UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

JOSETE LEAL DIAS

# COMPREENSÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE NÚMEROS FRACIONÁRIOS

BELÉM/PA

2012

**JOSETE LEAL DIAS**

# COMPREENSÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE NÚMEROS FRACIONÁRIOS

**Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará - UFPA, como exigência para obtenção do título de Doutora em Educação em Ciências e Matemáticas, área de concentração em Educação Matemática.**

**Orientador: Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva**

**BELÉM / PA**

**2012**

**Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) –**
**Biblioteca do IEMCI, UFPA**

Dias, Josete Leal.
Compreensão de professores de matemática sobre números fracionários / Josete Leal Dias, orientador Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva – 2012.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2012.

1. Professores de matemática – formação. 2. Matemática – ensino de primeiro grau. I. Silveira, Marisa Rosâni Abreu da Silveira, orient. II. Título.

CDD - 22. ed. 371.12

**JOSETE LEAL DIAS**

**COMPREENSÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA SOBRE NÚMEROS FRACIONÁRIOS**

**Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará - UFPA, como exigência para obtenção do título de Doutora em Educação em Ciências e Matemáticas, área de concentração em Educação Matemática**

**Aprovada em: ____/____/____**

**Banca Examinadora:**

________________________________________

**Prof. Dr. Nelson Pirola**

**Membro Titular Externo – UNESP-BAURU**

________________________________________

**Prof. Dr. Iran Abreu Mendes**

**Membro titular Externo - UFRN**

________________________________________

**Prof. Dr. Adilson do Espírito Santo – Membro Interno IEMCI-UFPA**

________________________________________

**Prof$^{a}$. Dr$^{a}$ Rosália Maria de Aragão - Membro Interno IEMCI-UFPA**

________________________________________

**Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva IEMCI-UFPA**

________________________________________

**Prof$^{a}$ Dr$^{a}$. Maria José Mendes de Freira – Suplente IEMCI-UFPA**

________________________________________

**Porf$^{a}$. Dr$^{a}$. Wanderléia de Azevedo Medeiros Leitão – Suplente EAUFPA**

**DIDICATÓRIA**

A minha Mãe Maria José, meu porto seguro. A meu filho Anderson Phelipe minha maior expressão de amor e ao meu querido Antônio Osvaldo companheiro e amigo.

## AGRADECIMENTOS

A Deus e a Virgem Maria de Nazareth pela caminhada realizada.

A meu querido Orientador Profº. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva por sua disposição e compromisso incondicional com a produção desta pesquisa.

Aos professores participantes deste estudo pela credibilidade e disponibilidade para a materialização desta investigação, e aos estudantes da Escola de Aplicação pelas aprendizagens durante minha vida docente, em especial, a Natália, por ter me ensinado que é possível buscar alternativas para uma educação para Todos.

Aos professores participantes da banca, Prof. Dr. Adilson do Espírito Santo pela co-orientação deste estudo, prof. Dr.Nelson Pirola, Profº Dr. Iran Mendes pela oportunidade de dialogarmos nessa empreitada, deixo meu carinho. Ao Prof. Dr. Renato Guerra pelas trocas de ideias e a Profª Drª Rosália Aragão, Profª Drª. Maria José Mendes e a Profª Drª. Wanderléia Leitão.

Em especial agradeço aos pesquisadores (ras). profº Dr Plinio Moreira (UFMG), Alécio Damico (Fundação Santo André) e Maria Jose Silva (PUC-SP) que mesmo em face do meu anonimato disponibilizaram-me materiais para este estudo.

A prof. Drª. Isabel Lucena pela dedicação profissional cujo carinho, admiração foram construídos na dialogia teórica por uma educação da e na Amazônia.

A meus colegas de curso pela aprendizagem obtida, em especial os/as amigos/as que conquistei, entre os/as quais, Isaura Chaves minha parceira nesta caminhada, Lênio Levy, Roberto Bibas, Ana Sgrott pelo carinho e admiração, a Patrícia Feitosa, Augusta Raposo e Silvio Tadeu pela amizade, bem como aos participantes dos Grupos de Estudos e Pesquisa GEMM e GEMAZ.

Aos funcionários deste Instituto, em Especial dona Dayse pelo carinho a mim dedicado, e a Escola de Aplicação que de forma politicamente correta me possibilitou esta oportunidade, em especial, agradeço aos docentes das séries iniciais.

A meu amado Pai (in memorian) e minha irmã Jane (in memorian) pelos momentos que juntos vivemos e que nesta caminhada me deixaram saudades, pois cumpriram suas missões. A minha Mãe exemplo de vida, aos meus irmãos e sobrinhos cuja vivencia é sempre alegria. A Regina Lúcia de Albuquerque pelos anos de amizade, e a meu sobrinho-neto Sergio Manoel (dois anos) que mesmo tropeçando nas palavras

enche-me de alegria ao vê-lo articular suas intuições científicas, pois ao juntar três canudinhos, passa a contemplar a forma “criada” e anuncia: ***tiândulo*** *(triângulo).*

Aos meus amores Anderson Phelipe pela oportunidade de ser sua mãe e curtir suas fases de vida, cada qual a melhor e a Antônio Osvaldo, pois como canta Vinicius, se o *amor é fantasia eu me sinto ultimamente em pleno carnaval.*

## RESUMO

Esta pesquisa tem como um dos seus objetivos investigar como os professores de Matemática expressam sua compreensão sobre números fracionários tendo em vista proporcionar ao estudante conhecimento significativo. A partir da revisão da literatura este estudo foi circunscrito em duas vias: uma endógena onde trago as contribuições de Kieren (1976) e Nunes et al (2003) compreendendo números fracionários a partir dos significados parte-todo, número, operador multiplicativo, medida e quociente. Esses significados foram assumidos a partir de Vergnaud (1990) como um conjunto de situações que dão sentido ao conceito de números fracionários. A outra via, exógena, por meio das contribuições da sociologia do conhecimento segundo Fleck (1976) e da Matemática Cultural por Alan Bishop (1990). Essas duas vias foram selecionadas no intuito de responder: Que compreensão os professores de Matemática manifestam ao enfrentarem um conjunto de situações envolvendo números fracionários? Participaram deste estudo vinte e um professores das redes pública e privada com mais de três anos de experiência no sexto ano do Ensino Fundamental. O estudo contou com a aplicação de um teste diagnóstico com no mínimo duas secções para cada participante contendo quinze questões envolvendo os significados de números fracionários. Os dados foram analisados mediante as categorias: invariante operatório, os cinco significados, dinâmica comunicativa. Como resultado foi possível indicar que do ponto de vista endógeno os professores compreendem números fracionários na dependência dos significados parte-todo e operador multiplicativo, e do ponto de vista exógeno o Círculo Exotérico (os professores participantes) não compreende o objeto em questão como metaconceito, diferentemente do Círculo Esotérico (produções acadêmicas), reforçando assim, a dinâmica comunicativa intracoletiva, que não favorece a escola em geral, nem às práticas pedagógicas em particular, o desenvolvimento de valores como abertura para o ensino de Matemática.

Palavras-Chave: Formação de Professor, Matemática Cultural, Coletivo de Pensamento, Conhecimento da Matéria, Números Fracionários.

**ABSTRACT**

This research is a review of its objectives in terms that how mathematics teachers express their conceptual understanding of fractional numbers in order to make it a significant knowledge to the student. From the review of the literature on this subject of education I chose to confine this study in two ways: one where endogenous bring the contributions of Kieren (1976) and Nunes et al (2003) including fractional numbers from the part-whole meanings, number, multiplying operator, measure and quotient. These meanings were taken from Vergnaud (1990) as a set of situations that give meaning to the concept of fractional numbers. Another exogenous through the contributions of sociology of knowledge according to Fleck (1976) and cultural mathematics by Alan Bishop (1990). These two routes were selected in order to answer: What teacher`s Mathematics understanding manifested when facing a set of situation involving fractional numbers? The study included twenty-one teachers from public and private with more than three years experience in the sixth year of elementary school. The study involved the application of a diagnostic test with at least two sections for each participant containing fifteen questions involving the meanings of fractional numbers above posts. Data were analyzed from the categories: invariant surgery, the five meanin gs, communicative dynamics. As a result it was possible to indicate that participating teachers understand fractional numbers from the part-whole meanings and multiplicative operator, and the communication of the Exoteric Circle (the professors) than the Esoteric Circle (academic productions) thereby enhancing the communicative dynamics that by intracoletiva turn does not help the school in general, and pedagogical practices in particular, the development of values such as openness to teaching Mathematics.

Keywords: Teacher Training, Cultural Mathematics, Collective Thinking, Knowledge Matters, Fractional Numbers.

**RÈSUMÉ**

Cette recherche est un examen de ses objectifs en termes que les enseignants de mathématiques de l'école primaire expriment leur compréhension conceptuelle des nombres fractionnaires afin d'en faire une connaissance significative à l'étudiant. De l'examen de la littérature sur ce sujet de l'éducation, j'ai choisi de limiter cette étude de deux manières: l'une où endogène apporter les contributions de Kieren (1976) et Nunes et al (2003), y compris des nombres fractionnaires des significations partie-tout, le nombre , multipliant opérateur, mesure et le quotient. Ces significations ont été prises à partir de Vergnaud (1990) comme un ensemble de situations qui donnent un sens à la notion de nombres fractionnaires. Et une autre exogène à travers les apports de la sociologie de la connaissance selon Fleck (1976) et en mathématiques par la culture Alan Bishop (1990). Ces deux itinéraires ont été sélectionnés afin de répondre à: Qu'est-ce la compréhension des enseignants de la sixième année de l'école élémentaire manifestée face à un ensemble de situation impliquant des nombres fractionnaires? L'étude a inclus les vingt et un professeurs de l'expérience publique et privée, avec plus de trois ans dans la sixième année de l'école élémentaire. L'étude a impliqué l'application d'un test de diagnostic avec au moins deux sections pour chaque participant contenant quinze questions portant sur les significations de nombres fractionnaires ci-dessus les messages. Les données ont été analysées à partir des catégories: la chirurgie invariant, les cinq sens, la dynamique de communication. Par conséquent, il était possible d'indiquer que les enseignants participants de comprendre les nombres fractionnaires des significations partie-tout et l'opérateur multiplicatif, et la communication du Cercle exotérique (les professeurs) que le cercle ésotérique (productions académiques) améliorant ainsi la dynamique de communication qui par intracoletiva tour ne permet pas l'école en général, et les pratiques pédagogiques, en particulier, le développement de valeurs telles que la transparence dans l'enseignement des mathématiques.

Mots-clés: la formation des enseignants, Mathématiques culturelles, la réflexion collective, Le savoir, nombres fractionnaires.

## LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE QUADROS

## LISTA DE SIGLAS

SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

A Formação docente tem sido problematizada tanto em nível de desenvolvimento quanto de conhecimento profissional resultando em caminhos diferenciados para o campo investigativo. Nesse contexto, este estudo tem interesse nas questões atinentes ao conhecimento profissional, mesmo sabendo que os saberes/conhecimentos são de distintas naturezas e entrecruzados, ou seja, coexistem como um amálgama na cultura experencial do professor.

No sentido de traçar minimamente aspectos pontuais do conhecimento profissional, esta pesquisa articula-se de forma singular a um desses saberes que constitui a base de conhecimento docente, o saber disciplinar ou do conteúdo da matéria. Nessa linha, o termo base de conhecimento – **knowledeg base -** discutido por Shulman (1996), tem como intenção provocar reflexões para pensar saberes/conhecimentos que se articulam no exercício da docência e, que, de certa forma implicam na mediação pedagógica.

Ao declarar que há uma base de conhecimento que fundamenta a prática pedagógica, o autor chama atenção para aspectos em relação ao domínio conceitual e, assim, baseado em Schwab (1978), afirma que a base de conhecimento do conteúdo pode ser vista a partir de duas estruturas: a estrutura substantiva e a sintática. O domínio do conhecimento como estrutura substantiva é manifestado quando professor explicita relacionar ao conteúdo uma variedade de modos nos quais são organizados os conceitos básicos e princípios da disciplina; é de domínio sintático quando o professor enfatizar, em especial na Matemática, o ensino de procedimentos algorítmicos.

Levando em conta essa discussão, muitos trabalhos foram realizados em todos os níveis de ensino tanto à luz de formação inicial quanto continuada. Autores como Ball (2000), Ma (2009) e Eisenhart *et al.* (1992) afirmam que a formação dos futuros professores, no que se refere ao domínio do conhecimento matemático, necessita de mais atenção. Essa necessidade também é indicada por Garcia (2003), Reali e Lima (2002), bem como Curi (2005) ao ratificarem que a ausência de conhecimentos específicos às diferentes áreas do saber é um grande problema para a formação docente.

O estudo de Curi (2005) aponta para a importância do domínio do conteúdo, pois em relação aos conteúdos matemáticos, no curso de Pedagogia, em especial, não há uniformidade (base comum) e nem ao menos apontamentos legais que direcionem o tratamento que deverá ser dado ao trabalho com os saberes disciplinares de matemática para as séries iniciais do Ensino Fundamental.

Seguindo a linha de pesquisa sobre domínio do conteúdo, Moreira e Davi (2005:15), indicam a necessidade de estudos que focalizem o saber disciplinar, pois *as análises das relações entre formação docente e questões da prática costumam ficar presas aos outros componentes do saber docente.*

Nesse sentido, seria prudente pensar o que fazer para que os conteúdos a serem ensinados pelos futuros professores contribuíssem efetivamente em sua prática. Entre uma das possibilidades a serem apresentadas vejo a de continuar apostando em estudos que deflagrem de fato os nós encontrados na prática educativa do Ensino Fundamental.

Considerando que no âmbito da formação o domínio conceitual está citado como aspecto que implica no exercício da docência, parece-me ser plausível fazer um recorte da investigação ainda menor e neste intento, situo as questões atinentes aos números racionais, em especial na representação fracionária como importante para o campo de pesquisa, pois *a competência básica de todo e qualquer professor é o domínio do conteúdo específico. Somente a partir deste ponto é possível construir a competência pedagógica* (CANDAU, 1997, p. 46).

Nesse campo de conhecimento as pesquisas podem ser divididas em dois grupos: os de caráter histórico-epistemológico, como Gleaser(1981), Baldino (1996), Escaleno e Grairin (2010) e Medeiros e Medeiros(1992), Behr, Harel, Post e Lesh (1992), Kieren (1976) e os de caráter didático, tais como Lopes *et al* (2012), Andrade (2008), entre outros. O interesse deste estudo fica por conta de aspectos epistemológicos. E nesse âmbito, Behr *et al*, já referenciados, afirmam haver um consenso na literatura sobre o ensino dos números racionais, qual seja, a de que aprender as noções que envolvem os números racionais continua sendo um sério obstáculo na aprendizagem.

Partindo dessa premissa, Damico (2007) afirma que, pesquisas como as de Freudenthal (1983) Ohlsson (1987) Bigelow Davis e Hunting, (1989) e Kieren, (1989) consideram que o ensino deste tópico escolar apresenta dificuldades que precisam ser superadas. Essas premissas levam-me, no entanto, a perguntar: por que ainda residem tantos obstáculos no ensino de números racionais, em especial na representação fracionária? Que percurso formativo os futuros professores estão vivenciando em relação à matemática escolar? Como se organiza o espaço escolar para dar conta de questões sobre a base de conhecimentos que sustenta os fazeres docentes? Mediante essas e outras questões é que defino a formação de professor para pensar sobre o objeto números fracionários.

Essa opção está em função dos resultados de estudos como os de Carpeter *et al*. (1976, 1980) e Post (1981), demonstrando que só um terço dos alunos com 13 anos de idade e dois terços com 17 anos somam corretamente 1/2 + 1/3, fato este que, segundo os autores pode ser conseqüência de procedimentos mecanizados. Corroborando as pesquisas citadas há relatos de dados oficiais brasileiros sobre as dificuldades envolvendo números fracionários.

A esse respeito, cito os resultados do SAEB (2001) e SARESP-SP/1998 (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) apontando que somente 26% dos estudantes pesquisados apresentaram respostas satisfatórias às questões envolvendo fração. Quadro que se manteve em 2009 indicando que mais da metade (58,3% e 63,3%) dos estudantes da terceira série do Ensino Médio (27,6% e 71.2%) na oitava série e (30,3% e 63,3%) na quarta série do Ensino Fundamental tiveram respectivamente, índices insuficientes em seus resultados, o que reforça a aprendizagem do conteúdo de números fracionários como um dos mais comprometidos.

Além dessas, outras dificuldades têm sido evidenciadas em nível de Brasil, a exemplo, os estudos de Silva (1997, 2005), Bezerra (2001), Moutinho (2005), Merlini (2005), Santos (2005), Canova (2006) e Sant´anna (2008) mostrando que os alunos e professores têm pouco domínio sobre esse conceito.

Dos estudos sobre números fracionários, excetuando os que estão baseados em Duval (2003), a grande maioria dos trabalhos nacionais recebe orientação de Kieren (1976) e mais especificamente Nunes *et al* (2003), estes últimos, baseados em Vergnaud (1990), corroboram que, uma situação dada ou um simbolismo particular não evoca em um indivíduo todos os esquemas disponíveis, isto é, quando se diz que uma palavra tem determinado significado, estamos recorrendo a um subconjunto de esquemas e, dessa forma, operando com uma restrição ao conjunto dos esquemas possíveis, daí a importância de pensar números fracionários a partir de um conjunto de situações. Levando em conta tais orientações, Nunes *et al*.(2003) identificam, pelo menos, cinco significados possíveis que devem ser levados em consideração no ensino e aprendizagem de números fracionários: *número, parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo* , significados que serão assumidos neste estudo. Este recorte e sua natureza foram por mim assumidos como de natureza endógena, ou seja, são pesquisas que pontuam elementos de estrutura interna ou epistemológica desta matéria. Assim sendo, posso dizer que as análises ou resultados de pesquisas sobre números fracionários apontam certa circularidade seguindo um caminho pré-determinado.

A partir desta observação passei a considerar outros elementos que, de certa forma, pudessem interferir na forma como os professores de matemática compreendem esse objeto matemático.

Na tentativa de alargar a análise passei a denominar as contribuições selecionadas relativas a aspectos exógenos, ou seja, além das ideias já assumidas no debate acerca dos números fracionários, levei em conta fatores da sociologia do conhecimento e da matemática cultural para substanciar a *premissa de que o professor ensina como aprende.*

A partir do instrumento diagnóstico e dos manuais didáticos busquei analisar os dados a partir dos cinco significados e suas âncoras mais próximas como Teoria dos Campos Conceituais, Aprendizagem Significativa e Mapa Conceitual, bem como analisá-los à luz da epistemologia de Fleck (1986) ao tratar o conhecimento e sua disseminação a partir da dinâmica comunicativa estabelecida por Coletivos de Pensamentos que, segundo o autor, são portadores de uma maneira de conhecer um determinado fenômeno.

Além de Fleck (1986), busquei Bishop (1990), autor que vem chamando atenção para as questões axiológicas, **relativas** aos valores, que são veículos de certas escolhas mesmo que o docente não tenha consciência de tal referência.

Isto significa dizer que além da natureza epistemológica – expressa pelos os cinco significados -, a aprendizagem docente é contextual e, portanto passível de significação nas relações concretas da prática experiencial. Se o professor ensina como aprende, isso pode ter causas tanto de natureza intrínseca no que diz respeito ao domínio conceitual advindo da formação inicial, quanto das injunções de uma dada cultura escolar que, por vezes, acaba reforçando certas formas de se relacionar com os objetos conceituais. Daí a necessidade de se olhar para elementos exógenos.

Dado o exposto, o corpus textual deste estudo compreende como segue os seguintes capítulos:

No capítulo um - intitulado *Das considerações iniciais ao problema de pesquisa* - busco situar o estudo, primeiramente, em recortes de vivências de minha vida no curso de minha formação e depois enveredando por aspectos internos do estudo como problemática, objetivos e pergunta de pesquisa como primeiras inquietudes. A seguir apresento um breve panorama da temática.

No capítulo dois trago a metodologia como forma de possibilitar ao leitor visualizar as opções realizadas para compor este estudo com os seguintes tópicos: *O (in)visível que descortina e conduz a trajetória da investigação; Do ambiente da investigação;- Seleção dos* *participantes; Instrumento diagnóstico;Suporte analítico para a trajetória da investigação.* Neste capítulo apresento os focos de análise.

No capitulo três, incorro em sobrevôos sobre aspectos relacionais entre cultura e conhecimento abordando ideias como: *Entrelaçando conhecimento como cultura* e suas subseções com o intuito de explicitar os números fracionários entre as racionalidades: mítica e cientifica finalizando com as orientações sobre os cinco significados que farão parte deste estudo.

No capítulo quatro, após apresentar o objeto matemático números fracionários em suas racionalidades, trago elementos sócio-cognitivos como componentes para pensar números fracionários, elementos esses construídos a partir das ideias de Estilo de Pensamento e valores como âncoras tácitas da cultura escolar, bem como das teorias de aprendizagem/conceitual que indicam possibilidades para pensar sobre a organização do ensino.

No capítulo cinco trato questões atinentes à formação docente indicando a opção de assumir conhecimentos e saberes como faces de mesma moeda, destacando o conhecimento do conteúdo e a importância do *como* no processo formativo do professor.

No capítulo seis - *Os achados deste estudo: a análise em foco* - apresento o resultado da pesquisa em quatro enfoques: (i) sobre o invariante, (ii) sobre os cinco significados, (iii) resultado sobre a questão aberta envolvendo a questão 3/5 apresentados mapas conceituais, (iv) resultado da dinâmica comunicativa entre os Coletivos de Pensamento. No capítulo sete faço as considerações finais.

# CAPÍTULO 1
# Das considerações iniciais ao problema de pesquisa

## 1.1. Do lugar de onde falo

*Há tanto tempo vivido e parece que tudo cabe numa caixa de sapato....*
*Alcir Guimarães*

O excerto do artista paraense Alcir Guimarães traduz um pouco do meu sentimento no momento de realizar alguns recortes de minha vida profissional. Como ponto de partida início esta seção trazendo um pouco de minha formação inicial. Sou Pedagoga, atuo nas séries iniciais, porém tive a oportunidade de trabalhar, mesmo por curtos períodos em todos os níveis de ensino. Nessas andanças exerci tanto a função de Orientadora Educacional, quanto de Professora em rede de ensino público e privado, vivências que me ajudaram na construção da minha identidade docente.

Na minha trajetória acadêmica entre tantas leituras, em especial na área de Educação Matemática, encontrei uma pesquisa acadêmica cujo título muito me chamou atenção: **A minha vida seria muito diferente se não fosse a Matemática.** Título polissêmico que pode nos levar a lembranças de afetos positivos ou não em relação à matemática e nesta pesquisa foram anunciados depoimentos negativos de estudantes da EJA sobre esta disciplina. Não posso negar que em alguns momentos de minha vida escolar também pensei na matemática como algo negativo devido às experiências obtidas, vivenciando *imagens quebradas*, como cita Arroyo (2000) .

A minha relação com a Matemática se deu fora de visões maniqueístas matizadas pelos sabores e dissabores vividos no contexto áulico. Em minha vida estudantil o professor de matemática que mais me trouxe sabores foi um Engenheiro Civil. Não fui privilegiada – em âmbito geral como estudante - com uma postura docente que hoje já se pode dizer que exista, mas também não posso negar o esforço, o carinho e a dedicação que recebi de alguns professores[1], porém em se tratando de vivencias com afeto não positivo em relação à matemática os professores da terceira série, do terceiro ano do segundo grau, e de primeiro

[1] Entre os quais cito a professora Maria das Graças (in memória – 1ª série EF), Laís Aderne (in memória), Ivanilde Apoluceno (3º grau), Dorinha (7ª série) e o professor Paulo Araújo (7ª série) profissionais os quais admirava e que talvez tenham me influenciado na escolha profissional.

ano de Universidade confesso não ter saudades. Este último tinha como critério de avaliação fazer um instrumento – teste - com duas questões e na aplicação do instrumento dizia: *a primeira questão é de vocês podem tentar responder, mas a segunda possivelmente será minha!* E era, pois ninguém respondia. Ainda me lembro de alguns dos conteúdos envolvidos na questão... **logaritmo!**

Não sei ao certo se foi a maneira de negociar os objetos conceituais de matemática que me fez optar pelo curso de Pedagogia e, me afastei, das áreas ditas exatas, contudo, sei que estas, me causavam estranhamento, certo distanciamento. Quando cursei o ensino superior havia a oportunidade de escolher uma entre as três áreas de atuação: orientação educacional, supervisão escolar e administração escolar; entre essas optei por Orientação Educacional porque se aproximava de forma direta das questões pertinentes ao aluno, ou seja, com as questões relacionadas com o campo da cognição e da formação da pessoa humana.

Trabalhei como Orientadora Educacional em escolas públicas, em experiências significativas, mas parecia que faltava algo. As escolas eram muito precárias e dificilmente eu tinha a oportunidade de ter colegas no mesmo turno de trabalho para discutirmos ações e dificuldades do cotidiano. Uma das maiores dificuldades era conciliar as discussões teóricas que buscava com diversas práticas encontradas, o que resultava em algumas frustrações.

Comecei a perceber que a sala de aula era um lugar privilegiado onde o profissional poderia ao menos tentar uma empreitada a serviço de mudança. Foi quando surgiu o concurso público para docência, e então concorri a uma vaga, na qual fui aprovada, para a disciplina Estrutura do Ensino de Primeiro e Segundo Graus para atuar no nível que hoje se chama Ensino Médio, na Formação de Professores porém, na mesma Instituição, um ano após minha aprovação houve concurso para séries iniciais e os professores que estavam classificados não tinham experiência neste nível de ensino o que dificultava a gestão da sala de aula. Com isso fui convidada a atuar nesse segmento onde me encontro.

De início trabalhava com Matemática e Estudos Sociais, atualmente Estudos Geográficos, e dispensava atenção à segunda disciplina. Nesta época tinha forte interesse por questões que envolviam currículo, políticas públicas e desenvolvimento sustentável, mas comecei a enfrentar problemas com uma mãe, professora aposentada *dona da verdade*, que queria me obrigar a enfatizar, por exemplo, os termos da multiplicação e os tipos de fração (própria imprópria e aparente).

Preocupada com minha atuação revisitei minha formação continuada e observei que algumas não subsidiavam de forma concreta a minha nova ocupação – a de ser professora. Embora as especializações em Ensino Fundamental com ênfase em Desenvolvimento

Sustentável[2] e em Administração Escolar tivessem me possibilitado enriquecer minha vida acadêmica, mesmo assim, sentia que precisava de algo mais próximo da problemática concernente à sala de aula, em especial, sobre aprendizagem matemática.

Com o intuito de me aproximar da área busquei o Mestrado, em Educação Matemática, e conheci alguns professores que combinavam com alguns desejos aos quais eu ansiava. A temática debatida, na minha proposição inicial de pesquisa, foi um tópico disciplinar muito especifico – **A propriedade distributiva da multiplicação: uma visão diagnóstica do processo[3].**

Para a formação em nível de Doutorado me interessa tratar elementos da aprendizagem docente, o que me possibilitou investigar na linha de Formação de Professores porque o ensino de matemática ainda apresenta indicadores não desejáveis. A esse respeito, o estudo de Silveira (2002:01) afirma que a matemática é a disciplina que mais reprova na escola e em 2009 o relatório da **OCDE[4]** mostra que boa parte dos brasileiros chega ao fim do Ensino Fundamental com lacunas muito graves, tais como: a de não conseguir interpretar textos indicados para os anos iniciais do Ensino Fundamental, bem como a dificuldade em realizar operações de soma e de subtração. Dentre essas dificuldades o campo dos números relativos é bastante fragilizado.

Além de dados oficiais é de consenso que o conteúdo de fração geralmente fica para o final do período letivo devido às dificuldades impregnadas neste conceito. Como exemplo, temos a complexidade em explicar às crianças dos anos iniciais que 1/2 é maior que 1/4 levando em conta o todo-referência. A dificuldade neste conteúdo não se restringe apenas aos alunos. Curi (2000:97) ao entrevistar trezentos e setenta e sete professores concluiu que grande parte dos professores tinha dificuldades em ensinar fração e decimais.

Essas indicações motivaram-me a enveredar pelo campo da formação docente destacando o objeto números fracionários por compreender que estes elementos são importantes no contexto do ensino.

Nesta seção foram selecionados alguns fatos de minha caminhada que nos dizeres de Alcir Guimarães cabem ***numa caixinha de sapato***, pois tais episódios têm a intenção de apresentar um pouco desse tempo vivido.

---

[2] Na época eu trabalhava na Secretaria Municipal de Educação como membro de uma equipe que atuava na Formação de Professores. No referido momento eu participava da elaboração de projetos de escolas-modelo no governo paraense.

[3] Sob a Orientação do Prof. Dr. Francisco Hermes Santos da Silva.

[4] Organização para Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE)

## 1.2. Problemática, objetivos e pergunta de pesquisa como primeiras inquietudes

O interesse pelo objeto em estudo surge de uma linha investigativa que embora não tenha acompanhado a minha trajetória de formação continuada, tem me acompanhado como uma constante preocupação para o ensino e para a aprendizagem. Em um dos encontros pedagógicos sobre Educação Inclusiva, em que o ensino da matemática era o destaque, o excerto abaixo me chamou atenção:

> Eu[5] desejo o que toda criança deseja: que vocês professores tenham muita paciência com as minhas dificuldades.

A meu ver esta paciência requer entre outras, a epistemológica, ou seja, requer que o professor fique atento as questões pertinentes à natureza conceitual do conteúdo disciplinar como forma de buscar socializar os conceitos matemáticos de forma substanciada e significativa, o que requer que o docente esteja constantemente averiguando sua formação.

Nesses termos, esta seção visa assentar o objeto de estudo perante a literatura, bem como indicar um panorama sobre a formação docente por isso contará com os seguintes componentes: (l)*- Um breve panorama sobre números fracionários; (ll) Incursões pela literatura internacional e Incursões pela literatura nacional; (lll) - Estudos que tratam da Formação do Professor; (lV) Objetivos e questão de pesquisa como primeiras inquietudes.*

## 1.3. Um breve panorama sobre Números Fracionários

O ensino de Matemática tem tido resultados não muito expressivos em âmbito do domínio conceitual, quer seja em termos de avaliação de larga escala, quer seja em âmbito relativo ao processo de aprendizagem. Dentre os tópicos apresentados como ponto nevrálgico no ensino temos a aprendizagem dos números fracionários, uma das formas de representação dos números racionais.

Pinilla (2007) afirma que uma das dificuldades no domínio dos números fracionários está na passagem do conhecimento cientifico para o conhecimento escolar. Esta passagem tem sugerido alguns caminhos para a abordagem dos números fracionários desde materiais manipulativos às ideias algébricas com seus sofisticados procedimentos.

---

[5] Depoimento do aluno A3 pertencente ao projeto mutirão. Este projeto atende alunos com autismo e faz parte da rede de estudos sobre Educação Inclusiva da Escola de Aplicação da UFPA, sob a coordenação da Prof. MS.c. Maria de Belém Feitosa.

Corroborando tais assertivas Bonotto (1992:30) afirma que é necessário levar em conta que o aprendiz precisa de um longo tempo para se adaptar a essa nova forma de pensar, pois como se sabe a matemática escolar no início da escolarização enfatiza a aprendizagem dos números naturais e romper com esta lógica não é tão simples quanto se pensa.

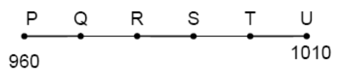
Na mesma linha de pensamento, em termos de avaliação externa ou de larga escala, os órgãos oficiais têm apontado a necessidade de melhorar a proficiência na aprendizagem matemática. Assim sendo, desde 2001, o MEC recomenda que:

> É mais importante, no Ensino Fundamental, trabalhar o conceito de fração, explorando suas diferentes possibilidades, inclusive relacionando representações fracionárias e decimais (1/2 = 0,5), do que lidar com a memorização de procedimentos para realizar operações com frações (p. 30).

Essa indicação parece não ser novidade do ponto de vista de orientações para a prática pedagógica no sentido de que o aluno possa transitar de forma significativa nas representações de números racionais. Em 2011 a avaliação de larga escala[6] tratou dos números fracionários para o sexto ano (quinta serie) enfatizando a mudança de registro e a compreensão de números fracionários como coordenadas lineares ou número como se pode constar a seguir:

Figura 01--.Item nº IT_023672 Prova Brasil 2011 sobre números fracionários.

Na reta numérica a seguir, o ponto P representa o número 960 e o ponto U representa o número 1010.



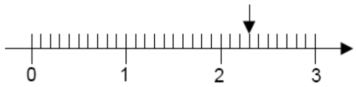

Em qual ponto está localizado o número 990, sabendo que a diferença entre o valor de um ponto e o valor de outro ponto consecutivo é de 10 unidades?

Fonte: http://provabrasil.inep.gov.br/exemplos-de-questoes2

[6] Avaliação de larga escala: política de avaliação sistêmica para promover melhorias e ampliar o acesso à escola. Está ligada ao INEP atuando em todos os níveis de ensino (SAEB, PROVA BRASIL, PROVINHA BRASIL, ENEM E ENADE).

Figura 02 - Item nº IT_043630 Prova Brasil 2009.

O número decimal correspondente ao ponto assinalado na reta numérica é




(A) 0,3 (B) 0,23 (C) 2,3 (D) 2,03

Fonte: http://provabrasil.inep.gov.br/exemplos-de-questoes2

Como pode ser visto, a habilidade exigida nas questões acima indica a necessidade do estudante dominar os números fracionários em contexto diferenciado do usual como é o caso do uso do significado parte-todo com frações egípcias (igual a 1) com forte opção pelas quantidades contínuas

Em consulta ao banco de dados do INEP- Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira é possível dizer que a proficiência em matemática desde 2011 não tem apresentado resultado com crescimento positivo de forma significativa, tanto em relação a estudantes de quinto ano (quarta série), quanto de nono ano (oitava série).

As avaliações de larga escala têm mostrado uma tipologia em relação ao comando das questões que não são usuais na prática pedagógica e como consequência acredito que essas abordagens poderão possibilitar ao professor repensar sua prática. As questões apresentadas no teste do Provinha Brasil[7] de 2011 possibilitam afirmar que há uma exigência para o ensino de números fracionários que vai além da necessidade de trabalhar nas duas formas propriamente ditas – duas por se tratar de ensino fundamental, pois a notação cientifica também é um tipo de representação deste conjunto numérico – as fracionárias e decimais, também solicita a compreensão do conceito em sua natureza endógena, pois transitar em registro de coordenadas lineares/número pressupõe dominar o conceito em sua forma complexa, assertiva de vários cenários como segue:

[7] Provinha Brasil é uma avaliação diagnóstica aplicada aos alunos matriculados no segundo ano do ensino fundamental. A intenção é oferecer aos professores e gestores escolares um instrumento que permita acompanhar, avaliar e melhorar a qualidade da alfabetização e do letramento inicial oferecidos às crianças. In: http://portal.mec.gov.br.

- **Incursões pela Literatura Internacional**

As dificuldades no ensino e na aprendizagem de números fracionários das mais diversas naturezas o que têm sido interesse de estudos em âmbitos nacionais e internacionais. Um foco em destaque diz respeito a estudos epistemológicos sobre a aprendizagem matemática no contexto dos números fracionários que, conforme Pinilla (2007), são estudos fundamentais no debate sobre esta temática por abordarem questões que são relativas: ao contrato didático, à excessiva representação semiótica, ao uso prematuro de imagens e modelos formais, a *misconceptions*, obstáculos didáticos e epistemológicos, entre outros, que compõem um conjunto de fatores que dificultam a aprendizagem desse conceito.

No intuito de discutir nacionalmente este tópico, estudiosos brasileiros têm buscado bases teóricas, entre outras, nas pesquisas do grupo de *Psychology of Mathematics Education (PME*)[8] e dos estudos de *Marku Hannula* (cf. SANTANA 2008: 33) realizados na Finlândia apontando que estudantes da quinta à sétima série (do sexto ao oitavo anos) possuem dificuldades em compreender fração no contexto da reta numérica.

Outro apoio vem das pesquisas do *National Council of Teacher of Mathematics (NCTM: 1983)*, sob as orientações de autores como: Behr, Harel, Post e Lesh (1992) que apontaram dificuldades semelhantes, concluindo em seus estudos que *os alunos precisam solidificar seu entendimento de frações como número* (NCTM 2000, p.33). Partindo de estudos realizados o NCTM propôs uma reforma no currículo para atender as necessidades dos estudantes para dominarem o conceito de números fracionários.

O Centro de estudos *Concepts in Secondary Mathematics and Science (CSMS)*, através de Hart (1981), também tem contribuído com as pesquisas nacionais, a exemplo o estudo de Hart realizado na Grã-Bretanha. Como instrumento de coleta de dados Hart aplicou um teste envolvendo fração a 10.000 estudantes de 12 a 15 anos e concluiu que uma das causas das dificuldades *com os números fracionários é a passagem do campo dos números naturais para o campo dos racionais*, outro grupo que também serve de base para as nossas pesquisas pertencem ao *Department of Mathematics,University of Califórnia*, Berkeley, USA, sendo o maior expoente o pesquisador Wu (2008)

Wu indica alguns entraves para o ensino de frações, entre esses a ênfase na relação parte-todo em detrimento do significado número. O pesquisador acredita que pela relação dos

---

[8] O Grupo Internacional de Psicologia da Educação Matemática (PME) é um órgão autônomo, É um subgrupo oficial da Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI) e passou a existir no Terceiro Congresso Internacional de Educação Matemática (ICME3), realizado em Karlsruhe, Alemanha, em 1976. Acessado em 20/06/2011. Disponível em: http://ppgecm.uepb.edu.br/index.php?

campos da geometria e da álgebra será possível vencer algumas barreiras. Por isso, orienta que o ensino dos números fracionários deva iniciar-se pelo uso da reta numérica. Outra pesquisa que já indicava dificuldades na aprendizagem de números fracionários foi a de Mack (1990), e mais uma vez a crítica ao ensino dos números fracionários recai sobre a tradição dos modelos convencionais, ou seja, de modelos com ênfase na relação parte-todo utilizando representação figural de pizza ou figuras geométricas.

Nessa pesquisa foi observado que estudantes de quinta e sexta séries (sexto e sétimo anos) ao resolverem problemas de fração envolvendo a ideia de partição – em quantidades contínuas - tinham tendência em separar o todo em partes e representar cada uma das partes como se fosse um inteiro o que contribuía para a não compreensão conceitual deste objeto.

Dos grupos apresentados acima, o NCTM se destacou em termos de contribuições em nível de produções acadêmicas nacionais, principalmente com os estudos de Kieren (1976:35). A partir de suas orientações o conceito de número fracionário começa a ser discutido como tópico rico de significados. Kieren primeiramente propôs o entendimento de números racionais centrado nas estruturas matemáticas chamando de **interpretações** os diversos contextos em que os números racionais poderiam ser compreendidos no contexto escolar. Nesses termos, o autor interpretava números racionais como: *frações que podem ser somadas, subtraídas, equivalentes; frações decimais como extensão do sistema decimal de numeração; elementos de um conjunto quociente infinito*; entre outros.

O termo **interpretações** ainda não atingia a pretensão do autor em fazer certo *isolamento* conceitual. Em estudos posteriores Kieren (1988) retoma suas ideias e passa a utilizar o termo ***subconstrutor*** no sentido de classificar os números racionais conforme estruturas de pensamento, ou seja, o autor passa a entender os objetos mentais como um construto teórico. Assim, busca *isolar,* ou melhor, busca reconfigurar de forma pontual as noções essenciais constituintes deste conceito, pois na premissa primeira a inter-relação de ideias impedia que se atingisse esse objetivo.

Nesse âmbito, os subconstrutores foram pensados como: *quociente*, *medida*, *operador e razão*, assumindo-se que o subconstrutor *parte-todo* está incluído nos demais subconstrutores anunciados. Em 1993, Behr, Lesh, Post e Silver partindo dos estudos de Kieren classificam os subconstrutores como:

- **medida fracionária:** ligado ao subconstrutor parte-todo indicando a questão *quanto há de uma quantidade relativa a uma unidade especificada daquela quantidade*;
- (b) **razão**: a relação expressa entre duas quantidades de uma mesma grandeza em que não pode ser adicionada ou subtraída;

- (c) **taxa**: que define uma nova quantidade como uma relação entre duas outras quantidades em que pode haver adição ou subtração;
- (d) **quociente**: representa uma divisão a : b, na forma a/b, ou seja, a dividido por b, quando inserido em um determinado contexto envolvendo duas grandezas, por exemplo: Existem 4 bolas e 3 crianças;
- (e) **coordenadas lineares**: número racional como um ponto da reta numérica, noção que se aproxima da ideia de medida proposto por Kieren, enfatizando a questão intervalar, a densidade e a descontinuidade;
- (f) **decimal**: que enfatiza as propriedades do  sistema de numeração;
- (g) **operador**: que vê a fração como uma transformação.

Esses arranjos conceituais embora singulares resguardam ligações, pois como, já ressaltado, há no cômputo geral uma inter-relação entre esses construtos, por isso, os autores referidos comungam do fato de que para se ter o domínio deste conceito é preciso estabelecer vivencias pedagógicas que possibilitem interpretar e compreender números fracionários no contexto de múltiplos significados. Essas premissas foram divulgadas e serviram de bases para outros estudos como segue abaixo.

- **Incursões pela Literatura Nacional**

A literatura nacional está fortemente ligada a estudos de nível internacional ao mostrar que as dificuldades em dominar o conceito de números fracionários ocorrem nas mais variadas realidades. Independente do foco a ser assumido há similitude entre as dificuldades de aprendizagem sobre o ensino dos racionais em sua representação fracionária. Isto quer dizer que tanto as pesquisas internacionais, quanto as pesquisas nacionais têm indicando haver uma ideia **universal,** qual seja: a de que a dificuldade de se aprender os números fracionários está em função da complexidade presente em sua natureza conceitual.

Em âmbito nacional as pesquisas sobre esta temática tiveram forte concentração no Grupo de Estudos G5 de Educação Algébrica, que era vinculado ao projeto de Cooperação Internacional da Universidade de Oxford[9].

---

[9] Este projeto esteve sob a coordenação da professora Terezinha Nunes (2003) e do Centro das Ciências Exatas e Tecnológicas PUC/SP, com as professoras Tânia Campos e Sandra Magina que atuavam no projeto intitulado *A Formação, desenvolvimento e o ensino de fração* que tinha por objetivo investigar questões sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais em sua representação fracionária em níveis diferenciados de ensino, tanto na linha do ensino quanto da

O Grupo de Estudos G5 tinha como referência a classificação de Nunes (2003) que, partindo das ideias de Kieren e demais colaboradores, reorienta os subcosntrutores em cinco significados; parte-todo, quociente, número, mediada e operador multiplicativo. Isto possibilitou, certamente, estudos em níveis iniciais de escolarização, a exemplo, os estudos de Merline (2005) e Canova (2006).

O objeto números fracionários como foco de investigação tem duas fortes tendências analíticas. Observando-se as produções nacionais é possível assinalar que além das questões teóricas elucidadas pelo G5, outra vertente se faz presente, qual seja, a Teoria de Registro de Representação Semiótica, de Raymund Duval. Ambo ocupam-se de analisar o objeto em questão em sua ontogenia. Isto quer dizer que, a preocupação central é discutir e delinear construções teóricas que embasem o fazer docente de elementos conceituais internos e necessários à compreensão dos números fracionários. Apesar deste estudo ter interesse nas questões pertinentes aos subconstrutores será citado algumas pesquisas realizadas nesta perspectiva, bem como pesquisas em âmbito geral, ou seja, pesquisas que não estão na perspectiva de Nunes *et al* (2003).

Canova (2006) ao investigar crenças, concepções e competências de professores polivalentes (1º e 2º ciclos) e de professores especialistas do Ensino Fundamental concluiu que, em relação às competências, o desempenho dos grupos de professores em termos dos significados de fração não foi equitativo assim como também os invariantes de ordem e equivalência. Os professores polivalentes fixavam-se em situações envolvendo parte-todo e os especialistas no significado operador multiplicativo.

Santos (2005) investigou a proficiência docente na elaboração de situações-problema envolvendo números fracionários tendo como sujeitos professores que atuavam no 1º e 2º Ciclos (polivalentes G1 e G2) e no 3º ciclo (especialista, G3) no Ensino Fundamental e concluiu que as situações-problema propostas pelos três grupos investigados foram consideradas inconsistentes do ponto de vista conceitual. No total de 402 problemas, 72 eram inviáveis para tratar o conceito de fração. Outro resultado apontado foi que não havia diferença significativa entre todos os sujeitos pesquisados seja na elaboração ou no uso de procedimentos para resolver a atividade proposta.

O estudo de Lima e Brito (2005) também apontou para a defasagem de conteúdos dos professores para trabalhar com o *conceito de fração*. O estudo de Garcia (2007) reforça que os professores investigados tinham dificuldades em compreender situações com os

---

aprendizagem. Tal acordo possibilitou a este grupo investigar as questões do ensino e da aprendizagem de números fracionários ratificando as ideias defendidas pelos autores citados na secção anterior significados quociente, medida, operador multiplicativo e número, demonstrando o pouco domínio dos conteúdos a serem ensinados. O estudo de Silva (2005), ainda na linha da formação docente, reforça as dificuldades dos professores em compreenderem números fracionários, na perspectiva colocada pelas pesquisas internacionais, mesmo mediante um curso de formação continuada em âmbito colaborativo. Os professores investigados ao final do curso permaneceram elaborando sequências didáticas que envolviam o tópico em questão de forma rígida, centradas numa visão particular dentre os significados de números fracionários.

As preocupações sobre este objeto de estudo têm sido perseguidas por várias frentes e como forma de possibilitar verificar esse alargamento além dos estudos já citados temos também Castroldi (2005) e Gomes (2001) que envolviam alunos do ensino fundamental para olhar o objeto em estudo a partir da interação que os alunos desenvolviam, indicando que esta abordagem acaba por motivar os alunos a enfrentarem os problemas postos.

Bernardes (2004) e Moreira (2010) indicam que recursos como computador e calculadora virtual são instrumentos potenciais para a aprendizagem de números fracionários por alunos de sétimo ano/sexta série; Soares (2007) sinaliza que alunos de nono ano/oitava séries recebem orientação sobre números racionais com ênfase em registro numérico e alunos do sexto ano/quinta série recebem orientações com foco na representação visual o que de certa forma compromete a apreensão conceitual e Severo (2009) admite que os alunos do primeiro ano do Ensino Médio demonstram dificuldade em compreender números racionais em suas variadas representações.

Outra indicação tem sido apresentada por Bertoni (2008) que se apoia em Vergnaud para ilustrar nas séries iniciais possibilidades de ensinar frações a partir de um conjunto de situações cotidianas e vivenciadas pelas crianças. Desta forma, a autora acredita que seja viável possibilitar ensino significativo. Com interesse neste mesmo nível de ensino, Lopes (2008) apresenta orientações para o ensino de fração seja possibilitado às crianças pequenas desde o inicio da escolarização como forma de favorecer tal domínio.

Neste mesmo nível de ensino, Guerra e Silva (2008) chamam atenção para a preocupação de introdução de aspectos algébricos no ensino deste objeto nas series iniciais em função dessa assertiva orientam para este nível de escolarização  o ensino de frações pelo principio da contagem.

Como visto a diversidade investigativa é grande, mas o foco fica por conta de investigar estudantes principalmente no ensino fundamental e essa afirmativa é reforçada pelos estudos de Demartini (2009) e Cruz (2003) que segundo a primeira autora, as crianças de sexto ano/quinta série não dominam frações em contextos contínuos e discretos, e a segunda argumenta que mesmo antes do processo formal a criança já apresenta noções em relação ao conceito de fração ao utilizar o pensamento proporcional, o que poderá ser utilizado pela escola de forma favorável.

Esses estudos me possibilitam dizer que é necessário pensar sobre a formação docente, em especial sobre o domínio da matéria como forma de pensar a divulgação dos conceitos sobre números fracionários. Essa premissa surge em detrimento de buscar compreender o nó que se estabelece no ensino deste conceito, pois se as crianças, segundo Cruz (2003), já operam com frações antes do ensino formal, isto torna discussão fundamental.

Se, por um lado, as investigações mostram a dificuldade dos professores e alunos da educação básica em atuarem de forma significativa com os números fracionários, por outro lado, os estudantes mesmo no Ensino Superior também não demonstram dominar esse conteúdo. Neste nível de ensino, Damico (2007) investigou licenciados de matemática e conclui que estes saem do curso de licenciatura em matemática com uma visão confusa sobre números fracionários. Outro elemento pertinente a ressaltar foi a influência do uso do recurso mnemônico para trabalhar o significado parte-todo.

Rodrigues (2005) realizou uma pesquisa de caráter longitudinal envolvendo estudantes nos três níveis de ensino - sendo que no Ensino Superior. A pesquisa contou com estudantes de exatas - e conclui que o domínio conceitual em termos de conhecimentos abstratos sobre número fracionários não é de domínio desses estudantes, Maciel e Câmara (2007) também ratificam as dificuldades que os estudantes possuem em relação ao ensino dos números fracionários.

Corroborando as pesquisas citadas, há os relatos de dados oficiais brasileiros sobre dificuldades envolvendo números fracionários. Nesses termos, cito os resultados do SAEB (2001), SARESP-SP/1998 (Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo), apontando que somente 26% dos estudantes pesquisados obtiveram respostas satisfatórias nas questões envolvendo fração. Quadro que se mantém, em 2009.

Em termos de resultados regionais, poucos são os trabalhos dedicados ao estudo dos números fracionários. No último EPAEM[10] (2010) ocorrido em Belém-Pará, o tema em foco foi discutido à luz do uso da calculadora nas regras de operações aritméticas como forma de potencializar a aprendizagem dos números fracionários. Neste âmbito, Morais (2010)

[10] Encontro Paraense de Modelagem Matemática

concluiu que os professores das séries iniciais possuem dificuldades em comparar comparação de fração.

- **Estudos que tratam da Formação do Professor**

A pesquisa Camargo (1998) assevera que as disciplinas específicas nos cursos de licenciatura em Matemática influenciam mais a prática do futuro professor do que as didático-pedagógicas. Este fenômeno decorre em virtude de que as primeiras geralmente reforçarem procedimentos internalizados durante o processo anterior de escolarização desses profissionais.

Assim sendo, a Formação de Professores como temática tem recebido notórias contribuições sobre *o fazer docente como experiências identitárias,* pertencentes a um grupo de profissionais ou de *Coletivo de Pensamento* [11]. As pesquisas apontam diferenciadas abordagens, umas centradas no que chamarei de *aprendizagem situada*, tais como: as pesquisas baseadas nas orientações de Schön (1992), Shulman (1996), entre outros; e as que adjetivarei de *interpretativas* como Tardif (2000, 2002), Pontes, Matos e Abrantes (1998), entre outros. Com tais contribuições é possível observar na literatura certos focos investigativos que podem ocasionar incorporações de diferentes visões sobre conhecimentos e saberes[12].

Esta incorporação[13] de conhecimentos revela a complexidade do ato de ensinar, pois seu arcabouço constitui-se por vários saberes oriundos de diversas naturezas uma vez que o conhecimento de si e do mundo se desdobram em diversas perspectivas formando em termos de Tardif (2002) um amálgama formativo. Sabemos que, na prática, o professor desenvolve saberes que se caracterizam por indeterminações, complexidade e imprevisibilidade que exigem tomadas de decisão acertadas no sentido de resolver problemas cotidianos que tornam sua atividade exigente. Nesta exigência, o domínio dos saberes acadêmicos assume papel preponderante como forma de responder aos interesses da sociedade.

