

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Criação de fótons no efeito Casimir dinâmico em cavidade oscilante
com condições de Neumann e Dirichlet**

Edney Ramos Granhen

Programa de Pós-Graduação em Física
Centro de Ciências Exatas e Naturais
Universidade Federal do Pará
Belém/Março de 2005

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

**Criação de fótons no efeito Casimir dinâmico em cavidade oscilante
com condições de Neumann e Dirichlet**

Edney Ramos Granhen

Dissertação de Mestrado
submetida ao Programa de Pós-Graduação
de Física da Universidade de Federal do Pará

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Danilo Teixeira Alves (UFPa)
Prof. Dr. Van Sergio da Silva Alves (UFPa)
Prof. Dr. Carlos Farina de Souza (UFRJ)
Prof. Dr. Luis Carlos Bassalo Crispino (UFPa) - Suplente
Prof. Prof. Dr. Jorge Castiñeiras Rodríguez (UFPa) - Suplente

Belém 2005

ABSTRACT

We consider a massless scalar field in a two-dimensional space-time inside an oscillating cavity with mixed boundary conditions. In order to discuss particle creation phenomenon, we consider the situation of parametric resonance in which the oscillating frequency is twice the frequency of the first mode of the static cavity. For convenience, we suppose that one of the boundaries is at rest and imposes Neumann condition to the field, whereas the other is in non-relativistic motion and imposes a Dirichlet condition on the field. Following the procedure developed by Dodonov and Klimov (*Phys. Rev. A*, **56**, 2664 (1996)), we compute the number of created particles, the generation rate and the energy in the cavity. We compare our results with those found in the literature for the Dirichlet-Dirichlet case.

RESUMO

Consideramos um campo escalar não massivo num espaço-tempo bi-dimensional dentro de uma cavidade oscilante com condições de contorno mistas. Discutindo do fenômeno da criação de partículas, consideramos uma situação de ressonância paramétrica na qual a frequência de oscilação da fronteira é duas vezes a frequência do primeiro modo da cavidade estática. Por conveniência, supomos que a fronteira que está em repouso impõe ao campo a condição de Neumann, enquanto que a outra, em movimento não relativístico, impõe ao campo a condição de Dirichlet. Seguindo o procedimento desenvolvido por Dodonov e Klimov (*Phys. Rev. A*, **56**, 2664 (1996)), calculamos o número de partículas criadas, a taxa de geração e a energia na cavidade. Comparamos nossos resultados aos encontrados na literatura para o caso Dirichlet-Dirichlet.

Dedicatória,
A Ewerton Granhen
meu irmão e amigo

*Quando você atinge o caminho da
estratégia, não haverá nada que não possa
compreender*

Miyamoto Musashi

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Danilo T. Alves pela orientação, amizade e confiança que depositou em minha pessoa no decorrer deste trabalho, tendo contribuído e muito para minha formação.

Ao Prof. Dr. Van Sergio pela leitura desta obra e suas importantes observações a respeito do assunto, pelo incentivo e dicas para apresentação da defesa.

Aos professores Dr. João dos Santos Protázio e Dr. Edgardo S. Cheb-Terrab, pelas discussões relacionadas com soluções de equações diferenciais parciais. Não posso deixar de esquecer a ajuda dos amigos Dr. Humberto Belich Jr., A Augusto Alves e ao professor Dr. Carlos Farina, membro do Instituto de Física da UFRJ, e quem devo a gratidão pela sugestão do tema deste trabalho.

À minha família, tão paciente e amiga nos momentos altos e baixos de minha carreira: Joaquim, Raimunda, Ewerton e Elda.

Aos amigos, em especial, Mauro Andreato, Luciana e aos demais, feitos em minha jornada pela UFSCar. À dupla de amigos que fiz durante o mestrado na UFPA, Francisco (Chiquinho) e Damião.

Ao Colegiado de Pós-Graduação em Física da UFPA.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Conteúdo

Introdução	3
1 Campo na cavidade oscilante	16
1.1 Obtenção do sistema de EDO's simplificado	18
1.2 Solução do sistema de equações diferenciais	23
1.2.1 Mapeando EDO's em EDP's	24
1.2.2 Solução das EDP's	27
2 Criação de fótons	30
2.1 Simplificação da fórmula para a taxa de criação no primeiro modo	30
2.2 Solução das equações integrais relevantes	33
2.3 Taxa e número de fótons no primeiro modo da cavidade	37
2.4 Taxa e número total de fótons dentro da cavidade	40
2.5 Energia total dentro da cavidade	43
A Consistência entre as EDO's e as transformações de Bogoliubov	50
B Obtenção da EDP para a função geradora $K^{(n)}$	53
C Forma fechada para a solução da EDP relacionada com $W^{(n)}$	56
D Teste de consistência para as soluções obtidas para $W^{(n)}$ e $K^{(n)}$	58
E Derivadas das soluções $W^{(n)}$ e $K^{(n)}$	61
F Demonstração de que todos os modos do campo são relevantes	63

G	Demonstração da taxa e número de fótons	66
G.1	Demonstração da fórmula (2.70)	66
G.2	Demonstração das fórmulas (2.77) e (2.80)	67

Introdução

Em 1948, H. B. G. Casimir calculou a força atrativa entre duas placas neutras, paralelas e perfeitamente condutoras, usando um método baseado na mudança da energia de ponto-zero do campo eletromagnético, imposta pela presença das placas [1] (detalhes sobre este efeito e tópicos correlacionados ver [2]). Para duas placas paralelas e infinitamente permeáveis a força é atrativa e idêntica ao resultado original de Casimir para placas perfeitamente condutoras. Entretanto, a força de Casimir entre uma placa perfeitamente condutora e outra perfeitamente permeável é, surpreendentemente, repulsiva [3]. Devido a esta peculiaridade, placas permeáveis foram recentemente consideradas na literatura, no contexto do efeito Casimir bem como em eletrodinâmica quântica de cavidades [4, 5]. É interessante notar que, embora a densidade de energia para o caso de duas placas perfeitamente condutoras e duas placas perfeitamente permeáveis seja exatamente a mesma, a influência destas vizinhanças sobre as propriedades radiativas num sistema atômico (como a taxa de emissão espontânea de um átomo) são bastante diferentes [5].

O problema do campo eletromagnético entre duas placas paralelas e perfeitamente condutoras, pode ser dividido em dois problemas de condições de contorno: o potencial vetor representando a polarização transversal elétrica (TE) é associado à condição de Dirichlet-Dirichlet (DD)(condição de Dirichlet em ambas as placas); enquanto que o potencial vetor representando a polarização transversal magnética (TM) é associado à condição de Neumann-Neumann (NN). Para o caso de duas placas infinitamente permeáveis, o potencial vetor TE é associado a NN e o potencial vetor TM é relacionado as condições de contorno DD. Para o caso de uma placa perfeitamente condutora e uma permeável, o potencial vetor TE satisfaz, na placa condutora, a condição de Dirichlet, e Neumann na permeável; já o potencial vetor TM satisfaz Neumann-Dirichlet. Recentemente a condição de Neumann tem sido considerada na literatura relacionada com a energia de Casimir no

contexto do campo escalar [6].

A versão não estacionária das forças estáticas de Casimir são forças exercidas pelas flutuações do vácuo sobre as fronteiras em movimento. Estas forças, usualmente conhecidas como forças dinâmicas de Casimir, originam o efeito dissipativo sobre o movimento de corpos macroscópicos. Com isso a energia dissipada durante o processo é convertida na criação de partículas reais, como uma consequência direta do princípio da conservação da energia. Visto que temos criação de partículas reais induzidas pelo movimento das fronteiras, estas forças também são chamadas de forças de reação a radiação. Podem surgir mesmo no caso de uma única fronteira, como mostrado por Moore em 1970 [7], Fulling e Davies em 1976 [8] e Ford e Vilenkin em 1982 [9]. No contexto da eletrodinâmica quântica, considerando placas perfeitamente condutoras e paralelas oscilando no vácuo, foi mostrado que fótons são criados em pares e que os fótons TM (associados às condições NN) são produzidos em maior número que os fótons TE (DD), com um espectro angular bastante diferente [10].

No contexto de campo escalar em 3+1 dimensões, a produção de partículas numa cavidade oscilante é aumentada quando mudamos a condição de contorno DD para NN [11]. Um espelho cuja condição de Neumann seja imposta sobre o campo, deformado mecanicamente com uma certa frequência, emite um número de partículas muito maior do que um espelho cuja condição imposta ao campo seja Dirichlet [12]. Dirichlet e Neumann exercem a mesma força sobre um espelho em movimento (numa aproximação não relativística) quando o estado do campo é simétrico sobre translação (como o estado de vácuo e térmico), mas não para estados coerentes, que introduzem uma fase de referência quebrando esta simetria [5]. Enquanto o efeito estático, há muito tempo já foi observado experimentalmente, até agora o efeito dinâmico não foi detectado, mas esquemas experimentais de detecção têm sido propostos. Uma possível maneira de detectar o fenômeno é relacionada as vibrações do espelho na frequência de gigahertz [14], mas é difícil um movimento mecânico acompanhar tais frequências e amplitudes apropriadas [15, 16]. Recentemente um esquema experimental alternativo foi proposto, baseado na simulação do movimento do espelho pela mudança da reflectividade de um semiconductor por irradiação de um laser, cuja energia dos fótons correspondem a energia de “gap” do semiconductor. [15, 16, 17]

No presente trabalho, enfocamos o modelo composto por um campo escalar não-massivo, num espaço-tempo bi-dimensional e confinado em uma cavidade oscilante, impondo ao campo condições de fronteira mistas: Neumann em uma das fronteiras e Dirichlet em outra. Nesse contexto, a fim de fazer uma descrição de resultados encontrados na literatura, consideremos inicialmente o problema de um campo escalar real ϕ , sem massa, em um espaço-tempo bidimensional, obedecendo à equação de onda¹:

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) \phi(t, x) = 0, \quad (1)$$

e sujeito à condição de que se anule sobre duas fronteiras (condição de Dirichlet em ambas as fronteiras), uma em $x = 0$ e outra em $x = L$:

$$\phi(t, 0) = \phi(t, L) = 0. \quad (2)$$

No contexto da teoria quântica de campos, a diferença de energia \mathcal{E} associada a essa região, entre a energia de ponto zero em todo o eixo (dentro e fora das fronteiras), considerando as condições de contorno impostas pela presença dessas fronteiras, e a energia de ponto zero, também em todo o eixo, mas na ausência das fronteiras, é dada por (energia ainda não regularizada):

$$\mathcal{E}_c(L) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{n\pi}{L} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} |k_x| \frac{L}{2\pi} dk_x. \quad (3)$$

Essa diferença só tem sentido físico se utilizarmos alguma prescrição de regularização. Por exemplo, uma função exponencial de corte para altas frequências. As frequências mais altas não contribuem para energia dentro da cavidade, dessa forma a energia de Casimir associada ao campo em 1+1 dimensão é:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c(L) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{\hbar c}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} e^{-sn\pi/L} - \frac{L\hbar c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |k_x| e^{-s|k_x|} dk_x \right\} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{\hbar c}{2} \left(-\frac{\partial}{\partial s} \right) \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-s\pi/L})^n - \frac{\hbar c L}{2\pi} \left(-\frac{\partial}{\partial s} \right) \int_0^{\infty} e^{-s\kappa} d\kappa \right\} \\ &= \frac{\hbar c}{2} \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{\pi/L}{4 \sinh^2(s\pi/2L)} - \frac{L}{\pi s^2} \right\} \end{aligned}$$

¹No presente trabalho consideramos $c = \hbar = 1$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hbar c}{2} \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \left[\frac{L}{\pi s^2} - \frac{\pi}{12L} + \mathcal{O}(s^2) \right] - \frac{L}{\pi s^2} \right\} \\
&= -\frac{\pi}{24L}.
\end{aligned} \tag{4}$$

A força entre as fronteiras é dada então por:

$$F(L) = -\frac{\partial}{\partial L} \mathcal{E}(L) = -\frac{\pi}{24L^2}. \tag{5}$$

O sinal negativo no resultado indica que há uma força atrativa entre as fronteiras.

Como já mencionado, um novo efeito quântico, denominado *Casimir dinâmico*, ocorre quando a posição das fronteiras varia no tempo. Adotando um dos modelos propostos por Moore [7], consideremos o campo escalar mencionado, na presença de duas fronteiras: uma fixa em $x = 0$ e outra executando um movimento *prescrito* $x = L(t)$. Consideremos a condição de que o campo se anule sobre a fronteira fixa ($\phi(t, 0) = 0$), e também seja nulo sobre a fronteira móvel do ponto de vista de um referencial inercial que se move com a mesma velocidade da fronteira em um dado instante t :

$$\phi'(t', x')|_{fronteira} = 0, \tag{6}$$

onde t' , x' e ϕ' são as coordenadas e o campo medidos num referencial co-móvel. A passagem para o referencial inercial do laboratório é imediata, uma vez que para o campo escalar temos $\phi'(t', x') = \phi(t, x)$, resultando em que as condições de fronteira, escritas em termos das quantidades medidas no referencial do laboratório, tomam a forma:

$$\phi(t, 0) = 0 \tag{7}$$

$$\phi(t, L(t)) = 0. \tag{8}$$

Moore encontrou um conjunto completo de soluções para o problema (1), (7) e (8) na forma:

$$\hat{\phi}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\hat{a}_n \phi^{(n)}(t, x) + H.c. \right], \tag{9}$$

onde

$$\phi^{(n)}(t, x) = e^{in\pi R(t+x)} - e^{in\pi R(t-x)} \tag{10}$$

e as funções de fase R satisfazem a equação funcional:

$$R(t + L(t)) - R(t - L(t)) = 2. \tag{11}$$

Os cálculos de Moore, levando em conta esta solução, mostraram que *fótons podem ser criados* através de um efeito excitante do movimento da fronteira sobre o estado de vácuo do campo [7]. Fulling e Davies [8] mostraram que fótons podem ser gerados por uma única fronteira não uniformemente acelerada, enfatizando a correlação deste efeito com processos de criação de partículas em modelos cosmológicos (vide, por exemplo, [21]). Em relação ao problema (1), (7) e (8), Fulling e Davies calcularam o valor esperado da densidade de energia

$$\langle T_{00}(t, x) \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \langle (\partial_x \hat{\phi}(t, x))^2 \rangle + \langle (\partial_t \hat{\phi}(t, x))^2 \rangle \right\} \quad (12)$$

no interior da cavidade oscilante, obtendo para sua expressão renormalizada:

$$\langle T_{00}(t, x) \rangle_{ren} = -f(t+x) - f(t-x), \quad (13)$$

onde

$$f(z) = \frac{1}{24} \left[\frac{R'''(z)}{R'(z)} - \frac{3}{2} \left(\frac{R''(z)}{R'(z)} \right)^2 + \frac{1}{2} \pi^2 (R'(z))^2 \right]. \quad (14)$$

A solução (9)-(11), proposta por Moore, embora exata em 1 + 1 dimensões, inclusive para movimentos relativísticos, possui limitações para uso prático. Uma delas é que a solução não é generalizável para dimensões mais altas. Outra, é que somente poucas soluções exatas da equação (11) são conhecidas.

Em 1982, Ford e Vilenkin [9] apresentaram um método perturbativo para tratar problemas como dado em (1), (7) e (8), assumindo a fronteira oscilando em movimento prescrito, não-relativístico, com pequena amplitude ao redor de uma posição fixa. Como exemplo de um movimento que se enquadra nestas características, consideremos o movimento harmônico:

$$L(t) = L_0[1 + \epsilon \sin(\Omega t)], \quad (15)$$

onde $\epsilon \ll 1$ e $L_0 \epsilon \Omega \ll 1$. O método de Ford e Vilenkin consiste em resolver o problema perturbativamente em ϵ . O ponto chave está em considerar, a priori, o campo ϕ como sendo uma perturbação da solução do problema estático correspondente:

$$\phi(t, x) = \phi_0(t, x) + \delta\phi(t, x), \quad (16)$$

sendo $\delta\phi$ da mesma ordem ϵ da amplitude de oscilação da fronteira e ϕ_0 a solução da equação de onda (1) sob as condições estáticas dadas em (2). Este método pode ser

diretamente generalizado a problemas envolvendo fronteiras que se movem em espaços com dimensões mais altas. Ford e Vilenkin o aplicaram para o caso de um campo escalar sem massa, em $3 + 1$ dimensões, na presença de uma fronteira plana em movimento [9]. Esse mesmo método também foi aplicado com sucesso no caso do campo eletromagnético [10, 22] e, mais recentemente, ao cálculo do número de fótons criados pelo movimento de uma única placa metálica e por uma cavidade formada por duas placas metálicas paralelas [23]. Embora o método utilizado por Ford e Vilenkin tenha sido muito eficiente e generalizável para dimensões mais altas somente era válido em limite de tempos curtos, ou seja, tempos muito menores que um segundo.

Em trabalho publicado em 1990, Dodonov, Klimov e Man'ko [24] estudaram o problema da geração de estados comprimidos para o problema (9)-(11), usando a lei de movimento harmônico dada em (15). Os autores consideraram a solução da equação (11) para este caso, como sendo uma perturbação da solução do problema estático correspondente:

$$R(\xi) = R_0(\xi) + \delta R(\xi) , \quad (17)$$

onde $\delta R(\xi)$ da mesma ordem ϵ da amplitude de oscilação da fronteira, enquanto $R_0(\xi) = \xi/L_0$ é a solução da versão estática do problema (11). A solução perturbativa (17) vale no limite de tempos curtos. Em [25, 26], Dodonov, Klimov e Nikonov divulgam soluções para (11) valendo para o limite assintótico de tempo longo. Em trabalho de 1994, Law [27] propõe, para o problema (1), (7) e (8), um movimento da fronteira basicamente senoidal com frequência ressonante igual ao dobro da menor auto-frequência da cavidade:

$$\begin{aligned} L(t) &= L_0 + \frac{L_0}{2\pi} \left\{ \sin^{-1} \left[\sin(\tan^{-1}(\epsilon\pi)) \cos\left(\frac{2\pi t}{L_0}\right) \right] - \tan^{-1}(\epsilon\pi) \right\} \\ &\approx L_0 \left(1 - \epsilon \sin^2\left(\frac{\pi t}{L_0}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right) . \end{aligned} \quad (18)$$

Para esta forma de $L(t)$ Law encontra a solução exata para R na equação (11), válida para um tempo arbitrário:

$$R(2nL_0 + \xi) = 2n + \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \left(\cos\left(\frac{\xi\pi}{L_0}\right) - 2n\epsilon\pi \right) , \quad (19)$$

onde $n \geq 1$ e $\xi \in (-L_0, L_0]$. Usando (19) nas fórmulas (13) e (14), obtidas por Fulling e Davies [8], Law, então, verifica o comportamento do valor esperado do tensor densidade

de energia do campo no interior da cavidade oscilante, obtendo que a variação espacial e temporal da densidade de energia do campo se dá através da propagação de dois pacotes de onda que são refletidos pelas fronteiras, podendo a força atrativa de Casimir ser amplificada.

Vários trabalhos formularam o problema (1), (7) e (8) em termos de uma densidade de Hamiltoniana efetiva [28, 29, 30, 31]. Law [32] também estudou, do ponto de vista quântico e usando uma Hamiltoniana efetiva, o problema em que as condições (7) e (8) estão associadas à equação da onda

$$\partial_t (\epsilon(t, x) \partial_t \phi(t, x)) - \partial_x^2 \phi(t, x) = 0, \quad (20)$$

a qual inclui o espaço entre as fronteiras preenchido com um meio linear, dielétrico, não-dispersivo, sem-perdas, com permissividade descrita por uma função real, *externamente prescrita*, $\epsilon(t, x)$, e com uma permeabilidade $\mu = 1$ através da cavidade.

Em trabalho publicado em 1995, Law [31] define um conjunto de coordenadas generalizadas $\{Q_k\}$, de modo que, num instante arbitrário de tempo, a solução de (1), (7) e (8), pode ser escrita como:

$$\hat{\phi}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{2L_0}{n}} \left[\hat{b}_n \phi^{(n)}(t, x) + H.c. \right], \quad (21)$$

onde

$$\phi^{(n)}(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k^{(n)}(t) \sqrt{\frac{2}{L(t)}} \sin\left(\frac{k\pi x}{L(t)}\right). \quad (22)$$

Substituindo (21) e (22) em (1), após alguma álgebra, obtem-se um conjunto infinito de equações diferenciais acopladas [31]:

$$\ddot{Q}_k^{(n)} + \omega_k^2(t) Q_k^{(n)} = 2\lambda(t) \sum_j g_{kj} \dot{Q}_j^{(n)}(t) - \dot{\lambda}(t) \sum_j g_{kj} Q_j^{(n)}(t) + \lambda^2(t) \sum_{j,l} g_{jk} g_{jl} Q_l^{(n)}(t), \quad (23)$$

onde

$$\omega_k(t) = \frac{k\pi}{L(t)}, \quad \lambda(t) = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}, \quad (24)$$

e os coeficientes antissimétricos constantes são definidos por:

$$g_{kj} = \begin{cases} (-1)^{k+j} \frac{2kj}{j^2 - k^2}, & j \neq k \\ 0, & j = k. \end{cases} \quad (25)$$

Em 1996, Dodonov e Klimov [14] mostraram que, para frequências ressonantes, as equações (23) são simplificadas de modo que podem ser resolvidas *exatamente*. A expressão *exatamente* significa que a solução não é considerada como uma perturbação de ordem ϵ da solução do problema estático correspondente, como feito em (16) e (17). Outra motivação para estudar o caso de frequências ressonantes está no fato de que, nas condições de laboratório, a velocidade máxima atingida pela fronteira é muito pequena em comparação com a velocidade da luz. Assim sendo, uma esperança de observar o efeito de criação de fótons por fronteiras em movimento está em que o acúmulo gradual de pequenas alterações no estado quântico resultem num efeito significativo. Deste modo Dodonov e Klimov consideraram o movimento harmônico oscilando com duas vezes a primeira auto-frequência da cavidade, criando uma situação de ressonância paramétrica (vide, por exemplo, [33, 34]). A seguir será feito um resumo da técnica desenvolvida por Dodonov e Klimov [14], visto que *a mesma será utilizada no presente trabalho*.

