



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

Tese de Doutorado

Modelagem 2,5D dos campos usados no método eletromagnético a multi-frequência - EMMF

Valdelírio da Silva e Silva

Belém
Dezembro, 2012

Valdelírio da Silva e Silva

**Modelagem 2,5D dos campos usados no método
eletromagnético a multi-frequência - EMMF**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará para obtenção do título de Doutor em Geofísica.

Área de concentração: Métodos eletromagnéticos

Orientador: Dr. Cícero Roberto Teixeira Régis

Coorientador: Dr. Carlos Alberto Dias

Belém

Dezembro, 2012

Dados Internacionais de Catologação-na-Publicação (CIP)
Sistemas de Bibliotecas da UFPA

S586m Silva, Valdelírio da Silva e
Modelagem 2,5D dos campos usados no método eletromagnético a multi-frequência
- EMMF/ Valdelírio da Silva e Silva; Orientador: Dr. Cícero Roberto Teixeira Régis;
Coorientador: Dr. Carlos Alberto Dias– 2013
66 f.: il.

Tese (doutorado em geofísica) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Geociências, Programa de Pós-Graduação em Geofísica, Belém, 2012.

1. Método de elementos finitos. 2. Bobina circular horizontal. 3. Modelagem eletromagnética. I. Régis, Cícero Roberto Teixeira, *orient.* II. Dias, Carlos Alberto, *coorient.* III. Universidade Federal do Pará. IV. Título: Modelagem 2,5D dos campos usados no método eletromagnético a multi-frequência - EMMF

CDD 22^a ed.: 620.00151535

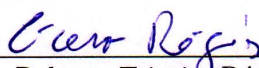
VALDELÍRIO DA SILVA E SILVA

**Modelagem 2,5D dos campos usados no método
eletromagnético a multi-frequência – EMMF**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Geofísica da Universidade Federal do Pará para obtenção
do título de Doutor em Geofísica.

Data de aprovação: 19/12/2012

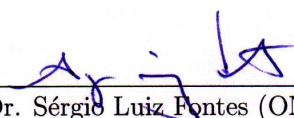
Banca Examinadora:



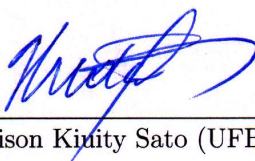
Dr. Cícero Roberto Teixeira Régis (UFPA)
Orientador.



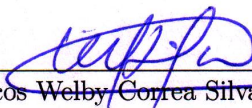
Dr. Carlos Alberto Dias (UENF-LENEP)
Co-orientador



Dr. Sérgio Luiz Fontes (ON)



Dr. Hédison Kintity Sato (UFBA)



Dr. Marcos Welby Correa Silva (UFPA)

Agradecimentos

Ao professor Cícero Roberto Teixeira Régis pelas orientações no desenvolvimento da tese, por sua amizade, e sua persuasão diante de minhas teimosias.

Ao professor Carlos Alberto Dias pelo convite de trabalho no projeto que originou esta tese, a seu apoio, orientação e sugestões no desenvolvimento e melhoria deste trabalho.

Ao professor Allen Q. Howard Junior por se dispor a colaborar conosco e sugerir uma solução ao problema de convergência das integrais de uma importante etapa da modelagem.

Ao professores Hédison Kiuity Sato e Olivar Lima de Lima pelas elucidações sobre fundamentos teóricos e aplicações do método eletromagnético a multi-frequência, e pelo inestimável apoio que me foi dado no longo período de minha estada em Salvador.

Ao professores Marcos Welby Correa Silva e Sérgio Luiz Fontes pelos questionamentos e sugestões que contribuíram para melhoria deste trabalho.

À PETROBRÁS sob o projeto de número 0050.0056738.10.9 pelo apoio financeiro para desenvolvimento e apresentações de resultados em eventos da comunidade geofísica.

Ao CNPQ, inicialmente pela concessão da bolsa de doutorado, e posteriormente pelo apoio financeiro através do INCT-GP.

Aos técnicos e administrativos, Lene e Reinaldo, de informática, Joaquim, e à Maria, pelo valioso apoio na parte burocrática, serviços e intermediações para que eu tivesse agradáveis ambientes de trabalho e de estada em Salvador.

Aos colegas Ibhram, Rigmary, Sílvia e Vinícius pelos agradáveis momentos de estudo e descontração que tivemos durante o desenvolvimento do trabalho em Salvador.

Aos meus amigos, Edelson da Cruz Luz, Walleson Gomes dos Santos, Rodrigo Erasmo, Glauco Lira e Manuel, pelas construções e compartilhamentos de conhecimentos, e por, mesmo diante de tantas tarefas, fazerem nossa convivência acadêmica ser ainda mais agradável.

Aos colegas de trabalho, Frayzer e Fábio Batista, pelas permutações de disciplinas, para que eu pudesse me dedicar em maior tempo à tese.

A todos os meus familiares: mãe, pai, irmão, esposa e filhas por aceitarem, compreenderem ou torcerem pela conclusão desta etapa acadêmica.

Resumo

Esta tese mostra a modelagem 2,5D de dados sintéticos do Método Eletromagnético a Multi-frequência (EMMF). O trabalho é apresentado em duas partes: a primeira apresenta os detalhes dos métodos usados nos cálculos dos campos gerados por uma bobina horizontal de corrente colocada sobre a superfície de modelos bidimensionais; e a segunda, usa os resultados obtidos para simular os dados medidos no método EMMF, que são as partes real e imaginária da componente radial do campo magnético gerado pela bobina. Nesta segunda parte, observamos o comportamento do campo calculado em diversos modelos, incluindo variações nas propriedades físicas e na geometria dos mesmos, com o intuito de verificar a sensibilidade do campo observado com relação às estruturas presentes em uma bacia sedimentar. Com esta modelagem, podemos observar as características dos dados e como as duas partes, real e imaginária, contribuem com informações distintas e complementares. Os resultados mostram que os dados da componente radial do campo magnético apresentam muito boa resolução lateral, mesmo estando a fonte fixa em uma única posição. A capacidade desses dados em distinguir e resolver estruturas alvo será fundamental para o trabalho futuro de inversão, bem como para a construção de seções de resistividade aparente.

Palavras-chaves: Metodo de elementos finitos. Bobina circular horizontal. Modelagem eletromagnética.

Abstract

This thesis shows the 2.5D calculation of synthetic data from the Multifrequency Electromagnetic Method (EMMF, from the portuguese name). The work is presented in two main parts: the first one presents the details of the numerical methods used in the calculation of the fields generated by the Horizontal Loop of Current, placed on the surface of bi-dimensional earth models; the second part uses the achieved results to simulate EMMF method data, which are the real and imaginary parts of the radial magnetic field from the loop. In the second part, we observe the computed fields from several different models, including variations in their physical properties as well as in the geometry of their features. We aim at estimating the sensibility of these fields to the structures that can be found in a sedimentary basin. With this modeling, we are able to study the characteristics of the data and to find how the two components of the radial field, real and the imaginary, contribute with separate and complimentary information about the structures in the models. The results show that the radial magnetic field presents very good lateral resolution, for a measure taken from a fixed source. The observed capability of these data to resolve target structures will be extremely important for the future work with the inversion of such data, as well as for the building of apparent resistivity sections.