Nesta perspectiva, este estudo investiga o conhecimento profissional do professor, mesmo compreendendo que o **eu-profissional** se constitui num ambiente formativo complexo. A importância deste recorte justifica-se porque, entre outros fatores, a formação

[11] O termo Coletivo de Pensamento será detalhado no capitulo 4.
[12] Esta cisão não é o foco desse estudo, por isso ambos esses termos serão assumidos como onda-partícula, ou seja, como faces da mesma moeda, ou melhor, saber passa então a ser postulado como *ato de ter ou incorporar conhecimentos de algo, quer seja em nível teórico, quer seja em nível prático*.
[13] A palavra incorporar deve ser entendida como relativa a elemento dinâmico e constituído pelas vicissitudes do fazer pedagógico.

docente é vista como uma das maneiras de favorecer uma aprendizagem que melhorar a qualidade do ensino.

Como os docentes aprendem? Como incorporam e se incorporam novas perspectivas ao ensino? Como se caracteriza a cultura profissional docente? Que diálogos são estabelecidos no cotidiano da prática educativa? Como estão organizados os saberes conceituais frente a um determinado tópico para fazerem frente a negociação de significados de forma positiva? São questões que sugerem um longo debate sobre perspectivas coexistentes sobre a formação docente, porém a intenção é provocar um olhar para a importância do domínio conceitual frente às exigências da atividade docente singularizada, que vem a ser a negociação dos significados dos objetos de aprendizagem matemática.

Para esta negociação a compreensão dos conteúdos da matemática escolar torna-se fundamental e, por isso, em termos das discussões teóricas sobre formação docente, a opção fica pela consideração de Shulman (1996), como um dos aportes teóricos. Investigar sobre os possíveis e necessários conhecimentos que o professor deve dominar como possibilidade de uma aprendizagem significativa tem sido interesse de outros autores, tais como Graça (1997), Monteiro (2001) demonstrando a importância de estudos nessa perspectiva.

Esses autores, assumindo os pressupostos de Shulman (1996) reconhecem a importância de um conhecimento base como um dos pilares da profissionalização docente. Afirmam ser fundamental levar em conta o conhecimento do professor sobre a disciplina que ministra por considerar que cada área do conhecimento possuiu uma especificidade para que o professor tenha um domínio substantivo/significativo da matéria. A base de conhecimento para o ensino consiste de um corpo de conhecimentos, habilidades e disposições que são necessários para que o professor possa propiciar processos de aprendizagens, em diferentes áreas de conhecimento, níveis, contextos e modalidades de ensino de forma propositiva. Essa base envolve conhecimentos de diferentes naturezas necessários e indispensáveis para a atuação profissional.

Mizukami (2004:3) baseando-se nos pressupostos de Shulman (1996), afirma que o desenvolvimento do conhecimento do conteúdo/pedagógico *é mais enfatizado em cursos de formação inicial e se torna mais aprofundado, diversificado e flexível a partir da experiência profissional refletida e objetivada.*

Segundo a autora, para Shulman, já citado, a base de conhecimento se refere a um repertório profissional que contém categorias de conhecimento que subjazem à compreensão que o professor necessita para promover aprendizagens dos alunos. Portanto, os profissionais do ensino necessitam de um corpo de conhecimento profissional que os guiem em suas decisões quanto ao conteúdo e à forma de tratá-lo em meio à cotidianidade cultural.

As preocupações sobre a Formação Docente fomentaram a formação de variados grupos,- a exemplo, o G7 da SBEM - , tendo com destaque as pesquisadoras Nacarato e Paiva (2005:14) indicando que as produções da Sociedade Brasileira de Educação Matemática encontravam-se compiladas em três linhas de pesquisa: *o professor como agente de sua própria formação, o professor e a pesquisa, e, o professor como produtor de saberes*. É nesta última linha que vejo possibilidade de pensar o domínio do conteúdo.

Em âmbito geral, no que se refere a estudos sobre o domínio do conteúdo matemático, cito alguns exemplos coletados da página do banco de dados da CAPES, entre esses, os estudos de Petry (2000) indicando que há necessidade de fundamentar a formação inicial e continuada do professor numa intensa relação teoria-prática, o que implica na superação do modelo de formação fundamentado na racionalidade técnica e sua substituição por um modelo de racionalidade prática, crítica e reflexiva. Silva (2005.b), ao investigar saberes matemáticos de professores especialistas, afirma que os professores apresentam dificuldades para ensinar os conceitos de números racionais mesmo tendo detectado um discurso docente construtivista. Costa (2008) concluiu que os professores investigados apresentavam dificuldades em dominar o conteúdo, mesmo após a pesquisadora ter oferecido um curso de formação continuada, pois os professores mantiveram certos procedimentos e argumentos a respeitos de alguns teoremas e estruturas do conteúdo matemático, que se faziam presentes mesmo antes da intervenção da pesquisa.

A pesquisa de Severo (2009) conclui que, para os professores entrevistados, o problema quanto ao domínio dos números racionais está relacionado aos estudantes porque estes não sabem o significado de fração.

Esses estudos contribuem para pensar **o que os professores de matemática precisam saber para poder ensinar o conteúdo da matemática escolar.** Isto em nenhum momento esvazia as demais questões imbricadas na profissionalização docente, posto que, segundo Shulman (1996), *os professores precisam ter diferentes tipos de conhecimentos para atuarem no ensino, pois estes manifestam seus saberes de formas diversas.*

Ainda em relação ao tratamento do domínio do conteúdo a pesquisa de Má (2009), indica que os professores americanos tiveram menos sucesso em situações que envolvem a matemática elementar que os professores japoneses. A autora chama atenção para a necessidade do professor ter domínio matemático escolar tanto em aspectos verticais como é o caso de um conhecimento profundo, quanto de aspectos horizontais tais como saber fazer relações entre os tópicos matemáticos.

Na relação concernente ao domínio do conteúdo matemático, a pesquisa de Damico (2007:40) elenca outros estudos, por exemplo, o de Ponte e Chapman sinalizando que entre os problemas relacionados ao conhecimento da matéria a ser ensinada destacam-se os seguintes:

(l) representações incompletas e compreensão reduzida sobre frações (em especial sobre divisão de frações);

(ll) falta de habilidade em conectar situações do mundo real e cálculo simbólico; definições e imagens distorcidas sobre os números racionais; dificuldades de compreender o tópico a ser ensinado de forma sólida, pois, embora expressassem ter conhecimento adequado sobre procedimentos algorítmicos, os mesmos eram inadequados em relação à compreensão do significado das operações que realizavam;

(lll) falta de conhecimento sobre os conceitos geométricos básicos; sérias dificuldades com a Álgebra e com o raciocínio lógico.

Sendo assim, os estudos em termos da formação vêm referendar o que já anunciava anteriormente, isto é, que o domínio conceitual sobre números fracionários alcança níveis e sujeitos diferentes o que induz a pensar sobre a importância de estudos nesse âmbito.

Como visto, muitas evidências já foram oferecidas para explicitar que o objeto em estudo não é tarefa fácil, posto que, exige repensar a formação docente. Assumindo a formação como potencializadora para promover mudanças no quadro ora apresentado e, corroborando o pensamento de Oliveira e Ponte (2005) ao anunciarem a necessidade de se intensificar pesquisas em relação ao conhecimento profissional, na área de educação matemática, é que assento este estudo.

Assim sendo, é dentro dos aspectos da formação profissional que elegi a formação conceitual, mais precisamente o conhecimento disciplinar/conteúdo/matéria da matemática para este estudo, aliando-o a aspectos da sociologia do conhecimento e da matemática cultural, elementos que colaboram para a discussão deste objeto de investigação em âmbito sócio-culturais.

O conhecimento da matéria sobre números fracionários e os aspectos citados relacionam-se para que possamos verificar o caminho que as produções acadêmicas têm desenvolvido até então. Nesse primeiro contato é possível verificar a ênfase do objeto números fracionários a partir de sua natureza endógena, que, aliás, será imprescindível para localizar este estudo nos pressupostos de Shulman, já citado. Porém, esses estudos, ao se circunscreverem nesse raio de investigação, não trazem outros elementos para o debate.

No inicio desta seção fiz algumas indagações, entre as quais, a seguinte: *como se caracteriza a cultura profissional docente*? Essa inquietude indica-me possibilidades para abrir o leque de interesse sobre o objeto em foco, pois parece plausível pensar que o domínio da matéria a ser ensinada pode estar vinculado a pressupostos para além dos já tratados.

Neste prisma, Moreira e David (2005) contribuem para a situação posta, pois, ao abordarem a relação matemática escolar e matemática científica asseveram que, no contexto educativo, a matemática escolar não se reduz a uma versão didatizada da matemática científica. Assim sendo, assumo a produção e divulgação de significados matemáticos permeados de jogos e de contingências que vão delineando e até mesmo cristalizando práticas educativas usuais. Embora se saiba que a matemática escolar se alimenta da cientificidade e de sua validação, não se pode dizer que a matemática escolar também não contenha outros elementos para alimentar-se, pois, na organização e divulgação de seu arcabouço teórico, a comunidade escolar que irei chamar de *Coletivo de Pensamento* valida e julga as demonstrações matemáticas a partir de elementos de natureza não só didática como também os de natureza sócio-politico-pedagógicos, mesmo que esta validação aconteça de forma despercebida o que certamente poderá reforçar antigos habitus pedagógicos.

O professor no exercício de sua prática atua como sujeito cognoscente, mas sobretudo, sócio-cultural. Nessa assertiva, há elementos que induzem ou constituem seu fazer e, com isso, acredito ser viável pensar uma base de conhecimento favorável ao exercício docente aliando-a ao que White (2009, citado por Bishop 1999) chama de *discurso articulado, isto é,* a capacidade de articulação de um *saber a outros saberes* como condição para a criação, ordenação e regulação de sistemas de conhecimentos que, segundo o autor, aperfeiçoa constantemente o uso de ferramentas e forma tradições de conhecimentos e crenças.

Neste âmbito os modos de explicar o pensamento matemático escolar passam a ser vistos em termos inclusivos de cultura. Isto, justamente, porque o conhecimento é esfera de simbolização – de signos e de significados – e a cultura expressa esse processo simbólico desconsiderando o homem e seu entorno.

Vejo a importância e a indispensável contribuição que os estudos de natureza endógena têm oferecido, mas assumo a visão de que o conhecimento além de ser individual é também coletivo, por isso, alargo este estudo no sentido de tratar elementos de natureza exógenos que serão apoiados por Fleck (1986) e Bishop (1999).

Compreendo o homem como ser simbólico e, por isso, cultural. Nesse sentido, este estudo traz elementos do conhecimento como cultura porque os achados advindos dos dados dessa pesquisa serão assumidos como *teias de significados tecidos pelo grupo de professores em meio* a sua formação numa tradição de compreender e ensinar os números fracionários. Embora saibamos que a formação de conceitos possa ser explicada por questões de natureza cognitiva ou conceituais, não podemos negar a importância do processo de internalização dos signos culturais, em especial, pela via da cultura escolar.

Nesse sentido, o ensino de números fracionários expressa-se em função dos processos que estão ligados a fatores individuais, socioculturais e conceituais. O que quero ressaltar é que a produção e divulgação do conhecimento são constituídas por múltiplas variáveis, entre essas, as contribuições advindas do ponto de vista de uma cultura de aprendizagem por meio das teorias cognitivas ou de conceito e da cultura escolar enquanto instituição social, pois as interações vivenciadas no espaço escolar influenciam e determinam modos de pensar, sentir e atuar sobre os objetos de aprendizagem matemática.

Ensinar além das questões já postas e restritas a um olhar pela cognição requer também estruturas organizativas, identidades pessoais, dinâmicas interpessoais e comunicações simbólicas para que o conteúdo da matéria possa ser melhor discutido. Por isso, a discussão endógena dos cinco significados de números fracionários vem acompanhada de elementos relacionados a aspectos cognitivos e aspectos da matemática cultural como forma de compreendê-lo para além do artifício lógico posto porque ambos imbricam-se na atividade matemática docente.

- **Objetivos e Questão de Pesquisa**

Vale ressaltar que as dificuldades em relação ao domínio conceitual dos números fracionários são gerais, tanto à luz da aprendizagem, quanto do ensino. As pesquisas são emanadas de interesses diversos, quer centradas no objeto conceitual, quer em crenças e concepções docentes e, ainda, em recursos didático-tecnológicos visando possibilitar à área da matemática várias maneiras de abordar e compreender o conceito de números fracionários.

Levando em conta as informações do G7-SBEM, as leituras das produções acadêmicas em relação à formação docente, bem com as leituras em relação ao conceito de números fracionários considerei importante, como já destacado anteriormente, pensar as questões endógenas – envolvendo os cinco significados de números fracionários – não somente nos seus limites e natureza conceitual, mas também em âmbitos comunicativos e culturais, pois os professores formam uma comunidade e atuam em um local singular mediado por múltiplas variáveis. Entre essas variáveis posso citar os valores, os acordos tácitos que estão presentes nas escolhas de determinados tópicos da matéria a ser ensinada, bem como na forma como o professor assume determinadas verdades conceituais.

Para enfatizar tais ideias apoiei-me em Fleck (1986) e em notas de Bishop (1999) para explicitar que, além das questões inerentes ao conteúdo matemático escolar, a formação docente precisa tratar de discussões periféricas que afetam o cotidiano da prática pedagógica.

Nesses termos, Bishop (1990, 1999, 2002, 2005) assevera a importância de pesquisas que levem em conta o debate sobre valores no ensino e na pesquisa trazendo á educação matemática contribuições para refletirmos sobre a sóciocognição. Ainda em termos de valores no contexto da pesquisa e do ensino de matemática, Clarkson, P. C. Fitzsimons, G.E., Seah (1999) têm ratificado a importância desses estudos. Nesse sentido, a partir da epistemologia de Fleck (1986) posso dizer da importância de se verificar das discussões conceituais a ideia de Estilo de Pensamento que permeia o contexto escolar. Coadunando essa assertiva, considero nesta investigação a possibilidade de centrar a discussão sobre números fracionários na interseção dos aspectos de natureza conceitual com aspectos sócio-culturais.

Mediante o exposto é possível pensar: se o conteúdo matemático sobre os números fracionários apresenta complexidade como objeto a ser apreendido e se há necessidade de evidenciar que, entre outros, os conteúdos disciplinares constituem a base de conhecimentos para ensinar, isto me permite perguntar: **Que compreensão os professores de matemática do sexto ano do Ensino Fundamental manifestam ao enfrentarem um conjunto de situações envolvendo números fracionários?**

Esta indagação se põe em função da **hipótese de que o professor ensina o conceito de fração baseado em conhecimentos oriundos de suas vivências ao longo de sua trajetória como estudante. Assim atua no Ensino Básico, sem compreender a matemática necessária para o tratamento escolar dos significados dos números fracionários, ou seja, parece haver uma tradição nas práticas pedagógicas de compreender e ensinar este objeto de ensino, tradição esta que pode ser estabelecida por uma cultura escolar pouco questionada.** Além da assertiva de que o professor ensina como aprende de suas experiências acadêmicas é importante ressaltar outra razão, qual seja, a de que para ensinar, entre outros princípios, é fundamental o domínio do conteúdo.

Tal domínio pode possibilitar ao professor desenvolver práticas criativas que sustentam saberes e fazeres capazes de desenvolver uma aprendizagem de base sólida. Em se tratando de ensino escolar, é relevante dizer da necessidade do domínio da rede relacional de significados presentes nos objetos de aprendizagem matemática, caso contrário, o ensino tenderá a repetir as lições advindas de um longo caminho, das mais variadas instâncias vivenciadas pelo professor, lições essas que podem não favorecer ao estudante o domínio necessário dos conceitos. Nesses termos, para responder a indagação posta apresento os seguintes objetivos:

**GERAL**

Analisar como os professores expressam sua compreensão conceitual sobre números fracionários tendo em vista torná-lo um conhecimento significativo para o estudante do Ensino Fundamental.

**ESPECÍFICOS**

Identificar a partir de um teste diagnóstico que significados de números fracionários são explicitados por professores do sexto ano do Ensino Fundamental;

Identificar o *Estilo de Pensamento* veiculado sobre números fracionários entre os professores pesquisados, as produções acadêmicas e livros didáticos no sentido de averiguar como se estabelece a dinâmica comunicativa em relação ao objeto em estudo;

Verificar se os professores ensejam conhecimento substantivo sobre números fracionários considerando a importância do domínio conceitual dos objetos matemáticos de forma significativa.

Mediante o exposto é possível dizer da importância que pesquisas nesse âmbito possuem porque poderão ajudar a compreender e analisar a relação que os professores do ensino básico, em especial do sexto ano, estabelecem com esse campo numérico. Nesses termos, percebo a relevância deste estudo por tratar de questões pertinentes ao fazer pedagógico e seu entorno, levando em conta que a prática produz saberes, bem como produz *uma referência com base na qual se processa seleção, filtragem ou adaptação dos saberes adquiridos fora dela, de modo a torná-los úteis ou utilizáveis*. (MOREIRA e DAVID, 2005, p.42).

Exposto algumas nuance do desejo de realizar este estudo, as próximas páginas trarão indicativos de como se encaminhou esta proposta explicitando a metodologia como uma maneira de possibilitar o conhecer do processo.

# CAPÍTULO 2
# METODOLOGIA

## 2.1. O (in)visível que descortina e conduz a trajetória da investigação

No trabalho investigativo há diversas faces, sensações que se imbricam entre desafios, conquistas, dúvidas, solidão, avanços, recursos, parcerias na perspectiva de ver o novo emergente. Nesse sentido, é com clareza que o biólogo chileno Maturana (2001) afirma que tudo que é dito sobre um fenômeno é construído a partir de *um observador em sua relação com o meio exterior, relação essa que passa por sua visão de mundo e seus valores*. Nesse conjunto - visão de mundo e valores - eu acrescentaria as correlações de forças e jogos simbólicos que são exercidos na trama em que se constrói o arcabouço pesquisativo, pois o conhecimento é uma construção coletiva que em termos do pensamento de Fleck (1986) significa dizer de *Estilos de Pensamento* presentes nas mais variadas formas de interpretar o mundo como fenômeno.

Para interpretar o mundo há vários caminhos, entre eles o científico. Assim sendo, este estudo tem como configuração metodológica a assunção de características circunscritas em termos qualitativos e quantitativos.

Em termos quantitativos a pesquisa tem como instrumento de investigação um teste diagnóstico que, tendo por base elementos tratados por Nunes *et al*. (2003), convida o professor resolver situações-problema envolvendo números fracionários dando destaque as categorias: (**a**) invariante operatório: equivalência; (**b**) os cinco significados de números fracionários: parte-todo, medida, número, operador multiplicativo e quociente. Apesar do instrumento ter sido inspirado nas orientações de Nunes, citados anteriormente, e autores de teses e dissertações atinentes a este objeto de estudo, destaco que nas situações com significado parte-todo foi proposto um alargamento envolvendo fração maior que a unidade em virtude do nível de formação dos sujeitos de pesquisa.

Em termos de aspectos qualitativos, primeiramente considerei as análises das categorias **a** e **b – invariante e significados de números fracionários,** bem como a análise da questão **2,** questão aberta do teste diagnóstico que solicitava ao professor exemplificar situações-problema envolvendo a notação 3/5. Em virtude de ser uma questão aberta gerou possibilidades do professor explicitar de forma livre seu entendimento. Nesse sentido, partindo de seus registros tanto nas categorias **a e b,** quanto na questão **2,** foi possível trazer elementos da Teoria dos Campos Conceituais que, certa forma, se vincula à Aprendizagem Significativa e Mapas Conceituais como ferramenta para explicitar as categorias empíricas ou unidades de análise. Em segundo nível de análise foram trazidos também elementos dos postulados de Fleck (1986), Bishop (1999, 2005) e Shulman (1996) como forma de reafirmar o alargamento deste estudo em relação aos correlatos.

## 2.2. Do ambiente da investigação

Esta pesquisa foi realizada em escolas municipais, estaduais e escolas da rede particular de ensino do município de Belém.

A aplicação do teste diagnóstico foi diversificado, dado que, em alguns casos, eu aplicava o teste na casa do professor ou em seu outro ambiente de trabalho. Para a coleta de dados foram feitas várias seções individualmente culminando em três meses de aplicação do teste diagnóstico, pois muitos professores alegavam não ter tempo[14] para responder o teste.

A aproximação com os professores da pesquisa foi desafiadora, um misto de **medo e ousadia**. Medo pelo estranhamento entre pesquisador e participante em meio a preocupação de não tornar o primeiro contato uma violência simbólica, e ousadia porque a cada dia era necessário renascer das amarras pessoais e contingenciais para entrar em campo e buscar sensibilizar o professor da necessidade de realização desta pesquisa.

Quando eu conseguia convencer o professor a participar da pesquisa, eu solicitava que este se identificasse colocando um codinome em seu protocolo para que em futuras secções eu pudesse identificá-lo, mas somente três participantes utilizaram essa estratégia, foi então que passei a identificá-los por ordem alfabética (**PA – Professor A**), e assim por diante. Juntamente com o teste diagnóstico eles recebiam um termo de compromisso para autorizar a divulgação dos resultados e dar ciência dos objetivos da investigação e dos aspectos éticos para fins e usos da pesquisa.

## 2.3. Seleção dos participantes

A partir do sexto ano do Ensino Fundamental, o conteúdo de números fracionários começa a se alargar, exigindo que o sujeito aprendente estabeleça compreensão para além do contexto de frações egípcias. Neste ano/série o conteúdo em voga articula-se de forma

[14] Momento da pesquisa a grave das escolas da rede Estadual e Municipal havia terminado.

contundente a outros conteúdos, tais como *probabilidade, porcentagem,* e subsequentemente às *funções algébricas* entre outros.

Após estabelecer os primeiros vínculos entre pesquisadora e professor foi feito um convite de participação porque a livre participação possibilitaria maior engajamento dos participantes. Para este convite foi tomado como critério o tempo de atuação. Desse modo, participaram da pesquisa os professores que tinham no mínimo três anos de atuação no sexto ano e de preferência que esta atuação fosse recente, ou seja, que o professor tivesse vivências no sexto ano durante os três últimos anos anteriores ao momento da realização da pesquisa. A investigação contou vinte e um professores.

### 2.4. Suporte analítico para a trajetória da investigação

Considerando as respostas dadas pelos professores quando da aplicação do teste diagnóstico é mister, para este estudo, buscar perceber para compreender *como os professores manifestam o conhecimento disciplinar no que se refere aos números fracionários,* ou seja, como eles manifestaram o domínio conceitual que sustenta seus fazeres sobre o ensino deste tópico. Assim, busco explicitar a compreensão matemática de forma a perceber se, de forma correlata, a compreensão docente enfatiza elementos atinentes aos conhecimentos substantivos (conceituais) ou sintáticos (procedimentais) sobre o objeto em questão. Por conhecimento substantivo, Shulman (1996) entende a compreensão do conhecimento no domínio das questões específicas, dos procedimentos, dos conceitos e de suas inter-relações internas; no âmbito do conhecimento sintático serão levados em consideração expressões/notações cujo significado fica circunscrito a uma visão em que a ação docente expressa ênfase no **procedimento** em si. Nesse arranjo busco perceber a base de conhecimento dos professores sobre o assunto de fração.

Isto porque uma pesquisa científica é um produto cujo resultado é demonstrado seguindo algumas maneiras de reconhecer, categorizar, analisar, classificar certos problemas histórico-sociais para contribuir com a área, o que pode gerar reflexão e criação de novas incursões pesquisativas sobre o objeto em estudo.

Minha opção é observar o fenômeno nas perspectivas qualitativa e quantitativa por compreender que ambas, embora tenham suas peculiaridades, podem explicitar o **ver formativo**, como alega Fleck, que por sua vez é estabelecido na construção, no caminhar da própria pesquisa. No ir e vir entre o confronto de dados e as leituras por mim realizadas ao longo do processo, muitas opções foram feitas, entre as quais os referenciais de autores tais como Bishop (1990), Fleck (1976) à psicologia cognitiva.

Tal recorte na verdade foi a ponte para ratificar a ideia de que os professores ensinam como aprendem e, assim, no intuito de me aproximar dessa confirmação ou refutá-la, pude pensar em verificar essa assertiva a partir de vários ângulos tais como: testes, livros didáticos , mapas conceituais e comunicação entre os *coletivos de pensamento* (produções acadêmicas e professores participantes).

O recorte apresentado justifica-se, a meu ver, porque no conjunto dos elementos internos de um modelo cientifico: justificativa, objetivo, pergunta, entre os demais elementos, têm-se a oportunidade de relacioná-los para construir assim categorias de análises.

Nesses termos, a palavra categoria assume o sentido de agrupamento de elementos que são sistematizados pelo pesquisador durante a pesquisa de campo ou análise de conceitos em documentos. Como a análise encontra-se em um campo restrito de envolvimento entre participantes e pesquisadora, o que concorre para um afastamento entre fatos e seus contextos, a análise da realidade será a *priore* uma síntese objetiva do teste diagnóstico, porém é possível dizer da subjetividade quando se leva em conta uma questão aberta inserida no instrumento de coleta de dados. Partindo desse entendimento, para a construção deste estudo e posterior análise foram realizados os seguintes passos:

❖ Estudos preliminares: foi realizado um levantamento na literatura de pesquisas sobre números relativos na representação fracionária no sentido de me aproximar da temática tanto à luz da formação de professor, quanto à luz dos processos de ensino e de aprendizagem.

❖ Teste Piloto: para a validação do teste diagnóstico foram feitas dezoito questões aplicadas a dois professores das séries iniciais e dois professores do sexto ano. No inicio da pesquisa foi pensado trabalhar com os professores das séries iniciais, porém foi percebido que muitas situações apresentadas não faziam parte do cotidiano desses sujeitos, por outro lado, é no sexto ano que o ensino da matemática tem seus atributos mais ligados ao pensamento abstrato, e os números fracionários possui primazia em termos de aspectos algébricos, daí a opção pelos sujeitos pertencentes ao sexto ano. O resultado do teste aplicado aos professores deste teste piloto indicou que estes enfatizavam fração como significado parte-todo.

❖ O estudo principal: para este momento a amostra contou com professores especialistas que atuavam no sexto ano. O número de secções foi muito relativo.

Para alguns dos participantes foram realizadas duas secções com menos de uma hora cada, para outros, foram feitas varias secções e várias vezes eu ficava um período de trabalho na escola aguardando o professor para responder o teste e, às vezes, eu saia sem o preenchimento do instrumento, o que dificultava a coleta de dados, principalmente porque havia professor que na referida escola tinha pouca carga-horária e em turno contrário não atuava como docente.

Após a aplicação do instrumento e categorização dos dados foram descartadas três questões: duas foram completamente extintas em função da elaboração de comando e porque não possibilitavam que os professores evidenciassem com clareza o emprego de números fracionários e uma questão, no caso de número **15,** subitem **b**, porque o emprego de números fracionários estava na condição de ferramenta e não como objeto de estudo. Ao detectar esse detalhe pensei em verificar esta questão à luz da teoria de Doaudy [15](1992) – Ferramenta-objeto porém, como o teste não havia sido pensado nesse pressuposto, optei por não considerar a questão para análise, uma vez que em virtude do uso do conceito de fração ter vindo acompanhado dessa varável a incidência de questões não aceitáveis do ponto de vista cientifico neste item ficou em termos de 47,6%. Para efeito de análise foi considerada somente o subitem **15.a, embora no apêndice o teste traga a questão 15.b.** Por questão aceitável foram classificadas aquelas que correspondiam ao conceito cientifico - escolar.

- Levantamento das produções: foi realizado um levantamento das produções acadêmicas em nível de Pós-Graduação no período de 2000 a 2010, sobre números racionais na representação fracionária onde foi possível perceber a concentração em duas bases teóricas: uma baseada em Raymond Duval na perspectiva da Teoria de Representação Semiótica, e outra em autores como Behr, Kieren e colaboradores, entre esses, Nunes[16] com forte influência nas produções nacionais.

Este levantamento teve a finalidade de observar a circulação acadêmica a respeito da temática e para isso consultei o site do Banco de dados da CAPES, os sites dos Programas de Pós Graduação no Ensino de Ciências e Matemáticas, ENEM – Encontro de Educação

---

[15] Régine Doaudy (1992) considera que as que as noções matemáticas devam ser trabalhadas enquanto objeto do saber matemático, funcionando como ferramenta explícita quando surge a necessidade de trabalhar outros domínios em que a questão em jogo se configura de forma implícita. Régine Douady propõe a mudança ou jogo de quadros como meio de fazer evoluir as concepções dos alunos em Matemática. Desta forma o domínio matemático é constituído de vários quadros, que são definidos por Douady da seguinte forma: Quadro geométrico (Constituído por superfícies planas, como polígonos regulares e irregulares); Quadro numérico (Constituído por medidas das superfícies– expressas por meio de números positivos que podem se inteiros, fracionários ou irracionais); Quadro das grandezas (Contexto próprio da noção de área, incluindo a equivalência formada por superfícies de mesma área. É um processo de comparação das grandezas não necessariamente numérico). SANTOS, Cíntia Bento dos Santos e CURI Edda. **Alguns aspectos de articulação entre as teorias da didática francesa e suas contribuições para formação de professores**. In: REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. V4.5, p.53-66, UFSC: 2009.

[16] Idem.

Matemática e o curriculum lattes dos autores. Para a seleção dos trabalhos foram usadas como palavras-chave, os seguintes termos: Números Racionais, Números Fracionários e Ensino de Fração. Na análise das produções busquei verificar o Estilo de Pensamento, terminologia que será tratada mais adiante, de acordo com Fleck (1986).

As produções foram lidas e organizadas em Foco(s) Temático(s), baseando-me em Fiorentini (2002), Megid (2000) e Lorenzetti (2008) através da realização de um inventário das produções compilando em uma ficha padrão os seguintes aspectos internos das pesquisas: tema, resumo, sujeito de investigação, pergunta de pesquisa, recorte metodológico, tendência teórica, região de publicação e principais resultados.

A partir de uma leitura não diacrônica foram selecionados elementos analíticos, tais como, **a linguagem estilizada e a base teórica** existentes nas produções**,** elementos estes que orientam um Estilo de Pensamento. Além deste, foi averiguada a dinâmica comunicativa existente entre o Estilo de Pensamento presentes nas produções acadêmicas e na compreensão dos professores participantes da pesquisa sobre o objeto em foco.

A identificação do Estilo de Pensamento vem em meio às contribuições no que diz respeito a valores matemáticos termo cunhado na sociologia da matemática por Alan Bishop (1990).

❖ Elaboração de Mapas Conceituais: elaborei Mapas Conceituais no sentido de verificar aproximações ou distanciamento dos significados de números fracionários presentes nos livros didáticos, nas formulações dos professores em relação à notação 3/5 e as possíveis relações com a dinâmica comunicativa presente nas produções acadêmicas. A inserção da análise de livros didáticos se deu em função da necessidade de verificar a dinâmica comunicativa entre os Coletivos de Pensamento e, assim, buscar elementos empíricos para consubstanciar a hipótese deste estudo.

❖ Classificação dos dados: para este momento aproximei-me de Oliveira (2005) que tem indicado como possibilidade de análise das informações obtidas realizar uma matriz para elencar alguns elementos norteadores como: categorias gerais, categorias empíricas e unidades de análise. Essa matriz orienta a classificação das informações agrupando-as segundo características comuns. Conforme Oliveira, já citada, as categorias gerais são as teorias que embasam o estudo, as categorias empíricas estão relacionadas à pesquisa realizada, e as unidades de análise que são os detalhamentos empíricos

Levando em conta o exposto é possível apresentar uma matriz geral de categorização para este estudo, nesses termos o quadro apresentado a seguir pode ser compreendido da seguinte forma: *as categorias teóricas* como os grandes eixos do estudo que estão numerados contendo a categoria geral e leituras afins.

Desse modo os números **1** e **2** e suas subcategorias formam essa primeira parte de categorização. As *categorias empíricas* disponibilizam as intenções de análise a partir das categorias gerais e podem ser identificadas pelos marcadores; e as *unidades de análise* indicam os achados a partir dos elementos/palavras os quais fazem parte do repertório conceitual das categorias teóricas e que se transformam em unidades de análise.

Quadro 01 – Matriz de categorias de análise

| Categorias Teóricas | Categorias empíricas | Unidade de análise |
|---|---|---|
| ***1. Números fracionários*** | • *Significados de números fracionários* | *Parte-todo, medida, quociente, números, operador multiplicativo. Equivalência* |
| *Teoria Campos conceituais* | • *Conjunto de situações* | *Esquemas* |
| *Aprendizagem significativa* | • *Tipos* | *Mecânica, significativa* |
| *Mapas Conceituais* | *Questão aberta e livros didáticos* | *Dimensões: Bidimensional Unidimensional. Significados* |
| ***2. Cultura escolar e Formação docente*** | ________________ | ______________________ |
| *Axiologia do conhecimento* | *Valores Sociológicos* | *Abertura e mistério* |
| *Coletivo de Pensamento* | • *Dinâmica Comunicativa* | *Comunicação Intra e intercoletiva* |
| *Saberes docentes* | • *Conhecimento da matéria* | *Conhecimento Substantivo e sintático* |

Fonte: elaborado pela autora.

As duas âncoras, identificadas pelos números **1 e 2,** são as duas categorias teóricas que surgem da necessidade de pensar o objeto deste estudo. Como já abordado, as pesquisas que se debruçaram a este respeito estão circunscritas à análise de natureza endógena.

Observando este desenho pesquisativo, incluo como segunda categoria geral aspectos concernentes ao que chamarei de Cultura Escolar e Formação Docente em suas respectivas subtemáticas eleitas como forma de ancorar o debate já posto numa rede de discussões que, a meu ver, interferem e constituem o saber-fazer docente. É importante ressaltar que no texto a seguir as categorias empíricas, enquanto suporte analítico, tais como Aprendizagem significativa e Teoria dos Campos Conceituais serão apresentadas no capitulo Cultura Escolar por tratar de elementos imprescindíveis para pensar a divulgação e a socialização dos objetos de aprendizagem.

A plataforma apresentada no quadro de matriz de análise e classificação dos dados se estabeleceu a partir do teste diagnóstico, portanto todos os elementos apresentados no quadro 01 tornam-se ligados aos cinco significados de números fracionários o que por sua vez deve-se considerar, em certa medida, que alguns dos elementos presentes na matriz terão mais destaques que outros. De posse dessas informações apresento o instrumento diagnóstico organizado por grupo de questões.

## 2.5 . Instrumento Diagnóstico

O instrumento de pesquisa foi elaborado levando em conta tanto os cinco significados de fração, quanto o invariante equivalência, inspirados na classificação de Nunes *et al*. (2003) e em pesquisas como as de Canova (2006), Silva (2007) Moutinho (2005), Rodrigues (2005) Damico (2007) e Merlini (2005), entre outras. Porém, como a pesquisa envolve professores especialistas que já possuem experiências em tratar o objeto em estudo, o instrumento diagnóstico trouxe uma especificidade.

Esta especificidade, embora levando em conta as orientações de Nunes *et al* , já citada, quanto a definição de *parte-todo*, este estudo considerou pertinente apresentar situações que envolvessem frações impróprias, uma vez que no significado em âmbito usual do ensino tem-se vinculado à necessidade de articular o conceito enfatizando as características da representação visual e, não, suas propriedades, principalmente no contexto das frações egípcias (igual a 1), sobretudo nas representações estáveis como por exemplo o uso da barra de chocolate.

O teste diagnóstico ao trazer a fração imprópria no significado da relação *parte-todo* exige por parte do participante utilizar o pensamento algébrico, que por sua vez, é conseguido pela transição do pensamento concreto para o pensamento abstrato tendo em vista garantir a compreensão do objeto independente de sua representação.

O instrumento diagnóstico apresenta situações envolvendo os cinco subconstrutores/significados de fração conhecidos como: parte-todo, operador multiplicativo, medida, número e quociente. O instrumento contou com dezoito questões, mas foram consideradas para análise somente quinze. Este instrumento será apresentado nesta seção levando em conta as situações envolvidas, a natureza/tipo de significados, a situação subjetiva e o invariante operatória equivalência. No apêndice o mesmo será apresentado como foi aplicado em campo.

As situações-problema foram organizadas em grupos, sendo: **Grupo A** que contempla as questões que tratam do invariante equivalência, **Grupo B** que contempla as questões relacionadas aos significados de números fracionários e o **Grupo C** que contempla a questão subjetiva expressa pela questão **2**, como pode ser visto abaixo:.

Quadro 02. Distribuição das questões segundo os significados e invariante.

| ***Grupo*** | ***Situação*** | ***Questões*** |
|---|---|---|
| ***A*** | ***Invariante: Equivalência*** | ***1, 6, 11*** |
| ***B*** | ***SIGNIFICADOS*** | ________________ |
| *B.1* | *Parte-Todo* | ***3, 4, 5, 8*** |
| *B.2* | *Quociente* | ***7, 9*** |
| *B.3* | *Operador Multiplicativo* | ***12, 13*** |
| *B.4* | *Medida* | ***10, 15*** |
| *B.5* | *Número* | ***14*** |
| ***C*** | ***Questão subjetiva*** | ________________ |
| | *Elaboração de situações com a notação 3/5* | ***2ª*** |

Fonte: elaborado pela autora a partir do teste diagnóstico.

Os dados obtidos por este instrumento possibilitaram categorizar e analisar como os professores se comportam perante certas situações que envolvem *números fracionários*, tanto no que se refere a responderem questões propostas, quanto elaborarem uma situação-problema que envolvesse o conceito em foco.

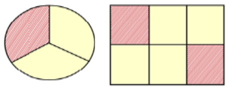
- **GRUPO A: QUESTÕES RELACIONADAS AO INVARIANTE OPERATÓRIO EQUIVALÊNCIA**

Neste grupo serão tomadas as questões que visam explicitar o invariante equivalência como fator relevante para a construção de números fracionários. Este invariante que, por conseguinte, desenvolve o invariante ordem é fundamental porque ajuda na compreensão de números fracionários justamente como número. Este grupo é formado pelas questões **1, 6 e 11**[17]**.**

[17] Questão 1 e 6, elaboradas pela autora. Questão 11 elaborada por Merline (2005).

## QUESTÃO 1

*Edna distribuiu igualmente a massa de bolo com 1 kg de trigo em duas formas, uma redonda e outra retangular para repartir para seus amigos. Conforme a representação abaixo, as partes pintadas de vermelho representam a mesma quantidade nos dois bolos? Justifique.*

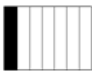
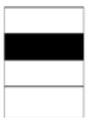


***Algumas respostas esperadas:***

***SIM:*** *indica que o sujeito considerou a conservação mesmo que o registro figural tenha sido alterado. A justificativa fica por conta de estabelecer relações entre um terço e dois sextos percebendo a equivalência.*
***NÃO:*** *indica que a compreensão da situação está por conta da representação.*

## QUESTÃO. 6

*Qual (is) da(s) figura(s) abaixo pode(m) representar uma fração equivalente a 1/4*

.  **A ( )**  **B ( )**  **C ( )**  **D ( )**

**B,C e D:** *indica que considerou a equivalência inclusive como principio de identidade.*

**B e D**: *indica ter considerado a equivalência quando a mudança de registro expressa essa relação de forma clara*.

**A**: *indica não identificar os termos dos números fracionários.*

**QUESTÃO. 11**

| | |
|---|---|
| Paulo vai pintar sua casa nas cores azul e branca. Observe a gravura abaixo e responda:<br><br>a) A mistura de tinta vai ter a mesma cor na segunda e na terça-feira? SIM ( ) NÃO ( )<br><br>b) Que fração representa a quantidade de tinta azul em relação à mistura das tintas azul e branca?<br>Na segunda-feira<br>Na terça-feira | RESPOSTA.<br>a) SIM<br>b) Na segunda-feira 1/2<br>Na terça-feira 1/2<br><br><br> |

- **GRUPO B. Questões relacionadas ao Significado/subconstrutor Parte-Todo**

Neste grupo, é muito comum o uso da dupla contagem como facilitadora da aprendizagem é muito utilizado, principalmente em situações de frações iguais ou menor que o inteiro. Esse recurso mobiliza elementos como quantificação ou identificação das partes de forma visivelmente apresentada, pois a ênfase desse significado fica por conta de exemplos de situações estáticas utilizando representação como figuras de pizza ou figuras geométricas retangulares. O estudante usa o recurso de dupla contagem quando ao se deparar com uma situação envolvendo fração, identifica, a partir de uma representação figural principalmente em contexto de quantidades continuas, o numerador (a partir da contagem de partes destacas do inteiro) e o denominador (identificando o números de partes em que o todo fora divido). Recurso este normalmente usado na tradição escolar.

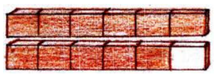
Porém, este recurso é limitado em relação a situações que envolvem frações maiores que o inteiro. Fazem parte do grupo envolvendo este significado as questões **3, 4, 5 e 8**[18]**.** As questões **4** e **5** pertencem ao contexto de frações unitárias, e as questões **3** e **8** estão ligadas a relação parte-todo, porém no contexto de frações maiores que 1. O intuito é buscar a possibilidade de analisar o comportamento do professor em relação ao entendimento de fração para além da ideia acumulada pelas práticas pedagógicas – parte-todo em frações egípcias. Assim, é possível verificar se os professores interpretam o tópico – números fracionários - como um objeto matemático, em que a parte é maior que o próprio todo. Na questão **4** exige-

[18] Questões 3,4 e 8 foram elaboradas pela autora; questão 5 por Merline (2005).

se o conhecimento mais elementar que vem a ser o emprego da dupla contagem e, neste caso, os termos numerador e denominador são bem indicados.

Na questão **5,** embora as partes não sejam visíveis, o mesmo recurso pode ser aplicado. Nas questões 3 e 8 exige-se mais abstração caracterizando pelo contexto da fração imprópria em que se pode representar uma parte maior que o inteiro.

***QUESTÃO. 3***

| ***PARTE-TODO*** | |
|---|---|
| *Renato ganhou duas barras de chocolate. Dividiu-as em 6 partes iguais e comeu certa quantidade (parte pintada). Que fração representa a quantidade de chocolate que Renato comeu?*<br>*Considerando a situação-problema posta, comente a resposta apresentada abaixo:*<br>*R = Renato comeu 11/12* | *RESPOSTA.*<br>*11/6 ou*<br>*1 5/6*<br> |

**Algumas respostas esperadas:**

- **Correto.** Indica que o participante não considerou a representação como dois inteiros, e sim, um inteiro considerando 12/12.
- **Renato comeu um inteiro e cinco sextos ou onze** sextos: indica que o participante demonstra não estar preso ao visual usando sua compreensão para expressar o domínio sobre os objetos matemáticos de forma abstratos.

***QUESTÃO 4***

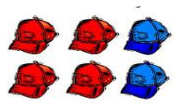
| ***SIGNIFICADO PARTE TODO*** | |
|---|---|
| *Caroline repartiu sua barra de chocolate em cinco partes iguais e deu dois pedaços a Pedro. Que fração representa a quantidade de chocolate que Pedro recebeu?* | *RESPOSTA.*<br>$\frac{2}{5}$ |

**Algumas respostas esperadas:**

$\frac{2}{5}$ Indica que o participante utilizou duas partes do chocolate para um total de cinco partes.

$\frac{5}{2}$ Indica que o participante confundiu numerador e denominador

***QUESTÃO. 5***

| ***SIGNIFICADO PARTE-TODO*** | |
|---|---|
| *Numa loja para presentes há 4 bonés vermelhos e 2 azuis. Que fração representa a quantidade de bonés azuis em relação ao total de bonés?* | ***RESPOSTA.*** $\frac{2}{6}$ ***ou*** $\frac{1}{3}$  |

***Algumas respostas esperadas:***

$\frac{2}{6}$ **:** Indica que o participante pode ter usado a estratégia de dupla contagem a partir do total de elementos.

$\frac{1}{3}$ : **I**ndica que o participante pode ter estabelecido a relação de equivalência entre os grupos de elementos do conjunto. O que poderá ser alcançado pela simplificação de fração ou pela utilização do significado Operador Multiplicativo.

**Questão 8**

| **PARTE-TODO** | |
|---|---|
| *Se quisermos representar a quantidade de pedaços de pizza da figura abaixo como fração de uma pizza, qual a fração que representaria a quantidade de pizza que não foi consumida (a parte de cor amarela)?*  | **RESPOSTA.** $\frac{12}{8}$ , $1\frac{4}{8}$, $1\frac{1}{2}$ |

**Algumas respostas esperadas:**

$\frac{12}{8}$ . $1\frac{4}{8}$, $1\frac{1}{2}$: Indica que o participante compreendeu que a unidade referência é maior que um inteiro.

$\frac{12}{16}$, ou $\frac{3}{4}$: Indica não ter considerado a fração doze dezesseis avos, demonstrando dificuldades de passar de situações contextualizadas quando o objeto é abstrato. Nesse caso, a fração imprópria, como objeto abstrato, é vista como relação entre duas quantidades.

$\frac{4}{16}$ Indica que o participante considerou as partes destacadas levando em conta que o todo referência são as duas unidades como uma só unidade.mm

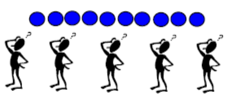
$\frac{6}{17}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{8}{6}$, $\frac{12}{4}$: Indica que o participante pode ter usado as relações parte-parte.

- **GRUPO B. Questões relacionadas ao Significado/subconstrutor Quociente**

Mobilizar o pensamento para as tarefas que podem ser trabalhadas com este significado de fração implica em compreendê-las como estruturas de pensamentos ligadas a distribuição de grandezas. Nesses termos, o registro **a/b** passa a significar que **a** foi distribuído em **b** – em n partes iguais. Nesse grupo de situações as tarefas passam a ter um diferencial, qual seja: no significado quociente o **a** pode ser **menor, maior ou igual** a **b** e podem representar grandezas diferentes como, por exemplo, crianças e bolos. Nesses termos, a técnica de divisão associa à operação a ÷ b ao fracionário a/b.

É importante dizer que este significado em contextos discretos favorece a coordenação de idéias, ou seja, possibilita a compreensão de operador, porém usualmente não se utiliza o número fracionário como resposta, pois o contexto de divisão no conjunto dos números naturais responde a situações-problema próprias desse conjunto. Fazem parte deste grupo as questões **7 e 9.**[19]

**QUESTÃO 7**

| SIGNIFICADO QUOCIENTE | |
|---|---|
| Tenho dez bolas para dividir para cinco crianças. Quantas bolas cada criança ganhará? Que fração representa essa distribuição?  | RESPOSTA.<br>a)2<br>b) $\frac{10}{5}$ |

[19] Questões elaboradas por Moutinho (2005).

**Algumas respostas esperadas**

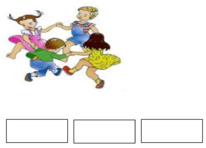
$\frac{10}{5}$: Indica uso da idéia de quociente.

$\frac{2}{10}$ : Indica usar idéia parte-todo.

$\frac{1}{5}$: Indica idéia de operador multiplicativo, ou simplificação de 2/10.

$\frac{10}{2}$: Indica que o participante confundiu quociente (10:5 = 2) como denominador.

***QUESTÃO 9***

| SIGNIFICADO QUOCIENTE | |
|---|---|
| Foram divididas igualmente para 4 crianças, 3 barras de chocolate. Marque com um X a resposta que você considera correta.<br><br>Cada criança receberá um chocolate inteiro? SIM ( ) Não ( ) **Justifique sua resposta:** | **RESPOSTA. NÃO.**<br>**Justificativas**<br> |

**Algumas respostas esperadas:**

Não. $\frac{3}{4}$ Indica caracterização do significado quociente

Não: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ . Indica que o participante utilizou cálculos diferenciados para chegar ao resultado.

Sim: $\frac{3}{12}$ : Indica que o participante compreendeu as três barras considerando-as como inteiro repartida.

- **GRUPO B Questões relacionadas ao Significado/Subconstrutor Operador Multiplicativo**

Pensar o ensino de fração em que as situações associam-se a concepção de operador multiplicativo é possibilitar ao estudante perceber que o número fracionário assume o papel de transformar uma situação inicial para produzir uma situação final adquirindo um caráter funcional de transformação, isto é, assume um caráter onde a representação de uma ação deva imprimir sobre um número ou quantidade transformando seu valor nesse processo. Em quantidades contínuas esse significado expressa a ideia de uma máquina que reduz ou amplia a quantidade; em quantidade discreta, atua como multiplicador- divisor. Nesse caso a fração pode ser vista como valor escalar aplicado a uma quantidade. Fazem parte deste grupo as questões **12 e 13**[20]**.**

***QUESTÃO.12***

| SIGNIFICADO OPERADOR MULTIPLICATIVO | |
|---|---|
| *Em uma gincana estudantil, os três primeiros alunos que terminaram as tarefas ganharam um determinado número de bolas, do total de 35 conforme a classificação. Paulo ganhou 4/14 de bolas, Daniel 1/7 e Tiago 4/7. Responda quem ficou em 1º, 2º e 3º lugar respectivamente?* | RESPOSTA.<br>*1º lugar Thiago*<br>*2ª lugar Paulo*<br>*3º lugar Daniel* |

**Algumas respostas esperadas**

**1º lugar:** Thiago

**2º lugar:** Paulo

**3º lugar:** Daniel

O participante poderá chegar a essas respostas usando o algoritmo como transformação. Ou por lógica de reagrupamento de frações ao comparar a fração 1/7 com a fração 4/14, que simplificando 4/14 terá como resultado a fração 2/7. Então poderá comparar 1/7; 2/7; 4/7 e chegar a resposta certa.

**QUESTÃO 13**

| SIGNIFICADO OPERADOR MULTIPLICATIVO | |
|---|---|
| Raquel vai doar para a sala de leitura 3/6 da quantidade de livros desenhados abaixo. Quantos livros Raquel vai doar?<br> | RESPOSTA.<br>8 livros |

[20] Questões elaboradas pela autora.

**Algumas respostas esperadas:**

$3 . \frac{16}{6} = \frac{48}{6}$.= 8 livros. Indica que o participante utilizou o algoritmo da transformação. $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ = 8 livros. Indica ter usado a simplificação.

- **Grupo B. Questões relacionadas ao Significado/Subconstrutor Medida**

O significado medida auxilia a compreensão de números fracionários em situações de quantidades intensivas, extensivas e eventos como probabilidade, este último a partir do sexto ano da Escola Fundamental começa a ser estabelecido nos manuais didáticos.

Números fracionários tendo como significado, o de Medida, são empregados em situações que envolvem quantidades intensivas e extensivas.

Algumas medidas envolvem frações por se referirem a quantidades extensivas, nas quais a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis.

Neste contexto, pode-se exemplificar situações envolvendo o conceito de probabilidade. A probabilidade de um evento é medida pelo quociente do número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis. Portanto, a probabilidade de um evento varia de 0 a 1 e a maioria dos valores com os quais se trabalha são números fracionários. Para melhor compreensão Merline (2005:29) apresenta os seguintes exemplos:

*Exemplo 1 (Quantidade discreta): João terá que passar por uma prova de fogo. Seu amigo colocou dentro de uma caixinha 3 bolas coloridas,2 azuis e uma branca, e apostou com João: se você tirar uma bola dessa caixa sem ver, e ela for azul, você ganha o jogo. Que fração representa a chance de João ganhar o jogo?*

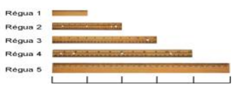
Nessa situação, a possibilidade de João ganhar o jogo é expressa por uma medida (significado) obtida pelo quociente entre o número de bolinhas azuis e o número total de bolinhas da caixa, ou seja, pela fração 2/3.

Outras medidas envolvem frações por referirem-se a quantidades intensivas.

