



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
CIVIL**

SANDRO DIORD RESCINHO AMADOR

**PROGRAMA COMPUTACIONAL COM
INTERFACE GRÁFICA PARA IDENTIFICAÇÃO
ESTOCÁSTICA DE PARÂMETROS MODAIS DE
ESTRUTURAS CIVIS – APLICAÇÃO EM PONTES E
TORRES DE LINHAS DE TRANSMISSÃO**

Belém

2007



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO TECNOLÓGICO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
CIVIL**

SANDRO DIORD RESCINHO AMADOR

**PROGRAMA COMPUTACIONAL COM
INTERFACE GRÁFICA PARA IDENTIFICAÇÃO
ESTOCÁSTICA DE PARÂMETROS MODAIS DE
ESTRUTURAS CIVIS – APLICAÇÃO EM PONTES E
TORRES DE LINHAS DE TRANSMISSÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Remo Magalhães de Souza

Belém

2007

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal do Pará, Belém/PA.

Amador, Sandro Diord Rescinho

Programa computacional com interface gráfica para identificação estocástica de parâmetros modais de estruturas civis: aplicação em pontes e torres de linha de transmissão / Sandro Diord Rescinho Amador; orientador, Remo Magalhães de Souza. – 2007

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Centro Tecnológico, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Belém, 2007.

1. Estruturas metálicas. 2. Dinâmica estrutural. 3. Análise modal.
4. Computação gráfica. I. Título.

CDD – 21. ed. 624.182



PROGRAMA COMPUTACIONAL COM INTERFACE GRÁFICA PARA IDENTIFICAÇÃO ESTOCÁSTICA DE PARÂMETROS MODAIS DE ESTRUTURAS CIVIS – APLICAÇÃO EM PONTES E TORRES DE LINHAS DE TRANSMISSÃO.

AUTOR:

SANDRO DIORD RESCINHO AMADOR

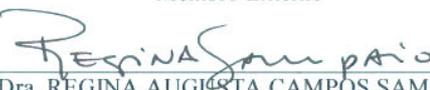
DISSERTAÇÃO SUBMETIDA A BANCA EXAMINADORA APROVADA PELO COLEGIADO DO CURSO DE MESTRADO EM ENGENHARIA CIVIL DO INSTITUTO DE TECNOLOGIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ, COMO REQUISITO PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL NA ÁREA DE ESTRUTURAS E CONSTRUÇÃO CIVIL.

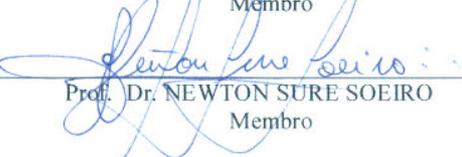
APROVADA EM: 21 / 09 / 2007

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. REMO MAGALHÃES DE SOUZA
Orientador


Prof. Dr. JOSÉ LUIS VITAL DE BRITO
Membro Externo


Prof.^a Dra. REGINA AUGUSTA CAMPOS SAMPAIO
Membro


Prof. Dr. NEWTON SURE SOEIRO
Membro

Visto:


Prof. Dr. ALCEBIADES NEGRÃO MACEDO
Coordenador do PPGEC / IT / UFPA

Dedicatória

Aos meus pais Ana Maria Rescinho Amador e Ariosvaldo José Barbosa Amador que sempre me apoiaram ao longo dessa jornada, e a todos os professores que contribuíram para minha formação acadêmica.

Agradecimentos

Ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil pela oportunidade, e ao corpo docente desse programa, em particular ao professor Remo Magalhães de Souza, meu orientador.

À toda turma do NiCAE, especialmente aos alunos da graduação: Edílson Moraes (Maguila), Marcelo Brito (Senhor Madruga), Giselle (Dona Gigi), Rafael Queiroz (Morceirão) e ao Francisco Vicente (Jacozinho). Ao professor Luís Augusto e ao Engo Jean Rodrigo (Dolabila) que enfrentaram o medo e desafiaram a gravidade nos ensaios experimentais de vibração da torre de linha de transmissão de energia situada na margem direita do rio Guamá.

Ao Marcelo Rassy Teixeira (Homem-Pedra) pela ajuda na criação do modelo computacional da ponte do TGL, e ao José Fernando pela realização dos ensaios experimentais na referida ponte. Não poderida deixar de agradecer também ao Alécio Patrick (esse ainda não tem apelido. Por enquanto!!!) pela ajuda na criação dos modelos da torre da travessia do Guamá.

À minha namorada Margret Jäger por todo o apoio prestado na fase de conclusão desta dissertação.

À CAPES e à Eletronorte pelo apoio financeiro dispensado para elaboração desta dissertação.

Enfim, à todos que direta e indiretamente contribuíram para realização deste trabalho.

RESUMO

Sandro Amador. Programa Computacional com Interface Gráfica Para Identificação Estocástica de Parâmetros Modais de Estruturas Civas – Aplicação em Pontes e Torres de Linhas de Transmissão. Belém, Departamento de Construção Civil, Universidade Federal do Pará, 2007. 174 p. dissertação (mestrado).

O interesse no comportamento dinâmico de estruturas metálicas vem crescendo nas últimas décadas no Brasil, em decorrência de acidentes com colapso total de algumas estruturas devido às vibrações ambientes em diversas regiões do país. Na região amazônica, por exemplo, onde esse tipo de estrutura deve vencer obstáculos como florestas e rios de grande largura, casos de colapso total de estruturas metálicas também são relatados. O foco principal dessa dissertação é o estudo do comportamento modal de estruturas metálicas submetidas às vibrações ambientes cuja magnitude das forças de excitação é desconhecida. Dois estudos de caso são apresentados: no primeiro deles, o comportamento modal de uma torre de linha de transmissão de energia elétrica é investigado; e no segundo caso, tanto o comportamento modal como os níveis de desconforto de uma ponte são estudados. Os estudos realizados neste último caso visam avaliar os níveis de desconforto da ponte quando submetida às excitações ambientes como rajadas de vento e o tráfego de veículo de acordo a norma brasileira NBR 8800 (1986). Em ambos os estudos de caso foram realizadas análises experimentais e computacionais. Na etapa experimental, ambas as estruturas foram monitoradas com emprego de um conjunto de acelerômetros de baixa frequência e também de um sistema de aquisição apropriados para ensaios de vibração de estruturas civis. Como é muito difícil medir a magnitude das forças de excitação ambientes, foram utilizados os métodos de identificação estocásticos **SSI-DATA** e **SSI-COV** para extração de parâmetros modais de estruturas civis a partir somente dos dados de resposta coletados nos ensaios de vibração. Entre as atividades desenvolvidas nessa etapa, destaca-se a criação de um programa computacional com recursos do *Graphical User Interface* (GUI) da plataforma Matlab®, destinado à identificação modal de estruturas civis com o emprego dos referidos métodos estocásticos. Esse programa é constituído de três módulos: o primeiro é destinado ao processamento e tratamento dos sinais coletados nos ensaios de vibração; o segundo é utilizado para adicionar as informações do posicionamento dos acelerômetros utilizados nos arquivos dos sinais de resposta; e o terceiro e último módulo é destinado à identificação a partir dos arquivos de dados de resposta processados nos dois primeiros módulos. Na etapa das análises teóricas, foram criados modelos numéricos utilizando o método dos elementos finitos para simular o comportamento dinâmico das estruturas analisadas. Comparando os resultados obtidos em ambas as etapas de análise, verifica-se que resultados experimentais e teóricos apresentaram parâmetros bastante próximos entre si nos primeiros modos de vibração. Os resultados experimentais mostraram que ambos os métodos estocásticos foram muito eficientes na identificação das estruturas ensaiadas.

Palavras-chave: identificação estocástica, dinâmica estrutural, análise modal.

ABSTRACT

Sandro Amador. A Graphical User Interface for Modal Identification of Civil Engineering Structures by Means of Stochastic State-Space Models – Application to Bridges and Overhead Transmission Line Towers. Belém, Faculty of Civil Engineering, Federal University of Para, 2007. 174 p. master thesis (master degree in civil engineering).

Interest on the dynamic behavior of latticed structures has been increased in the latest decades in Brazil since some accidents with total collapse of some structures, due to excessive vibration, have been occurred in its different regions. In the Amazon region, for instance, where these latticed structures overcome great obstacles such as the rainforest and large rives crossings, cases of collapse of latticed structures have been also reported. This master thesis focuses on the study of the modal behavior of latticed steel structures subjected to ambient vibrations caused by unknown excitation forces. Two study cases are presented: in the first, the modal behavior of a steel overhead transmission line tower is investigated; in the second case, the modal behavior and comfort level of a steel bridge is studied. The study of this last case aims at investigating the level of comfort of the bridge under ambient vibration, caused by wind gusts and vehicle traffic, according to the Brazilian standard NBR 8800 (1986). In both study cases, experimental and theoretical dynamic analyzes were performed to extract the modal parameters of theses structures. In the experimental stage, both structures were monitored using a set of low frequency accelerometers as well as a data acquisition system suitable for vibration tests of civil engineering structures. Since it is very difficult to measure the magnitude of ambient excitation forces, two stochastic subspace identification methods known as **SSI-DATA** and **SSI-COV** were employed to extract the modal parameters of the analyzed structures from response data collected in the vibration tests. Among all activities performed in this stage, a Graphical User Interface (**GUI**) toolbox in Matlab® platform was developed. In this toolbox, the above mentioned stochastic methods were implemented to extract modal parameters of civil engineering structures only from the response data collected in vibration tests. This toolbox consists of three modules: the first is used to process and treat the signals collected in the vibrations tests; the second is designed for allowing user to add the information related to the position and orientation of the accelerometers to the data files; the last module is used to extract the modal parameters from the response data files pre-processed in the first two modules. In the theoretical stage, numerical models were created to simulate de dynamical behavior of the structures under study. By comparing the results from both stages of analysis, it is observed that the experimental and theoretical results are in good agreement for the first modes of vibration. The experimental results showed that the approach developed for output-only modal analysis of civil engineering structures using stochastic state-space based methods was very efficient for identification of the modal parameters of the analyzed structures.

Keywords: stochastic identification, structural dynamics, modal analysis.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – APRESENTAÇÃO	22
1.1 INTRODUÇÃO.....	22
1.2 OBJETIVOS.....	24
1.2.1 Objetivo geral.....	24
1.2.2 Objetivos Específicos.....	24
1.3 JUSTIFICATIVA.....	27
1.4 METODOLOGIA.....	31
1.5 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO.....	34
CAPÍTULO 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	36
2.1 INTRODUÇÃO.....	36
2.2 ANÁLISE DINÂMICA DE TORRES SUBMETIDAS À AÇÃO DO VENTO ...	36
2.3 ANÁLISE DINÂMICA DE PONTES.....	44
2.4 IDENTIFICAÇÃO MODAL DE ESTRUTURAS CIVIS A PARTIR SOMENTE DA RESPOSTA.....	48
2.5 CONCLUSÃO.....	52
CAPÍTULO 3 – MÉTODO DO SUBESPAÇO ESTOCÁSTICO	54
3.1 INTRODUÇÃO.....	54
3.2 MODELOS DE VIBRAÇÃO DE ESTRUTURAS.....	55
3.2.1 Modelos em Vibração Livre e Sem Amortecimento.....	56
3.2.2 Modelos de Vibração com Amortecimento Viscoso Proporcional.....	59
3.2.3 Modelos de Vibração com Amortecimento Viscoso.....	60
3.2.4 Modelos de Vibração em Espaço de Estado Contínuo no Tempo.....	64
3.2.5 Modelos de Vibração Determinísticos em Espaço de Estado Discreto no Tempo.....	70
3.2.6 Modelos de Vibração Estocásticos em Espaço de Estado Discreto no Tempo	76
3.3 IDENTIFICAÇÃO ESTOCÁSTICA DE SISTEMAS DINÂMICOS.....	79
3.3.1 Controlabilidade e Observabilidade.....	79
3.3.2 Organização dos Dados de Resposta.....	82
3.3.3 Propriedades dos Modelos Estocásticos em Espaço de Estado.....	84
3.3.4 Método do Subespaço Estocástico Baseado na Covariância das Respostas de Referência (SSI-COV).....	88
3.3.5 Método do Subespaço Estocástico Baseado nos Dados de Resposta de Referência (SSI-DATA).....	95
CAPÍTULO 4 – PROGRAMA COMPUTACIONAL.....	106
4.1 INTRODUÇÃO.....	106
4.2 DESCRIÇÃO DO PROGRAMA.....	106
4.2.1 Módulo de Tratamento de Sinais.....	107

4.2.2	Módulo de Posicionamento dos Acelerômetros	114
4.2.3	Módulo de Identificação de Parâmetros	115
CAPÍTULO 5 – EXEMPLOS DE APLICAÇÃO		119
5.1	INTRODUÇÃO.....	119
5.2	ANÁLISE DA TORRE DE LINHA DE TRANSMISSÃO SITUADA NA MARGEM DIREITA DO RIO GUAMÁ.....	120
5.2.1	Descrição das Análises Realizadas.....	120
5.2.2	Análise Computacional	121
5.2.3	Análise experimental	122
5.2.4	Comparação Entre os Resultados Experimentais e Teóricos	131
5.3	ANÁLISE DA PONTE DO TGL	134
5.3.1	Descrição das Análises Realizadas.....	136
5.3.2	Análise Computacional	136
5.3.3	Análise Experimental	146
5.3.4	Análise de Desconforto	173
CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....		175
6.1	INTRODUÇÃO.....	175
6.2	CONCLUSÕES.....	175
6.3	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	178

Lista de Figuras

Figura 1-1 - Torre 195 colapsada, componente da LT de 230 KV Caxipó/Sinop no Estado do Mato Grosso (Caldas, 2004)	28
Figura 1-2 – Torre 196 colapsada componente da LT de 230 KV Caxipó/Sinop no Estado do Mato Grosso (Caldas, 2004)	28
Figura 1-3 – Trecho do viaduto colapsado no Rio de Janeiro (Cunha <i>et al.</i> , 1998)	29
Figura 3-1 - Sistema com múltiplos graus de liberdade (Maia <i>et al.</i> , 1996).....	55
Figura 3-2 - Sistema dinâmico com entradas e saídas determinísticas	64
Figura 3-3 – Sistema dinâmico com entradas, saídas determinísticas no tempo discreto	71
Figura 3-4 – Sistema dinâmico puramente determinístico e discreto no tempo ...	72
Figura 3-5 – Sistema dinâmico estocástico (Overschee e De-Moor, 1996).....	78
Figura 3-6 – Fluxograma do processo de identificação modal através do método SSI-COV	92
Figura 3-7 – Fluxograma para elaboração do diagrama de estabilidade com o método SSI-COV	94
Figura 3-8 - Fluxograma do processo de identificação modal através do método SSI-DATA	104
Figura 3-9 - Fluxograma para elaboração do diagrama de estabilidade com o método SSI-DATA	105
Figura 4-1 – Interface gráfica criada para tratamento dos sinais obtidos nos ensaios de vibração	108
Figura 4-2 – Abertura de arquivo de dados obtidos nos ensaios de vibração	108
Figura 4-3 – Recursos de visualização e seleção disponíveis para auxiliar no tratamento dos sinais	109
Figura 4-4 – Visualização em detalhe (<i>Zoom</i>) do trecho selecionado entre os marcadores e do seu respectivo auto-espectro	109
Figura 4-5 – Estimativa do espectro de um sinal com número inteiro de ciclos	112

Figura 4-6 – Estimativa do espectro de um sinal com número não inteiro de ciclos	112
Figura 4-7 – Redução do erro de vazamento com a utilização da janela Hanning	113
Figura 4-8 – Erros de <i>off-set</i> e de ganho presentes no sinal.....	113
Figura 4-9 – Correção dos erros de off-set e de ganho através da regressão linear	114
Figura 4-10 - Módulo de posicionamento dos acelerômetros.....	115
Figura 4-11 – Módulo de Identificação de parâmetros	116
Figura 4-12 - Botão para visualização das formas modais	117
Figura 4-13 - Exibição das formas modais correspondentes aos pólos estáveis marcados no diagrama de estabilidade.....	118
Figura 5-1 – Torre tipo autoportante situada na margem direita do rio Guamá .	120
Figura 5-2 - Espectro do vento turbulento típico comparado com espectro sísmico (Balendra (1993) apud Peeters (2000)).....	121
Figura 5-3 – Modelo em elementos finitos da torre com as cadeias de isoladores (SAP2000®).....	122
Figura 5-4 – Posição dos acelerômetros instalados na estrutura da torre	123
Figura 5-5 - Série temporais e espectros obtidos nos ensaios experimentais da torre	124
Figura 5-6 - Diagrama de estabilidade criado com método SSI-DATA para identificação das primeiras freqüências da torre na faixa de 0 a 5 Hz.....	125
Figura 5-7 – Diagrama de estabilidade criado com método SSI-COV para identificação das primeiras freqüências da torre na faixa de 0 a 5 Hz.....	126
Figura 5-8 - Diagrama de estabilidade criado com método SSI-DATA para identificação das freqüências da torre situadas na faixa de 0 a 10 Hz.....	126
Figura 5-9 - Diagrama de estabilidade criado com método SSI-COV para identificação das freqüências da torre situadas na faixa de 0 a 10 Hz.....	127
Figura 5-10 – Modos de vibração obtidos experimentalmente através do método SSI-DATA	129
Figura 5-11 - Modos de vibração obtidos experimentalmente através do método SSI-COV	130
Figura 5-12 – Variação das freqüências obtidas teórica e experimentalmente em função dos modos (Silva, 2006).....	131

Figura 5-13 – Fotografia da ponte do TGL	134
Figura 5-14 – Segmentos típico de quatro vãos com 120,5 metros de comprimento total.....	135
Figura 5-15 – Segmentos típico de três vãos com 90,5 metros de comprimento total.....	135
Figura 5-16 - Seção típica da ponte e detalhe do apoio	135
Figura 5-17 - Geometria do modelo do primeiro segmento com as estacas e o cavalete.....	137
Figura 5-18 – Participação de massa do segmento 1-2 nas direções x, y e z, em função das freqüências naturais determinadas através do MEF para o segmento 1-2.....	139
Figura 5-19 - Modos mais importantes obtidos com o modelo numérico do segmento 1-2 de acordo com a participação de massa.....	140
Figura 5-20 – Geometria do modelo criado para o segmento 10-11 com comprimento de 120,5 m	141
Figura 5-21 - Participação de massa da estrutura nas direções X, Y e Z, em função das freqüências naturais determinadas através do MEF para o segmento 10-11	142
Figura 5-22 - Modos mais importantes obtidos com o modelo numérico do segmento 10-11 de acordo com a participação de massa.....	143
Figura 5-23 - Geometria do modelo criado para o segmento 11-12 com comprimento de 90,5 m	144
Figura 5-24 - Participação de massa da estrutura nas direções X, Y e Z, em função das freqüências naturais determinadas através do MEF para o segmento 11-12	145
Figura 5-25 – Modos mais importantes obtidos com o modelo numérico do segmento 11-12 de acordo com a participação de massa.....	146
Figura 5-26 – Utilização dos sensores de referência para reunir as formas modais parciais obtidas nos diversos arranjos para formar o modo completo da estrutura (Peeters, 2000)	148
Figura 5-27 – Disposição dos acelerômetros segundo o Arranjo A1 no segmento 1-2	148
Figura 5-28 - Séries temporais e os respectivos espectros obtidos no arranjo A1 do segmento 1-2.....	149
Figura 5-29 - Diagrama de estabilidade criado com método SSI-DATA para identificação do arranjo A1 do segmento 1-2	150

Figura 5-30 - Diagrama de estabilidade criado com método SSI-COV para identificação do arranjo A1 do segmento 1-2	150
Figura 5-31 – Modos de vibração experimentais obtidos com o método SSI-DATA para o arranjo A1 do segmento 1-2.....	151
Figura 5-32 - Modos de vibração experimentais obtidos com o método SSI-COV para o arranjo A1 do segmento 1-2	152
Figura 5-33 - Comparação entre os modos teóricos e experimentais obtidos para o arranjo A1 do segmento 1-2.....	153
Figura 5-34 - Disposição dos acelerômetros no segmento 10-11 segundo o Arranjo A1	154
Figura 5-35 – Séries temporais e os respectivos espectros obtidos no arranjo A1 do segmento 10-11	155
Figura 5-36 – Diagrama de estabilidade criado na primeira etapa de identificação com método SSI-DATA para identificação do arranjo A1 do segmento 10-11.	156
Figura 5-37 - Diagrama de estabilidade criado na primeira etapa de identificação com método SSI-COV para identificação do arranjo A1 do segmento 10-11 ...	157
Figura 5-38 - Diagrama de estabilidade criado na segunda etapa de identificação com método SSI-DATA para identificação do arranjo A1 do segmento 10-11.	158
Figura 5-39 - Diagrama de estabilidade criado na segunda etapa de identificação com método SSI-COV para identificação do arranjo A1 do segmento 10-11 ...	158
Figura 5-40 – Modos de vibração experimentais obtidos com o método SSI-COV para o arranjo A1 do segmento 10-11	159
Figura 5-41 – Modos de vibração experimentais obtidos com o método SSI-DATA para o arranjo A1 do segmento 10-11.....	160
Figura 5-42 – Comparação entre os modos teóricos e experimentais obtidos para o arranjo A1 do segmento 10-11	161
Figura 5-43 - Disposição dos acelerômetros no segmento 11-12 segundo o Arranjo A1	162
Figura 5-44 – Séries temporais e os respectivos espectros obtidos no arranjo A1 do segmento 11-12.....	163
Figura 5-45 - Diagrama de estabilidade criado com método SSI-DATA para identificação do arranjo A1 do segmento 11-12	164
Figura 5-46 - Diagrama de estabilidade criado com método SSI-COV para identificação do arranjo A1 do segmento 11-12	164

Figura 5-47 - Modos de vibração experimentais obtidos com o método SSI-DATA para o arranjo A1 do segmento 11-12.....	165
Figura 5-48 - Modos de vibração experimentais obtidos com o método SSI-COV para o arranjo A1 do segmento 11-12	166
Figura 5-49 - Comparação entre os modos teóricos e experimentais obtidos para o arranjo A1 do segmento 11-12.....	167
Figura 5-50 - Disposição dos acelerômetros no segmento 11-12 segundo o arranjo A2.....	168
Figura 5-51 - Séries temporais e os respectivos espectros obtidos no arranjo A2 do segmento 11-12	169
Figura 5-52 - Diagrama de estabilidade criado com método SSI-DATA para identificação do arranjo A2 do segmento 11-12	170
Figura 5-53 - Diagrama de estabilidade criado com método SSI-COV para identificação do arranjo A2 do segmento 11-12	170
Figura 5-54 - Modos de vibração experimentais obtidos com o método SSI-DATA para o arranjo A2 do segmento 11-12.....	171
Figura 5-55 – Modos de vibração experimentais obtidos com o método SSI-COV para o arranjo A2 do segmento 11-12	171
Figura 5-56 - Comparação entre os modos teóricos e experimentais obtidos para o arranjo A2 do segmento 11-12.....	172
Figura 5-57 – Limites de desconforto causados por vibrações em pisos de edifícios residenciais, escolares e comerciais, devidas ao caminhar de pessoas (NBR 8800/86).....	173
Figura 5-58 – Maior amplitude de aceleração observada no sensor V1	174

Lista de Tabelas

Tabela 5-1 – Comparação dos resultados obtidos nas análises.....	128
Tabela 5-2 – Comparação entre as frequências naturais obtidas teórica e experimentalmente	131
Tabela 5-3 – Comparação entre as formas modais experimentais e teóricas (Silva, 2006)	132
Tabela 5-4 – Participação de massa nos deslocamentos na direção dos eixos x, y e z, e nas rotações em torno desses eixos	138
Tabela 5-5 - Participação de massa nos deslocamentos na direção dos eixos x, y e z, e nas rotações em torno desses eixos	141
Tabela 5-6 - Participação de massa nos deslocamentos na direção dos eixos x, y e z, e nas rotações em torno desses eixos	144
Tabela 5-7 - Comparação dos resultados experimentais obtidos com os métodos SSI-DATA e SSI-COV para o arranjo A1 do segmento 1-2	151
Tabela 5-8 – Comparação dos resultados experimentais obtidos com os métodos SSI-DATA e SSI-COV para o arranjo A1 do segmento 10-11	159
Tabela 5-9 - Comparação dos resultados experimentais obtidos com os métodos SSI-DATA e SSI-COV para o arranjo A1 do segmento 11-12	165
Tabela 5-10 - Comparação dos resultados experimentais obtidos com os métodos SSI-DATA e SSI-COV para o arranjo A2 do segmento 11-12	171

Lista de abreviatura, siglas e símbolos

$\mathbf{A}_c, \mathbf{B}_c, \mathbf{C}_c, \mathbf{D}_c$	Matrizes dos modelos contínuos em espaço de estado
$\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d, \mathbf{C}_d, \mathbf{D}_d$	Matrizes dos modelos discretos em espaço de estado
a_i, b_i	Coefficientes modais a e b
$\mathbf{C}_a, \mathbf{C}_v, \mathbf{C}_d$	Matrizes de incidência das respostas para aceleração, velocidade e deslocamento
e	Número neperiano
f	Frequência em Hertz
$\mathbf{f}(t)$	Vetor de forças de excitação no instante t
f_i	Frequência em Hertz associada ao i -ésimo modo de vibração
\mathbf{G}	Matriz de covariância entre os estados seguintes e as respostas
\mathbf{G}^{ref}	Matriz de covariância entre os estados seguintes e as respostas de referência
\mathbf{H}^{ref}	Matriz de <i>Hankel</i> dos dados de resposta
\mathbf{I}	Matriz identidade
i	Metade do número de superlinhas da matriz de Hankel \mathbf{H}^{ref} dos dados de resposta
j	Unidade imaginária ($j^2 = -1$)
J_k	Função janela utilizada na estimativa do espectro
k	Índice de tempo discreto ($t = k\Delta t, k \in \mathbb{N}$)
\mathbf{K}	Ganho do filtro Kalman
k_i	Rigidez modal
l	Número de respostas
\mathbf{L}_c	Matriz de participação modal para os modelos em espaço de estado contínuo no tempo, $\mathbf{L}_c = \mathbf{B}_c^T \boldsymbol{\Psi}^{-T}$
\mathbf{L}_d	Matriz de participação modal para os modelos em espaço de estado contínuo no tempo, $\mathbf{L}_d = \mathbf{B}_d^T \boldsymbol{\Psi}^{-T}$
\mathbf{L}_s	Matriz que seleciona as respostas de referência
$\mathbf{M}, \mathbf{C}, \mathbf{K}$	Matrizes de massa, amortecimento e rigidez

m_i, k_i	Massa modal e rigidez modal
n	Ordem do modelo em espaço de estado ($n = 2n_d$)
N	Número de amostras no tempo
n_d	Número de GDL
\mathbf{O}_i	Matriz de observabilidade com ordem i
\mathfrak{P}_i^{ref}	Projeção do espaço das linhas das respostas futuras sobre o espaço das linhas no espaço das linhas das respostas de referência passada
$\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{S}$	Matrizes de covariância dos ruídos existentes no processo e nas medições
$\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \ddot{\mathbf{q}}(t)$	Vetores de deslocamento, velocidade e aceleração no instante t
r	Número de resposta de referência
\mathbf{R}, \mathbf{Q}	Matrizes obtidas com a fatoração QR
\mathbf{R}_0	Matriz de covariância \mathbf{R}_i com intervalo i igual a zero
\mathbf{R}_0^{ref}	Matriz de covariância \mathbf{R}_i^{ref} com intervalo i igual a zero
\mathbf{R}_i	Matriz de covariância entre as respostas com intervalo i
$\hat{\mathbf{R}}_i$	Matriz de covariância estimada entre as respostas com intervalo i
\mathbf{R}_i^{ref}	Matriz de covariância entre as respostas e as respostas de referência com intervalo i
\mathbf{S}	Matriz de localização das entradas
$\hat{S}_y^{(r)}$	Periodograma do r -ésimo espectro $\Gamma^{(r)}$
S_y	Periodograma de Welch do sinal randômico y
t	Variável contínua do tempo
$\mathbf{T}_{1 i}^{ref}$	Matriz de <i>Toeplitz</i> das covariâncias das respostas de referência
$\mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{V}$	Matrizes obtidas com a SVD
$\mathbf{u}(t)$	Vetor de entrada contínuo no instante t
\mathbf{u}_k	Vetor de entrada discreto no instante $t = k\Delta t$
\mathbf{V}_c	Matriz das formas modais observadas nas respostas para tempo discreto, $\mathbf{V}_c = \mathbf{C}_c \mathbf{\Psi}$
\mathbf{V}_d	Matriz das formas modais observadas nas respostas para tempo discreto, $\mathbf{V}_d = \mathbf{C}_d \mathbf{\Psi}$
$\mathbf{V}_i, \mathbf{W}_i$	Resíduos da estimativa dos estados e das respostas dos modelos em espaço de estado obtidos com emprego do filtro Kalman
\mathbf{v}_k	Vetor de ruído presente nas medições das respostas no instante $t = k\Delta t$

\mathbf{W}, \mathbf{U}	Variáveis auxiliares na dedução dos modelos em espaço de estado
\mathbf{w}_k	Vetor de ruído existente no processo no instante $t = k\Delta t$
$\mathbf{x}(t)$	Vetor de estado contínuo no instante t
$\hat{\mathbf{X}}_i$	Seqüência de estados estimados do filtro kalman
\mathbf{x}_k	Vetor de estado discreto no instante $t = k\Delta t$
$\mathbf{y}(t)$	Vetor de resposta contínuo no instante t
\mathbf{Y}_f	Partição da Matriz de <i>Hankel</i> com as respostas futuras
\mathbf{y}_k	Vetor de resposta discreto no instante $t = k\Delta t$
$\mathbf{y}_k^{\sim ref}$	Vetor das demais respostas (obtido com a exclusão das respostas de referência) no instante $t = k\Delta t$
\mathbf{y}_k^{ref}	Vetor de respostas de referência no instante $t = k\Delta t$
\mathbf{Y}_p^{ref}	Partição da Matriz de <i>Hankel</i> com as respostas passadas de referência
$\mathbf{z}(t)$	Vetor de estado modal, $\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}\mathbf{z}(t)$
α_i	Constante utilizada para alterar a escala do autovetor $\boldsymbol{\phi}_i$ e normaliza a matriz de massa \mathbf{M}
Δt	Intervalo de amostragem
ε, ν	Constantes de amortecimento de Rayleigh ($\mathbf{C} = \varepsilon\mathbf{K} + \nu\mathbf{M}$)
$\boldsymbol{\Phi}$	Matriz de autovetores (vibração livre e sem amortecimento)
$\hat{\boldsymbol{\Phi}}$	Matriz dos autovetores que normalizam a matriz de massa (vibração livre e sem amortecimento)
$\bar{\boldsymbol{\phi}}$	Vetor de amplitudes de deslocamento dos modelos de vibração livre e sem amortecimento
$\boldsymbol{\phi}_i$	Autovetor (vibração livre e sem amortecimento)
$\hat{\boldsymbol{\phi}}_i$	Autovetor que normaliza a matriz de massa \mathbf{M} (vibração livre e sem amortecimento)
$\gamma^{(r)}$	r -ésimo segmento ponderado do sinal de resposta \mathbf{y}
$\Gamma^{(r)}$	Espectro do r -ésimo segmento ponderado $\gamma^{(r)}$
Γ_i^{ref}	Matriz de controlabilidade reversa reduzida com ordem i
$\boldsymbol{\Lambda}$	Matriz diagonal contendo os autovalores contínuos λ_i
$\boldsymbol{\Lambda}_c$	Matriz diagonal contendo os autovalores contínuos λ_i, λ_i^*
$\boldsymbol{\Lambda}_d$	Matriz diagonal contendo os autovalores discretos μ_i, μ_i^*

λ	Escalar utilizado para determinação da solução dos modelos de vibração
λ_i	Autovalores contínuos
μ_i	Autovalores discretos
Θ	Matriz de autovetores (referente às coordenadas das respostas $\mathbf{q}(t)$)
$\bar{\theta}$	Vetor de amplitudes de deslocamento dos modelos de vibração com amortecimento viscoso
θ_i	Autovetor associado ao i -ésimo modo de vibração (referente às coordenadas das respostas $\mathbf{q}(t)$)
Σ	Matriz de covariância entre dois dois vetores de estado no mesmo instante
Ω	Matriz diagonal que contém as frequências naturais angulares ω_i (vibração livre)
ω	Frequência natural em rad/s
ω_i	Frequência natural em rad/s associada ao i -ésimo modo de vibração
$\bar{\Psi}$	Vetor de amplitudes de estado dos modelos de vibração com amortecimento viscoso
Ψ	Matriz de autovetores complexos dos modelos contínuos e discretos em espaço de estado
Ψ_i	Autovetor complexo dos modelos em espaço de estado contínuo e discreto associado ao i -ésimo modo de vibração
ζ_i	Fator de amortecimento modal
$(\bullet)^*$	Conjugado complexo
$E(\bullet)$	Valor Esperado (Esperança)
$(\bullet)^\dagger$	Pseudo-inversa de Moore-Penrose
$(\bullet)^H$	Conjugada transposta de uma matriz
$(\bullet)^T$	Transposta de uma matriz
ANEEL	Agência Nacional de Energia Elétrica
ARMA	<i>Auto-Regression Moving Average</i>
ARMAV	<i>Auto-Regressive Moving Average Vector</i>
CVA	<i>Canonical Variate Algorithm</i>
SVD	Decomposição em Valores Singulares

EF	Elementos Finitos
GDL	Grau de Liberdade/Graus de Liberdade
GUI	<i>Graphical User Interface</i> (Interface Gráfica com Usuário)
ITD	<i>Ibrahim Time Domain</i>
LSCE	<i>Least Squares Complex Exponential</i>
LT	Linha de Transmissão de Energia Elétrica/Linhas de Transmissão de energia elétrica
MEF	Método dos Elementos Finitos
NiCAE	Núcleo de Instrumentação e Computação Aplicada à Engenharia
RANDOMDEC	<i>Random Decrement</i> (Decremento Randômico)
SSI	<i>Stochastic Subspace Identification</i> (Identificação por Subespaços Estocásticos)
SSI-COV	<i>Covariance-Driven Stochastic Subspace Identification</i> (Identificação por Subespaços Estocásticos Baseados nas Covariâncias das Respostas de Referência)
SSI-DATA	<i>Data Driven Stochastic Subspace Identificatio</i> (Identificação por Subespaços Estocásticos Baseados nos Dados de Resposta de Referência)
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
DFT	<i>Discrete Fourier Transform</i>
TGL	Terminal de Granéis Líquidos

CAPÍTULO 1

Apresentação

1.1 INTRODUÇÃO

Com o crescimento do setor elétrico brasileiro e da adoção das hidrelétricas como principal fonte de produção de energia, a geração de energia elétrica, que outrora era oriunda das usinas termelétricas situadas próximas aos grandes centros urbanos, ao longo dos anos afastou-se cada vez mais destes centros. Nestas circunstâncias, o projeto, a construção e a manutenção da infra-estrutura necessária para transmissão da energia das usinas geradoras até as grandes cidades encontram nos aspectos geográficos, como relevo e características hidrográficas, os maiores obstáculos para implantação. Os elementos da infra-estrutura como as torres de linha de transmissão, por exemplo, necessitam ser obrigatoriamente mais altas para vencer tanto as irregularidades de relevo como também para transpor grandes vãos existentes nas travessias dos rios.

Aspectos relacionados com as condições climáticas, como a ação do vento, somadas às irregularidades do relevo sobre o qual os elementos da infra-estrutura estão instalados, correspondem a dificuldades tanto para o projeto como para a manutenção das estruturas de transmissão de energia elétrica. No caso específico da região amazônica, esta situação é ainda mais freqüente devido às suas condições climáticas, hidrológicas e de relevo característicos.

A região amazônica possui peculiaridades que a torna distinta das demais regiões do Brasil. Entre estas particularidades está a sua imensa bacia hidrográfica caracterizada por grandes rios. No universo da engenharia estrutural, estas peculiaridades representam um grande desafio aos projetistas, sobretudo nos projetos de estruturas de transposição desses rios, como pontes e torres de linhas de transmissão (LT) de energia elétrica. Sabe-se com base em estudos como, por exemplo, o realizado por Momomura *et al.* (1997), que as peculiaridades existentes no relevo é um fator que pode representar uma importante influência no comportamento dinâmico das estruturas.

Um dos principais aspectos a ser considerado no projeto desse tipo de estrutura é a ação do vento, que leva ao surgimento de vibrações eólicas. Fatores relacionados com a forma dos rios, os vales e as grandes larguras acabam por intensificar os efeitos dinâmicos nas estruturas de travessia. Ventos leves e estáveis, característicos da região amazônica, encontram nos rios de planície com larguras apreciáveis, um ambiente favorável para propagação. Como resultado disso, surgem as vibrações elevadas tanto nos cabos condutores quanto nas torres do sistema de transmissão.

No caso das estruturas metálicas como pontes e torres, não é difícil encontrar relatos de acidentes em virtude da ação de carregamentos dinâmicos como vento e/ou movimentação de veículos. Casos mais graves de acidentes com ruína total da estrutura, eventualmente são relatados na literatura científica como, por exemplo, em Blessmann (2003). O problema de vibração excessiva causada pela ação do vento nas torres de linhas de transmissão é bastante grave, podendo ocasionar interrupções no fornecimento de energia. Estas interrupções podem ter como consequência até mesmo um *blackout*, por tempo indeterminado, podendo levar, de uma forma ou de outra, a prejuízos tanto aos usuários como às empresas operadoras do sistema elétrico.

No caso das pontes metálicas, além das solicitações transientes tanto de origem aerodinâmica como de origem hidrodinâmica, há ainda, as solicitações dinâmicas inerentes à sua utilização como o tráfego de veículos no tabuleiro. Entre os vários estudos existentes na literatura sobre controle de vibrações em pontes, o estudo realizado por Fujino (2002) mostra que essas solicitações podem ocasionar desde um desconforto aos usuários com a ocorrência dos efeitos de ressonância, até a ruína decorrente da fadiga do material. Uma das alternativas para evitar esses transtornos é identificar os níveis das solicitações dinâmicas aos quais as estruturas civis estão submetidas.

1.2 OBJETIVOS

Entre as várias atividades realizadas nesse trabalho, destaca-se o desenvolvimento de um procedimento apropriado para identificação modal experimental de estruturas civis submetidas às forças de excitação ambientes de natureza desconhecida. Para avaliar a eficiência da metodologia desenvolvida foram investigados os comportamentos modais de duas estruturas. A primeira delas corresponde a uma das torres componentes da **LT Vila do Conde-Guamá** de 230 KV que está localizada na travessia do rio Guamá, em Belém, PA, e a segunda corresponde a uma ponte que serve de acesso ao píer do Terminal de Granéis Líquidos (**TGL**), estando localizada no porto de Vila do Conde, no município de Barcarena, PA.

Convém ressaltar que parte deste trabalho, mais especificamente o estudo da torre, está também inserido em um projeto de Pesquisa e Desenvolvimento (P&D). As análises realizadas na estrutura da torre situada na travessia do rio Guamá são parte de um estudo piloto desse projeto de pesquisa que foi realizado em um trecho da **LT Vila do Conde – Guamá**.

1.2.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver uma metodologia adequada para análise modal experimental de estruturas civis submetidas às excitações ambientes de natureza desconhecida, onde as únicas informações disponíveis para identificação de parâmetros dessas estruturas são as saídas (respostas) medidas nos ensaios de vibração. O propósito dessa metodologia é possibilitar a identificação experimental de parâmetros modais das estruturas civis a partir somente dos dados de resposta medidos por meio de transdutores de aceleração.

1.2.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos são detalhadamente descritos nas subseções seguintes.

1.2.2.1 Identificação Modal Experimental a Partir Somente dos Dados da Resposta

Entres os vários objetivos desse trabalho destaca-se o estudo e a implementação computacional de dois métodos de análise modal experimental baseados na teoria de Identificação por Subespaços Estocásticos, ou *Stochastic Subspace Identification (SSI)*, que são o **SSI-DATA** e **SSI-COV**. Nesse estudo destacam-se como objetivos específicos o desenvolvimento das seguintes atividades:

- Realizar um estudo sobre o estado da arte da identificação modal a partir somente das respostas medidas nos ensaios de vibração de estruturas civis submetidas às excitações ambientes;
- Estudar a teoria envolvida nos métodos de identificação modal de identificação modal por subespaços estocásticos **SSI-DATA** e **SSI-COV**.
- Implementar a teoria dos referidos métodos através do desenvolvimento de um programa computacional na plataforma MATLAB® destinado a identificação modal de estruturas civis a partir somente dos dados de resposta medidos nos ensaios de vibração.
- Criar um **GUI** (*Graphical User Interface*) para o referido programa visando facilitar a interação com usuário e, conseqüentemente, otimizar o processo de identificação de parâmetros a partir das séries temporais coletadas nos ensaios de vibração.
- Avaliar a precisão dos resultados experimentais obtidos com o programa através da comparação com resultados teóricos obtidos com emprego do **MEF**.

1.2.2.2 Análise Modal da Ponte do TGL e da Torre de LT na Travessia do Rio Guamá

Para avaliar a eficiência e a precisão da metodologia desenvolvida para identificação de parâmetros a partir somente das respostas, foram realizadas análises modais da ponte do **TGL** e da torres de **LT** da travessia do rio Guamá. Para essas análises pode-se destacar como objetivos específicos a execução das seguintes atividades:

- Realizar ensaios de vibração nas estruturas da torre e da ponte com emprego de transdutores de aceleração (acelerômetros) e de sistema de aquisição apropriados para os ensaios de vibração de estruturas civis.
- Elaborar modelos computacionais precisos para a simulação, por **EF**, do problema de vibração nas estruturas estudadas.
- Utilizar os métodos estocásticos de identificação **SSI-DATA** e **SSI-COV** para determinar experimentalmente os parâmetros modais da torre e da ponte.
- Comparar os parâmetros modais experimentalmente obtidos através dos métodos **SSI-DATA** e **SSI-COV** com os obtidos nas análises por **EF**.
- No caso particular da ponte do **TGL**, além das atividades anteriormente descritas, destaca-se também como objetivo específico, a avaliação do nível de desconforto humano na estrutura sob a ação de carregamentos dinâmicos induzidos pelo vento, pelo tráfego de veículos e também pela pressão dinâmica da água nas estacas.

1.3 JUSTIFICATIVA

Diante da grande dimensão geográfica da Amazônia brasileira, que ocupa em torno de 60% (sessenta por cento) do espaço territorial do Brasil, e da configuração de seu território intensamente recortado pela malha fluvial componente da maior bacia hidrográfica do mundo, o projeto e a manutenção das estruturas de transposição como pontes e torres do sistema de transmissão de energia elétrica vêm se tornando motivo de preocupação para as empresas responsáveis por estas atividades.

No caso das estruturas do sistema de transmissão de energia elétrica, esta preocupação é especialmente intensificada com as linhas que já apresentam envelhecimento, devido ao longo período de operação. Gera grande apreensão nas equipes de manutenção, o fato de que a segurança das torres mais antigas, componentes do sistema de distribuição de energia elétrica, pode ser comprometida pelas solicitações dinâmicas originadas pela ação do vento.

Casos de acidentes com colapso estrutural total de torres de LT, inclusive com interrupção da distribuição de energia, são relatados na literatura, como por exemplo, o acidente ocorrido nas LTs da usina de Itaipu entre Foz de Iguaçu e Ivaiporã no Paraná, em 02 de novembro de 1997, quando 10 torres ruíram sob o efeito de ventos de até 130 km/h (36m/s), conforme reportagem do jornal “O Estado de São Paulo” do dia 04 de novembro de 1997.

Como caso mais recente deste tipo de acidente destaca-se o ocorrido em 23 de setembro de 2004, no estado do Mato Grosso. De acordo com a reportagem veiculada no jornal Diário de Cuiabá, ventos de até 100 Km/h derrubaram quatro torres componentes da LT de 230 KV entre Nova Muntum e Lucas do Rio Verde no norte do estado. As Figuras 1-1 e 1-2 mostram duas das quatro torres colapsadas, identificadas como 195 e 196, respectivamente (Caldas, 2004).



Figura 1-1 - Torre 195 colapsada, componente da LT de 230 KV Caxipó/Sinop no Estado do Mato Grosso (Caldas, 2004)



Figura 1-2 – Torre 196 colapsada componente da LT de 230 KV Caxipó/Sinop no Estado do Mato Grosso (Caldas, 2004)

No âmbito regional, no estado do Pará, cita-se o acidente ocorrido no projeto Tramo Oeste (De-Souza, 2002). No dia 10 de agosto de 1999, após a ocorrência de ventos com velocidades elevadas já posteriormente a energização da LT de 138 kV Rurópolis-Itaituba, a torre 331 (de 160 metros de altura) atingiu o colapso total. Esta torre localiza-se no trecho de travessia do Rio Tapajós, onde são utilizadas torres autoportantes bastante elevadas, com vãos variando de 435 a 1231 metros. Laudos técnicos emitidos por empresas de engenharia e investigações acadêmicas sobre o problema indicaram como causas do sinistro, problemas de vibração induzida pelo vento (De-Souza, 2002).

É importante destacar que acidentes como esses acabam trazendo diversos transtornos, especialmente quando resultam na interrupção do fornecimento de energia. Os elevados custos causados por estas interrupções, o custo da reconstrução da estrutura, as multas relacionadas com o tempo de paralisação do fornecimento de energia, acabam trazendo prejuízos tanto de ordem econômica, como também comprometendo a credibilidade e a imagem das empresas operadoras do sistema de energia.

Sabe-se que a causa deste tipo de acidente é de origem dinâmica e está relacionada com a ação do vento no conjunto formado pelo acoplamento dos condutores e torres do sistema de transmissão de energia. Ventos estáveis e não turbulentos encontram condições de propagações favoráveis, na Região Amazônica, sobretudo na travessia dos rios de grande largura, em que seus vales funcionam como um duto, canalizando os ventos na direção perpendicular às estruturas de travessia, como as pontes, as torres e cabos do sistema de transmissão de energia elétrica.

No caso específico das pontes, não são raros os relatos na literatura de casos de transtornos relativos ao conforto da utilização da estrutura, como também até colapso total, devido às solicitações de origem dinâmicas provocadas tanto pela ação do vento como também pelo tráfego dos veículos no tabuleiro. Em particular, no estado no Rio de Janeiro, cita-se o caso de um viaduto que, de acordo com Cunha *et al.* (1998), teria desabado sobre uma linha férrea, como mostra a Figura 1-3.



Figura 1-3 – Trecho do viaduto colapsado no Rio de Janeiro (Cunha *et al.*, 1998)

Tanto no caso das torres e condutores de energia elétrica, como no caso das pontes, os efeitos das vibrações induzidas pelo vento devem ser controlados, caso contrário, estas vibrações podem levar tanto a ruptura por fadiga dos cabos das **LT**, como também causar danos e, até mesmo, o colapso, principalmente nas estruturas localizadas nas travessias dos rios. Nesse contexto, as peculiaridades da região amazônica contribuem para o agravamento desta situação, sobretudo quando há necessidade de transpor os grandes rios da região como, por exemplo, os rios Guamá, Tocantins e Tapajós, em que as estruturas de travessia devem necessariamente vencer grandes vãos.

Essa realidade justifica a realização do trabalho ora apresentado cuja proposta é avaliar o comportamento de estruturas metálicas sob as condições do clima e relevo característico da Amazônia. Cabe ressaltar que esta dissertação está inserida em um projeto de P&D (Pesquisa e Desenvolvimento) da Eletronorte, conforme regulamentação da Agência Nacional de Energia Elétrica (**ANEEL**), e que foi desenvolvido pela Universidade Federal do Pará (**UFPA**).

1.4 METODOLOGIA

Uma das principais dificuldades encontradas nos ensaios de vibração de estruturas civis é a determinação das forças de excitação ambiente como, por exemplo, a pressão dinâmica do vento e o tráfego de veículos. Sabe-se que a quantificação dessas forças é essencial para identificação de parâmetros modais através de métodos de análise modal experimental tradicionais como, por exemplo, os descritos em Maia *et al.* (1996) e Ewins (1984) para os quais tanto as informações de entrada (*input*), como as de saída (*output*) devem ser conhecidas para que a identificação desses parâmetros para um sistema do tipo entrada-saída (*input-output*) seja possível.

Nos ensaios de vibração das estruturas civis submetidas às excitações ambientes, geralmente as informações relativas às entradas (*input*) são de difícil determinação. Neste caso, alternativamente, pode-se utilizar excitadores eletromecânicos (*shakers*) através dos quais as entradas são facilmente determinadas. Ocorre entretanto que, em alguns casos, a utilização de *shakers* muitas vezes se torna inviável tanto do ponto de vista operacional, como também do ponto de vista financeiro, sobretudo se a estrutura a ser ensaiada estiver situada em local de difícil acesso. Dependendo das dimensões da estrutura, o custo operacional dessa alternativa pode ser muito elevado e inviabilizar os ensaios com esses excitadores. Além disso, é difícil isolar a estrutura dos efeitos do vento.

Diante dessas dificuldades, os métodos de identificação modal aplicados somente sobre as respostas (*output-only*) determinadas com auxílio de transdutores de deslocamento, velocidade, e/ou ainda aceleração surgem como uma ferramenta importante para extração de parâmetros modais experimental de estruturas civis. Dentre os vários métodos com essa finalidade existentes na literatura, pode-se destacar os métodos de Identificação por Subespaços Estocásticos (*Stochastic Subspace Identification - SSI*). O emprego de tais métodos na identificação de sistemas estruturais complexos como pontes e torres mostraram-se bastante eficientes na extração dos parâmetros dessas estruturas, como mostram os estudos realizados por Peeters (2000).

Diferentemente dos métodos de análise modal experimental convencionais, que só podem ser empregados quando tanto a natureza da excitação como a da resposta são conhecidas como, por exemplo, os métodos classificados como SISO (*Single Input - Single Output*), SIMO (*Single Input - Multiple Output*), MIMO (*Multiple Input - Multiple Output*), etc., os métodos de identificação por subespaços estocásticos são capazes de identificar as frequências naturais, os fatores de amortecimento, e os correspondentes modos de vibração a partir somente das respostas no domínio do tempo.

Os estudos apresentados por Peeters (2000) mostram que os métodos estocásticos como de Identificação por Subespaços Estocásticos Baseados nas Covariâncias das Respostas de Referência - **SSI-COV** (*Covariance-Driven Stochastic Subspace Identification*) – e o de Identificação por Subespaços Estocásticos Baseados nos Dados de Resposta de Referência - **SSI-DATA** (*Data Driven Stochastic Subspace Identification*) - são bastante robustos e adequados para identificação modal de estruturas civis onde, geralmente, a natureza das forças de excitação é de difícil determinação. Juntamente com outros métodos como o método de Ibrahim (*Ibrahim Time Domain - ITD*) associado à técnica do Random Decrement (**RANDOMDEC**) (Andersen, 1997; Ferreira-Neto, 2005), os métodos **SSI-DATA** e **SSI-COV** representam o estado da arte no que diz respeito à identificação modal de estruturas civis submetidas à vibração ambiente.

Por esses motivos, tanto no estudo de caso da torre metálica da travessia do Guamá como no da ponte do TGL, os métodos **SSI-DATA** e **SSI-COV** juntamente com o **MEF** foram utilizados. Com essas ferramentas buscou-se avaliar os níveis de vibração em ambas as estruturas através dos ensaios experimentais de vibração realizados com emprego de transdutores de aceleração (acelerômetros) e de sistemas de aquisição de dados apropriados para os ensaios de estruturas civis. Nas análises teóricas realizadas com **MEF** foram criados modelos computacionais visando simular e reproduzir o comportamento dinâmico dessas estruturas.

Na etapa das análises experimentais, as séries temporais coletadas nos ensaios de vibração das estruturas estudadas foram processadas visando reduzir as imprecisões

contidas nesses sinais de resposta, e com emprego dos métodos **SSI-DATA** e **SSI-COV** a identificação de parâmetros das estruturas estudadas foi realizada. Entre as várias atividades envolvidas nessa etapa, destaca-se a implementação computacional de um programa desenvolvido na plataforma MATLAB® destinado à identificação modal de estruturas civis utilizando os métodos **SSI-DATA** e **SSI-COV**. O programa desenvolvido possui uma interface gráfica amigável que foi criada com os recursos do *Graphical User Interface (GUI)* do MATLAB®. Com esse programa foi possível realizar todas as análises experimentais e também identificar os parâmetros modais das estruturas estudadas. No caso específico da ponte do **TGL**, além da identificação de parâmetros, foi também realizada a análise de desconforto dessa estrutura de acordo com critérios normativos estabelecidos na norma brasileira NBR8800 (1986).

1.5 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

No CAPÍTULO 2 é apresentada a revisão bibliográfica sobre o estudo do comportamento dinâmico de estruturas metálicas. Este capítulo está dividido em três partes: a primeira parte trata de estudos recentes realizados sobre torres em estrutura metálica sob a ação do vento; a segunda parte da revisão mostra vários estudos relativos às excitações ambientes sobre pontes; finalmente, na terceira parte é apresentada a revisão realizada sobre a identificação de sistemas estruturais submetidos às excitações ambientes, na qual são utilizados métodos modernos de identificação de parâmetros.

O CAPÍTULO 3 apresenta o desenvolvimento teórico-matemático sobre o qual está fundamentado os métodos de identificação de parâmetros baseados em subespaços estocásticos utilizados no estudo experimental do comportamento vibratório das estruturas analisadas neste trabalho. Neste capítulo também são mostradas as vantagens e desvantagens em relação a outros métodos de identificação semelhantes, assim como as restrições na utilização dos referidos métodos.

A implementação de um programa computacional com interface amigável (*Graphical User Interface - GUI*) na plataforma MATLAB® voltado para identificação modal de sistemas estruturais é apresentada no CAPÍTULO 4. Trata-se de um programa computacional que é baseado na teoria descrita no CAPÍTULO 3, sendo composto por três módulos: o primeiro destinado ao tratamento dos sinais brutos coletados no domínio do tempo, o segundo e o terceiro voltado para identificação de parâmetros a partir dos arquivos pré-processados nos primeiros dois módulos. Ainda no CAPÍTULO 4, o funcionamento dos três módulos, assim como os elementos da interface gráfica, são detalhadamente apresentados.

No CAPÍTULO 5 são apresentados os resultados das análises de dois estudos de caso. O primeiro trata da análise dinâmica computacional e experimental da ponte do Terminal de Granéis Líquidos do Porto de Vila do Conde localizado em Barcarena, PA. No segundo estudo foi analisado o comportamento dinâmico de uma das torres da **LT** de 230 KV Vila do Conde – Guamá, localizada na margem direita do rio Guamá. Neste

capítulo também pode ser constatada a eficiência das análises experimentais realizadas com a utilização do programa computacional descrito no CAPÍTULO 4.

Finalmente, no CAPÍTULO 6, as conclusões obtidas a partir das análises realizadas no CAPÍTULO 5 são apresentadas. Neste último capítulo são também sugeridos alguns estudos e atividades para trabalhos futuros destinados àqueles que pretendem dar continuidade ao trabalho realizado.

CAPÍTULO 2

Revisão Bibliográfica

2.1 INTRODUÇÃO

Os efeitos dinâmicos causados por excitações ambientes, como a ação do vento e o tráfego de veículos nas estruturas metálicas, são uns dos aspectos principais desta dissertação. A incidência dessas excitações, neste tipo de estrutura, cada vez mais desperta na comunidade científica grande interesse. Vários estudos vêm sendo desenvolvidos nos últimos anos a respeito do assunto. A seguir são apresentados alguns estudos, descrevendo o conhecimento até então acumulado sobre a pesquisa do comportamento dinâmico das estruturas metálicas, com ênfase em pontes e torres.

