



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**INSTITUTO DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

# **Modelagem de Canais de Comunicações Móveis com a Utilização de Séries Temporais e Geoestatística**

**Edilberto Oliveira Rozal**

**Belém – Pará**

**Março de 2013**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**INSTITUTO DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

Edilberto Oliveira Rozal

# **Modelagem de Canais de Comunicações Móveis com a Utilização de Séries Temporais e Geoestatística**

Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Pará como um dos requisitos para obtenção do título de “Doutor em Engenharia Elétrica”.

Orientador: Evaldo Gonçalves Pelaes  
Co-orientador: Joaquim C. B. Queiroz

Belém-Pará-Brasil

2013

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**INSTITUTO DE TECNOLOGIA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**Modelagem de Comunicações Móveis com a Utilização de Séries Temporais e Geoestatística**

Autor: Edilberto Oliveira Rozal

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO DA BANCA EXAMINADORA APROVADA PELO COLEGIADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ E JULGADA \_\_\_\_\_ PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA NA ÁREA DE TELECOMUNICAÇÕES

APROVADA EM:     /     /     .

BANCA EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. Evaldo Gonçalves Pelaes – Orientador UFPA

---

Prof. Dr. Joaquim Carlos Barbosa Queiroz – Co-orientador UFPA

---

Prof. Dr. Gervásio Protásio dos Santos Cavalcante UFPA

---

Prof. Dr. João Crisóstomo Weyl Albuquerque Costa UFPA

---

Prof. Dr. Antônio Marcos de Lima Araújo - IFPA/IESAM

---

Prof. Dr. Luiz Alencar Reis da Silva Mello – Cetuc – PUC/RJ

Visto:

---

Prof. Dr. Evaldo Gonçalves Pelaes

COORDENADOR DO PPGEE/ITEC/UFPA

# Agradecimentos

A Deus, por tudo que sou.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Evaldo Pelaes, pela amizade, pela paciência e pelo tempo dedicado a minha orientação.

.

Ao meu co-orientador, Prof. Dr. Joaquim Queiroz, pela amizade e pelo imenso tempo dedicado a minha orientação.

Aos meus pais Luiz e Maria Rozal, espelhos na formação da minha personalidade.

A minha esposa Nazaré e a meus filhos Edilberto e Erik, razões do meu viver.

À Concessionária Oi celular, pela disposição da base de dados.

*A Deus, aos meus pais, minha esposa Nazaré e meus filhos Edilberto e Erik.*

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xii</b>
<b>Lista de Siglas</b>	<b>xiv</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Trabalhos Relacionados .....	2
1.2 Contribuições e organização da tese .....	6
<b>2 Modelos de Propagação</b>	<b>8</b>
2.1 Mecanismos de Propagação .....	8
2.2 Modelos de Previsão de Cobertura .....	9
2.2.1 Modelo de Okumura .....	9
2.2.2 Modelo de Okumura-Hata .....	10
2.2.3 Modelo de Lee .....	11
2.2.4 Modelo de Ibrahim Parsons .....	12
2.2.5 Modelo de Bertoni-Walfisch .....	13
2.2.6 Modelo Cost 231 – Ikegami-Walfisch .....	15
<b>3 Modelos de Séries Temporais</b>	<b>19</b>
3.1 Classificação .....	20
3.2 Enfoques básicos .....	20
3.3 Tipos de Variação .....	21
3.4 Procedimentos estatísticos de previsão .....	22
3.5 Processos Estocásticos .....	22
3.6 Estacionariedade de uma Série .....	24

3.7	Processo Ergódico.....	25
3.8	Média, Variância e Autocovariância .....	27
3.8.1	Média .....	27
3.8.2	Variância.....	27
3.8.3	Covariância .....	27
3.8.4	Estimadores Amostrais da média, Variância e Autocovariância.....	28
3.8.5	Propriedades da Função Autocovariância .....	28
3.9	Ruído Branco .....	28
3.10	Alguns Operadores .....	29
3.11	Ferramentas para Análise de Séries Temporais .....	30
3.11.1	Correlações Amostrais – Função de Autocorrelação (FAC) .....	30
3.11.2	Função de Autocorrelação Parcial (FACP) .....	32
3.12	Modelos de Box e Jenkins – Modelos ARIMA.....	33
3.12.1	Processos de Médias Móveis .....	35
3.12.2	Processos Autorregressivos.....	36
3.12.2.1	Função de autocorrelação parcial (facp) .....	37
3.12.2.2	Identificação dos processos .....	39
3.12.2.3	Significância estatística da fac e facp.....	41
3.12.2.4	Inspeção visual da função de autocorrelação .....	41
3.12.3	Modelo Autorregressivo de Média Móvel (ARMA) .....	42
3.12.4	Modelo Autorregressivo Integrado e de Média Móvel (ARIMA) .....	44
3.12.4.1	Identificação de Modelos .....	45
3.12.4.2	Critérios de Informação .....	47
3.12.4.3	Estimação de Modelos ARIMA .....	47
3.12.4.3.1	Teste sobre um parâmetro .....	48
3.13	Modelagem de Séries Temporais Multivariadas .....	51
3.13.1	Modelos de Função de Transferência.....	51
3.13.2	Modelos de Funções de Transferência com simples entrada.....	51
3.13.3	Exemplos de funções de resposta impulso típicos.....	54
3.13.4	Função de correlação cruzada (FCC) .....	57
3.13.5	Construção de modelos de Função de Transferência .....	59
3.13.6	Identificação de modelos de função de transferência e modelos de ruído.....	60

3.13.7 Estimativa de modelos de função de transferência.....	62
3.13.8 Teste do diagnóstico dos modelos de função de transferência .....	62
<b>4 Geoestatística</b>	<b>64</b>
4.1 Conceitos básicos de geoestatística .....	64
4.2 Variáveis regionalizadas.....	68
4.2.1 Características das variáveis regionalizadas.....	70
4.3 Descrição de padrões espaciais .....	71
4.4 Modelamento da variação espacial.....	75
4.4.1 Modelo Esférico .....	77
4.4.2 Modelo Exponencial.....	77
4.4.3 Modelo Gaussiano .....	77
4.4.4 Modelo Potência.....	78
4.5 Estimativa espacial .....	82
4.6 Krigagem.....	82
4.6.1 Krigagem Ordinária.....	83
<b>5 Aplicação de Séries Temporais e Geoestatística em</b>	
<b>    Sinais de Comunicações Móveis</b>	<b>87</b>
5.1 Conjunto de Medição .....	87
5.2 Banco de Dados. ....	89
5.3 Metodologia. ....	91
5.3.1 Análise em Séries Temporais.....	91
5.3.1.1 Preparação dos dados .....	93
5.3.1.2 Ajuste de modelos univariados para as variáveis explicativas - Identificação das séries temporais .....	94
5.3.1.3 Modelos de funções de transferência .....	99
5.3.1.3.1 Notação do operador atraso e Funções de Transferência .....	100
5.3.1.3.2 Funções de autocorrelação cruzada.....	100
5.3.1.3.3 Estimativa de um Modelo de Função de Transferência Preliminar .....	105
5.3.2 Diagnóstico da Autocorrelação Espacial .....	108



5.3.2.1 Descrição da amostra .....	109
5.3.2.2 Diagnóstico da Autocorrelação Espacial .....	110
5.3.2.3 Inferência Espacial por Krigagem .....	113
5.4 Análise Comparativa dos resultados.....	114
<b>Conclusão</b>	<b>119</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>122</b>
<b>Trabalhos Publicados Pelo Autor</b>	<b>129</b>

# Lista de Figuras

Figura 2.1 - Modelo de propagação de Bertoni-Walfisch .....	15
Figura 2.2 - Modelo de propagação de Ikegami-Walfisch .....	16
Figura 2.3 - Modelo Walfisch-Ikegami (vista superior da rua).....	16
Figura 3.1 - Tendência de uma série temporal .....	21
Figura 3.2 - Representação gráfica dos valores assumidos por uma V.A. $Z(t_i)$ , para cada instante fixado $t_i$ .....	23
Figura 3.3 - Representação gráfica das V.A. com suas respectivas f.d.p's .....	23
Figura 3.4 - Representação gráfica de um processo estocástico.....	24
Figura 3.5 - Série temporal (170 observações) da Potência do sinal recebido (dBm) ao longo da Avenida Gentil Bittencourt, Belém/PA. Série nãoestacionária .....	26
Figura 3.6 - Série temporal (170 observações) da Altura dos prédios (m) ao longo da Avenida Gentil Bittencourt, Belém/PA. Série estacionária.....	26
Figura 3.7 - Ciclo iterativo sobre o uso da metodologia de Box e Jenkins .....	34
Figura 3.8 - FAC e FACP para um modelo AR (1).....	40
Figura 3.9 - FAC e FACP para um modelo MA (1).....	40
Figura 3.10 - Sistema dinâmico de Função de Transferência.....	52
Figura. 4.1(a) e 4.1(b) - Principais componentes da variação espacial .....	70
Figura 4.2 - Diagrama de dispersão para os pares $(x_i, y_i)$ .....	71
Figura 4.3 - Parâmetros do semivariograma.....	78

Figura 4.4 - Modelos semivariográficos do tipo transitivo (com patamar) mais usuais em geoestatística .....	79
Figura 4.5 - Modelos potência para diferentes valores de $w$ .....	79
Figura 4.6 - Tipos de anisotropia variográfica; a) geométrica b) zonal .....	80
Figura 5.1 - Vias utilizadas no centro urbano de Belém. ....	88
Figura 5.2 - Vista parcial do grande centro urbano de Belém/Pa. ....	90
Figura 5.3 - Mapa mostrando um maior índice de urbanização nos bairros envolvidos na campanha de medição .....	91
Figura 5.4 - Potência do sinal recebido coletadas ao longo de onze vias localizadas no grande centro urbano da cidade de Belém/PA .....	92
Figura 5.5 - Distância entre os prédios coletadas ao longo de onze vias localizadas no grande centro urbano da cidade de Belém/PA .....	92
Figura 5.6 - Altura dos prédios coletadas ao longo de onze localizadas no grande centro urbano da cidade de Belém/PA .....	93
Figura. 5.7(a) e 5.7(b) - Função de autocorrelação e Função de autocorrelação parcial para a potência do sinal recebido .....	95
Figura. 5.8(a) e 5.8(b) - Função de autocorrelação e Função de autocorrelação. parcial para a distância entre prédios .....	96
Figura. 5.9(a) e 5.9(b) - Função de autocorrelação e Função de autocorrelação parcial para a altura dos prédios.....	97
Figura 5.10 - Correlação cruzada entre a potência do sinal recebido ( $Y_t$ ) e a distância entre prédios ( $X_{It}$ ) .....	103

Figura 5.11- Correlação cruzada entre a Potência do sinal recebido ( $Y_t$ ) e a altura dos prédios ( $X_{2t}$ ) .....	105
Figura. 5.12(a) e 5.12(b) - Função de autocorrelação e Função de autocorrelação parcial para os resíduos ( $N_t$ ) .....	108
Figura 5.13 - Distribuição espacial dos resíduos do modelo em Séries temporais .....	109
Figura 5.14 - Variograma experimental e teórico dos resíduos.....	110
Figura. 5.15(a) e 5.15(b) - Função de autocorrelação e Função de autocorrelação parcial para os resíduos ( $e_t$ ) .....	112
Figura 5.16.a e 5.16.b – Mapa da distribuição espacial da potência recebida (dBm) obtidas pelo Modelo simulado e pela Campanha de medição .....	113
Figura 5.17 -Valores observados para a resposta do modelo e para a variável resposta Potência do sinal recebido (dBm) – (Modelo simulado – Equação 5.5).....	114
Figura 5.18 - Potência do sinal recebido pela estação rádio móvel e estimada pelos modelos teóricos e simulado.....	115
Figura 5.19 - Potência do sinal recebido pela estação rádio móvel e estimada pelos modelos teóricos e simulado para a Avenida Alcindo Cacela .....	117
Figura 5.20 - Potência do sinal recebido pela estação rádio móvel e estimada pelos modelos teóricos e simulado para a Rua Conselheiro Furtado.....	117

# Lista de Tabelas

Tabela 3.1 - Características das $fac$ 's e $facp$ 's dos processo AR(1) e MA(1).....	39
Tabela 3.2 - Propriedades teóricas da $fac$ e $facp$ .....	43
Tabela 3.3 - Condições de estacionaridade/invertibilidade e estimativas iniciais.....	43
Tabela 3.4 - Função de Transferência para $r = 0$ .....	54
Tabela 3.5 - Função de Transferência para $r = 1$ .....	55
Tabela 3.6 - Função de Transferência para $r = 2$ .....	56
Tabela 5.1 - Variável Potência do sinal recebido, autocorrelação dos resíduos.....	98
Tabela 5.2 - Variável distancia entre prédios, verificação da autocorrelação dos resíduos.....	98
Tabela 5.3 - Variável Altura dos prédios, verificação da autocorrelação dos resíduos.....	99
Tabela 5.4 - Modelo ARIMA ajustado para as series de entrada.....	99
Tabela 5.5 - Verificação da correlação cruzada entre as séries $Y_t$ (Potência do recebido) e $X_{1t}$ (Distancia entre prédios).....	101
Tabela 5.6 - Correlação cruzada entre $Y_t$ (Potência do sinal recebido) e $X_{1t}$ (Distancia entre prédios) .....	102
Tabela 5.7 - Verificação da correlação cruzada entre as séries $Y_t$ (Potência do sinal recebido) e $X_{2t}$ (Altura dos Prédios).....	103
Tabela 5.8 - Correlação cruzada entre $Y_t$ (Potência do sinal recebido) e $X_{2t}$ (Altura dos Prédios) .....	104

Tabela 5.9 - Estimativas e estatísticas dos parâmetros do modelo de função de transferência obtidas por iteratividade (SAS).....	106
Tabela 5.10 - Análise dos Resíduos para o Modelo .....	107
Tabela 5.11 - Comparação entre os três modelos teóricos, o valor medido e para a previsão com o modelo simulado para as vias envolvidas na campanha de medição .....	116
Tabela 5.12 - Comparação entre os resultados obtidos para os três modelos teóricos, modelo simulado e o valor medido para a Avenida Alcindo Cacela.....	118
Tabela 5.13 - Comparação entre os resultados obtidos para os três modelos teóricos, modelo simulado e o valor medido para a Rua Conselheiro Furtado.....	118

# Lista de Siglas

AIC	–	Critério de Akaike
ARIMA	–	Modelo Arima
ARMA	–	Modelo Auto-Regressivo de Média Móvel
ACF	–	Função de autocorrelação parcial
<i>BIC</i>	–	Critério Bayesiano
<i>E</i>	–	Módulo do campo elétrico
EM	–	Estação rádio móvel
ERB	–	Estação rádio-base
FDP	–	Função distribuição de probabilidade
FDC	–	Função distribuição cumulativa
GPS	–	<i>Global Positioning System</i>
GTD	–	<i>Geometrical Theory of Diffraction</i>
KS	–	krigagem simples
KO	–	krigagem ordinária
L(dB)	–	Perda de propagação em decibéis
LAG	–	Atraso
PT	–	Potencia de transmissão
MA	–	Processo de médias móveis
MAPE	–	Erro percentual médio absoluto
<i>RSS</i>	–	Soma dos quadrados dos resíduos
RMS	–	Valor RMS da densidade de potência
RMSE	–	Raiz do erro quadrático médio
SIACF	–	Função de auto-correlação inversa
SIC	–	Critério de Schwarz
SPACF	–	Função de autocorrelação parcial amostral
UHF	–	Faixa de frequência para sistemas móveis celulares
UTD	–	<i>Uniform Theory of Diffraction</i>
V.A.	–	Variável aleatória

# Lista de Símbolos

$A$	– Influencia da geometria dos prédios
$h_p$	– Altura dos prédios
$d_b$	– Distância entre prédios
$s$	– Densidade de potência
$E$	– Módulo do campo elétrico
$\eta$	– Impedância intrínseca do meio
$P_T$	– Potência transmitida pela transmissora
$G_T$	– Ganho da antena transmissora
$G_R$	– Ganho da antena receptora
$\Delta\phi$	– Diferença de fase
$h_T$	– Altura da antena transmissora
$h_R$	– Altura da antena receptora
$L_0$	– Atenuação no espaço livre
$f$	– Frequência
$G_{\text{área}}$	– Fator de correção relacionado com o tipo de terreno
$L_p$	– Valor médio da perda devido ao caminho de propagação para área urbana
$h_m$	– Altura da antena do terminal móvel em metros
$a(h_m)$	– Fator de correção da altura efetiva da antena receptora da unidade móvel
$L_{PS}$	– Perda devido ao caminho de propagação para área suburbana
$L_{PO}$	– Perda de propagação para áreas rurais abertas
$W_t$	– Potência do sinal recebido pela EM
$W_{1,6\text{ km}}$	– Potência recebida a uma milha (1,6 km) na direção da EM, em dBm
$\alpha$	– Coeficiente de perda por percurso num determinado ambiente
$G_t$ e $G_r$	– Ganhos das antenas da ERB e da EM, respectivamente
$LU$	– Fator de utilização do solo
$U$	– Fator de urbanização



$A$	– Influencia da geometria dos prédios
$L_{rts}$	– Perda por difração ao nível das ruas e por espalhamento
$L_{ms}$	– Perda devido aos multiplanos
$L_T$	– Atenuação total
$\Delta h_m$	– Diferença entre a altura dos prédios e a altura da estação móvel
$W$	– Largura da rua
$L_s$	– Fator de correção devido a orientação da rua em função do ângulo de incidência
$\phi$	– Ângulo de incidência
$p(r)$	– Função densidade de probabilidade
$dT$	– Espaço de tempo infinitesimal
$p(X,Y)$	– Função de distribuição conjunta
$I_0(u)$	– Função de Bessel modificada de ordem zero
$N$	– Comprimento da série temporal
$\mu$	– Média
$\sigma_z^2$	– Variância
$\gamma_k$	– Covariância
$\nabla_s^d Z_t$	– Operador diferença
$SZ_t$	– Operador soma
$r_k$	– Coeficiente de autocorrelação amostral entre k variáveis
$\theta(\mathbf{B})$	– Operador de médias móveis de ordem $q$
$\phi(\mathbf{B})$	– Operador autoregressivo de ordem $p$
$t$	– Teste $t$
$\nu(B)$	– Função de transferência
$\hat{\rho}_{\alpha\beta}(k)$	– Função correlação cruzada amostral
$\chi^2$	– Distribuição Qui-quadrado
$Q_0$	– Teste Q de <i>Portmanteau</i>
$\varphi$	– Coeficiente de assimetria
$K$	– Curtose
$F_{XY}(x,y)$	– Distribuição bivariada
$\gamma_{xy}$	– Semivariograma

$E\{X\}$	– Média ponderada
$\rho_{XY}$	– Coeficiente de correlação linear
$\rho_{XY}^R$	– Coeficiente de correlação <i>rank</i>
$\gamma(h)$	– Semivariograma experimental
$Co$	– Efeito pepita
$C$	– Patamar (ou <i>sill</i> )
$a$	– Alcance
$\Gamma(\mathbf{h})$	– Matriz de modelos semivariográficos
$\mathbf{B}^s$	– Matriz de co-regionalização
$[C_{\alpha\beta}]$	– Matriz de covariância
$\rho_k$	– Matriz de correlações

# Resumo

O presente trabalho apresenta os resultados da modelagem de canal de propagação baseado em séries temporais multivariadas com a utilização de dados coletados em campanhas de medição e as principais características da urbanização de onze vias do centro da cidade de Belém-Pa. Modelos de função de transferência foram utilizados para avaliar efeitos na série temporal da potência do sinal recebido (dBm) que foi utilizada como variável resposta e como variáveis explicativas a altura dos prédios e as distâncias entre os prédios. Como nos modelos em séries temporais desconsideram-se as possíveis correlações entre amostras vizinhas, utilizou-se um modelo geoestatístico para se estabelecer a correção do erro deste modelo.

Esta fase do trabalho consistiu em um conjunto de procedimentos necessários às técnicas geoestatísticas. Tendo como objetivo a análise em duas dimensões para dados espacialmente distribuídos, no que diz respeito à interpolação de superfícies geradas a partir das mostras georreferenciadas obtidas dos resíduos da potência do sinal recebido calculados com o modelo em séries temporais. Os resultados obtidos com o modelo proposto apresentam um bom desempenho, com erro médio quadrático na ordem de 0,33 dB em relação ao sinal medido, considerando os dados das onze vias do centro urbano da cidade de Belém/Pa. A partir do mapa de distribuição espacial da potência do sinal recebido (dBm), pode se identificar com facilidade as zonas infra ou supra dimensionadas em termos desta variável, isto é, beneficiadas ou prejudicadas com relação a recepção do sinal, o que pode resultar em um maior investimento da operadora (concessionária de telefonia celular móvel) local naquelas regiões onde o sinal é fraco.

Palavras Chave – Wireless, modelagem temporal multivariada, Modelo ARIMA, geoestatística, krigagem.

# Abstract

This work presents the results of propagation channel modeling, based on multivariate time series models using data collected in measurement campaigns and the main characteristics of urbanization in the city of Belem-PA. Transfer function models were used to evaluate effects on the time series of received signal strength (dBm) which was used as the response variable and as explanatory variables of the height of buildings and distances between buildings. As time series models disregard to the possible correlations between neighboring samples, we used a geostatistical model to establish the correctness of this model error. This phase of the work consisted of a set of procedures necessary to geostatistical techniques. Aiming at the analysis on two dimensions for data spatially distributed, with respect to the interpolation of surfaces generated from georeferenced samples obtained from residues of received signal power computed using the model series. The results obtained with the proposed model showed an excellent performance, with mean square error in the order of 0.33 dB compared to the measured signal, considering the data of the eleven routes from the center of the city of Belém/Pa. From the map of the spatial distribution of the received signal strength (dBm), one can easily identify areas below or above dimensional in terms of this variable, that is benefited or damaged compared with the signal reception, which may result in a greater investment of the local operator (concessionaire mobile phone) in those regions where the signal is weak.

Keywords: Wireless, Multivariate temporal modeling, ARIMA model, geostatistics, kriging.

# Capítulo 1

## Introdução

Atualmente existe uma grande variedade de modelos de canal, com fundamentos teóricos e experimentais para previsão da atenuação de percurso (*path loss*) em sistemas de comunicações móveis, consistindo esta em um dos passos mais importantes no planejamento de sistemas móveis celulares. Uma correta previsão possibilita ao projetista de sistemas móveis ter a capacidade de prever a potência mínima que é necessária irradiar de um transmissor para suprir com qualidade aceitável de cobertura uma área predeterminada, o que é de fundamental importância para a melhoria da técnica do reuso de frequência e para a implementação de projetos com banda compartilhada.

Esses modelos diferem na sua aplicabilidade, sobre diferentes tipos de terreno e diferentes condições ambientais. Dessa forma, não existe um modelo adequado para todas as situações. Em casos reais, o terreno sobre o qual se dá a propagação apresenta topografia variada, vegetação e construções distribuídas de forma aleatória. Embora o cálculo da perda de propagação possa ser realizado, ainda que com precisão limitada, utilizando técnicas como a do traçado de raios ou soluções numéricas para aproximações da equação de onda, os métodos mais utilizados para cálculo de cobertura são os empíricos ou semi-empíricos [1].

Para se verificar qual modelo é mais adequado para uma determinada região, pode-se realizar campanhas de medição na área de interesse e avaliar o desempenho de cada modelo frente as medidas. Esta avaliação pode ser realizada por comparação quantitativa analisando as estatísticas do erro de cada modelo em relação aos valores medidos.

Através destes parâmetros estatísticos pode-se construir uma tabela comparativa entre os modelos considerados, possibilitando assim, determinar por uma análise estatística qual modelo mais se ajusta a referida região de estudo.

Uma boa predição do modelo de propagação é fundamental para a execução de um projeto eficiente, tanto do ponto de vista da qualidade do sistema como sob o aspecto de custos de implantação. Na prática é muito comum selecionar um modelo de cálculo para o pré-projeto,

mas antes da execução do projeto devem-se realizar medições de campo em um grande número de pontos da região a ser coberta, e ajustar os parâmetros (coeficientes) do método, de modo a minimizar o erro de predição.

Neste trabalho é apresentado um modelo em séries temporais para a caracterização da potência do sinal recebido (dBm) em onze vias do centro urbano da cidade de Belém do Pará. O trabalho consistiu no estudo das possíveis relações existentes entre essa potência do sinal recebido e o comportamento da altura dos prédios, além da distância entre os prédios. Modelos de função de transferência foram utilizados para avaliar efeitos na série temporal da potência recebida e para avaliar possíveis relações entre a altura dos prédios e a distância entre prédios.

Para a correção do erro do modelo em séries temporais, em vez de ser utilizado, outro modelo ARIMA, um modelo espacial Geoestatístico baseado em técnicas de krigagem foi utilizado. Este Módulo engloba um conjunto de procedimentos necessários às técnicas geoestatísticas (análise exploratória, geração e modelagem de semivariograma e interpolação por krigagem). Tendo como objetivo a análise em duas dimensões para dados espacialmente distribuídos, no que diz respeito à interpolação de superfícies geradas a partir das amostras georreferenciadas obtidas da potência recebida Os resultados obtidos com o modelo proposto apresentaram um excelente desempenho, com erro médio quadrático na ordem de 0,33 dB em relação ao sinal medido, considerando os dados de onze vias do centro urbano da cidade de Belém/Pa .

## **1.1 Trabalhos Relacionados**

Um algoritmo rápido e preciso para reproduzir as variações do sinal no receptor nas comunicações com satélites, é apresentado por Briso em [2]. Este modelo faz a utilização de um hardware que permite testar e medir diferentes parâmetros do canal em laboratório. O modelo foi gerado com medidas do canal realizadas com a utilização de um *GPS* que é um dos poucos sistemas geoestacionários disponíveis. As medidas foram processadas para extrair as estatísticas para diferentes posições e elevações do satélite, e então um versátil e preciso modelo foi gerado para ambientes rural, semi-urbano e suburbano. Medidas em diferentes ambientes foram realizadas e processadas e os resultados das medidas foram aplicados a modelos estatísticos gerais como as distribuições Gaussianas, Rayleigh e de Rice.

Uma avaliação da relativa significância de vários objetos encontrados em um cenário típico de ruas para estimar as contribuições do atraso e do ângulo de propagação com um ajuste em ambiente suburbano foi realizada em [3]. Neste trabalho, foi feita a análise da influência da dispersão devido a prédios em ambientes urbanos usando a técnica de traçado de raios. Foi mostrado que o mecanismo que contribui para o espalhamento angular na estação rádio base é a dispersão difusa dos prédios próximos à estação rádio base, além da reflexão e difração difusa dos prédios de alturas diferentes. As simulações podem ser usadas para diferentes cidades para investigar a dependência de parâmetros, tal como a altura da antena.

Um estudo de propagação em uma área urbana, mais precisamente em um parque de floresta (Campo de Santana-Rj) foi realizado em [4], que consistiu na investigação da natureza estatística do desvanecimento para frequências no intervalo de 0,9 GHz a 1,8 GHz, bem como o exame do ganho de altura da estação rádio base. Medidas do sinal do receptor em intervalos de 30 segundos foram realizadas em 15 pontos diferentes do parque, os quais foram utilizados para a modelagem com as funções de distribuição para o desvanecimento. Foi mostrado que na maioria dos casos a distribuição podia ser aproximada pela distribuição de Rice, da qual o fator  $K$  (parâmetro de Rice) foi encontrado como função da altura da estação rádio base. Nesse trabalho foi mostrado que as medidas de voltagem recebida modeladas pelas distribuições de Rice e Nakagami em muitos casos tiveram os mesmos valores para o teste Chi-quadrado, sendo que as distribuições Gaussiana e de Rayleigh foram modeladas para alguns caso particulares. As várias medidas do sinal mostram que uma única contribuição se torna mais dominante quando a estação base é levantada.

Em [5] são apresentados dois tipos de modelos de canais com múltipla entrada: O geométrico que é baseado na geometria 2D descrita por Ertel et al [6] e o modelo estatístico, que é baseado no modelo estocástico desenvolvido na Universidade de Aalborg na Dinamarca [6,7,8]. A vantagem do modelo geométrico é que todos os parâmetros usados para caracterizar o canal (espalhamento Doppler, tempo de retardo, ângulo de chegada, etc.) são correlacionados. Por sua natureza física, o modelo geométrico implementa todos esses parâmetros do sinal e pode ser utilizado em ambientes indoor e outdoor sem a necessidade de dados empíricos. A desvantagem é que o modelo geométrico simplifica em demasia o mundo físico e assim alguns detalhes estatísticos provavelmente são perdidos.

Em [9] foi realizado um estudo estatístico do modelo de propagação de Walfisch-Bertoni para a estimação da perda de percurso em ambientes urbanos. O modelo é uma combinação dos métodos empíricos e determinísticos, possuindo dois parâmetros principais

além dos seus parâmetros básicos: a altura dos prédios,  $h_p$  e a distância entre os prédios,  $d_b$ . O método proposto, no entanto, busca estimar esses dois parâmetros, a fim de generalizar o modelo de Walfisch-Bertoni na predição do sinal para diferentes áreas urbanas, estes parâmetros foram estimados em duas categorias diferentes: Estimação experimental, onde os valores estatísticos  $h_p$  e  $d_b$  foram definidos através de uma base de dados estatísticos obtidos em 20 áreas urbanas diferentes; e a estimação teórica escolhendo os valores  $h_p$  e  $d_b$  como variáveis aleatórias e modelados em função da distribuição Gaussiana e de Rayleigh. Nesse modelo, os parâmetros são modelados como variáveis aleatórias unidimensionais (apenas um dos parâmetros varia) e os seus resultados são obtidos através da análise da média e do desvio padrão da perda de percurso, devido aos parâmetros  $h_p$  e  $d_b$  para cada área urbana, sendo modelados em função da distribuição Gaussiana e de Rayleigh pelo motivo dos ambientes simulados possuírem características físicas desses modelos.

Uma comparação do desvanecimento de dados medidos com o modelo estatístico de Rayleigh foi apresentada em [10]. Os resultados mostram que o modelo de Rayleigh apresenta resultados discrepantes quando comparados com os dados experimentais quando se utiliza o modelo ARMA. Para a validade do modelo, foram comparadas algumas características do desvanecimento obtidas analiticamente com os dados medidos.

Uma análise da distribuição Weibull que consistiu na descrição do desvanecimento de canais outdoor é apresentada em [11], onde é realizada a comparação desta distribuição com outros modelos estatísticos, tais como a distribuição de Rayleigh, Rice e Nakagami. A comparação é feita utilizando dados experimentais tomados em ambientes urbanos e suburbanos na frequência de 900 MHz. A partir da introdução da distribuição Weibull como uma ferramenta para descrever o desvanecimento de canais outdoor, foi verificado que a distribuição de Rayleigh é inadequada em muitos casos para descrever modernas áreas urbanas, enquanto que as distribuições de Weibull, Rice e Nakagami descrevem adequadamente o desvanecimento, ressaltando-se o fato de que os parâmetros da distribuição Weibull são calculados.

Em [12] são apresentadas algumas contribuições ao estudo do comportamento estatístico do sinal de rádio em um sistema móvel. O estudo é realizado através da estatística de segunda ordem do sinal pelos cálculos da taxa de cruzamento de nível a tempo médio de desvanecimento. Nesse trabalho estimou-se a proporção da área da célula que é sobreposta por outra célula considerando-se as condições de cobertura das células; estimou-se também a proporção da área de uma célula sobreposta por duas outras células adjacentes considerando-



se 100% de cobertura das células. Os resultados mostram que esta proporção é significativa, da ordem de 40 %, com potencial de ser utilizada em algoritmos de caminamento alternativo de tráfego.

Em [13] é feita uma importante análise do modelamento estatístico para o modelo de propagação de Walfisch-Bertoni, através de seus principais parâmetros, assumindo características de variáveis aleatórias bidimensionais. Observou-se que a variação destes parâmetros no modelo de Walfisch-Bertoni, ocasionou uma grande diferença no cálculo da perda de propagação, essa diferença é bastante notória nas superfícies representativas da FDP bidimensional e da FDC bidimensional causado pela mudança da variância, que dá uma nítida noção de dispersão dos dados, ou seja, de quanto à perda de propagação  $L(\text{dB})$ , desviou-se da sua média para cada cenário simulado.

Em [14] apresentam-se métodos para aperfeiçoar o desempenho de redes de comunicação de dados através da modelagem e predição de com modelos dinâmicos com variação temporal. Neste trabalho caracteriza-se o desvanecimento do canal Rayleigh usando a 1ª e 2ª ordem do modelo autorregressivo (AR). Estes modelos foram aplicados para estimar a probabilidade de erro como função do bloco de transmissão. Os resultados mostram que a 2ª ordem do modelo AR captura o comportamento pseudoperiódico do canal Rayleigh além de produzir a estimação precisa da probabilidade de erro do bloco relativa à 1ª ordem do processo AR. Análises de desempenho dos modelos demonstram insuficiência da cadeia de Markov na representação das características do canal em pequena escala de tempo.

Em [15] foi apresentado um modelo estatístico associado a uma campanha de medição realizada em uma área suburbana com alta densidade de árvores nativas da região Amazônica. Com o modelo estatístico de perda de propagação apresentado obteve-se uma predição com erro médio de 4,05 dB em relação à perda medida, esse valor é razoável para esse tipo de predição.

Em [16] foi demonstrado que é necessário um processo autorregressivo de ordem  $n \geq 2$  para modelar a função de autocorrelação parcial (ACF) em canais caracterizados por ambientes de dispersão isotrópicos e não-isotrópicos. Nesse trabalho, os parâmetros modelo são obtidos minimizando o erro quadrático entre a ACF real e estimada. Este método de aproximação mostra uma sensível melhora no cálculo da ACF quando comparada com o tradicional Método Yule-Walker [17].

No artigo [18] apresentou-se um modelo que consiste em um ajuste do modelo de Walfisch-Ikegami através da regressão linear múltipla, utilizando como variável dependente a

potência do sinal recebido e como variáveis independentes os parâmetros  $h_p$  (altura dos prédios) e  $d_b$  (distâncias entre os prédios), as quais foram modeladas como uma variável aleatória com função de distribuição de probabilidade Gaussiana. Os resultados comparativos mostram que a potência do sinal recebido calculada com o modelo ajustado demonstra certa cordância com a potência do sinal recebido medido, porém um alto erro médio quadrático.

Em [19] foi proposto um algoritmo que consiste na seleção modelos adaptáveis para a predição de redes de sensores sem fio em séries temporais. Os resultados experimentais baseados em 14 séries temporais obtidas através de medições realizadas por redes de sensores sem fio em cenários diferentes demonstram a eficiência e a versatilidade da estrutura, proporcionando em uma maior versatilidade e eficiência econômica na comunicação.

## 1.2 Contribuições e organização da tese

Durante algumas décadas, o sistema de comunicações via rádio submeteram-se a um extenso desenvolvimento, tendo sempre como meta a melhoria no desempenho e a boa qualidade do sistema e soluções adequadas para o custo. Um sistema de comunicação via rádio deve ser projetado com muito cuidado de modo a atender estes requisitos. Uma das características mais importantes na propagação é a perda de percurso em um ambiente de rádio móvel. Uma boa estimativa das perdas de propagação fornece uma boa base, para uma seleção apropriada da posição das estações bases e a determinação das frequências de operação.

Uma boa predição do nível da intensidade de campo é uma tarefa complexa e difícil. Desta forma há a necessidade de se ter modelos de propagação apropriados para a região em que se pretende implantar o sistema para que se tenha um bom desempenho.

O presente trabalho apresenta uma proposta de modelagem de canal de propagação, baseado em modelos de séries temporais multi-variáveis, realizando um diagnóstico dos efeitos da autocorrelação espacial, para então analisar a variabilidade espaço-temporal da potência do sinal recebido através de dados coletados em campanhas de medição em áreas urbanizadas da cidade de Belém-PA. Considera-se o estudo do comportamento e de propriedades características de variáveis como altura de prédios, distância entre prédios e a distância da estação rádio móvel. Especificamente o trabalho faz utilização de função de transferência na modelagem multivariada de séries de dados de um cenário urbano

considerando como variável resposta a potência recebida e as variáveis altura dos prédios, distância entre prédios como co-variadas.

No segundo capítulo descrevem-se as principais características dos modelos de propagação, onde se explana a importância da topografia e morfologia para a modelagem. Apresentam-se os principais modelos utilizados tanto para macro células como micro células. Nos diversos modelos estudados a morfologia é caracterizada por parâmetros que são definidos de forma empírica para cada ambiente. Portanto é importante que se tenha uma boa definição destes parâmetros para minimizar erros. Os modelos tradicionais de previsão de perdas, considerados empíricos: Okumura, Okumura-Hata, Lee, Ibrahim-Parsons, Bertoni-walfisch e Ikegami-Walfisch serão apresentados devido às simulações e a proposta que serão apresentadas no capítulo 5.

No terceiro capítulo faz-se uma abordagem teórica de séries temporais, onde se enfatiza com mais detalhes os modelos ARIMA e os modelos baseados em funções de transferência. O capítulo quatro apresenta os fundamentos teóricos relativos aos conceitos geoestatístico que foram considerados neste trabalho (estimação e simulação). No que concerne às metodologias geoestatísticas, apresenta-se o conceito de Variável Regionalizada. Introduce-se a função covariância espacial e o variograma como ferramentas reveladoras da continuidade espacial, referem-se os conceitos de variogramas experimentais univariados indicando as fórmulas utilizadas para o respectivo cálculo e referem-se as funções teóricas mais utilizadas nas Ciências da Terra para o ajustamento dos variogramas experimentais. Finalmente apresenta-se o formalismo teórico das metodologias de estimação por krigagem. No capítulo cinco são apresentados os resultados das simulações e no sexto e último capítulo retiram-se algumas conclusões e propõem-se linhas de investigação futura para o aperfeiçoamento do modelo proposto.

# CAPÍTULO 2

## Modelos de Propagação

O canal de rádio-propagação, pela sua natureza aleatória é dependente da faixa de frequência utilizada, não é de fácil compreensão, exigindo estudos teóricos e dados estatísticos para sua caracterização. Existem três formas básicas de propagação, a partir das quais podem ocorrer subdivisões que são: ondas ionosféricas, ondas troposféricas e ondas terrestres [1].

A variedade de modelos experimentais e teóricos tem sido desenvolvidos para a predição da propagação em sistemas móveis de rádio. Muitos modelos têm sido publicados na literatura. Listaremos agora alguns destes modelos, colocando suas principais características. Estes modelos são comparados em termos de ambiente e fatores de propagação, bem como também pela saída de informação de cada um.

### 2.1 Mecanismos de Propagação

Os mecanismos de propagação determinam a atenuação de propagação no enlace e, conseqüentemente, o valor médio do sinal no receptor. A compreensão dos mecanismos envolvidos são básicos para o cálculo do raio máximo de uma célula. Por outro lado, os efeitos de propagação determinam as flutuações rápidas e lentas do sinal em torno de seu valor médio.

As flutuações que reduzem o valor do sinal são o que se denomina desvanecimento (em pequena escala ou, usualmente, desvanecimento rápido; e em larga escala ou, usualmente, desvanecimento lento). O correto entendimento das características dos efeitos de propagação é básico para a estimativa do desempenho do sistema e cálculo de cobertura das células.

Os mecanismos de propagação predominantes na faixa de frequências usada em sistemas celulares são: visibilidade, reflexão (incluindo múltiplas reflexões e espalhamento) e

difração (incluindo múltiplas difrações). É usual se denominar a reflexão especular de reflexão apenas, e a reflexão difusa de espalhamento.

No efeito de propagação denominado multipercurso, o sinal resultante recebido é devido a composição de inúmeras versões do sinal original transmitido, que percorreram diferentes percursos determinados, em grande parte, pelas reflexões e difrações que sofreram pelos próprios mecanismos de propagação. Outro efeito de propagação é o que se manifesta através da flutuação do nível de sinal devido a obstruções geradas pelo relevo ou criadas pelo homem. Esse efeito é conhecido por sombreamento.

Na elaboração de um projeto para sistemas de comunicações, a determinação exata tanto das características de propagação quanto dos mecanismos e de seus efeitos são muito importantes.

## **2.2 Modelos de Previsão de Cobertura**

Os modelos de propagação são geralmente baseados nos modelos de perda de propagação descritos anteriormente, seção 2.2, e modificados com base em resultados obtidos a partir de campanhas de medições em uma ou mais regiões [1]. O modelamento dos resultados obtidos e a apresentação do resultado final se dão através de ábacos, como o modelo de Okumura [20, 21], por exemplo, ou expressões que fornecem o valor mediano da atenuação, como os modelos Okumura-Hata [22, 23, 24], Lee [20], Ibrahim-Parsons [26], Walfisch-Bertoni [27] e Ikegami-Walfisch [28, 29].

Os algoritmos de predição destes modelos lidam normalmente com grande volume de dados, requer um sofisticado processamento computacional e um conhecimento, às vezes detalhado, da topografia do terreno. Por serem baseados em medições realizadas em locais específicos, os modelos empíricos tendem a não fornecer resultados muito confiáveis quando aplicados a regiões que difiram significativamente da região original [1].

### **2.2.1 Modelo de Okumura**

O modelo é baseado em medidas feitas em Tokyo (Japão), em arredores suburbanos com frequências de 200, 453, 922, 1310, 1430 e 1920 MHz, num ambiente com terreno quase plano. Determina um método para predição da intensidade de campo em áreas de serviços móvel com distância de enlace de 1 a 100 Km, altura da antena da estação rádio base

(ERB) de 30 a 1000 m, altura da antena da estação móvel (EM) e o tipo de área coberta pelo sistema [20].

A área de cobertura do sistema é classificada de acordo com os obstáculos encontrados no trajeto de propagação em: Urbana – caracterizada pela grande concentração de obstáculos como edifícios e árvores de grande porte; Suburbana – caracterizada pela presença não acentuada de casas e árvores; Área aberta ou rural – caracterizada como um espaço aberto, onde não há obstáculos como prédios e árvores de grande porte.

