

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

MODELAMENTO MATEMÁTICO DE INTERFACES NEUROLÓGICAS

FERNANDO ANTÔNIO PINHEIRO GOMES

DM 027/2009

UFPA / ITEC / PPGEE  
Campus Universitário do Guamá  
Belém-Pará-Brasil  
2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

FERNANDO ANTÔNIO PINHEIRO GOMES

MODELAMENTO MATEMÁTICO DE INTERFACES NEUROLÓGICAS

UFPA / ITEC / PPGEE  
Campus Universitário do Guamá  
Belém-Pará-Brasil  
2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

FERNANDO ANTÔNIO PINHEIRO GOMES

MODELAMENTO MATEMÁTICO DE INTERFACES NEUROLÓGICAS

Dissertação submetida à Banca  
Examinadora do Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia  
Elétrica da UFPA para a obtenção  
do Grau de Mestre em  
Engenharia Elétrica

UFPA / ITEC / PPGEE  
Campus Universitário do Guamá  
Belém-Pará-Brasil  
2009

---

G633m Gomes, Fernando Antonio Pinheiro

Modelamento matemático de interfaces neurológicas / Fernando Antonio Pinheiro Gomes; orientador, Victor Alexandrovich Dmitriev.- 2009

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Belém, 2009.

1. Engenharia biomédica . 2. Green, funções de . 3. Equações diferenciais. I. orientador. II. título.

CDD 22. ed. 610.28

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

MODELAMENTO MATEMÁTICO DE INTERFACES NEUROLÓGICAS

AUTOR: FERNANDO ANTÔNIO PINHEIRO GOMES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO DA BANCA EXAMINADORA APROVADA PELO COLEGIADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ E JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA ELÉTRICA NA ÁREA DE TELECOMUNICAÇÕES.

APROVADA EM \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

BANCA EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. Victor Alexandrovich Dmitriev  
(ORIENTADOR – UFPA)

---

Prof. Dr. Rubem Gonçalves Farias  
(MEMBRO – UFPA)

---

Prof. Dr. Danilo Teixeira Alves  
(MEMBRO – UFPA)

---

Prof. Dr. Karlo Queiroz da Costa  
(MEMBRO – UFPA)

VISTO:

---

Prof. Dr. Marcus Vinicius  
(COORDENADOR DO PPGEE/ITEC/UFPA)

## AGRADECIMENTOS

À UFPA (Universidade Federal do Pará), referência em ensino, pesquisa e extensão no Brasil.

Ao Grupo de Nanofotônica e Nanoeletrônica da UFPA, por fornecer a infraestrutura necessária ao bom andamento das minhas atividades de pesquisa.

Aos professores e funcionários da FEE (Faculdade de Engenharia Elétrica) e do PPGEE (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica), por terem colaborado decisivamente na minha formação intelectual.

Aos amigos Álvaro Leitão e Marden Sobreira pelos incentivos e ouvidos sempre atento.

Especial agradecimento a minha família, sem os quais este trabalho não existiria.

Por fim, agradeço a todos que contribuíram de alguma forma com este trabalho.

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO 1 – UMA INTRODUÇÃO AOS NEURÔNIOS .....	4
1.1 – Os principais componentes do sistema nervoso humano .....	4
1.2 – O tecido nervoso .....	4
1.3 – Potenciais de membrana .....	5
1.4 – Medidas do potencial de membrana .....	7
1.5 – Princípio da neutralidade elétrica .....	8
1.6 – Bomba de sódio-potássio .....	9
1.7 – Permeabilidade da membrana neural .....	10
1.8 – Origem do potencial de membrana normal em repouso .....	10
1.9 – Potencial de ação neural .....	11
1.10 – Começo de um potencial de ação .....	13
1.11 – Propagação do potencial de ação ao longo da fibra nervosa .....	13
1.12 – Exemplo da ação dos potenciais de ação .....	15
CAPÍTULO 2 – JUNÇÃO NEURÔNIO-SEMICONDUTOR.....	17
2.1 – A estrutura da junção neurônio-semicondutor .....	17
2.2 – Dinâmica da junção neurônio-substrato .....	19
CAPÍTULO 3 – SOLUÇÕES ANALÍTICAS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA .....	24
3.1 – Solução analítica no domínio da frequência – Método da superposição .....	24
3.2 – Solução analítica no domínio da frequência - Método do operador .....	28
Capítulo 4 – RESULTADOS OBTIDOS .....	35
4.1 – Comparação entre os dois métodos .....	35
4.1.1 – Análise quando a frequência tende a zero .....	35
4.1.2 – Análise quando a frequência tende ao infinito .....	38
4.1.3 – Análise em médias frequências .....	40
CONCLUSÃO.....	42
SUGESTÕES PARA ESTUDOS FUTUROS.....	43

APÊNDICE A .....	44
APÊNDICE B.....	47
APÊNDICE C.....	58
BIBLIOGRAFIA .....	67

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Fig. 1. Desenho representando interface homem-máquina .....	1
Fig. 2. Ilustração de uma ponte em torno de tecido lesionado .....	2
Fig. 1.1. Estrutura de um neurônio do encéfalo.....	5
Fig. 1.2. Potenciais de difusão através da membrana celular .....	6
Fig. 1.3. Medida do potencial de membrana celular .....	7
Fig. 1.4. Distribuição de íons do líquido intersticial da fibra nervosa.....	8
Fig. 1.5. Bomba de $Na^+ - K^+$ .....	9
Fig. 1.6. Canais de vazamento $Na^+ - K^+$ .....	10
Fig. 1.7. Contribuição do potencial de difusão do potássio.....	11
Fig. 1.8. Contribuição do potencial de difusão do sódio .....	11
Fig. 1.9. Exemplo de um típico potencial de ação.....	12
Fig. 1.10. Propagação do potencial de ação .....	14
Fig. 1.11. Exemplo da ação do potencial de ação para o sistema olfativo .....	15
Fig. 2.1. Célula nervosa de um rato sobre um substrato de silício .....	17
Fig. 2.2. Indicação da formação da fenda na junção .....	18
Fig. 2.3. Indicação da formação da tensão $V_j$ na junção entre neurônio-substrato.....	19
Fig. 2.4. Modelo matemático representativo da dinâmica da junção-substrato .....	20
Fig. 5.1.(a) Módulo da função de transferência para baixas frequências .....	37
Fig. 5.1.(b) Fase da função de transferência para baixas frequências .....	38
Fig. 5.2.(a) Módulo da função de transferência da equação (5.1) .....	40
Fig. 5.2.(b) Fase da função de transferência da equação (5.1). .....	41
Fig. A.1. Modelo contacto de área.....	44
Fig. B.1. Função de Green como função de $x$ e $\xi$ .....	51
Fig. B.2. Função de Green-Modal como função de $x$ e $\xi$ .....	55

## RESUMO

O estudo do comportamento dinâmico da junção que se forma ao se unir uma fibra nervosa a um semicondutor é objeto de muitas pesquisas ultimamente em grandes centros de pesquisas. Estes estudos levam basicamente a dois modelos matemáticos de modelagem da junção: o modelo de contacto de ponta e o modelo de contacto de área. Utilizando o modelo de contacto de área, resolve-se a equação diferencial que descreve o comportamento dinâmico da junção neurônio-semicondutor, através de dois métodos analíticos.

No primeiro método a solução da equação diferencial é obtida através da soma de duas equações: da solução da equação homogênea mais a da equação particular, obtendo dessa forma, o resultado que consta na literatura. Já o segundo método é o que descreve a solução usando as funções de Green, cujo resultado, embora não coincidente com o da literatura, é totalmente coincidente na região de interesse dentro da junção.

A vantagem do uso da função de Green na determinação da solução de uma equação diferencial, é que, uma vez determinada essa função, a solução dessa equação diferencial é obtida de forma imediata, bastando para tal, fazer um processo de integração do produto entre a função de Green e a função de excitação ou fonte.

Por último, mostra-se a completa equivalência entre os dois métodos de soluções da equação diferencial.

**PALAVRAS-CHAVE:** Junção neurônio-semicondutor, modelo contacto de área, solução analítica, função de Green.

## ABSTRACT

The study of the dynamic behavior of the neuron transistor junction has been the aim of several great research centers lately. These studies basically give rise to two mathematical models that describe the neuron transistor junctions: the point contact model and the area contact model.

Through the area contact model, this work shows how to obtain solutions of the differential equation that describe the dynamic behavior of the neuron transistor junction using two different analytical methods.

In the first method chosen the solution of the differential equation give rise from summation between the solutions of the homogeneous equation and the particular equation. The second choice uses the Green's functions to obtain the solution of the equation.

At last, it is proved that the two methods are fully equivalent between each other.

**KEYWORDS:** Neuron semiconductor junction, area contact model, analytical solution, Green's function.

# INTRODUÇÃO

São dois os fatores motivadores deste estudo:

1) Em um futuro próximo, chegar-se-á em algum tipo de interface que permitirá uma interação homem-máquina, como o esquematizado na figura 1 [2].

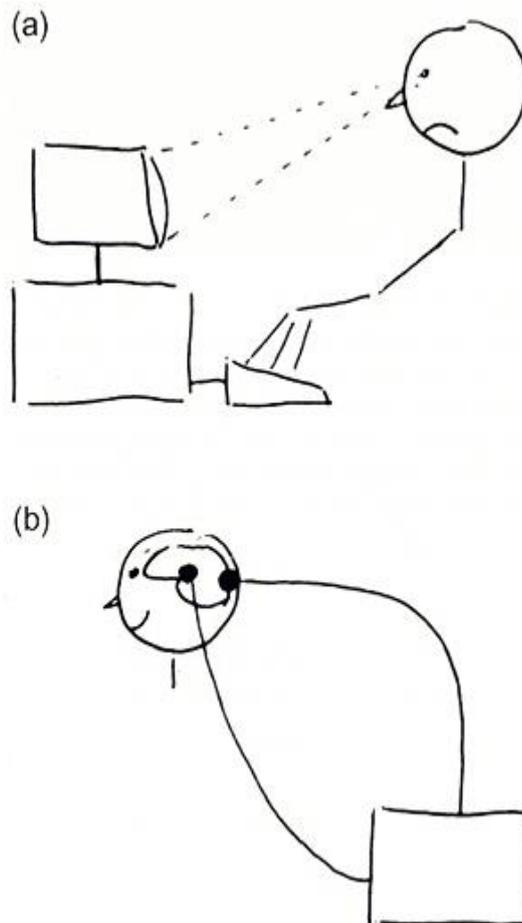


Fig. 1. Desenho representando interface homem-máquina. (Adaptado de [2]).

Na figura 1-a tem-se a interface tradicional, homem-máquina, em que a interação depende da visualização do conteúdo que se apresenta na tela do computador e, esse conteúdo, por sua vez, é processado no cérebro humano e posteriormente realimentado ao computador, por meio de uma codificação de impulsos nervosos, através de uma unidade periférica de entrada, que neste caso da ilustração é o teclado do computador.

Esse é um processo relativamente lento.

Na figura 1-b tem-se a interface futurista, que para torná-la uma realidade, diversas pesquisas estão sendo desenvolvidas no campo da neurociência. Basicamente o processo é o mesmo do anterior, apenas divergindo quanto à realimentação, que ocorre de forma direta entre o cérebro humano e a máquina, tornando assim, a interação homem-máquina bem superior em desempenho, quando comparada com a interface tradicional; e

2) O tecido nervoso é um tecido que uma vez danificado, não sofre processo de recuperação. Atualmente existem diversas pesquisas sobre a recuperação do tecido nervoso, bem como de outros tecidos e até mesmo de órgãos inteiros, baseados no uso de células tronco.

Outro enfoque, também bastante promissor, é o de se fazer uma ponte eletrônica em torno do tecido danificado, conforme mostra a figura 2.

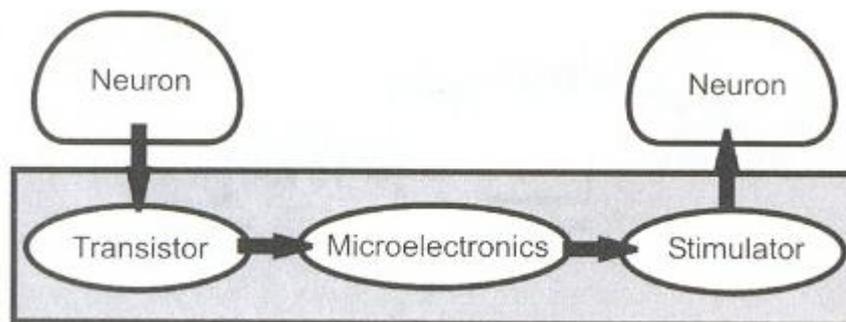


Fig. 2. Ilustração de uma ponte em torno de tecido lesionado [2].

Nessa figura, capturam-se os impulsos nervosos através de um sensor, processa-se essa informação, que está codificada e, reintroduz-se esse sinal no tecido são depois da lesão.

Mas recentemente, com o avanço da tecnologia, cientistas americanos desenvolveram uma câmera de tamanho bastante reduzido que instalada nos óculos do paciente, envia o sinal capturado pela câmara, diretamente ao nervo óptico, através de micro-sensores que foram instalados previamente. Esse processo foi testado em um paciente cego de nascença, mas cujo nervo óptico estava em perfeito estado. Esse procedimento permitiu ao paciente distinguir formas de objetos e as várias nuances da luz, conforme foi divulgado nos noticiários nacionais e internacionais.

Em ambos os casos, 1) e 2), há o surgimento de uma junção, entre a membrana celular e o sensor, devido ao acoplamento entre a célula nervosa e o semiconductor. Nessa junção, chamada de neurônio-silício, surge uma tensão, que pode ser medida [2] e que traduz o comportamento dinâmico dessa junção descrita por meio de uma equação diferencial parcial.

Assim, torna-se de fundamental importância o estudo da dinâmica dessa junção, através de métodos alternativos de solução da equação diferencial, que descreve o modelo matemático representativo da junção neurônio-semicondutor.

Neste estudo, as soluções analíticas são preferidas à solução numérica, pois essas soluções fornecem meios de se fazer uma análise potencial, simples e rápida das variáveis envolvidas no processo sem a necessidade do uso de programas computacionais, que envolve cálculos numéricos trabalhosos para cada simulação, além é claro, dos erros de truncamento que faz com que muitas das vezes, a solução não convirja.

Dessa forma, resolve-se a equação diferencial representativa da junção neurônio-semicondutor, através da utilização de dois métodos analíticos: o primeiro deles utiliza o método da superposição, cuja solução é a soma entre a solução da equação homogênea mais a solução da equação particular. O segundo método faz uso das funções de Green.

Esses métodos analíticos são bastante diferentes entre si. No primeiro método sempre que se mudar a excitação ou fonte, deve-se resolver a equação como um todo, ao passo que pelo método que utiliza a função de Green, uma vez que se tenha determinada tal função, a solução fica independente da fonte, dependendo apenas de uma integração do produto entre a função de Green e a excitação.

Por último, faz-se uma comparação entre as soluções desses métodos analíticos em que se mostra a total equivalência entre ambos.

# CAPÍTULO 1

## UMA INTRODUÇÃO AOS NEURÔNIOS [1]

### 1.1 – Os principais componentes do sistema nervoso humano

De modo simplificado, o sistema nervoso se divide em sistema nervoso central e sistema nervoso periférico. O sistema nervoso central é constituído pelo encéfalo e pela medula espinhal.

O encéfalo é a principal região integrativa do sistema nervoso, o qual é dividido em muitos componentes funcionais, pois o mesmo é o responsável por controlar funções que estão relacionadas ao psiquismo e ao controle de ações complexas do corpo humano ao passo que a medula espinhal desempenha duas funções. A primeira funciona como condutor de muitas vias nervosas que saem ou que chegam ao encéfalo. A segunda age como região integrativa para coordenação de muitas atividades neurais subconscientes, como a reação a um estímulo doloroso e até mesmo movimentos grosseiros, como os de marcha.

O sistema nervoso periférico é composto de malha muito ramificada de nervos e também muito extensa, que cobre cada parte, por menor que seja do corpo humano.

### 1.2 – O tecido nervoso

O tecido nervoso contém dois tipos básicos de células que são os neurônios, que conduzem os impulsos nervosos por todo o sistema nervoso e as células de suporte e isolamento, chamadas de neuroglia, que mantêm os neurônios em suas posições relativas e impedem que os impulsos nervosos permaneçam concentrados em cada neurônio, ou seja, que não se dispersem pelos neurônios, fato esse que é extremamente indesejável.

A figura 1.1 mostra todos os elementos de um neurônio do encéfalo ou da medula espinhal, que são:

- 1) Corpo celular – é a partir dele que se originam todas as outras partes do neurônio;
- 2) Dendritos – são expansões, muito ramificadas e múltiplas do corpo celular, responsáveis pelo recebimento dos impulsos nervosos que serão transmitidos, de milhares de outros neurônios;

3) Axônio – é a parte do neurônio conhecida como fibra nervosa. Possuem comprimentos variados, podendo ser de apenas alguns milímetros a até um metro. Os axônios são os responsáveis em conduzir os impulsos nervosos até o próximo neurônio; e

4) Terminações axônicas e sinapses – próximo ao seu término, o axônio forma milhares de ramificações e em cujas extremidades de cada uma delas, existem terminações especializadas, chamadas de terminações pré-sinápticas. Essas terminações formam um ponto de contacto, chamado sinapse, através do qual os impulsos nervosos são transmitidos de um neurônio para o outro. Quando estimulado, o terminal pré-sináptico libera um hormônio conhecido como substância transmissora.