*Exemplo 2 (Quantidade contínua): Para fazer certa quantidade de suco são necessários 2 medidas de água para 1 medida de concentrado de laranja. Que fração representa a medida da água em relação ao total de suco?*

Ao fazer esse suco, devemos utilizar 1 medida de concentrado de laranja para 2 medidas de água e a receita é medida pela razão 1 para 2 que pode ser representada como sendo 1/2 (relação parte-parte). Com essa medida podemos fazer, indefinidamente, diversas quantidades de suco, mantendo o mesmo sabor e, além disso, essa quantidade poderá nos remeter à ideia de fração, se considerarmos que o todo (a mistura) é constituído de 3 partes, sendo que 1/3 é a fração que corresponde a medida de concentrado de laranja na mistura e 2/3 é a fração que corresponde a medida de água, na mistura. Fazem parte deste grupo as questões **10**[21] e **15.** A Questão 11 também poderia fazer parte deste grupo, mas ficou analisado juntamente com o Grupo de questões que discorre sobre o invariante e equivalência.

**QUESTÃO 10**

<table>
<tr><th colspan="2">SIGNIFICADO MEDIDA</th></tr>
<tr><td>Observe as réguas abaixo e responda as perguntas:<br><br>a) Quanto mede a régua 2 tomando-se a régua 1 como unidade?<br>b) Quanto mede a régua 1 tomando-se a régua 4 como medida?<br>c) Quanto mede a régua 3 tomando-se a régua 5 como medida?<br>d) Quanto mede a régua 4 tomando-se a régua 3 como medida?</td><td>RESPOSTAS:<br>a) Duas vezes<br>b) A quarta parte<br>c) Três quintos<br>d) Quarto terços ou um inteiro e mais um terço.</td></tr>
</table>

**Algumas respostas esperadas**

- Esta questão indica que mesmo perante a representação icônica a compreensão de número fracionário se estendeu para além do significado parte–todo, pois no subitem “4” o pensamento torna-se reversível em relação às demais questões, pois se pensada cada régua como seguimentos de reta régua “4” em relação a régua “3” percebe-se que sobra um segmento - uma unidade.

[21] Questão elaborada por Damico (2007).

**a) duas vezes**

**b) a quarta parte**

**c) três quintos**

**d) quatro terços ou um inteiro e um terço.**

**e) um inteiro e um quarto:** indica ter comparado a situação seguindo a ordem em que os dados aparecem no problema

**QUESTÃO 15**

*Na análise foi considerado apenas o subitem* ***15.a,*** *como já referendado.*

| SIGNIFICADO MEDIDA | RESPOSTA |
|---|---|
|  a)Jogando apenas uma vez um dado de seis faces, qual a fração que representa a chance de tirar o número 3? | *a)* $\frac{1}{6}$ |

**Algumas respostas esperadas**

$\frac{1}{6}$. Indica que o participante usou o significado medida para compreender a possibilidade de o 3 ter a chance de aparecer quando jogar uma vez o dado.

$\frac{2}{12}$ **.** Indica que o participante usou o significado medida para compreender a possibilidade de o 3 ter a chance de aparecer quando jogar duas vezes o dado **.** Porém não opera com a multiplicação.

$\frac{3}{6}$ . Indica que o participante usou as informações do comando.

- **Grupo B. Questões relacionadas ao Significado/Subconstrutor Número**

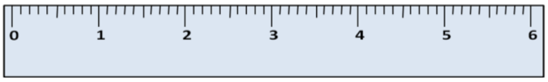
O significado número ou coordenada linear tem como finalidade possibilitar a compreensão dos números fracionários na reta real, facilitando, entre outras, a compreensão de que números fracionários são inteiros e vice-versa. Faz parte deste grupo a questão **14**[22]**.**

[22] Questão baseada em Canova (2005).

**QUESTAO. 14**

Identifique as frações na régua abaixo:

**1/2,1 3/4, 3/12 e 5/2**




| RESPOSTA. |
|---|
| 1/2 = 0,5 |
| 1 3/4 = 1,75 |
| 3/12 = 0,25 |
| 5/2 = 2,5 |

**Algumas respostas esperadas:**

$\frac{1}{2}$ = 0,5; 1 $\frac{3}{4}$= 1,75; $\frac{3}{12}$ = 0,25; ,$\frac{5}{2}$= 2,5. Indica que o participante localizou os números fracionários como significado número.

$\frac{1}{2}$ =3. O participante considerou a reta numérica como todo, inteiro.

- **GRUPO C. Questão Subjetiva:**

A questão 2[23] , a seguir, considerada subjetiva foi pensada como forma de possibilitar ao professor participante a oportunidade de registrar, ou melhor, de explicitar sua compreensão – de forma livre - perante a situação posta. Nesta questão o professor poderia exemplificar diferentes situações para a notação 3/5. O esperado era que o professor representasse mais de um significado contido no conceito de números fracionários. Além da criação de um exemplo também foi solicitado ao professor elencar os conteúdos afins ao conceito em estudo.

**QUESTÃO. 2**

*A representação 3/5 faz parte das vivências com o conceito de fração em sala de aula. Que(ais) exemplo(s) você poderia criar para trabalhar esse conceito? Que(ais) conteúdos matemáticos você identifica nesta situação?*

[23] Elaborada pela autora.

Este instrumento serviu para a construção do quadro 01 de matriz de organização e análise dos dados. A análise foi construída a partir dos seguintes enfoques analíticos: **(l) enfoque1 com os resultados em relação ao grupo A que envolve as questões sobre invariante equivalência; (ll) enfoque.2 com resultados do grupo B sobre os cinco significados de números fracionários; (lll) enfoque 3 trazendo os resultados da questão 2 questão aberta e (lV) enfoque 4 trazendo os resultados da dinâmica comunicativa entre os Coletivos de Pensamento.**

Nesta seção, foi apresentado o percurso realizado para compreender as razões das escolhas de determinados referenciais e indicar os achados desta investigação. Uma das escolhas será apresentada subsequentemente na consideração de *Números fracionários como relação da interface conhecimento como cultura.* O desejo é deflagrar olhares sobre o objeto em estudo entre racionalidades diferentes que, ao seu modo, divulgam crenças e verdades sobre determinadas formas de compreender os números fracionários.

# CAPÍTULO 3
# NÚMEROS FRACIONÁRIOS COMO INTERFACE DO CONHECIMENTO CULTURAL

## Entrelaçando conhecimento e cultura

Tem sido crescente no campo da Educação Matemática pesquisas envolvendo a temática da cultura com o propósito de subsidiar estudos para compreender a Matemática como prática social. A exemplo, D'Ambrósio (1996, 1997) e Bishop (1999, 2000, 2005) enfatizam a importância dos aspectos culturais no processo de ensino e de aprendizagem em matemática. Esses aspectos, no contexto da aula, assumem-se como valores que podem se apresentar restritos, como é o caso da escola, ou gerais, como é o caso da Matemática de diferentes povos.

Esses valores advêm de certas relações, tais como, a comunicação entre antropologia e Matemática que possibilita perceber este conhecimento como resultante de um saber que possui relações para além das explicitações do domínio acadêmico formalizado e aceito como universal. Isto estimula tentativas de pensar o ensino de matemática nos termos de Bishop, como *uma maneira de conhecer e de tratar os objetos de aprendizagem matemática* (1999:190).

Desse modo, posso dizer que essa comunicação possibilita perceber a dinâmica das variadas formas de conhecer o entorno, a realidade que, por vezes, constitui indícios de pensamento matemático, ensejando *perceber a dialética da identidade/diferença entre a cultura e as culturas* (CUCHE, 2002: 244) no que se refere à maneira com que cada cultura tratar tais objetos.

Em razão disso, trago para esta seção fragmentos da história do pensamento matemático uma vez que considero como importante compreender o ensino enfocando relações entre ideias e práticas que ocorrem tanto na academia como no mundo externo a ela. Entre esses espaços de relações situa-se a escola, que neste estudo, será concebida como espaço que institucionaliza uma maneira própria de conhecer os conceitos.

Levando em consideração escola como local de cultura/conhecimento, a maneira de pensar/fazer o ensino de matemática acontece de variadas formas, por vezes assumidas como: (a) experiências curriculares expressivas dos objetos conceituais *através de contos populares como ferramentas poderosas que favorecerem habilidades como criar hipóteses e desenvolver a argumentação, fatores indispensáveis ao desenvolvimento do pensamento* *matemático,* Aymerich (2009:62, minha tradução); (b) outras vezes trabalhada de forma a utilizar uma linguagem altamente formal e abstrata chegando a distanciar-se da concepção de matemática como *um saber de coerência constantemente interpolado* (VERGANI, 2009:32).

Sendo um saber constantemente interpolado, parece oportuno enfocar os números fracionários com objetos conceituais determinados por injunções sociais, culturais e históricos. É neste âmbito que o termo *cultura* ganha relevância. Assim, alio-me à noção de cultura como *modo de vida* e, nesses termos, não há como não assumir os dizeres de Morin (2008:24), para quem *conhecimento é cultura. A Cultura* mobiliza modos de explicitar os modelos Matemáticos eleitos por um determinado grupo.

### 3.1. A relação conhecimento-cultura para explicitar modelos matemáticos

*O conhecimento está na cultura e a cultura está no conhecimento*

*(Morin, 2008:24)*

O conhecimento escolar é dotado de uma configuração própria que, dependendo de certas práticas, é considerado como fonte em si, embora saibamos que qualquer recorte do saber Matemático que adentre o universo escolar apresenta risco de congelar as formas de produção desse conhecimento. Podemos citar como uma dessas produções as explicações primeiras advindas de povos antigos, em especial dos gregos. Ressalto, pois a importância de considerar os modelos explicativos dos objetos matemáticos externos ao movimento de progresso interno da matemática como área de conhecimento. Vistos nessa exteriorização a síntese apresentada traz os objetos de aprendizagem, e de forma especial os números fracionários, como elementos de cultura porque, sendo assim assumida, *a **cultura** poderá ser usada para transformar a compreensão, explicação e os modelos teóricos do mundo,* Stuart Hall (1997).

Conforme Moreira e Candau (2003: p. 159), cultura para Hall é elemento que penetra em cada canto da vida social configurando e modificando o cotidiano de cada prática social. Desta forma, posso dizer que o caráter social que envolve os números fracionários atende à dinamicidade da sociedade à qual pertencem podendo ser assumidos como inventividade, o que possibilita a formação de modelos dos conceitos. Por ser conhecimento humano é, ao mesmo tempo, cultural e cognitivo.

Em função dessa visão, considero importante ressaltar duas racionalidades, duas maneiras de pensar os números fracionários: *a mítica e a científica*, é o que trato a seguir.

### 3.2. Racionalidade mítica e registro dos números fracionários

Como inventividade, parece ser interessante tratar alguns pontos iniciais para a formalização do conceito de fração. É notória a aceitação dos *papirus* como referencial para o tratamento da história da Matemática, principalmente o de **Rhind**[24] que contém problemas sobre fração, entre esses, **a tabela de número 47**[25]. Contudo, outro ponto que julgo importante para compreender que aspectos dos modos de vida dos indivíduos podem se entrelaçar ao conteúdo acadêmico hoje sistematizado. Desta forma, não se pode negar o brilhantismo da espiritualidade empregada pelos egípcios no que se refere à interface entre fração e cultura, que sugere trazer a lenda dos **Olhos de Hórus**, datada do Império Antigo (c. 2575 a 2134 A.C).

Como se sabe, os egípcios utilizavam vários amuletos protetores, tanto em vida quanto em suas múmias. Entre os mais antigos encontra-se o **Olho Uedjat** que é um dos mais comuns na história egípcia. Ele simbolizava o olho direito do falcão, isto é, do **deus Hórus**, o qual foi perdido durante a luta entre este deus e seu tio Seth que o fracionou em 64 partes. Esse fracionamento passou então, a ser vinculado, a um código numérico, remetendo à ideia de um todo e suas partes.

[24] Matemática egípcia baseia-se em dois grandes documentos: o "Papiro de Rhind" e o "Papiro de Moscovo". O papiro de Rhind datado de cerca de 1650 A.C.tem aproximadamente 5,5 m de comprimento e 0,32 m de largura. Contém 85 problemas ligados à Aritmética e à Geometria. Basicamente o papiro dá-nos informações sobre aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares e trigonometria básica. Esses problemas são, em sua maioria, ligados ao quotidiano da época e procuravam apresentar métodos e fórmulas que permitissem resolver assuntos que surgiam diariamente, tais como: o preço do pão, a armazenagem de grãos de trigo, a alimentação do gado, etc.
Foi copiado, em escrita hierática [uma forma simplificada da escrita hieroglífica] de um trabalho mais antigo, [aproximadamente 200 anos, pelo escriba Ahmes ou Aahmesu, cujo nome significa "Filho da Lua". Esteve perdido durante muitos séculos até ser encontrado pelo advogado e antiquário escocês Alexander Henry Rhind que o comprou, por volta de 1850, em Luxor, no Egito em meados do século XIX.

[25] Tabela das frações de 1 hekat, como as frações de **Olho de Hórus, frações inteiras.** A partir 200 A.C. este símbolo passou a ser utilizado pelos egípcios para representar frações da hekat. A hekat era a unidade de volume egípcia para a medição de grãos e era dividida em 64 partes. A hekat é subdividida em 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32 e 1/64. Estas frações somam juntas 63/64 faltando 1/64 para completar o "um completo ou inteiro". Cada parte do Olho de Hórus representa uma das frações da hekat - a soma das partes dá aproximadamente 1. Pois: 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 =1 . Disponível em: **http://matematica-na-veia.blogspot.com.br/2011/06/o-segredo-do-papiro-de-rhind.html.** Acessado em 31/08/2012.

Na imagem do **Olho de Hórus**[26] todos os pedaços reunidos formavam o **Uedjat** (todo), ligando a imagem à ideia de número inteiro, a unidade recuperada e, por efeitos mágicos, o amuleto proporcionava a integridade física e a valentia do corpo. Segundo Ifrah (1995, 1997), o símbolo do **Uedjat** pode ser decomposto em pedaços e cada parte do Olho representa uma fração que somadas resultam em 63 /64, ou seja, aproximadamente a um inteiro.

Os egípcios acreditavam que o último pedaço (1/64) era mágico e não poderia ser visto. Algumas explicações fazem relação entre o símbolo e a escrita fracionária, a exemplo, a ideia[27] de que o um representa o símbolo, o TODO, a unidade em si. Do TODO nascem os demais números apresentados no Olho de Hórus. A vontade do TODO de tomar vida leva-o a projetar a sua imagem somando-se a ele próprio. Assim, surge algo diferente do TODO, vindo do TODO e fazendo parte do TODO e surgindo o número dois. Aplicando a mesma ideia surge o número 4 e assim sucessivamente. Como estes números provêm do TODO, a forma mais perfeita para representá-los é a notação fracionária, compreendida como as várias partes da unidade.

A explicação acima pode não parecer lógica do ponto de vista do conhecimento científico, por isso, quaisquer explicações de que por ventura se possa lançar mão, no sentido de demonstrar argumentativamente tais relações, podem ser classificadas como espectro da **herança do cogito ergo *sum*** (COSTA, 2009: p. 147), pois, na racionalidade mítica, o que pode ser uma contradição lógica talvez não seja o cerne explicativo da relação entre mitologia e o conhecimento matemático acadêmico. Como não se sabe ao certo qual é a relação estabelecida para numeralizar cada parte do **Olho de Hórus**, não se pode desprezar a confiança que o homem passa a estabelecer com a linguagem, pois através desta, os códigos matemáticos tornam-se cada vez mais distantes do entorno das explicações primeiras. A seguir o símbolo de Olho de Hórus e suas respectivas frações.

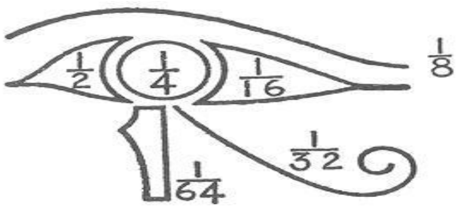



Figura 03 -: Figura da lenda do Olho de Hórus.

Fonte: http://www.freemasons-freemasonry.com/5sentidos.pdf

[26] As sobrancelhas equivaliam a 1/8, a pupila era 1/4, a parte esquerda da pupila era 1/2, a parte direita da pupila era 1/16, a parte inferior vertical abaixo do olho era 1/32 e a parte inferior diagonal do olho representava 1/64.

[27] Informações tiradas do site: http://memgimel.blogspot.com/2005/06/horus.html. Em 06/05/2010.

Os egípcios usavam frações unitárias para facilitar a divisão da unidade por **n partes** e as que tivessem numerador diferente da unidade eram reduzidas à fração unitária. A exemplo, no papiro de Rhind havia a seguinte notação**:**

$$\frac{2}{5} \text{ como } \frac{1}{3} + \frac{1}{15} \text{ e nunca } \frac{1}{5} + \frac{1}{5}.$$

A relação entre a lenda de **Hórus** e as frações deve ter, entre outros motivos, a notável associação entre o conhecimento matemático e a natureza, vistos como conhecimentos auxiliares.

Tratando de alguns indícios que buscam aproximar os conceitos matemáticos e ideias dos modos de vida de uma sociedade, busco verificar o que há entre a coerência do cotidiano e a construção do conhecimento matemático. Nessa perspectiva, a China também é um dos locais onde se pode visualizar essa coerência. Com sua filosofia baseada no **Yin e Yang**, princípio de duas forças complementares que compõem tudo que existe num equilíbrio dinâmico, os chineses, segundo Boyer (2003), faziam analogias entre os conceitos de fração e os sexos. Assim, relacionavam o numerador ao filho e o denominador à mãe. Saber onde inicia e termina a relação entre o místico e o cientifico é pouco provável, uma vez que se observarmos a lenda de Hórus ambos aparecem intimamente ligados.

### 3.3. Racionalidade científica: história e modelos explicativos de números fracionários

Para Boyer (1974:4) e Almeida (2001:39), o conceito de números fracionários surge bem mais tarde que o de número inteiro. De modo geral, as sociedades primitivas não necessitavam do uso de frações, como pode ser visto no exemplo seguinte:

> ...Para dividir 20 conchas por 5 pessoas, ou seja, para encontrar 1/5 de 20, poderia ser resolvido, construindo-se 5 montes (iguais) com as 20 conchas, obtendo-se 4 conchas para cada monte.

Nesse caso, podiam-se escolher unidades suficientemente pequenas, dispensando o trabalho com frações. Portanto as sociedades primitivas podiam efetuar contas (adição, subtração, multiplicação e divisão) com o auxilio de contadores, dentro de certo limite, sem terem noção dos fundamentos lógicos desses procedimentos. Boyer[28] afirma que o desenvolvimento do conceito de fração passou por uma fase evolutiva, das binárias, quinárias às decimais.

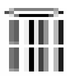
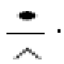
Para ordenar fatos relevantes, trarei alguns indícios das épocas Antiga, Média, Moderna e Contemporânea em relação aos números fracionários.

Na Idade Antiga, povos como egípcios, mesopotâmios, gregos e romanos já anunciavam o uso dos números fracionários em seus contextos sociais. Os egípcios, estes adotavam duas maneiras de representar os números fracionários: (a) a representação por signos especiais, tais como nas frações: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ e (b) a representação padrão das frações unitárias com um ponto colocado sobre o número **n** (numerador) para representar o que designamos por $\frac{1}{n}$.

Nos escritos hieroglíficos, quando os egípcios queriam registrar o inverso do inteiro colocavam um sinal oval sobre tal número. Havia escritas diferentes para os egípcios e para a escrita registrada no **papirus de Ahmes**. Com a utilização do Papirus a escrita passou a ser hierática substituindo o sinal oval por um ponto colocado sobre a cifra para o inteiro correspondente.

Apresento subsequentemente algumas expressões que a notação de números fracionários exprime para demonstrar a preocupação desses povos antigos em traduzir matematicamente ideias que eram usadas em seus cotidianos.

Figura 04 - Escrita egípcia de números fracionários

| Notação fracionária | Egípcia | Papirus de Ahmes |
|---|---|---|
| $\frac{1}{8}$ |  |  |
| $\frac{1}{20}$ |  |  |

Fonte: http://educar.sc.usp.br/licenciatura/trabalhos/egito.htm.

Em meados do terceiro milênio, os Babilônios e Sumérios já usavam números fracionários com base sessenta (sexagesimal) com princípio posicional, sendo que os números

[28] Idem.

menores que sessenta eram representados por um sistema de base dez, e os maiores e igual a sessenta eram regidos pelo mesmo princípio, porém com base sessenta. Esses povos foram os primeiros a utilizar a notação racional para a escrita dos números fracionários.

No sistema posicional babilônico havia os números inteiros e as frações sexagesimais análogas aos décimos, centésimos e milésimos, tal como se utiliza hoje (C.F. BOYER: 2003).

Esse princípio conforme Gundlach (1992:21) tornava o sistema babilônico ambíguo, pois o símbolo poderia ser interpretado tanto **como 1 +** $\frac{30}{60}$**, quanto 1** $\frac{1}{2}$

Este símbolo babilônico, como não era usada nenhuma separatriz poderia ser interpretado como:

**1. 60 + 30, isto é, 90; Ou** $\frac{1}{60} + \frac{30}{(60)2}$ **, isto é,** $\frac{90}{3600}$ **ou** $\frac{1}{40}$ **,** daí a necessidade de se construírem tabelas para fins de cálculos matemáticos e astronômicos. Para os demais havia mescla de sistema de base dez e outras bases, principalmente em contextos de peso, medida, datas e áreas, entre outros. Os babilônicos ao assumirem a notação racional converteram-nas em frações sexagesimais (cujo denominador é igual a uma potência de 60) e expressando-as mais ou menos como se expressam as frações de horas em minutos e segundos:

$$33m \ e \ 45s = \frac{33}{60}h + \frac{45}{3600}h.$$

Contudo, os babilônios não chegaram ao uso da "vírgula" para diferenciar os inteiros das frações sexagesimais da unidade. A expressão - **33:45 -** tanto poderia significar **33 horas 45 minutos,** quanto - **0 horas 33 minutos e 45 segundos -**, deste modo, o contexto estabelecia o entendimento desta notação.

Já os gregos, entre outros sistemas, para registrarem os números utilizavam o alfabeto demarcando no lado direito das letras um acento para diferenciar palavras e números. Esse sistema originou-se de situações práticas como declaração de propriedades, cálculos e registros de câmbios de moedas. A base utilizada pelos gregos para usar frações era a de base dez, porém quando as utilizavam para registros astronômicos optavam pela base sexagenal babilônica. Nos registros alfabéticos, exceto a notação 1/2, as demais frações eram marcadas por um traço vertical no alto e à direita para identificar o denominador.

$$\delta^{|} = \frac{1}{5} \qquad \pi\eta^{|} = \frac{1}{88} \qquad \delta^{\nu\varepsilon} = \frac{4}{55} \qquad \mu\beta^{\eta} = \frac{42}{8} \qquad \overline{\kappa\alpha\varsigma}^{|} = 21\frac{1}{6}$$

Como os egípcios, os gregos sentiam-se tentados a usar frações unitárias, com representações simples, escrevendo apenas o denominador, seguido de um acento ou sinal diacrítico. Como exemplo, 1/34 escrevia-se $\lambda\bar{\delta}'$

Esta notação poderia ser confundida com o significado da notação **30 1/4**, porém o contexto esclarecia a utilização desses símbolos (Boyer, 1974).

Na Idade Média, no século II (A.C), a China acenava para o uso de frações. O documento intitulado ***Nove capítulos sobre os procedimentos Matemáticos*** marca na China antiga o início dos registros desses números, utilizando o conceito de medida como fonte de inspiração. **Liu Hui,** no século III, reorganiza os capítulos desse documento e as frações passam a ter papel importante, sendo compreendidas como **as partes não inteiras**. Nos procedimentos de cálculos utilizando os números fracionários, os chineses denominavam (**ZIN, filhos)** para o numerador e (**UM,** a mãe) para o denominador. A relação de comparação entre a unidade e as partes é denominada de **FEN.**

Ainda na China antiga encontramos os criadores do ábaco em que era possível realizar as operações com frações para as quais se achavam o mínimo denominador comum com tendência ao uso da decimilização nas operações fracionárias o que facilitava a manipulação com esses números, (BOYER: 1974).

No século V (D.C) há indícios de documentos que tratam sobre números fracionários pelo povo hindu tendo como maior expoente Arybhata que, em seus estudos, destinou um capítulo às frações envolvendo operações de adição e subtração como resultante da redução, ou seja, da transformação de frações homogêneas.

Os indianos consideravam os números inteiros como frações, sendo que a unidade ficava no denominador. Quando queriam nomear a fração 1/1 – inteiro – usavam o termo ***rapa-bhapa.*** Outro expoente foi Brahmagupta com sua fórmula – embora com alguns equívocos – para a área do quadrilátero juntamente com as fórmulas das diagonais.

Este autor, segundo Silva (2005), conseguiu ser mais preciso que Arybhata e anunciou a divisão de números fracionários, de modo a concluir que:

> ... depois de ter invertido o denominador e o numerador do divisor, o denominador do dividendo é multiplicado pelo (novo) denominador e seu numerador pelo (novo) numerador...

Os indianos denominavam por termos específicos a notação fracionária, assim ***ansa*** significava *parte e se referia ao termo numerador;* ***cheda*** para o termo *denominador e* ***bhaga*** significava distribuir.

Os árabes, após um longo processo de tradução das contribuições científicas de outros povos, conseguiram acumular, para o século IX, valiosos conhecimentos matemáticos e de astronomia. A escrita de números fracionários era encontrada no Alcorão (Livro Sagrado dos Mulçumanos) quando os versículos tratavam de divisão de heranças. Ao se referirem a parte utilizavam a palavra ***guz***. Utilizavam frequentemente a fração 2/3 e de tipo ***1/n, para*** $2 \leq n \leq 6$ ***e*** $n = 8$. Para os árabes, fração vem do significado de divisão. De acordo com Silva (1997: 19), os judeus também demarcaram seu espaço com o estudioso Abraham Bar Hiyya (1065-1145), que escreveu duas obras de matemática, das quais, a obra intitulada ***O Livro das Superfícies e Medidas*** que traz a concepção de fração como sendo **n partes de p** com a utilização da notação alfabética. Outro autor que contribuiu com as discussões sobre números fracionários foi **Abraham-ibn-Ezra**, que em 1160 escreveu ***O Livro dos Números*** contendo um sistema de numeração posicional com nove algarismos (representando-os pelas nove primeiras letras do alfabeto hebraico) e o zero.

Na Europa, em meio a tantas conquistas e desenvolvimento científico, foi no século XIII que apareceu a notável contribuição de "***Liber Abaci***" de Fibonacci (1180-1250) retomando em transações comerciais as frações ascendentes, de certo modo abandonadas pelos árabes. Fibonacci, em seus estudos, utilizou a barra horizontal para a notação de três tipos de números fracionários, quais sejam: *comuns,* sexagesimais e unitárias, sem lançar mão das decimais.

Outro ponto importante foi a representação de número misto, pois colocava a parte fracionária antes da parte inteira. Na notação atual de $11\frac{5}{6}$, o autor escrevia: $\frac{1}{3}, \ \frac{1}{2}$ 11 usando a justaposição de inteiros e frações unitárias indicando uma adição. Segundo Boyer (1974), Fibonacci parecia julgar importante as frações unitárias, pois para decompor 98/100 recorria a seguinte notação: $\frac{1}{100}, \ \frac{1}{50}, \frac{1}{5} \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ e para 99/100, escrevia: $\frac{1}{25}, \ \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$.

Na idade Moderna, aqui compreendida como momento de *revolução social*, ou seja, momento da mudança dos modos de produção feudal para o modo de produção capitalista -

vista dos séculos XVI ao XVIII -, podemos ressaltar a grande explosão de ideias no campo da ciência. Entre muitas curiosidades, entretanto, as advindas de proposições do matemático *Robert Recorde* (1510-1558) com a publicação de seu livro "**The ground of artes",** o seu mais completo livro de aritmética, introduzindo o símbolo (=) para a igualdade.

Além desse autor, temos *Michael Stifel* (1486-1567) considerado o maior algebrista alemão do século XIV e XV. Stifel trabalhou com álgebra, números racionais e irracionais, bem como associou progressão aritmética à progressão geométrica, antecipando a invenção dos logaritmos. No entanto, as notações das frações ordinárias que encontramos atualmente nos manuais didáticos têm suas bases no sistema posicional hindu e da invenção árabe da barra horizontal

O século XVII também foi importante para o desenvolvimento[29] do pensamento matemático, entre tantos pensadores tivemos: (a) *John Napie*r que contribui com o desenvolvimento dos logaritmos e impulsionou as frações decimais, separando a parte inteira da decimal através de um ponto; (b) *Harriot e Ougther* que contribuíram para notação e codificação da álgebra; (c) Kepler que anunciou suas leis do movimento planetário; (d) *Desargues e Pascal* inaugurando um novo campo da geometria pura; (e) Descartes ao desenvolver a geometria analítica; (f) *Fermat* com os fundamentos da teoria dos números; (g) *Huygens* contribuindo para a teoria das probabilidades e, (h) *Newton e Leibniz* com suas contribuições sobre o desenvolvimento do cálculo.

Em 1602-1675 Roberval apresenta sua teoria de ordem entre razões, na qual propôs a diluição das frações no corpo dos números racionais, tornando tal obra a mais completa e coerente teoria sobre a estrutura de semi-grupo ordenado de razões de grandezas.

A matemática é considerada uma das ferramentas mais importantes para o avanço cientifico, uma vez que, tendo como grande partida o estudioso francês *Vietë*, pai da notação algébrica, bem como por *Simon Stevin* (1548-1620), físico e matemático alemão dos Países Baixos que fez a exposição mais antiga das frações decimais. Em 1582, Stevin contribuiu significativamente para a notação atual, ao escrever o número **679,567** a seguinte forma:

**679(0) 5(1) 6(2) 7(3)**

[29]. Informações retiradas do site: http://www.ifba.edu.br/dca/Corpo_Docente/MAT/EJS/SOBRE_A_HISTORIA_DOS_NUMEROS.pdf. em: 12/1272011.

Esta forma de escrita expressa compreensão pela seguinte explicação**: 679 unidades inteiras, 5 unidades decimais de primeira ordem ou décimos, 6 unidades decimais de segunda ordem ou centésimos e 7 unidades decimais de terceira ordem ou milésimos.** Em 1592, o suíço Jost Bürgi simplificou a notação fracionária ao eliminar a menção inútil da ordem das frações decimais consecutivas, colocando no alto das unidades simples o símbolo **°,** assim:

$$67\overset{\circ}{9}567$$

Ao mesmo tempo, o italiano Magini substitui esta bolinha por um ponto colocado entre o algarismo das unidades e o dos decimais. Foi assim que nasceu a notação usada até os dias atuais: 679.567. Em 1874, *Cantor* considera que o conjunto de todas as frações é um conjunto contável, ou seja, com frações também se pode utilizar a relação biunívoca como nos inteiros positivos e, portanto, expressa a mesma potência que os inteiros.

Na contemporaneidade, nesse caso a brasileira, as *revoluções* na área da matemática intensificaram-se de forma a consolidar reformas para o ensino desta disciplina. Entre muitos destaques, temos a participação de **Euclides Roxo** (1925)
que, comungando das ideias de **Félix Klien** (1849-1925), participou de movimentos pela renovação dos métodos de ensino de matemática (VALENTE: 2004). A proposta de modernização do ensino tinha por objetivo a criação de uma nova disciplina denominada matemática, na qual os ensinos isolados da aritmética, da álgebra e da geometria seriam pensados de forma conjunta (MIORIM: 1998; PITOMBEIRA, 2003; VALENTE: 2004).

Entre tantas transformações os números racionais também vão sendo alvo de redefinições, tanto que, no século passado, com o advento do movimento da Matemática Moderna, os números fracionários passaram a ser pensados de maneiras distintas em três momentos da escola brasileira – de 1900 a 1970 - desde o conceito de grandeza à conceitualização de números racionais vai tomando contornos diferenciados conforme Gomes[30] , a saber:

(a) Em primeiro momento, os números fracionários eram vistos como **números**, isto é, como resultados da medição de uma grandeza, e foram chamados preferencialmente **números**

[30] **GOMES**, Maria Laura Magalhães. Os Números Racionais em Três Momentos da História da Matemática Escolar Brasileira. Disponível em: **http://www.google.com.br/#hl=pt-BR&output=search&sclient=psy-**ab&q=fracoes+em+tres+momentos+da+historia+brasileira&oq=fracoes+. Acessado em 08/jun/2011.

**comensuráveis**. Note que essa conceituação tem caráter formal, depende de uma noção imprecisa de grandeza e se apoia fortemente na medição de comprimentos;

(b) Em segundo momento, os estudos sobre números racionais enfrentavam um enfraquecimento das ideias que ligavam a noção de fração e a medição de comprimentos; não se usava mais a denominação "números comensuráveis" e a fração é tida, sobretudo, como uma ou mais das partes iguais em que se divide a unidade, a qual não é mais representada por um segmento de reta. Observa-se, ainda, a ausência de uma definição para os números racionais;

(c) Em terceiro momento, ausenta-se a noção de grandeza. O número (racional) é apresentado como uma propriedade comum a dois conjuntos entre os quais se pode estabelecer uma correspondência biunívoca. A idéia da fração como uma ou mais partes iguais em que se divide a unidade é desvalorizada em favor de uma apresentação da fração a/b que enfatiza o par ordenado de inteiros **a** e **b**, com **b** diferente de zero. Por eleger determinadas evidencia no tratamento dos números fracionários, a predominância da linguagem é mais formal.

As definições sobre números fracionários permearam, ainda, as últimas décadas do século XX, conforme Silva (2007:50).

Assim é possível verificar um forte debate sobre a definição do que venha a ser **números fracionários** como se pode observar nas proposições dos autores apresentados a seguir:

Davis e Hersch (1985, p. 458) chamam os racionais de **fração**, quando definem o número racional como **qualquer número que seja a razão de dois inteiros: 1/1, -6/7, 21/102, 4627/1039, portanto, tais exemplos são " fração"**.

(a) Chevallard, Bosch e Gascón (2001) ao apresentarem o exemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-2}.$$

indicam que a partir da operação de racionalizar o denominador é possível chegar a uma fração.

(c) Alphonse (1995) tenta a princípio diferenciar "frações" de "números" associando a fração a um operador de fracionamento e, assim, assevera, que: .

> *A priori* as frações não são números, mas, no contexto, são operações de medidas associadas de maneira natural às grandezas fracionadas. Uma fração evoca, então, um operador de fracionamento. Esta origem subsiste igualmente no enunciado: $\frac{3}{4}$
>
> não se lê "três sobre quatro", mas, "três quartos". Para Euclides também as razões de grandezas não são números. Aliás, uma escrita antigamente corrente, **a:b; c:d** que significa a está para **b** assim como **c** está para **d,** leva a não considerar as razões de grandezas como números..

Outra ideia apresentada por Alphonse é a possibilidade da fusão de fração e razão explicitar as seguintes relações:

> ... temos igualmente uma aparição de frações em um contexto aritmético como: a fração é um elemento do resultado de uma divisão que não termina. Quando as "**frações"** adquirem o estatuto de número, com a escrita a/b, algumas propriedades serão introduzidas. Obtém-se igualmente uma articulação entre a notação e a concepção de um lado e de outro, as operações, em conseqüência um tipo de fusão entre fração e razão que se opera. Por outro lado, a noção de número racional feita historicamente muito tardia toma, também, a designação canônica a/b.

(d) D'Áugustine (1976) associa os "números fracionários" à distribuição de grandezas discretas e contínuas diferenciando "número fracionário" de "fração" da seguinte forma:

> Define-se número fracionário como o quociente de dois números naturais, de modo que o divisor seja diferente de zero, isto é, um número fracionário é qualquer número que pode ter o nome a/b onde a e b são números naturais e b ≠ 0. Uma fração pode ser definida como o símbolo ou o nome para o número fracionário e pode ter a forma a/b, onde a e b designam números naturais. É importante saber que uma fração designa um número fracionário, bem como é também importante saber quando duas frações designam o mesmo **número fracionário.**

Este autor também faz referência à porcentagem como ente comercial dizendo o seguinte:

> A notação de percentagem é muito usada em nossa sociedade. Como ela é muito útil para reduzir os dados estatísticos a uma forma mais fácil de ser entendida e para comunicar as relações da aplicação comercial do número, será importante desenvolver não apenas o significado matemático de percentagem (percentagem é outra notação usada para representar **números fracionários**), mas também a sua função de comparação.

(e) Niven (1984:30) afirma que nem o conjunto dos naturais nem o dos inteiros é **fechado em relação à divisão, porque a divisão de inteiros pode produzir frações como** $\frac{4}{3}, \frac{7}{6}, -\frac{2}{5}$, **etc.**" e acrescenta que **"o conjunto de todas as frações como estas é o conjunto**

**dos racionais.** Isto porque define: **um número racional (ou uma fração ordinária) é um número que pode ser colocado na forma a/d, onde a e d são inteiros e d não é zero**.

Para este autor, quando a palavra **fração** aparece escrita, nos manuais, sem relacionar de forma direta com os termos "números racionais ou fração ordinária", esta é pensada no sentido de designar qualquer expressão algébrica com um numerador e um denominador a exemplo,

$$\sqrt{3}/2 \,,\; 17/x \;\; ou \;\; \frac{x^2-y^2}{x^2-y^2}$$

Podemos indagar porquê de se adicionar palavras – ordinárias – ou (re)nomear o termo fração – números racionais – nos discursos pedagógicos. A questão, ao que parece, está para além de uso de sinônimos, posto que, mesmo de maneira incipiente, há todo um contexto que deveria ser discutido no campo da álgebra. Isto porque temos que tratar termos como **anel, corpo, integridade** e, outras expressões, que indicam o lugar, o status dos termos usados na representação **a/b**, com **b** diferente de zero na teia conceitual que os mesmos remetem.

Nivem (1984), ao assentar suas preocupações na natureza endógena do conceito de **fração,** chama atenção para algumas denominações que aparentemente parecem estar presas à representação simbólica. Ao discorrer sobre a definição de **números racionais** (**a/b**), ressalta preocupações em relação ao registro escrito, pois este objeto matemático assume diferentes modos de representação. Essa nuance pode levar o sujeito aprendente fazer certa confusão entre objeto e significado. Nesse sentido, lança o seguinte exemplo: $\frac{2}{3}$ que pode ser escrito nas seguintes notações: 4/6, 6/9, ou $2\sqrt{3}/3\sqrt{3}$ ou $\frac{-10}{-10}$, entre outros exemplos que se pudesse lançar mão.

Nivem (1984: p.32), observa que as palavras **fração, números fracionários, números racionais** são usados como sinônimos acrescentando o seguinte:

> Uma fração definida de tal modo que, se multiplicarmos seu numerador e denominador por uma mesma quantidade, a nova fração representará o mesmo número, assim só de olhar para uma expressão, nem sempre podemos dizer se ela representa ou não um número racional.

Considere, por exemplo, os números $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ e $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$

> nenhum dos quais está na forma $\frac{a}{d}$ com **a** e **d** inteiros. Podemos, porém, efetuar certas manipulações aritméticas com a primeiro expressão e obter 2 e portanto é racional. O que não acontece com a notação
>
> $$\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$$
>
> que representa $\sqrt{5}$.

Outros autores se lançam a discutir essa problemática, tais como, Ciscar e Garcia (1998) afirmando que:

> A ideia de fração está apoiada em situações em que está implícita a relação parte-todo. Esta relação é uma das possíveis interpretações da fração. Mas por outro lado, também podemos representar, mediante uma fração, situações em que está implícita uma relação parte-parte (ou todo-todo), que nos levam a interpretação da fração, como razão. Ainda existem outras interpretações das frações: operador, quociente de dois números, etc. O constructo teórico que sintetiza todas elas é o número racional. Há, portanto, um grande caminho a percorrer entre as primeiras idéias intuitivas de “metades” e “terços” até a consideração das frações como elementos integrantes de uma estrutura algébrica.

A partir das citações, podemos asseverar que o conceito de **números fracionários** demanda a compreensão de conceitos formais bem refinados, tal como o conceito de **corpo**, como já referido anteriormente.

Resguardando as séries iniciais em termos de um alto teor de complexidade sobre os números fracionários, mesmo assim, não se pode negar nessas vivências a complexidade que vem a ser manipular com operações de frações, posto que, as séries subsequentes transitam no arcabouço teórico dos números racionais trazendo pressupostos teóricos algébricos.

Entre tais pressupostos, axiomas como **corpo** passam ser trabalhados no ensino e, com isso, termos tais como a **associatividade, comutatividade**, a existência de **elementos simétricos**, dentre outros, que formam a estrutura que garante o conceito **números fracionários** as propriedades para possibilitar operar algebricamente com as operações (+ e .). Além disso, se considerarmos que o conjunto **números fracionários** não é vazio, mas possui um conjunto de operações, então, sua estrutura pode ser considerada como (F, +, .), onde F vem a ser números fracionários.

Satisfazendo o exposto e os axiomas de **corpo**, isto é, suas propriedades no campo da adição e da multiplicação, é possível dizer que as citações referendadas expressam que números fracionários são uma estrutura algébrica. Levando em consideração essas suaves premissas e considerando que os conjuntos dos números **Q** (relativos) são **corpos**, podemos, então, falar de **fração em relação aos números racionais.**

Como forma de traçar orientações para a Educação Básica a partir de 1997, com a criação dos PCN`S (Parâmetros Curriculares nacionais), o ensino dos números racionais – formas decimais e fracionárias - é introduzido desde a segunda série/segundo ano do ensino fundamental (1º e 2º ciclos) por meio de resolução de problemas, para ampliar o campo numérico dos estudantes, ao mesmo tempo em que, objetiva possibilitar aos alunos reconhecer que os números naturais são insuficientes para resolver determinados problemas. A recomendação é atinente ao trabalho com **números racionais** a partir da ideia de *divisão entre dois números inteiros excluindo-se o caso em que o divisor é zero,* envolvendo os significados*:* Parte-todo, Quociente e Razão. Em relação aos 3º e 4º ciclos o documento oficial reforça as orientações existentes e acrescenta outras interpretações que devem ser trabalhadas envolvendo os números fracionários, tais como as que se seguem:

- O número racional usado como índice comparativo entre duas unidades, reforçando a ideia já explicitada anteriormente para o segundo ciclo;
- O número racional envolvendo probabilidades: a chance de sortear 1 bola verde de uma caixa, em que há 2 bolas verdes e 8 bolas de outras cores é de 2/10;

- O número racional explorado em contextos de porcentagem como, por exemplo: 70 em cada 100 alunos de uma Escola gostam de futebol 70/100, 0,70, 70%, ou ainda 7/10, 0,7.

As orientações dos PCN (BRASI: 1997) corroboram as discussões existentes na literatura sobre os significados de números fracionários ao indicar a necessidade e a importância de se trabalhar um conjunto de situações sobre esse objeto sem tratar isoladamente cada uma dessas interpretações. Isto quer dizer que, solidificação desses significados pelos estudantes necessitará de um trabalho sistemático ao longo do ensino fundamental que possibilite análise e comparação de variadas situações-problema.

Nesse sobrevôo é possível retomar as discussões iniciais desta seção, quando busco pensar matemática como conhecimento-cultura que, mediadas pelas forças do contexto/entorno e do desenvolvimento do pensamento abstrato - a racionalidade cientifica - vão tomando formas, discursos, modos de vida, de produção de si que não cessam e, nesses termos, da racionalidade mítica à científica o grau de refinamento conceitual é indiscutível.

Desde a necessidade de medições de terreno de terra à sofisticação do campo conceitual dos números fracionários, muitos debates foram feitos. É notório que tenho usado constantemente a expressão **números fracionários** após ter percebido a complexidade teórica que emerge quando se pretende definir o conceito, posto que, não se trata de uso de predicativos para dizer das coisas, mas de traçar minimamente algumas opções.

Em função da literatura consultada, foi evidenciada, desde o capítulo anterior, a forte influencia dos estudos da pesquisadora Terezinha Nunes nos estudos nacionais, uma vez que desde 1997, juntamente com seus colaboradores, vêm advertindo sobre essa complexidade. Nesses termos, esclarecem que usarão *a expressão "números racionais" de uma forma mais geral e "frações" apenas quando se referirem a problemas parte-todo*, (NUNES e BRYANT, 1997: 193). Sem adentrar no debate, retomo as discussões de Nivem (1984) para enfatizar o cuidado que se deve ter nesse campo numérico, qual seja: a diferença entre o objeto e sua representação.

Mediante o exposto e, juntamente com Silva (2007:56), acolho a expressão **números fracionários** em vez de **fração** para estabelecer diferenças entre o objeto matemático e suas representações. Nesses termos, tratarei *por números fracionários todo elemento do conjunto dos reais ou do conjunto dos polinômios que pode ser representado por uma classe de frações.*

Mesmo com essa indicação é preciso salientar que o termo **fração** aparecerá neste estudo, quer em virtude da força que a linguagem possa ter, quer porque me reporto ao uso desse termo na concepção dos autores referendados e que se referem à **fração** como **números fracionários**.

Na sequência, trago as ideias de Nunes et al (2003) sobre os significados de números fracionários que justamente formatam o instrumento diagnóstico.

### 3.4. Os Cinco Significados

- **Números Fracionários como relação PARTE-TODO**

A ideia presente nesse significado é a da partição de um todo em partes iguais, em que cada parte pode ser representada como ***n/1***. Assim, o significado parte-todo em algumas situações envolverá contexto em que um dado todo é dividido em partes iguais, nas quais a utilização de um procedimento de dupla contagem é suficiente para se chegar a uma representação correta. Porém, é preciso advertir sobre o alargamento desta situação neste estudo para situações maiores que o inteiro.

- **Números Fracionários como QUOCIENTE**

Este significado está presente nas situações em que a divisão surge como uma estratégia bem adaptada para resolver um determinado problema**.** Isso significa que, conhecido o número do grupo a ser formado, o quociente representa o tamanho de cada grupo. Nas situações de quociente temos duas variáveis, por exemplo: chocolate e criança. Na situação de quociente, a fração corresponde à divisão - três chocolates para quatro crianças - e, também, o resultado da divisão - cada criança receberá 3/4.

- **Números Fracionários como OPERADOR MULTIPLICATIVO**

Este significado está associado ao papel de transformação, isto é, representação de uma ação que se deva imprimir sobre um número ou uma quantidade, transformando seu valor nesse processo. Conceber a fração como operador multiplicativo é admitir que a **fração a/***b*, funciona em quantidades contínuas, como uma máquina que reduz ou amplia essa quantidade no processo. Ao passo que, em quantidades discretas, sua aplicação atua como um multiplicador divisor.

- **Números Fracionários como uma MEDIDA**

Assumiremos a fração com o significado de medida em situações de quantidades intensivas e extensivas. Algumas medidas envolvem frações por se referirem às quantidades, intensivas, nas quais a quantidade é medida pela relação entre duas variáveis. Por exemplo, a probabilidade de um evento é a medida pelo quociente do número de casos favoráveis, dividido pelo número de casos possíveis. Portanto, a probabilidade de um evento varia de zero a um, e a maioria dos valores com os quais trabalhamos é fracionária.

- **Números Fracionários como NÚMEROS**

Frações, como números inteiros, **são números que não precisam necessariamente referir-se a quantidades específicas.** Existem duas formas de representação fracionária: ordinária, ou seja, **p/q**, e decimal. Ao admitir a fração com o significado de número, não é necessário fazer referência a uma situação ou a um conjunto de situações para nos remeter a essa ideia.

Todo esse movimento traçado pela matemática é capaz de indicar que os modelos explicativos sobre números fracionários explicitam aspectos culturais inerentes, não só porque aprender está ligado a contextos culturais, mas também porque é possível dizer que, ao mesmo tempo em que a cultura gera a aprendizagem, esta por sua vez, está no epicentro da formação histórica da cultura de determinado grupo.

Se por um lado, a racionalidade científica se mostra evidente em relação à racionalidade mítica, em razão deste estudo visualizar questões atinentes a primeira, por outro, não podemos negar a influência das ideias iniciais no campo dos números fracionários. Dos contextos de medida, peso entre outros, à racionalidade mítica algo se pode referendar: a sensação de que tais racionalidades são fundamentais para a conquista do refinamento do conceito de números fracionários.

### 3.5. Ensejando compreensão

Os recortes realizados expressam a intenção de apresentar duas formas distintas de racionalidade, cada uma implicando propriedades peculiares de explicarem seus modelos sobre o conhecimento matemático na tentativa de indicar que os saberes/conhecimentos escolares possuem uma matriz.

Nesse sentido, Morin (2008: 169) assevera que parece haver uma prática que exerce as disjunções entre uma cultura *subcompreensiva (cientifico-técnica) e uma cultura subexplicativa (humanista)*, que separa tanto compreensão, quanto explicação; tanto o universo subjetivo, quanto objetivo presentes na produção do conhecimento humano, em especial do conhecimento matemático.

Cultura, conhecimento e aprendizagem não são variáveis independentes, pois é no enfrentamento das resoluções de problemas, e neste caso, a aprendizagem de números fracionários, que se firmam as maneiras de sentir, pensar e agir sobre o problema estabelecido, ou seja, sobre a relação entre cultura, conhecimento e aprendizagem no contexto escolar que acabam por consolidar certas formas de tratar os objetos conceituais de aprendizagem.

Entrelaçar cultura e conhecimento é solicitar à cultura escolar que não feche o conhecimento em suas referências sob pena de tratá-lo em um contexto fechado e dogmático. Por mais que o conhecimento tenha tido suas reelaborações conceituais refinando sua linguagem e tornando seus códigos universais, os modelos explicativos apresentam abertura para as ações criativas dos povos que, por vezes, nem sempre são acompanhadas das explicações de validação ou de verificação das exigências lógico-empíricas.

O desenvolvimento do conceito dos números fracionários apresenta os caminhos pelos quais seus pensadores encontraram explicações para justificar o que compreendiam desse objeto. A este respeito, os estudos de Fibonacci, citado por Boyer (1974), é um exemplo, pois na época usava a escrita dos números mistos de forma diferenciada da atual. Este autor ao escrever **números mistos** coloca a parte fracionária antes da parte inteira, isso me permite conjecturar que tal escolha demonstra as possíveis determinações sócio-culturais inerentes à produção do conhecimento.

Em sentido análogo, posso dizer que, no grupo de professores pesquisado, essas determinações passam a estar presentes na forma como estes assumem o conceito de números fracionários, uma vez que imersos em uma **cultura escolar** suas aprendizagens tendem a trazer as aprendizagens desse entorno.

Após lidar com elementos da historicidade do conceito de **números fracionários,** para o capítulo subsequente, penso tratar componentes sócio-cognitivos para pensar números fracionários. Nesse intuito, trago ao debate recortes que julgo importantes, entre os quais, questões atinentes à escola, tais como: **cultura escolar e dimensões cognitivas**. Isto porque, a escola além de ser um espaço para a formação de sujeitos críticos, também é um espaço em que a organização conceitual prescinde de teorização sobre essa mesma organização de forma a torná-la significativa.

Neste breve panorama podemos vislumbrar a presença da inventividade como aspectos constituintes do saber matemático que a partir de noções aqui chamadas de intuitivas vão ganhando dimensões conceituais que possibilitam a Matemática desenvolver seus argumentos e conquistar novos parâmetros axiológicos. Esta inventividade inerente ao homem não pode ser perdida na escola quando se deseja negociar os objetos de aprendizagem na educação básica. A Matemática como um saber constantemente interpolado pela inventividade exige padrões de ensino que façam da didática uma constante busca pela formação do cidadão crítico.

Para isso, é preciso que o professor esteja atento aos paradigmas formativos que sustentam sua prática no sentido de se apoiar no saber culturalmente elaborado e a partir do jogo existente no interior do exercício da docência propor um currículo em que a Matemática seja pensada e objetivada como aspectos socioculturais, valorizando os processos interativos da aula e as relações epistemológicas presentes nos tópicos de ensino.