A fórmula geral apresentada por Okumura é dada por:

$$L = L_0 + A(f, d) - G_{\text{área}} - G(h_t) - G(h_r). \quad (2.1)$$

Onde  $L_0$  é a atenuação em espaço livre,  $A(f, d)$  é obtido pela curva de atenuação em função da distância  $d$  (distância entre as estações rádio-base e transmissora [KM]) e da frequência  $f$  [MHz],  $G_{\text{área}}$  é fator de correção obtido por curvas relacionadas com o tipo de terreno e a frequência utilizada, e  $G(h_t)$  e  $G(h_r)$  são correções relativas às alturas de  $h_t$  e  $h_r$  das antenas transmissoras e receptora, respectivamente.

$$G(h_t) = 20 \log(h_t / 200), \quad h_t > 10m \quad (2.2)$$

$$G(h_r) = \left\{ \begin{array}{ll} 10 \log(h_r / 3), & h_r < 3m \\ 20 \log(h_r / 3), & 3m \leq h_r \leq 10m \end{array} \right\}$$

O modelo de Okumura não é muito aplicado na prática, devido a sua natureza gráfica. Para se trabalhar melhor com esse modelo em simulações computacionais utilizam-se as expressões ajustadas de Hata.

### 2.2.2 Modelo de Okumura-Hata

O modelo de Okumura foi tomado como referência para o desenvolvimento do modelo de Hata, que na verdade, apresenta uma formulação prática do modelo de Okumura. O modelo de Hata, de grande aceitação, leva em consideração a morfologia sem detalhamento, isto é, utiliza “manchas” morfológicas para diferentes ambientes de propagação como área suburbana, área urbana, área urbana densa, área rural, etc.

O modelo de Hata é uma formulação empírica do modelo de Okumura. Aplica-se a uma faixa de frequências entre 150 e 1500 MHz. Este modelo é mais adequado para macro

células por cobrir áreas maiores que 1 km. Como as cobertas por uma micro célula são inferiores a esta distância o mesmo então não é recomendado.

O valor médio da perda de propagação de uma área urbana é:

$$L_p = 69.55 + 26.16 \log f - 13.82 \log h_b - a(h_m) + (44.9 - 6.55 \log h_b) \log d . \quad (2.3)$$

Onde:

$L_p$  é o valor médio da perda devido ao caminho de propagação para área urbana [dB];

$f$  é a frequência de operação em MHz;

$h_b$  é a altura efetiva da antena da ERB em metros;

$h_m$  é a altura da antena do terminal móvel em metros;

$d$  é a distância entre transmissor (ERB) e receptor em Km;

$a(h_m)$  é o fator de correção da altura efetiva da antena receptora da unidade móvel, a qual é uma função do tamanho da área de cobertura [dB], dada por:

i) Cidade pequena-média:

$$a(h_m) = (1,1 \log f - 0,7)h_m - (1,56 \log f - 0,8) \quad (dB). \quad (2.4)$$

ii) Cidade grande:

$$a(h_m) = (8,29(\log 1,54h_m)^2 - 1,10) \quad f \leq 200 \text{ MHz} \quad (dB), \quad (2.5)$$

$$a(h_m) = 3,2(\log 1,75h_m)^2 - 4,97 \quad f \geq 400 \text{ MHz} \quad (dB). \quad (2.6)$$

O valor médio da perda devido ao caminho de propagação para área suburbana em dB é expresso por:

$$L_{PS} = L_p - 2(\log(f/28))^2 - 54 \quad (dB). \quad (2.7)$$

O valor médio da perda devido ao caminho de propagação para áreas rurais abertas em dB é dado por:

$$L_{PO} = L_p - 4,78(\log(f))^2 + 18,33 \log f - 40,94 \quad (dB). \quad (2.8)$$

### 2.2.3 Modelo de Lee

O modelo de Lee também é baseado em dados experimentais que definem um modelo de propagação por área definido. Este modelo é apresentado na forma

$$W_r = W_{1,6km} - 10.\alpha.\log(d/1,6km) + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \quad (2.9)$$

$$\alpha_1 = 10.\log(w_i/10), \quad (2.10)$$

$$\alpha_2 = 20.\log(h_t / h_{o,t}), \quad (2.11)$$

$$\alpha_3 = G_t - 6, \quad (2.12)$$

$$\alpha_4 = 10.\log(h_r / h_{o,r}), \quad (2.13)$$

$$\alpha_5 = G_r. \quad (2.14)$$

Onde:

$W_t$  – potência do sinal recebido pela EM em dBm;

$W_{1,6\text{ km}}$  – potência recebida a uma milha (1,6 km) na direção da EM, em dBm;

$d$  – distância da ERB à EM em km;

$\alpha$  – coeficiente de perda por percurso num determinado ambiente;

$h_t$  e  $h_r$  – alturas das antenas da ERB e EM, respectivamente, em metros;

$G_t$  e  $G_r$  – ganhos das antenas da ERB e da EM, respectivamente, em dBd.

Os parâmetros com índice  $o$  são valores de referência a 1 milha da ERB.

O modelo de Lee é um processo de predição ponto-a-ponto a partir de um método área a área. Assim, são calculadas as perdas da propagação por área e em seguida verifica-se se há obstruções no percurso. Caso haja alguma obstrução o sinal recebido após esta obstrução é submetido a uma perda por obstrução somada à perda anteriormente calculada. Desta forma este modelo utiliza outros modelos de propagação para casos de difração e reflexão no procedimento ponto-a-ponto.

O modelo ponto-a-ponto se mostra bastante eficaz para o cálculo de cobertura celular, mas é recomendado apenas para a faixa de em torno dos 900 MHz.

## 2.2.4 Modelo de Ibrahim-Parsons

Este modelo de propagação para ambientes urbanos leva em consideração fatores como o grau de urbanização, utilização do terreno, e a variação de altura entre a estação móvel (EM) e a estação rádio base (ERB). Essas características empíricas foram extraídas de medidas realizadas na cidade de Londres, razão pela qual, esse modelo também é conhecido como “Modelo Londrino”, em frequências entre 168 e 900 MHz. Este modelo foi estudado



em áreas urbanas sem ondulações. É utilizado para distâncias entre antenas menores que 10 Km e antena receptora de altura inferior a 3m.

Com as medidas e os fatores já mencionados, Ibrahim e Parsons puderam descrever o ambiente urbano quantitativamente, determinando a dependência da perda de propagação com a distância e com a frequência de transmissão.

A região analisada é dividida em quadriculas de 500 m de lado e dois fatores são considerados: o fator de utilização do solo,  $LU$ , definido como área do quadrado coberta por edificações; e o fator de urbanização,  $U$ , que é a propagação da área coberta por edificações com prédios altos. Assim, a perda média de percurso, para duas antenas isotrópicas de ganho unitário, é dada por [26]:

$$L = -20 \log(0,7h_t) - 8 \log h_r + \frac{f}{40} + 26 \log \frac{f}{40} - 86 \log \left( \frac{f + 100}{156} \right) + \left[ 40 + 14,15 \log \left( \frac{f + 100}{156} \right) \right] \log d + 0,265LU - 0,37H + 0,087U - 5,5. \quad (2.15)$$

Onde  $h_t$  e  $h_r$  são as alturas das antenas transmissora e receptora, respectivamente em metros,  $d$  é a distância do enlace entre as antenas em Km,  $f$  é a frequência de operação em MHz e  $H$  é a diferença entre as alturas dos quadrados que contêm as antenas transmissora e receptora.

## 2.2.5 Modelo de Bertoni-Walfisch

Este modelo teórico foi desenvolvido especificamente para predição do efeito em prédios na perda de transmissão média.

Aplica-se em ambientes urbanos e suburbanos onde os prédios são de alturas razoavelmente uniformes e são construídos em um grande número de prédios enfileirados com separação pequena entre os prédios vizinhos, de forma que a distância entre os prédios seja pequena comparada com a largura. Além disso, é feita a consideração de que as ruas são paralelas entre si. Este modelo, entretanto, não leva em consideração nenhum efeito da vegetação ou obstruções do terreno.

Neste modelo, o sinal recebido ao nível das ruas pela unidade móvel não tem componente em linha de visada direta com a antena transmissora, situada normalmente acima da altura dos prédios sendo, portanto, formado predominantemente por reflexões e difrações nos prédios próximos à unidade móvel. O modelo descreve a inclinação local do terreno na

vizinhança da estação móvel. Entretanto, não incorpora fatores de rugosidade do terreno e não trata também de características de obstrução do terreno, tais como montes, colinas e etc.

O modelo é uma combinação de modelos empíricos e determinísticos usados na estimativa da perda de propagação em ambientes urbanos sobre uma faixa de frequência de 800 a 2000 MHz.

A falta de um único modelo compacto que possa ser usado para diferentes áreas urbanas é um dos problemas importantes a ser resolvidos. O modelo de Bertoni-Walfisch foi conhecido como mais bem sucedido nesta área. Além dos parâmetros básicos tais como a frequência de ligação  $f$ , à distância entre transmissor e receptor  $d$ , a altura da antena transmissora e receptora  $h$  e  $h_m$ , respectivamente, há dois outros parâmetros chaves: A altura dos prédios  $h_p$  e a distância entre os prédios  $d_p$ .

O modelo de Bertoni-Walfisch apresenta um melhor desempenho quando comparado com outros modelos de predição, uma vez que ele leva em consideração as características de cada área urbana onde o modelo é aplicado.

Para o terreno nivelado e dentro do horizonte de rádio a perda de propagação média em 900 MHz é dada por, assumindo antenas isotrópicas de ganho unitário [27]:

$$L = 155,8 + A - 18 \log(h - h_p) + 38 \log d \quad (dB). \quad (2.16)$$

onde  $A$  é a influencia da geometria dos prédios dada por:

$$A = 5 \log \left[ \left( \frac{d_b}{2} \right)^2 + (h_b - h_m)^2 \right] - 9 \log d_b + 20 \log \left\{ \tan^{-1} \left[ \frac{2(h_b - 2h_m)}{d_b} \right] \right\}. \quad (2.17)$$

Onde  $d_b$  é distância centro-a-centro das fileiras dos edificios em metros,  $h_b$  é a altura média dos edificios em metros,  $h_m$  é a altura da antena móvel em metros,  $h$  é a altura da estação base da antena transmissora em metros e  $d$  é a distancia entre a EM a ERB em Km. A Figura 2.1 ilustra os parâmetros usados, especificamente para o Modelo de Walfisch-Bertoni.

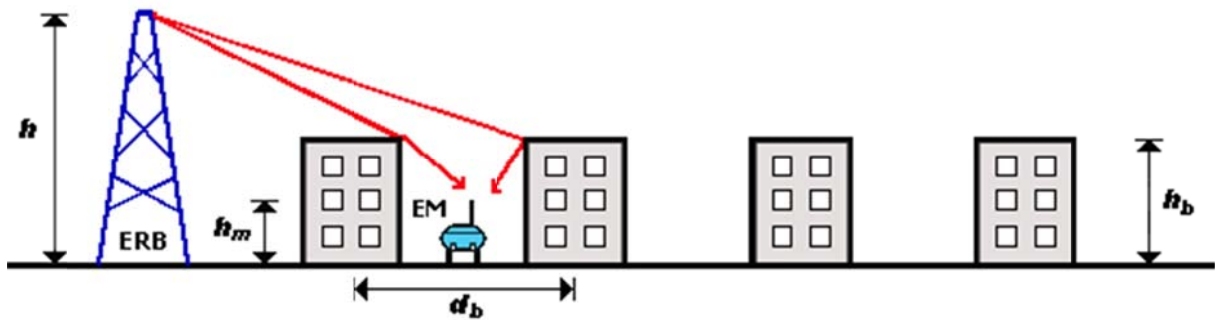


Figura 2.1 – Modelo de propagação de Bertoni-Walfisch.

## 2.2.6 Modelo Cost 231 – Ikegami-Walfisch

O modelo COST (Cooperation in the Field of Scientific and Technical) 231, desenvolvido a partir dos modelos de Walfish-Bertoni e Ikegami, leva em consideração a morfologia detalhada do terreno, com informações de altura de prédios, distancia entre prédios, largura media das ruas e orientação destas com relação à direção de propagação. O Comitê de Pesquisas Europeu COST 231 desenvolveu este modelo para propagação em ambientes urbanos para utilização na faixa de frequências compreendida entre 800 e 2000 MHz, e aplica-se tanto a projetos de sistemas macro celulares, como micro celulares, podendo as antenas das estações radio base estar situadas abaixo das alturas dos prédios, ou morfologias, situadas nas proximidades. A grande inovação do modelo do COST 231 está relacionada com o fenômeno da propagação guiada quando existe linha de visada entre a estação rádio-base e o móvel na direção de uma rua cercada por edifícios. A propagação desta forma é diferente que da propagação em espaço livre.

.Os parâmetros são definidos nas Figuras. 2.2 e 2.3. O modelo Walfisch-Ikegami possui três componentes básicos:

- Perda no espaço livre ( $L_0$ );
- Perda por difração ao nível das ruas e por espalhamento ( $L_{rts}$ );
- Perda devido aos multiplanos ( $L_{ms}$ ).

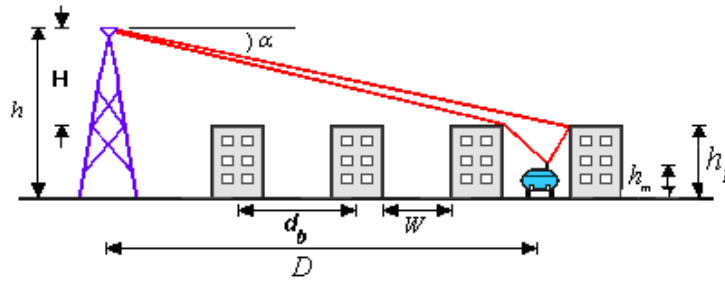


Figura 2.2 – Modelo de propagação de Ikegami-Walfisch.

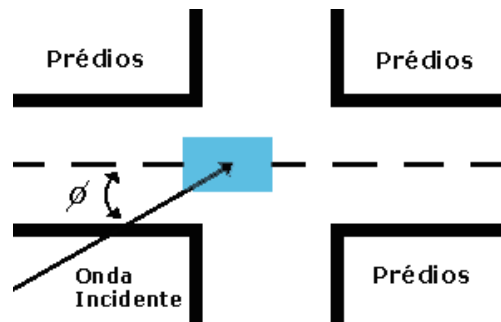


Figura 2.3– Modelo Walfisch-Ikegami (vista superior da rua).

A atenuação total ( $L_T$ ) pode ser dada por [28]:

$$L_T = \begin{cases} L_o + L_{rts} + L_{msd} \\ L_o \end{cases} \quad \text{para } L_{rts} + L_{msd} \leq 0 \quad (2.18)$$

Sendo:

$$L_o = 32,4 + 20 \log D + 20 \log f, \quad (2.19)$$

$$L_{rts} = -16,9 + 10 \log W + 10 \log f + 20 \log \Delta h_m + L_{ori}, \quad (2.20)$$

$$L_{ms} = L_{bsh} + K_a + K_d \log D + K_f \log f - 9 \log d_b. \quad (2.21)$$

Sendo  $D$  a distância entre transmissor e receptor, em quilômetros,  $h$  a altura da antena transmissora e  $\Delta h_m$  é a diferença entre a altura dos prédios ( $h$ ) e a altura da estação móvel ( $h_m$ ), em metros. O modelo leva em consideração três parâmetros muito importantes para o cálculo da perda: a altura dos prédios ( $h_p$ ), em metros, a distância entre os prédios ( $d_b$ ), em metros e a largura da rua ( $w$ ), em metros.  $L_s$  é o fator de correção devido a orientação da rua em função do ângulo de incidência  $\phi$  dado por:

$$\begin{cases} -10 + 0,354\phi & \text{para } 0^\circ \leq \phi < 35^\circ \\ 2,5 + 0,075(\phi - 35^\circ) & \text{para } 35^\circ \leq \phi < 55^\circ \\ 4,0 - 0,114(\phi - 55^\circ) & \text{para } 55^\circ \leq \phi < 90^\circ \end{cases} \quad (2.22)$$

$L_{msd}$  é determinado segundo o modelo de Bertoni-Walfisch, onde os prédios são modelados como sendo semiplanos como mostrado na Figura 2.2. A onda plana incidente no topo dos semiplanos é caracterizada pelo ângulo de incidência  $\phi$ . Entretanto o modelo de Bertoni-Walfisch falha para  $\phi \approx 0$ , isto é, quando a altura da antena da estação rádio base ( $h$ ) é aproximadamente igual a altura dos prédios ( $h_p$ ). Para solucionar este problema, COST 231 Ikegami-Walfisch introduziu algumas correções empíricas. Os termos  $L_{bsh}$  e  $K_a$  não existem no modelo de Bertoni-Walfisch e representam o incremento da atenuação do percurso devido a redução da altura da estação rádio base ( $h$ ). Utilizando:

$$\Delta h = h - h_p \quad (2.23)$$

Os demais termos da equação (2.21) podem ser definidos por:

$$L_{bsh} = \begin{cases} -18 \log(1 + \Delta h) & \text{para } h > h_p \\ 0 & \text{para } h \leq h_p \end{cases} \quad (2.24)$$

$$k_a = \begin{cases} 54 & \text{para } h > h_p \\ 54 - 0,8\Delta h_b & \text{para } D \geq 0,5 \text{ Km e } h \leq h_p \\ 54 - 0,8\Delta h \frac{D}{0,5} & \text{para } D < 0,5 \text{ Km e } h < h_p \end{cases} \quad (2.25)$$

Os termos  $K_d$  e  $K_f$  na equação (2.21) estão relacionados com a atenuação devido a difração sobre os múltiplos semiplanos considerados no modelo como função da distância e da frequência de operação, respectivamente, e são definidos por:

$$k_d = \begin{cases} 18 & \text{para } h > h_p \\ 18 - 15 \frac{\Delta h}{h_p} & \text{para } h \leq h_p \end{cases} \quad (2.26)$$

$$k_f = -4 + \begin{cases} 0,7 \left( \frac{f}{925} - 1 \right) & \text{para cidades de porte médio} \\ 1,5 \left( \frac{f}{925} - 1 \right) & \text{para centros metropolitanos} \end{cases} \quad (2.27)$$

Observação:

A altura da estação rádio base e da estação móvel é restrita aos seguintes limites:

$$4 \text{ m.} < h < 50 \text{ m.}$$

$$1 \text{ m.} \leq h_{\text{móvel}} \leq 3 \text{ m.}$$

(2.28)

# CAPÍTULO 3

## Modelos de Séries Temporais

Uma série temporal é um conjunto de observações feitas sequencialmente ao longo do tempo ou espaço, isto é:

$$Z_t, t = 1, 2, 3, \dots, N;$$

onde  $t$  representa a variação temporal da ST e  $N$ , o comprimento desta.

A característica mais importante deste tipo de dados é que as observações são dependentes e estamos interessados em analisar e modelar esta dependência. Enquanto que em modelos de regressão a ordem das observações é irrelevante para a análise, em séries temporais a ordem dos dados é crucial. Vale notar também que o tempo pode ser substituído por outra variável como a distância, altura, etc.

A aplicação de séries temporais cresceu bastante após a divulgação dos trabalhos dos professores Box, Jenkins e Bacon em 1966. Segundo Morettin e Toloí [30], as séries temporais podem surgir de diferentes áreas de conhecimento como, por exemplo,

- Meteorologia e Oceanografia: precipitação, temperatura, velocidade do vento, velocidade e amplitudes de correntes marítimas, etc;
- Astrofísica: curvas de luz de objetos estelares, número de manchas solares, explosões solares observadas em radiofrequência e altas energias, etc;
- Geofísica espacial: pulsações geomagnéticas, cintilações ionosféricas, etc.;
- Economia: índice da Bolsa de Valores, dinâmica de derivativos, etc.;
- Medicina: eletrocardiograma, eletro-encefalograma, etc.

Uma das características mais relevantes nestes tipos de dados é a dependência entre as observações e, em geral, o interesse concentra-se na análise e modelagem desta dependência fenomenológica [30].

A série temporal também pode ser vista como a realização de um processo estocástico, que é definido como uma sequência de observações regidas por leis probabilísticas. Isto significa que uma série temporal pode ser considerada como uma amostra de um determinado

processo estocástico. Morettin e Toloi [30] mostram que, quando se analisa uma série temporal os objetivos básicos são:

- i) Modelagem do fenômeno em estudo;
- ii) Obtenção de conclusões em termos estatísticos;
- iii) Avaliação da adequação do modelo para fins de previsão e controle.

Deste modo, a aplicação de séries temporais utiliza a avaliação dos dados históricos para obter modelos de previsão. O objeto fundamental da análise de uma série temporal é fazer inferências sobre as propriedades ou características básicas do processo estocástico a partir das informações contidas na série observada, buscando identificar um padrão de comportamento da série que possibilite fazer previsões [31].

Em geral as séries temporais são aplicadas para:

- i) Análise e modelagem - descrever a série, verificar suas características mais relevantes e suas possíveis relações com outras séries;
- ii) Previsão - a partir de valores históricos da série (e possivelmente de outras séries também) procura-se estimar previsões de curto prazo (*forecast*). O número de instantes à frente para o qual é feita a previsão é chamado de horizonte de previsão.

### 3.1 Classificação

Dada uma série temporal  $Z_t$ ,  $t = 1, \dots, N$  a variável observada pode ser discreta, contínua, univariada ou multivariada. O índice 'tempo' pode ser discreto ou contínuo, unidimensional ou multidimensional.

### 3.2 Enfoques Básicos

Há basicamente, dois enfoques aplicados na análise de séries temporais. O primeiro considera a análise feita no domínio do tempo (utilizada na análise de processos não determinísticos) utilizando-se, como ferramenta principal a função autocorrelação, etc. Neste caso, é de interesse, a magnitude dos eventos ocorridos em um dado instante  $t$  de tempo, bem como a relação de distância entre as observações em instantes distintos de tempo.

Como segundo enfoque, tem-se a análise feita no domínio da frequência (baseia-se na procura de características determinísticas) utilizada quando os componentes harmônicos de uma série são separados e apresentam significação física ou ainda, quando se deseja medir



mais convenientemente os efeitos práticos do processo. Neste caso, é associado à função densidade espectral, cuja ferramenta utilizada, é o espectro.

As duas formas de análise não são alternativas, mas sim complementares, onde cada uma delas mostra diferentes aspectos da natureza da série temporal.

### 3.3 Tipos de variação

Segundo os métodos tradicionais de decomposição de séries temporais, pode-se considerar quatro componentes:

- i) Componente de tendência: É o tipo de variação, onde a série flutua em torno de uma reta média, podendo existir uma inclinação positiva ou negativa (tendência linear). Em [32], tendência ou movimento de longo prazo, são as variáveis de longo prazo na média, ressaltando, no entanto, a dificuldade de se definir o que seja longo prazo, uma vez que longas variações cíclicas apresentadas por um dado fenômeno podem ser confundidas com tendência.

Nos casos mais comuns trabalha-se com tendência constante, linear ou quadrática, como ilustrado na figura 3.1.

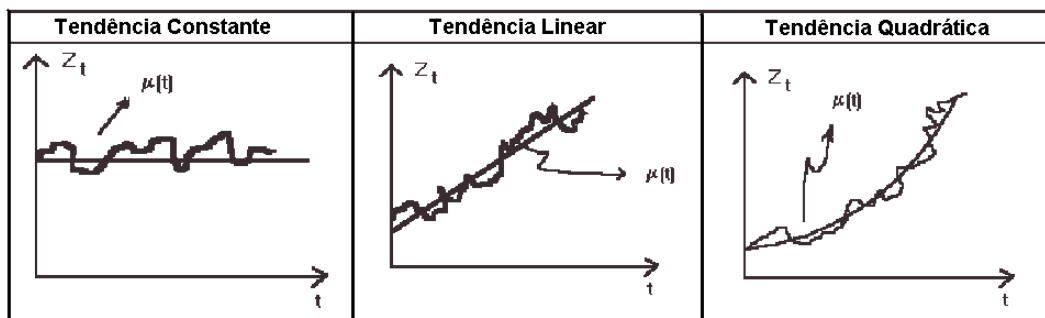


Figura 3.1 – Tendência de uma série temporal.

- ii) Componente sazonal: É o tipo de variação ocorrida em determinadas séries, com certo grau de regularidade: Isto é, são variações periódicas exibidas por certas séries. Estas variações podem ser, diárias, semanais, mensais, anuais, etc. Pode-se facilmente detectar esse tipo de variação e removê-la dos dados, fornecendo, por conseguinte, uma série dessazonalizada.

- iii) Outros efeitos cíclicos: São as variações (cujo período é fixo ou não), ocorridas em torno de uma curva de tendência. São exemplos: variações de temperatura ao longo do

dia (período fixo) e ciclos econômicos (período não fixo) cujo período varia de 5 a 7 anos e apresentando, segundo certas teorias, intervalos de decadência, receso, recuperação e prosperidade.

iv) Efeitos aleatórios ou flutuações irregulares: são as flutuações irregulares detectadas na série de resíduos (após a remoção dos efeitos de tendência, sazonalidade e cíclicas). A série de resíduos deverá ser a mais aleatória possível. O grau de aleatoriedade da série de resíduos depende de quão bem removidos, tiverem sido os efeitos acima.

### 3.4 Procedimentos estatísticos de previsão

Os procedimentos de previsão utilizados na prática variam muito, podendo ser simples e intuitivos, com pouca análise dos dados, ou complexos e racionais, envolvendo um considerável trabalho de interpretação de séries temporais. Vale a pena ressaltar, no entanto, que a previsão não constitui um fim em si, mas deve ser vista como parte integrante de um complexo processo de tomada de decisão, visando a objetivos específicos. Dentre os procedimentos estatísticos de previsão podem ser citados:

- i) Modelos Univariados: Inclui os modelos que se baseiam em uma única série histórica. Como exemplo, podem ser citados:
  - A decomposição por componentes não observáveis, que foi o mais utilizado até a década de 1960;
  - Os modelos univariados de Box & Jenkins [32] que consistem em uma classe geral de modelos lineares conhecidos como modelos ARIMA.
- ii) Modelos de Função de Transferência: nos quais a série de interesse é explicada não só pelo seu passado histórico, como também por outras séries temporais não correlacionadas entre si.
- iii) Modelos Multivariados: modelam simultaneamente duas ou mais séries temporais sem qualquer exigência em relação à direção da causalidade entre elas.

### 3.5 Processos Estocásticos

De uma maneira informal, pode-se conceituar processo estocástico como sendo uma população, composta de  $N$  amostras onde cada amostra é uma trajetória  $Z^i(t)$  possível, conhecida como série temporal. Isto é, para cada possível trajetória  $Z^i(t)$ , realização do processo estocástico  $Z$ , tem-se uma série temporal,  $Z_t$ :  $t = 1, 2, \dots, N$  onde  $N$  representa o

número de observações. Daí, dizemos que o processo estocástico, é o mecanismo gerador de uma série temporal. De uma maneira geral, para cada instante  $t$ , de tempo fixo, tem-se associado uma porção de valores, que formarão uma variável aleatória (V.A.),  $Z_t$ , como mostra a Figura 3.2.

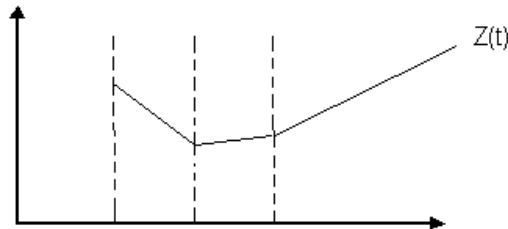


Figura 3.2 – Representação gráfica dos valores assumidos por uma V.A.  $Z(t_i)$ , para cada instante fixado  $t_i$ .

Pode-se ainda associar a cada V.A., a sua função densidade de probabilidade f.d.p.,  $f(Z_t)$  respectiva, podendo até mesmo, cada uma delas (V.A.), possuir uma f.d.p. distinta para cada  $t_i$  distinto, conforme a Figura 3.3.

Se para o instante  $t_1$ , seleciona-se uma observação de V.A.  $Y(t_1)$ ; para o instante  $t_2$ , seleciona-se outra observação de V.A.  $Y(t_2)$ , etc.; então, pode-se formar um conjunto de observações, que será apenas uma amostra, ou uma trajetória ( $Z^i(t)$ ), ou uma realização, ou ainda uma série temporal conforme vimos acima, embora o que chamamos de série temporal, ou seja, apenas uma parte de uma trajetória dentre as possíveis trajetórias do processo estocástico  $Z$  [30].

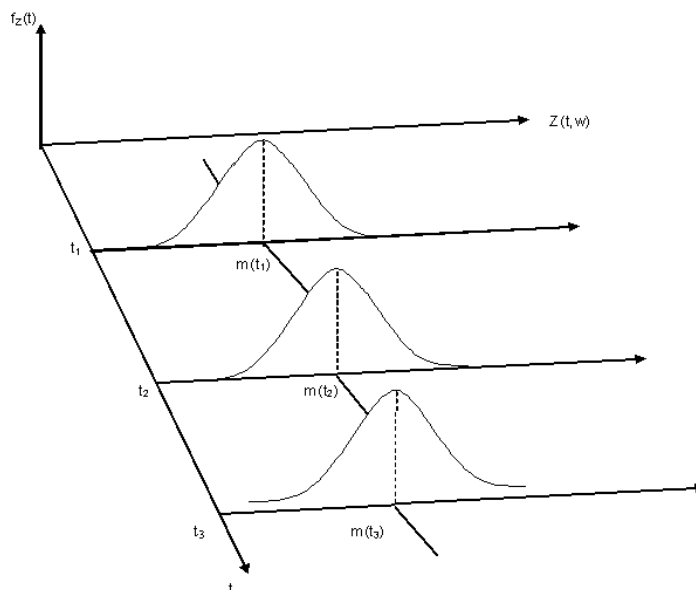


Figura 3.3 – Representação gráfica das V.A. com suas respectivas f.d.p's.

O conjunto de todas as possíveis trajetórias é chamado processo estocástico como mostra a Figura 3.4.

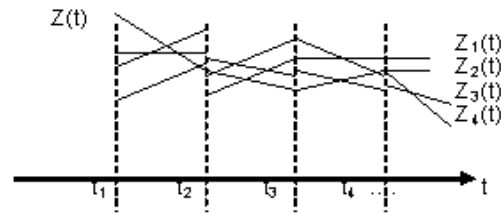


Figura 3.4 – Representação gráfica de um processo estocástico.

Formalmente, define-se um processo estocástico (real ou complexo) como uma sequência no tempo, de variáveis aleatórias com funções de distribuição bem definidas da seguinte forma:

$$Z = \{z(t, w), t \in T, w \in \Omega\} \quad (3.1)$$

Na equação (3.1),  $T$  representa o conjunto dos números inteiros (caso discreto) ou o conjunto dos números reais (processo de tempo contínuo).

Observe que se  $T$  é fixo,  $Z(T, W)$  é uma V.A. e se  $w$  é fixo,  $Z(T, W)$  é uma série temporal [30].

Convém lembrar que na prática, nem sempre conhecemos as funções de distribuição da  $N$ -ésima ordem e só tem-se apenas uma realização do processo estocástico gerador da série. Diante destes dois problemas, é que são impostas as restrições de estacionariedade e ergodicidade do processo.

### 3.6 Estacionariedade de uma Série

Se as características estatísticas de um processo estocástico não se alteram no decorrer do tempo, os dados flutuam ao redor de uma média constante diz-se que o processo é estacionário [31].

Um processo estocástico é estacionário se ele atingiu o equilíbrio. Em termos formais, em um processo estacionário a distribuição de probabilidade conjunta nos instantes  $t_1, t_2, \dots, t_m$  é a mesma que a distribuição nos instantes  $t_{1+k}, t_{2+k}, \dots, t_{m+k}$  para qualquer  $k$ , ou seja, um deslocamento de  $k$  unidades de tempo não afeta a distribuição de probabilidade conjunta. Se a distribuição marginal de  $Z_t$  é a mesma que a distribuição marginal de  $Z_{t+k}$ , logo, a distribuição

marginal de  $Z_t$  não depende do instante de tempo escolhido e, em particular, a média e variância de  $Z_t$  são constantes para qualquer  $t$ .

Um das suposições básicas feitas na análise de séries temporais é que o processo estocástico gerador dos dados seja um processo estacionário [30].

De uma maneira formal, são considerados dois tipos de estacionariedade:

- a) Estacionariedade Estrita (forte ou de 1ª ordem): É aquela onde as funções densidade de probabilidade não variam com o tempo, para quaisquer que sejam duas V.A. tomadas. Isto é,

$$P(Z_t, \dots, Z_{t+k}) = P(Z_{t+m}, \dots, Z_{t+k+m})$$

ou simplesmente:

$$P(Z_t) = P(Z_{t+m}), \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.2)$$

- b) Estacionariedade Ampla (fraca, de 2ª ordem ou estacionária em covariância): Ocorre se e somente se apenas alguns dos momentos permanecem inalterados com o tempo, isto é:

b.1)  $\mu = E(Z_t) = E(Z_{t+k})$  (média do processo é constante)

b.2)  $\gamma_k = Cov(Z_t, Z_{t+k}) = Cov(Z_{t+m}, Z_{t+k+m})$  (covariância entre  $Z_t$  e  $Z_{t+k}$  depende apenas do atraso  $k$ )

b.3)  $\sigma^2 = \gamma_0 = Var(Z_t)$  (variância do processo é constante)

Na prática, nem sempre, se tem a realização de um processo estocástico estacionário; neste caso, devem-se fazer transformações na série até torná-la estacionária, para daí usar a teoria de processos estacionários.

### 3.7 Processo Ergódico

É aquele onde a existência de apenas uma realização do processo é o suficiente para que obtenhamos todas as suas estatísticas. Com isso, fica superado o problema existente na prática, pois aí, só existe uma observação da série temporal, sendo impossível fazer a estimação de seus parâmetros.

Agora, satisfeitas as condições de estacionariedade e ergodicidade, é possível se “obter as estimativas das quantidades de interesse imediato, bastando tomar valores médios através do tempo, em vez de dependermos de um conjunto de realizações, para valores médios”, conforme [32].

Como “a maioria dos processos estacionários observados na prática são ergódicos” [33] -[34], pode-se encontrar facilmente todas suas estatísticas. A idéia geral é tornar as variáveis  $Z_t$  e  $Z_{t+k}$ , independentes, à medida que aumenta o valor de  $k$ , o que é razoável de se admitir na prática.

As Figuras 3.5 e 3.6 mostram exemplos de séries com e sem estacionariedade, para ilustrar a necessidade dos argumentos citados nos itens 3.3 e 3.4.

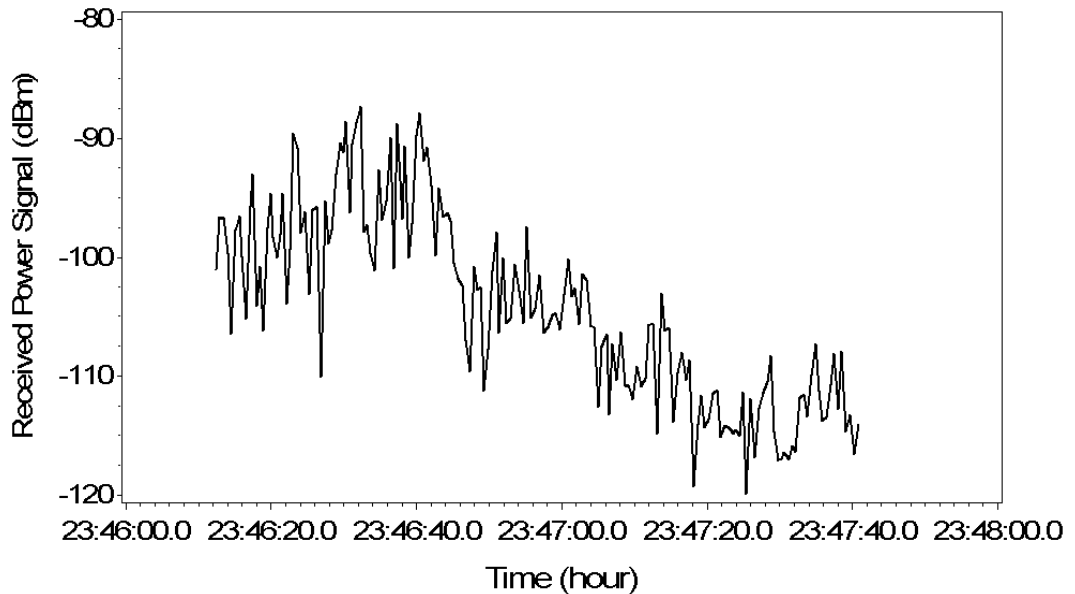


Figura 3.5 – Série temporal (170 observações) da Potência do sinal recebido (dBm) ao longo da Avenida Gentil Bittencourt, Belém/PA. Série não estacionária.

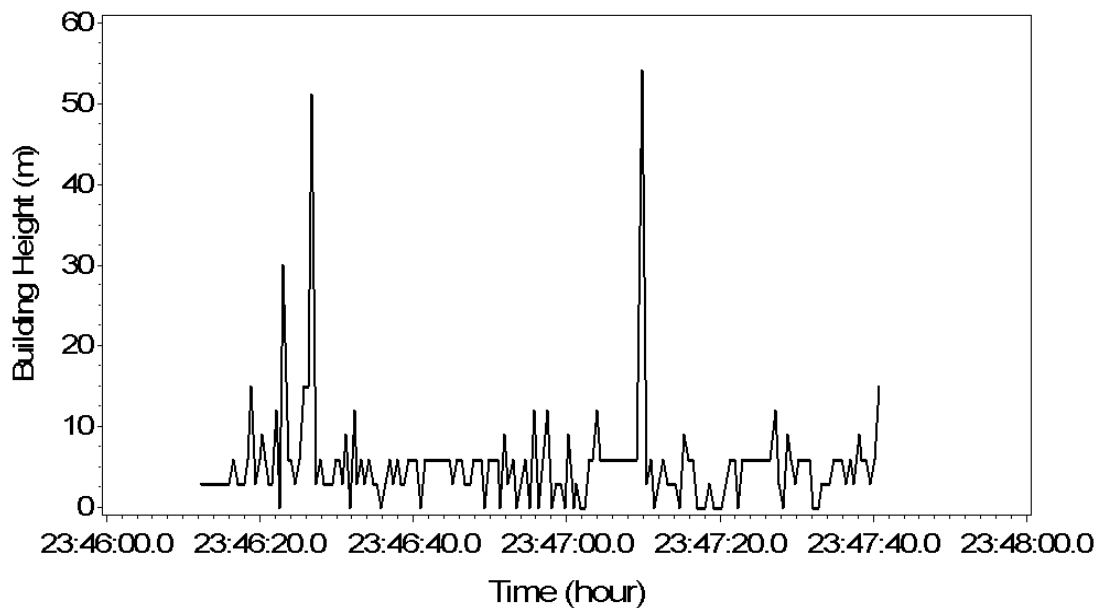


Figura 3.6 - Série temporal (170 observações) da Altura dos prédios (m) ao longo da Avenida Gentil Bittencourt, Belém/PA. Série estacionária.

## 3.8 Média, Variância e Autocovariância

Neste sub-ítem, estamos interessados apenas nos momentos de 1ª e 2ª ordem; isto é, estudamos aqui, apenas os processos fracamente estacionários ou ditos apenas processos estacionários.

### 3.8.1 Média

Seja  $z$  uma V.A. discreta, definida no conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ . seja  $P(z)$ , a sua f.d.p. associada. Então, a sua média será:

$$\mu = \mu(t) = E(z_t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} z \cdot P(z) \text{ constante } \forall t \quad (3.3)$$

### 3.8.2 Variância

É uma medida que se refere à dispersão dos dados. É o segundo momento, em relação à média. É dado por:

$$\begin{aligned} \sigma_z^2 &= E[(z_t - E(z_t))^2] \\ &= E[(z_t - \mu)^2] \\ &= \sum_{-\infty}^{+\infty} (z - \mu)^2 \cdot P(z) \end{aligned} \quad (3.4)$$

### 3.8.3 Covariância

Neste, caso é uma medida que depende apenas da diferença dos tempos. Então a variância entre  $z_t$  e  $z_{t+k}$  bem como entre  $z_{t+\alpha}$  e  $z_{t+\alpha+k}$  com f.d.p.  $P(z_t, z_{t+k})$  é dita covariância de LAG K, a qual é dada por:

$$\begin{aligned} \gamma_k &= COV [z_t, z_{t+k}] = COV [z_{t+\alpha}, z_{t+\alpha+k}] \\ &= E[(z_t - E(z_t))(z_{t+k} - E(z_{t+k}))] \\ &= E[(z_{t+\alpha} - E(z_{t+\alpha}))(z_{t+\alpha+k} - E(z_{t+\alpha+k}))] \\ &= E[z_t, z_{t+k}] - \mu_t \mu_{t+k} = (z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)P(z_t, z_{t+k}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Particularmente, para  $k=0$ , tem-se:

$$\gamma_0 = COV [z_t, z_t] = VAR (z_t) = E[(z_t - \mu)^2], \quad (3.6)$$

é positiva e definida  $\forall t$

### 3.8.4 Estimadores Amostrais da média, Variância e Autocovariância.

Dada a série  $Z_t$ ,  $t = 1, \dots, N$ . Então, os estimadores amostrais da média, variância e autocovariância são dados por:

$$\text{Média: } \bar{Z} = \frac{\sum_{t=1}^N Z_t}{N}. \quad (3.7)$$

$$\text{Variância: } \bar{\gamma}_0 = C_0 = \bar{\sigma}_z^2 = \frac{\sum_{t=1}^N (z_t - \bar{z})^2}{N}. \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \text{Autocovariância: } \bar{\gamma}_k = C_k &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (z_t - \bar{z}) (z_{t+k} - \bar{z}), \\ &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (z_{t+\alpha} - \bar{z}) (z_{t+\alpha+k} - \bar{z}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

### 3.8.5 Propriedades da Função Autocovariância

Finalmente, supondo ainda a estacionariedade do processo, tem-se as seguintes propriedades da função de autocovariância que devem ser satisfeitas:

$$1) \gamma_0 \geq 0 \quad (3.10)$$

$$2) \gamma_k = \gamma_{-k} \quad (3.11)$$

$$3) |\gamma_k| \leq \gamma_0 \quad (3.12)$$

$$4) \gamma_k \text{ é positiva e definida} \quad (3.13)$$

## 3.9 Ruído Branco

É uma sequência de V.A. 's independentes e identicamente distribuídas ( $a_t$ ,  $t \in T$ ). Não necessariamente, porém de modo geral, possuem média zero e variância constante  $\sigma_a^2$ . Tais V.A. 's são ditas choques aleatórios e a sequência formada, é dita ruído branco. É um tipo de série completamente aleatória, onde se torna impossível, apreender qualquer padrão de comportamento para dados. Então:

$$a_t \approx N(0, \sigma_a^2)$$

e



$$\gamma_k = COV [a_t, a_{t+k}] = E[a_t, a_{t+k}] = 0, \quad \forall K \neq 0 \quad (3.14)$$

A FAC residual de um processo ruído branco possui as seguintes características:

$$a) \rho_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

$$b) f(w) = \frac{1}{2\pi} \sigma_a^2 \quad (\text{espectro}) \quad (3.16)$$

### 3.10 Alguns Operadores

No estudo dos processos, são empregados operadores que seguem as leis elementares da álgebra para simplificar bastante o desenvolvimento dos modelos; em particular, os de Box-Jenkins que serão vistos adiante.

i) Operador de atraso (de retardo ou de translação para o passado): É denotado por:

$$\begin{aligned} B Z_t &= Z_{t-1} \\ B^2 Z_t &= Z_{t-2} \\ &\dots\dots\dots \\ B^m Z_t &= Z_{t-m}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

ii) Operador Avanço (de translação para o futuro, de adiantamento): É denotado por F e definido por:

$$\begin{aligned} B Z_t &= Z_{t+1} \\ B^2 Z_t &= Z_{t+2} \\ &\dots\dots\dots \\ B^m Z_t &= Z_{t+m}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

iii) Operador Diferença: Equivale a tomar d-diferenças simples e/ ou sazonais sobre a série  $Z_t$ . De um modo geral, é suficiente se tomar uma ou duas diferenças, para que a série seja estacionária.

