



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Efeito Casimir em Teorias de Chern-Simons

Penn Lee Menezes Rodrigues

Orientadora: Prof^a Dr^a Silvana Perez

Belém-Pará

2011

Efeito Casimir em Teorias de Chern-Simons

Penn Lee Menezes Rodrigues

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Pará (PPGF-UFPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Orientadora: Prof^a Dr^a Silvana Perez

Banca Examinadora:

Prof^a Dr^a Silvana Perez (Orientadora)

Prof. Dr. Paulo Américo Maia Neto (Membro Externo)

Prof. Dr. Danilo Teixeira Alves (Membro Interno)

Prof. Dr. João Felipe Medeiros Neto (Suplente)

Belém-Pará

2011

Resumo

Efeito Casimir em Teorias de Chern-Simons

Penn Lee Menezes Rodrigues

Orientadora: Prof^a Dr^a Silvana Perez

Resumo da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Pará (PPGF-UFPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

Nesta dissertação obtemos a força de Casimir a temperatura finita entre duas linhas paralelas sujeitas a condição de fronteira do tipo linhas mistas, no contexto da teoria de Maxwell-Chern-Simons em $(2 + 1)$ dimensões. Além disso, analisamos a simetria de inversão de temperatura apresentada pela energia livre de Helmholtz do modelo para diferentes condições de fronteira.

Iniciamos estudando aspectos gerais do formalismo de Matsubara no intuito de introduzirmos efeitos térmicos na teoria; também analisamos aspectos gerais da teoria de MCS em $(2 + 1)$ dimensões. Posteriormente, revisitamos o cálculo da força de Casimir para o caso de duas linhas paralelas infinitamente permeáveis magneticamente a temperatura nula e finita, bem como o caso de linhas mistas a temperatura nula, onde tomamos uma linha perfeitamente condutora eletricamente e outra infinitamente permeável magneticamente.

Em seguida, apresentamos novos resultados envolvendo a força de Casimir a temperatura finita com condições de fronteira do tipo linhas mistas. Por último, analisamos a simetria de inversão de temperatura associada à energia livre de Helmholtz do modelo, mostrando que mesmo para condições mistas é possível obter uma espécie de simetria residual, em analogia a resultados existentes para a eletrodinâmica em $(3+1)$ dimensões.

Belém-Pará

2011

Abstract

Casimir Effect in Chern-Simons Theories

Penn Lee Menezes Rodrigues

Orientadora: Prof^a Dr^a Silvana Perez

Abstract da Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Pará (PPGF-UFGPA) como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Ciências (Física).

In this work we study the Casimir force for Maxwell-Chern-Simons (MCS) theories in (2+1) dimensions. In particular for the bidimensional case, we consider different boundary conditions and present new results concerning the influence of the temperature in the phenomenon. We also analyse the Temperature Inversion Symmetry, considering both the massless and massive cases.

We start by studying general aspects from Matsubara formalism with the goal of introduce thermal effects in the theory; we also analyse general aspects of (2+1)-dimensional MCS theory. Then, we review the Casimir force for the infinite magnetically permeable lines at both zero and finite temperature, as well as the mixed lines at zero temperature, for which we take one line infinite magnetically permeable and the other perfect conducting.

We next present new results concerning the Thermal Casimir force for the case of mixed lines. Finally, we analyse the Temperature Inversion Symmetry associated with the Helmholtz free energy, showing that even for the mixed lines boundary conditions it is still possible to define a residual symmetry, the result being analogous to previous results for the eletrodynamics in (3+1) dimensions.

Belém-Pará

2011

*“Para Kely,
Pedro e Paulo”*

*Foi bom para mim
ter passado pela aflição,
para que aprendesse os
teus decretos.*

Sl 119:71

Agradecimentos

No decorrer da minha vida acadêmica como aluno de Pós-Graduação angariei muitas amizades que influenciaram positivamente no desenvolvimento desta dissertação. No entanto, antes de agradecê-las, quero agradecer em primeiro lugar a Deus, pois não posso negar a minha fé e esperança em Jesus Cristo:

*Somente a Ti, ó Senhor Deus, a Ti somente,
e não a nós, seja dada a glória por causa
do Teu amor e da Tua fidelidade.*

Sl 115:1

Em segundo lugar, como não poderia deixar de ser, quero agradecer a minha família: a minha amada esposa Kely Rodrigues, pelo apoio, pela motivação e, acima de tudo, pela paciência; aos meus filhos: Pedro e Paulo, por me fazerem querer ser uma pessoa melhor. Deixo aqui também o agradecimento aos meus pais, Jorge e Selma Rodrigues, pela fé que aplicaram na minha pessoa acreditando que eu poderia ir além das minhas limitações.

Na sequência de prioridades, quero agradecer a Prof^ª Dr^ª Silvana Perez pela orientação, pela paciência e dedicação que tem dispendido ao longo desses dois anos de trabalho. Além disso, quero agradecer ao apoio e as discussões altamente frutíferas do nosso grupo de pesquisa: Soraya, Charles, Tércio, Tanísia e Carol.

Aproveito também para expressar a minha gratidão à Capes pelos dois anos de bolsa que permitiram me dedicar aos estudos que culminaram neste trabalho.

Agradeço também a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para a minha formação acadêmica e para a minha vida pessoal.

Além disso, pelas massarocas compartilhadas, pela amizade e momentos de descontração, agradeço aos colegas: Leandro, Orival, Alberto, Wallace, Fernando, Alex, Hector, Neto, Messias, João Paulo, Eduardo e Elaine.

Pela força, pelas orações e pela amizade, quero agradecer ao Pr César Jucá e aos irmãos em Cristo da IEADMI - Pedreira III.

Para finalizar, o que dizer senão:

*Combati o bom combate,
completei a carreira, guardei a fé.*

2Tm 4:7

Sumário

Introdução	9
1 Aspectos Gerais	12
1.1 O Operador Densidade	13
1.2 Formalismo de Tempo Imaginário para a TQC	16
1.3 A Teoria de Chern-Simons	20
2 Efeito Casimir em (2+1) dimensões a Temperatura Nula	24
2.1 Considerações Gerais	25
2.2 Condições Simétricas de Fronteira a Temperatura Nula	29
2.3 Linhas Mistas a Temperatura Nula	33
3 Efeito Casimir em (2+1) dimensões a Temperatura Finita	36
3.1 Condições Simétricas de Fronteira a Temperatura Finita	37
3.2 Linhas Mistas a Temperatura Finita	40
3.3 Simetria de Inversão de Temperatura	44
Considerações Finais	46
A Teorias de Chern-Simons em (3+1) dimensões	47
A.1 Considerações Gerais	48
A.2 As Equações de Movimento	48
A.3 Efeito Casimir em Modelos MCS em (3+1) Dimensões.	51
Referências Bibliográficas	53

Introdução

Na matemática, estuda-se a simetria de um dado objeto fazendo o levantamento de todas as operações que não o modificam. Os geradores destas operações são agrupados em conjuntos satisfazendo determinadas propriedades: definimos assim a Teoria de Grupos [1, 2]. Entre os grupos de grande interesse na matemática estão os grupos de Lie, pois por meio deles e de uma propriedade chamada de homomorfismo pode-se mapear diversas grandezas invariantes de outros grupos.

Com o advento da Mecânica Quântica foi possível, a partir dos trabalhos de Wigner [3] em 1939, implementar a noção de representação de grupos de simetria de Lie no estudo de sistemas físicos. Dessa forma, Wigner e outros perceberam que a invariância era um conceito fundamental para o entendimento de novos fenômenos físicos e o desenvolvimento de teorias apropriadas.

Historicamente o desenvolvimento da teoria de Chern-Simons (CS) não é diferente ao da teoria de grupos. Inicialmente, era uma teoria puramente matemática, que surgiu da tentativa de se derivar uma fórmula combinatorial para um invariante sobre o Manifold quadri-dimensional, e cuja análise se baseava em uma abordagem topológica de invariantes geométricos e formas características sobre tal espaço. A estrutura original da teoria foi apresentada pela primeira vez por Shiing-Shen Chern and James Simons em 1974, no trabalho intitulado “Formas Características e Invariantes Geométricos” (do original “*Characteristic Forms and Geometric Invariants*”) [4]. Somente posteriormente, devido às suas características bastantes peculiares, foi possível aplicá-la ao estudo de diversos sistemas físicos planares, que vão desde a matéria condensada até a cosmologia e gravitação.

Em particular, a teoria de CS ganhou destaque quando desempenhou um papel fundamental na explicação dos fenômenos planares como, por exemplo, o Efeito Hall Quântico e a supercondutividade de alta temperatura [5, 6]. Além disso, essas abordagens permitiram observar que o modelo de CS é um invariante de calibre, viola a paridade e a invariância por reversão temporal. Merece destaque também o fato de que quando considerada conjuntamente com outros modelos, esta teoria apresenta características

interessantes que estão relacionadas com a geração de massa para o fóton topológico, no caso do termo de Maxwell; e ao atrelamento de um fluxo magnético a partículas carregadas que interagem com o potencial vetor, no caso de campos de matéria.

Uma outra discussão importante para este trabalho é um pouco mais antiga que a teoria CS e está relacionada à força de atração entre dois corpos neutros. Embora estudos nesta direção remontem do século XIX, somente a partir de 1948 o fenômeno foi descrito satisfatoriamente por uma teoria, pois nesse ano Hendrik Casimir previu que duas placas condutoras descarregadas, muito próximas uma da outra, deveriam exercer uma interação de atração mútua [7]. De fato, em uma análise histórica, podemos dizer que a origem dos estudos relacionados com a atração mútua entre objetos neutros é anterior aos trabalhos de Casimir, sendo que, já na época de Casimir, acreditava-se estar relacionada às forças intermoleculares fracas analisadas por van der Waals quando ele estudava moléculas neutras em 1873 [8]. Casimir porém, propõe uma elegante análise utilizando o formalismo de Teoria Quântica de Campos.

Sabemos hoje que esta força de atração se deve as oscilações do vácuo entre as placas, uma vez que partículas virtuais são criadas e aniquiladas a todo momento, e isso ocasiona flutuações de energia nessas regiões. Vale salientar que essas considerações dizem respeito a um tratamento via temperatura nula, pois para temperatura finita devemos considerar também flutuações devido ao banho térmico que as partículas estão sujeitas [9, 10].

Além das propriedades acima, cabe ressaltarmos uma característica interessante vinculada ao efeito Casimir: o tipo de interação entre as placas depende da natureza delas. Esta característica do modelo é chamada de efeito de condições de fronteira [11, 12]. Na literatura encontramos casos onde os autores consideram diversos tipos de condições de fronteiras como, por exemplo, duas linhas perfeitamente condutoras eletricamente (PCE) [13], para as quais a força é atrativa; linhas circulares PCE¹ [14], para as quais a força é atrativa; duas linhas infinitamente permeáveis magneticamente (IPM)[15], para o qual a força é atrativa; e o caso de linhas mistas, onde é considerada uma linha IPM e outra PCE [15, 16], para a qual a força é repulsiva. É importante relatarmos que sistemas que apresentam força de Casimir repulsiva têm despertado grande interesse, pois trabalhos recentes apresentam diversas aplicações na construção de sistemas nanoeletromecânicos [17].

Analisando o estudo das flutuações do vácuo na teoria de Maxwell-Chern-Simons (MCS) em (2+1)

¹Por uma questão de simplicidade passaremos a utilizar somente as siglas PCE e IPM quando nos referirmos às linhas Perfeitamente Condutoras Eletricamente e às linhas Infinitamente Permeáveis Magneticamente, respectivamente.

dimensões, é possível estabelecer uma relação entre a massa topológica do fóton associado ao potencial vetor com a força de Casimir entre duas placas paralelas inseridas neste campo. Em outras palavras, via cálculo da força de Casimir, é possível estimar a ordem de grandeza da massa topológica dos fótons do modelo MCS. Essa foi exatamente a motivação que levou Milton e Jack a calcular a força de Casimir entre duas linhas PCE [13]. Neste trabalho, os autores obtiveram resultados análogos aos obtidos por Casimir [7] para a eletrodinâmica em (3+1) dimensões.

Nesta dissertação iremos analisar os efeitos térmicos na teoria de MCS, considerando diferentes condições de contorno. No capítulo 1, revisitaremos os principais aspectos relacionados com a construção de observáveis a temperatura finita via formalismo de Matsubara. Apresentaremos também aspectos gerais relacionados com o modelo de MCS em $(2 + 1)$ dimensões. No capítulo 2, apresentaremos o cálculo da força de Casimir via método das funções de Green, explicitando a influência das diferentes condições de fronteiras sobre as equações que determinam a expressão para a força. Especificamente, iremos revisar o cálculo da força de Casimir para linhas IPM e para linhas mistas a temperatura nula, resultados estes obtidos em [18].

No capítulo 3, analisamos a força de Casimir a temperatura finita para o caso de linhas IPM e apresentamos os nossos resultados para o caso de linhas mistas a temperatura finita. Veremos como a simetria de inversão de temperatura (SIT) se manifesta para linhas PCE no limite de massa nula, bem como mostraremos que para o caso de linhas mistas, no limite de massa nula, a força de Casimir apresenta simetria de inversão de temperatura do tipo residual, de acordo com a definição encontrada em [19]. Para finalizar, apresentamos algumas considerações finais pertinentes ao trabalho.

Capítulo 1

Aspectos Gerais

Teoria de Campos a Temperatura Finita

No desenvolvimento deste trabalho, ao passarmos do estudo à temperatura nula para a abordagem de temperatura finita, utilizaremos o formalismo de tempo imaginário ou formalismo de Matsubara¹. Este formalismo consiste em um mapeamento da teoria quântica de campos usual de tal forma que a variável temporal sofre uma rotação no plano complexo, atingindo o eixo imaginário negativo. Após a rotação, a variável de tempo passa a ser interpretada como temperatura e, assim, esse formalismo é mais apropriado para descrever sistemas estatísticos em equilíbrio térmico. Os observáveis da teoria são determinados a partir da função de partição e esta, por sua vez, é uma função do operador densidade. Vemos assim que este operador assume um papel fundamental na teoria estatística quântica, contendo todas as informações acerca do sistema estudado. Este é o motivo de iniciarmos este capítulo com uma revisão dos principais aspectos concernentes a ele.

¹Este formalismo foi apresentado por Matsubara em 1955 [21], e atualmente os principais aspectos do formalismo podem ser encontrados em vários livros texto sobre teoria quântica de campos a temperatura finita, como por exemplo [22, 23, 24].

1.1 O Operador Densidade

A abordagem que utilizaremos nesta dissertação consiste em um tratamento da teoria de campos via Física Estatística Quântica, na qual o ente físico fundamental é dado pelo operador densidade. Para entender sua importância na teoria estatística quântica iniciaremos o estudo com uma revisão de alguns conceitos e de algumas importantes características da formulação da Mecânica Quântica via operador densidade².

Na formulação usual da Mecânica Quântica postula-se que o estado físico de um sistema quântico é completamente descrito por um vetor de estado (ou *ket*) $|\psi\rangle$ ³. Nessa concepção, o vetor de estado contém a máxima informação que a Mecânica Quântica permite atribuir ao sistema, dentre as limitações impostas pelo Princípio de Incerteza de Heisenberg.

