

# UFPA

## Otimização de Antenas Lineares e Planares para Aplicações em Sistemas de Banda Larga

Marcelo Nobuyuki Kawakatsu

2° Semestre - 2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ INSTITUTO DE TECNOLOGIA PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Belém - Pará

## Otimização de Antenas Lineares e Planares para Aplicações em Sistemas de Banda Larga

Este trabalho foi julgado em 16/10/2009 adequado para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica e aprovado na sua forma final pela banca examinadora.

Dr. Victor Alexandrovich Dmitriev Orientador

Dr. Danilo Teixeira Alves Membro da Banca Examinadora

Dr. Gervásio P. dos Santos Cavalcante Membro da Banca Examinadora

Dr. Karlo Queiroz da Costa Membro da Banca Examinadora

Dr. Marcus Vinícius Alves Nunes Coordenador do Programa de Pós-graduação

## UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ INSTITUTO DE TECNOLOGIA PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Marcelo Nobuyuki Kawakatsu

Otimização de Antenas Lineares e Planares para Aplicações em Sistemas de Banda Larga

> TRABALHO SUBMETIDO AO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA.

Belém – Pará 2009 Ao nosso Pai...;

Aos meus pais, pelo apoio incondicional em todos os momentos de minha vida;

Aos demais familiares, que também não poupam esforços;

Ao meu orientador Professor Victor Dmitriev;

A todos os meus professores e amigos que fizeram parte desta caminhada;

A Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Pará, pelo apoio financeiro com a bolsa de mestrado.

#### RESUMO

O objetivo deste trabalho é a otimização da largura de banda de antenas linear e planar para aplicações em sistemas de banda larga. Nesse sentido, foi feito um estudo das técnicas de análise, aumento da largura de banda e otimização adequadas para o problema em questão. Como técnica de análise, foi utilizado o método dos momentos, o qual está apresentado no capítulo II. Para aumentar a largura de banda, foram utilizadas as técnicas de colocação de elementos parasitas e construção de fendas no radiador, descritos sucintamente no capítulo III. Como algoritmo de otimização, foi utilizado o algoritmo genético, descrito sucintamente no capítulo II. Neste trabalho, são apresentadas duas propostas de antenas, uma antena dipolo linear combinada com quatros espiras parasitas, capítulo IV, e uma antena planar do tipo espira, capítulo V. No primeiro caso, foram utilizados elementos parasitas e o algoritmo genético para aumentar a largura de banda e, no segundo, foram empregadas fendas no radiador e a otimização paramétrica para este objetivo.

## ABSTRACT

The objective of this work is the bandwidth optimization of linear and planar antennas for broadband system applications. For achieving this goal, it was made a study of the analysis, bandwidth enlargement and optimization techniques appropriated for the problem in question. As analysis technique, the method of moments was utilized, which is presented in chapter II. For bandwidth enlargement, the techniques of collocation of parasitic elements and building slots in the radiator were employed, briefly described in chapter III. As optimization algorithm, the genetic algorithm was utilized, briefly described in chapter II. In this work, two antenna proposals are presented, a linear dipole antenna combined with four parasitic elements, chapter IV, and a planar antenna of loop type, chapter V. In the first case, it was utilized parasitic elements and the genetic algorithm to enlarge the bandwidth, and in the second, it was employed slots in the radiator and the parametric optimization to this objective.

## SUMÁRIO

Lista de Figuras	III
Lista de Tabelas	V
CAPÍTULO I: INTRODUÇÃO	06
1.1. Objetivo	07
CAPÍTULO II: Metodologia	08
2.1. Operador Linear Utilizado na Análise de Antenas Lineares e	
Planares	08
2.2. Método dos Momentos com Funções de Base e Teste Pulsos	
Constantes	09
2.3. Método dos Momentos com Função de Base e Teste Pulsos	
Triangulares	11
2.4. Modelagem da Fonte de Alimentação	14
2.5. Cálculo da Impedância de Entrada da Antena	15
2.6. Cálculo dos Diagramas de Radiação	15
2.7. Algoritmo Genético	16
CAPÍTULO III: Técnicas de Aumento da Largura de Banda de	
Antenas Lineares e Planares	19
3.1. Campo Próximo de um Dipolo Elétrico Linear	19
3.2. Utilização de Elementos Parasitas	26
3.3. Construção de Fendas no Radiador	27
CAPÍTULO IV: Antena Dipolo com Quatro Espiras Parasitas para	
Aplicações em Sistemas de Banda Larga	28
4.1. Introdução	28
4.2. Estrutura da Antena	28
4.3. Otimização e Resultados	29
CAPÍTULO V: Antena Compacta em Formato de Espira para	
Aplicações em Sistemas de Banda Larga	35
5.1. Introdução	35
5.2. Estrutura da Antena	35

5.3. Otimização e Resultados	35
CONCLUSÃO	41
<ul> <li>Propostas de Trabalhos Futuros</li> </ul>	41
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	42
APÊNDICE	44

## LISTA DE FIGURAS

2.1. Condutor retangular $L \ge W$ dividido em células retangulares	
(funções de base e teste pulsos constantes)	09
2.2. Condutor retangular $L \ge W$ dividido em células retangulares	
(funções de base e teste pulsos triangulares)	12
2.3. Modelo da borda alimentadora	14
2.4. Fluxograma do AG implementado	17
3.1. Densidades de energia elétrica e magnética médias para $l = \lambda/2$ (a)	
$e l = \lambda/4 (b)$	24
3.2. Densidades de energia elétrica e magnética médias para $l = \lambda/8$ (a) e	
$l = \lambda/16$ (b)	24
3.3. Densidades de energia elétrica (a) e magnética (b) instantâneas para	
$l = \lambda/2$	26
3.4. Densidades de energia elétrica (a) e magnética (b) instantâneas para	
$l = \lambda/16$	26
4.1. Configurações geométricas das antenas original (a) e modificada (b)	29
4.2. Impedâncias de entrada das configurações original (a) e proposta (b)	
para $Z_0 = 50 \ \Omega$	30
4.3. Impedâncias de entrada das configurações original (a) e proposta (b)	
para $Z_0 = 75 \ \Omega$	31
4.4. Coeficientes de reflexão das configurações original (a) e proposta (b)	
para $Z_0 = 50 \ \Omega$	31
4.5. Coeficientes de reflexão das configurações original (a) e proposta (b)	
para $Z_0 = 75 \ \Omega$	31
4.6. Diagramas de radiação da configuração original (a) e proposta (b) no	
plano xy em $f_{nc}$	33
4.7. Diagramas de radiação da configuração original (a) e proposta (b) no	
plano xz em $f_{nc}$	33
4.8. Diagramas de radiação da configuração original (a) e proposta (b) no	
plano yz em $f_{nc}$	33

5.1. Geometria da antena e o sistema de coordenada de referência	36
5.2. Perda de retorno para $g_s = 1$ , $w_l = 16$ e diferentes valores de $g_g$	
(em milímetros)	36
5.3. Perda de retorno para $g_g = 0,5, w_I = 16$ e diferentes valores de $g_s$	
(em milímetros)	37
5.4. Perda de retorno para $g_g = 0,5$ , $g_s = 1$ e diferentes valores de $w_I$	
(em milímetros)	37
5.5. Perda de retorno para $g_g = 0,5$ , $g_s = 1$ e $w_l = 16$ (em milímetros)	39
5.6. Diagramas de radiação nos planos-xy (a), xz (b) e yz (c) na	
freqüência de 4,2 GHz	38
5.7. Diretividade na direção $\phi = 90^{\circ}$ e $\theta = -45^{\circ}$	39
5.8. Distribuição de corrente superficial na antena e em parte do plano	
de terra na freqüência de 4,2 GHz	40

## LISTA DE TABELAS

1.1. Freqüências dos sistemas de comunicação sem fio mais utilizados	06
4.1. Parâmetros de otimização utilizados no AG	29
4.2. Parâmetros geométricos das configurações otimizadas	30
4.3. Larguras de banda de perda de retorno	32

## CAPÍTULO I: Introdução

Os sistemas de comunicação sem fio têm se desenvolvido muito rapidamente nos últimos anos. Exemplos de tais sistemas são o de telefonia celular, o de posicionamento global (GPS), redes locais sem fio (WLAN), redes pessoais sem fio de banda ultralarga (UWB), etc. O desenvolvimento desses sistemas tem demandado antenas com características melhoradas, ou seja, com dimensões reduzidas, maior número e largura de banda, diagramas de radiação com maior área de cobertura, etc.

Na Tabela 1 são mostradas as freqüências de operação dos sistemas de comunicação sem fio mais utilizados [1]. As larguras de banda (BW) variam de 7 % a 13 % para os sistemas de comunicação móvel comerciais e alcança até 109 % para comunicações de banda ultralarga. As antenas utilizadas devem possuir as características requeridas no intervalo de freqüência de operação. Por exemplo, antenas para telefonia móvel devem ter uma cobertura ampla e um bom casamento de entrada na faixa de freqüência de operação.

	Freqüência de	Largura de banda	
Sistema	operação	total	
	Tv: 824-849 MHz		
Serviço de Telefone Móvel Avançado (AMPS)		70 MHz (8,1 %)	
	Rx: 824–894 MHz		
Sistema Clabel new Commission and Méraia (CSM)	Tx: 880–915 MHz	90 MIL (9.7.0/)	
Sistema Giobal para Comunicações Moveis (GSM)	Rx: 925–960 MHz	80 MHZ (8,7 %)	
Service de Commisse a Recent (DCS)	Tx: 1710–1785 MHz	170 MHz (9,5 %)	
Serviço de Comunicações Pessoai (PCS)	Rx: 1805–1880 MHz		
Sistema Clabel new Commission and Méanie (CSM)	Tx: 1850–1910 MHz	140 MHz (7,3 %)	
Sistema Giobal para Comunicações Moveis (GSM)	Rx: 1930–1990 MHz		
Acesso Múltiplo por Divisão de Código com Banda Larga	Tx: 1920–1980 MHz	250 MIL- (12 2 0/)	
(WCDMA)	Rx: 2110–2170 MHz	250 MHz (12,2 %)	
Sistemas de Telesemunicação Márel Universal (UMTS)	Tx: 1920–1980 MHz	250 MHz (12,2 %)	
Sistemas de Telecomunicação Movel Universal (UMTS)	Rx: 2110–2170 MHz		
Ultra Banda Larga (UWB) para comunicações e medida	3100-10600 MHz	7500 MHz (109 %)	

Tabela 1. Freqüências dos sistemas de comunicação sem fio mais utilizados.

Atualmente, existe uma tendência de integração de vários sistemas em um único dispositivo, requerendo antenas com várias bandas de operação, ou seja, antenas multibandas. Estas antenas devem possuir uma única banda larga ou várias bandas separadas, dependendo dos sistemas a serem operados, além disso, devem ter tamanho compacto para caber no interior dos aparelhos.

Vários trabalhos foram publicados sobre técnicas de aumento da largura de banda e redução do tamanho de antenas planares, baseadas em modificações na estrutura de alimentação, colocação de elementos parasitas, construção de fendas no radiador, o uso de estubes periódicos, etc [2-4].

A utilização de algoritmos de otimização, como o algoritmo genético [5] e a otimização por enxame de partículas [6], tem permitido obter antenas com características superiores e com menor esforço humano quando comparada à otimização paramétrica convencional. Enquanto na otimização paramétrica cada parâmetro é variado individualmente, nos algoritmos de otimização os parâmetros são variados de forma conjunta, possibilitando a obtenção de melhores resultados.

#### 1.1. Objetivo

Este trabalho teve como objetivo otimizar a largura de banda de antenas linear e planar para aplicações em sistemas de banda larga, utilizando as técnicas citadas anteriormente.