A aplicação do operador diferença em uma série temporal consiste em um filtro muito utilizado para remover uma componente de tendência polinomial desta série, o qual é chamado diferenciação. Este filtro consiste em diferenciar a série até que ela se torne estacionária.

O operador diferença é denotado por  $\nabla$  e definido da seguinte forma:

$$\nabla_s^d Z_t = (1 - B^s)^d Z_t \quad (3.19)$$

Para o modelo não estacionário simples, tem-se,

$$\begin{aligned} \text{para } d = 1, \nabla Z_t &= (1 - B)Z_t, \text{ para } s = 1 \text{ e } d = 1 \\ &= Z_t - Z_{t-1}. \end{aligned}$$

$$\text{Para } d = 2, \nabla^2 Z_t = (1 - B)^2 Z_t$$

$$\begin{aligned} &= (1 - B)(Z_t - Z_{t-1}) \\ &= Z_t - 2Z_{t-1} - Z_{t-2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

então,  $\nabla = 1 - B$ .

iv) Operador Soma: É denotado por S e definido por:

$$\begin{aligned} SZ_t &= \sum_{j=0}^{\infty} Z_{t-j} = Z_t + Z_{t-1} + Z_{t-2} + \dots \\ &= (1 + B + B^2 + \dots)Z_t = \frac{1}{1 - B} Z_t \\ &= \frac{1}{\nabla} Z_t. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Então:

$$S = \nabla^{-1}$$

## 3.11 Ferramentas para Análise de Séries Temporais

As principais ferramentas utilizadas para análise de séries temporais são: as funções de autocorrelação e autocorrelação parcial [30].

### 3.11.1 Correlações Amostrais – Função de Autocorrelação (FAC)

Uma importante ferramenta para se identificar as propriedades de uma série temporal consiste de uma série de quantidades chamadas coeficientes de autocorrelação amostral. A ideia é similar ao coeficiente de correlação usual, isto é, para n pares de observações das variáveis x e y o coeficiente de correlação amostral é dado por:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (3.22)$$

Aqui, no entanto o propósito é o de medir a correlação entre as observações de uma mesma variável em diferentes horizontes de tempo, i.e. correlações entre observações defasadas 1, 2, . . . períodos de tempo. Assim, dadas  $n$  observações  $x_1, \dots, x_n$  de uma série temporal discreta pode-se formar os pares  $(x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, x_n)$ . Considerando  $x_1, \dots, x_{n-1}$  e  $x_2, \dots, x_n$  como duas variáveis o coeficiente de correlação entre elas é dado por.

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (x_t - \bar{x}_1)(x_{t+1} - \bar{x}_2)}{\sqrt{\sum_{t=1}^{n-1} (x_t - \bar{x}_1)^2 \sum_{t=1}^{n-1} (x_{t+1} - \bar{x}_2)^2}} \quad (3.23)$$

Onde as médias amostrais são

$$\bar{x}_1 = \sum_{t=1}^{n-1} \frac{x_t}{n-1} \quad \text{e,} \quad (3.24)$$

$$\bar{x}_2 = \sum_{t=2}^n \frac{x_t}{n-1} \quad (3.25)$$

Como o coeficiente  $r_1$  mede as correlações entre observações sucessivas ele é chamado de coeficiente de autocorrelação ou coeficiente de correlação serial. É usual simplificar a equação (3.23) utilizando-se a média de todas as observações, i. é.,  $\bar{x} = \sum_{t=1}^n x_t / n$  já que  $\bar{x}_1 \cong \bar{x}_2$ ,

e assumindo variância constante. Assim, a equação (3.23) pode ser escrita como:

$$r_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (x_t - \bar{x})(x_{t+1} - \bar{x})}{(n-1) \sum_{t=1}^n \frac{(x_t - \bar{x})^2}{n}} \quad (3.26)$$

A equação (3.26) pode ser generalizada para calcular a correlação entre observações defasadas de  $k$  períodos de tempo, i.e.

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})}{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2} \quad (3.27)$$

Esta última equação fornece o coeficiente de autocorrelação de ordem  $k$ . Assim como o coeficiente de correlação usual, as autocorrelações são adimensionais e  $-1 < r_k < 1$ . Na prática é mais usual calcular primeiro os coeficientes de autocovariância  $\{c_k\}$ , definidos por analogia com a fórmula usual de covariância, isto é.

$$c_k = \sum_{t=1}^{n-k} \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (x_t - \bar{x})(x_{t+k} - \bar{x})}{n}, k = 0, 1, \dots \quad (3.28)$$

Os coeficientes de autocorrelação são obtidos por  $r_k = c_k / c_0$ .

Um gráfico com os  $k$  primeiros coeficientes de autocorrelação como função de  $k$  é chamado de correlograma e pode ser uma ferramenta poderosa para identificar características da série temporal. Porém isto requer uma interpretação adequada do correlograma, i.e., deve-se associar certos padrões do correlograma como determinadas características de uma série temporal.

Para uma série temporal com tendência os valores de  $r_k$  não decairão para zero a não ser em defasagens grandes. Intuitivamente, isto ocorre porque uma observação de um lado da média tende a ser seguida por um grande número de observações do mesmo lado (devido à tendência). Neste caso, pouca ou nenhuma informação pode ser extraída do correlograma já que a tendência dominará outras características. Na verdade, como será visto em outros capítulos a função de autocorrelação só tem um significado para séries estacionárias, sendo assim qualquer tendência deve ser removida antes do cálculo de  $\{r_k\}$ .

### 3.11.2 Função de Autocorrelação Parcial (FACP)

A função autocorrelação parcial (FACP) representa a correlação entre  $Y_t$  e  $Y_{t-k}$  como uma função da defasagem  $k$ , filtrado o efeito de todas as outras defasagens sobre  $Y_t$  e  $Y_{t-k}$ . Define-se a função de autocorrelação parcial como a sequência de correlações entre  $(X_t$  e  $X_{t-1})$ ,  $(X_t$  e  $X_{t-2})$ ,  $(X_t$  e  $X_{t-3})$  e assim por diante, desde que os efeitos de defasagens anteriores sobre  $t$   $X$  permanecem constantes. A FACP é calculada como o valor do coeficiente  $\phi_{kk}$  na equação

$$X_t = \phi_{k1}X_{t-1} + \phi_{k2}X_{t-2} + \phi_{k3}X_{t-3} + \dots + \phi_{kk}X_{t-k} + e_t. \quad (3.29)$$

### 3.12 Modelos de Box e Jenkins – Modelos ARIMA

Uma metodologia bastante utilizada na modelagem de séries temporais não-estacionárias foi proposta por Box e Jenkins [32] que originou-se na apresentação do trabalho feito por Box-Jenkins e Bacon no Seminário de Séries Temporais na Universidade de Wisconsin, em outubro de 1966. Foi uma completa revolução, nas pesquisas que envolviam análises de sinais no domínio do tempo, preconizado por Wold [35], Bartlett [36], Tintner [37], Cox and Miller [38] dentre outros. Assim, o estudo de Box-Jenkins, foi apenas uma junção dos trabalhos já existentes, porém com uma visão bem mais ampla.

Tal metodologia consiste em ajustar parâmetros autorregressivo com parâmetros de médias móveis, e explicitamente inclui diferenciação na formulação do modelo. Especificamente os três tipos de parâmetros do modelo são: parâmetros autorregressivo

( $p$ ), o número de diferenças ( $d$ ) e os parâmetros de médias móveis ( $q$ ). Na notação introduzida por Box e Jenkins, os modelos são indicados como ARIMA ( $p, d, q$ ).

Box e Jenkins formalizaram a teoria da utilização de componentes autorregressivos e de médias móveis na modelagem de séries temporais utilizando-se de duas ideias básicas na criação de sua metodologia de construção de modelos:

Atualmente, a metodologia de Box-Jenkins é muito utilizada na construção de modelos em séries temporais. Estes modelos são basicamente fundamentados nos seguintes aspectos:

- a) Parcimônia: Este aspecto se refere à quantidade mínima de parâmetros que deve possuir o modelo. Isto é, os modelos postulados em geral, devem possuir o menor número de parâmetros, de forma que as previsões obtidas sejam bastante precisa. Obtendo-se uma representação adequada no fenômeno em estudo com relação aos métodos de previsão vistos adiante.
- b) Construção iterativa do modelo em que a informação empírica é analisada teoricamente sendo, o resultado deste estágio confrontado com a prática e assim sucessivamente até a obtenção de um modelo satisfatório.

A metodologia para a construção de um modelo é baseada em um ciclo iterativo, na qual a escolha da estrutura do modelo é baseada nos próprios dados. O ciclo iterativo utilizado para a análise de uma série temporal através da metodologia de Box e Jenkins está representado na Figura 3.7.

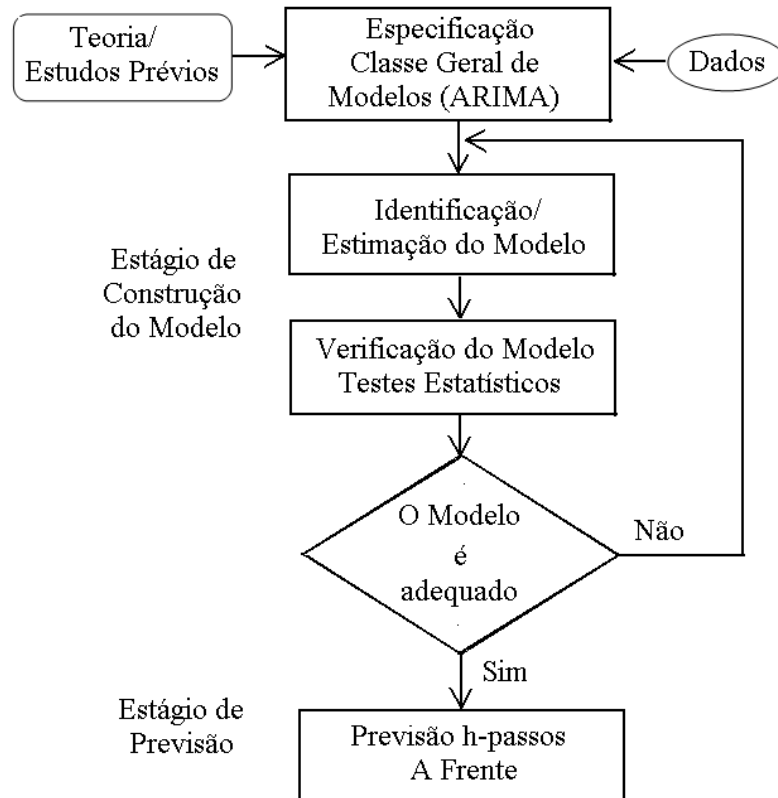


Figura 3.7 - Ciclo iterativo sobre o uso da metodologia de Box e Jenkins.

O ciclo de construção do modelo obedece às seguintes fases:

b.1) **Especificação:** consideração de uma classe geral de modelos para a análise. Procura-se nesta fase, o maior número possível (compatível, é claro) de modelos para representar o conjunto de dados;

b.2) **Identificação** do modelo: Nesta fase (a que apresenta maior dificuldade), procura-se entre os modelos possíveis, determinar aquele que deverá ser usado. Tendo como ferramentas a análise de autocorrelações, autocorrelações parciais e seus respectivos correlogramas.

b.3) **Estimação**, na qual os parâmetros do modelo identificado são estimados;

b.4) **Verificação ou diagnóstico** do modelo ajustado: Nesta última fase, procuramos verificar através da análise residual, se o modelo proposto (identificado), é adequado para os objetivos (por exemplo, previsões). Caso o modelo não seja adequado o ciclo é repetido, voltando-se à fase de identificação. Um procedimento muitas vezes utilizado é identificar vários modelos que são estimados e verificados. Se o propósito é previsão escolhe-se o modelo que com melhor ajustamento, por exemplo, que apresenta o menor erro quadrático médio.

A fase de identificação é a fase crítica da modelagem de Box-Jenkins. “É possível que vários pesquisadores identifiquem modelos diferentes para a mesma série temporal” [30].

### 3.12.1 Processos de Médias Móveis

Seja  $a_t$  um processo puramente aleatório com média  $\mu$  e variância  $\sigma_a^2$ . Um processo  $Z_t$  é chamado de processo de médias móveis de ordem  $q$ , ou MA( $q$ ), se,

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (3.40)$$

O processo MA( $q$ ) pode ser expresso usando um operador atraso, denotado por  $B$  e definido como,

$$B^j Z_t = Z_{t-j}, \text{ para todo } j.$$

Deste modo, a equação 3.40 pode ser escrita como.

$$Z_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t = \theta(B) a_t \quad (3.41)$$

onde  $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q$  : operador de médias móveis de ordem  $q$ .

**OBS:** O operador linear  $B$  pode ser tratado como uma variável.

Pode-se mostrar que:  $E(Z_t) = 0$

$$\gamma(0) = Var[Z(t)] = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_a^2 = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^q \theta_j^2 \quad (3.42)$$

$$\text{onde } \theta_0^2 = 1$$

Sabendo-se que  $\text{Cov}(a_t, a_s) = \sigma_a^2$  (variância constante) para  $t = s$  e  $\text{Cov}(a_t, a_s) = 0$  para  $t \neq s$  (ruídos não correlacionados), a função de autocovariância é dada por,

$$\begin{aligned} \gamma(k) &= \text{Cov}(Z_t, Z_{t-k}) = \\ &= \text{Cov}(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}, a_{t-k} - \theta_1 a_{t-k-1} - \dots - \theta_q a_{t-k-q}) \\ \gamma(k) &= \begin{cases} 0, & k > q \\ \left( -\theta_k + \sum_{j=1}^{q-k} \theta_j \theta_{k+j} \right) \sigma_a^2, & k = 1, \dots, q \end{cases} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Como a média a variância são constantes e  $\gamma(k)$  não depende de  $t$  o processo é (fracamente) estacionário para todos os valores possíveis de  $\theta_j$ .

A função de autocorrelação (fac) será,

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \begin{cases} 0, & k > q \\ \frac{\left( -\theta_k + \sum_{j=1}^{q-k} \theta_j \theta_{k+j} \right)}{\sum_{j=0}^q \theta_j^2}, & k = 1, \dots, q \\ 1, & k = 0 \end{cases} \quad (3.44)$$

Deve-se observar que a fac tem um ponto de corte na defasagem  $q$ , ou seja,  $\rho(k) = 0$  para  $k > q$ . Essa é uma característica específica de processos de médias móveis.

### 3.12.2 Processos Autorregressivos

Seja  $a_t$  um processo puramente aleatório com média  $\mu$  e variância  $\sigma_a^2$ . Um processo  $Z_t$  é chamado de processo autorregressivo de  $p$ , ou  $\text{AR}(p)$ , se

$$Z_t = a_t + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p}. \quad (3.45)$$

Reescrevendo-se o modelo em termos operador atraso  $B$ , tem-se

$$Z_t = a_t + \phi_1 B Z_t + \phi_2 B^2 Z_t + \dots + \phi_p B^p Z_t, \quad (3.46)$$

então

$$\phi(B) Z_t = a_t. \quad (3.47)$$

Onde:



$\phi(\mathbf{B}) = 1 - \phi_1\mathbf{B} - \phi_2\mathbf{B}^2 - \dots - \phi_p\mathbf{B}^p$  é o operador autorregressivo estacionário de ordem  $p$ .

Pode-se mostrar que a condição de estacionariedade do processo  $\text{AR}(p)$  é que todas as raízes de  $\phi(\mathbf{B}) = 1 - \phi_1\mathbf{B} - \phi_2\mathbf{B}^2 - \dots - \phi_p\mathbf{B}^p = 0$  estejam fora do círculo unitário. Isto é,  $|\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p| < 0$ .

### 3.12.2.1 Função de autocorrelação parcial (facp)

Box e Jenkins [32] sugeriram que, no caso de modelos AR informação adicional sobre a ordem pode ser obtida pelo exame da *função de autocorrelação parcial*. Sendo  $\pi_m = (-a_m)$  o último coeficiente modelo  $\text{AR}(m)$ . Então  $\pi_m$  é o coeficiente de autocorrelação parcial entre  $X_t$  e  $X_{t+m}$  (mantendo-se  $X_{t+1}, \dots, X_{t+m-1}$  fixados ou constantes), e um plot de  $\pi_m$  contra  $m$  é a chamada função de autocorrelação parcial. Se o modelo verdadeiro é  $\text{AR}(k)$  então claramente  $\pi_m = 0, m > k$ , e a função de autocorrelação parcial se anula depois de um número finito de termos. Se agora nós estimamos  $\pi_m$  por  $\hat{\pi}_m = -\hat{a}_m$  onde  $\hat{a}_m$  é a estimativa do último coeficiente no modelo  $\text{AR}(m)$  ajustado, então o gráfico de  $\hat{\pi}_m$  contra  $m$  deveria indicar a ordem do modelo verdadeiro. Quando os  $\hat{a}_m$  são estimados a partir das equações de Yule-Walker [30], um método recursivo para o cálculo de  $\hat{\pi}_m$  foi dado por Durbin [33]. Denotando mais explicitamente, o  $j$ -ésimo coeficiente de um modelo AR de ordem  $m$  por  $a_{j,m}$  ( $j=1, \dots, m$ ), a fórmula de Durbin é dada por:

$$\hat{a}_{m+1,j} = \hat{a}_{m,j} - \hat{a}_{m+1,m+1} \hat{a}_{m,m-j+1} \quad j = 1, \dots, m \quad (3.48)$$

$$\hat{a}_{m+1,j} = \frac{\hat{\rho}(m+1) - \sum_{j=1}^m \hat{a}_{mj} \hat{\rho}(m+1-j)}{1 - \sum_{j=1}^m \hat{a}_{mj} \hat{\rho}(j)} \quad (3.49)$$

Pode ser mostrado em [34] que para um processo  $\text{AR}(k)$  os  $\{\pi_m\}$ ,  $m > k$ , são aproximadamente independentemente distribuídos, cada um com média zero e variância aproximadamente  $(1/N)$ ,  $N$  sendo o número de observações sobre as quais o modelo é ajustado. Também, para  $N$  grandes o  $\hat{\pi}_m$  pode ser considerado aproximadamente

normalmente distribuído, e, portanto, um procedimento aproximado para testar se  $\pi_m = 0$  é examinar se  $\hat{\pi}_m$  se encontra entre  $\pm 2\sqrt{1/N}$ .

Seja  $\phi_{kj}$  o  $j$ -ésimo coeficiente de um processo AR( $k$ ), de forma que  $\phi_{kk}$  seja o último. Sabe-se que,

$$\rho_j = \phi_{k1} \rho_{j-1} + \phi_{k2} \rho_{j-2} + \dots + \phi_{kk} \rho_{j-k}, \quad j = 1, \dots, k \quad (3.50)$$

a partir das quais pode-se obter as equações de Yule-Walker.

$$\begin{array}{ccc} \text{Matriz de correlações} & \mathbf{Vp} & \mathbf{Vc} \\ \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \vdots \\ \phi_{kk} \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix} \end{array} \quad (3.51)$$

Onde:

$\mathbf{Vp}$  é vetor de parâmetros (facp), enquanto que  $\mathbf{Vc}$  é o vetor de autocorrelações.

Resolvendo essas equações sucessivamente para  $k = 1, 2, 3, \dots, k$

$$k = 1: \phi_{11} = \rho_1$$

$$k = 2: \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix} \quad \phi_{22} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \quad (3.52)$$

$$k = 3: \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{22} \\ \phi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_3 \end{bmatrix} \quad \phi_{33} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & \rho_1 & \rho_3 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix}} \quad (3.53)$$

$$\text{em geral, } \phi_{kk} = \frac{\rho_k^*}{\rho_k},$$

onde:

$\rho_k$  é a matriz de correlações e  $\rho_k^*$  é a matriz de correlações,  $\rho_k$ , com a última coluna substituída pelo vetor de autocorrelações.

$\phi_{kk}$ : função de autocorrelação parcial (facp)  $\Rightarrow$  igual à correlação parcial entre  $Z_t$  e  $Z_{t-k}$  eliminados os efeitos intermediários (influência) de  $Z_{t-1}, \dots, Z_{t-k+1}$ . Deste modo, a facp pode ser usada para identificar a ordem de um processo  $AR(p)$ .

Pode-se mostrar que a fac do processo  $MA(1)$  se comporta como a facp do processo  $AR(1)$ , com um corte na primeira defasagem. Por outro lado, a facp do processo  $MA(1)$  decai exponencialmente, exatamente como a fac do processo  $AR(1)$ . A dualidade entre os processos  $MA$  e  $AR$  se reproduz nas “assinaturas” reveladas nas fac e facp. A Tabela 3.1 mostra as características das fac’s e facp’s dos processo  $AR(1)$  e  $MA(1)$ .

Tabela 3.1 – Características das fac’s e facp’s dos processo  $AR(1)$  e  $MA(1)$

Processo	Função de autocorrelação (fac)	Função de autocorrelação parcial (facp)
$AR(1)$	Decai para zero (exponencialmente ou através de senóides amortecidas) $\rho(k) = \phi_1^k$	É zero depois do <i>lag</i> $p$ (Corte na primeira defasagem) $\phi_{11} = \phi$ $\phi_{kk} = 0, \quad k > 1$
$MA(1)$	É zero depois do <i>lag</i> $q$ (Corte na primeira defasagem) $\rho(k) = \begin{cases} 0, & k > 1 \\ \frac{-\theta_1}{(1+\theta_1^2)}, & k = 1 \end{cases}$	Decai para zero (exponencialmente ou através de senóides amortecidas) $\phi_{kk} = \theta_1^k$

### 3.12.2.2 Identificação dos processos

A identificação do modelo a ser estimado ocorre pelo comportamento das FACs e FACPs e seus respectivos correlogramas. A ordem autorregressiva  $p$  é determinada pela verificação da função de autocorrelação parcial (FACP) da série estudada. Se a série for unicamente autorregressiva, sua função de autocorrelação  $r_k$  sofrerá uma queda exponencial gradativa, e sua função de autocorrelação parcial sofrerá uma queda repentina após o *lag*  $k$ , conforme pode ser visto na Figura 3.8. Se não, efetua-se uma análise dos estimadores para

verificar até que ordem de defasagem do correlograma desta função é estatisticamente significativa. Essa será sua ordem autorregressiva [33].

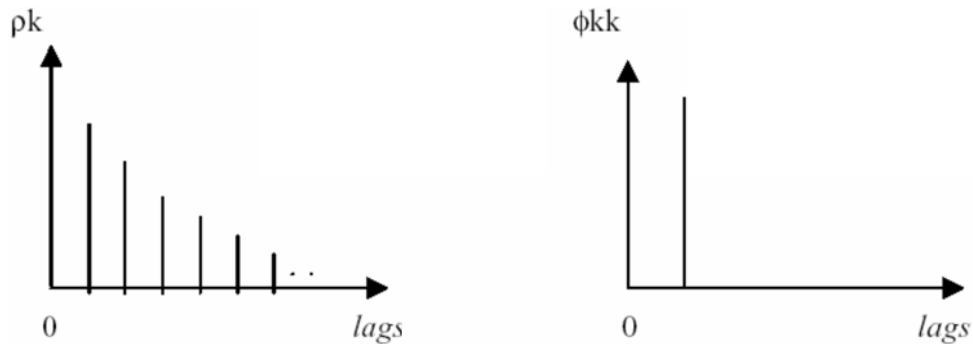


Figura 3.8 – FAC e FACP para um modelo AR (1).

Se a série for unicamente de média móvel, sua função de autocorrelação  $r_k$  sofrerá uma queda repentina após o lag  $k$ , enquanto que sua função de autocorrelação parcial sofrerá uma queda exponencial gradativa, conforme pode ser visto na Figura 3.9.

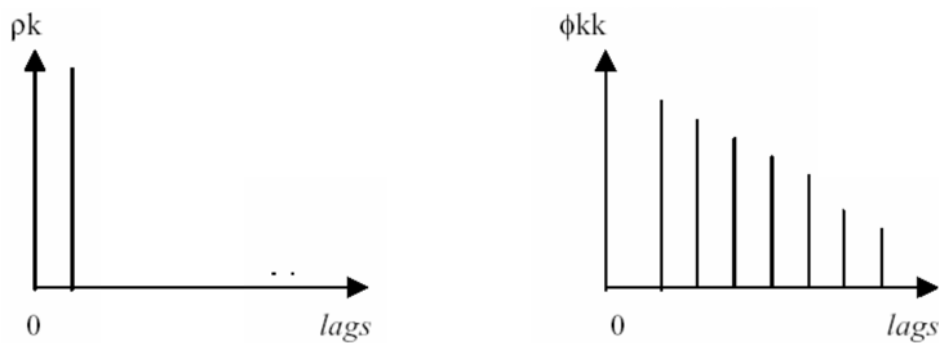


Figura 3.9 – FAC e FACP para um modelo MA (1).

Em suma:

- 1) Se a fac decai exponencialmente, é indício de que o processo seja um AR. Nesse caso, a facp ajuda a determinar a ordem do processo.
- 2) Se a fac apresenta um corte abrupto depois de poucas defasagens, é indício de que o processo seja um MA. Isso se confirma se a facp decai exponencialmente.

### 3.12.2.3 Significância estatística da *fac* e *facp*.

Como só se dispõe de estimativas amostrais da *fac* e *facp*, que são variáveis aleatórias, deve-se efetuar um teste de significância. Para grandes amostras, pode-se mostrar que, sob a hipótese nula de um ruído branco.

$$fac: r_k \approx N\left(0, \frac{1}{\sqrt{N}}\right) \quad (3.54)$$

$$facp: \hat{\phi}_{kk} \approx N\left(0, \frac{1}{\sqrt{N}}\right) \quad (3.55)$$

Assim, um intervalo de confiança de aproximadamente 95% para uma autocorrelação ou autocorrelação parcial amostral, é dado por  $\pm 2/\sqrt{N}$ . Se  $r_k$  ou  $\hat{\phi}_{kk}$  estiver fora desse intervalo, é uma indicação de processo MA ou AR.

### 3.12.2.4 Inspeção visual da função de autocorrelação

Algumas vezes é possível obter uma visão da ordem de um modelo AR ou MA pelo exame da forma gráfica da função de autocorrelação amostral. Modelos AR e MA de ordens diferentes produzem funções de autocorrelações com características diferentes. Tipicamente, modelos AR produzem funções de autocorrelação com decaimento exponencial enquanto modelos MA caem para zero exatamente depois de um número finito de termos. Pela inspeção do comportamento das funções de autocorrelação amostral pode-se obter alguma indicação de qual classe de modelos poderiam ser apropriados, e também alguma dica sobre a ordem adequada para o modelo. Box e Jenkins [32] desenvolveram esta técnica com grande detalhe e fornecem bastante ilustrações de sua aplicação prática a dados reais (juntamente com a correspondente análise da função de autocorrelação parcial). Entretanto, seu uso efetivo depende da experiência e conhecimento do usuário, e, além disso, o comportamento da função de autocorrelação amostral nem sempre reflete acuradamente o comportamento da verdadeira função de autocorrelação. Aproximação de Esta, portanto, cuidado de bastante de exige e cautela em sua aplicação e embora ela possa ser útil como uma orientação preliminar, geral de em, seria prudente que ela fosse complementada por técnicas mais quantitativas.

### 3.12.3 Modelo Autorregressivo de Média Móvel (ARMA)

Para muitas séries encontradas na prática, a combinação de termos autorregressivo e de médias móveis, chamados de modelos ARMA, é a solução adequada. Os processos ARMA formam uma classe de modelos muito úteis e parcimoniosos para descrever dados de séries temporais. O modelo  $ARMA(p, q)$  é da forma:

$$\tilde{Z}_t = \phi_1 \tilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{Z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{Z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (3.56)$$

Modelos MA ou AR podem ser obtidos como casos especiais quando  $p = 0$  ou  $q = 0$ . Usando o operador atraso,  $\mathbf{B}$ , o modelo pode ser reescrito como:

$$(1 - \phi_1 \mathbf{B} - \phi_2 \mathbf{B}^2 - \dots - \phi_p \mathbf{B}^p) Z_t = (1 - \theta_1 \mathbf{B} - \theta_2 \mathbf{B}^2 - \dots - \theta_q \mathbf{B}^q) a_t \quad (3.57)$$

Ou,

$$\phi(\mathbf{B})Z_t = \theta(\mathbf{B})a_t \quad (3.58)$$

Os valores de  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$  que tornam o processo estacionário são tais que as raízes de  $\phi(\mathbf{B}) = 0$  estão fora do círculo unitário. Analogamente, os valores de  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  que tornam o processo invertível são tais que as raízes de  $\theta(\mathbf{B}) = 0$  estão fora do círculo unitário.

As funções de autocorrelação e autocorrelação parcial ficam consideravelmente mais complicadas em processos ARMA. De modo geral, para um processo ARMA  $(p, q)$  estacionário a função de autocorrelação tem um decaimento exponencial ou oscilatório após a defasagem  $q$  enquanto a função de autocorrelação parcial tem o mesmo comportamento após a defasagem  $q$ . Em princípio este resultado pode ser utilizado para auxiliar na determinação da ordem  $(p, q)$  do processo, mas na prática nem sempre é fácil distinguir entre decaimentos exponenciais e oscilatórios através das estimativas dessas funções. Na Tabela 3.2 são apresentadas as propriedades teóricas das funções de autocorrelação e autocorrelação parcial para alguns processos estacionários, que podem auxiliar na identificação do modelo e a Tabela 3.3 mostra as Condições de estacionaridade/invertibilidade e estimativas iniciais para os principais processos.

Tabela 3.2 – Propriedades teóricas da fac e facp.

Processo	Fac	Facp
Série aleatória	0	0
AR(1) $\phi > 0$	Decaimento exponencial	0, para $k \geq 2$
AR(1) $\phi < 0$	Decaimento oscilatorio	0, para $k \geq 2$
AR(p)	Decaimento para zero	0, para $k > p$
MA(1)	0, para para $k > 1$	Decaimento oscilatório
ARMA(p,q)	Decaimento a partir de p	Decaimento a partir de q

Tabela 3.3– Condições de estacionaridade/invertibilidade e estimativas iniciais

Processo	Condição de estacionaridade/invertibilidade	Estimativas iniciais da fac
AR	AR(1): $-1 < \phi < 1$ AR(2): $\phi_1 + \phi_2 < 1$ $\phi_2 - \phi_1 < 1$ $-1 < \phi_2 < 1$	$\rho_k = \phi^k \quad j \geq 0$ $\rho_1 = \frac{\phi_1}{1 - \phi_2}$ , $\rho_2 = \frac{\phi_1^2}{1 - \phi_2} + \phi_2$ $\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} \quad k > 2$
MA	MA(1): $-1 < \theta < 1$ MA(2) $\theta_1 + \theta_2 < 1$ $\theta_2 - \theta_1 < 1$ $-1 < \theta_2 < 1$	$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta}{1 + \theta^2}, & k = 1 \\ 0, & k \geq 2 \end{cases}$ $\rho_1 = \begin{cases} \frac{-\theta_1 + \theta_1 \theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, & k = 1 \\ 0, & k \geq 3 \end{cases}$ $\rho_2 = \begin{cases} \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}, & k = 2 \\ 0, & k \geq 3 \end{cases}$
ARMA	ARMA(1,1): $-1 < \phi < 1$ $-1 < \theta < 1$	$\rho_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_0} = \frac{(1 - \phi_1 \theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1 \theta_1}$ $\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} \quad k > 1$

### 3.12.4 Modelo Autorregressivo Integrado e de Média Móvel (ARIMA)

O modelo ARIMA é um caso geral dos modelos propostos por Box e Jenkins [32], o qual é apropriado para descrever séries não estacionárias, ou seja, séries que não possuem média constante no período de análise, nas quais os parâmetros quase sempre são pequenos. Na prática, geralmente as séries encontradas apresentam tendência e (ou) sazonalidade.

Os modelos ARIMA podem possuir termos autorregressivos (a variável dependente e os termos defasados no tempo) e podem ser integrados quando seus dados originais não são estacionários. Será necessário diferenciar a série original dos dados  $d$  vezes até obter uma série estacionária (sua média e variância sejam constantes no tempo). Posteriormente, a série obtida pode ser modelada por um processo ARMA( $p, q$ ) [39].

Considere uma série  $Z_t$  não estacionária, mas sua primeira diferença é estacionária, então pode-se representá-la como,

$$W_t = Z_t - Z_{t-1} = (1 - B) \Delta Z_t = \Delta Z_t \quad (3.59)$$

e a série  $W_t$  pode ser representada por um modelo ARMA( $p, q$ ), ou seja,

$$\phi(B) W_t = \theta(B) a_t \quad (3.60)$$

Substituindo o valor de  $W_t$

$$\phi(B) \Delta Z_t = \theta(B) a_t \quad (3.61)$$

generalizando para  $d$  diferenças

$$\phi(B) \Delta^d Z_t = \theta(B) a_t \quad (3.62)$$

No modelo (3.62) todas as raízes de  $\phi(B)$  estão fora do círculo unitário. Então (3.62) é equivalente a

$$\varphi(B) Z_t = \theta(B) a_t \quad (3.63)$$

Onde  $\varphi(B)$  é um operador autorregressivo não estacionário de ordem  $p + d$ , com  $d$  raízes iguais a um (sobre o círculo unitário) e as  $p$  restantes fora do círculo unitário, i.e.,

$$\varphi(B) = \phi(B) \Delta^d = \phi(B) (1 - B)^d \quad (3.64)$$

Como  $W_t$  é o resultado de diferenças de  $Z_t$ , ou seja,  $Z_t$  é uma integral de  $W_t$ , por isso se diz que  $Z_t$  segue um modelo autorregressivo -integrado-médias móveis, ou modelo ARIMA( $p, d, q$ ), onde  $p$  e  $q$  são as ordens de  $\phi(B)$  e  $\theta(B)$ , respectivamente.



### OBSERVAÇÕES:

1) Séries  $Z_t$  tais que, tomando-se um número finito de diferenças,  $d$ , tornam-se estacionárias, são chamadas não-estacionárias homogêneas, ou ainda, são portadoras de raízes unitárias. Para séries não-estacionárias quanto ao nível, é suficiente tomar uma diferença para torná-las estacionárias. Para séries não-estacionárias quanto à inclinação, é necessário tomar a segunda diferença para torná-la estacionária.

2) Embora a série de diferenças de uma série estacionária seja ainda uma série estacionária, diferenciar demasiadamente uma série complica a estrutura da autocorrelação e aumenta a variância da série diferenciada.

3) Casos particulares do modelo  $ARIMA(p,d,q)$ :

$$3.1) ARIMA(0,1,1) = \Delta^d Z_t = (1 - \theta B)a_t$$

$$3.2) ARIMA(1,1,1) = (1 - \phi B)\Delta^d Z_t = (1 - \theta B)a_t$$

3.3)  $ARIMA(p,0,0) = AR(p)$ , que corresponde a um modelo Autorregressivo de ordem  $p$ ,  $AR(p)$ : usado quando há autocorrelação entre as observações;

3.4)  $ARIMA(0,0,q) = MA(q)$ , que é um modelo de Média Móvel de ordem  $q$ ,  $MA(q)$ : usado quando há autocorrelação entre os resíduos;

3.5)  $ARIMA(p,0,q) = ARMA(p,q)$ , que é um modelo Autorregressivo de Média Móvel:  $ARMA(p,q)$ ; usado quando há autocorrelação entre as observações e autocorrelação entre os resíduos;

4) Quando uma série não é estacionária sua fac decai “lentamente” (processos de memória longa).

5) Quando a variância de uma série muda com o tempo deve-se realizar alguma transformação nos dados, de forma que a mesma se torne estacionária, para que seja possível a utilização dos métodos de Box-Jenkins [32].

#### 3.12.4.1 Identificação de Modelos

O objetivo da identificação é determinar os valores de  $p$ ,  $d$  e  $q$  do modelo  $ARIMA(p, d, q)$ , além das estimativas preliminares dos parâmetros a serem utilizados no processo de estimação. O procedimento de identificação consiste de 3 etapas:

a) Verificar se existe a necessidade de uma transformação na série original, com objetivo de estabilizar a variância;

b) Tornar a série estacionária por meio de diferenças, de modo que o processo  $\Delta^d Z_t$  seja reduzido a um  $ARMA(p,q)$ . O número de diferenças,  $d$ , necessárias para que o processo se torne estacionário, é alcançado quando a fac amostral de  $W_t = \Delta^d Z_t$  decresce rapidamente para zero. Neste estágio, a utilização de um teste para a verificação de raízes unitárias no polinômio autorregressivo, pode ser de grande utilidade.

c) Identificar o processo  $ARMA(p,q)$  resultante, através da análise das autocorrelações e autocorrelações parciais estimadas, cujos comportamentos devem imitar os comportamentos das respectivas quantidades teóricas.

O maior problema neste estágio de procedimento é evitar um excesso de diferenças. McLeod [40] faz alguns comentários interessantes:

1. Um número excessivo de diferenças resulta em um valor negativo da autocorrelação de ordem 1 da série diferenciada, neste caso,  $\rho_1 = -0,5$ .
2. Quando a série é corretamente diferenciada a variância da série transformada diminui. Por outro lado, o excesso de diferenças aumentará essa variância. Assim, o monitoramento da variância é bastante útil para escolher o valor apropriado de  $d$ .

Na prática  $d = 0, 1$  ou  $2$  e é suficiente inspecionar as primeiras 15 ou 20 autocorrelações da série e de suas diferenças.

A identificação do modelo  $ARIMA$  é um dos maiores problemas enfrentados na metodologia de Box-Jenkins. Uma mesma série pode ser identificada por modelos diferentes para vários pesquisadores. As principais propostas alternativas para identificação são apresentadas São a Função de autocorrelação inversa (SIACF) que desempenha o mesmo papel na modelagem  $ARIMA$  da função de autocorrelação parcial amostral (SPACF) e a Função de autocorrelação estendida (face). Existem muitos métodos utilizados para determinar as ordens de um modelo  $ARIMA(p,d,q)$ . Choi [41] apresenta uma descrição completa dos procedimentos formulados por Anderson [42] para modelo AR, Gray, Kelley e McIntire [43] para modelo ARMA e Nerlove, Grether e Carvalho [44] que apresentam um procedimento alternativo para identificar modelos  $ARIMA$  a partir das autocorrelações somente.

### 3.12.4.1.1 Critérios de Informação

Em muitas aplicações vários modelos podem ser julgados adequados em termos de comportamento dos resíduos. Uma forma de selecionar esses modelos é utilizar os chamados critérios de informação, que consideram não apenas a qualidade do ajuste, mas também penalizam a inclusão de parâmetros extras. Assim, um modelo com mais parâmetros pode ter um ajuste melhor, mas necessariamente será preferível em termos do critério de informação. A regra básica é selecionar o modelo cujo critério de informação calculado seja mínimo. O trabalho pioneiro nesta direção é devido a Akaike (AIC) [45] cuja definição mais comumente utilizada é dada por:

$$AIC(k) = (-2) \ln [Verossimilhança Maximizada] + 2k. \quad (3.65)$$

Onde  $k$  é o número de parâmetros estimados (em modelos ARMA( $p, q$ ),  $k = p + q + 1$ ). Para dados normalmente distribuídos e usando-se estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros (3.65) torna-se equivalente a:

$$AIC(k) = N \ln(RSS) + 2k \quad (3.66)$$

Além do critério de Akaike, os critérios de informação mais comumente usados são [30]:

ii) Schwarz (SIC) :

$$SIC(k) = N \ln(RSS) + k \ln(N) \quad (3.67)$$

iii) Bayesiano (BIC):

$$BIC(k) = -2 \log Verossimilhança Maximizada + k + k \ln N \quad (3.68)$$

Onde  $N$  é o número de observações.

$k$  é o número de parâmetros estimados.

$RSS$  consiste na soma dos quadrados dos resíduos.

Deve-se manter  $N$  fixo para comparar os modelos

### 3.12.4.2 Estimação de Modelos ARIMA

A partir de identificação do(s) modelo(s) provisório(s) para a série temporal, o próximo passo, é a estimação de seus parâmetros. Em certo momento será necessário usar um procedimento iterativo de estimação não-linear de mínimos quadrados e as estimativas

preliminares encontradas na fase de identificação serão usadas como valores iniciais neste procedimento. Atualmente, os programas computacionais incorporam estes valores iniciais, não havendo a necessidade de se obter estimativas preliminares.

Os principais métodos utilizados nas estimativas dos parâmetros de modelos ARIMA são:

- a) Método dos momentos
- b) Método de Mínimos Quadrados
- c) Método da Máxima verossimilhança
- d) Métodos computacionais iterativos e otimização não linear

Maiores detalhes sobre a estimação de parâmetros dos modelos podem ser vistos em Box e Jenkins [46], Priestley [47] e Abraham e Ledolter [48]; bem como a comparação entre eles que é apresentada por Aigner [49], Dent e Min [50], Beveridge [51] e Damslett [52]

### 3.12.4.2.1 Teste sobre um parâmetro

O teste para verificação se um parâmetro é zero ou não, é feito pela estatística:

$$t = \frac{\text{Estimativa do parâmetro}}{\text{Estimativa do desvio - padrão, } \sigma, \text{ desse parâmetro}} \quad (3.69)$$

como regra prática, rejeita-se a hipótese de que o parâmetro é zero quando o valor absoluto da estatística  $t$  é maior do que 2,0.