Os *kets* pertencem a um espaço vetorial complexo de dimensão infinita, denominado espaço de Hilbert, sobre o qual é definida uma álgebra de composição e é possível escolher um conjunto de vetores ortonormais formando uma base completa. Além disso, sobre o espaço de Hilbert definimos os operadores (simbolizados por \hat{O}), que são entes responsáveis pelas medidas dos observáveis físicos. Os possíveis resultados da atuação de um operador sobre um *ket* são dados pelos autovalores da equação de autovalores:

$$\hat{O} |\nu_k\rangle = \nu_k |\nu_k\rangle, \quad (1.1)$$

onde $|\nu_k\rangle$ é um autoestado do operador \hat{O} e ν_k é o autovalor associado a este autoestado. Por outro lado, associado a cada estado físico representado por um particular vetor de estado $|\psi\rangle$ temos a probabilidade de, na medida de \hat{O} em $|\psi\rangle$, obter uma de suas várias possibilidades de autovalor ν_k , dada por:

$$p_k = |\langle \nu_k | \psi \rangle|^2 = \langle \psi | \hat{P}_k | \psi \rangle, \quad (1.2)$$

onde $\hat{P}_k = |\nu_k\rangle \langle \nu_k|$ é o operador, que após a medida, projeta o estado do sistema físico para o estado $|\nu_k\rangle$ [28].

Para finalizar a coleção de postulados que estruturam a teoria quântica, o vetor de estado deve satisfazer uma equação de evolução temporal dada pela equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle. \quad (1.3)$$

²Neste tópico abordamos apenas aspectos gerais concernentes ao operador densidade, para mais detalhes ver, por exemplo: [25, 26, 27].

³Estamos adotando aqui a notação de Dirac, para mais detalhes ver, por exemplo [28, 29, 30].

Neste ponto é importante ressaltarmos que a abordagem acima só fornece previsões para coleções de sistemas identicamente preparados (ditos *ensembles* puros), todos eles representados pelo mesmo *ket*, ou seja, quando temos o perfeito conhecimento do estado em que o sistema se encontra.

No entanto, em uma abordagem estatística, lidamos com sistemas nos quais, em geral, parte de seus elementos está no *ket* $|\psi_1\rangle$, outra parte está no *ket* $|\psi_2\rangle$ e assim por diante. Os *ensembles* que possuem essa característica são ditos mistos e não nos fornecem toda a informação necessária para um tratamento quântico via Mecânica Quântica usual. Ao invés disso, podemos apenas associar certas probabilidades $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$, de que um particular sistema do *ensemble*, escolhido aleatoriamente, esteja nos estados quânticos descritos pelos *kets* $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_m\rangle$, respectivamente. O *ensemble* pode, então, ser interpretado como uma superposição incoerente (que não pode ser expressa por uma combinação linear) de estados, com ω_m representando a fração de sistemas no estado $|\psi_m\rangle$.

Podemos ainda supor que esses *kets* são normalizados,

$$\langle \psi_m | \psi_m \rangle = 1, \quad (1.4)$$

mas não podemos, *a priori*, afirmar que eles são ortogonais. Além disso, as probabilidades devem satisfazer:

$$\omega_m \geq 0, \quad \sum_m \omega_m = 1. \quad (1.5)$$

Em analogia à Eq.(1.2), podemos obter a probabilidade de, na medida do observável \hat{O} em um estado físico $|\psi_m\rangle$, obter o resultado ν_k , como sendo dada por:

$$p_k^m = \langle \psi_m | \hat{P}_k | \psi_m \rangle. \quad (1.6)$$

A partir da Eq. (1.6) podemos definir a probabilidade de, na medida no *ensemble*, obtermos o resultado ν_k como sendo a seguinte média ponderada:

$$p_k^{ens} = \sum_m \omega_m p_k^m \quad (1.7)$$

$$= \sum_m \omega_m \langle \psi_m | \hat{P}_k | \psi_m \rangle. \quad (1.8)$$

Usando a propriedade $Tr |\nu\rangle \langle u| = \langle u | \nu \rangle$ podemos reescrever a probabilidade acima como:

$$p_k^{ens} = Tr \left[\left(\sum_m \omega_m |\psi_m\rangle \langle \psi_m| \right) \hat{P}_k \right], \quad (1.9)$$

de modo que toda a informação sobre o *ensemble* fica restrita ao operador contido na parte entre parênteses. Este operador é denominado Operador Densidade $\hat{\rho}^4$,

⁴Note, na Eq.(1.10), que as Eqs.(1.4) e (1.5) são necessárias para garantir que $Tr \rho = \sum_m \omega_m \langle \psi_m | \psi_m \rangle = 1$.

$$\hat{\rho} = \sum_m \omega_m |\psi_m\rangle \langle \psi_m|, \quad (1.10)$$

e, em termos dele, a probabilidade de que a medida de \hat{O} no *ensemble* forneça o resultado ν_k pode ser escrita na forma:

$$p_k^{ens} = Tr \hat{\rho} \hat{P}_k. \quad (1.11)$$

Além da probabilidade associada com uma determinada medida de \hat{O} , podemos também obter o valor esperado da medida de \hat{O} no *ensemble* a partir da seguinte equação:

$$\langle \hat{O} \rangle \equiv \sum_k \nu_k p_k^{ens} \quad (1.12)$$

$$= Tr \hat{\rho} \left(\sum_k \nu_k \hat{P}_k \right). \quad (1.13)$$

Notando na expressão acima que a quantidade entre parênteses é a decomposição espectral do operador \hat{O} , obtemos que o valor esperado é dado por:

$$\langle \hat{O} \rangle = Tr \hat{\rho} \hat{O}. \quad (1.14)$$

Note agora que a partir dos resultados obtidos acima podemos analisar coleções de sistemas sem que seja necessário termos o conhecimento completo do *ket* que descreve o *ensemble*. Neste caso, basta conhecer o operador densidade que representa o *ensemble*. Por exemplo, para um sistema em equilíbrio termodinâmico com um reservatório térmico em uma temperatura absoluta T , pode-se demonstrar que o operador densidade, não normalizado, assume a seguinte forma:

$$\rho(\beta) = e^{-\beta \hat{H}}, \quad (1.15)$$

onde β representa o inverso da temperatura de equilíbrio ($\beta = \frac{1}{T}$)⁵ e \hat{H} é a hamiltoniana do sistema. Por outro lado, para um *ensemble* genérico⁶, o operador densidade é dado por [22]:

$$\rho(\beta) = e^{-\beta \hat{K}}, \quad (1.16)$$

com \hat{K} sendo um operador que depende do particular *ensemble* escolhido. Por exemplo, para o *ensemble* grande-canônico temos $\hat{K} = \hat{H} - \mu \hat{N}$, onde \hat{N} é o operador número de partículas do sistema e μ é o potencial químico.

⁵Cabe ressaltar que neste trabalho estamos adotando o sistema de unidades naturais, no qual a constante de Boltzmann é unitária, $k = 1$.

⁶No sentido de ser um *ensemble* canônico ou grande canônico.

Finalizando esta discussão, vale salientar a semelhança entre o termo $e^{-\beta\hat{K}}$ e o fator de Boltzmann, $e^{-\beta K_j}$, que na estatística clássica determina a probabilidade relativa do microestado j a uma dada temperatura T .

1.2 Formalismo de Tempo Imaginário para a TQC

Conforme vimos na seção anterior, a teoria estatística quântica é feita necessariamente utilizando o operador densidade, uma vez que neste caso estamos considerando um *ensemble* misto. Deste modo, o comportamento estatístico de um sistema mecânico pode ser estudado, a partir da escolha apropriada de um *ensemble* e sua respectiva matriz densidade. Em particular, para um *ensemble* em equilíbrio térmico, temos que o operador densidade é dado por⁷:

$$\rho(\beta) = e^{-\beta K}. \quad (1.17)$$

Utilizando este operador, notamos que ele satisfaz à equação de Bloch, dada por:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \beta} = -K\rho. \quad (1.18)$$

Além disso, podemos também definir a função de partição Z que contém toda a informação sobre o sistema estatístico, como sendo:

$$Z = \text{Tr} \rho. \quad (1.19)$$

Segundo os postulados da Mecânica Estatística, para se obter informações sobre o sistema é necessário que antes se obtenha a função de partição que representa o mesmo. No entanto, somar ρ sobre todo espectro de energias do sistema nem sempre é tarefa trivial, sendo que, em muitos casos, este espectro nem mesmo é conhecido de maneira exata. Podemos então efetuar um cálculo perturbativo para obter Z . Consideramos que K possa ser escrito como $K = K_0 + K_I$, onde K_0 é tal que $Z(K_0)$ é conhecida e K_I é uma perturbação imposta ao sistema. Com isso, é possível obtermos Z através de uma teoria de perturbação em torno de $Z(K_0)$.

Como consequência das hipóteses acima podemos definir uma nova função $S = S(\beta)$ tal que:

$$\rho = e^{-\beta K} \equiv e^{-\beta K_0} S(\beta), \quad (1.20)$$

de tal maneira que a equação de Bloch (1.18), expressa em termos de S , torna-se:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} S(\beta) = -K_I S(\beta). \quad (1.21)$$

⁷Deste ponto em diante, sempre que não haja ambiguidades com outros termos, omitiremos o símbolo circunflexo dos operadores.

A introdução da função S nos leva a notarmos a semelhança entre a Eq.(1.21) e a derivada com relação ao tempo do operador de evolução temporal $\mathcal{U}(t, t')$ da teoria quântica, ou seja, $S(\beta)$ é qualitativamente semelhante a $\mathcal{U}(t, t')$ e esta é a essência da formulação da Teoria Quântica de Campos a Temperatura Finita. Esta teoria é conhecida como formalismo de Matsubara ou formalismo de tempo imaginário [21]. Vamos a seguir apresentar esta formulação.

Na descrição de um sistema quântico, os observáveis são expressos através de operadores no espaço de Hilbert e admitem representações diferentes. Por exemplo, nas representações de Heisenberg e de interação os operadores são expressos por:

$$\mathcal{O}_H(t) = e^{iHt/\hbar} \mathcal{O}_S e^{-iHt/\hbar} \quad (1.22)$$

$$\mathcal{O}_I(t) = e^{iH_0 t/\hbar} \mathcal{O}_S e^{-iH_0 t/\hbar}, \quad (1.23)$$

onde \mathcal{O}_S é o operador na representação de Schrödinger. Na expressão acima, estamos considerando que a hamiltoniana do sistema pode ser escrita como $H = H_0 + H_I$, no qual H_0 representa a hamiltoniana do sistema sem a interação e H_I representa a hamiltoniana de interação. Além disso, os operadores $\mathcal{O}_H(t)$ e $\mathcal{O}_I(t)$ podem ser relacionados a partir da seguinte expressão:

$$\mathcal{O}_H(t) = \mathcal{U}(0, t) \mathcal{O}_I(t) \mathcal{U}(t, 0). \quad (1.24)$$

Nessa equação $\mathcal{U}(t_1, t_2)$ é o operador de evolução temporal e é definido como sendo:

$$\mathcal{U}(t_1, t_2) = e^{iH_0 t_1/\hbar} e^{-iH(t_1-t_2)/\hbar} e^{-iH_0 t_2/\hbar}, \quad (1.25)$$

satisfazendo a seguinte equação de movimento:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{U}(t, t') = H_I(t) \mathcal{U}(t, t'). \quad (1.26)$$

Em vista da equação acima podemos interpretar a Eq.(1.21) como sendo a equação de movimento para o operador S em uma representação “modificada” de interação. Podemos observar isso facilmente realizando uma rotação sobre o eixo temporal, no sentido horário, de modo a coincidir com o eixo imaginário negativo ($t \rightarrow -i\beta$), e mapearmos $H \rightarrow K$. Realizando essas modificações na teoria usual podemos estudar efeitos de temperatura via Mecânica Estatística na abordagem quântica, ou seja, podemos definir uma nova representação de interação a partir de:

$$\mathcal{O}_{K_I}(\tau) = e^{K_0 \tau} \mathcal{O}_S e^{-K_0 \tau}. \quad (1.27)$$

Devemos notar ainda que essas modificações requerem também uma representação “modificada” de Heisenberg como:

$$\mathcal{O}_H(\tau) = e^{K\tau}\mathcal{O}_S e^{-K\tau} \quad (1.28)$$

$$= \mathcal{U}(0, \tau)\mathcal{O}_{K_I}\mathcal{U}(\tau, 0), \quad (1.29)$$

onde o operador de evolução temporal (modificado) é expresso por:

$$\mathcal{U}(\tau_1, \tau_2) = e^{K_0\tau_1/\hbar} e^{-K(\tau_1-\tau_2)/\hbar} e^{-K_0\tau_2/\hbar}, \quad (1.30)$$

e satisfaz a seguinte equação:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\mathcal{U}(\tau, \tau') = -K_I(\tau)\mathcal{U}(\tau, \tau'). \quad (1.31)$$

Neste novo formalismo o operador densidade assume também uma forma modificada, sendo descrito por:

$$\rho(\beta) = e^{-\beta K} \equiv e^{-\beta K_0}\mathcal{U}(\beta, 0), \quad (1.32)$$

e devido a este fato os observáveis da teoria passam a ser escritos como médias estatísticas nos *ensembles* especificados por ρ , ou seja:

$$\langle \mathcal{O} \rangle \equiv \langle \mathcal{O} \rangle_\beta \quad (1.33)$$

$$= \frac{1}{Z} \text{Tr} \rho \mathcal{O}, \quad (1.34)$$

onde Z é a função de partição do sistema. Esta nova formulação nos permite mapear a TQC para sistemas a temperatura finita ($T \neq 0$) na TQC a temperatura nula. Neste caso, os observáveis são calculados como médias nos *ensembles* expressos por ρ e K , ao invés de médias nos estados de vácuo.

Usando o mapeamento acima podemos obter, em analogia ao formalismo de temperatura nula, a função de partição via método de integração funcional. Para isso considere a função de partição da mecânica estatística, no *ensemble* canônico ($K = H$), como sendo dada por:

$$Z(\beta) = \text{Tr} \rho(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}}, \quad (1.35)$$

onde o traço deve ser calculado em uma base completa qualquer. Neste caso, geralmente, considera-se o conjunto completo de autovetores do operador H . No entanto, como estamos considerando *ensemble* mistos iremos tomar o conjunto completo dos autovetores do operador campo ϕ^8 . Assim, o traço assume a seguinte forma:

$$Z(\beta) = \int d\phi \langle \phi | \rho(\beta) | \phi \rangle, \quad (1.36)$$

⁸Por conveniência, estaremos considerando o caso bosônico.

onde $|\phi\rangle$ satisfaz a equação $\hat{\phi}|\phi\rangle = \phi|\phi\rangle$. Note na equação acima que podemos identificar o operador $\rho(\beta)$ como sendo um operador de evolução temporal para tempos imaginários. Assim, fazendo a generalização do operador de evolução temporal semelhante a Eq.(1.27) e fazendo o processo de integração funcional obtemos [23, 31]:

$$Z(\beta) = \int \mathcal{D}\phi e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E}, \quad (1.37)$$

onde \mathcal{L}_E é a densidade de lagrangiana associada com \mathcal{H} , no espaço euclidiano.