2.2 ANÁLISE DINÂMICA DE TORRES SUBMETIDAS À AÇÃO DO VENTO

Sabe-se que em certas circunstâncias críticas, as solicitações dinâmicas provocadas pela ação do vento podem levar as estruturas ao colapso total conforme os casos relatados por Simiu e Scanlan (1978) e Blessmann (2003). Preocupados com este fato, Trainor *et al.* (1985), desenvolveram um procedimento analítico relativamente prático para o cálculo das frequências naturais fundamentais das torres de LT tipo autoportante. Este procedimento é fundamentado na aproximação de primeira ordem de Durkerley em que a torre é idealizada como uma barra engastada em uma extremidade e livre na outra, com rigidez variável. Segundo os autores, este método pode ser empregado tanto no aprimoramento da análise estática por elementos finitos, como também, como uma etapa preliminar na resposta forçada ou na otimização computacional.

Marthur *et al.* (1987) estudaram as vibrações nos condutores e torres induzidas pelo vento. Neste trabalho os autores apresentam os resultados de um estudo de uma torre de LT de energia elétrica estaiada em forma de “Y”, em que as vibrações atuando

tanto nos cabos condutores como na estrutura da torre, são modeladas com utilização de um elemento especial parabólico. Os modos das frequências mais baixas envolvem o movimento vibratório dos condutores que são influenciados tanto pelo balanço dos isoladores dos condutores, como também pelo acoplamento dos cabos com as torres. Foi constatado ainda que o carregamento transferido para as torres durante o efeito de galope nas baixas frequências não é catastrófico, pelo menos quando as linhas estão levemente cobertas com gelo.

Utilizando o Método dos Elementos Finitos, Krauthammer (1987) simulou o comportamento estático e dinâmico de uma torre de iluminação. Foi criado um modelo computacional tridimensional da estrutura, e simulada a atuação do vento. A resposta dinâmica foi estudada aplicando-se várias condições de carregamentos. Os resultados numéricos foram comparados com os experimentais para avaliar a precisão dos resultados obtidos. As frequências naturais mais baixas da estrutura calculadas numérica e experimentalmente foram idênticas, assim como os valores máximos de aceleração e deslocamento devido aos ventos com velocidades abaixo de 48,27 Km/h foram também idênticos em ambas as análises.

Um outro aspecto importante observado tanto na análise numérica quanto na experimental foi a preponderância da resposta do primeiro modo em relação aos demais. Os dados da análise numérica indicaram que a resposta do modo fundamental governa o comportamento dinâmico da estrutura. Uma análise mais criteriosa por elementos finitos mostrou que mesmo quando a torre era submetida a ventos com velocidades muito altas, a resposta situava-se em torno de 0,4 Hz. Os dados experimentais de deslocamento mostraram que quase todas as respostas horizontais encontravam-se no primeiro modo. Tanto os resultados numéricos como os experimentais mostraram claramente que a magnitude da aceleração não ultrapassou o valor de 0,20 g, e os deslocamentos menores que 7,6 cm para ventos com velocidades inferiores a 48,27 Km/h.

Ozono e Maeda (1992) estudou o comportamento vibratório dos condutores e o efeito das tensões dinâmicas transmitidas para as torres. Neste estudo, os autores investigaram a interação dinâmica entre a torre e os cabos condutores em baixa

freqüência, variando a rigidez dos suportes dos cabos. Para quantificar os efeitos dinâmicos transmitidos para torre pelos condutores, foram utilizadas as funções resposta em freqüência (**FRF**) para as tensões e deslocamentos. Estas funções mostram as freqüências predominantes e os correspondentes modos de vibração.

Na Austrália, Al-Bermani e Kitipornchai (1992) propuseram uma técnica analítica para previsão e simulação do comportamento limite estrutural de torres autoportantes, submetidas às condições de carregamento estático. A metodologia aplicada considera os efeitos de não-linearidade geométrica e do material, como também a flexibilidade dos nós e os grandes deslocamentos. Foi desenvolvido um programa computacional para prever o comportamento limite de duas torres de linha de transmissão de energia elétrica. Este programa foi capaz de prever precisamente a carga de colapso das estruturas, entretanto, com relação aos deslocamentos, a comparação entre as medidas obtidas experimentalmente e a previstas pelo programa não mostrou a mesma eficiência.

O comportamento vibratório de uma torre reticulada de TV submetida à ação dinâmica do vento foi objeto do estudo realizado por Homes *et al.* (1992). Os autores compararam os dados de resposta de aceleração medidos experimentalmente com os previstos através da teoria de vibração aleatória, utilizando as informações de projeto disponíveis. Tanto as acelerações no sentido do fluxo do vento como as transversais a este, aumentaram uniformemente com a velocidade média do vento, e a magnitude de ambas as acelerações foram semelhantes. Os dados experimentais foram coletados por um longo período durante o inverno australiano de 1989. Os autores constataram que as estimativas da resposta ao carregamento do vento são, geralmente, subestimadas.

Venkateswarlu *et al.* (1994) estudaram o comportamento dinâmico de uma antena de comunicação submetida ao carregamento aleatório do vento, através de uma análise estocástica. Os autores apresentam um modelo espectral para o cálculo da resposta do vento e do fator de resposta de rajada de uma torre reticulada de transmissão de microondas. Foi desenvolvido um programa computacional para o cálculo do fator de resposta de rajada, da resposta das torres reticuladas submetidas ao carregamento do vento, como também das características do vento, usando este método estocástico de

espectro. Os autores calcularam o fator de resposta de rajada para uma torre de transmissão de microondas de 101 m, através deste método, e posteriormente, o comparou com os valores obtidos pela formulação recomendada tanto pelas normas indiana, australiana e britânica, como também pelo ASCE (American Society of Civil Engineers).

No Japão, uma pesquisa sobre a vibração causada pelo vento nas torres de LT's do tipo autoportante foi realizada por Momomura *et al.* (1992). A análise, realizada no domínio do tempo, foi baseada na hipótese do comportamento *quase*-estático, e os resultados medidos experimentalmente foram comparados com resultados analíticos. Neste trabalho, o comportamento dos cabos condutores e das torres foi analisado em conjunto.

Alam e Santhakumar (1996) desenvolveram uma análise de confiabilidade e realizaram um teste completo das torres de LT do tipo autoportante. Segundo os autores, muito pode ser melhorado nos métodos de projeto adotados por algumas normas existentes, com a introdução de um procedimento para projeto das torres de LT baseados na confiabilidade dos elementos estruturais. De acordo com os autores, a metodologia adotada por algumas normas de projeto não pode prever, precisamente, o comportamento estrutural das torres das LT's. Eles afirmam que o manual ASCE 52 (1988) e ASCE 74 (1991) podem levar os projetistas a cometerem erros no pré-dimensionamento das torres.

El-Ghazaly e Al-Khaiat (1995) apresentam vários aspectos relacionados com não linearidade geométrica das torres estaiadas, e investigaram o comportamento de uma torre plana estaiada fictícia. A investigação revela que o limite de estabilidade de uma torre estaiada, e de outras estruturas esbeltas semelhantes, submetidas às forças axiais de grande intensidade, pode ser previsto usando análise não linear geométrica. A análise não linear mostrou-se mais apropriada do que a análise convencional por autovalor e autovetor, devido aos consideráveis efeitos provocados pelo deslocamento lateral devido à flambagem pré-existente neste tipo de estrutura.

Glanvile e Kwok (1997), realizaram medições de deslocamentos em duas torres reticuladas submetidas ao carregamento do vento. As torres analisadas são utilizadas como antena de transmissão de TV, o que exige deflexões mínimas para as condições operacionais de transmissão do sinal. As medições dos deslocamentos foram obtidas através de vários arranjos, e comparadas com as estimativas teóricas adotadas pelas normas de vento australianas. O procedimento utilizado para estimativa dos deslocamentos dinâmicos das torres reticuladas inclui o Método do Elementos Finitos (MEF) e os parâmetros medidos experimentalmente, em escala real.

Momomura *et al.* (1997) investigaram o comportamento dinâmico de torres de linha de transmissão de energia elétrica instaladas em uma área montanhosa sob a ação do vento. Dados relativos ao comportamento vibratório das torres foram coletados entre 1991 a 1993. O estudo concluiu que as características dinâmicas do conjunto formado pela torre e condutores são fortemente influenciadas pelo comportamento vibratório dos condutores. Foi constatada ainda que os valores dos espectros de resposta de aceleração e de deformação específica do conjunto torre com os condutores aumentam com o aumento da velocidade do vento. Um outro aspecto importante verificado neste trabalho é a influência da topografia da área onde as torres estão instaladas, tanto na velocidade média quanto na intensidade da turbulência dos ventos.

Nos EUA, Feng e Zhang (1997) estudaram as características do comportamento vibratório de uma torre de transmissão de TV. A resposta dinâmica da torre submetida ao carregamento turbulento do vento foi analisada, considerando-se, entre outros fatores, a interação entre o vento e estrutura. Com auxílio do método de representação de espectro para simulação dos componentes flutuantes da velocidade do vento, a resposta estática e vibratória da torre de TV foi encontrada para cada simulação de vento turbulento utilizado como entrada. Os resultados obtidos forneceram informações de entrada importantes, para o controle de vibração da torre com amortecedores passivos e/ou ativos.

Após o estudo do comportamento de um trecho de uma linha de transmissão de energia elétrica situado na travessia do lago de Maracaibo, na Venezuela, Diana *et al.* (1998), apresentaram diferentes problemas que deveriam ser levados em conta no

projeto das torres, mecanismos de amortecimento, isoladores e arranjo das tensões. Estes problemas são representados pelas oscilações mecânicas relacionadas com excitação provocadas pelo vento, como por exemplo, as vibrações induzidas por vórtices nos condutores, efeito de esteira e, eventualmente, o efeito de galope provocado pelo acúmulo de gelo nos condutores.

Visando evitar o mau funcionamento de uma antena de transmissão de TV, limitando tanto o deslocamento no topo, como as tensões excessivas, Peeters e De-Roeck (1998) realizaram um estudo do comportamento dinâmico da antena submetida à ação do vento. Neste estudo, os autores realizaram uma análise modal experimental da antena e compararam os resultados obtidos nesta análise, com os resultados obtidos numericamente através de um modelo numérico em elementos finitos (EF), previamente criado. Dada a complexidade da aferição do carregamento dinâmico provocado pela ação do vento, somente os dados de resposta foram coletados experimentalmente. Na análise modal experimental realizada, os autores extraíram os parâmetros modais dos dados de resposta medidos em aceleração, empregando a técnica de identificação através de subespaços estocásticos.

Yasui *et al.* (1999) também estudaram o efeito de esteira provocado pelo vento nas torres autoportantes e estaiadas. Os autores descrevem um método para analisar as vibrações induzidas pelo vento, no conjunto formado pelos condutores e torre de transmissão de energia elétrica, e também apresentam os resultados de dois estudos de caso. Os resultados destes estudos mostram que as diferenças na maneira pela qual as torres sustentam os cabos condutores influenciam nas características da resposta dinâmica.

Ambrosini *et al.* (2002) também analisaram estruturas autoportantes e estaiadas submetidas ao carregamento aleatório do vento através de simulações no domínio da frequência. Um procedimento para aplicação de métodos de integração, ou do método da matriz de transferência é apresentado na análise deste tipo de carregamento aleatório. Segundo os autores, este procedimento oferece várias vantagens em relação aos outros procedimentos alternativos, permitindo a consideração de qualquer tipo de comportamento de material visco-elástico linear. Ambrosini *et al.* também concluíram

que este procedimento pode ser estendido para análise da resposta em flexo-torção de torres altas, com a introdução da correlação vertical do vetor da velocidade instantânea do vento.

Kang e Lo (2002) apresentaram um método para estimar o carregamento provocado pelo vento nas torres de elevada altura do tipo cilíndrica, e também, a magnitude da vibração do solo sobre o qual as torres são construídas. As equações que governam o movimento da estrutura são discretizadas usando o método das diferenças finitas. Baseado nestas equações, um modelo linear inverso foi construído para identificar a intensidade do carregamento do vento e o comportamento vibratório do solo. Problemas de ordem inversa são freqüentemente adotados nos processos de fabricação e nos projetos em que há dificuldade ou, em alguns casos, impossibilidade de se medir diretamente grandezas físicas relacionadas com um determinado fenômeno. No problema de ordem inversa, o objetivo principal é identificar a magnitude desconhecida de certo fenômeno físico, conhecendo-se apenas, os dados de resposta medidos experimentalmente. Os resultados do estudo indicam que o carregamento causado pela ação do vento, e a vibração no solo podem ser estimados através das medidas de deslocamento em várias posições, ao longo da ponte. De acordo com os autores, a metodologia proposta é fácil e eficaz, podendo ser estendida a muitas outras aplicações.

No Brasil, também há muitos estudos sobre o comportamento das torres do sistema de transmissão de energia elétrica. A ocorrência de alguns acidentes, provocados pelo carregamento aerodinâmico do vento, com colapso total de algumas dessas torres vêm despertando nos pesquisadores brasileiros o interesse sobre o comportamento dinâmico deste tipo de estruturas.

Loredou-Souza e Davenport (2000) revisaram o procedimento utilizado para estabelecimento do carregamento devido ao vento, no projeto de torres de **LT**. Neste estudo os autores compararam os procedimentos utilizados atualmente, tais como o método de fator de resposta de rajada, com o procedimento estatístico que utiliza linhas de influência, o qual é considerado mais realístico. A partir dos resultados obtidos nesta comparação, pôde-se concluir que a incorporação das propriedades dinâmicas das estruturas de transmissão nas metodologias de projeto é necessária, e que o método

estatístico utilizando linhas de influência é uma abordagem mais correta, pois permite a inclusão de um maior número de fatores na metodologia de projeto.

Rodrigues *et al.* (2000) estudaram o comportamento de torres de linhas de transmissão do tipo autoportante submetidas à ação do vento. O estudo teve como referência três acidentes ocorridos na região sul do Brasil, provocados por tormentas com ventos que podem ter ultrapassado a velocidade de 100 Km/h. Foi realizado um estudo de caso para duas torres metálicas selecionadas: uma torre autoportante tipo delta com 32,86m de altura, e uma torre em "V", estaiada, com 47m. A interface torre-cabos elétricos foi cuidadosamente estudada, assim como os amortecedores de vibração e espaçadores de feixe. A resposta dinâmica no domínio do tempo obtida com o modelo tridimensional em elementos finitos do sistema da linha de transmissão, mostra a importância da interação fluido-cabos-estrutura na avaliação do comportamento das torres expostas à ação do vento. A oscilação lateral dos cabos elétricos em catenária, suportados por torres com características dinâmicas desfavoráveis, é a principal causa dos acidentes ocorridos. Segundo os autores as torres não resistem às forças de inércia despertadas predominantemente pelos cabos condutores.

Battista *et al.* (2003) apresentaram um procedimento racional como parâmetro normativo de estabilidade a ser considerado no projeto das LTs. Através dos resultados obtidos com um modelo em 3D, em elementos finitos, os autores analisam o comportamento dinâmico e o mecanismo de colapso de uma torre de LT típica. Um modelo analítico de dois graus de liberdade é apresentado como sendo uma ferramenta útil para avaliação das frequências fundamentais nos estágios iniciais de projeto das LTs. Com objetivo de reduzir o deslocamento horizontal no topo das torres, amortecedores em forma de pêndulo foram instalados e a eficiência deste dispositivo é demonstrada através da comparação entre os resultados numéricos e experimentais.

2.3 ANÁLISE DINÂMICA DE PONTES

Entre os vários tipos de excitação dinâmica, a vibração induzida pelo vento, em alguns casos pode ser crítica para pontes, sobretudo, para as suspensas e estaiadas com grandes vãos. A seguir são apresentados alguns estudos desenvolvidos nos últimos anos sobre comportamento dinâmico das pontes e passarelas.

Brownjohn *et al.* (1994), realizaram uma investigação analítica e experimental de uma passarela de pedestres estaiada, com 50m de vão. O estudo analítico consistiu na modelagem em 3D da estrutura, para que fossem determinados os modos de vibração envolvendo o tabuleiro, as torres e os cabos de suspensão. Foram realizados testes com um protótipo da estrutura com a aplicação de impacto provocado por um martelo para determinação dos modos de vibração. Além dos testes realizados com protótipo, a excitação causada pelo tráfego de pedestres também foi medida experimentalmente através de instrumentação apropriada visando a determinação dos modos de vibração correspondentes aos modos obtidos através dos testes com o protótipo. A análise dos dados mostrou que tanto os painéis de concreto como outros elementos estruturais da passarela têm um efeito significativo na rigidez global da estrutura. Os testes demonstraram ainda que a estrutura é levemente amortecida e suscetível às vibrações induzidas pela passagem de pedestres.

Xu *et al.* (1997) realizaram um estudo do comportamento dinâmico de uma ponte pênsil. Trata-se de um estudo de caso em que foi criado um modelo dinâmico em 3D, com a utilização de elementos finitos para simular o comportamento do sistema torre-cabos. As torres, constituídas de colunas em concreto armado e vigas em concreto protendido, foram modeladas por elementos de viga de Timoshenko tridimensionais. Tanto os cabos do vão principal, como os dos vãos laterais foram modelados por elementos de cabo com três nós, considerando a não linearidade geométrica e grandes deflexões elásticas. Com a criação do modelo, a etapa seguinte do estudo consistiu na análise modal para determinar as características e a interação dinâmica entre os cabos e torres. Os resultados mostraram que nas frequências naturais mais baixas, os modos de vibração do sistema podem ser, razoavelmente, classificados em modos no plano e

modos fora do plano. Além disso, as interações dinâmicas entre as torres e cabos são significativas nas frequências naturais globais, tanto nas vibrações contidas no plano dos elementos como fora dele. Finalmente, os resultados analíticos obtidos através do modelo tridimensional, em elementos finitos, foram comparados com as propriedades dinâmicas medidas experimentalmente. Os resultados desta comparação mostram que tanto as frequências naturais dos modos contidos no plano definido pelo conjunto cabos-torre, como as frequências dos modos contidos fora deste plano, apresentam valores bem próximos.

Ding e Lee (2000) também analisaram comportamento dinâmico das pontes suspensas com grandes vãos. Neste estudo, os autores utilizaram um modelo tridimensional, em elementos finitos, formulado para analisar o comportamento dessas estruturas sob a ação dos ventos turbulentos. Neste modelo, todos os tipos de não linearidades geométricas como a acomodação dos cabos, a interação da força e o momento fletor no tabuleiro e nas torres, assim como as mudanças na geometria da ponte devido às grandes deformações foram consideradas na análise. Os carregamentos causados pelo vento como as forças devido ao efeito de martelamento, como também as cargas que levam a estrutura a um estado de auto-excitação, foram convertidas para o domínio do tempo através de técnicas de simulações computacionais com objetivo de montar as matrizes de rigidez e amortecimento aerodinâmico, e também, os vetores de carga dos elementos. Na etapa seguinte do estudo os autores construíram um modelo de carregamento de vento mais refinado, visando à investigação do efeito de mudança instantânea no ângulo de ataque efetivo dos ventos turbulentos na resposta da ponte sob o efeito de martelamento.

Fujino (2002) realizou um estudo do comportamento vibratório das pontes com grandes vãos suspensas por cabos. Neste estudo o autor discute aspectos relacionados com controle e monitoramento de vibrações neste tipo de estrutura. A ênfase principal do trabalho gira em torno da vibração causada por forças que variam no tempo, como por exemplo, as forças aerodinâmicas induzidas pelo vento. Neste trabalho, o autor descreve um novo procedimento para o controle da vibração das pontes suspensas com grandes vãos, com a utilização de *flaps* aerodinâmicos adicionais. Finalmente, com base nos resultados das análises de algumas pontes suspensas com grandes vãos, o autor

ressalta a necessidade do monitoramento e controle das vibrações ambientes desse tipo de estrutura.

Com objetivo de conservar a capacidade de serviço e a integridade estrutural das pontes suspensas, Chen e Cai (2003), propuseram um controle temporário passivo destas estruturas, baseado na formulação geral do subsistema mola-amortecedor da ponte. Esta pesquisa visa investigar alternativas para melhorar a performance das pontes em situações de eventos extremos como, por exemplo, a incidência de tornados nas pontes com grandes vãos. O efeito do tráfego de veículos no comportamento dinâmico dessas estruturas combinado com a ação do vento foi investigado tendo-se como referência um estudo de caso de uma ponte. Após o desenvolvimento do estudo os autores destacaram as seguintes conclusões: Os veículos típicos não apresentam efeitos significativos na estabilidade da ponte com relação ao efeito de martelamento e no pico de resposta. Isso ocorre devido ao fato de que a frequência de vibração do veículo é relativamente alta se comparada com os modos fundamentais da ponte.

No Brasil, a preocupação com verificação da estabilidade estrutural de pontes frente às forças aerodinâmicas produzidas pelo vento também vem crescendo. Em nível nacional, vários estudos a respeito desse assunto têm sido realizados nos últimos anos, como mostra a revisão apresentada a seguir.

Estefani *et al.* (2002) investigaram comportamento dinâmico de uma passarela de pedestres. Foi realizado um estudo em uma passarela construída em aço, composta de quatro vãos de passagem e quatro rampas de acesso. Os autores desenvolveram um programa computacional para calcular as forças de uma ou mais pessoas andando e/ou correndo na estrutura. Entre outros fatores, o programa considera o tempo de contato entre o pé e o piso da estrutura, o comprimento de passo, a velocidade de avanço, o peso da pessoa e o fator de impacto produzido no movimento. Segundo os autores o programa computacional permite simular as forças dinâmicas por uma ou mais pessoas caminhando ou correndo em diferentes sentidos na estrutura. Como conclusões, os autores indicam a necessidade de estudos mais detalhados para garantir a segurança da estrutura quando esta for submetida às vibrações induzidas pelo homem, que variam em torno da frequência fundamental da estrutura. Os autores constataram ainda que as

acelerações máximas calculadas para uma ou duas pessoas caminhando na estrutura, são inferiores aos limites propostos pelo CEB (1991).

No trabalho de Rocha *et al.* (2003), são apresentados e discutidos procedimentos analíticos e experimentais necessários para verificação das condições de estabilidade aerodinâmica das pontes estaiadas com tabuleiro e torres em concreto armado. O trabalho também apresenta os resultados do estudo da ação do vento sobre o modelo seccional reduzido da ponte estaiada sobre o rio Guamá no estado do Pará, Brasil. O estudo experimental desta ponte foi realizado em um túnel de vento, onde o modelo seccional reduzido foi fixado a um sistema de molas e amortecedores a fim de permitir a simulação das frequências naturais correspondentes aos modos vertical e de torção. Os modelos foram instrumentados com acelerômetros e testados para diferentes níveis de amortecimento estrutural.

Foi utilizado um modelo numérico computacional tanto para elaboração do modelo reduzido, como também para aferição das propriedades dinâmicas que auxiliaram no planejamento dos ensaios no túnel de vento. Como resultado deste estudo os autores determinaram a velocidade crítica de instabilização por *flutter* e indicaram, entre três alternativas de geometria do tabuleiro propostas, a mais transparente ao escoamento aerodinâmico. Na alternativa adotada como definitiva foi realizada uma pequena alteração na geometria do tabuleiro, aplicando-se uma inclinação na face interna das longarinas.

Peeters e Ventura (2003) realizaram um estudo comparativo entre várias técnicas de identificação modal a partir de dados experimentais obtidos nos ensaios de vibração de uma ponte em concreto armado. Trata-se de uma ponte em concreto armado composta de três vãos que foi monitorada durante dois anos e cujos dados experimentais foram identificados através de técnicas que variaram desde as mais simples como o método de detecção de pico “*pick-picking*” até as mais avançadas como as baseadas em subespaços estocásticos.

2.4 IDENTIFICAÇÃO MODAL DE ESTRUTURAS CIVIS A PARTIR SOMENTE DA RESPOSTA

A aplicação de métodos de análise modal convencionais nos ensaios dinâmicos das estruturas civis de grande porte torna-se geralmente inviável. Isto ocorre pelo fato desses métodos utilizarem tanto as informações relativas à entrada como também à saída (Ewins, 1984; Maia *et al.*, 1996). Diante dessas dificuldades, os métodos de identificação modal aplicados somente sobre as respostas apresentam-se como uma importante ferramenta de análise modal, sobretudo em estruturas de grande porte como é o caso das estruturas analisadas neste trabalho. Na realidade, existem vários desses métodos na literatura que são classificados como métodos de identificação modal a partir somente das respostas (*output-only modal analysis*). Variando desde o mais simples, como por exemplo, o de detecção de pico (*pick picking*) associado ao método da banda de meia potência, até os mais sofisticados como, por exemplo, do subespaço estocástico (**SSI-COV** e **SSI-DATA**) apresentados por Peeters (2000) e o por Andersen (1997), ou ainda o *Random Decrement* (Asmussen, 1997; Ferreira-Neto, 2005).

Alguns desses métodos já foram utilizados nesses tipos de estrutura, e os resultados mostraram-se bastante satisfatórios. O estudo realizado por Andersen (1997), apresenta um programa computacional com interface gráfica amigável para identificação modal de estruturas a partir somente das respostas medidas, tendo como base teórica modelos estocásticos de Auto-Regressão por Vetor de Médias Móveis (*Auto-Regressive Moving Average Vector* - **ARMAV**). Um dos objetivos desse trabalho é tornar a teoria de identificação modal utilizando modelos estocásticos no domínio do tempo mais acessível para os engenheiros civis. Nesse trabalho são também apresentados os resultados de dois casos experimentais: O primeiro trata de um estudo de simulação, enquanto que o segundo descreve as aplicações do sistema de identificação modal através de modelos de **ARMAV**.

No primeiro caso, são realizadas simulações computacionais de um pórtico de cinco andares com propósito de verificar as propriedades assintóticas da estimativa de parâmetros por modelos de **ARMAV**. Ainda neste primeiro caso o autor destaca que a

precisão da estimativa de parâmetros modais através desses modelos pode ser influenciada pela quantidade de dados de resposta medidos e também pela razão entre o sinal de resposta e o ruído (*signal-to-noise ratio*). Quanto ao segundo caso experimental, o autor mostra os resultados da aplicação de um sistema de identificação baseado em um modelo estocástico de **ARMAV** para detecção de danos através da determinação das propriedades dinâmicas de uma torre treliçada. Para tanto, foi simulado um dano com a introdução de uma trinca em uma das diagonais localizada na parte inferior da torre.

Foram realizados testes de vibração na estrutura da torre em seu estado íntegro e, a partir dos dados coletados nestes testes, foram determinadas as propriedades dinâmicas da torre com a maior precisão possível. Numa etapa seguinte, após certo intervalo de tempo, as propriedades dinâmicas foram novamente determinadas através de testes de vibração realizados na estrutura em seu estado danificado e, em seguida, essas foram comparadas com as propriedades dinâmicas obtidas no estado íntegro. Este procedimento foi repetido ao longo de aproximadamente dois meses. Nesse período a intensidade do dano simulado foi, progressiva e propositalmente, aumentada de modo que cada uma das quatro intensidades de dano correspondesse a uma trinca com um determinado comprimento.

Como conclusão do primeiro caso, um dos principais aspectos observados foi que a estimativa de parâmetros provavelmente torna-se mais precisa quando a quantidade de dados tende ao infinito. Com relação ao segundo caso, verificou-se que os modelos estocásticos de **ARMAV** podem ser utilizados de maneira bastante satisfatória na identificação de danos de estruturas civis, uma vez que foi possível detectar alterações significativas nas frequências naturais devido aos danos introduzidos na estrutura da torre.

Fan *et al.* (2007) apresentaram um novo método de identificação modal baseado na teoria de subespaços estocásticos. O método em questão visa melhorar a identificação de parâmetros a partir somente dos dados de respostas obtidos nos ensaios de vibração, rearranjando a matriz de *Hankel* de tal forma que as características dos modos pouco excitados também possam ser determinadas. O método apresentado foi

testado nos dados de resposta de uma ponte em concreto armado em forma de arco. Segundo os autores, o emprego do novo método possibilitou uma separação confiável dos modos espúrios em relação aos modos físicos da ponte e também a estimativa dos parâmetros associados a modos pouco excitados.

No Brasil alguns estudos sobre identificação modal de estruturas civis baseados nessas recentes teorias também são encontrados. O estudo realizado por Brasiliano (2005), por exemplo, busca estabelecer uma metodologia adequada para a avaliação das condições estruturais de edificações civis, apresentando um estudo onde ferramentas, como a identificação de sistemas e atualização de modelos, são avaliadas. Neste trabalho a autora utiliza métodos de identificação estocásticos, baseados apenas na resposta da estrutura como, por exemplo, o (SSI-COV) e (SSI-DATA), e ainda, métodos de atualização de modelos, baseados em funções de penalidade, aplicados a estruturas simples, ensaiadas em laboratório.

Dentre as várias atividades envolvidas nesse trabalho, pode-se destacar os ensaios de vibração, em laboratório, de uma estrutura de um pórtico plano em escala reduzida. Com emprego de acelerômetros e de um sistema de aquisição de dados a estrutura foi monitorada durante os ensaios de vibração e, a partir somente dos dados de resposta no domínio do tempo, as frequências naturais, os fatores de amortecimento e os correspondentes modos de vibração foram determinados com utilização de métodos estocásticos como o SSI-COV e o SSI-DATA, e também do método de detecção de pico (*pick picking*). Foram realizados ensaios de vibração livre por meio de uma força de impacto aplicada em vários pontos na estrutura, e também ensaios de vibração forçada utilizando um motor fixado em um das vigas do pórtico.

Após a determinação dos parâmetros a partir dos dados obtidos nos diferentes ensaios, a autora estabeleceu uma comparação entre os resultados determinados teoricamente e os determinados experimentalmente. Como conclusão das análises modais realizadas, a autora verificou que, de modo geral, a identificação de parâmetros com emprego do método SSI-DATA parece ter levado a melhores resultados quando comparados com os resultados obtidos através dos demais métodos utilizados.

Nunes-Junior *et al.* (2005) identificaram os parâmetros modais de um pórtico tridimensional através da teoria de subespaços estocásticos. A partir de um modelo em elementos finitos as matrizes de massa e rigidez foram determinadas e, utilizando o método de Rayleigh (Clough e Penzien, 1993), os autores estimaram a matriz de amortecimento. Com essas matrizes espaciais do pórtico os autores determinaram as matrizes de estado no tempo discreto. De posse dessas matrizes de estado, e da aplicação de um sinal aleatório (ruído branco gaussiano) como excitação, em cada grau de liberdade, foram obtidas as respostas da estrutura no domínio do tempo. Após a determinação dessas respostas os autores calcularam as frequências naturais, os amortecimentos e os correspondentes modos de vibração com o emprego do método de identificação por subespaços estocásticos. Posteriormente, foi realizada a comparação entre os resultados teóricos, obtidos do modelo em elementos finitos, e os obtidos a partir da identificação pelo método de identificação por subespaços estocásticos, onde esses resultados se mostraram bastante próximos.

Ferreira-Neto (2005) estudou um método de análise modal apropriado para estruturas civis submetidas às vibrações ambientes. Trata-se do método de *Ibrahim Time Domain (ITD)* associado com a técnica do *Random Decrement* ou **RANDOMDEC** (Asmussen, 1997), no qual os parâmetros modais como as frequências naturais, os fatores de amortecimentos e os correspondentes modos de vibração são determinados a partir, somente, das respostas medidas no domínio do tempo.

Nesse trabalho, o autor realiza uma análise modal de uma ponte rodoviária em concreto armado a partir dos resultados coletados nos ensaios experimentais de vibração que foram realizados através do monitoramento com emprego de acelerômetros de baixa frequência. Essa análise foi realizada por meio de um programa computacional previamente desenvolvido na plataforma MATLAB®. Com objetivo de avaliar a eficiência da análise experimental realizada, o autor estabelece uma comparação entre os resultados experimentais e os resultados obtidos a partir de um modelo em elementos finitos, por meio da estimativa de erro entre as frequências naturais e pelo *Modal Assurance Criterion (MAC)* (Allemang, 1999).

Como conclusão do estudo, o autor verificou que a identificação modal com emprego do método de Ibrahim (*Ibrahim Time Domain - ITD*) associado ao **RANDOMDEC** forneceu valores muito próximos aos obtidos por meio de um modelo em elementos finitos. Entretanto, o autor chama atenção para alguns cuidados com a utilização e interpretação dos resultados fornecidos, uma vez que o ruído existente nos sinais obtidos pode dar origem a modos espúrios (chamados de modos “numéricos”).

2.5 CONCLUSÃO

A partir da revisão da bibliografia realizada, conclui-se que há uma grande apreensão por parte dos pesquisadores com relação aos esforços transientes oriundos da incidência do vento nas estruturas. Um outro aspecto importante e comum observado em alguns desses estudos é a metodologia apresentada para caracterização do comportamento dinâmico das torres metálicas. Esta metodologia basicamente consiste na determinação dos parâmetros modais da estrutura, através de modelos numéricos normalmente utilizando-se o método dos elementos finitos, como também as técnicas de análise modal experimental.

Analisando-se a bibliografia relacionada com estudo do comportamento dinâmico das torres metálicas, pôde-se constatar que os procedimentos normativos estabelecidos para elaboração de projetos de torres de linha de transmissão não são suficientes para garantir a segurança dessas estruturas. É importante destacar que em alguns desses estudos, como o desenvolvido por Momomura *et al.* (1997), não só a ação do vento nas torres de linha de transmissão de energia elétrica e seus efeitos no seu desempenho dinâmico, mas também as características do relevo sobre o qual a torre está instalada constituem os principais aspectos dessa pesquisa. Os autores concluíram que as irregularidades do relevo de uma área montanhosa influenciam na maneira em que os ventos incidem na estrutura, mostrando que as peculiaridades de relevo devem ser consideradas em estudos semelhantes.

Constitui acentuada relevância para este trabalho de pesquisa a metodologia adotada por Peeters (2000) em sua investigação dos parâmetros dinâmicos de uma torre

de TV. Neste estudo, o autor utiliza métodos estocásticos aplicados somente sobre os dados de resposta em aceleração para determinação desses parâmetros. Na análise dinâmica das torres de linha de transmissão de energia elétrica, proposta nesta dissertação é aplicada uma metodologia semelhante para determinação das assinaturas dinâmicas destas estruturas.

Quanto à determinação das características dinâmicas das pontes, conclui-se que a metodologia adotada é semelhante à aplicada para torres, na qual se desenvolve um modelo numérico para análise dinâmica com auxílio de uma investigação modal experimental da estrutura, visando ampliar a precisão do modelo numérico.

Os estudos de vibração em pontes basicamente concentram seus esforços no sentido de compreender o comportamento dessas estruturas sob a ação do vento e do tráfego de veículos e também da maneira pela qual este carregamento incide nas pontes. Outras fontes de excitação com o tráfego de veículos nas pontes ou de pedestres nas passarelas e seus efeitos no comportamento dinâmico dessas estruturas são também investigadas por alguns pesquisadores.

Com relação à análise modal experimental de estruturas civis, a bibliografia consultada mostra uma nova tendência no que diz respeito à identificação de parâmetros de estruturas complexas submetidas às excitações ambientes. No caso específico das torres, os estudos apresentados por Andersen (1997) e Peeters (2000) mostraram-se bastante apropriados para a análise deste tipo de estrutura, pois ambos os métodos de identificação modal baseados em subespaços estocásticos foram capazes de identificar os modos correspondentes às frequências naturais bastante próximas entre si. Um outro aspecto importante a respeito do estudo de Peeters (2000) é que o método foi aplicado tanto em uma torre de antena de TV, como também em uma ponte em concreto armado e, em ambas as análises, os resultados obtidos com aplicação do método dos Subespaços Estocásticos mostraram-se bastante promissores.

CAPÍTULO 3

Método do Subespaço Estocástico

3.1 INTRODUÇÃO

Diante das dificuldades encontradas nos ensaios dinâmicos experimentais das estruturas civis submetidas a excitações ambientes, optou-se neste trabalho por adotar um método de identificação modal que pudesse ser aplicado somente sobre as respostas medidas nos ensaios de vibração dessas estruturas, uma vez que é muito difícil determinar a magnitude das excitações ambientes como, por exemplo, a incidência do vento e também o tráfego de veículos.

Vários desses métodos são encontrados na literatura, variando desde os mais simples como, por exemplo, o de Detecção de Pico (*Pick Picking*) (Ewins, 1984), até os mais complexos como os métodos baseados em Auto Regressão por Médias Móveis (*Auto-Regression Moving Average - ARMA*) (Andersen, 1997), ou os métodos baseados na Técnica do Decremento Randômico (*Random Decrement Technique - RDT*) associado ao método de Ibrahim (*ITD*) (Asmussen, 1997; Ferreira-Neto, 2005), ou o método da Exponencial Complexa (*Least Squares Complex Exponential - LSCE*) (Ewins, 1984) ou ainda os métodos de Identificação por Subespaços Estocásticos (*Stochastic Subspace Identification – SSI*) (Overschee e De-Moor, 1996).

Entre os vários métodos existentes, o método de identificação modal dos subespaços estocásticos foi adotado no presente trabalho pelo fato de ser bastante eficiente na identificação modal de torres e pontes a partir somente dos dados de resposta obtidos nos experimentos de vibração (Peeters e De-Roeck, 1998; Peeters, 2000). Trata-se de um método inverso no qual a entrada é estimada a partir das séries temporais obtidas como respostas do sistema. Entre as principais vantagens do emprego dos métodos estocásticos na identificação de estruturas civis pode-se citar o custo reduzido e a facilidade operacional observadas nos ensaios de vibração em campo. Essas vantagens advêm do fato de não haver necessidade de interdição das estruturas

durante todo o período dos ensaios, o que reduz significativamente os transtornos operacionais causados durante a realização desses ensaios. Isso representa um aspecto muito positivo, sobretudo nos ensaios das pontes para as quais a paralisação do tráfego resulta em um grande transtorno para os usuários, mesmo quando essas estruturas são interditadas por um curto período.

A seguir, é apresentado o desenvolvimento teórico-matemático sobre a identificação modal através dos modelos em espaços dos estados e, em seguida, os dois métodos de identificação modal através de subespaços estocásticos estudados neste trabalho. Mais detalhes a respeito desse desenvolvimento teórico podem ser encontrados, por exemplo, em Peeters e De-Roeck (1998), Peeters (2000), Overschee e De-Moor (1996), entre outras publicações.

3.2 MODELOS DE VIBRAÇÃO DE ESTRUTURAS

O sistema mecânico constituído de vários graus de liberdade (**GDL**) ilustrado na Figura 3-1 é geralmente utilizado na análise do comportamento vibratório de estruturas complexas como as estruturas civis e mecânicas (Maia *et al.*, 1996).

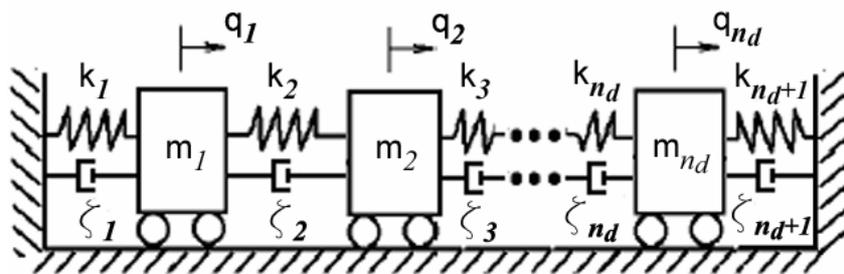


Figura 3-1 - Sistema com múltiplos graus de liberdade (Maia *et al.*, 1996)

Embora as estruturas reais correspondam a sistemas elásticos contínuos e não homogêneos, o seu comportamento vibratório pode ser descrito pelo sistema mecânico discreto constituído de n_d conjuntos de massa, mola e amortecedor, que representam, respectivamente, a massa, a rigidez e o amortecimento de todos os **GDL** da estrutura.

Considerando que cada uma das massas se move devido à ação de forças externas, e estabelecendo o equilíbrio das forças atuantes nessas massas, o fenômeno de vibração pode ser modelado pelo sistema de equações mostrado a seguir.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (3.1)$$

onde t é a variável contínua do tempo, $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$ e $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$ são, respectivamente, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, $\mathbf{q}(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$ é o vetor de deslocamento e $\mathbf{f}(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$ é o vetor de forças externas (entradas), com n_d correspondendo ao número de GDL do sistema.

3.2.1 Modelos em Vibração Livre e Sem Amortecimento

Desprezando-se o amortecimento e assumindo que as massas do sistema mecânico da Figura 3-1 se movem sem ação de forças externas, a equação (3.1) é, então, reescrita como (Maia *et al.*, 1996):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

Sabe-se que a solução da equação diferencial homogênea (3.2) possui a seguinte forma:

$$\mathbf{q}(t) = \bar{\boldsymbol{\varphi}} e^{\lambda t} \quad (3.3)$$

onde $\bar{\boldsymbol{\varphi}}$ é um vetor de amplitudes de deslocamento que representa as possíveis soluções da equação (3.2), e λ é um escalar. Inserindo (3.3) em (3.2), e lembrando que $e^{\lambda t} \neq 0$ para qualquer instante t , então pode-se escrever:

$$(\mathbf{K} + \lambda^2 \mathbf{M})\bar{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{0} \quad (3.4)$$

que corresponde ao problema de autovalor e autovetor generalizado. Esse problema é resolvido adotando-se a solução não trivial para equação (3.4), na qual $\bar{\varphi} \neq 0$ e a inversa de $(\mathbf{K} + \lambda^2 \mathbf{M})$ não existe, sendo:

$$\det(\mathbf{K} + \lambda^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (3.5)$$

onde o operador $\det(\bullet)$ representa o determinante de uma matriz. A equação característica expressa em (3.5) possui n_d possíveis soluções $-\lambda_i^2 \in \mathbb{R}$ (com $i=1,2,\dots,n_d$) que correspondem aos autovalores da equação (3.4). Os autovetores $\varphi_i \in \mathbb{R}^{n_d}$ são obtidos com a determinação de $\bar{\varphi}$ na equação (3.4) para cada um dos autovalores $-\lambda_i^2$. No caso de vibração livre e sem amortecimento, pode-se estabelecer a seguinte relação (Maia *et al.*, 1996):

$$-\lambda_i^2 = \omega_i^2 \Leftrightarrow \lambda_i = j\omega_i \quad (3.6)$$

onde $j = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária e $\omega_i \in \mathbb{R}$ é a frequência natural angular (em rad/s) correspondente ao i -ésimo autovetor. A solução completa da equação do movimento (3.2) de um sistema mecânico em vibração livre e sem amortecimento pode ser expressa pelas seguintes matrizes:

$$\mathbf{\Omega}^2 = \begin{bmatrix} -\lambda_1^2 & & & \\ & -\lambda_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\lambda_{n_d}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_{n_d}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi} = [\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots \quad \varphi_{n_d}] \quad (3.7)$$

onde $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$ é uma matriz modal cujas colunas correspondem às formas modais do sistema, e $\mathbf{\Omega} \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$ é uma matriz cuja a diagonal principal contém as frequências naturais angulares ω_i (em rad/s). Uma propriedade importante de $\mathbf{\Phi}$ é a sua ortogonalidade, com a qual se pode estabelecer as seguintes relações:

$$\mathbf{\Phi}^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} m_i & \\ & \ddots \\ & & m_{n_d} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi}^T \mathbf{K} \mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} k_i & \\ & \ddots \\ & & k_{n_d} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Uma prática bastante comum na análise modal é modificar a escala de Φ de tal sorte que:

$$\hat{\Phi}^T \mathbf{M} \hat{\Phi} = \mathbf{I} \quad (3.9)$$

$$\hat{\Phi}^T \mathbf{K} \hat{\Phi} = \Omega^2 \quad (3.10)$$

onde $\hat{\Phi} \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$ é uma nova matriz modal que normaliza a matriz de massa, e $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n_d \times n_d}$ é a matriz identidade de dimensões $n_d \times n_d$. A relação entre as matrizes modais $\hat{\Phi}$ e Φ é estabelecida pela seguinte equação:

$$\hat{\Phi}_i = \alpha_i \Phi_i \quad (3.11)$$

onde $\hat{\Phi}_i \in \mathbb{R}^{n_d}$ é a i -ésima coluna da matriz modal $\hat{\Phi}$, e $\alpha_i \in \mathbb{R}$ é um escalar que altera o módulo dos vetores modais Φ_i de modo que as equações (3.9) sejam satisfeitas. Inserindo a equação (3.11) em (3.9), tem-se:

$$(\alpha_i \Phi_i)^T \mathbf{M} (\alpha_i \Phi_i) = \alpha_i^2 \Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i = \alpha_i^2 m_i = 1 \quad (3.12)$$

O valor do escalar α_i é, finalmente, determinado da seguinte forma:

$$\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{m_i}} \quad (3.13)$$

onde m_i é a massa modal. Com isso, tem-se também que:

$$(\alpha_i \Phi_i)^T \mathbf{K} (\alpha_i \Phi_i) = \alpha_i^2 k_i = \frac{k_i}{m_i} = \omega_i \quad (3.14)$$

onde k_i é rigidez modal.

3.2.2 Modelos de Vibração com Amortecimento Viscoso Proporcional

Um das principais dificuldades encontradas na análise de sistemas com múltiplos graus de liberdade é a determinação do efeito do amortecimento nas frequências naturais e nos vetores de formas modais. Em sistemas mecânicos complexos como, por exemplo, as estruturas civis e mecânicas, ao contrário da massa e da rigidez, é difícil estimar como o amortecimento se distribui ao longo dessas estruturas (Allemang, 1999).

Na realidade, dependendo da complexidade da estrutura, é razoável considerar um amortecimento com características que resulte de uma combinação de vários mecanismos de amortecimento. Entretanto, como a representação matemática da combinação de vários mecanismos de amortecimento é muito difícil, é conveniente buscar uma alternativa menos complexa para estimar o amortecimento. Para tanto, pode-se definir um mecanismo de amortecimento hipotético que seja proporcional à massa e à rigidez do sistema. A hipótese do amortecimento viscoso proporcional considera que a matriz \mathbf{C} é escrita como uma combinação linear das matrizes \mathbf{M} e \mathbf{K} , de acordo a seguinte equação:

$$\mathbf{C} = \varepsilon\mathbf{K} + \nu\mathbf{M} \quad (3.15)$$

onde $\varepsilon \in \mathbb{R}$ e $\nu \in \mathbb{R}$ são duas constantes. Assumindo a hipótese de que as massas do sistema mecânico da Figura 3-1 vibram livremente, sem a ação de forças externas ($\mathbf{f}(t) = 0$), e com amortecimento viscoso, então a equação (3.1) é reescrita como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (3.16)$$

Considerando o conceito da matriz de formas modais normais definidas na subseção 3.2.1, pode-se definir um outro vetor de coordenadas $\hat{\mathbf{q}}(t)$ de tal sorte que:

$$\mathbf{q}(t) = \hat{\Phi}\hat{\mathbf{q}}(t) \quad (3.17)$$

Inserindo a equação (3.17) na (3.16) e pré-multiplicando esta última por $\hat{\Phi}^T$, tem-se:

$$\hat{\Phi}^T \mathbf{M} \hat{\Phi} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \hat{\Phi}^T \mathbf{C} \hat{\Phi} \dot{\mathbf{q}}(t) + \hat{\Phi}^T \mathbf{K} \hat{\Phi} \mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (3.18)$$

A hipótese de amortecimento viscoso proporcional considera que o amortecimento é distribuído da mesma maneira que a massa e a rigidez estão distribuídas no sistema (hipótese de Reyleigh). Utilizando essa hipótese a equação (3.16) pode ser simplificada se as equações (3.9), (3.10) e (3.15) forem inseridas na equação (3.18), resultando em:

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + \left[\backslash 2\zeta_i \omega_i \backslash \right] \dot{\mathbf{q}}(t) + \left[\backslash \omega_i^2 \backslash \right] \mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

onde ζ_i é a razão de amortecimento correspondente ao i -ésimo dos n_d modos de vibração. Essa razão é determinada de acordo com a seguinte relação:

$$\zeta_i = \frac{\nu}{2\omega_i} + \frac{\varepsilon\omega_i}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n_d \quad (3.20)$$

É importante observar que é possível determinar ν e ε de forma prática, especificando-se ζ e ω para os dois primeiros modos de vibração (Chopra, 1995).

3.2.3 Modelos de Vibração com Amortecimento Viscoso

Em várias situações nas quais o amortecimento é baixo, é possível estimar a matriz de amortecimento utilizando a definição de amortecimento viscoso proporcional sem que haja uma considerável perda de precisão. No entanto, se o sistema possuir alto amortecimento, a estimativa através dessa definição torna-se inviável devido à perda de precisão. Nesse último caso, o procedimento adequado é utilizar a equação homogênea correspondente à equação (3.1), a partir da qual se pode estabelecer um modelo de vibração apropriado para sistemas dinâmicos com qualquer valor de amortecimento viscoso (Maia *et al.*, 1996). O primeiro passo para o desenvolvimento desse modelo é determinar a solução da equação homogênea correspondente à (3.1), que, de modo geral, assume a seguinte forma:

$$\mathbf{q}(t) = \bar{\boldsymbol{\theta}} e^{\lambda t} \quad (3.21)$$

onde $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ é um vetor de amplitudes de deslocamento que representa as possíveis soluções da equação homogênea correspondente à (3.1), e λ é um escalar. Substituindo a equação (3.21) na (3.16) obtém-se um outro problema de autovalor e autovetor dado por:

$$\left[\lambda^2 \mathbf{M} + \lambda \mathbf{C} + \mathbf{K} \right] \bar{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

Entretanto, a solução da equação homogênea (3.16) pode ser determinada de uma maneira conveniente para o desenvolvimento teórico dos modelos de vibração em espaço de estado mostrados nas seções seguintes. Para tanto a equação (3.16) deve ser transformada em uma equação de primeira ordem, tal que:

$$\mathbf{U} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{W} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \quad (3.23)$$

onde as matrizes $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são simétricas, e $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ é um vetor de estados complexo. A equação mostrada em (3.23) é chamada de equação de estado, e as matrizes que a descrevem se relacionam com as matrizes do modelo espacial \mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{C} e $\mathbf{q}(t)$ através das equações mostradas a seguir.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{M} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

Com a transformação da equação (3.16) na (3.23), pelo menos uma das dimensões das matrizes da equação (3.23) passou a ser de $n = 2n_d$. A solução da equação homogênea de primeira ordem (3.23) possui a seguinte forma:

$$\mathbf{x}(t) = \bar{\boldsymbol{\psi}} e^{\lambda t} \quad (3.26)$$

onde $\bar{\boldsymbol{\psi}}$ é um vetor que representa as possíveis soluções da equação homogênea mostrada em (3.23), e λ é, neste contexto, um número complexo. Inserindo a equação (3.26) na (3.24), obtém-se:

$$(\mathbf{U}\lambda + \mathbf{W})\bar{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{0} \quad (3.27)$$

que corresponde ao problema de autovalor e autovetor complexo generalizado cuja solução deve fornecer um conjunto de $n = 2n_d$ autovalores e autovetores. Adotando-se a solução não trivial para equação (3.27) e considerando-se um sistema dinâmico sub-amortecido ($\zeta < 1$), é possível determinar um conjunto de n autovalores complexos que ocorrem em pares conjugados. Uma vez determinado os n autovalores pode-se determinar os respectivos autovetores usando a equação (3.27), que também ocorrem em pares conjugados complexos. Representando os autovalores pelos pares conjugados λ_i e λ_i^* , e os autovetores por $\boldsymbol{\psi}_i$ e $\boldsymbol{\psi}_i^*$ com $i = 1, 2, \dots, n_d$, têm-se:

$$\boldsymbol{\psi}_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_i \\ \boldsymbol{\theta}_i \lambda_i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}_i^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\theta}_i^* \\ \boldsymbol{\theta}_i^* \lambda_i^* \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, n_d \quad (3.28)$$

onde $\boldsymbol{\psi}_i, \boldsymbol{\psi}_i^* \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ são os autovetores correspondente às coordenadas do vetor de estado $\mathbf{x}(t)$ da equação homogênea de primeira ordem (3.27), e $\boldsymbol{\theta}_i, \boldsymbol{\theta}_i^* \in \mathbb{C}^{n_d \times 1}$ são os autovetores relacionados com as coordenadas vetoriais de $\mathbf{q}(t)$ do problema expresso pela equação (3.22) que, por sua vez, corresponde à equação homogênea de segunda ordem (3.16).

A solução completa para os modelos de vibração com amortecimento viscoso pode ser expressa de acordo com as seguintes matrizes.

$$\boldsymbol{\Lambda}_c = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Lambda}^* \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Psi} = \left[\begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_1 & \boldsymbol{\psi}_2 & \cdots & \boldsymbol{\psi}_{n_d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_1^* & \boldsymbol{\psi}_2^* & \cdots & \boldsymbol{\psi}_{n_d}^* \end{pmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Theta} & \boldsymbol{\Theta}^* \\ \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Lambda} & \boldsymbol{\Theta}^*\boldsymbol{\Lambda}^* \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

onde $\boldsymbol{\Lambda}_c \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é uma matriz diagonal que contém os autovalores ao longo da sua diagonal principal e $\boldsymbol{\Psi} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é a matriz cujas colunas são os autovetores da equação (3.27). As sub-matrizes $\boldsymbol{\Lambda} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ e $\boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{C}^{n \times n}$, por sua vez, expressam a solução do

problema de autovalor e autovetor da equação homogênea de segunda ordem (3.16), e são frequentemente definidas da seguinte forma:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n_d} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Theta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 & \boldsymbol{\theta}_2 & \cdots & \boldsymbol{\theta}_{n_d} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

onde os autovalores complexos λ_i são calculados a partir da seguinte expressão (Maia *et al.*, 1996):

$$\begin{aligned} \lambda_i, \lambda_i^* &= -\omega_i \zeta_i \pm j \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}, \quad \omega_i = |\lambda_i| \\ \zeta_i &= -\frac{\text{Re}(\lambda_i)}{\omega_i}, \quad f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \end{aligned} \quad (3.31)$$

onde ω_i , f_i e ζ_i são, respectivamente, a frequência natural angular (rad/s), a frequência natural (em ciclos/s) e o fator de amortecimento correspondente ao i -ésimo modo de vibração. Considerando os n os autovalores λ_i e autovetores $\boldsymbol{\psi}_i$ apresentados nas equações(3.29), a equação (3.23) fica

$$\mathbf{U}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Lambda}_c + \mathbf{W}\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0} \quad (3.32)$$

Aplicando-se a propriedade de ortogonalidade de $\boldsymbol{\Psi}$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} a_{i\lambda} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{U}\boldsymbol{\Psi}, \quad \begin{bmatrix} b_{i\lambda} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Psi}^T \mathbf{W}\boldsymbol{\Psi} \quad (3.33)$$

Inserindo as equações (3.33) na (3.32), e pré-multiplicando essa última equação por $\boldsymbol{\Psi}^T$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} a_{i\lambda} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Lambda}_c + \begin{bmatrix} b_{i\lambda} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\Lambda}_c = - \begin{bmatrix} 1 \\ a_{i\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{i\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{i\lambda} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

onde as matrizes diagonais $\begin{bmatrix} a_i \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} b_i \end{bmatrix}$ são, respectivamente, conhecidas como *matriz modal a* e *matriz modal b*.