## **CAPÍTULO II: Metodologia**

#### 2.1. Operador Linear Utilizado para Análise de Antenas Lineares e Planares

A partir das equações de Maxwell e das definições dos potenciais vetor magnético ( $\overline{A}$ ) e escalar elétrico ( $\phi$ ), chega-se na seguinte equação para o campo elétrico radiado por fontes de corrente elétrica

$$\overline{E}^{r}(\overline{r}) = -j\omega\overline{A}(\overline{r}) - \nabla\phi(\overline{r}), \qquad (2.1)$$

onde  $\overline{A} e \phi$  estão relacionados com  $\overline{J}$  (A/m), a densidade de corrente superficial da antena, por

$$\overline{A}(\overline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \overline{J}(\overline{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} ds', \qquad (2.2)$$

$$\phi(\bar{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{S} \sigma(\bar{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} ds', \qquad (2.3)$$

$$\sigma(\bar{r}') = -\frac{1}{j\omega} \nabla \cdot \bar{J}(\bar{r}') , \qquad (2.4)$$

onde  $\bar{r} = \hat{x}x + \hat{y}y + \hat{z}z$  é o vetor posição do ponto de observação,  $\bar{r}' = \hat{x}x + \hat{y}y' + \hat{z}z'$  o vetor posição do ponto de fonte na região *S*, sendo  $R = |\bar{r} - \bar{r}'|$ ,  $\mu_0$  e  $\varepsilon_0$  a permeabilidade e a permissividade do espaço livre,  $\sigma$  (C/m<sup>2</sup>) a densidade de carga elétrica superficial e  $k = 2\pi/\lambda$  o número de onda.

Substituindo (2.2-2.4) em (2.1), obtém-se a equação integral do campo elétrico (EFIE) [7]

$$\overline{E}^{r}(\overline{r}) = -j \frac{\omega \mu_{0}}{4\pi} \int_{S} \overline{J}(\overline{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} ds' - j \frac{1}{4\pi\omega\varepsilon_{0}} \nabla \int_{S} (\nabla \cdot (\overline{r}')) \frac{e^{-jkR}}{R} ds' .$$
(2.5)

A Eq. (2.5) relaciona o campo elétrico radiado por uma dada distribuição de corrente por meio de um operador integro-diferencial. Entretanto, em problemas de antenas,  $\overline{J}$  é desconhecido. Apenas se conhece a fonte excitação da antena, a qual pode ser uma fonte de alimentação aplicada em algum ponto da antena ou um campo incidente produzido por uma fonte externa.

Na análise de antenas utilizando a EFIE, é necessário resolver um problema de síntese, ou seja, determinar o operando ( $\overline{J}$ ) a partir do campo elétrico. Como o campo

elétrico radiado  $(\overline{E}^r)$  é desconhecido, relaciona-se este com o campo incidente por meio da condição de contorno para a componente tangencial do campo elétrico em *S*.

Para o caso de antenas planares, o operador envolve integrais de superficie, uma vez que  $\overline{J}$  é superficial. Enquanto que, no caso de antenas lineares, o operador envolve integrais de linha, pois  $\overline{J}$  pode ser considerada unidirecional ( $\overline{I}$ (A)). Neste último caso, a Eq. (2.5) é reduzida a

$$\overline{E}^{r}(\overline{r}) = -j \frac{\omega \mu_{0}}{4\pi} \int_{L} \overline{J}(\overline{r}') \frac{e^{-jkR}}{R} dl^{\gamma} - j \frac{1}{4\pi\omega\varepsilon_{0}} \nabla \int_{L} (\nabla \cdot \overline{J}(\overline{r}')) \frac{e^{-jkR}}{R} dl^{\gamma}.$$
(2.6)

Neste trabalho será utilizado o método dos momentos (MoM) para resolver numericamente a EFIE. Primeiro será mostrado o desenvolvimento matemático do MoM com funções de base e teste pulsos constantes e, depois, com funções de base e teste pulsos triangulares, como descrito nos próximos tópicos deste capítulo.

#### 2.2. Método dos Momentos com Funções de Base e Teste Pulsos Constantes

O MoM é um método numérico geral empregado para resolver operadores integrais, diferenciais ou integro-diferenciais [7], como é o caso da EFIE. Este método permite obter uma solução numérica aproximada, porém, o erro pode ser reduzido a custo de um maior esforço computacional.

A seguir será mostrado o desenvolvimento matemático do MoM para uma densidade de corrente com componentes na direção x e y. Para isso, será considerado um condutor retangular (*S*) como mostrado na Fig. 2.1.



Figura 2.1. Condutor retangular dividido em células retangulares, mostrando as posições dos elementos de corrente e carga, e os parâmetros utilizados para descrevê-los.

No MoM a função procurada é expandida como uma combinação linear de funções de base ortogonais entre si. Como, no caso considerado, a função procurada  $\overline{J}$  só possui componentes nas direções x e y, esta função é expandida na forma

$$\overline{J}(\overline{r'}) \cong \sum_{n'=1}^{N_y} \sum_{m'=1}^{N_{x-1}} I_{m',n'}^x \overline{P}_{m',n'}^x (\overline{r'}) + \sum_{m'=1}^{N_x} \sum_{n'=1}^{N_y-1} I_{m',n'}^y \overline{P}_{m',n'}^y (\overline{r'}), \qquad (2.7)$$

onde  $I_{m',n'}$  são coeficientes desconhecidos e  $\overline{P}_{m',n'}$  funções de base conhecidas.

Para definição das funções de base pulsos constantes, *S* é dividido em  $Nx \times Ny$  células retangulares, o que resulta em (Nx-1)Ny elementos de corrente na direção x e Nx(Ny-1) elementos de corrente na direção y, como mostrado na Fig. 2.1. Nesta região,  $\overline{P}_{m',n'}$  é definido como

$$\overline{P}_{m',n'}^{x} = \begin{cases} \hat{x}, & x_{m'}^{-} \le x' \le x_{m'}^{+} & e & y_{n'-1} \le y' \le y_{n'} \\ 0, & fora \end{cases},$$
(2.8a)

$$\overline{P}_{m',n'}^{y} = \begin{cases} \hat{y}, & x_{m'-1} \le x' \le x_{m'} & e & y_{n'}^{-} \le y' \le y_{n'}^{+} \\ 0, & fora \end{cases}$$
(2.8b)

Como  $\overline{J}$  é constante em cada célula,  $\rho$ , definido na Eq. (2.4), é expandido com as derivados sendo calculadas por meio de diferenças finitas na forma

$$\rho(\bar{r}') \cong -\frac{1}{j\omega} \sum_{n'=1}^{Ny} \sum_{m'=1}^{Nx} \left[ \frac{\left( I_{m',n'}^{x} - I_{m'-1,n'}^{x} \right)}{\Delta l_{m',n'}} P_{m',n'}^{x-}(\bar{r}') + \frac{\left( I_{m',n'}^{y} - I_{m',n'-1}^{y} \right)}{\Delta l_{m',n'}} P_{m',n'}^{y-}(\bar{r}') \right], \qquad (2.9)$$

onde  $P_{m',n'}^{x-}(\overline{r'})$  é definido como

$$P_{m',n'}^{x_{-}} = \begin{cases} 1, & x_{m'} \le x' \le x_{m'-1} & e & y_{n'-1} \le y' \le y_{n'} \\ 0, & fora \end{cases},$$
(2.10a)

$$P_{m',n'}^{y-} = \begin{cases} 1, & x_{m'-1} \le x' \le x_{m'} & e & y_{n'-1} \le y' \le y_{n'} \\ 0, & fora \end{cases}$$
(2.10b)

Como  $I_{0,n'}^x = I_{Nx,n'}^x = I_{m',0}^y = I_{m',Ny}^y = 0$ , a Eq. (2.9) pode ser escrita em termos de somatórios iguais aos utilizados em  $\overline{J}$  como

$$\rho \cong -\frac{1}{j\omega} \left\{ \sum_{n'=1}^{Ny} \sum_{m'=l}^{Nx-l} \left[ I_{m',n'}^{x} \left( \frac{P_{m',n'}^{x-}}{\Delta l_{m',n'}^{-}} - \frac{P_{m',n'}^{x+}}{\Delta l_{m',n'}^{+}} \right) \right] + \sum_{m'=l}^{Nx} \sum_{n'=l}^{Ny-l} \left[ I_{m',n'}^{y} \left( \frac{P_{m',n'}^{y-}}{\Delta l_{m',n'}^{-}} - \frac{P_{m',n'}^{y+}}{\Delta l_{m',n'}^{+}} \right) \right] \right\}.$$
(2.11)

onde  $P_{m',n'}^{x_+} = P_{m'+1,n'}^{x_-}$  e  $P_{m',n'}^{y_+} = P_{m',n'+1}^{y_-}$ .

Para determinar os N = (Nx-1)Ny + Ny(Ny-1) coeficientes das expansões feitas nas funções  $\rho \in \overline{J}$  é necessário construir um sistema de N equações linearmente independentes a partir da Eq. (2.5) (o desenvolvimento está mostrado no Apêndice). Este sistema pode ser colocado na forma matricial a seguir

$$[V_m] = [Z_{m,n}][I_n], \qquad m \in n = 1, 2, ..., N,$$
(2.12)

onde  $[V_m]$  é chamado de vetor de tensão,  $[Z_{m,n}]$  matriz de impedância e  $[I_n]$  vetor de corrente (vetor dos coeficientes). Os elementos de  $[V_m]$  e  $[Z_{m,n}]$  são dados por

$$V_m = \overline{E}_m^i \cdot \overline{\Delta l}_m, \qquad (2.13)$$

$$Z_{m,n} = \left[ j \frac{\omega \mu_0}{4\pi} \overline{\Delta l}_n \cdot \overline{\Delta l}_m \psi_{m,n} + j \frac{1}{4\pi \omega \varepsilon_0} \left( \psi_{m,n}^{+,+} - \psi_{m,n}^{-,+} - \psi_{m,n}^{+,-} + \psi_{m,n}^{-,-} \right) \right], \qquad (2.14)$$

onde  $\psi_{m,n} = \frac{1}{\Delta l_n} \int_{y_n^- x_n^-}^{y_n^+ x_n^+} \frac{e^{-jkR_m}}{R_m} dx' dy'.$ 

Os termos  $\psi_{m,n}$  podem ser calculados aproximadamente pelas seguintes equações (o desenvolvimento está mostrado no Apêndice)

$$\Psi_{m,n} = \begin{cases} \left[ 2\ln\left(\frac{R_{o,n} + \Delta w_n}{\Delta l_n}\right) + \frac{2\Delta w_n}{\Delta l_n}\ln\left(\frac{R_{o,n} + \Delta l_n}{\Delta w_n}\right) - j\frac{k}{2}\Delta w_n \right], & m = n \\ \frac{e^{-jkR_{m,n}}}{R_{m,n}}\Delta w_n, & m \neq n \end{cases}$$
(2.15)

onde  $R_{o,n} = \sqrt{\Delta l_n^2 + \Delta w_n^2}$  e  $R_{m,n} = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}$ .

#### 2.3. Método dos Momentos com Funções de Base e Teste Pulsos Triangulares

Para o desenvolvimento matemático do MoM com funções de base e teste pulsos triangulares será considerada também uma densidade de corrente com componentes na direção x e y. Para isso, será considerado um condutor retangular (*S*) como mostrado na Fig. 2.2.



Figura 2.2. Condutor retangular dividido em células retangulares, mostrando os elementos de corrente e os parâmetros utilizados para descrevê-los.

