UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

JANEISI DE LIMA MEIRA

LABIRINTOS DA COMPREENSÃO DE REGRAS EM MATEMÁTICA: um estudo a partir da regra de três

BELÉM
2012

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) –

Biblioteca do IEMCI, UFPA

Meira, Janeisi de Lima.
Labirintos da compreensão de regras em matemática: um estudo a partir da regra de três / Janeisi de Lima Meira, orientadora Profa. Dra. Marisa Rosâni Abreu Silveira – 2012.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2012.

1. Aritmética. 2. Matemática – estudo e ensino. I. Silveira, Marisa Rosâni Abreu da Silveira, orient. II. Título.

CDD - 22. ed. 513

JANEISI DE LIMA MEIRA

LABIRINTOS DA COMPREENSÃO DE REGRAS EM MATEMÁTICA: um estudo a partir da regra de três

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.

Orientadora: Profª. Drª. Marisa Rosâni Abreu da Silveira

BELÉM - PA
2012

JANEISI DE LIMA MEIRA

LABIRINTOS DA COMPREENSÃO DE REGRAS EM MATEMÁTICA: um estudo a partir da regra de três

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação em Ciências e Matemáticas.

Orientadora: Profª. Drª. Marisa Rosâni Abreu da Silveira

Comissão Examinadora

____

Profa. Drª. Marisa Rosâni Abreu da Silveira (orientadora) – IEMCI/UFPA

____

Profa. Drª. Ocsana Danyluk (examinadora externa) – UPF

____

Prof. Dr. José Messildo Viana (examinador interno) – IEMCI/UFPA

____

Prof. MSc. Ronaldo Barros Ripardo (examinador - Doutorando) – FE/USP

Belém-Pa
2012

À

Meus pais
Neuza e João *(in memorian)*

Minha irmã e meuirmão
Anaélis e Carlos

Agradecimentos

A Deus, fonte de inspiração, refúgio e sabedoria em todos os momentos, ainda que eu parecesse estar perdido e sem solução.

Ao meu pai, João Meira *(in memorian)*.

À minha mãe, Neuza Lima, instrumento de Deus e sinônimo de luta e conquistas e pela compra do primeiro livro.

À professora Drª. Marisa Silveira, minha orientadora, pela perspicácia, disponibilidade, competência e por sua dedicação em orientar-me compartilhando seus conhecimentos, conduzindo-me pelos vales escuros e sombrios dos labirintos da filosofia de Wittgenstein.

A minha irmã Anaélis e a meu irmão Carlos pelo apoio e sempre incentivando-me cada vez mais. Companheiros de todas as horas e por criarem um ambiente amigo, sempre me amparando.

Ao meu tio Elias, por mostrar como a vida é prazerosa.

Ao Professor Pedro Braga juntamente com seus alunos da Turma de 7º ano e todos da Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará, por permitirem que realizasse a pesquisa de campo.

À Capes, pelo auxílio financeiro durante todo o período do mestrado.

À professora Drª. Ocsana Danyluk, por dedicar seu tempo à apreciação e contribuição deste trabalho.

Ao professor Dr. Messildo Viana, pela leitura e contribuição neste trabalho.

Ao professor Dr. Adílson, pela leitura e contribuição deste trabalho, ainda na fase de qualificação.

A professora Emília Pimenta, pelas correções e por suas contribuições acerca da linguagem e de tudo que esta nos oferece.

Aos professores do Instituto de Educação Matemática e Cientifica IEMCI/UFPA.

Aos mestres que nos instruíram desde os primeiros passos até essa conquista. Em especial, a todos os professores da Educação Básica, poucos lembrados.

A todos os integrantes do Grupo de Linguagem Matemática – GELIM, pelas interlocuções e amadurecimento das ideias discutidas acerca da linguagem na Educação Matemática.

A Raquel Nascimento, pelo ambiente de conforto e por inspirar-me com tanta criatividade.

Ao João Vidal, pela compreensão e ajuda durante essa conquista.

A Ronaldo Ripardo, grande responsável pela minha conquista de fazer parte do mundo da Pós-Graduação.

A Emanuel Nogueira, companheiro de todos os momentos e por sempre estar na minha ilharga ao serpentearmos as ruas Belenenses.

A Neta Gil, companheira de luta e por dar voz aos gritos silenciados dos Ribeirinhos do Xingu e, por não tombar diante das oligarquias amazônidas.

Aos Colegas que fiz no mestrado.

Aos funcionários do Instituto de Educação Matemática e Científica.

A todos os amigos que incentivaram nesta caminhada, fortalecendo-me com suas palavras de conforto.

E não menos importante a todos que contribuíram para a construção desse trabalho e que aqui não tiveram seus nomes citados, o meu obrigado.

O homem possui a capacidade de construir linguagens com as quais se pode expandir todo sentido, sem fazer ideia de como e do que cada palavra significa - como também falamos sem saber como se produzem os sons particulares (Ludwig Wittgenstein, Investigações Filosóficas).

Resumo

A presente pesquisa teve como objetivo analisar os procedimentos adotados por alunos do Ensino Fundamental ao interpretarem e aplicarem regras matemáticas na resolução de problemas de regra de três simples e composta, bem como o processo de tratamento que é dado à linguagem, em especial, à linguagem matemática. O processo de reflexão acerca da linguagem desencadeou, a partir do nosso estudo, do movimento conhecido por Virada Linguística, espaço em que se discutiu que seria impossível filosofar a respeito de algo sem anteriormente refletir sobre a linguagem pelo motivo de considerar que qualquer experiência se realiza anteriormente na linguagem. A partir desse momento, surgem as primeiras interpretações daquilo que ficou conhecido como Filosofia da Linguagem. Foi a partir dessa perspectiva filosófica que procuramos ancorar nossas análises, principalmente nas ideias daquele que ficou conhecido como o maior expoente, Ludwig Wittgenstein. As ideias desse filósofo se dividem em duas conflitantes filosofias, a primeira em que busca uma análise lógica da linguagem, e a segunda que discute e analisa a linguagem a partir da noção de contexto, ou seja, onde as expressões linguísticas adquirem sentido. Nesta segunda fase de seu pensamento, discute entre outros temas a necessidade que o sujeito possui de ‘seguir regras’, a qual subsidiou uma de nossas seções de análise. O cenário da pesquisa foi uma sala de aula com alunos do 7º ano da Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará. A coleta do material aconteceu a partir de observações *in lócus* e por meio da aplicação de três baterias de testes envolvendo problemas matemáticos escolares de regra de três. Após o término das atividades, realizamos uma entrevista semiestruturada com alguns desses alunos e com o professor da turma. As análises desse material estão organizadas em três seções, as quais revelaram que grande parte desses alunos fracassou ao aplicar e seguir as regras matemáticas. Destacamos ainda que as ações desses alunos frente ao uso dos algoritmos também acontecem de maneira mecânica, pois aplicaram as regras e as seguiram sem atribuírem sentido, há ainda aqueles que se confundiram com as regras aprendidas em experiências anteriores.

Palavras-chave: Linguagem. Regras no ensino de matemática. Regra de três. Filosofia de Wittgenstein.

Abstract

The objective of this research was to analyze the procedures used by elementary school students about interpreting and applying mathematical rules in the resolution of some mathematical exercises that they are currently studying, as well as treatment that is given to language, especially the mathematical language. Our study started with the movement known as the Linguistic Turn. This happened because of a philosophical thought that says. It is impossible to argue about something without having discussed about it before. So this time forward, appear the first interpretations of what became known as philosophy of the language. It was about it that we base our analysis agreeing with it is main defender, the philosopher Ludwig Wittgenstein. His ideas are divided into two conflicting philosophies. The first analyze the language in a logical way, and the second analyze it in a context. In this second stage of his thought, he argues about the need of the people on follow rules, which helped us in one of our class. It happened during a class building. It were passed some math test, to analyze the level of knowledge of the students, after the tests there was an interview with each students about what they were currently studying. Analyzes the tests we conclude that the students did not apply of the correct way, and often confused the mathematical rules.

Keywords: Language. Follow rules in mathematics. Rule three. Wittgenstein's philosophy.

Sumário

INTRODUÇÃO

Nesta pesquisa, abordamos um tema que vem crescendo nos estudos em Educação Matemática: a Linguagem. A linguagem faz parte de todas nossas ações cotidianas e dela dependemos para adquirir e transmitir os conhecimentos necessários para um convívio em sociedade. Também, não podemos esquecer que todas as ações que efetivam as relações do mundo em que vivemos são inicialmente provenientes da linguagem. Entretanto, nossas experiências linguísticas seguem regras, desse modo, asseguramos que todas as ações são reguladas por regras que atendem a critérios discutidos e acordados em comunidade.

Ao longo do desenvolvimento da Educação Matemática, as pesquisas que possuem a Linguagem como objeto de estudo vem conquistando cada vez mais espaço e mostrando que os problemas na compreensão da linguagem, e particularmente, da linguagem matemática, possuem influências sobre as dificuldades dos alunos no processo de aprendizagem, principalmente, na matemática.

Nessa direção, a presente investigação pretende responder à pergunta assim enunciada: *Que regras matemáticas os alunos aplicam na solução de problemas de regra de três?* A partir dessa pergunta, pretenderemos discutir como os alunos aplicam e compreendem as regras matemáticas e não matemáticas necessárias para a compreensão dos conceitos nelas envolvidas e que são discutidas e aprendidas em sala de aula.

Mostramos ainda que os alunos em algumas circunstâncias aplicam regras provenientes de um *jogo de linguagem* em outro *jogo*, isto é, as regras que aplicam em um contexto podem não apresentar conexão com outro contexto, nesta circunstância, induzindo-os ao “erro”. Indicações desse tipo apontam que esses alunos ainda não compreenderam a aplicação correta dessas regras. Desse modo, buscando compreender tais mudanças de significados dos diferentes usos da linguagem e, em particular, da linguagem matemática, ancoramos nossas ideias às de *jogos de linguagem* e *semelhanças de família* presentes na filosofia tardia do filósofo Ludwig Wittgenstein.

Discutindo a respeito da ambiguidade gerada pelas palavras da linguagem cotidiana, percebemos que o registro sozinho não aponta caminhos para um único significado, ele precisa estar empregado a um contexto para adquirir tal significado. Isso implica dizer que muitas palavras do vocabulário matemático possuem outros significados quando são empregadas, por exemplo, na linguagem cotidiana[1]. Contudo, mesmo que uma palavra possua diversos usos, não implica dizer que temos diferentes conceitos acerca dela, por exemplo, no uso da palavra *jogo* não apresentamos problemas sobre seu emprego, sabemos usá-la em suas diversas acepções. O próprio Wittgenstein reconhece que usamos muitos conceitos com definições imprecisas. Para o autor, o termo "conceito" já é um conceito vago (I. F § 71).

Neste sentido, o movimento dos conceitos provenientes da *semelhança de família* não implica que seus usos sejam ambíguos, pois, ao fazerem parte das atividades humanas, isto é, das *formas de vida,* esses aspectos, apenas, indicam proximidades e distanciamentos. Pois, seus contornos têm sido deliberados em acordos comunitários.

Nesse estudo, mostramos ainda a necessidade que os alunos possuem da abreviação das ideias matemáticas por meio do algoritmo e da generalização de suas regras. Essa situação confere à matemática um caráter altamente genérico e intuitivo. Apesar de os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN's – manifestarem que essas ações pretendem reduzir o universo de compreensão do aluno, entendemos que se manifestam como um recurso à aprendizagem quando o aluno se depara com uma linguagem codificada que lhe parece inacessível. Entretanto, entendemos que em matemática há a necessidade desse tipo de codificação da linguagem matemática que busca atender a um aspecto de economia, e pretende facilitar os procedimentos de resolução. Com isso, o aluno enxerga no algoritmo a tentativa da redução de um conceito e a possibilidade de um uso eficaz e instantâneo.

Comungamos da ideia de que a matemática possui uma linguagem. E, como veremos, toda linguagem segue regras. Com a linguagem matemática não é diferente devido ao fato de atender a critérios sintáticos. Desse modo, para estruturar essa linguagem é necessário seguir uma sintaxe que orienta a combinação dos signos matemáticos que produzem forma e que seja reconhecida pelos seus falantes. Para a constituição dessa língua, contamos

[1] Tomamos a ideia de linguagem cotidiana como àquela que é usada no cotidiano das pessoas e do contexto que foge aos muros estritamente da linguagem matemática.

ainda com uma semântica que exprime os significados dos usos das expressões provenientes da sintaxe e que adquirem significados quando são aplicadas a um contexto. Quando não são respeitadas essas estruturas, a linguagem matemática pode parecer sem sentido, para o aluno, o que pode ocasionar em muitos casos o não entendimento das conexões entre cada símbolo e, portanto, daquilo que pretendem dizer ou descrever.

Não tomemos a ideia de que neste estudo pretendemos defender unicamente o ensino ‘tradicional’. Pretendemos mostrar a partir de nossa reflexão e de nosso referencial que o ensino de matemática ao longo da historia não foi muito diferente da atualidade, pois ainda está aprisionado ao processo de seguir algoritmos, regras sem sentido para o aluno e conforme mostrou nossa pesquisa não avançou muito nesse tipo de ensino. Aqui pretendemos mostrar que faz parte do fazer matemático seguir essas regras e que os algoritmos se constituem como caminhos que institucionalizam o processo de ensino e de aprendizagem na maioria das salas de aula de matemática.

Neste sentido, com o intuito de elucidar parte dos problemas vivenciados pelos alunos ao se depararem com sentenças matemáticas e não as compreenderem, realizamos a presente pesquisa, que tem como objetivo discutir o processo de aplicação e interpretação de regras matemáticas e não matemáticas adotados por alunos em situações de resolução de problemas de regra de três simples e/ou composta em contexto escolar.

A presente pesquisa está dividida em quatro capítulos, além da introdução, das observações finais, referências e anexos.

No primeiro capítulo, apresentamos o caminho metodológico, no qual expomos as motivações que nos levaram a realizar essa pesquisa. Neste, também apresentamos o cenário, os atores e as cenas que suscitaram o material empírico da pesquisa. Descrevemos os instrumentos e caracterizamos os procedimentos de análises. Tratamos da pergunta de pesquisa a qual nos propusemos a responder a partir dos objetivos que mostraram os caminhos que nos levaram a trilhar para responder tal pergunta. Por fim, apresentamos a justificativa que nos motivou escolher o conteúdo de regra de três nas aulas de matemática.

No segundo capítulo, fazemos um recorte do movimento conhecido por Virada Linguística, na qual situamos a radical mudança na concepção da filosofia e seu novo panorama na maneira de articular as perguntas filosóficas. Mostramos que é, principalmente, a partir desse movimento que a linguagem assume importância no pensamento filosófico e deixa de ser considerada apenas como um instrumento para expressar o pensamento. Ainda neste capítulo, traçamos um fio condutor da mudança da concepção do pensamento de Wittgenstein, em que passa da teoria da figuração, em que procura explicar as relações entre mundo e realidade, presente na obra *Tractatus Logico-Philophicus* (1921), para a análise da linguagem, sob a perspectiva das condições pragmáticas do uso linguístico, isto é, a linguagem passa a assumir características que fazem parte das atividades humanas, adquirindo significado nos contextos em que são aplicadas. Apresentamos, ainda, alguns dos principais conceitos wittgensteinianos, como: *jogos de linguagem* e os múltiplos usos de uma mesma sentença; *semelhanças de família* como o elo entre os múltiplos jogos de linguagem; e *forma de vida* em que discute as malhas de ações complexas presentes nas relações entre linguagem e cultura.

No terceiro capítulo, apresentamos a noção de regra baseada na concepção wittgensteineana, de estudiosos e de algumas pesquisas na educação matemática que tratam dessa temática. Mostramos que o domínio da aplicação correta da regra implica no domínio do conceito aprendido e, que se o aluno compreende a regra e a segue corretamente, provavelmente, chegará a um resultado que esteja de acordo com a lógica prevista pela matemática. Tratamos também da confusão da regra na matemática, ocasião em que os alunos aplicam regras aprendidas em experiências anteriores, como, por exemplo, no ano letivo anterior, que não são adequadas para aquela nova situação de aprendizagem. Tais confusões a respeito da aplicação da regra podem ser provenientes das *semelhanças de famílias* desses conteúdos.

No quarto capítulo, descrevemos e discutimos a respeito de nossa investigação em sala de aula. Fazemos uma breve caracterização do objeto matemático escolhido para estudo e apresentamos nossas seções de análise suscitadas do material empírico produzido pelos alunos. Como estratégias de análise, elegemos três seções que foram divididas em: confusão/interpretação equivocada da regra matemática; seguimento do algoritmo; Interpretação/análise dos alunos para os problemas de regra de três.

Trazemos os resultados das análises da pesquisa, a partir do referencial teórico adotado.

Por último, apresentamos ainda as observações finais, momento em que refletimos acerca do procedimento de aplicar e seguir regras no processo de ensino e de aprendizagem da matemática. Finalizando, expomos as referências bibliográficas utilizadas na pesquisa e os anexos.

Capítulo I – Caminho Metodológico

Neste capítulo, delineamos o processo metodológico adotado na pesquisa, a motivação que nos levou a enveredar pelo universo da linguagem, em particular, da linguagem matemática. Descrevemos os instrumentos de coleta de material empírico, o cenário da pesquisa, os atores que configuraram as cenas, bem como os critérios que apontam para a organização das seções de análises.

1.1 Motivação da Pesquisa

A presente pesquisa nasceu das inquietações em compreender as regras matemáticas e suas interpretações ainda como aluno da Educação Básica. Não obstante, essas dúvidas perduraram quando ingressamos nos Cursos de graduação em Licenciatura em Matemática, pela Universidade do Estado do Pará – UEPA e Licenciatura em Letras, pela Universidade Federal do Pará – UFPA. Em todas essas ocasiões, procurávamos compreender como a linguagem tornava-se um caminho ou um obstáculo para a compreensão dos conceitos, em particular, os matemáticos.

Em ambas as universidades, havia atividades de pesquisa e de extensão, cada uma a seu modo, que visava à melhoria dos estudos voltados para as práticas dos futuros professores. No Curso de Licenciatura em Matemática, organizamos semanas acadêmicas, nas quais eram ministrados minicursos, oficinas em que se apresentavam técnicas e metodologias que estavam voltados para o processo de ensino de matemática. Nesses eventos, procuravam-se elementos que respondessem às minhas inquietações a respeito das dificuldades em compreender a linguagem como fio condutor da articulação entre matemática e linguagem, todavia, estas indagações ainda continuavam sem respostas.

No outro curso, vivenciamos, a partir dos estudos da linguística, linguística de texto e sociolinguística, elementos de compreensão do funcionamento da linguagem enquanto estrutura voltada para o estabelecimento de comunicação nos diferentes grupos ou da análise dos aspectos fonético-fonológicos. No entanto, esses estudos, ainda ficavam ‘engessados’ à análise formal do funcionamento da língua enquanto fenômeno sócio-histórico, ora dando ênfase aos aspectos sintáticos, ora nos estudos dos léxicos.

A partir das reflexões iniciadas nesses momentos, percebemos, durante a formação, que ler e interpretar um texto em língua natural (nesse caso, a língua portuguesa) demanda o domínio de algumas propriedades imanentes ao texto: são os aspectos das propriedades contextuais e cotextuais. Marcuschi (2008) discute essas propriedades a partir da noção de gêneros textuais[2]. Para o autor, gêneros textuais são "os textos que apresentam padrões sócio-comunicativos concretamente realizados na interação de forças históricas, sociais, institucionais e técnicas" (MARCUSCHI, 2008, p. 155). A importância de se tomar os diferentes gêneros textuais no aprendizado de uma língua deve seguir dois princípios básicos: os cotextuais, que são as propriedades linguísticas da língua e do texto, as regras envolvidas que organizam e regulam sua estruturação, e; contextuais, que estão ligados aos aspectos que envolvem os interlocutores da enunciação, os usos de seus *jogos de linguagem,* em que atribuem sentidos em suas *formas de vida*. Mais adiante, delinearemos aquilo que pode ser elucidado por *jogos de linguagem* e *forma de vida*.

Como atividade de extensão, participamos como bolsista de um projeto da Universidade Federal, o Projeto/Curso Magistério Modalidade Normal (2º grau), do Programa Nacional de Educação na Reforma Agrária – Pronera. A concepção metodológica desse projeto/Curso estava ancorada na pedagogia da Alternância[3], com base na concepção freireana, desse modo, permitia maior flexibilidade com os jogos de linguagem daquele grupo de alunos, pois valorizava seus hábitos, costumes e demais ações dos que ali vivem. O projeto foi desenvolvido em áreas de assentamento da Reforma Agrária e sua execução se deu pelo Governo Federal em parceria com o Instituto Nacional de Colonização e Reforma Agrária – INCRA, Universidade Federal do Pará – UFPA e Movimentos Sociais. A participação nesse projeto me fez atentar para os diversos *'jogos de linguagem'* presentes nas diferentes *'formas de vida'*,

[2] Tomaremos como gênero textual a ideia discutida por Marcuschi (2008), a qual se aproxima ao que Bakhtin (2010) discute como teoria da enunciação.
[3] Em sentido geral, adotamos a ideia de pedagogia da alternância como sendo os períodos formativos que se repartem entre o meio sócio profissional e a escola (Cf. CALVÓ, 1999).

daqueles estudantes, principalmente, no que tange ao contexto de ensino e de aprendizagem em que a linguagem era requerida.

Nas aulas de matemática desse Projeto/Curso, os alunos trabalhavam com a tabulação e elaboração de gráficos a partir dos dados coletados para a preparação de seus trabalhos durante o período em que permaneciam em suas comunidades. Constatamos que eles conseguiam fazer a interpretação apenas oral desse material tabulado, apresentando muitas dificuldades nos textos escritos que envolviam a linguagem matemática e na leitura e interpretação dos dados sistematizados sob os modelos matemáticos.

Em nossa experiência, como professor na disciplina Linguagem Matemática III, para o curso em questão que apresentava em sua ementa, trabalhar a interpretação e a compreensão das regras envolvidas nos conteúdos que fazem parte do currículo de matemática referente às séries iniciais do Ensino Fundamental, verificamos que os alunos não compreendiam as regras matemáticas que estavam envolvidas naquele processo. Explicar situações como a regra do “vai um” na adição de parcelas ou na multiplicação pareciam coisas fora de suas realidades, pois não compreendiam o sistema numérico posicional. Desse modo, como compreenderiam a linguagem envolvida para explicar a seus futuros alunos? Os alunos desse projeto/Curso, futuros professores, sabiam desenvolver tais algoritmos da adição e multiplicação, porém não sabiam explicar as circunstâncias envolvidas naquela regra matemática.

Na Educação Básica, atuamos como professor nos ensinos Fundamental e Médio. Observamos nas turmas que, quando os alunos entendiam a linguagem envolvida nos problemas matemáticos, acertavam a resolução ou apresentavam uma resposta coerente. No entanto, quando não entendiam o enunciado desses problemas apresentavam respostas que pareciam ser mágicas (BARUK, 1996) ou completamente desconexas daquela situação de resolução. As repostas mágicas são aquelas em que os alunos “fazem surgir” e que não são comuns para aquele tipo de questão, isto é, respostas que não estão previstas pelo professor e pela lógica matemática daquele tipo de problema. Geralmente faziam a seguinte pergunta: *professor, o* *que a questão está pedindo*? Ao invés de procurarem ler e compreender o sentido que estava veiculado naquele problema matemático.

A partir da leitura do livro *Matemática e Língua Materna: análise de uma impregnação mútua* (2001), de Nilson José Machado, passamos a perceber que o processo de comunicação da linguagem matemática merecia maior destaque, pois, sem comunicação, não haveria ensino. Fomos observando como era realizada a tradução da linguagem matemática para a língua natural ou vice-versa, e buscávamos entender as estratégias de resolução dos alunos. Por meio de diálogos com os alunos, observávamos e escutávamos como eles realizavam essa tradução e como explicavam suas estratégias para resolver as atividades das aulas de matemática.