Key-words: Finite element method. Large loop. Electromagnetic modeling.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	8
2	METODOLOGIA	10
2.1	CAMPOS PRIMÁRIOS DA BCH E DO DMV	11
2.1.1	Avaliação Numérica das Integrais	14
2.2	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS NA MODELAGEM 2,5D	21
2.3	MODELAGEM 2,5D DA BCH	31
2.4	TESTES DE VALIDAÇÃO DA MODELAGEM 2,5D DA BCH	34
3	ANÁLISE DE RESPOSTAS DE MODELOS 2D	39
3.1	VARIAÇÃO NA LARGURA DE UM CORPO CONDUTIVO ISOLADO	41
3.2	VARIAÇÃO NA PROFUNDIDADE	44
3.3	INVESTIGAÇÃO DE UMA ZONA RESISTIVA	46
3.4	INVESTIGAÇÃO DA RESOLUÇÃO DE DOIS CORPOS ISOLADOS	48
3.5	MODELO COM <i>BACKGROUND</i> ESTRATIFICADO	50
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	53
	Referências	55
	Apêndices	58
	APÊNDICE A Campo Primário da BCH e do DMV no domínio (r, z)	59
	APÊNDICE B Campo Primário da BCH e do DMV no domínio (x, \hat{k}_y, z)	63
	APÊNDICE C Obtenção das Equações de Elementos Finitos 2,5D	65

1 INTRODUÇÃO

O método Eletromagnético a Multi-Frequência (EMMF) é um método geofísico que se propõe a obter as propriedades elétricas da subsuperfície, utilizando como fonte uma espira de corrente estendida sobre a superfície do terreno. Atualmente, essa espira tem a forma quadrado, com dimensões de até 600 metros de lado. Operando em várias frequências, o método excita indutivamente o meio, e, a partir da resposta do campo magnético horizontal radial coletado nos receptores, determina-se a resistividade aparente e um parâmetro de caracterização do efeito de polarização elétrica induzida (IP) provocado no meio.

O método EMMF vem sendo desenvolvido por vários anos (DIAS, 1968; SATO, 1979; MACHADO, 2009). E desde a sua idealização e concepção por C. A. Dias, vem ocorrendo contribuições ao método, de ordem instrumental, teórica e de uso prático na exploração de petróleo. Dias (1968), usando um dipolo magnético vertical, tomou a componente magnética radial normalizada pela resposta magnética vertical do espaço livre e construiu uma tabela de valores das partes real e imaginária desse campo, variando dois parâmetros, que são associados: à frequência de investigação, à posição transmissor-receptor e ao módulo e à fase da condutividade do meio, que nesse caso é uma função complexa que caracteriza o efeito de IP provocado pela excitação da fonte e a heterogeneidade do meio. Tais parâmetros são: o número de indução e o parâmetro de polarização, os quais para um valor do campo observado são obtidos pelo uso da tabela, informando a condutividade aparente do meio e a contribuição da razão da condutividade imaginária para o módulo da condutividade retratando o efeito de IP.

Sato (1979) acrescentou uma estimativa da localização de um ponto da subsuperfície que mais contribui para o campo normalizado medido em uma determinada posição da superfície. Ele introduziu a ideia de profundidade de penetração para a fonte dipolar (skin-depth dipolar vertical) e, mediante o comportamento da razão posição do receptor/skin-depth em função do número de indução, adotou uma fração desse skin-depth dipolar para determinar aproximadamente o ponto associado à resistividade encontrada pela tabela criada por Dias (1968). Este ponto é considerado como sendo o centro da zona do semi-espaço homogêneo que mais influencia na medida, e sua determinação analítica foi feita por Machado (2009). Além de sugerir uma correção no posicionamento do ponto representativo dessa zona, este último autor também fez estudos para avaliar o erro associado à aproximação, em relação à configuração transmissor-receptor, como também, ao tipo de bobinas quadrada ou circular em vez de dipolo magnético vertical, usando o método EMMF.

O objetivo deste trabalho é dar uma contribuição ao método EMMF através da modelagem bidimensional dos dados do método (componente radial do campo magnético medido na superfície). De posse de um código capaz de calcular estes dados, analisaremos a influência sobre eles de diversas feições em sub-superfície. Para este propósito, escolhemos a técnica numérica de Elementos Finitos (EF) nodais. No método EMMF a fonte é finita e o problema se caracteriza como aquele comumente denominado de 2,5D, em que as equações que o re-

gem devem ser expressas num domínio espectral de Fourier, e sua solução final é obtida com contribuição de soluções 2D de cada variável espectral de discretização do domínio de Fourier.

Para a realização do cálculo do campo nos modelos 2D, empregamos a solução de campo elétrico do meio estratificado como termo fonte nas equações diferenciais. Diferentemente da modelagem feita até agora do método EMMF (MACHADO, 2009), as respostas de campo eletromagnético no meio estratificado (1D) de que precisamos devem ser determinadas em qualquer posição espacial do meio considerado, além de também serem necessárias estas respostas no domínio espectral, da Transformada de Fourier. No caso da bobina circular horizontal as expressões de campo, em qualquer domínio, apresentam-se como integrais cujos integrandos são funções altamente oscilantes e que decaem lentamente. Para avaliar estas integrais em posições arbitrárias dentro das camadas, as técnicas mais comuns utilizadas na modelagem eletromagnética em geofísica são imprecisas, quando não, demandam extremamente longo tempo computacional. Conseguimos contornar este problema numérico modificando o caminho de integração para avaliar as integrais no plano complexo. Foi com esta técnica numérica que computamos nossas componentes de campo primário no domínio espectral. Estes resultados são apresentados em Silva, Régis e Howard (2011). Para o caso das respostas requeridas no domínio espacial, de maneira mais otimizada, usamos o método de quadratura com extrapolação (QWE) que foi apresentado recentemente por Key (2012), que sumarizamos mais adiante, no texto sobre a modelagem 1D.

No segundo capítulo desta tese, apresentamos as metodologias utilizadas para obter respostas de campo em meios bidimensionais. Iniciamos mostrando o cálculo para meios estratificados horizontais, os problemas intrínsecos dessa modelagem para a bobina circular horizontal assim como as saídas para contornar tais problemas. Em seguida, apresentamos o método de Elementos Finitos nodais usado para obtenção das respostas em meios bidimensionais, e os testes de validação dos algoritmos.