Na região S,  $\overline{P}_{m',n'}$  é definido como

$$\overline{P}_{m',n'}^{x} = \begin{cases} \hat{x} \frac{x' - x_{m'-1}}{x_{m'} - x_{m'-1}}, & x_{m'-1} \leq x' \leq x_{m'} \quad e \quad y_{n'-1} \leq y' \leq y_{n'} \\ \hat{x} \frac{x_{m'+1} - x'}{x_{m'+1} - x_{m'}}, & x_{m'} \leq x' \leq x_{m'+1} \quad e \quad y_{n'-1} \leq y' \leq y_{n'} \\ 0 & , & fora \end{cases}$$

$$\overline{P}_{m',n'}^{y} = \begin{cases} \hat{y} \frac{y' - y_{n'}}{y_{n'} - y_{n'-1}}, & x_{m'-1} \leq x' \leq x_{m'} \quad e \quad y_{n'-1} \leq y' \leq y_{n'} \\ \hat{y} \frac{y_{n'+1} - y'}{y_{n'+1} - y_{n'}}, & x_{m'-1} \leq x' \leq x_{m'} \quad e \quad y_{m'} \leq y' \leq y_{m'+1} \\ 0 & , & fora \end{cases}$$

$$(2.16b)$$

Utilização das funções de base pulsos triangulares,  $\overline{J}$  e  $\rho$  são expandidos como

$$\overline{J}(\overline{r'}) \cong \sum_{n'=1}^{N_y} \sum_{m'=1}^{N_x-1} I_{m',n'}^x \overline{P}_{m',n'}^x (\overline{r'}) + \sum_{m'=1}^{N_x} \sum_{n'=1}^{N_y-1} I_{m',n'}^y \overline{P}_{m',n'}^y (\overline{r'}), \qquad (2.17a)$$

$$\rho(\bar{r}') \cong -\frac{1}{j\omega} \left[ \sum_{n'=1}^{N_y} \sum_{m'=1}^{N_{x-1}} I_{m',n'}^x \frac{d}{dx} \,\overline{P}_{m',n'}^x(\bar{r}') + \sum_{m'=1}^{N_x} \sum_{n'=1}^{N_{y-1}} I_{m',n'}^y \frac{d}{dy} \,\overline{P}_{m',n'}^y(\bar{r}') \right].$$
(2.17b)

Para determinar os N = (Nx-1)Ny + Ny(Ny-1) coeficientes das expansões feitas nas funções  $\rho$  e  $\overline{J}$  é necessário construir um sistema de N equações linearmente independentes a partir da Eq. (2.5) (o desenvolvimento está mostrado no Apêndice). Este sistema pode ser colocado na forma matricial a seguir

$$[V_m] = [Z_{m,n}][I_n], \qquad (2.18)$$

onde

$$\begin{split} V_{m} &= \overline{E}_{m}^{i,c-} \cdot \frac{\overline{\Delta l}_{m}^{-}}{2} + \overline{E}_{m}^{i,c+} \cdot \frac{\overline{\Delta l}_{m}^{+}}{2}, \\ Z_{m,n} &= j \frac{\omega}{2} \Big[ \Big( \overline{A}_{m,n}^{-,-} + \overline{A}_{m,n}^{-,+} \Big) \cdot \overline{\Delta l}_{m}^{-} + \Big( \overline{A}_{m,n}^{+,-} + \overline{A}_{m,n}^{+,+} \Big) \cdot \overline{\Delta l}_{m}^{+} \Big] \\ &+ j \frac{1}{\omega} \Big( \phi_{m,n}^{+,-} - \phi_{m,n}^{+,+} - \phi_{m,n}^{-,-} + \phi_{m,n}^{-,+} \Big) \end{split}$$

com

$$\overline{A}_{m,n}^{\pm,\pm} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Delta s_n^{\pm}} \overline{P}_n^{\pm} \frac{e^{-jkR_m^{\pm}}}{R_m^{\pm}} ds^{,},$$
$$\phi_{m,n}^{\pm,\pm} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\Delta s_n^{\pm}} \left(\nabla \cdot \overline{P}_n^{\pm}\right) \frac{e^{-jkR_m^{\pm}}}{R_m^{\pm}} ds^{,},$$

onde *m* representa o ponto de observação e *n* o ponto de fonte.

Para  $\stackrel{+}{m} = \stackrel{+}{n}$  ou  $\stackrel{-}{m} = \stackrel{-}{n}$ , os termos anteriores podem ser calculados com boa aproximação por meio das seguintes equações (o desenvolvimento está mostrado no Apêndice)

$$\overline{A}_{n,n}^{-,-} = \hat{n}^{-} \frac{\mu_{0}}{4\pi} \left[ \ln\left(\frac{R_{o,n}^{c-} + \Delta w_{n}}{\Delta l_{n}^{-}}\right) + \frac{\Delta w_{n}}{\Delta l_{n}^{-}} \ln\left(\frac{R_{o,n}^{c-} + \Delta l_{n}^{-}}{\Delta w_{n}}\right) - j\frac{k}{2}\Delta w_{n} \right], \qquad (2.19a)$$

$$\overline{A}_{n,n}^{+,+} = \hat{n}^{+} \frac{\mu_{0}}{4\pi} \left[ \ln \left( \frac{R_{o,n}^{+} + \Delta w_{n}}{\Delta l_{n}^{+}} \right) + \frac{\Delta w_{n}}{\Delta l_{n}^{+}} \ln \left( \frac{R_{o,n}^{+} + \Delta l_{n}^{+}}{\Delta w_{n}} \right) - j \frac{k}{2} \Delta w_{n} \right], \quad (2.19b)$$

$$\phi_{n,n}^{-,-} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \left[ \ln\left(\frac{R_{o,n}^- + \Delta w_n}{\Delta l_n^-}\right) + \frac{\Delta w_n}{\Delta l_n^-} \ln\left(\frac{R_{o,n}^- + \Delta l_n^-}{\Delta w_n}\right) - j\frac{k}{2}\Delta w_n \right],$$
(2.20a)

$$\phi_{n,n}^{+,+} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \left[ \ln\left(\frac{R_{o,n}^+ + \Delta w_n}{\Delta l_n^+}\right) + \frac{\Delta w_n}{\Delta l_n^+} \ln\left(\frac{R_{o,n}^+ + \Delta l_n^+}{\Delta w_n}\right) - j\frac{k}{2}\Delta w_n \right],$$
(2.20b)

onde  $\hat{n}^{\pm}$  é um versor na direção de  $\overline{P}_{n}^{\pm}$ .

Para os demais casos os termos podem calculados aproximadamente como

$$\overline{A}_{m,n}^{\pm,-} = \hat{n}^{-} \frac{\mu_0 e^{-jkR_{m,n}^{\pm,-}}}{8\pi R_{m,n}^{\pm,-}} \Delta l_n \Delta w_n, \qquad (2.21a)$$

$$\overline{A}_{m,n}^{\pm+} = \hat{n}^{+} \frac{\mu_{0} e^{-jkR_{m,n}^{\pm,+}}}{8\pi R_{m,n}^{\pm,+}} \Delta l_{n} \Delta w_{n}, \qquad (2.21b)$$

$$\phi_{m,n}^{\pm,-} = \frac{e^{-jkR_{m,n}^{\pm,-}}}{4\pi\varepsilon_0 R_{m,n}^{\pm,-}} \Delta w_n, \qquad (2.22a)$$

$$\phi_{m,n}^{\pm,+} = \frac{e^{-jkR_{m,n}^{\pm,+}}}{4\pi\varepsilon_0 R_{m,n}^{\pm,+}} \Delta w_n \,. \tag{2.22b}$$

#### 2.4. Modelagem da Fonte de Alimentação da Antena

Antenas são usualmente alimentadas por uma linha de transmissão convencional conectada à mesma por um par de terminais eletricamente próximos. Esta alimentação pode ser modelada com boa aproximação por uma fonte de tensão ideal conectada à antena através de um par de terminais separados por uma pequena distância, chamada *gap* de alimentação.

Neste trabalho, considerou-se como fonte de alimentação da antena uma fonte de tensão ideal de amplitude V = 1 V. A fonte foi modelada utilizando o modelo do gerador de função delta ou modelo da borda alimentadora, ou seja, a tensão V é aplicada em uma borda de largura desprezível ( $\Delta$ ) associada a função de base  $\bar{f}_a$ , como ilustrado na Fig. 2.3.



Figura 2.3. Modelo da borda alimentadora. As flechas em preto mostram a direção do campo elétrico e as flechas em branco a direção da corrente superficial da antena nas células vizinhas à borda alimentadora.

O campo elétrico estabelecido no interior do gap de alimentação é dado por

$$\overline{E}_a = -\nabla \phi = \hat{y} \frac{V_a}{\Delta_a}.$$
(2.23)

Quando  $\Delta_a$  tende a zero, a amplitude do campo elétrico tende ao infinito, logo, este campo pode ser modelado por meio da função delta de Dirac, considerando a borda alimentadora em y = 0, como

$$\overline{E}_a = \hat{y} V_a \delta(y). \tag{2.24}$$

Com isso, a integral do campo elétrico no domínio da função de base associada à borda alimentadora é igual à tensão aplicada, ou seja

$$\int E_a dy = V_a \,. \tag{2.25}$$

Como existe apenas uma função de base associada à borda alimentadora, o campo elétrico é nulo no domínio de todas as funções de base exceto naquele associado à  $\bar{f}_a$ , mais especificamente no *gap* de alimentação. Neste modelo, a fonte é modelada como um campo elétrico incidente, dessa forma, o elemento correspondente à  $\bar{f}_a$  no vetor de tensão, mostrado nas Eqs. (2.12 e 2.18), é igual a *V*, sendo os demais elementos nulos.

#### 2.5. Cálculo da Impedância de Entrada da Antena

A impedância de entrada da antena é a razão entre a tensão e a corrente nos terminais de entrada da antena (*gap* de alimentação). No modelo da borda alimentadora, a impedância é dada pela razão entre a tensão de alimentação ( $V_a = 1$  V) e a corrente total normal a borda alimentadora.

Como somente a função de base  $\overline{f}_a$  possui componente normal à borda alimentadora e a sua amplitude é unitária na borda, a corrente na entrada da antena é igual a amplitude da densidade de corrente associada à  $\overline{f}_a$  ( $I_a$ ) multiplicada pela largura da borda alimentadora ( $\Delta w_a$ ). Com isso, a impedância de entrada da antena é dada por

$$Z_{in} = R_{in} + jX_{in} = \frac{V_a}{\Delta w_a I_a}, \qquad (2.26)$$

onde  $R_{in}$  e  $X_{in}$  são a resistência e a reatância de entrada da antena.

#### 2.6. Cálculo do Diagrama de Radiação

Para o cálculo dos campos eletromagnéticos radiados pela antena, foi utilizado o modelo do dipolo infinitesimal. Neste modelo cada elemento de corrente é aproximado por um dipolo elétrico infinitesimal. O campo radiado total é obtido como a soma das contribuições de cada dipolo.

Os campos magnético e elétrico radiados por um dipolo elétrico infinitesimal localizado na origem são determinados a partir de expressões analíticas conhecidas [8],

$$\overline{H}(\overline{r}) = \frac{jk}{4\pi} (\overline{m} \times \overline{r}) C e^{-jkr}, \quad C = \frac{1}{r^2} \left[ 1 + \frac{1}{jkr} \right], \quad (2.27)$$

$$\overline{E}(\overline{r}) = \frac{\eta}{4\pi} \left( \left( \overline{M} - \overline{m} \right) \left[ \frac{jk}{r} + C \right] + 2\overline{m}C \right) e^{-jkr}, \quad \overline{M} = \frac{(\overline{r}.\overline{m})\overline{r}}{r^2} \quad , \tag{2.28}$$

onde  $r = |\overline{r}|$ ,  $\eta = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} \cong 377 \ \Omega$  é a impedância intrínseca do espaço livre e  $\overline{m}$  é o momento de dipolo correspondente a um elemento de corrente. Por exemplo, considerando funções de base pulsos constantes, o momento de dipolo para o elemento de corrente *n* é dado por

$$\overline{m} = I_n \Delta w_n \Delta l_n \tag{2.29}$$

As Eqs. (2.27-2.28) são expressões exatas, ou seja, sem aproximações para campos distantes, sendo, portanto, válidas para distâncias arbitrárias ao dipolo. Entretanto, este modelo apresenta resultados imprecisos se a distância de observação for da mesma ordem do comprimento dos elementos de corrente, uma vez que os elementos de corrente são finitos.

Como dito anteriormente, os campos elétrico e magnético totais em  $\bar{r}$  são obtidos a partir da soma das contribuições de cada dipolo elétrico correspondente à cada elemento de corrente, ou seja

$$\overline{H}(\overline{r}) = \sum_{n=1}^{N} \overline{H}_n \left( \overline{r} - \frac{1}{2} \left( \overline{r}_n^{c+} + \overline{r}_n^{c-} \right) \right), \tag{2.30}$$

$$\overline{E}(\overline{r}) = \sum_{n=1}^{N} \overline{E}_n \left( \overline{r} - \frac{1}{2} \left( \overline{r}_n^{c+} + \overline{r}_n^{c-} \right) \right).$$
(2.31)

Em regiões de campos distantes, as frentes de onda podem ser aproximadas como ondas planas. Neste caso, os campos  $\overline{E}$  e  $\overline{H}$  são ambos perpendiculares entre si e a direção de propagação, ou seja, a onda possui o modo eletromagnético transversal (TEM). Com isso, basta calcular um dos campos que o outro pode ser determinado a partir de uma das seguintes relações

$$\overline{E}(\overline{r}) = \eta \overline{H}(\overline{r}) \times \frac{\overline{r}}{r}, \qquad (2.32)$$

$$\overline{H}(\overline{r}) = \frac{1}{\eta} \frac{\overline{r}}{r} \times \overline{E}(\overline{r}).$$
(2.33)

#### 2.7. Algoritmos Genéticos

Os algoritmos genéticos (AGs) são métodos numéricos de otimização "globais" baseados nos processos da evolução natural das espécies, ou seja, seleção, cruzamento e mutação, chamados de operadores genéticos. Estes algoritmos que modelam a

adaptação das espécies ao ambiente são muito atrativos por serem de fácil compreensão e implementação, entretanto, tendem a serem lentos, necessitando de muitas iterações para chegar na solução ótima.