Note agora que, a partir da Eq.(1.37), podemos expressar a média estatística em termos de uma integração funcional. Deste modo, qualquer observável estatístico pode ser calculado, senão de forma exata, pelo menos perturbativamente com o uso de técnicas similares aos métodos tradicionais da TQC a temperatura nula. Além disso, podemos também obter as funções de correlação de maneira análoga às funções de Green da TQC usual, ou seja, partindo da definição de funcional gerador das funções de Green da teoria,

$$Z(\beta; j) \equiv \int \mathcal{D}\phi e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^3x [\mathcal{L}_E - j(\vec{x}, \tau)\phi]}, \quad (1.38)$$

podemos obter a função de Green $G(\tau_1, \tau_2)$ como sendo:

$$\frac{1}{Z(\beta)} \left. \frac{\delta^2 Z(\beta; j)}{\delta j(\tau_1) \delta j(\tau_2)} \right|_{j=0} = \frac{1}{Z(\beta)} \int \mathcal{D}\phi \phi_{\tau_1} \phi_{\tau_2} e^{-S_E(\beta)} \quad (1.39)$$

$$= G(\tau_1, \tau_2). \quad (1.40)$$

onde a dependência sobre as coordenadas \vec{x} foi suprimida para não carregar a notação. Além disso, definimos a ação $S_E(\beta)$ como sendo:

$$S_E(\beta) = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_E. \quad (1.41)$$

Nesta linha, muitos resultados da abordagem usual de TQC (como, por exemplo, o cálculo dos diagramas de Feynman) podem ser utilizados a temperatura finita ($T \neq 0$). A principal diferença consiste no fato de que nas integrais temporais para $T \neq 0$, o tempo é considerado em um intervalo finito ao invés de variar no intervalo $(-\infty, \infty)$, como na abordagem usual. Como consequência, as frequências associadas com o tempo finito, na transformada de Fourier de G , são múltiplos inteiros de $\frac{\pi}{\beta}$. Usando as propriedades de simetria que diferenciam bósons e férmions pode-se demonstrar que para bósons elas são dadas por⁹:

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}, \quad (1.42)$$

e para férmions:

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}, \quad n = 0, 1, 2, \quad (1.43)$$

⁹Um estudo mais detalhado pode ser encontrado em [22].

que são conhecidas na literatura como frequências de Matsubara [21]. Além disso, no caso bosônico as variáveis de campo satisfazem condições de contorno periódicas com período β na componente temporal, enquanto que, no caso fermiônico, satisfazem condições de contorno antiperiódicas [22].

Cabe ressaltar ainda, uma vez que as energias assumem valores específicos neste formalismo, dados pelas Eqs. (1.42) e (1.43), o seguinte mapeamento ocorre para as variáveis de integração:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f(\omega, \vec{k}) \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_n \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} f\left(\frac{2n\pi}{\beta}, \vec{k}\right). \quad (1.44)$$

Muitas vezes as somas envolvidas no cálculo acima podem ser avaliadas sem dificuldades [35]. No entanto, as integrais restantes nas componentes espaciais são mais complicadas e em geral requerem o uso de aproximações como, por exemplo, os limites de alta e baixa temperaturas. No terceiro capítulo apresentaremos em detalhes alguns desses cálculos.

1.3 A Teoria de Chern-Simons

Vamos iniciar esta seção fazendo a seguinte pergunta: qual a densidade de lagrangiana invariante de Lorentz, mais geral possível, associada ao campo vetorial, também invariante de Lorentz, $A^\mu = (A^0, \vec{A})$?

- Para o caso de $(3 + 1)$ dimensões a resposta é dada, univocamente, pela lagrangiana de Maxwell,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (1.45)$$

pois através do princípio de mínima ação recuperamos as equações de Maxwell da eletrodinâmica.

- Por outro lado, para o caso de $(2 + 1)$ dimensões a resposta não é mais unívoca, pois além da lagrangiana de Maxwell, existe outra lagrangiana que, por construção¹⁰, é invariante de Lorentz, a saber:

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho. \quad (1.46)$$

na qual κ é uma constante intrínseca à teoria e o símbolo $\epsilon^{\mu\nu\rho}$ representa o tensor completamente anti-simétrico de Levi-Civita, para o qual assumimos que $\epsilon^{012} = 1$ ou:

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda} = \begin{cases} 1, & \text{para permutações pares de } 0, 1, 2 \\ -1, & \text{para permutações ímpares de } 0, 1, 2 \\ 0, & \text{para qualquer outra.} \end{cases}$$

¹⁰Podemos encontrar uma construção alternativa a partir da dualidade da teoria MCS [32].

Além disso, cabe ressaltar que a partir deste ponto estaremos usando a métrica com diagonal da forma $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$ e considerando, como usual, $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

A teoria descrita pela densidade de lagrangiana (1.46) é conhecida como teoria de Chern-Simons e possui características próprias [33, 34]. No entanto, antes de iniciarmos o estudo da teoria de Chern-Simons é importante lembrarmos alguns aspectos da teoria de Maxwell, pois estas duas teorias possuem algo em comum: são teorias de calibre que descrevem certos aspectos eletrodinâmicos de partículas carregadas.

A teoria de Maxwell abeliana em $(2 + 1)$ dimensões na presença de fontes é definida em termos do campo de calibre $A_\mu = (A_0, \vec{A})$, sendo A_0 o potencial escalar e \vec{A} o potencial vetor, pela seguinte densidade de lagrangiana:

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu, \mu, \nu = 0, 1, 2 \quad (1.47)$$

onde a densidade de matéria J^μ é conservada ($\partial_\mu J^\mu = 0$).

A partir da densidade de lagrangiana (1.47) notamos que a teoria é invariante sob transformações de calibre $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ e obtemos as seguintes equações de Euler-Lagrange para a dinâmica do campo:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (1.48)$$

que são as equações de Maxwell e as quais também são invariantes de calibre.

Note que a teoria de Maxwell pode ser definida para um espaço-tempo com d dimensões, para isso basta tomarmos o índice μ do campo de calibre A_μ como assumindo os valores $\mu = 0, 1, 2, \dots, (d - 1)$ no espaço-tempo d -dimensional. Além disso, note que mediante a essas mudanças a densidade de lagrangiana (1.47) e as equações de Euler-Lagrange (1.48) da teoria não alteram. Assim, a teoria de Maxwell em $(2+1)$ dimensões, é semelhante a mesma teoria em $(3+1)$ dimensões, sendo a principal diferença entre elas a definição do campo magnético, pois em $(2+1)$ dimensões esta grandeza é um (pseudo-) escalar, sendo dada por $B = \epsilon^{ij} \partial_i A_j$, enquanto que em $(3 + 1)$ dimensões ela é um (pseudo-) vetor sendo dada por $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Nesta mesma linha de raciocínio podemos estudar a teoria de Chern-Simons, dada pela Eq.(1.46). Em primeiro lugar, notamos que embora esta densidade de lagrangiana pareça não ser invariante de calibre, por depender do campo de calibre A_μ , sob variação funcional o termo de diferença assume a forma de uma derivada total,

$$\delta \mathcal{L}_{CS} = \frac{\kappa}{2} \partial_\mu [\Lambda \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\nu \partial_\rho A_\mu], \quad (1.49)$$

e se os termos de fronteiras puderem ser desprezados, então a ação $S_{CS} = \int d^3x \mathcal{L}_{CS}$ será uma grandeza invariante de calibre [34].

Desprezando os termos de fronteiras obtemos as equações de Euler-Lagrange como sendo dadas por:

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa} \epsilon_{\mu\nu\lambda} J^\lambda, \quad (1.50)$$

onde acrescentamos um termo de fonte à Eq.(1.46) da maneira usual. Em termos das componentes a Eq.(1.50) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \rho &= \kappa B \\ J^i &= \kappa \epsilon^{ij} E_j, \end{aligned} \quad (1.51)$$

onde ρ é a densidade de carga, B e E representam os campos magnético e elétrico, respectivamente. Além disso, note que a densidade de corrente J^μ é conservada $\epsilon^{\mu\nu\lambda} \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0$.

A partir da Eq.(1.51) é possível notarmos uma das características diferenciadas da teoria CS: o acoplamento entre um fluxo de campo magnético e a carga elétrica, isto é, sempre que uma partícula estiver carregada teremos um fluxo de campo magnético associado à ela¹¹. Perceba também que a teoria de Chern-Simons pura ($J_\mu = 0$) fornece apenas a solução trivial ($F_{\mu\nu} = 0$), de modo que se faz necessário a sua abordagem conjunta com outras teorias como, por exemplo:

- Acoplando com campos dinâmicos de matéria (analogamente à Eq.(1.51));
- Acoplando com a teoria de Maxwell (teoria de calibre abeliana);
- Acoplando com a teoria de Yang-Mills (teoria de calibre não-abeliana);
- Gravidade

Analisando cada uma das possibilidades obteremos teorias com características próprias. Por exemplo, para a segunda possibilidade, em termos do campo de Maxwell, podemos interpretar a introdução do termo de Chern-Simons como um mecanismo de geração de massa para o campo A_μ que não depende da escolha de calibre. Para entendermos melhor a afirmação acima, consideremos a teoria de Maxwell-Chern-Simons, dada pela seguinte densidade de lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{\kappa}{2} \epsilon^{\mu\nu\lambda} A_\mu \partial_\nu A_\lambda + A^\mu J_\mu, \quad (1.52)$$

onde estamos considerando o modelo em (2+1) dimensões. Neste caso a equação de movimento torna-se:

$$\partial_\beta F^{\beta\alpha} + \frac{m}{2} \epsilon^{\alpha\beta\lambda} F_{\beta\lambda} = -J^\alpha, \quad (1.53)$$

¹¹A referência [34] apresenta uma boa discussão das conseqüências desse acoplamento.

ou, em termos do campo de calibre:

$$(\square\eta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu - m\epsilon_{\mu\nu\alpha}\partial^\alpha) A^\nu = -J_\mu. \quad (1.54)$$

Em seguida utilizando o método da função de Green,

$$(\square\eta_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu - m\epsilon_{\mu\nu\alpha}\partial^\alpha) G^{\nu\rho}(x - x') = -\delta_\mu^\rho\delta^3(x - x'), \quad (1.55)$$

obtemos o propagador do modelo, expresso, no espaço euclidiano, por:

$$G^{\mu\nu}(p) = -\frac{1}{p^2 - \kappa^2} \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} - \frac{\kappa}{p^2} \epsilon^{\mu\nu\rho} p_\rho \right] - \lambda \frac{p^\mu p^\nu}{p^4}, \quad (1.56)$$

onde estamos considerando um calibre covariante tipo Lorentz.

A partir da Eq.(1.56) podemos identificar a massa do campo de calibre, m_{A_μ} , como sendo o pólo do propagador, ou seja,

$$m_{A_\mu} = \kappa, \quad (1.57)$$

o que nos mostra que o termo CS fornece massa topológica para o fóton.

Para finalizar, além das características anteriores, podemos citar também o fato de que o modelo de CS é invariante por inversão temporal, viola a paridade e não pode ser definido em um espaço-tempo para uma dimensão d qualquer¹² [34], devido apresentar uma derivada de primeira ordem nas coordenadas e devido ao tensor de Levi-Civita. Assim, não é possível definirmos essa teoria para um espaço-tempo que possua um número ímpar de dimensões espaciais como, por exemplo, para um espaço-tempo com $(3 + 1)$ dimensões,

$$\mathcal{L}_{CS} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\mu A_\nu \partial_\lambda A_\rho = 0. \quad (1.58)$$

Por outro lado, podemos escrever a densidade de lagrangiana para a teoria em um espaço-tempo com $(4 + 1)$ dimensões como sendo:

$$\mathcal{L}_{CS} = \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho\xi} A_\mu \partial_\nu A_\lambda \partial_\rho A_\xi. \quad (1.59)$$

¹²No sentido de obtermos uma densidade de lagrangiana associada ao campo A^μ que seja invariante por Lorentz.

Capítulo 2

Efeito Casimir em (2+1) dimensões a Temperatura Nula

Conforme vimos na seção (1.3), as lagrangianas de Maxwell e de Chern-Simons nos fornecem modelos que satisfazem todos os critérios usuais de uma teoria de calibre, e mesmo assim apresentam comportamentos eletromagnéticos bastante diferenciados. Além disso, a combinação entre essas duas teorias nos fornece um resultado interessante: a geração de massa para o campo de calibre A^μ .

Neste capítulo iremos abordar a influência do termo de Chern-Simons na determinação da força de Casimir a temperatura nula entre duas linhas paralelas para diferentes condições de fronteira em (2+1) dimensões, especificamente no contexto da teoria de Maxwell-Chern-Simons. Uma vez que as teorias de calibre em (2+1) dimensões apresentam comportamentos eletromagnéticos diferenciados, cabe estudar se tais comportamentos, juntamente com o termo de Chern-Simons são fortes o suficiente para alterar a força de Casimir.

No cálculo da força sobre as linhas iremos considerar duas situações de fronteira diferentes: na primeira, o sistema considerado consiste em duas linhas infinitamente permeáveis magneticamente¹ (IPM), sobre as quais a condição de fronteira é dada por $B = 0$ (campo magnético nulo); e na segunda, o sistema consiste em uma linha perfeitamente condutora eletricamente (PCE) e uma linha perfeitamente permeável magneticamente (IPM), também conhecida na literatura como linhas mistas (LM) [15], para as quais as condições de fronteira são dadas por $E = 0$ (campo elétrico nulo) e $B = 0$ (campo magnético nulo) sobre a primeira e a segunda linha, respectivamente.

Inicialmente revisitaremos os resultados obtidos por Alves *et al.* [18] para a força de Casimir entre

¹Este termo infinitamente permeável é utilizado em analogia ao termo utilizado por Boyer [15].

linhas IPM e LM a temperatura nula (Secs. 2.2 e 2.3). Em particular, o valor da força no caso IPM é idêntico ao obtido por Milton e Jack para duas linhas PCE [13]. Sendo as forças nos casos IPM e PCE idênticas (tanto a temperatura nula quanto finita) chamaremos estas duas situações de condições de fronteira “simétricas”.

2.1 Considerações Gerais

Neste capítulo estaremos considerando a teoria abeliana de Maxwell-Chern-Simons (MCS) em $(2+1)$ dimensões, a qual pode ser descrita por meio da seguinte densidade de lagrangiana para o campo de calibre A_μ :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m}{2}\epsilon_{\mu\nu\lambda}A^\mu\partial^\nu A^\lambda. \quad (2.1)$$

Uma outra forma de descrevermos a teoria pode ser dada através da definição do tensor dual \tilde{F}^μ ,

$$\tilde{F}^\mu \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} = \epsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta, \quad (2.2)$$

com a qual podemos reescrever a densidade de lagrangiana (2.1) como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\tilde{F}^\mu\tilde{F}_\mu + \frac{m}{2}A^\mu\tilde{F}_\mu. \quad (2.3)$$

As equações de Euler-Lagrange associadas à densidade de lagrangiana (2.1) são dadas por:

$$\partial_\beta F^{\beta\alpha} + \frac{m}{2}\epsilon^{\alpha\beta\lambda}F_{\beta\lambda} = 0, \quad (2.4)$$

ou, em termos do tensor dual \tilde{F}^μ :

$$-\epsilon^{\alpha\mu\nu}\partial_\mu\tilde{F}_\nu + m\tilde{F}^\alpha = 0, \quad (2.5)$$

a partir da qual obtemos a identidade de Bianchi,

$$\partial_\mu\tilde{F}^\mu = 0. \quad (2.6)$$

Como nas próximas seções estaremos analisando o efeito Casimir, veremos agora o arcabouço do cálculo da força de Casimir para diferentes condições de fronteiras. Seguindo [13, 35], calcularemos as soluções de sistemas de equações diferenciais acopladas para as componentes da função de Green $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ associada ao tensor dual \tilde{F}^μ .

No cálculo da força de Casimir em modelos MCS em $(2+1)$ dimensões, estaremos considerando duas linhas paralelas (que podem ser de naturezas diferentes ou não) imersas no campo de MCS, localizadas em $x = 0$ e $x = a$, conforme ilustra a Fig. (2.1).

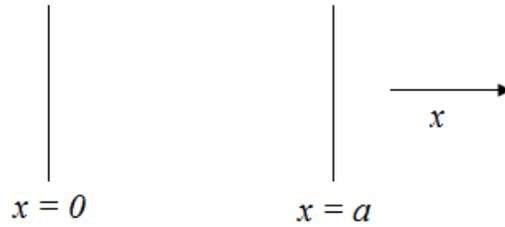


Figura 2.1: Disposição geométrica das linhas paralelas.

