

**OS EFEITOS DELAWARE E GRONINGEN:
UM ESTUDO QUANTITATIVO POR ELEMENTOS FINITOS**

por

AJAY CHABA

Bacharel em Física (Universidade Federal da Paraíba - 1984)

Tese submetida como requisito parcial ao grau de

MESTRE EM CIÊNCIAS

em

GEOFÍSICA

ao

Colegiado do Curso de Pós-Graduação em

Geofísica

da

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Banca Examinadora :

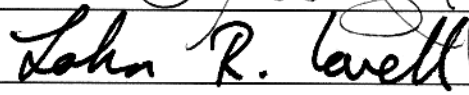
Dr. Luiz Rijo (Orientador)

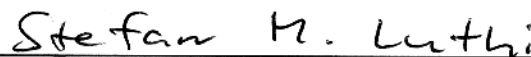
Dr. John Richard Lovell (Co-orientador)

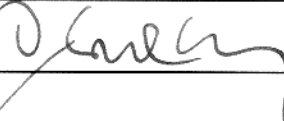
Dr. Stefan Moritz Lüthi

Dr. Dirceu Abrahão









Data da Homologação : 05/03/1993

CHABA, Ajay. **Os Efeitos Delaware e Groningen; um estudo quantitativo por elementos finitos.** Belém, Universidade Federal do Pará. Centro de Geociências, 1992. 126 p. il.
Tese (Mestrado em Geofísica) – Curso de Pós-Graduação em Geofísica, Centro de Geociências, UFPa., 1992.

1. EFEITO DELAWARE. 2. EFEITO GRONINGEN. 3. ELEMENTOS FINITOS. 4. DUAL LATEROLOG. I. Título.

À minha família pelo incentivo
à realização deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Prof. Luiz Rijo pela revisão desta tese e pela paciência, atenção e orientação na realização deste trabalho.

Ao meu co-orientador Prof. John Richard Lovell pela revisão desta tese e pela ampla contribuição que deu a este trabalho, tanto no curso especial que ministrou nesta Universidade, como pelos múltiplos esclarecimentos e sugestões dados por correspondência eletrônica e por ocasião da sua segunda visita a esta universidade, como ainda pelo fundamental material bibliográfico fornecido.

Ao Prof. Stefan Moritz Lüthi pela revisão desta tese, pronta colaboração, importantes discussões, vasto material bibliográfico fornecido e por ter propiciado as condições para a co-orientação do Prof. John Richard Lovell.

Ao Geólogo Dirceu Abrahão pela revisão desta tese e pelo pronto apoio logístico sempre que necessário.

Ao Prof. Paulo Buarque Guimarães e Prof. Antônio Abel Carrasquila pelas discussões e suporte em informática.

Ao Geólogo José Roberto Barbosa Corrêa por ter me colocado em contato com o problema e pela revisão do primeiro capítulo desta tese.

À Dra. Barbara Anderson por ter gentilmente cedido um capítulo, de sua co-autoria, de livro em impressão, sobre perfilagem com ferramentas de eletrodos para este autor.

À PETROBRÁS pela liberação para a realização deste trabalho e pelo suporte logístico fornecido durante o período necessário a este.

À Schlumberger-Doll Research, e em particular ao Dr. Bill Preeg e Dr. Michael Oristaglio, por propiciar uma fundamental viagem de meu co-orientador a esta universidade no mês de novembro de 1992.

À HLS do Brasil por ter gentilmente cedido o manual de treinamento e um folheto publicitário sobre o DLL para este autor.

Ao Convênio UFPA/FADESP/CNPQ/FINEP/PETROBRÁS e o Núcleo de Pesquisa em Geofísica de Petróleo da UFPA por ter propiciado os meios para realização deste trabalho.

A todos os meus colegas de curso pelo agradável ambiente de trabalho que propiciaram, em especial ao colega José Alberto Bucheb e aos meus colegas da turma 1990.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

TABELAS

5.1	Coordenadas de Área e Pesos para a Quadratura Gaussiana de 13 Pontos num Triângulo	78
5.2	Parâmetros Eletromagnéticos dos Materiais Envolvidos nos Efeitos Delaware e Groningen	93

FIGURAS

1.1	Coluna Estratigráfica da Bacia do Solimões	4
2.1	Diâmetros de Perfuração e Revestimento de Poço	9
2.2	Princípio de Ferramentas de Indução	13
2.3	A Ferramenta <i>Short Normal</i>	14
2.4	A Ferramenta <i>Short Normal</i> num Meio Isotrópico e Homogêneo	15
2.5	O Efeito de Poço Condutivo sobre a Ferramenta <i>Short Normal</i>	18
2.6	O Efeito de Camada Adjacente Condutiva sobre a Ferramenta <i>Short Normal</i>	19
2.7	A Focalização Esférica	20
2.8	A Ferramenta <i>Micro-Spherically Focused Log</i>	21
2.9	A Focalização Lateral	22
2.10	A Ferramenta <i>Laterolog 3</i>	22
2.11	A Ferramenta <i>Laterolog 7</i>	24
2.12	Ferramentas de Eletrodos X Ferramentas de Indução	25
2.13	A Ferramenta <i>Dual Laterolog</i>	27
2.14	Distribuição de Correntes da Ferramenta <i>Dual Laterolog</i>	28
2.15	O <i>Bridle</i>	32
4.1	O Efeito Delaware	57
4.2	Eletrodo Pontual Injetando Corrente Contínua	64
4.3	Efeito da Blindagem sobre a Corrente Alternada	67
4.4	Efeito do Revestimento sobre a Corrente Alternada	69
5.1	A Função-chapéu Base de Elementos Finitos	75

5.2	Armazenamento LS-CS de Matrizes Esparsas	81
5.3	Domínio Finito de Verificação dos Programas Elaborados	90
5.4	Domínio Infinito de Verificação dos Programas Elaborados	92
5.5	Fronteiras do Domínio de Modelagem do Efeito Delaware	95
5.6	Fronteiras do Primeiro Domínio de Modelagem do Efeito Groningen	96
5.7	Fronteiras do Segundo Domínio de Modelagem do Efeito Groningen	97
5.8	Convergência do Algoritmo de Gradiente Bi-Conjugado	100
5.9	Malha de Elementos Finitos para o Efeito Groningen	101
5.10	Malha Triangular em Volta da Ferramenta	102
6.1	O Efeito Delaware-I	109
6.2	O Efeito Delaware-II	110
6.3	O Efeito Groningen-I	111
6.4	O Efeito Groningen-II	112
6.5	O Efeito Groningen-III	113
6.6	O Efeito Groningen-IV	114
6.7	O Efeito Groningen-V	115
6.8	O Efeito Groningen-VI	117
6.9	O Efeito Groningen-VII	118
6.10	O Efeito Groningen-VIII	119

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	i
LISTA DE ILUSTRAÇÕES	iii
SUMÁRIO	v
RESUMO	1
ABSTRACT	2
CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO	3
CAPÍTULO 2 A PERFILAGEM DE RESISTIVIDADE	8
2.1 Aspectos Históricos	8
2.2 A Perfilagem de Poço	8
2.2.1 O Ambiente em Subsuperfície	8
2.2.2 Importância da Perfilagem de Resistividade	10
2.3 Ferramentas de Medição de Resistividade	11
2.3.1 Ferramentas de Indução	11
2.3.2 Ferramentas de Eletrodos	12
2.3.3 Ferramentas de Eletrodos versus Ferramentas de Indução	23
2.4 A Ferramenta “Dual Laterolog”	26
2.5 Equipamentos de Suporte	29
2.5.1 O Cabo de Perfilagem	30
2.5.2 O “Torpedo”	30
2.5.3 O “Bridle”	30
2.5.4 O “Fish”	31
CAPÍTULO 3 MODELAGEM DE RESPOSTA DE FERRAMENTAS DE ELETRODOS	33
3.1 Equações de Maxwell	34
3.2 Equações de Maxwell para Condições Estacionárias	37
3.2.1 Equação de Laplace da Voltagem	38
3.2.2 Condições de Fronteira para a Voltagem	39

3.2.3	Cálculo de Voltagens e Correntes	40
3.3	Equações de Maxwell para Condições Harmônicas	40
3.3.1	Modos TE e TM	42
3.3.2	Equação de Helmholtz para H_ϕ	43
3.3.3	Formulação Fraca para a Equação de Helmholtz de H_ϕ	46
3.3.4	Condições de Fronteira para $U = 2\pi\rho H_\phi$	49
3.3.5	Cálculo de Voltagens e Correntes	51
3.4	Métodos de Solução de Equações Eletromagnéticas	53
3.4.1	Métodos Analíticos	53
3.4.2	Métodos Numéricos	54
3.4.3	Métodos Híbridos	54
3.5	Modelagem da Focalização	54
CAPÍTULO 4 OS EFEITOS DELAWARE E GRONINGEN		56
4.1	O Efeito Delaware	56
4.1.1	Conceito de Impedância de Transferência	57
4.1.2	Causas do Efeito Delaware	60
4.1.3	Efeito da Blindagem do Cabo e do Revestimento	60
4.1.4	O Efeito Anti-Delaware	61
4.2	O Efeito Groningen	62
4.2.1	Histórico	62
4.2.2	Eletrodo Pontual Injetando Corrente Alternada num Meio Homogêneo	63
4.2.3	Efeito da Blindagem do Cabo e do Revestimento	65
4.2.4	Soluções	68
CAPÍTULO 5 METODOLOGIA		71
5.1	Método de Elementos Finitos	71
5.1.1	A Expansão de Galerkin e a Base de Funções de Elementos Finitos	73
5.1.2	Cálculo da Matriz de "Stiffness" Elementar	76
5.1.3	Cálculo da Matriz de "Stiffness" Global	80
5.1.4	Imposição das Condições de Fronteira	80
5.1.5	Solução do Sistema Linear	84
5.2	Cálculo de Voltagem e de Corrente	88
5.3	Modelos de Verificação dos Programas Elaborados	89
5.4	Modelo Utilizado para os Efeitos Delaware e Groningen	92
5.4.1	Parâmetros Eletromagnéticos	93
5.4.2	Hipóteses do Modelo	93

5.4.3	Geração da Malha de Elementos Finitos e de Perfis	94
5.5	Sistemática de Processamento	101
CAPÍTULO 6	RESULTADOS	106
6.1	Correção dos Programas Elaborados	106
6.2	Valor de k para o Modelo	107
6.3	Perfis com o Efeito Delaware	108
6.4	Perfis com o Efeito Groningen:	108
CAPÍTULO 7	CONCLUSÃO	120
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	121
ANEXO I	CONDIÇÃO DE FRONTEIRA PARA UM CABO DE PERFILAGEM BLINDADO ¹⁹	125

RESUMO

Os efeitos Delaware e Groningen são dois tipos de anomalia que afetam ferramentas de eletrodos para perfilagem de resistividade. Ambos os efeitos ocorrem quando há uma camada muito resistiva, como anidrita ou halita, acima do(s) reservatório(s), produzindo um gradiente de resistividade muito similar ao produzido por um contato óleo-água. Os erros de interpretação produzidos têm ocasionado prejuízos consideráveis à indústria de petróleo. A PETROBRÁS, em particular, tem enfrentado problemas ocasionados pelo efeito Groningen sobre perfis obtidos em bacias paleozóicas da região norte do Brasil.

Neste trabalho adaptamos, com avanços, uma metodologia desenvolvida por LOVELL (1990), baseada na equação de Helmholtz para H_ϕ , para modelagem dos efeitos Delaware e Groningen. Solucionamos esta equação por elementos finitos triangulares e retangulares. O sistema linear gerado pelo método de elementos finitos é resolvido por gradiente bi-conjugado pré-condicionado, sendo este pré-condicionador obtido por decomposição LU (*Low Up*) da matriz de *stiffness*. As voltagens são calculadas por um algoritmo, mais preciso, recentemente desenvolvido. Os perfis são gerados por um novo algoritmo envolvendo uma sucessiva troca de resistividade de subdomínios. Este procedimento permite obter cada nova matriz de *stiffness* a partir da anterior pelo cálculo, muito mais rápido, da variação dessa matriz. Este método permite, ainda, acelerar a solução iterativa pelo uso da solução na posição anterior da ferramenta.

Finalmente geramos perfis sintéticos afetados por cada um dos efeitos para um modelo da ferramenta *Dual Laterolog*.

ABSTRACT

The Delaware and Groningen effects are two different kinds of anomaly affecting electrode type resistivity logging tools. Both effects take place when there is a high-resistivity bed, like halite or anhydrite, above the reservoir(s), producing a gradient on the resistivity log, which resembles an oil-water contact. The misinterpretations therefore produced have caused considerable losses to oil industry. PETROBRÁS, in particular, has faced problems caused by Groningen effect on logs obtained in paleozoic basins of northern Brazil.

In this work we have adapted and improved upon a methodology developed by LOVELL (1990) based on Helmholtz's equation for H_ϕ for modeling Delaware and Groningen effects. We solve this equation by triangular and rectangular finite elements. The finite element linear system is solved by preconditioned bi-conjugate gradient, the preconditioner being obtained by incomplete LU (Low Up) decomposition. Voltages are calculated by a recently developed, and more precise, algorithm. Logs are generated by a new algorithm involving successive switching of subdomain resistivity. This procedure allows the computation of each new stiffness matrix from the previous one by the very fast computation of matrix variation. Moreover, this method allows rapid iterative solution by using the solution from the previous tool position.

Finally we compute resistivity logs subject to each effect for a model of the Dual Laterolog Tool.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Em 1978 foi descoberta uma ocorrência de gás natural nas adjacências do Rio Juruá, na porção central da bacia do Solimões, distando 840 *km* a oeste de Manaus. Esta foi a primeira descoberta significativa de uma acumulação de hidrocarbonetos numa bacia paleozóica brasileira. O campo descoberto foi designado de Juruá (CORRÊA & BEER, 1986). Em 1988 foram descobertas acumulações comerciais de óleo, gás e condensado em outro campo nesta mesma bacia. Este campo foi designado de Rio Urucu em função da proximidade do rio de mesmo nome. Mais recentemente, ainda nesta bacia, foram descobertos novos campos designados de Leste de Urucu e Igarapé Marta.

Nos campos de Juruá e Rio Urucu utiliza-se a coluna estratigráfica representada na Figura 1.1. A acumulação de gás natural do campo de Juruá encontra-se em arenitos da Formação Monte Alegre e as acumulações de óleo, gás e condensado do campo de Urucu encontram-se em arenitos das formações Itaituba, Monte Alegre, Curuá e Ererê. A Formação Itaituba apresenta, além dos já mencionados arenitos, intervalos de anidrita, halita, calcarenito, folhelho, calcilito e silito. Nota-se, na coluna estratigráfica, que a Formação Monte Alegre encontra-se abaixo da Formação Itaituba. Como os arenitos da Formação Itaituba encontram-se abaixo dos intervalos de anidrita e halita, podemos afirmar que em ambos os campos existem camadas de anidrita e halita acima do reservatório. Anidrita e halita são evaporitos formados por $CaSO_4$ e $NaCl$, respectivamente, assim estão em estado de hidratação mínima e portanto são quase cristalinos, sendo assim muito resistivos.

A perfuração de camadas de halita com fluido de perfuração à base de água exige que o fluido seja saturado de $NaCl$ para que não ocorra a dissolução destas camadas na vizinhança do poço, criando sérios problemas mecânicos. Deste modo durante o período inicial de exploração do campo de Juruá as rochas da Formação Monte Alegre eram perfuradas com fluido de perfuração saturado, basicamente como uma continuação operacional da perfuração das rochas da Formação Itaituba. Fluidos de perfuração saturados inevitavelmente são de baixa resistividade.

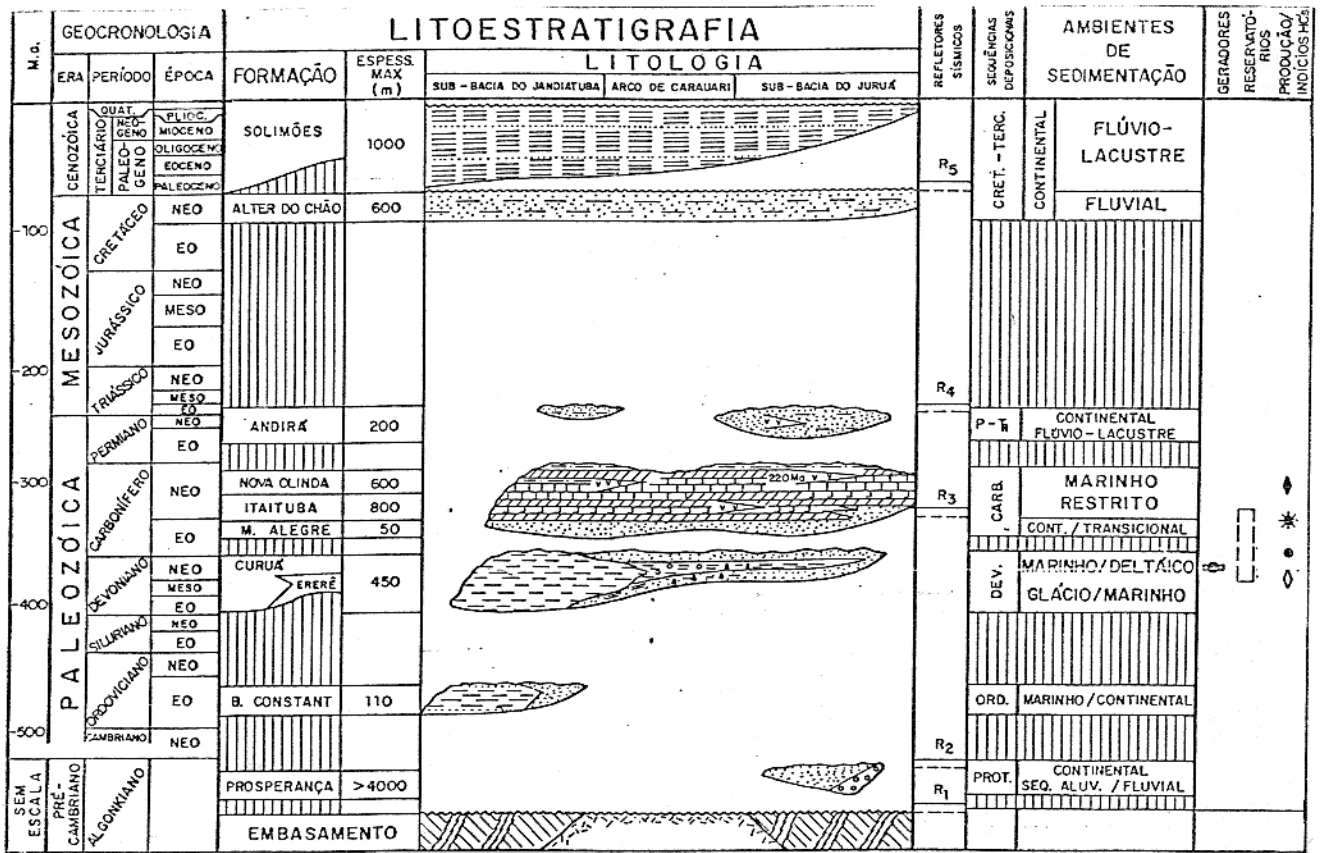


Figura 1.1 - Coluna Estratigráfica da Bacia do Solimões. (CAMPOS et al., 1991)

Conforme veremos na seção 2.3.3 a resistividade do fluido de perfuração é fator determinante na escolha entre ferramentas de eletrodos e ferramentas de indução. Ferramentas de eletrodos são ferramentas que injetam corrente na formação, enquanto ferramentas de indução são ferramentas que induzem corrente na formação. Fluidos de perfuração de baixa resistividade tornam obrigatório o uso de ferramentas de eletrodos. Assim utilizou-se no campo de Juruá a ferramenta de eletrodos mais avançada disponível: o *Dual Laterolog*.

As tentativas de avaliação dos perfis do campo de Juruá revelaram grandes dificuldades. Em alguns intervalos os valores obtidos de saturação de gás eram anormalmente altos, sendo incoerentes com os resultados de testes de formação. Após investigação sobre as possíveis causas desta anomalia, concluiu-se que os valores de resistividade medidos eram erroneamente elevados. (CORRÊA & BEER, 1986)

O uso do *Dual Laterolog* como ferramenta de perfilagem, a presença de uma camada muito resistiva acima da camada reservatório e medidas de resistividade elevadas, são os fatores, conforme veremos na seção 4.2, que levam a uma comparação com o campo de Groningen (Holanda) e com o efeito homônimo (WOODHOUSE, 1978). Deste modo, os valores anômalos de resistividade do campo de Juruá foram atribuídos ao efeito Groningen (CORRÊA & BEER, 1986).

O efeito Groningen é considerado um resíduo do efeito Delaware (ver capítulo 4), o qual se julgava estar solucionado com uma alteração no projeto da ferramenta DLL (HLS, 1990; MORAN & CHEMALI, 1979; SUAU et al., 1972; TABANOU & ANDERSON, 1992). Há algum tempo que se conhece as prováveis causas deste efeito (LACOUR-GAYET, 1981; MORAN & CHEMALI, 1979; WOODHOUSE, 1978), porém os primeiros estudos quantitativos são muito recentes (LOVELL, 1990; LOVELL, 1992). O único algoritmo de correção do efeito Groningen disponível depende do registro da voltagem fora de fase, o que só é factível com o uso de ferramenta tornada comercial recentemente (DAVIES et al., 1992).

A indisponibilidade de um algoritmo de correção para o efeito Groningen acarretou, na continuidade da atividade exploratória nestes campos da Bacia do Solimões, a procura por soluções operacionais para evitar este efeito. Basicamente, buscou-se meios da perfilagem de resistividade ser realizada por ferramenta de indução, a qual não está sujeita ao efeito Groningen. Para isto é necessário que, pelo menos no momento da perfilagem, o fluido de perfuração seja a base de água pouco salina ou a base de óleo. O fluido à base de água deve ser *pouco salino*, sendo este sal o *KCl* e para esta área, devido a presença da argila ilita no reservatório, a qual incharia (resultando em dano à formação) caso fosse utilizado um fluido à base de água doce. Três procedimentos foram então testados:

- Assim que a perfuração atinge a profundidade programada substitue-se o fluido de perfuração da porção inferior do poço. A substituição é feita injetando-se, no fundo do poço, com o uso da coluna de perfuração, o novo fluido em volume calculado de modo a não atingir as camadas de halita. Inevitavelmente este procedimento faz com que o reservatório seja invadido por dois filtrados de fluido de perfuração diferentes em proporções desconhecidas. Não há modo de se considerar esta dupla invasão na avaliação da formação a partir dos perfis. Assim, esta solução tem como desvantagem a qualidade questionável da avaliação feita. Este procedimento não é mais utilizado.
- Logo após a perfuração da última camada de halita procede-se ao revestimento do poço. Então substitue-se, no poço inteiro, o fluido de perfuração por um fluido não saturado. Continua-se a perfuração até a profundidade programada e realiza-se a perfilagem. Esta solução acarreta o desperdício do fluido de perfuração trocado e de considerável tempo de sonda na execução da operação. Portanto, esta solução tem como desvantagem o alto custo. Este procedimento ainda é utilizado, principalmente em poços exploratórios.
- O poço é inteiramente perfurado com fluido a base de óleo. Esta solução necessita do transporte do óleo usado até o local de perfuração. Realizar isto em locais de difícil acesso na Amazonia, é uma operação complicada e, principalmente, de alto custo. A instalação de uma estação de tratamento para re-aproveitamento do fluido de perfuração tornou esta solução economicamente aceitável, mas ainda de alto custo. Há ainda a questão ambiental, pois o uso de fluidos de perfuração a base de óleo produzem rejeitos poluentes. Como última desvantagem é preciso mencionar que o uso deste fluido impede a obtenção de um perfil de resistividade de profundidade de investigação rasa, pois as melhores ferramentas para este tipo de medida são de eletrodos. Assim, esta solução tem como desvantagens o alto custo, os problemas ambientais e as dificuldades de avaliação criados. Este procedimento também é utilizado atualmente.

A melhor solução para este problema seria a existência de um algoritmo de correção para medidas de resistividade, obtidas com a ferramenta *Dual Laterolog*, sujeitas ao efeito Groningen. Este trabalho insere-se como parte deste objetivo maior. Para saber se é possível construir um algoritmo de correção e talvez construí-lo, é antes necessário ter-se um algoritmo para quantificar o efeito Groningen em função dos diversos fatores que se supõe influir no mesmo.

Neste trabalho abordamos inicialmente a perfilagem de resistividade e, no capítulo seguinte, as opções de modelagem deste perfil, no tocante a escolha da equação, do seu método de solução e das condições de fronteira envolvidas. Depois descrevemos os efeitos Delaware e Groningen, concluindo que para modelarmos o efeito Groningen devemos solucionar a equação

de Helmholtz em coordenadas cilíndricas para H_ϕ . Em seguida descrevemos a metodologia da solução numérica utilizada para a equação escolhida e os algoritmos de cálculo de voltagens e correntes. Por fim, expomos os resultados obtidos e as conclusões deste trabalho.

CAPÍTULO 2

A PERFILAGEM DE RESISTIVIDADE

2.1 Aspectos Históricos

Em 5 de setembro de 1927, os irmãos Schlumberger realizaram a primeira perfilagem de resistividade em poço no campo de Pechelbronn em Dieffenbach, Alsácia, França. Conrad e Marcel Schlumberger, físico e engenheiro mecânico respectivamente, desenvolveram o método a partir da experiência em prospecção elétrica em superfície no período de 1912 a 1926 (LÜTHI, 1991). Esta bem sucedida experiência foi repetida em outros campos, sofreu avanços e tornou-se um serviço comercialmente disponível. A perfilagem elétrica de poço foi a base para o desenvolvimento dos outros tipos de perfis. A empresa fundada pelos irmãos Schlumberger, a *Société de Prospection Électrique Schlumberger*, prosperou, sendo hoje uma empresa multinacional entre as 100 maiores empresas do mundo.

2.2 A Perfilagem de Poço

Em francês a perfilagem de poço é denominada de *carottage électrique*, o qual traduzido literalmente seria testemunhagem elétrica. Este nome reflete o objetivo da perfilagem, qual seja determinar características da rocha em subsuperfície por meios eletrônicos. No caso da exploração de hidrocarbonetos, o que se tenta determinar é a presença destes.

O ambiente em subsuperfície, com as alterações induzidas pelo poço, influem na sua perfilagem. Precisamos, portanto, analisar as características mais relevantes deste ambiente.

2.2.1 O Ambiente em Subsuperfície

Para a perfilagem de resistividade, dentro do escopo deste trabalho, há três aspectos do ambiente em subsuperfície que devem ser considerados:

- *O Poço*: Para termos acesso à subsuperfície precisamos perfurar um poço. Esta perfuração é realizada em vários estágios quanto ao diâmetro de poço (SELLEY, 1985),

como ilustra a Figura 2.1. Nos poços da PETROBRÁS, a perfuração de poço é normalmente realizada em diâmetros de poço de 31.1 cm ($12\frac{1}{4}$ ") ou 21.6 cm ($8\frac{1}{2}$ "). O poço é preenchido por um fluido de perfuração (lama). Este fluido é necessário à estabilidade mecânica e química do poço, à remoção dos fragmentos de rocha resultantes do processo de perfuração e à lubrificação e resfriamento da coluna de perfuração (PETROBRÁS, 1987). Este fluido pode ser a base de água ou óleo. Como já mencionamos na introdução deste trabalho, iremos considerar fluidos a base de água saturados de sais. Estes fluidos são muito condutivos sendo a resistividade de 0.02 ohm.m (resistividade de uma solução de 200.000 ppm a $180^{\circ}F$) um valor típico (SCHLUMBERGER, 1989a).

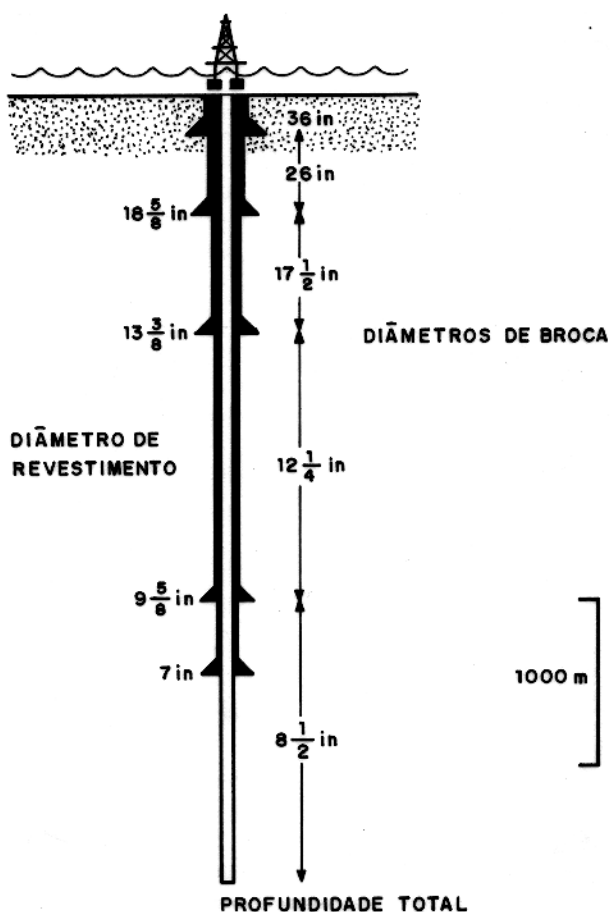


Figura 2.1 - Os diâmetros de perfuração (à direita) e de revestimento (à esquerda) de poços. (SELLEY, 1985)

- *O Revestimento*: Após cada estágio de perfuração, e antes do próximo estágio, é necessário revestir o poço com tubos de aço, cimentando-se estes tubos junto à parede do poço, próximo à porção final da coluna de revestimento. A Figura 2.1 ilustra os diversos diâmetros internos de revestimento. O revestimento influi no efeito Groningen. Como

a perfilagem é realizada no poço não revestido, os diâmetros de revestimento que temos de considerar são os referentes a estágios anteriores. No caso de poços da PETROBRÁS teremos de considerar diâmetros de 34.0 cm ($13\frac{3}{8}$ ") ou 24.4 cm ($9\frac{5}{8}$ ").

- *A Perturbação:* O poço perturba mecânica, térmica e quimicamente o ambiente em subsuperfície. No tocante a perturbação química de rochas reservatório, o fluido original da formação é deslocado pela invasão de filtrado de fluido de perfuração. A região, na vizinhança do poço, em que resta apenas a parte irredutível do fluido original é denominada de zona lavada. A região, suficientemente distante do poço, em que o fluido que preenche a rocha esteja inalterado é denominada de zona virgem. A região entre as zonas lavada e virgem é denominada de zona de transição. O conjunto das zonas lavada e de transição é denominada de zona invadida.

2.2.2 Importância da Perfilagem de Resistividade

Numa visão estreita, podemos enunciar os objetivos da perfilagem de poço, analisando a importância da perfilagem de resistividade, como (adaptado de ELLIS, 1987):

1. *Determinar a presença de hidrocarbonetos:* Normalmente tem-se indicação quanto à presença de hidrocarbonetos somente pela análise de amostras de calha durante a perfuração do poço. Porém, para uma caracterização mais precisa, a perfilagem de resistividade será necessária.
2. *Determinar a localização dos hidrocarbonetos:* Havendo hidrocarbonetos, a determinação do intervalo de profundidade em que estes estão presentes dependerá de modo essencial do perfil de resistividade.
3. *Determinar o volume de hidrocarbonetos na formação:* O perfil de resistividade é fundamental para qualquer quantificação do volume de hidrocarbonetos numa formação.
4. *Determinar o quanto de hidrocarbonetos pode ser produzido:* O perfil de resistividade pode ser acessório neste objetivo, especialmente se dispusermos de medidas de resistividade a diferentes profundidades de investigação.

A necessidade do uso do perfil de resistividade reside no fato de hidrocarbonetos serem muito resistentes e a água do subsolo, sendo normalmente salina, ser pouco resistente. Rochas reservatório, ou seja rochas com porosidade efetiva, em subsuperfície têm o seu espaço intergranular ocupado por algum fluido, seja hidrocarbonetos ou água. Assim a resistividade de uma rocha reservatório está relacionada à composição do fluido que permeia esta rocha

para cada intervalo de profundidade. Existe uma infinidade de relações empíricas propostas, relacionando a resistividade medida da formação com a saturação de água, ou seja a fração de água na composição do fluido que ocupa o espaço intergranular. A mais conhecida relação é a de Archie:

$$S_w^n = \frac{a}{\phi^m} \frac{R_w}{R_t}, \quad (2.1)$$

sendo que:

S_w = saturação de água,

ϕ = porosidade efetiva,

R_w = resistividade da água de formação,

R_t = resistividade da formação e

a, m, n = constantes positivas.

A relação 2.1 e todas as outras relações existentes entre a saturação de água e a resistividade da formação têm em comum o fato da saturação de água ser decrescente com a resistividade da formação.

Assim, a fidedignidade da medida de resistividade numa formação será determinante na correta avaliação do conteúdo de hidrocarbonetos, caso ocorram.

2.3 Ferramentas de Medição de Resistividade

Existem dois tipos fundamentalmente diferentes de ferramentas de medição de resistividade: ferramentas de indução e ferramentas de eletrodos, os quais descrevemos a seguir:

2.3.1 Ferramentas de Indução

O princípio de ferramentas de indução consiste em gerar um campo magnético oscilante no meio (poço + formação) com o uso de bobinas transmissoras. Este campo magnético irá induzir em cada ponto do meio uma corrente de intensidade (aproximadamente) inversamente proporcional à resistividade neste ponto. Estas correntes por sua vez irão gerar um campo magnético em bobinas receptoras na ferramenta induzindo corrente nestas bobinas. Assim uma medida da corrente induzida em bobinas receptoras será a base de cálculo da resistividade aparente do meio, ou seja a resistividade de um meio homogêneo e isotrópico

que forneceria o mesmo sinal. A Figura 2.2 demonstra este princípio para uma ferramenta de apenas uma bobina transmissora e uma receptora.

O desenvolvimento de ferramentas de indução levou a fabricação de ferramentas com varias bobinas transmissoras e receptoras. O uso de mais de uma bobina transmissora tem a finalidade de aumentar, relativamente, a corrente induzida em certas regiões do meio privilegiando estas regiões na participação no sinal gerado. O uso de mais de uma bobina receptora tem a finalidade de diminuir a participação de certas regiões no sinal medido. No caso de ferramentas destinadas a medir a resistividade da zona virgem da formação o intuito no projeto da ferramenta é de fazer com que o máximo de sinal provenha desta zona e o mínimo do poço e da zona invadida.

Mencione-se que as bobinas transmissoras também irão induzir diretamente corrente nas bobinas receptoras. Estas correntes são de muito maior intensidade do que as induzidas pelo meio. Porém haverá uma diferença de fase, idealmente de $\pi/2$ rad, entre estes dois tipos de corrente. Com o uso de detetores sensíveis à fase, consegue-se separá-las.

A Figura 2.2 também ilustra o importante fato de que as linhas de correntes geradas na formação por ferramentas de indução são horizontais e espacialmente confinadas, nascendo e morrendo na própria formação. Conforme veremos no capítulo 4, este é o motivo de ferramentas de indução não estarem sujeitas aos efeitos Delaware e Groningen.

2.3.2 Ferramentas de Eletrodos

O princípio de ferramentas de eletrodos consiste em injetar corrente no meio (poço + formação), através de eletrodos, medindo-se a resistividade aparente deste meio pela resistência oferecida a passagem de corrente.

A corrente usada é sempre de baixa frequência ($< 1 kHz$), já tendo se utilizado até $15 Hz$ (MORAN & CHEMALI, 1979). Idealmente a corrente usada seria contínua, porém a impedância que apareceria na superfície do eletrodo, devido à polarização eletroquímica, de magnitude imprevisível, impede que assim seja. O uso de corrente alternada faz com que a polarização no eletrodo diminua sensivelmente e se estabilize, sendo menor quanto mais alta for a frequência usada. Na modelagem da resposta de ferramentas de eletrodos é convencional supor que a corrente seja contínua, pois frequências tão baixas, como veremos no capítulo 3, nos permitem fazê-lo. No capítulo 4 veremos porque o efeito Groningen é justamente um caso em que esta suposição não é mais válida.

O dispositivo de medição mais simples que poderíamos imaginar provavelmente seria

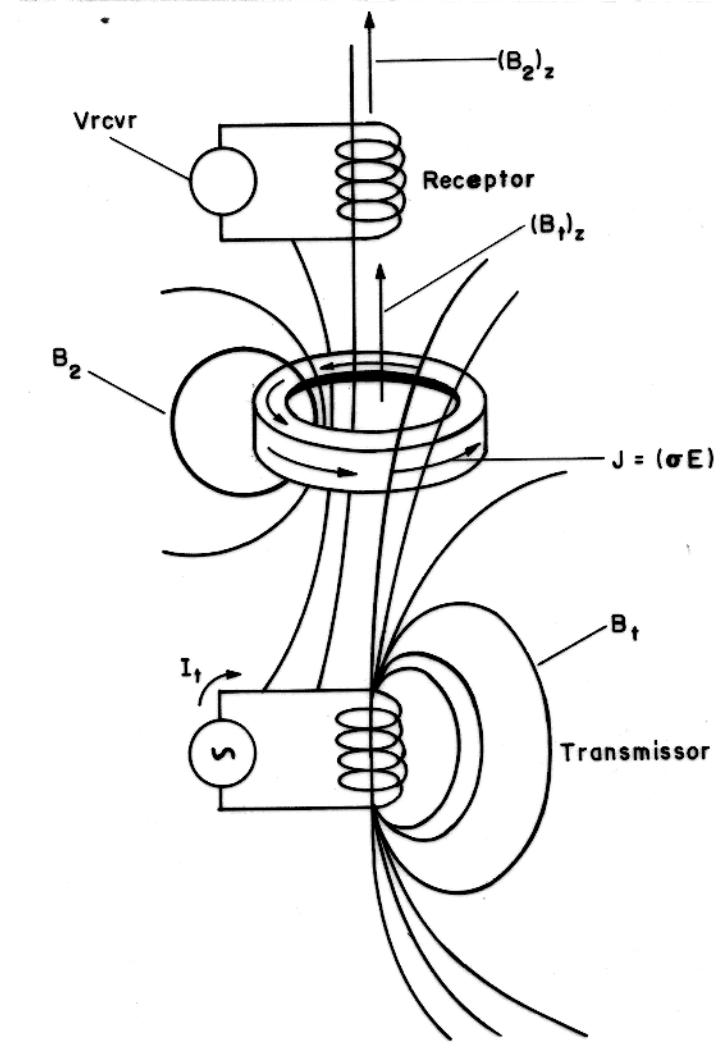


Figura 2.2 - O princípio de ferramentas de indução. Uma bobina transmissora, dentro do qual circula uma corrente I_t , gera um campo magnético B_t , o qual induz um campo elétrico (E) neste mesmo meio. Este campo elétrico acarreta numa corrente (J) de intensidade crescente com a condutividade (σ) do meio. Esta corrente no meio, por sua vez, gera o campo magnético B_2 , cuja componente $(B_2)_z$ induz uma tensão V_{rcvr} na bobina receptora. A componente $(B_t)_z$ do campo magnético gerado pela bobina transmissora também induz uma tensão diretamente na bobina receptora. (ELLIS, 1987)

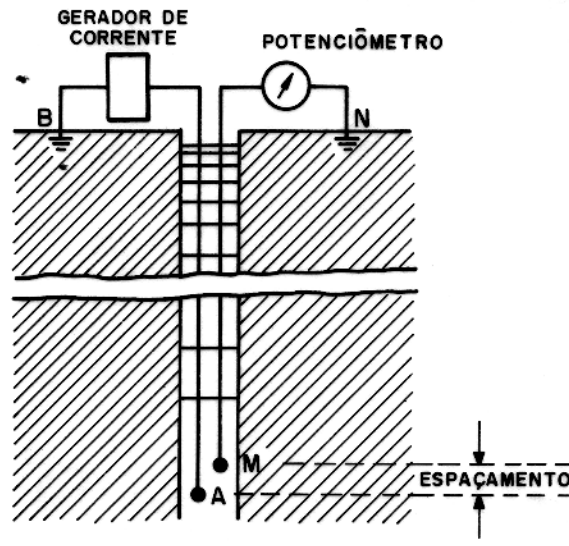


Figura 2.3 - Desenho esquemático da ferramenta *Short Normal*. O termo “*Short*” refere-se ao espaçamento de 16” entre os eletrodos A e M. (TABANOU & ANDERSON, 1992)

constituído de um único eletrodo emissor injetando corrente de amplitude fixa na formação, na profundidade em que se deseja esta medição. Porém devemos lembrar que necessitamos de um eletrodo receptor¹ para esta corrente, que pode ficar na superfície, de um eletrodo para medir a voltagem² e de um eletrodo de referência para medição desta voltagem, que também pode ficar na superfície. Este é o projeto da ferramenta *Short Normal* (Figura 2.3), que foi a primeira ferramenta de eletrodos comercialmente disponível.