A escolha por essa linha de pesquisa se deu pela aproximação que poderia fazer entre os dois Cursos de graduação (Letras e Matemática), haja vista que encontrava nos estudos da compreensão da linguagem desenvolvidos no Curso de Letras caminhos que apontavam elucidar as indagações na interpretação de textos.

A partir desses estudos, buscamos traçar diálogos com textos e aulas de matemática. Escolhemos como referencial teórico os estudos desenvolvidos na área da Filosofia da Linguagem, principalmente, nos trabalhos de Ludwig Wittgenstein e de seus estudiosos como aporte para a sedimentação das ideias de nossa pesquisa. Foi a partir dos estudos realizados por esse filósofo que estabelecemos pontos de aproximação, por meio da linguagem, com as dificuldades no processo de ensino e de aprendizagem da matemática, pois sua filosofia é capaz de apontar caminhos que levam à compreensão aos estudos da linguagem, em particular, podendo também ser aplicadas aos estudos da linguagem matemática.

O conteúdo das aulas de matemática escolhido para desenvolver nosso estudo foi a regra de três. A escolha desse conteúdo se deu por requerer do aluno a leitura e o reconhecimento das grandezas envolvidas nas situações-problemas. Nesse processo, o aluno pode analisar se se tratam de grandezas diretamente ou inversamente proporcionais. Assim, ao analisar a situação-problema, os alunos teriam a experiência de aplicar um conjunto de regras que possibilitasse buscar uma solução. A fim de situar o conteúdo de estudo, no capítulo IV, faremos uma explanação mais detalhada acerca do surgimento e das práticas da regra de três.

Nos próximos subtópicos, descreveremos como aconteceram os procedimentos e abordagem metodológica da pesquisa, bem como as cenas em que dividimos a estruturação da coleta/produção do material empírico e de elementos que permitiram iniciar a constituição dos processos de análise das atividades desenvolvidas com os alunos. Essas cenas foram divididas em três momentos: o primeiro foi a observação; o segundo, a aplicação das atividades acompanhada de uma entrevista e o terceiro, a análise dessas atividades.

1.2 Primeiros passos para a coleta do material empírico

Os primeiros passos para a coleta do material empírico aconteceram no mês de maio do ano de 2010, quando fizemos o primeiro contato com a escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará. Nesse primeiro encontro, conversamos com o diretor de estágio da escola e ele nos autorizou a realizar a pesquisa. Logo em seguida, encaminhou-nos ao professor da turma. Ao expor nossa proposta de trabalho ao professor, este concordou em ceder espaço para o desenvolvimento da pesquisa.

Após esse contato, marcamos outro encontro para o mês de agosto, do mesmo ano. Nesse mesmo mês, expusemos a nossa intenção de pesquisa. A partir daí, discutimos como seria a nossa participação em sala de aula e, então, deixamos acordado o retorno para o mês de outubro. Nesse mês, reunimo-nos novamente e apresentamos nossos instrumentos de pesquisa, e, então, marcamos as datas para iniciar as observações. Concordamos com o professor para que as primeiras observações iniciassem no mês de novembro.

Quando iniciei as observações, o professor estava finalizando o conteúdo de equações do primeiro grau com duas variáveis. Após o término desse conteúdo, iniciou o assunto de proporcionalidade, pois analisando os livros didáticos adotados pelo professor e a proposta da escola esse conteúdo antecede os conteúdos de razão, proporção, grandezas proporcionais e regra de três todos dispostos nesta ordem.

A pesquisa está dividida em três momentos, que chamamos de cenas. Procuramos assentá-la sob a modalidade de pesquisa qualitativa por permitir uma triangulação entre diferentes procedimentos para a obtenção do material empírico e de sua análise (BORBA; ARAÚJO, 2006), pois a realidade, principalmente da sala de aula é múltipla e observar as atitudes dos atores pesquisados permite ao pesquisador já exercitar suas primeiras percepções.

Partindo do pressuposto que o processo de ensino se dá por meio da linguagem e do discurso do professor, entendemos que a aprendizagem se realiza pelas percepções dos alunos. Assim, concordamos com Bicudo (2006), quando afirma que as pesquisas em Educação Matemática,

> Solicitam manifestações qualitativas porque buscam manifestações na percepção, porque trabalham com a linguagem, com o discurso. Seus dados são sempre *subjetivos*, pois são percepções de um sujeito para quem o mundo faz sentido, mas também são intersubjetivas, porque são sempre objetos intencionais; portanto, são frutos do movimento de expressão da consciência para (...) o mundo (...) o outro (BICUDO, 2006, p. 112-113).

A autora corrobora conosco no sentido de que o sujeito deve ocupar lugar de destaque no ambiente pesquisado. Entendemos que a partir disso justifica-se a escolha da modalidade de pesquisa. Pois, além de contemplar as manifestações da subjetividade dos sujeitos e o discurso de quem ensina (professor), os dados são sempre subjetivos, isto é, atendem a interesses particulares e seus significados são múltiplos, passíveis de interpretações em que os métodos tradicionais não dão conta de abarcá-los.

Ponte (2008) mostra que essa modalidade de pesquisa é muito frequente em educação e, na educação matemática, tem se tornado cada vez mais comum. E que a razão pela escolha dessa modalidade, qualitativa, é, basicamente, a de que a atenção dada aos múltiplos fatores que compõem a natureza da sala de aula permite uma análise do contexto aos quais os sujeitos pesquisados estão envolvidos e os significados atribuídos por eles a estes elementos, podem desencadear situações de reflexão suficientes para encontrar respostas para a questão de pesquisa.

De acordo com Bogdan e Biklen (1994), para que uma pesquisa possa ser considerada qualitativa, deve atender a cinco características, não precisando, necessariamente, estar engendrada. São elas:

1) O ambiente natural é a fonte de pesquisa e o pesquisador o principal instrumento. O contato direto do investigador com o ambiente é um pressuposto;
2) A pesquisa qualitativa é descritiva e considera que todos os elementos tem potencial para ajudarem na construção da compreensão sobre o objeto de estudo;
3) O processo é mais importante do que o produto propriamente dito;
4) A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo, ou seja, à medida que os dados vão sendo recolhidos, as abstrações vão sendo feitas, sem a preocupação de comprovar hipóteses estabelecidas a *priori*; e
5) Constituem-se focos de atenção os significados dados pelos participantes aos elementos em questão.

Nesse sentido, acreditamos ter escolhido a modalidade de pesquisa que mais se adapta ao tipo de investigação a qual desenvolvemos, e por ser aquela que mais tem se destacado nesse ambiente de pesquisa.

Com o objetivo de conhecer o que havia sido publicado na área da Educação Matemática com ênfase nos estudos sobre a linguagem, realizamos um levantamento bibliográfico que se consistiu na análise das produções que versam sobre o tema que buscamos investigar. Elegemos as pesquisas que possuem imbricações da língua natural e linguagem matemática, suas interfaces e publicações que compreendem a produção de textos nas aulas de matemática.

A busca desse material foi realizada nas publicações dos Programas de Pós-Graduação em Educação e Educação Matemática das universidades brasileiras; no Banco de dados da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Capes –, em especial, dos periódicos; e no banco de teses e anais da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM. Esse levantamento se deu por meio de palavras-chave e também analisando os resumos, e principais resultados dessas pesquisas.

Após o levantamento realizado na revisão bibliográfica e o amadurecimento das leituras, a pergunta orientadora da pesquisa foi sendo definida e tomando contorno mais adequado para aquilo que queríamos investigar. A partir daí, delimitamos o referencial teórico e tivemos uma dimensão dos tipos e enfoques das pesquisas já realizadas com a mesma temática a que nos propomos investigar.

Corroborando com nossas iniciativas, Alves-Mazzoti (1998) afirma que, no processo de revisão da literatura o pesquisador,

> Vai progressivamente conseguindo definir de modo mais preciso o objetivo de seu estudo, o que, por sua vez, vai lhe permitindo selecionar melhor a literatura realmente relevante para o encaminhamento da questão *[de pesquisa]*, em um processo gradual e recíproco de focalização (ALVES-MAZZOTI, 1998, p. 180, grifos nosso).

Conforme discutido pelo autor supracitado, foi o que fizemos no intuito de delinear os rumos da nossa pesquisa, esclarecer os objetivos para, então, irmos a campo observar e coletar o material empírico.

Ainda nesse processo de delineamento da pesquisa, a participação no Grupo de Estudo em Linguagem Matemática – GELIM – proporcionou-nos observar, a partir das pesquisas que estavam se encerrando, por alguns integrantes do grupo, como o pesquisador deve agir diante dos dados e dos sujeitos pesquisados, bem como eleger instrumentos que não permitam confusões na coleta do material empírico e de como analisá-los. Esse momento foi fundamental para perceber como se desenvolve a pesquisa no ambiente desse programa de pós-graduação.

Outro momento rico para a sedimentação das ideias de nossa investigação foi à realização do III Seminário de Avaliação do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas – SAPPECIM –, no âmbito do Programa de Pós-Graduação do Instituto de Educação Matemática e Cientifica – IEMCI. Neste seminário, recebemos contribuições que delinearam o encaminhamento da análise do material empírico, inclusive, recomendações para que observássemos as situações em que eram trabalhados os jogos de linguagem realizados em/nas aulas, haja vista que, para Wittgenstein, a comunicação acontece por meio dos jogos de linguagem e é neles que a linguagem se realiza.

1.3 Cenário da pesquisa

O cenário da pesquisa se deu em um espaço de sala de aula. Para a intervenção, coleta de dados e observações, elegemos a Escola de Aplicação da Universidade Federal do Pará, pois esta procura trabalhar o conhecimento sob a perspectiva do aprendizado em suas dimensões: científico, tecnológico, social e cultural. Além disso, por aceitar de modo mais trivial pesquisadores e experimentações pedagógicas.

Nesta pesquisa, não tivemos em nenhum momento a intenção ou o interesse de trabalhar com situações que extrapolasse o cotidiano da sala de aula, isto é, nos mantivemos fiéis aos *jogos de linguagem* que são jogados nesse ambiente de ensino. Neste sentido, os problemas matemáticos adotados são todos retirados de livros didáticos, apesar de terem sofrido algumas modificações com o objetivo de eliminar possíveis ambiguidades e ajustes de valores. Nesse caso, mantivemos a estrutura e boa parte dos textos de todos os problemas.

1.3.1Atores da Pesquisa

Os atores da pesquisa são trinta e dois (32) alunos de uma turma de 7º ano das séries finais do Ensino Fundamental e seu professor de matemática. Desse total, escolhemos aleatoriamente quinze (15) alunos e o professor para uma entrevista. Buscamos observar as relações que se tecem no estudo da regra de três neste ambiente de ensino.

1.4 Cenas que suscitaram o material empírico

A partir da pesquisa realizada em sala de aula, analisaremos como os alunos interpretam e aplicam as regras sobre os problemas de regra de três e que conhecimentos eles mobilizam para realizar essas interpretações.

As observações que realizamos em sala de aula foram gravadas em áudio e acompanhadas de alguns registros em diário de bordo. Estas tiveram o intuito de nos sensibilizar no momento em que estivéssemos analisando o material empírico coletado para que percebêssemos de que forma o professor interagiu com os alunos ao explicar o assunto de regra de três. Neste sentido, examinamos se foram evidenciadas as regras matemáticas e que importância foi dada às regras linguísticas e ao domínio do conhecimento que o aluno possuía anterior àquela experiência, a fim de que atribuíssem sentido no momento em que fossem organizar os dados para calcular a regra de três.

A coleta do material empírico se deu pela aplicação de teste, isto é, aplicação de problemas de regra de três[4]. Essa aplicação foi dividida em três cenas. Na primeira cena, após o professor introduzir o assunto e apresentar alguns exemplos e exercícios, aplicamos testes referentes a problemas que envolviam apenas regra de três simples, ou seja, problemas em que apresentavam apenas duas grandezas. Havia problemas que apresentavam grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

Na segunda cena, logo após a explicação do professor, e os alunos perceberem que nesse momento a resolução se daria de modo mais detalhado, aplicamos a segunda bateria de testes que envolvem problemas de regra de três composta. Fizemos a escolha por problemas que envolvia apenas três grandezas, pois partilhamos da ideia de que o princípio de resolução de problemas com mais de três grandezas é o mesmo adotado para resolver problemas com três grandezas. Com base nas observações e nas atividades realizadas pelos alunos, percebemos que conseguiram intuir que a ideia para resolver problemas com mais de três grandezas é a mesma. Sendo assim, julgamos que não seria necessário aplicar problemas que envolviam mais de três grandezas.

Após a aplicação das baterias de testes em separado, conforme havia sido ensinado aos alunos, isto é, seguindo a ordem de ensinar a regra de três simples e depois a regra de três composta, aplicamos mais uma bateria de testes. Para a realização dessa cena, aplicamos simultaneamente problemas de regra de três simples e regra de três composta.

Nesta última cena, queríamos que os alunos identificassem e resolvessem cada um dos problemas propostos. Pressupomos que se os alunos conseguissem identificar a quantidade de grandezas e os procedimentos de resolução de cada problema, ficaríamos tentados a dizer que

---

[4] Adotamos a expressão “problemas de regras de três” quando referirmos aos problemas aplicados aos alunos nessa pesquisa, pois todos foram retirados de livros didáticos e estavam no espaço, dos livros, que se referem ao conteúdo de regra de três. Esse esclarecimento se dá para que não sejam confundidos com problemas que envolvem ou podem ser resolvidos por regra de três.

eles já dominavam as regras requeridas para a resolução de um problema de regras de três simples e/ou composta. As regras para a resolução desse tipo de problema, conforme foram ensinadas pelo professor, serão explicitadas mais adiante no capítulo IV.

1.4.1Instrumentos de pesquisas

Os instrumentos de pesquisa adotados foram os testes aplicados aos alunos e duas entrevistas: uma com os alunos e a outra com o professor. O primeiro teste (anexo A) também funcionou como 'testes piloto', para que verificássemos se os alunos haviam entendido os problemas e se saberiam resolvê-los conforme o procedimento ensinado pelo professor. Também procuramos observar se os enunciados dos problemas que propomos aos alunos não apresentavam ambiguidades para que dessa forma não gerassem interpretações que não estivessem condizentes aos objetivos da pesquisa.

Conforme já mencionado, as atividades aconteceram em três cenas, as quais acompanharam o ritmo das aulas. A aplicação do primeiro teste (anexo A) se deu após iniciar o conteúdo. Como de *praxe*, o professor inicia explicando o assunto de regra de três simples e posteriormente passa à regra de três composta. Assim, após as explicações e resoluções de exercícios por parte do professor que mostrou aos alunos como resolver esse tipo de problema, solicitamos aos alunos que respondessem e entregassem o teste para que fizéssemos nossas primeiras análises.

A partir da aplicação desses primeiros testes julgamos necessária a realização de uma entrevista em que os alunos relatariam o que não foi possível identificar em seus registros, como, por exemplo, as estratégias de pensamento adotas para a resolução do problema. Para orientar as perguntas, durante a entrevista, elaboramos um roteiro semiestruturado (Anexo D), a fim de facilitar o diálogo com os alunos.

O professor deu sequencia às aulas, chegando ao estudo da regra de três composta. Os alunos relataram, na entrevista, que nesse tópico de estudo tinham dificuldades em analisar os problemas, porque, havia mais de duas grandezas. Após o professor explicar e resolver alguns exercícios, entregamos aos alunos mais uma bateria de problemas (Anexo B), todos de regra de três composta. Os alunos resolveram-na e recolhemos para posterior análise.

Após a correção das duas baterias de exercícios, verificamos que os alunos haviam compreendido os procedimentos de resolução de problemas de regra de três, e, que apesar de haver erros em suas resoluções, sabiam quais os procedimentos que deveriam ser adotados. Não obstante, decidimos aplicar mais uma terceira bateria de problemas (Anexo C). Nessa última, havia tanto problemas de regras de três simples como problemas de regra três composta, estando tais problemas misturados uns aos outros e os alunos deveriam analisá-los e resolvê-los.

Para esclarecer como os alunos haviam construídos suas estratégias de resoluções, realizamos uma entrevista. Para isso, sorteamos aleatoriamente quinze (15) alunos. A entrevista teve como intuito que esses alunos relatassem como faziam para interpretar e aplicar a regra matemática, ou seja, a 'analítica'[5] que o professor havia ensinado. A entrevista permitiu aos alunos que relatassem o que sabiam, bem como, explicitassem suas dúvidas acerca da resolução daqueles problemas. Isso também permitiu identificar as estratégias de resoluções que não foram contempladas nas observações ou nos registros das resoluções das atividades.

Na entrevista, utilizamos um roteiro semiestruturado (Anexo D) que tinha como objetivo deixar os alunos explicarem espontaneamente como interpretaram e como aplicaram as regras na resolução dos problemas. Fizemos perguntas que estimulavam os alunos a dizerem como interpretaram e aplicaram a '*analítica'* ensinada pelo professor em suas resoluções nos problemas de regra de três.

Segundo Pádua (2000), a entrevista também possibilita que os dados obtidos possam ser analisados quantitativa e qualitativamente, podendo ser utilizada com qualquer segmento da população, inclusive sendo a semiestruturada uma técnica muito propícia para ser usada em pesquisas educacionais, pois possibilita aprofundar temas específicos.

---

[5] Entender a "analítica" como o termo em que o professor utilizou para designar a análise aplicada para saber se as grandezas eram diretamente ou inversamente proporcionais.

Para Fiorentini e Lorenzato (2006),

> Se o pesquisador pretende investigar o movimento do pensamento dos alunos na resolução de problemas matemáticos, terá que escolher um instrumento que permita explicitar as estratégias e heurísticas utilizadas pelos alunos. Ou seja, pedir, nesse caso, que os alunos pensem em voz alta durante a resolução do problema, ou registrem no caderno como construíram sua resolução (FIORENTINI; LORENZATO, 2006 p. 98-99).

Esses autores corroboram com nossos pensamento quando criamos mecanismos que permitem tal esclarecimento por parte dos alunos, por exemplo: as observações das aulas e a aplicação de atividades que permitiram aos alunos explicitar por meio da escrita e de entrevista as estratégias do movimento de seus pensamentos. Além de conversas fora da sala de aula com o professor e com alguns alunos.

1.5 Pergunta orientadora da Pesquisa

A indagação que orientou a pesquisa que ora descrevemos é assim enunciada: ***Que regras matemáticas os alunos aplicam na solução de problemas de regra de três?***

1.5.1Objetivos da pesquisa

1.5.1.1 Geral

- Discutir o processo de aplicação e interpretação das regras matemáticas em problemas de regra de três.

1.5.1.2 Específicos

- Verificar que sentidos são atribuídos pelos alunos na interpretação de problemas de regra de três diretamente ou inversamente proporcionais.

- Analisar a compreensão das regras matemáticas no processo de ensino e aprendizagem.

- Analisar de que maneira o algoritmo influencia na compreensão dos conceitos matemáticos por parte dos alunos.

1.6 Procedimentos das análises

Os procedimentos de análises adotados nesta pesquisa estão organizados em três seções. Estas seções surgiram de uma análise preliminar que fizemos do material empírico e também foram norteados pelos objetivos específicos da pesquisa. Ao término da aplicação da última bateria de testes, passamos a observar características que permitissem triangular os dados e o referencial teórico, a fim de perceber as regras e procedimentos mobilizados pelos alunos em suas resoluções.

Capítulo II – Referencial Teórico

Neste capítulo, resgataremos alguns fragmentos da Filosofia da Linguagem e dos estudos da linguagem em linhas gerais. Para isso, utilizaremos alguns conceitos e estudos que surgiram no que ficou conhecido como a *Virada Linguística.* Mostraremos a partir dos estudos da linguagem a guinada que ocorreu nas concepções filosóficas e no modo de pensar de Wittgenstein, apresentaremos, ainda, alguns contornos dos principais conceitos presente em sua segunda filosofia.

2.1 Virada Linguística e surgimento da nova concepção de filosofia – a Filosofia da Linguagem

No final do século XIX, ocorreu o que Gustav Bergmann intitulou de Virada Linguística (*linguistic turn*) (Rorty, 1992). A Virada Linguística[6] causou uma radical transformação na maneira de ver e pensar a filosofia. É nesse momento em que os filósofos encontram na linguagem refúgio para repulsar a metafísica. Ao invés de buscar por uma 'essência', 'substância' e checar os limites e propriedades da razão, tem-se uma preocupação com a estrutura significante da linguagem. Assim, a relação pensamento e linguagem acontece por meio dos enunciados linguísticos.

Esse movimento colocou a linguagem no centro das discussões filosóficas agindo como forma de reação contra o idealismo e o psicologismo até então dominante. A Virada Linguística leva a uma reformulação da filosofia, em outras palavras, a uma mudança de paradigma, não mais em busca por um fundamento último para a verdade (ARAÚJO, 2007), mas na compreensão da linguagem nos seus diferentes usos. Para Davidson (1982), a Virada Linguística é uma expressão que nomeia um novo paradigma quanto ao modo de se fazer filosofia e que veio para sustentar as ideias filosóficas a partir de análises da linguagem.

A filosofia da linguagem desencadeia um conjunto de reflexões distintas e não se deixa substituir pelo puro essencialismo da linguagem enquanto

---

[6] Para este trabalho consideraremos como virada linguística todo o conjunto de situações que levou a Filosofia à busca pela compreensão de seus problemas por meio dos estudos da linguagem. Desse modo, quando nos referirmos à Virada Linguística estaremos contemplando a virada epistemológica, a linguística e pragmática.

cálculo, como inicialmente pretendia Leibniz e posteriormente, os logicistas, espelhados nas ideias do filósofo E. Russel e de G. Frege. Estudiosos como Dummett (1979 apud MARCONDES, 2001, p. 52), afirmam que é na filosofia de "Frege que surge a preocupação filosófica com a linguagem". Seu ponto de partida se deu a partir dos problemas de fundamentos da matemática, quando na busca por uma linguagem formal procurou reduzir a aritmética à lógica.

É nesse cenário que as discussões passam das reflexões filosóficas assentadas na "consciência", da "atividade mental" enquanto atividades abstratas e, enquanto objeto lógico de caráter subjetivo para a análise do pensamento a partir da linguagem e a maneira como o pensamento pode ser comunicado, isto é, a partir do funcionamento da linguagem, dos princípios que governam o seu uso (MARCONDES, 2001).

Segundo Bastos e Candiotto (2007), as primeiras interpretações da Filosofia da Linguagem eram de cunho empirista ou formalista. No seu início, desenvolveu-se em diferentes direções, sendo marcada por preocupações linguísticas, técnicas e metodológicas passando a chamar a atenção de filósofos, psicólogos, antropólogos, historiadores e etc., que buscavam por uma fundamentação epistemológica. Sempre com a necessidade de "evitar o caráter problemático das investigações sobre o pensamento, estados da consciência e a visão mental" (MARCONDES, 2001, p. 53).

A linguagem passa a ter, então, uma função diferente, não mais de mero instrumento a serviço do homem. Ela passa a ser verdadeira condição de possibilidade para que o sujeito compreenda os objetos do pensamento, pois só tem acesso a eles pela linguagem. A linguagem não é a expressão do pensamento é a própria maquinaria deste, é a única forma que temos de acessar ao pensamento, nosso e de outrem. Nessa perspectiva filosófica, não há espaço para o *cogito*, o *a priori*, nela o sujeito é o homem que fala nas e pelas trocas linguísticas, constituídos por uma linguagem que atende a critérios públicos. É assim que se dá a produção de conhecimento.

Para Marcondes (2001, p. 54), a função da "análise filosófica da linguagem não é descobrir e explicar os sentidos de um trecho do discurso, mas descrever o sistema produtor da significação. Não o que o ato linguístico significa, mas como chega a significar”. Desse modo, não se trata de um estudo empírico da língua, mas da busca pela formulação de uma teoria da linguagem que tenha como núcleo a teoria do significado.

A linguagem é o veiculo que mediatiza todas as relações significativas entre sujeito e objeto, possibilitando o entendimento mútuo sobre os sentidos de todas as palavras usadas e sobre os sentidos das coisas em seus contextos e usos. Isso nos faz acreditar que no uso dos sinais de uma língua está presente a dimensão pragmática da linguagem, isto é, o uso social que uma comunidade faz dessa linguagem, e, como tal, essa dimensão integra as dimensões semântica e sintática. Não podemos limitar a linguagem a apenas essas dimensões supracitadas, para a articulação completa dela devemos considerar também os aspectos gramatical, lógico e pragmático-discursivo. Se um desses recursos faltar ou for sobreposto, o resultado é uma concepção equivocada e limitada do fenômeno linguagem (ARAÚJO, 2007).