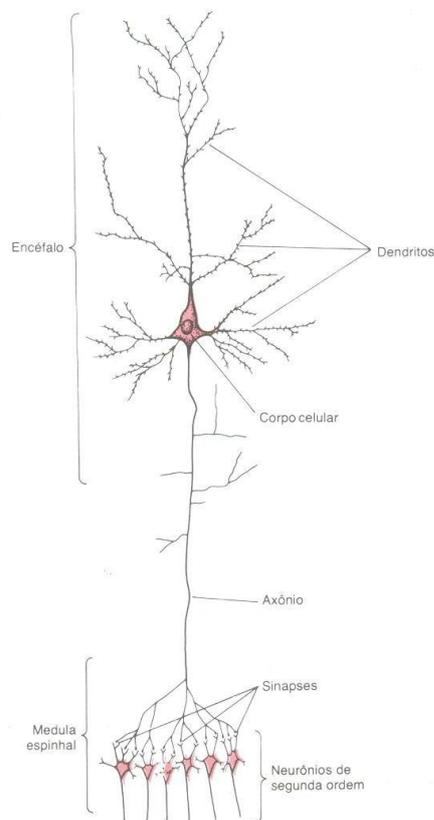


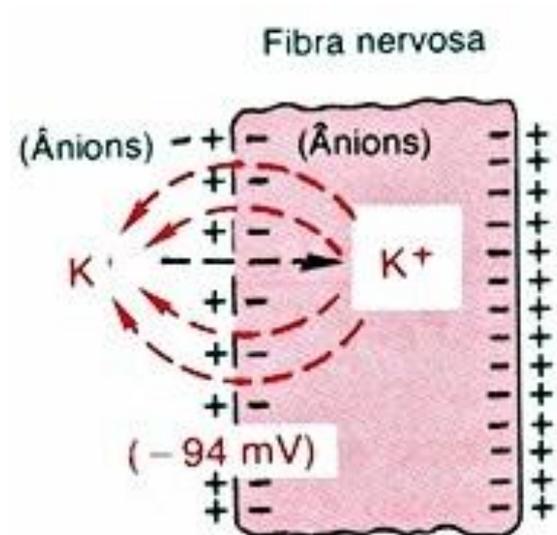
Fig. 1.1. Estrutura de um neurônio do encéfalo.

### 1.3 – Potenciais de membrana

Existem potenciais elétricos entre a parte externa e interna da membrana celular de praticamente todas as células do corpo humano, como as células musculares e as nervosas,

por exemplo, que são excitáveis. Esses potenciais elétricos, neste tipo de tecido, são devidos, principalmente, as ações de dois íons: o Sódio e o Potássio.

(a)



(b)

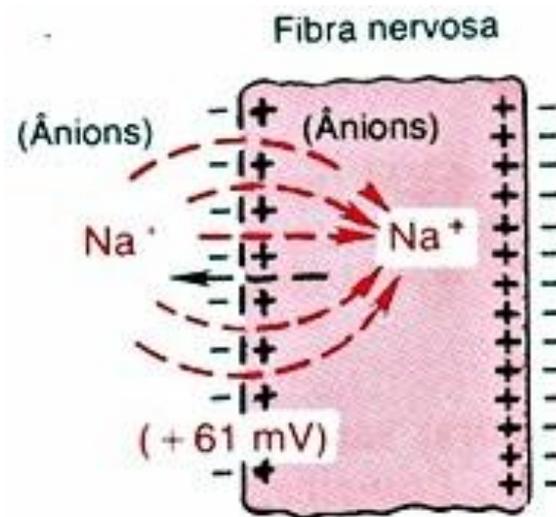


Fig. 1.2. Potenciais de difusão através da membrana celular.

A figura 1.2-a apresenta, esquematicamente, o desenvolvimento de potencial de difusão através da membrana celular, causado pela difusão devido à alta concentração de íons de potássio no interior da célula nervosa, do interior para o exterior da célula. A membrana, nesse caso, é seletivamente permeável apenas ao potássio. Dessa forma, os íons potássio difundem-se para fora da célula. Isso faz com que a face externa da célula fique com cargas positivas e o interior da célula com cargas negativas. Todo esse movimento iônico é muito

rápido, com duração de aproximadamente de 1 *ms*. Essa nova diferença de potencial repele os íons potássio de volta para o interior da célula, criando um bloqueio de qualquer movimento efetivo de potássio para o exterior. Essa diferença de potencial, que bloqueia a corrente iônica de potássio, é da ordem de 94 *mV*, com a negatividade no interior da fibra nervosa.

Na figura 1.2-b, representa o mesmo fenômeno que ocorre para os íons potássio, só que agora, para os íons de sódio. Desta vez a membrana apresenta-se permeável aos íons sódio, que também são positivos, só que sua concentração ocorre no exterior da membrana e o movimento desses íons é para o interior da membrana. Esse movimento iônico de sódio ocorre até atingir o potencial de bloqueio, que também dura cerca de 1 *ms*, sendo que o potencial necessário é de cerca de 60 *mV*, sendo positivo no interior celular.

O que mantém esse gradiente de concentração de íons de sódio e potássio na membrana plasmática é a bomba de sódio e potássio, que o faz à custa de energia obtida através da respiração celular.

#### 1.4 – Medidas do potencial de membrana

A figura 1.3, mostra esquematicamente o método para a medida do potencial de membrana.

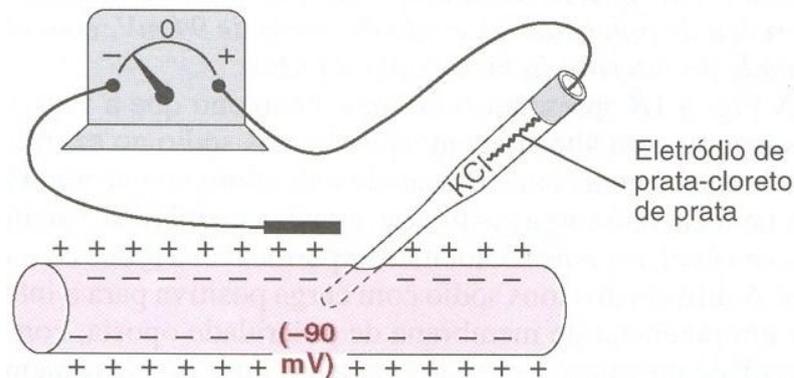


Fig. 1.3. Medida do potencial de membrana celular.

O método consiste na inserção de uma diminuta pipeta, cheia de solução eletrolítica, na membrana celular. Outro eletrodo é colocado no exterior da fibra nervosa e, com a ajuda de um voltímetro eletrônico ou de um osciloscópio, registra-se a diferença de potencial entre o interior e o exterior da fibra nervosa.

Este método é simples, mas de difícil execução, devido às dimensões diminutas das fibras nervosas envolvidas.

### 1.5 – Princípio da neutralidade elétrica

Este princípio afirma que para cada íon positivo, existe perto desse íon, outro íon negativo, de tal forma que o neutraliza. Se tal fato não ocorresse, seriam gerados nos líquidos intra e extracelular, potenciais elétricos de cerca de bilhões de volts.

A figura 1.4 mostra a distribuição de íons com cargas negativas e positivas no líquido intersticial que banha o exterior de uma fibra nervosa.

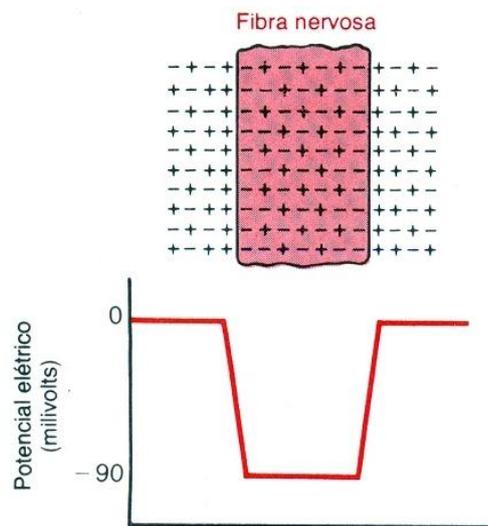


Fig. 1.4. Distribuição de íons no líquido intersticial da fibra nervosa.

A figura 1.4 mostra que a distribuição de cargas é nula, exceto próximo a membrana celular, que atua como um capacitor, pois há acúmulo de um tipo de cargas em um lado da membrana e acúmulo da mesma quantidade de cargas, só que com sinal oposto, no outro lado da membrana celular.

O gráfico da figura 1.4 mostra a distribuição do potencial elétrico em torno e na membrana da fibra nervosa. Enquanto o sensor estiver fora da membrana neural, o potencial registrado é zero volt. Quando o sensor atravessa a membrana celular, o valor do potencial registrado é de  $-90\text{ mV}$ , ficando nesse valor estável à medida que o sensor atravessa o interior da fibra nervosa e, voltando a zero volt, no instante em que o mesmo atravessa o outro lado da membrana.

O fato da membrana nervosa se comportar como um capacitor é de capital importância. Isso faz com que, para ser gerado o potencial negativo no interior da fibra, seja necessário o transporte de apenas alguns poucos íons, cerca de  $1/5.000.000$  a  $1/100.000.000$  das cargas totais positivas é que precisa ser transportado do interior da fibra. Número igualmente pequeno de íons positivos, sendo transportado para o interior da fibra, é suficiente para inverter o potencial de  $-90\text{ mV}$  a até  $+35\text{ mV}$  dentro de menos de  $1/10.000$  de segundo. Esse deslocamento rápido de íons é que produz o sinal neural que se propaga ao longo da fibra nervosa.

### 1.6 – Bomba de sódio-potássio

Todas as membranas celulares do corpo humano possuem uma potente bomba de sódio-potássio que, continuamente, bombeia sódio para fora e potássio para o interior da fibra. Essa bomba é eletro gênico, pois um maior número de cátions, três íons  $\text{Na}^+$  para o exterior e dois íons  $\text{K}^+$  para o interior, são bombeados para fora do que para dentro da fibra. Isso equivale a gerar cargas negativas na face interna da membrana.

Essa bomba de sódio-potássio é a grande responsável pela formação dos imensos gradientes de concentração de sódio e de potássio entre as faces da membrana neural em repouso.

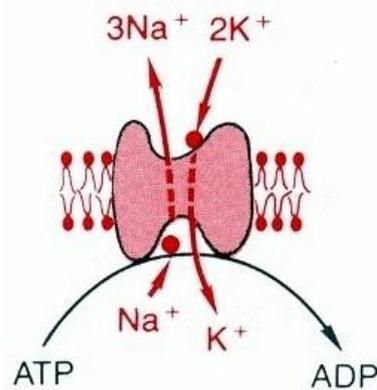


Fig. 1.5 – Bomba de  $\text{Na}^+-\text{K}^+$ .

Na figura 1.5 está representada esquematicamente a bomba de  $\text{Na}^+-\text{K}^+$ , onde se observa o transporte de 3 íons  $\text{Na}^+$  para o exterior da célula e de 2 íons  $\text{K}^+$  para o interior da célula. Esse transporte gasta energia. Essa energia é obtida através da transformação de ATP (adenosina trifosfato) em ADP (adenosina difosfato) [3].

### 1.7 – Permeabilidade da membrana neural

A membrana neural não é completamente impermeável. Ao contrário, ela apresenta alguns vazamentos preferenciais para determinados íons [3]. Esses vazamentos são devido à presença de determinados tipos de proteínas presentes na membrana celular. A esses vazamentos dá-se o nome de canais de vazamento. Existem várias proteínas distintas desse tipo, com diferentes propriedades de vazamento, porém o foco é sobre o vazamento de potássio, haja vista que, na média, esses canais são muito mais permeáveis ao potássio que ao sódio, por cerca de 100 vezes, em condições normais.

A figura 1.6 mostra um exemplo de como ocorre o vazamento através da membrana celular.

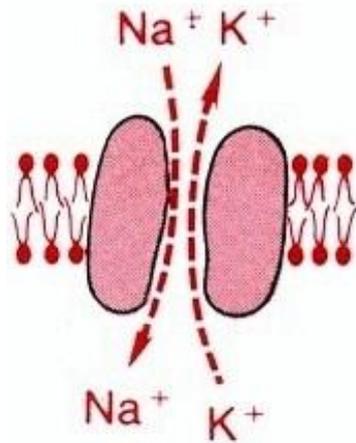


Fig. 1.6 – Canais de vazamento  $Na^+-K^+$  [1].

### 1.8 – Origem do potencial de membrana normal em repouso

São três os fatores com importância para o estabelecimento do potencial de membrana normal em repouso de  $-90\text{ mV}$ .

1) Contribuição do potencial de difusão do potássio – Devido à alta concentração de íons de potássio no interior da membrana, haverá um fluxo desses íons no sentido de dentro para fora. A proporção dessa concentração interna e externa é de 35 para 1. O potencial de Nernst relacionado a essa concentração é de  $-94\text{ mV}$ . Dessa forma, se o potencial de repouso fosse devido unicamente aos íons potássio, esse potencial de repouso deveria ser de  $-94\text{ mV}$ , conforme a figura 1.7, que mostra o potencial resultante devido o fluxo de íons potássio para fora, através dos canais abertos na membrana.

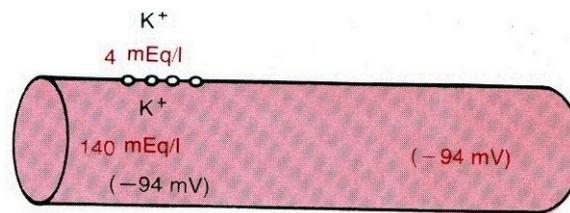


Fig. 1.7 – Contribuição do potencial de difusão do potássio.

2) Contribuição do potencial de difusão de sódio – A figura 1.8 mostra um potencial de membrana de  $+61\text{ mV}$  devido à pequena difusão de íons sódio pelos canais de vazamentos. A concentração interna e externa do íon sódio é de 0,1. O potencial de  $+61\text{ mV}$  seria o potencial de membrana, devido unicamente a difusão do íon de sódio. Na figura 1.8, observa-se também a contribuição de difusão dos íons de potássio. Para se calcular o potencial de repouso da membrana levando em consideração a contribuição da difusão dos íons de potássio e sódio, usa-se a equação de Goldman e não mais a de Nernst, resultando um potencial de repouso de membrana de  $-86\text{ mV}$ , na face interna da membrana.

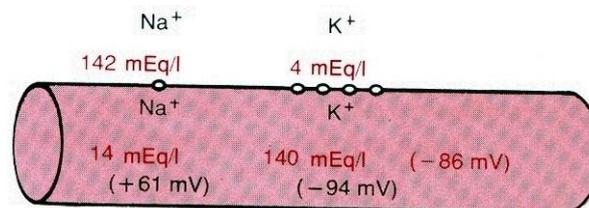


Fig. 1.8 – Contribuição do potencial de difusão do sódio.

3) Contribuição da bomba de  $\text{Na}^+ - \text{K}^+$  - Essa bomba é responsável pelo envio de forma contínua de três íons de sódio para o exterior e de dois íons de potássio para o interior da fibra [3]. Isso ocasiona uma negatividade adicional de cerca de  $-4\text{ mV}$  na parte interna da membrana, resultando em um potencial de membrana de  $-90\text{ mV}$ , levando em consideração todos os fatores que contribuem para a formação desse potencial.

### 1.9 – Potencial de ação neural

Os sinais neurais são transmitidos pelas variações rápidas do potencial de membrana ao longo da fibra nervosa. Essas variações rápidas do potencial de membrana são conhecidas como potenciais de ação. Cada potencial de ação tem seu início através de uma variação

muito rápida no potencial de repouso, que é negativo, para um potencial positivo, e retornando, quase que com a mesma rapidez, para o potencial de repouso.

A figura 1.9 mostra, esquematicamente, as variações do potencial de membrana, ressaltando o início bastante violento do potencial de ação, bem como, a sua recuperação, que é apenas um pouco mais lenta.

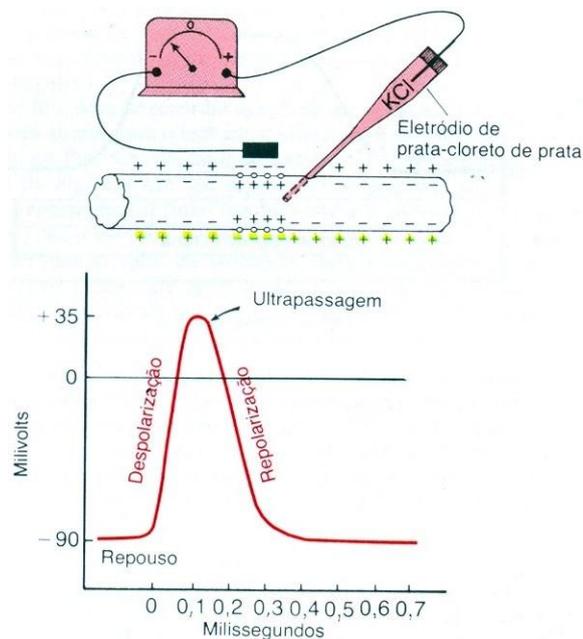


Fig. 1.9 – Exemplo de um típico potencial de ação.