3.2.4 Modelos de Vibração em Espaço de Estado Contínuo no Tempo

Conforme mostrado anteriormente, a solução da equação de movimento (3.1) é facilmente determinada quando ela é reescrita sob a forma de uma equação de estado. Esse tipo de equação é muito utilizado na engenharia elétrica e, nos últimos anos, também na identificação modal de estruturas civis e mecânicas. Na realidade os modelos em espaço de estado podem ser utilizados para descrever vários fenômenos em diversas áreas do conhecimento científico. A Figura 3-2 ilustra o funcionamento básico de um sistema dinâmico contínuo no tempo que pode ser utilizado para descrever vários fenômenos como, por exemplo, o de vibração de estruturas.



Figura 3-2 - Sistema dinâmico com entradas e saídas determinísticas

Para o fenômeno de vibração, os modelos em espaço de estado são definidos a partir de duas equações: a primeira delas é conhecida como *equação de estado*; e a segunda é chamada de *equação de observação*. A primeira é obtida a partir da equação do movimento (3.1), e a segunda é determinada a partir das respostas obtidas nos ensaios de vibração. A seguir, é apresentado o desenvolvimento teórico dos modelos de vibração em espaço de estado.

3.2.4.1 Equação de Estado

O fenômeno de vibração ilustrado na Figura 3-1 e modelado pela equação (3.1) também pode ser modelado sob a forma de uma equação de estado do tipo:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t)$$

onde as variáveis $\mathbf{x}(t)$, \mathbf{A}_c e \mathbf{B}_c devem ser calculadas em função das matrizes espaciais \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} e do vetor $\mathbf{q}(t)$ da equação (3.1). O primeiro passo para estabelecer essa relação consiste em pré-multiplicar a equação do movimento (3.1) por \mathbf{M}^{-1} , resultando na seguinte expressão:

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}(t) \quad (3.35)$$

O passo seguinte consiste em escrever a equação (3.35) sob a forma de uma equação de estado, isto é, sob a forma de uma equação de diferenças, onde:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{S} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (3.36)$$

onde $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n_d \times m}$ é uma matriz constituída de zeros e uns convenientemente dispostos ao longo das suas linhas e colunas de modo a especificar os m dos n_d **GDL** nos quais as excitações $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ estão realmente aplicadas. Com definição de \mathbf{S} e $\mathbf{u}(t)$ pode-se estabelecer a seguinte relação:

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{S}\mathbf{u}(t) \quad (3.37)$$

Inserindo a equação (3.24) na (3.36), tem-se:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{S} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (3.38)$$

E de forma mais compacta pode-se escrever:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \quad (3.39)$$

onde $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ é o *vetor de estado* no instante t , $\mathbf{A}_c \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a *matriz de estado* e $\mathbf{B}_c \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é chamada de *matriz de entrada*. Comparando as equações (3.23) e (3.39) pode-se provar que:

$$\mathbf{A}_c = -\mathbf{U}^{-1}\mathbf{W} \quad (3.40)$$

Isolando \mathbf{U} e \mathbf{W} nas equações (3.33) e inserindo essas matrizes na equação (3.40), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c &= -\left\{ \boldsymbol{\Psi}^{-T} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{i\setminus} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^{-1} \right\}^{-1} \boldsymbol{\Psi}^{-T} \begin{bmatrix} 1 \\ b_{i\setminus} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^{-1} = \\ &= -\boldsymbol{\Psi} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{i\setminus} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Psi}^{-T} \begin{bmatrix} 1 \\ b_{i\setminus} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^{-1} = \\ &= -\boldsymbol{\Psi} \begin{bmatrix} 1 \\ a_{i\setminus} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ b_{i\setminus} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^{-1} = \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Lambda}_c \boldsymbol{\Psi}^{-1} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Observa-se que a equação (3.41) conduz ao problema de autovalor e autovetor expresso pela seguinte equação:

$$\mathbf{A}_c \boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Lambda}_c \quad (3.42)$$

A equação de estado (3.39) representa um passo importante para o desenvolvimento de métodos de identificação modal. É importante lembrar, entretanto, que é necessário conhecer as respostas de todos os graus de liberdade para que a equação (3.39) seja satisfeita. Isso representa um obstáculo para o desenvolvimento dos métodos de identificação modal uma vez que somente as respostas de um pequeno subconjunto, dos **GDL** existentes no sistema, são determinadas nos ensaios experimentais de vibração. Na prática dos ensaios experimentais, no entanto, geralmente não é possível medir as respostas de todos os **GDL** e, por isso, há necessidade de se estabelecer uma nova equação, também sob a forma de estado, de maneira que se possa identificar uma estrutura com múltiplos graus de liberdade a partir das respostas medidas por meio de sensores instalados somente em um pequeno subconjunto dos n_d **GDL** da estrutura. Essa outra equação é conhecida como *equação de observação*, e o seu desenvolvimento teórico-matemático é descrito seguir.

3.2.4.2 Equação de Observação

A resposta de um experimento de vibração pode ser expressa em função dos valores medidos por sensores instalados em l dos n_d **GDL** disponíveis no sistema, onde os l **GDL** geralmente correspondem a um pequeno subconjunto dos n_d **GDL** existentes na estrutura. Assumindo que em cada um desses l **GDL** pelo menos um sensor de aceleração, velocidade ou deslocamento esteja instalado de modo a medir as suas respectivas grandezas, é possível estabelecer uma outra equação, chamada de *equação de observação*, que expressa as respostas totais dos l **GDL** como uma combinação linear das respostas medidas em aceleração, velocidade e/ou deslocamento, como:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_a \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}_v \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}_d \mathbf{q}(t) \quad (3.43)$$

onde $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^l$ são as resposta totais medidas, e \mathbf{C}_a , \mathbf{C}_v e $\mathbf{C}_d \in \mathbb{R}^{l \times n_d}$ são matrizes seletivas constituídas de “zeros” e alguns “uns” convenientemente posicionados de forma a determinar a existência de um sensor em um determinado grau de liberdade. Na realidade trata-se de uma matriz de mapeamento dos sensores existentes na estrutura em relação aos graus de liberdade nos quais eles estão instalados.

A equação (3.43) também pode ser reescrita sob a forma de uma equação de estado, tal qual a equação (3.39), como:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t) \quad (3.44)$$

onde $\mathbf{C}_c \in \mathbb{R}^{l \times n}$ é chamada de *matriz de resposta* e $\mathbf{D}_c \in \mathbb{R}^{l \times m}$ é conhecida como *matriz de transmissão direta*. A relação entre essas matrizes e as matrizes seletivas \mathbf{C}_a , \mathbf{C}_v , \mathbf{C}_d e $\mathbf{q}(t)$ na equação (3.43) é encontrada isolando-se o termo correspondente à aceleração na equação (3.1), onde:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{K}\mathbf{q}(t) \quad (3.45)$$

Substituindo (3.37) em (3.45), e isolando $\ddot{\mathbf{q}}(t)$, tem-se:

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{u}(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{q}(t) \quad (3.46)$$

Substituindo (3.46) em (3.43), e considerando a as equações (3.24) e (3.44), chega-se a:

$$\mathbf{C}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_d - \mathbf{C}_a\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{C}_v - \mathbf{C}_a\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

$$\mathbf{D}_c = \mathbf{C}_a\mathbf{M}^{-1}\mathbf{S} \quad (3.48)$$

A equação (3.47) pode ser simplificada se, de fato, somente transdutores de aceleração forem utilizados. Na realidade este tipo de sensor é frequentemente utilizado em experimentos de vibração em estruturas civis. Neste caso, as matrizes seletivas \mathbf{C}_d e \mathbf{C}_v são nulas, e as equações (3.47) podem ser reescritas como:

$$\mathbf{C}_c = \begin{pmatrix} -\mathbf{C}_a\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{C}_a\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Com a definição da *equação de estado* em (3.39), e da *equação de observação* em (3.44), pode-se definir um outro modelo de vibração, desta vez em espaço de estado, correspondente ao modelo de vibração expresso pela equação do movimento (3.1), como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_c\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_c\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_c\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}_c\mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (3.50)$$

As equações (3.50) correspondem ao modelo clássico de vibração puramente determinístico em espaço de estado para o tempo contínuo, onde $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{y}(t)$ são, respectivamente, as excitações e as respostas conhecidas, do sistema dinâmico ilustrado na Figura 3-2. Tal qual o modelo expresso pela equação do movimento (3.1), os modelos em espaço de estado são capazes de descrever o comportamento do sistema dinâmico da Figura 3-1. Entretanto, diferentemente do modelo expresso pela equação do movimento cuja ordem é definida pelo número de linhas de $\mathbf{q}(t)$ que, por sua vez é igual ao número de **GDL** (n_d) do sistema, os modelos em espaço de estado representados pela equação (3.50) possuem ordem definida pelo número de linhas do

vetor de estados $\mathbf{x}(t)$ que é de $n = 2n_d$. Isso se explica pelo fato de que o vetor $\mathbf{x}(t)$ possui deslocamentos e velocidades de todos os **GDL** do sistema, como pode ser observado na equação (3.24).

Utilizando as propriedades de ortogonalidade da matriz Ψ , pode-se definir uma equação para transformação das coordenadas do *vetor de estado* $\mathbf{x}(t)$ de tal sorte que:

$$\mathbf{x}(t) = \Psi \mathbf{z}(t) \quad (3.51)$$

onde $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{C}^n$ é o *vetor de estado modal* que, diferentemente do vetor de estado $\mathbf{x}(t)$, não possui informações de deslocamento e velocidade, mas sim outras informações sem significado físico. Inserindo a equação (3.51) nas do modelo em espaço de estado (3.50), chega-se a:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \Psi^{-1} \mathbf{A}_c \Psi \mathbf{z}(t) + \Psi^{-1} \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_c \Psi \mathbf{z}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Substituindo a equação (3.42) na (3.52), tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \Lambda_c \mathbf{z}(t) + \Psi^{-1} \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}_c \Psi \mathbf{z}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (3.53)$$

A equação (3.53) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \Lambda_c \mathbf{z}(t) + \mathbf{L}_c \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{V}_c \mathbf{z}(t) + \mathbf{D}_c \mathbf{u}(t) \end{aligned} \quad (3.54)$$

onde \mathbf{V}_c é chamada de *matriz das formas modais observadas* que corresponde aos modos de vibração que podem ser efetivamente observados nos experimentos de vibração através dos sensores de resposta instalados nos l dos n_d **GDL** da estrutura, e \mathbf{L}_c é a *matriz de participação modal*. Comparando as equações (3.53) com as (3.54), pode-se definir:

$$\mathbf{L}_c = \mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{B}_c \quad (3.55)$$

$$\mathbf{V}_c = \mathbf{C}_c\mathbf{\Psi} \quad (3.56)$$

A transformação iniciada na equação (3.52) e finalizada na (3.54) é conhecida na literatura como *transformação de similaridade*. Essa transformação é essencial para determinação dos modos de vibração a partir das informações de saída obtidas nos ensaios experimentais de vibração nos quais as excitações e as respostas de apenas alguns poucos graus de liberdade são realmente medidas (Andersen, 1997; Peeters, 2000).

Um outro aspecto importante do modelo expresso pelas equações (3.54) é que, na prática da análise modal experimental, apenas alguns dos múltiplos modos de vibração estão situados na banda de interesse. Convém lembrar também que o número de **GDL** instrumentados nos ensaios de vibração é geralmente muito inferior aos da estrutura e, assim sendo, somente um subconjunto de todas as formas modais da estrutura está efetivamente presente nos dados de resposta medidos pelos sensores. Esse subconjunto é chamado de *formas modais observadas* nas respostas (\mathbf{V}_c), e é calculado através da equação (3.56).

3.2.5 Modelos de Vibração Determinísticos em Espaço de Estado Discreto no Tempo

As equações (3.50) representam um passo importante para modelagem do fenômeno de vibração através de espaços dos estados. Todavia, no cotidiano dos ensaios experimentais de vibração de estruturas, tanto as excitações como as respostas são obtidas com emprego de sensores que são capazes de medir grandezas físicas somente no tempo discreto. Diante desse fato é necessário reescrever essas equações no tempo discreto de tal forma que seja possível modelar o sistema dinâmico, puramente determinístico, com entradas e saídas discretas da Figura 3-3.



Figura 3-3 – Sistema dinâmico com entradas, saídas determinísticas no tempo discreto

No sistema dinâmico da Figura 3-3 as entradas \mathbf{u}_k e as saídas \mathbf{y}_k determinísticas são medidas no tempo discreto com uma taxa de amostragem constante Δt , em cada instante $t = k\Delta t$, onde $k \in \mathbb{N}^n$. Nessas circunstâncias o modelo em espaço de estado contínuo correspondente às equações (3.50) pode ser reescrito para o sistema dinâmico na Figura 3-3 na forma de um modelo em espaço de estado discreto no tempo correspondente à seguinte equação:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_d \mathbf{u}_k \end{aligned} \quad (3.57)$$

onde, $\mathbf{A}_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B}_d \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{C}_d \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $\mathbf{D}_d \in \mathbb{R}^{l \times m}$ são, respectivamente, as matrizes de *estado*, *entrada*, *saída* e *transmissão direta* para os modelos em espaço de estado discreto no tempo. O vetor de estado discreto \mathbf{x}_k é definido em função do correspondente vetor de estado no tempo contínuo, através da seguinte equação:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(k\Delta t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}(k\Delta t) \\ \dot{\mathbf{q}}(k\Delta t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_k \\ \dot{\mathbf{q}}_k \end{Bmatrix} = \mathbf{x}_k, \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.58)$$

O funcionamento esquemático dos modelos discretos em espaço de estado com excitações $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^m$ e respostas $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^l$, descritos pelas matrizes \mathbf{A}_d , \mathbf{B}_d , \mathbf{C}_d e \mathbf{D}_d , é ilustrado na Figura 3-4, onde Δ corresponde a um intervalo.

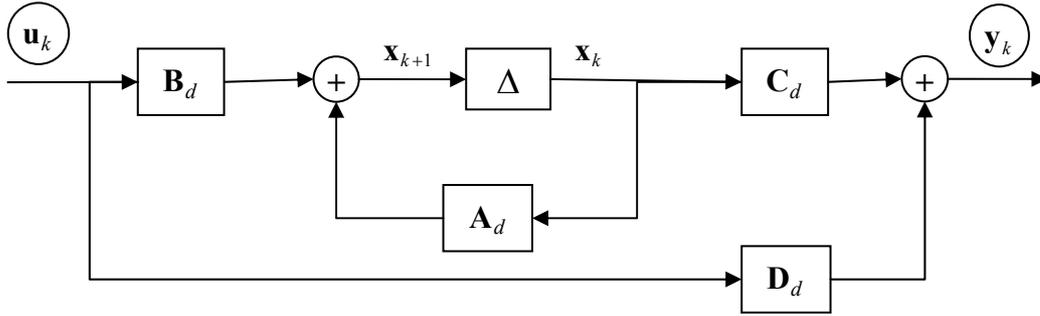


Figura 3-4 – Sistema dinâmico puramente determinístico e discreto no tempo (Overschee e De-Moor, 1996)

Para estabelecer as relações entre as matrizes \mathbf{A}_d , \mathbf{B}_d , \mathbf{C}_d , \mathbf{D}_d que descrevem o modelo discreto correspondente às equações (3.57) e as correspondentes matrizes do modelo contínuo expresso pelas equações (3.50), é necessário considerar a definição de mapeamento exponencial de uma matriz apresentada a seguir.

$$e^{\mathbf{Q}} = \mathbf{I} + \mathbf{Q} + \frac{\mathbf{Q}^2}{2!} + \dots + \frac{\mathbf{Q}^p}{p!} \quad (3.59)$$

onde \mathbf{Q} é uma matriz quadrada, \mathbf{I} é a matriz identidade, p é um escalar, e e é o número neperiano. Utilizando essa definição pode-se verificar a seguinte propriedade (Chen, 1984; Brasiliano, 2005):

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A}_c t} = \mathbf{A}_c e^{\mathbf{A}_c t} = e^{\mathbf{A}_c t} \mathbf{A}_c \quad (3.60)$$

Pré-multiplicando ambos os lados da equação (3.39) por $e^{-\mathbf{A}_c t}$ e isolando o termo contendo \mathbf{B}_c , pode-se escrever:

$$e^{-\mathbf{A}_c t} \dot{\mathbf{x}}(t) - e^{-\mathbf{A}_c t} \mathbf{A}_c \mathbf{x}(t) = e^{-\mathbf{A}_c t} \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \quad (3.61)$$

Observando a equação (3.61), verifica-se que ela também pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left[e^{-\mathbf{A}_c t} \mathbf{x}(t) \right] = e^{-\mathbf{A}_c t} \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \quad (3.62)$$

Integrando a equação (3.62) de t_0 a t , têm-se:

$$\begin{aligned} e^{-\mathbf{A}_c t} \mathbf{x}(t) \Big|_{\tau=t_0}^t &= \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}_c \tau} \mathbf{B}_c \mathbf{u}(\tau) d\tau \Leftrightarrow \\ e^{-\mathbf{A}_c t} \mathbf{x}(t) - e^{-\mathbf{A}_c t_0} \mathbf{x}(t_0) &= \int_{t_0}^t e^{-\mathbf{A}_c \tau} \mathbf{B}_c \mathbf{u}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3.63)$$

Considerando que $(e^{-\mathbf{A}_c t})^{-1} = e^{\mathbf{A}_c t}$, a equação (3.63) assume a seguinte forma:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_c(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}_c(t-\tau)} \mathbf{B}_c \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3.64)$$

que é a solução geral da equação de estado (3.39). Para estabelecer as relações entre as matrizes do modelo discreto e as correspondentes matrizes do modelo contínuo, é necessário considerar ainda que a excitação $\mathbf{u}(t)$ seja obtida em instantes discretos $t = k\Delta t$, onde $k \in \mathbb{N}$, e também admitir que ela seja constante no intervalo de amostragem $k\Delta t \leq t < (k+1)\Delta t$. Assumindo essas hipóteses e definindo $t_0 = k\Delta t$, pode-se escrever (Glad e Ljung, 2000):

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_c(t-k\Delta t)} \mathbf{x}(k\Delta t) + \int_{k\Delta t}^t e^{\mathbf{A}_c(t-\tau)} \mathbf{B}_c \mathbf{u}(k\Delta t) d\tau \quad (3.65)$$

Definindo que o próximo vetor de estado seja obtido no instante $t = (k+1)\Delta t$, a equação (3.65) fica:

$$\mathbf{x}((k+1)\Delta t) = e^{\mathbf{A}_c \Delta t} \mathbf{x}(k\Delta t) + \left(\int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} e^{\mathbf{A}_c(k\Delta t + \Delta t - \tau)} d\tau \right) \mathbf{B}_c \mathbf{u}(k\Delta t) \quad (3.66)$$

Adotando as definições (3.58) e uma nova variável $\alpha = k\Delta t + \Delta t - \tau$, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= e^{\mathbf{A}_c \Delta t} \mathbf{x}_k + \left(\int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_c \alpha} d\alpha \right) \mathbf{B}_c \mathbf{u}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_d \mathbf{u}_k\end{aligned}\quad (3.67)$$

Finalmente, comparando as equações (3.67) com as (3.57), verifica-se que as relações entre as matrizes que descrevem o modelo discreto e as correspondentes matrizes do modelo contínuo são dadas pelas seguintes expressões (Glad e Ljung, 2000):

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}_c \Delta t} \quad (3.68)$$

$$\mathbf{B}_d = \left(\int_0^{\Delta t} e^{\mathbf{A}_c \alpha} d\alpha \right) \mathbf{B}_c \quad (3.69)$$

$$\mathbf{C}_d = \mathbf{C}_c \quad (3.70)$$

$$\mathbf{D}_d = \mathbf{D}_c \quad (3.71)$$

Assumindo que a matriz \mathbf{A}_d não seja singular e substituindo o termo $e^{\mathbf{A}_c \alpha}$ pela sua forma em série de Taylor (Kaplan, 1981) em torno da origem (série de McLaurin) na equação (3.59), a expressão para o cálculo da matriz \mathbf{B}_c é facilmente simplificada (Chen, 1984).

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_d &= \left[\int_0^{\Delta t} \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}_c \alpha + \mathbf{A}_c^2 \frac{\alpha^2}{2!} + \dots \right) d\alpha \right] \mathbf{B}_c = \left(\mathbf{I} \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2!} \mathbf{A}_c + \frac{\Delta t^3}{3!} \mathbf{A}_c^2 + \dots \right) \mathbf{B}_c = \\ &= \mathbf{A}_c^{-1} \left(\mathbf{A}_c \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2!} \mathbf{A}_c^2 + \frac{\Delta t^3}{3!} \mathbf{A}_c^3 + \dots + \mathbf{I} - \mathbf{I} \right) \mathbf{B}_c = \mathbf{A}_c^{-1} \left(e^{\mathbf{A}_c \Delta t} - \mathbf{I} \right) \mathbf{B}_c\end{aligned}$$

Lembrando que $\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}_c \Delta t}$, logo a matriz \mathbf{B}_d pode ser finalmente expressa como:

$$\mathbf{B}_d = \mathbf{A}_c^{-1} (\mathbf{A}_d - \mathbf{I}) \mathbf{B}_c \quad (3.72)$$

É possível provar também que as frequências naturais, os fatores de amortecimento e os correspondentes modos de vibração para os modelos em espaço de estado no tempo discreto são calculados a partir da determinação do problema de autovalor e autovetor, de maneira análoga ao modelo contínuo. O primeiro passo para tanto consiste em substituir a equação (3.41) na (3.68), que resulta na seguinte expressão:

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}_c \Delta t} = e^{\mathbf{\Psi} \mathbf{\Lambda}_c \mathbf{\Psi}^{-1} \Delta t} \quad (3.73)$$

O passo seguinte consiste em expandir o lado direito da equação (3.59) utilizando a série de McLaurin de maneira que essa equação seja simplificada da seguinte forma (Peeters, 2000):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d &= e^{\mathbf{\Psi} \mathbf{\Lambda}_c \mathbf{\Psi}^{-1} \Delta t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathbf{\Psi} \mathbf{\Lambda}_c \mathbf{\Psi}^{-1} \Delta t)^k = \mathbf{\Psi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathbf{\Lambda}_c \Delta t)^k \right) \mathbf{\Psi}^{-1} = \\ &= \mathbf{\Psi} e^{\mathbf{\Lambda}_c \Delta t} \mathbf{\Psi}^{-1} = \mathbf{\Psi} \mathbf{\Lambda}_d \mathbf{\Psi}^{-1} \end{aligned} \quad (3.74)$$

onde $\mathbf{\Lambda}_d \in \mathbb{C}^{n \times n}$ é uma matriz que contém os autovalores do modelo em espaço de estado discreto no tempo. Finalmente, os autovalores e autovetores para os modelos discretos em espaço de estado podem ser determinados resolvendo o correspondente problema expresso pela equação a seguir.

$$\mathbf{A}_d \mathbf{\Psi} = \mathbf{\Psi} \mathbf{\Lambda}_d \quad (3.75)$$

Analisando as equações (3.74), observa-se que a relação entre os autovalores discretos e contínuos é expressa por (Peeters, 2000):

$$\mathbf{\Lambda}_d = e^{\mathbf{\Lambda}_c \Delta t} = \left[\begin{array}{c} \mu_i \end{array} \right] \quad (3.76)$$

onde μ_i representam os n autovalores do modelo em espaço de estado discreto no tempo. A relação entre esses autovalores e os correspondentes autovalores do modelo contínuo é definida pelas seguintes relações (Peeters, 2000):

$$\mu_i = e^{\lambda_i \Delta t} \Rightarrow \lambda_i = \frac{\ln(\mu_i)}{\Delta t} \quad (3.77)$$

As matrizes de *formas modais observadas* \mathbf{V}_d e de *participação modal* \mathbf{L}_d para o tempo discreto são definidas de forma análoga às correspondentes matrizes do modelo contínuo, através das seguintes equações (Peeters, 2000):

$$\mathbf{L}_d = \mathbf{B}_d^T \mathbf{\Psi}^{-T} \quad (3.78)$$

$$\mathbf{V}_d = \mathbf{C}_d \mathbf{\Psi} \quad (3.79)$$

Substituindo a equação (3.70) na (3.79) e comparado o resultado obtido com a equação (3.56), verifica-se que:

$$\mathbf{V}_d = \mathbf{V}_c = \mathbf{C}_c \mathbf{\Psi} \quad (3.80)$$

3.2.6 Modelos de Vibração Estocásticos em Espaço de Estado Discreto no Tempo

Nos itens anteriores foi apresentado o desenvolvimento teórico-matemático para os modelos de vibração em espaço de estado contínuo e discreto no tempo, nos quais tanto as excitações como as respostas desses modelos foram consideradas como grandezas determinísticas. Embora o desenvolvimento desses modelos corresponda a um passo importante para identificação experimental de sistemas dinâmicos e, mais especificamente, de sistemas estruturais complexos como as estruturas civis, é importante lembrar que, até então, foi assumida a hipótese de que os sistemas ilustrados nas Figuras 3-2 e 3-3 não sofrem nenhum tipo de perturbação que interfiram nas medições das excitações e respostas. Nos ensaios experimentais de vibração, entretanto, as medições das excitações e das respostas são sujeitas às perturbações como, por exemplo, ruídos e imprecisões nas leituras obtidas pelos sensores utilizados nesses ensaios.

Como é muito difícil ou, até mesmo, impossível determinar as perturbações presentes nas excitações \mathbf{u}_k e respostas \mathbf{y}_k dos modelos discretos descritos pela equação (3.57), essas perturbações são modeladas por variáveis estocásticas com características de um ruído branco. Ao adicionar variáveis estocásticas no modelo em espaço de estado expresso pelas equações (3.57), têm-se:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{D}_d \mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k\end{aligned}\quad (3.81)$$

onde a variável $\mathbf{w}_k \in \mathbb{R}^n$ contém valores estocásticos referentes ao ruído e às imprecisões na modelagem, e $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^l$ contém informações de ruído devido às imprecisões nas medidas das respostas pelos sensores. Com a introdução das variáveis estocásticas, a equação (3.81) passa a representar um modelo em espaço de estado determinístico-estocástico combinado no tempo discreto. Na realidade, as variáveis estocásticas \mathbf{w}_k e \mathbf{v}_k não são medidas, mas consideradas como um ruído branco estacionário com média zero e com matriz de covariância entre dois instantes distintos quaisquer dada por (Overschee e De-Moor, 1996; Peeters, 2000):

$$\mathbf{E} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{w}_p \\ \mathbf{v}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w}_q^T & \mathbf{v}_q^T \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{pmatrix} \delta_{pq} \quad (3.82)$$

onde o operador $\mathbf{E}(\bullet)$ corresponde ao valor esperado, δ_{pq} é o delta de Kronecker, e p e q são dois instantes escolhidos arbitrariamente. $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{l \times l}$ e $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times l}$ são sub-matrizes da matriz de covariância. Sabe-se, entretanto, que nem sempre é possível medir a magnitude das excitações, sobretudo, quando o sistema dinâmico corresponde a uma estrutura civil submetida a excitações ambientes. Nessas circunstâncias, tanto as excitações como também as perturbações presentes no sistema dinâmico são representadas por variáveis estocásticas, resultando no modelo puramente estocástico em espaço de estado discreto no tempo, que é descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k\end{aligned}\quad (3.83)$$

Como as excitações são desconhecidas, é impossível distingui-las das perturbações e, em virtude dessa dificuldade, na primeira equação de estado (3.83) tanto as excitações como as perturbações decorrentes de ruído e das imprecisões na modelagem são descritas pela variável estocástica \mathbf{w}_k . De maneira análoga, as excitações e as imprecisões referentes às medidas das respostas são descritas pela variável \mathbf{v}_k na segunda equação de estado (3.83).

As equações (3.83) representam os modelos estocásticos em espaço de estado, através dos quais a identificação de sistemas dinâmicos é realizada a partir somente das respostas. A Figura 3-5 descreve, de forma esquemática, os modelos puramente estocásticos em espaço de estado discreto no tempo onde variáveis estocásticas \mathbf{w}_k e \mathbf{v}_k descrevem as excitações e as perturbações, e Δ representa um intervalo entre dois vetores de estado \mathbf{x}_k consecutivos.

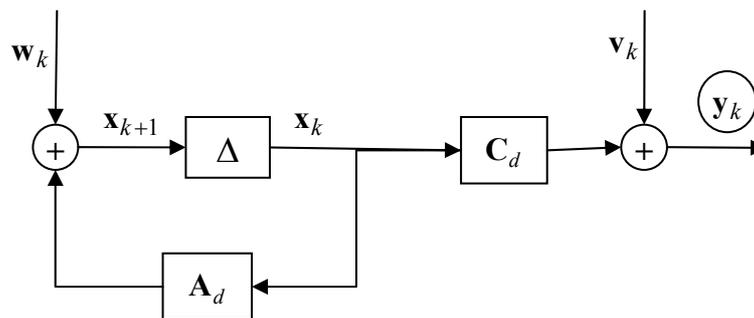


Figura 3-5 – Sistema dinâmico estocástico (Overschee e De-Moor, 1996)

Nos modelos representados pela equação (3.83) e ilustrado na Figura 3-5 os vetores de estado \mathbf{x}_k são desconhecidos, porém podem ser determinados com emprego de algoritmos de identificação modal em uma etapa intermediária. Convém ressaltar que a equação (3.83) representa o estado da arte no que diz respeito à identificação modal de estruturas submetidas a excitações ambientes através dos modelos em espaço de estado, onde, somente, as respostas podem ser medidas nos ensaios experimentais de vibração.

3.3 IDENTIFICAÇÃO ESTOCÁSTICA DE SISTEMAS DINÂMICOS

Com a utilização dos modelos puramente estocásticos em espaço de estado correspondentes às equações (3.83) e da teoria de realização estocástica (Overschee e De-Moor, 1996) é possível identificar sistemas dinâmicos a partir somente das respostas. A aplicação da teoria de realização à identificação de parâmetros modais foi, primeiramente, realizada por (Benveniste e Fuchs, 1985) *apud* (Peeters, 2000) e visa identificar modelos estocásticos em espaço de estado a partir, somente, das respostas.

A seguir são apresentados dois dos mais importantes métodos de identificação modal de modelos estocásticos em espaço de estado. O primeiro deles é conhecido na literatura como **SSI-COV** (*Covariance-Driven Stochastic Subspace Identification*) e o segundo como **SSI-DATA** (*Data-Driven Stochastic Subspace Identification*). Ambos utilizam técnicas numéricas avançadas como **SVD** (Decomposição em Valores Singulares), sendo bastante robustos na identificação de parâmetros a partir de modelos estocásticos em espaço de estado, uma vez que são capazes de identificar sistemas dinâmicos a partir, somente, das respostas, mesmo com a presença de ruído.

A seguir, serão apresentadas algumas definições importantes que são necessárias ao desenvolvimento teórico dos referidos métodos de identificação modal.

3.3.1 Controlabilidade e Observabilidade

De acordo com Glad e Ljung (2000) os conceitos de observabilidade e controlabilidade estão relacionados com a maneira pela qual os vetores de estado de modelos em espaço de estado são influenciados pelas entradas e como essa influência se manifesta nas respostas de um sistema como o da Figura 3-3.

3.3.1.1 Controlabilidade no Tempo Discreto

Um estado \mathbf{x}_k é dito *controlável* se existir uma entrada em um instante finito de tempo de maneira que \mathbf{x}_k possa ser determinado a partir do estado inicial \mathbf{x}_0 . O sistema é considerado *controlável* se todos os estados \mathbf{x}_k são controláveis. Os estados controláveis do sistema em espaço de estado da equação (3.57) constituem um espaço linear, sendo, portanto, o espaço da matriz de controlabilidade definida por:

$$\Gamma_n(A_d, B_d) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d & \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d & \mathbf{A}_d^2 \mathbf{B}_d & \dots & \mathbf{A}_d^{n-1} \mathbf{B}_d \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

onde n é a ordem do sistema. O sistema é *controlável* se, e somente se, Γ_n possuir *rank* completo. Se o sistema é *controlável* pode-se determinar um estado qualquer \mathbf{x}_N no instante $t = N\Delta t$ a partir do estado inicial $\mathbf{x}_0 = 0$. Utilizando a equação (3.57) pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{B}_d \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{A}_d \mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_1 = \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d \mathbf{u}_0 + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_N &= \mathbf{A}_d^{N-1} \mathbf{B}_d \mathbf{u}_0 + \mathbf{A}_d^{N-2} \mathbf{B}_d \mathbf{u}_1 + \dots + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{N-1} \end{aligned} \quad (3.85)$$

As equações (3.85) também podem ser escritas na forma matricial como:

$$\mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d & \mathbf{A}_d \mathbf{B}_d & \mathbf{A}_d^2 \mathbf{B}_d & \dots & \mathbf{A}_d^{N-1} \mathbf{B}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{N-1} \\ \mathbf{u}_{N-2} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

ou simplesmente:

$$\mathbf{x}_N = \Gamma_N \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{N-1} \\ \mathbf{u}_{N-2} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

3.3.1.2 Observabilidade no Tempo Discreto

Um sistema dinâmico descrito pela equação de estado (3.57) é dito *observável* se, para qualquer seqüência de estado, um estado qualquer \mathbf{x}_N tomado no instante $t = N\Delta t$ pode ser determinado no tempo finito usando somente as respostas desse sistema. Isso significa que a partir somente das respostas é possível determinar o comportamento de todo o sistema. Adotando os modelos discretos em espaço de estado descrito pelas equações (3.57) e considerando que as entradas discretas \mathbf{u}_k para $k = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ sejam iguais à zero, as respostas discretas podem ser calculadas através do seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_0 &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_1 &= \mathbf{C}_d \mathbf{x}_1 = \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d \mathbf{x}_0 \\ &\vdots \\ \mathbf{y}_N &= \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^N \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (3.88)$$

As equações (3.88) também podem ser escritas na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_d \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d \\ \vdots \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^N \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 \quad (3.89)$$

ou simplesmente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_N \end{bmatrix} = \mathbf{O}_N(\mathbf{A}_d, \mathbf{C}_d)\mathbf{x}_0 \quad (3.90)$$

onde \mathbf{O}_N é a matriz de observabilidade. O sistema é observável se, e somente se, \mathbf{O}_N possuir *rank* completo.

3.3.2 Organização dos Dados de Resposta

Para os métodos de identificação modal através de modelos estocásticos em espaço de estado é necessário que a organização dos dados de resposta obtidos nos ensaios de vibração deva obedecer a determinados critérios. Um desses critérios corresponde à definição dos sensores de referência que é de fundamental importância para o desenvolvimento teórico dos métodos apresentados adiante. Esta definição está baseada na hipótese de que, desde que um determinado sensor, através do qual se deseja medir a resposta de um certo grau de liberdade, não esteja posicionado em um nó (modal) da estrutura, a resposta medida por ele conterá informações de todos os modos de vibração dessa estrutura. Na prática dos ensaios experimentais de vibração, definir os sensores de referência significa escolher um subconjunto de todos os sensores instalados na estrutura.

Considerando $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^l$ um vetor que possui as l respostas de todos os sensores utilizados em um ensaio de vibração no instante $t = k\Delta t$, deve-se escolher apropriadamente os sensores de referência $\mathbf{y}_k^{ref} \in \mathbb{R}^r$ de tal sorte que:

$$\mathbf{y}_k^{ref} = \mathbf{L}_s \mathbf{y}_k, \quad (3.91)$$

onde $\mathbf{L}_s \in \mathbb{R}^{r \times l}$ é uma matriz composta de muitos zeros e alguns uns, convenientemente dispostos nas linhas e colunas, visando selecionar os sensores de referência. Rearranjando a matriz de respostas de todos os sensores \mathbf{y}_k de tal sorte que os r sensores de referência \mathbf{y}_k^{ref} ocupem as primeiras linhas, têm-se:

$$\mathbf{y}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_k^{ref} \\ \tilde{\mathbf{y}}_k^{ref} \end{pmatrix} \quad (3.92)$$

onde $\tilde{\mathbf{y}}_k^{ref} \in \mathbb{R}^{l-r}$ é o vetor de resposta dos sensores remanescentes obtido pela exclusão das respostas de referências do vetor de todas as respostas \mathbf{y}_k . Convém ressaltar que, nos modelos estocásticos em espaço de estado, os vetores das respostas de referência \mathbf{y}_k^{ref} desempenham uma função semelhante à dos vetores das entradas \mathbf{u}_k nos modelos determinísticos em espaço de estado discretos no tempo representados pelas equações (3.57).

Um outro procedimento importante para o desenvolvimento teórico dos métodos de identificação modal por subespaços estocásticos é a organização das respostas \mathbf{y}_k em uma matriz de *Hankel*¹ (Overschee e De-Moor, 1996), como mostrado a seguir.

$$\mathbf{H}^{ref} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0^{ref} & \mathbf{y}_1^{ref} & \cdots & \mathbf{y}_{N-1}^{ref} \\ \mathbf{y}_1^{ref} & \mathbf{y}_2^{ref} & \cdots & \mathbf{y}_N^{ref} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_{i-1}^{ref} & \mathbf{y}_i^{ref} & \cdots & \mathbf{y}_{i+N-2}^{ref} \\ \mathbf{y}_i & \mathbf{y}_{i+1} & \cdots & \mathbf{y}_{i+N-1} \\ \mathbf{y}_{i+1} & \mathbf{y}_{i+2} & \cdots & \mathbf{y}_{i+N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{y}_{2i-1} & \mathbf{y}_{2i} & \cdots & \mathbf{y}_{2i+N-2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_p^{ref} \\ \mathbf{Y}_f \end{pmatrix} \begin{matrix} \Downarrow ri \\ \Downarrow li \end{matrix} \begin{matrix} \text{"passado"} \\ \text{"futuro"} \end{matrix} \quad (3.93)$$

É importante destacar que a matriz de *Hankel* $\mathbf{H}^{ref} \in \mathbb{R}^{(r+l)ixN}$ da equação (3.93) contém um fator de escala de $1/\sqrt{N}$, onde N é o número de colunas dessa matriz. Nesta equação i corresponde a um dado intervalo no tempo discreto. Um outro aspecto importante relativo à equação (3.93) é que a matriz de *Hankel* pode ser dividida em duas submatrizes $\mathbf{Y}_p^{ref} \in \mathbb{R}^{rixN}$ e $\mathbf{Y}_f \in \mathbb{R}^{lixN}$ que correspondem, respectivamente, à

¹ Por definição a matriz de *Hankel* é uma matriz cujos elementos situados nas anti-diagonais são constantes

matriz das respostas de referência passadas e à matriz das respostas futuras. É conveniente para os métodos de identificação de sistemas dinâmicos em espaço de estado que a matriz de *Hankel* seja também particionada das seguintes formas:

$$\mathbf{H}^{ref} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{Y}_p^{ref+}}{\mathbf{Y}_{i|i}^{\sim-ref}} \\ \mathbf{Y}_f^- \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow r(i+1) \\ \updownarrow l-r \\ \updownarrow l(i-1) \end{matrix}, \quad \mathbf{H}^{ref} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{Y}_p^{ref}}{\mathbf{Y}_{i|i}} \\ \mathbf{Y}_f^- \end{pmatrix} \begin{matrix} \updownarrow ri \\ \updownarrow l \\ \updownarrow l(i-1) \end{matrix} \quad (3.94)$$

onde $\mathbf{Y}_p^{ref+} \in \mathbb{R}^{r(i+1) \times N}$, $\mathbf{Y}_{i|i}^{\sim-ref} \in \mathbb{R}^{r(l-r) \times N}$, $\mathbf{Y}_f^- \in \mathbb{R}^{r(l-r) \times N}$ e $\mathbf{Y}_{i|i} \in \mathbb{R}^{l \times N}$ são submatrizes da matriz de *Hankel*.

3.3.3 Propriedades dos Modelos Estocásticos em Espaço de Estado

A seguir são introduzidas algumas propriedades e hipóteses importantes para desenvolvimento teórico dos métodos de identificação modal através dos modelos estocásticos em espaço de estado. Como mencionado anteriormente, as variáveis estocásticas do modelo representado pelas equações (3.83) são consideradas ruídos brancos com covariância fornecida pela equação (3.82). Uma outra hipótese considerada é que os modelos descritos pelas equações (3.83) correspondam a processos estocásticos estacionários com média igual à zero. Nestas condições a covariância dos vetores de estado \mathbf{x}_k e o seu valor esperado são respectivamente (Peeters, 2000):

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}_k \mathbf{x}_k^T) = \mathbf{\Sigma}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0} \quad (3.95)$$

onde a matriz de covariância $\mathbf{\Sigma}$ é independente do instante k . Lembrando que \mathbf{w}_k e \mathbf{v}_k são variáveis estocásticas que contém valores com características de ruídos brancos, e como tal são independentes dos vetores de estado \mathbf{x}_k , conclui-se que:

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}_k \mathbf{w}_k^T) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{x}_k \mathbf{v}_k^T) = \mathbf{0} \quad (3.96)$$

Uma outra propriedade importante é a definição da matriz de covariância das respostas $\mathbf{R}_i \in \mathbb{R}^{l \times l}$ dada por:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{E}(\mathbf{y}_{k+i}\mathbf{y}_k^T) \quad (3.97)$$

A matriz de covariância \mathbf{G} mede a variação entre o vetor de estado seguinte \mathbf{x}_{k+1} e o vetor de resposta \mathbf{y}_k e é, por definição, dada por:

$$\mathbf{G} = \mathbf{E}(\mathbf{x}_{k+1}\mathbf{y}_k^T) \quad (3.98)$$

Considerando as hipóteses anteriormente apresentadas e, ainda, as definições correspondentes às equações (3.95) a (3.98), as seguintes equações podem ser deduzidas (Overschee e De-Moor, 1996; Peeters, 2000):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}_k\mathbf{x}_k^T) &= \mathbf{\Sigma} = \mathbf{A}_d\mathbf{\Sigma}\mathbf{A}_d^T + \mathbf{Q} \\ \mathbf{E}(\mathbf{y}_k\mathbf{y}_k^T) &= \mathbf{R}_0 = \mathbf{C}_d\mathbf{\Sigma}\mathbf{C}_d^T + \mathbf{R} \\ \mathbf{E}(\mathbf{x}_{k+1}\mathbf{y}_k^T) &= \mathbf{G} = \mathbf{A}_d\mathbf{\Sigma}\mathbf{C}_d^T + \mathbf{S} \end{aligned} \quad (3.99)$$

A matriz de covariância das respostas também é determinada a partir das propriedades definidas anteriormente, como:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i &= \mathbf{C}_d\mathbf{A}_d^{i-1}\mathbf{G} \\ \mathbf{R}_{-i} &= \mathbf{G}^T(\mathbf{A}_d^{i-1})^T\mathbf{C}_d^T, \quad i = 1, 2, 3... \end{aligned} \quad (3.100)$$

Admitindo a hipótese de que o processo estocástico é ergódico², a covariância das respostas \mathbf{R}_i pode ser estimada através da seguinte equação:

² Um processo estocástico estacionário é dito ergódico quando o valor esperado de uma amostra de tempo, isto é a média sobre um número infinito de processos, pode ser substituído pela média de uma série infinitamente longa de processos.

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{E} \left(\mathbf{y}_{k+i} \mathbf{y}_k^T \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{y}_{k+i} \mathbf{y}_k^T \quad (3.101)$$

As equações (3.100) e (3.101) são de extrema importância para identificação de sistemas dinâmicos estocásticos a partir, somente, das respostas, pois, uma vez determinada a matriz de covariância \mathbf{R}_i , as matrizes \mathbf{A}_d , \mathbf{C}_d e \mathbf{G} são calculadas através da fatoração de \mathbf{R}_i . É importante destacar que, uma vez calculadas as matrizes \mathbf{A}_d , \mathbf{G} , \mathbf{C}_d e \mathbf{R}_0 , o modelo estocástico em espaço de estado é resolvido. Convém ressaltar que essas matrizes descrevem os modelos estocásticos da equação (3.83), desempenhando função equivalente à das matrizes \mathbf{A}_d , \mathbf{B}_d , \mathbf{C}_d e \mathbf{D}_d nos modelos puramente determinístico em espaços dos estados descrito pelas equações (3.57).

Utilizando o conceito das respostas de referência, pode-se definir uma matriz de covariância das respostas de referência que é determinada de forma análoga à equação (3.97), como:

$$\mathbf{R}_i^{ref} = \mathbf{E} \left[\mathbf{y}_{k+i} \left(\mathbf{y}_k^{ref} \right)^T \right] = \mathbf{R}_i \mathbf{L}_s^T \quad (3.102)$$

A matriz de covariância entre o vetor de estado seguinte \mathbf{x}_{k+1} e o vetor de resposta de referência \mathbf{y}_k^{ref} é definida de maneira semelhante à equação (3.98), como:

$$\mathbf{G}^{ref} = \mathbf{E} \left[\mathbf{x}_{k+1} \left(\mathbf{y}_k^{ref} \right)^T \right] = \mathbf{G} \mathbf{L}_s^T \quad (3.103)$$

A matriz de covariância $\mathbf{R}_i^{ref} \in \mathbb{R}^{l \times r}$ entre as respostas de referência \mathbf{y}_k^{ref} e as respostas \mathbf{y}_k é definida por:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_i^{ref} &= \mathbf{R}_i \mathbf{L}_s^T = \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{i-1} \mathbf{G}^{ref} \\ \left(\mathbf{R}_i^{ref} \right)^T &= \mathbf{L}_s \mathbf{R}_{-i} = \left(\mathbf{G}^{ref} \right)^T \left(\mathbf{A}_d^{i-1} \right)^T \mathbf{C}_d^T, \quad i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.104)$$

É conveniente para os métodos estocásticos de identificação de sistemas dinâmicos a partir das covariâncias das respostas de referência armazenar essas informações como submatrizes de uma matriz de *Toeplitz* (Overschee e De-Moor, 1996). Por definição a matriz de *Toeplitz* $\mathbf{T}_{||i}^{ref} \in \mathbb{R}^{rixli}$, ilustrada na equação (3.105), é uma matriz cujos elementos situados ao longo das diagonais são constantes.

$$\mathbf{T}_{||i}^{ref} = \mathbf{Y}_f \left(\mathbf{Y}_p^{ref} \right)^T = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i^{ref} & \mathbf{R}_{i-1}^{ref} & \dots & \mathbf{R}_1^{ref} \\ \mathbf{R}_{i+1}^{ref} & \mathbf{R}_i^{ref} & \dots & \mathbf{R}_2^{ref} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{2i-1}^{ref} & \mathbf{R}_{2i-2}^{ref} & \dots & \mathbf{R}_i^{ref} \end{bmatrix} \quad (3.105)$$

Utilizando os conceitos de observabilidade e controlabilidade da teoria de controle, as matrizes de *observabilidade* $\mathbf{O}_i \in \mathbb{R}^{lixn}$ e de *controlabilidade* $\mathbf{\Gamma}_i^{ref} \in \mathbb{R}^{nxri}$ são definidas como (Overschee e De-Moor, 1996; Sontag, 1998; Glad e Ljung, 2000):

$$\mathbf{O}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_d \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{i-1} \end{pmatrix} \quad (3.106)$$

$$\mathbf{\Gamma}_i^{ref} = \left(\mathbf{A}_d^{i-1} \mathbf{G}^{ref} \quad \mathbf{A}_d^{i-2} \mathbf{G}^{ref} \quad \dots \quad \mathbf{A}_d \mathbf{G}^{ref} \quad \mathbf{G}^{ref} \right) \quad (3.107)$$

De acordo com teoria de controle, se as matrizes \mathbf{A}_d e \mathbf{C}_d na equação (3.106) são observáveis, logo todos os modos do sistema dinâmico podem ser observados a partir dos dados de resposta. Ainda de acordo com essa teoria, se as matrizes \mathbf{A}_d e \mathbf{G}^{ref} são controláveis, isto implica que todos os modos desse sistema podem ser excitados por forças de entrada estocásticas (Overschee e De-Moor, 1996).

3.3.4 Método do Subespaço Estocástico Baseado na Covariância das Respostas de Referência (SSI-COV)

O método **SSI-COV** estudado neste trabalho identifica modelos estocásticos em espaço de estado como os representados pelas equações (3.83), nos quais somente os dados de resposta são conhecidos. Esse método foi primeiramente introduzido por Peeters (2000) e consiste na reformulação do método **SSI-COV** clássico (Overschee e De-Moor, 1996) que identifica os modelos estocásticos utilizando a covariância das respostas de todos os sensores utilizados nos experimentos de vibração. Essa reformulação se baseia na utilização do conceito dos sensores de referência e, conseqüentemente, na substituição da matriz de covariância de todas as respostas pela matriz covariância dos sensores de referência que é definida na equação (3.105).

O primeiro passo para o desenvolvimento do Método do Subespaço Estocástico Baseado nas Covariâncias das Respostas, conhecido na literatura como *Covariance-Driven Stochastic Subspace Identification (SSI-COV)*, consiste em fatorar a matriz de covariância das respostas de referência, obtida através de equação (3.105), como um produto entre as matrizes de *observabilidade* \mathbf{O}_i e de *controlabilidade* $\mathbf{\Gamma}_i^{ref}$ definidas nas equações (3.106) e (3.107). Essa fatoração é obtida substituindo-se a equação (3.104) na (3.105).

$$\begin{aligned}\mathbf{O}_i &= \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1^{1/2} \\ \mathbf{\Gamma}_i^{ref} &= \mathbf{S}_1^{1/2} \mathbf{V}_1^T\end{aligned}\quad (3.110)$$

Analisando a matriz de *observabilidade estendida* na equação (3.106), verifica-se que a *matriz de saída* \mathbf{C}_d pode ser determinada isolando-se as l primeiras linhas da matriz \mathbf{O}_i . Utilizando a notação do Matlab a matriz \mathbf{C}_d é calculada através da seguinte equação:

$$\mathbf{C}_d = \mathbf{O}_i \left((1:l), (1:n) \right) \quad (3.111)$$

Utilizando essa mesma notação e observando-se a equação (3.107), \mathbf{G}^{ref} é calculada da seguinte forma:

$$\mathbf{G}^{ref} = \mathbf{\Gamma}_i^{ref} \left((1:n), \left((r(i-1)+1):(ri) \right) \right) \quad (3.112)$$

Com relação à *matriz de entrada* \mathbf{A}_d , uma das formas de calculá-la é através da seguinte equação (Peeters, 2000):

$$\mathbf{A}_d = \mathbf{O}_i^\dagger \left((1:l(i-1)), (1:n) \right) \mathbf{O}_i \left((l+1), li \right) \quad (3.113)$$

onde o operador $(\bullet)^\dagger$ representa a pseudo inversa de Moore-Penrose (Allemang, 1999; Lay, 1999). Para finalizar o processo de identificação do sistema dinâmico, resta a calcular a matriz covariância das respostas \mathbf{R}_0^{ref} , que é determinada através de uma das equações (3.104).

$$\mathbf{R}_0^{ref} = \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{-1} \mathbf{G}^{ref} \quad (3.114)$$

Finalmente, as matrizes \mathbf{A}_d , \mathbf{G}^{ref} , \mathbf{C}_d e \mathbf{R}_0^{ref} que descrevem o modelo estocástico em espaço de estado (3.83) foram determinadas e a identificação do sistema dinâmico é teoricamente concluída com determinação dos autovalores discretos Λ_d e

dos *modos de vibração observados* \mathbf{V}_d que é, então, realizada através das matrizes \mathbf{A}_d e \mathbf{C}_d de acordo com as equações (3.75) e (3.79).

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d &= \mathbf{\Psi} \mathbf{\Lambda}_d \mathbf{\Psi}^{-1} \\ \mathbf{V}_d &= [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n] = \mathbf{C}_d \mathbf{\Psi} \end{aligned} \quad (3.115)$$

onde $v \in \mathbb{C}^l$ representa os *vetores de formas modais observadas* nos sensores. A seguir é apresentado na Figura 3-6 um fluxograma para implementação computacional do método **SSI-COV**. Utilizando o fluxograma da Figura 3-6 é teoricamente possível identificar sistemas dinâmicos complexos a partir somente das respostas como, por exemplo, as estruturas civis submetidas às excitação ambientes. Na realidade prática dos ensaios experimentais de vibração, entretanto, como o número de respostas medidas no tempo não é infinito, a covariância das respostas \mathbf{R}_i acaba não mais sendo calculada pela equação (3.101), mas estimada usando a seguinte equação:

$$\hat{\mathbf{R}}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{y}_{k+i} \mathbf{y}_k^T \quad (3.116)$$

Com isso as matrizes que descrevem o sistema o sistema dinâmico $\mathbf{A}_d, \mathbf{G}, \mathbf{C}_d, \mathbf{R}_0$ acabam também sendo consideradas como estimativas.

Um outro aspecto importante a respeito do método **SSI-COV** é que seria teoricamente possível determinar a ordem do modelo somente avaliando o número de valores singulares da matriz covariância $\mathbf{T}_{||i}^{ref}$. Para determinar essa ordem é comum adotar o procedimento de superestimá-la e, em seguida, calcular o número de valores singulares não nulos de $\mathbf{T}_{||i}^{ref}$, que, então, será igual à verdadeira ordem do modelo. Na prática, entretanto, essa matriz é influenciada por perturbações e, com isso, todos os valores singulares encontrados através da equação (3.109) acabam sendo não nulos, o que dificulta a determinação da ordem desses modelos. Isso acontece porque as perturbações introduzidas na matriz de covariância $\mathbf{T}_{||i}^{ref}$ dão origem a modos numéricos espúrios.