No terceiro capítulo, apresentamos respostas em seções da parte real e imaginária do campo magnético radial em vários modelos. Nessas investigações pretendemos mostrar que características geoeletricas são, em termos dessa componente de campo, detectáveis pelo método EMMF, avaliando-se variações de dimensões, profundidades, separação de corpos e contraste de resistividade. Realizamos uma análise do poder de resolução dos dados para detectar estruturas geo-elétricas, que nos darão uma boa estimativa do conteúdo de informação que estes dados trazem sobre aquelas estruturas.

No quarto capítulo apresentamos nossas conclusões das análises feitas no trabalho, bem como sugestões de próximos passos a serem dados no desenvolvimento da pesquisa no método EMMF.

2 METODOLOGIA

Os modelos geofísicos aqui estudados consistem de uma ou mais heterogeneidades bi-dimensionais, inseridas num meio encaixante constituído por um semi-espço de camadas horizontais homogêneas e isotrópicas. Sobreposto a este, incluímos outro semi-espço, de condutividade 10^{-12} S/m, representando o ar. O transmissor, que supre energia eletromagnética ao meio geológico, pode ser uma bobina circular horizontal (BCH) ou um dipolo magnético vertical (DMV), com corrente $I(\omega)$, dependente da frequência, situada na superfície ou acima dela. Adotando a dependência temporal $e^{i\omega t}$, ou seja, considerando as transformadas direta e inversa de Fourier como sendo

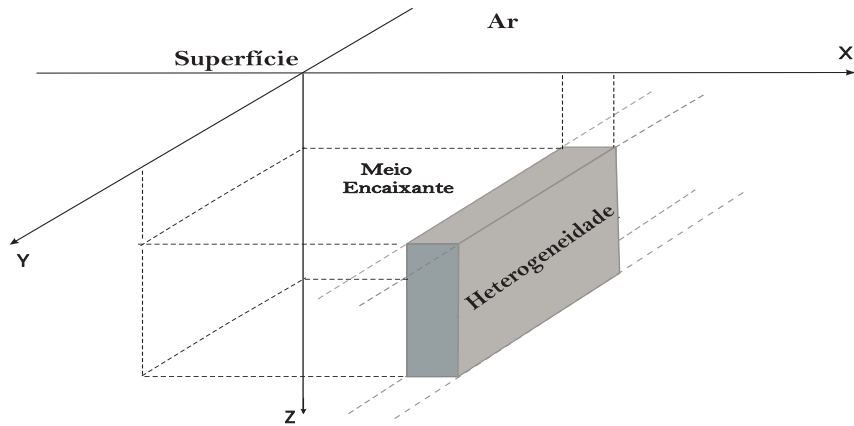
$$\hat{f}(w) = \mathbb{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (2.1)$$

$$f(t) = \mathbb{F}^{-1}[\hat{f}(w)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{i\omega t} d\omega; \quad (2.2)$$

o modelo primário (meio estratificado) apresenta admitividade $\eta_p = \sigma_p + i\omega\epsilon_p$ e a(s) heterogeneidade(s) $\eta = \eta_p + \Delta\eta$.

A orientação adotada dos eixos ortogonais é mostrada na figura (1) abaixo.

Figura 1 – Orientação adotada dos eixos coordenados.



Fonte: Do autor

Para a modelagem de métodos eletromagnéticos geofísicos, temos, como ponto de partida as equações de Maxwell que, no domínio da frequência, apresentam-se como:

$$\nabla \cdot \epsilon \mathbf{E} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \eta \mathbf{E} = \mathbf{J}_f, \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \mathfrak{z} \mathbf{H} = \mathbf{0}, \quad (2.6)$$

em que \mathbf{J}_f é a densidade de corrente na fonte e $\mathfrak{z} = i\omega\mu$ a impeditividade.

O transmissor supre energia eletromagnética ao meio geológico e o receptor capta as informações sobre o meio na forma de campo elétrico ou magnético. Seguindo Zhdanov (2009), separamos esses campos em primários e secundários. Chamamos campo primário aquele que seria observado no meio na ausência das heterogeneidades, ou seja, apenas com o modelo 1D, sujeito ao mesmo transmissor. O campo secundário é dado pela diferença entre o campo total no meio 2D/3D e o campo primário.

As equações para o campo primário são:

$$\nabla \times \mathbf{H}^p - \eta_p \mathbf{E}^p = \mathbf{J}_f, \quad (2.7)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^p + \mathfrak{z}_p \mathbf{H}^p = \mathbf{0}, \quad (2.8)$$

e, como os campos eletromagnéticos totais são somatórias dos campos primário e secundário, i.e., $\mathbf{E} = \mathbf{E}^p + \mathbf{E}^s$ e $\mathbf{H} = \mathbf{H}^p + \mathbf{H}^s$, reescrevemos as equações (2.4) e (2.6) da seguinte forma:

$$\nabla \times (\mathbf{H}^p + \mathbf{H}^s) - (\eta_p + \Delta\eta)(\mathbf{E}^p + \mathbf{E}^s) = \mathbf{J}_f, \quad (2.9)$$

$$\nabla \times (\mathbf{E}^p + \mathbf{E}^s) + (\mathfrak{z}_p + \Delta\mathfrak{z})(\mathbf{H}^p + \mathbf{H}^s) = \mathbf{0}, \quad (2.10)$$

em que $\eta_p + \Delta\eta = \eta$ e $\mathfrak{z}_p + \Delta\mathfrak{z} = \mathfrak{z}$ descrevem as propriedades eletromagnéticas do modelo primário e suas variações ($\Delta\eta = \Delta\sigma + i\omega\Delta\epsilon$ e $\Delta\mathfrak{z} = i\omega\Delta\mu$), decorrentes das heterogeneidades. Utilizando (2.7) e (2.8) nas equações (2.9) e (2.10), chegamos às expressões:

$$\nabla \times \mathbf{H}^s - \eta \mathbf{E}^s = \Delta\eta \mathbf{E}^p, \quad (2.11)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^s + \mathfrak{z} \mathbf{H}^s = -\Delta\mathfrak{z} \mathbf{H}^p. \quad (2.12)$$

Essas equações (2.11) e (2.12) são as que consideramos no método de Elementos Finitos (EF). Se os meios que normalmente consideramos são não-magnéticos (i.e. $\mu_p = \mu_s = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$) então o membro da direita da equação (2.12) será nulo.

2.1 CAMPOS PRIMÁRIOS DA BCH E DO DMV

Nesta seção, apresentamos as soluções para as equações (2.7) e (2.8) de campo primário para as fontes usadas em nossa modelagem do método EMMF, a aproximação analítica em dois semi-espacos no caso do DMV, e uma discussão sobre avaliação numérica das integrais para obtenção dos campos da BCH.

Nos trabalhos de campo, o método EMMF, atualmente, faz uso de uma bobina quadrada de centenas de metros de lado. No entanto, Machado (2009) demonstrou que, a partir do centro da bobina, as medidas feitas, em distâncias acima de três vezes e meia a medida do lado de uma bobina quadrada, podem ser aproximadas por uma BCH de mesmo momento, e que, para um DMV, as respostas, em módulo, possuem erro inferior a 1%, caso as medidas sejam tomadas a partir de seis vezes o lado da espira quadrada. Diferentemente do que se faz na aquisição dos dados, precisamos dos campos em qualquer profundidade para a modelagem numérica bi

ou tridimensional. Por isso, a fim de avaliar o método EMMF em diferentes configurações geométricas transmissor-receptor, deduzimos no apêndice A, as componentes de campo para a BCH e DMV em meios de camadas estratificadas horizontalmente.