# CAPÍTULO 4
# CULTURA ESCOLAR E COMPONENTES SÓCIO-COGNITIVOS NA SOCIALIZAÇÃO DOS SIGNIFICADOS DOS NÚMEROS FRACIONÁRIOS

A escola como organização social complexa própria sofre influências de fatores externos e internos que permeiam seu espaço construindo, assim, o que podemos chamar de ***cultura escolar.***

A cultura aparece como contexto simbólico que circunda, de maneira permanente e de forma relativamente perceptível, o crescimento e o desenvolvimento dos indivíduos e dos grupos humanos, de forma tal *que, só é entendida num contexto de significações, que por sua vez, envolve jogos de interesse,* (PERÉZ-GOMES: 13 -15). Este contexto simbólico – representado pela  escola - apresenta ferramentas conceituais das quais a pertinência, a permanência, a utilidade, os valores institucionais, culturais e sociais dessas são postos em jogo, seja pela criticidade desempenhada pelos seus atores, seja de forma velada pelo uso ou não dessas ferramentas no contexto da aula,  de forma singular, pela ênfase em algum conteúdo.

A expressão **cultura escolar** está sendo assumida como experiência coletiva da atividade humana que seleciona do entorno social e do patrimônio intelectual apenas um *espectro estreito de saberes, contingências, de forma de expressão de símbolos socialmente mobilizados,* (FORQUIM: 1993, 16), e supostamente vivido na realidade social.

Geralmente as ações educativas desenvolvidas na escola passam a ser objetos claros ou não, segundo os interesses que corporificam a prática pedagógica na estreita relação professor-aluno. Assim sendo, para este momento apresento, de forma sucinta, algumas contribuições para se pensar o objeto em destaque - **números fracionários** – em outros entornos. Na configuração de **entornos escolares,** vale pontar o seguinte:

✓ *(1) a escola como espaço de cultura própria,* em cujo, espaço há um entrecruzamento de ideias que, de certa forma, incidem na divulgação dos conteúdos conceituais, tais como*: (1.a)* Valores *como interface cultural que fundamentam o conhecimento escola; (1.b) Estilização como modo de pensar os objetos de aprendizagem* para referendar que conhecimento filia-se a uma comunidade de pensamento e que, portanto, não é neutro. Ressalto que sua organização e investigação baseiam-se em estilos de pensar que fortalecem e constituem ver formativo de um determinado conhecimento;

✓ (2) *Elementos das teorias de aprendizagem e suas consequências para a formação de professores trazendo contribuições de ideias entre as quais: Teoria dos Campos Conceituais, Aprendizagem Significativa e Mapas Conceituais,* com o propósito *de* elucidar questões pertinentes a aspectos da psicologia cognitiva que, embora pareçam restritos à cognição, ao cogito, assevero que assunção deste ou daquele modelo de organizar e pensar objetos conceituais são frutos também de uma comunidade social que expressa os saberes historicamente acumulados.

- **A Escola como lugar de cultura ou legitimidade própria**

Quando Hall (1997) indica cultura como compreensão dos modelos teóricos do mundo, posso assumir a escola como este espaço onde se explicitam alguns modelos de interpretação de *conhecimento*. Esta explicitação por vezes pode não ser concebida como uma maneira de conhecer, como fenômeno explicativo das ocorrências do mundo, mas como código restrito resumindo *progressivamente seu conteúdo a simples ações* (BISHOP, 2000:194).

A palavra ***cultura*** pode tomar acento designador de um lugar, definido por concepções, mitos, crenças, normas, ritos que marcam a experiência pedagógica e institui em seu cotidiano um modo de pensar e ver a realidade. Trata-se, então, da escola como organização cultural que, como tal, traz características que a tornam particular e a distinguem de outro tipo de organização.

Em termos de organização cultural, autores como Rebelo, Gomes e Cardoso, (2001), bem como Pérez-Goméz (2001), a classificam com as seguintes expressões: Cultura Social, Cultura Institucional, Cultura Experiencial, Cultura Acadêmica. Obviamente, a escola pode conviver com interfaces dessas denominações, mas o interesse é ver a escola em termos de Cultura Institucional, definida como um tipo de organização em que as tradições, os costumes, as rotinas, os rituais reforçam ou transgridem valores. Por isso, a assunção de que a escola é um espaço de **cultura própria**, ou no dizer de Forquin (1993: 168) é um local que agrega um conjunto de saberes com propriedades tais como as seguintes:

> ...uma vez organizado, didatizado, compõe a base de conhecimentos sobre a qual trabalham professores e alunos. E nessa ideia está pressuposta uma seleção prévia de elementos da cultura humana, científica ou popular, erudita ou de massas.

Sem dúvida, é possível aceitar o peso do destaque acima, mas é possível pensar se essa base de conhecimento analisada no pressuposto sociológico adquire os mesmos aspectos valorativos e de importância na seleção e organização dos conhecimentos científicos a serem socializados no contexto escolar? Evita-se responder negativamente, pois há certa tensão que resulta da consideração de que toda e qualquer forma de organização pedagógica constitui-se em ato político e como tal seleciona e justifica suas escolhas em detrimento a determinado fim.

Como cultura institucional que estabelece suas normas para assegurar um percurso que vise conferir ao educando competências para se relacionar com o mundo, a escola também pode ser pensada a partir de outro pressuposto.

Pérez-Gomez, já citado, chama atenção para algumas práticas que pensam a escola como *organização instrumental* onde a neutralidade e a objetividade acenam para a crença de uma cultura única na qual a fragmentação de informações possa estabelecer uma visão homogênea dos processos de produção do conhecimento. Mas o que de fato oficializa uma cultura legitimada no interior da escola?

Nos moldes de Chervel (1990), a escola oferece uma cultura para seu entorno através de duas faces: os programas oficiais que definem seus objetos e que a escola busca persegui-los, posto que, os resultados efetivamente produzidos em seu âmbito, em sua concretude tornam-na local de cultura de *difusão, mas e fundamentalmente de criação de sua própria cultura.* Nesse pressuposto, a escola não cumpre somente as definições macro estabelecidas pelos órgãos oficiais, ela cria uma maneira própria de estabelecer os processos pedagógicos, a linguagem, os discursos, a gestão e as tomadas de decisões.

É neste contexto que as disciplinas tomam corpo e, de modo singular, posso dizer que a matemática escolar se constitui a partir das orientações *curriculares, mas também da lógica estabelecida pela prática escolar,* conforme afirmam Moreira e David (2005).

Essas orientações ou elementos estruturais do fazer pedagógico são referidos por Forquim (1993: 167) como o *mundo social* escolar que captura seu imaginário, ritos, valores, modos de transgressão e aceitação *de seu regime próprio de produção e gestão de símbolos.* O autor ainda argumenta que a educação *não transmite a cultura ou as culturas, a não ser algo destas* (1993:15), o que reforça a compreensão aqui assumida de escola como local próprio de cultura.

Se este mundo social lida com transgressões e aceitações, seja de ordem ideológica, imaginária ou conceitual então é viável assumir juntamente como Pérez-Gómez que este mundo social é um local de *cruzamento de culturas,* eu diria mais, não somente de cruzamento, mas de tensão uma vez que as tomadas de decisões no âmbito da vida escolar passam por tensões de forças dominantes em cada momento histórico.

Por perceber este entrecruzamento cultural no espaço escolar Pérez-Gómez (1997) passa a denominá-la como um espaço ***ecológico*** trazendo uma carga sintática à organização, divulgação e reorientação dos conhecimentos escolares, com fins de transcendências dos conteúdos disciplinares. De forma mais incisiva, escola como espaço ecológico, diz da possibilidade de assumi-la como *espaço de vivência e recriação da cultura, utilizando a cultura crítica para provocar a reconstrução pessoal da cultura experiencial,* (PÉREZ-GÓMEZ, 1993: 273).

A partir desse entendimento, é possível, em âmbito teórico, tratar nesse mundo social duas compreensões sobre o conhecimento, uma à luz de Bishop (2005) e outra à luz de Fleck. (1986). O primeiro por tratar das discussões em relação à matemática em termos sociológicos que, por sua vez, podem ser estendidas à compreensão de Fleck, como já citado – com sua abordagem de Coletivo de Pensamento - sobre o conhecimento justamente porque uma comunidade de pensamento não vincula outra coisa que não valores. Portanto, ambos os autores de forma singular, podem nos possibilitar compreender a matemática como um campo de conhecimento que na cultura escolar é revestida de uma cultura que a define.

## 4.1. Valores como interface cultural que fundamentam o conhecimento escolar

A cultura escolar não é abstrata, é real porque se dá nas relações do indivíduo com o seu entorno tornando-se espaço de comunicação humana, estabelecendo e cultivando valores que orientam os fins educativos a serem alcançados. É na vivência da escola como espaço de cultura que há a possibilidade de reprodução ou de transformação das experiências dos conteúdos desta mesma cultura. Em meio a processos de mudanças ou não, as experiências vividas na e pela cultura escolar estão imbuídas de valores que definem a organização estrutural e pedagógica como forma de captar determinados códigos simbólicos estabelecidos pelos indivíduos pertencentes à escola.

Para Bishop[31], na Educação Matemática os valores são qualidades, critérios positivos para a promoção do ensino e são componentes cruciais no ambiente de sala de aula, embora, muitas vezes, os professores possam acreditar que não estão ***ensinando valores***.

[31] Bishop, In: Research, Policy and Practice: the case of values. Disponivel em: http//: www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/recordDetail?.

Em termos dos códigos existentes no contexto escolar, a Matemática toma assento como disciplina que merece destaque como pode ser conferido nos estudos de Gomes (2005: 48), ao investigar *valores da cultura matemática nas vozes de pensadores franceses do século das luzes e* conclui que, nos escritos desses pensadores, esta disciplina é vista como valor de primazia que a torna uma das mais importantes disciplinas no contexto escolar.

Considerando-a como produção cultural, Bishop (1988, baseado em White), indica um agrupamento de elementos para tratar de questões de valores em relação ao seu ensino. Assim, elege categorias tais como (a) caráter ideológico; (b) caráter sentimental e (c) caráter sociológico que orientam a matemática, em especial a matemática ocidental porque, segundo o autor, há outros elementos que poderão nortear certos fazeres matemáticos de distintos grupos culturais. Assim, propõe três pares complementares de valores associados à educação matemática: (1) *racionalismo e objetismo* ligados a categoria ideológica; *(2) controle e progresso* ligados a categoria sentimental *e (3) abertura e mistério* ligados a categoria sociológica.

Todos esses valores se fazem presentes no contexto do ensino. Todavia, os valores **ideológicos** são os mais enraizados e cultivados na cultura matemática. O valor ideológico é muitas vezes denominado de *racionalismo* e *considerado o coração da matemática.* Logo há ênfases em aspectos das relações lógicas em que o vocabulário racional é bem elaborado, enfatizando o pensamento dedutivo. Já o objetismo, valor complementar do racionalismo, caracteriza-se como uma visão de mundo dominada por imagens de objetos materiais que, segundo Bishop, já referido, caracteriza a comunidade matemática fortemente influenciada pela escola pitagórica.

Em relação aos valores **sentimentais,** o controle refere-se à segurança e ao controle oferecidos pelo poder constituinte da cultura matemática como forma de compreender a realidade, isto é, de compreender o fenômeno natural e social. Porém, nesta categoria, a previsibilidade e a estabilidade são elementos concernentes à matemática; e progresso diz respeito à possibilidade de avanço em termos de sua natureza conceitual, conferindo um caráter dinâmico à cultura matemática para possibilitar criar alternativas conceituais em relação a determinados objetos que até então pareciam não admitir explicações.

Os valores **sociológicos,** *abertura e mistério*, estão menos ligados à matemática como corpus de conhecimento em si e ligado a ideia sobre o conhecimento matemático que as pessoas expressam no interior das instituições. A expressão ***abertura*** significa admitir valores concernentes às *verdades*, as idéias, e as proposições matemáticas, que estão submetidas à indagação de todas as pessoas; ***mistério*** implica as ideias, as proposições matemáticas estão ligadas a uma comunidade que produz tais idéias, deste modo os conceitos matemáticos estão em âmbito mais abstrato possível. Os valores por mim tratados estão imbricados às ações que os professores assumem diante do saber matemático que exerce influência sobre as experiências de aprendizagens dos educandos.

## 4.2. Estilização de Pensamento e circulação de ideias

Pensar em qualquer objeto de aprendizagem matemática, em especial dos números fracionários, é pensar na culturalidade de seus modelos explicativos. Tais modelos assumem padrões e significados compartilhados em âmbito acadêmico/escolar transfigurando-se em artefatos conceituais, socializados em meio a dinâmica da cultura institucional. Esses artefatos podem ser estilizados a partir de uma maneira de pensar sua organização de acordo com determinada visão de grupo(s), de especialista(s) ou de Estilo de Pensamento dos sujeitos envolvidos no debate.

Nessa perspectiva, trago as contribuições de Fleck[32], que servirão também de lentes para as análises. Esse referencial tem sido utilizado em pesquisas acadêmicas, a exemplo as de Cutolo (2001) e Cutolo e Aleveti (2011).

- **Elementos norteadores da epistemologia de Fleck**

Para Fleck (1986) compreender a teoria do conhecimento como produção individualista é uma ilusão e expressa uma visão inadequada do conhecimento científico, pois é preciso levar em conta as convicções empíricas, as estruturas sociológicas e as certezas que unem os cientistas. Assim, este autor cunha os conceitos de **Coletivo de Pensamento e Estilo de Pensamento.** O primeiro refere-se à unidade social de uma comunidade cientifica de um determinado campo do saber; o segundo refere-se aos acordos, às proposições, quer dizer, é o estilo que o Coletivo constrói de seu aporte teórico. Desta forma, *o saber não é jamais possível em si mesmo, mas somente sob certas condições de pré-suposições sobre o objeto* (FLECK: 1986 p.23).

[32] Ludwink Fleck, médico e epistemólogo polonês fez pesquisas em microbiologia e bioquímica. Em 1935 publicou sua obra Entstehung und Entwicklungeiner wissenschaftlichen Tatsache (A Gênese e o Desenvolvimento de um Fato Científico). Realizou um estudo de caso sobre o desenvolvimento do conceito de sífilis e da história da reação de Wassrmann, o que possibilitou desenvolver argumentos para sua base epistemológica. Fleck foi pioneiro na abordagem sociológica e interacionista de analisar a ciência.

Um Estilo de Pensamento envolve três fases: (a) instauração do estilo; (b) extensão do estilo; (c) transformação do estilo, chamada de Classicismo. Porém, é na extensão do saber que pode culminar o aparecimento de um *contra-saber* e, assim, o Estilo de Pensamento passa para o período denominado de Compilação o que contribui para que ocorra a transformação e a mudança de um Estilo de Pensamento.

O Coletivo de Pensamento ou o Portador do Estilo de Pensamento olha para o fenômeno de forma sistemática, e seus participantes comungam crenças e valores, uma espécie de *coerção de pensamento*, em que o consenso científico gera uma maneira de resistência ao ver arbitrário (1986:24). O Coletivo de Pensamento para validar seu Estilo de Pensamento tende a utilizar determinado método de investigação e, por consequência, a interpretação dos fatos ocorre de uma maneira dirigida que impede outras formas de perceber os fatos (PFUETZENREITER: 2003:114).

A este tipo de validação Fleck denomina de *harmonia das ilusões*, pois as pesquisas tendem a estar coadunadas com o Estilo de Pensamento no qual o indivíduo se insere. O conhecimento e práticas estilizadas, compartilhadas no exercício da observação, da experimentação, das orientações das práticas investigativas demarcam o Estilo de Pensamento, imprimindo aos cientistas o método e o estilo para as soluções dos problemas que desejam alcançar. O Estilo de Pensamento (EP) consiste numa determinada atitude e num tipo de atividade que o identifique, portanto pode ser definido como *um perceber dirigido com a correspondente elaboração intelectiva e objetiva do percebido. FLECK: 1986. p,111).*

Uma comunidade científica não é formada apenas por uma corrente teórica e nem um cientista fica limitado a participar de apenas um grupo. A comunicação é algo que o sujeito estabelece vinculando-se a mais de um grupo.

A estruturação do coletivo de pensamento, no interior de uma comunidade científica é denominada de Circulação Comunicativa dos círculos Esotéricos e Exotéricos responsáveis pela manutenção ou não de um EP. O **Círculo Esotérico** é compreendido pelos especialistas de um campo dentro da generalidade científica, o saber especializado (SCHÄFER & SCHNELLE, 1986). Esse grupo caracteriza o Coletivo de Pensamento e institui seu estilo de pensar.

A partir da produção científica e da socialização de práticas efetivadas forma-se o **Círculo Exotérico**, referente aos leigos que participam do saber científico e que formam opinião pública interferindo no saber especializado. A relação entre os dois círculos ocorre pela relação **intercoletiva** responsável pela disseminação das ideias, e a comunicação entre os membros do Coletivo de Pensamento é chamada de **intracoletiva.** Essa comunicação é o canal disseminador dos valores adotados pelo Coletivo de Pensamento. Todo círculo esotérico estabelece relação com o exotérico e quanto maior a distância entre os membros desses círculos, mais tempo perdurará a transmissão de um pensamento dentro do mesmo Coletivo de Pensamento e, por conseguinte, mais certo parece ser o Estilo adotado.

Desta forma, quanto mais especializada, quanto mais restringida for uma Comunidade de Pensamento, mais forte é o vínculo de pensamento entre os membros. No processo de comunicação entre os Coletivos de Pensamento, as ideias, valores, concepções e palavras têm significados singulares, pois estão impregnadas pelo tom estilístico que podem sofrer alterações quando disponibilizadas a outros Coletivos por levar em conta o jogo existente no interior dessas comunicações.

As duas abordagens tratadas acima são tomadas como sistemas de pensamento que destacam maneiras de olharmos as realizações humanas. Por isso, vejo necessidade de perceber essa cultura dita escolar por vieses, também, dos processos de pensamento em âmbito da cognição que diz respeito a aprendizagem. Neste caso, a aprendizagem docente que será tomada como ressonância de variáveis sócio-cognitivas, mas que nem por isso perde sua característica problematizadora em termos individuais como forma de balizar e discutir os modos de estruturação e divulgação dos saberes escolares.

Nesses termos, vale considerar indícios de algumas contribuições teóricas do ponto de vista das teorias da aprendizagem incluindo: a teoria da Aprendizagem Significativa, a Teoria dos Campos Conceituais e Mapas Conceituais. Tais pretensões se justificam porque, na contemporaneidade, os processos de ensinar e aprender não podem mais conviver com o dualismo ou fragmentação estabelecida entre o social, o epistemológico, cultural e o psicológico na relação com um determinado fenômeno.

### 4.3. Elementos das teorias da aprendizagem significativa/conceitual como subsídios para o ensino

O fazer docente propicia à emersão de aspectos de ordens diversas em função disso, busco explicitar que, para além dos aspectos endógenos, as práticas docentes sofrem influências de aspectos sócio-cognitivos. Desde as contribuições de Fleck e Bishop, já explicitados, trago para reflexão a cultura escolar que, certamente, influencia a cultura docente. Tal cultura materializa maneiras de ensinar, entre as quais, destaco a Teoria de

Aprendizagem de Ausubel, que tem recebido contribuições de autores como Gardner[33] (1993) e Moreira[34] (2000), além de trazer contribuições da Teoria da Conceitualização de Vergnaud (1990) e dos Mapas Conceituais (1972).

- **Teoria dos Campos Conceituais**

Autores como Ruiz-Primo, Schultz, Li e Shavelson (2001) analisam a aprendizagem a partir da compreensão das estruturas de conhecimento, fornecendo à literatura denominações de tipo ou níveis de conhecimentos. A partir do desenvolvimento de seus estudos, estes autores começaram a identificar que nas pesquisas sobre aprendizagem havia preocupação de analisar aprendizagem com ênfase nos métodos de avaliação estabelecidos para cada tipo de conhecimento.

Desta forma, asseveram que as orientações sobre os tipos de conhecimentos configuram tendência de pesquisa e assim, as investigações observavam mais os procedimentos de ensino que os elementos interativos da aprendizagem.

Entre esses elementos interativos ressalto a conceitualização do conhecimento, princípio que guia o comportamento do sujeito aprendente por meio de analogias, hipóteses e metáforas. Por isso, Vergnaud (1990) considera que o fator essencial da dificuldade dos estudantes encontra-se vinculado não ao tipo de operação que um determinado problema requer por em prática, mas às operações do pensamento que os estudantes devem fazer para estabelecer relações pertinentes entre os dados do problema.

A teoria de Vergnaud não se concentra em questões das estruturas lógicas, razão pela qual é denominada como ***psicologia de conceitos,*** pois se acredita que não se pode evidenciar e analisar as dificuldades encontradas pelos alunos sem levar em conta, primeiramente, as especificidades dos conteúdos, do conhecimento envolvidos, bem como, o processo de conceitualização do real. Na teoria dos Campos Conceituais – TCC- há uma distinção que justifica o princípio da conceitualização que vem a ser a negação da dissociabilidade de duas questões centrais: *a resolução de problemas e formação de conceitos*. Até então, na

[33] Para Gardner (1993), a aprendizagem significativa dos conteúdos acadêmicos provoca na memória duas estruturas semânticas: a semântica acadêmica e a semântica experiencial. A primeira possibilita resolver de forma significativa os objetos conceituais; a segunda que o individuo continua usando para resolver problemas do cotidiano. E assim sendo, parece não haver uma obliteração em relação aos conhecimentos intuitivos porque quando o individuo sai da escola continua a utilizar a semântica experiencial como modelo explicativo para explicar os problemas da realidade.

[34] Moreira (2000) O autor revê as contribuições de Ausubel a partir das discussões de Maturana e Varela, Vygotsky, Morin e adjetiva a expressão *aprendizagem significativa com o termo critica.*

psicologia da aprendizagem, a primeira era vista como novo reagrupamento de ações e regras já existentes na estrutura cognitiva (subsunçores), enquanto que a segunda como uma nova forma de conceitualizar o mundo, os objetos de aprendizagem, existindo, portanto, dissociação entre essas duas formas de analisar a aprendizagem.

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) passa a considerar essa separação como erro crasso, pois conforme Greca e Moreira (2002), para Vergnaud há que se considerar a parte da representação simbólica e de conceitos presentes na resolução de problemas, tanto quanto a parte da resolução de problemas na formação de conceitos.

Nesta teoria, é por meio de enfrentamento de situações e problemas que um conceito dominado progressivamente adquire sentido para o sujeito. Os sentidos de uma situação não estão na situação em si, nas palavras e símbolos. Sentido é uma relação do sujeito para as situações e para os significantes (VERGNAUD, 1990, p. 158). Em outros termos, são os esquemas evocados no sujeito por uma situação ou por um significante que constituem o sentido dessa situação ou desse significante para este mesmo sujeito.

A TCC é uma teoria complexa porque dissemina a ideia de que os objetos de aprendizagem matemática adquirem sentidos na vivência de uma variedade de situações pois, em uma determinada situação, um conceito jamais contempla os significados inerentes a sua formulação. Segundo Vergnaud (1990), um campo conceitual é um conjunto de situações, cujo domínio progressivo exige uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão.

Nessa perspectiva, a construção de um conceito envolve uma terna de conjuntos que, segundo a teoria dos campos conceituais, é chamada simbolicamente de **S.I.R**: O **S** é relativo a um conjunto de situações que dá significado ao objeto em questão; o **I** é relativo a um conjunto de invariantes, que trata das propriedades e procedimentos necessários para definir esse objeto; e o **R** concernente a um conjunto de representações simbólicas, as quais permitem relacionar o significado desse objeto com as suas propriedades. Nesse tripleto há um termo central, que vem a ser o conjunto de situações visto como uma tarefa, sendo que toda situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas.

Embora o conjunto de situações possa modelar o domínio do conhecimento para o sujeito, o sentido atribuído não está nas situações em si, nem nas palavras e nem nas representações simbólicas. Um conceito torna-se significativo para o sujeito através de uma variedade de situações e diferentes aspectos de um mesmo conceito que estão envolvidos em distintas situações.

Mas, quais seriam os elementos que poderiam constituir o conceito de Campos Conceituais? Para objetivar a expressão foram pensados três princípios: (1) um conceito não se forma dentro de um único tipo de situações; 2) uma situação não se analisa com um único conceito; 3) a construção e a apropriação de todas as propriedades de um conceito ou de todos os aspectos de uma situação é um processo complexo que se desenrola ao longo dos anos.

É possibilitando ao sujeito aprendente uma variedade de situações que este poderá, ao tentar resolvê-las, manipular propriedades pertinentes ao objeto matemático apresentado, bem como estabelecer as relações possíveis buscando para isso esquemas que julga dar conta da situação apresentada.

Na TCC esquema é conceituado como sendo uma organização invariante da conduta para uma determinada classe de situações. Um esquema é um universal *eficiente para todo um espectro de situações e podem gerar diferentes sequências de ações, procedimentos de coleta e controle de informações, dependendo das características de cada situação em particular* (VERGNAUD: 1996, p. 172)

Os esquemas são formados de regras, metas, referências e invariantes operatórios. Nos invariantes há duas categorias fundamentais que são **os teoremas-em-ato e conceitos-em-ato** – que constituem a base conceitual implícita, ou explícita, que permite obter a informação e, a partir dela, e dos objetivos a alcançar, inferir as regras de ação mais pertinentes.

**Conceitos-em-ato** são ingredientes necessários dos **teoremas-em-ato**, mas não se confundem com estes. Proposições podem ser verdadeiras ou falsas, porém conceitos só podem ser relevantes ou irrelevantes. Contudo, não há proposições sem conceitos, por isso, há uma relação dialógica entre conceitos-em-ato e teoremas-em-ato, uma vez que conceitos são ingredientes de teoremas e os teoremas são proposições que dão aos conceitos seu conteúdo, sem, contudo, serem passíveis de fundi-los.

Tais conceitos e teoremas explícitos não são mais do que a parte visível do “iceberg” da conceitualização: sem a parte escondida formada pelos invariantes operatórios essa parte visível não seria nada. Reciprocamente, não se pode falar de invariantes operatórios integrados nos esquemas senão com a ajuda do conhecimento explícito. Frente a uma situação o sujeito pode acionar vários esquemas no sentido de buscar enfrentar o desafio posto, por isso a importância do ensino que possa visar, segundo a TCC, o desenvolvimento cognitivo tendo como objetivo apresentar uma sequência didática que acione um vasto repertório de esquemas para permitir aos sujeitos enfrentarem e dominarem um conjunto de situações a ele apresentado.

Perante esse enfrentamento há que se considerar duas classes de situações: uma em que o sujeito enfrenta as situações de forma significativa, pois as condutas a serem empregadas já estão automatizadas pelo sujeito; e outra classe na qual o nível de competência do sujeito ainda não dispõe de elementos suficientes para dar conta ao desafio, combinando e recombinando esquemas no sentido de atingir a meta desejada.

Não há dúvidas sobre a importância das contribuições da TCC para uma prática didática que leve em consideração entre outros elementos, a natureza conceitual pertencente às ciências, haja vista o número de pesquisas, Moreira (2002) Magina e Campos (2008), Magina *et al*. (2009), que entre outros, proporcionam a área de matemática experiências para que o professor possa se aproximar do aporte teórico da TCC como viabilidade para pensar o ensino de forma significativa.

- **Aprendizagem significativa**

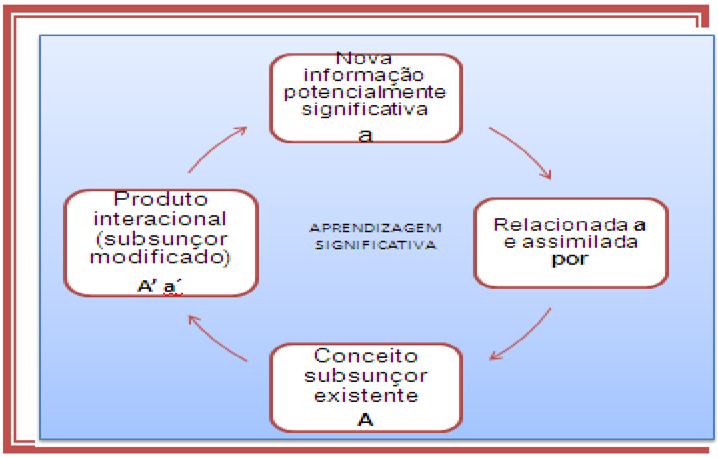
A abordagem significativa da aprendizagem, surgida na década de 60, é tratada como relevante nos processos de negociação de significados por suas explicações relativas ao processo de aprendizagem, tendo como pedra angular o conceito de **aprendizagem significativa.**

Ausubel (1980: 37) afirma que a essência da aprendizagem significativa está *em que ideias, simbolicamente expressas, sejam relacionadas de maneira substantiva (não-literal) e não-arbitrária á estrutura cognitiva.* Desta forma, a compreensão genuína de um conceito ou proposição implica a posse de significados claros, precisos, diferenciados e transferíveis.

Esta posse ou armazenamento de informações segue uma lógica organizativa obedecendo a uma hierarquia conceitual e, assim, conceitos mais específicos do conhecimento são assimilados a conceitos mais gerais ou inclusivos, daí a importância atribuída aos *conhecimentos prévios*. A interação entre o material conceitual existente na estrutura cognitiva com as novas informações passa tanto por influência direta dos conceitos já apreendidos, quanto pelas modificações possibilitadas pelo novo material. Ao consubstanciar sua teoria, Ausubel estabeleceu uma chamada *Teoria da Assimilação*, como expressa na figura abaixo, e que foi adaptada a partir da obra de Moreira[35] (s/d):

[35] MOREIRA, Marco Antonio. *Ensino e Aprendizagem* enfoques teóricos: Skniner, Gagné, Bruner, Piaget, Ausubel e Rogeres. São Paulo: Editora Moraes, s/d.

Figura 05 - Esquema de apropriação e acomodação de conceitos




Fonte: Moreira (s/d)

A assimilação ou ancoragem, portanto, é um processo que provoca mudanças tanto na proposição inicial **a,** quanto no subsunçor **A,** que é referente ao material que interage com a proposição inicial. Além desse processo, também há modificação possibilitando uma co-participação entre **a´A´** que passa a ser um subsunçor modificado que, por sua vez, passa a gerar novas interações. Mas há uma dinâmica fundamental para a apreensão conceitual que precisa ser considerada, a de que entre uma e outra interação ocorrem outras.

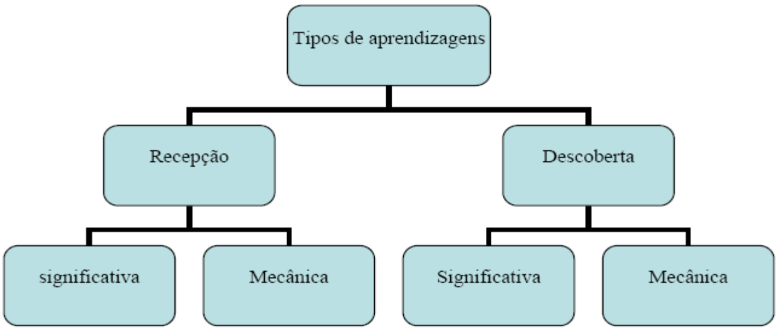
A aprendizagem significativa pode ocorrer em ambos os tipos de aprendizagens: por recepção e por descoberta, bem como podem acontecer concomitantemente na mesma tarefa que fora oferecida ao sujeito aprendente.

O ciclo apresentado acima, na verdade, é muito mais dinâmico, pois mesmo se compreendendo a existência de interações, as novas informações passam por um período de dissociabilidade obtendo um caráter de entidades individuais. Desse modo fica compreendida a seguinte relação (**A´a ´ ⇄ A´ + a´),** favorecendo a retenção **a´,** porque entra em jogo a economia mental, ou seja, é mais fácil guardar velhas ideias de caráter geral que as novas e pormenorizadas.

A Teoria da Assimilação ausubeliana afirma que a estrutura cognitiva de cada indivíduo é extremamente organizada e hierarquizada, no sentido que as várias idéias se encadeiam de acordo com a relação que se estabelece entre elas. Além disso, é nesta estrutura que se ancoram e se reordenam novos conceitos e idéias que o indivíduo vai progressivamente internalizando. Nesses termos, uma nova informação (conceito, idéia, proposição) adquire significado por meio da ancoragem de aspectos relevantes da estrutura cognitiva chamados de *subsunçores*.

Podemos pensar nos tipos de aprendizagem proposta por Ausubel a partir de Nunes (2007) como segue:

Figura 06 - Tipos de aprendizagem



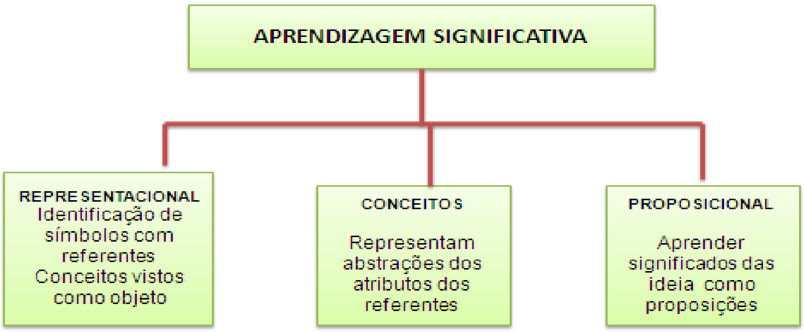

Fonte: Nunes 2007.

Nesse sentido, caso a aprendizagem não estabeleça relações entre o novo material a ser apreendido e os subsunçores existentes, pode ocorrer a chamada aprendizagem mecânica ou automática - *rote learning*, organizando as informações na estrutura cognitiva de forma arbitrária. A ocorrência dessas duas maneiras de aprender é vista por Ausubel como um *continuum* e não como dicotômicas, aliás, para a teoria ausubeliana não há dicotomias entre as formas de aprender um determinado objeto.

Embora pareça que a aprendizagem mecânica contraste à significativa, Moreira e Masini (1982) afirmam que a aprendizagem é mecânica até que alguns elementos de conhecimento que existam na estrutura cognitiva sejam subsunçores pouco elaborados, porém na medida em que a aprendizagem passa a ser significativa, esses mesmos subsunçores passam a ficar cada vez mais elaborados e mais capazes de ancorar novas informações.

Segundo Ausubel, já citado, para a aprendizagem ser significativa deve prescindir de um fator fundamental, o de manter interação com os conhecimentos prévios existentes na estrutura cognitiva do aprendente. A aprendizagem significativa pode ser de três modos:

Figura 7 - Tipologia da Aprendizagem Significativa




Fonte: elaborada pela autora

Segundo Moreira (1999), a aprendizagem representacional, embora sendo a inicial, está contida nas demais, é uma aprendizagem básica porque está relacionada à apreensão de símbolos individuais havendo uma equivalência entre um símbolo arbitrário e seu referente, nesses termos um nome significa aquilo que o seu referente significa para uma determinada pessoa. A proposicional estabelece uma relação mais sofisticada, podendo o sujeito compreender os aspectos denotativos ou conotativos que um nome possa apresentar, expressando tanto sentido denotativo quanto conotativo das palavras.

Assim, compreender significa articular um conjunto de palavras – representando conceitos -.A tarefa é aprender o significado que está para além da soma dos significados das palavras ou conceitos que compõe a proposição (MOREIRA e MASINI: 1982).

Quanto a aprendizagem de conceitos[36], é preciso lembrar que os conceitos são representados por símbolos individuais e arbitrários em virtude de estarem vinculados inicialmente a aprendizagem representacional. Neste tipo de aprendizagem existe uma equivalência entre a palavra que representa o conceito e o próprio conceito. É preciso esclarecer que, nesta teoria, conceitos constituem-se em abstrações dos atributos essenciais que são comuns a determinada categoria.

A aprendizagem significativa tem a ver com os princípios para ordená-las porque, uma vez instalada, a aprendizagem como um conjunto de ideias pertencente a estrutura cognitiva não-arbitrária, mais três categorias se fazem importantes: as relações de subordinação, superordenação e combinatória que constituem o processo de aprendizagem significativa vinculados a aprendizagem de conceito e de proposição.

[36] Para Ausubel (1980) Há duas formas de adquirir conceitos: **1. Formação de conceitos:** Processo indutivo, significativo, orientado por hipóteses e atividades empírico-concretas que caracterizam a fase inicial de aquisição de conceitos pelos alunos. **2. Assimilação de conceitos:** Após a etapa de formação de conceitos o aluno se encontrará em uma fase de maturidade que lhe permite relacionar à estrutura cognitiva os atributos essenciais abstratos de novas idéias genéricas, caracterizando a assimilação de conceitos.

A aprendizagem proposicional e de conceitos contempla os três princípios. As do tipo *subordinada* são as mais comuns ocasionadas pela relação ou integração do novo material com as ideias-âncora, podendo ser derivativa, isto é, quando o aprendizado fica limitado a um exemplo do que já se sabe; ou correlativa (o novo aprendizado é um exemplo que alarga a significação daquilo que já se sabe, ou seja, é uma extensão, elaboração, modificação ou qualificação de conceitos ou proposições previamente adquiridos).

Quando os conceitos estabelecidos na estrutura cognitiva são assimilados por conceitos mais inclusivos, ocorre a aprendizagem *superordenada.* Como exemplo, o significado número no contexto dos números fracionários em relação ao significado parte-todo em contextos de quantidades contínuas porque as proposições mais inclusivas são relacionadas. Quanto à *combinatória* acontece quando a relação do novo material se estabelece independente das relações das proposições, ideias hierarquicamente estabelecidas acima ou abaixo das ideias-âncora e assim *não se constitui, nem como exemplo e nem como generalizações daquilo que se usou como âncora da nova ideia na estrutura cognitiva*, Prass (2007:30).

Ao assimilar um novo conceito, a ancoragem realizada em relação ao subsunçor existente possibilita sua plasticidade, modificando-o por haver um processo inclusivo que, ocorrendo uma ou mais vezes, passa a ser chamado de diferenciação progressiva ou reconciliação integrativa instrucional uma vez que o novo conceito é apreendido pela relação da aprendizagem subordinativa. Quando há uma aprendizagem significativa superordenada ou combinatória em que o novo material adquirido e informações existentes se reorganizam adquirindo novos significados, essa recombinação é chamada de reconciliação integrativa, em que é favorável o professor explorar as relações entre as ideias, as similitudes e diferenças *que nada mais são que uma forma de diferenciação progressiva da estrutura cognitiva*, Moreira (1999: 69).

- **Mapas Conceituais**

Os mapas conceituais foram desenvolvidos por Novak e Gowin (1984) propostos para instrumentalizar a teoria da aprendizagem significativa, que resulta na aquisição de novas informações mediante esforço deliberado por parte do aprendiz para ancorar a informação nova com conceitos ou proposições relevantes presentes na estrutura cognitiva do aluno (AUSUBEL *et al*., 1978 apud CAÑAS *et al*. 2004).

De uma maneira ampla, mapas conceituais são apenas diagramas que indicam relações entre **conceitos**. Especificamente, podem ser interpretados como diagramas hierárquicos que procuram refletir a organização conceitual de um corpo de conhecimento ou de parte dele, Moreira e Buchweitz (1993), por isso envolve conceitos e suas relações. Pensar em um mapa conceitual deve-se levar em conta aspectos como clareza e complexidade conceitual.

Levando em consideração as orientações de Ausubel (1980, 2003), um mapa conceitual deve ser pensado a partir dos conceitos mais gerais e inclusivos colocando-os no topo do mapa, prosseguindo de cima para baixo no eixo vertical para daí apresentar-se os demais conceitos em ordem descendente de inclusividade, chegando-se aos termos mais específicos sem esquecer-se das linhas que representam as interconexões conceituais, levando a uma relação de subordinação entre os conceitos.

Moreira (1996), citando Rowell, na construção de um mapa conceitual dar-se-á prioridade ao ordenamento hierárquico vertical e, em razão disso, nem sempre é possível mostrar as relações horizontais desejadas. Assim, o eixo horizontal deve ser interpretado como menos estruturado, enquanto que o vertical reflete bem o grau de inclusividade dos conceitos. De acordo com as orientações deste autor  não há regras fixas para a realização de Mapas Conceituais.

Moreira (2002:10) indica duas dimensões como plausíveis no contexto didático; a dimensão de mapas unidimensionais que são apenas listas de conceitos que tendem a apresentar uma organização linear vertical simples, que dão apenas uma visão grosseira da estrutura conceitual e os mapas bidimensionais que apresentam as dimensões: vertical e horizontal, permitindo, portanto, uma representação mais completa das relações entre os conceitos.

É indiscutível a importância dos mapas conceituais na organização do ensino e da avaliação do processo de aprendizagem, uma vez que, entre outras vantagens, o uso de mapas conceituais possibilita acessar dois canais de apreensão da realidade, são eles: um visual e outro verbal que acionados simultaneamente formam um arcabouço conceitual na estrutura cognitiva do sujeito, possibilitando-o destacar as informações mais relevantes e suas possíveis articulações.

Assim sendo, um de seus méritos é constituir-se em recurso perceptivo-visual que possibilita a negociação de significados que, segundo a teoria da codificação dual de Allan Paivio (1986), é de suma importância para a maximização da aprendizagem. Desta forma, pode-se reafirmar a importância dos mapas conceituais, pois nesta perspectiva a cognição humana por dispor simultaneamente de dois subsistemas cognitivos de apreensão: um imagético e outro verbal, que embora sejam códigos diferentes, inter-relacionam-se e facilitam a aprendizagem.

### 4.4. Ensejando compreensão

Nesta seção busquei tratar de forma genérica aspectos sócio-cognitivos que influenciam a cultura escolar, uma vez que esta é portadora de uma multiplicidade de fatores que envolvem aspectos sociais, psicológicos, entre outros, que permeiam o exercício docente e são determinantes do fazer pedagógico. Nesses termos, são situacionais ocorridos na concretude do espaço escolar. A cultura escolar é um encontro comunicativo provocado por intencionalidades, daí mitos, filiações, conflitos fazerem parte da pele institucional. Além de ser um tipo de organização em que as tradições, os costumes, as rotinas e os rituais reforçam vigências de valores.

È possível indicar que, neste espaço, as ferramentas conceituais podem ser negociadas vislumbrando aspectos sociológicos, como referenda Fleck, já citado. Nessa perspectiva, as ferramentas conceituais podem anunciar que a produção e a democratização do conhecimento estão ligados a Comunidades de Pensamento, as quais a partir de suas comunicações inter e intracoletiva podem ocasionar a instauração, extensão ou a compilação de um **Estilo de Pensamento** que se julga formativo em termos de elaborações conceituais, divulgando ideias, métodos e fazeres que se coadunem com o estilo de pensar instituído.

De outro modo, Bishop (2002) contribui para este debate por assumir que os professores, em suas mediações, assumem valores que caracterizam a aprendizagem matemática. Dentre esses, os sociológicos, principalmente os valores por ele referido como *abertura*, a meu ver, parecem bem próximos de um determinado estilo de pensamento. Como citam Bishop e Clarke (2005), os professores, muitas vezes, não *acreditam que ensinam valores em suas aulas, bem como possuem pouca ciência de seus próprios valores quando estão ensinando*, porém pesquisas têm mostrado a importância desse olhar sociológico para o campo da matemática escolar.

Esses saberes/conhecimentos também tidos como valores formam, de modo singular, a cultura escolar. Nesse sentido, Kroeber e Kluckhohn (c.f.BISHOP: 1999) afirmam que os valores constituem a única base inteligível para a compreensão da cultura porque *a verdadeira organização de todas as culturas se dá, fundamentalmente, em função de seus valores*. Se a escola é um local de cultura própria, seria pertinente compreender que existem variadas formas de se relacionar com o conhecimento.

Sendo assim, o conhecimento a ser divulgado seria a interação de vivências que advém da criação desta própria cultural escolar, como produto das atividades ali vividas, mediatizadas pelos valores assumidos.

Além disso, é importante perceber estilos de pensamentos e valores veiculados, pois, na organização e divulgação das ferramentas conceituais, a aprendizagem deve ser vista como cultura de um aprender significativamente como forma de potencializar o domínio conceitual. Segundo Ausubel, *a maioria dos novos conceitos é adquirida através dos processos de assimilação chamada: diferenciação progressiva e reconciliação integrativa de conceitos* chamando atenção para o grau de importância que os organizadores prévios possuem. Esses organizadores podem ser pensados à luz da ideia de **Mapas Conceituais** como portadores de um esquema que possibilita articular sistemas visuais e verbais que facilitam a aprendizagem.

A despeito de todas essas contribuições, é preciso chamar atenção para aspectos como a conceitualização, pois mesmo com a compreensão de que significados/conceitos estão associados em termos gerais/culturais a uma comunidade social ou coletivo de pensamento, isto é, os conceitos como ferramentas de análise e tomada de decisão em situações concretas estão vinculados ao ver formativo, estes também podem ser analisados em seus aspectos endógenos, o que facilitará essa tomada de decisão. É nesse sentido que Vergnaud (1990) e Nunes *et al*. (2003) têm contribuído, pois asseveram que um conceito deve ser pensado num conjunto de situações. Dessa forma, é possível indicar como fundamental o papel *mediador do professor*.

Considerando essas visões e posições, assumo em capítulo subsequente a análise dos dados a partir não somente dos cinco significados tratados nas pesquisas já realizadas, mas explicitar aspectos atinentes a questões sociológicas ao buscar perceber indícios de valores que por certo poderão estar submergidos nos dados.

De forma mais contundente, me interessa observar a dinâmica comunicativa estabelecida entre os coletivos de pensamentos aqui decretados, bem como utilizar, em certa medida, as teorias da aprendizagem para esclarecer e compreender as relações estabelecidas pelos docentes frente a um conjunto de situações envolvendo os números fracionários. Todavia, antes da análise de dados parece importante tratar questões atinentes à Formação Docente apresentada a seguir.

# CAPÍTULO 5
# FORMAÇÃO DOCENTE

O que pensamos saber no momento em que estamos negociando os significados dos objetos de aprendizagem matemática? Como os selecionamos e como os organizamos, bem como quem são nossas bases teóricas para a organização de uma sequência didática que pensamos dar conta dos objetivos aos quais nos propomos a ensinar? Estas questões são amplas, mas necessárias de consideração no exercício da profissão docente.

Tais questões não são novas na área da educação e, a despeito do que já foi vivenciado historicamente, podemos dizer de momentos em que foram enfatizadas práticas presas à concepção da *maturação biológica,* recursos tecnológicos e manipulativos, à pedagogia do laisez-faire[37] em que o docente orientava a aprendizagem em função das tendências pedagógicas, assumindo-se, como intelectual de transformação (GIROUX: 1997) posteriormente, com a tese de pensar-na-ação (SCHON:1992, 2000).

Nessas tipologias ou fundamentações formativas pode-se perceber o deslocamento de foco sobre as investigações no que diz respeito a formação de professores.

Esse deslocamento transcorre entre ênfases em eixos que vão desde certas questões eminentemente metódicas, quando, a discussão centralizava-se no **como** ensinar, às questões ético-politicas de **por que e o quê ensinar passando ainda pela configuração da subjetividade docente,** referidos de acontecimentos, que ocorrem nos interstícios de liberdade, de sonhos e de criação, que se (re)constroem nos processos de sujeição dos professores, nos processos de práticas em que são moldados, estagnam, ou que se transformam.

Tais acontecimentos têm se manifestado entre as ações que perpetuam práticas não refletidas, mas também práticas transformadoras. Em relação à primeira, um dos motivos de tal ocorrência pode ser a forma como o docente se relaciona com as propostas disciplinares pautadas no cotidiano escolar – como se relacionar com o saber - e que, de certa forma, essa relação pode, conforme Tardif (2007), não nascer do amadurecimento ou de uma agenda de conquistas alcançadas pelo próprio professor no exercício de sua atividade.

Uma das pautas dessa agenda vem a ser a seleção de conteúdos que, segundo Tardif e Gauthier (2007:41), é exterior à prática docente, motivo pelo qual o professor poderia ser

[37] Laissez-faire: termo usado no campo das tendências pedagógicas para indicar “deixai-os fazer”, minimizando a atuação do professor sobre a gestão da aula.

“comparado” a um técnico e executor destinado à tarefa de transmissão de saberes. Quanto à segunda, pode-se indicar a tomada de consciência da necessidade de introduzir no exercício da profissão elementos que modifiquem seu próprio tempo em condições que ultrapasse a realidade posta examinando-o permanentemente. Assim, o docente passa a assumir aprendizagem como um conhecimento reconstrutivo porque a aprendizagem é sempre uma atividade do sujeito, processo de interpretação participativa e referência culturalmente plantada (DEMO: 2000, 53).

Mediante o exposto é possível afirmar que a formação docente é permeada pelas duas maneiras citadas, isto é, enquanto uma busca romper ou estabelecer uma contra-esfera de tomada de decisão, a outra ainda dá sinais de uma postura técnica absolutista, como apontou Fiorentini (2004) afirmando que a maioria dos professores de Cálculo, de Álgebra e da Análise de Topologia acredita que ensinar é um empreendimento apenas relacionado a conceitos e a procedimentos matemáticos.

Discutir **como** ensinar não é objeto recente e historicamente é na década de 70 que acontece o auge do tecnicismo-liberal no Brasil. Esta tendência marca o domínio técnico-formal do conteúdo como exigência primeira para o ensino de qualidade. Segundo Fiorentini (1989), havia pouca exploração de pesquisas que discutissem o domínio da disciplina. Assim, tal como a abordagem tecnicista houve outras consideradas relevantes, entre as quais, as abordagens: *libertadora e a critica social* dos conteúdos que visavam empreender ás pesquisas e às práticas escolares novos valores sobre o papel da escola e da profissionalização docente junto a sociedade. Dessa forma, algumas enfatizavam o conteúdo disciplinar, outras as concepções de professores. Essas mudanças surgiram com tentativas de alargar o olhar docente sobre as pesquisas que investigavam as práticas pedagógicas coincidindo com tipologias diversas, a exemplo, a classificação de Fiorentini (1998)[38] sobre saberes e conhecimentos que, neste estudo, serão tomados como face de uma mesma moeda.

Em termos da formação docente, o interesse investigativo nas últimas décadas encontra-se na tessitura dos saberes docentes ou de saberes dos professores, como têm sido objeto de discussão por parte de um grande número de autores nacionais e internacionais. No que tange ao professor reflexivo autores como Schön (2000), Tardif e Gauthier (2007), Pimenta (2005), (1986), Nóvoa (1992), Ponte (1991), Ponte e Oliveira (2002), Alarcão (2001)

[38] Fiorentini (1998), seleciona o termo conhecimento à partir de Shulman (1986) e Zeichener (1993). Baseado nesses autores concebe o termo conhecimento relativo ao saber disciplinar, à matéria a ensinar; e concebe o termo saber quando se refere as formas de representação do saber dos professores.

e, de modo especial, as pesquisas no caso da educação matemática, sob forte influencia de Fiorentini *et al*. (2002), Fiorentini (2004) e Nacarato (2004), têm sido um marco pesquisativo.

A necessidade de compreender a formação docente na área da Educação Matemática inspirou Fiorentini (2002)[39] a investigar trabalhos acadêmicos em nível de Teses e dissertações concluindo que em Educação Matemática apresentam os seguintes focos:

- **Formação inicial (59 estudos**) tendo como objeto de estudo programas e cursos; prática de ensino e estágio; outras disciplinas; experiências/atividades extracurriculares; formação, pensamento e prática de formadores de professores; entre outros.
- **Formação continuada (51 estudos)** tendo como objeto de estudos modelos/programas/projetos; cursos de atualização/especialização; a própria prática do formador; grupos ou práticas colaborativas e iniciação e evolução profissional do professor.

