

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS GEOFÍSICAS E GEOLÓGICAS

EFEITOS DO STRIKE DAS ESTRUTURAS GEOLÓGICAS DE DUAS
DIMENSÕES NAS PSEUDOS-SEÇÕES DE IP RESISTIVIDADE

Tese Apresentada por
PAULO BUARQUE DE MACEDO GUIMARÃES

como requisito parcial à obtenção do grau em
MESTRE EM CIÊNCIAS
Na área de
GEOFÍSICA

Conferido pelo Programa de Pós-Graduação em
Ciências Geofísicas e Geológicas da
Universidade Federal do Pará

Aprovado: 22.12.83


LUIZ RIJO (ORIENTADOR)


AUGUSTO CESAR BITTENCOURT PIRES


JEAN MARIE FLEXOR


MARCO ANTONIO RAUPP

Comitê de Tese

T.225. GUIMARÃES, Paulo Buarquerde Macêdo
G.941 Efeitos do Strick das estruturas
geológicas de duas dimensões nas
pseudos-Seções de IP resistividade.
Belém, UFPa/NCGG, 1984.

148 p.

Tese apresentada ao Núcleo de Ci
ências Geofísicas e Geológicas da
Universidade Federal do Pará, para
obter o grau de Mestre em Ciências
na área de Geofísica.

1. Geofísica. 2. Métodos Geofísi
cos - Elétricos, 3. Modelamento Geo
físico.

I. Universidade Federal do Pará - Nú
cleo de Ciências Geofísicas e Geoló
gicas. II. Título.

A Enrique Campbell
que lutou e morreu
pelo que acreditava
9/6/45 - 6/12/82

"E a gente fazendo conta
pro dia que vai chegar"

Geraldo Vandrê - Aroeira

AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Luiz Rijo, orientador desta Tese, pelo incentivo, pela extrema paciência e pela disponibilidade para trocar idéias ou sugerir novas.

Aos demais membros da Banca, Drs. A.C.B.Pires, J.M.Flexor, M.A. Raupp, pelas sugestões no decorrer do trabalho e sobre o texto.

A J.W.D.Leão, co-orientador, e J.S.Protázio, pelas infindáveis discussões sobre como arrancar resultados de uma integral numérica.

A Vilma M.A.Souza pela eficiência na datilografia e a Rosane M.S. Santos pelos desenhos finais.

Aos técnicos e estagiários D.M.Otake, P.S.Magalhães, R.S. Oliveira, R.A.O.Evangelista, R.S.Oliver, U.S.Quintela, W.Barra Jr., pela ajuda nos gráficos e na computação.

Aos demais colegas, em especial do Suporte Matemático do NCGG, que aturaram esta Tese.

A FINEP, que financiou parcialmente este trabalho, e ao CNPq-Observatório Nacional que me liberou grande parte do tempo.

Finalmente, a todos que entenderam que um trabalho científico só pode ser concluído quando está pronto.

SUMÁRIO

	Página
DEDICATÓRIA	I
AGRADECIMENTOS	II
ÍNDICE DE ILUSTRAÇÕES	VI
NOTAÇÃO MATEMÁTICA	IX
RESUMO	1
ABSTRACT	2
1 INTRODUÇÃO	3
2 COLOCAÇÃO DO PROBLEMA	5
2.1 Conceitos Básicos	5
2.1.1 Resistividade Aparente	5
2.1.2 Polarização Induzida no Domínio da Frequência ...	8
2.1.3 Arranjo Dipolo-Dipolo	9
2.1.4 Pseudo-Seções	10
2.2 Equação do Problema	10
2.3 Modelamento Digital	11
2.3.1 Modelamento em Duas Dimensões	13
2.3.2 Transformação de Fourier dos Potenciais	14
3 APLICAÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS	16
3.1 Discretização do Contínuo	17
3.2 Determinação das Funções Interpoladoras	18
3.3 Derivação das Equações dos Elementos	20
3.4 Condições de Contorno	23
3.5 Equação da Matriz Elementar	23
3.6 Construção da Matriz Global	26

	Página
3.7	Incorporação das Condições de Contorno 26
3.8	Solução do Sistema de Equações 27
4	RECUPERAÇÃO DOS POTENCIAIS 28
4.1	Casos Simples 28
4.1.1	Caso Homogêneo 28
4.1.2	Falhas e Diques Verticais Infinitos 29
4.2	Particularização para o Arranjo Dipolo-Dipolo... 31
4.2.1	Caso Ortogonal 31
4.2.2	Caso Não Ortogonal 35
4.3	Transformada de Fourier para o Caso Não Ortogo - nal 36
4.3.1	Integração Oscilante com Polinômios Ortogonais.. 36
4.3.2	Integração por Quadratura de Gauss-Laguerre 39
4.3.3	Integração por Gauss-Legendre e Gauss-Laguerre.. 42
4.3.4	Integração por Gauss-Laguerre Modificada 45
4.3.5	Testes da Integral em Pseudo-Seções 47
5	RESULTADOS DO MODELAMENTO 55
5.1	Testes de Malha 55
5.2	Testes do Modelamento 55
5.3	Resultados para o Dique 57
5.4	Interpretação Preliminar para o Efeito do ângulo 58
5.5	Sugestões para Melhorias 58
6	BIBLIOGRAFIA 112
7	APÊNDICE A - APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS IMAGENS 115
A.1	- Falha Vertical 115
A.2	- Dique Infinito 118
8	APÊNDICE B - IMPLEMENTAÇÃO DA TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER 129

	Página
B.1 - Cálculo dos Coeficientes Dependentes da Oscila- ção	129
B.2 - Cálculo dos Coeficientes Independentes da Oscila- ção	132
B.3 - Reagrupamento dos Coeficientes	132
B.4 - Implementação em FORTRAN	133

ÍNDICE DE ILUSTRAÇÕES

		página
Fig. 1	- Densidade decorrente devido a uma fonte pontual	5
Fig. 2	- Disposição de eletrodos para medidas de resistividade	7
Fig. 3	- Esquema de uma pseudo-seção	11
Fig. 4	- Uma malha para o problema de IP-resistividade	18
Fig. 5	- Elemento triangular para malha.....	19
Fig. 6	- Função esférica modificada de Bessel...	30
Fig. 7	- Potenciais transformados para o modelo homogêneo	32
Fig. 8	- Diferenças de potenciais para o modelo homogêneo	32
Fig. 9	- Potenciais transformados para a falha vertical	33
Fig. 10	- Diferenças de potenciais para a falha vertical	33
Fig. 11	- Diferenças de potenciais para o dique infinito	34
Fig. 12	- Linha de dipolos cortando um corpo obliquamente	35
Fig. 13 a 18	- Teste da integral oscilante e de Laguerre normal	49/51

	página
Fig. 19 - Modelos de Teste	56
Fig. 20 a 25 - Pseudo-seções analíticas para falha vertical	59/64
Fig. 26 a 31 - Pseudo-seções analíticas para dique infinito	65/70
Fig. 32 - Testes de malha de elementos finitos - modelo homogêneo	71
Fig. 33 a 36 - Pseudo-seções (E.F.) para falha vertical	72/75
Fig. 37 a 40 - Pseudo-seções (E.F.) para dique infinito	76/79
Fig. 41 a 44 - Pseudo-seções (E.F.) para dique vertical - Modelo 1	80/83
Fig. 45 a 47 - Pseudo-seções (E.F.) para dique vertical - Modelo 1 com variação da espessura	84/86
Fig. 48 a 51 - Pseudo-seções (E.F.) para dique vertical - Modelo 2	87/90
Fig. 52 a 54 - Pseudo-seções (E.F.) para dique vertical - Modelo 2 com variação da espessura	91/93
Fig. 55 a 58 - Pseudo-seções (E.F.) para dique vertical - Modelo 3	94/97
Fig. 59 a 61 - Pseudo-seções (E.F.) para dique vertical - Modelo 3 com variação da espessura	98/100

	página
Fig. 62 a 65 - Pseudo-seções (E.F.) para dique incli- nado - Modelo 1	100/104
Fig. 66 a 68 - Pseudo-seções (E.F.) para dique incli- nado - Modelo 1 com variação da espes- sura	105/107
Fig. 69 a 72 - Pseudo-seções (E.F.) para dique incli- nado - Modelo 2	108/111
Fig. A.1 - Imagens para falha	116
Fig. A-2 - Resistividade aparente e PFE para uma falha vertical infinita (segundo Ludwig, 1975)	119
Fig. A-3 - Resistividade aparente e PFE para um dique vertical infinita (segundo Ludwig, 1975)	120
Fig.A-4 a A-7- Imagens para o dique infinito, casos 1 a 4	121, 123 125, 127

NOTAÇÃO MATEMÁTICA

É usado o sistema MKS. Os eixos coordenados x, y, z , tem z positivo para baixo. Se \mathbf{v} é um vetor, \mathbf{v}^T é seu transposto.

- α - ângulo entre os lados de um elemento (e)
- A - área de um elemento (e)
- a_i, b_i, c_i - coeficientes da função interpoladora N_i (metro)
- β - ângulo entre a linha de medida e o "strike"
- b_ℓ - coeficientes da parte oscilante da integração numérica
- c_ℓ - coeficientes da parte não oscilante da integração numérica
- ΔV - diferença de potencial elétrico (volt)
- $\delta(x)$ - função delta de Dirac (1/metro)
- $d_{\ell, m}$ - aproximação por quadratura de grau m de c_ℓ
- \vec{E} - vetor intensidade de campo elétrico (volt/metro)
- (e) - elemento
- f - função genérica
- G** - matriz global do sistema
- G - fator geométrico
- h - erro residual na aproximação por e.f.
- I - intensidade de corrente elétrica (ampère)

- i - $\sqrt{-1}$
- \vec{J} - vetor densidade de corrente elétrica (ampère/metro²)
- J_ℓ - função de Bessel de primeira espécie de grau ℓ
- k - número de onda (1/metro)
- K_0 - função esférica modificada de Bessel
- K_{ij} - coeficiente de reflexão entre os meios i e j
- L - operador linear
- L_n - polinômio de Laguerre de grau n
- \vec{n} - vetor unitário normal a uma superfície, de componentes n_x, n_y, n_z .
- N_i - funções interpoladoras (funções base) de um elemento
- \mathbf{N} - vetor cujas componentes são N_i
- p - função peso para normalização de polinômios
- P_n - polinômio de Legendre de grau n
- PFE - efeito percentual de frequência
- q - densidade de carga elétrica (coulomb/metro³)
- q_ℓ - polinômio ortonormal de grau ℓ
- r - distância entre dois pontos
- ρ - resistividade elétrica (ohm - metro)
- ρ_a - resistividade aparente (ohm - metro)

ρ_{ca}, ρ_{cc} - resistividade aparente com corrente alternada e contínua (ohm - metro)

S - função que representa a fonte do problema

s_i - valor da fonte no nó i

\mathbf{s} - vetor de componentes s_i

S - vetor fonte global

T - transformada de Fourier de uma função genérica

T_m - aproximação de T por quadratura de grau m

V - potencial elétrico (volt)

\hat{V} - transformada de Fourier do potencial

V_e - aproximação de \hat{V} sobre um elemento (e)

v_i - valor de V_e no ponto i

\mathbf{v} - vetor cujas componentes são os v_i de um elemento

V - vetor global dos potenciais

w_e - pesos para quadratura numérica

RESUMO

Os levantamentos de IP-resistividade efetuados na Serra dos Carajás não foram executados ortogonalmente às estruturas geológicas, pois utilizaram linhas anteriormente abertas pelas equipes de geoquímica. Este fato motivou este estudo teórico da influência da direção das linhas de medidas de IP-resistividade em relação ao "strike" da estrutura.

Foi usado o programa de elementos finitos de Rijo (1977), desenvolvido para levantamentos perpendiculares às estruturas, com as adaptações necessárias. A modificação principal foi na rotina de transformação inversa de Fourier. Para o caso simples dos levantamentos perpendiculares, a transformada inversa é uma integral discreta com apenas sete pontos. No entanto, para as medidas oblíquas, o integrando é oscilatório, e portanto, a integral a ser calculada é mais complexa. Foi adaptado um método apresentado por Ting e Luke (1981), usando dezoito pontos em cada integração.

Foi constatado que o efeito da direção da linha em relação ao "strike" é desprezível para ângulos maiores que 60 graus. Para ângulos menores, o efeito consiste no alongamento da anomalia, com pequenas alterações em seu centro. Não há uma maneira simples de compensar este efeito com mudanças nos parâmetros do modelo.

ABSTRACT

The IP-resistivity surveys carried out in the Carajás mineral district were not orthogonal to the geological structures because they were executed on lines already opened by the geochemistry crews. This fact motivated us to study theoretically the influence of the direction of the IP-resistivity survey lines with respect to the strike of the structure.

We used Rijo's finite element program (1977), developed for surveys perpendicular to the structures, with the necessary adaptations. The main modification was in the inverse Fourier transform routine. For the simple case of the perpendicular surveys, the inverse transform is an easy discrete integral with seven points. However, for oblique surveys the integrand is oscillatory and therefore the integral to be evaluated is more complex. We adapted a method presented by Ting and Luke (1981) using eighteen points in each integration.

It was found that the effect of the direction of the line with respect to the strike is negligible for angles greater than 60 degrees. For smaller angles the effect is to "open" the anomaly with minor changes in its center. There is no obvious way to compensate this effect with changes in the model parameters.

1 INTRODUÇÃO

O método de polarização induzida (IP) é empregado em geofísica principalmente para prospecção de minerais metálicos disseminados, como os sulfetos. Os levantamentos de IP são sempre associados aos de resistividade. Esta última, de uso mais generalizado que o IP, é aplicada largamente na pesquisa geotermal e de água subterrânea, além da exploração mineral.

Nos trabalhos iniciais de geofísica para a prospecção de cobre da Serra dos Carajás, nos quais o NCGG da UFPA tomou parte (Campbell, 1980), o IP-resistividade apresentou bons resultados. No entanto, algumas medidas nesse levantamento foram feitas em linhas previamente abertas para os trabalhos de geoquímica. Foi constatado então que essas linhas não eram perpendiculares à direção dos corpos mineralizados. Este fato causou dúvidas acerca dos resultados obtidos sobre elas, pois as técnicas conhecidas de interpretação quantitativa subentendem que as travessas devam ser ortogonais ao "strike" das estruturas.

O objetivo desta tese é justamente permitir a interpretação direta de dados de IP e resistividade em duas dimensões, sem qualquer restrição à direção dos perfis de observação em relação às estruturas geológicas. Este é um problema não resolvido na literatura, tendo sido apenas tentado pelo grupo da Universidade de Utah por volta de 1975 (Rijo, comunicação pessoal). Existem apenas alguns modelos analíticos ou analógicos para situações muito simples.

Neste trabalho, foi usado um programa de elementos finitos desenvolvido por Rijo (1977), que permite grande flexibilidade na simulação da geometria dos corpos e da topografia. Como esse programa é simples e confiável, não houve preocupação em aproveitar suas versões mais avançadas. A maior modificação para sua implementação no Dec-10 da Universidade Federal do Pará foi na forma de armazenamento das matrizes, e no algoritmo para sua redução, com o intuito de diminuir a paginação. Os resultados apresentados referem-se ao arranjo de eletrodos dipolo-dipolo, para o IP no domínio da frequência. Contudo, a metodologia

aqui desenvolvida pode ser adaptada a outras configurações.

O tipo de formulação adotada utiliza uma transformada de Fourier para reduzir uma dimensão do modelamento. O problema todo se concentra na execução da transformada inversa, para recuperar os potenciais no domínio do espaço. Aí aparece a diferença em relação ao caso ortogonal. A transformada, pelo tipo dos potenciais, recai numa integral oscilante e descontínua na origem. A solução encontrada foi usar uma forma de quadratura que incorporasse as oscilações, reduzindo as dificuldades de convergência.

A tese está dividida em 5 capítulos e dois apêndices. O segundo capítulo é uma introdução aos métodos de resistividade e IP, e coloca o problema do modelamento. O capítulo 3 dá uma visão rápida e simplificada do uso dos elementos finitos.

No capítulo 4 discute-se a transformação inversa, que constitui a parte principal deste trabalho. O capítulo 5 apresenta alguns modelos geofísicos com influência do ângulo. Todos os resultados foram obtidos no Decsystem-10 da UFPa. Foi usada a precisão simples, exceto onde indicado explicitamente.

Os dois apêndices resumem a utilização do método das imagens para gerar modelos de teste, e a implementação da integração em FORTRAN.

Houve uma certa preocupação em manter a redação em termos simples. No entanto, nem sempre é possível fugir ao jargão adotado em determinada especialidade.

2 COLOCAÇÃO DO PROBLEMA

Os métodos elétricos de resistividade e de polarização induzida são tradicionais na prospecção geofísica. Encontram-se amplamente discutidos na literatura (por exemplo, Keller e Frishknecht, 1966, Sumner, 1976). O objetivo deste capítulo é rever alguns de seus conceitos e mostrar como é implementado seu modelamento.

2.1 Conceitos Básicos.

2.1.1 Resistividade Aparente

O método da resistividade se baseia na detecção de anomalias nos potenciais gerados artificialmente, por fontes pontuais, na superfície ou em profundidade. Essas anomalias são provocadas pelas variações da litologia. Elas podem ser medidas através dos valores de resistividade aparente. O desenvolvimento abaixo explica fisicamente esse conceito.

Seja I a intensidade de corrente injetada por uma fonte pontual num terreno plano de condutividade homogênea (Fig. 1).

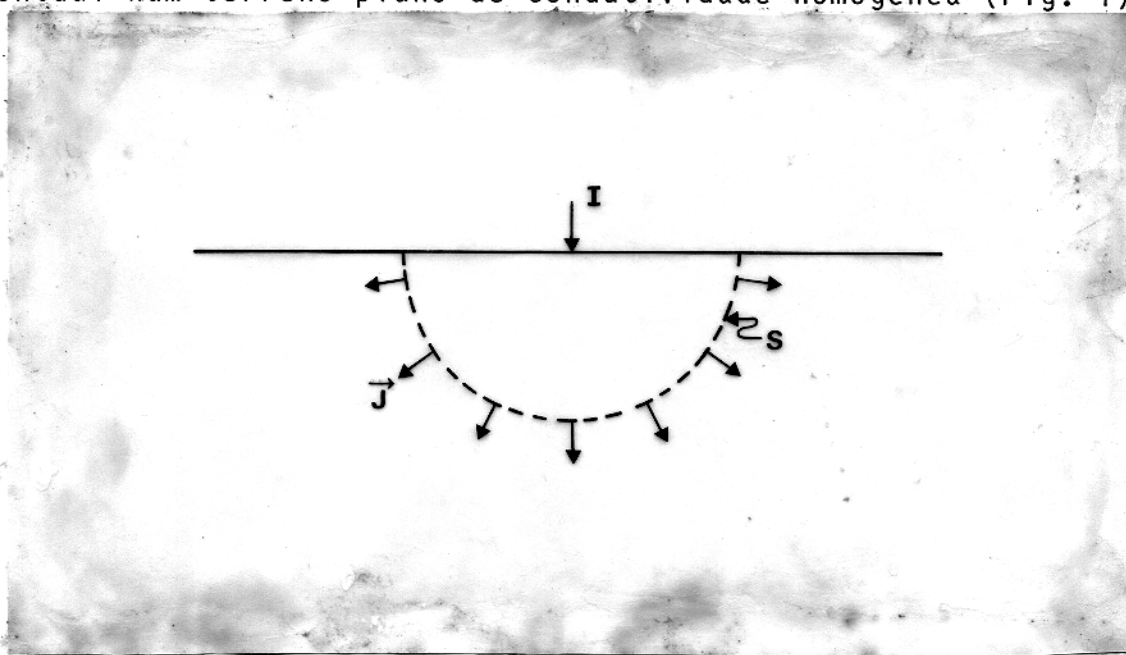


Fig. 1

Densidade de corrente devido a uma fonte pontual.

A equação de conservação da carga é escrita como:

$$\int_s \vec{J} \cdot \vec{n} \, da = I, \quad (1)$$

com \vec{J} sendo a densidade de corrente, \vec{n} o vetor unitário normal à superfície s e da um elemento de área.

A integral de superfície \bar{e} , no caso, definida sobre uma semi-esfera de raio r e centrada na fonte pontual (Fig. 1), onde a densidade de corrente \bar{e} radial e constante. Então,

$$2 \pi r^2 J = I, \quad (2)$$

Por outro lado, a Lei de Ohm relaciona a densidade de corrente com o campo elétrico produzido \vec{E} ,

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (3)$$

onde σ é a condutividade do terreno. Segue daí que:

$$J = \sigma E = \frac{I}{2 \pi r^2}, \quad (4)$$

e o potencial torna-se:

$$V = \frac{I}{2 \pi \sigma r}. \quad (5)$$

Nos levantamentos de campo são usados um par de eletrodos

de corrente. O potencial, num ponto j distante r_{j1} e r_{j2} das duas fontes, se escreve por superposição:

$$V_j = \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_{j1}} - \frac{1}{r_{j2}} \right) = V_{j1} - V_{j2} \quad (6)$$

Um outro par de eletrodos \bar{e} usado na leitura dos potenciais (Fig. 2):

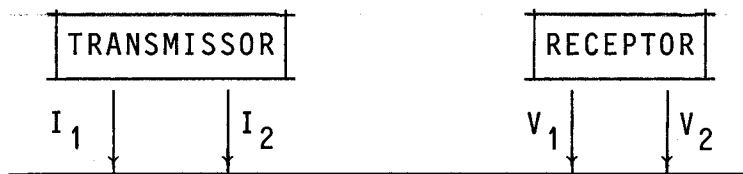


Fig. 2

Disposição de eletrodos para medidas de resistividade.

A diferença de potencial \bar{e} :

$$\Delta V = V_1 - V_2 = \frac{I}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{r_{11}} - \frac{1}{r_{12}} - \frac{1}{r_{21}} + \frac{1}{r_{22}} \right). \quad (7)$$

O inverso da expressão entre parênteses \bar{e} chamado de fator geométrico, e representado por G . A equação acima permite calcular a resistividade dados a voltagem e a corrente.

Na prática, o terreno não \bar{e} plano, nem homogêneo. Então, o uso dessa equação fornece um resultado que não corresponde às resistividades reais envolvidas. Por isso, o valor obtido no campo \bar{e} chamado de resistividade aparente, e da equação (7),

$$\rho_a = 2\pi G \frac{\Delta V}{I} \quad (8)$$

Examinando essa expressão, fica claro que a resistividade aparente também depende do arranjo de medida adotado.

As rochas tem resistividades que variam entre 1 e 10^6 ohm-m. Para os metais nativos os valores são da ordem de 10^{-6} ou 10^{-7} ohm-m, e para outros condutores, de 1 a 10^{-5} ohm-m (Keller e Frisknecht, 1966). No entanto, se estes minerais estiverem distribuídos esparsamente pelas rochas, serão difíceis de discriminar pela resistividade.

2.1.2 Polarização Induzida no Domínio da Frequência.

Há um outro efeito elétrico associado à presença de condutores no subsolo. Esse efeito é conhecido como polarização induzida. A condução de corrente nas rochas se dá por meio dos íons dos eletrólitos existentes em seus poros. A passagem dos íons é bloqueada pelos minerais metálicos, onde a condução é feita pelos elétrons. Como resultado, ocorre uma polarização da interface metal-eletrólito. Para que o efeito se manifeste, não é necessário que os condutores sejam maciços. O caminho dos íons é impedido mesmo pela mineralização disseminada.

Reações eletroquímicas na superfície dos condutores afetam a mudança de um modo de condução para o outro. Esse processo armazena energia. Ao se interromper a injeção de corrente, a energia é liberada. É possível amostrar o decaimento da voltagem correspondente com um arranjo semelhante ao da resistividade no chamado IP no domínio do tempo.

Se for usada uma fonte de corrente alternada, a voltagem responderá sempre com um atraso. Assim, a resistividade aparente será função da frequência utilizada. Uma das formas de medir essa variação é pelo efeito percentual de frequência (PFE):

$$PFE = \frac{\rho_{cc} - \rho_{ca}}{\rho_{cc}} \times 100\% . \quad (9)$$

Nessa relação, ρ_{cc} é a resistividade aparente com a corrente contínua ou com frequência muito baixa. Por seu lado, ρ_{ca} corresponde a uma frequência mais alta (~ 0.1 Hz). Não são utilizados valores muito grandes para evitar que a energia seja armazenada também por campos magnéticos (acoplamento eletromagnético) (Madden e Cantwell, 1967). É comum uma outra forma da equação (9) que toma como base a resistividade com corrente alternada.

É simples simular essa situação no modelamento. O problema é resolvido duas vezes, alterando a resistividade intrínseca dos corpos que apresentam polarização induzida. Os resultados podem ser então aplicados na equação (9).

Os valores típicos para as anomalias de PFE estão na faixa de 3 a 30%.

2.1.3 Arranjo Dipolo-Dipolo.

A distribuição mais comum dos eletrodos para medidas no domínio da frequência é o arranjo dipolo-dipolo colinear. Nesse tipo de arranjo, o espaçamento entre os dois eletrodos de corrente é mantido constante, assim como o dos eletrodos de voltagem.

A distância entre os pares transmissores e receptores varia com múltiplos inteiros do espaçamento entre os eletrodos, que pode ser então tomado como unitário. Sob essas condições, se o afastamento entre o transmissor e o receptor for de n unidades, o fator geométrico (equação 7) será igual a $n(n+1)(n+2)/2$.

O arranjo percorre a linha de medida com alguns valores de n . Para facilitar o uso do equipamento no campo, os eletrodos transmissores ocupam apenas a parte central da varredura. Neste trabalho serão consideradas 6 posições para o par de corrente e 16 para o de voltagem.

2.1.4 Pseudo-Seções.

Para apresentar as medidas com o arranjo dipolo-dipolo é usado um esquema proposto inicialmente por Hallof (Marshall e Madden, 1959). Os dados são dispostos tendo como abcissa o centro do arranjo, e como ordenada o espaçamento entre o transmissor e o receptor (Fig. 3).

Intuitivamente, o aumento da distância entre os pares de eletrodos deveria trazer informações de profundidades maiores. No entanto, há também mais informação lateral. Daí o nome de pseudo-seção para essa representação. É conveniente desenhar as linhas de mesmo valor como retas para reforçar o caráter esquemático das seções. Também é usual traçar esses contornos logaritmicamente, como por exemplo para os valores de 1, 1.5, 2, 3, 5, 7, 10, 15, etc ...

2.2 Equação do Problema.

A equação (1), sob forma diferencial, é conhecida como equação de continuidade. Ela relaciona a divergência da densidade de corrente \vec{J} com a variação temporal da densidade de carga q :

$$\nabla \cdot \vec{J} = - \frac{\partial q}{\partial t} = - I \delta(x) \delta(y) \delta(z). \quad (10)$$

O último termo representa a corrente injetada através de uma fonte pontual na origem. A substituição de (3) em (10) produz:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \vec{E} \right) = - I \delta(x) \delta(y) \delta(z). \quad (11)$$

Como o problema é independente do tempo, a segunda Lei de Maxwell permite escrever o campo elétrico como o gradiente de um potencial V :

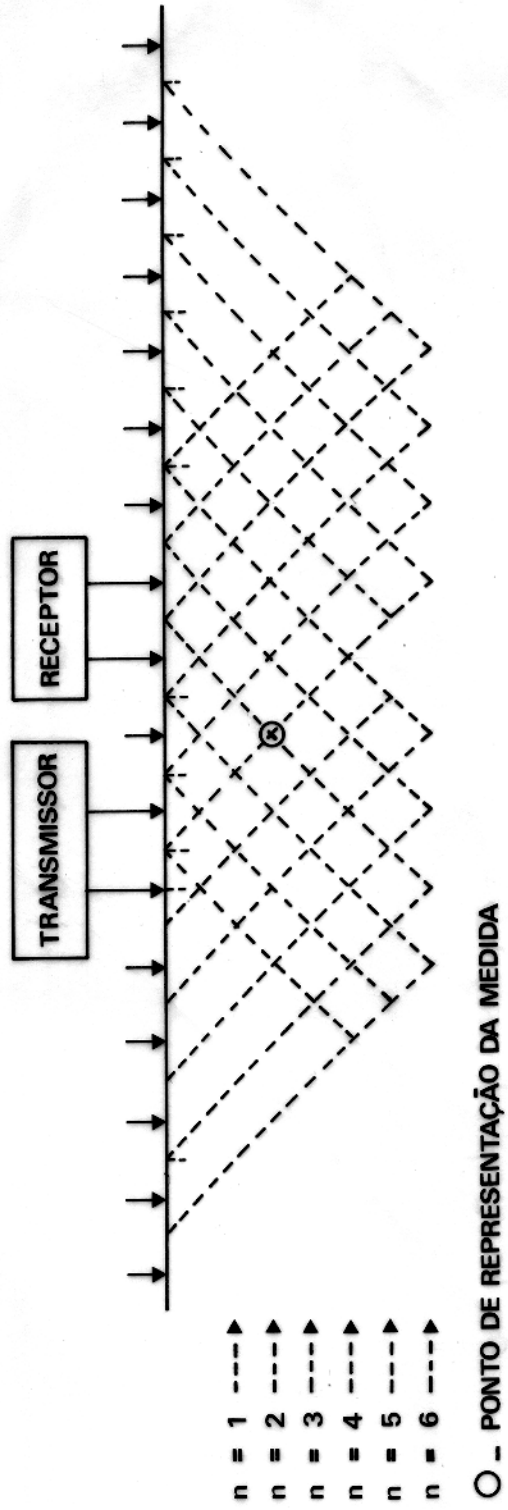


Fig. 3
Esquema de uma pseudo-seção

$$\vec{E} = - \nabla V. \quad (12)$$

Então a equação (11) se torna:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla V \right) = I \delta(x) \delta(y) \delta(z). \quad (13)$$

As condições de contorno são:

- a) O potencial tende a zero com o aumento da distância ao eletrodo;
- b) A derivada do potencial é nula na interface terra-ar.

O chamado problema direto em geofísica consiste em atribuir por tentativa valores às resistividades da equação (13), para que a solução dessa equação se ajuste aos dados de campo. As próximas seções mostram como resolver a equação (13) por modelamento.

2.3 Modelamento Digital.

É fácil encontrar na literatura soluções do problema de resistividade para corpos de geometria simples. Uma solução para falhas e diques verticais e infinitos pelo método das imagens é usada nesta tese para teste de resultados intermediários.

Nos casos de interesse para a prospecção mineral, as estruturas geológicas são bem mais complexas. Obter uma solução matemática exata é virtualmente impossível. O tratamento dos dados de campo se resume, quase sempre, a uma análise qualitativa através de curvas padrões calculadas por modelos analógicos (Hällöf, 1970). A interpretação dos resultados das medidas de polarização induzida sofre restrições ainda maiores.

Nos últimos anos, as técnicas de modelamento digital vem

possibilitando interpretações mais realistas. As técnicas mais empregadas em problemas eletromagnéticos são elementos finitos (Coggon, 1971), diferenças finitas (Jepsen, 1969), analogia de redes de circuitos (Swift, 1971) e equação integral (Barnett, 1972, Snyder, 1976).

As três primeiras requerem a solução de uma equação diferencial em toda terra. A equação integral é resolvida apenas nas regiões anômalas: envolve matrizes menores que as outras três, em troca de uma formulação matemática mais sofisticada. É mais indicada para modelar um ou dois corpos pequenos, principalmente em três dimensões. Já os métodos de equações diferenciais simulam melhor estruturas complexas em duas dimensões (Hohman, 1977).

Pode-se mostrar a equivalência dos métodos dos elementos finitos, diferenças finitas e analogia de circuitos (Rijo, 1977, Pires, 1978). A técnica dos elementos finitos permite, no entanto, uma maior flexibilidade geométrica. Isto facilita o modelamento de variações na topografia (Fox et alii, 1980), do formato de corpos complexos ou de mudanças nas propriedades físicas do meio.

2.3.1 Modelamento em Duas Dimensões

O esforço computacional para resolver um problema em três dimensões é muito grande, tornando, muitas vezes, sua solução anti-econômica. Uma forma de aliviar essa dificuldade é reduzi-lo de uma dimensão, supondo as estruturas infinitas na direção do "strike". Esta restrição não é tão forte, pois no caso do IP, um corpo de comprimento cinco ou mais vezes maior que sua largura pode ser considerado bi-dimensional para uma grande variação de condutividades (Hohman, 1977). Além disso, o IP apresenta melhor resolução na prospecção de metais disseminados. Em grande número de casos, essas ocorrências se caracterizam por serem finas e alongadas.

Apesar do modelo ser a duas dimensões, as potenciais pro-

duzidos por uma fonte pontual são tri-dimensionais. Uma transformada de Fourier elimina esta incompatibilidade. Já existem modelamentos por elementos finitos quando as linhas de medida são perpendiculares ao "strike" (Coggon, 1971, Rijo, 1977). O problema surge na recuperação da resposta tri-dimensional quando os perfis deixam de ser perpendiculares ao corpo. É o que esta tese se propõe a resolver.

2.3.2 Transformação de Fourier dos Potenciais.

A suposição de uma simetria de translação ao longo do "strike" (tomado como eixo y) permite aplicar uma transformada de Fourier unidimensional na equação (13). A transformada é definida pelo par de equações:

$$\widehat{V}(x, k, z) = \int_{-\infty}^{\infty} V(x, y, z) e^{-iky} dy, \quad (14)$$

$$V(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{V}(x, k, z) e^{iky} dk. \quad (15)$$

A variável k é também chamada de número de onda. Transformando a equação (13), ela se torna:

$$\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho} \nabla \widehat{V} \right) = \widehat{I} \delta(x) \delta(z), \quad (16)$$

onde ρ não depende de y . Outra forma de escrever esta equação é:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{V}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{V}}{\partial z} \right) - \frac{k^2}{\rho} \widehat{V} = \widehat{I} \delta(x) \delta(z). \quad (17)$$

Esta é a equação de Helmholtz em duas dimensões. Ela deve ser resolvida, por elementos finitos, para quantos números de onda forem necessários para efetuar, numericamente, a transformada inversa (equação (15)).

3 APLICAÇÃO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos é um algoritmo que permite a obtenção de soluções aproximadas para equações diferenciais, principalmente do tipo elíptico. A teoria de sua aplicação à equação de Helmholtz é bem conhecida (Zienkiewicz, 1971, Hubner, 1975). Uma discussão interessante da sua utilização em geofísica está em Rijo (1977). Os pontos principais são revistos neste capítulo.

A solução analítica da equação (17) forneceria o valor do potencial transformado em toda a terra. Como raramente é possível deduzir essa solução, a idéia do método é substituir a solução fechada por um conjunto de funções de obtenção supostamente mais fácil. Isto é feito subdividindo a terra em um número finito de elementos. Sobre cada elemento, o potencial será aproximado por uma dessas funções. Explicitando melhor:

- a) A região é subdividida em elementos, no caso triangulares. Esses elementos se ligam em nós, situados nos vértices ou sobre seus lados, formando uma malha. Cada elemento tem propriedades físicas definidas. A malha representa, numa seção vertical, o terreno e os corpos envolvidos.
- b) A aproximação da solução é efetuada por funções interpoladoras, definidas por seus valores nos nós. Esses valores, discretos, são as incógnitas do problema.
- c) A equação de cada elemento é estabelecida separadamente. Esta é uma característica importante da formulação em elementos finitos. As equações elementares são obtidas a partir da equação de Helmholtz, dos polinômios interpolantes e de um critério de aproximação. O problema recai num sistema de equações.
- d) Devem ser definidas as condições de contorno.
- e) As equações dos elementos são convertidas para forma matricial.

- f) As matrizes elementares são montadas numa matriz global, superpondo os nós.
- g) As condições de contorno de Dirichlet são produzidas após a montagem.
- h) A matriz do sistema de equações é resolvida.

Esses passos estão discutidos em seguida.

3.1 Discretização do Contínuo.

Para representar o potencial por um número finito de valores é preciso limitar a região de solução. No entanto, a malha empregada deve ser suficientemente grande para que, nas suas fronteiras, os valores dos potenciais sejam baixos, minimizando erros de reflexão. Outra preocupação é a de fazer a malha mais densa perto das descontinuidade, para melhorar a aproximação.

O desenho da malha é extremamente importante no método, porque o número de equações a serem resolvidas depende do número de nós. Há um compromisso entre a aproximação e o tempo de máquina consumida na solução do problema.

A facilidade na manipulação da forma e tamanho dos elementos é uma característica desejável para o modelamento. Neste trabalho foram usados elementos triangulares. Eles são convenientes para a representação de estruturas geológicas (por exemplo, falhas e diques inclinados). Além disso, permitem a utilização de funções interpoladoras simples, como polinômios lineares, na aproximação da solução. Esses polinômios são definidos para cada elemento e considerados nulos fora dele.

A Fig. 4 mostra uma malha usada para esse tipo de problema.

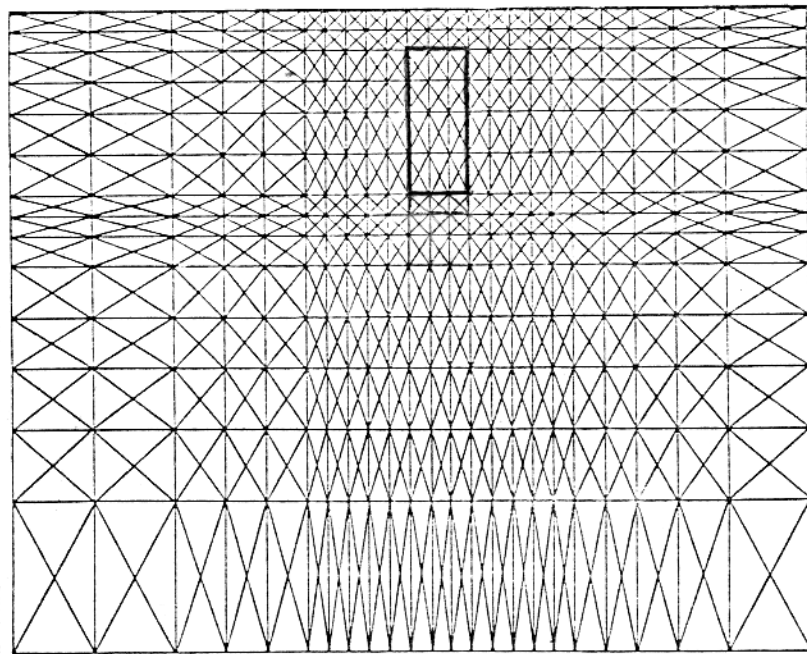


Fig. 4

Uma malha para o problema de IP-resistividade.

3.2 Determinação das Funções Interpoladoras.

O potencial sobre o meio discretizado é representado pelo conjunto das aproximações sobre cada elemento,

$$\tilde{V}(x,z) = \sum_{e=1}^M V_e(x,z) \quad (18)$$

onde M é o número de elementos e V_e a representação da solução sobre cada um deles.

Seja um elemento triangular com nós nos vértices 1, 2 e 3 (Fig. 5).

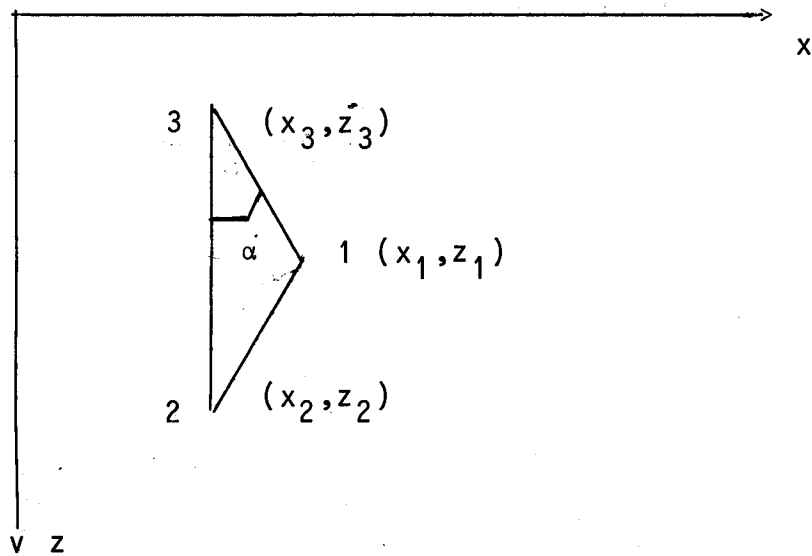


Fig. 5
Elemento triangular para malha.

A aproximação linear do potencial sobre este elemento é determinada por:

$$V_e(x, z) = l_1 + l_2 x + l_3 z, \quad (19)$$

Os valores dos potenciais em cada nó são:

$$\begin{aligned} v_1 &= l_1 + l_2 x_1 + l_3 z_1, \\ v_2 &= l_1 + l_2 x_2 + l_3 z_2, \end{aligned} \quad (20)$$

$$v_3 = l_1 + l_2 x_3 + l_3 z_3.$$

Resolvendo para os coeficientes l e substituindo em (19),

$$V_e(x, z) = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3, \quad (21)$$

onde

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i z), \quad (22)$$

sendo A a área do triângulo e

$$\begin{aligned} a_i &= x_j z_k - x_k z_j, \\ b_i &= z_j - z_k, \\ c_i &= x_k - x_j, \end{aligned} \quad (23)$$

com i, j, k variando de 1 a 3. N_j e N_k são análogos, obtidos por permutação cíclica dos índices i, j e k .

A equação (21) pode ser escrita sob forma matricial em cada elemento como:

$$v_e = \mathbf{N}^t \mathbf{v}, \quad (24)$$

onde

$$\mathbf{N}^t = (N_1, N_2, N_3), \quad (25)$$

$$\mathbf{v}^t = (v_1, v_2, v_3).$$

3.3 Derivação das Equações dos Elementos.

A equação de Helmholtz (equação (17)), formalmente, é

$$L \hat{V} = S, \quad (26)$$

onde

$$L = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \right) - \frac{k^2}{\rho},$$

$$S = \hat{I} \delta(x) \delta(z).$$

Substituindo (18) em (26),

$$L \left(\sum_{e=1}^M V_e \right) - S = h(x,z). \quad (28)$$

O termo $h(x,z)$ é o erro residual que aparece na substituição do valor exato pelo aproximado. Um critério para minimizar esse erro é o de Galerkin. Por ele, as funções base em cada elemento são feitas ortogonais ao erro. Isto equivale ao produto interno

$$\langle N_i, h \rangle = \int_{(e)} N_i(x,z) h(x,z) dx dz = 0. \quad (29)$$

A integral é sobre o elemento (e) . O índice i corresponde a cada uma das funções base do elemento, variando de 1 a 3. Substituindo na equação (29) h por sua expressão, dada em (28),

$$\langle N_i, L V_e - S \rangle = 0. \quad (30)$$

Essa expressão é também:

$$\int_{(e)} N_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_e}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_e}{\partial z} \right) - \frac{k^2}{\rho} V_e - S \right] dx dz = 0. \quad (31)$$

Integrando por partes o primeiro termo, ele fica sendo:

$$\int_{(e)} N_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_e}{\partial x} \right) \right] dx dz = - \int_{(e)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_e}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} dx dz +$$

$$+ \int_{(e)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_e}{\partial x} N_i n_x d\ell. \quad (32)$$

Na última integral, n_x representa a componente na direção x do vetor normal \vec{n} à superfície do elemento.

Após um procedimento idêntico para o segundo termo, a equação (31) se torna:

$$\int_{(e)} \left[- \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial V_e}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial V_e}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) \right] dx dz -$$

$$- \int_{(e)} N_i \left(\frac{k^2}{\rho} V_e + S \right) dx dz + \int_{(e)} \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_e}{\partial n} N_i d\ell = 0. \quad (33)$$

onde:

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = \frac{\partial V_e}{\partial x} n_x + \frac{\partial V_e}{\partial z} n_z . \quad (34)$$

3.4 Condições de Contorno.

Na equação (33) as integrais de superfície s̄o não se anulam nas fronteiras externas. Isto porque uma fronteira percorrida num sentido num elemento, o ser̄a em sentido contr̄ario no elemento adjacente. Ent̄ao as integrais se cancelar̄ao mutuamente nas fronteiras internas.

A integral de superfície tamb̄em se anular̄a se a derivada for igual a zero. Esta condiç̄ao ̄e chamada de Newman ou natural. Ela ocorre, n̄ao havendo fuga de corrente, na interface terra-ar.

3.5 Equaç̄ao da Matriz Elementar.

A substituiç̄ao da equaç̄ao (24) na equaç̄ao (33), j̄a sem o termo da fronteira, leva a

$$\int (e) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \mathbf{v} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z} \mathbf{v} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) dx dz -$$

$$- \int (e) \frac{k^2}{\rho} \mathbf{N} \mathbf{v} N_i dx dz - \int (e) S N_i dx dz = 0. \quad (35)$$

que ̄e uma equaç̄ao matricial, podendo ser tamb̄em representada por

$$(\mathbf{K} + \mathbf{P}) \mathbf{v} = \mathbf{S} \quad (36)$$

com as entradas das respectivas matrizes sendo

$$k_{ij} = - \int_{(e)} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dx dz, \quad (e)$$

$$p_{ij} = - \int_{(e)} \frac{k^2}{\rho} N_i N_j dx dz, \quad (37)$$

$$s_i = \int_{(e)} \bar{I} \delta(x) \delta(z) N_i dx dz. \quad (e)$$

O desenvolvimento da primeira integral é fácil. Para o caso da segunda, é conveniente usar a relação (Zienkiewicz, 1971):

$$\int_{(e)} N_1^a N_2^b N_3^c dx dz = \frac{2a! b! c! A}{(a+b+c+2)!}, \quad (38)$$

onde A é a área do elemento (e) . Como a resistividade ρ é constante sobre cada elemento, ela pode ser aplicada sem problema.