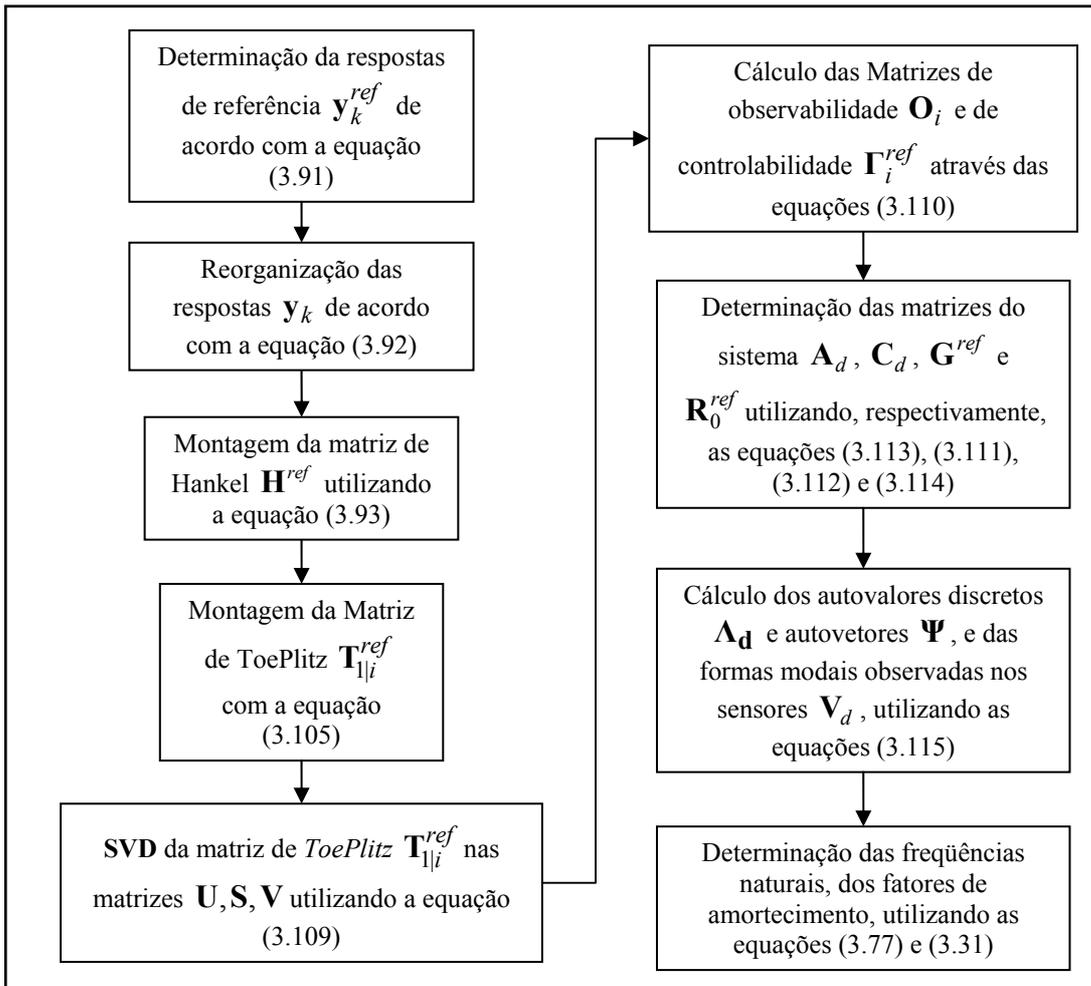


Figura 3-6 – Fluxograma do processo de identificação modal através do método SSI-COV

Uma metodologia bastante apropriada para determinação da ordem dos modelos estocásticos a partir de métodos de identificação que utilizam a **SVD**, consiste na criação de um diagrama de estabilidade (Allemang, 1999). Este tipo de diagrama é construído variando-se, em ordem crescente, a ordem do modelo, e, para cada uma dessas variações, são calculadas as frequências, os amortecimentos e os modos de vibração. Comparando os parâmetros de um modelo de ordem $p+1$ com outro de ordem imediatamente inferior p , e verificando que a diferença entre as respectivas frequências naturais, fatores de amortecimento e modos de vibração situam-se dentro de limites pré-estabelecidos, então esses parâmetros são rotulados no diagrama como estáveis. Se, por exemplo, forem escolhidos como limites 1% para frequências, 5% para os fatores de amortecimento e 2% para os vetores de formas modais, podem-se estabelecer como critérios as seguintes equações (Allemang, 1999; Peeters, 2000):

$$100\% \frac{f^{(p)} - f^{(p+1)}}{f^{(p)}} < 1\%$$

$$100\% \frac{\zeta^{(p)} - \zeta^{(p+1)}}{\zeta^{(p)}} < 5\% \quad (3.117)$$

$$100\% [1 - \mathbf{MAC}(p, (p+1))] < 2\%$$

onde p corresponde a ordem do modelo para qual f, ζ e os correspondentes vetores de formas modais observadas v são identificados. O Critério de Confiança Modal ou *Modal Assurance Criterion* (**MAC**) (Allemang, 1999), como é conhecido na literatura, mede a correlação entre dois vetores modais, e é calculado a partir da seguinte expressão (Allemang, 1999; Peeters, 2000):

$$\mathbf{MAC}(p, (p+1)) = \frac{\left| v^{(p)H} v^{(p+1)} \right|^2}{\left(v^{(p)H} v^{(p)} \right) \left(v^{(p+1)H} v^{(p+1)} \right)} \quad (3.118)$$

onde o operador $(\bullet)^H$ representa a conjugada transposta de uma matriz. O resultado da expressão (3.118) é um escalar que qualifica a relação entre dois vetores. Esse escalar pode assumir valores que variam de zero, indicando nenhuma correlação, a um, representando uma correlação consistente.

Uma vez criado o diagrama de estabilidade, observa-se que, na medida em que a ordem do modelo cresce, mais frequências são identificadas, porém, os modos físicos se estabilizam e a ordem correta do modelo é encontrada, sendo também possível extrair os parâmetros modais da estrutura. Para os modos mais excitados que, de certa forma, predominam nos sinais de respostas medidos, é possível observar que os correspondentes parâmetros logo estabilizam nas primeiras variações da ordem do modelo. Para modos que são pouco excitados, entretanto, é necessário variar o modelo até ordens muito altas para que a suas estabilidades ocorram (Allemang, 1999).

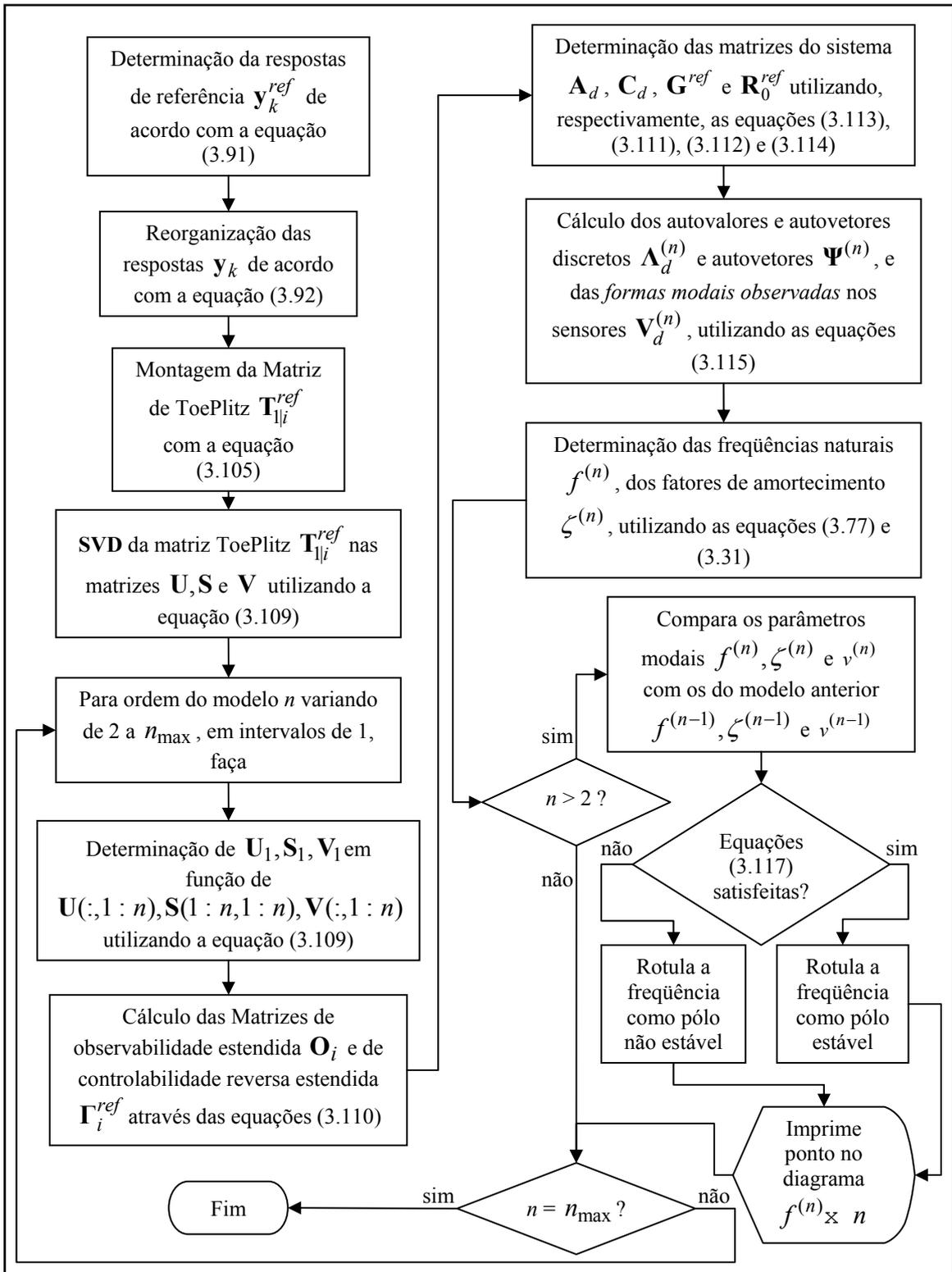


Figura 3-7 – Fluxograma para elaboração do diagrama de estabilidade com o método SSI-COV

No caso do método SSI-COV, a maneira mais eficiente de criar o diagrama de estabilidade é realizada calculando a SVD da matriz de Toeplitz a apenas uma vez, utilizando a equação (3.109). O número de superlinhas e supercolunas da matriz $T_{||i}^{ref}$

deve ser tal que $ri \geq n_{\max}$, onde n_{\max} corresponde à ordem máxima do modelo. Com a variação do número de valores singulares, e conseqüentemente, das dimensões das matrizes $\mathbf{U}_1, \mathbf{S}_1$ e \mathbf{V}_1 na equação (3.110), as matrizes \mathbf{O}_i e $\mathbf{\Gamma}_i^{ref}$ são calculadas para cada uma das diferentes ordens de modelo e, a partir dessas matrizes, as matrizes $\mathbf{A}_d, \mathbf{G}, \mathbf{C}_d, \mathbf{R}_0$ que descrevem o sistema e os parâmetros modais, são calculados de acordo com o procedimento anteriormente descrito. O fluxograma mostrado na Figura 3-7 ilustra o procedimento para elaboração do diagrama de estabilidade utilizando o método SSI-COV.

3.3.5 Método do Subespaço Estocástico Baseado nos Dados de Resposta de Referência (SSI-DATA)

Com a utilização de técnicas numéricas robustas como a SVD, a fatoração QR e a estimativa por mínimos quadrados (Lay, 1999) aliadas ao conceito de filtro Kalman da teoria de controle (Overschee e De-Moor, 1996; Glad e Ljung, 2000), o método SSI-DATA é capaz de identificar modelos estocásticos em espaço de estado a partir somente das respostas obtidas nos ensaios de vibração. Esse método foi primeiramente proposto por (Peeters, 2000) e consiste na reformulação do método SSI-DATA clássico que identifica os modelos estocásticos a partir de todas as respostas dos sensores utilizados nos experimentos de vibração. Essa reformulação consiste na redução das dimensões do modelo com a utilização do conceito dos sensores de referência (Peeters, 2000).

Diferentemente do método SSI-COV, o SSI-DATA não utiliza a covariância das respostas, mas a projeção dos espaços das linhas dos dados das respostas futuras \mathbf{Y}_f no espaço das linhas das respostas de referência passadas \mathbf{Y}_p^{ref} . Esta projeção é definida a seguir, como:

$$\mathfrak{P}_i^{ref} \equiv \mathbf{Y}_f / \mathbf{Y}_p^{ref} \equiv \mathbf{Y}_f \left(\mathbf{Y}_p^{ref} \right)^T \left(\mathbf{Y}_p^{ref} \left(\mathbf{Y}_p^{ref} \right)^T \right)^{\dagger} \mathbf{Y}_p^{ref} \quad (3.119)$$

onde as matrizes $\mathbf{Y}_f \in \mathbb{R}^{lixN}$ e $\mathbf{Y}_p^{ref} \in \mathbb{R}^{rixN}$ são sub-matrizes da matriz de *Hankel* \mathbf{H}^{ref} definida na equação (3.93). Uma outra definição importante para o método **SSI-DATA** é a do filtro Kalman (Overschee e De-Moor, 1996; Sontag, 1998; Glad e Ljung, 2000). Através deste filtro pode-se estimar o vetor de estado $\hat{\mathbf{x}}_k$ a partir das respostas \mathbf{y}_k observadas até o instante $k-1$ quando as matrizes $\mathbf{A}_d, \mathbf{G}, \mathbf{C}_d$ e \mathbf{R}_0 que descrevem os modelos estocásticos em espaço de estado são conhecidas. Assumindo que o estado inicial seja $\hat{\mathbf{x}}(0) = 0$, os vetores de estado $\hat{\mathbf{x}}_k$ são estimados através do filtro Kalman, utilizando a seguinte fórmula recursiva:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{x}}_k &= \mathbf{A}_d \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_{k-1} - \mathbf{C}_d \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \\ \mathbf{K}_{k-1} &= (\mathbf{G} - \mathbf{A}_d \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{C}_d^T) (\mathbf{R}_0 - \mathbf{C}_d \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{C}_d^T)^{-1} \\ \mathbf{P}_k &= \mathbf{A}_d \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_d^T + (\mathbf{G} - \mathbf{A}_d \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{C}_d^T) (\mathbf{R}_0 - \mathbf{A}_d \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{C}_d^T)^{-1} (\mathbf{G} - \mathbf{A}_d \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{C}_d^T)^T\end{aligned}\quad (3.120)$$

onde $\mathbf{P}_0 \equiv \mathbf{E}[\hat{\mathbf{x}}_0 \hat{\mathbf{x}}_0^T] = 0$ é a covariância do vetor de estado inicial estimado, $\mathbf{P}_k = \mathbf{E}[\hat{\mathbf{x}}_k \hat{\mathbf{x}}_k^T]$ é a covariância do k -ésimo vetor de estado, e \mathbf{K} é o ganho do filtro Kalman. Uma vez estimados os vetores $\hat{\mathbf{x}}_k$, eles são então convenientemente armazenados formando a uma *matriz de estados estimados* $\hat{\mathbf{X}}_i$ que apresenta a seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{X}}_i \equiv (\hat{\mathbf{x}}_i \quad \hat{\mathbf{x}}_{i+1} \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{x}}_{i+N-1}) \quad (3.121)$$

De acordo com (Overschee e De-Moor, 1996), a projeção \mathfrak{P}_i pode ser decomposta no produto da matriz de *observabilidade* \mathbf{O}_i pela *matriz de estados estimados* $\hat{\mathbf{X}}_i$ da equação (3.121).

$$\mathfrak{P}_i^{ref} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_d \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^2 \\ \cdots \\ \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{i-1} \end{pmatrix} \left(\hat{\mathbf{x}}_i \quad \hat{\mathbf{x}}_{i+1} \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{x}}_{i+j-1} \right) \Downarrow \quad n = \mathbf{O}_i \hat{\mathbf{X}}_i \quad (3.122)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$n$$

O mesmo procedimento adotado para estimativa do *rank* da matriz de Toepliz da equação (3.109), também pode ser adotado para determinar o *rank* da matriz de projeção \mathfrak{P}_i . Aplicando-se a **SVD** da matriz \mathfrak{P}_i , e desprezando os valores singulares nulos, tem-se:

$$\mathfrak{P}_i^{ref} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T = (\mathbf{U}_1 \quad \mathbf{U}_2) \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{V}_1^T \\ \mathbf{V}_2^T \end{pmatrix} = \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1 \mathbf{V}_1^T \quad (3.123)$$

onde $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{lixli}$ e $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{rixri}$ são matrizes ortonormais, e $\mathbf{S} \in (\mathbb{R}^+)^{lixli}$ é uma matriz diagonal que contém os valores singulares em ordem decrescente. $\mathbf{U}_1 \in \mathbb{R}^{lixn}$, $\mathbf{S}_1 \in [\mathbb{R}_0^+]^{n \times n}$ e $\mathbf{V}_1 \in \mathbb{R}^{N \times n}$. Na ultima igualdade da equação (3.123) a **SVD** é calculada em função das matrizes $\mathbf{U}_1 \in \mathbb{R}^{lixn}$, $\mathbf{S}_1 \in (\mathbb{R}^+)^{n \times n}$ e $\mathbf{V}_1 \in \mathbb{R}^{rixn}$, considerando somente os valores singulares não nulos cujo número é igual ao *rank* (posto) da matriz de projeção \mathfrak{P}_i^{ref} .

A matriz de *observabilidade* \mathbf{O}_i e a *matriz de estados estimados* do filtro Kalman $\hat{\mathbf{X}}_i$ podem também ser calculadas em função de \mathbf{U}_1 , \mathbf{S}_1 \mathbf{V}_1 , de acordo com a seguinte equação (Overschee e De-Moor, 1996):

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_i &= \mathbf{U}_1 \mathbf{S}_1^{1/2} \\ \hat{\mathbf{X}}_i &= \mathbf{O}_i^\dagger \mathfrak{P}_i^{ref} \end{aligned} \quad (3.124)$$

Para calcular as matrizes que descrevem o sistema dinâmico estocástico é necessário ainda definir uma outra matriz de projeção que é calculada em função das matrizes de respostas futuras e passadas obtidas a partir da matriz de *Hankel*, de acordo com a seguinte equação:

$$\mathfrak{P}_{i-1}^{ref} = \mathbf{Y}_f^- / \mathbf{Y}_p^{ref+} = \mathbf{O}_{i-1} \hat{\mathbf{X}}_{i+1} \quad (3.125)$$

onde $\hat{\mathbf{X}}_{i+1}$ é a *matriz dos próximos estados estimados* e \mathbf{O}_{i-1} é uma outra matriz de observabilidade que é obtida suprimindo-se as últimas l linhas da matriz de observabilidade \mathbf{O}_i . Em notação do Matlab, pode-se escrever:

$$\mathbf{O}_{i-1} = \mathbf{O}_i(1 : l(i-1), :) \quad (3.126)$$

Reescrevendo a equação (3.125), a *matriz dos próximos estados estimados* $\hat{\mathbf{X}}_{i+1}$ pode ser calculada da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{X}}_{i+1} = \mathbf{O}_{i-1}^\dagger \mathfrak{P}_{i-1}^{ref} \quad (3.127)$$

Uma vez estimada a *matriz de estados* $\hat{\mathbf{X}}_i$ a partir das respostas, as matrizes de estados \mathbf{x}_k e \mathbf{x}_{k+1} , as respostas y_k , e as perturbações \mathbf{v}_k e \mathbf{w}_k podem ser substituídas, respectivamente, por $\hat{\mathbf{X}}_i$, $\hat{\mathbf{X}}_{i+1}$, $\mathbf{Y}_{i|i}$, \mathbf{V}_i e \mathbf{W}_i na equação (3.83) que é, então, reescrita da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{i+1} \\ \mathbf{Y}_{i|i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_d \\ \mathbf{C}_d \end{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_i + \begin{pmatrix} \mathbf{W}_i \\ \mathbf{V}_i \end{pmatrix} \quad (3.128)$$

onde $\mathbf{V}_i \in \mathbb{R}^{2n \times N}$ e $\mathbf{W}_i \in \mathbb{R}^{l \times N}$ e são considerados resíduos sem nenhuma correlação com as matrizes $\mathbf{Y}_{i|i}$ e $\hat{\mathbf{X}}_{i+1}$. Admitindo essa hipótese, as matrizes de *entrada* \mathbf{A}_d e de *saída* \mathbf{C}_d do sistema estocástico de equações (3.128) são obtidas por meio de mínimos quadrados.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_d \\ \mathbf{C}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{i+1} \\ \mathbf{Y}_{i|i} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_i^\dagger \quad (3.129)$$

Os resíduos \mathbf{V}_i e \mathbf{W}_i podem ser então calculados isolando-se a parcela correspondente a eles na equação (3.128).

$$\begin{pmatrix} \mathbf{W}_i \\ \mathbf{V}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_{i+1} \\ \mathbf{Y}_{i|i} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{A}_d \\ \mathbf{C}_d \end{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}_i \quad (3.130)$$

As matrizes de covariância de ruído \mathbf{Q} , \mathbf{R} e \mathbf{S} são calculadas a partir dos resíduos de acordo com a seguinte equação:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^T & \mathbf{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{W}_i \\ \mathbf{V}_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W}_i^T & \mathbf{V}_i^T \end{pmatrix} \quad (3.131)$$

Uma vez determinadas as matrizes de covariância dos resíduos e as matrizes \mathbf{A}_d e \mathbf{C}_d , as matrizes \mathbf{G} e \mathbf{R}_0 que descrevem os modelos estocásticos em espaço de estado podem ser calculadas. O primeiro passo para tanto, consiste em resolver a equação de Lyapunov (Overschee e De-Moor, 1996), mostrada a seguir, para a matriz $\mathbf{\Sigma}$.

$$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{A}_d \mathbf{\Sigma} \mathbf{A}_d^T + \mathbf{Q} \quad (3.132)$$

O passo seguinte consiste em determinar as matrizes \mathbf{G} e \mathbf{R}_0 , propriamente ditas, de acordo com as equações a seguir.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_0 &= \mathbf{C}_d \mathbf{\Sigma} \mathbf{C}_d^T + \mathbf{R} \\ \mathbf{G} &= \mathbf{A}_d \mathbf{\Sigma} \mathbf{C}_d^T + \mathbf{S} \end{aligned} \quad (3.133)$$

A matriz $\mathbf{Y}_{i|i}$ da equação (3.94) também pode ser determinada a partir das submatrizes de \mathbf{R} e \mathbf{Q} , de acordo com a seguinte equação (Peeters, 2000).

$$\mathbf{Y}_{i|i} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{12}^T & \mathbf{R}_{22}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{13}^T & \mathbf{R}_{23}^T & \mathbf{R}_{33}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_1^T \\ \mathbf{Q}_2^T \\ \mathbf{Q}_3^T \end{pmatrix} \quad (3.137)$$

Embora as equações (3.136) e (3.137) tenham sido expressas em função das submatrizes de \mathbf{R} e \mathbf{Q} , observa-se, entretanto, que devido as suas características de ortonormalidade as submatrizes de \mathbf{Q} são canceladas quando as equações (3.136) e (3.137) são inseridas nas equações (3.129). Procedendo-se desta forma, a equação (3.129) pode ser reescrita de acordo com a seguinte equação.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_d \\ \mathbf{C}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_{i-1}^\dagger \mathbf{R}_{14}^T \\ \mathbf{R}_{12}^T \\ \mathbf{R}_{13}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{12}^T \\ \mathbf{R}_{13}^T \\ \mathbf{R}_{14}^T \end{pmatrix}^\dagger \mathbf{O}_i \quad (3.138)$$

De acordo com Peeters (2000), a matriz *Hankel* pode ser substituída pela matriz \mathbf{R} sem que haja perda de precisão significativa no processo de identificação de parâmetros. Assim a matriz de projeção \mathfrak{P}_i^{ref} mostrada nas equações (3.136) também pode se calculada somente em função das submatrizes de \mathbf{R} .

$$\mathfrak{P}_i^{ref} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{12}^T \\ \mathbf{R}_{13}^T \\ \mathbf{R}_{14}^T \end{pmatrix} \quad (3.139)$$

Vários algoritmos para identificação de modelos estocásticos em espaço de estado podem ser encontrados na literatura (Overschee e De-Moor, 1996; Peeters, 2000). A diferença entre eles está na maneira pela qual a matriz de projeção expressa pela equação (3.139) é ponderada antes da aplicação da **SVD**. Uma das variantes desses algoritmos é conhecida como *Canonical Variate Analysis (CVA)* ou *Análise Canônica*

Variada e consiste em ponderar a equação (3.139) utilizando o termo $(\mathbf{Y}_f \mathbf{Y}_f^T)^{-1/2}$ como peso, dando origem a seguinte equação:

$$(\mathbf{Y}_f \mathbf{Y}_f^T)^{-1/2} \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{12}^T \\ \mathbf{R}_{13}^T \\ \mathbf{R}_{14}^T \end{pmatrix} = \mathbf{USV}^T \quad (3.140)$$

Ainda de acordo com esse algoritmo, a matriz de *observabilidade* é calculada através da seguinte expressão (Overschee e De-Moor, 1996):

$$\mathbf{O}_i = (\mathbf{Y}_f \mathbf{Y}_f^T)^{-1/2} \mathbf{U}_i \mathbf{S}_i^{1/2} \quad (3.141)$$

Conhecidas as matrizes \mathbf{A}_d e \mathbf{C}_d , os autovalores discretos Λ_d e os modos de vibração observados podem ser então calculados de acordo com as equações (3.75) e (3.78).

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_d &= \mathbf{\Psi} \mathbf{\Lambda}_c \mathbf{\Psi}^{-1} \\ \mathbf{V}_d &= \mathbf{V}_c = \mathbf{C}_c \mathbf{\Psi} \end{aligned} \quad (3.142)$$

Uma vez identificadas as matrizes do sistema dinâmico e as formas modais observadas \mathbf{V}_d , resta somente determinar os demais parâmetros modais. O primeiro passo para tanto consiste em determinar os autovalores contínuos Λ_c conforme a equação (3.77).

$$\Lambda_c = \left[\lambda_{i\setminus} \right] = \frac{\ln(\Lambda_d)}{\Delta t} \quad (3.143)$$

Finalmente, após a determinação dos autovalores contínuos Λ_c , as freqüências naturais e os respectivos fatores de amortecimento são calculados utilizando as equações (3.31) (Maia *et al.*, 1996).

$$\lambda_i, \lambda_i^* = -\omega_i \zeta_i \pm j \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2}, \quad \omega_i = |\lambda_i|$$

$$\zeta_i = -\frac{\text{Re}(\lambda_i)}{\omega_i}, \quad f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$$
(3.144)

Para finalizar a identificação do modelo estocástico da equação (3.128) resta calcular as matrizes \mathbf{G} e \mathbf{R}_0 através das equações (3.132) e (3.133). Com isso os parâmetros modais e as matrizes \mathbf{A}_d , \mathbf{C}_d , \mathbf{G} e \mathbf{R}_0 que definem o sistema dinâmico são determinadas. A Figura 3-8 mostra um fluxograma para implementação computacional do método **SSI-DATA**. Um diagrama de estabilidade também pode ser construído para o método **SSI-DATA**, seguindo um procedimento análogo ao desenvolvido para o método **SSI-COV**. Na Figura 3-9 é mostrado um fluxograma para criação do diagrama de estabilidade para o método **SSI-DATA**.

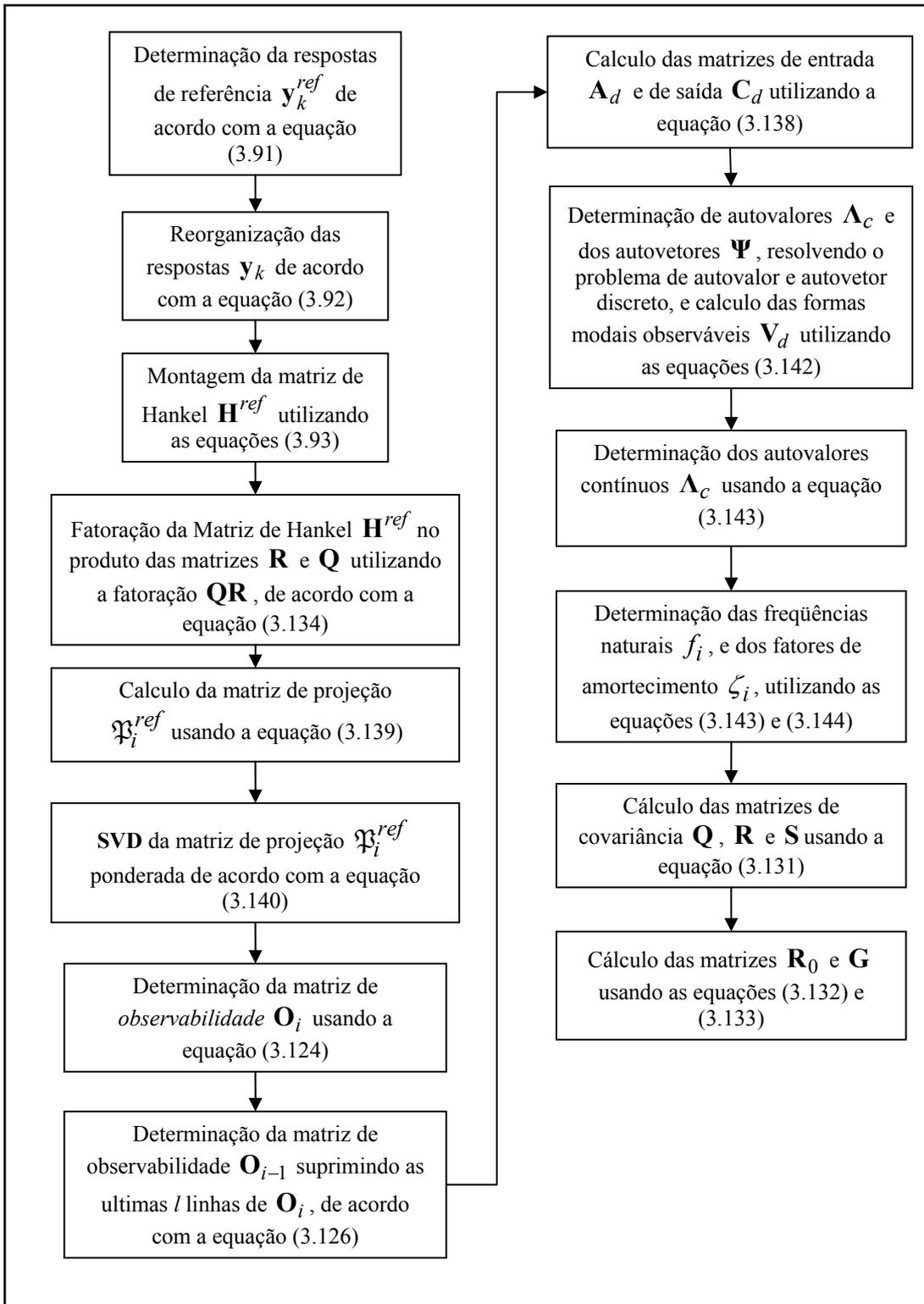


Figura 3-8 - Fluxograma do processo de identificação modal através do método SSI-DATA

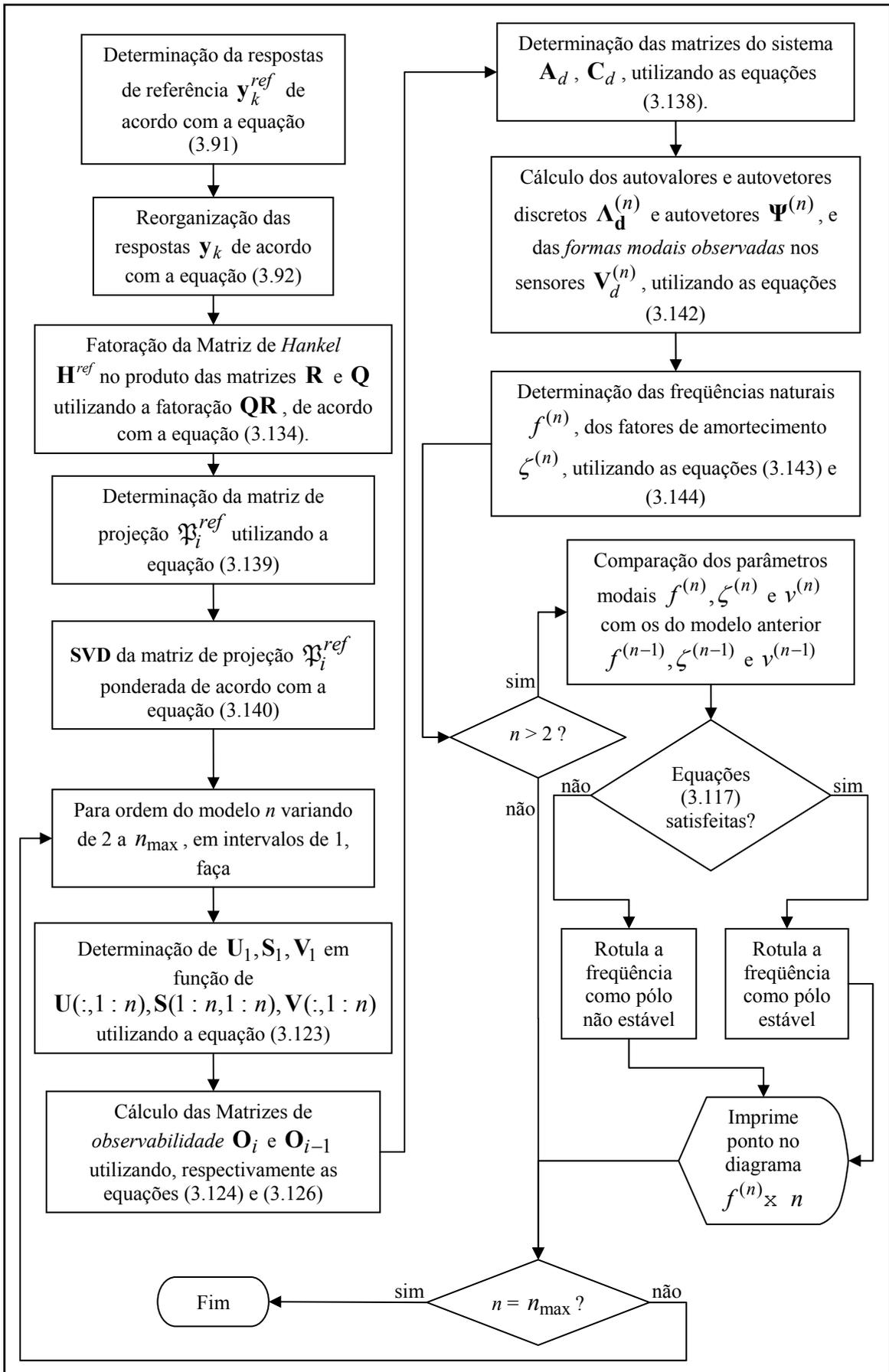


Figura 3-9 - Fluxograma para elaboração do diagrama de estabilidade com o método SSI-DATA

CAPÍTULO 4

Programa Computacional

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo é apresentado um programa computacional destinado à identificação modal de estruturas civis submetidas a excitações ambientes utilizando os métodos **SSI-COV** e **SSI-DATA** descritos no CAPÍTULO 3. Apesar de já existirem outros programas comerciais destinados à identificação modal através da teoria de subespaços estocásticos como, por exemplo, o MACEC (Peeters, 2000) e o Artemis (Cunha *et al.*, 2004), optou-se, neste trabalho, por criar um programa com o mesmo propósito, que foi desenvolvido na plataforma Matlab®. A decisão de desenvolver um novo programa, ao invés de se utilizar um programa comercial já existente, se explica pela facilidade de adequar os equipamentos utilizados nos ensaios de vibração de estruturas civis existentes no Núcleo de Instrumentação e Computação Aplicada à Engenharia (**NiCAE**). Um outro aspecto que justifica essa decisão é o fato desse novo programa ser aberto, o que flexibiliza as suas aplicações e também o seu contínuo aperfeiçoamento pela equipe do **NiCAE**. No contexto do projeto de P&D da Eletronorte isso representa um aspecto muito positivo uma vez que, no futuro, será estabelecido um sistema de monitoração contínua *on-line* de torres de linhas de transmissão através do qual se pretende prever mudanças no comportamento dessas estruturas a partir das suas assinaturas dinâmicas (De-Souza, 2002).

4.2 DESCRIÇÃO DO PROGRAMA

O programa é composto de três módulos: o primeiro é destinado ao pré-processamento dos sinais de respostas coletados nos ensaios de vibração; o segundo é usado para incluir as informações do posicionamento dos sensores (acelerômetros) nos arquivos pré-processados no primeiro módulo; e o terceiro módulo é constituído das ferramentas de identificação propriamente ditas onde os sinais processados no primeiro e no segundo módulos são identificados com auxílio de um diagrama de estabilidade a

partir do qual é possível identificar as frequências naturais, os fatores de amortecimento e os respectivos modos de vibração.

4.2.1 Módulo de Tratamento de Sinais

A Figura 4-1 mostra o primeiro módulo destinado ao tratamento das séries temporais obtidas como respostas nos ensaios de vibração de estruturas civis. A finalidade desse módulo é preparar os sinais para serem submetidos ao processo de identificação. Ele possui uma interface gráfica amigável, criada com recursos do Matlab® (*Graphical User Interface – GUI*), através da qual o usuário pode realizar operações visando reduzir as perturbações e imprecisões existentes nos sinais que possam comprometer ou, até mesmo, inviabilizar a estimativa dos parâmetros modais da estrutura. Como mostrado na Figura 4-2, o **GUI** criado para este módulo permite que os arquivos de dados correspondentes a cada um dos arranjos obtidos nos ensaios de vibração sejam abertos e tratados apropriadamente.

Uma vez abertos os arquivos de dados dos ensaios, o programa exibe as séries temporais e também os auto-espectros correspondentes a cada um dos canais. Um outro recurso importante disponibilizado nesse módulo corresponde às ferramentas de edição das séries temporais. Utilizando essas ferramentas é possível, por exemplo, excluir um canal, derivar e integrar os sinais no tempo e ainda multiplicá-los ou dividi-los por um valor escalar. O módulo possui outros recursos de edição que possibilitam, por exemplo, selecionar apenas um trecho das séries temporais e também selecionar a banda de frequência de interesse para posterior identificação. Para seleção dessa banda o módulo dispõe de um filtro Chebychev passa baixa do tipo I (Mitra, 1998).

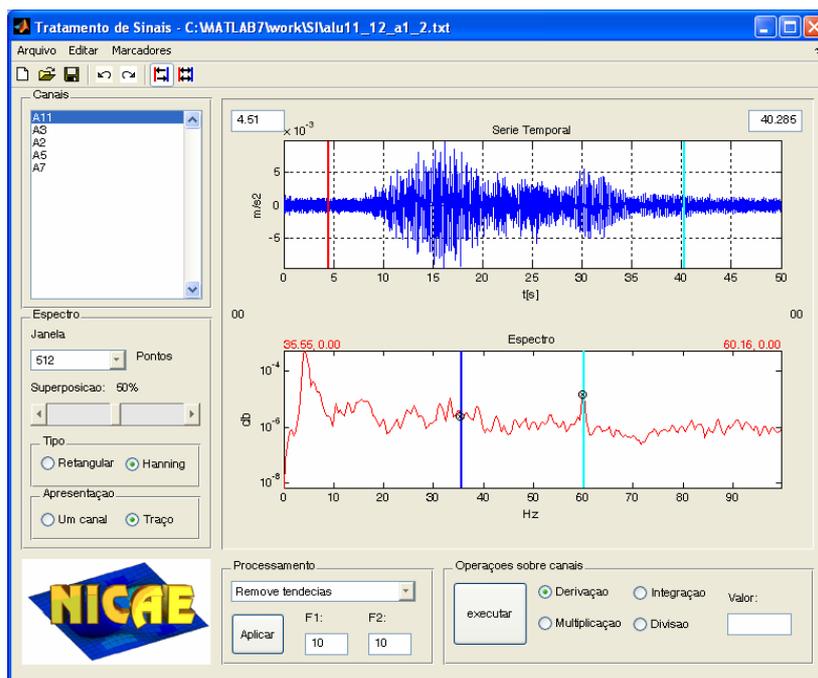


Figura 4-1 – Interface gráfica criada para tratamento dos sinais obtidos nos ensaios de vibração

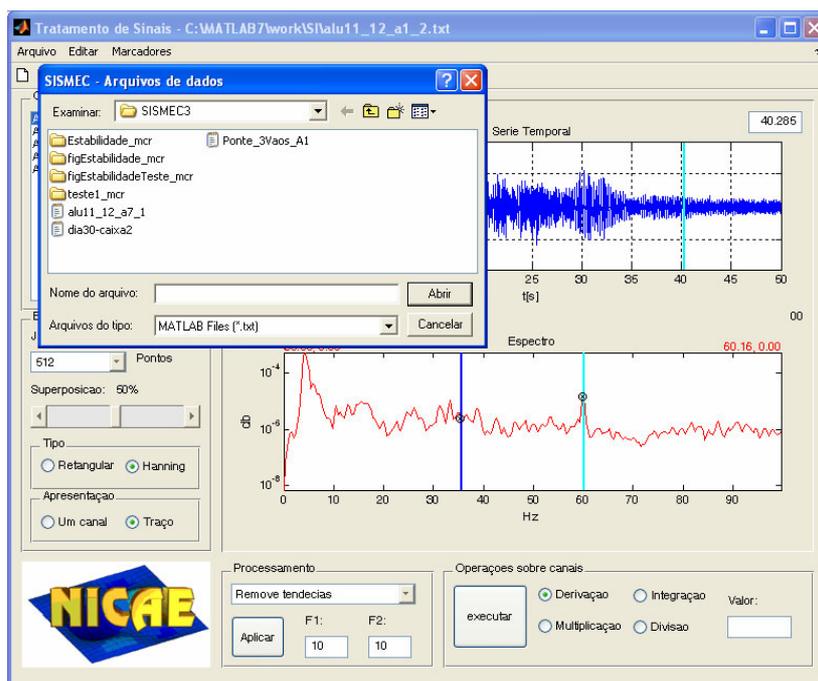


Figura 4-2 – Abertura de arquivo de dados obtidos nos ensaios de vibração

Com relação aos recursos de visualização, destaca-se os marcadores mostrados na Figura 4-3 com os quais é possível selecionar apenas um trecho e, posteriormente, visualizá-lo mais detalhadamente, como mostra a Figura 4-4. Esses marcadores também são utilizados para selecionar apenas um trecho da série temporal que, posteriormente,

pode ser gravado em arquivo para ser identificado no segundo módulo, em uma etapa seguinte.

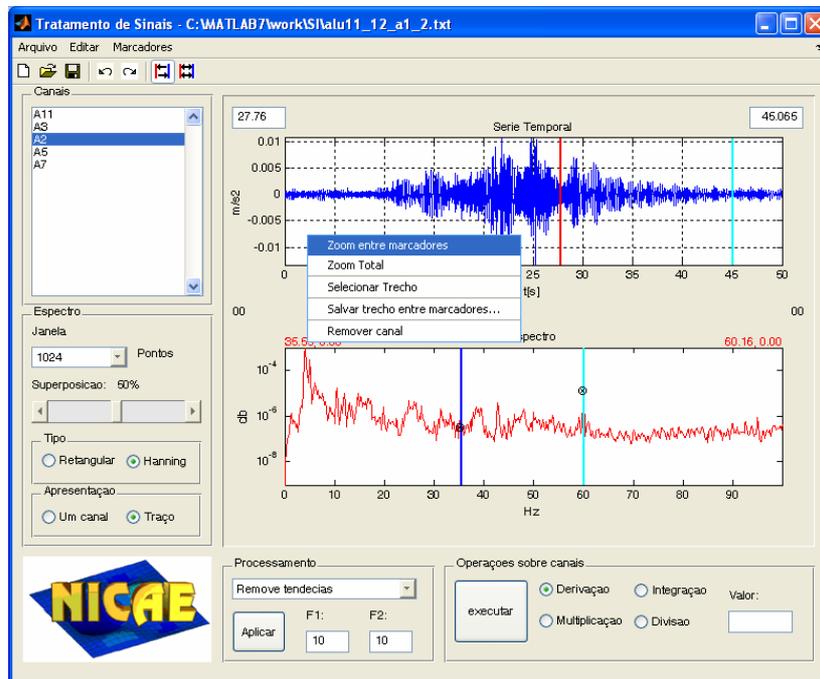


Figura 4-3 – Recursos de visualização e seleção disponíveis para auxiliar no tratamento dos sinais

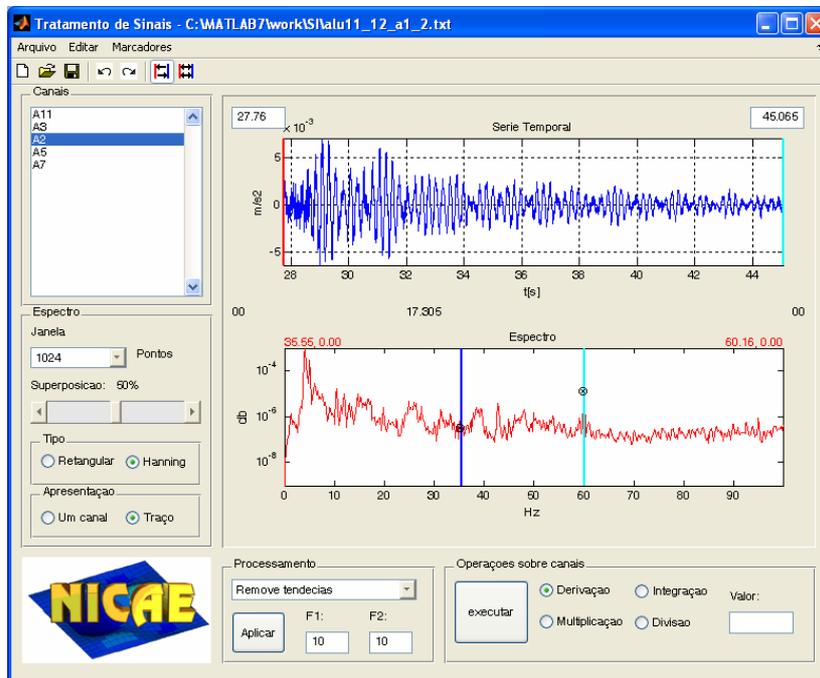


Figura 4-4 – Visualização em detalhe (*Zoom*) do trecho selecionado entre os marcadores e do seu respectivo auto-espectro

O módulo de tratamento dos sinais permite ainda que o usuário escolha entre a visualização do auto-espectro de um canal ou a visualização de um espectro resultante

da soma dos auto-espectros de cada canal (traço da matriz de espectro). Nesse módulo o auto-espectro de cada canal é estimado a partir dos sinais de resposta através do Periodograma Médio Ponderado (*Weighted Averaged Periodogram*) que também é conhecido na literatura como Periodograma de Welch (Mitra, 1998; Peeters, 2000).

De acordo com Mitra (1998), diferentemente da estimativa através da aplicação direta dos algoritmos **FFT** (*Fast Fourier Transform*) ou **DFT** (*Discrete Fourier Transform*), a estimativa através de métodos não paramétricos como o Periograma de Welch conduz a uma estimativa dos espectros dos sinais randômicos mais precisa, uma vez que ela é realizada com a utilização de uma função janela cujos valores correspondem aos pesos de uma média ponderada. A referida janela pode ser uma das utilizadas na análise de sinais como, por exemplo, as janelas Bartlett, Hamming, Hanning, Retangular, entre outras. No caso do módulo de tratamento de sinais utilizou-se somente as funções janelas Retangular e Hanning, como pode ser observado na Figura 4-4.

Em uma primeira etapa da estimativa do espectro pelo método do Periodograma de Welch, o sinal de resposta y é dividido em R segmentos com N amostra em cada um deles. Em seguida, cada um desses segmentos é ponderado com a utilização dos N elementos de uma função janela J_k , considerando uma superposição dos segmentos adjacentes de Q elementos. Este procedimento é sintetizado na equação a seguir:

$$\gamma_k^{(r)} = y_{k+rQ} J_k, \quad 0 \leq k \leq N-1 \quad 0 \leq r \leq R-1 \quad (4.1)$$

onde $\gamma^{(r)}$ é o r -ésimo segmento ponderado do sinal y . O passo seguinte consiste em determinar o espectro $\Gamma^{(r)}$ para o r -ésimo segmento ponderado $\gamma^{(r)}$ com emprego da **DFT**, de acordo com a seguinte equação:

$$\Gamma^{(r)}(e^{j\omega\Delta t}) = \sum_{k=0}^{N-1} \gamma_k^{(r)} e^{-j\omega\Delta t} \quad (4.2)$$

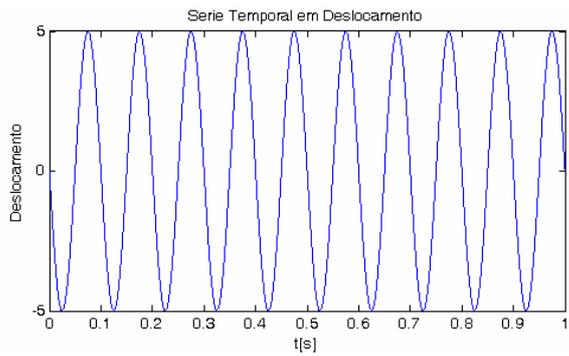
onde Δt é o intervalo de amostragem do sinal y . Em seguida, o cálculo do periodograma $\hat{S}_y^{(r)}$ para cada um dos R segmentos do sinal y é realizado de acordo com a seguinte equação:

$$\hat{S}_y^{(r)}(\omega) = \frac{1}{N-1} \frac{|\Gamma^{(r)}(e^{j\omega\Delta t})|^2}{\sum_{k=0}^{N-1} |J_k|^2} \quad (4.3)$$

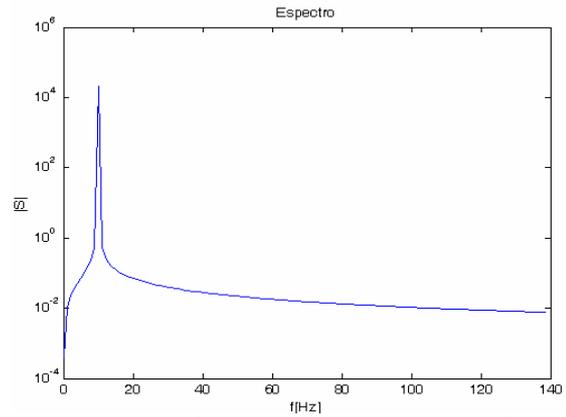
onde j é a unidade imaginária e ω é a frequência angular (em rad/s). Finalmente, o periodograma do sinal randômico y é determinado através da média aritmética dos R periodogramas $\hat{S}_y^{(r)}$ calculados anteriormente através da equação (4.3).

$$\hat{S}_y(\omega) = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^{R-1} \hat{S}_y^{(r)}(\omega) \quad (4.4)$$

Uma das vantagens da estimativa do espectro pelo Periodograma de Welch é a redução do erro devido ao “vazamento” ou “truncamento” do sinal (*leakage*), o que melhora a precisão da estimativa do espectro. O erro devido ao vazamento ilustrado nas Figuras 4-5 e 4-6 é muito freqüente na estimativa do espectro através da **FFT**. Ele ocorre quando o sinal não possui um número inteiro de ciclos no interior da janela utilizada, o que resulta no surgimento de freqüências espúrias em torno da freqüência do sinal. Na Figura 4-5 (a) o sinal mostrado possui número de ciclos inteiro, assim, o correspondente espectro mostrado na Figura 4-5 (b) é calculado pela **FFT** sem a ocorrência do erro de vazamento. No entanto, quando o espectro é calculado a partir de um sinal como o mostrado na Figura 4-6 (a) cujo número de ciclos não é inteiro, há o surgimento de freqüências numéricas em torno da freqüência do sinal, como mostra a Figura 4-6 (b).

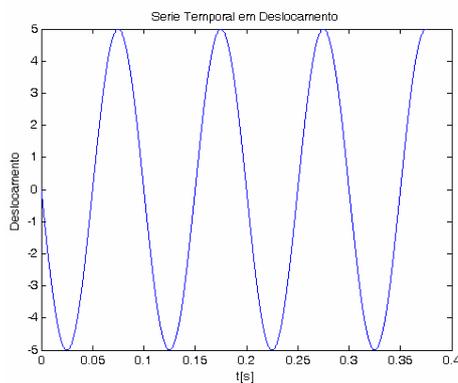


(a) Sinal com número inteiro de ciclos

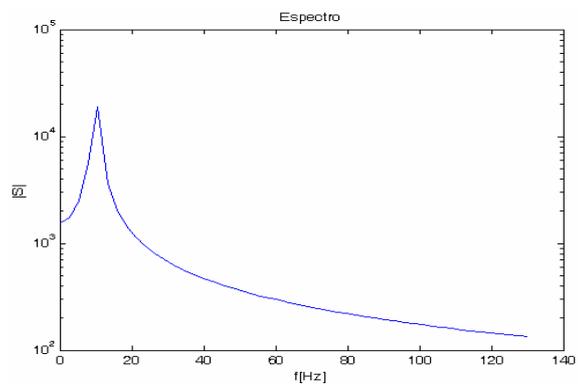


(b) Espectro do sinal com número inteiro de ciclos

Figura 4-5 – Estimativa do espectro de um sinal com número inteiro de ciclos



(a) Sinal com número de ciclos não inteiros



(b) Espectro do sinal com número não inteiro de ciclos

Figura 4-6 – Estimativa do espectro de um sinal com número não inteiro de ciclos

Uma das alternativas para reduzir esse tipo de erro é a utilização da janela Hanning que, como pode ser observado na Figura 4-7 (a), garante que o sinal tenha um número inteiro de ciclos antes de ser submetido à **FFT**. Entretanto, com a aplicação da janela Hanning, a amplitude do espectro é reduzida pela metade, como pode ser observado na Figura 4-7 (b). Essa discrepância, no entanto, pode ser minimizada se a função janela Hanning for multiplicada por dois, o que aproxima o espectro estimado com essa janela do espectro real, conforme mostra a Figura 4-7 (c).

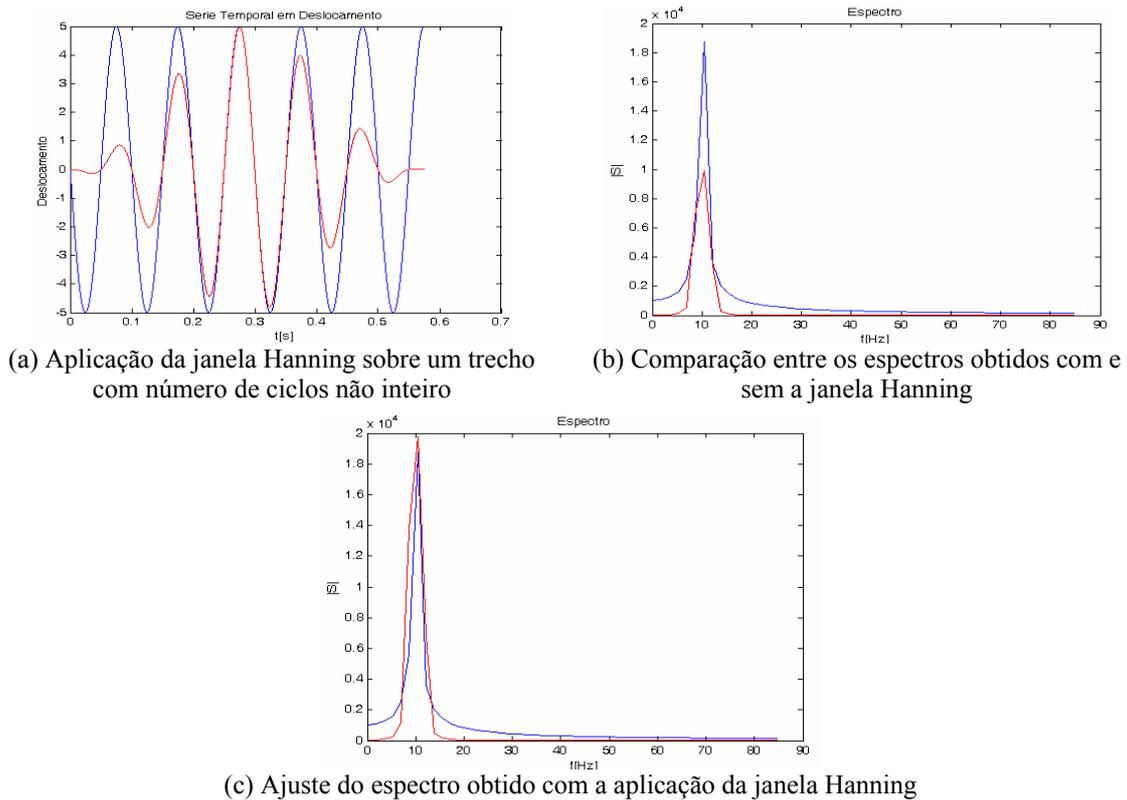


Figura 4-7 – Redução do erro de vazamento com a utilização da janela Hanning

Um outro recurso importante que o módulo de tratamento de sinais dispõe, é a possibilidade da redução dos erros de deslocamento (*off-set*) e de ganho (*gain error*). Esses erros são introduzidos nos sinais durante a conversão dos valores analógicos para digitais através dos chamados conversores AD existentes nos sistemas de aquisição de dados utilizados nos ensaios de vibração. Como pode ser observado na Figura 4-8, o sinal obedece a uma tendência que é aproximada por uma reta cujos coeficientes angular e linear correspondem respectivamente aos erros de deslocamento e de ganho.