- **Qualidade das estimativas**

Se a estimativa de correlação entre dois coeficientes de um modelo ARIMA é “alta”, significa que as estimativas desses coeficientes são de “baixa qualidade”, pelo fato de que, uma pequena mudança nos dados, provavelmente produzirá significativa diferença nas estimativas dos parâmetros. Em termos práticos, considera-se que a correlação entre os dois coeficientes é “alta”, quando seu valor absoluto for maior ou igual a 0,9.

- **Verificação**

As autocorrelações  $r_k(\hat{a})$  ferramentas básicas para a verificação da adequação do modelo, sendo que:

$$r_k(\hat{a}) = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (\hat{a}_t - \bar{a})(\hat{a}_{t+k} - \bar{a})}{\sum_{t=1}^n (\hat{a}_t - \bar{a})^2} \quad (3.70)$$

• **Testes de hipóteses:**

i) Teste  $t$ : para testar a hipótese  $H_0: \rho_k(a) = 0$ , para cada autocorrelação residual, a estatística de teste é:

$$t = \frac{r_k(\hat{a})}{s[r_k(\hat{a})]} \quad (3.71)$$

Onde  $s[r_k(\hat{a})]$  é um estimador do desvio-padrão de  $r_k(\hat{a})$ , dado por,

$$s[r_k(\hat{a})] = \left[ 1 + 2 \sum_{j=1}^{k-1} r_2(\hat{a}) \right]^{\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{2}} \quad (3.72)$$

Na prática, se  $|t| < 1,25$  nos lags 1, 2 e 3 e  $|t| < 1,6$  nos demais lags, conclui-se que os erros são não correlacionados. Caso contrário, rejeita-se  $H_0$ , com a conclusão de existência de que os erros são correlacionados.

ii) Teste Qui-Quadrado (teste de Box-Pierce) : para testar a hipótese  $H_0: \rho_k(a) = 0$ , a estatística de teste é

$$Q^* = n(n+2) \sum_{k=1}^v (n-k)^{-1} r_k^2(\hat{a}), \quad (3.73)$$

onde  $n$  é o número de observações usadas para estimar o modelo e  $v$  é o número de autocorrelações. A distribuição  $Q^*$  é aproximadamente qui-quadrado com  $v - m$  graus de liberdade, sendo  $m$  o número de parâmetros estimados no modelo ARIMA. Se o valor de  $Q^*$  é grande, rejeita-se  $H_0$ , ou seja, neste caso haverá evidências de que os erros são correlacionados.

iii) Teste da autocorrelação cruzada

A verificação das autocorrelações  $\hat{r}_k$  dá informações sobre novos termos de médias móveis a serem incluídos no modelo. Por exemplo, se  $|\hat{r}_8| > 2/\sqrt{N}$  um termo  $\theta_8 a_{t-8}$  deverá ser incluído no modelo.

Outro teste que pode auxiliar no procedimento de identificação pode ser com base na correlação cruzada entre valores passados da série e o valor presente do ruído. De fato, se o

modelo é adequado, então  $a_t$  e  $Z_{t-k}$  serão não correlacionados para  $k \geq 1$ . Isso sugere investigar a função de correlação cruzada (fcc).

- **Gráfico dos resíduos**

A análise gráfica dos resíduos é útil para detectar alguns problemas que podem surgir no ajustamento do modelo. Por exemplo, pode-se descobrir, através destes gráficos, se a variância dos erros muda com o tempo, sugerindo que seja feita alguma transformação nos dados.

- **Algumas características de um “bom ajuste” de um modelo ARIMA**

1. Menor número de coeficientes possível;
2. É estacionário;
3. É invertível
4. As estimativas dos coeficientes  $\hat{\phi}'_s$  e  $\hat{\theta}'_s$  são de alta qualidade:
  - a) O módulo de t, para cada estimativa do coeficiente, é maior ou igual a 2;
  - b) Não existe “alta” correlação entre os coeficientes  $\hat{\phi}'_s$  e  $\hat{\theta}'_s$
5. Os resíduos são não correlacionados.

- **Performance preditiva**

A avaliação da capacidade preditiva de um modelo deve se basear em observações fora da amostra. Na prática, é preciso verificar se os resíduos se comportam de forma aleatória (ou imprevisível) em torno de zero, com variâncias aproximadamente constantes e serem não correlacionados ao longo do tempo. Para avaliar a performance preditiva pode-se adotar o seguinte procedimento:

- a) Estima-se o modelo até determinado período  $T$ , não considerando as últimas  $N - T$  observações;
- b) Calcula-se as previsões para as últimas  $N - T$  observações;
- c) Comparam-se os valores previstos com os observados.

As medidas de desempenho preditiva estão baseadas no erro de previsão  $e_t = Z_t - \hat{Z}_t$ .

As medidas mais usuais são:

i) Erro percentual médio absoluto: 
$$\text{MAPE} = \left( \frac{1}{N - T} \right) \sum_{t=T+1}^N \left| \frac{e_t}{Z_t} \right| \quad (3.74)$$

$$\text{ii) Raiz do erro quadrático médio: } \text{RMSE} = \sqrt{\left(\frac{1}{N-T}\right) \sum_{t=T+1}^N e_t^2} \quad (3.75)$$

## 3.13 Modelagem de Séries Temporais Multivariadas

### 3.13.1 Modelos de função de transferência

Modelos de função de transferência são diferentes dos modelos ARIMA. Modelos ARIMA são modelos de séries univariadas no tempo, porém modelos de função de transferência são modelos de séries multivariadas no tempo. Isso significa que o modelo ARIMA relaciona a série só com o seu passado. Além do seu passado, os modelos de função de transferência referem-se também com o presente e o passado de outras variáveis. Por exemplo, vendas podem estar relacionadas a gastos com propaganda; consumo diário de eletricidade pode estar relacionado a certas variáveis ambientais tais como máxima temperatura externa e umidade relativa.

Modelos de função de transferência podem ser utilizados para modelar a saída de um único e de vários sistemas [53]. No caso de modelos de uma única saída, uma única equação é necessária para descrever o sistema. Ela é referida como a única equação do modelo de função de transferência. A saída de vários modelos de função de transferência é referida como um modelo de função transferência de múltiplas equações ou modelo de função de transferência simultânea (STF) (ver [62, 63, 64, 65]).

### 3.13.2 Modelos de funções de transferência com simples entrada

Considere que  $X_t$  e  $Y_t$  são séries adequadamente transformadas de modo que ambas sejam estacionárias. Em um sistema linear de entrada e saída simples, as séries de entrada  $X_t$  e saída  $Y_t$  são relacionadas através de um filtro linear como:

$$Y_t = v(B) X_t + N_t. \quad (3.76)$$

Onde  $v(B) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j B^j$  é referido como a função de transferência de filtro por Box e Jenkins [46] e  $N_t$  é série de ruído do sistema que é independente da série de entrada  $x_t$ .

Na literatura o termo função de transferência também é utilizado para descrever a função resposta de frequência. Quando  $X_t$  e  $N_t$  seguem algum modelo ARMA a equação (3.76) é também conhecida como modelo ARMAX [53].

Os coeficientes no modelo da função de transferência (3.76) são frequentemente chamados de pesos da resposta impulso. O modelo de função de transferência é considerado estável se a seqüência desses pesos da resposta impulso é finita (absolutamente somável), i.e.,  $\sum |v_j| < \infty$ . Portanto, em um sistema estável uma entrada limitada sempre produz uma saída limitada. O modelo de função de transferência é dito ser causal se  $v_j = 0$  para  $j < 0$ . Logo, em um modelo causal o sistema não responde à série de entrada até que ela tenha sido realmente aplicada no sistema. Em outras palavras, a saída é afetada pelas entradas no sistema somente em termos de valores passados e presentes. Um modelo causal é também chamado de modelo realizável, conforme parecem ser todos os sistemas reais físicos. Na prática, frequentemente se considera somente o seguinte modelo estável causal:

$$Y_t = v_0 X_t + v_1 X_{t-1} + v_2 X_{t-2} + \dots + N_t. \quad (3.77)$$

$$= v(B)X_t + N_t.$$

Onde  $v(B) = \sum_{-\infty}^{\infty} v_j B^j$ ,  $\sum |v_j| < \infty$  e  $X_t$  e  $N_t$  são independentes. O sistema é apresentado na Figura 3.10.

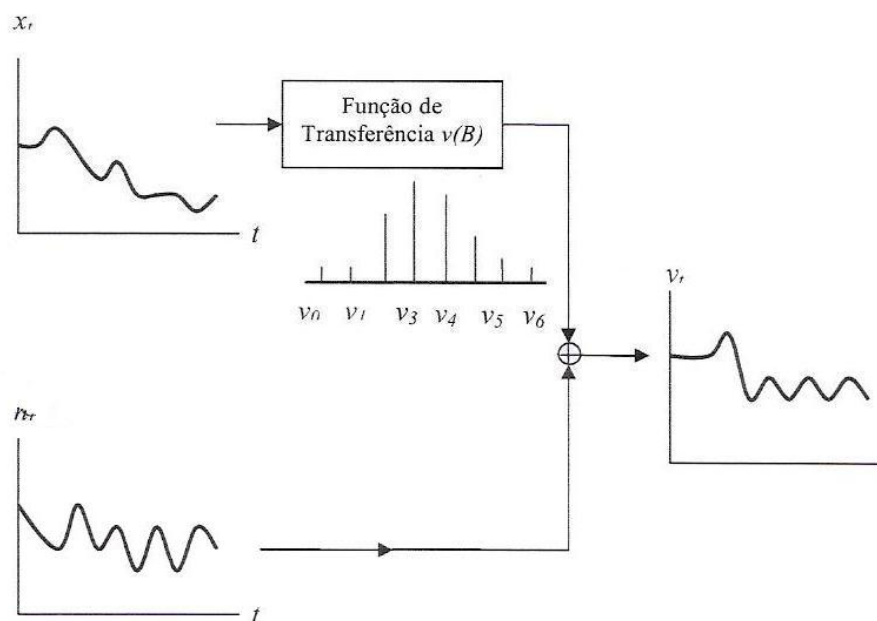


Figura 3.10 - Sistema dinâmico de Função de Transferência [53].



O objetivo do modelamento de função de transferência é identificar e estimar a função de transferência  $v(B)$  e o modelo de ruído para  $N_t$  com base na informação disponível das séries de entrada  $X_t$  e da série de saída  $Y_t$ . A maior dificuldade é que a informação sobre  $X_t$  e  $Y_t$  é finita e a função de transferência em (3.77) contém um número infinito de coeficientes. Para aliviar essa dificuldade a função de transferência  $v(B)$  é representada na seguinte forma racional [53]:

$$v(B) = \frac{w_s(B)B^b}{\delta_r(B)}. \quad (3.78)$$

Onde  $w_s(B) = w_0 - w_1B - \dots - w_sB^s$ ,  $\delta_r(B) = 1 - \delta_1B - \dots - \delta_rB^r$ , e  $b$  é um parâmetro de defasagem que representa o atraso do tempo presente que decorre antes que o impulso da variável de entrada produza um efeito sobre a variável de saída. Para um sistema estável é assumido que as raízes de  $\delta_r(B) = 0$  estão fora do círculo unitário [58]. Encontrados  $w_s(B)$ ,  $\delta_r(B)$  e  $b$  os pesos  $v_j$  da resposta impulso podem ser obtidos igualando-se os coeficientes de  $B^j$  em ambos os lados da seguinte equação:

$$\delta_r(B)v(B) = w_s(B)B^b. \quad (3.79)$$

ou

$$[1 - \delta_1B - \dots - \delta_rB^r][v_0 + v_1B + v_2B^2 + \dots] = [w_0 - w_1B - \dots - w_sB^s]B^b.$$

Portanto, tem-se que:

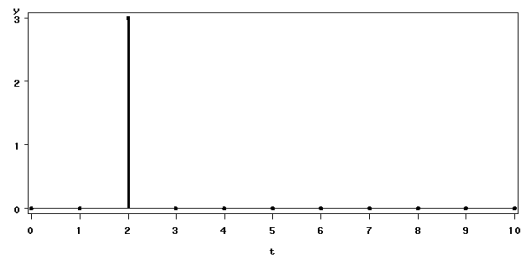
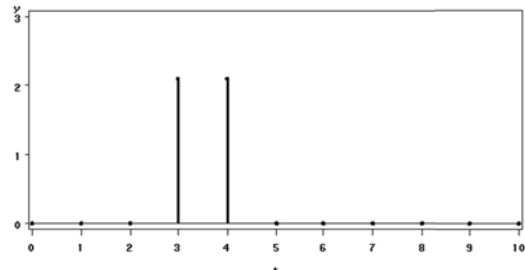
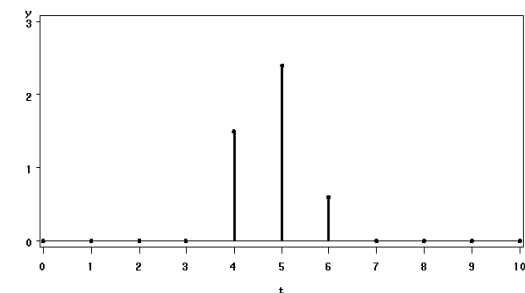
1.  $v_j = 0$   $j < b$ .
2.  $v_j = \delta_1v_{j-1} + \delta_2v_{j-2} + \dots + \delta_rv_{j-r} + w_0$   $j = b$ .
3.  $v_j = \delta_1v_{j-1} + \delta_2v_{j-2} + \dots + \delta_rv_{j-r} - w_{j-b}$   $j = b + 1, b + 2, \dots, b + s$ .
4.  $v_j = \delta_1v_{j-1} + \delta_2v_{j-2} + \dots + \delta_rv_{j-r}$   $j > b + s$ .

### 3.13.3 Exemplos de funções de resposta impulso típicos.

Na prática, os valores de  $r$  e  $s$  no sistema (3.78) raramente excedem 2. Algumas funções de transferência típicas são ilustradas a seguir.

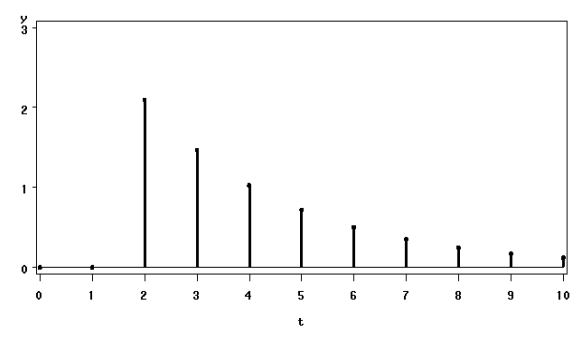
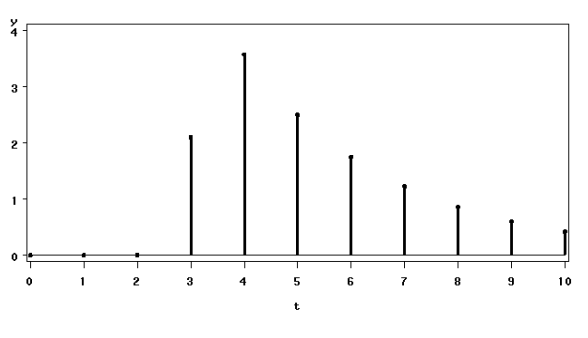
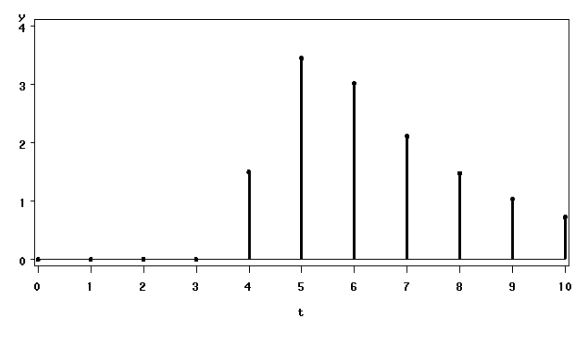
**Tipo 1:  $r = 0$ .** Neste caso, a função de transferência contém somente um número finito de pesos de respostas impulso iniciando com  $v_b = w_0$  e terminando com  $v_{b+s} = -w_s$ .

Tabela 3.4 - Função de Transferência para  $r = 0$

$(b,r,s)$	Função de transferência	Pesos impulso típicos
$(2,0,0)$	$v(B)X_t = w_0 X_{t-2}$	<p><math>Y(t) = w_0 X(t-2)</math></p>  <p>The plot shows a single vertical line at <math>t=2</math> with a height of <math>w_0</math>. The x-axis is labeled <math>t</math> and ranges from 0 to 10. The y-axis is labeled <math>Y</math> and ranges from 0 to 3.</p>
$(2,0,1)$	$v(B)X_t = (w_0 - w_1 B)X_{t-2}$	<p><math>Y(t) = (w_0 - w_1 B)X(t-2)</math></p>  <p>The plot shows two vertical lines: one at <math>t=3</math> with height <math>w_0 - w_1</math> and another at <math>t=4</math> with height <math>-w_1</math>. The x-axis is labeled <math>t</math> and ranges from 0 to 10. The y-axis is labeled <math>Y</math> and ranges from 0 to 3.</p>
$(2,0,2)$	$v(B)X_t = (w_0 - w_1 B - w_2 B^2)X_{t-2}$	<p><math>Y(t) = (w_0 - w_1 B - w_2 B^2)X(t-2)</math></p>  <p>The plot shows three vertical lines: one at <math>t=4</math> with height <math>w_0 - w_1</math>, one at <math>t=5</math> with height <math>w_0 - 2w_1 + w_2</math>, and one at <math>t=6</math> with height <math>-w_1 + w_2</math>. The x-axis is labeled <math>t</math> and ranges from 0 to 10. The y-axis is labeled <math>Y</math> and ranges from 0 to 3.</p>

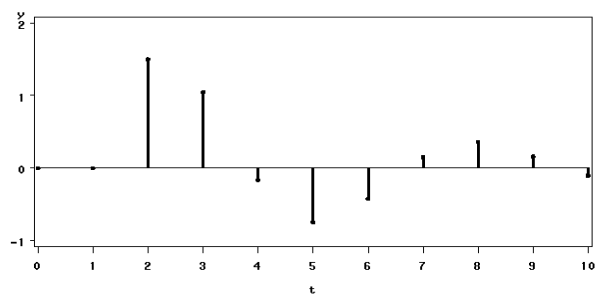
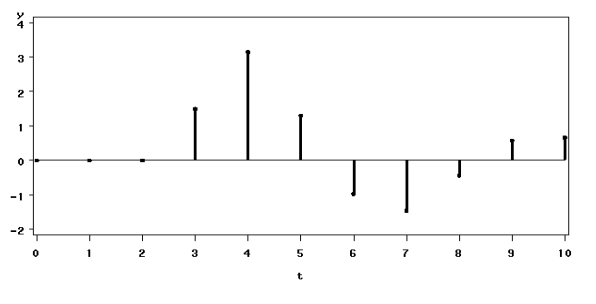
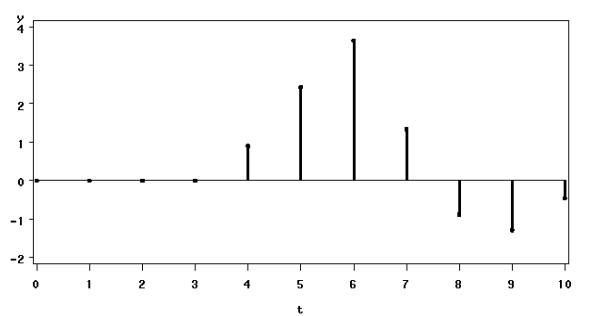
**Tipo 2:  $r = 1$ .** Neste caso, os pesos de respostas impulso mostram uma queda exponencial iniciando com  $V_b$  se  $s = 0$ ;  $V_{b+1}$  se  $s = 1$ ; e  $V_{b+2}$  se  $s = 2$ .

Tabela 3.5 - Função de Transferência para  $r = 1$ 

$(b,r,s)$	Função de transferência	Pesos impulso típicos
$(2,1,0)$	$v(B)X_t = \frac{w_0}{(1 - \delta_1 B)} X_{t-2}$	<p><math>Y(t) = w_0 X(t-2)/(1 - d_1 B)</math></p> 
$(2,1,1)$	$v(B)X_t = \frac{(w_0 - w_1 B)}{(1 - \delta_1 B)} X_{t-2}$	<p><math>Y(t) = (w_0 - w_1 B) X(t-2)/(1 - d_1 B)</math></p> 
$(2,1,2)$	$v(B)X_t = \frac{(w_0 - w_1 B - w_2 B^2)}{(1 - \delta_1 B)} X_{t-2}$	<p><math>Y(t) = (w_0 - w_1 B - w_2 B^2) X(t-2)/(1 - d_1 B)</math></p> 

**Tipo 3:**  $r = 2$ . Neste caso, os pesos de respostas impulso mostram tanto um amortecimento exponencial como um amortecimento senoidal de acordo com a natureza das raízes do polinômio  $\delta_2(B) = (1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2) = 0$ . Seguem um decaimento exponencial se as raízes são reais, isto é, se  $\delta_1^2 + 4\delta_2 \geq 0$ ; e seguem um decaimento senoidal se as raízes forem complexas, i.e., se  $\delta_1^2 + 4\delta_2 < 0$ .

Tabela 3.6 - Função de Transferência para  $r = 2$ 

$(b,r,s)$	Função de transferência	Pesos impulso típicos
$(2,2,0)$	$v(B)X_t = \frac{w_0}{(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2)} X_{t-2}$	$Y(t) = w_0 X(t-2) / (1 - d_1 B - d_2 B^2)$ 
$(2,2,1)$	$v(B)X_t = \frac{(w_0 - w_1 B)}{(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2)} X_{t-2}$	$Y(t) = (w_0 - w_1 B) X(t-2) / (1 - d_1 B - d_2 B^2)$ 
$(2,2,2)$	$v(B)X_t = \frac{(w_0 - w_1 B - w_2 B^2)}{(1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2)} X_{t-2}$	$Y(t) = (w_0 - w_1 B - w_2 B^2) X(t-2) / (1 - d_1 B - d_2 B^2)$ 

Em resumo, as Tabelas 3.4, 3.5 e 3.6, extraídas de [53], mostram que as ocorrências de picos sugerem parâmetros no numerador da função de transferência, análogo a modelos de médias móveis, e a ocorrência com um comportamento de decaimento exponencial pode indicar a existência de parâmetros no denominador da função de transferência, semelhante a modelos autorregressivos.

### 3.13.4 Função de correlação cruzada (FCC)

A função de correlação cruzada é uma medida útil de direção e intensidade entre duas variáveis aleatórias. Considere dois processos estocásticos  $X_t$  e  $Y_t$  para  $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Dizemos que  $X_t$  e  $Y_t$  são estacionários conjuntamente se ambos são processos univariados estacionários e a correlação cruzada entre  $X_t$  e  $Y_t$ ,  $\text{Cov}(X_t, Y_t)$ , é uma função somente da diferença de tempo ( $s - t$ ). Em tais casos, a função de covariância cruzada entre  $X_t$  e  $Y_t$  é [53]:

$$\gamma_{xy}(k) = E[(X_t - \mu_x)(Y_t - \mu_y)]. \quad (3.80)$$

Onde  $E$  representa a esperança matemática (média)

Para  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Sob padronização, tem-se a seguinte função de correlação cruzada:

$$\rho_{xy}(k) = \frac{\gamma_{xy}(k)}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (3.81)$$

Para  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , onde  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  são os desvios-padrão de  $X_t$  e  $Y_t$ , respectivamente. É importante notar que a função de covariância cruzada  $\gamma_{xy}(k)$  e as funções de correlação cruzada  $\rho_{xy}(k)$  são generalizações das funções de autocovariância e autocorrelação porque  $\gamma_{xx}(k) = \gamma_x(k)$  e  $\rho_{xx}(k) = \rho_x(k)$ . Contudo, ao contrário da função de autocorrelação  $\rho_x(k)$ , que é simétrica em relação à origem, i.e.,  $\rho_x(k) = \rho_x(-k)$ , a função de correlação cruzada não é simétrica, ou seja,  $\rho_{xy}(k) \neq \rho_{xy}(-k)$ . Em vez disso, tem-se:

$$\gamma_{xy}(k) = E(X_t - \mu_x)(Y_{t+k} - \mu_y) = E(Y_{t+k} - \mu_y)(X_t - \mu_x) = \gamma_{yx}(-k). \quad (3.82)$$

Que implica em:

$$\rho_{xy}(k) = \rho_{yx}(-k). \quad (3.83)$$

Deste modo, a função de correlação cruzada, FCC, mede não somente a intensidade de uma associação, mas também sua direção. Para ver a figura inteira da relação entre as séries  $X_t$  e  $Y_t$ , é importante examinar a FCC,  $\rho_{xy}(k)$ , para ambos os atrasos positivos e negativos,  $k > 0$  e  $k < 0$ . O gráfico da FCC é conhecido como correlograma cruzado.

**Observações importantes:**

- A FCC,  $\rho_{xy}(k)$ , é definida somente quando  $X_t$  e  $Y_t$  são processos bivariados conjuntamente estacionários. Pode haver necessidade de algumas diferenças para se obter a estacionaridade exigida e transformações para a estabilização da variância podem ser necessárias. Deste modo, a menos que sejam mencionados, os processos  $X_t$  e  $Y_t$  serão assumidos conjuntamente estacionários.
- No modelo de função de transferência geral

$$Y_t = v(B) X_t + N_t \quad (3.84)$$

Pode-se assumir que a série de entrada  $X_t$  segue um processo ARMA

$$\phi_x(B)X_t = \theta_x \alpha_t. \quad (3.85)$$

Onde  $\alpha_t$  é um ruído branco, dado por:

$$\alpha_t = \frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} X_t. \quad (3.86)$$

Esta série é frequentemente chamada de série de entrada pré-ajustada. Aplicando-se a mesma transformação de pré-ajustamento na série de saída  $Y_t$ , obtém-se a série de saída filtrada,

$$\beta_t = \frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} Y_t. \quad (3.87)$$

Fazendo  $e_t = \theta_x^{-1}(B)\phi_x(B)n_t$ , o modelo de função de transferência (3.83) (substituindo (3.84) e (3.86) em (3.87)), torna-se,

$$\beta_t = v(B) \alpha_t + e_t. \quad (3.88)$$

Os pesos  $v_j$  da resposta impulso podem consequentemente ser encontrados como,

$$v_k = \frac{\sigma_\beta}{\sigma_\alpha} \rho_{\alpha\beta}(k). \quad (3.89)$$

### 3.13.5 Construção de modelos de função de transferência

Para um determinado conjunto de dados de séries temporais  $X_t$  e  $Y_t$ ,  $1 \leq t \leq n$ , a função de correlação cruzada.

$$\rho_{xy}(k) = \frac{\gamma_{xy}(k)}{\sigma_x \sigma_y}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.90)$$

é estimada pela seguinte função de correlação cruzada amostral,

$$\hat{\rho}_{xy}(k) = \frac{\hat{\gamma}_{xy}(k)}{S_x S_y}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.91)$$

onde

$$\hat{\gamma}_{xy}(k) = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (X_t - \bar{X})(Y_{t+k} - \bar{Y}), & k \geq 0, \\ \frac{1}{n} \sum_{t=1-k}^n (X_t - \bar{X})(Y_{t+k} - \bar{Y}), & k < 0, \end{cases}, \quad (3.92)$$

$$S_x = \sqrt{\hat{\gamma}_{xx}(0)}, \quad S_y = \sqrt{\hat{\gamma}_{yy}(0)}, \quad (3.93)$$

E  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  são as médias amostrais das series  $X_t$  e  $Y_t$ , respectivamente.

Para testar se certos valores da FCC  $\rho_{xy}(k)$  são estatisticamente nulos, compara-se a FCC amostral  $\hat{\rho}_{xy}(k)$  com seus erros-padrão. Em [59] é definida a variância e covariância aproximada entre duas correlações cruzadas amostrais  $\hat{\rho}_{xy}(k)$  e  $\hat{\rho}_{xy}(k+j)$ . A covariância é dada por:

$$\begin{aligned} Cov[\hat{\rho}_{xy}(k), \hat{\rho}_{xy}(k+j)] &\cong (n-k)^{-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left\{ \rho_{xx}(i) \rho_{yy}(i+j) + \rho_{xy}(i+k+j) \rho_{xy}(k-i) \right. \\ &\quad + \rho_{xy}(k) \rho_{xy}(k+j) \left[ \rho_{xy}^2(i) + \frac{1}{2} \rho_{xx}^2(i) + \frac{1}{2} \rho_{yy}^2(i) \right] \\ &\quad - \rho_{xy}(k) \left[ \rho_{xx}(i) \rho_{xy}(i+k+j) + \rho_{xy}(-i) \rho_{yy}(i+k+j) \right] \\ &\quad \left. - \rho_{xy}(k+j) \left[ \rho_{xx}(i) \rho_{xy}(i+k) + \rho_{xy}(-i) \rho_{yy}(i+k) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Var[\hat{\rho}_{xy}(k)] &\cong (n-k)^{-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left\{ \rho_{xx}(i) \rho_{yy}(i) + \rho_{xy}(k+i) \rho_{xy}(k-i) \right. \\ &\quad + \rho_{xy}^2(k) \left[ \rho_{xy}^2(i) + \frac{1}{2} \rho_{xx}^2(i) + \frac{1}{2} \rho_{yy}^2(i) \right] \\ &\quad \left. - 2 \rho_{xy}(k) \left[ \rho_{xx}(i) \rho_{xy}(i+k) \rho_{xy}(-i) \rho_{yy}(i+k) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Sob a hipótese de que as duas séries  $X_t$  e  $Y_t$  são não correlacionadas e a série  $X_t$  é um ruído branco, a equação (3.94) torna-se.

$$\text{Cov}[\hat{\rho}_{xy}(k), \hat{\rho}_{xy}(k+j)] \cong (n-k)^{-1} \rho_{yy}(j). \quad (3.96)$$

Segue que,

$$\text{Var}[\hat{\rho}_{xy}(k)] \cong (n-k)^{-1}. \quad (3.97)$$

Assim, quando a série  $X_t$  é ruído branco, pode-se testar a hipótese que as duas séries  $X_t$  e  $Y_t$  não apresentam correlação cruzada pela comparação da FCC amostral  $\hat{\rho}_{xy}(k)$  com seu erro padrão aproximado  $\frac{2}{\sqrt{(n-k)}}$ .

Na prática, a série  $X_t$ , em geral, não é ruído branco, e é necessário que ela seja pré-ajustada e também que a série de saída seja filtrada.

### 3.13.6 Identificação de modelos de função de transferência e modelos de ruído

Como já foi mencionado anteriormente, uma observação importante na construção do modelo de função de transferência consiste que as variáveis  $X_t$ ,  $Y_t$  e  $N_t$  são todas estacionárias. Portanto, para séries não estacionárias algumas estabilizações da variância e diferenciações podem ser necessárias. Sendo assim, a função de transferência  $\nu(B)$  é obtida segundo os seguintes passos:

1. Pré-ajustamento das séries de entrada

$$\phi_x(B)X_t = \theta_x \alpha_t, \text{ ou seja:} \quad (3.98)$$

$$\alpha_t = \frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} X_t. \quad (3.99)$$

Onde  $\alpha_t$  é uma série de ruído branco, que representa a parte aleatória dos dados, com média zero e variância  $\sigma_\alpha^2$ .

2. Calcular a série de saída filtrada. Ou seja, transformar a série de saída  $Y_t$  utilizando o modelo pré-ajustado acima para gerar a série:

$$\beta_t = \frac{\phi_x(B)}{\theta_x(B)} Y_t. \quad (3.100)$$

3. Calcular a FCC amostral  $\hat{\rho}_{\alpha\beta}(k)$  entre  $\alpha$  e  $\beta$  para estimar  $\nu_k$ .



A significância da FCC e seu equivalente  $\hat{\nu}_k$  podem ser testados por meio da comparação com seu desvio-padrão  $(n-k)^{-1/2}$ .

4. Identificar  $b$ ,  $\delta_r(B) = (1 - \delta_1 B - \delta_2 B^2 - \dots - \delta_r B^r)$  e  $w_s(B) = (w_0 - w_1 B - \dots - w_s B^s)$  pelo ajuste do padrão de  $\hat{\nu}_k$ . Uma vez que  $b$ ,  $r$  e  $s$  são escolhidos, estimativas preliminares  $\hat{w}_j$  e  $\hat{\delta}_j$  podem ser encontradas a partir de sua relação com  $\nu_k$  como mostrado na equação (4.10). Portanto, uma estimativa preliminar da função de transferência  $\nu_k$  será:

$$\hat{\nu}(B) = \frac{\hat{w}_s(B) B^b}{\hat{\delta}_r(B)}. \quad (3.101)$$

Uma vez obtido o modelo preliminar da função de transferência, pode-se calcular a série de ruídos estimada,

$$\begin{aligned} \hat{N}_t &= Y_t - \hat{\nu}(B) X_t. \\ &= Y_t - \frac{\hat{w}_s(B)}{\hat{\delta}_r(B)} B^b X_t. \end{aligned} \quad (3.102)$$

O modelo apropriado para o ruído pode ser identificado examinando-se sua FAC e FACP ou por outra ferramenta de identificação de séries univariadas de tempo. Então:

$$\phi(B) n_t = \theta(B) a_t. \quad (3.103)$$

Combinando (3.101) e (3.102) tem-se o seguinte modelo de função de transferência:

$$Y_t = \frac{w(B)}{\delta(B)} X_{t-b} + \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t. \quad (3.104)$$

No processo de identificação acima da função de transferência  $\nu(B)$ , a série de entrada deve ser pré-ajustada. O modelo pré-ajustado é usado para filtrar a série de saída, mas não necessariamente para ajustá-lo. Este é um método normal e simples para a construção de um modelo de função de transferência causal. Entretanto, para a construção de um possível sistema não causal com fenômeno de retroalimentação (*feedback*), onde  $Y_t$  é influenciado por  $X_t$  e este é influenciado por  $Y_t$ , ambas as séries de entrada e saída devem ser pré-ajustadas antes de se examinar sua FCC. Isso é frequentemente referido como um duplo pré-ajustamento.

### 3.13.7 Estimativa de modelos de função de transferência

Depois da identificação de um modelo de função de transferência preliminar mostrado na equação 4.34, é necessário estimar os parâmetros  $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_r)'$ ,  $w = (w_0, w_1, \dots, w_s)'$ ,  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)'$ ,  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)'$  e  $\sigma_a^2$ . Pode-se escrever a equação (3.104) como,

$$\delta(B)\phi(B)Y_t = \phi(B)w(B)X_{t-b} + \delta(B)\theta(B)a_t. \quad (3.105)$$

ou equivalentemente,

$$c(B)Y_t = d(B)X_{t-b} + e(B)a_t. \quad (3.106)$$

Onde:

$$c(B) = \delta(B)\phi(B) = (1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r)(1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)$$

$$= (1 - c_1 B - c_2 B^2 - \dots - c_{p+r} B^{p+r}).$$

$$d(B) = \phi(B)w(B) = (1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p)(w_0 - w_1 B - \dots - w_s B^s)$$

$$= (d_0 - d_1 B - d_2 B^2 - \dots - d_{p+s} B^{p+s})$$

$$e(B) = \delta(B)\theta(B) = (1 - \delta_1 B - \dots - \delta_r B^r)(1 - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q)$$

$$= (1 - e_1 B - e_2 B^2 - \dots - e_{r+q} B^{r+q}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} a_t = & y_t - c_1 y_{t-1} - \dots - c_{p+r} y_{t-p-r} - d_0 x_{t-b} + d_1 x_{t-b-1} + \dots + d_{p+s} x_{t-b-p-s} \\ & + e_1 a_{t-1} + \dots + e_{r+q} a_{t-r-q}. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Onde  $c_i$ ,  $d_j$  e  $e_k$  são funções de  $\delta_i$ ,  $w_j$ ,  $\phi_k$ ,  $\theta_l$ .

### 3.13.8 Teste do diagnóstico dos modelos de função de transferência

Depois da identificação do modelo e estimativas dos seus parâmetros é necessário testar a adequação do modelo antes que ele possa ser usado para previsão, controle ou outros propósitos.

No modelo de função de transferência é assumido que  $a_t$  são ruídos brancos e independentes da série de entrada  $X_t$  e, portanto, também independente da série de entrada

pré-ajustada  $\alpha_t$ . Deste modo, no teste do diagnóstico de um modelo de função de transferência devem-se examinar os resíduos  $\hat{a}_t$  do modelo de ruído assim como os resíduos  $\alpha_t$  do modelo de entrada pré-ajustado para verificar se as considerações se mantêm, ou seja, se os resíduos são independentes.

- **Teste da correlação cruzada:**

Para um modelo adequado, a FCC amostral  $\hat{\rho}_{\hat{a}\hat{a}}(k)$ , entre  $\hat{a}_t$  e  $\alpha_t$  não deve mostrar padrões e estar dentro de seus dois erros padrões  $2(n-k)^{-1/2}$ , ou seja, a série de ruído  $a_t$  e a série de entrada  $X_t$  devem ser independentes. O teste Q de Portmanteau também pode ser usado [53]:

$$Q_0 = m(m+2) \sum_{j=0}^K (m-j)^{-1} \hat{\rho}_{\hat{a}\hat{a}}^2(j). \quad (3.108)$$

Que segue aproximadamente uma distribuição  $\chi^2$  com  $(K+1) - M$  graus de liberdade, onde  $m = n - t_0 + 1$ , que é o número de resíduos  $\hat{a}_t$  calculados e  $M$  é o número de parâmetros  $\delta_i$  e  $w_j$  estimados na função de transferência  $v(B) = w(B)/\delta(B)$ .

- **Teste da autocorrelação.**

Para um modelo adequado, a FAC e FACP amostrais do ruído ( $\hat{a}_t$ ), que representa as perturbações aleatórias das séries, não devem mostrar qualquer padrão. Um teste Q de Portmanteau similar à (3.108) também pode ser usado:

$$Q_1 = m(m+2) \sum_{j=0}^K (m-j)^{-1} \hat{\rho}_{\hat{a}}^2(j). \quad (3.109)$$

que segue aproximadamente uma distribuição  $\chi^2$  com  $(K - p - q)$  graus de liberdade, dependendo somente do número de parâmetros no modelo de ruído. dependendo somente

# CAPÍTULO 4

## Geoestatística

Os métodos Geoestatísticos, ou simplesmente Geoestatística, foram desenvolvidos graças aos estudos do engenheiro de minas Georges Matheron na França no final da década de 50 e início da década de 60. O termo designa a metodologia desenvolvida com o objetivo de estudar o comportamento das chamadas variáveis regionalizadas, utilizadas para o estudo da distribuição espacial de fenômenos naturais. O desenvolvimento dessa teoria por Matheron foi baseado nos trabalhos empíricos para estimativas de reservas minerais realizados pelo engenheiro de minas D.G. Krige e o estatístico H.S. Sichel, realizados na África do Sul, nos anos 50 [60].

A geoestatística resume-se na aplicação de métodos matemáticos e estatísticos a problemas das Ciências da Terra e pode ser utilizada em diversas áreas como: geologia, pesquisa mineral, para traduzir a geologia para modelos usados em engenharia, determinação do tipo de amostragem, estimativa espacial e temporal, simulação, bem como, na análise de riscos e quantificação de reservas.

Uma marca registrada da geoestatística é sua praticidade, o que explica seu sucesso e aplicação em diversas áreas como: mineração [60]-[61], petróleo [62]-[63], ciências do solo [64]-[65], geotecnia [66]-[67], hidrogeologia [68], ecologia [69], e ciências ambientais [70]-[71].

### 4.1 Conceitos básicos de geoestatística

A geoestatística trata com questões simples, mas importantes, de interpolação espacial e quantificação da incerteza para variáveis que apresentam continuidade espacial, ou seja, que podem ser medidas em qualquer ponto da área/região/zona em estudo. Ela está baseada em conceitos estatísticos tradicionais como:

- Variável Aleatória – é uma variável que pode apresentar uma série de resultados de acordo com alguma distribuição de probabilidades [frequências] ( $p_i, i = 1, \dots, N$ ). As  $N$  probabilidades de ocorrências devem satisfazer as condições (1)  $p_i \geq 0$ , para todo  $i = 1, \dots, N$  e (2)  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ . A variável aleatória (VA) é representada por uma letra maiúscula ( $Z$ ) e os possíveis resultados pela letra minúscula correspondente,  $z_i, i = 1, \dots, N$ . Quando o número de resultados ou ocorrências é finito, a variável aleatória é denominada “discreta” ou categórica. Se o número de resultados possíveis é infinito, a variável aleatória é do tipo contínua. São exemplos de variáveis a utilização da terra, ou contagens de insetos, ou espécies de fósseis. Variáveis contínuas incluem propriedades petrofísicas como porosidade, permeabilidade, concentrações de metais ou poluentes. Em geral, na geoestatística, a VA está relacionada a alguma localização no espaço, e é representada pela notação  $Z(\mathbf{u})$ , onde  $\mathbf{u}$  é o vetor de coordenadas da localização. Vetores serão representados em negrito. A VA  $Z(\mathbf{u})$  vista como uma função de  $\mathbf{u}$  é chamada uma função aleatória (FA), indicando um conjunto de VA’s definidos sobre algum campo de interesse, por exemplo,  $\{Z(\mathbf{u}), \mathbf{u} \in \text{área de estudo}\}$ . A VA  $Z(\mathbf{u})$  também é dependente da informação no sentido que sua distribuição de probabilidade muda conforme mais dados sobre o valor não amostrado  $z(\mathbf{u})$  tornam-se disponíveis.