Dodonov e Klimov [14] resolveram o problema (1), (7) e (8), para o movimento da fronteira dado por

$$L(t) = \begin{cases} L_0, & t \leq 0 \\ L_0[1 + \epsilon \sin(\frac{2\pi t}{L_0})], & 0 < t < T \\ L_0, & t \geq T. \end{cases} \quad (26)$$

Portanto, durante um intervalo de tempo T , a fronteira oscila com frequência igual a duas vezes a primeira auto-frequência da cavidade. Para que a fronteira retorne à posição inicial, é necessário impor que:

$$T = \frac{\mathcal{N}L_0}{2}, \quad (27)$$

onde $\mathcal{N} \in \mathbb{Z}_+^*$. A seguir, consideraram a solução de (1), (7), (8) e (26), na forma (21), sendo:

$$\phi^{(n)}(t < 0, x) = \sqrt{\frac{2}{L_0}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L_0}\right) \exp(-i\omega_n t). \quad (28)$$

Para $0 < t < T$, tem-se $\phi^{(n)}$ escrito na forma (22), onde as seguintes condições iniciais devem ser satisfeitas:

$$Q_k^{(n)}(0) = \delta_{kn}, \quad \dot{Q}_k^{(n)}(0) = -i\omega_n \delta_{kn}. \quad (29)$$

Estas condições satisfazem (7), (8) e as condições iniciais (28). Após o intervalo de tempo T , a fronteira retorna à posição inicial L_0 . O lado direito da equação (23) se anula e sua

solução torna-se:

$$Q_k^{(n)}(t > T) = \xi_k^{(n)}(T)e^{-i\omega_k t} + \eta_k^{(n)}(T)e^{i\omega_k t}. \quad (30)$$

Introduzindo (30) em (22), fazendo $L(t) = L_0$, chega-se ao campo $\hat{\phi}$ na forma:

$$\hat{\phi}(t > T, x) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\left(\frac{k\pi x}{L_0}\right) [\hat{a}_k \exp(-i\omega_k t) + H.c.]. \quad (31)$$

O novo conjunto de operadores físicos \hat{a}_m e \hat{a}_m^\dagger , relacionam-se com \hat{b}_m e \hat{b}_m^\dagger através das transformações de Bogoliubov:

$$\hat{a}_m = \sum_n \sqrt{\frac{m}{n}} \left(\hat{b}_n \xi_m^{(n)}(T) + \hat{b}_n^\dagger \eta_m^{*(n)}(T) \right). \quad (32)$$

O número de fótons criados no m -ésimo modo, após cessado o movimento da fronteira, é igual ao valor médio do operador $\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m$, em relação ao estado de vácuo inicial, definido com respeito aos operadores \hat{b}_n :

$$\mathcal{N}_m(T) \equiv \langle 0_b | \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m | 0_b \rangle = m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |\eta_m^{(n)}(T)|^2. \quad (33)$$

Para determinar o número de fótons em (33), Dodonov e Klimov buscaram a solução de (23) na forma:

$$Q_k^{(n)}(0 < t < T) = \xi_k^{(n)}(t)e^{-i\omega_k t} + \eta_k^{(n)}(t)e^{i\omega_k t}, \quad (34)$$

com as seguintes condições iniciais:

$$\xi_k^{(n)}(0) = \delta_{nk}, \quad \eta_k^{(n)}(0) = 0. \quad (35)$$

Feita a substituição de (34) em (23), e também a expressão para a lei de movimento da fronteira no intervalo de tempo $0 \leq t \leq T$, dado em (26), o resultado é expandido no parâmetro ϵ . É suposto que as funções $\eta_k^{(n)}$ e $\xi_k^{(n)}$ variem lentamente com o tempo, o que significa:

$$\dot{\xi} \sim \epsilon, \quad \dot{\eta} \sim \epsilon, \quad \ddot{\xi} \sim \epsilon^2, \quad \ddot{\eta} \sim \epsilon^2. \quad (36)$$

Os termos de ordem ϵ^2 ou maior são então desprezados. Multiplicando-se convenientemente as equações resultantes por fatores $\exp(-i\omega_k t)$ ou $\exp(i\omega_k t)$, e executando média

em intervalos de tempo $2\pi/\omega_1 = 2L_0$, levando em conta que as funções η e ξ praticamente não variam nessa escala de tempo, são obtidas as seguintes equações diferenciais

$$\frac{d}{d\tau}\xi_1^{(n)} = -\eta_1^{(n)} + 3\xi_3^{(n)}, \quad (37)$$

$$\frac{d}{d\tau}\xi_k^{(n)} = (k+2)\xi_{k+2}^{(n)} - (k-2)\xi_{k-2}^{(n)}, \quad k \geq 2 \quad (38)$$

$$\frac{d}{d\tau}\eta_1^{(n)} = -\xi_1^{(n)} + 3\eta_3^{(n)}, \quad (39)$$

$$\frac{d}{d\tau}\eta_k^{(n)} = (k+2)\eta_{k+2}^{(n)} - (k-2)\eta_{k-2}^{(n)}, \quad k \geq 2, \quad (40)$$

onde foi introduzida a variável

$$\tau = \frac{1}{2}\epsilon\omega_1 t. \quad (41)$$

As equações (37)-(40) são mais simples do que as equações (23), de modo que podem ser resolvidas *exatamente* [14]. Usando a expansão em série das funções η e ξ , as equações (37)-(40) e as condições iniciais em (35), é possível mostrar que:

$$\eta_{2k}^{(n)}(t) = \eta_k^{(2n)}(t) = 0, \quad (42)$$

o que significa que *não* haverá criação de fótons nos modos pares. O número de fótons produzido no primeiro modo da cavidade é, portanto, dado por:

$$\mathcal{N}_1(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left| \eta_1^{(n)}(\tau) \right|^2, \quad (43)$$

onde o somatório passa a ser considerado para valores *ímpares* de n . Derivando (43) com respeito a variável τ e usando várias relações de recorrência provenientes da solução do sistema (37)-(40), com as condições iniciais em (35), Dodonov e Klimov obtém a seguinte forma fechada para a taxa de geração de fótons no modo principal da cavidade:

$$\frac{d\mathcal{N}_1}{d\tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \eta_1^{(n)} \dot{\eta}_1^{(n)} = -2\eta_1^{(1)}(\tau)\xi_1^{(1)}(\tau). \quad (44)$$

A solução analítica para as funções $\eta_1^{(n)}$ e $\xi_1^{(n)}$ é encontrada:

$$\xi_1^{(1)} = \frac{2}{\pi} \frac{E(\kappa) + \tilde{\kappa}K(\kappa)}{1 + \tilde{\kappa}}, \quad \eta_1^{(1)} = \frac{2}{\pi} \frac{E(\kappa) - \tilde{\kappa}K(\kappa)}{1 - \tilde{\kappa}}, \quad (45)$$

onde $\kappa = \sqrt{1 - \exp(-8\tau)}$, $\tilde{\kappa} = \sqrt{1 - \kappa^2} = \exp(-4\tau)$, τ é dado em (41), e $K(k)$ e $E(k)$ são as integrais elípticas completas de primeiro e segundo tipo, respectivamente [35]-[36].

Usando (45) em (44), Dodonov e Klimov [14] obtiveram uma expressão analítica para a taxa com que os fótons são produzidos no primeiro modo da cavidade:

$$\frac{d\mathcal{N}_1}{dt} = \frac{4\epsilon\omega_1}{\pi^2} \frac{E^2(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K^2(\kappa)}{\kappa^2}. \quad (46)$$

O número de fótons criados no primeiro modo é dado por:

$$\mathcal{N}_1 = \frac{2}{\pi^2} E(\kappa)K(\kappa) - \frac{1}{2}. \quad (47)$$

O número total de fótons criados para todos os modos dentro cavidade também foi obtido:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\pi^2} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\kappa^2\right) K^2(\kappa) - E(\kappa)K(\kappa) \right]. \quad (48)$$

No presente trabalho, o método desenvolvido por Dodonov e Klimov [14] será aplicado ao problema (1) e (8) sendo que, em vez da condição de Dirichlet dada em (7), sobre a fronteira fixa impõe-se ao campo a condição de Neumann:

$$(\partial_x \phi)(t, 0) = 0. \quad (49)$$

A motivação para o estudo de situações dinâmicas em que uma fronteira impõe condição de Neumann e outra Dirichlet, está em que, já no caso de fronteiras estáticas, esse tipo de condições mistas implicam em uma alteração significativa na energia de Casimir. A energia de Casimir associada às condições estáticas mistas

$$(\partial_x \phi)(t, 0) = \phi(t, L) = 0 \quad (50)$$

é *positiva* e dada por [37]:

$$\mathcal{E} = \frac{\pi}{48L}. \quad (51)$$

A força entre as fronteiras é dada então por:

$$F(L) = -\frac{\partial}{\partial L} \mathcal{E}(L) = \frac{\pi}{48L^2}. \quad (52)$$

O sinal *positivo* em (52) indica que há uma mudança drástica na força de Casimir: ela deixa de ser atrativa, como dado em (5), e passa a ser repulsiva. É interessante ressaltar que a expressão para a energia de Casimir estática para o caso em que *as duas* fronteiras impõem ao campo condições de Neumann, é igual à energia de Casimir para o caso de

duas fronteiras de Dirichlet dada em (5). Portanto, para fronteiras de mesmo tipo, a energia de Casimir é negativa, enquanto fronteiras de tipos diferentes (uma fronteira de Neumann e outra de Dirichlet), tem-se a energia de Casimir positiva [37].

O primeiro cálculo da força repulsiva de Casimir entre placas paralelas, uma perfeitamente condutora e outra infinitamente permeável, foi feito por Boyer e publicado em 1974 [3], no contexto da eletrodinâmica quântica em 3+1. Nesse caso, a força repulsiva de Casimir aparece quando as placas têm naturezas diferentes, ressaltando que, para o caso de duas placas perfeitamente condutoras ou duas placas perfeitamente permeáveis, a força de Casimir é atrativa. Inspirados no trabalho de Boyer [37], vários trabalhos verificaram qual o papel de placas permeáveis, ou cavidades combinando placas permeáveis e condutoras, em outros efeitos relacionados com a eletrodinâmica quântica em cavidades [4]-[5]. Visto que, em 1+1 dimensões, a situação de placas de naturezas diferentes [3] é simulada pela presença de condições mistas (Dirichlet e Neumann), alguns trabalhos nessas dimensões têm estudado os efeitos Casimir estático [37] e dinâmico [13, 38], levando em conta a presença de condições de Neumann, ou cavidades combinando Dirichlet e Neumann.

Motivado pelas alterações que a consideração de fronteiras de naturezas diferentes traz ao efeito Casimir estático, o objetivo do presente trabalho é verificar quais as alterações que estas trazem ao efeito Casimir dinâmico. Especificamente, neste trabalho, estão calculados o número de fótons criados, a taxa de criação de fótons e a energia transferida pela fronteira ao campo, para o problema (1), (8) e (49), associado a um movimento harmônico da fronteira, oscilando com o dobro da auto-frequência fundamental da cavidade, numa situação de ressonância paramétrica. Comparações são feitas entre os resultados obtidos aqui com os existentes na literatura para o caso Dirichlet-Dirichlet. Os cálculos seguem o procedimento desenvolvido por Dodonov e Klimov [14].

O presente trabalho é organizado como segue. No capítulo 1 é obtido um conjunto de equações diferenciais aproximadas relacionando as funções η e ξ . O sistema de equações obtido é mapeado em uma equação diferencial parcial, cuja solução é encontrada em termos de equações integrais. No capítulo 2 as equações integrais, sem serem resolvidas, são utilizadas para simplificar as expressões para a taxa de criação de fótons. A expressão simplificada indica quais equações integrais de fato precisam ser resolvidas. Essas equações

são resolvidas em termos de integrais elípticas e a taxa de criação de fótons é determinada. A seguir são obtidos o número de fótons criados e a energia que o movimento da fronteira transmite ao sistema.

Capítulo 1

Campo na cavidade oscilante

Consideremos o problema (1), (8) e (49), associado ao seguinte movimento da fronteira:

$$L(t) = \begin{cases} L_0, & t \leq 0 \\ \mathcal{L}(t), & 0 < t < T \\ L_0, & t \geq T. \end{cases} \quad (1.1)$$

onde

$$\mathcal{L}(0) = \mathcal{L}(T) = L_0. \quad (1.2)$$

Para um instante arbitrário, a solução pode ser escrita como:

$$\hat{\phi}(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2L_0}{n + \frac{1}{2}}} \left[\hat{b}_n \psi^{(n)}(t, x) + H.c. \right], \quad (1.3)$$

O operador de campo $\hat{\phi}_{in}(t, x)$ (quando as fronteiras estão em repouso) é obtido, fazendo-se

$$\psi_{in}^{(n)}(t, x) = \sqrt{\frac{2}{L_0}} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L_0} \right] e^{-i\omega_n t} \quad (1.4)$$

em (1.3), o que resulta:

$$\hat{\phi}_{in}(t, x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{b}_n}{\sqrt{n + \frac{1}{2}}} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L_0} \right] e^{-i\omega_n t} + H.c., \quad (1.5)$$

onde

$$\omega_n = (n + 1/2)\pi/L_0. \quad (1.6)$$

Para $0 < t < T$, tem-se que $\psi^{(n)}$ é escrito na forma:

$$\psi^{(n)}(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k^{(n)}(t) \sqrt{\frac{2}{L(t)}} \cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L(t)} \right], \quad (1.7)$$

onde as seguintes condições iniciais devem ser satisfeitas:

$$Q_k^{(n)}(0) = \delta_{kn}, \quad \dot{Q}_k^{(n)}(0) = -i\omega_n \delta_{kn}. \quad (1.8)$$

Substituindo (1.3) e (1.7) em (1), obtém-se um conjunto infinito de equações diferenciais acopladas:

$$\ddot{Q}_j^{(n)}(t) + [\Omega_j(t)]^2 Q_j^{(n)}(t) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \dot{Q}_k^{(n)}(t) M_{jk}(t) - \sum_{k=0}^{\infty} Q_k^{(n)}(t) N_{kj}(t), \quad (1.9)$$

onde:

$$M_{jk}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \lambda(t) \frac{(-1)^{j+k} (2k+1)(2j+1)}{(j+k+1)(j-k)}, & k \neq j \\ 0, & k = j \end{cases} \quad (1.10)$$

$$N_{jk}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{(-1)^{j+k+1} (2k+1)(2j+1)(2j^2+2j+2k^2+2k+1)}{(j+1+k)^2(j-k)^2} \lambda(t)^2 - M_{jk}(t) \frac{\dot{\lambda}(t)}{\lambda(t)}, & k \neq j \\ -\frac{1}{12} (3 + 4\pi^2 j^2 + \pi^2 + 4\pi^2 j) \lambda(t)^2, & j = k \end{cases} \quad (1.11)$$

$$\lambda(t) = \frac{\dot{L}(t)}{L(t)}, \quad \Omega_j(t) = \left(j + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{L(t)}. \quad (1.12)$$

De acordo com (1.2), para $t \geq T$ a fronteira volta *definitivamente* à posição inicial $x = L_0$. O lado direito da equação (1.9) se anula e sua solução pode ser escrita na forma:

$$Q_k^{(n)}(t \geq T) = \xi_k^{(n)}(T) e^{-i\omega_k t} + \eta_k^{(n)}(T) e^{i\omega_k t}. \quad (1.13)$$

Introduzindo (1.13) em (1.7), fazendo $L(t) = L_0$, chega-se ao campo $\hat{\phi}$ para $t \geq T$ na forma:

$$\hat{\phi}_{out}(t \geq T, x) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{a}_k}{\sqrt{k + \frac{1}{2}}} \cos \left[\left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L_0} \right] e^{-i\omega_k t} + H.c. \quad (1.14)$$

O novo conjunto de operadores físicos \hat{a}_m e \hat{a}_m^\dagger se relacionam com \hat{b}_m e \hat{b}_m^\dagger através das transformações de Bogoliubov:

$$\hat{a}_k = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\hat{b}_n \alpha_{nk} + \hat{b}_n^\dagger \beta_{nk}^* \right], \quad (1.15)$$

$$\hat{a}_k^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\hat{b}_n^\dagger \alpha_{nk}^* + \hat{b}_n \beta_{nk} \right], \quad (1.16)$$

onde

$$\alpha_{nm} = \sqrt{\frac{2m+1}{2n+1}} \xi_m^{(n)}(T), \quad \beta_{nm} = \sqrt{\frac{2m+1}{2n+1}} \eta_m^{(n)}(T). \quad (1.17)$$

Os coeficientes em (1.17) satisfazem às seguintes relações (vide Apêndice A):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{\alpha_{nk}^* \alpha_{mk} - \beta_{nk}^* \beta_{mk}\} = \delta_{nm}, \quad (1.18)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{nm}^* \alpha_{nj} - \beta_{nm}^* \beta_{nj}) = \delta_{mj}, \quad (1.19)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\beta_{nm}^* \alpha_{nk} - \beta_{nk}^* \alpha_{nm}) = 0. \quad (1.20)$$

O número de fótons criados no k -ésimo modo, após cessado o movimento da fronteira, é igual ao valor médio do operador $\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$, em relação ao estado de vácuo inicial, definido com respeito aos operadores \hat{b}_n :

$$\mathcal{N}_k(T) = \langle 0_b | \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k | 0_b \rangle = (2k+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} |\eta_k^{(n)}(T)|^2. \quad (1.21)$$

A taxa de geração de fótons \mathcal{R}_k é:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_k(T) &= \frac{d}{dT} \mathcal{N}_k(T) \\ &= 2(2k+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_k^{(n)}(T)}{(2n+1)} \frac{d}{dT} \eta_k^{(n)}(T). \end{aligned} \quad (1.22)$$

O objetivo, então, é calcular $\eta_k^{(n)}(T)$ a partir da solução de (1.9) e obter o resultado do somatório em (1.21) para uma determinada lei de movimento que obedeça (1.1).

Na próxima seção, a lei de movimento será fixada e será obtido um conjunto de equações diferenciais simplificado, relacionando as variáveis η e ξ .