Considerando que a BCH e o DMV são espiras circulares, sobre um meio de camadas horizontais as componentes de campo eletromagnético possuem simetria cilíndrica e por isso são expressas nestas coordenadas. Com a corrente fluindo circularmente nas espiras tem-se apenas a componente de campo elétrico E_ϕ^p , e as magnéticas H_r^p e H_z^p em qualquer ponto do meio de camadas horizontais. Elas são encontradas a partir do uso de transformadas de Hankel, que, no domínio (k_r, z) , comportam-se como ondas planas (ilustradas na figura (2)) e se apresentam como:

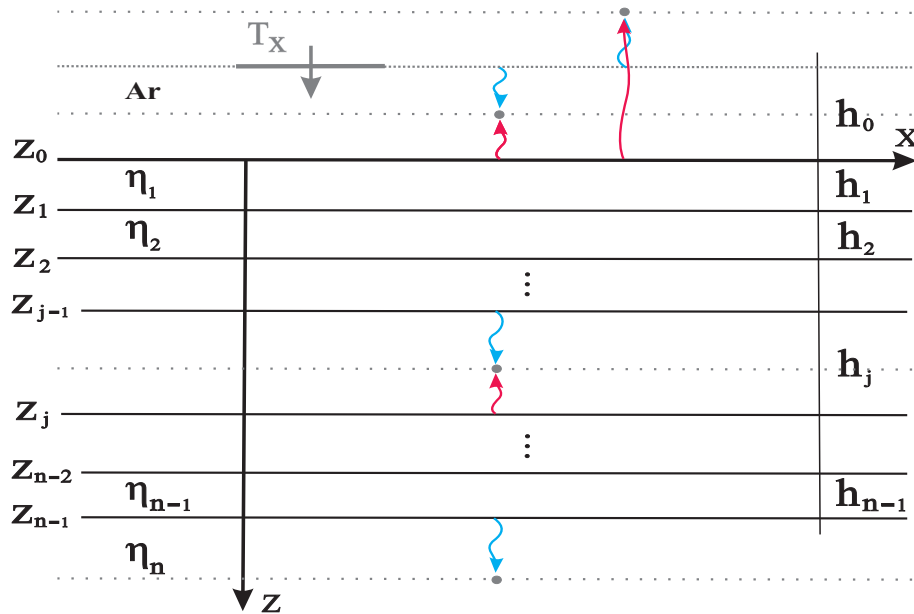
$$E_\phi^p(r, z) = \int_0^\infty \widehat{E}_\phi^p(k_r, z) J_1(k_r r) k_r dk_r, \quad (2.13)$$

$$H_r^p(r, z) = \int_0^\infty \widehat{H}_r^p(k_r, z) J_1(k_r r) k_r dk_r, \quad (2.14)$$

$$H_z^p(r, z) = -\frac{1}{\partial_p} \int_0^\infty \widehat{E}_\phi^p(k_r, z) J_0(k_r r) k_r^2 dk_r \quad (2.15)$$

onde J_0 e J_1 são as funções de Bessel de primeira espécie de ordens 0 e 1, respectivamente.

Figura 2 – Ilustração de ondas no domínio (k_r, z) transmitidas e refletidas num meio estratificado horizontal.



Fonte: Do autor

As componentes \widehat{E}_ϕ^p e \widehat{H}_r^p tem as seguintes expressões:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{E}_{\phi(0)}^p(k_r, z) = T_E^{(0)}(e^{u_0(z-h_o)} + R_{TE}^{(0)}e^{u_0(z+h_o)}), \text{ se } z \leq h_o < 0 \\ \widehat{E}_{\phi(0)}^p(k_r, z) = T_E^{(0)}(e^{-u_0(z-h_o)} + R_{TE}^{(0)}e^{u_0(z+h_o)}), \text{ se } h_o < z \leq 0 \\ \widehat{E}_{\phi(j)}^p(k_r, z) = T_E^{(j)}(e^{-u_j(z-z_{j-1})} + R_{TE}^{(j)}e^{u_j(z-z_j-h_j)}), \text{ para } j = 1, \dots, n-1 \\ \widehat{E}_{\phi(n)}^p(k_r, z) = T_E^{(n)}e^{-u_n(z-z_{n-1})}, \end{array} \right. \quad (2.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{H}_{r(0)}^p(k_r, z) = Y_0 T_E^{(0)}(e^{u_0(z-h_o)} + R_{TE}^{(0)}e^{u_0(z+h_o)}), \quad z \leq h_o < 0 \\ \widehat{H}_{r(0)}^p(k_r, z) = -Y_0 T_E^{(0)}(e^{-u_0(z-h_o)} - R_{TE}^{(0)}e^{u_0(z+h_o)}), \quad h_o < z \leq 0 \\ \widehat{H}_{r(j)}^p(k_r, z) = -Y_j T_E^{(j)}(e^{-u_j(z-z_{j-1})} - R_{TE}^{(j)}e^{u_j(z-z_j-h_j)}), \text{ para } j = 1, \dots, n-1 \\ \widehat{H}_{r(n)}^p(k_r, z) = -Y_n T_E^{(n)}e^{-u_n(z-z_{n-1})}. \end{array} \right. \quad (2.17)$$

Aqui z é a profundidade da medida, h_o é a altura (≤ 0) da fonte em relação à interface ar-terra, z_j , a profundidade da j -ésima camada (com $j = 0, 1, \dots, n-1$), k_r a variável no domínio da transformada, $u_j = \sqrt{k_r^2 - k_j^2}$, a constante de propagação do meio j (com $k_j = \sqrt{-\mathfrak{z}_j \mathfrak{p}_j}$ o número de onda da j -ésima camada) e $Y_j = \frac{u_j}{\mathfrak{z}_p}$ é admitância intrínseca da camada j . As constantes $T_E^{(j)}$ e $R_{TE}^{(j)}$ são os coeficientes de transmissão e reflexão de propagação da onda eletromagnética do modo TE que é caracterizado nestas fontes.

Os coeficientes de reflexão são dados por:

$$R_{TE}^{(j)} = \frac{Y_j - \widetilde{Y}_{j+1}}{Y_j + \widetilde{Y}_{j+1}}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (2.18)$$

onde $\widetilde{Y}_{j+1} = -\frac{H_{r(j)}}{E_{\phi(j)}} \Big|_{z=z_j}$ é a admitância aparente da camada $j+1$.

