



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Densidade de energia e força de radiação sobre fronteiras  
em movimento num espaço-tempo bidimensional**

Andreson Luis Carvalho Rego

Belém-Pará

Março-2009



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Densidade de energia e força de radiação sobre fronteiras  
em movimento num espaço-tempo bidimensional**

Andreson Luis Carvalho Rego  
*Orientador:* Prof. Dr. Danilo Teixeira Alves

Belém-Pará  
Março-2009

# Densidade de energia e força de radiação sobre fronteiras em movimento num espaço-tempo bidimensional

Andreson Luis Carvalho Rego

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Pará (PPGF-UFPa) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Orientador: Prof. Dr. Danilo Teixeira Alves

Banca Examinadora

---

Prof. Dr. Danilo T. Alves

---

Prof. Dr. Victor Dmitriev

---

Prof. Dr. Van Sérgio Alves

Belém-Pará

Março-2009

---

## Resumo

### Densidade de energia e força de radiação sobre fronteiras em movimento num espaço-tempo bidimensional

Andreson Luis Carvalho Rego

*Orientador:* Prof. Dr. Danilo Teixeira Alves

Resumo da Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Pará (PPGF-UFPa) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

No presente trabalho, nós investigamos a densidade de energia e a força de reação a radiação quântica sobre uma fronteira em movimento que impõem ao campo escalar, sem massa, condições de contorno de Dirichlet ou Neumann. Apesar de assumirmos um particular movimento para fronteira, introduzido por Walker e Davies muitos anos atrás (*J. Phys. A*, **15** L477, 1982), consideramos novas possibilidades para o estado inicial do campo, entre as quais, estados térmicos e coerentes. Nós investigamos, também, o problema de uma cavidade com uma das fronteiras no particular movimento proposto por Walker e Davies, levando em conta o estado de vácuo, térmico e coerente como estados iniciais do campo. Finalmente, investigamos o caso de uma fronteira não estática que impõem condições de contorno de Robin ao campo.

Belém-Pará

2009

## *Abstract*

### Energy density and radiation forces on moving boundaries in a two dimensional spacetime

Andreson Luis Carvalho Rego

*Orientador:* Prof. Dr. Danilo Teixeira Alves

*Abstract* da Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Pará (PPGF-UFPa) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

In the present work, we investigate the energy density and the quantum radiation reaction force on one moving boundary which imposes on a massless scalar field a Dirichlet or a Neumann boundary condition. Though we assume a particular motion for the boundary, introduced by Walker and Davies many years ago (*J. Phys. A*, **15** L477, 1982), we consider new possibilities for the initial field state, namely, thermal state and coherent state. We also investigate the problem of a cavity with one of the boundaries in the particular motion proposed by Walker and Davies, taking into account the vacuum, thermal and coherent initial field states. Finally we investigate the case of a non-static boundary which imposes the Robin boundary condition to the field.

Belém-Pará

2009

*“Aos meus pais: Chico Rego e Maria Risleide,  
aos meus queridos irmãos: Alex e Adriana e  
aos eternos amigos...”*

*...Os Espíritos se regozijam a cada novo passo  
de progresso da Ciência humana, porque  
dos seus labores, das suas dedicações,  
brotará o conhecimento superior que  
felicitará os núcleos de criaturas,  
porquanto ficará patente, plenamente evidenciada,  
a grande missão do Espírito  
como elemento criador, orgnizador e  
conservador de todos os fenômenos  
que regulam a vida material*

*Emmanuel*

---

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer...

- A Deus, causa primária de todas as coisas, fonte de inteligência suprema, soberano de justiça, bondade e amor. Agradeço a Jesus, nosso mestre amado, sábio dos sábios, sempre nos mostrando o caminho da eterna e verdadeira felicidade.
- Aos amigos de ontem, hoje e sempre que nos divesos planos da espiritulidde, me auxiliam na caminhada desta minha existência.
- Aos meus pais, Chico Rego e Maria Risoleide, a quem sou muito grato pelos profundos ensinamentos e pelo amor e carinho dispensados a mim em caráter incondicional. Aos meus irmãos, Alex e Adriana por terem me ensinado o siblime dom da convivência familiar, mostrando-me as responsabilidades a serem praticadas no laborioso caminho do progresso.
- Aos amigos de toda minha formação estudantil, desde infância até fim de mestrado e por que não início de doutorado...Luiz Armando, Wagner, Thiago, Davi, Tânia, Carmem, Tami, Shirsley, Marcus Danilo, Camila, Elaine, Tarciso, “*Turma do mestrado*”, “*Turma da salinha do provedor*”, “*Galera do PET*”, “*Amigos do CELUZ*” ... acreditem são muitos! Agradeço a todos vocês por saberem valorizar o real sentido que tem para mim a palavra amizade.
- Ao grupo de Casimir-UFPa, do qual faço parte desde os tempos de IC, pela oportunidade de fazer pesquisa, amigos e pelo excelente ambiente trabalho que julgo aqui indescritível. A todos integrantes: Os líderes Danilo e Edney; Os camaradas: Mateus, Wagner, Hector, João Paulo, Jeferson Danilo, Jocivaldo e à casemira Alessandra meu fraterno abraço.
- Aos professores da Faculdade de Física e do Programa de Pós-Graduação em Física-UFPa que sempe me auxiliaram durante graduação e mestrado.
- Em especial...Ao amigo Sérgio Vizeu, Professor de Mecânica Quântica e tutor dos tempos de PET-Física (Grupo do qual fiz parte e a quem devo profundo respeito pelas lições alí adquiridas), meu sincero agradecimento, pela nobreza de pessoa e pelo professor exemplar que contribuiu significativamente para minha edificação na carreira que eu escolhi apri-morar. A professora Silvana Perez, profissional a quem admiro muito por sua disciplina e dedicação com os assuntos acadêmicos, aqui registro minha grande satisfação de ter sido seu aluno.

- Ao amigo Danilo Alves, Grande “*cumpadi*”. Reforço meus agradecimentos pelo exemplo de ser humano. Apresentou-me uma forma de trabalho pautada na parceria, amizade, união e dedicação. Ensinou-me a fazer pesquisa de uma maneira diferente, divertida e responsável. Ao mestre, camarada e como ele gosta de ser lembrado... “*irmão mais velho*”... o meu muito obrigado.
- A CAPES pelo suporte financeiro.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>12</b>
<b>1 Revisando a solução do campo sob condições de Dirichlet e Neumann</b>	<b>15</b>
1.1 Uma fronteira . . . . .	15
1.2 Cavidade . . . . .	17
<b>2 Aplicação ao modelo de Walker e Davies</b>	<b>19</b>
2.1 Uma fronteira: vácuo . . . . .	19
2.2 Uma fronteira: térmico e coerente . . . . .	23
2.3 Cavidade: vácuo, térmico e coerente . . . . .	28
<b>3 Solução do campo sob condição de Robin</b>	<b>35</b>
3.1 Tentativa de solução via transformação conforme . . . . .	35
3.2 Proposta de solução sem uso da transformação conforme . . . . .	36
3.2.1 Condições de Dirichlet . . . . .	38
3.2.2 Condições de Neumann . . . . .	39
3.2.3 Condições de Robin . . . . .	40
<b>4 Perspectivas</b>	<b>43</b>
4.1 Densidade de energia: Fórmulas exatas . . . . .	43
4.2 Densidade de energia: Termos divergentes . . . . .	55
<b>Considerações Finais</b>	<b>58</b>
<b>A Transformações Conforme</b>	<b>59</b>
A.1 Invariância conforme da equação de Klein-Gordon . . . . .	59
A.2 Solução da equação da onda nas coordenadas $(w, s)$ . . . . .	62

---

A.3	Mapeando o problema dinâmico em um problema estático . . . . .	66
<b>B</b>	<b>Tensor energia-momentum</b>	<b>71</b>
B.1	Expressão analítica . . . . .	71
B.2	Densidade de energia e força: vácuo . . . . .	72
B.3	Densidade de energia e força: correção térmica . . . . .	75
<b>C</b>	<b>Alguns limites importantes</b>	<b>77</b>
C.1	Limites importantes . . . . .	77
<b>D</b>	<b>Recuperando os casos particulares para condições de Robin</b>	<b>84</b>
D.1	Equação diferencial . . . . .	84
D.2	Modos dinâmicos e derivadas: Dirichlet . . . . .	85
D.3	Modos dinâmicos e derivadas: Neumann . . . . .	89
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>92</b>

# Introdução

Há 30 anos atrás, muitos autores iniciaram investigação sobre o problema de radiação de fronteiras móveis (Refs. [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]). No contexto de uma campo escalar, real, em 1+1 dimensões, submetido a condições de Dirichlet na posição  $x = z(t)$ , Fulling e Davies [3] obtiveram uma fórmula exata para a parte física e finita do valor esperado do tensor energia-momentum, assumindo o vácuo como estado inicial.

Muitos trajetórias foram abordadas na literatura, incluindo aquelas investigadas por Fulling e Davies [3], assumindo que a aceleração da fronteira iniciava ou cessava abruptamente, gerando uma densidade de energia infinita, ou em outras palavras, um pulso de delta na energia emitida por conta deste ponto de descontinuidade. Desejando estudar um modelo exato sem tais descontinuidades, Walker e Davies [8] propuseram uma lei de movimento na qual o espelho, ou fronteira, acelera ao longo de uma trajetória suave e assintoticamente estática. Então, eles obtiveram uma solução exata para o problema da radiação emitida por fronteiras móveis.

O movimento assintoticamente estático proposto por Walker e Davies [8] traz a vantagem de evitar certas patologias relacionadas a radiação emitida por espelhos em movimento com aceleração abrupta.

Moore, no contexto de um campo escalar real, não massivo dentro de uma cavidade (região do espaço-tempo em estudo limitada por duas fronteiras) não estática, obteve uma expressão exata para o valor esperado do tensor energia-momentum dado em termos de uma equação funcional, usualmente chamada de equação de Moore [1]. Para esta equação não existe uma técnica geral de solução analítica, mas soluções analítico-exatas para particulares movimentos da fronteira [3, 9, 10], e também soluções analítico-aproximadas [11, 12]. O efeito Casimir dinâmico tem sido investigado em cavidades não estáticas quando o estado inicial do campo é um banho térmico (Refs. [11, 13, 14, 15, 16]); Estados coerentes (Refs. [15, 17, 18, 19]) e também estados comprimidos tem sido considerados (Ref.[15]).

No contexto do efeito Casimir dinâmico, o problema de fronteiras oscilando com pequenas amplitudes é comumente relacionado ao problema de criação de fótons em laboratório e é usualmente investigado via soluções analítico-aproximadas da equação de Moore [11, 12] e também via outros métodos perturbativos [20].

Por outro lado, a investigação de movimentos não oscilantes, de larga amplitudes, são frequentemente motivados pelo problema de criação de partículas em modelos cosmológicos, bem como, pelo problema da radiação emitida por colapso de buracos negros [3, 21, 22]. A densidade de energia associada tem sido estudada para particulares leis de movimento nas quais a equação de Moore pode ser resolvida exatamente [3, 22].

Para trajetórias não oscilantes genéricas, uma abordagem baseada em um método numérico para resolver exatamente a equação de Moore para uma lei geral de movimento, proposta por Cole e Schieve [23] tem sido bastante útil.

Este método devolve resultados em boa concordância com aqueles obtidos via abordagem perturbativa [23, 24] e ainda pode dar resultados para modelos que não possuem solução via técnica perturbativa, como é o caso de problemas com cavidades em expansão.

Ainda no cenário do efeito Casimir dinâmico, merece relevante destaque os problemas devotados ao estudo das chamadas forças dinâmicas de Casimir, nos quais as condições de contorno exercem grande influência. Na literatura, estes problemas tem sido investigados em sua grande maioria via método perturbativo (ver Ref. [17], em que os autores investigam este problema sob condições de Neumann).

Contudo, Mintz, Farina, Maia Neto e Rodrigues foram os primeiros a investigar o efeito Casimir dinâmico sob condições de Robin (Refs. [25, 26, 27]). As forças dinâmicas de Casimir foram tratadas via abordagem perturbativa e o número de fótons criados foi calculado para pequenos deslocamentos e velocidades não relativísticas da fronteira.

Destaca-se o fato das condições de Robin trazerem a vantagem de mesclar continuamente as condições de Dirichlet e Neumann. Tais condições tem se mostrado de extrema importância para modelos fenomenológicos que descrevem superfícies penetráveis. Para alguns casos particulares, as condições de contorno podem simular o modelo de plasma em metais reais (Ref. [25, 26, 27]).

Mediante escolha apropriada do parâmetro que faz a conexão entre as condições de Neumann e Dirichlet, as condições de Robin podem ser responsáveis pelo surgimento de forças de natureza restauradora na região entre duas placas paralelas. Resultado análogo pode ser encontrado para modelos que levam em consideração movimentos não relativísticos para uma única placa,

sob os quais os efeitos dissipativos do estado inicial de vácuo são praticamente eliminados (Ref. [25], fato este que pode justificar o efeito de supressão das partículas criadas neste modelo (Ref. [26])).

No presente trabalho, investigamos a densidade de energia e a força de reação a radiação quântica sobre uma fronteira em movimento que impõe ao campo escalar, sem massa, em um espaço-tempo bidimensional, condições de contorno de Dirichlet ou Neumann. Consideramos novas possibilidades ao modelo proposto por Walker e Davies ao levarmos em conta estados térmicos e coerentes como estados iniciais do campo (Ref. [30]).

Ainda com relação ao modelo de Walker e Davies, aplicamos a técnica baseada na abordagem de Cole-Schieve (Ref. [23, 34]), para examinarmos a densidade de energia dentro de uma cavidade unidimensional em expansão com uma lei de movimento na qual não existe uma solução analítica exata para sua correspondente equação de de Moore. Além do vácuo, consideramos os estados térmicos e coerentes como estados iniciais do campo (Ref. [31]).

Finalmente, investigamos o caso de uma fronteira não estática que impõe condições de contorno de Robin ao campo. Utilizando uma abordagem não perturbativa, tal como a proposta por DeWitt (Ref. [2]), que dispensa o uso de mapeamento conforme, investigamos a solução exata do campo, apresentando alguns perspectivas relacionadas a solução encontrada.

A dissertação está organizada da seguinte maneira. No capítulo 1, revisamos a solução do campo para as condições de Dirichlet e Neumann para os casos de uma fronteira e cavidade. No capítulo 2, aplicamos as fórmulas exatas do campo ao modelo de Walker e Davies, revisando os cálculos destes autores para o estado de vácuo e promovendo a extensão destes resultados para os estados térmicos e coerentes, tanto para o caso de uma fronteira quanto o de uma cavidade.

No capítulo 3, apresentamos a solução dos modos dinâmicos de Robin em dois aspectos. O primeiro investiga o campo via mapeamento conforme e o segundo dispensa o uso deste tipo de transformação. No capítulo 4, apresentamos como perspectiva associada aos modos dinâmicos de Robin, os cálculos para a densidade de energia nestas condições. Analisamos, discutimos e apresentamos o status atual destes resultados. Encerramos a dissertação apresentando as considerações finais.

# Capítulo 1

## Revisando a solução do campo sob condições de Dirichlet e Neumann

Este capítulo é devotado a revisão da solução do campo que satisfaz condições de contorno de Dirichlet ou Neumann, para o caso de uma fronteira e cavidade, tomando por base as discussões apresentadas nas Refs. [15, 28, 29, 31].

### 1.1 Uma fronteira

Seja o campo escalar, real, não-massivo em um espaço-tempo bidimensional e que obedece a equação de Klein-Gordon:

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) \phi(t, x) = 0. \quad (1.1)$$

e satisfaz as condições de contorno de Dirichlet e Neumann para um referencial em repouso:  $\phi(t, z(t)) = 0$  e  $(\dot{z}(t)\partial_t + \partial_x) \phi(t, x)|_{x=z(t)} = 0$ .

De acordo com o modelo proposto por Moore e em seguida aperfeiçoado por Fulling e Davies [1, 3], os modos do campo podem ser encontrados explorando a invariância conforme da equação de Klein-Gordon, (ver apêndice A):

$$\hat{\phi}(t, x) = \int_0^\infty d\omega [\hat{a}_\omega \phi_\omega + H.c.], \quad (1.2)$$

em que

$$\phi_\omega(t, x) = (4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} \left[ \gamma e^{-i\omega r(v)} + \gamma^* e^{-i\omega p(u)} \right] \quad (1.3)$$

formam um conjunto completo, fechado e ortonormalizado de soluções com frequências positivas, com  $u$  e  $v$  sendo as linhas nulas do cone de luz do espaço-tempo bidimensional  $(t, x)$  e definidas por:

$$u = t - x \quad \text{e} \quad v = t + x. \quad (1.4)$$

Os modos descritos na Eq. (1.3) são os mais gerais possíveis [15]. A partir dela podemos estudar os modos do campo para condições de Dirichlet ou Neumann, bem como, estudar o problema localmente levando em consideração o lado esquerdo ou direito da fronteira móvel. Para isso basta ajustarmos os valores de  $\gamma$  e das funções  $r(v)$  e  $p(u)$ . Note que ao assumirmos  $\gamma = 1$ , obtemos os modos dinâmicos de Neumann para os dois lados da fronteira, enquanto que, para  $\gamma = i$ , teremos a solução para a condição Dirichlet. No apêndice A, apresentamos os cálculos e principais discussões para o caso de uma fronteira de Dirichlet.

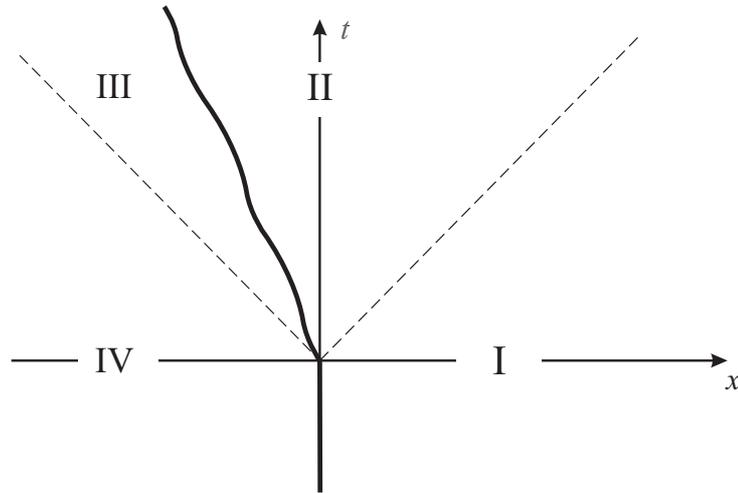


Figura 1.1: Regiões de propagação dos modos do campo à direita e à esquerda do movimento da fronteira.

Para as regiões I e II mostradas na Fig. 1.1:

$$r(v) = v \quad (1.5)$$

e

$$2\tau_u - u = f^{-1}(u) \equiv p(u), \quad (1.6)$$

onde  $\tau_u$  pode ser obtido de

$$\tau_u - z(\tau_u) = u; \quad (1.7)$$

Para as regiões III and IV:

$$p(u) = u \quad (1.8)$$

e

$$2\tau_v - v = g^{-1}(u) \equiv r(v), \quad (1.9)$$

onde

$$\tau_v + z(\tau_v) = v. \quad (1.10)$$

O campo nas regiões I e IV não é afetado pelo movimento da fronteira [3], de modo que as funções  $p$  e  $r$  são igualmente escolhidas para serem as funções identidade nestas regiões estáticas.

## 1.2 Cavidade

Vamos começar considerando o campo satisfazendo a equação de Klein-Gordon, ou simplesmente equação da onda, e obedecendo às condições impostas sobre a fronteira estática em  $x = 0$ , e também sobre a fronteira em movimento localizada em  $x = L(t)$ , em que  $x = L(t)$  é uma lei preescrita para o movimento da fronteira em que  $L(t < 0) = L_0$ , com  $L_0$  sendo o comprimento da cavidade na situação estática. De acordo com a Ref. [29], consideramos quatro tipos de condições de contorno. A condição Dirichlet-Neumann (DN) impõe a condição Dirichlet sobre a placa estática, enquanto que a derivada espacial do campo tomada no referencial de Lorentz instantaneamente co-móvel a fronteira é nula, condição de Neumann, na posição da fronteira em movimento. Consideramos, também, as condições de contorno de Dirichlet-Dirichlet (DD), Neumann-Neumann (NN) e Neumann-Dirichlet (ND). Uma solução geral para a equação da onda pode ser escrita como [29]:

$$\hat{\psi}(t, x) = \lambda(\hat{A} + \hat{B}\psi^{(0)}) + \sum_{n=1-2\beta}^{\infty} [\hat{a}_n\psi_n(t, x) + H.c.], \quad (1.11)$$

em que os modos do campo  $\psi_n(t, x)$  são dados por

$$\psi_n(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4(n+\beta)\pi}} \left[ \gamma e^{-i(n+\beta)\pi R(v)} + \gamma^* e^{-i(n+\beta)\pi R(u)} \right],$$

com  $\psi^{(0)} = [R(v) + R(u)]/2$  (ver Ref. [32]),  $u = t - x$ ,  $v = t + x$ , e  $R$  satisfazendo a equação funcional  $R[t+L(t)] - R[t-L(t)] = 2$ , que é a equação de Moore. Os operadores  $\hat{A}$  e  $\hat{B}$  obedecem as relações de comutação  $[\hat{A}, \hat{B}] = i$ ,  $[\hat{A}, \hat{a}_n] = [\hat{B}, \hat{a}_n] = 0$ . A solução NN é reobtida para  $\lambda = \gamma = 1$  e  $\beta = 0$ . Os outros três casos são reobtidos se  $\lambda = 0$  e:  $\beta = 0$  e  $\gamma = i$  para o caso DD;  $\beta = 1/2$  e  $\gamma = i$  para o caso DN;  $\beta = 1/2$  e  $\gamma = 1$  para o caso ND.

# Capítulo 2

## Aplicação ao modelo de Walker e Davies

Nesta seção aplicaremos as fórmulas exatas do campo, obtidas via mapeamento conforme, ao modelo proposto por Walker e Davies [8]. Estudando o comportamento da força que atua sobre a fronteira móvel, revisitaremos o caso de vácuo, no problema da cavidade unidimensional com uma fronteira móvel, estendendo os resultados destes autores para os estados iniciais de banho térmico e coerente.

### 2.1 Uma fronteira: vácuo

Iniciamos esta seção fazendo um apanhado geral dos resultados obtidos por Walker e Davies [8]. Os referidos autores propuseram a seguinte lei de movimento para a fronteira:

$$t = -z \pm A \left( e^{-2z/B} - 1 \right)^{1/2}, \quad (2.1)$$

em que  $A$  e  $B$  são constantes, com  $A > B$  para que  $|\dot{z}| < 1$ . Trata-se de um movimento suave e assintoticamente estático (ver Fig. 2.1) para  $t \rightarrow \pm\infty$ . A velocidade da fronteira pode ser relativística (ver Fig. 2.2) para os parâmetros  $A = 2$  e  $B = 1$ .

Para pontos sobre a fronteira, temos que a trajetória é dada por

$$\tau_u = -z(\tau_u) \pm A \left( e^{-2z(\tau_u)/B} - 1 \right)^{1/2} \quad (2.2)$$

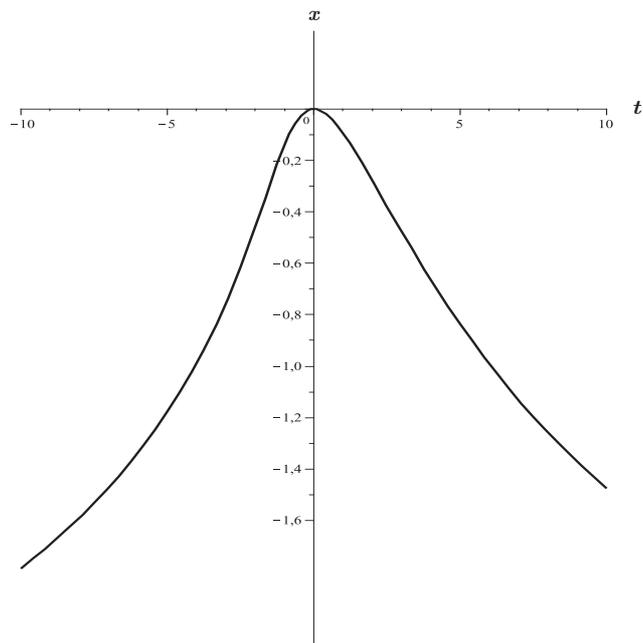


Figura 2.1: O movimento suave e assintoticamente estático proposto por Walker e Davies, com  $A=2$  e  $B=1$ .

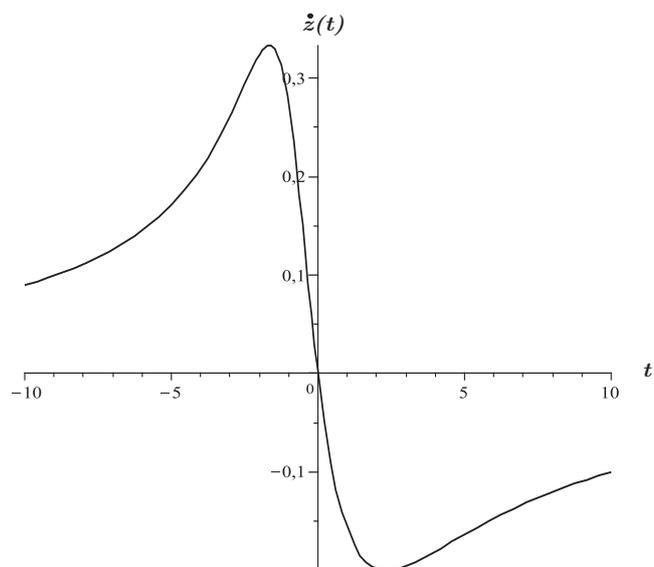


Figura 2.2: A velocidade relativística da fronteira para os parâmetros  $A = 2$  e  $B = 1$ .

ou simplesmente

$$\tau_u + z(\tau_u) = \pm A \left( e^{-2z(\tau_u)/B} - 1 \right)^{1/2}.$$

Sabendo que  $p(u) = 2z(\tau_u) + u$ , teremos:

$$p(u) = \pm A \left( e^{-2z(\tau_u)/B} - 1 \right)^{1/2}. \quad (2.3)$$

Naturalmente, o deslocamento da fronteira (ver Fig. 2.1) em termos de  $u$  e  $p(u)$  será:

$$z(\tau_u) = -\frac{B}{2} \ln \left( p^2(u) / A^2 + 1 \right), \quad (2.4)$$

com:

$$u = B \ln \left( p^2(u) / A^2 + 1 \right) + p(u). \quad (2.5)$$

Para pontos sobre a fronteira, a definição  $u = \tau_u - z(\tau_u)$ , nos permite escrever:  $p(u) = \tau_u + z(\tau_u)$ . Desta forma, a velocidade da fronteira fica definida como:

$$\dot{z} = \frac{dz(\tau_u)}{d\tau_u} = \frac{dz(\tau_u)}{dp(u)} \frac{dp(u)}{d\tau_u}. \quad (2.6)$$

Usando a Eq. (2.4), teremos:

$$\dot{z} = - \left( \frac{Bp(u)}{p(u)^2 + A^2} \right) (1 + \dot{z}), \quad (2.7)$$

que resulta em:

$$\dot{z} = - \frac{Bp(u)}{Bp(u) + p^2(u) + A^2}. \quad (2.8)$$

Sendo a Eq. (2.8) o que representa a velocidade da fronteira (ver Fig. 2.2) em termos da função  $p(u)$ , como prediz o modelo de Walker e Davies.

Para a aceleração, usamos raciocínio análogo, obtendo:

$$\ddot{z} = \frac{B \left( p(u)^4 - A^4 \right)}{\left( Bp(u) + p(u)^2 + A^2 \right)^3}. \quad (2.9)$$

como sendo a expressão para aceleração da fronteira em termos da função  $p(u)$ .