1.1 Obtenção do sistema de EDO's simplificado

Consideremos em (1.1) a seguinte lei de movimento harmônico da fronteira:

$$\mathcal{L}(t) = L_0 \left(1 + \epsilon \sin \left(\frac{P\pi t}{L_0} \right) \right), \quad (1.23)$$

onde $P \in \mathbb{Z}_+^*$, $\epsilon \ll 1$ e $\epsilon P\pi \ll 1$. As duas últimas condições implicam, respectivamente, que o movimento é de pequena amplitude e não-relativístico. Para que (1.2) seja satisfeita,

é necessário impor que:

$$T = \frac{\mathcal{N}L_0}{P}, \quad (1.24)$$

onde $\mathcal{N} \in \mathbb{Z}_+^*$. Uma vez fixada a lei de movimento, o foco está em obter a solução da equação (1.9) para $0 < t < T$, a qual pode ser buscada na forma

$$Q_k^{(n)}(t) = \xi_k^{(n)}(t)e^{-i\omega_k t} + \eta_k^{(n)}(t)e^{i\omega_k t}, \quad (1.25)$$

associada às condições iniciais

$$\xi_k^{(n)}(0) = \delta_{nk}, \quad \eta_k^{(n)}(0) = 0. \quad (1.26)$$

Faz-se a substituição de (1.25) em (1.9), e também a expressão para a lei de movimento da fronteira no intervalo de tempo $0 < t < T$, dado em (1.23). Considerando que as funções $\eta_k^{(n)}$ e $\xi_k^{(n)}$ variam lentamente com o tempo, o que significa assumir (36), o resultado, expandido até primeira ordem no parâmetro ϵ , é dado por

$$T_j^{(n)}(t) + \sum_{k \neq j} F_k^{(n)}(t) = 0, \quad (1.27)$$

onde

$$\begin{aligned} T_j^{(n)}(t) &= i \frac{\pi(1+2j)}{L_0} \left[\dot{\eta}_j^{(n)}(t) e^{\frac{i\pi t(2j+1)}{2L_0}} - \dot{\xi}_j^{(n)}(t) e^{-\frac{i\pi t(2j+1)}{2L_0}} \right] - \\ &\epsilon \sin\left(\frac{P\pi t}{L_0}\right) \frac{(2j+1)^2 \pi^2}{2L_0^2} \left[\eta_j^{(n)}(t) e^{\frac{i\pi t(2j+1)}{2L_0}} + \xi_j^{(n)}(t) e^{-\frac{i\pi t(2j+1)}{2L_0}} \right] \end{aligned} \quad (1.28)$$

e

$$\begin{aligned} F_k^{(n)}(t) &= \frac{\epsilon \pi^2 P^2 (2k+1)(2j+1)(-1)^{k+j+1}}{2L_0^2 (j-k)(j+1+k)} \sin\left(\frac{P\pi t}{L_0}\right) \times \\ &\times \left[\xi_k^{(n)}(t) e^{\frac{-1/2 i(2k+1)\pi t}{L_0}} + \eta_k^{(n)}(t) e^{\frac{1/2 i(2k+1)\pi t}{L_0}} \right] + \\ &+ \frac{i\epsilon \pi^2 P (2k+1)^2 (2j+1)(-1)^{k+j+1}}{2L_0^2 (j-k)(j+1+k)} \cos\left(\frac{P\pi t}{L_0}\right) \times \\ &\times \left[\xi_k^{(n)}(t) e^{\frac{-1/2 i(2k+1)\pi t}{L_0}} - \eta_k^{(n)}(t) e^{\frac{1/2 i(2k+1)\pi t}{L_0}} \right]. \end{aligned} \quad (1.29)$$

A seguir, a equação (1.27) é multiplicada por $\exp\left(-\frac{i(2j+1)\pi t}{2L_0}\right)$. A equação (1.28) fica escrita como:

$$T_j^{(n)}(t) e^{\left(-\frac{i(2j+1)\pi t}{2L_0}\right)} = i \frac{\pi(1+2j)}{L_0} \left[\dot{\eta}_j^{(n)}(t) - \dot{\xi}_j^{(n)}(t) e^{-\frac{i\pi t(2j+1)}{L_0}} \right] -$$

$$\begin{aligned} & \epsilon \sin\left(\frac{P\pi t}{L_0}\right) \frac{(2j+1)^2 \pi^2}{2L_0^2} \times \\ & \times \left[\eta_j^{(n)}(t) + \xi_j^{(n)}(t) e^{-\frac{i\pi t(2j+1)}{L_0}} \right]. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Usando $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ parcialmente na equação (1.30), tem-se:

$$\begin{aligned} T_j^{(n)}(t) e^{-\frac{i(2j+1)\pi t}{2L_0}} &= i \frac{\pi(1+2j)}{L_0} \left[\dot{\eta}_j^{(n)}(t) - \dot{\xi}_j^{(n)}(t) e^{-\frac{i\pi t(2j+1)}{L_0}} \right] + \\ & - \epsilon \frac{(2j+1)^2 \pi^2}{2L_0^2} \sin\left(\frac{P\pi t}{L_0}\right) \eta_j^{(n)}(t) + \\ & + \epsilon i \frac{(2j+1)^2 \pi^2}{4L_0^2} e^{-\frac{i\pi t(2j+1-P)}{L_0}} \xi_j^{(n)}(t) + \\ & - \epsilon i \frac{(2j+1)^2 \pi^2}{4L_0^2} e^{-\frac{i\pi t(2j+1+P)}{L_0}} \xi_j^{(n)}(t). \end{aligned} \quad (1.31)$$

O k -ésimo termo o somatório em (1.27), multiplicado pelo fator exponencial, é dado por:

$$\begin{aligned} F_k^{(n)}(t) e^{-\frac{i(2j+1)\pi t}{2L_0}} &= i \frac{\pi^2 \epsilon P (-1)^{j+k} (2j+1)(2k+1)(2k+1-P)}{4L_0^2 (j-k)(j+1+k)} \times \\ & \times \left[\eta_k^{(n)}(t) e^{-\frac{i\pi t(P+j-k)}{L_0}} - \xi_k^{(n)}(t) e^{\frac{i\pi t(P-j-1-k)}{L_0}} \right] + \\ & + i \frac{\pi^2 \epsilon P (-1)^{j+k} (2j+1)(2k+1)(2k+1+P)}{4L_0^2 (j-k)(j+1+k)} \times \\ & \times \left[\eta_k^{(n)}(t) e^{\frac{i\pi t(P-j+k)}{L_0}} - \xi_k^{(n)}(t) e^{-\frac{i\pi t(P+j+1+k)}{L_0}} \right]. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Calcula-se a média temporal da equação (1.27), multiplicada pelo fator exponencial, num intervalo de tempo igual a $2\pi/\omega_0 = 4L_0$ ($c = 1$):

$$\frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} dt e^{-\frac{i(2j+1)\pi t}{2L_0}} \left[T_j^{(n)}(t) + \sum_{k \neq j} F_k^{(n)}(t) \right] = 0. \quad (1.33)$$

O procedimento leva em conta que as funções η , $\dot{\eta}$, ξ , e $\dot{\xi}$ podem ser tiradas da integral, pois são praticamente constantes nessa escala de tempo. A média relacionada com o termo $T_j^{(n)}(t)$ vale:

$$\frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} dt e^{-\frac{i(2j+1)\pi t}{2L_0}} T_j^{(n)}(t) = i \frac{\pi(1+2j)}{L_0} \dot{\eta}_j^{(n)}(t) + i\epsilon \frac{(2j+1)^2 \pi^2}{4L_0^2} \xi_j^{(n)}(t) \delta_{j,(P-1)/2}. \quad (1.34)$$

A média tomada nos infinitos termos do somatório em (1.33), é escrita como a soma de apenas quatro termos:

$$\begin{aligned}
& \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_0}} dt e^{-\frac{i(2j+1)\pi t}{2L_0}} \sum_{k \neq j} F_k^{(n)}(t) = \\
& \frac{i\epsilon\pi^2}{4L_0^2} (2j + 2P + 1) (2j + 1) (-1)^{2j+P+1} \eta_{(j+P)}^{(n)}(t) \\
& - \frac{i\epsilon\pi^2}{4L_0^2} (2j - 2P + 1) (2j + 1) (-1)^{2j-P+1} \eta_{(j-P)}^{(n)}(t) \theta(j - P) \\
& - \frac{i\epsilon\pi^2}{4L_0^2} (3P - 2j - 1) (2P - 2j - 1) (2j + 1) (-1)^P \\
& \quad \times \eta_{(P-j-1)}^{(n)}(t) \theta(P - j - 1) H(2j - P + 1) \\
& - \frac{i\epsilon\pi^2}{4L_0^2} (2P - 2j - 1) (2j - P + 1) (2j + 1) (-1)^P \\
& \quad \times \xi_{(P-j-1)}^{(n)}(t) \theta(P - j - 1) H(2j - P + 1). \tag{1.35}
\end{aligned}$$

onde as funções θ e H são definidas como:

$$\theta(u) = \begin{cases} 1, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0. \end{cases}, \tag{1.36}$$

$$H(u) = \begin{cases} 0, & u = 0 \\ \frac{1}{u}, & u \neq 0. \end{cases} \tag{1.37}$$

Usando (1.34) e (1.35) em (1.33), a seguinte equação é obtida:

$$\begin{aligned}
& \dot{\eta}_j^{(n)}(t) + i\epsilon \frac{(2j+1)\pi}{4L_0} \xi_j^{(n)}(t) \delta_{j,(P-1)/2} \\
& + \frac{\epsilon\pi}{4L_0} (2j + 2P + 1) (-1)^{2j+P+1} \eta_{(j+P)}^{(n)}(t) + \\
& - \frac{\epsilon\pi}{4L_0} (2j - 2P + 1) (-1)^{2j-P+1} \eta_{(j-P)}^{(n)}(t) \theta(j - P) + \\
& - \frac{\epsilon\pi}{4L_0} (3P - 2j - 1) (2P - 2j - 1) (-1)^P \times \\
& \quad \times \eta_{(P-j-1)}^{(n)}(t) \theta(P - j - 1) H(2j - P + 1) + \\
& - \frac{\epsilon\pi}{4L_0} (2P - 2j - 1) (2j - P + 1) (-1)^P \times \\
& \quad \times \xi_{(P-j-1)}^{(n)}(t) \theta(P - j - 1) H(2j - P + 1) = 0. \tag{1.38}
\end{aligned}$$

A idéia é fazer uso da condição de ressonância paramétrica, ou seja, fazer a frequência de oscilação da fronteira coincidir com o dobro de alguma das auto-freqüências da cavi-

dade. No caso específico do presente trabalho, igual ao *dobro* da auto-frequência fundamental $\omega_0 = \pi/2L_0$, o que equivale a fazer $P = 1$ na lei de movimento (1.23). Feito isso, considerando $j = 0$ em (1.38), é obtida a seguinte equação diferencial ordinária (EDO):

$$\frac{d}{dt}\eta_0^{(n)}(t) = -\frac{\pi\epsilon}{4L_0}\xi_0^{(n)}(t) - \frac{\pi\epsilon}{4L_0}3\eta_1^{(n)}(t). \quad (1.39)$$

É conveniente fazer as substituições:

$$\xi(t) \rightarrow \xi(\tau), \quad (1.40)$$

$$\eta(t) \rightarrow \eta(\tau), \quad (1.41)$$

seguido da redefinição

$$t = \frac{4L_0}{\pi\epsilon}\tau. \quad (1.42)$$

Desse modo a equação (1.39) fica escrita como:

$$\frac{d}{d\tau}\eta_0^{(n)}(\tau) = -\xi_0^{(n)}(\tau) - 3\eta_1^{(n)}(\tau). \quad (1.43)$$

Fazendo $j \geq 1$ em (1.38), as equações diferenciais em $\eta_j^{(n)}(t)$ são obtidas:

$$\frac{d}{d\tau}\eta_j^{(n)}(\tau) = (2j-1)\eta_{j-1}^{(n)}(\tau) - (2j+3)\eta_{j+1}^{(n)}(\tau) \quad (j \geq 1). \quad (1.44)$$

Multiplicando-se a equação (1.27) pela exponencial $\exp\left(\frac{i(2j+1)\pi t}{2L_0}\right)$, e procedendo de modo análogo a (1.30)-(1.44), são obtidas as seguintes equações:

$$\frac{d}{d\tau}\xi_0^{(n)}(\tau) = -\eta_0^{(n)}(\tau) - 3\xi_1^{(n)}(\tau), \quad (1.45)$$

$$\frac{d}{d\tau}\xi_j^{(n)}(\tau) = (2j-1)\xi_{j-1}^{(n)}(\tau) - (2j+3)\xi_{j+1}^{(n)}(\tau) \quad (j \geq 1). \quad (1.46)$$

Ao conjunto de EDO's (1.43)-(1.46), estão associadas às condições iniciais (1.26). Se comparadas com o as equações *exatas* (1.9), as equações (1.43)-(1.46) são *aproximadas*, sendo considerados os termos até primeira ordem no parâmetro ϵ . Dodonov e Klimov [14] enfatizam que esta, entretanto, é uma boa aproximação visto que, em situações realísticas de laboratório, este parâmetro é da ordem de 10^{-8} [40].

Uma verificação de consistência das equações (1.43)-(1.46) é feita em detalhes no Apêndice A, e se resume como segue. A condição de unitariedade (1.18) é tomada para

$n = m$. A seguir os coeficientes α e β são substituídos conforme (1.17) e, então, é tomada a derivada no parâmetro temporal. Isto resulta na relação (vide Apêndice A):

$$\sum_{m=0} (2m+1) \left(\xi_m^{(n)} \dot{\xi}_m^{(n)} - \eta_m^{(n)} \dot{\eta}_m^{(n)} \right) = 0. \quad (1.47)$$

A equação (1.47) pode ser reobtida através da manipulação das equações (1.43)-(1.46) (vide Apêndice A), o que serve como uma verificação de consistência das mesmas.

Na próxima seção o sistema (1.43)-(1.46) será resolvido exatamente.

1.2 Solução do sistema de equações diferenciais

Para a solução do sistema de EDO's (1.43)-(1.46) é conveniente aplicar a seguinte substituição de variáveis:

$$\mu_k^{(n)}(\tau) = \xi_k^{(n)}(\tau) + \eta_k^{(n)}(\tau), \quad \nu_k^{(n)}(\tau) = \xi_k^{(n)}(\tau) - \eta_k^{(n)}(\tau), \quad (1.48)$$

com a qual o sistema pode ser reescrito e organizado em dois grupos: um relacionando apenas os coeficientes $\mu_k^{(n)}$, e o outro os coeficientes $\nu_k^{(n)}$:

$$\dot{\mu}_0^{(n)}(\tau) = -\mu_0^{(n)}(\tau) - 3\mu_1^{(n)}(\tau), \quad (1.49)$$

$$\dot{\mu}_k^{(n)}(\tau) = (2k-1)\mu_{k-1}^{(n)}(\tau) - (2k+3)\mu_{k+1}^{(n)}(\tau), \quad k \geq 1 \quad (1.50)$$

$$\dot{\nu}_0^{(n)}(\tau) = \nu_0^{(n)}(\tau) - 3\nu_1^{(n)}(\tau), \quad (1.51)$$

$$\dot{\nu}_k^{(n)}(\tau) = (2k-1)\nu_{k-1}^{(n)}(\tau) - (2k+3)\nu_{k+1}^{(n)}(\tau), \quad k \geq 1. \quad (1.52)$$

As condições iniciais (1.26) são mapeadas em:

$$\mu_k^{(n)}(0) = \nu_k^{(n)}(0) = \delta_{kn}. \quad (1.53)$$

A solução para o sistema de equações (1.49)-(1.52), e conseqüentemente (1.43)-(1.46), será obtida através do procedimento usado em [14], no qual o problema de resolver o sistema de infinitas equações diferenciais ordinárias é mapeado no problema de duas equações diferenciais parciais (EDP's) independentes (eqs. (1.69) e (1.71)), onde uma das funções incógnitas (eq. (1.68)) é geradora das funções $\mu_k^{(n)}$, enquanto a outra (eq. (1.72)) é geradora das funções $\nu_k^{(n)}$.

1.2.1 Mapeando EDO's em EDP's

Inicialmente serão enfocadas as eqs. (1.49) e (1.50). Usando a variável auxiliar $z \in \mathbb{C}^*$, as equações são multiplicadas conforme a regra: a equação envolvendo $\dot{\mu}_k^{(n)}$ ($k \geq 0$) é multiplicada por z^{2k+1} . Para a eq. (1.49), tem-se:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\mu_0^{(n)}(\tau) z \right] = -\mu_0^{(n)}(\tau) z - 3\mu_1^{(n)}(\tau) z. \quad (1.54)$$

É conveniente multiplicar e dividir o segundo termo do lado direito de (1.54) por z , reescrevendo-a na forma:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\mu_0^{(n)}(\tau) z \right] = -\mu_0^{(n)}(\tau) z - \frac{3}{z} \mu_1^{(n)}(\tau) z^2. \quad (1.55)$$

A eq. (1.50), para $k = 1$, é multiplicada por z^3 :

$$\frac{d}{d\tau} \left[\mu_1^{(n)}(\tau) z^3 \right] = \mu_0^{(n)}(\tau) z^3 - 5\mu_2^{(n)}(\tau) z^3. \quad (1.56)$$

Novamente é conveniente multiplicar e dividir o segundo termo do lado direito por z , obtendo:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\mu_1^{(n)}(\tau) z^3 \right] = \mu_0^{(n)}(\tau) z^3 - \frac{5}{z} \mu_2^{(n)}(\tau) z^4, \quad (1.57)$$

O procedimento, aplicado em geral para as EDO's (1.50), conduz a:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\mu_k^{(n)}(\tau) z^{2k+1} \right] = (2k-1) \mu_{k-1}^{(n)}(\tau) z^{2k+1} - \frac{(2k+3)}{z} \mu_{k+1}^{(n)}(\tau) z^{2k+2}, \text{ apenas para } k \geq 1. \quad (1.58)$$

A adição das equações (1.55) e (1.58), resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k^{(n)}(\tau) z^{2k+1} \right] &= -\mu_0^{(n)}(\tau) z - \frac{3}{z} \mu_1^{(n)}(\tau) z^2 + \left(\mu_0^{(n)}(\tau) z^3 - \frac{5}{z} \mu_2^{(n)}(\tau) z^4 \right) + \\ &+ \left(3\mu_1^{(n)}(\tau) z^5 - \frac{7}{z} \mu_3^{(n)}(\tau) z^6 \right) + \\ &+ \left(5\mu_2^{(n)}(\tau) z^7 - \frac{9}{z} \mu_4^{(n)}(\tau) z^8 \right) + \dots \\ &+ (2k-1) \mu_{k-1}^{(n)}(\tau) z^{2k+1} - \frac{(2k+3)}{z} \mu_{k+1}^{(n)}(\tau) z^{2k+2}. \end{aligned} \quad (1.59)$$

O agrupamento dos termos de $\mu_k^{(n)}$, resulta em:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k^{(n)}(\tau) z^{2k+1} \right] = -\mu_0^{(n)}(\tau) z + \mu_0^{(n)}(\tau) z^3 + 3\mu_1^{(n)}(\tau) z^2 \left(z^3 - \frac{1}{z} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + 5\mu_2^{(n)}(\tau) z^4 \left(z^3 - \frac{1}{z} \right) + \dots \\
& + (2k-1) \mu_{k-1}^{(n)}(\tau) z^{2k-2} \left(z^3 - \frac{1}{z} \right) + \dots
\end{aligned} \tag{1.60}$$

É conveniente adicionar e subtrair o termo $\mu_0^{(n)}(\tau)/z$, resultando em:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k^{(n)}(\tau) z^{2k+1} \right] &= \mu_0^{(n)}(\tau) \left(\frac{1}{z} - z \right) + \mu_0^{(n)}(\tau) \left(z^3 - \frac{1}{z} \right) + \\
& + 3\mu_1^{(n)}(\tau) z^2 \left(z^3 - \frac{1}{z} \right) + 5\mu_2^{(n)}(\tau) z^4 \left(z^3 - \frac{1}{z} \right) + \dots \\
& + (2k-1) \mu_{k-1}^{(n)}(\tau) z^{2k-2} \left(z^3 - \frac{1}{z} \right) + \dots
\end{aligned} \tag{1.61}$$

A manipulação da equação (1.61) conduz a:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k^{(n)}(\tau) z^{2k+1} \right] &= \mu_0^{(n)}(\tau) \left(\frac{1}{z} - z \right) + \left(z^3 - \frac{1}{z} \right) \left\{ \mu_0^{(n)}(\tau) + 3\mu_1^{(n)}(\tau) z^2 + \right. \\
& \left. + 5\mu_2^{(n)}(\tau) z^4 + \dots + (2k-1) \mu_{k-1}^{(n)}(\tau) z^{2k-2} + \dots \right\} \\
&= \mu_0^{(n)}(\tau) \left(\frac{1}{z} - z \right) + \left(z^3 - \frac{1}{z} \right) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \mu_k^{(n)}(\tau) z^{2k} \right\}, \\
&= \mu_0^{(n)}(\tau) \left(\frac{1}{z} - z \right) + \left(z^3 - \frac{1}{z} \right) \frac{d}{dz} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k^{(n)}(\tau) z^{2k+1} \right].
\end{aligned} \tag{1.62}$$

Definindo:

$$M^{(n)}(\tau, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k^{(n)}(\tau) z^{2k+1}, \tag{1.63}$$

tem-se a EDP:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} M^{(n)}(\tau, z) = \left(z^3 - \frac{1}{z} \right) \frac{\partial}{\partial z} M^{(n)}(\tau, z) + \left(\frac{1}{z} - z \right) \mu_0^{(n)}(\tau). \tag{1.64}$$

A função $M^{(n)}(\tau, z)$ é a função geradora das funções $\mu_k^{(n)}(\tau)$. As fórmulas (1.53) e (1.63), conduzem à seguinte condição inicial associada à EDP (1.64):

$$M^{(n)}(0, z) = z^{2n+1}. \tag{1.65}$$

Usando o grau de liberdade existente para a variável auxiliar z , redefine-se:

$$z = i\lambda, \tag{1.66}$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Com a definição:

$$M^{(n)}(t, z) = iW^{(n)}(t, \lambda), \quad (1.67)$$

onde

$$W^{(n)}(\tau, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mu_k^{(n)}(\tau) \lambda^{2k+1}, \quad (1.68)$$

a EDP (1.64) e a condição inicial (1.65) são mapeadas em:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} W^{(n)}(\tau, \lambda) = \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda^3 \right) \frac{\partial}{\partial \lambda} W^{(n)}(\tau, \lambda) - \left(\frac{1}{\lambda} + \lambda \right) \mu_0^{(n)}(\tau), \quad (1.69)$$

$$W^{(n)}(0, \lambda) = (-1)^n (\lambda)^{2n+1}. \quad (1.70)$$

Um procedimento análogo, adotado agora para as equações (1.51) e (1.52) (vide Apêndice B), faz com que estas EDO's sejam mapeadas na seguinte EDP:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} K^{(n)}(\tau, \lambda) = \nu_0^{(n)}(\tau) \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) + \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda^3 \right) \frac{\partial}{\partial \lambda} K^{(n)}(\tau, \lambda) \quad (1.71)$$

com a função $K^{(n)}(\tau, \lambda)$ definida por:

$$K^{(n)}(\tau, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \nu_k^{(n)}(\tau) \lambda^{2k+1} \quad (1.72)$$

e com a seguinte condição inicial:

$$K^{(n)}(0, \lambda) = (-1)^n \lambda^{2n+1}. \quad (1.73)$$

Note que as funções $\mu_k^{(n)}$ e $\nu_k^{(n)}$ podem ser extraídas a partir de (1.68) e (1.72) por meio de derivadas em relação a λ , isto é:

$$\mu_k^{(n)}(\tau) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{\partial^{2k+1}}{\partial \lambda^{2k+1}} W^{(n)}(\tau, \lambda), \quad (1.74)$$

$$\nu_k^{(n)}(\tau) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{\partial^{2k+1}}{\partial \lambda^{2k+1}} K^{(n)}(\tau, \lambda). \quad (1.75)$$

As equações (1.69) e (1.71) aparecem na referência [14], no contexto do cálculo para o caso Dirichlet-Dirichlet. Na seção seguinte essas equações são resolvidas para as condições (1.70) e (1.73).