A partir das análises desses trabalhos, o autor concluiu que havia distanciamento entre a formação pedagógica e a formação específica em Educação Matemática. Partindo desse resultado houve grande interesse em realizar pesquisas que buscassem minimizar tal fosso. Com isso, o segundo foco - formação continuada - surgiu como campo propício à mudança do paradigma da racionalidade técnica. Não muito distante dessas conclusões, o trabalho de Ferreira (2002) também reforça a necessidade de investigação no contexto da formação continuada.

É inegável a tendência de estudos sobre a profissionalização docente com foco no desenvolvimento profissional, mas Carvalho (2003) chama atenção para a ideia de que a forma como o professor entende os conteúdos a serem ensinados influencia diretamente no modo como ele adapta tais conteúdos ao ensino. Nesse sentido corroboro as ideias da autora entendendo como pertinente pensar, a título de pesquisa, sobre conhecimento da matéria a ser ensinada. Esse interesse também se justifica a partir de Oliveira[40] que em experiências com professores de matemática em rede de formação continuada, alerta para que, de modo geral, os professores de matemática manifestam:

- Comportamentos que apresentam sérias dificuldades com o conteúdo que deveriam ensinar;

[39] Estudo denominado Dossiê em Educação Matemática.
[40] OLIVEIRA, Maria Cristina de Araújo**.** Possibilidades de Construção do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo na Formação Inicial de Professores de Matemática. Disponível em: www.anped.org.br/reunioes/28/textos/gt08/gt08356int.rtf. *Acessado em 14/out/2011.*

- Adquirir maior parte dos conhecimentos da prática docente que possuem depois de formados, quando já estão lecionandos;
- Ter dificuldade em fazer transformações do saber adquirido na Universidade para o saber a ser ensinado ao seu aluno na escola.

Como Oliveira, outros pesquisadores, a exemplo, Lampert e Ball (conforme PONTE e OLIVEIRA: 2002) encontram em decorrência de suas pesquisas essas mesmas dificuldades, indicando que nos Estados Unidos a formação de professores apresenta um quadro ainda pouco satisfatório. Entre os possíveis entraves, Ponte e Oliveira (2002:5) destacam a existência da separação entre a teoria e a prática, pois **a teoria raramente é examinada na prática e a prática por sua vez pouco interroga a teoria.** Considero esta uma questão transversal tanto para as pesquisas de formação continuada, quanto inicial, posto que, nesta última, a pesquisa realizada por Gatti *et al* (2006) na Fundação Carlos Chagas sobre a formação de professores de matemática no Brasil apontou o seguinte:

> Os cursos de Licenciatura em Matemática estão formando profissionais com perfis diferentes, alguns com uma formação matemática profunda, que talvez não se sintam preparados para enfrentar as situações de sala de aula, que não se restringem ao saber matemático. Outros, com uma formação pedagógica desconexa da formação específica em Matemática, forçando o licenciado a encontrar as inter-relações entre essas formações. Consideram-se poucos os cursos de Licenciatura em Matemática que oferecem uma formação mais aprofundada em educação matemática, como os que estariam propiciando experiências aos futuros professores mais contextualizadas e significativas para a construção da prática pedagógica.

Sendo assim, a formação docente ainda se reveste de velhos problemas apontados na literatura, tais como, o baixo desempenho qualitativo nas provas de larga escala e que incide diretamente na atuação dos professores em sala de aula. Esses resultados apontam a necessidade de pensar sobre certas questões como: que conhecimentos são necessários e como trabalhá-los na formação de futuros professores para que o ensino na educação básica seja qualificado? É nesse sentido que autores como Ball (1990) Selden & Selden (1996), Ponte (2000) Bairral (2003), Hill e Hill (2004), Palis (2005,) e outros, apontam para a necessidade de se investigar a prática pedagógica em âmbitos diversos envolvendo processos cognitivos, conceituais e formativos.

Ainda em termos dos desafios para ensinar e orientar os alunos no Ensino Básico, o estudo de Damico (2007:36) apontou um grande número de pesquisas interessadas na compreensão dos professores sobre tópicos matemáticos específicos dos currículos escolares, tais como os estudos de (BALL, 1990; EVEN, 1989, 1993; EVEN E TIROSH, 1995; TIROSH e GRAEBER, 1990), referendando a área a necessidade de estudos dessa natureza. Como vemos os caminhos de pesquisas na linha da formação docente transitam entre processos da formação profissional e do desenvolvimento profissional tornando-se âncoras que julgo ainda necessárias para pensar e discutir a formação de professores.

Mediante o escrito, entendo ser pertinente investigar o conhecimento disciplinar como forma de contribuir com a área de Educação Matemática.

Como esse intuito, elenco os seguintes elementos: (l) conhecimentos-saberes na tessitura da formação docente, tecendo para pensar saberes e conhecimento como elementos indissociáveis, (ll) conhecimentos sobre o conteúdo e suas implicações para a formação à luz das contribuições de Shulman quanto a forma de conhecimentos presentes no processo de formação docente; (lll) destaque sobre a importância do **como,** relativo aos processos de ensino e de aprendizagem**,** na prática docente, uma vez que este estudo localiza-se no âmbito do conhecimento do conteúdo.

## 5.1. A relação Conhecimentos-saberes na tessitura da Formação Docente

Sem minimizar o debate e se bem observado, as relações entre saber/conhecimento e cultura são centrais que qualquer manifestação abstrata parece contemplar tais significados. Dessa forma, é pertinente trazer Tardif e Gauthier (2002: 105) para explanar que ***se tudo é saber por que então falar de saber?*** Nesse sentido, os autores apontam para a necessidade de compreensão do reenquadramento conceitual para pensar esta categoria e, mediante essa assertiva, encontram na relação **pensamento-cultura da modernidade** três faces, a destacar:

- **Subjetividade:** o sujeito e a representação – é o tipo de saber subjetivo diferente dos outros tipos de certezas como a fé, crença convicção, portanto a subjetividade é considerada como o “lugar” do saber/do conhecer, isto é, saber qualquer coisa é possuir uma certeza subjetiva racional e encontra apoio na maioria das pesquisas em cognição.
- **Julgamento:** o discurso assertivo – o julgamento passa a ser o “lugar” do saber/conhecimento, mas o julgamento é assumido como concreto quando diz, neste caso, à dimensão assertiva ou propositiva, diz-se então, dos discursos que afirmam algo de verdadeiro a respeito da natureza ou do fenômeno, assumindo o julgamento do fato e não de valor.

- **O argumento:** a discussão – para além da lógica propositiva, saber/conhecer passa então a ser uma atividade discursiva que insiste em tentar validar, com auxilio de argumentos, operações discursivas e linguísticas, uma proposição ou uma ação.

Então o lugar da relação entre saber/conhecer passa a ser a argumentação, logo, engloba potencialmente diferentes tipos de discursos, cujo locutor, no âmbito de uma discussão, esforça-se em fundar a validade, oferecendo razões discutíveis e criticáveis em que os argumentos passam a ser entendidos como elementos comunicativos no interior de uma comunidade buscando superar os pontos de vista iniciais de uma subjetividade que de forma concreta são respeitados com argumentos e contra-argumentos.

Para os autores, a inserção dessa relação na cultura da modernidade leva em conta o fato de que qualquer tipologia apresenta interesse pela sua denominação, justamente pela exigência de perceber a racionalidade pensada. Ou seja, quando em termos pesquisativos, o professor é convidado a dialogar sobre seu fazer, assim o faz a partir das considerações acima feitas, pois o professor fundamenta ou expressa seu saber/conhecer na perspectiva de um pensamento subjetivo racional, no fundamento do que julga ou no fundamento de argumentos. Obviamente, essa fragmentação é relativa, pois responder sobre **o quê, o como, o porquê** está repleto de inúmeras ordens de comunicação intrínsecas às três categorias postas em pauta que, conforme o interesse pode se enfatizar uma dessas expressões em função da escolha investigativa.

Outro olhar sobre a discussão de saber pode ser encontrada em Furió (1994) que, do ponto de vista filosófico, assinala que os saberes ou conhecimentos podem ser classificados em três grupos:

- **Saber ou conhecimento declarativo** - também chamado descritivo ou factual, por meio do qual sabemos expressar em forma de proposições o que acontece ou o que pensamos sobre um determinado conceito. Este tipo de saber ou conhecimento procura responder ao que é, o que acontece, de forma descritiva;
- **Saber ou conhecimento processual ou procedimental** - relativo às habilidades ou destrezas que dominamos e que, em geral, demonstram-se por meio da ação de um saber-fazer. Este tipo de conhecimento manifesta-se quando se responde ao como se faz uma coisa e, em geral, pode demonstrar fazendo-a. Existe também quando se expressam os argumentos de uma resposta em forma proposicional;
- **Saber ou conhecimento explicativo** – que leva ou implica no domínio de teorias (compreendidas como construções dinâmicas de hipóteses entrelaçadas) que dão significado e profundeza aos dois tipos de conhecimentos anteriores e caracteriza-se por seu poder

predicativo. Este tipo de conhecimento responde ao por que dos fatos, conceitos, etc e pode ser considerado um pensamento causal.

Tomando, de forma geral, as orientações de Tardif e Gauthier e de Furió já citadas, é possível dizer que a opção investigativa deste estudo dará ênfase na concepção de saber/conhecer compreendidos como **subjetividade** porque esta corrobora elementos tratados por Shulman em relação ao conhecimento do conteúdo de ensino. É válido, pois, resguardar que o profissional em ação aciona dispositivos diferenciados e a articulação entre as orientações dos manuais e o instante áulico é gerido por momentos suigeneris em que saberes/conhecimentos são tomados a partir do interesse das práticas investigativas.

## 5.2. Conhecimento do conteúdo e suas implicações para a formação docente

Perante a explanação sobre possíveis entendimentos entre saber e conhecimentos, o que vem em termos de formação docente  complexificar e desafiar a lógica conteúdista que não ultrapassava a dimensão pedagógica stricto sensu, é possível dizer dos limites dos conhecimentos prévios ao magistério. Quando se pensa nos saberes/conteúdos na/da ação não se pode negar a importância e a necessidade de uma visão pragmática em termos formativos, o que recai no sentido de Garcia e Blanco (1997:3), maior atenção a fatos conceituais e empíricos, bem como à forma de *como os professores transformam o conhecimento que possuem da matéria em conhecimento ensinável e compreensível para os alunos.*

É nessa perspectiva que apoio-me em Shulman (1986), por ser necessário reafirmar seu anúncio ao discutir a importância de pensar sobre as questões teóricas que envolvem a prática docente como oportunidade para a reflexão. Shulman considera que cada área do conhecimento possui uma estrutura, códigos e crenças genuínas para interpretar a realidade. Assim sendo, é importante reconhecer que o conhecimento do conteúdo influencia o modo pelo qual como o processo de abstração se realiza, uma vez que cada disciplina possuiu suas indagações. Por isso, cabe ao professor refletir sobre elas e atuar no enfrentamento reflexivo para a possibilidade do domínio conceitual. Em seus manuscritos há três dimensões como centralizantes sobre o conhecimento profissional que servem de âncoras para a formação de professor, a saber:

**O conhecimento da matéria do conteúdo** refere-se à organização do conhecimento pelo professor, pois nas diferentes áreas de conhecimento os modos de discutir a estrutura de conhecimento são diferentes. Para bem conhecer os conteúdos é preciso compreender a estrutura da matéria utilizando, por exemplo, as categorias estrutura substantiva e estrutura sintática. Por Estrutura ou conhecimento substantivo ou epistemológico o autor considera o domínio dos conceitos e princípios do saber disciplinar que estão organizados para incorporar os fatos, é relativo à natureza e aos significados dos conhecimentos, do desenvolvimento histórico das ideias. Este domínio é fundamental para que o professor tenha autonomia intelectual no processo pedagógico, constituindo-se efetivamente como mediador dos saberes produzidos historicamente e aqueles reelaborados e relevantes sócio-culturalmente. Quanto a Estrutura ou conhecimento sintático: domínios de regras para determinar o que é legitimo em âmbito disciplinar e aquilo que daí se afasta, ou seja, é a estrutura em que os conceitos básicos e princípios do conteúdo disciplinar estão organizados.

- **O conhecimento pedagógico dos conteúdos** sem dicotomizar conhecimento de ensino-aprendizagem e os procedimentos didáticos - vão além do conhecimento da matéria do assunto inserindo.

Neste contexto as formas mais comuns de representação com as idéias são analogias, as ilustrações, os exemplos, explicações e demonstrações, a sequência didática que é a organização do objeto de aprendizagem. Ou seja, os modos de representar e formular o assunto de forma a torná-lo compreensível e acessível para os outros. Inclui também aquilo que faz a aprendizagem de um determinado assunto fácil ou difícil.

- **O conhecimento curricular** é o conhecimento sobre o currículo, contexto das disciplinas a serem ensinadas observando a organização e a estruturação dos conhecimentos. É o conjunto de programas elaborados para o ensino e a variedade de materiais instrucionais representados pelo projeto completo dos programas de ensino, que abrange desde assuntos particulares à variedade de materiais de ensino disponíveis em relação a esse programa, e o conjunto de características que servem particularmente como indicação e contra indicação quanto ao uso de um determinado material em circunstâncias particulares. Todos esses conhecimentos se entrelaçam na pratica pedagógica ou como fala Shulman nos contextos inclusivos.

Shulman (1987) acrescenta que, no processo de formação do professor, é necessária a constituição de uma base de conhecimentos para o ensino como forma de valorizar o saber do professor sobre aquilo que constitui o conteúdo do ensino e da aprendizagem. Esta base é composta por características fundamentais tais como: um corpo de compreensão; habilidades; conhecimento do conteúdo específico da sua disciplina; conhecimento pedagógico geral; conhecimento de currículo; conhecimento pedagógico relativo ao conteúdo de ensino;

conhecimento de outros conteúdos relativos à disciplina de ensino; conhecimento das características dos alunos; conhecimentos dos contextos educacionais e seus fins; propósitos e valores educacionais. Pode-se dizer até de outras, mas essas são importantes ao exercício da docência para atender os diferentes níveis de ensino.

A despeito de algumas críticas sobre a limitação das discussões trazidas por Shulman para o campo investigativo e formativo sobre/da/na docência, em especial por não tratar de saberes de uma epistemologia da prática, Monteiro (2001) aponta o contrário, pois indica que este autor trata de saberes experienciais em duas passagens: (a), quando o autor afirma que os conhecimentos pedagógicos são formas particulares de conhecimento dos conteúdos que englobam os aspectos dos conteúdos mais apropriados para o seu ensino; (b) quando o autor classifica os tipos de conhecimentos necessários para os professores.

Como se sabe, no âmbito da aula todos os saberes convergem, porém a matéria, objeto de ensino, é destacada por Shulman (1996) apoiado em Schwab (1978). De acordo com estes autores, é possível compreender a base de conhecimento do conteúdo a partir de duas estruturas: a substantiva e a estrutura sintática. Os autores designam a base de conhecimento do conteúdo como possuidora de estrutura substantiva quando o domínio do professor em relação ao conteúdo corresponde a uma variedade de modos nos quais são organizados os conceitos básicos e princípios da disciplina; diz-se que a estrutura de domínio de um conhecimento docente é sintático quando o entendimento docente sobre determinado tópico de ensino enfatiza os procedimentos algorítmicos.

Como se sabe, o desenvolvimento profissional inclui conhecimentos das mais variadas ordens que se transformam em conteúdos a serem ensinados, e assim, a compreensão sobre a prática se *constitui num ato educativo, que se caracteriza à medida que o professor busca compreender as situações concretas que se apresentam em seu trabalho* (STENHOUSE: 1987). Esta compreensão pode advir da reflexão do enfrentamento dos problemas da prática ou do contato de situações-problemas refletidas em função de estudos teóricos que possam otimizar a cultura docente em ação.

Falar em formação docente e em como este profissional assume sua profissão pode sugerir amplos debates, porém uma coisa parece ser plausível, qual seja, do ponto de vista do fazer pedagógico, o desafio está *em o professor cultivar uma prática que tente eliminar as contradições e busque uma abordagem a favor da aprendizagem do aluno* (PAIS: 2001, p. 31). Para isso, é pertinente discutir os conhecimentos matemáticos envolvidos na prática profissional docente da escola básica como forma de contribuir para a compreensão das dificuldades apresentadas e das possibilidades de inovações no processo formativo.

## 5.3. A importância do *como* na prática docente

O imaginário social sobre o que vem a ser um *bom ensino* recai diretamente na maneira em como se estabelece a mediação pedagógica, o que de antemão parece ser uma apologia de domínios de técnicas e tecnologias necessárias ao ensino de qualidade. Porém, o acento que proponho ao termo *como* vem em aspectos éticos, sem dispensar o prosáico, ou seja, vem da preocupação do cuidado com a profissionalização docente e seu fazer de forma substantiva como acorda Shulman (1996).

Apóio-me, entre outros, em Arroyo (2000: 110) para dizer desta subseção quando este afirma que as questões do *como* na formação deveriam merecer mais cuidado profissional e maior atenção. Em seu discurso, o **como** está relacionado à necessidade que o professor deveria ter de saber mais dos processos mentais, intelectuais, dos hábitos e valores ativados e provocados pelo como ensinamos e pelo como os estudantes aprendem e socializam as informações obtidas.

Mais ainda, dever-se-ia atentar às quentões inerentes á natureza e ao estatuto epistemológico dos objetos de aprendizagem, em especial dos objetos matemáticos. Para o referido autor pouco se discute as dimensões formadoras ou deformadoras desse **como** e a importância da ação como o principal desafio do saber nos espaços institucionais.

O que torna a escola um espaço que trata o movimento da intelectualidade do educando tem a ver diretamente com o como ensinamos e do que ensinamos, elementos nucleares da pedagogia. O autor, ao destacar a importância de como ensinamos, insere questões argumentativas em âmbito da formação cidadã. Nesse, âmbito compreendo que o acesso e o domínio aos códigos culturais também é um forte elemento para se pensar a dimensão cidadã/humana, daí a necessidade do professor possuir além de outros, o domínio dos conteúdos.

Esta crença emerge da percepção do ensino como uma atividade de prática cultural que dirige as trocas educativas sinalizando o compromisso do que se faz e do como se faz por ser a aula um espaço vivo de criação e transformações de significados. Nesse processo, o papel do professor é fundamental e não se trata de assumi-los na dimensão estritamente técnica criticada por Pérez-Gómez (2000:84), em que a intervenção didática deve-se **reduzir** à escolha e à ativação dos meios necessários para a realizaçao dos objetivos pré-determinados fora do processo de negociação de significados.

A importância do **como** e de suas consequências em relação ao conhecimento do conteúdo de modo específico e, de forma geral, dos demais denominados por Shulman, têm a possibilidade de ser compreendido não mais em níveis estanques, mas imputados de sentidos que busquem indagar como construir uma cultura do ensinar e do aprender como forma de assegurar o compromisso com a cultura da ação docente e com as dimensões projetivas do fazer pedagógico.

As dimensões da competência ou o (re)pensar o **como** na educação não é uma preferência pelo pragmatismo, mas pensar na forma como se aprende, ou melhor, como se ensina que tem por base, como afirma Arroyo, já citado, tanto as teorias pedagógicas clássicas quanto as contemporâneas, as quais, de modo mais incisivo tem a ver com a maneira do professor apresentar o conhecimento.

A centralidade do **como** e como centralizamos nossa vida docente segundo Arroyo têm por base certas matrizes que implicam: a ação, a práxis e o trabalho como principio educativo que de certa forma cria uma cultura da ação docente porque, para o autor, todo conhecimento é ação. Nesse sentido, é fundamental que o docente compreenda e discuta as variadas matrizes pedagógicas que são incorporadas na sua cultura profissional e escolar na perspectiva de reeducar nossa visão em relação aos conteúdos da docência. Dominar o conhecimento disciplinar como trata Shulman, refere-se à organização do conhecimento pelo professor a partir de uma compreensão substantiva da matéria.

## 5.4. Ensejando compreensão

As amplas questões que abriram esta seção podem apresentar inúmeras respostas a variados contextos e tempos pedagógicos. Isto significa que outros recortes teóricos poderiam ser tratados nesse âmbito. A seleção entre os autores citados vem no sentido de indicar minimamente indícios de que saberes e conhecimentos no contexto da formação docente, podem ser vistos para além de uma visão monolítica.

Se observado as tipologias apresentadas por Tardif e Gauthier (saberes subjetivo, julgamento e argumento) e Furió (declarativo, processual e explicativo), resguardando as devidas proporções, é possível aliar as categorias subjetivo e processual com a categoria conhecimento do conteúdo por Shulman, uma vez que o foco proeminente é olhar para o saber docente sobre o domínio de determinados conceitos científicos por compreender que a relação estabelecida pelos professores com os saberes que ensinam constitui-se como uma das atividades essenciais da docência.

Nesse sentido, investigar o saber-fazer do professor não minimiza a importância de pesquisas em âmbitos localizados e, portanto cabe realizar investigações que busquem explicitar como esse processo se realiza, pois a relação entre o domínio do conteúdo, pedagógico e curricular não é automático.

As contribuições desta seção vêm no sentido de reforçar um dos aportes teóricos de Shulman, a preocupação com a cultura da ação docente, ou dos domínios dos saberes na ação, que de forma recortada recai no domínio conceitual do objeto em estudo denominado de números fracionários.

Ressalto que o saber ou o conhecimento amplia-se a partir de sua provisoriedade, produzido a partir de uma ordem pessoal e segundo a experiência de cada docente sendo eminentemente cultural porque é partilhado em um contexto capaz de criar sentidos e que gerados também na prática poderão ou não transformá-la.

Em termos formativos é possível indicar que neste estudo a retomada da importância do domínio dos objetos conceituais – **o como** – enquanto artefato da cultura escolar destaca a necessidade de estudos nesse âmbito no sentido não de estabelecer uma relação unívoca entre o que o professor sabe e o que os estudantes dominam, discurso esse veementemente minimizado nos âmbitos dos estudos sobre formação docente, mas de explicitar elementos da cotidianidade áulica que precisam ser retomados como pressupostos formativos e investigativos com fins de tratar a (in)certeza como elemento da constituição do exercício doente.

Pensar sobre o conhecimento do conteúdo, ou de outra forma, sobre as questões do **como** não tem o caráter de tornar trivial o exercício da prática, pois os autores, já citados, apontam para a complexidade da natureza da tarefa docente. Nesse intuito, cabe ressaltar a importância de se questionar sobre os saberes que os professores pensam saber para ensinar, bem como quais são as fontes desses conhecimentos/saberes e como se manifestam no exercício da docência.

Neste prisma a importância do **como** se coaduna com os pressupostos reflexivos acerca dos paradigmas de **formação na concepção compreensiva**, e assim, toda forma de pensar sobre o conhecimento de base, ou o conhecimento necessário para o ensino, leva em conta um perfil de professor que se assuma como sujeito de práxis, como sujeito capaz de pensar sobre seu fazer.

Quando Shulman (1986) traz ao debate os três pilares do que irá determinar de conhecimento base – ***knowledge* base** – é possível perceber a amplitude, a exigência de aspectos formativos, seja em nível de formação inicial, seja em nível de formação continuada para que o professor se constitua como tal.

A perspectiva apresentada por este o autor  vislumbra de certa forma um ponto em destaque: o de tomar o ensino como um processo de **raciocínio pedagógico** em que, pensar sobre os conteúdos disciplinares, requer pensá-los pedagogicamente o que exige da escola uma organização na perspectiva de um local de cultura docente comprometida com ensino de qualidade.

Tendo em vista o exposto, as questões tratadas nesta seção indicam o aporte de Shulman em termos da Formação Docente como possíveis indicativos para explicitar a partir do teste diagnóstico a estrutura de conhecimento – substantivo ou sintático. Tendo visto essas contribuições, o convite é mergulhar no capitulo subsequente relativo aos **achados deste estudo: a análise em foco.**

# CAPITULO 6
# OS ACHADOS DESTE ESTUDO

Nesta seção serão apresentados os achados como forma de explicitar a compreensão dos professores de matemática do sexto ano do ensino fundamental sobre números fracionários levando em conta as discussões apresentas anteriormente. Para ensejar compreensão, este estudo assenta-se, em duas grandes âncoras e leituras afins: (1) Números fracionários: teoria dos campos conceituais, aprendizagem significativa e mapas conceituais; (2) Escola, Cultura e Formação Docente: teoria do conhecimento (FLECK: 1976), matemática cultural (BISHOP: 1999) e formação docente (SHULMAN: 1986). Mediante este alargamento foi possível analisar os dados na seguinte sequência:

- **Enfoque 1. Grupo A**: envolve a análise das questões que tratam do Invariante operatório **equivalência**;

- **Enfoque 2. Grupo B:** envolve a análise dos cinco significados de números fracionários subdivididos em cinco subgrupos: B.1: correspondente ao significado parte-todo, B.2: correspondente ao significado quociente, B.3: correspondente ao significado operador multiplicativo, B.4: correspondente ao significado medida e B.5 correspondente ao significado número;

- **Enfoque 3. Grupo C**: envolvendo a questão aberta. **2** correspondente a notação 3/5 e seus respectivos mapas conceituais;

- **Enfoque 4.** envolve os resultados da dinâmica comunicativa entre os Coletivos de Pensamento.

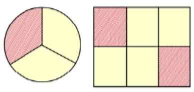
## 6.1. ENFOQUE – 1 Análise dos resultados sobre o Invariante Equivalência

Neste enfoque será abordado como invariante o conceito de **equivalência** no intuito de explicitar como os professores manifestaram seus conhecimentos no teste diagnóstico. A equivalência constitui-se num conceito âncora para o desenvolvimento de habilidades de pensamento envolvendo números fracionários. Este invariante é importante por proporcionar ao sujeito aprendente compreender fração como número e não como superposição de números inteiros, evitando, assim, que se compreenda a representação $\frac{a}{b}$, com b ≠ 0, como se fossem dois números sobrepostos, porém independentes. Conforme estudos de Hierbet e Beher, citados por Tinoco e Lopes (1994), em que afirmam que esse modo de pensar pode levar o aluno a não perceber fração como número e, assim, passar a considerar fração como um par de números inteiros.

Esse invariante como componente curricular contribui para localizar um número fracionário na reta numérica, bem como comparar frações ordenando-as como número, se não, vejamos as questões seguintes:

Questão 3

Edna distribuiu igualmente a massa para bolo de 1 kg de trigo em duas formas, uma redonda e outra retangular para repartir para seus amigos. Conforme a representação abaixo, as partes pintadas de vermelho representam a mesma quantidade nos dois bolos? Justifique.

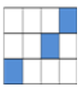


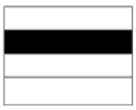
**100% de respostas aceitáveis**

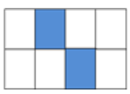
**QUESTÃO 6**

Qual (is) da(s) figura(s) abaixo pode(m) representar uma fração equivalente a 1/4.

**A ( )** 

**B ( )** 

**c ( )** 

**D ( )** 

**Dezesseis respostas aceitáveis (76%) e cinco não aceitáveis (24%)**

**11ª QUESTÃO.**

**Paulo vai pintar sua casa nas cores azul e branca. Observe a gravura abaixo e responda:**


**a) A mistura de tinta vai ter a mesma cor na segunda e na terça-feira?**
**( ) SIM ( ) NÃO**
**Treze respostas aceitáveis (61,9%)**
**Oito participantes não responderam (31,0%).**

De acordo com a análise dos protocolos de respostas, foi possível concluir que os professores demonstraram que o conceito de equivalência se situa em um repertório usual na vivência escolar, principalmente na questão **3** porém, as questões **6** e **11.a** devem ser pontuadas por trazerem de forma considerável um percentual de respostas não aceitáveis ou não respondidas. Na questão 6, cinco professores não compreenderam o termo equivalente como referente ao próprio número, pois desconsideraram o subitem **6.c** como equivalente a 1/4. Na questão **11.a**, onde a equivalência é solicitada de forma implícita, oito docentes não responderam a questão. Nesta última, o tipo de representação não é usual nos manuais didáticos o que pode ter influenciado o resultado apresentado.

A equivalência em termos do ensino dos números fracionários é um conceito que traz em si algumas dificuldades. Entre essas, Nunes (2005) destaca: (a) o uso da percepção em detrimento dos fatores lógico-matemáticos, em que a representação figural do mesmo número fracionário resulta em diferenças perceptivas; (b) o papel da linguagem, em termos de que, números diferentes possam representar a mesma quantidade (1/2 = 2/4), bem como o mesmo número pode representar quantidades diferentes (1/2 de 8; 1/2 de 10).

As questões de número **6 e 11.a –equivalência -** apresentam uma representação em que a percepção é solicitada de forma diferente da questão três, isto concorreu para que seis docentes não atentassem para o uso da percepção.

Com isso podemos dizer que usar um conceito em diversas situações possibilita dominá-lo em escalas vantajosas, do contrário, o ensino pode ficar preso a um determinado contexto e, como consequência, condiciona a compreensão do sujeito aprendente a um único tipo de representação.

Nesses termos, é pertinente falar da contribuição que a teoria de campo conceitual de Vergnaud traz em especial no que diz respeito ao conjunto de situações, expressado, o que foi feito com as questões referidas, em que foram propostas três situações em contextos diferentes, exigindo representações diferentes, o que mostra bem o que este autor quer dizer com Campo Conceitual.

Na análise de problemas de estrutura aditiva o precursor da TCC identifica **os problemas tipo.** De forma correlata, posso indicar que os resultados apresentados indicam que o sujeito deixa-se sugestionar por **representações tipo** (é o caso da representação da questão 1, familiar aos professores, enquanto que as representações das questões **6 e 11**.a não são usuais nos livros didáticos e, consequentemente, aos professores).

## 6.2. ENFOQUE 2 - Análise dos resultados sobre os Significados de números fracionários

O objetivo desta seção é apresentar para análise como os professores explicitam seus conhecimentos de base sobre números fracionários a partir de situações eleitas de acordo com os significados enfatizados pela pesquisa, com o intuito de evidenciar como os professores lidam com situações-problema envolvendo os significados de números fracionários como campo conceitual do conhecimento matemático. Primeiramente será apresentado o resultado de cada significado e, após, será apresentado uma síntese analítica geral do enfoque em questão.

### B.1. Apresentação dos Resultados por significados

- **Significado Parte-Todo**

Na literatura baseada em Nunes *et al* (2003), a ideia presente nesse significado é a da partição de um todo (contínuo ou discreto) em n partes iguais, em que cada parte pode ser representada como **n/1.** Como já referendado neste significado apresentaremos exemplos para além das frações egípcias. Assim sendo, o recurso de dupla contagem não poderá ser o único a ser utilizado na tentativa de chegar a representação correta.

| |
|---|
| **QUESTÃO 4**<br>Caroline repartiu sua barra de chocolate em cinco partes iguais e deu dois pedaços a Pedro. Que fração representa a quantidade de chocolate que Pedro recebeu? |
| 100 % de respostas aceitáveis |

Situações como as expostas acima, principalmente a de número **4**, apresentam dificuldade restrita e fazem parte, de forma sistemática, das vivências dos docentes investigados. Em relação à questão **5**, a metade dos professores relacionou 2/6 a 1/3 mostrando uso da noção de equivalência, relação cuja experiência no sexto ano possibilita o uso dessa tecnologia. Observando-se as considerações feitas no enfoque anterior pode-se ratificar a presença de **representações tipo** porque essa atividade é usual nas práticas pedagógicas.

Em se tratando da questão **4**, justamente por ser a mais usual, algumas ponderações tem sido feitas, tais como, as citadas por Campos *et al*. (1995) e Kerslake (1996) ao afirmarem que a ênfase nessa abordagem pode trazer limitações à compreensão do conceito de números fracionários por evidenciar os aspectos perceptivos em detrimento dos lógico-matemáticos, o que corrobora os autores já citados no enfoque invariante. Essa crítica surge com o propósito de chamar atenção para as práticas didáticas em que predominam o significado parte-todo (fração unitária) como significado quase exclusivo do conceito de fração.

Mesmo mediante essa chamada de atenção, não se pode negar a contribuição desse significado ao pensamento matemático, principalmente na questão da ***formação da linguagem fracionária***, Kieren (1988) e Nunes e Bryant (1997), que visam orientar a aprendizagem ao domínio da imagem de dupla contagem implicando: (a) contar as partes em que o inteiro foi dividido (denominador) e, (b) contar quantas dessas partes foram consideradas (numerador). Isso significa dizer que o recurso de dupla contagem é importante quando o objetivo é iniciar a formação da linguagem fracionária, porém é preciso observar que, quando se pretende construir um pensamento ligado aos elementos lógico-matemáticos, esse recurso é limitado para compreender situações que envolvem o conceito de área.

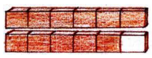
Conforme Vergnaud (1993) ressalta, a ênfase no contexto parte-todo em situações de quantidades contínuas com representação visual marcante *pode centrar a aprendizagem somente no aspecto de dupla contagem, ao invés de orientar o pensamento para a divisão de "n" partes e sua representação matemática 1/n.*

Corroborando a ideia que a ênfase no ensino de números fracionários pelo domínio perceptivo é limitante, autores como Escolano e Gairín (2005) chamam atenção para o uso da cardinalidade frente ao processo de dupla contagem (identificação das partes) no significado parte-todo de frações unitárias, uma vez que na identificação de um número fracionário o aluno pode considerar aspectos como a cardinalidade e, assim, passa a identificar cada um dos identificadores da fração (numerador e denominador) como número natural.

Essa atitude pode minimizar a compreensão de atributos como a conservação da área e a omissão da grandeza utilizada e, assim, o sujeito acaba por não sentir a necessidade de inserir em seus procedimentos nenhuma estrutura numérica superior à estrutura dos números naturais, como exige a notação **a/b.**

**QUESTÃO 3**

Renato ganhou duas barras de chocolate. Dividiu-as em 6 partes iguais e comeu certa quantidade (parte hachurada). Que fração representa a quantidade de chocolate que Renato comeu?



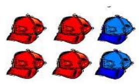
Considerando a situação-problema posta, comente a resposta apresentada abaixo:

R = Renato comeu 11/12.

12 Respostas aceitáveis: 57,1%

**QUESTÃO 5**

Numa loja para presentes há 4 bonés vermelhos e 2 azuis. Que fração representa a quantidade de bonés azuis em relação ao total de bonés?



100% de respostas aceitáveis (dos 21 participantes, 11 relacionam 2/6 a 1/3)

QUESTÃO 8

Se quisermos representar a quantidade de pedaços de pizza da figura abaixo como fração de uma pizza, qual a fração que representaria a quantidade de pizza que não foi consumida (a parte de cor amarela)?

<u>Respostas</u>

*Seis respostas aceitáveis com a seguinte notação:* $\frac{12}{8}$ considerando o inteiro como $\frac{16}{8}$ (28,5%).

Quinze respostas não aceitáveis (71,4%).

Como já foi apresentado anteriormente, a ideia de fração advinda da concepção de fração unitária apresenta domínio por parte dos docentes, contudo, em relação a ideia que extrapola o inteiro é possível perceber alguns equívocos. Nove docentes (14,8%) tiveram a compreensão de que, na questão **8,** o inteiro seria 16/16,considerando nesta situação o uso de fração imprópria ou de número misto, como é possível indicar que o professor usou um referencial para cada subitem.

Das notações apresentadas, chama atenção alguns protocolos de respostas como é o caso do professor **PG,** que considerou como correta a resposta 4/12. A partir desse resultado, é possível dizer que o docente ao ter que considerar o inteiro como 16/8, em virtude da representação figural, tendo a dificuldade de reconstruir o inteiro na fração imprópria, pois ao registrar a notação: $\frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{12}$ induz dizer que o docente considerou cada pizza como inteiro. Nota-se que, além de considerar um novo todo, o docente utiliza uma técnica que não condiz com as regras de soma de frações homogêneas ao somar os denominadores reforçando as recomendações de Nunes (2005) sobre representação visual.

Outra resposta que também chama atenção vem a ser a do professor **PE** registrando $\frac{4}{6}$ e a resposta do professor **PQ** que considera oito oitavos como todo-referência. Mas, como a representação visual apresenta duas pizzas o referido professor divide o todo por dois, como exposto **( 6/8 : 2 = 3/4**), concluindo que a parte não consumida corresponde a ¾ das suas pizzas. Outros professores, como por exemplo, **PR** e **PN** confundem o todo-referência, assumem 8/8 como todo, registrando 6/8 como a parte de pizza não consumida e, assim, passa a considerar apenas uma das pizzas. Com tais procedimentos, é possível dizer que os professores ao considerarem apenas uma pizza explicitam uma visão de fração como fração unitária.

Pelo exposto, há indicação de que a representação visual parece ter contribuído para respostas não aceitáveis, como pode-se verificar a resposta do professor **PH.**

**P.H: Está certo, pois as barras foram divididas em 6 partes cada, totalizando assim, 11/12.**

A forte ênfase da representação visual no ensino de fração tem sido investigado como elemento estruturante do pensamento matemático. Autores como Marshall (1993), Sweller e

Cooper (1985) comungam dessa ideia, porém, nas questões **3** e **8**, percebe-se a dificuldade de alguns professores conservarem o todo-referência como 16/8 na questão **8** e 11/6 como todo-referência da questão **3.**

Situações envolvendo a ideia de fração imprópria, como é exposta na questão **3,** são usuais no contexto escolar, a exemplo as propostas por Silveira e Marques[41] (2006:126) porém, intuir que, mais uma vez, a **representação tipo,** ou de outro modo, a forma de solicitação da questão foi atenuante. Neste caso, foi solicitado que o professor explicitasse seus conhecimentos da matéria sobre a situação quando a questão induzia o professor a justificar o **erro do aluno**. No caso de Silveira e Marques, já citados, o comando fica por conta de representar graficamente uma fração imprópria ou escrever o número misto a partir da representação gráfica.

Uma das causas dessa dificuldade pode ser a ênfase em vivências com números fracionários utilizando *a representação visual sem levar em conta questões como área e a conservação do todo*, como advertido nas pesquisas de Owens (1980) e Sambo (1980), sobretudo na representação vinculada ao modelo pizza tão comum na prática pedagógica.

Embora, no debate acadêmico, as discussões sobre números fracionários estejam longe de possuir uma resposta que satisfaça as indagações postas, uma coisa parece fazer sentido quando se observa as questões deste significado: que alguns professores compreendem números fracionários ***como sendo sempre menor que 1***, levando a crer que, em suas vivências com o ensino dos números fracionários não há uma apurada reflexão que torne a compreensão deste tópico como ente matemático que poderá comprometer a ideia de assumi-lo como objeto capaz de comparar grandezas e ser passível de realizar operações em um conjunto de situações.

Como pode ser visto, em relação às questões parte-todo tratadas no instrumento, quando a situação envolve questões usuais, a conservação da unidade parece ser assimilada, pois o referencial parte-todo em frações unitárias parece ser de domínio docente, mas quando se usa aspectos simbólicos, a tendência é tomar as partes como nova unidade que compromete o domínio conceitual.

Reitero que há uma hipótese explicativa das representações tipo, como no item anterior, isto é, como as situações apresentadas, são usuais nos livros didáticos, na representação de frações unitárias, isto limita o professor a este tipo de representação.

[41] SILVEIRA, Ênio e MARQUES, Cláudio. **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2006, quinto ano do Ensino Fundamental.

Consequentemente, o professor ao se deparar com representações de frações não unitárias manifesta obstáculos provocados por essas representações.

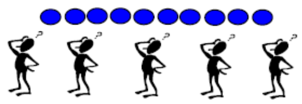
Assim sendo, afirmo que as orientações de Vergnaud, no que referem a assunção do termo conceito na aprendizagem dos objetos conceituais, se fazem necessárias, pois caso o professor tivesse passado em suas experiências acadêmicas por um conjunto de situações que pudessem significar o **conceito** de número fracionários, com certeza certos eventos não teriam acontecido.

- **B.2- Significado Quociente**

Considerando a questão **7,** relativa a pergunta ***quantas bolas cada criança ganhará,*** pode ser observado que esta situação-problema não representa para os professores conflito entre os campos: naturais e fracionários, tendo como resultado a resposta *duas bolas.* Esta questão não foi considerada para análise, pois o interesse é a pergunta ***Que fração representa essa distribuição***, pois esta última encontra-se no campo dos números fracionários.

QESTÃO 7

Tenho dez bolas para dividir para cinco crianças. Quantas bolas cada criança ganhará? Que fração representa essa distribuição?



**Oito respostas aceitáveis: 10/5 (38%)**

**Treze respostas não aceitáveis: (61,9%)**

**Protocolos apresentados**

**a) 1/5 b) 10/2 c) 10/2 ou 1/5 d) 2/5 e) 2/10 f) 10/2 ou a metade g) 2/1**

Levando em consideração as respostas expostas, é possível dizer que os professores que indicaram que a fração solicitada representa 10/2 ou um quinto deram respostas correspondentes à primeira pergunta ***quantas bolas cada criança receberá*** e não à segunda pergunta. Quanto à resposta um quinto, se tivesse sido referente ao resultado 10/5, se poderia dizer que o professor empregou o significado **operador multiplicativo**, ou seja, não importa a quantidade de bolinhas de gude a serem divididas, pois o que cada uma das 5 crianças receberá equivale a 1/5 do total de bolinhas de gude. Não se pode dizer, pois que, a ideia de significado **operador multiplicativo** deixe de existir, mas a representação 2/10 não corresponde ao solicitado.

A resposta 2/10, além de indicar a fração que não fora solicitada, demonstra também incorreção em identificar os termos dos números fracionários: numerador e denominador. Além desse indicativo, pode-se novamente indicar a **presença da ideia de fração menor que 1** e nesse caso o professor empregou o significado parte-todo. Das treze respostas não aceitáveis, sete respostas traziam a notação 2/10, ou seja, traziam a compreensão da questão no significado parte-todo e, com isso, conduziram interpretar que esta situação não fora de certa forma compreendida como quociente, isto porque o foco de análise desta questão fica centrada no subitem **7.b.**

Entre outras respostas expressas nos protocolos, encontrei a resposta 2/5, que me leva a compreender a dificuldade do professor, em foco, trabalhar com os dados do problema ao tomar a resposta *duas bolas* como numerador e não como o resultado quociente; a resposta 2/1 chama atenção porque é possível indicar que o professor chegou ao resultado 10/5, mas simplificou chegando ao resultado 2/1. Porém, 2/1 levará ao resultado *duas bolas*, e não a pergunta solicitada, qual seja. q*ue fração representa essa distribuição.*

Compreender que 10/5 é uma fração possível nesse contexto pode ter comprometido o desempenho dos professores, pois como visto anteriormente, a ideia de fração menor que 1 é muito forte nos saberes dos professores. A pesquisa de Canova (2006: 188) indica que os professores das séries iniciais, mesmo compreendendo esta situação, registravam de forma equivocada os termos da fração, como ocorreu neste estudo com alguns professores especialistas. A pesquisa de Moutinho (2005: 130) também indica dificuldades dos estudantes de oitava série/nono ano e quarta série/quinto ano de compreender números fracionários nesse contexto, por isso, o autor indica a notação 2/10 como possível teorema-em-ato. Esta análise indica que os professores participantes apresentaram o mesmo esquema.

A notação 10/2 em relação à notação 10/5 foi predominante ocasionando, certamente, resultados diferentes. Para a notação 10/2 a resposta contemplará cinco bolas; enquanto que a notação 10/5 conduzirá a resposta a duas bolas. Com isso, pode-se inferir que, embora as respostas para a primeira pergunta - *duas bolas* - representem quase cem por cento de respostas tidas como aceitáveis, a resposta do item 7.b - **que fração representa essa distribuição -** apresentou um índice considerável de respostas não aceitáveis (61,9%).

Eis aqui mais um indício do que se tem afirmado sobre as **representações tipo** que induzem os professores ao erro sistemático sempre que o assunto é representação. Isto está de acordo com a hipótese de Vergnaud sobre o tripleto S.I.R, que explica o campo conceitual, em especial sobre o conjunto de representações necessárias ao conjunto de situações.

Observando a tendência em alguns professores responderem 10/2, para a pergunta *que fração representa essa divisão, é* possível indicar que a tendência foi querer se referir a resposta 2/10 o que indicaria a ***fração que representa o que cada criança receberia***, **ou seja, representaria duas bolas.** Nesse contexto, o significado seria de parte-todo, pois o numerador e denominador envolvem apenas uma grandeza (bolinhas de gude), contexto que não se aplicaria ao objetivo pensado para esta questão que era enfocar o significado Quociente e, desta forma, envolve duas grandezas $\frac{\textit{bolinhas de gude}}{\textit{crianças}}$

A resposta do participante designado por **P.J - *10/2, isto é a metade -***, demonstra a dificuldade em lidar com os termos dos números fracionários. Nesse sentido, o participante usou o número (2) como denominador, quando deveria ter usado o número cinco. Abaixo, algumas respostas presentes nos protocolos da questão **7,** como segue:

- **P.G= cada criança ganhará 5 bolas. 10/5**
- **P.T: Cada criança receberá duas bolas. A fração que representa esta distribuição é 10/2, isto é, 1/2 (metade).**
- **P.J= Se a divisão for justa cada criança ganhará duas bolas. 2/10.**
- **P.H= Duas bolas. 2/5**

A questão **9,** sobremaneira conhecida em contextos educativos, aparentemente demonstra lidar com situação de domínio dos professores a partir do modelo apresentado. Nesta situação, o intuito também é possibilitar ao professor perceber que a divisão é uma boa estratégia de resolução, bem como averiguar a abordagem conceitual que os professores utilizariam para justificar essa partição. Esta questão se encontra a seguir.

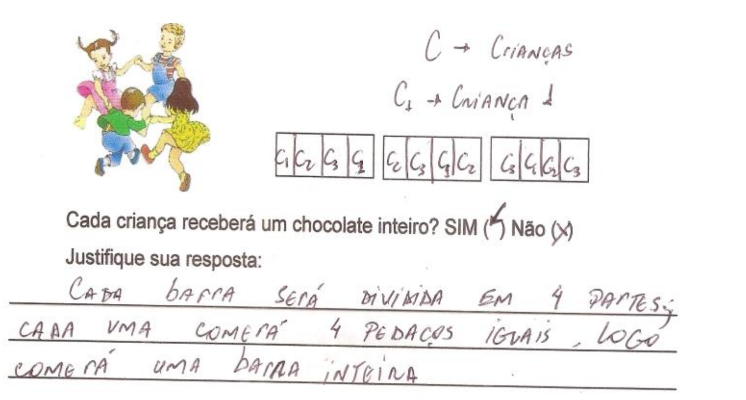
QUESTÃO 9 - Foram divididas igualmente para 4 crianças, 3 barras de chocolate. Marque com um X a resposta que você considera correta.

Cada criança receberá um chocolate inteiro? SIM ( ) Não ( ) Justifique sua resposta:

**Em relação a primeira pergunta:**
**Dezenove respostas aceitáveis (90,4%)**
**Duas respostas não aceitáveis: (9,5 7%)**
**Em relação as justificativas: Quatro respostas aceitáveis de forma substancial do ponto de vista matemático (19%). Dezessete respostas não aceitáveis de forma substancial do ponto de vista matemático (80,9%)**

Esta situação-problema envolve dois itens: o primeiro como pertencente ao contexto escolar e pouca exigência de domínio conceitual, a qual, nove professores apresentaram notação, o segundo item que solicita ao professor justificar suas respostas, como pode ser visto abaixo, foram elementares. Em relação a pergunta ***cada criança receberá um chocolate inteiro*** os professores apresentaram um bom desempenho com notações como segue: 3/4; 1/4; 0,75. A notação 0,75 demonstra que o professor **P.R** relacionou números relativos em suas representações fracionárias e decimais porém, em termos de contexto, a situação requeria o emprego da notação fracionária. Das respostas consideradas não aceitáveis trago o exemplo de um professor que considerou que cada criança comeria uma barra inteira de chocolate, como foi a resposta do professor **P.P** como exposto a seguir

**P.P=**


C → CRIANÇAS
$C_1$ → CRIANÇA 1
| $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_2$ | | $C_3$ | $C_4$ | $C_2$ | $C_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|

Cada criança receberá um chocolate inteiro? SIM ( ) Não (X)

Justifique sua resposta:

CADA BARRA SERÁ DIVIDIDA EM 4 PARTES; CADA UMA COMERÁ 4 PEDAÇOS IGUAIS, LOGO COMERÁ UMA BARRA INTEIRA

De acordo com este protocolo, quando o professor parece preparado para usar a representação visual para auxiliar sua compreensão sobre a situação-problema, ele considera quatro inteiros e não três inteiros, o que o leva a crer que cada criança receberá uma barra de chocolate. Isso reforça as críticas já citadas em relação ao ensino de números fracionários pela compreensão quase que exclusiva na representação figural.

No significado quociente, posto na questão **9**, mais do que perceber o domínio conceitual solicitado na primeira pergunta, o intuito era provocar os professores a justificarem suas respostas com o propósito de analisar os argumentos anunciados se estes eram revestidos de um domínio conceitual substancial ou não do ponto de vista matemático. Mediante os protocolos é possível perceber que, quando os professores justificavam suas respostas – sem perder de vista - que são professores especialistas seus argumentos ficavam em nível de senso comum e, assim, é possível indicar que o conhecimento de base (domínio conceitual) apresenta-se frágil, como pode ser visto nos excertos que seguem abaixo:

**P.E= Não. O número de criança é maior que a quantidade de barra de chocolate, por isso, cada criança receberá uma parte da barra.**

**P.J= Não é possível distribuir igualmente 3 barras de chocolate para 4 crianças sem parti-las.**
**P.L= Não. O número de barras é menor que o número de crianças, logo cada criança receberá uma porção menor que uma barra.**
**P.M= Não. Há mais quantidade de crianças que chocolate.**

O significado **quociente** possibilita compreender a relação entre fração e divisão, ou seja, possibilita um alargamento conceitual para compreender que, no campo dos números fracionários, a divisão é uma estratégia possível. Nesses termos, conhecendo o número de grupo a ser formado, o quociente representa o tamanho de cada grupo. No caso da questão **9** – três chocolates para quatro crianças -, como significado quociente, a fração corresponde à divisão (três chocolates para quatro crianças) e, também, ao resultado da divisão (cada criança receberá 3/4).

No que diz respeito às justificativas dos protocolos apresentados acima, é percebido o distanciamento conceitual entre os argumentos usados pelos professores e o domínio das estruturas conceituais internas que constituem o corpo de conhecimento existente nos números fracionários.

Mediante o exposto, é possível levar em consideração que o significado **quociente** causou estranhamento em relação à situação-problema apresentada na questão **7.b**, bem como demonstra que, na questão **9**, em relação as justificativas apresentadas, este mesmo significado/subconstrutor não é desconhecido, mas não foi exposto com propriedade, ou em termos de Shulman (1986) *não foi expresso como conhecimento substantivo.*

- **B.3. Significado Operador Multiplicativo**

QUESTÃO 14

Em uma gincana estudantil, os três primeiros alunos que terminaram as tarefas ganharam um determinado número de bolas, do total de 35 conforme a classificação. Paulo ganhou 4/14 de bolas, Daniel 1/7 e Tiago 4/7. Responda quem ficou em 1º, 2º e 3º lugar respectivamente?