No apêndice B, mostramos que:  $p'(u) = 1 + z'(\tau_u) / [1 - z'(\tau_u)]$ . Então, com ajuda da Eq. (2.8), teremos que a derivada primeira de  $p(u)$  no modelo de Walker e Davies será dada por:

$$p'(u) = \frac{p^2(u) + A^2}{2Bp(u) + p^2(u) + A^2}. \quad (2.10)$$

De maneira equivalente encontramos a segunda e terceira derivadas da função  $p(u)$ :

$$p''(u) = \frac{2B \left( p^4(u) - A^4 \right)}{\left( 2Bp(u) + p^2(u) + A^2 \right)^3}, \quad (2.11)$$

$$p'''(u) = -\frac{4B(p^5(u) - Bp^4(u) - 2A^2p^3(u) - 3A^4p(u) - 3A^4B)(p^2(u) - A^2)}{(2Bp(u) + p^2(u) + A^2)^5}. \quad (2.12)$$

Por fim, substituindo as derivadas de  $p(u)$  na expressão renormalizada da componente do tensor que define a média no vácuo para a densidade energia:

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}_{00}(u) \rangle^{(+)} = & (B/6\pi) \left[ p^5(u) + \frac{1}{2}Bp^4(u) - 2A^2p^3(u) - 3A^2Bp^2(u) + \right. \\ & \left. - 3A^4p(u) - \frac{3}{2}A^4B \right] / (2Bp(u) + p^2(u) + A^2)^4, \end{aligned} \quad (2.13)$$

que fornece a densidade local de energia para uma única fronteira em movimento com média no estado inicial de vácuo e sob condições de Dirichlet [8]. A Fig. 2.3 mostra o comportamento gráfico da densidade de energia.

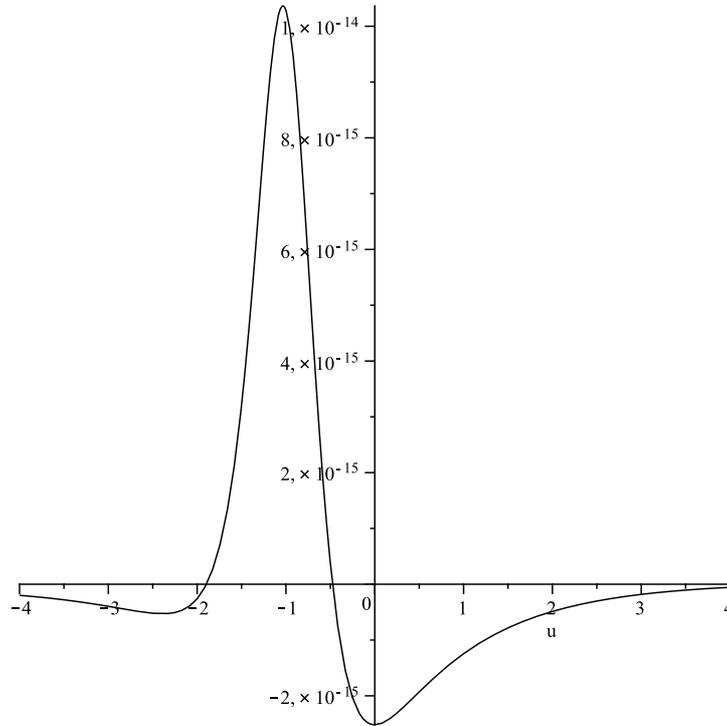


Figura 2.3: Densidade local de energia à direita do movimento da fronteira.

Contrariamente à Fulling e Davies [3], temos aqui uma expressão para a densidade local de energia, livre de funções delta que surgem por conta da aceleração abrupta a qual é submetida a fronteira. Essa é uma das mais relevantes contribuições que o modelo de Walker-Davies proporcionaram ao estudo do problema da radiação emitida por fronteiras móveis.

## 2.2 Uma fronteira: térmico e coerente

Nesta seção, estendemos os resultados apresentados por Walker e Davies levando em consideração o banho térmico e estados coerentes como estados iniciais do campo. Primeiramente, analisamos o problema sob o ponto de vista da densidade local de energia à direita da fronteira em movimento e em seguida, examinaremos a força de radiação que atua sobre a mesma.

Levando em conta os resultados do apêndice B, temos que a densidade local de energia à direita da fronteira, tomando somente a contribuição da parte do banho térmico é dada por:

$$\langle \hat{T}_{00}(u) \rangle_{(T)}^{(+)} = \frac{\pi T^2}{12} [1 + (p'(u))^2]. \quad (2.14)$$

Usando (2.10), teremos a contribuição para a densidade local, da parte de banho térmico, no modelo de Walker e Davies:

$$\langle \hat{T}_{00}(u) \rangle_{(T)}^{(+)} = \frac{\pi T^2}{12} \left[ 1 + \left( \frac{p(u)^2 + A^2}{2Bp(u) + p(u)^2 + A^2} \right)^2 \right]. \quad (2.15)$$

Finalmente, a expressão final para a densidade sendo uma soma entre as partes de vácuo e do banho será, neste modelo, representada por:

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}_{00}(u) \rangle^{(+)} &= \frac{B}{6\pi (2Bp(u) + p(u)^2 + A^2)^4} \left[ p(u)^5 + \frac{1}{2}Bp(u)^4 - 2A^2p(u)^3 + \right. \\ &\quad \left. - 3A^2Bp(u)^2 - 3A^4p(u) - \frac{3}{2}A^4B \right] + \\ &\quad + \frac{\pi T^2}{12} \left[ 1 + \left[ \frac{p(u)^2 + A^2}{2Bp(u) + p(u)^2 + A^2} \right]^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Analisando a Eq. (2.15), vemos que ela apresenta duas contribuições. A primeira parcela corresponde a metade da densidade inicial do banho:  $\pi T^2/12$ . Enquanto que a segunda parcela carrega a outra metade acoplada com o termo de radiação que será responsável ora pelo efeito de amplificação da energia das partículas que existem no banho, ora pela energia das partículas criadas por conta do movimento da fronteira no banho térmico.

A Fig. 2.4 analisa o comportamento gráfico da Eq. (2.16), nos indicando que aparentemente os efeitos térmicos eliminam os mínimos locais que surgem na densidade de energia com média no estado de vácuo.

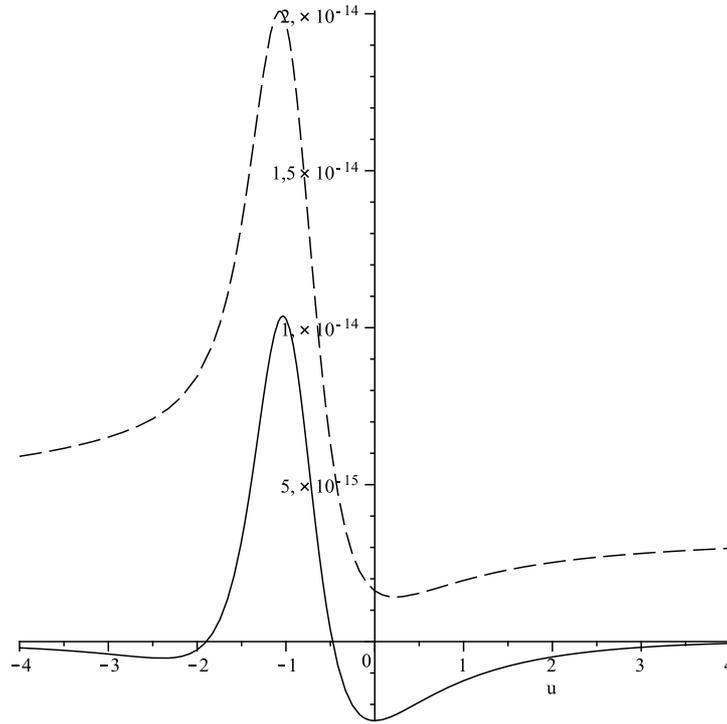


Figura 2.4: Comportamento gráfico da média da densidade de energia no estado térmico quando reduzida a diferença entre os parâmetros A e B. Consideramos  $T = 286 \times 10^{-6} K$ .

Vamos examinar agora a força de radiação que atua sobre a fronteira em movimento quando um banho térmico à temperatura  $T$  é considerado como estado inicial do campo. Para este caso, temos:  $\langle \hat{a}_{\omega}^{\dagger} \hat{a}_{\omega} \rangle = \bar{n}(\omega) \delta(\omega - \omega')$  em que  $\bar{n}(\omega) = 1/(e^{\hbar\omega/T} - 1)$ , com a constante de Boltzmann igual a unidade, tal como definido no apêndice B. Daqui em diante as médias  $\langle \dots \rangle$  tomadas sobre um estado inicial do campo, que assumimos aqui, por simplicidade, como sendo o mesmo para ambos os lados da fronteira. Partindo do valor esperado do operador densidade de energia  $\mathcal{T} = \langle \hat{T}_{00}(t, x) \rangle$ , podemos escrever a força total  $F(t)$  que atua sobre a fronteira móvel como (visto que  $T_{00} = T_{11}$  neste modelo):

$$F(t) = \mathcal{T}[t, z(t)]^{(-)} - \mathcal{T}[t, z(t)]^{(+)}, \quad (2.17)$$

em que o índice superior “+” indica a força que atua no lado direita da fronteira, enquanto que “-” indica a força atuando no lado esquerdo. Assim, podemos escrever a força total por:

$$F = F_{vac} + F^{(T)}, \quad (2.18)$$

em que  $F_{vac}$  representa a contribuição do vácuo para a força total, ver apêndice B. Para a

contribuição térmica,  $F^{(T)}$ , nós tomamos a fórmula exata [15]:

$$F^{(T)} = -\sigma_T \left[ \dot{z} \frac{(1 + \dot{z}^2)}{(1 - \dot{z}^2)^2} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} F_{(n)}^{(T)}, \quad (2.19)$$

em que

$$F_{(n)}^{(T)} = -\sigma_T (2n + 1) \dot{z}^{2n+1} \quad (2.20)$$

e  $\sigma^{(T)} = 2\pi T^2/3$  o coeficiente de viscosidade. Da Eq. (2.8) e (2.19), temos:

$$F^{(T)} = \sigma^{(T)} \left\{ \frac{Bp(u) (Bp(u) + p(u)^2 + A^2)}{(2Bp(u)^3 + 2Bp(u) A^2 + p(u)^4 + 2p(u)^2 A^2 + A^4)^2} \times (2B^2p(u)^2 + 2Bp(u)^3 + 2Bp(u) A^2 + p(u)^4 + 2p(u)^2 A^2 + A^4) \right\}. \quad (2.21)$$

Na Eq. (2.19), truncando a série em  $n = N$  ( $N = 0, 1, 2, \dots$ ), obtemos a fórmula aproximada  $\tilde{F}^{(T)}$ :

$$\tilde{F}^{(T)} = \sum_{n=0}^N F_{(n)}^{(T)}. \quad (2.22)$$

Para  $n = 0$ , obtemos:

$$F^{(T)} \approx F_{(0)}^{(T)} = -\sigma^{(T)} \dot{z} = \sigma^{(T)} \frac{Bp(u)}{Bp(u) + p(u)^2 + A^2}. \quad (2.23)$$

Esta fórmula mostra que a força é proporcional a velocidade da fronteira (a força térmica aproximada dependente da velocidade foi obtida por Jaekel e Reynaud [33]). Na Fig. 2.5, mostramos a força exata (linha sólida) e a aproximada (linha tracejada). Vemos que para altas velocidades (ver, também, Fig. 2.2) uma grande discrepância ocorre para os valores exatos e aproximados. Mas para  $t = 10$ , a velocidade da fronteira encontra-se em torno de 0.1 da velocidade da luz e, próximo a esta velocidade relativística, ambas as fórmulas, exata e aproximada, estão em boa concordância nesta região. É também notável que a força térmica é a mesma para as condições de Dirichlet ou Neumann [15].

Agora, vamos investigar o estado coerente como estado inicial do campo. O estado estado coerente de amplitude  $\alpha$  é definido como auto-estado do operador de aniquilação:  $\hat{a}_\omega |\alpha\rangle = \alpha \delta(\omega - \omega_0) |\alpha\rangle$ , em que  $\alpha = |\alpha| \exp(i\theta)$  e  $\omega_0$  é a frequência do modo excitado. Para este caso, podemos explicitar a força total na seguinte maneira:

$$F = F_{vac} + F^{(\alpha)}, \quad (2.24)$$

em que:

$$F^{(\alpha)} = F_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}^{(\alpha)} + F_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}^{(\alpha)}, \quad (2.25)$$

$$F_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}^{(\alpha)} = -\frac{4}{\pi} \omega_0 |\alpha|^2 \dot{z} (1 + \dot{z}^2) / (1 - \dot{z}^2)^2, \quad (2.26)$$

$$F_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}^{(\alpha)} = \pm \frac{\omega_0}{4\pi} |\alpha|^2 e^{-2i(\omega_0 t - \theta)} \left\{ \left[ e^{2i\omega_0 z(t)} \left( \frac{1 - \dot{z}}{1 + \dot{z}} \right)^2 - e^{-2i\omega_0 z(t)} \right] - \left[ \left( \frac{1 + \dot{z}}{1 - \dot{z}} \right)^2 e^{-2i\omega_0 z(t)} - e^{2i\omega_0 z(t)} \right] \right\} + \text{c.c.}, \quad (2.27)$$

e o sinal “+” referindo-se à condição de contorno de Dirichlet e “-” para a de Neumann. Usando Eq. (2.2) e (2.4) nas Eqs. (2.26) e (2.27), obtemos as fórmulas específicas:

$$F_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}^{(\alpha)} = \sigma^{(\alpha)} \left\{ \frac{Bp(u) (Bp(u) + p(u)^2 + A^2)}{(2Bp(u)^3 + 2Bp(u)A^2 + p(u)^4 + 2p(u)^2A^2 + A^4)^2} \times (2B^2p(u)^2 + 2Bp(u)^3 + 2Bp(u)A^2 + p(u)^4 + 2p(u)^2A^2 + A^4) \right\}, \quad (2.28)$$

$$F_{\langle \hat{a} \hat{a} \rangle}^{(\alpha)} = \pm \frac{\sigma^{(\alpha)} e^{-2i(\omega_0 t - \theta)}}{16} \left\{ \frac{(p(u)^2 + A^2)^2 + (2Bp(u) + p(u)^2 + A^2)^2}{(p(u)^2 + A^2)^2} \left( \frac{p(u)^2 + A^2}{A^2} \right)^{-i\omega_0 B} - \frac{(p(u)^2 + A^2)^2 + (2Bp(u) + p(u)^2 + A^2)^2}{(2Bp(u) + p(u)^2 + A^2)^2} \left( \frac{p(u)^2 + A^2}{A^2} \right)^{i\omega_0 B} \right\} + \text{c.c.} \quad (2.29)$$

Em que,  $\sigma^{(\alpha)} = 4|\alpha|^2 \omega_0 / \pi$ . Da Eq. (2.28) vemos que a força  $F_{\langle \hat{a}^\dagger \hat{a} \rangle}^{(\alpha)}$  é a mesma para as condições de Dirichlet ou Neumann. Por outro lado, na Eq. (2.29) (e também na Eq. (2.30)), o sinal “+” refere-se a condição de Dirichlet e “-” para a condição de Neumann.

Se considerarmos simultaneamente velocidades não relativísticas e de baixa amplitude (tal como considerado pela Ref. [17]), a força  $F^{(\alpha)}$  pode ser aproximada como [15]:

$$F^{(\alpha)} \approx \tilde{F}^{(\alpha)} = -\frac{4\omega_0}{\pi} |\alpha|^2 \{ \dot{z}(t) \pm [\cos(2\omega_0 t - 2\theta) \dot{z}(t) - \sin(2\omega_0 t - 2\theta) \omega_0 z(t)] \}. \quad (2.30)$$

Usando Eq. (2.2) e (2.4) nas Eqs.(2.30), obtemos:

$$\tilde{F}^{(\alpha)} = \sigma^{(\alpha)} \left\{ \frac{Bp(u)}{Bp(u) + p(u)^2 + A^2} [1 \pm \cos(2(\omega_0 t - \theta))] \mp \frac{\omega_0 B}{2} \ln(p^2/A^2 + 1) \sin(2(\omega_0 t - \theta)) \right\}. \quad (2.31)$$

Na Fig. 2.6, mostramos que a força exata (linha sólida) e a aproximada (linha tracejada) para o caso coerente sob condições de contorno de Dirichlet. Novamente, vemos que para altas velocidades (ver também Fig. 2.2) uma grande discrepância ocorre para os valores exato e aproximado. Mas, aqui, a parte discrepante apresenta a força coerente aproximada maior que

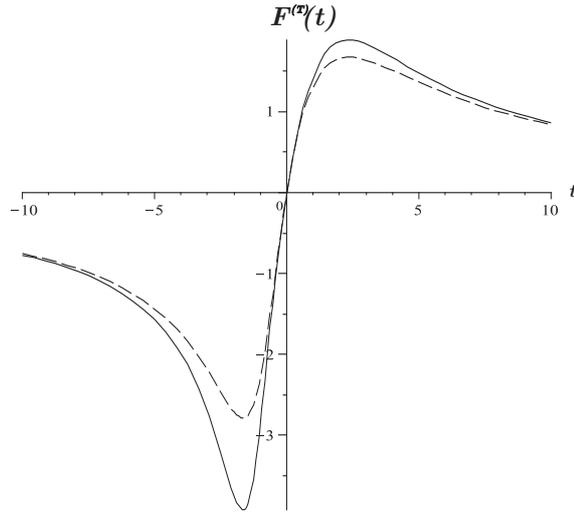


Figura 2.5: A força térmica exata  $F^{(T)}$  (linha sólida) força térmica aproximada  $F^{(T)} \approx F_{(0)}^{(T)}$  (linha tracejada), para  $T = 1$ .

a exata em valores absolutos. O comportamento inverso foi observado para o caso térmico. É razoável verificar que para a condição de fronteira de Neumann, a força coerente oscila de maneira diferente (ver Fig. 2.7).

Na Fig. 2.5 notamos que  $|F^{(T)}| \geq |F_{(0)}^{(T)}|$ . Na Eq. (2.19) podemos ver que  $F^{(T)}$  é dada em termos de uma série de potências ímpares de  $\dot{z}$ , em que cada termo desta série possui o mesmo sinal. Isto nos permite escrever:

$$|F^{(T)}| = \sum_{n=0}^{\infty} |F_{(n)}^{(T)}|. \quad (2.32)$$

Da equação acima, podemos concluir que:

$$|F^{(T)}| \geq |\tilde{F}^{(T)}|. \quad (2.33)$$

O resultado na Eq. (2.33) é válido para qualquer lei de movimento (não somente aquela em que consideramos nesta seção). Neste contexto, a desigualdade na Eq. (2.33) explica o comportamento gráfico das curvas na Fig. 2.5. Note que nas Figs. 2.2 e 2.5, a força  $F^{(T)}$  é sempre oposta ao movimento da fronteira, o que também pode ser concluído pelo uso da Eq. (2.19).

Na Fig. 2.6 observamos o comportamento inverso:  $|F^{(\alpha)}| \leq |\tilde{F}^{(\alpha)}|$ . De fato, a fórmula (2.30) é obtida após considerarmos pequenos valores para a velocidade e também baixas amplitudes. A última consideração origina uma dependência linear em  $z(t)$  na Eq. (2.30). Ou seja, quando  $t \rightarrow \pm\infty$ ,  $|z| \rightarrow \infty$  e a amplitude  $\tilde{F}^{(\alpha)}$  cresce.

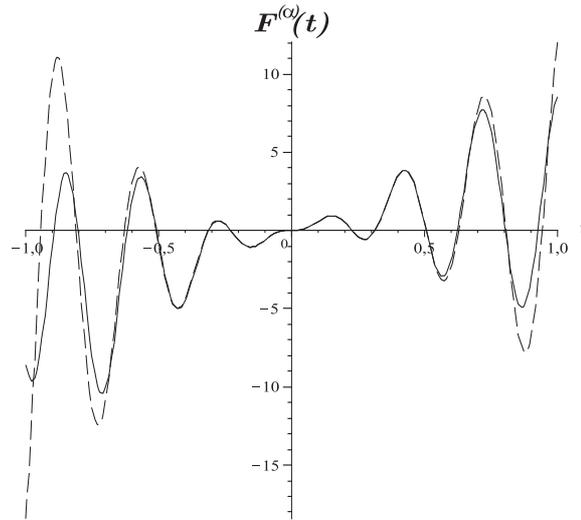


Figura 2.6: A força coerente exata  $F^{(\alpha)}$  (linha sólida) e a força coerente aproximada  $F^{(\alpha)} \approx \tilde{F}^{(\alpha)}$  (linha tracejada), para o caso Dirichlet, com  $\alpha = 1$ ,  $\theta = \pi/2$  e  $\omega_0 = 10$ .

## 2.3 Caverna: vácuo, térmico e coerente

Vamos iniciar investigando a seguinte trajetória particular  $x = L(t)$ , baseada naquela proposta por Walker e Davies [8]:

$$t = L_0 - L + A \left( e^{-2(L_0 - L)/B} - 1 \right)^{1/2}, \quad (2.34)$$

válida para  $t \geq 0$ , em que  $A$  e  $B$  são constantes positivas, com  $A > B$  (para que  $|\dot{L}| < 1$ ). Para  $A = 2$  e  $B = 1$  (valores escolhidos, também, na Ref. [8]) a trajetória é mostrada na Fig. 2.8. Esta trajetória possui algumas propriedades interessantes: possui uma descontinuidade na aceleração da fronteira quando  $t = 0$  ( $L = 1$ ) (tal como mostrado na Fig. 2.8(b)), mas é suave e assintoticamente estática para  $t \rightarrow \infty$  (ver Fig. 2.8 (a)). Com esta característica, os estados “in” e “out” podem ser bem definidos e a média para o número de partículas criadas pode ser obtida. Acrescentamos ainda que a descontinuidade na aceleração da fronteira se dá para um único ponto, em oposição à outras leis de movimento encontradas na literatura, nas quais a descontinuidade na aceleração ocorre em dois pontos: no começo e ao final do intervalo de tempo em que a fronteira é acelerada. De acordo com Walker e Davies, trajetórias assintoticamente estáticas trazem a vantagem de evitar certas patologias relacionadas à radiação emitida por fronteiras em movimento com aceleração abrupta [8].

Tomando como exemplo de estado inicial do campo aquele no qual a matriz densidade é

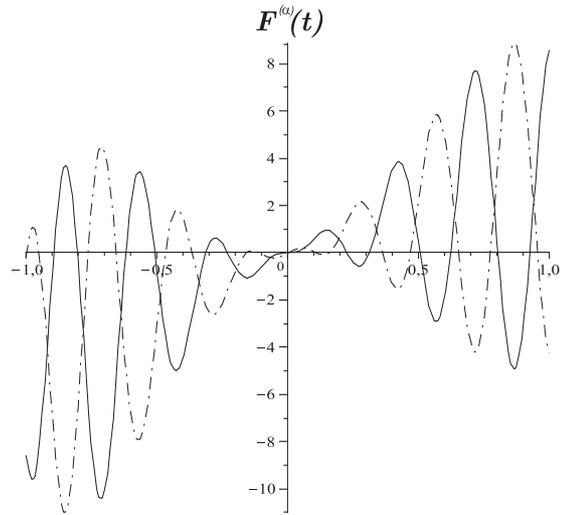


Figura 2.7: A força coerente exata para as condições de contorno de Dirichlet (linha sólida) e Neumann (linha ponto-tracejada), com  $\alpha = 1$ ,  $\theta = \pi/2$  e  $\omega_0 = 10$ .

diagonal na base de Fock, consideremos os estados de vácuo e térmico. Pode ser mostrado que o valor esperado do operador densidade de energia  $\mathcal{T} = \langle \hat{T}_{00}(t, x) \rangle$  pode ser explicitado como:  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{vac}} + \mathcal{T}_{\text{non-vac}}$ , em que  $\mathcal{T}_{\text{vac}}$  é a contribuição para a densidade de energia devido a parte de vácuo e  $\mathcal{T}_{\text{non-vac}}$  é a contribuição da parte não-vácuo devido as partículas reais no estado inicial do campo. Daqui em diante considere as médias  $\langle \dots \rangle$  tomadas sobre o estado inicial do campo que são aniquilados pelo operador  $\hat{B}$ . Vamos iniciar considerando o vácuo como estado inicial do campo ( $\mathcal{T}_{\text{non-vac}} = 0$ ). A contribuição do vácuo para a densidade de energia dentro de uma caverna oscilante pode ser escrita como [1, 3, 29]  $\mathcal{T}_{\text{vac}} = -f(v) - f(u)$ , em que:

$$f = \frac{|\gamma|^2}{24\pi} \left\{ \frac{R'''}{R'} - \frac{3}{2} \left( \frac{R''}{R'} \right)^2 + \pi^2 \left[ \frac{1}{2} - 3(\beta - \beta^2) \right] R'^2 \right\}. \quad (2.35)$$

Para a situação estática, a função  $R$  é dada por  $R(z) = z/L_0$  e sua primeira derivada é uma constante  $R'(z) = 1/L_0$ . A partir desta equação, obtemos (ver [1, 3, 35] a conhecida força estática de Casimir  $\mathcal{F}_{\text{vac}}^{(s)}$  atuando na fronteira da direita:

$$\mathcal{F}_{\text{vac}}^{(s) \text{ DD}} = \mathcal{F}_{\text{vac}}^{(s) \text{ NN}} = -\pi/(24L_0^2), \quad \mathcal{F}_{\text{vac}}^{(s) \text{ DN}} = \mathcal{F}_{\text{vac}}^{(s) \text{ ND}} = \pi/(48L_0^2), \quad (2.36)$$

em que os índices super-escritos DD, NN, DN e ND representam os tipos de condições de contorno consideradas em nossos cálculos.

Na Fig. 2.9(a) plotamos, para ambos os casos DD e NN tendo o vácuo como estado inicial do campo, a evolução da força real  $\mathcal{F}_{\text{vac}} = \mathcal{T}_{\text{vac}}[t, L(t)]$  atuando na fronteira móvel (linha sólida)

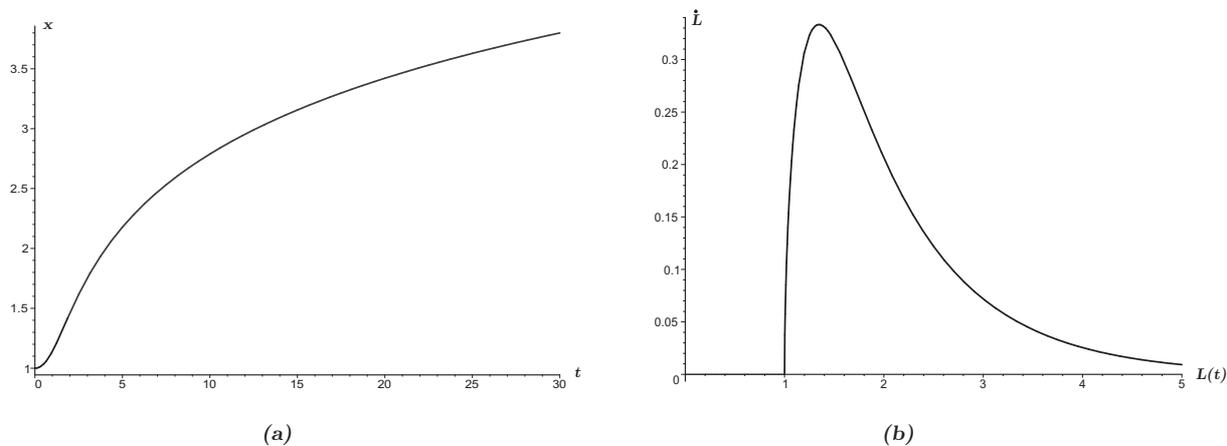


Figura 2.8: **(a)** Trajetória da fronteira móvel definida pela Eq. (2.34); **(b)** Velocidade da fronteira móvel (eixo vertical) como posição da fronteira.