A figura 1.9 mostra as três etapas do potencial de ação:

**Repouso** – Nesta fase, a membrana é dita polarizada, devido ao seu grande potencial negativo presente no interior da fibra nervosa. Esse potencial negativo, em torno de  $-90\text{ mV}$  corresponde ao potencial de repouso da membrana, pois é o potencial antes do começo do potencial de ação;

**Despolarização** – Nesta fase, o potencial varia muito rapidamente em direção a um potencial mais positivo. Essa variação é devida principalmente à permeabilidade da membrana aos íons de sódio, permitindo um fluxo muito grande desses íons para o interior da membrana; e

**Repolarização** – Nesta fase, é restabelecido muito rapidamente, o potencial da membrana de repouso. No início desse ciclo, a membrana que antes era permeável aos íons sódio, passa a ser impermeável a esses íons, cessando dessa forma o fluxo de íons sódio. Agora a membrana torna-se permeável aos íons potássio, criando um fluxo, a exemplo do ocorrido aos íons sódio, só que agora, para o exterior da fibra.

### 1.10 – Começo de um potencial de ação

Enquanto a membrana da célula nervosa permanecer em seu potencial de repouso, que é em torno de  $-90\text{ mV}$ , sem nenhuma perturbação, nenhum potencial de ação é disparado. Porém, se uma perturbação qualquer for suficiente para produzir um aumento do potencial de repouso da membrana em direção a um potencial menos negativo, ocorrerá um processo de *feedback* positivo, pois o potencial crescente irá abrir os canais de sódio voltagem-dependente, ocorrendo assim, um forte fluxo de íons sódio para o interior da membrana, tornando mais positivo, ainda, o potencial da membrana. Esse aumento de tensão faz com que mais canais de sódio voltagem-dependente se abram, implicando em mais fluxo de íons sódio para o interior da membrana e assim, aumentando mais ainda o potencial da membrana. Esse é um ciclo vicioso, que irá ocorrer até que o último canal de sódio voltagem-dependente se abra. Logo após a abertura dos últimos canais de sódio voltagem-dependente, em frações de milissegundos, o próprio aumento na tensão do potencial de ação, que atingindo o seu nível máximo, faz com que os canais de sódio voltagem-dependente fiquem inativos e ativem os canais de potássio voltagem-dependente, fazendo com que ocorra agora um fluxo de íons potássio para fora da fibra nervosa, ocasionando assim, o rápido retorno do potencial de ação ao nível de repouso da membrana da fibra nervosa, encerrando-se assim, rapidamente o potencial de ação.

Em geral, para que ocorra o potencial de ação, é necessário um aumento súbito, de aproximadamente  $15\text{ mV}$  a  $30\text{ mV}$ , no potencial de repouso da membrana da fibra nervosa. Os níveis de tensão anteriores são conhecidos como limiar para o desencadeamento do potencial de ação.

### 1.11 – Propagação do potencial de ação ao longo da fibra nervosa

A propagação do potencial de ação é, na maioria das vezes, devido à capacidade dos pontos adjacentes da membrana da fibra nervosa ser excitada devido à ocorrência de um potencial de ação em um ponto qualquer dessa fibra.

A figura 1.10 mostra o mecanismo desse processo de propagação do potencial de ação por toda a fibra nervosa.

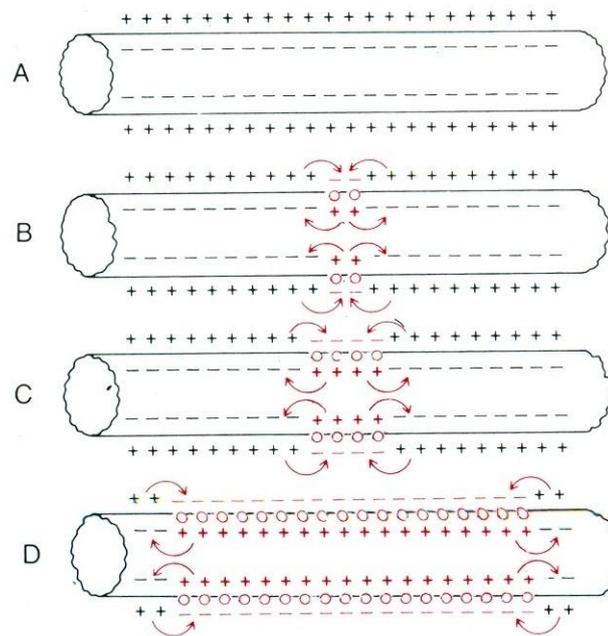


Fig. 1.10 – Propagação do potencial de ação.

A figura 1.10-A mostra a condição de repouso da fibra nervosa, pois existe alta concentração de íons positivos no exterior da fibra e de íons negativos no interior da mesma, dando como resultado, um valor negativo em torno de  $-90\text{ mV}$ , no interior da fibra, considerando-se o exterior como a referência.

A figura 1.10-B mostra uma fibra que foi excitada em seu ponto médio. Vê-se a reversão de polaridade no ponto excitado. Nesse ponto, houve um fluxo muito forte de íons sódio para o interior da fibra, através da abertura dos canais de sódio voltagem-dependente, dando, assim, o início de um potencial de ação.

O intenso fluxo de íons de sódio para o interior da fibra faz com que esses íons fluíam por vários milímetros, ao longo do interior da fibra nervosa, conforme mostram as setas. Essas cargas positivas aumentam a voltagem nas adjacências, acima do valor de limiar de voltagem, ocorrendo dessa forma, a despolarização dessas áreas e, como consequência, novos potenciais de ações e, como resultado final, a propagação do estímulo inicial ao longo da fibra nervosa, em conformidade com o que mostra as figuras 1.10-C e 1.10-D.

A transmissão do processo de despolarização, ao longo da fibra nervosa ou muscular, é chamada de impulso nervoso ou muscular.

Quando um potencial de ação tem início em qualquer ponto da membrana, e havendo condições adequadas, o processo de despolarização irá se propagar, ao longo de toda membrana neural. Isso é o chamado princípio do tudo-ou-nada, e se aplica a todos os tecidos excitáveis normais.

O fator de segurança, que garante a propagação do estímulo ao longo da fibra, é a proporção entre o potencial de ação e o limiar de excitação e deve ser sempre maior que 1.

### 1.12 – Exemplo da ação dos potenciais de ação

Na figura 1.11, temos um exemplo dos potenciais de ação agindo no sistema olfativo.

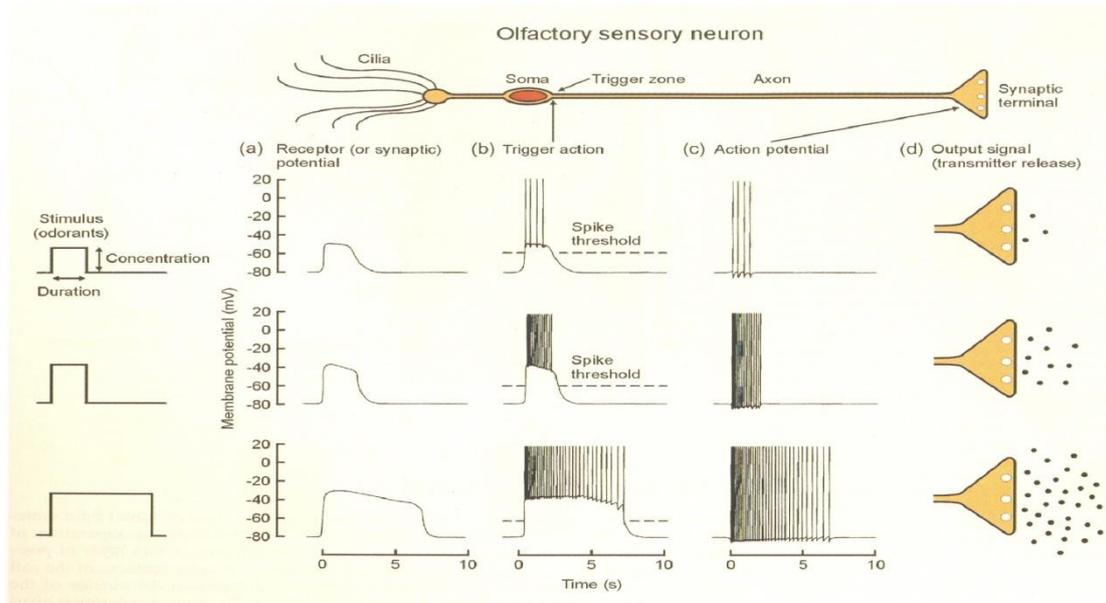


Fig. 1.11 – Exemplo da ação do potencial de ação para o sistema olfativo [2].

Na figura 1.11, vê-se claramente, que o estímulo, que nesse exemplo é o odor, que chega a *cílios* é convertido em um pulso elétrico, cuja amplitude e duração correspondem à intensidade e a duração do estímulo, respectivamente.

Existe também uma área chamada de *zona de disparo*. O potencial de ação só se propaga através do axônio, se o seu nível ultrapassar o limiar de disparo. Isso inibe a propagação de falsos estímulos.

Na linha superior da figura 1.11, observa-se que o pulso que é processado no *soma* tem pouca amplitude, pois ultrapassa muito pouco o nível de limiar. Isso faz com que se desencadeie todo o processo de geração dos pulsos de ação de potencial, que irão se propagar ao longo do axônio até o terminal sináptico. Observa-se que devido a pouca amplitude do pulso elétrico, os potenciais de ações gerados, são relativamente poucos, quando comparados os gerados na linha do meio, pois nesse exemplo, a amplitude do pulso é bem maior.

Na última linha da figura 1.11, tem-se um pulso de amplitude elevada em seu início e que decresce ao longo do tempo. Observa-se, assim, uma concentração grande de potenciais de ação sendo propagados ao longo da fibra nervosa e que ao longo do tempo, devido ao decréscimo da amplitude, ocorre também um maior espaçamento dos pulsos de potenciais de ação.

Por último, vê-se que o formato dos pulsos dos potenciais de ação tem sempre o mesmo formato. O que muda é a frequência e o tempo com que são gerados.

## CAPÍTULO 2

### JUNÇÃO NEURÔNIO-SEMICONDUCTOR

#### 2.1 – A estrutura da junção neurônio-semicondutor

Os impulsos nervosos propagando-se em um axônio neuronal podem ser medidos através de técnicas invasivas ou não-invasivas. O objetivo aqui é obter o registro dos impulsos nervosos utilizando-se técnicas não-invasivas por meio do contacto direto entre o substrato de um semicondutor e o neurônio, formando assim, uma junção neurônio-semicondutor [2]. A figura 2.1 [2] mostra a formação da junção.

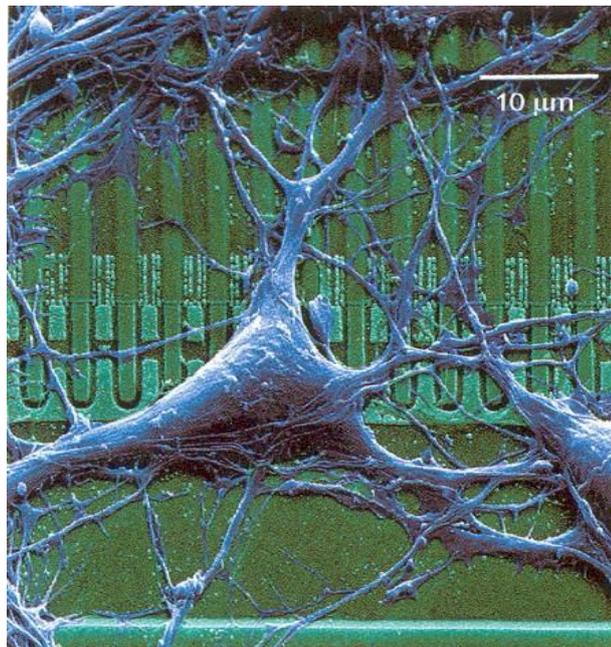


Fig. 2.1. Célula nervosa de um rato sobre um substrato de silício.

O arranjo da figura anterior é de uma única célula nervosa do cérebro de um rato sobre um *chip* de silício. A escala da barra é de 10  $\mu\text{m}$ . A superfície do *chip*, em verde e, a porta da rede de transistores de efeito de campo, são os quadrados escuros. O neurônio, em azul, é cultivado sobre o substrato por vários dias em um eletrólito.

A escolha do substrato de silício deve-se principalmente a três fatores [2]: 1) O substrato de silício coberto com uma fina camada de dióxido de silício mostra-se um perfeito substrato para cultura de células nervosas; 2) O dióxido de silício faz com que não haja

passagem de elétrons para o substrato e, dessa forma, não ocorre o processo corrosivo do substrato, que iria danificar as células nervosas; e 3) A tecnologia atual de fabricação de componentes permite a construção de dispositivos, em escala microscópica, que são postos diretamente em contacto com as células, formando, dessa forma, a junção neurônio-semicondutor.

No processo de formação da junção neurônio-semicondutor, como mostrado na figura 2.1, o contacto entre o neurônio e o semicondutor não é perfeito [2]. Isto acontece devido à adesão das células nervosas com o substrato acontecerem através de moléculas de proteínas que se destacam da membrana celular, formando pequenas protuberâncias e que, quando depositadas sobre o substrato, essas formações manterão a membrana celular afastada do substrato, originando assim, uma fenda, entre a membrana celular e o dióxido de silício depositado sobre o semicondutor, cheia de eletrólito, conforme mostra a figura 2.2 [13].

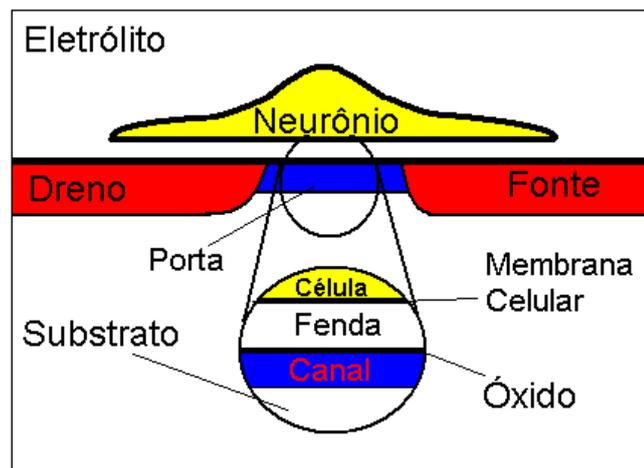


Fig. 2.2. Indicação da formação da fenda na junção.

A estrutura acima forma um condutor planar, cujo núcleo é composto pelo eletrólito da fenda e um dos lados é formado pela membrana celular e, o outro, pelo dióxido de silício. O eletrólito permanece isolado do substrato de silício e do citoplasma celular, devido à membrana celular e o dióxido de silício serem isolantes.

Qualquer atividade neuronal irá gerar correntes iônicas e de deslocamentos através da membrana celular. Como consequência dessas correntes, aparecerá uma corrente, que se espalha ao longo da fenda, originando assim, uma tensão entre a membrana celular e o substrato, chamada de Potencial Extracelular Transcondutivo (PET),  $V_j$ , que pode ser mensurada com o uso de um transistor de efeito de campo. O inverso também é verdadeiro, ou seja, um sinal aplicado aos terminais do transistor de efeito de campo irá gerar uma

corrente de deslocamento através da camada de dióxido de silício que, em consequência dessa corrente, surge uma corrente ao longo da fenda, dando origem assim, entre a membrana e o substrato, a tensão  $V_j$ , que por sua vez, irá abrir os canais iônicos apropriados na membrana celular, que irá desencadear os potenciais de ação, excitando, assim, a fibra nervosa [2]. A figura 2.3 [2] ilustra o processo.

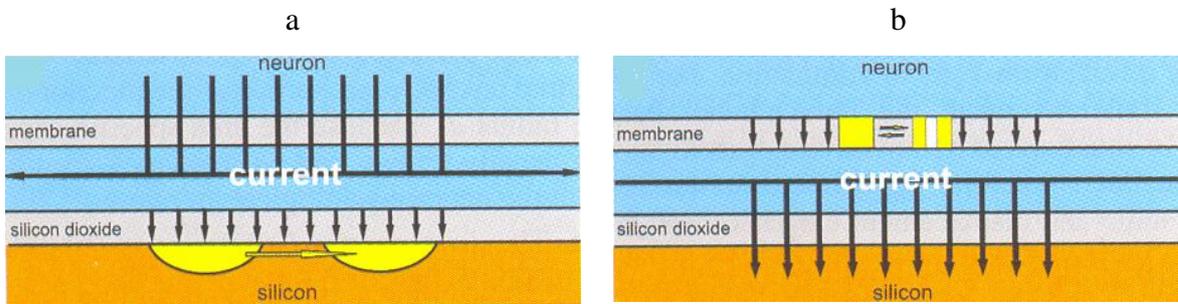


Fig. 2.3. Indicação da formação da tensão  $V_j$  na junção entre neurônio-substrato.

A altura da fenda, que é a separação entre a membrana celular e o substrato, é um parâmetro fundamental da junção e é determinado experimentalmente [2].

## 2.2 – Dinâmica da junção neurônio-substrato

Quando uma célula nervosa está firmemente acoplada a um transistor, é formada uma junção entre a membrana celular e a porta desse transistor, na qual se desenvolve uma tensão  $V_j$ , como consequência da excitação celular por meio de estímulos nervosos [4]. O estímulo nervoso ocasiona disparos de ações de potenciais que se propagam ao longo da fibra nervosa originando um fluxo de corrente elétrica através da membrana celular para a junção. Essa corrente se espalha na fenda que é formada na junção resultando, em consequência, o surgimento da tensão  $V_j$ , que depende das coordenadas espaciais  $x$ ,  $y$ , do tempo  $t$ , do estímulo neuronal, da geometria e das propriedades elétricas da junção neurônio-substrato [4]. Essa tensão  $V_j$  nada mais é que o Potencial Extracelular Transcondutivo (PET). Essa voltagem excita o terminal de porta, que por sua vez, modula os terminais fonte-dreno do transistor presente no substrato de silício, podendo, assim, ser medida toda e qualquer atividade neuronal de forma não-invasiva [2].

