

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

REDUÇÃO DE ORDEM DE MODELOS MATEMÁTICOS LINEARES USANDO  
ALGORITMOS GENÉTICOS

ANDRÉ DE OLIVEIRA FERREIRA

DM: 08 / 2012

UFPA / ITEC / PPGEE  
Campus Universitário do Guamá  
Belém-Pará-Brasil  
2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ANDRÉ DE OLIVEIRA FERREIRA

REDUÇÃO DE ORDEM DE MODELOS MATEMÁTICOS LINEARES USANDO  
ALGORITMOS GENÉTICOS

DM: 08 / 2012

UFPA / ITEC / PPGEE  
Campus Universitário do Guamá  
Belém-Pará-Brasil  
2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

REDUÇÃO DE ORDEM DE MODELOS MATEMÁTICOS LINEARES USANDO  
ALGORITMOS GENÉTICOS

ANDRÉ DE OLIVEIRA FERREIRA

Dissertação Submetida à Banca  
Examinadora do Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Elétrica  
da UFPA como parte dos requisitos  
para a obtenção do Grau de Mestre  
em Engenharia Elétrica

UFPA / ITEC / PPGEE  
Campus Universitário do Guamá  
Belém-Pará-Brasil  
2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

REDUÇÃO DE ORDEM DE MODELOS MATEMÁTICOS LINEARES USANDO  
ALGORITMOS GENÉTICOS

AUTOR: ANDRÉ DE OLIVEIRA FERREIRA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO DA BANCA  
EXAMINADORA APROVADA PELO COLEGIADO DO PROGRAMA DE PÓS-  
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO  
PARÁ E JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA NA ÁREA DE SISTEMAS DE ENERGIA

APROVADA EM: 07/08/2012

BANCA EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. JOSÉ AUGUSTO LIMA BARREIROS  
(ORIENTADOR - UFPA)

---

Prof. Dr. ORLANDO FONSECA SILVA  
(MEMBRO - UFPA)

---

Prof. Dr. CARLOS TAVARES DA COSTA JÚNIOR  
(MEMBRO - UFPA)

---

Prof. Dr. JORGE ROBERTO BRITO DE SOUZA  
(MEMBRO - UFPA)

VISTO:

---

Prof. Dr. MARCUS VINICIUS ALVES NUNES  
(COORDENADOR DO PPGEE / ITEC / UFPA)

UFPA / ITEC / PPGEE

---

Ferreira, André de Oliveira.

Redução de ordem de modelos matemáticos lineares usando algoritmos genéticos / André de Oliveira Ferreira; orientador, José Augusto Lima Barreiros. – 2012.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Belém, 2012.

1. Algoritmos genéticos. 2. Otimização matemática. 3. Simulação. I. Orientador. II. Título.

CDD 22. ed. 006.31

---

**É Proibida a reprodução total ou parcial desta dissertação, a defesa da mesma foi fechada ao público, pois contém dados sigilosos.**

## **DEDICATÓRIA**

Dedico este trabalho ao Sapiientíssimo Deus criador de todas as coisas. Aos meus pais Antônio Rocha Ferreira e Elmira de Oliveira Ferreira e a todos aqueles que de maneira direta ou indireta contribuíram para meu sucesso acadêmico.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, pelo dom da vida, pela saúde, pelo saber, por tudo.

Agradeço aos meus pais pela formação de meu caráter e pelo esforço despendido em minha educação e formação. Sem o apoio incondicional deles eu não seria o que sou hoje.

Agradeço ao amigo e professor Orlando Fonseca Silva (Nick), que desde a graduação tem nos auxiliado, orientado e acreditado em nosso potencial.

Agradeço ao meu orientador, professor Barreiros, por nos aceitar como aluno do programa de pós-graduação e por acreditar em nosso potencial.

Sou grato a todos os professores, profissionais e alunos que me ajudaram no decorrer de toda a minha vida acadêmica.

Agradeço à Universidade Federal do Pará, pela oportunidade do ensino gratuito e de qualidade.

*“Ó profundidade das riquezas, tanto da sabedoria como da ciência de Deus! Quão insondáveis são os seus juízos, quão inescrutáveis os seus caminhos! Quem compreendeu a mente do Senhor? Ou quem foi o seu conselheiro? Ou quem primeiro deu a ele para que lhe seja recompensado? Porque dele e por ele e para ele são todas as coisas! Glória, pois, a ele eternamente! Amém!”*

*Hino de Adoração de Paulo (Romanos 11 ,33-36)*

# SUMÁRIO

RESUMO	i
ABSTRACT	ii
CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 – Generalidades	1
1.2 – Computação Evolutiva	2
1.3 – Objetivo do Trabalho	3
1.4 – Organização da Dissertação	4
CAPÍTULO 2 – TRABALHOS E MÉTODOS SOBRE REDUÇÃO DE ORDEM	5
2.1 – Introdução	5
2.2 – Breve Histórico	5
2.3 – Métodos Baseados na Retenção de Pólos Dominantes	6
2.3.1 – Retenção de Pólos Dominantes	6
2.3.1.1 – Redução de Modelos por Decomposição de Potência e Comparação da Resposta em Frequência	6
2.3.1.2 – Medida Qualitativa da Dominância Modal para Sistemas Contínuos	7
2.4 – Métodos Baseados nas Aproximações de Padé	7
2.5 – Métodos Baseados no Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz	7
2.5.1 – Aproximações de Routh para Reduzir a Ordem de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo	8
2.5.2 – Redução de Funções de Transferência pelo Método da Equação de Estabilidade	8
2.6 – Métodos Baseados na Representação em Espaço de Estados	9
2.7 – Métodos Baseados em Otimização	9
2.7.1 – Otimização em Redução de Sistemas Lineares	10
2.7.2 – Redução de Ordem de Sistemas Lineares Usando Técnica de	10

Minimização do erro	
2.7.3 – Redução de Modelos por Minimização da Integral do Quadrado	11
do Erro – Índices de Desempenho	
2.7.4 – Redução de Ordem por Meio de Técnica de Minimização do Erro	11
2.7.5 – Redução de Ordem no Domínio da Frequência Baseada na	11
Minimização da Norma dos Coeficientes Polinomiais do Erro	
2.7.6 – Redução de Ordem de Sistemas Dinâmicos Lineares Usando o	11
Método da Equação de Estabilidade e Algoritmos Genéticos	
2.7.7 – Redução de Modelos Baseada na Norma <i>Hankel</i> Ponderada	12
Usando Algoritmos Genéticos e sua Aplicação a Sistemas de Potência	
2.7.8 – Redução de Ordem de Sistemas Lineares Discretos Usando	12
Algoritmos Genéticos	
2.7.9 – Redução de Ordem de Sistemas MIMO Usando Algoritmos	12
Genéticos	
2.8 – Métodos Baseados na Decomposição em Subespaços de Krilov	13
2.9 – Conclusão	14
CAPÍTULO 3 – TEORIA DE ALGUNS MÉTODOS DE REDUÇÃO DE	
ORDEM BASEADOS EM OTIMIZAÇÃO	15
3.1 – Introdução	15
3.2 – Otimização em Redução de Sistemas Lineares	15
3.3 – Redução de Ordem de Sistemas Lineares Usando Técnica de	17
Minimização do Erro	
3.4 – Redução de Ordem de Sistemas Lineares Usando o Método de	19
Equação da Estabilidade e Algoritmos Genéticos	
3.5 – Redução de Ordem de Sistemas Lineares Discretos Usando	21
Algoritmos Genéticos	
3.6 – Redução de Ordem no Domínio da Frequência Baseada na	24
Minimização da Norma dos Coeficientes Polinomiais do Erro	
3.7 – Conclusão	26
CAPÍTULO 4 – ALGORITMOS GENÉTICOS	27
4.1 – Introdução	27
4.2 – O que é um Algoritmo Genético	27

4.3 – A Teoria Básica da Evolução das Espécies	27
4.4 – Breve Histórico dos Algoritmos Genéticos	28
4.5 – Funcionamento dos Algoritmos Genéticos	29
4.6 – Módulo de População	30
4.7 – Módulo de Avaliação	31
4.8 – Módulo de Seleção de Pais	31
4.9 – Operadores de Crossover e Mutação	32
4.10 – Implementação do Algoritmo Genético	33
4.11 – Conclusão	33
CAPÍTULO 5 – APLICAÇÕES E RESULTADOS	34
5.1 – Introdução	34
5.2 – Validação do Algoritmo Genético Desenvolvido	34
5.3 – Sistema de Terceira Ordem	35
5.4 – Sistema de Quarta Ordem	38
5.5 – Sistema de Quinta Ordem	41
5.6 – Sistema de Sexta Ordem	44
5.7 – Sistema de Sétima Ordem	47
5.8 – Conclusão	50
CAPÍTULO 6 – CONCLUSÕES E PROPOSTAS PARA FUTUROS TRABALHOS	51
6.1 – Conclusões	51
6.2 – Propostas para Futuros trabalhos	52
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	53

## RESUMO

Nesta dissertação apresenta-se o problema de redução de ordem de modelos dinâmicos lineares, sob o ponto de vista de otimização via Algoritmos Genéticos. Uma função custo, obtida a partir da norma dos coeficientes do numerador da função de transferência do erro entre o modelo original e o reduzido, é minimizada por meio de um algoritmo genético, com consequente cálculo dos parâmetros do modelo reduzido. O procedimento é aplicado em alguns exemplos que demonstram a validade da abordagem.

**Palavras-Chaves:** algoritmo genético, redução de ordem, otimização, modelos matemáticos.

## ABSTRACT

This dissertation presents the order reduction problem of dynamic models, from the optimization viewpoint by genetic algorithm. An objective function, obtained from the norm of the coefficients of the numerator of the error transfer function among the original and reduced model, is minimized by a genetic algorithm, with consequent calculation of the parameters of the reduced model. The procedure is applied to some examples that demonstrate the validity of the approach.

**Keywords:** genetic algorithms, order reduction, optimization, mathematical models.

# Capítulo 1

## *Introdução*

### **1.1– Generalidades**

Em diversas aplicações científicas, há a necessidade de se modelar determinado processo. A modelagem consiste, basicamente, em se traduzir os fenômenos observados no processo para uma linguagem que permita uma melhor interpretação ou entendimento. Um modelo matemático é um análogo matemático que representa algumas das características observadas em determinado sistema (Aguirre, 2000).

Em aplicações de sistemas de controle, um modelo matemático deve representar com certa precisão o comportamento dinâmico do processo ou, pelo menos, aproximá-lo de forma bem aceitável. O comportamento dinâmico, por sua vez, geralmente é descrito por equações diferenciais ou equações de diferenças.

Apesar de os sistemas físicos serem, por natureza, não lineares, diversos sistemas de interesse da engenharia de controle podem ser linearizados em torno de um ponto de operação (Ziemer, 1998), o que permite modelá-los através de equações diferenciais ou de diferenças lineares (Dorf, 2001). Essa restrição é necessária a fim de simplificar a modelagem. Outra consideração simplificadora que pode ser utilizada é a invariância no tempo (Aguirre, 2000). A modelagem de processos através de equações diferenciais lineares invariantes no tempo permite a representação alternativa destas equações por Função de Transferência (Ogata, 2000).

Há várias formas e técnicas de modelagem, dentre as quais destacam-se duas: a chamada modelagem caixa branca ou fenomenológica, que se baseia nas leis físicas que regem o processo; e a modelagem caixa preta, ou empírica, que permite obter modelos através da coleta de dados do processo (Aguirre, 2000).

Independentemente do tipo de modelagem utilizado, um fator muito importante a considerar é a ordem do modelo obtido. Para sistemas contínuos, a ordem de um modelo matemático é o grau da maior derivada presente na equação diferencial representativa do processo ou a maior potência da variável “ $s$ ” no polinômio do denominador, se estiver representado por função de transferência.

Muitos processos físicos tais como sistemas térmicos, motores de corrente contínua, sistemas de amortecimento dentre outros, podem ser modelados por meio da técnica fenomenológica, que permite obter modelos lineares invariantes no tempo. Em vários desses casos, as equações diferenciais ou funções de transferências obtidas são de primeira ou segunda ordem. Para estes modelos, há diversos métodos clássicos de análise e projeto de sistemas de controle consagrados na literatura (Ogata, 2000).

Ocorre que a modelagem de um determinado sistema dinâmico pode resultar em um modelo de ordem elevada, o que torna a análise e projeto de sistemas de controle mais complexos. Assim, tornou-se relevante investigar se é possível obter um modelo de ordem reduzida, ou seja, determinar outro modelo de ordem menor, que tenha aproximadamente as mesmas características dinâmicas (Benner, 2005).

Redução de ordem é um problema clássico da teoria de controle e atraiu grande atenção, sobretudo na década de 60, quando os computadores tinham uma capacidade de processamento bastante limitada (Aguirre, 2000). Desde então, uma infinidade de métodos foi desenvolvida e, apesar da grande quantidade já existente, novos métodos surgem, com destaque mais recente para aqueles que utilizam técnicas de computação evolutiva (Mishra *et al.*, 2011). Além das aplicações em controle, a redução de ordem pode aplicar-se também a modelos de larga escala, oriundos da modelagem de circuitos elétricos RLC interconectados, por exemplo, (Shi & Shi, 2005).

## **1.2 – Computação Evolutiva**

Computação evolutiva diz respeito à emulação computacional do processo biológico de evolução natural na tentativa de se resolver problemas matemáticos, sobretudo de otimização.

A idéia de computação evolutiva surgiu na década de 40 quando os cientistas começam a se inspirar na natureza para criar o ramo da inteligência artificial.

No final de década de 50, começou-se a buscar modelos de sistemas genéricos que pudessem gerar soluções candidatas para problemas que eram difíceis demais para resolver computacionalmente (Linden, 2006).

Posteriormente, foram feitas tentativas de se associar o processo de evolução natural a problemas de otimização.

A computação evolutiva engloba, portanto, uma família de algoritmos inspirados na Teoria Evolutiva de Darwin.

Todo algoritmo evolutivo é baseado nas seguintes idéias:

1. A criação de uma população de indivíduos candidatos à solução de um determinado problema. Essa população pode ser gerada aleatoriamente ou através de alguma técnica;
2. A criação de uma função de avaliação, que servirá para julgar quão boa é a solução proporcionada por determinado indivíduo pertencente à população;
3. A criação dos operadores de seleção natural, recombinação e mutação, que simulam simplificadamente o processo de criação de novas gerações de indivíduos mais aptos.

O funcionamento básico de um algoritmo evolutivo consiste em buscar dentro da população de indivíduos aqueles que possuem as melhores características, tentar combiná-los de forma a gerar soluções ainda melhores, repetindo este processo até que uma solução satisfatória seja obtida.

Conforme já mencionado, Algoritmos Evolutivos são utilizados na resolução de problemas de otimização, sobretudo os casos de minimização e maximização de funções multimodais.

São diversas as vantagens dos Algoritmos Evolutivos. Primeiro, são técnicas de otimização global, não ficam estagnados ao encontrarem um mínimo ou máximo locais. Podem ser aplicados a funções com descontinuidades, onde os dados são discretos ou não possuem derivada. Segundo, sua facilidade de implementação, pois em geral são programas simples, além de o mesmo algoritmo poder ser utilizado para a resolução de diversos problemas, alterando somente a função de avaliação dos indivíduos, mantendo inalterada a estrutura do algoritmo.

Apesar de haver uma grande variedade de modelos computacionais do processo de evolução natural, entre os mais utilizados e difundidos na literatura estão os Algoritmos Genéticos (AG).

### **1.3 – Objetivo do Trabalho**

Este trabalho apresenta um método de redução de ordem de modelos lineares e invariantes no tempo, que se baseia na minimização, por meio de um algoritmo genético, de uma função custo obtida mediante a determinação da norma dos coeficientes do numerador do erro entre as funções de transferência entre o modelo original e o reduzido (Araújo, 2008),

com conseqüente cálculo dos parâmetros do modelo reduzido. A metodologia será aplicada na redução de alguns modelos, o que demonstrará a validade da abordagem.

#### **1.4 – Organização da Dissertação**

O trabalho divide-se em 6 capítulos, incluindo esta introdução. No capítulo 2 serão apresentados alguns métodos e trabalhos sobre redução de ordem, com ênfase naqueles que empregam alguma técnica de otimização ou algoritmos genéticos. Será apresentado também um breve histórico sobre o problema.

No capítulo 3 será exposta a teoria envolvida em alguns métodos de redução de ordem baseados em otimização.

O capítulo 4 introduzirá os Algoritmos Genéticos, técnica de otimização empregada na obtenção dos parâmetros do modelo reduzido, e mostra passo a passo o AG implementado para este trabalho.