Após a Virada Linguística, as análises da linguagem se voltam para os usos, os contextos, os falantes, os discursos. Nesse momento em que a linguagem se torna o instrumento para a compreensão do pensamento e um caminho para a possível dissolução dos problemas filosóficos, exclui-se a subjetividade no sentido de propriedade de um sujeito que apreende e representa o mundo. No lugar de ser a expressão do pensamento com relação às formas transcendentais, a linguagem passa a ser uma estrutura articulada independente de um sujeito ou de uma vontade individual, passando agora a usos públicos com jogos de linguagem que se façam ser compreendidos (ARAÚJO, 2007). Para significar, é preciso que a linguagem se estruture semanticamente, com isso a relação pensamento e realidade se faz por meio dos enunciados linguísticos.

Um dos momentos mais importantes dessa reformulação da filosofia se deu com a passagem da análise lógico-linguistica, cujo núcleo é a proposição com o significado e a referência que alcança seu ápice com a teoria da figuração tractatiana, para a análise da linguagem ordinária sem núcleo algum (ARAÚJO, 2004). A linguagem deixa de ser propriedade mental, sua significação se dá por uma combinação de signos regidos por regras que se realizam em um sistema linguístico que no seu uso assume determinado valor. Pelo aprendizado dessas regras que são públicas é possível realizar múltiplos jogos linguísticos, ou, conforme Wittgenstein, ‘jogos de linguagem’. Para Araújo (2004), a significação não se dá pela relação entre a palavra que designa e o objeto designado, resultado de uma suposta relação direta com a coisa nomeada, mas por pertencer ao sistema da língua, que tem suas regras próprias, cujo funcionamento não depende de uma consciência individual, limitada a expressar o pensamento. A linguagem é uma ferramenta pública, ordinária, do dia a dia, suas regras tem um caráter pragmático, não se restringem à forma lógica da proposição, aliás, não são suscetíveis de formalização, pois se prestam a um uso contextual.

A partir desse momento, a linguagem tem como ponto de articulação o uso em contextos, de modo que a significação não depende da relação referencial entre língua e mundo. O que é afirmado ou pressuposto é realizado ou dito em uma situação de emprego do quotidiano, lugar onde a língua se realiza, em contextos dialógicos, como parte de culturas e formas de vida. Não nos comunicamos com frases construídas pela gramática e sim por situações enunciativas ditas por alguém, a alguém em determinada situação. Nesse sentido, ao falarmos, estamos em sentido *Latus,* comunicando mais do que as palavras possam dizer, há as intenções que estão presente no agir de um contexto em que as comunidades realizam a comunicação.

A corrente filosófica de maior influência nessa nova concepção de linguagem é o pragmatismo[7] que tem em seus maiores expositores filósofos como Austin, Habermas, Wittgenstein, que apesar de estar ‘ligados’ a mesma corrente, esses filósofos apresentam concepções diferentes de encarar os estudos da linguagem. Austin apresenta os *atos de fala*, distinguindo-os em locucionários, ilocucionário, perculocionário. Para esse autor, o objeto a ser estudado não deve ser a oração em si, mas a produção de um enunciado em determinado contexto de discurso, pois, há todo um sistema de práticas e valores, crenças e interesses a ele associado. Habermas com a teoria da *Ação*

[7] Uma distinção entre pragmática e pragmatismo é feita por Marcondes (2000), considerando que em muitos aspectos se aproximam, mas não se confundem. Ambos valorizam a linguagem comum e o seu uso concreto como a principal instância de investigação da linguagem. Nessa pesquisa usaremos ambos os termos no sentido expoente da filosofia da linguagem.

comunicativa pressupõe a linguagem como entendimento da interação social dos sujeitos falantes. Dentre esses filósofos, destaca-se Wittgenstein[8] em suas duas concepções filosóficas. A primeira, que acreditava que tanto a linguagem quanto o mundo possuíam uma estrutura lógica subjacente que era necessário haver uma correspondência entre linguagem e mundo. E a segunda, quando desenvolveu a ideia de *jogos de linguagem*, em que considera que ao usarmos a linguagem estamos agindo num contexto que envolve diversas práticas sociais. A linguagem determina, a partir dessas práticas, o modo como uma comunidade age no mundo, Wittgenstein chamou-as de *jogos de linguagem*.

2.2 Múltiplos jogos de linguagem

No parágrafo segundo das *Investigações Filosóficas*[9], Wittgenstein nos apresenta um diálogo entre um trabalhador e seu ajudante. O trabalhador grita 'lajota'. Como o ajudante compreende que deve levar-lhe uma lajota? Para Wittgenstein, a compreensão, por parte do ajudante, está ligada ao funcionamento da linguagem. Para que haja a compreensão desse funcionamento, o autor das *Investigações* usa a expressão '*jogo de linguagem*' que tem a ideia de contrapor-se à concepção de que cada nome na linguagem nomearia (descreveria) objetos do mundo e assim cada proposição da linguagem descreveria um fato no mundo (SILVA, 2011). Essa concepção, a qual Wittgenstein, em sua segunda fase, se contrapõe está presente em sua primeira obra, o *Tractatus Logico-Philosophicus*[10], publicada em1921.

Nessa primeira obra, Wittgenstein procura traçar os 'limites do pensamento', os quais somente seriam possíveis pela linguagem. Para o autor, "os limites do meu pensamento é o limite do meu mundo" (Tractatus, 1993). Se não compreendemos a linguagem que descreve o mundo onde habitamos, não desenvolvemos o conhecimento, as crenças, o significado e os valores éticos e estéticos desse mundo.

[8] Comumente costuma-se referir-se a "primeiro" e "segundo" Wittgenstein. Esse autor apresenta dois momentos 'distintos' em sua filosofia. O "primeiro" Wittgenstein refere-se à filosofia de sua primeira obra o *Tractatus Logico-Philosophicus* de 1921 e, o "segundo" Wittgenstein que compreende os escritos a partir de 1933, cuja principal obra é as *Investigações Filosóficas.*

[9] De agora em diante, referiremos à obra *Investigações Filosóficas*, por apenas *Investigações*.

[10] De agora em diante referiremos à primeira obra de Wittgenstein, o *Tractatus Logico-Philosophicus*, por apenas *Tractatus*.

Para Grayling (2002),

> O fundamental no Tractatus é a ideia de que a linguagem tem uma estrutura lógica subjacente, cujo entendimento mostra os *limites do que pode se dizer* claro e significativamente (...) e o que pode ser dito é o mesmo que pode ser pensado, desse modo, tão logo apreendamos a natureza da linguagem e, portanto, do que pode ser pensado claro e significativamente, teremos mostrado o limite além do qual a linguagem e o pensamento tornam absurdos (GRAYLING, 2002, p. 29, grifos nosso).

É nessa esfera de considerar os limites do sentido que brotam os problemas filosóficos que são resultados de mal-entendidos a respeito da linguagem. Para Wittgenstein, é tarefa da filosofia tornar claro a natureza de nossa fala e de nosso pensamento. É nessa direção que o *Tractatus* tem o objetivo de 'solucionar' os problemas da filosofia a partir da compreensão de como funciona a linguagem na relação com o mundo, ou seja, de explicar como o significado se liga à proposição.

No *Tractatus* não era concebível nem uma noção de vaguesa, as proposições eram submetidas a uma análise lógica e se não fosse possível definir um valor de verdade eram consideradas 'absurdas', ou de fato, não eram consideradas proposições. Silva (2011) aponta que para o autor do *Tractatus,* as equações matemáticas não eram consideradas proposições e sim pseudoproposições, pois nada descrevem a respeito de a realidade. A proposição "exprime de uma maneira determinada, claramente especificável, o que ela exprime: a proposição é articulada" (Tractatus, 1993). Desse modo, deveria haver fatos no mundo que a verificasse ou falsificasse. Uma proposição deveria sempre possuir um significado determinado. Assim, quando uma proposição designa um fato, isto é, um estado de coisas ocorre que ela é verdadeira, do contrário é falsa. É a partir dessa confirmação de verdade, que se pode verificar se as demais proposições compostas, a partir da proposição elementar, são verdadeiras ou falsas.

Para Wittgenstein (1993), "todas as proposições de nossa linguagem corrente são, de fato, tais como são, perfeitamente ordenadas de um ponto de vista lógico" (Tractatus, 1993). Desse modo, a forma de representação, ou forma lógica, ou ainda forma da afiguração enquanto essência da linguagem e do mundo assegura não só a ligação entre a linguagem e a realidade, como também o parâmetro universal que junta qualquer proposição (CONDÉ, 1998).

Após a publicação desse livro, *Tractatus Lógico-Philosophicus*, Wittgenstein afasta-se da filosofia e vai trabalhar como professor de ensino primário em escolas de uma região da Áustria. Muitos comentadores julgam decisiva essa escolha do filósofo para a sua mudança de concepção em relação à sua filosofia. O filósofo percebe que aquilo que havia proposto no *Tractatus* não dava conta de responder as ilusões causadas pelo mal uso da linguagem. Desde então, decide voltar à filosofia e reformula a sua maneira de pensar a linguagem, abandonando decisivamente aquele 'velho modo de pensar' e reconhecendo os equívocos que havia cometido naquela primeira obra. A partir daí, Wittgenstein pretende uma "cura" que cercearia os problemas filosóficos, ou seja, a "cura" para os problemas oriundos do mal-uso da linguagem (SILVA, 2011).

Essa mudança de pensamento se dá pelo que o filósofo chamou de 'terapia filosófica'. Moreno (2000), esclarece-nos que, para Wittgenstein, a terapia é considerada como uma atividade filosófica que "procura detectar e assim clarificar situações conceitualmente confusas" (p. 72). Ainda segundo Moreno (2005), a terapia, "permite mudar a maneira habitual de interpretar nossos conceitos, ampliando, com isso, nossa disposição para pensar outras formas de sentido e, principalmente, para considerá-los legítimas possibilidades de organizar a experiência" (p. 225). Para Wittgenstein, "não há um método da filosofia, mas, sim, métodos, como que diferentes terapias" (I.F §133).

Como resultado dessa terapia, que se isenta de qualquer sugestão sobre as verdadeiras ou legitimas soluções a serem adotadas, Wittgenstein chegou ao que chamou de '*jogos de linguagem'*. Esses jogos não precisariam apresentar ligações entre si, haveria apenas meras '*semelhanças de família'*. Segundo o filósofo, não existia, apenas, um jogo de linguagem, e sim, múltiplos jogos de linguagem. Para Wittgenstein, a confusão filosófica se origina do entrecruzamento dos jogos de linguagem, isto é, da utilização de termos de um jogo de linguagem conforme a regra de outro jogo.

Segundo Glock (1998), os jogos de linguagem foram inicialmente chamados de *práticas de ensino* que seria as “formas primitivas da linguagem”, signos mais simples que são usados em nossa linguagem quotidiana, “com os quais uma criança começa a usar as palavras” (p. 226). Logo em seguida, Wittgenstein percebe que essa noção – de práticas de linguagem – nada mais é que “fragmentos de nossa linguagem”. Com efeito, essas ‘formas primitivas’ evoluíram para a ideia, definitiva, de jogos de linguagem, como sendo um “sistema de comunicação”, por meio do qual a criança aprende a sua língua natural, ou pela qual esta lhe é ensinada (*idem)*.

Esse novo sistema – os jogos de linguagem - deve ser completo, pois exprimem toda a linguagem de uma comunidade. Wittgenstein esclarece que apesar de na comunicação os indivíduos associarem muitos nomes a objetos, procedimento que se dá apontando, isso não se caracterizaria como uma relação monolítica, pois a criança, mais tarde, aprenderá a fazer usos distintos de um mesmo signo, compreendendo que esse signo possui significado conforme sua aplicação a um contexto. Para Wittgenstein, um signo não adquire significado por estar associado a um objeto, mas sim por ter seu uso governado por regras. “O significado de uma palavra é seu uso na linguagem” (I.F § 43) ou ainda “todo o signo sozinho parece morto. O *que* lhe dá vida?– no uso, ele vive” (I.F § 432).

Assim, é que “resgatamos a ideia de os significados das palavras emergirem dos usos que fazemos delas em determinados contextos ou situações” (BELLO, 2010, p. 552). Para o filósofo, “os usos, ou melhor, os processos de uso das palavras são regrados, e seus sentidos podem ser encontrados em convenções e formas de vida” (*idem*). Nesse sentido, Wittgenstein rompe com a concepção essencialista da linguagem, uma vez que o significado de uma palavra é construído pelo seu uso, modificando-se a cada uso que dela fazemos. Porém, não trazem em si uma essência invariável (CONDÉ, 1998).

O significado de uma expressão linguística se dá pelo seu *uso* na linguagem. Os sentidos atribuídos a uma expressão linguística ou palavra bem como sua lógica de funcionamento ou técnicas de uso depende do contexto no qual estão envolvidos, isto é, dos hábitos e costumes que temos ou empregamos, não em uma relação figurativa em meio às proposições e fatos.

Para Grayling (2002),

> Não há uma "lógica da linguagem", mas muitas; a linguagem não tem nenhuma essência única, mas é uma vasta coleção de diferentes práticas, cada qual com sua própria lógica. O significado não consiste na relação entre palavras e coisas ou numa relação figurativa entre proposições e fatos; o significado de uma expressão é, antes, seu uso na multiplicidade de práticas que vão compor a linguagem. Além disso, a linguagem não é algo completo e autônomo que pode ser investigado independentemente de outras considerações, pois ela se entrelaça com todas as atividades e comportamentos humanos; consequentemente nossos inúmeros diferentes usos dela recebem conteúdo e significado de nossos afazeres práticos, nosso trabalho, nossas relações com as outras pessoas e com o mundo que habitamos (GRAYLING, 2002, p. 90).

Conforme nos esclarece o autor, a palavra ou expressão linguística pode ser empregada em diferentes práticas. No entanto, devem atender à lógica daquela prática. Assim, se temos uma "concepção errônea do funcionamento da linguagem estamos sujeitos a confusões" (GRAYLING, 2002, p. 91). Estas confusões "com as quais [devemos] nos ocupar nascem quando a linguagem, por assim dizer, caminha no vazio, não quando trabalha" (I.F § 132, grifo nosso). A saída é examinar como a linguagem realmente funciona. O vazio e as confusões na linguagem acontecem quando não entendemos as relações constituídas nos *jogos de linguagem*.

Quando Wittgenstein cunha o termo *jogo de linguagem,* usando-o para designar os múltiplos empregos das expressões na linguagem em suas diferentes práticas, quer dizer que uma mesma expressão pode indicar diferentes ações, dependendo do contexto ao qual foi empregada, dependendo da atividade em que esteve envolvida. A linguagem se inicia pelo jogo e a filosofia dos jogos de linguagem exclui o locutor solitário. Condé (1998, p. 94), aponta que o termo "jogos de linguagem surgiu da metáfora de jogo, que já é uma evolução da metáfora do cálculo". A metáfora do cálculo nos diz que a linguagem pode ser governada por regra, assim como o cálculo que opera de acordo com regras apropriadas. Essa noção, de jogo de linguagem, resulta da comparação que o filósofo faz entre as várias semelhanças de jogo e linguagem. Segundo Glock (1998), essas semelhanças se dão tanto na linguagem como no jogo, por serem governados por regras constitutivas, as regras da gramática.

Wittgenstein procura pontuar o que concebe como ‘*jogo de linguagem’,* fazendo-nos refletir sobre o emprego da linguagem nos diferentes contextos, isto é, a aplicação da linguagem nas diferentes práticas em que está inserida, ou seja, nas formas de vida. Desse modo, as práticas que constituem o

> Processo do uso das palavras é um daqueles jogos por meio dos quais as crianças aprendem sua língua materna. Chamarei esses jogos de “jogos de linguagem (...) e poder-se-iam chamar também, de jogos de linguagem, os processos da repetição das palavras pronunciadas e o conjunto da linguagem e das atividades com as quais está ligada” (I.F § 7, *grifos nosso*).

Para Wittgenstein, o termo ‘*jogo de linguagem*’ “salienta que o falar da linguagem é uma parte de uma atividade ou de uma forma de vida” (I. F § 23). “Uma parte grita as palavras, a outra age de acordo com elas” (I.F § 18). O autor nos convida a “imaginar a multiplicidade dos jogos de linguagem”, apresentando-nos alguns jogos, como: “comandar, descrever, relatar, conjeturar, expor, inventar, representar, cantar, pedir, agradecer, traduzir de uma língua à outra, resolver um cálculo, mentir, contar historias, relatar sonhos” e etc. E considera que “há incontáveis jogos de linguagem” (*idem*). Eles são múltiplos e variados e as únicas semelhanças que possuem são as *semelhanças de família*.

A partir do próprio termo “*jogo*”, Wittgenstein elucida:

> Considere, por exemplo, os processos que chamamos “jogos”. Refiro-me a jogos de tabuleiro, de cartas, de bola, torneios esportivos e etc. o que é comum a todos eles? Não diga: “algo deve ser comuns a eles, senão não chamaríamos ‘jogos’”, - mas *veja* se algo é comum a eles todos. – Pois, se você os contempla, não verá na verdade algo que fosse comum a *todos*, mas verá semelhanças, parentescos, e até toda uma série deles (I.F § 66).

Conforme esclarece o filósofo, ao considerarmos as especificidades de um jogo ao outro, notamos que não se unem por um único traço definidor, muitos desaparecem, enquanto outros surgem. No entanto, mantém-se, qualquer que seja a unidade de semelhança desses traços que os ligam e os consideram como jogos. Nos jogos “vemos uma rede complicada de semelhanças, que se envolvem e se cruzam mutuamente. Semelhanças de conjunto e de pormenor" (I.F § 66). Para Wittgenstein, os jogos de linguagem não apresentam limites, "porque nenhum está traçado" a não ser "para uma finalidade particular" (I.F § 69). Quando indagado sobre o conceito de 'jogo' Wittgenstein, retruca: "pode-se dizer que o conceito de 'jogo' é um conceito com contornos imprecisos" (I. F§ 71).

Continua o filósofo,

> Em vez de indicar algo que é comum a tudo aquilo que chamamos de linguagem, digo que não há coisa comum a esses fenômenos, em virtude da qual empregamos para todos a mesma palavra, - mas sim que estão *aparentados* uns com os outros de muitos modos diferentes. E por causa desse parentesco ou desses parentescos, chamamo-los todos de "linguagem" (I. F § 65).

A respeito desses 'aparentamento', Wittgenstein costumava usar a expressão '*semelhanças de família*' com a finalidade de "designar a semelhança entre os usos de palavras ou conceitos, não por sua posse comum de um conjunto de características essenciais ou definidoras, mas por uma relação geral de similaridade entre os diferentes usos" (Cf. SILVA, 2011, p. 30), ou seja, pelas diferentes ações por ela desencadeadas.

Para esses parentescos dos jogos de linguagem, Wittgenstein usa o termo *semelhança de família*, pois apresentam uma "unidade que falamos do conceito de jogo. Em se tratando de conceitos definidos por semelhanças de família, é a unidade de uma família de usos que nos permite falar do conceito de '"tal e tal coisa'" (SILVA, 2011, p. 31).

Para Wittgenstein (1999), não se pode,

> Caracterizar melhor essas semelhanças do que com a expressão "semelhanças de família"; pois assim se envolvem e se entre cruzam as diferentes semelhanças que existem entre os membros de uma família: estatura, traços fisionômicos, cor dos olhos, o andar, o temperamento e etc. – E digo: os "jogos" formam uma família (I. F. § 67).

O que fundamenta os jogos de linguagem são as regras e as *semelhanças* com outros jogos, mostrando a unidade das relações presentes entre seus conceitos. É nesse movimento das interações entre os jogos que pode nascer a formação de um novo conceito, isto é, novos usos para a aplicação desse mesmo conceito (SILVEIRA, 2005).

Wittgenstein ainda usa o conceito de número para elucidar as semelhanças de família nos jogos de linguagem. Para o autor, aplicamos o conceito de número em seus diferentes tipos, a saber: número cardinal, número racional, número real e etc. Todos esses conceitos apresentam um parentesco que os fazem ser chamados de número. Desse modo, os números não podem ser definidos por uma única propriedade comum, todavia apresenta apenas algum traço que o façam ser conceituado como tal.

O conjunto das distintas práticas nas quais a linguagem está inserida, Wittgenstein chamou de *formas de vida*. Esse termo contempla os entrelaçamentos culturais, da visão de mundo das práticas de linguagem. Uma forma de vida faz parte da formação cultural ou social, é a totalidade das atividades praticadas por uma comunidade em que estão imersos os jogos de linguagem (GLOCK, 1998).

Portanto, não devemos procurar uma essência ou forma lógica que defina os jogos de linguagem na sua forma de vida. Eles não possuem uma propriedade comum que os defina. São os diferentes contextos de aplicação de uma palavra, expressão linguística, gestos, ações ou conceito partilhado em suas diferentes lógicas e técnicas de uso. Desta maneira, a significação que é dada às expressões linguísticas é fruto de seus diferentes usos nos diversos contextos. Por isso, não há um uso privado e devem ser decorrente das trocas do organismo com o meio ambiente. Vale ressaltar que esses usos não são aleatórios, devem estar em acordo com determinadas regras, que não são tão simples, pois estão em contínuo fluxo e se encontra em diversos planos.

Capítulo III – Seguir Regra na Matemática

Neste capítulo, pretendemos discutir os procedimentos de seguir regras na matemática baseado na filosofia de Wittgenstein. Como conteúdo matemático de estudo, adotamos a regra de três, por esta ressaltar as discussões que vêm ao encontro deste capítulo. Percebemos em nosso estudo que no processo de ensino e aprendizagem da regra de três, somos levados a seguir regras, isto é, caminhos algoritmizados de resolução. Procuramos mostrar direções que levam a acreditar que os passos da regra no processo de ensino da matemática já estão prescritos pela própria lógica da matemática, desse modo, há um esforço do professor de possibilitar ao aluno interpretá-la para segui-la corretamente.

3.1 Procedimento de seguir regras na matemática de acordo com a filosofia de Wittgenstein

O procedimento de seguir regras na filosofia de Wittgenstein esteve presente, principalmente no período a partir dos anos de 1930, momento este apresentado por muitos estudiosos de sua filosofia como um período de transição, isto é, o momento em que rompe com a filosofia presente em sua primeira obra, o *Tractatus,* que o levou a compreender a linguagem a partir da noção dos *jogos de linguagem*, presente, principalmente, nas *Investigações*. A regra é arquitetada como papel fundamental nas discussões de suas ideias a respeito da linguagem.

Para Glock (1998), as regras na concepção wittgensteiniana "desempenham uma função em inúmeras atividades críticas e pedagógicas, algumas das quais são institucionalizadas (formação educacional, dicionários): o ensino de uma língua, a correção de erros, a explicação de palavras específicas e a aquisição de habilidades linguísticas mais avançadas" (GLOCK, 1998, p. 195). Com efeito, "o importante é apenas que nossa prática adquirida possa ser descrita como uma atividade governada por regras" (p. 195). Com isso, "teríamos a possibilidade de explicar e justificar nossos usos de palavras com base nessas regras" (*idem*).

A matemática como qualquer outra ciência é governada por regras, a compreensão de suas regras possibilita o domínio de seus conceitos. Para

Silveira (2008, p. 94), “a regra matemática, quando interpretada, possibilita a compreensão do conceito que está subjacente à regra. Construir um conceito é, dessa forma, interpretar uma regra”. O processo de comunicação das regras matemáticas é realizada por meio da língua natural, que também é regida por regras linguísticas e gramaticais. Desta forma, acreditamos que as regras da língua podem interferir no processo de comunicação das regras matemáticas, e que esse processo de comunicação dos conceitos matemáticos acontece em simbiose com a língua natural.