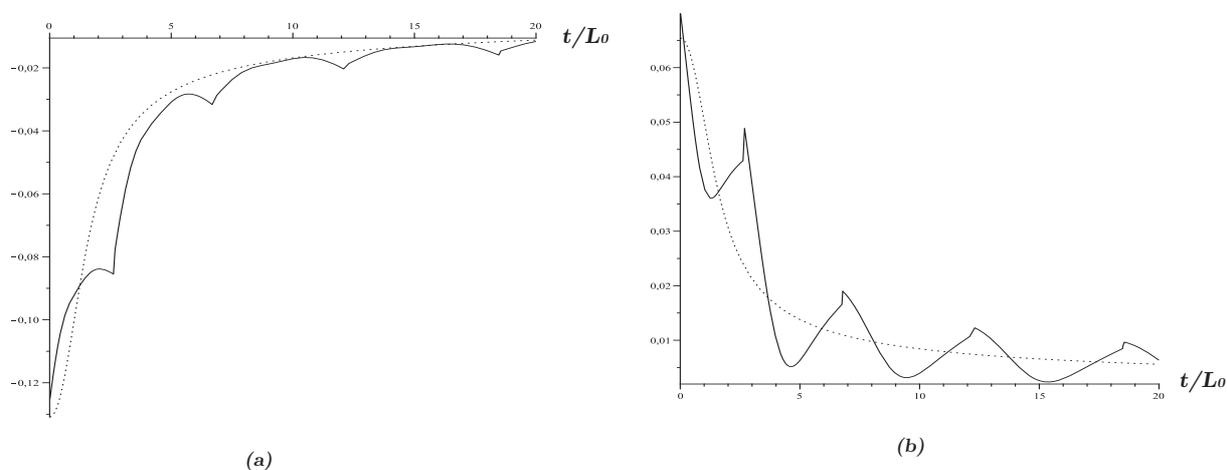


Figura 2.9: **(a)** A força quântica  $\mathcal{F}_{\text{vac}}$  atuando sobre a fronteira móvel (linha sólida) e a força estática de Casimir atrativa  $\mathcal{F}_{\text{vac}}^{(s)}$  (linha pontilhada) para os casos DD ou NN; **(b)** A força quântica  $\mathcal{F}_{\text{vac}}$  atuando sobre a fronteira móvel (linha sólida) para os casos DN ou ND, e a força estática de Casimir repulsiva  $\mathcal{F}_{\text{vac}}^{(s)}$  (linha pontilhada). Em ambos os casos o vácuo foi considerado como estado inicial do campo. As discontinuidades nas derivadas ocorrem para  $t_1 \approx 2.67$ ,  $t_2 \approx 6.78$ ,  $t_3 \approx 12.20$ ,  $t_4 \approx 18.56$ .

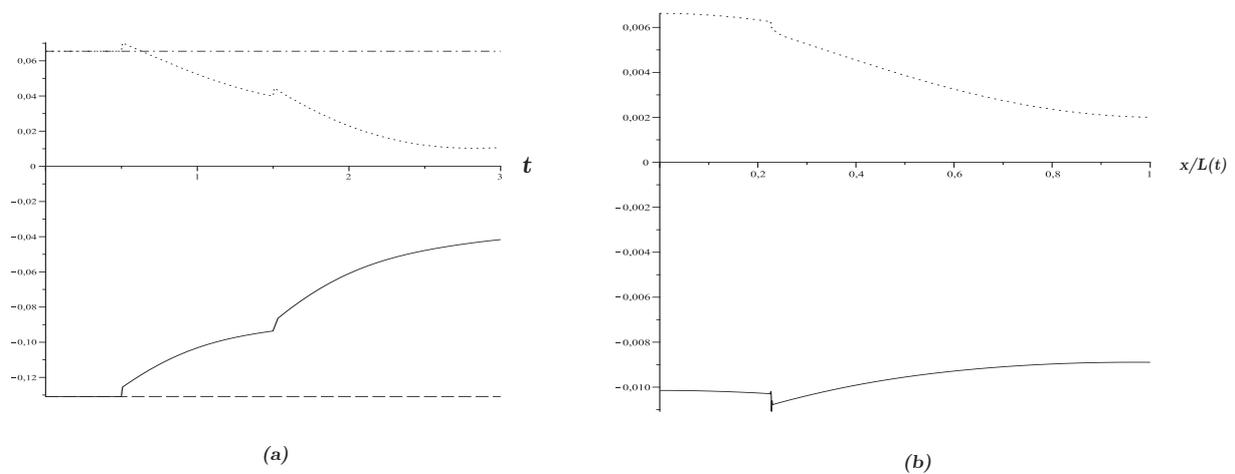


Figura 2.10: **(a)** A densidade de energia para os casos DD e NN (linha sólida) e, também, para os casos DN e ND (linha pontilhada), no ponto  $x = L_0/2$ , como função do tempo. A linha tracejada e a tracejada-pontilhada representam, respectivamente, as densidades estáticas de Casimir para os casos DD-NN e ND-DN. **(b)** A densidade de energia para os casos DD ou NN (linha sólida) e também para os casos DN ou ND (linha pontilhada), como função da posição normalizada  $x/L(t)$  na caverna, para um tempo  $t = 30L_0$ . Em ambos os casos o vácuo foi considerado como estado inicial do campo.

para cada posição  $L$ , enquanto que a linha pontilhada o valor da força de Casimir estática  $-\pi/[24L(t)^2]$  que poderia agir sobre a fronteira se estivesse parada na posição  $x = L$ . De maneira análoga, na Fig. 2.9(b) plotamos, para os casos DN e ND, a evolução temporal da força agindo sobre a fronteira móvel (linha sólida), enquanto que a linha pontilhada mostra a força de Casimir estática repulsiva  $\pi/[48L(t)^2]$ . Vemos na Fig. 2.9 que, para as condições DD e NN, e também para DN e ND, a força de radiação atuando sobre as fronteiras em movimento são as mesmas:

$$\mathcal{F}_{\text{vac}}^{\text{DD}} = \mathcal{F}_{\text{vac}}^{\text{NN}}, \quad \mathcal{F}_{\text{vac}}^{\text{DN}} = \mathcal{F}_{\text{vac}}^{\text{ND}}. \quad (2.37)$$

A Fig. 2.9 mostra também que a força dinâmica se aproxima da força estática de Casimir no limite assintótico  $t \rightarrow \infty$ .

Na Fig. 2.9 podemos ver descontinuidades nas derivadas. Estas descontinuidades sempre ocorrem quando a frente de onda na densidade de energia encontra a fronteira da direita. Para  $t = 0$  a fronteira da direita começa a se mover, interagindo com o campo no estado de vácuo e gerando uma onda na densidade de energia, propagando-se para a esquerda na cavidade. A onda será refletida pela fronteira estática da esquerda e se propaga para direita até encontrar a fronteira da direita no tempo  $t = t_1 \approx 2.67$ . Este valor pode ser obtido resolvendo a equação  $t_1 - L_0 = L(t_1)$ . A partir deste instante, a fronteira da direita irá interagir novamente com esta onda refletida, que produzirá a mencionada descontinuidade. De uma forma geral, a onda na densidade de energia, após várias reflexões, encontrará a fronteira da direita nos instantes  $t = t_i$ , em que  $i = 1, 2, \dots$ , que pode ser obtido por resolução da equação:

$$t_i - t_{i-1} - L(t_{i-1}) = L(t_i), \quad (2.38)$$

com  $t_0 = 0$ .

Na Fig. 2.10(a) mostramos a densidade de energia no ponto  $x = L_0/2$ , como função do tempo, para os casos DD ou NN (linha sólida), e também para os casos DN ou ND (linha pontilhada). De  $t = 0$  para  $t = 1/2$  observamos um valor constante, correspondente a densidade de energia de Casimir estática. Em  $t = 1/2$  a onda na densidade de energia chega ao ponto  $x = L_0/2$ . O salto observado neste ponto está relacionado ao movimento abrupto iniciado pela fronteira da direita, no sentido de que existe uma descontinuidade da aceleração da fronteira como mostrado na Fig. 2.8(b). Após reflexão pela fronteira da esquerda, este ponto de descontinuidade se propaga e pode novamente ser observado para  $t = 1.5$ , e assim por diante, após sucessivas reflexões. A densidade de energia no ponto  $x = L_0/2$  vai a zero, desde que, para nossa

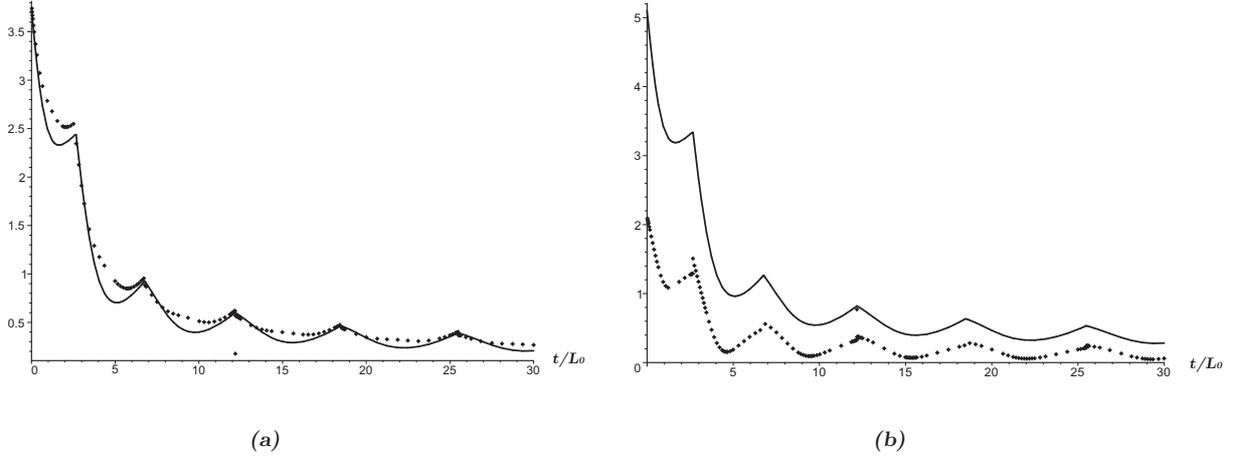


Figura 2.11: **(a)** A força quântica  $\mathcal{F}_T$  (linha sólida) e  $-30 \times \mathcal{F}_{\text{vac}}$  (linha pontilhada) para os casos DD e NN, como função do tempo; **(b)** A força quântica  $\mathcal{F}_T$  (linha sólida) e  $30 \times \mathcal{F}_{\text{vac}}$  (linha pontilhada) para os casos DN e ND, como função do tempo. Em ambos os casos, o banho térmico com temperatura  $T = 1$  foi considerado como estado inicial do campo.

lei de movimento, o comprimento da caverna vá ao infinito e o movimento seja assintoticamente estático para  $t \rightarrow \infty$ . Na Fig. 2.10(b) mostramos a energia em todos os pontos da caverna para  $t = 30L_0$ .

Agora, vamos considerar o estado térmico como estado inicial do campo. Neste caso, temos  $\langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'} \rangle = \delta_{nn'} \bar{n}(n, \beta)$  e  $\langle \hat{a}_n \hat{a}_{n'} \rangle = \langle \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_{n'}^\dagger \rangle = 0$ , em  $\bar{n}(n, \beta) = [\exp(\kappa(n + \beta)) - 1]^{-1}$  e  $\kappa = 1/T$ . Na Fig. 2.11 comparamos o comportamento da força  $\mathcal{F}_T = \mathcal{T}_{\text{non-vac}}[t, L(t)]$  para  $T = 1$  e  $\mathcal{F}_{\text{vac}}$ , obtendo que a diferença entre  $\mathcal{F}_T^{\text{DD}}$  e  $\mathcal{F}_T^{\text{DN}}$  é um fator de escala. Vemos, também, que:

$$\mathcal{F}_T^{\text{DD}} = \mathcal{F}_T^{\text{NN}}, \quad \mathcal{F}_T^{\text{DN}} = \mathcal{F}_T^{\text{ND}}. \quad (2.39)$$

Note que, as descontinuidades das derivadas visualizadas na Fig. 2.11 ocorrem para os mesmos valores  $t_i$  dados na Eq. 2.38.

O estado coerente, um exemplo de estado não-diagonal ( $\langle \hat{a}_n \hat{a}_{n'} \rangle \neq 0$ ), pode ser definido como um auto-estado do operador de aniquilação:  $\hat{a}_n |\alpha\rangle = \alpha \delta_{nn_0} |\alpha\rangle$ , em que  $\alpha = |\alpha| e^{i\theta}$  e  $n_0$  está relacionado a frequência do modo excitado [36]. Na Fig. 2.12 visualizamos o comportamento da força  $\mathcal{F}_\alpha = \mathcal{T}_{\text{non-vac}}[t, L(t)]$  para  $\alpha = 1$  e  $\theta = 0$ . Note que, para o estado coerente, a simetria entre os casos DD e NN, e também para os casos DN e ND, é quebrada, no sentido de que:

$$\mathcal{F}_\alpha^{\text{DD}} \neq \mathcal{F}_\alpha^{\text{NN}}, \quad \mathcal{F}_\alpha^{\text{DN}} \neq \mathcal{F}_\alpha^{\text{ND}}. \quad (2.40)$$

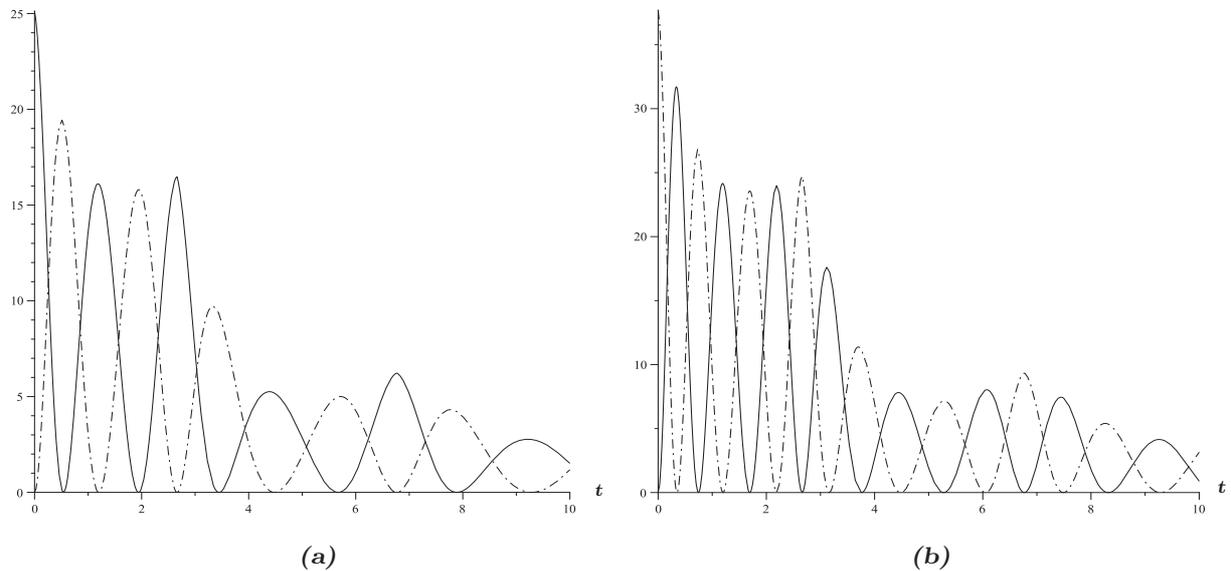


Figura 2.12: A força coerente  $\mathcal{F}_\alpha$  atuando sobre a fronteira em movimento (vertical axis), como função do tempo, para um estado coerente com  $|\alpha| = 1$  and  $\theta = 0$ . **(a)** O caso DD (linha sólida) e o caso NN (linha tracejada e pontilhada); **(b)** O caso DN (linha sólida) e o caso ND (linha tracejada-pontilhada).

Se bem que no caso estático ( $t < 0$ ), para certos valores de  $\alpha$  e  $\theta$ , a densidade de energia é dependente do espaço-tempo, e também pode ser diferente se considerarmos os casos NN, DD, ND ou DN [29]. O inverso ocorre para os estados iniciais vácuo e térmico nos quais a densidade de energia é uma constante, apresentando o mesmo valor para os casos NN e DD, e também para os casos ND e DN [29]. Estas diferenças entre os estados coerente (não-diagonal), térmico e vácuo (diagonal) na situação estática propagam-se ao longo da situação dinâmica ( $t > 0$ ), como foi visto nas Eqs. (2.37), (2.39) e (2.40).

# Capítulo 3

## Solução do campo sob condição de Robin

Estudamos o comportamento local do campo à direita do movimento de uma fronteira sob condições de contorno de Robin. Primeiramente, investigamos uma tentativa de solução via transformação conforme. Em seguida, apresentamos uma proposta de solução sem uso deste tipo de transformação.

### 3.1 Tentativa de solução via transformação conforme

Como sabemos, explorando a invariância conforme da equação de Klein-Gordon, podemos obter o comportamento dos modos dinâmicos do campo que se encontra sob uma dada condição de contorno. Além de preservar a métrica e equação da onda, o mapeamento conforme modifica as condições de contorno, tornando-as mais simples, uma vez que o problema dinâmico é mapeado no problema estático.

Neste sentido, vamos em busca da solução dos modos do campo via mapeamento conforme das coordenadas da fronteira em  $(t, z(t))$  para a uma fronteira estática em  $(w, 0)$ . Vamos tomar como base os resultados obtidos na Ref. [28].

Seja a condição de Dirichlet nas coordenadas  $(w, s)$ :

$$\phi(t, z(t)) = 0 \rightarrow \Phi(w, s)|_{s=0} = 0. \quad (3.1)$$

As condições de Neumann,  $(\dot{z}(t)\partial_t + \partial_x)\phi(t, x)|_{x=z(t)} = 0$ , após mapeamento conforme, tornam-se:

$$\left\{ [1 - \dot{z}(w)] \frac{\partial f^{-1}(u)}{\partial u} \frac{\partial}{\partial s} \right\} \Phi(w, s) \Big|_{s=0} = 0. \quad (3.2)$$

Se levarmos em consideração somente as condições de Neumann, teremos ainda  $\partial_s \Phi(w, s)|_{s=0}$ .

Em outras palavras, ao fazermos uso do mapeamento conforme, esperamos que as condições de contorno dinâmicas em  $(t, x)$  recaiam sobre condições estáticas em  $(w, s)$ , cuja situação nos permite obter os modos do campo de forma mais simples.

As condições de Robin, definidas em termos de um observador em repouso no seu laboratório de medidas,

$$\phi(t, x)|_{x=q(t)} = \beta \left[ \dot{q}(t) \partial_t \phi(t, x)|_{x=q(t)} + \partial_x \phi(t, x)|_{x=q(t)} \right], \quad (3.3)$$

sendo nada mais do que uma combinação entre as condições de Dirichlet e Neumann, podem ser escritas, de acordo com as Eqs. (3.1) e (3.2), nas coordenadas  $(w, s)$  como:

$$\Phi(w, s)|_{s=0} = \{ \beta [1 - \dot{z}(w)] \partial_u f^{-1}(u) \partial_s \Phi(w, s) \} \Big|_{s=0}. \quad (3.4)$$

A equação acima nos mostra claramente que as condições de Robin estáticas não foram reobtidas, diferentemente aos casos Dirichlet e Neumann. Este fato nos impede de ir mais adiante na tentativa de encontrar os modos do campo sob condições de Robin via mapeamento conforme.

## 3.2 Proposta de solução sem uso da transformação conforme

O problema da radiação emitida por fronteiras móveis pode ser revisto sem fazer uso do procedimento adotado por Fulling e Davies [3]. Sabemos que, no contexto de um campo escalar, real, sem massa, em  $1 + 1$  dimensões, o campo tem seus modos descritos por ondas que se propagam para direita e para esquerda. Este resultado é muito natural, uma vez que a equação de Klein-Gordon é a própria equação da onda, uma equação diferencial de segunda ordem em  $t$  e  $x$ , que pode ser vista como um problema de valor inicial [1]. Tal representação nos permite

escrever os modos do campo em termos de funções arbitrárias<sup>1</sup>:

$$\phi_\omega(t, x) = F_\omega(u) + G_\omega(v), \quad (3.5)$$

em que  $u = t - x$  e  $v = t + x$ . A função  $F_\omega(u)$  representa modos que se propagam para direita, enquanto  $G_\omega(v)$  representa modos que se propagam para esquerda.

A presença de fronteiras neste espaço-tempo impõe condições de contorno aos modos do campo. Quando a fronteira encontra-se estática, os modos são bem comportados e podem ser obtidos por variados métodos, de acordo com as condições de contorno aplicada. As frentes de onda que se propagam ao encontro da placa, no sentido de aproximação e que dela se afastam após reflexão, em nada se alteram por conta da placa estar em repouso.

No caso de uma fronteira em movimento, o cenário é diferente. Neste regime a fronteira encontra-se estática em instantes  $t$  definidos no intervalo entre  $(-\infty, t_0]$ , em que  $t_0$  é o instante em que a fronteira inicia seu movimento com aceleração não nula e variável. Este intervalo será daqui em diante conhecido como situação estática ( $t < t_0$ ). A partir de  $t_0$ , a fronteira encontra-se em movimento com trajetória não trivial e que pode ser definido no intervalo temporal  $[t_0, \infty)$  ou fechado em algum instante intermediário. Este intervalo, daqui em diante será denominado situação dinâmica ( $t > t_0$ ).

Na Fig. 1.1, ilustramos as situações a pouco descritas, na qual adotamos  $t_0 = 0$ , como sendo o instante em que a fronteira começa a se movimentar.

A Fig. 1.1 mostra as regiões de propagação dos modos do campo tanto na situação estática ( $t < 0$ ), regiões I e IV, quanto na situação dinâmica ( $t > 0$ ), regiões II e III. Conforme já discutimos, os modos em nada se alteram na situação estática e são facilmente obtidos de acordo com a condição de contorno que a fronteira estática impõe ao campo. Na situação dinâmica, os modos que se propagam ao encontro da fronteira não são influenciados pelo movimento da fronteira, contudo, após refletidos, tem sua estrutura modificada e o efeito desta alteração é obtido pela imposição das condições de contorno dinâmicas sobre a fronteira móvel.

Este método foi usado e proposto por DeWitt [2] para obter os modos do campo refletidos por uma barreira refletora móvel. Estes modos devem formar uma base completa, fechada e ortonormalizada e talvez tenha sido este o apelo usado por diversos autores para o uso de transformações conformes de coordenadas ao longo dos anos nos problemas da radiação devido à fronteiras em movimento.

---

<sup>1</sup>No apêndice A, discutimos a técnica proposta por DeWitt, mas, sob o ponto de vista das transformações conformes. Nosso objetivo é reproduzir os mesmos resultados de maneira independente

A elegância do método de DeWitt [2] reside no fato de que os modos dinâmicos refletidos pela fronteira móvel são conectados aos modos estáticos, bem definidos e que satisfazem todas as propriedades de completeza e fechamento exigidas aos modos do campo, por meio das condições de contorno sobre a fronteira em movimento e argumentos de causalidade.

A fim de checarmos a consistência da técnica até aqui apresentada, reproduziremos os resultados obtidos no capítulo 2, para o comportamento local dos modos do campo na região à direita de uma fronteira móvel que impõe ao campo condições de Dirichlet ou Neumann. Por fim, iremos implementar estes resultados para uma tentativa de encontrar os modos dinâmicos do campo sob condições de Robin.

### 3.2.1 Condições de Dirichlet

De acordo com a Eq. (1.3), a solução dos modos de Dirichlet na situação estática ( $t < 0$ ,  $\gamma = i$ ,  $r(v) = v$  e  $p(u) = u$ ), é dada por:

$$\phi_\omega(t, x) = i(4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} [e^{-i\omega v} - e^{-i\omega u}]. \quad (3.6)$$

Em que identificamos:

$$G_\omega(v) \rightarrow G_\omega^{(s)}(v) = i(4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\omega v}. \quad (3.7)$$

$$F_\omega(u) \rightarrow F_\omega^{(s)}(u) = -i(4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\omega u}. \quad (3.8)$$

Na situação dinâmica ( $t > 0$ ), os modos que se propagam para esquerda são conhecidos e os modos refletidos serão obtidos pelas condições de contorno, desta forma:

$$\phi_\omega(t, x) = i(4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\omega v} + F_\omega(u). \quad (3.9)$$

Impondo as condições de Dirichlet nesta região,

$$\phi_\omega(t, z(t)) = 0, \quad (3.10)$$

teremos:

$$F_\omega(u)|_{u=t-z(t)} = -i(4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\omega[t+z(t)]}. \quad (3.11)$$

A equação acima nos mostra que os modos refletidos ficam completamente definidos como função de seu argumento, a saber  $u = t - z(t)$ . Assim, para um fixo valor de  $u$  e para um dado

valor de  $z(t)$ , virá:

$$F_\omega(u) = -i(4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\omega(\tau_u - z(\tau_u))}. \quad (3.12)$$

De acordo com a definição de  $u$ , teremos, na situação dinâmica, que  $\tau_u$  fica determinado mediante resolução da seguinte equação transcendental:  $u = \tau_u - z(\tau_u)$ . Desta forma, fazendo  $\tau_u = u + z(\tau_u)$  e definindo:

$$p(u) = 2z(\tau_u) - u, \quad (3.13)$$

teremos, finalmente:

$$F_\omega(u) = -i(4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\omega p(u)}. \quad (3.14)$$

A Eq. (3.14) representa os modos refletidos por uma fronteira em movimento sob condições de Neumann [3]. Este resultado está de acordo com a Eq. (1.3), desde que façamos  $\gamma = i$  e  $r(v) = v$ .

### 3.2.2 Condições de Neumann

Partindo da Eq. (1.3), a solução estática dos modos de Neumann, a situação estática ( $t < 0$ ,  $\gamma = i$ ,  $r(v) = v$  e  $p(u) = u$ ), é dada por:

$$\phi_\omega(t, x) = (4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} [e^{-i\omega v} + e^{-i\omega u}]. \quad (3.15)$$

Em que identificamos:

$$G_\omega(v) \rightarrow G_\omega^{(s)}(v) = (4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\omega v}. \quad (3.16)$$

$$F_\omega(u) \rightarrow F_\omega^{(s)}(u) = (4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\omega u}. \quad (3.17)$$

Na situação dinâmica ( $t > 0$ ), os modos que se propagam para esquerda são conhecidos e os modos refletidos serão obtidos pelas condições de contorno, desta forma:

$$\phi_\omega(t, x) = (4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\omega v} + F_\omega(u). \quad (3.18)$$

Impondo as condições de Neumann, definidas em termos de um referencial de laboratório, nesta região,

$$[\dot{z}(t)\partial_t + \partial_x] \phi_\omega(t, x)|_{x=z(t)} = 0, \quad (3.19)$$

teremos:

$$F'_\omega(u)|_{u=t-z(t)} = -(4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} \frac{1 + \dot{z}(t)}{1 - \dot{z}(t)} i\omega e^{-i\omega[t+z(t)]}. \quad (3.20)$$

A equação acima nos mostra que a derivada dos modos refletidos do campo fica completamente definida como função de seu argumento,  $u = t - z(t)$ . Fixando o valor de  $u$  e conhecendo a forma de  $z(t)$ , reescrevemos a Eq. (3.20) como:

$$F'_\omega(u) = -(4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} \frac{1 + z'(\tau_u)}{1 - z'(\tau_u)} i\omega e^{-i\omega[2z(\tau_u)-u]}. \quad (3.21)$$

Usando a Eq. (3.13), obtemos:

$$p'(u) = \frac{1 + z'(\tau_u)}{1 - z'(\tau_u)}, \quad (3.22)$$

que é a derivada primeira da função  $p(u)$ . Desta forma, a equação diferencial definida em (3.14) fica:

$$F'_\omega(u) = -i\omega (4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} p'(u) e^{-i\omega p(u)}, \quad (3.23)$$

cuja resolução é facilmente obtida e que resulta em:

$$F_\omega(u) = (4\pi\omega)^{-\frac{1}{2}} e^{-i\omega p(u)}. \quad (3.24)$$

A Eq. (3.24) representa os modos refletidos por uma fronteira em movimento sob condições de Neumann [15]. Este resultado está de acordo com a Eq. (1.3), desde que façamos  $\gamma = 1$ ,  $r(v) = v$ .