O conjunto de transistores empregados para captura dos impulsos nervosos são um pouco diferentes do transistor (MOS) *metal-oxide-semiconductor* (FET) *field-effect-transistor*. Esses transistores são chamados de (EOS) *electrolyte-oxide-semiconductor* (FET)

*field-effect-transistor* em que o terminal metálico da porta é substituído por um eletrólito condutivo. São os chamados transistores úmidos [2].

A figura 2.4 [4] mostra o modelo matemático da junção neurônio-substrato, com elementos diferenciais, usado para a dedução da equação representativa do comportamento dinâmico da tensão  $V_j$ . Esse modelo é conhecido como *sandwich cable* [4].

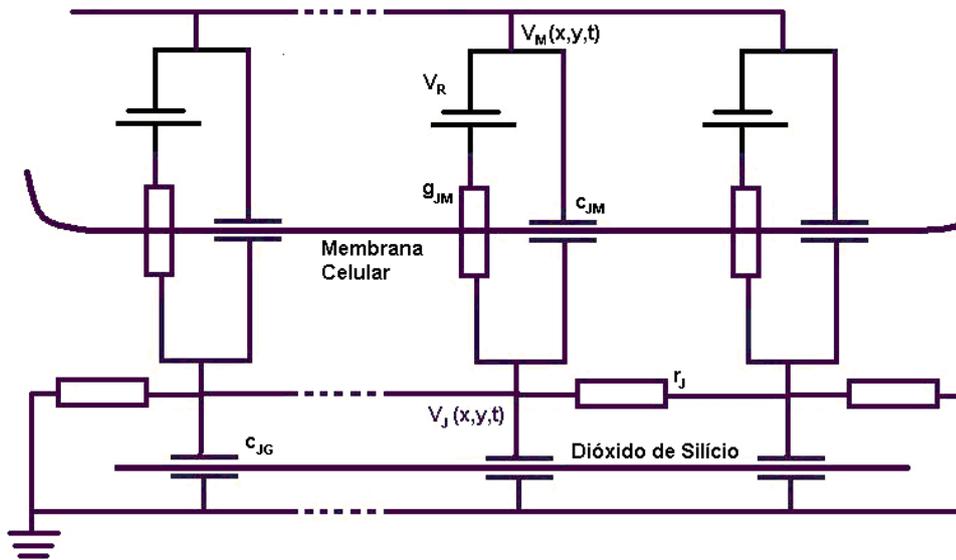


Fig. 2.4. Modelo matemático representativo da dinâmica da junção-substrato [4].

O significado dos parâmetros do modelo acima é:  $V_M$  é a tensão interna da membrana celular, em unidade de tensão;  $V_J$  é a tensão na junção, entre a membrana celular e o dióxido de silício, também em unidade de tensão;  $c_{JM}$  é a capacitância específica da membrana celular, em unidade de capacitância por unidade de área;  $c_{JG}$  é a capacitância específica do dióxido de silício, em unidade de capacitância por unidade de área;  $g_{JM}$  é a condutância específica total da membrana, em unidade de condutância por unidade de área;  $r_j$  é a resistência laminar da fenda entre a membrana e o dióxido de silício, em unidade de resistência e  $V_R$  é a tensão de repouso da membrana, em unidade de tensão.

De acordo com [4],  $g_{JM}$ ,  $r_j$  e  $V_R$  são conforme abaixo:

$$g_{JM} = \sum g_{JM}^i, \quad (2.1)$$

$$V_R = \frac{\sum g_{JM}^i V_0^i}{g_{JM}}, \quad (2.2)$$

$$r_j = \frac{\rho_j}{d}, \quad (2.3)$$

em que  $g_{JM}^i$  representa a condutância específica para os íons do tipo  $i$ , isto é, íons de potássio, cálcio etc.  $V_0^i$  representa a tensão de repouso da membrana celular de cada íon  $i$ ,  $\rho_j$  representa a condutividade laminar da junção e  $d$  é a distância entre a membrana celular e o dióxido de silício.

A equação diferencial que dita o comportamento dinâmico da junção neurônio-semicondutor, cujo modelo matemático é representado pela figura 2.4, é, de acordo com [4]:

$$(c_{JM} + c_{JG}) \frac{\partial V_J}{\partial t} + g_M V_J - \nabla \cdot \left( \frac{1}{r_j} \nabla V_J \right) = c_{JM} \frac{\partial V_M}{\partial t} + g_M (V_M - V_R). \quad (2.4)$$

Na figura 2.4 a região em estudo é uma área. Logo,  $V_J$  é função de duas coordenadas espaciais e uma temporal,  $x$ ,  $y$  e  $t$  e que  $V_M$  é função apenas do tempo possuindo comportamento oscilante, (2.4) fica:

$$\begin{aligned} (c_{JM} + c_{JG}) \frac{\partial V_J(x, y, t)}{\partial t} + g_M V_J(x, y, t) - \nabla \cdot \left( \frac{1}{r_j} \nabla V_J(x, y, t) \right) \\ = c_{JM} \frac{dV_M(t)}{dt} + g_M V_M(t), \end{aligned} \quad (2.5)$$

em que  $V_R$  sendo constante, foi incorporado à  $V_M(t)$ , ou seja,  $V_M(t) = V_M - V_R$ .

Na junção, entre a membrana neuronal e a porta do transistor, toma-se uma área circular de raio  $a$ , homogênea. Essa área sendo homogênea implica que  $g_{JM}$ ,  $c_{JM}$ ,  $c_{JG}$  e  $r_j$  sejam constantes, pois ficam independentes das coordenadas espaciais [4]. Logo, (2.5) se transforma em:

$$(c_M + c_G) \frac{\partial V_J(x, y, t)}{\partial t} + g_M V_J(x, y, t) - \frac{1}{r_j} \nabla^2 V_J(x, y, t) = c_M \frac{dV_M(t)}{dt} + g_M V_M(t). \quad (2.6)$$

Em (2.6):

$$c_M = c_{JM};$$

$$g_M = g_{JM};$$

e

$$c_G = c_{jG}.$$

Multiplicando (2.6) por  $1/g_M$ , vem:

$$-\frac{1}{g_M r_j} \nabla^2 V_j(x, y, t) + \frac{(c_M + c_G)}{g_M} \frac{\partial V_j(x, y, t)}{\partial t} + V_j(x, y, t) = \frac{c_M}{g_M} \frac{dV_M(t)}{dt} + V_M(t). \quad (2.7)$$

São definidos os seguintes parâmetros [4]:

$$\lambda^2 = \frac{1}{g_M r_j}; \quad (2.8)$$

$$\tau = \frac{c_M + c_G}{g_M}; \quad (2.9)$$

e

$$\tau_M = \frac{c_M}{g_M}. \quad (2.10)$$

O parâmetro  $\lambda$  representa a constante de propagação, em número de comprimento de onda,  $\tau$  a constante de tempo da estrutura do modelo matemático da figura 2.4 e  $\tau_M$  a constante de tempo de membrana celular.

Substituindo (2.8), (2.9) e (2.10) em (2.7):

$$-\lambda^2 \nabla^2 V_j(x, y, t) + \tau \frac{\partial V_j(x, y, t)}{\partial t} + V_j(x, y, t) = \tau_M \frac{dV_M(t)}{dt} + V_M(t). \quad (2.11)$$

A solução de (2.11) será tratada no sistema de coordenadas cilíndricas, pois a região na junção considerada é de uma área circular homogênea, de raio  $a$ . Assim, o operador laplaciano, fica:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}. \quad (2.12)$$

Devido à homogeneidade da área circular de raio  $a$ , implica que  $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} = 0$  e (2.12) fica:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad (2.13)$$

em que  $0 \leq r \leq a$ .

Desenvolvendo (2.13), obtêm-se:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \left[ r \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \right] = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}. \quad (2.14)$$

Em coordenadas cilíndricas, a dependência espacial, neste caso, passa a ser apenas em  $r$  [4]. Então:

$$V_j(x, y, t) = V_j(r, t). \quad (2.15)$$

Substituindo (2.15) e (2.14) em (2.11), têm-se:

$$-\lambda^2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} V_j(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_j(r, t)}{\partial r} \right] + \tau \frac{\partial V_j(r, t)}{\partial t} + V_j(r, t) = \tau_M \frac{dV_M(t)}{dt} + V_M(t). \quad (2.16)$$

A equação (2.16) será objeto de estudo nos capítulos subseqüentes.

No Apêndice A, demonstra-se os passos para chegar-se à equação (2.11).

## CAPÍTULO 3

### SOLUÇÕES ANALÍTICAS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Neste capítulo, a equação (2.16) será resolvida analiticamente, através de dois métodos, no domínio da frequência, usando a transformada de Fourier. A transformada de Fourier, converte uma equação diferencial parcial linear com coeficientes constantes em uma equação diferencial ordinária [5].

O primeiro método faz uso da linearidade da equação diferencial. Sua solução é obtida através da soma entre as soluções da equação homogênea e da equação particular. Usa-se o método dos coeficientes a determinar para a obtenção da solução da equação particular.

O segundo método utiliza as funções de Green, que se constitui em uma ferramenta bastante poderosa na solução de problemas físicos descritos através de equações diferenciais não homogêneas, pois, a partir da função de Green, sujeitas a determinadas condições de contorno, a solução do problema é imediata.

Para obterem-se as funções de Green, há basicamente dois métodos: o método do operador [11] em que as soluções são construídas para regiões à esquerda e à direita da localização da fonte, resultando em duas funções de Green, uma para cada região. A função de Green completa é o resultado da composição das funções de Green de cada região. O outro método faz uso da expansão modal, que expressa a função de Green em termos de uma soma, usando a superposição de autofunções válidas para toda a região de interesse [6]. O método do operador é o que será empregado para a solução da equação (2.16).

No Apêndice B, é feita uma breve apresentação dos métodos de obtenção das funções de Green.

#### 3.1 – Solução analítica no domínio da frequência – Método da superposição

Para obter-se a solução de (2.16), reproduzida aqui por conveniência, no domínio da frequência, aplica-se a transformada de Fourier em ambos os membros da referida equação.

$$-\lambda^2 \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} V_j(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_j(r, t)}{\partial r} \right] + \tau \frac{\partial V_j(r, t)}{\partial t} + V_j(r, t) = \tau_M \frac{dV_M(t)}{dt} + V_M(t). \quad (3.1)$$

A equação (3.1) satisfaz as seguintes condições de contorno:

$$\lim_{r \rightarrow 0} |V_J(r, t)| < \infty; \quad (3.2)$$

e

$$V_J(a, t) = 0. \quad (3.3)$$

A equação (3.2) representa a condição de que, no centro da junção,  $V_J(r, t)$  possui um valor finito, já a equação (3.3), que na periferia da junção, o valor de  $V_J(r, t)$  deve ser nulo.

Se  $V_J(r, \omega)$  e  $V_M(\omega)$  forem, respectivamente, as transformadas de Fourier de  $V_J(r, t)$  e  $V_M(t)$ , a equação (3.1), fica, dividindo por  $-\lambda^2$ :

$$\frac{d^2 V_J(r, \omega)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_J(r, \omega)}{dr} - \left( \frac{j\omega\tau + 1}{\lambda^2} \right) V_J(r, \omega) = - \left( \frac{j\omega\tau_M + 1}{\lambda^2} \right) V_M(\omega), \quad (3.4)$$

resultando em:

$$\frac{d^2 V_J(r, \omega)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_J(r, \omega)}{dr} - \gamma_\omega^2 V_J(r, \omega) = -\gamma_{\omega_M}^2 V_M(\omega), \quad (3.5)$$

em que:

$$\gamma_\omega^2 = \frac{1 + j\omega\tau}{\lambda^2}; \quad (3.6)$$

e

$$\gamma_{\omega_M}^2 = \frac{1 + j\omega\tau_M}{\lambda^2}. \quad (3.7)$$

A equação (3.5) obedece às seguintes condições de contorno:

$$\lim_{r \rightarrow 0} |V_J(r, \omega)| < \infty; \quad (3.8)$$

e

$$V_j(a, \omega) = 0. \quad (3.9)$$

A equação (3.5) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, cuja solução, de acordo com a teoria das equações diferenciais, é dada pela soma entre a solução da equação homogênea e a solução da equação particular, ou seja:

$$V_j(r, \omega) = V_h(r, \omega) + V_p(r, \omega). \quad (3.10)$$

A equação homogênea de (3.5) é:

$$\frac{d^2 V_h(r, \omega)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_h(r, \omega)}{dr} - \gamma_\omega^2 V_h(r, \omega) = 0. \quad (3.11)$$

A equação de Bessel modificada de ordem  $m$  tem a forma [5]:

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \left( -\sqrt{\lambda} - \frac{m^2}{r^2} \right) f = 0. \quad (3.12)$$

Quando se compara (3.11) com (3.12), verifica-se que (3.11) é a equação de Bessel modificada de ordem zero, cuja solução é da forma [5]:

$$V_h(r, \omega) = c_1 I_0(\gamma_\omega r) + c_2 K_0(\gamma_\omega r), \quad (3.13)$$

em que  $I_0(\gamma_\omega r)$  é a função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem zero e  $K_0(\gamma_\omega r)$  é a função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem zero.

Fazendo uso da equação (3.8), resulta que  $c_2 = 0$ . Assim, a equação (3.13), fica:

$$V_h(r, \omega) = c_1 I_0(\gamma_\omega r). \quad (3.14)$$

A solução da particular é da forma:

$$V_p(\omega) = KV_M(\omega). \quad (3.15)$$

Então:

$$-\gamma_\omega^2 K = -\gamma_{\omega_M}^2, \quad (3.16)$$

resultando para K:

$$K = \frac{\gamma_{\omega_M}^2}{\gamma_\omega^2}. \quad (3.17)$$

Fazendo as substituições, obtêm-se:

$$V_J(r, \omega) = c_1 I_0(\gamma_\omega r) + \frac{\gamma_{\omega_M}^2}{\gamma_\omega^2} V_M(\omega). \quad (3.18)$$

Aplicando a condição de contorno  $V_J(a, \omega) = 0$  em (3.18):

$$V_J(a, \omega) = c_1 I_0(\gamma_\omega a) + \frac{\gamma_{\omega_M}^2}{\gamma_\omega^2} V_M(\omega) = 0,$$

resultando para  $c_1$ :

$$c_1 = -\frac{\gamma_{\omega_M}^2}{\gamma_\omega^2 I_0(\gamma_\omega a)} V_M(\omega). \quad (3.19)$$

Substituindo (3.19) em (3.18), resulta para  $V_J(r, \omega)$ :

$$V_J(r, \omega) = \frac{\gamma_{\omega_M}^2}{\gamma_\omega^2} \left[ 1 - \frac{I_0(\gamma_\omega r)}{I_0(\gamma_\omega a)} \right] V_M(\omega). \quad (3.20)$$

A equação (3.20) é a solução da equação (3.5), no domínio da frequência, que é idêntica à equação que consta na referência [4].

### 3.2 – Solução analítica no domínio da frequência – Método do operador

A equação a ser resolvida no domínio da frequência no sistema de coordenadas cilíndricas, pelo método do operador, é a equação (3.5), reproduzida aqui por conveniência:

$$\frac{d^2 V_J(r, \omega)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_J(r, \omega)}{dr} - \gamma_\omega^2 V_J(r, \omega) = -\gamma_{\omega_M}^2 V_M(\omega) \quad (3.21)$$

em que  $\gamma_\omega^2 = \frac{1+j\omega\tau}{\lambda^2}$  e  $\gamma_{\omega_M}^2 = \frac{1+j\omega\tau_M}{\lambda^2}$ .

A equação 3.21 obedece às mesmas condições de contorno, representadas pelas equações (3.8) e (3.9).

Reescrevendo (3.21) em outra formatação, conforme abaixo, obtêm-se:

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV_J(r, \omega)}{dr} \right) \right] - \gamma_\omega^2 V_J(r, \omega) = -\gamma_{\omega_M}^2 V_M(\omega), \quad (3.22)$$

em que:

$$L = \frac{1}{r} \left[ \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right) \right], \quad (3.23)$$

é o operador de *Sturm-Liouville*.

De acordo com as diversas literaturas técnicas e em especial as [5] e [6], (3.22) representa um problema de *Sturm-Liouville* de terceiro tipo, pois apesar do intervalo de interesse ser finito, em  $r = 0$ , a equação (3.23) apresenta uma singularidade, sendo chamado, portanto, de operador singular de *Sturm-Liouville*.