Os resultados obtidos quando se aplica o método proposto na redução de modelos de até sétima ordem, são apresentados no capítulo 5.

No capítulo 6 serão feitos comentários gerais, conclusões e sugestões para futuros trabalhos.

## Capítulo 2

### *Trabalhos e Métodos sobre Redução de Ordem*

#### **2.1 – Introdução**

Este capítulo tem por objetivo apresentar alguns métodos e trabalhos sobre redução de ordem. A quantidade de métodos e artigos existentes sobre o assunto é muito grande e seria praticamente inviável uma citação de todos. Contudo, almeja-se apresentar os mais difundidos na literatura, sobretudo aqueles que têm como base alguma técnica de otimização. Também serão citados outros métodos nos quais os algoritmos genéticos foram utilizados.

#### **2.2 – Breve Histórico**

Conforme mencionado no capítulo anterior, o problema de redução de ordem remonta aos anos 60. Nessa época os métodos poderiam ser divididos em dois grupos (Aguirre, 1995). O primeiro grupo incluía técnicas desenvolvidas no domínio do tempo, e tinham como característica comum reter no modelo reduzido modos especificados do modelo original. Essa retenção resultava, portanto, na manutenção de propriedades físicas fundamentais do sistema original, tais como constantes de tempo. Outra característica era a garantia da estabilidade dos modelos gerados.

O segundo grupo se utilizava de técnicas no domínio da frequência. Os métodos mais populares incluíam aqueles que restringiam o modelo reduzido a combinar com um número finito de coeficientes, calculados diretamente a partir do modelo original. Esses coeficientes eram escolhidos para satisfazer vários critérios, tal que a saída do modelo reduzido se comparasse tanto quanto possível à saída do sistema original. Nesse caso, os coeficientes calculados são entidades puramente matemáticas que não têm um significado físico. As vantagens dessas técnicas é que os modelos resultantes eram usualmente mais precisos que os modelos do primeiro grupo. Entretanto, o modelo reduzido poderia resultar em um modelo instável. Nos anos subseqüentes, uma quantidade de outros métodos foi desenvolvida para superar o problema da instabilidade.

Métodos baseados em otimização também foram propostos (Fortuna *et al*, 1989). Em geral, eles se baseiam na minimização de alguma função que mede um determinado erro entre o modelo original e o reduzido. A escolha da função e do algoritmo ou técnica de otimização são, portanto, de grande importância para o sucesso desta metodologia, e uma diversidade de opções pode ser aplicada. Em alguns casos são utilizadas técnicas de inteligência computacional, tais como algoritmos genéticos (Satakshi *et al*, 2005).

Ressalta-se que, desde meados da década de oitenta até os dias atuais, especial atenção tem sido dada à redução da ordem de controladores (Aguirre, 2000), principalmente os projetados por meio de técnicas modernas, tais como  $H_\infty$  e controladores do tipo LQG/LTR (Matos *et al*, 2006) (Dehghani & Yazdanpanah, 2005), dentre outras, que geralmente apresentam ordem igual ou maior que a planta.

Recentemente, ênfase tem sido dada à redução de modelos de larga escala (ordem muito alta) (Jaimoukha, 1997), que se originam, por exemplo, da modelagem de circuitos em chips VLSI (Benner *et al*, 2005), modelagem de redes de energia elétrica e outros. Dentre estes se destacam os métodos que utilizam técnicas de projeção em subespaços dominantes (Shi & Shi, 2005) e a decomposição em subespaços de Krilov (Jaimoukha, 1997).

## **2.3 – Métodos Baseados na Retenção de Pólos Dominantes.**

### **2.3.1 – Retenção de Pólos Dominantes**

Pode-se dizer que a idéia básica para a redução de ordem, surge através do conceito de dominância modal. Diversos livros introdutórios de Engenharia de Controle (Ogata, 2000) apresentam esta idéia.

Nesta metodologia, o modelo reduzido é obtido através da retenção dos pólos considerados mais dominantes e rejeição dos pólos menos dominantes. Desta forma, excluindo do modelo os pólos menos dominantes, implicará em reduzir a ordem tantas vezes quantos forem os pólos menos dominantes rejeitados. Em princípio, um pólo é considerado dominante se está mais próximo do eixo " $j\omega$ ". As seções a seguir apresentarão artigos que tratam de métodos para se determinar a dominância modal, e o emprego desta na redução de modelos.

#### **2.3.1.1 – Redução de Modelos por Decomposição de Potência e Comparação da Resposta em Frequência.**

Em (Ouyang *et al*, 1987) o autor aborda o problema de redução de modelos sob o ponto de vista dos modos dominantes. A determinação de quais são dominantes se dá por

meio de uma medida da contribuição de energia de cada modo para a saída do sistema. Os com maior energia são considerados dominantes.

Para a medição da energia, é utilizado o conceito de decomposição de potência. Assim, os modos com grande dispersão (ampla contribuição de energia) são utilizados na obtenção do denominador da função de transferência do modelo reduzido. Os com pequena dispersão (pequena contribuição de energia) são descartados. O numerador é determinado através da técnica de comparação das respostas em frequência.

### **2.3.1.2 – Medida Quantitativa da Dominância Modal para Sistemas Contínuos.**

Em (Aguirre, 1993) é apresentado um método para se determinar uma medida quantitativa da dominância modal. O autor informa que seu objetivo não é o de obter modelos simplificados, mas sim determinar se um dado sistema apresenta modos dominantes, mesmo quando eles não são os mais lentos (mais próximos do eixo “ $j\omega$ ”). Para se quantificar a dominância, são desenvolvidas fórmulas simples tanto para a representação em função de transferência como para espaço de estados.

## **2.4 – Métodos Baseados nas Aproximações de Padé.**

Os métodos de Padé consistem basicamente em se calcular os coeficientes de Padé do modelo original, que na verdade são os coeficientes da expansão da função de transferência em série de Taylor. Diversos métodos baseados em aproximações de Padé foram desenvolvidos, tais como o Método Clássico de Padé, o Método de Padé em Torno de Duas frequências, o Método de Padé com Retenção de Pólos e o método de Padé com Mínimos Quadrados, (Takahashi *et al*, 1987), (Ismail *et al*, 1997), (Aguirre, 2000).

Os métodos de Padé apresentam como vantagem o baixo custo computacional, contudo, tinham a desvantagem de poder gerar modelos instáveis. Assim, diversos métodos que mesclavam os de Padé com a retenção de pólos dominantes foram desenvolvidos para superar o problema da instabilidade (Shamash, 1975).

## **2.5 – Métodos Baseados no Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz.**

Os métodos baseados no critério de estabilidade de Routh-Hurwitz basicamente consistem de dois procedimentos. Primeiramente determina-se o polinômio do denominador do modelo reduzido, cujos coeficientes são computados através da tabela de estabilidade de

Routh, obtida a partir do polinômio do denominador do modelo original. Posteriormente obtém-se o polinômio do numerador.

Uma variante desta técnica consiste em separar o polinômio do denominador da função de transferência original nas suas partes par e ímpar, formando assim a chamada “equação de estabilidade do sistema”. As partes são fatoradas e somente as raízes que estão mais próximas da origem são retidas. As raízes retidas são então usadas para construir o polinômio do denominador do modelo reduzido.

Conforme já mencionado, os métodos de Padé apresentam o inconveniente da instabilidade. Os métodos de Routh-Hurwitz têm como principal característica a garantia da estabilidade. A desvantagem é que eles produzem más aproximações entre os modelos para sistemas cuja resposta não é dominada por pólos mais próximos da origem (Shamash, 1981). As seções a seguir apresentam dois artigos sobre métodos baseados no critério de estabilidade.

### **2.5.1 – Aproximações de Routh para Reduzir a Ordem de Modelos de Sistemas Lineares Invariantes no Tempo.**

Em (Hutton & Friedland, 1975) os autores apresentam o problema de redução de ordem e os métodos existentes até então para a resolução do problema, e esclarecem sobre as vantagens e deficiências de cada método.

Posteriormente, a técnica de redução é apresentada, e consiste em, inicialmente, decompor a função de transferência original na expansão *alfa-beta*. Em seguida, os coeficientes da expansão são calculados através da tabela de Routh. O modelo reduzido é obtido por meio do truncamento da expansão e arranjo do resultado como uma função racional em “s”.

O método apresenta propriedades úteis, como o fato de o modelo reduzido ter a garantia da estabilidade se o sistema original for estável, seus pólos e zeros aproximam-se dos pólos e zeros do original (à medida que a ordem é aumentada) e a convergência da energia da resposta ao impulso do modelo para a do sistema original.

### **2.5.2 – Redução de Funções de Transferência pelo Método da Equação de Estabilidade.**

Chen, (Chen & Chang, 1979) apresenta um método que se baseia na equação da estabilidade. As equações de estabilidade do numerador e do denominador da função de transferência original são obtidas por meio da separação dos termos com expoentes pares e

dos com expoentes ímpares. As raízes das partes pares (tanto do numerador como do denominador) são chamadas de zeros e as das partes ímpares de pólos.

Posteriormente, as equações são fatoradas e rearranjadas. Os pólos e zeros não dominantes (neste caso, são considerados dominantes aqueles com menor magnitude) das equações da estabilidade são rejeitados e os polinômios reduzidos das partes pares e ímpares são obtidos, com conseqüente determinação do modelo reduzido.

Para igualar as respostas em regime permanente, os coeficientes das equações de estabilidade reduzidas são multiplicados pelas magnitudes dos pólos ou zeros que foram descartados. A estabilidade é garantida.

## **2.6 – Métodos Baseados na Representação em Espaço de Estados.**

Há diversos métodos de redução de ordem de modelos baseados na representação em espaço de estados. Contudo será citado somente um trabalho, muito importante por seu forte embasamento matemático e aplicabilidade na redução de diversos modelos que utilizam essa representação.

Moore apresenta um método baseado em espaços de estados que tem um forte embasamento matemático para se chegar ao cerne da redução de modelos. Este método se fundamenta na Teoria da Realização Mínima de Kalman. Essa teoria diz que há um modelo de ordem menor se, e somente se, para um dado sistema de coordenadas, o modelo em espaço de estado pode ser decomposto em subsistemas menores. Dentre estes subsistemas menores, pode-se obter um que apresente a mesma matriz de resposta ao impulso que o modelo original. Assim, a idéia principal por trás desta técnica é a eliminação de subsistemas fracos, que contribuem pouco para a matriz de resposta ao impulso (Moore, 1981).

## **2.7 – Métodos Baseados em Otimização.**

Conforme já mencionado, os métodos baseados em otimização consistem na minimização de uma função erro entre o modelo original e o reduzido. Diversas técnicas de minimização podem ser utilizadas. Nas próximas sub-seções comenta-se alguns trabalhos importantes, e que empregam diferentes técnicas de otimização, inclusive alguns artigos nos quais houve o emprego de técnicas de inteligência computacional, tais como algoritmos genéticos.

### **2.7.1 – Otimização em Redução de Sistemas Lineares.**

Em 1983, foi apresentado um método de redução que utiliza como técnica de otimização um procedimento particular que tem um alto grau de confiabilidade e que foi usado para resolver outros problemas de redução de modelos no domínio da frequência (Yang & Luus, 1983).

Os modelos reduzidos obtidos são de 2º ordem para todos os exemplos tratados no artigo. A estabilidade é garantida por meio da restrição que impõe que todos os coeficientes do denominador da função de transferência reduzida sejam positivos. O erro de regime permanente também é eliminado, por meio da imposição de outra restrição, que relaciona coeficientes de ambos os modelos. O problema de otimização consiste em escolher os coeficientes do modelo reduzido tal que o funcional obtido pelo quadrado do erro seja minimizado. O método é aplicado para a redução de ordem de um modelo de terceira ordem e outro de oitava ordem.

### **2.7.2 – Redução de Ordem de Sistemas Lineares Usando Técnica de Minimização do Erro.**

Em 1987, Mukherjee apresentou um método que consiste em reter os polos dominantes do sistema original, e os zeros são sintetizados indiretamente através da determinação dos coeficientes do polinômio do numerador da função de transferência do sistema, (Mukherjee & Mishra, 1987). Considera-se que os alto-valores da função de transferência do sistema original são todos reais e distintos. O primeiro passo consiste em determinar a resposta ao degrau de ambos os modelos usando a técnica de expansão em frações parciais, tal que as respostas em regime permanente e transitória sejam separadas. Então, pela comparação das respostas em regime permanente, um dos coeficientes do polinômio do numerador da função de transferência do modelo reduzido é determinado. Posteriormente, é calculada a integral do quadrado do erro (ISE, *integral square error*) entre as partes transitórias das respostas ao degrau. A ISE é minimizada com relação aos coeficientes desconhecidos do polinômio do numerador da função de transferência do modelo reduzido e, conseqüentemente, um conjunto de equações lineares algébricas é obtido, das quais os coeficientes desconhecidos podem ser facilmente determinados.

### **2.7.3 – Redução de Modelos por Minimização da Integral do Quadrado do Erro - Índices de Desempenho.**

Howitt apresentou um método para construir modelos reduzidos, nos quais tanto os pólos quanto os zeros são considerados parâmetros livres e são escolhidos de forma a minimizar a ISE, entre as respostas ao degrau e ao impulso dos modelos (Howitt & Luus, 1990). Isto elimina o problema de determinar quais pólos do sistema original devem ser retidos. As funções de transferência do sistema original podem ter tanto pólos reais quanto complexos distintos. Também é investigado o tipo de entrada a ser usada no cálculo do modelo reduzido. O índice de desempenho depende do tipo de entrada a ser usado (degrau ou impulsiva).

### **2.7.4 – Redução de Ordem por meio de Técnica de Minimização do Erro.**

Um método simples para a redução de ordem de sistemas lineares invariantes no tempo é proposto em (Ramesh *et al*, 2008). A estabilidade dos modelos resultantes é assegurada. O método consiste de dois passos. Primeiro, a estrutura do modelo reduzido é previamente determinada, cujos coeficientes serão posteriormente calculados. O coeficiente do termo de “ $s^0$ ” do denominador do modelo reduzido é então obtido por meio do uso da equação de estabilidade. Após, os outros coeficientes do modelo reduzido são determinados, igualando-se a função de transferência dos dois modelos (original e reduzido) e usando-se o termo de “ $s^0$ ” calculado anteriormente.

### **2.7.5 – Redução de Ordem no Domínio da Frequência Baseada na Minimização da Norma dos Coeficientes Polinomiais do Erro.**

Nesse recente trabalho, a metodologia empregada para a redução de modelos consiste em obter inicialmente o erro entre as funções de transferência do modelo original e o reduzido, cuja estrutura é previamente especificada. Posteriormente é obtida a norma quadrática dos coeficientes do numerador do erro na função de transferência, que é uma função que deverá ser minimizada, e cuja restrição de minimização é que o polinômio característico do modelo reduzido seja um polinômio Hurwitz (Araújo *et al*, 2008).

### **2.7.6 – Redução de Ordem de Sistemas Dinâmicos Lineares Usando o Método da Equação de Estabilidade e Algoritmo Genético.**

Parmar apresenta um algoritmo para redução de modelos lineares utilizando as vantagens do método da equação da estabilidade e a minimização do erro por meio de algoritmo genético (Parmar *et al*, 2007).

O denominador do modelo reduzido é obtido através da equação de estabilidade, e o numerador, por meio da minimização da integral do quadrado do erro entre as respostas transitórias dos modelos pelo uso de um algoritmo genético. É mostrado que o algoritmo tem várias vantagens, por exemplo, o fato de os modelos reduzidos preservarem a estabilidade e o valor de regime permanente do sistema original. Além disso, o algoritmo proposto foi estendido para a redução de sistema multivariáveis.

### **2.7.7 – Redução de Modelos Baseada na Norma *Hankel* Ponderada Usando Algoritmo Genético e sua Aplicação a Sistemas de Potência.**

Nesse método, um algoritmo genético é utilizado para se obter modelos reduzidos por meio da minimização da norma *Hankel* ponderada entre o sistema original e modelo reduzido (Dehghani & Yazdanpanah, 2005).

Ao contrário de outros métodos que usam algoritmo genético, a principal característica deste é que ele pode ser aplicado a todos os sistemas, não havendo restrição quanto ao sistema original ser estritamente próprio ou estável. Outra característica é que ele pode ser utilizado tanto em sistemas contínuos como discretos. Como exemplo, o método é aplicado para redução de um modelo de sistema de potência de seis barras.