Como podemos verificar, por argumentos de causalidade e conhecendo a forma estática dos modos do campo, todo seu comportamento local e dinâmico fica determinado pelas condições de contorno sobre a fronteira. Este resultado será de fundamental importância para obtermos a forma dos modos do campo sob condições de Robin.

### 3.2.3 Condições de Robin

Tomando por base as discussões introdutórias deste capítulo, iremos estudar o comportamento local do campo à direita do movimento da fronteira (ver regiões I e II da Fig. 1.1), sem fazer uso de mapeamento conforme.

Antes de tudo vamos encontrar a forma dos modos do campo sob condições de contorno de Robin,

$$\phi(t, x)|_{x=0} = \beta \frac{\partial}{\partial x} \phi(t, x)|_{x=0}, \quad (3.25)$$

por conta da presença de uma fronteira estática localizada na posição  $x = 0$ .

Desta forma, encontramos a solução dos modos do campo dada por [25, 27]:

$$\phi_\omega(t, x) = C(\omega, \beta) [(\omega\beta + i)e^{-i\omega v} + (\omega\beta - i)e^{-i\omega u}]. \quad (3.26)$$

Em que  $C(\omega, \beta) = [4\pi\omega(\omega^2\beta^2 + 1)]^{-1/2}$ . Neste caso, podemos identificar os modos  $F_\omega(u)$  e  $G_\omega(v)$  como sendo:

$$F_\omega(u) \rightarrow F_\omega^{(s)}(u) = C(\omega, \beta)(\omega\beta - i)e^{-i\omega u}. \quad (3.27)$$

$$G_\omega(v) \rightarrow G_\omega^{(s)}(v) = C(\omega, \beta)(\omega\beta + i)e^{-i\omega v}. \quad (3.28)$$

Se tomarmos os limites  $\beta \rightarrow 0$  e  $\beta \rightarrow \infty$  recuperamos os modos estáticos para uma fronteira de Dirichlet:  $\phi_\omega(t, x) = i(4\pi\omega)^{-1/2} [e^{-i\omega v} - e^{-i\omega u}]$  e para uma fronteira de Neumann:  $\phi_\omega(t, x) = (4\pi\omega)^{-1/2} [e^{-i\omega v} + e^{-i\omega u}]$ , respectivamente.

Na situação dinâmica ( $t > 0$ ), por argumentos de causalidade, sabemos que os modos que se propagam para esquerda, definidos na situação estática, não sofrem influência por conta da fronteira em movimento. Contudo, após sofrerem reflexão, terão sua estrutura modificada. Como já sabemos,  $F_\omega(u)$  é obtido a partir das condições de contorno sobre a fronteira. Desta forma, os modos do campo podem ser escritos como:

$$\phi_\omega(t, x) = C(\omega, \beta)(\omega\beta + i)e^{-i\omega v} + F_\omega(u). \quad (3.29)$$

Impondo as condições de Robin dinâmicas escritas para um referencial de laboratório nesta região e definidas pela Eq. (3.3), obtemos:

$$2\beta F_\omega'(u) + A'(u)F_\omega(u) = -C(\omega, \beta)(\omega\beta + i)[(2\omega\beta - i)p'(u) - i]e^{-i\omega p(u)}. \quad (3.30)$$

A solução da Eq. (3.30) é dada por:

$$F_\omega(u) = C(\omega, \beta) \left[ \frac{(\omega\beta + i)(2\omega\beta - i)}{(2\omega\beta + i)} e^{-i\omega p(u)} - \frac{2\omega(\omega\beta + i)}{(2\omega\beta + i)} e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} \int e^{\frac{A(u)}{2\beta}} e^{-i\omega p(u)} du \right], \quad (3.31)$$

com:  $p(u) = 2\tau(u) - u$  e  $A(u) = p(u) + u = 2\tau(u)$ .

Sabendo que toda integral indefinida pode ser escrita como:

$$\int f(u)du = F(u) + k. \quad (3.32)$$

Da mesma forma, podemos escrever integrais definidas por:

$$\int_0^u f(x)dx = F(u) - F(0). \quad (3.33)$$

Isolando  $F(u)$  em (3.33) e substituindo em (3.32), obtemos:

$$\int f(u)du = \int_0^u f(x)dx + k_1, \quad (3.34)$$

com  $k_1 = k + F(0)$ . De maneira análoga podemos reescrever o fator com integral indefinida em (3.31) da seguinte maneira:

$$\int e^{(A(u)/2\beta)} e^{-i\omega p(u)} du = \int_0^u e^{(A(x)/2\beta)} e^{-i\omega p(x)} dx + k^R(\omega, \beta). \quad (3.35)$$

Assim, a Eq. (3.31) fica:

$$F_\omega(u) = C(\omega, \beta) \left[ \frac{(\omega\beta + i)(2\omega\beta - i)}{(2\omega\beta + i)} e^{-i\omega p(u)} - \frac{2\omega(\omega\beta + i)}{(2\omega\beta + i)} e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} \int_0^u e^{\frac{A(x)}{2\beta}} e^{-i\omega p(x)} dx - \frac{2\omega(\omega\beta + i)}{(2\omega\beta + i)} e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} k^R(\omega, \beta) \right]. \quad (3.36)$$

Para obter o valor de  $k^R(\omega, \beta)$ , fazemos na equação acima  $p(u) = u$ , o que corresponde a situação estática. Desta forma, obtemos:

$$k^R(\omega, \beta) = i\beta / (\omega\beta + i).$$

Por fim:

$$F_\omega(u) = C(\omega, \beta) \left[ \frac{(\omega\beta + i)(2\omega\beta - i)}{(2\omega\beta + i)} e^{-i\omega p(u)} - \frac{2\omega(\omega\beta + i)}{(2\omega\beta + i)} e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} \int_0^u e^{\frac{A(x)}{2\beta}} e^{-i\omega p(x)} dx - \frac{2i\omega\beta}{(2\omega\beta + i)} e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} \right]. \quad (3.37)$$

A Eq. (3.37) mostra quem são os modos refletidos por uma fronteira dinâmica sob condições de Robin. No apêndice D, checamos a consistência desta fórmula.

A partir desta expressão, conhecendo as derivadas de seu argumento, poderemos calcular as fórmulas exatas para a densidade de energia local do campo.

# Capítulo 4

## Perspectivas

Neste capítulo, apresentamos as principais perspectivas que o conhecimento dos modos dinâmicos de uma fronteira de Robin podem ter como consequência.

### 4.1 Densidade de energia: Fórmulas exatas

Tomando por base as discussões apresentadas no apêndice B, para obtermos a expressão para a densidade de energia, renormalizada, precisamos subtrair a expressão para a densidade de energia definida em termos dos modos dinâmicos (3.29) e (3.37), daquela definida em termos dos modos estáticos (3.26),

$$\mathcal{T}_{\text{vac}}^{(+)} = \mathcal{T}_{\text{vac}}^{(+)} \Big|_{(t>0)} - \mathcal{T}_{\text{vac}}^{(+)} \Big|_{(t<0)}, \quad (4.1)$$

tomando em seguida o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  para o fator regularizante.

Na situação estática,  $t < 0$ , de acordo com (3.26), a expressão para densidade de energia é dada por:

$$\mathcal{T}_{\text{vac}}^{(+)} \Big|_{(t<0)} = -(2\pi\varepsilon^2)^{-1}. \quad (4.2)$$

De uma forma geral, os modos do campo são dados por:  $\phi_\omega(t, x) = G_\omega(v) + F_\omega(u)$ . Sua parte conjugada, de acordo com a regularização será:

$$\phi_\omega^*(t, x) = G_\omega^*(v + \varepsilon) + F_\omega^*(u + \varepsilon).$$

Assim, tomando as derivadas em  $t$  e  $x$ , teremos:

$$\partial_t \phi_\omega(t, x) = G'_\omega(v) + F'_\omega(u). \quad (4.3)$$

$$\partial_t \phi_\omega^*(t, x) = G_\omega'^*(v + \varepsilon) + F_\omega'^*(u + \varepsilon). \quad (4.4)$$

$$\partial_x \phi_\omega(t, x) = G_\omega(v) - F_\omega(u). \quad (4.5)$$

$$\partial_x \phi_\omega^*(t, x) = G_\omega'^*(v + \varepsilon) - F_\omega'^*(u + \varepsilon). \quad (4.6)$$

A partir destas relações, a expressão para densidade de energia, para  $t > 0$ , fica:

$$\mathcal{T}_{\text{vac}}^{(+)} \Big|_{(t>0)} = \mathcal{T}_{\mathbf{G}}^{(+)} + \mathcal{T}_{\mathbf{F}}^{(+)} . \quad (4.7)$$

Em que:

$$\mathcal{T}_{\mathbf{G}}^{(+)} = \int_0^\infty d\omega G_\omega'(v) G_\omega'^*(v + \varepsilon). \quad (4.8)$$

e

$$\mathcal{T}_{\mathbf{F}}^{(+)} = \int_0^\infty d\omega F_\omega'(u) F_\omega'^*(u + \varepsilon). \quad (4.9)$$

A parcela  $\mathcal{T}_{\mathbf{G}}^{(+)}$  representa a contribuição para densidade de energia em termos das derivadas dos modos que se propagam para esquerda. Usando (3.28), obtemos:

$$\mathcal{T}_{\mathbf{G}}^{(+)} = -(4\pi\varepsilon^2)^{-1}. \quad (4.10)$$

Note que por não serem afetados pelo movimento da fronteira, os modos que se propagam para a esquerda representam metade da contribuição para a densidade de energia na situação estática. A parte que falta para reobter a densidade inicial do campo virá dos modos refletidos pela fronteira.

A parcela  $\mathcal{T}_{\mathbf{F}}^{(+)}$  representa a contribuição para densidade de energia em termos das derivadas dos modos que se propagam para direita. Este termo carrega metade da contribuição oriunda da configuração inicial do campo, bem como, os termos que modificam a densidade de energia do campo devido ao movimento da fronteira.

De acordo com (4.9), precisamos conhecer as derivadas com relação ao próprio argumento dos modos definidos em (3.37). Desta forma, a derivada dos modos refletidos pela fronteira é dada por

$$\begin{aligned} F_\omega'(u) = & C(\omega, \beta) \left[ -i\omega p'(u) \frac{(\omega\beta + i)(2\omega\beta - i)}{(2\omega\beta + i)} e^{-i\omega p(u)} + \right. \\ & + \frac{A'(u)}{\beta} \frac{\omega(\omega\beta + i)}{(2\omega\beta + i)} e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} \int_0^u e^{\frac{A(x)}{2\beta}} e^{-i\omega p(x)} dx + \\ & \left. - \frac{2\omega(\omega\beta + i)}{(2\omega\beta + i)} e^{-i\omega p(u)} + \frac{i\omega A'(u)}{(2\omega\beta + i)} e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} \right]; \end{aligned} \quad (4.11)$$

E sua parte conjugada escrita como:

$$\begin{aligned}
F_{\omega}^{\prime*}(u + \varepsilon) = & C^*(\omega, \beta) \left[ i\omega p'(u + \varepsilon) \frac{(\omega\beta - i)(2\omega\beta + i)}{(2\omega\beta - i)} e^{i\omega p(u + \varepsilon)} \right. \\
& + \frac{A'(u + \varepsilon)\omega(\omega\beta - i)}{\beta(2\omega\beta - i)} e^{-\frac{A(u + \varepsilon)}{2\beta}} \int_0^{u + \varepsilon} e^{\frac{A(y)}{2\beta}} e^{i\omega p(y)} dy \\
& \left. - \frac{2\omega(\omega\beta - i)}{(2\omega\beta - i)} e^{i\omega p(u + \varepsilon)} - \frac{i\omega A'(u + \varepsilon)}{(2\omega\beta - i)} e^{-\frac{A(u + \varepsilon)}{2\beta}} \right].
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Note que o produto entre as derivadas dos modos  $F_{\omega}'(u) F_{\omega}^{\prime*}(u + \varepsilon)$  pode ser representado por:

$$F_{\omega}'(u) F_{\omega}^{\prime*}(u + \varepsilon) = \sum_{n=1}^{16} F_n(\omega, \beta) = \sum_{n=1}^{16} F_n. \tag{4.13}$$

Portanto,

$$\mathcal{T}_{\mathbf{F}}^{(+)} = \int_0^{\infty} d\omega \left[ \sum_{n=1}^{16} F_n \right] = \sum_{n=1}^{16} \left[ \int_0^{\infty} d\omega F_n \right]. \tag{4.14}$$

Definindo:

$$\int_0^{\infty} d\omega F_n = T_n(\omega, \beta) = T_n. \tag{4.15}$$

Desta forma, a contribuição para densidade de energia devido aos modos refletidos pela fronteira pode ser reescrita como:

$$\mathcal{T}_{\mathbf{F}}^{(+)} = \sum_{n=1}^{16} T_n. \tag{4.16}$$

Sabendo que:

$$C(\omega, \beta) C^*(\omega, \beta) = [(4\pi\omega)(\omega\beta + i)(\omega\beta - i)]^{-1}, \tag{4.17}$$

poderemos identificar termo a termo da equação (4.13). A ordem dos termos obedece a seguinte estrutura: O primeiro termo de  $F_{\omega}'(u)$  multiplica cada termo de  $F_{\omega}^{\prime*}(u + \varepsilon)$ , formando as quatro primeiras parcelas para densidade de energia e assim por diante.

Termo 1:

$$F_1 = \frac{\omega}{4\pi} p'(u) p'(u + \varepsilon) e^{-i\omega[p(u) - p(u + \varepsilon)]}. \tag{4.18}$$

Tomando a integral na frequência:

$$T_1 = \frac{1}{4\pi} p'(u) p'(u + \varepsilon) \int_0^{\infty} \omega e^{-i\omega[p(u) - p(u + \varepsilon)]} d\omega. \tag{4.19}$$

Note que:

$$\int_0^{\infty} \omega e^{-i\omega[p(u)-p(u+\varepsilon)]} d\omega = -\frac{1}{(p(u) - p(u + \varepsilon))^2}. \quad (4.20)$$

Daí:

$$T_1 = -\frac{1}{4\pi} \frac{p'(u)p'(u + \varepsilon)}{(p(u) - p(u + \varepsilon))^2}. \quad (4.21)$$

A equação anterior diverge no limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Expandindo tal expressão em série de potências de  $\varepsilon$  até  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , virá:

$$T_1 = -\frac{1}{4\pi\varepsilon^2} - \frac{1}{24\pi} \left[ \frac{p'''(u)}{p'(u)} - \frac{3}{2} \left( \frac{p''(u)}{p'(u)} \right)^2 \right] + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (4.22)$$

Podemos perceber que este termo já é responsável pela densidade local de energia com média no estado de vácuo sob condições de contorno de Dirichlet ou de Neumann.

Termo 2:

$$F_2 = -\frac{i\omega}{4\pi\beta} \frac{p'(u) A'(u + \varepsilon) e^{-\frac{A(u+\varepsilon)}{2\beta}} e^{-i\omega p(u)}}{(2\omega\beta + i)} \int_0^{u+\varepsilon} e^{\frac{A(y)}{2\beta}} e^{i\omega p(y)} dy. \quad (4.23)$$

Tomando a integral na frequência:

$$T_2 = \frac{p'(u) A'(u + \varepsilon) e^{-\frac{A(u+\varepsilon)}{2\beta}}}{4\pi\beta} \int_0^{u+\varepsilon} e^{\frac{A(y)}{2\beta}} \frac{d}{du} \left[ \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\omega[p(u)-p(y)]}}{(2\omega\beta + i)} d\omega \right] dy. \quad (4.24)$$

Note que:

$$\left[ \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\omega[p(u)-p(y)]}}{(2\omega\beta + i)} d\omega \right] = \frac{1}{2\beta} Ei \left( 1, -\frac{p(u) - p(y)}{2\beta} \right) e^{-\frac{p(u)-p(y)}{2\beta}}. \quad (4.25)$$

E ainda:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \left[ \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\omega[p(u)-p(y)]}}{(2\omega\beta + i)} d\omega \right] &= -\frac{p'(u)}{4\beta^2} Ei \left( 1, -\frac{p(u) - p(y)}{2\beta} \right) e^{-\frac{p(u)-p(y)}{2\beta}} \\ &\quad - \frac{1}{2\beta} \frac{p'(u)}{p(u) - p(y)}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Daí:

$$\begin{aligned} T_2 &= -\frac{p'(u) A'(u + \varepsilon) e^{-\frac{A(u+\varepsilon)}{2\beta}} e^{-\frac{p(u)}{2\beta}}}{16\pi\beta^3} \int_0^{u+\varepsilon} Ei \left( 1, -\frac{p(u) - p(y)}{2\beta} \right) e^{\frac{A(y)}{2\beta}} e^{\frac{p(y)}{2\beta}} dy + \\ &\quad - \frac{p'(u) A'(u + \varepsilon) e^{-\frac{A(u+\varepsilon)}{2\beta}}}{8\pi\beta^2} \int_0^{u+\varepsilon} \frac{e^{\frac{A(y)}{2\beta}}}{[p(u) - p(y)]} dy. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Expandindo o termo acima em série de potências de  $\varepsilon$  até  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , virá:

$$T_2 = -\frac{p'(u) A'(u) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} e^{-\frac{p(u)}{2\beta}}}{16\pi\beta^3} \int_0^u Ei\left(1, -\frac{p(u)-p(y)}{2\beta}\right) e^{\frac{A(y)}{2\beta}} e^{\frac{p(y)}{2\beta}} dy + \\ -\frac{p'(u) A'(u) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}}}{8\pi\beta^2} \int_0^u \frac{e^{\frac{A(y)}{2\beta}}}{[p(u)-p(y)]} dy + \frac{A'(u)}{8\pi\beta^2} \ln(\varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (4.28)$$

que é a expressão da segunda parcela para densidade de energia.

Os demais termos obedecerão aos mesmos comandos, de modo que daqui em diante apenas explicitaremos a definição de cada termo e sua forma antes e após expansão em  $\varepsilon$ .

Termo 3:

$$F_3 = \frac{i\omega p'(u) e^{-i\omega[p(u)-p(u+\varepsilon)]}}{2\pi (2\omega\beta + i)}. \quad (4.29)$$

Tomando a integral na frequência:

$$T_3 = \frac{p'(u)/2\pi}{p'(u+\varepsilon)} \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega[p(u)-p(u+\varepsilon)]}}{(2\omega\beta + i)} d\omega \right], \quad (4.30)$$

obtemos:

$$T_3 = \frac{1}{4\pi\beta} \frac{p'(u)}{p(u)-p(u+\varepsilon)} + \frac{p'(u)}{8\pi\beta^2} Ei\left(1, -\frac{p(u)-p(u+\varepsilon)}{2\beta}\right) e^{-\frac{p(u)-p(u+\varepsilon)}{2\beta}}. \quad (4.31)$$

Expandindo  $T_3$  em série de potências de  $\varepsilon$  até  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , virá:

$$T_3 = -\frac{\varepsilon^{-1}}{4\pi\beta} + \frac{1}{8\pi\beta} \frac{p''(u)}{p(u)} - \frac{p'(u)}{8\pi\beta^2} \left[ \gamma + \ln\left(\frac{p'(u)\varepsilon}{2\beta}\right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (4.32)$$

que é a expressão da terceira parcela para densidade de energia.

Termo 4:

$$F_4 = -\frac{\omega p'(u) A'(u+\varepsilon) e^{-\frac{A(u+\varepsilon)}{2\beta}} e^{-i\omega p(u)}}{4\pi (2\omega\beta + i)(\omega\beta - i)}. \quad (4.33)$$

Tomando a integral na frequência:

$$T_4 = -\frac{A'(u+\varepsilon) p'(u) e^{-\frac{A(u+\varepsilon)}{2\beta}}}{4\pi} \left[ \int_0^\infty \frac{\omega e^{-i\omega p(u)}}{(2\omega\beta + i)(\omega\beta - i)} d\omega \right], \quad (4.34)$$

obtemos:

$$T_4 = -\frac{p'(u) A'(u+\varepsilon)}{12\pi\beta^2} Ei\left(1, \frac{p(u)}{\beta}\right) e^{-\frac{A(u+\varepsilon)}{2\beta}} e^{\frac{p(u)}{\beta}} + \\ -\frac{p'(u) A'(u+\varepsilon)}{24\pi\beta^2} Ei\left(1, -\frac{p(u)}{2\beta}\right) e^{-\frac{A(u+\varepsilon)}{2\beta}} e^{-\frac{p(u)}{2\beta}}. \quad (4.35)$$

Expandindo  $T_4$  em série de potências de  $\varepsilon$  até  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , virá:

$$T_4 = -\frac{p'(u) A'(u)}{12\pi\beta^2} Ei\left(1, \frac{p(u)}{\beta}\right) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} e^{\frac{p(u)}{\beta}} + \\ -\frac{p'(u) A'(u)}{24\pi\beta^2} Ei\left(1, -\frac{p(u)}{2\beta}\right) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} e^{-\frac{p(u)}{2\beta}} + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (4.36)$$

que é a expressão da quarta parcela para densidade de energia.

Termo 5:

$$F_5 = \frac{i\omega}{4\pi\beta} \frac{p'(u+\varepsilon) A'(u) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} e^{i\omega p(u+\varepsilon)}}{(2\omega\beta - i)} \int_0^u e^{\frac{A(x)}{2\beta}} e^{-i\omega p(x)} dx. \quad (4.37)$$

Tomando a integral na frequência:

$$T_5 = \frac{A'(u) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}}}{4\pi\beta} \int_0^u e^{\frac{A(x)}{2\beta}} \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega[p(x)-p(u+\varepsilon)]}}{(2\omega\beta - i)} d\omega \right] dx, \quad (4.38)$$

obtemos:

$$T_5 = -\frac{A'(u) p'(u+\varepsilon) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} e^{-\frac{p(u+\varepsilon)}{2\beta}}}{16\pi\beta^3} \int_0^u Ei\left(1, \frac{p(x)-p(u+\varepsilon)}{2\beta}\right) e^{\frac{A(x)}{2\beta}} e^{\frac{p(x)}{2\beta}} dx + \\ + \frac{A'(u) p'(u+\varepsilon) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}}}{8\pi\beta^2} \int_0^u \frac{e^{\frac{A(x)}{2\beta}}}{p(x)-p(u+\varepsilon)} dx. \quad (4.39)$$

Expandindo  $T_5$  em série de potências de  $\varepsilon$  até  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , virá:

$$T_5 = -\frac{A'(u) p'(u) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} e^{-\frac{p(u)}{2\beta}}}{16\pi\beta^3} \int_0^u Ei\left(1, \frac{p(x)-p(u)}{2\beta}\right) e^{\frac{A(x)}{2\beta}} e^{\frac{p(x)}{2\beta}} dx + \\ + \frac{A'(u) p'(u) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}}}{8\pi\beta^2} \int_0^u \frac{e^{\frac{A(x)}{2\beta}}}{p(x)-p(u)} dx + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (4.40)$$

que é a expressão da quinta parcela para densidade de energia.

Termo 6:

$$F_6 = \frac{\omega}{4\pi\beta} \frac{A'(u) A'(u+\varepsilon) e^{-\frac{A(u)-A(u+\varepsilon)}{2\beta}}}{(4\omega^2\beta^2 + 1)} \int_0^u e^{\frac{A(x)}{2\beta}} e^{-i\omega p(x)} dx \int_0^{u+\varepsilon} e^{\frac{A(y)}{2\beta}} e^{i\omega p(y)} dy. \quad (4.41)$$

Tomando a integral na frequência:

$$T_6 = \frac{A'(u) A'(u+\varepsilon) e^{-\frac{A(u)+A(u+\varepsilon)}{2\beta}}}{4\pi\beta} \times \\ \times \int_0^u e^{\frac{A(x)}{2\beta}} \left\{ \int_0^{u+\varepsilon} e^{\frac{A(y)}{2\beta}} \left[ \int_0^\infty \frac{\omega e^{-i\omega[p(x)-p(y)]}}{(4\omega^2\beta^2 + 1)} d\omega \right] dy \right\} dx, \quad (4.42)$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
T_6 &= \frac{A'(u) A'(u + \varepsilon) e^{-\frac{A(u)+A(u+\varepsilon)}{2\beta}}}{32\pi\beta^4} \times \\
&\times \int_0^u e^{\frac{A(x)-p(x)}{2\beta}} \left[ \int_0^{u+\varepsilon} Ei \left( 1, -\frac{p(x)-p(y)}{2\beta} \right) e^{\frac{A(y)+p(y)}{2\beta}} dy \right] dx + \\
&+ \frac{A'(u) A'(u + \varepsilon) e^{-\frac{A(u)+A(u+\varepsilon)}{2\beta}}}{32\pi\beta^4} \times \\
&\times \int_0^u e^{\frac{A(x)+p(x)}{2\beta}} \left[ \int_0^{u+\varepsilon} Ei \left( 1, \frac{p(x)-p(y)}{2\beta} \right) e^{\frac{A(y)-p(y)}{2\beta}} dy \right] dx
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Expandindo  $T_6$  em série de potências de  $\varepsilon$  até  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , virá:

$$\begin{aligned}
T_6 &= \frac{A'(u)^2 e^{-\frac{A(u)}{\beta}}}{32\pi\beta^4} \times \\
&\times \int_0^u e^{\frac{A(x)-p(x)}{2\beta}} \left[ \int_0^u Ei \left( 1, -\frac{p(x)-p(y)}{2\beta} \right) e^{\frac{A(y)+p(y)}{2\beta}} dy \right] dx + \\
&+ \frac{A'(u)^2 e^{-\frac{A(u)}{\beta}}}{32\pi\beta^4} \times \\
&\times \int_0^u e^{\frac{A(x)+p(x)}{2\beta}} \left[ \int_0^u Ei \left( 1, \frac{p(x)-p(y)}{2\beta} \right) e^{\frac{A(y)-p(y)}{2\beta}} dy \right] dx + \mathcal{O}(\varepsilon),
\end{aligned} \tag{4.44}$$

que é a expressão da sexta parcela para densidade de energia.

Termo 7:

$$F_7 = -\frac{\omega}{2\pi\beta} \frac{A'(u) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} e^{i\omega p(u+\varepsilon)}}{(4\omega^2\beta^2 + 1)} \int_0^u e^{\frac{A(x)}{2\beta}} e^{-i\omega p(x)} dx. \tag{4.45}$$

Tomando a integral na frequência:

$$T_7 = -\frac{A'(u) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}}}{2\pi\beta} \int_0^u e^{\frac{A(x)}{2\beta}} \left[ \int_0^\infty \frac{\omega e^{-i\omega[p(x)-p(u+\varepsilon)]}}{(4\omega^2\beta^2 + 1)} d\omega \right] dx. \tag{4.46}$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
T_7 &= -\frac{A'(u) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} e^{\frac{p(u+\varepsilon)}{2\beta}}}{16\pi\beta^3} \int_0^u Ei \left( 1, -\frac{p(x)-p(u+\varepsilon)}{2\beta} \right) e^{\frac{A(x)-p(x)}{2\beta}} dx + \\
&- \frac{A'(u) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} e^{-\frac{p(u+\varepsilon)}{2\beta}}}{16\pi\beta^3} \int_0^u Ei \left( 1, \frac{p(x)-p(u+\varepsilon)}{2\beta} \right) e^{\frac{A(x)+p(x)}{2\beta}} dx.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Expandindo  $T_7$  em série de potências de  $\varepsilon$  até  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , virá:

$$\begin{aligned}
T_7 &= -\frac{A'(u) e^{-\frac{A(u)+p(u)}{2\beta}}}{16\pi\beta^3} \int_0^u Ei \left( 1, -\frac{p(x)-p(u)}{2\beta} \right) e^{\frac{A(x)-p(x)}{2\beta}} dx + \\
&- \frac{A'(u) e^{-\frac{A(u)-p(u)}{2\beta}}}{16\pi\beta^3} \int_0^u Ei \left( 1, \frac{p(x)-p(u)}{2\beta} \right) e^{\frac{A(x)+p(x)}{2\beta}} dx + \mathcal{O}(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{4.48}$$

que é a expressão da sétima parcela para densidade de energia.