Substituindo o valor de N , dado pela equação (22), em (36), a equação matricial se transforma em:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{4\rho A} & b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 & 2 & 1 & 1 \\ & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 & & 1 & 2 & 1 \\ & & & b_3^2 + c_3^2 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \mathbf{v} = \mathbf{s} \quad (39)$$

(simétrica)

que \bar{e} é a matriz elementar do sistema. Supondo uma fonte pontual no nó 3 (Fig. 5),

$$N_1 = 0, N_2 = 0, N_3 = 1, \text{ e da equação (37)}$$

$$s_1 = 0, s_2 = 0 \text{ e}$$

$$s_3 = \int (e) \hat{I} \delta(x) \delta(z) dx dz = \hat{I}, \quad (40)$$

A intensidade da fonte deve ser dividida por todos os elementos que a compartilham. Para o elemento da Fig. 5, a magnitude dependerá da razão do ângulo α para 360. Em consequência:

$$\mathbf{s} = \frac{\alpha I}{360} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \quad (41)$$

Exceto onde está concentrada uma fonte, os elementos do vetor \mathbf{s} são nulos.

3.6 Construção da Matriz Global.

A montagem das matrizes elementares na matriz global é comum a todos os problemas de elementos finitos. Existem diversos esquemas descritos na literatura (Zienkiewicz, 1971, Hubner, 1975, Irons, 1970). A equação matricial global é representada por:

$$\mathbf{GV} = \mathbf{S} \quad (42)$$

Devido ao operador e às funções interpoladoras utilizados, essa matriz é simétrica, esparsa, bandeda e com a diagonal dominante. Sua dimensão M é igual ao número de nós do domínio discretizado. O vetor \mathbf{V} é constituído dos M valores procurados da função $V(x,z)$, um em cada nó. O vetor \mathbf{S} traz todas as informações sobre as fontes. Ele é obtido pela soma das equações (41) de cada elemento.

3.7 Incorporação das Condições de Contorno.

O passo seguinte é a incorporação das condições de Dirichlet (as condições de Neuman já estão implícitas na equação (33)). É importante manter as características da matriz global. Um meio para isto é descrito por (Hubner, 1975).

Seja um exemplo simples, como um sistema de quatro equações,

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{vmatrix} \quad (43)$$

com as condições de contorno

$$\begin{aligned}
 v_1 &= c_1 \\
 v_3 &= c_3.
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

As equações se modificam para:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & g_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & g_{42} & 0 & g_{44} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 \\ s_2 - g_{21}c_1 - g_{23}c_3 \\ c_3 \\ s_4 - g_{41}c_1 - g_{43}c_3 \end{vmatrix}.
 \tag{45}$$

As características da matriz **G** não foram alteradas. Ela se mantém simétrica e bandeda. Evidentemente, as soluções do sistema obedecerão as condições de contorno.

3.8 Solução do Sistema de Equações.

A resolução do sistema é um ponto crítico do programa. Como as matrizes são muito grandes, ela ocupa 90% do esforço computacional. Para economizar memória, somente um lado da banda é armazenado. Foi usada uma redução gaussiana, com a solução simultânea dos vetores associados a cada posição dos eletrodos de corrente.

Como foi dito na seção 2.3.2, o sistema deve ser resolvido para cada valor de k , gerando os pontos que serão utilizados na recuperação dos potenciais. O próximo capítulo discute este processo.

Convém notar que atualmente existem maneiras mais eficientes de efetuar a montagem e redução da matriz global, por exemplo as baseadas no método frontal (Irons, 1970). Rijo(1981) implementou um algoritmo muito eficiente para o tipo de problema tratado aqui.

4 RECUPERAÇÃO DOS POTENCIAIS

O passo seguinte à obtenção dos potenciais \bar{e} é recuperar seus valores, no domínio do espaço, por meio da transformada inversa de Fourier. Pela simetria em k da equação (17), a equação (15) fica sendo:

$$V(x,y,z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{V}(x,k,z) \cos(ky) dk \quad (46)$$

Este capítulo apresenta um modo de resolver esta integral.

4.1 Casos Simples.

Alguns casos tem uma expressão analítica tanto para o potencial quanto para sua transformada. Com eles é possível entender algumas das dificuldades da transformação inversa.

4.1.1 Caso Homogêneo

Os potenciais para esse caso foram discutidos no capítulo 2 e são do tipo da equação (5). A forma transformada desses potenciais \bar{e} , sendo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$$\bar{V}(x,k,z) = \frac{I\rho}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iky}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} dy, \quad (47)$$

e pela simetria em y

$$\tilde{V}(x,k,z) = \frac{I\rho}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(ky)}{(a^2 + y^2)^{1/2}} dy, \quad (48)$$

onde $a^2 = x^2 + z^2$, Logo, fazendo $t = y/a$.

$$\tilde{V}(x,k,z) = \frac{I\rho}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos(kat)}{(1 + t^2)^{1/2}} dt = \frac{I\rho}{\pi} K_0(ka). \quad (49)$$

A integral \tilde{V} , portanto, uma representação da função esférica modificada de Bessel. Na Figura 6, ela está representada para alguns valores do parâmetro a . A descontinuidade na origem \tilde{V} é logarítmica, e ela decai para zero quando o argumento cresce (Abramowitz e Stegun, 1965).

4.1.2 Falhas e Diques Verticais Infinitos

No apêndice 1 está discutida a solução pela teoria das imagens para este casos. A comparação das equações (5) e (49) indica que a transformação

$$\frac{1}{(a^2 + y^2)^{1/2}} \iff 2K_0(ka) \quad (50)$$

pode ser usada para a obtenção dos potenciais transformados.

No apêndice A estão relacionadas estas fórmulas. Os potenciais transformados são combinações lineares de K_0 . Os casos mais complexos também apresentam as características da função de Bessel.

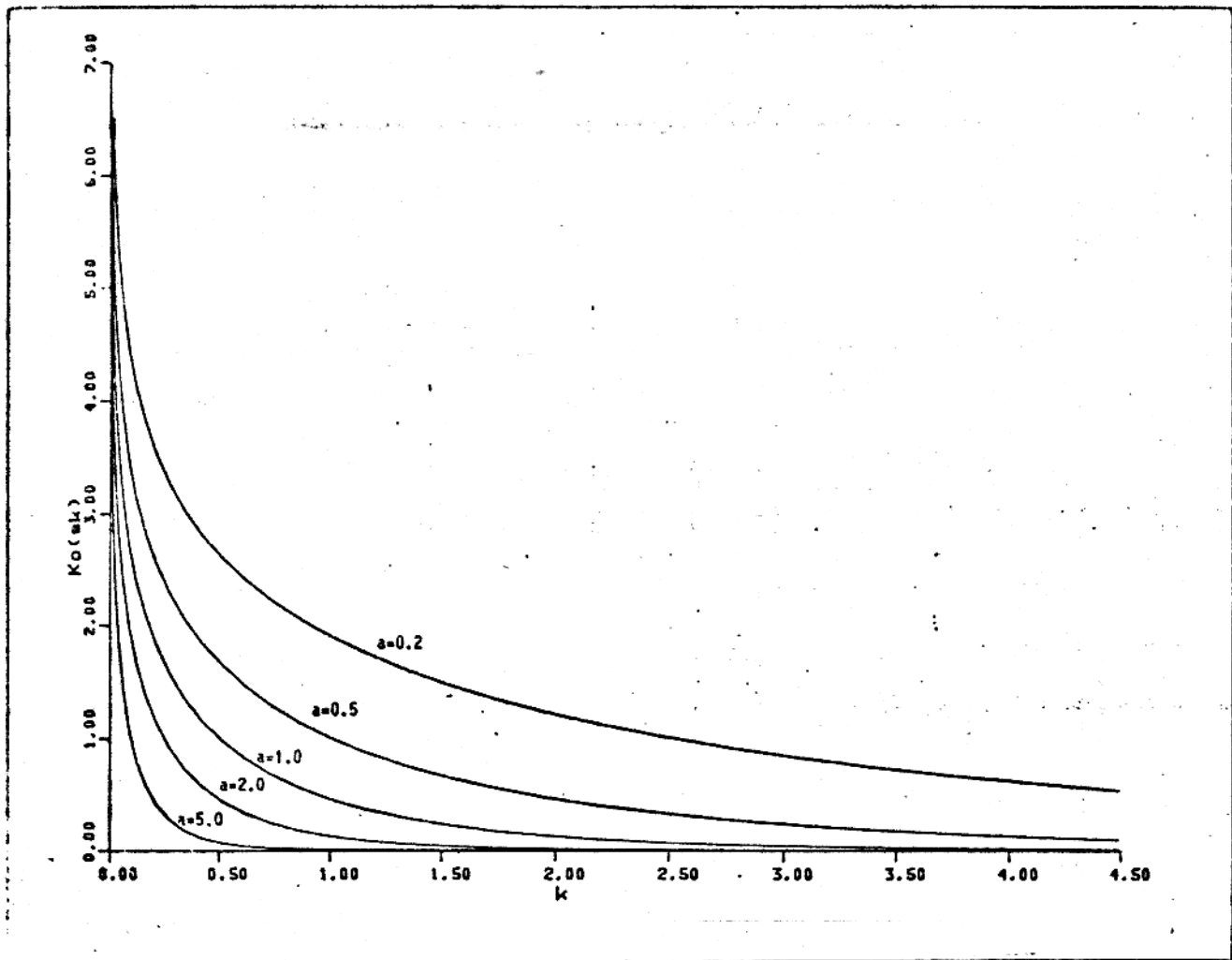


Figura 6
Função esférica modificada de Bessel

4.2 Particularização para o Arranjo Dipolo-Dipolo.

O arranjo dos eletrodos no campo pode simplificar, em alguns casos, a recuperação dos potenciais.

4.2.1 Caso Ortogonal

No caso particular da linha de medida perpendicular ao corpo, ela pode ser tomada como o eixo $y = 0$:

$$V(x,0,z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{V}(x,k,z) dk. \quad (51)$$

A ausência do termo oscilante facilita a integração numérica.

A equação (7) utiliza diferenças de potencial. Isto simplifica a integração quando os eletrodos são perpendiculares ao corpo, pois

$$\Delta \tilde{V} = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\infty} \tilde{V}_{11} dk - \int_0^{\infty} \tilde{V}_{12} dk - \int_0^{\infty} \tilde{V}_{21} dk + \int_0^{\infty} \tilde{V}_{22} dk \right], \quad (52)$$

o que significa que as diferenças dos potenciais pode ser realizada antes da integração. Essas diferenças, e os potenciais, para os casos mencionados acima, estão nas Figuras 7 a 11. As curvas foram obtidas pelo método das imagens. Em todas elas, as distâncias são normalizadas pelo espaçamento dos eletrodos do dipolo, como explicado na seção 2.1.3. Apesar da descontinuidade dos potenciais na origem, sua diferença é uma curva contínua e muito suave, de fácil integração. Portanto, o caso ortogonal não apresenta maiores dificuldades sob este aspecto.

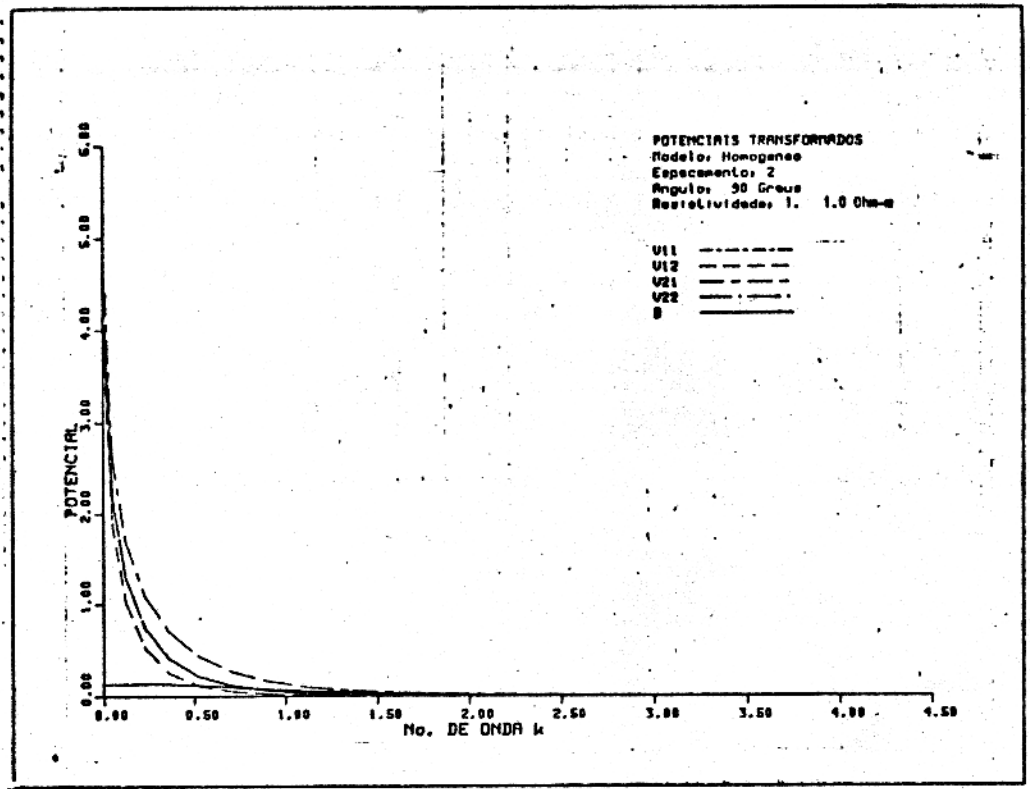


Figura 7
Potenciais transformados para o modelo homogêneo

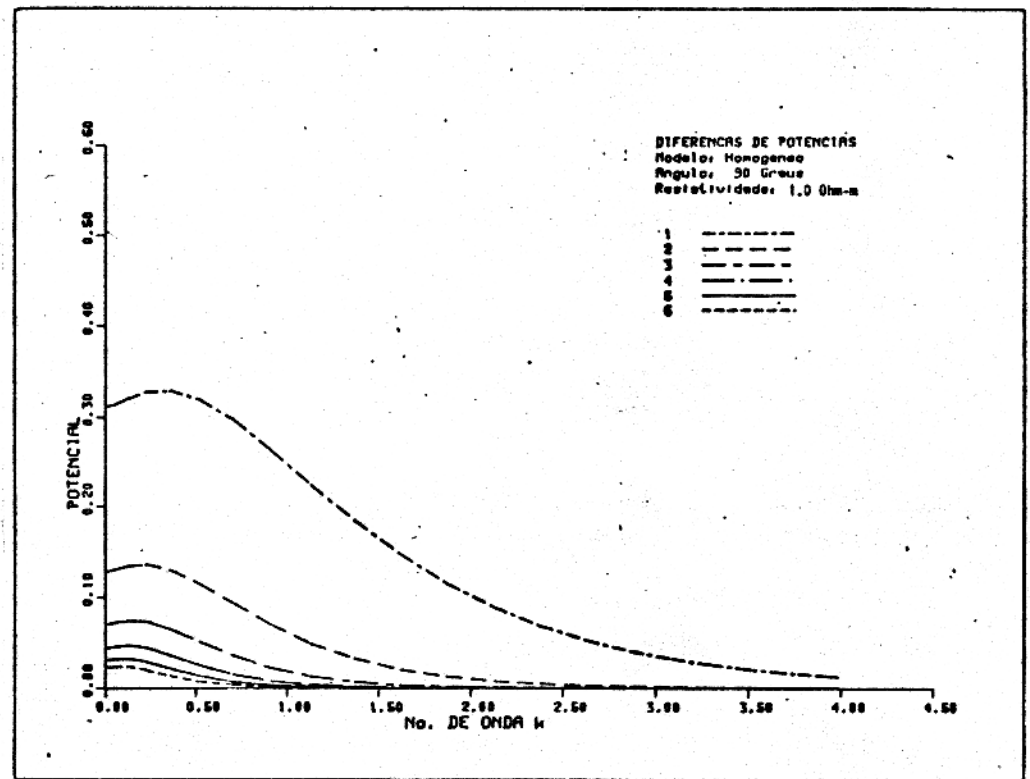


Figura 8
Diferenças de potenciais para o modelo homogêneo

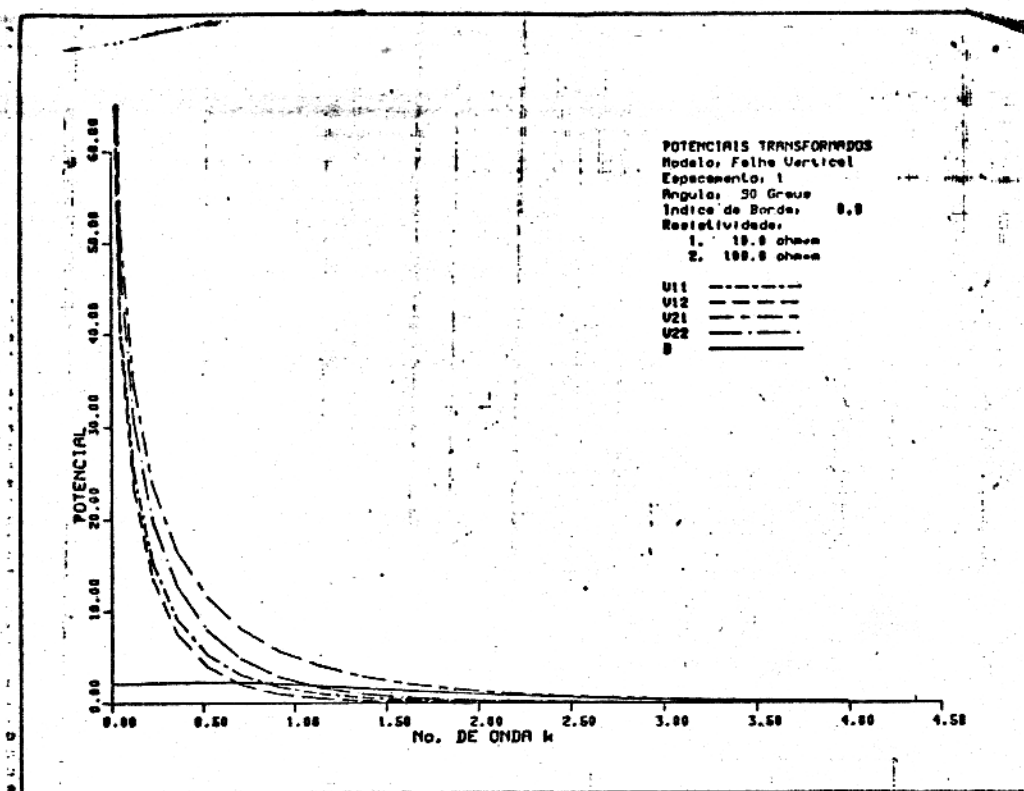


Figura 9
 Potenciais transformados para a falha vertical

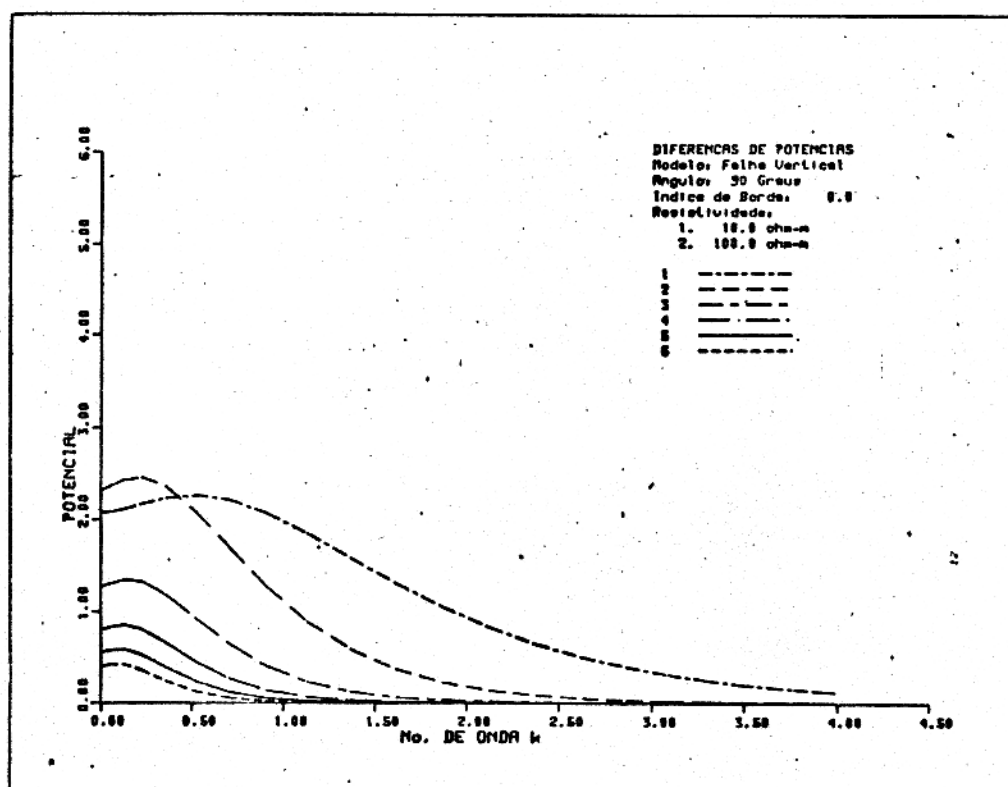


Figura 10
 Diferenças de potenciais para a falha vertical

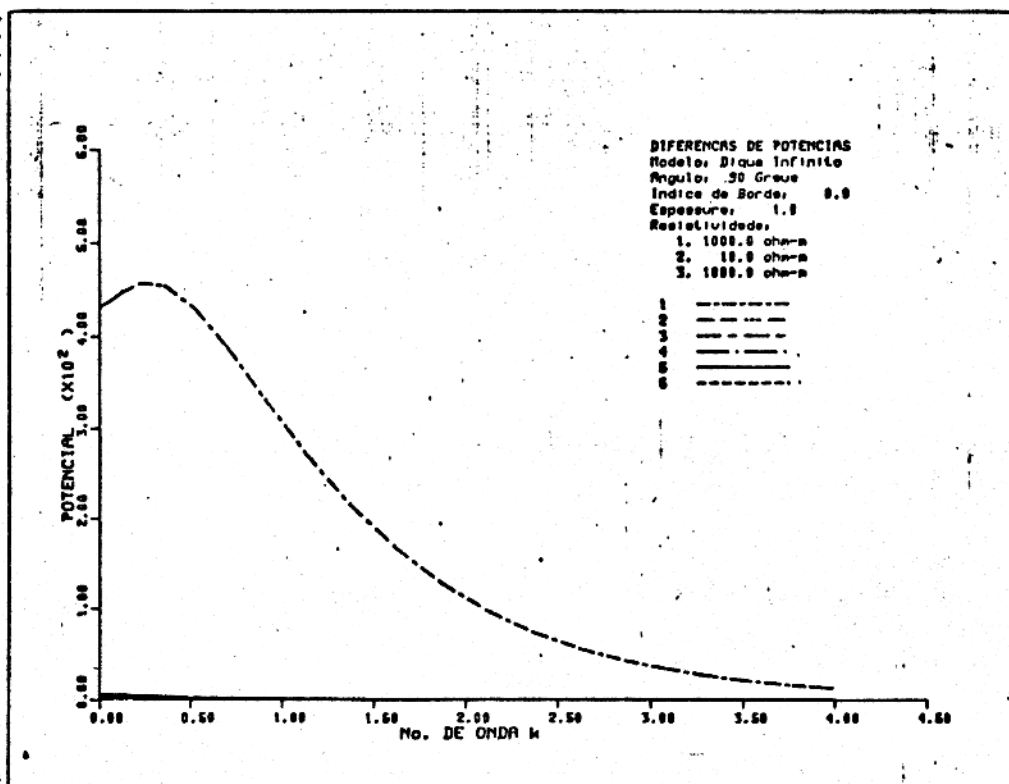
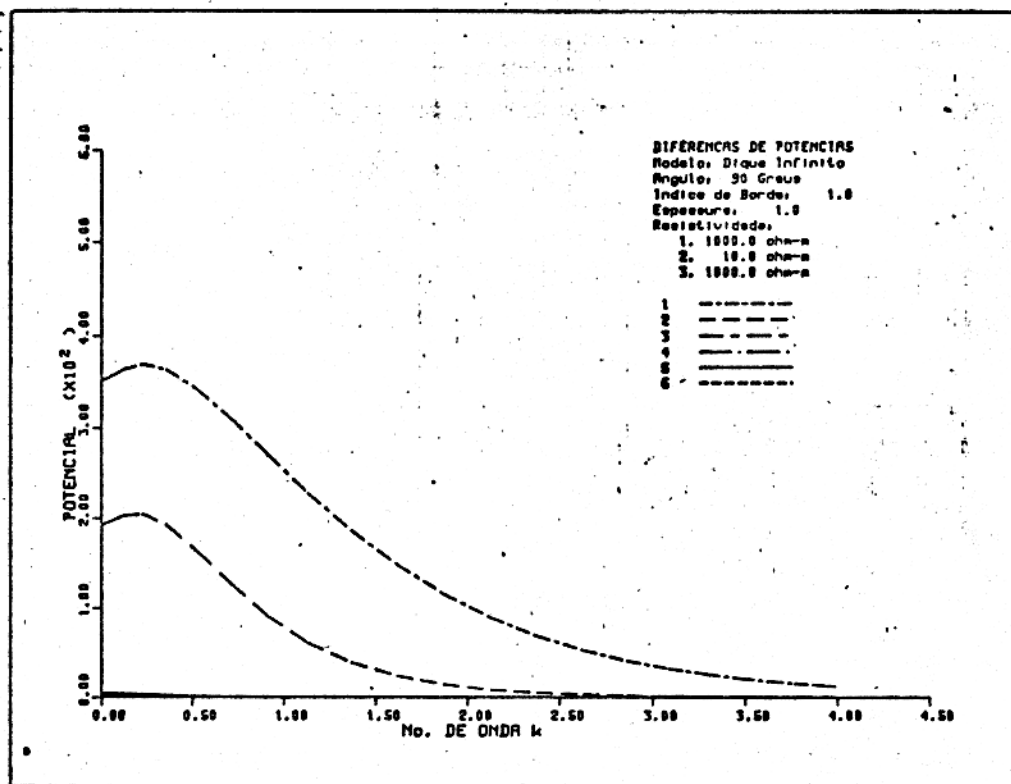


Figura 11
 Diferenças de potenciais para o dique infinito

4.2.2 Caso Não Ortogonal

Ao ser introduzido um ângulo devido ao "strike", a variável y , que determina a oscilação do integrando da equação (46), será diferente para cada potencial (Fig. 12).

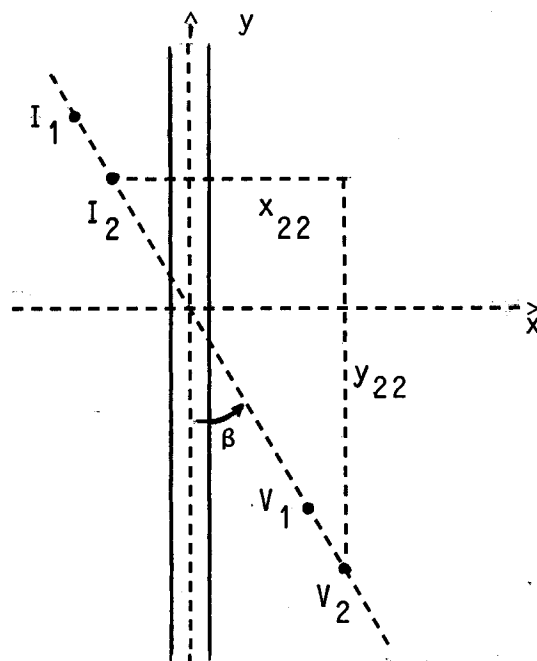


Fig. 12

Linha de dipolos cortando um corpo obliquamente.

Logo os cosenos oscilarão diferentemente para cada integral, e ao contrário do caso anterior, a descontinuidade não poderá ser removida. Além disso, a integração numérica de uma função oscilante apresenta vários problemas.

As coordenadas x e y dependem do espaçamento dos eletrodos e do ângulo devido ao "strike":

$$x = r \operatorname{sen} \beta ,$$

$$y = r \operatorname{cos} \beta .$$

(53)

No campo, o normal é o uso de 5 ou 6 níveis de sondagem (Fig. 3). A maior distância entre eletrodos é 8 unidades. O potencial transformado só depende de x e z , e a oscilação de y (equação (46)). Pelas relações (53) e pela Figura 6, fica claro que, para os perfis próximos à perpendicular, os potenciais decairão rapidamente. As oscilações serão pequenas e amortecidas. Quando o ângulo β diminui, a influência das oscilações aumenta.

4.3 Transformada de Fourier para o Caso Não Ortogonal.

As transformadas de Fourier em problemas de geofísica são resolvidas, na maioria das vezes, por uma transformada rápida de Fourier (FFT) (Cooley e Tukey, 1965), ou por meio de filtros (Anderson, 1975). Essas duas técnicas, embora muito rápidas, necessitam de um número considerável de pontos. Mas no algoritmo de elementos finitos, o tempo maior de computação é gasto na obtenção desses pontos, o que torna desprezível o tempo da integração.

Integrais oscilantes complicam a convergência de muitos esquemas, como por exemplo de quadraturas gaussianas (Davis e Rabinowitz, 1975). Uma alternativa é o método de Filon, que é uma regra de Simpson modificada. Há variações mais sofisticadas, empregando interpoladores de terceira ordem (Flinn, 1959) ou "splines" (Chase e Fosdick, 1969, Einarsson, 1972). Todos eles trabalham com espaçamento constante, o que dificulta seu ajuste às características dos potenciais.

No caso atual, o uso de polinômios de grau mais alto facilita manipular a singularidade na origem dos potenciais e os limites infinitos da integral.

4.3.1 Integração Oscilante com Polinômios Ortogonais

Esses métodos estão baseados na representação da função e do termo oscilante, separadamente, por sua expansão em séries de polinômios ortogonais sobre o intervalo de integração. A or-

togonalidade permite escrever a integral como uma série (Patterson, 1976, Littlewood e Zakian, 1976).

A transformação inversa dos potenciais (equação(46)) é um caso particular da integral

$$T(y) = \int_a^b p(k) e^{iyk} f(k) dk. \quad (54)$$

Sejam os polinômios q_ℓ ortogonais à função p no intervalo $[a,b]$. Serão empregadas as formas normalizadas dos polinômios para não complicar a notação. A expansão de uma função f será :

$$f(k) = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell q_\ell(k), \quad (55)$$

onde os coeficientes c_ℓ são

$$c_\ell = \int_a^b p(k) q_\ell(k) f(k) dk. \quad (56)$$

A aplicação de (55) e (56) na integral da equação (54) leva a

$$T(y) \cong \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell b_\ell(y), \quad (57)$$

onde

$$b_\ell = \int_a^b p(k) q_\ell(k) e^{iyk} dk. \quad (58)$$

Os termos do somatório da equação (57) dependem ou da variável y (equação (58)) ou da função f (equação (56)). A série convergirá se pelo menos um deles decair suficientemente com ℓ (Ting e Luke, 1981).

Os coeficientes b_ℓ são expansões em polinômios da parte oscilante do integrando da equação (54):

$$e^{iyk} = \sum_{\ell=0}^{\infty} b_\ell(y) q_\ell(k). \quad (59)$$

Muitas vezes é possível obter uma fórmula fechada para a equação (58). Por outro lado, como não se conhece a expressão analítica da função, a equação (56) pode ser resolvida por meio de uma quadratura, ou seja

$$c_\ell \approx d_{\ell,m} = \sum_{n=0}^m w_n q_\ell(k_n) f(k_n). \quad (60)$$

Os coeficientes w_n dependem da quadratura empregada, e são chamados de pesos. Esse processo pode ser encarado como uma quadratura, de pesos $w_n q_\ell$, para cada coeficiente c_ℓ . Os $m \times m$ pesos podem ser gerados uma só vez, o que será mostrado na implementação (apêndice B). É importante notar que em cada quadratura são usados os mesmos valores $f(k_n)$ da função, que só é calculada m vezes.

A equação (57) fica aproximada então por

$$T_m(y) \cong \sum_{\ell=0}^m d_{\ell,m} b_{\ell}(y). \quad (61)$$

A convergência de $T_m(y)$ na equação (61) para $T(y)$ na equação (57), e a representação do erro, estão discutidos no trabalho citado de Ting e Luke. Na equação (61) há um truncamento da série, acentuando a necessidade de uma convergência rápida.

O problema da integração fica resumido ao cálculo de dois tipos de coeficientes. Um pela quadratura da função a ser integrada, sem a parte oscilante. Outro, correspondente à oscilação, pela avaliação de uma fórmula. Esta colocação aproveita a eficiência das quadraturas, mas evita os problemas de convergência que aparecem quando elas são usadas em integrandos oscilantes.

Ting e Luke (1981) empregam polinômios de Laguerre e Hermite para integrais com limite infinito. No caso da equação (46), o uso da quadratura de Gauss-Laguerre é mais conveniente, tanto pelos limites da integração quanto pelo comportamento assintótico dos potenciais.

A função peso para esta quadratura é o inverso da exponencial, e da equação (54)

$$T(y) = \int_0^{\infty} e^{-k} e^{iyk} f(k) dk. \quad (62)$$

4.3.2 Integração por Quadratura de Gauss-Laguerre

O cálculo dos coeficientes independentes da oscilação para a equação (62) é baseado na regra de Gauss-Laguerre:

$$\int_0^{\infty} e^{-k} f(k) dk = \sum_{n=0}^m w_n f(k_n), \quad (63)$$

onde a função \bar{e} amostrada nos zeros dos polinômios de Laguerre $L_m(k)$. Krylov (1962) apresenta as abcissas e os pesos até $m=32$. No caso atual \bar{e} mais conveniente empregar:

$$\int_0^{\infty} f(k) dk = \sum_{n=0}^m e^{k_n} w_n f(k_n). \quad (64)$$

Partindo da equação (60), os coeficientes independentes da oscilação são calculados por:

$$c_\ell \cong \sum_{n=0}^m e^{k_n} L_\ell(k_n) f(k_n) \quad (65)$$

A fórmula dada por Patterson (1976) para os coeficientes dependentes da oscilação \bar{e} :

$$b_\ell(y) = i y^\ell \frac{(y-i)^{\ell+1}}{1+y^2}. \quad (66)$$

Esses coeficientes podem ser calculados por recorrência (apêndice B). Infelizmente, seu decaimento \bar{e} lento. Além disso, no caso dos potenciais transformados, a descontinuidade na origem também prejudica a aplicação desta quadratura, exigindo as modificações apresentadas nas seções seguintes.

A influência da descontinuidade \bar{e} mostrada no exemplo abaixo. Ele apresenta a integração da função K_0 , sem a parte os-

cilante, para alguns valores do ponto inicial do intervalo de integração. Os resultados exatos foram extraídos da Tabela 11.1, página 492, de Abramowitz e Stegun (1965).

$$e^a \int_a^{\infty} K_0(k) dk$$

a	Exato	L ₁₅	L ₃₂ (32)	L ₃₂ (15)
0.0	1.5707963	1.530058	1.551369	1.551369
0.5	1.0612717	1.061258	1.061272	1.061272
1.0	0.8923752	0.8923748	0.8923752	0.8923752
1.5	0.7897357	0.7897357	0.7897357	0.7897357
2.0	0.7176295	0.7176295	0.7176295	0.7176295

As terceiras e quarta colunas apresentam os resultados para as quadraturas de Laguerre de grau 15 e 32. A convergência melhora quando o intervalo de integração se afasta da origem. Na última coluna foram utilizados são os 15 primeiros pontos da quadratura de grau 32. Os valores são os mesmos que usando todos os pontos, e melhores que com os 15 pontos da quadratura de grau 15 (Coluna 3), como sugerido por Davis e Rabinowitz (1975). O motivo é o rápido crescimento dos zeros dos polinômios de Laguerre, para valores onde a função já pode ser considerada nula. A quadratura de grau mais alto contém mais pontos na parte inicial, melhorando a aproximação.

Um outro exemplo ilustra não somente o efeito da descontinuidade, como também o do decaimento lento dos coeficientes b_ℓ . É um teste para a parte real da fórmula (57) com a função $K_0(k)$ e $y = \cos \pi/6$:

$$\int_0^{\infty} K_0(k) \cos(yk) dk$$

l	c_l	b_l	$c_l \times b_l$	soma
0	1.551368	0.2500000	0.3878422	0.3878422
5	1.493545	-0.0000000	-0.0000000	0.8142089
10	0.6947869	-0.0593262	-0.0041219	0.7566082
15	0.3913814	0.0500565	0.0001951	0.7671710
20	0.2243163	-0.0215676	-0.0631602	0.7661798
25	0.1130630	0.0118786	0.0001343	0.7659264
30	0.0290919	-0.0033409	-0.0000097	0.7660123
	valor exato		0.7853982	$(\pi/4)$

Os valores da Coluna 2 contêm o erro devido à descontinuidade na origem. O primeiro valor, por exemplo, deveria ser $\pi/2$ (ver o teste anterior). O comportamento dos b_l não ajuda na convergência do somatório.

4.3.3 Integração por Gauss-Legendre e Gauss-Laguerre

Para acelerar a convergência, Patterson (1976) sugere que a integral da equação (62) seja dividida em duas partes:

$$\int_0^{\infty} e^{iyk} f(k) dk = \frac{a}{2} e^{iya/2} \int_{-1}^1 e^{iyak/2} f\left(\frac{(k+1)a}{2}\right) dk + e^{iya} \int_0^{\infty} e^{-k} e^{iyk} e^k f(k+a) dk, \quad (67)$$

onde a é o ponto da divisão do intervalo de integração. As duas integrais podem ser resolvidas pelo método discutido aqui. A última integral converge mais rapidamente que no caso anterior, pois a função f é amostrada em valores maiores do seu argumento,

onde decai mais depressa. A primeira integral do lado direito da equação (67) pode ser resolvida por uma quadratura de Gauss-Legendre oscilante.

A forma usual dessa última quadratura é:

$$\int_{-1}^1 f(k) dk = \sum_{n=1}^m w_n f(k_n). \quad (68)$$

As abcissas agora são os zeros dos polinômios de Legendre $P_n(k)$. Em Davis e Rabinowitz (1975) há um programa que calcula os zeros e os pesos para qualquer grau. Na formulação oscilatória, os coeficientes independentes da oscilação são:

$$c_\ell = \sum_{n=0}^m w_n p_\ell(k_n) f(k_n) \quad (69)$$

A fórmula deduzida por Ting e Luke (1981) para os coeficientes dependentes da oscilação, nesse caso, é:

$$b_\ell(y) = \frac{i^\ell \pi^{1/2} (2\ell+1)}{(2y)^{1/2}} J_{\ell+1/2}(y), \quad (70)$$

onde $J_{\ell+1/2}(y)$ representa a função de Bessel de primeira espécie de coeficiente fracionário. Como esses coeficientes são decrescentes, devem ser calculados por uma recorrência inversa (apêndice B). Seu decaimento é rápido, como pode ser visto pelo seu uso na parte real da equação (59).

k	y	cos(yk)	Leg. 32	Lag. 32	Lag. 128
0.0	1.0	1.000000	1.000000	0.9999847	1.000000
0.0	5.0	1.000000	1.000000	0.4663909	0.9194692
0.0	10.0	1.000000	1.000000	1.851847	0.4806702
0.5	1.0	0.8775826	0.8775825	0.8775795	0.8775826
0.5	5.0	-0.8011436	-0.8011436	-0.9090062	-0.7810312
0.5	10.0	0.2836622	0.2836622	-0.0256659	0.4693176
1.0	1.0	0.5403023	0.5403023	0.5403047	0.5403023
1.0	10.0	-0.8390715	-0.8390715	0.0462951	-0.4884698
2.0	6.0	0.8438539	0.8449661	-0.2580975	0.9131146
2.0	7.0	0.1367372	0.3131091	-0.1176861	0.0000100

A convergência para os polinômios de Legendre com 32 pontos (coluna 4) é sensivelmente melhor que para Laguerre, mesmo com 128 pontos (coluna 5 e 6).

O problema agora é que a quadratura de Gauss-Legendre não é boa para lidar com a descontinuidade do potencial na origem, como revela o teste seguinte:

$$\int_0^a K_0(k) dk = \frac{a}{2} \int_{-1}^1 K_0\left(\frac{a(k+1)}{2}\right) dk$$

a	Exato	G ₁₂	G ₂₄	G ₃₂
0.1	0.3421645	0.3417598	0.2055584	0.1427628
0.5	0.9271025	0.9250796	0.6288929	0.4641997
1.0	1.242510	1.238464	0.9263342	0.7170630
2.0	1.473676	1.465584	1.240818	1.028520
4.0	1.560650	1.544466	1.469849	1.328141

Os valores exatos foram calculados a partir da Tabela 11.1 de Abramowitz e Stegun (1965).

4.3.4 Integração por Gauss-Laguerre Modificada

Na equação (67), os coeficientes independentes da oscilação da primeira integral do lado direito são obtidos por:

$$c_\ell = \frac{a}{2} \int_{-1}^1 P_\ell(k) f\left(\frac{a(k+1)}{2}\right) dk. \quad (71)$$

Fazendo $u = k + 1/2$ nesta equação,

$$c_\ell = a \int_{-1}^1 P_\ell(2u-1) f(au) du. \quad (72)$$

Davis e Rabinowitz (1975) recomendam uma mudança de variável para remover singularidades. Como a descontinuidade dos potenciais é logarítmica, a transformação

$$u = e^{-k} \quad (73)$$

é conveniente. Aplicando em (72),

$$c_\ell = a \int_0^\infty e^{-k} P_\ell(2e^{-k} - 1) f(ae^{-k}) dk. \quad (74)$$

Esta integral pode ser calculada por uma quadratura de Gauss-Laguerre. O teste abaixo pode ser comparado com o anterior de Gauss-Legendre.

a	Exato	L ₁₅	L ₃₂ (32)	L ₃₂ (15)
0.1	0.3421645	0.3432975	0.3421644	0.3421644
0.5	0.9271025	0.9312697	0.9271025	0.9271024
1.0	1.242510	1.249555	1.242510	1.242510
2.0	1.473676	1.485192	1.473676	1.473676
4.0	1.560650	1.578564	1.560650	1.560649

A eficiência da transformação também pode ser avaliada quando ela é usada junto com a quadratura de Gauss-Laguerre deslocada. A integral abaixo foi feita com 15 pontos para cada quadratura de grau 32 nos intervalos [0,1] e [1,∞).

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(ck) dk = \frac{1}{c}$$

c	Exato	Soma	[0,1]	[1,∞)
0.25	4.000000	3.990365	1.602393	2.387972
0.5	2.000000	1.999974	1.1804234	0.8195508
0.75	1.333333	1.333333	0.9467423	0.3865909
1.0	1.000000	1.000000	0.7910062	0.2089927
2.0	0.5000000	0.499999	0.4690855	0.0309144
5.0	0.2000000	0.199999	0.1995659	0.0004340

Nos dois primeiros casos, o decaimento da função é lento (ver Fig. 67), e os 15 pontos não são suficientes para que a segunda integral convirja totalmente.

Esse modo de calcular os coeficientes permite usar com eficiência a equação (67). O apêndice B reúne as fórmulas empregadas. O mesmo exemplo testado anteriormente com Laguerre oscilante deixa bem claro a melhora. Aqui são usados 15 pontos da quadratura de grau 32 para cada integral da equação (67). O pon

to de troca $\bar{e} a = 1$.

$$\int_0^{\infty} K_0(k) \cos(yk) dk \quad y = \cos \pi/6$$

Integral 1: [0,1]

ℓ	c_ℓ	b_ℓ	$c_\ell \times b_\ell$	Soma
0	1.242510	0.5698601	0.7080567	0.7080567
2	0.1714222	-0.1534669	-0.2630763	0.9546909
4	0.0502010	0.0033541	0.0001684	0.9521881
6	0.0238236	-0.0000256	-0.0000006	0.9522002
8	0.1410576	0.0000000	0.0000000	0.9522002

Integral 2: [1, ∞)

ℓ	c_ℓ	b_ℓ	$c_\ell \times b_\ell$	Soma
0	0.3282865	-0.4675342	-0.1534852	-0.1534852
5	0.0023830	0.2404097	0.0057290	-0.1671243
10	0.0002512	-0.0918977	-0.0000231	-0.1667731
15	0.0000469	0.0204883	0.0000010	-0.1668055
20	0.0000105	0.0045208	0.0000000	-0.1668019

Soma 1 + 2 = 0.7853984

Exato = 0.7853982

4.3.5 Testes da Integral em Pseudo-Seções

A convergência do esquema de integração exposto acima foi testada com os potenciais obtidos pelo método das imagens (a pên-dice A).

Nas Figuras 13 a 18 estão os testes com as duas quadraturas sendo de grau 32, com 15 pontos para cada. O meio é homogêneo, com resistividade de 1000 ohm-m. Para comparação, estão juntos com os resultados para uma quadratura normal de Laguerre de grau 32, com 30 pontos. Esta última converge razoavelmente até um ângulo de 30 graus, pelas razões sugeridas na seção 4.2.2. Já para 15 graus, os resultados são muito ruins, ao contrário da quadratura oscilante. Nada garante, portanto, que a quadratura usual dará bons resultados para modelos mais complicados.

Apesar dos exemplos do próximo capítulo haverem sido calculados também com 15 x 15 pontos, os testes mostraram que até 9 x 9 pontos os erros da integração são inferiores à resolução dos elementos finitos, e dentro da tolerância necessária para o tratamento de dados de campo.