### **2.7.8 – Redução de Ordem de Sistemas Lineares Discretos Usando Algoritmo Genético.**

O artigo que apresenta esse método de redução para sistemas lineares discretos no tempo é o (Satakshi *et al*, 2005). Inicialmente, as respostas do modelo original e do reduzido são decompostas em duas partes, a transitória e a de regime permanente. Os coeficientes desconhecidos do modelo reduzido são determinados através da minimização do somatório do quadrado do erro (SSE, *summation square error*), entre as respostas ao degrau dos modelos usando um algoritmo genético. As partes de regime permanente das respostas são igualadas uma a outra.

### **2.7.9 – Redução de Ordem de Sistemas MIMO Usando Algoritmo Genético.**

Em 2011, Mishra aplicou um algoritmo genético para redução de ordem de sistemas com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO) (Mishra *et al*, 2011).

O método é baseado na técnica de minimização do erro, onde a ISE entre a resposta transitória do modelo original e a do reduzido é minimizada por um algoritmo genético. O procedimento de redução é simples e o desempenho dos modelos obtidos é comparado com o de outros métodos conhecidos. A estabilidade dos modelos resultantes é garantida se o sistema original é estável.

## **2.8 – Métodos Baseados na Decomposição em Subespaços de Krilov.**

Os espaços e subespaços de Krilov são utilizados para a resolução de sistemas de equações lineares de grande porte (matrizes de ordem muito alta). Pode-se dizer que o melhor método para resolver sistemas lineares é a eliminação gaussiana com pivoteamento parcial. Contudo, quando as matrizes são esparsas e apresentam ordem elevada, o custo computacional envolvido inviabiliza a aplicação deste método. Métodos baseados na decomposição em subespaços de Krilov mostram-se atraentes para a resolução deste tipo de problema por suas boas propriedades numéricas e computacionais, e têm sido aplicados nos últimos 60 anos com esta finalidade.

Esta técnica tem sido aproveitada para aplicação em redução de modelos de ordem muito elevada, como os originados da modelagem de circuitos integrados VLSI. Alguns métodos de redução requerem a resolução da equação de Lyapunov e, para sistemas com ordem maior que 200, estes métodos são intratáveis devido a limitações computacionais (Jaimoukha, 1997). Para superar estas dificuldades o uso de métodos iterativos baseados nos subespaços de Krilov é uma boa alternativa.

A seguir, comenta-se um interessante trabalho no qual os subespaços de Krilov foram utilizados.

Em (Jaimoukha, 1997), o objetivo é a redução de modelos cuja matriz de transferência estável é de ordem muito elevada. Uma base para uma parte do subespaço de controlabilidade associado ao sistema original é gerada e um erro residual é definido para alguma aproximação deste subespaço. É estabelecido que minimizar a norma  $\ell_\infty$  deste erro residual sobre o conjunto de aproximações estáveis leva a um novo problema cuja solução é usada para construir modelos reduzidos. O erro é minimizado por meio do algoritmo de Resíduos Mínimos Generalizados (GMRES, Generalized Minimal Residual).

## **2.9 – Conclusão**

Este capítulo descreveu resumidamente alguns trabalhos e métodos de redução de ordem de sistemas lineares invariantes no tempo. Foram citados tanto métodos antigos quanto recentes, mencionando, quando possível, as vantagens e desvantagens de cada um. A maior parte dos trabalhos citados consistiu de artigos nos quais foram empregadas técnicas de otimização, dentre as quais, algoritmos genéticos. Também foi citado um método para redução de sistemas de ordem muito elevada.

No próximo capítulo, será apresentada a teoria envolvida em alguns dos métodos citados.

## Capítulo 3

### *Conceitos Teóricos de Alguns Métodos de Redução de Ordem de Modelos Baseados em Otimização*

#### 3.1– Introdução

Neste capítulo serão abordados os conceitos teóricos envolvidos em alguns métodos de redução de ordem de modelos baseados em otimização que foram descritos resumidamente no capítulo anterior. Sempre que possível, serão mostrados as vantagens e desvantagens de cada método. Serão apresentados dois métodos cujo procedimento de solução do problema de otimização é algébrico. Posteriormente, serão expostos outros dois métodos, nos quais a função custo, que geralmente é a *ISE* (*integral square error*, domínio contínuo) ou a *SSE* (*summation square error*, domínio discreto), é minimizada por um algoritmo genético.

Finalmente, é apresentado um método cuja função custo é diferente das utilizadas nos métodos anteriores, e que é construída com base no erro na função de transferência entre o modelo original e reduzido.

#### 3.2 – Otimização em Redução de Sistemas Lineares.

Será descrito o método proposto por (Yang & Luus, 1983). Seja o sistema estável dado pela Equação (3.1), para o qual se deseja reduzir a ordem  $n$ .

$$H(s) = \frac{a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}{s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n} \quad (3.1)$$

Seja também o modelo reduzido de (3.1) dado pela Equação (3.2), cuja ordem é  $m < n$ .

$$H_R(s) = \frac{c_1 s^{m-1} + \dots + c_{m-1} s + c_m}{s^m + d_1 s^{m-1} + \dots + d_{m-1} s + d_m} \quad (3.2)$$

Sejam as respostas ao degrau dos modelos original e reduzido representadas pelas funções  $y(t)$  e  $y_r(t)$ .

Este método de redução baseado em otimização consiste em obter os parâmetros do modelo reduzido de forma que o funcional dado pela Equação (3.3) seja minimizado.

$$J = \int_0^t [y(t) - y_r(t)]^2 \quad (3.3)$$

Se o modelo reduzido for de ordem 2, terá a estrutura dada pela Equação (3.4).

$$R(s) = \frac{c_1 s + c_2}{s^2 + d_1 s + d_2} \quad (3.4)$$

Para o caso de uma função de transferência reduzida de 2ª ordem, as seguintes considerações podem ser feitas:

1. Conforme o critério de estabilidade de Routh-Hurwitz, para que o modelo da Equação (3.4) seja estável, é necessário que os coeficientes do denominador de  $R(s)$  sejam todos positivos (Ogata, 2000);
2. Para que o valor de regime permanente das respostas ao degrau de ambos os modelos (equações 3.1 e 3.4) sejam iguais, pode-se aplicar o teorema do valor final (Dorf, 2001), obtendo-se a restrição dada na Equação (3.5).

$$d_2 = \frac{b_n}{a_n} c_2 \quad (3.5)$$

Para um modelo reduzido de 2ª. ordem, o problema de otimização consiste em obter  $c_1$ ,  $c_2$  e  $d_1$  tal que o funcional da Equação (3.3) seja minimizado.

As considerações 1 e 2 facilitam a obtenção de modelos de 2ª ordem, não somente neste método, mas também no proposto nesta dissertação. Quando se utiliza como método de otimização um algoritmo genético, a restrição descrita na consideração 1 pode ser aplicada no algoritmo restringindo o espaço de busca a um intervalo de números positivos, o que resultará em modelos de 2ª ordem estáveis, além disso, se o sistema original for de fase mínima, o modelo reduzido também o será e os coeficientes do numerador,  $c_1$  e  $c_2$ , serão positivos.

### 3.3 – Redução de Ordem de Sistemas Lineares Usando Técnica de Minimização do Erro.

Em (Mukherjee & Mishra, 1987), propõe-se o método descrito a seguir. Considere-se a função de transferência estável e com pólos reais e distintos dada na equação (3.6).

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \quad (3.6)$$

Onde  $p_1, p_2, \dots, p_n$  são os pólos do sistema, e  $-p_1 < -p_2 < \dots < -p_n$ , e  $n \geq m$ .

A resposta ao degrau para (3.6) é obtida a partir da Equação (3.7).

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} = \frac{k_0}{s} + \frac{k_1}{(s + p_1)} + \dots + \frac{k_n}{(s + p_n)} \quad (3.7)$$

Aplicando-se a expansão em frações parciais, determina-se os  $k_n$  ganhos agrupados na Equação (3.8).

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{b_0}{(p_1)(p_2) \dots (p_n)} \\ k_1 &= \frac{b_m (-p_1)^m + b_{m-1} (-p_1)^{m-1} + \dots + b_1 (-p_1) + b_0}{(-p_1)(-p_1 + p_2) \dots (-p_1 + p_m)} \\ &\vdots \\ k_n &= \frac{b_m (-p_n)^m + b_{m-1} (-p_n)^{m-1} + \dots + b_1 (-p_n) + b_0}{(-p_n)(-p_n + p_1)(-p_n + p_2) \dots (-p_n + p_{n-1})} \end{aligned} \quad (3.8)$$

A Transformada Inversa de Laplace da equação (3.7) resulta em (3.9)

$$y(t) = k_0 + k_1 e^{-p_1 t} + \dots + k_{n-1} e^{-p_{n-1} t} + k_n e^{-p_n t} \quad (3.9)$$

onde  $k_0$  representa a resposta em regime permanente e os termos restantes a resposta transitória do sistema.

Considere-se o modelo reduzido, Equação (3.10), de ordem  $v < n$ ,  $v \geq q$ , onde foram retidos os  $v$  pólos dominantes do modelo original. Sua resposta ao degrau é dada pela Equação (3.11).

$$H_R(s) = \frac{c_q s^q + c_{q-1} s^{q-1} + \dots + c_1 s + c_0}{s^v + d_{v-1} s^{v-1} + \dots + d_1 s + d_0} = \frac{c_q s^q + c_{q-1} s^{q-1} + \dots + c_1 s + c_0}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_v)} \quad (3.10)$$

$$Y_R(s) = \frac{c_q s^q + c_{q-1} s^{q-1} + \dots + c_1 s + c_0}{s(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_v)} = \frac{k'_0}{s} + \frac{k'_1}{s + p_1} + \dots + \frac{k'_v}{s + p_v} \quad (3.11)$$

Procedendo-se de forma análoga à expansão em frações parciais da Equação (3.7), pode-se obter os ganhos  $k'_0 \dots k'_v$ , Equação (3.12), e a expressão para a resposta ao degrau, Equação (3.13), de  $H_R(s)$ .

$$\begin{aligned} k'_0 &= \frac{c_0}{(p_1)(p_2) \dots (p_v)} \\ k'_1 &= \frac{c_q (-p_1)^q + c_{q-1} (-p_1)^{q-1} + \dots + c_1 (-p_1) + c_0}{(-p_1)(-p_1 + p_2) \dots (-p_1 + p_v)} \\ &\vdots \\ k'_v &= \frac{c_q (-p_v)^q + c_{q-1} (-p_v)^{q-1} + \dots + c_1 (-p_v) + c_0}{(-p_v)(-p_v + p_1)(-p_v + p_2) \dots (-p_v + p_{v-1})} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$y_R(t) = k'_0 + k'_1 e^{-p_1 t} + \dots + k'_{v-1} e^{-p_{v-1} t} + k'_v e^{-p_v t} \quad (3.13)$$

Para que as respostas em regime permanente de ambos os modelos sejam iguais, os ganhos  $k_0$  e  $k'_0$  devem ser iguais, o que resulta na Equação (3.14) e, por conseguinte, na determinação do coeficiente desconhecido  $c_0$ .

$$\frac{c_0}{(p_1)(p_2) \dots (p_v)} = \frac{b_0}{(p_1)(p_2) \dots (p_v) \dots (p_n)} \quad (3.14)$$

A parte transitória da resposta é utilizada para calcular os coeficientes restantes. Para tanto, usa-se a ISE entre as respostas transitórias, obtendo-se o funcional dado pela Equação (3.15), que deverá ser minimizado.

$$J = \int_0^{\infty} [(y(t) - k_0) - (y_R(t) - k'_0)]^2 dt = \int_0^{\infty} [(y(t) - y_R(t))]^2 dt \quad (3.15)$$

Substituindo-se as expressões (3.9) e (3.13) em (3.15), obtém-se a expressão (3.16) para o funcional.

$$\begin{aligned}
 J = & \frac{(k_1 - k'_1)^2}{2p_1} + \frac{(k_2 - k'_2)^2}{2p_2} + \dots + \frac{(k_v - k'_v)^2}{2p_v} + \frac{k_{v+1}^2}{2p_{v+1}} + \dots + \frac{k_n^2}{2p_n} + \frac{2(k_1 - k'_1)(k_2 - k'_2)}{p_1 + p_2} \\
 & + \frac{2(k_2 - k'_2)(k_3 - k'_3)}{p_2 + p_3} + \dots + \frac{2(k_{v-1} - k'_{v-1})(k_v - k'_v)}{p_{v-1} + p_v} + \dots + \frac{2k_{n-1}k_n}{p_{n-1}p_n}
 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Para obter os pontos de mínimo, a Equação (3.16) é diferenciada com relação às constantes desconhecidas  $c_q, c_{q-1}, \dots, c_1$ , o que resultará na determinação destes coeficientes e, conseqüentemente, no modelo reduzido. Maiores detalhes do arranjo do funcional  $J$  podem ser obtidos em (Mukherjee & Mishra, 1987).

Este método apresenta desvantagens. Uma delas é a restrição de que a função de transferência tenha somente pólos reais e apresente pólos dominantes. Caso o sistema original apresente ordem relativamente alta e pólos complexos, o cálculo e arranjo do funcional  $J$ , bem como a minimização deste seriam muito trabalhosos. Além disso, caso o modelo original não apresente pólos dominantes, seria necessário outro procedimento para obter seu polinômio característico.

$J$  pode ter característica de função multimodal, isto é, pode apresentar muitos mínimos locais. Uma boa ferramenta a ser utilizada na minimização da Equação (3.16) é um algoritmo genético, devido as suas diversas vantagens na otimização de funções, que serão apresentadas no Capítulo 4.

### 3.4 – Redução de Ordem de Sistemas Lineares Usando o Método da Equação da Estabilidade e Algoritmos Genéticos.

Será exposto o método proposto em (Parmar *et al*, 2007).

Sejam os modelos original (estável) e reduzido dados pelas Equações (3.17) e (3.18), respectivamente.

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (3.17)$$

$$H_R(s) = \frac{N_R(s)}{D_R(s)} = \frac{c_q s^q + c_{q-1} s^{q-1} + \dots + c_1 s + c_0}{s^v + d_{v-1} s^{v-1} + \dots + d_1 s + d_0} \quad (3.18)$$

Este método consiste nos seguintes passos:

1. Determinação dos coeficientes do denominador de  $H_R(s)$  por meio da equação de estabilidade do sistema original;
2. Determinação dos coeficientes do numerador de  $H_R(s)$  através de um algoritmo genético, que minimize a ISE entre as respostas ao degrau dos modelos original e reduzido, obtido de forma análoga a da Equação (3.15).

A equação de estabilidade é uma equação obtida por meio da separação dos termos com expoentes pares e os com expoentes ímpares.

Assim, considere-se obter a equação de estabilidade para o denominador de  $H(s)$ . Separando-se os termos pares e ímpares resulta na Equação (3.19).

$$\left. \begin{aligned} D_{par}(s) &= \sum_{i=0,2,4,\dots}^n a_i s^i = a_0 \prod_{i=1}^{m_1} \left( 1 + \frac{s^2}{z_i^2} \right) \\ D_{impar}(s) &= \sum_{i=1,3,5,\dots}^n a_i s^i = a_1 s \prod_{i=1}^{m_2} \left( 1 + \frac{s^2}{r_i^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.19)$$

Onde  $m_1 = n/2$ , para  $n$  par e  $m_2 = (n-1)/2$ , para  $n$  ímpar, e  $z_1^2 < z_2^2 < \dots$ ,  $r_1^2 < r_2^2 < \dots$ .

As raízes de  $D_{par}(s)$  são chamadas de zeros e as de  $D_{impar}(s)$  são chamadas de pólos das equações de estabilidade.

Para se determinar as equações de estabilidade do denominador do modelo reduzido  $H_R(s)$ , descartam-se os zeros e pólos da Equação (3.19) com maiores magnitudes (Chen & Chang, 1979), resultando na Equação (3.20).

$$\left. \begin{aligned} D_{Rpar}(s) &= a_0 \prod_{i=1}^{m_3} \left( 1 + \frac{s^2}{z_i^2} \right) \\ D_{Rimpar}(s) &= a_1 s \prod_{i=1}^{m_4} \left( 1 + \frac{s^2}{r_i^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Onde  $m_3 = v/2$ , para  $v$  par e  $m_4 = (v-1)/2$ , para  $v$  ímpar.