A distribuição de probabilidades de uma VA  $Z(\mathbf{u})$  contínua pode ser totalmente caracterizada pela função de distribuição acumulada (FDA) definida como:

$$F(\mathbf{u};z) = Prob\{Z(\mathbf{u}) \leq z\} \quad (4.1)$$

A equação (4.1) fornece a probabilidade que a VA  $Z$  seja menor ou igual a um determinado valor  $z$ , geralmente denominado valor de corte. A FDA apresenta as seguintes propriedades:

- $F(\mathbf{u};z)$  é não decrescente;
- $F(\mathbf{u};z) \in [0,1]$ ;
- $F(-\infty) = 0$  e  $F(\infty) = 1$

A probabilidade de  $Z$  ocorrer em um intervalo  $[a,b]$ , onde  $b > a$ , é dada pela diferença dos valores da FDA nos pontos  $a$  e  $b$ :

$$Prob\{Z(\mathbf{u}) \in [a,b]\} = F(b) - F(a) \quad (4.2)$$

Similarmente, a probabilidade de  $Z$  exceder um valor de corte  $z$  é escrita como:

$$Prob\{Z(\mathbf{u}) > z\} = 1 - F(\mathbf{u};z) \quad (4.3)$$

A função densidade de probabilidade (FDP) é a derivada da FDA, se esta for diferenciável, ou seja:

$$f(\mathbf{u};z) = F'(\mathbf{u};z) = \lim_{dz \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{u};z + dz) - F(\mathbf{u};z)}{dz} \quad (4.4)$$

Quando a FDA é realizada para um conjunto específico de informações, por exemplo,  $(n)$  consistindo de  $n$  valores de dados vizinhos  $Z(\mathbf{u}_\alpha) = z(\mathbf{u}_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ , a notação “condicional à  $n$ ” será utilizada, definindo a função de distribuição acumulada condicional (FDAC):

$$F(\mathbf{u};z|(n)) = Prob\{Z(\mathbf{u}) \leq z|(n)\} \quad (4.5)$$

Uma notação similar é utilizada no caso da VA  $Z(\mathbf{u})$  ser do tipo categórica tomada para qualquer valor  $K$  de resultados  $k = 1, \dots, K$ :

$$F(\mathbf{u};k|(n)) = Prob\{Z(\mathbf{u}) = k|(n)\} \quad (4.6)$$

É importante observar que a FDAC (4.5) é uma função da localização  $\mathbf{u}$ , do tamanho da amostra  $(n)$ , da configuração geométrica (a localização dos dados em  $\mathbf{u}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ ) e dos valores amostrais (os  $n$  valores  $z(\mathbf{u}_\alpha)$ 's).

- Quantis – o quantil- $p$  de uma distribuição  $F(\mathbf{u};z_p)$  é o valor  $z_p$  para o qual  $F(\mathbf{u}; z_p) = Prob\{Z(\mathbf{u}) \leq z_p\} = p \in [0,1]$ , ou seja, é o valor  $z_p$  da distribuição abaixo do qual estão uma proporção  $p$  de dados. Portanto, o quantil- $p$  pode ser expresso em uma forma inversa da FDA, ou seja:

$$\text{O quantil-}p \ z_p = F^{-1}(\mathbf{u}; p) \text{ com } p \in [0,1] \quad (4.7)$$

Os quantis mais comumente usados são:

- a) A mediana ( $M$ ), equivalente ao quantil.

$$M = F^{-1}(\mathbf{u}; 0.5) \quad (4.8)$$

- b) Os quartis inferior e superior:

$$z_{0.25} = F^{-1}(\mathbf{u}; 0.25) \quad \text{e} \quad z_{0.75} = F^{-1}(\mathbf{u}; 0.75)$$

Uma forma de comparar duas distribuições é através de uma ferramenta gráfica conhecida como Q-Q plot, que consiste em cruzar graficamente os quantis das duas distribuições. Quando todos os pontos em um Q-Q plot caem sobre a linha de  $45^\circ$ , desenhada

a partir da origem, as duas distribuições são exatamente iguais. Deslocamentos em relação à linha de 45° indicam diferenças nas duas distribuições, em particular:

Um deslocamento sistemático acima ou abaixo da linha de 45° indica que os *centros* ou médias das distribuições são diferentes. Um deslocamento acima da distribuição implica que os valores da distribuição  $Y$  são mais elevados do que os de  $X$ .

1. Uma inclinação diferente de 45° indica que as dispersões ou variâncias das duas distribuições são diferentes. Uma inclinação maior do que 1 (ou 45°) indica que a variância de  $Y$  é maior do que a de  $X$ .
  2. Curvatura sobre o Q-Q plot indica que as duas distribuições têm formas diferentes.
- Valor esperado – É a média ponderada dos  $n$  possíveis resultados, onde cada resultado é ponderado por sua probabilidade de ocorrência:

– no caso discreto:

$$E\{Z\} = m = \sum_{i=1}^N p_i z_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i \quad (4.9)$$

– no caso contínuo, sob condições de existência das integrais:

$$E\{Z\} = m = \int_{-\infty}^{+\infty} z.dF(\mathbf{u}; z) = \int_{-\infty}^{+\infty} z.f(\mathbf{u}; z)dz \quad (4.10)$$

$$\approx \sum_{k=1}^K z'_k [F(\mathbf{u}; z_{k+1}) - F(\mathbf{u}; z_k)] \quad \text{com } z'_k \in ]z_k, z_{k+1}]$$

onde  $F(\mathbf{u}; z)$  e  $f(\mathbf{u}; z)$  e são a FDA e FDP, respectivamente. A integral  $\int_{-\infty}^{+\infty} z.dF(\mathbf{u}; z)$  foi aproximada por  $K$  classes com respectivas frequências  $[F(\mathbf{u}; z_{k+1}) - F(\mathbf{u}; z_k)]$  e  $z'_k$  é um valor dentro da  $k$ -ésima classe, por exemplo, o centro da classe.

A variância da VA  $Z$  é definida como o quadrado do desvio esperado de  $Z$  em relação à sua média:

$$\text{Var}\{Z\} = \sigma^2 = E\{[Z - m]^2\} = E[Z^2] - m^2 \quad (4.11)$$

$$= \sum_{i=1}^N p_i (z_i - m)^2, \quad \text{no caso discreto}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (z - m)^2 dF(\mathbf{u}; z) = \int_{-\infty}^{+\infty} (z - m)^2 f(\mathbf{u}; z)dz, \quad \text{no caso contínuo.}$$

A raiz quadrada da variância,  $\sigma$ , é chamada de desvio-padrão, e sua razão em relação à média,  $\sigma/m$ , para variáveis não negativas, é denominado coeficiente de variação (ou desvio-padrão relativo) sendo adimensional. Coeficientes variação maiores do que 1 podem indicar a presença de valores altos (outliers) na distribuição.

Uma medida para avaliar a assimetria da distribuição é o coeficiente de assimetria, definido por:

$$\varphi = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n \frac{[(z(\alpha) - m)^3]}{\sigma^3} \quad (4.12)$$

Distribuições simétricas apresentam  $\varphi = 0$ . Distribuições com assimetria positiva apresentam uma longa cauda devido a altos valores e  $\varphi$  é positivo e, por outro lado, distribuições com assimetria negativa apresentam uma longa cauda devido a valores baixos e  $\varphi$  é negativo. A média é chamada de primeiro momento. O segundo momento centrado na média é a variância, o terceiro momento é a assimetria, o quarto é a curtose.

A Curtose ( $K$ ), que mede o grau de achatamento da distribuição em relação à normal, é definida por:

$$K = \frac{1}{n} \sum_{\alpha=1}^n \frac{[(z(\alpha) - m)^4]}{\sigma^4} \quad (4.13)$$

## 4.2 Variáveis regionalizadas

A variabilidade espacial de algumas características do solo vem sendo uma das preocupações de pesquisadores praticamente desde o início do século. Smith [72] estudou a disposição de parcelas no campo em experimentos de rendimento de variedades de milho, numa tentativa de eliminar o efeito de variações do solo. Montgomery [73], preocupado com o efeito do nitrogênio no rendimento do trigo, fez um experimento em 224 parcelas, medindo o rendimento de grãos. Vários outros autores, como Waynick e Sharp [74], também estudaram variações de nitrogênio e o carbono no solo.

Os procedimentos usados na época baseavam-se na estatística clássica e utilizavam grandes quantidades de dados amostrais, visando caracterizar ou descrever a distribuição espacial da característica em estudo. Por estatística clássica entende-se aquela que se utiliza



de parâmetros como média e desvio padrão para representar um fenômeno e se baseia na hipótese principal de que as variações de um local para outro são aleatórias.

Krige [75], trabalhando com dados de concentração de ouro, concluiu que somente a informação dada pela variância seria insuficiente para explicar o fenômeno em estudo. Para tal, seria necessário levar em consideração a distância entre as observações. A partir daí surge o conceito da *geoestatística*, que leva em consideração a *localização geográfica* e a *dependência espacial*.

Matheron [76]-[77], baseado nas observações de Krige, desenvolveu a *teoria das variáveis regionalizadas*, a partir dos fundamentos da geoestatística.

Segundo [78], uma variável regionalizada é uma função numérica com distribuição espacial, que varia de um ponto a outro com continuidade aparente, mas cujas variações não podem ser representadas por uma função matemática simples. A teoria das variáveis regionalizadas pressupõe que a variação de uma variável pode ser expressa pela soma de três componentes [79]: a) uma componente estrutural, associada a um valor médio constante ou a uma tendência constante; b) uma componente aleatória, espacialmente correlacionada; e c) um ruído aleatório ou erro residual.

Se  $\mathbf{x}$  representa uma posição em uma, duas ou três dimensões, então o valor da variável  $Z$ , em  $\mathbf{x}$ , é dada por [79]:

$$Z(x) = m(x) + \varepsilon(x) + \varepsilon''$$

onde:

$m(x)$  é uma função determinística que descreve a componente estrutural de  $Z$  em  $\mathbf{x}$ ;

$\varepsilon(x)$  é um termo estocástico, que varia localmente e depende espacialmente de  $m(\mathbf{x})$ ;

$\varepsilon''$  é um ruído aleatório não correlacionado, com distribuição normal com média zero e variância  $\sigma^2$ .

As Figuras 4.1(a) e 4.1(b) ilustram as três componentes principais da variação espacial. A Figura 4.1(a) apresenta uma componente determinística que varia abruptamente, enquanto a componente determinística na Figura 4.1(b) apresenta uma tendência linear.

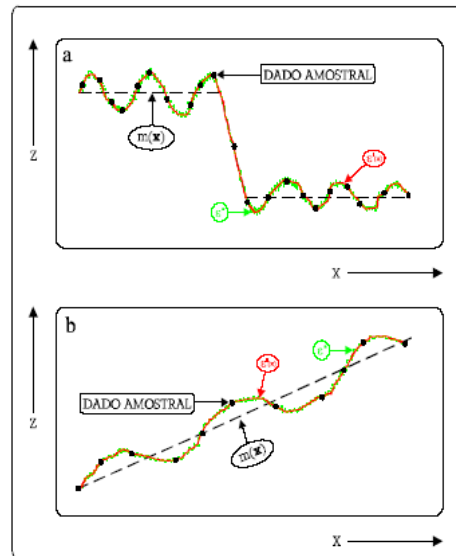


Figura. 4.1(a) e 4.1(b) - Principais componentes da variação espacial.

FONTE: Modificada de Burrough ([79], p. 155).

### 4.2.1 Características das variáveis regionalizadas

Segundo Camargo [80], as principais características de uma variável regionalizada são:

- **Localização**: uma variável regionalizada é numericamente definida por um valor, o qual está associado a uma amostra de tamanho, forma e orientação específicos. Essas características geométricas da amostra são denominadas suporte geométrico. O suporte geométrico não necessariamente compreende volumes, podendo se referir também a áreas e linhas. Quando o suporte geométrico tende a zero, tem-se um ponto ou amostra pontual e o suporte geométrico é imaterial.

Resumindo, a teoria das variáveis regionalizadas considera a geometria das amostras, distintamente da estatística clássica onde a forma, o tamanho e a orientação não são considerados. Um experimento estatístico clássico como o lançamento de moedas têm resultados que são independentes se a moeda é grande ou pequena, leve ou pesada, e de como é lançada.

- **Anisotropia**: algumas variáveis regionalizadas são anisotrópicas, isto é, apresentam variações graduais numa direção e rápidas ou irregulares em outra.

• **Continuidade:** dependendo do fenômeno sendo observado, a variação espacial de uma variável regionalizada pode ser grande ou pequena. Apesar da complexidade das flutuações, uma continuidade média geralmente está presente. Esta continuidade é exemplificada por Olea [81] em um caso hipotético, onde amostras de solo de mesmo tamanho, forma e orientação são coletadas em intervalos regulares ao longo de linhas imaginárias.

### 4.3 Descrição de padrões espaciais

#### ▪ Distribuição bivariada

Em ciências da Terra é frequentemente importante conhecer o padrão de dependência de uma variável  $X$  em relação a outra  $Y$ , por exemplo, quando se deseja saber a relação entre pares de concentrações de metais medidas na mesma localização. A distribuição conjunta de resultados de um par de variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  é caracterizada pela FDA conjunta (ou bivariada) definida como:

$$F_{XY}(x,y) = Prob\{ X \leq x, e Y \leq y \} \quad (4.14)$$

estimada, na prática, pela proporção de pares de dados conjuntamente abaixo dos respectivos valores (valores de corte)  $x$  e  $y$ . Isto pode ser mostrado no diagrama de dispersão (Figura 4.2) onde cada par de dado  $(x_i, y_i)$  é plotado como um ponto.

O grau de dependência entre as duas variáveis  $X$  e  $Y$  pode ser caracterizado pela dispersão em torno da linha de  $45^\circ$  no diagrama de dispersão. A dependência perfeita ( $X = Y$ ) corresponde a todos os pares experimentais  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, N$  plotados sobre a linha de  $45^\circ$ .

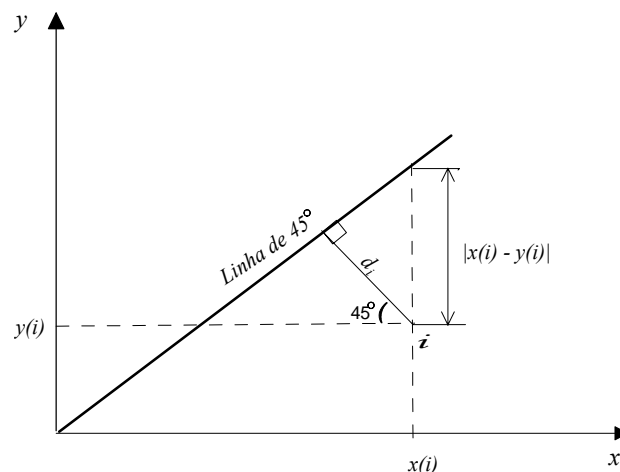


Figura 4.2 – Diagrama de dispersão para os pares  $(x_i, y_i)$  [82].

O momento de inércia do diagrama de dispersão em torno da linha de  $45^\circ$  – chamado de “semivariograma” do conjunto de pares  $(x_i, y_i)$  – é definido como a metade da média das diferenças quadráticas entre as coordenadas de cada par, ou seja:

$$\gamma_{XY} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i^2 = \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2 \quad (4.15)$$

Quanto maior o valor do semivariograma, maior a dispersão e menos relacionadas são as duas variáveis  $X$  e  $Y$ .

Conforme definido anteriormente, o valor esperado de  $X$  é a média ponderada dos  $n$  resultados possíveis  $x_i$ , ponderados por suas respectivas probabilidades de ocorrência, isto é:

$$E\{X\} = m_X = \sum_{i=1}^N p_i x_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (4.16)$$

Analogamente à equação (4.10), o valor esperado do produto  $XY$  é definido como a média ponderada dos resultados conjuntos  $XY = xy$ , ponderados por suas respectivas probabilidades de ocorrência, ou seja,

$$E\{XY\} = \int \int_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot d^2 F_{XY}(\mathbf{u}; x, y) = \int \int_{-\infty}^{+\infty} xy \cdot f_{XY}(\mathbf{u}; x, y) dx dy \quad (4.17)$$

estimada na prática por:  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i$

onde  $f_{XY}(\mathbf{u}; x, y) = \frac{d^2 F_{XY}(\mathbf{u}; x, y)}{dx dy}$  é a função densidade de probabilidade (FDP) bivariada.

O momento bivariado (4.17) é chamado covariância não centrada das duas VA's  $X$  e  $Y$ . A covariância centrada (na média), ou simplesmente covariância, é definida por:

$$\begin{aligned} \text{Cov}\{X, Y\} &= \sigma_{XY} = E\{XY\} = E\{[X - m_X] \cdot [Y - m_Y]\} \\ &= E\{XY\} - m_X \cdot m_Y \end{aligned} \quad (4.18)$$

estimada na prática por:  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m_X)(y_i - m_Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i - m_X m_Y$

Conforme a equação (4.11), a variância de  $X$  pode ser definida como a autocovariância de  $X$  sobre si mesma, isto é:

$$\sigma_X^2 = Var\{X\} = Cov\{X, X\} = E\{[X - m_X]^2\} = \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - m_X^2 \right] \geq 0 \quad (4.19)$$

A covariância padronizada (adimensional) entre duas VA's  $X$  e  $Y$  é conhecida como coeficiente de correlação linear, ou seja:

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{Cov\{X, Y\}}{\sqrt{Var\{X\} \cdot Var\{Y\}}} \in [-1, +1] \quad (4.20)$$

A relação experimental entre o semivariograma e a covariância pode ser obtida pelo desenvolvimento da equação (4.15), mostrada a seguir:

$$2\gamma_{XY} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2$$

o termo ao quadrado é desenvolvido e é acrescentado o termo:  $m_X^2 - m_X^2 + m_Y^2 - m_Y^2$

$$2\gamma_{XY} = \left[ \frac{1}{N} \sum_i x_i^2 - m_X^2 \right] + \left[ \frac{1}{N} \sum_i y_i^2 - m_Y^2 \right] - \frac{2}{N} \sum_i x_i y_i + m_X^2 + m_Y^2$$

os termos em colchetes são substituídos pela equação (4.19) e é acrescentado  $2m_X m_Y - 2m_X m_Y$

$$2\gamma_{XY} = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2 \left[ \frac{1}{N} \sum_i x_i y_i - m_X m_Y \right] + m_X^2 + m_Y^2 - 2m_X m_Y$$

$$2\gamma_{XY} = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\sigma_{XY} + (m_X - m_Y)^2 \geq 0 \quad (4.21)$$

A equação (4.21) mostra que um aumento no semivariograma  $2\gamma_{XY}$  é acompanhado de um decréscimo na covariância  $\sigma_{XY}$ : Quanto maior for a dispersão dos pares  $(x_i, y_i)$  em torno da linha 45° no diagrama de dispersão maior será o semivariograma  $2\gamma_{XY}$  e menor a covariância  $\sigma_{XY}$  e o coeficiente de correlação  $\rho_{XY}$ , o que caracteriza o semivariograma como uma medida de variabilidade e a covariância e correlação como medidas de similaridade.

Para as variáveis padronizadas  $X' = (X - m_X)/\sigma_X$  e  $Y' = (Y - m_Y)/\sigma_Y$ , cujas estatísticas correspondentes são  $m_{X'} = m_{Y'} = 0$  e  $\sigma_{X'}^2 = \sigma_{Y'}^2 = 1$ , então:

$$\sigma_{X'Y'} = E \left\{ \frac{X - m_X}{\sigma_X} \cdot \frac{Y - m_Y}{\sigma_Y} \right\} = \rho_{XY} \in [-1, +1] \quad (4.22)$$

A substituição de  $m_{X'} = m_{Y'} = 0$  e  $\sigma_{X'}^2 = \sigma_{Y'}^2 = 1$  na equação (4.21), resulta em:

$$\gamma_{X'Y'} = 1 - \rho_{XY} \in [0, 2] \quad (4.23)$$

Observa-se que, quando  $\rho_{XY} = 1 \Rightarrow \gamma_{XY} = 0$ , portanto, todos os pares padronizados  $\left( \frac{x_i - m_X}{\sigma_X}, \frac{y_i - m_Y}{\sigma_Y} \right)$  estão alinhados em torno da linha de 45° do diagrama de dispersão. O coeficiente de correlação  $\rho_{XY}$  é invariante a qualquer transformação linear aplicada sobre as VA's  $X$  e/ou  $Y$ . O semivariograma  $\gamma_{XY}$  e covariância  $\sigma_{XY}$ , ao contrário, são dependentes de transformações lineares nas VA's  $X$  e  $Y$ , ou seja, de uma translação  $X + b$ , ou rescalonamento  $aX$ .

O coeficiente de correlação  $\rho_{XY}$  fornece uma medida da correlação linear entre as duas variáveis  $X$  e  $Y$ . Se for interpretada de outro modo pode conduzir a erros. Tal como a variância, o coeficiente de correlação é fortemente afetado por valores extremos (muito altos ou muito baixos). Uma medida mais robusta é o coeficiente de correlação *rank*,  $\rho_{XY}^R$ , que considera o *rank* (ordem crescente ou decrescente) dos dados,  $r(x_i)$  e  $r(y_i)$ , em vez dos valores originais:

$$\rho_{XY}^R = \frac{1}{N} \frac{\sum_{i=1}^N [r(x_i) - m_{Rx}] \cdot [r(y_i) - m_{Ry}]}{\sigma_{Rx} \cdot \sigma_{Ry}} \quad (4.24)$$

onde  $m_{Rx}$  e  $\sigma_{Rx}$  são as médias e desvio-padrão dos  $N$  *ranks*  $r(x_i)$ . Uma grande diferença entre  $\rho_{XY}$  e  $\rho_{XY}^R$  reflete ou uma relação não-linear entre as duas variáveis  $X$  e  $Y$  ou a presença de pares de valores extremos.

As VA's  $X$  e  $Y$  podem representar:

- (i) duas diferentes propriedades medidas em uma mesma localização, por exemplo, concentração (ou teor) de arsênio e manganês no solo;
- (ii) uma mesma propriedade medida em duas diferentes localizações do espaço, característica das variáveis regionalizadas, por exemplo, concentração de arsênio nas localizações  $x$  e  $x + h$  separadas por um vetor  $h$ , sendo:  $X = Z(x)$ ,  $Y = Z(x + h)$ ;
- (iii) duas diferentes propriedades medidas em duas diferentes localizações, por exemplo, concentração de arsênio na localização  $x$  e concentração de manganês em separada por um vetor  $h$ , sendo:  $X = Z_{As}(x)$ ,  $Y = Z_{Mn}(x + h)$ .

Em todos os casos, o semivariograma  $\gamma_{XY}$  ou a correlação  $\rho_{XY}$  medirão o grau de variabilidade/similaridade entre as duas VA's  $X$  e  $Y$ .

O segundo caso (ii) é de particular interesse em problemas de interpolação espacial, onde se deseja inferir (mapear) uma determinada área para uma determinada propriedade,

$Z(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u} \in$  área  $A$ , a partir de uma amostra  $n$  de  $Z(\mathbf{u})$ . A Combinação de todos os  $n(\mathbf{h})$  pares de dados de  $Z(\mathbf{u})$  sobre a mesma área/zona/camada/população  $A$  com tais pares separados aproximadamente pelo mesmo vetor  $\mathbf{h}$  (em comprimento e direção), permite estimar o semivariograma característico (ou experimental) da variabilidade espacial em  $A$ :

$$\gamma(\mathbf{h}) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{\alpha=1}^{N(\mathbf{h})} [z(\mathbf{u}_{\alpha}) - z(\mathbf{u}_{\alpha} + \mathbf{h})]^2 \quad (4.25)$$

## 4.4 Modelamento da variação espacial

O semivariograma experimental (4.25) é uma estimativa discreta de uma integral espacial bem determinada definindo uma média sobre  $A$ :

$$\gamma_A(\mathbf{h}) = \frac{1}{A(\mathbf{h})} \int_A [z(\mathbf{u}) - z(\mathbf{u} + \mathbf{h})]^2 d\mathbf{u} \quad \text{para } \mathbf{u} \text{ e } \mathbf{u} + \mathbf{h} \in A \quad (4.26)$$

Tal como a VA  $Z(\mathbf{u})$  e sua distribuição caracteriza a incerteza sobre o valor de certa propriedade na localização  $\mathbf{u}$ , a função aleatória  $Z(\mathbf{u})$ ,  $\mathbf{u} \in A$ , definida como um conjunto de VA's dependentes caracterizará a incerteza espacial conjunta sobre  $A$ . O semivariograma dessa função aleatória caracteriza o grau de dependência espacial entre duas variáveis aleatórias  $Z(\mathbf{u})$  e  $Z(\mathbf{u} + \mathbf{h})$  separados de um vetor  $\mathbf{h}$ .

Para o modelamento do semivariograma, realizado depois de construído o semivariograma experimental, é necessário que a hipótese de estacionariedade seja considerada. Esta hipótese estabelece, em resumo, que os dois primeiros momentos (média e variância) da diferença  $[Z(\mathbf{u}) - Z(\mathbf{u} + \mathbf{h})]$  são independentes da localização  $\mathbf{u}$  e função somente do vetor  $\mathbf{h}$ . O segundo momento dessa diferença corresponde ao semivariograma, ou seja:

$$2\gamma(\mathbf{h}) = E\{[Z(\mathbf{u}) - Z(\mathbf{u} + \mathbf{h})]^2\} \text{ é independente de } \mathbf{u} \in A \quad (4.27)$$

Desenvolvendo da equação acima (acrescentando  $m^2$  em todos os termos, por conveniência), obtem-se:

$$2\gamma(\mathbf{h}) = \{E[Z^2(\mathbf{u})] - m^2\} + \{E[Z^2(\mathbf{u} + \mathbf{h})] - m^2\} - 2\{E[Z(\mathbf{u}).Z(\mathbf{u} + \mathbf{h})] - m^2\}$$

$$2\gamma(\mathbf{h}) = \text{Var}\{Z(\mathbf{u})\} + \text{Var}\{Z(\mathbf{u} + \mathbf{h})\} - 2.\text{Cov}\{Z(\mathbf{u}), Z(\mathbf{u} + \mathbf{h})\}$$

$$2\gamma(\mathbf{h}) = 2[C(0) - C(\mathbf{h})]$$

$$\gamma(\mathbf{h}) = C(0) - C(\mathbf{h}), \quad (4.28)$$

sendo que:

$$\text{Var}\{Z(\mathbf{u})\} = \text{Var}\{Z(\mathbf{u}+\mathbf{h})\} = \sigma^2 = C(0) \quad \text{para todo } \mathbf{u} \in A$$

$$\text{Cov}\{Z(\mathbf{u}), Z(\mathbf{u}+\mathbf{h})\} = C(\mathbf{h}) \quad \text{para todo } \mathbf{u} \in A$$

A relação (4.28) é utilizada então para a determinação do modelo semivariográfico. A variância  $C(0)$  é chamada na geoestatística como patamar (ou sill). O semivariograma pode ser definido como o gráfico da função semivariância versus a distância  $\mathbf{h}$ , é uma técnica utilizada para medir a dependência entre pontos amostrais, distribuídos segundo um sistema espacial de referência e para a interpolação de valores necessários à construção de mapas de isolinhas [83]. Segundo Christakos [85], é a ferramenta preferida para inferência estatística porque oferece algumas vantagens sobre a covariância, entre as quais:

- i) seu cálculo empírico está sujeito a erros menores;
- ii) Oferece melhor caracterização da variabilidade espacial;
- iii) Exige a chamada hipótese de estacionaridade intrínseca, ou seja, que  $Z(\mathbf{u})$  é uma função aleatória com incrementos  $Z(\mathbf{u}+\mathbf{h}) - Z(\mathbf{u})$  estacionários, mas não necessariamente ela própria estacionária.

Christakos [85] mostra ainda que, em geral, para uma função contínua escolhida como semivariograma, é necessário e suficiente satisfazer a propriedade de positivo definida, que garante que a variância de certas combinações lineares descritas por  $Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(\mathbf{u}_i)$  sejam positivas. O modelo semivariográfico  $\gamma(\mathbf{h})$  deve ser condicionalmente negativo definido, isto é:

$$-\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma(\mathbf{h}) \geq 0 \quad \text{quando} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \quad \forall n$$

Outra condição a ser satisfeita pelo semivariograma é:

$$\lim_{|\mathbf{h}| \rightarrow \infty} \gamma(\mathbf{h}) / |\mathbf{h}|^2 = 0$$

Uma vez que não é fácil verificar essas condições diretamente [85], a solução prática é usar combinações lineares de modelos básicos que são válidos, isto é, permissíveis. Os modelos básicos mais utilizados em geoestatística são apresentados a seguir:



### 4.4.1 Modelo Esférico

O modelo esférico é um dos modelos mais utilizados na geoestatística. Apresenta patamar e o crescimento é linear junto à origem. A equação normalizada deste modelo é:

$$\gamma(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0 & |\mathbf{h}| = 0 \\ Co + C \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{|\mathbf{h}|}{a} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{|\mathbf{h}|}{a} \right)^3 \right] & 0 < |\mathbf{h}| \leq a \\ Co + C & |\mathbf{h}| > a \end{cases} \quad (4.29)$$

### 4.4.2 Modelo Exponencial

Outro modelo bastante utilizado é o modelo exponencial, A equação normalizada deste modelo é dada por:

$$\gamma(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0 & |\mathbf{h}| = 0 \\ Co + C \left[ 1 - \exp\left(-\frac{|\mathbf{h}|}{a}\right) \right] & |\mathbf{h}| \neq 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

### 4.4.3 Modelo Gaussiano

O modelo gaussiano é um modelo transitivo, muitas vezes usado para modelar fenômenos extremamente contínuos [83]. A equação representativa deste modelo é dada por:

$$\gamma(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0 & |\mathbf{h}| = 0 \\ Co + C \left[ 1 - \exp\left(-\frac{|\mathbf{h}|}{a}\right)^2 \right] & |\mathbf{h}| \neq 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

O vetor de parâmetros desses modelos é  $\Phi = (Co, C, a)$ , onde as componentes são denominadas de efeito pepita, patamar e alcance, respectivamente. O efeito pepita está relacionado a erros de amostragens, erros de medida ou microregionalizações da variável analisada, que causam uma descontinuidade na origem do semivariograma. O patamar, também conhecido como “sill”, representa o nível de variabilidade do semivariograma até a sua estabilização. O alcance (ou amplitude variográfica) é a distância observada até o nível onde a variabilidade se estabiliza. Indica a distância em que as amostras estão correlacionadas

espacialmente (Figura 4.3). A Figura 4.4 mostra os modelos semivariográficos esférico, exponencial e gaussiano com os respectivos vetores de parâmetros  $\Phi_1 = (0; 3; 2)$ ,  $\Phi_2 = (0; 3; 1,7)$  e  $\Phi_3 = (0; 3; 1,8)$ . Esses modelos são chamados de transitivos, indicando que atingem um patamar.

#### 4.4.4 Modelo Potência

O modelo potência é dado por:

$$\gamma(\mathbf{h}) = \begin{cases} 0 & , |\mathbf{h}| = 0 \\ Co + c |\mathbf{h}|^w & , |\mathbf{h}| \neq 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

onde

- $c \geq 0$  é o coeficiente de declividade
- $0 \leq w \leq 2$  é o expoente.

Este modelo não é transitivo, ou seja, não atinge o patamar. É utilizado, em geral, para modelar fenômenos com capacidade infinita de dispersão. A Figura 4.5 mostra modelos potência para diferentes valores do parâmetro  $w$ . Quando  $w = 1$ , o modelo se chama linear. Os modelos transitivos possuem a covariância correspondente representada por  $C(\mathbf{h}) = Co - \gamma(\mathbf{h})$ . O modelo potência, ao contrário, por não possuir patamar, não possui a covariância correspondente.

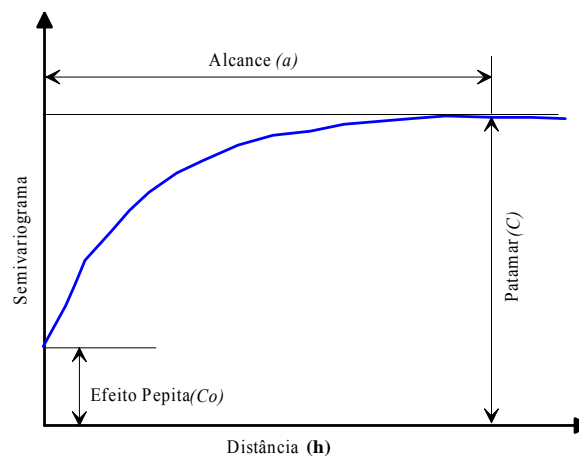


Figura 4.3 – Parâmetros do semivariograma.

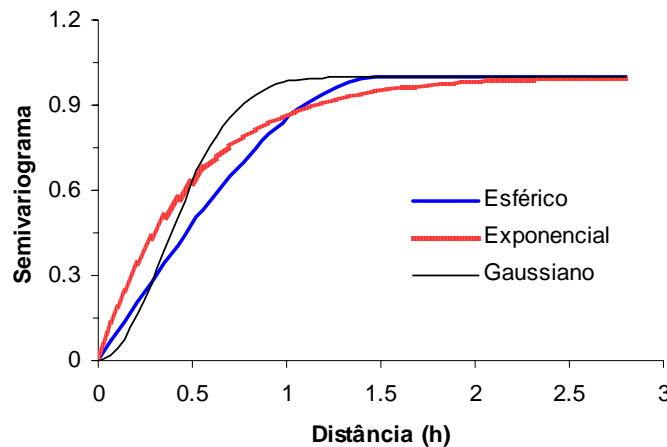


Figura 4.4 – Modelos semivariográficos do tipo transitivo (com patamar) mais usuais em geoestatística.

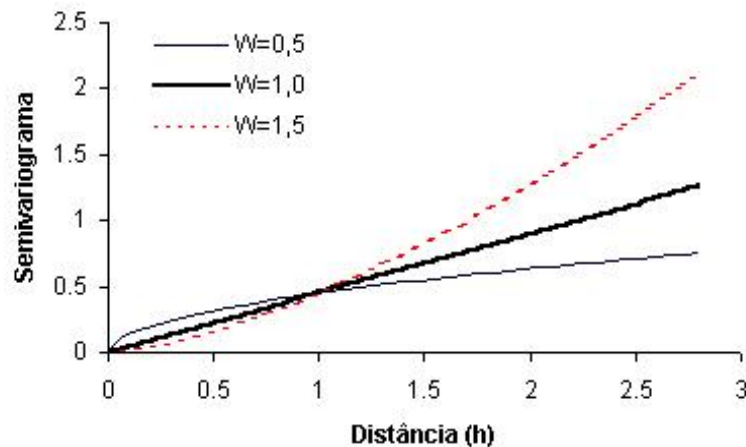


Figura 4.5 – Modelos potência para diferentes valores de  $w$ .

O semivariograma (e covariância) são funções do vetor  $\mathbf{h}$  (comprimento e direção). Quando a dependência é somente em relação ao comprimento (distância) do vetor  $\mathbf{h}$ , o modelo é chamado isotrópico. Se a dependência é também na direção do vetor  $\mathbf{h}$ , então o modelo é chamado anisotrópico. A anisotropia pode ser verificada através da observação dos semivariogramas experimentais em diferentes direções, por exemplo,  $0^\circ$  (Norte),  $45^\circ$ ,  $90^\circ$  (Leste) e  $135^\circ$ . Caso os semivariogramas nessas direções sejam similares, o fenômeno é chamado *isotrópico* (ou omnidirecional), indicando que o padrão de variabilidade espacial não muda com a direção e um único modelo (isotrópico) é suficiente para descrever a variabilidade espacial da variável em estudo. Por outro lado, se são observadas, entre os

semivariogramas, diferenças nas direções, o fenômeno é denominado *anisotrópico*. Quando as diferenças são observadas somente em relação ao alcance, a anisotropia é chamada *geométrica*. Caso as diferenças sejam tanto no alcance quanto no patamar, a anisotropia é do tipo *zonal*. A Figura 4.6 ilustra esses dois casos.

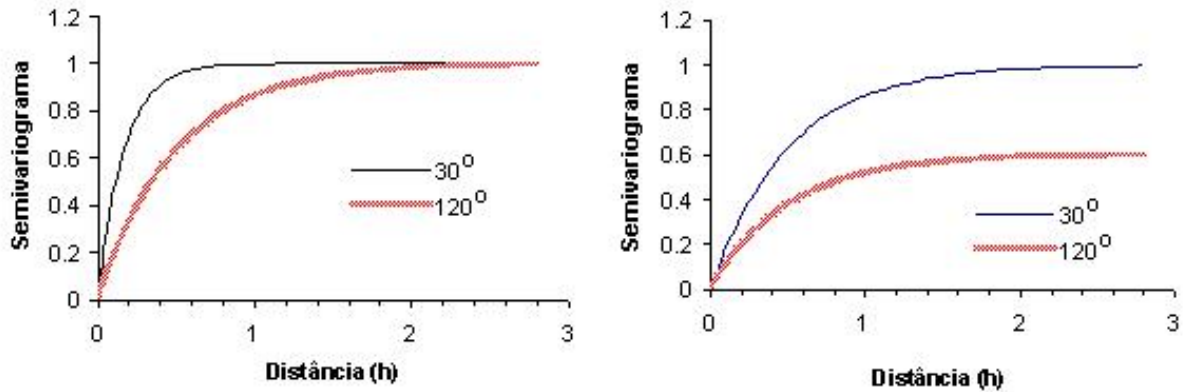


Figura 4.6 – Tipos de anisotropia variográfica; a) geométrica b) zonal.

Em muitas situações dois ou mais modelos permissíveis devem ser combinados para ajustar a forma do semivariograma experimental. Isso pode ocorrer quando os dados estão disponíveis para uma extensão bastante longa e o semivariograma experimental ao longo daquela direção pode revelar diversas escalas de variabilidade. Essa sucessão aninhada (*nested*) de escalas ( $S$ ) de variabilidade pode ser modelada por uma soma de semivariograma.

$$\gamma(\mathbf{h}) = \sum_{s=0}^S b^s \gamma_s(\mathbf{h}) \quad \text{com } b^s \geq 0 \quad (4.33)$$

sendo  $b^s$  o patamar positivo do correspondente modelo semivariográfico  $\gamma_s(\mathbf{h})$ .

Cada estrutura  $\gamma_s(\mathbf{h})$  caracteriza o padrão de variabilidade/continuidade espacial prevalecendo em uma escala particular. Por exemplo, as  $S$  estruturas podem ter alcances  $a_1 \ll a_2 \ll \dots \ll a_S$ .

O objetivo da análise estrutural (semivariográfica) é construir um modelo permissível que capture as mais importantes características espaciais da variável em estudo. Embora os valores do semivariograma experimental desempenhem um papel importante neste processo, a informação secundária, tal como a fornecida por um conhecimento físico da área e fenômeno pode ser de grande interesse.

Goovaerts [64] apresenta o caso bivariado, onde o modelamento da co-regionalização entre duas variáveis aleatórias exige que sejam modelados os dois semivariogramas diretos  $\gamma_{ii}(\mathbf{h})$  e  $\gamma_{jj}(\mathbf{h})$  mais o semivariograma cruzado  $\gamma_{ij}(\mathbf{h})$ . Os três modelos devem ser construídos juntos para garantir que a matriz de modelos semivariográficos  $\Gamma(\mathbf{h}) = [\gamma_{ij}(\mathbf{h})]$  seja condicionalmente negativa semi-definida para todas as distâncias  $\mathbf{h}$ , o que requer que a seguinte desigualdade seja satisfeita:

$$|\gamma_{ij}(\mathbf{h})| \leq \sqrt{\gamma_{ii}(\mathbf{h})\gamma_{jj}(\mathbf{h})} \quad \forall \mathbf{h} \quad (4.34)$$

A condição (4.33) é facilmente checada toda a vez que os três semivariogramas são modelados como combinações lineares do mesmo conjunto básico de modelos  $\gamma_s(\mathbf{h})$ :

$$\gamma_{ij}(\mathbf{h}) = \sum_{s=0}^S b_{ij}^s \gamma_s(\mathbf{h}) \quad \forall i, j \quad (4.35)$$

ou, usando notação matricial

$$\Gamma(\mathbf{h}) = \sum_{s=0}^S \mathbf{B}^s \gamma_s(\mathbf{h}) \quad (4.36)$$

onde  $\mathbf{B}^s = [b_{ij}^s]$  é referida como uma matriz de co-regionalização.

As condições suficientes para que o chamado modelo linear de co-regionalização (MLC) seja permissível são: (1) as funções  $\gamma_s(\mathbf{h})$  são modelos semivariográficos permissíveis, e (2) cada matriz de co-regionalização é positivo-definida, o que implica que os coeficientes  $b_{ij}^s$  devem satisfazer as seguintes restrições:

$$b_{ii}^s \geq 0, \quad b_{jj}^s \geq 0 \quad \forall s \quad (4.37)$$

$$|b_{ij}^s| \leq \sqrt{b_{ii}^s \cdot b_{jj}^s} \quad \forall s \quad (4.38)$$

Na prática, o modelamento é realizado em dois passos:

1. Primeiro, são modelados os dois semivariogramas diretos como combinações lineares de estruturas básicas selecionadas  $\gamma_s(\mathbf{h})$ ; em seguida, as mesmas estruturas básicas são ajustadas ao semivariograma cruzado sob a restrição (4.38).

## 4.5 Estimativa espacial

Depois que o modelo de dependência espacial entre as duas variáveis aleatórias  $Z(\mathbf{u})$  e  $Z(\mathbf{u}+\mathbf{h})$  é estabelecido, pode-se direcionar o problema da estimação de um valor desconhecido  $z(\mathbf{u})$  a partir dos valores disponíveis. O objetivo não é somente encontrar uma estimativa  $z^*(\mathbf{u})$  do valor desconhecido, mas também o modelamento da incerteza sobre essa estimativa. A incerteza é dependente da informação disponível, dos valores observados  $z(\mathbf{u}_\alpha)$ 's e do modelo de dependência espacial estabelecido.

O valor desconhecido  $z(\mathbf{u})$  pode ser estimado a partir de uma combinação linear dos  $n$  valores observados mais um parâmetro  $\lambda_0$ :

$$z^*(\mathbf{u}) = \lambda_0 + \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_\alpha(\mathbf{u})z(\mathbf{u}_\alpha) \quad (4.39)$$

onde  $z^*(\mathbf{u})$  é chamada uma “estimativa” e  $Z^*(\mathbf{u})$ , a VA, é chamado “estimador”, isto é:

$$Z^*(\mathbf{u}) = \lambda_0 + \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_\alpha(\mathbf{u})Z(\mathbf{u}_\alpha) \quad (4.40)$$

Deve-se, portanto, determinar o conjunto de pesos ( $\lambda_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ ) junto com uma medida da incerteza associada, ou seja, uma medida da variância,  $V[Z(\mathbf{u}) - Z^*(\mathbf{u})]$ . Existem diversos métodos de estimação entre os quais a interpolação linear simples que atribui pesos todos iguais a  $1/N$  ( $N =$  número de amostras), o inverso do quadrado da distância, onde são usados pesos  $\lambda_\alpha$  proporcionalmente inversos ao quadrado da distância (Euclidiana) que separa o valor estimado do valor observado. As principais falhas dos métodos tradicionais de estimação para utilização na geoestatística são: não considerar o padrão de dependência espacial da variável e não fornecer uma medida de erro para a estimativa.