Nessa configuração, a força de Casimir por unidade de comprimento pode ser obtida por meio do valor esperado no vácuo da componente T^{11} do tensor energia-momento sobre a fronteira²:

$$\text{força/comprimento} = f = \langle T^{11} \rangle|_{\text{fronteira}}, \quad (2.7)$$

pois é a componente normal-normal (em relação as linhas) do tensor energia-momento que contribui para a força.

O tensor energia-momento canônico é obtido como sendo:

$$T_{(c)}^{\mu\nu} = \partial^\nu A_\alpha \frac{\mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\alpha} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.8)$$

$$= -\partial^\nu A_\beta F_\alpha \epsilon^{\alpha\mu\beta} + \frac{1}{2} F^\alpha F_\alpha \eta^{\mu\nu} + \frac{m}{2} \left[(\partial^\nu A_\beta) A_\alpha \epsilon^{\alpha\mu\beta} - A^\alpha F_\alpha \eta^{\mu\nu} \right], \quad (2.9)$$

de modo que no limite $m \rightarrow 0$ recuperamos o tensor energia-momento canônico para o campo de Maxwell [36],

$$T_{(c)}^{\mu\nu} = -\partial^\nu A_\beta F_\alpha \epsilon^{\alpha\mu\beta} + \frac{1}{2} F^\alpha F_\alpha \eta^{\mu\nu}. \quad (2.10)$$

A partir da Eq.(2.8) vemos que o tensor energia-momento não é simétrico nos índices μ, ν e depende da massa topológica do campo de Chern-Simons. Este resultado conduz a dois possíveis valores diante da permuta $\mu \leftrightarrow \nu$ e isso pode significar que observadores diferentes obtêm resultados diferentes para o mesmo observável físico. Por outro lado, adicionando um termo de divergência total a Eq.(2.8) podemos obter o tensor energia-momento simetrizado,

$$T^{\mu\nu} = T_{(c)}^{\mu\nu} + \partial_\rho \Omega^{\rho\mu\nu}, \quad (2.11)$$

onde a divergência total é obtida como sendo

$$\Omega^{\rho\mu\nu} = -\frac{1}{2} (H^{\rho\mu\nu} - H^{\mu\nu\rho} + H^{\nu\rho\mu}), \quad (2.12)$$

com

$$H^{\rho\mu\nu} = i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial_\mu \partial A^\alpha} (I^{\rho\nu})^\alpha_\beta A^\beta_\alpha, \quad (2.13)$$

²Nesta seção nos deteremos apenas na determinação das equações diferenciais acopladas que determinam a força de Casimir. As soluções envolvendo as condições de fronteira serão analisadas posteriormente.

e

$$(I^{\rho\nu})_{\beta}^{\alpha} = -i \left(\eta^{\rho\alpha} \delta_{\beta}^{\nu} - \eta^{\nu\alpha} \delta_{\beta}^{\rho} \right). \quad (2.14)$$

Muito embora o cálculo seja trabalhoso, não apresenta nenhuma dificuldade conceitual. Assim, sem entrar em detalhes técnicos, o tensor energia-momento simetrizado é obtido como sendo:

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha} F_{\alpha}{}^{\nu} + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

ou, em termos do dual,

$$T^{\mu\nu} = \tilde{F}^{\mu} \tilde{F}^{\nu} - \frac{1}{2} \tilde{F}^{\alpha} \tilde{F}_{\alpha} \eta^{\mu\nu}. \quad (2.16)$$

Vemos assim que a forma simetrizada do tensor energia-momento não depende da massa topológica m .

Utilizando a Eq.(2.16) o valor esperado de T^{11} pode ser escrito como:

$$\langle T^{11} \rangle = \frac{1}{2} \langle F^0(\mathbf{x})^2 + F^1(\mathbf{x})^2 - F^2(\mathbf{x})^2 \rangle \quad (2.17)$$

$$\equiv \frac{1}{2} \lim_{\mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x}} [\langle F^0(\mathbf{x}) F^0(\mathbf{x}') \rangle + \langle F^1(\mathbf{x}) F^1(\mathbf{x}') \rangle - \langle F^2(\mathbf{x}) F^2(\mathbf{x}') \rangle], \quad (2.18)$$

onde $\mathbf{x} \doteq (t, x, y)$ e as componentes do tensor dual \tilde{F}^{μ} são calculadas via método das funções de Green:

$$\tilde{F}^{\mu}(\mathbf{x}) = \int d\mathbf{x}' G^{\mu\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') J_{\nu}(\mathbf{x}'), \quad (2.19)$$

no qual $G^{\mu\nu}$ é a função de Green associada à Eq.(2.5), ou seja:

$$(-\epsilon_{\mu\alpha\beta} \partial^{\alpha} + m \eta_{\mu\beta}) G^{\beta\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\delta_{\mu}^{\rho} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (2.20)$$

Seguindo a Ref. [13], podemos reescrever os valores esperados $\langle F_{\mu}(\mathbf{x}) F_{\nu}(\mathbf{x}') \rangle$ como:

$$\langle F_{\mu}(\mathbf{x}) F_{\nu}(\mathbf{x}') \rangle = -i \epsilon_{\nu\lambda\sigma} \partial'^{\lambda} G_{\mu}{}^{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{x}'). \quad (2.21)$$

Por outro lado, introduzindo a transformada de Fourier de $G^{\mu\nu}$

$$G^{\mu\nu}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(y-y')} \int \frac{d\varpi}{2\pi} e^{-i\varpi(x-x')} G^{\mu\nu}(\mathbf{k}) \quad (2.22)$$

$$= \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(y-y')} \mathcal{G}^{\mu\nu}(k, \omega; x - x'), \quad (2.23)$$

onde $\mathbf{k} \doteq (\omega, \varpi, k)$ e

$$\mathcal{G}^{\mu\nu}(k, \omega; x - x') = \int \frac{d\varpi}{2\pi} e^{-i\varpi(x-x')} G^{\mu\nu}(\mathbf{k}), \quad (2.24)$$

podemos reescrever os valores esperados como:

$$\begin{aligned}\langle F_0(\mathbf{x})F_0(\mathbf{x}') \rangle &= -i \left[\frac{\partial G^{01}}{\partial y'} - \frac{\partial G^{02}}{\partial x'} \right] \\ &= - \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(y-y')} \left[\frac{1}{i} \frac{\partial \mathcal{G}^{02}}{\partial x'} + k\mathcal{G}^{01} \right],\end{aligned}\quad (2.25)$$

$$\begin{aligned}\langle F_1(\mathbf{x})F_1(\mathbf{x}') \rangle &= -i \left[\frac{\partial G^{12}}{\partial t'} + \frac{\partial G^{10}}{\partial y'} \right] \\ &= - \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(y-y')} [k\mathcal{G}^{10} - \omega\mathcal{G}^{12}],\end{aligned}\quad (2.26)$$

$$\begin{aligned}\langle F_2(\mathbf{x})F_2(\mathbf{x}') \rangle &= i \left[\frac{\partial G^{21}}{\partial t'} + \frac{\partial G^{20}}{\partial x'} \right] \\ &= - \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(y-y')} \left[\frac{1}{i} \frac{\partial \mathcal{G}^{20}}{\partial x'} + \omega\mathcal{G}^{21} \right].\end{aligned}\quad (2.27)$$

Substituindo as expressões acima na Eq.(2.17) e agrupando os termos semelhantes concluímos que:

$$\langle T^{11} \rangle = - \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(y-y')} t^{11},\quad (2.28)$$

onde

$$t^{11} = \left[\frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial x'} (\mathcal{G}^{02} - \mathcal{G}^{20}) + \frac{k}{2} (\mathcal{G}^{01} + \mathcal{G}^{10}) - \frac{\omega}{2} (\mathcal{G}^{12} + \mathcal{G}^{21}) \right].\quad (2.29)$$

As componentes $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ podem ser calculadas através da Eq.(2.20) tomando-se $\mu, \nu = 0, 1, 2$. Assim, obtemos que as componentes \mathcal{G}^{01} , \mathcal{G}^{11} e \mathcal{G}^{21} satisfazem o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}-ik\mathcal{G}^{01} + m\mathcal{G}^{11} + i\omega\mathcal{G}^{21} &= \delta(x - x'), \\ m\mathcal{G}^{01} - ik\mathcal{G}^{11} + \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{G}^{21} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{G}^{01} - i\omega\mathcal{G}^{11} + m\mathcal{G}^{21} &= 0.\end{aligned}\quad (2.30)$$

Por outro lado, as componentes \mathcal{G}^{00} , \mathcal{G}^{10} e \mathcal{G}^{20} satisfazem:

$$\begin{aligned}-m\mathcal{G}^{00} + ik\mathcal{G}^{10} - \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{G}^{20} &= \delta(x - x'), \\ -ik\mathcal{G}^{00} + m\mathcal{G}^{10} + i\omega\mathcal{G}^{20} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{G}^{00} - i\omega\mathcal{G}^{10} + m\mathcal{G}^{20} &= 0.\end{aligned}\quad (2.31)$$

Por último, \mathcal{G}^{22} , \mathcal{G}^{12} e \mathcal{G}^{02} satisfazem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{G}^{22} - ik\mathcal{G}^{12} + m\mathcal{G}^{02} &= 0, \\ i\omega\mathcal{G}^{22} + m\mathcal{G}^{12} - ik\mathcal{G}^{02} &= 0, \\ m\mathcal{G}^{22} - i\omega\mathcal{G}^{12} + \frac{\partial}{\partial x}\mathcal{G}^{02} &= \delta(x - x').\end{aligned}\quad (2.32)$$

Em resumo, para obtermos a força de Casimir por unidade de comprimento, devemos determinar as componentes $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ da função de Green univocamente. No entanto, como essas componentes são soluções de equações diferenciais de primeira e de segunda ordem, esses cálculos só serão possíveis mediante o conhecimento de duas condições relacionadas com cada uma das componentes $\mathcal{G}^{\mu\nu}$, as quais estão relacionadas com as fronteiras do sistema em estudo. Nas próximas seções, analisaremos a influência de duas condições de fronteira sobre a força de Casimir entre duas linhas de diferentes naturezas:

- Condições Simétricas de Fronteiras (duas linhas IPM);
- Linhas mistas (LM) (uma linha IPM e outra PCE).

2.2 Condições Simétricas de Fronteira a Temperatura Nula

Nesta seção iremos revisitar o cálculo para a força de Casimir, por unidade de comprimento, entre duas linhas sujeitas a condições simétricas de fronteira. Apresentaremos, especificamente, o cálculo da força de Casimir para duas linhas IPM³, localizadas em $x = 0$ e $x = a$ (nesta revisão utilizamos como base a Ref.[18]).

Dada a disposição geométrica das linhas, as condições de fronteira são dadas por:

$$B(x = 0) = B(x = a) = 0, \quad (2.33)$$

ou, como o campo magnético é descrito pelo pseudo-escalar $B \equiv F^0 = \epsilon^{ij} \partial_i A_j$,

$$F^0(x = 0 \text{ ou } a) = 0. \quad (2.34)$$

Utilizando a Eq.(2.19) a condição de fronteira pode ser escrita em termos das componentes $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ como:

$$\mathcal{G}^{0\mu}(x = 0 \text{ ou } a) = 0. \quad (2.35)$$

Manipulando algebricamente o sistema (2.30), é possível desacoplar a equação diferencial que \mathcal{G}^{01} satisfaz como sendo:

$$\left(\bar{k}^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \mathcal{G}^{01} = i \left(-k + \frac{\omega}{m} \frac{\partial}{\partial x} \right) \delta(x - x'), \quad (2.36)$$

³Poderíamos considerar também o caso de linhas PCE. No entanto, conforme veremos mais adiante os resultados para os casos IPM e PCE são idênticos; além disso os cálculos envolvidos são análogos.

onde estamos usando a definição:

$$\bar{k}^2 = \omega^2 - m^2 - k^2. \quad (2.37)$$

Aplicando o método da descontinuidade [35] na Eq.(2.36) e utilizando a condição $\mathcal{G}^{01}(x = 0 \text{ ou } a) = 0$, obtém-se:

$$\mathcal{G}^{01} = \frac{mk(ss) + \bar{k}\omega(sc)}{im\bar{k} \sin \bar{k}a}. \quad (2.38)$$

onde foi empregada as seguintes notações [13]

$$\begin{aligned} (ss) &= \sin \bar{k}x_{<} \sin \bar{k}(x_{>} - a) \\ (sc) &= \begin{cases} \sin \bar{k}x \cos \bar{k}(x' - a) & \text{se } x < x', \\ \cos \bar{k}x' \sin \bar{k}(x - a) & \text{se } x > x', \end{cases} \\ (cs) &= \begin{cases} \cos \bar{k}x \sin \bar{k}(x' - a) & \text{se } x < x', \\ \sin \bar{k}x' \cos \bar{k}(x - a) & \text{se } x > x', \end{cases} \\ (cc) &= \cos \bar{k}x_{<} \cos \bar{k}(x_{>} - a), \end{aligned}$$

nas expressões acima $x_{>}$ ($x_{<}$) indicam o maior (menor) de x e x' .

Por outro lado, o sistema (2.30) também permite que \mathcal{G}^{21} seja escrita em termos de \mathcal{G}^{01} ,

$$\mathcal{G}^{21} = -\frac{i\omega}{\omega^2 - m^2} \left[\delta(x - x') + i \left(k + \frac{m}{\omega} \frac{\partial}{\partial x} \right) \mathcal{G}^{01} \right], \quad (2.39)$$

de modo que \mathcal{G}^{21} pode ser escrito como:

$$\mathcal{G}^{21} = -\frac{i\omega}{\omega^2 - m^2} \left[\delta(x - x') + \frac{1}{\sin \bar{k}a} \left(\frac{k^2}{\bar{k}}(ss) + \frac{km}{\omega}(sc) + \frac{km}{\omega}(cs) + \bar{k}(cc) \right) \right]. \quad (2.40)$$

Os sistemas (2.31) e (2.32) são resolvidos sem muito esforço de maneira análoga. Assim, as componentes restantes necessárias ao cálculo da força de Casimir são dadas por:

$$\mathcal{G}^{00} = \frac{m^2 - \omega^2}{m\bar{k}} \frac{(ss)}{\sin \bar{k}a}, \quad (2.41)$$

$$\mathcal{G}^{20} = -\frac{1}{m\bar{k} \sin \bar{k}a} [\omega k(ss) + m\bar{k}(cs)], \quad (2.42)$$

$$(2.43)$$

e

$$\mathcal{G}^{10} = \frac{i}{\sin \bar{k}a} \left[\frac{\omega}{m}(cs) + \frac{k}{\bar{k}}(ss) \right], \quad (2.44)$$

$$\mathcal{G}^{02} = -\frac{1}{m\bar{k} \sin \bar{k}a} [m\bar{k}(sc) + k\omega(ss)], \quad (2.45)$$

$$\mathcal{G}^{12} = -\frac{i\omega}{m^2 - \omega^2} \left[\delta(x - x') + \frac{1}{\sin \bar{k}a} \left(\frac{k^2}{\bar{k}^2}(ss) + \frac{km}{\omega}(sc) + \frac{k\omega}{m}(cs) + \bar{k}(cc) \right) \right]. \quad (2.46)$$

Neste ponto observa-se que $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ e $\mathcal{G}^{\nu\mu}$ obedecem a mesma relação satisfeita pelas componentes da função de Green para o caso de condições de fronteira do tipo PCE [13], isto é, $\mathcal{G}^{\mu\nu}(x, x') = [\mathcal{G}^{\nu\mu}(x', x)]^*$.