A solução de (3.22), no domínio do tempo é [6]:

$$V_J(\rho, t) = \int_0^a f(r, t) g(r, t/\rho, t_a) \omega(r) dr + \{p(r) \left[ \frac{\partial V_J(r, t)}{\partial r} g(r, t/\rho, t_a) - V_J(r, t) \frac{\partial g(r, t/\rho, t_a)}{\partial r} \right] \} \Big|_0^a \quad (3.24)$$

Aplicando a condição de contorno (3.9) associado ao fato que  $p(r)_{r=0} = 0$  e que  $g(a, t/\rho, t_a) = 0$ , a equação (3.24) se reduz à:

$$V_j(\rho, t) = \int_0^a f(r, t)g(r, t/\rho, t_a)\omega(r)dr. \quad (3.25)$$

Como se quer a resposta em frequência, em termos de função de transferência, toma-se a transformada temporal de Fourier da equação (3.25), obtendo-se:

$$V_j(\rho, \omega) = \int_0^a F(r, \omega)G(r, \omega/\rho, \omega_a)rdr, \quad (3.26)$$

em que  $F(r, \omega)$  é a transformada de Fourier de  $f(r, t)$  e  $G(r, \omega/\rho, \omega_a)$  é a transformada de Fourier da função de Green  $g(r, t/\rho, t_a)$ .  $F(r, \omega)$  é dada por:

$$F(r, \omega) = \gamma_{\omega_M}^2 V_M(\omega). \quad (3.27)$$

Portanto, para se ter a solução da equação 3.21, basta achar a função de Green correspondente.

Na busca da função de Green, deve-se resolver (3.22), de acordo com a equação abaixo [5] e [6]:

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV_j(r, \omega)}{dr} \right) \right] - \gamma_{\omega}^2 V_j(r, \omega) = -\frac{\delta(r - \rho)}{2\pi r}. \quad (3.28)$$

No intervalo finito  $(0, a)$ ,  $p(r) = 0$  em  $r = 0$ . Neste caso existe uma singularidade em  $r = 0$ , pois neste ponto,  $p(r)$  se anula. Em  $r = a$ , é um ponto regular.

Devem-se classificar as singularidades considerando a equação homogênea associada com (3.28) [6], ou seja:

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{d}{dr} \left( r \frac{dV_j(r, \omega)}{dr} \right) \right] - \gamma_{\omega}^2 V_j(r, \omega) = 0, \quad (3.29)$$

com  $r \neq \rho$ .

Para tal classificação, faz-se uso do teorema de *Weyl* [6], que efetivamente divide as singularidades em duas mutuamente excludentes, ou seja:

1. Circulo limite: todas as soluções  $V_j$  estão em  $\mathcal{L}_2(a, b)$  para todo  $\gamma_\omega$ ; e
2. Ponto limite: A existência das soluções estarem em  $\mathcal{L}_2(a, b)$  depende de:
  - a. Se  $Im(\gamma_\omega) \neq 0$ , existe exatamente uma solução  $V_j$  em  $\mathcal{L}_2(a, b)$ ; e
  - b. Se  $Im(\gamma_\omega) = 0$ , ambas ou nenhuma solução  $V_j$  está em  $\mathcal{L}_2(a, b)$ .

A equação (3.29) aceita duas soluções linearmente independente, quando  $\gamma_\omega = 0$ .

Essas soluções são:

$$V_{j1}(r, \omega) = 1; \quad (3.30)$$

e

$$V_{j2}(r, \omega) = \ln r. \quad (3.31)$$

Apesar de (3.31) ser singular em  $r = 0$ , tanto (3.30) como (3.31) são absolutamente integráveis quadraticamente sobre o intervalo  $(0, a)$  o que implica que quaisquer outras soluções,  $V_{j1}(r, \omega)$  e  $V_{j2}(r, \omega)$ , quando  $\gamma_\omega \neq 0$ , estejam em  $\mathcal{L}_2(a, b)$ . Assim, no caso de (3.29), a singularidade envolvida é do tipo circulo limite.

A equação (3.29) é a equação de Bessel modificada de ordem zero. Tal equação admite como solução a combinação linear das funções de Bessel modificada de primeira espécie e ordem zero,  $I_0(\gamma_\omega r)$ , com a de segunda espécie e ordem zero,  $K_0(\gamma_\omega r)$ . Então:

$$G(r, \omega / \rho, \omega_a) = \begin{cases} AI_0(\gamma_\omega r) + BK_0(\gamma_\omega r) & r < \rho \\ CI_0(\gamma_\omega r) + DK_0(\gamma_\omega r) & r > \rho \end{cases}, \quad (3.32)$$

em que  $A, B, C$  e  $D$  em (3.32) são constantes a determinar em função das condições de contorno no intervalo  $0 \leq r \leq a$  e das condições de continuidade e salto, em  $r = \rho$  [6].

As duas condições de contorno são dadas por:

$$\lim_{r \rightarrow 0} |G(r, \omega / \rho, \omega_a)| < \infty; \quad (3.33)$$

e

$$G(a, \omega/\rho, \omega_a) = 0. \quad (3.34)$$

A aplicação de (3.33) em (3.32) implica necessariamente que  $B = 0$ . Fazendo uso de (3.34) também em (3.32), obtêm-se a seguinte expressão para  $D$ , dada abaixo:

$$D = -C \frac{I_0(\gamma_\omega a)}{K_0(\gamma_\omega a)}. \quad (3.35)$$

Substituindo (3.35) juntamente com  $B = 0$  em (3.32), têm-se:

$$G(r, \omega/\rho, \omega_a) = \begin{cases} AI_0(\gamma_\omega r) & r < \rho \\ C[I_0(\gamma_\omega r) - \frac{I_0(\gamma_\omega a)}{K_0(\gamma_\omega a)} K_0(\gamma_\omega r)] & r > \rho \end{cases}. \quad (3.36)$$

Aplicando as condições de continuidade e salto em  $r = \rho$  em (3.36), obtêm-se o seguinte sistema de equações:

$$AI_0(\gamma_\omega \rho) - C \left[ I_0(\gamma_\omega \rho) - \frac{I_0(\gamma_\omega a)}{K_0(\gamma_\omega a)} K_0(\gamma_\omega \rho) \right] = 0; \quad (3.37)$$

e

$$-\gamma_\omega AI_0'(\gamma_\omega \rho) + \gamma_\omega C \left[ I_0'(\gamma_\omega \rho) - \frac{I_0(\gamma_\omega a)}{K_0(\gamma_\omega a)} K_0'(\gamma_\omega \rho) \right] = -\frac{1}{\rho}, \quad (3.38)$$

em que  $I_0'(\gamma_\omega \rho)$  e  $K_0'(\gamma_\omega \rho)$  representam as derivadas primeiras de  $I_0(\gamma_\omega r)$  e  $K_0(\gamma_\omega r)$  em  $r = \rho$  respectivamente.

Resolvendo (3.37) e (3.38), simultaneamente e fazendo uso da identidade [7]:

$$I_0'(\gamma_\omega \rho) K_0(\gamma_\omega \rho) - I_0(\gamma_\omega \rho) K_0'(\gamma_\omega \rho) = \frac{1}{\gamma_\omega \rho}, \quad (3.39)$$

obtêm-se para  $A$  e  $C$ :

$$A = \frac{I_0(\gamma_\omega a)K_0(\gamma_\omega \rho) - I_0(\gamma_\omega \rho)K_0(\gamma_\omega a)}{I_0(\gamma_\omega a)}; \quad (3.40)$$

e

$$C = -\frac{I_0(\gamma_\omega \rho)K_0(\gamma_\omega a)}{I_0(\gamma_\omega a)}. \quad (3.41)$$

A equação (3.39) representa o wronskiano das soluções  $I_0(\gamma_\omega r)$  e  $K_0(\gamma_\omega r)$ . Como (3.39) é diferente de zero, significa dizer que as soluções são linearmente independentes, constituindo, dessa forma, duas soluções para (3.36).

Substituindo as equações (3.40) e (3.41) na equação (3.36), obtêm-se assim, para a função de Green:

$$G(r, \omega / \rho, \omega_a) = \begin{cases} \left[ \frac{I_0(\gamma_\omega a)K_0(\gamma_\omega \rho) - I_0(\gamma_\omega \rho)K_0(\gamma_\omega a)}{I_0(\gamma_\omega a)} \right] I_0(\gamma_\omega r) & r < \rho \\ \left[ \frac{I_0(\gamma_\omega a)K_0(\gamma_\omega r) - I_0(\gamma_\omega r)K_0(\gamma_\omega a)}{I_0(\gamma_\omega a)} \right] I_0(\gamma_\omega \rho) & r > \rho \end{cases}. \quad (3.42)$$

Fazendo-se a permuta entre  $r$  e  $\rho$ , mostra-se que  $G(r, \omega / \rho, \omega_a)$  é simétrica, pois:

$$G(\rho, \omega / r, \omega_a) = G(r, \omega / \rho, \omega_a). \quad (3.43)$$

Substituindo (3.42) e (3.27) em (3.26):

$$\begin{aligned} & V_j(\rho, \omega) \\ &= \int_0^\rho \gamma_{\omega_M}^2 V_M(\omega) \left[ \frac{I_0(\gamma_\omega a)K_0(\gamma_\omega \rho) - I_0(\gamma_\omega \rho)K_0(\gamma_\omega a)}{I_0(\gamma_\omega a)} \right] I_0(\gamma_\omega r) r dr \\ &+ \int_\rho^a \gamma_{\omega_M}^2 V_M(\omega) \left[ \frac{I_0(\gamma_\omega a)K_0(\gamma_\omega r) - I_0(\gamma_\omega r)K_0(\gamma_\omega a)}{I_0(\gamma_\omega a)} \right] I_0(\gamma_\omega \rho) r dr. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Como a função de transferência de (3.44) é dada por:

$$H_G(\rho, \omega) = \frac{V_J(\rho, \omega)}{V_M(\omega)}, \quad (3.45)$$

então, fazendo-se a troca de variáveis entre  $\rho$  e  $r$  em (3.44) e (3.45) e colocando (3.44) no formato da equação (3.45), tem-se que:

$$\begin{aligned} H_G(r, \omega) = & \frac{\gamma_{\omega M}^2}{I_0(\gamma_{\omega} a)} \{ [I_0(\gamma_{\omega} a)K_0(\gamma_{\omega} r) - I_0(\gamma_{\omega} r)K_0(\gamma_{\omega} a)] \int_0^r I_0(\gamma_{\omega} \rho) \rho d\rho \\ & + I_0(\gamma_{\omega} a)I_0(\gamma_{\omega} r) \int_r^a K_0(\gamma_{\omega} \rho) \rho d\rho \\ & - K_0(\gamma_{\omega} a)I_0(\gamma_{\omega} r) \int_r^a I_0(\gamma_{\omega} \rho) \rho d\rho \}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

De [7], têm-se as seguintes relações:

$$\left( \frac{d}{zdz} \right)^{\alpha} [z^m I_m(z)] = z^{m-\alpha} I_{m-\alpha}(z); \quad (3.47)$$

e

$$\left( \frac{d}{zdz} \right)^{\alpha} [z^m K_m(z)] = (-1)^m z^{m-\alpha} I_{m-\alpha}(z). \quad (3.48)$$

Se em (3.47) e (3.48)  $\alpha = 1$  e  $m = 1$ , obtêm-se para as integrais em (3.46):

$$\int_0^r I_0(\gamma_{\omega} \rho) \rho d\rho = \frac{r I_1(\gamma_{\omega} r)}{\gamma_{\omega}}; \quad (3.49)$$

$$\int_r^a I_0(\gamma_{\omega} \rho) \rho d\rho = \frac{a I_1(\gamma_{\omega} a)}{\gamma_{\omega}} - \frac{r I_1(\gamma_{\omega} r)}{\gamma_{\omega}}; \quad (3.50)$$

e

$$\int_r^a K_0(\gamma_\omega \rho) \rho d\rho = \frac{rK_1(\gamma_\omega r)}{\gamma_\omega} - \frac{aK_1(\gamma_\omega a)}{\gamma_\omega}. \quad (3.51)$$

Substituindo (3.49), (3.50) e (3.51) em (3.46), resulta:

$$H_G(r, \omega) = \frac{\gamma_{\omega M}^2}{\gamma_\omega I_0(\gamma_\omega a)} [rI_0(\gamma_\omega a)[I_0(\gamma_\omega r)K_1(\gamma_\omega r) + K_0(\gamma_\omega r)I_1(\gamma_\omega r)] \\ - aI_0(\gamma_\omega r)[I_0(\gamma_\omega a)K_1(\gamma_\omega a) + K_0(\gamma_\omega a)I_1(\gamma_\omega a)]. \quad (3.52)$$

A equação (3.52) representa a solução de (3.21), no domínio da frequência.

## CAPÍTULO 4

### RESULTADOS OBTIDOS

Neste capítulo, faz-se a análise das soluções da equação diferencial (2.16), obtida no capítulo 3.

#### 4.1 – Comparação entre os dois métodos

As soluções apresentadas para a equação diferencial (2.16) são:

$$H(r, \omega) = \frac{\gamma_{\omega M}^2}{\gamma_{\omega}^2} \left[ 1 - \frac{I_0(\gamma_{\omega} r)}{I_0(\gamma_{\omega} a)} \right]; \quad (4.1)$$

e

$$H_G(r, \omega) = \frac{\gamma_{\omega M}^2}{\gamma_{\omega} I_0(\gamma_{\omega} a)} [ r I_0(\gamma_{\omega} a) [ I_0(\gamma_{\omega} r) K_1(\gamma_{\omega} r) + K_0(\gamma_{\omega} r) I_1(\gamma_{\omega} r) ] - a I_0(\gamma_{\omega} r) [ I_0(\gamma_{\omega} a) K_1(\gamma_{\omega} a) + K_0(\gamma_{\omega} a) I_1(\gamma_{\omega} a) ] ]. \quad (4.2)$$

A função de transferência é dada por:

$$H(r, \omega) = H_G(r, \omega) = \frac{V_J(r, \omega)}{V_M(\omega)}. \quad (4.3)$$

Apesar das equações (4.1) e (4.2) aparentemente não serem semelhantes, elas são equivalentes entre si, como será mostrado a seguir.

Para (4.1) e (4.2) serem equivalentes, elas devem apresentar os mesmos resultados, tanto em amplitude quanto em deslocamento de fase, dentro da junção de raio  $a$ , em estudo, para toda e qualquer frequência do espectro de interesse. Dessa forma, estuda-se o comportamento dessas equações para frequências tendendo ao infinito, tendendo a zero e para as demais frequências, faz-se uso da análise gráfica.

##### 4.1.1 – Análise quando a frequência tende à zero

No limite da frequência tendendo à zero,  $\gamma_\omega^2$  e  $\gamma_{\omega_M}^2$  converge para:

$$\gamma_{\omega_M}^2 = \frac{1}{\lambda^2}; \quad (4.4)$$

e

$$\gamma_\omega^2 = \frac{1}{\lambda^2}, \quad (4.5)$$

que quando substituídas em (4.1), resulta em [4]:

$$H(r, \omega)_{|\omega \rightarrow 0} = \left[ 1 - \frac{I_0\left(\frac{r}{\lambda}\right)}{I_0\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \right]. \quad (4.6)$$

Fazendo a substituição de (4.4) e (4.5) em (4.2):

$$\begin{aligned} H_G(r, \omega)_{|\omega \rightarrow 0} &= \frac{r}{\lambda} \left[ I_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) K_1\left(\frac{r}{\lambda}\right) + K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) I_1\left(\frac{r}{\lambda}\right) \right] \\ &- \frac{a}{\lambda} \left[ \frac{I_0\left(\frac{r}{\lambda}\right)}{I_0\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \right] \left[ I_0\left(\frac{a}{\lambda}\right) K_1\left(\frac{a}{\lambda}\right) + K_0\left(\frac{a}{\lambda}\right) I_1\left(\frac{a}{\lambda}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Na equação (4.7), o termo  $\frac{a}{\lambda} \left[ I_0\left(\frac{a}{\lambda}\right) K_1\left(\frac{a}{\lambda}\right) + K_0\left(\frac{a}{\lambda}\right) I_1\left(\frac{a}{\lambda}\right) \right] = 1$ , bem como a expressão  $\frac{r}{\lambda} \left[ I_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) K_1\left(\frac{r}{\lambda}\right) + K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) I_1\left(\frac{r}{\lambda}\right) \right] = 1$ , para todo valor de  $0 \leq r \leq a$ . Dessa forma, (4.7) reduz-se à:

$$H_G(r, \omega)_{|\omega \rightarrow 0} = \left[ 1 - \frac{I_0\left(\frac{r}{\lambda}\right)}{I_0\left(\frac{a}{\lambda}\right)} \right], \quad (4.8)$$

o que resulta na igualdade entre (4.8) e (4.6), para frequências bem próximas de zero.

As equações (4.6) e (4.8) são reais, pois seus módulos dependem unicamente dos valores resistivos, tanto da membrana celular quanto da resistência laminar, conforme modelo

apresentado na fig. 2.4, e não apresentam defasagem. Isto significa que, para baixas frequências, a membrana celular apresenta comportamento puramente resistivo, haja vista que, o efeito capacitivo da membrana é desprezível.

A figura a seguir, mostra o comportamento da função de transferência para baixas frequências, para posições dentro da junção, variando desde o centro até a periferia.