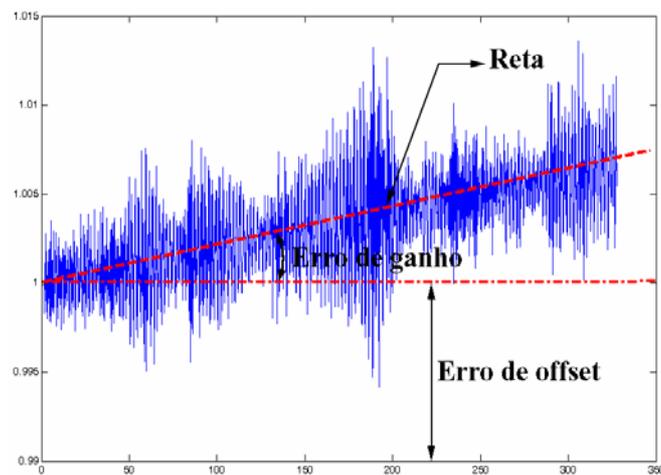


Figura 4-8 – Erros de *off-set* e de ganho presentes no sinal

Como mostra a Figura 4-9, os erros de ganho e deslocamento são corrigidos através de uma regressão linear. O Matlab® possui uma sub-rotina denominada *Detrend* que é capaz de remover esse tipo de tendência que pode influenciar negativamente e, até mesmo inviabilizar, a identificação dos parâmetros modais.

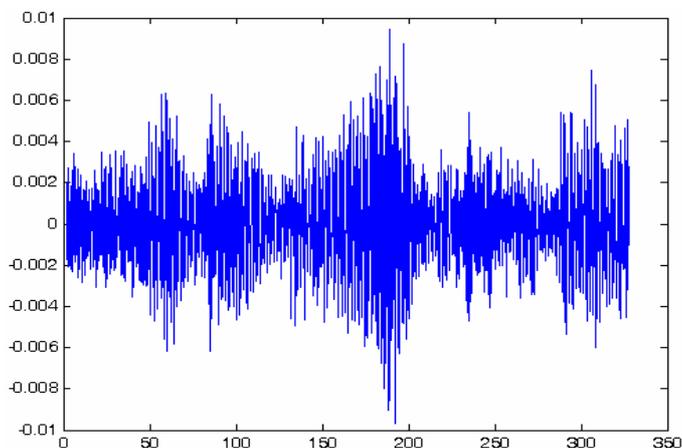


Figura 4-9 – Correção dos erros de off-set e de ganho através da regressão linear

4.2.2 Módulo de Posicionamento dos Acelerômetros

A finalidade do módulo de posicionamento dos acelerômetros é introduzir nos arquivos dos sinais de resposta as informações sobre o posicionamento, direção e sentido dos transdutores de aceleração utilizados nos ensaios de vibração. Essas informações são necessárias para viabilizar a identificação da forma modal associadas às frequências naturais que serão posteriormente identificadas no módulo de identificação de parâmetros. A Figura 4-10 ilustra o procedimento de posicionamento dos acelerômetros ao longo da estrutura no qual são utilizados tanto os arquivos de respostas de todos os canais utilizados no arranjo, como também um arquivo esquemático da estrutura ensaiada. Na realidade as informações contidas nesse segundo arquivo definem um modelo em elemento finitos (EF) simplificado da estrutura que é utilizado na construção da representação esquemática da forma modal da estrutura (Cook *et al.*, 1989).

Após a abertura de ambos os arquivos, basta o usuário do programa selecionar apropriadamente as opções mostradas no lado esquerdo da Figura 4-10. Após a seleção do canal desejado e também da direção e do sentido dos acelerômetros é necessário, em

seguida, selecionar o nó da estrutura no qual o sensor correspondente ao canal anteriormente selecionado foi, de fato, instalado. Para selecionar esse nó, basta aproximar o cursor do mouse do nó desejado e, em seguida, pressionar o botão direito e escolher a opção “adicionar acelerômetro”, como mostra a Figura 4-10. Seguindo um procedimento semelhante ao anteriormente descrito, pode-se também remover um acelerômetro existente. Finalmente, quando todos os sensores são adicionados à estrutura, o operador do programa pode, então, salvar os sinais processados com as informações dos acelerômetros para que eles possam ser identificados no terceiro módulo do programa.

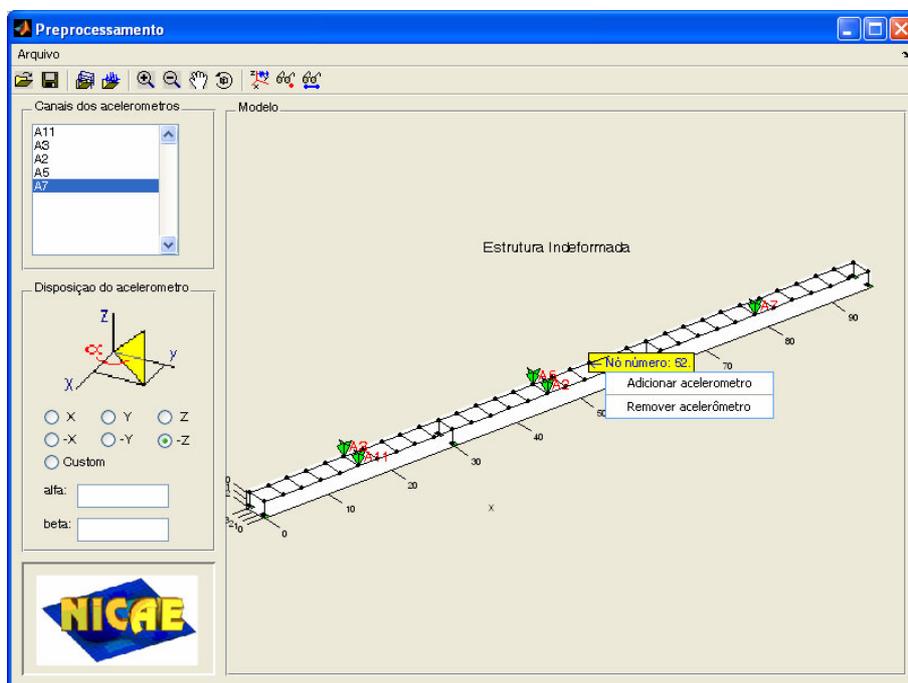


Figura 4-10 - Módulo de posicionamento dos acelerômetros

4.2.3 Módulo de Identificação de Parâmetros

Após a etapa de tratamento realizado no primeiro módulo, os sinais de resposta tratados são recuperados no módulo de identificação. Este módulo é destinado à determinação dos parâmetros através dos métodos de identificação **SSI-COV** e **SSI-DATA**. Para tanto é necessário definir os sensores de referência, a ordem do modelo e os critérios de estabilidade, que serão utilizados na elaboração de um diagrama de estabilidade como o mostrado na Figura 4-11. No módulo de identificação, o diagrama de estabilidade criado segue estritamente o procedimento descrito no final do item 3.3.4

que é ilustrado no fluxograma da Figura 3-9. O programa disponibiliza critérios de estabilidade que são inicialmente definidos em 1% para as frequências naturais, 2% para os fatores de amortecimento, e 1% para correlação entre os vetores modais. Esses critérios são relativos às equações (3.117) e podem ser modificados pelo usuário dependendo da qualidade dos sinais de respostas obtidos nos ensaio de vibração. Quanto melhor for a qualidade do sinal, mais restritos esses critérios poderão ser.

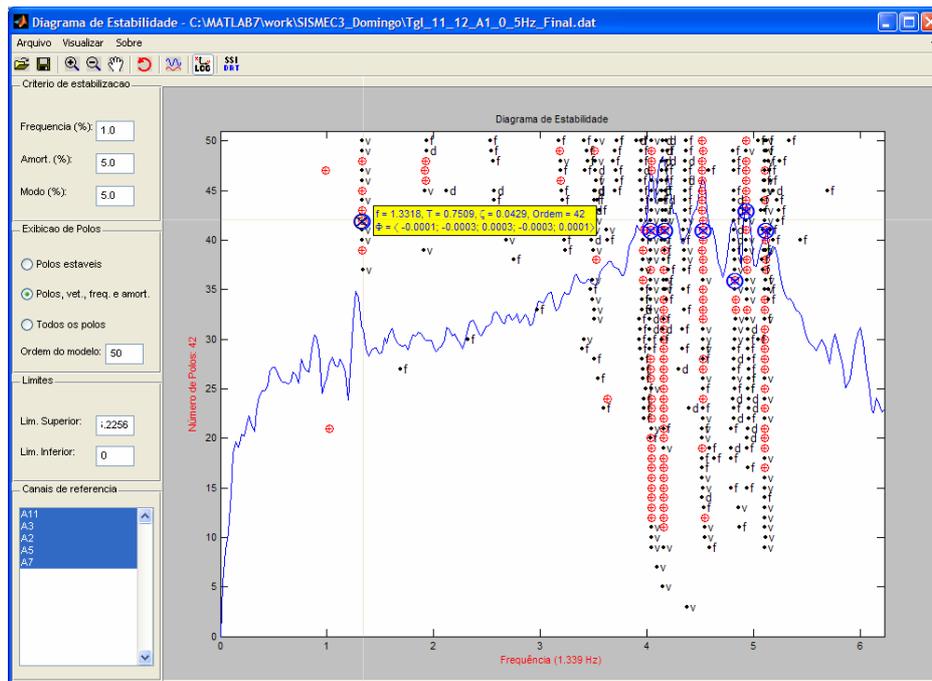


Figura 4-11 – Módulo de Identificação de parâmetros

No diagrama de estabilidade mostrado na Figura 4-11 as frequências são rotuladas de acordo com a seguinte convenção: “⊕” - pólo estável, isto é, quando todos os critérios das equações (3.117) forem satisfeitos; “•v” – pólo com frequência e vetores modais estáveis, ou seja, quando somente o primeiro e o último critério das equações (3.117) forem satisfeitos; “•d” – pólo com amortecimento e frequência estáveis, isto é, quando somente os dois primeiros critérios das equações (3.117) forem satisfeitos; pólos somente com frequências estáveis “•f” quando somente o primeiro critério das equações (3.117) for satisfeito; e, finalmente, caso o pólo não satisfaça nenhum dos critérios previstos nas equações (3.117) ele pode ser rotulado como não estável e podendo ser representado no diagrama de estabilidade por “•”. Uma vez definidos os critérios de estabilidade e selecionados os canais de referência entre os canais disponíveis, o diagrama pode ser traçado ou atualizado a qualquer momento. Como pode ser observado na Figura 4-11, o diagrama é traçado sobre o espectro de potência

anteriormente estimado no módulo de tratamento de sinais com propósito de facilitar a identificação visual dos parâmetros modais.



Figura 4-12 - Botão para visualização das formas modais

Além das ferramentas de identificação, o módulo de identificação modal dispõe ainda de recursos de visualização que também auxiliam no processo de identificação. É possível, por exemplo, escolher uma das três opções de exibição das frequências rotuladas no diagrama que são: opção de exibição 1 - somente os pólos estáveis “ \oplus ”; opção de exibição 2 - pólos estáveis “ \oplus ” mais os pólos com frequências e vetores estáveis “ $\bullet v$ ” mais os pólos com frequências e amortecimentos estáveis “ $\bullet d$ ” mais os pólos com somente frequências estáveis “ $\bullet f$ ”; e opção de exibição 3 – inclui os pólos da opção de exibição 2 mais os pólos não estáveis “ \bullet ”. Além dos recursos de visualização de pólos, o módulo de identificação dispõe também de recursos como de visualização em detalhes como *zoom* e *pan*, que auxiliam no processo de identificação dos pólos, principalmente, quando há a ocorrência de frequências muito próximas umas das outras no diagrama de estabilidade. Com a criação do diagrama de estabilidade é, finalmente, possível identificar as frequências naturais, os fatores de amortecimento e os correspondentes modos de vibração. Para tanto basta mover o cursor do mouse sobre um dos pólos estáveis existentes no diagrama e, então, os referidos parâmetros são exibidos em uma janela, como ilustrado na Figura 4-11.

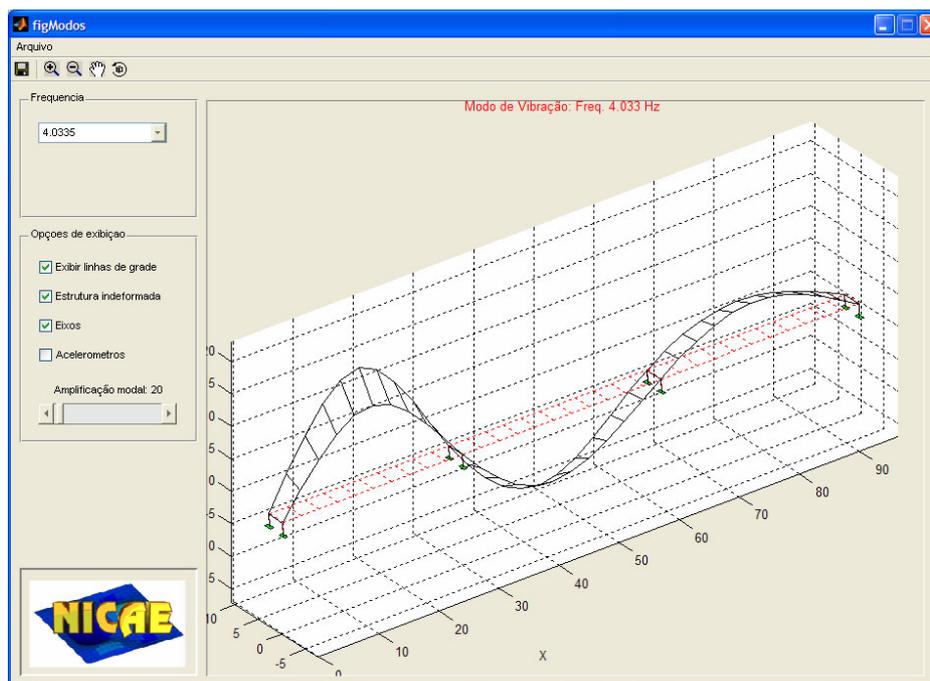


Figura 4-13 - Exibição das formas modais correspondentes aos pólos estáveis marcados no diagrama de estabilidade

Para visualizar as formas modais é necessário marcar os pólos estáveis identificados no diagrama com o símbolo “ \oplus ”. Isso é realizado pressionando o botão esquerdo do mouse e, em seguida, selecionando a opção “adicionar marcador”. Quando o marcador for adicionado ao pólo, será exibido símbolo “ \otimes ” indicando que o pólo estável marcado é um modo de vibração identificado pelo usuário. Quando todos os pólos identificados forem marcados com “ \otimes ”, então o operador pode visualizar as formas modais pressionando o botão destacado na Figura 4-12. Após pressionar o referido botão, as formas modais associadas aos pólos marcados no diagrama são exibidas, como mostra a Figura 4-13.

Após a identificação de parâmetros, o módulo permite que o diagrama seja gravado em disco em três diferentes formatos: o primeiro deles possui extensão de arquivo (*.STB) que é um tipo de arquivo no qual todos os critérios de estabilidade utilizados na identificação podem ser armazenados, permitindo que os resultados da identificação possam ser recuperados e analisados em ocasiões futuras; o segundo e o terceiro formato correspondem, respectivamente, aos formatos (*.BMP) e (*.JPG) que são arquivos de figuras e imagens.

CAPÍTULO 5

Exemplos de Aplicação

5.1 INTRODUÇÃO

O comportamento vibratório das estruturas civis cada vez mais desperta grande interesse na comunidade técnico-científica. Uma das razões para tanto é que, através das assinaturas dinâmicas das estruturas é possível avaliar o grau de integridade dessas estruturas (Peeters, 2000; Lee e Kim, 2002; Maeck, 2003; Koh e Dyke, 2007). Sabe-se que a mudança dessas assinaturas ao longo do tempo está associada ao surgimento de danos nas estruturas (Andersen, 1997; Maeck, 2003). Diante dessa constatação, os métodos de identificação modal através de subespaços estocásticos apresentam-se como uma importante ferramenta uma vez que, através deles, é possível identificar os parâmetros modais das estruturas a partir somente das respostas obtidas no monitoramento das estruturas em operação.

Neste capítulo os métodos de identificação modal baseados em Subespaços Estocásticos, descritos no CAPÍTULO 3 e implementados no programa computacional descrito no CAPÍTULO 4, foram utilizados na identificação de duas estruturas metálicas. A primeira corresponde a uma torre de transmissão de energia elétrica e a segunda a uma ponte. Trata-se de dois estudos quais ambas as estruturas foram monitoradas em serviço, isto é, em circunstâncias operacionais, utilizando como entradas as excitações ambientes como o vento e o tráfego de veículos. A seguir, são apresentados os resultados das análises computacionais e experimentais de vibração realizadas em ambas as estruturas.

5.2 ANÁLISE DA TORRE DE LINHA DE TRANSMISSÃO SITUADA NA MARGEM DIREITA DO RIO GUAMÁ

O rio Guamá possui aproximadamente 1.300 metros de largura no ponto em que a linha de transmissão Vila do Conde – Guamá o cruza. Essa linha de transmissão de 230 kV é responsável pelo fornecimento de energia para parte da região oeste do estado do Pará. No cruzamento dessa linha com o rio Guamá existem três torres que suportam seis feixes duplos de cabos condutores de energia e dois cabos pára-raios que cruzam dois vãos de aproximadamente 650 metros sobre as águas do rio. A torre em estudo corresponde a uma estrutura metálica treliçada com, aproximadamente, 75 metros de altura que está situada na margem direita do rio. Ela é constituída de barras de aço com perfil laminado tipo L (Cantoneira), como mostra a Figura 5-1.



(a) Detalhe da silhueta da torre



(a) Torre vista do rio Guamá

Figura 5-1 – Torre tipo autoportante situada na margem direita do rio Guamá

5.2.1 Descrição das Análises Realizadas

Neste estudo foram realizadas análises numéricas, através do **MEF**, e experimentais, através dos métodos de identificação **SSI-DATA** e **SSI-COV**, visando

avaliar a vulnerabilidade das torres situadas na travessia do rio Guamá frente às excitações provocadas pelo vento. Com este propósito foi criado um modelo numérico da estrutura através do qual foi possível simular o comportamento dinâmico da torre. Após a etapa das simulações computacionais foram realizados ensaios experimentais de vibração na estrutura com a utilização de transdutores de aceleração (acelerômetros de baixa frequência). Uma das principais atividades realizadas nesse estudo de caso foi avaliar se os primeiros modos da torre estão situados em uma banda de frequência de 0 a 1 Hz, que é a banda em que os modos de vibração são mais vulneráveis à ação do vento, como mostra a Figura 5-2.

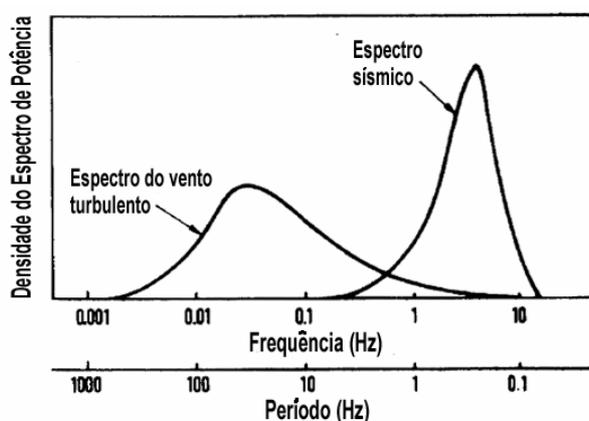


Figura 5-2 - Espectro do vento turbulento típico comparado com espectro sísmico (Balendra (1993) apud Peeters (2000))

5.2.2 Análise Computacional

Na primeira etapa do estudo do comportamento modal da torre foram realizadas simulações computacionais através do **MEF**. Para tanto foram criados modelos através do programa de análise estrutural SAP2000® (Csi, 2005) com base nos dados existentes nos projetos fornecidos pela empresa proprietária da estrutura. Uma das principais dificuldades encontradas nas análises computacionais foi a modelagem e simulação do comportamento dos cabos condutores e pára-raios (Amador *et al.*, 2006) dada a não-linearidade envolvida no comportamento mecânico de tais elementos estruturais. Em uma etapa preliminar dos estudos desenvolvidos no âmbito do projeto de pesquisa e desenvolvimento sobre comportamento das torres de travessia (De-Souza, 2002), a estrutura da torre foi modelada considerando apenas as massas dos cabos,

desconsiderando suas rigidezes. Um desses modelos é mostrado na Figura 5-3 (Silva, 2006).

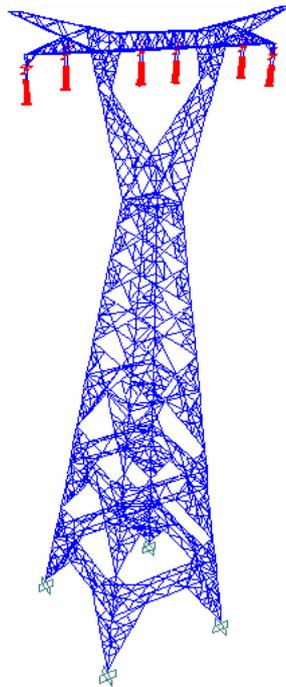


Figura 5-3 – Modelo em elementos finitos da torre com as cadeias de isoladores (SAP2000®)

Na construção desse modelo foram utilizadas 2.909 barras e 1.484 nós. Para modelar tanto as cadeias dos isoladores como também as barras da treliça da torre foram adotados elementos de pórtico espacial (Silva, 2006). Nas simulações computacionais realizadas verificou-se que a inclusão das cadeias de isoladores no modelo da torre isolada proporcionou uma mudança significativa no comportamento modal da estrutura. De fato, com a consideração dessas cadeias nos modelos numéricos da torre foram obtidos resultados mais próximos dos resultados experimentais, como pode ser observado nas seções seguintes.

5.2.3 Análise experimental

Nos ensaios experimentais de vibração foram utilizados seis acelerômetros piezo-elétricos (ICP) de baixa frequência. Os sensores foram instalados nas seções **A** e **B** nas posições indicadas na Figura 5-4. A estrutura foi monitorada através de um sistema de aquisição de dados durante três horas com uma taxa de amostragem de 100 Hz, e como fonte de excitação foi utilizado o próprio vento.

Nesse período, foram coletadas três séries temporais com duração de, aproximadamente, uma hora. Em cada série foram coletadas cerca de 360.000 amostras em cada canal com intervalos de amostragem de 0,01 segundos. Os sinais de resposta coletados nos ensaios foram posteriormente recuperados e devidamente tratados no programa computacional apresentado no CAPÍTULO 4. Após a redução dos erros de tendência e de ganho, as séries temporais e os respectivos espectros apresentaram o aspecto mostrado na Figura 5-5. Após o tratamento, as séries temporais foram manipuladas visando à extração de parâmetros, a qual foi realizada em duas etapas: na primeira delas os parâmetros foram identificados em uma faixa de frequência de 0 a 5Hz, proporcionando uma maior precisão na identificação dos primeiros modos da estrutura através dos métodos estocásticos em estudo; na segunda etapa, os demais modos situados em uma faixa de 5 a 10 Hz foram identificados. Na primeira etapa de identificação foi possível determinar com maior robustez e precisão os modos situados na faixa de 0 a 5 Hz que é a faixa em que as estruturas civis são mais vulneráveis à ação do vento, como pode ser observado no espectro mostrado na Figura 5-2.

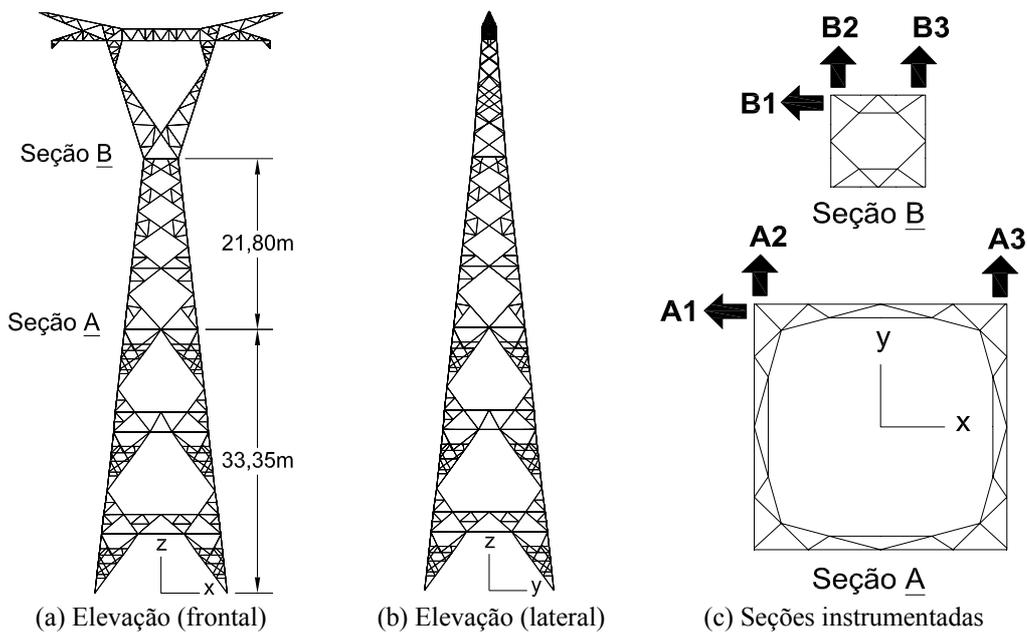
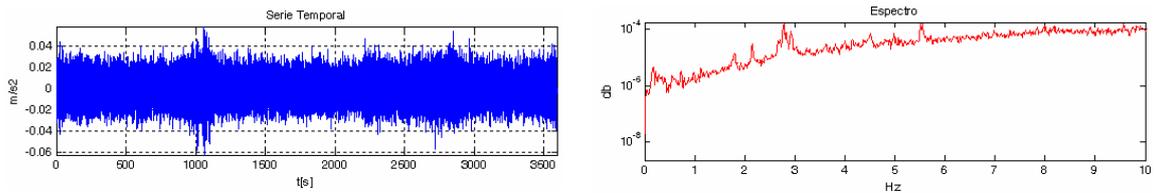
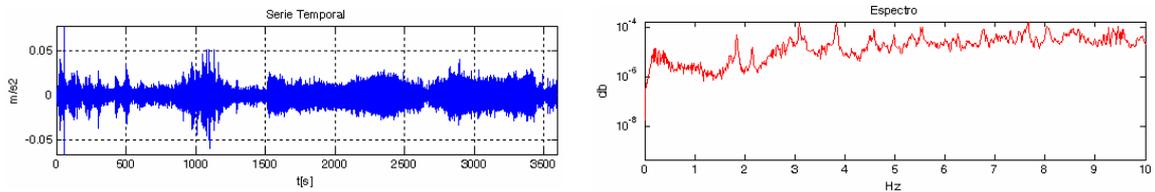


Figura 5-4 – Posição dos acelerômetros instalados na estrutura da torre

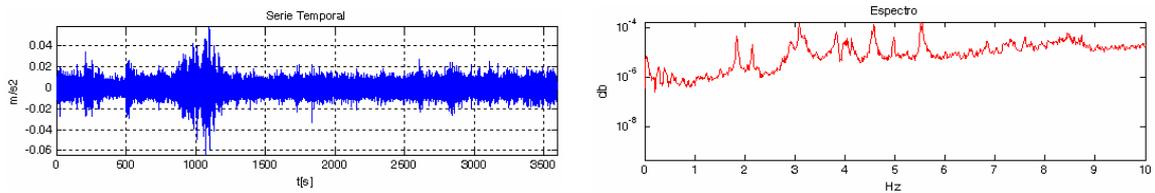
Nessa primeira etapa de identificação os sinais foram filtrados utilizando um filtro passa baixa Chebyshev tipo I com uma frequência de corte de 5 Hz antes da identificação de parâmetros através dos métodos SSI-DATA e SSI-COV.



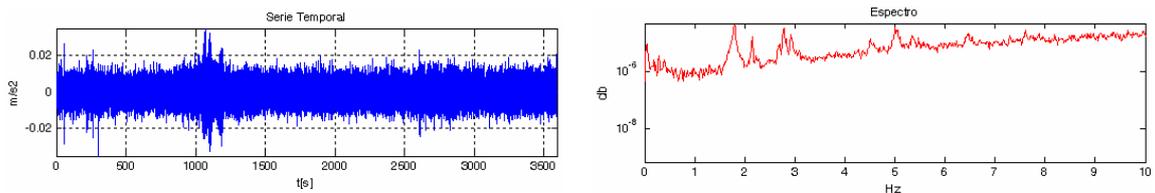
(a) Série temporal e espectro obtidos com acelerômetro **A1**



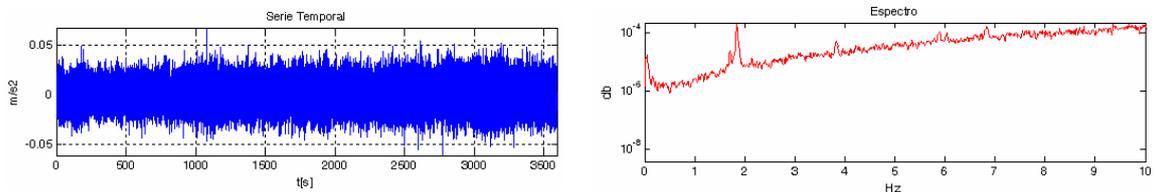
(b) Série temporal e espectro obtidos com acelerômetro **A2**



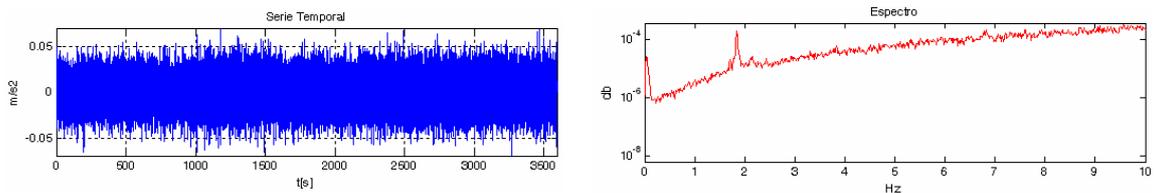
(c) Série temporal e espectro obtidos com acelerômetro **A3**



(d) Série temporal e espectro obtidos com acelerômetro **B1**



(e) Série temporal e espectro obtidos com acelerômetro **B2**



(f) Série temporal e espectro obtidos com acelerômetro **B3**

Figura 5-5 - Série temporais e espectros obtidos nos ensaios experimentais da torre

Após a introdução das informações do posicionamento dos acelerômetros nos sinais de resposta, foram criados diagramas de estabilidade utilizando ambos os métodos, seguindo a metodologia descrita no item 3.3.4, com a ordem n do modelo variando de 2 a 50. Os critérios de estabilidade utilizados foram: 1% para as frequências, 5% para os amortecimentos, 5% para os vetores modais. Foram utilizados

como referência os acelerômetros **B1**, **B2** e **B3** instalados na seção **B** como ilustrado na Figura 5-4 (c). Uma vez criados os diagramas de estabilidade, as frequências naturais, os fatores de amortecimento e os respectivos modos de vibração foram determinados a partir dos parâmetros dos pólos estáveis selecionados nos referidos diagramas de estabilidade, como mostram as Figuras 5-6 e 5-7.

Os símbolos utilizados nos diagramas de estabilidade mostrados nas Figuras 5-6 e 5-7 obedecem a seguinte convenção: \oplus - pólo estável; $\bullet v$ - frequência e vetores estáveis; $\bullet d$ - frequência e amortecimento estáveis; $\bullet f$ - frequência estável. Na elaboração de ambos os diagramas o número de intervalos de tempo (i) e número de amostras (N) foram definidos em 40 e 32768, respectivamente. Essas variáveis são utilizadas na montagem da matriz de *Hankel* e devem ser escolhidas convenientemente pelo usuário.

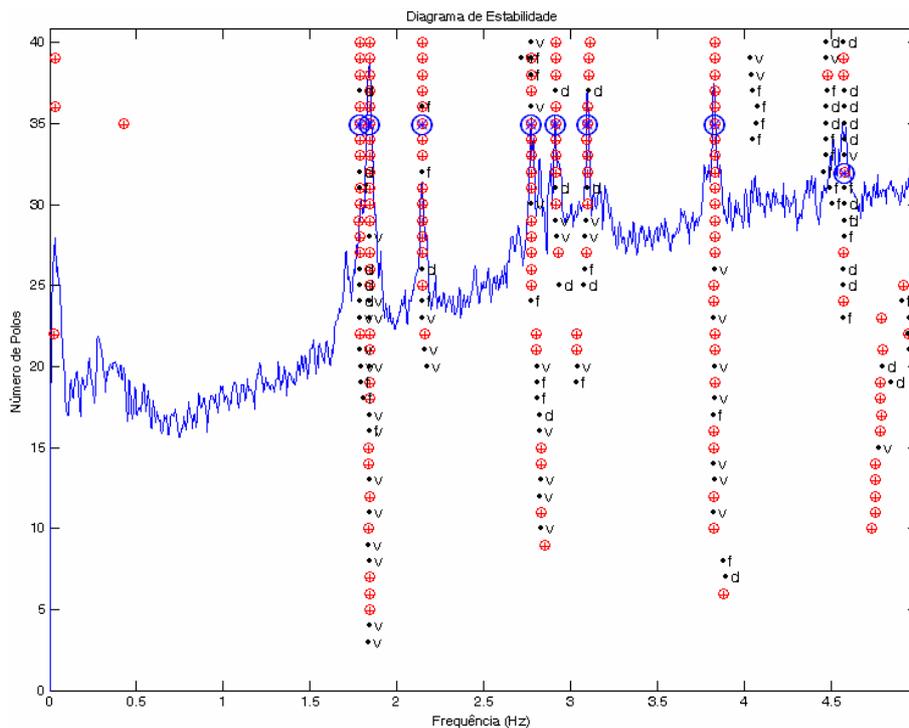


Figura 5-6 - Diagrama de estabilidade criado com método **SSI-DATA** para identificação das primeiras frequências da torre na faixa de 0 a 5 Hz

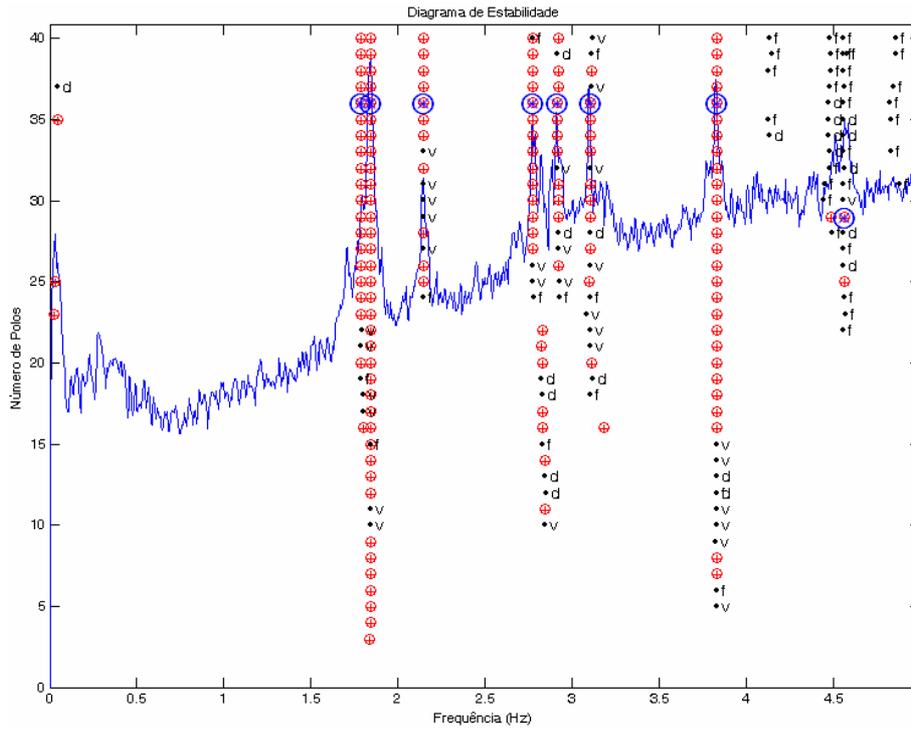


Figura 5-7 – Diagrama de estabilidade criado com método **SSI-COV** para identificação das primeiras frequências da torre na faixa de 0 a 5 Hz

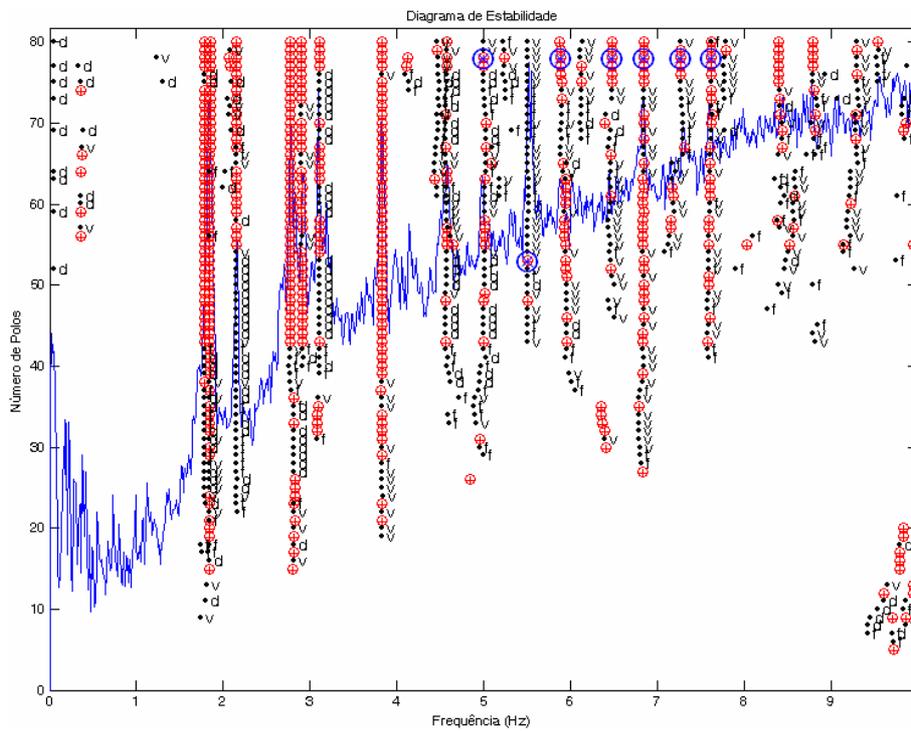


Figura 5-8 - Diagrama de estabilidade criado com método **SSI-DATA** para identificação das frequências da torre situadas na faixa de 0 a 10 Hz

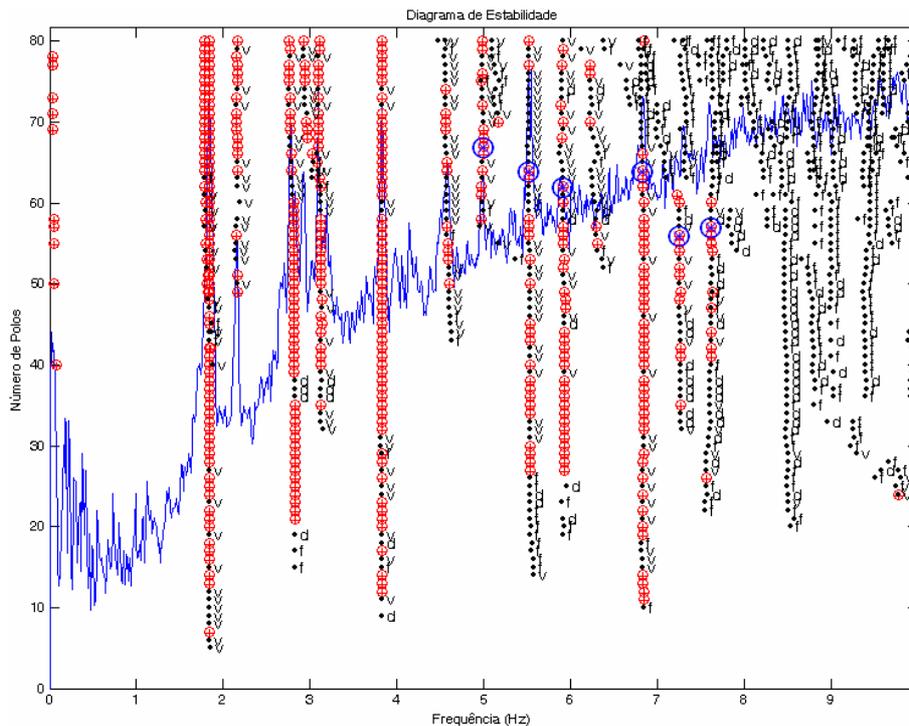


Figura 5-9 - Diagrama de estabilidade criado com método SSI-COV para identificação das frequências da torre situadas na faixa de 0 a 10 Hz

Na segunda etapa de identificação os sinais foram também filtrados com um filtro passa baixa Chebyshev tipo I, mas desta vez com uma frequência de corte de 10 Hz. Após a introdução das informações do posicionamento dos acelerômetros nos sinais de resposta, foram criados diagramas de estabilidade com os métodos **SSI-DATA** e **SSI-COV** com a ordem n do modelo variando de 2 a 80. Na construção desses diagramas foram adotados os mesmos critérios de estabilidade e sensores de referência utilizados na primeira etapa de identificação. Na elaboração desses diagramas foram adotados ainda os seguintes parâmetros: número de intervalos de tempo (i) igual a 60 e número de amostras (N) igual a 32768 para ambos os métodos.

A Tabela 5-1 mostra as frequências naturais e os fatores de amortecimento dos quinze primeiros modos de vibração experimentalmente identificados nas duas etapas. Esses parâmetros foram estimados a partir dos pólos estáveis selecionados no diagrama de estabilidade para cada modo de vibração visualmente identificado. As formas modais correspondentes a esses parâmetros são exibidas nas Figuras 5-10 e 5-11.

Tabela 5-1 – Comparação dos resultados obtidos nas análises

Modo	Resultados experimentais através do método SSI-DATA		Resultados experimentais através do método SSI-COV	
	Frequências naturais (Hz)	Fatores de Amortecimento (%)	Frequências naturais (Hz)	Fatores de Amortecimento (%)
1°	1,786	1,7529	1,789	1,5800
2°	1,846	0,6104	1,846	0,5825
3°	2,148	0,7281	2,150	1,0184
4°	2,776	1,4108	2,775	1,3180
5°	2,914	1,0720	2,917	1,0541
6°	3,099	2,0988	3,107	2,2760
7°	3,830	0,4685	3,832	0,5415
8°	4,578	0,5728	4,562	0,4483
9°	5,001	1,0160	5,000	1,6732
10°	5,508	0,0633	5,522	0,0397
11°	5,891	0,9596	5,911	1,3711
12°	6,480	1,4046	-	-
13°	6,843	0,6520	6,832	0,5956
14°	7,270	0,3423	7,253	0,4704
15°	7,621	0,3367	7,624	0,4680

Conforme explicado na subseção 4.2.3, as formas modais esquemáticas mostradas nas Figuras 5-10 e 5-11 são criadas por meio de uma interpolação dos deslocamentos contidos nos vetores modais, obtidos no processo de identificação com emprego dos métodos estocásticos **SSI-DATA** e **SSI-COV**. Essa interpolação é realizada com emprego de um modelo simplificado em **EF** da estrutura no qual as direções e os sentidos dos deslocamentos modais obtidos são orientados de acordo com a disposição dos respectivos acelerômetros.

Comparando os resultados da identificação pelo método **SSI-DATA** com os obtidos por meio do **SSI-COV** observa-se que os valores das frequências naturais são muito próximos. Entretanto quando se compara os fatores de amortecimento, verifica-se que esses valores não são tão próximos para alguns dos modos de vibração identificados. A diferença entre os valores dos amortecimentos nesses casos ocorre devido ao fato de que esses modos não foram tão excitados quanto os demais. Isso também pode explicar a razão pela qual o 12° modo experimental obtido com o método **SSI-DATA** não foi determinado com o emprego do método **SSI-COV** como pode ser observado na Tabela 5-1.

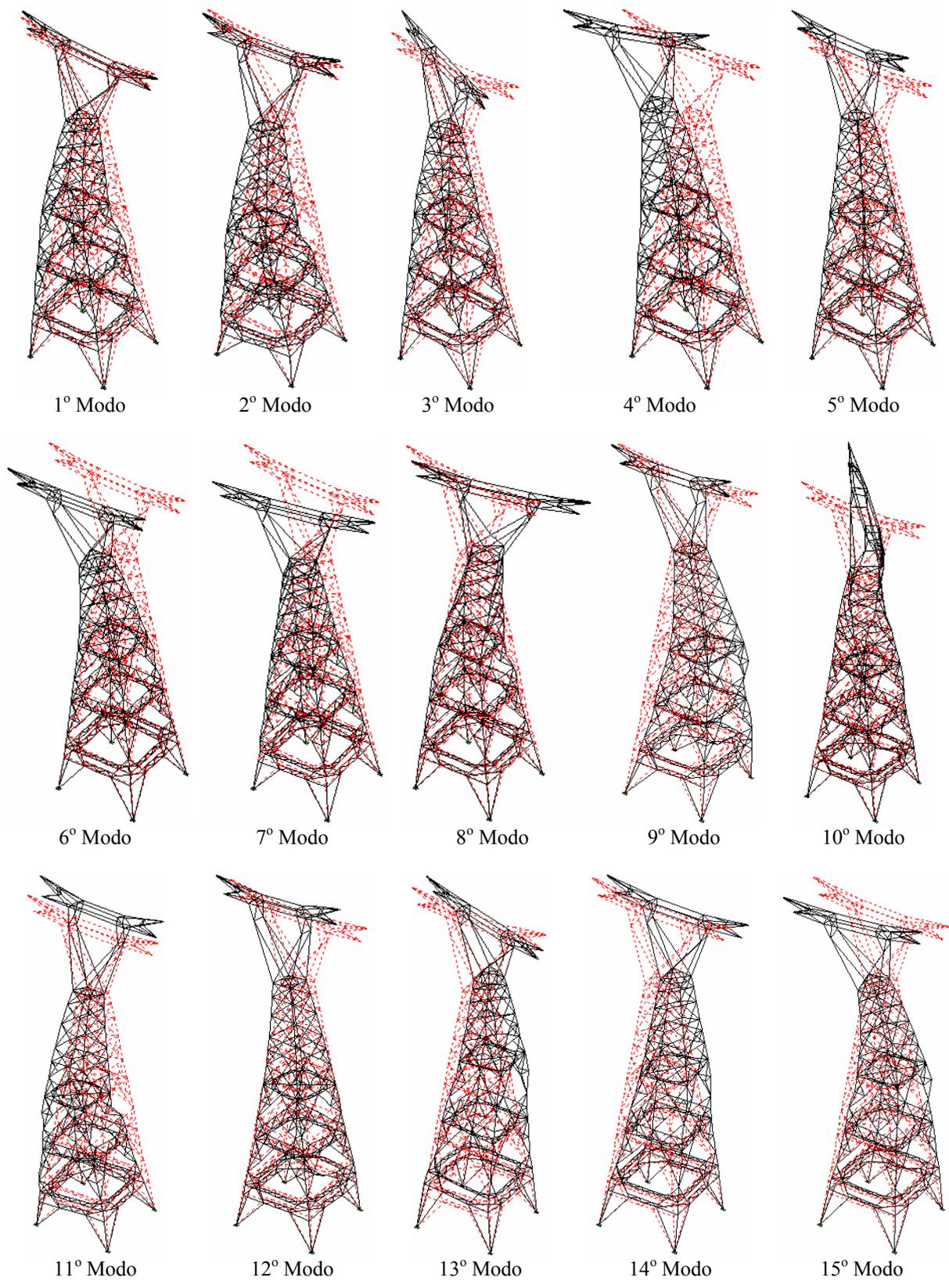


Figura 5-10 – Modos de vibração obtidos experimentalmente através do método SSI-DATA

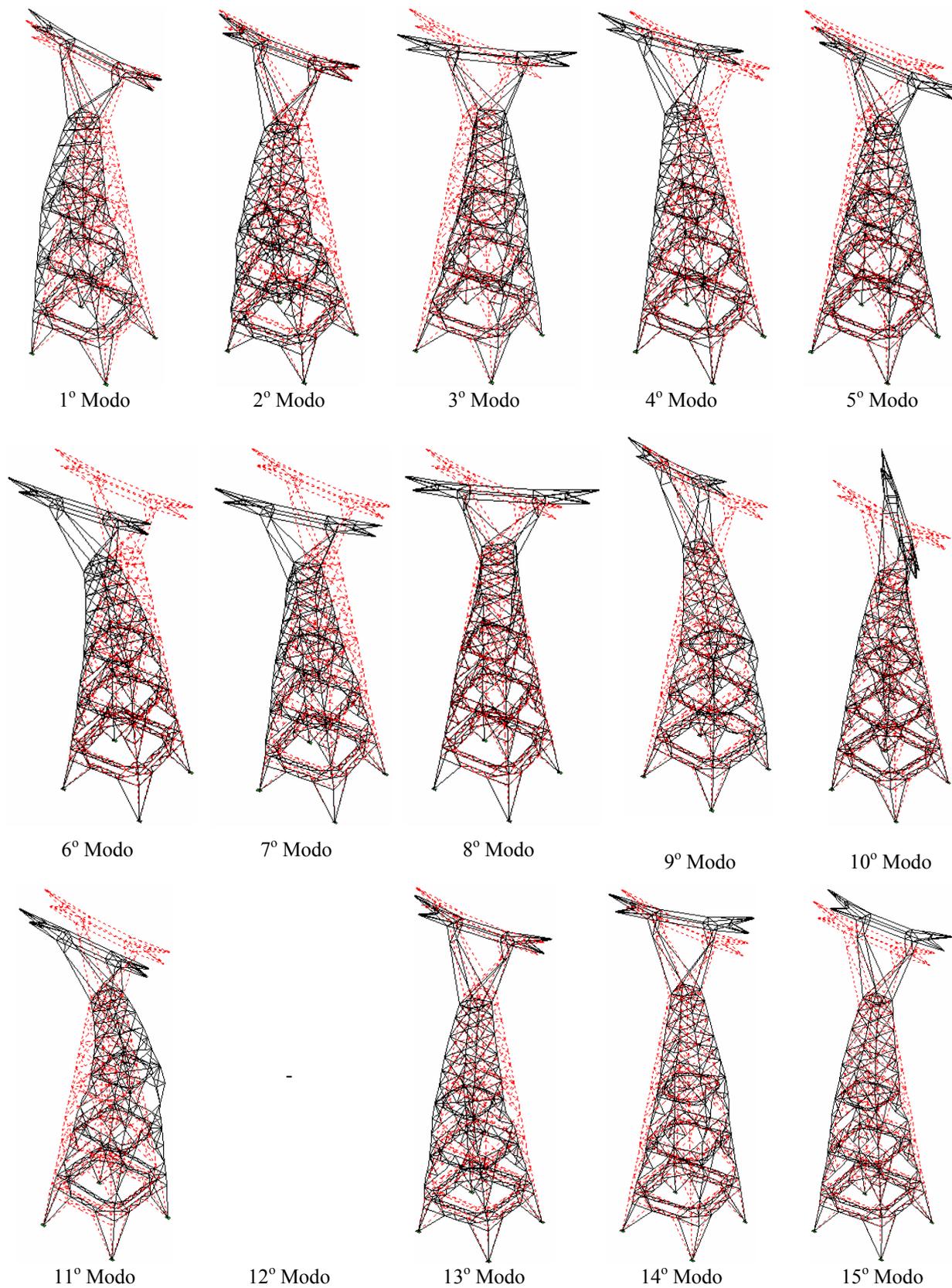


Figura 5-11 - Modos de vibração obtidos experimentalmente através do método SSI-COV

5.2.4 Comparação Entre os Resultados Experimentais e Teóricos

Na Tabela 5-2 é apresentada a comparação entre os parâmetros obtidos experimentalmente através do método **SSI-DATA** e dos determinados teoricamente através do **MEF**.

Tabela 5-2 – Comparação entre as frequências naturais obtidas teórica e experimentalmente

Modo	Frequências experimentais obtidas através do método SSI-DATA (Hz)	Frequências teóricas obtidas através do MEF (Hz)
1º	1,786	1,750
2º	1,846	1,957
3º	2,148	2,069
4º	2,776	3,014
5º	2,914	3,593

A Figura 5-12 mostra a variação das frequências naturais teóricas e experimentais obtidas em função dos modos identificados em ambas as análises.

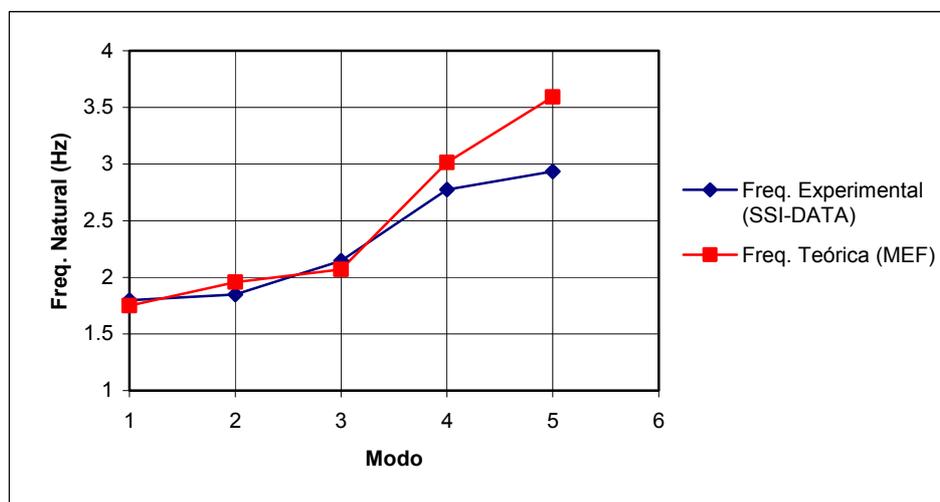
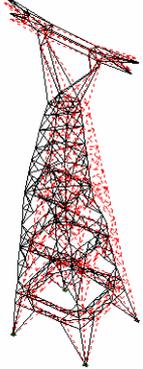
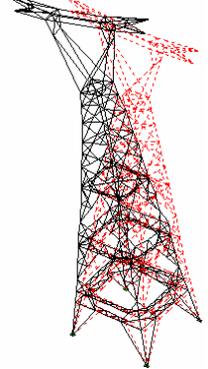
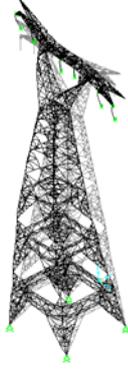
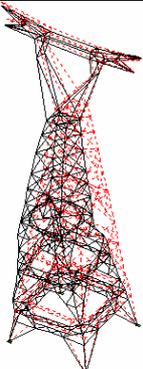
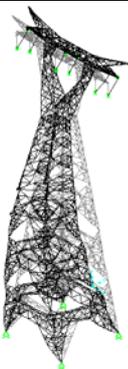
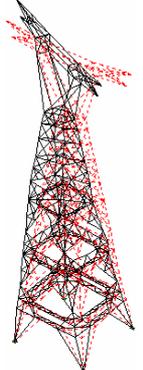
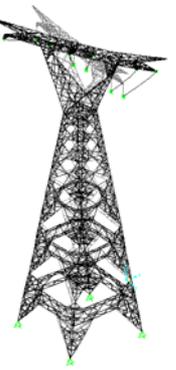


Figura 5-12 – Variação das frequências obtidas teórica e experimentalmente em função dos modos (Silva, 2006)

A Tabela 5-3 mostra a comparação entre as formas modais teóricas e as experimentais obtidas para os cinco primeiros modos de vibração. Verifica-se que as formas modais apresentam certa semelhança somente nos três primeiros modos de vibração.