Combinando-se as equações de estabilidade do modelo reduzido, o denominador pode ser obtido conforme a expressão (3.21).

$$D_R(s) = D_{Rpar}(s) + D_{Rimpar}(s) = \sum_{i=0}^{v-1} d_i s + s^v \quad (3.21)$$

Os coeficientes do numerador do modelo reduzido são determinados através da minimização da ISE, Equação (3.22), entre as respostas transitórias ao degrau de ambos os modelos.

$$J = \int_0^{\infty} [(y(t) - y_R(t))]^2 dt \quad (3.22)$$

Há similaridades entre este método e o descrito anteriormente, qual seja, a obtenção dos coeficientes do numerador do modelo reduzido através da minimização da ISE. A diferença é que neste método foi utilizado um algoritmo genético como técnica de minimização.

A combinação do emprego da equação de estabilidade e do algoritmo genético torna este método bastante eficiente, pois a estabilidade do modelo reduzido é garantida (caso o original seja estável) devido ao emprego da equação de estabilidade. O uso do algoritmo genético permite a minimização eficiente e menos trabalhosa da ISE.

### 3.5 – Redução de Ordem de Sistemas Lineares Discretos Usando Algoritmo Genético.

Um método aplicado à redução de sistemas discretos e que utiliza algoritmos genéticos é proposto em (Satakshi *et al*, 2005).

Seja a função de transferência discreta, Equação (3.23), estável, com  $n$  pólos, que podem ser reais ou imaginários, distintos ou repetidos.

$$H(z) = \frac{a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_1z + a_0}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_{n_1})(z-\eta_1-iv_1)(z-\eta_1+iv_1)(z-\eta_2-iv_2)(z-\eta_2+iv_2)\dots(z-\eta_{n_2}-iv_{n_2})(z-\eta_{n_2}+iv_{n_2})(z-\sigma_1)^{m_1}(z-\sigma_2)^{m_2}\dots(z-\sigma_q)^{m_q}} \quad (3.23)$$

Onde  $n_1$  é a quantidade de pólos reais distintos,  $n_2$  a quantidade de pares de pólos complexos,  $n_3 = m_1 + m_2 + \dots + m_q$  a quantidade de pólos reais repetidos,  $m_1, m_2, \dots, m_q$  são todos maiores que um e  $n = n_1 + 2n_2 + n_3$ . Como o sistema é estável  $|p_i|, |\eta_j|, |v_j|, |\sigma_i| \leq 1$ .

A resposta ao degrau para  $H(z)$  é dada pela Equação (3.24)

$$y(k) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i (p_i)^k + \sum_{j=1}^{n_2} (\beta_j (\eta_j + iv_j)^k + \bar{\beta}_j (\eta_j - iv_j)^k) + \sum_{s=1}^q \left( \sum_{l=1}^{m_s} h_{sl} k^{l-1} (\sigma_s)^k \right) \quad (3.24)$$

$$y(k) = y_{rp}(k) + y_{tr}(k)$$

Onde  $y_{rp}(k) = \alpha_0$  é a parte de regime permanente da resposta e  $y_{tr}(k)$  é parte transitória.

Os coeficientes da Equação em (3.24) são agrupados na Equação (3.25):

$$\alpha_i = \left. \frac{(z-p_i)H(z)}{z-1} \right|_{z=p_i}$$

$$\beta_j = \left. \frac{(z-\eta_j-iv_j)H(z)}{z-1} \right|_{(\eta_j+iv_j)} \quad (3.25)$$

$$h_{sl} = \left( \left. \frac{1}{(m_s-l)!} \frac{d^{m_s-l}}{d^{m_s-l}z} ((z-\sigma_s)^{m_s} H(z) / (z-1)) \right) \right|_{z=\sigma_s}$$

Considere-se agora o modelo reduzido cuja estrutura é dada pela Equação (3.26), e que pode ser rearranjada conforme a Equação (3.27).

$$H_R(z) = \frac{c_{r-1}z^{r-1} + c_{r-2}z^{r-2} + \dots + c_1z + c_0}{z^r + d_{r-1}z^{r-1} + \dots + d_1z + d_0} \quad (3.26)$$

$$H_R(z) = \frac{c_{r-1}z^{r-1} + c_{r-2}z^{r-2} + \dots + c_1z + c_0}{(z-p_1')(z-p_2')\dots(z-p_{r_1}')\underbrace{(z-\delta_1-i\gamma_1)(z-\delta_1+i\gamma_1)}_{(z-\delta_1)^2}\dots\underbrace{(z-\delta_2-i\gamma_2)(z-\delta_2+i\gamma_2)}_{(z-\delta_2)^2}\dots(z-\delta_{r_2}-i\gamma_{r_2})(z-\delta_{r_2}+i\gamma_{r_2})(z-\rho_1)^{f_1}(z-\rho_2)^{f_2}\dots(z-\rho_w)^{f_w}} \quad (3.27)$$

Onde  $r_1$  é a quantidade de pólos reais distintos,  $r_2$  a quantidade de pares de pólos complexos,  $r_3 = f_1 + f_2 + \dots + f_w$  a quantidade de pólos reais repetidos,  $f_1, f_2, \dots, f_w$  são todos maiores que um e  $r = r_1 + 2r_2 + r_3$ . Como o sistema é estável  $|p_i'|, |\delta_i|, |\gamma_i|, |\rho_i| \leq 1$ .

A resposta ao degrau para  $H_R(z)$  é dada pela Equação (3.28)

$$y_R(k) = \alpha_0' + \sum_{i=1}^{r_1} \alpha_i'(p_i')^k + \sum_{j=1}^{r_2} (\beta_j'(\delta_j + i\gamma_j)^k + \overline{\beta_j'}(\delta_j - i\gamma_j)^k) + \sum_{s=1}^w \left( \sum_{l=1}^{f_s} h_{sl}' k^{l-1} (\rho_s)^k \right) \quad (3.28)$$

$$y_R(k) = y_{Rrp}(k) + y_{Rtr}(k)$$

Onde  $y_{Rrp}(k) = \alpha_0'$  é a parte de regime permanente da resposta do modelo reduzido e  $y_{Rtr}(k)$  é a parte transitória.

Os coeficientes na Equação (3.28) são:

$$\alpha_i' = \left. \frac{(z-p_i')H_R(z)}{z-1} \right|_{z=p_i'}$$

$$\beta_j' = \left. \frac{(z-\delta_j-i\gamma_j)H_R(z)}{z-1} \right|_{z=(\delta_j+i\gamma_j)}$$

$$h_{sl}' = \left( \left. \frac{1}{(f_s-l)!} \frac{d^{f_s-l}}{dz^{f_s-l}} ((z-\rho_s)^{f_s} H_R(z) / (z-1)) \right) \right|_{z=\rho_s}$$

Os parâmetros desconhecidos do modelo reduzido, Equação (3.27),  $c_i (i=1, \dots, r-1)$ ,  $p_i' (i=1, \dots, r_1)$ ,  $\delta_j, \gamma_j (j=1, \dots, r_2)$  e  $\rho_k (k=1, \dots, w)$ , são determinados através da minimização do somatório do quadrado do erro (SSE) entre as respostas ao degrau dos modelos original e reduzido usando um algoritmo genético. As partes de regime permanente das respostas dos modelos devem ser iguais.

Os procedimentos deste método podem ser resumidos em dois passos:

1. Determina-se a *SSE* entre as repostas ao degrau do modelo original e do reduzido, Equação (3.29).  $N$  é o numero de amostras.

$$SSE = \sum_{k=0}^N [y(k) - y_R(k)]^2 = \sum_{k=0}^N [(y_{tr}(k) - y_{Rtr}(k))]^2 \quad (3.29)$$

2. Minimiza-se a *SSE* através de um algoritmo genético, com conseqüente determinação dos coeficientes desconhecidos de  $H_R(z)$ .

Este método também apresenta similaridades com os anteriores, tais como a determinação dos parâmetros desconhecidos do modelo reduzido por meio da minimização de um funcional através de um algoritmo genético. Neste caso, como o domínio é de variáveis discretas, o funcional é a *SSE* entre as respostas transitórias. O método aplica-se a funções de transferência estáveis com pólos reais, repetidos ou complexos conjugados.

### 3.6 – Redução de Ordem no Domínio da Frequência Baseada na Minimização da Norma dos Coeficientes Polinomiais do Erro

Este método, (Araújo, 2008), apresenta uma função custo a minimizar cuja construção é diferente das anteriores, que se baseiam na minimização da *ISE* ou da *SSE*.

Sejam as funções de transferência original e reduzida, dadas pelas Equações (3.17) e (3.18), respectivamente. A metodologia proposta consiste basicamente em obter os parâmetros do modelo reduzido através da minimização de uma função custo obtida da seguinte forma.

1. Especifica-se inicialmente a estrutura e a ordem do modelo reduzido, representado pela função de transferência  $H_R(s)$ .

2. Obtém-se o erro na função de transferência entre o modelo original e o modelo reduzido, Equação (3.30).  $N_E(s)$  e  $D_E(s)$  são o numerador e o denominador da função de transferência do erro, respectivamente.

$$e(s) = H(s) - H_R(s) = \frac{N_E(s)}{D_E(s)} \quad (3.30)$$

3. Determina-se a norma quadrática dos coeficientes do polinômio  $N_E(s)$ , que é a função  $f$  a ser minimizada.

Manipulando a Equação (3.30), obtém-se a Equação (3.31).

$$e(s) = \frac{N_E(s)}{D_E(s)} = \frac{N(s)D_R(s) - N_R(s)D(s)}{D(s)D_R(s)} \quad (3.31)$$

O problema de otimização consiste em minimizar a norma quadrática dos coeficientes do polinômio  $N_E(s)$ , conforme a Equação (3.32).

$$\begin{aligned} \text{mim } f &= \text{norm}^2 \{ \text{coef}[N_E(s)] \} \\ \text{s.a } D_E(s) &\text{ é Hurwitz} \end{aligned} \quad (3.32)$$

A restrição de que  $D_E(s)$  seja um polinômio de Hurwitz garante que os modelos resultantes sejam estáveis. Além disso, outras restrições que visem reter certas propriedades do modelo original podem ser consideradas. O número de variáveis da função objetivo depende da ordem desejada para o modelo reduzido e da quantidade de zeros. A função objetivo é quadrática e a convergência para uma única solução, caso ela exista, é assegurada por uma boa escolha das condições iniciais.

Em (Araújo, 2008), a obtenção da solução do problema de otimização é feita algebricamente. Nenhum algoritmo de busca é utilizado. Tal procedimento pode resultar em mínimos locais como solução, e mínimos globais são altamente desejáveis. Além disso, caso o modelo seja de ordem relativamente elevada, o procedimento algébrico pode ser trabalhoso. Também já foi citado que a convergência depende de uma boa escolha das condições iniciais.

A presente dissertação propõe minimizar a função  $f$  através de um algoritmo genético. As vantagens de seu uso na minimização da função  $f$  residem no fato de que o algoritmo genético é um algoritmo de busca de soluções globais e não tem dependência de condições

iniciais. O Capítulo 4, descreve as características de um algoritmo e o implementado para este trabalho.

### **3.7 – Conclusão**

Este capítulo apresentou a teoria envolvida em alguns métodos de redução de ordem baseados em otimização. O resultado do problema de otimização de uma função custo geralmente resulta na determinação dos coeficientes desconhecidos do modelo reduzido. A função custo utilizada em muitos métodos de redução baseados em otimização é a ISE (caso o domínio seja contínuo) ou a SSE (caso o domínio seja discreto). Foram apresentados métodos que utilizam algoritmos genéticos para a minimização da ISE ou da SSE, mesclados com outras técnicas. Finalmente, um método proposto que utiliza como função custo a norma quadrática dos coeficientes polinomiais do erro foi apresentado, e também a proposta desta dissertação, que sugere o uso de um algoritmo genético para minimizar a função custo do último método proposto.

## Capítulo 4

### *Algoritmos Genéticos*

#### **4.1– Introdução**

Este capítulo tratará dos algoritmos genéticos (AG), técnica a ser utilizada neste trabalho para minimizar as funções custo para obtenção dos parâmetros dos modelos reduzidos.

Será mostrado o que é um algoritmo genético e uma concisa apresentação da Teoria da Evolução das Espécies (na qual os AG se baseiam). Posteriormente, um breve histórico e a teoria básica envolvida para entendimento da implementação de AG serão expostos, bem como suas partes constituintes. No final mostrar-se-á passo a passo o AG desenvolvido para este trabalho.

#### **4.2 – O que é um Algoritmo Genético?**

Algoritmos Genéticos são uma técnica de busca do ramo da computação evolucionária cujo funcionamento é baseado no processo biológico de evolução natural (Linden, 2006). Podem ser usados principalmente para otimização global de funções multimodais (funções que podem apresentar muitos mínimos ou máximos locais).

A principal característica de AG como métodos de busca é que não ficam retidos ao encontrar máximos ou mínimos locais, pois não têm dependência forte aos valores iniciais. Eles nem sempre localizam a solução ótima, mas sim boas soluções a cada execução e não necessariamente a mesma todas as vezes.

A seção a seguir descreve simplificada a Teoria da Evolução das Espécies, na qual os AG se baseiam.

#### **4.3 A Teoria Básica da Evolução das Espécies e Genética**

A teoria da evolução natural das espécies formulada por Charles Darwin em 1859, afirma que indivíduos dentro de um mesmo ecossistema competem entre si por recursos limitados. Indivíduos que não logram êxito na competição tendem a ter uma prole menor, e

sua descendência reduzida faz com que a probabilidade de ter seus genes propagados para as próximas gerações seja menor.

Indivíduos mais fortes tendem a gerar descendentes fortes, muito mais bem adaptados às características de seu meio.

Ao formular sua teoria, Darwin não sabia quais eram os mecanismos através dos quais a adaptação acontecia. Contudo no início do século XX, descobriu-se que o processo de transmissão de características estava associado a uma unidade básica de informação, o gene. Basicamente, todo indivíduo, seja ele animal ou vegetal, é formado por uma ou mais células, dentro das quais o organismo possui uma cópia completa do conjunto de um ou mais pares de cromossomos. Um cromossomo é composto por genes, que por sua vez, são blocos de seqüência de DNA (ácido desoxirribonucleico), que controlam uma característica hereditária específica.

A transmissão das características é realizada através da reprodução, que pode ser de dois tipos: sexuada ou assexuada.

A reprodução assexuada é feita por organismos inferiores e a sexuada através da troca de material genético entre dois indivíduos de sexos opostos, por meio da relação sexual. Ressalta-se que, em um AG, a reprodução emulada é a sexuada.

Na reprodução sexuada, cada progenitor fornece parte do material genético através de um processo denominado *crossing-over* (crossover), no qual um pedaço de cada cromossomo é trocado com seu par. Na etapa de troca de informação, pequenos erros podem ocorrer ao longo do tempo, gerando mutações dentro do código genético, que são responsáveis por variar ainda mais as características dos indivíduos gerados.

Portanto, indivíduos com uma melhor adequação ao meio ambiente, reproduzem mais. Ao reproduzirem mais, têm mais chance de propagarem seus genes para a próxima geração. Contudo, devido aos operadores genéticos (crossover e mutação), os cromossomos dos descendentes não são exatamente iguais aos dos pais, mas sim uma combinação de seus genes. Assim, as gerações seguintes podem evoluir e se adaptar cada vez mais ao meio que os cerca (Linden, 2006).

#### **4.4 Breve Histórico dos Algoritmos Genéticos**

O estudo dos algoritmos genéticos se inicia na década de 40, quando os cientistas começam a tentar emular os fenômenos naturais, o que culminaria no desenvolvimento do ramo da inteligência artificial.

Na década de 50, tentou-se buscar modelos de sistemas genéricos que pudessem gerar soluções candidatas para problemas que eram difíceis demais para serem resolvidos computacionalmente.

No final da década de 50, o processo de evolução natural começou a ser associado a problemas de otimização e, logo depois, no início da década de 60, os genes começaram a ser emulados nos algoritmos através da representação binária, inteira e real, possibilitando também o desenvolvimento dos operadores de recombinação. Na mesma década, os conceitos de computação evolucionária foram desenvolvidos e aplicados a situações práticas.

Os algoritmos genéticos foram efetivamente desenvolvidos no final da década de 60, quando John Holland propôs um modelo heurístico computacional baseado na evolução das espécies que oferecia boas soluções para problemas extremamente difíceis que eram computacionalmente insolúveis até aquela época (Linden, 2006).

#### 4.5 Funcionamento do Algoritmo Genético

Resumidamente, um AG funciona da seguinte forma: cria-se uma população de indivíduos. Para cada um dos indivíduos é feita uma avaliação como sendo uma solução para o problema em questão. Em seguida, são selecionados os melhores candidatos a solução através de algum método que simule o processo de seleção natural. Posteriormente, os candidatos selecionados são submetidos aos operadores genéticos, tais como recombinação e mutação.