1.2.2 Solução das EDP's

A solução da equação (1.69) é [14]:

$$W^{(n)}(\tau, \lambda) = 2 \int_0^\tau \frac{\mu_0^{(n)}(a)}{\sqrt{1 - e^{8a-8\tau} \frac{(1-\lambda^2)^2}{(1+\lambda^2)^2}}} da + F \left(\frac{(\lambda^2 - 1) e^{-4\tau}}{1 + \lambda^2} \right), \quad (1.76)$$

Fazendo $\tau = 0$ em (1.76) e usando a condição (1.70), a função F pode ser determinada explicitamente, fazendo com que a solução de (1.69) e (1.70) seja (vide Apêndice C) :

$$\begin{aligned} W^{(n)}(\tau, \lambda) &= 2 \int_0^\tau \frac{\mu_0^{(n)}(a)}{\sqrt{1 - e^{8a-8\tau} \frac{(1-\lambda^2)^2}{(1+\lambda^2)^2}}} da + \\ &\quad - (-1)^n \left(- \frac{(\lambda^2 - 1) e^{-4\tau} + \lambda^2 + 1}{(\lambda^2 - 1) e^{-4\tau} - \lambda^2 - 1} \right)^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (1.77)$$

Com a seguinte mudança de variável

$$a = \tau - x, \quad (1.78)$$

a solução (1.77) torna-se:

$$\begin{aligned} W^{(n)}(\tau, \lambda) &= 2 \int_0^\tau \frac{\mu_0^{(n)}(\tau - x)}{\sqrt{1 - \frac{(1-\lambda^2)^2}{(1+\lambda^2)^2} e^{-8x}}} dx + \\ &\quad - \left[\frac{(1 + \lambda^2) + (\lambda^2 - 1) e^{-4\tau}}{(1 + \lambda^2) - (\lambda^2 - 1) e^{-4\tau}} \right]^{n+\frac{1}{2}} (-1)^n. \end{aligned} \quad (1.79)$$

De acordo com (1.68) e (1.74), a solução (1.79) deve satisfazer, por exemplo, à seguinte condição de contorno:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} W^{(n)}(\tau, \lambda) \right|_{\lambda=0^-} = \mu_0^{(n)}(\tau). \quad (1.80)$$

No Apêndice D mostramos que o lado esquerdo de (1.80) pode ser escrito na forma:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} W^{(n)}(\tau, \lambda) \right|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^-} \int_0^\tau f^W(x, \lambda) \mu_0^{(n)}(\tau - x) dx, \quad (1.81)$$

onde a função f^W é uma representação da função delta de Dirac:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^-} f^W(x, \lambda) = \delta(x). \quad (1.82)$$

Com isso fica provado que a relação (1.80) é satisfeita.

Usando a definição (1.68), tem-se:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^-} W^{(n)}(\tau, \lambda) = 0. \quad (1.83)$$

A combinação de (1.79) e (1.83) resulta em uma equação integral para cada uma das funções $\mu_0^{(n)}$

$$\int_0^\tau \frac{\mu_0^{(n)}(\tau - x)}{\sqrt{1 - e^{-8x}}} dx = \frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{1 - e^{-4\tau}}{1 + e^{-4\tau}} \right)^{n+1/2}. \quad (1.84)$$

A aplicação de um procedimento análogo ao descrito no Apêndice C, para (1.71) e (1.73), resulta em:

$$\begin{aligned} K^{(n)}(\tau, \lambda) &= 2 \frac{(1 - \lambda^2)}{(1 + \lambda^2)} \int_0^\tau \frac{\nu_0^{(n)}(a) e^{-4(\tau-a)}}{\sqrt{1 - \frac{(1-\lambda^2)^2}{(\lambda^2+1)^2} e^{-8(\tau-a)}}} da + \\ &\quad - (-1)^n \left[\frac{(\lambda^2 + 1) + (\lambda^2 - 1) e^{-4\tau}}{(\lambda^2 + 1) - (\lambda^2 - 1) e^{-4\tau}} \right]^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (1.85)$$

No Apêndice D é mostrado que (1.85) obedece à condição de contorno:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} K^{(n)}(\tau, \lambda) \right|_{\lambda=0^-} = \nu_0^{(n)}(\tau), \quad (1.86)$$

o que está de acordo com (1.72) e (1.75).

Usando a definição (1.72), tem-se:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^-} K^{(n)}(\tau, \lambda) = 0. \quad (1.87)$$

A combinação de (1.85) e (1.87) resulta nas seguintes equações integrais para as funções $\nu_0^{(n)}$:

$$\int_0^\tau \frac{\nu_0^{(n)}(\tau - x) e^{-4(\tau-x)}}{\sqrt{1 - e^{-8x}}} dx = \frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{1 - e^{-4\tau}}{1 + e^{-4\tau}} \right)^{n+1/2}. \quad (1.88)$$

O conhecimento de $\mu_0^{(n)}$ e $\nu_0^{(n)}$, através da solução das equações integrais (1.84) e (1.88), completaria a obtenção da solução do sistema de EDO's iniciais dadas em (1.49)-(1.52). Todas as funções restantes $\mu_k^{(n)}$ e $\nu_k^{(n)}$ ($k \neq 0$) poderiam ser obtidas a partir de $\mu_0^{(n)}$ e $\nu_0^{(n)}$ de uma das duas formas a seguir:

1. A substituição das soluções explícitas para $\mu_0^{(n)}$ e $\nu_0^{(n)}$ em (1.49) e (1.51), implicaria em imediato conhecimento de $\mu_1^{(n)}$ e $\nu_1^{(n)}$. Estas substituídas nas seguintes, permitiriam o conhecimento de todas as outras funções $\mu_k^{(n)}$ e $\nu_k^{(n)}$ ($k \geq 2$).
2. A substituição das soluções explícitas para $\mu_0^{(n)}$ e $\nu_0^{(n)}$ na solução da EDP's de $W^{(n)}$ e $K^{(n)}$ dadas em (1.79) e (1.85), permitiria que as soluções para $\mu_k^{(n)}$ e $\nu_k^{(n)}$ fossem determinadas com auxílio das fórmulas (1.74) e (1.75).

O ponto em questão agora é a determinação da solução das equações integrais (1.84) e (1.88). Entretanto, seguindo o procedimento sugerido em [14], antes de nos lançarmos a resolver estas equações, as mesmas serão manipuladas para que sejam geradas relações de recorrência entre as funções μ , ν e suas derivadas. Estas relações serão utilizadas para simplificar a expressão da taxa de criação de fótons dada em (1.22) e com isso reduzir o número de equações integrais que precisam ser calculadas sem que sejam necessário resolver todas as equações integrais. No próximo capítulo essas relações de recorrência são encontradas e a expressão para a taxa de criação de fótons é então simplificada. Somente então as equações integrais relevantes são calculadas explicitamente.

Capítulo 2

Criação de fótons

2.1 Simplificação da fórmula para a taxa de criação no primeiro modo

Para calcular o número de fótons dado em (1.21), é conveniente calcular primeiramente a taxa de fótons dada em (1.22). A taxa de geração de fótons para o modo principal da cavidade é obtida fazendo $k = 0$ em (1.22):

$$\mathcal{R}_0(T) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_0^{(n)}(T)}{(2n+1)} \frac{d}{dT} \eta_0^{(n)}(T). \quad (2.1)$$

Em princípio, o cálculo de (2.1) requer a determinação das funções $\eta_0^{(n)}$ e suas derivadas. Entretanto, a partir de relações de recorrência que serão encontradas a seguir, verifica-se a expressão (2.1) pode ser reescrita apenas em termos das funções $\eta_0^{(0)}$ e $\xi_0^{(0)}$. Primeiramente vamos encontrar as relações de recorrência para as funções $\mu_0^{(n)}$ e $\nu_0^{(n)}$. O ponto de partida é fazer $n = 0$ na equação (1.84), o que resulta na seguinte equação integral:

$$\int_0^\tau \frac{\mu_0^{(0)}(\tau-x) dx}{\sqrt{1-e^{-8x}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-e^{-4\tau}}{1+e^{-4\tau}}}. \quad (2.2)$$

A derivada desta equação em relação a τ , sabendo que $\mu_0^{(0)}(0) = 1$, é dado por:

$$\int_0^\tau \frac{\dot{\mu}_0^{(0)}(\tau-x) dx}{\sqrt{1-e^{-8x}}} = \frac{2e^{-4\tau}}{1-e^{-8\tau}} \sqrt{\frac{1-e^{-4\tau}}{1+e^{-4\tau}}} - \frac{1}{\sqrt{1-e^{-8\tau}}}. \quad (2.3)$$

De modo similar pode-se obter a equação integral para $\nu_0^{(0)}$. Entretanto, é conveniente introduzir a função:

$$\zeta_0^{(n)}(\tau) = e^{4\tau} \nu_0^{(n)}(\tau). \quad (2.4)$$

Usando (2.4) a equação (1.88) é mapeada em:

$$\int_0^\tau \frac{\zeta_0^{(n)}(\tau-x) dx}{\sqrt{1-e^{-8x}}} = \frac{e^{4\tau}}{2} \left(\frac{1-e^{-4\tau}}{1+e^{-4\tau}} \right)^{n+\frac{1}{2}}, \quad (2.5)$$

onde, para $n=0$, tem-se:

$$\int_0^\tau \frac{\zeta_0^{(0)}(\tau-x) dx}{\sqrt{1-e^{-8x}}} = \frac{e^{4\tau}}{2} \sqrt{\frac{1-e^{-4\tau}}{1+e^{-4\tau}}}. \quad (2.6)$$

Com a derivada desta e com auxílio de (1.53) e (2.4):

$$\int_0^\tau \frac{\dot{\zeta}_0^{(0)}(\tau-x) - 4\zeta_0^{(0)}(\tau-x) dx}{\sqrt{1-e^{-8x}}} = \frac{2}{1-e^{-8\tau}} \sqrt{\frac{1-e^{-4\tau}}{1+e^{-4\tau}}} - \frac{1}{\sqrt{1-e^{-8\tau}}}. \quad (2.7)$$

Somando as equações (2.3) e (2.7), temos

$$\int_0^\tau \frac{\dot{\mu}_0^{(0)}(\tau-x) dx}{\sqrt{1-e^{-8x}}} + \int_0^\tau \frac{\dot{\zeta}_0^{(0)}(\tau-x) - 4\zeta_0^{(0)}(\tau-x) dx}{\sqrt{1-e^{-8x}}} = 0, \quad (2.8)$$

o que leva à EDO, pois τ é arbitrário:

$$\frac{d}{d\tau} \mu_0^{(0)}(\tau) + \frac{d}{d\tau} \zeta_0^{(0)}(\tau) = 4\zeta_0^{(0)}(\tau), \quad (2.9)$$

a qual é equivalente a

$$\frac{d}{d\tau} \mu_0^{(0)}(\tau) + e^{4\tau} \frac{d}{d\tau} \nu_0^{(0)}(\tau) = 0. \quad (2.10)$$

Fazendo $n=1$ na equação em (1.84) e usando as equações (2.2) e (2.3) chegamos na relação

$$\int_0^\tau \frac{\dot{\mu}_0^{(0)}(\tau-x) + \mu_0^{(0)}(\tau-x) - \mu_0^{(1)}(\tau-x) dx}{\sqrt{1-e^{-8x}}} = 0, \quad (2.11)$$

que leva à EDO

$$\frac{d}{d\tau} \mu_0^{(0)}(\tau) + \mu_0^{(0)}(\tau) - \mu_0^{(1)}(\tau) = 0. \quad (2.12)$$

Obtemos uma relação semelhante usando (2.3), (2.6) e fazendo $n=1$ em (2.5):

$$\frac{d}{d\tau} \mu_0^{(0)}(\tau) + \zeta_0^{(0)}(\tau) + \zeta_0^{(1)}(\tau) = 0. \quad (2.13)$$

Das equações (2.10), (2.12) e (2.13) chegamos às seguintes equações:

$$\frac{d}{d\tau}\eta_0^{(0)}(\tau) + \xi_0^{(0)}(\tau) - \eta_0^{(1)}(\tau) = 0, \quad (2.14)$$

$$\frac{d}{d\tau}\xi_0^{(0)}(\tau) + \eta_0^{(0)}(\tau) - \xi_0^{(1)}(\tau) = 0. \quad (2.15)$$

Manipulando as equações integrais envolvendo $\dot{\mu}_0^{(1)}(\tau)$, $\mu_0^{(0)}(\tau)$, $\mu_0^{(2)}(\tau)$, $\dot{\zeta}_0^{(1)}(\tau)$, $\zeta_0^{(0)}(\tau)$ e $\zeta_0^{(2)}(\tau)$, chegamos às seguintes EDO's

$$\frac{d}{d\tau}\mu_0^{(1)}(\tau) + 3\mu_0^{(0)}(\tau) - 3\mu_0^{(2)}(\tau) = 0, \quad (2.16)$$

$$\frac{d}{d\tau}\zeta_0^{(1)}(\tau) - 4\zeta_0^{(1)}(\tau) + 3\zeta_0^{(0)}(\tau) - 3\zeta_0^{(2)}(\tau) = 0. \quad (2.17)$$

Executando, para os demais índices, procedimentos análogos aos usados na obtenção de (2.16) e (2.17), obtemos as relações de recorrência:

$$\frac{d}{d\tau}\mu_0^{(n)}(\tau) = (2n+1) \left[\mu_0^{(n+1)}(\tau) - \mu_0^{(n-1)}(\tau) \right], \quad \text{para } k \geq 1, \quad (2.18)$$

$$\frac{d}{d\tau}\zeta_0^{(n)}(\tau) - 4\zeta_0^{(n)}(\tau) = (2n+1) \left[\zeta_0^{(n+1)}(\tau) - \zeta_0^{(n-1)}(\tau) \right], \quad \text{para } k \geq 1. \quad (2.19)$$

Estas equações podem ser reescritas em termos das funções η e ξ :

$$\frac{d}{d\tau}\xi_0^{(n)}(\tau) = (2n+1) \left[\xi_0^{(n+1)}(\tau) - \xi_0^{(n-1)}(\tau) \right], \quad \text{para } k \geq 1, \quad (2.20)$$

$$\frac{d}{d\tau}\eta_0^{(n)}(\tau) = (2n+1) \left[\eta_0^{(n+1)}(\tau) - \eta_0^{(n-1)}(\tau) \right], \quad \text{para } k \geq 1. \quad (2.21)$$

Usando (2.14), (2.15), (2.21) e (2.20), temos que o somatório que aparece na taxa de geração de fótons fica reduzido a apenas um termo:

$$\mathcal{R}_0(\tau) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_0^{(n)}(\tau)}{(2n+1)} \frac{d}{d\tau}\eta_0^{(n)}(\tau) = -2\eta_0^{(0)}(\tau) \xi_0^{(0)}(\tau). \quad (2.22)$$

Através de um procedimento análogo ao usado na obtenção de (2.22), a seguinte equação é obtida:

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi_0^{(n)}(\tau)}{(2n+1)} \frac{d}{d\tau}\xi_0^{(n)}(\tau) = -2\eta_0^{(0)}(\tau) \xi_0^{(0)}(\tau). \quad (2.23)$$

Um mecanismo de verificação das fórmulas (2.22) e (2.23) é descrito como segue. Substitui-se $m = j$ na relação (1.19) e deriva-se no parâmetro temporal, o que resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \left(\xi_0^{(n)}(\tau) \dot{\xi}_0^{(n)}(\tau) - \eta_0^{(n)}(\tau) \dot{\eta}_0^{(n)}(\tau) \right) = 0. \quad (2.24)$$

A verificação consiste em observar que a diferença entre (2.22) e (2.23) resulta em (2.24).

Uma vez que a taxa de fótons no modo $n = 0$ é escrita somente em termos das funções $\eta_0^{(0)}$ e $\xi_0^{(0)}$, apenas as equações integrais correspondentes a estas serão calculadas. Isto será feito na próxima seção.

2.2 Solução das equações integrais relevantes

O cálculo explícito da equação (2.22) envolve o conhecimento das funções $\eta_0^{(0)}$ e $\xi_0^{(0)}$. O início do processo de determinação destas funções se dá pela aplicação da transformada de Laplace em (2.2):

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^t f(x) \mu_0^{(0)}(\tau - x) dx \right\} = \mathcal{L} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - e^{-4\tau}}{1 + e^{-4\tau}}} \right\}, \quad (2.25)$$

onde

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-8x}}}, \quad (2.26)$$

cujas transformada em termos da função Γ é conhecida:

$$\bar{F}(s) = \mathcal{L} \{f(x)\} = \frac{1}{8} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{8}\right) \sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{8}\right)}. \quad (2.27)$$

Considerando a transformada de Laplace do lado direito de (2.25) dada em termos das funções Gama e que as funções $f(x)$ e $\mu_0^{(0)}$ sejam convolutivas, esta equação fica reescrita como:

$$\bar{F}(s) \bar{\mu}_0^{(0)}(s) = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{8}\right)}{s \Gamma\left(\frac{s}{8}\right)} + \frac{1}{16} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{s}{8}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{8}\right)}. \quad (2.28)$$

A substituição de (2.27) em (2.28), seguida de algumas simplificações, resulta em uma equação para $\bar{\mu}_0^{(0)}(s)$:

$$\bar{\mu}_0^{(0)}(s) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{s}{8} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{8}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{s}{8}\right)} \right]^2 \right\}. \quad (2.29)$$

A próxima equação integral a ser tratada será:

$$\int_0^\tau \frac{\nu_0^{(0)}(\tau - x) e^{-4x}}{\sqrt{1 - e^{-8x}}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1 - e^{-4\tau}}{1 + e^{-4\tau}}}, \quad (2.30)$$

obtida ao fazermos $n = 0$ em (1.88). A aplicação de um procedimento semelhante ao usado na obtenção de (2.29), resulta em:

$$\bar{\nu}_0^{(0)}(s) = -\frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{s}{8} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{s}{8}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{8}\right)} \right]^2 \right\}. \quad (2.31)$$

É conveniente definirmos a função $\bar{R}\left(\frac{p}{q}s + m\right)$, dada por:

$$\bar{R}\left(\frac{p}{q}s + m\right) = \left[\frac{\Gamma\left(\frac{p}{q}s + m\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{q}s + m + \frac{1}{2}\right)} \right]^2, \quad (2.32)$$

onde p e q são números inteiros e m um número semi-inteiro. O termo à direita em (2.32) pode ser escrito como segue [35, 36]:

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{p}{q}s + m\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{q}s + m + \frac{1}{2}\right)} \right]^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-(\frac{p}{q}s+m)(\rho+\sigma)} d\rho d\sigma}{\sqrt{(1-e^{-\rho})(1-e^{-\sigma})}}. \quad (2.33)$$

A equação (2.33) é conhecida como integral de Euler de primeira espécie. A substituição de (2.33) em (2.32) resulta em:

$$\begin{aligned} \bar{R}\left(\frac{p}{q}s + m\right) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-(\frac{p}{q}s+m)(\rho+\sigma)} d\rho d\sigma}{\sqrt{(1-e^{-\rho})(1-e^{-\sigma})}} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-m\sigma} d\sigma}{\sqrt{(1-e^{-\sigma})}} \int_0^\infty \frac{e^{-m\rho} e^{-\frac{p}{q}s(\rho+\sigma)} d\rho}{\sqrt{(1-e^{-\rho})}}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Usando as propriedades de transformada de Laplace da função delta:

$$\mathcal{L} \left\{ \delta \left(\tau - \frac{p}{q}a \right) \right\} = \exp \left(-sa \frac{p}{q} \right), \quad (2.35)$$

a equação (2.34) torna-se:

$$\bar{R}\left(\frac{p}{q}s + m\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-m\sigma} d\sigma}{\sqrt{(1-e^{-\sigma})}} \int_0^\infty \frac{e^{-m\rho} \mathcal{L} \left\{ \delta \left(\tau - \frac{p}{q}(\rho + \sigma) \right) \right\} d\rho}{\sqrt{(1-e^{-\rho})}}. \quad (2.36)$$

Podemos tomar a transformada inversa de Laplace em τ de (2.36) e obter:

$$\begin{aligned} R\left(\frac{p}{q}\tau + m\right) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-m\sigma} d\sigma}{\sqrt{(1-e^{-\sigma})}} \int_0^\infty \frac{e^{-m\rho} \delta \left(\tau - \frac{p}{q}(\sigma + \rho) \right) d\rho}{\sqrt{(1-e^{-\rho})}} \\ &= \frac{1}{\pi} \left| \frac{p}{q} \right| \int_0^\infty \frac{e^{-m\sigma} d\sigma}{\sqrt{(1-e^{-\sigma})}} \frac{e^{-m\left(\frac{q}{p}\tau - \sigma\right)} \theta \left(\frac{q}{p}\tau - \sigma \right)}{\sqrt{\left(1 - e^{-\left(\frac{q}{p}\tau - \sigma\right)}\right)}}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

A presença da função de Heaviside na equação acima faz com que o limite de integração seja alterado, de maneira que podemos escrever

$$R\left(\frac{p}{q}\tau + m\right) = \frac{e^{-m\frac{q}{p}\tau}}{\pi} \left|\frac{p}{q}\right| \int_0^{\frac{q}{p}\tau} \frac{d\sigma}{\sqrt{(1-e^{-\sigma})\left(1-e^{-\left(\frac{q}{p}\tau-\sigma\right)}\right)}}. \quad (2.38)$$

Fazendo em (2.38) a mudança de variável

$$z = e^{-\sigma} \quad (2.39)$$

obtemos

$$R\left(\frac{p}{q}\tau + m\right) = \frac{e^{-m\frac{q}{p}\tau}}{\pi} \left|\frac{q}{p}\right| \int_{e^{-\frac{q}{p}\tau}}^1 \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)\left(z-e^{-\frac{q}{p}\tau}\right)}}. \quad (2.40)$$