RESISTIVIDADE APARENTE(ANALITICA)

-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5
1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0
1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0
1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0
1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0
1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0

RESISTIVIDADE APARENTE(INTEGRAL)

-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5
1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0
1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0
1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0
1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0
1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0

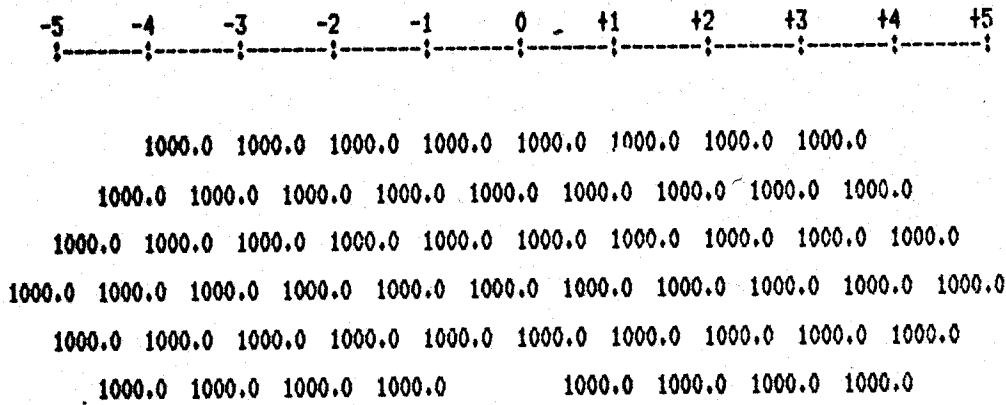
RESISTIVIDADE APARENTE(LAGUERRE)

-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5
1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0
1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0
999.9	999.9	999.9	999.9	999.9	999.9	999.9	999.9	999.9	999.9	999.9
999.8	999.8	999.8	999.8	999.8	999.8	999.8	999.8	999.8	999.8	999.8
999.6	999.6	999.6	999.6	999.6	999.6	999.6	999.6	999.6	999.6	999.6
999.3	999.3	999.3	999.3	999.3	999.3	999.3	999.3	999.3	999.3	999.3

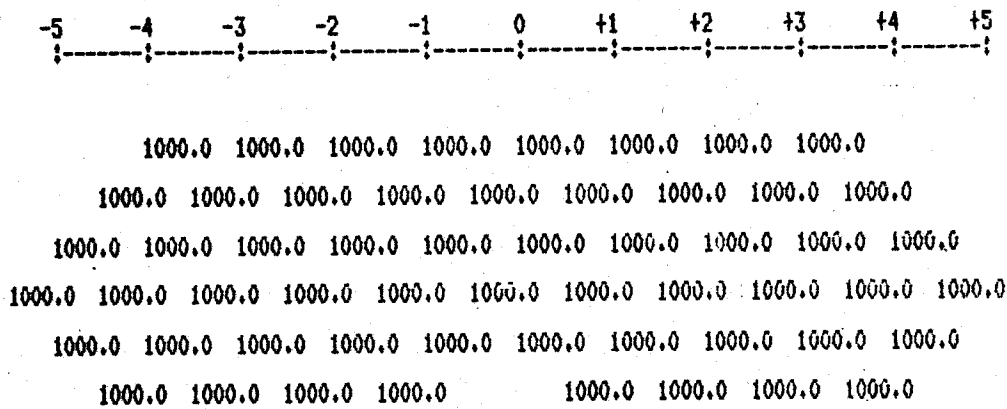
Fig.13 Teste da integral oscilante (srau 32, 15X15 pts.)
e de Laguerre Normal (srau 32, 30 pts.)

Modelo: homogêneo Resistividade
Anulo(sraus) : 90.00 1 1000.00 ohm-m

RESISTIVIDADE APARENTE(ANALITICA)



RESISTIVIDADE APARENTE(INTEGRAL)



RESISTIVIDADE APARENTE(LAGUERRE)

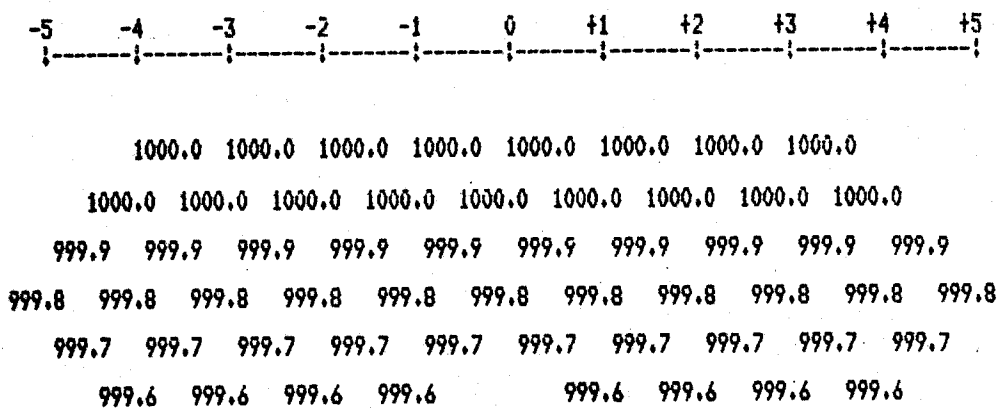
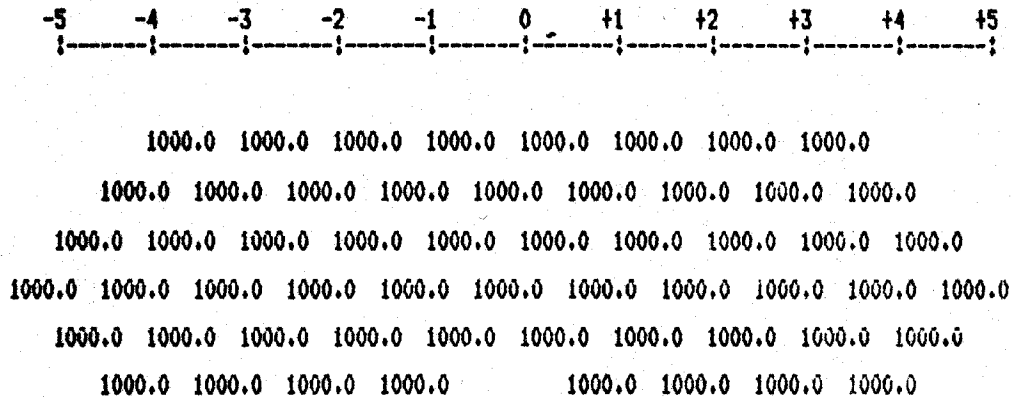


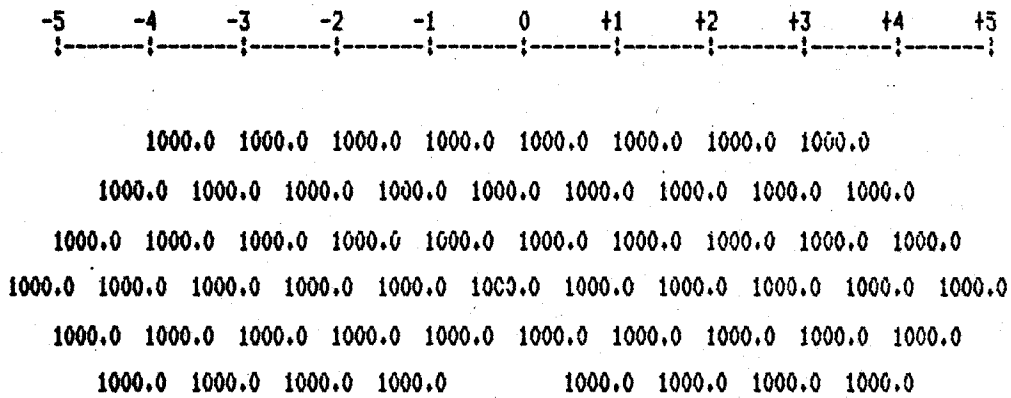
Fig. 14 Teste da integral oscilante (grau 32, 15X15 pts.)
e de Laguerre Normal (grau 32, 30 pts.)

Modelo: homogêneo Resistividade
Anulo(graus) : 75.00 1 1000.00 ohm-m

RESISTIVIDADE APARENTE (ANALITICA)



RESISTIVIDADE APARENTE (INTEGRAL)



RESISTIVIDADE APARENTE (LAGUERRE)

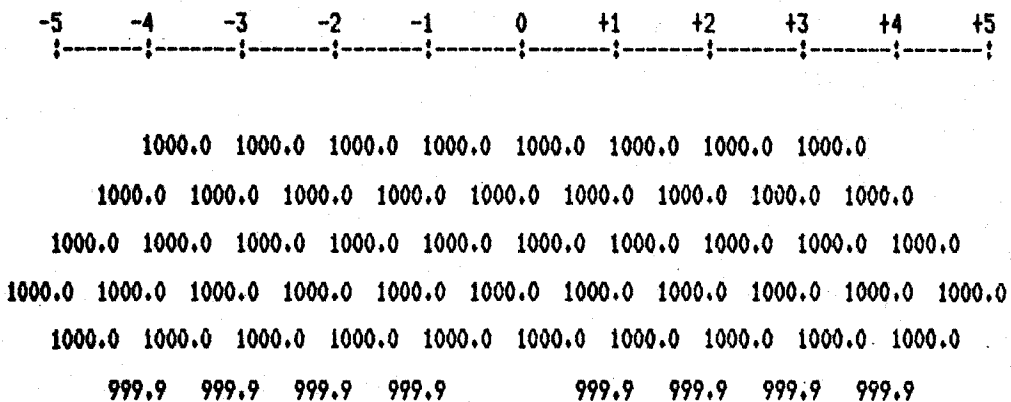
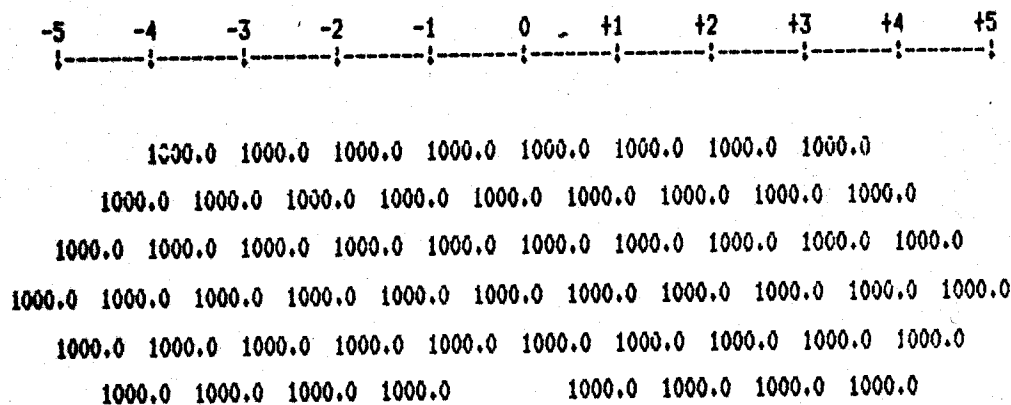


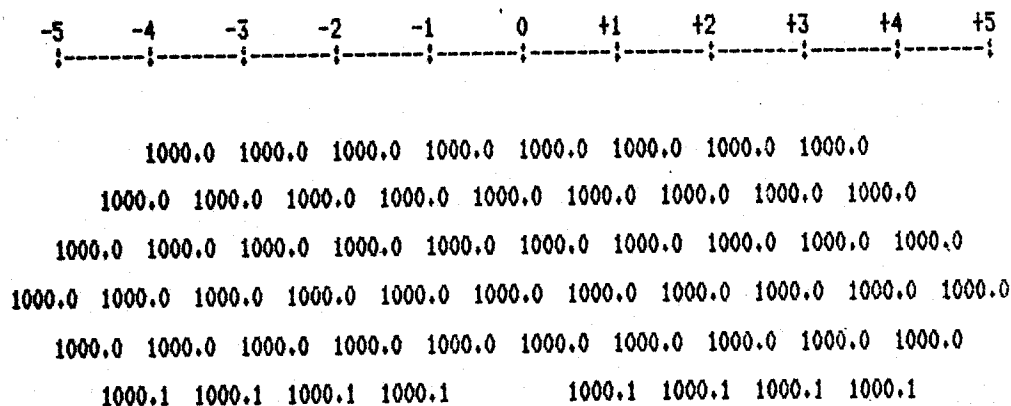
Fig. 15 Teste da integral oscilante (grau 32, 15x15 pts.)
e de Laguerre Normal (grau 32, 30 pts.)

Modelo: homogêneo Resistividade
Anulo (graus) : 60.00 I 1000.00 ohm-m

RESISTIVIDADE APARENTE(ANALITICA)



RESISTIVIDADE APARENTE(INTEGRAL)



RESISTIVIDADE APARENTE(LAGUERRE)

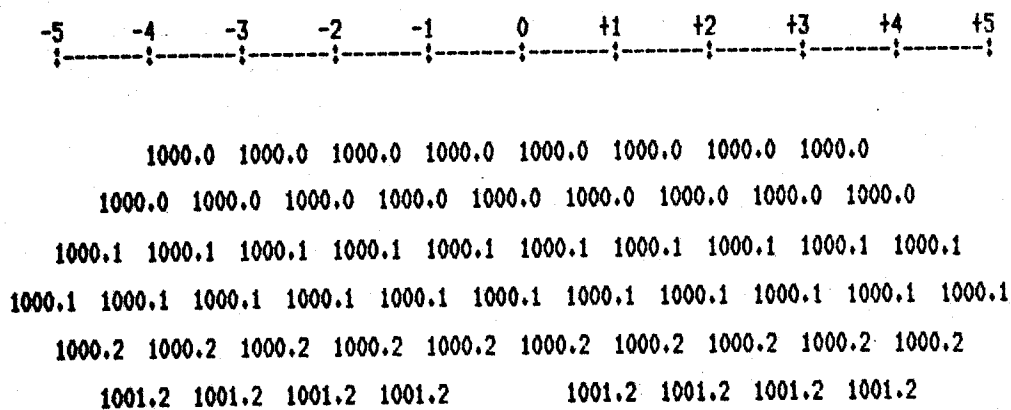


Fig.16 Teste da integral oscilante (grau 32, 15X15 pts.)
e de Laguerre Normal (grau 32, 30 pts.)

Modelo: homogêneo Resistividade
 Ângulo(graus) : 45.00 1 1000.00 ohm-m

RESISTIVIDADE APARENTE(ANALITICA)

-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5
1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0
1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0
1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0
1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0
1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0
1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0

RESISTIVIDADE APARENTE(INTEGRAL)

-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5
1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0
1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0
1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0
1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0
1000.1	1000.1	1000.1	1000.1	1000.1	1000.1	1000.1	1000.1	1000.1	1000.1	1000.1
999.9	999.9	999.9	999.9	999.9	999.9	999.9	999.9	999.9	999.9	999.9

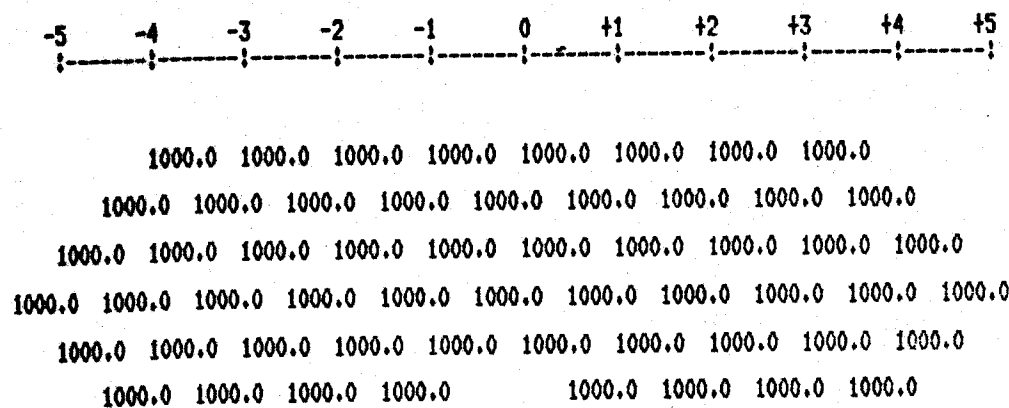
RESISTIVIDADE APARENTE(INTEGRAL)

-5	-4	-3	-2	-1	0	+1	+2	+3	+4	+5
1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0
1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0	1000.0
1000.1	1000.1	1000.1	1000.1	1000.1	1000.1	1000.1	1000.1	1000.1	1000.1	1000.1
1000.8	1000.8	1000.8	1000.8	1000.8	1000.8	1000.8	1000.8	1000.8	1000.8	1000.8
997.5	997.5	997.5	997.5	997.5	997.5	997.5	997.5	997.5	997.5	997.5
983.3	983.3	983.3	983.3	983.3	983.3	983.3	983.3	983.3	983.3	983.3

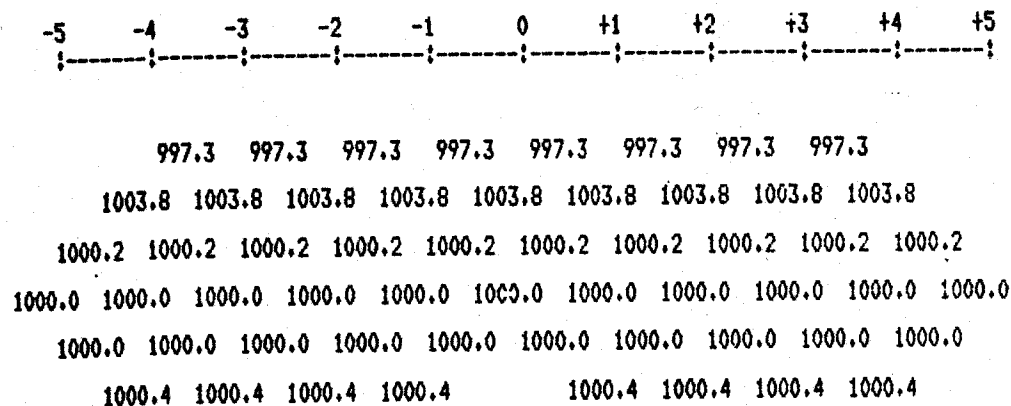
Fig.17 Teste da integral oscilante (grau 32, 15X15 pts.)
e de Lasuerre Normal (grau 32, 30 pts.)

Modelo: homogêneo Resistividade
Angulo(graus) : 30.00 1 1000.00 ohm-m

RESISTIVIDADE APARENTE(ANALITICA)



RESISTIVIDADE APARENTE(INTEGRAL)



RESISTIVIDADE APARENTE(INTEGRAL)

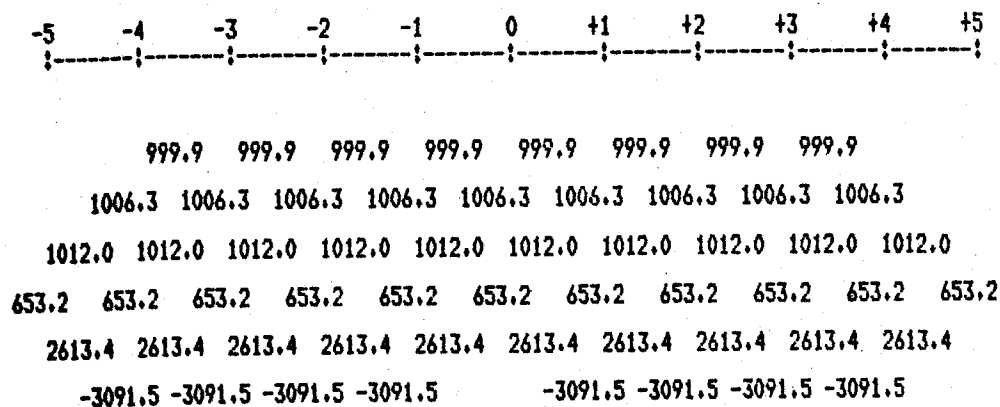
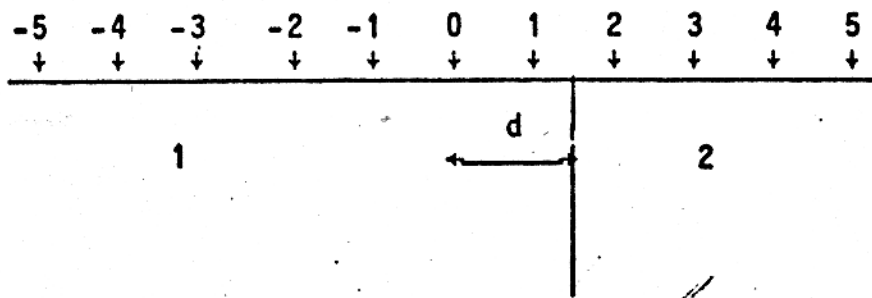
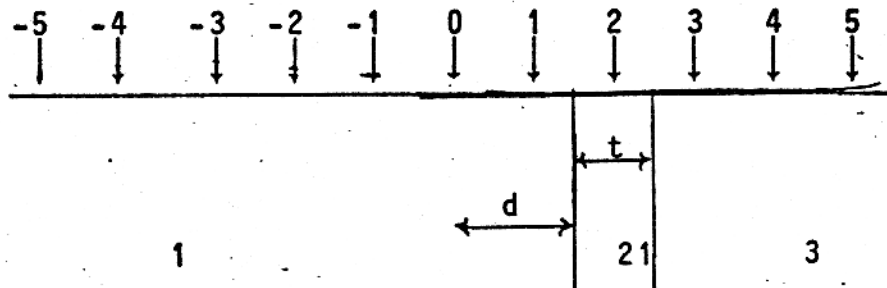


Fig.18 Teste da integral oscilante (grau 32, 15X15 pts.)
e de Lasuerre Normal (grau 32, 30 pts.)

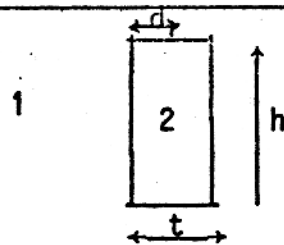
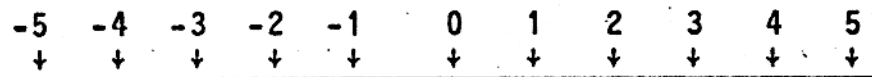
Modelo: homogêneo Resistividade
Angulo(graus) : 15.00 1 1000.00 ohm-m



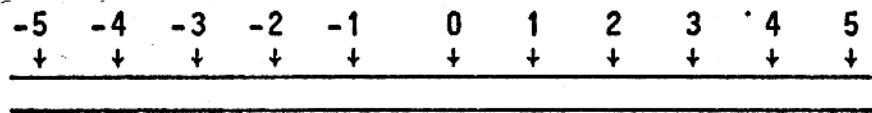
FALHA VERTICAL



DIQUE INFINITO



DIQUE FINITO



DIQUE INCLINADO

- d - Índice da borda
- t - Espessura
- h - Altura
- p - Profundidade

FIG. 19 - MODELOS DE TESTE

5 RESULTADOS DO MODELAMENTO

O capítulo anterior mostrou um meio de recuperar os potenciais no domínio do espaço, que são usados para construir as pseudo-seções. São necessários apenas os potenciais nas diversas posições dos eletrodos de voltagem. Como foi dito no final do Capítulo 3, os valores empregados nas transformadas inversas são calculados ao mesmo tempo para todas as posições dos eletrodos de corrente. A resistividade aparente é obtida pela equação (7) do Capítulo 2. Já a equação (8) permite calcular o PFE, conhecidas as resistividades para frequência alta e baixa.

A Figura 19 define os modelos e os parâmetros usados para teste. As Figuras 20 a 31 contêm a resistividade aparente e o PFE calculados diretamente pelo método das imagens para uma falha e um dique verticais e infinitos. Servem como comparação para os resultados do modelamento. Elas mostram também que para 75 graus as seções pouco diferem do caso ortogonal. Já os perfis a 15 graus estão muito distorcidos. Por esses motivos, os modelos com elementos finitos foram concentrados nos casos de 90, 60, 45 e 30 graus.

5.1 Testes de Malha

As malhas empregadas contêm 77 x 25 pontos, exceto a de 30 graus, com 69 x 25. A precisão do modelamento pode ser avaliada pela Figura 32, o que apresenta as resistividades para um meio homogêneo. O maior erro é de 4% no último nível do perfil a 30 graus. É inferior ao esperado dos dados de campo, da ordem de 5%.

5.2 Testes do Modelamento

Uma idéia melhor da precisão é conseguida comparando os valores para a falha (Figuras 33 a 36) e o dique (Figuras 37 a 40) infinitos com os resultados analíticos (Figuras 20 a 31). Os valores para o PFE são mais próximos porque são diferenças dos

potenciais, reduzindo o erro do processo.

5.3 Resultados para o Dique

O dique finito foi usado para avaliar a influência do ângulo do "strike" por ser um modelo simples. Tanto no caso do dique vertical quanto no inclinado, a altura do corpo é de duas unidades, e a profundidade de meia unidade (Figura 19).

Nas Figuras 41 a 44, o dique tem uma espessura de 1 unidade, resistividade de 10 ohm-m e PFE de 100%. A rocha encaixante possui uma resistividade de 100 ohm-m sem PFE. O efeito preponderante do ângulo é o alargamento da anomalia da parte central da pseudo-seção, correspondente ao corpo condutor. Contudo, os valores centrais são alterados muito pouco. Este efeito não tem somente como causa o aumento da seção efetiva do perfil sobre o corpo. Isto pode ser constatado nas Figuras 45 a 47, onde a largura do modelo foi feita equivalente às dos casos de 60, 45 e 30 graus, mas o perfil é perpendicular. Não é difícil notar nessas figuras que a variação da largura afeta imediatamente os valores na anomalia central. Este é também o efeito mais marcante se o corpo for deslocado para cima ou para baixo, ou for variada sua resistividade ou a da sua vizinhança.

Outros testes reforçam essas observações. Para as Figuras 48 a 51, o PFE do corpo foi reduzido para 25%, com as Figuras 52 a 54 apresentando a variação na espessura. As Figuras 55 a 61 mantêm a mesma sistemática, tendo sido aumentada a resistividade do meio encaixante para 1000 ohm-m em relação ao modelo anterior.

Estes dois últimos conjunto de parâmetros foram também adotados para um dique inclinado (Figuras 62 a 72). Deve-se notar que foi mantido constante o afastamento entre a base e o topo do modelo (Figura 19), e não a inclinação. Apesar das seções serem mais complexas, a 60 graus elas ainda são bastante semelhantes ao caso ortogonal.

5.4 Interpretação Preliminar para o Efeito do ângulo.

Os testes realizados levam a crer que o efeito do ângulo nas pseudo-seções não pode ser confundido, apesar do alargamento das anomalias, com variações nas características elétricas ou geométricas do corpo condutor. O efeito também não é dependente da geometria dos corpos, pois foi observado na falha, no dique, tanto vertical quanto inclinado, e para vários contrastes de resistividade e PFE.

Outro fato é bem evidente: até 60 graus, o efeito não é maior que a precisão usual dos dados de campo, podendo ser desprezado para os casos práticos.

5.5 Sugestões para Melhorias.

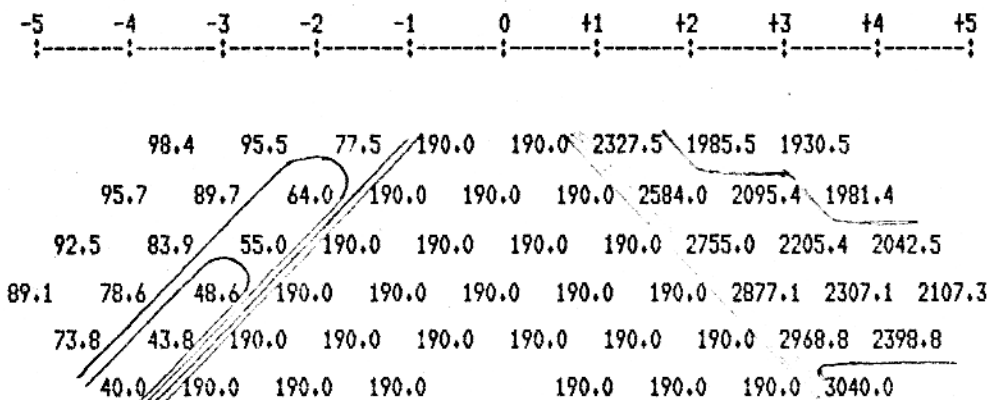
Não foi intenção desta tese otimizar os algoritmos. Como foi mencionado no final do Capítulo 3, a própria formulação empregada dos elementos finitos pode ser aprimorada. Tanto os tipos de elementos e funções interpoladoras quanto a montagem e a redução da matriz global podem ser redefinidos, com mais flexibilidade e eficiência.

Na parte da integração, devem ser tentados processos de extrapolação para acelerar a convergência. Isto pode acontecer na obtenção e soma dos coeficientes, e também, como sugerem Ting e Luke (1981), no refinamento dos resultados da quadratura.

Cabe também lembrar que o esquema de integração é geral, podendo ser usado para outros tipos de oscilação e descontinuidade do integrando. Por exemplo, são comuns em modelamento geofísicos as transformadas de Hankel. Elas podem ser eficientemente resolvidas caso sejam encontradas fórmulas de recorrência para os coeficientes oscilantes.

Fica também em aberto um estudo mais sistemático dos efeitos do ângulo nas pseudo-seções, e um meio de corrigi-lo dos dados de campo.

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

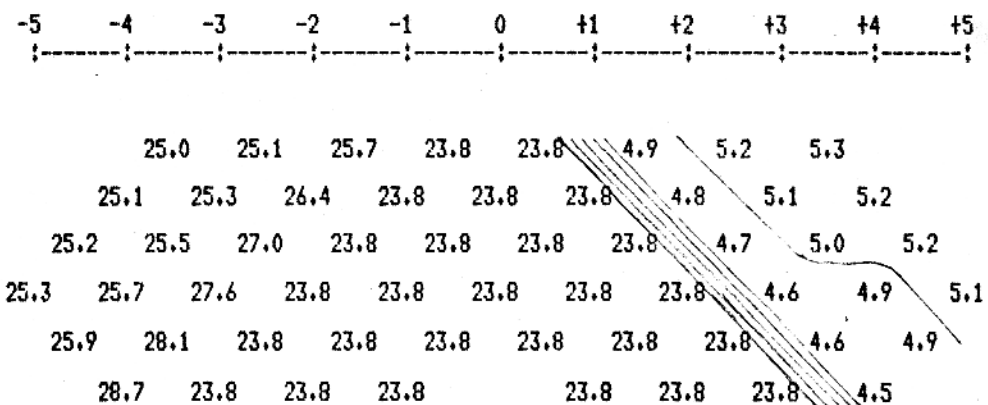
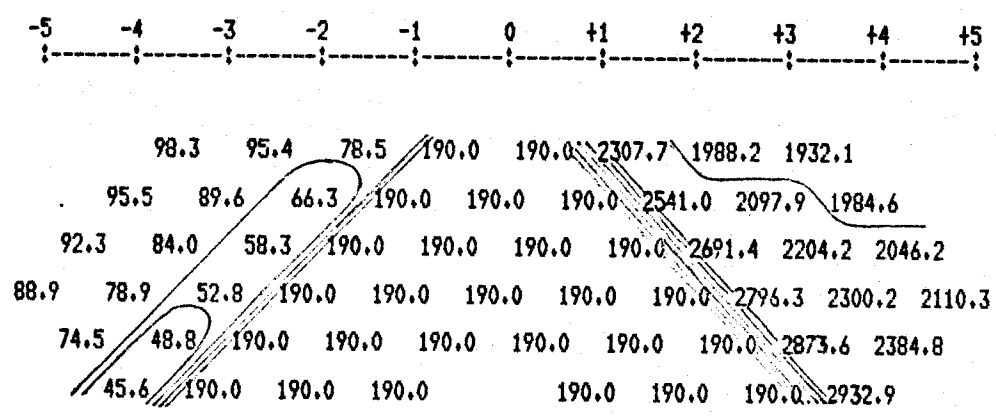


Fig.20 Pseudo-seções analíticas

Modelo: falha vertical	Resistividade	PFE
Ângulo(graus) : 90.00	1 100.00 ohm-m	25.00 %
Índice de borda: 0.00	2 1900.00 ohm-m	5.30 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

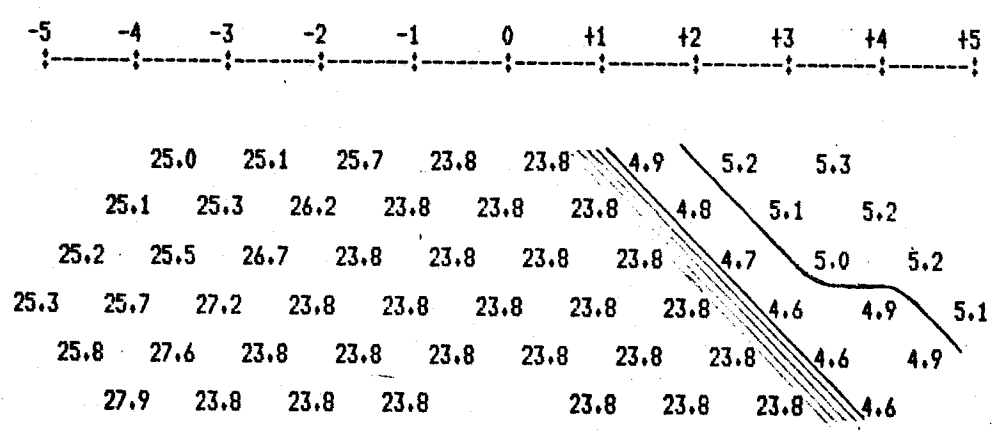
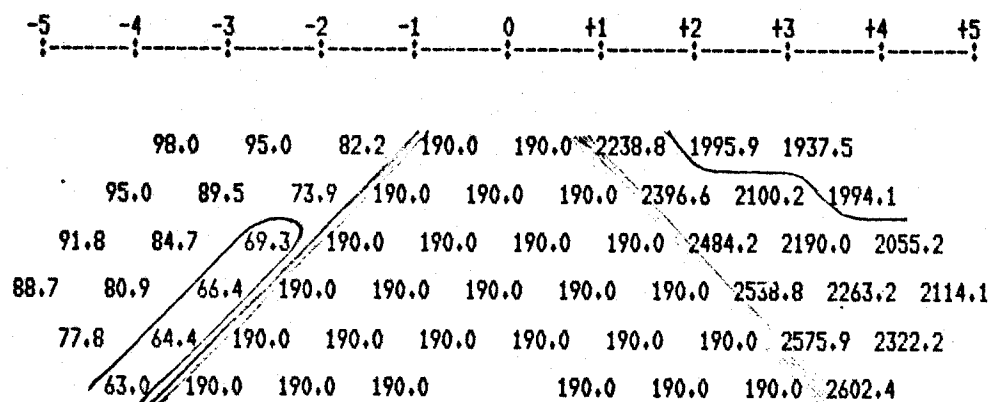


Fig. 2 | Pseudo-seções analíticas

Modelo: falha vertical	Resistividade	PFE
Ângulo(graus) : 75.00	1 100.00 ohm-m	25.00 %
Índice de borda: 0.00	2 1900.00 ohm-m	5.30 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

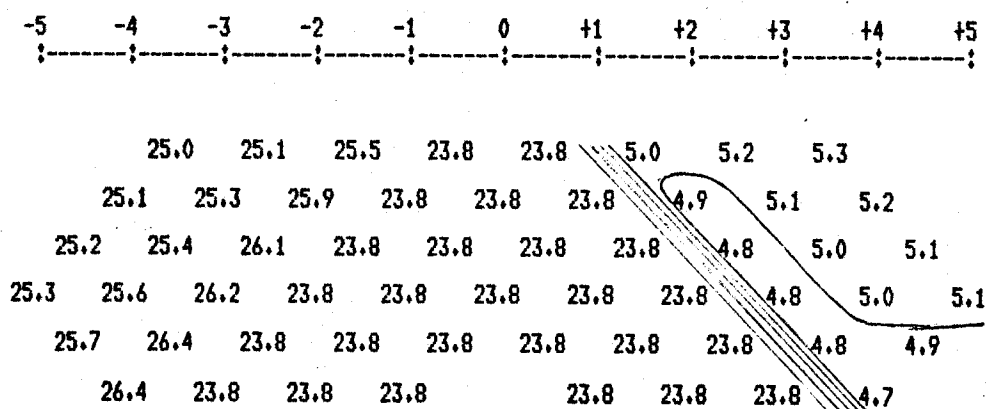
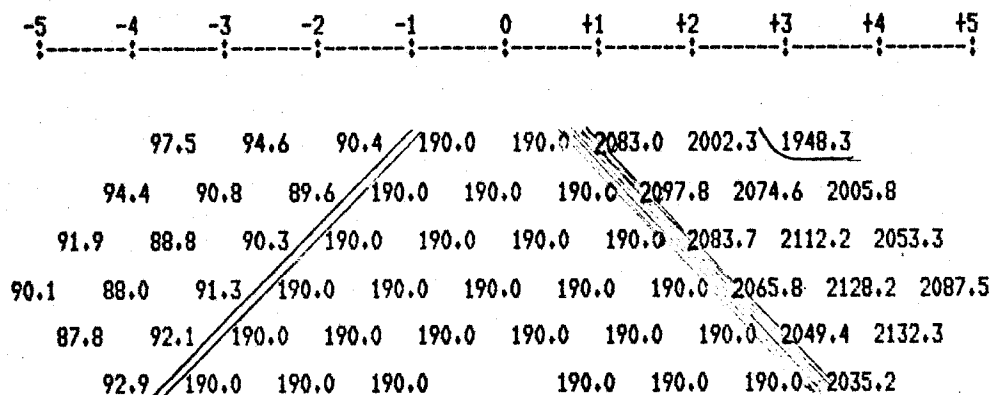


Fig.22 Pseudo-seções analíticas

Modelo:	Resistividade	PFE
falha vertical		
Angulo(graus) : 60.00	1 100.00 ohm-m	25.00 %
Indice de borda: 0.00	2 1900.00 ohm-m	5.30 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

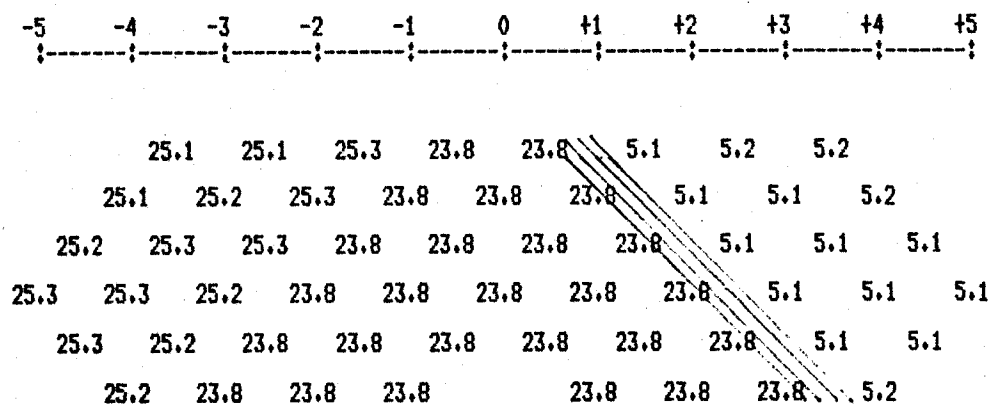
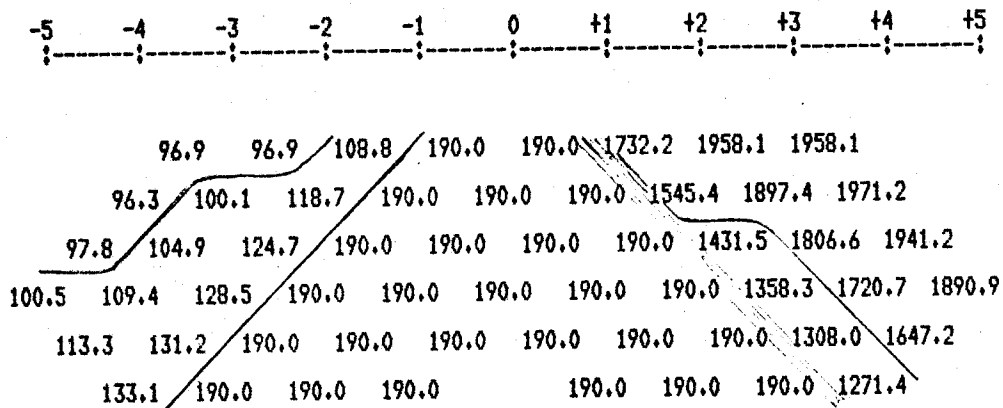


Fig.23 Pseudo-seções analíticas

Modelo: falha vertical		Resistividade	PFE
Ângulo(graus) : 45.00	1	100.00 ohm-m	25.00 %
Índice de borda: 0.00	2	1900.00 ohm-m	5.30 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

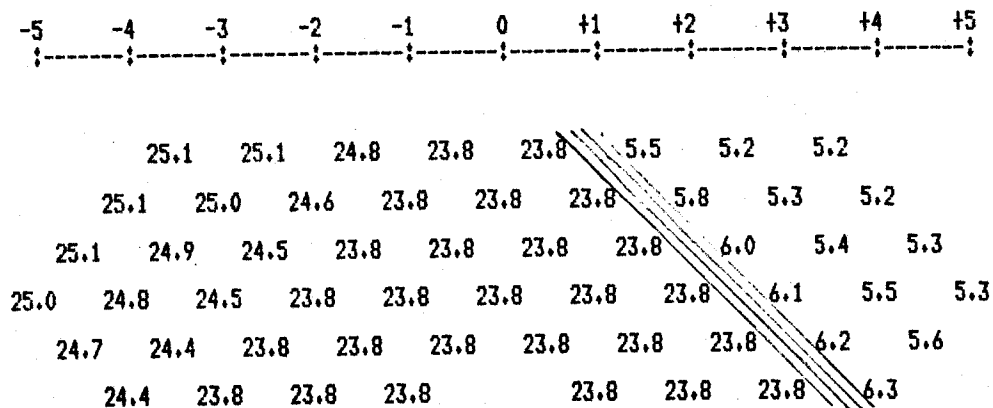
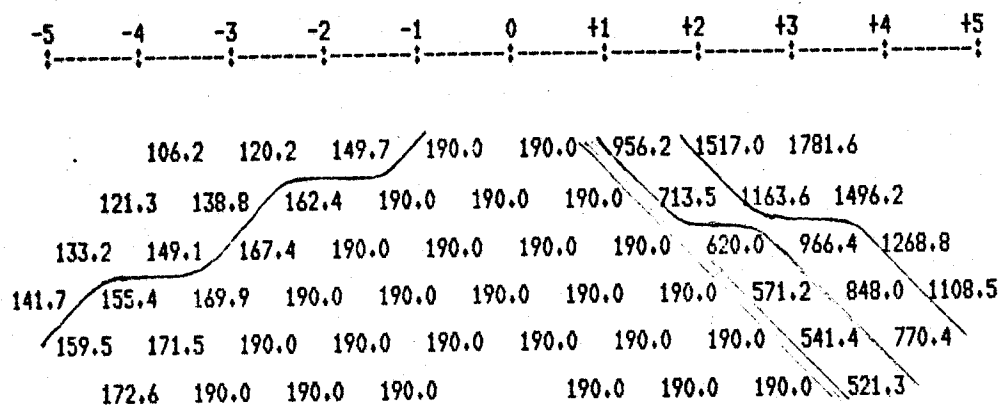


Fig.24 Pseudo-seções analíticas

Modelo: falha vertical	Resistividade	PFE
Angulo(graus) : 30.00	1 100.00 ohm-m	25.00 %
Indice de borda: 0.00	2 1900.00 ohm-m	5.30 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

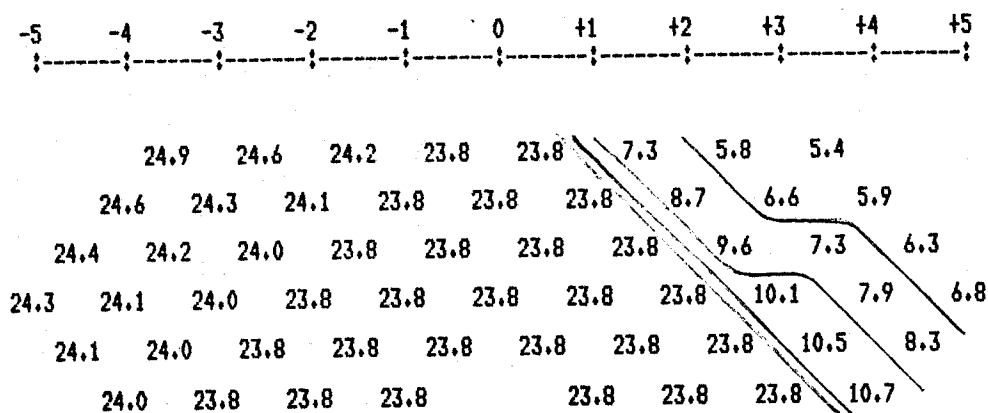
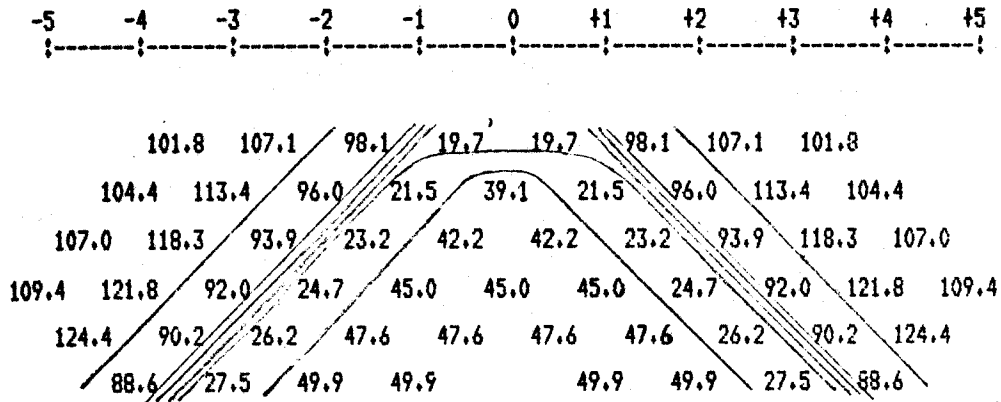


Fig.25 Pseudo-seções analíticas

Modelo:	Resistividade	PFE
falha vertical	1 100.00 ohm-m	25.00 %
Ângulo(graus) : 15.00	2 1900.00 ohm-m	5.30 %
Índice de borda: 0.00		