Dezenove respostas aceitáveis (90,4%)

Duas respostas não aceitáveis (9,5%)

Nesta situação é possível utilizar como estratégia o significado de operador multiplicativo, como uma máquina de transformação. Como visto, esta situação parece ser de domínio dos professores, porém, somente sete professores usaram esse recurso, oito não explicitaram a estratégia utilizada, três fizeram a simplificação de 4/14 para 2/7 e um professor usou o M.M.C para chegar ao resultado. Duas respostas foram consideradas não aceitáveis do ponto de vista matemático, entre essas chama atenção o procedimento do professor **P.L** apresentada no recorte abaixo:

**40 : 7= 0,57**

**40 : 14= 0,2..**

**0 : 7= 0,14**

**QUESTÃO 13**

**Raquel vai doar para a sala de leitura 3/6 da quantidade de livros desenhados abaixo. Quantos livros Raquel vai doar?**

**Vinte e uma resposta aceitáveis (100%)**

O significado **operador multiplicativo** parece ter boa aceitação pelos professores investigados, uma vez que quinze professores realizaram procedimento que envolvem a concepção de números fracionários como máquina de transformação (multiplicação-divisão) e seis professores manifestaram realizar a simplificação de 3/6 explicitando a relação de equivalência entre **3/6 e 1/2**.

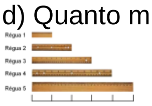
- **- B.4 Significado Medida**

A ideia de **medida** é usual no cotidiano docente principalmente quando se fala em sistema métrico em que os números decimais assumem papel de protagonistas. Isto, pode fazer com que o uso deste componente curricular fique despercebido. Isto compromete compreender a relação do significado de números fracionários como **medida**.

O uso de situações como **medida** possibilita o desenvolvimento de habilidades de pensamento que convergem para a compreensão de números fracionários com valor maior que um o que possibilita o desenvolvimento da noção de equivalência.

Apresento, a seguir, uma situação-problema pensada para este contexto.

QUESTÃO. 10. Observe as réguas abaixo e responda as perguntas:
a) Quanto mede a régua 2 tomando-se a régua 1 como unidade?
b) Quanto mede a régua 1 tomando-se a régua 4 como medida?
c) Quanto mede a régua 3 tomando-se a régua 5 como medida?
d) Quanto mede a régua 4 tomando-se a régua 3 como medida?




Respostas dos itens a, b, c, d.
A = 100% aceitáveis. B= Vinte respostas aceitáveis (95,2%) e uma não aceitável (4,7%)
C = vinte respostas aceitáveis (95,2%) e uma não aceitável (4,7%) -
D= Em relação a esse subitem foram registradas as seguintes respostas

- Quinze respostas aceitáveis (71,4%), sendo as notações 4/3 ou 1 1/3.
- Seis respostas não aceitáveis (28,5%)

Como observado nesta questão, a de número **10, o subitem 10.c** apresenta ordem crescente de **medida** em que a menor cabe um número de vezes exato na medida a ser pedida. Nesse sentido, há uma lógica de fração unitária. Esta lógica, contudo, não corresponde ao subitem **10.d** em que se percebe a dificuldade dos professores para trabalhar a unidade-referência.

Mediante a análise dos dados, das quinze respostas dadas como aceitáveis, três estavam na forma de número misto (1 1/3), o que indica que os professores manifestam compreender o problema cuja resposta também poderia estar na notação (4/3). O tipo de problema apresentado no subitem **d** é um indicativo de situação facilitadora para geração de frações mistas, porém, a partir da análise dos protocolos, é possível concluir que alguns professores explicitam ter pouco domínio nesse contexto. Neste item, ao realizar a comparação entre o comprimento de uma régua menor sobre uma maior, de forma que a menor não caiba um número inteiro de vezes na maior, exige-se, que a comparação seja propiciada pela visualização da medida como o número de vezes que a régua menor cabe na maior, resultando numa fração imprópria, ou num número misto.

QUESTÃO 15

Jogando apenas uma vez um dado de seis faces, qual a fração que representa a chance de tirar o número 3?

**A) Vinte respostas aceitáveis, isto é, 1/6 (95,2%)**
**Uma resposta não aceitável, isto é, 2/6 (4,7%)**

Esta situação envolve números fracionários cujo conceito de probabilidade é a chave do pensamento. A probabilidade é marcada pelo quociente de número de casos favoráveis dividido pelo número de casos possíveis. A probabilidade varia de 0 a 1 e a maioria dos valores que se pode trabalhar são representações fracionárias. Na situação exposta a probabilidade foi assumida como **medida**, que corresponde à fração 1/6. No item **a** os professores deram respostas quase cem por cento aceitáveis do ponto de vista do esperado.

O significado **medida**, como já evidenciado, é bem empregado em situações em que a probabilidade esteja presente como é o caso da questão **15a,** porém, quando o texto apresentado traz modelos como o da questão **10d – medida no contexto da fração imprópria,** observa-se que, mais uma vez, o comportamento se repete e a dificuldade recai sobre a compreensão da conservação da unidade, ou de frações impróprias, em contextos não usuais, diferentes, como os propostos, a exemplo os apresentados em livros didático - Silveira e Marques (2006). Então, é possível indicar, a existência de um habitus didático no que se refere ao tratamento dos números fracionários em determinados contextos, gerando uma atitude rotineira que possivelmente interferirá na eleição de certas situações didáticas para trabalhar com números fracionários.

- **- B.5. Significado Número**

Neste significado é assumido que a notação $\frac{a}{b}$ expressa um número na reta real, se considerado a relação biunívoca entre o número fracionário e um número real e os pontos na reta.

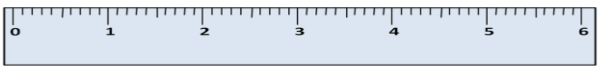
Nas suas manifestações, os professores apresentam baixo desempenho neste significado e, assim, a ideia de fração emerge presa a um significado que impede compreendê-la como número. Isto quer dizer que, consequentemente poderá incidir na aprendizagem dos estudantes.

O conjunto dos números fracionários pode ser a extensão do conjunto de números inteiros, de modo que se possa estender as operações aritméticas (+,-,x,:) de inteiros aos números fracionários, então é possível perguntar de que maneira os professores que não atribuem ao significado de número às frações poderão auxiliar os alunos na construção significativa do conceito de fração

Questão 14

Identifique as frações: a) 1/2; b) 1 3/4; c) 3/12 e d) 5/2 na régua abaixo:

Seis respostas aceitáveis (28%), Quinze respostas não aceitáveis (71,4%).



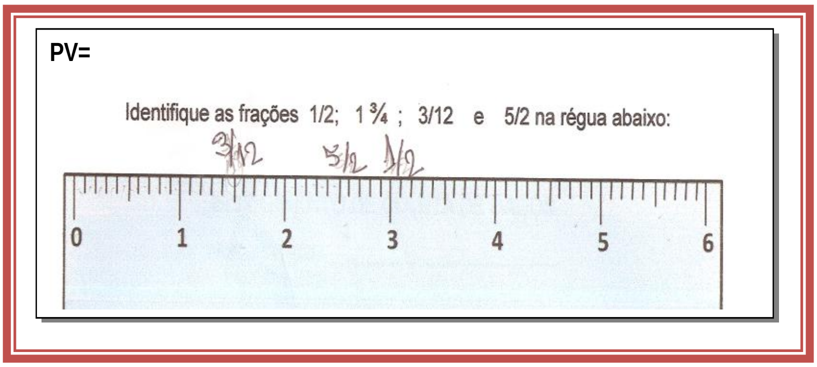

Na localização do número fracionário 1/2 na régua graduada, conforme proposição dos professores, oito (38,0%) deram respostas aceitáveis localizando-o no ponto 0,5. Onze professores (52,3%) localizaram 1/2 como sendo a metade da régua, ou seja, indicaram ser o número 3 o ponto referência solicitado. Um professor indicou ser o ponto 0,7 a resposta correspondente e um professor não respondeu.

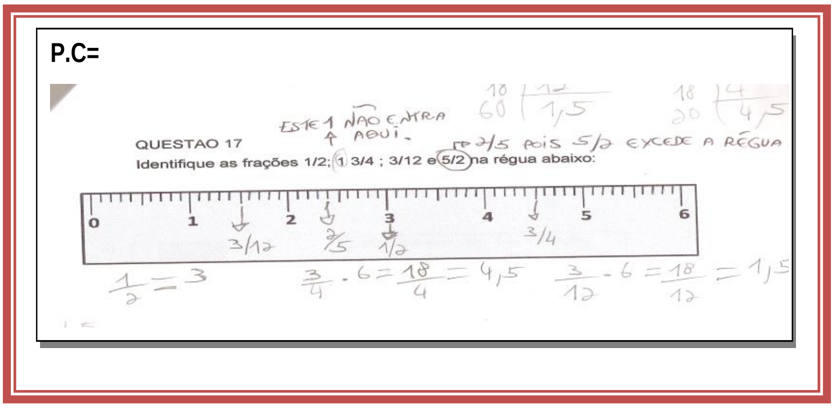
A localização do número misto 1 3/4 também conserva o mesmo número de acerto. No total, oito professores localizaram 1 3/4 como sendo correspondente a 1,75 (38,0%), expressando as respostas aceitáveis porém, sete professores (33,3%) responderam que seria impossível localizar o número solicitado e, assim, isolaram a parte inteira tentando localizar somente a parte fracionária, seis professores não localizaram o ponto na régua.

A fração própria 3/12 teve nove respostas aceitáveis do ponto de vista matemático resultando em 42,8% das respostas obtidas, isto é, nove professores localizaram o número 3/12 no ponto 0,25 da régua. Porém, nove professores indicaram ser a localização 1,5 (42,0%) como resposta certa e três professores não responderam.

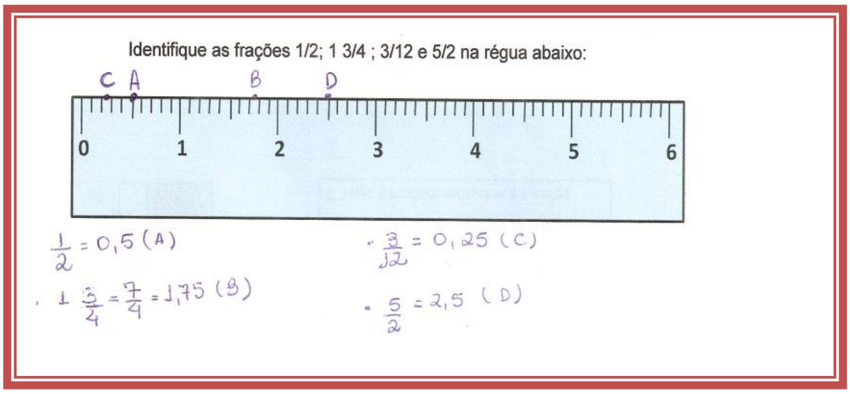
A fração maior que o inteiro 5/2 que poderia ser escrita na forma de número misto apresenta treze respostas aceitáveis, ou seja, cerca de (61,9%) dos professores localizaram na régua o ponto 2,5. Um professor respondeu ser o ponto 5,5 a resposta correta, quatro professores indicam ser necessário mais uma régua somando 15 cm para poder localizar a fração 5/2 na régua e três professores não responderam a questão. Dado o resultado da questão **14**, a seguir, apresento alguns excertos.

O protocolo do professor **P.T** registra o domínio conceitual dos aspectos lógicos em detrimento dos aspectos perceptivos como relatado nas pesquisas de Mack (1990), entre outros**:**



**P.T**




Como visto, o domínio conceitual na reta numérica ou no significado Número parece merecer destaque, pois o nível de compreensão dos professores nesse tipo de situação/significado parece fragilizado, uma vez que, dentre todos, seis professores conseguiram localizar todos os pontos. Para autores como Kieren (1988), Behr, Lesh, Post, Silver (1983) e Wu (2002), entre outros, compreender o significado **número** como aspecto construtor de números fracionários é um ponto fundamental para o domínio dos números racionais.

Conforme Damico (2007:7) a ausência do domínio deste significado pelo professor o impossibilita de perceber as vantagens deste significado em relação aos demais. E assim, afirma que dominar situações como esta possibilita ao sujeito aprendente compreender o seguinte:

**a)** Os tipos de problemas envolvendo a localização de pontos na reta numerada ou vice-versa fazem com que os alunos concebam as frações como os números naturais;

**b)** A ideia de que os números racionais são uma extensão dos números inteiros, bem como a ideia de que os números inteiros também são racionais;

**c)** As frações impróprias (frações maiores que a unidade) e as frações mistas (3 1/2) apareçam de forma natural;

**d)** As propriedades topológicas da reta, tais como a densidade dos números racionais seja vislumbrada;

**e)** A reta numérica pode ser um instrumento de construção do significado de equivalência e de ordem dos números fracionários, além de servir como modelo representacional para auxiliar a compreensão das operações básicas com frações.

A reta numérica, segundo a literatura consultada, aparece como elemento potencial para a aprendizagem dos números fracionários oportunizando ao aluno a passagem das ações concretas (uso de símbolos) ao pensamento abstrato (álgebra), pois num segmento de reta é *mais fácil perceber que a metade de* $\frac{1}{2}$ *é* $\frac{1}{4}$, Wu (2005). É importante ressaltar que os aspectos endógenos que constituem os números fracionários, os significados, não são desconhecidos pelos professores porém, seu domínio é manifestado de forma comprometida.

Como já dito anteriormente, o significado número tem possibilidades de contribuir para o desenvolvimento de habilidades cognitivas em relação à capacidade de se pensar o conceito de fração em seus múltiplos significados, bem como promover habilidades de pensamento para a aquisição de fator como a equivalência em relação aos números fracionários.

De acordo com os resultados dos enfoques **invariante** (enfoque.1) e **significados** (enfoque.2), é possível afirmar que ambos são manifestados, mas não coordenados.

Mediante o exposto, aponto como resultado que os professores do Ensino Básico em relação aos significados dos números fracionários apresentam o conceito de forma incipiente, não estabelecendo um conhecimento ancorado numa rede relacional, pois os significados tratados aparecem de forma isolada e predominante, enfatizando um de seus atributos endógenos/significados.

Assim sendo, é necessário reforçar que as **representações tipo** são um indicativo de que o professor deixa-se levar pela centração visual. Alguns professores não atentaram para o aspecto da representação do número, mas para a representação da régua. Isto ocorreu porque não é usual, mostrar uma reta numerada como uma régua, como foi proposto, mas como uma linha pontuada de números . Por isso alguns professores consideraram que as frações eram postos em relação à régua. Isso demonstra a necessidade de procurar propor aos sujeitos maior conjunto possível de representações de uma mesma situação. Isto quer dizer, usar-se de maneiras análogas. Preocupada com o mesmo tipo de representação, ou seja, com esta mesma questão, Canova (2005: 192) investigando professores das séries iniciais, obteve resultados correlatos, ou seja, os professores do primeiro ciclo do ensino fundamental também tiveram dificuldades de operar com este significado nesta representação o que foi corroborada por Teixeira (2008:198).

Visto como os professores apresentaram seus movimentos cognitivos em relação aos números fracionários, vale a pena ressaltar as orientações de Ausubel (1980) a de que o equipamento cognitivo humano não está preparado para lidar eficientemente e em longo prazo com as informações adquiridas mecanicamente. Como sabemos os conceitos em foco não são simplórios, mas exigem abstrações sofisticadas para a sua apreensão, daí a importância do enfrentamento pelo sujeito de um conjunto de situações. Isso nos indica a importância que tem, no processo de ensino, o professor pensar sobre a sequência didática eleita, pois esta, segundo a teoria ausubeliana, tem fundamental importância como organizador prévio para possibilitar ao estudante coordenar relações sobre o objeto matemático.

Embora não possa afirmar certos pressupostos em relação à empiria deste estudo, é possível mediante o esquema cognitivo apresentado pelos professores – ***representação tipo*** – inferir a forte presença da aprendizagem representacional conforme Ausubel, já referido, posto que, embora, fundamental e constituinte da plasticidade operatória cognitiva, o domínio de um objeto de aprendizagem não pode se resumir a uma única organização didática. Mais que obter e construir os significados das palavras – dos sistemas de representação dos objetos de aprendizagem – é fundamental que a aprendizagem representacional venha possibilitar o desenvolvimento das aprendizagens proposicional e de conceitos.

Observando que os cinco significados, de acordo com Nunes et al, já referidos, são apresentados pelos professores em seus protocolos, posso, contudo, pontuar a seguinte síntese: a de que o campo conceitual de números fracionários não é transversal e integrativo a estes.

Vale ressaltar que o significado **medida**, quando apresentado de forma expressa ao conceito de evento (probabilidade), tal como na questão **15.a**, os professores expressam dominá-lo, mas, quando em outra representação esse mesmo significado é solicitado, como na questão **10.d**, o professor utiliza-se de esquemas que não são adequados à situação, ou melhor, os seus conhecimentos prévios, passam a necessitar de princípios organizadores cognitivos para a apreensão conceitual, chamados por Ausubel (2003) de **reconciliação integrativa**, para que o sujeito aprendente possa rever os conflitos existentes.

Em outra frente analítica, pode-se trazer Vergnaud (1999), e neste caso, atente ao fato de que embora o significado parte-todo seja basilar e próximo à formação de conceitos em termos de Ausubel, já citado, a racionalidade científica tratada no primeiro capítulo deste estudo indica o progresso interno que matematicamente esse conceito adquiriu. Considerando a organização do comportamento docente, é possível perceber que as situações, em que a fração não seja egípcia, ou seja, menor que 1, os esquemas são ordinários, ou seja, os esquemas acionados pelos professores dão conta da situação apresentada, o que juntamente com Vergnaud, já citado, pode-se dizer que o comportamento do professor expressa um certo *hábitos em usar certos* procedimentos.

Em termos gerais, um esquema que é um elemento cognitivo individual e universal, serve para dar conta de uma gama de situações porém, neste estudo, foi observado que, segundo a teoria dos campos conceituais, os esquemas ordinários que seriam necessários para dar conta do conjunto de situações apresentadas não estão automatizados, ou seja, não dão conta de forma qualitativa do conjunto de situações apresentadas, o que, por conseguinte, vai requerer o emprego de vários esquemas. Logo, se o significado nos moldes da TCC vem a ser as relações que o sujeito estabelece com as situações e com os significantes, então posso intuir que, pelos esquemas evocados, por parte dos professores investigados me permite então considerar que a compreensão de números fracionários são significados pelos sujeitos nos moldes da racionalidade mítica, com ênfase no significado parte-todo, o que, por sua vez, não há nessa assertiva nenhum caráter valorativo, ou seja, os professores significam o conceito de números fracionários ainda de forma incipiente.

Levando em conta as leituras correlatas em relação às categorias teóricas *números fracionários* - TCC e Aprendizagem Significativa, esta seção apresentou o objeto de estudo na perspectiva da TCC como um tripleto, em que **S** é o conjunto de situações (referente) como sendo os cinco significados, **R** como sigficante/representação simbólica, **I** invariante com a opção do invariante equivalência. Neste contexto, em termos ausubelianos, a compreensão docente indica advir de uma experiência em que a aprendizagem ocorre de forma subordinada com viés da aprendizagem subordinativa derivativa porque o conjunto de situações foi ancorado em determinados significados, ou seja, em exemplo pré-existente (parte-todo, operador multiplicativo), sem induzir a presença de uma extensão entre este e a habilidade exigida nas situações maiores que 1, o que de certa forma indica que a aprendizagem docente necessita de princípios que eliminem conflitos cognitivos existentes – reconciliação integrativa, para que, a partir de experiências nesse âmbito, o professor adquira a chamada organização hierárquica de estruturação lógica dos objetos conceituais como forma de alcançar a aprendizagem significativa.

### 6.3. Síntese analítica sobre os significados de números fracionários

É possível concordar que o conjunto de situações apresentadas aos professores poderia ser resolvido por significados/subconstrutores eleitos pelos próprios professores para solucionarem as situações-problema postas, pois o significado para os objetos de aprendizagem matemática, segundo Vergnaud (1993), diz respeito ao sujeito aprendente que, através de suas manifestações e de enfrentamento em relação às situações a ele apresentadas, passa a eleger procedimentos que o possibilite chegar a determinadas respostas.

As situações apresentadas encontram-se alimentadas por autores como Kieren (1989) ,Post (1981), Behr (1992) e Nunes *et al*. (2003), fundamentalmente, parti de situações que já são desenhadas com o indicativo dos significados/subconstrutores apresentados por esses autores. Desta forma, foram eleitas situações que abrangessem os cinco significados: parte-todo, medida, operador multiplicativo, quociente e número.

Em todos os significados foram acenados dois indicadores que, se não mais importantes, pelo menos serviram como uma das bússolas para indicar algumas aproximações conclusivas neste estudo, são eles: as respostas aceitáveis e as respostas não aceitáveis do ponto de vista matemático sem com isso reduzir a análise a dados meramente quantitativos. O termo respostas aceitáveis também será usado neste texto como sinônimo de resultados qualitativos e os pontos não qualitativos serão sinônimos de respostas não aceitáveis.

Em termos qualitativos no enfoque invariante – equivalência -, é possível considerar que o conceito, em termo geral, não é desconhecido pelos professores, principalmente quando apresentado em situações rotineiras, como é o caso da questão **1**– equivalência em relação a 1/3. Já em situações como as de número **6- equivalência em relação à notação 1/4 e 11.a equivalência/medida** não foi percebido o mesmo desempenho.

Quanto aos significados, foi possível perceber que os professores apresentaram resultado qualitativo principalmente em situações cujo significado é a relação parte-todo em contextos de frações unitárias como visto nas questões **4 e 5 – parte-todo em quantidades contínua e discreta menor que 1**. Quando este significado é solicitado em situações como as questões de número **3 e 8 parte-todo no contexto da fração imprópria -,** extrapolação do inteiro, percebe-se nitidamente a dificuldade de solucionar a situação posta.

Outro resultado qualitativo foi o significado operador multiplicativo encontrado nas questões **12 e 13**, questões que os professores manifestaram domínio em quase cem por cento das respostas dadas. Pesquisa como a de Merlini *et al*. (2005) apontou que esse significado é um dos mais potencialmente trabalhados pelos professores do quinto e sexto anos do Ensino Fundamental, o que concorre de maneira análoga para que situações que envolvam esse significado tendam a apresentar domínio pelos professores.

Verificando-se o significado medida nos itens da questão **10 (10.a. 10.b e 10c)**, **significado medida utilizando réguas como representação visual menor/igual a 1**- o domínio conceitual também é qualitativo e, mais uma vez, pode-se confirmar a presença do significado parte-todo em frações unitárias como ponto-chave da ideia de fração unitária pelos professores investigados, haja vista, o número de acertos. No entanto, no subitem 10.**d** em que a relação posta exige aplicação de um conhecimento reversível, ou de outra forma, a ideia de fração extrapola a ideia parte-todo em contexto envolvendo o significado medida, os professores apresentaram certo atropelo.

Em relação à questão quinze, em que fração como medida também é solicitada, foi observado que no subitem **15.a** em que a probabilidade está vinculada a ideia de fração, os professores praticamente não manifestaram dúvidas, uma vez que o contexto parece ser usual.

Quanto ao significado quociente, é possível dizer que os professores possuem noção desse significado, porém as questões **7** e **9** apresentam resultados díspares. Na questão **9,** do ponto de vista de escores, as respostas aceitáveis/qualitativas foram superiores, pois dezenove professores apresentaram protocolos qualitativos. Porém, levando em conta as justificativas apresentadas para a partição solicitada no problema, considero do ponto de vista matemático, que as justificativas apresentadas são frágeis, ou seja, a base conceitual dos professores sobre o porquê cada criança receber(rá) 3/4 de chocolate é argumentada de forma não substantiva (sem expressão conceitual significativa).

Embora não se esteja enfatizando os tipos de grandezas (continua ou discreta), a questão que envolve o significado quociente em situações contínuas, como é o caso da questão **9,** em que foi distribuído igualmente para quatro crianças três barras de chocolate, obteve maior desempenho, porém na questão **7**, que envolve grandeza discreta, a escrita em número fracionário ficou comprometida. Outro aspecto que se deve levar em consideração é o conceito que os professores têm de conservação da unidade como todo-referência pois, como pode ser constatado nos protocolos apresentados, este conceito precisa de maiores intervenções no sentido de possibilitar aos professores passarem da compreensão simbólica para a compreensão conceitual abstrata.

Na questão **9 significado quociente**, a notação 10/5 parece ter incomodado os professores impedindo-os de registrarem como resposta aceitável, o que pode interferir no ensino quando se objetiva trabalhar com frações impróprias, pois segundo Santos (2005:157) *as situações no significado quociente também possibilitam ensinar frações com o numerador maior que um.*

Deste pressuposto é possível afirmar novamente que a ideia de números fracionários está presa a dois contextos apenas, pois compreendê-los como número exige domínio de caracteres com equivalência e, por conseguinte, o de ordem. Relacionando-se o conceito –

equivalência – nos enfoques apresentados, é possível dizer que em termos qualitativos este está fragilizado, isto porque para localizar números na reta real, a equivalência é fundamental. Estudos de Nunes *et al*. (2003) apontam para a importância da coordenação dos significados existentes nos números fracionários para que atributos como a equivalência sejam atendidos.

Considerando a formação profissional e as experiências desses professores com o ensino de matemática, o conceito de números fracionários mostra-se pautado na relação entre as partes e o todo, relação manifestada pelo pensamento mítico quando busca na lenda do Olho de Horus alguma explicação, ou nos primórdios da construção do conceito de números fracionários, as chamadas frações egípcias. Este resultado aponta para a necessidade de pensar na formação do professor da Educação Básica, pois para realizar uma mediação qualitativa em termos dos objetos de aprendizagem matemática *os professores devem ter conhecimento matemático para orientar seus alunos neste assunto bastante sofisticado*" (WÚ, 2002, p.122 ). Tal necessidade se faz entre outras, pela imbricação conceitual inerente aos números fracionários, pois do ponto de vista do ensino não se pode isolar tais significados, o que exige do professor habilidades para propor situações de ensino que os contemplem de forma significativa.

### 6.4. Ensejando compreensão a partir dos enfoques invariantes e dos significados de números fracionários

Uma das grandes contribuições da Teoria dos Campos Conceituais vem a ser a crença de que, no processo de significação dos objetos matemáticos, existe uma indissociabilidade entre resolução de problemas e formação de conceitos no saber escolar, pois, se pensarmos nos moldes de Vergnaud (1996), um conceito é algo em permanente processo de devir, estamos sempre nos aproximando de sua objetividade, generalidade e universalidade, sem considerá-lo uma entidade acabada. Este autor esclarece que, para o aluno, o sentido de um conceito está fortemente associado à atividade de resolução de problemas, assim sendo, pode-se afirmar que é nesse contexto que o aluno pode desenvolver sua compreensão do sentido inicial dos conceitos e teoremas matemáticos. Esse preâmbulo quer dizer da importância do domínio de um saber da matéria em âmbitos substantivos por parte do professor para que os conceitos matemáticos possam ser trabalhados de maneira significativa.

Vergnaud (2009), Magina *et al*. (2001) Magina e Campos (2004) apresentam em termos do conteúdo matemático os *problemas tipo*, ou seja, mostram que na resolução de operações aritméticas há grupos de problemas que exigem certas habilidades cognitivas, no caso deste estudo, o conjunto de situações no enfoque *invariante* equivalência e os cinco significados pode-se dizer das *representações tipos* que, como fora observado, os professores demonstram centração por determinados tipos de representação.

Nesses termos, de maneira geral posso assumir juntamente com a Teoria dos Campos Conceituais a ideia de que *a forma operatória do conhecimento é a fonte e o critério desse conhecimento* Vergnaud (2000: 12), ou seja, é fundamental o professor compreender o que conhece como forma de usar critérios para a utilização de **situações** que favoreçam no ensino a utilização da operatividade cognitiva como fontes dos processos de acomodação e assimilação do conhecimento. Para possibilitar essa vivência ao estudante é preciso que o professor possua um conhecimento tal a respeito do conteúdo a ser ensinado e as relações desse conteúdo com as tarefas a serem desenvolvidas no contexto da aula.

O conjunto de situações apresentadas neste estudo demonstra que os professores do sexto ano do Ensino Fundamental expressam um entendimento de números fracionários de forma ainda incipiente, ou seja, se a formação de um conceito é realizada a partir de experiências ou conhecimentos prévios em meio a um conjunto de situações coordenadas pelo sujeito por meio de uma síntese, então esta síntese, segundo os dados analisados, não revela a existência de uma extensa e complexa rede de relações envolvendo o objeto em estudo. Isto pode advir de uma leitura conceitual ainda em construção por parte dos professores. Vergnaud (2000:19) chama atenção para o fato de que leitura/apreensão do símbolo é apenas a parte visível do iceberg conceitual e como vimos na leitura simbólica como é o caso das **questões: 14 - frações enquanto número** e questão **10.d** ou figural como é o caso **da questão. 1 - que trata de equivalência em representações tipo,** entre outras. Os resultados apontados demonstram que o domínio conceitual dos professores reside justamente nesse iceberg, ou seja, parece haver maior domínio em aspectos diretamente comunicáveis sobre os números fracionários que em seus aspectos conceituais, endógenos.

Com isso é possível afirmar que os professores deste estudo explicitam a aprendizagem de tipo subordinada com viés da aprendizagem derivativa porque o conjunto de situações foi ancorado, em determinados significados, em exemplo pré-existente (parte-todo, operador multiplicativo), sem induzir a presença de uma extensão entre estes e a habilidade exigida em outras na situações.

## 6.5. ENFOQUE – 3 Análise dos resultados sobre os Números fracionários envolvendo a situação 3/5

Este enfoque[42] atende somente a segunda questão cujo objetivo é verificar se os professores ao elaborarem uma situação-problema explicitam, ou não, os cinco sentidos de números fracionários já citados neste estudo. De acordo com os dados apresentados este enfoque contará com as seguintes sequencias analíticas: (l) resultado dos cinco significados; (ll) mapas conceituais dos conteúdos listados; (lll) mapas conceituais dos livros didáticos.

- **Resultados sobre os Significados de números fracionários emergentes da situação 3/5**

Como esta questão é de caráter aberto o professor tinha liberdade de criar situações que ele julgasse contemplar a(s) ideias(s) de números fracionários. O quadro abaixo apresenta as respostas referentes aos subitens 2.a e 2.b, questão 2.

Quadro 3 - Respostas dos docentes para a notação 3/5

| *Questão 2. A representação 3/5 faz parte das vivências com o conceito de fração em sala de aula.a) Que(ais) exemplo(s) você poderia criar para trabalhar esse conceito? B)Que(ais) conteúdos matemáticos você identifica nesta situação?* | |
|---|---|
| *Exemplos apresentados (%) - subitem **2.a*** | *Conteúdos relacionados – subitem **2.b*** |
| **Parte-todo:** 15 de 21 professores, ou seja, aproximadamente 71% dos professores. | ✓ *Razão;*<br>✓ *Porcentagem;*<br>✓ *Fração*<br>✓ *Fração própria;* |
| **Operador Multiplicativo** 7 de 21 professores, ou seja, aproximadamente 33% dos professores. | ✓ *Divisão entre numerador e denominador;* |
| **Medida:** 2 de 21 professores, ou seja, aproximadamente 9% professores | ✓ *Números decimais*<br>✓ *Números racionais;*<br>✓ *Operações fundamentais* |
| **Quociente:** 1 de 21 professores, ou seja, aproximadamente 4,5% dos professores. Este sujeito não elaborou a situação matemática. | ✓ *Proporção;*<br>✓ *Probabilidade*<br>✓ *Matemática financeira.*<br>✓ *Divisibilidade e velocidade.* |
| **Número: 0,0%** | *Quatro professores não listaram nenhum conteúdo.* |

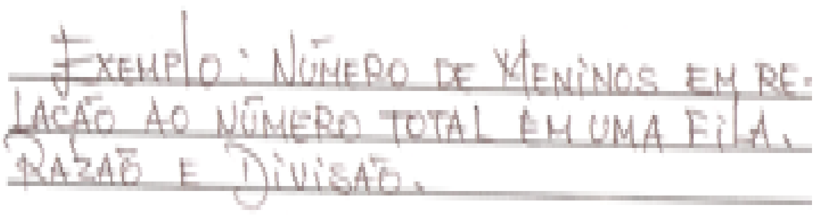
Fonte: Teste diagnóstico.

[42] Nenhum professor registrou explicitamente a ideia de NUMERAL ou QUOCIENTE. $OBS_2$: Como os professores **PI** e **PJ** apropriaram-se de mais de uma ideia a porcentagem não possui como total a notação 100%.

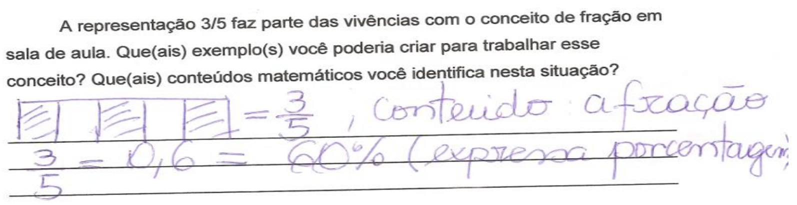
As situações elaboradas apresentam exemplos clássicos como situações envolvendo pizza e barra de chocolate num contexto visual com quantidades continuas. Como já citado, a ênfase no significado parte-todo, em contexto contínuo, pode levar o professor, em suas atividades diárias, a *uma falsa impressão de que esta situação foi compreendida e respondida pelo aluno com propriedade,* Nunes e Bryant (1997). Esta ênfase em determinados significados pode advir da preocupação do professor em elaborar situações ligadas ao dia-a-dia dos estudantes. Nos exemplos registrados nenhum exemplo fora trabalhado no contexto algorítmico, embora alguns professores tenham citado as operações com números fracionários, bem como não houve nenhuma situação envolvendo o invariante, equivalência.

Os resultados apresentados neste enfoque não se distanciam dos resultados do enfoque anterior – os significados -, pois os significados parte-todo, no contexto das frações unitárias, e operador multiplicativo são significativos na elaboração de problemas pelos professores, como pode ser observado:

**P.B:**


EXEMPLO: NÚMERO DE MENINOS EM RE-LAÇÃO AO NÚMERO TOTAL EM UMA FILA. RAZÃO E DIVISÃO.

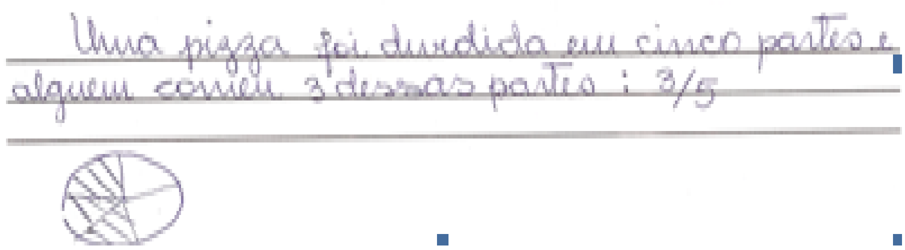
**P.N**= 3/5, conteúdo de fração. 3/5 = 0,6 = 60% (expressa porcentagem).


A representação 3/5 faz parte das vivências com o conceito de fração em sala de aula. Que(ais) exemplo(s) você poderia criar para trabalhar esse conceito? Que(ais) conteúdos matemáticos você identifica nesta situação?

$= \frac{3}{5}$, Conteúdo: a fração

$\frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%$ (expressa porcentagem)

**P.R**


Uma pizza foi dividida em cinco partes e alguém comeu 3 dessas partes: 3/5

**P.P**: Três de cinco bananas estão estragadas na merenda da escola.

x 3/5 CAPACIDADE DA LOTAÇÃO DE UM ÔNIBUS; QUANTO FICAR A CAPACIDADE

x 3/5 DO TAMANHO DE UM TERRENO, ÁREA DE UM TERRENO

De posse da análise dos protocolos posso indicar que nenhum docente propôs uma situação contemplando os cinco significados, aliás, os exemplos foram apresentados mais em termos de orientação, como por exemplo, *o uso de fração em relação a uma quantidade, partição de um todo em partes iguais, que em termos de uma situação-problema propriamente dita.*

As situações enunciadas pelos professores apresentam-se com ênfase em aspectos de dupla contagem, por exemplos: identificar as partes hachuradas a partir de desenhos de barra de chocolate e pizza - **significado quociente.** Esse procedimento tem sido apontado preocupante para o ensino, pois tal ênfase pode induzir que se despreze a conservação das áreas, como detectado por pesquisadores como Campos *et al*. (1995) Nunes (2003). Merlini (2005) Moutino (2005) e Canova (2006) entre outros. Este tipo de erro ocorre pela falta de atenção às propriedades geométricas das figuras ou das partes usadas para introduzir o conceito de fração.

Em relação aos conteúdos que possam se relacionar aos números fracionários os professores listaram aqueles que de fato estão presentes nos componentes curriculares do sexto ano, como é o caso de conteúdos como razão, proporção, probabilidade, embora nenhum exemplo apresentado tenha indicado qualquer inter-relação entre esses e a notação 3/5. Em síntese, tanto os significados, quanto os conteúdos que se relacionam a notação 3/5 são expressos pelos professores de forma usuais, o que incide em um ensino em que os objetos de aprendizagem são apresentados novamente de forma estanque e privados de aplicações em contextos diversificados.

- **Apresentação dos Mapas Conceituais referentes à situação 3/5**

Mapa conceitual foi pensado nesta secção no sentido de explicitar as evidências da organização conceitual que os professores atribuíram aos números fracionários. Para este momento apresento duas disposições: na primeira será apresentada a ênfase dos exemplos propostos pelos professores segundo os cinco significados de números fracionários, o que será chamado de diagrama geral dos significados apresentados na situação 3/5; a segunda, conta com a apresentação da listagem dos conteúdos vinculados ao conceito de números fracionários. De acordo com a análise dos protocolos, o conceito de números fracionários foi apresentado de forma enfática para dois tipos de significados, o significado parte-todo e operador multiplicativo.

Figura 8 - diagrama geral dos significados de números fracionários


Fonte: elaborada pela autora a partir da questão 2.

Dos vinte e um professores três apresentaram mais de um significado, isto porque os professores **PI e PJ** ofereceram mais de um exemplo porém, quando foi solicitado a elaboração da situação-problema, o significado medida não havia sido contemplado. O professor **P.F** também apenas indicou a *palavra quociente*, mas não elaborou nenhum exemplo, mesmo assim, a resposta foi considerada porque o professor indicou a possibilidade de empregá-lo em situações didáticas. No diagrama nota-se a ausência do significado número sem nenhuma referência, bem como vale lembrar que o significado quociente, mesmo que tenha sido citado, também não foi revelado como conceito usual nas vivências dos professores.

- **Apresentação dos significados do Mapa Conceitual dos conteúdos apresentados pelos professores à Questão 2 envolvendo a notação 3/5**

A partir dos protocolos foram elaborados quatorze mapas porque alguns serviram para mais de um professor. Cabe ressaltar que o professor (P.G) não registrou os conteúdos solicitados.

Tendo em vista as discussões sobre mapas conceituais, Moreira e Greca (2004) indicam que há várias dimensões e, neste estudo, serão tomadas duas: as chamadas *unidimensional* em que o diagrama é apresentado em forma de lista, uma maneira vertical *sem muita exploração interna dos conceitos, ou seja, quando é apresentado poucos conceitos sem que se possa inferir relações entre os mesmos (grifo meu),* que embora simples, permite uma visão mínima da estrutura conceitual e outra bidimensional, que tira partido também da dimensão horizontal, permitindo, portanto, uma representação mais completa das relações entre os conceitos. Levando em conta que mapas conceituais estão sendo usados neste estudo como ferramenta e não como método, passarei a denominá-los na seguinte ordem:

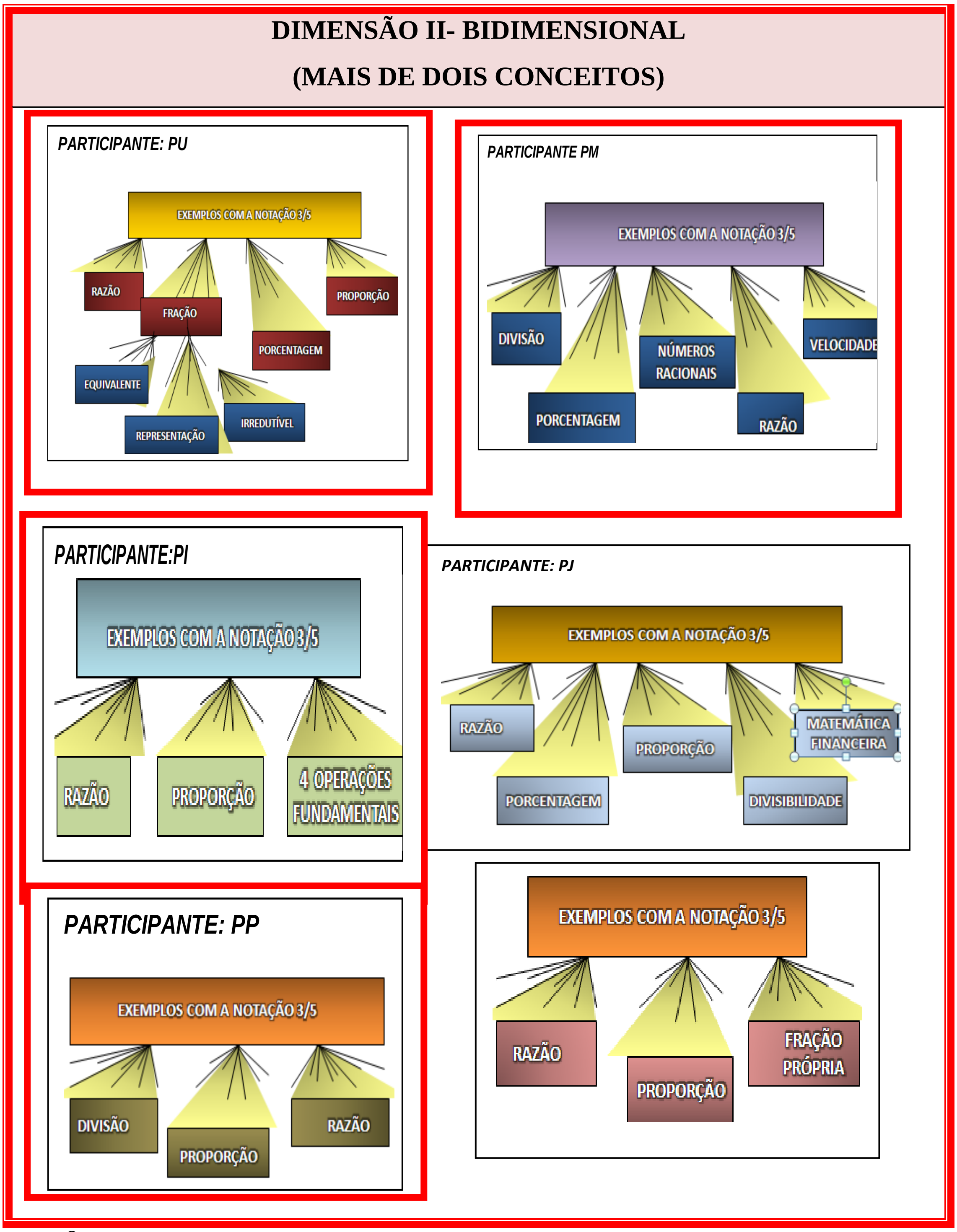
**a) Unidimensionais:**
(l) unidimensional 1: mapas que apresentaram dois conceitos diretamente ligados ao conteúdo disciplinar formal[43]; (ll) unidimensional 2: mapas que apresentam apenas um conteúdo diretamente ligado ao conteúdo disciplinar formal;

**b) Bidimensionais:** (i) bidimensional. 1: mapas que apresentam mais de dois conteúdos diretamente ligados ao conteúdo disciplinar formal, podendo inclusive se pensar no ensino de números fracionários de forma longitudinal, isto é para além do sexto ano.

Obviamente que, quando se usa mapa conceitual, a pretensão não é estabelecer sua existência como algo rígido, pois essa representação corresponde a um determinado momento em que a pessoa expressa elementos que naquele momento lhe é possível relacionar. A seguir apresento o resultado do mapa bidimensional.

[43] Estou me referindo como conteúdo formal aqueles prescritos pelos Órgãos Oficiais como os destinados ao sexto ano.

Quadro 4- Mapas Bidimensionais



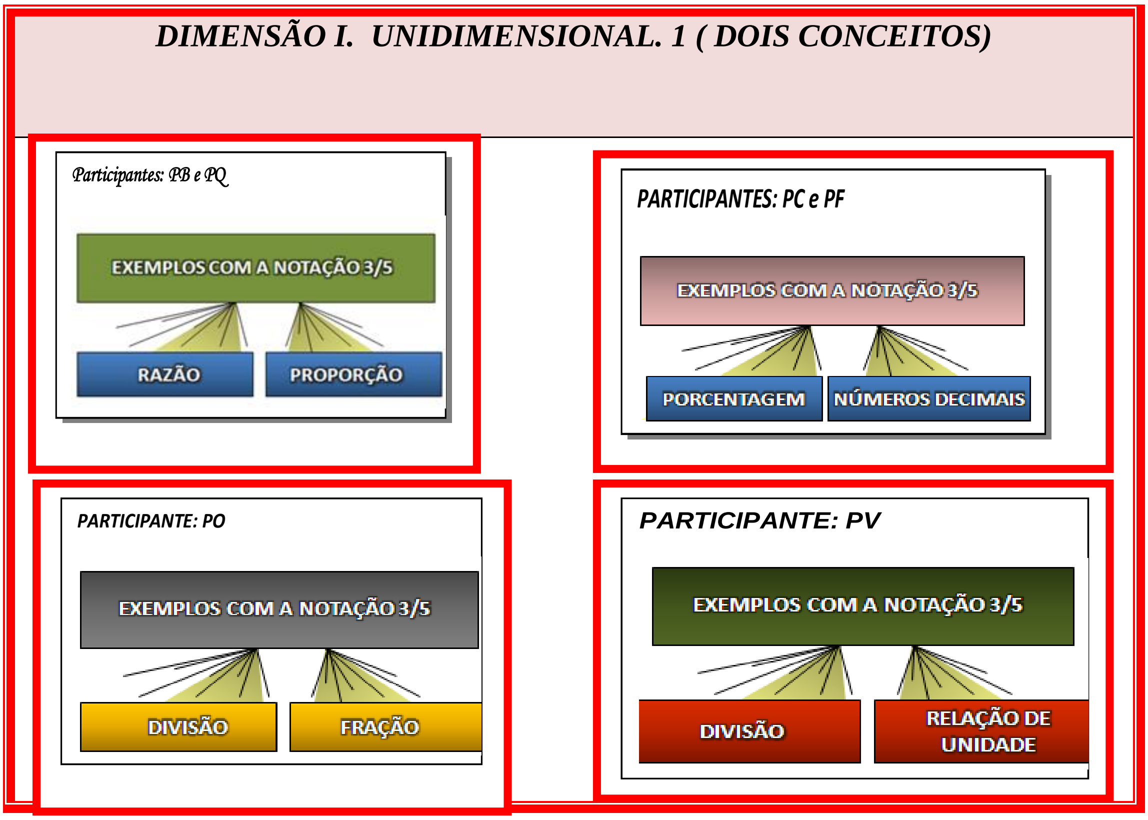

e

Fonte: Instrumento diagnóstico.

A apresentação dos mapas foi pensada em função de tornar as informações analisadas didáticas. Nesses termos, os mapas seguem critérios hierárquicos, ou seja, partem da dimensão bidimensional à unidimensional, isto porque estou partindo dos pressupostos ausubelianos que assume a estrutura de organização do conhecimento partindo do geral para o particular.

Pelo resultado apresentado na dimensão bidimensional os professores **PU** e **PM** elegeram mais conteúdos. Em termos gerais pode-se dizer que os conteúdos listados apresentam duas abrangências: uma ligada internamente no próprio conceito como: **fração própria, as quatro operações, equivalência e irredutibilidade** e outra, em que os conceitos se entrelaçam em nível longitudinal como: **velocidade, matemática financeira, porcentagem, probabilidade e razão**. Estes dois últimos são, segundo Nunes (2005), ligados diretamente ao significado medida. Nesses termos, é possível indicar a presença de uma estrutura conceitual com ênfase num repertório vinculado ao sexto ano do Ensino Fundamental.

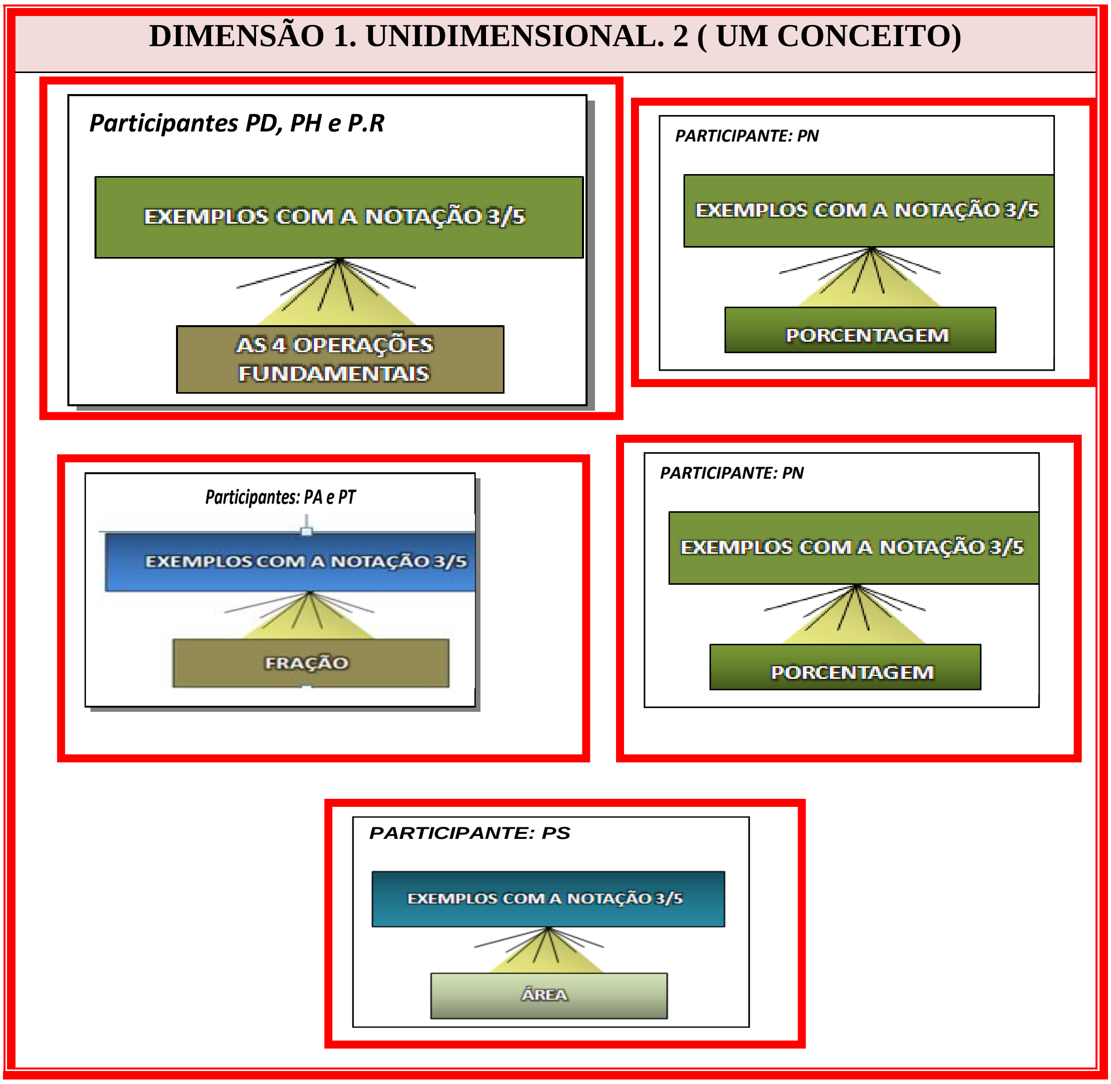
Quadro 5 - Mapa Conceitual Unidimensional.1




Fonte: Instrumento diagnóstico.