Tabela 5-3 – Comparação entre as formas modais experimentais e teóricas (Silva, 2006)

Modo	Forma modal experimental (SSI-DATA)	Forma modal teórica Experimental (MEF)	Modo	Forma modal experimental (SSI-DATA)	Forma modal teórica Experimental (MEF)
1			4		
	$f = 1,786$	$f = 1,750$		$f = 2,776$	$f = 3,014$
2			5		
	$f = 1,846$	$f = 1,957$		$f = 2,914$	$f = 3,593$
3					
	$f = 2,148$	$f = 2,069$			

Comparando os resultados teóricos e experimentais mostrados, observa-se que os respectivos parâmetros modais apresentam certa semelhança somente nos três primeiros modos de vibração. Conforme mostrado na Figura 5-12, os parâmetros teóricos e experimentais se afastam na medida em que as frequências naturais obtidas em ambas as análises aumentam. Uma provável explicação para a diferença entre os parâmetros dos demais modos é que somente a massa dos cabos condutores foi considerada nas análises teóricas realizadas por meio dos modelos numéricos em **EF**.

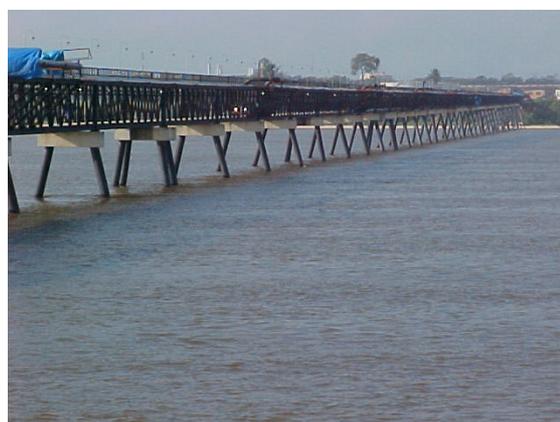
Essas massas foram consideradas como pontuais e aplicadas nos nós onde os cabos estão conectados aos respectivos isoladores.

5.3 ANÁLISE DA PONTE DO TGL

A ponte estudada é utilizada como acesso ao terminal de granéis líquidos (TGL), interligando as instalações retro-portuárias do Porto de Vila do Conde ao píer do TGL (Figura 5-13). Ela é utilizada para acesso de veículos e pedestres ao píer, assim como de suporte para os dutos utilizados para transporte de granéis líquidos, tais como: óleo combustível, soda cáustica, água potável, esgoto sanitário e água do sistema de combate a incêndio. A ponte é constituída por nove segmentos hiperestáticos típicos de 120,5 metros de comprimento (Figura 5-14), e um único segmento de 90,5 metros (Figura 5-15), resultando em uma ponte de 1.175 metros de extensão. Todos os segmentos possuem vãos de cerca de 30 metros de comprimento. Os segmentos são apoiados sob apoios fretados de neoprene que estão fixados nos blocos de concreto que, por sua vez, são apoiados sobre estacas de aço como mostra a Figura 5-16. Em cada segmento, há blocos intermediários com duas estacas, e dois blocos extremos com quatro estacas. A estrutura da ponte é constituída por treliças metálicas e o piso é constituído de placas pré-fabricadas de concreto, como mostram as Figuras 5-13 a 5-16.



(a) Vista lateral do ponto de vista da área retro-portuária



(b) Vista lateral geral do ponto de vista do píer

Figura 5-13 – Fotografia da ponte do TGL

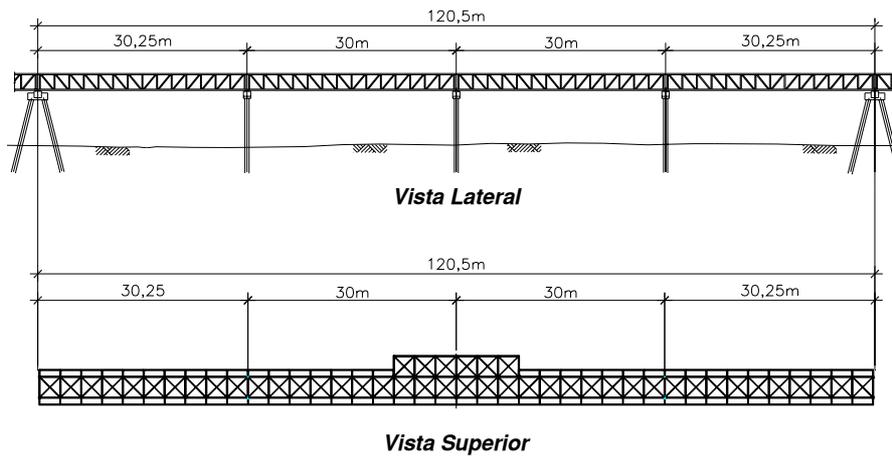


Figura 5-14 – Segmentos típico de quatro vãos com 120,5 metros de comprimento total

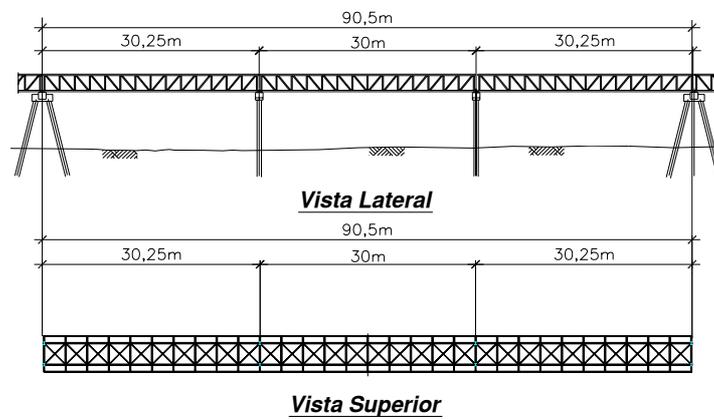


Figura 5-15 – Segmentos típico de três vãos com 90,5 metros de comprimento total

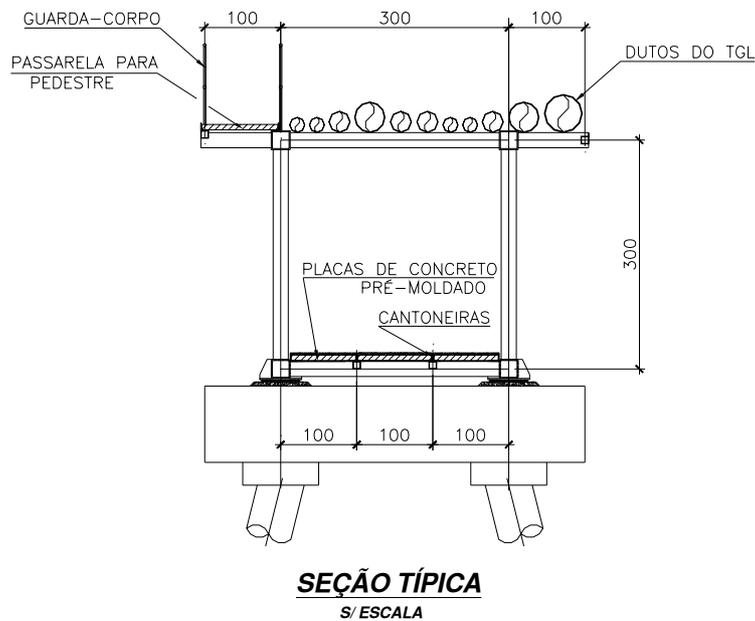


Figura 5-16 - Seção típica da ponte e detalhe do apoio

5.3.1 Descrição das Análises Realizadas

Os estudos de vibração da ponte do TGL foram realizados devido aos indícios de vibrações excessivas observadas pelos operadores portuários e também pelos técnicos responsáveis pela manutenção da estrutura. O propósito desse estudo foi avaliar o nível de desconforto humano presente na estrutura quando ela é submetida às excitações ambientes provocadas pela incidência do vento, pelo tráfego de veículos e também pela pressão dinâmica da água nas estacas. Essa avaliação teve como referência os limites recomendados pela NBR 8800/86 (1986).

5.3.2 Análise Computacional

Foram criados três modelos para análise modal da estrutura no programa SAP2000®. O primeiro deles foi utilizado na análise do primeiro segmento da ponte (segmento 1-2), e os outros dois para análise dos segmentos 10-11 e 11-12. Nesses modelos foram empregados elementos de barra de pórtico espacial (tipo *frame*) para representar a estrutura metálica treliçada e as estacas, e elementos de casca (tipo *shell*) para representar as placas de concreto armado do piso. A geometria dos modelos foi baseada nos projetos executivos fornecidos pela proprietária da estrutura. Para a representação dos aparelhos de apoio foram utilizados elemento de ligação (*nlink*) cujas rigidezes foram determinadas a partir das expressões abaixo, conforme Pfeil (1989).

$$k_h = A_n \frac{G_n}{h_t} \quad (5.1)$$

$$k_v = \frac{E_n A_n}{k_c h_n} \left(\frac{b}{h_n} \right)^2 \quad (5.2)$$

$$k_f = \frac{k_b E_n b^5}{h_n^3} \quad (5.3)$$

onde: k_h , k_v , k_f são as rigidezes do aparelho de apoio nas direções horizontal, vertical e em torno dos eixos horizontais, respectivamente; k_c é um coeficiente que depende das características do aparelho de apoio; h_n é a espessura de uma almofada de neoprene; h_t é o somatório das espessuras das almofadas; b é uma constante; A_n é a área da almofada de neoprene; E_n é o módulo de elasticidade longitudinal do neoprene; e, finalmente, G_n é o módulo de elasticidade transversal do neoprene. Na criação desses modelos as estacas foram consideradas engastadas a partir de certa profundidade em relação ao leito do rio. Essa profundidade de engastamento foi calculada com base nas publicações de Matlock e Reese considerando as características do solo do leito (Alonso, 1989).

5.3.2.1 Análise do segmento 1-2

O segmento 1-2, localizado próximo à margem, é diferente dos demais, pois possui um dos apoios na forma de um cavalete metálico em substituição às estacas, como mostra a Figura 5-13 (a). A Figura 5-17 mostra o modelo numérico criado para análise e identificação modal do segmento.

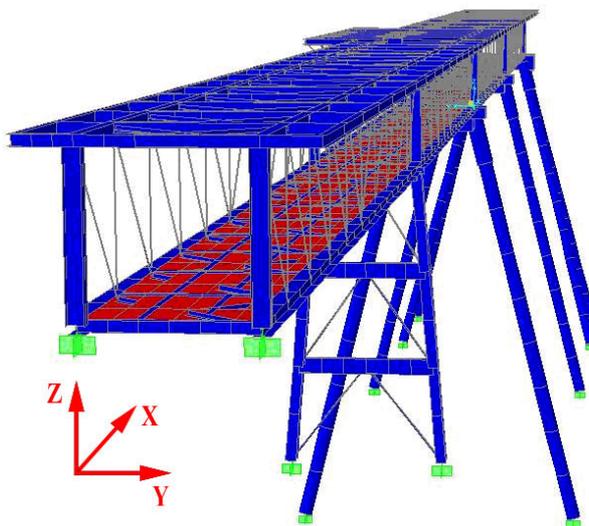


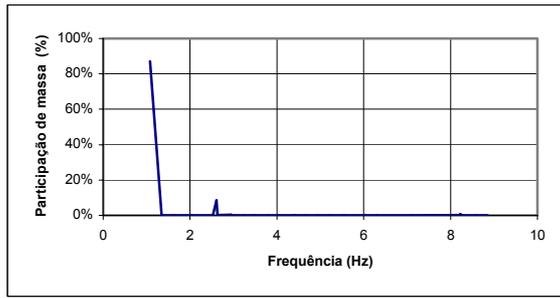
Figura 5-17 - Geometria do modelo do primeiro segmento com as estacas e o cavalete

A Tabela 5-4 mostra os resultados da análise modal realizada para o segmento 1-2 com o modelo em elementos finitos (EF) mostrado na Figura 5-17. Nas análises realizadas com esse modelo foram identificados e classificados os modos de vibração mais importantes de acordo com a participação de massa (Csi, 2005).

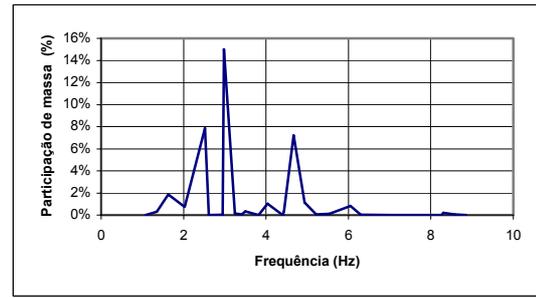
Os gráficos da Figura 5-18 mostram a variação do percentual de participação de massa de em função da frequência nas direções dos eixos globais x, y e z e nas rotações em torno dos eixos. A partir dos resultados obtidos nessas análises, constatou-se que os modos mais importantes possuem as frequência naturais mostradas na Tabela 5-4. Nesses modos há uma considerável participação de massa, tanto nas direções x, y e z, como também nas rotações em torno desses eixos. A Figura 5-19 apresenta os modos de vibração e as respectivas frequência naturais teoricamente obtidas para o segmento 1-2. A partir dos resultados das análises desse segmento, verifica-se que os mais importantes estão situados na faixa de, aproximadamente, 0 a 6 Hz.

Tabela 5-4 – Participação de massa nos deslocamentos na direção dos eixos x, y e z, e nas rotações em torno desses eixos

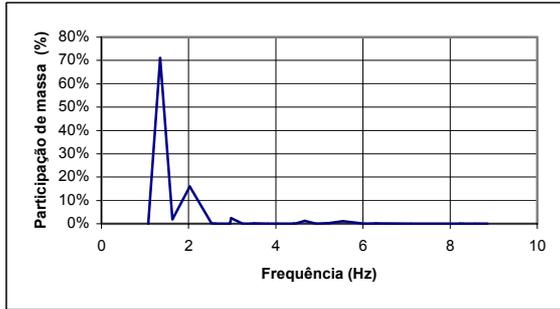
Nº	Modo Descrição	Freq. (Hz)	Deslocamento de massa (%)			Rotação de massa (%)		
			X	Y	Z	X	Y	Z
1	Flexão das Estacas	1,063	88,00	0,00	0,00	0,00	0,01	0,18
2	Flexão lateral	1,396	0,00	72,00	0,00	0,18	0,00	6,82
3	Flexão lateral	1,699	0,00	0,12	0,00	2,66	0,00	74,00
4	Flexo-torção	2,062	0,00	18,00	0,00	0,57	0,00	0,87
5	Flexão-torção	2,567	0,00	0,32	0,03	7,00	0,00	10,00
6	Flexão vertical	2,610	8,35	0,00	0,01	0,00	0,00	0,01
9	Flexão vertical	3,006	0,00	2,14	0,46	15,00	0,01	0,32
13	Flexo-torção	3,838	0,00	0,00	0,78	0,14	7,65	0,00
14	Flexão lateral	4,057	0,01	0,00	7,00	1,26	0,01	0,01
17	Flexão vertical	4,480	0,00	0,00	0,12	0,15	28,00	0,01
18	Flexão vertical	4,822	0,00	0,83	27,00	8,62	0,41	0,11
19	Flexão lateral e vertical	5,159	0,00	0,45	14,00	0,09	0,00	0,03



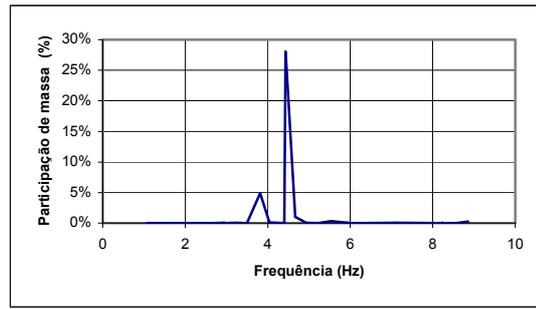
(a) Participação de massa na direção X



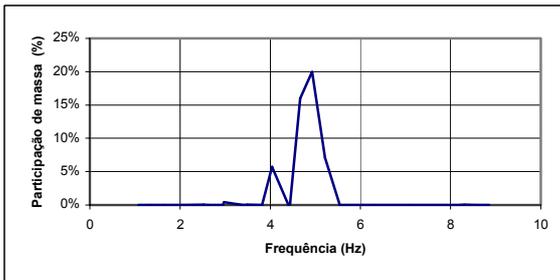
(d) Participação de massa em torno de X.



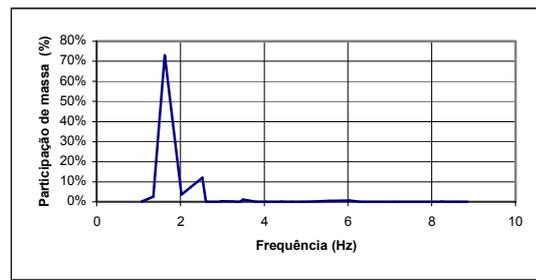
(b) Participação de massa na direção Y



(e) Participação de massa em torno de Y



(c) Participação de massa na direção Z



(f) Participação de massa em torno de Z

Figura 5-18 – Participação de massa do segmento 1-2 nas direções x, y e z, em função das frequências naturais determinadas através do MEF para o segmento 1-2

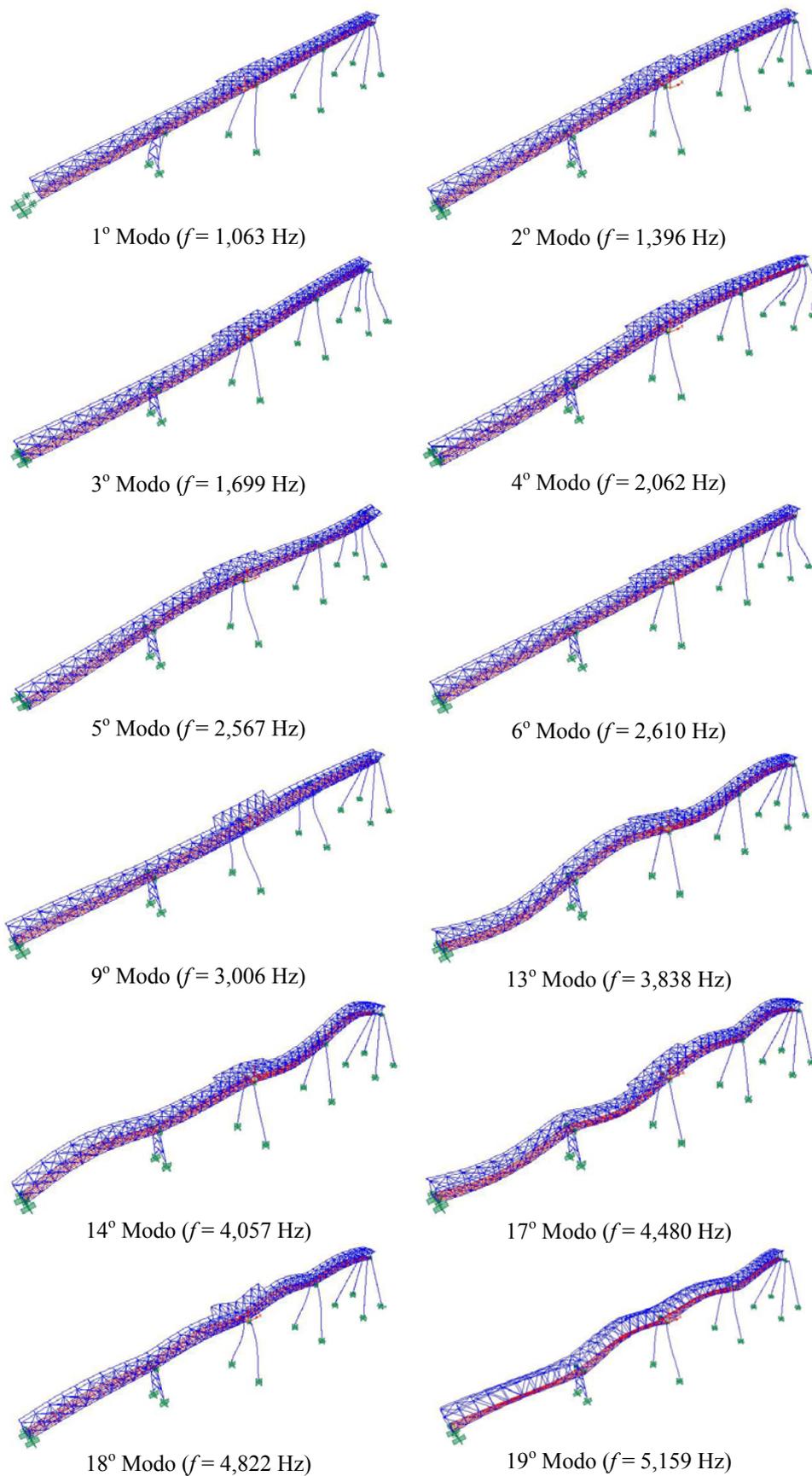


Figura 5-19 - Modos mais importantes obtidos com o modelo numérico do segmento 1-2 de acordo com a participação de massa

5.3.2.2 Análise do segmento 10-11

Este é o penúltimo segmento da ponte. Ele possui comprimento total de 120,5 m e está localizado próximo ao píer. A Figura 5-20 mostra o modelo numérico criado para análise e identificação modal desse segmento.

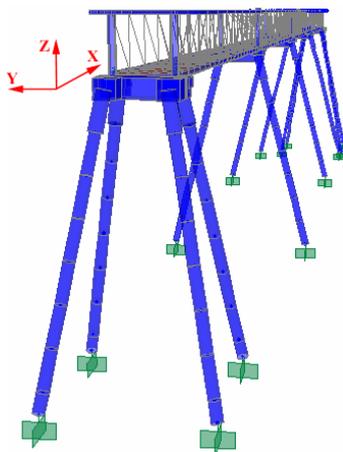


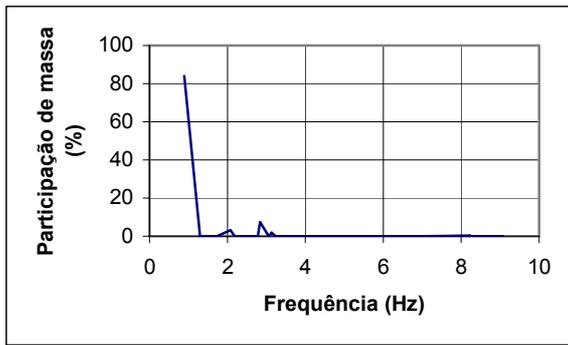
Figura 5-20 – Geometria do modelo criado para o segmento 10-11 com comprimento de 120,5 m

Adotando um procedimento análogo ao utilizado na análise do segmento 1-2, foram determinados os modos de vibração mais importantes para o segmento 10-11 de acordo com o percentual de participação de massa nas direções e em torno dos eixos x, y e z. As frequências naturais dos modos mais importantes determinados teoricamente, de acordo com a participação de massa, são mostradas na Tabela 5-5.

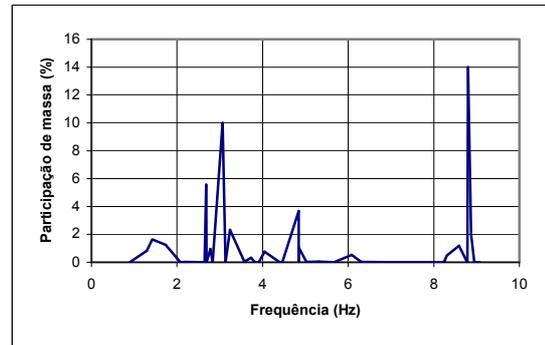
Tabela 5-5 - Participação de massa nos deslocamentos na direção dos eixos x, y e z, e nas rotações em torno desses eixos

Nº	Modo Descrição	Freq. (Hz)	Deslocamento de massa (%)			Rotação de massa (%)		
			X	Y	Z	X	Y	Z
1º	Corpo rígido do Tabuleiro	0,890	84,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,14
2º	Flexão lateral	1,291	0,00	57,00	0,00	0,83	0,00	35,00
3º	Flexão lateral	1,417	0,00	15,00	0,00	1,64	0,00	27,00
4º	Flexão lateral	1,732	0,00	10,00	0,00	1,25	0,00	13,00
6º	Flexão lateral	2,186	0,00	4,11	0,00	0,03	0,00	13,00
8º	Flexão lateral	2,681	0,00	3,15	0,03	5,58	0,00	3,03
12º	Flexo-torção	3,060	0,00	0,72	0,36	10,00	0,01	0,57
17º	Flexão vertical	3,820	0,00	0,00	0,00	0,00	3,30	0,23
19º	Flexão vertical	4,049	0,01	0,00	4,97	0,76	0,03	0,00
21º	Flexão vertical	4,461	0,00	0,00	0,02	0,00	19,00	0,05
22º	Flexão vertical e lateral	4,839	0,00	0,89	20,00	3,68	0,00	0,00
24º	Flexão vertical	4,842	0,00	0,25	5,61	1,07	0,00	0,00
25º	Flexão vertical e lateral	5,019	0,00	0,30	3,83	0,03	0,00	0,00
26º	Flexo-torção	5,313	0,00	1,66	4,00	0,00	0,00	0,22

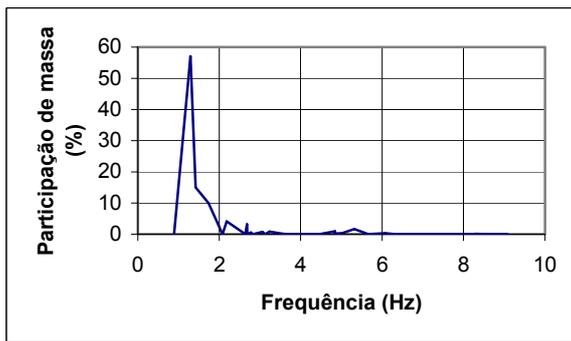
Os gráficos da Figura 5-21 mostram a variação do percentual de participação de massa em função da frequência nas direções dos eixos globais x, y e z e nas rotações em torno dos eixos. A partir das análises realizadas, observou-se que os modos mais importantes estão situados na faixa de, aproximadamente, 0 a 9 Hz. As formas modais correspondentes à esses modos são mostradas na Figura 5-22.



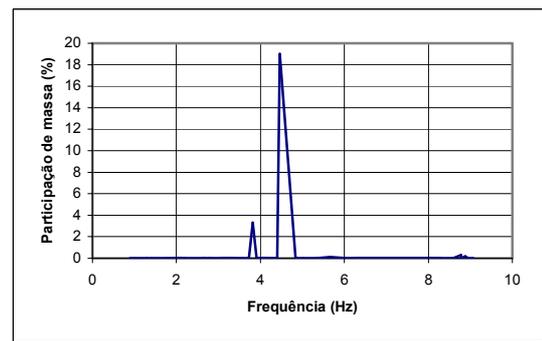
(a) Participação de massa na direção X



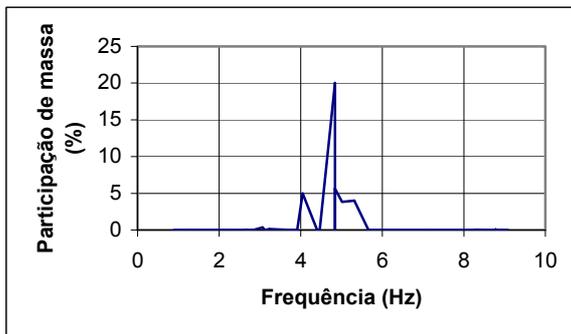
(d) Participação de massa em torno de X.



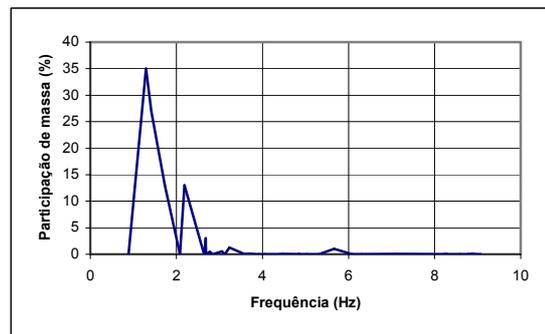
(b) Participação de massa na direção Y



(e) Participação de massa em torno de Y.



(c) Participação de massa na direção Z



(f) Participação de massa em torno de Z.

Figura 5-21 - Participação de massa da estrutura nas direções X, Y e Z, em função das frequências naturais determinadas através do **MEF** para o segmento 10-11

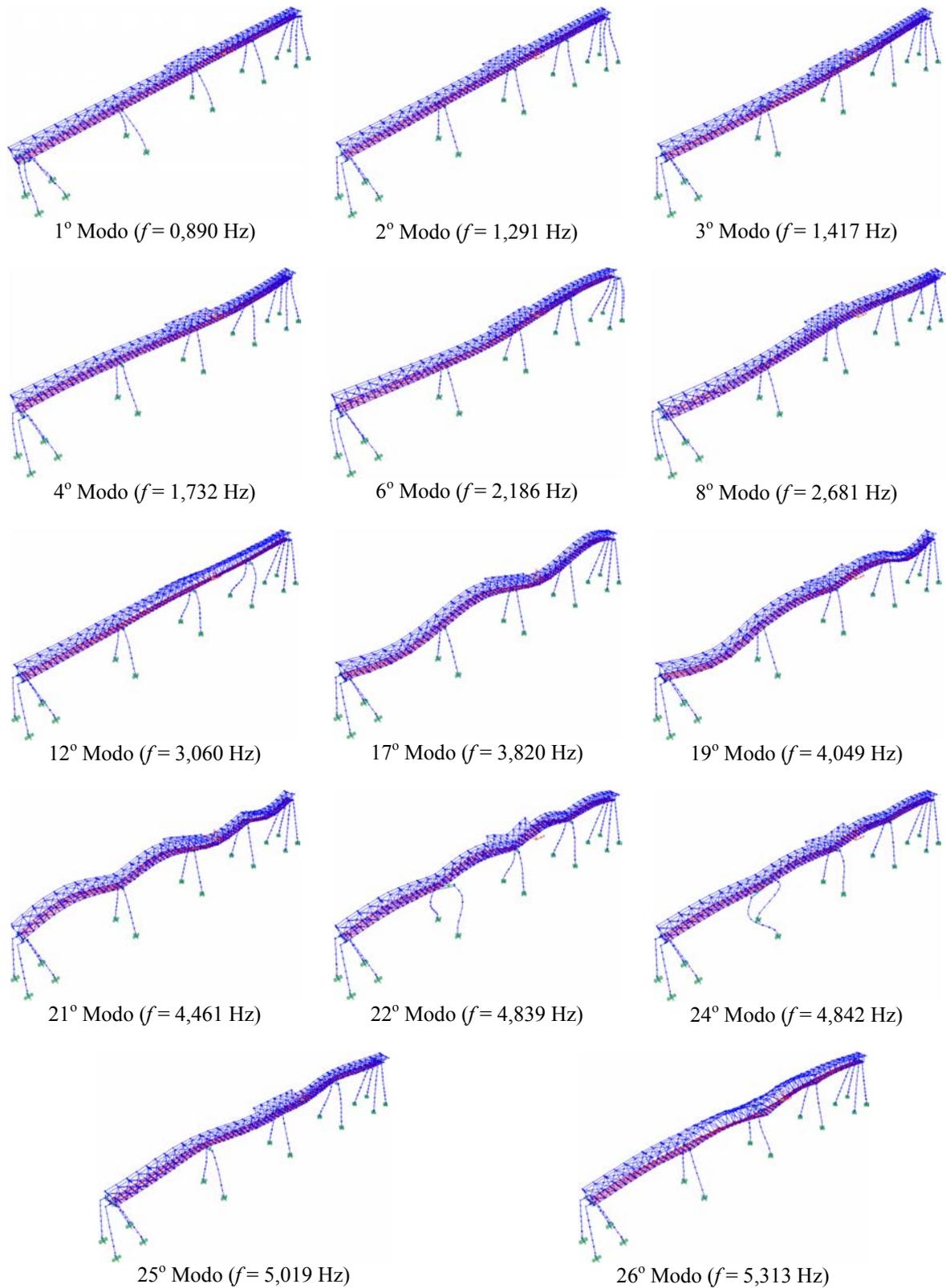


Figura 5-22 - Modos mais importantes obtidos com o modelo numérico do segmento 10-11 de acordo com a participação de massa

5.3.2.3 Análise do segmento 11-12

Este último segmento da ponte possui um comprimento total de 90,5 metros e está situado junto ao píer do TGL. Ele se diferencia dos demais segmentos típicos da ponte por possuir somente três vãos. A Figura 5-23 mostra o modelo numérico criado para análise e identificação modal desse segmento.

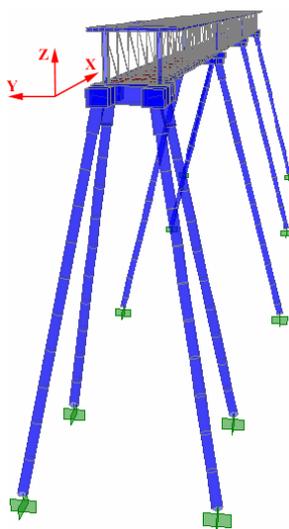


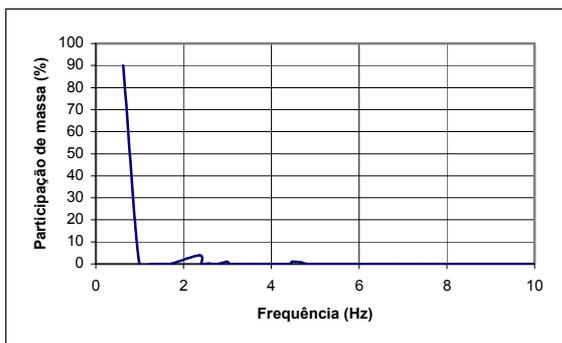
Figura 5-23 - Geometria do modelo criado para o segmento 11-12 com comprimento de 90,5 m

Seguindo um procedimento análogo ao utilizado na análise dos segmentos 1-2 e 10-11, foram determinados os modos de vibração mais importantes para o segmento 11-12 de acordo com a percentual de participação de massa nas direções e em torno dos eixos x, y e z. As frequências naturais dos modos mais importantes obtidas teoricamente, de acordo com critério de participação de massa são, mostradas na Tabela 5-6.

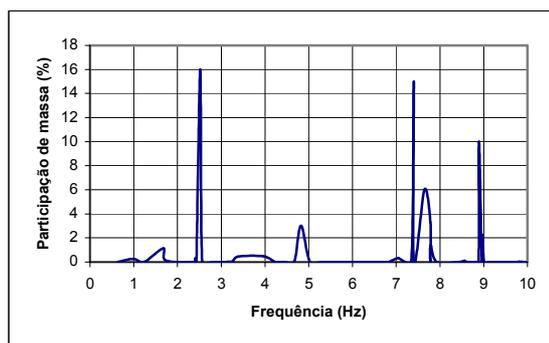
Tabela 5-6 - Participação de massa nos deslocamentos na direção dos eixos x, y e z, e nas rotações em torno desses eixos

Nº	Modo Descrição	Freq, (Hz)	Deslocamento de massa (%)			Rotação de massa (%)		
			X	Y	Z	X	Y	Z
1	Corpo rígido	0,624	90,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
2	Flexão lateral	0,984	0,00	52,00	0,00	0,00	0,00	0,00
3	Flexão lateral	1,250	0,00	38,00	0,00	0,00	0,00	0,00
4	Flexão lateral	1,675	0,00	2,53	0,00	1,14	0,00	0,00
9	Torção	2,519	0,00	0,00	0,00	16,00	0,00	0,00
17	Flexão vertical	3,962	0,00	0,00	4,97	0,00	0,00	0,00
18	Flexão vertical	4,238	0,00	0,00	0,00	0,00	18,00	0,00
22	Flexo vertical	4,821	0,00	0,00	36,00	3,00	6,09	0,00
24	Flexo-torção	5,316	0,00	1,53	1,39	0,00	0,00	0,00

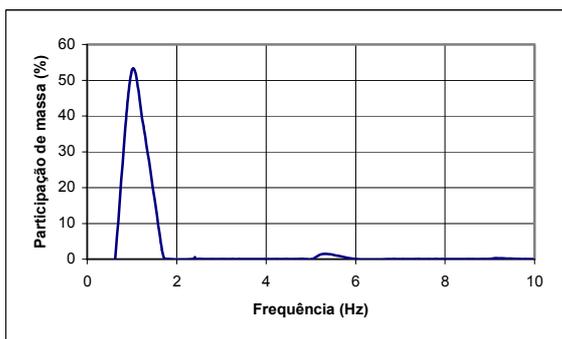
Os gráficos da Figura 5-24 mostram a variação do percentual de participação de massa em função da frequência nas direções dos eixos globais x, y e z e nas rotações em torno desses eixos. Verificando os resultados das análises, constata-se que os modos mais importantes estão situados na faixa de, aproximadamente, 0 a 9 Hz. As formas modais correspondentes a esses modos são mostradas na Figura 5-25.



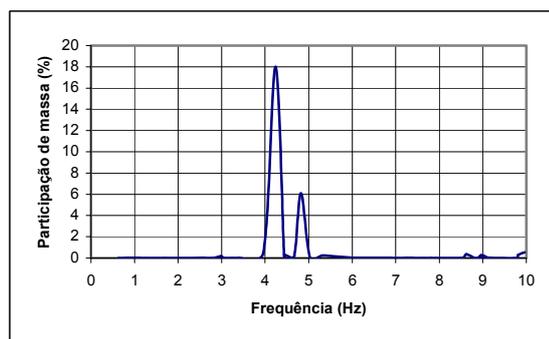
(a) Participação de massa na direção X



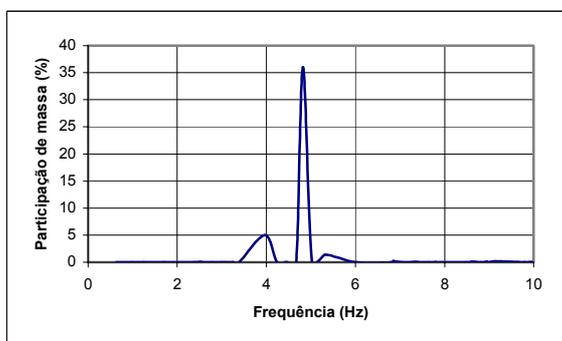
(d) Participação de massa em torno de X.



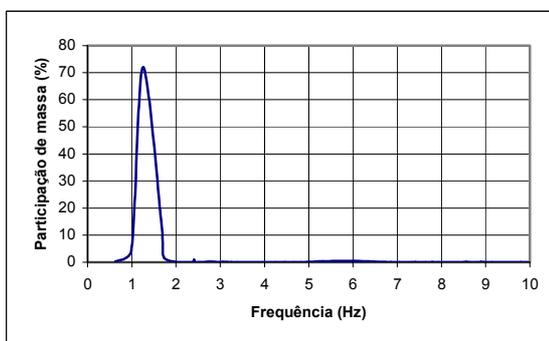
(b) Participação de massa na direção Y



(e) Participação de massa em torno de Y.



(c) Participação de massa na direção Z



(f) Participação de massa em torno de Z.

Figura 5-24 - Participação de massa da estrutura nas direções X, Y e Z, em função das frequências naturais determinadas através do **MEF** para o segmento 11-12

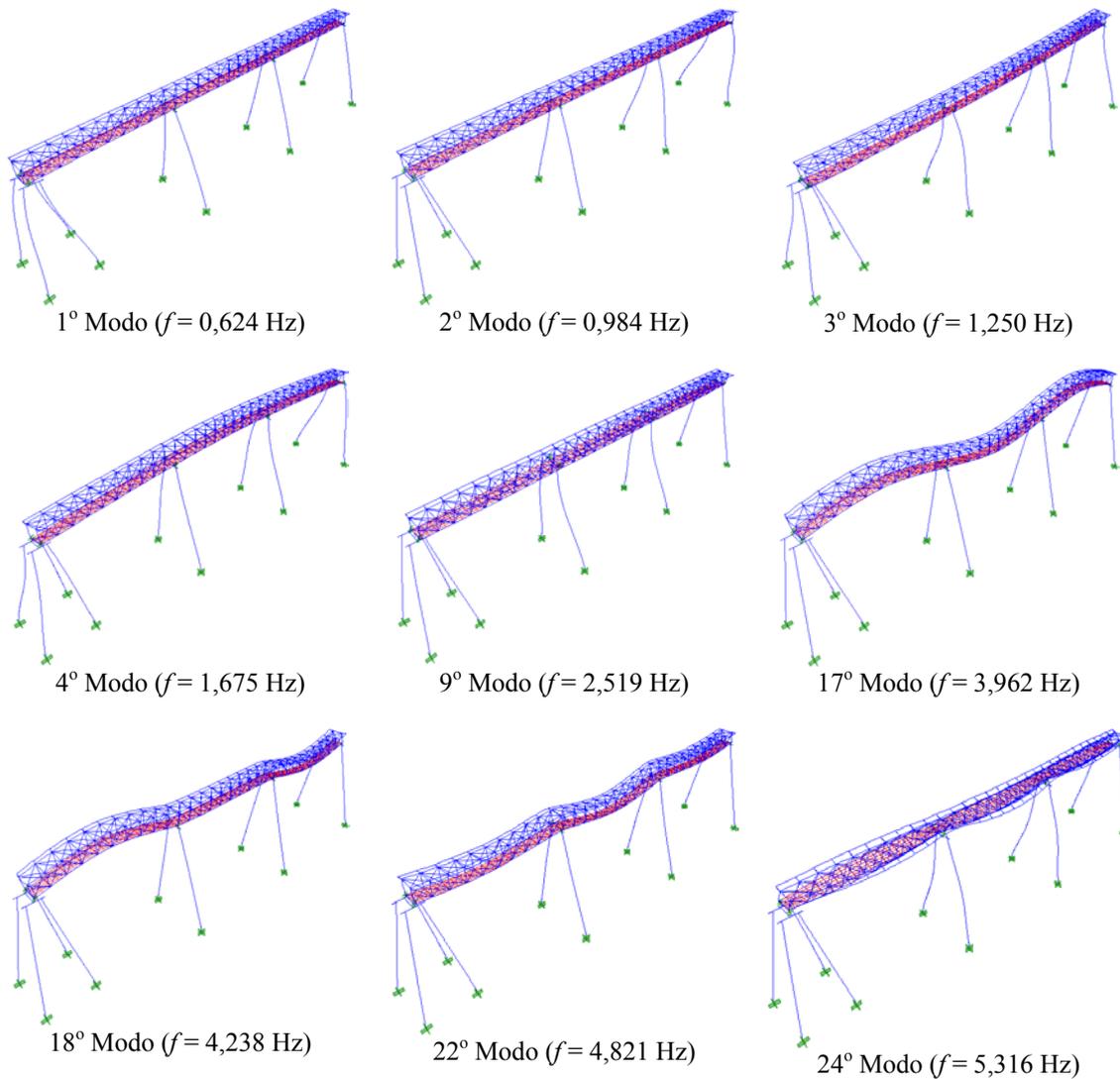


Figura 5-25 – Modos mais importantes obtidos com o modelo numérico do segmento 11-12 de acordo com a participação de massa

5.3.3 Análise Experimental

As acelerações na ponte foram medidas por meio de cinco servo-acelerômetros instalados na estrutura em vários arranjos nos segmentos 1-2 (segmento de 120 metros de comprimento com cavalete), 6-7 e 10-11 (segmentos típicos de 120,5 metros de comprimento) e ainda no segmento 11-12 (segmento com 90,5 metros de comprimento). Os sinais dos acelerômetros foram digitalmente coletados a uma frequência de amostragem de 200 Hz, empregando-se o sistema ADS-2000-LYNX®, acoplado a um microcomputador portátil. Como fontes de excitação da estrutura, foram utilizados automóveis movimentando-se ao longo da ponte com velocidades de 30, 40 e 50 Km/h,

e também o próprio vento. Para extração dos parâmetros modais da estrutura foram utilizados os métodos estocásticos **SSI-DATA** e **SSI-COV**.

Convém ressaltar que na época em que os ensaios experimentais foram realizados na ponte, não se imaginava que as séries temporais coletadas fossem ser utilizadas na identificação de parâmetros através dos métodos baseados na teoria de subespaços estocásticos. Por esse motivo, os cuidados com a duração mínima das séries temporais em cada arranjo para a identificação satisfatória através dos referidos métodos não foram devidamente observados. Como resultado disso, todas as séries temporais, com exceção das obtidas nos ensaios do segmento 10-11, foram coletadas com a duração de cerca de 50 segundos, sendo, portanto, insuficiente para uma identificação com maior precisão e robustez.

Um outro aspecto não considerado durante os ensaios, foi o conceito dos sensores de referência introduzido no item 3.3.2. Utilizando este conceito, as formas modais parciais obtidas nos diversos arranjos de um experimento de vibração podem ser reunidas para formar a forma modal completa da estrutura. Segundo Peeters (2000), isso é possível se a posição dos sensores de referência permanecer comum em todos os arranjos. Se este procedimento for adotado, a relação entre os modos de dois arranjos distintos pode ser encontrada através das amplitudes (modais) de referência por mínimos quadrados como mostra a Figura 5-26 . De acordo com Peeters (2000), se o fator de escala que relaciona as formas modais de referência de dois arranjos distintos for diferente de 1, significa que a excitação de natureza desconhecida possivelmente tenha mudado e, conseqüentemente, implica que as amplitudes de referência de um determinado modo X em um arranjo sejam diferentes das amplitudes desse mesmo modo em um outro arranjo.

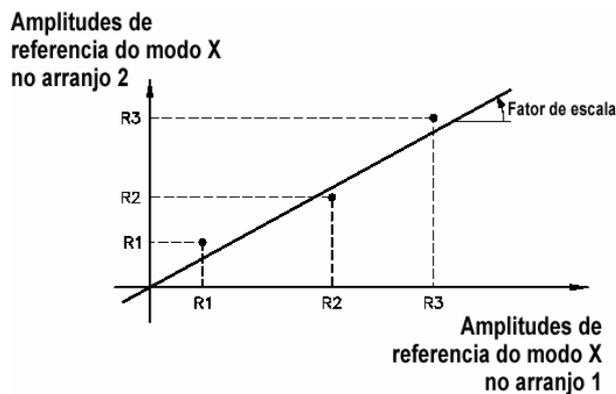


Figura 5-26 – Utilização dos sensores de referência para reunir as formas modais parciais obtidas nos diversos arranjos para formar o modo completo da estrutura (Peeters, 2000)

A seguir, são apresentados os resultados das análises experimentais dos segmentos 1-2, 10-11 e 11-12. Os resultados do segmento 6-7 não são apresentados em virtude de serem semelhantes aos resultados obtidos para o segmento 10-11.

5.3.3.1 Resultados experimentais obtidos para o segmento 1-2

Apesar das séries temporais obtidas nos ensaios de vibração desse segmento serem curtas, foi possível identificar os primeiros modos situados na faixa de 0 a 5 Hz. No segmento 1-2 foram realizados vários ensaios experimentais de vibração seguindo diversos arranjos. Um desses arranjos é chamado de “arranjo A1”. Nele os sensores foram dispostos de modo a medir as respectivas acelerações na direção Z, como mostra a Figura 5-27.

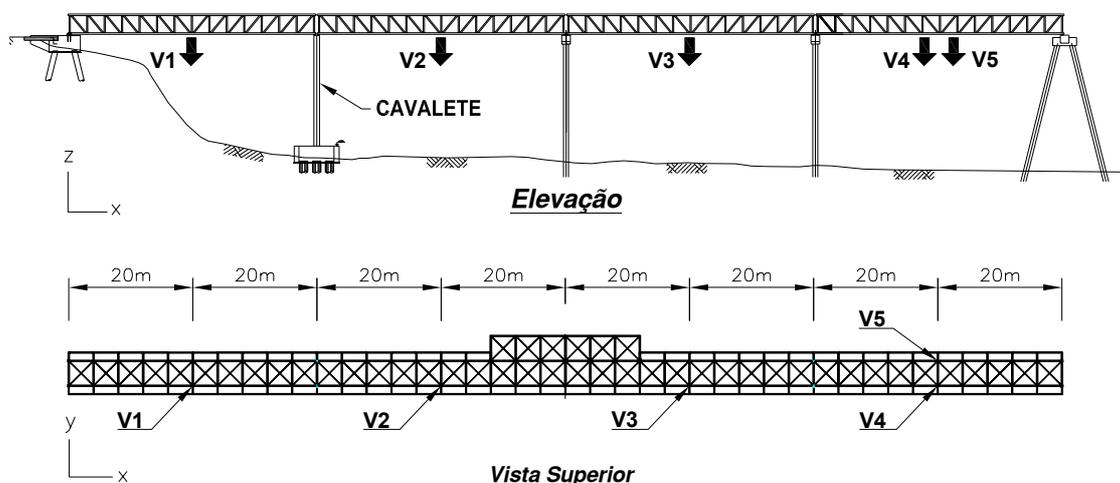


Figura 5-27 – Disposição dos acelerômetros segundo o Arranjo A1 no segmento 1-2

As séries temporais obtidas nesse arranjo são mostradas na Figura 5-28. Elas foram coletadas no ensaio de vibração quando da passagem do veículo utilizado para excitar a estrutura a uma velocidade de 40 km/h.

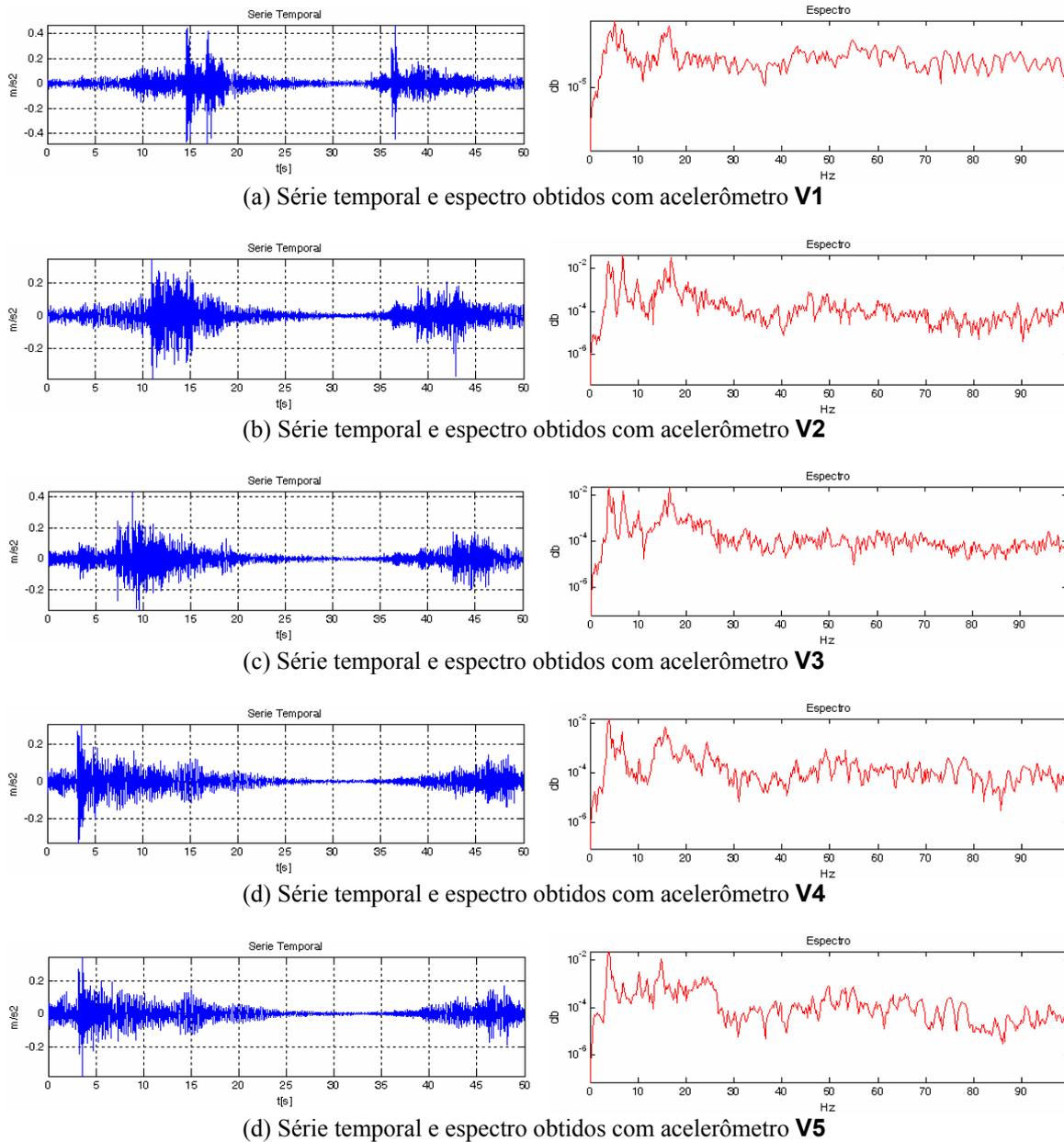


Figura 5-28 - Séries temporais e os respectivos espectros obtidos no arranjo A1 do segmento 1-2

Os sinais mostrados na Figura 5-28 foram filtrados com um filtro passa baixa Chebyshev tipo I com uma frequência de corte de 5 Hz. Com esse procedimento o número de amostras passou a ser 8 vezes menor do que o dos sinais originais. Após o tratamento dos sinais as informações do posicionamento dos sensores foram adicionadas ao arquivo dos sinais de resposta. Em seguida, utilizando os métodos estocásticos **SSI-DATA** e **SSI-COV**, foi possível identificar cinco frequências naturais a partir dos dados

de resposta anteriormente tratados. Essas freqüências foram determinadas com auxílio do diagramas de estabilidade mostrados nas Figuras 5-29 e 5-30. Esses diagramas foram criados variando a ordem do modelo de 2 a 30. Na construção de ambos os diagramas foram utilizados os seguintes critérios de estabilidade: 1% para as freqüências, 5% para os amortecimentos e 5% para os vetores.