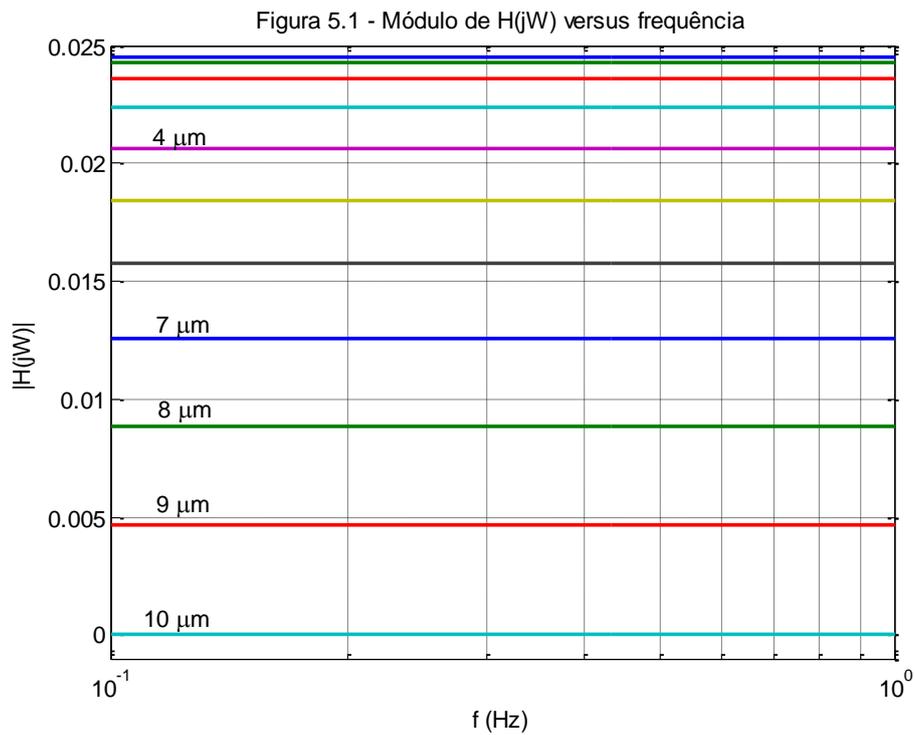


Fig. 5.1.a – Módulo da função de transferência para baixas frequências.

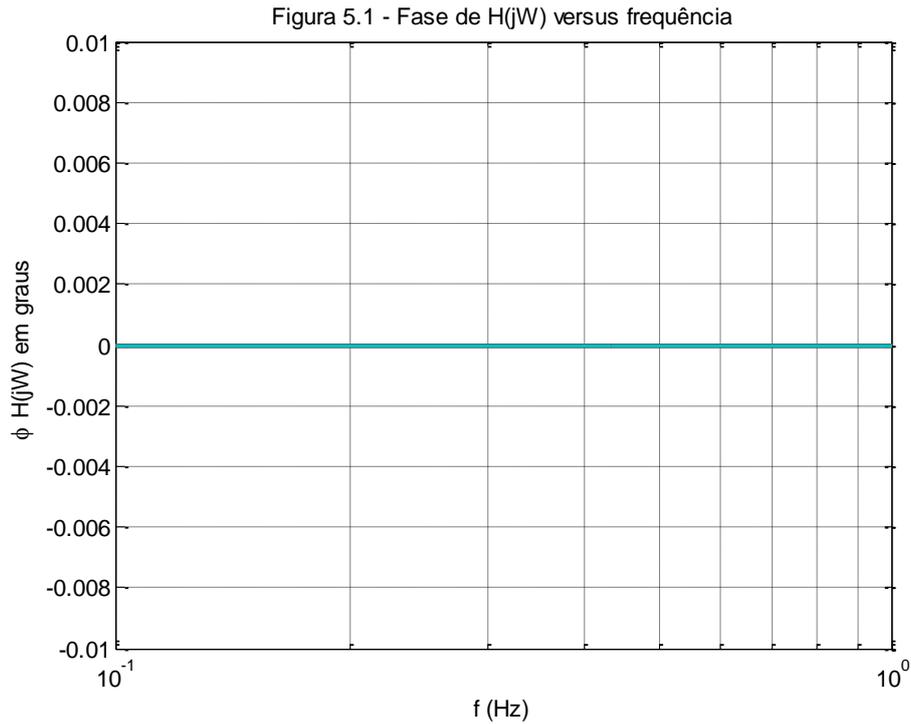


Fig. 5.1.b – Fase da função de transferência para baixas frequências.

#### 4.1.2 – Análise quando a frequência tende ao infinito

No estudo das equações (4.1) e (4.2) no limite da frequência tendendo ao infinito, faz-se uso das fórmulas assintóticas das funções de Bessel modificada de primeira e segunda espécie, dadas por [9]:

$$I_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x; \quad (4.9)$$

e

$$K_p(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}. \quad (4.10)$$

Substituindo (4.9) em (4.1), obtêm-se:

$$H(r, \omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{\gamma_{\omega_M}^2}{\gamma_{\omega}^2} \left[ 1 - \sqrt{\frac{a}{r}} e^{\gamma_{\omega}(r-a)} \right]. \quad (4.11)$$

Como  $r$ , no limite, é sempre menor que  $a$ , mais tão próximo de  $a$  quanto se queira fazer, então  $e^{\gamma_{\omega}(r-a)} = 0$ , pois  $\gamma_{\omega}$  é muito grande. Assim, (4.11) se transforma em:

$$H(r, \omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{\gamma_{\omega_M}^2}{\gamma_{\omega}^2} = \frac{1 + j\omega\tau_M}{1 + j\omega\tau}; \quad (4.12)$$

que quando  $\omega \rightarrow \infty$ , resulta para (4.12):

$$H(r, \omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{C_M}{C_M + C_G}. \quad (4.13)$$

Substituindo (4.9) e (4.10) em (4.2), obtêm-se:

$$H_G(r, \omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{\gamma_{\omega_M}^2}{\gamma_{\omega}^2} \left[ 1 - \sqrt{\frac{a^2}{r}} e^{\gamma_{\omega}(r-a)} \right], \quad (4.14)$$

resultando para (4.14):

$$H_G(r, \omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = \frac{C_M}{C_M + C_G}, \quad (4.15)$$

que como já esperado, mostra a igualdade entre (4.15) e (4.13).

O resultado acima mostra que, tanto o módulo de (4.13) quanto de (4.15) independem da posição dentro da junção, bem como o seu valor depende apenas dos valores das capacitâncias específicas da membrana celular e da do dióxido de silício [4]. O efeito da resistência específica da membrana celular e da resistência laminar, são desprezíveis em altas frequências.

Substituindo os valores de  $C_M$  e  $C_G$  em (4.13) ou (4.15), obtêm-se:

$$H_G(r, \omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = 0,9434, \quad (4.16)$$

que é o valor para onde  $H(r, \omega)|_{\omega \rightarrow \infty}$  e  $H_G(r, \omega)|_{\omega \rightarrow \infty}$  convergirão para altas frequências.

#### 4.1.3 – Análise em médias frequências

Fazer análise em médias frequências das equações (4.1) e (4.2) é muito complicado. Assim, a análise feita será gráfica.

Pode-se ver na figura 5.2, que quando a frequência tende ao infinito, tanto  $H(r, \omega)|_{\omega \rightarrow \infty}$  quanto  $H_G(r, \omega)|_{\omega \rightarrow \infty}$ , convergem para (4.15) ratificando o fato que os módulos de (4.13) e (4.15) independem da posição dentro da junção, mas apresentam defasagens, que aumentam, à medida que se vai afastando do centro em direção à periferia da junção, onde ocorre a máxima defasagem, com um valor em torno de  $45^\circ$ .

A figura 5.2 mostra o gráfico de (4.1), obtida no capítulo 3.

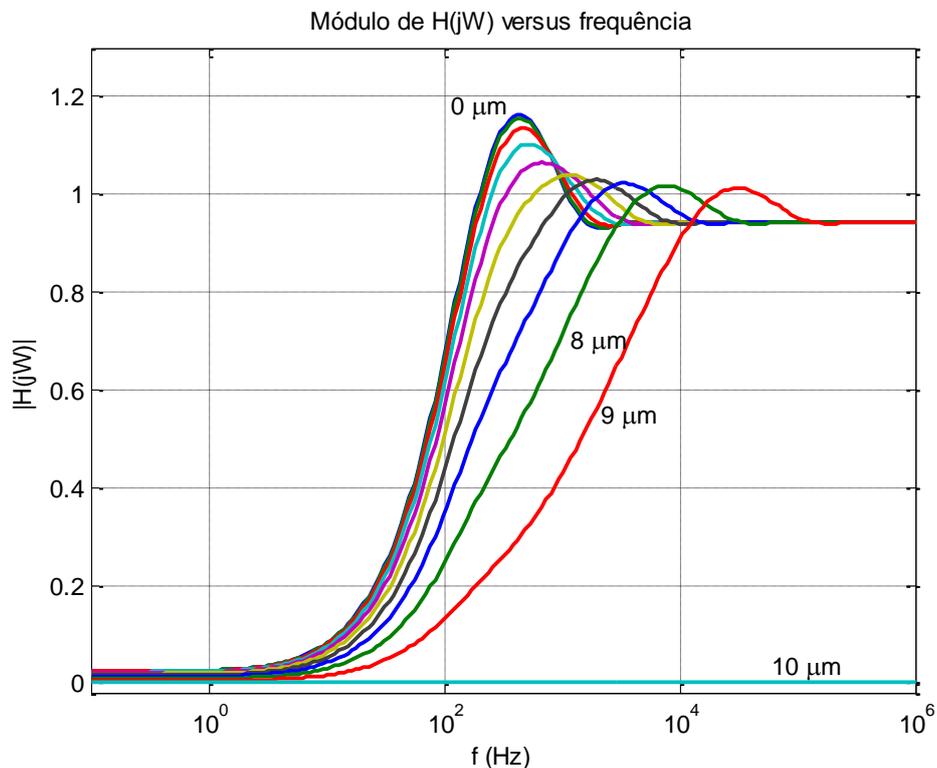


Fig. 5.2.a – Módulo da função de transferência de (4.1).

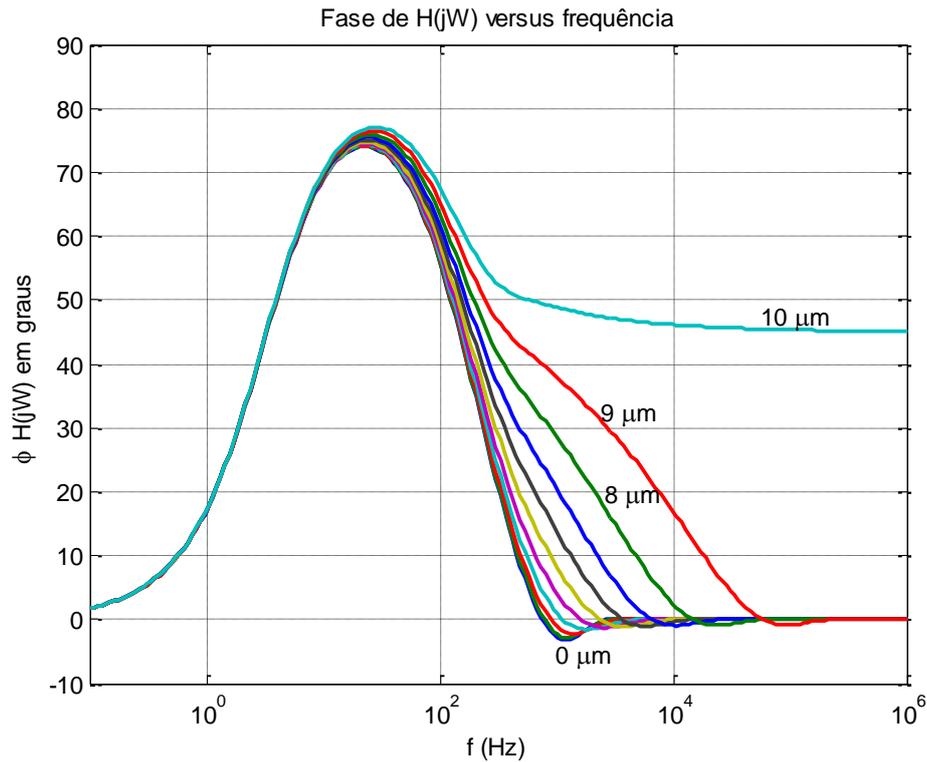


Fig. 5.2.b – Fase da função de transferência de (4.1).

Na figura 5.2, também se observa o comportamento em baixas frequências, confirmando, da mesma forma, a conclusão anterior de que seus módulos dependem unicamente dos valores resistivos do modelo matemático da junção, e não apresentando, portanto, defasagens.

Observa-se, também, nessa figura, a presença de um efeito ressonante, cuja frequência de ressonância é função da posição dentro da junção. Essa frequência de ressonância é menor no centro da junção e máxima na periferia da mesma. Em compensação, as amplitudes nas frequências de ressonâncias são máximas no centro da junção e vão diminuindo a medida que se caminha em direção da periferia.

Os gráficos de (4.2), objeto de estudo no capítulo 3, são exatamente os mesmos, para baixa, média e alta frequência, dos apresentados na figura 5.2, motivo pelo qual não são reproduzidos aqui.

## CONCLUSÃO

Com base no exposto, pode-se afirmar que a junção formada entre a célula nervosa e o semicondutor forma um condutor planar com núcleo e dupla capa [10]. O núcleo é formado pelo líquido extracelular, sendo uma das capas composta pela membrana celular e a outra, pelo dióxido de silício do transistor de efeito de campo. Essas capas isolam o núcleo do líquido intracelular e do canal do transistor.

A atividade neuronal, representada por  $V_M$ , origina uma corrente através da membrana celular, que é composta por uma corrente iônica e outra de deslocamento. Essa corrente ao se deslocar pelo núcleo do condutor planar causa o aparecimento de uma tensão perfilar  $V_j$  [10], que pode ser medida nos terminais do transistor de efeito de campo. Essa tensão depende de características tais como, do estímulo neuronal, da geometria e das propriedades elétricas da junção [1].

No estudo do comportamento dinâmico da junção, foi utilizado como modelo matemático na representação de tal comportamento, o modelo de contacto de área, cuja representação matemática é através de uma equação diferencial linear parcial de segunda ordem e coeficientes constantes.

Essa equação foi solucionada em coordenadas cilíndricas usando-se para tal, a solução analítica através do método da superposição e das funções de Green. As soluções são em forma de funções de transferências.

Em baixas e altas frequências o estudo foi analítico, usando-se para isso, as aproximações assintóticas. Já em médias frequências, optou-se pelo estudo gráfico ao analítico, devido a sua simplicidade.

Comparando-se os resultados obtidos pelos dois métodos, para baixas, médias e altas frequências, verificou-se perfeita compatibilidade entre os dois, apesar de, aparentemente, as equações resultantes serem completamente diferentes.

Na análise das soluções no domínio do tempo da equação 2.16 também se obteve resultados semelhantes, conforme se pode verificar em [12].

A solução obtida pelo método da superposição dá um resultado analítico bem mais simples que o método que utiliza as funções de Green. Porém, a grande vantagem do último método é que, uma vez encontrada a função de Green, a solução é imediata, o que já não ocorre pelo primeiro método, pois depende do tipo da excitação para se achar a solução particular, o que às vezes é uma tarefa bastante difícil.

## SUGESTÕES PARA ESTUDOS FUTUROS

Para o futuro, pretende-se realizar estudos sobre a influência das dimensões do canal do transistor de efeito de campo. O comprimento e a largura desse canal são fatores determinantes no tipo de sinal medido entre os terminais de fonte e dreno do transistor.

Outro fator importante de estudo são as influências das não linearidades dos canais de sódio e potássio, bem como da membrana celular, no modelo matemático representativo da junção neurônio-semicondutor.

## APÊNDICE A

Neste apêndice, faz-se a seguir, a dedução matemática da equação (2.16).

Há, basicamente, dois modelos para o estudo da junção formada entre a membrana celular e os semicondutores de silício: o modelo contacto de ponta e o modelo contacto de área [2]. Neste estudo, considera-se o modelo contacto de área [8]. Neste modelo, considera-se que os contactos são formados por pequenas superfícies circulares. Dessa forma, os valores dos componentes de circuitos são dados em termos de valores específicos.

Na figura A.1, é redesenhada uma parte da figura 2.4, que representa um elemento do modelo contacto de área para um modelo alternado.

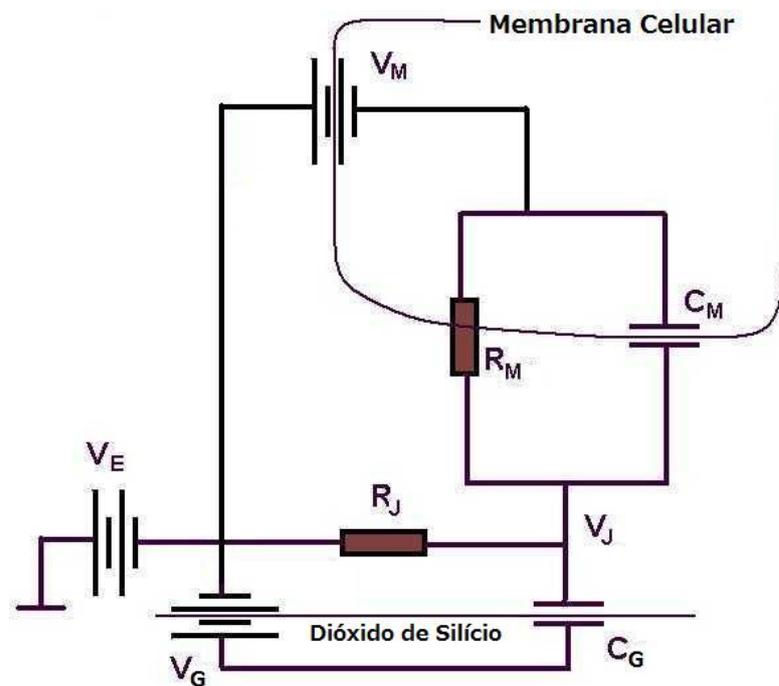


Fig. A1 – Modelo contacto de área.