A língua natural e a linguagem matemática apresentam algumas *semelhanças de família* em suas estruturas. No entanto, a primeira possui aspecto mais polissêmico que pode causar algumas interferências na interpretação das regras matemáticas. Devido a essa polissemia, às vezes, uma expressão verbalizada pelo professor de matemática pode não possuir o mesmo significado para o aluno e isso em algumas circunstâncias pode levá-lo a interpretar a regra de modo equivocado, isto é, interpretar de forma que não esteja em acordo com a lógica da matemática. Assim, a expressão enunciada pelo professor, naquele momento, pode não fazer parte do jogo de linguagem do aluno, isto é, do ‘universo discursivo’ em que ele esteja operando e desse modo possibilita-lhe diversas interpretações.

Mesmo com a busca pela melhoria da qualidade de ensino de matemática e com os avanços das novas metodologias e concepções de ensino de matemática, em geral, esse ensino se dá de modo que o professor mostra/aponta como deve fazer e isso comumente acontece por meio de exemplos, e o aluno, na maioria dos casos, acaba reproduzindo a situação ‘tal e qual’ o professor mostrou. Certamente, devido em alguns casos, o professor só conhecer aquele modo de ensinar ou ainda, porque esse aluno prefere repetir o que o professor fez por ser mais fácil, rápido e econômico. O ato de mostrar/apontar se assemelha ao conceito wittgensteiniano de ostensão, que está presente na sua ‘primeira filosofia’, e que procura reduzir a linguagem à relação dicotômica mundo-realidade que, para o referido autor, já num pensamento maduro em sua ‘segunda filosofia’, despreza a multiplicidade de espécies lógicas diferentes de entidades básicas a serem definidas (Cf. HINTIKKA; HINTIKKA, 1994).

Nesse caso, considerando o que foi apontado sobre a ostensão, compreendemos que em sua maioria, os alunos aplicam as regras dos algoritmos e processos de resolução sem se darem conta de que não a compreenderam, apenas, reproduzem mecanicamente, porém, isso não significa que a compreensão seja algo mecânico (GF, § 42). Conforme Silva (2011, p. 36), "se muitas vezes não temos dúvidas quando seguimos regras, isto é, reflexo de nosso treino, nossa prática, de nossa habilidade na atividade em questão", desse modo, pode ser que esteja compreendendo a aplicação dessas regras, mesmo que o fato de termos segurança de aplicar essa regra num contexto não garante que temos segurança para aplicá-la em outro. Nesse caso, uma regra não admite uma nova interpretação ao ser aplicada novamente, em outro contexto. Nossa prática é que define seu uso, porém com o significado já previsto, mas sempre pode haver uma situação na qual surjam dúvidas (SILVA, 2011).

Encontramos em Wittgenstein um esclarecimento acerca da aplicação da regra, dessa forma, percebendo que esse processo não acontece de modo mecânico. Para o autor:

> Não é assim? Primeiro, as pessoas usam uma explicação, uma tabela, consultando-a; mais tarde, por assim dizer, consultam-na na cabeça (trazendo-na para diante do olho interior ou algo assim) e, finalmente, trabalham sem a tabela, como se nunca tivesse existido (GF, § 43).

A partir das ideias desse autor, entendemos que muitas regras dentro do universo escolar são normativas e por isso aparentam serem seguidas mecanicamente, ou seja, apenas são aplicadas, muitas vezes sem atribuir sentido a essa aplicação que em algumas circunstâncias levaria à dedução sobre determinados conceitos. Especificamente, "na matemática, se atentarmos para o uso que fazemos de seus enunciados, constataremos que eles têm uma função normativa, ou seja, dizem-nos o que tem sentido e o que não tem sentido dizer" (GOTTSCHALK, 2004, p. 02). Podemos perceber isso, por exemplo, na construção da noção da fórmula do cálculo da área total de um cilindro circular reto, no qual se o aluno compreender que ao somar as áreas das duas bases e a área lateral chegará a tal fórmula, desse modo, comungamos da ideia de que as proposições matemáticas, e, portanto, suas regras, precisam ser ensinadas.

A área da base do cilindro circular reto é representado pela fórmula πr^2 e a área lateral é $2\pi rh$, onde r é o raio e h a altura. Assim, para calcular a área total do cilindro circular reto teremos duas vezes a área da base, mais a área lateral, em simbologia matemática: $2(\pi r^2) + 2\pi r\mathrm{h} \Rightarrow 2\pi r(r + \mathrm{h})$. Em situações como essa, se o professor conduzir o aluno a planificar o sólido geométrico, possivelmente facilitará ao aluno “enxergar” que a soma dessas áreas resultará na fórmula da área total do cilindro. Em muitos casos, os alunos são influenciados a decorar as três fórmulas, em separado, ao invés de construir argumentos em que a partir das áreas, da base e lateral, poderão chegar à área total.

Deste modo, nos jogos de linguagem utilizados para realizar o processo de comunicação da linguagem matemática por meio da língua natural, muitos conceitos da matemática se perdem na vagueza e nos labirintos da linguagem. Por isso, em certos casos esses conceitos não são compreendidos pelos alunos. Isso aponta que em determinados contextos os alunos compreendem o que lhes são comunicado, porém, em outros contextos não compreendem a regra que o professor pensava ter ensinado. Conforme indica Wittgenstein, “a linguagem é um labirinto de caminhos. Você chega a tal lugar por certo lado, e sabe onde está; você chega ao mesmo lugar por outro lado, e já não sabe onde está” (I. F. § 203).

Nesta pesquisa, restringiremo-nos a discutir os procedimentos de aplicação, interpretação e seguimento de regras no processo de ensino e de aprendizagem da matemática. Para tanto, ancoraremos nossa discussão sob a luz da filosofia de Wittgenstein, já que o autor mostra a necessidade que o sujeito possui de criar, seguir e obedecer regras. Na sua, segunda filosofia, os *jogos de linguagem*, apesar de não apresentar um conceito determinado, pronto, com limites definidos e se mostrarem aparentemente livres, também seguem regras. Essas regras não são apenas linguísticas, mas também pragmáticas, pois buscam orientar e distinguir o uso correto do incorreto. Esse *uso* depende dos 'acordos' que são feitos nas diferentes comunidades, isto é, nas *formas de vida* em que são criados e requeridos.

Na sala de aula de matemática, acontecem os *jogos de linguagem* que envolvem professor, alunos, autores de livros didáticos e etc., que possuem o objetivo de concretizar o processo de comunicação da linguagem matemática. O primeiro procura explicar a matemática, ou seja, jogar com o aluno mostrando, apontando e explicando como deve seguir determinada regra, ressaltando quais processos e atitudes deve adotar frente a uma dada situação. O segundo, geralmente, faz por imitação, como geralmente acontece somente lhe é apresentado aquele caminho, mas não significa que aprendeu o domínio da regra mesmo sem se dar conta que a regra domina a estruturação daquele jogo. É possível que esse aluno saiba aplicar a regra, mecanicamente, porém sem sentido naquele momento, pois ele sabe que deve seguir determinado caminho para aspirar um resultado.

Chauviré (1991), discutindo a regra na perspectiva de Wittgenstein, afirma que:

> Ora, não há instancia superior às regras que permita julgar se elas decidem corretamente sobre o que os fatos reais *devem* ser, ou sobre a *forma* que sua descrição deve assumir. As regras não têm contas a prestar senão a si mesmas. Assim, todos os procedimentos matemáticos são *normativos* e construtivos: consistem em determinar o sentido dos conceitos em jogo, em construir novas conexões conceituais (CHAUVIRÉ, 1991, p. 99).

A observância de que a regra é o mecanismo máximo permite compreender que ela deve ser seguida. Para tanto, não há uma *metaregra*, isto é, uma regra que seja superior, que orienta como aquela deve seguir em detrimento desta. Para Wittgenstein, "não podemos imaginar uma regra que regule o emprego da regra" (I.F § 84). Uma regra não carrega em si sua aplicação, apenas orienta o uso desta permitindo dizer se a ação empregada está correta ou incorreta.

O aluno acaba, em grande parte de sua vida escolar, apenas seguindo algoritmos que são compostos de regras explicitadas e não explicitadas[11]. Nesse contexto, segue que muitas coisas do discurso matemático não é

[11]Referimos-nos quando em uma operação matemática, na resolução de uma equação, por exemplo, não precisa dizer ao aluno que deve multiplicar ou dividir, ele já possui essa orientação.

necessário expor ao aluno, ele já reconhece por meio de suas experiências. Granger (1974) concebe esses não ditos (não explicitados) como os resíduos, isto é, aquilo que está subjacente ao texto.

As ações desses conceitos não revelados estão nos jogos de linguagem da matemática. Com efeito, evidencia-se esse fato em um problema matemático escolar, pois não está ordenando ao aluno que deva multiplicar, mas o aluno compreende que, ao multiplicar, poderá chegar com maior rapidez ao resultado, do que apenas se ficar adicionando as parcelas. Como podemos observar, neste exemplo: Um CD custa R$ 5,50. Quanto custa 13 desses CD´s?

Neste sentido, a regra matemática pode ser clara para o professor, mas não para o aluno, pois o professor já está habituado a seguir as regras da matemática no espaço escolar, ao passo que o aluno, mesmo possuindo essa experiência, possivelmente ainda não compreendeu o conceito que está subjacente à regra.

Em analogia a seguir regras, Wittgenstein (1999) expõe que o cálculo, a gramática e os jogos de linguagem apresentam semelhanças, pois todos obedecem e seguem regras. Para esse autor, se a regra for compreendida permite dizer que também compreendeu o conceito. Com efeito, a respeito do ensino de matemática no ambiente escolar, Silveira (2008) nos esclarece que "a regra matemática, quando interpretada, possibilita a compreensão do conceito que está subjacente à regra. Construir um conceito é, dessa forma, interpretar uma regra" (p. 94).

Nesse estudo, em que abordamos a resolução de problemas de regra de três, os alunos assinalaram, como mostraremos a seguir, que as maiores dificuldades na interpretação dos problemas residem na análise para saber se são de grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, ou seja, dificuldade em aplicar o conceito (a 'analítica', conforme apresentou o professor da turma). Pois, como observamos, a regra sob o ponto de vista do aluno muda conforme o contexto, no entanto, do ponto de vista normativo da matemática ela é sempre a mesma. Isso nos mostra que a regra ensinada pelo professor pode ter um sentido e um significado diferente para o aluno, ou em certos casos o aluno pode não compreender a aplicação dessa mesma regra em contextos diferentes. É necessário que no processo de ensino e de aprendizagem, o professor tenha clareza das regras matemáticas e não matemáticas que está ensinando, para que, dessa forma, possa indicar caminhos aos alunos no processo de compreensão e que, a partir disso, projetem novos sentidos sobre aquilo que foi ensinado.

Como as regras, o conhecimento não é espontâneo e deve ser ensinado, assim como as proposições matemáticas. Como vimos, a matemática possui regras, que devem ser seguidas para chegar a um resultado correto, compreendê-las é saber fazer o uso adequado, é possuir o seu domínio, ou seja, é dominar a técnica de uso de sua linguagem. Para Wittgenstein, "compreender uma frase significar compreender uma linguagem. Compreender uma linguagem significa dominar uma técnica" (I.F. § 199).

3.2 Confusão na aplicação das regras em matemática

A sociedade é organizada a partir de regras, que podemos chamar de juízos de valor, as condições de elaboração dessas regras dependem da forma de vida dessas comunidades. Baseado no sistema de regras sociais, encontramos as regras jurídicas que organizam os direitos e deveres, regras gramaticais que melhor organizam o processo de comunicação e assim por diante. Em certos casos, essas regras não deveriam, mas permitem ser transgredidas. Situações como essas, de transgressão, também estão presente no processo de ensino e aprendizagem das regras matemáticas.

No decurso da matemática é ensinado ao aluno simplificar, por exemplo, na expressão algébrica $\frac{(x+2).(x-2)}{(x+2)} = x-2$, com $x \neq -2$ em que numa outra situação quando ele se depara com a situação $\frac{x+4}{x+2}$, com $x \neq -2$, ele procura simplificar o x do numerador com o x do denominador, e em alguns casos o 4 com o 2, de certo modo, apresentando uma confusão na realização dessa prática que envolve regras matemáticas, pois apresenta como solução da expressão $\frac{x+4}{x+2} = 2$. No exemplo anterior, a regra matemática permite a simplificação, já no seguinte, não o é permitido, o aluno apenas apresenta uma forma de se chegar a um resultado. Assim, a regra deveria ser atualizada em contextos diferentes, mas o aluno não a atualizou, continua aplicando a mesma regra. Para Wittgenstein (1999), "'seguir uma regra' é uma *práxis*. E *acreditar* seguir a regra não é seguir a regra" (I.F. § 202). Conforme o autor, seguir uma regra é uma práxis, mas que precisa estar de acordo com os juízos de valores daquele contexto ou daquela comunidade em que é solicitada.

Baruk (1985) e Silveira (2008) apresentam 'confusões' cometidos por alunos semelhantes às supracitadas, indicando que na sentença $\frac{a+b}{a+c}$ em que os alunos simplificam a do numerador com a do denominador e apresentam como resultado $\frac{b}{c}$, desse modo, não apresenta um resultado que esteja em consonância com a regra matemática. Possivelmente, esses alunos devem ter intuído a partir do exemplo $\frac{ab}{ac}$, em que ao simplificar o a do numerador com o a do denominador, chegaria a reposta $\frac{b}{c}$.

Nos casos das confusões apresentadas, podemos perceber que a aplicação da regra matemática pelo aluno não está de acordo com a regra matemática requerida naquela situação. Nesse caso, podemos perceber indicativos de que o aluno não atualizou a regra nos diferentes contextos. Nesse sentido, os alunos acreditam estar seguindo a regra matemática, quando na verdade estão agindo em desacordo com as regras da matemática. A própria regra determina o que está em acordo ou em conflito com ela, uma vez que entender a regra é saber o que concorda ou não concorda com ela (FIGUEIREDO, 2009).

Situações como essas apontam que os alunos não conseguem compreender e projetar sentido sobre a leitura e interpretação das regras matemáticas expressas pelo professor em sala de aula, levando-os a criarem suas próprias regras, as *pseudoregras*, ou transformando, de modo equivocado, as regras que aprenderam em experiências anteriores para uma nova aplicação. Como em determinadas situações não conseguem compreender aquilo que está subjacente à regra, adotam suas próprias regras e lógicas que, em muitos casos, não coincidem com as regras ou lógica dos conceitos normativos da matemática exigidos e necessários para as aplicações em sala de aula.

Com objetivo de conduzir o aluno ao universo do domínio dos conceitos matemáticos, são-lhes apresentados objetos matemáticos que em certos casos estão seguidos de suas demonstrações (triângulo, por exemplo). A demonstração matemática deriva do seu conhecimento e da construção de seus conceitos (Cf. SILVEIRA, 2005). Tais demonstrações surgem a partir de postulados que seguem regras e essas definições se cristalizam enquanto conceitos matemáticos.

Segundo Panza e Salanskis (1995 apud SILVEIRA, 2008),

> Os conceitos estão cristalizados nas definições dos objetos. O objeto possui um predicado e, consequentemente, pode ser definido e conceitualizado. O objeto matemático é uma forma de realidade que procede geneticamente do seu conceito. A presença do objeto determina as suas propriedades, mostra a independência de atos de razão, é termo da relação entre objeto e sujeito, e é objeto de uma predicação (SILVEIRA, 2008, p. 97).

Ainda de acordo Silveira (2008), discutindo a demonstração segundo Wittgenstein.

> É na demonstração, ou seja, no nascimento da prova que surge a oportunidade da criação matemática. A demonstração produz novas conexões e cria o conceito dessas conexões, guia e dirige nossas experiências dentro de canais determinados e mostra o sentido de uma proposição. Calcular é um movimento entre os conceitos, em que a demonstração do cálculo é um novo conceito e também a transição para um juízo (SILVEIRA, 2008, p. 98).

Essas novas conexões estão atreladas às práticas de nossas experiências, levando-nos a refletir que os conceitos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem em sala de aula representam regras interpretadas, de naturezas diversas, conforme contextos em que são solicitadas. Desse modo, chegamos ao entendimento de que a regra é imaleável e não carrega em si suas possíveis aplicações, apenas orienta se os passos estão corretos ou incorretos. Sendo assim, nasce de um contexto, para gerar um significado, e, é ela que fundamenta os *jogos de linguagem* e também suas semelhanças com outros jogos.

Em matemática, as suas proposições são regras a serem interpretadas, a regra é a própria sintaxe que organiza e estrutura o comportamento em cada atividade, para que, dessa forma, possa gerar uma semântica, isto é, uma aplicação que possua um sentido para ser desenvolvida em um contexto e com isso conduzir a um uso em uma determinada forma de vida dentro de uma comunidade.

Nos problemas matemáticos, sua linguagem precisa ser interpretada para que suas regras sejam compreendidas e, dessa forma, o aluno possa chegar a um resultado, de preferência o esperado pelo professor e a matemática. Conforme observamos, na entrevista com os alunos, alguns relataram que é na '*analítica'* da regra de três composta que possuíam maior dificuldade. É nesse momento que o aluno aparentemente pode não está seguindo a regra ensinada pelo professor e, dessa forma, não a interpreta corretamente, isto é, não interpretar de acordo com a estrutura lógica da matemática que o professor ensinou. Por isso, encontra tais dificuldades para realizar a aplicação correta. Naquele momento, o uso da regra pode não possuir uma semântica, isto é, um sentido para a prática desse aluno, daí que ele pode não ter compreendido o uso dessa regra, diante desse motivo apresenta essas dificuldades em aplicá-la. Nesse caso, não foi compreendido o conceito, haja vista que, para Wittgenstein, o conceito é uma regra interpretada e é no uso que se adquire o significado.

De acordo com Silveira (2008),

> As regras matemáticas seguem as leis da lógica e as regras do aluno seguem a lógica do próprio aluno. O aluno interpreta a regra de acordo com as suas sensações subjetivas e a lógica obedece a leis que pretendem ser universais. Porém, é na demonstração, ou seja, no nascimento da prova que surge a oportunidade de criação matemática. O professor precisa conhecer como o aluno lida com as regras matemáticas quando cria a sua demonstração e é por meio do diálogo que professor e aluno participam do mesmo universo discursivo e entram em entendimento (SILVEIRA, 2008, p. 97-8).

A autora manifesta certa preocupação que o professor deve ter ao procurar entender por meio do diálogo, a lógica que o aluno adotou para interpretar determinada regra e posterior aplicação. Pois o aluno pode aplicar as regras de acordo com suas subjetivações e sensações, transgredindo o uso da regra matemática que deveria ser aplicada naquele contexto.

Ao aplicar uma regra que está sendo estudada, o aluno faz analogias com regras aprendidas anteriormente devido ao fato de apresentar certas semelhanças. Nesse sentido, ele procura conexões presentes nos dois processos (o já estudado e o que está sendo estudado) para construir o sentido necessário para aplicação correta desse novo conceito aprendido. Ora, essas conexões ocorrem de acordo com as regras da matemática, mostrando que ele conseguiu aprimorar seu conhecimento corretamente acerca da regra, isto é, domina a aplicação da regra, portanto, sua interpretação. Ora as conexões não podem ser admitidas pelas novas regras aprendidas naquele conceito matemático, isto é, possivelmente não interpreta corretamente a aplicação dessa nova regra, portanto, não domina seus usos. Em ambos os casos, o sentido projetado sobre a regra depende da subjetividade do aluno, pois o sentido de um conceito construído num contexto não é o mesmo construído em outro contexto. Assim, os critérios de verdade de juízo do aluno são produzidos pela subjetividade da sua interpretação em relação ao conceito. Para Silveira (2005, p. 165), “o conceito muda de acordo com o contexto, porque o aluno produz sentidos diferentes, mas o conceito continua o mesmo, já que ele deve obedecer às exigências da matemática”.

Em relação aos sentidos e confusões apresentado por alunos de graduação, Silveira et al. (2011) desenvolveram uma pesquisa com alunos de uma turma de Estágio III de um Curso de Licenciatura em Matemática, e constataram que as conexões feita por alguns desses alunos formandos, quando solicitados a mostrarem como ensinariam a seus futuros alunos o quadrado da soma de dois termos, apresentam confusões nos conceitos, aplicando a regra da soma dos quadrados dos catetos, ou seja, aplicaram o teorema de Pitágoras para demonstrar algebricamente o quadrado da soma de dois temos. Possivelmente, intuíram a partir da sentença $(x+y)^2$ para chegarem a x^2+y^2. Nesse caso, acreditamos que tentaram fazer analogias a partir da representação geométrica, porém, não transpuseram o conhecimento necessário para a generalização dos conceitos matemáticos presentes nas duas situações. Para Silveira (2008, p. 102), “a relação entre um conhecimento e suas aplicações está à mercê de fatos contingentes. No processo de aplicação da regra, o aluno depara-se com contextos diferentes e a regra, que deveria ser a mesma, passa por transformações e é modificada".

No processo de compreensão da regra, o aluno projeta sentido sobre a sua aplicação, possibilitando uma interpretação, ainda que não seja a que esteja de acordo com aquela regra matemática solicitada. Não descartando que a interpretação da regra é subjetiva e também não é um processo mecânico, pois exige reflexão acerca de sua compreensão, o aluno só possui domínio apropriado sobre ela quando projeta sentido sobre sua aplicação correta. Se o aluno consegue aplicar corretamente a regra nas situações, 4+5 e 4+5x6 ou em $\cos(3x).3$ e, neste último caso, compreendendo que é diferente de $\cos(9x)$, podemos inferir que possivelmente ele domina as aplicações correta dessas regras. Ou se perceber o "erro" há a possibilidade de correção. Em situações desse tipo acreditamos que se a regra foi seguida corretamente, podemos dizer que lhe foi atribuído sentido correto. Assim, o aluno passa a agir de acordo com a regra requerida para aquele contexto.

Para Silveira (2005),

> Ao seguir a regra, o sujeito lhe dá sentido, formando assim o seu conceito e participando do jogo de linguagem. Seguir uma regra é um jogo de linguagem; joga quem compreende a descrição da regra, o sujeito apenas deve segui-la, fazer o mesmo, pois existe apenas um caminho (SILVEIRA, 2005, p. 57).

Conforme indica a autora ao formar o conceito dado pelo sentido atribuído à regra, o sujeito participa de um jogo de linguagem que permite a compreensão e descrição dessa regra e, consequentemente, sua interpretação. Desse modo, os sentidos conferidos às expressões e conceitos utilizados pelo professor e pelos alunos na matemática estão em harmonia com o uso e com a forma como esse uso se entrelaça com a rede conceitual de cada aluno.

O conjunto das regras apresentadas pelo professor e seu aspecto dinâmico apresentam um contínuo fluxo que compõem o que Wittgenstein chama de gramática. A gramática é um conjunto de regras que tomada na sua dimensão pragmática determina uma *práxis* social. Livet (2009), procurando não reduzir o conceito de gramática para Wittgenstein, afirma que seria "a maneira pela qual se deve utilizar a expressão ‘seguir uma regra’ para que esse uso tenha um sentido” (p. 139). Para Glock (1998), “a gramática de uma língua é o sistema global de regras gramaticais, das regras constitutivas que a definem, pela determinação daquilo que faz sentido dizer ao usá-la” (p. 193) e nas palavras do próprio Wittgenstein “a gramática não diz como a linguagem deve ser construída para realizar sua finalidade, para ter tal e tal efeito sobre os homens. Ela apenas descreve, mas de nenhum modo explica o uso dos signos” (I.F. § 496).

Essa *práxis* a que nos referimos acima é passiva de geração de regras que podem constituir-se como tal pelo uso. Não podemos esquecer que, mesmo com o uso condicionando à regra, é ela quem determina se esse uso está correto ou incorreto. Conforme sugere Wittgenstein, as regras são convenções sociais criadas a partir das necessidades das suas formas de vida. Desse modo, novas regras são criadas e as existentes podem sofrer algumas alterações e adquirirem novos usos, ou seja, novas *práxis*. Ou permanecerem enrijecidas, estáticas como no caso da mecânica na Física e dos teoremas e corolários na matemática.