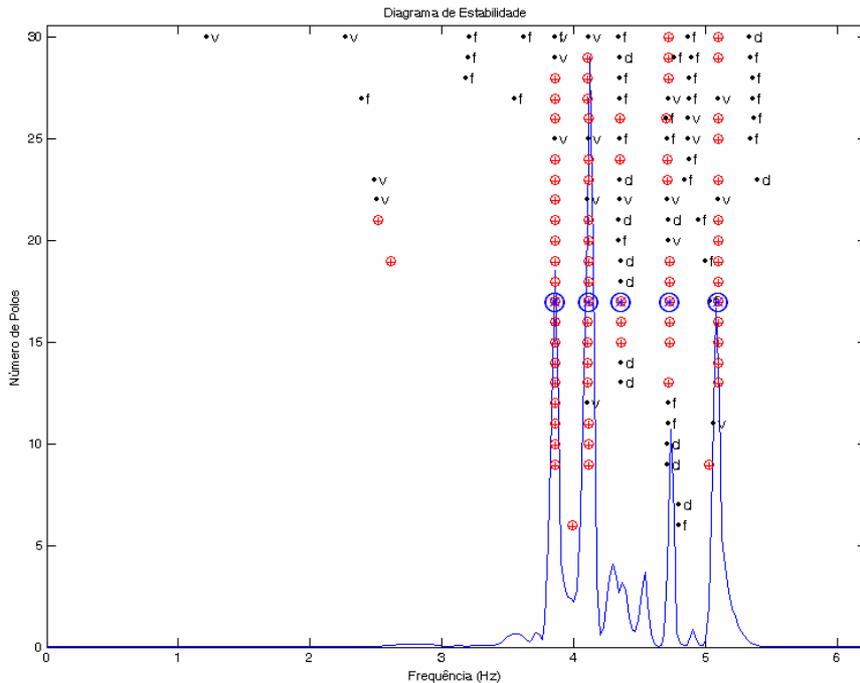


Figura 5-29 - Diagrama de estabilidade criado com método **SSI-DATA** para identificação do arranjo A1 do segmento 1-2

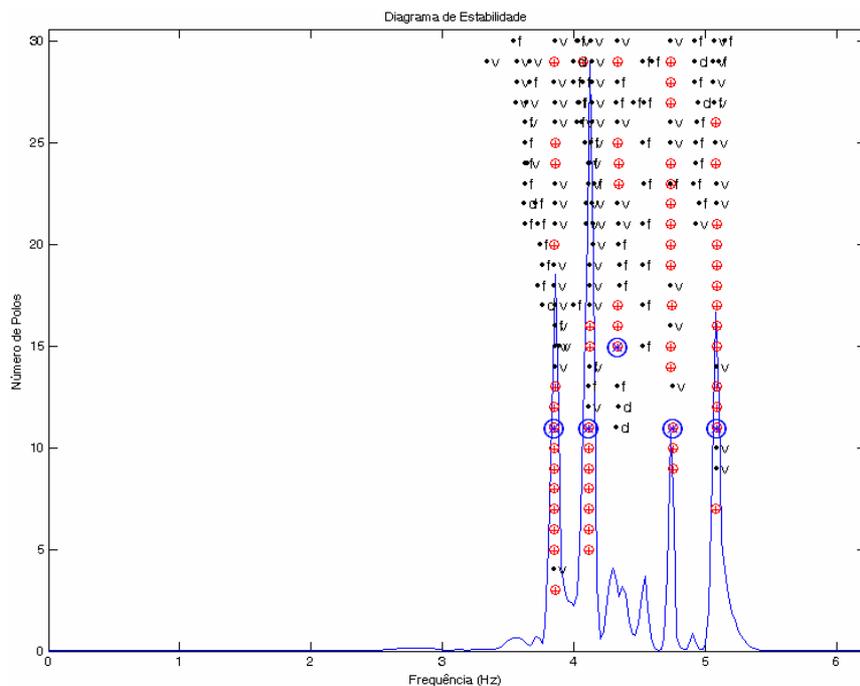


Figura 5-30 - Diagrama de estabilidade criado com método **SSI-COV** para identificação do arranjo A1 do segmento 1-2

Os demais parâmetros utilizados na construção de ambos os diagramas foram: N (número de amostras) igual a 512; como sensores de referência foram utilizados todos os canais disponíveis no arranjo; e como números de intervalos (i) foram adotados 20 e 30 para os métodos **SSI-DATA** e **SSI-COV**, respectivamente. Os símbolos mostrados nos referidos diagramas obedecem a seguinte convenção: \oplus - pólo estável; $\bullet v$ - frequência e vetores estáveis; $\bullet d$ - frequência e amortecimento estáveis; $\bullet f$ - frequência estável. Na Tabela 5-7 e nas Figuras 5-31 e 5-32 são mostrados os resultados obtidos com a utilização de ambos os métodos.

Tabela 5-7 - Comparação dos resultados experimentais obtidos com os métodos **SSI-DATA** e **SSI-COV** para o arranjo A1 do segmento 1-2

Modo	Resultados experimentais através do método SSI-DATA		Resultados experimentais através do método SSI-COV	
	Frequências naturais (Hz)	Fatores de Amortecimento (%)	Frequências naturais (Hz)	Fatores de Amortecimento (%)
1	3,857	0,6441	3,853	0,5621
2	4,109	0,5689	4,117	0,6351
3	4,355	1,4447	4,331	0,8236
4	4,725	0,9165	4,755	1,0920
5	5,099	0,5795	5,087	0,5428

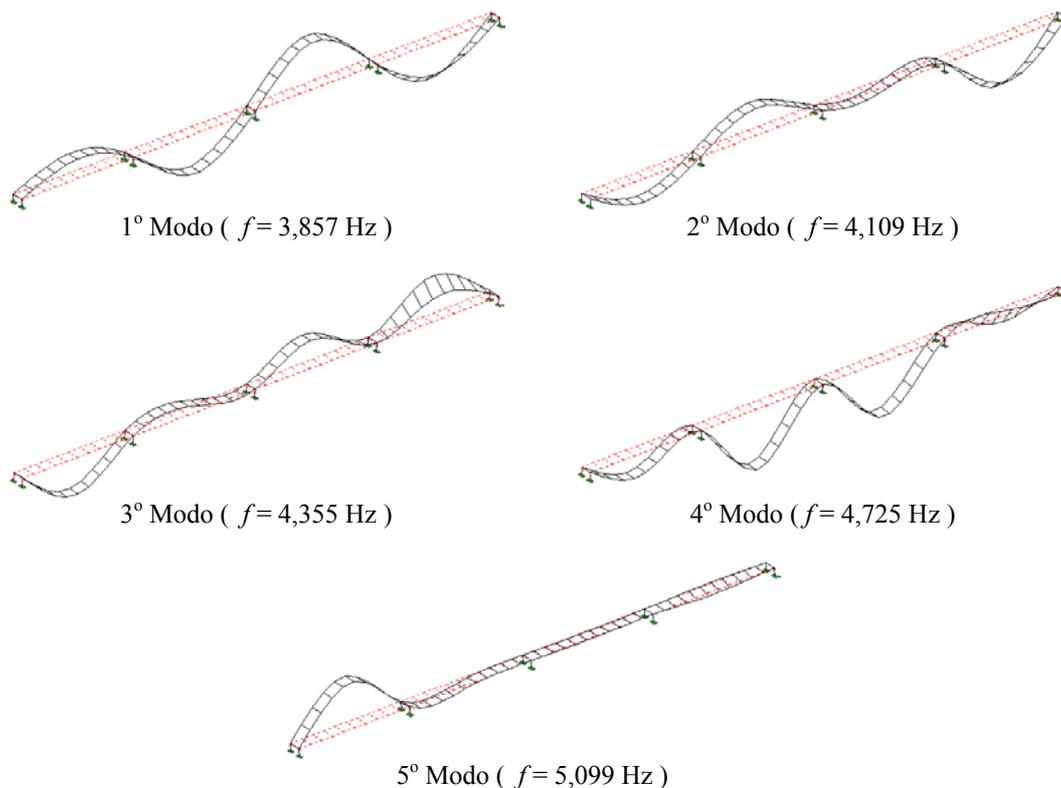


Figura 5-31 – Modos de vibração experimentais obtidos com o método **SSI-DATA** para o arranjo A1 do segmento 1-2

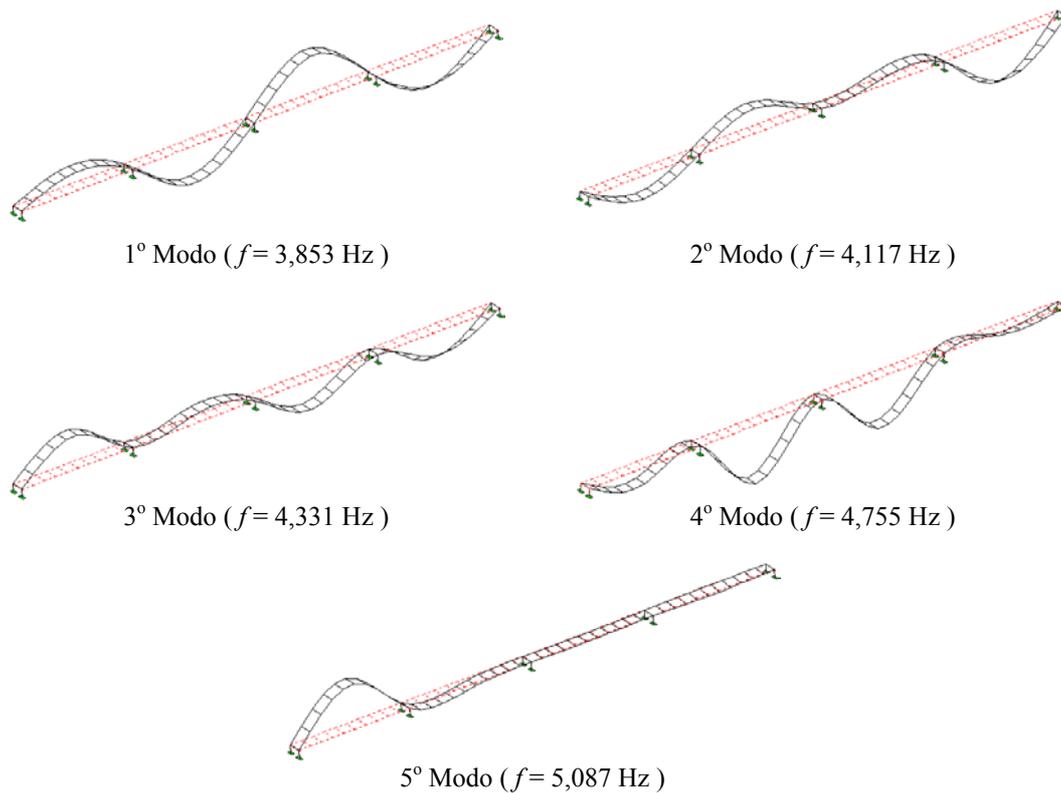
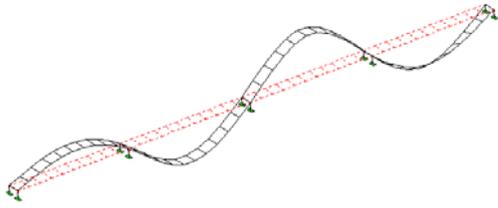


Figura 5-32 - Modos de vibração experimentais obtidos com o método **SSI-COV** para o arranjo A1 do segmento 1-2

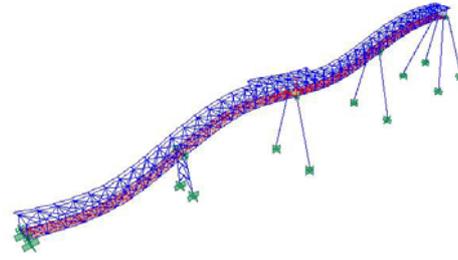
Comparando os resultados teóricos obtidos com o **MEF** e os experimentais obtidos com emprego do **SSI-DATA**, verifica-se que os primeiros quatro modos determinados experimentalmente apresentam parâmetros bastante próximos de alguns dos modos teóricos, como mostra a Figura 5-33.

Forma Modal Experimental (SSI-DATA)

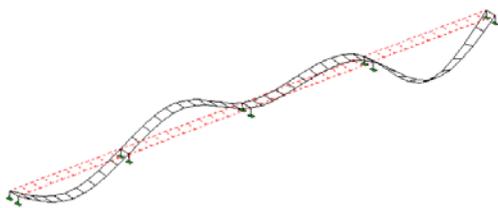
Forma Modal Teórica (EF)



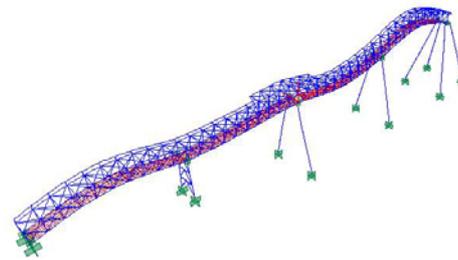
1º Modo ($f = 3,853$ Hz)



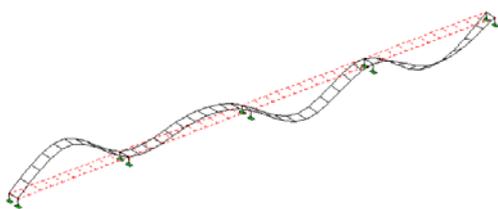
13º Modo ($f = 3,838$ Hz)



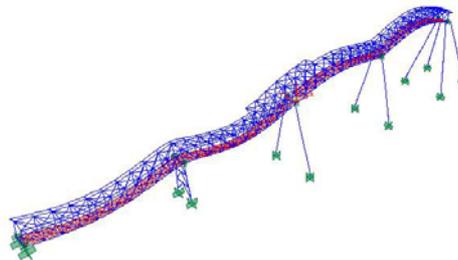
2º Modo ($f = 4,117$ Hz)



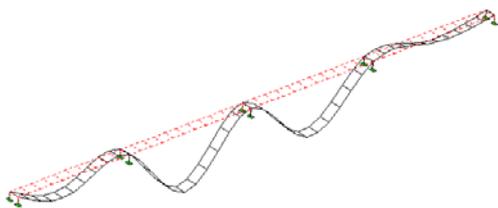
14º Modo ($f = 4,057$ Hz)



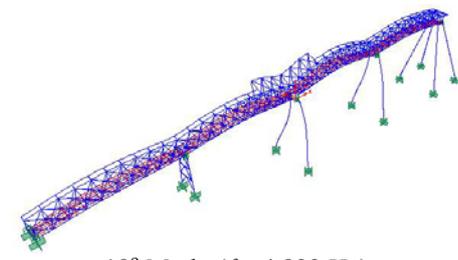
3º Modo ($f = 4,331$ Hz)



17º Modo ($f = 4,480$ Hz)



4º Modo ($f = 4,755$ Hz)



18º Modo ($f = 4,822$ Hz)

Figura 5-33 - Comparação entre os modos teóricos e experimentais obtidos para o arranjo A1 do segmento 1-2

5.3.3.2 Resultados experimentais obtidos para o segmento 10-11

Neste segmento foram também realizados vários ensaios experimentais de vibração seguindo diversos arranjos. Foi utilizado, como fonte de excitação, um automóvel movimentando-se ao longo da ponte com velocidades de 30, 40 e 50 Km/h, e também o próprio vento. A seguir são apresentados os resultados obtidos experimentalmente para o arranjo chamado de “A1” que é esquematizado na Figura 5-34. Nesse arranjo os sensores foram instalados no meio dos vãos de modo a medir aceleração na direção Z. As séries temporais e os respectivos espectros obtidos são mostrados na Figura 5-35.

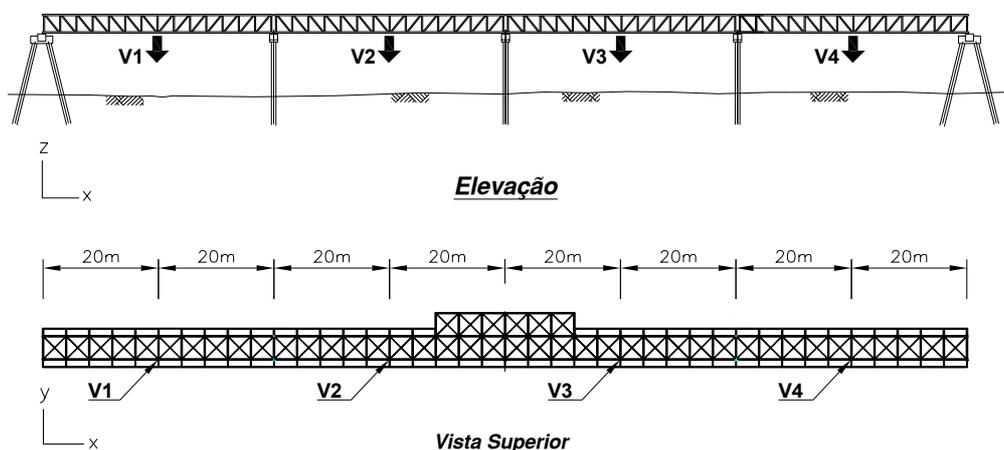


Figura 5-34 - Disposição dos acelerômetros no segmento 10-11 segundo o Arranjo A1

Nesse ensaio, as séries temporais foram continuamente coletadas a uma taxa de amostragem de 200 Hz por, cerca de, 43 minutos, durante a passagem do veículo utilizado para excitar a estrutura. Os sinais de resposta coletados nos ensaios foram, posteriormente, recuperados e devidamente tratados no programa computacional apresentado no CAPÍTULO 4. Após a redução dos erros de tendência e de ganho, as séries temporais e os respectivos auto-espectros de cada canal apresentaram o aspecto mostrado na Figura 5-35. Nessa figura é possível observar o surgimento de um pico em torno de 60 Hz que deve ter sido introduzido no sinal pela corrente de alimentação elétrica.

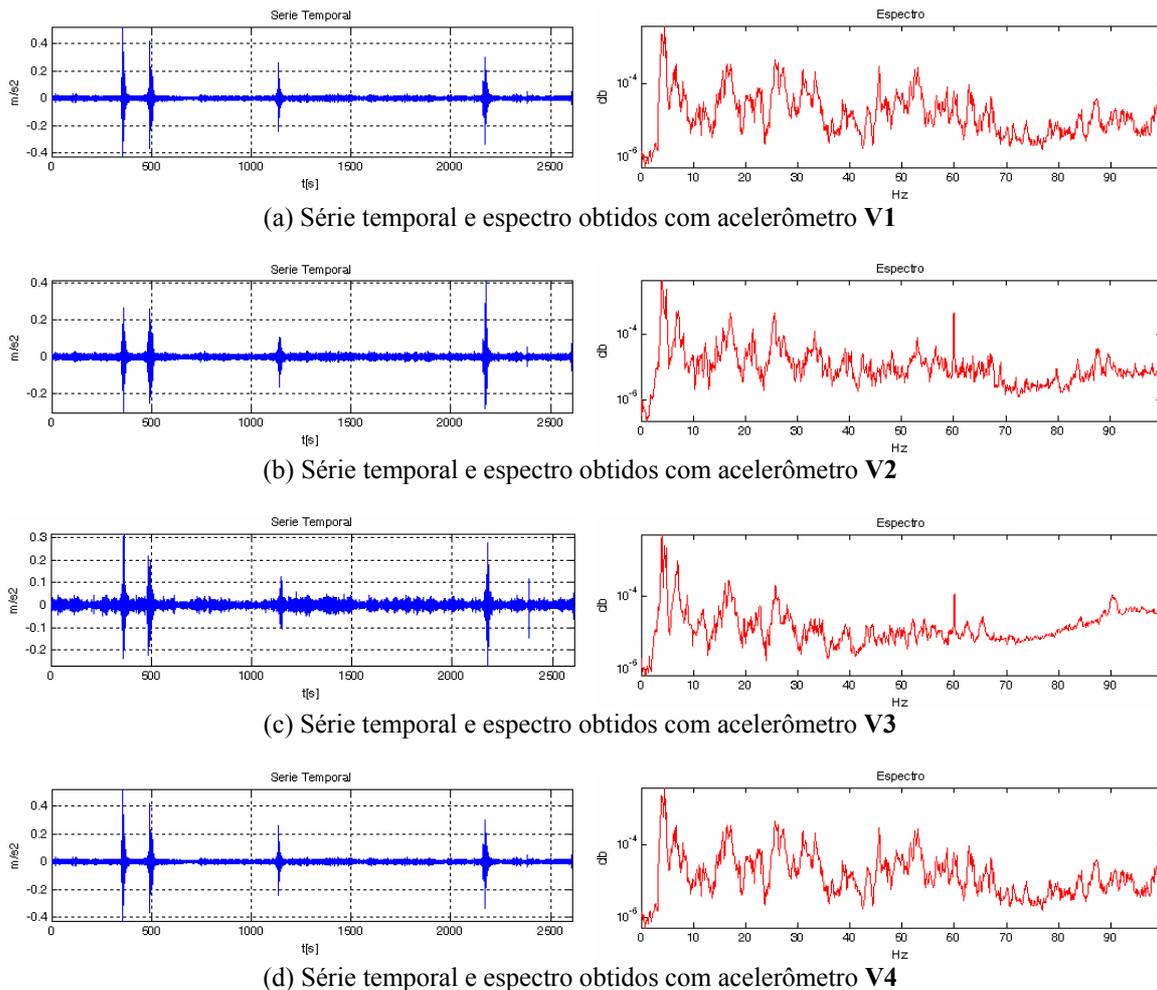


Figura 5-35 – Séries temporais e os respectivos espectros obtidos no arranjo A1 do segmento 10-11

O processo de identificação do arranjo em questão foi realizado em duas etapas: a primeira delas na faixa de 0 a 5 Hz; e a segunda na faixa de 0 a 10 Hz. Na primeira etapa de identificação foi isolado um trecho dos sinais coletados contendo 32.768 amostras que, posteriormente, foram filtrados com um filtro passa baixa Chebyshev tipo I com uma frequência de corte de 5 Hz. Com esse procedimento, o número de amostras passou a ser 8 vezes menor, proporcionando, assim, uma maior precisão na identificação na faixa de 0 a 5 Hz, e também a redução do esforço computacional necessário ao processo de identificação.

Após o tratamento dos sinais, dois diagramas de estabilidade foram criados utilizando os métodos **SSI-DATA** e **SSI-COV**, com a ordem (n) de ambos os modelos variando de 2 a 55. Os critérios de estabilidade utilizados foram: 1% para as frequências, 5% para os amortecimentos, 5% para os vetores (**MAC**). Foram utilizados

como referência todos os acelerômetros utilizados no arranjo A1. Para o número de intervalos (i) foram adotados 30 e 40 para os métodos **SSI-DATA** e **SSI-COV**, respectivamente, e como número de amostras (N) foi adotado 4096.

Uma vez criados os diagramas de estabilidade para a faixa de frequência de 0 a 5 Hz, as frequências naturais, os fatores de amortecimento e os respectivos modos de vibração foram determinados a partir dos pólos estáveis selecionados nos referidos diagramas, como mostra as Figuras 5-36 e 5-37. Na segunda etapa de identificação os sinais foram identificados em uma faixa de 0 a 10 Hz. O trecho contendo 32.768 amostras que foi utilizado na primeira etapa, foi novamente utilizado nesta segunda etapa. Esse trecho foi filtrado com filtro passa baixa Chebyshev tipo I com uma frequência de corte de 10 Hz. Após a filtragem, o número de amostras passou a ser de 8.192, sendo, portanto, 4 vezes menor que o número de amostras do trecho original.

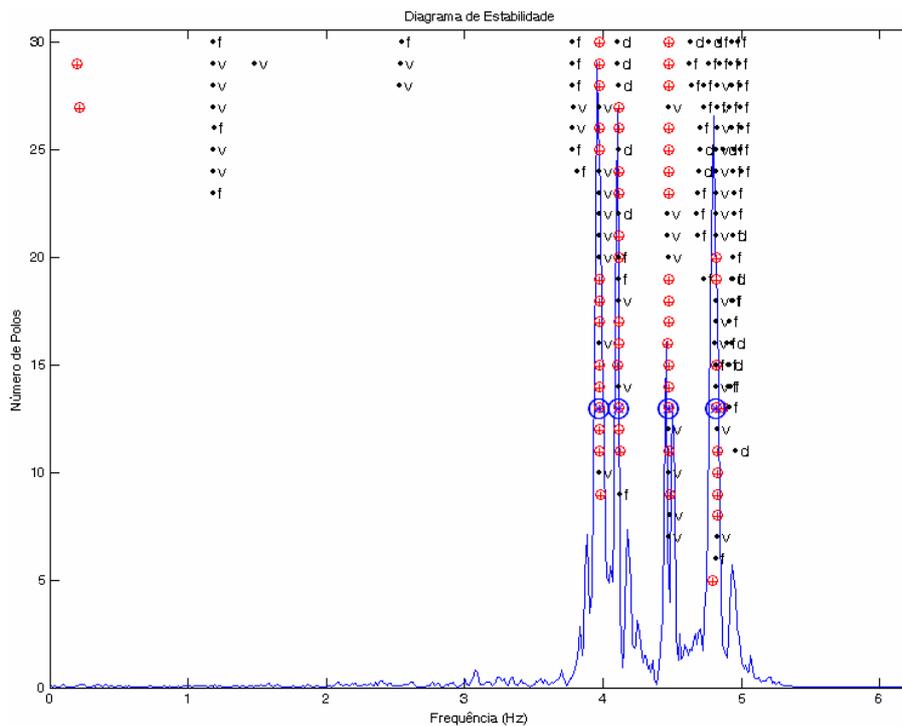


Figura 5-36 – Diagrama de estabilidade criado na primeira etapa de identificação com método **SSI-DATA** para identificação do arranjo A1 do segmento 10-11

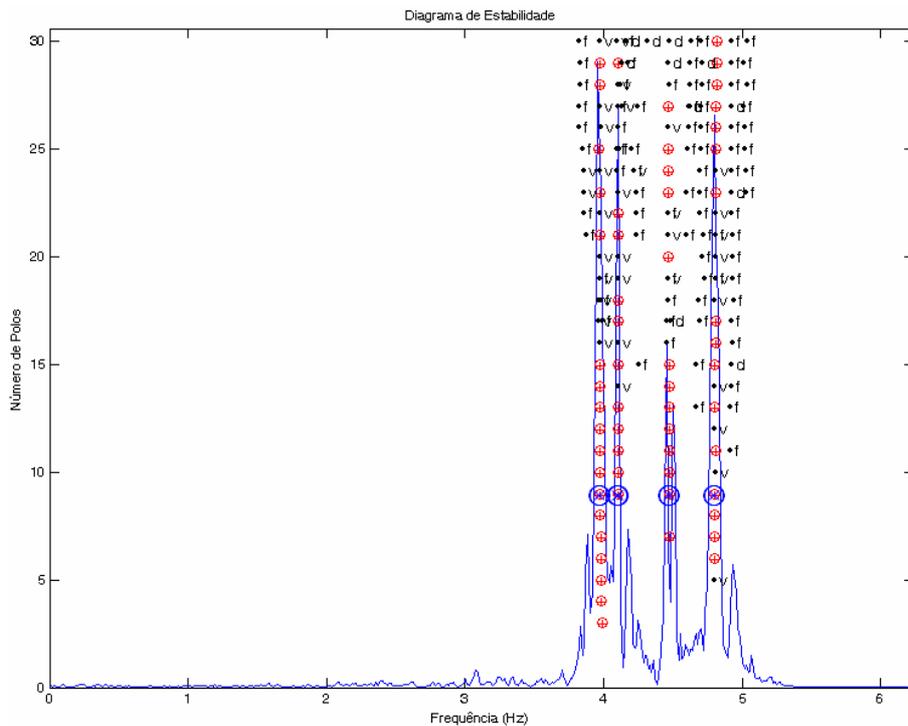


Figura 5-37 - Diagrama de estabilidade criado na primeira etapa de identificação com método **SSI-COV** para identificação do arranjo A1 do segmento 10-11

Após a filtragem os sinais tratados foram identificados através dos métodos estocásticos em estudo. Dois diagramas de estabilidade foram criados utilizando esses métodos, como mostram as Figuras 5-38 e 5-39. Na criação de ambos os diagramas a ordem do modelo (n) variou de 2 a 55, sendo adotados os seguintes critérios: 1% para as frequências, 5% para os amortecimentos, 5% para os vetores. Como sensores de referência foram adotados todos os sensores disponíveis no arranjo para ambos os diagramas, e para o número de intervalos de tempo (i) foram considerados 50 e 40 para os métodos **SSI-DATA** e **SSI-COV**, respectivamente. Como número de amostras foi adotado 16.384 para criação de ambos os diagramas.

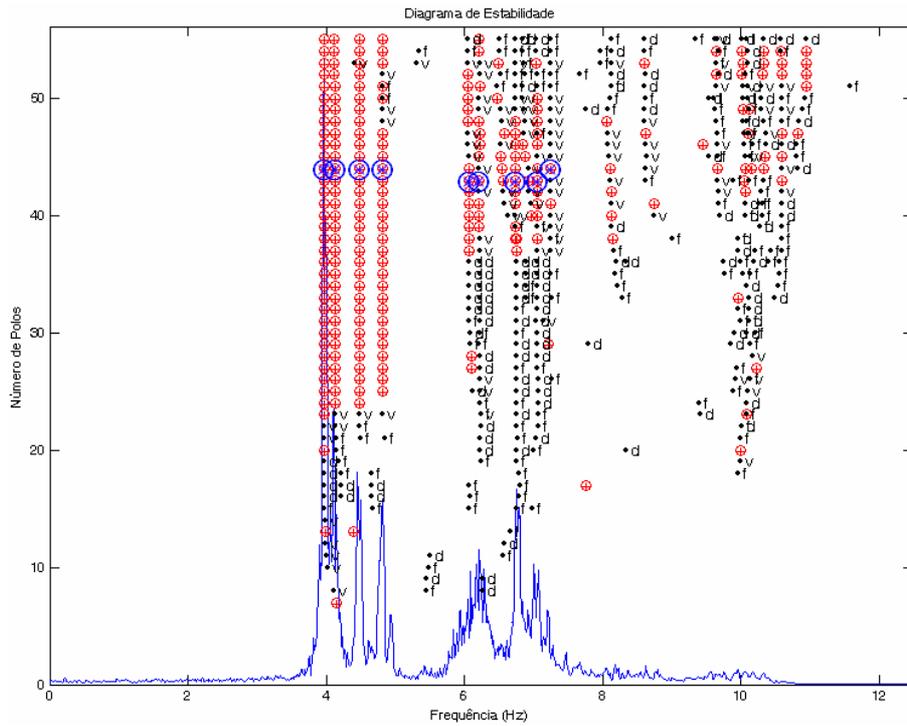


Figura 5-38 - Diagrama de estabilidade criado na segunda etapa de identificação com método SSI-DATA para identificação do arranjo A1 do segmento 10-11

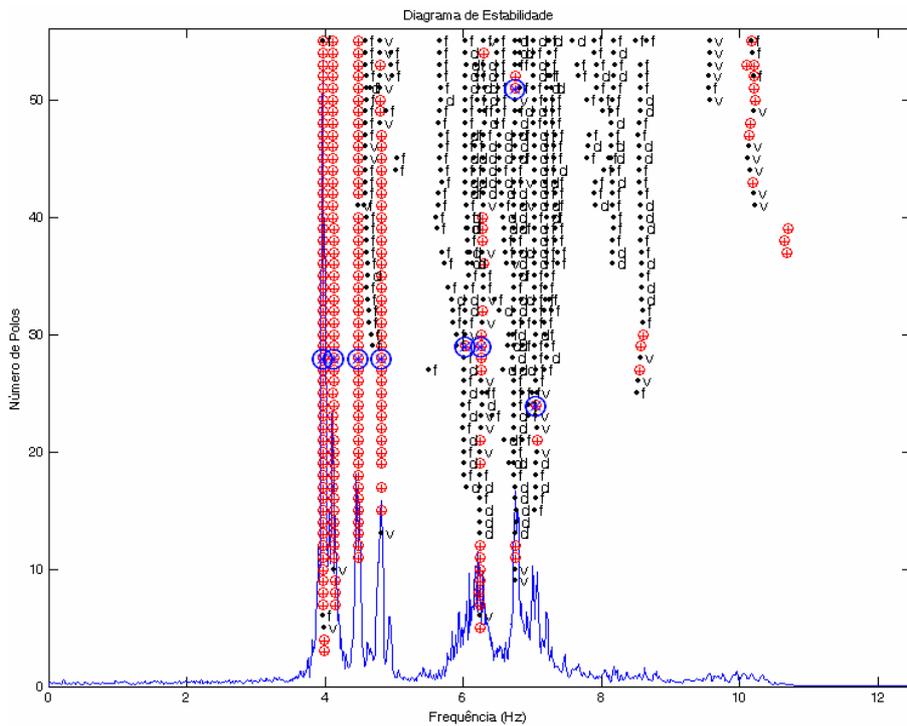


Figura 5-39 - Diagrama de estabilidade criado na segunda etapa de identificação com método SSI-COV para identificação do arranjo A1 do segmento 10-11

Comparando-se os resultados obtidos na primeira etapa de identificação (de 0-5 Hz) com os da segunda etapa (0-10 Hz), observa-se que os quatro primeiros modos identificados são exatamente os mesmos.

Tabela 5-8 – Comparação dos resultados experimentais obtidos com os métodos **SSI-DATA** e **SSI-COV** para o arranjo A1 do segmento 10-11

Modo	Resultados experimentais através do método SSI-DATA		Resultados experimentais através do método SSI-COV	
	Frequências naturais (Hz)	Fatores de Amortecimento (%)	Frequências naturais (Hz)	Fatores de Amortecimento (%)
1	3,971	0,8045	3,971	0,8882
2	4,114	1,0964	4,105	0,8642
3	4,473	0,5741	4,470	0,4894
4	4,819	0,9033	4,797	0,8564
5	6,070	2,4814	-	-
6	6,206	1,7620	6,241	1,6754
7	6,750	0,8714	6,753	0,6506
8	7,056	0,7217	7,032	0,5967
9	7,251	0,1569	-	-

Os resultados do processo de identificação de parâmetros para o arranjo A1 estão resumidos na Tabela 5-8 e nas Figuras 5-40 e 5-41.

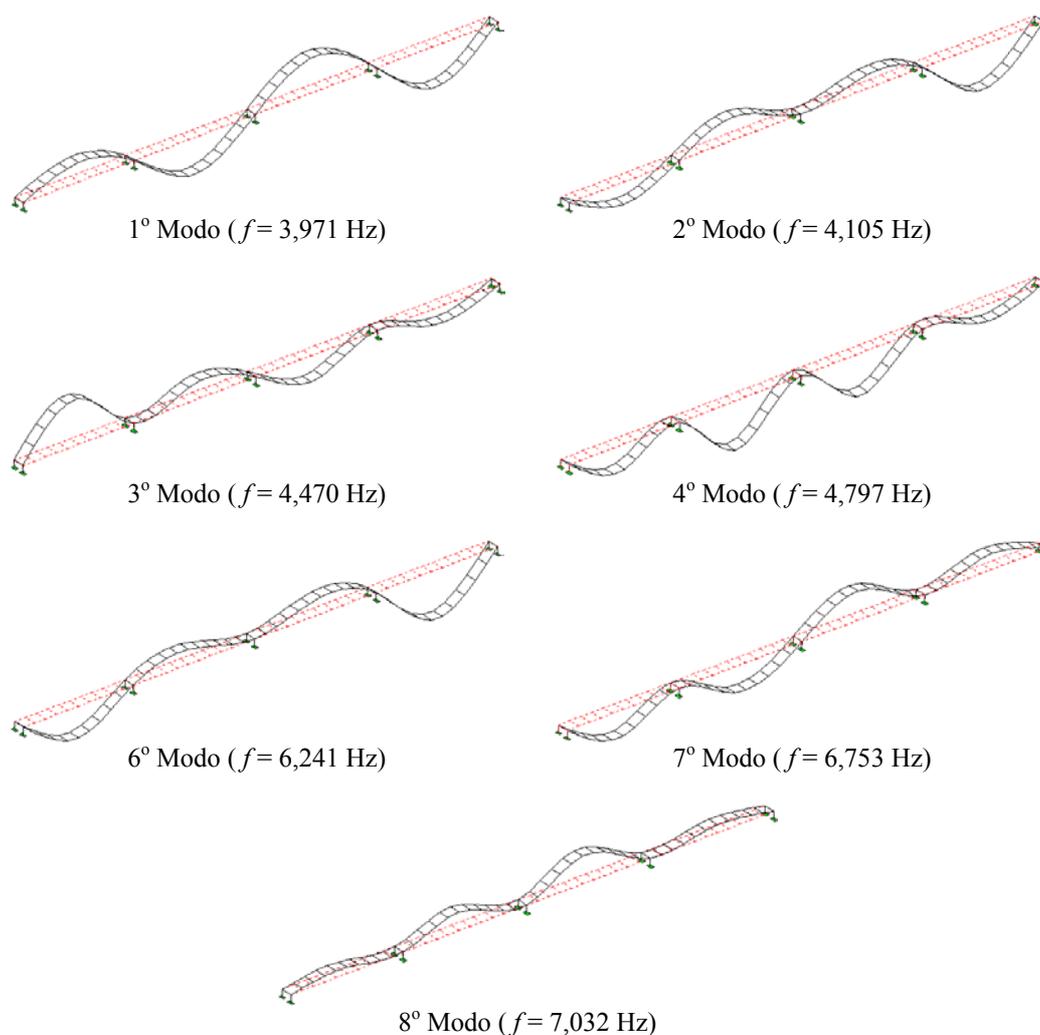


Figura 5-40 – Modos de vibração experimentais obtidos com o método **SSI-COV** para o arranjo A1 do segmento 10-11

Comparando os resultados teóricos, obtidos com o **MEF**, com os experimentais obtidos com emprego do **SSI-DATA** para o arranjo A1, verifica-se que os primeiros quatro modos determinados experimentalmente apresentam parâmetros bastante próximos de alguns desses modos teóricos, como mostra a Figura 5-42.

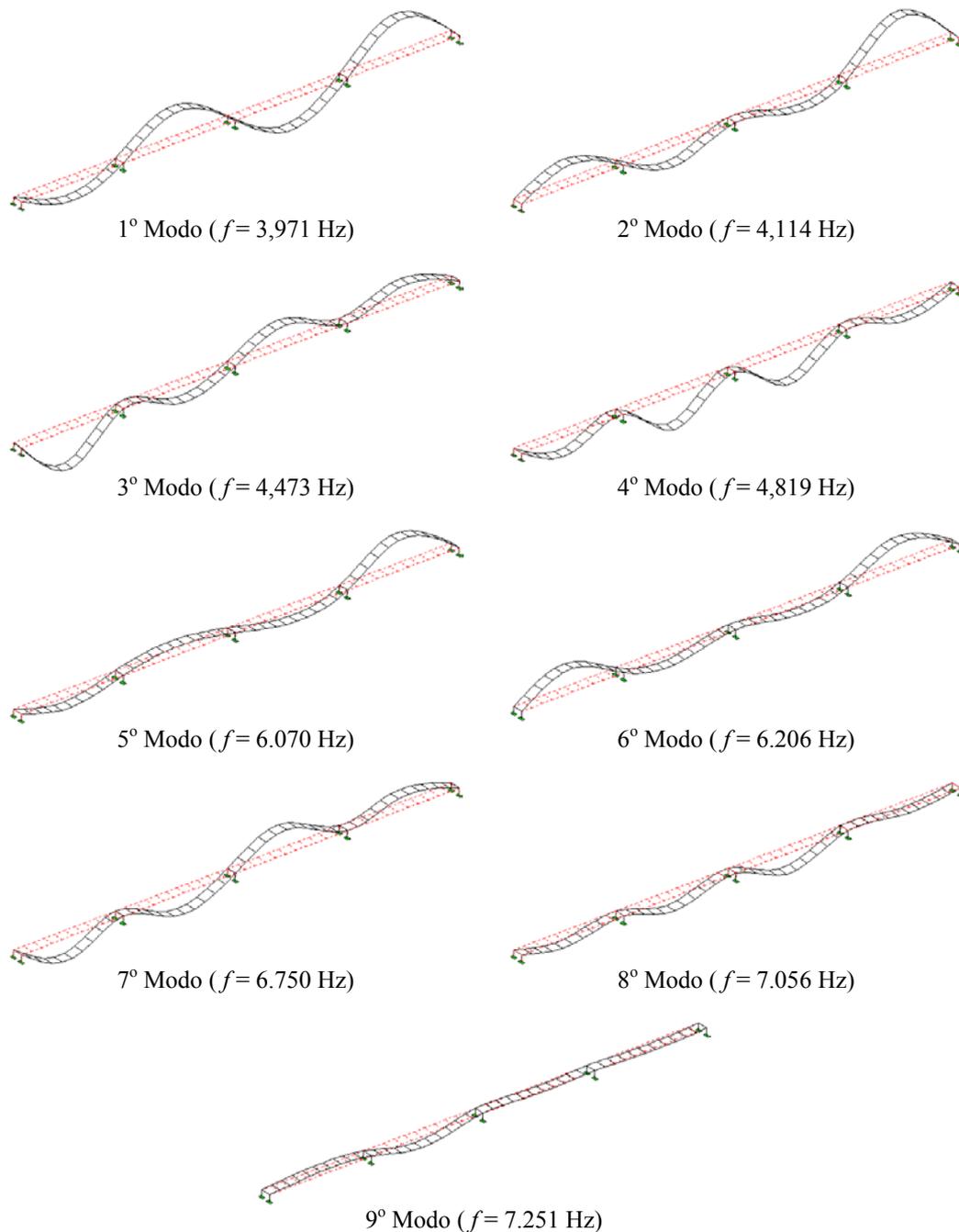


Figura 5-41 – Modos de vibração experimentais obtidos com o método **SSI-DATA** para o arranjo A1 do segmento 10-11

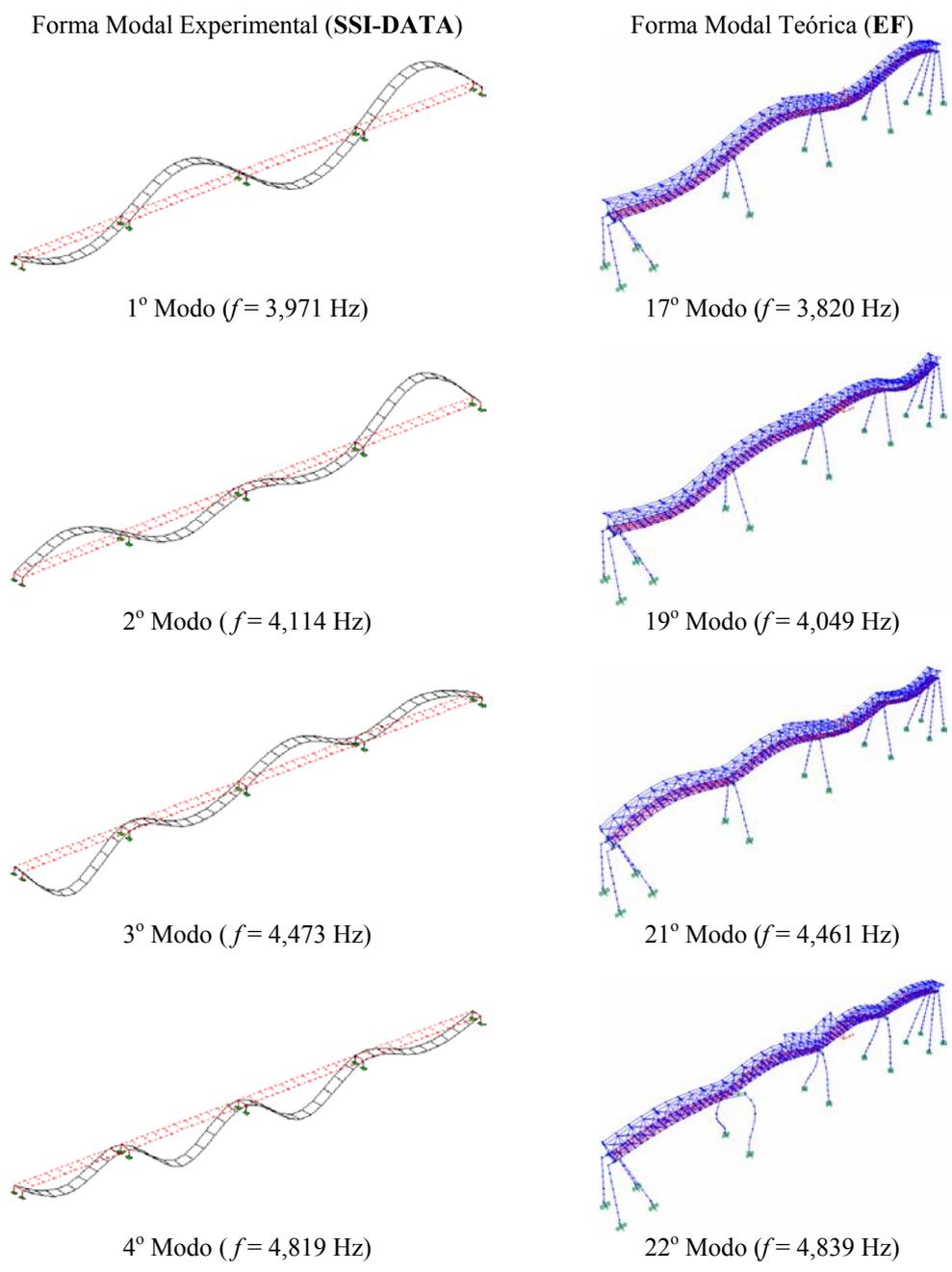


Figura 5-42 – Comparação entre os modos teóricos e experimentais obtidos para o arranjo A1 do segmento 10-11

5.3.3.3 Resultados experimentais obtidos para o segmento 11-12

Neste segmento foram realizados vários ensaios experimentais de vibração seguindo diversos arranjos. Como fonte de excitação foi utilizado um automóvel movimentando-se ao longo da ponte com velocidades de 30, 40 e 50 Km/h, e também o próprio vento. Embora as séries temporais coletadas nos ensaios de vibração fossem curtas, vários modos foram claramente identificados conforme mostrado a seguir.

5.3.3.3.1 Arranjo A1

No arranjo A1 os sensores foram instalados no meio dos vãos de modo a medir aceleração na direção Z, como mostra a Figura 5-43. As séries temporais e os respectivos espectros dos acelerômetros utilizados nesse arranjo são mostrados na Figura 5-44. Os sinais tratados mostrados na Figura 5-44 foram pré-processados e, em seguida, filtrados com emprego de um filtro passa baixa Chebyshev tipo I, com uma frequência de corte de 5.0 Hz. Com isso, a taxa de amostragem passou a ser 8 vezes menor que a taxa original do sinal.

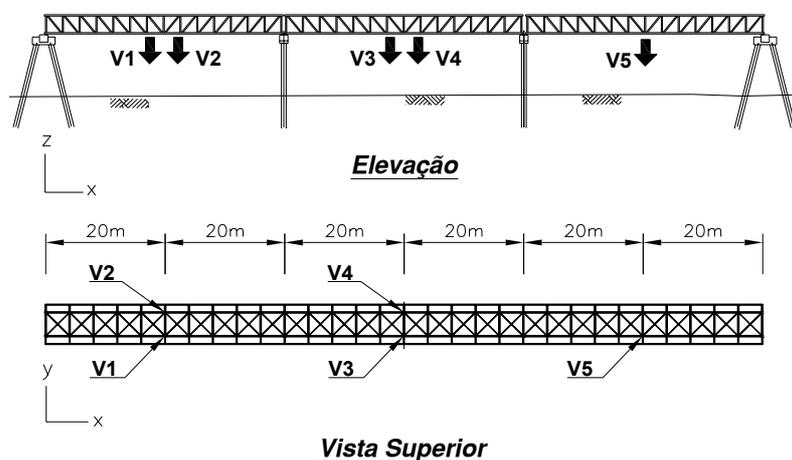
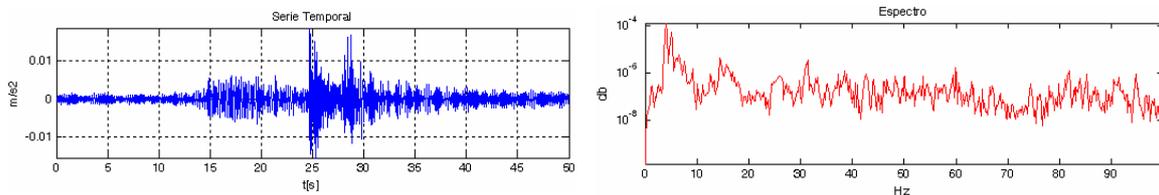


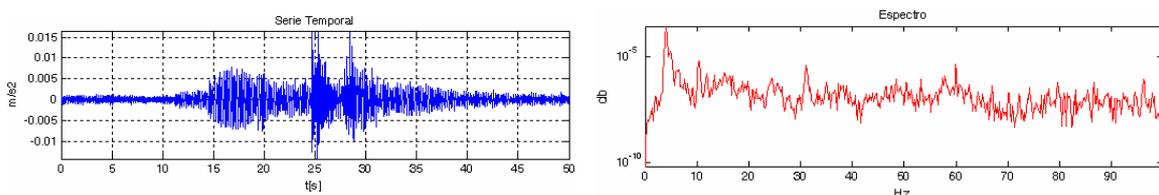
Figura 5-43 - Disposição dos acelerômetros no segmento 11-12 segundo o Arranjo A1

Após o tratamento dos sinais e adição das informações do posicionamento dos acelerômetros, foram criados os diagramas de estabilidade utilizando os métodos **SSI-DATA** e **SSI-COV**. Na construção desses diagramas a ordem do modelo variou de 2 a 50, sendo utilizados os seguintes critérios de estabilidade: 1% para as frequências, 5% para os amortecimentos, 5% para os vetores. Como sensores de referência foram

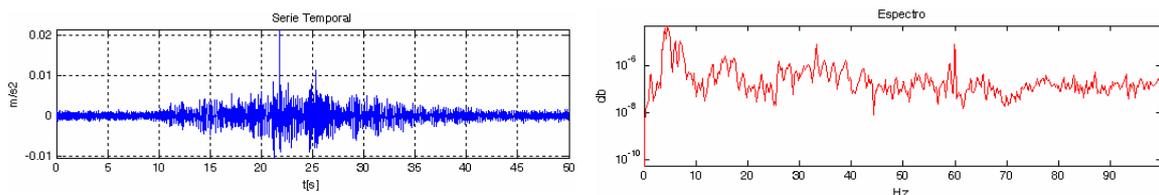
adotados todos os sensores disponíveis no arranjo para ambos os diagramas, e como número de intervalos de tempo (i) foram considerados 30 e 40 para os métodos SSI-DATA e SSI-COV, respectivamente. Os diagramas criados apresentaram os aspectos mostrados nas Figuras 5-45 e 5-46.