Na figura acima, têm-se que:

- $C_M$  representa a capacitância específica da membrana celular, em unidades de  $F/cm^2$ ;
- $R_M$  representa a resistência específica da membrana celular, em unidades de  $\Omega/cm^2$ ;

- $R_j$  representa a resistência laminar formada entre a membrana celular e o semiconductor, em unidades de resistência (  $\Omega$  );
- $C_G$  representa a capacitância específica do dióxido de silício do semiconductor, em unidades de  $F/cm^2$ ;
- $V_M$  representa a tensão no interior da membrana celular em relação à  $V_E$ , em unidades de tensão (V).  $V_M$  incorporou  $V_R$ ;
- $V_j$  representa a tensão na junção formada entre a membrana celular e o semiconductor, em unidades de tensão (V);
- $V_G$  representa a tensão do substrato de silício em relação à  $V_E$ , em unidades de tensão (V); e
- $V_E$  representa a tensão do líquido extracelular, em unidades de tensão (V).

Na figura A1, aplica-se no nó  $V_j$  a lei nodal de Kirchhoff resultando:

$$c_M \frac{\partial(V_j - V_M)}{\partial t} + c_G \frac{\partial(V_j - V_G)}{\partial t} + \frac{V_j - V_M}{r_M} + \frac{V_j - V_E}{r_j} = 0. \quad (A.1)$$

Em (A.1),  $c_M$  representa a capacitância da membrana celular,  $c_G$  a capacitância do dióxido de silício,  $r_M$  a resistência da membrana celular e demais grandezas, conforme definido acima.

Desenvolvendo (A.1) e levando em consideração que  $V_E = V_G = 0$ , têm-se:

$$(c_M + c_G) \frac{\partial V_j}{\partial t} + \frac{V_j}{r_M} + \frac{V_j}{r_j} = c_M \frac{\partial V_M}{\partial t} + \frac{V_M}{r_M}. \quad (A.2)$$

O modelo contacto de área descreve a corrente em cada elemento de área na junção [8]. Então, se na equação acima dividir-se ambos os membros pela área de cada elemento, representada aqui por  $a_{elem} = \pi a^2$ , onde  $a$  é o raio da área de cada elemento, (A.2) fica:

$$(C_M + C_G) \frac{\partial V_j}{\partial t} + g_M V_j + \frac{V_j}{r_j a_{elem}} = C_M \frac{\partial V_M}{\partial t} + g_M V_M. \quad (A.3)$$

Em (A.3), os valores de  $C_M$ ,  $C_G$  e  $g_M$  estão em termos de valores específicos de capacitância e condutância.

Sabe-se que  $\frac{V_J}{a_{elem}} = -\nabla^2 \frac{1}{r_j} V_J$ . Então:

$$(C_M + C_G) \frac{\partial V_J}{\partial t} + g_M V_J - \frac{1}{r_j} \nabla^2 V_J = C_M \frac{\partial V_M}{\partial t} + g_M V_M, \quad (\text{A.4})$$

pois  $a_{elem}$  é suficientemente pequeno para ser considerado homogêneo,  $r_j$  deixa, desse modo, de fazer parte do laplaciano.

Dividindo-se (A.4) por  $g_M$ , obtêm-se a equação 2.11. A equação 2.16 é a equação 2.11 em coordenadas cilíndricas.

## APÊNDICE B

A seguir, breve descrição dos métodos de obtenção das funções de Green, para o caso em que o operador de *Sturm-Liouville* [6] é regular.

### B1 – Método do operador

Esse método será descrito através da solução de um problema para uma região finita,  $0 \leq x \leq a$ , e com condições de contorno homogêneas,  $y(0) = y(a) = 0$ .

Seja a seguinte equação diferencial não-homogênea com condições de contorno  $y(0) = y(a) = 0$ .

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = -f(x). \quad (\text{B.1})$$

O primeiro passo na solução do problema é a obtenção da função de Green, conforme procedimento abaixo:

- 1) Resolve-se a equação diferencial homogênea, B.2, para  $x < \xi$  e  $x > \xi$ , em que  $\xi$  é a posição da fonte. O resultado contém quatro coeficientes que devem ser determinados;

$$\frac{d^2 g(x/\xi)}{dx^2} + k^2 g(x/\xi) = 0, \quad (\text{B.2})$$

- 2) Aplicam-se as duas condições de contorno que resulta na determinação de dois dos quatro coeficientes; e
- 3) Aplica-se a condição de continuidade e salto para a determinação dos outros dois coeficientes.

$$g\left(\frac{\xi^-}{\xi}\right) = g\left(\frac{\xi^+}{\xi}\right); \quad (\text{B.3a})$$

e

$$\frac{dg(\xi^+/\xi)}{dx} - \frac{dg(\xi^-/\xi)}{dx} = -\frac{1}{p(\xi)}. \quad (\text{B.3b})$$

As equações B.3a e B.3b representam as condições de continuidade e salto respectivamente.

O segundo passo é a obtenção da solução geral da equação não-homogênea, que é obtida pela equação abaixo:

$$y(x) = \int_0^a f(x)g(x/\xi)dx. \quad (\text{B.4})$$

Os passos descritos acima serão exemplificados através do seguinte problema: Seja a seguinte equação diferencial no intervalo  $x \in (0, a)$ :

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + k^2y(x) = -f(x), \quad (\text{B.5})$$

com as seguintes condições de contorno:

$$y(0) = y(a) = 0. \quad (\text{B.6})$$

Reescrevendo a equação (B.5) em termos do operador de Sturm-Liouville [5], encontram-se os valores para  $p(x) = 1$ ,  $q(x) = 0$ ,  $r(x) = 1$  e  $\lambda = k^2$ . A equação (B.5) se transforma em:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{dy}{dx} \right] + \lambda y = -f(x). \quad (\text{B.7})$$

Para a determinação da função de Green, reescreve-se (B.7) substituindo  $y(x)$  e  $f(x)$  por  $g(x/\xi)$  e pela função impulso,  $\delta(x - \xi)$ , respectivamente. Dessa forma:

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{dg(x/\xi)}{dx} \right] + \lambda g \left( \frac{x}{\xi} \right) = -\delta(x - \xi). \quad (\text{B.8})$$

A equação (B.8) deve satisfazer as mesmas condições de contorno, ou seja:  $g(0/\xi) = g(a/\xi) = 0$ .

Resolvendo para a equação homogênea, (B.8) fica:

$$\frac{d^2 g(x/\xi)}{dx^2} + \lambda g(x/\xi) = 0. \quad (\text{B.9})$$

cuja solução é da forma:

$$g \left( \frac{x}{\xi} \right) = \begin{cases} A \cos kx + B \sin kx & , \quad x < \xi \\ C \cos k(a - x) + D \sin k(a - x), & x > \xi \end{cases}. \quad (\text{B.10})$$

Aplicando as condições de contorno em (B.10), encontra-se  $A = C = 0$ .

Então:

$$g \left( \frac{x}{\xi} \right) = \begin{cases} B \sin kx & , \quad x < \xi \\ D \sin k(a - x), & x > \xi \end{cases}. \quad (\text{B.11})$$

Em seguida aplica-se na equação (B.11), a condição de continuidade,

$$B \sin k\xi = D \sin k(a - \xi) \quad (\text{B.12})$$

e salto:

$$-Dk \cos k(a - \xi) - Bk \cos k(a - \xi) = -1. \quad (\text{B.13})$$

Das duas equações acima, obtêm-se para B e D, os seguintes resultados:

$$B = \frac{\sin k(a - \xi)}{k \sin ka}; \quad (\text{B.14})$$

e

$$D = \frac{\text{sen}k\xi}{k\text{sen}ka}. \quad (\text{B.15})$$

Resultando para a função de Green:

$$g\left(\frac{x}{\xi}\right) = \begin{cases} \frac{\text{sen}k(a-\xi)}{k\text{sen}ka} \text{sen}kx, & x < \xi \\ \frac{\text{sen}k\xi}{k\text{sen}ka} \text{sen}k(a-x), & x > \xi \end{cases}. \quad (\text{B.16})$$

A equação (B.16) é simétrica, pois  $g(x/\xi) = g(\xi/x)$ .

Resultando como solução final para (B.5):

$$y(\xi) = \int_0^a f(x) h\left(\frac{x}{\xi}\right) dx, \quad (\text{B.17})$$

Na equação (B.17) aparece  $h(x/\xi)$  que é a função adjunta de Green [5]. Essa função é obtida diretamente da função de Green, equação (B.16), bastando substituir  $x$  por  $\xi$  e  $\xi$  por  $x$  [5]. Então:

$$h(x/\xi) = g(\xi/x) = g\left(\frac{x}{\xi}\right). \quad (\text{B.18})$$

Substituindo (B.18) na equação (B.17), tem-se:

$$y(\xi) = \int_0^a f(x) g\left(\frac{x}{\xi}\right) dx; \quad (\text{B.19})$$

e

$$y(\xi) = \int_0^{\xi} f(x) \frac{\text{sen}k(a-\xi)}{k\text{sen}ka} \text{sen}kx dx + \int_{\xi}^a f(x) \frac{\text{sen}k\xi}{k\text{sen}ka} \text{sen}k(a-x) dx. \quad (\text{B.20})$$

Fazendo o intercambio entre  $\xi$  e  $x$ , tem-se a solução final para o problema apresentado a título de exemplo:

$$y(x) = \int_0^x f(\xi) \frac{\text{sen}k(a-x)}{k\text{sen}ka} \text{sen}k\xi d\xi + \int_x^a f(\xi) \frac{\text{sen}kx}{k\text{sen}ka} \text{sen}k(a-\xi) d\xi. \quad (\text{B.21})$$

Na figura B.1, tem-se o gráfico da função de Green em função de  $x/a$  e de  $\xi/a$ , com  $ka = 10$ .

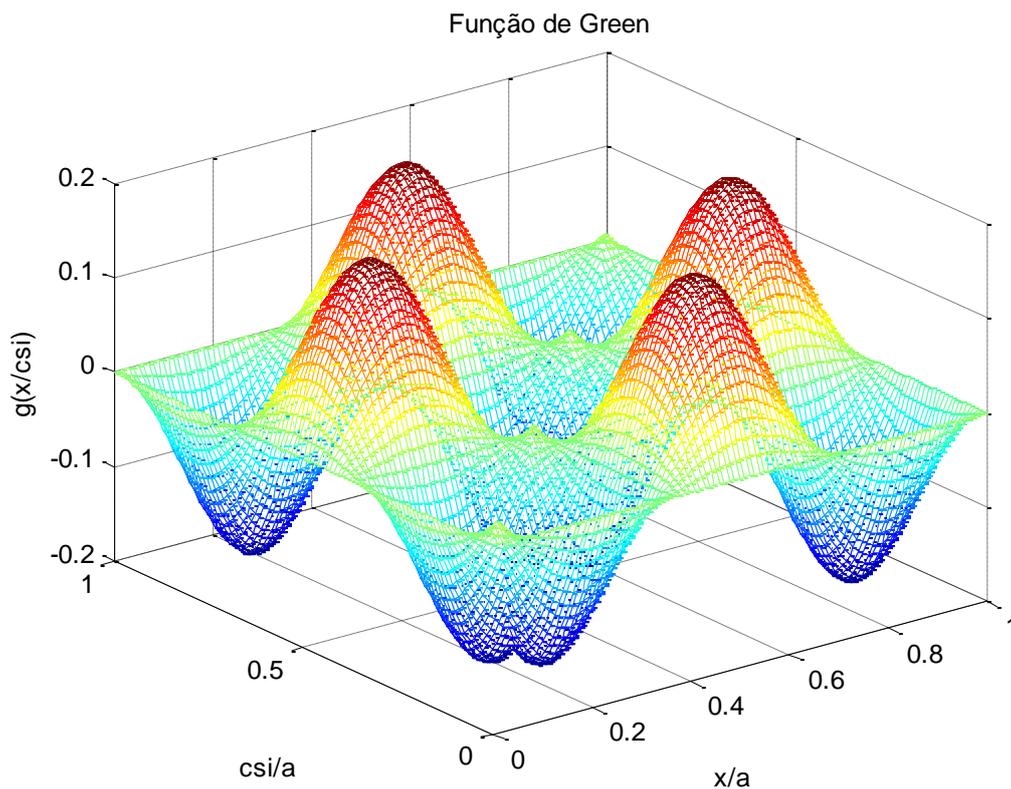


Fig. B.1 – Função de Green como função de  $x$  e  $\xi$ .

Na figura B.1, pode-se observar que as condições de contorno estão atendidas, bem como a condição de salto ou descontinuidade das derivadas a esquerda e a direita quando  $x = \xi$ .

## B.2 – Método da expansão modal [4] [5]

Esse método será descrito através da solução da equação (B.1), repetida aqui por conveniência:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = -f(x), \quad (\text{B.22})$$

e mesmas condições de contorno:  $y(0) = y(a) = 0$ .

A função de Green correspondente,  $g(x/\xi)$ , deve satisfazer a equação (B.23):

$$\frac{d^2 g(x/\xi)}{dx^2} + k^2 g\left(\frac{x}{\xi}\right) = -\delta(x - \xi), \quad (\text{B.23})$$

que também obedecem as mesmas condições de contorno  $g(0/\xi) = g(a/\xi) = 0$ .

A diferença desse método em relação ao anterior, é que ao invés de resolver (B.23) em relação à homogênea, elege-se uma solução em forma de uma série em termos de autofunções. Essas autofunções,  $\varphi_n$ , devem satisfazer a seguinte equação que está associada ao problema regular de *Sturm-Liouville* [5,6], ou seja:

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d\varphi_n}{dx} \right] + \lambda_n \varphi_n = 0. \quad (\text{B.24})$$

Devido às condições de contorno homogêneas, expande-se tanto  $g(x/\xi)$  como  $\delta(x - \xi)$  da equação (B.23) em série de Fourier de senos. Assim, tem-se para  $g(x/\xi)$ :

$$g\left(\frac{x}{\xi}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\xi) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right); \quad (\text{B.25})$$

e para  $\delta(x - \xi)$

$$\delta(x - \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\xi) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right). \quad (\text{B.26})$$

Nas equações (B.25) e (B.26), as autofunções são representadas por:

$$\phi_n(x) = \text{sen}(\lambda_n x), \quad (\text{B.27})$$

e os autovalores por:

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{a}, \quad (\text{B.28})$$

pois (B.25) e (B.26) satisfazem (B.24), com  $n = 1, 2, 3, \dots$

Substituindo as equações (B.25) e (B.26) na equação (B.23), tem-se:

$$\left[ -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \gamma_n(\xi) + k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\xi) \right] \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\xi) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right). \quad (\text{B.29})$$

De (B.26), encontra-se:

$$\alpha_n(\xi) = \frac{2}{a} \text{sen}\left(\frac{n\pi \xi}{a}\right). \quad (\text{B.30})$$

Substituindo (B.30) em (B.29), tem-se:

$$\left[ -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \gamma_n(\xi) + k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\xi) \right] \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a} \text{sen}\left(\frac{n\pi \xi}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right). \quad (\text{B.31})$$

A equação (B.31) é válida para qualquer  $x$  e  $n$ , podendo-se fazer a seguinte simplificação, conforme abaixo:

$$-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \gamma_n(\xi) + k^2 \gamma_n(\xi) = -\frac{2}{a} \text{sen}\left(\frac{n\pi \xi}{a}\right). \quad (\text{B.32})$$

Resultando para  $\gamma_n(\xi)$ :

$$\gamma_n(\xi) = \frac{2 \text{sen}\left(\frac{n\pi \xi}{a}\right)}{a \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - k^2}. \quad (\text{B.33})$$

A função de Green é, portanto:

$$g(x/\xi) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - k^2}. \quad (\text{B.34})$$

Como  $g(x/\xi)$  é simétrica, tem-se como solução da equação (B.22):

$$y(x) = \frac{2}{a} \int_0^a f(\xi) \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right)\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - k^2} d\xi, \quad (\text{B.35})$$

ou

$$y(x) = \frac{2}{a} \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi x}{a}\right)}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - k^2} \int_0^a f(\xi) \text{sen}\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right) d\xi. \quad (\text{B.36})$$

Na figura B.2, tem-se o gráfico da função de Green, obtida através da solução modal, em função de  $x/a$  e de  $\xi/a$ , com  $ka = 10$ .