O sentido da regra é adquirido no uso que dela se faz ao aplicá-la nos diferentes contextos. Não é possível dizer que um sujeito segue uma regra uma única vez. Seguir uma regra é um hábito, um costume, uma prática. E deve ser feito por mais de uma vez, até tornar-se uma *práxis*, aquilo que possa ser seguido por mais de um indivíduo. Por isso, dizemos que não seguimos uma regra privadamente, ela “traça a linha a ser guiada por todo o espaço”(I.F. § 219), assim, quando “sigo a regra não escolho. Sigo a regra cegamente” (*idem*), isto é, não há necessidade de justificação para se seguir essa regra (HEBECHE, 2002). Com efeito, obedecer a uma regra é uma prática.

O filósofo Wittgenstein, em suas elucubrações, se pergunta: “o que chamamos ‘seguir uma regra’ é algo que apenas uma pessoa pudesse fazer apenas *uma vez* na vida”?(I. F. §199). Ele mesmo busca justificar que não é possível, “não pode ser que apenas uma pessoa tenha, uma única vez, seguido uma regra. Não é possível que apenas uma única vez tenha sido feita uma comunicação, dada ou compreendida uma ordem etc. [...] isso, são *hábitos* (costumes, instituições)” (I. F. § 199, *grifos nossos*). São *práxis* que são adquiridas e realizadas em nossas formas de vida.

Glock (1998) apresenta quatro repostas dadas por Wittgenstein quando indagado sobre como uma regra pode determinar de antemão um número ilimitado de passos. Glock (1998) classifica a regra, de acordo com Wittgenstein, como: Mecanismo – sua compreensão é constituída a partir de uma disposição enunciada acerca de um mecanismo, ou seja, é um processo intuitivo, é só seguir os passos; Platônica – a regra é uma entidade abstrata, idealizada um '"mecanismo etéreo' inquebrável que gera uma totalidade infinita de aplicações, são trilhos sobre os quais somos inexoravelmente conduzidos" (p. 314); Mentalismo – o aprendiz "erra" por não intuir o que o professor queria dizer com a instrução. O professor não havia previsto outra interpretação a não ser aquela que havia ter pensado indicar; Hermenêutica – por mais que a regra não determine, por si só, o próximo passo, o modo como interpreto a instrução expressa seu significado sobre aquilo que se deve fazer.

Ainda, segundo Glock (1998), alguns estudiosos indicam que Wittgenstein rejeita tais explicações e sugere uma atitude cética em relação à regra. Com isso, surge a preocupação do abismo existente entre a regra e sua aplicação, considerando que uma nova decisão seja tomada a cada passo da aplicação da regra. No entanto, em algumas passagens, o filósofo sugere que esse abismo é transposto por nossas práticas. Isso faz sentido na medida em que tomamos a atividade de seguir regras como uma prática. Daí, compreender uma regra é saber como aplicá-la, é saber operar com seus signos, ou seja, agir em conformidade com seu uso.

Wittgenstein não procurava fornecer uma definição analítica para regra. As regras são como nossos padrões de correção que governam as multiplicidades ilimitadas de suas ocorrências, apontando-nos a direção. Embora não nos deixe às cegas, não somos logicamente obrigados a seguir uma regra em vez de outra. A regra não arrasta um indivíduo por um determinado caminho, se ele não a segue, apenas não estará jogando o jogo que precede o seu uso e, provavelmente, as suas atitudes estarão em desacordo com as regras do jogo a ser jogado, pelo menos naquele momento. Conforme aponta Luchi (1999, p. 157), "a participação num jogo implica num consenso entre os jogadores sobre as regras do jogo". A regra existe para orientar-nos e, de modo geral, deve ser adaptada a cada situação daquele contexto, pois exprime o uso que dela fazemos em nossas diversas práticas humanas, isto é, nas *formas de vida*. Ela serve para dizer que certas coisas são obedecê-las e certas coisas são transgredi-las.

Capítulo IV – Análise do material empírico

Neste capítulo, apresentaremos as nossas análises acerca do material empírico produzido pelos alunos em situação de sala de aula. Assentado no referencial teórico adotado, passaremos a discutir como os alunos compreendem e aplicam regras matemáticas nas atividades desenvolvidas, tendo em vista o tratamento especial que foi dado à linguagem, em particular, a linguagem matemática. Inicialmente situamos o objeto matemático elegido para o estudo, a regra de três. Posteriormente, como estratégia de análise e no intuito de melhor detalhamento de nossa pesquisa, elegemos três seções de análise.

4.1 A Regra de Três

Neste subtópico, apresentaremos de modo genérico o objeto matemático que escolhemos para estudo, a regra de três. Procuramos caracterizar o objeto matemático, a fim de explicitar como e porque a regra de três surge das práticas sociais e é implantada nas práticas de sala de aula, bem como os seus usos e finalidades nos diferentes momentos da história.

A Regra de Três teve suas primeiras aparições nas aritméticas comerciais, sendo usada pelos mercadores Orientais que obtinham, assim, de modo mais eloquente, resultados seguros para certos problemas numéricos. Era chamada pelo nome de Regra de Três pelos hindus e árabes, e por escritores latinos medievais. Foi chamada, também, de Regra de Ouro, de Chave dos Mercadores e de Regra dos Mercadores (BERNAL, 2004).

Esta regra era usualmente declarada sem muitas explicações a respeito de como proceder para realizar o cálculo e a disposição dos termos que seguia a mesma dada pelos antigos hindus: “Faça pela regra: multiplique o último número pelo segundo e, divida o produto pelo primeiro número. Na colocação de 3º termos deve ser bem observado que o 1º e o 3º são de mesma denominação”, isto é, de mesma natureza (SMITH, 1958, p. 489).

Essa técnica de resolução de problemas do cotidiano dos mercadores era usada como uma regra arbitrária e tem sua relação com a proporção e a álgebra reconhecida somente quando os matemáticos desta época começam a dar atenção às aritméticas comerciais. A representação de proporção e da regra de três parte de uma exposição retórica com auxílio de segmentos ou números e se modifica ao longo do tempo até chegar à representação algébrica atual. A disseminação destes conhecimentos se deve às muitas aritméticas publicadas no período do Renascimento.

Atualmente, temos algumas definições dadas a respeito da regra de três. Ávila (1986) considera a regra de três a partir da mesma ideia de proporção e propõe uma resolução algébrica para estes problemas. Considera que eles são aplicações de equações de primeiro grau. “Todos podem ser formulados em termos de duas variáveis *x* e *y*, ligadas por uma equação do tipo *y* = *kx* ou *xy* = *k*, onde *k* é uma constante. Isto é verdade mesmo nos chamados ‘problemas de regra de três composta”’ (p. 04). A Regra de Três é caracterizada por Imenes e Lellis (2002) como um tipo de equação usada em problemas de proporcionalidade. Envolve três números conhecidos e uma incógnita, que é o número desconhecido. Para Gomes (2006, p. 03), “se relaciona con problemas para cuya solución se establecen reglas fijas que dependen de una igualdad de razones”. De acordo com Pérez de Moya (1998, p. 220), “Díce se regla de tres porque en ella ocurren 3 números continuos o discontinuos proporcionales, y toda práctica no es otra cosa sino hallar otro cuarto número ignoto que se a ya en tal proporción con el tercero como el segundo con el primero”. Vallejo (1841, apud GOMES, 1998) apresenta uma definição daquilo que mais se aproxima das práticas de sala de aula atual,

> A regra de três pode ser de dois modos: simples e composta; a simples é aquela em que para determinar o efeito ou a causa que se busca, necessita somente atender a uma circunstância; e composta é aquela em que se necessita atender a duas ou mais circunstâncias. A regra de três simples se subdivide ou pode ser de outros dois modos: direta ou inversa; direta é aquela em que se trata de averiguar o efeito que produz a causa, ou a causa de que provém o efeito, quando se conhece o efeito produzido por uma causa de mesma natureza, junto com outro dado, o mesmo efeito que foi produzido e as outras duas causas de mesma natureza[12] (VALLEJO, 1841, apud GOMES, 1998, p. 06 *tradução nossa*).

[12]La regla de tres puede ser de dos modos: simple y compuesta; la simple es aquella en que para determinar el efecto o la causa que se busca, solo se necesita atender a una circunstancia; y compuesta es aquella en que se necesita atender a dos o más circunstancias. La regla de tres simple se subdivide o puede ser de otros dos modos: directa o inversa; directa es aquella en que se trata de averiguar el efecto que produce una causa, o la causa de que proviene un efecto, cuando se conoce el efecto producido por una causa de la misma especie; y la inversa es aquella en que se trata de averiguar la causa que se necesita para producir, junta con otra dada, el mismo efecto que han producido ya otras dos causas de la misma espécie (VALLEJO, 1841, apud GOMES, 1998, p. 06).

Todas essas definições comungam com aquilo que é trabalhado na maioria das escolas. Entretanto, muitos docentes ainda percebem a regra de três apenas como uma técnica para resolução de problemas que se anunciam como grandezas proporcionais. A prática do uso da regra de três não pode se resumir apenas a isso, como vimos, a partir das notas históricas, esse conteúdo, possui 'vida' própria, ele se sustenta sozinho. Infelizmente, em muitos casos, o estudo desse conteúdo é trabalhado de forma isolada. Isso pode ser percebido, principalmente, nos livros didáticos, nos quais é tratado como uma maneira de justificar o estudo de razão e proporção por estes serem assuntos que antecedem a regra de três e não evidenciam a potencialidade da regra de três como modelo articulador de temas da matemática escolar, como técnica eficiente usada em atividades diversas desenvolvidas pelas pessoas cotidianamente (SILVA, 2011).

Devido ao uso cotidiano e à praticidade dessa técnica ao resolver problemas, ao longo do tempo passa a incorporar o currículo escolar, e, atualmente, faz parte do programa de proporcionalidade. Seu ensino nas escolas brasileiras visa tipicamente à aprendizagem do uso de um algoritmo: usualmente o professor dá exemplos de problemas que podem ser resolvidos pela regra de três, ensina os procedimentos para a 'montagem da regra' e os cálculos necessários à solução, e depois apresenta uma lista (ou várias) de problemas para serem resolvidos por meio da regra de três.

Pelo motivo desse procedimento, em geral, não apresentar sentido para grande parte dos alunos, eles não apresentam autonomia suficiente que lhe assegure aplicar essa técnica de resolução de problemas. Porém, ainda é vista com a mais completa e mais utilizada estratégia para resolver problemas de proporção sendo usada pelos alunos, em alguns casos, como uma validação do pensamento proporcional. A pesquisa de Silva (2008) aponta que a regra de três é uma, senão a única, das estratégias mais utilizadas por alunos e professores de 7º ano do Ensino Fundamental para a resolução de problemas de proporção.

Os problemas de regra de três estudados em ambiente escolar apresentam situações em que as grandezas se estendem para além da simbologia matemática, por exemplo, na identificação da natureza das grandezas envolvidas no problema matemático. Essas grandezas assumem propriedades que extrapolam o ambiente escolar, pois adotam características que estão presente nos diversos blocos de conteúdos dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

A seguir, apresentamos nossas interpretações acerca do material coletado na pesquisa de campo, as análises serão feitas a partir de três seções.

4.2 Confusão/ interpretação equivocada de regras na matemática

Nesta seção, apresentaremos o procedimento de seguir regras no processo de ensino e de aprendizagem da matemática e de como os alunos as compreendem e as aplicam. Tampouco, como fazem analogias de regras matemáticas aprendidas em experiências anteriores ao tentar aplicá-las em situações nas quais são solicitados a resolverem um problema matemático escolar.

Conforme discutido no capítulo III, Wittgenstein procura entender como um indivíduo age sob o procedimento de seguir uma regra. O filósofo se mostrava interessado em saber como “uma regra (ou ordem) poderia implicar sua aplicação, pois qualquer modo de agir poderia, de alguma forma, ser interpretado como de acordo com a regra” (IF, § 201). Pois, “se todo modo de agir é uma interpretação de uma regra, então todo modo de agir está de acordo com alguma regra” (FIGUEREDO, 2009, p. 45).

O filósofo discute esse procedimento de seguir regras a partir do exemplo de ensinar a alguém uma série numérica do tipo “0, n, 2n, 3n....”. Assim, estamos inclinados a pensar que esse indivíduo seja capaz de construir séries como: “0, 1, 2, 3,...” ou ainda “0, 2, 4, 6...”. Wittgenstein chama a atenção para que ao pedirmos a esse indivíduo que continue a série além de 1000 lhe seja dado o comando some 2, “(+2)”, ele passe a construir a série “1004, 1008, 1012,...”, isso decorre pois que uma nova compreensão é indispensável em cada nível para executar a ordem corretamente. Wittgenstein se coloca como interlocutor e pergunta,“como se decide então qual é o passo correto em um ponto determinado? – [e ele mesmo responde] ‘o passo correto é aquele que se conforma à ordem – como foi significada’”. Assim, ao dar o comando some mais 2,(+2), você gostaria que o indivíduo escrevesse 1002 após 1000, ou ainda, 1868 após 1866, isto é, “o que quis dizer é que ele deveria escrever, após cada número já escrito, o segundo número seguinte” (I.F § 186).

Semelhante a esses processos, dão-se as regras no processo de ensino e aprendizagem na resolução de problemas de regra de três, no qual é evocado um conjunto de regras que o aluno observa que o professor aplica ao resolver tal problema matemático. Essas regras atendem ainda a critérios das regras linguísticas[13], dentre outras, pois os problemas precisam ser lidos e interpretados, isto é, traduzidos na língua natural desse aluno e somente depois resolvidos em linguagem matemática. Desse modo, podemos indicar que as dificuldades de interpretação das regras da língua podem interferir no processo de compreensão e aplicação das regras na matemática.

Embora alguns professores suprimam alguns desses passos, apresentamos em linhas gerais aquelas regras que julgamos principais a serem aplicadas no processo de compreensão da resolução de um problema de regra de três. Utilizaremos essas regras como critérios de análise do material empírico.

1ª: Identificar as grandezas;

2ª: Montar a tabela relacionando as grandezas e suas respectivas medidas (valores numéricos dessas grandezas);

3ª: Identificar a natureza das grandezas (diretamente ou inversamente proporcionais);

4ª: Uso de sinais adequados: - (menos) e + (mais) ou ↓↑ (setas);

5ª: Montar a proporção;

6ª:Executar os algoritmos.

Conforme podemos observar no material produzido pelos alunos, a confusão/interpretação equivocada das regras na matemática lhes fizeram cometer alguns enganos que não permitiram a compreensão adequada da regra matemática ou de outra natureza envolvida naquela situação. “Ao

[13] Neste trabalho, adotamos como regras linguísticas o conjunto de regras que proporciona o processo de comunicação, de maneira que extrapola as regras gramaticais.

aplicarmos uma palavra, estamos seguindo regras tácitas na linguagem, do mesmo modo que ao movermos uma peça qualquer do jogo de xadrez estamos agindo de acordo com as regras do xadrez” (GOTTSCHALK, 2007, p. 465). Os movimentos permitidos para cada peça do jogo seguem regras diferentes. Desse modo, ao resolver um problema de regra de três agiremos de acordo com as regras solicitadas para aquele tipo de problema ou com as regras ensinadas pelo professor, contudo, nem sempre os alunos agem de acordo com essas regras, pois ainda não a compreenderam. A Figura (4.2a) ilustra confusões apresentadas pelos alunos em nossa pesquisa de campo.

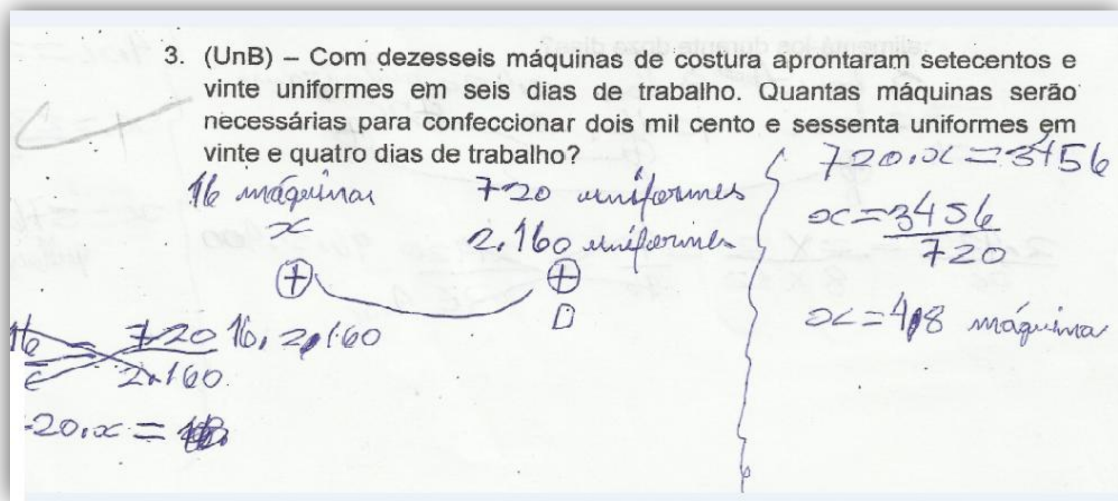


Figura (4.2a)

Observamos neste problema resolvido por um aluno, que ele não consegue ‘perceber’ tal problema como um problema de regra de três composta, desse modo, resolve-o como se fosse um problema de regra de três simples. Já na primeira regra, ele apresenta confusão ao identificar a quantidade de grandezas.

Nesta situação-problema, o aluno interpreta equivocadamente a regra ao organizar as grandezas proporcionais. Ele só consegue perceber duas grandezas, as grandezas máquinas e uniformes, ao invés de três – máquinas, uniforme e dias. Neste caso, o aluno consegue ler, porém, não interpreta conforme a lógica matemática da regra de três composta requerida naquele tipo de problema.

Assim, a grandeza dias não é percebida por esse aluno, entretanto, ele consegue intuir sobre a aplicação das demais regras para a resolução desse problema, isto é, sobre o algoritmo de resolução ensinado pelo professor. Mostra que sabe aplicar o algoritmo da resolução, porém de forma mecânica, sem refletir sobre o que lhe é dado no comando dessa situação-problema. Se esse aluno tivesse refletido sobre a regra conforme a lógica ensinada pelo professor, provavelmente teria percebido que havia mais de duas grandezas e perceberia que se tratava de um problema de regra de três composta.

Situação semelhante acontece com outra aluna da mesma turma, Figura (4.2b). No entanto, para essa aluna, diferentemente da situação anterior, não há uma variável a ser encontrada. Ela também utiliza apenas duas grandezas e não 'percebe' a terceira variável que deveria ser encontrada. Apenas aplica a relação de igualdade entre duas razões, isto é, o princípio fundamental da proporção. A aluna também aplica a regra que o professor ensinou sobre o algoritmo e encontra o valor doze máquinas que seria a resposta correta. Também na primeira regra apresenta confusão ao identificar as grandezas, na segunda, apresenta confusão ao montar a tabela com os tipos de grandezas e seus respectivos valores.

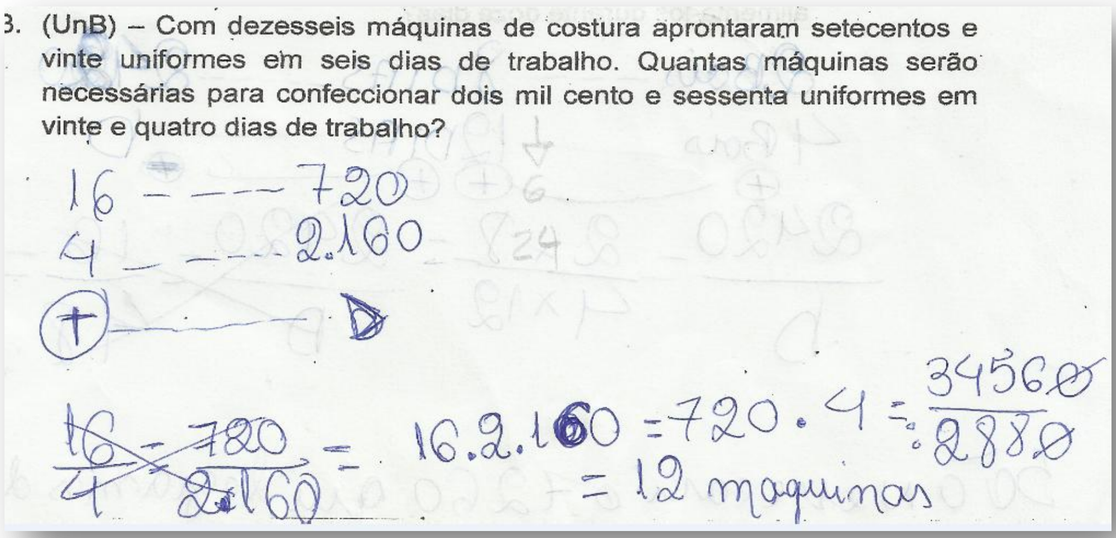


Figura (4.2b)

Curiosamente, essa aluna não elegeu grandezas, porém, sabe que deve apresentar uma como resposta, a grandeza máquinas. Inicialmente, podemos dizer que os seus resultados apareceram aleatoriamente, isto é, sob forma de mágica, pois, ao avaliarmos, percebemos que só a partir da 5ª regra de resolução, o procedimento efetuado por ela está de acordo com o procedimento ensinado pelo professor. Neste caso, evidencia-se que o estudante cria, por si mesmo, algumas regras a serem seguidas, que, muitas vezes, não estão condizentes com a realidade das regras da matemática ou das regras ensinadas pelo professor para aquele tipo de problema.

No processo de ensino e aprendizagem da matemática, são ensinadas aos alunos diversas regras durante seu percurso escolar. Para que esse aluno aprenda a operar, isto é, realizar combinações sob o conjunto de regras da estrutura da linguagem matemática, precisa dominar sua sintaxe, pois não poderá aplicar determinadas regras em qualquer situação pelo motivo de oferecer certas restrições à sua organização e a ordem de disposição das sentenças. Por exemplo, em uma expressão numérica, é necessário primeiro extrair a raiz, para depois somar ou subtrair ($\sqrt[3]{27} + 23$), em situações desse tipo, percebemos que as regras devem ser seguidas e respeitadas. O aluno necessita também dominar sua semântica visto que é necessário o entendimento dos sentidos e da natureza que são gerados pela combinação sintática adequada para a aplicação correta das regras.

Considerando a confusão que geralmente os alunos apresentam ao aplicar as regras matemáticas, entendemos que essas regras podem apresentar algumas *semelhanças de família* com outras regras que já foram aplicadas em situações anteriores. Pois, os traços que requerem em seus atuais usos podem se aproximar ou não de usos já realizado anteriormente.

Wittgenstein nos esclarece a respeito da confusão da aplicação de regras, a partir da noção do uso das regras do jogo.