Relacionando estes mapas aos exemplos elaborados pelos professores à notação 3/5, como apresentados anteriormente, percebe-se que os conceitos demonstrados nos mapas não são contemplados na elaboração das situações propostas pelos professores. Embora sinalizem possibilidade de relacioná-los ao conteúdo **fração**, essa relação se apresenta no campo das ideias não se materializando no momento de elaborar um exemplo para a notação 3/5, o que reforça a influencia da **representação tipo** na compreensão docente.

Quadro 06 - Representação dos Mapas conceituais unidimensional. 2




Fonte: Instrumento diagnóstico.

Não se pode negar que existem expressões nos mapas que denotam a presença de conteúdos afins e que são fundamentais para a flexibilização do pensamento, o que favorecerá o desenvolvendo de funções psicológicas cada vez mais complexas. Como também não se pode negar que certos exemplos explicitados pelos docentes podem levar a intuir que aspectos como linearidade podem estar presentes na maneira de ensinar fração, a exemplo, os mapas unidimensionais em que poderá ocorrer a não valorização da problematização, elemento indispensável para a leitura de números fracionários como metaconceito.

No mapa **unidimensional 2, quadro 06 há** resultados com menor possibilidade de relações entre os conceitos afins e o conceito de fração. Esses conteúdos foram expressos sem nenhuma articulação com as situações-problema elaboradas para a notação 3/5.

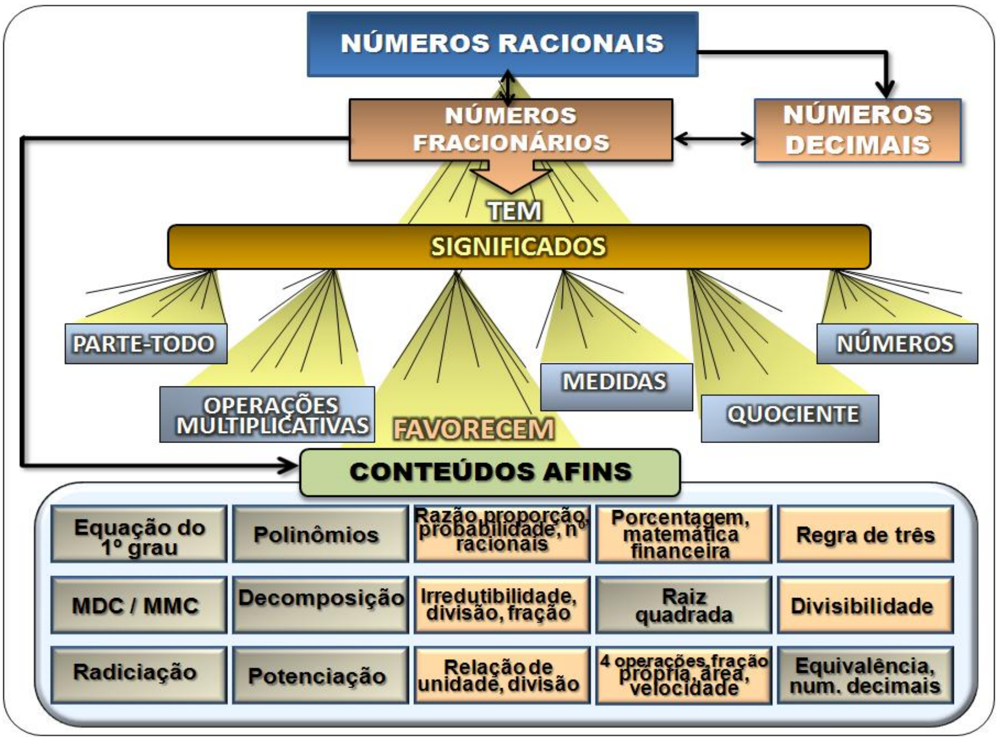
Em síntese, nos mapas considerados, unidimensional.I.1, quadros 5 e 6, é possível perceber a possibilidade de colocá-los numa relação horizontal em relação ao conceito de números fracionários, como por exemplo os mapas dos professores **PB e P.Q, P.C e PF.** Os mapas dos professores **PO (divisão e fração) e PV (divisão e relações de unidade)** demonstram no momento, uma estrutura conceitual em que os conceitos listados mostram-se de forma direta sem a possibilidade de vislumbrar o emprego de fração como ferramenta em outros conteúdos.

Diante das observações realizadas para o enfoque **5.3,** referentes à questão **2,** é possível concluir que, **os mapas conceituais apresentam um pequeno número de conceitos que podem estabelecer relações com a notação 3/5.**

Embora Moreira e Greca (2004) orientem não estabelecer julgamentos valorativos em relação aos mapas conceituais construídos, é inegável não chamar atenção para os mapas aqui apresentados porque, em se tratando de aprendizagem dos objetos de natureza matemática, os conceitos precisam ser estabelecidos num *conjunto de significados encaixados em um sistema de referência proposicional (*NOVAK E GOWIN: 1984, p. 14) .

Sabe-se que os mapas conceituais diferem de pessoa para pessoa indicando a possibilidade de representação variada e idiossincrática, mesmo assim, é possível indicar algumas possibilidades para a notação $\frac{3}{5}$ para o sexto ano. Para tal, cabe selecionar alguns conteúdos, pois como os números fracionários relacionam-se com grandes áreas do conhecimento matemático como aritmética, álgebra e geometria. Em cada uma dessas pode-se perceber maiores detalhamentos **como Álgebra I, II, III, Geometria Plana, Espacial** e demais tópicos vinculados. Por isso, conteúdos como **Semelhança, Funções Aritméticas, Trigonometria, Equações Algébricas, Polinômios, Números Complexos, Matrizes, Determinantes, Relações Métricas na Circunferência,** entre demais tópicos, podem ser apresentados em um determinado mapa. Como este estudo insere-se no âmbito do Ensino Fundamental, mais precisamente no sexto ano, o mapa conceitual apresentado a seguir leva em conta os conteúdos mais próximos deste nível de ensino.

Quadro 7 – Mapa Conceitual como possibilidade para o sexto ano do Ensino Fundamental




Fonte: elaborada pela autora.

## 6.6. Apresentação dos resultados do Mapa Conceitual da análise do livro didático

Neste estudo existe a hipótese de que o professor *ensina como aprende,* uma vez que este pode desenvolver suas práticas pedagógicas baseadas em vivências que tiveram ao longo de sua aprendizagem enquanto estudante, bem como de situações que permeiam suas experiências pedagógicas, como por exemplo, as atividades presentes nos manuais didáticos.

Nesses termos, surgiu a necessidade de analisar livros didáticos, no sentido de averiguar se há relação entre as ideias, as justificativas, as respostas dos professores e algumas atividades trazidas em livros-texto, o que pode induzir o professor a uma repetição de estratégias e introdução de tópicos conceituais sem um olhar apurado das formas como esses tópicos podem ser articulados dentro do seu próprio contexto conceitual.

Cabe ressaltar a importância de verificar nos livros didáticos qual(is) o(s) significado(s) de números fracionários que são mais evocados e de que forma esse resultado aproxima-se dos resultados até então encontrados. Destaco que os livros selecionados são utilizados pelos alunos dos professores investigados. Para esta análise os livros selecionados foram:

LIVRO **A:** Matemática compreensão e prática, de autoria de Ênio Silveira e Cláudio Marques Editora Moderna: 1ª edição.

LIVRO **B:** Matemática de autoria de Edwaldo Bianchini. Editora Moderna: 6ª edição, 2006.

LIVRO **C**: Matemática Ideias e Desafios Autores: Iracema Mori e Dulce Onaga. Editora Saraiva: 15ª edição- 2009.

Para melhor visualização serão apresentadas as seguintes categorias: (a) enfoque invariante: relativo à ordem e equivalência; (b) enfoque significados: corresponde aos cincos significados já referidos neste estudo; (c) enfoque conteúdos afins: conteúdos indicados pelos autores no contexto do ensino dos números relativos.

**a- Enfoque invariante**

Este enfoque aparece nas três coleções com ênfase em modelos estáticos com representação figural bem demarcada, enfatizando o emprego do algoritmo para se achar a classe de equivalência. Nesse patamar, pode-se reforçar as conclusões realizadas no **enfoque 1**, envolvendo a equivalência como nas questões **1, 6, e, 11** em que os professores centravam-se nas **representações tipo** e como possível motivo pode-se falar da influência dos livros didáticos. Os três livros dedicam um espaço (itens) bem pequeno para o tratamento deste invariante. Iniciam o tópico empregando a propriedade fundamental de frações e encerram as atividades de fixação, na verdade é apenas um sobrevoo.

O invariante ordem, no capitulo números racionais na escrita fracionária, também não merece muito destaque. Os livros B e C apresentam este invariante em contextos muito usuais como a passagem da escrita figural para a simbólica. Chama atenção o livro A, por apresentar o conceito de invariante ordem como *comparando números em forma de fração*, na página 127, que mesmo partindo de uma representação num contexto continuo e estático, como barra de chocolate, apresenta figuras com cortes visuais diferenciados, porém, a ênfase quanto ao reforço da aprendizagem fica por conta a aplicação do sinal de maior (>) ou menor (<) entre dois números fracionários o que necessita usar a propriedade fundamental, o que se repete nos demais.

A presença destes invariantes merece destaque com os livros A, a página 180 faz menção ao uso das frações, mas a ênfase fica para a escrita em decimal; e no livro C, quando aborda *números racionais na escrita decimal, em que trabalha com a reta numérica (páginas 212 a 213).*

**b- Enfoque significados**

Para fim de análise do enfoque C serão consideradas as situações que contemplem os significados de fração, pois situações com comando tais como: escreva as frações em palavras, indique a ordem das frações, ache a fração equivalente, escreva a fração que representa parte pintada da figura, entre outros, não foram computadas.

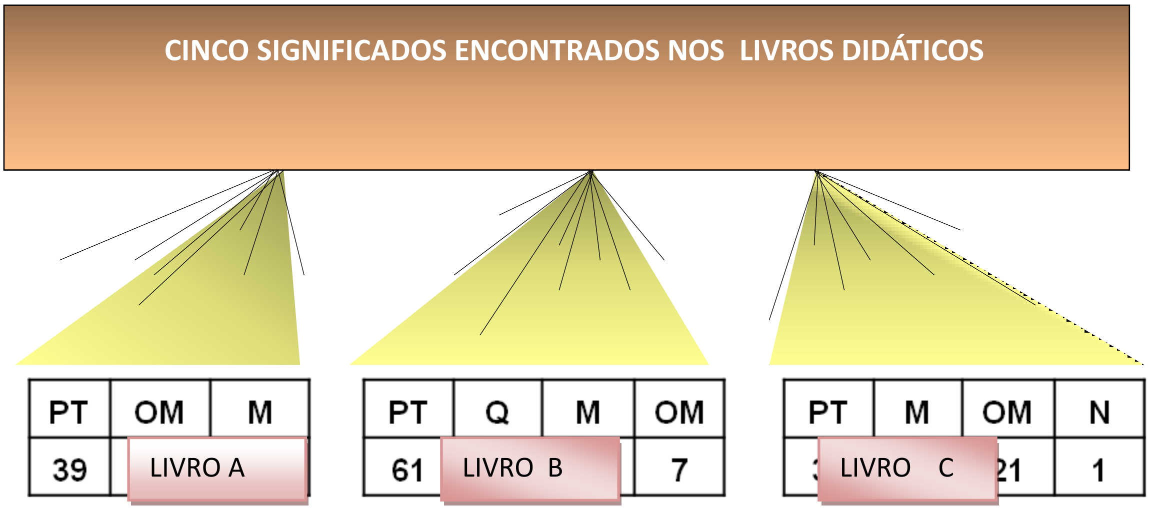
No livro **A,** das **151** questões **51** estão relacionadas ao contexto dos cinco significados de números fracionários distribuídas da seguinte forma: **39** situações em significado parte-todo, **11** questõe**s** como operador multiplicativo e **uma** questão envolvendo o subconstrutor medida. A representação é quase que exclusivamente não icônica. Quando há representação icônica esta fica por conta da representação com figuras geométricas tradicionais contemplando o significado parte-todo.

No livro **B,** das **157** questões foi possível selecionar **68** distribuídos da seguinte forma: **61** questões foram classificadas como parte-todo, **6** questões foram classificadas como quociente, **4** como medida e **7** questões classificadas como operador multiplicativo. Quanto à representação icônica fica por conta de representação em figuras retangulares; quanto ao contexto em relação às quantidades a ênfase está em quantidades contínuas e a fixação da aprendizagem fica na primazia da representação sem ícone, enfatizando as quatro operações com frações.

Quanto ao livro **C,** das **98** questões **67** foram classificadas de tal modo que: **38** no significado parte-todo em maior parte em contexto contínuo; **7** no significado medida; **21** classificadas como operador multiplicativo e **01** questão envolvendo número. Em relação ao contexto foram mais enfatizadas as quantidades continuas com representação não-icônica.

Para melhor visualização desses significados apresento o mapa conceitual sobre os cinco significados de frações encontrados nos livros didáticos, compreendendo o resultado apresentado na seguinte ordem da esquerda para a direita: primeiro, livro **A**, segundo livro **B** e terceiro livro **C**.

Figura 8 - Mapa conceitual das atividades dos livros didáticos




Fontes: livros didáticos consultados.

.

**(c) enfoque conteúdos afins:** por conteúdos afins serão compreendidos os tópicos apresentados pelos autores vinculados ao capitulo que trata de números racionais.

Livro **A** conteúdos afins: quatro operações, número racional inverso, frações equivalentes, potenciação, raiz quadrada, expressão numérica, frações decimais e números mistos.

Livro **B** conteúdos afins: as quatro operações, tipos de fração (própria, imprópria, aparente), número misto, frações equivalentes, potenciação e radiciação de fração, expressão numéricas, decimais, decimais exatos e dizimas periódicas, porcentagem, taxa, possibilidades e estatística

Livro **C** conteúdos afins: quatro operações, operações inversas, tipos de fração (própria, imprópria, aparente), número misto, frações equivalentes, tratamento da informação envolvendo porcentagem e fração, inverso multiplicativo, potência e raiz de fração, decimais, números racionais na reta numérica, porcentagem.

- **Síntese dos resultados relativos aos Números Fracionários na perspectiva de Mapas Conceituais**

Esta análise contempla a questão de número dois (2) do instrumento diagnóstico que, por ser uma questão aberta, possibilita maior expressividade por parte do professor pesquisado em relação ao seu saber sobre números fracionários.

Compreender como se estruturam os conceitos de aprendizagem dos objetos matemáticos é uma das possibilidades de buscar verificar como pensamos sobre tais objetos, sem com isso, negar as múltiplas variantes que se enlaçam no contexto escolar para daí questionarmos o quê e o porquê pensamos em determinada direção. Os mapas conceituais, em virtude de suas possibilidades para tal assertiva, foram usados objetivando elucidar como os professores têm assumido o conceito de números fracionários em suas vivências.

Reiterando, no enfoque **6.2,** que contempla situações envolvendo os cinco significados de números fracionários, a análise dos protocolos já apontou que os professores enfatizam apenas dois dos significados (relação parte-todo e Operador multiplicativo), o que torna a compreensão desse tópico parcial. Não muito distante no enfoque **6.3,** que trata dos mapas conceituais, o resultado reforça a análise do enfoque **6.2,** pois em termos da elaboração das situações-problema para a notação 3/5, os exemplos não expressaram uma concepção que venha ao encontro da compreensão do conceito de números fracionários a partir dos cinco significados.

Os exemplos propostos pelos professores além de possibilitar a conclusão de que os significados, do ponto de vista de sua significação, estão fragilizados, também emanam uma limitação em propor um arranjo em termos de conteúdos afins que favorecesse dizer de sua relação com esse conteúdo de forma maximizada.

Levando em conta que a atividade docente é um amálgama formativo e que, portanto, inúmeras experiências concorrem para agirmos de certo modo, é possível indicar que os materiais instrucionais exercem uma forte influência no exercício da profissão docente. Isto porque as respostas qualitativas do primeiro enfoque – as questões do teste diagnóstico - e as do mapa conceitual dos livros didáticos apontam para o mesmo fim: a ênfase em apenas dois dos cinco significados.

Além dessa vinculação entre as respostas dos professores para situações envolvendo números fracionários e os mapas conceituais apresentados, não há como não indicar familiaridade entre esses vínculos e os mapas que tratam dos conceitos relacionados a notação 3/5. Desta forma, percebe-se uma forte relação entre os saberes/conhecimentos dos professores sobre números fracionários e livro didático como uma das variáveis formativas da prática educativa, o que reforça a *hipótese de que a aprendizagem docente sobre influencias de suas vivencias pedagógicas.*

Em âmbitos gerais é possível afirmar que em cada uma das análises há um elemento forte como síntese. Na primeira análise o destaque é a centração, pois os professores expressam sofrer influências do aspecto figural nas representações de números fracionários.

Nessa representação, fica mais forte a presença das **representações tipo**, comuns à maioria dos livros textos e na prática docente dos professores, impossibilitando uma reflexão crítica sobre o conceito em estudo. Na segunda análise, fica evidente a dependência dos professores do livro -texto, haja vista que os mapas conceituais dos professores coincidem com os mapas conceituais dos livros-texto no que diz respeito aos significados dos números fracionários.

Desta forma pode-se pensar na seguinte direção: se o núcleo do desenvolvimento cognitivo é a conceitualização, logo a aprendizagem significativa permite o desenvolvimento cognitivo dos sujeitos e, portanto, a conceitualização é regulada pela interação contida nas situações e a estrutura cognitiva das pessoas em que medida a cultura escolar poderia auxiliar os docentes nesta interação?.

A compreensão e a ênfase por excelência nesses dois significados podem produzir um hiato entre os esquemas utilizados pelos professores e os invariantes dos conhecimentos científicos. Esses invariantes caso permaneçam implícitos podem se transformar em obstáculos, comprometendo a compreensão substantiva do conceito. Partindo da assertiva que o desenvolvimento cognitivo ocorre quando uma pessoa enfrenta um conjunto de situações e que paulatinamente vai dominando-as, então é correto afirmar da necessidade de investigar no âmbito da formação de professores inicial/continuada que corrobore para isso.

Vergnaud (1990: 21) sinaliza que o professor poderia proporcionar aos estudantes ferramentas para a construção de conceitos ou teoremas explícitos ou gerais em relação aos objetos de aprendizagem. Sabemos que os conhecimentos implícitos para serem transformados em qualquer linguagem não é algo trivial e nem direta. Esta possibilidade é revestida de inúmeras lacunas, entre essas, o distanciamento entre o que se pensa – teoremas-em-ato e o significado do signo, porém qualquer tentativa para empreitar esta jornada necessita que o professor tenha um domínio conceitual de forma significativa, o que por sua vez exige que domine um conjunto de situações em relação aos objetos de aprendizagem porque o professor tem um papel essencial nesse processo, pois conforme Moreira (2002), *sem o ensino dificilmente o estudante passará a dominar campos conceituais complexos e formalizados como os científicos.*

Nesse sentido, acredito que os referenciais em torno dos cindo significados foram satisfatórios para a apresentação dos resultados, pois mediantes os mesmos é possível compreender a importância das discussões sobre números fracionários (racionais) no sentido das orientações dos especialistas como Kieren (1989), Wu (2002) e Nunes *et al*. (2003) – como uma teia de relações. Porém, tudo indica que essa compreensão precisa de fomentos para se tornar visível na prática pedagógica. Essa visibilidade não está somente na divulgação desses referenciais, mas em pensar em que medida é plausível restringir à palavra fração ao significado parte-todo, ou se há necessidade de pensar num novo adjetivo, pois até então, o termo não é consensual na literatura, pois, a dificuldade está em definir *o nível de detalhe que essas classificações devem incluir, quais distinções são centrais e quais não são*, Nunes e Bryant (1997: 194).

### 6.7. Enfoque 4. Dinâmica Comunicativa e valores dos Números Fracionários

Embora este estudo tenha tomado como base os cinco significados de números fracionários posto na literatura, a compreensão assumida é que além dos aspectos endógenos também é possível pensá-lo numa compreensão que agregue aspectos da matemática cultural na condição de compreendê-los como artefatos sócio-científico-culturais, daí serem portadores de valores. Nesses termos, esta seção explicita os dados analisados a partir dos referenciais de Fleck (1996) e Bishop (1999).

Como já sinalizado, para Fleck (1996) o conhecimento é um evento que ocorre num processo coletivo e cultural que se desenvolve a partir do movimento de comunicações entre os sujeitos que de alguma forma dele participam. Essa comunicação traz em si uma dinâmica própria que ocorre a partir da formação de Coletivos de Pensamento que estabelecem diálogo entre os círculos Esotérico e Exotérico, também denominada de circulação intercoletiva e intracoletiva.

A comunicação do Círculo Esotérico estabelece, a partir de sua linguagem, referenciais teóricos e métodos de investigação, o que Fleck denomina de Estilo de Pensamento que marca época e imprime na personalidade dos cientistas o método e o estilo para as soluções dos problemas. O Estilo de Pensamento apresenta duas fases bem distintas: (a) **classicismo –** é a fase **em que as observações se encaixam perfeitamente** na teoria contribuindo para o processo de extensão do estilo de pensamento, o que Fleck denomina de *harmonia das ilusões*. Nesta fase há três momentos: (l) instauração; (ll) extensão; (lll) transformação do estilo; (b) **complicações –** é a fase **das exceções,** podendo contribuir para a transformação e a mudança de um Estilo de Pensamento. Para o acontecimento dessas fases é preciso haver uma dinâmica comunicativa uma espécie de popularização das ideias, uma *coerção de idéias* (FLECK: 1986), o que justifica a comunicação no Coletivo de Pensamento. Essa dinâmica no processo de produção e divulgação do conhecimento está ligada a pressupostos e condicionamentos sociais, históricos, antropológicos e culturais (DELIZOICOV: 2002, 56, 2004, a e 2004,b).

Por compreender que a escola é um espaço de confronto entre conhecimentos científicos e escolares a pretensão é explicitar a dinâmica comunicativa que envolve os coletivos de pensamentos aqui envolvidos, ou seja, há a intenção de verificar em que âmbitos a compreensão dos professores do sexto ano do Ensino Fundamental aproximam-se ou não do Estilo de Pensamento do Circulo Esotérico (as produções acadêmicas), pois é na dinâmica comunicativa que as ideias, valores, concepções e palavras têm significados singulares, pois estão impregnadas pelo tom estilístico de cada Círculo.

Tendo por base a epistemologia fleckiana, busquei analisar a dinâmica comunicativa entre os Coletivos de Pensamento identificados como (l) Círculo Esotérico: *as produções em nível de Pós-Graduação e, (ll) Círculo Exotérico os professores participantes da pesquisa que atuam no sexto ano do Ensino Fundamental e livros didáticos.* O resultado dos livros didáticos já foram apresentados na análise do enfoque 3 e nesta secção serão apresentados somente considerações gerais. Reconheço que os livros didáticos também são produções de especialistas, mas neste estudo esses recursos didáticos serão  tomados como pertencente ao Círculo Exotérico. Embora os autores de livros também constituam um grupo de especialistas, estes possuem um discurso mais simplificado que o discurso do Círculo aqui assumido como o Esotérico.

Para a análise do Estilo de Pensamento do Circulo Esotérico foram feitas as seguintes ações: (1) Consulta ao banco da CAPES das produções de Pós-Gradução de 2000 a 2010 envolvendo números relativos em sua representação fracionária; (2) construção de um inventário sobre as pesquisas, agrupando-as em focos temáticos; (3) leitura não diacrônica para verificarmos: *a linguagem estilizada do Coletivo de Pensamento encontrado e a base teórica que sustentam e estilizam o Coletivo em voga*.

Para este momento foram selecionados alguns excertos das produções acadêmicas que serão considerados como o corpus do Círculo Esotérico. Para identificar o tom estilístico dos Coletivos de Pensamentos foi feita a identificação de Focos Temáticos como já apresentados na metodologia.

Quanto ao Foco Temático de Formação de Professores a ênfase está na utilização da abordagem que toma como referência Kieren (1996) e Nunes *et al*. (2003), considerando relevante a abordagem do ensino de fração a partir de significados: parte-todo, medida, operador multiplicativo, quociente e número, interesse que também demarca o Foco Temático Formação Discente.

As pesquisas apresentam um forte enredamento das discussões teóricas lançadas pelos cientistas da área fortalecendo a comunicação intracoletiva de ideias. Do corpus apresentado, apenas duas pesquisas comunicam olhares diferenciados com uma base conceitual um pouco distinta no que tange a eleição do construto matemático para discutir o ensino ou a aprendizagem dos números fracionários. Embora não utilizem os cinco significados de Fração, fixam-se em discussão sobre a representação deste objeto.

Entre as pesquisas selecionadas, das trinta e cinco produções nove abrangem a Formação de Professor com ênfase aos professores de sexto ano e séries iniciais, todos empenhados em realizar um levantamento da compreensão docente sobre os significados de fração, seja através de um teste diagnóstico, seja por uma abordagem colaborativa; vinte e uma referem-se à aprendizagem discente e cinco estão direcionadas aos estudos da teoria de representação semiótica de Duval (2003).

Para a caracterização do Estilo de Pensamento do Circulo Exotérico, os professores participantes, foi selecionado a questão. **2** do teste diagnóstico em função de ser uma questão aberta. Esta questão solicitava que o professor elaborasse uma situação-problema que contemplasse a notação 3/5.

Para a verificação do Estilo de Pensamento do Círculo Esotérico foram destacados aspectos internos das produções como, por exemplo: as perguntas de pesquisa, objetivos, base teórica e resultados. Quanto ao Estilo de Pensamento do Círculo Exotérico confeccionei um diagrama contendo os exemplos que os professores elaboraram.

Segundo a abordagem fleckiana, um forte elemento que demarca um Coletivo de Pensamento é o uso de uma linguagem estilizada que aponta o ver formativo deste coletivo. Para melhor explicitação do Estilo de Pensamento do Circulo Esotérico apresento os excertos de pesquisas sinalizando que os destaques feitos caracterizam a linguagem estilizada porque esse tom estilístico é a regularidade que sustenta o ver formativo. As amostras citadas, a seguir, correspondem a oito trabalhos dos selecionados.

**AMOSTRA (M)**

*Quais as concepções que são possíveis de se identificar com relação aos* ***cinco diferentes significados da*** *fração (Número, Parte-todo, Quociente, Medida e Operador Multiplicativo), a partir da aplicação de um estudo diagnóstico, com alunos das 4ª e 8ª séries do ensino fundamental? (p,18)*

**AMOSTRA (E)**

*É possível uma Formação Continuada promover ações que permitam aos professores algumas mudanças em sua prática de ensino de números fracionários para a quinta série do ensino Fundamental, como forma de* ***envolver os cinco significados****. (p:41)*

## AMOSTRA (L)

*Analisar fatores que podem interferir no desenvolvimento profissional de professores das primeiras séries do Ensino Fundamental, como resultado de uma formação continuada com a finalidade de discutir* ***questões relacionadas à abordagem da representação fracionária de números racionais em seus cinco significados*** *(p,101)*

*[...] Quanto à competência, constatamos que não houve um desempenho eqüitativo entre* ***os cinco significados da fração e os invariantes****. Estas evidências levaram-nos a concluir que há a necessidade de se ampliar o campo conceitual desses professores com relação ao objeto fração.*

## AMOSTRA (F)

*Os resultados obtidos mostram uma tendência, tanto entre os professores polivalentes, como especialistas****, em valorizar a fração com o significado operador multiplicativo*** *na elaboração dos problemas.*

## AMOSTRS (E)

*De modo geral, pode-se afirmar que os professores constroem para a quinta série uma organização matemática para números fracionários, muito rígidas com tipos de tarefas* ***que associam sobretudo a concepção parte-todo em contextos de superfícies, mobilizando a técnica da dupla contagem****.*

## AMOSTRA (N)

Acreditamos que há necessidade de um **enfoque mais amplo no ensino do conceito de números racionais que envolva os diferentes significados de sua representação fracionária.**

## AMOSTRA (Q)

*Os resultados mostraram que cada* ***um dos cinco significados teve papel importante na aprendizagem da fração*** *pelos alunos e todos trouxeram contribuições para o início da apropriação desse objeto.*

[...] *Não houve preocupação em se trabalhar* ***com as diferentes situações que segundo Vergnaud (2001), dão sentido ao conceito, nem tão pouco foram considerados os diferentes significados de fração*** *afirmados por Nunes (2003).*

**AMOSTRA (H)**

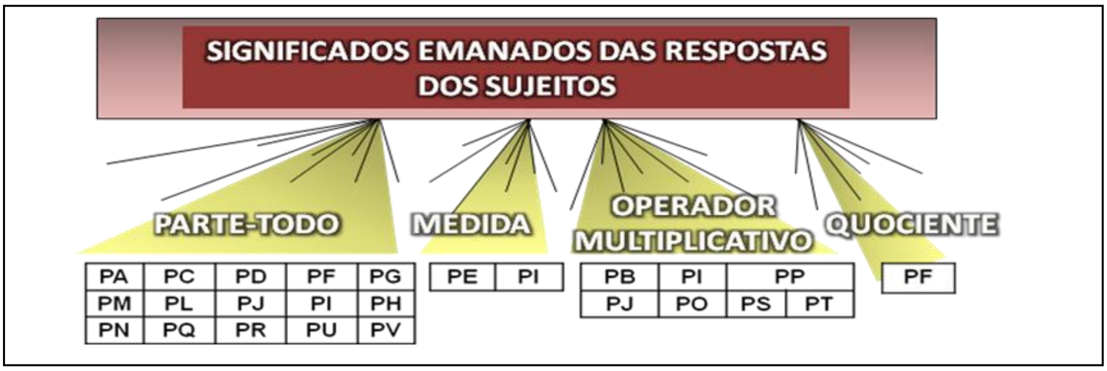
*Dessa forma, sentimo-nos inclinado* ***a concluir que o conceito de fração abordado na escola privilegia os significados parte-todo e operador multiplicativo, sem trabalhar de forma integrada os cinco subconstrutores****.*

Nas amostras foi destacada a linguagem cientifica usual utilizada pelos pesquisadores como forma de consolidar o que podemos chamar de *Estilo de Pensamento*. Nesses excertos a linguagem estilizada – a exemplo - *os cinco significados de fração/subconstrutores* – constitui-se a partir do marco teórico de autores como Post, Behr, Hiebert, Lesh, Nunes, Bryant, Kieren, Carpenter, Wu, Caraça Magina, Campos, Kerlake e Ohlisson, no que diz respeito ao tratamento dos números fracionários formando a matriz teórica das produções. Desta forma é pertinente indicar que o Estilo de Pensamento do Circulo Esotérico está alicerçado na concepção **de ensino de fração como uma rede conceitual** havendo, portanto, no campo investigativo a sintonia das ideias ou *harmonia das ilusões.*

Nesses termos, o ver é **formativo** reforçando a fase de instauração do Estilo de Pensamento, pois há uma forte comunicação intracoletiva que demarca Estilo de Pensamento hegemônico em nível de produção acadêmica na Pós-Graduação.

Quanto à identificação do Estilo de Pensamento do Círculo Exotérico, após a análise dos dados, foi elaborado o diagrama. Como visto, pode-se perceber a presença de quatro dos cinco significados adotados pelo Circulo Esotérico, a saber: **parte-todo, medida, quociente e operador multiplicativo** como é possível conferir a seguir:

Figura 10 - Diagrama dos significados de números fracionários elaborados pelos professores.




Fonte: Instrumento diagnóstico.

Cada tipo de significado dos números fracionários está identificado pelos professores proponentes. Vale ressaltar que os significados *quociente e medida* foram apenas citados, mas nenhum exemplo envolvendo a notação 3/5 foi apresentado pelos docentes.

A partir do exposto posso dizer que o Estilo de Pensamento dos professores, ou do Circulo Exotérico, ficou por conta da ênfase em apenas dois dos significados dentre os cinco que o Circulo Esotérico comunga, o que nos leva a pensar que há um hiato comunicativo o que reforça a comunicação intracoletiva de cada Circulo, que por sua vez apresenta Estilos de Pensamentos diferenciados, assumindo determinado método vivendo segundo, Fleck (1086), *a harmonia das ilusões,*. Nesta fase ocorre o impedimento de percepção de outras formas de ver os fatos, (PFUETZENREITER 2003:114). Em termos de ensino e aprendizagem dos números fracionários é possível dizer da necessidade da divulgação ou extensão do Estilo de Pensamento do Círculo Esotérico, pois uma de suas funções é proporcionar o ver formativo.

Diante da análise é possível intuir que o Circulo Exotérico possui proto-ideias a respeito do conceito de números fracionários. Em relação ao Estilo de Pensamento presente nos livros didáticos, dos cento e noventa e seis exercícios, trinta e oito representam situações envolvendo o significado parte-todo/fração menor que 1, trinta e nove com significado operador multiplicativo, doze exercícios envolvendo o significado medida, seis com significado quociente e um exercício envolvendo significado número. Assim sendo, os livros didáticos também não estabelecem comunicação muito próxima do Circulo Esotérico.

Nesse cenário afirmo que as proto-ideias, em particular a ênfase no significado parte-todo, tendem dificultar a *compreensão de números fracionários no campo quociente e como conseqüência consolidará mais a linguagem sobre números fracionários que sua compreensão propriamente dita*.

O exposto move-se diretamente em relação à formação de Estilo de Pensamento, pois a divulgação das ideias de forma sócio-cognitiva dos fragmentos de conhecimento coletivo que, torna certo Estilo de Pensamento hegemônico tornar-se-á mais divulgado se os coletivos favorecerem uma dinâmica comunicativa intracoletiva. Sabe-se que quanto mais um Estilo de Pensamento se afasta do núcleo esotérico em direção à periferia exotérica, mais simplificada é a tradução do fato científico e maior possibilidade de inventividades conceituais.

Nesses termos, as ideias do Circulo exotérico não se aproximam das ideias do Circulo Esotérico. Mediante as análises realizadas a compreensão dos professores sobre números fracionários é basicamente a de – **parte-todo,** necessitando que Círculo Esotérico estabeleça comunicação com o Exotérico e, assim, o saber torne-se divulgado. Para tal será necessário *uma determinada atitude e um tipo de execução que o consuma como ação dirigida,* em relação ao ver formativo, Fleck (1986:145).

Retomo a ideia de cultura tratada por Hall (1997), a de assumi-la como *compreensão dos modelos teóricos do mundo para* dizer da cultura dos modelos explicativos de números fracionários presente nos círculos esotérico e exotérico. Há portanto, uma cultura pesquisativa e docente que expressam valores.

Entre os pares de valores tratados por Bishop (2002) vejo os valores sociológicos expressos a partir da empiria. Quando a centração do comportamento decente se apresenta ligado às representações tipo o valor *abertura* fica comprometido porque as idéias matemáticas não são assumidas como saber de indagações. O valor *mistério* pode ser identificado a partir da comunicação intracoletiva do círculo esotérico que vivencia a harmonia das ilusões, por concentrar um estilo de pensamento em que as abstrações, as ideias matemáticas estão muito próximas das ideias matemáticas enquanto ciência e que, dada sua complexidade conceitual, invoca e provoca rupturas de certos modelos explicativos

Segundo Bishop (1999: 103) o espaço escolar que se ocupa da matemática enquanto tecnologia simbólica deveria privilegiar o valor abertura, a democratização do conhecimento através de provas, demonstrações e explicações individuais e creio que isso só será possível se os Coletivos de Pensamento estiverem em constante diálogo.

## 6.8. Ensejando compreensão

Em termos de dinâmica comunicativa, pode-se ensejar que os portadores de Estilo de Pensamento denominados, de circulo Esotérico e Exotérico vivem estilos de pensamento diferenciados culminando para o fortalecimento da comunicação intracoletiva em que cada Comunidade estabelece suas verdades e bases teóricas que legitimam as práticas investigativas e didáticas no que diz respeito aos números fracionários.

O Circulo Esotérico vivencia a chamada fase **classicismo,** momento em que as observações dos fatos de uma teoria se encaixam perfeitamente, contribuindo para o processo de extensão do estilo de pensamento, embora haja a necessidade de mais investimento nesta extensão, haja vista o distanciamento comunicativo.

O Estilo de Pensamento que caracteriza o Círculo Esotérico é a compreensão de números fracionários como rede conceitual/metaconceito. Quanto ao Estilo de Pensamento do Circulo Exotérico, nota-se que este Coletivo distancia-se do saber estilizado do Circulo

Esotérico, pois assume o objeto números fracionários como significado parte-todo e operador multiplicativo, portanto, não relacional.

Na relação comunicativa os Círculos chamados de Esotérico e Exotérico mantém interação circunscrita ao próprio Coletivo, que por sua vez sustenta o equilíbrio, cria solidez e mantém uma realidade fixa a respeito do fenômeno. Isto, reforça a ideia que o estilo de pensamento é determinado pelo desejo de verdade do fato científico..

Nesses termos, concluo que os Estilos de Pensamento encontrados são diferentes exigindo que os pertencentes do(s) círculo(s) exotérico e esotérico construam a dinâmica da comunicação intercoletiva, o que favorecerá principalmente ao Circulo exotérico avançar em suas crenças e assim a compreensão sobre números fracionários poderá alcançar níveis abrangentes.

Para Fleck (1976) muitos fatos científicos encontram-se vinculados a ideias iniciais ainda mal delineadas (ou não significativas) chamadas de proto-ideias ou pré-ideias, um exemplo de proto-ideias poderia ser localizado nas situações em que, envolvendo o significado parte-todo no contexto das frações egípcias os resultados foram qualitativos.

Nesses termos, é possível dizer que a formação dos professores pertencentes a este estudo ainda está presa às proto-ideias sobre números fracionários numa dinâmica comunicativa intracoletiva, que por sua vez impede o não desenvolvimento de práticas que fortaleçam o valor abertura como ferramenta para questionar as verdades postas e desenvolver o senso criativo.

Shulman (1996) chama atenção para o domínio do conteúdo, para a estrutura substantiva do conhecimento, o que não foi enfatizado a partir das respostas dos participantes. O professor ao exprimir possíveis exemplos sobre a notação fracionária 3/5, caso seus esquemas ordinários pudessem demonstrar, ilustrariam exemplos em contextos que se aproximassem do contexto do Circulo Esotérico.

Desta forma, em relação ao domínio do conhecimento docente, este pode ser intuído como um saber sintático. Retomando-se as justificativas da questão **9,**[44] **fração imprópria,** caso o professor desejasse realizar intervenção qualificada, seria preciso favorecer ao estudante *compreender as relações entre dividendo, divisor e quociente, ou seja, seria necessário compreender as conseqüências do tamanho n em um n-cortes*, Nunes e Bryant (1997:194), o que favorecerá compreender conceitualmente números fracionários como divisão. Compreender que nesse significado a ideia de números fracionários envolve duas

---

[44] Foram divididas igualmente para 4 crianças 3 barras de chocolates. Cada criança ganhou ima barra inteira?

variáveis, e assim, a ideia de números fracionários estaria relacionada tanto à ideia de divisão de 3 barras de chocolate para 4 crianças, quanto ao resultado **3/4**..

Na questão **7**[45], houve dificuldade do professor identificar as variáveis, como pode ser visualizado nas respostas dos professores **PT, PJ, e PH** indicando que a fração que representava a divisão solicitada **2/10, 2/5, menos a notação 10/5**.

Ressalto que o conhecimento/saber foi/é construído em um contexto próprio de significação. Esse contexto que, de forma singular atrelo à organização escolar, indica, à luz do exposto nesta secção, que as lições estabelecidas no interior da escola reforçam os saberes/conhecimentos dos professores adquiridos ao longo de suas vivências pedagógicas. Isto porque, como já evidenciado, existem formas comunicativas que (Esotérico e Exotérico) reforçam a premissa de que o conhecimento se constrói em contextos próprios de significação. Desta forma, o ***como*** posto em ação reforça postulados aprendidos e tidos como passíveis de dar conta da demanda necessária para se estabelecer o domínio conceitual dos números fracionários por parte dos estudantes.

Em termos de Vergnaud (1996), a organização do comportamento docente – esquemas – em algumas situações não trouxe a competência necessária para atender ao conjunto de situações.

Ainda neste pressuposto é possível dizer que os esquemas ordinários (aqueles automatizados/significativos) por parte de alguns sujeitos entrevistados possuem competência quanto às representações tipo, principalmente no contexto de significados parte-todo e operador multiplicativo. Se um esquema apoia-se sempre numa conceitualização implícita, em que os invariantes operatórios administram o reconhecimento pelo sujeito dos elementos pertinentes à situação e à apreensão da informação, então é possível indicar que, para a ocorrência da conceitualização de números fracionários, o professor necessita vivenciar situações que o possibilite desenvolver um vasto repertório de esquemas.

---

[45] Tenho 10 bolas para dividir para 5 crianças .Que fração representa essa distribuição?

# CAPITULO 7
# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo retomo o problema de pesquisa, trazendo aproximações explicativas para o fenômeno estudado, intitulado **Compreensão dos professores de matemática sobre Números Fracionários,** explicitado a partir da resolução de um instrumento diagnóstico referente a um conjunto de situações. O termo *conjunto de situações* é apresentado por Vergnaud (1993) e assumido por Nunes *et al*. (2003) com o propósito de reafirmar o campo conceitual de números fracionários como um conjunto de significados que configura o corpus das questões postas para este estudo.

Como forma de olhar o objeto em múltiplas faces foram trazidas contribuições de estudos sobre a cognição em especial de Ausubel (1980, 2003) com sua teoria significativa e Moreira (1999) com mapas conceituais. Essas leituras suportaram compreender elementos endógenos do objeto investigado, mas, no sentido de alargar os estudos realizados, foi pensado tratar os dados em seus aspectos exógenos, daí a importância de compreender a organização do comportamento ou esquemas dos sujeitos pelas lentes da sociologia do conhecimento que neste estudo materializam-se pelas orientações de Fleck (1936) e Bishop (1999). Esses aspectos endógenos e exógenos constituem as noções teóricas construídas para analisar a maneira como o professor compreende **números fracionários**. Essas referências, a meu ver, coadunam-se com os propósitos deste estudo.

A partir desta plataforma retomo a pergunta de pesquisa inicialmente posta e apresento algumas implicações dos resultados encontrados para a prática pedagógica, além de discutir as limitações desta pesquisa e indicar possibilidades de estudos.

## 7.1. Retomada da pergunta de Pesquisa

A pesquisa, no caso da educação, tida como ato de conhecimento, parafraseando Freire (1993:36), é ao mesmo tempo um ato de ensino e de aprendizagem. Ensino porque o percurso encenado serve de lições, fomenta crenças e (des)crenças e novas formas de aprendizagens a todos e porque é impossível realizar tamanho mergulho investigativo e não aprender que pesquisar implica auto-co-educar-se em permanente e dinâmico movimento, pois para se retornar à atividade docente, em quaisquer níveis, é necessário compreender que é imprescindível continuar a pesquisar. Pesquisamos para produzirmos novos conhecimentos e anunciarmos algo. Nesse sentido, nos capítulos anteriores já traçamos as parcerias para esse anúncio no sentido de discutir **Que compreensão os professores de matemática manifestam ao enfrentarem um conjunto de situações envolvendo números fracionários?**

À guisa dos resultados, posso indicar que as teias de significados ou os enfoques produzidos *pelo grupo de professores em meio* a uma longa formação, de certa forma, anunciam uma tradição de compreender e ensinar os **números fracionários**.

Por isso, para responder a pergunta investigativa de forma temporal posso dizer que os docentes de matemática do sexto ano do Ensino Fundamental manifestam conhecer o objeto em questão, porém, seu conhecimento aproxima-se das primeiras ideias, as da lenda de Hórus, que implicam na compreensão de um todo fracionado em partes menores que o inteiro. Nesses termos, posso intuir que há uma centração por partes dos professores em um dos significados de números fracionários, embora eu possa dizer que os outros significados que fazem parte do movimento interno, inerente ao saber matemático e que possibilitam construção de ideias complexas sobre o objeto em questão, estejam presentes na compreensão do professor, mesmo se apresentando de forma setorizada.

Em função das manifestações dos professores de matemática, posso dizer que a compreensão do objeto em questão do ponto de vista dos cinco significados na proposta de Nunes et al encontra-se presa a ideia de parte-todo em frações menores que **1 e operador multiplicativo**, o que por sua vez pode reforçar uma tradição: *a de compreender e ensinar os números fracionários somente nesses substratos*.

Dentre os cinco significados, o significado **número** foi o mais comprometido, o que reitera o que tem sido informado pelas pesquisas correlatas, as quais, por sua vez, induz-me pensar numa universalidade em termos dessa compreensão, pois, em nível nacional e internacional, a complexidade deste objeto tem se mostrado desafiante ao tratamento escolar.

A **representação tipo** foi responsável por evocar certos esquemas. Quando a situação apresentava-se em situações usuais como, por exemplo, as expressas nas questões **1, 4 e 5**[46]**,** as manifestações emergentes são qualitativas do ponto de vista científico, mas quando apresentava questões como **3,8,10.d e 14**[47] já não se percebe o mesmo desempenho. Assim, a representação tipo foi um indicativo de que os professores demonstraram certo conflito em relação à conservação da unidade, principalmente ao verificar se os docentes visualizavam números fracionários/fração como maior que o inteiro.

[46] Questões que envolvem situações no contexto das frações egípcias.
[47] Questões que não envolvem situações no contexto de frações egípcias.

Analiticamente posso explicitar que no significado **quociente**, quando apresentado no contexto das unidades discretas, embora esse contexto não tenha se consubstanciado em categoria, mas estava presente no instrumento diagnóstico**,** foi possível identificar que o esquema utilizado nessa situação estava atrelado ao contexto parte-todo com frações egípcias, o que os impediu de apresentar resposta 10/5, o que me leva a considerar que os professores não compreendem tal situação quando envolve numerador maior que a unidade.

Ainda em termos de aproximação com a pergunta de pesquisa, foram levantadas informações sobre a possibilidade do professor elaborar situações-problema e verificar se havia desdobramentos em relação aos manuais didáticos. De acordo com os mapas conceituais obtidos, ratifico as afirmações expostas, a de que os professores não compreendem números fracionários como rede relacional de conhecimentos. Isso também é verificado à luz da sociologia do conhecimento, pois, o Circulo Esotérico, expressa compreensão sobre o objeto em estudo distante da compreensão do Circulo Exotérico, fortalecendo, assim, a comunicação **intracoletiva**. Essa comunicação, se olhada pelas lentes de Bishop, já referido, pode configurar que valores sociológicos como **abertura** dificilmente são postos em ação, visto que o ensino de números fracionários são comunicados dentro de uma concepção cerrada aos olhos dos próprios docentes.

Quanto aos **cinco significados,** estes são apresentados pelos professores, mas o campo conceitual de números fracionários não é transversal e integrativo. Isto porque no caso do significado **medida** quando apresento de forma expressa o conceito de evento probabilidade, os professores parecem dominá-la, mas quando em outra representação esse mesmo significado é solicitado, como na questão em que a **medida** era solicitada em contexto não unitário, como pode ser conferido na questão **10.d (quanto mede a régua 4 tomando a régua 3 como medida)**, o professor utiliza-se de esquemas que não atendem à situação, ou melhor, os seus conhecimentos prévios passam a necessitar de novos princípios organizadores para a apreensão conceitual, chamada por Ausubel de reconciliação integrativa.

Neste contexto, em termos ausubelianos, a compreensão docente indica advir de uma experiência em que a aprendizagem ocorre de forma subordinada, com viés da aprendizagem derivativa porque o conjunto de situações foi ancorado, em determinados significados, em exemplo pré-existente (parte-todo, operador multiplicativo), sem envolver extensão entre este e a habilidade exigida na situação. Isto, de certa forma, indica que são necessários princípios que eliminem conflitos cognitivos existentes – por meio da reconciliação integrativa para que, a partir de experiências nesse âmbito, o professor adquira a chamada organização hierárquica de estruturação lógica dos objetos conceituais como forma de alcançar aprendizagem significativa.

Assim sendo, é possível afirmar que os professores do sexto ano tendem a ensinar como aprendem/ram e, portanto, necessitam vivenciar experiências que os coloquem frente a diferentes formas de pensar um mesmo problema ou, nos moldes de Vernaud (1990), que o processo de conceitualização no contexto pedagógico leve em conta um conjunto de situações para que o sujeito vivencie experiências várias para construir campos conceituais científicos, que por mais que estes se construam por um longo tempo, esta aquisição só ocorrerá à luz de uma mediação eficiente.

Isto recai certamente na formação docente inicial e continuada. Nessa perspectiva, entre outras formas argumentativas, invoco a função da escola como local de cultura própria e, nesse patamar, é crucial que o docente (re)visite sua prática como um ato educativo. Isto quer dizer que a escola não pode ser apenas uma fábrica de divulgação de conhecimento, mas necessita urgentemente transformar-se em lócus de aprendizagem [*de todos]* no sentido de tratar o conhecimento com pressupostos (re)construtivos. Pois, por meio da reflexão na/da/sobre a prática será possível, pois, avaliar e realizar ações projetivas sobre a formação.

Em cada uma das análises procedidas há um elemento forte, que pode ser expresso como síntese , tais como: Nas análises do enfoque 1 – equivalência – e enfoque 2 – cinco significados - observo que o destaque é a centração dos professores em determinadas situações, pois os professores expressam ser influenciados pelo aspecto figural das representações de números fracionários, em que fica mais forte as **representações tipo**, com ênfase nos significados **parte-todo e operador multiplicativo** comuns à maioria dos livros-texto e na prática docente dos professores, impossibilitando reflexão crítica sobre o conceito em estudo.

Na segunda e na terceira análises, enfoque 3, fica evidente a dependência dos professores do livro-texto, haja vista que os mapas conceituais dos professores coincidem com os mapas conceituais dos livros no que diz respeito aos significados dos números fracionários.

Na quarta análise, enfoque 4, observo que os professores – Circulo Exotérico - não estabelecem comunicação com especialista no sentido de haver a extensão do Estilo de Pensamento do Circulo Esotérico. Tudo isso leva a considerar que o conhecimento da matéria dos professores participantes pode ser considerado como um conhecimento **não substantivo** nos moldes de Shulman (1986).

Certamente, concluo que, o professor ensina como aprendeu, uma vez que tanto a análise dos aspectos endógenos quanto dos exógenos indica que os professores compreendem números fracionários com ênfase nos significados *parte-todo e operador* multiplicativo, e não como metaconceito.

Isso implica dizer que embora, o professor conheça situações que tratem de números fracionários, estes demonstram uma base conceitual centrada mais em aspectos figurativos que lógicos. Ressalto, ainda que, quando apresentei as duas racionalidades: mítica e cientifica, sendo possível verificar a presença da historicidade na produção do conhecimento, como pode ser visto nas notações que os pensadores da época expressavam pude, posteriormente, dizer que o grupo de professores participantes expressam *determinações sócio-culturais sobre a compreensão de números fracionários*.

Tal expressão se justifica porque, a escola como local de cultura própria, veicula valores e sacraliza certas práticas e, mediante os resultados obtidos, parece que os professores estão mergulhados numa cultura escolar que reforça saberes existentes, ou seja, a compreensão docente sobre números fracionários parece ser produto das atividades ali vividas e mediatizadas pelos valores assumidos.

Assim sendo, retomo a afirmação estabelecida anteriormente, de que, saber ou o conhecimento amplia-se a partir de sua provisoriedade, produzido a partir de uma ordem pessoal e, segundo a experiência de cada docente, sendo eminentemente cultural porque é partilhado em um contexto capaz de criar e gerar sentidos que na prática poderão ou não transformá-la. Estes sentidos, em termos do objeto em estudo, precisam ser (re)pensados na cultura experiencial e institucional desses sujeitos, pois, como afirma Fleck (1986), o conhecimento é um empreendimento coletivo e portanto, cabe a todos no interior da escola discutir e refletir sobre a provisoriedade dos saberes, com fins de torná-los socialmente referendados.