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

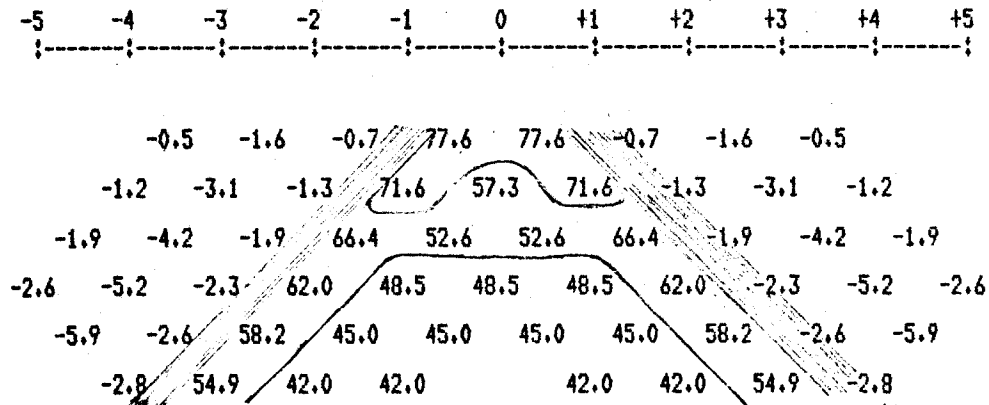
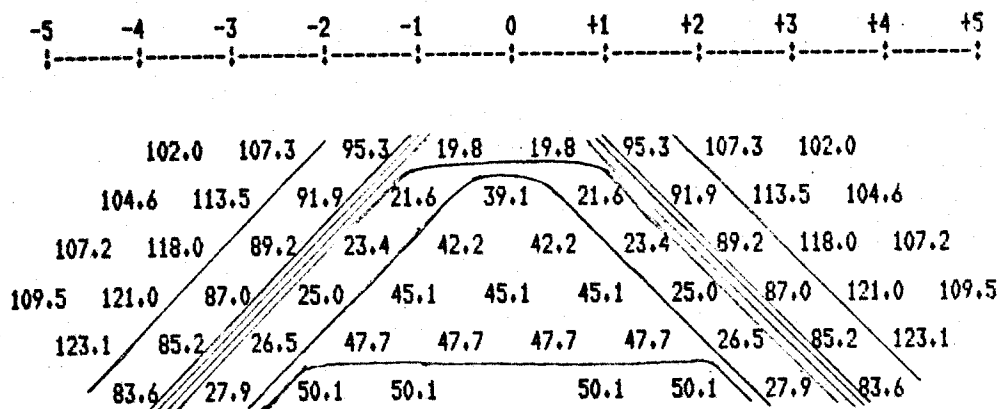


Fig. 26 Pseudo-seções analíticas

Modelo: dique infinito	Resistividade	PFE
Ângulo(graus) : 90.00	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Índice de borda: -0.50	2 10.00 ohm-m	100.00 %
Espessura : 1.00	3 100.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

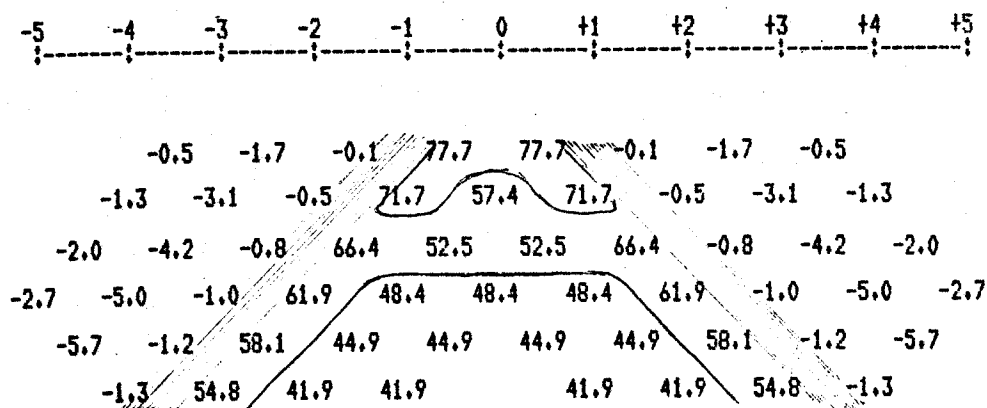
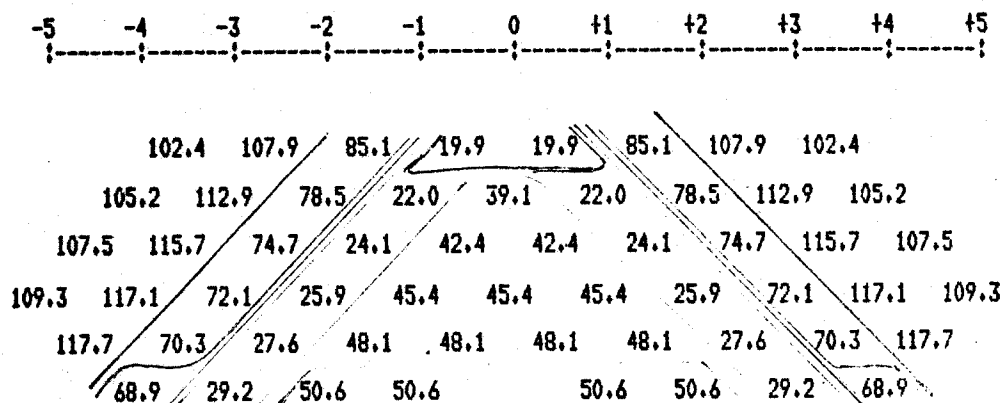


Fig.27 Pseudo-seções analíticas

Modelo:	Resistividade	PFE
Modelo: diaque infinito		
Angulo(graus) : 75.00	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Indice de borda: -0.50	2 10.00 ohm-m	100.00 %
Espessura : 1.00	3 100.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

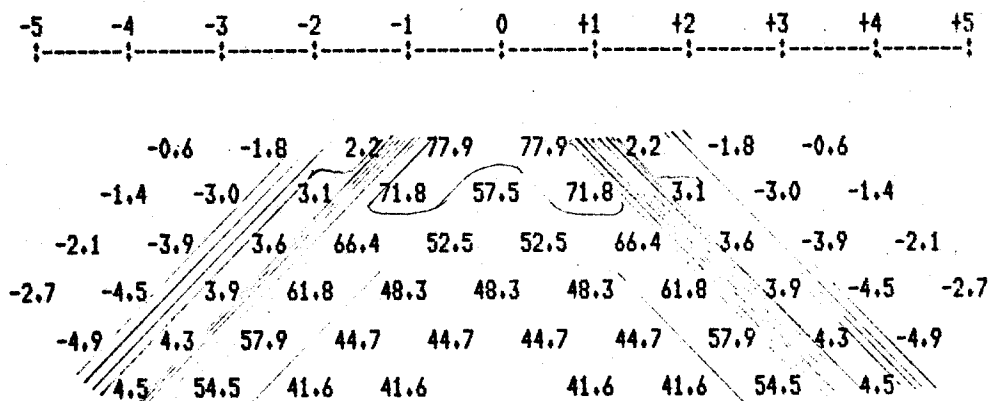
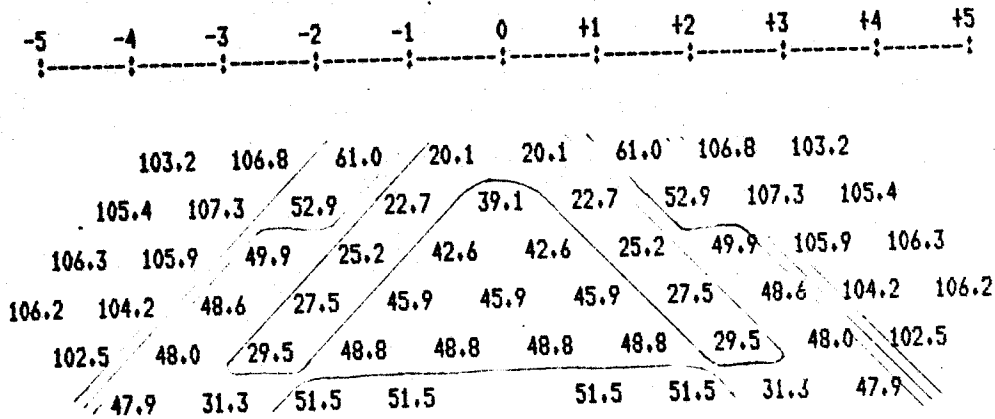


Fig.28 Pseudo-seções analíticas

Modelo: dique infinito	Resistividade	PFE
Ângulo(graus) : 60.00	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Índice de borda: -0.50	2 10.00 ohm-m	100.00 %
Espessura : 1.00	3 100.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

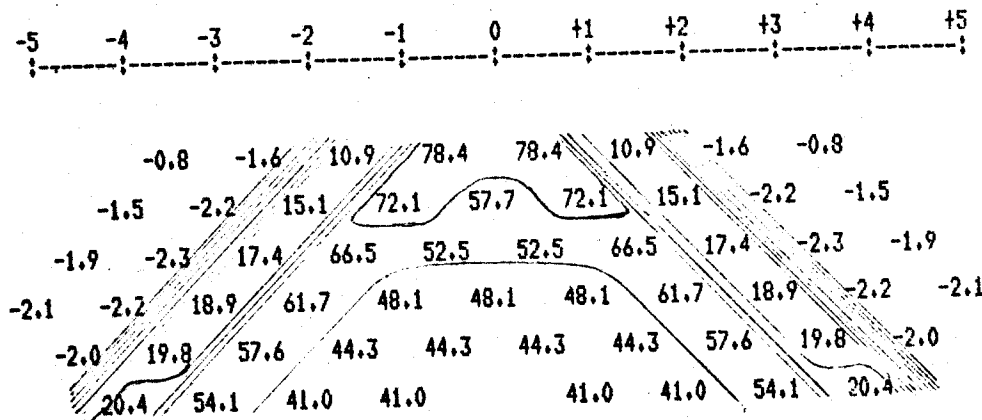
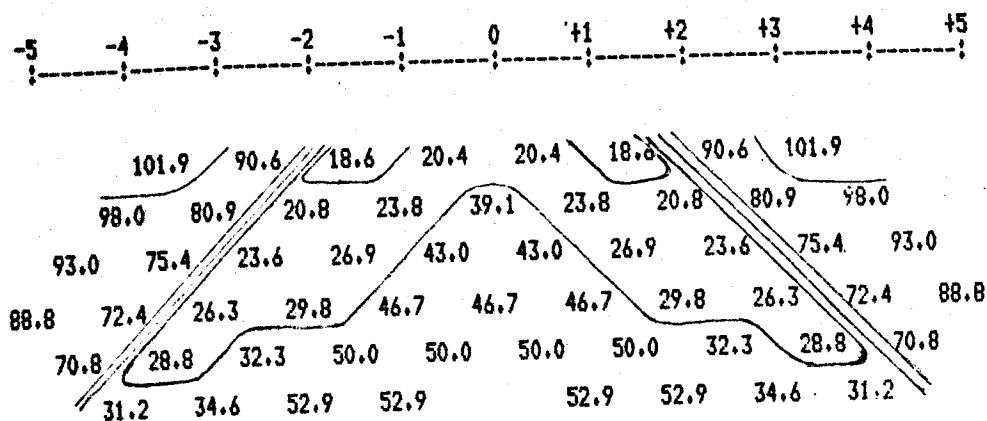


Fig.29 Pseudo-seções analíticas

Modelo:	Resistividade	PFE
diaque infinito	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Angulo(graus) : 45.00	2 10.00 ohm-m	100.00 %
Indice de borda: -0.50	3 100.00 ohm-m	0.00 %
Espessura : 1.00		

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

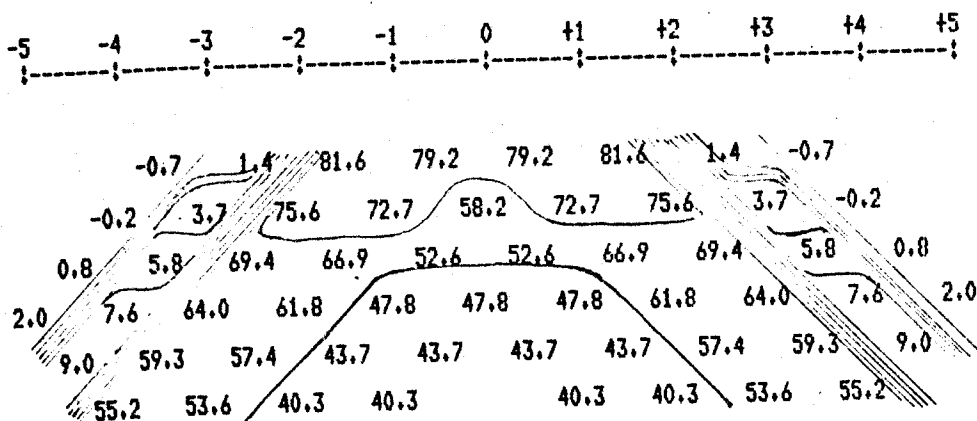
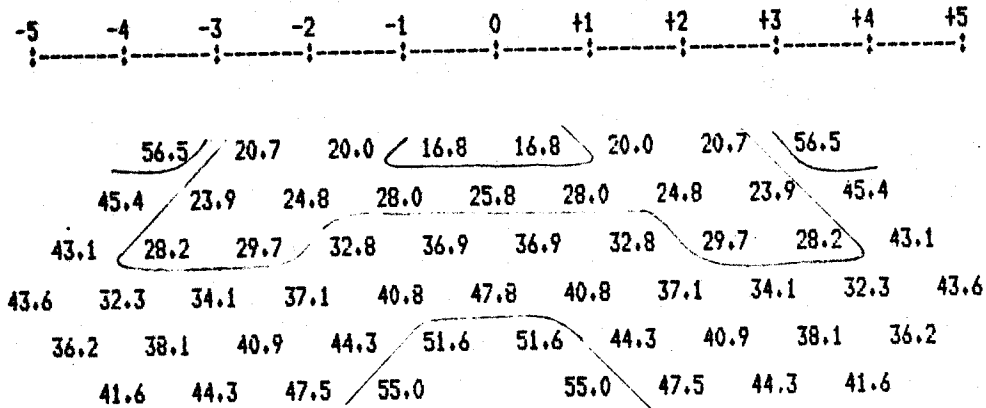


Fig.30 Pseudo-seções analíticas

Modelo:	Resistividade	PFE
diáque infinito	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Angulo(graus) : 30.00	2 10.00 ohm-m	100.00 %
Indice de borda: -0.50	3 100.00 ohm-m	0.00 %
Espessura : 1.00		

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

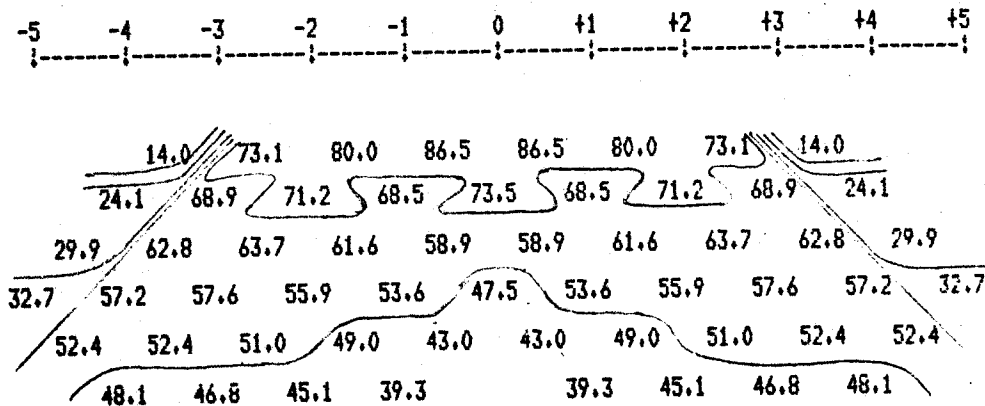
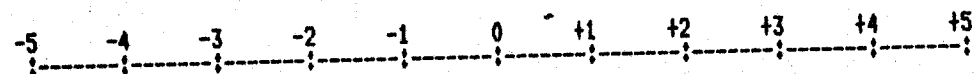


Fig.31 Pseudo-seções analíticas

Modelo:	Resistividade	PFE
diague infinito		
Ângulo(sraus) : 15.00	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Índice de borda: -0.50	2 10.00 ohm-m	100.00 %
Espessura : 1.00	3 100.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



973 976 980 1001 1001 980 976 973
 987 991 994 998 1000 998 994 991 987
 996 996 998 1000 1001 1001 1000 998 996 996
 1004 1002 1002 1003 1004 1003 1004 1003 1002 1002 1004
 1010 1008 1008 1007 1007 1007 1007 1008 1008 1010
 1017 1014 1013 1012 1012 1013 1014 1017

90 graus

995 999 1002 1006 1006 1002 999 995
 999 1000 1002 1002 1002 1002 1002 1000 999
 1003 1003 1003 1003 1003 1003 1003 1003 1003 1003
 1009 1007 1007 1006 1006 1006 1006 1006 1007 1007 1009
 1014 1013 1011 1011 1010 1010 1011 1011 1013 1014
 1021 1019 1017 1016 1016 1017 1019 1021

60 graus

1005 1007 1006 1006 1006 1006 1007 1005
 1005 1004 1004 1004 1004 1004 1004 1004 1005
 1007 1007 1006 1006 1005 1005 1006 1006 1007 1007
 1012 1011 1010 1009 1009 1009 1009 1009 1010 1011 1012
 1019 1017 1016 1015 1015 1015 1015 1016 1017 1019
 1027 1025 1024 1023 1023 1024 1025 1027

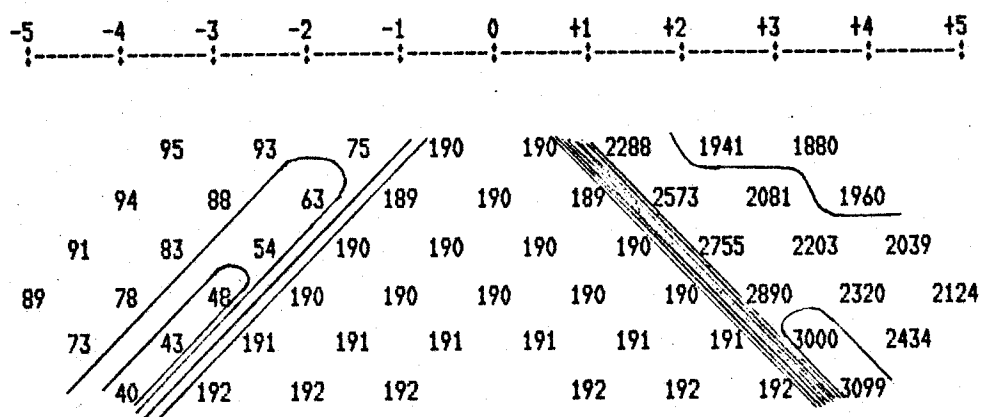
45 graus

1006 1007 1007 1007 1007 1007 1007 1006
 1006 1006 1005 1005 1005 1005 1005 1006 1006
 1011 1010 1010 1009 1009 1009 1009 1010 1010 1011
 1019 1018 1018 1017 1016 1016 1016 1017 1018 1018 1019
 1029 1028 1027 1026 1026 1026 1026 1027 1028 1029
 1040 1038 1037 1037 1037 1037 1038 1040

30 graus

Fig. 32 Testes de malha de elementos finitos
 meio homogêneo resistividade 1000 ohm-m

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

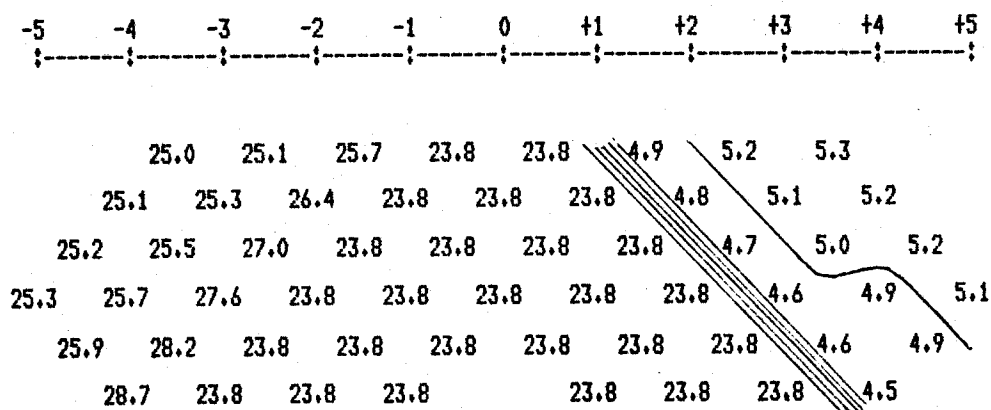
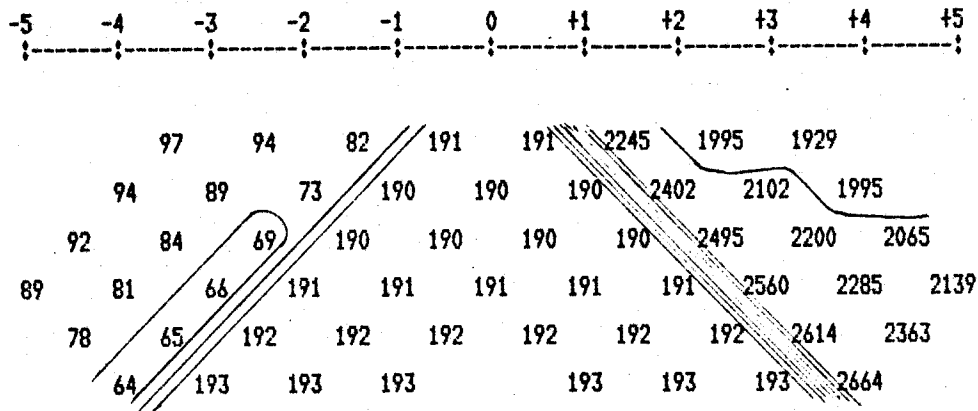


Fig.33 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo: falha vertical	Resistividade	PFE
Angulo(graus) : 90.00	1 100.00 ohm-m	25.00 %
Indice de borda: 0.00	2 1900.00 ohm-m	5.30 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

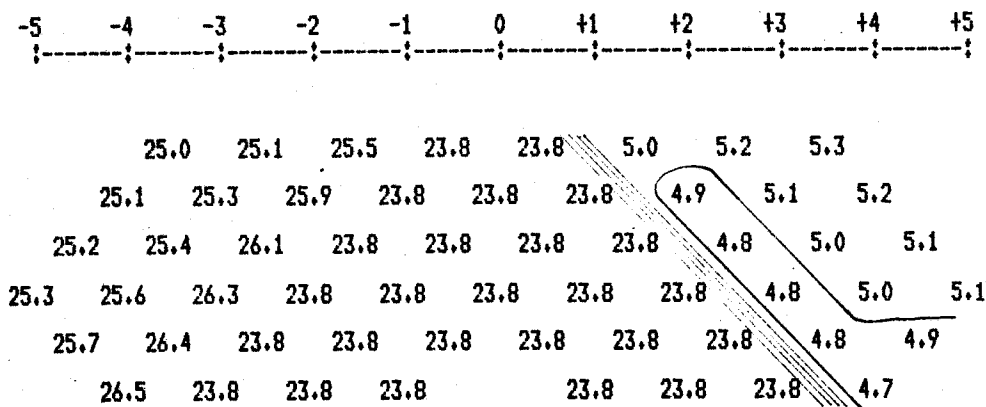
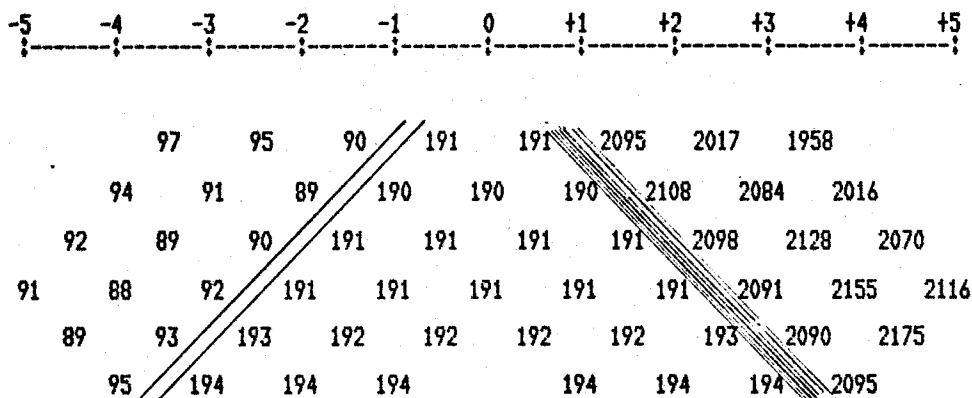


Fig.34 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo: falha vertical	Resistividade	PFE
Angulo(graus) : 60.00	1 100.00 ohm-m	25.00 %
Indice de borda: 0.00	2 1900.00 ohm-m	5.30 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

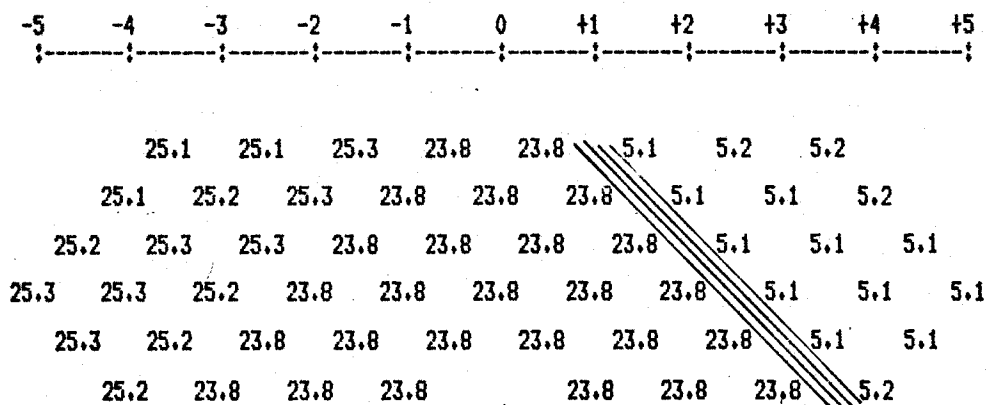
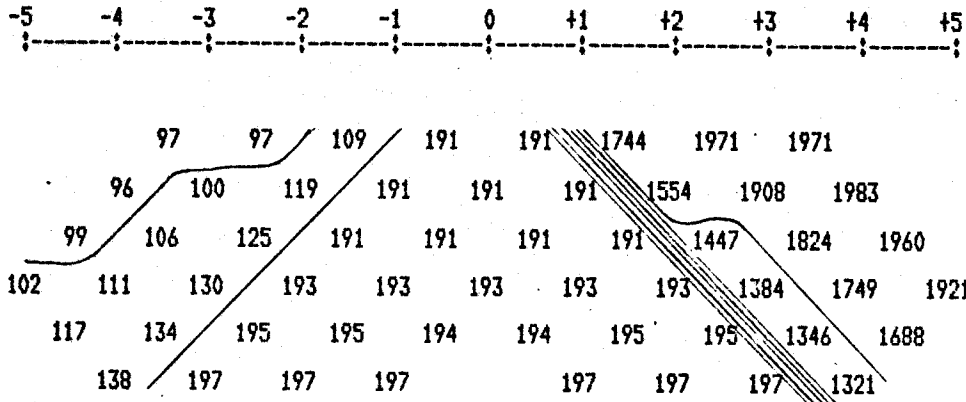


Fig. 35 Pseudo-seedex (E. F.)

Modelo: falha vertical	Resistividade	PFE
Angulo(graus) : 45.00	1 100.00 ohm-m	25.00 %
Indice de borda: 0.00	2 1900.00 ohm-m	5.30 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

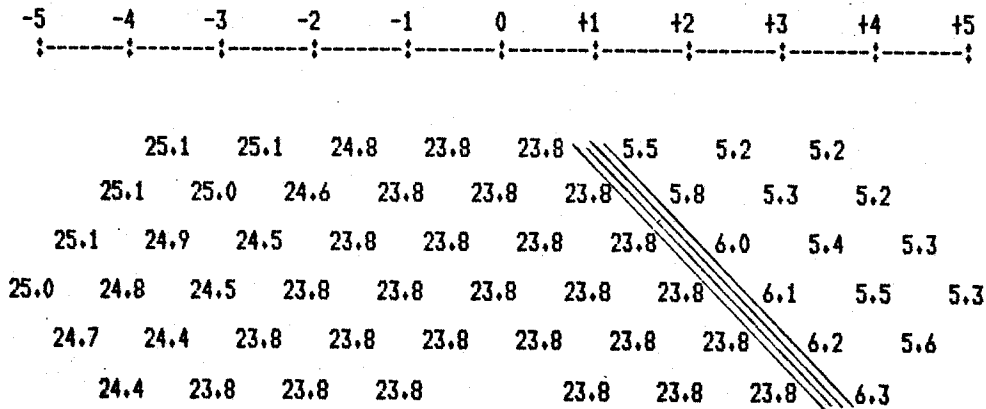
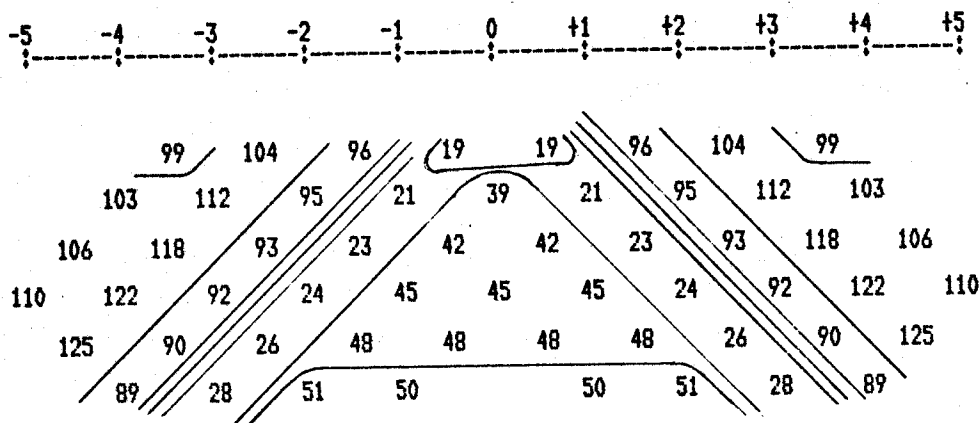


Fig.36 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo: falha vertical	Resistividade	PFE
Angulo(graus) : 30.00	1 100.00 ohm-m	25.00 %
Indice de borda: 0.00	2 1900.00 ohm-m	5.30 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

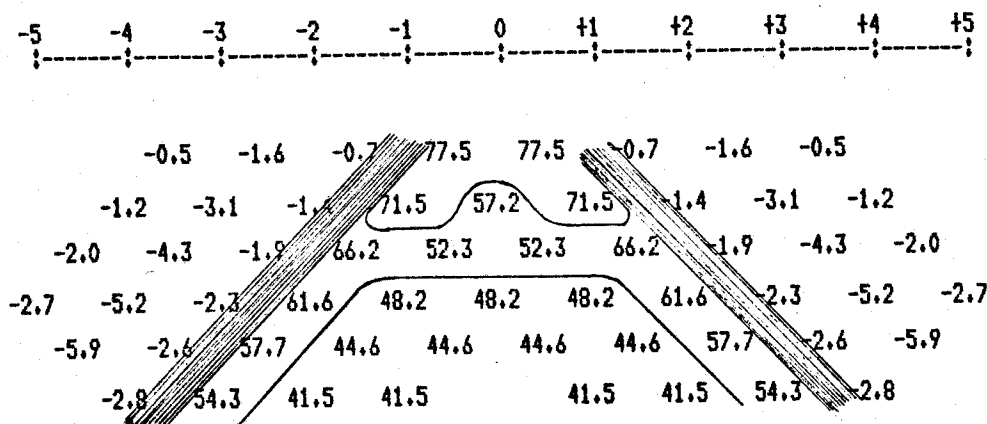
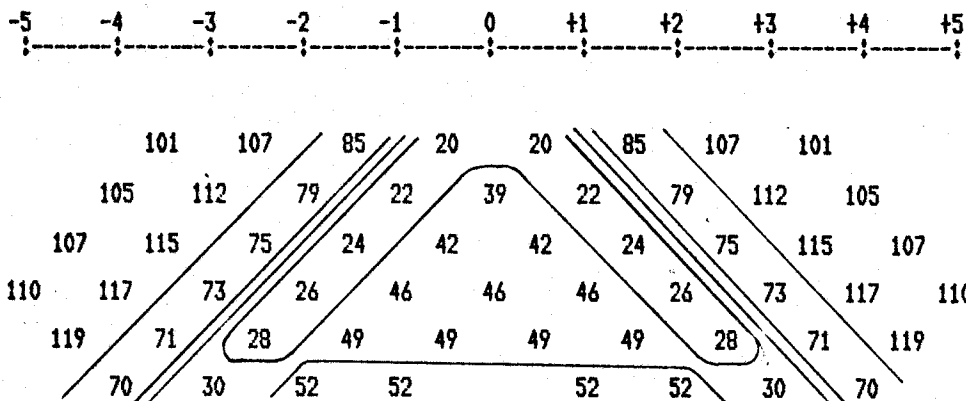


Fig.37 Pseudo-serões (E. F.)

Modelo:	Resistividade	PFE
diqoe infinito	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Angulo(graus) : 90.00	2 10.00 ohm-m	100.00 %
Indice de borda: -0.50	3 100.00 ohm-m	0.00 %
Espessura : 1.00		

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

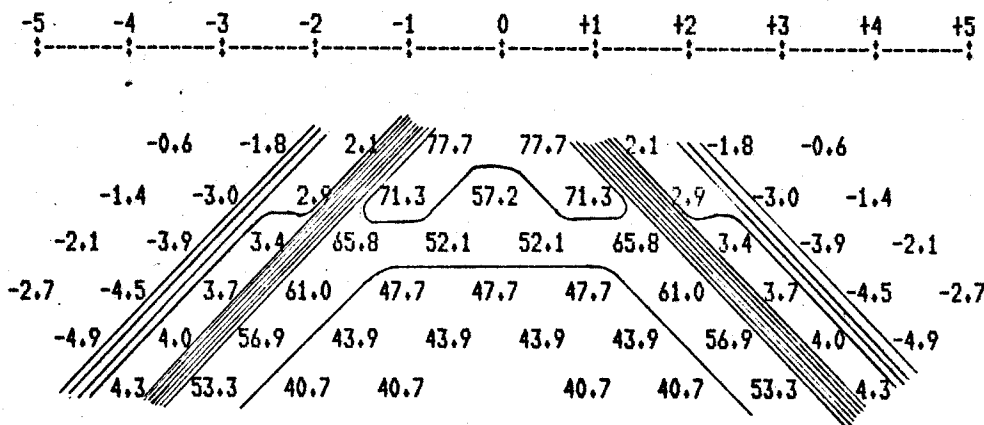
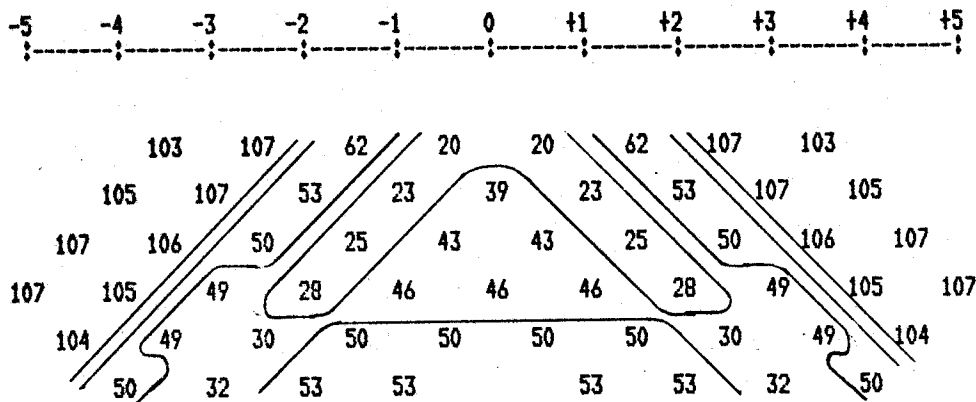


Fig.38 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo:	Resistividade	PFE
diaque infinito	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Angulo(graus) : 60.00	2 10.00 ohm-m	100.00 %
Indice de borda: -0.50	3 100.00 ohm-m	0.00 %
Espessura : 1.00		

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

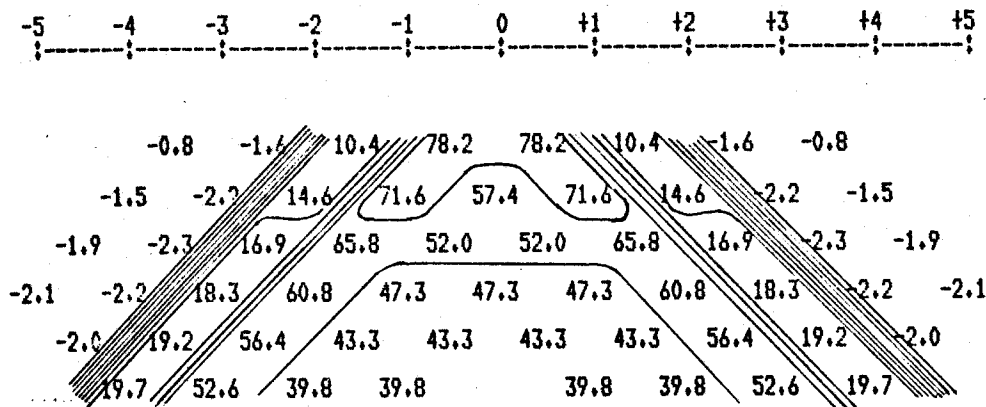
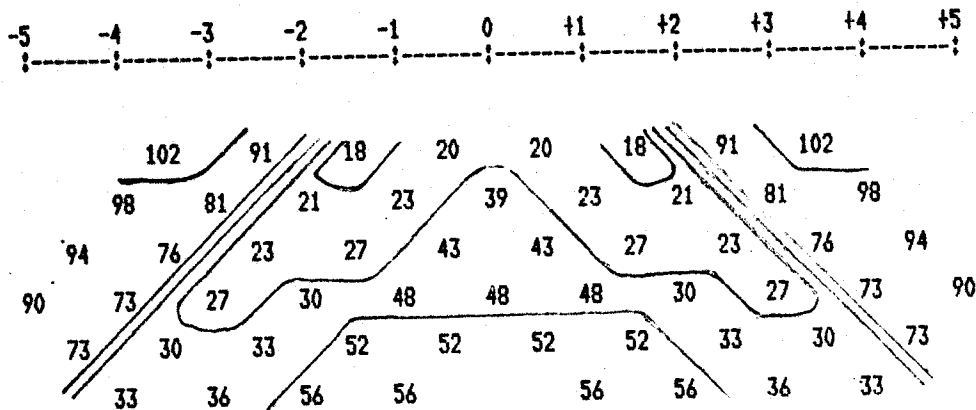


Fig.39 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo: dique infinito	Resistividade	PFE
Angulo(graus) : 45.00	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Indice de borda: -0.50	2 10.00 ohm-m	100.00 %
Espessura : 1.00	3 100.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

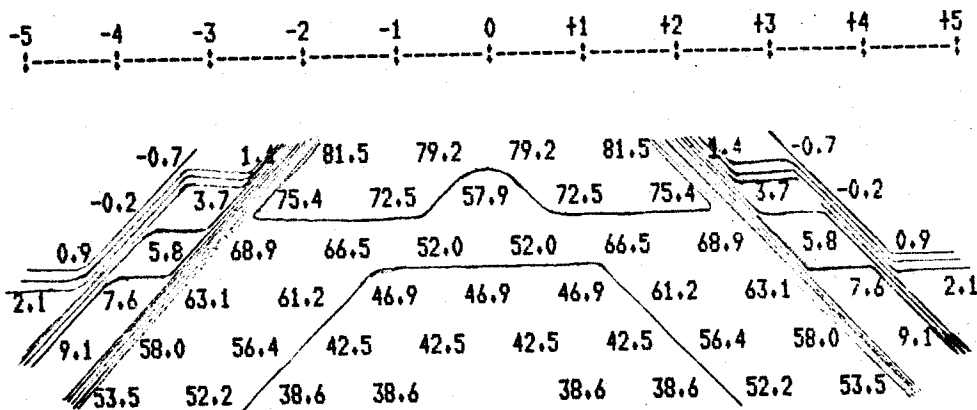
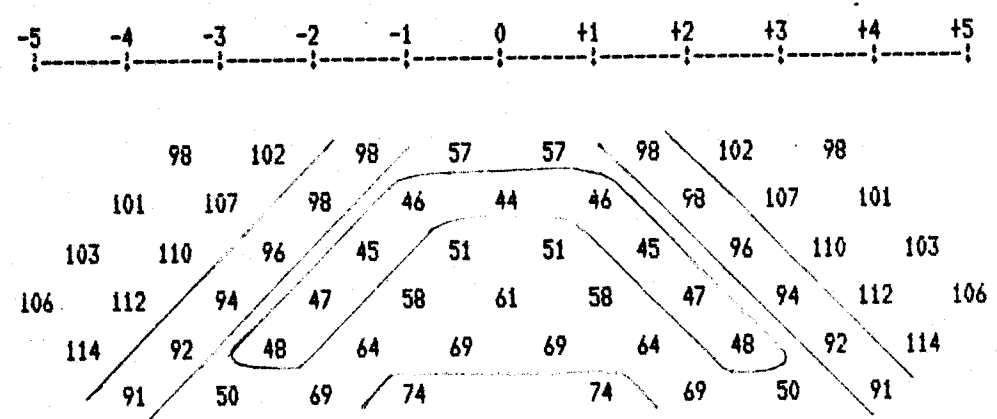


Fig. 40 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo: dique infinito	Resistividade	PFE
Angulo(graus) : 30.00	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Indice de borda: -0.50	2 10.00 ohm-m	100.00 %
Espessura : 1.00	3 100.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

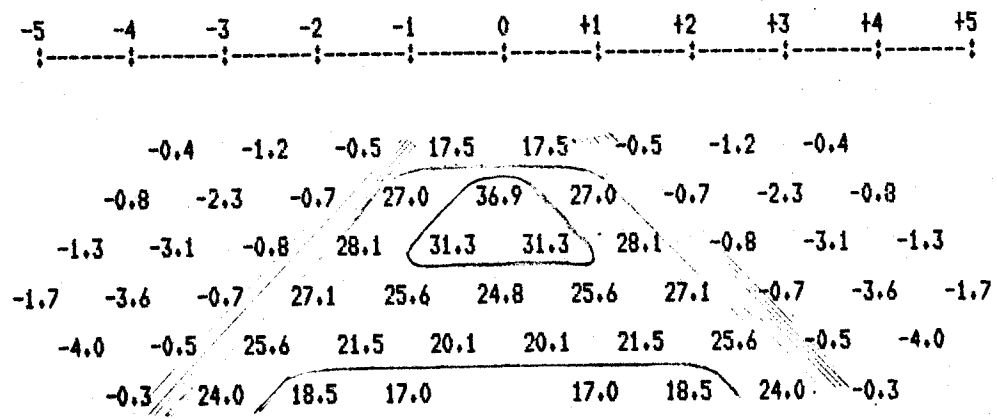
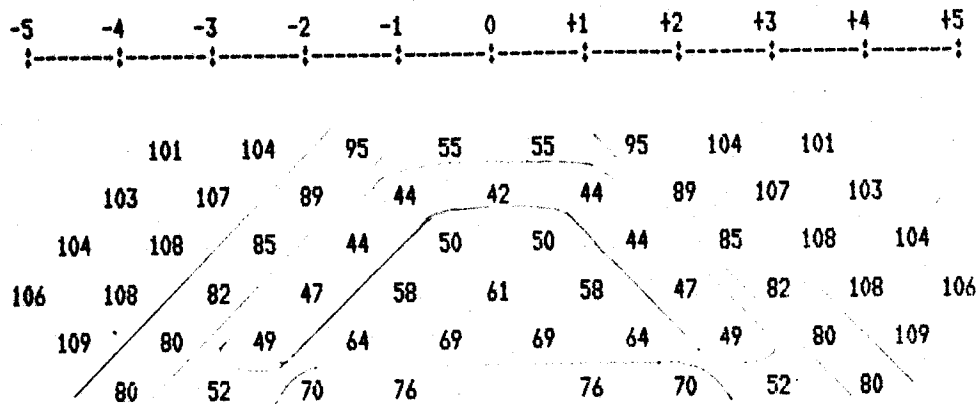


Fig.41 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo:	Resistividade	PFE
diqúe vertical		
Ângulo(graus) : 90.00	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Índice de borda: -0.50	2 10.00 ohm-m	100.00 %
Espessura : 1.00	3 100.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

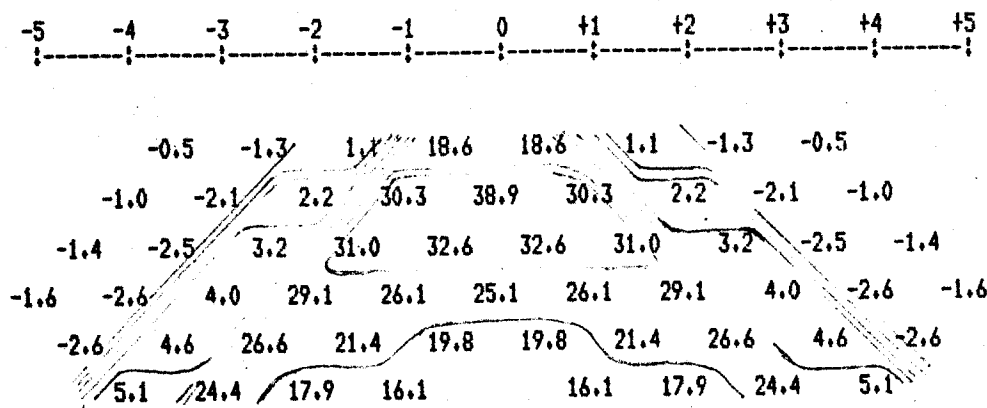
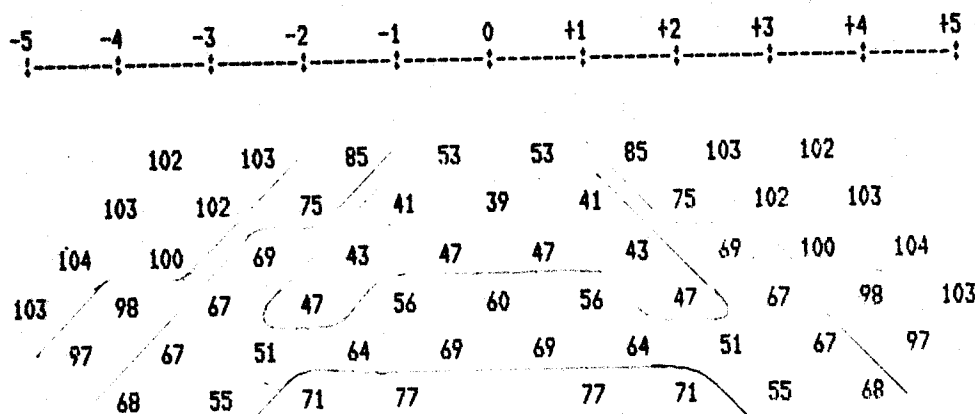


Fig. 42 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo:	Resistividade	PFE
Angulo(graus) : 60.00	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Indice de borda: -0.50	2 10.00 ohm-m	100.00 %
Espessura : 1.00	3 100.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

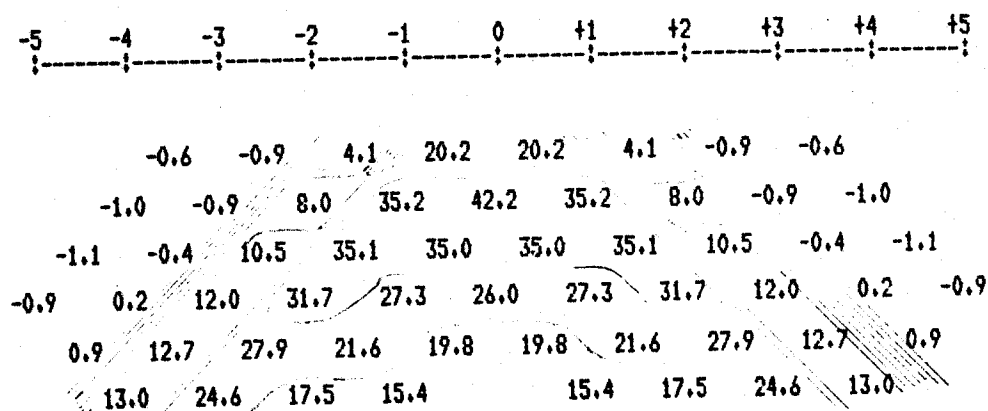
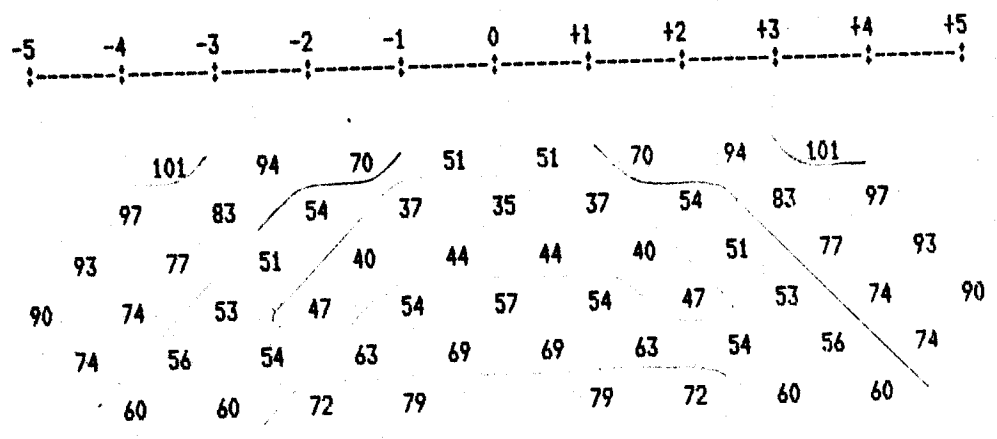


Fig. 43 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo:	Resistividade	PFE
dique vertical		
Ângulo(graus) : 45.00	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Índice de borda: -0.50	2 10.00 ohm-m	100.00 %
Espessura : 1.00	3 100.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

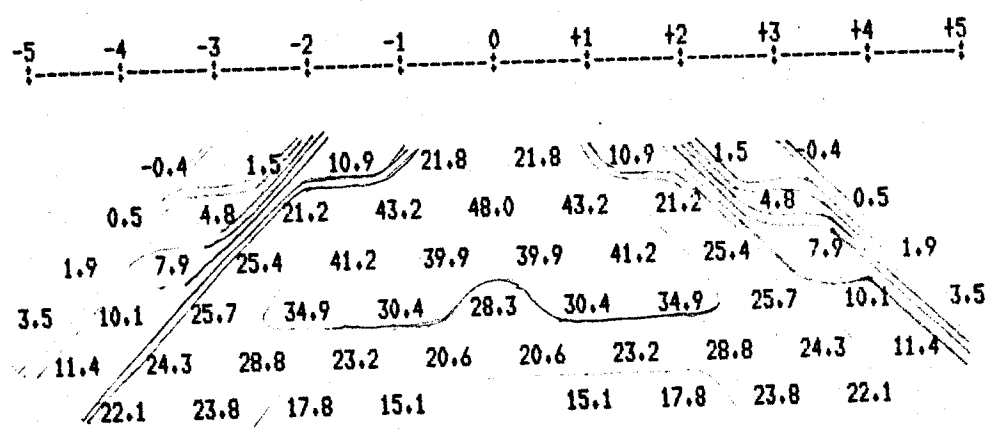
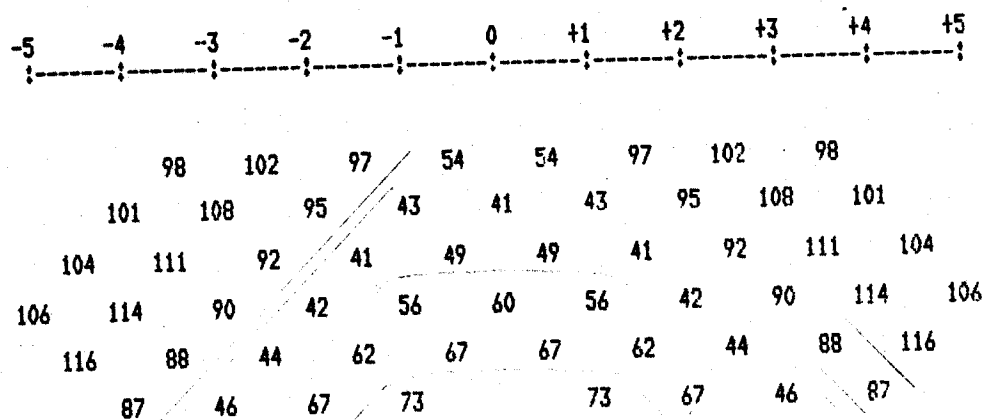


Fig.44 Pseudo-serões (E. F.)