> É como se alguém explicasse: “Jogar consiste em empurrar coisas, segundo certas regras, numa superfície...” – e nós lhe respondêssemos: “Você parece pensar no jogo de tabuleiro, mas nem todos os jogos são assim. Você pode retificar sua explicação, limitando-a expressamente a esses jogos” (I. F. § 03)

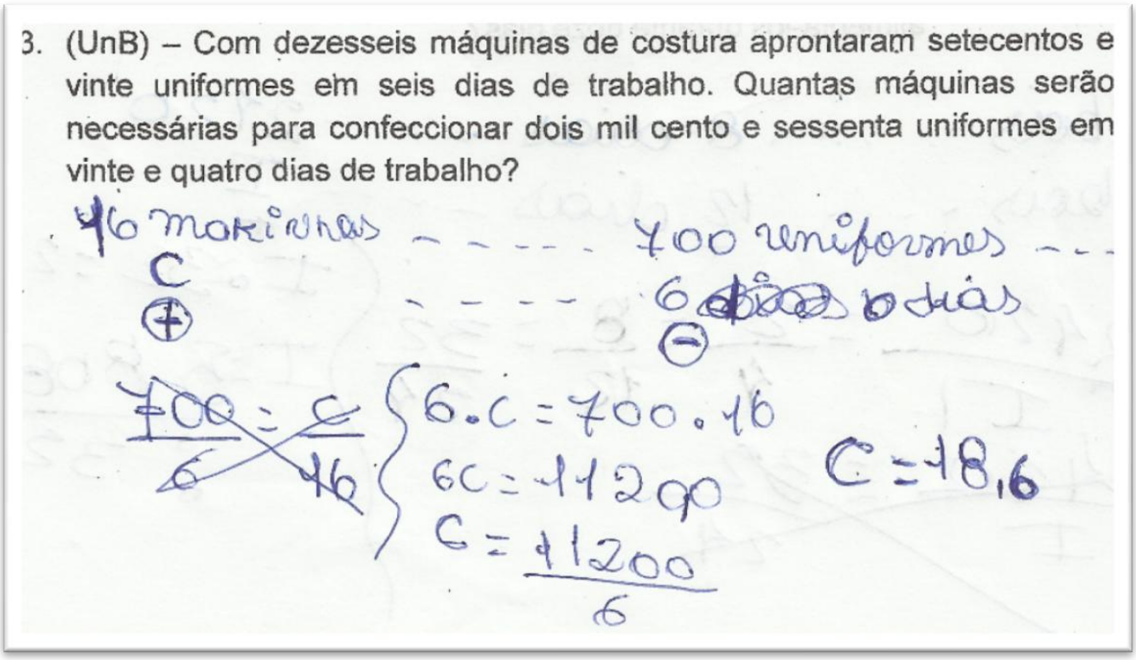
Assim como a expressão linguística *‘jogo’* pode assumir diferentes usos, não somente para jogos de tabuleiro, as regras de cada jogo também podem apresentar confusões sobre sua aplicação, pois um sujeito corre o risco de aplicar as regras de um jogo a outro devido suas semelhanças. As regras desse mesmo jogo também estão sujeitas a confusões sobre suas próprias aplicações. Ao associar essas regras as suas atividades, percebemos que elas compõem a gramática que descreve os sentidos de seus usos publicamente acordados, pois esses usos não são arbitrários, mas especificados nos jogos de linguagem usados naquele processo comunicativo.

Segundo Wittgenstein, “as regras de um jogo podem permitir uma certa liberdade, mas mesmo assim tem de ser regras bem determinadas” (Z § 441). O aluno pode ter liberdade na sua forma de expressar o modo como escolhe para resolver determinado problema, contudo, ele deve seguir as regras envolvidas naquele contexto. Pois, nem sempre a lógica adotada pelo aluno está de acordo com a lógica da regra matemática envolvida em uma determinada situação.

Nesse sentido, o processo de comunicação desenvolvido precisa ser claro, pois na escola a comunicação não ocorre certamente na linguagem matemática dos matemáticos, nem tão pouco, na língua natural. Devido a isso se assume uma sintaxe específica, uma semântica considerada oportuna e nasce uma língua ‘estranha’, que permite a assimilação do domínio de conceitos matemáticos pelos estudantes (D’AMORE, 2007).

Na situação indicada na Figura (4.2c), a aluna também apresenta confusão ao eleger a quantidade correta e os valores das grandezas. Como vimos, para o cálculo de problemas de regra de três, seguimos algumas regras, a primeira consiste em identificar as grandezas, a segunda em montar a tabela relacionando seus valores e assim por diante. Já nessas duas primeiras regras essa aluna fica confusa, pois acaba misturando as grandezas ao organizá-las sob a forma de tabela. Certamente a aluna não seguiu corretamente essas primeiras regras, pois, ao participar de um jogo com a linguagem matemática no contexto de sala de aula, o aluno deve seguir as regras que a lógica da matemática impõe (SILVEIRA, 2005).

Como a primeira regra não é, necessariamente, uma regra matemática, a aluna não considerou que uniformes e dias são grandezas de naturezas diferentes e como consequência não podem ser medidas pela mesma unidade de medida. Na tentativa de proceder com a resolução a aluna ao tentar aplicar a segunda regra, colocou a grandeza *dias* embaixo da grandeza *uniforme*. Com essa confusão de organização das grandezas, dificilmente conseguiria identificar a natureza da terceira regra que é estabelecer a relação de grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.



3. (UnB) – Com dezesseis máquinas de costura aprontaram setecentos e vinte uniformes em seis dias de trabalho. Quantas máquinas serão necessárias para confeccionar dois mil cento e sessenta uniformes em vinte e quatro dias de trabalho?

16 maquinas ----- 700 uniformes ---
C ----- 6 dias
+ −

$\frac{700}{6} = \frac{C}{16}$ $\begin{cases} 6 \cdot C = 700 \cdot 16 \\ 6C = 11200 \\ C = \frac{11200}{6} \end{cases}$ $C = 18{,}6$

Figura (4.2c)

A aplicação a partir da quarta regra se deu, de modo como o professor costuma ensinar, isto é, de acordo com o algoritmo estabelecido pelo professor em sua sequência didática. Porém, as relações de grandezas não estão seguindo os critérios estabelecidos de acordo com as regras de resolução apresentadas anteriormente para a resolução desse tipo de problema. Essas dificuldades em não aplicar corretamente as regras nos leva a crer no abismo existente entre a regra e sua aplicação. De acordo com Wittgenstein, aplicar uma regra corretamente é intuir o sentido da regra. O conceito é uma regra interpretada, existindo um abismo entre a regra e a sua aplicação. Para Silveira (2005, p. 15), “O sentido atribuído ao objeto pelo aluno deve corresponder às regras previstas pela lógica da matemática”.

Na Figura 4.2d, percebemos que o aluno Antônio utiliza o mesmo valor, “vinte (20)”, tanto para representar a quantidade de alunos, como de horas. Ele apresenta confusão ao aplicar a segunda regra, pois ao montar a tabela com os respectivos valores de cada grandeza mistura os valores dessas grandezas. Essas confusões apontam para o não estabelecimento de critérios para seguir as regras ensinadas pelo professor. Segundo Hebeche (2002), seguir regra envolve o envolver-se constantemente com o erro, o imprevisto, as exceções e as improvisações que fazem parte da noção de domínio de uma técnica, conforme constamos nos registros desse aluno.

Estabelecido àquilo que seria, para o aluno, a estrutura para resolver tal problema, ele procura aplicar as demais regras, por exemplo, a terceira regra que identifica a natureza em relação a sua proporcionalidade, isto é, identificar que se trata de uma grandeza diretamente ou inversamente proporcional, conforme relata o aluno na entrevista *“o professor disse que a gente olhava pros números e: se aumentasse colocava o sinal de mais e se diminuísse o sinal de menos, ai fiz assim*”. Os sinais “de mais” e “de menos” a que o aluno se refere, fazem parte da estratégia de ensino adotada pelo professor, esses substituem as setas que são comumente usadas para identificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais. Na seção 4.4, discutiremos com mais detalhe o uso desses sinais. Aparentemente esse aluno assinala estar seguindo a regra ensinada pelo professor, mas nesse entremeio da regra e de sua aplicação, o aluno parece ter se perdido no abismo que há entre essas duas entidades. Ele acredita está seguindo a regra, todavia, para Wittgenstein, acreditar seguir a regra não é seguir a regra. Para, de fato, o aluno seguir uma regra ele deve agir de acordo com as normativas dessa regra, do contrário, apenas pensa que estará seguindo, conforme ilustra a Figura (4.2d) abaixo.

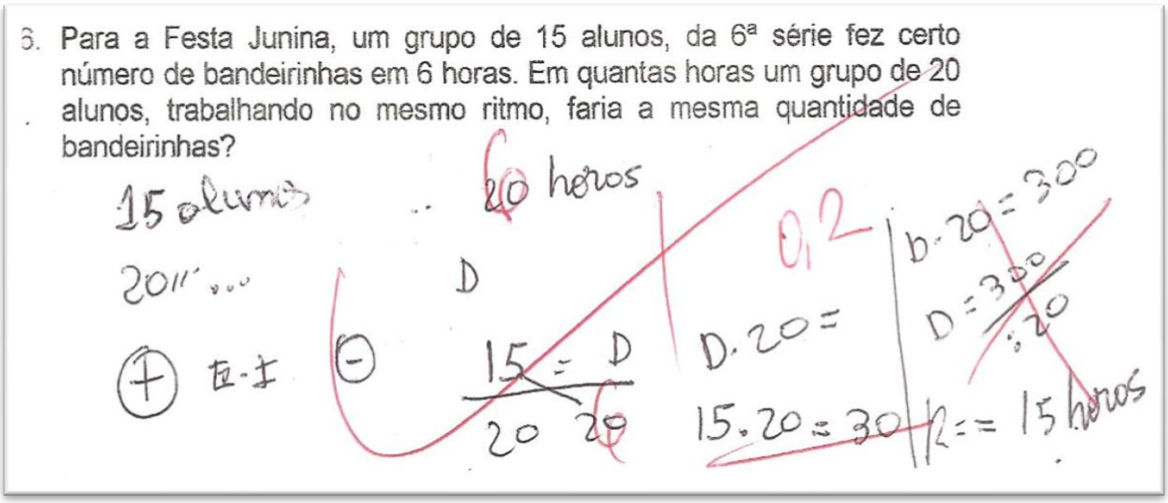


Figura 4.2d[14]

[14] As marcações em vermelho foram feitas pelo professor da turma.

A dificuldade em compreender o uso da regra parece ligada ao meio de obter uma visão abrangente da totalidade das regras que compõem um sistema, nesse caso, o sistema da prática pedagógica apresentada pelo professor em sua sequência didática.

Wittgenstein procura elucidar o conceito de *seguir regras* enquanto fundamento da ação significativa e do pensamento. Algo que orienta os jogos nas relações entre ação e compreensão que esclarecem o conceito de interpretação dessas regras, ao mostrar que se trata de uma atividade de manipulação simbólica exercida em contextos sociais permeados pela linguagem, e não um ato mental solipsista (MORENO, 2004).

Os dados da pesquisa apontam que grande parte dos alunos se confundia ao aplicar as regras apresentadas pelo professor em sua sequência didática, isto é, a análise para identificar, principalmente, a natureza das grandezas quanto à sua proporcionalidade. A compreensão adequada da regra possibilita a esses alunos uma aplicação correta. Conforme relatou o professor na entrevista, "*a dificuldade que os alunos possuem é em aplicar a analítica do problema. Aquilo que eu falo, procuro ser bem claro na minha linguagem, mas muitos ainda não entendem, percebo que eles ainda não estão maduros para esse tipo de problemas".*

Diante das dificuldades enfrentadas pelos alunos ao compreenderem o processo de aplicação de regra na aprendizagem de matemática, concordamos com Gottschalk (2004), quando afirma que,

> Há sim, uma certa *semelhança de família* entre as várias aplicações de regras da matemática. Por exemplo, pode-se dizer que há uma semelhança de família entre as várias técnicas de contagem e de medição, mas essas não são diversas facetas de uma matemática mais 'essencial' (GOTTSCHALK, 2004, p. 09, grifos nossos).

Assim, se o aluno não compreende satisfatoriamente as regras que gerenciam o jogo do cálculo, aparentemente ele não tem como jogar. Desse modo, passa a acreditar que se trata de algo 'estranho', interpretando e estabelecendo conexões como se existisse algum tipo de magia (BARUK, 1996). Para Wittgenstein, aplicar uma regra corretamente é intuir sobre o sentido atribuído a essa regra. Dessa forma, o conceito gerado pela aplicação correta da regra é a regra interpretada de acordo com aquele conteúdo estudado. Como vimos, a regra não prescreve o próximo passo a ser dado, ela apenas orienta se o uso está correto ou incorreto. “É um conjunto de regras que dá sentido a qualquer experiência que eu tenha com o objeto empírico” (GOTTSCHALK, 2007, p. 466).

Desse modo, cabe ao professor, estabelecer conexões entre a regra e sua aplicação, buscando no processo de ensino eliminar os abismos existentes e não esperar que o aluno as deduza, uma vez que esta seja apresentada. Dessa forma, cabe ao aluno explorar as possibilidades de aplicação e seu uso dentro do jogo de linguagem solicitado (GOTTSCHALK, 2004).

Na próxima seção, apresentamos a importância que o algoritmo possui no processo de ensino e de aprendizagem e qual a significância que esse instrumento matemático exerce nas práticas escolares dos alunos e dos professores.

4.3 Seguimento do algoritmo

Na seção anterior, discutimos sobre o procedimento de aplicar e seguir regras na resolução de problemas de regra de três, que de certa forma possuem relações imbricadas com o seguimento do algoritmo. Sendo assim, nesta seção, mostraremos que no processo de ensino e de aprendizagem os alunos seguem o algoritmo e, na maioria dos casos, essa ação acontece sem refletir sobre sua aplicação, apenas o aplicam e, em muitas situações, por mais que se orientem pelo uso do algoritmo, eles ‘erram’ devido não aplicarem corretamente as regras envolvidas nesse processo.

Concebemos o algoritmo como um instrumento que em certos casos possibilita a compreensão dos conceitos matemáticos e que possui a função de generalizar e agilizar o procedimento de resolução de um problema. Para o uso do algoritmo, há sempre um primeiro passo, seguido de um segundo, e assim por diante. Sua característica mais marcante é se constituir numa sequência de passos, para a realização de uma tarefa (CUNHA, 2007).

O algoritmo se apresenta como um modelo pronto, isto é, com suas regras já determinadas: o aluno, ou qualquer outra pessoa, apenas executa seus passos, ou seja, suas regras. No entanto, seus usuários precisam dominar a aplicação dessa técnica para que se chegue ao resultado correto. Corroboramos com a definição de Ferreira (2001, p. 31), quando define algoritmo como sendo o “conjunto de regras e operações bem definidas e ordenadas, destinado à solução de um problema ou classe de problemas em número finito de etapas”. Embora o algoritmo aponte que seu uso se restrinja a uma atividade mecânica, trivial, sistemática e, até mesma automática, a esse respeito, defendemos que esse ‘mecanicismo’ a que nos referimos pressupõe anteriormente a compreensão do seu funcionamento, para, a partir daí, a ação de segui-lo poder se tornar mecânico, pois a partir dessa compreensão possibilita ao aluno dominar o seu uso, como exemplo, o algoritmo da multiplicação adotado a partir da quinta regra de resolução no estudo da regra de três.

Entendemos que uma das formas de ampliar o domínio do conceito seja por meio do uso do algoritmo, pois a aplicação correta deste possibilita a compreensão do conceito. Nesse sentido, não devemos descartar a importância do seu uso. Usá-lo corretamente pode se tornar uma técnica, todavia, o aperfeiçoamento do uso dessa técnica se constitui via treino, em outras palavras no estudo desse conteúdo.

De acordo com Silva (2011),

> Quando emprego uma técnica ou uma regra, como continuar uma série numérica, reajo sem hesitação porque domino esta técnica; sou compelido a fazer tal e tal coisa devido ao *treinamento* que recebi, nós reagimos a regra da forma como fomos treinados (SILVA, 2011, p. 84, *destaque nosso*).

Wittgenstein reforça a ideia de que é necessário o treino no processo de aprendizagem de um conceito matemático. Para o autor, o treino, nada mais é do que o domínio das habilidades de nossas práticas, as práticas que fazem parte de nossas *formas de vida.*

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – (BRASIL,1998) sugerem uma concepção construtivista. Devido a isso, não recomendam o uso de algoritmos no processo de ensino e de aprendizagem, pois insinuam que estes são apenas atividades de memorização dos conceitos e por isso não acontece a manipulação que desenvolveria as competências e habilidades necessárias aplicadas naquele conteúdo. Todavia, sem o uso desse instrumento fica difícil para o aluno em fase de amadurecimento cognitivo orientar-se na busca por um padrão de correção do objeto matemático ensinado.

Nesse sentido, como estratégia de ensino da sequência didática desenvolvida pelos professores em sala de aula é comumente apresentado aos alunos o algoritmo. Via de regra, este aparece sob forma de um modelo que deve ser aplicado para resolver determinado problema matemático escolar. Em alguns casos, há alunos que apresentam caminhos para resolver os problemas diferentes daquelas que o professor ensinou, porém, o objetivo é que os resultados sejam os mesmos. Contudo, na maioria das práticas desenvolvidas em sala de aula é comum os alunos seguirem os procedimentos que o professor ensina. A partir dos dados dessa pesquisa percebemos que os alunos seguiram o algoritmo que o professor ensinou, mesmo sabendo que há precedentes de que alguns problemas de regra de três também podem ser resolvidos por proporcionalidade, equivalência e etc.

As figuras a seguir mostram que os alunos procuraram seguir o algoritmo ensinado pelo professor em sala de aula. Contudo, apesar de ‘errarem’, ainda assim, esses alunos, pensavam estar seguindo as regras do algoritmo que lhes foram ensinados. Com base nas observações e no material escrito, constatamos que esses alunos tentaram seguir as etapas do algoritmo apresentado pelo professor no processo de resolução dos problemas, mas o resultado alcançado por esses alunos não coincidiu com a resposta apresentada pelo professor.

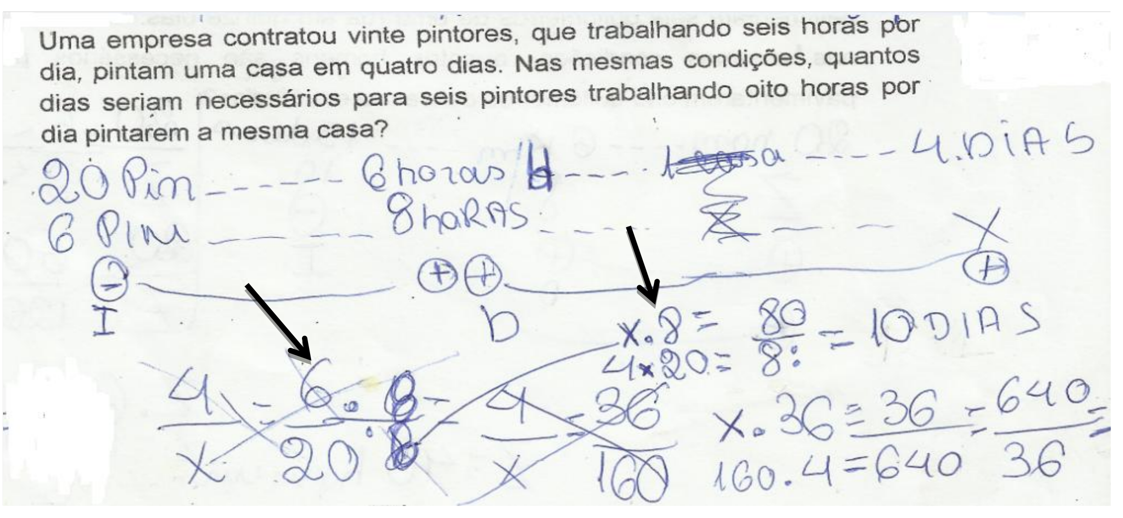


Figura (4.3a)

A Figura (4.3a) esboça que, após o aluno aplicar a quinta regra, isto é, montar a proporção, atrapalha-se ao realizar a multiplicação dos termos que mantém a proporcionalidade, conforme indicam as setas. Dentro do processo de aplicação do algoritmo, é prática corriqueira os alunos invocarem regras que já tenha vivenciado em outros jogos ou ‘inventarem’ novas regras (SILVEIRA, 2005). Desse modo, essas ações não possibilitam alcançarem resultados corretos.

A Figura (4.3b) esboça essas compreensões equivocadas das regras de aplicação do algoritmo. Em muitas situações no processo de ensino da matemática, algumas regras aplicadas em um algoritmo não são explicitadas aos alunos. Na Figura (4.3b), encontramos um exemplo evidente dessa não revelação de algumas regras implícitas na aplicação do algoritmo. Por exemplo, a grandeza de tempo adotada nesse problema possui duas unidades de medidas diferentes (hora e minutos). Percebemos por meio da resolução desse aluno que ele não identifica essa característica, e acaba aplicando o algoritmo sem transformar a grandeza tempo em uma mesma unidade de medida. O fato de o aluno não identificar as derivações dessas características implícitas dos procedimentos de resolução influencia em sua tomada de decisão para alcançar o resultado correto.

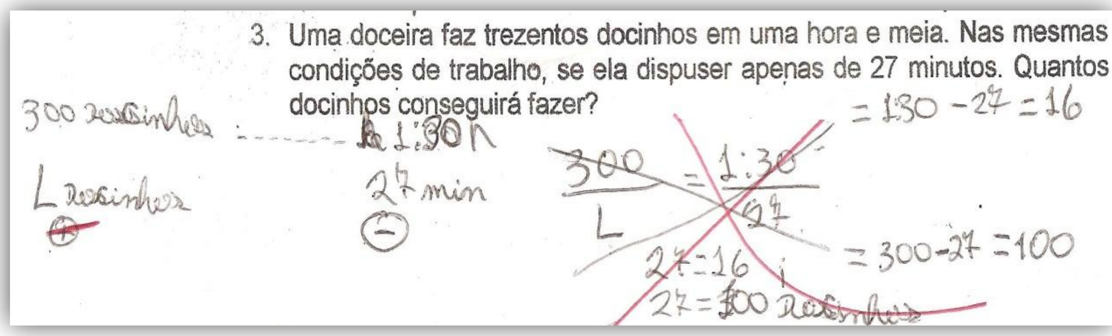


Figura (4.3b)

Gómez-Granell (2003) oferece-nos um exemplo de um ‘erro’ muito comum apresentado pelos alunos na aplicação, por exemplo, do algoritmo da soma. Sem dominar a regra do ‘vai um’ o aluno aplica essa regra do modo que compreendeu, entretanto, a aplicação equivocada desse algoritmo não permite, ao aluno, alcançar o resultado correto. A partir do exemplo apresentado pela autora, podemos constatar que esse aluno pode intuir que a soma daqueles números não é o resultado alcançado pela aplicação do algoritmo.

> Outro erro típico consiste, por exemplo, em somar quantidades sem considerar o procedimento de "vai um":
>
> $$\begin{array}{r} 24 \\ \underline{+\ 48} \\ 612 \end{array}$$
>
> É evidente que qualquer aluno de oito anos sabe, de cabeça, que o resultado de 24 + 18 não pode ser 612. No entanto, sem se ater ao significado, ele respeita a aplicação do procedimento que domina – somar sem utilizar a técnica do "vai um" – e o aplica fazendo a extrapolação ou supervalorização de uma regra (GÓMEZ-GRANELL, 2003, p. 266).

A situação acima ilustra perfeitamente a confusão apresentada por esse aluno ao aplicar o algoritmo da soma. Ações desse tipo nos mostra que se não houver o domínio sob a operação das regras do algoritmo por parte do aluno, este pode até chegar a um resultado, contudo, esse resultado na maioria das vezes não coincide com o resultado previsto pela lógica matemática envolvida naquela situação.

A compreensão da *analítica* empregada pelo professor mostrou que há diferentes *jogos de linguagem* envolvidos no processo de ensino e de aprendizagem. Por esse motivo, pode proporcionar aos alunos cruzamentos com outros jogos que não são aqueles envolvidos na resolução desse tipo de problema. Essas semelhanças presentes nos jogos do professor e dos alunos, em algumas situações podem conduzir o aluno ao 'erro'. Um caminho que julgamos importante para que essas confusões não aconteçam, ou, pelo menos, se minimizem e que busca aproximar esses jogos é o uso do algoritmo, pois já apresentam em sua estrutura os passos a serem dados, necessitando apenas que o aluno aplique-os e siga-os corretamente.

Como a linguagem matemática busca sintetizar todos os casos possíveis através de fórmulas, regras e algoritmos, a "abreviação através do algoritmo é a redução dos atos" (SILVEIRA, 2005, p. 63). A partir disso, é possível intuir que o algoritmo, mesmo sob uma visão reducionista de que não possibilita atitudes reflexivas se apresenta como um caminho a seguir. Acreditamos que o seu uso de maneira adequada pode tornar-se um instrumento potencializador da compreensão da linguagem e dos mecanismos matemáticos dentro do ambiente de sala de aula.

Na seção seguinte, apresentamos a Interpretação/análise dos alunos para os problemas de regra de três. Percebemos a partir dos jogos de linguagem adotados por professor e alunos que suas semelhanças interferem na compreensão da linguagem e das regras matemáticas envolvidas nas situações de sala de aula.