Usando a definição de integral elíptica [36]

$$K(\kappa) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-\kappa^2 t^2)}}, \quad (2.41)$$

a expressão em (2.40) torna-se:

$$R\left(\frac{p}{q}\tau + m\right) = e^{-m\frac{q}{p}\tau} \frac{2}{\pi} \left|\frac{q}{p}\right| K\left(\sqrt{1-e^{-\frac{q}{p}\tau}}\right) \theta(\tau). \quad (2.42)$$

As equações (2.29) e (2.31) podem agora ser reescritas em termos de R :

$$\bar{\nu}_0^{(0)}(s) = -\frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{s}{8} R\left(\frac{s}{8}\right) \right\}, \quad (2.43)$$

$$\bar{\mu}_0^{(0)}(s) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{s}{8} R\left(\frac{s}{8} + \frac{1}{2}\right) \right\}. \quad (2.44)$$

Aplica-se a transformada inversa de Laplace na equação (2.43):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \bar{\nu}_0^{(0)}(s) \right\} &= -\frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ 1 - \frac{s}{8} R\left(\frac{s}{8}\right) \right\} \\ &= -\frac{1}{2} \delta(\tau) + \frac{1}{16} \mathcal{L}^{-1} \left\{ s \bar{R}\left(\frac{s}{8}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

A expressão (2.45) pode ser reescrita como:

$$\nu_0^{(0)}(\tau) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \theta}{\partial \tau}(\tau) + \frac{1}{16} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \bar{H}(s) \bar{R}\left(\frac{s}{8}\right) \right\}. \quad (2.46)$$

A transformada de Laplace inversa no lado direito de (2.46) pode ser escrita como:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \bar{H}(s) \bar{R}\left(\frac{s}{8}\right) \right\} = \int_0^\tau h(\tau - \xi) r(\xi) d\xi, \quad (2.47)$$

enquanto a transformada inversa para a função H é:

$$\mathcal{L}^{-1} \{ \bar{H}(s) = s \} = h(\xi) = \frac{\partial \delta}{\partial \xi}(\xi). \quad (2.48)$$

Substituindo as equações (2.48) e (2.42) (com: $m = 0, q = 8, p = 1$) em (2.47), temos:

$$\begin{aligned} \int_0^\tau h(\tau - \xi) r(\xi) d\xi &= \frac{16}{\pi} \int_0^\tau \frac{\partial \delta}{\partial \xi}(\tau - \xi) K(\sqrt{1 - e^{-8\xi}}) d\xi \\ &= \frac{16}{\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[K(\sqrt{1 - e^{-8\tau}}) \right]. \end{aligned} \quad (2.49)$$

De (2.46), (2.47) e (2.49) resulta:

$$\nu_0^{(0)}(\tau) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[K(\sqrt{1 - e^{-8\tau}}) \right]. \quad (2.50)$$

Desse modo a função $\nu_0^{(0)}(\tau)$ está determinada. Para seguir com a determinação de $\mu_0^{(0)}(\tau)$ vamos aplicar a transformada inversa de Laplace na equação (2.29):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \{ \bar{\mu}_0^{(0)}(s) \} &= \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \left\{ 1 - \frac{s}{8} R \left(\frac{s}{8} + \frac{1}{2} \right) \right\}, \\ &= \frac{1}{2} \delta(t) - \frac{1}{16} \mathcal{L}^{-1} \left\{ s R \left(\frac{s}{8} + \frac{1}{2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

A fórmula (2.51) pode ser reescrita como:

$$\mu_0^{(0)}(\tau) = -\frac{1}{16} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \bar{H}(s) \bar{R} \left(\frac{s}{8} + \frac{1}{2} \right) \right\}. \quad (2.52)$$

Usando (2.42) (com $m = 1/2, q = 8, p = 1$), obtemos:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \bar{H}(s) \bar{R} \left(\frac{s}{8} + \frac{1}{2} \right) \right\} = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[e^{-4\tau} K(\sqrt{1 - e^{-8\tau}}) \right]. \quad (2.53)$$

Substituindo (2.53) em (2.52) temos:

$$\mu_0^{(0)}(\tau) = -\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[e^{-4\tau} K(\sqrt{1 - e^{-8\tau}}) \right]. \quad (2.54)$$

É conveniente usar a notação:

$$\kappa = \sqrt{1 - e^{-8\tau}}, \tilde{\kappa} = \sqrt{1 - \kappa^2} = e^{-4\tau}, \quad (2.55)$$

e usar as regras de diferenciação:

$$\frac{d}{d\kappa} K(\kappa) = \frac{E(\kappa)}{\kappa \tilde{\kappa}^2} - \frac{K(\kappa)}{\kappa}, \quad \frac{d}{d\kappa} E(\kappa) = \frac{E(\kappa) - K(\kappa)}{\kappa}, \quad (2.56)$$

onde

$$E(\kappa) = \int_0^{\pi/2} d\alpha \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \alpha}$$

é conhecida como integral elíptica de segunda espécie. Com isso obtemos as funções μ e ν :

$$\mu_0^{(0)}(\kappa) = -\frac{4}{\pi} \frac{\tilde{\kappa}}{\kappa^2} [E(\kappa) - K(\kappa)], \quad (2.57)$$

$$\nu_0^{(0)}(\kappa) = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\kappa^2} [E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)]. \quad (2.58)$$

Substituindo as variáveis μ e ν por η e ξ chegamos às expressões de η e ξ em termos das integrais elípticas

$$\xi_0^{(0)}(\kappa) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 - \tilde{\kappa}}{\kappa^2} \right) [E(\kappa) + \tilde{\kappa} K(\kappa)], \quad (2.59)$$

$$\eta_0^{(0)}(\kappa) = -\frac{2}{\pi} \left(\frac{1 + \tilde{\kappa}}{\kappa^2} \right) [E(\kappa) - \tilde{\kappa} K(\kappa)]. \quad (2.60)$$

Com as funções $\xi_0^{(0)}$ e $\eta_0^{(0)}$ obtidas, procedemos na próxima seção com a obtenção das expressões para taxa e para o número de fótons criados no primeiro modo da cavidade.

2.3 Taxa e número de fótons no primeiro modo da cavidade

A taxa de geração de fótons como função do tempo dada em (2.1), está relacionada com a dada em (2.22) pela seguinte relação:

$$\frac{\partial}{\partial T} \mathcal{N}_0(\tau) = \frac{\partial \tau}{\partial T} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{N}_0(\tau).$$

Com isso a taxa do número de fótons no primeiro modo é:

$$\mathcal{R}_0(T) = \frac{\partial \tau}{\partial T} \mathcal{R}_0(\tau) = 4 \frac{\varepsilon \omega_0}{\pi^2} \frac{E(\kappa)^2 - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)^2}{\kappa^2}. \quad (2.61)$$

No limite em que $\tau \ll 1$, $\kappa = \sqrt{8\tau} \ll 1$. A expansão das funções elípticas é dada por [35]:

$$K(\kappa) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \kappa^2 + \frac{9}{64} \kappa^4 + \dots \right\}, \quad (2.62)$$

$$E(\kappa) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{4} \kappa^2 - \frac{3}{64} \kappa^4 - \dots \right\}. \quad (2.63)$$

Substituindo as expansões das funções elípticas em (2.61), obtemos uma expressão para a taxa de número de fótons produzidos no primeiro modo da cavidade, que depende linearmente com o tempo T :

$$\mathcal{R}_0(T) \approx \frac{1}{2}\varepsilon^2\omega_0^2T, \quad \varepsilon\omega_0T \ll 1. \quad (2.64)$$

Para o limite de tempos longos, ou seja $\tau \gg 1$, $\tilde{\kappa} \rightarrow 0$. Logo as expansões das funções elípticas são:

$$K(\kappa) \approx \ln\left(\frac{4}{\tilde{\kappa}}\right) + \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{4}{\tilde{\kappa}}\right) - 1\right]\tilde{\kappa}^2 + \dots, \quad (2.65)$$

$$E(\kappa) \approx 1 + \frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{4}{\tilde{\kappa}}\right) - \frac{1}{2}\right]\tilde{\kappa}^2 + \dots \quad (2.66)$$

Nesse limite, na expressão (2.61), temos:

$$\frac{E^2(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K^2(\kappa)}{k^2} = 1. \quad (2.67)$$

Logo a taxa de número de fótons produzidos dentro da cavidade para o primeiro modo no limite de tempos longos é:

$$\mathcal{R}_0(T) = 4\frac{\varepsilon\omega_0}{\pi^2}, \quad \varepsilon\omega_0T \gg 1. \quad (2.68)$$

Para obtermos a expressão do número de fótons produzidos no primeiro modo, integramos a equação (2.61), levando em conta a relação:

$$d\tau = \frac{k dk}{4\tilde{k}}, \quad (2.69)$$

e usando as definições integrais das funções elípticas, $E(0) = K(0) = \pi/2$, tem-se uma expressão analítica exata para o número de fótons no primeiro modo da cavidade (vide apêndice G):

$$\mathcal{N}_0(\kappa) = \frac{2}{\pi^2}E(\kappa)K(\kappa) - \frac{1}{2}. \quad (2.70)$$

Na figura 2.1 é mostrado um gráfico para a fórmula (2.70), e feita a comparação com o resultado equivalente para o caso Dirichlet-Dirichlet [14]. No limite em que $\tau \ll 1$, (2.70) apresenta um comportamento parabólico:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0(t) &= \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{1}{4}\kappa^2 + \frac{9}{64}\kappa^4\right\}\left\{1 - \frac{1}{4}\kappa^2 - \frac{3}{64}\kappa^4\right\} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4}(\varepsilon\omega_0t)^2, \quad \varepsilon\omega_0t \ll 1. \end{aligned} \quad (2.71)$$

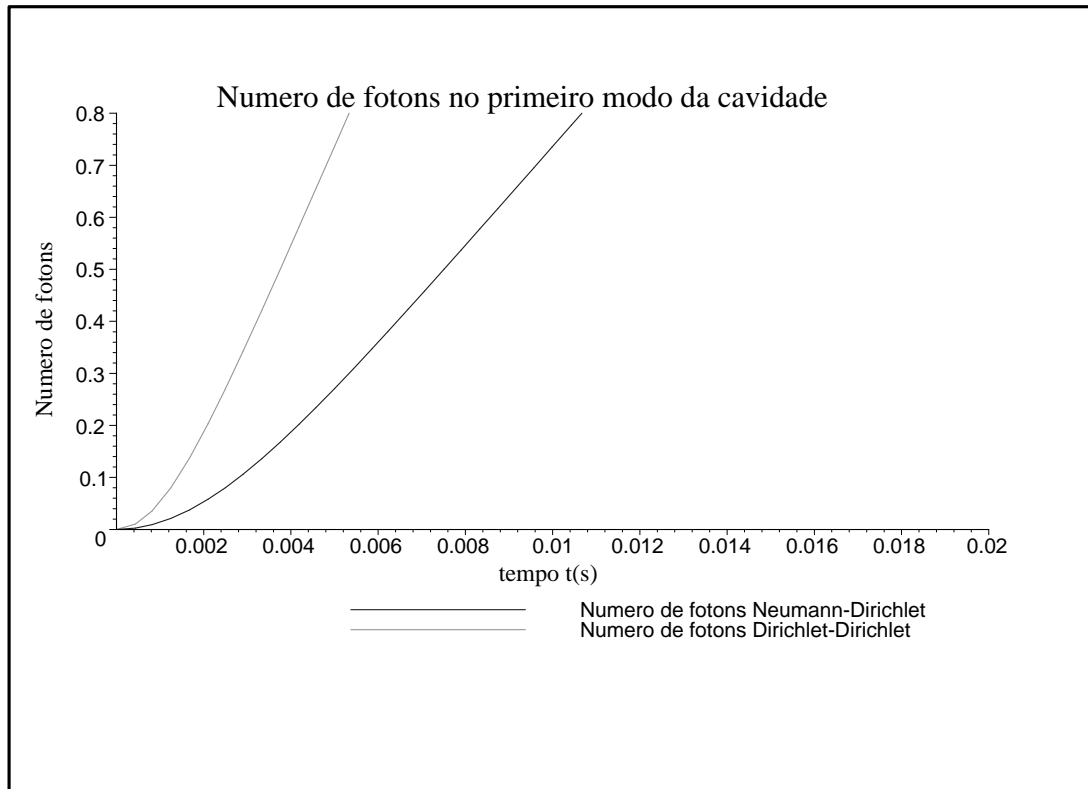


Figura 2.1: Número de fótons no primeiro modo da cavidade. No gráfico foram usados os seguintes parâmetros experimentais considerados em [14]: $\epsilon \sim 10^{-8}$ e $L_0 \sim 1 \text{ cm}$, o que corresponde a uma frequência de oscilação da fronteira de 30 GHz para o caso Dirichlet-Dirichlet (DD), e 15 GHz para o caso Neumann-Dirichlet (ND).

No limite em que $\tau \gg 1$, (2.70) apresenta dependência linear:

$$\mathcal{N}_0(t) = \frac{4}{\pi^2} \varepsilon \omega_0 t + \frac{2}{\pi^2} \ln 4 - \frac{1}{2}, \quad \varepsilon \omega_0 t \gg 1. \quad (2.72)$$

2.4 Taxa e número total de fótons dentro da cavidade

Para determinar a taxa *total* do número de fótons produzidos dentro da cavidade no intervalo de 0 a T , somamos as contribuições de todos os modos possíveis da cavidade. A demonstração de que são necessários todos os modos pode ser verificada no apêndice F

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{N}(\tau) = \sum_k \sum_n 2 \frac{(2k+1)}{(2n+1)} \eta_k^{(n)}(\tau) \dot{\eta}_k^{(n)}(\tau) = -2 \sum_n \frac{1}{(2n+1)} \xi_0^{(n)}(\tau) \eta_0^{(n)}(\tau). \quad (2.73)$$

Diferenciando a equação (2.73), tem-se:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \mathcal{N}(\tau) = -2 \sum_n \frac{1}{(2n+1)} \left[\xi_0^{(n)}(\tau) \dot{\eta}_0^{(n)}(\tau) + \dot{\xi}_0^{(n)}(\tau) \eta_0^{(n)}(\tau) \right], \quad (2.74)$$

e usando as equações (2.14), (2.15), (2.21) e (2.20) tem-se:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \mathcal{N}(\tau) = 2 \left(\left[\xi_0^{(0)}(\tau) \right]^2 + \left[\eta_0^{(0)}(\tau) \right]^2 \right). \quad (2.75)$$

Usando as equações (2.59) e (2.60) a segunda derivada do número de fótons criados em todos os modos é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} \mathcal{N}(\tau) &= \frac{8}{\pi^2 \kappa^4} \left[(1 - \tilde{\kappa})^2 [E(\kappa) + \tilde{\kappa} K(\kappa)]^2 + (1 + \tilde{\kappa})^2 [E(\kappa) - \tilde{\kappa} K(\kappa)]^2 \right] \\ &= \frac{16}{\pi^2 \kappa^4} \left\{ [E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)]^2 + \tilde{\kappa}^2 [E(\kappa) - K(\kappa)]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

A partir da expressão (G.9) podemos obter a expressão da taxa de criação, através da integração de (G.9) (usando $d\tau = \kappa d\kappa / 4\tilde{\kappa}^2$, vide apêndice G):

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{N}(\tau) = \frac{4}{\kappa^2 \pi^2} [E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)] [K(\kappa) - E(\kappa)]. \quad (2.77)$$

Na figura 2.2 mostramos um gráfico para a fórmula (2.77), e feita a comparação com o resultado equivalente para o caso Dirichlet-Dirichlet [14]. No limite em que $\tau \ll 1$ (2.77) apresenta dependência linear em τ :

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{N} = 2\tau. \quad (2.78)$$

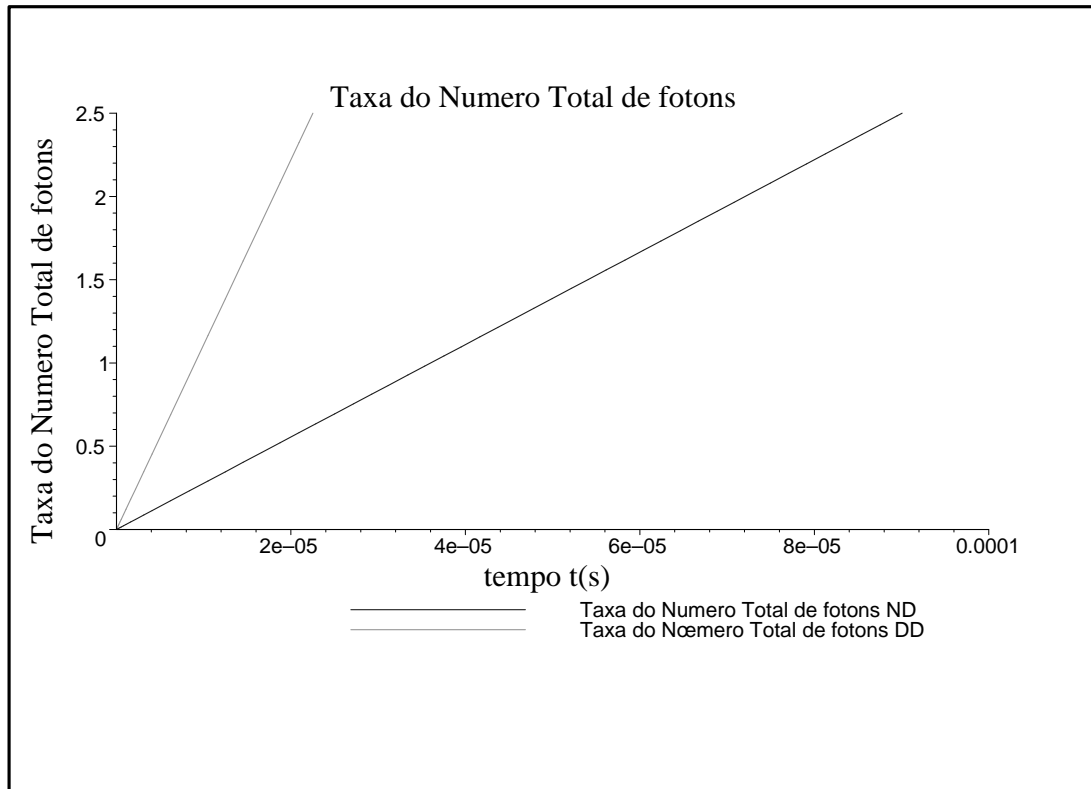


Figura 2.2: Taxa total de fótons produzidos na cavidade. No gráfico foram usados os seguintes parâmetros experimentais considerados em [14]: $\epsilon \sim 10^{-8}$ e $L_0 \sim 1 \text{ cm}$, o que corresponde a uma frequência de oscilação da fronteira de 30 GHz para o caso Dirichlet-Dirichlet (DD), e 15 GHz para o caso Neumann-Dirichlet (ND).

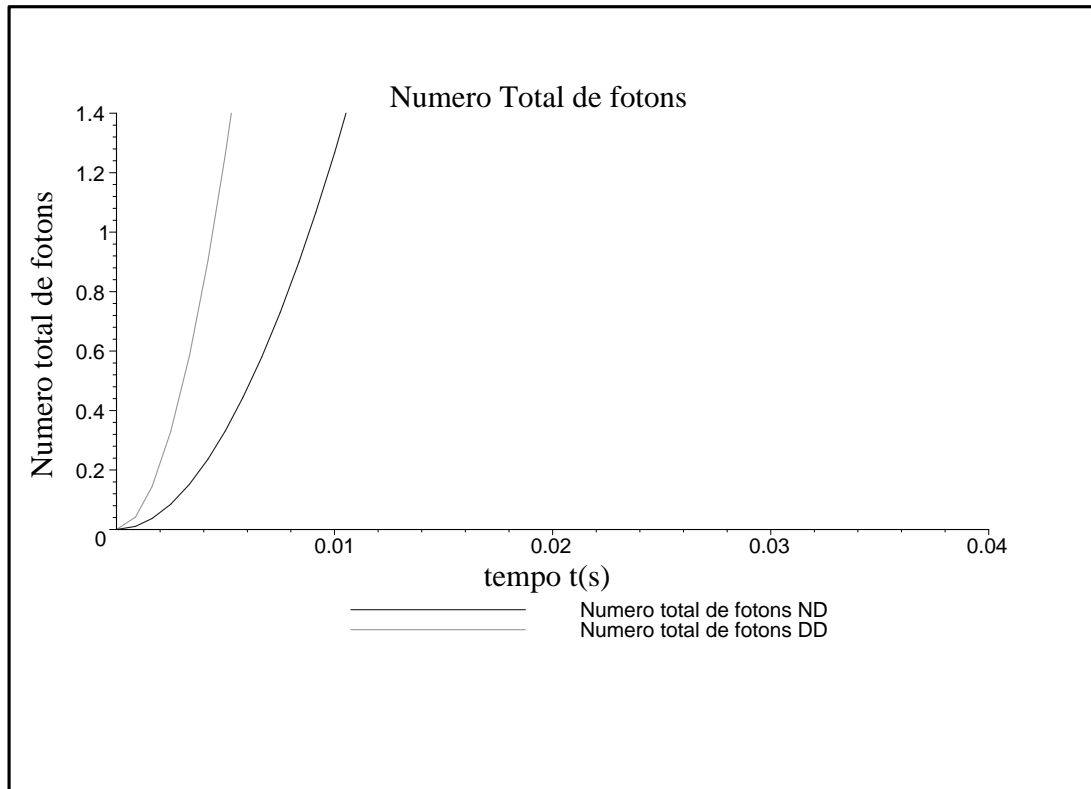


Figura 2.3: Gráfico para o número total de fótons produzidos na cavidade. No gráfico foram usados os seguintes parâmetros experimentais considerados em [14]: $\epsilon \sim 10^{-8}$ e $L_0 \sim 1 \text{ cm}$, o que corresponde a uma frequência de oscilação da fronteira de 30 GHz para o caso Dirichlet-Dirichlet (DD), e 15 GHz para o caso Neumann-Dirichlet (ND).