A Figura 4.1 apresenta um esquema de funcionamento de um AG.

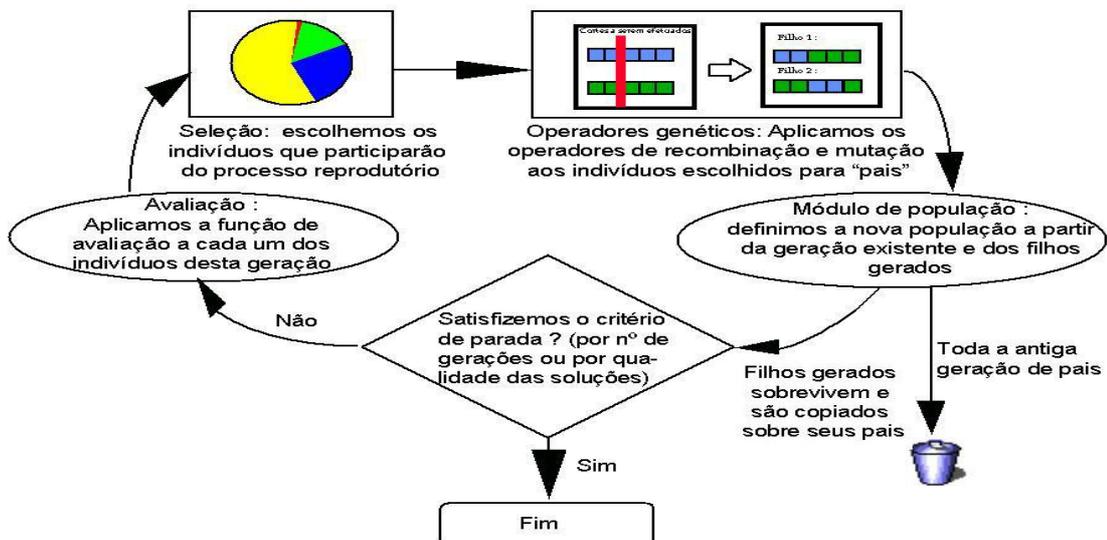


Figura 4.1 – Esquema Geral de um AG

Conforme explicado anteriormente, um algoritmo genético baseia-se no processo de evolução natural. Desta forma, para implementá-lo é necessário emular o comportamento dos vários estágios e agentes existentes no processo de evolução, tais como população de indivíduos, genes, seleção natural dentre outros. Os vários componentes do AG serão mostrados nas seções a seguir.

#### 4.6 Módulo de população

O módulo de população é responsável pela criação de indivíduos candidatos à solução do problema. Por analogia ao processo de evolução natural, no AG cada indivíduo é um cromossomo e para que a população de cromossomos possa ser criada necessita-se de uma representação destes, de forma que possam ser tratados pelo computador.

Neste trabalho será usada a representação binária, onde cada cromossomo é uma seqüência de bits. Por analogia com as partes fundamentais que compõe um cromossomo biológico, cada bit é chamado de gene. A Figura 4.2 representa um cromossomo e seus genes.

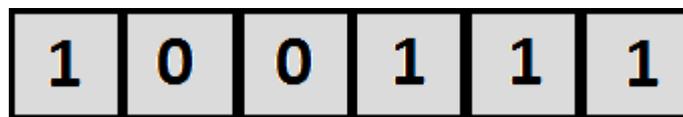


Figura 4.2 Representação de Um Cromossomo

Na representação binária, é necessário definir dois itens:

- 1) Faixa de operação das variáveis;
- 2) A precisão desejada;

Se a faixa de operação pertence ao intervalo  $[inf_i, sup_i]$ , onde  $inf_i$  e  $sup_i$  representam o limite inferior e superior do intervalo, respectivamente, e os cromossomos são formados por  $k$  bits, a precisão é definida pela Equação (1.1).

$$P = \frac{sup_i - inf_i}{2^k - 1} \quad (1.1)$$

Usa-se a Equação (1.2) para converter os cromossomos na representação binária para o número real correspondente dentro da faixa de operação.

$$N_{real_i} = inf_i + P \times r_i \quad (1.2)$$

Onde  $r_i$  é o número inteiro correspondente ao número binário.

Existem outros tipos de representações, e apesar de estas serem mais adequadas a determinado tipo de problema, ainda se usa muito a representação binária (Linden, 2006).

Optou-se pelo uso da representação binária pela simplicidade e facilidade de aplicação dos operadores genéticos.

#### 4.7 Módulo de Avaliação

O módulo de avaliação contém a função de avaliação. Ele simplesmente retorna um valor numérico que indica quão boa é a solução representada por determinado indivíduo. O módulo de avaliação deve conter todo o conhecimento sobre o problema a ser resolvido, tanto suas restrições quanto seus objetivos. Ele contém a função a ser minimizada.

Para este trabalho, a função de avaliação é a função que contém as normas quadráticas dos coeficientes do numerador do erro na função de transferência.

#### 4.8 Módulo de Seleção de Pais

Este módulo simula o mecanismo de seleção natural que atua sobre as espécies no processo de evolução. Ele consiste basicamente em selecionar indivíduos mais fortes (com alto valor de avaliação), mas sem desprezar completamente os mais fracos (com valor de avaliação muito baixo), isso porque indivíduos fracos também podem apresentar características que sejam favoráveis à criação de outro indivíduo que seja uma boa solução, características estas que podem não estar presentes em indivíduos fortes.

Um método que apresenta os requisitos anteriormente mencionados é o método da roleta viciada, que consiste em criar uma roleta virtual, na qual cada indivíduo recebe um “pedaço” proporcional ao seu valor de avaliação. A roleta é rodada virtualmente e o indivíduo sobre o qual ela parar será o selecionado.

#### 4.9 Operadores de Crossover e Mutação

Na evolução das espécies, estas são capazes de se reproduzir. Conforme já explicado, existem dois tipos de reprodução, a sexuada e a assexuada. Na reprodução sexuada, os pais transmitem aos filhos suas características. Cada progenitor fornece parte do material genético para que o novo indivíduo seja formado. Esse processo se inicia com a duplicação dos cromossomos, que depois realizam uma operação denominada crossover. Na operação de crossover, um pedaço de cada cromossomo é trocado com seu par. Nos AG essa operação ocorre analogamente.

Depois de selecionados dois pais no módulo de seleção, um ponto de corte é escolhido aleatoriamente. Um ponto de corte é um ponto de separação entre dois genes e para  $k$  genes existem  $(k-1)$  pontos de corte. Depois de selecionado o ponto de corte, os pais são separados em duas partes: um à esquerda do ponto de corte e outro à direita. O primeiro filho é composto através da concatenação da parte esquerda do primeiro pai com a parte direita do segundo pai. O segundo filho é composto através da concatenação da parte esquerda do segundo pai com a parte direita do primeiro pai. A Figura 4.3 ilustra a operação de crossover.

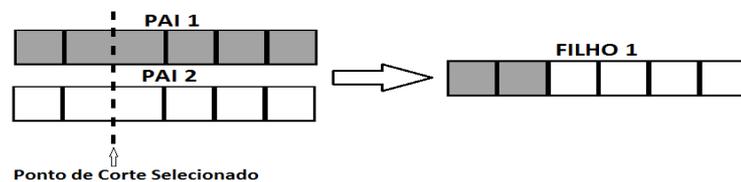


Figura 4.3 – Operador de Crossover

No processo de reprodução podem ocorrer alterações nos genes devido a diversos fatores. Nos AG essa operação também ocorre da seguinte forma: um número entre 0 e 1 é sorteado. Se este número for menor que uma probabilidade predeterminada (que para este trabalho foi de 1%) então o operador de mutação entra em ação alterando o valor do gene. A Figura 4.4 ilustra o processo de mutação.

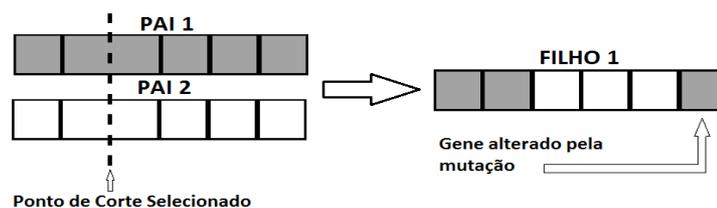


Figura 4.4 – Operador de Crossover e Mutação

#### 4.10 Implementação do Algoritmo Genético

Para o trabalho em questão foi desenvolvido um AG através de script em Matlab (Chapman, 2006), que funciona da seguinte forma:

- 1) Inicialize a população de cromossomos através do script “*gerapopulacao*”;
- 2) Enquanto o valor máximo da função de avaliação for menor que um valor predeterminado, execute o AG;
- 3) Calcule o valor da avaliação de todos os indivíduos da população através da função “*calculaavaliacao*”;
- 4) Selecione os pais através da função “*seleciona*”;
- 5) Aplique a operação de *crossover* e mutação por meio da função “*crossover*” aos pais selecionados para que uma nova população seja gerada;
- 6) Crie a nova população e, caso o critério de parada não seja satisfeito, repita o processo;
- 7) Se o critério de parada foi satisfeito, então pare o processo;
- 8) Fim.

A função “*gerapopulacao*” é responsável pela criação dos cromossomos na representação binária. A função “*calculaavaliacao*” avalia todos os indivíduos presentes na população e onde está inserida a função a ser minimizada, que, no trabalho em questão, é a função que contém a norma dos coeficiente da função de transferência do erro entre o modelo original e o modelo reduzido. A função “*seleciona*” é responsável pela emulação do processo de seleção natural, conforme já descrito. A função “*crossover*”, realiza a operação de crossover entre os pais selecionados e também o processo de mutação.

#### 4.11 Conclusão

Este capítulo apresentou os algoritmos genéticos, sua teoria básica e implementação. No próximo capítulo, serão expostas aplicações dos algoritmos genéticos no problema de redução de ordem de modelos matemáticos lineares.

## Capítulo 5

### *Aplicações e Resultados*

#### 5.1– Introdução

Este capítulo apresentará alguns dos resultados obtidos quando se aplica o método de redução proposto nesta dissertação.

A metodologia será aplicada na redução de alguns modelos, o que demonstrará a validade da abordagem.

#### 5.2 – Validação do Algoritmo Genético Desenvolvido

O primeiro passo em busca de resultados foi validar o AG desenvolvido através da verificação de seu correto funcionamento. Para isso, o AG foi usado para calcular os parâmetros a e b do modelo reduzido do sistema dado pela Equação (5.1), retirado de (Araújo, 2008).

$$H(s) = \frac{4s^3 + 28s^2 + 68s + 60}{s^4 + 8s^3 + 24s^2 + 32s + 15} \quad (5.1)$$

Os pólos e zeros de (5.1) são, respectivamente,  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = -3$ ,  $p_{3,4} = -2 \pm j1$ ,  $z_1 = -3$ ,  $z_{2,3} = -2 \pm j1$ .

Observa-se que modelo da Equação (5.1) apresenta cancelamento perfeito de pólos e zeros, o que resulta na função de transferência reduzida da Equação (5.2).

$$H_R(s) = \frac{4}{s+1} \quad (5.2)$$

Procedeu-se conforme segue:

1. Da mesma forma que (Araújo, 2008), supõe-se uma função de transferência reduzida dada pela Equação (5.3).

$$H_R(s) = \frac{b}{s+a} \quad (5.3)$$

2. Calculou-se a função de transferência do erro entre o modelo original e o reduzido, equação (5.4).

$$e(s) = \frac{(4-b)s^4 + (28+4a-8b)s^3 + (68+28a-24b)s^2 + (60+68a-32b)s + (60a-15b)}{s^5 + (8+a)s^4 + (24+8a)s^3 + (32+24a)s^2 + (15+32a)s + 15a} \quad (5.4)$$

3. Foi obtida a norma quadrática dos coeficientes do numerador da função de transferência do erro, resultando na equação (5.5).

$$f(a,b) = (4-b)^2 + (28+4a-8b)^2 + (68+28a-24b)^2 + (60+68a-32b)^2 + (60a-15b)^2 \quad (5.5)$$

O algoritmo genético foi executado com os parâmetros discriminados na Tabela 1, que também apresenta os valores de a e b:

Tabela 1: Parâmetros e Valores Calculados Pelo AG para o Exemplo 1

Exec.	População	Genes	Espaço de Busca	a e b
1ª.	50	44	[-10,10]	1,0002 e 4,0006
2ª.	50	44	[-20,20]	0,9997 e 3,9993

O algoritmo genético desenvolvido calculou os valores praticamente exatos dos parâmetros a e b, o que o torna confiável como ferramenta para otimização de funções.

### 5.3 – Sistema de Terceira Ordem.

Considere-se um sistema de terceira ordem, com função de transferência dada pela Equação (5.6), que não apresenta dominância modal (Araújo, 2008).

$$H(s) = \frac{1}{(s+0,99)(s+1)(s+1,1)} \quad (5.6)$$

(Araújo, 2008) obtém um modelo reduzido de 2ª ordem de fase não mínima. O AG foi usado para que se obtivesse um modelo reduzido de 2ª ordem, mas de fase mínima. Para tanto, procedeu-se da seguinte forma:

1. Supôs-se um modelo reduzido de segunda ordem dado pela Equação (5.7).

$$H_R(s) = \frac{cs + d}{s^2 + as + b} \quad (5.7)$$

2. Como nos passos 1, 2 e 3 do item 5.2, obteve-se a função de transferência do erro e a que deverá ser minimizada, Equações (5.8) e (5.9).

$$e(s) = \frac{-cs^4 + (-3,09c - d)s^3 + (1 - 3,179c - 3,09d)s^2 + (a - 1,089c - 3,179d)s + (b - 1,089d)}{s^5 + (a + 3,09)s^4 + (3,09a + b + 3,179)s^3 + (3,179a + 3,09b + 1,089)s^2 + (3,179b + 1,089a)s + 1,089b} \quad (5.8)$$

$$f(a, b, c, d) = (-c)^2 + (-3,09c - d)^2 + (1 - 3,179c - 3,09d)^2 + (a - 1,089c - 3,179d)^2 + (b - 1,089d)^2 \quad (5.9)$$

3. Foi incluída a restrição para que o modelo reduzido gerado seja de fase mínima.
4. Incluiu-se a restrição  $y(\infty) = y_R(\infty)$ .

A restrição para a geração de modelos de fase mínima foi incluída no AG através do espaço de busca de soluções, restringido somente a números positivos.

Dado um polinômio, mostrado na Equação (5.10), a condição necessária (mas não suficiente) para que todas as raízes tenham parte real negativa é que todos os coeficientes  $a_i$  sejam positivos (Ogata, 2000).

$$a_0s^m + a_1s^{m-1} + \dots + a_m \quad (5.10)$$

Essa restrição também implica que os modelos de 2ª ordem gerados serão estáveis.

De acordo com critério de estabilidade de Routh-Hurwitz (Dorf, 2001), o requisito para que um sistema de segunda ordem seja estável é que todos os coeficientes do polinômio característico da função de transferência sejam positivos.

A restrição  $y(\infty) = y_R(\infty)$  iguala os valores em regime permanente de ambos os modelos através do teorema do valor final (Dorf, 2001).

A Tabela 2 apresenta os valores dos parâmetros calculados pelo AG.

Tabela 2: Valores Calculados pelo AG para o Exemplo 2

Exec.	População	Genes	Esp. Busca	a, b, c e d.
1ª.	60	60	[0,5]	a=0,8813 b=0,3059 c=0,0020 d=0,2809
2ª.	400	60	[0,5]	a=0,9322 b=0,3177 c=1,526x10 <sup>-4</sup> d=0,2917

As Figuras 5.1 e 5.2 apresentam as respostas ao degrau e em frequência, respectivamente, dos sistemas original, do reduzido pelo método de (Araújo, 2008) e o reduzido através do AG, com a=0,9322, b=0,3177, c=1,526x10<sup>-4</sup> e d=0,2917.