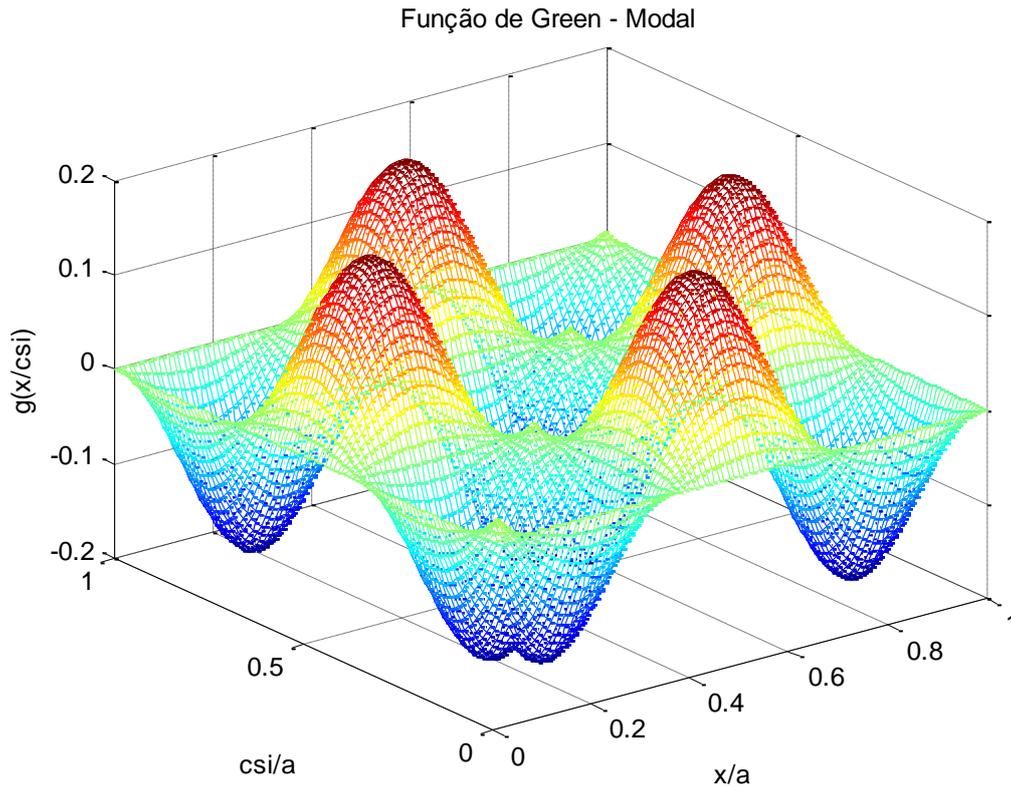


Fig. B.2 – Função de Green-Modal como função de  $x$  e  $\xi$ .

Abaixo, um resumo do método:

Deseja-se resolver a equação diferencial:

$$Ly(x) = -f(x), \quad (\text{B.37})$$

com condições de contorno  $By(x) = 0$  ao longo do contorno.  $L$  é o operador diferencial regular de *Sturm-Liouville*:

$$L = \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} \right] + [q(x) + \lambda r(x)], \quad (\text{B.38})$$

e  $B$  é o operador da condição de contorno, dado por:

$$B = \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 \frac{d}{dx}, & \text{em } x = a \\ \beta_1 + \beta_2 \frac{d}{dx}, & \text{em } x = b \end{cases}. \quad (\text{B.39})$$

Procura-se uma função de Green  $g(x/\xi)$ , que satisfaça:

$$Lg(x/\xi) = -\delta(x - \xi) \quad \text{e} \quad Bg(x/\xi) = 0. \quad (\text{B.40})$$

Para achar a função de Green, usa-se o conjunto de autofunções  $\varphi_n(x)$  associado com o problema de *Sturm-Liouville*:

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d\varphi_n}{dx} \right] + [q(x) + \lambda r(x)] \varphi_n = 0, \quad (\text{B.41})$$

em que  $\varphi_n(x)$  satisfaz as mesmas condições de contorno que  $y(x)$ . Se a função de Green existir e se o conjunto  $\{\varphi_n\}$  for completo, então se pode representar  $g(x/\xi)$  por uma série, na forma:

$$g(x/\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\xi) \varphi_n(x). \quad (\text{B.42})$$

Aplicando o operador  $L$  na equação (B.42), obtêm-se:

$$Lg(x/\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\xi) L\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\xi) (\lambda - \lambda_n) r(x) \varphi_n(x) = -\delta(x - \xi). \quad (\text{B.43})$$

Na equação (B.43),  $\lambda$  é diferente do autovalor  $\lambda_n$ . Resolvendo a equação (B.43), obtém-se para  $\gamma_n(x)$ :

$$\gamma_n(\xi) = \frac{\varphi_n(\xi)}{\lambda_n - \lambda}, \quad (\text{B.44})$$

que resulta para  $g(x/\xi)$ :

$$g(x/\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\xi)}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(x). \quad (\text{B.45})$$

A equação (B.45) permite que se escreva a função de Green, de forma imediata, se os autovalores e conseqüentemente as autofunções são conhecidas.

## APÊNDICE C

A seguir apresentam-se os códigos dos programas utilizados para fornecer os resultados descritos neste trabalho.

Utiliza-se da linguagem de programação simulações.

(i) Programa que retorna o gráfico da fig. B.1 do Apêndice B:

```
clear all
clc
disp('Início de execução...')
a = 1;
k = 10;
k1 = k/a;
%Passo do incremento
inc = 1/100;
%Incrementa as linhas das matrizes do meshgrid
x = 0:inc:1;
%Incrementa as colunas das matrizes do meshgrid
ksi=0:inc:1;
[X,Ksi]=meshgrid(x,ksi);
for lin=1:length(x)
    for col=1:length(ksi)
        if X(lin,col)<=Ksi(lin,col)
            g(lin,col)=sin(k*X(lin,col)/a)*sin(k*(1-Ksi(lin,col)/a))/(k1*sin(k));
        end
        if X(lin,col)>Ksi(lin,col)
            g(lin,col)=(sin(k*(Ksi(lin,col)/a)))*sin(k*(1-X(lin,col)/a))/(k1*sin(k));
        end
    end
end
end
% Gráfico
```

```

figure(1);
surf(X,Ksi,g);
mesh(X,Ksi,g);
colormap('default');
title('Função de Green')
xlabel('x/a')
ylabel('csi/a')
zlabel('g(x/csi)')

```

(ii) Programa que retorna o gráfico da fig. B.2 do Apêndice B:

```

clear all
clc
%ATENÇÃO: Este processamento é bastante demorado devido ao loop que implementa a
somaória.
disp('Início de execução...')
%Definindo a resolução
a=1;
%Definindo o incremento
inc = 1/100;
%Incremento das linhas das matrizes do meshgrid
x=0:inc:1;
%Incremento das colunas das matrizes do meshgrid
ksi=0:inc:1;
X,Ksi]=meshgrid(x,ksi);
%Valor máximo de n
nmax=150;
for lin=1:length(x)
    for col=1:length(ksi)
        %Implementa os termos do somatório
        for n=1:nmax;
            %k*a = 10
            k = 10/a;
            s(1,n)=(sin(n*pi*Ksi(lin,col)/a)*sin((n*pi*X(lin,col))/a))/(((n*pi/a)^2)-k^2);

```

```

    end
%Implementa os termos do somatório gerados para cada X e Ksi
    g(lin,col)=(2/a)*sum(s);
    end
end
%Gráfico de "g" como uma soma de autofunções
figure(1);
surf(X,Ksi,g);
mesh(X,Ksi,g);
colormap('default');
title('Função de Green - Modal')
xlabel('x/a')
ylabel('csi/a')
zlabel('g(x/csi)')

```

(iii) Programa que retorna o gráfico da figura 5.1 – equação (5.8):

```

%Plotagem do gráfico da função de transferência para baixas frequências
%- capítulo 5 - figura 5.1.

```

```
clear all
```

```
clc
```

```
%Entrada valores dos parâmetros.
```

```
a = 10*1e-6; %Unidade em metros.
```

```
CJM = 5e-6; %Unidade em Farads/centimetro quadrado.
```

```
gJM = 0.1e-3; %Unidade em Siemens/centimetro quadrado.
```

```
CJG = 0.3e-6; %Unidade em Farads/centimetro quadrado.
```

```
rJ = 1e9; %Unidade em Ohms.
```

```
%Calculo parâmetros auxiliares.
```

```
tau = (CJM + CJG)/gJM; %Constante de tempo da junção. Unidade em segundos.
```

```
taum = CJM/gJM; %Constante de tempo da membrana. Unidade em segundos.
```

```
lambda2 = 1/(gJM*rJ)*1e-4; %Número de onda ao quadrado. Unidade em 1/metros quadrado.
```

```

%Escala logarítmica no eixo da frequência
K1 = 200;
f = logspace(-1,0,K1);

%Criação do vetor R
R = 1e-6*[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 9.9999];

for r = 1:1:11
    for k = 1:1:K1

        format long

        ION = besseli(0,R(r)/(sqrt(lambda2)));
        IOD = besseli(0,a/(sqrt(lambda2)));

        %Obtenção da função de transferência H
        H = (1-ION/IOD);
        %Obtenção da parte real e imaginária de H
        RH = real(H);
        IH = imag(H);
        %Obtenção do módulo e fase de H
        MH(r,k) = sqrt(RH^2 + IH^2);
        FH(r,k) = atan(IH/RH)*180/pi;
    end
end

%Plotagem do módulo
figure(1)
semilogx(f,MH,'LineWidth',1.5),grid
title('Figura 5.1 - Módulo de H(jW) versus frequência');
xlabel('f (Hz)');
ylabel('|H(jW)|');
ylim([-0.001 0.025]);
xlim([0.1 1]);

```

```

%Plotagem da fase
figure(2)
semilogx(f,FH,'LineWidth',1.5),grid
title('Figura 5.1 - Fase de H(jW) versus frequência');
xlabel('f (Hz)');
ylabel('\phi H(jW) em graus');
ylim([-0.01 0.01]);
xlim([0.1 1]);

```

(iv) Programa que retorna o gráfico da equação obtida no capítulo 3 – equação (3.20):

%Plotagem do gráfico da solução da equação diferencial obtida analiticamente - capítulo 3 - equação 3.20.

%A solução está sob a forma de uma função de transferência -  $H_j(r,w)$ .

```

clear all
clc

```

%Entrada valores dos parâmetros.

a = 10\*1e-6; %Unidade em metros.

CJM = 5e-6; %Unidade em Farads/centimetro quadrado.

gJM = 0.1e-3; %Unidade em Siemens/centimetro quadrado.

CJG = 0.3e-6; %Unidade em Farads/centimetro quadrado.

rJ = 1e9; %Unidade em Ohms.

%Calculo parâmetros auxiliares.

tau = (CJM + CJG)/gJM; %Constante de tempo da junção. Unidade em segundos.

taum = CJM/gJM; %Constante de tempo da membrana. Unidade em segundos.

lambda2 = 1/(gJM\*rJ)\*1e-4; %Número de onda ao quadrado. Unidade em 1/metros  
%quadrado.

%Escala logarítmica no eixo da frequência

K1 = 200;

```
f = logspace(-1,6,K1);
```

```
%Criação do vetor R
```

```
R = 1e-6*[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 9.9999];
```

```
for r = 1:1:11
```

```
    for k = 1:1:K1
```

```
        %A equação a ser calculada é:  $H = (\text{gamam2}/\text{gama2}) * (1 - \text{ION}/\text{IOD})$ .
```

```
        %ION e IOD são as funções de Bessel modificada de ordem zero e primeira espécie.
```

```
        % $\text{gamam2} = 1 + j * 2 * \pi * f * \text{taum}$  e  $\text{gama2} = 1 + j * 2 * \pi * f * \text{tau}$ .
```

```
        format long
```

```
        gama2 = (1 + j*2*pi*f(k)*tau)/lambda2;
```

```
        gama = sqrt(gama2);
```

```
        gamam2 = (1 + j*2*pi*f(k)*taum)/lambda2;
```

```
        ION = besseli(0,gama*R(r));
```

```
        IOD = besseli(0,gama*a);
```

```
        %Obtenção da função de transferência H
```

```
        H = (gamam2/gama2)*(1-ION/IOD);
```

```
        %Obtenção da parte real e imaginária de H
```

```
        RH = real(H);
```

```
        IH = imag(H);
```

```
        %Obtenção do módulo e da fase de H
```

```
        MH(r,k) = sqrt(RH^2 + IH^2);
```

```
        FH(r,k) = atan(IH/RH)*180/pi;
```

```
    end
```

```
end
```

```
%Plotagem do módulo
```

```
figure(1)
```

```
semilogx(f,MH,'LineWidth',1.5),grid
```

```
title('Módulo de H(jW) versus frequência');
```

```
xlabel('f (Hz)');
```

```
ylabel('|H(jW)|');
```

```
ylim([-0.02 1.3]);
xlim([0.1 1000000]);
```

```
%Plotagem da fase
figure(2)
semilogx(f,FH,'LineWidth',1.5),grid
title('Fase de H(jW) versus frequência');
xlabel('f (Hz)');
ylabel('\phi H(jW) em graus');
ylim([-10 90]);
xlim([0.1 1000000]);
```

(v) Programa que retorna o gráfico da equação obtida no capítulo 4 – equação (4.34):

%Plotagem do gráfico da solução da equação diferencial obtida através da função de Green - capítulo 4 - equação 4.20.

%A solução está sob a forma de uma função de transferência -  $H_j(r,w)$ .

```
clear all
```

```
clc
```

```
%Entrada valores dos parâmetros.
```

```
a = 10*1e-6; %Unidade em metros.
```

```
CJM = 5e-6; %Unidade em Farads/centimetro quadrado.
```

```
gJM = 0.1e-3; %Unidade em Siemens/centimetro quadrado.
```

```
CJG = 0.3e-6; %Unidade em Farads/centimetro quadrado.
```

```
rJ = 1e9; %Unidade em Ohms.
```

```
%Calculo parâmetros auxiliares.
```

```
tau = (CJM + CJG)/gJM; %Constante de tempo da junção. Unidade em segundos.
```

```
taum = CJM/gJM; %Constante de tempo da membrana. Unidade em segundos.
```

```
%lambda2 = 1/(gJM*rJ)*1e-4; %Número de onda ao quadrado. Unidade em 1/metros  
%quadrado.
```

```
lambda2 = 1/(gJM*rJ)*1e-4;
```

```
%Escala logarítmica no eixo da frequência
```

```
K1 = 200;
```

```
f = logspace(-1,6,K1);
```

```
%Criação do vetor R
```

```
R = 1e-6*[0.00001 1 2 3 4 5 6 7 8 9 9.9999];
```

```
for r = 1:1:11
```

```
    for k = 1:1:K1
```

```
        %A equação a ser calculada é a equação (4.34) obtida através do método de Green.
```

```
        %gamam2 = 1 + j*2*pi*f*taum e gama2 = 1 + j*2*pi*f*tau.
```

```
        format long
```

```
        gama2 = (1 + j*2*pi*f(k)*tau)/lambda2;
```

```
        gama = sqrt(gama2);
```

```
        gamam2 = (1 + j*2*pi*f(k)*taum)/lambda2;
```

```
        I0a = besseli(0,gama*a);
```

```
        K0r =esselk(0,gama*R(r));
```

```
        I1r = besseli(1,gama*R(r));
```

```
        I0r = besseli(0,gama*R(r));
```

```
        K1r =esselk(1,gama*R(r));
```

```
        K1a =esselk(1,gama*a);
```

```
        K0a =esselk(0,gama*a);
```

```
        I1a = besseli(1,gama*a);
```

```
%Obtenção da função de transferência HG
```

```
HG = (gamam2/(gama*I0a))*(R(r)*I0a*(K0r*I1r+I0r*K1r)-a*I0r*(I0a*K1a+K0a*I1a));
```

```
%Obtenção da parte real e imaginária de HG
```

```
HGR = real(HG);
```

```
HGI = imag(HG);
```

```
%Obtenção do módulo e fase de HG
MHG(r,k) = sqrt(HGR^2 + HGI^2);
FHG(r,k) = atan(HGI/HGR)*180/pi;
end
end

%Plotagem do módulo
figure(1)
semilogx(f,MHG,'LineWidth',1.5),grid
title('Módulo de HG(jW) versus frequência');
xlabel('f (Hz)');
ylabel('|HG(jW)|');
ylim([-0.02 1.3]);
xlim([0.1 1000000]);

%Plotagem da fase
figure(2)
semilogx(f,FHG,'LineWidth',1.5),grid
title('Fase de HG(jW) versus frequência');
xlabel('f (Hz)');
ylabel('\phi HG(jW) em graus');
ylim([-10 90]);
xlim([0.1 1000000]);
```

## BIBLIOGRAFIA

- [1] GUYTON, Arthur C. Neurociência Básica: Anatomia e Fisiologia. Editora Guanabara Koogan S.A., 1993.
- [2] WASER, RAINER. Nanoelectronics and Information Technology 2<sup>nd</sup>, Wiley-VCH-2005.
- [3] GUYTON & HALL. Fisiologia Médica. Décima edição, Guanabara-Koogan-2002.
- [4] WEIS, R., e P. Fromherz. Phys. Rev. E 55, 877 (1997).
- [5] HABERMAN, Richard. Física para Cientistas e Engenheiros 2<sup>nd</sup>, Prantice Hall, 1987.
- [6] DUDLEY, Donald G. Mathematical Foundation for Electromagnetic Theory IEEE PRESS-1994.
- [7] WATSON, G. N. A Treatise on the Theory of Bessel Functions 2<sup>nd</sup>, Cambridge at the University Press-1944.
- [8] BRAUN, D., e P. Fromherz. Imaging Neuronal Seal Resistance on Silicon Chip using Fluorescent Voltage-Sensitive Dye. Biophys. J. 87:1351-1359.
- [9] E, Capelas de Oliveira, e Martin Tygel. Universitários, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2005.
- [10] SCHMIDTNER, Markus, e P. Fromherz. Na<sup>+</sup> Channels in Cell Adhesion. Biophys. J. 90:183-189.
- [11] DUFFY, Dean G. Green's Functions with Applications. Chapman & Hall/CRC, 2001.

- [12] GOMES, Fernando, e Victor Dmitriev  
de uma Equação Diferencial para Modelamento Matemático de Interfaces Neurológicas  
XXXI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional (CNMAC). Belém,  
2008.
- [13] VOELKER, M., e P. Fromherz. "Nyquist Noise Adhesion Detected in a Neuron-Silicon  
Transistor" *Phys. Rev. Lett.* 96, 0031-9007 (2006).