Para $\tau \gg 1$, temos:

$$\frac{d}{d\tau}\mathcal{N} = 16\frac{\tau}{\pi^2} \gg \frac{d}{d\tau}\mathcal{N}_0. \quad (2.79)$$

A equação (2.77), integrada com o uso das fórmulas (2.56) e $d\tau = \kappa d\kappa/4\tilde{\kappa}^2$, resulta em (vide apêndice G):

$$\mathcal{N}(\tau) = \frac{1}{\pi^2} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\kappa^2\right) K^2(\kappa) - E(\kappa) K(\kappa) \right]. \quad (2.80)$$

O limite de (2.80) para $\tau \ll 1$ tem comportamento parabólico:

$$\mathcal{N}(\tau) = \tau^2. \quad (2.81)$$

No limite $\tau \gg 1$ o número *total* de fótons criados dentro da cavidade é:

$$\mathcal{N}(\tau) = \frac{8}{\pi^2}\tau^2 + \frac{4\tau}{\pi^2}(\ln 4 - 1) - \frac{\ln 4}{\pi^2}(1 - \ln 2) + \mathcal{O}(\tau \exp(-8\tau)). \quad (2.82)$$

Na próxima seção a energia total transferida ao campo pela fronteira é calculada.

2.5 Energia total dentro da cavidade

A energia total acumulada na cavidade é dada por:

$$\mathcal{E}(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} \omega_m \mathcal{N}_m(\tau) = \omega_0 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2k+1)^2}{(2n+1)} |\eta_m^n(\tau)|^2. \quad (2.83)$$

Vamos introduzir a seguinte função:

$$S^n = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)^2 |\eta_m^{(n)}|^2, \quad (2.84)$$

que diferenciada com relação à variável τ , com uso das equações (1.43) e (1.44), resulta em:

$$\begin{aligned} \dot{S}^{(n)} &= -2\eta_0^{(n)}\dot{\xi}_0^{(n)} - 6\eta_0^{(n)}\eta_1^{(n)} + \\ &+ 2\sum_{m=1}^{\infty} (2m+1)^2 (2m-1) \eta_m^{(n)}\eta_{m-1}^{(n)} + \\ &- 2\sum_{m=1}^{\infty} (2m+1)^2 (2m+3) \eta_m^{(n)}\eta_{m+1}^{(n)}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Fazendo a seguinte mundaça de índice $m - 1 \rightarrow m$ no primeiro somatório, e incluindo o segundo termo de (2.85) no último somatório, temos:

$$\dot{S}^{(n)} = -2\eta_0^{(n)}\dot{\xi}_0^{(n)} + 4 \sum_{m=0}^{\infty} (2m+3)(2m+1)\eta_m^{(n)}\eta_{m+1}^{(n)}. \quad (2.86)$$

Diferenciamos esta equação mais uma vez obtendo:

$$\ddot{S}^{(n)} = 2\dot{\eta}_0^{(n)}\dot{\xi}_0^{(n)} - 2\eta_0^{(n)}\ddot{\xi}_0^{(n)} + 4 \left[\dot{\xi}_0^{(n)} \right]^2 - 4 \left[\dot{\eta}_0^{(n)} \right]^2 + 16S^{(n)}. \quad (2.87)$$

Usando a relação (vide Apêndice A)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \dot{\xi}_0^{(n)} \eta_0^{(n)} - \dot{\eta}_0^{(n)} \xi_0^{(n)} \right\} = 1. \quad (2.88)$$

e também a relação

$$\mathcal{E} = \omega_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}}{(2n+1)}, \quad (2.89)$$

a expressão (2.87) fica simplificada na forma:

$$\ddot{\mathcal{E}} - 16\mathcal{E} = 2\omega_0 \quad (2.90)$$

A solução de (2.90), que satisfaz às condições iniciais $\mathcal{E}(0) = \dot{\mathcal{E}}(0) = 0$, é dada por:

$$\mathcal{E}(\tau) = \frac{1}{4}\omega_0 \sinh^2(2\tau). \quad (2.91)$$

O comportamento da função (2.91) em relação ao tempo, está mostrado na figura (2.4). Podemos dizer que a energia cresce muito mais rapidamente com o tempo sob condições de fronteira DD do que sob as condições de fronteira de ND.

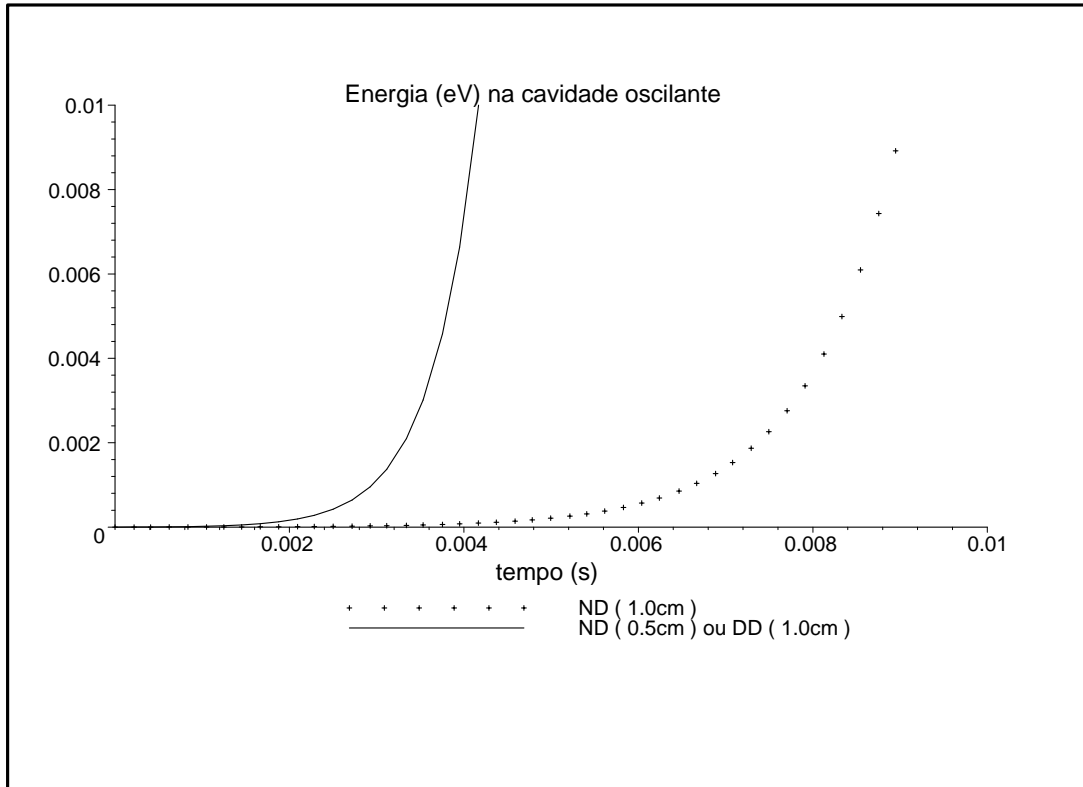


Figura 2.4: A energia relacionada as partículas criadas na cavidade oscilante para $\epsilon \sim 10^{-8}$. A energia armazenada na cavidade DD com $L'_0 = 1 \text{ cm}$, oscilando com 30 GHz é mostrada pela linha solida. A mesma linha representa a cavidade ND com $L_0 = 0.5 \text{ cm}$, oscilando com 30 GHz. A energia na cavidade ND com $L_0 = 1 \text{ cm}$ é representada pela linha pontilhada, oscilando com 15 GHz.

Análise dos Resultados e comentários finais

Calculamos a taxa de criação de partículas bem como a energia total correspondente (como função do tempo) dentro de uma cavidade oscilante unidimensional com as fronteiras obedecendo as condições de contorno mistas. Comparamos nossos resultados com aqueles encontrados na literatura para o caso Dirichlet-Dirichlet [14]. A tabela (2.1) resume algumas propriedades relacionadas às cavidades unidimensionais DD [14] e ND, oscilando com frequência duas vezes a frequência do primeiro modo da correspondente cavidade estática. As frequências permitidas ($\nu = \omega/2\pi$) associadas aos modos do campo na cavidade DD com comprimento de repouso L'_0 , são $n/2L'_0$ ($n = 1, 2, \dots$). Para este tipo de cavidade oscilando com $1/L'_0$, apenas os modos ímpares, cujas frequências são dadas por $1/L'_0, 3/L'_0$ e assim por diante, são criadas [14]. Na cavidade ND, com comprimento de repouso L_0 , as frequências permitidas para os modos do campo são $(2n+1)/4L_0$ ($n = 0, 1, \dots$). Para este tipo de cavidade, a frequência de oscilação é $1/2L_0$, e as partículas são criadas em todos os modos, em contraste com o caso DD. Uma possível explicação qualitativa para este fato pode ser cogitada. Na cavidade DD, em que a frequência de oscilação, que é por admissão duas vezes o primeiro modo não perturbado da correspondente cavidade DD estática, também é duas vezes a diferença entre as frequências que correspondem a dois níveis de energia adjacentes. Conseqüentemente, haverá um tipo de ressonância indireta com todos os modos cujas frequências diferem da primeira fundamental por um número inteiro vezes a frequência de oscilação. Neste caso, isto significa que apenas os modos ímpares serão excitados. Por outro lado, no caso da cavidade ND, a frequência de oscilação não é duas vezes, mas igual a diferença entre as frequências de

Tabela 2.1: Os modos permitidos e criados para a cavidade DD [14] e ND, oscilando com frequências que são duas vezes a frequência do primeiro modo das correspondentes cavidades estáticas

Caso	ν_{permit}	ν_{criado}	ν_{criado} $L_0 = L'_0/2$
ND	$(2n + 1)/4L_0$	$(2n + 1)/4L_0$ (todos os modos)	$(2n + 1)/2L'_0$
DD	$n/2L'_0$	$(2n + 1)/2L'_0$ (apenas os modos ímpares)	

dois níveis de energia adjacentes da correspondente cavidade estática. Então, neste caso, todos os modos serão excitados.

Um caso interessante ocorre para a condição particular $L_0 = L'_0/2$. Observe, que para este caso, todos os modos permitidos presentes na cavidade estática ND de comprimento L_0 , correspondem apenas aos modos ímpares da cavidade DD com comprimento $L'_0 = 2L_0$. Entretanto, os modos pares da cavidade DD não são excitados na ressonância paramétrica considerada em [14], sendo produzidas partículas relacionadas aos modos ímpares $(2n + 1)/L'_0$, os quais correspondem a todos os modos excitados na cavidade ND. Então para esta situação particular, ambas as cavidades excitam os mesmos modos.

As razão entre o número total de partículas criadas em ND (\mathcal{N}_{ND}) e (\mathcal{N}_{DD}) ([14]) é dado por:

$$\frac{\mathcal{N}_{DD}}{\mathcal{N}_{ND}} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\frac{8\pi\epsilon t}{L'_0}}\right) K^2(k') - E(k') K(k')}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\frac{4\pi\epsilon t}{L_0}}\right) K^2(k) - E(k) K(k)}, \quad (2.92)$$

onde $k' = \sqrt{1 - e^{-\frac{4\pi\epsilon t}{L'_0}}}$, $k = \sqrt{1 - e^{-\frac{2\pi\epsilon t}{L_0}}}$. Tanto para tempos longos quanto para tempos curtos, o número total de partículas criadas tem dependência quadrática no tempo [ver as eqs. (2.81) e (2.82)], tornando a razão (2.92) aproximadamente $\mathcal{N}_{DD}/\mathcal{N}_{ND} \approx (2L_0/L'_0)^2$. Por outro lado, o número de partículas criadas no primeiro modo tem uma

Tabela 2.2: Resultados numéricos. O índice subscrito (*prim*) significa o primeiro modo da correspondente cavidade e (*oscil*) significa oscilação da fronteira. Os resultados são considerados para $T = 1\text{s}$

	ND, $L_0 = 1\text{cm}$	DD, $L'_0 = 1\text{cm}$ ou ND, $L_0 = 0.5\text{cm}$
ν_{oscil}	15 GHz	30 GHz
ν_{prim}	7.5 GHz	15 GHz
\mathcal{N}_{prim}	190.837	381.823
\mathcal{R}_{prim}	190.985	381.971
\mathcal{R}	9.007×10^4	36.014×10^4
\mathcal{N}	4.507×10^4	18.014×10^4

dependência quadrática para tempos curtos [ver Eq. (2.71)], mas apresenta uma dependência linear para tempos longos [ver Eq. (2.72)]. Assim a razão entre o número de partículas criadas no primeiro modo para ND (\mathcal{N}_{prim}^{ND}) e DD (\mathcal{N}_{prim}^{DD}) [14] é dado para tempos curtos por $\mathcal{N}_{prim}^{DD}/\mathcal{N}_{prim}^{ND} \approx (2L_0/L'_0)^2$, enquanto que para tempos longos $\mathcal{N}_{prim}^{DD}/\mathcal{N}_{prim}^{ND} \approx (2L_0/L'_0)$. A razão entre a energia total relacionada à criação de partículas para ND (\mathcal{E}_{ND}) e DD (\mathcal{E}_{DD}) [14] é dado, para um tempo qualquer, por $\mathcal{E}_{ND}/\mathcal{E}_{DD} = 2L_0 \sinh^2(\pi\epsilon t/L'_0) / [L'_0 \sinh^2(\pi\epsilon t/2L_0)]$. Sendo que para tempos curtos temos $\mathcal{E}_{ND}/\mathcal{E}_{DD} \approx (2L_0/L'_0)^3$.

Para uma situação particular onde $L_0 = L'_0/2$. Eq.(2.91) e a correspondente fórmula para o caso DD [14] mostra que a mesma quantidade de energia mecânica é dissipada pelo movimento da fronteira em ambos os caso ND e DD. O número total de partículas criada e os modos excitados são os mesmos. Como uma consequência da escolha especial $L_0 = L'_0/2$, ambas as cavidades exibem o mesmo efeito Casimir dinâmico (contrariamente, o efeito Casimir estático é bem diferente: a força é atrativa para o caso DD, com valor $\pi/96L_0^2$, enquanto que a força é repulsiva em ND, com valor $\pi/48L_0^2$). Neste sentido, o problema da cavidade ND de comprimento L_0 oscilando com duas vezes a frequência fundamental do primeiro modo, pode ser mapeado no problema de uma cavidade DD de

comprimento $2L_0$, oscilando com a mesma frequência. Considerando este mapeamento, sugerimos que o espectro de partículas criadas na cavidade ND é o mesmo obtido no correspondente caso DD [41] que não é uma planckiana devido ao efeito de compressão (squeezing effect).

Finalmente, a Fig. 2.4 e a tabela 2.2 exibem alguns resultados numéricos. Na tabela 2.2 o subscrito (*prim*) significa o primeiro modo da correspondente cavidade e (*oscil*) significa oscilação da fronteira, e os resultados são considerados para $T = 1$ s.

Nós pontuamos que, para os valores particulares de L_0 , L'_0 e tempo (tempo longo) considerados na tabela 2.2, as razões entre os resultados encontrados na terceira e segunda colunas para cada uma das linhas três e quatro, não são exatamente os mesmos, mas aproximadamente iguais a dois, enquanto que para as linhas cinco e seis as razões também são diferentes, mas aproximadamente iguais a quatro.

Apêndice A

Consistência entre as EDO's e as transformações de Bogoliubov

Consideremos o campo $\hat{\phi}_{in}$ em (1.5) escrito na forma:

$$\hat{\phi}_{in} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\hat{b}_n \psi_n^{in} + \hat{b}_n^\dagger \psi_n^{*in} \right), \quad (\text{A.1})$$

onde

$$\psi_n^{in} = \frac{2}{\sqrt{n+1/2}} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi x}{L_0} \right] \exp(-i\omega_n t) \quad (\text{A.2})$$

são funções que constituem um conjunto completo de bases ortogonais no intervalo de $(0, L_0)$. O produto escalar é definido por:

$$(\psi, \chi) = -i \int_0^{L_0} dx (\psi \chi_t^* - \psi_t \chi^*) . \quad (\text{A.3})$$

As funções ψ_m^{in} estão relacionadas com ψ_n^{out} por

$$\psi_n^{out}(t, x) = \sum_{m=0}^{\infty} [\alpha_{nm} \psi_m^{in}(t, x) + \beta_{nm} \psi_m^{*in}(t, x)] . \quad (\text{A.4})$$

Usando-se as condições de ortogonalidade, pode-se mostrar que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{ \alpha_{nk}^* \alpha_{mk} - \beta_{nk}^* \beta_{mk} \} = \delta_{nm} . \quad (\text{A.5})$$

Usando as relações de comutação entre os operadores de criação e aniquilação, obtém-se:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_{nm}^* \alpha_{nj} - \beta_{nm}^* \beta_{nj}) = \delta_{mj}, \quad (\text{A.6})$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\beta_{nm}^* \alpha_{nk} - \beta_{nk}^* \alpha_{nm}) = 0, \quad (\text{A.7})$$

onde os coeficientes α e β são definidos em (1.17).

O objetivo desta seção é mostrar que há consistência entre as equações (1.43)-(1.46) e a condição de unitariedade (A.5) para as transformações de Bogoliubov. A demonstração se inicia fazendo $n = m$ na condição de unitariedade (A.5):

$$\sum_{k=0}^{\infty} \{[\alpha_{nk}]^2 - [\beta_{nk}]^2\} = 1. \quad (\text{A.8})$$

A seguir os coeficientes definidos em (1.17) são substituídos em (A.8):

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \left\{ \left[\xi_k^{(n)} \right]^2 - \left[\eta_k^{(n)} \right]^2 \right\} = (2n+1). \quad (\text{A.9})$$

Por fim, a derivada desta última expressão em relação a τ resulta em:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1) \left\{ \xi_k^{(n)} \dot{\xi}_k^{(n)} - \eta_k^{(n)} \dot{\eta}_k^{(n)} \right\} = 0. \quad (\text{A.10})$$

A seguir a equação (A.10) é reobtida através da manipulação das equações (1.43)-(1.46), o que serve como uma verificação de consistência das mesmas. Multiplica-se o lado esquerdo das equações (1.45) e (1.46) por $(2j+1) \xi_j^{(n)}(\tau)$. Em seguida os termos são somados:

$$\sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \xi_j^{(n)}(\tau) \frac{d}{d\tau} \xi_j^{(n)}(\tau) = \xi_0^{(n)}(\tau) \dot{\xi}_0^{(n)}(\tau) + \sum_{j=1}^{\infty} (2j+1) \xi_j^{(n)}(\tau) \frac{d}{d\tau} \xi_j^{(n)}(\tau). \quad (\text{A.11})$$

Substitui-se as expressões à direita em (1.45) e (1.46) no lado direito da equação (A.11):

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \xi_j^{(n)} \dot{\xi}_j^{(n)} &= -\xi_0^{(n)} \eta_0^{(n)} + \sum_{j=1}^{\infty} (2j+1) (2j-1) \xi_j^{(n)} \xi_{j-1}^{(n)} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) (2j+3) \xi_j^{(n)} \xi_{j+1}^{(n)} \\ &= -\xi_0^{(n)} \eta_0^{(n)}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Fazendo o procedimento análogo para as funções η , chega-se em:

$$\sum_{j=0}^{\infty} (2j+1) \eta_j^{(n)} \dot{\eta}_j^{(n)} = -\xi_0^{(n)} \eta_0^{(n)}. \quad (\text{A.13})$$

A expressão resultante da diferença entre (A.12) e (A.13) é igual a (A.10), como queríamos mostrar.