No caso dos coeficientes de transmissão tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_E^{(1)} = T_E^{(0)} \frac{1 + R_{TE}^{(0)}}{1 + R_{TE}^{(1)}e^{-2u_1 h_1}} \\ T_E^{(j)} = T_E^{(j-1)} \frac{(1 + R_{TE}^{(j-1)})e^{-u_{j-1} h_{j-1}}}{1 + R_{TE}^{(j)}e^{-2u_j h_j}}, \quad \text{para } j = 2, \dots, n-1 \\ T_E^{(n)} = T_E^{(n-1)}(1 + R_{TE}^{(n-1)})e^{-u_{n-1} h_{n-1}}. \end{array} \right. \quad (2.19)$$

No ar, o coeficiente de transmissão para a BCH é

$$T_E^{(0)} = \frac{-a \mathfrak{z}_p I(\omega) J_1(k_r a)}{2u_0}, \quad (2.20)$$

em que a é o raio e $I(\omega)$ a intensidade da corrente de excitação. No caso do DMV, esta expressão fica como

$$T_E^{(0)} = \frac{-m_z \mathfrak{z}_p}{4\pi}, \quad (2.21)$$

sendo $m_z = nI(\omega)\pi a^2$ o momento do dipolo, com n o número de espiras.

Além das componentes de campo serem determinadas no domínio espacial (r, z) , há necessidade na modelagem 2,5D por Elementos Finitos que o campo elétrico apresente expressões no domínio espectral de Fourier (x, k_y, z) . As seguintes expressões são deduzidas no apêndice B:

$$E_x^p(x, k_y, z) = 2 \int_0^\infty \frac{ik_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \widehat{E}_\phi^p(k_x, k_y, z) \cos(k_x x) dk_x \quad (2.22)$$

$$E_y^p(x, k_y, z) = 2 \int_0^\infty \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \widehat{E}_\phi^p(k_x, k_y, z) \sen(k_x x) dk_x \quad (2.23)$$

com $\widehat{E}_\phi^p(k_x, k_y, z)$ sendo dado pelas fórmulas de (2.16), com utilização da constante de propagação $u_j = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_j^2}$ para $j = 0, 1, 2, \dots, n$.

2.1.1 Avaliação Numérica das Integrais

As integrais (2.13), (2.14), (2.15), (2.22) e (2.23) não têm soluções analíticas para meios estratificados. No entanto, para um DMV na superfície de dois semiespaços dos quais o primeiro é o ar ($\sigma = 0$) e o segundo é um meio condutor homogêneo, não magnético ($\mu = \mu_o$), no domínio de validade da aproximação quase-estática e para $h_o = 0$ e $z = 0$, tem-se que (HOHMANN, 1987):

$$E_\phi^p = \frac{-m_z}{2\pi\sigma_1 r^4} [3 - (3 + 3ik_1 r - k_1^2 r^2)e^{-ik_1 r}] \quad (2.24)$$

$$H_r^p = \frac{-m_z k_1^2}{4\pi r} \left[I_1\left(\frac{ik_1 r}{2}\right) K_1\left(\frac{ik_1 r}{2}\right) - I_2\left(\frac{ik_1 r}{2}\right) K_2\left(\frac{ik_1 r}{2}\right) \right] \quad (2.25)$$

$$H_z^p = \frac{-m_z}{2\pi k_1^2 r^5} [(9 + 9ik_1 r - 4k_1^2 r^2 - ik_1^3 r^3) e^{-ik_1 r} - 9] \quad (2.26)$$

em que I e K são as funções de Bessel Modificadas de primeira e segunda espécies, respectivamente.

Com exceção do caso acima, as expressões de campo, para as fontes em questão, devem ser determinadas com alguma técnica numérica. Comumente, na modelagem eletromagnética em geofísica, faz-se uso de filtros digitais lineares (ANDERSON, 1979; GUPTASARMA; SINGH, 1997; KONG, 2007) para expressões de campo determinadas pela transformada de Hankel ou de Fourier. Existem também uso de quadraturas com frações continuadas para determinação dessas integrais (CHAVE, 1983) ou de uso conjunto de filtros e séries hipergeométricas de Gauss (SINGH; MOGI, 2003). No entanto, em muitos casos, os integrandos são funções altamente oscilantes e de convergência lenta, como por exemplo, a BCH e fontes dipolares operadas em alta frequência. Nesses casos, os filtros são imprecisos e as quadraturas adaptativas no eixo real demandam tempo muito prolongado. Alternativamente, pode-se realizar a integração no plano complexo de maneira muito mais econômica computacionalmente, do que a simples aplicação de quadraturas. Um método para realizar este tipo de integração está descrito em Silva, Régis e Howard (2011).

Se quisermos os campos da BCH apenas na superfície, devemos seguir Ryu, Morrison e Ward (1970) que apresentam expressões de campo que separam em duas outras parcelas, uma que pode ser modificada para uma integral finita e uma outra que converge com o uso de filtros digitais satisfazendo a precisão que almejamos. (SINGH; MOGI, 2003; SINGH; MOGI, 2005) afirmaram que séries hipergeométricas de Gauss sobre a parcela não usada nos filtros, sem aproximá-la por uma integral finita, pode contornar os problemas de convergência dessa integral. Estes autores apresentaram suas respostas para a componente $H_z^p(z = 0)$, mas Deun e Cools (2007) escreveram uma nota mostrando que as aproximações por séries hipergeométricas de Gauss para as demais componentes não convergem.

Dentro da ideia de quadraturas adaptativas, Key (2012) apresentou uma técnica de aceleração de convergência para integrações nas expressões de campos eletromagnético que apresenta, para o domínio espacial, otimização superior aquela que desenvolvemos para uso no plano complexo. A técnica, denominada de quadratura com extrapolação (QWE), inicialmente trata a integração no eixo real como uma série de somas parciais, cujas parcelas são as quadraturas Gauss-Legendre em intervalos de amplitude definidos pelos zeros das funções kernel dos integrandos, ou seja, entre os zeros de J_0 , J_1 , seno ou cosseno. Isto apenas possibilita uma determinação mais precisa. O que torna QWE mais eficiente é a utilização da transformação de Shanks via algoritmo epsilon de aceleração de convergência (SHANKS, 1955; WYNN, 1956; WENIGER, 1989), que a partir de um certo número de parcelas estima o resto truncado da série com bom grau de precisão. Key (2012) detalha a implementação da QWE para várias fontes e analisa a precisão mediante o número de pontos adotados na quadratura Gauss-Legendre.