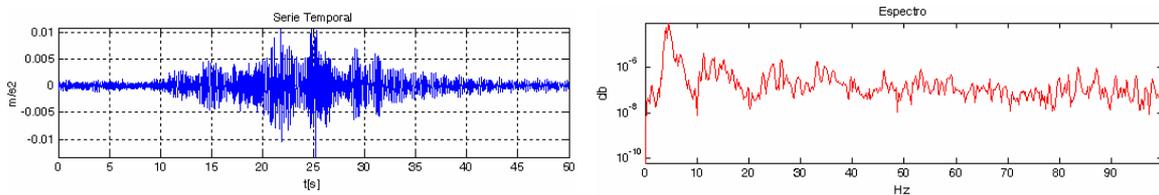
(a) Série temporal e espectro obtidos com acelerômetro **V1**



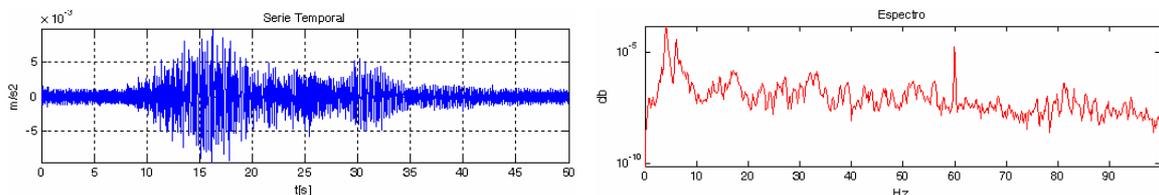
(b) Série temporal e espectro obtidos com acelerômetro **V2**



(c) Série temporal e espectro obtidos com acelerômetro **V3**



(d) Série temporal e espectro obtidos com acelerômetro **V4**



(e) Série temporal e espectro obtidos com acelerômetro **V5**

Figura 5-44 – Séries temporais e os respectivos espectros obtidos no arranjo A1 do segmento 11-12

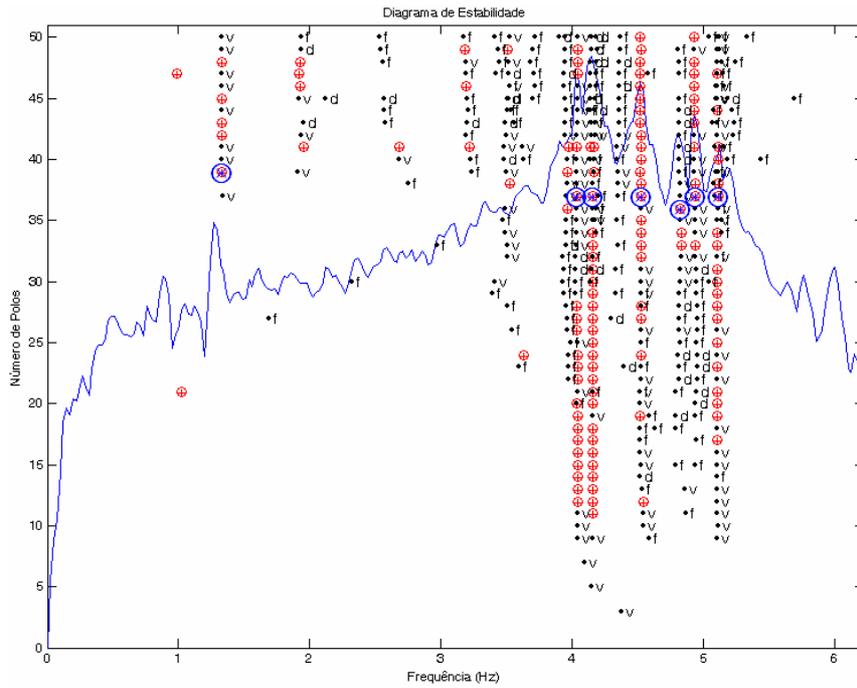


Figura 5-45 - Diagrama de estabilidade criado com método SSI-DATA para identificação do arranjo A1 do segmento 11-12

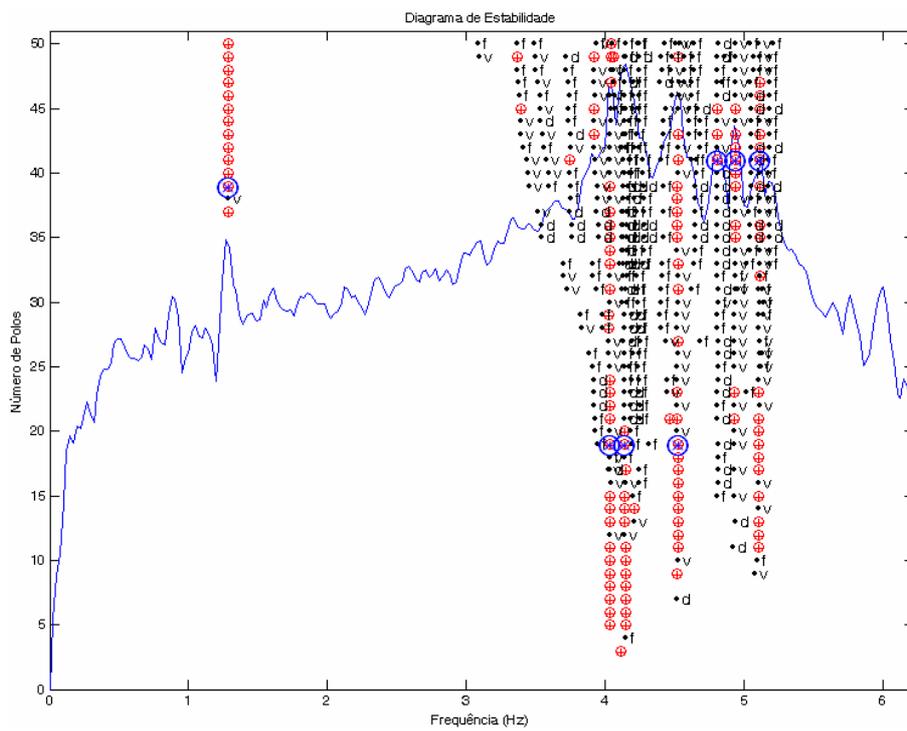


Figura 5-46 - Diagrama de estabilidade criado com método SSI-COV para identificação do arranjo A1 do segmento 11-12

Tabela 5-9 - Comparação dos resultados experimentais obtidos com os métodos **SSI-DATA** e **SSI-COV** para o arranjo A1 do segmento 11-12

Modo	Resultados experimentais através do método SSI-DATA		Resultados experimentais através do método SSI-COV	
	Frequências naturais (Hz)	Fatores de Amortecimento (%)	Frequências naturais (Hz)	Fatores de Amortecimento (%)
1	1,312	3,602	1,288	0,805
2	4,043	0,861	4,036	0,322
3	4,158	0,474	4,134	0,441
4	4,520	0,562	4,517	0,481
5	4,826	0,571	4,808	0,453
6	4,936	0,283	4,932	0,172

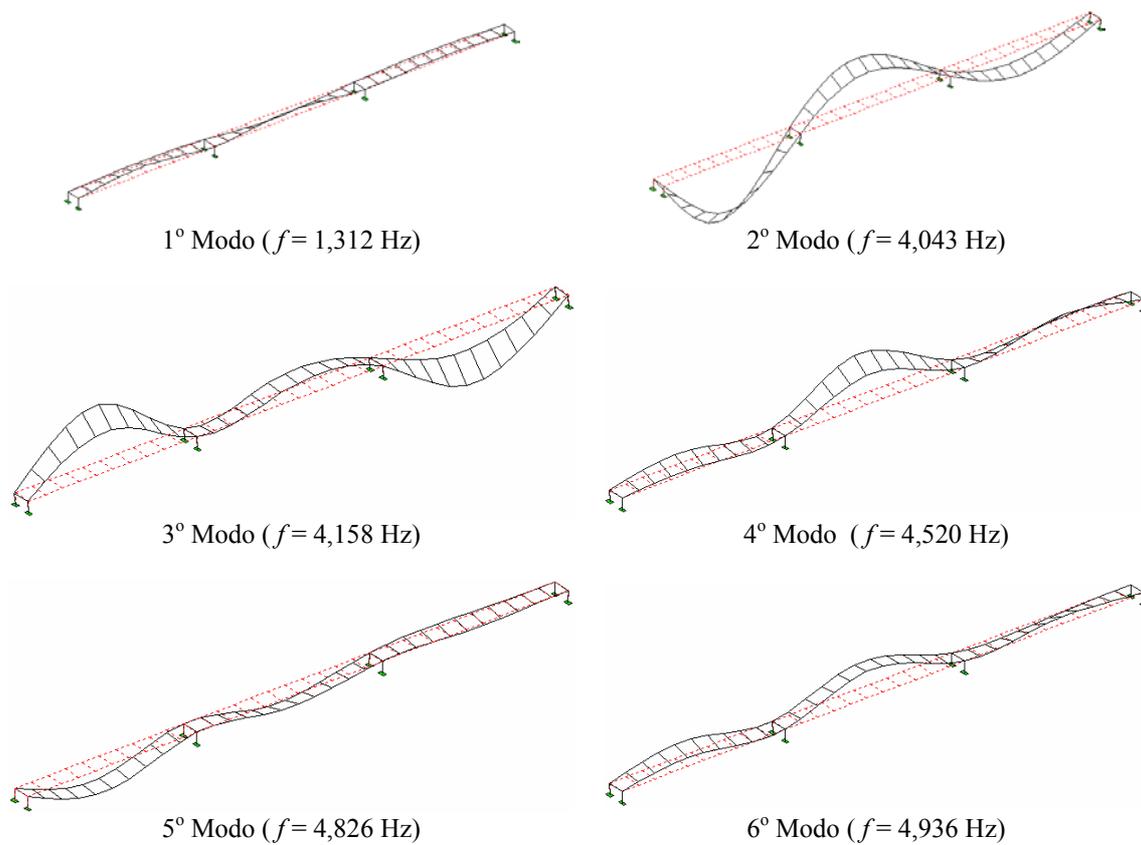


Figura 5-47 - Modos de vibração experimentais obtidos com o método **SSI-DATA** para o arranjo A1 do segmento 11-12

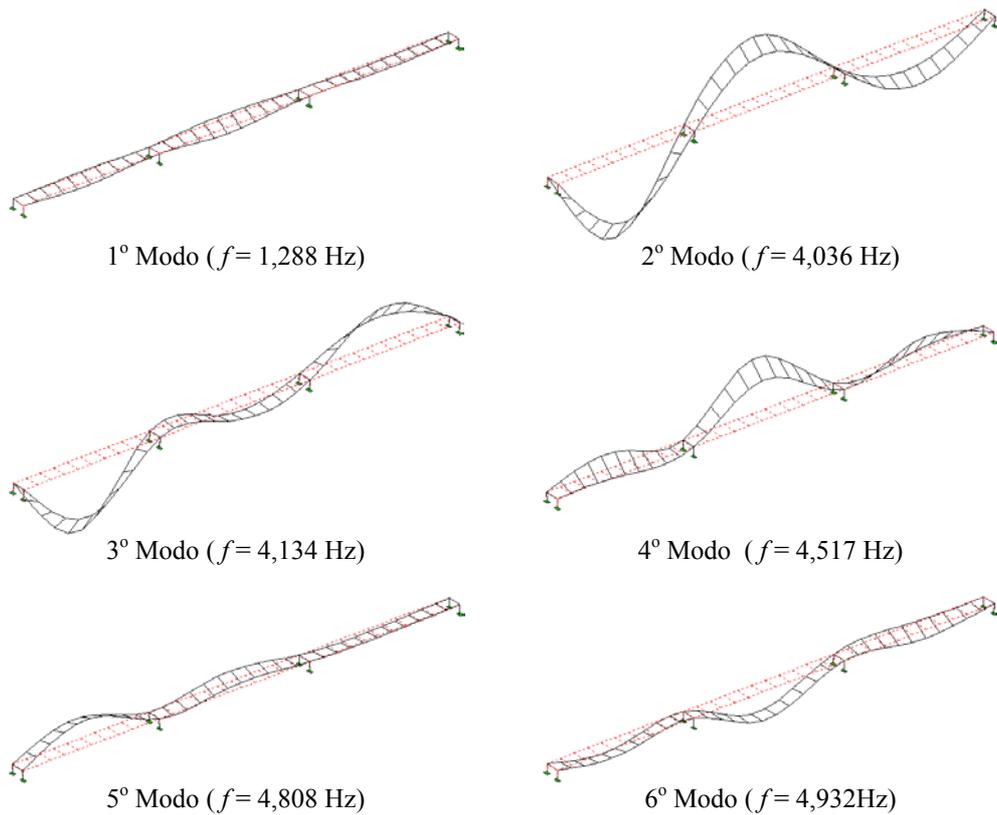
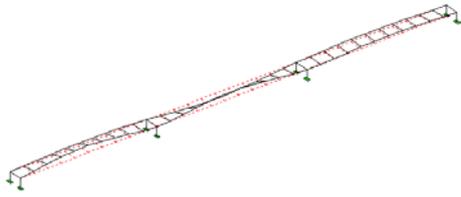


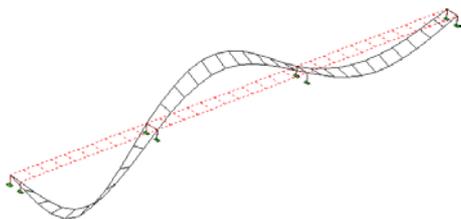
Figura 5-48 - Modos de vibração experimentais obtidos com o método **SSI-COV** para o arranjo A1 do segmento 11-12

Comparando os resultados teóricos obtidos com o **MEF** e os experimentais obtidos com emprego do **SSI-DATA** para o arranjo A1, verifica-se que os primeiros quatro modos determinados experimentalmente apresentam parâmetros bastante próximos de alguns dos modos teóricos, como mostra a Figura 5-49.

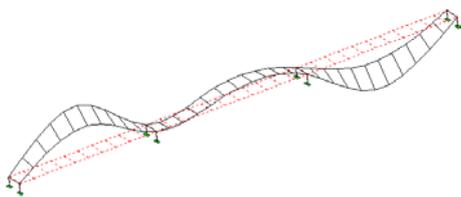
Forma Modal Experimental (SSI-DATA)



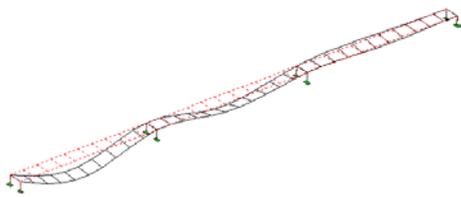
1º Modo ($f=1,288$ Hz)



2º Modo ($f=4,036$ Hz)

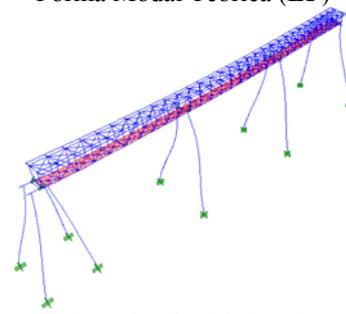


3º Modo ($f=4,158$ Hz)

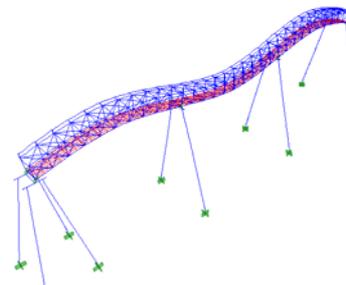


5º Modo ($f=4,826$ Hz)

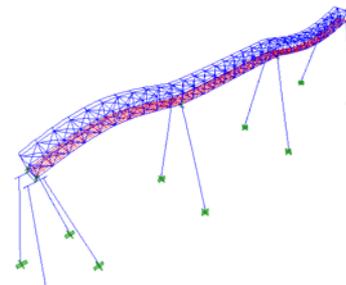
Forma Modal Teórica (EF)



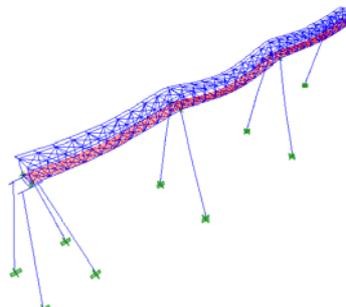
3º Modo ($f=1.250$ Hz)



17º Modo ($f=3,962$ Hz)



18º Modo ($f=4,238$ Hz)



22º Modo ($f=4,821$ Hz)

Figura 5-49 - Comparação entre os modos teóricos e experimentais obtidos para o arranjo A1 do segmento 11-12

5.3.3.3.2 Arranjo A2

No arranjo A2 do segmento 11-12 os sensores foram instalados no meio dos vãos de modo a medir aceleração na direção Y, como mostra a Figura 5-50. As séries temporais e os respectivos espectros dos acelerômetros utilizados nesse arranjo são mostrados na Figura 5-51. Nessa figura é possível observar o surgimento de um pico com frequência em torno de 60 Hz que deve ter sido introduzido no sinal pela corrente de alimentação elétrica.

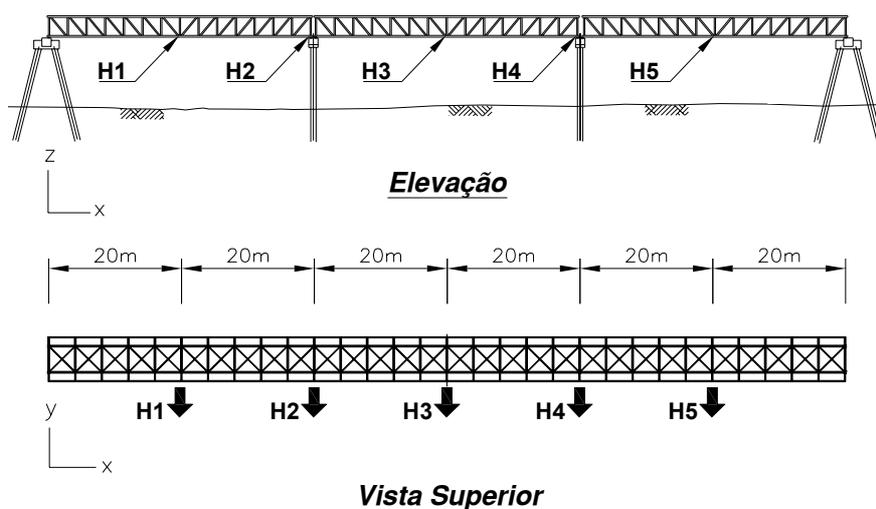


Figura 5-50 - Disposição dos acelerômetros no segmento 11-12 segundo o arranjo A2

Os sinais mostrados na Figura 5-51 foram pré-processados e, em seguida, filtrados com emprego de um filtro passa baixa Chebyshev tipo I, com uma frequência de corte de 5.0 Hz. Com esse procedimento os sinais passaram a ter um número de amostras oito vezes menor que o do sinal original. Após a redução da frequência de amostragem dois diagramas de estabilidade foram criados utilizando os métodos **SSI-DATA** e **SSI-COV** variando a ordem dos respectivos modelos de 2 a 60 e utilizando os mesmos critérios de estabilidade adotados no arranjo A1. Como sensores de referência foram utilizados todos os sensores. Os demais parâmetros adotados na construção desses diagramas foram:

- todos os sensores disponíveis no arranjo como sensores de referência;
- número de intervalos de tempo (i) igual a 40 tanto para o método **SSI-DATA** como para o **SSI-COV**; e
- número de amostras (N) igual a 512.

Os diagramas criados com esses parâmetros apresentaram os aspectos mostrados nas Figuras 5-52 e 5-53.

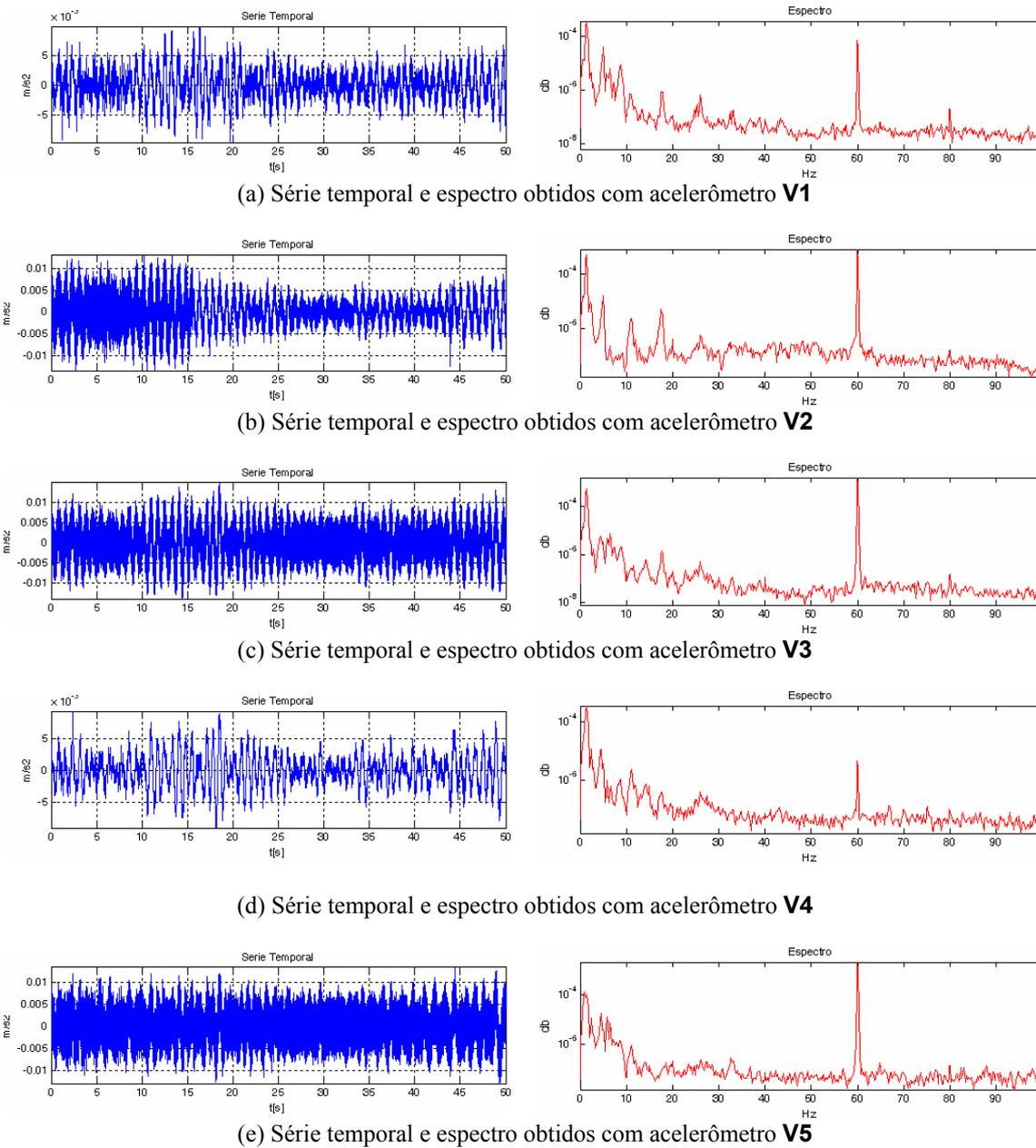


Figura 5-51 - Séries temporais e os respectivos espectros obtidos no arranjo A2 do segmento 11-12

A partir desses diagramas, foi possível identificar claramente oito modos de vibração em uma faixa de frequência de 0 a 5Hz, cujos parâmetros são apresentados na Tabela 5-10 e nas Figuras 5-54 e 5-55.

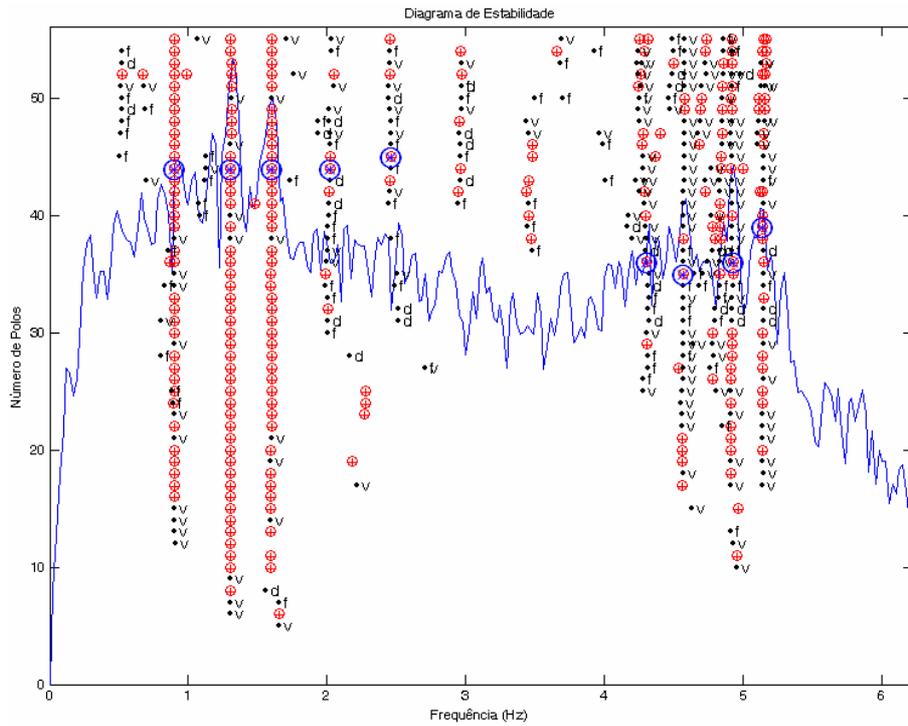


Figura 5-52 - Diagrama de estabilidade criado com método **SSI-DATA** para identificação do arranjo A2 do segmento 11-12

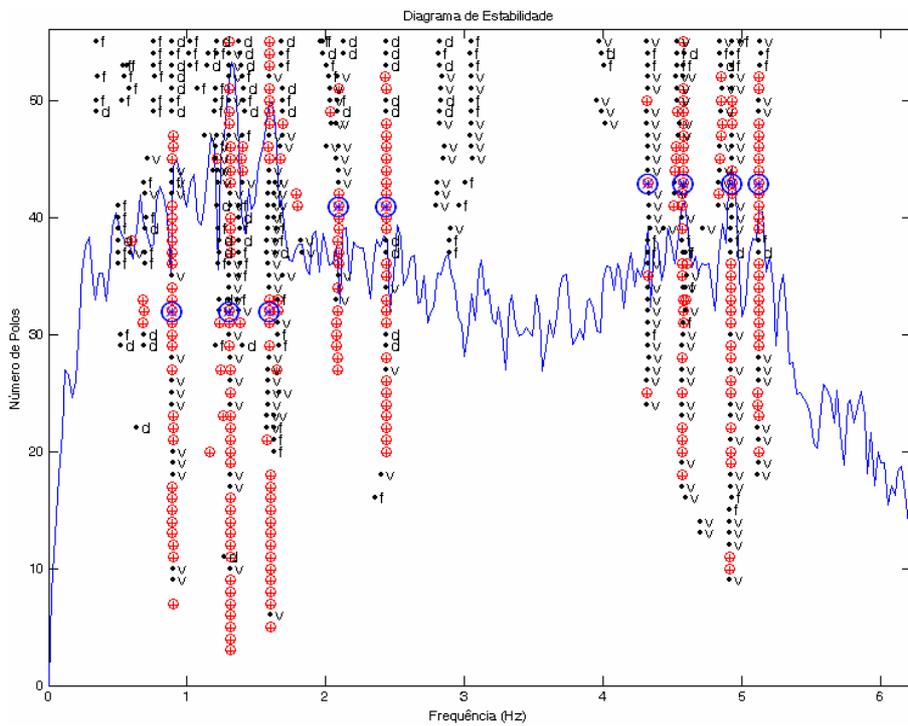


Figura 5-53 - Diagrama de estabilidade criado com método **SSI-COV** para identificação do arranjo A2 do segmento 11-12

Tabela 5-10 - Comparação dos resultados experimentais obtidos com os métodos **SSI-DATA** e **SSI-COV** para o arranjo A2 do segmento 11-12

Modo	Resultados experimentais através do método SSI-DATA		Resultados experimentais através do método SSI-COV	
	Frequências naturais (Hz)	Fatores de Amortecimento (%)	Frequências naturais (Hz)	Fatores de Amortecimento (%)
1	0,897	1,761	0,893	1,863
2	1,308	0,852	1,307	0,520
3	1,603	1,250	1,592	0,920
4	2,026	4,151	2,080	5,045
5	2,463	3,583	2,435	1,960
6	4,300	1,894	4,325	0,380
7	4,568	0,451	4,575	0,562
8	4,923	0,463	4,930	0,311

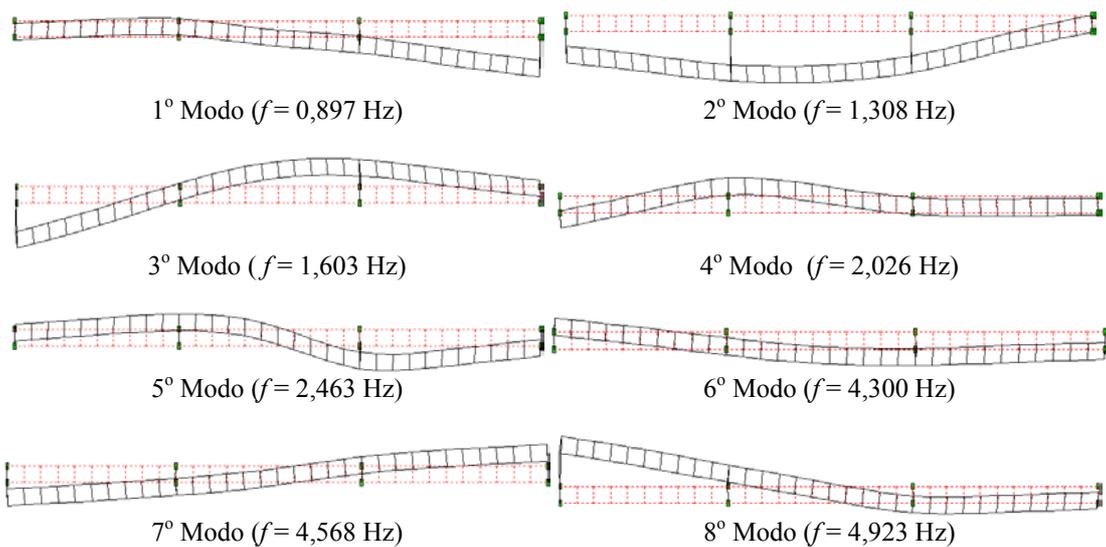


Figura 5-54 - Modos de vibração experimentais obtidos com o método **SSI-DATA** para o arranjo A2 do segmento 11-12

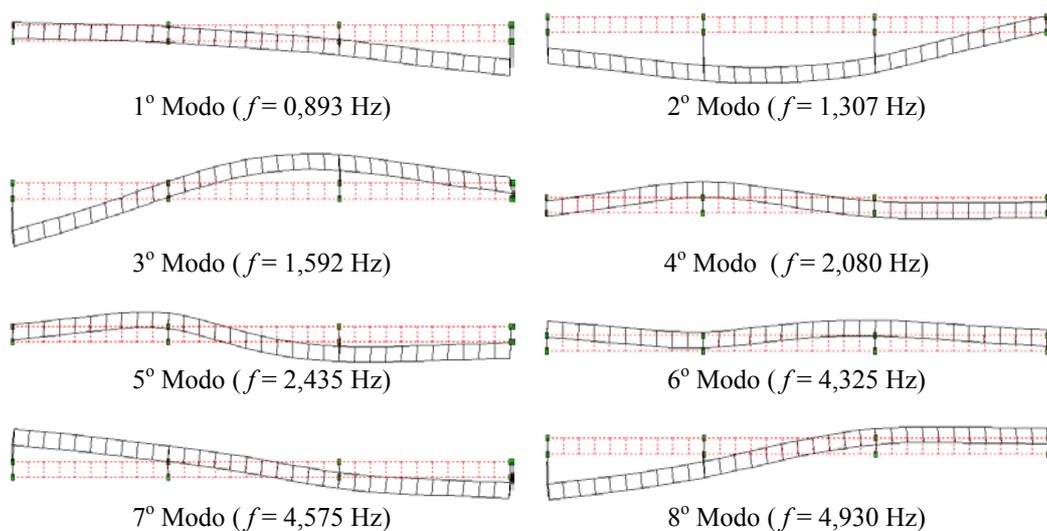


Figura 5-55 – Modos de vibração experimentais obtidos com o método **SSI-COV** para o arranjo A2 do segmento 11-12

Comparando os resultados teóricos obtidos com o **MEF** e os experimentais obtidos com emprego do **SSI-DATA** para o arranjo A2, verifica-se que quatro modos determinados experimentalmente apresentam parâmetros bastante próximos de alguns dos modos teóricos, como mostra a Figura 5-56.

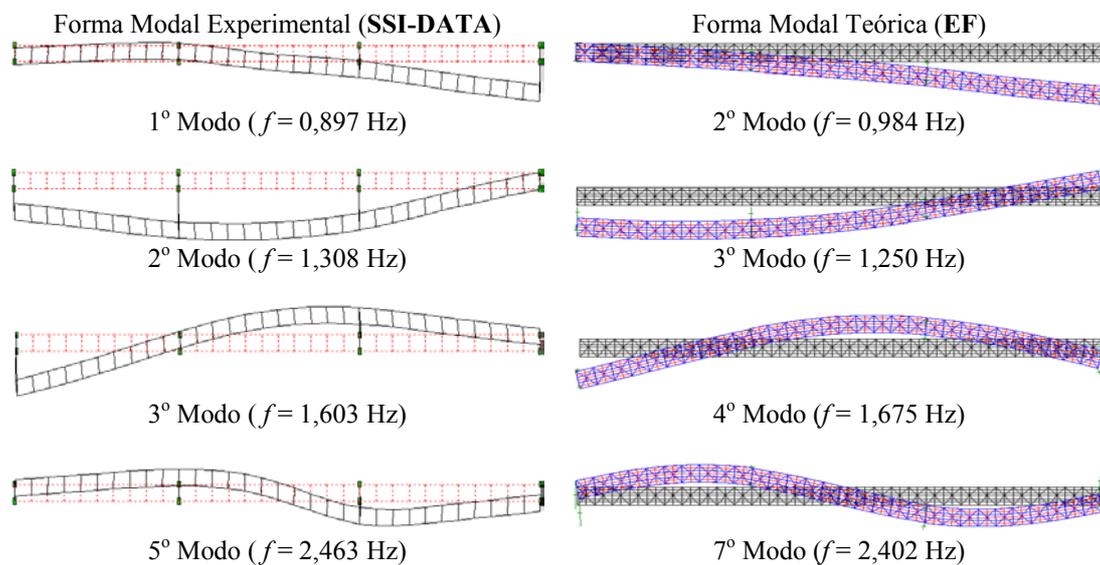


Figura 5-56 - Comparação entre os modos teóricos e experimentais obtidos para o arranjo A2 do segmento 11-12

5.3.4 Análise de Desconforto

Com identificação dos parâmetros modais da ponte, foi possível realizar a análise de desconforto da estrutura. Essa análise foi realizada considerando os limites de desconforto recomendados pela norma brasileira NBR 8800/86 (1986). Em seu anexo N – Vibrações em Pisos – essa norma estabelece limites de desconforto tanto para vibrações contínuas como também para vibrações transientes. Para o caso de vibrações senoidais contínuas que duram mais do que aproximadamente 10 ciclos, a norma estabelece um limite de percepção que é definido em termos percentuais da aceleração da gravidade (g) como mostra a Figura 5-57. No caso específico de vibrações contínuas, o conforto deve ser medido em função da média dos picos de amplitude de aceleração. De acordo com a norma, na faixa de frequência de 2 a 8 Hz, em que as pessoas são mais sensíveis à vibração, o valor médio das amplitudes dos picos não deve exceder a, aproximadamente, 0,5% de g , quando da ocorrência de vibrações contínuas.

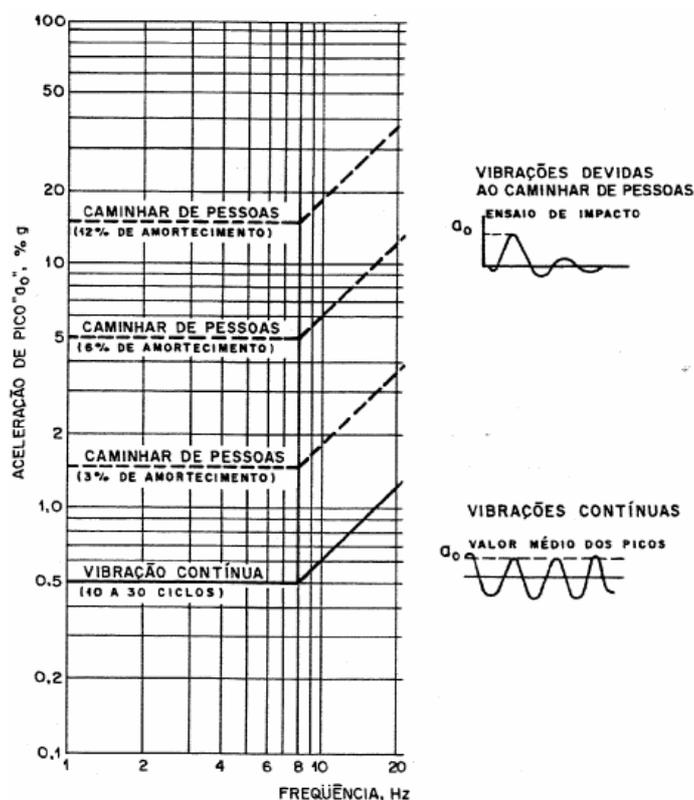


Figura 5-57 – Limites de desconforto causados por vibrações em pisos de edifícios residenciais, escolares e comerciais, devidas ao caminhar de pessoas (NBR 8800/86)

A norma recomenda, ainda, que os limites de desconforto mostrados na Figura 5-57 devam ser considerados nos projetos de residências, escolas e escritórios. Esses limites podem ser mais baixos – cerca de 0,25% de g - para locais sensíveis como, por exemplo, salas de cirurgia e laboratórios, ou mais elevados – em torno de 0,75% g - no caso de ocupações industriais. No caso da estrutura da ponte do TGL, na faixa de 0 a 8 Hz, as maiores amplitudes de aceleração foram encontradas nas séries temporais obtidas com arranjo A1 adotado nos ensaios do segmento 10-11. A maior dessas amplitudes foi observada no sensor V1, como mostra a Figura 5-58. Embora a amplitude máxima de aceleração no sensor V1 seja bastante superior ao limite recomendado pela NBR 8800 (1986), verifica-se que a média das amplitudes é de 0,19% de g . Sendo, portanto, bastante inferior ao limite de desconforto de ocupações industriais que é de 0,75% de g .

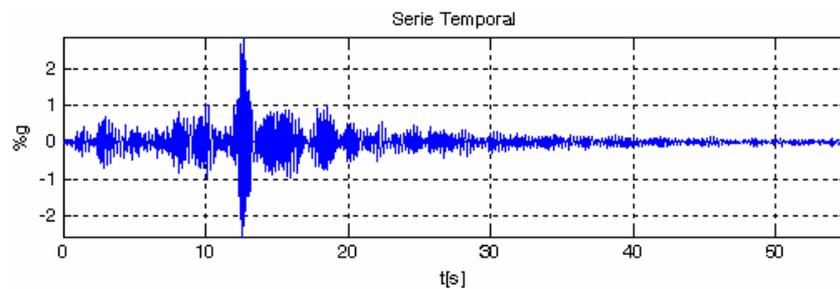


Figura 5-58 – Maior amplitude de aceleração observada no sensor V1

CAPÍTULO 6

Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

6.1 INTRODUÇÃO

Após inúmeras análises realizadas com emprego de ferramentas de análises como o **MEF** e os métodos **SSI-DATA** e **SSI-COV**, foram obtidos resultados bastante satisfatórios que auxiliaram na investigação do comportamento dinâmico das duas estruturas metálicas analisadas nesse trabalho. O programa de identificação desenvolvido na plataforma Matlab® forneceu resultados precisos na identificação modal das estruturas metálicas estudadas, mesmo com a presença de uma considerável razão sinal-ruído nos sinais coletados nos respectivos ensaios experimentais de vibração. Essa eficiência foi constatada na determinação dos parâmetros da torre que, devido à simetria na sua geometria, possui modos de vibração com frequências naturais muito próximas entre si.

A seguir são apresentadas as principais conclusões obtidas nas análises realizadas nesse trabalho.

6.2 CONCLUSÕES

A utilização da plataforma Matlab® proporcionou a elaboração de um programa com uma interface que, apesar de simples, facilita bastante o processo de identificação de parâmetros através dos métodos estocásticos **SSI-DATA** e **SSI-COV**. Com relação às técnicas numéricas utilizadas no programa, observou-se uma demanda de tempo razoavelmente grande no processamento de séries temporais longas, sobretudo no módulo de identificação, quando a **SVD** e a fatoração **QR** são executadas. Dependendo do tamanho das séries temporais e do intervalo (i) utilizados na identificação de parâmetros, o tempo necessário para calcular a **SVD** e a fatoração **QR** pode chegar a, respectivamente, 20% e 50% do tempo total gasto no processo de identificação.

No que diz respeito aos métodos estocásticos em espaço de estado, observou-se grande robustez e precisão no processo de extração de parâmetros a partir somente das séries temporais de resposta obtidas nos ensaios de vibração. Observou-se que, quanto maior for o número de amostras dessas séries, mais precisa e robusta será a identificação dos parâmetros modais. Convém lembrar, entretanto, que há uma limitação na capacidade de processamento por parte dos microcomputadores. No microcomputador utilizado nas identificações de parâmetros das estruturas analisadas nesse trabalho (Intel® Pentium® 4 CPU 3,00 GHz com 1,00 GB de memória RAM), verificou-se que o número máximo de amostras processadas foi de 32.768.

A partir da comparação entre os dois métodos estocásticos estudados, verificou-se que o **SSI-DATA** forneceu resultados mais precisos que o **SSI-COV**, sobretudo quando a identificação foi realizada em faixas mais amplas de frequência como, por exemplo, de 0 a 10 Hz ou ainda de 0 a 20 Hz. Uma possível explicação para esse fato é que, diferentemente do método **SSI-COV** que identifica os parâmetros a partir da matriz de covariância das respostas de referência, o **SSI-DATA** utiliza a projeção dos espaços das linhas dos dados das respostas futuras (Y_f) no espaço das linhas das respostas de referência passadas (Y_p^{ref}). Isso conduz a uma identificação mais robusta e precisa uma vez que, ao contrário do que ocorre no **SSI-COV**, os dados de resposta não são elevados ao quadrado.

Nas análises realizadas com os métodos estocásticos verificou-se que, quanto mais excitados forem os modos nos ensaios de vibração, mais rapidamente esses modos estabilizam no diagrama de estabilidade e, conseqüentemente, eles podem ser identificados com maior precisão. Para estes casos não há necessidade de variar a ordem do modelo até valores altos para construir os diagramas de estabilidade, uma vez que os modos identificados começam a estabilizar em ordens muito baixas. Outro fator que pode influenciar, positiva ou negativamente, na eficiência da identificação de parâmetros através dos métodos estocásticos estudados é a escolha do número de intervalos (i). Nas identificações de parâmetros realizadas, esse número variou em uma faixa de 30 a 60. Um outro fator que pode ser decisivo no sucesso da identificação de parâmetros é a escolha dos sensores de referência. Se a escolha desses sensores for inadequada, as formas modais obtidas na identificação possivelmente não

corresponderão às formas modais reais da estrutura. Além disso, alguns modos de vibração possivelmente não serão identificados.

Com relação às análises do comportamento modal da torre, observa-se que os parâmetros modais teóricos e experimentais apresentam boa concordância entre si somente nos três primeiros modos de vibração. Observa-se, entretanto, que os parâmetros dos demais modos obtidos em ambas as análises se afastam à medida que as respectivas frequências aumentam. Uma possível explicação para essa discrepância é que somente a massa dos feixes de cabos condutores foi introduzida no modelo em **EF** nos nós em que eles estão conectados, enquanto que as suas respectivas rigidezes foram desprezadas nesse modelo. Com base nas simulações computacionais da torre isolada e nos resultados da análise modal experimental constatou-se uma considerável influência dos cabos no comportamento modal da torre, sobretudo nos modos com frequências naturais situadas acima de 2 Hz. Analisando os parâmetros modais obtidos, constata-se que, apesar da primeira frequência estar situada na parte descendente da curva da densidade do espectro de potência do vento mostrado na Figura 5-2, não é possível assegurar que a estrutura não sofra danos ao longo do tempo com a incidência de rajadas de vento com frequências acima de 1 Hz. Muito embora a probabilidade da ocorrência de rajadas com essas frequências seja muito pequena.

Com relação ao estudo dos níveis de vibração da ponte do **TGL**, as principais conclusões são:

- Sob excitação ambiente (ação do vento e passagem de veículos), os modos mais relevantes, do ponto de vista do desconforto, são os verticais orientados na direção do eixo Z;
- Os modos mais relevantes, de acordo com a participação de massa, são os laterais orientados na direção do eixo Y;
- os maiores desconfortos medidos não ultrapassam os limites estabelecidos na norma Brasileira NBR 8800 (1986), caso sejam considerados os padrões de desconforto para ocupações industriais;

- apesar das frequências da estrutura estarem situadas na parte descendente da curva da densidade do espectro de potência do vento, mostrado na Figura 5-2, não é possível assegurar que a estrutura não sofra danos ao longo do tempo com a incidência de rajadas de vento com frequências acima de 0,5 Hz. Muito embora a probabilidade da ocorrência de rajadas com essas frequências seja muito pequena;
- comparando-se os fatores de amortecimento experimentalmente obtidos através dos métodos **SSI-DATA** e **SSI-COV** nas análises realizadas, verifica-se que, quanto mais excitados forem os modos, mais próximos entre si estarão os valores do fatores de amortecimento calculados por ambos os métodos; e
- quanto mais excitados forem os modos de vibração de certa estrutura, mais eficiente e precisa será a identificação de seus parâmetros modais através dos métodos estocásticos **SSI-DATA** e **SSI-COV**.

6.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Com relação ao programa de identificação através dos métodos baseados em subespaços estocásticos sugere-se que:

- os métodos estocásticos **SSI-DATA** e **SSI-COV** sejam implementados em outra plataforma com melhor desempenho computacional como Visual C++;
- o programa criado neste trabalho seja aperfeiçoado e adaptado para análise modal automática utilizando os dados de resposta oriundos de um sistema de monitoração *on-line*;
- o módulo de identificação de parâmetros seja aperfeiçoado de maneira que o operador possa selecionar todas as formas modais parciais previamente determinadas para cada um dos arranjos, e, em seguida, uniformizar as escalas dessas formas parciais, de tal sorte que a forma modal completa da estrutura ensaiada seja determinada;

- as escalas das formas modais parciais obtidas em cada um dos arranjos adotados nos ensaios de vibração sejam uniformizadas, permitindo que a forma modal completa seja obtida posteriormente a partir dessas formas modais parciais.
- sejam implementadas outras técnicas de tratamento de sinais visando reduzir as imprecisões e ruídos nos sinais coletados nos ensaios de vibração, para que a identificação de parâmetros através dos métodos **SSI-DATA** e **SSI-COV** seja ainda mais precisa e robusta.

No que se refere ao estudo do comportamento modal da torre da travessia do rio Guamá, sugere-se que:

- o modelo em **EF** seja aperfeiçoado de modo que possa reproduzir com maior precisão o comportamento dinâmico da torre. Para tanto recomenda-se que as rigidezes dos feixes de cabos condutores sejam consideradas de forma precisa no modelo da torre utilizando o elemento baseado na formulação co-rotacional (De-Souza, 2000);
- seja avaliada com maior precisão a influência dos cabos condutores no comportamento dinâmico da torres;
- seja realizada uma análise transiente com a simulação do carregamento do vento variando no tempo, visando determinar as amplitudes máximas dos deslocamentos, assim como os níveis máximos das deformações e dos esforços nas barras; e
- sejam realizados ensaios periódicos na torre visando identificar as mudanças nas assinaturas dinâmicas da estrutura visando prever, com certa antecedência, a ocorrência de acidentes e até o colapso da estrutura, evitando assim, instabilidades no fornecimento de energia.

Para o estudo da ponte do **TGL** propõe-se que sejam realizadas as seguintes atividades:

- monitoramento durante a incidência de ventos fortes, principalmente, quando da ocorrência de tempestades na área do píer do TGL;
- sejam realizados novos ensaios nos quais os cuidados quanto à duração mínima e quanto à conservação do posicionamento dos sensores de referência nos diversos arranjos sejam observados;
- seja realizada uma análise transiente com a simulação do carregamento do vento e da pressão da água nas estacas variando no tempo, visando determinar as amplitudes máximas das acelerações e deslocamentos, assim como os níveis máximos das deformações e dos esforços nas barras; e
- que os resultados obtidos nas simulações propostas no item anterior sejam avaliados de acordo com os limites de desconforto estabelecidos em normas nacionais e internacionais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alam, M. J. e A. R. Santhakumar. Reliability Analysis and Full-scale Testing of Transmission Tower. **Journal of Structural Engineering**, p.338-344. 1996.

Al-Bermani, F. G. A. e S. Kitipornchai. Nonlinear Analysis of Transmission Line Towers. **Engineering Structures**, v.14, n.3, p.139-151. 1992.

Allemang, R. J. **Vibrations: Experimental Modal Analysis, Course Notes**. Seventh edition, Structural Dynamics Research Laboratory, University of Cincinnati, OH, USA, 1999.

Alonso, U. R. **Dimensionamento de Fundações Profundas**. São Paulo, SP: Ed. Edgard Blücher Ltda. 1989

Amador, S. D. R., L. A. C. Veloso, R. M. De Souza e J. R. F. Aguilera. **Full-Scale Experimental Modal Analysis of an Overhead Transmission Line Tower Crossing Guamá River in The Amazon Region**. Thirteenth International Congress on Sound and Vibration (ICSV13). Vienna, Austria, 2006. p.

Ambrosini, R. D., J. D. Riera e R. F. Danesi. Analysis of Structures Subjected to Random Wind Loading by Simulation in the Frequency Domain. **Probabilistic Engineering Mechanics**, n.17, p.233-239. 2002.

Andersen, P. **Identification of Civil Engineering Structures Using Vector ARMA Models**. (PhD Thesis). Aalborg University, Aalborg, Denmark, 1997.

Asmussen, J. C. **Modal Analysis Based on the Random Decrement Technique - Application to Civil Engineering Structures**. (PhD Thesis). Department of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, Denmark, 1997.

Balendra, T. **Vibration of Buildings to Wind and Earthquake Loads**. London, UK: Springer-Verlag. 1993

Battista, R. C., R. S. Rodrigues e M. S. Pfeil. Dynamic Behavior and Stability of Transmission Line Towers under Wind Forces. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, n.91, p.1051-1067. 2003.

Benveniste, A. e J. J. Fuchs. Single Sample Modal Identification of a Non-stationary Stochastic Process. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.1, n.30, p.66-74. 1985.

Blessmann, J. **Acidentes Causados Pelo Vento**. Rio Grande do Sul, RS, Brasil. 2003

Brasiliano, A. S. **Identificação de Sistemas e Atualização de Modelos Numéricos com Vistas à Avaliação de Modelos Numéricos**. (Tese de Doutorado). Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2005.

Brownjohn, J. M. W., A. A. Dumanoglu e C. A. Taylor. Dynamic Investigation of a Suspension Footbridge. **Engineering Structures**. 16: 395-406 p. 1994.

Caldas, S. LT 230 kV Caxipó/Sinop - Acidente Provocado por Vento com Velocidade Superior a 100 km/h no estado do Mato Grosso: Centrais Elétricas do Norte do Brasil S/A - Eletronorte, Brasília, 2004: apresentação power point p. 2004.

Chen, C. **Linear System Theory and Design**. New York, NY: Holt Rinehart and Winston. 1984

Chen, S. R. e C. S. Cai. Evolution of long span bridge response to wind-numerical simulation and discussion. **Computers and Structures**, n.81, p.2055-2066. 2003.

Chopra, A. K. **Dynamics of Structures - Theory and Applications to Earthquake Engineering**. New Jersey: Prentice Hall. 1995

Clough, R. W. e J. Penzien. **Dynamics of Structures**: McGraw-Hill. 1993

Cook, R. D., D. S. Malkus e M. E. Plesha. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**: John Wiley & Sons. 1989

Csi. Analysis Reference Manual, For SAP2000®, ETABS®, and SAFE™. Berkeley, California, USA: Computers and Structures, Inc. 2005.

Cunha, A., E. Caetano, R. Brincker e P. Andersen. **Identification from the Natural Response of Vasco da Gama Bridge**. 22nd International Modal Analysis Conference (IMAC). Dearborn, Michigan, 2004. p.

Cunha, A. J. P., N. A. Lima e V. C. M. Souza. **Acidentes Estruturais na Construção Civil**. Brasil: Editora Pini, v.1. 1998

De-Souza, R. M. **Force-based Finite Element for Inelastic Large Displacement Analysis of Frames**. (Ph. D. Thesis). University of California at Berkeley, California, USA, 2000.

De-Souza, R. M. Desenvolvimento de um Sistema para Análise de Segurança e Monitoração On-line para Previsão de Falhas Estruturais de Torres de Linhas de Transmissão: Formulário de Projeto da ANEEL p. 2002.

Diana, G., S. Bruni, F. Cheli, F. Fossati e A. Manenti. Dynamic analysis of the transmission line crossing Lago Maracaibo. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v.76, n.74, p.977-986. 1998.

Ding, Q. e P. K. K. Lee. Computer Simulation of Buffeting Actions of Suspension Bridges Under Turbulent Wind. **Computer and Structures**: 787-797 p. 2000.

El-Ghazaly, H. A. e H. A. Al-Khaiat. Analysis and Design of Guyed Transmission towers - case study in Kuwait. **Computers and Structures**. 55: 413-431 p. 1995.

Estefani, C., J. L. Brito e G. N. Doz. **Passarela de Pedestres: Análise das vibrações Induzidas**. Universidade de Brasília, Brasília, DF, 2002.

Ewins, D. J. **Modal Testing: Theory and Practice**. England: Research Studies Press LTD. 1984

Fan, J., Z. Zhang e H. Hua. Data Processing in Subspace Identification and Modal Parameter Identification of an Arch Bridge. **Mechanical Systems and Signal Processing**: 1674-1689 p. 2007.

Feng, M. Q. e R. Zhang. Wind-Induced Vibration Characteristics of Nanjing TV Tower. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v.32, n.4, p.693-706. 1997.

Ferreira-Neto, L. S. **Um Método para Análise Modal de Estruturas Submetidas a Excitações Ambientais**. (Dissertação de Mestrado). Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 2005.

Fujino, Y. Vibration, control and monitoring of long-span bridges - recent research, developments and practice in Japan. **Journal of Constructional Steel Research**, n.58, p.71-97. 2002.

Glad, T. e L. Ljung. **Control Theory - Multivariate and Nonlinear Methods**: Taylor and Francis. 2000

Glanville, M. J. e K. C. S. Kwok. Wind-induced deflections of free-standing lattice towers. **Engineering Structures**. 19: 79-91 p. 1997.

Holmes, J. D., B. L. Schafer e R. W. Banks. Wind-Induced Vibration of a Large Broadcasting Tower. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v.41, n.44, p.2101-2109. 1992.

Kang, C. C. e C. Y. Lo. An inverse vibration analysis of a tower subjected to wind drags on a shaking ground. **Applied Mathematical Modeling**: 517-528 p. 2002.

Kaplan, W. **Advanced Mathematics for Engineers**. USA: Addison-Wesley publishing co. 1981

Koh, B. H. e S. J. Dyke. Structural Health Monitoring for Flexible Bridges Structures Using Correlation and Sensitivity of Modal Data. **Computers and Structures**. 85: 117-130 p. 2007.

Krauthammer, T. A Numerical Study of Wind-induced Tower Vibrations. **Computers and Structures**. 26: 233-241 p. 1987.

Lay, D. C. **Álgebra Linear e Suas Aplicações**: Editora LTC. 1999

Lee, J. W. e J. D. Kim. Health Monitoring for Bridges Under Ordinary Traffic Loadings. **Journal of Sound and Vibration**, v.257, n.2, p.247-264. 2002.

Loredo-Souza, A. M. e A. L. Davenport. **Resposta de Torres de Transmissão à Ação do Vento**. XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural. Punta Del Este, Uruguai, 2000. p.

Maeck, J. **Damage Assessment of Civil Engineering Structures by Vibration Monitoring**. (Ph. D. thesis). Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, Belgium,, 2003.

Maia, N., J. Silva, J. He, N. Lieven, R. Lin, G. Skigle, W. To e A. Urgueira. **Theoretical and Experimental Modal Analysis**. England: ed. Research Studies Press. 1996

Marthur, R. K., A. H. Shah, P. G. S. Trainor e N. Popplewell. Dynamic of a Guyed Transmission Tower System. **IEEE Transactions on Power Delivery**. PWRD-2: 908-916 p. 1987.

Mitra, S. K. **Digital Signal Processing - A Computer-Based Approach**. New York, USA: McGraw-Hill. 1998

Momomura, Y., H. Marukawa e T. Ohkuma. Wind-induced vibration of Transmission Line System. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v.41, n.44, p.2035-2046. 1992.

Momomura, Y., H. Marukawa, T. Okamura, E. Hongo e T. Ohkuma. Full-scale measurements of wind-induced vibrations of transmission line system in a mountainous area. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v.72, p.241-252. 1997.

NBR8800. **Projeto e Execução de Estruturas de Aço de Edifícios: Método dos Estados Limites**. Rio de Janeiro: ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. 1986

Nunes-Junior, O. A., A. S. Borges e J. A. Pereira. **Modal Parameters Identification Applied to Operational Data**. XXVI Iberian Latin-America Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE. Guarapari, Espirito Santo, Brazil, 2005. p.

Overschee, P. V. e B. De-Moor. **Subspace Identification for Linear Systems, Theory - Implementation - Application**. Belgium: Kluwer Academic Publishers. 1996

Ozono, S. e J. Maeda. In-plane dynamic interaction between a tower and conductors at lower frequencies. **Engineering Structures**. 14: 210-212 p. 1992.

Peeters, B. **System Identification and Damage Detection in Civil Engineering**. (Ph. D. thesis). Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, Belgium, 2000.

Peeters, B. e G. De-Roeck. **Stochastic subspace system identification of a steel transmitter mast**. The International Modal Analysis Conference. USA, 1998. 130-136 p.

Peeters, B. e C. E. Ventura. Comparative Study of Modal Analysis Techniques For Bridge Dynamic Characteristic. **Mechanical Systems and Signal Processing**. 17: 965-988 p. 2003.

Pfeil, W. **Pontes em Concreto Armado**. Rio de Janeiro, RJ: LPC Editora, v.2. 1989

Rocha, M. M., A. M. L. Souza, M. J. Paluch e G. J. Z. Núñez. **Aspectos Aerodinâmicos a Serem Considerados no Projeto de Pontes Estaiadas - Estudo de Caso: Ponte Sobre o Rio Guamá**. Simósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto. São Paulo, 2003. p.

Rodrigues, R. S., R. C. Battista e M. S. Pfeil. **Desvendando o Mecanismo Dinâmico de Colapso de Torres de Linhas de Transmissão sob Ação de Forças de Vento**. XXIX Jornadas Sud-Americanas de Ingeniería Estructural. Mendoza, Argentina, 2000. p.

Silva, E. M. L. **Relatório Técnico - Científico do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica - PIBIC CNPq e PIBIC UFPA: Modelagem Computacional do Comportamento Mecânico das Estruturas de Linhas Aéreas de Transmissão**. UFPA. Belém, PA. 2006

Simiu, E. e R. H. Scanlan. **Wind Effects on Structures: an Introduction to Wind Engineering**. USA: John Wiley & Sons, Inc. 1978

Sontag, E. D. **Mathematical Control Theory - Deterministic Finite Dimensional Systems**. NJ, USA: ed. Springer-Verlag. 1998

Trainor, P. S. G., N. Popplewell, A. H. Shah e C. K. Wong. Estimation of Fundamental Dynamic Characteristics of Transmission Line Towers. **IEEE Transactions on Power Apparatus and System**. PAS-104: 681 - 689 p. 1985.

Venkateswarlu, B., P. Harikrishna, S. S. Rajan e M. S. R. Kumar. Stochastic Gust Response of Microwave Lattice Towers. **Computers & Structures**. 52: 1031-1041 p. 1994.

Xu, Y. L., J. M. Ko e Z. Yu. Modal Analysis of Tower-Cable System of Tsing Ma Long Suspension Bridge. **Engineering Structures**. 19: 857-867 p. 1997.

Yasui, H., H. Marukawa, Y. Momomura e T. Ohkuma. Analytical Study on Wind-Induced Vibrations of Power Transmission Towers. **Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics**, v.83, p.431-441. 1999.