Notando que

$$\mathcal{G}^{01} + \mathcal{G}^{10} = \frac{\omega}{im \sin \bar{k}a} [(sc) - (cs)], \quad (2.47)$$

$$\mathcal{G}^{12} + \mathcal{G}^{21} = \frac{k}{im \sin \bar{k}a} [(sc) - (cs)], \quad (2.48)$$

$$\mathcal{G}^{02} - \mathcal{G}^{20} = -\frac{1}{\sin \bar{k}a} [(sc) - (cs)], \quad (2.49)$$

pode-se escrever $t^{11}(x)$ como:

$$t^{11}(x) = -\frac{1}{2i \sin \bar{k}a} \lim_{x' \rightarrow x} \frac{\partial}{\partial x'} [(sc) - (cs)], \quad (2.50)$$

ou, calculando sobre as linhas,

$$t^{11}(x = 0 \text{ ou } a) = -\frac{\bar{k}}{2i \sin \bar{k}a} \cos \bar{k}a = i\frac{\bar{k}}{2} \cot \bar{k}a. \quad (2.51)$$

A partir do valor obtido para t^{11} obtém-se a seguinte expressão para a força de Casimir:

$$f(m) = \langle T^{11} \rangle = \frac{i}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{dk}{2\pi} \bar{k} \cot \bar{k}a, \quad (2.52)$$

ou, introduzindo as variáveis euclidianas $\omega \rightarrow i\xi$ e $\bar{k} \rightarrow i\lambda$,

$$f(m) = -\int \frac{d\xi dk}{(2\pi)^2} \frac{\lambda}{2} \left[1 + \frac{2}{e^{2\lambda a} - 1} \right], \quad (2.53)$$

onde $\lambda^2 = \xi^2 + m^2 + k^2$.

Omitindo o termo constante⁴, pode-se reescrever a expressão para a força como:

$$f(m) = - \int \frac{d\xi dk}{(2\pi)^2} \frac{\lambda}{e^{2\lambda a} - 1} \quad (2.54)$$

Note que o resultado (2.53) é exatamente o mesmo obtido na Ref.[13] para o caso de duas linhas PCE, de modo que a força por unidade de comprimento para o caso de linhas IPM é idêntica a da referência supracitada, ou seja:

$$f(m) = - \frac{1}{16\pi a^3} \int_{2ma}^{\infty} dy \frac{y^2}{e^y - 1}, \quad (2.55)$$

a qual descreve uma força de Casimir atrativa, cuja intensidade diminui exponencialmente a medida que a massa aumenta, conforme nos mostra a Fig.(2.2).

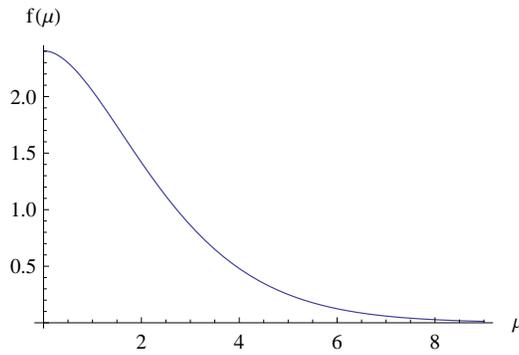


Figura 2.2: Gráfico da força de Casimir para linhas IPM, no qual é definido $f(\mu) = -16\pi a^3 f(m)$ e $\mu = 2ma$.

Analicamente podemos perceber esse comportamento tomando o limite ($ma \gg 1$) na Eq.(2.53):

$$f(m) \approx - \frac{1}{8\pi a^3} (2m^2 a^2 + 2ma + 1) e^{-2ma}. \quad (2.56)$$

Note também que tomando $m \rightarrow 0$ na Eq.(2.53) obtemos que a expressão da força se reduz a forma:

$$f(m=0) = - \frac{1}{8\pi a^3} \zeta(3), \quad (2.57)$$

onde $\zeta(n)$ é a função Zeta de Riemann.

⁴No cálculo da força de Casimir termos constantes são omitidos basicamente por três motivos: (1) pode ser considerado como um termo de contato; (2) por ser um termo que seria cancelado por uma contribuição devida ao campo externo; e (3) por ser um termo que não depende da distância entre as placas.

2.3 Linhas Mistas a Temperatura Nula

Nesta seção revisitaremos o cálculo da força de Casimir, por unidade de comprimento, entre uma linha IPM em $x = 0$ e uma linha PCE em $x = a$. Nessa configuração, as condições de fronteira são tais que:

$$B(x = 0) = 0 \text{ (ou seja, sobre a linha IPM)} \quad (2.58)$$

$$E(x = a) = 0, \text{ (sobre a linha PCE)} \quad (2.59)$$

ou, em termos das componentes $\mathcal{G}^{\mu\nu}$, devemos ter:

$$\mathcal{G}^{0\mu}(x = 0) = 0 \quad (2.60)$$

$$\mathcal{G}^{1\mu}(x = a) = 0. \quad (2.61)$$

Comparando com a Eq. (2.35), que fixa as duas condições de fronteira para cada componente da função de Green no caso de linhas IPM, vemos a principal diferença no caso LM: as relações acima impõem somente uma condição de contorno para cada componente da função de Green e portanto é necessário fixar um critério para obter a segunda condição. Vamos explicitar a técnica utilizada para determinar a segunda condição especificamente no sistema (2.30). Neste caso temos inicialmente duas condições:

$$\mathcal{G}^{01}(x = 0) = 0 \quad (2.62)$$

$$\mathcal{G}^{11}(x = a) = 0. \quad (2.63)$$

Assim, impondo a condição $\mathcal{G}^{01}(x = 0) = 0$ sobre a Eq.(2.36), a solução é dada por:

$$\mathcal{G}_{<}^{01} = A \sin \bar{k}x \quad (2.64)$$

para $0 < x < x' < a$ e

$$\mathcal{G}_{>}^{01} = A \sin \bar{k}x + i \frac{\omega}{m} \cos[\bar{k}(x' - x)] + i \frac{k}{\bar{k}} \sin[\bar{k}(x' - x)], \quad (2.65)$$

para $0 < x' < x < a$. Na Eq.(2.64), A é uma constante a ser determinada e a notação ' $>$ ' (' $<$ ') denota $x > x'$ ($x < x'$).

Para repetir a análise para a componente \mathcal{G}^{11} , é preciso inicialmente obter a equação diferencial por ela satisfeita. Manipulando o sistema (2.30), pode-se demonstrar que ela é dada por:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \bar{k}^2 \right) \left[\mathcal{G}^{11} - \frac{1}{m} \delta(x - x') \right] = \frac{\rho^2}{m} \delta(x - x'), \quad (2.66)$$

a solução deste sistema, imposta a condição $\mathcal{G}^{11}(x = a) = 0$, é dada por:

$$\mathcal{G}_{<}^{11} = \frac{1}{m} \delta(x - x') + F \sin \bar{k}(x - a) + \frac{\rho^2}{m\bar{k}} \sin[\bar{k}(x' - x)] \quad (2.67)$$

para $0 < x < x' < a$ e

$$\mathcal{G}_{>}^{11} = \frac{1}{m} \delta(x - x') + F \sin \bar{k}(x - a), \quad (2.68)$$

para $0 < x' < x < a$. Nesta equação F é uma constante a ser determinada.

Para determinar A e F usamos uma relação entre as componentes \mathcal{G}^{01} e \mathcal{G}^{11} que também é obtida do sistema (2.30):

$$\mathcal{G}^{11} = \frac{im}{m^2 - \omega^2} \left[\left(\frac{\omega}{m} \frac{\partial}{\partial x} + k \right) \mathcal{G}^{01} - i\delta(x - x') \right]. \quad (2.69)$$

O valor de \mathcal{G}^{11} em $x = 0$ é obtido considerando-se \mathcal{G}^{01} em $x = 0$ na relação acima, ou seja:

$$\mathcal{G}^{11}(x = 0) = \frac{i\omega}{m^2 - \omega^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{G}^{01} \right)_{x=0} = \frac{i\omega\bar{k}}{m^2 - \omega^2} A. \quad (2.70)$$

Igualando as Eqs. (2.67) e (2.70) em $x = 0$ obtemos a primeira relação entre as constantes A e F . Para a condição de fronteira em $x = a$ o procedimento é o mesmo, e chegamos a uma segunda relação entre as constantes. Aplicadas as condições e agrupados os termos semelhantes é possível obter:

$$\mathcal{G}_{<}^{01} = -\frac{i}{m\bar{k}} \frac{(\omega^2\bar{k}^2 + m^2k^2) \sin \bar{k}(x' - a) \sin \bar{k}x}{\omega\bar{k} \cos \bar{k}a + mk \sin \bar{k}a}, \quad (2.71)$$

e

$$\mathcal{G}_{>}^{01} = \frac{i}{m\bar{k}} \frac{[\omega\bar{k} \cos \bar{k}x' + mk \sin \bar{k}x'] [\omega\bar{k} \cos \bar{k}(x - a) - mk \sin \bar{k}(x - a)]}{\omega\bar{k} \cos \bar{k}a + mk \sin \bar{k}a}. \quad (2.72)$$

Do mesmo modo, pode-se obter também a expressão para \mathcal{G}^{10} ,

$$\mathcal{G}_{<}^{10} = -\frac{i\rho^2(\omega^2 - m^2)}{m\bar{k}} \frac{\sin \bar{k}x' \sin \bar{k}(x - a)}{\omega\bar{k} \cos \bar{k}a + mk \sin \bar{k}a}. \quad (2.73)$$

e

$$\mathcal{G}_{>}^{10} = \frac{i}{m\bar{k}} \frac{[\omega\bar{k} \cos \bar{k}x + mk \sin \bar{k}x] [\omega\bar{k} \cos \bar{k}(x' - a) - mk \sin \bar{k}(x' - a)]}{\omega\bar{k} \cos \bar{k}a + mk \sin \bar{k}a}. \quad (2.74)$$

Neste ponto Alves *et al.* observaram que as linhas mistas, apesar de apresentarem um comportamento diferenciado em relação as componentes calculadas na seção anterior, ainda preservam a propriedade $\mathcal{G}^{\mu\nu}(x, x') = [\mathcal{G}^{\nu\mu}(x', x)]^*$.

A partir do método de descontinuidade, pode-se determinar as demais componentes de modo análogo a \mathcal{G}^{10} e sem maiores dificuldades e, então, escrever a seguinte expressão para a força:

$$f(m) = - \int \frac{d\xi}{2\pi} \int \frac{dk}{2\pi} \frac{\lambda}{e^{2(\lambda a + i\alpha)} - 1}. \quad (2.75)$$

ou, em termos de coordenadas polares,

$$f(m) = \frac{1}{2\pi} \int_m^\infty \frac{\lambda^2(\lambda - m)}{me^{2\lambda a} + \lambda e^{2\lambda a} - m + \lambda} d\lambda, \quad (2.76)$$

onde $\lambda^2 = \xi^2 + m^2 + k^2$ e $\alpha = \arctan \left[\frac{\xi\lambda}{km} \right]$.

A expressão para a força de Casimir entre linhas mistas, Eq.(2.76), foi obtida em [18] e descreve uma força repulsiva cuja intensidade, semelhantemente ao caso de linhas IPM, diminui exponencialmente a medida que a massa aumenta.

Embora os resultados para as forças de Casimir entre duas linhas IPM e entre linhas mistas descrevam forças repulsivas que diminuem exponencialmente com a massa, vemos que para o caso de linhas mistas a força é mais atenuada. Isso pode ser observado através da Fig.(2.3), onde é comparada a dependência da força de Casimir na massa para os casos de linhas IPM e linhas mistas.

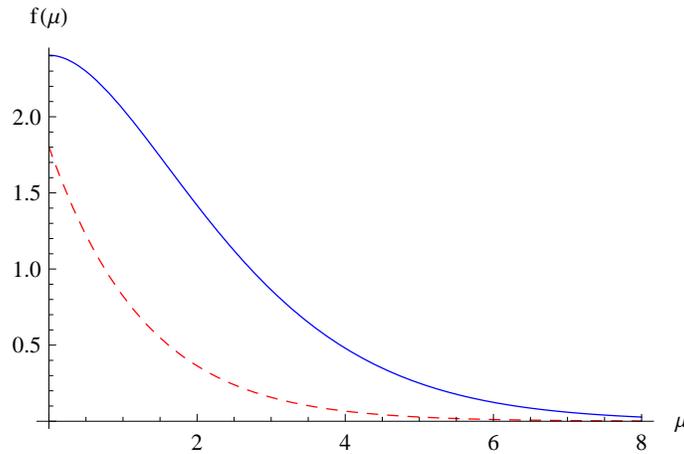


Figura 2.3: Comparação entre as curvas características da intensidade da força para linhas IPM e linhas mistas. No gráfico, as linhas cheias representam o caso IPM e a linha pontilhada representa o caso LM. Além disso, $f(\mu) = 16\pi a^3 f(m)$ e $\mu = 2ma$.

Capítulo 3

Efeito Casimir em (2+1) dimensões a Temperatura Finita

Neste capítulo apresentaremos as correções térmicas para a força de Casimir na teoria de MCS em (2+1) dimensões. Inicialmente revisitamos a força de Casimir a temperatura finita para condições simétricas, resultado este obtido pela primeira vez em [13](Sec. 3.1), posteriormente, apresentamos os resultados novos desta dissertação: a força de Casimir para a teoria de MCS entre linhas mistas a temperatura finita (nos limites de alta e baixa temperatura)(Sec. 3.2), bem como a análise da simetria de inversão de temperatura no modelo de MCS em (2+1) dimensões¹ (Sec. 3.3).

Conforme vimos na Sec.(1.2), o procedimento para determinar um observável a temperatura finita é razoavelmente simples, bastando incluir o efeito de temperatura na expressão do observável a temperatura nula via formalismo de Matsubara. Neste caso, os valores contínuos assumidos pela energia passam a ser discretos ($\xi \rightarrow \xi_n$) e, uma vez que o termo de Chern-Simons é equivalente a um campo escalar massivo com *spin* unitário, esses valores são dados por:

$$\xi_n = \frac{2\pi n}{\beta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1)$$

Como consequência, a integral sobre os valores da energia é substituída por um somatório sobre o número inteiro n :

$$\int \frac{d\xi}{2\pi} \rightarrow \frac{1}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty}. \quad (3.2)$$

¹Artigo em fase de submissão.

3.1 Condições Simétricas de Fronteira a Temperatura Finita

Como a disposição geométrica das linhas não se altera pela inclusão do efeito térmico, as condições de fronteiras aplicadas à temperatura nula continuam válidas para temperatura finita. Assim, a força de Casimir para duas linhas IPM, imersas em um banho térmico a temperatura T , pode ser obtida a partir da discretização da energia ξ na Eq.(2.53):

$$f^{(T)}(m) = -\frac{2}{\pi\beta} \sum'_{n=0} \int_0^{\infty} dk \frac{\lambda}{e^{2\lambda a} - 1} \quad (3.3)$$

$$= -\frac{1}{2\pi\beta a^2} \sum'_{n=0} \int_{\chi_n}^{\infty} dy \frac{y^2}{e^y - 1} (y^2 - \chi_n^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.4)$$

onde $\chi_n^2 = 4m^2 a^2 + \frac{16\pi^2 a^2 n^2}{\beta^2}$, $\beta = 1/T$ e T é a temperatura do banho térmico. Na expressão acima a linha no somatório significa que o termo para o qual $n = 0$ é contado pela metade.

A partir da expressão (3.3) podemos notar que a solução analítica para a força de Casimir a temperatura finita não pode ser obtida de maneira trivial, devido as dificuldades em efetuarmos o cálculo da integral envolvida no processo. Neste caso, pode-se avaliar a solução para a força por meio da análise gráfica de $f^{(T)}(m)$ pela massa para diferentes valores de temperatura, conforme nos mostra a Fig.(3.1).