Modelo: diaque vertical	Resistividade	PFE
Angulo(graus) : 30.00	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Indice de borda: -0.50	2 10.00 ohm-m	100.00 %
Espessura : 1.00	3 100.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

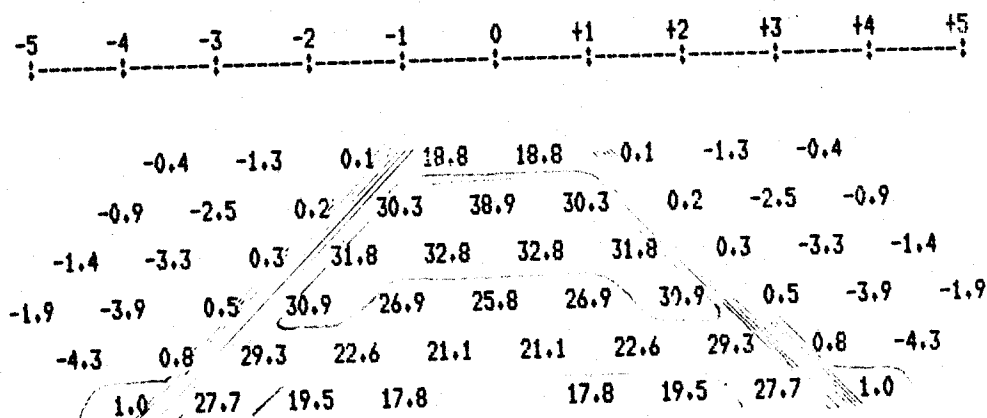
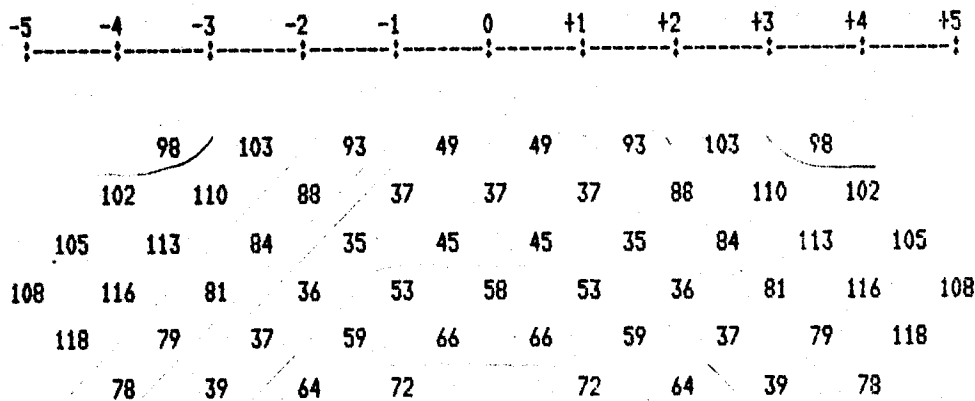


Fig.45 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo: dique vertical	Resistividade	PFE
Ângulo(graus) : 90.00	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Índice de borda: -0.58	2 10.00 ohm-m	100.00 %
Espessura : 1.15	3 100.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

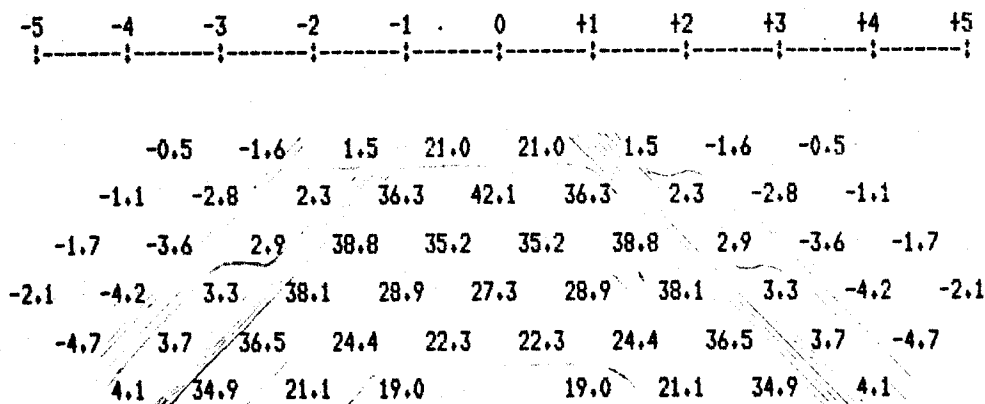
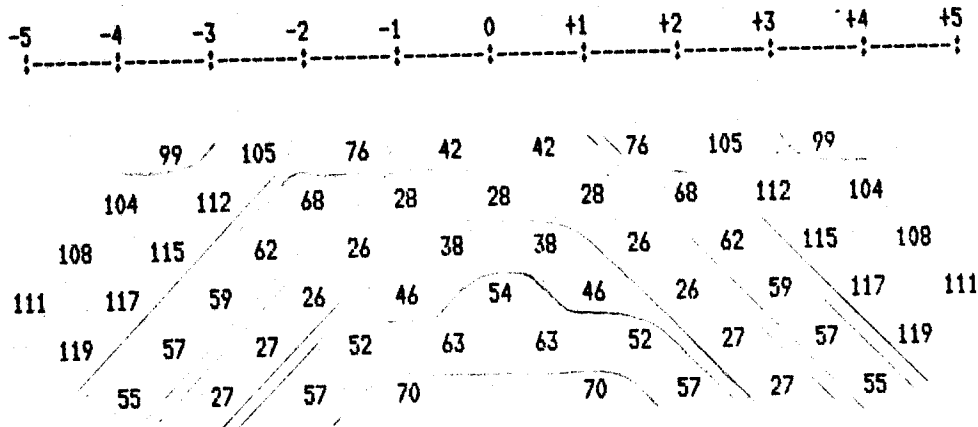


Fig.46 Pseudo-series (E. F.)

Modelo: dique vertical	Resistividade	PFE
Angulo(graus) : 90.00	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Indice de borda: -0.71	2 10.00 ohm-m	100.00 %
Espessura : 1.41	3 100.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

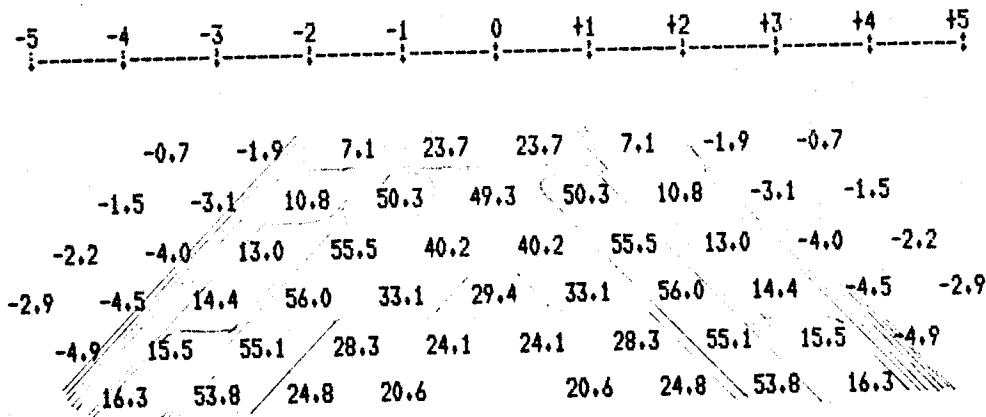
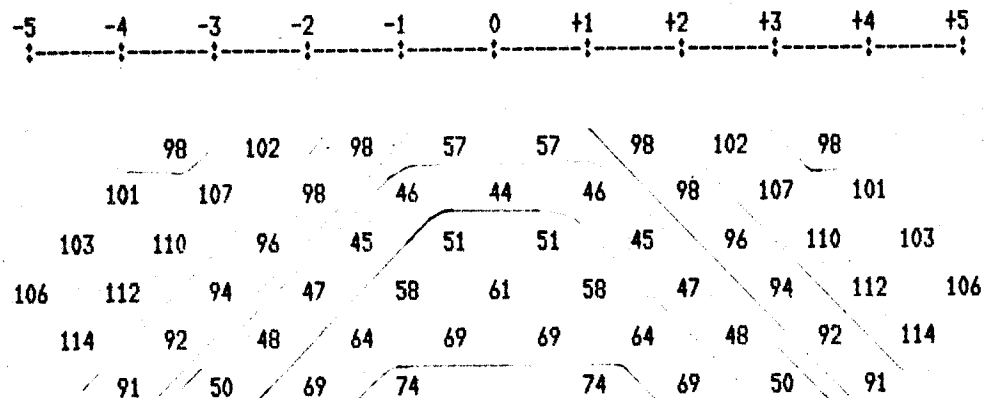


Fig. 47 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo: dique vertical	Resistividade	PFE
Ângulo(graus) : 90.00	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Índice de borda: -1.00	2 10.00 ohm-m	100.00 %
Espessura : 2.00	3 100.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

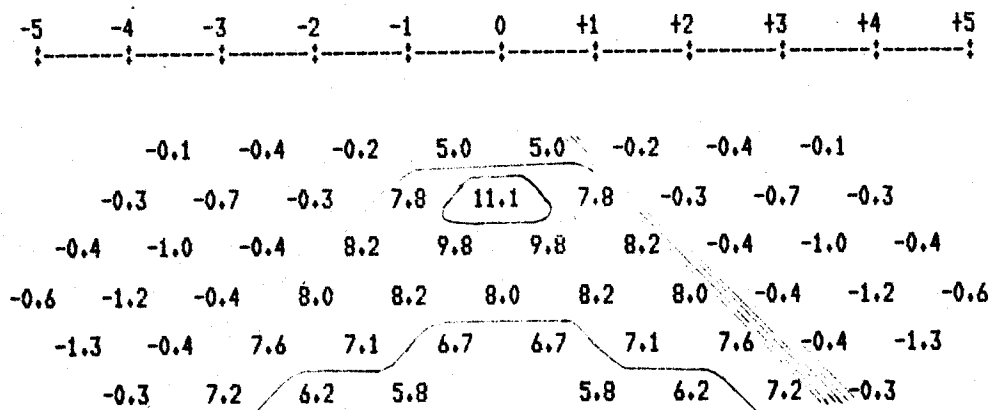
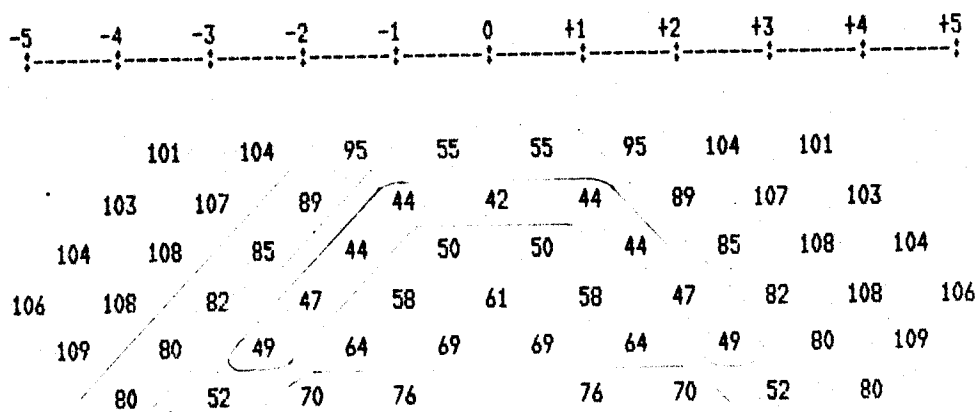


Fig.48 Pseudo-seed (E. F.)

Modelo:	diôco vertical	Resistividade	PFE
Angulo(graus)	: 90.00	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Indice de borda:	-0.50	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Espessura	: 1.00	3 100.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARFENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

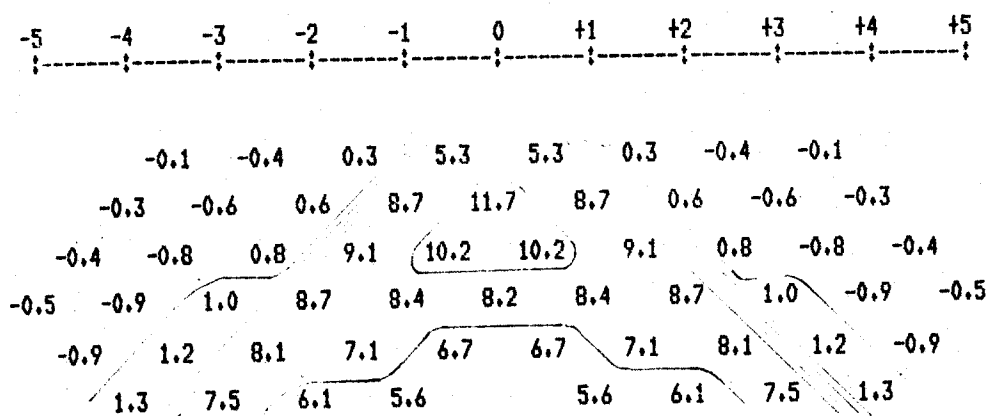
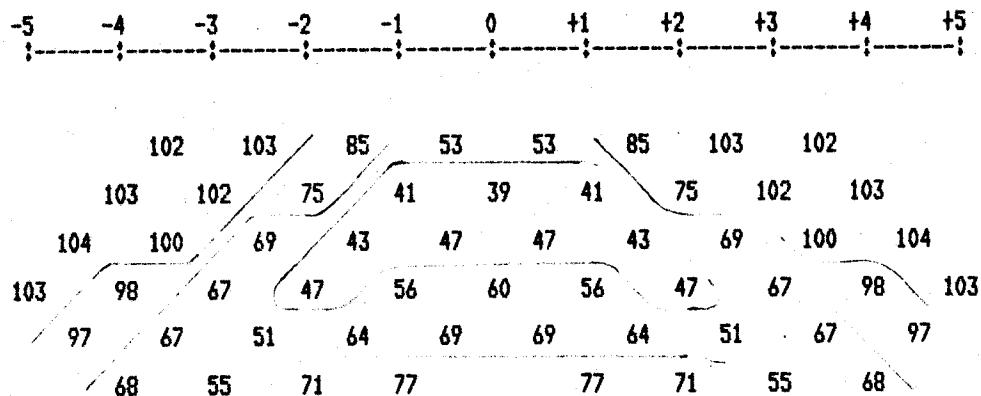


Fig. 49 Pseudo-series (E. F.)

Modelo: dique vertical	Resistividade	PFE
Angulo(graus) : 60.00	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Indice de borda: -0.50	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Espessura : 1.00	3 100.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

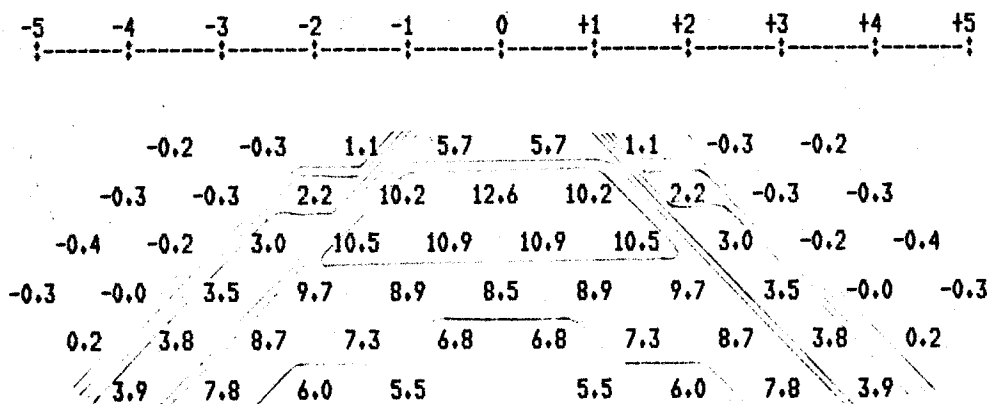
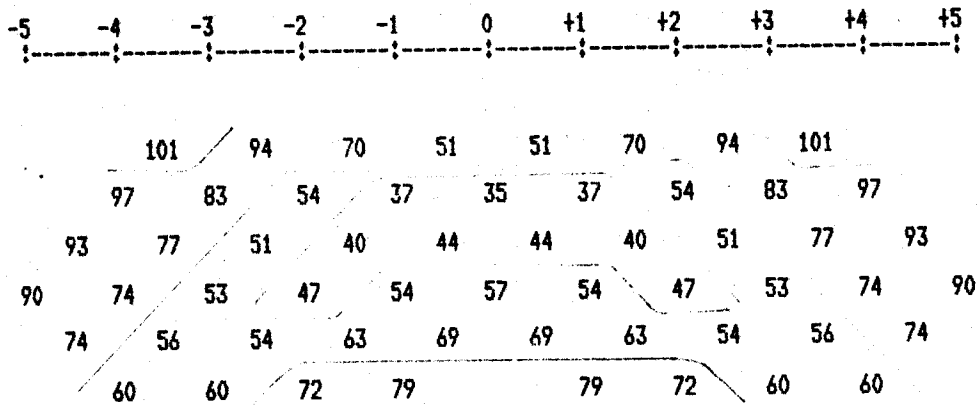


Fig.50 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo: dique vertical	Resistividade	PFE
Angulo(graus) : 45.00	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Indice de borda: -0.50	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Espessura : 1.00	3 100.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

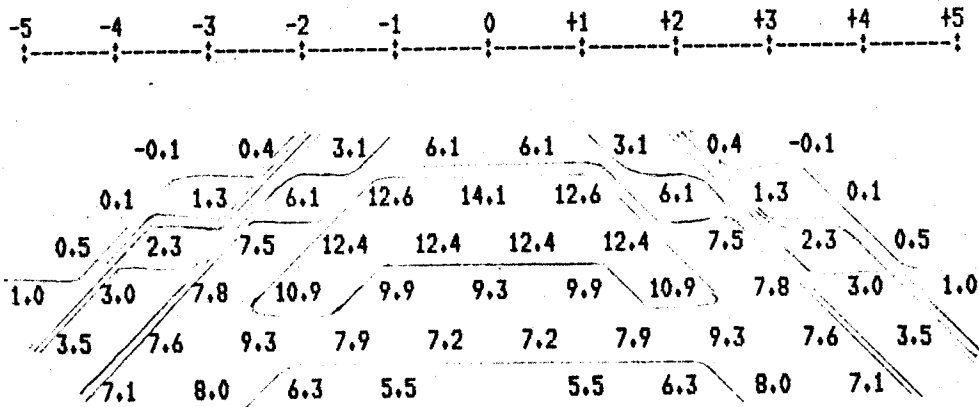
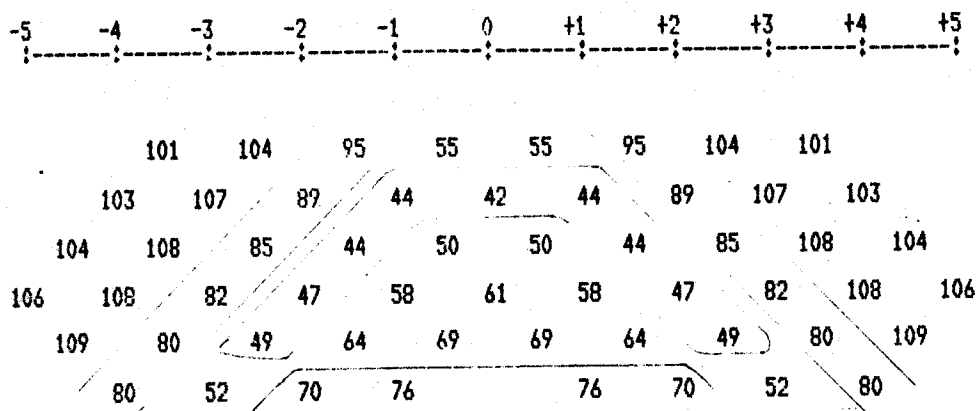


Fig.51 Pseudo-seedes (E. F.)

Modelo: diaque vertical	Resistividade	PFE
Angulo(sraus) : 30.00	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Indice de borda: -0.50	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Espessura : 1.00	3 100.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

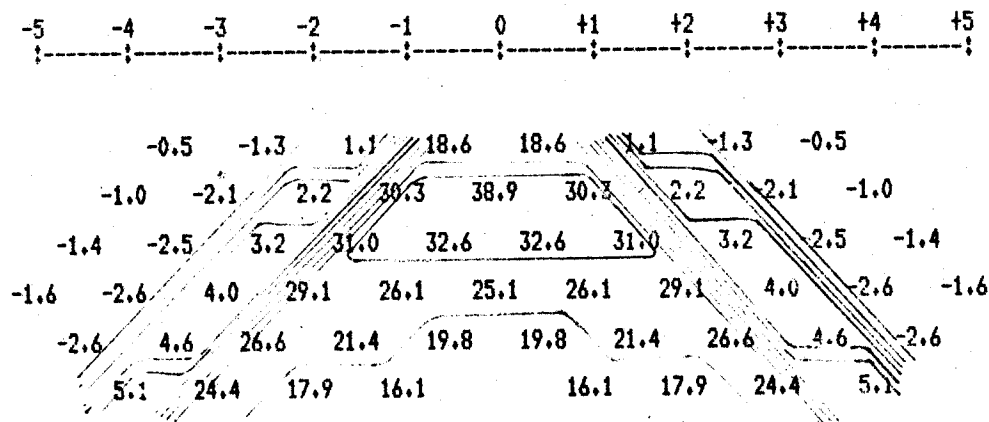
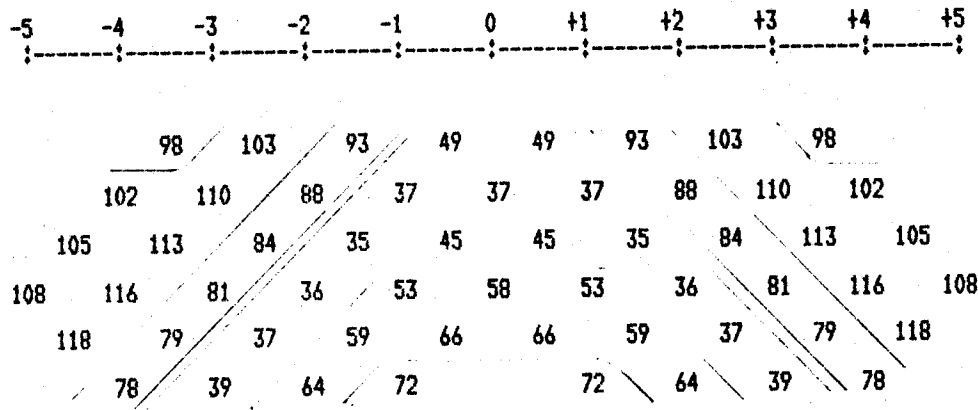


Fig. 52 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo:	Resistividade	PFE
diâmetro vertical		
Ângulo(graus) : 90.00	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Índice de borda: -0.58	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Espessura : 1.15	3 100.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

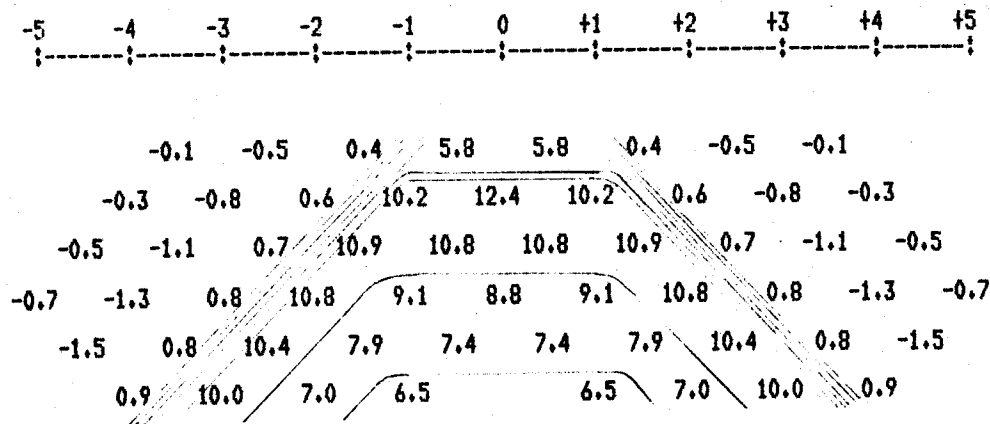
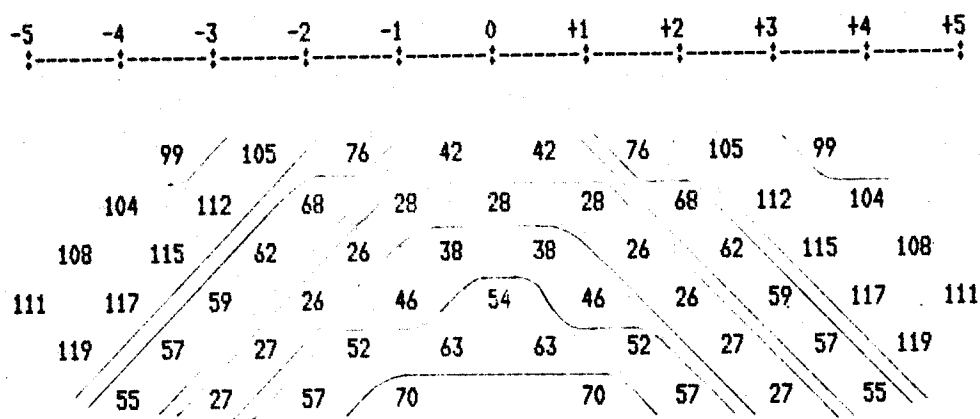


Fig. 53 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo: dique vertical	Resistividade	PFE
Ângulo(graus) : 90.00	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Índice de borda: -0.71	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Espessura : 1.41	3 100.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

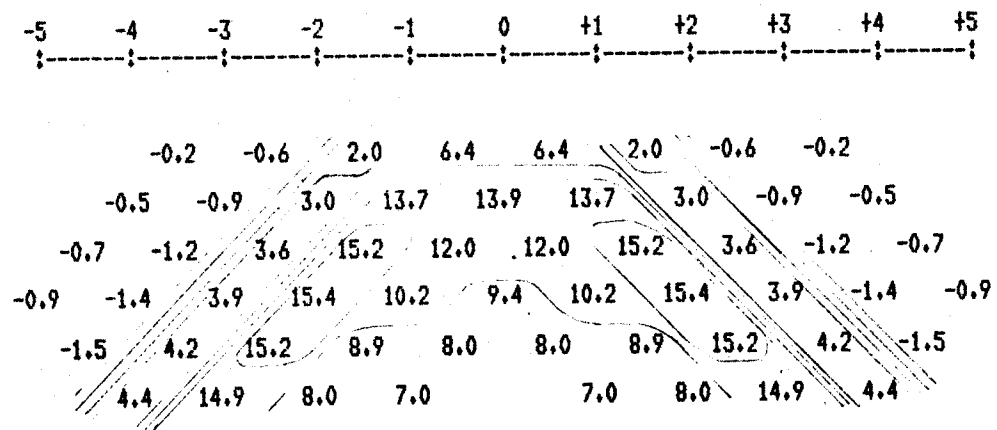
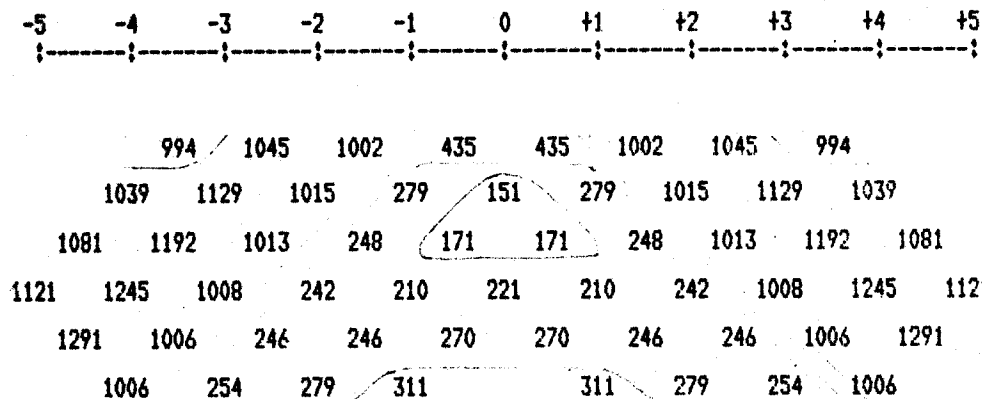


Fig.54 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo: diaque vertical	Resistividade	PFE
Ângulo(graus) : 90.00	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Índice de borda: -1.00	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Espessura : 2.00	3 100.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

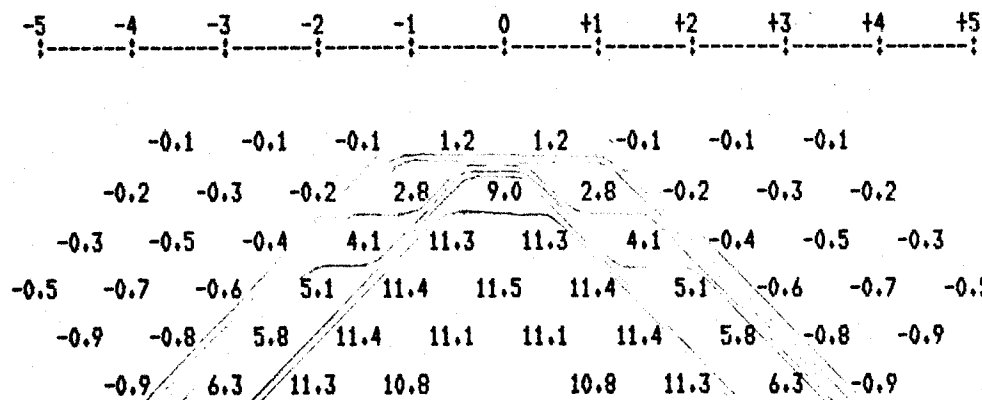
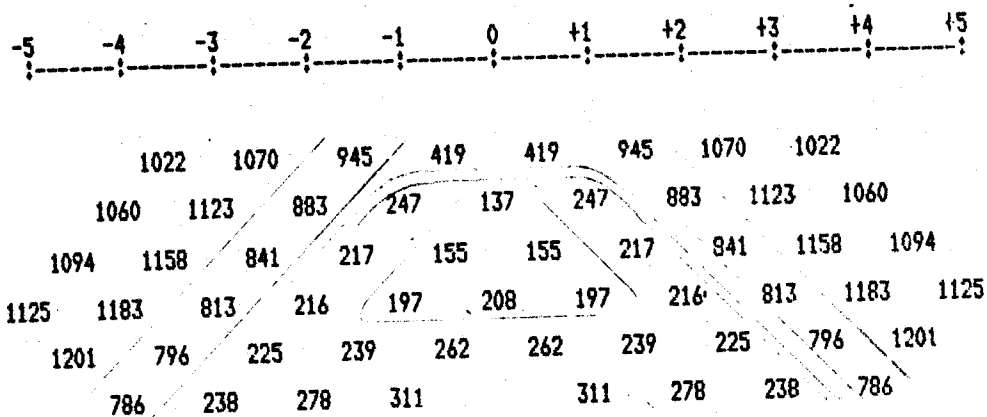


Fig.55 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo:	Resistividade	PFE
diague vertical		
Angulo(graus) : 90.00	1 1000.00 ohm-m	0.00 %
Indice de borda: -0.50	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Espessura : 1.00	3 1000.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

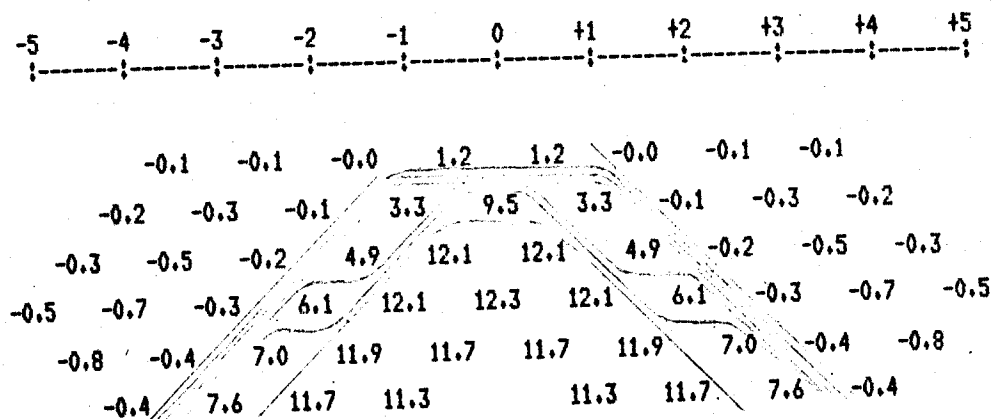
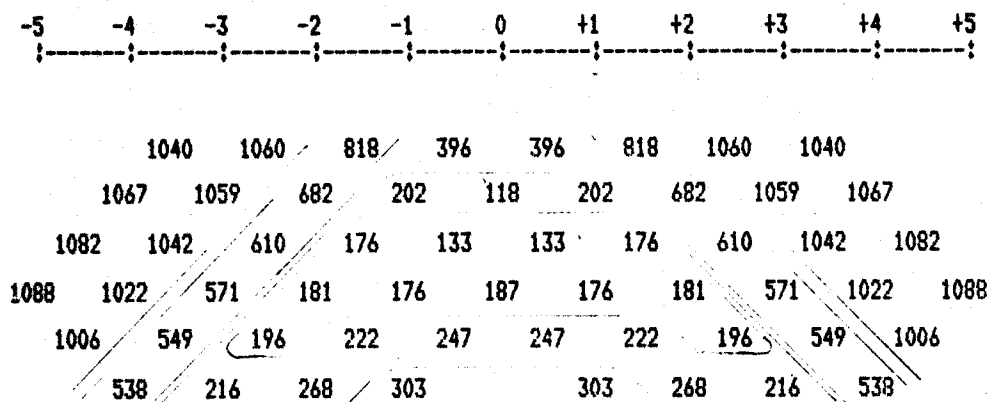


Fig.56 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo: dique vertical	Resistividade	PFE
Angulo(graus) : 60.00	1 1000.00 ohm-m	0.00 %
Indice de borda: -0.50	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Espessura : 1.00	3 1000.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

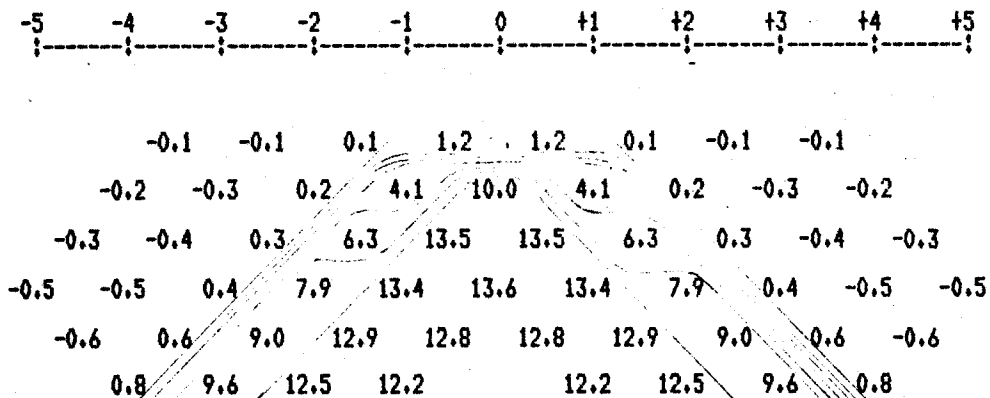
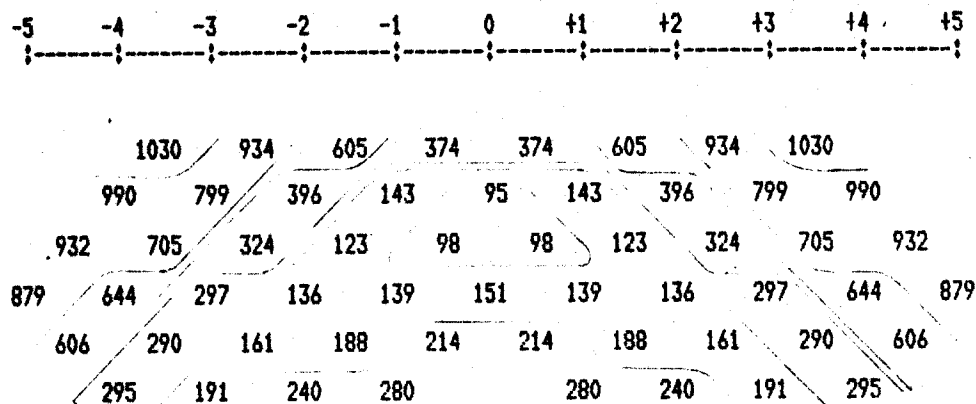


Fig.57 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo:	Resistividade	PFE
diqve vertical		
Angulo(graus) : 45.00	1 1000.00 ohm-m	0.00 %
Indice de borda: -0.50	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Espessura : 1.00	3 1000.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

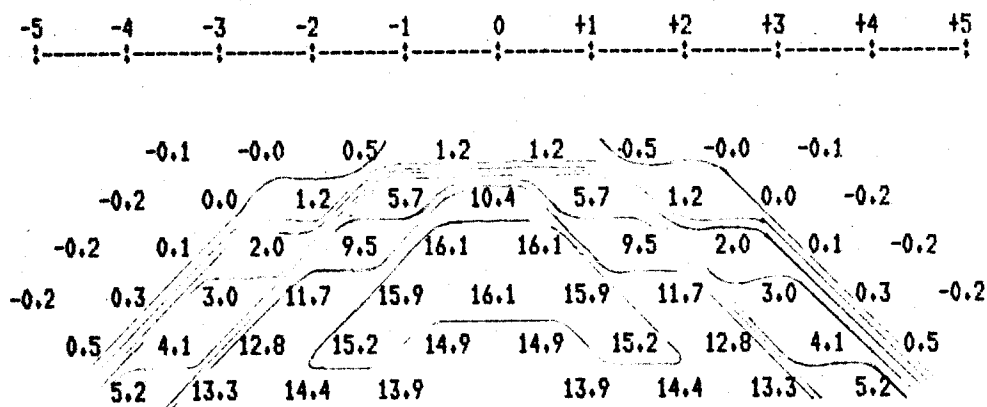
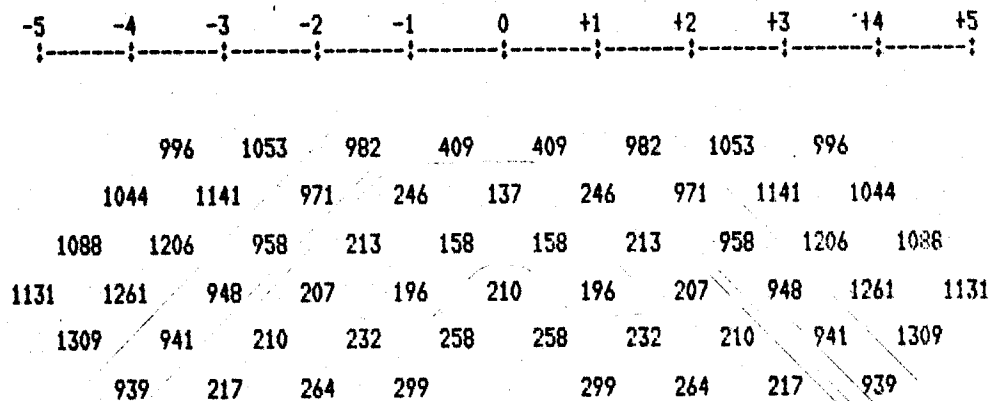


Fig.58 Pseudo-seed (E. F.)