Se supormos que a corrente é contínua podemos deduzir de modo bastante simples a fórmula de cálculo da resistividade aparente para esta ferramenta. Como primeiro passo vamos deduzir a densidade de corrente e a voltagem gerada por um eletrodo pontual³ injetando

¹A rigor, o termo receptor de corrente é válido apenas quando a corrente é contínua. Neste caso, a corrente continuamente injetada pelos eletrodos emissores está sendo, também, continuamente recebida pelos eletrodos receptores. No entanto, sendo a corrente alternada, cada eletrodo emite corrente numa metade do ciclo para receber corrente na outra metade. Em condições harmônicas, a corrente emitida tem de ser igual à corrente recebida para que haja conservação de carga elétrica. Assim, para a corrente alternada, a diferença entre os eletrodos emissores e receptores (denominação escolhida por mera convenção) é somente uma diferença de fase de π rad na corrente injetada por estes.

²É comum encontrarmos em livros de perfuração de poço o uso do termo *potencial* como sinônimo de voltagem. Pela teoria eletromagnética, estas funções só se equivalem em condições estacionárias, que só é possível se as correntes forem contínuas. No caso de correntes alternadas, a voltagem nada tem a ver com os potenciais, seja o escalar e o vetorial ou seja os de Schelkunoff-Debye, usados para descrever o campo eletromagnético (RIJO, 1990). Por esta razão evitaremos usar o termo *potencial* neste trabalho.

³Um eletrodo pontual é um eletrodo cujas dimensões podem ser desprezadas. Um eletrodo real pode assim ser considerado à uma certa distância deste.

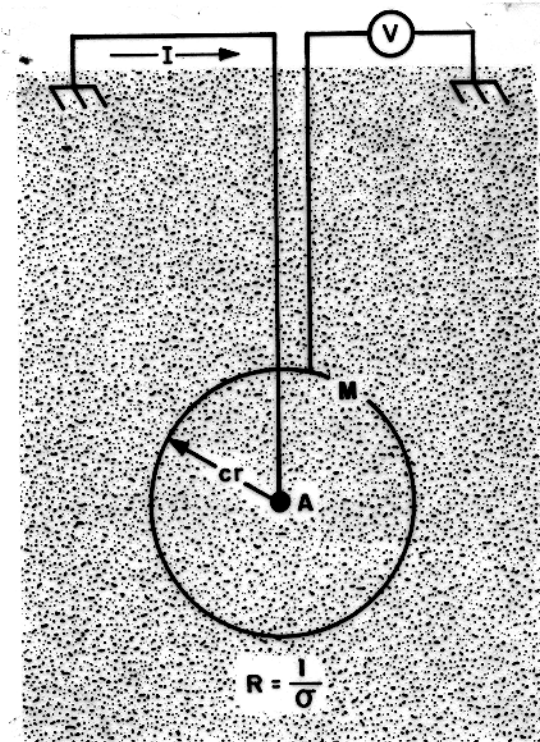


Figura 2.4 - A ferramenta *Short Normal* num meio isotrópico e homogêneo. Supomos que o eletrodo de retorno de corrente está distante do eletrodo emissor e conseqüentemente presumimos uma simetria esférica da voltagem e corrente geradas. (ELLIS, 1987)

uma corrente I^4 num meio isotrópico e homogêneo de resistividade R , com o eletrodo de retorno distante. Como podemos observar na Figura 2.4, esperamos neste caso uma simetria esférica na densidade de corrente e nas voltagens geradas por este eletrodo. Consideremos uma superfície esférica em torno do eletrodo. A corrente I que é injetada através do eletrodo tem que, supondo-se não haver acúmulo de carga⁵, atravessar esta superfície. Este fato associado à já mencionada simetria da densidade de corrente nos permite deduzir que:

$$I = \oint \vec{J} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 J, \quad (2.2)$$

sendo que:

I = corrente injetada pelo eletrodo,

⁴Adotamos, neste trabalho, a convenção de usar letras em negrito para representar as quantidades eletromagnéticas totais e iremos usar as mesmas letras, não sendo negrito, para representar as amplitudes destes mesmas quantidades quando em condições harmônicas.

⁵Isto tem de ser verdade para corrente contínua em condições estacionárias, mas não necessariamente para corrente alternada. No caso de corrente alternada pode haver acúmulo de carga numa fase da corrente para haver desacúmulo na outra fase. Este fenômeno é chamado de polarização e é um relevante fato ao se considerar o efeito Groningen.

\vec{J} = vetor densidade de corrente,

$d\vec{S}$ = elemento de área vetorial da superfície esférica,

J = módulo de \vec{J} e

r = raio da superfície esférica.

Pela Lei de Ohm e pela simetria esférica do campo elétrico podemos deduzir que:

$$J = |\vec{J}| = \frac{1}{R} |\vec{E}| = \frac{-1}{R} \frac{\partial V}{\partial r}, \quad (2.3)$$

sendo que:

R = resistividade do meio,

\vec{E} = vetor campo elétrico,

V = voltagem e

r = distância da origem do ponto em questão.

Substituindo a equação 2.3 na equação 2.2 temos que:

$$I = \frac{-4\pi r^2 \partial V}{R \partial r}. \quad (2.4)$$

Rearranjando esta equação temos que:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{-RI}{4\pi r^2}. \quad (2.5)$$

Integrando esta equação do infinito, onde a voltagem é convencionalmente como nula, até r temos que:

$$V = - \int_{\infty}^r \frac{RI}{4\pi r^2} dr = \frac{RI}{4\pi r}. \quad (2.6)$$

Lembrando pela Figura 2.3 que a voltagem medida pela ferramenta *Short Normal* é $V_M - V_N$ e que o eletrodo emissor e o receptor são ambos geradores de voltagem nos eletrodos de medição, podemos a partir da equação 2.6 obter que (LACOUR-GAYET, 1981):

$$\begin{aligned} V_M - V_N &= \left(\frac{R(+I)}{4\pi \overline{AM}} + \frac{R(-I)}{4\pi \overline{BM}} \right) - \left(\frac{R(+I)}{4\pi \overline{AN}} + \frac{R(-I)}{4\pi \overline{BN}} \right) \\ &= \frac{RI}{4\pi \overline{AM}} \left[1 + \frac{\overline{AM}}{\overline{BN}} - \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} - \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} \right], \end{aligned} \quad (2.7)$$

sendo que:

V_M = voltagem no eletrodo de monitoração,

V_N = voltagem no eletrodo de referência,

\overline{AM} = distância entre o eletrodo emissor de corrente e o de monitoração,

\overline{BM} = distância entre o eletrodo receptor de corrente e o de monitoração,

\overline{AN} = distância entre o eletrodo emissor de corrente e o de referência e

\overline{BN} = distância entre o eletrodo receptor de corrente e o de referência.

Isolando o termo R na equação 2.7 obtemos que:

$$R = \frac{4\pi\overline{AM}}{\left[1 + \frac{\overline{AM}}{\overline{BN}} - \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} - \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}\right]} \frac{V_M - V_N}{I} = k \frac{V_M - V_N}{I}. \quad (2.8)$$

Nesta última equação definimos uma constante k que denominamos de constante da ferramenta. Constante da ferramenta porque só depende de características da própria ferramenta. É então através da equação 2.8 que se calcula a resistividade aparente para a ferramenta *Short Normal*. A expressão final da equação 2.8 é utilizada para qualquer ferramenta de eletrodos, porém o valor da constante k não pode mais ser determinada tão diretamente. Este cálculo tem que ser feito por modelagem da resposta da ferramenta num meio isotrópico, assunto objeto do capítulo 3.

Na equação 2.8, é usual simplificar o cálculo da constante k para apenas $4\pi\overline{AM}$ considerando que o denominador na definição de k é praticamente 1 por ser a distância \overline{AM} muito menor que todas as outras distâncias envolvidas. Em particular despreza-se o termo contendo a distância \overline{BN} que se refere à voltagem gerada pelo eletrodo receptor sobre o eletrodo de referência. A eventual impossibilidade de desprezar este termo é a base da explicação do efeito Delaware (seção 4.1).

Além da ferramenta *Short Normal* outras ferramentas, com princípios de medição não muito diferentes, com vantagens e desvantagens em relação a esta, foram desenvolvidas. Citamos as ferramentas 64" *Short Normal*, *Long Normal*, *Lateral*, e ferramentas de patins para medição da resistividade da zona lavada. (ELLIS, 1987; TABANOU & ANDERSON, 1992)

Há duas situações em que a medição realizada pela ferramenta *Short Normal*, e outras ferramentas da época (1927-1950), torna-se problemática. Uma situação se refere a quando o fluido de perfuração é muito condutivo e/ou o poço é de elevado diâmetro. Nesta situação, a corrente injetada pela ferramenta tende a permanecer principalmente no poço, seguindo caminho para o eletrodo receptor, e não a penetrar na formação. A Figura 2.5 ilustra este

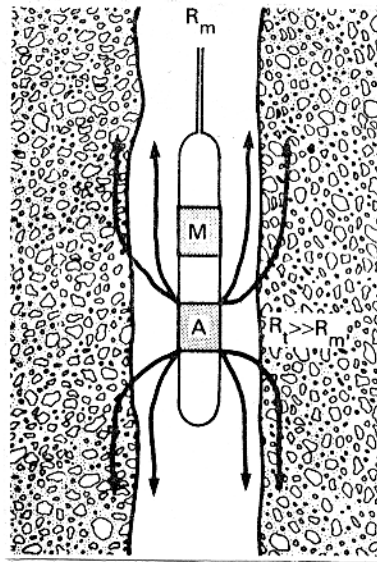


Figura 2.5 - A ferramenta *Short Normal* num poço de elevado diâmetro e/ou com fluido muito mais condutivo que a formação. As correntes praticamente não penetram na formação. (ELLIS, 1987)

fenômeno. Para esta ferramenta, e outras ferramentas de eletrodos de medição de resistividade da zona virgem, a solução deste problema está associada à necessidade de aumentar a profundidade de investigação. Isto porque a profundidade de investigação só pode ser aumentada por um maior controle da injeção de corrente de modo que esta corrente sofra espalhamento geométrico com o maior retardo possível. Este controle é o mesmo necessário para solucionar este problema.

A segunda situação é quando uma camada adjacente é muito mais condutiva do que a camada aonde se deseja medir a resistividade. Neste caso as correntes tendem a penetrar na camada condutiva e a refletirem a resistividade da mesma (Figura 2.6). Semelhante à situação anterior, a solução deste problema, para esta e qualquer outra ferramenta de eletrodos, está associada ao aprimoramento da resolução vertical. Isto porque o controle, sobre a corrente, necessário para evitar que corrente penetre na camada adjacente é o mesmo requerido no aumento da resolução vertical.

A necessidade de superar os problemas da ferramenta *Short Normal* levaram ao desenvolvimento de ferramentas baseadas na idéia da focalização. A focalização tem como objetivo a tentativa de obrigar a corrente a atravessar a camada em frente à ferramenta segundo, aproximadamente, uma geometria pré-estabelecida. Esta focalização é conseguida pelo uso de eletrodos, emissores ou receptores de corrente, adicionais denominados de focalização. O controle desta focalização é feito através de eletrodos de monitoração da voltagem em distâncias pré-estabelecidas. Fez-se este desenvolvimento para duas geometrias: a esférica e

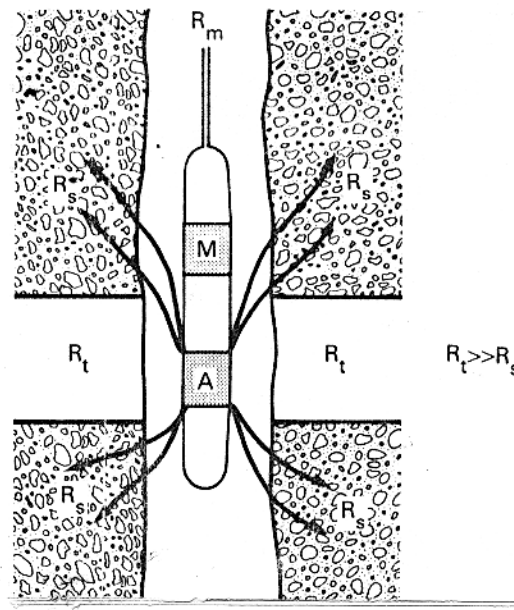


Figura 2.6 - A ferramenta *Short Normal* quando a camada adjacente é muito mais condutiva do que a camada em frente à ferramenta. As correntes tendem a penetrar na camada mais condutiva. (ELLIS, 1987)

a lateral.

A focalização esférica está ilustrada na Figura 2.7, mostrando a geometria das correntes da ferramenta *Spherically Focused Log*. A focalização esférica, como o nome já denuncia, procura estabelecer uma simetria esférica nas superfícies de equi-voltagem da ferramenta, como estas eram para a ferramenta *Short Normal* num meio isotrópico e homogêneo (ver Figura 2.4). Consegue-se esta geometria variando a corrente emitida pelo eletrodo principal e a recebida pelos eletrodos de focalização de modo que a diferença de voltagem entre os eletrodos monitores M_0 (em curto-circuito com M'_0) e M_1 (em curto-circuito M'_1) seja mantida constantemente num valor V_0 e a diferença de voltagem entre este último e o eletrodo M_2 (em curto-circuito com M'_2) seja mantida nula. Existirão duas superfícies de equi-voltagem praticamente esféricas: uma que passa pelos eletrodos M_0 e M'_0 e outra que passa entre os eletrodos M_1 e M_2 e entre M'_1 e M'_2 . Assegura-se a quase esfericidade destas superfícies pela simetria de posição dos eletrodos monitores em relação ao principal e, no caso da primeira, o fato desta superfície estar num único meio (poço). Pode-se notar na Figura 2.7 que a focalização esférica é efetiva num pequeno raio de ação, sendo assim útil para medir resistividade principalmente da zona invadida, não da zona virgem. A voltagem usada no cálculo da resistividade aparente é a voltagem V_0 e a corrente usada é a do eletrodo principal. (SERRA, 1984)

A ferramenta *Spherically Focused Log* foi a base para o desenvolvimento da ferramenta

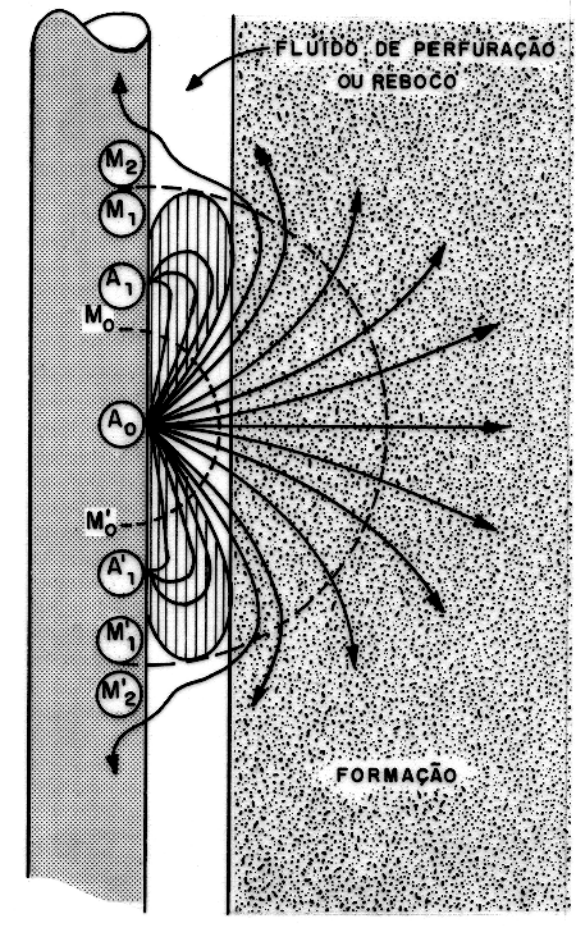


Figura 2.7 - A focalização esférica realizada pela ferramenta *Spherically Focused Log*. (ELLIS, 1987)

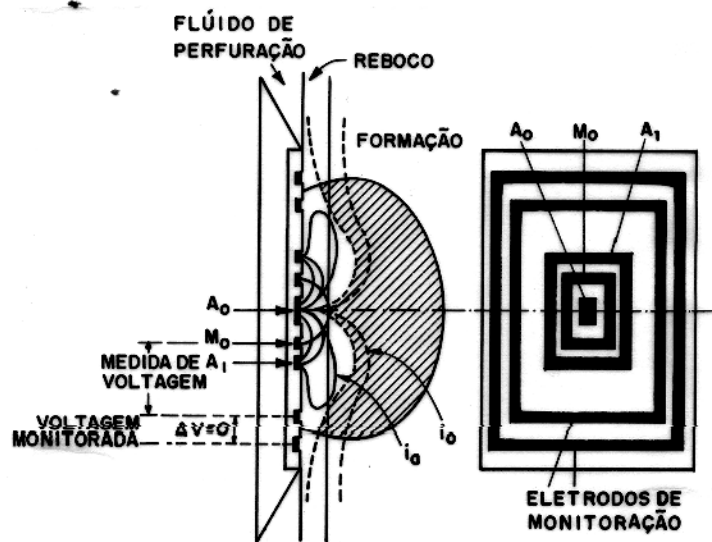


Figura 2.8 - Desenho esquemático da ferramenta *Micro-Spherically Focused Log*. (SUAU et al., 1972)

de patins *Micro-Spherically Focused Log* (Figura 2.8). A ferramenta *Dual Laterolog*, objeto deste trabalho, utiliza este tipo de focalização na medida de resistividade de profundidade de investigação média e utiliza o *Micro-Spherically Focused Log* para a medida rasa (seção 2.4).

A focalização lateral em comparação com uma medida não-focalizada está ilustrada na Figura 2.9. A focalização lateral procura fazer a corrente do eletrodo principal ser injetada laminarmente na formação. Consegue-se isto fazendo com que a tensão não varie (i.e., tenha derivada nula) na direção vertical, acima e abaixo do eletrodo principal. Assim a componente vertical do campo elétrico e da densidade de corrente são nulos. Varias ferramentas com este tipo de focalização foram desenvolvidas, porém neste trabalho iremos descrever apenas as ferramentas *Laterolog 3* e *Laterolog 7*. Uma fusão do projeto destas ferramentas é utilizada para realizar a medida profunda de resistividade na ferramenta *Dual Laterolog* (seção 2.4).

A ferramenta *Laterolog 3* é composta de 3 eletrodos (Figura 2.10): um principal (A_0) e dois, longos, de focalização (A_1 e A_1') simetricamente dispostos em relação ao primeiro. O eletrodo principal é mantido à tensão constante e os dois eletrodos de focalização mantidos à essa mesma tensão, assegurando-se assim a focalização lateral. A tensão usada no cálculo da resistividade aparente é a tensão dos eletrodos e a corrente é a do eletrodo principal (SERRA, 1984). Esta ferramenta representou um grande avanço na questão da profundidade de investigação.

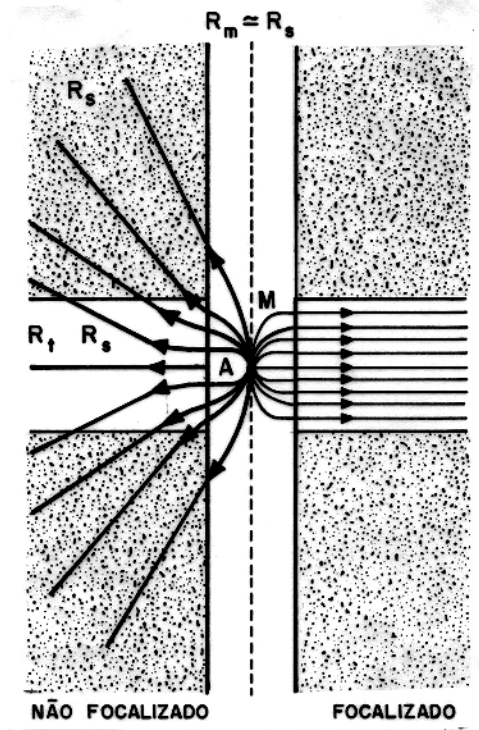


Figura 2.9 - A focalização lateral em comparação com a ausência de focalização. (ELLIS, 1987)

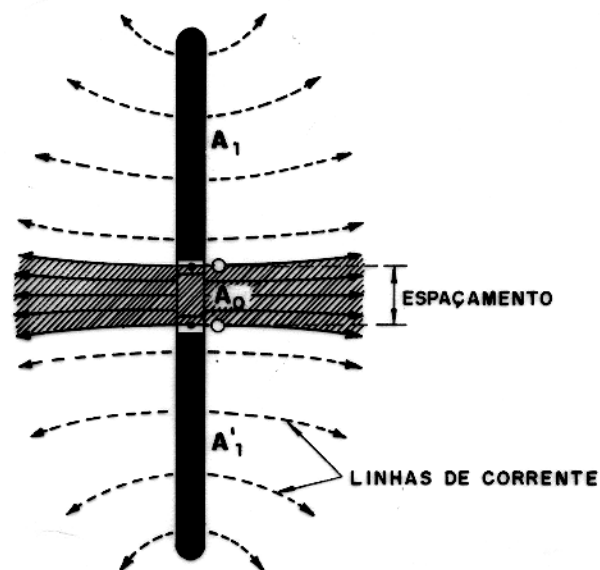


Figura 2.10 - A ferramenta *Laterolog 3* e sua geometria (idealmente) de correntes. (SERRA, 1984)

A presença de dois eletrodos longos era o principal problema desta ferramenta. Isto porque estes eletrodos interferem com a medida de potencial espontâneo e com ferramentas de indução (DOLL, 1951). A ferramenta de indução é necessária uma vez que a ferramenta *Laterolog 3* só fornece um tipo, quanto à profundidade de investigação, de resistividade. A interferência é produzida pela forte indução sofrida pelos eletrodos e o consequente sinal gerado por estes eletrodos.

A ferramenta *Laterolog 7* é composta de 7 eletrodos (Figura 2.11), dos quais um é o principal (A_0), dois são de focalização (A_1 e A_2) e quatro são de monitoração da voltagem (M_1 , M'_1 , M_2 e M'_2). O eletrodo principal é mantido a corrente constante. A corrente de focalização é ajustada de modo a que a diferença de voltagem entre M_1 (em curto-circuito com M_2) e M'_1 (em curto-circuito com M'_2) seja nula. Assim não há campo elétrico vertical próximo a estes eletrodos de medição e a focalização lateral é assegurada. A voltagem usada no cálculo da resistividade aparente é a voltagem do eletrodo M_1 (idealmente igual a dos demais eletrodos de monitoração) e a corrente é a do eletrodo principal (DOLL, 1951). Esta ferramenta, em relação à *Laterolog 3*, representou um avanço considerável na questão da resolução vertical, no entanto ficou aquém na questão da profundidade de investigação.

A ferramenta *Laterolog 7* foi a base para o projeto de uma ferramenta de patins denominada *Micro-Laterolog* (DOLL, 1953) e da ferramenta *Laterolog 8*, que apenas incorporou um eletrodo extra para medidas de resistividade rasa, esta última tendo feito parte da ferramenta *Dual Induction-Laterolog* (TIXIER et al., 1963).

Na próxima seção (2.4) trataremos da ferramenta de eletrodos *Dual Laterolog*.

2.3.3 Ferramentas de Eletrodos versus Ferramentas de Indução

Conhecendo-se os dois tipos de ferramentas de resistividade, a pergunta que se faz é quando usar um tipo ou o outro. A questão básica é a resistividade do fluido de perfuração e seu contraste com a da formação. Ferramentas de eletrodos exigem que o fluido seja pouco resistivo para que haja contato elétrico com a formação, e quanto menor for esta resistividade (até certo limite) em comparação com a da formação, melhor será a medida. Ferramentas de indução, pelo contrário, funcionam melhor quanto mais resistivo for o fluido de perfuração em contraste com a formação, assegurando uma participação menor do sinal do poço na medida. A Figura 2.12 representa um guia na seleção entre os dois tipos de ferramenta.

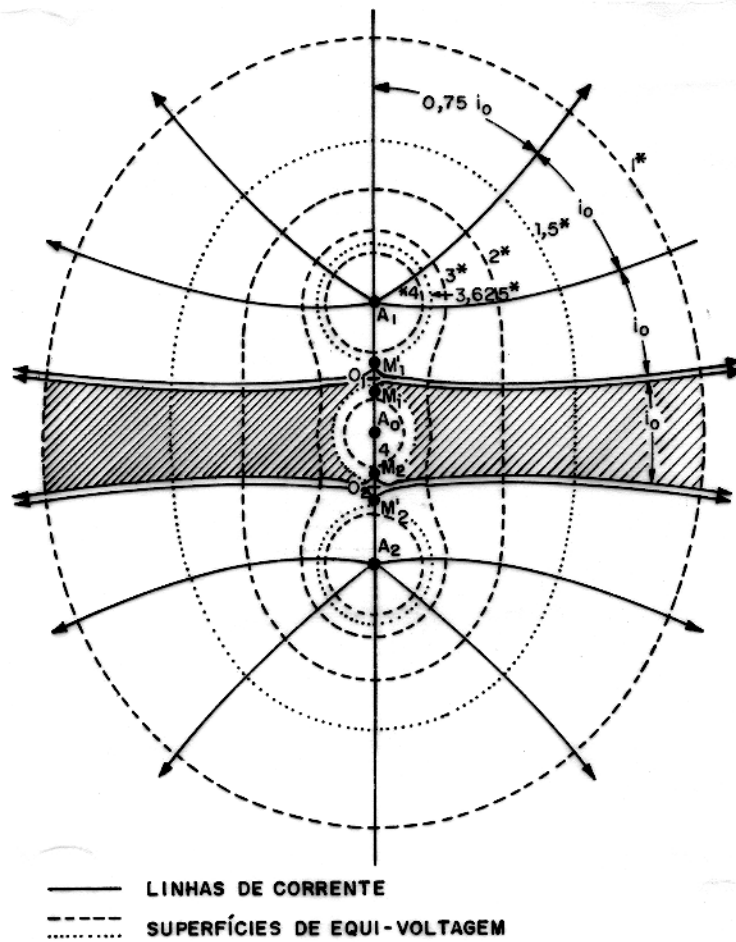


Figura 2.11 - Desenho esquemático da ferramenta *Laterolog 7*. (DOLL, 1951)

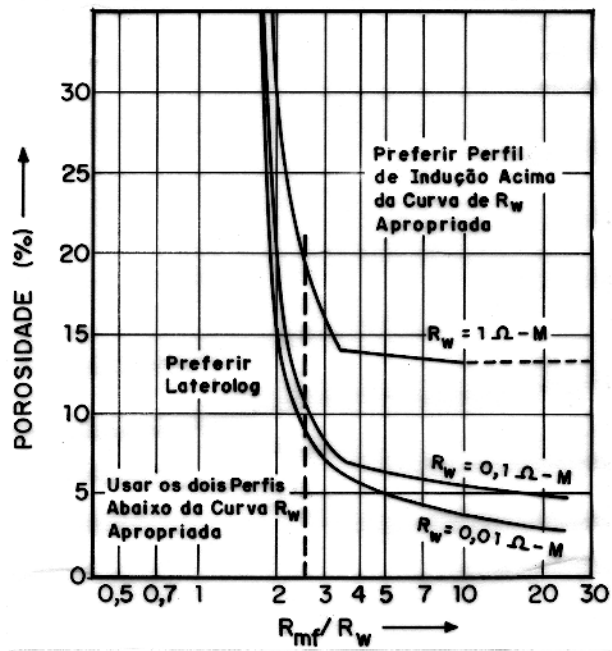


Figura 2.12 - Ferramentas de Eletrodos X Ferramentas de Indução. As Ferramentas de eletrodos são indicadas quanto menor for a resistividade do filtrado de fluido de perfuração em comparação com a resistividade da água de formação, dependendo também da porosidade. (SCHLUMBERGER, 1989b)

2.4 A Ferramenta "Dual Laterolog"

Em 1972 tornou-se comercial a ferramenta *Dual Laterolog-R_{zo}* (SUAU et al., 1972), ou simplesmente *Dual Laterolog*, sendo até o momento, a principal ferramenta de eletrodos para medição de resistividade em operação (Figura 2.13). O diâmetro da ferramenta varia, de acordo com o fabricante e o modelo, de 8.9 cm (3½") a 13.3 cm (5¼") sendo 9.2 cm (3⅝") um valor mais usual (SERRA, 1984). O comprimento da ferramenta varia, também de acordo com o fabricante e o modelo, de 3.05 m (10') a 8.53 m (28') (SERRA, 1984), sendo o último valor o mais usual e também o mencionado no artigo original desta ferramenta (SUAU et al., 1972).

Esta ferramenta realiza três medidas de resistividade de diferentes profundidades de investigação. A medida rasa é realizada por um sistema de eletrodos em patim igual a ferramenta *Micro-Spherically Focused Log* (Figura 2.8). As medidas profunda e média estão ilustradas na Figura 2.14. As duas medidas são realizadas com o uso dos mesmos eletrodos e de modo simultâneo. Isto é possível usando frequências diferentes nas duas medidas, sendo assim possível desacoplá-las. A medida profunda é realizada em 35 Hz e a média em 280 Hz (HLS, 1990; LACOUR-GAYET, 1982; SCHOLBERG, 1973).

As Figuras 2.13 e 2.14 demonstram o fato do sistema de eletrodos utilizado para a medida profunda ser uma fusão do projeto da ferramenta *Laterolog 3* com o da *Laterolog 7*. O eletrodo A_0 é o principal. Os eletrodos A_1 e A'_1 focalizam a corrente de A_0 , com o uso dos eletrodos de monitoração M_1 , M_2 , M'_1 e M'_2 , num sistema semelhante ao *Laterolog 7*⁶. Os eletrodos longos A_2 e A'_2 reforçam a focalização de A_0 num sistema semelhante ao *Laterolog 3*. Pelo fato da ferramenta *Dual Laterolog* já realizar três tipos de medidas de resistividade, dispensando qualquer ferramenta de indução, e por não haver mais, desde esta época, necessidade de realizar a perfilagem de potencial espontâneo concomitantemente com a de resistividade, não existem mais as razões que inviabilizaram os eletrodos longos do *Laterolog 3*. Os eletrodos A_2 e A'_2 são mantidos a mesma voltagem de A_1 e A'_1 , e não de A_0 como poderia se supor⁷ (HLS, 1990; SCHOLBERG, 1973). O resultado é uma ferramenta que supera em larga escala, em termos de profundidade de investigação e resolução vertical, todas as ferramentas anteriores.

⁶Uma nova versão do *Dual Laterolog*, no entanto, não mantém em curto-circuito os eletrodos A_1 e A'_1 , nem os eletrodos monitores. Esta ferramenta tem dois circuitos independentes de focalização, um para os eletrodos superiores e outro para os inferiores (HLS, 1989).

⁷Há, na literatura (HLS, 1990; SCHOLBERG, 1973), indicação da existência de eletrodos adicionais de monitoração denominados A_1^* e A'_1^* , o primeiro localizado imediatamente acima de A_1 e o segundo imediatamente abaixo de A'_1 . Estes eletrodos estariam envolvidos apenas na medida profunda e sua função seria a de monitorar a voltagem de A_1 e A'_1 , respectivamente, para fins de controle da voltagem de A_2 e A'_2 .

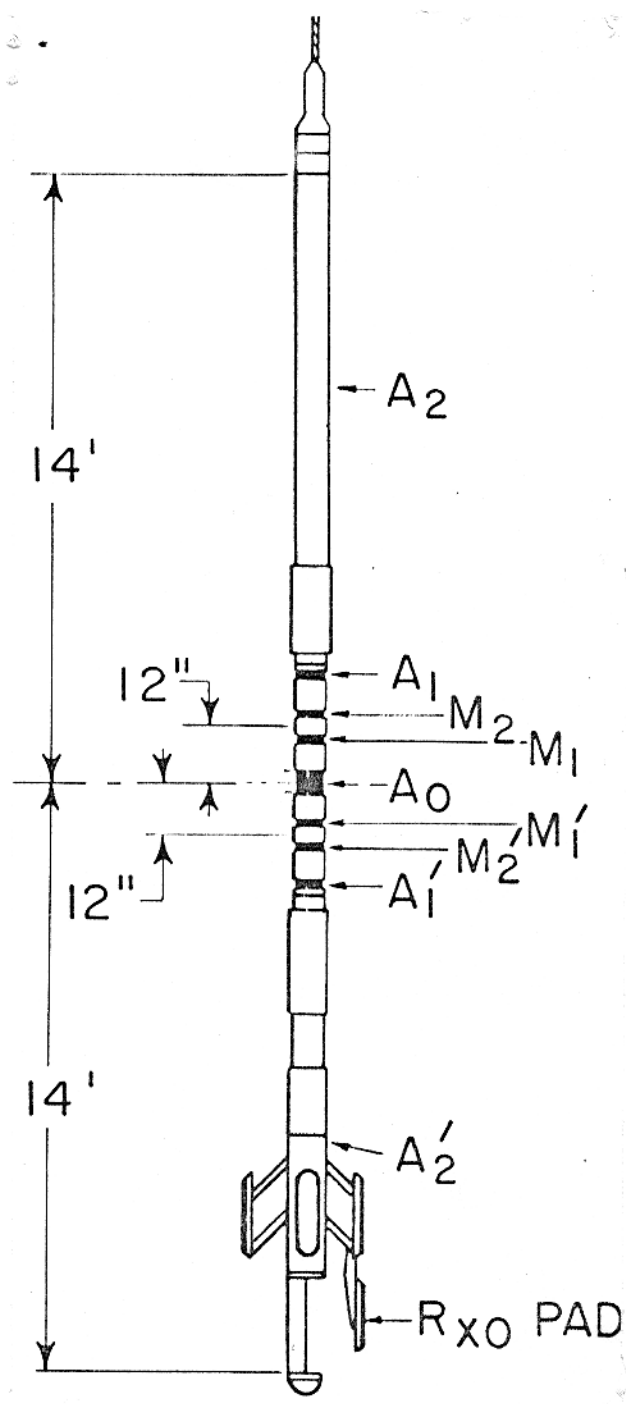


Figura 2.13 - Projeto da ferramenta *Dual Laterolog*. (SUAU et al., 1972)

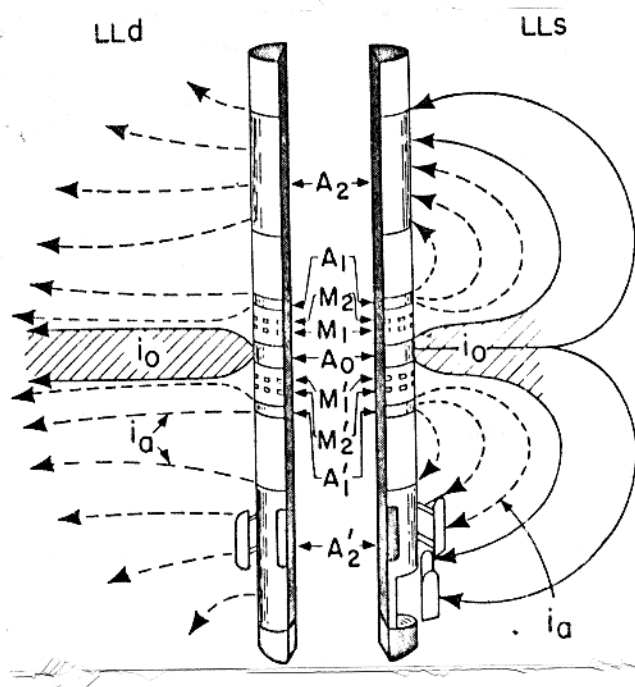


Figura 2.14 - Distribuição de correntes para os dois tipos de medida, a profunda (LLd) e a média (LLs), da ferramenta *Dual Laterolog*. Os dois modos atuam simultaneamente e estão desacoplados por operarem em frequências diferentes. (SUAU et al., 1972)

A medida de profundidade média se diferencia da profunda pelo fato dos eletrodos A_2 e A'_2 servirem como receptores da corrente emitida pelo eletrodo principal (Figura 2.14), os demais eletrodos operando de modo semelhante. Isto assegura uma influência maior da zona invadida sobre esta medida. Embora uma comparação entre as Figuras 2.14 e 2.7 não revele nenhuma semelhança, na verdade o sistema de eletrodos usado na medida média é quase o recíproco⁸ (TABANOU & ANDERSON, 1992) do *Spherically Focused Log*, sendo assim estas duas medidas bastante semelhantes.

A voltagem usada no cálculo da resistividade aparente, tanto na medida profunda quanto na média, é a do eletrodo M_1 (idealmente igual a dos demais eletrodos monitores) e a corrente é a do eletrodo principal (SCHOLBERG, 1973). O valor da constante da ferramenta k é de 1.45 para a medida média e de 0.81 (HLS, 1990), ou 0.89 (DAVIES et al., 1992), para a medida profunda dependendo do fabricante.

Há mais dois eletrodos desta ferramenta que não foram mencionados: o eletrodo receptor de corrente (B) e o eletrodo de referência de voltagem (N). Ambos os eletrodos, no entanto, não se encontram no corpo da ferramenta e serão considerados na próxima seção.

Uma importante inovação tecnológica desta ferramenta em relação às anteriores é o fato do eletrodo principal ser mantido a potência constante e não mais a corrente ou voltagem constante. Este fato faz com que esta ferramenta seja muito mais versátil em termos do espectro de resistividades de formação que a ferramenta pode medir. (SUAU et al., 1972)

2.5 Equipamentos de Suporte

Todas as ferramentas de perfilagem, para cumprirem sua função no poço, precisam de equipamentos de suporte como o cabo de perfilagem e os equipamentos que ficam no caminhão ou unidade de perfilagem para, por exemplo, fornecer energia para o funcionamento destas ferramentas e para o registro das medidas.

Para fins deste trabalho quatro equipamentos precisam ser considerados: o cabo de perfilagem, o *torpedo*, o *bridle* e o *fish*.

⁸Um princípio do eletromagnetismo largamente utilizado em geofísica é o Princípio da Reciprocidade. Este princípio garante que uma perfeita troca entre os eletrodos de medida de voltagem e os de injeção de corrente em nada alteram a medida. Assim um *Spherically Focused Log* recíproco seria esta ferramenta com os eletrodos de corrente passando a ser de monitoração e os de monitoração passando a ser de injeção de corrente.

2.5.1 O Cabo de Perfilagem

O cabo de perfilagem tem as seguintes funções (SERRA, 1984):

- Transmissão de esforço mecânico da unidade de perfilagem para a ferramenta.
- Realização de interface elétrica entre a unidade de perfilagem e a ferramenta, para transmissão de potência elétrica do primeiro para o segundo e de dados do segundo para o primeiro.
- Medição da profundidade.

Há dois tipos de cabo em uso: o monocabo e o multicabo. O *mono* e o *multi* se referem a 1 e 7 condutores, respectivamente, dentro do cabo. O monocabo tem um diâmetro de 5.5 mm (7/32") e o multicabo 11.8 mm (15/32")(SERRA, 1984).

Ambos os tipos de cabos têm os condutores recobertos por um isolante e acima do isolante uma blindagem, com 2.5 mm (0.1") de espessura, constituída de um duplo revestimento de fios de aço helicoidalmente enrolados. A blindagem serve para a transmissão de esforço mecânico e para medição de profundidade através de marcação magnética (SERRA, 1984). Veremos mais tarde que o cabo impõe uma condição de fronteira necessária a modelagem de ferramentas de eletrodos e a presença da blindagem é importante na modelagem do efeito Groningen.

2.5.2 O "Torpedo"

Ferramentas de eletrodos necessitam de um eletrodo de referência, onde a voltagem seja praticamente nula, para medições de voltagem. Este eletrodo deve estar suficientemente próximo da ferramenta para que o seu uso como referência não esteja sujeito a distúrbios ambientais e suficientemente longe para que não esteja sujeita à voltagem criada por essa mesma ferramenta. Assim o eletrodo de referência é colocado num equipamento denominado de *torpedo*. O *torpedo* é uma cabeça de conexão do cabo de perfilagem com o *bridle*, estando portanto acima da ferramenta de perfilagem. O *torpedo* é de constituição metálica, porém isolado eletricamente do cabo de perfilagem e dos condutores internos.

2.5.3 O "Bridle"

O *bridle* é um cabo especial, com isolamento externo, que fica entre o *torpedo* e a ferramenta (Figura 2.15). O *bridle* é necessário para que não exista um caminho condutivo, para

a corrente injetada no meio, entre a ferramenta e o *torpedo*.

Em projetos antigos do *Dual Laterolog*, o eletrodo de retorno de corrente e o eletrodo de referência eram ambos colocados no *bridle*. Veremos no capítulo 4 porque atualmente o eletrodo de retorno é colocado no *fish* e o eletrodo de referência no *torpedo*.

O *bridle* normalmente tem um comprimento de 24.4 m (80') e um diâmetro de 19.8 mm (25/32") (SCHLUMBERGER, 1992, Comunicação Verbal).