Problemas eletromagnéticos de otimização envolvem normalmente muitos parâmetros e, além disso, em muitos casos, são governados por equações que só possuem solução numérica, o que torna impossível a utilização de técnicas de otimização tradicional baseadas no gradiente da função. Nestes casos, os algoritmos evolutivos são bastante indicados.

Nesses algoritmos, cada parâmetro do problema é codificado em uma seqüência binária (ou outro tipo de código), chamada de gene. A cadeia formada por todos os genes recebe a denominação de cromossomo ou indivíduo, o que representa uma solução possível qualquer para o problema a ser otimizado. O conjunto de todos os cromossomos constitui a população.

Para iniciar o algoritmo, a população inicial é criada de forma aleatória. A cada geração, obtém-se uma nova população através dos processos de seleção, cruzamento e mutação. A classificação dos indivíduos por aptidão é feita através da função custo ou objetivo do problema.

O algoritmo implementado neste trabalho está resumido no fluxograma mostrado na Fig. 2.4.



Figura 2.4. Fluxograma do AG implementado.

Algumas características do AG implementado neste trabalho foram: elitismo, em que o indivíduo mais apto é sempre mantido para a próxima geração com o objetivo de acelerar a convergência do algoritmo e ponto de cruzamento aleatório, com o objetivo de aumentar a diversidade dos genes.

Informações mais detalhadas sobre os algoritmos genéticos podem ser obtidas na referência [6].

## CAPÍTULO III: Técnicas de Aumento da Largura de Banda de Antenas Lineares e Planares

Para aumentar a banda de casamento de impedância das antenas é necessário minimizar a reatância de entrada da antena em uma faixa de freqüência mais larga possível. A reatância de entrada da antena é causada pela energia reativa armazenada na região de campo próximo da antena, sendo que esta energia é igual à diferença entre as energias magnética e elétrica na região de campo próximo (região com distâncias menores que  $0,62\sqrt{D^3/\lambda}$ , onde *D* é a maior dimensão da antena [9]) da antena. Logo, uma maneira de aumentar a largura de banda de impedância das antenas é reduzindo esta energia reativa.

Existem algumas técnicas para redução dessa energia reativa, como a utilização de elementos parasitas e construção de fendas no radiador, as quais serão descritas sucintamente neste capítulo.

Antes de descrever as técnicas citadas anteriormente, será feito um estudo das densidades de energia média e instantânea na região de campo próximo de um dipolo elétrico finito com comprimento menor que a metade do comprimento de onda de operação. O estudo do dipolo elétrico é importante, pois esta antena elementar serve de base para o entendimento de diversas outras antenas como, por exemplos, as do tipo monopolo, *patch*, *PIFA*, etc.

#### 3.1. Campos Próximos de um Dipolo Elétrico Finito

No cálculo dos campos próximos, será considerado um dipolo elétrico de comprimento *l* localizado ao longo do eixo-z e simetricamente em relação à origem, com a densidade de corrente senoidal dada a seguir

$$\overline{I}(x', y', z') = \begin{cases} \hat{z}I_0 \sin\left[k\left(\frac{l}{2} + z'\right)\right], & -\frac{l}{2} \le z' \le 0\\ \hat{z}I_0 \sin\left[k\left(\frac{l}{2} - z'\right)\right], & 0 \le z' \le \frac{l}{2} \end{cases}.$$
(3.1)

onde  $I_0$  é a amplitude máxima da corrente e  $k = 2\pi / \lambda$  é número de onda.

O vetor potencial magnético é dado por

$$A_{z}(x, y, z) = \frac{\mu_{0}I_{0}}{4\pi} \left\{ \int_{-l/2}^{0} \sin\left[k\left(\frac{l}{2} + z'\right)\right] \frac{e^{-jkR}}{R} dz' + \int_{0}^{l/2} \sin\left[k\left(\frac{l}{2} - z'\right)\right] \frac{e^{-jkR}}{R} dz' \right\},$$

$$R = \sqrt{x^{2} + y^{2} + (z - z')^{2}} = \sqrt{\rho^{2} + (z - z')^{2}}.$$
(3.2)

onde  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - z')^2} = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}$ .

Da definição de  $\overline{A}$ , tem-se em coordenadas cilíndricas

$$\overline{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \overline{A} = \hat{\rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_{\phi}}{\partial z} \right) + \hat{\phi} \left( \frac{\partial A_{\rho}}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) + \hat{z} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_{\phi})}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_{\rho}}{\partial \phi} \right],$$
(3.3)

como  $\overline{A}$  possui somente a componente  $A_z$  e esta não varia com  $\phi$ , a Eq. (3.3) é reduzida a

$$H_{\phi} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial \rho}.$$
(3.4)

Devido a simetria azimutal, a solução é a mesma para qualquer valor de  $\phi$ . Escolhendo-se  $\phi = \pi/2$ , tem-se as seguintes relações

$$\begin{cases} x = \rho \cos \phi = 0 \\ y = \rho \sin \phi = \rho , \\ \partial/\partial \rho = \partial/\partial y \end{cases}$$
(3.5)

logo, a Eq. (3.4) pode ser escrita como

$$H_{\phi} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_z}{\partial y}.$$
(3.6)

Substituindo (3.2) em (3.6), obtém-se

$$H_{\phi} = -\frac{I_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \int_{-l/2}^{0} \sin\left[k\left(\frac{l}{2} + z'\right)\right] \frac{e^{-jkR}}{R} dz' + \int_{0}^{l/2} \sin\left[k\left(\frac{l}{2} - z'\right)\right] \frac{e^{-jkR}}{R} dz' \right\},$$
(3.7)

e usando a relação de Euler

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{j2},$$

a Eq. (3.7) pode ser escrita na forma

$$H_{\phi} = j \frac{I_0}{8\pi} \left\{ e^{jk\frac{l}{2}} \int_{-l/2}^0 \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{e^{-jk(R-z')}}{R} \right] dz' - e^{-jk\frac{l}{2}} \int_{-l/2}^0 \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{e^{-jk(R+z')}}{R} \right] dz' + e^{jk\frac{l}{2}} \int_{0}^{l/2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{e^{-jk(R+z')}}{R} \right] dz' - e^{-jk\frac{l}{2}} \int_{0}^{l/2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{e^{-jk(R-z')}}{R} \right] dz' \right\}$$

$$(3.8)$$

Os integrandos de (3.8) podem ser desenvolvidos como

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{e^{-jk(R\pm z')}}{R} \right] = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{e^{-jk\left(\sqrt{x^2 + y^2 + (z-z')^2 \pm z'}\right)}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-z')^2}} \right] = -y \left( \frac{1}{R^3} + j\frac{k}{R^2} \right) e^{-jk(R\pm z')}.$$
 (3.9)

Com o uso de (3.9) o primeiro termo de (3.8) pode ser escrito como

$$\int_{-l/2}^{0} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{e^{-jk(R-z')}}{R} \right] dz' = -y \int_{-l/2}^{0} \left( \frac{1}{R^3} + j \frac{k}{R^2} \right) e^{-jk(R-z')} dz', \qquad (3.10)$$

cujo integrando é igual a seguinte diferencial

$$d\left[\frac{e^{-jk(R-z')}}{R(R+z-z')}\right] = \left[\frac{dR^{-1}}{(R+z-z')} + \frac{d(R+z-z')^{-1}}{R} - jk\frac{d(R-z')}{R(R+z-z')}\right]e^{-jk(R-z')}$$
$$= \left[\frac{1}{R^3} + j\frac{k}{R^2}\right]e^{-jk(R-z')}dz'$$
(3.11)

Com a relação dada em (3.11), a integral de (3.10) tem como solução

$$\int_{-l/2}^{0} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{e^{-jk(R-z')}}{R} \right] dz' = -y \frac{e^{-jk(R-z')}}{R(R+z-z')} \Big|_{-l/2}^{0}$$
$$= y \left[ \frac{e^{-jk\left(\frac{R}{2}+\frac{l}{2}\right)}}{R_{1}(R_{1}+z+l/2)} - \frac{e^{-jkr}}{r(r+z)} \right],$$
(3.12)

onde, para  $\phi = \pi/2$ ,  $R_1 = \sqrt{y^2 + (z + l/2)^2}$  e  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ .

Como

$$\begin{cases} R_1^2 - (z + l/2)^2 = y^2 \\ r^2 - z^2 = y^2 \end{cases},$$

a Eq. (3.12) pode ser escrita na forma

$$\int_{-l/2}^{0} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{e^{-jk(R-z')}}{R} \right] dz' = \frac{1}{y} \left[ \left( 1 - \frac{z+l/2}{R_1} \right) e^{-jk\left(\frac{R_1+l}{2}\right)} - \left( 1 - \frac{z}{r} \right) e^{-jkr} \right].$$
(3.13)

21

Realizando o mesmo procedimento para os demais termos de (3.7), chega-se em

$$\begin{aligned} H_{\phi} &= j \frac{I_{0}}{8\pi} \left\{ \frac{e^{jk\frac{l}{2}}}{y} \left[ \left( 1 - \frac{z + l/2}{R_{1}} \right) e^{-jk(R_{1} + l/2)} - \left( 1 - \frac{z}{r} \right) e^{-jkr} \right] \right. \\ &+ \frac{e^{-jk\frac{l}{2}}}{y} \left[ \left( 1 + \frac{z + l/2}{R_{1}} \right) e^{-jk(R_{1} - l/2)} - \left( 1 + \frac{z}{r} \right) e^{-jkr} \right] \\ &+ \frac{e^{jk\frac{l}{2}}}{y} \left[ \left( 1 + \frac{z - l/2}{R_{2}} \right) e^{-jk(R_{2} + l/2)} - \left( 1 + \frac{z}{r} \right) e^{-jkr} \right] \\ &+ \frac{e^{-jk\frac{l}{2}}}{y} \left[ \left( 1 - \frac{z - l/2}{R_{2}} \right) e^{-jk(R_{2} + l/2)} - \left( 1 - \frac{z}{r} \right) e^{-jkr} \right] \right] \end{aligned}$$
(3.14)

onde  $R_2 = \sqrt{y^2 + (z - l/2)^2}$ . A Eq. (3.14) pode ser simplificada a

$$H_{\phi} = j \frac{I_0}{4\pi y} \Big[ e^{-jkR_1} + e^{-jkR_2} - 2\cos(kl/2)e^{-jkr} \Big].$$
(3.15)

As componentes de campo elétrico podem ser determinadas a partir da seguinte equação de Maxwell

$$\overline{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \nabla \times \overline{H} \,. \tag{3.16}$$

Como  $\overline{H}$  só possui a componente  $H_{\phi}$ , a Eq. (3.16) é desenvolvida como

$$\overline{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon} \left[ -\hat{a}_{\rho} \frac{\partial H_{\phi}}{\partial z} + \hat{a}_{z} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho H_{\phi})}{\partial \rho} \right) \right].$$
(3.17)

Substituindo (3.15) em (3.17), obtém-se as seguintes componentes do campo elétrico no plano  $\phi = \pi/2$ 

$$E_{\rho} = E_{y} = j \frac{\eta I_{0}}{4\pi y} \left[ \frac{z + l/2}{R_{1}} e^{-jkR_{1}} + \frac{z - l/2}{R_{2}} e^{-jkR_{2}} - \frac{2z \cos(kl/2)}{r} e^{-jkr} \right], \quad (3.18a)$$

$$E_{z} = -j\frac{\eta I_{0}}{4\pi} \left[ \frac{1}{R_{1}} e^{-jkR_{1}} + \frac{1}{R_{2}} e^{-jkR_{2}} - \frac{2\cos(kl/2)}{r} e^{-jkr} \right].$$
 (3.18b)

onde  $\eta = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0} \cong 377 \ \Omega$  é a impedância intrínseca do espaço livre.