Termo 8:

$$F_8 = -\frac{i\omega}{4\pi\beta} \frac{A'(u)A'(u+\varepsilon)e^{-\frac{A(u)-A(u+\varepsilon)}{2\beta}}}{(4\omega^2\beta^2+1)(\omega\beta-i)} \int_0^u e^{\frac{A(x)}{2\beta}} e^{-i\omega p(x)} dx. \quad (4.49)$$

Tomando a integral na frequência:

$$T_8 = -\frac{iA'(u)A'(u+\varepsilon)e^{-\frac{A(u)-A(u+\varepsilon)}{2\beta}}}{4\pi\beta} \times \int_0^u e^{\frac{A(x)}{2\beta}} \left[ \int_0^\infty \frac{\omega e^{-i\omega p(x)}}{(4\omega^2\beta^2+1)(\omega\beta-i)} d\omega \right] dx. \quad (4.50)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} T_8 &= \frac{A'(u)A'(u+\varepsilon)e^{-\frac{A(u)-A(u+\varepsilon)}{2\beta}}}{48\pi\beta^3} \int_0^u Ei\left(1, -\frac{p(x)}{2\beta}\right) e^{\frac{A(x)-p(x)}{2\beta}} dx + \\ &+ \frac{A'(u)A'(u+\varepsilon)e^{-\frac{A(u)-A(u+\varepsilon)}{2\beta}}}{16\pi\beta^3} \int_0^u Ei\left(1, \frac{p(x)}{2\beta}\right) e^{\frac{A(x)+p(x)}{2\beta}} dx + \\ &- \frac{A'(u)A'(u+\varepsilon)e^{-\frac{A(u)-A(u+\varepsilon)}{2\beta}}}{12\pi\beta^3} \int_0^u Ei\left(1, \frac{p(x)}{\beta}\right) e^{\frac{A(x)}{2\beta}} e^{\frac{p(x)}{\beta}} dx. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Expandindo  $T_8$  em série de potências de  $\varepsilon$  até  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , virá:

$$\begin{aligned} T_8 &= \frac{A'(u)^2 e^{-\frac{A(u)}{\beta}}}{48\pi\beta^3} \int_0^u Ei\left(1, -\frac{p(x)}{2\beta}\right) e^{\frac{A(x)-p(x)}{2\beta}} dx + \\ &+ \frac{A'(u)^2 e^{-\frac{A(u)}{\beta}}}{16\pi\beta^3} \int_0^u Ei\left(1, \frac{p(x)}{2\beta}\right) e^{\frac{A(x)+p(x)}{2\beta}} dx + \\ &- \frac{A'(u)^2 e^{-\frac{A(u)}{\beta}}}{12\pi\beta^3} \int_0^u Ei\left(1, \frac{p(x)}{\beta}\right) e^{\frac{A(x)}{2\beta}} e^{\frac{p(x)}{\beta}} dx + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.52)$$

que é a expressão da oitava parcela para densidade de energia.

Termo 9:

$$F_9 = -\frac{i\omega p'(u+\varepsilon)e^{-i\omega[p(u)-p(u+\varepsilon)]}}{2\pi} \frac{1}{(2\omega\beta-i)}. \quad (4.53)$$

Tomando a integral na frequência:

$$T_9 = -\frac{1}{2\pi} \frac{d}{d\varepsilon} \left[ \int_0^\infty \frac{e^{-i\omega[p(u)-p(u+\varepsilon)]}}{(2\omega\beta-i)} d\omega \right], \quad (4.54)$$

obtemos:

$$T_9 = -\frac{1}{4\pi\beta} \frac{p'(u+\varepsilon)}{p(u)-p(u+\varepsilon)} + \frac{p'(u+\varepsilon)}{8\pi\beta^2} Ei\left(1, \frac{p(u)-p(u+\varepsilon)}{2\beta}\right) e^{\frac{p(u)-p(u+\varepsilon)}{2\beta}}. \quad (4.55)$$

Expandindo  $T_9$  em série de potências de  $\varepsilon$  até  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , virá:

$$T_9 = \frac{\varepsilon^{-1}}{4\pi\beta} + \frac{1}{8\pi\beta} \frac{p''(u)}{p(u)} - \frac{p'(u)}{8\pi\beta^2} \left[ \gamma + \ln \left( -\frac{p'(u)\varepsilon}{2\beta} \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (4.56)$$

que é a expressão da nona parcela para densidade de energia.

Termo 10:

$$F_{10} = -\frac{\omega}{2\pi\beta} \frac{A'(u+\varepsilon) e^{-\frac{A(u+\varepsilon)}{2\beta}} e^{-i\omega p(u)}}{(4\omega^2\beta^2 + 1)} \int_0^u e^{\frac{A(y)}{2\beta}} e^{i\omega p(y)} dy. \quad (4.57)$$

Tomando a integral na frequência:

$$\begin{aligned} T_{10} &= -\frac{A'(u+\varepsilon) e^{-\frac{A(u+\varepsilon)}{2\beta}}}{2\pi\beta} \times \\ &\quad \times \int_0^u e^{\frac{A(y)}{2\beta}} \left[ \int_0^\infty \frac{\omega e^{-i\omega[p(u)-p(y)]}}{(4\omega^2\beta^2 + 1)} d\omega \right] dy. \end{aligned} \quad (4.58)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} T_{10} &= -\frac{A'(u+\varepsilon) e^{-\frac{A(u+\varepsilon)+p(u)}{2\beta}}}{16\pi\beta^3} \times \\ &\quad \times \int_0^{u+\varepsilon} Ei \left( 1, \frac{p(u)-p(y)}{2\beta} \right) e^{\frac{A(y)-p(y)}{2\beta}} dy + \\ &\quad -\frac{A'(u+\varepsilon) e^{-\frac{A(u+\varepsilon)-p(u)}{2\beta}}}{16\pi\beta^3} \times \\ &\quad \times \int_0^{u+\varepsilon} Ei \left( 1, -\frac{p(u)-p(y)}{2\beta} \right) e^{\frac{A(y)+p(y)}{2\beta}} dy. \end{aligned} \quad (4.59)$$

Expandindo  $T_{10}$  em série de potências de  $\varepsilon$  até  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , virá:

$$\begin{aligned} T_{10} &= -\frac{A'(u) e^{-\frac{A(u)+p(u)}{2\beta}}}{16\pi\beta^3} \times \\ &\quad \times \int_0^u Ei \left( 1, \frac{p(u)-p(y)}{2\beta} \right) e^{\frac{A(y)-p(y)}{2\beta}} dy + \\ &\quad -\frac{A'(u) e^{-\frac{A(u)-p(u)}{2\beta}}}{16\pi\beta^3} \times \\ &\quad \times \int_0^u Ei \left( 1, -\frac{p(u)-p(y)}{2\beta} \right) e^{\frac{A(y)+p(y)}{2\beta}} dy. \end{aligned} \quad (4.60)$$

que é a expressão da parcela  $T_{10}$  para densidade de energia.

Termo 11:

$$F_{11} = \frac{\omega e^{-i\omega[p(u)-p(u+\varepsilon)]}}{\pi (4\omega^2\beta^2 + 1)}. \quad (4.61)$$

Tomando a integral na frequência:

$$T_{11} = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^\infty \frac{\omega e^{-i\omega[p(u)-p(u+\varepsilon)]}}{(4\omega^2\beta^2 + 1)} d\omega \right], \quad (4.62)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} T_{11} = & \frac{1}{8\pi\beta^2} Ei \left( 1, \frac{p(u) - p(u + \varepsilon)}{2\beta} \right) e^{\frac{p(u)-p(u+\varepsilon)}{2\beta}} + \\ & + \frac{1}{8\pi\beta^2} Ei \left( 1, -\frac{p(u) - p(u + \varepsilon)}{2\beta} \right) e^{-\frac{p(u)-p(u+\varepsilon)}{2\beta}}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Expandindo  $T_{11}$  em série de potências de  $\varepsilon$  até  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , virá:

$$T_{11} = -\frac{1}{8\pi\beta^2} \left[ \gamma + \ln \left( -\frac{p'(u)\varepsilon}{2\beta} \right) \right] - \frac{1}{8\pi\beta^2} \left[ \gamma + \ln \left( \frac{p'(u)\varepsilon}{2\beta} \right) \right] + \mathcal{O}(\varepsilon), \quad (4.64)$$

que é a expressão da parcela  $T_{11}$  para densidade de energia.

Termo 12:

$$F_{12} = \frac{i\omega}{2\pi} \frac{A'(u + \varepsilon) e^{-\frac{A(u+\varepsilon)}{2\beta}} e^{-i\omega p(u)}}{(4\omega^2\beta^2 + 1)(\omega\beta - i)}. \quad (4.65)$$

Tomando a integral na frequência:

$$T_{12} = \frac{iA'(u + \varepsilon) e^{-\frac{A(u+\varepsilon)}{2\beta}}}{2\pi} \left[ \int_0^\infty \frac{\omega e^{-i\omega p(u)}}{(4\omega^2\beta^2 + 1)(\omega\beta - i)} d\omega \right]. \quad (4.66)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} T_{12} = & -\frac{A'(u + \varepsilon)}{24\pi\beta^2} Ei \left( 1, -\frac{p(u)}{2\beta} \right) e^{-\frac{A(u+\varepsilon)+p(u)}{2\beta}} + \\ & -\frac{A'(u + \varepsilon)}{8\pi\beta^2} Ei \left( 1, \frac{p(u)}{2\beta} \right) e^{-\frac{A(u+\varepsilon)-p(u)}{2\beta}} + \\ & + \frac{A'(u + \varepsilon)}{6\pi\beta^2} Ei \left( 1, \frac{p(u)}{\beta} \right) e^{-\frac{A(u+\varepsilon)}{2\beta}} e^{\frac{p(u)}{\beta}}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Expandindo  $T_{12}$  em série de potências de  $\varepsilon$  até  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , virá:

$$\begin{aligned} T_{12} = & -\frac{A'(u)}{24\pi\beta^2} Ei \left( 1, -\frac{p(u)}{2\beta} \right) e^{-\frac{A(u)+p(u)}{2\beta}} + \\ & -\frac{A'(u)}{8\pi\beta^2} Ei \left( 1, \frac{p(u)}{2\beta} \right) e^{-\frac{A(u)-p(u)}{2\beta}} + \\ & + \frac{A'(u)}{6\pi\beta^2} Ei \left( 1, \frac{p(x)}{\beta} \right) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} e^{\frac{p(u)}{\beta}} + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.68)$$

que é a expressão da parcela  $T_{12}$  para densidade de energia.

Termo 13:

$$F_{13} = -\frac{\omega p'(u+\varepsilon) A'(u) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} e^{i\omega p(u+\varepsilon)}}{4\pi (2\omega\beta - i)(\omega\beta + i)}. \quad (4.69)$$

Tomando a integral na frequência:

$$T_{13} = -\frac{A'(u) p'(u+\varepsilon) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}}}{4\pi} \left[ \int_0^\infty \frac{e^{i\omega p(u+\varepsilon)}}{(2\omega\beta - i)(\omega\beta + i)} d\omega \right], \quad (4.70)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} T_{13} = & -\frac{A'(u) p'(u+\varepsilon)}{24\pi\beta^2} Ei\left(1, -\frac{p(u+\varepsilon)}{2\beta}\right) e^{-\frac{A(u)+p(u+\varepsilon)}{2\beta}} + \\ & -\frac{A'(u) p'(u+\varepsilon)}{12\pi\beta^2} Ei\left(1, \frac{p(u+\varepsilon)}{\beta}\right) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} e^{\frac{p(u+\varepsilon)}{\beta}}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Expandindo  $T_{13}$  em série de potências de  $\varepsilon$  até  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , virá:

$$\begin{aligned} T_{13} = & -\frac{A'(u) p'(u)}{24\pi\beta^2} Ei\left(1, -\frac{p(u)}{2\beta}\right) e^{-\frac{A(u)+p(u)}{2\beta}} + \\ & -\frac{A'(u) p'(u)}{12\pi\beta^2} Ei\left(1, \frac{p(u)}{\beta}\right) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} e^{\frac{p(u)}{\beta}} + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.72)$$

que é a expressão da parcela  $T_{13}$  para densidade de energia.

Termo 14:

$$F_{14} = \frac{i\omega A'(u) A'(u+\varepsilon) e^{-\frac{A(u)-A(u+\varepsilon)}{2\beta}}}{4\pi\beta (4\omega^2\beta^2 + 1)(\omega\beta + i)} \int_0^{u+\varepsilon} e^{\frac{A(y)}{2\beta}} e^{i\omega p(y)} dy. \quad (4.73)$$

Tomando a integral na frequência:

$$\begin{aligned} T_{14} = & \frac{iA'(u) A'(u+\varepsilon) e^{-\frac{A(u)+A(u+\varepsilon)}{2\beta}}}{4\pi\beta} \times \\ & \times \int_0^{u+\varepsilon} e^{\frac{A(y)}{2\beta}} \left[ \int_0^\infty \frac{\omega e^{i\omega p(y)}}{(4\omega^2\beta^2 + 1)(\omega\beta + i)} d\omega \right] dy. \end{aligned} \quad (4.74)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} T_{14} = & \frac{A'(u) A'(u+\varepsilon) e^{-\frac{A(u)+A(u+\varepsilon)}{2\beta}}}{48\pi\beta^3} \int_0^{u+\varepsilon} Ei\left(1, -\frac{p(y)}{2\beta}\right) e^{\frac{A(y)-p(y)}{2\beta}} dy + \\ & \frac{A'(u) A'(u+\varepsilon) e^{-\frac{A(u)+A(u+\varepsilon)}{2\beta}}}{16\pi\beta^3} \int_0^{u+\varepsilon} Ei\left(1, \frac{p(y)}{2\beta}\right) e^{\frac{A(y)+p(y)}{2\beta}} dy \\ & -\frac{A'(u) A'(u+\varepsilon) e^{-\frac{A(u)+A(u+\varepsilon)}{2\beta}}}{12\pi\beta^3} \int_0^{u+\varepsilon} Ei\left(1, \frac{p(y)}{\beta}\right) e^{\frac{A(y)}{2\beta}} e^{\frac{p(y)}{\beta}} dy. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Expandindo  $T_{14}$  em série de potências de  $\varepsilon$  até  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , virá:

$$\begin{aligned} T_{14} = & \frac{A'(u)^2 e^{-\frac{A(u)}{\beta}}}{48\pi\beta^3} \int_0^u Ei\left(1, -\frac{p(y)}{2\beta}\right) e^{\frac{A(y)-p(y)}{2\beta}} dy + \\ & \frac{A'(u)^2 e^{-\frac{A(u)}{\beta}}}{16\pi\beta^3} \int_0^u Ei\left(1, \frac{p(y)}{2\beta}\right) e^{\frac{A(y)+p(y)}{2\beta}} dy \\ & - \frac{A'(u)^2 e^{-\frac{A(u)}{\beta}}}{12\pi\beta^3} \int_0^u Ei\left(1, \frac{p(y)}{\beta}\right) e^{\frac{A(y)}{2\beta}} e^{\frac{p(y)}{\beta}} dy + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.76)$$

que é a expressão da parcela  $T_{14}$  para densidade de energia.

Termo 15:

$$F_{15} = -\frac{i\omega A'(u) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} e^{i\omega p(u+\varepsilon)}}{2\pi (4\omega^2\beta^2 + 1) (\omega\beta + i)}. \quad (4.77)$$

Tomando a integral na frequência:

$$T_{15} = -\frac{iA'(u) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}}}{2\pi} \left[ \int_0^\infty \frac{\omega e^{i\omega p(u+\varepsilon)}}{(4\omega^2\beta^2 + 1) (\omega\beta + i)} d\omega \right]. \quad (4.78)$$

obtemos:

$$\begin{aligned} T_{15} = & -\frac{A'(u)}{24\pi\beta^2} Ei\left(1, -\frac{p(u+\varepsilon)}{2\beta}\right) e^{-\frac{A(u)+p(u)}{2\beta}} + \\ & -\frac{A'(u+\varepsilon)}{8\pi\beta^2} Ei\left(1, \frac{p(u+\varepsilon)}{2\beta}\right) e^{-\frac{A(u)-p(u)}{2\beta}} + \\ & +\frac{A'(u+\varepsilon)}{6\pi\beta^2} Ei\left(1, \frac{p(u+\varepsilon)}{\beta}\right) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} e^{\frac{p(u)}{\beta}}. \end{aligned} \quad (4.79)$$

Expandindo  $T_{15}$  em série de potências de  $\varepsilon$  até  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , virá:

$$\begin{aligned} T_{15} = & -\frac{A'(u)}{24\pi\beta^2} Ei\left(1, -\frac{p(u)}{2\beta}\right) e^{-\frac{A(u)+p(u)}{2\beta}} + \\ & -\frac{A'(u)}{8\pi\beta^2} Ei\left(1, \frac{p(u)}{2\beta}\right) e^{-\frac{A(u)-p(u)}{2\beta}} + \\ & +\frac{A'(u)}{6\pi\beta^2} Ei\left(1, \frac{p(u)}{\beta}\right) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} e^{\frac{p(u)}{\beta}} + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned} \quad (4.80)$$

que é a expressão da parcela  $T_{15}$  para densidade de energia.

Termo 16:

$$F_{16} = \frac{\omega A'(u) A'(u+\varepsilon) e^{-\frac{A(u)-A(u+\varepsilon)}{2\beta}}}{4\pi (4\omega^2\beta^2 + 1) (\omega^2\beta^2 + 1)}. \quad (4.81)$$

Tomando a integral na frequência:

$$T_{16} = \frac{A'(u) A'(u+\varepsilon) e^{-\frac{A(u)-A(u+\varepsilon)}{2\beta}}}{4\pi} \left[ \int_0^\infty \frac{\omega}{(4\omega^2\beta^2 + 1) (\omega^2\beta^2 + 1)} d\omega \right], \quad (4.82)$$

obtemos:

$$T_{16} = \frac{A'(u) A'(u + \varepsilon) e^{-\frac{A(u) - A(u + \varepsilon)}{2\beta}}}{12\pi\beta^2} \ln(2). \quad (4.83)$$

Expandindo  $T_{16}$  em série de potências de  $\varepsilon$  até  $\mathcal{O}(\varepsilon)$ , virá:

$$T_{16} = \frac{A'(u)^2 e^{-\frac{A(u)}{\beta}}}{12\pi\beta^2} \ln(2). \quad (4.84)$$

que é a expressão da parcela  $T_{16}$  para densidade de energia.

Diante destes resultados, podemos reescrever (4.7) por:

$$\mathcal{T}_{\text{vac}}^{(+)} \Big|_{(t>0)} = T_1(\omega, 0) + \sum_{n=2}^{16} T_n(\omega, \beta) + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (4.85)$$

Note que:  $T_1(\omega, 0) = -(4\pi\varepsilon^2)^{-1} + \mathcal{T}_{\text{vac-D-N}}^{(+)}$ . O primeiro termo representa metade da densidade inicial do campo e o segundo trata-se da densidade de energia devido ao campo submetido a condições de Dirichlet ou Neumann [3]. Temos, ainda,  $\sum_{n=2}^{16} T_n(\omega, \beta) \rightarrow \sum_{n=2}^{16} T_n(\omega, \beta, \varepsilon)$ , uma vez que este termo exibe dependência em relação ao parâmetro regularizador. Assim,

$$\mathcal{T}_{\text{vac}}^{(+)} \Big|_{(t>0)} = -(4\pi\varepsilon^2)^{-1} + \mathcal{T}_{\text{vac-D-N}}^{(+)} + \sum_{n=2}^{16} T_n(\omega, \beta, \varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (4.86)$$

Neste sentido, escrevemos a expressão regularizada para a densidade de energia como:

$$\mathcal{T}_{\text{vac}}^{(+)} = -(2\pi\varepsilon^2)^{-1} + \mathcal{T}_{\text{vac-D-N}}^{(+)} + \sum_{n=2}^{16} T_n(\omega, \beta, \varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (4.87)$$

Subtraindo da equação anterior a contribuição inicial da densidade de energia, Eq. (4.10), obtemos:

$$\mathcal{T}_{\text{vac}}^{(+)} = \mathcal{T}_{\text{vac-D-N}}^{(+)} + \sum_{n=2}^{16} T_n(\omega, \beta, \varepsilon) + \mathcal{O}(\varepsilon). \quad (4.88)$$

Tomando o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , teremos uma expressão renormalizada para densidade de energia. Contudo, tal limite exibe, ainda, uma divergência na soma  $\sum_{n=2}^{16} T_n(\omega, \beta, \varepsilon)$ , o que a princípio não era esperado. Este problema será tratado na próxima seção.

## 4.2 Densidade de energia: Termos divergentes

A seção anterior nos mostrou que a média no vácuo da densidade de energia para os modos dinâmicos do campo submetido a condições de Robin é dada por um somatório composto por

16 termos  $\mathcal{T}_F^{(+)} = \mathcal{T}_{\text{vac-D-N}}^{(+)} + \sum_{n=2}^{16} T_n(\omega, \beta, \varepsilon)$ . Desta soma, a primeira parcela representa a densidade de energia de um campo submetido a condições de contorno de Neumann ou Dirichlet. Tal fato nos leva concluir que os demais termos representam a contribuição devido somente a condição de Robin, daí a dependência destes termos em relação ao fator  $\beta$ .

Uma forma natural de verificar a consistência destas fórmulas, obtidas via abordagem exata, é checar se as mesmas recuperam os casos particulares. Em outras palavras, a somatória  $\sum_{n=2}^{16} T_n(\omega, \beta, \varepsilon)$  deve satisfazer as seguintes propriedades:

$$\sum_{n=2}^{16} T_n(\omega, \beta, \varepsilon) \Big|_{p(u)=0} = 0. \quad (4.89)$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \sum_{n=2}^{16} T_n(\omega, \beta, \varepsilon) = 0; \quad \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^{16} T_n(\omega, \beta, \varepsilon) = 0; \quad (4.90)$$

As técnicas de regularização tem como principal finalidade separar e explicitar, em uma expressão (discreta ou contínua) que pode assumir valores infinitos, sua parte divergente. A Eq. (4.87) deveria apresentar essa característica, contudo, a soma  $\sum_{n=2}^{16} T_n(\omega, \beta, \varepsilon)$  ainda possui dependência com relação ao parâmetro regularizador.

Em nosso estudo, a expressão renormalizada para densidade de energia é obtida após tomarmos o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Mas, tal limite, de acordo com a seção anterior, traria novos infinitos para a densidade de energia, conforme mostra as Eqs. (4.28), (4.32), (4.56) e (4.64).

Outro problema encontrado refere-se em avaliar as parcelas da densidade de energia na situação estática,  $p(u) = u$ . Na maioria dos termos pertencentes a soma  $\sum_{n=2}^{16} T_n(\omega, \beta, \varepsilon)$ , as seguintes estruturas se repetem, a menos de uma constante:

$$\zeta(\alpha, \lambda) = \int_0^\alpha \frac{e^{\frac{A(\lambda)}{2\beta}}}{[p(\alpha) - p(\lambda)]} d\lambda. \quad (4.91)$$

$$\xi(\alpha, \lambda) = \int_0^\alpha Ei\left(1, \frac{p(\lambda) - p(\alpha)}{2\beta}\right) e^{\frac{A(\lambda)}{2\beta}} e^{\frac{p(\lambda)}{2\beta}} d\lambda. \quad (4.92)$$

$$\chi(\alpha, \lambda) = \int_0^\alpha Ei\left(1, -\frac{p(\lambda)}{2\beta}\right) e^{\frac{A(\lambda) - p(\lambda)}{2\beta}} d\lambda. \quad (4.93)$$

Em todas elas surgem expressões divergentes quando  $p(u)$ :

$$\zeta(\alpha, \lambda)|_{p(\alpha)=\alpha} = \int_0^\alpha \frac{e^{\frac{\alpha}{\beta}}}{\alpha - \lambda} d\lambda = Ei\left(1, -\frac{\alpha - \lambda}{\beta}\right) e^{\frac{\lambda}{\beta}} \Big|_0^\alpha. \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned} \xi(\alpha, \lambda)|_{p(\alpha)=\alpha} &= \int_0^\alpha Ei\left(1, \frac{\lambda - \alpha}{2\beta}\right) e^{\frac{3\alpha}{2\beta}} d\lambda \\ &= \frac{2\beta}{3} \left[ Ei\left(1, \frac{\lambda - \alpha}{2\beta}\right) e^{\frac{3\lambda}{2\beta}} - Ei\left(1, -\frac{\lambda - \alpha}{\beta}\right) \right]_0^\alpha. \end{aligned} \quad (4.95)$$

$$\begin{aligned}
\chi(\alpha, \lambda)|_{p(\alpha)=\alpha} &= \int_0^\alpha Ei\left(1, \frac{\lambda}{2\beta}\right) e^{\frac{\lambda}{2\beta}} d\lambda \\
&= 2\beta \left[ Ei\left(1, \frac{\lambda}{2\beta}\right) e^{\frac{\lambda}{2\beta}} - Ei\left(1, -\frac{\lambda}{\beta}\right) \right]_0^\alpha. \tag{4.96}
\end{aligned}$$

Este fato se deve as propriedades da função exponencial integral modificada  $Ei(1, f(x))$ , ver Ref. [39], que não é definida na origem.

Estes problemas surgiram após o processo de integração na frequência, uma vez que nos cálculos anteriores a esta etapa, todos os casos particulares eram recuperados. Desta maneira, acreditamos que a técnica de regularização parece não ser adequada para o modelo proposto, o que nos obriga ao estudo de novos mecanismos de regularização e renormalização em estudos posteriores.

# Considerações Finais

Nós estudamos a força exercida sobre uma fronteira móvel que impõe ao campo escalar, real, não massivo, em duas dimensões espaço-temporais condições de contorno de Dirichlet ou Neumann. Estendemos para os estados de banho térmico e coerente como estado inicial do campo os resultados analíticos obtidos por Walker e Davies (Ref. [8]) para a força que atua sobre a fronteira. Cálculos numéricos foram realizados, resultando no comportamento gráfico destas forças.

Usando a técnica de cálculo baseada na abordagem de Cole e Schieve (Ref. [23, 34]), obtemos o comportamento da densidade de energia dentro de uma cavidade em expansão, e também o comportamento da força dinâmica que atua sobre a fronteira móvel. Consideramos, também, as condições de Dirichlet e Neumann e observamos que a densidade de energia e a força que atua sobre a fronteira móvel são afetadas se trocarmos as condições de contorno NN por DD (ou DN por ND), para os estados de vácuo ou banho térmico como estados iniciais do campo (estados diagonais). Por outro lado, a mesma invariância não é observada no estado coerente (não diagonal). Como perspectiva, calcularemos o número de partículas criadas neste modelo.

Tomando como base a abordagem não perturbativa proposta por DeWitt (Ref. [2]), obtemos a solução dos modos do campo para uma fronteira móvel sob condições de Robin, sem fazer uso das transformações conformes.