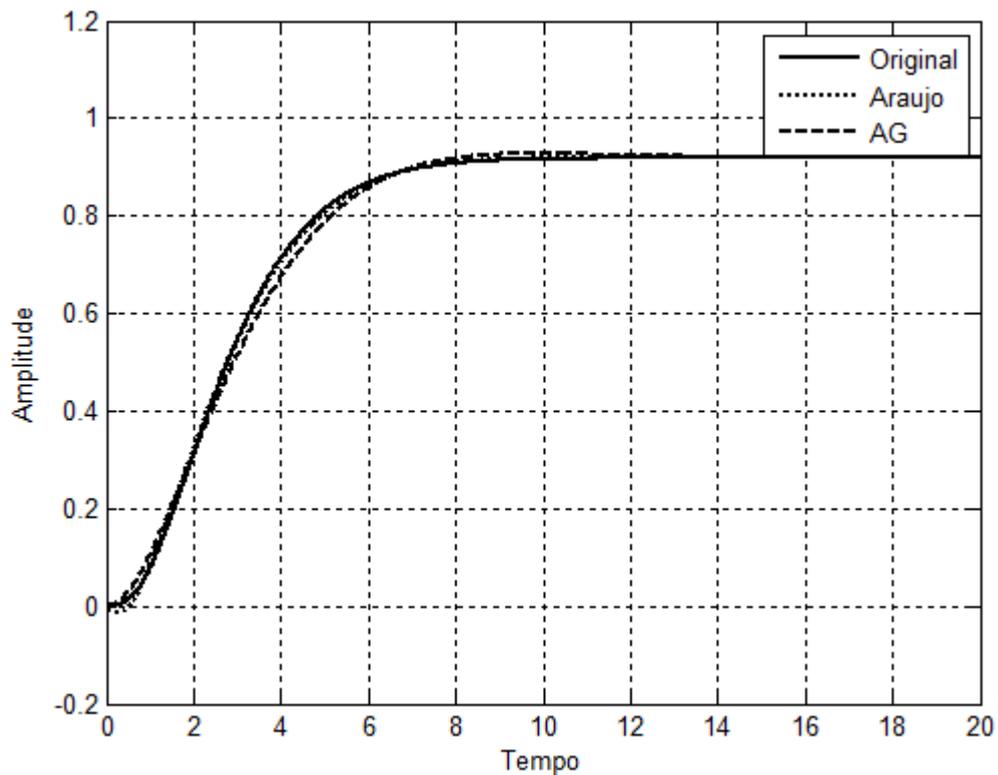


Figura 5.1: Resposta ao Degrau para o Sistema de Terceira Ordem e seus Modelos Reduzidos.

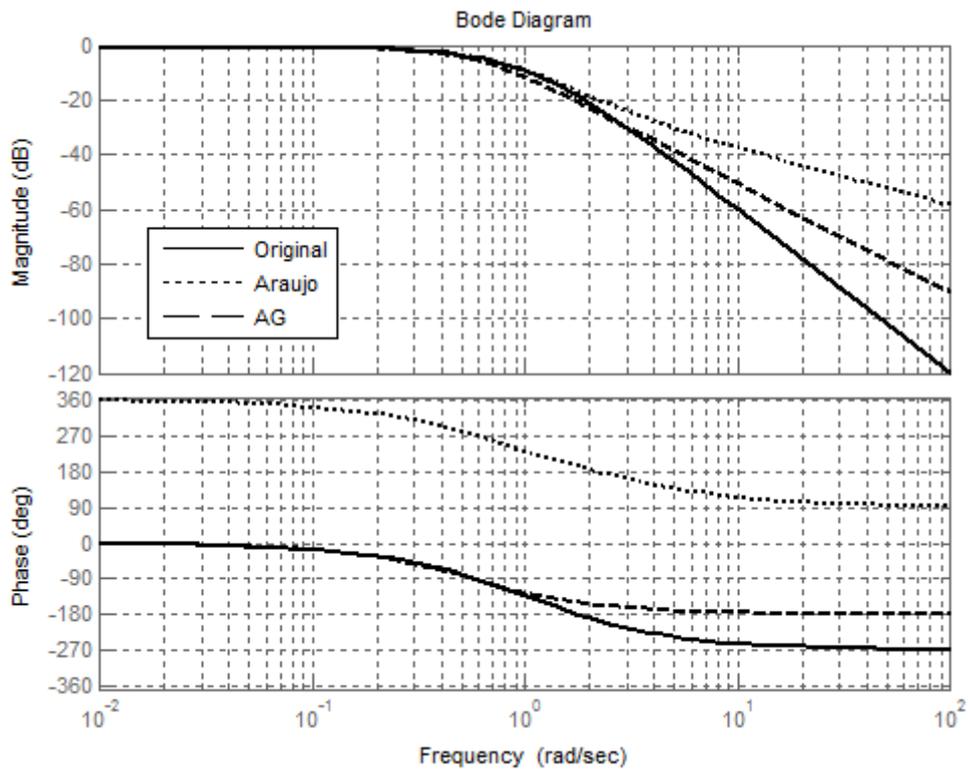


Figura 5.2: Resposta em Frequência para o Sistema de Terceira Ordem e seus Modelos Reduzidos.

A Tabela 3 apresenta o valor da integral do quadrado do erro ( $J$ ) entre as respostas ao degrau dos sistemas.

Tabela 3: Comparação entre os Modelos para o Sistema de Terceira Ordem

Modelo Reduzido	Função de Transferência	$J$
Araújo	$\frac{-0,1246s + 0,4455}{s^2 + 1,2804s + 0,4851}$	0,0004
Obtido pelo AG.	$\frac{1,526 \times 10^{-4}s + 0,2917}{s^2 + 0,9322s + 0,3177}$	0,0044

Observa-se que o modelo obtido por meio do AG tem erro maior, contudo é de fase mínima como o sistema original.

#### 5.4 – Sistema de Quarta Ordem

Nesse exemplo (Araújo, 2008), o modelo a ser reduzido é dado pela Equação (5.11).

$$H(s) = \frac{s^3 + 7s^2 + 24s + 24}{s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24} \quad (5.11)$$

(5.11) apresenta pólos reais  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = -2$ ,  $p_3 = -3$ ,  $p_4 = -4$ , e zeros  $z_{1,2} = -2,7306 \pm j2,8531$ ,  $z_3 = 1,5388$ .

Supôs-se uma função de transferência reduzida com a mesma estrutura  $H_R$  da Equação (5.7).

A função de transferência do erro e a função a ser minimizada são dadas pelas Equações (5.12) e (5.13), respectivamente.

$$e(s) = \frac{(1-c)s^5 + (7+a-10c-d)s^4 + (24+7a+b-35c-10d)s^3 + (24+24a+7b-50c-35d)s^2 + (24a+24b-24c-50d)s + (24b-24d)}{(s^4 + 10s^3 + 35s^2 + 50s + 24)(s^2 + as + b)} \quad (5.12)$$

$$f(a,b,c,d) = (1-c)^2 + (7+a-10c-d)^2 + (24+7a+b-35c-10d)^2 + (24+24a+7b-50c-35d)^2 + (24a+24b-24c-50d)^2 + (24b-24d)^2 \quad (5.13)$$

Neste caso também foi aplicada a restrição de valor final.

O resultado obtido consta na Tabela 4.

Tabela 4: Valores Calculados pelo AG para o Sistema de Quarta Ordem

População	Genes	Espaço de Busca	a, b, c e d
800	80	[0,5]	a=2,5812 b=1,6333 c=0,7936 d=1,6333

As Figuras (5.3) e (5.4) apresentam as resposta ao degrau e em frequência, respectivamente, do modelo original, do reduzido pelo método de (Araújo, 2008) e do reduzido através do AG.

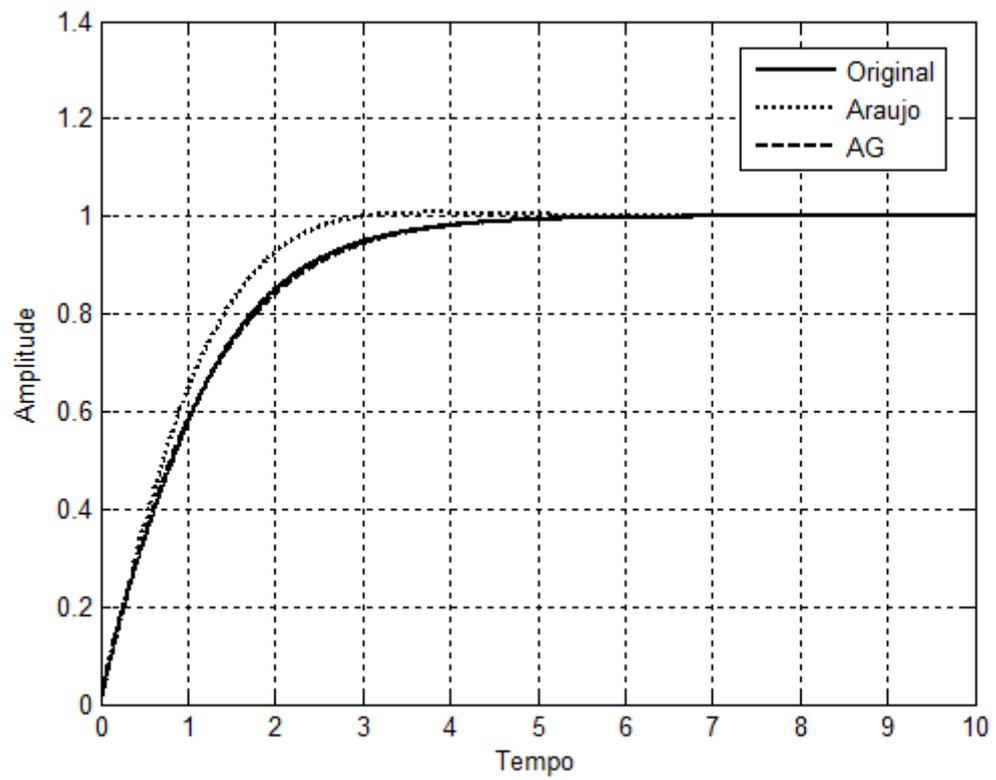


Figura 5.3: Resposta ao Degrau para o Sistema de 4ª Ordem e seu Modelo Reduzido.

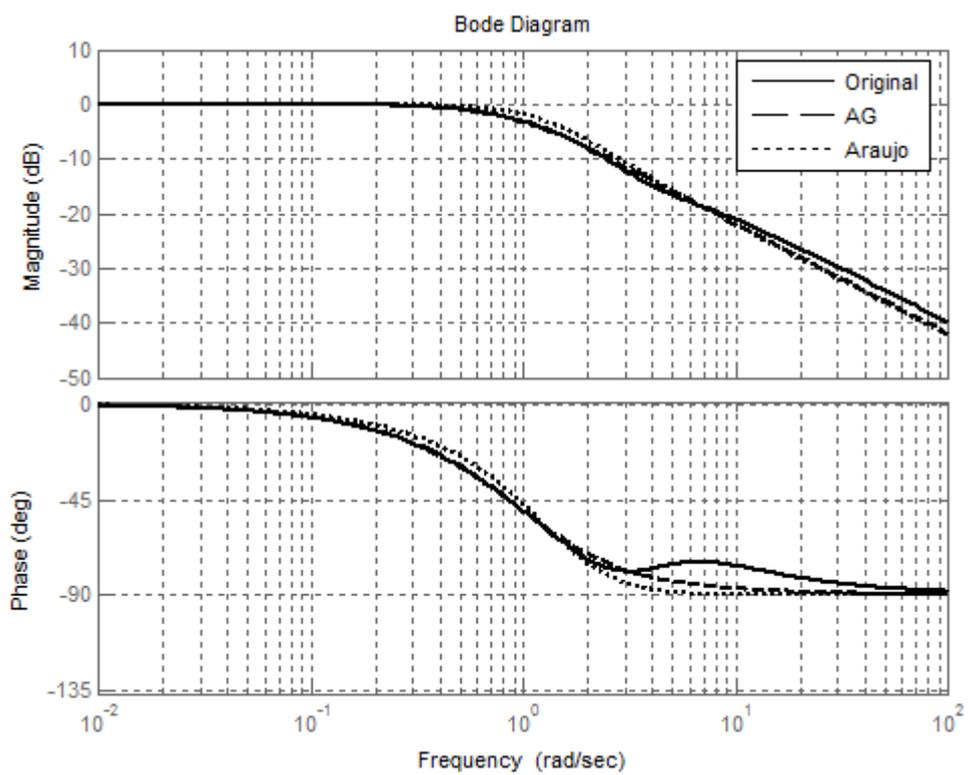


Figura 5.4: Resposta em Frequência para o para o Sistema de 4ª Ordem e seu Modelo Reduzido.

Tem-se na Tabela 5, o valor do funcional  $J$ , para uma comparação do desempenho entre os modelos.

Tabela 5: Comparação entre os Modelos para o Sistema de Quarta Ordem

<b>Modelo Reduzido</b>	<b>Função de Transferência</b>	<b><math>J</math></b>
Araújo	$\frac{0,772s+1,819}{s^2+2,318s+1,819}$	0,0135
Obtido pelo AG.	$\frac{0,7936s+1,6333}{s^2+2,5812s+1,6333}$	0,0001

O modelo reduzido com os parâmetros calculados no AG apresentou desempenho superior ao modelo obtido em (Araújo, 2008).

### 5.5 – Sistema de Quinta Ordem

Este modelo de quinta ordem, Equação (5.14), foi obtido em (Penna, 1990).

$$H(s) = \frac{-0,0217s^4 + 0,7968s^3 + 3,5762s^2 + 1,9614s + 0,96892}{3 \times 10^{-6}s^5 + 0,884s^4 + 6,129s^3 + 5,282s^2 + 3,56s + 1} \quad (5.14)$$

A estrutura do modelo reduzido de ordem 3 é dada pela equação (5.15).

$$H_R(s) = \frac{es^2 + cs + d}{s^3 + as^2 + bs + k} \quad (5.15)$$

A função de transferência do erro e a função custo são dadas pelas equações (5.16) e (5.17), respectivamente.

$$\begin{aligned}
& (-0,0217 - 3 \times 10^{-6} e) s^7 + (0,7968 - 0,0217 a - 0,884 e - 3 \times 10^{-6} c) s^6 + \\
& + (3,5762 + 0,7968 a - 0,0217 b - 6,129 e - 0,884 c - 3 \times 10^{-6} d) s^5 + \\
& + (1,9614 + 3,5762 a + 0,7968 b - 0,0217 k - 5,282 e - 6,129 c - 0,884 d) s^4 + \\
& + (0,9689 + 1,9614 a + 3,5762 b + 0,7968 k - 3,56 e - 5,282 c - 6,129 d) s^3 + \\
& + (0,9689 a + 1,9614 b + 3,5762 k - e - 3,56 c - 5,282 d) s^2 + \\
& + (0,9689 b + 1,9614 k - c - 3,56 d) s + (0,9689 k - d)
\end{aligned}
\quad (5.16)$$

$$e(s) = \frac{\quad}{(3 \times 10^{-6} s^5 + 0,884 s^4 + 6,129 s^3 + 5,282 s^2 + 3,56 s + 1)(s^3 + a s^2 + b s + k)}$$

$$\begin{aligned}
f(a, b, c, d, e, k) = & (-0,0217 - 3 \times 10^{-6} e)^2 + (0,7968 - 0,0217 a - 0,884 e - 3 \times 10^{-6} c)^2 + \\
& + (3,5762 + 0,7968 a - 0,0217 b - 6,129 e - 0,884 c - 3 \times 10^{-6} d)^2 + \\
& + (1,9614 + 3,5762 a + 0,7968 b - 0,0217 k - 5,282 e - 6,129 c - 0,884 d)^2 + \\
& + (0,9689 + 1,9614 a + 3,5762 b + 0,7968 k - 3,56 e - 5,282 c - 6,129 d)^2 + \\
& + (0,9689 a + 1,9614 b + 3,5762 k - e - 3,56 c - 5,282 d)^2 + \\
& + (0,9689 b + 1,9614 k - c - 3,56 d)^2 + (0,9689 k - d)^2
\end{aligned}
\quad (5.17)$$

Seguindo-se a metodologia proposta e com a adição da restrição  $y(\infty) = y_R(\infty)$ , foi obtido o modelo reduzido, Equação (5.18), e conforme a Tabela 6.

$$H_R(s) = \frac{0,6587 s^2 + 0,3286 s + 0,1914}{s^3 + 0,8838 s^2 + 0,647 s + 0,1976} \quad (5.18)$$

Tabela 6: Valores Calculados pelo AG para o Sistema de Quinta Ordem.

População	Genes	Espaço de Busca	a, b, c, d, e, k
200	60	[0,2]	a=0,8838 b=0,6470 c=0,3286 d=0,1914 e=0,6587 k=0,1976

As Figuras (5.5) e (5.6) apresentam as respostas ao degrau e em frequência, respectivamente, dos modelos reduzidos obtidos através do AG e o obtido através do método de (Araujo, 2008).

A Tabela 7 apresenta o valor do funcional  $J$ , para uma comparação do desempenho entre os modelos.