2.5.4 O "Fish"

O *Fish* é um eletrodo de chumbo, conectado diretamente à unidade de perfilagem, aterrado ou mergulhado no mar, que serve como receptor para a corrente enviada à ferramenta de perfilagem. Podemos considerar, para efeitos práticos, que esteja localizado na superfície próximo ao poço.

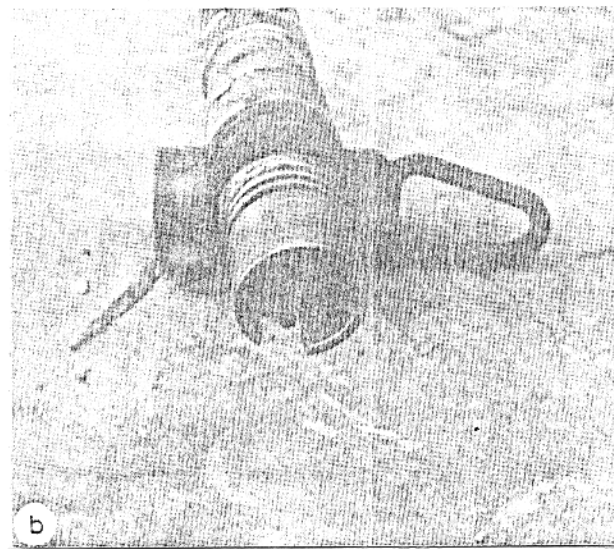
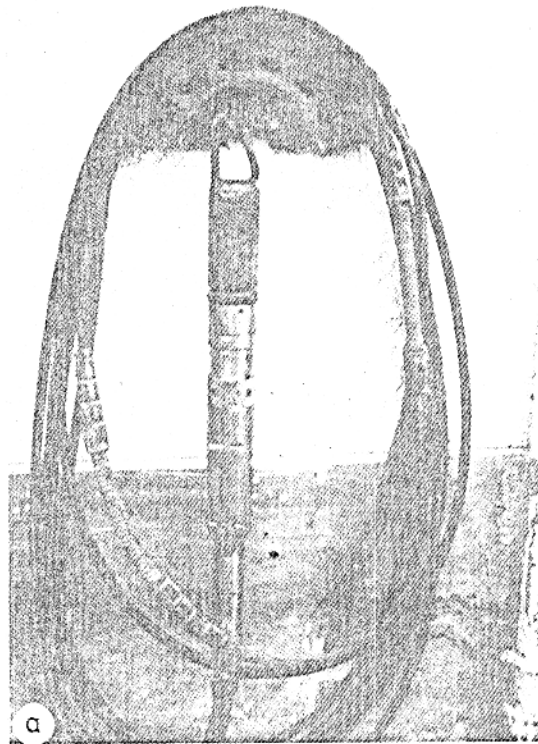


Figura 2.15 - O *Bridle* (a) e a cabeça de conexão com a ferramenta (b).
(SERRA, 1984)

CAPÍTULO 3

MODELAGEM DE RESPOSTA DE FERRAMENTAS DE ELETRODOS

No capítulo anterior descrevemos o fato de uma constante da ferramenta k , relativa ao cálculo da resistividade aparente, estar associada a todas as ferramentas de eletrodos. Podemos, a partir de considerações de simetria e da lei de Ohm, calcular o valor desta constante para a mais simples ferramenta de eletrodos existente, a *Short Normal*. Podemos, ainda, constatar a impossibilidade de, a partir de cálculos tão simples, obter o valor dessa constante para ferramentas de eletrodos mais avançadas. Para conseguir isto é necessário simular o sistema de medida nos mais diversos ambientes possíveis. Esta simulação é denominada de Modelagem de Resposta de Ferramentas de Eletrodos.

A modelagem é, ainda, necessária para se obter correções para as resistividades aparentes, de modo a aproximá-las da resistividade verdadeira da formação. Isto se deve ao fato do ambiente em subsuperfície não ser o meio homogêneo suposto no cálculo da resistividade aparente. O efeito Groningen é um caso de não-homogeneidade do meio em subsuperfície acarretando em necessidade de correção para medidas de resistividade.

Uma medida de resistividade realizada por uma ferramenta de eletrodos é tão somente um problema de eletromagnetismo. Todo problema de eletromagnetismo sempre pode ser resolvida experimentalmente ou teoricamente. Ambas as soluções são utilizadas e cada uma tem suas limitações. Em relação à solução experimental dois procedimentos podem ser utilizados:

- *A Construção de Redes de Resistores*: Este procedimento foi muito utilizado no período de 1950 a 1960. Consiste em construir um circuito de resistores supostamente equivalente ao ambiente da perfilagem. As limitações deste método são evidentes e por isto o mesmo caiu em desuso. (ELLIS, 1987; GUYOD, 1955)
- *Modelamento em Escala de Laboratório*: Este procedimento é recente e os trabalhos publicados para o *Laterolog* são de um único grupo de pesquisa (BITTAR et al., 1990; SHATTUCK et al., 1987). Construiu-se ferramentas 20 vezes menores que as de poço

e simula-se a formação por um concreto poroso embebido em água salina. Estas ferramentas, porém, foram operadas a frequências mais altas para diminuir os efeitos de polarização de eletrodo. A vantagem deste procedimento é o fato de se realizar uma medida em condições, pelo menos geometricamente, muito próxima da medida em poço. Para o efeito Groningen, no entanto, este procedimento é pouco útil por motivos que exporemos no capítulo 4.

A solução teórica nada mais é do que solucionar as equações de Maxwell, que são as equações básicas do eletromagnetismo, no domínio⁹ e com as condições de fronteira (do domínio) apropriados para o problema. Esta é a solução usada neste trabalho. Nesta solução também há dois procedimentos possíveis: condições estacionárias (corrente contínua) ou condições harmônicas (corrente alternada). Estes dois procedimentos conduzem a duas equações diferentes a serem resolvidas. Para resolver estas equações temos um amplo leque de opções. As equações e os modos de resolvê-las são os assuntos básicos deste capítulo.

3.1 Equações de Maxwell

As equações de Maxwell no sistema de unidades SI e na forma integral, que é a forma de validade mais abrangente, são as seguintes (adaptado de REITZ et al., 1982):

$$\text{Lei de Gauss da eletricidade: } \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q, \quad (3.1)$$

$$\text{Lei de Gauss do magnetismo: } \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (3.2)$$

$$\text{Lei de Ampère estendida: } \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_C} \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_{S_C} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad e \quad (3.3)$$

$$\text{Lei de Faraday: } \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{S_C} -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \quad (3.4)$$

sendo que:

S = superfície de integração fechada,

\vec{D} = deslocamento elétrico,

Q = carga livre total no volume encoberto por S ,

\vec{B} = indução magnética,

⁹Os pontos do espaço em que desejamos conhecer a solução e/ou supomos influir nesta constituem o domínio de solução da equação. Denominamos de Fronteira do Domínio a superfície que delimita estes pontos.

C = circuito de integração fechado,

\vec{H} = intensidade magnética,

S_C = superfície de integração cuja fronteira é o circuito C ,

\vec{J} = densidade de corrente e

\vec{E} = campo elétrico.

Em Geofísica é conveniente separar o termo de densidade de corrente (\vec{J}) em duas partes:

$$\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_g, \quad (3.5)$$

sendo que:

\vec{J}_f = densidade de corrente de fonte e

\vec{J}_g = densidade de corrente gerada no meio.

Fazemos estas definições para distinguirmos a corrente circulando dentro do equipamento de medida da que circula no meio. É interessante observar que num eletrodo, a corrente que está saindo do eletrodo para o meio é igual a corrente de fonte que está entrando no eletrodo pelo equipamento.

Neste trabalho consideraremos apenas meios isotrópicos, sendo assim válidas as seguintes relações constitutivas para estes meios:

$$\vec{J}_g = \sigma \vec{E}, \quad (3.6)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \text{ e} \quad (3.7)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (3.8)$$

sendo que:

σ = condutividade do meio,

ϵ = permissividade do meio e

μ = permeabilidade magnética do meio.

Suporemos, nestas relações, que os meios sejam lineares, ou seja que $\sigma \neq \sigma(\vec{E})$, $\epsilon \neq \epsilon(\vec{E})$ e $\mu \neq \mu(\vec{H})$.

Substituindo a equação 3.5 e as relações constitutivas nas equações de Maxwell obtemos:

$$\oint_S \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q, \quad (3.9)$$

$$\oint_S \mu \vec{H} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (3.10)$$

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_C} \vec{J}_f \cdot d\vec{S} + \int_{S_C} \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} + \int_{S_C} \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \text{ e} \quad (3.11)$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{S_C} -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (3.12)$$

Os modelos usados para ambientes geológicos são sempre contínuos por pedaços, ou seja contínuos com fronteiras de descontinuidade, quanto a propriedades eletromagnéticas. Então as equações de Maxwell, para pontos que não estejam nas fronteiras de descontinuidade, podem ser reduzidas para uma forma matematicamente mais conveniente, denominada de forma diferencial (adaptado de REITZ et al., 1982):

$$\vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{E} = q_v, \quad (3.13)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mu \vec{H} = 0, \quad (3.14)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f + \sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ e} \quad (3.15)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (3.16)$$

sendo que:

q_v = densidade volumétrica de cargas livres.

Em modelos geofísicos normalmente não se tem conhecimento prévio da densidade de cargas livres (q_v), pois as fontes são de corrente. Nas fronteiras de descontinuidade as equações de Maxwell se reduzem às seguintes condições de fronteira (adaptado de REITZ et al., 1982):

$$\mathbf{E}_1^t = \mathbf{E}_2^t, \quad (3.17)$$

$$\sigma_1 \mathbf{E}_1^n - \sigma_2 \mathbf{E}_2^n = -\frac{\partial q_s}{\partial t}, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{H}_1^t = \mathbf{H}_2^t \text{ e} \quad (3.19)$$

$$\mu_1 \mathbf{H}_1^n = \mu_2 \mathbf{H}_2^n, \quad (3.20)$$

sendo que:

q_s = densidade superficial de cargas livres na fronteira,

X^t = componente tangencial à fronteira do vetor \vec{X} ,

X^n = componente normal à fronteira do vetor \vec{X} ,

X_1 = valor da propriedade, ou componente de vetor, X no meio 1 na vizinhança da fronteira e

X_2 = valor da propriedade, ou componente de vetor, X no meio 2 na vizinhança da fronteira.

As equações de Maxwell nesta última forma, com as condições de fronteira, são a nossa base de trabalho. Precisamos agora considerar as duas possibilidades de solução: condições estacionárias ou condições harmônicas.

3.2 Equações de Maxwell para Condições Estacionárias

Condições Estacionárias significam a não variação com o tempo ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) dos campos eletromagnéticos. As condições criadas por uma fonte de corrente contínua, passado um período de relaxação (denominado de transiente elétrico) após o acionamento da fonte, podem assim ser considerados. Neste caso as equações de Maxwell se reduzem a:

$$\vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{E} = q_v, \quad (3.21)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mu \vec{H} = 0, \quad (3.22)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f + \sigma \vec{E} \text{ e} \quad (3.23)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (3.24)$$

A equação 3.24, associado com um resultado da Análise Vetorial ($\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} V = 0$ sendo V um campo escalar qualquer), sugere a possibilidade de se escrever $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$. Fazendo esta substituição na equação 3.23 e tirando-se a divergência da equação resultante e lembrando que $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times = 0$, obtemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \sigma \vec{\nabla} V = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_f. \quad (3.25)$$

A função V é denominada de Voltagem e a equação 3.25 é denominada de equação de Poisson da Voltagem. A redução desta equação à equação de Laplace é o assunto da próxima seção.

3.2.1 Equação de Laplace da Voltagem

Na equação 3.25, o lado direito da equação anula-se para pontos fora das fontes tornando-se:

$$\vec{\nabla} \cdot \sigma \vec{\nabla} V = 0. \quad (3.26)$$

Esta equação é conhecida como a equação de Laplace da voltagem. Esta é a equação a ser resolvida se não tivermos fontes no domínio, o que é possível se colocarmos todas as fontes na fronteira do domínio.

No entanto, se tivermos fontes no domínio, temos de calcular o valor deste lado direito. Para um sistema de dois eletrodos pontuais, um emissor e o outro receptor, conectados por um condutor recoberto por um isolante, injetando uma corrente I no meio isto é relativamente simples. A corrente de fonte neste caso é dado por:

$$\vec{J}_f = -I \chi_{[z_1 z_2]} \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} \hat{z}, \quad (3.27)$$

sendo que:

$\chi_{[z_1 z_2]}$ = função tipo Heaviside de valor unitário sobre a linha que une z_1 e z_2 (as coordenadas dos eletrodos) e

$\delta(\rho)$ = função delta de Dirac.

Observar que o sinal de menos é para garantir que a corrente dentro do equipamento esteja descendo para o eletrodo em z_1 para ser injetada no meio. Obtendo-se a divergência desta corrente de fonte obtemos que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_f = -I \frac{\partial \chi_{[z_1 z_2]} \delta(\rho)}{\partial z} = -I [\delta(z - z_1) - \delta(z - z_2)] \frac{\delta(\rho)}{2\pi\rho} = -I [\delta(\vec{r} - \vec{r}_1) - \delta(\vec{r} - \vec{r}_2)], \quad (3.28)$$

sendo que:

$\delta(\vec{r})$ = função delta tridimensional de Dirac ($= \frac{\delta(\rho)\delta(z)}{2\pi\rho}$).

Substituindo este resultado na equação 3.25, obtemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \sigma \vec{\nabla} V = -I [\delta(\vec{r} - \vec{r}_1) - \delta(\vec{r} - \vec{r}_2)]. \quad (3.29)$$

Esta equação também é denominado de equação de Laplace pelo fato do lado direito desta ser nulo na "maioria" dos pontos de espaço. Este modelo de dois eletrodos pontuais injetando

corrente no meio é denominado de *dipólo elétrico* (GIANZERO & RAU, 1977). Este modelo foi a base dos trabalhos iniciais de modelagem eletromagnética de ferramentas de eletrodos. A partir deste modelo, desenvolveu-se métodos corretivos para se modelar eletrodos não-pontuais (GIANZERO & RAU, 1977; MERCHANT & THADANI, 1982).

A equação de Laplace, e as diversas maneiras de resolvê-la (seção 3.4), é a base de quase todos os trabalhos de modelagem de ferramentas de eletrodos publicados até hoje¹⁰ e também do único pacote comercial, o ELMOD (ANDERSON et al., 1989), de modelagem de ferramentas de eletrodos existente. O problema da equação de Laplace é que a mesma é estritamente válida para corrente contínua. O efeito Groningen é dependente da frequência e portanto não pode ser modelado com a equação de Laplace.

3.2.2 Condições de Fronteira para a Voltagem

Nas fronteiras de descontinuidade do meio as equações 3.17 e 3.18 expressadas em termos da voltagem tornam-se

$$V_1 = V_2 \text{ e} \quad (3.30)$$

$$\sigma_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} = \sigma_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} \quad (3.31)$$

respectivamente, sendo que:

$\frac{\partial}{\partial n}$ = derivada de uma função na direção normal à interface.

Na fronteira do domínio adota-se os seguintes casos:

- *Pontos de Fronteira Distantes das Fontes*: Considera-se a voltagem nula e portanto impõe-se condição de Dirichlet homogênea nestes pontos.
- *Pontos de Fronteira sobre as Fontes*: Considera-se a voltagem um valor fixo positivo nos eletrodos emissores e negativo nos receptores. Assim impõe-se condição de Dirichlet não-homogênea para estes pontos.
- *Pontos de Fronteira próximas às Fontes*: Considera-se que não há corrente atravessando estas fronteiras e portanto o campo elétrico tem componente normal nula, o que é equivalente a derivada normal da voltagem ser nula. Impõe-se condição de Neumann homogênea nestes pontos.

¹⁰Este autor tem conhecimento de uma única exceção (ANDERSON & CHEW, 1985), na qual se utiliza uma equação que, além de não ser a de Laplace, também não é a de Helmholtz em H_ϕ (a equação usada neste trabalho).

3.2.3 Cálculo de Voltagens e Correntes

Uma vez resolvida a equação de Laplace com as condições de fronteira adequadas à uma determinada ferramenta, precisamos calcular as voltagens e as correntes utilizadas no cálculo da resistividade aparente. Já que a equação resolvida é sobre a própria voltagem, os valores de voltagem necessários são obtidos pelo valor da solução nos pontos de medida.

Quanto à corrente é preciso se considerar os dois casos possíveis:

- *Fontes de Corrente no Domínio:* Neste caso a corrente terá sido fixada na própria modelagem, não havendo nenhum cálculo a fazer.
- *Fontes de Corrente na Fronteira:* Neste caso teremos de calcular a corrente injetada pelo eletrodo. Como a corrente injetada pelo eletrodo é igual a corrente recebida pelo meio na vizinhança deste eletrodo, isto pode ser feito da seguinte maneira:

$$\mathbf{I} = \int_{S_e} \vec{\mathbf{J}}_g \cdot d\vec{\mathbf{S}} = 2\pi\rho_e \int_{z_e^i}^{z_e^s} \vec{\mathbf{J}}_g \cdot \hat{n} dz, \quad (3.32)$$

sendo que:

S_e = superfície do eletrodo,

ρ_e = raio do eletrodo,

z_e^i = coordenada z inferior do eletrodo e

z_e^s = coordenada z superior do eletrodo.

Nesta dedução anterior supomos a simetria azimutal da corrente e que o eletrodo seja paralelo ao eixo z . Substituindo a equação 3.6 na equação acima e notando que a direção normal à superfície do eletrodo é a direção $\hat{\rho}$ obtemos que:

$$\mathbf{I} = 2\pi\rho_e \int_{z_e^i}^{z_e^s} \sigma \vec{\nabla} V \cdot \hat{n} dz = 2\pi\rho_e \sigma \int_{z_e^i}^{z_e^s} \frac{\partial V}{\partial \rho} dz, \quad (3.33)$$

Esta é a fórmula a ser usada para o cálculo da corrente.

3.3 Equações de Maxwell para Condições Harmônicas

As condições são harmônicas quando o campo eletromagnético oscila com uma única frequência. Isto é possível quando as fontes são de corrente alternada desta frequência (depois de decorrido um tempo de estabilização após o acionamento da fonte), que é o caso de ferramentas de perfilagem de eletrodos, e o meio é não-dispersivo, que tem de ser verdade se

o meio for linear (suposição já admitida anteriormente). Nestas condições a função de fonte e os campos eletromagnéticos podem ser separados num produto de uma amplitude com uma função oscilatória. É convenção supor que as fontes oscilam segundo uma função cosseno. Os campos eletromagnéticos terão também um termo em função cosseno, denominado termo em fase (com a fonte), e um termo em função seno, que aparecerá devido às interações eletromagnéticas, denominado termo fora de fase. Assim poderíamos escrever:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{J}}_f &= \vec{J}_f \cos(\omega t), \\ \vec{\mathbf{E}} &= \vec{E}_1 \cos(\omega t) + \vec{E}_2 \sin(\omega t) \text{ e} \\ \vec{\mathbf{H}} &= \vec{H}_1 \cos(\omega t) + \vec{H}_2 \sin(\omega t).\end{aligned}$$

Observar que ω é a frequência circular, em *rad/s*, da oscilação e é igual a $2\pi f$, sendo f a frequência em *Hz* destas oscilações. Notemos que nestas separações as funções amplitude são reais. Existe, porém, um modo aparentemente mais complicado, mas matematicamente mais conveniente de fazer esta separação:

$$\vec{\mathbf{J}}_f = \vec{J}_f e^{-i\omega t}, \quad (3.34)$$

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{E} e^{-i\omega t} \text{ e} \quad (3.35)$$

$$\vec{\mathbf{H}} = \vec{H} e^{-i\omega t}. \quad (3.36)$$

Esta forma de separar merece algumas observações:

1. Permite-se que os campos $\vec{\mathbf{J}}_f$, $\vec{\mathbf{E}}$ e $\vec{\mathbf{H}}$ sejam complexos. Isto é um artifício matemático pois só a parte real tem significado físico. Assim as funções $Re[\vec{\mathbf{J}}_f]$, $Re[\vec{\mathbf{E}}]$ e $Re[\vec{\mathbf{H}}]$ é que representam a fonte e os campos.
2. As funções amplitude \vec{J}_f , \vec{E} e \vec{H} agora são complexas e neste caso tanto a parte real como a imaginária tem significado. Pois

$$\begin{aligned}Re[\vec{\mathbf{X}}] &= Re[\vec{X} e^{-i\omega t}] = Re[(Re[\vec{X}] + iIm[\vec{X}]) \cdot (\cos(\omega t) - i\sin(\omega t))] \\ &= Re[\vec{X}] \cos(\omega t) + Im[\vec{X}] \sin(\omega t).\end{aligned}$$

Assim associamos a parte real das funções amplitude com o termo em fase e a parte imaginária com o termo fora de fase.

Antes de substituirmos as equações 3.34 a 3.36 nas equações de Maxwell (3.13 a 3.16), precisamos considerar a questão do termo \mathbf{q}_v na equação 3.13. O cálculo deste termo em condições harmônicas pode ser feita aplicando a equação da continuidade (adaptado de REITZ et al., 1982) a estas fontes:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{J}} + \frac{\partial \mathbf{q}_v}{\partial t} = 0. \quad (3.37)$$

Considerando que q_v e \vec{J} também podem ser desdobrados em $q_v e^{-i\omega t}$ e $\vec{J} e^{-i\omega t}$ podemos obter que:

$$q_v e^{-i\omega t} = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{J}}{i\omega} e^{-i\omega t}. \quad (3.38)$$

Substituindo as equações 3.34 a 3.36 nas equações de Maxwell 3.13 a 3.16, considerando a equação 3.38 obtemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{E} e^{-i\omega t} = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{J}}{i\omega} e^{-i\omega t}, \quad (3.39)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mu \vec{H} e^{-i\omega t} = 0, \quad (3.40)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} e^{-i\omega t} = \vec{J}_f e^{-i\omega t} + \sigma \vec{E} e^{-i\omega t} - i\omega \epsilon \vec{E} e^{-i\omega t} \quad (3.41)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} e^{-i\omega t} = i\omega \mu \vec{H} e^{-i\omega t}. \quad (3.42)$$

Simplificando estas equações obtemos:

$$\vec{\nabla} \cdot \epsilon \vec{E} = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{J}}{i\omega}, \quad (3.43)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \mu \vec{H} = 0, \quad (3.44)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}_f + (\sigma - i\omega \epsilon) \vec{E} \quad (3.45)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = i\omega \mu \vec{H}. \quad (3.46)$$

Estas são as equações de Maxwell para condições harmônicas. Estas equações são, na verdade, mais do que precisamos. Para este trabalho utilizaremos apenas as duas últimas equações. Precisamos agora considerar os modos em que estas duas equações podem ser desdobradas, quando em coordenadas cilíndricas, mas isto é o assunto da próxima seção.

3.3.1 Modos TE e TM

O sistema de coordenadas cilíndricas é evidentemente o mais indicado para problemas de poço. Isto por que é usual supor simetria cilíndrica nos problemas de poço. É importante observar que esta simetria implica na não variação azimutal ($\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$) de toda medida e/ou propriedade física do meio, principalmente de campos eletromagnéticos. Neste sistema de coordenadas o termo \vec{J}_f da equação 3.45, no caso de ferramentas de eletrodos, possui apenas duas componentes: a $\hat{\rho}$ e a \hat{z} . Isto porque a corrente no equipamento existe na direção \hat{z} e os eletrodos injetam radialmente a corrente no meio. Assim consideraremos $\vec{J}_f = J_\rho^f \hat{\rho} + J_z^f \hat{z}$.

A equação 3.45 expandida em coordenadas cilíndricas, e assumindo a não-variação azimutal, torna-se:

$$\frac{\partial H_\phi}{\partial z} = -J_\rho^f - (\sigma - i\omega \epsilon) E_\rho, \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial H_\rho}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial \rho} = (\sigma - i\omega\epsilon)E_\phi \text{ e} \quad (3.48)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} = J_z^f + (\sigma - i\omega\epsilon)E_z. \quad (3.49)$$

A equação 3.46 expandida do mesmo modo torna-se:

$$\frac{\partial E_\phi}{\partial z} = -i\omega\mu H_\rho, \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial \rho} = i\omega\mu H_\phi \text{ e} \quad (3.51)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho E_\phi)}{\partial \rho} = i\omega\mu H_z. \quad (3.52)$$

As equações 3.47, 3.49 e 3.51 envolvem somente as componentes H_ϕ , E_ρ e E_z . Enquanto as equações 3.48, 3.50 e 3.52 envolvem somente as componentes H_ρ , H_z e E_ϕ . Esta separação das componentes é consequência direta da simetria cilíndrica do modelo (hipótese de derivação das equações) e implica na possibilidade de um grupo de componentes existir sem a existência do outro, o que denominamos modos do campo eletromagnético. O que determinará a existência de um ou dos dois modos é a fonte. (adaptado de RIJO, 1990)

O modo que envolve as componentes H_ϕ , E_ρ e E_z é denominado de TM, de Transversal Magnético, enquanto o modo que envolve os componentes H_ρ , H_z e E_ϕ é denominado de TE, de Transversal Elétrico. O *Transversal* se refere a direção ϕ que é transversal à direção de profundidade. O modo TM é assim denominado pela presença da componente H_ϕ e o modo TE pela presença da componente E_ϕ .

Ferramentas de eletrodos funcionam exclusivamente no modo TM. Podemos ver isto pelo fato do termo de fonte J_f estar exclusivamente em equações do modo TM. Pode-se deduzir isto também pelo fato da corrente gerada no meio não poder, pela simetria do problema, ter componente azimutal e portanto E_ϕ tem de ser nulo. É interessante mencionar que ferramentas de indução operam no modo TE, isto porque a fonte (as bobinas) tem correntes justamente na direção ϕ .

Precisamos agora deduzir a equação a ser resolvida para modelar o modo TM das ferramentas de eletrodos.

3.3.2 Equação de Helmholtz para H_ϕ

Deduzimos na seção anterior que ferramentas de eletrodos operam exclusivamente no modo TM e portanto apenas as componentes H_ϕ , E_ρ e E_z são não-nulas. Podemos montar

uma única equação sobre uma única componente e, se precisarmos, determinar as outras componentes a partir desta. Escolhe-se H_ϕ pelo fato desta componente ser tangencial a todas as usuais fronteiras de descontinuidade, $\rho = cte$ (ex.: o poço com a formação) ou $z = cte$ (ex.: estratificação da formação), usadas em modelos geofísicos e devido a simplicidade da condição de fronteira 3.19.

Dividindo a equação 3.45 por $\sigma - i\omega\epsilon$ e fazendo o rotacional desta equação obtemos:

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{\nabla} \times \vec{H}}{\sigma - i\omega\epsilon} = \vec{\nabla} \times \frac{\vec{J}_f}{\sigma - i\omega\epsilon} + \vec{\nabla} \times \vec{E}. \quad (3.53)$$

Substituindo a equação 3.46 nesta obtemos:

$$\vec{\nabla} \times \frac{\vec{\nabla} \times \vec{H}}{\sigma - i\omega\epsilon} = \vec{\nabla} \times \frac{\vec{J}_f}{\sigma - i\omega\epsilon} + i\omega\mu\vec{H}. \quad (3.54)$$

O termo $\vec{\nabla} \times \frac{\vec{J}_f}{\sigma - i\omega\epsilon}$ pode ser interpretado como uma fonte de corrente magnética e é designado por \vec{M} . Pelo fato do modo ser TM temos que $\vec{H} = H_\phi \hat{\phi}$ e só para esta componente interessa resolver a equação acima. Fazendo estas substituições e fazendo o produto interno com $\hat{\phi}$ na equação acima obtemos:

$$\hat{\phi} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \frac{\vec{\nabla} \times (H_\phi \hat{\phi})}{\sigma - i\omega\epsilon} \right] - i\omega\mu H_\phi = M_\phi. \quad (3.55)$$

Se considerarmos que as propriedades eletromagnéticas (σ , ϵ e μ) sejam constantes por pedaços, e não apenas contínuos por pedaços, a equação acima pode ser simplificada considerando a identidade (REITZ et al., 1982):

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \quad (3.56)$$

e considerando a equação 3.44 obtemos:

$$\hat{\phi} \cdot \left[\frac{-\nabla^2 (H_\phi \hat{\phi})}{\sigma - i\omega\epsilon} \right] - i\omega\mu H_\phi = M_\phi, \quad (3.57)$$

a qual simplificando torna-se:

$$\hat{\phi} \cdot \nabla^2 (H_\phi \hat{\phi}) + k^2 H_\phi = (-\sigma + i\omega\epsilon) M_\phi, \quad (3.58)$$

sendo que:

$k = \sqrt{i\omega\mu\sigma + \omega^2\mu\epsilon}$ = número de onda do campo eletromagnético.

Esta é a equação de Helmholtz de H_ϕ . Para ser mais preciso é a forma *forte* desta equação. Esta não é a forma mais conveniente para a solução por elementos finitos, que é o método de solução utilizada neste trabalho. Na próxima seção derivaremos a forma *fraca* desta equação, mais conveniente para este trabalho.

Podemos agora mencionar porque frequências baixas, em princípio, permitem tratar o problema como sendo de corrente contínua. A equação acima é uma equação de onda e é possível demonstrar (REITZ et al., 1982) que para a região em que $|k\vec{r}| \ll 1$, que a equação acima se reduz a:

$$\hat{\phi} \cdot \nabla^2(H_\phi \hat{\phi}) = (-\sigma + i\omega\epsilon)M_\phi. \quad (3.59)$$

Esta equação é equivalente a que obteríamos se $\nabla \times \vec{E} = 0$ que é a base para considerarmos o campo como gradiente da voltagem e obter a equação de Laplace (equação 3.26). Usando a definição de k e já que, para frequências baixas, $\omega\mu\sigma \gg \omega^2\mu\epsilon$, a condição acima pode ser re-escrita como:

$$\omega\mu\sigma r^2 \ll 1. \quad (3.60)$$

Esta equação para uma frequência de 35 Hz e um meio típico de 1 ohm.m resulta em $2.7 \times 10^{-4} r^2 \ll 1$. Devemos interpretar r como a máxima distância entre elementos que interagem no sistema de medição. Se houvesse interação apenas da ferramenta com o meio mais próximo, esta condição seria sempre satisfeita. Mas o fato do eletrodo de retorno estar na superfície e existir uma blindagem de cabo de perfilagem, e eventualmente um revestimento, faz com que esta condição possa não ser satisfeita.

Necessitaremos da equação de Helmholtz acima reduzida a coordenadas cilíndricas, sem variação em z ($\frac{\partial}{\partial z} = 0$) e sem fontes no domínio. Façamos esta dedução agora. Expandindo o laplaciano, com estas hipóteses, na equação 3.58 obtemos:

$$\hat{\phi} \cdot \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial(H_\phi \hat{\phi})}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2(H_\phi \hat{\phi})}{\partial \phi^2} \right] + k^2 H_\phi = 0. \quad (3.61)$$

É importante observar porque mantivemos o termo em derivada azimutal ($\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$). Já mencionamos que supomos simetria azimutal do campo eletromagnético e portanto a derivada azimutal de H_ϕ é nula. Só que a derivada azimutal de $\hat{\phi}$ não é nula. De fato $\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} = -\hat{\rho}$ e como $\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial \phi} = \hat{\phi}$ conclui-se que:

$$\frac{\partial^2(H_\phi \hat{\phi})}{\partial \phi^2} = -H_\phi \hat{\phi}. \quad (3.62)$$

Simplificando a equação 3.61, usando este último resultado, obtemos que:

$$\rho^2 \frac{\partial^2 H_\phi}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial H_\phi}{\partial \rho} + (k^2 \rho^2 - 1)H_\phi = 0. \quad (3.63)$$

Esta equação é a equação de Bessel de 1ª ordem em H_ϕ e sua solução geral pode ser escrita como (ARFKEN, 1985):

$$H_\phi = AH_1^{(1)}(k\rho) + BJ_1(k\rho), \quad (3.64)$$

sendo que:

A = constante arbitrária,

$H_1^{(1)}(.)$ = função de Hankel de 1ª espécie e 1ª ordem,

B = constante arbitrária e

$J_1(.)$ = função de Bessel de 1ª ordem.

Este resultado será usado na dedução de uma condição de fronteira para o cabo de perfilagem blindado e para testes no programa de computador deste trabalho.

3.3.3 Formulação Fraca para a Equação de Helmholtz de H_ϕ

A forma forte da equação de Helmholtz, ou de qualquer equação diferencial, exige que a função a ser determinada obedeça rigidamente esta equação para quaisquer vizinhanças, tão pequenas quanto desejarmos, em torno de cada ponto do domínio. A forma fraca se diferencia da forte por abrandar esta exigência. Isto é necessário para que possamos dividir o domínio em regiões menores e solucionarmos polinomialmente esta equação nestas regiões, que é o princípio do método de elementos finitos. Em termos práticos nada se altera já que todo sistema de detecção tem um tamanho finito. Nesta seção apresentaremos uma formulação fraca desenvolvida por LOVELL (1990), com adaptações a este trabalho.

Já mencionamos anteriormente que pressupomos simetria cilíndrica dos nossos problemas. Isto permite reduzir um problema, em princípio, tridimensional em apenas bidimensional por desprezarmos a coordenada azimutal (ϕ). Assim o domínio das nossas equações será sempre uma região do plano ρ - z e fronteira deste domínio será um circuito neste mesmo plano. Fazemos as seguintes definições:

Ω = domínio da equação,

$\partial\Omega$ = fronteira do domínio ,

$\partial\Omega_D$ = parte da fronteira sujeita à condições de Dirichlet,

$\partial\Omega_N$ = parte da fronteira sujeita à condições de Neumann ou de Robin,

$H_0^1(\Omega)$ = conjunto das funções complexas sobre Ω , quadrado-integráveis sobre este domínio, com valor nulo sobre $\partial\Omega_D$ e deriváveis até a primeira ordem.

A partir da equação 3.55 obtém-se a seguinte forma fraca da equação de Helmholtz:

$$\int \int_{\Omega} \psi \left[\hat{\phi} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \frac{\vec{\nabla} \times (H_{\phi} \hat{\phi})}{\sigma - i\omega\epsilon} \right) - i\omega\mu H_{\phi} \right] 2\pi\rho d\rho dz = \int \int_{\Omega} \psi M_{\phi} 2\pi\rho d\rho dz \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \quad (3.65)$$

O termo 2π aparece pela redução da dimensão ϕ . Por questão de uma conveniência que aparecerá mais tarde, este termo 2π será, onde possível, colocado junto ao termo H_{ϕ} . A equação acima é fraca por exigirmos uma igualdade entre duas integrais envolvendo funções teste (ψ) e não mais o cumprimento da rígida equação anterior.

Antes de simplificarmos a equação anterior, precisamos obter uma expressão. O teorema da divergência (REITZ et al., 1982) reduzido às dimensões ρ e z torna-se:

$$\int \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \rho d\rho dz = \oint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} \rho dl, \quad (3.66)$$

sendo \hat{n} um vetor unitário normal ao circuito $\partial\Omega$ apontando para "fora" de Ω . Na integral de linha da equação acima, e em qualquer outra integral de linha neste trabalho, suporemos que o sentido de integração é contrário ao relógio. Se na equação acima $\vec{F} = \vec{A} \times \vec{B}$ e usando a seguinte identidade (REITZ et al., 1982):

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}), \quad (3.67)$$

obtemos que:

$$\int \int_{\Omega} [\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})] \rho d\rho dz = \oint_{\partial\Omega} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} \rho dl. \quad (3.68)$$

Re-arranjando esta equação e usando o fato de que $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} = -\vec{A} \cdot (\hat{n} \times \vec{B})$ (produto vetorial misto) obtemos que:

$$\int \int_{\Omega} [\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A})] \rho d\rho dz = \int \int_{\Omega} [\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})] \rho d\rho dz - \oint_{\partial\Omega} \vec{A} \cdot (\hat{n} \times \vec{B}) \rho dl. \quad (3.69)$$

Se usarmos esta identidade na equação 3.65 com $\vec{B} = \psi \hat{\phi}$ e $\vec{A} = \frac{\vec{\nabla} \times (H_{\phi} \hat{\phi})}{\sigma - i\omega\epsilon}$ obtemos que:

$$\int \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon} [\vec{\nabla} \times (\psi \hat{\phi})] \cdot [\vec{\nabla} \times (2\pi H_{\phi} \hat{\phi})] - i\omega\mu\psi 2\pi H_{\phi} \right] \rho d\rho dz - \oint_{\partial\Omega} \frac{\vec{\nabla} \times (2\pi H_{\phi} \hat{\phi})}{\sigma - i\omega\epsilon} \cdot (\hat{n} \times \psi \hat{\phi}) \rho dl = \int \int_{\Omega} \psi 2\pi M_{\phi} \rho d\rho dz \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \quad (3.70)$$

O termo da integral de circuito (\oint) ainda pode ser simplificado. Primeiro notemos que $(\hat{n} \times \psi \hat{\phi}) dl = \psi \hat{l} dl = \psi d\vec{l}$. Além disso, pela equação 3.45 o termo $\frac{\vec{\nabla} \times (2\pi H_{\phi} \hat{\phi})}{\sigma - i\omega\epsilon}$ é simplesmente

$\frac{2\pi\vec{J}_f}{\sigma-i\omega\epsilon} + 2\pi\vec{E}$. Só que o termo de fonte não contribui para a integral de circuito, pois as fontes (eletrodos) que estiverem na fronteira emitem corrente normalmente, assim $\vec{J}_f \cdot \vec{dl} = 0$. Concluimos que o termo se reduz a $2\pi \int_{\partial\Omega} \rho\psi \vec{E} \cdot \vec{dl}$. Por último, notemos que $\psi \in H_0^1(\Omega)$ e portanto $\psi = 0$ sobre $\partial\Omega_D$. Assim o circuito da integral se reduz a $\partial\Omega_N$. Assim a equação se torna:

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon} [\vec{\nabla} \times (\psi \hat{\phi})] \cdot [\vec{\nabla} \times (2\pi H_{\phi} \hat{\phi})] - i\omega\mu\psi 2\pi H_{\phi} \right] \rho d\rho dz - 2\pi \int_{\partial\Omega_N} \rho\psi \vec{E} \cdot \vec{dl} \\ = \int \int_{\Omega} \psi 2\pi M_{\phi} \rho d\rho dz \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Este termo ($\int_{\partial\Omega_N} \dots$) merece algumas considerações. Primeiro este termo, além de só existir em fronteiras não-Dirichlet, ainda será nulo em fronteiras em que a componente tangencial do campo elétrico seja nulo. Uma outra consideração a ser feita é o fato deste termo ser exclusivamente de fronteira. Devido ao método numérico que escolhemos neste trabalho, podemos ignorar este termo na montagem do problema e usar este termo quando da aplicação das condições de fronteira. É o que faremos.

Devemos agora expandir os rotacionais da equação acima, desprezando o termo de fronteira, em coordenadas cilíndricas com a hipótese de não-variação azimutal, assim obtendo:

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho 2\pi H_{\phi})}{\partial\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial\rho} + \frac{\partial(2\pi H_{\phi})}{\partial z} \frac{\partial\psi}{\partial z} \right) - i\omega\mu(2\pi H_{\phi})\psi \right] \rho d\rho dz - \\ = \int \int_{\Omega} \psi 2\pi M_{\phi} \rho d\rho dz \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Re-arranjando os ρ 's nesta equação obtemos:

$$\begin{aligned} \int \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon} \left(\frac{\partial(2\pi\rho H_{\phi})}{\partial\rho} \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial\rho} + \frac{\partial(2\pi\rho H_{\phi})}{\partial z} \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial z} \right) - i\omega\mu(2\pi\rho H_{\phi})(\rho\psi) \right] \frac{d\rho}{\rho} dz \\ = \int \int_{\Omega} (\rho\psi) 2\pi M_{\phi} d\rho dz \quad \forall \psi \in H_0^1(\Omega). \end{aligned} \quad (3.73)$$

O modo como esta última equação foi escrita já reflete uma das características inovadoras da formulação. A função a ser solucionada numericamente não é H_{ϕ} e sim a função $U = 2\pi\rho H_{\phi}$. A função teste a servir de base para os elementos finitos não é ψ e sim $W = \rho\psi$. Além disso já podemos mencionar que neste trabalho não colocaremos nenhuma fonte no domínio, todas as fontes estarão na fronteira, e portanto o lado direito da equação acima se anula. A equação acima re-escrita para estas duas funções e anulando o lado direito torna-se:

$$\int \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon} \left(\frac{\partial U}{\partial\rho} \frac{\partial W}{\partial\rho} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} \right) - i\omega\mu U W \right] \frac{d\rho}{\rho} dz = 0 \quad \forall \frac{W}{\rho} \in H_0^1(\Omega). \quad (3.74)$$

Esta é a equação que usaremos neste trabalho. É interessante notarmos que não tivemos de pressupor que as propriedades eletromagnéticas fossem constantes por pedaços na dedução desta equação como tivemos de fazer na forma *forte*. Assim esta equação tem uma aplicabilidade maior do que a forma *forte*.

