et cohérence mathématique: introduction aux problémes de congruence. In: Annales de didactique et de Sciences Cognitives, vol.1, p. 7-25. Irem de Strasbourg, 1988.

ESPINOS A, Mar ia Paz Prendes. Aprendemos...? Cooperando e colaborando? Las claves del método. In: SÁNCHES, Francisco Martinez. Redes de comunicación em La ensinnãnza – las nuevas perspectivas del trabajo coopertativo. Barcelona: Paidos, 2003. pp. 95 – 127.

FREIRE, Paulo. Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e terr a, 1996.

GRANDE, André Lúcio. O conceito de independência e dependência linear e os registros de representação semiótica nos livros didáticos de álgebra linear . Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo. PUC. 2006.

HAGE, Salomão Mufarr ej. Ensino e Aprendizagem na EJA: Superando preconceitos e for talecendo a construção do conhecimento, 2004.

HERRERO, Sandra Machel Segura. Sistemas de equações lineares: uma seqüência didática. Relime. Vol 7. num 1. março, 2004. pp. 49 – 72.

FONSECA, Maria da Conceição Ferreira Reis. Educação de jovens e adultos. Belo Horizonte: Autentica, 2002.

GODINO, Juan D. Teoría de las funciones semióticas: un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrución matemática, Universidade de Granada, 2003.

GONÇALVES, Tadeu Oliver; FIORENTINI, Dário. Formação e desenvolvimento profissional de docentes que for mam matematicamente futuros professores. In: FIORENTINI, Dario, NACARATO, Adair Mendes (orgs), Cultura, formação e desenvolvimento profissional de pr ofessores que ensinam matemática: investigando e teorizando a partir da prática docente. São Paulo: Musa, 2005.

GUZMÁN, Ismênia. Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: vocês de estudiantes. Revoline. Vol. 1, Num. 1, marzo, 1998, PP. 5-21.

IEZZI, Gelson, et al. M atemática: ciência e aplicação. 2 ed. São Paulo. Atual, 2004.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara, et al. Educação m atemática: uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999.

MORIN, Edgar. Educação e complexidade: os sete saberes e outros ensaios. São Paulo: Cortez, 2002.

MOREIRA, Marcos A; MASINI, Elcio S. F.. Salzano. Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982.

MOREIRA, Plínio Cavalcante. A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar. Belo Horizonte: Autentica 2007.

MORETTI, Méricles Thadeu. O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática. Itajaí: Contrapontos. N.6. p. 23-37. Set/dez 2002.

MORI, Iracema et al. Matemática: idéias e desafios. 6ª série. 11 ed. São Paulo: Saraiva, 2002.

NAME, Miguel Assis. Tempo de Matemática. São Paulo: Editora do Brasil, 6ª série, 1996.

PAIS, Luiz Carlos. Didática da Matemática, uma análise da influencia francesa. 2ª edição, Belo Horizonte: Autentica, 2002.

__________ Ensinar e aprender matemática. Belo Horizonte: Autentica, 2006.

SILVA, Neivaldo Oliveira. Ensino de Matemática. Belém: eduepa, 2004.

STEINBRUCH, Alfredo. Álgebra Linear. São Paulo. McGraw-Hill, 1987.

Apêndices