Contudo, verificamos que a parte divergente do campo não foi separada da parte finita e física do tensor energia-momentum, em particular a densidade de energia do campo. Neste contexto, até o momento associamos o problema à técnica de regularização adotada.

Como perspectiva futura, iremos em busca de técnicas alternativas de regularização e renormalização para as condições de contorno do problema em estudo.

# Apêndice A

## Transformações Conforme

### A.1 Invariância conforme da equação de Klein-Gordon

Seja a equação de Klein-Gordon definida nas coordenadas  $(t, x)$ :

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) \phi(t, x) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Tal como proposto por Moore e em seguida por Fulling e Davies [1, 3], apresentamos as seguintes transformações conformes, escrita em termos de funções arbitrárias:

$$t - x = f(w - s), \quad t + x = g(w + s) \quad (\text{A.2})$$

e suas inversas:

$$w - s = f^{-1}(t - x), \quad w + s = g^{-1}(t + x). \quad (\text{A.3})$$

Estas definições resultam em:

$$t = \frac{g(w + s) + f(w - s)}{2}, \quad x = \frac{g(w + s) - f(w - s)}{2}, \quad (\text{A.4})$$

$$w = \frac{g^{-1}(t + x) + f^{-1}(t - x)}{2}, \quad s = \frac{g^{-1}(t + x) - f^{-1}(t - x)}{2}. \quad (\text{A.5})$$

Desta forma, podemos mapear o campo das coordenadas  $(t, x)$  para as coordenadas  $(w, s)$ .

Por se tratar de um campo escalar, temos que  $\phi(t, x)$  é invariante sob transformações conformes:

$$\phi(t, x) = \Phi(w, s). \quad (\text{A.6})$$

Tomando a derivada primeira de  $\phi(t, x)$  com relação a  $t$ , obtem-se:

$$\partial_t \phi(t, x) = \frac{\partial \Phi(w(t, x), s(t, x))}{\partial t} = \frac{\partial \Phi(w, s)}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \Phi(w, s)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t}. \quad (\text{A.7})$$

Tomando a derivada com relação a  $x$ , virá:

$$\partial_x \phi(t, x) = \frac{\partial \Phi(w(t, x), s(t, x))}{\partial x} = \frac{\partial \Phi(w, s)}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \Phi(w, s)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x}. \quad (\text{A.8})$$

Note que:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g^{-1}(t+x)}{\partial(t+x)} - \frac{\partial f^{-1}(t-x)}{\partial(t-x)} \right]. \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g^{-1}(t+x)}{\partial(t+x)} + \frac{\partial f^{-1}(t-x)}{\partial(t-x)} \right]. \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g^{-1}(t+x)}{\partial(t+x)} + \frac{\partial f^{-1}(t-x)}{\partial(t-x)} \right]. \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial g^{-1}(t+x)}{\partial(t+x)} - \frac{\partial f^{-1}(t-x)}{\partial(t-x)} \right]. \quad (\text{A.12})$$

Levando em conta as Eqs. (A.9) até (A.12) e redefinindo:

$$\partial g^{-1}(t+x)/\partial(t+x) = (g^{-1})'(t+x) = 1/g'(w+s), \quad (\text{A.13})$$

$$\partial f^{-1}(t-x)/\partial(t-x) = (f^{-1})'(t-x) = 1/f'(w-s). \quad (\text{A.14})$$

Com isso a Eq. (A.7) torna-se:

$$\begin{aligned} \partial_t \phi(t, x) &= [1/g'(w+s) + 1/f'(w-s)] \partial_w \Phi(w, s) + \\ &+ [1/g'(w+s) - 1/f'(w-s)] \partial_s \Phi(w, s). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Analogamente, a Eq. (A.8) fica:

$$\begin{aligned} \partial_x \phi(t, x) &= [1/g'(w+s) - 1/f'(w-s)] \partial_w \Phi(w, s) + \\ &+ [1/g'(w+s) + 1/f'(w-s)] \partial_s \Phi(w, s) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Defindo os seguinte operadores:

$$\mathcal{O}_{w+s} = 1/2 [(g^{-1})'(t+x) (\partial_w + \partial_s)] = 1/2 [1/g'(w+s) (\partial_w + \partial_s)], \quad (\text{A.17})$$

$$\mathcal{O}_{w-s} = 1/2 [(f^{-1})'(t-x) (\partial_w - \partial_s)] = 1/2 [1/f'(w-s) (\partial_w - \partial_s)]. \quad (\text{A.18})$$

Teremos que as derivadas primeira com relação a  $t$  e  $x$  ficam:

$$\partial_t \phi(t, x) = [\mathcal{O}_{w+s} + \mathcal{O}_{w-s}] \Phi(w, s), \quad (\text{A.19})$$

$$\partial_x \phi(t, x) = [\mathcal{O}_{w+s} - \mathcal{O}_{w-s}] \Phi(w, s). \quad (\text{A.20})$$

Então, a derivada segunda do campo  $\phi(t, x)$  com relação a  $t$  fica:

$$\begin{aligned} \partial_t^2 \phi(t, x) &= \mathcal{O}_{w+s} [\mathcal{O}_{w+s} \Phi(w, s)] + \mathcal{O}_{w-s} [\mathcal{O}_{w+s} \Phi(w, s)] + \\ &+ \mathcal{O}_{w+s} [\mathcal{O}_{w-s} \Phi(w, s)] + \mathcal{O}_{w-s} [\mathcal{O}_{w-s} \Phi(w, s)]. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

A derivada segunda do campo com relação a  $x$  fica:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \phi(t, x) &= \mathcal{O}_{w+s} [\mathcal{O}_{w+s} \Phi(w, s)] - \mathcal{O}_{w-s} [\mathcal{O}_{w+s} \Phi(w, s)] + \\ &- \mathcal{O}_{w+s} [\mathcal{O}_{w-s} \Phi(w, s)] + \mathcal{O}_{w-s} [\mathcal{O}_{w-s} \Phi(w, s)]. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Fazendo a diferença entre as Eqs. (A.21) e (A.22), teremos:

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) \phi(t, x) = 2 [\mathcal{O}_{w-s} (\mathcal{O}_{w+s} \Phi(w, s)) + \mathcal{O}_{w+s} (\mathcal{O}_{w-s} \Phi(w, s))]. \quad (\text{A.23})$$

Note que:

$$\mathcal{O}_{w-s} \mathcal{O}_{w+s} = \frac{1}{4} (g')^{-1} (w+s) (f')^{-1} (w-s) (\partial_w^2 - \partial_s^2) \quad (\text{A.24})$$

$$\mathcal{O}_{w+s} \mathcal{O}_{w-s} = \frac{1}{4} (f')^{-1} (w-s) (g')^{-1} (w+s) (\partial_w^2 - \partial_s^2) \quad (\text{A.25})$$

Então, com ajuda de (A.24) e (A.25), podemos reescrever (A.23) como sendo:

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) \phi(t, x) = [g'(w+s) f'(w-s)]^{-1} (\partial_w^2 - \partial_s^2) \Phi(w, s). \quad (\text{A.26})$$

Sabendo que o lado esquerdo de (A.26) é a equação da onda para o campo nas coordenadas  $(t, x)$ , teremos:

$$(f')^{-1} (w-s) (g')^{-1} (w+s) (\partial_w^2 - \partial_s^2) \Phi(w, s) = 0$$

As funções  $f$  e  $g$  sendo analíticas e suas derivadas inversíveis:

$$(\partial_w^2 - \partial_s^2) \Phi(w, s) = 0, \quad (\text{A.27})$$

virá:

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2) \phi(t, x) = 0 \rightarrow (\partial_w^2 - \partial_s^2) \Phi(w, s) = 0. \quad (\text{A.28})$$

O que nos mostra que a Eq. (A.1) é invariante sob transformações conformes.

## A.2 Solução da equação da onda nas coordenadas

$(w, s)$

A solução da equação da onda em  $(w, s)$  precisa ser escrita em termos de bases que formam um conjunto completo, fechado e ortonormalizado:

$$\Phi(w, s) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \gamma_k(w) \psi_k(s). \quad (\text{A.29})$$

A função  $\psi_k(s)$  deve obedecer a equação de Helmholtz

$$\partial_s^2 \psi_k(s) = -\omega_k^2 \psi_k(s), \quad (\text{A.30})$$

com:

$$\omega_k = ck. \quad (\text{A.31})$$

Neste caso, por generalidade, admitiremos  $k$  assumindo valores positivos ou negativos e  $k \neq 0$ .

A função  $\psi_k(s)$  deve ainda satisfazer as seguintes propriedades:

$$\int_0^{\infty} ds \psi_k(s) \psi_{k'}^*(s) = \delta(k - k'), \quad (\text{A.32})$$

$$\int_0^{\infty} dk \psi_k(s) \psi_k^*(s') = \delta(s - s'), \quad (\text{A.33})$$

conhecidas respectivamente como condição de ortogonalidade e condição de fechamento.

Substituindo (A.29) na equação de Klein-Gordon escrita em  $(w, s)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \{ [\partial_w^2 \gamma_k(w)] \psi_k(s) - \gamma_k(w) [\partial_s^2 \psi_k(s)] \} = 0$$

e usando (A.30), teremos:

$$\partial_w^2 \gamma_k(w) + \omega_k^2 \gamma_k(w) = 0, \quad (\text{A.34})$$

cuja solução dada por:

$$\gamma_k(w) = a_k e^{-i|\omega_k|w} + b_k e^{i|\omega_k|w}. \quad (\text{A.35})$$

Substituindo (A.35) em (A.29):

$$\Phi(w, s) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \psi_k(s) [a_k e^{-i|\omega_k|w} + b_k e^{i|\omega_k|w}]. \quad (\text{A.36})$$

Impondo a condição do campo  $\Phi(w, s)$  ser real:

$$\Phi(w, s) = \Phi^*(w, s). \quad (\text{A.37})$$

Duas considerações precisam ser feitas:

- i)  $\psi_k(s)$  é uma função real:

$$\begin{aligned} \Phi(w, s) &= \Phi^*(w, s). \\ \int_{-\infty}^{\infty} dk \psi_k(s) [a_k e^{-i|\omega_k|w} + b_k e^{i|\omega_k|w}] &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \psi_k^*(s) [a_k^* e^{i|\omega_k|w} + b_k^* e^{-i|\omega_k|w}]. \end{aligned}$$

Usando  $\psi_k(s) = \psi_k^*(s)$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \psi_k(s) [(a_k - b_k^*) e^{-i|\omega_k|w} + (b_k - a_k^*) e^{i|\omega_k|w}] = 0.$$

O que nos permite concluir:

$$\begin{cases} a_k = b_k^* \\ b_k = a_k^* \end{cases}. \quad (\text{A.38})$$

Voltando para (A.36):

$$\Phi(w, s) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \psi_k(s) [a_k e^{-i|\omega_k|w} + a_k^* e^{i|\omega_k|w}]. \quad (\text{A.39})$$

Trocando  $k$  por  $-k$  na segunda parcela da expressão anterior e sabendo que  $|\omega_k| = |\omega_{-k}|$ , teremos:

$$\Phi(w, s) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \psi_k(s) [a_k e^{-i|\omega_k|w} + a_k^* e^{i|\omega_k|w}]. \quad (\text{A.40})$$

- ii)  $\psi_k(s)$  é uma função complexa:

$$\begin{aligned} \Phi(w, s) &= \Phi^*(w, s). \\ \int_{-\infty}^{\infty} dk \psi_k(s) [a_k e^{-i|\omega_k|w} + b_k e^{i|\omega_k|w}] &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dk \psi_k^*(s) [a_k^* e^{i|\omega_k|w} + b_k^* e^{-i|\omega_k|w}]}_{k=-\alpha} \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \psi_k(s) \left[ a_k e^{-i|\omega_k|w} + b_k e^{i|\omega_k|w} \right] = - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \psi_{-\alpha}^*(s) \left[ a_{-\alpha}^* e^{i|\omega_{-\alpha}|w} + b_{-\alpha}^* e^{-i|\omega_{-\alpha}|w} \right]}_{\alpha=k}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \psi_k(s) \left[ a_k e^{-i|\omega_k|w} + b_k e^{i|\omega_k|w} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} dk \psi_{-k}^* \left[ a_{-k}^* e^{i|\omega_{-k}|w} + b_{-k}^* e^{-i|\omega_{-k}|w} \right]$$

Usando  $\psi_k(s) = \psi_{-k}^*(s)$  e também  $|\omega_k| = |\omega_{-k}|$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \psi_k(s) \left[ (a_k - b_{-k}^*) e^{-i|\omega_k|w} + (b_k - a_{-k}^*) e^{i|\omega_k|w} \right] = 0.$$

O que nos permite concluir:

$$\begin{cases} a_k = b_{-k}^* \\ b_k = a_{-k}^* \end{cases}. \quad (\text{A.41})$$

Voltando para (A.36):

$$\Phi(w, s) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \psi_k(s) \left[ a_k e^{-i|\omega_k|w} + a_{-k}^* e^{i|\omega_k|w} \right]. \quad (\text{A.42})$$

Trocando  $k$  por  $-k$  na segunda parcela da expressão anterior, teremos:

$$\Phi(w, s) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \psi_k(s) \left[ a_k e^{-i|\omega_k|w} + a_k^* e^{i|\omega_k|w} \right]. \quad (\text{A.43})$$

As equações (A.40) e (A.43) nos mostram que a expressão do campo  $\Phi(w, s)$  é a mesma seja  $\psi_k(s)$  complexa ou real.

Promovendo o campo a operador para que este seja quantizado, obtemos:

$$\hat{\Phi}(w, s) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \psi_k(s) \left[ \hat{a}_k e^{-i|\omega_k|w} + H.c. \right]. \quad (\text{A.44})$$

Levando

$$\hat{a}_k \rightarrow \hat{a}_k (2k)^{-1/2}$$

para que a base do campo seja completa, fechada e ortonormalizada; Trocando  $k$  por  $\omega$  e nos limitando ao estudo de frequências positivas do campo, teremos:

$$\hat{\Phi}(w, s) = \int_0^{\infty} d\omega \left[ \hat{a}_\omega \Phi_\omega(w, s) + H.c. \right]. \quad (\text{A.45})$$

Em que  $\Phi_\omega(w, s)$  é a base do campo:

$$\Phi_\omega(w, s) = (2\omega)^{-1/2} \psi_\omega(s) e^{-i|\omega|w} \quad (\text{A.46})$$

e naturalmente satisfaz:

$$(\Phi_\omega, \Phi_{\omega'}) = \delta(\omega - \omega'). \quad (\text{A.47})$$

A função  $\psi_\omega(s)$  deve ser determinada pelas condições de contorno.

Lembrando que as transformações conformes nos permitem mapear as linhas de mundo de uma fronteira móvel definidas no espaço-tempo bi-dimensional de Minkowski  $(t, x)$  em um novo espaço-tempo  $(w, s)$  de duas dimensões em que a métrica foi preservada a menos de um fator de escala.

Nestes termos, consideremos uma fronteira estática em  $(w, 0)$  que impões condições de contorno de Dirichlet ao campo, que nas coordenadas  $(w, s)$  se escrevem:

$$\Phi_\omega(w, s)|_{s=0} = 0, \quad (\text{A.48})$$

que implica em

$$\psi_\omega(s)|_{s=0} = 0. \quad (\text{A.49})$$

A solução de (A.30) é dada por:

$$\psi_\omega(s) = A_\omega \cos(\omega s) + B_\omega \sin(\omega s) = C_\omega e^{i\omega s} + D_\omega e^{-i\omega s}. \quad (\text{A.50})$$

Substituindo (A.49) em (A.50), virá:

$$\psi_\omega(s) = B_\omega \sin \omega s. \quad (\text{A.51})$$

Pela condição de ortogonalidade (A.32), podemos afirmar que:

$$B_\omega = \pm (2/\pi)^{1/2}. \quad (\text{A.52})$$

Escolhendo a solução positiva, os modos do campo  $\Phi(w, s)$  em (A.46) na presença de uma fronteira estática, ficam:

$$\Phi_\omega(w, s) = i (4\pi\omega)^{-1/2} \left( e^{-i\omega(w+s)} - e^{-i\omega(w-s)} \right). \quad (\text{A.53})$$

Substituindo este resultado em (A.45), teremos finalmente a expressão final para o campo de uma única fronteira em repouso sob condições de contorno de Dirichlet.

Usando os mesmos comandos, podemos obter os modos do campo para uma fronteira estática que impõe condições de Neumann ao campo:

$$\partial_s \Phi_\omega(w, s)|_{s=0} = 0 \Rightarrow \partial_s \psi_\omega(s)|_{s=0} = 0. \quad (\text{A.54})$$

Neste caso, a solução será:

$$\Phi_\omega(w, s) = (4\pi\omega)^{-1/2} \left( e^{-i\omega(w+s)} + e^{-i\omega(w-s)} \right). \quad (\text{A.55})$$

Sendo esta portanto a forma dos modos do campo na presença de uma fronteira estática de Neumann.

## A.3 Mapeando o problema dinâmico em um problema estático

Em um espaço tempo bidimensional  $(t, x)$  uma fronteira em movimento é meramente um ponto, movendo-se em geral ao longo de uma linha de mundo com trajetória não-trivial dada por:

$$x = z(t), \quad |\dot{z}(t)| < 1, \quad (\text{A.56})$$

onde assumimos  $c = 1$ . Assumindo que  $f$  e  $g$  possam ser escolhidos de tal forma que a curva  $(w, 0)$  coincida com a trajetória  $(t, z(t))$ , a expressão (A.2) torna-se:

$$t - z(t) = f(w), \quad t + z(t) = g(w). \quad (\text{A.57})$$

Resolvendo o sistema acima obtemos:

$$t = \frac{1}{2} [g(w) + f(w)], \quad z(t) = \frac{1}{2} (g(w) - f(w)), \quad (\text{A.58})$$

o que implica em [3]:

$$z \left( \frac{1}{2} [g(w) + f(w)] \right) = \frac{1}{2} (g(w) - f(w)). \quad (\text{A.59})$$

Segundo Fulling e Davies [3], soluções de (A.59) existem globalmente para uma classe de movimentos  $x = z(t)$  da fronteira. A Fig. A.1 trata de uma trajetória hipotética descrita pela

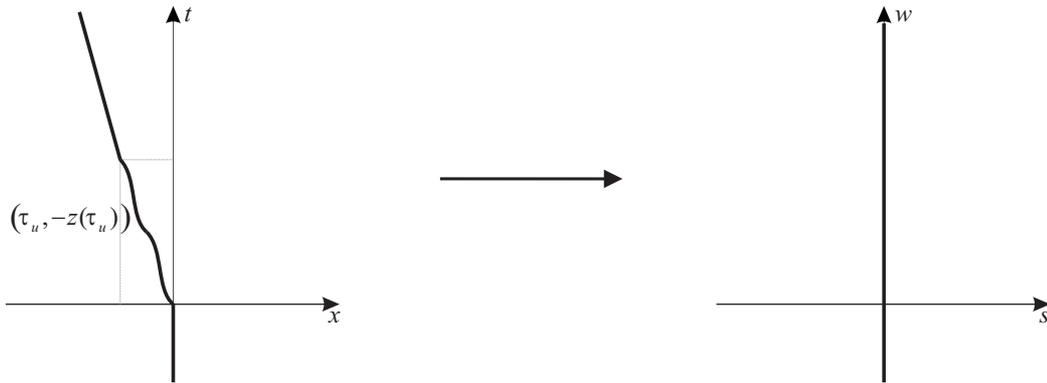


Figura A.1: Mapeamento de uma fronteira dinâmica  $(t, z(t))$ , no espaço-tempo bidimensional  $(t, x)$ , em fronteira estática  $(w, 0)$  de um novo espaço bidimensional de coordenadas  $(w, s)$ .

fronteira em movimento no espaço  $(t, x)$ , que se move aceleradamente para esquerda, executando movimento uniforme após o instante  $T$ .

Esta fronteira móvel tem todos os seus pontos mapeados em uma fronteira estática na geometria  $(w, s)$ .

Um conjunto de trajetórias de particular interesse são aquelas em que a fronteira está inicialmente em repouso. Então vamos assumir:

$$z(t < 0) = 0. \tag{A.60}$$

Seguindo procedimento adotado por Fulling e Davies [3], buscaremos um sistema de coordenadas  $(w, s)$  coincidente com  $(t, x)$  ao longo de toda a região  $t \leq x$  (região I na figura 1.2). De (A.58) e (A.60), temos:

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{2} (g(w) - f(w)) = 0, \\ g(w) &= f(w) = w, \text{ para } w < 0, \end{aligned} \tag{A.61}$$

ou seja, na região estática, em  $(w, s)$  e conseqüentemente em  $(t, x)$ , as funções  $f$  e  $g$  e suas inversas apresentam como resultado seus respectivos argumentos.

Mapear o problema dinâmico em um problema estático consiste em encontrar a solução do campo nas coordenadas  $(w, s)$ . Nesta nova geometria a fronteira móvel no espaço  $(t, x)$  agora encontra-se estática, sendo este modelo mais simples para encontrarmos a solução do campo.

A solução da equação da onda em  $(w, s)$ , obtida na seção A.2 deste apêndice, e a condição de contorno (A.48) determinam os modos de frequência positiva  $(\omega > 0)$  do campo. Substituindo

(A.3) em (A.53), virá:

$$\phi_\omega(t, x) = i(4\pi\omega)^{-1/2} \left[ e^{-i\omega g^{-1}(t+x)} - e^{-i\omega f^{-1}(t-x)} \right]. \quad (\text{A.62})$$

Para a região estática, ou seja  $t < 0$ , os modos do campo em  $(w, s)$  devem coincidir com os modos em  $(t, x)$ . Desta forma, fazendo  $(w, s) \rightarrow (t, x)$ , teremos:

$$\phi_\omega(t, x) = i(4\pi\omega)^{-1/2} \left( e^{-i\omega(t+x)} - e^{-i\omega(t-x)} \right). \quad (\text{A.63})$$

De acordo com DeWitt [2], o modo do campo, nas regiões I, II e III (Fig. A.2), pode ser escrito como:

$$\phi_\omega(t, x) = F_\omega(x - t) + G_\omega(x + t), \quad (\text{A.64})$$

em que  $F_\omega(x - t)$  é conhecido apenas na região I, região estática ou simplesmente região “in”, onde os argumentos da função  $F_\omega$  são positivos, ou seja,  $t \leq x$ . Identificamos as funções  $F_\omega$  e  $G_\omega$  como sendo, respectivamente, o primeiro e o segundo termo de (A.63), *i.e.*:

$$F_\omega(x - t) = \frac{e^{-i\omega(t-x)}}{2i\sqrt{\pi\omega}}, \quad (\text{A.65})$$

$$G_\omega(x + t) = -\frac{e^{-i\omega(x+t)}}{2i\sqrt{\pi\omega}}. \quad (\text{A.66})$$

Entretanto, partindo da região “in”, a função  $G_\omega$  é conhecida em todas as regiões (I, II e III com  $t \leq x$  e  $t > x$ ), ou seja, mantém a mesma forma tanto na “região estática”, região I, quanto na “região dinâmica”, regiões II e III, do espaço  $(t, x)$ , devolvendo como resultado sempre seu próprio argumento:

$$G_\omega(x + t) = -\frac{e^{-i\omega g^{-1}(x+t)}}{2i\sqrt{\pi\omega}} = -\frac{e^{-i\omega(x+t)}}{2i\sqrt{\pi\omega}}. \quad (\text{A.67})$$

Perceba que nesta expressão, identificamos  $G_\omega$  pelo primeiro termo de (A.62) que representa o modo do campo para a região dinâmica de movimento do espelho,  $t > x$ . A função  $F_\omega$ , para instantes em que o espelho encontra-se na região dinâmica, diferentemente à função  $G_\omega$ , não apresenta um valor conhecido, de modo que para definí-lo nesta região, devemos levar em consideração a condição de contorno de Dirichlet:  $\phi_\omega(t, z(t)) = 0$ , aplicada aos modos em (A.64), de modo que:

$$F_\omega(z(t) - t) + G_\omega(z(t) + t) = 0. \quad (\text{A.68})$$

Como a função  $G_\omega$  é conhecida nesta região, obtemos uma expressão para a função  $F_\omega$  na região dinâmica de movimento do espelho,  $t > x$ :

$$F_\omega(z(t) - t) = -G_\omega(z(t) + t) = \frac{e^{-i\omega(z(t)+t)}}{2i\sqrt{\pi\omega}}. \quad (\text{A.69})$$

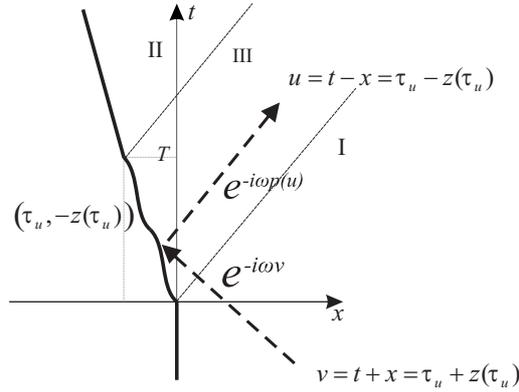


Figura A.2: Descrição da linha de mundo de uma fronteira móvel localizada em  $x = z(t)$ . Os modos do campo encontram a fronteira em três situações: (região I) fronteira parada; (região II) fronteira com aceleração não-constante; (região III) fronteira em movimento com velocidade uniforme;

Os modos do campo obtidos em termos das inversas de  $f$  e  $g$  para um instante qualquer ( $t > 0$ ) têm sempre a função  $G_\omega$  determinada de modo que podemos reescrever (A.62):

$$\phi_\omega(t, x) = -\frac{e^{-i\omega(t+x)}}{2i\sqrt{\pi\omega}} + \frac{e^{-i\omega f^{-1}(t-x)}}{2i\sqrt{\pi\omega}}. \quad (\text{A.70})$$

Definindo:

$$u \equiv t - x, \quad v \equiv t + x. \quad (\text{A.71})$$

em que  $u$  e  $v$  representam linhas nulas do cone de luz de um espaço-tempo bidimensional. Assim a expressão (A.70) fica representada por:

$$\phi_\omega(t, x) = -\frac{e^{-i\omega v}}{2i\sqrt{\pi\omega}} + \frac{e^{-i\omega f^{-1}(u)}}{2i\sqrt{\pi\omega}}. \quad (\text{A.72})$$

O último termo de (A.72), de acordo com a definição (A.71) e com  $x = z(t)$ , fica identificado como:

$$F_\omega(-u) = \frac{e^{-i\omega f^{-1}(u)}}{2i\sqrt{\pi\omega}}. \quad (\text{A.73})$$

O lado direito de (A.69) é função de  $u$ . Assim, precisamos redefinir (A.71) como função desta variável, o que resulta em:

$$u = \tau_u - z(\tau_u), \quad v = \tau_u + z(\tau_u). \quad (\text{A.74})$$

A expressão (A.69) torna-se:

$$F_\omega(-u) = \frac{e^{-i\omega[z(\tau_u)+\tau_u]}}{2i\sqrt{\pi\omega}} = \frac{e^{-i\omega(2\tau_u-u)}}{2i\sqrt{\pi\omega}}. \quad (\text{A.75})$$

Comparando (A.73) e (A.75), obtemos a relação entre  $u$  e a inversa de  $f$ :

$$f^{-1}(u) = 2\tau_u - u \equiv p(u), \quad (\text{A.76})$$

e finalmente:

$$\phi_\omega(t, x) = -\frac{e^{-i\omega v}}{2i\sqrt{\pi\omega}} + \frac{e^{-i\omega(2\tau_u - u)}}{2i\sqrt{\pi\omega}} = \frac{i}{\sqrt{4\pi\omega}} \left( e^{-i\omega v} - e^{-i\omega p(u)} \right). \quad (\text{A.77})$$

A Eq. acima representa os modos do campo para uma fronteira dinâmica de Dirichlet, tal como proposto por Fulling e Davies [3], via mapeamento do problema dinâmico em  $(t, x)$  em um problema estático em  $(w, s)$ , segundo rege a transformação conforme.