Apresentamos aqui a implementação para a BCH no domínio espacial. Realizamos primeiramente uma mudança de variável de integração, pois desejamos fazer quadraturas entre os zeros da função kernel, e estas tem em seus argumentos a variável original de integração vezes uma constante. No caso da BCH no domínio espacial sempre temos $J_1(k_r a) \cdot J_1(k_r r)$ ou $J_1(k_r a) \cdot J_0(k_r r)$. Tomaremos $g = k_r a$ se a distância r é menor que o raio a , e usaremos $g = k_r r$ no caso contrário. Exemplificando pela componente elétrica medida no ar com uma BCH na superfície ($h_o = 0$), temos mediante (2.16) e (2.13) que:

$$\begin{cases} E_{\phi(0)}^p(r, z) = \int_0^\infty \frac{-a\beta_p I(\omega)}{2u_0} \left(e^{u_0 z} + R_{TE}^{(0)} e^{u_0 z} \right) J_1(g) J_1\left(\frac{gr}{a}\right) \frac{g}{a^2} dg, \text{ se } r < a \\ E_{\phi(0)}^p(r, z) = \int_0^\infty \frac{-a\beta_p I(\omega)}{2u_0} \left(e^{u_0 z} + R_{TE}^{(0)} e^{u_0 z} \right) J_1\left(\frac{ga}{r}\right) J_1(g) \frac{g}{r^2} dg, \text{ se } r \geq a. \end{cases} \quad (2.27)$$

em que a constante de propagação, em qualquer camada j , será escrita como $u_j = \sqrt{(g/a)^2 - k_j^2}$ para $r < a$ e $u_j = \sqrt{(g/r)^2 - k_j^2}$ se $r \geq a$.

Os n primeiros zeros de $J_\nu(g)$ podem ser determinados pelo método de Newton-Raphson, cuja primeira aproximação é dada por Abramowitz e Stegun (1964): $n\pi + \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$. Para a componente H_z^p , apesar de ter em sua expressão o kernel $J_0(k_r r)$, as quadraturas com os zeros de J_1 foram mais rápidas que com os de J_0 , confirmando Key (2012).

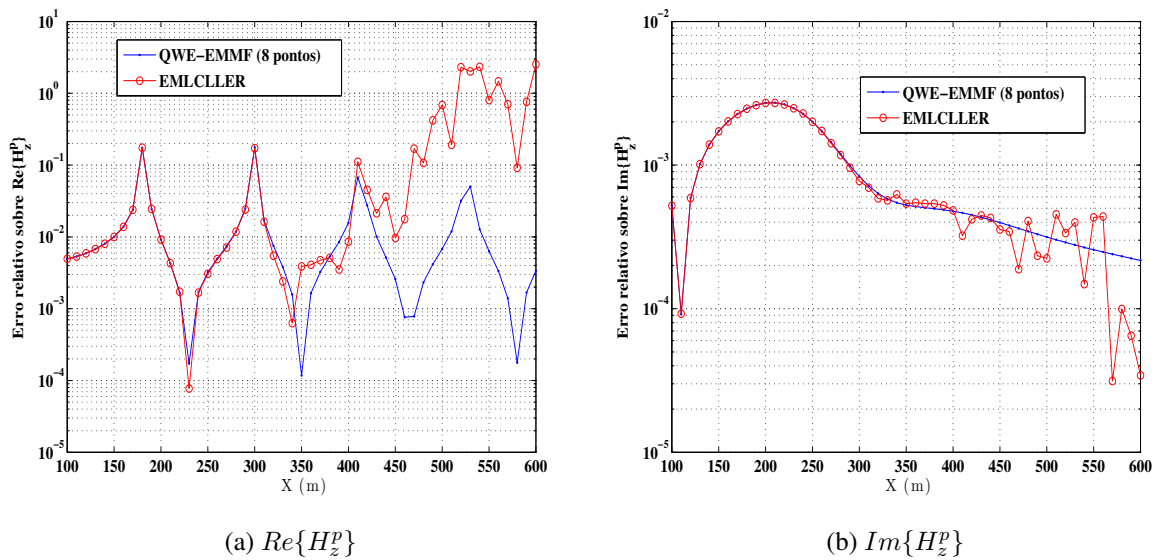
Dadas uma tolerância relativa t_{rel} e uma tolerância absoluta t_{abs} , adotamos no processo iterativo do algoritmo epsilon o mesmo critério de parada usado por Key (2012). Com a soma parcial na i -ésima iteração dada por S_i , o erro absoluto em relação a anterior dado por E_{abs}^i , diremos que o algoritmo convergiu se $E_{abs}^i \leq t_{rel} \cdot |S_i| + t_{abs}$.

Um programa em *Fortran 77* contendo a determinação de H_z^p pela técnica descrita por Singh e Mogi (2003) é disponível em <http://www.iamg.org/CGEditor.index.htm>. Tal código, EMLCLLER, utiliza os filtros digitais de Guptasarma e Singh (1997) com 120 pontos para J_0 e 140 pontos para J_1 e séries hipergeométricas de Gauss se $|z| < 1$. É disponibilizado também, no endereço <http://software.seg.org/2012/0003>, o código em *Matlab* do método QWE construído por Key (2012) para várias fontes. Infelizmente, o programa cedido possui apenas as respostas da componente H_z^p da BCH num meio de dois semi-espacos. Primeiramente apresentamos uma comparação das respostas de uma BCH com aproximação de um DMV. Tomamos, na BCH, dois semiespacos com resistividade do ar sendo $10^{12} \Omega \cdot m$ e a camada inferior tendo $\rho_1 = 1 \Omega \cdot m$. O raio considerado foi de 5 m, a frequência de 200 Hz e as medidas foram de 10 em 10 m feitas de 100 m a 600 m. As tolerâncias absoluta e relativa para a QWE construídas por nós foram $t_{abs} = 10^{-30}$ e $t_{rel} = 10^{-9}$.

Apresentamos na figura (3) os erros relativos cometidos com as respostas de H_z^p encontradas com o código EMLCLLER e nosso código, QWE-EMMF, em relação àquelas encontradas analiticamente por (2.26) do DMV. No QWE-EMMF utilizamos a quadratura Gauss-Legendre com apenas 8 pontos entre dois zeros consecutivos da função de Bessel. Como estamos determinando $H_z^p|_{z=0}$, o EMLCLLER utiliza o filtro de 120 pontos e mais uma série hipergeométrica. Apesar de na comparação de $Im\{H_z^p\}$ o EMLCLLER apresentar erro relativo oscilante e se direcionando a valores menores que o apresentado na QWE, os filtros junto com a série hipergeométrica dão resultados com erro até superior a 100% na comparação de $Re\{H_z^p\}$.

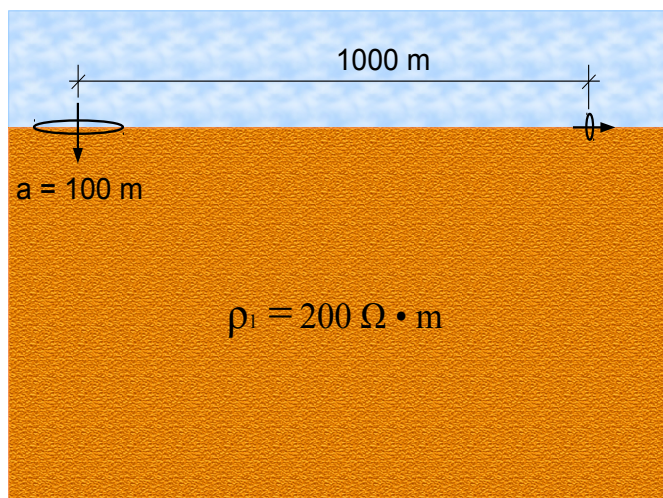
Sobre um modelo de um semi-espaço mais resistivo comparamos as respostas de todas as componentes primárias da BCH com as analíticas de um DMV de mesmo momento magnético. Na figura (4) representamos o modelo investigado que tem uma BCH de 100 m de raio sobre o semi-espaço de $200 \Omega \cdot m$ de resistividade. Tomamos 120 frequências variando de 0,1 a 1000 Hz e apresentamos na figura (5) as componentes de campo obtidas na medida com $r = 1000$ m na superfície.