Modelo:	diâque vertical	Resistividade	PFE
Angulo(graus)	: 30.00	1 1000.00 ohm-m	0.00 %
Indice de borda:	-0.50	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Espessura	: 1.00	3 1000.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

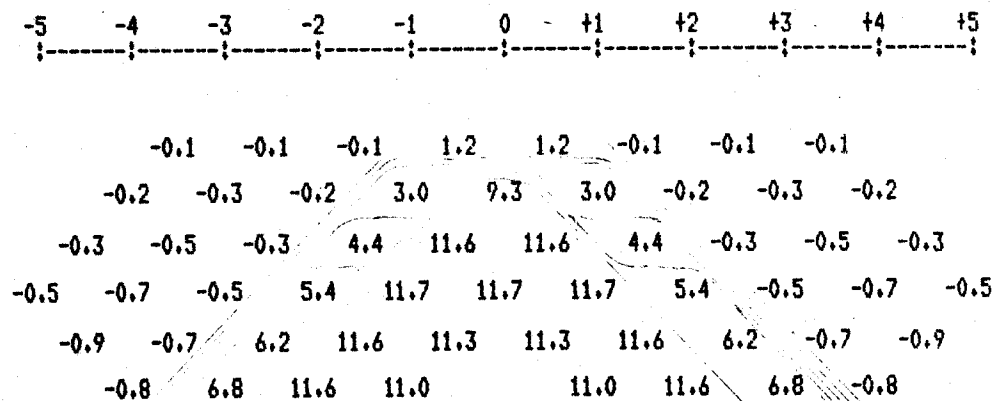
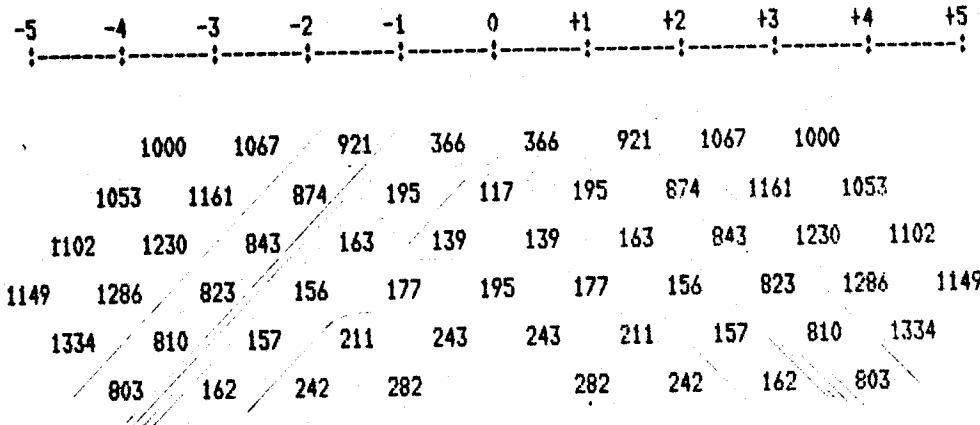


Fig. 59 Pseudo-seed (E. F.)

Modelo: dique vertical	Resistividade	PFE
Angulo(graus) : 90.00	1 1000.00 ohm-m	0.00 %
Indice de borda: -0.58	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Espessura : 1.15	3 1000.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

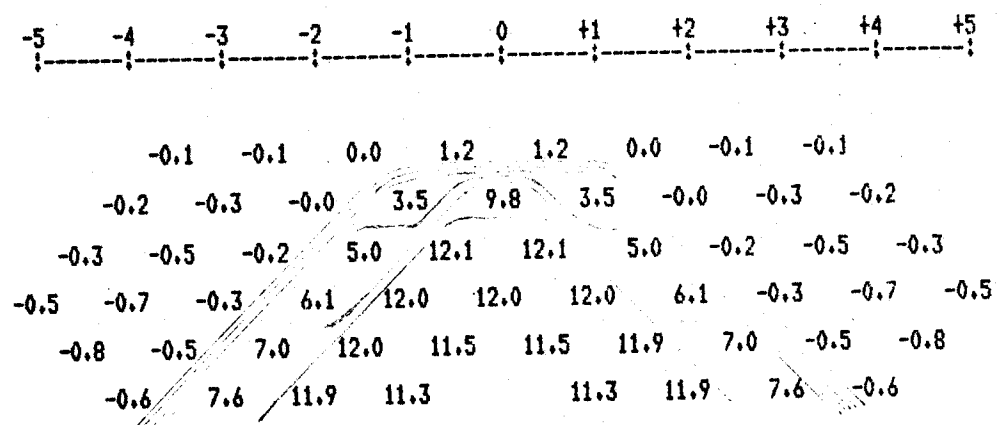
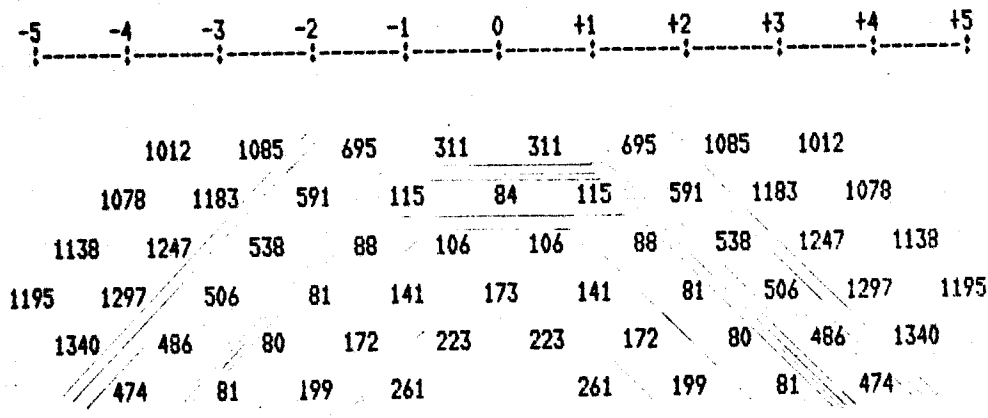


Fig. 3 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo:	diêue vertical	Resistividade	PFE
Angulo(graus)	: 90.00	1 1000.00 ohm-m	0.00 %
Indice de borda:	-0.71	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Espessura	: 1.41	3 1000.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

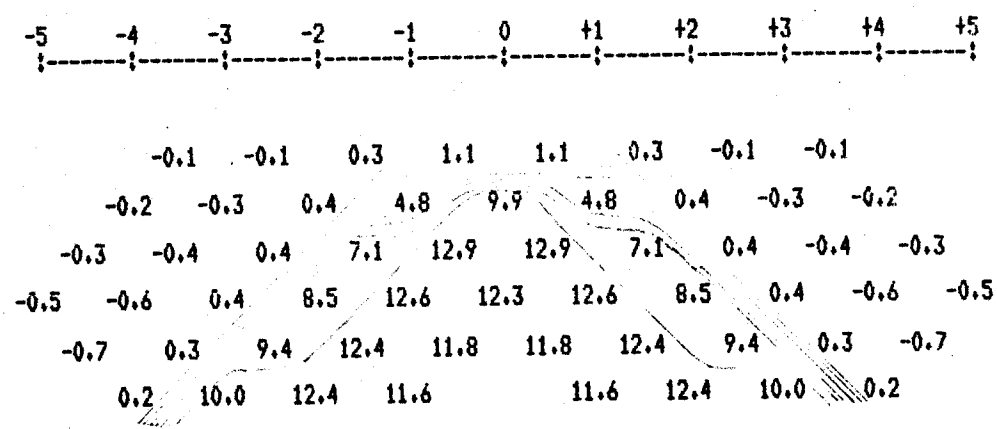
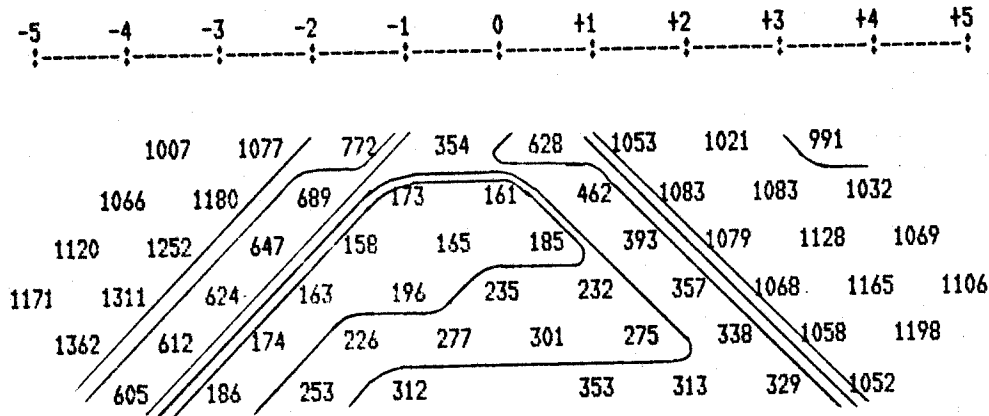


Fig. 61 Pseudo-serões (E. F.)

Modelo: diaque vertical	Resistividade	PFE
Angulo(graus) : 90.00	1 1000.00 ohm-m	0.00 %
Indice de borda: -1.00	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Espessura : 2.00	3 1000.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

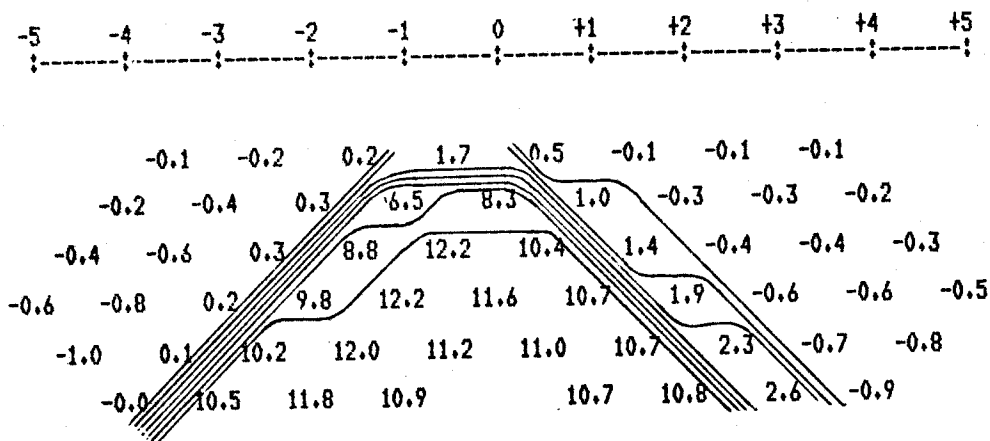
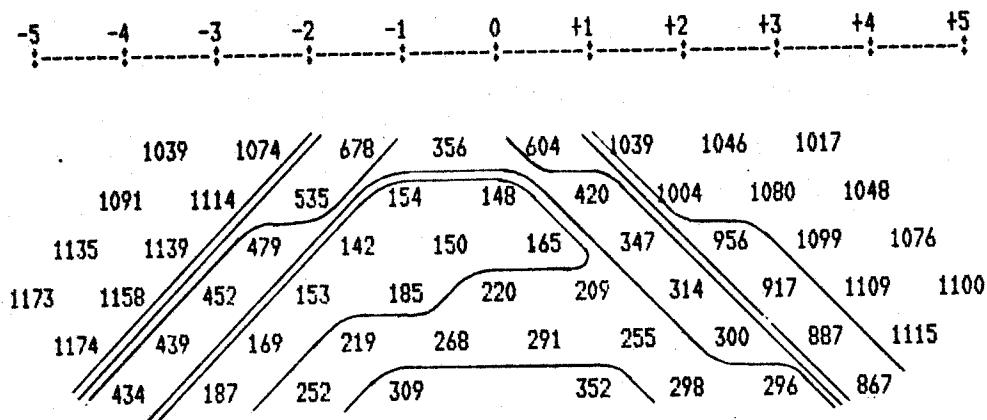


Fig. 62 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo: dique inclin.	Resistividade	PFE
Ângulo(graus) : 90.00	1 1000.00 ohm-m	0.00 %
Índice de borda: -1.00	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Espessura : 1.00	3 1000.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

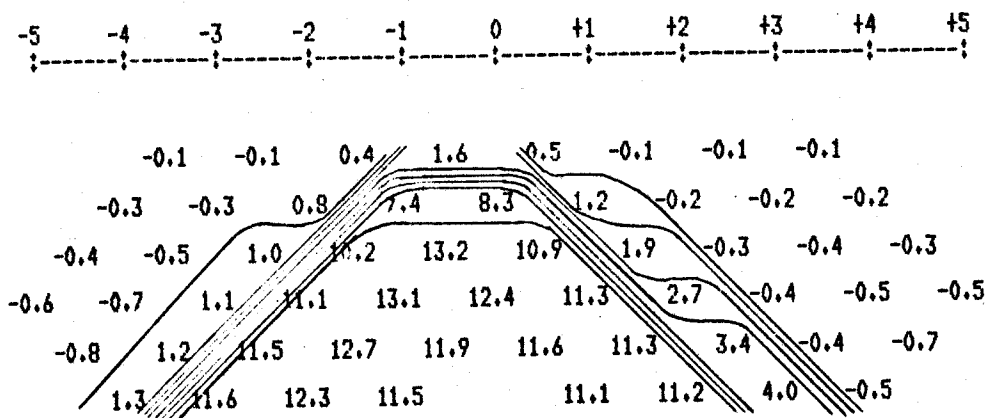
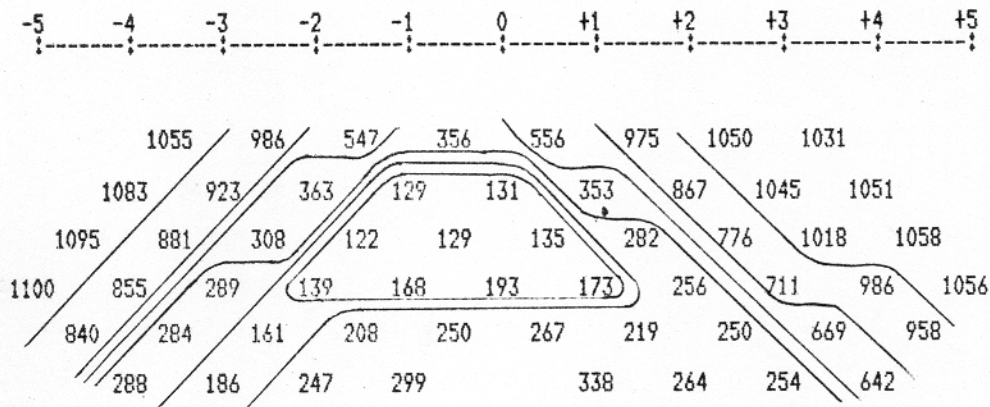


Fig. 63 Pseudo-seeds (E. F.)

Modelo: diaque inclin.	Resistividade	PFE
Angulo(graus) : 60.00	1 1000.00 ohm-m	0.00 %
Indice de borda: -1.00	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Espessura : 1.00	3 1000.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

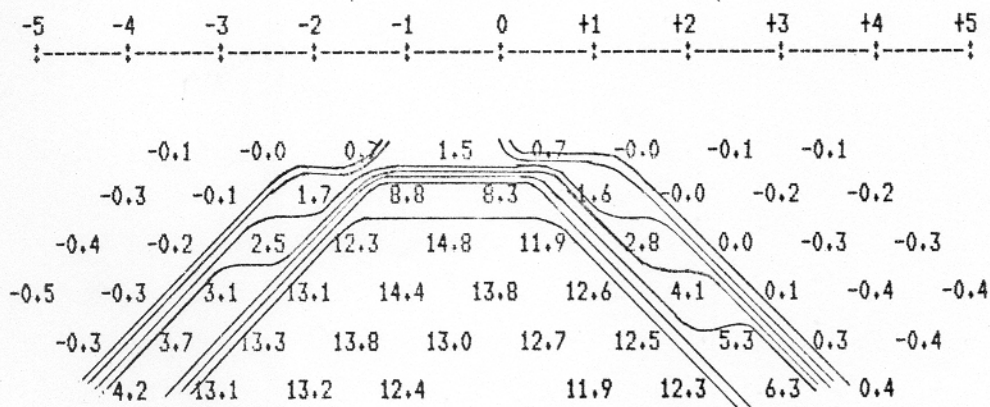
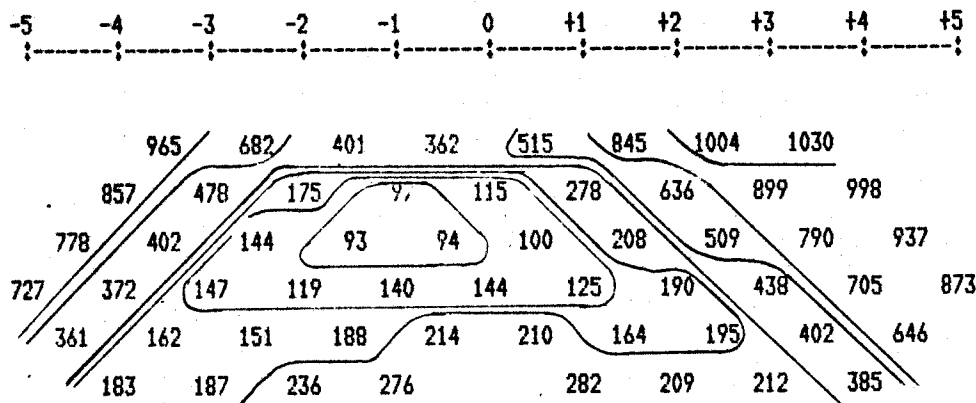


Fig. 64 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo: dique inclin.	Resistividade	PFE
Angulo(graus) : 45.00	1 1000.00 ohm-m	0.00 %
Indice de borda: -1.00	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Espessura : 1.00	3 1000.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

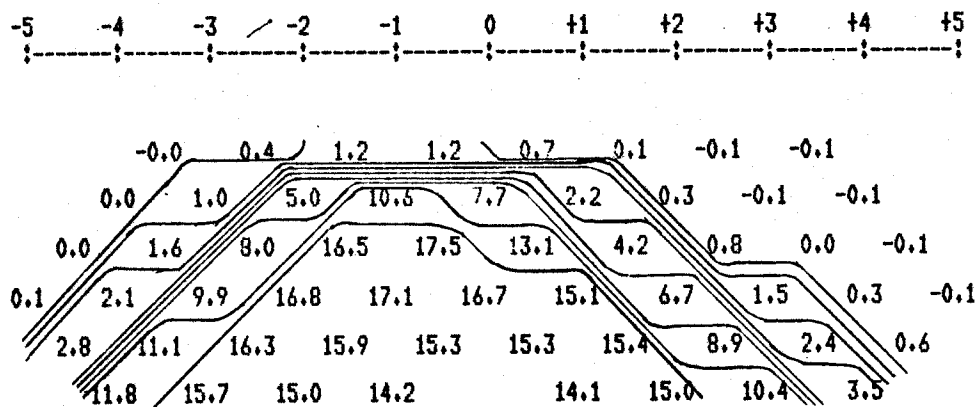
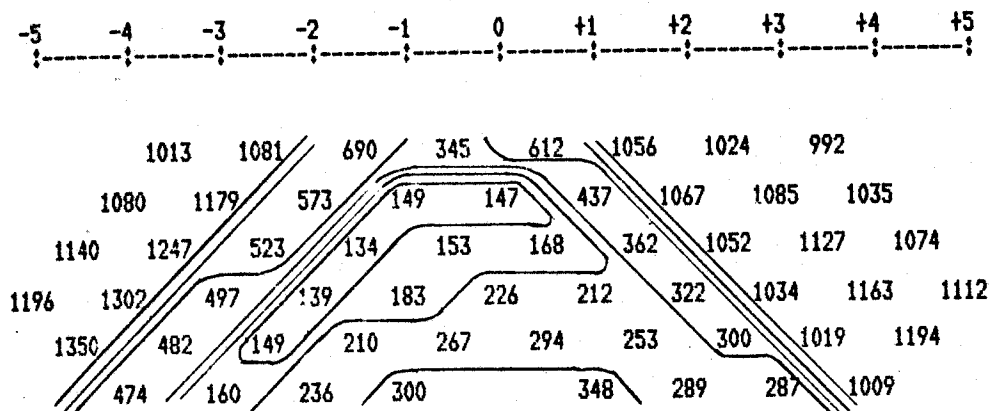


Fig. 65 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo:	Resistividade	PFE
diaca inclin.	1 1000.00 ohm-m	0.00 %
Angulo(graus) : 30.00	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Indice de borda: -1.00	3 1000.00 ohm-m	0.00 %
Espessura : 1.00		

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

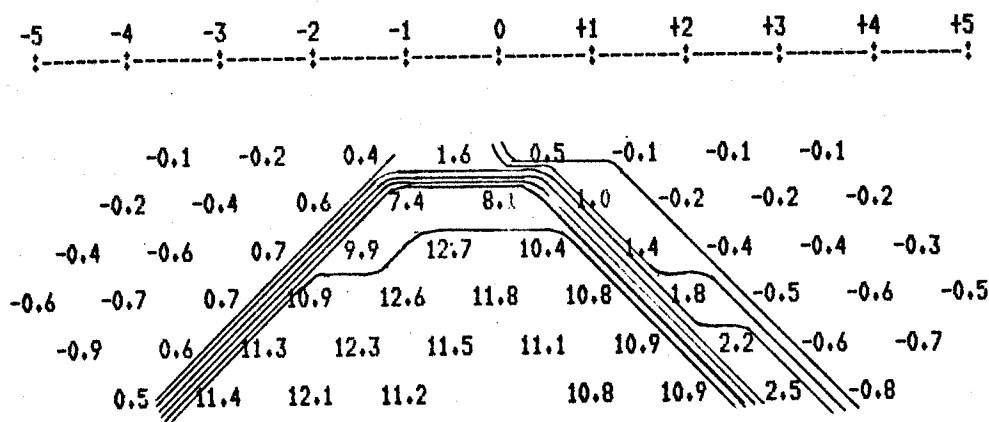
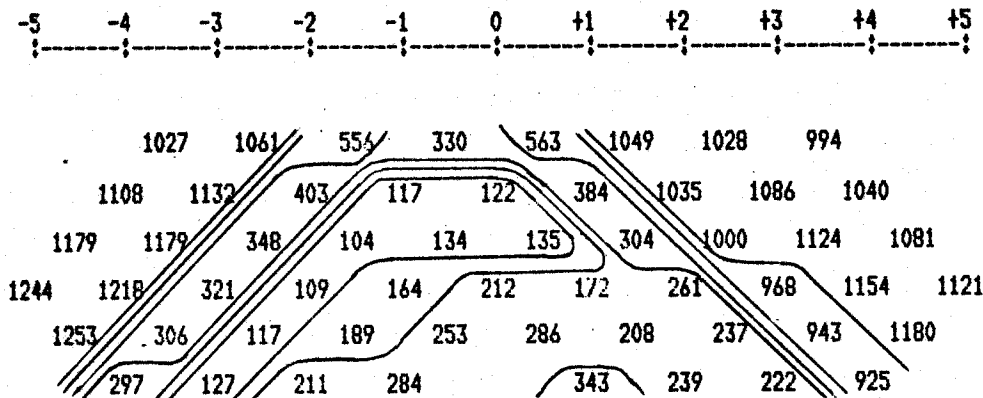


Fig. 66 Pseudo-seeds (E. F.)

Modelo:	Resistividade	PFE
diâque inclin.	1 1000.00 ohm-m	0.00 %
Angulo(graus) : 90.00	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Indice de borda: -1.15	3 1000.00 ohm-m	0.00 %
Espessura : 1.00		

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

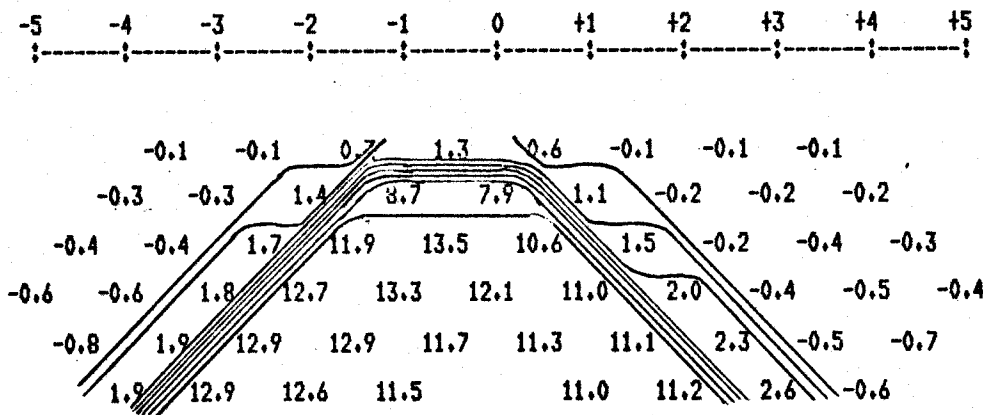
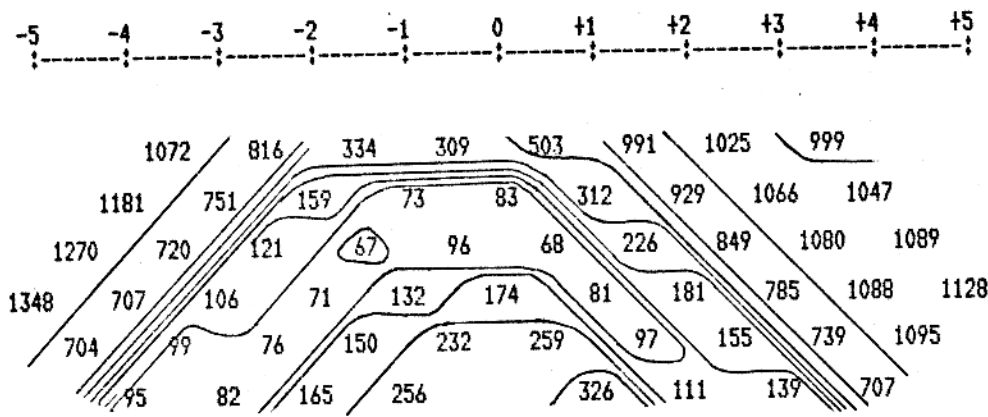


Fig. 67 Pseudo-seções (E. F.)

	Resistividade	PFE
Modelo: dique inclin.		
Angulo(graus) : 90.00	1 1000.00 ohm-m	0.00 %
Indice de borda: -1.41	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Espessura : 1.00	3 1000.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

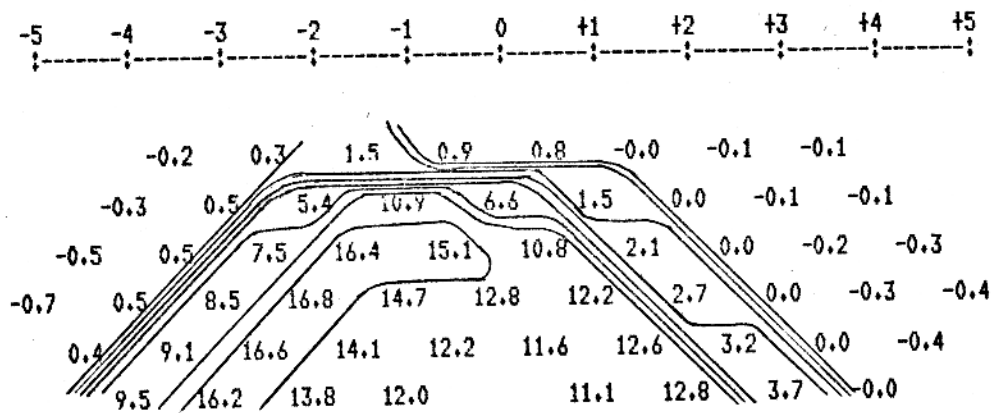
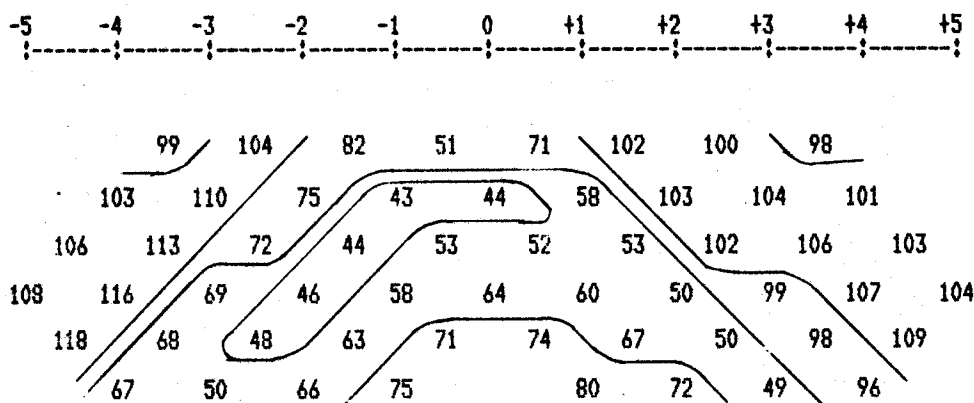


Fig. 68 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo:	Resistividade	PFE
diâque inclin.		
Ângulo(graus) : 90.00	1 1000.00 ohm-m	0.00 %
Índice de borda: -2.00	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Espessura : 1.00	3 1000.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

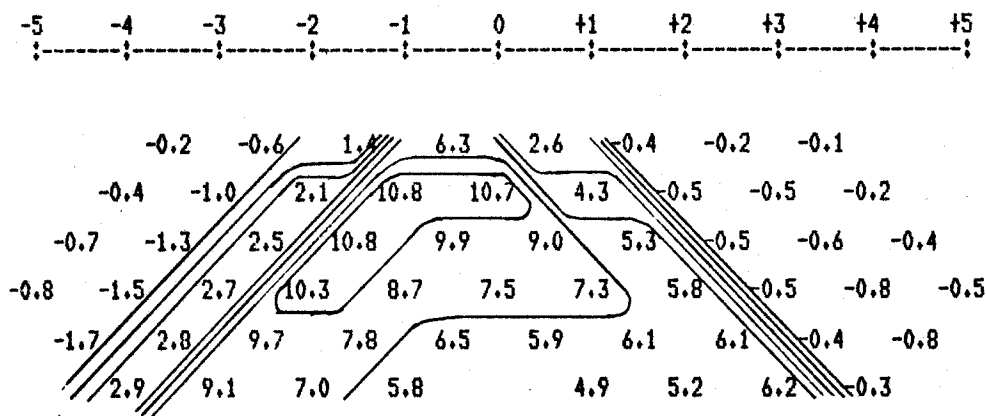
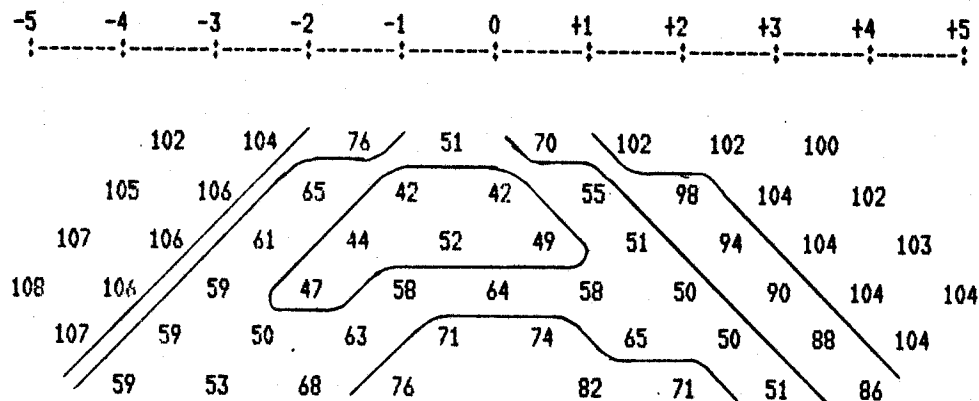


Fig. 69 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo:	Resistividade	PFE
diique inclin.		
Angulo(graus) : 90.00	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Indice de borda: -1.00	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Espessura : 1.00	3 100.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

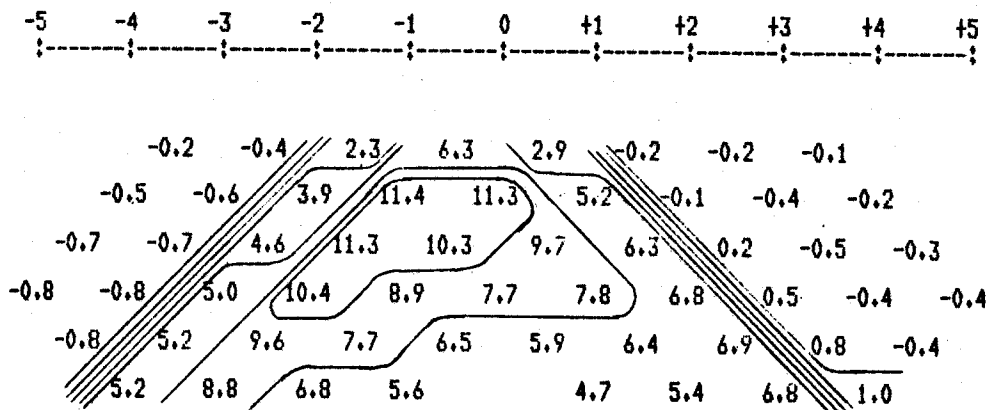
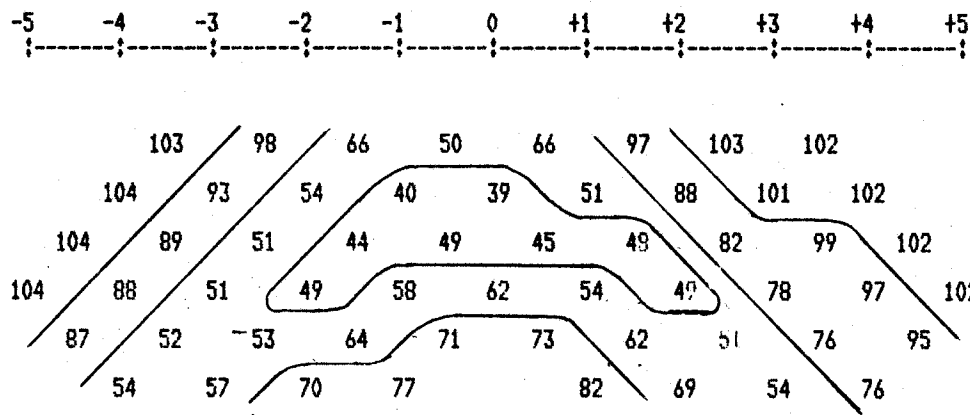


Fig. 70 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo: dique inclin.	Resistividade	PFE
Angulo(graus) : 60.00	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Indice de borda: -1.00	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Espessura : 1.00	3 100.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

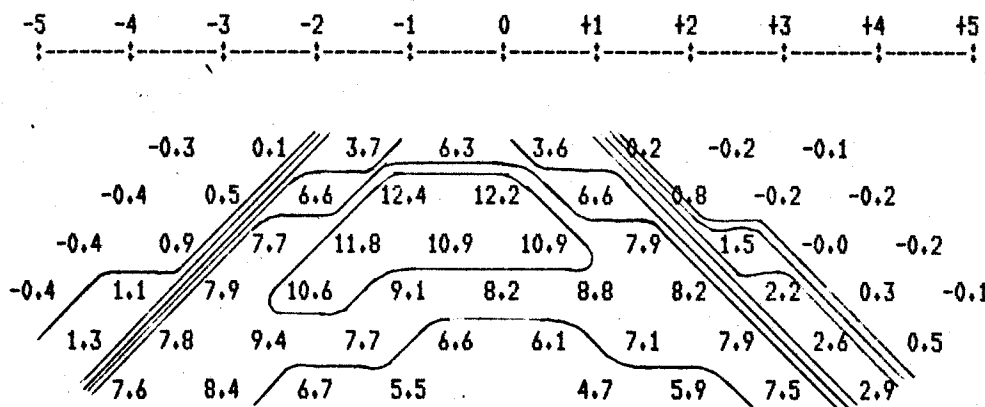
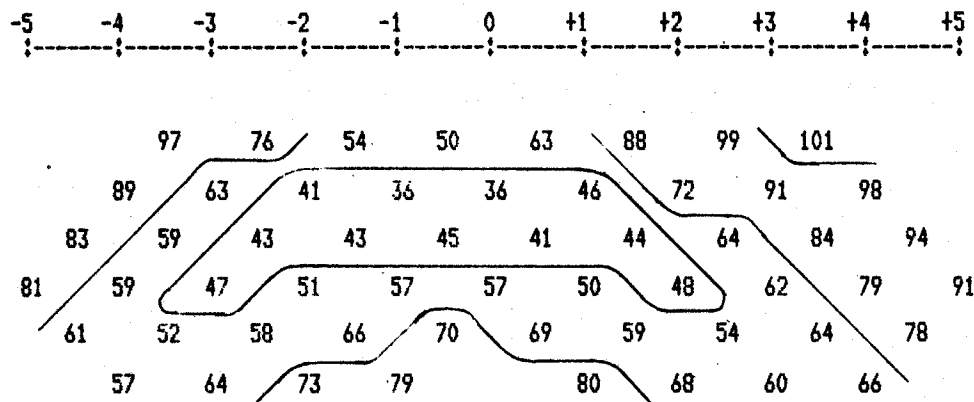


Fig.71 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo: dique inclin.	Resistividade	PFE
Angulo(graus) : 45.00	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Indice de borda: -1.00	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Espessura : 1.00	3 100.00 ohm-m	0.00 %

RESISTIVIDADE APARENTE



EFEITO PERCENTUAL DE FREQUENCIA

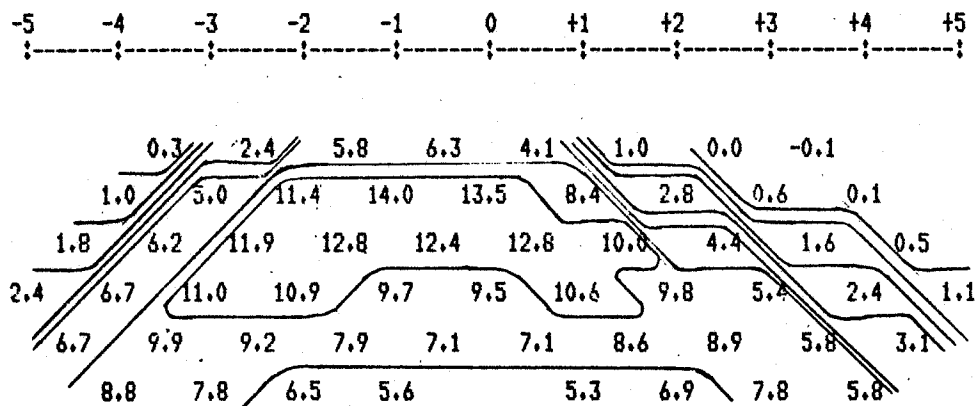


Fig. 72 Pseudo-seções (E. F.)

Modelo: diaque inclin.	Resistividade	PFE
Angulo(graus) : 30.00	1 100.00 ohm-m	0.00 %
Indice de borda: -1.00	2 10.00 ohm-m	25.00 %
Espessura : 1.00	3 100.00 ohm-m	0.00 %

6 BIBLIOGRAFIA

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I.A. - 1965 - Handbook of mathematical functions. New York, Dover. 1046 p.
- ANDERSON, W.L. - 1975 - Improved digital filters for evaluating Fourier and Hankel transform integrals. Denver, U.S. Geological Survey. 82 p.
- BARNETT, C.T. - 1972 - Theoretical modelling of induced polarization effects due to arbitrarily shaped bodies. Ph.D. Thesis. Golden, Colorado School of Mines. 156 p.
- CAMPBELL, E.H. - 1980 - Métodos geofísicos aplicados à prospecção de cobre na Serra dos Carajás - Pará. Tese de mestrado. Belém, UFPa - NCGG. 79 p.
- CHASE, S.M.; FOSDICK, L.D. - 1969 - Algorithm 353, Filon quadrature. Comm. Assoc. Comput. Mach. 12(8):457-458.
- COGGON, J.H. - 1971 - Electromagnetic and electrical modelling by the finite element method. Geophysics. 36(1):132-155.
- COOLEY, J.W.; TUKEY, J.W. - 1965 - An algorithm for the calculation of complex Fourier series. Math. Comp. 19:297-301.
- DAVIS, P.J.; RABINOWITZ, P. - 1975 - Methods of numerical integration. New York, Academic Press. 459 p.
- EINARSSON, B. - 1972 - Algorithm 418, calculation of Fourier integral. Comm. Assoc. Comput. Mach. 15(1):47-48.
- FLINN, E.A. - 1959 - A modification of Filon's method of numerical integration. Jour. Assoc. Comput. Mach. 6:181-184.
- FOX, R.C.; HOHMANN, G.W.; KILLPACK, T.J.; RIJO, L. - 1980 - Topographic effects in resistivity and induced polarization surveys. Geophysics. 45(1):75-93.

HALLOF, P.G. - 1970 - Theoretical induced polarization and resistivity studies, scale model cases. Ontario, McPhar Geophysics. 3v.

HOHMANN, G.W. - 1977 - Numerical IP modelling. In: Induced polarization for exploration geologists and geophysicists. Tucson, University of Arizona. P. 221-284.

HUBNER, K.H. - 1975 - The finite element method for engineers. New York, John Wiley. 500 p.

IRONS, B. - 1970 - A frontal solution program for finite element analysis. Inter. Jour. Num. Math. Eng. 2: 5-32

JACKSON, J.D. - 1975 - Classical electrodynamics. 2 ed. New York, John Wiley. 848 p.

JEPSEN, A.F. - 1969 - Numerical modelling in resistivity prospecting. Ph.D. Thesis. Berkeley, University of California. 104 p.

KELLER, G.V.; FRISCHKNECHT, F.C. - 1966 - Electrical methods in geophysical prospecting. Oxford, Pergamon Press. 517 p.

KRYLOV, V.I. - 1972 - Approximate calculation of integrals. New York, MacMillan, 357 p.

LITTLEWOOD, R.K.; ZAKIAN, V. - 1976 - Numerical evaluation of Fourier integrals. Jour. Inst. Math. Applic. 18: 331-339.

LUDWIG, C.S. - 1967 - Theoretical induced polarization and resistivity response for the dual frequency system collinear dipole-dipole array. Tucson, Heinrichs Geoexploration. 2v.

MADDEN, T.R.; CANTWELL, T. - 1967 - Induced polarization, a review. In: Mining Geophysics, vol. 2. Tulsa, Society of Exploration Geophysicists. p. 373-400.

- MARSHALL, D.J.; MADDEN, T.R. - 1959 - Induced polarization, a study of its causes. *Geophysics*. 24(4):780-816.
- PATTERSON, T.N.L. - 1976 - On high precision methods for the evaluation of Fourier integrals with finite and infinite limits. *Numer. Math.* 27: 41-52.
- PIRES, A.B. - 1978 - Network modelling of resistivity data. *Colorado School of Mines Quarterly*. 73(4):19-37.
- REITZ, J.R.; MILFORD, F.J. - 1972 - Foundations of electromagnetic theory. Reading, Addison Wesley. 435 p.
- RIJO, L. - 1977 - Modelling of electric and electromagnetic data. Ph.D. Thesis. Salt Lake City, University of Utah. 242 p.
- RIJO, L. - 1981 - A fast finite element (FFE) algorithm for two and three-dimensional IP-resistivity data interpretation. SIAM conference on mathematical and computational methods in the exploration and extraction of deep mineral resources. Tucson, Soc. Ind. Appl. Math. p.16-19.
- SNYDER, D.D. - 1976 - A method for modelling the resistivity and IP response of two-dimensional bodies. *Geophysics*. 41(3): 997-1015.
- SUMNER, J.S. - 1976 - Principles of induced polarization for geophysical exploration. New York, Elsevier. 227 p.
- SWIFT, C.M. -1971 - Theoretical magnetotelluric and TURAM response from two-dimensional inhomogeneities. *Geophysics* . 36(1):38-52.
- TING, B.Y.; LUKE, Y.L. - 1981 - Computation of integrals with oscillatory and singular integrands. *Math. Comp.* 37(155) : 169-183.
- ZIENKIEWICZ, O.C. - 1971 - The finite element method in engineering science. London, McGraw Hill. 521 p.

APÊNDICE A

APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS IMAGENS

O método das imagens é empregado no eletromagnetismo clássico para a solução de problemas de cargas na presença de condutores e dielétricos (ver, por exemplo, Jackson, 1975). Em princípio, consiste na substituição das interfaces por cargas fictícias. Essas cargas são calculadas e posicionadas de modo que os campos ou potenciais produzidos se ajustem às condições de contorno da equação de Poisson.

Pela analogia entre esses sistemas e os de correntes estacionárias (Reitz e Milford, 1972), o método pode ser aplicado ao problema de resistividade. As restrições ficam por conta da dificuldade de encontrar as imagens, exceto nos casos mais simples.

A discussão aqui está baseada em Ludwig (1967), que estudou vários modelos de falhas e diques verticais e infinitos. Seu trabalho também apresenta uns poucos exemplos com a linha dos dipolos cruzando uma interface com um ângulo de 30 graus.

A.1 Falha Vertical

A Fig. A-1 representa o esquema para uma falha vertical e infinita.

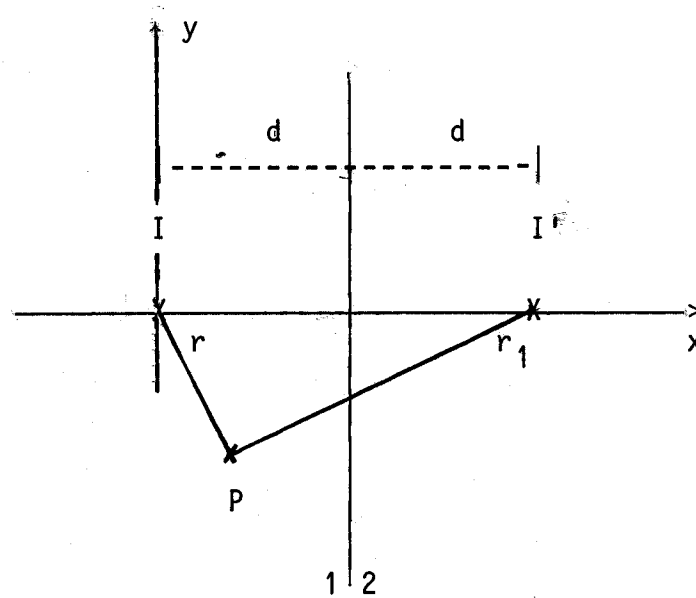


Fig. A-1
Imagens para a falha.