Lembrando que as expressões são válidas para qualquer posição no espaço fazendo  $y = \rho$ , devido a simetria azimutal do problema.

Com as expressões dos campos conhecidas, as densidades de energia elétrica e magnética médias podem ser determinadas a partir das seguintes expressões

$$W_e = \frac{\varepsilon_0}{4} \left| \overline{E}(\overline{r}) \right|^2 = \frac{\varepsilon_0}{4} \overline{E}(\overline{r}) \cdot \overline{E}^*(\overline{r}), \qquad (3.19)$$

$$W_m = \frac{\mu_0}{4} \left| \overline{H}(\overline{r}) \right|^2 = \frac{\mu_0}{4} \overline{H}(\overline{r}) \cdot \overline{H}^*(\overline{r}).$$
(3.20)

Substituindo (3.15) e (3.18) em (3.19) e (3.20), obtém-se após algumas manipulações matemáticas

$$W_{e} = \frac{\mu_{0}I_{0}^{2}}{32\pi^{2}\rho^{2}} \left\{ 1 + \left[ \frac{r^{2} - (l/2)^{2}}{R_{1}R_{2}} \right] \cos(k(R_{1} - R_{2})) - 2\frac{r^{2} + zl/2}{rR_{1}} \cos(kl/2)\cos(k(r - R_{1})) \right\}, \qquad (3.21)$$

$$-2\frac{r^{2} - zl/2}{rR_{2}}\cos(kl/2)\cos(k(r - R_{2})) + 2\cos^{2}(kl/2) \right\}$$

$$W_{m} = \frac{\mu_{0}I_{0}^{2}}{32\pi^{2}\rho^{2}} \left\{ 1 + \cos(k(R_{1} - R_{2})) - 2\cos(kl/2)\cos(k(r - R_{1})) - 2\cos(kl/2)\cos(k(r - R_{1})) - 2\cos(kl/2)\cos(k(r - R_{1})) - 2\cos(kl/2)\cos(k(r - R_{1})) \right\}. \qquad (3.22)$$

Nas Figs. 3.1 e 3.2 são mostradas as densidades de energia elétrica e magnética médias a uma distância transversal do dipolo de  $0,1\lambda$  para  $l = \lambda/2, \lambda/4, \lambda/8$  e  $\lambda/16$ . Para confirmar os resultados analíticos, as densidades também foram calculadas utilizando o método dos momentos com funções de base e teste pulsos constantes. No cálculo dos campos elétrico e magnético, foi feito o uso do modelo de dipolo infinitesimal. Como os elementos de corrente são finitos (dipolos finitos), este modelo não é válido para distâncias da ordem do comprimento dos elementos de corrente.



Figura 3.1. Densidades de energia elétrica e magnética médias para  $l = \lambda/2$  (a) e  $l = \lambda/4$  (b).



Figura 3.2. Densidades de energia elétrica e magnética médias para  $l = \lambda/8$  (a) e  $l = \lambda/16$  (b).

A partir das Figs. 3.1 e 3.2, observa-se que, na região de campo próximo do dipolo elétrico, as energias elétrica e magnética médias estão localizadas em domínios diferentes, mas com sobreposição parcial. A localização é mais pronunciada no caso do dipolo ressonante ( $l = \lambda/2$ ) onde  $W_m >> W_e$  em z = 0 e  $W_m << W_e$  em z = ±l e neste caso as energias magnética e elétrica armazenadas na região de campo próximo do dipolo são iguais.

Ao reduzir *l* de  $\lambda/2$  para  $\lambda/16$ , a densidade de energia elétrica aumenta, principalmente em z = 0, portanto, para o caso de dipolos curtos, a energia elétrica armazenada no campo próximo da antena excede consideravelmente a energia magnética.

As densidades de energia elétrica e magnética instantâneas podem ser determinadas a partir das expressões

$$w_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \left| \operatorname{Re}(\overline{E}e^{j\omega t}) \right|^2, \qquad (3.23)$$

$$w_m = \frac{\mu_0}{2} \left| \operatorname{Re}(\overline{H}e^{j\omega t}) \right|^2.$$
(3.24)

Substituindo (3.15) e (3.18) em (3.23) e (3.24), respectivamente, obtém-se após algumas manipulações matemáticas

$$w_{e} = \frac{\mu_{0}I_{0}^{2}}{32\pi^{2}\rho^{2}} \left\{ \left[ \left( \frac{2\rho}{r} \cos(kl/2)sen(kr) - \frac{\rho}{R_{1}}sen(kR_{1}) - \frac{\rho}{R_{2}}sen(kR_{2}) \right) \cos(\omega t) - \left( \frac{2\rho}{r} \cos(kl/2)\cos(kr) - \frac{\rho}{R_{1}}\cos(kR_{1}) - \frac{\rho}{R_{2}}\cos(kR_{2}) \right) sen(\omega t) \right]^{2} + \left[ \left( \frac{z+l/2}{R_{1}}sen(kR_{1}) + \frac{z-l/2}{R_{2}}sen(kR_{2}) - \frac{2z}{r}\cos(kl/2)sen(kr) \right) \cos(\omega t) - \left( \frac{z+l/2}{R_{1}}\cos(kR_{1}) + \frac{z-l/2}{R_{2}}\cos(kR_{2}) - \frac{2z}{r}\cos(kl/2)\cos(kr) \right) sen(\omega t) \right]^{2} \right\}$$

$$(3.25)$$

$$w_{m} = \frac{\mu_{0}I_{0}^{2}}{32\pi^{2}\rho^{2}} \{ [sen(kR_{1}) + sen(kR_{2}) - 2\cos(kl/2)sen(kr)]\cos(\omega t) \\ - [\cos(kR_{1}) + \cos(kR_{2}) - 2\cos(kl/2)\cos(kr)]sen(\omega t) \}^{2}$$
(3.26)

Nas Figs. 3.3 e 3.4 são mostradas as densidades de energia elétrica e magnética instantâneas a uma distância transversal do dipolo de  $0,1\lambda$  para  $l = \lambda/2$  e nos instantes de tempo t = 0, T/8, T/4 e 3T/8, onde T é o período de oscilação do sinal de excitação da antena. Para t = T/2, as densidades retornam para a posição t = 0.



Figura 3.3. Densidades de energia elétrica (a) e magnética (b) instantâneas para  $l = \lambda/2$ .



Figura 3.4. Densidades de energia elétrica (a) e magnética (b) instantâneas para  $l = \lambda/16$ .

A partir das Figs. 3.4 e 3.5, as densidades de energia elétrica e magnética instantâneas oscilam harmonicamente com o dobro da freqüência do sinal de excitação. Na vizinhança bem próxima do dipolo,  $w_e$  encontra-se defasada de  $\pi/4$  de  $w_e$ , ou seja, quando  $w_e$  alcança o seu máximo,  $w_m$  está no seu mínimo e vice-versa.

#### 3.2. Utilização de Elementos Parasitas

Para aumentar a banda de casamento de impedância das antenas é necessário reduzir a energia reativa armazenada na região de campo próximo da antena. É possível compensar esta energia utilizando elementos parasitas, ou seja, elementos acoplados apenas eletromagneticamente, que armazenam energia reativa contrária a da antena. Dessa forma, a energia reativa é transformada em energia de troca, ou seja, energia que fica alternando entre as formas magnética e elétrica (Figs. 3.4 e 3.5), sendo esta energia transformada em energia de propagação ao passar da região de campo próximo para a de campo distante.

No caso da antena dipolo linear, mostrado no tópico anterior, com comprimento menor que a metade do comprimento de onda de operação, foi verificado que esta antena possui uma energia reativa elétrica. Com a utilização de elementos parasitas com energia reativa contrária a esta antena, como é o caso de antenas espiras, é possível aumentar a faixa de casamento de impedância desta antena.

No capítulo IV, são mostrados os resultados de uma antena dipolo linear combinada com quatro espiras parasitas.

#### 3.3. Construção de Fendas no Radiador

Antenas são dispositivos ressonantes com uma largura de banda muito limitada. Uma maneira de projetar antenas de banda de larga é através da construção de fendas no radiador. Estas fendas permitem criar caminhos distintos para a corrente com freqüências de ressonância diferentes. Se estas ressonâncias tiverem freqüências próximas e um bom casamento de impedância, é possível obter uma antena com o dobro ou mais da largura de banda de uma com uma única ressonância.

No capítulo V, são mostrados os resultados de uma antena do tipo espira obtida através da construção de fendas na placa de radiação da antena.

## CAPÍTULO IV: Antena Dipolo com Quatro Espiras Parasitas para Aplicações em Sistemas de Banda Larga

#### 4.1. Introdução

Este trabalho apresenta uma proposta de uma nova antena, sendo resultante de uma modificação da antena publicada em [10]. Esta antena combina as antenas dipolo e espira com os momentos de dipolo ortogonais entre si. De acordo com os resultados obtidos por McLean [11] e Tefiku et all [12], quando os momentos de dipolo (elétrico e magnético) são ortogonais entre si, existe um forte acoplamento eletromagnético ou impedância mútua entre eles, em contraste com o caso em que os momentos de dipolo são paralelos.

Com a combinação de dipolos magnéticos em um dipolo elétrico, como explicado no capítulo III, é possível compensar a energia reativa armazenada na região de campo próximo do dipolo, com isso, aumentar a largura de banda (BW) da antena.

Para fazer a análise numérica desta antena, foi desenvolvido um programa em Matlab baseado no método dos momentos com funções de base e teste pulsos constantes, descrito no capítulo II seção 2.2. Foi utilizado também o programa comercial IE3D da Zeland para validar os resultados [13].

#### 4.2. Descrição da Antena

As configurações geométricas da antena original e modificada estão mostradas nas Figs. 3.1 (a) e (b). A configuração original (Fig. 3.1 (a)), é constituída por um arame reto (dipolo elétrico) de comprimento L, alinhado ao longo do eixo z, e duas espiras em arame com formato retangular de dimensões  $a_1 \ge b_1$  localizados no plano  $\ge z$  e simetricamente com relação ao eixo z. A configuração modificada (Fig. 3.1 (b)), por sua vez, é constituída por quatro espiras de dimensões  $a_2 \ge b_2$ , duas localizadas plano  $\ge z$  e as outras duas no plano yz, e simetricamente com relação ao eixo z. Na Fig. 3.1,  $d_i$  é a distância de separação entre o arame reto e as espiras. Todos os condutores da antena foram considerados com o raio L/200 e sem perda.



Figura 4.1. Configurações geométricas das antenas original (a) e proposta (b).

Em ambos os casos, a excitação é aplicada apenas no centro do arame reto e as espiras colocadas como elementos parasitas, ou seja, acopladas apenas eletromagneticamente. Além disso, os momentos de dipolo elétrico e magnético são ortogonais entre si.

#### 4.3. Otimização e Resultados

O algoritmo genético (AG) foi aplicado em ambas as configurações para otimizar a BW de perda de retorno. Nas simulações, foram considerados como parâmetros de otimização os parâmetros geométricos  $a_i$ ,  $b_i$  e  $d_i$ , enquanto que L foi mantido fixo e usado como fator de normalização para os demais parâmetros. Os intervalos de variação, a precisão e o número de bits utilizados para cada parâmetro de otimização são mostrados na Tabela 4.1.

Parâmetro	Intervalo	Precisão	N° de bits
$a_i / L$	$0.10 \le a_i / L \le 0.73$	0,01	6
$b_i / L$	$0.10 \le b_i / L \le 0.73$	0,01	6
$d_i/L$	$0.03 \le d_i / L \le 0.66$	0,01	6

Tabela 4.1. Parâmetros de otimização utilizados no AG.

Para a função objetivo do AG, foi considerada a maximização da BW de perda de retorno relativa, ou seja, BW dividida pela freqüência central, considerando o nível de -10 dB para a perda de retorno como referência. O cálculo da perda de retorno foi feito por

meio da expressão RL(dB)= $20\log_{10}|(Z_{in}-Z_0)/(Z_{in}+Z_0)|$ , onde  $Z_{in}$  é a impedância de entrada e  $Z_0$  é a impedância da linha de alimentação da antena.