Figura 3 – Erros relativos do EMLCLLER e QWE-EMMF (computando-se uma BCH de raio 5 m) em relação à resposta analítica de H_z^p do DMV sobre a superfície de semi-espaco condutor: (a) $Re\{H_z^p\}$; (b) $Im\{H_z^p\}$.



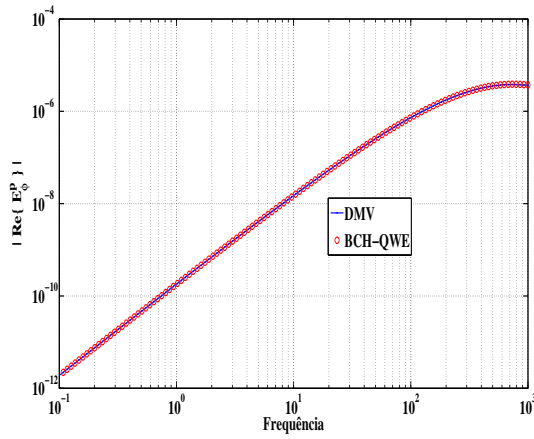
Fonte: Do autor

Figura 4 – Modelo para investigação das respostas de QWE-EMMF com as de DMV - solução analítica.

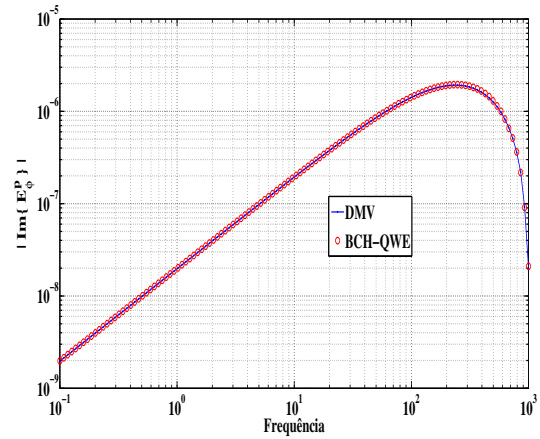


Fonte: Do autor

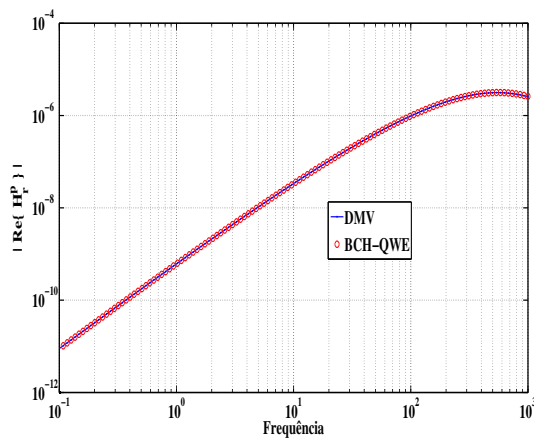
Figura 5 – Comparação do campo primário obtido com QWE-EMMF e as respostas analíticas do DMV sobre o modelo da figura (4). (a) $Re\{E_\phi^p\}$; (b) $Im\{E_\phi^p\}$; (c) $Re\{H_r^p\}$; (d) $Im\{H_r^p\}$; (e) $Re\{H_z^p\}$; (f) $Im\{H_z^p\}$.