De outro modo, isso significa dizer que, de fato, há necessidade de um intercâmbio entre a academia e a escola de Educação Básica, pois o distanciamento entre essas duas instituições não tornar a escola do ensino básico um lócus de pesquisa e construção de proposições, o que, aliás, seria fundamental pensar sobre a cultura escolar, o que, por sua vez, ao se discutir internamente as questões da formação docente, inevitavelmente os professores, poderão passar a pensar que este século é o século de aprendizagem.

Assim sendo, somente uma formação qualitativa no exercício da prática será capaz de fazer da escola um espaço de construção e (re)construção de significados. Isso não minimiza a responsabilidade da formação inicial, o que a meu ver é fundamental, pois, mais que ter contato com uma ciência especifica é preciso não somente dominá-la, mas fundamentalmente problematizá-la para que na passagem da academia para a escola a porta que abre não seja a porta que provoque esquecimentos.

Nesta caminhada foi possível perceber a necessidade de uma formação que vá além do saber preso a aspectos figurativos para se compreender o conceito de números fracionários como metaconceito. Com isso quero registrar a importância do professor compreender sua função como de caráter diverso envolvendo, assim, aspectos tanto de ordem conceitual, no que diz respeito ao domínio da matéria, quanto estar atento as questões de ordem sócio-cognitivas que incidem na maneira como assumimos nossa cultura de ação docente.

Para repensar as ações da prática, recorro novamente as ideias de Bishop (1999) ao falar sobre o *discurso articulado*, o que recai diretamente nas ideias de Fleck (1986) com a importância da dinâmica comunicativa entre os Coletivos de Pensamento, pois buscar um discurso articulado nada mais é que possibilitar ao profissional docente compreender-se como sujeito em constante construção. Nesses termos, aponto a necessidade do docente não se comportar como executor de tarefas, pois assumir a tarefa de negociar os significados dos objetos conceituais tem a ver com o sentido de pertencimento e de cuidado com a tarefa de ser professor. O que, por conseguinte, exige que o docente transforme a escola em lócus ecológico, segundo Pérez-Gómez (2001), que nada mais é ***que viver uma cultura critica que provoque a reconstrução pessoal da cultura experiencial.***

Esse assumir não se refere a solidão profissional, diz-se também de um reconhecer-se como um Coletivo de Pensamento que veicula e seleciona valores. Em síntese, o domínio de números fracionários aponta mais uma vez para a necessidade de discutir na formação inicial o conteúdo necessário à Educação Básica como forma de passar  compreender esse objeto de aprendizagem para além da estrutura semântica experiencial, o que significa dizer que aprender tem a ver com um domínio do saber para que as explicações das experiências primeiras sejam flexibilizadas a partir das contribuições dos conceitos científicos e, assim, o sujeito aprendente explique a realidade utilizando de forma qualitativa os modelos matemáticos construídos historicamente.

## 7.2. Implicações dos resultados desta pesquisa para a prática pedagógica do professor de matemática

Sabe-se que o professor no exercício de sua profissão precisa, entre outros conhecimentos, do conhecimento da matéria que ensina. Isso significa, nos moldes de Shulman (1986), discutir sobre de que forma a *cultura do* ***como*** pode trazer a área de investigação, para as praticas áulicas, indicativos qualitativos para a formação conceitual . Esses indicativos poderão estimular discutir formação docente como um todo, bem como, discutir sobre o papel da escola como local de cultura própria, tornando-a **local de aprendizagem**.

As sínteses apresentadas neste estudo podem subsidiar os professores a pensarem sobre o que pensam saber sobre números fracionários para torná-los compreensíveis aos estudantes da educação básica. Além disso, motivá-los sobre as formas de organização do ensino, pois aprender por uma única forma é limitar o estudante na construção de significados e de sua autonomia.

Além das contribuições advindas do tratamento dos dados ao objeto de estudo, aposto que é preciso pensar o espaço institucional como **cultura de saberes experienciais, pessoais e coletivos** que, ao proporcionar o desenvolvimento docente autônomo, possibilite-lhes distanciar-se da própria cultura através de senso crítico capaz de oferecer-lhe clareza sobre as limitações e possibilidades de seus saberes.

## 7.3. Limitações deste estudo

Busquei olhar o objeto em várias frentes como forma de compreender o fenômeno, porém é sabido que todo esforço nessa empreitada é limitado, ou seja, circunscreve-se na mediação de suas possibilidades. Mesmo nessa compreensão é possível dizer da necessidade de outros estudos adentrarem de forma interativa na realidade no sentido de explorar de forma contundente as considerações de Alan Bishop (2005).

Acredito que a forma de aproximação com os sujeitos passa a dar mais possibilidades analíticas quando a relação entre pesquisador e sujeitos de pesquisa permite que estes sujeitos possam dialogar numa dinâmica capaz de favorecer clareza e intensidade às proposições feitas. Pude sentir no curso desta pesquisa que investigar o conhecimento disciplinar traz resistências por parte dos professores, pois esta é uma abordagem que lida diretamente com possíveis fragilidades formativas que não são fáceis de serem explicitadas. Sendo o foco – conhecimento disciplinar – uma vertente de extrema sensibilidade torna-se imprescindível pensarmos em formas de aproximação com os sujeitos-professores para de forma colaborativa construirmos e realizarmos investigações.

Muitas respostas ficam em aberto, dentre as quais, como os conteúdos da educação básica têm sido tratados na formação de futuros professores. Isto foi reforçado quando a **representação tipo** aparece como fator predominante de centração do comportamento dos professores. Assim sendo, parece viável buscar compreender as formas de apresentação que os professores em todos os níveis estabelecem como organizadores do seu ensino.

Compreendendo que não é possível alcançar todas as respostas esperadas, desejo apresentar sugestões de continuidade de estudos, tais como: (l) em que medida a compreensão da cardinalidade interfere na construção do significado de números fracionários, ou seja, como o recurso da dupla contagem empregada de forma enfática nas situações parte-todo em contexto contínuo com frações menores que 1 influencia na construção do pensamento; (ll) se a reta numérica/real possibilita a compreensão de números fracionários como tal, então, como este recurso tecnológico e simbólico pode ser visto como estruturante do pensamento; (lll) que(quais) abordagem(ns) sobre números fracionários estão sendo veiculados no currículo das redes de ensino e da formação docente local; (lV) em que termos os materiais manipulativos proporcionam compreender números fracionários como metaconceito, (V) como o professor de matemática compreende números fracionários relacionados a outros tópicos matemáticos, ou seja, como o professor se comporta perante o emprego de números fracionários enquanto ferramenta; (Vl) que estruturas cognitivas estão relacionadas aos cinco significados, posto por Nunes e colaboradores; (Vll) como a natureza semiótica e a natureza material (empíricos) são estabelecidas no processo de construção de conhecimento sobre números fracionários, (Vlll) que relações podem ser estabelecidas entre as possibilidades de ensino de números fracionários como metaconceito e o desenvolvimento do pensamento proporcional dos estudantes e (lX) quais são e como se organizam no interior da escola os espaços formativos dos professores.

## REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. P. *et al*. **Psicologia educacional.** Tradução: Eva Nick e outros. 2. ed. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

____________. **Aquisição e retenção de conhecimentos: Uma perspectiva cognitiva,** Lisboa: Editora Plátano, 2003.

AYMERICH, C. Posibilidades comunicativas, expresivas y matemáticas de los cuentos. IN: ALSINA, Ángel, PLANAS, Núrias (Coords). **Educación Matemáticas e Buenas Practicas infanil, primaria, secundaria y educación superior.** Barcelona, editorial Graó, de IRIF, S.L. 2009.

ANDRADE, S.de.A. **A pesquisa em educação matemática: os pesqusiadores e a sala de aula: um fenômeno complexo, múltiplo olhares, um tecer de fios.** 2008. Tese de Doutorado. FE-USP, São Paulo.

ALARCÃO, I. **Escola reflexiva e nova racionalidade**. Porto Alegre: Artmed. 2001.

ALMEIDA, M.C. **Origem dos numerais.** In. Seminário Nacional da Historia da Matemática, 4. 2001. Anais. Natal. Sociedade Brasileira da Matemática, 2001.

ARROYO. M.G. **Oficio de Mestre. Imagens e auto-imagens.** Petrópolis, RJ: Vozes, 2000.

BALDINO, R. R. **Sobre a Epistemologia dos Números Inteiros.** Educação Matemática em Revista, São Paulo, n. 5, p. 4-14, 1996.

BALL, D. L. Bridging Practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. **Journal of teacher education**, v. 51, n. 3, mai/jun, p. 241-247. 2000.
_________. **The mathematics understandings that prospective teachers bring to teacher education. The elementary school journal,** 90, 449-466, 1990. Disponível em: http://louisville.edu/edu/crmstd/bibo_math_elem_teachers.html. Acesso em 01/05/08.

BAIRRAL, M. **Natureza do Conhecimento Profissional do Professor: Contribuições Teóricas para a Pesquisa em Educação Matemática**. Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, 41, 11-33, 2003.

BEZERRA, Francisco José Brabo. **Introdução do conceito de número fracionário e de suas representações: uma abordagem criativa para a sala de aula.** Trabalho de conclusão de Curso (Mestrado). 2001 – Pontífice Universidade Católica, São Paulo.

BEHR, M; LESH, R; POST, T; SILVER,E. Rational-Number Concepts. In: LESH,R; LANDAU, M. (Eds.) **Acquisition of Mathematical Concepts and Processes.** Orlando: Academic Press, 1983.
BEHR, M. J.; HAREL, G.; POST, T.; LESH, R. Rational number, ratio, and proportion. In: GROUWS, D. A. (Ed.). **Handbook of research on Mathematics teaching and learning**. New York: MacMillan, 1992

BERTONI, N.E. **A construção do conhecimento sobre Número Fracionário**. **Bolema.** Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, p.209 a 237, 2008.

BIANCHINI, E. **Matemática.** Editora Moderna: 6ª edição, 5ª série, 2006.

BICA, Luiz Manoel Peliz Marques. **Funções em livros didáticos: relações entre aspectos visuais e textuais.** Pontífice Universidade Católica, São Paulo, 2009, 146.fls.

BISHOP, A. **Encultuación Matemática la educación matemática desde uma perspectiva cultural.** España: Paidos,1999.

**____________Research, policy and practice: The case of values Alan J. Bishop,** Monash University, Australia, Disponivel em http://mes3.learning.aau.dk/Papers/Bishop.pdf. Acessado em 17/03/2012.

**_______ transitions experience of immigrant secondary school students: dilemmas and decision.** 2002 Disponivel em http:// www.spring. Com/978-0-7923-7185-4. Acessado em 17/03/2012.

BISHOP, A. J, CLARKE, B. Research, **Values in maths and science – what can we learn from children's drawings?. Paper presented at the Annual Conference the Mathematics** Association of Victoria, December, 2005. Disponívhhttp://books.google.com.br/books?id=tl_WyTNtsL4C&pg=PA132&lpg=PA132&dq=Values+in+maths+and+science. Acessado em 15.12.2011

BOYER, C. B. **História da matemática**. 2º ed. SP. Edgard Blucher, 2003.

**_______ História da Matemática.** Traduçao, Elsa, F. Gomide. 1º edição São Paulo. Editora: Edgard Biucher, Editora da Universidade de São Paulo, 1974.

BONOTTO D.L. *et, al.* **A Análise da Dialética Ferramenta-Objeto no Objeto de Aprendizagem "Potencializando o seu conhecimento"** IN: Vivências: Revista Eletrônica de Extensão da URI ISSN 1809-1636, p 85-99, maio, 2009.

CAMARGO, M. P. **A reflexão dos licenciandos e licenciados-professores da UNIMEP sobre sua formação profissional em Matemática e Ciências: Subsídios para um novo projeto de Licenciatura.** Dissertação (Mestrado em Educação) 1998. - UNIMEP, Piracicaba, SP.

CAMPOS, T. *et al*. **Lógica das equivalências**: relatório de pesquisa. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Não publicada. 1995.

CAMPOS, T. *et al*. **Uma análise da construção do conceito de fração:** relatório de pesquisa. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Não publicada, 1995.

CAÑAS, A. J. *et al*. **Colaboración en la construcción de conocimiento mediante**

**mapas conceptuales. [on line].** Disponível em: <http://cmap.coginst.uwf.edu>. Acesso em: 07 set. 2011.tirei novak 1981.
CANDAU, V. M. **Magistério: construção cotidiana**. Petrópolis: Vozes, 1997.

CANOVA, Raquel Factori. **Crenças, Concepções e Competências de professores do 1º e 2º Ciclos do Ensino Fundamental com relação à fração**. Dissertação de mestrado, PUC_SP, 2006, p,241.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da Matemática.** Lisboa: Gradiva, 1998, 2010.

CARVALHO, A. M. P.. A inter-relação entre Didática das Ciências e a Prática de Ensino. In: SELLES, Sandra Escovedo e FERREIRA, Márcia Serra (orgs.) **Formação docente em Ciências: memórias e práticas**. Niterói: Eduff, 2003. p.117-35.

CARPENTER, T. P. **Teaching and learning rational numbers: proposed framework for CGI teacher development in the upper elementary grades. Wisconsim Center for Education Research. School of Education**, University of Wisconsin- Madison, 1994.

CASTOLDI C. **Processo de Formação do Conceito de Fração: Interações Em Sala de Aula.** Dissertação Universidade Federal de Passos Fundo, Educação. 2005, 115 p.

CATTO, G. G. **Registro de representação e o número racional uma abordagem nos livros didáticos.** Pontífice Universidade Católica, São Paulo, 2000. 168.fls. .

COSTA, W. N. G.. **No Tecido/Texto da Etnomatematica: constituindo uma nova trama/Linha de Pesquisa.** IN: Etnomatematica novos desafios teóricos e pedagógicos. Niterói-RJ:UFF, 2009.Disponível em: htp//: Densino.univates.br~4iberoamericano/trabalho/trabalho165.pdf. 02/02/2011, às 23h13.

COSTA C. B.J. Da. **O Conhecimento do Professor de Matemática sobre o Conceito de Função.** Dissertação de Mestrado 01/01/2008.1v. 100p, 2008. Universidade Federal do Rio de Janeiro - Ensino de Matemática.

CURI, E. **Formaçao de Professores de Matemática: realidade presente e perspectivas futuras.** Dissertação de Mestrado, 2000. 244p. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Ensino de Matemática.

**______ A matemática e os professores dos anos iniciais**. São Paulo: Musa Editora, 2005

CUCHE.Denys, **A Noção de Cultura nas Ciências Sociais.** São Paulo: Bauru: EDUSC, 2002.

CUNHA, Micheline Rizcallhah Kanaan da. **A QUEBRA da UNIDADE e o número decimal :um estudo diagnóstico nas primeiras séries do Ensino Fundamental.** Trabalho de conclusão de Curso (Mestrado) – Pontífice Universidade Católica, São Paulo, 2002

CUTOLO e ALVETTI. **Uma visão epistemológica da circulação de idéias presente na comunicação científica**” XVI SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE FÍSICA. Disponível em: www.sbf1.sbfisica.org.br/eventos/snef/xvi/cd/.../T0278-1.pdf. Acesso 02/02/2011.

CLARKSON, P. C. FITZSIMONS, G.E., SEAH, W.T. &, “**Values Relevant to Mathematics? I’d like to See** That! In. D. Tynam, IN. Scott, K. Stacey, G. Asp, J. Dowsey, H. Hollingsworth & B. McCrae (Eds.), **Mathematics: Across the ages. Melbourne**: Mathematics Association of Victoria, 1999.

CHERVEL, A. História **das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. Teoria e Educação.** Porto Alegre, nº 2, p. 177-229, 1990.

CRUZ M. S. S.. **Resolvendo Adição de Frações através de Estimativas: um Estudo Exploratório.** Dissertação. Universidade Federal de Pernambuco - Psicologia (Psicologia Cognitiva), **01/05/2003.** 157p.

DAMICO, Al. **Uma Investigação sobre a Formação Inicial de Professores de Matemática para o Ensino de Números Racionais no Ensino Fundamental.** Trabalho de conclusão de Curso (Doutorado) – Pontífice Universidade Católica, São Paulo, 2007

DÀMBROSIO,U. **Etnomatemática e Historia da Matemática.** In: FANTINO, M.C. Etnomatemàtica e novos desafios teóricos e pedagógicos. Niterói-RJ- UFF. 2009.
**__________ Da realidade à ação. Reflexões sobre educação e matemática.** 2ª edição. Campinas. Papirus, 1997.

DELIZOIVOV, D. *et al*. **sociogênese do conhecimento e pesquisa em ensino: contribuições a partir do referencial fleckiano**. Cad. Cat. Ens. Fís., v.19, número especial: p.50-66, mar. 2002.

DELIZOICOV,N. *et al*. **Conhecimento, Tensões e Transições. Ciências e Educação.** UNESP: Bauru – SP.v.10.n3,p 443-460, 2004,a.

_____________. **Pesquisa em ensino de ciências como ciências humanas aplicadas.** IN: Cad. Bras. Ens. Fís., v. 21: p. 145-175, ago. 2004,b.

DEMARTINI. I. T. **Refletindo sobre a Formação do Conceito de Número Racional na Forma Fracionária**. Dissertação. 2009. 175p.Universidade de Passo Fundo.

DEMO, P. **Conhecer e Aprender sabedoria dos limites e desafios**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

DOUADY, R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, 1986.

DUVAL, R. Registros de Representações semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática In: Machado, S.D.A (org.). **Aprendizagem em Matemática Registros de Representação Semiótica. Campinas,** SP: Papirus, 2003.

EISENHART, M. *et al*. **Conceptual Knowledge falls through the cracks: complexities of learning to teach mathematics for understandings**. **JRME**, 1993, v. 24, n. 1, p. 8-40.
EISENHART, M. *et al*. Learning to teach hard mathematics: do novice teachers and their

instructors give up too easily? Journal for Research in Mathematics Education, v. 23, n. 3, p. 194-222.1992.

EAGLETON, Terry. **A Idéia de Cultura.** São Paulo: UNESP, 2005.

ESCOLANO, R. GAIRIN, J.M. “**Modelos de Medida para o Ensino do Número Racional na Educação Primária** Revista Iberoamericana de Educação Matemática. Lisboa. 2005. Disponível em:http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/ponte/ Acesso em: 09 agosto de 2010.

FERNANDEZ, C**. Lesson Study: a means for elementary teachers to develop the knowledge of mathematics needed for reform-minded teaching. Mathematical thinking and learning,** 7 (4), 256-289, 2005 Lawrence Erlbaum Associates Disponível em http://www.informaworld.com/smpp/ftinterface~db=all~content=a785828327~fulltext=713240930 Acesso em 01/05/2011.

FIORENTINI,D. et.al. **Formação de Professores que ensinam matemática: um balanço de 25 anos de pesquisa brasileira. Educação** In: Revista – Dossiê: Educação Matemática. Belo Horizonte- UFMG. 2002.

FIORENTINI, D. A investigação em Educação Matemática sob a perspectiva dos formadores de professores. In: **SEMINÁRIO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA,** XV-SIEM, 2004, Covilhã, Portugal. **Actas** Lisboa: 2004, p.13-35.

________, D. Tendências temáticas e metodológicas da pesquisa em Educação Matemática no Brasil. In: **Anais do I Encontro Paulista de Educação Matemática**, 1989.

FONSECA, F. L.. **A divisa de números racionais decimais: Um estudo diagnóstico de alunos de 6ª serie.** Trabalho de conclusão de Curso (Mestrado) – 2005. Pontífice Universidade Católica, São Paulo.

FORQUIN, Jean-Claude. **Escola e cultura: as bases sociais e epistemológicas do conhecimento escolar.** Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

FURIÓ, C.J. **Tendencias atuales en la formación del profesorado de ciencias. Enseñanza de las Ciencias,**, v.12, n.2, p.188-199, 1994.

FLECK, L. **La Génesis y el Desarrollo de un Hecho Científico**. La génesis y el desarrollo de un hecho científico. Madrid: Alianza Editorial,1986.

FREIRE, P. Criando métodos de pesquisa alternativa. In: In: BRADÃO, C. R. (org.) **Pesquisa Participante**, 3ª edição. São Paulo: Brasiliense, 1983.

GARCÍA e BLANCO,M.M. **Conocimento profesional del profesor de matemáticas: el concepto de función como objeto de enseñanza-aprendizaje.** Sevillha: Giem-Krons, 1997.

GARCÍA, M. V.S. **Dificuldades específicas en el aprendizage de las fracciones. Estúdio de casos. Implicaciones para la formación de maestros. Aulas de verano. Instituto Superior de Formación del Profesorado**, Ministério de Educación, Cultura y Deporte, 2003.

GATTI, B. *et al.* ***Formação de professores e carreira*** *– problemas e movimentos de renovação. Campinas, SP: Editora Autores Associados, 2000.*

GIROUX, Henry. **Os Professores como Intelectuais – Rumo a uma Pedagogia Crítica da Aprendizagem**. Porto Alegre: Artmed, 1997

GODOY, L.F.S.. **Registro de representação da noção de derivada e o processo de aprendizagem. 2008.105p**. Universidade Católica de São Paulo.

GOMES, M.L.M. **Valores da cultura matemática na vozes de pensadores franceses do século das Luzes** IN: Revista Zetetiké, Cempem-FE- Unicamp,v.13,n 14, jul/dez, 2005.

GOMES M.T.C**. A Construção do Conceito de Fração através da Resolução de Problemas: uma abordagem sócio-cognitivista**. Mestrado. UNIVERSIDADE SANTA ÚRSULA - EDUCAÇÃO MATEMÁTICA **.** 01/09/2001**,** 150p.

GOMES M. G. T.C.**. A Construção do Conceito de fração através da Resolução de Problemas: uma abordagem sócio-cognitivista.** 150p. Mestrado. 2001. 150p. UNIVERSIDADE SANTA ÚRSULA - EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**.**

GLEASER, G. **Epistemologia dos Números Relativos**. Boletim do GEPEM, Rio de Janeiro, n. 17, p. 29-124, 1981.

GRANDE, **O conceito de independência e dependência linear e os registros de representação semióticas nos livros didáticos de álgebra linear.** Dissertação. 2006. 208 p.Universidade Católica de São Paulo.

GRAÇA, A. **O Conhecimento pedagógico do conteúdo do ensino de basquetebol.** 1997. Tese de Doutorado. Faculdade de Ciência do Desporto e de educação Física, Universidade do Porto, Porto, 1997.

GUERRA, R.B.. SILVA. F.H.S. **As operações com frações e o princípio da contagem.** IN: revista Boletim de Educação Matemática. BOLEMA, UNESP, ano 21, nº31, 2008.

GUNDLACH, B.H. **Números e Numerais**. Coleção: Tópicos da História da Matemática. São Paulo: Atual Editora, 1992, 77 p.

HALL, S. The centrality of culture: notes on the cultural revolutions of our time. In.: THOMPSON, Kenneth (ed.). **Media and cultural regulation**. London, Thousand Oaks, New Delhi: The Open University; SAGE Publications, 1997

HART, K. **Children’s Understanding of Mathematics: 11-16**. London : John Murray, 1981.

HILL, C. Hearther e Ball,D.L. **Learing for research in the mathematics educations Learing Mathematics for teathing (colocar dosi pontos) Results from California,s Mathematics Profisional Desenvolpment Instituts**. In: Journal for research in Mathematics Educations. 2004, vol, 35. n5, pp 330-351. 2004.

IFRAH, 1997, p. 581. **Historia Universal dos Algarismos.** Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997.

KIEREN, T. E.Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. **Number concepts and operations** in the middle grades. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

____________. Personal Knowledge of **rational numbers: its intuitive and formal development.** In: J. HIEBERT, J.; BEHR, M. (eds.): Number concepts and operations in the Middle Grades. New Jersey: Erlbaum, 1988. p. 162-80.

_______. **Number and measurement: mathemathical, cognitive and instructional foundaments of rational numbe**r, Columbus, OHERIC/SMEA, p. 101-144, 1976.

KERSLAKE, D. **Fractions: Childresn's Strategies and Errors: A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics** Project, Windsor: NFERnet. – texto logica das equivalencias. 1986.

KICHOW, Irio Valdir. **Procedimentos didáticos relativos ao Ensino de Números Racionais em nível de Sexto e Sétimo ano do Ensino Fundamental. 2009.** Trabalho de conclusão de Curso (Mestrado) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul**,** São Paulo.

LAGE, Luciana. **Enquadramento de números racionais em intervalos de racionais: uma investigação com alunos do ensino fundamental. 2005.** Trabalho de conclusão de Curso (Mestrado) – Pontífice Universidade Católica, São Paulo.

LIMA, V.S; BRITO, M. R.F. **MAPEAMENTO COGNITIVO E A FORMAÇÃO DE CONCEITOS DE FRAÇÃO.** BRITO, Marcia Regina F. (Org.). Psicologia da Educação Matemática Teoria e Pesquisa. Florianópolis: Insular. 2005.

LOPES, A.R. L.V. *ET al*. p**rofessoras que ensinam matemática nos anos iniciais e a sua formação. In Revista linhas Criticas, Brasilia, DF. N, 35, p87-106, jan/abr.2012.**

LOPES, A. J.. **O que Nossos Alunos Podem Estar Deixando de Aprender sobre Frações, quando Tentamos lhes Ensinar Frações**. **Bolema.** Rio Claro (SP),Ano 21, nº 31, 2008,p.1 a 22.Disponível em:http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2105/1830 Acesso em 28/05/2011.

LORENZETTI. L.. **Estilos de Pensamento em Educação Ambiental: uma análise a partir das Dissertações e Teses**. Tese do Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica da Universidade Federal de Santa Catarina – UFSC. 2008, 407f

MA, L. **Saber e Ensinar Matemática Elementar.** Tradução: Sara Lemos e Ana Sofia Duarte. Lisboa Portugal. Gradativa Editora. 2009.

MAGINA, S. *et al*. **Repensando adição e subtração: contribuições de teoria dos campos conceituais.** 2. ed. São Paulo: PROEM, 2001.

MAGINA S**,** CAMPOS T**. A Fração nas Perspectivas do Professor e do Aluno dos Dois Primeiros Ciclos do Ensino Fundamental. In:**
BOLEMA, Rio Claro (SP), ano 21,, nº31, p. 23 a 40 23. 2008.

MAGINA S. *et al*. Alina **Como desenvolver a compreensão da criança sobre fração?Uma experiência de ensino**. IN: R. bras. Est. pedag., Brasília, v. 90, n. 225, p. 411-432, maio/ago. 2009.

MAGINA S. e CAMPOS T. **As Estratégias dos alunos na resolução de problemas aditivos: um estudo diagnóstico**. In: Educação Matemática e Pesquisa em educação. São Paulo, v.6,n1, 2004.

MACIEL A. CÂMARA Marcelo **Analisando o Rendimento de Alunos das Séries Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio em Atividades Envolvendo Frações e Idéias Associadas**.In; Revista Bolema, Rio Claro (SP), Ano 20, nº 28, 2007, pp. 163 a 177, 2007.

MACK, N. K. **Learning fractions with understanding: building on informal knowledge.** Journal for Research in Mathematics Education, v. 21, p. 16-32, 1990.

MALASPINA, Maria Conceição de Oliveira. **O início do ensino de Fração: uma intervenção com alunos de 2ª série do Ensino Fundamental.** Trabalho de conclusão de Curso (Mestrado) – Pontífice Universidade Católica, São Paulo, 2007

MERLINI, V.L.. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental.** Trabalho de conclusão de Curso (Mestrado) – Pontífice Universidade Católica, São Paulo, 2005.

MOUTINHO, L.V. **Fração e seus diferentes significados: um estudo com alunos das 4ª e 8ª séries do ensino fundamental.** Trabalho de conclusão de Curso (Mestrado) – Pontífice Universidade Católica, São Paulo, 2005.

MOREIRA I.M.B. **O Ensino das Operações com Frações envolvendo Calculadora. 2010.** 137p. Mestrado. UNIVERSIDADE DO ESTADO DO PARÁ.

MATURANA, H. **Cognição, ciência e vida cotidiana**. IN: MAGO, Cristina; organização e tradução Cristina Magro, Victor Paredes. Belo Horizonte: Ed. UFMG, 2001.

MARSHALL, S P. Assessment of rational number understanding: a schemabased approach. In: CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E. H.; ROMBERG, T. (Ed.).**Rational numbers: an integration of research.** Hillsdale: Lawrence Erbaum, 1993.

MEDEIROS, A.; MEDEIROS, C. **Números negativos: uma história de incertezas**. BOLEMA, São Paulo, v. 7, n. 8, p. 49-59, 1992.

MEGID NETO, J. **O ensino de Ciências no Brasil: catálogo analítico de teses e dissertações**, 1972-1995. Campinas: UNICAMP/FE/CEDOC, 1998. 220 p

MERLINI, V.L. **O conceito de fração e seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental.** Dissertação, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, 2005

MERLINI, V.L. *et al*. **Fração: o significado quociente para professores e estudantes – um estudo comparativo.** In: V CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA – CIBEM. Lisboa. 2005.

MIZUKAMI M.G.N.. **Aprendizagem da docência: algumas contribuições de L. S. Shulman.** Revista do Centro de Educação. Edição: - Vol. 29 - N° 02. 2004

MOUTINHO, L. V. **Frações e seus diferentes significados:um estudo com alunos da 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, 218 pp. Pontifícia Universidade Católica de são Paulo, 2005.

MONTEIRO A.M.F.C.. **PROFESSORES: ENTRE SABERES E PRÁTICAS.** In: Revista Educação & Sociedade, vol.22 no.74 Campinas SP. 2001

MORAIS E.C**. Ensinar-Aprender Frações em um curso de Formação Continuada para Professores dos anos Iniciais do Ensino Fundamental: conhecimentos e dificuldades evidenciadas.** Dissertação de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da UFPA. 2010. 125 fls.

MOREIRA, M.A. e MASINI, E.F.S. **Aprendizagem significativa: a teoria de aprendizagem de David Ausubel**. São Paulo: Editora Moraes. 1982.

MOREIRA, M.A. e BUCHWEITZ. **Novas estratégias de ensino e aprendizagem: os mapas conceituais e o Vê epistemológico**. Lisboa: Plátano Edições Técnicas. 1993.

MOREIRA I.M.B.. **O Ensino das Operações com frações envolvendo calculadora**. Dissertação Universidade Federal do Pará, Educação./2010, 137 fls.

MOREIRA. A.M; GRECA M. **Sobre Cambio Conceptual, Obstáculos Representacionales, Modelos Mentales, Esquemas de Asimilación y Campos Conceptuales.** Porto Alegre: URFGS, 2004.

MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. **Investigações em Ensino de Ciências**, v. 7, n. 1, 2002. Disponível em: http://www.if.ufrgs.br/public/ensino/revista.htm.Acessado em: 15/03/2011.

MOREIRA, M.A. **Aprendizagem significativa.** Brasília: Editora da UnB. 1999.

MOREIRA, P.C.i, DAVID, M.M. **O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica.** Revista Brasileira de Educação. Nº 28, 2005.

MORIN, E. **O método 3 O Conhecimento do Conhecimento.** Porto Alegre: Sulima. 2008.MORI, Iracema. ONAGA Dulce **Matemática Ideias e Desafios. 6º ano.** Editora Saraiva: 15ª edição- 2009.

NACARATO, A.M.. **A formação do professor que ensina Matemática: perspectivas e desafios frente às políticas públicas**. Recife. Anais ENEM 2004. Disponível em: http://www.sbem.

NACARATO, A. M; PAIVA, M. **Formação de Professores que ensinam matemática.** III SIPEM – Águas de Lindóia/MG, 2006. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/RelatorioGT7.pdf. Acessado em 09/11/2011.

NOTARI, Alexandre Marques. **Simplificação de frações aritméticas e algébricas: Um diagnóstico comparativo dos procedimentos.** Trabalho de conclusão de Curso (Mestrado). 2002. – Pontífice Universidade Católica, São Paulo.

NOVAK, J,D, GOWIN, D. **Learning how to learn.** Cambridge: Cambridge University Press, 1984.

NÓVOA, A. **Os professores e sua formação**. Lisboa: Ed. Dom Quixote.1992.

NOVAK, J. D. **Uma teoria da educação**. Tradução: Marco Antônio Moreira. São Paulo: Pioneira, 1981.

NOVAK, J. D.; GOWIN, D. B. **Teoria y practica de la educación**. España, Editora: Alianza,1988.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Artes Médicas. (1997).

NUNES, T. *et al*. **Educação Matemática: números e operações numéricas**. 4 ed. São Paulo: Cortez, 2005.

NUNES, T.*et al*.. **The effect of situations on children's understanding of fractions.** Trabalho apresentado no encontro da British Society for Research on the Leaming of Mathematics. Oxford: June, 2003.

NUNES, T. e BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1999.

NUNES, J.M.V. **História da Matemática e Aprendizagem Significativa da Área do Círculo: Uma Experiência de Ensino-Aprendizagem.** Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, da Universidade Federal do Pará, 2007, 110p.

OLIVEIRA, M.H; PONTE, J.P. **Investigação sobre concepções, saberes e desenvolvimento de professores de matemática.** VII Seminário de Investigação em educação matemática. Universidade de Lisboa. 2005

OLIVEIRA, M.M.de. **Como Fazer: Pesquisa Qualitativa**. Recife: Bagaço, 2005.

OHLSSON, Stellan. **Sense and reference in the design of interative illustrations for rational numbers.** In: LAWLER, R. W.; YAZDANI, M. (Ed.). Artificial intelligence and education. Norwood: Ables, 1987.

OWENS,D.T. **Styudy of the relationship of area and learing concepts by children in grades three and four.** In kieren, T.E. (ED) Recent research on number concepts. Columbus. ERIC/SMEAC, 1980.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática, uma análise da influência francesa**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PAIVIO.A. **DUAL CODING THEORY AND EDUCATION.** Disponível em http://www.umich.edu/~rdytolrn/pathwaysconference/presentations/paivio.pdf. Acessado em 7/05/2011.

PALIS, G. Educação Matemática: entrelaçando pesquisa e ensino, compreensão e mudança. *Educação on-line*, PUC Rio, v. 1, p. 1, 2005. Disponível em Http /wwww.maxwell.lambda.ele.puc-rio.br/CGI/in/PRG0599.EXE/7456. PDF. NrOcoSis=21350&CdLinPrg. Acessado em 09/03/2011.

PÉREZ-GOMÉZ.A.I.**A Cultura escolar na sociedade neoliberal.**Tradução. Ernani Rosa. Porta Alegre: Artmed, editora. 2001.

PETRY H. **Construção do Modelo Didático Dos Professores De Matemática do Ensino Médio de Uruguaiana..** 1v. 97p. Mestrado. Pontifícia Universidade Católica Do Rio Grande Do Sul – Educação. 2000

PIMENTA, S. G; GARRIDO, E; MOURA, M. **Pesquisa colaborativa na escola; uma maneira de facilitar o desenvolvimento profissional dos professores.** In: MARIN, Alda J. (Org.). Professor reflexivo no Brasil: gênese e crítica de um conceito. 3. ed. São Paulo: Cortez. (2005).

PINILLA, M.I. F.. **FRACTIONS: CONCEPTUAL AND DIDACTIC ASPECTS.** Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics, Issue 7, 2007.

PITOMBEIRA, J. B. Euclides Roxo e as polêmicas sobre a modernização do ensino da matemática. In: VALENTE, W. (Org.). **Euclides Roxo e a modernização do ensino de Matemática no Brasil**. São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2003. p. 86- 158.

PICONNE, D.F.B.. **Os registros de representação semiótica mobilizados por professores no ensino do teorema fundamental do cálculo. 2007.** Dissertação, – Pontífice Universidade Católica, São Paulo.

PONTE, J. P. Ciências da educação, mudança educacional, formação de professores e novas tecnologias. In A. Nóvoa, B. P. Campos, J. P. Ponte, & M. E. B. Santos, **Ciências da educação e mudança**. Porto: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. 1991.

PONTE, J. P.; OLIVEIRA, H. **Remar contra a maré: a construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial**. Revista de Educação, v. 11, n. 2, Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 2002.

PONTE, J. P, Matos, J. M, e Abrantes, P. **Investigação em educação matemática: Implicações curriculares.** Lisboa: Disponível em: http://scholar.google.com.br/scholar?q=pontes+matos+e+abrantes+1998&btnG=&hl=pt-BR&as_sdt=. Acessado em 09.10.2011.

POST, T. R. **Fractions: results and implications from national assessment**. The Arithmetic Teacher, v. 28, n. 9, p. 26-31, 1981.

PFUETZENREITER. Márcia Regina **Epistemologia de Ludwik Fleck como Referencial para a Pesquisa nas Ciências Aplicadas.** Episteme, Porto Alegre, n. 16, p. 111-135, jan./jun. 2003

PRASS, A.R. **Teorias de Aprendizagem.** Dissertação. Mestrado Acadêmico da Universidade do Rio Grande do Sul.UFGRS 2007, 125fls..

REALI, A. M. LIMA, S. M. O papel da formação básica na aprendizagem profissional da docência. In: REALI, A. MIZUKAMI, M. (orgs.). **Formação de professores**: Práticas Pedagógicas e Escolas. São Carlos: EdUFSCar, 2002, p. 217-235.

REBELO, T; GOMES, D, E CARDOSO, L. **Aprendizagem organizacional: relações e implicações**, in Revista Psychologica, 2001, 27, pp. 69-89.

RODRIGUES, W.R. **Números racionais: um estudo das concepções de alunos após o estudo formal.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, 217 pp. Pontifícia Universidade Católica de são Paulo, 2005.

RUIZ-PRIMO, M. A., Schultz, S. E., Li, M., & Shavelson, R. J. **EXAMINING CONCEPT MAPS AS AN ASSESSMENT TOOL**. Journal of Research in Science Teaching, 2001. n,*38*(2), 260-278.Disponivel em: http://cmc.ihmc.us/papers/cmc2004-036.pdf. Acessado em 12/01/2012.

SAMBO, Abdussalami,A. **transfer effects of measure concepts on the learing of fractional numbers.** Tese (Doutorado). The University of Alberta. 1980.

SANT'ANNA. N.FP. **Práticas Pedagógicas para a Prática de Frações objetivando o ensino da Álgebra.** Tese. Programa de Pós-Graduação da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. 2008.

SANTOS, A. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnostico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental.** Dissertação, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, 2005.

RODRIGUES, W.R. **Números Racionais: um estudo das concepções de alunos após o estudo formal.** Trabalho de conclusão de Curso (Mestrado) 2005 – Pontífice Universidade Católica, São Paulo.

ROMANATTO, M.C.. **Numero racional: relações necessárias a sua compreensão. Tese** – Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Educação, São Paulo, 1997

ROSA, R. R. da. **Dificuldades na compreensão e na formação de conceitos de números racionais: uma proposta de solução. Dissertação** 2007. Pontífice Universidade Católica, São Paulo.

SANTOS, A. dos. **O conceito de fração em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental.** Trabalho de conclusão de Curso (Mestrado) – Pontífice Universidade Católica, São Paulo, 2005.

SANT'ANNA,Neide Fonseca Parracho. **Práticas Pedagógicas para o ensino de Frações objetivando a introdução à Álgebra.** Trabalho de conclusão de Curso (Mestrado) 2008.– Pontífice Universidade Católica, São Paulo.

SEVERO D.F. **Números Racionais e Ensino Médio: uma busca de significados.** Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática. 1v. 165p. 01/01/2009. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - Educação em Ciências e Matemática.

SOARES Maria Arlita da Silveira. **Os números racionais e os registros de representqação semiótica: análise de planejamento das séries finais do Ensino Fundamental. 2007.**132p. Mestrado. Univ. Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul - Educação Nas Ciências**.**

SCHWAB, J. Science, **curriculum and liberal education**: Selected essays Joseph J. Schwab. I. Westbury & N. Wilkof (Eds.) Chicago, Il: University of Chicago Press. (1978).

SHULMAN, Lee S. **Conocimiento y enseñanza.** In: Estudios públicos, 83. Centro de Estúdios Públicos. Traduzido por Alberto Ide. Chile: Santiago, p.163-196.1987.

__________ **Those who understand: the knowledge growths in teaching.** In: Education Research, fev,pp, 44- 14. 1996.

SILVA, da M. J.F.. **Investigando saberes de professores do Ensino Fundamental com enfoque em números fracionários para a quinta série**. Tese. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, 2005.a.

________________ SILVA, M.J.F. **Sobre a introdução do conceito de número fracionário**. Dissertação de mestrado em Educação Matemática. 1997. PUC/SP. 245.p

SILVA .A.R.H.S. **Concepção do Professor de Matemática e dos alunos frente ao Erro no processo de Ensino Aprendizagem dos Números Racionais**. Dissertação de Mestrado, 2v. 128p. Mestrado. PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ – EDUCAÇÃO. 2005.b.

SILVA, A.FG. **O desenvolvimento profissional docente: análise de uma formação continuada de professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem de frações.** Tese. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, PUC-SP, 2007.

SILVA, T.V. **A Compreensão da Idéia do Número Racional e suas operações na Eja Uma Forma de Inclusão em sala de aula.** Trabalho de conclusão de Curso (Mestrado) 2007. – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Rio Grande do Norte.

SILVA, T. **A Compreensão da Idéia do Número Racional e suas operações na Eja Uma Forma de Inclusão em sala de aula.** Trabalho de conclusão de Curso (Mestrado) 2007– Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Rio Grande do Norte.

SILVEIRA, Ênio. M.C. **Matemática: compreensão e prática, 6º ano,** Editora Moderna: 1ª edição. 2008.

SILVEIRA, M. R. Matemática é difícil: um sentido pré-construído evidenciado na fala dos alunos. **In: Reunião anual da ANPED**, 25, MG. Anais. MG: ANPED, 25. p. 1-17. CD-ROM. 2002.

SCHÄFER, L.; SCHNELLE, T. Introducción – Los fundamentos de la visión sociologica de Ludwik Fleck de la teoría de la ciencia. In: FLECK, L. **La génesis y el desarrollo de un hecho científico.** Madrid: Alianza Editorial, 1986. p. 9-42.

SWELLER, J. COOPER, G. **The use of worked exemples as a substitute for problems solving in learing algebra. In** Cognitions abd Instruction, v.2, p,59-89. 1985.

SCHÖN, Donald A**. Educando o profissional reflexivo: um novo design para o ensino e a aprendizagem**. Tradução de Roberto Cataldo Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.

__________ **La formación de profesionales reflexivos**. Hacia un nuevo disefio de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones. Barcelona, 1992.

SELDEN, A., SELDEN,J. **Of what does mathematical knowledge consist? In: Selden, A., Selden,J (Eds.)Research Samplers**, MAA ONLINE, The Mathematical Association of America, 1, 1996. Disponível em http://www.maa.org/t_and_l/sampler/research_sampler.html. Acessado em 13/08/2011.

STENHOUSE L **La investigación como base de la enseñanza**. Tercera Edición. Ediciones Morata Madrid, 1987.

TARDIF, M.; LESSARD, C. LAHAYE, L. Os professores face ao saber – esboço de uma problemática do saber docente. Teoria & Educação, Porto Alegre, n. 4, 1991.

TARDIF, M. **Saberes profissionais dos professores e conhecimentos universitários: elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas conseqüências em relação à formação para o magistério**. In: Revista Brasileira de Educação, n. 13, p. 5-24, 2000.

__________. **Saberes docentes & formação profissional.** Petrópolis: Vozes. 2002.

TARDIF, M, GUATHIER, C. O professor como Ator Racional. Que racionalidade, que saber, que julgamento. In: PAQUAY, *et al* (Orgs) **Formando Professores Profissionais ; Quais estratégias, Quais competências?** Porto Alegre: Artmed, 2007.

TEIXEIRA, Al. M.. **O professor, o ensino de fração e o livro didático: um estudo investigativo.** Trabalho de conclusão de Curso (Mestrado) – Pontífice Universidade Católica, São Paulo, 2008

TINOCO, L. A. A.; LOPES, M. L. M. Frações: dos resultados de pesquisa à prática em sala de aula. **Educação Matemática em Revista,** São Paulo, v. 1, n. 2, p. 13-18, 1994.

TULON, A.S. **Ensino de frações e equivalência de estímulos: um estudo com uso.** Trabalho de conclusão de Curso (Mestrado) 2008.– Pontífice Universidade Católica, São Paulo.

VERGANI, T. **A criatividade como destino Transdisciplinaridade, cultura e educação.** São Paulo, Editora da Física, 2009.

VALENTE, W. R. (Org.). **O nascimento da matemática do ginásio**. São Paulo: Annablume; Fapesp, 2004.

VERGNAUD, G. **La théorie des champs conceptuels**. Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 10, n. 23, 133-170, 1990.
___________. **A Criança, a Matemática e a Realidade -** Editora UFPR 2009.

___________. A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. Revista do GEMPA, Porto Alegre, nº 4: 9-19. 1996.

VERGNAUD, G. **Teoria dos campos conceituais**. In Nasser, L. (Ed.) Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, pp. 1-26. 1993.

WU, H. C**hapter 2: Fractions.** Departamento of Mathematics#3840- University of California Berkeley-Berkeley, 2002.

# APÊNDICE

## APÊNDICE 0 1- Instrumento Diagnóstico

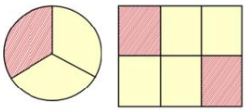
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUÇAO
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTIFÍCA
PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇAO MATEMÁTICA

INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS

Nome fictício: ________________________

QUESTÃO 1

Edna distribuiu igualmente a massa para bolo de 1 kg de trigo em duas formas, uma redonda e outra retangular para repartir para seus amigos. Conforme a representação abaixo, as partes pintadas de vermelho representam a mesma quantidade nos dois bolos? Justifique.



_______________________________________________________________________________

_______________________________________________________________________________

QUESTÃO 2

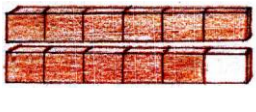
A representação 3/5 faz parte das vivências com o conceito de fração em sala de aula. Que(ais) exemplo(s) você poderia criar para trabalhar esse conceito? Que(ais) conteúdos matemáticos você identifica nesta situação?

_______________________________________________________________________________

_______________________________________________________________________________

QUESTÃO 3

Renato ganhou duas barras de chocolate. Dividiu-as em 6 partes iguais e comeu certa quantidade (parte hachurada). Que fração representa a quantidade de chocolate que Renato comeu?



Considerando a situação-problema posta, comente a resposta apresentada abaixo:

R = Renato comeu 11/12.

_______________________________________________________________________________

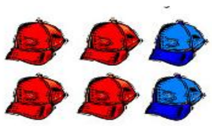
_______________________________________________________________________________

QUESTÃO 4

Caroline repartiu sua barra de chocolate em cinco partes iguais e deu dois pedaços a Pedro. Que fração representa a quantidade de chocolate que Pedro recebeu?

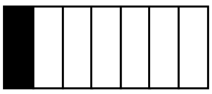
QUESTÃO 5

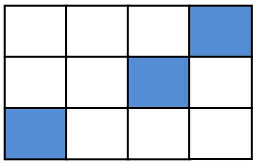
Numa loja para presentes há 4 bonés vermelhos e 2 azuis. Que fração representa a quantidade de bonés azuis em relação ao total de bonés?

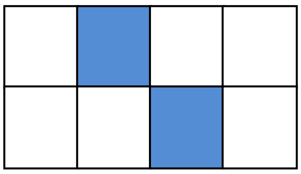


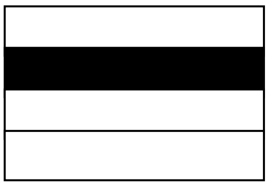
QUESTÃO 6

Qual (is) da(s) figura(s) abaixo pode(m) representar uma fração equivalente a 1/4.

A (  ) 

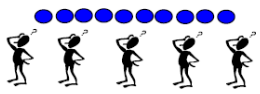
B (  ) 

C (  ) 

D ( ) 

QUESTÃO 7

Tenho dez bolas para dividir para cinco crianças. Quantas bolas cada criança ganhará? Que fração representa essa distribuição?



QUESTÃO 8

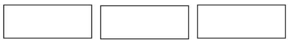
Se quisermos representar a quantidade de pedaços de pizza da figura abaixo como fração de uma pizza, qual a fração que representaria a quantidade de pizza que não foi consumida (a parte de cor amarela)?

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

QUESTÃO 09

Foram divididas igualmente para 4 crianças, 3 barras de chocolate. Marque com um X a resposta que você considera correta.



Cada criança receberá um chocolate inteiro? SIM ( ) Não ( )

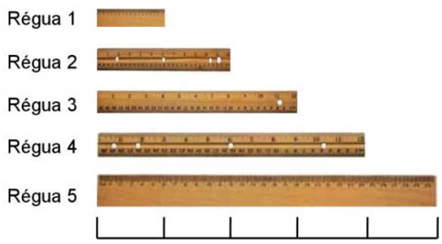
Justifique sua resposta:

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

QUESTÃO 10

Observe as réguas abaixo e responda as perguntas:




a) Quanto mede a régua 2 tomando-se a régua 1 como unidade?

______________________________________________________________________

b) Quanto mede a régua 1 tomando-se a régua 4 como medida?

______________________________________________________________________

c) Quanto mede a régua 3 tomando-se a régua 5 como medida?

______________________________________________________________________

d) Quanto mede a régua 4 tomando-se a régua 3 como medida?

______________________________________________________________________

QUESTÃO 11

Paulo vai pintar sua casa nas cores azul e branca. Observe a gravura abaixo e responda:


a) A mistura de tinta vai ter a mesma cor na segunda e na terça-feira?
SIM (   ) NÃO (   )

b) Que fração representa a quantidade de tinta azul em relação à mistura das tintas azul e branca?

Na segunda-feira?______________________________________________________
Na terça-feira? ____________________________________________

QUESTÃO 12

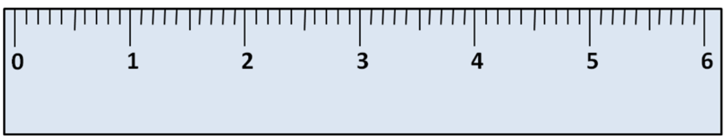
Em uma gincana estudantil, os três primeiros alunos que terminaram as tarefas ganharam um determinado número de bolas, do total de 35 conforme a classificação. Paulo ganhou 4/14 de bolas, Daniel 1/7 e Tiago 4/7. Responda quem ficou em 1º, 2º e 3º lugar respectivamente?

QUESTÃO 13

Raquel vai doar para a sala de leitura 3/6 da quantidade de livros desenhados abaixo. Quantos livros Raquel vai doar?

QUESTAO 14

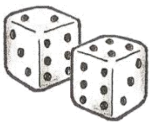
Identifique as frações 1/2; 1 ¾ ; 3/12 e 5/2 na régua abaixo:



QUESTÃO 15

a) Jogando apenas uma vez um dado de seis faces, qual a fração que representa a chance de tirar o número 3?

B)Jogando apenas uma vez dois dados juntos, cada um com seis faces, qual a fração que representa a chance de tirar o número 3 nos dois dados?



## APÊNDICE 02 - Listagem dos programas de Pós-Graduação consultados

*Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da PUCRS*

*Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da PUCSP*

*Doutorado no Ensino de Matemática da PUCSP*

*Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da ULBRA*

*Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da UNESP Marília*

*Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da UNESP Bauru*

*Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da UEL*

*Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da UFRE*

*Mestrado  em Educação Matemática da UFMS*

*Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da UFG*

*Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da UFRN*

*Mestrado Profissional em Educação e Matemática da PUCSP*

*Mestrado Profissional em Educação e Matemática da UFRGS*

*Mestrado Profissional no Ensino de Física e Matemática da UNIFRA/RS*

*Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da PUC-MINAS*

*Mestrado  Profissional em Ciências Exatas da UNIVATES*