## 4.6 Krigagem

Krigagem é a designação genérica adotada na geoestatística para uma família de algoritmos de regressão de mínimos-quadrados baseados no estimador de regressão linear  $Z^*(\mathbf{u})$ . O valor esperado do erro da VA é:

$$E\{Z(\mathbf{u}) - Z^*(\mathbf{u})\} = E\{Z(\mathbf{u})\} - E\{Z^*(\mathbf{u})\} \quad (4.41)$$

Substituindo-se  $Z^*(\mathbf{u})$  da equação 4.41, obtém-se:

$$E\{Z(\mathbf{u})\} - \lambda_0 - \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha}(\mathbf{u}) E\{Z(\mathbf{u}_{\alpha})\} = m(\mathbf{u}) - \lambda_0 - \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha} m(\mathbf{u}_{\alpha})$$

Para que o estimador seja não tendencioso, o valor esperado do erro deve ser zero, então o parâmetro  $\lambda_0$  é assumido como:

$$\lambda_0 = m(\mathbf{u}) - \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha} m(\mathbf{u}_{\alpha}) \quad (4.42)$$

Substituindo o valor de  $\lambda_0$  em 4.41, obtem-se:

$$Z^*(\mathbf{u}) - m(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha}(\mathbf{u}) [Z(\mathbf{u}_{\alpha}) - m(\mathbf{u}_{\alpha})] \quad (4.43)$$

onde  $\lambda_{\alpha}(\mathbf{u})$  é o peso atribuído a cada valor observado  $Z(\mathbf{u}_{\alpha})$  localizado dentro de determinada vizinhança  $W(\mathbf{u})$  centrado em  $\mathbf{u}$ . Os  $n(\mathbf{u})$  pesos são escolhidos de forma a minimizar a estimação ou erro da variância  $\sigma_E^2(u) = Var[Z^*(\mathbf{u}) - Z(\mathbf{u})]$  sob a condição de não-tendenciosidade do estimador. As diferenças entre os vários tipos de krigagem residem no modelo considerado para a tendência  $m(\mathbf{u})$  na expressão (4.43). A krigagem simples (KS) considera a média  $m(\mathbf{u})$  conhecida e constante por toda a área de estudo, enquanto a krigagem ordinária (KO) limita o domínio de estacionaridade da média à vizinhança local  $W(\mathbf{u})$  e, ao contrário da KS, a média é desconhecida.

### 4.6.1 Krigagem Ordinária

A krigagem ordinária (KO) considera a variação local da média limitada ao domínio de estacionaridade da média à vizinhança local  $W(\mathbf{u})$  centrada sobre a localização  $\mathbf{u}$  a ser estimada. Nesse caso, considera-se a média comum (estacionária)  $m(\mathbf{u})$  na equação 4.44, ou seja:

$$Z^*(\mathbf{u}) - m(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha}(\mathbf{u}) [Z(\mathbf{u}_{\alpha}) - m(\mathbf{u})] \quad (4.44)$$

$$Z^*(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha}(\mathbf{u}) Z(\mathbf{u}_{\alpha}) + \left[ 1 - \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha}(\mathbf{u}) \right] m(\mathbf{u})$$

A média  $m(\mathbf{u})$  desconhecida pode ser eliminada considerando-se a soma dos pesos ( $\lambda_{\alpha}(\mathbf{u})$ ) da krigagem igual a 1. Deste modo:

$$Z_{KO}^*(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha}^{KO}(\mathbf{u}) Z(\mathbf{u}_{\alpha}) \quad \text{com} \quad \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha}^{KO}(\mathbf{u}) = 1 \quad (4.45)$$

A minimização da variância do erro ( $Var[Z^*(\mathbf{u}) - Z(\mathbf{u})]$ ) sob a condição  $\sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha}^{KO}(\mathbf{u}) = 1$ , permite a determinação dos pesos  $\lambda_{\alpha}$  a partir do seguinte sistema de equações chamado de sistema de krigagem ordinária (equações normais com restrições):

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta}^{KO}(\mathbf{u}) C(\mathbf{u}_{\beta} - \mathbf{u}_{\alpha}) + \mu(\mathbf{u}) = C(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\alpha}), & \alpha = 1, \dots, n \\ \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta}^{KO}(\mathbf{u}) = 1 \end{cases} \quad (4.46)$$

onde  $C(\mathbf{u}_{\beta} - \mathbf{u}_{\alpha})$  e  $C(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\alpha})$  são, respectivamente, a covariância entre os pontos  $\mathbf{u}_{\beta}$  e  $\mathbf{u}_{\alpha}$  e  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}_{\alpha}$  e  $\mu(\mathbf{u})$  é o parâmetro de Lagrange associado com a restrição  $\sum_{\beta=1}^{KO} \lambda_{\beta}(\mathbf{u}) = 1$ .

O sistema de krigagem (4.45) apresenta uma e somente uma solução se:

i) A função de covariância  $C(\mathbf{h})$  é positivo-definida. Esta condição significa que a função  $C(\mathbf{h})$  ou matriz de covariância  $[C_{\alpha\beta}]$  deve garantir a positividade da variância para qualquer combinação de variáveis aleatórias  $Z(\mathbf{u}_{\alpha})$ , isto é:

$$Var\left\{\sum_{\alpha=1}^N \lambda_{\alpha} Z(\mathbf{u}_{\alpha})\right\} = \sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta=1}^N \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} C(\mathbf{u}_{\alpha} - \mathbf{u}_{\beta}) \geq 0$$

ii) Não existem dois dados totalmente redundantes, isto é,  $\mathbf{u}_{\alpha} \neq \mathbf{u}_{\beta}$  se  $\alpha \neq \beta$

A correspondente variância mínima do erro, chamada de variância da krigagem ordinária, é dada por:

$$\sigma_{KO}^2 = Var[Z(\mathbf{u}) - Z^*(\mathbf{u})] = C_0 - \sum_{\alpha=1}^{n(\mathbf{u})} \lambda_{\alpha} C(\mathbf{u}_{\beta} - \mathbf{u}_{\alpha}) - \mu(\mathbf{u}) \quad (4.47)$$

onde  $C_0 = Var Z(\mathbf{u}) = \sigma^2$

Substituindo a covariância por sua expressão  $C(\mathbf{h}) = C_0 - \gamma(\mathbf{h})$ , o sistema (4.46) e a variância  $\sigma_{KO}^2$  podem ser escritos em função do modelo semivariográfico  $\gamma(\mathbf{h})$ .

Assim, ao contrário dos estimadores lineares mais tradicionais, a krigagem utiliza um sistema de pesos que considera um modelo de correlação espacial específico à variável na área A em estudo. A krigagem fornece não somente uma estimativa de mínimos quadrados da variável em estudo, mas também o erro de variância associado. Entretanto, a variância da krigagem tem sido frequentemente mal utilizada como uma medida de confiança da



estimativa da krigagem, uma vez que a variância dos erros é independente dos valores reais dos dados e depende somente da configuração dos dados [64]-[82]. Uma alternativa é modelar a incerteza sobre o valor desconhecido  $z(\mathbf{u})$  a partir da FDAC,  $F(\mathbf{u}; z | (n))$ , daquela variável. O valor dessa função é determinado por uma série de valores de corte  $z_k$  que discretizam a faixa de variação de  $z$ :

$$F(\mathbf{u}; z_k | (n)) = \text{Prob}\{Z(\mathbf{u}) \leq z_k | (n)\}, \quad k = 1, \dots, K \quad (4.48)$$

A estimação geoestatística não paramétrica dos valores da FDAC é baseada na interpretação da probabilidade condicional (equação 4.10) como o valor esperado condicional de uma variável indicativa  $I(\mathbf{u}; z_k)$  com base nos  $n$  dados observados:

$$F(\mathbf{u}; z_k | (n)) = E\{I(\mathbf{u}) \leq z_k | (n)\} \quad (4.49)$$

sendo  $I(\mathbf{u}; z_k) = 1$  se  $Z(\mathbf{u}) \leq z_k$  e zero se  $Z(\mathbf{u}) > z_k$ . Os valores da função de distribuição acumulada condicional podem então ser estimadas pela krigagem ordinária dos dados indicativos transformados.

Na implementação da aproximação indicativa deve-se escolher o conjunto de  $K$  valores de corte de modo que a faixa de valores da variável  $z$  seja dividida em  $K + 1$  classes com frequências aproximadamente iguais. Para cada valor de corte  $z_k$  são computados os semivariogramas indicativos experimentais, definidos por:

$$\hat{\gamma}_I(\mathbf{h}; z_k) = \frac{1}{2N(\mathbf{h})} \sum_{\alpha=1}^{N(\mathbf{h})} [i(\mathbf{u}_\alpha; z_k) - i(\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{h}; z_k)]^2, \quad (4.50)$$

onde  $N(\mathbf{h})$  é o número de pares de dados dentro de determinada classe separados pelo vetor  $\mathbf{h}$  (distância e direção). Quanto maior for o valor de  $\hat{\gamma}_I(\mathbf{h}; z_k)$ , menos conectados no espaço são os pequenos ou grandes valores.

Uma vez que a incerteza sobre o valor não amostrado tenha sido modelada pela utilização da aproximação indicativa, uma estimativa para aquele valor desconhecido pode ser obtida a partir da função de distribuição acumulada condicional. A média (semelhante à equação 4.10) da distribuição acumulada condicional conhecida como estimativa E-type de  $z(\mathbf{u})$  é definida como:

$$z(\mathbf{u})_E^* \approx \sum_{k=1}^{K+1} z_k [F(\mathbf{u}; z_k | (n)) - F(\mathbf{u}; z_{k-1} | (n))] \quad (4.51)$$

e a variância condicional da distribuição acumulada condicional é obtida por:

$$\sigma^2(\mathbf{u}) \approx \sum_{k=1}^{K+1} [z'_k - z(\mathbf{u})^*_E]^2 \cdot [F(\mathbf{u}; z_k | (n)) - F(\mathbf{u}; z_{k-1} | (n))], \quad (4.52)$$

onde:

- $z_k, k = 1, \dots, K$  são os valores de corte que discretizam a faixa variação dos valores  $z$ ;
- $z'_k$ , é a média da classe  $(z_{k-1} - z_k]$ , que depende do modelo de interpolação utilizado dentro das classes, por exemplo, para o modelo linear,  $z'_k = (z_{k-1} + z_k)/2$ .

A vantagem sobre a krigagem ordinária é que a aproximação indicativa fornece uma medida de incerteza que considera os valores dos dados, enquanto a variância da krigagem depende somente da configuração dos dados e modelo semivariográfico. As estimativas E-type e krigagem são iguais somente quando os valores originais  $z$  são normalmente distribuídos e a FDAC é modelada por meio de uma aproximação multi-Gaussiana [86].

# CAPÍTULO 5

## Aplicação de Séries Temporais e Geoestatística em Sinais de Comunicações Móveis

### 5.1 Conjunto de Medição

O conjunto de equipamentos utilizados no setup de medidas é dado por um sistema de transmissão e por um sistema de recepção. O sistema de transmissão é formado por uma antena de transmissora usada pelo operador local (Oi Celular) é o modelo 739632 produzido por *Katherein<sup>TM</sup>* que tem dupla polarização ( $\pm 45^\circ$ ) e opera sobre a escala 880 a 960 megahertz com ganho de 14,5 dBi na polarização vertical. Durante as medições, foi transmitido um sinal CW na frequência de 890.4 MHz. Para eliminar a interferência, todos os canais que usam a mesma frequência ou frequências adjacentes a usada nas medições foram desligadas da planta pela Oi Celular. O sistema de recepção é o modelo E7474A TDMA produzido por Agilent. A antena receptora usada nas medições foi um monopolo modelo TPM 8003A produzido pela *Plus<sup>TM</sup>* que operam no intervalo de 825 a 896 MHz com ganho de 3 dBi, a qual foi montada sobre um carro e o sinal recebido era armazenado por um laptop que tinha um cartão de PCMCIA instalado, este cartão fazia a interface entre o sistema da aquisição e o sistema do armazenamento. Além da aquisição da potência recebida, o sistema de teste de movimentação utiliza um sistema de *GPS* para dar a informação geográfica da posição de todas as medições. Devido o ambiente de medida ser densamente arborizado, em muitos pontos ocorreu a perda de visibilidade do satélite, fazendo com que o *GPS* não fornecesse uma medida exata da posição geográfica. Para evitar essa perda da posição, um cronômetro foi usado para medir o tempo que o veículo (com velocidade constante de 20 km/h) usou para trafegar toda a

extensão da rua em estudo. Um tratamento subsequente, realizado em Matlab 7.0, converteu o tempo em distância. A Figura 5.1 mostra as rotas utilizadas na campanha de medição.



Figura 5.1 – Vias utilizadas no centro urbano de Belém-PA.

## 5.2 Banco de Dados

A base de dados constituem as informações necessárias para avaliação do sinal em propagação e estas devem então compreender a área de interesse, a morfologia da região e o mapa geográfico do local. Uma empresa local de Telecomunicações forneceu as características técnicas das estações de transmissão e o sinal recebido nas rotas descritas. Essa área se encontra no centro urbano de Belém-PA. A aquisição da verticalização e de medidas das testadas dos prédios e residências, que somaram um total de aproximadamente 4500 pontos (entre residências e prédios), foi feita através do AUTOCADMAP e do ORTOFOTO obtidos com uma planta digitalizada junto a Companhia de Desenvolvimento e Administração da Área Metropolitana de Belém – CODEM.

Belém, capital do estado do Pará, pertencente à Mesorregião Metropolitana de Belém. Com uma área de aproximadamente 1 064,918 km<sup>2</sup>, localiza-se no norte brasileiro, com latitude de -01° 27' 21" e longitude de -48° 30' 16", altitude de 10 metros e distante 2 146 quilômetros de Brasília. Com uma população de 1 392 031 habitantes, a maior densidade demográfica da região norte 1307,17 hab/km<sup>2</sup>, (IBGE/2010), é conhecida como "Metrópole da Amazônia", e uma das dez cidades mais movimentadas e atraentes do Brasil. A cidade é sede da Região Metropolitana de Belém, que com 2.100.319 habitantes, é a 2º mais populosa da região, 12ª do país e 177ª do mundo, além de ser o maior aglomerado urbano da região. A cidade de Belém, considerada a maior da linha do equador, é também classificada como a capital com melhor qualidade de vida do Norte do Brasil. A Figura 5.2 mostra uma vista aérea do grande centro urbano da capital paraense banhada pela baía do Rio Guajará.



Figura 5.2 – Vista parcial do grande centro urbano de Belém/PA (fonte: <http://www.skyscrapercity.com/showthread.php?t=254672>, janeiro de 2013).

A Figura 5.3 mostra os bairros envolvidos na campanha de medição, Nazaré, Batista Campos e Umarizal apresentam como um todo um alto grau de verticalização, indicado pela legenda em vermelho, sendo superior a 300 edifícios; alguns chegando a atingir 70 metros de altura. As onze vias que fazem parte da campanha de medição são as avenidas Doca de Souza Franco, Nazaré, Gentil Bittencourt, Governado José Malcher, Generalíssimo Deodoro; a travessa Quatorze de Março e Quintino Bocaiúva; e as ruas Antônio Barreto, Domingos Marreiros, Almirante Wandenkolk e Senador Lemos, que mostram um alto grau de urbanização com o predomínio de edificações de todos os tamanhos. Nestas Avenidas encontramos a maior concentração de prédios comerciais. Nos Bairros Batista Campos e Nazaré, foram localizados e quantificados cinco espaços livres, que são constituídos por quatro praças (Praça Batista Campos, CAN, Praça da República e Praça da Trindade), um horto Municipal e um Museu (Museu Paraense Emílio Goeldi). Nestes dois bairros é frequente a presença de mangueiras ao longo das vias citadas; enquanto que no Bairro Umarizal este tipo de arborização é menos frequente, bem como a presença de espaços livres, onde foram contabilizadas apenas duas praças (Praça Santos Dumont e a Praça Eneida de Moraes).



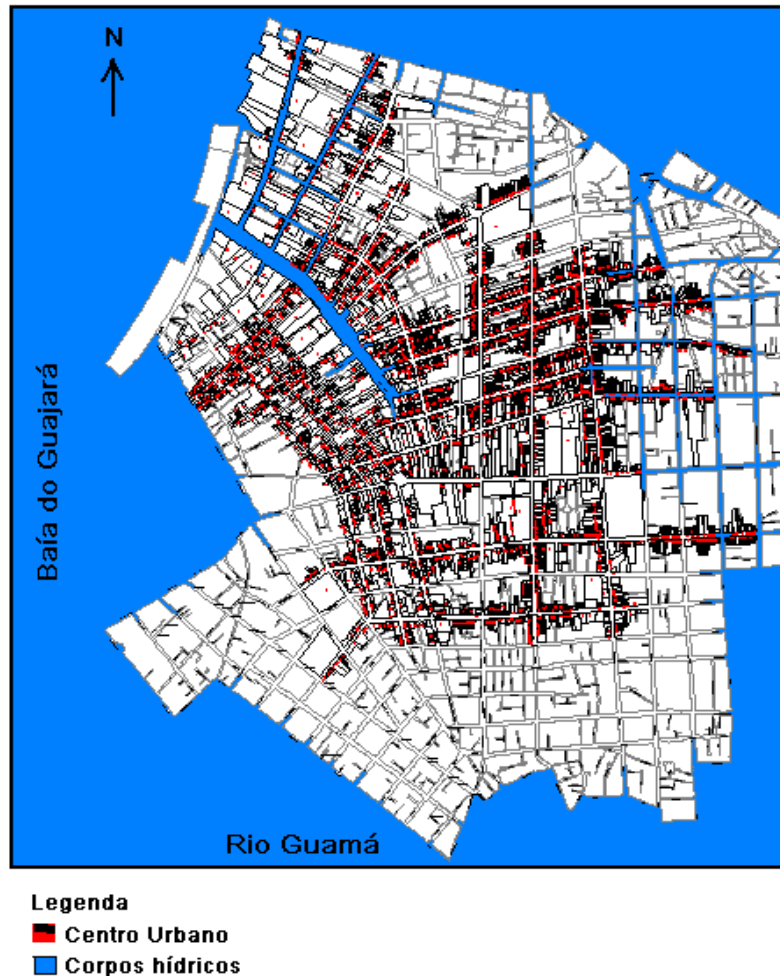


Figura 5.3 – Mapa mostrando um maior índice de urbanização nos bairros envolvidos na campanha de medição.

## 5.3 Metodologia.

### 5.3.1 Análise em Séries Temporais

Para a análise da estatística dos dados da potência recebida ao longo das vias em estudo Foi utilizado um modelo de séries temporais com utilização de função de transferência na modelagem multivariada de séries de dados de potência recebida primeiramente ao longo das onze vias citadas anteriormente; considerando como variável resposta a potência recebida e as variáveis distância entre o transmissor e receptor, distância entre prédios e altura dos prédios como co-variadas. As análises foram todas realizadas através de programas elaborados com as rotinas do soft estatístico **SAS** [87].

As Figuras 5.4 a 5.6 apresentam os gráficos das séries que serão analisadas com os dados coletados ao longo das onze vias da campanha de medição.

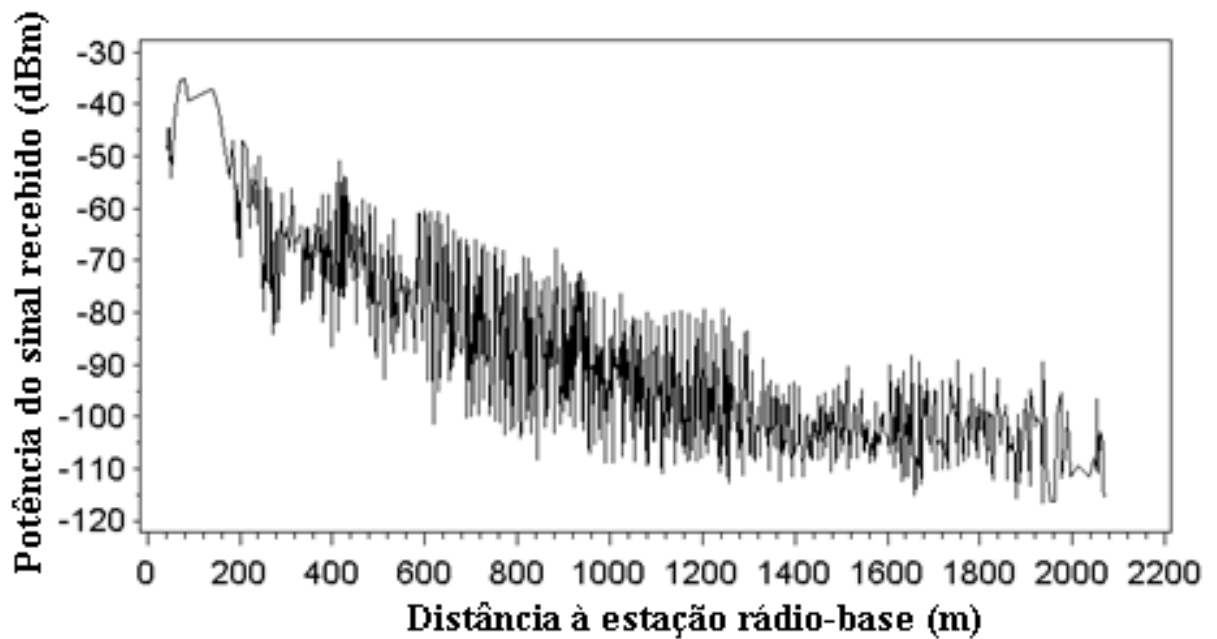


Figura 5.4 - Potência do sinal recebido coletadas ao longo de onze vias localizadas no grande centro urbano da cidade de Belém/PA.

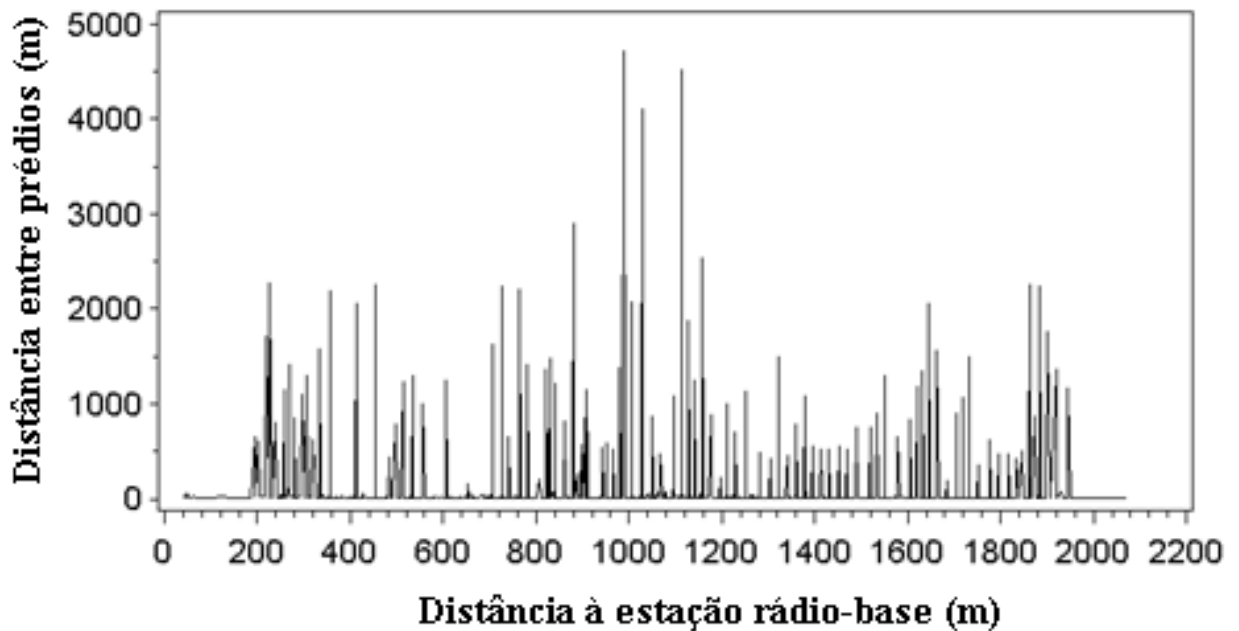


Figura 5.5 - Distância entre os prédios coletadas ao longo de onze vias localizadas no grande centro urbano da cidade de Belém/PA.



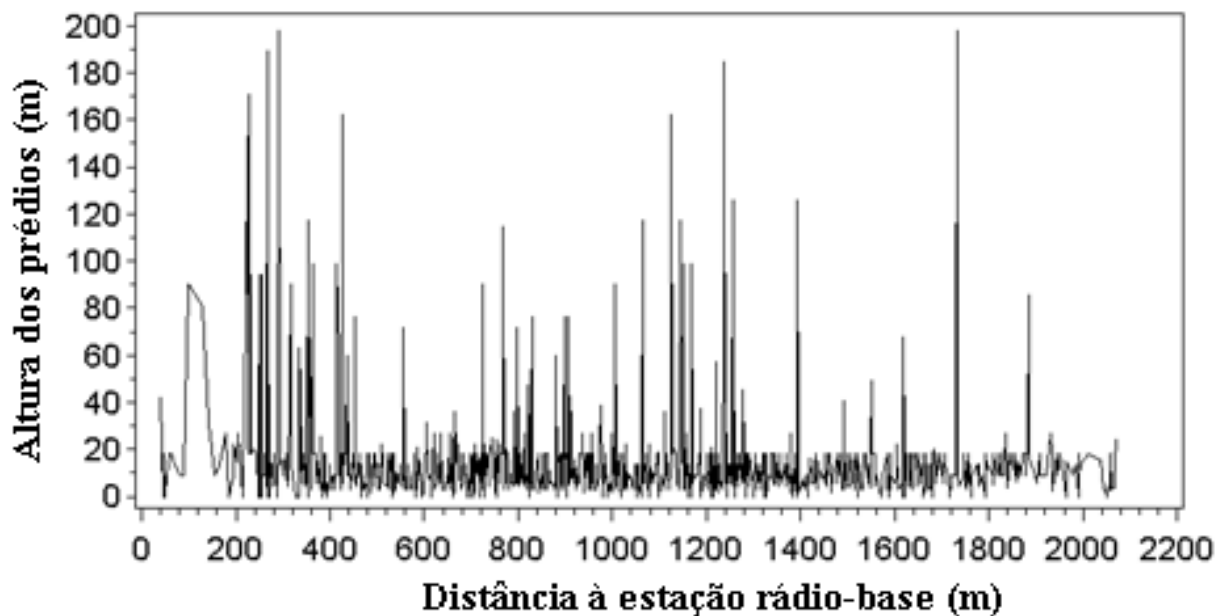


Figura 5.6 - Altura dos prédios coletadas ao longo de onze vias localizadas no grande centro urbano da cidade de Belém/PA.

### 5.3.1.1 Preparação dos dados.

Inicialmente o banco de dados continha 1889 dados georeferenciados de potencia recebida, distancia entre prédios e altura dos prédios na área de estudo. Entretanto, haviam pontos com coordenadas repetidas. Neste caso, para evitar a utilização de valores diferentes na mesma localização, foram considerados os valores médios nesses pontos. O conjunto final de consistiu 970 observações, que mantiveram a configuração espacial dos dados totais (amostra primitiva).

A construção dos modelos de series temporais multivariados com o uso de funções de transferência necessita inicialmente que se ajuste os modelos univariados para cada variável.

### **5.3.1.2 Ajuste de modelos univariados para as variáveis explicativas - Identificação das séries temporais.**

Como visto anteriormente, esta fase consiste em determinar qual o processo gerador da série, quais os filtros (modelos ARIMA) e suas ordens. A realização do processo de identificação, além da análise gráfica, necessita, em geral, das interpretações da função de autocorrelação e função de autocorrelação parcial, apresentadas nas Figuras 5.7 a 5.9. Neste trabalho, a identificação de cada série temporal foi realizada utilizando-se o soft SAS. Para a série potência recebida foi aplicada uma diferença para torná-la estacionária. Em todos os casos os parâmetros estimados foram significativos e os resíduos apresentaram autocorrelações não significativas, um sinal de ajuste aceitável como mostra as Tabelas 5.1 à 5.3.

A partir de agora a variável resposta potência recebida será denotada por  $Y_d$  e as variáveis explicativas distância entre prédios e altura dos prédios por  $X_{1d}$  e  $X_{2d}$ , respectivamente.

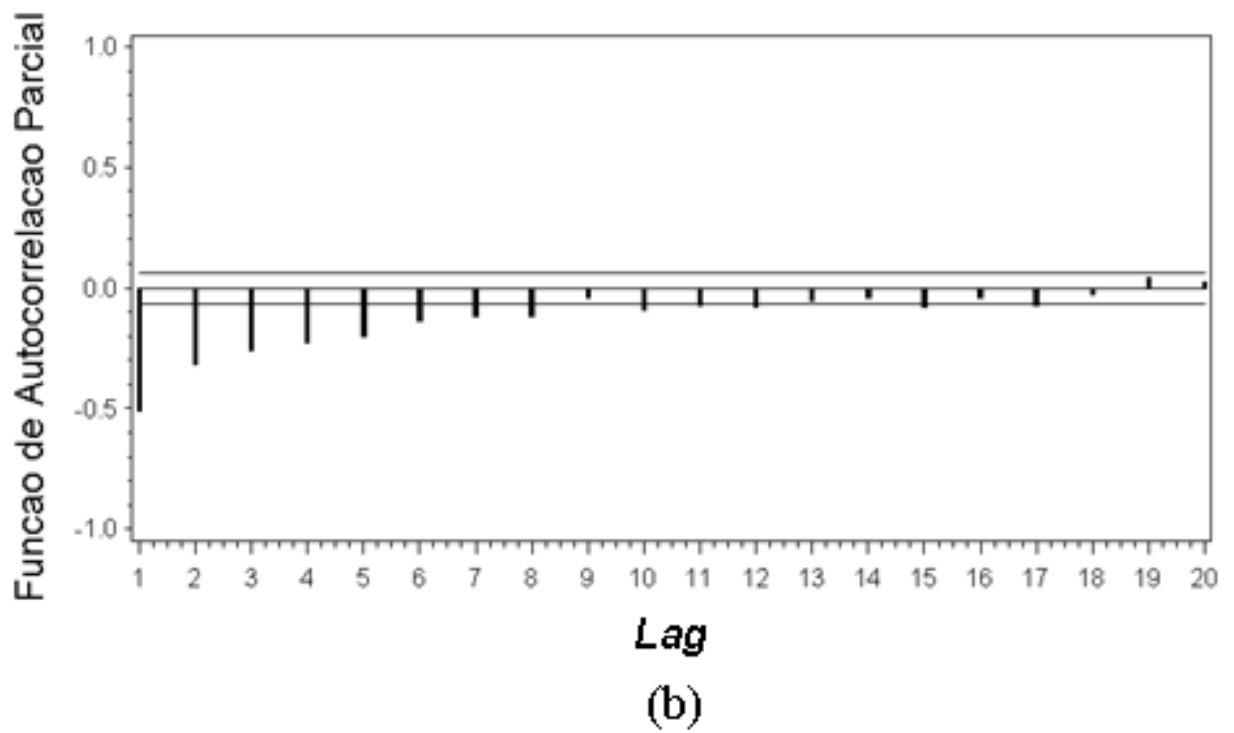
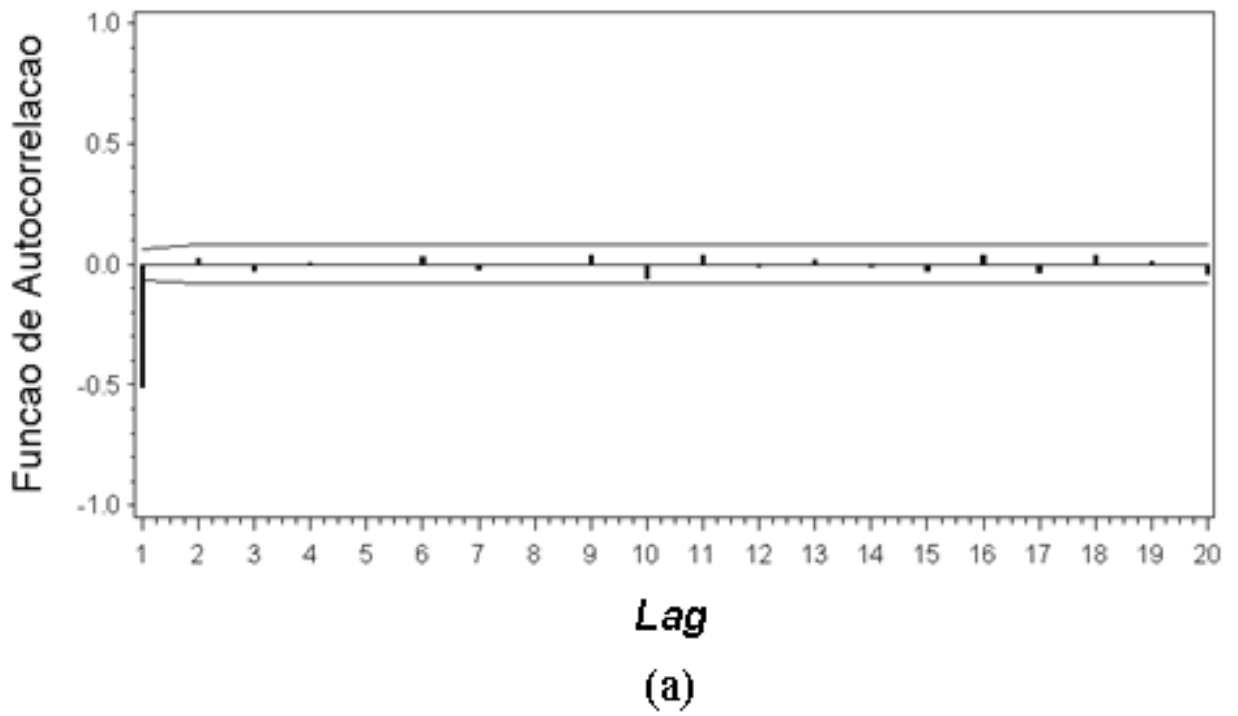


Figura. 5.7(a) e 5.7(b) - Função de autocorrelação e Função de autocorrelação parcial para a potência do sinal recebido.

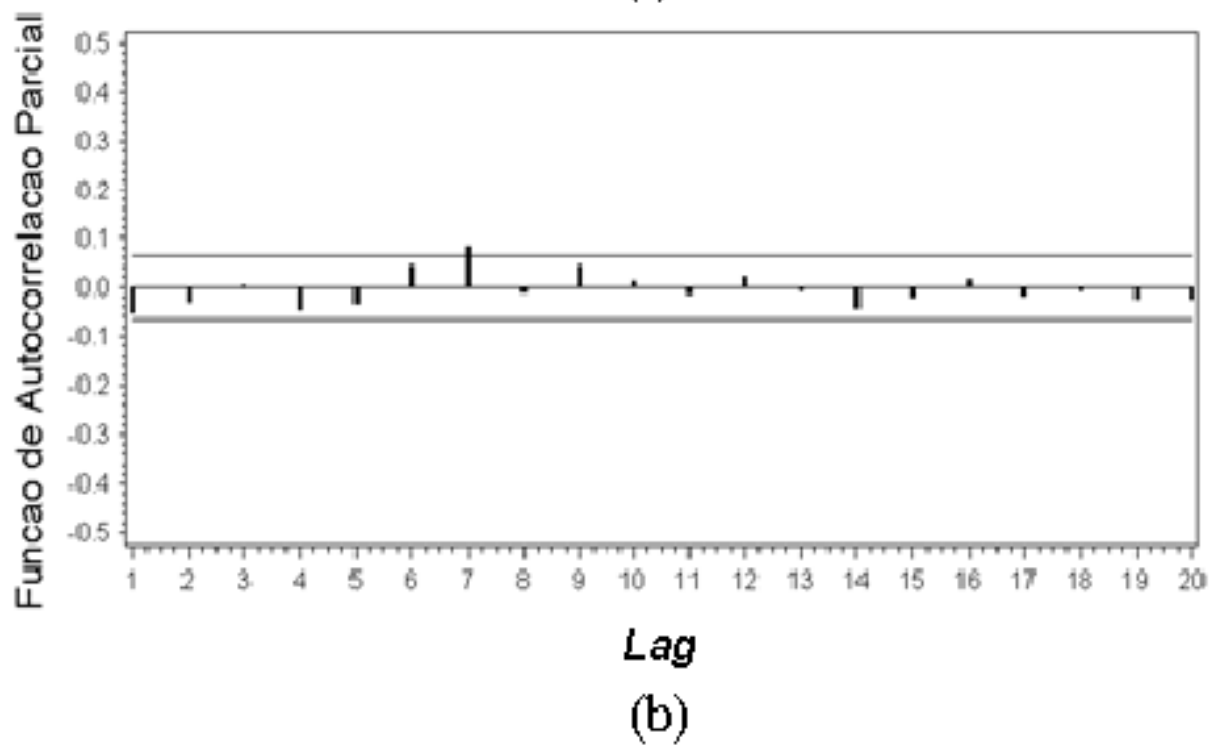
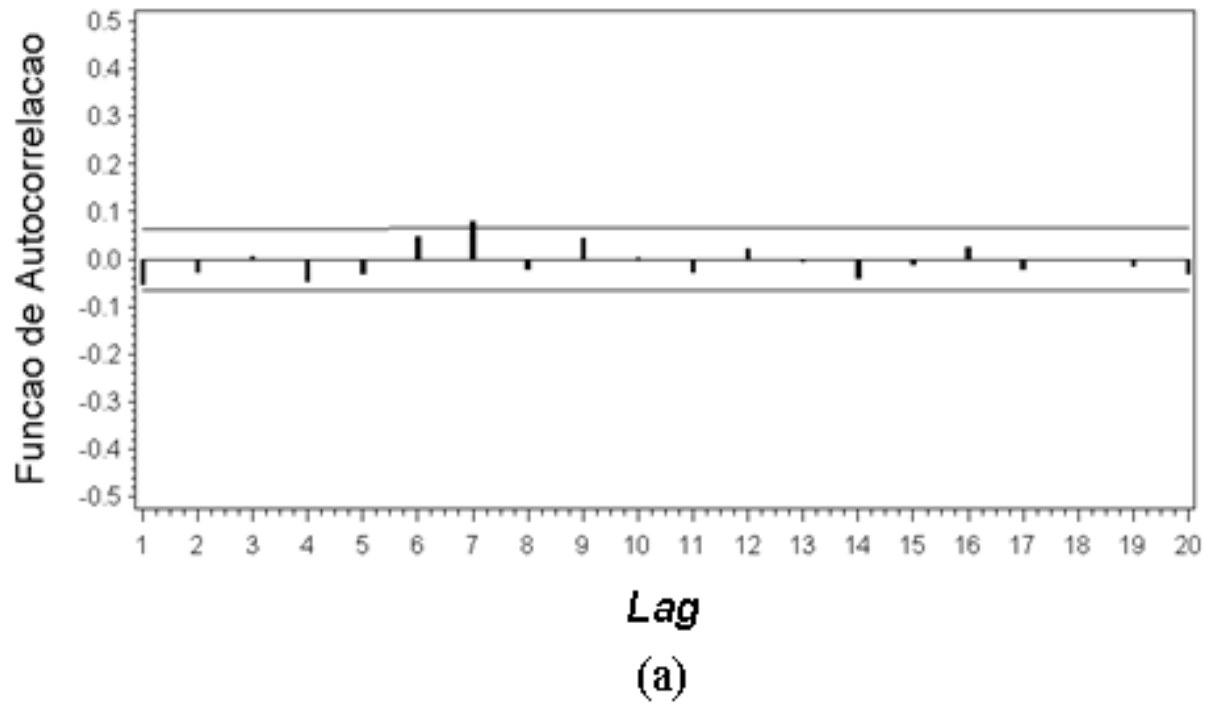


Figura. 5.8(a) e 5.8(b) - Função de autocorrelação e Função de autocorrelação parcial para a distância entre prédios.