Tabela 7: Comparação entre os Modelos para o Sistema de Quinta Ordem

Modelo Reduzido	Função de Transferência	$J$
Araújo	$\frac{0,6016s^2 + 0,2785s + 0,0186}{s^3 + 0,6318s^2 + 0,4677s + 0,0192}$	1,1984
Obtido pelo AG.	$\frac{0,6587s^2 + 0,3286s + 0,1914}{s^3 + 0,8838s^2 + 0,647s + 0,1976}$	0,0031

O modelo reduzido com os parâmetros calculados no AG apresentou desempenho consideravelmente superior ao modelo obtido em (Araújo, 2008).

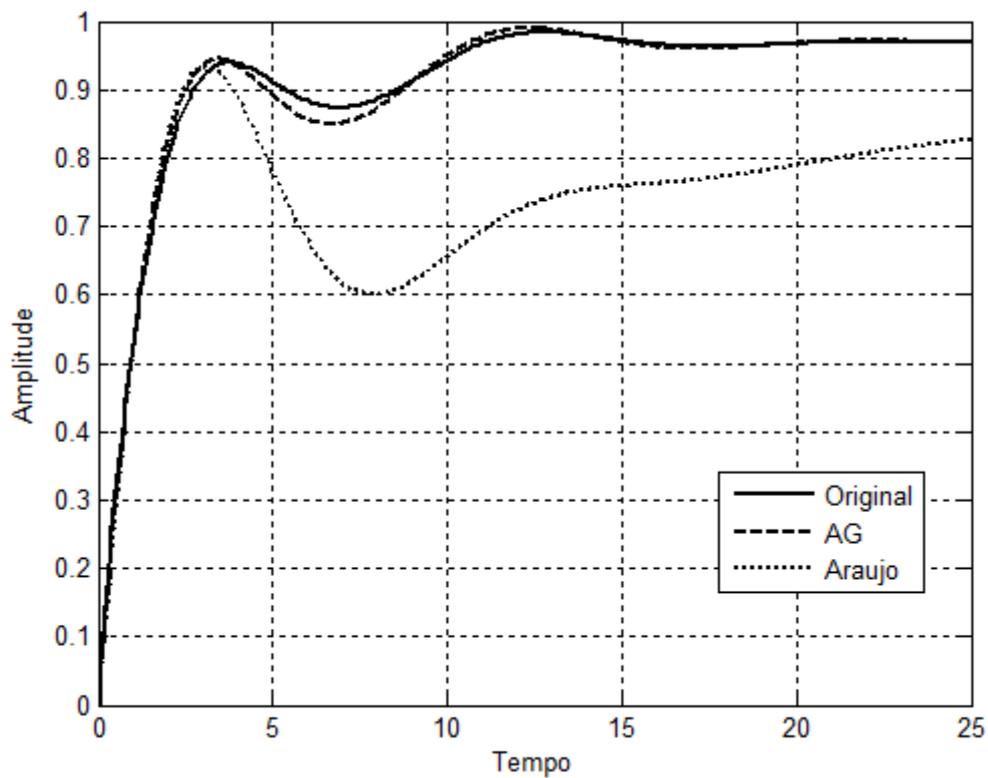


Figura 5.5: Resposta ao Degrau para o Sistema de 4ª Ordem e seus Modelos Reduzidos.

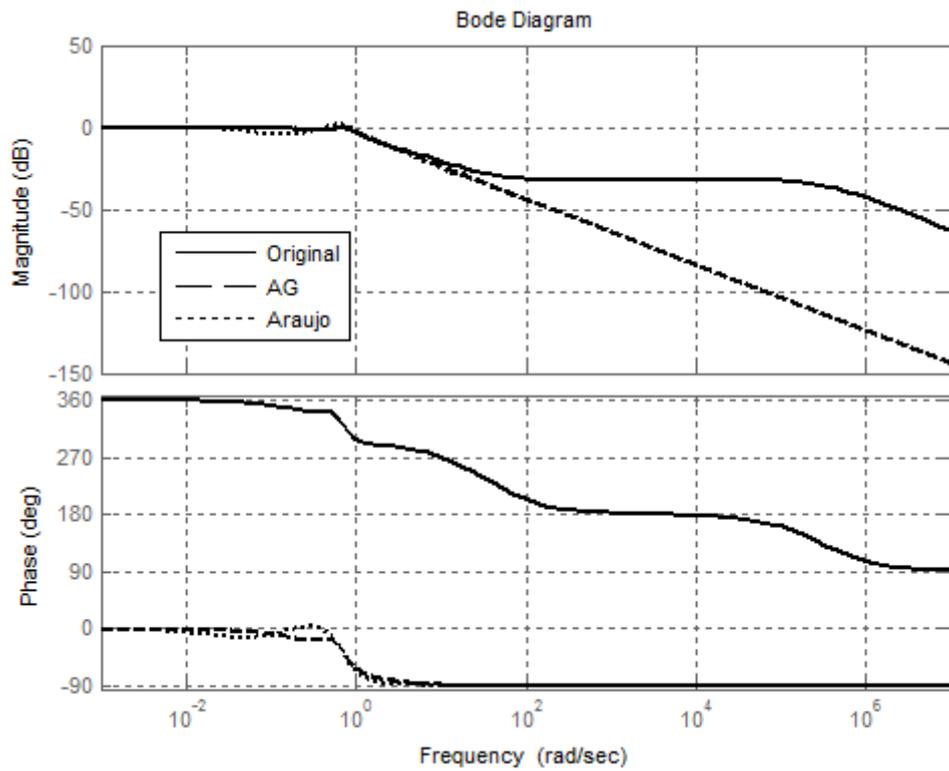


Figura 5.6: Resposta em Frequência para o Sistema de 4ª Ordem e seus Modelos Reduzidos.

O valor do funcional  $J$  para o modelo obtido através do AG é de 0,0031. Apesar da ligeira diferença na parte transitória da resposta, o valor do erro cometido é pequeno.

## 5.6 – Sistema de Sexta Ordem

Este modelo, Equação (5.19), também foi retirado de (Araújo, 2008).

$$H(s) = \frac{16s^4 + 96s^3 + 936s^2 + 780s + 3250}{s^6 + 13,2s^5 + 158,6s^4 + 594s^3 + 2765s^2 + 1050s + 2500} \quad (5.19)$$

A estrutura do modelo reduzido utilizado é de 2ª ordem dado pela Equação (5.20).

$$H_R(s) = \frac{cs + d}{s^2 + as + b} \quad (5.20)$$

Utilizando-se a restrição que iguala os valores de regime permanente de ambos os modelos, o original e o reduzido, pode-se alterar a estrutura da Equação (5.20), a qual passa a ser a da Equação (5.21).

$$H_R(s) = \frac{cs + 1,3}{s^2 + as + 1} \quad (5.21)$$

O erro na função de transferência e a função que deverá ser minimizada são dadas pelas Equações (5.22) e (5.23).

$$e(s) = \frac{(-c)s^7 + (14,7 - 13,2c)s^6 + (78,84 + 16a - 158,6c)s^5 + (745,82 + 96a - 594c)s^4 + (103,8 + 936a - 2765c)s^3 + (603,2 + 780a - 1050c)s^2 + (-585 + 3250a - 2500c)s}{(s^6 + 13,2s^5 + 158,6s^4 + 594s^3 + 2765s^2 + 1050s + 2500)(s^2 + as + 1)} \quad (5.22)$$

$$f(a, c) = (-c)^2 + (14,7 - 13,2c)^2 + (78,84 + 16a - 158,6c)^2 + (745,82 + 96a - 594c)^2 + (103,8 + 936a - 2765c)^2 + (603,2 + 780a - 1050c)^2 + (-585 + 3250a - 2500c)^2 \quad (5.23)$$

Os parâmetros calculados pelo AG constam na Tabela 8.

Tabela 8: Valores Calculados pelo AG para Modelo Reduzido de 6ª Ordem

<b>População</b>	<b>Genes</b>	<b>Espaço de Busca</b>	<b>a e c</b>
1000	40	[0,5]	a=0,2898 c=0,3688

As Figuras 5.7 e 5.8 comparam as respostas ao degrau e em frequência para os modelos obtidos por (Araujo,2008) e o obtido pelo AG.

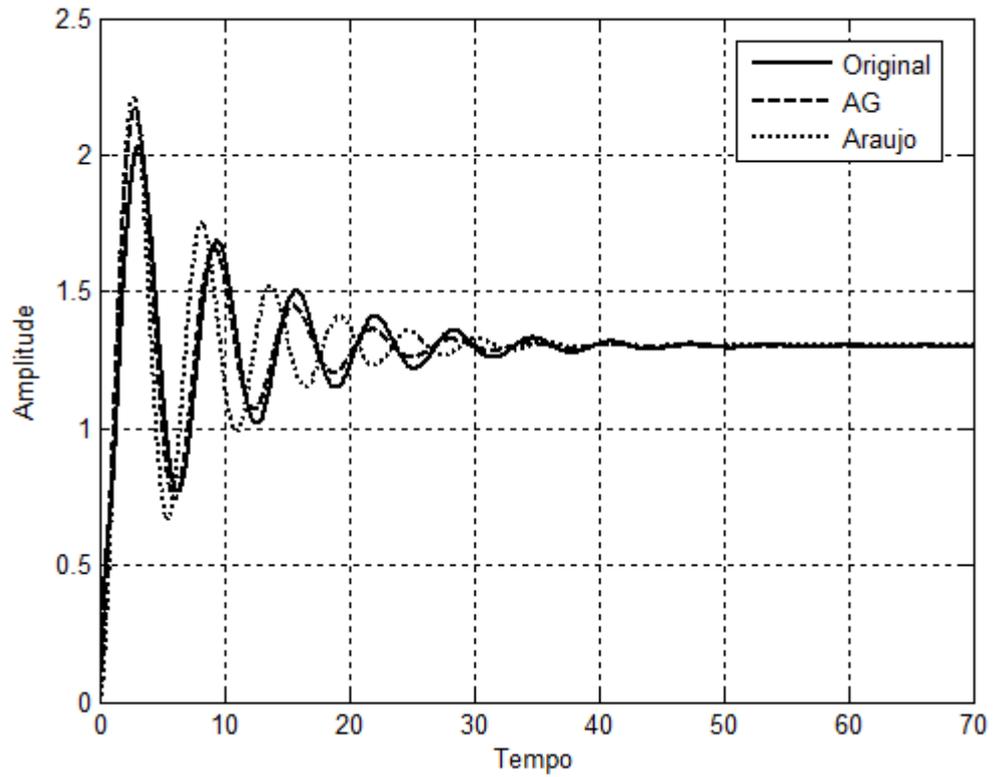


Figura 5.7: Resposta ao Degrau para o para o Sistema de 6ª Ordem e Seus Modelos Reduzidos.

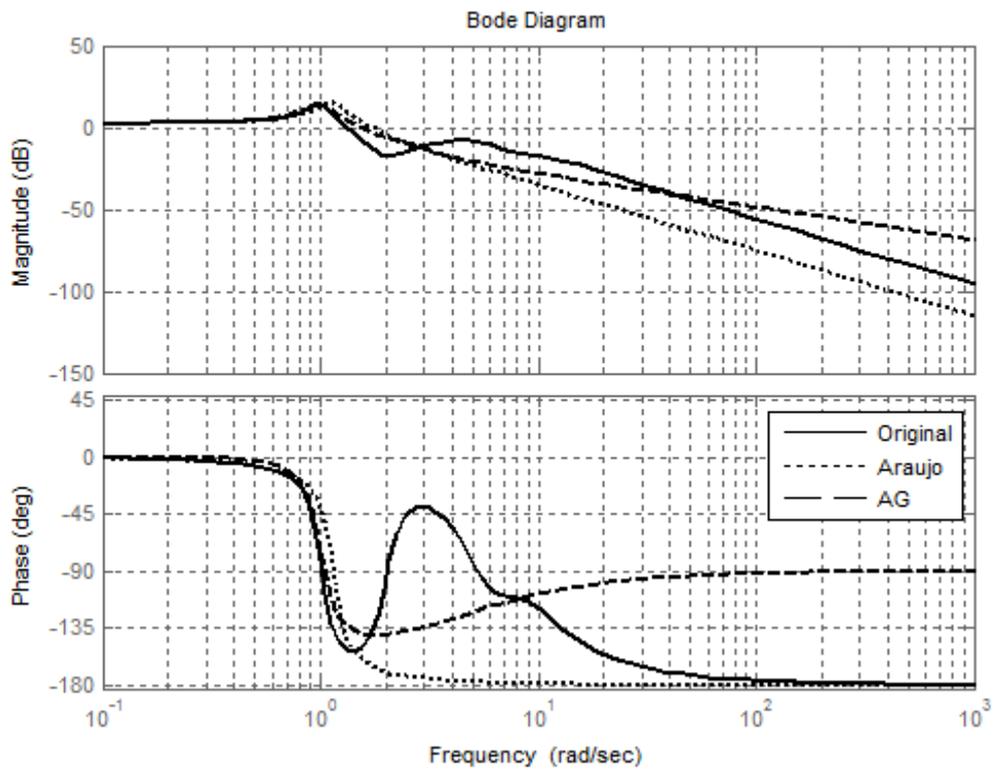


Figura 5.8: Resposta em Frequência para o para o Sistema de 6ª Ordem e Seus Modelos Reduzidos

A Tabela 9 apresenta os valores do funcional  $J$  para os modelos obtidos.

Tabela 9: Comparação entre os Modelos para o Sistema de Quarta Ordem

<b>Modelo Reduzido</b>	<b>Função de Transferência</b>	<b><math>J</math></b>
Araújo	$\frac{1,72}{s^2 + 0,26 + 1,32}$	0,8821
Obtido pelo AG.	$\frac{0,3688s + 1,3}{s^2 + 0,2898s + 1}$	0,1435

O modelo obtido pelo AG apresenta menor erro entre as respostas ao degrau, contudo sua resposta em fase tende a divergir da do modelo original à medida que a frequência é aumentada, o que não ocorre no modelo obtido em (Araújo, 2008).

### 5.7 – Sistema de Sétima Ordem

O modelo dado pela Equação (5.24), que é um modelo de sistema de potência, é a função de transferência entre a tensão de referência do regulador de tensão e a variação de velocidade no eixo do rotor de uma máquina síncrona, retirado de (Barreiros, 1994).

$$H(s) = \frac{1,535 \times 10^4 s^4 + 2,448 \times 10^5 s^3 + 2,338 \times 10^5 s^2}{s^7 + 91,94 s^6 + 2709 s^5 + 3,501 \times 10^4 s^4 + 2,471 \times 10^5 s^3 + 1,413 \times 10^6 s^2 + 4,825 \times 10^6 s + 4,031 \times 10^6} \quad (5.24)$$

Supôs-se inicialmente um modelo reduzido de quinta ordem, cuja estrutura é dada pela Equação (5.25).

$$H_R(s) = \frac{as^2 + bs}{s^5 + cs^4 + ds^3 + es^2 + ls + k} \quad (5.25)$$

O erro da função de transferência e a que deverá ser minimizada são dadas, respectivamente, pelas Equações (5.26) e (5.27).

$$\begin{aligned}
& (1,535x10^4 - a)s^9 + (2,448x10^5 + 1,535x10^4c - 91,94a - b)s^8 + \\
& + (2,338x10^5 + 2,448x10^5c + 1,535x10^4d - 2709a - 91,94b)s^7 + \\
& + (2,338x10^5c + 2,448x10^5d + 1,535x10^4e - 3,501x10^4a - 2709b)s^6 + \\
& + (2,338x10^5d + 2,448x10^5e + 1,535x10^4l - 2,448x10^5a - 3,501x10^4b)s^5 + \\
& + (2,338x10^5e + 2,448x10^5l + 1,535x10^4k - 1,413x10^6a - 2,448x10^5b)s^4 + \\
& + (2,338x10^5l + 2,448x10^5k - 4,825x10^6a - 1,413x10^6b)s^3 + (2,338x10^5k - \\
& - 4,031x10^6a - 4,825x10^6b)s^2 + (-4,031x10^6b)s \\
e(s) = & \frac{\hspace{15em}}{(s^7 + 91,94s^6 + 2709s^5 + 3,501x10^4s^4 + 2,448x10^5s^3 + 1,413x10^6s^2 + \\
& + 4,825x10^6s + 4,031x10^6)(s^5 + cs^4 + ds^3 + es^2 + ls + k)} \tag{5.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(a, b, c, d, e, l, k) = & (1,535x10^4 - a)^2 + (2,448x10^5 + 1,535x10^4c - 91,94a - b)^2 + \\
& + (2,338x10^5 + 2,448x10^5c + 1,535x10^4d - 2709a - 91,94b)^2 + \\
& + (2,338x10^5c + 2,448x10^5d + 1,535x10^4e - 3,501x10^4a - 2709b)^2 + \\
& + (2,338x10^5d + 2,448x10^5e + 1,535x10^4l - 2,448x10^5a - 3,501x10^4b)^2 + \\
& + (2,338x10^5e + 2,448x10^5l + 1,535x10^4k - 1,413x10^6a - 2,448x10^5b)^2 + \\
& + (2,338x10^5l + 2,448x10^5k - 4,825x10^6a - 1,413x10^6b)^2 + (2,338x10^5k - \\
& - 4,031x10^6a - 4,825x10^6b)^2 + (-4,031x10^6b)^2 \tag{5.27}
\end{aligned}$$

A Tabela 10 apresenta os resultados obtidos pelo AG.