4.4 Interpretação/análise dos alunos para os problemas de regra de três

Nesta seção, discutiremos a interpretação/análise dos alunos para os problemas de regra de três aplicados na pesquisa. Partindo do pressuposto de que o professor utilizava uma estratégia não muito corriqueira julgamos necessário elucidá-la, haja vista que esse procedimento pretendia facilitar a aprendizagem dos alunos.

O professor iniciava a aula apresentando uma situação-problema, isto é, um problema em que seria possível discutir alguns conceitos envolvidos naquele conteúdo e a partir dessa situação dava início às discussões de como poderiam resolvê-la. Nesse processo, solicitava aos alunos suas opiniões, o modo como intuíam sobre a estratégia para resolver e chegar a um resultado coerente com a lógica da matemática. Após a discussão e registro no quadro-negro das diferentes estratégias de resolução dos alunos, iniciava uma possível ‘conceitualização’ daquele conteúdo. Em seguida, apresentava aos alunos um problema resolvido juntamente com os procedimentos de resolução, isto é, apontava um modelo de algoritmo a ser seguido. Nesta pesquisa, esse estudo inicial se deu com o conteúdo de regra de três simples e posteriormente foi estudado o conteúdo de regra de três composta, conforme já relatado. A sequência didática do professor consistia em apresentar aos alunos uma situação-problema e os passos a serem seguidos, isto é, aponta um processo algorítmico de resolução.

Uma curiosidade demonstrada na prática pedagógica do professor era a sua estratégia ao analisar a natureza das grandezas, se eram diretamente ou inversamente proporcionais, isto é, a aplicação da terceira regra. O professor utilizava os sinais de adição (+) e subtração (-), ao invés de setas para realizar tal análise. Na entrevista, o professor relatou que as setas confundiam os alunos e por isso sua preferência pelos sinais.

> *Em minha prática pedagógica, já usei as setas, mas percebi que os alunos se confundiam muito, por isso adotei outra estratégia, essa dos sinais, constatei que com os sinais eles não se confundem tanto ao aplicar à analítica (entrevista com o professor).*

Conforme pudemos constatar, tanto na fala do professor como a partir das observações, os sinais operatórios (que nesse caso não possuíam essa função) ajudavam os alunos a aplicarem a terceira regra do algoritmo de resolução da regra de três, no entanto, mesmo com a possibilidade de se confundirem ao aplicarem os sinais no momento em que deveriam comparar grandezas, principalmente, na regra de três composta, por apresentar na coluna da variável mais de um sinal, o uso dessa estratégia constituiu-se como um instrumento em que a maior parte dos alunos apresentaram resultados positivos, isto é, compreenderam o domínio do conceito.

Ao organizar os dados dos problemas matemáticos de regra de três, a partir do esquema de proporção, isto é, após a aplicação das três primeiras regras do algoritmo de resolução, o professor mostrava aos alunos como aplicar a analítica. A partir da aplicação da terceira regra, isto é, o procedimento de aplicar a *'analítica'*, inicialmente, apresentado pelo professor, dava-se da seguinte maneira: o professor analisava quais dessas grandezas apresentava a razão entre os seus dois valores, isto é, o antecedente e o consequente, a partir daí, observava se esses valores aumentavam ou diminuíam, analisando na razão de um para o outro, ou seja, a razão do antecedente para o consequente. A partir de então, comparava com a outra grandeza, a que apresentava a variável, fazendo a seguinte pergunta: *se aumentou desse lado o que acontece desse outro, aumenta ou diminui?* Na medida em que os valores das duas grandezas aumentavam ou diminuíam na mesma proporção, considerava-os diretamente proporcional, se um valor aumentasse e o outro diminuísse inversamente proporcional. Essa estratégia funcionava tanto para os problemas de regra de três simples como para a os problemas de regra de três composta. Para esses últimos problemas, exigiam uma análise mais minuciosa por apresentar mais de duas grandezas.

Para comparar uma grandeza com a outra, isto é, a razão entre as grandezas, o professor traçava linhas que acompanhava o sinal de adição (+) e/ou subtração (-). Essas linhas tinham a função de mostrar para o aluno quais eram as grandezas que estavam sendo comparadas. A partir disso, poderia perceber se as grandezas aumentavam ou diminuíam e, dessa forma, avaliar se correspondiam a grandezas de natureza diretamente ou inversamente proporcionais. As linhas possibilitavam ainda verificar se os sinais eram diferentes ou iguais naquela situação. Se os sinais fossem iguais às grandezas eram diretamente proporcionais, se fossem diferentes eram inversamente proporcionais.

A seguir, apresentamos um modelo hipotético que se aproxima da proposta de resolução daquilo que o professor desenvolvia em sala de aula.

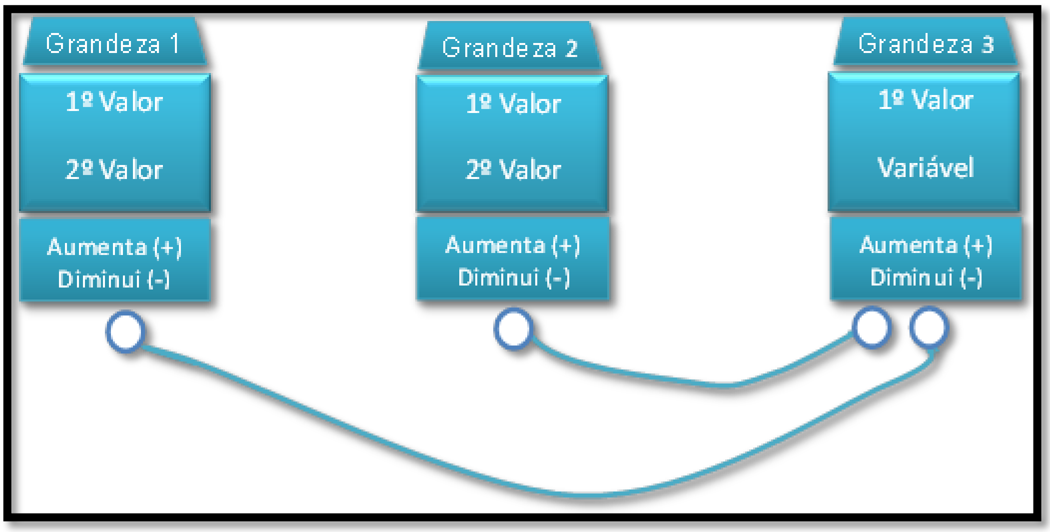


Figura (4.4a)

Nesse modelo da figura (4.4a), procuramos generalizar a formalização da estratégia didática adotada pelo professor. Nesta situação, as linhas se articulam com os sinais e descrevem a natureza proporcional das grandezas na situação-problema. Essa estratégia se assemelha àquela que se utiliza das setas, no entanto, mobiliza um elemento novo, os sinais de adição e subtração. Sua configuração possibilita uma interpretação veiculada pelo jogo de linguagem particular daquela situação que permite nesse contexto se cristalizar enquanto regras. Contudo, não são regras matemáticas e sim regras criadas pelo professor. O modelo acima apresentado ilustra a estratégia de resolução de um problema de regra de três composta, entretanto, também podemos aplicá-lo aos problemas de regra de três simples, basta eliminarmos uma das grandezas.

No desenvolvimento das aulas do professor, percebemos que os jogos de linguagem adotados para os sinais naquela situação de ensino fugiam às suas características naturais dentro do contexto da matemática, pois, enquanto na matemática apresentam-se como sinais operatórios ou como a natureza positiva ou negativa de um número, naquele caso serviam apenas para avaliar, mesmo com base em valores numéricos, se as grandezas eram diretamente ou inversamente proporcionais.

Conforme o exposto, as regras dos sinais operatórios assumiram características peculiares, pois atendiam especificamente àquela situação. Nesse caso, as palavras, isto é, os sinais operatórios assumem outros significados, pois participava de um jogo específico, o jogo daquela sala de aula. Segundo Oliveira (2001, p. 130), “a significação das palavras não está estabelecida de modo definitivo”. Wittgenstein percebe que os diferentes usos da linguagem fazem parte da totalidade dessa situação da vida humana, isso é parte da atividade humana, ou seja, de sua *forma de vida*. É por essa razão que a significação das palavras só pode ser esclarecida por meio do exame das formas de vida, dos contextos em que as palavras ocorrem, pois é o uso que decide sobre a significação das expressões linguísticas (OLIVEIRA, 2001), ainda, segundo o filósofo Austríaco, a significação de uma palavra “é seu uso na linguagem”. Desse modo, só se pode entender a linguagem a partir do contexto em que os homens se comunicam entre si. Segundo Marcondes (2006), a mesma palavra pode, assim, participar de diferentes contextos com diferentes significados. São inúmeros esses usos, e não há porque privilegiar um sobre o outro já que tudo depende dos objetivos específicos de quem usa a linguagem.

Nesse sentido, apresentamos a seguir algumas das atividades desenvolvidas pelos alunos de modo que possam ilustrar àquilo que estamos discutindo:

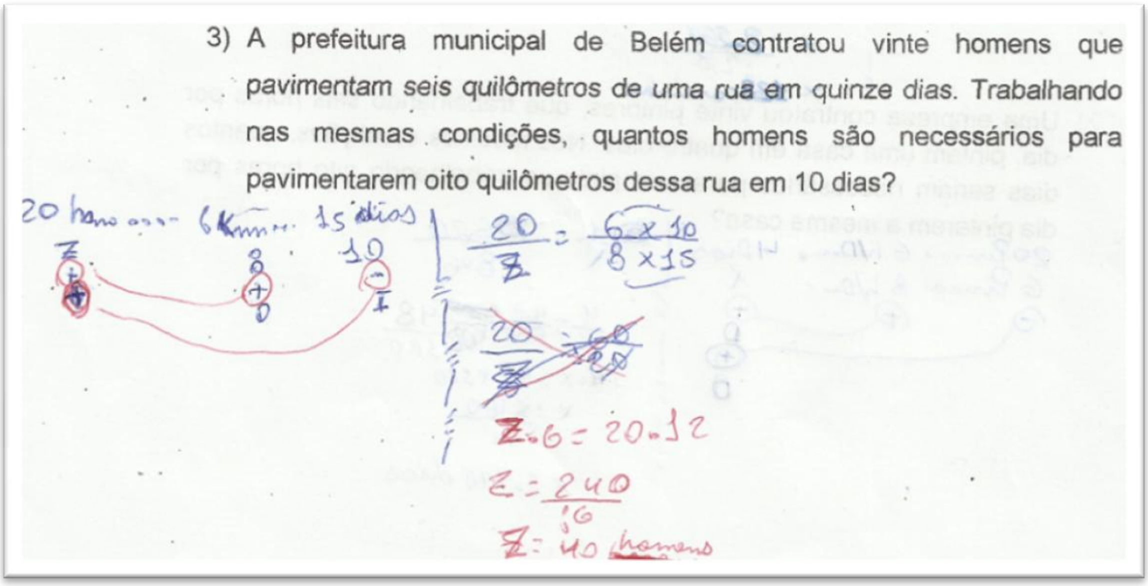


Figura (4.4b)

A figura (4.4b) e a figura (4.4c) ilustram a estratégia utilizada pelo professor ao procurar facilitar o processo de ensino e de aprendizagem para os alunos. Conforme discutido anteriormente, as linhas descrevem as relações de comparação da razão de uma grandeza com a outra grandeza. E os sinais descrevem a natureza dessas grandezas quanto a sua proporcionalidade. Podemos observar que esses elementos indicados pelo professor ajudaram os alunos a chegarem a um resultado em seu processo de resolução.

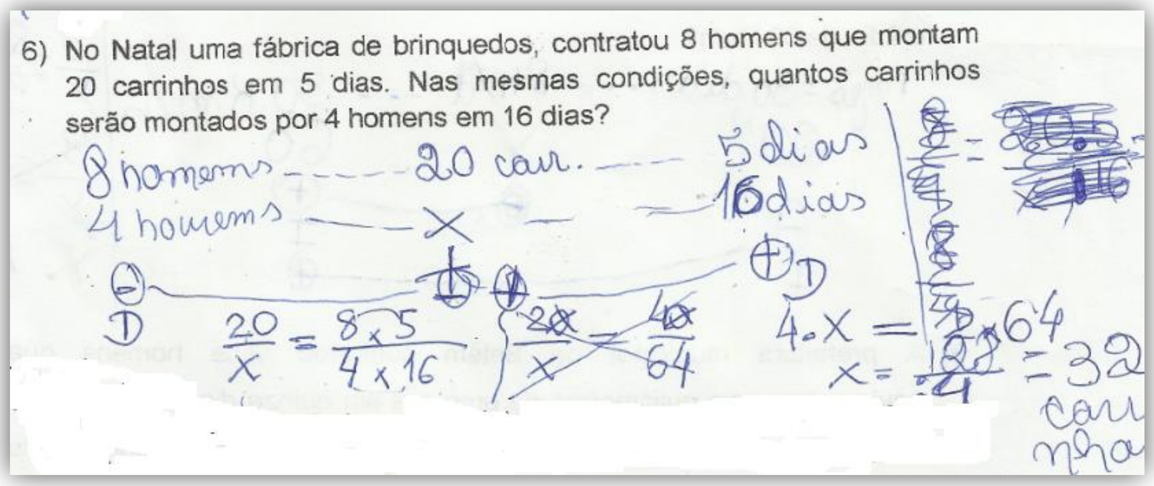


Figura (4.4c)

A partir das observações, percebemos que a estratégia ensinada pelo professor facilitou bastante para os alunos no processo de analisar se as grandezas eram de natureza diretamente ou inversamente proporcionais. Com base nas observações e a partir dos relatos dos alunos na entrevista, pudemos constatar que é na regra de três composta que eles apresentam maiores dificuldades em aplicar a *‘analítica’*, pois esse tipo de problema matemático apresenta várias grandezas. Na entrevista com os alunos ouvimos:

> *Eu tenho mais dificuldade nos problemas de regra de três composta, eles têm mais coisas* [grandezas] *pra gente achar, ai me confundo na hora de fazer a analíti*ca (entrevista com os alunos, grifos nossos).

Como já havíamos sinalizado em nossas análises e com base nas conversas com o professor e agora endossado pelo aluno, é nesse tipo de problema em que residem os grandes equívocos no processo de aplicação e interpretação das regras do algoritmo de resolução. Julgamos que tais dificuldades ocorrem devido a esse tipo de problema apresentar mais de duas grandezas, desse modo, os alunos sinalizam confusão ao aplicar a analítica.

Na tentativa de jogar o mesmo jogo do professor e, consequentemente, aplicar as mesmas regras, os alunos em certos momentos acabam se equivocando ao aplicar determinadas regras desse jogo. Foi também, neste tipo de problema que os alunos apresentaram confusões ao traçar as linhas que identificavam a natureza das grandezas para saber se eram diretamente ou inversamente proporcionais.

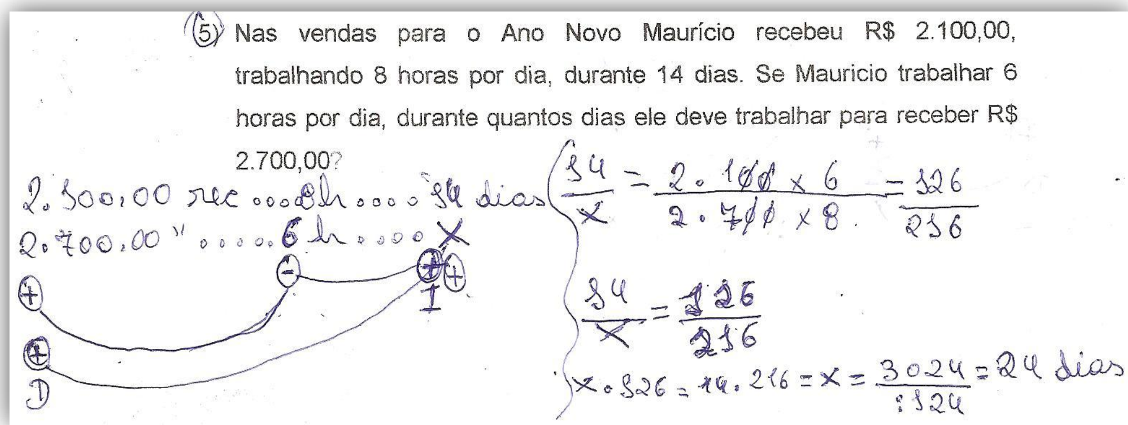


Figura (4.4d)

A figura (4.4d) apresenta nitidamente certa confusão presente na interpretação do *jogo* do aluno, quando procura estabelecer, utilizando as linhas como parâmetros para a identificação da natureza das grandezas com base no jogo do professor. Embora Wittgenstein nos mostre que qualquer curso de ação possa ser interpretado conforme uma regra, assim também qualquer enunciação de uma regra deve ser compreendida (MATOS, 2006). Ao compreender uma regra, podemos sempre ser guiados por interpretações variadas, que geram conjuntos de resultados distintos conforme constatamos no resultado da interpretação desse aluno.

A partir dos dados da pesquisa avaliamos que para os alunos, às vezes, não é necessário traçar mais de uma linha de orientação para cada razão entre as grandezas, ou em outros casos traçam linhas a mais, as quais não são necessárias, conforme indica a seta na figura (4.4e). Considerando que os jogos de linguagem entre o professor e os alunos apresentados no processo de ensino e de aprendizagem muitas vezes não se entrecruzam, isso nos leva a acreditar que pelo motivo dos jogos não atenderem às mesmas regras, ou seja, os mesmo critérios, grande parte dos alunos apresenta alguma confusão ao aplicar as regras para executar tal procedimento.

Essa confusão pode ser proveniente das semelhanças entre as regras aplicadas pelo professor e as regras que os alunos entenderam, pois há nessas semelhanças uma disposição mecânica que induz ao erro, assim os alunos pensam que estão seguindo a regra que lhes foram ensinadas.

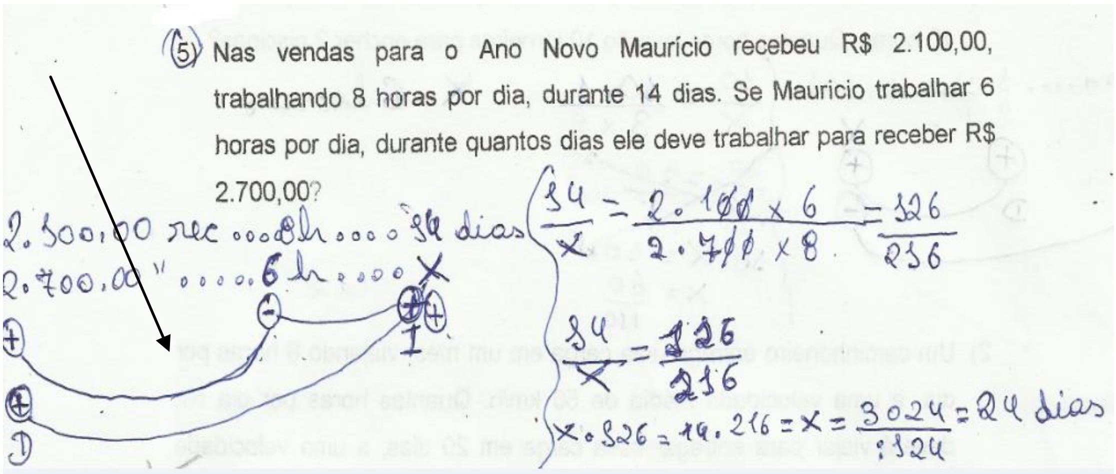


Figura (4.4e)

Essa estratégia utilizada pelo professor buscava facilitar a aprendizagem com o uso do algoritmo que havia sido ensinado a esses alunos. A elucidação da estratégia procurava ter clareza se as grandezas eram diretamente ou inversamente proporcionais. Para um melhor entendimento da aplicação dessa regra, os alunos deveriam traçar apenas duas linhas, conforme ilustra a figura (4.4f) que deve sempre indicar a relação entre as grandezas que apresenta à variável, isto é, a grandeza dependente.

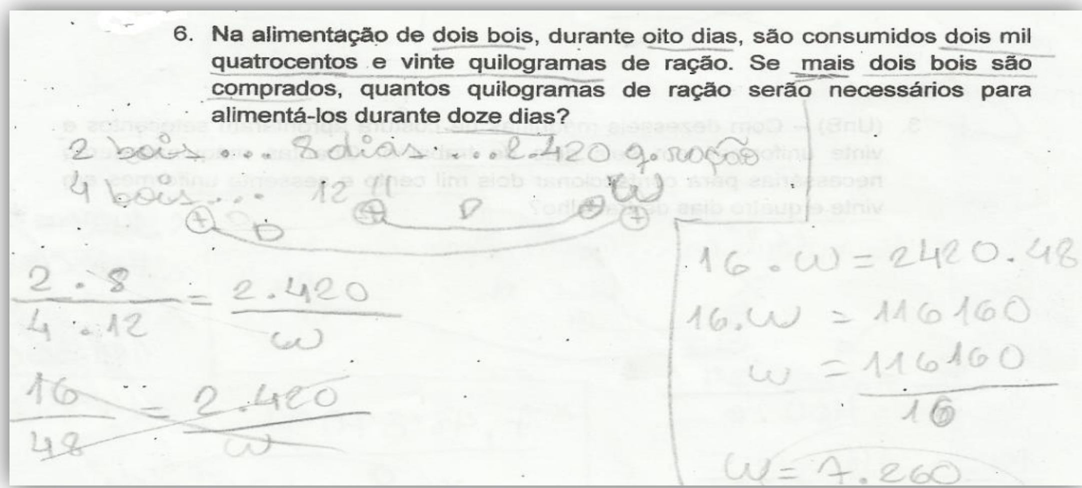


Figura (4.4f)

No exemplo a seguir, apresentamos algumas das interpretações equivocadas que os alunos fizeram sob o uso impróprio do algoritmo que o professor ensinou. A figura (4.4g) apresenta as confusões de um aluno com as linhas. Enquanto estas deveriam facilitar o processo de aprendizagem, neste caso, acabou conduzindo o aluno a um esforço bem maior para analisar se as grandezas eram diretamente ou inversamente proporcionais. Apesar de o aluno ter acertado o resultado, não temos como estimar parâmetros para compreender o seu processo de raciocínio. Neste caso, acreditamos que as estratégias didáticas adotadas pelo professor acabaram apresentando resultado que não eram os previstos pelo próprio professor.

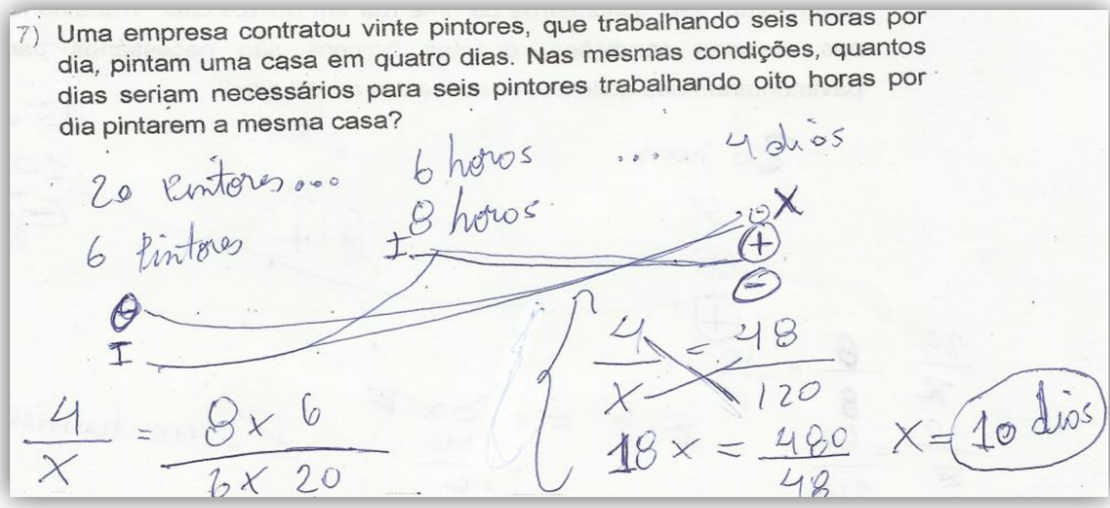

7) Uma empresa contratou vinte pintores, que trabalhando seis horas por dia, pintam uma casa em quatro dias. Nas mesmas condições, quantos dias seriam necessários para seis pintores trabalhando oito horas por dia pintarem a mesma casa?