Quando P está no meio 1, o potencial no ponto é a soma dos potenciais devido à corrente em I e sua imagem I'. Pela equação (5) do Capítulo 2,

$$V_1(x,y) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{I\rho_1}{r} + \frac{I'\rho_2}{r_1} \right) . \quad (\text{A.1})$$

Quando P está no meio 2, não há a imagem, e P "vê" a corrente enfraquecida,

$$V_2(x,y) = \frac{1}{2} \frac{I''\rho_2}{r} . \quad (\text{A.2})$$

I' e I'' dependem do coeficiente de reflexão entre os dois meios,

$$K_{21} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} = -K_{12} \quad (\text{A.3})$$

Isto e mais as relações

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2} = (a^2 + y^2)^{1/2}, \quad (\text{A.4})$$

$$r_1 = \left((2d - x)^2 + y^2 \right)^{1/2} = \left(a_1^2 + y_1^2 \right)^{1/2}.$$

permitem escrever as equações (A.1) e (A.2) como

$$V_1 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + y^2}} + \frac{K_{21}}{\sqrt{a_1^2 + y_1^2}} \right), \quad (\text{A.5})$$

$$V_2 = \frac{I\rho_2}{2\pi} \left(\frac{1 - K_{21}}{\sqrt{a^2 + y^2}} \right). \quad (\text{A.6})$$

Aplicando a transformada de Fourier como na equação (47) do Capítulo 4, os potenciais transformados serão:

$$\tilde{V}_1 = \frac{I\rho_1}{\pi} [K_0(ka) + K_0(ka_1)], \quad (\text{A.7})$$

$$\tilde{V}_2 = \frac{I_{\rho 1}}{\pi} [(1 - K_{21}) K_0(ka)] \quad . \quad (A.8)$$

Essas fórmulas são fáceis de implementar no computador. K_0 é calculável por uma aproximação polinomial (Abramowitz e Stegun, 1965), com uma precisão melhor que 10^{-7} . As resistividades aparentes e os PFE são calculados pelas equações (8) e (9) do Capítulo 2.

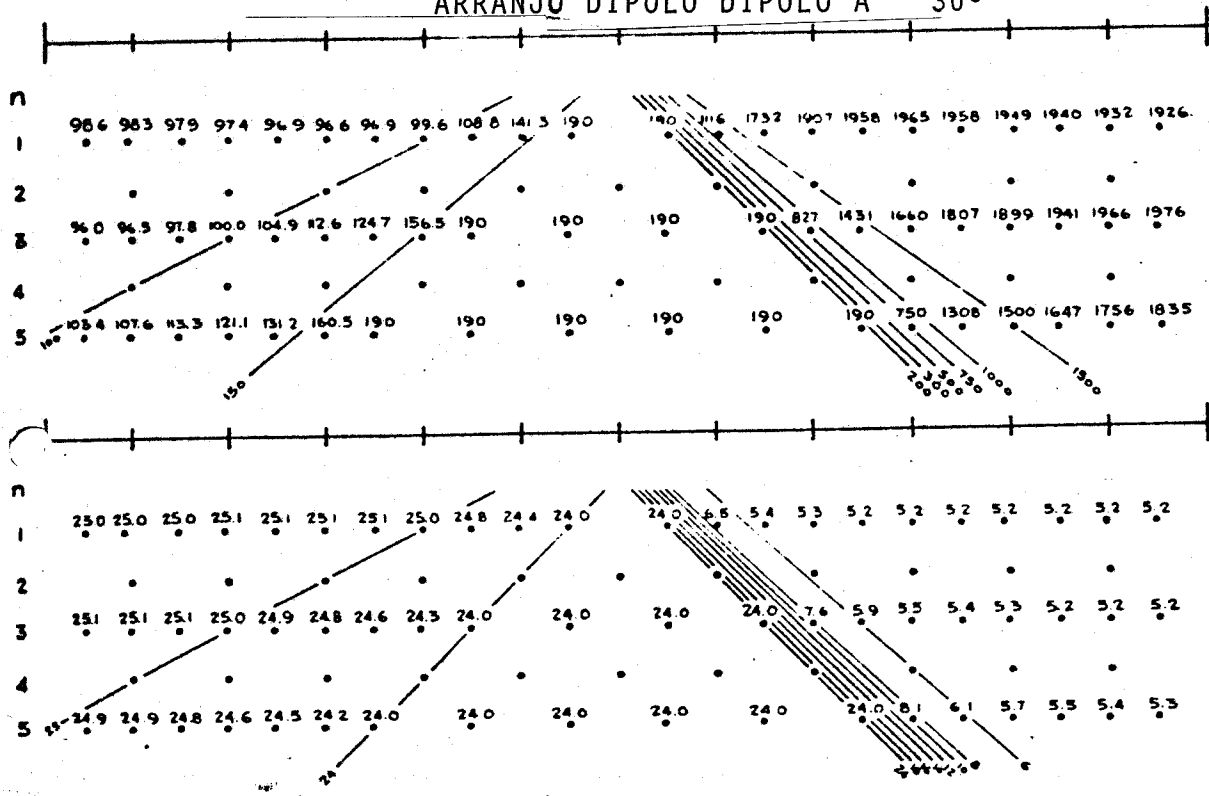
A Figura A-2 é do trabalho citado de Ludwig. Ela pode ser comparada com a Figura 24 do Capítulo 4, que foi obtida a partir das equações (A.5) e (A.6) para o mesmo caso. As discrepâncias dos PFE no centro da pseudo-seção são causadas por Ludwig tomar como base a resistividade alta na equação (9).

A.2 Dique Infinito

Neste caso, o problema é um pouco mais sofisticado porque as reflexões nas duas interfaces causam imagens múltiplas. Os nove casos possíveis de posicionamento dos eletrodos nos três meios podem ser resumidos em quatro, e estão apresentados a seguir. A Figura 26 do Capítulo 4, obtida com essas fórmulas, pode ser comparada com os resultados de Ludwig na Figura A-3.

LINHA DE POLARIZAÇÃO INDUZIDA CRUZANDO UM
CONTATO VERTICAL EM UM

ARRANJO DIPOLO DIPOLO A 30°

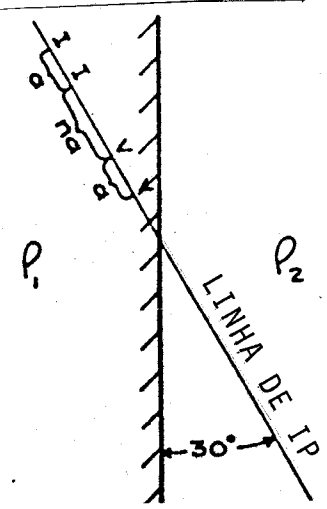


resistividade aparente

efeito percentual de frequencia (PFE)

$\rho_1 = 100, PFE_1 = 25.0, MCF_1 = 250 \quad \rho_2 = 1900, PFE_2 = 5.3, MCF_2 = 3$

PLANTA



CONTATO VERTICAL

Figura A-2

Resistividade aparente e PFE para uma falha vertical infinita (segundo Ludwig, 1975).

RESPOSTA TEÓRICA DE POLARIZAÇÃO INDUZIDA
CORPO TABULAR $t = 1.0$ ARRANJO DIPOLO-DIPOLO

T-4

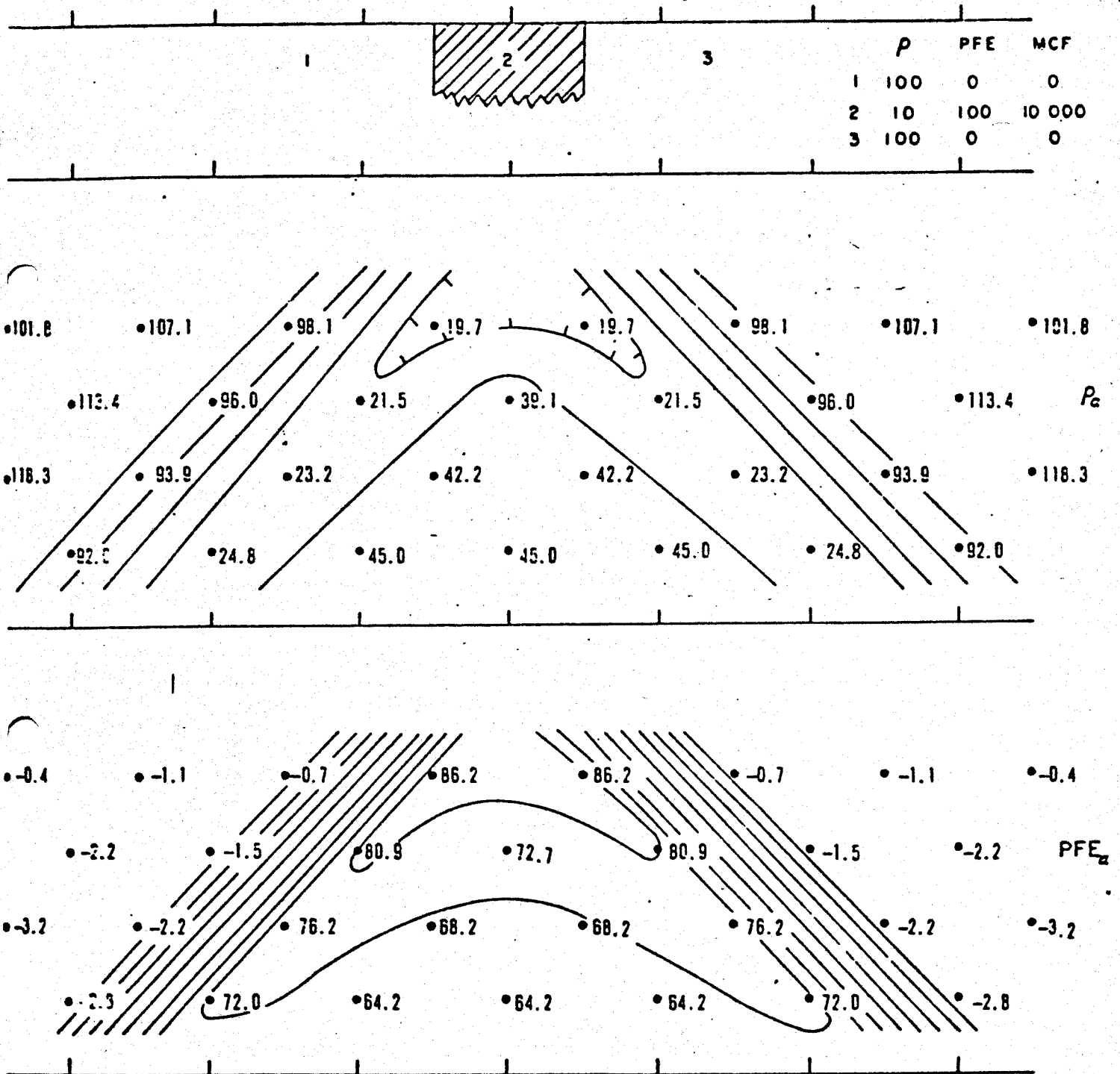
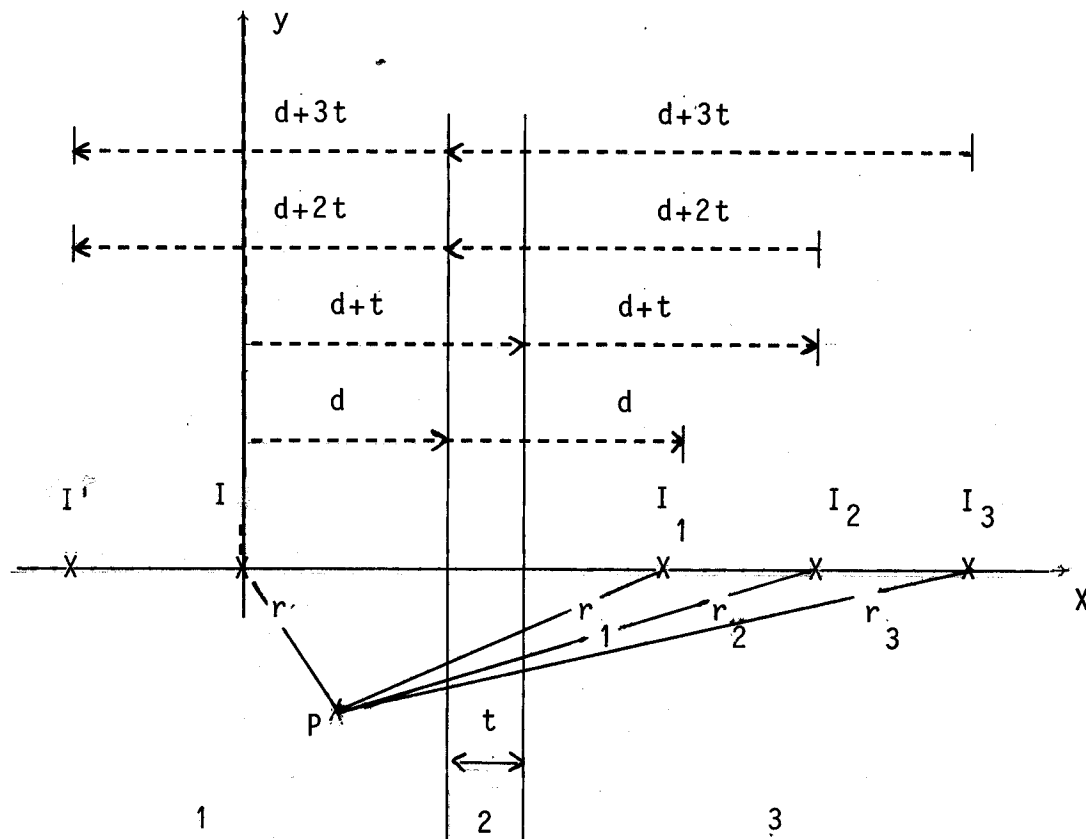


Figura A-3
Resistividade aparente e PFE para um dique
vertical infinito (segundo Ludwig, 1975)

1) Eletrodos de corrente e potencial no meio 1



$$I' = K_{12}K_{32} (1-K_{21}) I$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$I_1 = K_{12} I$$

$$r_1 = \sqrt{(2d-x)^2 + y^2}$$

$$I_2 = K_{32}(1-K_{21}) I$$

$$r_2 = \sqrt{(2d+2t-x)^2 + y^2}$$

$$I_3 = K_{32}K_{12}K_{32}(1-K_{21}) I$$

$$r_3 = \sqrt{(2d+4t-x)^2 + y^2}$$

Figura A-4

Imagens para o dique infinito, caso 1

Na Figura A-4 estão representados as fontes e as imagens, com suas intensidades. A fonte I produz duas imagens. Uma, de intensidade I_1 , devida à interface entre os meios 1 e 2. A se-

gunda é o reflexo na interface entre 2 e 3. Sua intensidade I_2 é reduzida pela reflexão na primeira interface. Esta imagem é por sua vez refletida na interface entre os meios 1 e 2, gerando uma imagem de intensidade I'' . Por estar no meio 1, esta última não atua em P, mas terá nova imagem no meio 3, devido à segunda interface. Esta outra imagem também é refletida, dando origem a uma seqüência infinita de imagens, em que são as do meio 3 influirão no potencial em P.

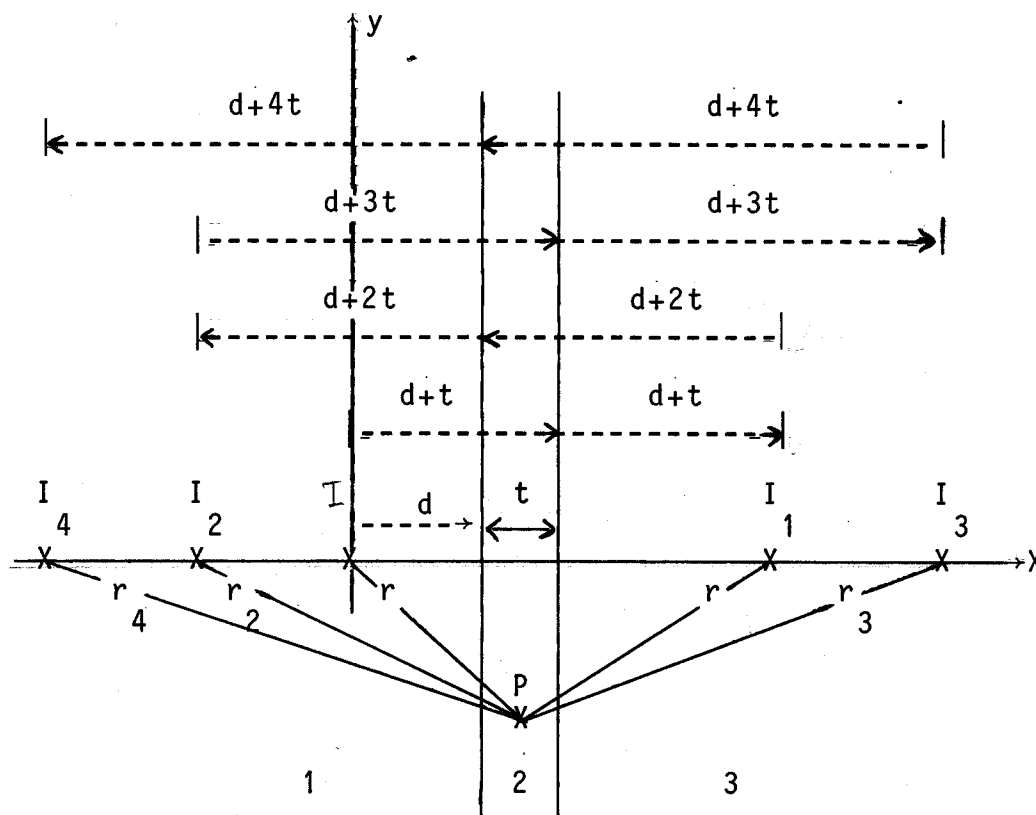
A equação (A.9) é a fórmula obtida para o potencial, e (A.10) sua transformada de Fourier. Os coeficientes de reflexão obedecem à convenção da equação (A.3).

$$V_1 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}} + \frac{K_{21}}{\sqrt{a^2+y^2}} - K_{23}(1-K_{21})^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(K_{21}K_{23})^m}{\sqrt{a^2+y^2}} \right] \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_1 = \frac{I\rho_1}{\pi} & [K_0(ka) + K_{21} K_0(ka_1) - \\ & - K_{23}(1-K_{21})^2 \sum_{m=0}^{\infty} (K_{21}K_{23})^m K_0(ka_m)] \quad (\text{A.10}) \end{aligned}$$

$$a = x, \quad a_1 = 2d - x, \quad a_m = 2(m+1)t + 2d - x.$$

2) Eletrodo de corrente no meio 1 e de potencial no meio 2.



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$I_1 = K_{32}(1-K_{21}) I$$

$$r_1 = \sqrt{(2d+2t-x)^2 + y^2}$$

$$I_2 = K_{12}K_{32}(1-K_{21}) I$$

$$r_2 = \sqrt{(2t+x)^2 + y^2}$$

$$I_3 = K_{32}K_{12}K_{32}(1-K_{21}) I$$

$$r_3 = \sqrt{(2d+4t-x)^2 + y^2}$$

$$I_4 = K_{12}K_{32}K_{12}K_{32}(1-K_{21}) I$$

$$r_4 = \sqrt{(4t+x)^2 + y^2}$$

Figura A-5

Imagens para o dique infinito, caso 2

Hã duas s̄eries infinitas de imagens, uma no meio 1 e outra no meio 3. Apesar do ponto P estar no meio 2, as equações podem ser escritas em termos da resistividade do meio 1, pois, de (A.4),

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{1+K_{21}}{1-K_{21}} \quad (A.11)$$

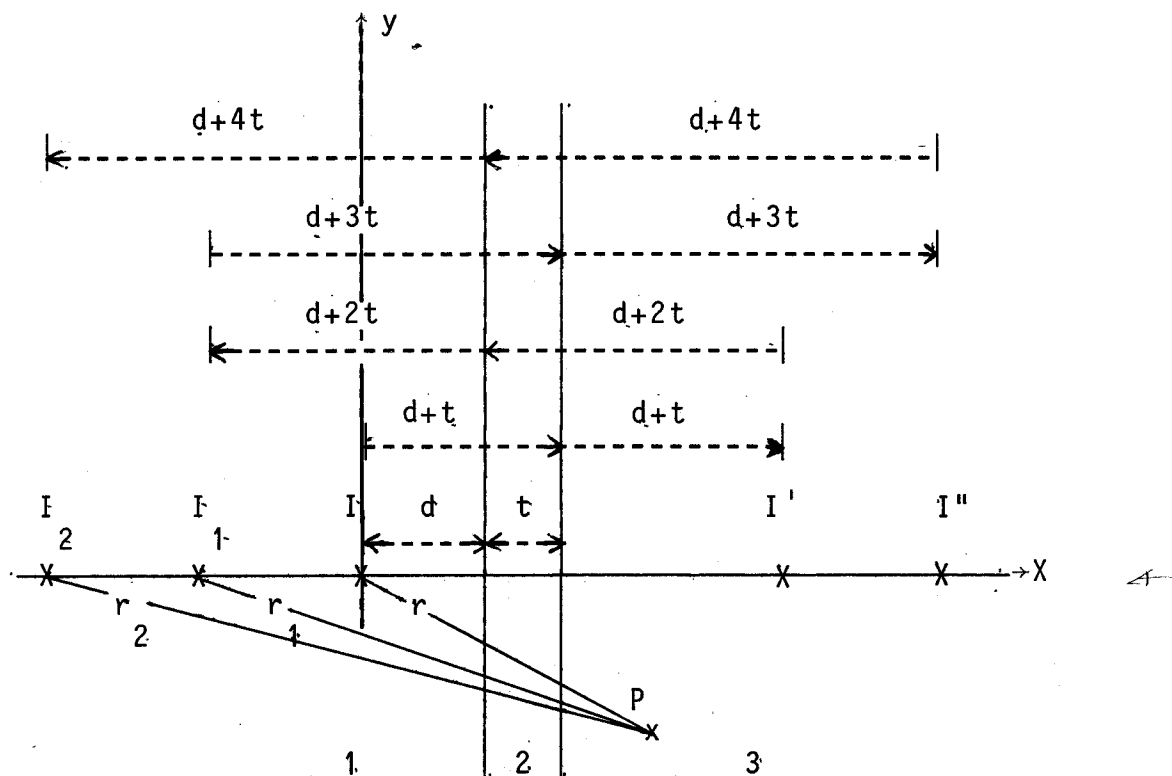
As equações para o potencial e sua transformada s̄ão

$$\begin{aligned} V_2 = \frac{I\rho_1}{2\pi} & \left[(1+K_{21}) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(K_{21}K_{23})^m}{\sqrt{a_{2m}^2 + y^2}} \right. \\ & \left. - K_{23}(1+K_{21}) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(K_{21}K_{23})^m}{\sqrt{a_{1m}^2 + y^2}} \right] \quad (A.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{V}_2 = \frac{I\rho_1}{\pi} & \left[(1+K_{21}) \sum_{m=0}^{\infty} (K_{21}K_{23})^m K_0(ka_{2m}) \right. \\ & \left. - K_{23}(1+K_{21}) \sum_{m=0}^{\infty} (K_{21}K_{23})^m K_0(ka_{1m}) \right] \quad (A.13) \end{aligned}$$

$$a_{1m} = 2(m+1)t + 2d - x \quad a_{2m} = 2mt + x$$

3) Eletrodo de corrente no meio 1 e de potencial no meio 3.



$$I' = K_{32}(1-K_{21}) I$$

$$I'' = K_{32}K_{12}K_{32}(1-K_{21}) I$$

$$I_1 = K_{12}K_{32}(1-K_{21}) I$$

$$I_2 = K_{12}K_{32}K_{12}K_{32}(1-K_{21}) I$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r_1 = \sqrt{(2t+x)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(4t+x)^2 + y^2}$$

Figura A-6

Imagens para o dique infinito, caso 3

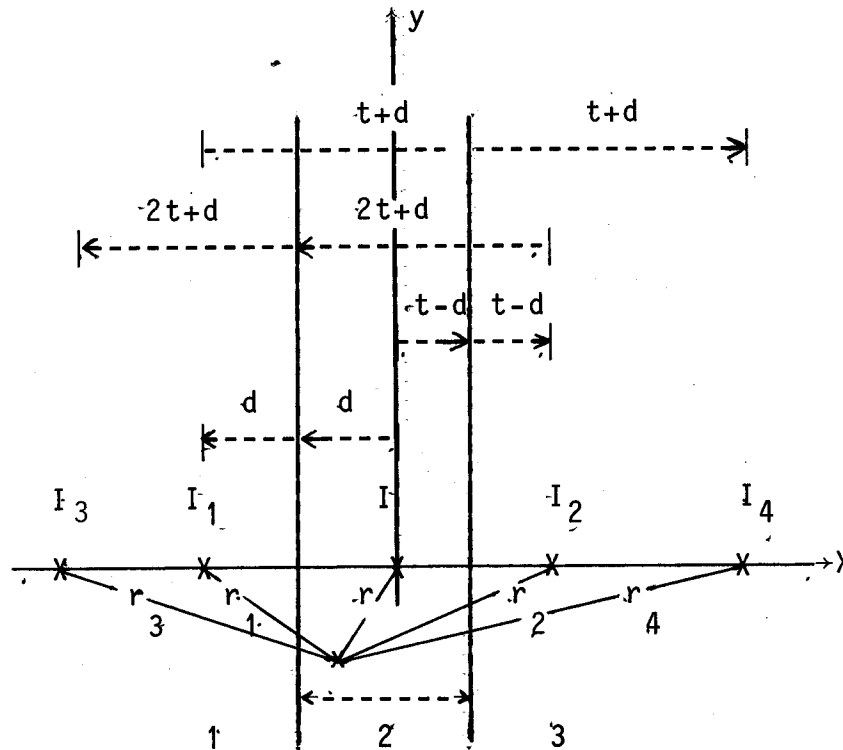
Novamente há duas seqüências infinitas nos meios 1 e 3. Somente a do meio 1 é vista pelo ponto no meio 3, e essas imagens são reduzidas pela reflexão na interface 2-3. Os potenciais são

$$V_3 = \frac{I\rho_3}{2\pi} (1-K_{21})(1-K_{32}) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(K_{21}K_{23})^m}{\sqrt{a^2 + y_m^2}} \quad (\text{A.14})$$

$$\tilde{V}_3 = \frac{I\rho_3}{\pi} (1-K_{21})(1-K_{32}) \sum_{m=0}^{\infty} (K_{21}K_{23})^m K_0(ka_m) \quad (\text{A.15})$$

$$a_m = 2mt + x$$

4) Eletrodos de corrente e potencial no meio 2



$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$r_1 = \sqrt{(2d+x)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(2t-2d+x)^2 + y^2}$$

$$r_3 = \sqrt{(2t+x)^2 + y^2}$$

$$r_4 = \sqrt{(2t-x)^2 + y^2}$$

$$I_1 = K_{12} I$$

$$I_2 = K_{32} I$$

$$I_3 = K_{12}K_{32} I$$

$$I_4 = K_{32}K_{12} I$$

Figura A-7

Imagens para o dique infinito, caso 4

Neste caso, as imagens estão em 1 e 3. Como no caso 2, é possível escrever os potenciais em função da resistividade do meio 1.

$$\begin{aligned}
V_4 = & \frac{I\rho_2}{2\pi} \left(\frac{1+K_{21}}{1-K_{21}} \right) \left[\frac{1}{\sqrt{a^2 + y^2}} - K_{21} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(K_{21}K_{23})^m}{\sqrt{a^2 + y^2}} \right. \\
& - K_{23} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(K_{21}K_{23})^m}{\sqrt{a^2 + y^2}} + K_{21}K_{23} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(K_{21}K_{23})^m}{\sqrt{a^2 + y^2}} + \right. \\
& \left. \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(K_{21}K_{23})^m}{\sqrt{a^2 + y^2}} \right] \right] \quad (A.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{V}_4 = & \frac{I\rho_1}{\pi} \left(\frac{1+K_{21}}{1-K_{21}} \right) \left[K_0(ka) - K_{21} \sum_{m=0}^{\infty} (K_{21}K_{23})^m K_0(ka_{1m}) \right. \\
& - K_{21} \sum_{m=0}^{\infty} (K_{21}K_{23})^m K_0(ka_{2m}) + K_{21}K_{23} \left[\sum_{m=0}^{\infty} (K_{21}K_{23})^m K_0(ka_{3m}) + \right. \\
& \left. \left. + \sum_{m=0}^{\infty} (K_{21}K_{23})^m K_0(ka_{4m}) \right] \right] \quad (A.17)
\end{aligned}$$

$$a = x \quad a_{1m} = 2mt + 2d + x \quad a_{2m} = 2(m+1)t - 2d - x$$

$$a_{3m} = 2(m+1)t + x \quad a_{4m} = 2(m+1)t - x$$

APÊNDICE B

IMPLEMENTAÇÃO DA TRANSFORMADA INVERSA DE FOURIER

B.1 Cálculo dos Coeficientes Dependentes da Oscilação

Na equação (67) (Capítulo 4), a variável responsável pela oscilação da última integral é y . A fórmula para a obtenção dos coeficientes está na equação (66). Patterson (1976) sugere o uso de recorrências para esta equação, pois

$$b_{\ell} = y \frac{(y - i)}{1 + y^2} b_{\ell-1}, \quad (\text{B.1})$$

com $b_0 = \frac{1 + iy}{1 + y^2}.$ (B.2)

A equação (B.1) pode ser separada nas suas partes reais e complexas,

$$b_{\ell} = C_{\ell} + iS_{\ell}, \quad (\text{B.3})$$

onde

$$C_{\ell} = \left(\frac{y}{1 + y^2} \right) (yC_{\ell-1} + S_{\ell-1}), \quad (\text{B.4})$$

$$S_{\ell} = \left(\frac{y}{1 + y^2} \right) (yS_{\ell-1} - C_{\ell-1}), \quad (\text{B.5})$$

com

$$C_0 = \frac{1}{1 + y^2} \quad \text{e} \quad S_0 = \frac{y}{1 + y^2} \quad (\text{B.6})$$

O fator que multiplica a integral (equação (67)) pode ser incorporado aos coeficientes. Assim, a parte real, que é o que interessa na transformada inversa em cosseno, fica sendo

$$b_\ell = C_\ell \cos(ya) - S_\ell \sin(ya) . \quad (\text{B.7})$$

A fórmula de recorrência para os coeficientes oscilantes da outra integral está na equação (70). Ela é semelhante à usada na obtenção das funções de Bessel de ordem fracionária,

$$b_{\ell+1} = \frac{i(2\ell+3)}{y'} b_\ell - \frac{(2\ell+3)}{(2\ell-1)} b_{\ell-1}, \quad (\text{B.8})$$

sendo

$$b_0 = \left(\frac{\pi}{2y}\right)^{1/2} J_{\ell+1/2}(y') = \frac{\sin y'}{y'} . \quad (\text{B.9})$$

com $y' = ya/2$. É fácil notar que os termos pares são reais e os ímpares, complexos.

Se a recorrência for usada sob esta forma, os resultados serão desastrosos. O motivo é que cada um de seus termos consiste de uma diferença entre as partes reais e complexas. Como esses valores são decrescentes, mas próximos, há uma rápida perda de algarismos significativos. Num computador como o Dec-10, com 7 dígitos em precisão simples, o oitavo termo já será sem valor.

A saída é empregar o algoritmo atribuído a J.C.P. Miller, que pode ser encontrado na sec. 10.5 do "Handbook of Mathematical Functions" (Abramowitz e Stegun, 1965). Ting e Luke (1981) apresentam uma demonstração de sua validade. A idéia é fazer a recorrência de traz para frente, do termo N ao zero. N é escolhido de modo que o termo $N+1$ já possa ser considerado nulo. O termo de ordem N é suposto inicialmente igual a 1. Então, de (B.8).

$$b_{\ell-1} = \frac{i(2\ell-1)}{y} b_{\ell} - \frac{(2\ell-1)}{(2\ell+3)} b_{\ell+1}. \quad (\text{B.10})$$

Ao chegar ao primeiro termo, ele é comparado com o valor dado por (B.9). Todos os termos são então multiplicados pelo fator de proporcionalidade obtido, para chegar ao resultado final.

Do mesmo modo como no caso anterior, a parte real dos coeficientes é

$$b_{\ell} = C_{\ell} \cos\left(\frac{ya}{2}\right) - S_{\ell} \sin\left(\frac{ya}{2}\right), \quad (\text{B.10})$$

com C_{ℓ} e S_{ℓ} representando agora os termos pares e ímpares, respectivamente.

Há uma dificuldade associada ao rápido decaimento desses coeficientes. Ao ser usado $N = 32$, antes de atingir o termo de ordem zero, já ocorre um "overflow" (o maior valor manipulado pelo Dec-10 é 10^{39}): Isto foi resolvido fazendo o termo N não igual a 1, mas sim a um número bem menor, como por exemplo 10^{-35} .

B.2 Cálculo dos Coeficientes Independentes da Oscilação

Como mencionado no Capítulo 4, os pesos da equação (60) podem ser reescritos, ficando a equação sob a forma

$$c_{\ell} \equiv d_{\ell,m} = \sum_{n=0}^m w_{\ell,n} f(k_n). \quad (\text{B.11})$$

Os novos pesos são simplesmente

$$w_{\ell,n} = w_n q_{\ell}(k_n). \quad (\text{B.12})$$

Esses pesos dependem apenas do grau da quadratura, e podem ser calculados e armazenados a priori.

B.3 Reagrupamento dos Coeficientes

Escolhido o grau da quadratura e conhecida a variável de oscilação, é possível escrever a fórmula da integração (equação (61)) como

$$T_m(y) = \sum_{\ell=0}^m \sum_{n=0}^m w_{\ell,n} b_{\ell} f(k_n). \quad (\text{B.13})$$

Efetuando primeiro o somatório em ℓ , a equação fica sendo

$$T_m(y) = \sum_{n=0}^m w'_n f(k_n), \quad (\text{B.14})$$

onde os pesos w'_n são

$$w'_n = \sum_{\ell=0}^m w_{\ell,n} b_{\ell} \quad (B.15)$$

Esta formulação é eficiente quando as transformadas de Fourier são feitas repetidas vezes para os mesmos valores da oscilação, como no problema desta tese.

B.4 Implementação em FORTRAN

As idéias apresentadas aqui foram implementadas no Dec-System 10 da UFPa, que tem uma mantissa de 7 bits. A parte fracionária ocupa 27 bits em precisão simples e 62 em dupla. A seguir, estão listadas 3 subrotinas que realizam a transformada inversa.

A subrotina LLANG é simplesmente a implementação da equação (B.14). A subrotina XLLANG calcula os pesos para essa equação, dados os números de pontos de cada quadratura e a abcissa de troca. Esses pesos já são calculados para todos os valores da oscilação. O primeiro valor é Y_0 , o incremento DY , e NL é o seu número. Para o arranjo dipolo-dipolo com as dimensões normalizadas, $NL = 8$, $Y_0 = 1$, $DY = 1$. A subrotina XLLORT calcula os pesos para o caso ortogonal, ou seja, sem oscilação.

As abcissas e os pesos originais da quadratura estão em dois BLOCK DATA. Foram utilizados os valores para a quadratura de Gauss-Laguerre de grau 32, em dupla precisão, que estão em Krylov (1972). Os pesos foram multiplicados, ainda em precisão dupla, pelos polinômios de Legendre e Laguerre. Estes foram gerados pelas fórmulas de recorrência de Abramowitz e Stegun (1965), e conferidos com a utilização das subrotinas do "Standard Subroutine Package" acessível no Dec-10.

A equação (56) do Capítulo 4 pode ser usada para testar

os pesos, através da ortogonalidade dos polinômios de Legendre e Laguerre. Lembrando que nesses dois casos o polinômio de grau zero é igual a 1,

$$c_\ell = \int_a^b p(k) q_\ell(k) q_0(k) dk = \sum_{n=0}^m w_n q_\ell(k_n) = \begin{cases} 1 & \text{se } \ell = 0 \\ 0 & \text{se } \ell \neq 0 \end{cases}$$

Os resultados foram melhores que 10^{-16} .

SUBROTINA LLANG

CALCULA A TRANSFORMADA DE FOURIER PARA UMA FUNCAO
COM DESCONTINUIDADE LOGARITMICA NA ORIGEM

ARGUMENTOS:

V VALOR DA TRANSFORMADA
L ORDEM DA OSCILACAO ($1 < L < 8$)
F VETOR COM VALORES DA FUNCAO

SUBROUTINE LLANG(V,L,F)

CONSTANTES EM COMMON BLOCK:

X VETOR COM ABCESSAS DA FUNCAO
N NUMERO DE PONTOS
Y0 ARGUMENTO INICIAL DA OSCILACAO
DY0 INCREMENTO DA OSCILACAO
W PESOS PARA INTEGRACAO, CALCULADOS POR XLLANG E XLLORT

COMMON/LAMBDA/X(32),N,Y0,DY0

COMMON/BLKW/W(30,8)

DIMENSION F(1)

V=0.

DO 1 I=1,N

V=F(I)*W(I,L)+V

CONTINUE

V=V/3.14159265

RETURN

END

SUBROTINA XLLANG

CALCULA ABCISSAS E PESOS PARA A INTEGRACAO OSCILANTE

ARGUMENTOS:

NE NUMERO DE PONTOS NO PRIMEIRO TRECHO
NA " " SEGUNDO
C ABCISSA DE SEPARACAO DOS TRECHOS

SUBROUTINE XLLANG(NE,NA,C)

CONSTANTES EM COMMON BLOCK:

X VETOR COM ABCISSAS PARA CALCULO DA FUNCAO
N NUMERO DE PONTOS
Y0 ARGUMENTO INICIAL DA OSCILACAO
DY0 INCREMENTO DA OSCILACAO
W MATRIZ COM PESOS PARA INTEGRACAO
ZE,WE ABCISSAS E PESOS PARA O PRIMEIRO TRECHO (V. QLEGOS)
ZA,WA " " " " " " SEGUNDO (V. QLAGOS)

COMMON/LAMBDA/X(32),N,Y0,DY0
COMMON/BLKW/W(30,8)
COMMON/BLKE/ZE(32),WE(32,32)
COMMON/BLKD/ZA(32),WA(32,32)
DIMENSION B(8,32)

CALCULO DAS ABCISSAS EM FUNCAO DO PONTO C

DO 1 I=1,NE
X(I)=ZE(I)*C
DO 2 I=1,NA
X(I+NE)=ZA(I)+C

CALCULO DOS PESOS PARA O PRIMEIRO TRECHO

NK=29 ! se maior, estoura mantissa
B0=C ! do Dec-10
Y=Y0*B0/2. ! ver definicao da integral
DY=DY0*B0/2.
DO 11 L=1,8 ! loop para os argumentos
CA=COS(Y)
SA=SIN(Y)
B(L,NK+1)=0. ! recorrencia inversa
B(L,NK)=1.0E-35 ! evita estouro da mantissa
DO 12 K=NK,3,-2 ! coef. pares e impares
B(L,K-1)=FLOAT(2*K-3)*(-B(L,K)/Y+B(L,K+1)/FLOAT(2*K+1))
I=K-1
B(L,I-1)=FLOAT(2*I-3)*(B(L,I)/Y+B(L,I+1)/FLOAT(2*I+1))
CONTINUE
E=SIN(Y)/(Y*B(L,1)) ! fator multiplicativo
DO 14 K=1,NK,2 ! ajuste final
B(L,K)=B(L,K)*E*CA
B(L,K+1)=-B(L,K+1)*E*SA
CONTINUE
DO 15 I=1,NE ! reagrupamento
W(I,L)=0.
DO 16 K=1,NK-1
W(I,L)=B(L,K)*WE(I,K)+W(I,L)
W(I,L)=W(I,L)*C
Y=Y+DY

CALCULO DOS COEFICIENTES DO SEGUNDO TRECHO

NK=32
A0=C
Y=Y0
DO 21 L=1,8 ! loop para os argumentos

```
CA=COS(Y*AO)
SA=SIN(Y*AO)
CO=1./(1.+Y*Y)
SO=Y*CO
B(L,1)=CO*CA-SO*SA
A=SO
DO 22 K=2,NK          ! recorrencia normal
C1=A*(Y*CO+SO)
S1=A*(Y*SO-CO)
B(L,K)=C1*CA-S1*SA
CO=C1
SO=S1
22 CONTINUE
DO 25 I=1,NA          ! readrupamento
J=I+NE
W(J,L)=0.
DO 25 K=1,NK
W(J,L)=B(L,K)*WA(I,K)+W(J,L)
25 CONTINUE
21 Y=Y+DY
RETURN
END
```

SUBROTINA XLLORT

CALCULA AS ABCISSAS E PESOS PARA INTEGRAL SEM OSCILACAO

ARGUMENTOS:

NE NUMERO DE PONTOS NO PRIMEIRO TRECHO

NA " " " " SEGUNDO " "

C ABCISSA DE SEPARACAO DOS TRECHOS

SUBROUTINE XLLORT(NE,NA,C)

CONSTANTES EM COMMON BLOCK

X VETOR COM ABCISSAS PARA CALCULO DA FUNCAO

N NUMERO DE PONTOS

YO ARGUMENTO INICIAL DA OSCILACAO (sem uso aqui)

DYO INCREMENTO DA OSCILACAO (" " " ")

W MATRIZ COM PESOS PARA INTEGRACAO

ZE,WE ABCISSAS E PESOS PARA O PRIMEIRO TRECHO (V. QLEGOS)

ZA,WA " " " " SEGUNDO " " (V. QLAGOS)

COMMON/LAMBDA/X(32),N,YO

COMMON/BLKW/W(30,8)

COMMON/BLKE/ZE(32),WE(32,32)

COMMON/BLKD/ZA(32),WA(32,32)

CALCULO DAS ABCISSAS EM FUNCAO DO PONTO C

ARRANJO DOS PESOS PARA COMPATIBILIZAR COM LLANG

DO 1 I=1,NE

X(I)=ZE(I)*C

DO 1 J=1,8

1 W(I,J)=WE(I,1)*C

DO 2 I=1,NA

DO 2 J=1,11

W(I+NE,J)=WA(I,1)

2 X(I+NE)=ZA(I)+C

RETURN

END

ABCISSAS E PESOS PARA LAGUERRE OSCILANTE - PRIMEIRO TRECHO

VALORES ORIGINAIS EM KRYLOV (1962)

ABCISSAS MULTIPLICADAS POR e^{-x}
PESOS MULTIPLICADOS PELOS POLINOMIOS DE LEGENDRE

$$P_1(2e^{-x} - 1)$$

BLOCK DATA OLEGOS
COMMON/BLKE/Z(32),W(32,32)

DATA Z/

* 0.95648577E+00, 0.79094558E+00, 0.56164538E+00, 0.34216960E+00,
* 0.17863534E+00, 0.79791627E-01, 0.30433440E-01, 0.98877637E-02,
* 0.27286221E-02, 0.63739135E-03, 0.12553312E-03, 0.20748873E-04,
* 0.28628355E-05, 0.32770902E-06, 0.30901709E-07, 0.23907246E-08,
* 0.14843277E-09, 0.74067007E-11, 0.29197687E-12, 0.89544198E-14,
* 0.20977528E-15, 0.36722770E-17, 0.46762376E-19, 0.41890629E-21,
* 0.25302571E-23, 0.97502054E-26, 0.22746296E-28, 0.27049810E-31,
* 0.14963537E-34, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00/

DATA W/

* 0.10921834E+00, 0.21044311E+00, 0.23521323E+00, 0.19590334E+00,
* 0.12998379E+00, 0.70578624E-01, 0.31760913E-01, 0.11918215E-01,
* 0.37388163E-02, 0.98080331E-03, 0.21486492E-03, 0.39203420E-04,
* 0.59345416E-05, 0.74164046E-06, 0.76045679E-07, 0.63506022E-08,
* 0.42813830E-09, 0.23058995E-10, 0.97993793E-12, 0.32378017E-13,
* 0.81718234E-15, 0.15421338E-16, 0.21197923E-18, 0.20544297E-20,
* 0.13469826E-22, 0.56612941E-25, 0.14185605E-27, 0.19133755E-30,
* 0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.99713238E-01, 0.12245499E+00, 0.28999617E-01, -0.61839003E-01,
* -0.83544391E-01, -0.59315457E-01, -0.29827725E-01, -0.11682526E-01,
* -0.37184127E-02, -0.97955300E-03, -0.21481097E-03, -0.39201793E-04,
* -0.59345076E-05, -0.74163997E-06, -0.76045674E-07, -0.63506022E-08,
* -0.42813830E-09, -0.23058995E-10, -0.97993793E-12, -0.32378017E-13,
* -0.81718234E-15, -0.15421338E-16, -0.21197923E-18, -0.20544297E-20,
* -0.13469826E-22, -0.56612941E-25, -0.14185605E-27, -0.19133755E-30,
* -0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.81943852E-01, 0.16616570E-02, -0.11224354E+00, -0.68671444E-01,
* 0.15552753E-01, 0.39485244E-01, 0.26137850E-01, 0.11218139E-01,
* 0.36777724E-02, 0.97705476E-03, 0.21470310E-03, 0.39198539E-04,
* 0.59344397E-05, 0.74163900E-06, 0.76045665E-07, 0.63506021E-08,
* 0.42813830E-09, 0.23058995E-10, 0.97993793E-12, 0.32378017E-13,
* 0.81718234E-15, 0.15421338E-16, 0.21197923E-18, 0.20544297E-20,
* 0.13469826E-22, 0.56612941E-25, 0.14185605E-27, 0.19133755E-30,
* 0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.58211850E-01, -0.80025151E-01, -0.42397395E-01, 0.77354140E-01,
* 0.39035911E-01, -0.15763128E-01, -0.21026385E-01, -0.10538806E-01,
* -0.36172281E-02, -0.97331339E-03, -0.21454135E-03, -0.39193659E-04,
* -0.59343377E-05, -0.74163754E-06, -0.76045651E-07, -0.63506020E-08,
* -0.42813830E-09, -0.23058995E-10, -0.97993793E-12, -0.32378017E-13,
* -0.81718234E-15, -0.15421338E-16, -0.21197923E-18, -0.20544297E-20,
* -0.13469826E-22, -0.56612941E-25, -0.14185605E-27, -0.19133755E-30,
* -0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.31547195E-01, -0.82736617E-01, 0.75035041E-01, 0.87726616E-02,
* -0.55571232E-01, -0.64306379E-02, 0.14953117E-01, 0.95645885E-02,
* 0.35372747E-02, 0.96833602E-03, 0.21432577E-03, 0.39187153E-04,
* 0.59342018E-05, 0.74163560E-06, 0.76045632E-07, 0.63506019E-08,
* 0.42813829E-09, 0.23058995E-10, 0.97993793E-12, 0.32378017E-13,
* 0.81718234E-15, 0.15421338E-16, 0.21197923E-18, 0.20544297E-20,
* 0.13469826E-22, 0.56612941E-25, 0.14185605E-27, 0.19133755E-30,
* 0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.52735647E-02, -0.22638551E-01, 0.50569945E-01, -0.66867846E-01,
* 0.33062341E-01, 0.22338451E-01, -0.84562343E-02, -0.86211939E-02,
* -0.34385651E-02, -0.96213218E-03, -0.21405645E-03, -0.39179020E-04,
* -0.59340319E-05, -0.74163317E-06, -0.76045608E-07, -0.63506018E-08,
* -0.42813829E-09, -0.23058995E-10, -0.97993793E-12, -0.32378017E-13,