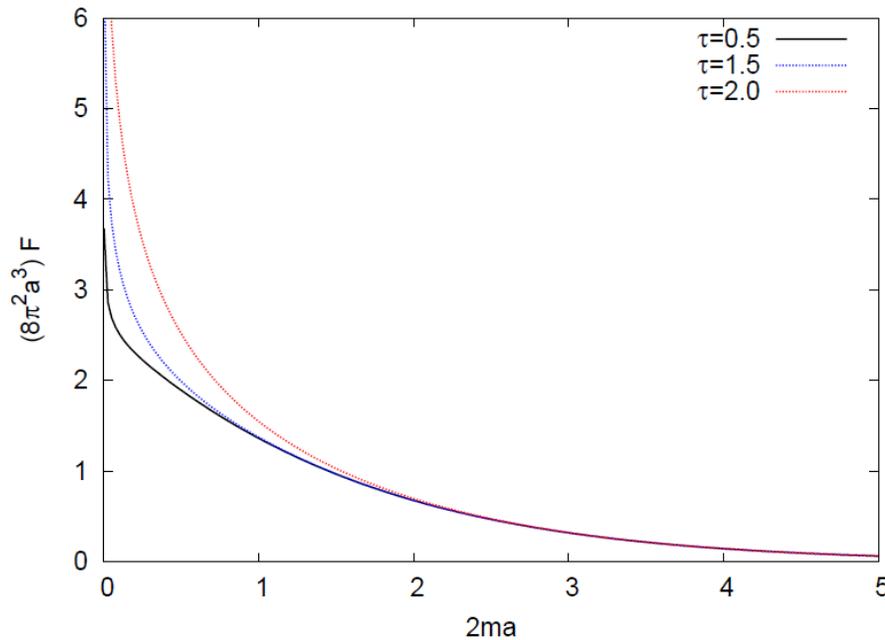


Figura 3.1: Gráfico da força entre duas linhas IPM para diferentes valores de temperatura. Neste caso, $\tau = 4\pi a T$ é a temperatura em escala.

Por outro lado, a análise do comportamento da força também pode ser feita considerando-se limites específicos de validade para a Eq.(3.3) como, por exemplo, considerando-se os limites de baixas e altas temperaturas.

(i) Limite de Altas Temperaturas

A solução aproximada para a força no limite de altas temperaturas é obtida considerando-se $T \rightarrow \infty$ ou $\beta \rightarrow 0^2$ sobre a Eq.(3.3). Neste limite o termo dominante é dado por $n = 0$ enquanto que os demais termos são exponencialmente pequenos. Portanto pode-se obter:

$$f^{(T \gg 0)} \sim -\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi\beta a^2} \int_{\mu}^{\infty} dy \frac{y^2}{e^y - 1} (y^2 - \mu^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{2\pi\beta a^2} g(\mu), \quad (3.5)$$

onde $\mu = 2ma$ e a função $g(\mu)$ é definida como

$$g(\mu) = \int_{\mu}^{\infty} dy \frac{y^2}{e^y - 1} \frac{1}{\sqrt{y^2 - \mu^2}}. \quad (3.6)$$

Note que no limite de massa nula a Eq.(3.5) se reduz à:

$$f^{(T \gg 0)} \sim -\frac{1}{4\pi^2\beta a^2} \zeta(2). \quad (3.7)$$

(ii) Limite de Baixas Temperaturas

Para se obter uma expressão para a força de Casimir no limite de baixas temperaturas ($T \rightarrow 0$ ou $\beta \rightarrow \infty$)³ o processo é um pouco mais complicado, pois a Eq.(3.3) não é analítica em $T = 0$. No entanto, de acordo com a Ref.[13], pode-se obter uma aproximação para a força utilizando-se a fórmula da soma de Poisson, a qual determina o valor do somatório de uma função de variáveis discretas a partir da transformada de Fourier de sua versão contínua: seja a $h(n)$ uma função da variável discreta n ; podemos determinar o valor de $\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)$ por meio da seguinte fórmula:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(2n\pi), \quad (3.8)$$

onde

$$\mathcal{H}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx h(x) e^{-i\alpha x} \quad (3.9)$$

é a transformada de Fourier de $h(n)$, onde n é promovida à variável contínua x . Assim, tomando

$$h(n) = \int_{\chi_n}^{\infty} dy \frac{y^2}{e^y - 1} (y^2 - \chi_n^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.10)$$

²Na prática o limite de altas temperaturas é tomado de tal modo que $\tau = 4\pi aT \gg 1$.

³Da mesma forma, o limite de baixas temperaturas é dado por $\tau = 4\pi aT \ll 1$.

obtemos

$$\mathcal{H}(2n\pi) = \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} dy \frac{y^2}{e^y - 1} \int_0^{\beta\sqrt{y^2 - \mu^2}/4\pi a} dx \cos[2n\pi x] (y^2 - \chi_x^2)^{-1/2}, \quad (3.11)$$

$$= \frac{\beta}{8\pi a} \int_{\mu}^{\infty} dy \frac{y^2}{e^y - 1} J_0 \left[c\sqrt{y^2 - \mu^2} \right]. \quad (3.12)$$

onde $J_0[x]$ é a função de Bessel de primeira espécie de ordem 0 e $c = \frac{n\beta}{2a}$. A partir dessa equação podemos obter facilmente o termo $h(0)$ tomando $n = 0$,

$$h(0) = 2\pi\mathcal{H}(0) = \frac{\beta}{4a} \int_{\mu}^{\infty} dy \frac{y^2}{e^y - 1}, \quad (3.13)$$

para o qual obtemos a primeira contribuição para a força

$$f^{n=0}(m) \equiv f^{T=0}(m) = -\frac{1}{16\pi a^3} \int_{\mu}^{\infty} dy \frac{y^2}{e^y - 1}, \quad (3.14)$$

que é exatamente a força entre as linhas PCE a temperatura nula obtida através da Eq.(2.53). Por outro lado, para $n \neq 0$ vemos que o tratamento da integral envolvendo a função de Bessel se torna bastante complicado, de modo que a correção térmica para a força é calculada no limite não massivo:

$$\mathcal{H}(2n\pi) = \frac{\beta}{8\pi a} \int_0^{\infty} dy \frac{y^2}{e^y - 1} J_0[cy]. \quad (3.15)$$

Notemos que no limite de baixas temperaturas ($c \rightarrow \infty$) pode-se reescrever a expressão acima como:

$$\mathcal{H}(2n\pi) = \frac{\beta}{8\pi a} \frac{1}{c^3} \int_0^{\infty} dx x^2 \frac{e^{-x/c}}{1 - e^{-x/c}} J_0(x) = \frac{a^2}{\pi\beta^2 n^3} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dx x^2 e^{-\frac{(n+1)x}{c}} J_0(x). \quad (3.16)$$

Utilizando que

$$\int_0^{\infty} dx x^{m+1} e^{-\alpha x} J_{\nu}(\gamma x) = (-1)^{m+1} \gamma^{-\nu} \frac{\partial^{m+1}}{\partial \alpha^{m+1}} \left[\frac{(\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} - \alpha)^{\nu}}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} \right], \quad (3.17)$$

onde $\gamma > 0$ e $Re[\nu] > -m - 2$, obtemos:

$$\mathcal{H}(2n\pi) = \frac{a^2}{\pi\beta^2 n^3} \sum_{\ell=1}^{\infty} F(\ell) \quad (3.18)$$

na qual foi definido

$$F(\ell) = \frac{2 \left(\frac{\ell}{c}\right)^2 - 1}{\left[\left(\frac{\ell}{c}\right)^2 + 1\right]^{5/2}}, \quad \ell = n + 1. \quad (3.19)$$

No cálculo do valor assintótico da soma em $F(\ell)$ podemos utilizar a fórmula de soma de Euler-Maclaurin:

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} F(\ell) = \int_1^{\infty} d\ell F(\ell) + \frac{1}{2}[F(\infty) + F(1)] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} B_{2k} [F^{(2k-1)}(\infty) - F^{(2k-1)}(1)], \quad (3.20)$$

onde B_{2k} são os números de Bernoulli e $(2k-1)$ indica a ordem da derivada em $F(\ell)$. Além disso, utilizando

$$\begin{aligned} \int_1^\infty d\ell F(\ell) &= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{c^2}\right)^{3/2}} \approx 1, \\ F(\infty) &= 0, \quad F(1) = \frac{-1 + \frac{2}{c^2}}{\left(1 + \frac{1}{c^2}\right)^{5/2}} \approx -1, \\ F^{(2k-1)}(\infty) &= 0, \quad F^{(2k-1)}(1) \approx 0, \quad (k \geq 1), \end{aligned} \quad (3.21)$$

obtemos

$$\mathcal{H}(n \neq 0) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{a}{\beta}\right)^2 \frac{1}{n^3}, \quad (3.22)$$

ou, substituindo na Eq.(3.11),

$$\sum_{n=1}^{\infty} h(n) = \left(\frac{a}{\beta}\right)^2 \zeta(3), \quad (3.23)$$

pode-se obter a força entre as linhas no limite de baixas temperaturas e massa nula:

$$f^{(T)}(m=0) \approx -\frac{1}{8\pi a^3} \zeta(3) \left[1 + \frac{4a^3}{\beta^3} + \dots \right]. \quad (3.24)$$

Note que a equação para a força Eq.(3.24) é do tipo atrativa e não depende da distância entre as linhas, semelhantemente ao caso da eletrodinâmica em $(3+1)$ dimensões [37].

3.2 Linhas Mistas a Temperatura Finita

Conforme vimos na seção anterior as condições sobre as fronteiras são as mesmas tanto para temperatura zero quanto para temperatura finita, de modo que para obtermos a força de Casimir a temperatura finita sob condições mistas, podemos utilizar a frequência de Matsubara para bósons na Eq.(2.75), ou seja:

$$f^{(T)}(m) = -\frac{1}{2\pi\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int dk \frac{\lambda}{e^{2(\lambda a + i\alpha)} - 1}, \quad (3.25)$$

onde

$$\lambda^2 = k^2 + m^2 + \frac{4\pi^2 a^2 n^2}{\beta^2}, \quad (3.26)$$

$$\alpha = \arctan \left[\frac{2\pi n \lambda}{km\beta} \right]. \quad (3.27)$$

Dada a alta complexidade na determinação da solução da Eq.(3.25) nos deteremos na análise do caso não massivo. Neste caso note que $m \rightarrow 0$ implica em $\alpha \rightarrow \pi/2$, de modo que a expressão para a força se reduz à seguinte forma:

$$f^{(T)}(m=0) = \frac{2}{\pi\beta} \sum_{n=0}^{\infty}{}' \int dk \frac{b}{e^{2ba} + 1}, \quad (3.28)$$

onde $b = \sqrt{k^2 + \frac{4\pi^2 n^2}{\beta^2}}$ e a linha no somatório novamente indica que o termo de ordem zero deve ser contado pela metade. Introduzindo a variável adimensional $y = 2\lambda a$ podemos reescrever a Eq.(3.28) como:

$$f^{(T)}(m=0) = \frac{1}{2\pi\beta a^2} \sum_{n=0}^{\infty}{}' \int_{\chi_n}^{\infty} dy \frac{y^2}{e^y + 1} (y^2 - \chi_n^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.29)$$

onde $\chi_n = \frac{4\pi a n}{\beta}$. Note agora que mais uma vez obter analiticamente uma expressão para a força de Casimir a temperatura finita não é uma tarefa trivial, por isso iremos considerar os limites de altas e baixas temperaturas.

(i) Limite de Altas Temperaturas

Para altas temperaturas o resultado é similar ao obtido para o caso não misto de linhas PCE a alta temperaturas [13], pois o termo dominante é obtido para $n=0$ enquanto que os demais são exponencialmente pequenos, ou seja:

$$f^T = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi\beta a^2} \int_{\mu}^{\infty} dy \frac{y}{e^y + 1} = \frac{1}{8\pi\beta a^2} \zeta(2). \quad (3.30)$$

Comparando este resultado com outros obtidos na literatura científica, por outros métodos e para o campo escalar não massivo, percebemos que se trata de resultados idênticos para o limite clássico [38]. Note ainda que podemos estabelecer uma relação entre os resultados de linhas mistas e linhas IPM no limite não massivo como sendo dada por:

$$f_{LM}^{(T)} = -\frac{1}{2} f_{IPM}^{(T)}. \quad (3.31)$$

ou, comparando com a expressão (3.7) obtemos que:

$$f_{LM}^{(T)}(m=0, a) = 2f_{IPM}^{(T)}(m=0, 2a) - f_{IPM}^{(T)}(m=0, a). \quad (3.32)$$

Conforme veremos posteriormente, este resultado é geral, independente do valor de temperatura e reflete a propriedade de inversão de temperatura residual satisfeita pela teoria.

(ii) Limite de Baixas Temperaturas

No limite de baixas temperaturas podemos determinar a força entre as linhas tomando

$$h(n) = \int_{\chi_n}^{\infty} dy \frac{y^2}{e^y + 1} (y^2 - \chi_n^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.33)$$

e calculando a transformada de Fourier $\mathcal{H}(2n\pi)$,

$$\mathcal{H}(2n\pi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dy \frac{y^2}{e^y + 1} \int_0^{\frac{\beta y}{4\pi a}} dx \cos[2n\pi x] (y^2 - \chi_x^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.34)$$

$$= \frac{\beta}{8\pi a} \int_0^\infty dy \frac{y^2}{e^y + 1} J_0[cy] \quad (3.35)$$

onde $\chi_n = \frac{4\pi an}{\beta}$ e $c = n\beta/(2a)$. A partir dessa expressão podemos determinar o termo $n = 0$ sem maiores dificuldades como sendo dada por:

$$\mathcal{H}(0) = \frac{\beta}{8\pi a} \int_0^\infty dy \frac{y^2}{e^y + 1} = \frac{3\beta}{16\pi a} \zeta(3), \quad (3.36)$$

e assim obtemos a primeira contribuição para a força como sendo:

$$f^{n=0}(m=0) \equiv f^{T=0}(m=0) = \frac{3}{32\pi a^3} \zeta(3). \quad (3.37)$$

Como já poderíamos esperar esse resultado é o mesmo obtido para as linhas mistas a temperatura nula [18].

Para determinarmos a solução para o caso $n \neq 0$ notemos que utilizando

$$\frac{1}{e^{x/c} + 1} = - \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^\ell e^{\frac{(\ell+1)x}{c}}, \quad c \rightarrow \infty \quad (3.38)$$

podemos escrever a Eq.(3.29) como:

$$\mathcal{H}(2n\pi) = -\frac{1}{c^3} \frac{\beta}{8\pi a} \sum_{\ell=1}^{\infty} (-1)^\ell \int_0^\infty dx x^2 e^{-(\ell+1)x/c} J_0(x) \quad (3.39)$$

$$= -\frac{1}{c^3} \frac{\beta}{8\pi a} \sum_{\ell=2}^{\infty} F(\ell), \quad (3.40)$$

onde

$$F(\ell) = (-1)^{\ell-1} \frac{2 \left(\frac{\ell}{c}\right)^2 - 1}{\left[\left(\frac{\ell}{c}\right)^2 + 1\right]^{5/2}}. \quad (3.41)$$

A soma sobre os valores de $F(\ell)$ pode ser obtida a partir da fórmula de Maclaurin,

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} F(\ell) = \int_1^\infty d\ell F(\ell) + \frac{1}{2} [F(\infty) + F(1)] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} B_{2k} \left[F^{(2k-1)}(\infty) - F^{(2k-1)}(1) \right], \quad (3.42)$$

notando que

$$B_{2k} = (-1)^{k+1} \frac{2(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k), \quad (3.43)$$

$$F(\infty) = 0, \quad F(1) = -\frac{\left(1 - \frac{2}{s^2}\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{s^2}} \left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^2} \approx -1,$$

$$F^{(2k-1)}(\infty) = 0, \quad F^{(2k-1)}(1) \approx (-i\pi)^{2k-1}, \quad (k \geq 1). \quad (3.44)$$

Substituindo esses resultados na fórmula de Euler-Maclaurin obtemos:

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} F(\ell) = -\frac{1}{2} + S(c), \quad (3.45)$$

onde $S(c) = \int_1^{\infty} d\ell F(\ell, c) - \frac{i}{\pi}$ e utilizamos que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta(2k)}{2^{2k-1}} = 1$. Além disso, temos de calcular também a integral da função $F(\ell)$ o que se mostra bastante complicado, por isso optamos por fazê-lo numericamente, conforme nos mostra o gráfico a seguir.