A otimização da BW de perda de retorno foi feita para as impedâncias de linha de alimentação de 50 e 75  $\Omega$  (impedância de linha comerciais). Os valores dos parâmetros geométricos obtidos para cada configuração e impedância de linha são mostrados na Tabela 4.2.

	50 Ω	75 Ω
Configuração	Parâmetro	Parâmetro
	$a_1 / L = 0.55$	$a_1 / L = 0.50$
Original	$b_1 / L = 0.14$ $d_1 / L = 0.03$	$b_1 / L = 0.11$ $d_1 / L = 0.03$
	$a_2 / L = 0.50$	$a_2 / L = 0.41$
Proposta	$b_2/L = 0.10$	$b_2/L = 0.12$
	$d_2 / L = 0.03$	$d_2 / L = 0.03$

Tabela 4.2. Parâmetros geométricos das configurações otimizadas.

As impedâncias de entrada ( $Z_{in}=R_{in}+jX_{in}$ ) das configurações otimizadas (Tabela 4.1) para  $Z_0 = 50$  e 75  $\Omega$  são mostradas respectivamente nas Figs. 4.2 e 4.3. As impedâncias estão em função da freqüência normalizada  $f_n=f.L/C=L/\lambda$ , onde C é a velocidade da luz e L é o comprimento do arame reto.



Figura 4.2. Impedâncias de entrada das configurações original (a) e proposta (b) para  $Z_0 = 50 \Omega$ .



Figura 4.3. Impedâncias de entrada das configurações original (a) e proposta (b) para  $Z_0 = 75 \Omega$ .





Figura 4.5. Coeficientes de reflexão das configurações original (a) e proposta (b) para  $Z_0 = 75 \Omega$ .

A perda de retorno ou coeficiente de reflexão e a diretividade das configurações otimizadas (Tabela 4.1) estão mostradas nas Figs. 4.4 e 4.5. Devido à simetria na geometria das antenas, a diretividade foi calculada apenas nas direções +x e +y para a configuração original e na direção +x para a configuração proposta.

A Tabela 4.3 contém a BW de perda de retorno para um nível menor ou igual a -10 dB e as freqüências normalizadas inferior  $(f_{ni})$ , central  $(f_{nc})$  e superior  $(f_{ns})$  da banda de operação para cada caso mostrado nas Figs. 4.4 e 4.5.

	50 Ω		75 Ω			
Configuração	fin	f <sub>cn</sub>	f <sub>sn</sub>	f <sub>in</sub>	f <sub>cn</sub>	f <sub>sn</sub>
Original	0.47	0.67	0.71	0.47	0.63	0.80
	BW = 40 %		BW = 52 %			
Proposta	0.49	0.63	0.77	0.48	0.70	0.91
	BW = 44 %		BW = 61 %			

Tabela 4.3. Larguras de banda de perda de retorno.

Observa-se das Figs. 4.4 e 4.5 que a configuração proposta possui uma diretividade mais plana na banda de operação em relação à configuração original.

Para a impedância de linha de alimentação de 50  $\Omega$ , a configuração proposta tem uma BW de perda de retorno 4 % maior que a da configuração original, enquanto que, para 75  $\Omega$ , a configuração proposta tem uma BW 9% maior que a da original. Observa-se dos resultados mostrados na Tabela 4.3 que a introdução de mais duas espiras parasitas alargou a banda de operação na direção das freqüências mais altas.

Para as configurações (original e proposta) otimizadas para  $Z_0 = 50 \ \Omega$ , foram calculados os diagramas de radiação nas freqüências normalizadas centrais ( $f_{nc}$ ) mostradas na Tabela 4.3. Os diagramas são mostrados nos planos xy (ou  $\theta = 90^\circ$ ), xz (ou  $\phi = 0^\circ$ ) e yz (ou  $\phi = 90^\circ$ ) em escala linear, sendo considerada somente a componente de co-polarização, já que esta antena possui polarização linear.



Figura 4.6. Diagramas de radiação da configuração original (a) e proposta (b) no plano xy em  $f_{nc}$ .



Figura 4.7. Diagramas de radiação da configuração original (a) e proposta (b) no plano xz em  $f_{nc}$ .



Figura 4.8. Diagramas de radiação da configuração original (a) e proposta (b) no plano yz em  $f_{nc}$ .

Com relação aos diagrama de radiação, a configuração proposta possui uma característica mais omnidirecional (plano xy) que a configuração original, como já era previsto, devido a maior simetria da antena.

## CAPÍTULO V: Antena Compacta em Formato de Espira para Aplicações em Sistemas de Banda Larga

#### 5.1. Introdução

Na referência [14], uma antena do tipo espira é apresentada para o regime multibandas. Neste trabalho é apresentada uma versão modificada desta antena, a qual possui geometria mais simples e um regime de banda larga. Esta antena foi otimizada em termos de BW de perda de retorno utilizando a otimização paramétrica. A configuração otimizada possui uma BW de 70 % para um nível menor ou igual a -10 dB, sendo possível cobrir vários sistemas banda larga.

Para fazer a análise numérica desta antena, foi desenvolvido um programa em Fortran baseado no método dos momentos com funções de base e teste pulsos triangulares, descrito no capítulo II seção 2.3. Foi utilizado também o programa comercial IE3D da Zeland para validar os resultados.

#### 5.2. Estrutura da Antena

Na Fig. 1 são mostrados a geometria da antena de microfita analisada e o sistema de coordenadas de referência. Esta é uma antena planar do tipo espira com dimensões  $W_a \ge L_a$ . A antena está no mesmo plano e no topo do plano de terra de dimensões  $W_g \ge L_g$ . Em um aparelho, a placa de circuito desempenha a função do plano de terra. A antena é conectada a uma linha de transmissão de 50 ohms na placa de alimentação.

#### 5.3. Otimização e Resultados

No cálculo das perdas de retorno (RL(dB) =  $20\log_{10}|(Z_{in}-Z_0)/(Z_{in}+Z_0)|$ , onde  $Z_{in}$  é a impedância de entrada e  $Z_0$  é a impedância da linha de alimentação da antena), foram utilizados os seguintes parâmetros geométricos fixos (em milímetros):  $L_g = 40$ ;  $W_g = 70$ ;  $L_a = 22$ ;  $W_a = 9$ ;  $g_f = 1$ ;  $w_f = 2$ ;  $w_2 = 1,5$  e  $w_3 = 1,5$ . Para os parâmetros  $g_g$ ,  $g_s$  e  $w_l$ , foram considerados três diferentes valores, como mostrados respectivamente nas Fig. 5.2, 5.3 e 5.4, sendo na Fig. 5.2  $g_s = 1$  e  $w_l = 16$ , na Fig. 5.3  $g_g = 0,5$  e  $w_l = 16$ , e na Fig. 5.4  $g_g = 0,5$  e  $g_s = 1$ .



Figura 5.1. Geometria da antena e o sistema de coordenada de referência.

Aumentando  $g_g$  de 0,5 para 1,5 mm (Fig. 5.2), o casamento de impedância da antena piora em quase toda a banda de operação, apresentando um pequeno deslocamento da banda na direção das freqüências mais baixas. Aumentando  $g_s$  de 1 para 3 mm (Fig. 5.3), piora também o casamento em quase toda banda de operação. Variando  $w_I$  é possível controlar a o casamento de impedância na primeira e na terceira ressonâncias. Comparando os três valores considerados, com  $w_I = 15$  mm, a antena possui o pior casamento na primeira ressonância, por outro lado, a terceira apresenta o melhor casamento. Com  $w_I = 17$ mm, a situação é oposta.



Figura 5.2. Perda de retorno para  $g_s = 1$ ,  $w_l = 16$  e diferentes valores de  $g_g$  (em milímetros).



Figura 5.3. Perda de retorno para  $g_g = 0.5$ ,  $w_I = 16$  e diferentes valores de  $g_s$  (em milímetros).



Figura 5.4. Perda de retorno para  $g_g = 0.5$ ,  $g_s = 1$  e diferentes valores de  $w_l$  (em milímetros).

Após fazer a otimização paramétrica, obteve-se como configuração otimizada a configuração com  $g_g = 0.5$ ,  $g_s = 1$  e  $w_I = 16$ . Para validar o resultado obtido no programa desenvolvido em Fortran, foi utilizado o programa comercial IE3D, sendo mostrados os resultados de ambos os programas para a configuração otimizada na Fig. 5.5. Esta antena possui uma BW de perda de retorno em torno de 70 % para um nível menor ou igual a -10 dB.



Figura 5.5. Perda de retorno para  $g_g = 0.5$ ,  $g_s = 1$  e  $w_l = 16$  (em milímetros).

Na Fig. 5.6 são mostrados os diagramas de radiação nos planos xy, xz e yz na freqüência de 4,2 GHz, o qual corresponde aproximadamente a freqüência central de operação da antena. Os diagramas foram obtidos a partir do programa em Fortran e do programa IE3D.





Figura 5.6. Diagramas de radiação nos planos-xy (a), xz (b) e yz (c) na freqüência de 4,2 GHz.

Na Fig. 5.7 é mostrada a diretividade na direção  $\phi = 90^\circ$  e  $\theta = -45^\circ$ . Esta antena possui uma diretividade maior ou igual a 3 dBi em toda banda de operação, apresentando um pico de 4 dBi em 5,5 GHz.



Figura 5.7. Diretividade na direção  $\phi = 90^\circ$  e  $\theta = -45^\circ$ .

Na Fig. 5.8 é mostrada a distribuição de corrente na antena e em parte do plano de terra na freqüência de 4,2 GHz. Como pode ser observado, o percurso da corrente criado pela antena e o plano de terra faz com que a mesma opere no modo de um comprimento de onda. Este modo é mantido em um intervalo grande de freqüência, sendo responsável pela banda de impedância larga e bom casamento de impedância da antena.



Figura 5.8. Distribuição de corrente superficial na antena e em parte do plano de terra na freqüência de 4,2 GHz.

## CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objetivo a otimização de antenas lineares e planares para aplicações em sistemas de banda larga. Para análise numérica das antenas foi utilizado o método dos momentos com funções de base do tipo pulsos constantes e pulsos triangulares. Para otimização das antenas foram empregados o algoritmo genético e a otimização paramétrica. Neste trabalho, foram apresentadas duas propostas de antenas, uma antena dipolo linear combinada com quatro espiras parasitas e uma antena planar do tipo espira. A primeira proposta é uma modificação de uma antena já estudada na literatura. Esta consiste de duas espiras parasitas, enquanto que a proposta consiste de quatro. Com esta modificação, foi possível aumentar a largura de banda de perda de retorno de -10 dB em 4 % para a impedância de linha de alimentação de 50  $\Omega$  e em 9 % para 75  $\Omega$ . Além disso, obteve-se um diagrama de radiação mais omnidirecional e um ganho mais plano na banda de operação. A segunda proposta também é uma modificação de uma antena já estudada na literatura. Esta possui um regime multi-bandas, enquanto que a proposta possui um regime banda larga com largura de banda de perda de retorno de -10 dB de 70 %, além de possuir geometria mais simples que a antena original.

#### - Propostas de Trabalhos Futuros

Estudar novas configurações para a antena dipolo linear acoplada eletromagneticamente às espiras parasitas, como, por exemplo, uma configuração planar com quatro espiras no mesmo plano.

Aplicar algoritmos de otimização na antena planar do tipo espira para melhorar ainda mais as suas características.

Estudar possíveis aplicações das antenas propostas neste trabalho e analisar experimentalmente as mesmas.