Apêndice B

Obtenção da EDP para a função geradora $K^{(n)}$

Com foco nas eqs. (1.51) e (1.52), o procedimento adotado é análogo ao descrito em (1.54)-(1.64). Para a eq. (1.51), tem-se:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\nu_0^{(n)}(\tau) z \right] = \nu_0^{(n)}(\tau) z - 3\nu_1^{(n)}(\tau) z. \quad (\text{B.1})$$

O segundo termo é multiplicado e dividido por z e reescrito na forma:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\nu_0^{(n)}(\tau) z \right] = \nu_0^{(n)}(\tau) z - \frac{3}{z} \nu_1^{(n)}(\tau) z^2. \quad (\text{B.2})$$

A equação (1.52), para $k = 1$ é multiplicada por z^3 e reescrita como:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\nu_1^{(n)}(\tau) z^3 \right] = \nu_0^{(n)}(\tau) z^3 - \frac{5}{z} \nu_2^{(n)}(\tau) z^4. \quad (\text{B.3})$$

O procedimento é estendido a todas as equações (1.52), para $k \geq 1$, resultando em:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\nu_k^{(n)}(\tau) z^{2k+1} \right] = (2k-1) \nu_{k-1}^{(n)}(\tau) z^{2k+1} - \frac{(2k+3)}{z} \nu_{k+1}^{(n)}(\tau) z^{2k+2}. \quad (\text{B.4})$$

A adição das equações (B.2), (B.3) e (B.4), resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \nu_k^{(n)}(\tau) z^{2k+1} \right] &= \nu_0^{(n)}(\tau) z - \frac{3}{z} \nu_1^{(n)}(\tau) z^2 + \left(\nu_0^{(n)}(\tau) z^3 - \frac{5}{z} \nu_2^{(n)}(\tau) z^4 \right) + \\ &+ \left(3\nu_1^{(n)}(\tau) z^5 - \frac{7}{z} \nu_3^{(n)}(\tau) z^6 \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(5\nu_2^{(n)}(\tau) z^7 - \frac{9}{z} \nu_4^{(n)}(\tau) z^8 \right) + \dots \\
& + (2k-1) \nu_{k-1}^{(n)}(\tau) z^{2k+1} - \frac{(2k+3)}{z} \nu_{k+1}^{(n)}(\tau) z^{2k+2}. \quad (\text{B.5})
\end{aligned}$$

Agrupando cada um dos termos de ν em (B.5), temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \nu_k^{(n)}(\tau) z^{2k+1} \right] & = \nu_0^{(n)}(\tau) z + \nu_0^{(n)}(\tau) z^3 + 3\nu_1^{(n)}(\tau) z^2 \left(z^3 - \frac{1}{z} \right) + \\
& + 5\nu_2^{(n)}(\tau) z^4 \left(z^3 - \frac{1}{z} \right) + \dots \\
& + (2k-1) \nu_{k-1}^{(n)}(\tau) z^{2k-2} \left(z^3 - \frac{1}{z} \right) + \dots \quad (\text{B.6})
\end{aligned}$$

Adicionando e subtraindo o seguinte termo $\nu_0^{(n)}(\tau)/z$, a equação anterior fica escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \nu_k^{(n)}(\tau) z^{2k+1} \right] & = \nu_0^{(n)}(\tau) \left(\frac{1}{z} + z \right) + \nu_0^{(n)}(\tau) \left(z^3 - \frac{1}{z} \right) + \\
& + 3\nu_1^{(n)}(\tau) z^2 \left(z^3 - \frac{1}{z} \right) + 5\nu_2^{(n)}(\tau) z^4 \left(z^3 - \frac{1}{z} \right) + \dots \\
& + (2k-1) \nu_{k-1}^{(n)}(\tau) z^{2k-2} \left(z^3 - \frac{1}{z} \right) + \dots \quad (\text{B.7})
\end{aligned}$$

Os termos $(z^3 - 1/z)$ são agrupados em (B.7):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \nu_k^{(n)}(\tau) z^{2k+1} \right] & = \nu_0^{(n)}(\tau) \left(\frac{1}{z} + z \right) + \left(z^3 - \frac{1}{z} \right) \left\{ \nu_0^{(n)}(\tau) + 3\nu_1^{(n)}(\tau) z^2 + \right. \\
& \left. + 5\nu_2^{(n)}(\tau) z^4 + \dots + (2k-1) \nu_{k-1}^{(n)}(\tau) z^{2k-2} + \dots \right\}. \quad (\text{B.8})
\end{aligned}$$

O somatório em (B.8) é reescrito na seguinte forma compacta:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \nu_k^{(n)}(\tau) z^{2k+1} \right] = \nu_0^{(n)}(\tau) \left(\frac{1}{z} + z \right) + \left(z^3 - \frac{1}{z} \right) \frac{d}{dz} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \nu_k^{(n)}(\tau) z^{2k+1} \right]. \quad (\text{B.9})$$

Com a definição da função

$$N^{(n)}(\tau, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k^{(n)}(\tau) z^{(2k+1)}, \quad (\text{B.10})$$

é obtida a EDP:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} N^{(n)}(\tau, z) = \nu_0^{(n)}(\tau) \left(\frac{1}{z} + z \right) + \left(z^3 - \frac{1}{z} \right) \frac{\partial}{\partial z} N^{(n)}(\tau, z). \quad (\text{B.11})$$

A função $N^{(n)}(\tau, z)$ é a função geradora das funções $\nu_k^{(n)}(\tau)$. As fórmulas (1.53) e (B.10), conduzem à seguinte condição inicial associada à EDP (B.11):

$$N^{(n)}(0, z) = z^{2n+1}. \quad (\text{B.12})$$

Usando (1.66), e a definição

$$N^{(n)}(t, z) = iK^{(n)}(t, \lambda), \quad (\text{B.13})$$

sendo

$$K^{(n)}(\tau, \lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \nu_k^{(n)}(\tau) \lambda^{2k+1}, \quad (\text{B.14})$$

a EDP (B.11) e a condição inicial (B.12) são mapeadas em:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} K^{(n)}(\tau, \lambda) = \nu_0^{(n)}(\tau) \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) + \left(\frac{1}{\lambda} - \lambda^3 \right) \frac{\partial}{\partial \lambda} K^{(n)}(\tau, \lambda), \quad (\text{B.15})$$

$$K^{(n)}(0, \lambda) = (-1)^n (\lambda)^{2n+1}. \quad (\text{B.16})$$

Apêndice C

Forma fechada para a solução da EDP relacionada com $W^{(n)}$

A solução da EDP (1.69) é [14]:

$$W^{(n)}(\tau, \lambda) = 2 \int^{\tau} \frac{\mu_0^{(n)}(a)}{\sqrt{-\frac{e^{8a-8\tau}\lambda^4 - 2e^{8a-8\tau}\lambda^2 + e^{8a-8\tau} - 2\lambda^2 - \lambda^4}{(1+\lambda^2)^2}}} da + F\left(\frac{(\lambda^2 - 1)e^{-4\tau}}{1 + \lambda^2}\right). \quad (\text{C.1})$$

Fazendo $\tau = 0$ em (C.1) e usando a condição (1.70) chegamos a:

$$(-1)^{(n)}(\lambda)^{2n+1} = 2 \int^0 \frac{\mu_0^{(n)}(a)}{\sqrt{-\frac{e^{8a}\lambda^4 - 2e^{8a}\lambda^2 + e^{8a} - 2\lambda^2 - \lambda^4}{(1+\lambda^2)^2}}} da + F\left(\frac{\lambda^2 - 1}{1 + \lambda^2}\right). \quad (\text{C.2})$$

Isolamos a função F na equação acima e obtemos:

$$F\left(\frac{\lambda^2 - 1}{1 + \lambda^2}\right) = (-1)^{(n+1)}(\lambda)^{2n+1} - 2 \int^0 \frac{\mu_0^{(n)}(a)}{\sqrt{1 - \frac{e^{8a}(1-\lambda^2)^2}{(1+\lambda^2)^2}}} da. \quad (\text{C.3})$$

Substituímos

$$(\lambda^2 - 1) / (1 + \lambda^2) = s \quad (\text{C.4})$$

e obtemos a forma da função F :

$$F(s) = (-1)^{(n+1)} \left(\frac{1+s}{1-s}\right)^{n+1/2} - 2 \int^0 \frac{\mu_0^{(n)}(a)}{\sqrt{1 - e^{8a}s^2}} da. \quad (\text{C.5})$$

A seguir é feita a substituição de s pelo argumento da função F que aparece na equação (C.1):

$$F\left(\frac{(\lambda^2 - 1)e^{-4\tau}}{1 + \lambda^2}\right) = (-1)^{(n+1)} \left(-\frac{(\lambda^2 - 1)e^{-4\tau} + 1 + \lambda^2}{(\lambda^2 - 1)e^{-4\tau} - 1 - \lambda^2}\right)^{n+1/2} +$$

$$-2 \int^0 \frac{\mu_0^{(n)}(a)}{\sqrt{1 - e^{8a-8\tau} \frac{(1-\lambda^2)^2}{(1+\lambda^2)^2}}} da. \quad (\text{C.6})$$

Substituindo (C.6) em (C.1), a seguinte expressão é obtida:

$$W^{(n)}(\tau, z) = 2 \int^\tau \frac{\mu_0^{(n)}(a)}{\sqrt{1 - e^{8a-8\tau} \frac{(1-\lambda^2)^2}{(1+\lambda^2)^2}}} da - 2 \int^0 \frac{\mu_0^{(n)}(a)}{\sqrt{1 - e^{8a-8\tau} \frac{(1-\lambda^2)^2}{(1+\lambda^2)^2}}} da +$$

$$-(-1)^n \left(-\frac{(\lambda^2 - 1)e^{-4\tau} + 1 + \lambda^2}{(\lambda^2 - 1)e^{-4\tau} - 1 - \lambda^2}\right)^{n+1/2}. \quad (\text{C.7})$$

As duas primeiras integrais são agrupadas, resultando na seguinte forma fechada para solução da EDP (1.69):

$$W^{(n)}(\tau, \lambda) = 2 \int_0^\tau \frac{\mu_0^{(n)}(a)}{\sqrt{1 - e^{8a-8\tau} \frac{(1-\lambda^2)^2}{(1+\lambda^2)^2}}} da +$$

$$-(-1)^n \left(-\frac{(\lambda^2 - 1)e^{-4\tau} + 1 + \lambda^2}{(\lambda^2 - 1)e^{-4\tau} - 1 - \lambda^2}\right)^{n+1/2}. \quad (\text{C.8})$$

Apêndice D

Teste de consistência para as soluções obtidas para $W^{(n)}$ e $K^{(n)}$

De acordo com (1.68) e (1.74), a solução (1.79) deve satisfazer, por exemplo, a seguinte condição de contorno:

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} W^{(n)}(\tau, \lambda) \right|_{\lambda=0^-} = \mu_0^{(n)}(\tau). \quad (\text{D.1})$$

Verificamos a seguir se (1.79) satisfaz (D.1). A derivada da equação (1.79) é (vide Apêndice E):

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} W^{(n)}(\tau, \lambda) = \int_0^\tau f^W(x, \lambda) \mu_0^{(n)}(\tau - x) dx + G^W(\tau, \lambda), \quad (\text{D.2})$$

onde definimos as funções:

$$f^W(x, \lambda) = -\frac{8\lambda e^{-8x}}{\left(1 - e^{-8x} \frac{(1-\lambda^2)^2}{(1+\lambda^2)^2}\right)^{3/2}} \frac{(1-\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^3}, \quad (\text{D.3})$$

$$G^W(\tau, \lambda) = -\frac{4(2n+1)\lambda e^{-4\tau} (-1)^n \left(\frac{1+\lambda^2 - e^{-4\tau}(1-\lambda^2)}{1+\lambda^2 + e^{-4\tau}(1-\lambda^2)}\right)^{(n+1/2)}}{(1+\lambda^2)^2 - e^{-8\tau}(1-\lambda^2)^2}. \quad (\text{D.4})$$

Para satisfazer a condição (D.1) devemos tomar o limite de λ tendendo a zero pela esquerda na equação (D.2)

$$\left. \frac{\partial}{\partial \lambda} W^{(n)}(\tau, \lambda) \right|_{\lambda=0} = \lim_{\lambda \rightarrow 0^-} \int_0^\tau f^W(x, \lambda) \mu_0^{(n)}(\tau - x) dx. \quad (\text{D.5})$$

A função $G^W(\tau, \lambda)$ é nula em $\lambda = 0$, enquanto que a função $f^W(x, \lambda)$ possui as seguintes propriedades:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^-} f^W(x \neq 0, \lambda) = 0, \quad (\text{D.6})$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^-} f^W(x = 0, \lambda) = \infty. \quad (\text{D.7})$$

Calculamos a integral da função $f^W(x, \lambda)$ como segue:

$$\int_0^\infty f^W(x, \lambda) dx = D(\lambda). \quad (\text{D.8})$$

Seja $D(\lambda)$ a função definida pela integral da função $f^W(x, \lambda)$:

$$D(\lambda) = - \int_0^\infty \frac{8\lambda e^{-8x}}{\left(1 - \frac{e^{-8x}(1-\lambda^2)^2}{(1+\lambda^2)^2}\right)^{3/2}} \frac{(1-\lambda^2)}{(1+\lambda^2)^3} dx$$

sugere-se a seguinte mudança de variável:

$$u = e^{-4x} \left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \right),$$

$$du = -4e^{-4x} \left(\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \right) dx.$$

e a integral torna-se:

$$D(\lambda) = - \frac{2\lambda}{(1-\lambda^4)} \int_0^{(1-\lambda^2)/(1+\lambda^2)} \frac{udu}{(1-u^2)^{3/2}}. \quad (\text{D.9})$$

Façamos outra mudança de variável na integração, desta vez para a variável u , como segue:

$$v^2 = 1 - u^2,$$

$$v dv = -u du$$

reescrevendo a integral em (D.9), como:

$$D(\lambda) = \frac{2\lambda}{(1-\lambda^4)} \int_1^{2|\lambda|/(1+\lambda^2)} \frac{dv}{v^2}$$

agora resolvida para a condição $\lambda < 0$

$$D(\lambda) = \frac{(1+\lambda)^2}{(1-\lambda^4)},$$

ou seja,

$$\int_0^{\infty} f^W(x, \lambda) dx = \frac{(1 + \lambda)^2}{(1 - \lambda^4)}. \quad (\text{D.10})$$

tomando o limite de $\lambda \rightarrow 0^-$ temos:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^-} \int_0^{\infty} f^W(x, \lambda) dx = 1. \quad (\text{D.11})$$

Conseqüentemente a função $f^W(x, \lambda)$ no limite em que λ tende a zero pela esquerda, de acordo com as propriedades (D.6) e (D.7), comporta-se como uma função delta, logo:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^-} f^W(x, \lambda) = \delta(x). \quad (\text{D.12})$$

Levando a constatação de (D.1). Analisando igualmente para a função $K^{(n)}$ chegamos a seguinte conclusão: A derivada da função $K^{(n)}$ pode ser escrita da mesma maneira que em (D.2):

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} K^{(n)}(\tau, \lambda) = \int_0^{\tau} f^K(x, \lambda) \nu_0^{(n)}(\tau - x) dx + G^K(\tau, \lambda), \quad (\text{D.13})$$

na qual as funções f^K e G^K são definidas do seguinte modo (vide Apêndice (E)):

$$f^K(x, \lambda) = -\frac{8\lambda e^{-4x}}{\left(1 - e^{-8x} \frac{(1-\lambda^2)^2}{(1+\lambda^2)^2}\right)^{3/2}} \frac{1}{(1 + \lambda^2)^2}, \quad (\text{D.14})$$

$$G^K(\tau, \lambda) = -\frac{4(2n+1)\lambda e^{-4\tau} (-1)^n \left(\frac{1+\lambda^2 - e^{-4\tau}(1-\lambda^2)}{1+\lambda^2 + e^{-4\tau}(1-\lambda^2)}\right)^{(n+1/2)}}{(1 + \lambda^2)^2 - e^{-8\tau}(1 - \lambda^2)^2}. \quad (\text{D.15})$$

Respeitando a seguinte condição de contorno:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} K^{(n)}(\tau, \lambda) \Big|_{\lambda=0^-} = \nu_0^{(n)}(\tau). \quad (\text{D.16})$$

A função f^K possui as seguintes propriedades:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^-} f^K(x \neq 0, \lambda) = 0, \quad (\text{D.17})$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^-} f^K(x = 0, \lambda) = \infty, \quad (\text{D.18})$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^-} \int_0^{\infty} f^K(x, \lambda) dx = 1. \quad (\text{D.19})$$

Logo a função f^K comporta-se como uma função delta, levando a constatação de (D.16)

Apêndice E

Derivadas das soluções $W^{(n)}$ e $K^{(n)}$

Derivando em relação a z a equação (1.79) temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} W^{(n)}(\tau, \lambda) &= \int_0^\tau \mu_0^{(n)}(\tau - x) \underbrace{2 \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(1 - e^{-8x} \frac{(1 - \lambda^2)^2}{(1 + \lambda^2)^2} \right)^{-1/2}}_{f(x, \lambda)} dx + \\ &\quad - 2 \underbrace{\frac{d}{d\lambda} (-1)^n \left(-\frac{(\lambda^2 - 1) e^{-4\tau} + 1 + \lambda^2}{(\lambda^2 - 1) e^{-4\tau} - 1 - \lambda^2} \right)^{n+1/2}}_{G(\tau, \lambda)}. \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

A seguir as funções $f(x, \lambda)$ e $G(\tau, \lambda)$ serão tratadas separadamente. A função $f(x, \lambda)$ é dada por:

$$\begin{aligned} f(x, \lambda) &= 2 \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(1 - e^{-8x} \frac{(1 - \lambda^2)^2}{(1 + \lambda^2)^2} \right)^{-1/2} \\ &= \left(1 - e^{-8x} \frac{(1 - \lambda^2)^2}{(1 + \lambda^2)^2} \right)^{-3/2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(e^{-8x} \frac{(1 - \lambda^2)^2}{(1 + \lambda^2)^2} \right)}_A, \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

onde:

$$A = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{e^{-8x} (1 - \lambda^2)^2}{(1 + \lambda^2)^2} \right) = -8\lambda e^{-8x} \frac{(1 - \lambda^2)}{(1 + \lambda^2)^3}. \quad (\text{E.3})$$

Substituindo o termo (E.3) em (E.2) a função $f(x, \lambda)$ torna-se:

$$f(x, \lambda) = -8\lambda e^{-8x} \left(1 - \frac{e^{-8x} (1 - \lambda^2)^2}{(1 + \lambda^2)^2} \right)^{-3/2} \frac{(1 - \lambda^2)}{(1 + \lambda^2)^3}. \quad (\text{E.4})$$

Passamos à função $G(\tau, \lambda)$, a qual é dada por :

$$G(\tau, \lambda) = (n + 1/2) (-1)^n \left(-\frac{(\lambda^2 - 1) e^{-4\tau} + 1 + \lambda^2}{(\lambda^2 - 1) e^{-4\tau} - 1 - \lambda^2} \right)^{n-1/2} \times B, \quad (\text{E.5})$$

onde

$$B = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(-\frac{(\lambda^2 - 1) e^{-4\tau} + 1 + \lambda^2}{(\lambda^2 - 1) e^{-4\tau} - 1 - \lambda^2} \right) = \frac{8\lambda e^{-4\tau}}{[-\lambda^2 - 1 + e^{-4\tau} (\lambda^2 - 1)]^2}. \quad (\text{E.6})$$

Substituindo o termo (E.6) em (E.5) a função $G(\tau, \lambda)$ torna-se:

$$G(\tau, \lambda) = (n + 1/2) (-1)^n \left(-\frac{(\lambda^2 - 1) e^{-4\tau} + 1 + \lambda^2}{(\lambda^2 - 1) e^{-4\tau} - 1 - \lambda^2} \right)^{n-1/2} \frac{8\lambda e^{-4\tau}}{[-\lambda^2 - 1 + e^{-4\tau} (\lambda^2 - 1)]^2}. \quad (\text{E.7})$$

Substituindo (E.4) e (E.7) em (E.1), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} W^{(n)}(\tau, \lambda) &= - \int_0^\tau \mu_0^{(n)}(\tau - x) \frac{8\lambda e^{-4x}}{\left(1 - e^{-8x} \frac{(1-\lambda^2)^2}{(1+\lambda^2)^2}\right)^{3/2} (1+\lambda^2)^3} dx + \\ &\quad - \frac{4(2n+1)\lambda e^{-4\tau} (-1)^n \left(\frac{1+\lambda^2 - e^{-4\tau}(1-\lambda^2)}{1+\lambda^2 + e^{-4\tau}(1-\lambda^2)}\right)^{(n+1/2)}}{(1+\lambda^2)^2 - e^{-8\tau}(1-\lambda^2)^2}. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Um procedimento análogo para a função $K^{(n)}$, resulta em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} K^{(n)}(\tau, \lambda) &= - \int_0^\tau \nu_0^{(n)}(\tau - x) \frac{8\lambda e^{-4x}}{\left(1 - e^{-8x} \frac{(1-\lambda^2)^2}{(1+\lambda^2)^2}\right)^{3/2} (1+\lambda^2)^2} dx + \\ &\quad - \frac{4(2n+1)\lambda e^{-4\tau} (-1)^n \left(\frac{1+\lambda^2 - e^{-4\tau}(1-\lambda^2)}{1+\lambda^2 + e^{-4\tau}(1-\lambda^2)}\right)^{(n+1/2)}}{(1+\lambda^2)^2 - e^{-8\tau}(1-\lambda^2)^2}. \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Apêndice F

Demonstração de que todos os modos do campo são relevantes

Neste apêndice demonstra-se quais os modos são necessários para calcular a taxa com que o número de fótons são criados. Conhecendo as equações ordinárias (1.43)-(1.46) e a soma (A.13) a taxa com que os fótons são criados na cavidade é:

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{N}(\tau) = -2 \sum_n \frac{1}{(2n+1)} \xi_0^{(n)}(\tau) \eta_0^{(n)}(\tau). \quad (\text{F.1})$$

Pode-se calcular a taxa conhecendo o resultado da soma em (F.1) desde que $n \in N$. O procedimento a seguir consiste em expandir em série de Taylor as funções η e ξ no parâmetro τ e relaciona-las com as condições iniciais através das equações paramétricas (1.43)-(1.46). Expandindo a função $\eta_0^{(n)}(\tau)$:

$$\eta_0^{(n)}(\tau) \approx \eta_0^{(n)}(0) + \tau \left. \frac{d\eta_0^{(n)}}{d\tau} \right|_{\tau=0} + \frac{\tau^2}{2!} \left. \frac{d^2\eta_0^{(n)}}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} + \dots \quad (\text{F.2})$$

Usando a equação (1.43) no ponto $\tau = 0$ e as condições iniciais do problema em (1.26):

$$\eta_0^{(n)}(\tau) \approx -\tau \left[\xi_0^{(n)}(0) + 3\eta_1^{(n)}(0) \right] - \frac{\tau^2}{2!} \left[\left. \frac{d}{d\tau} \xi_0^{(n)}(0) \right|_{\tau=0} + 3 \left. \frac{d}{d\tau} \eta_1^{(n)}(0) \right|_{\tau=0} \right] + \dots \quad (\text{F.3})$$