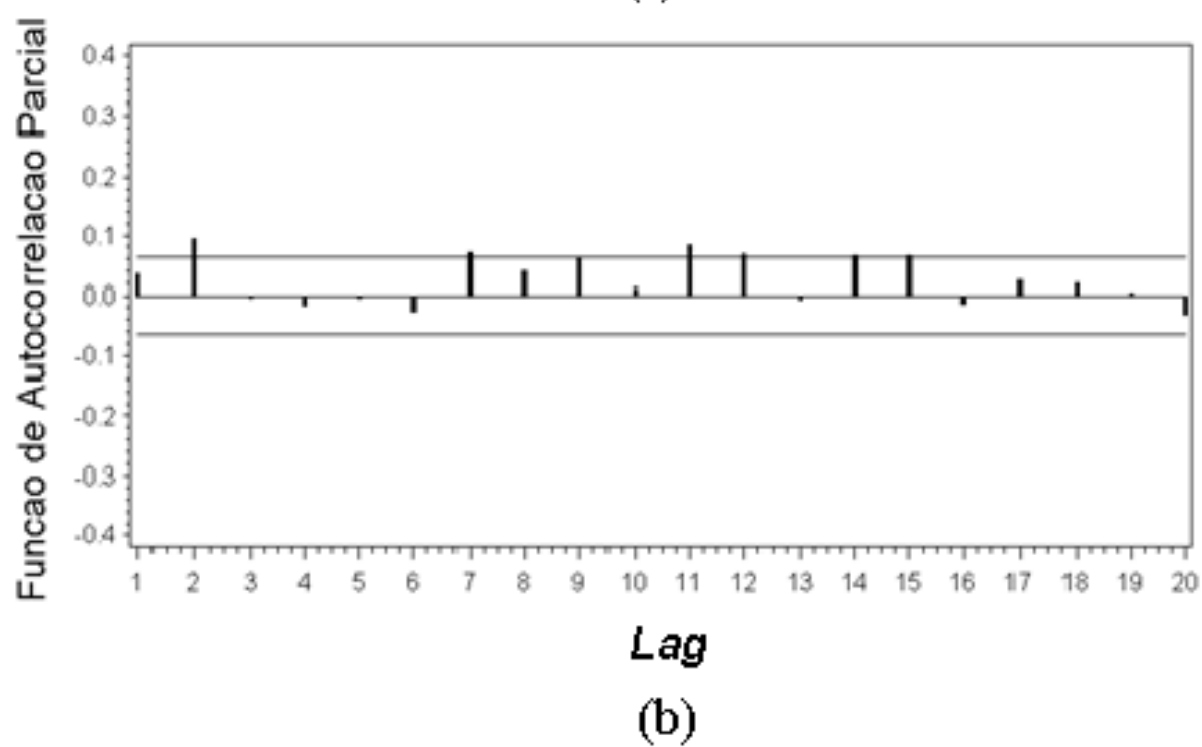
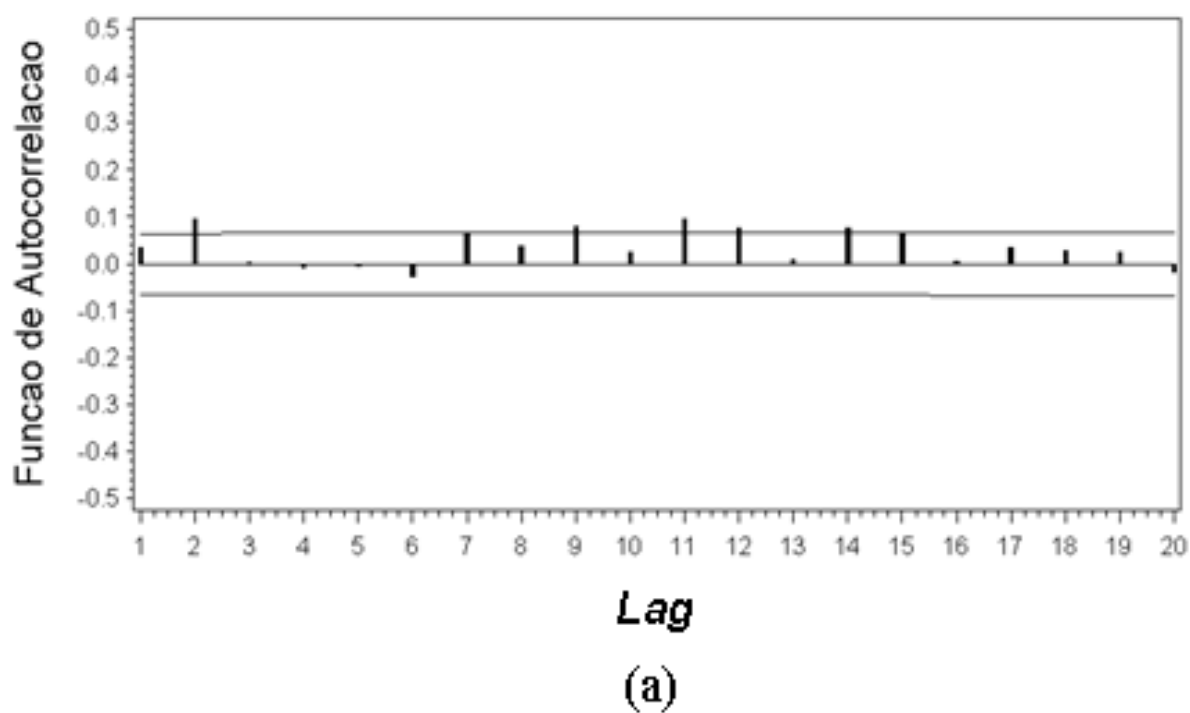


Figura. 5.9(a) e 5.9(b) - Função de autocorrelação e Função de autocorrelação parcial para a altura dos prédios.

A partir da análise das autocorrelações e autocorrelações parciais foram ajustados modelos preliminares para as séries, cujos resultados são apresentados na Tabela 5.4. Em todos os casos os parâmetros estimados foram significativos e os resíduos apresentaram autocorrelações não significativas, um sinal de ajuste aceitável do modelo.

Tabela 5.1 – Variável Potência do sinal recebido, autocorrelação dos resíduos.

Verificação da Autocorrelação dos Resíduos									
Atraso	Qui-quadrado	DF	Pr > Qui-quadrado	Autocorrelações					
6	5.18	5	0.3946	-0.040	-0.015	-0.038	-0.006	0.018	0.041
12	8.37	11	0.6796	0.005	0.013	0.026	-0.040	0.023	0.015
18	15.27	17	0.5764	0.028	0.009	0.001	0.048	0.018	0.059
24	20.04	23	0.6394	0.020	-0.045	-0.030	0.026	-0.017	0.023

Tabela 5.2 – Variável distancia entre prédios, verificação da autocorrelação dos resíduos.

Verificação da Autocorrelação dos Resíduos									
Atraso	Qui-quadrado	DF	Pr > Qui-quadrado	Autocorrelações					
6	9.47	5	0.0916	-0.055	-0.029	0.009	-0.045	-0.029	0.054
12	13.07	11	0.2888	0.004	-0.017	0.046	0.004	-0.024	0.025
18	16.62	17	0.4800	-0.007	-0.051	-0.008	0.022	-0.021	0.001
24	20.88	23	0.5882	-0.013	-0.032	0.044	-0.032	-0.001	0.009

Tabela 5.3 - Variável Altura dos prédios, verificação da autocorrelação dos resíduos.

Verificação da Autocorrelação dos Resíduos									
Atraso	Qui-quadrado	DF	Pr > Qui-quadrado	Autocorrelações					
6	.	0	.	0.018	0.003	-0.019	-0.028	-0.017	-0.044
12	7.38	6	0.2868	0.051	0.035	-0.006	0.003	0.006	-0.002
18	8.54	12	0.7419	-0.015	0.005	0.001	-0.008	0.023	0.018
24	15.03	18	0.6598	0.003	-0.039	0.066	-0.010	0.002	0.022

Tabela 5.4 - Modelo ARIMA ajustado para as series de entrada.

Series (variáveis)	Modelo ARIMA ajustado	Modelo
Potência do sinal recebido (dBm)	$Y_d = Y_{d-1} - \underset{p<0,0001}{0,91} a_{d-1} + a_d$	Arima(0,1,1)
Distancia entre os prédios(m)	$Y_{1d} = 128,58 + \underset{p<0,0001}{0,077} X_{1d-7} + a_d$	Arima(1,0,0)
Altura dos prédios (m)	$Y_{1d} = 14,870 + \underset{p<0,001}{0,076} Y_{2d-2} - \underset{p<0,034}{0,068} X_{2d-9} - \underset{p<0,0109}{0,081} X_{2d-11} - \underset{p<0,047}{0,063} X_{2d-12} - \underset{p<0,045}{0,064} X_{2d-14} - \underset{p<0,038}{0,066} X_{2d-15} + a_d$	Arima(6,0,0)

Onde:

$d$ : índice de distância.

$a_t$ : erro aleatório.

$\mu$ : termo médio (constante): neste caso não significativo. (MU).

### 5.3.1.3 Modelos de funções de transferência

Para identificar o modelo de função de transferência apropriada para um conjunto de dados, deve-se examinar o gráfico da função de correlação cruzada amostral. Para a função de correlação cruzada ser significativa, as séries de entrada e resposta devem ser pré-filtradas.

Para pré-filtrar as séries de entrada e resposta e para analisar a correlação apropriada, o procedimento é o seguinte:

1. Ajustar um modelo ARIMA à série de entrada de modo que os resíduos do modelo sejam ruído branco;
2. Filtrar a série resposta com o mesmo modelo usado para a série de entrada;
3. Fazer a correlação cruzada da série de resposta filtrada com a série de entrada filtrada para determinar a relação entre as séries;
4. Interpretar o gráfico de correlação cruzada do mesmo modo que um gráfico de função de autocorrelação. Indicadores autorregressivos indicam termos do denominador e indicadores de médias móveis indicam termos do numerador.

O gráfico de correlação cruzada pré-filtrada de uma função de transferência com  $q$  termos no numerador e  $p$  termos no denominador exibe o mesmo padrão depois de  $s$  lags, tal como o do gráfico da função de autocorrelação de um processo ARMA( $p,q$ ). Esta é a chave para identificar a função de transferência. Tal comportamento não é garantido sem a pré-filtragem, entretanto. O procedimento ARIMA automaticamente faz a pré-filtragem quando se incluem as declarações apropriadas no código do soft **SAS**.

### 5.3.1.3.1 Notação do operador atraso e Funções de Transferência

Os modelos ARIMA podem ser expressos em termos do operador atraso **B**. Uma função de Transferência aplica uma razão de operadores atraso polinomiais a uma ou mais variáveis explicativas observáveis,  $X_t$ , por exemplo:

$$Y_d - \mu = \frac{(1 - \theta_1 B)}{(1 - \phi_1 B)} X_{d-1} + N_d. \quad (5.1)$$

Onde  $N_d$  é o erro aleatório.

### 5.3.1.3.2 Funções de autocorrelação cruzada

Pode-se usar o gráfico de correlação cruzada para identificar a componente de função de transferência do modelo.

Modelos de funções de transferência são difíceis de identificar. O primeiro passo é examinar os lags negativos no gráfico de correlação cruzada. Para previsões válidas a partir



de modelos de funções de transferência, nenhum *lag* negativo deveria ter *spikes*. Se os *lags* negativos tem *spikes* significativos, então ocorre um chamado modelo com *feedback*.

Em seguida, deve-se checar a quantidade de defasagens no modelo. Se há *spike* no *lag* zero o modelo não apresenta defasagem. O modelo terá um período de defasagens  $n$  se não há *spikes* no gráfico de correlação cruzada no *lag* 0. Depois do período de defasagem deveria haver um *spike* no gráfico de correlação cruzada. O número de *spikes* depois do primeiro *spike* corresponde ao número de parâmetros do numerador na função de transferência do modelo. Se não existem *spikes* depois do primeiro *spike*, então o processo é provavelmente ruído branco.

Seguindo os *spikes*, o gráfico de correlação cruzada pode ter um dos seguintes padrões. Ele pode

- Decair exponencialmente, o que indica a necessidade de um parâmetro no denominador na função de transferência do modelo.
- Decair exponencialmente com padrão senoidal, que indica a necessidade de dois ou mais parâmetros no denominador na função de transferência do modelo.
- Cair imediatamente para zero, que indica que não é necessário nenhum parâmetro no denominador no modelo ou necessidade de parâmetros no numerador.

Os resultados das autocorrelações cruzadas entre a variável resposta e as variáveis explicativas foram obtidos através de programas elaborados no soft estatístico SAS, e são apresentados nas Tabelas 5.5 à 5.8. Os valores em negrito representam correlações significativas. As Figuras 5.10 e 5.11 mostram a correlação cruzada entre a potência recebida e as co-variáveis distância à estação rádio-base, distância entre os prédios e a altura dos prédios, respectivamente.

#### **Correlação cruzada entre $Y_t$ (Potência do sinal recebido) e $X_{Id}$ (Distancia entre prédios).**

Tabela 5.5 – Verificação da correlação cruzada entre as séries  $Y_d$  (Potência do sinal recebido) e  $X_{Id}$  (Distancia entre prédios).

Verificação da Correlação Cruzada entre as séries $Y_d$ e $X_{Id}$									
Até o Atraso	Qui-quadrado	DF	Pr > Qui-quadrado	Correlação Cruzada					
<b>5</b>	72.50	6	<.0001	-0.212	0.170	0.006	0.014	-0.005	0.031
<b>11</b>	89.22	12	<.0001	-0.079	0.017	0.047	-0.071	0.056	-0.016

Tabela 5.6 - Correlação cruzada entre  $Y_d$  (Potência do sinal recebido) e  $X_{Id}$  (Distancia entre prédios).

<b>CORRELAÇÕES CRUZADAS</b>					
<b>Atraso</b>	<b>Covariância</b>	<b>Correlação</b>	<b>Atraso</b>	<b>Covariância</b>	<b>Correlação</b>
<b>-16</b>	-96.269868	-.01882	<b>1</b>	868.559	0.16976
<b>-15</b>	96.829868	0.01892	<b>2</b>	29.011868	0.00567
<b>-14</b>	-86.113344	-.01683	<b>3</b>	71.562818	0.01399
<b>-13</b>	13.152557	0.00257	<b>4</b>	-27.838468	-.00544
<b>-12</b>	21.523860	0.00421	<b>5</b>	158.024	0.03088
<b>-11</b>	-121.765	-.02380	<b>6</b>	-405.512	-.07926
<b>-10</b>	-17.382628	-.00340	<b>7</b>	88.018889	0.01720
<b>-9</b>	-23.772356	-.00465	<b>8</b>	239.673	0.04684
<b>-8</b>	20.750341	0.00406	<b>9</b>	-365.266	-.07139
<b>-7</b>	-88.252142	-.01725	<b>10</b>	286.382	0.05597
<b>-6</b>	170.490	0.03332	<b>11</b>	-81.881450	-.01600
<b>-5</b>	-20.939577	-.00409	<b>12</b>	82.300042	0.01609
<b>-4</b>	125.223	0.02447	<b>13</b>	-68.058192	-.01330
<b>-3</b>	-268.610	-.05250	<b>14</b>	132.965	0.02599
<b>-2</b>	69.115805	0.01351	<b>15</b>	-131.621	-.02572
<b>-1</b>	196.674	0.03844	<b>16</b>	70.183178	0.01372
<b>0</b>	-1082.840	-.21164	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>-</b>

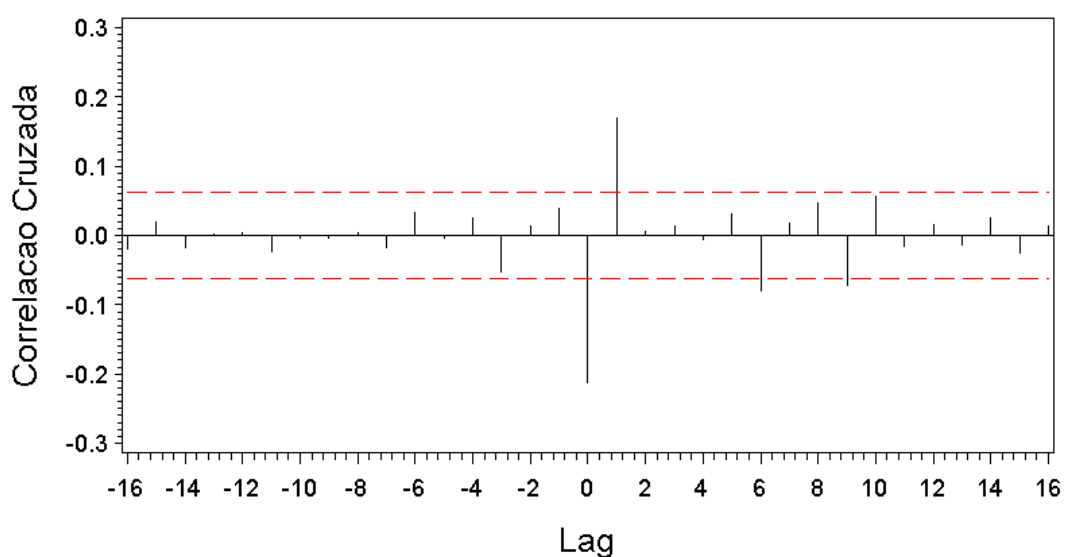


Figura 5.10 - Correlação cruzada entre a potência do sinal recebido ( $Y_d$ ) e a distância entre prédios ( $X_{1d}$ ).

**Interpretação:** Correlação cruzada entre  $Y_d$  e  $X_{1d}$ .

- O comportamento das correlações cruzadas indicam um modelo sem defasagem (correlação significativa no *lag* zero) e sugerem parâmetros no numerador e denominador (decaimento exponencial com padrão senoidal).
- Presença de correlações significativas nos *lags* 1, 6 e 9. Sugerindo a presença de dois parâmetros no numerador da Função de transferência.
- O decaimento exponencial com padrão senoidal das correlações cruzadas indicam a necessidade de dois ou mais parâmetros no denominador na função de transferência do modelo.

**Correlação cruzada entre  $Y_d$  (Potência do sinal recebido) e  $X_{2d}$  (Altura dos prédios).**

Tabela 5.7 – Verificação da correlação cruzada entre as séries  $Y_d$  (Potência do sinal recebido) e  $X_{2d}$  (Altura dos Prédios,).

Verificação da Correlação Cruzada entre as séries $Y_t$ e $X_{2t}$									
Até o Atraso	Qui-quadrado	DF	Pr > Qui-quadrado	Correlação Cruzada					
5	12.48	6	0.0520	-0.010	0.075	-0.036	0.044	-0.061	0.017
11	15.72	12	0.2046	0.002	-0.001	0.001	-0.031	-0.005	0.048

Tabela 5.8 - Correlação cruzada entre  $Y_d$  (Potência do sinal recebido) e  $X_{2d}$  (Altura dos Prédios).

<b>CORRELAÇÕES CRUZADAS</b>					
<b>Atraso</b>	<b>Covariância</b>	<b>Correlação</b>	<b>Atraso</b>	<b>Covariância</b>	<b>Correlação</b>
<b>-16</b>	2.773641	0.01085	<b>1</b>	19.129030	0.07485
<b>-15</b>	-0.832422	-.00326	<b>2</b>	-9.202769	-.03601
<b>-14</b>	4.387039	0.01717	<b>3</b>	11.211218	0.04387
<b>-13</b>	-3.669367	-.01436	<b>4</b>	-15.482366	-.06058
<b>-12</b>	5.107947	0.01999	<b>5</b>	4.316729	0.01689
<b>-11</b>	-4.193662	-.01641	<b>6</b>	0.448636	0.00176
<b>-10</b>	-16.358778	-.06401	<b>7</b>	-0.240438	-.00094
<b>-9</b>	-3.384076	-.01324	<b>8</b>	0.130563	0.00051
<b>-8</b>	22.401626	0.08765	<b>9</b>	-7.951642	-.03111
<b>-7</b>	-11.955131	-.04678	<b>10</b>	-1.279322	-.00501
<b>-6</b>	-0.111955	-.00044	<b>11</b>	12.360547	0.04836
<b>-5</b>	4.015509	0.01571	<b>12</b>	-6.454602	-.02525
<b>-4</b>	2.108837	0.00825	<b>13</b>	6.247581	0.02444
<b>-3</b>	5.356534	0.02096	<b>14</b>	-4.811603	-.01883
<b>-2</b>	-8.499404	-.03326	<b>15</b>	4.247706	0.01662
<b>-1</b>	-7.519022	-.02942	<b>16</b>	-6.900840	-.02700
<b>0</b>	-2.611463	-.01022		-	-

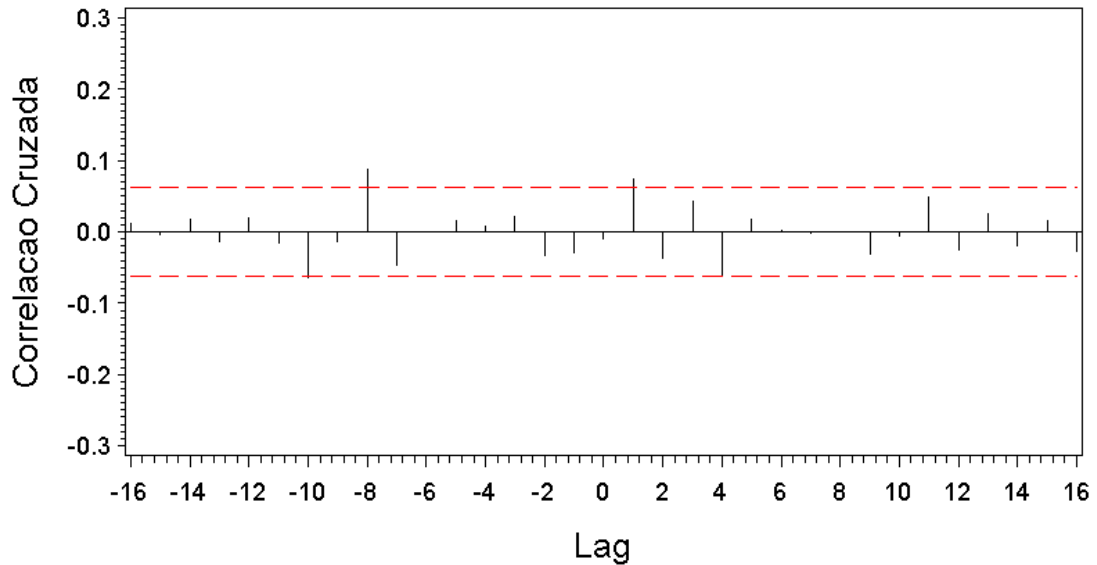


Figura 5.11 - Correlação cruzada entre a Potência do sinal recebido ( $Y_d$ ) e a altura dos prédios ( $X_{2d}$ ).

**Interpretação:** Correlação cruzada entre  $Y_d$  e  $X_{2d}$ .

- O comportamento das correlações cruzadas indicam um modelo com uma defasagem (correlação significativa no *lag* um) e sugerem parâmetros no numerador e denominador (decaimento exponencial com padrão senoidal).
- Presença de correlação significativa nos *lags* negativos – 8 e – 10 (modelo com feedback).
- Depois do primeiro *spike* significativo, existe outro *spike* significativo no *lag* 1, indicando a presença de um parâmetro no numerador da função de transferência.

### 5.3.1.3.3 Estimativa de um Modelo de Função de Transferência Preliminar

O modelo ajustado para a potência do sinal recebido ( $Y_d$ ) incluiu as variáveis explicativas  $X_{1d}$  (Distância entre os prédios) e  $X_{2d}$  (Altura dos prédios) e, de acordo com as análises sobre as correlações cruzadas e após algumas tentativas, o seguinte modelo de função de transferência foi especificado:

$$Y_d = \frac{w_0 + w_2 B^2}{(1 - \delta_1 B - \delta_9 B^9)} X_{1d} + \frac{w_0}{(1 + \delta_1 B)} X_{2d-1} + N_d \quad (5.2)$$

As Tabelas 5.9 e 5.10 mostram as estimativas dos parâmetros do modelo da função de transferência obtidas através de um programa do soft SAS e a análise dos resíduos para o modelo obtido, respectivamente. Observa-se que estatísticas das correlações cruzadas dos resíduos com a variável de entrada foram não significativas, ou seja, o modelo de função de transferência fornece um ajuste adequado aos dados. Todos os parâmetros apresentaram estimativas significativas, mas o cheque das autocorrelações residuais mostra um valor significativo no *lag* 1 (em negrito) como mostra a Tabela 5.10, o que indica que os resíduos desse modelo preliminar não são ruídos brancos. Ou seja, é necessário estimar parâmetros para o processo de erros ( $N_d$ ) deste modelo.

Tabela 5.9 - Estimativas e estatísticas dos parâmetros do modelo de função de transferência obtidas por iteratividade (SAS).

<b>Estimativa de Máxima Verossimilhança</b>							
<b>Parâmetro</b>	<b>Estimativa</b>	<b>Erro Padrão</b>	<b>Valor t</b>	<b>Approx Pr &gt;  t </b>	<b>Atraso</b>	<b>Variável</b>	<b>Shift</b>
<b>Numerador 1</b>	-0.0055288	0.0006839	-8.08	<.0001	0	Distância entre prédios ( $X_{1d}$ )	0
<b>Numerador 1,1</b>	-0.0028731	0.0010995	-2.61	0.0090	2	Distância entre prédios ( $X_{1d}$ )	0
<b>Denominador 1,1</b>	-0.77979	0.10366	-7.52	<.0001	1	Distância entre prédios ( $X_{1d}$ )	0
<b>Denominador 1,2</b>	0.12130	0.04502	2.69	0.0071	9	Distância entre prédios ( $X_{1d}$ )	0
<b>Numerador 2</b>	0.02997	0.01194	2.51	0.0121	0	Altura dos prédios ( $X_{2d}$ )	1
<b>Denominador 1,1</b>	-0.78529	0.12671	-6.20	<.0001	1	Altura dos prédios ( $X_{2d}$ )	1

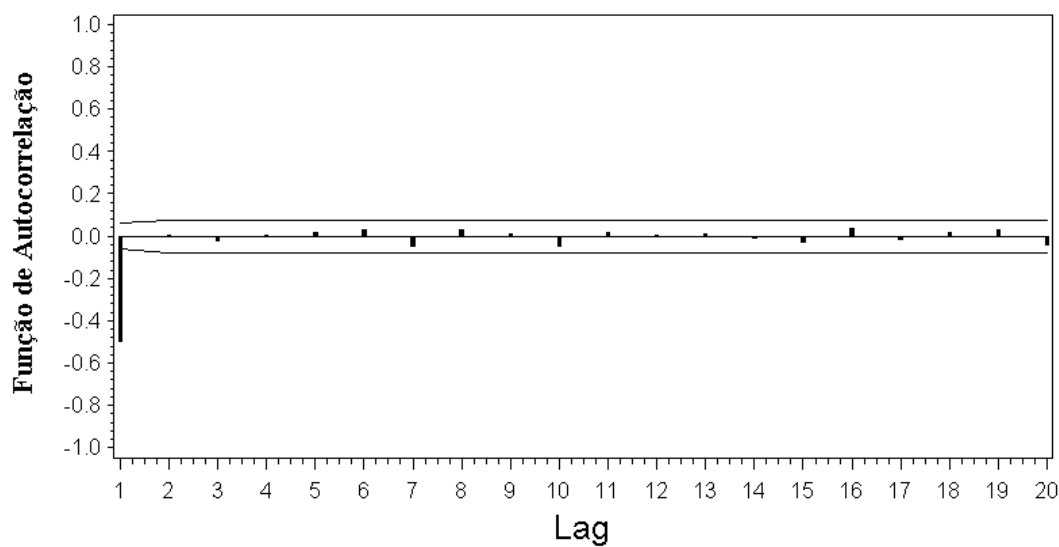
Tabela 5.10- Análise dos Resíduos para o Modelo.

Autocorrelação dos Resíduos									
Até o Atraso	Qui-quadrado	DF	Pr > Qui-quadrado	Autocorrelações					
6	240.31	6	<.0001	<b>-0.498</b>	0.006	-0.024	0.003	0.014	0.028
12	245.96	12	<.0001	-0.046	0.029	0.012	-0.048	0.020	0.007
18	248.38	18	<.0001	0.009	-0.006	-0.025	0.034	-0.016	0.017
24	264.80	24	<.0001	0.027	-0.044	-0.028	0.067	-0.063	0.068
30	270.47	30	<.0001	-0.052	0.004	0.009	0.015	0.001	-0.052
36	276.49	36	<.0001	0.040	-0.003	-0.008	0.012	0.033	-0.056
42	285.24	42	<.0001	0.049	-0.067	0.033	0.017	-0.016	-0.013
48	296.01	48	<.0001	0.055	-0.056	0.026	-0.005	-0.037	0.050

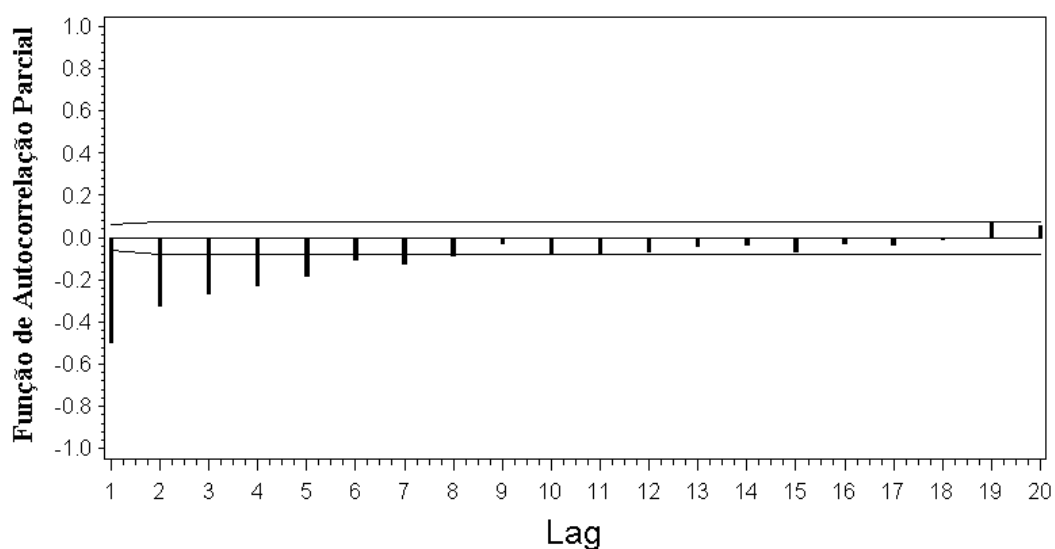
A equação do modelo em notação de operador atraso,  $B$ , pode ser escrita como:

$$Y_d = \frac{-0,0055 + 0,00287B^2}{(1 + 0,7799B - 0,1213B^2)} X_{1d} - \frac{0,0299}{(1 + 0,78529B)} X_{2d-1} + N_d. \quad (5.3)$$

As Figuras 5.12.a e 5.12.b mostram a Função de autocorrelação (FAC) e a Função de autocorrelação parcial (FACP) para os resíduos. Observa-se claramente um alto valor da correlação para o *lag* 1 na Figura 5.11.a, evidenciando uma alta correlação entre os resíduos. Esta análise residual pode indicar possíveis termos faltantes no modelo.



(a)



(b)

Figura. 5.12(a) e 5.12(b) - Função de autocorrelação e Função de autocorrelação parcial para os resíduos ( $N_d$ ).

### 5.3.2 Diagnóstico da Autocorrelação Espacial

Na seção anterior, estimou-se um modelo em séries temporais com modelos de função de transferência em que os resíduos ( $N_d$ ) desse modelo não são ruído branco.

Observe que no modelo ajustado foram consideradas apenas as características macrolocalizativas existentes nos dados do resíduo da potência do sinal recebido, calculados pelo modelo em séries temporais, não sendo levada em conta ainda a influência que os dados



exercem sobre os seus vizinhos, a pequena escala espacial. Ou seja, nos resíduos deste modelo ainda estão presentes duas componentes:  $\varepsilon'(x) + \varepsilon''$ , e apenas  $\varepsilon''$  é distribuído de forma independente. Neste caso os resíduos estimados ainda podem estar contaminados com os efeitos de dependência espacial a pequena escala espacial.

### 5.3.2.1 Descrição da amostra

Para efeito de realização da inferência espacial, a amostra é composta por 961 observações georreferenciadas, distribuídas por onze vias do centro urbano da cidade de Belém/PA. Esta amostra contém informações relativas dos resíduos da potência recebida (dBm) calculados através do modelo em séries temporais ( $N_d$ ) (equação 5.3). A Figura 5.13 apresenta uma distribuição espacial dos dados dos resíduos da potência do sinal recebido simulada pelo modelo em séries temporais ( $N_d$ ), na área em estudo. Foram utilizadas como variáveis locais, as coordenadas geográficas de cada ponto da coleta de dados, compatibilizadas com uma planta digitalizada do centro urbano da cidade de Belém, através do uso do programa **SURFER** [88].

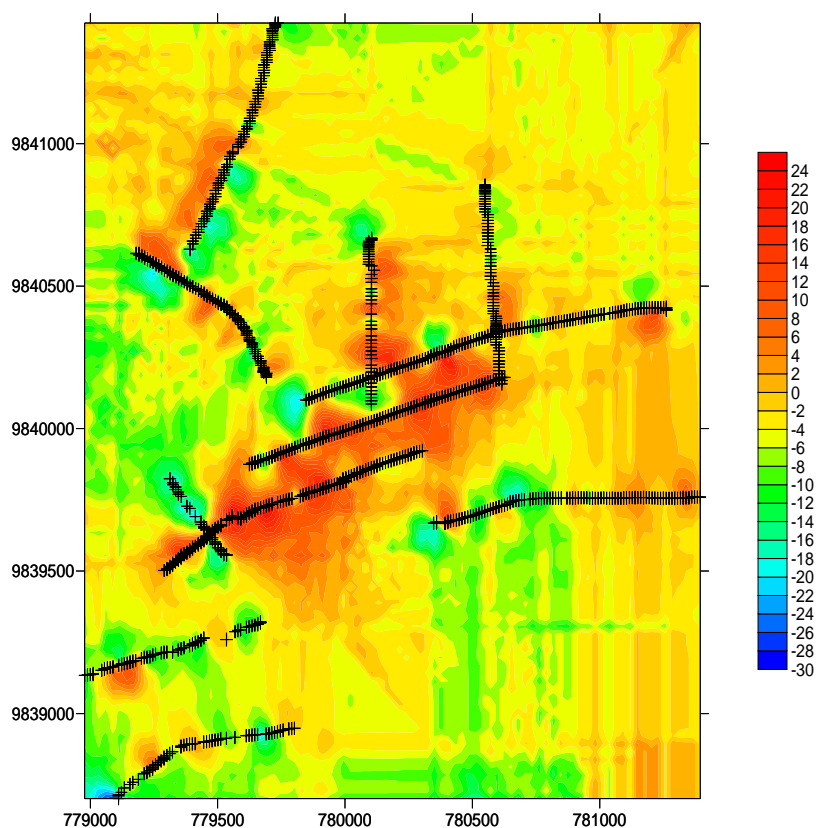


Figura 5.13 – Distribuição espacial dos resíduos do modelo em Séries temporais (equação 5.3).

### 5.3.2.2 Diagnóstico da Autocorrelação Espacial

Uma das formas de se diagnosticar a presença de efeitos espaciais nos dados do resíduo do modelo em série temporais calculado anteriormente é através da análise gráfica do semivariograma experimental. A inferência espacial é realizada pelo processo Krigagem que tem por fundamento a Teoria da Variável Regionalizada (TVR). Essa teoria identifica que a distribuição espacial de uma variável é expressa pela soma de três componentes: uma componente estrutural, tendo uma média constante ou tendência; uma componente aleatória espacialmente correlacionada, também chamada de variação regionalizada; uma componente aleatória não correlacionada espacialmente (erro residual).

A análise da variabilidade espacial dos resíduos do modelo em séries temporais, calculado pela equação, é realizada com o auxílio do semivariograma. Esta é uma das etapas mais importantes da análise geoestatística, pois o modelo de semivariograma escolhido representa a estrutura de correlação espacial a ser utilizada nos procedimentos inferenciais de krigagem. O resultado apresentado na Figura 5.14, mostra o semivariograma omnidirecional (caso isotrópico) e seu modelo de ajuste.

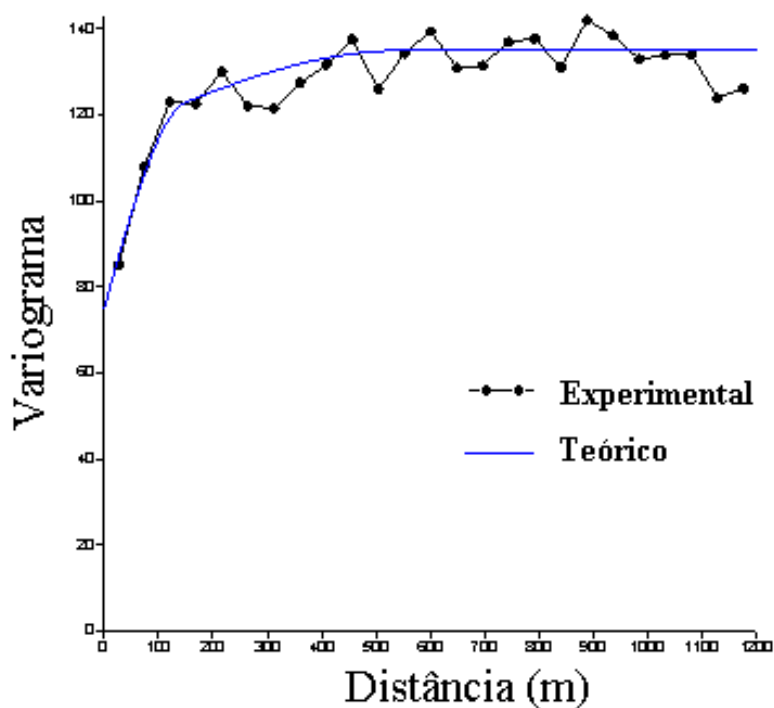


Figura 5.14 – Variograma experimental e teórico dos resíduos.

Cujos parâmetros estão na equação 5.4, é do tipo aninhado (duplo esférico), isto é, uma combinação de dois modelos esféricos.

$$\gamma(h) = 75 + 40 \left( \frac{150}{2h} - 1,5 \left( \frac{150}{h} \right)^3 \right) + 20 \left( \frac{500}{2h} - 1,5 \left( \frac{500}{h} \right)^3 \right) \quad (5.4)$$

Onde:

- $a_1 = 150$  e  $C_1 = 40$  correspondem aos parâmetros de alcance e contribuição, respectivamente, do primeiro modelo esférico ( $\gamma_1(\mathbf{h})$ ).
- $a_2 = 20$  e  $C_2 = 500$  correspondem aos parâmetros de alcance e contribuição, respectivamente, do segundo modelo esférico ( $\gamma_2(\mathbf{h})$ ).

Com base na estrutura definida pelo semivariograma na forma aninhada (duplo esférico), realizou-se a inferência espacial, através do processo de krigagem, obtendo-se o mapa de distribuição espacial da potência recebida através do programa SURFER [88].

Como a equação 5.4 estabelece a modelagem geoestatística dos resíduos ( $N_d$ ) adquiridos pelo modelo em séries temporais (equação 5.3). O modelo que estabelece o cálculo da potência recebida na área pesquisada é dado por:

$$Y_d = 75 + \frac{-0,0055 + 0,00287B^2}{(1 + 0,7799B - 0,1213B^9)} X_{1d} - \frac{0,0299}{(1 + 0,78529B)} X_{2d-1} + 40 \left( \frac{150}{2h} - 1,5 \left( \frac{150}{h} \right)^3 \right) + 20 \left( \frac{500}{2h} - 1,5 \left( \frac{500}{h} \right)^3 \right) + e_d \quad (5.5)$$

onde  $h$  é dado em metros,

$e_d$ : erro aleatório.

Analisando-se as Funções de Auto correlação e Auto Correlação Parcial dos resíduos do modelo encontrado (equação 5.5) nas Figuras 5.15.a e 5.15.b. Pode-se perceber uma substancial diminuição da autocorrelação dos resíduos ( $e_t$ ) quando comparados aos resíduos obtidos através do modelo em série temporal (equação 5.3). Note que há uma significativa diminuição no valor da autocorrelação para o *lag* 1 (Figura 15.a) quando comparada com a

Figura 5.12.a. Como nenhum dos *lags* apresentam *spike* significativo, logo pode-se afirmar que a série de resíduos do modelo simulado é estacionária ( $e_d$  é um ruído branco).

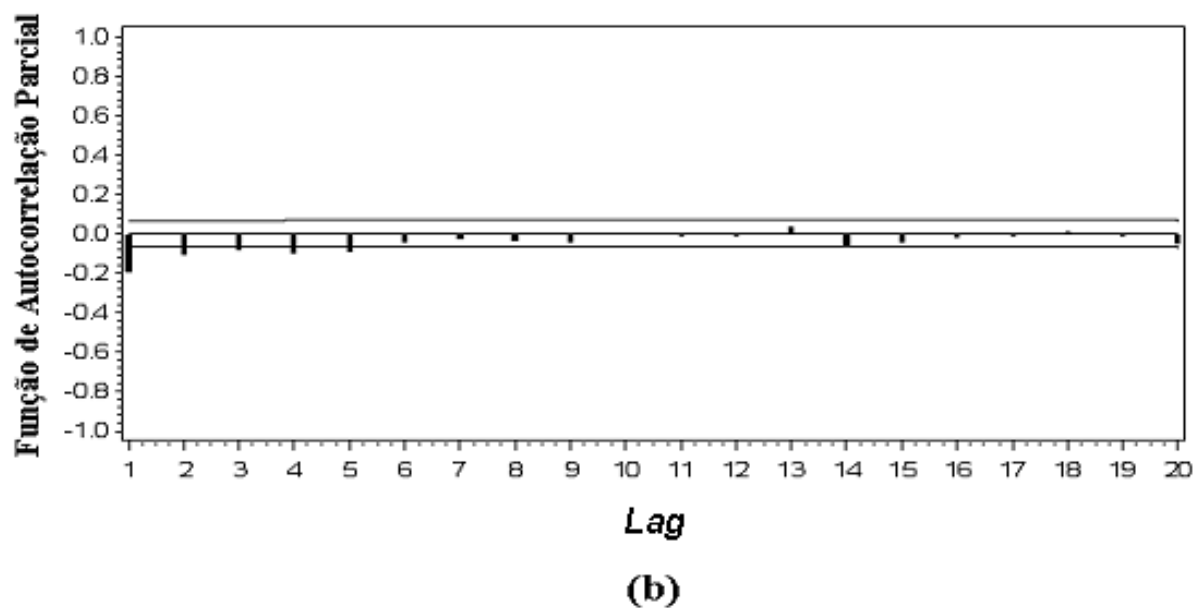
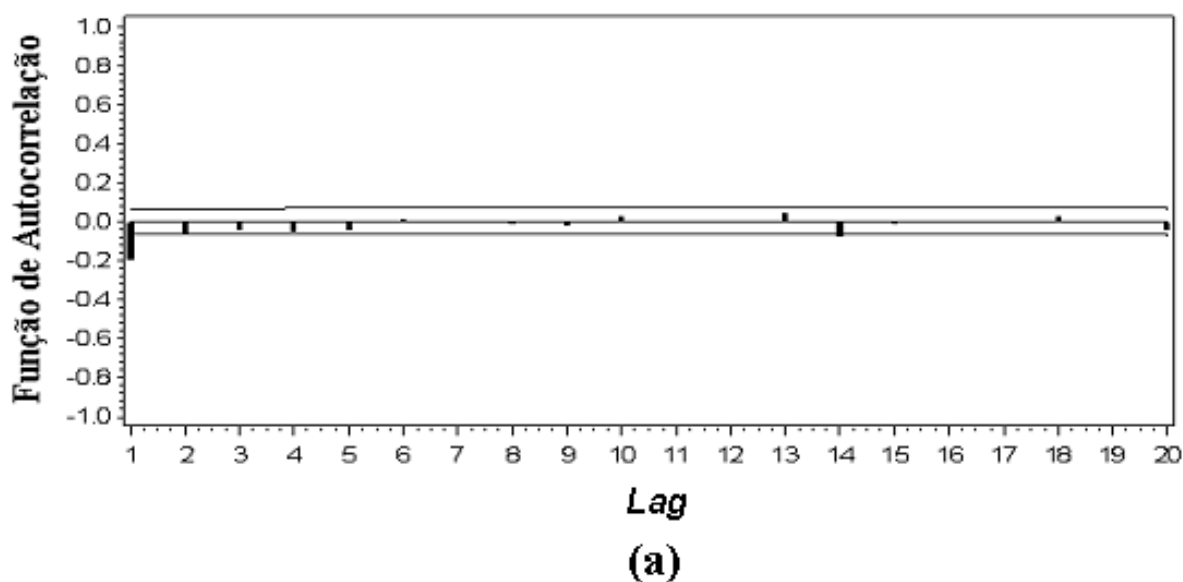


Figura. 5.15(a) e 5.15(b) - Função de autocorrelação e Função de autocorrelação parcial para os resíduos ( $e_d$ ).