Figura (4.4g)

Como vimos, no processo de ensino e de aprendizagem da regra de três qualquer que sejam as diferentes estratégias adotadas pelos professores, ainda que se utilizem de setas ou sinais, todas possuem em seus diferentes jogos, mesmo aparentando semelhanças, os objetivos e sempre as mesmas características, qual seja, de alcançar a aprendizagem dos alunos. Entretanto, a linguagem utilizada para ensinar o aluno não deve ser passiva de erros, pois estas confusões podem levar o aluno a uma interpretação errônea daquele conteúdo matemático que está sendo ensinado.

A partir dessa pesquisa entendemos que as dificuldades de compreensão das regras envoltas no processo de ensino e de aprendizagem da matemática nos conduz aos Labirintos da compreensão de sua sintaxe. Trabalhamos sob a perspectiva de que é na linguagem que encontramos caminhos para elucidar esse mal entendido causado pela interpretação equivocada das regras. Dessa forma, passamos a acreditar que não somente o professor precisa ter clareza das práticas de suas atividades linguísticas que estão presentes nesse processo de comunicação dos conteúdos a serem ensinados como também os alunos precisam jogar esse mesmo jogo.

Observações Finais

A presente pesquisa teve por objetivo responder a inquietações acerca das dificuldades linguísticas que os alunos apresentam ao aplicar e seguir as regras no processo de ensino e de aprendizagem da matemática. Como elemento norteador dessa investigação, elegemos a questão de pesquisa assim enunciada: *Que regras matemáticas os alunos aplicam na solução de problemas de regra de três?*

A partir dos estudos acerca da Filosofia da Linguagem, procuramos compreender as ações que a linguagem exerce sobre nossas atitudes e pensamentos. Buscamos compreender as problemáticas enfrentadas pelos filósofos durante a Virada Linguística ao procurarem solucionar os problemas enfrentados pelo mau uso da linguagem. Desse modo, encontramos em Wittgenstein elementos que apontam para o uso da linguagem no quotidiano como o *lócus* mais propício para análise. Acreditamos, a partir das ideias desse filósofo, que as expressões linguísticas e os conceitos adquirem significados quando aplicados em contextos de uso dos *jogos de linguagem*.

Neste sentido, aprender o significado de uma expressão linguística pode consistir na aquisição de uma regra ou um conjunto de regras, que governam seus usos dentro de um ou mais jogos de linguagem. Uma das consequências dessa ideia para a educação é que não há sentido em se ensinar um significado essencial de uma palavra independente de seus diversos usos. Uma palavra só adquire significado quando se opera com ela, ou seja, seguindo as regras de um determinado contexto linguístico.

A consideração da relação midiática entre regra e sua aplicação, assim como compreendê-la e aplicá-la corretamente é um ponto no qual Wittgenstein procura esclarecer em seus escritos a partir da década de 1930. Para o autor, a linguagem é uma atividade governada por regras que guiam nosso comportamento e determinam o significado do uso das palavras, na medida em que constituem uma função normativa expressa por uma forma linguística.

Ao olharmos para a matemática somente como um jogo de regras a ser seguido, estamos sujeitos a cair em armadilhas, justamente porque o significado do símbolo matemático não está nele e sim fora dele, isto é, em sua aplicação. Em matemática, a fronteira entre a aplicação das regras e sua compreensão está no domínio do conceito e do uso correto da linguagem.

Silveira (2005) discute que os critérios de verdade dos alunos nem sempre estão em sintonia com os critérios de verdade da matemática, pois nas semelhanças entre esses critérios acontecem os ‘erros’. Esses geralmente são causados por atender aos critérios dos alunos em detrimento da matemática. No entanto, quando percebido a tempo esses ‘erros’ ainda podem ser reparados.

A respeito de estudos que analisaram a regra sob a perspectiva de Wittgenstein, encontramos algumas pesquisas que mostram claramente a importância desse tema em sua filosofia, por exemplo, Figueredo (2009) analisou o papel do conceito de regra nas Investigações a partir da leitura de S. Kripke e, G.P. Baker e P.M. S. Hacker. Em que o primeiro defende que, apesar da noção de regra apresentar um paradoxo, surge como um importante argumento contra a ideia de linguagem privada. Por outro lado, os dois últimos discutem o conceito de regra como imprescindível na explicação que Wittgenstein apresenta a respeito do funcionamento da linguagem, na medida em que estas se constituem como funções normativas de uso dos signos linguísticos.

Silva (2011) investigou as dificuldades de ordem linguística enfrentada por um grupo de alunos do 5º ano do Ensino Fundamental no aprendizado de regras matemáticas, em particular, do conceito de divisão dentro do contexto de sala de aula. Deu ênfase, principalmente, nas discussões sobre a linguagem e constatou que algumas das dificuldades desses alunos residem em não compreenderem *as regras ensinadas pelo professor* e com isso inventam “novas regras matemáticas” em suas estratégias de resolução de problemas matemáticos escolares. Há ainda aqueles que “confundem” os contextos da resolução de problemas matemáticos, bem como a dificuldade de compreensão de problemas que trazem informações implícitas.

Com base nessas pesquisas e no estudo que realizamos, entendemos que a maneira como aplicamos uma regra depende de como fomos ensinados, porém, a aprendizagem dessa aplicação faz parte de nossa subjetividade, pois nem sempre aquilo que o professor pensa ter ensinado é o que o aluno realmente aprendeu.

Ao elegermos seções de análise, procuramos estabelecer elementos que facilitassem nossas interpretações acerca daquilo que foi produzido pelos alunos em sala de aula. Acreditamos que a partir dessas seções, poderíamos melhor desenvolver a aplicação das ideias wittgensteinianas em nossas apreciações, não somente do processo de seguir regras pelos alunos como também da matemática de modo geral.

Nossa pesquisa apontou que na aprendizagem da matemática os alunos seguem regras mecanicamente, pois na maioria das situações não atribuem sentido sob sua aplicação. Análogo a essa situação está o seguimento do algoritmo por apresentar características de generalização, conforme pudemos perceber nas resoluções dos problemas pelos alunos.

O amadurecimento dos alunos em relação à regra na matemática, possivelmente acontece quando esses alunos apresentam uma vivência de uso das técnicas de resoluções que contribui para a certeza do domínio sobre a sua aplicação correta. Desse modo, o professor estará promovendo sua aprendizagem, pois essas ações implicam que os alunos construam significado sobre os conceitos matemáticos.

Apesar da noção de proporcionalidade permear o estudo da regra de três, em nossa investigação percebemos que na maioria dos textos didáticos e na prática do professor o conteúdo de regra de três geralmente é trabalhado isoladamente, isto é, não prescindi da proporcionalidade. Apesar de esta última anteceder a primeira, não há um vínculo mais forte que isso. Essas evidências podem ser constatadas na pesquisa de Silva (2011). Nessa pesquisa, o autor mostra que a regra de três surgiu de práticas comerciais e somente após a larga difusão de suas técnicas de calcular passou a incorporar o fazer escolar. Somente a partir dessa incorporação na escola é que passou a assumir características da proporcionalidade.

Dessa forma, reconhecemos a importância que o estudo da regra de três exerce sobre o domínio de estratégias de resolução de uma situação-problema, possibilitando ao aluno compreender os modelos matemáticos e os conceitos ali envolvidos. Com isso, veremos que, quando conseguir aliar o domínio do conceito e as regras de uso do algoritmo, teremos uma aprendizagem que produzirá um significado.

Ressaltamos que o estudo das obras de Wittgenstein nos possibilitou reflexões que indicam mudanças nos paradigmas da educação, em particular, nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática, visto que, apesar de a matemática seguir regras normativas, é possível por meio dos *jogos de linguagem* estabelecer conexões na compreensão de suas regras que se cristalizam em forma de conceitos.

REFERÊNCIAS

ALVES-MAZZOTI, A. J. O método nas Ciências Sociais. In: ALVES-MAZZOTI, A. J; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas Ciências Naturais e Sociais:** pesquisa quantitativa e qualitativa. São Paulo: Editora Pioneira, 1998.

ARAÚJO, Inês Lacerda. **Do signo ao discurso**: introdução à filosofia da linguagem. São Paulo: Parábola editorial, 2004. (linguagem; v. 9)

ARAÚJO, Inês Lacerda. Subjetividade e linguagem são mutuamente excludentes?**Princípios**, Natal, v. 14, n. 21, jan./jun. 2007, p. 83-103.

BARUK, Stella. **Insucesso e matemáticas**. Tradução de Manoel Alberto. Lisboa: Relógio D'Água Editores, 1996.

BAKHTIN, Mikhail. **Marxismo e filosofia da linguagem:** problemas fundamentais do método sociológico na ciência da linguagem. Tradução de Michel Lahud e Yara Frateschi Vieira. 14ª ed. São Paulo: Hucitec, 2010.

BASTOS, Cleverson Leite; CANDIOTTO, Kleber B. B. **Filosofia da Linguagem**. Petrópolis: Vozes, 2007.

BELLO, Samuel Edmundo Lopes. Jogos de linguagem, práticas discursivas e produção de verdade: contribuições para a educação (matemática) contemporânea. **Zetetiké**– v. 18, Número Temático, 2010.

BERNAL, Márcia Maria. **Estudo do objeto proporção**: elementos de sua organização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado. Florianópolis, 2004. 169f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, 2004.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Quantitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Oliveira et all. (Org.) **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto, 1994.

BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Oliveira. Construindo pesquisas coletivamente em educação matemática. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Oliveira (Org.) et all. **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental.***Parâmetros curriculares nacionais****:* (5ª a 8ª séries). Brasília, DF: MEC/SEF, 1998. v. 1, v. 3.

CALVÓ, Pedro Puig. Introdução. In: **Pedagogia da Alternância** – alternância e desenvolvimento. Primeiro Seminário Internacional. Salvador: Dupligráfica,1999.

CONDÉ, Mauro Lúcio Leitão. **Wittgenstein**: linguagem e mundo. São Paulo: Annablume, 1998.

CHAUVIRÉ, Christiane. **Wittgenstein**. Tradução de Maria Luiza X de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1991.

CUNHA, Marisa Ortegoza da.Sobre a idéia de algoritmo. In: **Seminários de Estudos em Epistemologia e Didática (SEED-FEUSP),** Universidade de São Paulo/Faculdade de Educação, junho/2007.

D'AMORE, Bruno. **Elementos de didática da matemática**. Trad. Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

FIGUEIREDO, Nara Miranda de. **Estudo sobre regras e linguagem privada.** A divergência de interpretações sobre a noção de regra nas *Investigações Filosóficas.* 2009 Dissertação(Mestrado em Filosofia) – Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas,Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sérgio. **Investigações em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

GÓMEZ, Bernardo. **Los ritos enlaenseñanza de laregla de tres**. En Alexander Maz, Manuel Torralbo y Luís Rico (Eds*.). José Mariano Vallejo, El Matemático Ilustrado. Una mirada desde laeducación matemática*, pp. 47-69. Córdoba. Servicio de Publicaciones de laUniversidad de Córdoba, 2006.

GÓMEZ-GRANELL, Carmem. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, Ana; TOLCHINSKY, Ana. **Além da alfabetização:** aaprendizagem fonológica, ortográfica, textual e matemática. São Paulo: Editora Ática,2003.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. **Reflexões sobre contexto e significado na educação matemática.** In: VII Encontro Paulista de Educação Matemática (EPEM). São Paulo, 2004. Disponível em: <http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/Comunicacoes_Orais%5Cco0055.doc>. Acesso em: 25abril 2011.

GOTTSCHALK, Cristiane Maria Cornelia. Uma concepção pragmática de ensino e aprendizagem. In: **Educação e Pesquisa**. São Paulo, v.33, n. 3, p. 459-470. Set./dez. 2007.

GLOCK, Hans-Johann.**Dicionário Wittgenstein**. Tradução de Helena Martins. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.

GRANGER, Gilles-Gaston. **Filosofia do estilo**. Tradução de ScarlettZerbettoMarton. São Paulo: Perspectiva, ed. da universidade de São Paulo, 1974 (coleção estudos).

GRAYLING, A.C. **Wittgenstein**. Tradução de Milton Camargo Mota. São Paulo: Loyola, 2002 (Coleção mestres do pensar).

HEBECHE, Luiz. **O mundo da consciência:** ensaio a partir da filosofia da psicologia de L. Wittgenstein. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002.

HINTIKKA, Jaakko; HINTIKKA, Merril. **Uma investigação sobre Wittgenstein**. Tradução de Enid Abreu Dobranszky. Campinas: Papirus, 1994. – (Papirus Filosofia).

IMENES, L M. LELLIS, M. **Matemática para todos**. 6ª série, 3º ciclo. São Paulo, Scipione, 2002.

LIVET, Pierre.**As normas: análise da noção, estudo de textos:** Wittgenstein, Leibniz, Klesen, Aristóteles. Tradução de Fábio dos Santos Creder Lopes. Petrópolis: Vozes, 2009.

LUCHI, José Pedro. **A Superação da filosofia da consciência em J. Habermas**: a questão do sujeito na formação da Teoria Comunicativa da Sociedade. 555f. (*dissertatiun ad doctoratiun), Facultas Philosophie.* Pontificia Universitas Gregoriana, Roma, 1999.

MACHADO, Nílson José. **Matemática e língua materna**:análise de uma impregnação mútua. 5ª ed. São Paulo: Cortez, 2001.

MARCONDES, Danilo. A Teoria dos Atos de Fala como concepção pragmática de linguagem. **Filosofia Unisinos**, 7(3):217-230, set/dez 2006.

MARCONDES, Danilo. **Filosofia, linguagem e comunicação.**4 ed. São Paulo: Cortez, 2001.

MARCONDES, Danilo. Desfazendo mitos sobre a pragmática. **ALCEU** - v.1 - n.1 - pg 38 a 46 - jul/dez 2000.

MARCUSCHI, Luiz Antônio. **Produção textual, análise de gêneros e compreensão**. São Paulo: Parábola Editorial, 2008.

MATOS, Marcos de Almeida. O que faz uma regra? Desenvolvimentos de uma imagem wittgensteiniana do significado. 158f. (Dissertação de Mestrado), Departamento de Filosofia da Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas – Faculdade de Filosofia. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.

MORENO, Arley Ramos. **Wittgenstein**: os labirintos da linguagem - ensaio introdutório. Campinas: Editora da UNICAMP, 2000 - (Coleção Logos).

MORENO, Arley Ramos. **Introdução a uma pragmática filosófica**: de uma concepção de filosofia como atividade terapêutica a uma filosofia da linguagem. Campinas: editora da Unicamp, 2005.

MORENO, Arley Ramos. Uma concepção de atividade filosófica. *Caderno de História Filosofia e. Ciências*, Campinas, Série 3, v. 14, n. 2, p. 275-302, jul.-dez. 2004.

OLIVEIRA, Manfredo Araújo de. **Reviravolta linguístico-pragmática na filosofia contemporânea**. 2ª ed. São Paulo: Loyola, 2001.

PÁDUA, E. M. M. **Metodologia da pesquisa**: abordagem teórico-prática. 6ª ed. Campinas: Papirus, 2000.

PÉREZ DE MOYA, J. (1998). **Arithmeticapráctica y speculativa**. Salamanca. Biblioteca Castro. Madrid: Ediciones de la Fundación José Antonio de Castro,1998.

PONTE, João Pedro da. Estudos de Caso em Educação Matemática. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, América do Sul, 19, out. 2008. Disponível em:http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/1880/1657. Acesso em: 18 Jul. 2010.

RORTY, Richard. **Wittgenstein e a virada linguística**, 1992. http://ghiraldelli.files.wordpress.com/2008/07/rorty_virada.pdf. acesso em 25 nov. 2010.

SILVEIRA. Marisa Rosâni Abreu da. **Produção de sentidos e construção de conceitos na relação ensino/aprendizagem da matemática.**176f. (Doutorado em Educação), Programa de Pós-Graduação em Educação – Faculdade de Educação.Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2005.

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da. Aplicação e interpretação de regras matemáticas. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo: vol 10, nº 1. 2008.pp. 93-113.

SILVA, Paulo Vilhena da. **O aprendizado de regras matemáticas:** uma pesquisa de inspiração wittgensteiniana com crianças da 4ª série no estudo da divisão. 102f. (Dissertação de Mestrado), Instituto de Educação Matemática e Científica,Universidade Federal do Pará, Belém, 2011.

SILVA, Eolália Artifon. **Pensamento proporcional e regra de três:**estratégias utilizadas por alunos do ensino fundamental na resolução de problemas. 2008. 208f. (Dissertação Mestrado) – Universidade Tuiutí do Paraná, Programa de Pós-Graduação – Mestrado em Educação, Curitiba, 2008.

SMITH, D.E. **History of mathematics**. Special Topics of Elementary Mathematics. Tradução: Higino Vol. II. New York: Dover Publications, INC., 1958.

VALLEJO, José Mariano. Tratado Elemental de Matemáticas escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Cuarta edición corregida y considerablemente aumentada. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra. Madrid: Imp Garrayasaza, 1841.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Gramática filosófica (GF).** Tradução de Luís Carlos Borges.São Paulo: Loyola, 2003.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Investigações Filosóficas (IF**). Tradução de José Carlos Bruni. São Paulo: Nova cultural, 1999 (coleção os pensadores).

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Tractatus Logico-Philosophicus (TLP**). Tradução de Luiz Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: Edusp, 1993.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Fichas (Zettel) (Z).** Tradução de Ana Berhan da Costa.Lisboa: Edições 70, 1989.

Anexos

ANEXO A – BATERIA DE EXERCÍCIOS COM PROBLEMAS DE REGRA DE TRÊS SIMPLES

Escola de Aplicação
Disciplina de matemática
Professor:

Alun@:____

Lista de Atividades.

1. Com 1000 kg de ração uma certa quantidade de vacas podem ser alimentadas por 50 dias. A mesma quantidade de vacas, com 800 kg de ração, pode ser alimentada por quantos dias?

2. Em um banco, constatou-se que um caixa leva, em média, cinco minutos para atender três clientes. Qual é o tempo que esse caixa levará para atender trinta e seis clientes ?

3. Uma doceira faz trezentos docinhos em uma hora e meia. Nas mesmas condições de trabalho, se ela dispuser apenas de 27 minutos. Quantos docinhos conseguirá fazer?

4. Abrimos trinta e duas caixas e encontramos cento e sessenta bombons. Quantas caixas iguais necessitamos para obter trezentos e oitenta e cinco bombons ?

5. Um avião percorre dois mil e setecentos quilômetros em quatro horas. Em uma hora e vinte minutos de vôo o avião percorrerá quantos quilômetros?

6. Para a Festa Junina, um grupo de 15 alunos, da 6ª série fez certo número de bandeirinha sem 6 horas. Em quantas horas um grupo de 20 alunos, trabalhando no mesmo ritmo, faria a mesma quantidade de bandeirinhas?

7. Uma pesquisa da UFPA mostrou que, em média, as famílias paraenses, com 4 pessoas consomem 65 litros de Açaí por mês. Nas mesmas condições, quantos litros será consumido por uma família de 5 pessoas, no mesmo período de tempo?

8. A professora de Artes tem 2 gatinhos. Ela comprou ração o suficiente para alimentá-los durante 9 dias. Nesta semana ela ganhou mais um gatinho, se os gatos comem a mesma quantidade de ração, para quantos dias a ração será suficiente para alimentar os gatinhos?

9. Um galpão pode ser construído em quarenta e oito dias por sete pedreiros. Quantos pedreiros, com o mesmo ritmo de trabalho, deverão ser contratados para construir o galpão em apenas duas semanas?

ANEXOS B – BATERIA DE EXERCÍCIO COMPROBLEMAS DE REGRA DE TRÊS COMPOSTA

Escola de Aplicação
Disciplina de matemática
Professor:

Alun@:____ nº_____

Lista de Atividades.

1) Na casa de Dona Juana há três torneiras que enchem uma piscina em 10 horas. Quantas horas levarão 10 torneiras para encher 2 piscinas?

2) Um caminhoneiro entrega uma carga em um mês, viajando 8 horas por dia, a uma velocidade média de 50 km/h. Quantas horas por dia ele deverá viajar para entregar essa carga em 20 dias, a uma velocidade média de 60 km/h?

3) A prefeitura municipal de Belém contratou vinte homens que pavimentam seis quilômetros de uma rua em quinze dias. Trabalhando nas mesmas condições, quantos homens são necessários para pavimentarem oito quilômetros dessa rua em 10 dias?

4) Dois pedreiros levam 9 dias para construir um muro com 2 metros de altura. Assim, trabalhando 3 pedreiros e aumentando a altura do muro para 4metros, qual será o tempo necessário para construir esse muro?

5) Nas vendas para o Ano Novo Maurício recebeu R$ 2.100,00, trabalhando 8 horas por dia, durante 14 dias. Se Mauricio trabalhar 6 horas por dia, durante quantos dias ele deve trabalhar para receber R$ 2.700,00?

6) No Natal uma fábrica de brinquedos, contratou 8 homens que montam 20 carrinhos em 5 dias. Nas mesmas condições, quantos carrinhos serão montados por 4 homens em 16 dias?

7) Uma empresa contratou vinte pintores, que trabalhando seis horas por dia, pintam uma casa em quatro dias. Nas mesmas condições, quantos dias seriam necessários para seis pintores trabalhando oito horas por dia pintarem a mesma casa?

ANEXO C – BATERIA DE EXERCÍCIO COM PROBLEMAS DE REGRA DE TRÊS SIMPLES E COMPOSTA

Escola de Aplicação
Disciplina de matemática
Professor:

Alun@:____ nº_______

Lista de Atividades.

1. (EPCAr) – Um trem com a velocidade de 45km/h, percorre certa distância em três horas e meia. Nas mesmas condições e com a velocidade de 60km/h, quanto tempo gastará para percorrer a mesma distância?

2. Uma pessoa ganha R$ 1620,00 por 18 dias trabalhados no mês. Considerando as mesmas condições de trabalho, quanto ganhará essa pessoa se ela trabalhar apenas 7 dias desse mês?

3. (UnB) – Com dezesseis máquinas de costura aprontaram setecentos e vinte uniformes em seis dias de trabalho. Quantas máquinas serão necessárias para confeccionar dois mil cento e sessenta uniformes em vinte e quatro dias de trabalho?

4. (CEFET) – Os desabamentos, em sua maioria, são causados por grande acúmulo de lixo nas encostas dos morros. Se dez pessoas retiram cento e trinta e cinco toneladas de lixo em nove dias, quantas toneladas serão retiradas por quarenta pessoas em trinta dias ?

5. (CEFET) – Há40 dias, uma torneira na casa de Neilson está apresentando um vazamento de 45 gotas por minuto. Se um vazamento de 20 gotas por minuto, apresentado pela mesma torneira, desperdiça 100 litros de água em 30 dias, calcular o número de litros de água já desperdiçados na casa de Neilson.

6. Na alimentação de dois bois, durante oito dias, são consumidos dois mil quatrocentos e vinte quilogramas de ração. Se mais dois bois são comprados, quantos quilogramas de ração serão necessários para alimentá-los durante doze dias?

ANEXO D – ROTEIRO GERAL DE PERGUNTAS PARA A ENTREVISTA COM OS ALUNOS

Roteiro de entrevista

- Você teve dificuldades ou não ao ler o problema em língua portuguesa?
- Você teve ou não dificuldade em trabalhar com a linguagem matemática?
- Você teve ou não dificuldades em montar o problema?
- Teve dificuldade ou não em identificar o que está pedindo o problema?
- Você teve ou não dificuldade em aplicar a ‘analítica’ (a regra) no problema?
- Você teve ou não dificuldades em calcular a proporção?
- Você teve ou não dificuldade me resolver a equação?
- Como ou o quê você fez para identificar o que está pedindo no problema?
- Como você identificou para saber se era regra de três simples ou composta, e ainda diretamente ou inversamente proporcional?
- O que você imaginou para responder o problema?