Mais uma vez fazendo uso das equações paramétricas (1.45) e (1.44) para $j = 1$ em $\tau = 0$, temos:

$$\eta_0^{(n)}(\tau) \approx -\tau \delta_{n,0} - \frac{\tau^2}{2!} \left[2\eta_0^{(n)}(0) - 3\xi_1^{(n)}(0) - 15\eta_2^{(n)}(0) \right] + \dots \quad (\text{F.4})$$

Por fim fazendo uso das condições iniciais para as funções η 's e ξ 's chegamos a uma expressão para a expansão da função $\eta_0^{(n)}$

$$\eta_0^{(n)}(\tau) = -\tau\delta_{n,0} + 3\frac{\tau^2}{2}\delta_{n,1} + \mathcal{O}(\tau^3). \quad (\text{F.5})$$

Observa-se de (F.5) que a função depende de τ se n for zero ou 1, entretanto se extendermos a ordem da expansão, digamos que τ^3 , podemos verificar que os outros modos do campo também estão relacionados:

$$\eta_0^{(n)}(\tau) = -\tau\delta_{n,0} + 3\frac{\tau^2}{2}\delta_{n,1} + \frac{\tau^3}{6}(-31\delta_{n,0} + 3\delta_{n,2}) + \mathcal{O}(\tau^4). \quad (\text{F.6})$$

Podemos expandir em τ a função $\xi_0^{(n)}$:

$$\xi_0^{(n)}(\tau) \approx \xi_0^{(n)}(0) + \tau \left. \frac{d\xi_0^{(n)}}{d\tau} \right|_{\tau=0} + \frac{\tau^2}{2!} \left. \frac{d^2\xi_0^{(n)}}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} + \dots \quad (\text{F.7})$$

Usando a condição inicial (1.26) e a equação (1.45), temos:

$$\xi_0^{(n)}(\tau) \approx \delta_{n,0} + \tau \left[-\eta_0^{(n)}(0) - 3\xi_1^{(n)}(0) \right] + \frac{\tau^2}{2!} \left[-\left. \frac{d\eta_0^{(n)}}{d\tau} \right|_{\tau=0} - 3 \left. \frac{d\xi_1^{(n)}}{d\tau} \right|_{\tau=0} \right] + \dots, \quad (\text{F.8})$$

finalizamos esta expansão usando novamente a condição inicial e as equações (1.43) e (1.46) para $j = 1$:

$$\xi_0^{(n)}(\tau) = \delta_{n,0} - 3\tau\delta_{n,1} - \frac{\tau^2}{2!} [2\delta_{n,0} + 15\delta_{n,2}] + \mathcal{O}(\tau^3). \quad (\text{F.9})$$

Substituindo as expansões das funções η e ξ na expressão da taxa obtem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\mathcal{N}(\tau) &= -2 \sum_n \frac{1}{(2n+1)} \left[\delta_{n,0} - 3\tau\delta_{n,1} - \frac{\tau^2}{2!} [2\delta_{n,0} + 15\delta_{n,2}] + \mathcal{O}(\tau^3) \right] \\ &\times \left[-\tau\delta_{n,0} + 3\frac{\tau^2}{2}\delta_{n,1} + \frac{\tau^3}{6}(-31\delta_{n,0} + 3\delta_{n,2}) + \mathcal{O}(\tau^4) \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

Se substituirmos $n \rightarrow 2m$, ou seja, n um número par, em (F.10) obtem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}\mathcal{N}(\tau) &= -2 \sum_{m=0,2,4,\dots} \frac{1}{(4m+1)} \left[\delta_{2m,0} - \frac{\tau^2}{2!} [2\delta_{2m,0} + 15\delta_{2m,2}] + \mathcal{O}(\tau^3) \right] \\ &\times \left[-\tau\delta_{2m,0} + \frac{\tau^3}{6}(-31\delta_{2m,0} + 3\delta_{2m,2}) + \mathcal{O}(\tau^4) \right]. \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

ou considerar n um número ímpar

$$\frac{d}{d\tau}\mathcal{N}(\tau) = -2 \sum_{m=1,3,\dots} \frac{1}{(4m+3)} [-3\tau\delta_{(2m+1),1} + \mathcal{O}(\tau^3)] \left[3\frac{\tau^2}{2}\delta_{(2m+1),1} + \mathcal{O}(\tau^4) \right]. \quad (\text{F.12})$$

Podemos observar que a taxa do número de fótons expressa em termos dos modos ímpares ou pares não são nulas, de modo que para o cálculo da taxa com que os fótons são criados dentro da cavidade são necessários todos os modos do campo.

Apêndice G

Demonstração da taxa e número de fótons

G.1 Demontração da fórmula (2.70)

Nesta seção apresentamos a demonstração da taxa do número de fótons no primeiro modo da cavidade como função do tempo é dada pela seguinte relação:

$$\frac{\partial}{\partial T} \mathcal{N}_0(T) = \frac{\partial \tau}{\partial T} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{N}_0(\tau), \quad (\text{G.1})$$

ou seja

$$\mathcal{R}_0(T) = \frac{\partial \tau}{\partial T} \mathcal{R}_0(\tau), \quad (\text{G.2})$$

onde

$$\mathcal{R}_0(\tau) = -2\xi_0^{(0)}(\tau) \eta_0^{(0)}(\tau) = \frac{8}{\pi^2} \frac{E^2(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K^2(\kappa)}{\kappa^2}. \quad (\text{G.3})$$

Podemos obter o número total de fótons no primeiro modo da cavidade por integração direta da equação (G.2) sabendo que $\mathcal{N}_0(0) = 0$ e (G.3)

$$\begin{aligned} \int_0^T dT \frac{d}{dT} \mathcal{N}_0(T) &= \int_0^\tau d\tau \mathcal{R}_0(\tau) \\ \mathcal{N}_0(T) &= \frac{8}{\pi^2} \int_0^\tau d\tau \frac{E^2(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K^2(\kappa)}{\kappa^2}. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável

$$d\tau = \frac{\kappa d\kappa}{4\tilde{\kappa}^2}, \quad (\text{G.4})$$

temos:

$$\mathcal{N}_0(T) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\kappa \frac{d\kappa}{\kappa \tilde{\kappa}^2} \{E^2(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K^2(\kappa)\}. \quad (\text{G.5})$$

Na expressão (G.5) somamos e subtraímos $\tilde{\kappa}^2 E(\kappa) K(\kappa)$

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0(T) &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^\kappa \frac{d\kappa}{\kappa \tilde{\kappa}^2} \{E^2(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 E(\kappa) K(\kappa) + \tilde{\kappa}^2 E(\kappa) K(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K^2(\kappa)\} \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^\kappa d\kappa \left\{ \frac{[E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)]}{\kappa \tilde{\kappa}^2} E(\kappa) + K(\kappa) \frac{[E(\kappa) - K(\kappa)]}{\kappa} \right\} \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^\kappa d\kappa \left\{ \frac{dK}{d\kappa} E + K \frac{dE}{d\kappa} \right\} = \frac{2}{\pi^2} \int_0^\kappa d\kappa \frac{d}{d\kappa} (K(\kappa) E(\kappa)), \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

de modo que

$$\mathcal{N}_0(T) = \frac{2}{\pi^2} (E(\kappa) K(\kappa) - E(0) K(0)). \quad (\text{G.7})$$

Usando as definições integrais das funções elípticas, $E(0) = K(0) = \pi/2$, a equação (G.7) torna-se:

$$\mathcal{N}_0(T) = \frac{2}{\pi^2} E(\kappa) K(\kappa) - \frac{1}{2}. \quad (\text{G.8})$$

G.2 Demonstração das fórmulas (2.77) e (2.80)

A taxa com que os fótons são criados é obtida integrando a expressão:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} \mathcal{N}(\tau) = \frac{16}{\pi^2 \kappa^4} \left\{ [E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)]^2 + \tilde{\kappa}^2 [E(\kappa) - K(\kappa)]^2 \right\}. \quad (\text{G.9})$$

Usando (G.4)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \mathcal{N}(\tau) &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^\kappa \frac{d\kappa}{\tilde{\kappa}^2 \kappa^3} \left\{ [E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)]^2 + \tilde{\kappa}^2 [E(\kappa) - K(\kappa)]^2 \right\} \\ &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^\kappa d\kappa \frac{A(\kappa)}{\tilde{\kappa}^2 \kappa^3}. \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

Antes de fazermos a integração faz-se necessário efetuar uma certa álgebra no integrando

$$A(\kappa) = [E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)]^2 + \tilde{\kappa}^2 [E(\kappa) - K(\kappa)]^2 \quad (\text{G.11})$$

somando e subtraindo $\tilde{\kappa}^2 [E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)] [E(\kappa) - K(\kappa)]$ da expressão (G.11)

$$\begin{aligned} A(\kappa) &= [E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)]^2 - \tilde{\kappa}^2 [E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)] [E(\kappa) - K(\kappa)] \\ &\quad + \tilde{\kappa}^2 [E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)] [E(\kappa) - K(\kappa)] + \tilde{\kappa}^2 [E(\kappa) - K(\kappa)]^2, \end{aligned}$$

$$A(\kappa) = \kappa^2 E(\kappa) [E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)] + \tilde{\kappa}^2 [E(\kappa) - K(\kappa)] [2E(\kappa) - (1 + \tilde{\kappa}^2) K(\kappa)]. \quad (\text{G.12})$$

Dividindo a expressão (G.12) por $\tilde{\kappa}^2 \kappa^3$ e organizando os termos:

$$\frac{A(\kappa)}{\tilde{\kappa}^2 \kappa^3} = \frac{E(\kappa)}{\tilde{\kappa}^2 \kappa} [E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)] + \frac{[E(\kappa) - K(\kappa)]}{\kappa} \left[\frac{2}{\kappa^2} [E(\kappa) - K(\kappa)] + K(\kappa) \right]. \quad (\text{G.13})$$

A seguir mostra-se que (G.13) é a derivada em relação a κ da seguinte função:

$$\mathcal{F}(\kappa) = \frac{1}{\kappa^2} [E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)] [K(\kappa) - E(\kappa)]. \quad (\text{G.14})$$

A derivada de (G.14)

$$F(\kappa) = \frac{d}{d\kappa} \left(\frac{1}{\kappa^2} [E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)] [K(\kappa) - E(\kappa)] \right), \quad (\text{G.15})$$

$$\begin{aligned} F(\kappa) &= [K(\kappa) - E(\kappa)] \frac{d}{d\kappa} \left(\frac{E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)}{\kappa^2} \right) + \frac{E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)}{\kappa^2} \frac{d}{d\kappa} (K(\kappa) - E(\kappa)) \\ &= [K(\kappa) - E(\kappa)] J(\kappa) + \frac{E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)}{\tilde{\kappa}^2 \kappa} E(\kappa). \end{aligned} \quad (\text{G.16})$$

O termo $J(\kappa)$ usando as definições (2.56):

$$\begin{aligned} J(\kappa) &= \frac{d}{d\kappa} \left(\frac{E(\kappa)}{\kappa^2} - \frac{K(\kappa)}{\kappa^2} + K(\kappa) \right) \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \frac{d}{d\kappa} E(\kappa) - \frac{1}{\kappa^2} \frac{d}{d\kappa} K(\kappa) - \frac{2}{\kappa^3} E(\kappa) + \frac{2}{\kappa^3} K(\kappa) + \frac{d}{d\kappa} K(\kappa) \\ &= \frac{2}{\kappa^3} [K(\kappa) - E(\kappa)] - \frac{K(\kappa)}{\kappa}. \end{aligned}$$

Dessa forma podemos reescrever a equação (G.16) como:

$$F(\kappa) = \frac{E(\kappa)}{\tilde{\kappa}^2 \kappa} [E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)] + [K(\kappa) - E(\kappa)] \left[\frac{2}{\kappa^3} [K(\kappa) - E(\kappa)] - \frac{K(\kappa)}{\kappa} \right]. \quad (\text{G.17})$$

Como (G.17) é igual ao lado direito de (G.13) podemos substituir (G.13) por (G.15)

$$\frac{A(\kappa)}{\tilde{\kappa}^2 \kappa^3} = \frac{d}{d\kappa} \left([K(\kappa) - E(\kappa)] \frac{[E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)]}{\kappa^2} \right). \quad (\text{G.18})$$

Substituindo (G.18) em (G.10)

$$\frac{d}{d\tau} \mathcal{N}(\tau) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\kappa d\kappa \frac{d}{d\kappa} \left([K(\kappa) - E(\kappa)] \frac{[E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)]}{\kappa^2} \right) \quad (\text{G.19})$$

$$\frac{d}{d\tau}\mathcal{N}(\tau) = \frac{4}{\pi^2} [K(\kappa) - E(\kappa)] \frac{[E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)]}{\kappa^2} - \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{4}{\pi^2} [K(\kappa) - E(\kappa)] \frac{[E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)]}{\kappa^2}. \quad (\text{G.20})$$

O limite no último termo da expressão (G.20) é nulo, levando a expressão final para a taxa com que os fótons são produzidos dentro da cavidade Neumann-Dirichlet:

$$\frac{d}{d\tau}\mathcal{N}(\tau) = \frac{4}{\pi^2 \kappa^2} [K(\kappa) - E(\kappa)] [E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)]. \quad (\text{G.21})$$

Vamos calcular o número de fótons total dentro da cavidade integrando a expressão (G.21)

$$\mathcal{N}(\tau) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\kappa d\kappa [K(\kappa) - E(\kappa)] \frac{[E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)]}{\tilde{\kappa}^2 \kappa}. \quad (\text{G.22})$$

A seguir mostra-se que o integrando de (G.22) pode ser obtido pela seguinte derivada

$$\begin{aligned} G(\kappa) &= \frac{d}{d\kappa} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\kappa^2 \right) K^2(\kappa) - E(\kappa) K(\kappa) \right\} \\ &= \frac{d}{d\kappa} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\kappa^2 \right) K^2(\kappa) \right\} - \frac{d}{d\kappa} \{ E(\kappa) K(\kappa) \} \end{aligned} \quad (\text{G.23})$$

$$G(\kappa) = \frac{K(\kappa) E(\kappa)}{\kappa \tilde{\kappa}^2} + \frac{K(\kappa) E(\kappa)}{\kappa} - \frac{2K^2(\kappa)}{\kappa} - K(\kappa) \frac{d}{d\kappa} E(\kappa) - E(\kappa) \frac{d}{d\kappa} K(\kappa). \quad (\text{G.24})$$

Após alguma álgebra obtem-se:

$$G(\kappa) = [K(\kappa) - E(\kappa)] \frac{[E(\kappa) - \tilde{\kappa}^2 K(\kappa)]}{\kappa \tilde{\kappa}^2}. \quad (\text{G.25})$$

Podemos substituir este último resultado em (G.22)

$$\mathcal{N}(\tau) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\kappa d\kappa \frac{d}{d\kappa} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\kappa^2 \right) K^2(\kappa) - E(\kappa) K(\kappa) \right\}, \quad (\text{G.26})$$

sabendo que $E(0) = K(0) = \pi/2$ chega-se ao número de fótons produzidos dentro da cavidade:

$$\mathcal{N}(\tau) = \frac{1}{\pi^2} \left(1 - \frac{1}{2}\kappa^2 \right) K^2(\kappa) - E(\kappa) K(\kappa). \quad (\text{G.27})$$

Bibliografia

- [1] H. B. G. Casimir, Proc. K. Ned. Akad. Wet. **51**, 793 (1948).
- [2] G. Plunien, B. Muller, and W. Greiner, Phys. Rep. **134**, 87 (1986); P. Milonni, *The Quantum Vacuum*, Academic Press, San Diego (1994); V.M. Mostepanenko and N.N. Trunov, *The Casimir Effect and its Applications*, Clarendon, London (1997); M. Bordag, *The Casimir Effect 50 years Later*, World Scientific, Singapore, (1999); K. A. Milton, *The Casimir Effect*, World Scientific, Singapore (2001).
- [3] T.H. Boyer, Phys. Rev. A **9**, 2078 (1974).
- [4] M.V. Cougo-Pinto, C. Farina, F. Santos and A. Tort, Phys. Lett. B **446**, 170 (1999); M.V. Cougo-Pinto, C. Farina, F.C. Santos e A.C. Tort, J. Phys. A **32**, 4463 (1999); M.V. Cougo-Pinto, C. Farina and A. Tenório, Braz. J. Phys. **29** 371 (1999); F.C. Santos, A. Tenório and A.C. Tort, Phys. Rev. D **60**, 105022 (1999); I. Klich, A. Mann and M. Revzen, Phys. Rev. D **65**, 045005 (2002); O. Kenneth, I. Klich, A. Mann and M. Revzen, Phys. Rev. Lett. **89**, 033001 (2002); D. Iannuzzi and F. Capasso, Phys. Rev. Lett. **91**, 029101 (2003); F.A. Barone and C. Farina, Phys. Rev. D **71**, 067701 (2005); F.C. Santos, J.J. Passos Sobrinho and A.C. Tort, Braz. J. Phys. **35** 657 (2005);
- [5] D.T. Alves, C. Farina and A.C. Tort, Phys. Rev. A **61**, 034102 (2000); D.T. Alves, F. Barone, C. Farina and A.C. Tort, Phys. Rev. A **67**, 022103 (2003).
- [6] V.V. Nesterenko and I.G. Pirozhenko, J. Math. Phys. **41** 7, 4521 (2000); R.M. Avagyan, A.A. Saharian and A.H. Yeranyan, Phys. Rev. D **66**, 085023 (2002); A.C. A. Pinto, T.M. Britto, R. Bunchaft, F. Pacoal and F.S.S. da Rosa, Braz. J. Phys. **32** 4,

- 860 (2003); F.A. Barone, C. Farina and R. Moritz, Nucl. Phys. B **127** 118 (2004);
A.A. Saharian , R.S. Davtyan , A.H. Yeranyan, Phys. Rev. D **69**, 085002 (2004); N.
Graham and K. D. Olum, Phys. Rev. D **72**, 025013 (2005);
- [7] G. T. Moore, J Math. Phys. **11**, 2679 (1970).
- [8] S. A. Fulling e P. C. W. Davies, Proc. R. Soc. London
- [9] L. H. Ford e A. Vilenkin, Phys. Rev. D **25**, 2569 (1982).
- [10] P.A. Maia Neto and L.A.S. Machado, Phys. Rev. A **54**, 3420 (1996);
- [11] M. Crocce, D.A.R. Dalvit and F.D. Mazzitelli, Phys. Rev. A **66**, 033811 (2002).
- [12] M. Montazeri and M.F. Miri, Phys. Rev. A **71**, 063814 (2005).
- [13] D. T. Alves, C. Farina and P. A. Maia Neto, J. Phys. A **36**, 1333 (2003).
- [14] V. V Dodonov and A. B. Klimov, Phys. Rev. A, **56**, 2664 (1996).
- [15] M. Uhlmann, G. Plunien, R. Schutzhold and G. Soff, Phys. Rev. Lett. **93**, 193601-1
(2004).
- [16] C. Braggio, G. Bressi, G. Carugno, C. Del Noce, G. Galeazzi, A. Lombardi, A.
Palmieri, G. Ruoso and D. Zanello, Europhys. Lett., **70**, 754 (2005).
- [17] Y. E. Lozovik, V. G. Tsvetus, and E. A. Vinogradov, Phys. Scr. **52**. 184 (1995).
- [18] M. J. Sparnaay, Physica **24**, 751 (1958).
- [19] S. K. Lamoreaux, Phys.Rev. Lett. **78**, 5 (1997)
- [20] U. Mohideen e A. Roy, Phys. Rev. Lett. **81**, 4549 (1998) **A 348**, 393 (1976).
- [21] L. Parker, Phys. Rev. Lett., **21**, 562 (1968).
- [22] P. A. Maia Neto, J. Phys. A **27**, 2167 (1994);
- [23] D. F. Mundarain e P. A. Maia Neto , Phys. Rev. A **57** , 1379 (1998);
- [24] V. V. Dodonov, A. B. Klimov and V. I. Man'ko, Phys. Lett. A **149**, 225 (1990).

- [25] V. V. Dodonov and A. B. Klimov, Phys. Lett. A **167**, 309 (1992).
- [26] V. V. Dodonov, A. B. Klimov and D. E. Nikonov, J. Math. Phys. **34**, 2742 (1993).
- [27] C. K. Law, Phys. Rev. Lett. **73**, 1931 (1994).
- [28] M. Ravazy e J. Terning, Phys. Rev. D **31**, 307 (1985).
- [29] G. Calucci, J. Phys. A, **25**, 3873 (1992).
- [30] G. Barton e C. Eberlein, Ann. Phys. (N.Y.) **227**, 222 (1993).
- [31] C. K. Law, Phys. Rev. A, **51**, 2537 (1995).
- [32] C. K. Law, Phys. Rev. A, **49**, 433 (1994).
- [33] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, Pergamon, Oxford (1969).
- [34] N. N. Bogoliubov e Y. A. Mitropolsky, *Asymptotic Methods in the Theory of Non-Linear Oscillations*, Gordon e Breach, N. Y. (1985).
- [35] I. S. Gradshteyn and I. M. Mitropolsky, *Tables of Integrals, Series and Products*, Academic, New York (1994).
- [36] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York (1972).
- [37] T. H. Boyer, Am. J. Phys. **71**, 990 (2003).
- [38] D. T. Alves, *Influência de paredes magneticamente permeáveis em alguns efeitos do vácuo quântico*, Tese de Doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF (2002).
- [39] Giuseppe Ruoso - Padova - 22 de Junho de 2004, em <http://www.pd.infn.it/casimir/> (2004).
- [40] V. V. Dodonov, J. Phys. A, **33**, 3209 (2000).
- [41] V.V. Dodonov, Adv. Chem. Phys. **119**, 309 (2001).