### 5.3.2.3 Inferência Espacial por Krigagem

Utilizando os parâmetros do semivariograma, realizou-se a inferência espacial através do processo de krigagem, obtendo-se o mapa de distribuição espacial para a potência do sinal recebido (dBm) (modelo simulado – equação 5.5) mostrado na Figura 5.16.a. A Figura 5.16.b mostra a distribuição espacial dos níveis de cores que fornece informações sobre o padrão da distribuição da potencia recebida (dBm) obtidas na campanha de medição. Pode-se observar a potencialidade da metodologia adotada, quando se compara os mapas que indicam a distribuição espacial da potência recebida (dBm) pela unidade receptora.

Observe que na Krigagem apresentada na Figura 5.16.a e 5.16.b, onde pode-se observar as áreas com maior ou menor valor de recepção da potência recebida, conforme o gradiente de cores que permite um análise visual mais rápida e simples da área em estudo. Note que há certa concordância entre o perfil exibido pelos mapas obtidos com os valores previstos com o modelo simulado e os dados de campo.

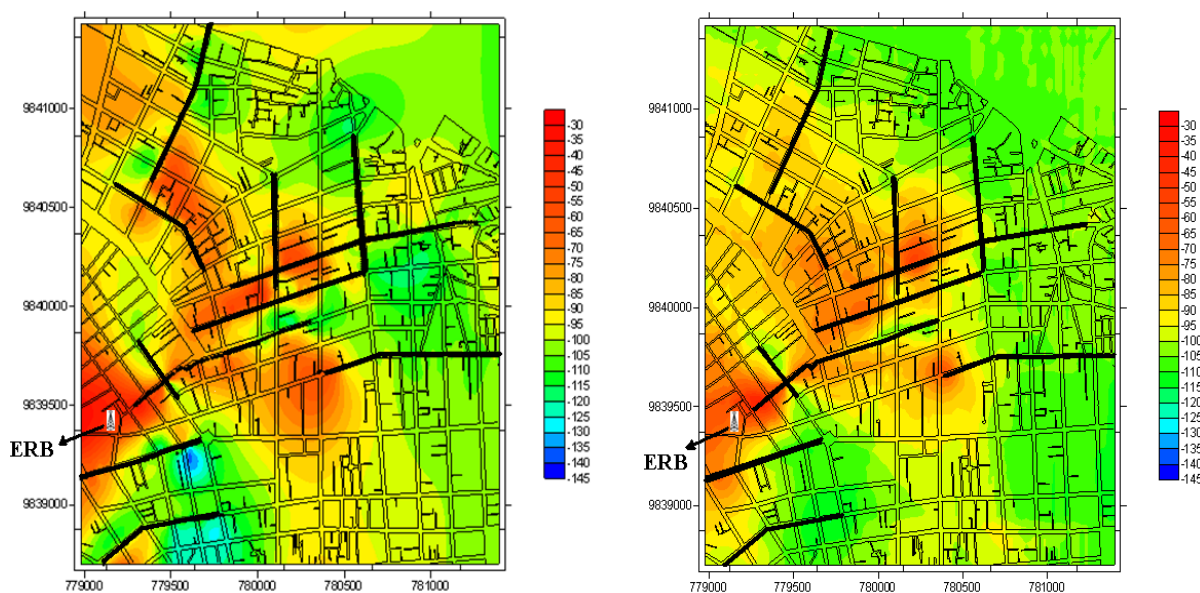


Figura 5.16.a e 5.16.b – Mapa da distribuição espacial da potência recebida (dBm) obtidas pelo Modelo simulado e pela Campanha de medição, respectivamente.

A distribuição espacial dos valores mostra as regiões marcadas em vermelho como as de níveis mais altos da potência recebida (dBm). Sendo as regiões em verde e azul as áreas com menor intensidade de sinal. Como era de se esperar, observa-se níveis mais altos de

potência às proximidades da estação rádio-base e em outras áreas não muito distantes da ERB.

Observe também que grande parte da região que possui um baixo nível de sinal situa-se a grandes distâncias da ERB, porém, no canto inferior esquerdo dos mapas (onde se localizam as Avenidas Nazaré e Gentil Bittencourt), existe uma região de baixa intensidade de sinal, o que pode ser explicado pela maior incidência de prédios com alturas elevadas e também de túneis formados por mangueiras presentes nestas duas vias.

A Figura 5.17 mostra o gráfico da resposta para o modelo e valores observados para a variável resposta Potência recebida simulada através de modelos em séries temporais com correção do erro através de um modelo geoestatístico. Os intervalos de confiança de 95% são indicados pela área amarela sombreada.

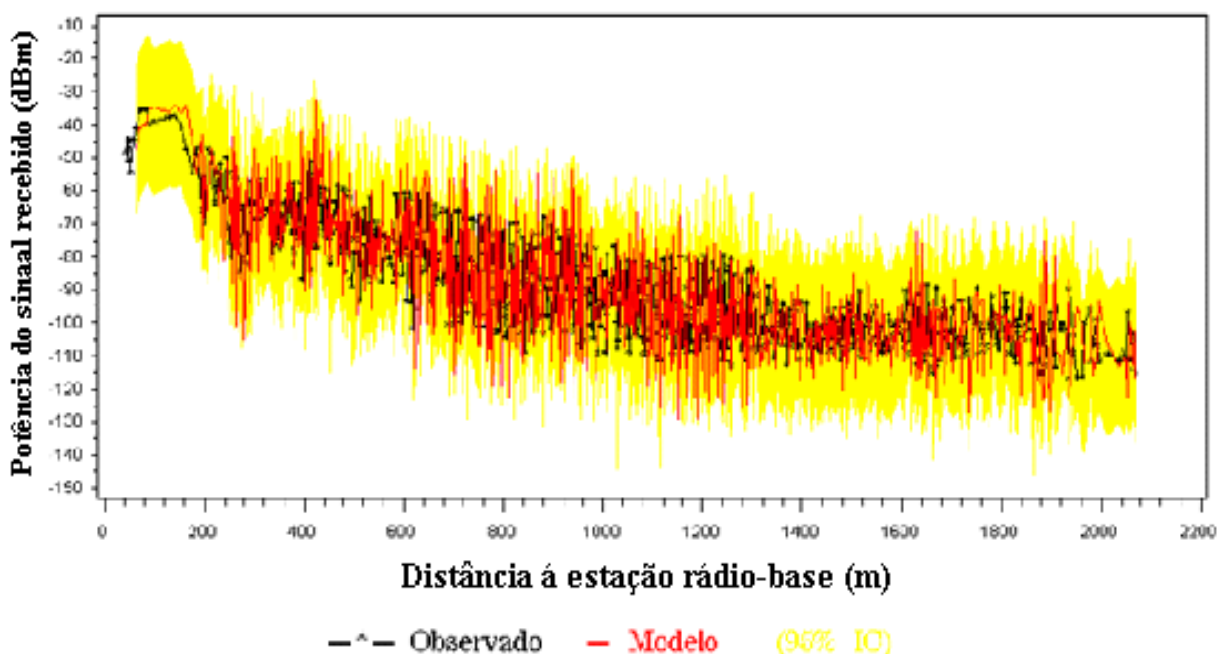


Figura 5.17 - Valores observados para a resposta do modelo e para a variável resposta Potência do sinal recebido (dBm) – (Modelo simulado – Equação 5.5).

## 5.4 Análise Comparativa dos resultados

Após a realização da análise comparativa dos resultados obtidos nas medições com as previsões dos modelos teóricos Ibrahim-Parsons, Okumura-Hata e Walfisch-Ikegami apresentados no capítulo 2 e o modelo simulado. Os modelos teóricos consideram no cálculo da atenuação do sinal parâmetros como altura das antenas transmissora e receptora, tipos de

cidade, altura média dos prédios, largura das ruas, frequência de operação e tipos de urbanização (rural suburbana e urbana), além da dependência com a distância.

Os parâmetros utilizados na análise dos modelos tinham os seguintes valores:

Altura da antena receptora:  $h_r = 1,5$  m.

Altura da antena receptora:  $h_t = 35$  m.

Frequência de operação:  $f = 877,44$  MHz

Largura média da rua:  $W = 22$  m.

Para a análise qualitativa das medidas com as previsões. Na figura 5.18 são apresentados os resultados experimentais e as simulações teóricas realizadas através dos modelos Ibrahim-Parsons, Okumura-Hata e Walfisch-Ikegami e a resposta do modelo simulado em séries temporais com correção de erro desenvolvido neste trabalho, para as onze vias do centro urbano da cidade de Belém-Pa.

Na Tabela 5.11 são apresentados os valores do Erro Médio Quadrático, da média e do desvio padrão.

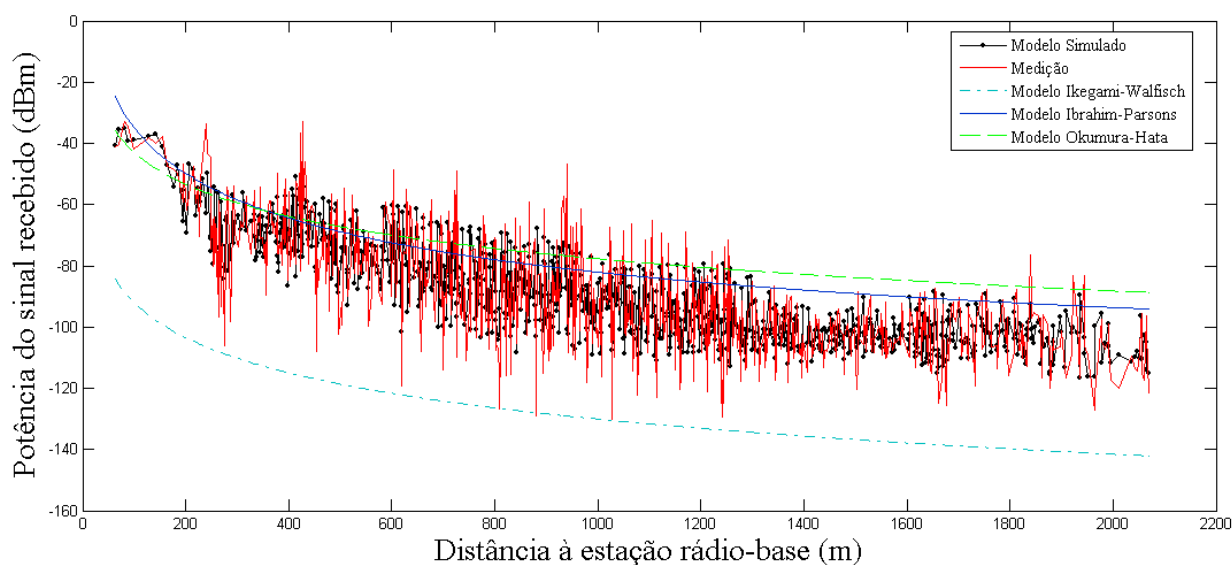


Figura 5.18 - Potência do sinal recebido pela estação rádio móvel e estimada pelos modelos teóricos e simulado.

Tabela 5.11 – Comparação entre os três modelos teóricos e o valor medido para as vias envolvidas na campanha de medição.

	<b>Erro Médio Quadrático</b>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>
Medição	-	-89,7875	15,7682
Modelo Proposto	0,33	-89,6232	18,0632
Modelo Ikegami-Walfisch	39,79	-128,4998	9,6217
Modelo Ibrahim-Parsons	13,26	-79,8502	11,0363
Modelo Okumura-Hata	16,56	-76,2557	8,8080

Observando-se a Tabela 5.11, verifica-se que, dentre os modelos dados acima, o que melhor descreve o sinal na área em estudo é o modelo simulado desenvolvido em séries temporais com correção de erro através da geoestatística, o qual apresentou um erro médio quadrático de 0,33 dB e o desvio padrão de 18,0632. Porém, entre os modelos teóricos, o que mais se aproxima das medidas é o modelo de Ibrahim-Parsons que apresentou um erro médio quadrático de 13,26 dB e o desvio padrão de 11,0363. Os modelos de Okumura-Hata e Walfisch-Ikegami apresentaram os piores resultados.

Com o intuito de efetuar um estudo de desempenho do modelo proposto, a fim de verificar a sua validade, foi realizada uma análise através dos dados coletados em mais duas vias da campanha de medição (Avenida Alcindo Cacela e Rua Conselheiro Furtado), as quais não fizeram parte do processamento dos dados para obtenção dos coeficientes inseridos na equação (5.5). As Tabelas 5.12 e 5.13 mostram os resultados experimentais, as simulações teóricas realizadas através dos modelos Ibrahim-Parsons, Okumura-Hata e Walfisch-Ikegami e a resposta do modelo simulado obtidos para estas duas vias da campanha de medição. As Figuras 5.19 e 5.20 mostram os gráficos comparativos da potência do sinal recebido versus distância à estação rádio base para a Avenida Alcindo Cacela e a Rua Conselheiro Furtado.



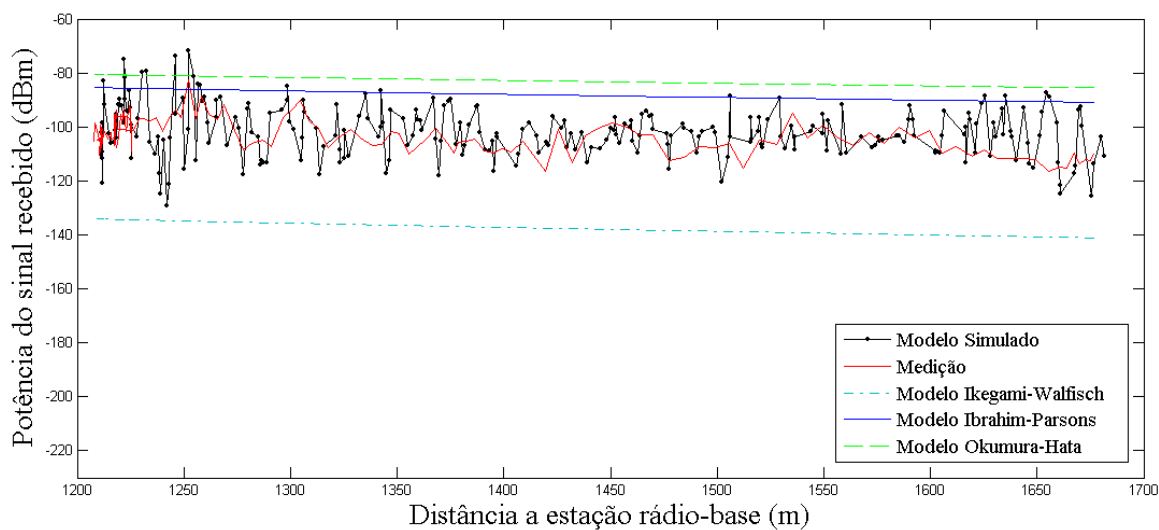


Figura 5.19 - Potência do sinal recebido pela estação rádio móvel e estimada pelos modelos teóricos e simulado para a Avenida Alcindo Cacela.

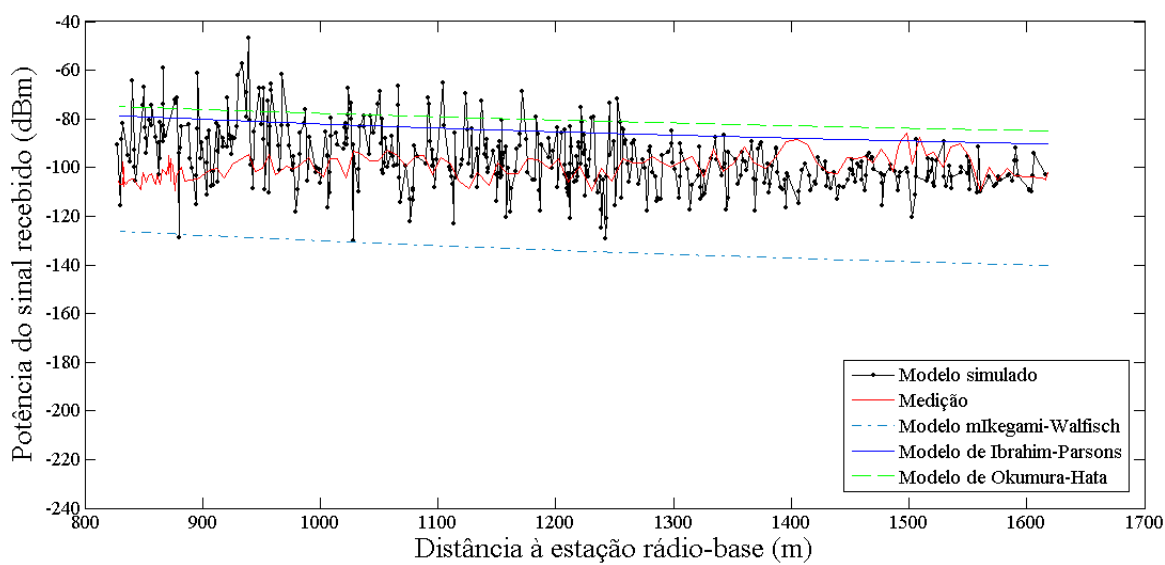


Figura 5.20 - Potência do sinal recebido pela estação rádio móvel e estimada pelos modelos teóricos e simulado para a Rua Conselheiro Furtado.

Tabela 5.12 – Comparação entre os resultados obtidos para os três modelos teóricos, modelo simulado e o valor medido para a Avenida Alcindo Cacela.

	<b>Erro Médio Quadrático</b>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>
Medição	-	-101,5776	6,4721
Modelo Proposto	12,80	-101,7422	9,4854
Modelo Ikegami-Walfisch	36,35	-137,3795	2,1852
Modelo Ibrahim-Parsons	14,94	-88,0159	1,7114
Modelo Okumura-Hata	19,71	-82,8905	1,5529

Tabela 5.13 – Comparação entre os resultados obtidos para os três modelos teóricos, modelo simulado e o valor medido para a Rua Conselheiro Furtado.

	<b>Erro Médio Quadrático</b>	<b>Média</b>	<b>Desvio Padrão</b>
Medição	-	-99,4415	9,0356
Modelo Proposto	9,04	-96,46896	12,8125
Modelo Ikegami-Walfisch	37,73	- 133,4741	3,8444
Modelo Ibrahim-Parsons	14,24	- 84,8467	3,1487
Modelo Okumura-Hata	18,40	- 80,1152	2,7320

# Capítulo 6

## Conclusão

A importância da morfologia na previsão do sinal de comunicações rádio-móvel. Nos diversos modelos estudados a morfologia é caracterizada por parâmetros que são definidos de forma empírica para cada ambiente, portanto é importante que se tenha uma boa definição destes parâmetros para minimizar erros.

Para se verificar qual modelo é mais adequado para uma determinada região, pode-se realizar campanhas de medição na área de interesse e avaliar o desempenho de cada modelo frente as medidas. Esta avaliação pode ser realizada por comparação quantitativa analisando as estatísticas do erro de cada modelo em relação aos valores medidos.

Através destes parâmetros estatísticos pode-se construir uma tabela comparativa entre os modelos considerados, possibilitando assim, determinar por uma análise estatística qual modelo mais se ajusta a referida região de estudo.

A precisão dos modelos de propagação utilizados é fundamental para a execução de um projeto eficiente, tanto do ponto de vista da qualidade do sistema como sob o aspecto de custos de implantação. Como a atenção dos serviços de comunicação móvel celular está voltada principalmente para a capacidade do sistema em prever a potência mínima necessária para irradiar níveis de sinais aceitáveis de cobertura sobre estações móveis, estimando os prováveis efeitos de transmissão em áreas adjacentes. Na prática é muito comum selecionar um modelo de cálculo para o pré-projeto, mas, antes da execução do projeto definitivo, realizar medidas de campo em um grande número de pontos da região a ser coberta e ajustar os parâmetros.

Neste trabalho foi apresentado um modelo em séries temporais com correção do erro através da geoestatística, que consistiu na previsão da potência recebida ao longo de onze vias localizadas no centro urbano da cidade de Belém/PA. Foi mostrado o estudo das possíveis relações existentes entre a potência do sinal recebido, da altura dos prédios, além da distância

entre os prédios. Modelos de função de transferência foram utilizados para avaliar efeitos na série temporal da potência recebida e para avaliar possíveis relações entre a altura dos prédios e das distâncias entre eles. Foram consideradas as séries originais e filtradas (ajustadas pelos modelos de função de transferência), para verificar se os modelos ajustados conservaram as características originais e assim confirmar o bom ajuste aos dados.

Como os modelos da estatística clássica desconsideram as possíveis correlações entre amostras vizinhas, não explorando assim, de forma satisfatória, as relações que possam existir entre as unidades amostrais. A correção do erro do modelo em séries temporais foi realizada através de um modelo geoestatístico que considerou o georreferenciamento dos dados, o que permitiu a identificação dos efeitos de interação espacial presente nos mesmos, utilizando-se o processo de Krigagem.

O modelo proposto apresentou um excelente resultado com erro médio quadrático na ordem de 0,33 dB em relação ao sinal medido, considerando os dados das onze vias da campanha de medição; enquanto que para os modelos Walfisch-Ikegami, Ibrahim Parsons e Okumura-Hata este erro foi na ordem de 39,79; 13,26 e 16,56 dB, respectivamente.

Portanto, o estudo realizado através da análise estatística em séries temporais com modelo de função de transferência e o estudo da variabilidade espacial das variáveis de interesse permitiram a construção de um modelo que permitiu identificar pela planta espacial das medidas da potência recebida (dBm) e pelo gradiente das linhas de iso-valores, os vetores de melhor recepção do sinal emitido pela ERB, identificando zonas homogêneas, bem como aquelas onde os usuários são prejudicados ou beneficiados pelo serviço da operadora local. Os resultados mostram que os modelos ajustados conservaram as mesmas características do sinal original. Além disto, esta metodologia permite a avaliação individualizada de todos os pontos da região considerada, a partir do conhecimento das suas coordenadas geográficas, e não apenas a demonstração de valores genéricos, como ocorre na elaboração tradicional dos modelos de propagação. Para tanto, foram obtidas estimativas das estatísticas, gráficos e mapas de dispersão e superfície que descrevessem espacialmente o comportamento da variável potência do sinal recebido (dBm) no centro urbano da cidade de Belém/Pa.

Para a Avenida Alcindo Cacela e a Rua Conselheiro furtado o modelo proposto apresentou um desempenho aceitável, com erro médio quadrático na ordem de 12,80 e 9,04 dB, respectivamente; enquanto que para os modelos Walfisch-Ikegami, Ibrahim Parsons e Okumura-Hata este erro foi na ordem de 36,35; 14,94 e 19,71 dB, respectivamente; para a

Avenida Alcindo Cacela e de 37,73; 14,25 e 18,40 dB, respectivamente; para a Rua Conselheiro Furtado.

### **Sugestões para outros trabalhos:**

- Ajustar um modelo geoestatístico incorporando a informação da dependência espacial dos dados da potência do sinal recebido, distância entre prédios e a altura dos prédios utilizando-se o processo da cokrigagem.
- Utilizar a mesma metodologia deste trabalho, inserindo no modelo em séries temporais outros parâmetros.
- Para o mesmo conjunto de dados. Estabelecer primeiramente um modelo geoestatístico para que a posteriori se faça a correção do erro deste modelo através de um modelo em séries temporais (modelo ARIMA).
- Construir um modelo utilizando-se a mesma metodologia deste trabalho, com a utilização de dados de recepção do sinal de TV digital (outdoor), rádio digital.

# Referências Bibliográficas

- [1] T. S. Rappaport, *Wireless Communications Principles and Practice*. USA, Prentice Hall, 2002.
- [2] Briso, C., J. I. Alonso - "Statistical and Empirical Models for LMSC Fading Based on GPS Measurement". En *First International Workshop On Radiowave Propagation Modelling For Satcom Services At Ku-Band An Above*. ESA/ESTEC. COST 255 Workshop Proceedings. (Paper 13). ESA, Estec, Holland. October 28-29, 1998.
- [3] H. L. Bertoni, P. Pongsilamane, C. Cheon, and G. Liang – "Sources and Statistics of Multipath Arrival at Elevated Base Station Antenna" - *IEEE Trans. Vehicular Tech.*, 1999:581-585.
- [4] J. C. L. Dal Bello, G. L. Siqueira, H. L. Bertoni – "Theoretical Analysis and Measurement Results of Vegetation Effects on Path Loss for Mobile Cellular Communication Systems" - *IEEE Trans. Vehicular Tech.*, 2000:1285-1293.
- [5] L. Gatzoulis, G. J. R. Povey – "A Comparison of Multiple Input Radio Channel Models Using Geometric and Stochastic Methods" - *IEEE Trans. Vehicular Tech.*, 2001:129-123.
- [6] R. B. Ertel, P. Cardieri, K. W. Sowerby et al. – "Overview of Spatial Channel Models for Antenna Array Communication Systems", *IEEE Personal Communications Magazine*, 5, 10-22, 1998.
- [7] K.I. Pedersen, P.E. Mogensen, B.H. Fleury, "Spatial Channel Characteristics in Outdoor Environments and their Impact on BS Antenna System Performance", *IEEE Proc. Vehicular Technology Conference (VTC'98)*, Ottawa, Canada, pp. 719-724, May 1998.
- [8] K. I. Pedersen, P. E. Mogensen – "Simulation of Dual Polarized Propagation Environments for Adaptive antennas", *IEEE Proc VTC Fall 99*, 62-66. September, 1999.
- [9] I. H. Cavdar – "A Statistical Approach to Bertoni-Walfisch Propagation Model for Mobile Radio Design in Urban Areas" - *IEEE Trans. Vehicular Tech.*, 2001:279-283.
- [10] T. William, J. Rittwik et al. – "Modeling Wireless Channel Fading" - *IEEE Trans. Vehicular Tech.*, 2001:1740-1742.
- [11] T. George, C. G. Christodoulou – "Use of Weibull Distribution for Describing Outdoor Multipath Fading" - *IEEE Trans. Vehicular Tech.*, 2002:232-235.
- [12] Guedes, L. G. R., – "Contribuições à Estatística do Sinal de Rádio Móvel" – Tese de Doutorado – Universidade Estadual de Campinas – Brasil – Julho de 1997.

- [13] Pereira Neto, A., Rozal, E. O., e Pelaes, E. G., – “Bidimensional Statistics Analysis of the Bertoni-Walfisch Propagation Model for Mobile Radio Design in Urban Areas” – IMOC 2003 – Iguazu Falls – September 2003.
- [14] S. Prachee – “Predictive Models For Wireless fading Channels” – Tese de Doutorado – University of Massachusetts, Lowell, 1998.
- [15] Simone G. C. Fraiha, Hermínio S. Gomes, Josiane C. Rodrigues, Gervásio P. S. Cavalcante, “Modelo Estatístico de Perda de Propagação para Sistemas Móveis em Área Suburbana Densamente Arborizada” - XXI Simpósio Brasileiro de Telecomunicações—SBT’04, 6-9 de Setembro de 2004, Belém, PA.
- [16] Sharma, P. “Time-Series Model for Wireless Fading Channels in Isotropic and Non-Isotropic Scattering Environments”. IEEE Communications Letters 2005, Vol. 9; Numb. 1, pages 46-48.
- [17] Marple, S., ‘Digital spectral analysis with applications’, Prentice-Hall, 1987
- [18] Rozal, Edilberto Oliveira ; PELAES, E. G. “Statistical adjustment of Walfisch-Ikegami model based in urban propagation measurements”. In: International Microwave and Optoelectronics Conference - IMOC2007, Salvador. v. 1. p. 584-588.
- [19] Yann-Aël Le Borgne, Silvia Santini, Gianluca Bontempi. “Adaptive model selection for time series prediction in wireless sensor networks”. Signal Processing, Vol. 87, Issue 12, Elsevier. December 2007, Pages 3010-3020.
- [20] Y. Okumura, E. Ohmori, T. Kawano, and K. Fukuda, “Field strength and its variability in VHF and UHF land-mobile radio service,” Review Electrical Communication Laboratory, vol. 16, pp. 825-873, 1968.
- [21] J. Minseok, L. Bomson, “Comparison between path-loss prediction models for wireless telecommunication system design”; Antennas and Propagation Society international Symposium, 2001. IEEE Volume 2, 8-13 July 2001 pp 186 – 189.
- [22] M. Hata, “Empirical Formula for Propagation Loss in Land Mobile Radio Service,”IEEE Transactions on Vehicular Technology, VT-29,3, 1980, pp. 317-325.
- [23] A. Medeisis, A. Kajackas, “On the use of the universal Okumura-Hata propagation prediction model in rural areas” Vehicular Technology Conference Proceedings, 2000.VTC 2000-Spring Tokyo. 2000 IEEE 51st, Volume 3, 15-18 May 2000 pp 1815 – 1818.

- [24] G.Y Delisle, J. P. Lefevre, M. Lecours, J. Y. Chouinard, "Propagation loss prediction: A comparative study with application to the mobile radio channel. Vehicular Technology, IEEE Transactions on Volume 34, Issue 2, May 1985 pp. 86 – 96.
- [20] W. C. Y. Lee, "Mobile Celular Telecommunication Systems", MacGraw-Hill, 1990.
- [26] Ibrahim, M. F., Parsons, J. D. Signal Strength Prediction in Built-up Areas. Part 1: Median Signal Strength. IEE Proc., 130, Part F, N 5, pp. 377-384, 1983.
- [27] J. Walfisch and H. L. Bertoni, "A Theoretical Model of UHF Propagation in urban environments," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, AP-36, 12, 1988, pp. 1788-1796.
- [28] Ikegami, F., et al., "Propagation Factors Controlling Mean Field Strength on Urban Streets," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. AP-32, December 1984, pp. 822–829.
- [29] Löw, K., "Comparison of Urban Propagation Models with CW-Measurements," Vehicular Technology Society 42nd VTS Conference, IEEE Cat. No. 92CH3159-1, Vol. 2, 1992, pp. 936–942.
- [30] Morettin, P. A. e Tolo, C. M. C. Análise de Séries Temporais, Edgard Blücher, São Paulo, 2004.
- [31] Makridakis, S. G.; Wheelwright, S. C; Hyndman, R. J. "Forecasting: methods and applications". 3.ed. New York: John Wiley & Sons, 1998.
- [31] Stengel, R. F. "Stochastic Optimal Control: Theory and Application". 1.ed. New York: John Wiley & Sons Inc, 1986.
- [32] Box, G. E. P.; Jenkins, G. M. and Reinsel, G. C.. "Times series analysis: forecasting and Control". 3. ed. San Francisco: Holden-Day, 1994.
- [33] Durbin, J.. "The fitting of time series models". Review of the International statistical Institute, 28:233–244, 1960.
- [34] A. C. Davison and D. V. Hinkley. "Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Bootstrap Methods and their Application". Cambridge University Press. USA, 2007.
- [35] Wold, H. "A study in the Analysis of Stationary Time Series". Uppsala, 1938.
- [36] Bartlett, N. S. "On the Theoretical Specification of Sampling Properties of Autocorrelated Time Series". Journal of the Royal Statistical Society, Vol 8, Supplement, 1946.
- [37] Tintner, G. "The Variate Difference Method. Bloomington", Ind., 1940.



- [38] Cox, D. R. and Miller, H. D. "The Theory of Stochastic Process", Methuen, 1965.
- [39] Stengel, Robert F. "Stochastic Optimal Control: Theory and Application". 1. ed. New York: John Wiley & Sons Inc, 1986.
- [40] McLeod, A.I. & Sales, P.R.H. "An algorithm for approximate likelihood calculation of ARMA and seasonal ARMA models", *Applied Statistics* 32, 211-223, 1983.
- [41] Choi, B. "ARMA Model Identification". New York: Springer, 1992.
- [42] Anderson, T., W. "Determination of the order of dependence in normally distributed time series. *Time Series Analyses*", ed. M. Rosenblatt, New York: Willey, 425-446, 1963.
- [43] Gray, H. L., Kelley, G. D., and McIntire, D. D. "A New Approach to ARMA modeling. *Communications in Statistics*", 87(1), 1-78, 1978
- [44] Nerlove, M., Grether, D. M., and Carvalho, J. L. "Analysis of Economic Time Series: A synthesis". New York: Academic Press, 1979.
- [45] Akaike, H. "Fitting Autorregressive Models for Prediction". *Ann. Inst. Statist. Math.* v. 21. Pag. 243-247, 1969.
- [46] Box, G. E. P. e Jenkins, G. M. "Time Series Analysis, Forecasting and Control" (2<sup>a</sup> ed.). San Francisco: Holden-Day, 1976.
- [47] Priestley, M. B. "Spectral Analysis and Time Series". v. 1 e 2, Academic Press, 1981.
- [48] Abraham, B. e Ledolter, J. "Statistical Methods for Ferecasting". Wiley, 1983.
- [49] Aigner, D., J. "A Compendium on Estimation of the Autorregressive – Moving Average Model for time Series Data", *Int. Econ. Ver.* 12. Pg. 348-371, 1977.
- [50] Dent, W. T. e Min, A. S. "A monte Carlo Study of Autorregressive Integrated Moving Average Process". *J. of Econometrics*, v. 7, pg. 23-55, 1978.
- [51] Beveridge, S. "Autorregressive Predictors: A Survey of the Evidence and Additional results". Manuscript – Faculty of Business Administration. University of Alberta, 1981.
- [52] Damslett, E. "Estimation in Moving Average Models", Why does it fail. *J. Statist. Comp. Simul.*, v. 16, pg. 109-128, 1983
- [53] Wei, W. S. "Time Series Analysis: Univariate and Multivariate". Addison-Wesley, 1989.
- [54] JD Cryer, KS Chan, "Time Series Analysis". With Application in R, 2nd edn. (Springer, New York, 2008.

- [55] ZL Dupe, “Prediction Nino3.4 SST Anomaly Using Simple Harmonic Model”, Paper presented at the Second International Conference on Science and Technology for the Assessment of Global Climate Change and Its Impacts, Jakarta, 1999.
- [56] L Lon-Mu et al. “Time Series Analysis and Forecast”, 2nd edn. (Scientific Computing Associates Corporation, Villa Park, IL, pp. 1–565, 2006.
- [57] D West, S Dellana, J Jarretti, Transfer function modeling of process with dynamic inputs. *J. Qual. Technol.* 34(3), 315–327, 2002.
- [58] Makridakis, S. G.; Wheelwright, S. C; Hyndman, R. J. “Forecasting: methods and applications”. 3.ed. New York: John Wiley & Sons, 1998.
- [59] Stengel, R. F. *Stochastic Optimal Control: Theory and Application*. 1.ed. New York: John Wiley & Sons Inc, 1986.
- [60] Landim, P. M. B. “Análise estatística de dados geológicos”. Fundação Editora da UNESP. São Paulo, 226 p., 1998.
- [61] Journel, A.G.; HUIJBREGTS, C.J. “Mining Geostatistics”. London Academic Press, 600 p., 1978.
- [62] Deustch, C.V. *Geostatistical Reservoir Modeling*. Oxford University Press. New York, 376 p., 2002.
- [63] Shrivastava, R. M. “An Application of Geostatistical Methods for Risk Analysis in Reservoir Management”. Society of Petroleum Engineers. SPE 20608. 1990.
- [64] Goovaerts, P. “Geostatistics in soil science: state-of-art and perspectives”. Elsevier Science. *Geoderma* 89:1-45. 1999.
- [65] Junior, P.J.R. “Métodos geoestatísticos no estudo da variabilidade espacial de parâmetros do solo”. Tese de Mestrado. EASALQ-Piracicaba, São Paulo, 99p., 1995.
- [66] Cromer, M.V.; Rautman, C. A.; Zelinsk, W. P. “Geostatistical Simulation of Rock Quality Designation (RQD) to Support facilities design at Yucca Mountain”, Nevada. *Geostatistical for Environmental and Geotechnical Applications*. ASTM STP 1283. Eds. American Society for Testing and Materials, 218-235. 280 p., 1996.
- [67] Sturaro, J.R. “Mapeamento geoestatístico de propriedades geológico-geotécnicas obtidas de sondagens de simples reconhecimento”. Tese de Doutorado. São Carlos, 1994.183 p. Disponível em [www.rc.unesp.br/igce/pos/indexpos.html](http://www.rc.unesp.br/igce/pos/indexpos.html).
- [68] Kitanidis, P. K. “Introduction to Geostatistics: Applications to Hydrogeology”. Cambridge University Press, New York, 249 p., 1997.

- [69] Assad, M.L.L; Fuks, S.D; Faria, C.D. “Mapeamento de ocorrências de termiteiros por krigagem indicatriz”. Cadernos de Informações Georeferenciadas –CIG– Vol.1(3). Unicamp SP, 1999. Disponível em [www.cpa.unicamp.br/revista/cigv1n3a2.html](http://www.cpa.unicamp.br/revista/cigv1n3a2.html).
- [70] Journel, A.G. “Geostatistical for the environmental sciences”. EPA Projects No. CR 811893, Las Vegas, USA. 135 p. 1987.
- [71] Goovaerts, P. “Geostatistics for Natural Resources Evaluation”. Oxford University Press, New York. 483 p., 1997
- [72] Smith, L.H. “Plot arrangement for variety experiment with corn”. Proc. American Society Agronomie, 5 (1): 84-89, 1910.
- [73] Montgomery, E. G. “Experiments in wheat breeding: experimental error in the nursery and variation in nitrogen and yield”. Washington, U.S. Dept. Agric. Bur. Plant. Indust. Bul., 1913. 61p.
- [74] Waynick, D.D.; Sharp, L.T. “Variability in soils and its significance to past and future soil investigations. II. Variation in nitrogen and carbon in field soils and their relation to the accuracy of field trials”. Agricultural Sciences, 4 (5): 121-139, 1919.
- [75] Krige, D.G. “A statistical approach to some basic mine evaluation problems on the Witwatersrand”. Johannesburg Chemistry Metallurgy Mining Society South African, 52 (6): 119-139, 1951.
- [76] Matheron, G. “Principles of geostatistics”. Economic Geology, 58 (8): 1246-1266, Dec. 1963.
- [77] Matheron, G. “The theory of regionalized variables and its applications”. Paris, Les Cahiers du Centre de Morphologie Mathematique de Fontainebleu, 211p., 1971.
- [78] Blais, R.A. & Carlier, P.A.. “Applications of geostatistics in ore valuation”. apud Olea, R.A., 1968.
- [79] Burrough, P. “A. Principles of geographical information systems for land resources assessment”. Oxford, Clarendon Press, 193p., 1987.
- [80] Camargo, E. C. G. “Desenvolvimento, implementação e teste de procedimentos geoestatísticos (krigagem) no Sistema de Processamento de Informações Georreferenciadas” (SPRING). 124 p. Dissertação (Mestrado em Sensoriamento Remoto). Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 1997.
- [81] Olea, R. A. “Optimum Mapping Technics Using Regionalized Variable Theory”. Kansas. Kansas Geological Survey, 137 p. (Series on Spatial Analysis, 2), 1975.

- [82] Journel, A.G. "Fundamentals of Geostatistics in Five Lessons". Vol. 8. Short Course in Geology American Geophysical Union, Washington, D.C., 1989.
- [83] Isaaks, E.H.; Srivastava, R. M. "An Introduction to Applied Geostatistics". Oxford University Press, New York, 561p., 1989.
- [84] Deutsch, C. V.; Journel, A. G. GSLIB: Geostatistical Software Library and User's Guide. Oxford University Press, New York, 369 p., 1998.
- [85] Christakos, G. "On the problem of permissible covariance and variogram models". Water Resources Research, 20(2):251-265. 1984.
- [86] Rautman C.A. & Istok J.D. "Probabilistic Assessment of Ground-Water Contamination: 1 Geostatistic Framework. Ground Water", Vol.35, No.5:899-909. 1996.
- [87] SAS Institute Inc., SAS/ETS User's Guide, Version 9 (SAS Institute Inc., Cary, NC, 2003.
- [88] SURFER, version 8.0. Contouring , Gridding, and Surface Mapping Package for Scientists and Engineers, 2002.

# Trabalhos Publicados Pelo Autor

1. Rozal, Edilberto Oliveira; Pelaes, E. G. ; Pereira Neto, Ananias. Simulação Estatística Bidimensional do Modelo de Bertoni - Walfisch para Canal de Rádio Móvel.. In: XX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, 2003, Rio de Janeiro. XX Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, 2003. v. 20. p. 234-239.

2. Rozal, Edilberto Oliveira; Pelaes, E. G.; Pereira Neto, Ananis . Bidimensional Statistics Analysis of the Bertoni Walfisch Propagation Model for Mobile Radio Design in Urban Areas. In: International Microwave and Optoelectronics Conference - IMOC 2003, 2003, Foz do Iguaçu. International Microwave and Optoelectronics Conference - IMOC 2003, 2003. v. 1. p. 235-240.

3. Rozal, E. O. Comparação entre modelos AR e ARMA para cobertura Móvel Celular em. In: III Encontro Regional de Matemática Aplicada e, 2004, Belém. Comparação entre modelos AR e ARMA para cobertura Móvel Celular em, 2004.

4. Rozal, Edilberto Oliveira ; Pelaes, E. G. . Statistical adjustment of Walfisch-Ikegami model based in urban propagation measurements. In: International Microwave and Optoelectronics Conference - IMOC2007, 2007, Salvador. International Microwave and Optoelectronics Conference - IMOC2007, 2007. v. 1. p. 584-588.

5. Rozal, Edilberto Oliveira ; Pelaes, E. G; Queiroz, J. C. B.; Salame, C . Modeling of wireless networks using multivariate time models. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing* 2012, **2012**:248.