## **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

- K. L. Wong, *Planar Antennas for Wireless Communications*. New York: John Wiley, 2003.
- [2] K. Q. da Costa, V. Dmitriev, D. C. Nascimento e J. C. da S. Lacava, "Broadband L-Probe Fed Patch Antenna Combined with Passive Loop Elements," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 6, pp. 100–102, 2007.
- [3] F. S. Paixão, M. N. Kawakatsu e V. A. Dmitriev, "Patch Antenna with T-Shaped Probe for Broadband Applications," *International Microwave and Optoelectronics Conference*, IMOC 2009, 2009.
- [4] K. Q. da Costa e V. Dmitriev, "Antena de microfita retangular com estubes periódicos para redução das dimensões", X Simpósio Brasileiro de Microondas e Optoeletrônica, Recife-PE, 2002.
- [5] Randy L. Haupt, "An Introduction to Genetic Algorithms for Electromagnetics," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 37, no. 2, 1995.
- [6] R. Jacob e R. S. Yahya, "Particle Swarm Optimization in Electromagnetics," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 52, no. 2, 2004.
- [7] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Method*. New York: Macmillan, pp. 62–81, 1968.
- [8] S. N. Makarov, Antenna and EM Modeling with Matlab. New York: John Wiley, 2002.
- [9] C. A. Balanis, Antenna Theory: Analysis and Design, 3ed. New York: John Wiley, 2005.
- [10] Costa, K. Q.; V. Dmitriev, "Combinações de dipolos elétricos e magnéticos com Simples Alimentação para Aumento da Largura de banda", XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, SBrT 04, Belém-PA, 2004.
- [11] F. Tefiku, C. A. Grimes, "Coupling Between Elements pf electrically Small Compound Antennas," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 22, no. 1, pp. 16–21, 1999.
- [12] J. S. McLean, "The Application of the Method of Moments to the Analysis of Electrically-Small "Compound Antennas"," *IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, pp. 119–124, 1995.

- [13] O endereço eletrônico da empresa é www.zeland.com.
- Y. Shin e S. O. Park, A Compact Loop Type Antenna for Bluetooth, S-DMB,
   Wibro, WiMax and WLAN Applications," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 6, pp. 320-323, 2007.

## **APÊNDICE**

#### A.1. Desenvolvimento da Matriz de Impedância para as Funções de Base Pulsos Retangulares

Substituindo as Eqs. (2.7) e (2.9) na Eq. (2.5) e representando os dois somatórios duplos em um único somatório e as funções de base nas direções x e y em uma única função tem-se

$$-\overline{E}^{r}(\overline{r}) = j \frac{\omega\mu_{0}}{4\pi} \int_{S} \sum_{n=1}^{N} I_{n} \overline{P}_{n}(\overline{r}) \frac{e^{-jkR}}{R} ds' + j \frac{1}{4\pi\omega\varepsilon_{0}} \nabla \int_{S} \sum_{n=1}^{N+1} I_{n} \left(\frac{P_{n}^{-}(\overline{r}')}{\Delta l_{n}^{-}} - \frac{P_{n}^{+}(\overline{r}')}{\Delta l_{n}^{+}}\right) \frac{e^{-jkR}}{R} ds',$$

$$Y = (Nx-1)Ny + Ny(Ny-1).$$
(A.1)

onde N = (Nx-1)Ny + Ny(Ny-1).

Como os operadores integral e divergente são lineares, os mesmos podem ser colocados dentro do somatório. Após colocar os coeficientes  $(I_n)$  em evidência, a Eq. (A.1) pode ser colocada na seguinte forma

$$-\overline{E}^{r}(\overline{r}) = \sum_{n=1}^{N} I_{n} \left[ j \frac{\omega \mu_{0}}{4\pi} \frac{\overline{\Delta l}_{n}}{\Delta l_{n}} \int_{\Delta s_{n}} \frac{e^{-jkR}}{R} ds^{*} + j \frac{1}{4\pi\omega\varepsilon_{0}} \nabla \left( \frac{1}{\Delta l_{n}^{+}} \int_{\Delta s_{n}^{+}} \frac{e^{-jkR}}{R} ds^{*} - \frac{1}{\Delta l_{n}^{-}} \int_{\Delta s_{n}^{-}} \frac{e^{-jkR}}{R} ds^{*} \right) \right]^{*}$$
(A.2)

A Eq. (A.2) será reescrita de uma forma mais compacta para facilitar as futuras manipulações como

$$-\overline{E}^{r} \cong \sum_{n=1}^{N} I_{n} \left( j \frac{\omega \mu_{0}}{4\pi} \overline{\Delta l}_{n} \psi_{n} + j \frac{1}{4\pi \omega \varepsilon_{0}} \nabla \left( \psi_{n}^{+} - \psi_{n}^{-} \right) \right),$$

$$\psi_{n}^{\pm} = \frac{1}{\Lambda l^{\pm}} \int \frac{e^{-jkR}}{R} ds^{*}.$$
(A.3)

onde  $\psi$  $\Delta l_n^{\pm} \Delta s_n^{\pm} K$ 

Para determinar as N = Nx(Ny-1) + (Nx-1)Ny incógnitas (coeficientes desconhecidos) são necessárias N equações linearmente independentes. Estas podem ser obtidas aplicando a Eq. (A.3) em N pontos distintos no domínio de análise.

Uma forma de garantir que o erro resultante da expansão feita em  $\overline{J}$  seja nulo em termos de média no domínio de análise é aplicando um procedimento de teste. Este procedimento consiste em aplicar o produto interno ou escalar com uma função de teste em ambos os lados da Eq. (A.3).

Neste trabalho foram utilizadas funções de teste iguais às funções de base, chamado de método de Galerkin [7]. Com a aplicação do procedimento de teste, a Eq. (A.3) resulta em

$$-\int_{\Delta s_m} \overline{E}^r \cdot \overline{P}_m ds = \sum_{n=1}^N I_n \left( j \frac{\omega \mu_0}{4\pi} \overline{\Delta I}_n \int_{\Delta s_m} \psi_n \cdot \overline{P}_m ds + j \frac{1}{4\pi \omega \varepsilon_0} \int_{\Delta s_m} \nabla \left( \psi_n^+ - \psi_n^- \right) \cdot \overline{P}_m ds \right),$$

$$1, 2, ..., N.$$
(A.4)

Considerando células de dimensões suficientemente pequenas, os campos apresentam uma pequena variação ao longo de uma célula, com isso, a Eq. (A.4) pode ser calculada com boa aproximação como

$$-\overline{E}_{m}^{r}\cdot\overline{\Delta l}_{m} = \sum_{n=1}^{N} I_{n} \left[ j \frac{\omega\mu_{0}}{4\pi} \overline{\Delta l}_{n} \cdot \overline{\Delta l}_{m} \psi_{m,n} + j \frac{1}{4\pi\omega\varepsilon_{0}} \left( \psi_{m,n}^{+,+} - \psi_{m,n}^{-,+} - \psi_{m,n}^{+,-} + \psi_{m,n}^{-,-} \right) \right],$$

$$2, \dots, N.$$
(A.5)

m = 1, 2, ..., N.

m =

Como produto escalar  $\overline{E}^r \cdot \overline{\Delta l}_m$  resulta em uma componente tangencial a S, a condição de contorno para a componente tangencial do campo elétrico nas superfícies perfeitamente condutoras da antena  $(\hat{n} \times (\overline{E}^r + \overline{E}^i) = 0)$ , onde  $\hat{n}$  é um versor normal a superfície da antena) pode ser utilizada diretamente na Eq. (A.5). Com isso, o campo incidente fica relacionado com a distribuição de corrente por meio da equação

$$\overline{E}_{m}^{i} \cdot \overline{\Delta l}_{m} = \sum_{n=1}^{N} I_{n} \left[ j \frac{\omega \mu_{0}}{4\pi} \overline{\Delta l}_{n} \cdot \overline{\Delta l}_{m} \psi_{m,n} + j \frac{1}{4\pi \omega \varepsilon_{0}} \left( \psi_{m,n}^{+,+} - \psi_{m,n}^{-,+} - \psi_{m,n}^{+,-} + \psi_{m,n}^{-,-} \right) \right],$$

$$m = 1, 2, ..., N.$$
(A.6)

A seguir será mostrado o procedimento realizado para o cálculo do termo  $\psi_{m,n}$ .

$$\psi_{m,n} = \frac{1}{\Delta l_n} \int_{y_n^- x_n^-}^{y_n^+ x_n^+} \frac{e^{-jkR_m}}{R_m} dx' dy', \qquad (A.7)$$

onde  $R_m = \sqrt{(x_m - x')^2 + (y_m - y')^2}$ .

Para os casos em que ponto de observação encontra-se no centro da célula de integração, ou seja, nos casos  $\psi_{n,n}$ ,  $\psi_{n,n}^{-,-}$  e  $\psi_{n,n}^{+,+}$ , foi feita expansão de exp(-jkR) em série de Maclauren como

$$e^{-jkR} = 1 - jkR - \frac{(kR)^2}{2} + \dots$$
 (A.8)

Considerando células de dimensões suficientemente pequenas, as integrais podem ser resolvidas com boa aproximação considerando apenas os dois primeiros termos. Para facilitar os cálculos, a integração pode ser feita com a origem do sistema de coordenadas no centro da célula. Após a integração, obtém-se para o termo  $\psi_{n,n}$ 

$$\psi_{n,n} = \frac{1}{\Delta l_n} \int_{-\Delta w_n/2}^{\Delta w_n/2} \int_{-\Delta l_n/2}^{\Delta l_n/2} \left[ \frac{1}{R_n} - jk \right] dx' dy'$$

$$= \left[ 2 \ln \left( \frac{R_{o,n} + \Delta w_n}{\Delta l_n} \right) + \frac{2\Delta w_n}{\Delta l_n} \ln \left( \frac{R_{o,n} + \Delta l_n}{\Delta w_n} \right) - j \frac{k}{2} \Delta w_n \right],$$
(A.9)

onde  $R_{o,n} = \sqrt{\Delta l_n^2 + \Delta w_n^2}$ .

Para os casos em que o ponto de observação encontra-se fora da célula de integração, o termo  $\psi_{m,n}$  pode ser calculado por

$$\psi_{m,n} = \frac{1}{\Delta l_n} \int_{\Delta s_n} f_n \frac{e^{-jkR_m}}{R_m} ds' = \frac{e^{-jkR_{m,n}}}{R_{m,n}} \Delta w_n,$$
(A.10)

onde  $R_{m,n} = \sqrt{(x_m - x_n)^2 + (y_m - y_n)^2}$ .

### A.2. Desenvolvimento da Matriz de Impedância para as Funções de Base Pulsos Triangulares

Substituindo as Eqs.  $(2.17a \ e \ 2.17b)$  na Eq. (2.5) e representando os dois somatórios duplos em um único somatório e as funções de base nas direções x e y em uma única função tem-se

$$-\overline{E}^{r} \cong j \frac{\omega \mu_{0}}{4\pi} \int_{S} \sum_{n=1}^{N} I_{n} \overline{P}_{n} \frac{e^{-jkR}}{R} ds' + j \frac{1}{4\pi\omega\varepsilon_{0}} \nabla \int_{S} \nabla \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} I_{n} \overline{P}_{n}\right) \frac{e^{-jkR}}{R} ds'.$$
(A.11)

Como os operadores integral e divergente são lineares, os mesmos podem ser colocados dentro do somatório. Após colocar os coeficientes em evidência, a Eq. (A.11) pode ser colocada na seguinte forma

$$-\overline{E}^{r} \cong \sum_{n=1}^{N} I_{n} \left( j \frac{\omega \mu_{0}}{4\pi} \int_{\Delta s_{n}} \overline{P}_{n} \frac{e^{-jkR}}{R} ds' + j \frac{1}{4\pi\omega\varepsilon_{0}} \nabla \int_{\Delta s_{n}} \left( \nabla \cdot \overline{P}_{n} \right) \frac{e^{-jkR}}{R} ds' \right).$$
(A.12)

Para facilitar as futuras manipulações, a Eq. (A.12) será reescrita como

$$-\overline{E}^{r} \cong \sum_{n=1}^{N} I_{n} \left( j \omega \overline{A}_{n} + j \frac{1}{\omega} \nabla \phi_{n} \right), \tag{A.13}$$

com

$$\overline{A}_{n} = \frac{\mu_{0}}{4\pi} \int_{\Delta s_{n}} \overline{P}_{n} \frac{e^{-jkR}}{R} ds^{,}$$

$$\phi_{n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}} \int_{\Delta s_{n}} (\nabla \cdot \overline{P}_{n}) \frac{e^{-jkR}}{R} ds^{,}$$