# Apêndice B

## Tensor energia-momentum

### B.1 Expressão analítica

Nesta breve seção obtemos a expressão analítica do tensor energia-momentum para o campo escalar, real, sem massa em um espaço-tempo bidimensional. Seja a definição canônica do tensor energia-momentum [37]:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi)} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} - g_{\mu\nu} \mathcal{L} = \frac{\partial L}{\partial (\partial^\mu \phi)} \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (\text{B.1})$$

Por *ansatz*, a densidade de lagrangeana para um campo escalar real, não massivo, é dada por:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi. \quad (\text{B.2})$$

Substituindo (B.2) em (B.1), virá:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\sigma\lambda} \partial_\sigma \phi \partial_\lambda \phi. \quad (\text{B.3})$$

A equação anterior, pode ainda ser escrita como:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (g^{00} \partial_0 \phi \partial_0 \phi + g^{11} \partial_1 \phi \partial_1 \phi), \quad (\text{B.4})$$

Assim, podemos escrever as componentes do tensor como sendo:

$$T_{01} = \partial_0 \phi \partial_1 \phi - \frac{1}{2} g_{01} (\partial_0 \phi \partial_0 \phi - \partial_1 \phi \partial_1 \phi) = \partial_0 \phi \partial_1 \phi. \quad (\text{B.5})$$

$$T_{10} = \partial_1 \phi \partial_0 \phi - \frac{1}{2} g_{10} (\partial_0 \phi \partial_0 \phi - \partial_1 \phi \partial_1 \phi) = \partial_1 \phi \partial_0 \phi. \quad (\text{B.6})$$

$$T_{00} = \partial_0 \phi \partial_0 \phi - \frac{1}{2} g_{00} (\partial_0 \phi \partial_0 \phi - \partial_1 \phi \partial_1 \phi) = \frac{1}{2} [(\partial_0 \phi)^2 + (\partial_1 \phi)^2]. \quad (\text{B.7})$$

$$T_{11} = \partial_1 \phi \partial_1 \phi - \frac{1}{2} g_{11} (\partial_0 \phi \partial_0 \phi - \partial_1 \phi \partial_1 \phi) = \frac{1}{2} [(\partial_0 \phi)^2 + (\partial_1 \phi)^2]. \quad (\text{B.8})$$

Essas componentes podem ser reunidas em uma matriz que representa a expressão analítica para o tensor energia-momentum do campo nas condições especificadas pelo problema em estudo:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial t} \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{\partial\phi}{\partial t} \frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\phi}{\partial t} & \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

O tensor energia momentum é uma quantidade responsável por medir a densidade e o fluxo de energia, bem como, o momentum de um dado campo. Cada componente é responsável por uma grandeza distinta. A componente  $T_{00}$  mede a densidade de energia,  $T_{01}$  o fluxo de energia,  $T_{10}$  fluxo de momentum e  $T_{11}$  mede pressão. Contudo, em um espaço-tempo bidimensional, as componentes de fluxo de momentum e energia tem a mesma dimensão. O mesmo acontece para as componentes que medem pressão e densidade de energia, ressaltando que nestas condições a componente  $T_{11}$  mede a força do campo em reação a radiação .

## B.2 Densidade de energia e força: vácuo

Sabemos que o valor esperado da componente  $\hat{T}_{00}$  do tensor energia-momentum, em 1+1 dimensões, nos fornece a densidade de energia do campo [3]. Na região à direita do movimento da fronteira, de acordo com a Eq. (B.9), o valor esperado do operador densidade de energia,  $\mathcal{T}_{\text{vac}}^{(+)} = \langle \hat{T}_{00}(t, x) \rangle^{(+)}$  é dada por:

$$\mathcal{T}_{\text{vac}}^{(+)} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\omega (\partial_t \phi_\omega \partial_t \phi_\omega^* + \partial_x \phi_\omega \partial_x \phi_\omega^*). \quad (\text{B.10})$$

De acordo com Fulling e Davies [3], a expressão anterior é divergente. Para extrair seu conteúdo físico, precisaremos fazer uso do processo de renormalização. Tal processo é composto

de três partes: (i) Adota-se uma técnica de regularização, que através do parâmetro regularizador, separa os termos divergentes daqueles que são bem comportados na expressão para densidade de energia; (ii) Subtraímos o valor esperado para densidade de energia, entre duas situações distintas, a fim de eliminarmos os termos espúrios; (iii) Tomamos o limite adequado do parâmetro regularizador, sendo aquele que recupera a expressão anterior para densidade de energia antes do processo de renormalização.

Neste problema, a técnica de regularização escolhida refere-se o método de separação de ponto, mais conhecido como *point splitting* [3]. O parâmetro regularizador é dado por  $\varepsilon$ , uma quantidade infinitesimal com parte imaginária positiva, sendo aplicada na parte conjugada dos modos do campo, em que reescrevemos a variável temporal  $t \rightarrow t + \varepsilon$ . A renormalização, em nosso estudo, consiste em subtrair a expressão para a densidade de energia definida em termos dos modos dinâmicos daquela definida em termos dos modos estáticos ,

Tomando a expressão dos modos do campo para uma fronteira móvel sob condições de Dirichlet, Eq. (A.77) e calculando as derivadas no tempo e no espaço destas equações, virá:

$$\partial_t \phi_\omega(t, x) = \frac{\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \left( e^{-i\omega v} - p'(u) e^{-i\omega p(u)} \right). \quad (\text{B.11})$$

$$\partial_x \phi_\omega(t, x) = \frac{\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \left( e^{-i\omega v} + p'(u) e^{-i\omega p(u)} \right). \quad (\text{B.12})$$

Onde  $p'(u) = \partial p(u) / \partial u$ , sendo  $p(u)$  definido por (A.76). Para as funções  $\phi_\omega^*$  aplicamos o método de regularização. Desta forma, as derivadas no tempo e no espaço na parte conjugada ficam:

$$\partial_t \phi_\omega^*(t, x) = \frac{\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \left( e^{i\omega(v+\varepsilon)} - p'(u + \varepsilon) e^{i\omega p(u+\varepsilon)} \right). \quad (\text{B.13})$$

$$\partial_x \phi_\omega^*(t, x) = \frac{\omega}{\sqrt{4\pi\omega}} \left( e^{i\omega(v+\varepsilon)} + p'(u + \varepsilon) e^{i\omega p(u+\varepsilon)} \right). \quad (\text{B.14})$$

Então, substituindo estas derivadas na Eq. (B.10), obtemos a expressão regularizada para a densidade de energia local do campo:

$$\mathcal{T}_{\text{vac-reg}}^{(+)} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon^2} - \frac{1}{24\pi} \left( \frac{p'''(u)}{p'(u)} - \frac{3}{2} \left( \frac{p''(u)}{p'(u)} \right)^2 \right) \quad (\text{B.15})$$

Este procedimento de regularização teve como principal finalidade explicitar o termo divergente contido na Eq. (B.10).

Para garantirmos o conteúdo físico da média no estado de vácuo da densidade local de energia, precisamos retirar o termo divergente nela ainda presente. Para isso, subtraímos desta

expressão, a média no vácuo da densidade de energia definida pela Eq. (B.10) para uma fronteira estática sob condições de Dirichlet:

$$\mathcal{T}_{\text{vac-est}}^{(+)} = -\frac{1}{2\pi\varepsilon^2}.$$

Desta forma, teremos:

$$\mathcal{T}_{\text{vac-ren}}^{(+)} = -\frac{1}{24\pi} \left( \frac{p'''(u)}{p'(u)} - \frac{3}{2} \left( \frac{p''(u)}{p'(u)} \right)^2 \right). \quad (\text{B.16})$$

Esta é, finalmente, a expressão para a densidade local de energia com média no estado de vácuo na região à direita do movimento da fronteira do campo que obedece as condições de contorno de Dirichlet sobre a fronteira móvel [3]. Na Ref. [15], encontramos a generalização desta expressão, levando em conta, também, a densidade no lado esquerdo da fronteira para condições de Dirichet ou Neumann.

Agora, queremos obter a expressão para a força devido ao vácuo na região à direita do movimento da fronteira. Para isso devemos tomar a média no vácuo da componente  $\hat{T}_{11}$  do tensor energia momentum para valores de  $(t, x)$  sobre a superfície da fronteira, ou seja, para pontos  $(t = \tau_u, x = z(\tau_u))$ , em que  $\tau_u$  é variável temporal de interseção da linha nula  $u$  com a superfície da fronteira em movimento. A partir das Eqs. (A.74) e (A.76), teremos:

$$p(u)|_{u=\tau_u-z(\tau_u)} = \tau_u + z(\tau_u). \quad (\text{B.17})$$

Tomando a derivada desta expressão com relação a  $\tau_u$ :

$$\frac{dp(u)}{d\tau_u} = \frac{dp(u)}{du} \frac{du}{\tau_u},$$

obtemos:

$$p'(u) = \frac{1 + \dot{z}}{1 - \dot{z}}. \quad (\text{B.18})$$

Em que  $\dot{z} = dz(\tau_u)/d\tau_u$ .

Utilizando mecanismo similar, obtemos as fórmulas para segunda e terceira derivada:

$$p''(u) = \frac{2\ddot{z}}{(1 - \dot{z})^3}. \quad (\text{B.19})$$

$$p'''(u) = \frac{2\ddot{z}}{(1 - \dot{z})^4} + \frac{6\dot{z}^2}{(1 - \dot{z})^5}. \quad (\text{B.20})$$

Então, substituindo as derivadas da função  $p(u)$  na Eq. (B.16), teremos:

$$F_{\text{vac}}^{(+)} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\ddot{z}^2 \dot{z}}{(1+z)^2(1-z)^4} - \frac{1}{12\pi} \frac{\ddot{z}}{(1+z)(1-z)^3}. \quad (\text{B.21})$$

Sendo esta a expressão da força exercida sobre a fronteira devido ao vácuo como reação a radiação por ela produzida na região à direita de seu movimento.

Novamente, encontramos na Ref. [15] e extensão da Eq. (B.21) levando em consideração também o lado esquerdo da fronteira:

$$F_{\text{vac}} = (1+z^2) \left[ \frac{1}{2\pi} \frac{\ddot{z}^2 \dot{z}}{(1-z^2)^4} + \frac{1}{6\pi} \frac{\ddot{z}}{(1-z^2)^3} \right]. \quad (\text{B.22})$$

A Eq. (B.22) representa a força total que atua sobre a fronteira em movimento, tanto para condição de Dirichlet quanto para Neumann, tendo o vácuo como estado inicial do campo.

### B.3 Densidade de energia e força: correção térmica

Uma vez conhecida a expressão do tensor energia-momentum para uma fronteira dinâmica no vácuo, podemos estender nosso estudo levando em consideração um banho térmico à temperatura  $T$  como estado inicial do campo. De acordo com a Ref. [38], teremos a seguinte relação para a média entre os operadores de criação e aniquilação:

$$\langle \hat{a}_\omega \hat{a}_{\omega'} \rangle_T = \langle \hat{a}_\omega^\dagger \hat{a}_{\omega'}^\dagger \rangle_T = 0. \quad (\text{B.23})$$

$$\langle \hat{a}_\omega^\dagger \hat{a}_{\omega'} \rangle_T = \bar{n}(\omega') \delta(\omega' - \omega) \quad (\text{B.24})$$

$$\langle \hat{a}_\omega \hat{a}_{\omega'}^\dagger \rangle_T = (1 + \bar{n}(\omega)) \delta(\omega' - \omega) \quad (\text{B.25})$$

com :

$$\bar{n}(\omega) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/\kappa_B T} - 1} = \frac{1}{e^{\omega/T} - 1}. \quad (\text{B.26})$$

Notando que  $\bar{n}(\omega)$  é a distribuição térmica de Planck, na qual fizemos ( $\kappa_B = \hbar = 1$ ), sendo  $\kappa_B$  a constante de Boltzmann. Usando estas médias entre os operadores, obtemos:

$$\mathcal{T}^{(+)} = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\omega [\partial_t \phi_\omega \partial_t \phi_\omega^* + \partial_x \phi_\omega \partial_x \phi_\omega^*] + \int_0^\infty d\omega \bar{n}(\omega) [\partial_t \phi_\omega \partial_t \phi_\omega^* + \partial_x \phi_\omega \partial_x \phi_\omega^*]. \quad (\text{B.27})$$

A primeira parcela da equação anterior nada mais é do que média no vácuo da densidade de energia e dada por (B.10), enquanto que o segundo termo é a contribuição térmica para a densidade de energia devido ao banho térmico:

$$\mathcal{T}_{\text{T}}^{(+)} = \int_0^\infty d\omega \bar{n}(\omega) [\partial_t \phi_\omega \partial_t \phi_\omega^* + \partial_x \phi_\omega \partial_x \phi_\omega^*]. \quad (\text{B.28})$$

Então, percebemos que a expressão para a densidade de energia com estado inicial em banho térmico fica identificada como:

$$\mathcal{T}^{(+)} = \mathcal{T}_{\text{vac}}^{(+)} + \mathcal{T}_{\text{T}}^{(+)} . \quad (\text{B.29})$$

Em Teoria Quântica de Campos à temperatura finita, não são necessárias medidas de regularização, uma vez que as correções térmicas não trazem novas divergências ultravioletas para a teoria em questão [40], de modo que o termo (B.28) se reduz a:

$$\mathcal{T}_{\text{T}}^{(+)} = \frac{1}{2\pi} \left( 1 + (p'(u))^2 \right) \int_0^\infty \frac{\omega d\omega}{(e^{\omega/\kappa_B T} - 1)} . \quad (\text{B.30})$$

Resolvendo a integral da equação anterior, teremos a contribuição para a densidade de energia devido somente ao banho térmico:

$$\mathcal{T}_{\text{T}}^{(+)} = \frac{\pi T^2}{12} \left[ 1 + (p'(u))^2 \right] . \quad (\text{B.31})$$

Para o cálculo da força devido ao banho que atua sobre a fronteira na região à direita de seu movimento, usamos a Eq. (B.18), o que resulta em

$$F_{\text{T}}^{(+)} = \frac{\pi T^2}{12} \left[ 1 + \left( \frac{1 + \dot{z}}{1 - \dot{z}} \right)^2 \right] , \quad (\text{B.32})$$

que no limite não relativístico ( $\dot{z} \ll 1$ ), é do tipo viscosa, proporcional à velocidade da fronteira.

Na ref. [15] encontramos as expressões para a densidade de energia e a força total que atua sobre a fronteira devido ao banho térmico, uma vez que neste trabalho os autores levaram em consideração o lado esquerdo de movimento da fronteira.

# Apêndice C

## Alguns limites importantes

Neste apêndice, apresentamos os argumentos introdutórios que serão necessários para verificar que as fórmulas exatas dos modos dinâmicos refletidos pela fronteira móvel sob condições de Robin recuperam os casos particulares nas condições de Dirichlet ou Neumann. Ao longo do texto, encontraremos alguns limites importantes associados a funções específicas e que tornarão mais acessível a compreensão dos limites que recuperam os resultados encontrados na literatura.

### C.1 Limites importantes

Antes de tudo, consideremos a seguinte função

$$h(x) = \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta}, \quad (\text{C.1})$$

com  $x, \beta \in [0, \infty]$ . Quanto vale  $\lim_{\beta \rightarrow 0} h(x)$  ?

Chamando  $\gamma = 1/\beta$ , teremos  $\beta \rightarrow 0 \Rightarrow \gamma \rightarrow \infty$ . Assim:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} h(x) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma e^{-\gamma x} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{\gamma}{e^{\gamma x}} = \frac{\infty}{\infty}, \quad (\text{C.2})$$

que é uma indeterminação. Aplicando a regra de L'Hospital:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} h(x) = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{(\gamma)'}{(e^{\gamma x})'} = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{\gamma x}} = 0, \quad (\text{C.3})$$

virá:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} h(x) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta} = 0. \quad (\text{C.4})$$

Seja agora:

$$H(x) = \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta} dx. \quad (\text{C.5})$$

Quanto vale, neste caso,  $\lim_{\beta \rightarrow 0} H(x)$  ?

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} H(x) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta} dx = - \lim_{\beta \rightarrow 0} e^{-\frac{x}{\beta}} \Big|_0^1 = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left(1 - e^{-\frac{1}{\beta}}\right) = 1.$$

Portanto,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} H(x) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta} dx = 1. \quad (\text{C.6})$$

Calculando os mesmos limites anteriores, mas agora para  $\beta \rightarrow \infty$ , teremos:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta} dx = 0 \quad (\text{C.7})$$

e

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} H(x) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta} dx = 0. \quad (\text{C.8})$$

A Figs. C.1, C.2 e C.3, a seguir, mostram o gráfico da função  $e^{-\frac{x}{\beta}}/\beta$  e também a descrição da área abaixo desta curva para diferentes valores de  $\beta$ .

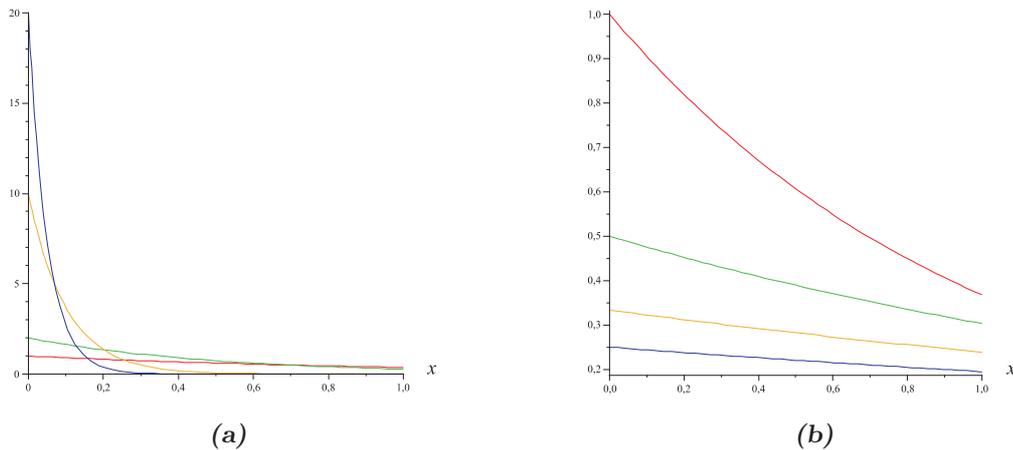


Figura C.1: Gráfico da função  $f(x) = e^{-\frac{x}{\beta}}/\beta$ . (a) Limite  $\beta \rightarrow 0$ . (b) Limite  $\beta \rightarrow \infty$ .

Observando a área abaixo da curva nas Figs C.2 e C.3, mesmo que  $\beta$  assuma valores cada vez menores, existe uma certa "compensação" para que  $H(x)$ , definido em (C.5), mantenha sempre o mesmo valor. Contudo, conforme  $\beta$  assume valores maiores, a área abaixo da curva tende a diminuir até se anular para  $\beta \rightarrow \infty$ , tal como previsto pela equação (C.8).

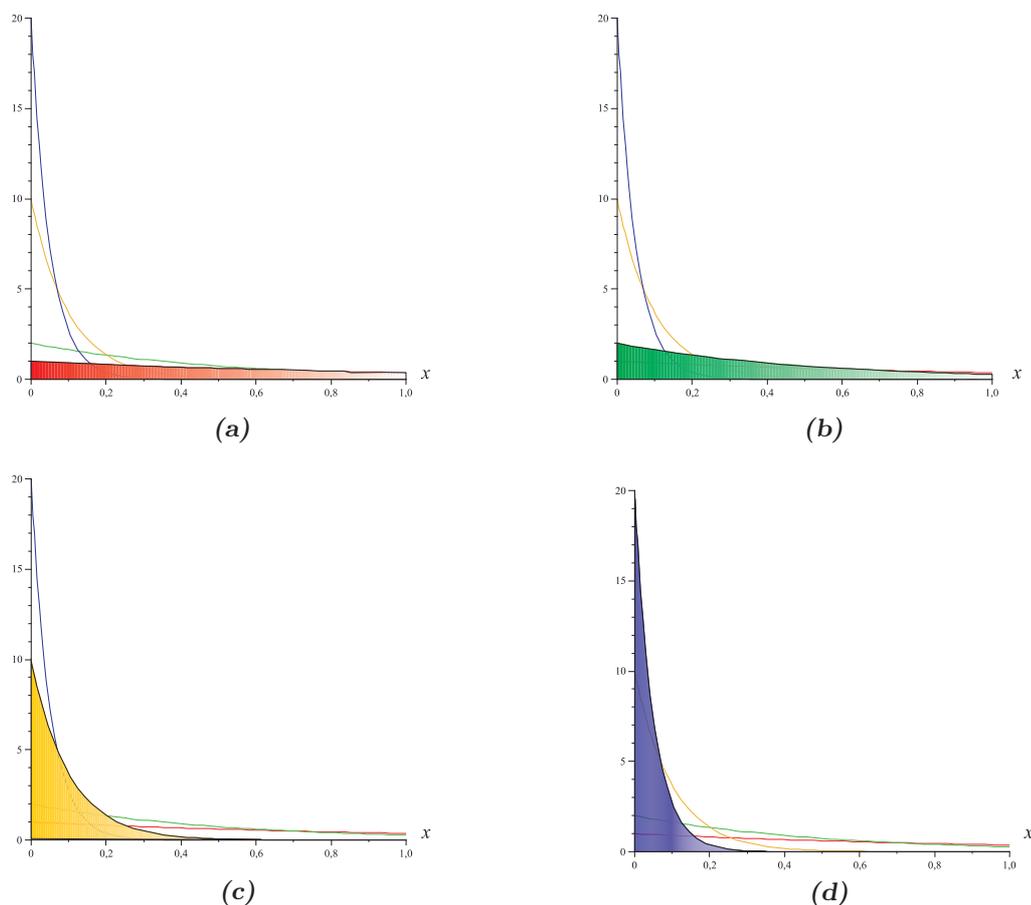


Figura C.2: Área abaixo da curva  $f(x) = e^{-x/\beta}/\beta$  no limite  $\beta \rightarrow 0$ .

Neste contexto, iremos generalizar nossos resultados, fazendo  $x \rightarrow f(x)$ , sendo  $f(x)$  uma função arbitrária, finita, e que satisfaz a seguinte propriedade:  $f(x) > 0 \forall x$ .

Podemos desde já adiantar que o limite da integral de  $e^{-f(x)/\beta}/\beta$  na variável  $x$  para  $\beta \rightarrow \infty$  é nula, de acordo com as propriedades impostas à  $f(x)$ . Com isso, para quaisquer limites de

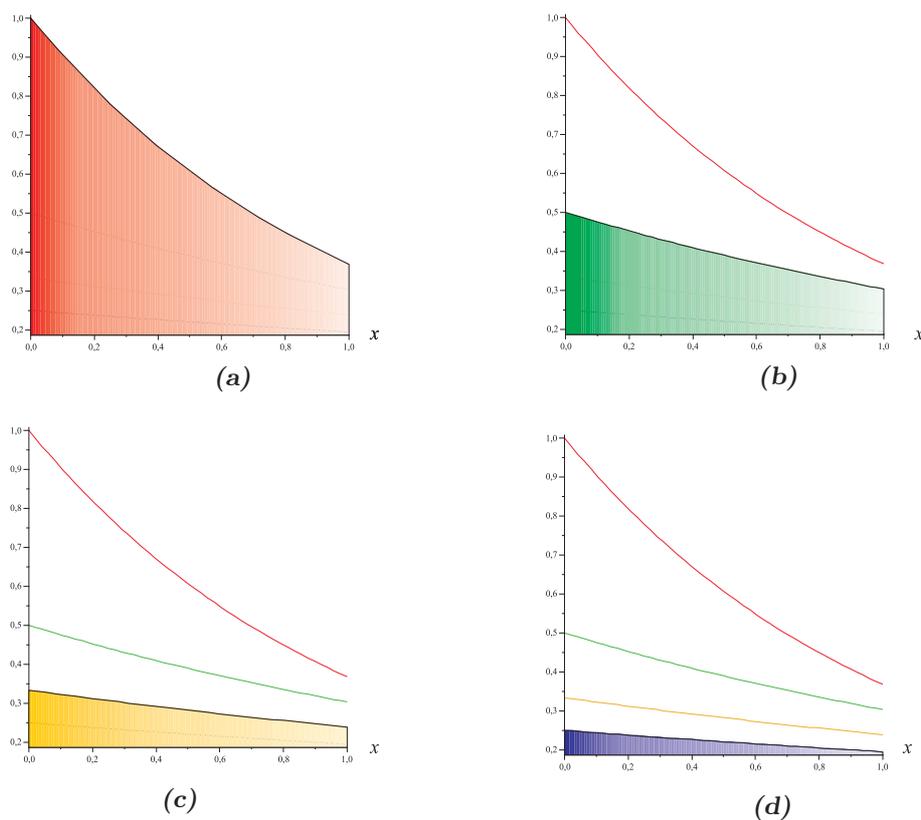


Figura C.3: Área abaixo da curva  $f(x) = e^{-\frac{x}{\beta}}/\beta$  no limite  $\beta \rightarrow \infty$ .

integração no intervalo  $(0, \infty]$ , teremos:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{e^{-\frac{f(x)}{\beta}}}{\beta} dx = 0. \quad (\text{C.9})$$

A partir do resultado obtido em (C.6), queremos mostrar que seu análogo para  $x \rightarrow f(x)$  é também diferente de zero. Seja a seguinte função escrita em termos de uma integral definida:

$$I(x) = \int_0^y \frac{e^{-\frac{f(x)}{\beta}}}{\beta} dx. \quad (\text{C.10})$$

Queremos descobrir quanto vale  $\lim_{\beta \rightarrow 0} I(x)$  ?

Podemos separar a integral  $I(x)$  em uma soma, cujos limites de integração correspondem a intervalos infinitesimais de mesmo comprimento  $\delta$  (ver Fig. C.4):

$$I(x) = \int_0^x \frac{e^{-\frac{f(x')}{\beta}}}{\beta} dx' = \int_0^{\delta_1} \frac{e^{-\frac{f(x')}{\beta}}}{\beta} dx' + \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{e^{-\frac{f(x')}{\beta}}}{\beta} dx' + \dots + \int_{\delta_N}^x \frac{e^{-\frac{f(x')}{\beta}}}{\beta} dx'. \quad (\text{C.11})$$

A expressão anterior nos diz que para cada integral, a variável  $x$  pode assumir valores muito pequenos de tal modo que  $f(x)$  admita expansão em série de potências, em torno de  $x = x_0$ , até a ordem linear.

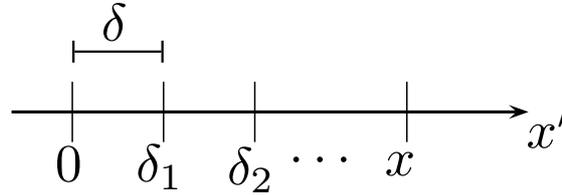


Figura C.4: Intervalos de comprimento infinitesimal  $\delta$  para a integral representada pela Eq. (C.11).