3.3.4 Condições de Fronteira para $U = 2\pi\rho H_\phi$

A escolha da componente H_ϕ para montagem da equação foi feita devido ao fato desta componente ser tangencial às fronteiras de descontinuidade dos modelos geofísicos para o ambiente de poço. Assim sendo, é válida a relação 3.19 a qual escrita para a função U torna-se:

$$U_1 = U_2. \quad (3.75)$$

Antes de considerar as fronteiras do domínio é importante reconsiderarmos o que é *fonte*. Até agora, sempre que mencionamos o termo *fonte* nos referimos a fontes de corrente, que necessariamente coincidem com as fontes de voltagem. Como a equação de Laplace é sobre a voltagem, essas fontes também são as fontes para a equação. Só que, agora, a função a ser resolvida é $U = 2\pi\rho H_\phi$. As fontes desta função, e portanto da equação, não coincidem mais com as fontes de corrente. A fonte de U não são os eletrodos e sim o cabo de perfilagem, o *bridle* e o *torpedo*. Os seguintes casos têm de ser considerados:

- *Pontos de Fronteira distantes do "Cabo", do "Torpedo", do "Bridle" e da Ferramenta:* O campo magnético gerado deve ser nulo e portanto U também. Adota-se condição de Dirichlet homogênea.
- *Pontos de Fronteira sobre Eletrodos Injetores de Corrente:* Um eletrodo perfeito injete a corrente normalmente no meio. Assim não há componente tangencial da corrente, e portanto do campo elétrico, nesta fronteira. Pela disposição das ferramentas em poço a direção tangencial a fronteira no eletrodo será a z . Sabemos que:

$$E_t = E_z = \hat{z} \cdot \frac{\vec{\nabla} \times (H_\phi \hat{\phi})}{\sigma - i\omega\epsilon} = \frac{1}{(\sigma - i\omega\epsilon)\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial\rho} = \frac{1}{2\pi\rho(\sigma - i\omega\epsilon)} \frac{\partial U}{\partial\rho}. \quad (3.76)$$

Observemos que uma derivação em ρ é uma derivação numa direção normal à fronteira. Portanto o campo tangencial ser nulo significa em termos de U que $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$. Adota-se condição de Neumann homogênea.

- *Pontos de Fronteira em que a Corrente Incide Normalmente:* Veremos mais tarde que teremos uma fronteira assim em $z = cte$. O argumento para obter a condição é a mesma do caso anterior, o desenvolvimento é levemente diferente mas o resultado é idêntico. Adota-se condição de Neumann homogênea.
- *Pontos de Fronteira sobre o "Bridle", o "Torpedo" e sobre Regiões Isolantes da Ferramenta:* Temos uma corrente gerando um campo magnético. Para obtermos a condição de fronteira precisamos reduzir, supondo que as condições sejam harmônicas, a lei de

Ampère extendida na forma integral (equação 3.11) em termos das funções amplitude. Assim obtemos:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{S_C} \vec{J}_f \cdot d\vec{S} + \int_{S_C} (\sigma - i\omega\epsilon) \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (3.77)$$

Aplicamos esta equação num circuito circular imediatamente em volta do equipamento (*bridle*, *torpedo* ou ferramenta), sendo S_C uma superfície circular montada neste circuito passando por dentro do equipamento. Pela simetria cilíndrica o termo do lado esquerdo resulta em $2\pi\rho H_\phi = U$. O primeiro termo do lado direito resulta na amplitude de corrente que está passando por dentro do equipamento. O segundo termo resulta desprezível pois $\sigma - i\omega\epsilon$ e S_C são muito pequenos. Resulta então $U = I$. Adota-se condição de Dirichlet não-homogênea.

- Pontos de Fronteira sobre o Cabo de Perfilagem: Se desprezarmos a blindagem do cabo recai-se num caso idêntico ao anterior. Efetivamente faremos isto numa primeira abordagem. No entanto, se considerarmos esta blindagem, que é condutiva, teremos de derivar uma nova condição. A derivação é um pouco intrincada e a deixaremos para o anexo I. A condição que resulta é (adaptado de LOVELL, 1992):

$$\frac{\vec{\nabla} \times (2\pi H_\phi \hat{\phi})}{\sigma - i\omega\epsilon} \cdot \hat{i} = 2\pi E_t = -\alpha U + \beta I \quad \text{com:} \quad (3.78)$$

$$\alpha = -\frac{1}{\rho_e} \sqrt{\frac{i\omega\mu_b}{\sigma_b - i\omega\epsilon_b}} \frac{\begin{vmatrix} H_1^{(1)}(k_b\rho_i) & J_1(k_b\rho_i) \\ H_0^{(1)}(k_b\rho_e) & J_0(k_b\rho_e) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} H_1^{(1)}(k_b\rho_i) & J_1(k_b\rho_i) \\ H_1^{(1)}(k_b\rho_e) & J_1(k_b\rho_e) \end{vmatrix}} e \quad (3.79)$$

$$\beta = \frac{2i}{\pi\rho_i\rho_e(\sigma_b - i\omega\epsilon_b)} \frac{1}{\begin{vmatrix} H_1^{(1)}(k_b\rho_i) & J_1(k_b\rho_i) \\ H_1^{(1)}(k_b\rho_e) & J_1(k_b\rho_e) \end{vmatrix}}, \quad (3.80)$$

sendo que:

$H_\nu^{(1)}(.)$ = função de Hankel de primeira espécie e ordem ν ,

$J_\nu(.)$ = função de Bessel de ordem ν ,

θ_b = propriedade θ ($= \sigma, \epsilon$ ou μ) do material que constitui a blindagem,

ρ_i = raio interno da blindagem e

ρ_e = raio externo da blindagem.

Este é o único caso de condição de fronteira neste trabalho em que teremos de considerar o termo de fronteira da equação 3.71. Este termo de fronteira pode, usando o resultado acima, ser reduzido a:

$$-2\pi \int_{\partial\Omega_N} \rho\psi \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\partial\Omega_N} (\alpha U - \beta I) \rho\psi dl = \alpha \int_{\partial\Omega_N} UW dl - \beta I \int_{\partial\Omega_N} W dl. \quad (3.81)$$

No capítulo 5 mostraremos como incorporar no algoritmo de elementos finitos esta condição de fronteira. Esta condição de fronteira é denominada de Robin, ou Neumann mista, não-homogênea.

É preciso mencionar, que neste item, fizemos a suposição de que uma corrente efetiva de amplitude I circula pelo cabo de perfilagem. Isto não será verdade em projetos antigos da ferramenta *Dual Laterolog* em que o eletrodo de retorno da corrente localizava-se no *bridle*. Iremos considerar este tipo de arquitetura no modelagem do efeito Delaware e assim consideraremos a aplicação desta condição com $I = 0$ ou seja uma condição de Robin homogênea.

3.3.5 Cálculo de Voltagens e Correntes

Neste tipo de modelagem, ao contrário da equação de Laplace, precisamos calcular a voltagem. É preciso mencionar que a voltagem não é mais uma função espacialmente bem definida, ou seja não é função unicamente da posição, mas também do processo de cálculo. Como estamos tratando de ferramentas de perfilagem, e estas serão colocadas na fronteira do domínio, a diferença de voltagem entre dois pontos, N e M , na fronteira, único tipo de cálculo de voltagem que importará, será definida pela expressão:

$$V_{NM} = \int_N^M \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad (3.82)$$

sendo que:

V_{NM} = diferença de voltagem entre N e M e

\int_N^M = integral de linha dentro de $\partial\Omega$ ligando os dois pontos (N e M).

Poderíamos cogitar em calcular numericamente a expressão acima, mas há um modo mais eficiente de processar este cálculo. O processo foi desenvolvido por LOVELL (1990) e a derivaremos a seguir. Para isto vamos definir os seguintes operadores:

$$S(H_\phi, \varphi) = \int \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon} [\vec{\nabla} \times (\varphi \hat{\phi})] \cdot [\vec{\nabla} \times (2\pi H_\phi \hat{\phi})] - i\omega\mu\varphi 2\pi H_\phi \right] \rho d\rho dz \quad (3.83)$$

$$\begin{aligned}
T(H_\phi, \varphi) &= \int \int_\Omega \varphi \left[\hat{\phi} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \frac{\vec{\nabla} \times (H_\phi \hat{\phi})}{\sigma - i\omega\epsilon} \right) - i\omega\mu H_\phi \right] 2\pi \rho d\rho dz \\
&= \int \int_\Omega \left[\frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon} [\vec{\nabla} \times (\varphi \hat{\phi})] \cdot [\vec{\nabla} \times (2\pi H_\phi \hat{\phi})] - i\omega\mu\varphi 2\pi H_\phi \right] \rho d\rho dz - \\
&\quad \oint_{\partial\Omega} 2\pi\rho\varphi \vec{E} \cdot \vec{dl} \\
&= S(H_\phi, \varphi) - \oint_{\partial\Omega} 2\pi\rho\varphi \vec{E} \cdot \vec{dl}, \tag{3.84}
\end{aligned}$$

sendo que:

$S(.,.)$ = primeiro operador linear definido,

$T(.,.)$ = segundo operador linear definido e

φ = uma função teste qualquer (não necessariamente pertencente a H_0^1),

Observemos que o operador S é exatamente o lado esquerdo da equação 3.71 desprezado o termo de fronteira e portanto corresponde exatamente ao lado esquerdo da equação 3.74 que iremos resolver. E mais o operador T é exatamente o lado esquerdo da equação 3.65, sendo que a simplificação feita após a segunda igualdade já foi justificada anteriormente.

Escolhemos uma função teste φ_{NM} que seja nula em todo o domínio Ω com exceção dos pontos na fronteira $\partial\Omega$ que interligam os pontos N e M , onde assumiremos que esta função teste vale $1/\rho$. O operador T aplicado sobre esta função teste será nulo, pois uma integral de superfície de uma função não-nula apenas num circuito é necessariamente nula. Assim obtemos que:

$$T(H_\phi, \varphi_{NM}) = S(H_\phi, \varphi_{NM}) - \int_N^M 2\pi \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0. \tag{3.85}$$

A partir desta equação obtemos que:

$$V_{NM} = \int_N^M \vec{E} \cdot \vec{dl} = \frac{1}{2\pi} S(H_\phi, \varphi_{NM}). \tag{3.86}$$

Ou seja aplicando o operador da equação que iremos resolver sobre esta função teste φ_{NM} podemos obter a voltagem entre dois pontos na fronteira do domínio. Observar que φ_{NM} corresponde a uma função W_{NM} nula em todo o domínio com exceção do referido circuito, onde esta função vale 1.

Demonstra-se que este processo de cálculo é muito mais preciso do que um cálculo direto pela equação 3.82 (LOVELL, 1992). No capítulo 5 mostraremos como implementar este cálculo numericamente.

O cálculo de corrente é relativamente simples de deduzir. Basta lembrarmos de como obtemos a condição de fronteira para as partes isolantes da ferramenta. O valor de U é igual a corrente que está passando dentro da ferramenta. Portanto a diferença entre o valor de U acima e abaixo do eletrodo é igual a corrente injetada pelo eletrodo, ou seja:

$$I = U^s - U^i, \quad (3.87)$$

sendo que:

U^s = valor de U na borda superior do eletrodo e

U^i = valor de U na borda inferior do eletrodo.

3.4 Métodos de Solução de Equações Eletromagnéticas

Os métodos disponíveis para solucionar equações eletromagnéticas podem ser classificados em três tipos: Analítico, Numérico ou Híbrido. É importante esclarecer que em qualquer método é necessário realizar procedimentos numéricos para a obtenção de valores calculados. A classificação se refere ao modo como abordamos a equação a ser resolvida. Comentemos os três métodos.

3.4.1 Métodos Analíticos

Os métodos analíticos são os métodos mais antigos usados na modelagem de perfis de resistividade: o primeiro trabalho data de 1933 (Fok apud GIANZERO & RAU, 1977). Basicamente dois métodos foram e são utilizados: o método de Green e o método da transformação integral (GIANZERO & ANDERSON, 1982).

Os métodos analíticos mostram-se particularmente superiores (em relação aos demais métodos) para modelagem de situações com quebra da simetria cilíndrica como, por exemplo, os efeitos de não-centralização da ferramenta de perfilagem (GIANZERO et al., 1985; GIANZERO & RAU, 1977). Mesmo havendo simetria cilíndrica estes métodos ainda são utilizados para modelos simples devido ao baixo custo computacional (CHEMALI et al., 1987). Para modelos mais complexos, no entanto, estes métodos acabam tornando-se computacionalmente inaceitáveis (ANDERSON & CHANG, 1982).

3.4.2 Métodos Numéricos

Há basicamente dois métodos numéricos: diferenças finitas e elementos finitos. Em ambos os métodos é necessário gerar uma malha de pontos sobre o domínio, sendo a precisão da solução numa região crescente com a densidade de pontos.

O método de diferenças finitas é viável e há até recentes trabalhos utilizando este método (TOWLE et al., 1988; WHITMAN et al., 1989), mas a falta de flexibilidade geométrica na construção da malha tornam este método inferior ao método de elementos finitos.

Neste trabalho utilizaremos o método de elementos finitos pela flexibilidade deste método e pela viabilidade computacional. No capítulo 5 descreveremos o método utilizado.

3.4.3 Métodos Híbridos

Os métodos híbridos são os mais recentes (GIANZERO et al., 1988; TSANG et al., 1984) e sua grande vantagem é a sempre maior velocidade computacional. A idéia consiste em resolver as equações analiticamente na direção da profundidade e numericamente na direção radial. Estes métodos, no entanto, requerem um esforço de programação muito maior do que os anteriores.

3.5 Modelagem da Focalização

Na modelagem de ferramentas de eletrodos pela equação de Laplace da voltagem já sabemos como considerar eletrodos na fronteira, se soubermos *a priori* a voltagem destes, e eletrodos no domínio, se soubermos a corrente injetada por estes. Mas para ferramentas com sistemas de focalização não sabemos *a priori* a voltagem dos eletrodos de focalização, então como modelar estas ferramentas?

Para resolver este problema invocamos o fato da equação de Laplace ser linear. É sabido que qualquer combinação linear de soluções de uma equação diferencial linear é uma nova solução desta equação. Assim inicialmente resolve-se o modelo para o eletrodo principal ativo ($V \neq 0$) e os de focalização inativos ($V = 0$). Depois resolve-se novamente com o eletrodo principal inativo e o par de eletrodos de focalização mais próximo ativo. Combina-se as duas soluções de modo a gerar uma solução que obedeça à condição de focalização. Repete-se este processo para o próximo par de eletrodos de focalização e assim por diante.

Se, no entanto, modelarmos a ferramenta de eletrodos pela equação de Helmholtz em H_ϕ podemos ainda usar o fato desta equação também ser linear, mas o processo de ativação

e inativação dos eletrodos, terá de ser feita pela corrente emitida por estes eletrodos. Se modelarmos a focalização com condições sobre a corrente a solução deste caso será semelhante a de Laplace. Porém a aplicação de condições de focalização sobre a voltagem necessitará da solução de um sistema linear sobre as soluções obtidas com as diversas situações de ativação e inativação de eletrodos. Mencione-se que este caso é dual ao anterior. Se tivermos solucionado a equação de Laplace e quisermos estabelecer condições de focalização sobre a corrente também teríamos de solucionar um sistema de equações semelhante a este.

Não entraremos em detalhes quanto a modelagem da focalização para soluções em H_ϕ uma vez que a dispensaremos neste trabalho. Na seção 5.4 argumentaremos quanto a irrelevância da focalização no efeito Groningen.

CAPÍTULO 4

OS EFEITOS DELAWARE E GRONINGEN

Os efeitos Delaware e Groningen são dois fenômenos de medidas de resistividade anormalmente altas. Ambos os efeitos atingem apenas ferramentas de eletrodos de alta profundidade de investigação e ocorrem quando da presença de uma camada muito resistiva acima do(s) reservatório(s).

A diferença entre os dois efeitos é sutil e os dois nomes se devem mais a razões históricas do que a qualquer outro motivo. Por essa razão há, na literatura, uma certa confusão na definição dos dois efeitos. Neste capítulo descreveremos os dois efeitos, explicitando as definições por nós adotadas.

4.1 O Efeito Delaware

O efeito Delaware é assim denominado por ter sido identificado na bacia de Delaware, situada no sudeste dos Estados Unidos. A perfilagem de resistividade em poços nesta bacia foi feita com a ferramenta *Dual Laterolog*. Os perfis apresentavam um gradiente de resistividade irreal em direção ao topo do reservatório. Isto acontecia a partir de 21.5 m (70') abaixo de uma camada muito espessa de anidrita. A resistividade medida atingia um valor várias vezes superior ao R_t verdadeiro. (SUAU et al., 1972)

O projeto inicial do *Dual Laterolog* mantinha tanto o eletrodo de referência da voltagem, quanto o eletrodo de retorno de corrente no *bridle*. O eletrodo de retorno ficava 6 m acima do de referência. Esta distância é suficiente, em situações normais, para que a voltagem gerada no eletrodo de referência, pelo eletrodo de retorno de corrente, seja desprezível.

A distância de 21.5 m (70'), que é a distância da camada de anidrita a partir da qual pode ocorrer o efeito Delaware, é bastante próxima da distância do eletrodo de referência da voltagem em relação à ferramenta. Assim, não foi difícil imaginar como a camada de anidrita produzia o efeito Delaware. Imaginou-se que a corrente sofria um efeito de compressão (*squeeze*) para o poço, para poder retornar ao eletrodo B (Figura 4.1). A diminuição do espalhamento geométrico da corrente de retorno é equivalente a reduzir a distância entre os

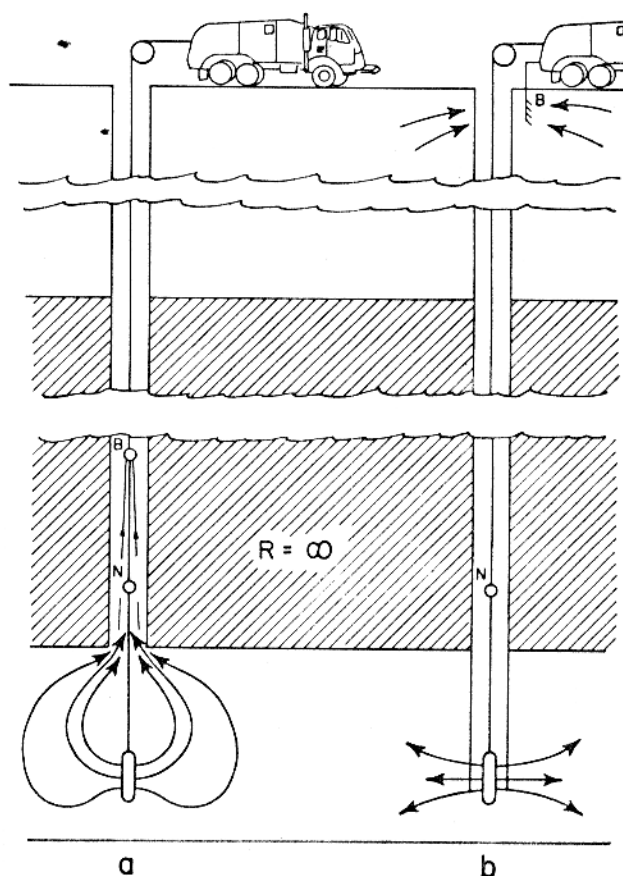


Figura 4.1 - O Efeito Delaware (a) e o resultado de deslocar o eletrodo de retorno para a superfície (b). (SUAU et al., 1972)

eletrodos B e N . Lembrando a equação 2.8 em que definimos o valor de k para a ferramenta *Short Normal*, notamos que uma aparente diminuição da distância \overline{BN} faria o k ser menor. Assim, estamos usando um k maior do que o real, e, por esta razão, super-estimando o valor da resistividade.

Um aprofundamento desta discussão necessita da definição do conceito de impedância de transferência, o qual faremos na próxima sub-seção.

4.1.1 Conceito de Impedância de Transferência

Define-se a impedância de transferência como (TABANOU & ANDERSON, 1992):

$$Z_{ij} = \frac{V_i}{I_j}, \quad (4.1)$$

sendo que:

Z_{ij} = impedância de transferência entre os eletrodos i e j ,

V_i = voltagem gerada sobre o eletrodo i pelo eletrodo j e

I_j = a corrente emitida pelo eletrodo j .

Mencione-se que a impedância de transferência é *entre* os eletrodos i e j , e não *do* eletrodo j sobre o eletrodo i , por ser demonstrável, pelo princípio da reciprocidade, que $Z_{ij} = Z_{ji}$.

Numa abordagem inicial, consideremos a impedância de transferência para eletrodos pontuais injetando corrente contínua. Neste caso podemos usar a relação 2.6 e assim obter que:

$$Z_{ij} = \frac{R}{4\pi \bar{i}j}, \quad (4.2)$$

sendo que:

$\bar{i}j$ = distância entre os eletrodos i e j .

Esta equação, mesmo sendo de validade restrita, demonstra um fato importante: A impedância de transferência entre dois eletrodos é diretamente proporcional a resistividade *de facto* entre os dois eletrodos e inversamente proporcional à distância entre eles. Devemos ainda mencionar que o termo 4π pode ser visto como um termo de espalhamento geométrico. Um confinamento espacial significará uma redução deste termo e o conseqüente aumento da impedância.

Já mencionamos que na ferramenta *Dual Laterolog* o cálculo da resistividade aparente é feito a partir da voltagem do eletrodo monitor e da corrente emitida pelo eletrodo principal. Expressando matematicamente temos:

$$R_a = k \frac{V_M - V_N}{I_o}, \quad (4.3)$$

sendo que:

R_a = resistividade aparente do meio,

k = constante da ferramenta,

V_M = voltagem no eletrodo de monitoração M_1 ,

V_N = voltagem no eletrodo de referência (idealmente nula) e

I_o = corrente emitida pelo eletrodo principal.

Tanto o eletrodo principal, como os eletrodos de focalização e o eletrodo de retorno de corrente podem gerar voltagem sobre o eletrodo de referência. Como a distância entre o eletrodo principal e os de focalização é muito menor do que a distância destes em relação ao de referência, podemos, para efeito de interação entre a ferramenta e o eletrodo de referência, considerar os eletrodos de focalização e o principal como um só emitindo uma corrente:

$$I_t = I_o + I_f, \quad (4.4)$$

sendo que:

I_t = corrente total emitida pela ferramenta e a recebida pelo eletrodo de retorno B e

I_f = corrente emitida pelos eletrodos de focalização.

Usando a definição de impedância de transferência, podemos obter que a voltagem gerada no eletrodo de referência é dada pela expressão (TABANOU & ANDERSON, 1992):

$$V_N = Z_{AN}I_t - Z_{BN}I_t, \quad (4.5)$$

sendo que:

Z_{AN} = impedância de transferência entre os eletrodos da ferramenta e o eletrodo de referência da voltagem e

Z_{BN} = impedância de transferência entre o eletrodo de retorno de corrente e o eletrodo de referência.

Substituindo esta equação na anterior obtemos que:

$$R_a = k \frac{V_M}{I_o} + k(Z_{BN} - Z_{AN}) \frac{I_t}{I_o}. \quad (4.6)$$

Assim, a anomalia na medida de resistividade aparente, causada por uma eventual voltagem não-nula no eletrodo de referência, é dada por:

$$\Delta R_a = k(Z_{BN} - Z_{AN}) \frac{I_t}{I_o}. \quad (4.7)$$

Esta é a equação que necessitamos para discutir o efeito Delaware.

4.1.2 Causas do Efeito Delaware

Durante a operação de perfilagem, a partir do momento em que o eletrodo B passa pela interface inferior da camada muito resistiva, a resistividade *de facto* entre os eletrodos B e N aumenta rapidamente até alcançar um patamar elevado, o qual é atingido quando o eletrodo N passa a interface. Assim, a impedância de transferência Z_{BN} aumenta consideravelmente e, pela equação 4.7, passamos a ter uma anomalia positiva na medida de resistividade.

É interessante mencionar porque o efeito Delaware não foi detectado em ferramentas antigas e o foi em ferramentas focalizadas. Observemos na equação 4.7 o termo $\frac{L}{l_0}$. Para ferramentas não-focalizadas este termo vale 1, enquanto para as focalizadas, já que as correntes de focalização são muito maiores que a principal, este termo é muito maior que 1, sendo assim um termo de amplificação do efeito.

A solução encontrada, para este efeito, é diminuir a impedância Z_{BN} . Realizou-se isto deslocando o eletrodo B para o *fish* na superfície. Esta solução parecia ter funcionado, com apenas um efeito colateral (ver seção 4.1.4), até que se detectou o efeito Groningen.

4.1.3 Efeito da Blindagem do Cabo e do Revestimento

A blindagem do cabo de perfilagem e o revestimento são, ambos, constituídos de aço e portanto são muito condutivos, sendo $R = 2 \times 10^{-7} \text{ohm.m}$ uma resistividade típica (LACOUR-GAYET, 1981). Assim, ambos os objetos criam um “curto-circuito” para a corrente no meio. Na prática, este “curto-circuito” significa uma posição efetiva, dos eletrodos, diferente da real. Demonstra-se (LACOUR-GAYET, 1981) que o deslocamento de posição é da ordem de:

$$L_c = \sqrt{\frac{R}{\lambda_c}}, \quad (4.8)$$

sendo que:

L_c = comprimento característico do efeito de “curto-circuito” provocado pela blindagem ou revestimento,

λ_c = resistividade linear do cabo ou revestimento e

R = resistividade do meio.

Para a blindagem de um multicabo, por exemplo, temos que:

$$\lambda_c = \frac{R_c}{A} = \frac{2 \times 10^{-7}}{\pi(\rho_e^2 - \rho_i^2)} = \frac{2 \times 10^{-7}}{3.14159 \times [(5.9 \times 10^{-3})^2 - (3.4 \times 10^{-3})^2]} \approx 3 \times 10^{-3},$$

sendo que:

R_c = resistividade do aço,

A = área da seção transversal da *blindagem*,

ρ_e = raio externo da *blindagem* e

ρ_i = raio interno da *blindagem*.

Assim, para esta *blindagem*, o comprimento de curto-circuito é dado por:

$$L_c = 18 \sqrt{R}, \quad (4.9)$$

o que pode ser bastante significativo, dependendo da resistividade do meio. Para o revestimento, este comprimento será muito maior, já que a área de seção é muito maior.

Deve-se interpretar este comprimento L_c como um deslocamento efetivo provocado pela *blindagem* (ou revestimento), em direção a esta *blindagem* (ou revestimento), sobre um eletrodo, quando nas proximidades deste eletrodo. (LACOUR-GAYET, 1981)

Não se deve esperar, necessariamente, que a *blindagem* (ou revestimento) provoque uma redução na impedância de transferência entre dois eletrodos por causa de uma suposta diminuição da resistividade efetiva do meio entre estes eletrodos. Isto porque estes objetos, ao contrário de (por exemplo) uma camada condutiva entre os dois eletrodos, provocam um confinamento espacial da corrente. Deste modo, a *blindagem* e o revestimento podem tanto provocar um aumento, como uma redução da impedância de transferência entre dois eletrodos.

Quando o eletrodo B se localizava no *bridle*, o efeito de “curto-circuito” provocado pela *blindagem* do cabo acarretava no fato da corrente geometricamente mais espalhada retornar a B passando por esta *blindagem*. Isto significa uma posição, em profundidade, efetiva, do eletrodo B , acima da real. Ou seja, a *blindagem* aumentava a distância efetiva entre os eletrodos B e N , diminuindo a impedância de transferência entre estes eletrodos, contribuindo para uma atenuação do efeito Delaware. Veremos mais tarde que a *blindagem* influi de modo exatamente contrário no efeito Groningen, ou seja aumentando-o. (LACOUR-GAYET, 1981)

4.1.4 O Efeito Anti-Delaware

Depois que o eletrodo de retorno de corrente do *Dual Laterolog* foi colocado na superfície, uma outra anomalia de resistividade foi detectada. Esta anomalia acontecia a partir de

4.6 m (15') abaixo da camada resistiva e era de redução da resistividade medida em relação à verdadeira. Foi denominada de efeito Anti-Delaware.

Podemos notar pela Figura 2.13 que 4.6 m (15') é um pouco superior a distância entre o topo do eletrodo de focalização superior e o eletrodo principal. Ou seja, o efeito Anti-Delaware ocorre a partir do momento em que a ferramenta está muito próxima da interface inferior da camada muito resistiva.

A explicação do efeito Anti-Delaware é muito simples. A medida que a ferramenta se aproxima da camada resistiva a impedância de transferência Z_{AN} cresce. Pela equação 4.7 deduzimos que este aumento de impedância provoca uma anomalia negativa na resistividade medida.

A solução para o efeito Anti-Delaware foi deslocar o eletrodo de referência N do *bridle* para o *torpedo*, assim diminuindo a impedância de transferência Z_{AN} .

4.2 O Efeito Groningen

Em toda nossa discussão do efeito Delaware, e Anti-Delaware, tratamos a corrente como sendo contínua, embora, conforme já mencionamos anteriormente (seção 2.3.2), a corrente usada nas ferramentas tenha sempre sido alternada. Historicamente, é o que foi feito. Somente quando se detectou o efeito Groningen, e a dependência deste com a frequência, é que se discutiu se o fato de ser usado corrente alternada na medida teria influência sobre o fenômeno. Denominaremos de efeito Delaware a anomalia produzida pela camada muito resistiva numa ferramenta que opere com corrente contínua e com os eletrodos de referência e de retorno no *bridle*. Denominaremos de efeito Groningen a anomalia produzida por uma camada resistiva sobre uma ferramenta que opere com corrente alternada e com o eletrodo de referência no *torpedo* e o de retorno no *fish*.

Descrevamos o efeito Groningen.

4.2.1 Histórico

O efeito Groningen foi constatado nos perfis obtidos no campo de gás de Groningen (Holanda). Produziu uma anomalia de muito menor amplitude do que o efeito Delaware, atingindo um valor máximo de 1.5 *ohm.m*, que, porém, pode começar a uma distância muito maior da camada resistiva, tendo esta distância atingido 83 m (272'). (WOODHOUSE, 1978)

Dois fatos sobre o efeito Groningen chamaram a atenção:

- Junto com a anomalia apareciam valores significativos da componente fora de fase da voltagem.
- O valor da anomalia era crescente com a frequência.

Estes fatores levaram a uma investigação do efeito de frequência sobre os sistemas de medição usados. Para expormos os resultados desta investigação, precisamos inicialmente analisar as diferenças de um eletrodo pontual injetando corrente alternada num meio homogêneo, em relação às, já descritas, características quando a corrente é contínua (seção 2.3.2).

4.2.2 Eletrodo Pontual Injetando Corrente Alternada num Meio Homogêneo

Consideremos um eletrodo pontual injetando corrente alternada num meio homogêneo com o eletrodo de retorno distante. A diferença mais marcante entre um eletrodo pontual injetando corrente alternada, em relação à corrente contínua, é uma quebra da simetria esférica das correntes e voltagens geradas em volta do eletrodo. A corrente concentra-se num cilindro em volta do condutor de corrente (o cabo), ao invés de um espalhamento uniforme no espaço, e, a partir de uma certa distância do eletrodo, torna-se paralelo ao condutor de corrente (Figura 4.2). Esta concentração de corrente ocorre devido ao *skin effect* existente sempre que o campo eletromagnético é oscilante. Pode-se mostrar que a amplitude de densidade de corrente decai exponencialmente a partir do cabo, com comprimento característico dado pelo *skin depth*. Assim a maior parte da corrente permanece num, já referido, cilindro de raio igual ao *skin depth*.

O *skin depth* também deve ser visto como a distância, do eletrodo, a partir da qual o fato da corrente não ser contínua tem influência. Assim, a partir de pouco mais de um *skin depth*, podemos considerar que a corrente, no meio, seja paralela ao cabo de perfilagem.

O *skin depth* é calculado pela expressão:

$$\delta = \sqrt{\frac{2R}{\omega\mu}}, \quad (4.10)$$

sendo que:

$\delta = \textit{skin depth}$,

$R =$ resistividade do meio,

$\omega =$ frequência circular da corrente injetada e

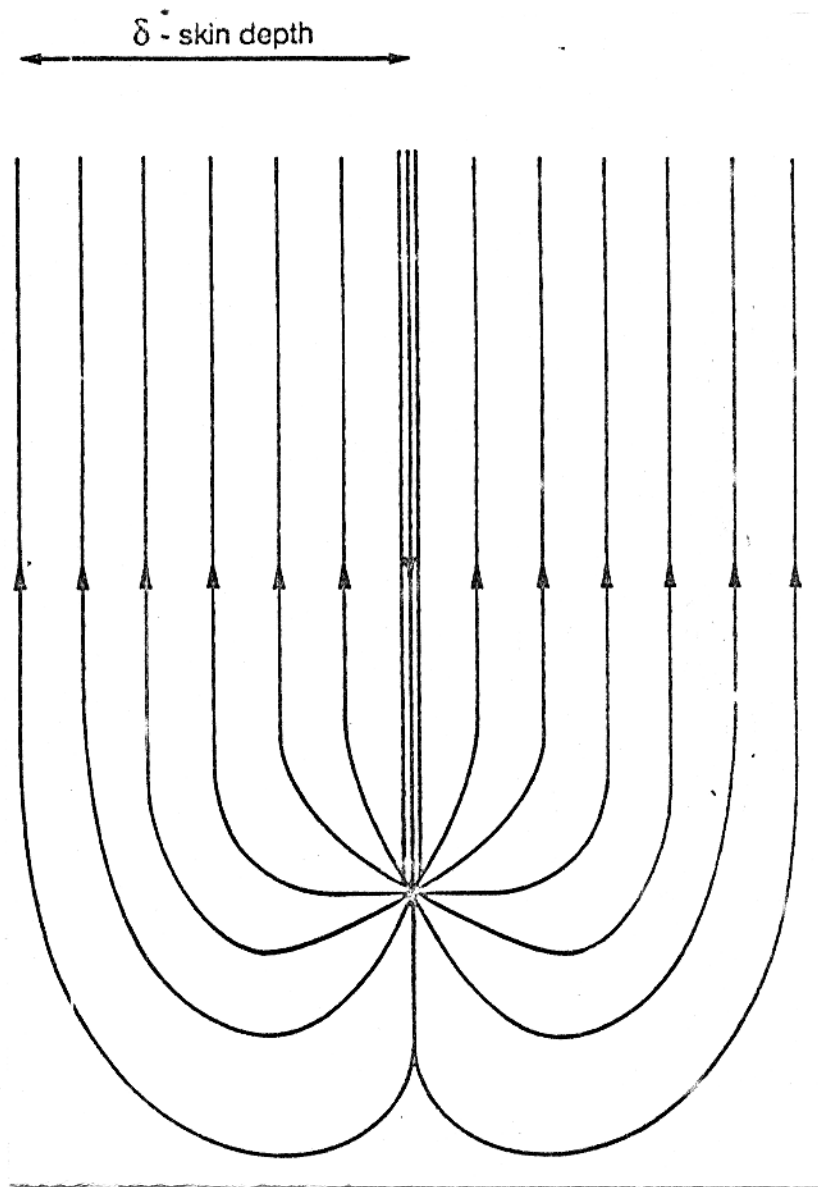


Figura 4.2 - Linhas de corrente geradas, num meio homogêneo, por um eletrodo pontual injetando corrente alternada, com o eletrodo de retorno distante. Cerca de 67% da corrente passa num cilindro de raio igual a um *skin depth*.(TABANOU & ANDERSON, 1992)

μ = permeabilidade magnética do meio.

Para uma corrente a 35 Hz e um meio com permeabilidade magnética igual a do vácuo ($\mu_o = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N.s}^2/\text{C}^2$), esta fórmula reduz-se a $\delta = 85\sqrt{R}$, o que para um meio de resistividade, por exemplo, 1 ohm.m significa 85 m . Esta distância é consideravelmente maior do que a ferramenta *Dual Laterolog*. Percebemos, então, que efeitos de corrente alternada devem se manifestar à longa distância, assim como o efeito Groningen.

Uma interessante consequência da corrente ser alternada é o fato de que a resistividade *linear* do cilindro em que a corrente está concentrada é constante e independente da resistividade do meio. Podemos de uma maneira simples, mas aproximada, deduzir isto. A resistividade linear do cilindro pode ser calculada por:

$$\lambda_l = \frac{R}{A}, \quad (4.11)$$

sendo que:

λ_l = resistividade linear do cilindro de corrente,

R = resistividade do meio que compõe o cilindro e

A = área do cilindro.

Como $A = \pi\delta^2 = \frac{2\pi R}{\omega\mu}$ obtemos que:

$$\lambda_l = \frac{\omega\mu}{2\pi}. \quad (4.12)$$

Esta expressão é muito próxima da seguinte expressão mais precisa (LOVELL, 1990):

$$\lambda_l = \frac{\omega\mu}{8}. \quad (4.13)$$

O fato da resistividade linear do cilindro de corrente ser constante significa que a voltagem ao longo do cilindro irá continuamente decair à uma taxa constante, a partir de um *skin depth* do eletrodo. Portanto, a voltagem pode decair para valores abaixo de zero ao longo do cilindro, mesmo com o eletrodo de retorno de corrente muito distante. Consequentemente, um eletrodo de referência pode estar a uma voltagem negativa e, pela equação 4.3, resultar num cálculo de resistividade, erroneamente, elevado.

4.2.3 Efeito da Blindagem do Cabo e do Revestimento

A blindagem e o revestimento influem no efeito Groningen de modo similar ao efeito Delaware, ou seja provocando “curto-circuito” da corrente no meio. Só que o fato da corrente ser alternada torna este efeito muito mais importante.

O efeito de ambos, blindagem e revestimento, é fazer com que a posição efetiva do eletrodo de retorno B desça da superfície para alguma profundidade dentro do poço. Até este ponto não há diferença entre a corrente ser contínua ou alternada. Observemos que esta nova posição efetiva do eletrodo de retorno dificilmente será muito próxima do eletrodo de referência e por isso, para corrente contínua, é difícil esperar um erro significativo na medida. Porém, para corrente alternada, temos a questão da corrente permanecer concentrada num cilindro em volta do cabo e, neste cilindro, a resistividade linear ser constante. O fato da resistividade linear ser constante significa que um deslocamento do eletrodo de retorno de corrente, mesmo permanecendo distante, terá influência na voltagem gerada sobre o eletrodo de referência. Isto está ilustrado na Figura 4.3.

Podemos deduzir uma expressão aproximada do erro possível causado pela blindagem. A variação de voltagem ao longo da blindagem, a partir de pouco mais de um *skin depth* do eletrodo, deve ser, pela lei de Ohm, dada por (LACOUR-GAYET, 1981):

$$V(z) = V_o - \lambda_l I_t z, \quad (4.14)$$

sendo que:

$V(z)$ = voltagem como função da profundidade,

V_o = voltagem na profundidade convencionalizada como nula e

z = coordenada de profundidade (z decresce para baixo).