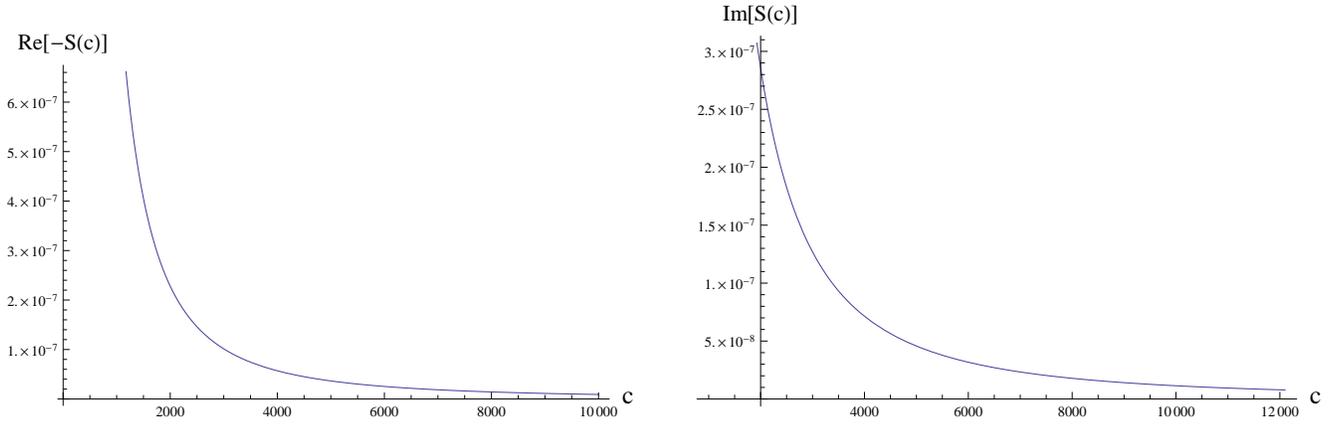


Figura 3.2: Comportamento das partes real e imaginária de $S(c) = \int_1^{\infty} d\ell F(\ell, c) - \frac{i}{\pi}$. Os dois gráficos nos mostram que tanto a parte real quanto a parte imaginária da função vão a zero no limite assintótico ($c \rightarrow \infty$).

Portanto, a partir da análise gráfica do comportamento assintótico de $S(c)$ obtemos que

$$\mathcal{H}(2n\pi) = \frac{1}{c^3} \frac{\beta}{8\pi a} \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{a^2}{2\pi\beta^2} \frac{1}{n^3}, \quad (3.46)$$

e para a força

$$f_{n \neq 0}^{(T)} = -\frac{1}{2\pi\beta^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = -\frac{1}{2\pi\beta^3} \zeta(3). \quad (3.47)$$

Colecionando todos os resultados obtemos a aproximação para a força entre as linhas mistas no limite não massivo como sendo dada por:

$$f^{(T)}(m=0) = f_{n=0}^{(T)} + f_{n \neq 0}^{(T)} \quad (3.48)$$

$$= \frac{3}{32\pi a^3} \zeta(3) \left[1 - \frac{16a^3}{3\beta^3} + \dots \right]. \quad (3.49)$$

A partir da expressão da acima vemos que, semelhantemente ao caso de linhas PCE, a correção térmica não depende da distância entre as linhas e a correção térmica é atrativa. Neste caso a diferença está no termo que não depende da temperatura, pois nos fornece uma força repulsiva. Observamos que este resultado é semelhante ao resultado obtido em [38], no qual o autor considera a força de Casimir a temperatura finita para o caso de um pistão no campo de Maxwell.

3.3 Simetria de Inversão de Temperatura

Finalizaremos este capítulo analisando a energia livre de Helmholtz associada com o efeito Casimir. Veremos que essa energia, para o caso de condições simétricas, apresenta uma simetria interessante chamada de simetria de inversão de temperatura, a qual relaciona o resultado obtido à temperatura nula com o resultado à temperatura finita [39, 40]. Na sequência, vamos obter a simetria de inversão de temperatura do tipo residual de acordo com a definição encontrada na Ref.[19]. Assim, vamos iniciar o estudo analisando o caso da força de Casimir sobre linhas PCE a temperatura finita, resultado este obtido em [13]:

$$f^T(m) = -\frac{1}{2\pi\beta a^2} \sum'_{n=0} \int_{\mu_n}^{\infty} dy \frac{y^2}{e^y - 1} (y^2 - \mu_n^2)^{-1/2} \quad (3.50)$$

onde $\mu_n^2 = (2ma)^2 + (4\pi na/\beta)^2$ e a linha no somatória indica que o termo de ordem zero deve ser contado pela metade. Note agora que após uma certa manipulação a Eq.(3.50) pode ser escrita como uma soma de dois termos: um termo de temperatura nula e outro de temperatura finita:

$$f^T(m=0) = f^{T=0}(m=0) + h^T(m=0). \quad (3.51)$$

com $f^{T=0}(m=0)$ e $h^T(m=0)$ sendo explicitamente as contribuições a temperatura nula e temperatura finita para a força de Casimir, dados respectivamente por:

$$f^{T=0}(m=0) = -\frac{1}{8\pi a^3} \zeta(3), \quad (3.52)$$

$$h^T(m=0) = -\frac{1}{8\pi\beta^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \int_0^{\infty} dy \frac{y^2}{e^{cy} - 1} J_0(y), \quad (3.53)$$

onde equações $c = 2aT/n$. Então, a partir da Ref.[19] obtemos que a energia livre de Helmholtz é dada por:

$$\mathcal{F}^T(m=0) = - \int f^T(m=0) da + \text{const}, \quad (3.54)$$

o termo constante é ajustado de modo que no limite de alta temperatura $\mathcal{F}^T(m=0)$ seja consistente com o termo de Stefan-Boltzmann. Assim, a contribuição de temperatura nula para \mathcal{F} é facilmente calculada como sendo:

$$\mathcal{F}^{T=0}(m=0) = -\frac{1}{16\pi a^2} \zeta(3). \quad (3.55)$$

Além disso, a contribuição de temperatura finita, $\mathcal{F}^T(m=0)$, é calculada da seguinte maneira:

$$\mathcal{F}^T(m=0) = -\frac{1}{8\pi a^2} \sum_{n,l=1}^{\infty} \frac{(2\pi\xi)^3}{[n^2 + (2\pi\xi l)^2]^{3/2}}, \quad (3.56)$$

onde $\xi = aT/\pi$ é a temperatura em escala. Substituindo as contribuições de temperatura zero e finita (Eqs. (3.55) e (3.56)) na Eq.(3.51) obtemos:

$$\mathcal{F}^T(m=0) = -\frac{1}{32\pi a^2} \sum_{n,l=-\infty}^{+\infty} \frac{(2\pi\xi)^3}{[n^2 + (2\pi\xi l)^2]^{3/2}}. \quad (3.57)$$

Dados os resultados acima podemos verificar a seguinte relação para a energia livre:

$$(2\pi\xi)^3 \mathcal{F}^T\left(m=0, \frac{1}{4\pi^2\xi}\right) = \mathcal{F}^T(m=0, \xi), \quad (3.58)$$

que é a simetria de inversão de temperatura (SIT) em (2+1). Uma vez que estamos tomando o limite sem massa, é possível obtermos, de modo análogo, uma relação para a condição de linhas mistas. Assim, para obtermos uma relação semelhante para o caso LM usaremos a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{2}{e^{2x} - 1}, \quad (3.59)$$

em termos da qual podemos escrever

$$\begin{aligned} f^T(m=0, a) &\equiv f_{(M)}^T(m=0, a) \\ &= 2f_{(NM)}^T(m=0, 2a) - f_{(NM)}^T(m=0, a), \end{aligned} \quad (3.60)$$

onde os subscritos M e NM representam respectivamente os dois tipos de condições de contorno: uma linha infinitamente permeável e uma linha perfeitamente condutora, e duas linhas infinitamente permeável.

Em termos da energia livre a relação (3.60) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^T(m=0, a) &\equiv \mathcal{F}_{(M)}^T(m=0, a) \\ &= \mathcal{F}_{(NM)}^T(m=0, 2a) - \mathcal{F}_{(NM)}^T(m=0, a). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Note agora porque esta simetria de inversão de temperatura é dita residual: podemos observar que os dois termos à direita na Eq.(3.61) satisfazem diretamente a Eq.(3.58), enquanto que o termo a esquerda não satisfaz. Este resultado já era esperado, pois a SIT está relacionada a condições de fronteira do tipo simétrica e não com condições mistas.

Podemos agora tentar repetir a mesma análise para as linhas simétricas para o caso massivo. Neste caso, devemos partir diretamente da Eq.(3.3) e obter a energia livre. Assim, obtemos o seguinte resultado:

$$\mathcal{F}^T = -\frac{m\pi}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \frac{\xi^2 \left(\sqrt{(2\pi\xi a\ell)^2 + n^2} + 1 \right)}{[(2\pi\xi a\ell)^2 + n^2]^{3/2}} e^{-\beta m \sqrt{(2\pi\xi a\ell)^2 + n^2}}, \quad (3.62)$$

a partir do qual vemos, claramente, que para o caso massivo a propriedade de simetria de inversão de temperatura, Eq. (3.58), não é satisfeita.

Considerações Finais

Nesta dissertação estudamos efeito Casimir no modelo de Maxwell-Chern-Simons em (2+1), no qual apresentamos novos resultados envolvendo efeitos térmicos na força de Casimir entre linhas mistas via método das funções de Green, bem como uma discussão a respeito da simetria de inversão de temperatura para este caso.

Como resultados, obtivemos que para o limite de altas temperaturas a força é repulsiva e possui a metade do valor da força entre duas linhas perfeitamente condutoras; e, para o limite de baixas temperaturas, obtivemos um resultado interessante que nos mostra que embora a força seja repulsiva a correção de primeira ordem é atrativa,

$$f^{(T)}(m = 0) = \frac{3}{32\pi a^3} \zeta(3) \left[1 - \frac{16a^3}{3\beta^3} + \dots \right].$$

Vale salientar que, muito embora o resultado acima pareça indicar que existe uma temperatura crítica, para qual a força muda o sentido, se calcularmos o valor desta temperatura veremos que ele é muito superior ao limite de validade da expansão considerada ($\beta \gg 4\pi a$). Cabe ressaltar ainda que, na expressão para a força, a correção de mais baixa ordem é exatamente igual ao obtido na Ref.[38] através da fórmula de Chowla-Selberg, no qual o autor também considera o método de regularização *zeta*.

Na sequência, por comparação entre as expressões para a força no limite de massa nula, nos casos de condições simétricas e mistas, obtivemos que a força no caso de linhas mistas deve satisfazer uma simetria de inversão de temperatura do tipo residual. Em contra partida, para o caso massivo observamos que essa simetria não é satisfeita.

Como perspectiva de continuidade do trabalho, iremos realizar a análise do modelo de MCS em (3+1) dimensões de modo análogo ao caso de (2+1) dimensões que foi abordado nesta dissertação. Para este modelo, na literatura existe somente o cálculo a temperatura nula e linhas PCE⁴. Toda a análise restante está em aberto, em particular a discussão a respeito da simetria de inversão de temperatura.

⁴No apêndice A apresentamos uma breve discussão envolvendo efeito Casimir neste modelo.

Apêndice A

Teorias de Chern-Simons em $(3+1)$ dimensões

Nos capítulos anteriores analisamos a teoria de calibre abeliana de Chern-Simons em $(2+1)$ dimensões, no contexto da teoria de Maxwell. Neste caso observamos, dentre outras características, que devido a inserção do termo de Chern-Simons, o modelo passa a violar a paridade, gera massa para o campo de calibre A^μ e, apesar disso, continua sendo um invariante de Lorentz.

Vimos também a impossibilidade de se generalizar a lagrangiana da teoria CS para espaços-tempos com um número ímpar de dimensões espaciais, de modo que a teoria continue sendo invariante de Lorentz. Este é exatamente o caso do modelo proposto por Field, Carrol e Jackiw em 1990, onde a lagrangiana de CS em $(3+1)$ dimensões é obtida através da inclusão de um quadrivetor externo acoplado ao campo de calibre A^μ . Como consequência, esses autores obtiveram uma eletrodinâmica modificada em $(3+1)$ dimensões com violação de paridade e violação da invariância de Lorentz.

Muito embora os experimentos até hoje não tenham encontrado nenhuma comprovação de sistemas físicos que respeitem esta quebra, estudos indicam que o termo de acoplamento da lagrangiana CS em $(3+1)$ dimensões está relacionado com a rotação da polarização de propagação dos fótons que compõem a radiação cósmica de fundo [41]. Além disso, na literatura, encontramos vários textos nos quais os autores utilizam a violação de Lorentz da teoria para estudar processos de quebra de simetrias CPT [42] e quebra de invariância de Lorentz sobre a radiação sincrotron [43].

Neste apêndice iremos apresentar aspectos gerais da teoria CS em $(3+1)$ dimensões, em particular enfocando na construção do tensor energia-momento canônico e na impossibilidade de construção do respectivo tensor simetrizado, devido a quebra da invariância de Lorentz. Além disso, listaremos alguns

resultados já calculados na literatura relacionados com a força de Casimir.

A.1 Considerações Gerais

Para iniciarmos a análise, consideremos a teoria abeliana de Maxwell-Chern-Simons em $(3 + 1)$ dimensões, descrita em termos da seguinte densidade de lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{2}p_\alpha\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}A_\beta\partial_\mu A_\nu - A^\mu J_\mu, \quad (\text{A.1})$$

onde $\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ é a lagrangiana de Maxwell, $\mathcal{L}_{CS} = -\frac{1}{2}p_\alpha\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}A_\beta\partial_\mu A_\nu$ é a modificação de Field-Carrol-Jackiw [20] para a lagrangiana de Chern-Simons em $(3 + 1)$ dimensões e J_μ é a corrente de matéria. Além disso, p^α é um quadri vetor que será definido posteriormente.