Aplicando o mesmo procedimento de teste (método de Galerkin) utilizado para o caso das funções de base pulsos retangulares, a Eq. (A.13) resulta em

$$-\int_{\Delta s_m} \overline{E}^r \cdot \overline{P}_m ds = \sum_{n=1}^N I_n \left( j\omega \int_{\Delta s_m} \overline{A}_n \cdot \overline{P}_m ds + j \frac{1}{\omega} \int_{\Delta s_m} \nabla \phi_n \cdot \overline{P}_m ds \right), m = 1, 2, ..., N.$$
(A.14)

Com o uso de uma das identidades vetoriais de superfície, o último termo da Eq. (A.14) pode ser reescrito como

$$\int_{\Delta s_m} \nabla \phi_n \cdot \overline{P}_m ds = -\int_{\Delta s_m} \phi_n \nabla \cdot \overline{P}_m ds .$$
(A.15)

Considerando células de dimensões suficientemente pequenas, os campos apresentam uma pequena variação ao longo de uma célula, com isso, a Eq. (A.15) pode ser calculada com boa aproximação como

$$\overline{E}_{m}^{r,-} \cdot \frac{\overline{\Delta l}_{m}^{-}}{2} + \overline{E}_{m}^{r,+} \cdot \frac{\overline{\Delta l}_{m}^{+}}{2} = \sum_{n=1}^{N} I_{n} \bigg[ j \frac{\omega}{2} \bigg( \overline{A}_{m,n}^{-} \cdot \overline{\Delta l}_{m}^{-} + \overline{A}_{m,n}^{+} \cdot \overline{\Delta l}_{m}^{+} \bigg) + j \frac{1}{\omega} \big( \phi_{m,n}^{+} - \phi_{m,n}^{+} \big) \bigg],$$

$$m = 1, 2, ..., N.$$
(A.16)

Aplicando a condição de contorno para a componente tangencial do campo elétrico nas superfícies perfeitamente condutoras da antena tem-se

$$\overline{E}_{m}^{i,-} \cdot \frac{\overline{\Delta l}_{m}^{-}}{2} + \overline{E}_{m}^{i,+} \cdot \frac{\overline{\Delta l}_{m}^{+}}{2} = \sum_{n=1}^{N} I_{n} \bigg[ j \frac{\omega}{2} \bigg( \overline{A}_{m,n}^{-} \cdot \overline{\Delta l}_{m}^{-} + \overline{A}_{m,n}^{+} \cdot \overline{\Delta l}_{m}^{+} \bigg) + j \frac{1}{\omega} \big( \phi_{m,n}^{+} - \phi_{m,n}^{+} \big) \bigg],$$

$$m = 1, 2, ..., N.$$
(A.17)

A seguir será mostrado o procedimento realizado para o cálculo dos termos  $\overline{A}_{m,n}^{\pm}$  e  $\phi_{m,n}^{\pm}$ . Considerando  $n \le (Nx-1)Ny$ , sendo que o desenvolvimento é o mesmo para n > (Nx-1)Ny1)Ny, tem-se

$$\overline{A}_{m,n}^{\pm} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Delta s_n} \overline{P}_n \frac{e^{-jkR_m^{\pm}}}{R_m^{c\pm}} ds' = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[ \hat{n}^- \frac{1}{\Delta l_n^-} \int_{y_n^- x_n^-}^{y_n^+ x_n} (x' - x_n^-) \frac{e^{-jkR_m^\pm}}{R_m^\pm} dx' dy' + \hat{n}^+ \frac{1}{\Delta l_n^+} \int_{y_n^- x_n^-}^{y_n^+ x_n^+} (x_n^+ - x') \frac{e^{-jkR_m^\pm}}{R_m^\pm} dx' dy' \right], \quad (A.18)$$

onde  $\hat{n}^{\pm}$  é um versor na direção de  $\overline{P}_{n}^{\pm}$ .

A Eq. (A.18) será reescrita em função de dois termos, correspondentes às células  $\stackrel{-}{n} \stackrel{+}{\mathrm{e}} \stackrel{n}{n}$ , como

$$\overline{A}_{m,n}^{\pm} = \overline{A}_{m,n}^{\pm,-} + \overline{A}_{m,n}^{\pm,+},$$
(A.19)

onde

$$A_{m,n}^{\pm,-} = \hat{n}^{-} \frac{\mu_{0}}{4\pi\Delta l_{n}^{-}} \int_{y_{n}^{-}x_{n}^{-}}^{y_{n}^{+}x_{n}} (x'-x_{n}^{-}) \frac{e^{-jkR_{m}^{\pm}}}{R_{m}^{\pm}} dx' dy',$$
$$A_{m,n}^{\pm,+} = \hat{n}^{+} \frac{\mu_{0}}{4\pi\Delta l_{n}^{+}} \int_{y_{n}^{-}x_{n}}^{y_{n}^{+}x_{n}^{+}} (x_{n}^{+}-x') \frac{e^{-jkR_{m}^{c\pm}}}{R_{m}^{\pm}} dx' dy'.$$

Para os casos em que ponto de observação encontra-se no centro da célula de integração, como é nos casos de  $\overline{A}_{n,n}^{-,-}$  e  $\overline{A}_{n,n}^{+,+}$ , foi feita expansão de  $\exp(-jkR)$  mostrada na Eq. (A.8). Para facilitar os cálculos, a integração pode ser feita com a origem no centro da célula, com isso, tem-se

$$\overline{A}_{n,n}^{-,-} = \hat{n}^{-} \frac{\mu_{0}}{4\pi\Delta l_{n}^{-}} \int_{-\Delta w_{n}/2}^{\Delta w_{n}/2} \int_{-\Delta l_{n}^{-}/2}^{\Delta l_{n}^{-}/2} \left[ \frac{x' + \Delta l_{n}^{-}/2}{R_{n}^{c-}} - jk \left( x' + \Delta l_{n}^{-}/2 \right) \right] dx' dy'$$

$$= \hat{n}^{-} \frac{\mu_{0}}{4\pi} \left[ \Delta l_{n}^{-} \ln \left( \frac{R_{o,n}^{c-} + \Delta w_{n}}{\Delta l_{n}^{-}} \right) + \Delta w_{n} \ln \left( \frac{R_{o,n}^{c-} + \Delta l_{n}^{-}}{\Delta w_{n}} \right) - j \frac{k}{2} \Delta l_{n}^{-} \Delta w_{n} \right], \quad (A.20a)$$

$$R_{o,n}^{c-} = \sqrt{\Delta l_{n}^{-2} + \Delta w_{n}^{2}}.$$

onde  $R_{o,n}^{c-} = \sqrt{$ 

$$\overline{A}_{n,n}^{+,+} = \hat{n}^{+} \frac{\mu_{0}}{4\pi\Delta l_{n}^{+}} \int_{-\Delta w_{n}/2}^{\Delta w_{n}/2} \int_{-\Delta l_{n}^{+}/2}^{\Delta l_{n}^{+}/2} \left[ \frac{\Delta l_{n}^{+}/2 - x'}{R_{n}^{c+}} - jk \left( \Delta l_{n}^{+}/2 - x' \right) \right] dx' dy'$$

$$= \hat{n}^{+} \frac{\mu_{0}}{4\pi} \left[ \Delta l_{n}^{+} \ln \left( \frac{R_{o,n}^{+} + \Delta w_{n}}{\Delta l_{n}^{+}} \right) + \Delta w(n) \ln \left( \frac{R_{o,n}^{+} + \Delta l_{n}^{+}}{\Delta w_{n}} \right) - j \frac{k}{2} \Delta l_{n}^{+} \Delta w_{n} \right]'$$
onde  $R_{o,n}^{+} = \sqrt{\Delta l_{n}^{+2} + \Delta w_{n}^{2}}$ . (A.21b)

Para os casos em que o ponto de observação encontra-se fora da célula de integração, os termos  $\overline{A}_{m,n}^{\pm,-}$  e  $\overline{A}_{m,n}^{\pm,+}$  podem ser calculados como

$$\overline{A}_{m,n}^{\pm,-} = \hat{n}^{-} \frac{\mu_0 e^{-jkR_{m,n}^{c\pm,c-}}}{8\pi R_{m,n}^{c\pm,c-}} \int_{y_n^- x_n^-}^{y_n^+ x_n} dx' dy' = \hat{n}^{-} \frac{\mu_0 e^{-jkR_{m,n}^{c\pm,c-}}}{8\pi R_{m,n}^{c\pm,c-}} \Delta l_n^- \Delta w_n , \qquad (A.22a)$$

$$\overline{A}_{mn}^{\pm+} = \hat{n}^{+} \frac{\mu_{0} e^{-jkR_{m,n}^{\pm\pm,c+}}}{8\pi R_{m,n}^{c\pm,c+}} \int_{y_{n}^{-}x_{n}}^{y_{n}^{\pm}x_{n}^{+}} dx' dy' = \hat{n}^{+} \frac{\mu_{0} e^{-jkR_{m,n}^{\pm\pm,c+}}}{8\pi R_{m,n}^{c\pm,c+}} \Delta l_{n}^{+} \Delta w_{n} , \qquad (A.22a)$$

onde  $R_{m,n}^{\pm,\pm}$  é a distância do centro da célula  $\overset{\pm}{n}$  ao centro da célula  $\overset{\pm}{m}$ .

No cálculo do termo  $\phi_{m,n}^{\pm}$ , foi utilizado o mesmo procedimento descrito anteriormente para o cálculo do termo  $\overline{A}_{m,n}^{\pm}$ .

$$\phi_{m,n}^{\pm} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\Delta s_n} (\nabla \cdot \bar{f}_n) \frac{e^{-jkR_m^{\pm}}}{R_m^{\pm}} ds^{,}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{\Delta l_n^{-}} \int_{y_n^{-} x_n^{-}}^{y_n^{+} x_n} \frac{e^{-jkR_m^{\pm}}}{R_m^{\pm}} dx' dy' - \frac{1}{\Delta l_n^{+}} \int_{y_n^{-} x_n^{-}}^{y_n^{+} x_n^{+}} \frac{e^{-jkR_m^{\pm}}}{R_m^{\pm}} dx' dy' \right) = \phi_{m,n}^{\pm,+} - \phi_{m,n}^{\pm,-}$$
(A.23)

Para os casos em que ponto de observação encontra-se no centro da célula de integração, como é nos casos de  $\phi_{n,n}^{-,-}$  e  $\phi_{n,n}^{+,+}$ , foi feita a expansão mostrada na Eq. (2.18), obtendo-se como resultados

$$\phi_{n,n}^{-,-} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \left[ \ln\left(\frac{R_{o,n}^- + \Delta w_n}{\Delta l_n^-}\right) + \frac{\Delta w_n}{\Delta l_n^-} \ln\left(\frac{R_{o,n}^- + \Delta l_n^-}{\Delta w_n}\right) - j\frac{k}{2}\Delta w_n \right],$$
(A.24a)

$$\phi_{n,n}^{+,+} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \left[ \ln\left(\frac{R_{o,n}^+ + \Delta w_n}{\Delta l_n^+}\right) + \frac{\Delta w_n}{\Delta l_n^+} \ln\left(\frac{R_{o,n}^+ + \Delta l_n^+}{\Delta w_n}\right) - j\frac{k}{2}\Delta w_n \right].$$
(A.24b)

Para os casos em que o ponto de observação encontra-se fora da célula de integração, os termos  $\phi_{m,n}^{\pm,-}$  e  $\phi_{m,n}^{\pm,+}$  podem ser aproximados como

$$\phi_{m,n}^{\pm,-} = \frac{e^{-jkR_{m,n}^{\pm,-}}}{4\pi\varepsilon_0\Delta l_n^- R_{m,n}^{\pm,-}} \int_{y_n^- x_n^-}^{y_n^+ x_n} dx' dy' = \frac{e^{-jkR_{m,n}^{\pm,-}}}{4\pi\varepsilon_0 R_{m,n}^{\pm,-}} \Delta w_n , \qquad (A.25a)$$

$$\phi_{m,n}^{\pm,+} = \frac{e^{-jkR_{m,n}^{\pm,+}}}{4\pi\varepsilon_0\Delta l_n^+ R_{m,n}^{\pm,+}} \int_{y_n^- x_n}^{y_n^+ x_n^+} dx' dy' = \frac{e^{-jkR_{m,n}^{\pm,+}}}{4\pi\varepsilon_0 R_{m,n}^{\pm,+}} \Delta w_n \,. \tag{A.25b}$$