Tabela 10: Valores Calculados pelo AG para Modelo Reduzido de 7ª Ordem

População	Genes	Espaço de Busca	a e c
1000	210	$[-7x10^3, 10^6]$	a=4756 b=-6504 c=40,78 d=564,4 e=3759 l=21980 k=69330

As Figuras 5.8 e 5.9 comparam as respostas ao degrau e em frequência de ambos os modelos original e reduzido.

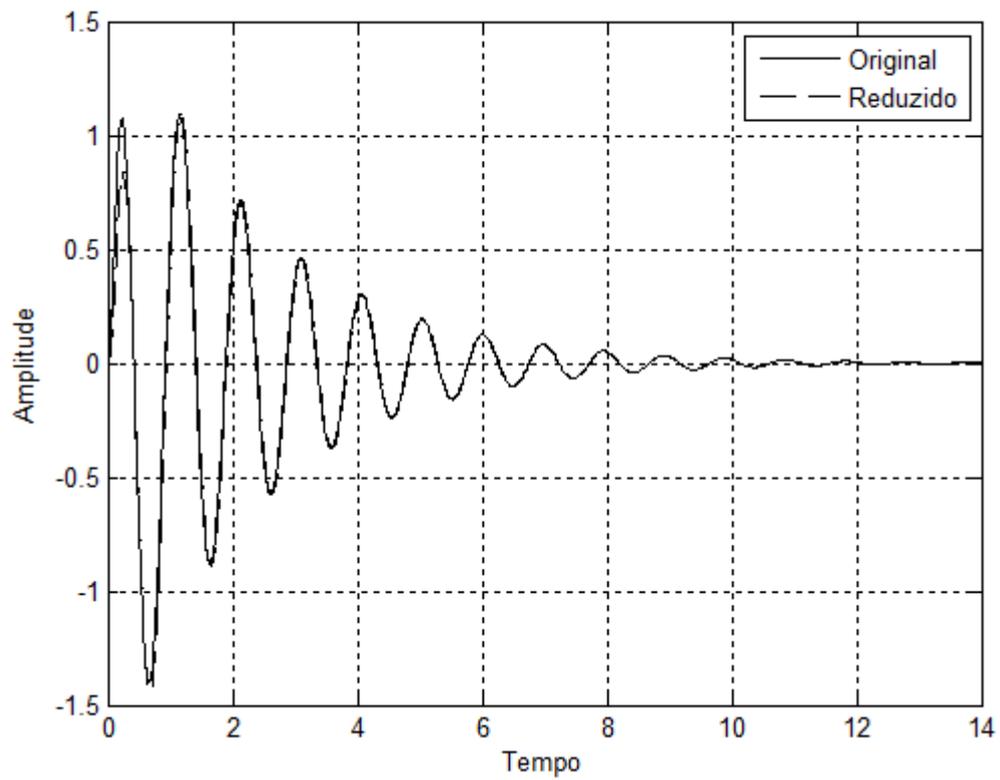


Figura 5.8: Resposta ao Degrau para o Modelo de Controlador, Original e Reduzido.

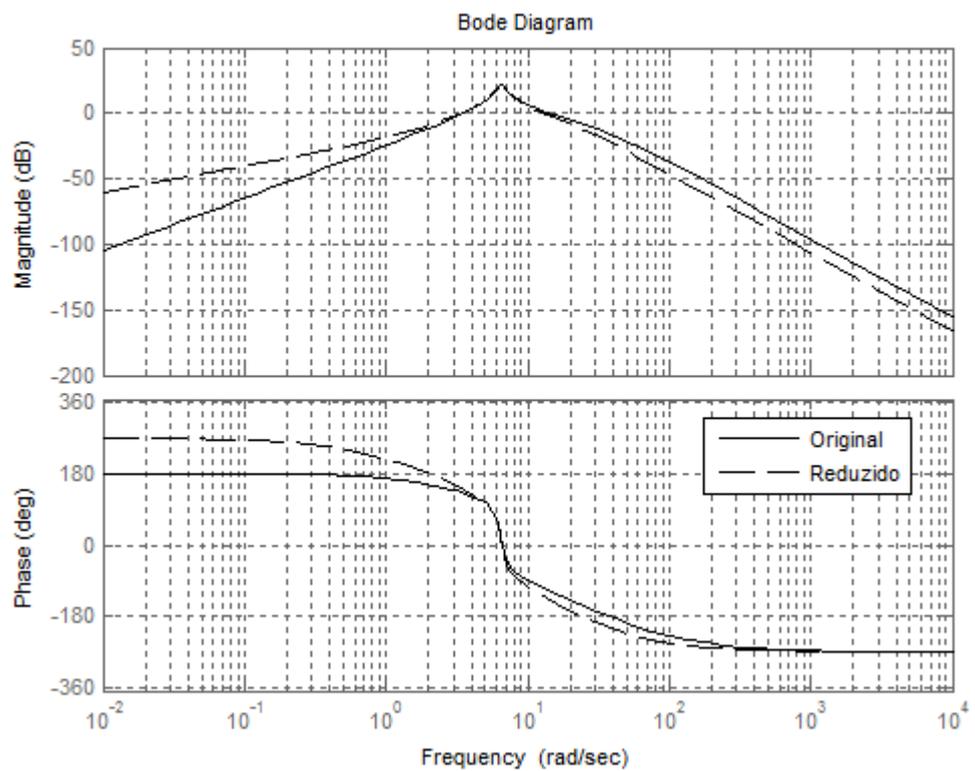


Figura 5.9: Resposta em Frequência para o Modelo de Controlador, Original e Reduzido.

O valor do funcional  $J$  foi de 0,0284, o que representa excelente aproximação para o modelo de controlador. Vê-se também que as respostas em frequência dos modelos tendem a ser aproximar, o que é altamente desejável para um controlador de ordem reduzida.

Um modelo reduzido pode ser obtido aplicando-se a metodologia de (Araujo, 2008), contudo o procedimento algébrico para se chegar à solução é trabalhoso, dada a ordem dos modelos reduzido e não reduzido.

## **5.8 – Conclusão**

Neste capítulo foram apresentados resultados da aplicação de algoritmos genéticos no problema de redução de ordem, onde a função a ser minimizada era formada pela norma quadrática dos coeficientes do numerador do erro na função de transferência entre os modelos original e reduzido.

A técnica foi aplicada a modelos de até sétima ordem. Os modelos obtidos apresentaram, na maioria dos casos, desempenho superior ao obtido quando se minimiza a função objetivo por técnicas algébricas. Foram feitas comparações através das respostas ao degrau e das curvas de resposta em frequência, além do uso da integral do quadrado do erro para uma mensuração numérica. O capítulo seguinte apresenta conclusões adicionais e sugestões para futuros trabalhos.

## Capítulo 6

### *Conclusões e Propostas para Futuros Trabalhos*

#### 6.1– Conclusões

Este trabalho abordou um problema clássico da teoria de controle, que é a redução de ordem de modelos matemáticos lineares. O método de redução proposto baseia-se na minimização da norma dos coeficientes do numerador do erro na função de transferência, utilizando otimização via algoritmos genéticos. Os resultados demonstram o mérito da metodologia. Uma vantagem nítida é o uso de um método de otimização global com incorporação de restrições que visam reter certas características do modelo original, como a propriedade de fase mínima e obviamente a estabilidade do modelo reduzido.

Os algoritmos genéticos são uma ferramenta eficaz na otimização de funções. No método de redução proposto nesta dissertação, que é um método baseado em otimização, os resultados apresentados comprovam sua eficácia. O algoritmo genético foi desenvolvido em sua formulação básica. Técnicas mais avançadas e que tornem o algoritmo melhor estruturado para incorporar diretamente determinadas restrições podem ser utilizadas.

A estrutura do modelo reduzido, ou seja, a forma da função de transferência deve ser previamente determinada, o que também é um fator importante para resultados satisfatórios. Não se sabe qual a melhor estrutura a utilizar, sendo esta determinação feita por tentativa e erro.

Há uma grande diversidade de métodos de redução apresentados na literatura, contudo não se sabe qual o mais adequado para reduzir determinado modelo e que produzirá melhor resultado.

Os modelos reduzidos obtidos pelo presente método mostraram-se excelentes quando se comparou as curvas de resposta ao degrau dos modelos reduzidos e não reduzidos, de modo que o método mostra-se viável para este tipo de aplicação.

## 6.2 – Propostas para Futuros Trabalhos

Como proposta para futuros trabalhos tem-se:

- Desenvolvimento de um método de redução baseado em um Sistema Fuzzy. Em (Fortuna *et al*, 1989) é apresentado um sistema especialista para otimização de técnicas de redução de modelos. Talvez seja possível criar uma base de regras e um sistema de inferência fuzzy do qual se extraia um modelo reduzido dado determinado modelo matemático.
- Estudo sobre qual o método mais adequado a ser aplicado a determinado modelo. Assim como pode existir um método que não resolva satisfatoriamente o problema de redução de ordem quando se aplica o método a determinado problema, deve existir um mais adequado. Por exemplo, modelos que apresentam pólos dominantes, podem ser reduzidos utilizando-se a técnica de rejeição de pólos não dominantes. Contudo, quando não há dominância modal este método não é adequado. Seria interessante saber, dadas as características de um modelo original, qual o método mais adequado a ser aplicado em sua redução.
- Estudo sobre qual o funcional a ser minimizado e que gerará melhor resultado na redução. A integral do quadrado do erro ISE (*integral square error*) é muito utilizada como função custo a ser minimizada em problemas de redução de ordem baseados em otimização. No presente trabalho, foi utilizado como funcional a ser minimizado a norma quadrática dos coeficientes do numerador da função de transferência do erro. Seria interessante saber se o uso de um destes funcionais produz melhor resultado que o outro.
- Estudo comparativo entre as técnicas de redução de ordem.
- Estudo sobre a robustez de controladores de ordem reduzida.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aguirre, L. A. (1993). *Quantitative Measure of Modal Dominance for Continuous Systems*, IEEE, Proceedings of the 32<sup>nd</sup> Conference on Decision and Control, San Antonio, Texas.

Aguirre, L. A. (2000). *Introdução à Identificação de Sistemas Técnicas Lineares e Não Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*, Editora da Universidade Federal de Minas Gerais, 1<sup>a</sup>. Ed.

Aguirre, L. A. (1995). *Exact Pole Retention in Least Square Padé Reduction of SISO Systems*. SBA Controle e Automação, Vol.6, No. 2, pp. 49-56.

Araújo, J. M., Castro, A. C., Santos, E. T. F. (2008). *Redução de Ordem no Domínio da Frequência Baseada na Minimização da Norma dos Coeficientes Polinomiais do Erro*. Revista Controle e Automação, vol. 19, N° 3, 235-241.

Benner, P.; Mehrmann, V. and Sorensen, D. C. (2005). *Dimension Reduction of Large-Scale Systems*. Springer, Berlin.

Chapman, S. J. (2006). *Programação em MATLAB para Engenheiros*. Thomson Learning, São Paulo.

Chen, T. C., Chang, C. Y. (1979). *Reduction of Transfer Functions by the Stability-Equation Method*. Journal of The Franklin Institute Press Ltd, vol. 308, N° 4, 389-404.

Dehghani, M., Yazdanpanah, M. J. (2005). *Model Reduction Based on the Frequency Weighted Hankel-Norm Using Genetic Algorithm and Its Application to the Power Systems*. Proceedings of the 2005 IEEE Conference on Control Application. 245-250.

Dorf, R. C; Bishop, R. H (2001). *Sistemas de Controle Modernos*. LTC, Rio de Janeiro.

Fortuna, L., Gallo, A., Nunnari, G. (1989). *Expert System Optimization of Model Reduction Techniques*. IEEE Control System Magazine, N° 4, 9-13.

Howitt, G. D., Luus, R. (1990). *Model Reduction by Minimization of Integral Square Error Performance Indices*. Journal of The Franklin Institute Press, vol. 327, N° 3, 343-357.

Hutton, M. F., Friedland, B. (1975). *Routh Approximations for Reducing Order of Linear, Time-Invariant Systems*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-20, N° 3, 329-337.

Ismail, O., Bandyopadhyay, B., and Gorez, R. (1997), *Discrete Interval System Reduction Using Padé Approximation to Allow Retention of Dominant Poles*. IEEE Transactions on Circuits and Systems — I: Fundamental Theory and Applications, Vol. 44, No. 11, 1075-1078.

Jaimoukha, I. M. (1997). *A General Minimal Residual Krylov Subspace Method for Large-Scale Model Reduction*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 42, N° 10, 1422-1427.

Linden, R. (2006). *Algoritmos Genéticos*. Brasport, Rio de Janeiro.

Matlab, Version 7.6.0 R2008a (2008). Estados Unidos: The Math Works.

Mishra, S. K., Panda, S., Padhy, S., Ardil, C. (2011). *MIMO System Order Reduction Using Real Coded Genetic Algorithm*. World Academy of Science, Engineering and Technology 76, 869-873.

Moore, B. C. (1981). *Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability, and Model Reduction*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-26, N° 1, 17-31.

Mukherjee, S., Mishra, R. N. (1987). *Order Reduction of Linear Systems using an Error Minimization Technique*. Journal of The Franklin Institute Press Ltd, vol. 323, N° 1, 23-32.

Ogata, K. (2000). *Engenharia de Controle Moderno*. Livros Técnicos e Científicos Editora S. A, Rio de Janeiro.

- Ouyang, M., Liaw, C. M., and Pan, C. T. (1987). *Model Reduction by Power Decomposition and Frequency Response Matching*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-32, N° 1, 59-62.
- Parmar, G., Prasad, R., Mukherjee, S. (2007). *Order Reduction of Linear Dynamic Systems using Stability Equation Method and GA*. International Journal of Computer and Information Engineering. 26-32.
- Pena, R. T; Aguirre, L. A.; Mendes, E. M. A. M. (1990). *A four Fuel Drum Boiler Combustion Control System Study and Redesign*, IEEE 29th Conference on Decision and Control, Hawaii, 1567-1572.
- Ramesh, K., Nirmalkumar, A., Gurusamy, G. (2008). *Order Reduction by Error Minimization Technique*. Proceedings of the 2008 International Conference on Computing, Communication and Networking (ICCCN, 2008) IEEE.
- Satakshi, Mukherjee, S., Mittal, R. C. (2005). *Order Reduction of Linear Discrete Systems using Genetic Algorithm*. Elsevier Applied Mathematical Modelling 29, 565-578.
- Shi, G., Shi, C. -J. R. (2005). *Model-Order Reduction by Dominant Subspace Projection: Error Bound, Subspace Computation and Circuit Application*. IEEE Transaction on Circuit and System-I: Regular Paper, Vol. 52, 975-993.
- Shamash, Y. (1975). *Linear System Reduction Using Padé Approximation to Allow Retention of Dominant Modes*, Int. J. Control, vol. 21, no. 2, 257-272.
- Shamash, Y. (1981). *Viability of methods for generating stable reduced order models*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-26, N° 6, 1285-1286.
- Matos, E. J., Souza, R. N., Souza, J. R. B. (2006). *Projeto de Controlador Robusto para Sistema Multivariável Instável com Uso de Pré-Compensador Dinâmico*, XVI Congresso Brasileiro de Automática, 2454-2459.

Takahashi, S., Yamanaka, K., Yamada, M. (1987), *Detection of dominant poles of systems with time delay by using Padé approximation*, Int. J. Control, vol. 45, N° 1, 251-254.

Yang, S. M., Luus, R. (1983). *Optimization in Linear System Reduction*. Electronic Letters 4<sup>th</sup>, vol. 19, N° 16, 635-637.

Ziemer, R. E., Tranter, W. H., Fannin, D. R. (1998). *Signals & Systems Continuous and Discrete*, Prentice Hall, 4<sup>th</sup> Ed.