É importante notarmos que o tensor de Levi-Civita é agora anti-cíclico, e definindo $\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = +1$, obtemos as seguintes igualdades:

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \text{para permutações pares} \\ -1, & \text{para permutações ímpares} \\ 0, & \text{para qualquer outra.} \end{cases}$$

ou, no caso geral:

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha - \mu)(\alpha - \nu)(\beta - \mu)(\beta - \nu)(\mu - \nu)}{12}. \quad (\text{A.2})$$

A.2 As Equações de Movimento

Seja a teoria de MCS em $(3 + 1)$ dimensões dada pela densidade de lagrangia (A.1). Definindo-se o tensor dual

$$\tilde{F}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}F_{\mu\nu} = \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\partial_\mu A_\nu, \quad (\text{A.3})$$

podemos reescrever a lagrangiana como:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\tilde{F}^{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}p_\alpha A_\beta\tilde{F}^{\mu\nu}. \quad (\text{A.4})$$

A partir da lagrangiana (A.1) e do tensor dual as equações clássicas de movimento são dadas por:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - p_\mu\tilde{F}^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (\text{A.5})$$

e

$$\partial_\mu\tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{A.6})$$

ou, em termos das componentes,

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho - \vec{p} \cdot \vec{B}, \quad (\text{A.7})$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (\text{A.8})$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (\text{A.9})$$

$$\nabla \times \vec{B} = -4\pi\vec{J} + \frac{\partial E}{\partial t} + \vec{p} \times \vec{E} - p_0\vec{B}. \quad (\text{A.10})$$

Note que a forma das equações não é mais invariante de Lorentz devido a inserção do quadrivetor externo p_α . Por outro lado, por uma transformação de calibre do tipo $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$, a variação da lagrangiana (A.1) é dada por

$$\Delta \mathcal{L} = \frac{1}{4} \Lambda \tilde{F}^{\mu\nu} (\partial_\mu p_\nu - \partial_\nu p_\mu). \quad (\text{A.11})$$

Portanto a invariância de calibre é preservada desde que $\Delta \mathcal{L}$ encontrado acima seja nulo. Uma condição suficiente para que a teoria seja invariante de calibre é que p^μ seja constante, de tal forma que as quantidades $\partial_\mu p_\nu$ sejam nulas.

Além disso, retomando a lagrangiana (A.1), podemos imaginar o termo de CS como uma soma de quatro lagrangianas em (2+1) dimensões nos planos cujas normais apontam nas direções das coordenadas (t, x, y, z) . Para ficar mais claro considere a lagrangiana de Chern-Simons da Eq.(A.1) para $p_0 = 0$, por simplicidade,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} p_i \epsilon^{i\beta\mu\nu} A_\beta \partial_\mu A_\nu \quad (\text{A.12})$$

$$= -\frac{1}{2} p_1 \epsilon^{1\beta\mu\nu} A_\beta \partial_\mu A_\nu - \frac{1}{2} p_2 \epsilon^{2\beta\mu\nu} A_\beta \partial_\mu A_\nu - \frac{1}{2} p_3 \epsilon^{3\beta\mu\nu} A_\beta \partial_\mu A_\nu, \quad (\text{A.13})$$

podemos observar que cada componente de p^μ atua sobre os termos da lagrangiana de modo a privilegiar uma determinada direção associada ao espaço-tempo (veja a Fig.(A.1)).

A partir da lagrangiana (A.1) podemos obter também o tensor energia-momento canônico como sendo:

$$T_{(c)}^{\mu\nu} = \partial^\nu A_\alpha \frac{\mathcal{L}}{\partial \partial_\mu A_\alpha} - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (\text{A.14})$$

$$= -\partial^\nu A_\alpha F^{\mu\alpha} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} + \frac{p_\sigma}{2} \left[\epsilon^{\sigma\beta\mu\alpha} A_\beta \partial^\nu A_\alpha - A_\beta \tilde{F}_{\sigma\beta} \right], \quad (\text{A.15})$$

que não é simétrico nos índices μ e ν . Em particular, para $p_\sigma = 0$ recuperamos o tensor energia-momento canônico do campo de Maxwell.

Além disso, podemos ingenuamente tentar adicionar um termo de divergência total em (A.14) para obter o tensor simetrizado da maneira usual apresentada no segundo capítulo, ou seja:

$$T^{\mu\nu} = T_{(c)}^{\mu\nu} + \partial_\rho \Omega^{\rho\mu\nu}. \quad (\text{A.16})$$

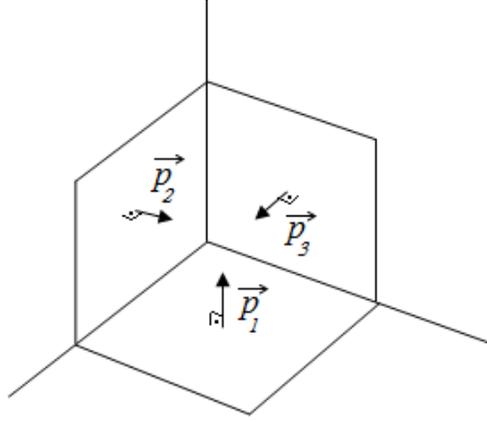


Figura A.1: Representação pictórica do papel do quadrivetor p^μ em um espaço tridimensional.

Assim, tomando

$$\Omega^{\rho\mu\nu} = - \left(F^{\nu\mu} - \frac{1}{2} p_\sigma A_\gamma \epsilon^{\sigma\gamma\nu\mu} \right) A^\lambda \quad (\text{A.17})$$

podemos obter o seguinte tensor energia-momento [44]:

$$T^{\mu\nu} = T_M^{\mu\nu} + \frac{1}{2} p_\sigma A_\gamma \epsilon^{\alpha\beta\sigma\rho} F_{\lambda\rho} \left[\delta_\beta^\gamma \delta_\sigma^\mu \eta^{\nu\lambda} + \frac{1}{2} \delta_\sigma^\lambda \left(\delta_\beta^\mu \eta^{\gamma\nu} - \delta_\beta^\gamma \eta^{\mu\nu} \right) \right], \quad (\text{A.18})$$

onde

$$T_M^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} \quad (\text{A.19})$$

é o tensor energia-momento de Maxwell simetrizado.

Da Eq.(A.18) vemos que, mesmo após o processo de simetrização, o tensor energia-momento continua sendo assimétrico ($T^{\mu\nu} \neq T^{\nu\mu}$). Este resultado era de se esperar, uma vez que o modelo não respeita mais a invariância de Lorentz.

A influência do quadrivetor p^μ pode ser observada também quando obtemos a densidade de energia a partir de $T^{\mu\nu}$ como sendo:

$$\mathcal{H} = T^{00} = \frac{1}{2} \left[\vec{E}^2 + \vec{B}^2 \right] + \frac{p^0}{2} \vec{A} \cdot \vec{B}, \quad (\text{A.20})$$

e através das componentes da densidade do momento linear,

$$\mathcal{P}^i = T^{0i} = \left(\vec{E} \times \vec{B} \right)^i + \frac{p^i}{2} \left(\vec{A} \cdot \vec{B} \right), \quad (\text{A.21})$$

Assim, é possível observamos que as componentes \vec{p} quebram a invariância do modelo por rotações espaciais, enquanto que a componente p_0 viola a invariância por transformação de *boosts*.

A.3 Efeito Casimir em Modelos MCS em (3+1) Dimensões.

Nesta seção vamos expor resultados recentes relacionados a força de Casimir em modelos de Maxwell-Chern-Simons em (3 + 1) dimensões, no qual utilizaremos a Ref. [44]. Especificamente, vamos revisitar a expressão para a força de Casimir a temperatura nula entre duas placas PEC considerando-se a distância entre elas como sendo muito pequena.

Conforme vimos na seção anterior, no modelo de MCS em (3 + 1) dimensões, o tensor energia-momento da teoria é dependente de calibre e varia de acordo com a definição do quadrivetor p^μ . Neste caso é necessário primeiramente fixar o calibre para que, posteriormente, seja possível obter a força de Casimir por meio da integração do tensor energia-momento sobre as placas.

No cálculo da força de Casimir em [44], os autores fixam o calibre sobre A^μ como sendo:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$\eta_\mu A^\mu = 0. \quad (\text{A.23})$$

Eles ainda consideram que $p^\mu = \{\eta, \vec{0}\}$ e que as placas estão dispostas perpendicularmente a direção do eixo z . Além disso, estão localizadas em $z = -a$ e $z = a$, sobre as quais é aplicada as seguintes condições de fronteira:

$$E_x = E_y = 0, \quad (\text{A.24})$$

e como não pode haver um campo magnético estático na direção z , que não desaparece sobre as placas, deve-se também considerar que

$$B_z = 0. \quad (\text{A.25})$$

Definidos o termo de fixação de calibre juntamente com a definição do quadrivetor p^μ , pode-se obter a força de Casimir através do cálculo do valor esperado no vácuo da componente normal-normal, que neste caso é dada por¹:

$$T_{33}^{\text{can}} = -F^{3\mu} F_{3\mu} + \frac{1}{2} (E^2 - H^2) + \partial^\mu (A_3 F_{\mu 3}) - A_3 \partial^\mu F_{\mu 3} + \eta \sum_{j=1,2} \epsilon_{ijk} A^i \partial_j A^k, \quad (\text{A.26})$$

a partir do qual podemos obter o valor esperado no vácuo da energia por unidade de área,

$$\frac{E_{\text{vácuo}}}{L^2} = -\frac{\pi^2}{720D^3} \left(1 + \frac{25(\eta D)^2}{\pi^2} + \mathcal{O}((\eta D)^4) \right) \quad (\text{A.27})$$

¹Como o nosso objetivo não é enfatizarmos o método utilizado pelos autores, bem como os detalhes técnicos envolvidos nos cálculos, apenas apresentaremos as expressões de nosso interesse que foram obtidas na Ref.[44].

e, posteriormente, a força de Casimir

$$f = -\frac{\partial}{\partial D} \frac{E_{vacuo}}{L^2} = -\frac{\pi^2}{240D^4} \left[1 + \frac{25(\eta D)^2}{3\pi^2} + \mathcal{O}((\eta D)^4) \right] \quad (\text{A.28})$$

válida para distâncias relativamente curtas $\eta D \ll 1$. Para finalizar, observa-se que na expansão para a força a correção é do tipo atrativa e quadrática em η .

Referências Bibliográficas

- [1] RAO, K.N.S., *Linear Álgebra and Group Theory for Physicists*, Hindustan Book Agency, (2006).
- [2] BALACHANDRAN, A.P; TRAHERN, C.G., *Lectures on group theory for physicists*, Bibliopolis, Napoli, (1984).
- [3] WIGNER, E.P., *Annals of Math.*, 40, 149, (1939).
- [4] CHERN, S.-S.; SIMONS, J. , *Annals of Math.*, 99 (1): 48-69,(1974).
- [5] GIRVIN, S. M., *The quantum Hall Effect*, ed. PRANGE, R. E. and GIRVIN, S. M., Chap. 10. (Springer Verlag, New York (1986); ZHANG, S. C., HANSSON,T. H. and KIRVELSON, S., *Phys. Rev. Lett.* 62, 82 (1989); FRÖHLICH, J. and STUDER, U., *Rev. Mod. Phys.* 65, 733 (1993).
- [6] CHEN, Y.-H., WILCZEK, F., WITTEN, E. and HALPERIN, B. I., *Int. Journ. Mod. Phys.* **B 3** 1001 (1989).
- [7] CASIMIR, H. B. G., *Proc. Ron. Ned. Akad. Wetensch.*, 51:793, (1948).
- [8] VAN DER WALLS, J. D., *Over de Continueïteit van den Gas- en Vloeïstoestand*, (thesis, Leiden, 1873).
- [9] LIFSHITZ, E. M., *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 29:94, (1956). [English transl: *Soviet Phys. JETP* 2:73, 1956].
- [10] SAUER, F., PhD thesis, Gottingen (1962).
- [11] RANDJBAR-DAEMI, S., SALAM, A. and STRATHDEE, J., *Int. J. Mod. Phys.* **B 5** 845 (1991).
- [12] FERRER, E. J., DE LA INCERA, V., *Int. J. Mod. Phys.* **B12**, 63-79 (1998).
- [13] MILTON, K. A. and JACK Ng, Y., *Phys. Rev.* **D 42**, 2875 (1990).
- [14] MILTON, K. A. and JACK Ng, Y., *Phys. Rev.* **D 46**, 842 (1992).

- [15] BOYER, T. H., Phys. Rev. A **9**, 2078 (1974).
- [16] COUGO-PINTO, M. V., FARINA, C., TENORIO, A., Braz. J. Phys. **29** (1999) 371-374.
- [17] MUNDAY, J. N., CAPASSO, F. and PARSEGIAN, V. A., Nature **457**, 170 (2009).
- [18] ALVES, D.T., GRANHEN, EDNEY R., DE MEDEIROS NETO, J.F., SILVANA PEREZ, Phys. Lett. A **374** (2010).
- [19] SANTOS, F. C., TENORIO, A. and TORT, A. C., Phys. Rev. D **60**, 105022 (1999).
- [20] CARROL, S. M., FIELD, G.B., JACKIW, R., Physical Review D, **41**, 1231, (1982).
- [21] MATSUBARA, T., Prog. Theor. Phys. **14**, 351 (1955).
- [22] DAS, A., *Finite Temperature Theory*, World Scientific, Singapore (1997).
- [23] LE BELLAC, M., *Thermal Field Theory*, Cambridge University Press (1996).
- [24] PEREZ, S., *Efeitos Térmicos na Teoria Quântica de Campos em (2+1) dimensões*, Tese de Doutorado, IFUSP, São Paulo (2003).
- [25] FANO. U., *Description of States in Quantum Mechanics by Density Matrix and Operator Techniques*, Phys. Rev. Lett. **29**, 74 (1957).
- [26] TER HAAR, B., *Theory and Application of The Density Matrix*, Rep. Prog. Phys. **24**, 304 (1961).
- [27] MACIEL, S. G., *Introdução à Mecânica Estatística Quântica: estudos sobre o operador densidade*, Trabalho de Conclusão de Curso, UFPA, Belém (2007).
- [28] SAKURAI, J. J., *Modern Quantum Mechanics*, San Fu Tuan Edition (1985).
- [29] DAS, A., *Quantum Mechanics*, Hindustan Book Agency, (2003).
- [30] COHEN-TANNOUJDI, C., *Quantum Mechanics*, John Wiley (1977).
- [31] KAPUSTA, J. I., *Finite Temperature Field Theory*, Cambridge University Press (1989).
- [32] GUIMARÃES, M. S., *A Dualidade Maxwell-Chern-Simons/Autodual e sua Extensão para Espaços Não-Comutativos*, Tese de Doutorado, UFRJ/IF, Rio de Janeiro (2005).
- [33] DESER, S., JACKIW, R. and TEMPLETON, S., *Topologically Massive Gauge Theories*, Ann. Phys. **140**, 372 (1982).

- [34] DUNNE, G. V., *Aspects of Chern-Simons theory*, in: Les Houches Summer School in Theoretical Physics, Session 69: Topological Aspects of Low-dimensional Systems, Les Houches, France, 7-31 Jul 1998. Arxiv: hep-th/9902115.
- [35] MILTON, K. A., *The Casimir Effect: Physical Manifestations of Zero-Point Energy*, World Scientific Publishing (2001).
- [36] GOMES, M., *Teoria Quântica dos Campos*, Editora da Universidade de São Paulo (2002).
- [37] SCHWINGER, J., DeRaad, L. L., Jr., and MILTON, K. A., *Ann. Phys.(N.Y.)* **115**, 1 (1978).
- [38] TEO, L.P., *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** (2009).
- [39] BROWN, L. S. and MACLAY, G. J., *Phys. Rev.* **184**, 1272 (1969)
- [40] RAVNDAL, F. and TOLLEFSEN, D., *Phys. Rev. D* **40**, 4191 (1989)
- [41] MINGZHE LI, YI-FU CAI, XIULIAN WANG, XINMIN ZHANG, *Phys. Let. B* **680**, 118 (2009).
- [42] SHAPIRO, I. L., *Phys. Rept.* **357**, 113 (2002), e-Print:arXiv/hep-th/0103093.
- [43] ALTSCHUL, B., *Phys. Rev. D* **72**, 085003 (2005).
- [44] KHARLANOV, O. G. and ZHUKOVSKY, V. Ch., arXiv:0905.3680v1.
- [45] BANERJEE, R. and MUKHERJEE, P., *Nucl. Phys.* **B478**, 235 (1996); *Prog. Theor. Phys.* **101**, 1189 (1999).