Então a voltagem, não-esperada, gerada no eletrodo de referência por um desvio de posição de L_c será dada por:

$$V_N = \Delta V = \lambda_l I_t L_c. \quad (4.15)$$

Considerando a equação 4.3, a equação anterior e a equação 4.8 obtemos que a anomalia provocada é de (LACOUR-GAYET, 1981):

$$\Delta R_a = \frac{k}{I_o} \lambda_l I_t \sqrt{\frac{R}{\lambda_c}} = k \frac{I_t}{I_o} \lambda_l \sqrt{\frac{R}{\lambda_c}}. \quad (4.16)$$

Esta equação demonstra a participação de todos os elementos inerentes ao efeito Groningen. A camada muito resistiva está presente no termo R de resistividade efetiva entre o eletrodo de referência e o de retorno. A frequência está presente no termo λ_l . A necessidade de ser uma ferramenta focalizada está presente no termo $\frac{I_t}{I_o}$. E finalmente observamos a necessidade de um elemento, que sempre esteve presente, que é a blindagem do cabo e/ou revestimento, presente pelo termo λ_c . Esta equação também nos permite inferir que o revestimento pode

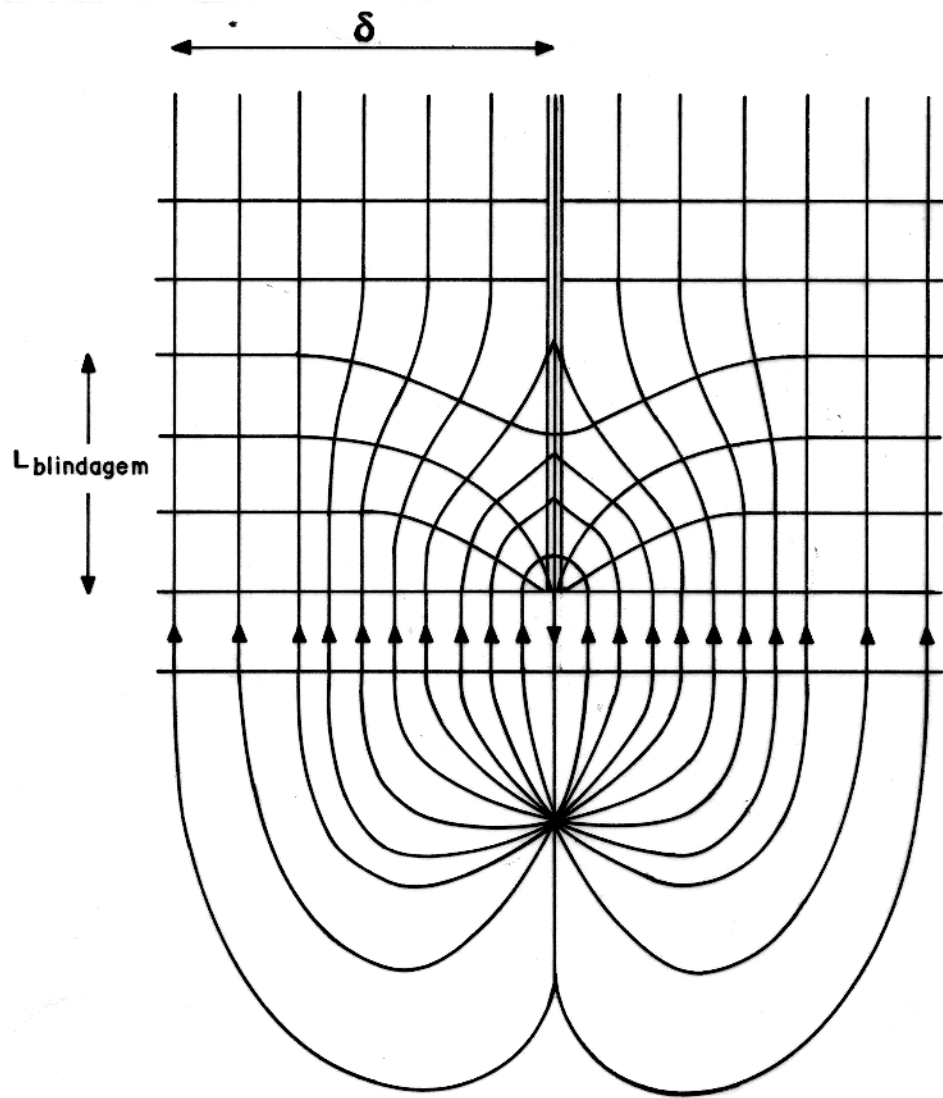


Figura 4.3 - Linhas de corrente (com setas) e Linhas de Equi-voltagem (sem setas) geradas, num meio homogêneo, por um eletrodo pontual injetando corrente alternada, com o eletrodo de retorno distante e, principalmente, com uma blindagem condutiva sobre o cabo. Observar que o cabo faz com que linhas de equi-voltagem que deveriam estar mais distantes estejam mais próximas da ferramenta. Isto significa uma voltagem negativa no eletrodo de referência e portanto uma anomalia positiva da resistividade medida. (TABANOU & ANDERSON, 1992)

ter um efeito muito maior ainda do que a blindagem (λ_c é muito menor). Lacour-Gayet (1981) afirma que o revestimento pode provocar uma anomalia de até 10 *ohm.m*.

Há um aspecto do efeito de “curto-circuito”, no meio, provocado pelo revestimento que ainda não mencionamos: o fato de que toda a corrente do meio que penetra no revestimento pela borda externa desce até a ponta inferior do revestimento para voltar a subir pela borda interna (Figura 4.4). Este fenômeno só ocorre com corrente alternada e se deve ao *skin depth* do aço. Pois $\delta_a = \sqrt{\frac{2R_a}{\omega\mu_a}}$ e como $R_a = 2 \times 10^{-7}$ e $\mu_a \approx 200 \times 4\pi \times 10^{-7}$ obtemos que $\delta_a \approx 2.7 \text{ mm}$. Uma espessura típica de revestimento é de 16 *mm*, que é mais de 6 vezes o *skin depth* neste mesmo revestimento. Assim, a corrente que penetra no revestimento pela borda externa fica concentrada a uma espessura de 2.7 *mm* a partir desta borda. A corrente é então “obrigada” a descer até a ponta inferior para poder subir numa espessura de 2.7 *mm* a partir da borda interna e assim chegar ao eletrodo de retorno de corrente.

Podemos agora observar que a causa comum dos efeitos Delaware e Groningen é o fato do eletrodo de referência não estar a uma, esperada, voltagem nula. Ferramentas de indução não necessitam de um eletrodo de referência e as correntes não têm de retornar a um eletrodo B passando por uma camada muito resistiva. Por esta razão ferramentas de indução não estão sujeitas a nenhum destes efeitos.

Devemos agora explicar a afirmação de que a modelagem em laboratório não seria útil para modelar o efeito Groningen. A modelagem em laboratório do efeito Groningen necessitaria de um grande aumento na frequência usada para que o *skin depth* atingisse valores comparáveis às dimensões do modelo usado. Porém, um aumento de frequência criaria uma atenuação nas medidas que as distanciaria da realidade de uma ferramenta de perfilagem. Ou seja, o efeito Groningen poderia ser modelado em laboratório, mas os valores obtidos não seriam representativos para a situação em campo.

4.2.4 Soluções

O efeito Groningen tem uma característica que permite a sua constatação: o surgimento de valores significativos da componente fora de fase da voltagem. Existem equipamentos comercialmente disponíveis para realizar esta detecção (DAVIES et al., 1992; HLS, 1990; LACOUR-GAYET, 1982).

Constatado o efeito Groningen, três soluções estão disponíveis:

- Perfila-se novamente o poço com uma ferramenta de indução.
- Perfila-se novamente com o *Dual Laterolog*, porém com o eletrodo de referência sobre

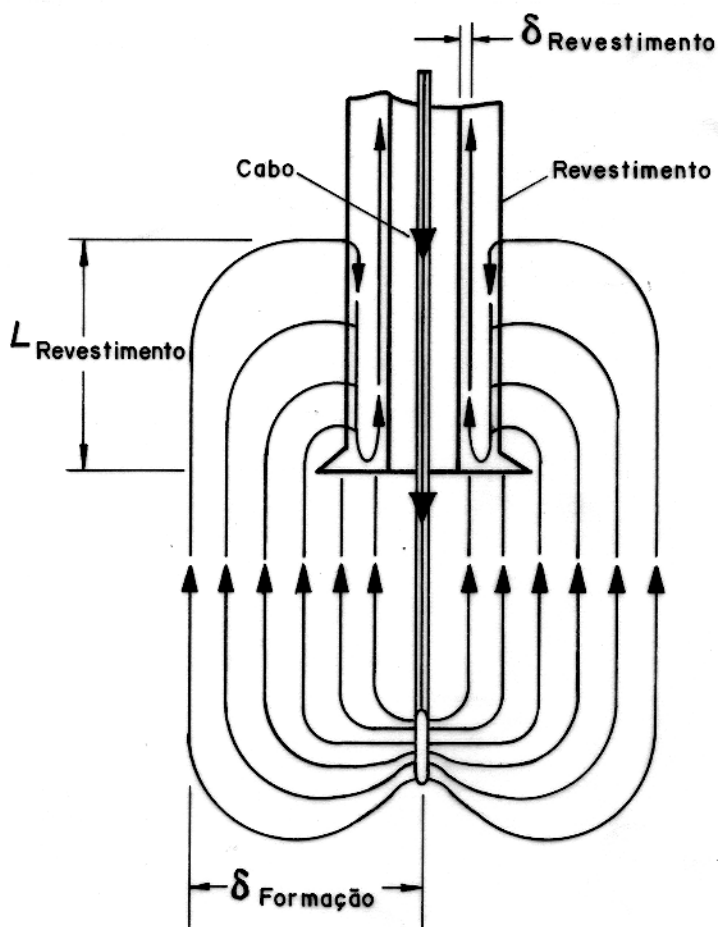


Figura 4.4 - Linhas de corrente geradas, num meio homogêneo, por um eletrodo pontual injetando corrente alternada, com o eletrodo de retorno distante e, principalmente, com um revestimento condutivo no poço. A corrente que penetra no revestimento pela borda externa desce até a ponta inferior e volta a subir pela borda interna. (TABANOU & ANDERSON, 1992)

um *bridle* abaixo da ferramenta.

- Corrige-se a medida para o efeito Groningen usando o valor da voltagem fora de fase.

Em relação a esta segunda solução deve-se mencionar que não é possível usar o procedimento de colocar um *bridle* abaixo da ferramenta regularmente, ou seja usar mesmo quando não há a possibilidade de ocorrer o efeito Groningen. Isto por uma razão simples: ter um *bridle* abaixo da ferramenta significa não poder perfilar uma seção de até 25 m na porção inferior do poço.

A terceira solução só é possível utilizando uma ferramenta que se tornou comercialmente disponível recentemente (DAVIES et al., 1992). Esta ferramenta também envolve a obtenção de imagens de resistividade no poço e por esta razão é de muito alto custo. Mesmo esta solução necessita de uma repetição da operação de perfilagem se o efeito Groningen ocorrer com influência do revestimento.

Todas as soluções mencionadas têm um custo razoavelmente alto. Neste trabalho buscamos verificar a possibilidade de uma quarta solução: corrigir o efeito Groningen sem ter o registro da voltagem fora de fase. Já explicamos a necessidade de usar a equação de Helmholtz em H_ϕ ao invés da equação de Laplace para fenômenos dependentes da frequência, como o efeito Groningen. No próximo capítulo explicamos como resolvemos esta equação e como modelamos o efeito Groningen e, também, o efeito Delaware.

CAPÍTULO 5

METODOLOGIA

Já conhecemos o problema que desejamos resolver, os efeitos Delaware e Groningen, e conhecemos todos os elementos do ambiente que provavelmente influem neste efeitos. Já optamos pela modelagem eletromagnética destes efeitos através da solução da forma fraca da equação de Helmholtz em H_ϕ e antecipamos que esta solução seria feita por um método numérico: o método de elementos finitos.

Neste capítulo expomos a técnica de elementos finitos utilizada neste trabalho. Expomos também como, a partir da solução obtida, calcular duas quantidades básicas na modelagem das ferramentas: a voltagem e a corrente. Expomos, ainda, as verificações realizadas sobre os programas para assegurar a correção destes. Finalmente, apresentamos as características do modelo a ser usado para modelar os efeitos Delaware e Groningen e detalhes quanto ao modo de gerar o perfil, que nada mais é do que gerar soluções diferentes para posições diferentes da ferramenta em relação às camadas.

5.1 Método de Elementos Finitos

O método de elementos finitos é uma técnica de cálculo de soluções aproximadas para equações diferenciais com condições de fronteira, para as soluções, especificadas. O método consiste em dividir o domínio em regiões menores, justamente os elementos finitos, e construir a solução sobre estes elementos. Este método é de aplicação geral nas mais diversas áreas da ciência. (BECKER et al., 1981)

Para derivarmos o método, inicialmente relembremos a equação que iremos resolver:

$$\iint_{\Omega} \left[\frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon} \left(\frac{\partial U}{\partial \rho} \frac{\partial W}{\partial \rho} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial z} \right) - i\omega\mu UW \right] \frac{d\rho}{\rho} dz = 0 \quad \forall \frac{W}{\rho} \in H_0^1(\Omega). \quad (5.1)$$

Se definirmos $H^1(\Omega)$ como o conjunto das funções complexas quadrado-integráveis e deriváveis até a primeira ordem sobre o domínio Ω , a equação acima permite afirmar que a solução U pertence a este conjunto de funções. Isto porque as derivadas na equação têm de existir para serem satisfeitas, logo U é derivável neste domínio. A integral da equação

também tem de existir para poder ser satisfeita e se escolhermos $W = U$, exceto em pontos sobre $\partial\Omega_D$ (lembrando que $\frac{W}{\rho} \in H_0^1(\Omega)$), concluímos que U terá de ser quadrado-integrável sobre este domínio. O fato de $W \neq U$ sobre $\partial\Omega_D$ não pode alterar uma integral de superfície pois $\partial\Omega_D$ é apenas um circuito.

Observemos que a única diferença entre os conjuntos $H_0^1(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$ é a exigência de nulidade sobre $\partial\Omega_D$ do primeiro, assim deduzimos que $H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$ e portanto $\frac{W}{\rho} \in H^1(\Omega)$. No domínio que usaremos neste trabalho não haverá pontos com $\rho = 0$ e, portanto, concluímos que $W \in H^1(\Omega)$. Ou seja, ambas as funções, U e W , pertencem ao mesmo conjunto $H^1(\Omega)$. É um resultado conhecido da Álgebra Linear que $H^1(\Omega)$ é um espaço vetorial de dimensão infinita, sendo assim válido fazer, a semelhança da série de Fourier, as expansões¹¹:

$$U = \sum_{j=1}^{\infty} u_j \xi_j \quad \text{e} \quad W = \sum_{i=1}^{\infty} w_i \xi_i, \quad (5.2)$$

sendo que:

u_j = coeficientes da expansão de U sobre a base ξ_j ,

ξ_j = base de funções do espaço vetorial $H^1(\Omega)$ e

w_i = coeficientes da expansão de W sobre a base ξ_i .

Substituindo estas expansões na equação 5.1, obtemos:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} w_i u_j \left[\int \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon} \left(\frac{\partial \xi_j}{\partial \rho} \frac{\partial \xi_i}{\partial \rho} + \frac{\partial \xi_j}{\partial z} \frac{\partial \xi_i}{\partial z} \right) - i\omega\mu \xi_j \xi_i \right] \frac{d\rho dz}{\rho} \right] = 0$$

$\forall w_i$ tal que $W = 0$ sobre $\partial\Omega_D$. (5.3)

Observemos que nesta equação que a função a ser determinada U se transformou nos coeficientes u_j , que são as novas incógnitas e que a função teste W se transformou nos coeficientes w_i . O fato da função teste W ser qualquer, desde que $\frac{W}{\rho} \in H_0^1(\Omega)$, implica que os coeficientes w_i são arbitrários, com exceção dos w_i 's relacionados a ξ_i 's que tenham valores não-nulos sobre $\partial\Omega_D$. Estes w_i 's poderão, em qualquer caso, serem nulos, porque isto *per si* já garante a condição de pertinência de W . Porém um valor não-nulo para um destes w_i 's pode não ser possível, e quando o for, so poderá ser não-nulo em conjunto com outros destes w_i 's de modo ao valor resultante da soma na expansão de W gerar valores nulos sobre $\partial\Omega_D$.

¹¹Supomos que $H^1(\Omega)$ seja um espaço vetorial infinito porém enumerável. Isto só é verdade se Ω for finito. Veremos mais tarde que o domínio Ω , apesar de teoricamente ser infinito, será considerado finito em razão do decaimento dos campos eletromagnéticos com a distância.

Se definirmos que:

$$S_{ij} = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon} \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \rho} \frac{\partial \xi_j}{\partial \rho} + \frac{\partial \xi_i}{\partial z} \frac{\partial \xi_j}{\partial z} \right) - i\omega\mu \xi_i \xi_j \right] \frac{d\rho dz}{\rho}, \quad (5.4)$$

então a equação 5.3 pode ser simplificada para:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} S_{ij} w_i u_j = 0 \quad \forall w_i \text{ tal que } W = 0 \text{ sobre } \partial\Omega_D. \quad (5.5)$$

Na definição de S_{ij} já podemos identificar a nossa futura matriz de *stiffness*¹² e podemos identificar no lado direito deste sistema o futuro vetor de *load*, por enquanto, nulo.

Já mencionamos que os coeficientes w_i são, em maioria, arbitrários, assim podemos escolher, quando possível, um destes igual a 1 e os demais nulos. Variando a escolha de qual destes coeficientes será igual a um, geraremos, a partir da equação 5.5, o seguinte sistema linear infinito de equações:

$$\sum_{j=1}^{\infty} S_{ij} u_j = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, \infty \text{ exceto } i\text{'s tal que } \xi_i \neq 0 \text{ sobre } \partial\Omega_D. \quad (5.6)$$

Temos agora um sistema linear infinito de equações a resolver. Isto não é uma tarefa simples. Porém ainda não especificamos a base ξ_i que iremos usar. Talvez uma escolha prudente desta base nos permita reduzir este sistema para um sistema finito de equações, obtendo uma solução, necessariamente, aproximada. Uma escolha deste tipo é a expansão de Galerkin.

O fato de não haver equações para alguns i 's não deve ser visto como um fator de indeterminação do sistema linear acima, isto porque as fronteiras de Dirichlet, que acarretam nesta falta de equações, também acarretam no prévio conhecimento do valor da solução numa região do domínio. Este fato será utilizado na expansão de Galerkin na base de funções de elementos finitos.

5.1.1 A Expansão de Galerkin e a Base de Funções de Elementos Finitos

Buscamos na expansão de Galerkin obter um conjunto finito de funções ξ_i para $i = 1, \dots, N$ que descreva aproximadamente o espaço $H^1(\Omega)$. Deste modo o sistema linear 5.6 transforma-se no sistema linear finito:

$$\sum_{j=1}^N S_{ij} u_j = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N \text{ exceto } i\text{'s tal que } \xi_i \neq 0 \text{ sobre } \partial\Omega_D. \quad (5.7)$$

¹²O método de elementos finitos inicialmente obteve uma larga aplicação na engenharia e a nomenclatura desenvolvida reflete este fato. Denomina-se de *stiffness* a matriz que contém as propriedades do sistema a ser resolvido e *load* o vetor que contém a ação externa sobre o sistema.

Espera-se que a solução obtida com este sistema seja mais preciso quanto maior for o valor de N . O método de Galerkin, em si, só enuncia as condições que esta base ξ_i tem de obedecer para que as soluções obtidas, aumentando o valor N , tendam à solução real. O método de elementos finitos é que nos fornece uma base: a base de funções de elementos finitos.

Já mencionamos que, no método de elementos finitos, o domínio é particionado em um grande número de pequenas regiões denominadas, justamente, de elementos finitos ou, simplesmente, elementos. Estes elementos normalmente são poligonais, sendo que neste trabalho usaremos apenas triângulos e retângulos, estes últimos somente na situação geométrica de ter os lados paralelos ao sistema de coordenadas. Os vértices dos diversos elementos formam a malha de nós de elementos finitos.

Procuramos inicialmente construir o sistema 5.7, ou seja calcular a matriz de *stiffness*, para cada elemento usando um número de funções base igual ao número de vértices da poligonal do elemento. Ou seja, para um triângulo usamos três funções base e para um retângulo usamos quatro funções base. Estas funções base são sempre funções polinomiais, as mais simples possíveis, com a propriedade de terem valor 1 em um dos vértices e valor nulo nos demais vértices do elemento.

Uma vez calculada a matriz de *stiffness* para cada elemento estas matrizes devem ser “juntadas” para formar a matriz de *stiffness* global. Isto terá de ser feito respeitando o fato de que cada nó pode ser vértice de vários elementos. Na prática teremos uma numeração nodal local, para cada elemento, e na “junção” das matrizes estabelecer a correspondência entre a numeração local e a global.

É possível demonstrar que o procedimento descrito acima é equivalente, em termos globais do domínio, em escolher uma base ξ_i global de modo que cada função ξ_i tenha valor 1 sobre o nó i , decrescendo polinomialmente a 0 para os nós mais próximos e permanecendo nulo para todos os demais nós do domínio. Estas funções são denominadas de funções-chapéu em consequência deste formato. A figura 5.1 demonstra este fato.

Assim há uma correspondência clara entre cada nó de uma malha de elementos finitos com a única função-chapéu de valor unitário sobre este nó. Isto é importante quanto a questão dos i 's excluídos no sistema 5.7, estes i 's serão unicamente os referentes aos nós pertencentes a fronteira de Dirichlet do domínio. É preciso observar que nada nos impede de calcular a matriz de *stiffness* para estes i 's, apenas não podemos igualar as equações correspondentes a estes i 's a 0. Na seção 5.1.4 veremos que a imposição da fronteira de Dirichlet cuidará deste problema.

Precisamos agora estabelecer como calcular as matrizes de *stiffness* elementares para

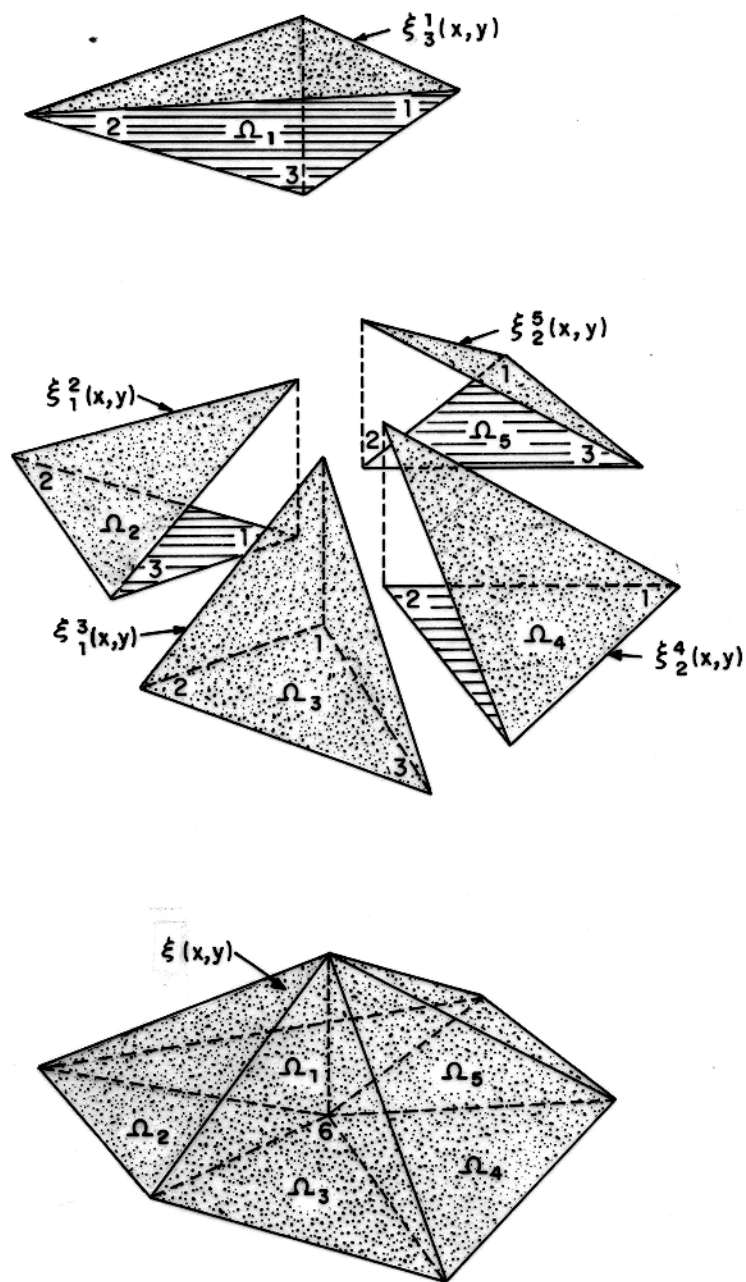


Figura 5.1 - A função-base de cada elemento (acima) em associação com funções-base de outros elementos (no meio) forma as funções-chapéu (abaixo) base sobre o domínio. (BECKER et al., 1981)

triângulos e retângulos e o algoritmo de formação da matriz de *stiffness* global.

5.1.2 Cálculo da Matriz de "Stiffness" Elementar

Já mencionamos que utilizaremos dois tipos de elemento neste trabalho: triângulos e retângulos. Inicialmente precisamos justificar porque usar dois tipos de elementos. É conhecido o fato de que elementos triangulares resultam, normalmente, em cálculos mais precisos do que elementos retangulares. Porém para elementos muito deformados (i.e. a extensão em uma dimensão muito maior que na outra) ocorre o inverso, ou seja elementos retangulares resultam em cálculos mais precisos do que triangulares (ZIENKIEWICZ, 1977). Neste trabalho aproveitaremos a maior precisão dos elementos triangulares na parte do domínio mais próxima à ferramenta e utilizaremos elementos retangulares na parte do domínio mais afastada da ferramenta, onde teremos de fazer um *spread-out* da malha de elementos finitos.

Inicialmente consideremos um elemento triangular. Se escrevermos as três funções-base neste elemento como:

$$\xi_i^e(\rho, z) = a_{i1} + a_{i2}\rho + a_{i3}z \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \quad (5.8)$$

a condição de que ξ_i^e igual a 1 no nó i do triângulo e nulo nos outros dois nós resulta em que (adaptado de BECKER et al., 1981):

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{2A_e}(\rho_2 z_3 - \rho_3 z_2) \quad , \quad a_{12} = \frac{1}{2A_e}(z_2 - z_3) \quad , \quad a_{13} = \frac{1}{2A_e}(\rho_3 - \rho_2) \quad , \\ a_{21} &= \frac{1}{2A_e}(\rho_3 z_1 - \rho_1 z_3) \quad , \quad a_{22} = \frac{1}{2A_e}(z_3 - z_1) \quad , \quad a_{23} = \frac{1}{2A_e}(\rho_1 - \rho_3) \quad , \\ a_{31} &= \frac{1}{2A_e}(\rho_1 z_2 - \rho_2 z_1) \quad , \quad a_{32} = \frac{1}{2A_e}(z_1 - z_2) \quad \text{e} \quad a_{33} = \frac{1}{2A_e}(\rho_2 - \rho_1) \quad , \end{aligned} \quad (5.9)$$

sendo que:

A_e = área do elemento,

ρ_i = coordenada ρ do nó i do triângulo e

z_i = coordenada z do nó i do triângulo.

Se substituirmos a definição 5.8 na definição 5.4 obteremos que a matriz de *stiffness* elementar será calculada por:

$$S_{ij}^e = \int \int_{\Omega^e} \left[\frac{a_{i2}a_{j2} + a_{i3}a_{j3}}{\sigma - i\omega\epsilon} - i\omega\mu[(a_{i1}a_{j2} + a_{i2}a_{j1})\rho + (a_{i1}a_{j1}) + (a_{i2}a_{j2})\rho^2 + (a_{i2}a_{j3} + a_{i3}a_{j2})\rho z + (a_{i1}a_{j3} + a_{i3}a_{j1})z + (a_{i3}a_{j3})z^2] \right] \frac{d\rho}{\rho} dz, \quad (5.10)$$

sendo que:

S_{ij}^e = matriz de *stiffness* elementar e

Ω^e = domínio do elemento.

A equação acima pode ser re-escrita como:

$$S_{ij}^e = \frac{a_{i2}a_{j2} + a_{i3}a_{j3}}{\sigma - i\omega\epsilon} IT_2 - i\omega\mu[(a_{i1}a_{j2} + a_{i2}a_{j1})IT_1 + (a_{i1}a_{j1})IT_2 + (a_{i2}a_{j2})IT_3 + (a_{i2}a_{j3} + a_{i3}a_{j2})IT_4 + (a_{i1}a_{j3} + a_{i3}a_{j1})IT_5 + (a_{i3}a_{j3})IT_6], \quad (5.11)$$

sendo que:

IT_1 = valor da integral $\int \int_{\Omega^e} dpdz$, que é igual à área do elemento A_e ,

IT_2 = valor da integral $\int \int_{\Omega^e} \frac{d\rho}{\rho} dz$,

IT_3 = valor da integral $\int \int_{\Omega^e} \rho dpdz$,

IT_4 = valor da integral $\int \int_{\Omega^e} z dpdz$,

IT_5 = valor da integral $\int \int_{\Omega^e} \frac{z}{\rho} dpdz$ e

IT_6 = valor da integral $\int \int_{\Omega^e} \frac{z^2}{\rho} dpdz$.

Neste trabalho optamos pelo cálculo destas integrais por uma quadratura gaussiana¹³ de 13 pontos no triângulo. As coordenadas de área¹⁴ e pesos estão dados na Tabela 5.1.

O outro tipo de elemento que utilizaremos neste trabalho são retângulos. Somente utilizaremos retângulos cujos lados sejam paralelos ao sistema de coordenadas. Neste caso o retângulo será caracterizado por quatro números: as coordenadas ρ inferior e superior (ρ_1 e ρ_2 respectivamente) e as coordenadas z inferior e superior (z_1 e z_2 respectivamente) do retângulo. Utilizaremos um sistema de numeração local dos nós de dois dígitos, cada um destes tendo como valores possíveis 1 e 2. O motivo de não usarmos um sistema de um dígito variando de 1 a 4, à semelhança do triângulo, se tornará visível pela forma que escolhemos para expressar as integrais elementares.

¹³A quadratura gaussiana é uma técnica numérica para cálculo de integrais. Consiste em calcular uma integral $\int \int f(\rho, z) dpdz$ através de uma expressão tipo $\sum_{i=1}^N p_i f(\rho_i, z_i)$ para apropriados pesos p_i e coordenadas ρ_i e z_i .

¹⁴Coordenadas de área são uma forma de descrever a localização de um ponto no interior de um triângulo independente da forma e tamanho deste triângulo. O nome *de área* provém do fato de que se traçarmos linhas ligando o ponto aos vértices, iremos partir o triângulo em três triângulos menores de área relativa, em relação ao triângulo original, igual às coordenadas de área do ponto. É por isto que a soma das coordenadas de área de um ponto é sempre 1. Maiores detalhes consultar BECKER et al. (1981).

Tabela 5.1 - Coordenadas de área (ζ_i) e pesos (p) para a quadratura gaussiana de 13 pontos num triângulo. (STRANG & FIX, 1973)

ζ_1	ζ_2	ζ_3	p
.333333333333333	.333333333333333	.333333333333333	-.149570044467670
.479308067841923	.260345966079038	.260345966079038	.175615257433204
.260345966079038	.479308067841923	.260345966079038	.175615257433204
.260345966079038	.260345966079038	.479308067841923	.175615257433204
.869739794195568	.065130102902216	.065130102902216	.053347235608839
.065130102902216	.869739794195568	.065130102902216	.053347235608839
.065130102902216	.065130102902216	.869739794195568	.053347235608839
.638444188569809	.312865496004875	.048690315425316	.077113760890257
.638444188569809	.048690315425316	.312865496004875	.077113760890257
.312865496004875	.638444188569809	.048690315425316	.077113760890257
.312865496004875	.048690315425316	.638444188569809	.077113760890257
.048690315425316	.312865496004875	.638444188569809	.077113760890257
.048690315425316	.638444188569809	.312865496004875	.077113760890257

As funções-base elementares são escritas como:

$$\begin{aligned} \xi_{11}^e &= \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1} \frac{z_2 - z}{z_2 - z_1}, & \xi_{12}^e &= \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1} \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \\ \xi_{21}^e &= \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \frac{z_2 - z}{z_2 - z_1}, & \xi_{22}^e &= \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Estas equações nos permitem notar que a numeração de dois dígitos não é arbitrária, ao contrário da numeração de um dígito. Assim o número 11, por exemplo, tem de ser atribuído ao nó de coordenadas ρ e z inferiores. Isto acarreta numa necessidade de realizar uma classificação dos nós antes do cálculo da matriz de *stiffness* elementar. Além disso, teremos de estabelecer uma correspondência $S_{ij} = S_{i_1 i_2, j_1 j_2}$, isto porque o cálculo da matriz de *stiffness* será feita com numeração nodal local de dois dígitos mas a acumulação na matriz de *stiffness* global terá de ser feita com uma numeração de um dígito.

Se definirmos:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{\rho_2 - \rho}{\rho_2 - \rho_1}, & \Gamma_2 &= \frac{\rho - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}, \\ \Lambda_1 &= \frac{z_2 - z}{z_2 - z_1}, & \Lambda_2 &= \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

podemos re-escrever as funções-base como:

$$\xi_{i_1 i_2}^e = \Gamma_{i_1} \Lambda_{i_2}. \quad (5.14)$$

Observar que Γ só depende de ρ e Λ só depende de z . Substituindo estas definições na definição 5.4 obtemos que:

$$S_{i_1 i_2, j_1 j_2} = \iint_{\Omega} \left[\frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon} \left(\Lambda_{i_2} \Lambda_{j_2} \frac{\partial \Gamma_{i_1}}{\partial \rho} \frac{\partial \Gamma_{j_1}}{\partial \rho} + \Gamma_{i_1} \Gamma_{j_1} \frac{\partial \Lambda_{i_2}}{\partial z} \frac{\partial \Lambda_{j_2}}{\partial z} \right) - i\omega\mu \Gamma_{i_1} \Gamma_{j_1} \Lambda_{i_2} \Lambda_{j_2} \right] \frac{d\rho}{\rho} dz$$

$$= \frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon} [\text{IRR1}_{i_1j_1} \text{IRZ2}_{i_2j_2} + \text{IRR2}_{i_1j_1} \text{IRZ1}_{i_2j_2}] - i\omega\mu [\text{IRR2}_{i_1j_1} \text{IRZ2}_{i_2j_2}], \quad (5.15)$$

sendo que:

$$\text{IRR1}_{i_1j_1} = \text{matriz } 2X2 \text{ de Integrais Retangulares em Rho tipo 1} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\partial \Gamma_{i_1}}{\partial \rho} \frac{\partial \Gamma_{j_1}}{\partial \rho} \frac{d\rho}{\rho},$$

$$\text{IRR2}_{i_1j_1} = \text{matriz } 2X2 \text{ de Integrais Retangulares em Rho tipo 2} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \Gamma_{i_1} \Gamma_{j_1} \frac{d\rho}{\rho},$$

$$\text{IRZ1}_{i_2j_2} = \text{matriz } 2X2 \text{ de Integrais Retangulares em Z tipo 1} = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial \Lambda_{i_2}}{\partial z} \frac{\partial \Lambda_{j_2}}{\partial z} dz \quad \text{e}$$

$$\text{IRZ2}_{i_2j_2} = \text{matriz } 2X2 \text{ de Integrais Retangulares em Z tipo 2} = \int_{z_1}^{z_2} \Lambda_{i_2} \Lambda_{j_2} dz.$$

Os valores destas integrais são (LOVELL, 1990):

$$\begin{aligned} \text{IRR1}_{11} &= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \rho} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \rho} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\log(\rho_2/\rho_1)}{(\rho_2 - \rho_1)^2}, \\ \text{IRR1}_{12} &= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \rho} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \rho} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{-1}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{-\log(\rho_2/\rho_1)}{(\rho_2 - \rho_1)^2}, \\ \text{IRR1}_{21} &= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \rho} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial \rho} \frac{d\rho}{\rho} = \text{IRR1}_{12}, \\ \text{IRR1}_{22} &= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \rho} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial \rho} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\log(\rho_2/\rho_1)}{(\rho_2 - \rho_1)^2}, \\ \\ \text{IRR2}_{11} &= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \Gamma_1 \Gamma_1 \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left[\rho - 2\rho_2 + \frac{\rho^2}{\rho} \right] d\rho = \frac{\rho_1 - 3\rho_2}{2(\rho_2 - \rho_1)} + \frac{\rho_1^2 \log(\rho_2/\rho_1)}{(\rho_2 - \rho_1)^2}, \\ \text{IRR2}_{12} &= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \Gamma_1 \Gamma_2 \frac{d\rho}{\rho} = \frac{-1}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left[\rho - (\rho_1 + \rho_2) + \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho} \right] d\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2(\rho_2 - \rho_1)} - \frac{\rho_1 \rho_2 \log(\rho_2/\rho_1)}{(\rho_2 - \rho_1)^2}, \\ \text{IRR2}_{21} &= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \Gamma_2 \Gamma_1 \frac{d\rho}{\rho} = \text{IRR2}_{12}, \\ \text{IRR2}_{22} &= \int_{\rho_1}^{\rho_2} \Gamma_2 \Gamma_2 \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)^2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left[\rho - 2\rho_1 + \frac{\rho^2}{\rho} \right] d\rho = \frac{\rho_2 - 3\rho_1}{2(\rho_2 - \rho_1)} + \frac{\rho_2^2 \log(\rho_2/\rho_1)}{(\rho_2 - \rho_1)^2}, \\ \\ \text{IRZ1}_{11} &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial \Lambda_1}{\partial z} \frac{\partial \Lambda_1}{\partial z} dz = \frac{1}{(z_2 - z_1)^2} \int_{z_1}^{z_2} dz = \frac{1}{z_2 - z_1}, \\ \text{IRZ1}_{12} &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial \Lambda_1}{\partial z} \frac{\partial \Lambda_2}{\partial z} dz = \frac{1}{(z_2 - z_1)^2} \int_{z_1}^{z_2} -dz = \frac{-1}{z_2 - z_1}, \\ \text{IRZ1}_{21} &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial \Lambda_2}{\partial z} \frac{\partial \Lambda_1}{\partial z} dz = \text{IRZ1}_{12}, \\ \text{IRZ1}_{22} &= \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial \Lambda_2}{\partial z} \frac{\partial \Lambda_2}{\partial z} dz = \frac{1}{(z_2 - z_1)^2} \int_{z_1}^{z_2} dz = \frac{1}{z_2 - z_1}, \\ \\ \text{IRZ2}_{11} &= \int_{z_1}^{z_2} \Lambda_1 \Lambda_1 dz = \frac{1}{(z_2 - z_1)^2} \int_{z_1}^{z_2} (z - z)^2 dz = \frac{z_2 - z_1}{3}, \\ \text{IRZ2}_{12} &= \int_{z_1}^{z_2} \Lambda_1 \Lambda_2 dz = \frac{1}{(z_2 - z_1)^2} \int_{z_1}^{z_2} (z - z)(z - z_1) dz = \frac{z_2 - z_1}{6}, \\ \text{IRZ2}_{21} &= \int_{z_1}^{z_2} \Lambda_2 \Lambda_1 dz = \text{IRZ2}_{12} \quad \text{e} \\ \text{IRZ2}_{22} &= \int_{z_1}^{z_2} \Lambda_2 \Lambda_2 dz = \frac{1}{(z_2 - z_1)^2} \int_{z_1}^{z_2} (z - z_1)^2 dz = \frac{z_2 - z_1}{3}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Estas integrais serão as utilizadas nos subprogramas apropriados.

5.1.3 Cálculo da Matriz de “Stiffness” Global

Uma característica da matriz de *stiffness* global visível na equação 5.4 é o fato desta matriz ser simétrica, i.e. $S_{ij} = S_{ji}$. Há uma outra característica da matriz de *stiffness* não tão visível: a matriz é esparsa, i.e. há poucos termos não-nulos na matriz. Isto pode ser visto lembrando que uma posição da matriz de *stiffness* global só se tornará não-nula se houver alguma matriz de *stiffness* elementar que a preencha. Portanto uma posição ij na matriz de *stiffness* global só será não-nula se o nó i compartilhar algum elemento com o nó j . Como é difícil imaginar um nó compartilhando elementos com mais do que, digamos, 25 outros nós e a malha que utilizaremos possui da ordem de 6000 nós, enxergamos que cada linha da matriz de *stiffness* global terá, no máximo, 25 posições não-nulas para 5975 posições nulas.

Sendo a matriz de *stiffness* global esparsa, é um contra-senso fazer a armazenagem computacional desta matriz em forma de matriz. Armazena-se apenas os valores não nulos desta matriz em forma de vetor real. Especifica-se a linha e coluna, que o termo teria na matriz original, através de dois vetores inteiros auxiliares. Esta estrutura de armazenagem é denominada LS-CS (adaptado de AXELSSON & BARKER, 1984) e está exemplificada na Figura 5.2. Observar que com esta estrutura, as posições em que se encontra uma linha i da matriz original S no vetor S são as posições de LS_i até $LS_{i+1} - 1$.

Com esta estrutura de armazenagem, é preciso gerar os vetores auxiliares, CS e LS, antes do cálculo do *stiffness* propriamente. Isto é feito por uma varredura sobre a malha de elementos finitos, rastreando o interrelacionamento nodal (i.e., um nó compartilha elementos com que outros nós).

5.1.4 Imposição das Condições de Fronteira

Já descrevemos na seção 3.3.4 as possíveis condições de fronteira que teremos de impor ao nosso problema. Temos basicamente três tipos de condições: Dirichlet (homogênea e não-homogênea), Neumann (somente homogênea) e Robin (não-homogênea ou homogênea). Consideremos agora como esta imposição será feita.

- *Condição de Neumann Homogênea:* É a mais trivial de impor, não temos de fazer absolutamente nada. Isto porque condições de fronteira não-Dirichlet, que é o caso desta, são impostos pelo termo de fronteira na equação 3.71, e neste caso este termo é nulo.