* -0.81718234E-15, -0.15421338E-16, -0.21197923E-18, -0.20544297E-20,
 * -0.13469826E-22, -0.56612941E-25, -0.14185605E-27, -0.19133755E-30,
 * -0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
 * -0.17462536E-01, 0.44796364E-01, -0.51098722E-01, 0.31386637E-01,
 * 0.73507775E-02, 0.29059417E-01, 0.20985399E-02, 0.74391357E-02,
 * 0.33219045E-02, 0.95471370E-03, 0.21373349E-03, 0.39169263E-04,
 * 0.59338281E-05, 0.74163025E-06, 0.76045580E-07, 0.63506016E-08,
 * 0.42813828E-09, 0.23058995E-10, 0.97993793E-12, 0.32378017E-13,
 * 0.81718234E-15, 0.15421338E-16, 0.21197923E-18, 0.20544297E-20,
 * 0.13469826E-22, 0.56612941E-25, 0.14185605E-27, 0.19133755E-30,
 * 0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
 * -0.34128253E-01, 0.67813888E-01, -0.55045667E-01, 0.38915596E-01,
 * -0.37113333E-01, 0.26207938E-01, 0.35881293E-02, -0.61527332E-02,
 * -0.31882426E-02, -0.94609477E-03, -0.21335701E-03, -0.39157881E-04,
 * -0.59335902E-05, -0.74162685E-06, -0.76045547E-07, -0.63506014E-08,
 * -0.42813827E-09, -0.23058995E-10, -0.97993793E-12, -0.32378017E-13,
 * -0.81718234E-15, -0.15421338E-16, -0.21197923E-18, -0.20544297E-20,
 * -0.13469826E-22, -0.56612941E-25, -0.14185605E-27, -0.19133755E-30,
 * -0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
 * -0.43141763E-01, 0.34791248E-01, 0.31986466E-01, -0.50496048E-01,
 * 0.38293996E-01, -0.15870991E-01, -0.81544663E-02, 0.47989931E-02,
 * 0.30386653E-02, 0.93629184E-03, 0.21292715E-03, 0.39144874E-04,
 * 0.59333184E-05, 0.74162296E-06, 0.76045516E-07, 0.63506011E-08,
 * 0.42813827E-09, 0.23058995E-10, 0.97993793E-12, 0.32378017E-13,
 * 0.81718234E-15, 0.15421338E-16, 0.21197923E-18, 0.20544297E-20,
 * 0.13469826E-22, 0.56612941E-25, 0.14185605E-27, 0.19133755E-30,
 * 0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
 * -0.44061823E-01, -0.22038935E-01, 0.56378571E-01, -0.44834547E-02,
 * -0.13500978E-01, 0.18985208E-02, 0.11275908E-01, -0.34164079E-02,
 * -0.28743847E-02, -0.92532360E-03, -0.21244408E-03, -0.39130245E-04,
 * -0.59330126E-05, -0.74161858E-06, -0.76045467E-07, -0.63506009E-08,
 * -0.42813826E-09, -0.23058995E-10, -0.97993793E-12, -0.32378017E-13,
 * -0.81718234E-15, -0.15421338E-16, -0.21197923E-18, -0.20544297E-20,
 * -0.13469826E-22, -0.56612941E-25, -0.14185605E-27, -0.19133755E-30,
 * -0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
 * -0.37604075E-01, -0.55678276E-01, -0.15581002E-01, 0.49135426E-01,
 * -0.17977395E-01, 0.11252349E-01, 0.12781180E-01, 0.20437148E-02,
 * 0.26967284E-02, 0.91321097E-03, 0.21190797E-03, 0.39113993E-04,
 * 0.59326729E-05, 0.74161372E-06, 0.76045420E-07, 0.63506006E-08,
 * 0.42813826E-09, 0.23058995E-10, 0.97993793E-12, 0.32378017E-13,
 * 0.81718234E-15, 0.15421338E-16, 0.21197923E-18, 0.20544297E-20,
 * 0.13469826E-22, 0.56612941E-25, 0.14185605E-27, 0.19133755E-30,
 * 0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
 * -0.25485658E-01, -0.41816616E-01, -0.54920598E-01, -0.24931741E-01,
 * 0.34332396E-01, -0.19779557E-01, 0.12664431E-01, -0.71865494E-03,
 * -0.25071271E-02, -0.89997702E-03, -0.21131903E-03, -0.39096120E-04,
 * -0.59322992E-05, -0.74160838E-06, -0.76045369E-07, -0.63506002E-08,
 * -0.42813825E-09, -0.23058994E-10, -0.97993792E-12, -0.32378017E-13,
 * -0.81718234E-15, -0.15421338E-16, -0.21197923E-18, -0.20544297E-20,
 * -0.13469826E-22, -0.56612941E-25, -0.14185605E-27, -0.19133755E-30,
 * -0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
 * -0.10125985E-01, 0.44007067E-02, 0.13044481E-02, -0.29040025E-01,
 * -0.25814727E-01, 0.21546232E-01, -0.11079959E-01, -0.52322249E-03,
 * 0.23071020E-02, 0.88564697E-03, 0.21067748E-03, 0.39076626E-04,
 * 0.59318915E-05, 0.74160254E-06, 0.76045312E-07, 0.63505999E-08,
 * 0.42813825E-09, 0.23058994E-10, 0.97993792E-12, 0.32378017E-13,
 * 0.81718234E-15, 0.15421338E-16, 0.21197923E-18, 0.20544297E-20,
 * 0.13469826E-22, 0.56612941E-25, 0.14185605E-27, 0.19133755E-30,
 * 0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
 * 0.57468841E-02, 0.43524439E-01, 0.51005218E-01, 0.40642372E-01,
 * 0.21602311E-03, -0.18564667E-01, 0.83204413E-02, 0.1649728E-02,
 * -0.20982512E-02, 0.87024805E-03, -0.20998356E-03, -0.39055514E-04,
 * -0.59314499E-05, -0.74159622E-06, -0.76045251E-07, -0.63505995E-08,
 * -0.42813825E-09, -0.23058994E-10, -0.97993791E-12, -0.32378017E-13,
 * -0.81718234E-15, -0.15421338E-16, -0.21197923E-18, -0.20544297E-20,
 * -0.13469826E-22, -0.56612941E-25, -0.14185605E-27, -0.19133755E-30,
 * -0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,

* 0.19521416E-01, 0.44757568E-01, 0.10916494E-01, 0.22237020E-02,
* 0.23703047E-01, 0.68408591E-02, -0.47813279E-02, -0.26327463E-02,
* 0.18822348E-02, 0.85380955E-03, 0.20923753E-03, 0.39032784E-04,
* 0.59309743E-05, 0.74158942E-06, 0.76045185E-07, 0.63505991E-08,
* 0.42813824E-09, 0.23058994E-10, 0.97993791E-12, 0.32378017E-13,
* 0.81718234E-15, 0.15421338E-16, 0.21197923E-18, 0.20544297E-20,
* 0.13469826E-22, 0.56612941E-25, 0.14185605E-27, 0.19133755E-30,
* 0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.29093070E-01, 0.97289878E-02, -0.45002791E-01, -0.39289956E-01,
* -0.29655265E-01, 0.43452893E-02, 0.91550800E-03, 0.34496245E-02,
* -0.16607607E-02, -0.83636266E-03, -0.20843967E-03, -0.39008438E-04,
* -0.59304648E-05, -0.74158213E-06, -0.76045115E-07, -0.63505984E-08,
* -0.42813824E-09, -0.23058994E-10, -0.97993790E-12, -0.32378016E-13,
* -0.81718234E-15, -0.15421338E-16, -0.21197923E-18, -0.20544297E-20,
* -0.13469826E-22, -0.56612941E-25, -0.14185605E-27, -0.19133755E-30,
* -0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.33160891E-01, -0.30991621E-01, -0.20984292E-01, 0.21944733E-01,
* 0.14707742E-01, -0.13488772E-01, 0.28166636E-02, -0.40832751E-02,
* 0.14355689E-02, 0.81794048E-03, 0.20759029E-03, 0.35982477E-04,
* 0.59299213E-05, 0.74157435E-06, 0.76045040E-07, 0.63505991E-08,
* 0.42813823E-09, 0.23058994E-10, 0.97993790E-12, 0.32378016E-13,
* 0.81718234E-15, 0.15421338E-16, 0.21197923E-18, 0.20544297E-20,
* 0.13469826E-22, 0.56612941E-25, 0.14185605E-27, 0.19133755E-30,
* 0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.31387307E-01, -0.44163387E-01, 0.37333416E-01, 0.23532074E-01,
* 0.95607085E-02, 0.17915862E-01, -0.59964975E-02, 0.48229042E-02,
* -0.12084159E-02, -0.79857790E-03, -0.20668970E-03, -0.30554903E-04,
* -0.59293439E-05, -0.74156609E-06, -0.76044960E-07, -0.63505976E-08,
* -0.42813823E-09, -0.23058994E-10, -0.97993790E-12, -0.32378016E-13,
* -0.81718234E-15, -0.15421338E-16, -0.21197923E-18, -0.20544297E-20,
* -0.13469826E-22, -0.56612941E-25, -0.14185605E-27, -0.19133755E-30,
* -0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.24400832E-01, -0.20699022E-01, 0.28768514E-01, -0.35169212E-01,
* -0.25839154E-01, -0.16537696E-01, 0.82899749E-02, -0.47641927E-02,
* 0.98105969E-03, 0.77831155E-03, 0.20573824E-03, 0.38925718E-04,
* 0.59287326E-05, 0.74155734E-06, 0.76044875E-07, 0.63505971E-08,
* 0.42813822E-09, 0.23058994E-10, 0.97993789E-12, 0.32378016E-13,
* 0.81718234E-15, 0.15421338E-16, 0.21197923E-18, 0.20544297E-20,
* 0.13469826E-22, 0.56612941E-25, 0.14185605E-27, 0.19133755E-30,
* 0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.13646700E-01, 0.18383767E-01, -0.28461375E-01, -0.67475209E-03,
* 0.23283568E-01, 0.10092688E-01, -0.94801302E-02, 0.48093116E-02,
* -0.75524360E-03, -0.75717971E-03, -0.20473626E-03, -0.38894723E-04,
* -0.59280873E-05, -0.74154810E-06, -0.76044786E-07, -0.63505965E-08,
* -0.42813822E-09, -0.23058994E-10, -0.97993789E-12, -0.32378016E-13,
* -0.81718234E-15, -0.15421338E-16, -0.21197923E-18, -0.20544297E-20,
* -0.13469826E-22, -0.56612941E-25, -0.14185605E-27, -0.19133755E-30,
* -0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.11143550E-02, 0.40523907E-01, -0.34172690E-01, 0.33826088E-01,
* -0.46346157E-02, -0.82921456E-03, 0.94855771E-02, -0.46667164E-02,
* 0.53268130E-03, 0.73522225E-03, 0.20368415E-03, 0.38862520E-04,
* 0.59274081E-05, 0.74153838E-06, 0.76044692E-07, 0.63505959E-08,
* 0.42813822E-09, 0.23058994E-10, 0.97993789E-12, 0.32378016E-13,
* 0.81718234E-15, 0.15421338E-16, 0.21197923E-18, 0.20544297E-20,
* 0.13469826E-22, 0.56612941E-25, 0.14185605E-27, 0.19133755E-30,
* 0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* -0.11010555E-01, 0.28529776E-01, 0.18880364E-01, -0.20204063E-01,
* -0.16359068E-01, -0.82514977E-02, -0.83635429E-02, 0.43507324E-02,
* -0.31504168E-03, -0.71248051E-03, -0.20258230E-03, -0.38828512E-04,
* -0.59266950E-05, -0.74152818E-06, -0.76044593E-07, -0.63505952E-08,
* -0.42813821E-09, -0.23058994E-10, -0.97993788E-12, -0.32378016E-13,
* -0.81718233E-15, -0.15421338E-16, -0.21197923E-18, -0.20544297E-20,
* -0.13469826E-22, -0.56612941E-25, -0.14185605E-27, -0.19133755E-30,
* -0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* -0.20711426E-01, -0.62340630E-02, 0.37169127E-01, -0.19823169E-01,
* 0.24974927E-01, 0.14345703E-01, 0.62975240E-02, -0.38809461E-02,
* 0.10393440E-03, 0.68899726E-03, 0.20143113E-03, 0.38792901E-04,

* 0.59259480E-05, 0.74151748E-06, 0.76044490E-07, 0.63505946E-08,
* 0.42813821E-09, 0.23058994E-10, 0.97993788E-12, 0.32378015E-13,
* 0.81718233E-15, 0.15421338E-16, 0.21197923E-18, 0.20544297E-20,
* 0.13469826E-22, 0.56612941E-25, 0.14185605E-27, 0.19133755E-30,
* 0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* -0.26463921E-01, -0.34386724E-01, -0.90935030E-02, 0.31568359E-01,
* -0.15758514E-01, -0.15695811E-01, -0.35713764E-02, 0.32814264E-02,
* 0.99104025E-04, -0.66481657E-03, -0.20023105E-03, -0.38755688E-04,
* -0.59251670E-05, -0.74150630E-06, -0.76044382E-07, -0.63505939E-08,
* -0.42813820E-09, -0.23058994E-10, -0.97993788E-12, -0.32378015E-13,
* -0.81718233E-15, -0.15421338E-16, -0.21197923E-18, -0.20544297E-20,
* -0.13469826E-22, -0.56612941E-25, -0.14185605E-27, -0.19133755E-30,
* -0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* -0.27466464E-01, -0.33210629E-01, -0.37815989E-01, -0.51737912E-03,
* -0.40994061E-02, 0.12084454E-01, 0.53311857E-03, -0.25798067E-02,
* 0.29262338E-03, 0.63998372E-03, 0.19898254E-03, 0.38716875E-04,
* 0.59243522E-05, 0.74149444E-06, 0.76044269E-07, 0.63505939E-08,
* 0.42813820E-09, 0.23058994E-10, 0.97993788E-12, 0.32378015E-13,
* 0.81718233E-15, 0.15421338E-16, 0.21197923E-18, 0.20544297E-20,
* 0.13469826E-22, 0.56612941E-25, 0.14185605E-27, 0.19133755E-30,
* 0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* -0.23743792E-01, -0.48656895E-02, -0.40846625E-03, -0.29985525E-01,
* 0.20292398E-01, -0.48377371E-02, 0.24472095E-02, 0.19882583E-02,
* 0.47527201E-03, -0.61454514E-03, -0.19768604E-03, -0.38676767E-04,
* -0.59235035E-05, -0.74148249E-06, -0.76044151E-07, -0.63505924E-08,
* -0.42813819E-09, -0.23058994E-10, -0.97993787E-12, -0.32378015E-13,
* -0.81718232E-15, -0.15421338E-16, -0.21197923E-18, -0.20544297E-20,
* -0.13469826E-22, -0.56612941E-25, -0.14185605E-27, -0.19133755E-30,
* -0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* -0.16111005E-01, 0.26379590E-01, 0.36262744E-01, 0.19063941E-01,
* -0.21641666E-01, -0.36446105E-02, -0.50207305E-02, -0.99239614E-03,
* -0.64580810E-03, 0.58854827E-03, 0.19634206E-03, 0.38634464E-04,
* 0.59226209E-05, 0.74146985E-06, 0.76044029E-07, 0.63505916E-08,
* 0.42813819E-09, 0.23058994E-10, 0.97993787E-12, 0.32378015E-13,
* 0.81718232E-15, 0.15421338E-16, 0.21197923E-18, 0.20544297E-20,
* 0.13469826E-22, 0.56612941E-25, 0.14185605E-27, 0.19133755E-30,
* 0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* -0.60086116E-02, 0.34817059E-01, 0.91694726E-02, 0.17062352E-01,
* 0.77634645E-02, 0.10671101E-01, 0.68990619E-02, 0.17015354E-03,
* 0.80310990E-03, -0.56204150E-03, -0.19495109E-03, -0.38590870E-04,
* -0.59217044E-05, -0.74145673E-06, -0.76043902E-07, -0.63505903E-08,
* -0.42813818E-09, -0.23058994E-10, -0.97993787E-12, -0.32378015E-13,
* -0.81718232E-15, -0.15421338E-16, -0.21197923E-18, -0.20544297E-20,
* -0.13469826E-22, -0.56612941E-25, -0.14185605E-27, -0.19133755E-30,
* -0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.47601464E-02, 0.14358454E-01, -0.32746999E-01, -0.28962563E-01,
* 0.11067345E-01, -0.14101606E-01, -0.78854586E-02, 0.62933282E-03,
* -0.94618477E-03, 0.53507402E-03, 0.19351365E-03, 0.38545687E-04,
* 0.59207540E-05, 0.74144312E-06, 0.76043771E-07, 0.63505899E-08,
* 0.42813818E-09, 0.23058994E-10, 0.97993787E-12, 0.32378015E-13,
* 0.81718232E-15, 0.15421338E-16, 0.21197923E-18, 0.20544297E-20,
* 0.13469826E-22, 0.56612941E-25, 0.14185605E-27, 0.19133755E-30,
* 0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.14343317E-01, -0.17194461E-01, -0.16788868E-01, 0.14954435E-02,
* -0.21477086E-01, 0.12990657E-01, 0.78944655E-02, -0.13767891E-02,
* 0.10741770E-02, -0.50769577E-03, -0.19203029E-03, -0.38498918E-04,
* -0.59197698E-05, -0.74142903E-06, -0.76043634E-07, -0.63505891E-08,
* -0.42813817E-09, -0.23058994E-10, -0.97993787E-12, -0.32378015E-13,
* -0.81718232E-15, -0.15421337E-16, -0.21197923E-18, -0.20544297E-20,
* -0.13469826E-22, -0.56612941E-25, -0.14185605E-27, -0.19133755E-30,
* -0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.21152104E-01, -0.33556939E-01, 0.27584605E-01, 0.27068774E-01,
* 0.16449341E-01, -0.78396599E-02, -0.69581663E-02, 0.20457842E-02,
* -0.11863740E-02, 0.47995730E-03, 0.19050155E-03, 0.38450567E-04,
* 0.59187518E-05, 0.74141445E-06, 0.76043493E-07, 0.63505882E-08,
* 0.42813817E-09, 0.23058994E-10, 0.97993786E-12, 0.32378015E-13,
* 0.81718231E-15, 0.15421337E-16, 0.21197923E-18, 0.20544297E-20,

* 0.13469826E-22, 0.56612941E-25, 0.14185605E-27, 0.19133755E-30,
* 0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.24118964E-01, -0.21783285E-01, 0.22939438E-01, -0.18260674E-01,
* -0.19623818E-04, 0.39302455E-03, 0.52186886E-02, -0.26135909E-02,
* 0.12822121E-02, -0.45190967E-03, -0.18892801E-03, -0.38400635E-04,
* -0.59176999E-05, -0.74139938E-06, -0.76043348E-07, -0.63505872E-08,
* -0.42813816E-09, -0.23058994E-10, -0.97993786E-12, -0.32378015E-13,
* -0.81718231E-15, -0.15421337E-16, -0.21197923E-18, -0.20544297E-20,
* -0.13469826E-22, -0.56612941E-25, -0.14185605E-27, -0.19133755E-30,
* -0.11922488E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00/
END

CCCCC

ABCISSAS E PESOS PARA LAGUERRE OSCILANTE - SEGUNDO TRECHO

VALORES ORIGINAIS EM KRYLOV (1962)

PESOS MULTIPLICADOS POR e^x
 ABCISSAS MULTIPLICADAS PELO POLINOMIO DE LAGUERRE $L(x)$

BLOCK DATA QLAGOS
 COMMON/BLKD/X(32),W(32,32)

DATA X

1/.0444893658,.23452611,.57688463,1.0724488,1.7224088
 2,2.5283367,3.4922133,4.6164568,5.9039585,7.3581267
 3,8.9829409,10.783019,12.763698,14.931140,17.292454
 4,19.855861,22.630890,25.628636,28.862102,32.346629
 5,36.100495,40.145719,44.509207,49.224395,54.333721
 6,59.892509,65.975377,72.687628,80.187447,88.735340
 7,98.829543,111.75140/

DATA W/

* 0.10921834E+00, 0.21044311E+00, 0.23521323E+00, 0.19590334E+00,
 * 0.12998378E+00, 0.70578624E-01, 0.31760913E-01, 0.11918215E-01,
 * 0.37388163E-02, 0.98080331E-03, 0.21484492E-03, 0.39203420E-04,
 * 0.59345416E-05, 0.74164046E-06, 0.76045679E-07, 0.63506022E-08,
 * 0.42813830E-09, 0.23058995E-10, 0.97993793E-12, 0.32378017E-13,
 * 0.81718234E-15, 0.15421338E-16, 0.21197923E-18, 0.20544296E-20,
 * 0.13469826E-22, 0.56612941E-25, 0.14185605E-27, 0.19133755E-30,
 * 0.11922488E-33, 0.26715112E-37, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
 * 0.10435929E+00, 0.16108871E+00, 0.99522334E-01, -0.14192963E-01,
 * -0.93901427E-01, -0.10786790E+00, -0.79154970E-01, -0.43101710E-01,
 * -0.18335000E-01, -0.62360717E-02, -0.17152540E-02, -0.38352780E-03,
 * -0.69812155E-04, -0.10331897E-04, -0.12389707E-05, -0.11974607E-06,
 * -0.92610124E-08, -0.56791159E-09, -0.27303131E-10, -0.10149417E-11,
 * -0.28683504E-13, -0.60367937E-15, -0.92230481E-17, -0.99073624E-19,
 * -0.71839594E-21, -0.33340781E-23, -0.92171504E-26, -0.13716535E-28,
 * -0.94411138E-32, -0.23438594E-35, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
 * 0.99608320E-01, 0.11752175E+00, 0.29704331E-02, -0.11163050E+00,
 * -0.12497571E+00, -0.60727977E-01, 0.36001084E-02, 0.28876919E-01,
 * 0.24752631E-01, 0.13098394E-01, 0.50236991E-02, 0.14729004E-02,
 * 0.33784513E-03, 0.61264835E-04, 0.88159433E-05, 0.10060363E-05,
 * 0.90686888E-07, 0.64140028E-08, 0.35256821E-09, 0.14876370E-10,
 * 0.47431051E-12, 0.11204341E-13, 0.19131472E-15, 0.22887919E-17,
 * 0.18432234E-19, 0.94813729E-22, 0.29015583E-24, 0.47784073E-27,
 * 0.36430812E-30, 0.10046244E-33, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
 * 0.94963837E-01, 0.79289808E-01, -0.61968699E-01, -0.13668286E+00,
 * -0.73938810E-01, 0.21878897E-01, 0.54579378E-01, 0.32426321E-01,
 * 0.47648828E-02, -0.61385095E-02, -0.55261963E-02, -0.25835850E-02,
 * -0.82776773E-03, -0.19592195E-03, -0.35297212E-04, -0.49020143E-05,
 * -0.52678951E-06, -0.43725435E-07, -0.27861374E-08, -0.13492956E-09,
 * -0.48979748E-11, -0.13085909E-12, -0.25134155E-14, -0.33673950E-16,
 * -0.30263129E-18, -0.17326316E-20, -0.58913090E-23, -0.10772157E-25,
 * -0.91241717E-29, -0.28025229E-32, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
 * 0.90424255E-01, 0.45966970E-01, -0.10173585E+00, -0.11882579E+00,
 * -0.38229224E-02, 0.70004748E-01, 0.45163123E-01, -0.23353046E-02,
 * -0.17258846E-01, -0.92742041E-02, -0.10282442E-02, 0.13387625E-02,
 * 0.93936696E-03, 0.34252248E-03, 0.84211775E-04, 0.15000376E-04,
 * 0.19905320E-05, 0.19882580E-06, 0.14963279E-07, 0.84384511E-09,
 * 0.35277640E-10, 0.10759514E-11, 0.23425569E-13, 0.35374895E-15,
 * 0.35673421E-17, 0.22839700E-19, 0.86642925E-22, 0.17654099E-24,
 * 0.16667048E-27, 0.57190943E-31, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
 * 0.85988006E-01, 0.17152608E-01, -0.12181161E+00, -0.79053218E-01,
 * 0.53586715E-01, 0.73106314E-01, 0.60862667E-02, -0.27988439E-01,
 * -0.14498727E-01, 0.18653940E-02, 0.44174488E-02, 0.15894602E-02,
 * -0.44884517E-04, -0.24957220E-03, -0.11142669E-03, -0.28646789E-04,
 * -0.50051129E-05, -0.62626001E-06, -0.57211524E-07, -0.38322441E-08,
 * -0.18728992E-09, -0.65975688E-11, -0.16435394E-12, -0.28189283E-14,
 * -0.32102073E-16, -0.23108732E-18, -0.98258961E-21, -0.22400776E-23,
 * -0.23656698E-26, -0.90978584E-30, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
 * 0.81653540E-01, -0.75298158E-02, -0.12682953E+00, -0.31779318E-01,

* 0.86045042E-01, 0.44894724E-01, -0.30020204E-01, -0.27831481E-01,
 * 0.20680194E-02, 0.88607583E-02, 0.23419127E-02, -0.10581550E-02,
 * -0.76961202E-03, -0.12191820E-03, 0.46681404E-04, 0.29781693E-04,
 * 0.80435429E-05, 0.13612001E-05, 0.15785028E-06, 0.12931045E-07,
 * 0.75411358E-09, 0.31151855E-10, 0.89837374E-12, 0.17663847E-13,
 * 0.22887760E-15, 0.18640441E-17, 0.89308365E-20, 0.22883728E-22,
 * 0.27140217E-25, 0.11739426E-28, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
 * 0.77419323E-01, -0.28433903E-01, -0.12067831E+00, 0.13609982E-01,
 * 0.92694359E-01, 0.44828330E-02, -0.45991879E-01, -0.93422557E-02,
 * 0.14523873E-01, 0.55427016E-02, -0.24424416E-02, -0.16975244E-02,
 * 0.12492318E-04, 0.24755347E-03, 0.66883192E-04, -0.46140492E-05,
 * -0.67765428E-05, -0.19189344E-05, -0.30865258E-06, -0.32454095E-07,
 * -0.23280939E-08, -0.11515058E-09, -0.39029886E-11, -0.88992657E-13,
 * -0.13239643E-14, -0.12289026E-16, -0.66745557E-19, -0.19320500E-21,
 * -0.25846969E-24, -0.12623296E-27, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
 * 0.73283841E-01, -0.45891417E-01, -0.10659382E+00, 0.51501118E-01,
 * 0.7855316E-01, -0.32285586E-01, -0.39890443E-01, 0.12226831E-01,
 * 0.14704203E-01, -0.24585855E-02, -0.30862131E-02, 0.31082058E-04,
 * 0.67690259E-03, 0.10880924E-03, -0.60012058E-04, -0.23258325E-04,
 * -0.57421868E-06, 0.13584068E-05, 0.39670271E-06, 0.59056479E-07,
 * 0.54806424E-08, 0.33468516E-09, 0.13610685E-10, 0.36525911E-12,
 * 0.63092875E-14, 0.67329611E-16, 0.41748301E-18, 0.13731690E-20,
 * 0.20823747E-23, 0.11532068E-26, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
 * 0.69245595E-01, -0.60213347E-01, -0.87241788E-01, 0.79045203E-01,
 * 0.50953458E-01, -0.55898754E-01, -0.18984499E-01, 0.25127726E-01,
 * 0.52186064E-02, -0.75607759E-02, -0.12907185E-02, 0.15303813E-02,
 * 0.30751392E-03, -0.19503518E-03, -0.57501641E-04, 0.11481660E-04,
 * 0.63828560E-05, 0.40336419E-06, -0.24850081E-06, -0.71853903E-07,
 * -0.95620255E-08, -0.75836933E-09, -0.38132805E-10, -0.12287014E-11,
 * -0.24995274E-13, -0.30995819E-15, -0.22124914E-17, -0.83247649E-20,
 * -0.14390242E-22, -0.90795352E-26, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
 * 0.65303106E-01, -0.71690925E-01, -0.64792116E-01, 0.95357688E-01,
 * 0.17335518E-01, -0.63017519E-01, 0.64544553E-02, 0.25138426E-01,
 * -0.63994736E-02, -0.65894325E-02, 0.22046714E-02, 0.12295376E-02,
 * -0.41743737E-03, -0.17728540E-03, 0.44192183E-04, 0.19949822E-04,
 * -0.18007480E-05, -0.14899415E-05, -0.11195840E-06, 0.42749909E-07,
 * 0.11418959E-07, 0.13024098E-08, 0.85024143E-10, 0.33849424E-11,
 * 0.82639245E-13, 0.12069001E-14, 0.10017527E-16, 0.43457835E-19,
 * 0.86176082E-22, 0.62278562E-25, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
 * 0.61454907E-01, -0.80596596E-01, -0.40985362E-01, 0.10089029E+00,
 * -0.15940689E-01, -0.55004623E-01, 0.27535283E-01, 0.14598111E-01,
 * -0.13526617E-01, -0.12985859E-02, 0.35818956E-02, -0.24924099E-03,
 * -0.59211632E-03, 0.79493771E-04, 0.67169179E-04, -0.83623386E-05,
 * -0.55356126E-05, 0.26025045E-06, 0.30593059E-06, 0.21224697E-07,
 * -0.69828794E-08, -0.15774436E-08, -0.14704747E-09, -0.75682669E-11,
 * -0.22770189E-12, -0.39854358E-14, -0.38947014E-16, -0.19663498E-18,
 * -0.45060362E-21, -0.37524220E-24, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
 * 0.57699549E-01, -0.87184961E-01, -0.17192186E-01, 0.96945202E-01,
 * -0.44155843E-01, -0.36070284E-01, 0.38846119E-01, -0.67980641E-03,
 * -0.13404783E-01, 0.43476202E-02, 0.21630214E-02, -0.13808238E-02,
 * -0.12243920E-03, 0.21596363E-03, -0.85619030E-05, -0.20478497E-04,
 * 0.14804148E-05, 0.13087711E-05, -0.46821164E-07, -0.55719030E-07,
 * -0.28441143E-08, 0.10599914E-08, 0.18563407E-09, 0.13436571E-10,
 * 0.51880965E-12, 0.11146402E-13, 0.13029749E-15, 0.77435747E-18,
 * 0.20684111E-20, 0.19984675E-23, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
 * 0.54035603E-01, -0.91693671E-01, 0.55356618E-02, 0.85305984E-01,
 * -0.64350262E-01, -0.11577215E-01, 0.39851589E-01, -0.14541092E-01,
 * -0.72045292E-02, 0.70987074E-02, -0.64134657E-03, -0.12800196E-02,
 * 0.43132252E-03, 0.93890948E-04, -0.67078570E-04, -0.38385954E-06,
 * 0.53795859E-05, -0.30351891E-06, -0.26848762E-06, 0.11896207E-07,
 * 0.88742792E-08, 0.22115318E-09, -0.14284644E-09, -0.18051815E-10,
 * -0.96047653E-12, -0.26238515E-13, -0.37474034E-15, -0.26590501E-17,
 * -0.83648526E-20, -0.94515459E-23, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
 * 0.50461652E-01, -0.94344289E-01, 0.26408214E-01, 0.67963404E-01,
 * -0.75185263E-01, 0.13257142E-01, 0.29165379E-01, -0.22617406E-01,
 * 0.15910803E-02, 0.59223463E-02, -0.28338899E-02, -0.20052452E-03,
 * 0.55229623E-03, -0.11959789E-03, -0.38561684E-04, 0.18819866E-04,

* 0.30418651E-06,-0.12450185E-05, 0.79187605E-07, 0.47195913E-07,
*-0.31276319E-08,-0.11919361E-08, 0.62775059E-11, 0.16179660E-10,
* 0.13934909E-11, 0.51296242E-13, 0.92226992E-15, 0.79585031E-17,
* 0.29858272E-19, 0.39822452E-22, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.46976297E-01,-0.95343119E-01, 0.44875497E-01, 0.46917844E-01,
*-0.76664614E-01, 0.34201307E-01, 0.13334802E-01,-0.23194481E-01,
* 0.91740711E-02, 0.19192511E-02,-0.31831526E-02, 0.95115481E-03,
* 0.19524888E-03,-0.19980529E-03, 0.32509153E-04, 0.11831033E-04,
*-0.48917870E-05, 0.34569337E-08, 0.25131643E-06,-0.21632941E-07,
*-0.68021450E-08, 0.67925603E-09, 0.12683274E-09,-0.49665617E-11,
*-0.14570426E-11,-0.81155359E-13,-0.19236609E-14,-0.20697428E-16,
* 0.94084051E-19,-0.14976574E-21, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.43578153E-01,-0.94981994E-01, 0.60570577E-01, 0.24943320E-01,
*-0.69798516E-01, 0.48431935E-01,-0.44168627E-02,-0.17043218E-01,
* 0.12897916E-01,-0.27162815E-02,-0.17234569E-02, 0.13898342E-02,
*-0.29523912E-03,-0.88542172E-04, 0.64002973E-04,-0.94072664E-05,
*-0.28439189E-05, 0.11683654E-05,-0.40657825E-07,-0.42425447E-07,
* 0.51005490E-08, 0.72917230E-09,-0.11297327E-09,-0.95113954E-11,
* 0.81849133E-12, 0.98458646E-13, 0.33404198E-14, 0.46465570E-16,
* 0.26124251E-18, 0.50308994E-21, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.40265860E-01,-0.93139035E-01, 0.73286991E-01, 0.99663972E-03,
*-0.56264450E-01, 0.54622395E-01,-0.20216980E-01,-0.66256017E-02,
* 0.11923373E-01,-0.59034450E-02, 0.56108321E-03, 0.92114370E-03,
*-0.53520766E-03, 0.93942850E-04, 0.28540095E-04,-0.18405505E-04,
* 0.28693932E-05, 0.50336093E-06,-0.24642946E-06, 0.18727854E-07,
* 0.54717701E-08,-0.94579747E-09,-0.42887714E-10, 0.13751860E-10,
* 0.34418913E-12,-0.79371429E-13,-0.46690016E-14,-0.88997023E-16,
*-0.63658954E-18,-0.15084492E-20, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.37038057E-01,-0.90279376E-01, 0.82948150E-01,-0.20828578E-01,
*-0.38098366E-01, 0.52796507E-01,-0.31216980E-01, 0.49125253E-02,
* 0.70921320E-02,-0.65003051E-02, 0.24386657E-02,-0.73325640E-04,
*-0.38233189E-03, 0.18836349E-03,-0.32370766E-04,-0.66045011E-05,
* 0.46576923E-05,-0.84139073E-06,-0.45631992E-07, 0.42829436E-07,
*-0.51517215E-08,-0.41828450E-09, 0.12935410E-09,-0.18843425E-11,
*-0.11427116E-11, 0.16775389E-13, 0.48798305E-14, 0.14245400E-15,
* 0.13513741E-17, 0.40280281E-20, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.33893413E-01,-0.86455864E-01, 0.89582326E-01,-0.40329438E-01,
*-0.17434658E-01, 0.44041069E-01,-0.35900330E-01, 0.14649779E-01,
* 0.31139559E-03,-0.45483796E-02, 0.30644791E-02,-0.97384019E-03,
* 0.19338242E-04, 0.12978927E-03,-0.60514215E-04, 0.11477401E-04,
* 0.80409555E-06,-0.98043458E-06, 0.21391483E-06,-0.72545322E-08,
*-0.54276770E-08, 0.96527158E-09,-0.10493042E-10,-0.11915712E-10,
* 0.71642318E-12, 0.54981840E-13,-0.30185737E-14,-0.18325784E-15,
*-0.24686202E-17,-0.95389114E-20, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.30830607E-01,-0.81809720E-01, 0.93308859E-01,-0.56692692E-01,
* 0.36973456E-02, 0.30155871E-01,-0.34080932E-01, 0.20518667E-01,
*-0.62222274E-02,-0.10206727E-02, 0.22826001E-02,-0.13042821E-02,
* 0.38858350E-03,-0.22751322E-04,-0.35037065E-04, 0.17260524E-04,
*-0.37666912E-05, 0.14383381E-06, 0.15178273E-06,-0.43101319E-07,
* 0.41072566E-08, 0.34207378E-09,-0.11999597E-09, 0.78305509E-11,
* 0.53630439E-12,-0.73372050E-13,-0.56448079E-15, 0.17334479E-15,
* 0.38000028E-17, 0.19894424E-19, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.27848333E-01,-0.76471177E-01, 0.94279282E-01,-0.69381505E-01,
* 0.23519809E-01, 0.13301197E-01,-0.26680653E-01, 0.21597439E-01,
*-0.10695403E-01, 0.26966786E-02, 0.56155055E-03,-0.94926976E-03,
* 0.50406648E-03,-0.15185174E-03, 0.18173403E-04, 0.64481380E-05,
*-0.40606037E-05, 0.10390292E-05,-0.11599873E-06,-0.10951479E-07,
* 0.61274792E-08,-0.90539069E-09, 0.30045310E-10, 0.81863192E-11,
*-0.10228284E-11, 0.13645015E-13, 0.35461711E-14,-0.87034691E-16,
*-0.47400000E-17,-0.36137564E-19, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.24945300E-01,-0.70560091E-01, 0.92741034E-01,-0.78111367E-01,
* 0.40599856E-01,-0.43159875E-02,-0.15381545E-01, 0.18095192E-01,
*-0.12095015E-01, 0.53431274E-02,-0.13105593E-02,-0.14512186E-03,
* 0.32185696E-03,-0.17202397E-03, 0.54680544E-04,-0.96924724E-05,
*-0.16410764E-06, 0.68312932E-06,-0.21942798E-06, 0.35887403E-07,
*-0.19989007E-08,-0.44399039E-09, 0.11248049E-09,-0.97907477E-11,
* 0.15002737E-13, 0.59559751E-13,-0.31645692E-14,-0.48017596E-16,

* 0.43849290E-17, 0.56135496E-19, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.22120234E-01, -0.64186523E-01, 0.88943541E-01, -0.82819478E-01,
* 0.53896876E-01, -0.20692761E-01, -0.22382400E-02, 0.11113231E-01,
* -0.10329059E-01, 0.61651476E-02, -0.25894176E-02, 0.69210013E-03,
* -0.31042809E-04, -0.79644632E-04, 0.48489078E-04, -0.16763822E-04,
* 0.37244495E-05, -0.41849982E-06, -0.43005838E-07, 0.30123007E-07,
* -0.66345117E-08, 0.77231917E-09, -0.26338790E-10, -0.60321321E-11,
* 0.97226930E-12, -0.51616716E-13, -0.50598838E-15, 0.14105463E-15,
* -0.21745415E-17, -0.72177331E-19, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.19371875E-01, -0.57451293E-01, 0.83166352E-01, -0.83630598E-01,
* 0.62771836E-01, -0.34207241E-01, 0.10683111E-01, 0.22845284E-02,
* -0.60957542E-02, 0.50627530E-02, -0.28457991E-02, 0.11834825E-02,
* -0.35272921E-03, 0.58434950E-04, 0.76182927E-05, -0.96713605E-05,
* 0.39389998E-05, -0.10273286E-05, 0.17778367E-06, -0.16000278E-07,
* -0.10974241E-08, 0.64606132E-09, -0.11052733E-09, 0.99418769E-11,
* -0.31147562E-12, -0.29350221E-13, 0.34327672E-14, -0.10495642E-15,
* -0.11952453E-17, 0.71717877E-19, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.16698976E-01, -0.50446519E-01, 0.75701157E-01, -0.80821692E-01,
* 0.66967047E-01, -0.43721645E-01, 0.21595300E-01, -0.66128830E-02,
* -0.59221781E-03, 0.25143591E-02, -0.20693796E-02, 0.11447490E-02,
* -0.48146299E-03, 0.15609133E-03, -0.36887221E-04, 0.46187303E-05,
* 0.57924523E-06, -0.55864301E-06, 0.18449318E-06, -0.39576430E-07,
* 0.58028821E-08, -0.51261007E-09, 0.54310235E-11, 0.57016106E-11,
* -0.86692557E-12, 0.62339949E-13, -0.18451518E-14, -0.35965498E-16,
* 0.35786258E-17, -0.44699131E-19, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.14100306E-01, -0.43256120E-01, 0.66843434E-01, -0.74787085E-01,
* 0.66564572E-01, -0.48618455E-01, 0.29187198E-01, -0.13993929E-01,
* 0.48341221E-02, -0.64759560E-03, -0.60785643E-03, 0.63274179E-03,
* -0.36889977E-03, 0.16035241E-03, -0.55147500E-04, 0.15071509E-04,
* -0.31554740E-05, 0.44268000E-06, -0.13857713E-07, -0.13008725E-07,
* 0.43806029E-08, -0.83521334E-09, 0.10763211E-09, -0.91701196E-11,
* 0.41065303E-12, 0.68998831E-14, -0.22379744E-14, 0.13092005E-15,
* -0.28680699E-17, -0.40850002E-20, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.11574650E-01, -0.35956303E-01, 0.56885593E-01, -0.66005416E-01,
* 0.61930654E-01, -0.48781168E-01, 0.32722805E-01, -0.18708923E-01,
* 0.90024326E-02, -0.35159560E-02, 0.10017710E-02, -0.11300098E-03,
* -0.86100833E-04, 0.75779957E-04, -0.37411636E-04, 0.13860933E-04,
* -0.41070116E-05, 0.98672126E-06, 0.19004984E-06, 0.28159746E-07,
* -0.28461079E-08, 0.95992410E-10, 0.28617606E-10, -0.67727639E-11,
* 0.81453215E-12, -0.61792451E-13, 0.28523152E-14, -0.60829520E-16,
* -0.55810273E-18, 0.48450233E-19, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.91208043E-02, -0.28616025E-01, 0.46111373E-01, -0.55009256E-01,
* 0.53652594E-01, -0.44533242E-01, 0.32050891E-01, -0.20170919E-01,
* 0.11123661E-01, -0.53579161E-02, 0.22325242E-02, -0.78859252E-03,
* 0.22583725E-03, -0.46182093E-04, 0.27957688E-05, 0.28642797E-05,
* -0.17050897E-05, 0.60817820E-06, -0.16404711E-06, 0.35326741E-07,
* -0.61452254E-08, 0.85630922E-09, -0.93065911E-10, 0.74455864E-11,
* -0.37660451E-12, 0.41436885E-14, 0.10400026E-14, -0.87818264E-14,
* 0.32676811E-17, -0.54435360E-19, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.67375819E-02, -0.21297440E-01, 0.34791403E-01, -0.42357976E-01,
* 0.42473374E-01, -0.36549209E-01, 0.27542541E-01, -0.18371529E-01,
* 0.10907136E-01, -0.57769042E-02, 0.27292986E-02, -0.11476668E-02,
* 0.42762166E-03, -0.14016092E-03, 0.39949618E-04, -0.97143078E-05,
* 0.19446175E-05, -0.29478675E-06, 0.24325063E-07, 0.28431159E-08,
* -0.16807293E-08, 0.40498926E-09, -0.67715863E-10, 0.85355632E-11,
* -0.82107010E-12, 0.59248379E-13, -0.30758359E-14, 0.10623748E-15,
* -0.20738726E-17, 0.12790281E-19, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.44238085E-02, -0.14056313E-01, 0.23179746E-01, -0.28614181E-01,
* 0.29228244E-01, -0.25751020E-01, 0.19978322E-01, -0.13805074E-01,
* 0.85513185E-02, -0.47650195E-02, 0.23922763E-02, -0.10822616E-02,
* 0.44074547E-03, -0.16124838E-03, 0.52837441E-04, -0.15444078E-04,
* 0.40057204E-05, -0.91582012E-06, 0.18301575E-06, -0.31623229E-07,
* 0.46574556E-08, -0.57323953E-09, 0.57255161E-10, -0.44160570E-11,
* 0.23633963E-12, -0.57682226E-14, -0.29016539E-15, 0.36419688E-16,
* -0.16940896E-17, 0.39943403E-19, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00,
* 0.21783242E-02, -0.69424308E-02, 0.11511301E-01, -0.14323823E-01,
* 0.14786409E-01, -0.13200926E-01, 0.10407511E-01, -0.73301004E-02,

* 0.46428948E-02,-0.26547564E-02, 0.13729103E-02,-0.64251300E-03,
* 0.27197682E-03,-0.10399037E-03, 0.35835687E-04,-0.11096905E-04,
* 0.30760451E-05,-0.75968402E-06, 0.16619321E-06,-0.31980825E-07,
* 0.53674264E-08,-0.77755498E-09, 0.95988998E-10,-0.99376981E-11,
* 0.84540674E-12,-0.57543214E-13, 0.30231858E-14,-0.11654142E-15,
* 0.30555301E-17,-0.48114590E-19, 0.00000000E+00, 0.00000000E+00/
END