Assumindo que  $x_0 \in (0, x]$ , escolhemos a seguinte aproximação para o argumento da exponencial:

$$e^{-\frac{f_k(x)}{\beta}} \approx e^{-\frac{f_k(x_0) + f'_k(x_0)(x-x_0)}{\beta}} \approx e^{-\frac{f_k(x_0)}{\beta}} e^{-\frac{f'_k(x_0)}{\beta}(x-x_0)} \approx e^{-\frac{f'_k(x_0)}{\beta}(x-x_0)}, \quad (\text{C.12})$$

em que fizemos  $f_k(x_0) = 0$  para garantir o comportamento linear de  $e^{-\frac{f_k(x)}{\beta}}$  para valores muito pequenos de  $x$ , tal como prediz a Eq. (C.6). Com isso, podemos resolver as  $n$  integrais agora escritas em termos de um integrando com dependência linear em  $x$ . Cada integral, de uma forma geral, pode ser resolvida tal como a estrutura a seguir:

$$I_k(x) = \int_a^b \frac{e^{-\frac{f'_k(x_0)}{\beta}(x-x_0)}}{\beta} dx. \quad (\text{C.13})$$

A solução de (C.13) é dada por:

$$I_k(x) = -\frac{1}{f'_k(x_0)} \left[ e^{-\frac{f'_k(x_0)}{\beta}(b-x_0)} - e^{-\frac{f'_k(x_0)}{\beta}(a-x_0)} \right]. \quad (\text{C.14})$$

Então,  $\lim_{\beta \rightarrow 0} I_k(x)$  se torna:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} I_k(x) = \begin{cases} -1/f'_k(x_0), & \text{se } x_0 = b \\ 1/f'_k(x_0), & \text{se } x_0 = a \end{cases}. \quad (\text{C.15})$$

O limite,  $\beta \rightarrow 0$ , da função  $I(x)$  será diferente de zero, tal como no caso da função (C.6), sempre que o ponto  $x_0$  for tomado em um dos extremos dos intervalos definidos em (C.11). Para os demais pontos, tal limite será sempre nulo.

Outro estudo interessante, em termos de generalização, consiste em admitir a seguinte estrutura:

$$J(x) = \int_0^x \frac{e^{-\frac{f(x')}{\beta}}}{\beta} g(x') dx'. \quad (\text{C.16})$$

Quanto será, neste caso,  $\lim_{\beta \rightarrow 0} J(x)$  ?

De maneira análoga ao problema anterior, podemos separar a integral  $J(x)$  em várias somas de integrais com intervalos infinitesimais nos quais tanto  $f(x)$  quanto  $g(x)$  podem admitir aproximação linear em torno de  $x = x_0$ .

$$J(x) = \int_0^{\delta_1} \frac{e^{-\frac{f(x')}{\beta}}}{\beta} g(x') dx' + \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{e^{-\frac{f(x')}{\beta}}}{\beta} g(x') dx' + \dots + \int_{\delta_N}^x \frac{e^{-\frac{f(x')}{\beta}}}{\beta} g(x') dx'. \quad (\text{C.17})$$

Cada integral admite a seguinte estrutura:

$$\begin{aligned} J_k(x) &= \int_a^b \frac{e^{-\frac{f_k(x)}{\beta}}}{\beta} g_w(x) dx = \frac{g_w(x_0)}{\beta} \int_a^b e^{-\frac{f'_k(x_0)}{\beta}(x-x_0)} dx + \\ &+ \frac{g'_w(x_0)}{\beta} \int_a^b (x-x_0) e^{-\frac{f'_k(x_0)}{\beta}(x-x_0)} dx. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

A segunda integral da expressão anterior pode ser resolvida por partes:

$$\begin{aligned} \int_a^b (x-x_0) e^{-\frac{f'_k(x_0)}{\beta}(x-x_0)} dx &= -\frac{\beta}{f'_k(x_0)} (x-x_0) e^{-\frac{f'_k(x_0)}{\beta}(x-x_0)} \Big|_a^b \\ &+ \frac{\beta}{f'_k(x_0)} \int_a^b e^{-\frac{f'_k(x_0)}{\beta}(x-x_0)}. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Contando com o auxílio da Eq. (C.13) e agrupando os termos semelhantes, teremos:

$$\begin{aligned} J_k(x) &= [c_1(\beta) - c_2(\beta)(b-x_0)] e^{-\frac{f'_k(x_0)}{\beta}(b-x_0)} + \\ &- [c_1(\beta) - c_2(\beta)(a-x_0)] e^{-\frac{f'_k(x_0)}{\beta}(a-x_0)}. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Em que

$$c_1(\beta) = -\frac{1}{f'_k(x_0)} \left( g_w(x_0) + \beta \frac{g'_k(x_0)}{f'_k(x_0)} \right) \quad (\text{C.21})$$

e

$$c_2(\beta) = \frac{g'_w(x_0)}{f'_k(x_0)}. \quad (\text{C.22})$$

Desta maneira, o limite da Eq. (C.16) fica

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} J_k(x) = \pm c_1(0) = \begin{cases} -g_w(x_0)/f'_k(x_0), & \text{se } x_0 = b \\ g_w(x_0)/f'_k(x_0), & \text{se } x_0 = a \end{cases}.$$

O que nos leva a mesma interpretação dada para o limite da Eq. (C.13). O limite será diferente de zero sempre quando o ponto  $x_0$ , no qual expandimos em aproximação linear as funções arbitrárias  $f(x)$  e  $g(x)$ , for tomado nos extremos dos intervalos definidos em (C.17) e nulo para os outros pontos.

Os modos dinâmicos de uma fronteira dinâmica de Robin e suas respectivas derivadas e ainda os termos que compõe a densidade de energia admitem termos com estrutura similar a expressão (C.16). Por esta razão, as considerações iniciais apresentadas serão de fundamental importância para recuperarmos os limites particulares para uma fronteira dinâmica de Dirichlet ou Neumann.

# Apêndice D

## Recuperando os casos particulares para condições de Robin

Neste apêndice, vamos discutir os procedimentos tomados para recuperar os casos particulares do problema de uma fronteira móvel sob condições de contorno de Robin. Iniciamos apresentando uma seção que testa a consistência da equação diferencial definida em (3.30). Em seguida, verificamos que os modos dinâmicos e suas respectivas derivadas para os casos Dirichlet e Neumann são recuperadas.

### D.1 Equação diferencial

Seja a Eq. (3.37) que representa os modos refletidos por uma fronteira dinâmica de Robin e sua derivada definida pela Eq. (4.11). Queremos demonstrar que a Eq. (3.30) é satisfeita. Note que:

$$\begin{aligned} 2\beta F'_\omega(u) = & C(\omega, \beta) \left[ -2i\omega\beta p'(u) \frac{(\omega\beta + i)(2\omega\beta - i)}{(2\omega\beta + i)} e^{-i\omega p(u)} + \right. \\ & + \frac{2\omega A'(u)(\omega\beta + i)}{(2\omega\beta + i)} e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} \int_0^u e^{\frac{A(x)}{2\beta}} e^{-i\omega p(x)} dx + \\ & \left. - \frac{4\omega\beta(\omega\beta + i)}{(2\omega\beta + i)} e^{-i\omega p(u)} + \frac{2i\omega\beta A'(u)}{(2\omega\beta + i)} e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

E ainda:

$$A'(u) F_\omega(u) = C(\omega, \beta) \left[ \frac{A'(u) (\omega\beta + i) (2\omega\beta - i)}{(2\omega\beta + i)} e^{-i\omega p(u)} - \frac{2\omega A'(u) (\omega\beta + i)}{(2\omega\beta + i)} e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} \int_0^u e^{\frac{A(x)}{2\beta}} e^{-i\omega p(x)} dx + \frac{2i\omega\beta A'(u)}{(2\omega\beta + i)} e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} \right]. \quad (\text{D.2})$$

Desta forma, sabendo que  $A'(u) = p'(u) + 1$ , teremos:

$$2\beta F'_\omega(u) + A'(u) F_\omega(u) = -C(\omega, \beta) (\omega\beta + i) [(2\omega\beta - i) p'(u) - i] e^{-i\omega p(u)}, \quad (\text{D.3})$$

que é a própria Eq. (3.30) como queríamos demonstrar.

## D.2 Modos dinâmicos e derivadas: Dirichlet

De acordo com os argumentos apresentados no apêndice C, podemos agora verificar que nossos resultados recuperam os modos dinâmicos de uma fronteira de Dirichlet.

Sabendo que os modos refletidos por uma fronteira dinâmica de Robin são dados pela Eq. (3.37), teremos:

$$F_\omega(u) = C(\omega, \beta) \sum_{n=1}^3 \rho_n(\omega, \beta). \quad (\text{D.4})$$

Onde:

$$\rho_1(\omega, \beta) = \frac{(\omega\beta + i) (2\omega\beta - i)}{(2\omega\beta + i)} e^{-i\omega p(u)}, \quad (\text{D.5})$$

$$\rho_2(\omega, \beta) = -\frac{2\omega(\omega\beta + i)}{(2\omega\beta + i)} I(x), \quad (\text{D.6})$$

com:

$$I(x) = \int_0^u e^{-\frac{A(u)-A(x)}{2\beta}} e^{-i\omega p(x)} dx \quad (\text{D.7})$$

e

$$\rho_3(\omega, \beta) = -\frac{2i\omega\beta}{(2\omega\beta + i)} e^{-\frac{A(u)}{2\beta}}. \quad (\text{D.8})$$

Tomando o limite  $\beta \rightarrow 0$  na Eq. (D.4), teremos:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} F_\omega(u) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[ C(\omega, \beta) \sum_{n=1}^3 \rho_n(\omega, \beta) \right]. \quad (\text{D.9})$$

Note que:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} C(\omega, \beta) = \lim_{\beta \rightarrow 0} [4\pi\omega (\omega^2\beta^2 + 1)]^{-1/2} = (4\pi\omega)^{-1/2} \quad (\text{D.10})$$

O primeiro termo de (D.9) ficará:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \rho_1(\omega, \beta) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{(\omega\beta + i)(2\omega\beta - i)}{(2\omega\beta + i)} e^{-i\omega p(u)} = -i(4\pi\omega)^{-1/2} e^{-i\omega p(u)}. \quad (\text{D.11})$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \rho_1(\omega, \beta) = -i(4\pi\omega)^{-1/2} e^{-i\omega p(u)}. \quad (\text{D.12})$$

Podemos ver que o limite da primeira contribuição já recupera os modos dinâmicos para uma fronteira de Dirichlet. O que nos obriga a verificar e concluir que os limites das demais contribuições deverão se cancelar.

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \sum_{n=2}^3 \rho_n(\omega, \beta) = 0 \quad (\text{D.13})$$

O segundo termo de (D.9) ficará:

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow 0} \rho_2(\omega, \beta) &= \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{2\omega\beta(\omega\beta + i)}{(2\omega\beta + i)} \frac{I(x)}{\beta} \\ \lim_{\beta \rightarrow 0} \rho_2(\omega, \beta) &= - \left[ \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{2\omega\beta(\omega\beta + i)}{(2\omega\beta + i)} \right] \left[ \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{I(x)}{\beta} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Note que o termo  $I(x)/\beta$  dado pela Eq. (D.7) tem estrutura similar a Eq. (C.16):

$$I(x) = \int_0^u e^{-\frac{f(x)}{2\beta}} g(x) dx, \quad (\text{D.15})$$

com:

$$f(x) = A(u) - A(x) \quad (\text{D.16})$$

e

$$g(x) = e^{-i\omega p(x)}. \quad (\text{D.17})$$

Neste caso, teremos:

$$f'(x_0) = -A'(x_0) \quad (\text{D.18})$$

e

$$g(x_0) = e^{-i\omega p(x_0)}. \quad (\text{D.19})$$

Portanto, separando a integral definida por (D.7) em  $n$  intervalos de comprimento infinitesimal  $\delta$ , tal como discutido no apêndice C, teremos:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{I(x)}{\beta} = \begin{cases} 2e^{-i\omega p(x_0)}/A'(x_0), \text{ se } x_0 = u \\ -2e^{-i\omega p(x_0)}/A'(x_0), \text{ se } x_0 = u - \delta_n \end{cases}. \quad (\text{D.20})$$

Por outro lado,

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{2\omega\beta(\omega\beta + i)}{(2\omega\beta + i)} = 0. \quad (\text{D.21})$$

O que nos leva a concluir:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \rho_2(\omega, \beta) = 0. \quad (\text{D.22})$$

O terceiro e último termo de (D.9) ficará:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \rho_3(\omega, \beta) = - \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{2i\omega\beta}{(2\omega\beta + i)} e^{-\frac{A(u)}{2\beta}} \quad (\text{D.23})$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \rho_3(\omega, \beta) = 0. \quad (\text{D.24})$$

E como era esperado, a Eq. (D.13) foi satisfeita. Assim, obtemos, finalmente:

$$F_\omega^{(D)}(u) = \lim_{\beta \rightarrow 0} F_\omega(u) = -i(4\pi\omega)^{-1/2} e^{-i\omega p(u)}, \quad (\text{D.25})$$

que corresponde aos modos dinâmicos refletidos por uma fronteira móvel sob condição de contorno de Dirichlet.

Nossos resultados são consistentes, também, para as derivadas dinâmicas de Dirichlet. A partir das Eqs. (4.11) e (D.10), teremos:

$$F'_\omega(u) = C(\omega, \beta) \sum_{n=1}^4 \sigma_n(\omega, \beta). \quad (\text{D.26})$$

Em que:

$$\sigma_1(\omega, \beta) = -i\omega p'(u) \frac{(\omega\beta + i)(2\omega\beta - i)}{(2\omega\beta + i)} e^{-i\omega p(u)}. \quad (\text{D.27})$$

$$\sigma_2(\omega, \beta) = -\frac{2\omega(\omega\beta + i)}{(2\omega\beta + i)} e^{-i\omega p(u)}. \quad (\text{D.28})$$

$$\sigma_3(\omega, \beta) = \frac{A'(u)}{\beta} \frac{\omega(\omega\beta + i)}{(2\omega\beta + i)} I(x). \quad (\text{D.29})$$

com  $I(x)$  dado por (D.15). E ainda:

$$\sigma_4(\omega, \beta) = \frac{i\omega A'(u) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}}}{(2\omega\beta + i)}. \quad (\text{D.30})$$

Tomando o limite  $\beta \rightarrow 0$  na Eq. (D.26), teremos:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} F'_\omega(u) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[ C(\omega, \beta) \sum_{n=1}^4 \sigma_n(\omega, \beta) \right]. \quad (\text{D.31})$$

O primeiro termo de (D.31) ficará:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \sigma_1(\omega, \beta) = -i\omega p'(u) \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[ \frac{(\omega\beta + i)(2\omega\beta - i) e^{-i\omega p(u)}}{(2\omega\beta + i)} \right] = -\omega p'(u) e^{-i\omega p(u)}. \quad (\text{D.32})$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \sigma_1(\omega, \beta) = -\omega p'(u) (4\pi\omega)^{-1/2} e^{-i\omega p(u)}. \quad (\text{D.33})$$

Podemos ver que o limite da primeira contribuição já recupera a derivada do modo dinâmico para uma fronteira de Dirichlet. Ou seja, as demais contribuições deverão se anular:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \sum_{n=2}^4 \sigma_n(\omega, \beta) = 0. \quad (\text{D.34})$$

O segundo termo de (D.31) ficará:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \sigma_2(\omega, \beta) = -2\omega \lim_{\beta \rightarrow 0} \left[ \frac{(\omega\beta + i) e^{-i\omega p(u)}}{(2\omega\beta + i)} \right] = -2\omega e^{-i\omega p(u)}.$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \sigma_2(\omega, \beta) = -2\omega (4\pi\omega)^{-1/2} e^{-i\omega p(u)}. \quad (\text{D.35})$$

O terceiro termo de (D.31) será:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \sigma_3(\omega, \beta) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{A'(u) \omega (\omega\beta + i) I(x)}{(2\omega\beta + i) \beta} \quad (\text{D.36})$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \sigma_3(\omega, \beta) = \left[ \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{A'(u) \omega C(\omega, \beta) (\omega\beta + i)}{(2\omega\beta + i)} \right] \left[ \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{I(x)}{\beta} \right]. \quad (\text{D.37})$$

Usando (D.20) para  $x_0 = u$  no segundo fator da Eq. (D.37), virá:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{I(x)}{\beta} = 2e^{-i\omega p(u)} / A'(u) \quad (\text{D.38})$$

e notando que

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{A'(u) \omega (\omega\beta + i)}{(2\omega\beta + i)} = \omega A'(u), \quad (\text{D.39})$$

teremos, para o limite da terceira parcela:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \sigma_3(\omega, \beta) = 2\omega (4\pi\omega)^{-1/2} e^{-i\omega p(u)}. \quad (\text{D.40})$$

O quarto e último termo de (D.31) ficará:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \sigma_4(\omega, \beta) = i\omega A'(u) \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{e^{-A(u)/2\beta}}{(2\omega\beta + i)} \quad (\text{D.41})$$

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \sigma_4(\omega, \beta) = 0. \quad (\text{D.42})$$

Note que, tal como esperado, a Eq. (D.34) for satisfeita. Podemos, então, concluir:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} F'_\omega(u) = F'_\omega{}^{(D)}(u) = -\omega p'(u) (4\pi\omega)^{-1/2} e^{-i\omega p(u)}, \quad (\text{D.43})$$

que corresponde a derivada dos modos dinâmicos refletidos por uma fronteira móvel sob condição de contorno de Dirichlet.

## D.3 Modos dinâmicos e derivadas: Neumann

Para recuperarmos os modos dinâmicos nestas condições de contorno, usaremos o mesmo procedimento para o caso Dirichlet. Partindo de (D.4), mas, tomando o limite  $\beta \rightarrow \infty$ , teremos:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} F_\omega(u) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[ C(\omega, \beta) \sum_{n=1}^3 \rho_n(\omega, \beta) \right] \quad (\text{D.44})$$

Note que:

$$C(\omega, \beta) = \frac{\mathcal{N}(\omega, \beta)}{\omega\beta}, \quad (\text{D.45})$$

$$\mathcal{N}(\omega, \beta) = [4\pi\omega(1 + 1/\omega^2\beta^2)]^{-1/2}. \quad (\text{D.46})$$

E ainda:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathcal{N}(\omega, \beta) = (4\pi\omega)^{-1/2}. \quad (\text{D.47})$$

O primeiro termo de (D.44) ficará:

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \rho_1(\omega, \beta) &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(\omega, \beta)}{\omega\beta} \frac{(\omega\beta + i)(2\omega\beta - i)}{(2\omega\beta + i)} e^{-i\omega p(u)} \\ &= \left[ \lim_{\beta \rightarrow \infty} \mathcal{N}(\omega, \beta) \right] \left[ \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{(1 + i/\omega\beta)(2 - i/\omega\beta)}{(2 + i/\omega\beta)} e^{-i\omega p(u)} \right] \\ &= (4\pi\omega)^{-1/2} e^{-i\omega p(u)}. \end{aligned} \quad (\text{D.48})$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \rho_1(\omega, \beta) = (4\pi\omega)^{-1/2} e^{-i\omega p(u)} \quad (\text{D.49})$$

O que mostra que a primeira parcela já recupera os modos dinâmicos de uma fronteira de Neumann. Tal como no caso anterior, devemos verificar que as demais contribuições irão se cancelar.

Assumindo  $f(x)$  e  $g(x)$  dados pelas Eqs. (D.16) e (D.17), respectivamente, e usando a Eq. (C.9), obtemos:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \rho_2(\omega, \beta) = - \left[ \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{2\mathcal{N}(\omega, \beta)(\omega\beta + i)}{(2\omega\beta + i)} \right] \left[ \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^u e^{-\frac{f(x)}{2\beta}} (g(x)/\beta) dx \right]. \quad (\text{D.50})$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \rho_2(\omega, \beta) = 0. \quad (\text{D.51})$$

O terceiro e último termo de (D.9) ficará:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \rho_3(\omega, \beta) = - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{2i\mathcal{N}(\omega, \beta) e^{-\frac{A(u)}{2\beta}}}{(2\omega\beta + i)}. \quad (\text{D.52})$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \rho_3(\omega, \beta) = 0. \quad (\text{D.53})$$

Podemos, então, concluir:

$$F_\omega^{(N)}(u) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} F_\omega(u) = (4\pi\omega)^{-1/2} e^{-i\omega p(u)}, \quad (\text{D.54})$$

que corresponde aos modos dinâmicos refletidos por uma fronteira móvel sob condição de contorno de Neumann.

Usaremos raciocínio análogo ao caso das derivadas dos modos dinâmicos de Dirichlet. Assim, tomando o limite  $\beta \rightarrow \infty$  na Eq. (D.26), teremos:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} F'_\omega(u) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} C(\omega, \beta) \sum_{n=1}^4 \sigma_n(\omega, \beta). \quad (\text{D.55})$$

O primeiro termo de (D.55) ficará:

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \sigma_1(\omega, \beta) &= -i\omega p'(u) \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(\omega, \beta) (\omega\beta + i) (2\omega\beta - i)}{\omega\beta (2\omega\beta + i)} e^{-i\omega p(u)} \\ &= -i\omega p'(u) (4\pi\omega)^{-1/2} e^{-i\omega p(u)}. \end{aligned} \quad (\text{D.56})$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \sigma_1(\omega, \beta) = -i\omega p'(u) (4\pi\omega)^{-1/2} e^{-i\omega p(u)}. \quad (\text{D.57})$$

Podemos ver que o limite da primeira contribuição já recupera a derivada do modo dinâmico para uma fronteira de Neumann, o que nos leva a concluir que as demais contribuições irão se anular.

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^4 \sigma_n(\omega, \beta) = 0. \quad (\text{D.58})$$

O segundo termo de (D.55) ficará:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \sigma_2(\omega, \beta) = - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(\omega, \beta) (\omega\beta + i)}{\beta (2\omega\beta + i)} e^{-i\omega p(u)} = 0. \quad (\text{D.59})$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \sigma_2(\omega, \beta) = 0. \quad (\text{D.60})$$

O terceiro termo de (D.55) será, usando as Eqs. (D.16), (D.17) e (C.9):

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \sigma_3(\omega, \beta) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[ \frac{\mathcal{N}(\omega, \beta) A'(u) (\omega\beta + i)}{\beta (2\omega\beta + i)} \int_0^u \frac{e^{-\frac{f(x)}{2\beta}} g(x)}{\beta} dx \right]. \quad (\text{D.61})$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \sigma_3(\omega, \beta) = 0 \quad (\text{D.62})$$

O quarto e último termo de (D.55) ficará:

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \sigma_4(\omega, \beta) = iA'(u) \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{N}(\omega, \beta)}{\beta(2\omega\beta + i)} e^{-\frac{A(u)}{2\beta}}. \quad (\text{D.63})$$

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \sigma_4(\omega, \beta) = 0. \quad (\text{D.64})$$

Mais uma vez, mostramos que nossas equações estão consistentes, uma vez que a Eq. (D.58) foi satisfeita. Podemos, então, concluir:

$$F_\omega^{(N)}(u) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} F'_\omega(u) = -i\omega p'(u) (4\pi\omega)^{-1/2} e^{-i\omega p(u)}, \quad (\text{D.65})$$

que corresponde a derivada dos modos dinâmicos refletidos por uma fronteira móvel sob condição de contorno de Neumann.

# Referências Bibliográficas

- [1] G.T. Moore, *J Math. Phys.* **11**, 2679, (1970)
- [2] B.S DeWitt, *Phys. Rep.* **19**, 295, (1975)
- [3] S.A. Fulling e P. C. W. Davies, *Proc. R. Soc. London A* **348**, 393, (1976)
- [4] P. C. W. Davies e S.A. Fulling, *Proc. R. Soc. London A* **354**, 59 (1997)
- [5] P. C. W. Davies e S.A. Fulling, *Proc. R. Soc. London A* **356** 237 (1997)
- [6] P. Candelas e D.J. Raine, *J. Math. Phys.* **17**, 2101 (1976)
- [7] P. Candelas e D. Deutsch, *Proc. R. Soc. London A* **354**, 79 (1977)
- [8] W.R. Walker e P.C.W. Davies, *J. Phys. A* **15**, L477 (1982)
- [9] C.K. Law, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1931 (1994)
- [10] Y. Wu, K.W. Chan, M.C. Chu e P.T. Leung, *Phys. Rev. A* **59**, 662 (1999); P Wegrzyn *J. Phys. B* **40**, 2621 (2007)
- [11] V.V. Dodonov, A.B. Klimov e D.E. Nikonov, *J. Math. Phys.* **34**, 2742 (1993)
- [12] D.A.R. Dalvit e F. D. Mazzitelli, *Phys. Rev. A* **57**, (1988)
- [13] M. T. Jaekel e S. Reynaud, *J. Phys. I (France)* **3** 339, (1993); M. T. Jaekel e S. Reynaud, *Phys. Lett. A* **172** 319, (1993); L.A.S. Machado, P. A. Maia Neto e C. Farina, *Phys. Rev. D* **66**, 105016 (2002).
- [14] G. Plunien, R. Schutzhold e G. Soff, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 1882 (2000)
- [15] D. T. Alves, E. R. Granhen e M. G. Lima, *Phys. Rev. D* **77**, 125001 (2008)

- [16] J. Hui, S. Qing-Yun e W. Jian-Sheng, *Phys. Lett. A* **268**, 174 (2000); R. Schutzhold, G. Plunien e G. Soff, *Phys. Rev. A* **65**, 043820 (2002); G. Schaller, R. Schutzhold, G. Plunien e G. Soff, *Phys. Rev. A* **66**, 023812 (2002).
- [17] D. T. Alves, C. Farina e P.A. Maia Neto, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 11333 (2003)
- [18] V.V. Dodonov, A. Klimov e V.I. Man'ko, *Phys. Lett. A* **149**, 225 (1990)
- [19] M.A. Andreatta e V.V. Dodonov, *J. Phys. A* **33**, 3209 (2000)
- [20] M. Razavy e J. Terning, *Phys. Rev. D* **31**, 307 (1985); G. Calucci, *J. Phys. A* **25**, 3873 (1992); C.K. Law, *Phys. Rev. A* **49**, 433 (1994); C.K. Law, *Phys. Rev. A* **51**, 2537 (1995); V.V. Dodonov e A. B. Klimov, *Phys. Rev. A* **53**, 2664 (1996); D. F. Mundarain e P.A. Maia Neto, *Phys. Rev. A* **57**, 1379 (1998).
- [21] J. Haro, *J. Phys. A* **38**, L307 (2005).
- [22] M. Castagnino e R. Ferraro, *Ann. Phys.* **154**, 1-23 (1984).
- [23] C. K. Cole e W. C. Schieve, *Phys. Rev. A* **52**, 4405 (1995).
- [24] D. T. Alves e E. R. Granhen, *Phys. Rev. A* **77**, 015808 (2008).
- [25] B. Mintz, C. Farina, P.A. Maia Neto e R.B. Rodrigues, *J. Phys. A* **39**, 6559 (2006).
- [26] B. Mintz, C. Farina, P.A. Maia Neto e R.B. Rodrigues, *J. Phys. A* **39**, 11325 (2006).
- [27] B. Mintz, Dissertação de mestrado, **UFRJ** (2007).
- [28] M.G. Lima, Dissertação de mestrado, **UFPA** (2008).
- [29] D. T. Alves, E. R. Granhen, M. G. Lima e H.O. Silva, hep-th/09031305
- [30] D. T. Alves, E. R. Granhen, M. G. Lima e A.L.C. Rego, *J. Phys. Conf. Series* **161**, 012033 (2009)
- [31] D. T. Alves, E. R. Granhen, M. G. Lima, H.O. Silva e A.L.C. Rego, *J. Phys. Conf. Series* **161**, 012032 (2009)
- [32] D.A.R. Dalvit, F. D. Mazzitelli e O. Millán, *J. Phys. A* **39**, 6261 (2006).
- [33] M. T. Jaekel e S. Reynaud, *J. Phys. I (France)* **3** 339, (1993)

- [34] C. K. Cole e W. C. Schieve, *Phys. Rev. A* **64**, 023813-1 (2001).
- [35] T.H. Boyer, *Am. J. Phys.* **71**, 990 (2003).
- [36] R.J. Glauber, *Phys. Rev.* **131**, 2766 (1963); R.J. Glauber, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 84 (1963).
- [37] W. Greiner e J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer-Verlag, Berlim (1996).
- [38] G. Plunien, B. Müller e W. Greiner, *Phys. Rep.* **134**, 2(1986).
- [39] M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, New York: Dover, (1972). I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals Series and Products*, Academic Press, New York (1965).
- [40] D.T. Alves, *Tese de Doutorado*, **CBPF** (2002).