A seguinte matriz:

$$S = \begin{bmatrix} 4. & -1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ -1. & 1. & 0. & -1. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 3. & -2. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & -1. & -2. & 4. & 0. & -3. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 2. & 0. & -1. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -3. & 0. & 1. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & -1. & 0. & 4. & 1. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. & 2. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 1. \end{bmatrix}$$

na forma LS-CS torna-se:

$$\begin{aligned} S &= (4. \ -1. \ -1. \ 1. \ -1. \ 3. \ -2. \ -1. \ -2. \ 4. \ -3. \ 2. \ -1. \ -3. \ 1. \ -1. \ 4. \ 1. \ 1. \ 2. \ 1.) \\ CS &= (1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 4 \ 3 \ 4 \ 2 \ 3 \ 4 \ 6 \ 5 \ 7 \ 4 \ 6 \ 5 \ 7 \ 8 \ 7 \ 8 \ 9) \\ LS &= (1 \ 3 \ 6 \ 8 \ 12 \ 14 \ 16 \ 19 \ 21 \ 22) \\ DS &= (1 \ 4 \ 6 \ 10 \ 12 \ 15 \ 17 \ 20 \ 21) \end{aligned}$$

Figura 5.2 - Exemplo de armazenamento de matriz esparsa em forma LS-CS. O vetor real S tem comprimento igual ao número de termos não-nulos da matriz S e contém estes valores não-nulos desta matriz. O vetor inteiro CS tem comprimento igual ao vetor S e contém as colunas em que estavam na matriz S original cada valor não-nulo deste vetor. O vetor inteiro LS tem comprimento igual à ordem da matriz S mais 1 e contém, na sua i -ésima posição, a posição em S (e CS) em que começa a i -ésima linha da matriz original. O último valor de LS seria a posição em que começaria uma linha adicional na matriz e é necessário para controle do final da última linha. O vetor inteiro DS tem comprimento igual à ordem da matriz S e contém, na sua i -ésima posição, a posição em S (e CS) em que se encontra o i -ésimo elemento da diagonal de S . Este vetor (DS) é utilizado em algumas operações especiais. (adaptado de AXELSSON & BARKER, 1984)

- *Condição de Robin:* Esta condição, por também ser não-Dirichlet, é imposta pelo termo de fronteira da equação 3.71. Já deduzimos, na seção 3.3.4, que esta condição se desdobra nos dois termos do lado direito, após a segunda igualdade, da equação 3.81. Podemos notar que apenas o termo $\alpha \int_{\partial\Omega_N} UW dl$ contém a incógnita U . Este termo terá de ser usado para corrigir a matriz de *stiffness* do sistema 5.7. O outro termo, $\beta I \int_{\partial\Omega_N} W dl$, por não ter a incógnita, terá de ser usado para corrigir o lado direito do mesmo sistema, e portanto o *load* passará a ter alguns termos não-nulos (AXELSSON & BARKER, 1984; LOVELL, 1992). Então as operações que teremos de fazer são:

$$S_{ij} \leftarrow S_{ij} + \alpha \int \xi_i \xi_j dl$$

e

$$l_i \leftarrow l_i + \beta I \int \xi_i dl$$

i e j nós que pertençam, ou delimitem, fronteira de Robin,
(5.17)

sendo que:

$l_i =$ vetor de *load*.

Precisamos calcular estas integrais. Este cálculo terá de ser realizado elemento por elemento, mas somente nos elementos que tenham um dos lados pertencentes a esta fronteira. Neste trabalho, a fronteira de Robin será uma linha reta em ρ constante. Deste modo, concluímos que $dl = dz$ e que cada elemento pode ter, no máximo, um lado sobre esta fronteira. Em relação às funções-base ξ_i , observemos que somente influirá no cálculo das integrais o valor destas funções sobre a fronteira. Para cada elemento que tenha um lado sobre a fronteira, teremos de considerar dois nós e portanto duas funções-base diferentes. Sobre a fronteira, cada função-base terá de ter valor unitário no seu nó correspondente e decrescer linearmente a zero sobre o outro nó, isto independente do fato do elemento ser triangular ou retangular. Ou seja, se z_1 e z_2 forem as coordenadas em z dos dois nós que delimitam o lado de elemento pertencente a fronteira de Robin, com $z_1 > z_2$, o valor das funções-base sobre a fronteira será dado por:

$$\xi_1^e = \frac{z_2 - z}{z_2 - z_1} \quad \text{e} \quad \xi_2^e = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad . \quad (5.18)$$

Os valores das integrais são (LOVELL, 1992):

$$\begin{aligned}
 \int_{z_1}^{z_2} \xi_1^e \xi_1^e dz &= \frac{1}{(z_2 - z_1)^2} \int_{z_1}^{z_2} (z_2 - z)^2 dz = \frac{z_2 - z_1}{3}, \\
 \int_{z_1}^{z_2} \xi_1^e \xi_2^e dz &= \frac{1}{(z_2 - z_1)^2} \int_{z_1}^{z_2} (z_2 - z)(z - z_1) dz = \frac{z_2 - z_1}{6}, \\
 \int_{z_1}^{z_2} \xi_2^e \xi_1^e dz &= \int_{z_1}^{z_2} \xi_1^e \xi_2^e dz = \frac{z_2 - z_1}{6}, \\
 \int_{z_1}^{z_2} \xi_2^e \xi_2^e dz &= \frac{1}{(z_2 - z_1)^2} \int_{z_1}^{z_2} (z - z_1)^2 dz = \frac{z_2 - z_1}{3}, \quad (5.19) \\
 \\
 \int_{z_1}^{z_2} \xi_1^e dz &= \frac{1}{(z_2 - z_1)} \int_{z_1}^{z_2} (z_2 - z) dz = \frac{z_2 - z_1}{2} \text{ e} \\
 \int_{z_1}^{z_2} \xi_2^e dz &= \frac{1}{(z_2 - z_1)} \int_{z_1}^{z_2} (z - z_1) dz = \frac{z_2 - z_1}{2}.
 \end{aligned}$$

A exigência de que $z_1 > z_2$ é para assegurar de que as integrais acima sejam na direção contrário ao relógio. Observar que isto acarreta o fato de que todas as integrais acima são negativas. Concluimos então que a imposição da fronteira de Robin será feita, por elemento, com a operação:

$$S_{ij} \leftarrow S_{ij} + \alpha \frac{z_2 - z_1}{3} \text{ se } i = j$$

ou

$$S_{ij} \leftarrow S_{ij} + \alpha \frac{z_2 - z_1}{6} \text{ se } i \neq j$$

e

$$l_i \leftarrow l_i + \beta I \frac{z_2 - z_1}{2}$$

i e j nós que pertençam, ou delimitem, fronteira de Robin.

(5.20)

Observar que se a condição de Robin for homogênea, a operação sobre o vetor de *load* não é necessária, o que pode ser obtido tomando $\beta = 0$.

Precisamos agora mencionar porque na equação 5.17 condicionamos que “ i e j nós que pertençam, ou delimitem, fronteira de Robin”. No contato de uma fronteira de Dirichlet com uma fronteira de Robin haverá um nó que será considerado pertencente à fronteira de Dirichlet. Isto porque a condição de Dirichlet é considerada *forte* e a de Robin é *fraca* na formulação do método de elementos finitos. Este nó, apesar de ser de Dirichlet, participará da imposição da condição de Robin. No próximo item, veremos que este fato e o método que escolhemos para impor a condição de Dirichlet nos obriga a impor esta fronteira antes da de Dirichlet.

- **Condição de Dirichlet:** A imposição desta fronteira significa impor ao sistema 5.7 o prévio conhecimento da solução sobre os nós que constituem a fronteira de Dirichlet. Já mencionamos que as linhas do sistema 5.7 referentes a nós em fronteira de Dirichlet não podem ser igualadas a zero como as demais linhas, pelo menos não com a matriz de *stiffness* do modo como está. A imposição é feita anulando na matriz de *stiffness*

todas as linhas referentes a nós de Dirichlet com exceção dos termos na diagonal que são igualadas a 1. No vetor de *load* impomos em todas as linhas referentes a estes mesmos nós os valores da solução nesta fronteira. Ou seja, “informamos” ao sistema que $u_i = l_i$, sendo i um nó sobre uma fronteira de Dirichlet e l_i o valor da solução sobre esta fronteira.

O fato de sabermos o valor da solução sobre os nós de Dirichlet também pode ser usado para reduzir as colunas referentes a estes nós nas outras equações do sistema. Basicamente, anulamos no sistema todas as colunas referentes a nós de Dirichlet e corrigimos o vetor de *load* para efeito desta anulação. A vantagem de realizar esta operação é acelerar a convergência da solução obtida por método iterativo, que é o tipo de método que usaremos. Esta operação de anular as colunas referentes a nós de Dirichlet é que nos “obriga” a impor a fronteira de Robin antes desta. Se fizermos o contrário estas colunas que deveriam estar anuladas poderão não estar mais e principalmente a correção do vetor de *load* terá sido feita erroneamente.

5.1.5 Solução do Sistema Linear

Temos o seguinte sistema linear de equações para resolver:

$$\sum_{j=1}^N S_{ij}u_j = l_i, \quad (5.21)$$

ou em linguagem matricial:

$$Su = l, \quad (5.22)$$

sendo que:

S = matriz de *stiffness*,

u = vetor-coluna de incógnitas e

l = vetor-coluna de *load*.

Para solucionar este sistema optamos por um método iterativo, válido apenas quando a matriz é simétrica, que é o nosso caso, denominado gradiente bi-conjugado pré-condicionado, sendo o pré-condicionador obtido por decomposição LU incompleta. O fundamento teórico deste método é de que resolver o sistema acima é equivalente a encontrar o ponto estacionário do funcional (AXELSSON & BARKER, 1984; LOVELL, 1990):

$$f(u) = \frac{1}{2}u^T Su - l^T u + c, \quad (5.23)$$

sendo que:

$f(\cdot)$ = funcional definido,

x^T = transposto de x ($= u$ ou l) e

c = vetor-coluna constante qualquer.

Mostra-se para o método de gradiente bi-conjugado (não pré-condicionado) que a obtenção do ponto estacionário do funcional acima pode ser obtido pelo processo iterativo:

$$\begin{aligned}\tau_k &= \frac{\langle g^k, g^k \rangle}{\langle d^k, Sd^k \rangle}, \\ u^{k+1} &= u^k + \tau_k d^k, \\ g^{k+1} &= g^k + \tau_k Sd^k, \\ \beta_k &= \frac{\langle g^{k+1}, g^{k+1} \rangle}{\langle g^k, g^k \rangle} \text{ e} \\ d^{k+1} &= -g^{k+1} + \beta_k d^k,\end{aligned}\tag{5.24}$$

sendo que:

τ_k = parâmetro iterativo da k -ésima iteração,

u^k = valor da solução após a k -ésima iteração,

g^k = valor da função $g(u) = Su - l$ após a k -ésima iteração,

d^k = direção de iteração da solução na k -ésima iteração e

β_k = parâmetro iterativo da k -ésima iteração.

É preciso observar que o produto interno contido nas equações acima é $\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$ e não $\langle x, y \rangle = \sum x_i \bar{y}_i$ (\bar{y} indica complexo conjugado de y) como seria o convencional. Esta é a razão do método ser gradiente bi-conjugado e não simplesmente gradiente conjugado (LOVELL, 1990).

Mostra-se que a taxa de convergência do processo acima é proporcional a raiz quadrada do número de condição espectral, ou seja o quociente entre o maior e o menor autovalor, da matriz S . O Pré-Condicionamento consiste em aumentar este número de condição espectral, acelerando a convergência do processo. Em teoria optamos por encontrar o ponto estacionário do funcional

$$\tilde{f}(v) = \frac{1}{2} v^T \tilde{S} v - \tilde{l}^T v + c \quad \text{com } \tilde{S} = E^{-1} S E \text{ e } \tilde{l} = E^{-1} l,\tag{5.25}$$

sendo E uma matriz inversível, ao invés do funcional anterior. Procura-se fazer com que a matriz \tilde{S} tenha um número de condição espectral maior do que S . Na prática, o processo iterativo será modificado para (AXELSSON & BARKER, 1984):

$$\begin{aligned}
 \tau_k &= \frac{\langle g^k, h^k \rangle}{\langle d^k, Sd^k \rangle}, \\
 u^{k+1} &= u^k + \tau_k d^k, \\
 g^{k+1} &= g^k + \tau S d^k, \\
 h^{k+1} &= C^{-1} g^{k+1}, \\
 \beta_k &= \frac{\langle g^{k+1}, h^{k+1} \rangle}{\langle g^k, h^k \rangle} \text{ e} \\
 d^{k+1} &= -g^{k+1} + \beta_k d^k,
 \end{aligned}
 \tag{5.26}$$

sendo que:

h^k = vetor-coluna auxiliar do processo e

C = matriz de pré-condicionamento, igual a EE^T .

Este é o algoritmo que usaremos, com valores iniciais dados por $u_i^0 = l_i/S_{ii}$, na solução da primeira configuração do problema, $g^0 = Su^0 - l$ e $h^0 = C^{-1}g^0$. Mencionamos *na solução da primeira configuração do problema* porque a geração de um perfil consiste em gerar soluções diferentes para posições relativas diferentes da ferramenta em relação às camadas. Após termos resolvido a primeira configuração, usaremos como valor inicial u^0 a solução final obtida na configuração anterior. Faremos isto pela simples razão de que se espera que uma pequena alteração na configuração implique numa pequena alteração da solução, sendo assim a solução anterior uma excelente estimativa inicial da nova solução.

A condição de encerramento do processo iterativo é definido como $|g \cdot h| < \varepsilon$. A tolerância ε é ajustável, sendo que o valor normalmente utilizado neste trabalho é de 1×10^{-8} .

Ainda nos resta descrever como será a matriz de pré-condicionamento utilizada. Obteremos esta matriz por eliminação gaussiana, ou decomposição LU, incompleta da matriz de *stiffness*. A operação será incompleta porque não permitiremos que, durante a eliminação, termos nulos tornem-se não-nulos.

Eliminação gaussiana é, originalmente, um método de solução de sistemas lineares de equações. O princípio do método é de utilizar a i -ésima equação para anular os termos da i -ésima coluna de todas as demais equações. A equação usada para realizar a operação é denominada de *pivoteadora* e as equações de cujos termos são anulados são denominadas de *pivoteadas*. A implementação global desta operação é normalmente feita num esquema *top-down-top*, ou seja a operação é realizada em duas etapas:

1. Cada equação é usada para pivotar todas as equações abaixo desta, começando por usar a primeira equação do sistema como a pivoteadora.
2. Cada equação é usada para pivotar todas as equações acima desta, começando com a última equação do sistema como sendo a pivoteadora.

Uma implementação equivalente, denominada de decomposição LU, consiste em realizar esta operação não sobre a equação como um todo, mas somente sobre a matriz do sistema, i.e. sem envolver o *load*. Demonstra-se que a matriz do sistema decompõe-se num produto $S = LU$, sendo L (de *Low*) uma matriz com termos não-nulos apenas na parte abaixo da diagonal e U (de *Up*) uma matriz com termos não-nulos na diagonal e na parte acima desta. Com a matriz decomposta resolve-se o sistema novamente por um esquema *top-down-top*. Porém, o algoritmo 5.26 envolve C^{-1} , só que solucionar $Ch = LUh = g$ é equivalente a calcular $h = C^{-1}g$.

O fato da eliminação, que iremos fazer, ser incompleta faz com que a decomposição seja, na verdade, $S = C + R = LU + R$, ou seja a exigência de que os termos nulos assim permaneçam faz com que haja um resíduo na operação (R) (LOVELL, 1990). É por isto que no algoritmo nunca indicamos S , de *stiffness*, como sendo a matriz de pré-condicionamento. Poderia se perguntar por que não usar a eliminação gaussiana completa para resolver o próprio sistema linear gerado por elementos finitos e dispensar o algoritmo de gradiente bi-conjugado pré-condicionado. O custo computacional de se usar uma eliminação gaussiana incompleta e o gradiente bi-conjugado pré-condicionado é muito menor do que usar uma eliminação gaussiana completa.

É preciso mencionar que a operação de eliminação gaussiana incompleta não é trivial e é computacionalmente custosa, tendo inicialmente competido em custo com a montagem da matriz de *stiffness*. A dificuldade desta operação se deriva da forma de armazenamento da matriz de *stiffness* que não permite localizar um valor pela sua coluna. Ou seja, é preciso rastrear do início de uma linha até atingir, ou ultrapassar, a coluna desejada para verificar se um valor existe. Neste trabalho conseguimos uma considerável otimização no algoritmo de eliminação gaussiana incompleta explorando o fato do armazenamento na forma esparsa manter o ordenamento das colunas, ou seja, dentre os termos de uma linha, um termo de coluna superior necessariamente é posterior a um de coluna menor. Com isto usamos um algoritmo envolvendo o uso de dois apontadores de varredura, um para a linha pivoteadora e outro para a pivoteada. O esquema usado é o seguinte:

1. Coloca-se os dois apontadores em posições iniciais apropriadas nas duas linhas ou seja logo após a diagonal na linha pivoteadora e no primeiro elemento da linha pivoteada

ainda não eliminada por operações anteriores.

2. Compara-se a coluna dos dois elementos apontados.
3. Se as colunas forem diferentes, incrementa-se em uma unidade o apontador de menor coluna. Se as colunas forem iguais executa-se a eliminação e incrementa-se em uma unidade os dois apontadores.
4. Volta-se a comparar as colunas dos elementos apontados e agir apropriadamente até que um dos apontadores ultrapasse a linha que este rastreia.

Transcrevemos trecho do subprograma FORTRAN que realiza esta operação:

```
DO WHILE ( (II.LE.(LS(I+1)-1)) .AND. (JJ.LE.(LS(CS(J)+1)-1)) )
  IF(CS(II).LT.CS(JJ)) THEN
    II=II+1
  ELSE IF(CS(II).EQ.CS(JJ)) THEN
    S(JJ)=S(JJ)-P*S(II)
    II=II+1
    JJ=JJ+1
  ELSE
    JJ=JJ+1
  ENDIF
ENDDO
```

5.2 Cálculo de Voltagem e de Corrente

Já deduzimos a expressão 3.86, na seção 3.3.5, que permite o cálculo da voltagem sobre uma fronteira de Dirichlet. Este é o único tipo de voltagem que teremos de calcular, pois desejamos saber a diferença de voltagem entre um eletrodo de monitoração e o de referência. Entre estes só há o *bridle*, partes isolantes e eletrodos da ferramenta. Os dois primeiros são fronteiras de Dirichlet e o terceiro componente não pode ter contribuição para um cálculo de diferença de voltagem.

Considerando a equação 3.86 e a equação 5.5, esta última com as considerações de Galerkin, obtemos que:

$$V_{NM} = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N S_{ij} w_i^{NM} u_j, \quad (5.27)$$

sendo que:

w_i^{NM} = vetor de coeficientes referentes a expansão da função $W_{NM} = \rho\varphi_{NM}$ definida na seção 3.3.5.

Na seção 3.3.5 já tínhamos mencionado que a função W_{NM} possuía valor unitário sobre a fronteira sobre o qual calcularemos a voltagem e valor nulo sobre o restante do domínio. Os coeficientes $w_{NM,i}$ que melhor irão corresponder a esta função são obviamente:

1. $w_i^{NM} = 1$ se o nó i pertence a fronteira de cálculo e
2. $w_i^{NM} = 0$ se o nó i não pertence a fronteira de cálculo.

Estes coeficientes significam, na prática, que estamos selecionando os nós que participarão do cálculo. A implementação numérica deste cálculo torna-se simples, basta multiplicar a matriz de *stiffness* original, i.e. sem a imposição de condições de fronteira, pela solução obtida e somar somente os valores obtidos sobre os nós pertencentes à fronteira de cálculo.

É preciso mencionar que os coeficientes acima não gerarão exatamente a função W_{NM} , pelo fato de que estes multiplicam funções-chapéu e portanto a função gerada irá a partir do valor unitário, sobre a fronteira de cálculo, decrescer linearmente até os nós mais próximos. A função gerada, então, será não-nula sobre a fronteira de cálculo e sobre uma vizinhança em volta desta. Isto é uma fonte de erro no cálculo, que será tanto maior quanto mais distantes estiverem os nós mais próximos desta fronteira. Assim é importante na geração da malha de elementos finitos, provocar um adensamento da malha em volta da fronteira de cálculo de voltagem. Durante este trabalho, em alguns testes, notou-se variações dramáticas no cálculo da voltagem devido a este fato.

A implementação do cálculo da corrente é trivial, basta calcular a diferença da solução entre os dois pontos que limitam o eletrodo.

5.3 Modelos de Verificação dos Programas Elaborados

Antes de prosseguir no uso destes programas é necessário realizar verificações para assegurar a correção destes programas. Para isto buscamos usar estes programas para resolver problemas de solução analítica conhecida. Dois domínios foram utilizados, um finito e outro infinito. Estes são os mesmos domínios usados por LOVELL (1990).

O domínio finito é uma área quadrada com lados em $\rho = \rho_1$ e ρ_2 e $z = z_1$ e z_2 , sendo que estabelecemos fronteiras Dirichlet nos lados em $\rho = constante$ (Figura 5.3). A solução neste domínio, pela simetria que este apresenta, não deve ter variação em z . Assim a solução

em H_ϕ será dada pela equação 3.64. Adaptando esta equação para a função U temos que a solução é dada por:

$$U = 2\pi\rho H_\phi = 2\pi\rho(AH_1^{(1)}(k\rho) + BJ_1(k\rho)). \quad (5.28)$$

Os valores das constantes A e B devem ser calculadas a partir das condições de Dirichlet

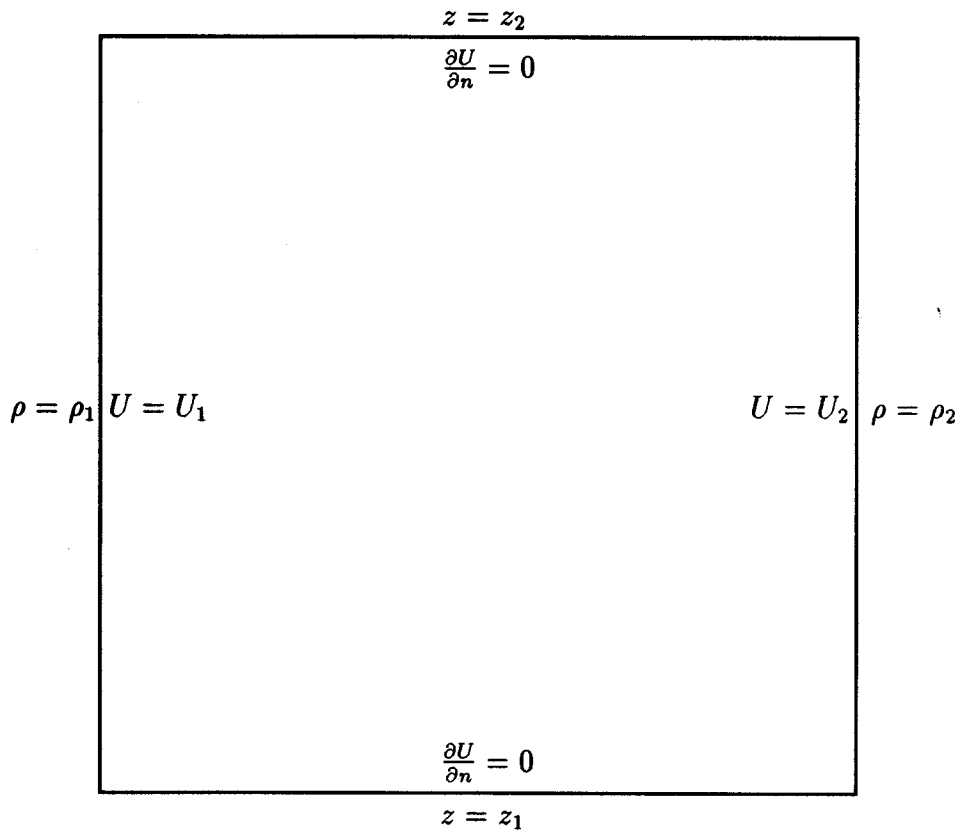


Figura 5.3 - Domínio Finito de Verificação dos Programas Elaborados.

dadas, ou seja pelo sistema de equações:

$$\begin{aligned} AH_1^{(1)}(k\rho_1) + BJ_1(k\rho_1) &= \frac{U_1}{2\pi\rho_1} \text{ e} \\ AH_1^{(1)}(k\rho_2) + BJ_1(k\rho_2) &= \frac{U_2}{2\pi\rho_2}. \end{aligned} \quad (5.29)$$

A solução analítica é calculada e comparada com a solução por elementos finitos através

do cálculo do erro relativo definido por:

$$\begin{aligned} \text{Erro Relativo} &= \left| \frac{U_A - U_E}{U_E} \right| \quad \text{se } |U_E| > 1. \times 10^{-5} \text{ e} \\ &10^5 |U_A - U_E| \quad \text{se } |U_E| \leq 1. \times 10^{-5} \text{ ,} \end{aligned} \quad (5.30)$$

sendo que:

U_A = valores obtidos da solução analítica e

U_E = valores obtidos da solução por elementos finitos.

Além de comparar a solução analítica com a solução por elementos finitos, em todo o domínio de verificação, ainda verificamos o algoritmo de cálculo de voltagem. Calculamos a diferença de voltagem sobre toda a fronteira em $\rho = \rho_1$. O valor analítico é dado por:

$$V = \int_{z_2}^{z_1} \vec{E} \cdot d\vec{l} = (z_2 - z_1)E_z = (z_2 - z_1) \frac{k}{\sigma - i\omega\epsilon} [AH_0^{(1)}(k\rho_1) + BJ_0(k\rho_1)] . \quad (5.31)$$

sendo que usamos, na segunda igualdade, um resultado do anexo I.

O domínio infinito é uma área retangular com lados em $\rho = \rho_1$ e ∞ e $z = z_1$ e z_2 , sendo que estabelecemos fronteira Dirichlet não-homogênea em $\rho = \rho_1$ e homogênea em $\rho = \infty$ (Figura 5.4). Na prática, usa-se ρ muito grande ao invés de ∞ .

A solução neste caso é mais simples do que no anterior pelo fato de que, necessariamente, $B = 0$. Isto por que a solução não pode ter o termo em J_1 , pois esta função assume valores infinitos em $\rho = \infty$. Assim a solução é dada por:

$$U = 2\pi\rho AH_1^{(1)}(k\rho) \quad \text{com } A = \frac{U_1}{2\pi\rho_1 H_1^{(1)}(k\rho_1)} . \quad (5.32)$$

O erro relativo para este caso é definido de modo um pouco diferente:

$$\begin{aligned} \text{Erro Relativo} &= \left| \frac{U_A - U_E}{U_A} \right| \quad \text{se } |U_A| > 1. \times 10^{-5} \text{ e} \\ &10^5 |U_A - U_E| \quad \text{se } |U_A| \leq 1. \times 10^{-5} \text{ ,} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Usamos U_A no denominador neste caso por que este valor dificilmente atingirá valores nulos no domínio utilizado (U_A só atinge zero no ∞ e o domínio de cálculo é finito), enquanto a solução por elementos finitos necessariamente o será sobre a fronteira em ρ máximo.

A voltagem sobre a fronteira $\rho = \rho_1$ agora é dada por:

$$V = (z_2 - z_1) \frac{k}{\sigma - i\omega\epsilon} AH_0^{(1)}(k\rho_1) . \quad (5.34)$$

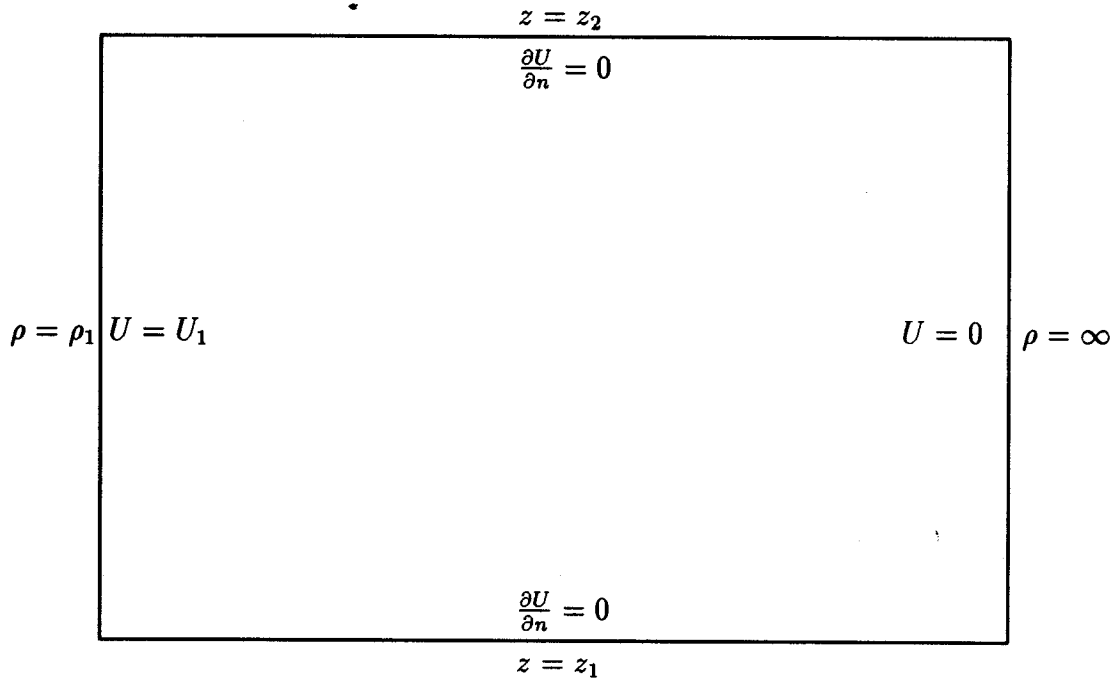


Figura 5.4 - Domínio Infinito de Verificação dos Programas Elaborados.

O domínio infinito, pela semelhança que possui com o domínio a ser usado na modelagem da ferramenta *Dual Laterolog* foi usado para calibrar os parâmetros de geração da malha de elementos finitos utilizada neste trabalho. Adotou-se o procedimento de usar os parâmetros que fizessem o cálculo da voltagem por elementos finitos ser o mais próximo do obtido analiticamente.

Os resultados destas verificações e os parâmetros de malha estabelecidos são descritos na seção 6.1.

5.4 Modelo Utilizado para os Efeitos Delaware e Groningen

Já nos referimos várias vezes ao domínio do nosso problema. Nesta seção descrevemos as características dos domínios usados para modelar os dois efeitos em questão. Descrevemos também as variações que provocaremos nestas características de modo a gerar um perfil de

Tabela 5.2 - Os materiais envolvidos nos efeitos Delaware e Groningen e as suas respectivas resistividades (R), permissividades (K) e permeabilidades magnéticas (K_m) relativas. (PARKHOMENKO, 1967; SCHLUMBERGER, 1989a; TELFORD et al., 1976)

Material	R (ohm.m)	K	K_m
Anidrita ou Halita	10^{10} *	6	1
Arenito com HC	100	4.65	1
Arenito sem HC	.5	4.65	1
Fluido de Perfuração	.02	6	1
Aço	2×10^{-7}	∞ *	200

resistividade.

5.4.1 Parâmetros Eletromagnéticos

Os parâmetros eletromagnéticos são os valores de resistividade, permissividade e permeabilidade magnética que usaremos no domínio de solução. Definimos $K = \epsilon/\epsilon_o$ e $K_m = \mu/\mu_o$ como sendo a permissividade e a permeabilidade magnética relativas respectivamente, sendo $\epsilon_o = 8.854 \times 10^{-12}$ (F/m) e $\mu_o = 4\pi \times 10^{-7}$ Ns^2/C^2 os valores da permissividade e permeabilidade magnéticas do vácuo. A Tabela 5.2 mostra valores representativos de resistividade e de permissividades e permeabilidades magnéticas relativas. Estes valores são médias dentre os disponíveis na bibliografia. Por motivos de estabilidade numérica, os parâmetros marcados (*) serão mudados para 10^5 ohm.m na resistividade da anidrita, ou halita, e 10^4 na permissividade relativa do aço.

5.4.2 Hipóteses do Modelo

Já descrevemos, em detalhe, o projeto da ferramenta *Dual Laterolog* e uma pergunta que precisamos agora responder é até que limite devemos considerar as diversas características dessa ferramenta na modelagem de sua resposta.

Inicialmente devemos considerar que os efeitos Delaware e Groningen afetam apenas a medida profunda desta ferramenta e portanto só será esta medida que modelaremos. Já mencionamos a importância, nestes efeitos, do fato da corrente de medida ser bastante menor que a corrente total emitida pela ferramenta (seção 4.1.2), no entanto a focalização em si é de pouca importância. Isto porque, neste trabalho, a camada-reservatório será modelada como

sendo homogênea e isotrópica. Assim sendo, é difícil esperar que a voltagem dos eletrodos de injeção de corrente da ferramenta sejam diferentes, pelo menos enquanto a ferramenta estiver em frente à camada-reservatório. Por estes motivos optamos por modelar a ferramenta *Dual Laterolog* como sendo um único eletrodo de comprimento 8.53 m , porém consideraremos que a corrente usada para medida da resistividade aparente será a corrente emitida por um pedaço de 61 cm de comprimento situado no centro deste eletrodo. Este último comprimento é o comprimento entre os eletrodos de monitoração da ferramenta (Figura 2.13) e, portanto, corresponde a espessura da lâmina de corrente injetada na formação pelo eletrodo principal (Figura 2.14).

Existe uma outra questão a ser considerada que é a extensão do domínio a ser considerado. Na direção radial a resposta é óbvia: O domínio começa na ferramenta, e equipamentos conectados, e se estende até onde for necessário à precisão dos cálculos a serem feitos, de acordo com os testes mencionados na seção anterior. Na direção da profundidade não dispomos dos mesmos testes por não termos solução analítica para calibrar uma verificação. Neste trabalho utilizaremos profundidades superior e inferior iguais a extensão radial determinada. O valor obtido é de 3000 m .

A profundidade superior escolhida acarreta num fato importante: a fronteira superior do domínio ($z = \text{constante superior}$) torna-se uma fronteira de Neumann homogênea. Isto acontece porque esperamos, de acordo com a Figura 4.2, que a corrente incida normalmente a esta fronteira.

Com todas estas considerações, as fronteiras dos domínios a serem usados para modelar os efeitos Delaware e Groningen, este último considerando a blindagem do cabo ou não, estão representadas nas Figuras 5.5, 5.6 e 5.7.

Geraremos perfis de 150 m a partir de 145 m abaixo da camada resistiva de acordo com com os relatos de ocorrência de efeito Groningen.

5.4.3 Geração da Malha de Elementos Finitos e de Perfis

Precisamos agora considerar como discretizar os domínios representados nas Figura 5.5, 5.6 e 5.7 em malhas de elementos finitos. O gerador de malhas utilizado neste trabalho tem a capacidade de gerar malhas só com elementos triangulares (há três opções quanto ao algoritmo de geração destes elementos), só com elementos retangulares ou ambos. Há alguns parâmetros deste gerador que devemos mencionar:

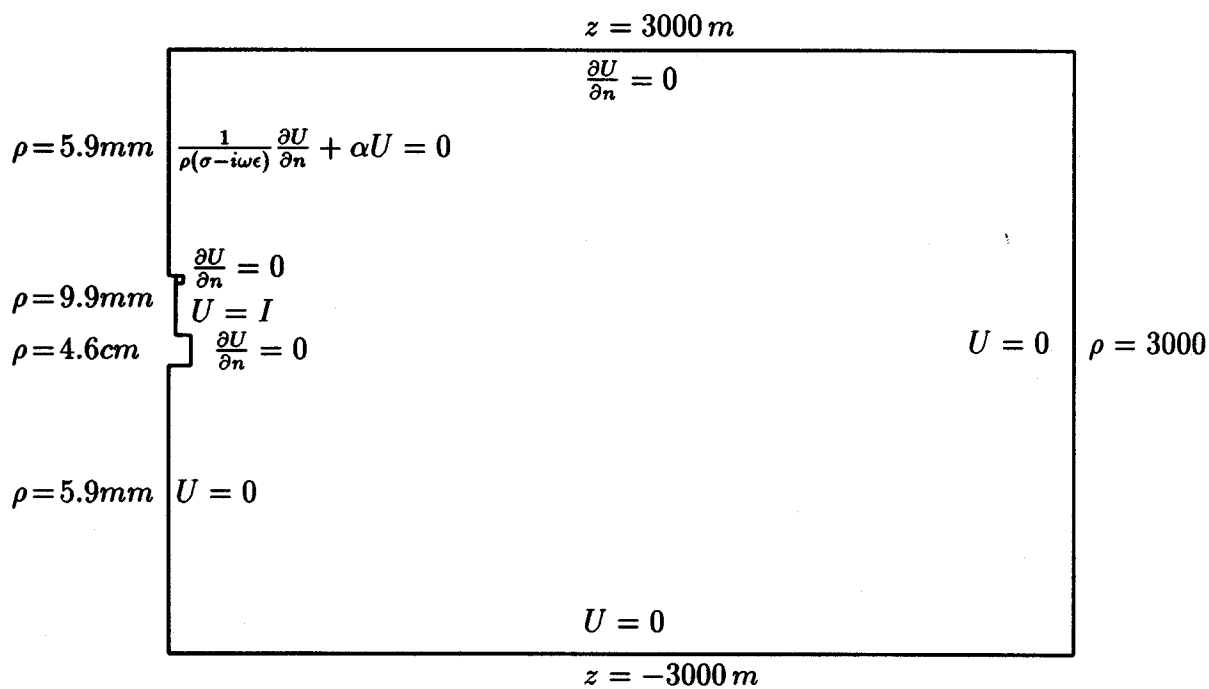


Figura 5.5 - Fronteiras do domínio de modelagem do efeito Delaware. Observamos a ferramenta, o *bridle* (com o eletrodo de retorno na parte superior deste) e o cabo de perfilagem. O centro da ferramenta está em $z = 0$. As distâncias em ρ não estão em escala.

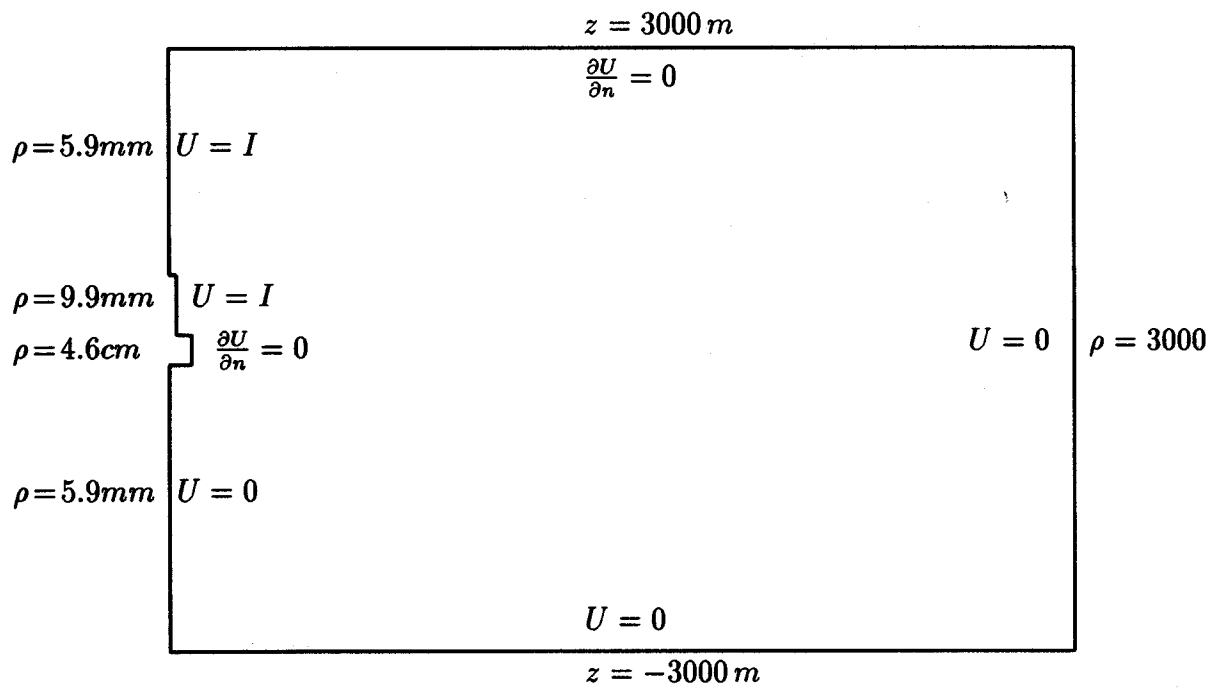


Figura 5.6 - Fronteiras do domínio de modelagem do efeito Groningen desconsiderando a blindagem do cabo.

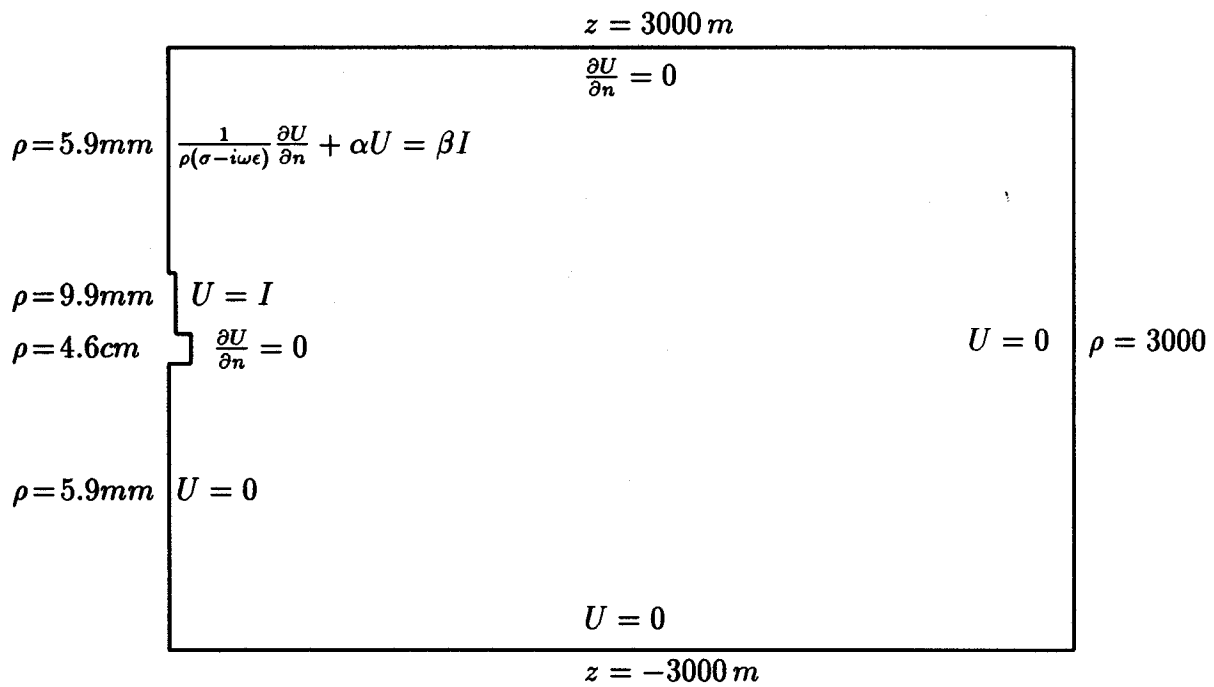


Figura 5.7 - Fronteiras do domínio de modelagem do efeito Groningen considerando a blindagem do cabo.

1. *Parâmetro RAISON*: permite adensamento da malha gerada. É especificado na construção de linhas no domínio. O valor 1 é usado quando não se deseja adensamento. Valores acima de 1 significam adensamento de nós no final da linha e valores abaixo de 1 significam adensamento no início da linha. As instruções de construção de linhas são anteriores às instruções de geração propriamente ditas da malha. Portanto um adensamento de nós sobre uma linha gera um adensamento na malha.
2. *Número de Referência*: permite “marcar” pontos e linhas dentro do domínio. No banco de elementos finitos gerados, para cada elemento são especificadas referências de nós e linhas, isto se alguma destas eventualmente pertencer ao conjunto de pontos e linhas previamente marcados. Este parâmetro é usado para especificar os diferentes tipos de fronteiras do domínio. Adotou-se a seguinte convenção quanto a estas referências:

0	→	ponto ou linha interno sem fonte	,
1 a 3	→	ponto ou linha em fronteira de Neumann	,
4 a 6	→	ponto ou linha em fronteira de Robin	e
7 a ?	→	ponto ou linha em fronteira de Dirichlet	.
3. *Número de Subdomínio*: permite especificar regiões diferentes dentro do domínio. Na malha gerada, é especificado para cada elemento o subdomínio ao qual este pertence. Usamos este parâmetro no programa para especificar os parâmetros eletromagnéticos de região.

Este último parâmetro em particular é importante no algoritmo de geração do perfil. Um perfil é obtido, na operação de campo, deslocando a ferramenta em relação à formação. Na modelagem nada nos impede de fazer o contrário, ou seja manter a ferramenta fixa e deslocar a formação. Este procedimento é computacionalmente mais vantajoso. Podemos ver isto na Figura 5.7, um deslocamento da ferramenta significa uma alteração na geometria das fronteiras do domínio, o que significaria que teríamos de gerar uma malha de elementos finitos diferente para cada posição da ferramenta. No deslocamento da formação temos apenas de deslocar as fronteiras de descontinuidade das propriedades eletromagnéticas. Neste trabalho optamos por construir uma malha de elementos finitos que dentro da formação tem 152 subdomínios em forma de estratos. Geramos o deslocamento da formação pela troca dos valores dos parâmetros eletromagnéticos, dos de arenito para os de anidrita (ou halita), em cada estrato. Este procedimento possibilita que, ao invés de recalcular toda a matriz de *stiffness*, calculemos apenas a variação provocada nesta matriz. A operação é feita pela varredura sobre a malha de elementos finitos e, para cada elemento que pertença ao subdomínio de cujos parâmetros foram trocados, calcula-se a seguinte matriz de alteração

elementar:

$$\Delta S_{ij} = \int \int_{\Omega} \left[\left(\frac{1}{\sigma_2 - i\omega\epsilon_2} - \frac{1}{\sigma_1 - i\omega\epsilon_1} \right) \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial \rho} \frac{\partial \xi_j}{\partial \rho} + \frac{\partial \xi_i}{\partial z} \frac{\partial \xi_j}{\partial z} \right) - i\omega(\mu_2 - \mu_1)\xi_i\xi_j \right] \frac{d\rho}{\rho} dz, \quad (5.35)$$

θ_1 = propriedade θ ($= \sigma, \epsilon$ ou μ) usada na montagem da matriz de *stiffness* e

θ_2 = novo valor da propriedade θ ($= \sigma, \epsilon$ ou μ) a ser usado na alteração da matriz de *stiffness*

Acumula-se estas matrizes na *stiffness* global conforme procedimento idêntico ao utilizado na montagem. É importante observar que deve-se produzir o deslocamento de camadas de modo que os parâmetros de um subdomínio mudem de meio menos resistivo para um mais resistivo. Se fizermos de modo contrário poderemos, no processo de alteração da matriz de *stiffness* global, estar subtraindo dois números muito próximos, o que é uma conhecida causa de erro numérico.

O algoritmo usado, por manter fixa a ferramenta e portanto manter inalterada a distância entre cada nó e esta ferramenta, permite utilizar a solução final obtida numa configuração como solução inicial para a nova configuração. Este procedimento reduz sensivelmente o número de iterações para convergência do gradiente bi-conjugado. É interessante observar que esta solução inicial é muito precisa para a maior parte do domínio, mas não o é para a região mais próxima do subdomínio de cujos parâmetros foram trocados. Este elevado erro localizado permite uma aprimoração desta solução inicial antes de submetê-la ao algoritmo de gradiente bi-conjugado. Por sugestão de Dr. John Lovell foi utilizado um algoritmo que localiza os nós para os quais o erro da solução inicial é acima de determinada tolerância e submete as equações referentes a estes nós a uma relaxação de Gauss-Seidel¹⁵ em 30 iterações. Esta relaxação é feita mantendo fixa a solução nos nós não relaxados. Esta relaxação é extremamente rápida e permite uma redução típica de 10% no número de iterações necessários à convergência do algoritmo de gradiente bi-conjugado. A convergência da solução está ilustrada na figura 5.8.

As malhas de elementos finitos utilizadas para os três domínios são bastante semelhantes, com a única diferença de uma região densa e triangularizada entre o eletrodo de retorno de corrente e o de referência no caso do domínio para o efeito Delaware. A malha para o efeito Groningen consiste de 7661 pontos com 7750 elementos, dos quais 705 são triângulos e 7045

¹⁵Relaxação de Gauss-Seidel é o processo iterativo mais simples existente para solucionar sistemas lineares de equações. É um método pouco exigente porém de convergência lenta. É adequado para sistemas de poucas equações.

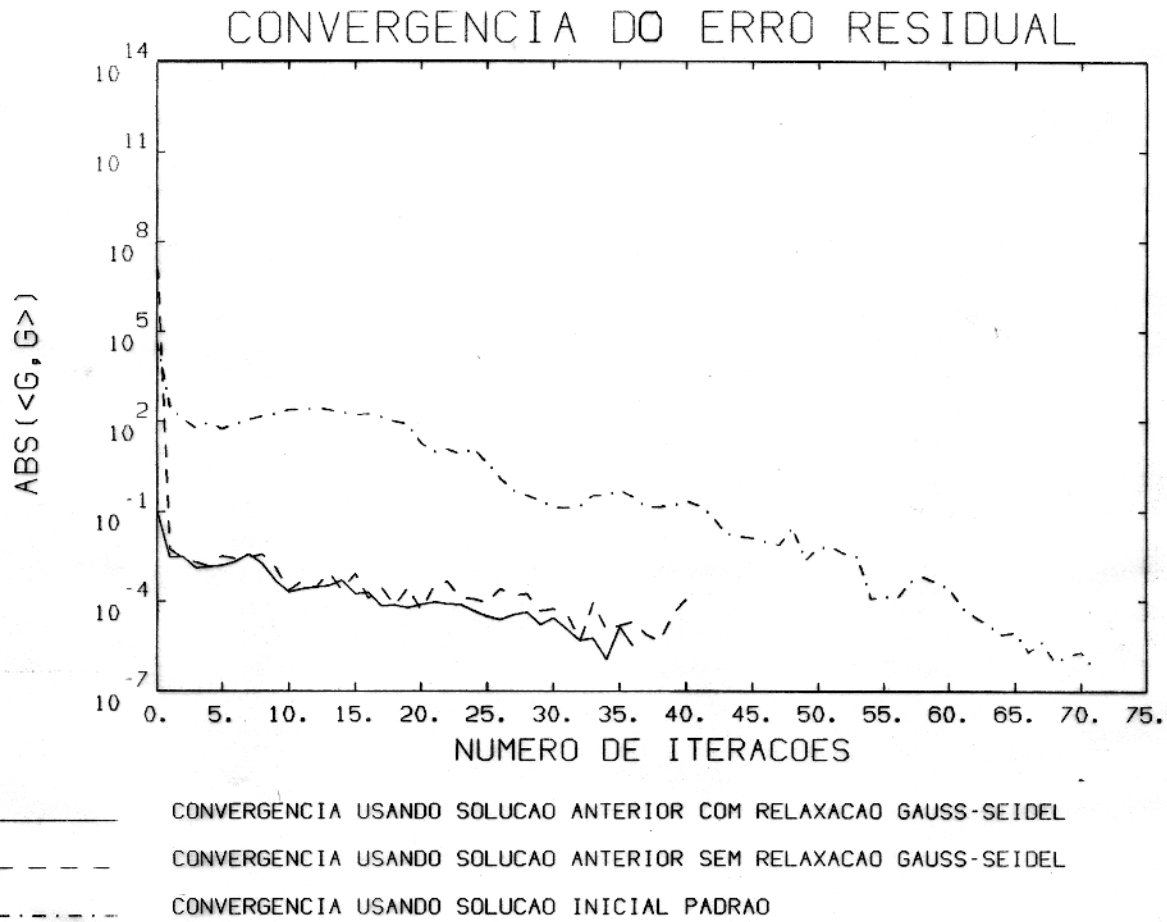


Figura 5.8 - A convergência do algoritmo de gradiente bi-conjugado para as várias possibilidades de solução inicial. $ABS(\langle G, G \rangle)$ é o valor absoluto do produto interno de G com G .

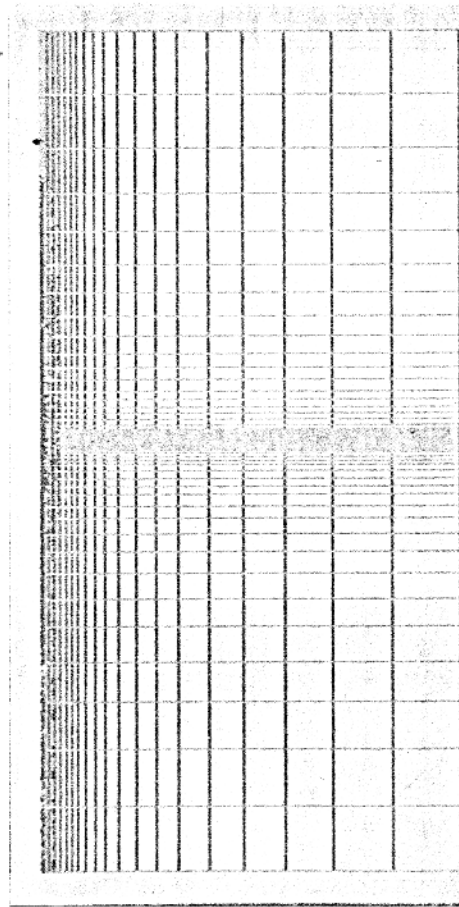


Figura 5.9 - Malha gerada para modelagem do efeito Groningen. A região triangularizada do poço não está perceptível.

são retângulos. A Figura 5.9 nos permite uma visão global da malha e Figura 5.10 mostra em detalhes a região triangularizada em volta da ferramenta.

5.5 Sistemática de Processamento

O processamento utilizado neste trabalho envolve o uso dos seguintes programas e subprogramas:

- *Sistema MODULEF*: É um sistema de programas e subprogramas desenvolvidos pelo *Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique* (França). Deste sistema foi utilizado o programa interativo APNOXX, para gerar as malhas de elementos finitos, e os subprogramas INITIS, que é um subprograma de inicialização, SDREST, para leitura do banco de dados contendo a malha de elementos finitos, e READRE para realizar alocação dinâmica.

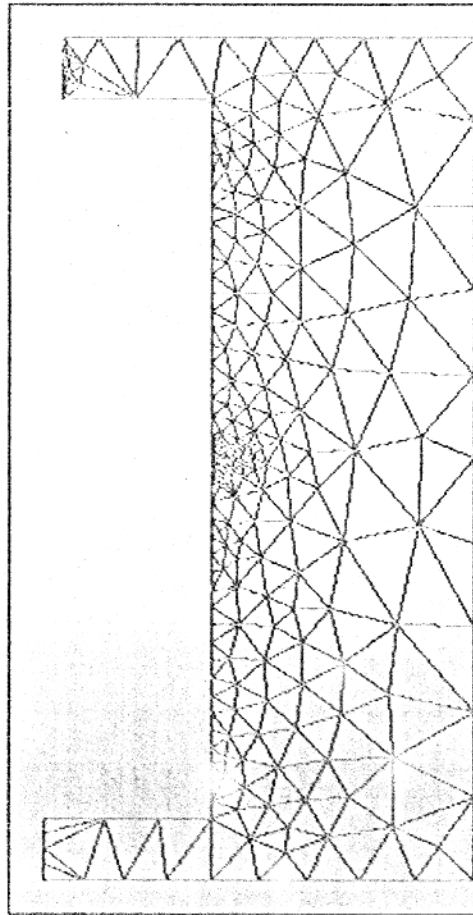


Figura 5.10 - Uma visão em detalhe de uma região triangularizada em volta da ferramenta. O lado direito corresponde à parede do poço.

- *Biblioteca ELEFIN-DCMPLX*: É a biblioteca de subprogramas desenvolvida neste trabalho. Os subprogramas utilizados são:

1. ASG (Alteração da *Stiffness* Global): Realiza o cálculo da variação da matriz de *stiffness* para a alteração dos parâmetros eletromagnéticos de um subdomínio.
2. AX0 (Alteração de X_0): Localiza as equações do sistema linear $Sx = l$ mal satisfeitas por uma solução inicial e submete os nós correspondentes a uma relaxação de Gauss-Seidel.
3. CAIM (Cálculo dos inversos da Admitividade e Impeditividade do Meio): Realiza o cálculo dos parâmetros inverso da admitividade ($= \frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon}$) e impeditividade ($= i\omega\mu$) a partir da frequência usada e da resistividade, permissividade e permeabilidade magnética de um meio. Os parâmetros calculados são os únicos parâmetros de meio utilizados pelos demais subprogramas.
4. CEAME¹⁶ (Construção da Estrutura de Armazenamento de Matrizes Esparsas): Realiza a varredura sobre o banco de dados de elementos finitos e constroi os vetores auxiliares LS, CS, DS e REF. Os três primeiros já estão explicados no texto. REF é um vetor com as referências dos nós.
5. CORREN (CORRENte): Realiza a diferença da solução obtida entre os extremos de um eletrodo calculando a corrente injetada por este eletrodo. É necessário fornecer os nós que limitam o eletrodo.
6. CPFB (Cálculo dos Parâmetros de Fronteira impostos pela Blindagem do cabo de perfilagem): Realiza, a partir dos parâmetros geométricos e eletromagnéticos da blindagem, o cálculo dos parâmetros de fronteira de Robin referentes a esta blindagem. Utiliza os subprogramas CBESJ e CBESH.
7. CSER (Cálculo da matriz de *Stiffness* Elementar Retangular): Classifica os nós de um elemento retangular e realiza o cálculo da matriz de *stiffness* sobre este elemento, utilizando os subprogramas INTRHO e INTZ.
8. CSET (Construção da matriz de *Stiffness* Elementar Triangular): Realiza o cálculo da matriz de *stiffness* sobre um elemento triangular, utilizando o subprograma INTRIA.

¹⁶Este subprograma é uma versão otimizada e adaptada de subprograma desenvolvido conjuntamente com o Geofísico Fernando Rodrigues (PETROBRÁS - RJ) em curso especial do Dr. John Lovell. A otimização se refere ao rastreamento ser feito de modo ordenado e não-redundante, tornando desnecessário operações de *sorting* e *colapsing*. A adaptação se refere à capacidade de lidar com elementos retangulares e triangulares.

9. CSG¹⁷ (Cálculo da matriz de *Stiffness* Global): Faz a leitura do banco de dados dos elementos finitos, busca as coordenadas de cada nó do elemento, realiza o cálculo da matriz de *stiffness* elementar, através do subprograma CSET ou CSER (conforme o caso) e finalmente faz a inclusão da *stiffness* elementar na matriz de *stiffness* global.
10. DIFVOL (DIFerença de VOLtagem): Multiplica a matriz *stiffness* original pela solução e, a partir da sequência de nós fornecida por VCSS, realiza o cálculo da voltagem.
11. EGI (Eliminação Gaussiana Incompleta): Realiza a eliminação gaussiana incompleta gerando o pré-condicionador para o algoritmo de gradiente bi-conjugado pré-condicionado.
12. GDCJPC (GraDiente bi-ConJugado Pré-Condicionado): Realiza, a partir da matriz de *stiffness* e do pré-condicionador, a solução do sistema linear $Sx = l$, utilizando auxiliariamente o subprograma SEGME.
13. IFD¹⁸ (Imposição da Fronteira de Dirichlet): Impõe a fronteira de Dirichlet sobre a matriz de *stiffness* e sobre o *load*.
14. IFR (Imposição da Fronteira de Robin): Realiza a imposição da fronteira de Robin para, por exemplo, um cabo blindado.
15. INTRHO (INTegrais no retângulo em RHO): Realiza o cálculo das integrais em ρ necessários ao cálculo da *stiffness* sobre um elemento retangular.
16. INTRIA (INTegrais num TRIÂngulo): Realiza o cálculo das seis integrais sobre um elemento triangular necessários ao cálculo da matriz de *stiffness* sobre este elemento.
17. INTZ (INTegrais no retângulo em Z): Realiza o cálculo das integrais em z necessários ao cálculo da *stiffness* sobre um elemento retangular.
18. SEGME (Solução por Eliminação Gaussiana de Matriz Esparsa): Realiza o cálculo $h = C^{-1}g$ necessário ao algoritmo de gradiente conjugado pré-condicionado.
19. SOLAN1 (SOLução ANALítica 1): Determina a solução e voltagem analíticas, sobre a fronteira em $\rho = \rho_1$, do domínio finito e compara estes com a solução por elementos finitos.

¹⁷Este subprograma é uma versão adaptada de subprograma desenvolvido conjuntamente com o Geofísico Fernando Rodrigues (PETROBRÁS - RJ) em curso especial do Dr. John Lovell. A adaptação se refere à capacidade de lidar com elementos triangulares e retangulares.

¹⁸Este subprograma é uma versão modificada de subprograma desenvolvido conjuntamente com o Geofísico Fernando Rodrigues (PETROBRÁS - RJ) em curso especial do Dr. John Lovell. A modificação se refere à compatibilidade com o subprograma IFR.

20. SOLAN2 (SOLução ANALítica 2): Determina a solução e voltagem analíticas, sobre a fronteira em $\rho = \rho_1$, do domínio infinito e compara estes com a solução por elementos finitos.
 21. VBPN (Varredura de Busca de Par Nodal): Realiza a busca dos nós que, por exemplo, limitam um eletrodo.
 22. VCSS (Varredura de Construção de Sequência de Soma): Determina quais os nós, sobre uma fronteira, que estejam entre duas profundidades fornecidas. É utilizado para construir o caminho de cálculo da voltagem.
 23. X0 (X_0): calcula a solução iterativa inicial $u_i = I_i/S_{ii}$ para a primeira configuração do modelo.
- *Biblioteca BESSEL*: É uma biblioteca desenvolvida pela *Sandia National Laboratories* (USA). Utilizamos os subprogramas CBESJ e CBESH para realizar o cálculo de funções de Hankel e Bessel.
 - *Programa DLPS*: É um programa de processamento de perfis desenvolvido pela *CogniSeis Development* (USA) e foi utilizado para gerar a apresentação gráfica dos perfis gerados.

CAPÍTULO 6

RESULTADOS

6.1 Correção dos Programas Elaborados

Foram realizados diversos testes com o domínio finito e com o domínio infinito. Diversos quanto ao valor das condições de Dirichlet, raio interno e parâmetros eletromagnéticos do meio. No entanto, todos os testes foram realizados à uma frequência de 35 Hz . Isto é importante quanto ao fato de, no domínio infinito, o raio externo e o parâmetro RAISON serem os adequados para esta frequência e superiores. Estes parâmetros podem ser usados para frequências um pouco inferiores, porém com perda de precisão.

Devido a dificuldades da instalação computacional, não será possível ilustrar com gráficos de linhas de contorno, produzidos pelo sistema MODULEF, a distribuição espacial do erro relativo entre a solução por elementos finitos e a analítica.

Reproduzimos os valores obtidos com os dois modelos para testes típicos:

1. *Modelo Finito*: Para um modelo com $\rho_1 = 1 \text{ m}$, $\rho_2 = 2 \text{ m}$, $z_1 = 0 \text{ m}$, $z_2 = 1 \text{ m}$, $U_1 = 1 - i$ e $U_2 = 0$ obtivemos um erro relativo, da solução por elementos finitos em relação à analítica, máximo no domínio de 1.46×10^{-4} . O cálculo da voltagem por elementos finitos foi de $0.1060929 - 0.10612067i$ enquanto a analítica foi de $0.1060894 - 0.10611718i$.
2. *Modelo Infinito*: É preciso observar que para este modelo é inevitável o surgimento de elevados erros relativos para distâncias altas. Isto porque temos de usar um domínio de extensão elevada, mas finita. Isto significa que a solução por elementos finitos necessariamente terá uma participação residual da função $J_1(k\rho)$, que para distâncias grandes afastará a solução de elementos finitos da solução analítica. O parâmetro que importa neste teste é até que distância a solução por elementos finitos representa fidedignamente a solução analítica. Para um teste com $\rho_1 = 5.9 \times 10^{-3} \text{ m}$, $z_1 = -1000 \text{ m}$, $z_2 = 1000 \text{ m}$, $U_1 = 1$ obtivemos um erro relativo abaixo de .02 até uma posição radial de 200 m . O cálculo da voltagem por elementos finitos foi de $6.805811 \times 10^{-2} - 0.8228580i$ enquanto a analítica foi de $6.908717 \times 10^{-2} - 0.8220870i$.

No teste com domínio infinito não devem ser estranhados os altos valores da parte imaginária em relação a parte real, apesar de neste caso a condição de Dirichlet ter sido real, pois a situação corresponde ao que teríamos quando distantes do eletrodo de injeção de corrente. Então temos valores reduzidos da voltagem em fase, mas a voltagem fora de fase se mantém com os mesmos valores, pois só depende da frequência.

6.2 Valor de k para o Modelo

A constante k de ferramentas de eletrodos é estabelecida utilizando-se um modelo consistindo de um poço de 21.6 cm ($8\frac{1}{2}$ ") com fluido de resistividade de 0.1 $ohm.m$ e uma formação isotrópica e homogênea de resistividade 3 $ohm.m$ (Lovell - Comunicação Verbal, 1992).

Temos, neste trabalho, dois projetos de ferramenta para calcularmos o valor de k : um com eletrodo de retorno no *bridle* e outro com eletrodo de retorno no *fish*. Optamos ainda em calcular o valor de k considerando a blindagem do cabo de perfilagem ou não. Os valores obtidos são os seguintes:

1. *Modelo com Eletrodo de Retorno no Bridle com cabo blindado: $k = 0.8313066$.*
2. *Modelo com Eletrodo de Retorno no Bridle com cabo não-blindado: $k = 0.7846676$.*
3. *Modelo com Eletrodo de Retorno no Fish com cabo blindado: $k = 0.7560959$.*
4. *Modelo com Eletrodo de Retorno no Fish com cabo não-blindado: $k = 0.8512973$.*

Nos modelos com o eletrodo de retorno no *Bridle*, os valores de k foram obtidos usando uma frequência de .1 Hz . Consideramos esta frequência suficientemente baixa para ser equivalente a corrente contínua e portanto adequada para modelagem do efeito Delaware. O uso de uma frequência mais baixa do que esta implicaria num *skin depth* extremamente elevado e, conforme já mencionamos, incompatível com a malha de elementos finitos usada. Nos modelos com o eletrodo de retorno no *Fish*, a frequência usada foi de 35 Hz .

O último valor calculado de k , para eletrodo de retorno no *fish* e desconsiderando a blindagem do cabo, é bastante próximo do valor publicado desta constante para a ferramenta *Dual Laterolog* (0.81 e 0.89). Isto é razoável, pois é provável que o valor de k mencionado na literatura tenha sido obtido desconsiderando a blindagem do cabo.

6.3 Perfis com o Efeito Delaware

O perfil da Figura 6.1 ilustra o efeito Delaware para os parâmetros padrão citados no capítulo anterior. Considera-se uma camada muito resistiva, anidrita ou halita, até a profundidade de 5 m e uma camada-reservatório, com água, abaixo desta profundidade. Constatamos a elevada magnitude do efeito Delaware.

A Figura 6.2, em comparação com a Figura 6.1, demonstra que a frequência não afeta o efeito Delaware. Isto é razoável pois, com o eletrodo de retorno no *bridle*, não há distâncias muito maiores que o *skin depth* envolvidas no sistema de medição.

6.4 Perfis com o Efeito Groningen:

O perfil base deste efeito está ilustrado na Figura 6.3. Novamente a camada resistiva atinge a profundidade de 5 m e a camada-reservatório localiza-se abaixo desta. Observar que a anomalia calculada é muito maior que a mencionada na literatura, estando bastante próxima do efeito Delaware. Analisemos a influência de alguns fatores no efeito Groningen:

- *Influência da Blindagem do Cabo de Perfilagem:* As Figuras 6.4 e 6.5 ilustram a enorme redução do efeito Groningen com a remoção da blindagem e com uma blindagem mais resistiva, respectivamente. Este fato demonstra que um preciso conhecimento dos parâmetros do cabo de perfilagem é essencial. Os parâmetros eletromagnéticos padrão utilizados neste trabalho para a blindagem são os do aço.
- *Influência da Frequência:* Comparando os perfis das Figuras 6.3, 6.6 e 6.7 observamos o esperado aumento do efeito Groningen com a frequência. É interessante observar que o efeito Groningen não desapareceu a baixa frequência. A explicação é de que o *squeeze* da corrente não desapareceu com a remoção do eletrodo de retorno de corrente para o *fish*.
- *Influência do Diâmetro de Poço e Resistividade do Fluido de Perfuração:* Comparando as Figuras 6.3 e 6.8 constatamos uma diminuição do efeito Groningen para um poço de maior diâmetro. Isto é razoável, pois um maior diâmetro significa uma diminuição da resistividade efetiva entre o eletrodo de retorno e o eletrodo de referência e também um espalhamento geométrico maior, diminuindo portanto a impedância de transferência entre estes eletrodos. Comparando as Figuras 6.3 e 6.9 observamos que um aumento da resistividade do fluido de perfuração aumenta o efeito Groningen. Este aumento

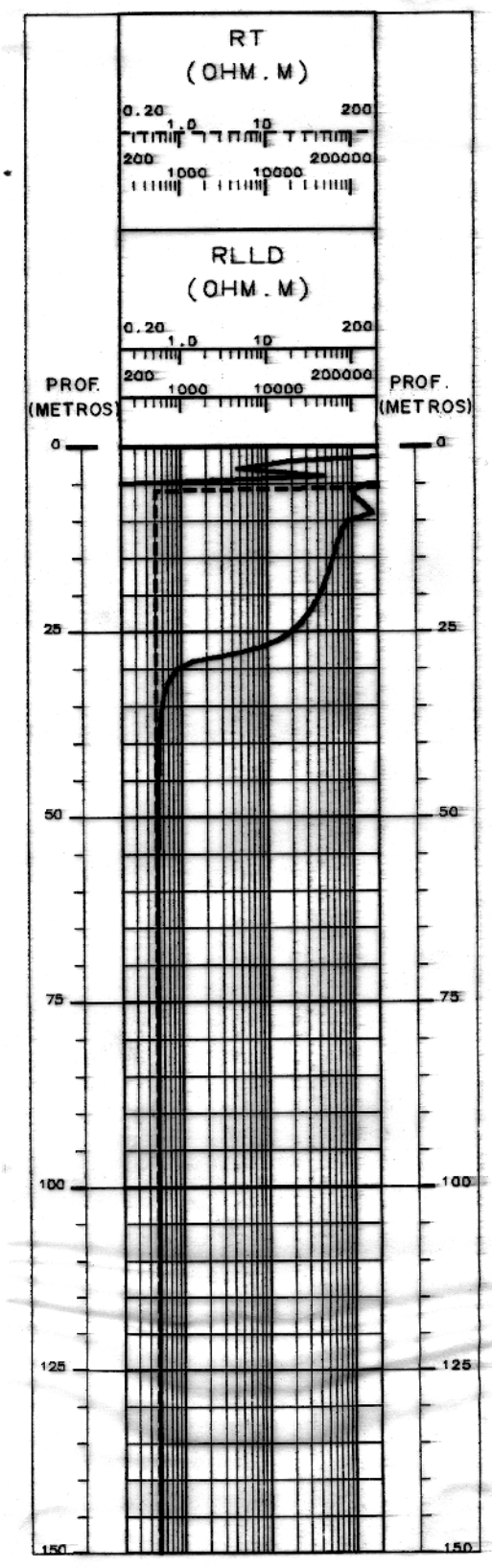


Figura 6.1 - O efeito Delaware para um poço de 21.6 cm ($8\frac{1}{2}$ "') com resistividade de fluido de perfuração de .02 ohm.m e frequência de medição de 10^{-1} Hz (\sim DC). A curva RT é a resistividade verdadeira e RLLD é a resistividade medida.

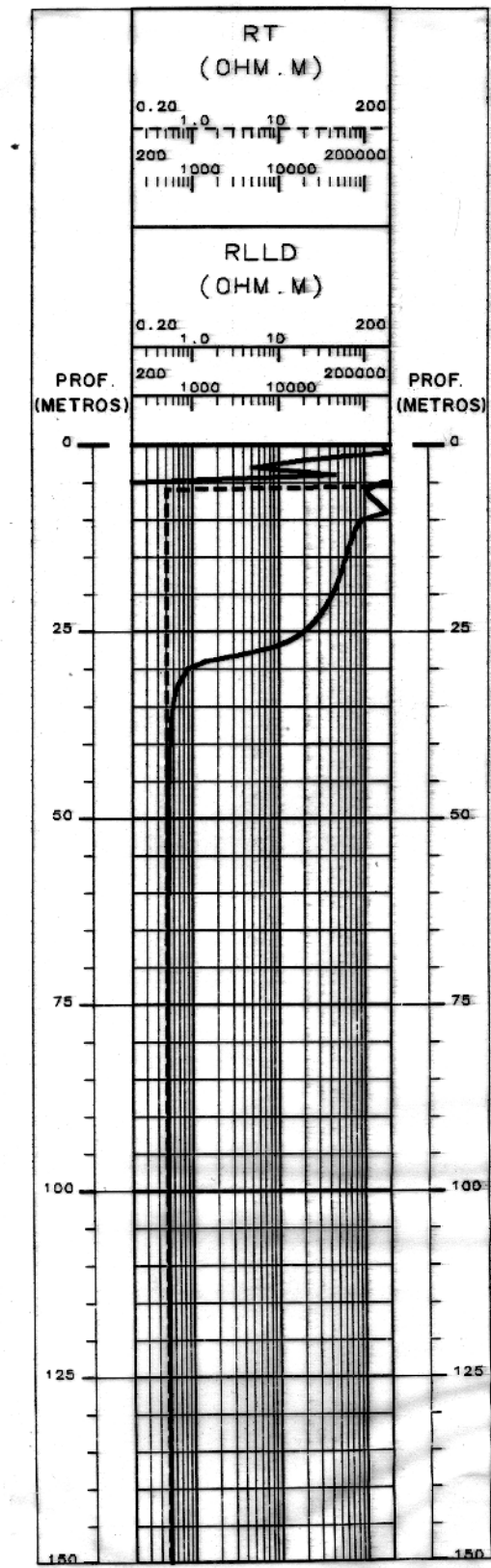


Figura 6.2 - O efeito Delaware para um poço de 21.6 cm ($8\frac{1}{2}$ "') com resistividade de fluido de perfuração de .02 ohm.m e frequência de medição de 35 Hz.

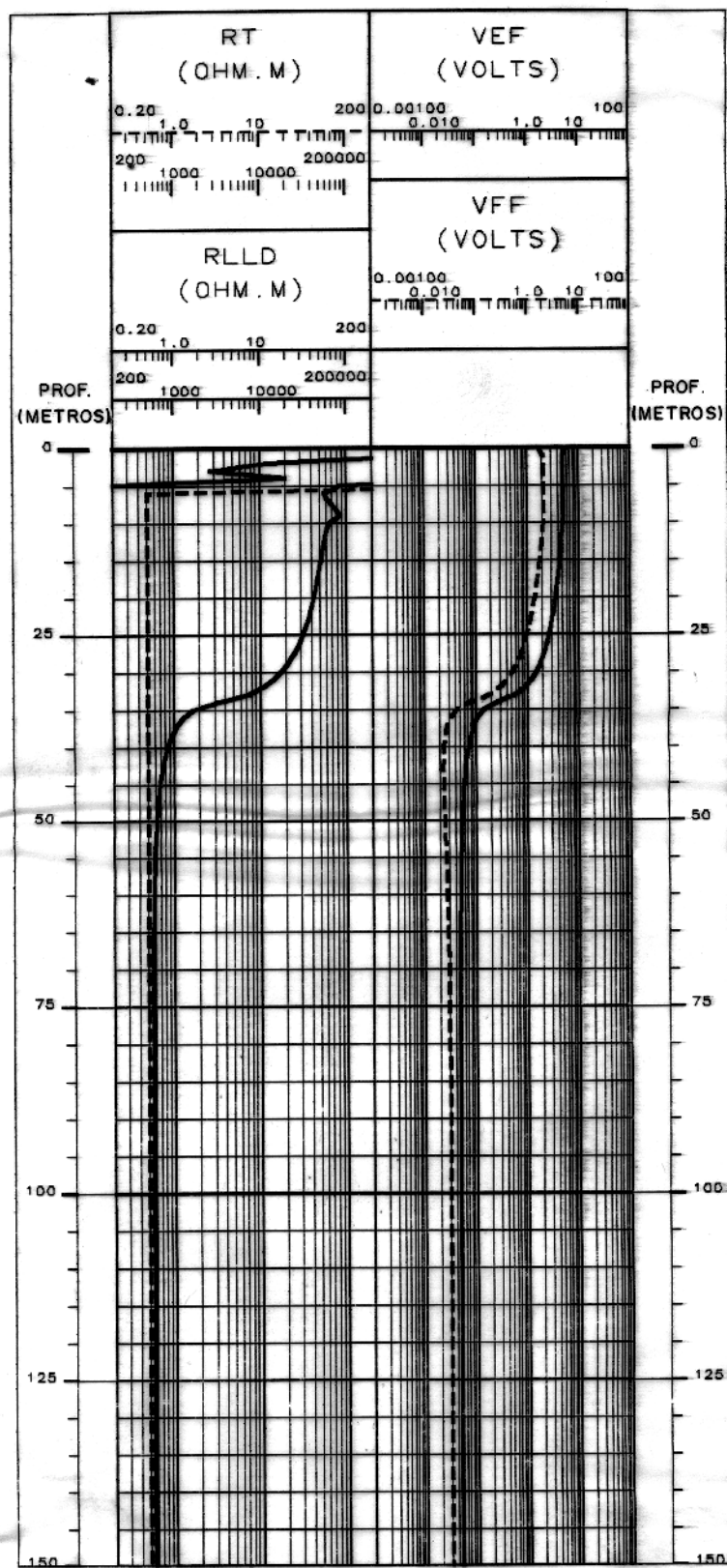


Figura 6.3 - O efeito Groningen para um poço de 21.6 cm ($8\frac{1}{2}$ ") com resistividade de fluido de perfuração de .02 ohm.m e frequência de medição de 35 Hz. A curva VEF é a voltagem em fase e VFF é a voltagem fora de fase.

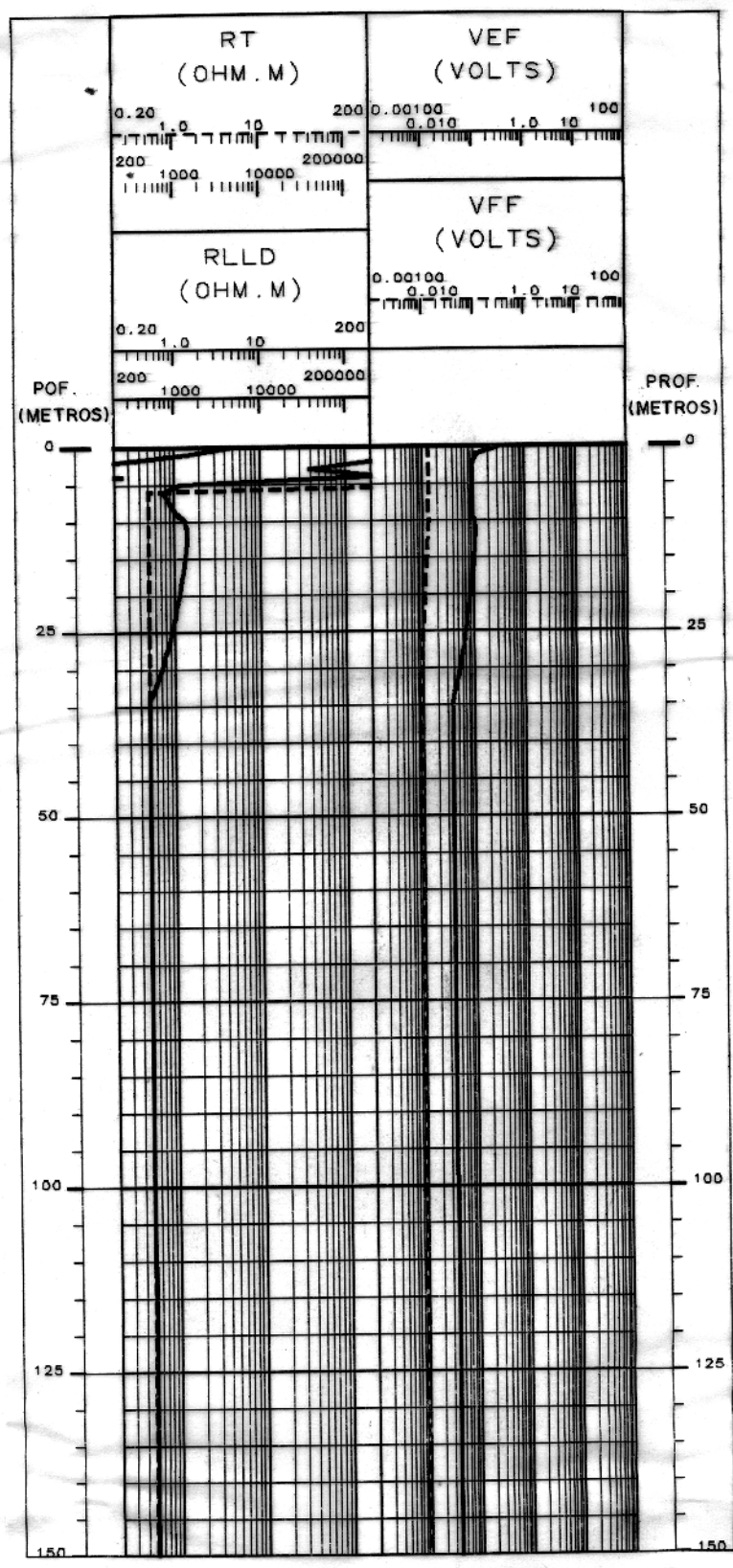


Figura 6.4 - O efeito Groningen para um poço de 21.6 cm ($8\frac{1}{2}$ ") com resistividade de fluido de perfuração de .02 ohm.m, frequência de medição de 35 Hz e desconsiderando a blindagem do cabo de perfilagem.

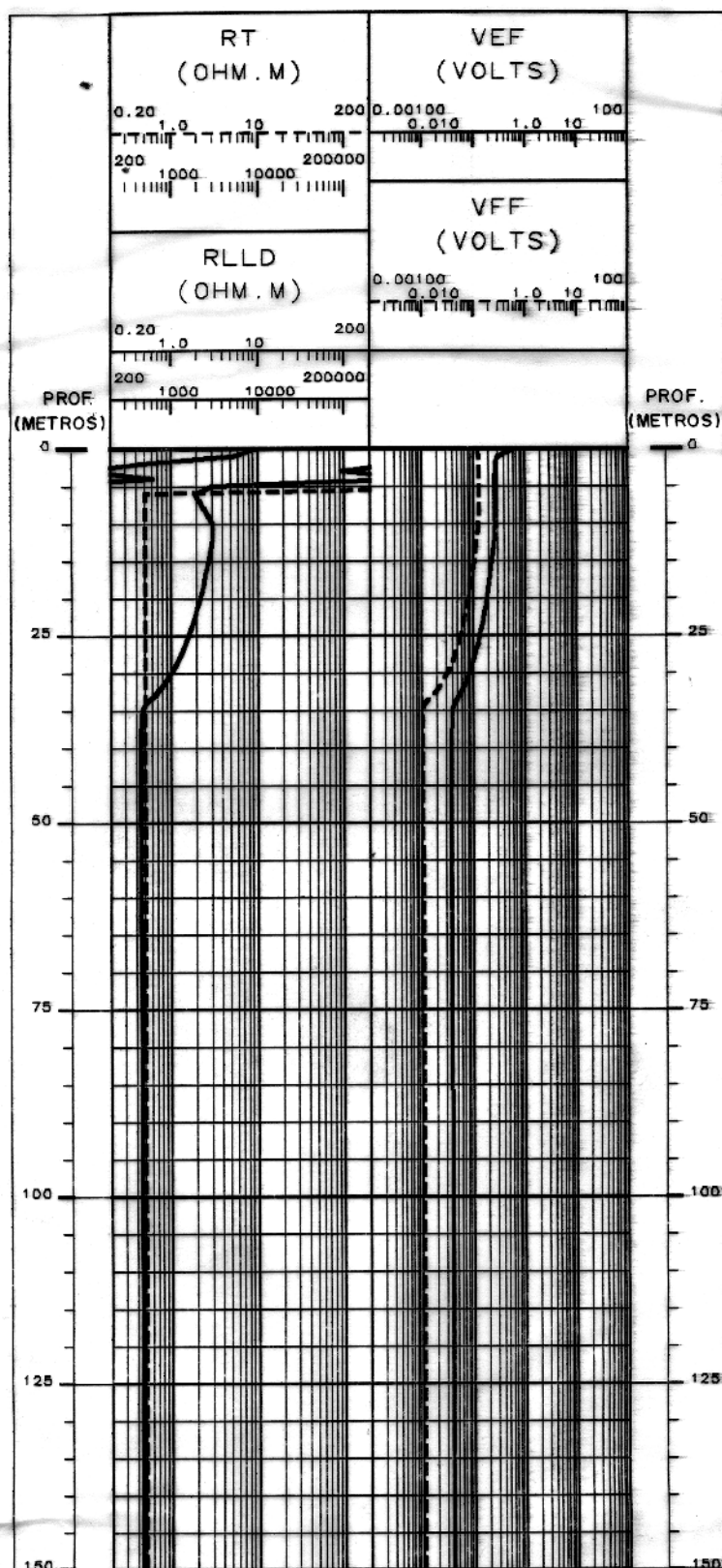


Figura 6.5 - O efeito Groningen para um poço de 21.6 cm ($8\frac{1}{2}$ ") com resistividade de fluido de perfuração de .02 ohm.m, frequência de medição de 35 Hz e com uma blindagem de 2×10^{-5} ohm.m.

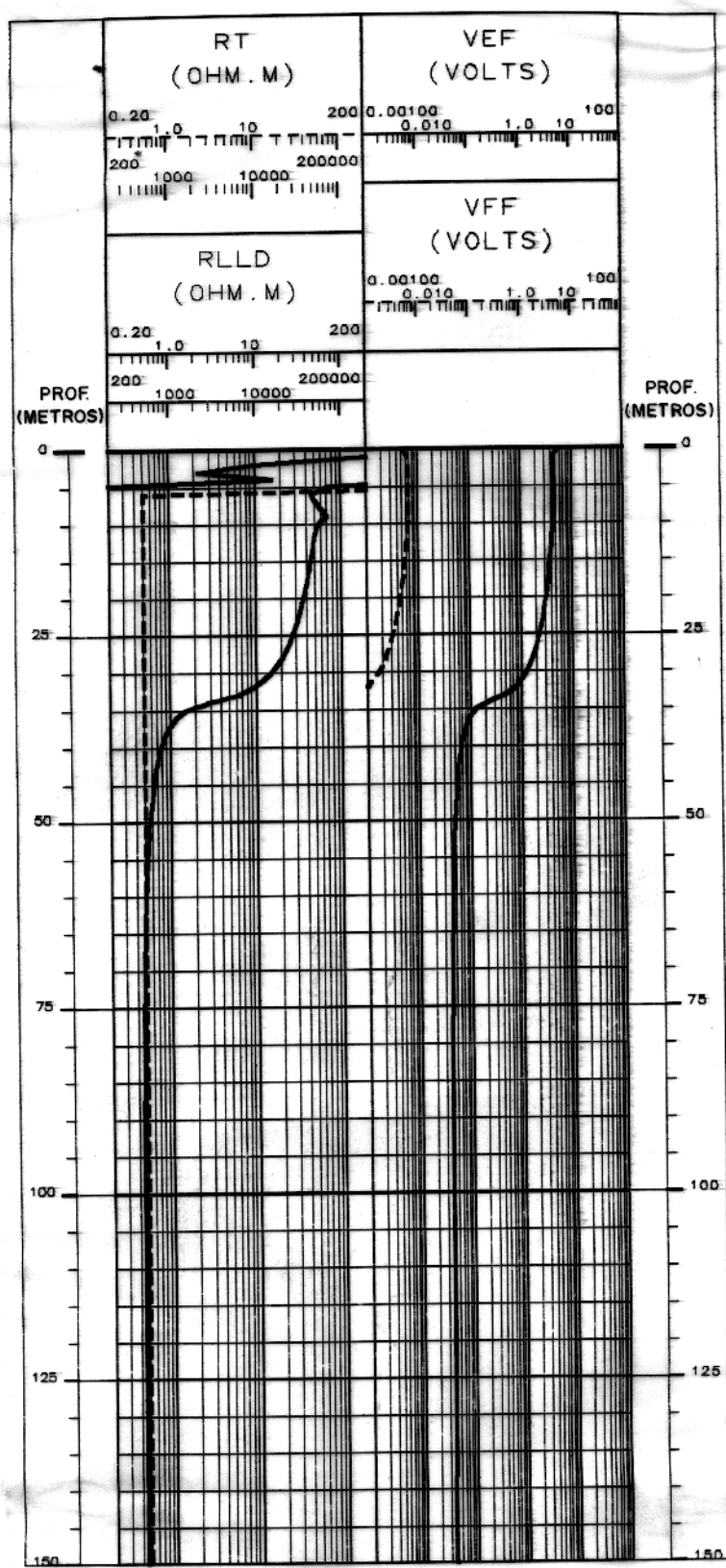


Figura 6.6 - O efeito Groningen para um poço de 21.6 cm ($8\frac{1}{2}$ ") com resistividade de fluido de perfuração de .02 ohm.m e frequência de medição de 10^{-1} Hz.

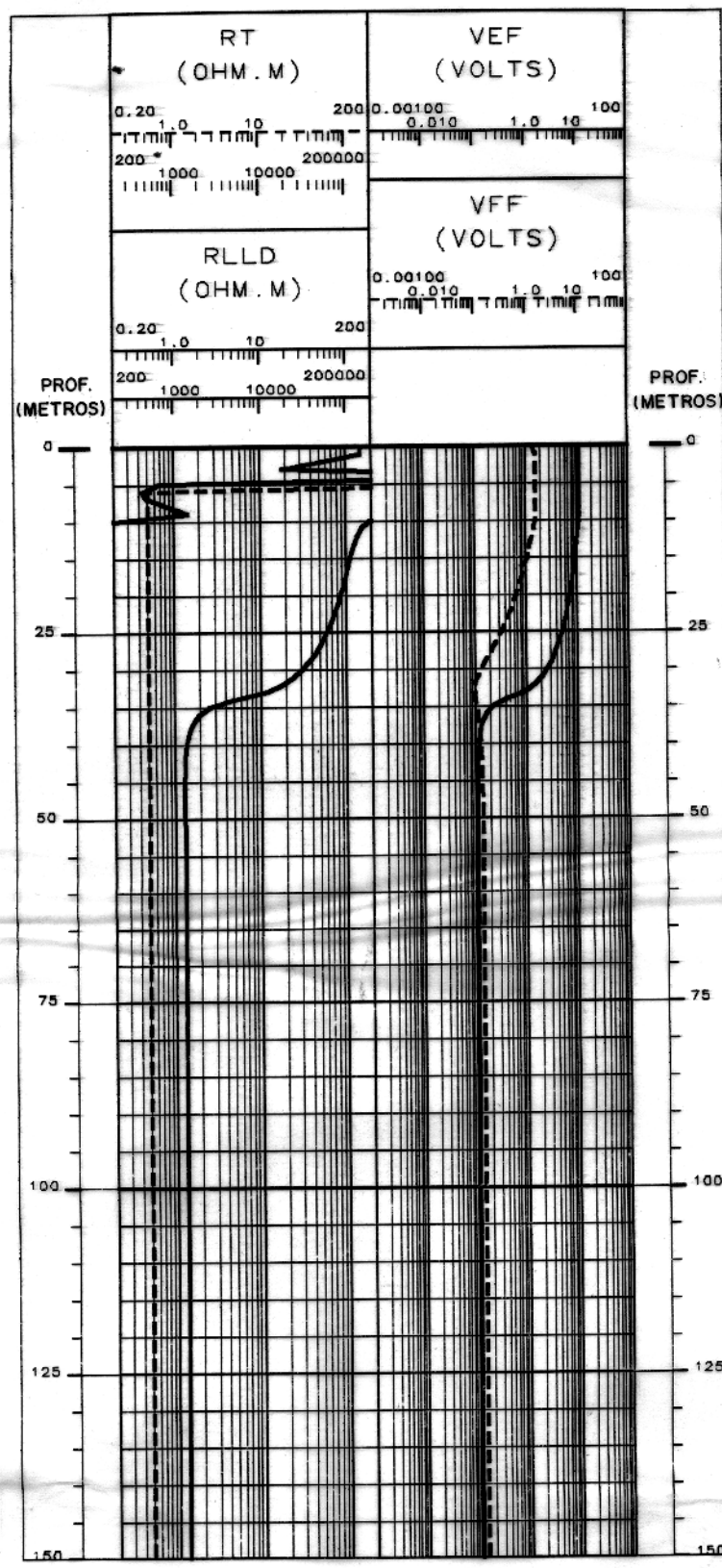


Figura 6.7 - O efeito Groningen para um poço de 21.6 cm ($8\frac{1}{2}$ ") com resistividade de fluido de perfuração de .02 ohm.m e frequência de medição de 500 Hz.

pode ser explicado pelo aumento da resistência efetiva entre o eletrodo de retorno e o de referência, aumentando a impedância de transferência entre estes eletrodos.

Finalmente a Figura 6.10 ilustra um perfil com o efeito Groningen quando o reservatório possui, no seu topo, uma coluna de 5 m de óleo.

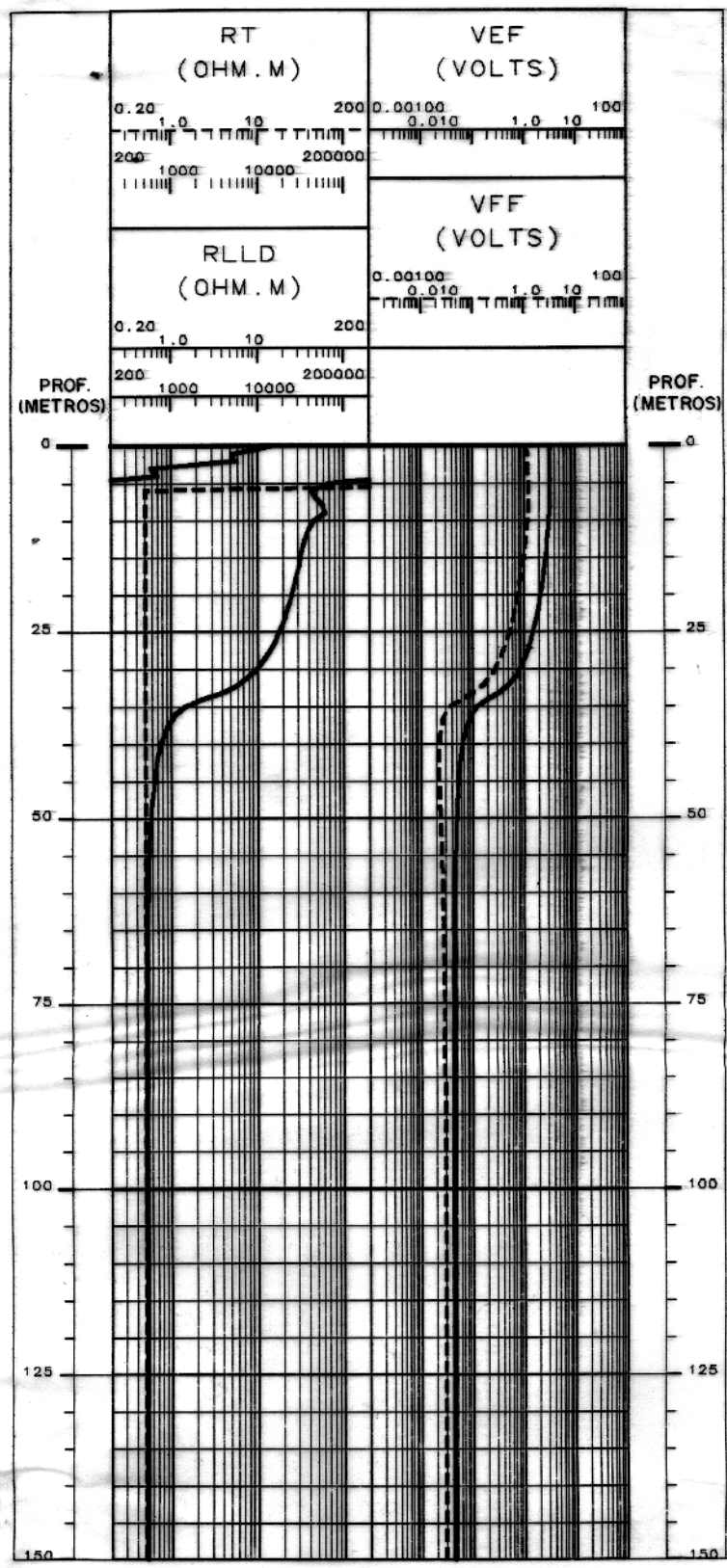


Figura 6.8 - O efeito Groningen para um poço de 31.1 cm (12 $\frac{1}{4}$ ") com resistividade de fluido de perfuração de .02 ohm.m e frequência de medição de 35 Hz.

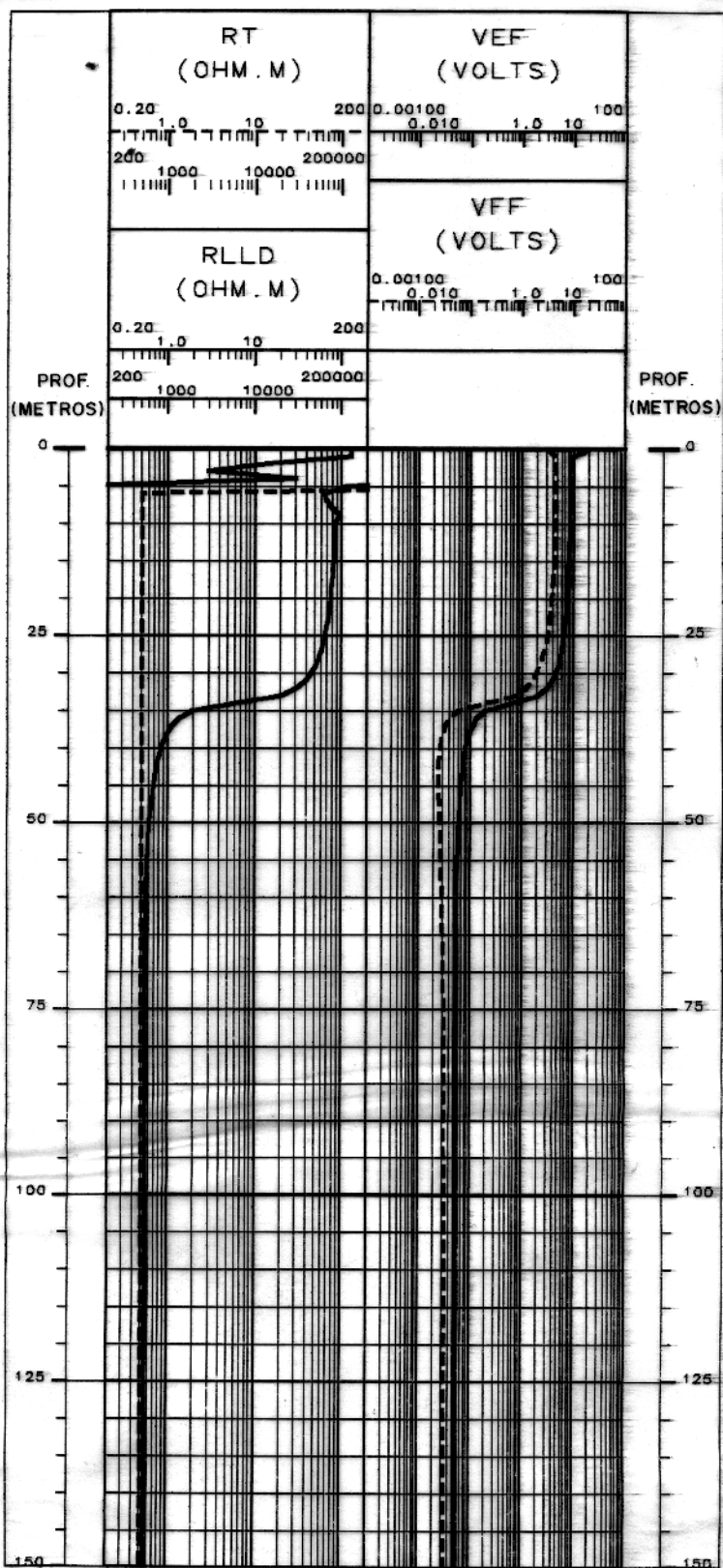


Figura 6.9 - O efeito Groningen para um poço de 21.6 cm (8½") com resistividade de fluido de perfuração de .1 ohm.m e frequência de medição de 35 Hz.

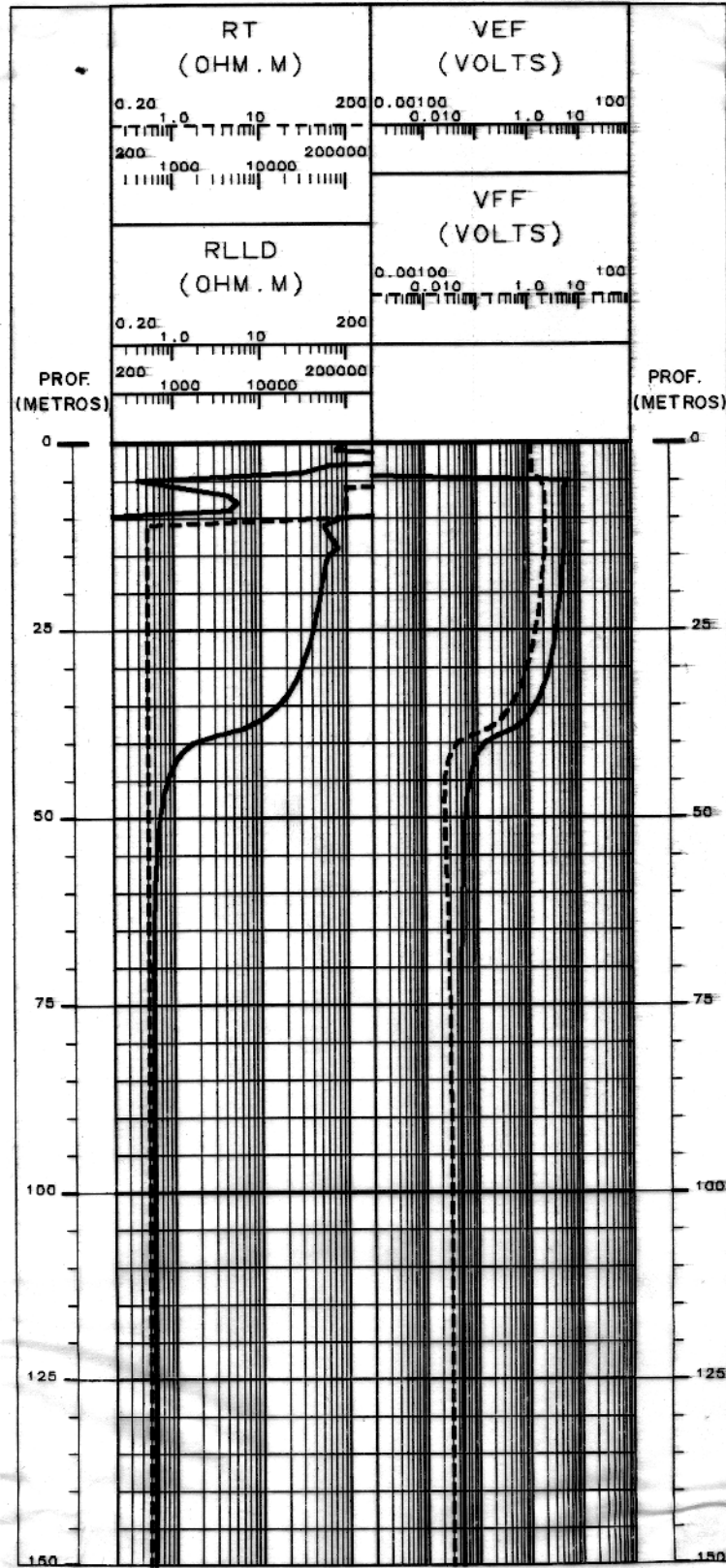


Figura 6.10 - O efeito Groningen para um poço de 21.6 cm ($8\frac{1}{2}$ ") com resistividade de fluido de perfuração de .02 ohm.m, frequência de medição de 35 Hz e com uma coluna de 5 m de óleo.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÃO

Conclue-se que o modelo da ferramenta *Dual Laterolog* e a metodologia utilizadas podem quantificar satisfatoriamente os efeitos Delaware e Groningen sobre as medidas de resistividade.

Constata-se que a blindagem do cabo de perfilagem é um ponto crítico do efeito Groningen. Pode-se chegar a dizer que a remoção do eletrodo de retorno para o *fish*, como solução do efeito Delaware, pode se tornar sem efeito por causa do efeito de “curto-circuito” realizado pela blindagem do cabo de perfilagem. Esta influência da blindagem torna o correto conhecimento dos parâmetros geométricos e eletromagnéticos, em particular a resistividade, desta blindagem, essencial a qualquer tentativa de correção do efeito Groningen. É importante observar que a resistividade da blindagem é uma incógnita até no tempo, devido a enferrujamento e desgaste da superfície externa da blindagem.

Constata-se, ainda, que mesmo na ausência da blindagem, ainda haveria um efeito Groningen, de muito menor proporção, que poderia confundir um intérprete quanto a um contato óleo-água.

É preciso mencionar que em todo este trabalho foi feita a suposição de que as ferramentas de eletrodos utilizam apenas a componente em fase da voltagem para o cálculo da resistividade. Não temos reais garantias de que isto de fato aconteça. O uso de uma voltagem que combine de algum modo espúrio a componente em fase com a fora de fase, tornará a tarefa de corrigir o efeito Groningen muito mais complexa.

Conclue-se que é ainda necessário aperfeiçoar o modelo utilizado para a correta geometria da ferramenta *Dual Laterolog* e examinar se a anomalia, a partir do momento que a ferramenta se aproxima da interface com a camada resistiva, é afetada pelo sistema de focalização. Precisamos ainda quantificar o efeito do revestimento e verificar se este efetivamente consegue superar a elevada amplitude da anomalia provocada pela blindagem. Precisamos ainda examinar a influência da invasão do filtrado de fluido de perfuração sobre estes efeitos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANDERSON, B.; BARBER, T.D.; SINGER, J.; BROUSSARD, T. 1989. ELMOD - putting electromagnetic modeling to work to improve resistivity log interpretation. In: ANNUAL LOGGING SYMPOSIUM, 30., Denver, 1989. **Transactions**. Houston, SPWLA, v.1, p. M.
- ANDERSON, B. & CHANG, S.K. 1982. Synthetic induction logs by the finite element method. **The Log Analyst**, 23(6):17-26.
- ANDERSON, B. & CHEW, W.C. 1985. SFL* interpretation using high speed synthetic computer generated logs. In: ANNUAL LOGGING SYMPOSIUM, 26., Dallas, 1985. **Transactions**. Houston, SPWLA, v.1, p. K.
- ARFKEN, G. 1985. **Mathematical methods for physicists**. 3ed. San Diego, Academic Press, 985p.
- AXELSSON, O. & BARKER, V.A. 1984. **Finite element solution of boundary value problems - theory and computation**. Orlando, Academic Press, 434p.
- BECKER, E.B.; CAREY, G.F.; ODEN, J.T. 1981. **Finite elements: an introduction**. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 258p.
- BITTAR, M.S.; SHATTUCK, D.P.; SHEN, L.C. 1990. Laboratory study of the shallow laterolog in high and low contrast zones. **The Log Analyst**, 31(4):189-197.
- CAMPOS, J.N.P.; MURAKAMI, C.Y.; FILHO, A.M.; BARBOSA, C.M. 1991. **Evolução tectono-sedimentar, habitat do petróleo e exploração da bacia do Solimões: relatório de progresso**. Manaus, PETROBRÁS/DENOC/DINTER. 27p. (Rel. Téc.).
- CHEMALI, R.; GIANZERO, S.; SU, S.M. 1987. The effect of shale anisotropy on focused resistivity devices. In: ANNUAL LOGGING SYMPOSIUM, 28., London, 1987. **Transactions**. Houston, SPWLA, v.1, p. H.
- CHEMALI, R.; GIANZERO, S.; SU, S.M. 1988. The dual laterolog in common complex situations. In: ANNUAL LOGGING SYMPOSIUM, 29., San Antonio, 1988. **Transactions**. Houston, SPWLA, v.1, p. N.

- CORRÊA, J.R.B. & BEER, R. 1986. Problemas referentes à avaliação de perfis na área de Juruá. In: SEMINÁRIO TÉCNICO DE OPERAÇÕES GEOLÓGICAS, 1., Natal, 1986. **Anais**. Rio de Janeiro, PETROBRÁS-DEPEX/DIGEO, v.1, p. 169-183.
- DAVIES, D.H.; FAIVRE, O.; GOUNOT, M.T.; SEEMAN, B.; TROUILLER, J.C.; BEN-IMELI, D.; FERREIRA, A.E.; PITTMAN, D.J.; SMITS, J.W.; RANDRIANAVONY, M.; ANDERSON, B.I.; LOVELL, J.R. 1992. **Azimuthal resistivity imaging: a new generation laterolog**. Washington, SPE. 21p. (SPE-24676).
- DOLL, H.G. 1951. The laterolog: a new resistivity logging method with electrodes using an automatic focusing system. **Petroleum Transactions, AIME**, 192:305-316.
- DOLL, H.G. 1953. The microlaterolog. **Petroleum Transactions, AIME**, 198:17-32.
- ELLIS, D.V. 1987. **Well logging for earth scientists**. New York, Elsevier, 532p.
- GIANZERO, S. & ANDERSON, B. 1982. An integral transform solution to the fundamental problem in resistivity logging. **Geophysics**, 47(6):946-956.
- GIANZERO, S.; LIN, Y.; CHEMALI, R.; DOSSEY, W. 1985. The effect of sonde eccentricity on resistivity tools: an exact theoretical model. In: ANNUAL LOGGING SYMPOSIUM, 26., Dallas, 1985. **Transactions**. Houston, SPWLA, v.1, p. GG.
- GIANZERO, S.; LIN, Y.; SU, S.M. 1988. A new high-speed hybrid technique for simulation and inversion of resistivity logs. **SPE Formation Evaluation**, 3(1):55-61
- GIANZERO, S. & RAU, R. 1977. The effect of sonde position in the hole on responses of resistivity logging tools. **Geophysics**, 42(3):642-654.
- GUYOD, H. 1955. Electric analogue of resistivity logging. **Geophysics**, 20(3):615-629.
- HLS. 1989. **Dual laterolog**. Houston. 4p.
- HLS. 1990. **DLL training notes**. Houston. 192p.
- LACOUR-GAYET, P.J. 1981. The Groningen effect... ..causes and partial remedy. **Schlumberger Technical Review**, 29(1):37-47.
- LACOUR-GAYET, P.J. 1982. Method and apparatus for detecting an anomaly in a resistivity measurement of an Earth formation. United States Patents 4 335 353.
- LOVELL, J.R. 1990. **Modelling frequency effects on laterologs**. Ridgefield, SCHLUMBERGER-DOLL RESEARCH. 108p. (Rel. Téc.)

- LOVELL, J.R. 1992. Modelling frequency effects on borehole resistivity tools. **Geophysics**. (no prelo).
- LÜTHI, S.M. 1991. **Perfilagem de poço 1 - notas de aula**. Belém, UFPA, 153p.
- MERCHANT, G.A. & THADANI, S.G. 1982. Finite electrode resistivity tool modelling. In: ANNUAL LOGGING SYMPOSIUM, 23., Corpus Christi, 1982. **Transactions**. Houston, SPWLA, v.1, p. Q.
- MORAN, J.H. & CHEMALI, R. 1979. More on the laterolog device. **Geophysical Prospecting**, 27(4):902-930.
- PARKHOMENKO, E.I. 1967. **Electrical properties of rocks**. New York, Plenum Press, 308p.
- PETROBRÁS. CENPES/DIVEN. 1987. **Introdução à perfuração**. Rio de Janeiro.
- REITZ, J.R.; MILFORD, F.J.; CHRISTY, R.W. 1982. **Fundamentos da teoria eletromagnética**. 3ed. Rio de Janeiro, Editora Campus, 516p.
- RIJO, L. 1990. **Teoria dos métodos eletromagnéticos 1 - notas de aula**. Belém, UFPA, 211p.
- SCHLUMBERGER. 1989a. **Log interpretation charts**. Houston. 151p.
- SCHLUMBERGER. 1989b. **Log interpretation principles/applications**. Houston. 237p.
- SCHOLBERG, A. 1973. Apparatus for determining the resistivity of a subsurface earth formation at different lateral distances from a bore hole wall. United States Patents 3 772 589.
- SELLEY, R.C. 1985. **Elements of petroleum geology**. New York, W.H. Freeman and Company, 449p.
- SERRA, O. 1984. **Fundamentals of well-log interpretation - 1. The acquisition of logging data**. Amsterdam, Elsevier, 423p.
- SHATTUCK, D.P.; BITTAR, M.S.; SHEN, L.C. 1987. Scale modelling of the laterolog using synthetic focusing methods. **The Log Analyst**, 28(4):357-369.
- STRANG, G. & FIX, G.J. 1973. **An analysis of the finite element method**. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 306p.

- SUAU, J.; GRIMALDI, P.; POUPON, A.; SOUHAITE, P. 1972. **The dual laterolog-R_{xo} tool**. Dallas, SPE. 12p. (SPE-4018).
- TABANOU, J.R. & ANDERSON, B.I. 1992. Remote sensing with low frequency electrode devices. In: KONG, J.A. ed. **Topics in electromagnetic research - vol. 6**. New York, Elsevier, (no prelo).
- TELFORD, W.M.; GELDART, L.P.; SHERIFF, R.E.; KEYS, D.A. 1976. **Applied geophysics**. Cambridge, Cambridge University Press, 860p.
- TIXIER, M.P.; ALGER, R.P.; BIGGS, W.P.; CARPENTER, B.N. 1963. **Dual induction-laterolog: a new tool for resistivity analysis**. Dallas, SPE. 18p. (SPE-713).
- TOWLE, G.H.; WHITMAN, W.W.; KIM, J.H. 1988. Electric log modelling with a finite difference method. **The Log Analyst**, 29(3):184-195.
- TSANG, L.; CHAN, A.K.; GIANZERO, S. 1984. Solution of the fundamental problem in resistivity logging with a hybrid method. **Geophysics**, 49(10):1596-1604.
- WHITMAN, W.W.; TOWLE, G.H.; KIM, J.H. 1989. Inversion of normal and lateral well logs with borehole compensation. **The Log Analyst**, 30(1):1-11.
- WOODHOUSE, R. 1978. The laterolog Groningen phantom can cost you money. In: **ANNUAL LOGGING SYMPOSIUM, 19.**, Paso, 1978. **Proceedings**. Houston, SPWLA, v.1, p. R.
- ZIENKIEWICZ, O.C. 1977. **The finite element method**. 3ed. London (UK), McGraw-Hill, 787p.

ANEXO I

CONDIÇÃO DE FRONTEIRA PARA UM CABO DE PERFILAGEM BLINDADO ¹⁹

Inicialmente precisamos argumentar quanto a nulidade da componente radial da corrente dentro da blindagem:

1. Não há, na blindagem, corrente proveniente do condutor interno devido ao isolamento entre ambos.
2. A corrente induzida na blindagem pelo campo magnético H_ϕ não tem componente radial. Isto porque $\frac{\partial H_\phi}{\partial z} = 0$, pois a corrente (do condutor) que gera este campo é constante ao longo do cabo e a blindagem tem pequena espessura. Pela equação 3.47 conclui-se que a componente radial do campo elétrico é nulo, e portanto da corrente também.
3. A corrente proveniente do meio deve se transformar numa corrente quase superficial na borda interna desta blindagem, não tendo portanto componente radial. Isto se deve à blindagem ser muito condutiva (é feita de aço).

A nulidade da componente radial de corrente implica na nulidade dessa mesma componente do campo elétrico. Novamente pela equação 3.47 deduzimos que $\frac{\partial H_\phi}{\partial z} = 0$. Assim temos um meio em que não há variação azimutal e nem variação na direção z de H_ϕ . Já sabemos a solução geral para H_ϕ neste caso (equação 3.64).

Denominaremos de ρ_i e ρ_e os raios interno e externo, respectivamente, da blindagem, e de k_b o número de onda do material constituinte desta blindagem. Por semelhança com a condição de Dirichlet para o *bridle*, deduzimos que $H_\phi(\rho_i) = I/2\pi\rho_i$. Assim podemos escrever o seguinte sistema de equações:

$$AH_1^{(1)}(k_b\rho_i) + BJ_1(k_b\rho_i) = \frac{I}{2\pi\rho_i} \quad \text{e} \quad AH_1^{(1)}(k_b\rho_e) + BJ_1(k_b\rho_e) = H_\phi(\rho_e). \quad (I.1)$$

¹⁹A demonstração contida neste anexo é uma adaptação de demonstração desenvolvida por LOVELL (1990).

Resolvendo este sistema para A e B pelo método de Kramer obtemos que:

$$A = \frac{\begin{vmatrix} \frac{I}{2\pi\rho_i} & J_1(k_b\rho_i) \\ H_\phi(\rho_e) & J_1(k_b\rho_e) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} H_1^{(1)}(k_b\rho_i) & J_1(k_b\rho_i) \\ H_1^{(1)}(k_b\rho_e) & J_1(k_b\rho_e) \end{vmatrix}} \quad \text{e} \quad B = \frac{\begin{vmatrix} H_1^{(1)}(k_b\rho_i) & \frac{I}{2\pi\rho_i} \\ H_1^{(1)}(k_b\rho_e) & H_\phi(\rho_e) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} H_1^{(1)}(k_b\rho_i) & J_1(k_b\rho_i) \\ H_1^{(1)}(k_b\rho_e) & J_1(k_b\rho_e) \end{vmatrix}}. \quad (\text{I.2})$$

Pela equação 3.49 temos que:

$$E_z = \frac{1}{\sigma_b - i\omega\epsilon_b} \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial\rho} = \frac{1}{\sigma_b - i\omega\epsilon_b} \left(A \frac{1}{\rho} \frac{\partial[\rho H_1^{(1)}(k_b\rho)]}{\partial\rho} + B \frac{1}{\rho} \frac{\partial[\rho J_1(k_b\rho)]}{\partial\rho} \right). \quad (\text{I.3})$$

É uma propriedade das funções de Bessel e Hankel que (ARFKEN, 1985):

$$\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}[x^n H_n^{(1)}(x)] = x^n H_{n-1}^{(1)}(x). \quad (\text{I.4})$$

Estas expressões para $x = k_b\rho$ e $n = 1$ tornam-se:

$$\frac{\partial[\rho J_1(k_b\rho)]}{\partial\rho} = \rho k_b J_0(k_b\rho) \quad \text{e} \quad \frac{\partial[\rho H_1^{(1)}(k_b\rho)]}{\partial\rho} = \rho k_b H_0^{(1)}(k_b\rho). \quad (\text{I.5})$$

Substituindo estas expressões na expressão I.3 obtemos que:

$$E_z = \frac{k_b}{\sigma_b - i\omega\epsilon_b} [A H_0^{(1)}(k_b\rho) + B J_0(k_b\rho)]. \quad (\text{I.6})$$

Lembrando que desejamos calcular o valor de $2\pi E_t = 2\pi E_z(\rho_e)$ e usando os valores de A e B , após algum algebrismo, obtemos que:

$$2\pi E_t = \frac{2\pi k_b}{\sigma_b - i\omega\epsilon_b} \left[\begin{vmatrix} H_1^{(1)}(k_b\rho_i) & J_1(k_b\rho_i) \\ H_0^{(1)}(k_b\rho_e) & J_0(k_b\rho_e) \\ H_1^{(1)}(k_b\rho_i) & J_1(k_b\rho_i) \\ H_1^{(1)}(k_b\rho_e) & J_1(k_b\rho_e) \end{vmatrix} H_\phi(\rho_e) + \begin{vmatrix} H_0^{(1)}(k_b\rho_e) & J_0(k_b\rho_e) \\ H_1^{(1)}(k_b\rho_e) & J_1(k_b\rho_e) \\ H_1^{(1)}(k_b\rho_i) & J_1(k_b\rho_i) \\ H_1^{(1)}(k_b\rho_e) & J_1(k_b\rho_e) \end{vmatrix} \frac{I}{2\pi\rho_i} \right]. \quad (\text{I.7})$$

Usando a relação $J_{\nu-1}(x)H_\nu^{(1)}(x) - J_\nu(x)H_{\nu-1}^{(1)}(x) = \frac{2}{i\pi x}$ (ARFKEN, 1985) obtemos que:

$$\begin{vmatrix} H_0^{(1)}(k_b\rho_e) & J_0(k_b\rho_e) \\ H_1^{(1)}(k_b\rho_e) & J_1(k_b\rho_e) \end{vmatrix} = H_0^{(1)}(k_b\rho_e)J_1(k_b\rho_e) - H_1^{(1)}(k_b\rho_e)J_0(k_b\rho_e) = \frac{2i}{\pi k_b\rho_e}. \quad (\text{I.8})$$

Usando esta relação e o fato de que $k = \sqrt{(i\omega\mu)(\sigma - i\omega\epsilon)}$ e $U = 2\pi\rho_e H_\phi(k_b\rho_e)$, a expressão para $2\pi E_t$ pode ser simplificada para:

$$2\pi E_t = \frac{1}{\rho_e} \sqrt{\frac{i\omega\mu_b}{(\sigma_b - i\omega\epsilon_b)}} \begin{vmatrix} H_1^{(1)}(k_b\rho_i) & J_1(k_b\rho_i) \\ H_0^{(1)}(k_b\rho_e) & J_0(k_b\rho_e) \\ H_1^{(1)}(k_b\rho_i) & J_1(k_b\rho_i) \\ H_1^{(1)}(k_b\rho_e) & J_1(k_b\rho_e) \end{vmatrix} U + \frac{2i}{\pi\rho_i\rho_e(\sigma_b - i\omega\epsilon_b)} \frac{1}{\begin{vmatrix} H_1^{(1)}(k_b\rho_i) & J_1(k_b\rho_i) \\ H_1^{(1)}(k_b\rho_e) & J_1(k_b\rho_e) \end{vmatrix}} I. \quad (\text{I.9})$$

Definindo que $2\pi E_t = -\alpha U + \beta I$ obtemos os valores de α e β dados no texto.