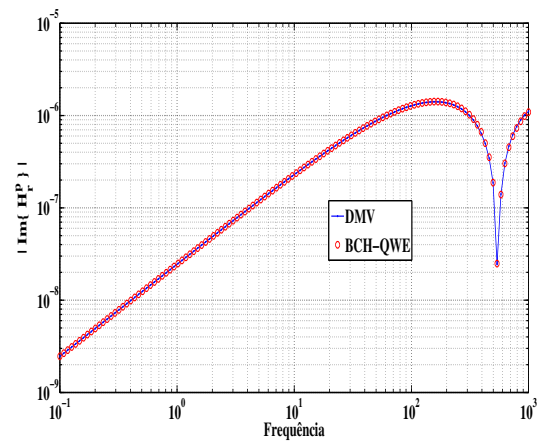
(a) $Re\{E_\phi^p\}$



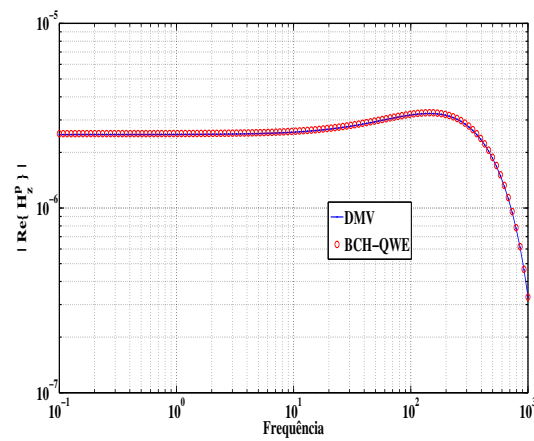
(b) $Im\{E_\phi^p\}$



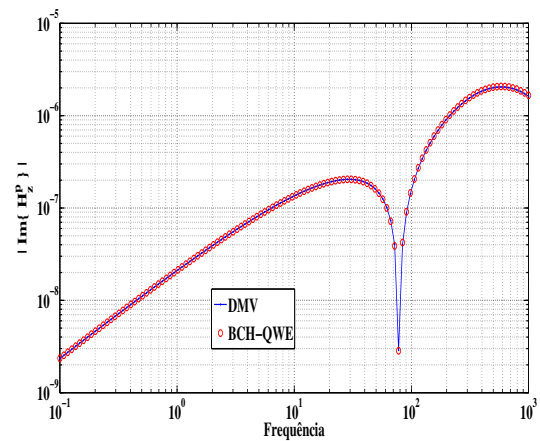
(c) $Re\{H_r^p\}$



(d) $Im\{H_r^p\}$



(e) $Re\{H_z^p\}$

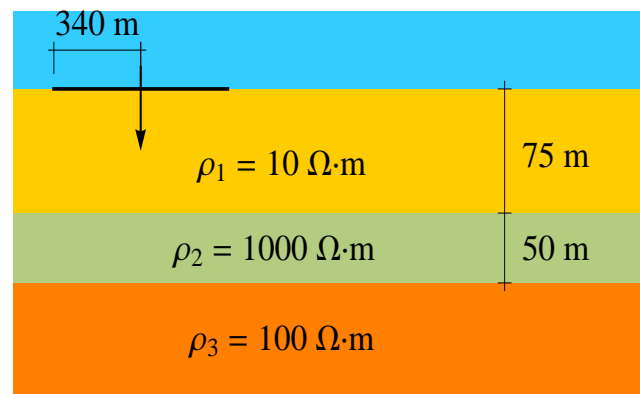


(f) $Im\{H_z^p\}$

Fonte: Do autor

Em profundidade, decorrente da contribuição da parte real das exponenciais ser decrescente, as expressões de campo eletromagnético da bobina possuem uma atenuação mais forte que aquelas medidas na superfície. Ainda assim, os integrandos da BCH no domínio espacial apresentam dificuldades de convergência com uso de filtros. Sobre o modelo representado na figura (6) avaliamos as respostas obtidas em profundidade por três clássicos filtros digitais lineares e a QWE-EMMF. No modelo, a BCH está na superfície e tem 340 m de raio. As medidas são feitas em profundidade iniciadas em 5 m e indo até 200 m, observadas de 5 em 5 m com uma frequência de 1000 Hz. A distância horizontal do centro da BCH ao receptor é de 1600 m com $y = 0$. O semiespaço inferior é composto por três camadas, a primeira de $10 \Omega \cdot m$, com espessura de 75 m, a segunda tem $1000 \Omega \cdot m$ com 50 m de espessura; e o substrato tem $100 \Omega \cdot m$ de resistividade. Na QWE-EMMF, adotamos apenas 8 pontos em Gauss-Legendre em cada intervalo entre os zeros de J_1 , com tolerância relativa de 10^{-6} e absoluta de 10^{-30} . Os filtros de Anderson (1979) foram operados com exigência de 801 pontos, os de Guptasarma e Singh (1997) com 140 pontos na determinação de E_ϕ^p e H_r^p , e 120 pontos em H_z^p , enquanto os de Kong (2007) usam 241 pontos para todas as componentes. Na figura (7) mostramos as diferenças existentes nas respostas.

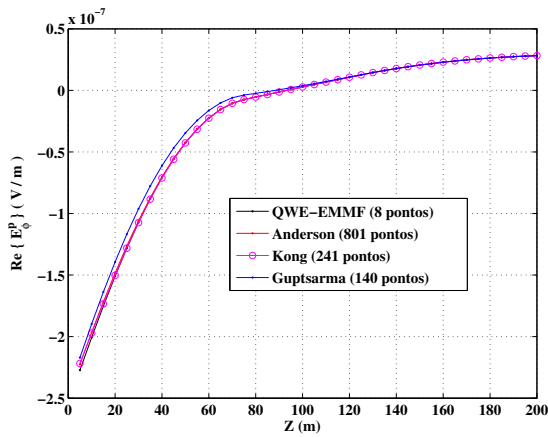
Figura 6 – Modelo para investigação em profundidade das respostas de campo com filtros digitais e QWE-EMMF.



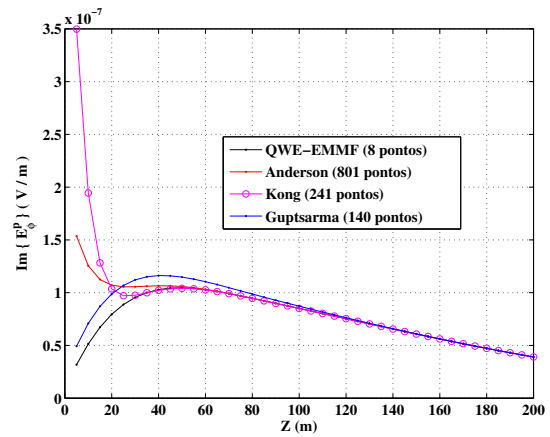
Fonte: Do autor

Apresentamos na figura (8), os números de avaliações dos integrandos de cada componente para obtenção das respostas pela QWE-EMMF, Guptasarma e Singh (1997) e Kong (2007). Vemos que, em geral QWE-EMMF, requer número de pontos maior que exigido em Guptasarma e Singh (1997), menor que de Kong (2007) e muito menor que Anderson (1979), mas que, diferente dos filtros, QWE-EMMF dá respostas precisas. Para os casos em que os filtros dariam respostas corretas, pode-se questionar o tempo de processamento requerido pela QWE, mas, nesse caso, sabendo quais posições r de medidas seriam feitas, uma otimização seria possível com a determinação prévia dos zeros das funções de Bessel $J_0(k_r r)$ ou $J_1(k_r r)$ e também multiplicadas pelos pesos da quadratura Gauss-Legendre.

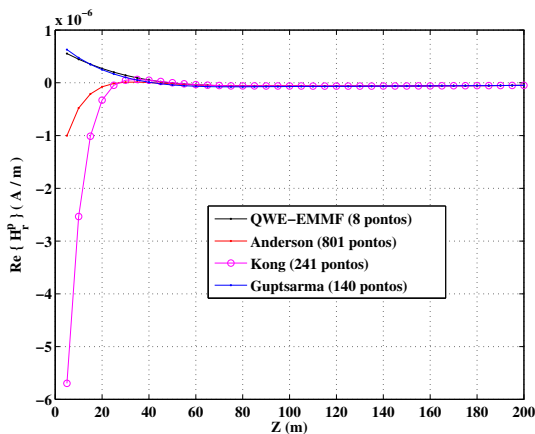
Figura 7 – Resposta em profundidade do campo primário obtida mediante uso de filtros digitais de Anderson (1979), Guptsarma e Singh (1997), Kong (2007) e QWE-EMMF aplicados ao modelo da figura (6). (a) $Re\{E_\phi^p\}$; (b) $Im\{E_\phi^p\}$; (c) $Re\{H_r^p\}$; (d) $Im\{H_r^p\}$; (e) $Re\{H_z^p\}$; (f) $Im\{H_z^p\}$.



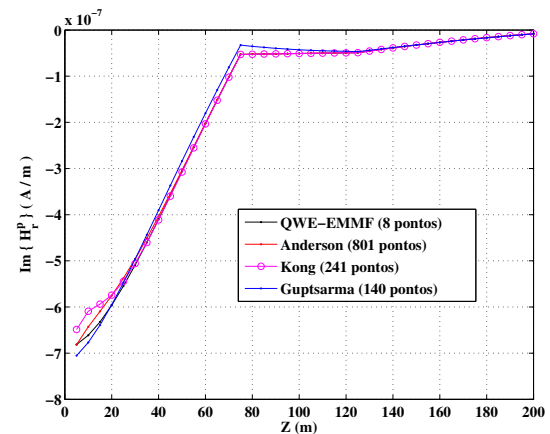
(a) $Re\{E_\phi^p\}$



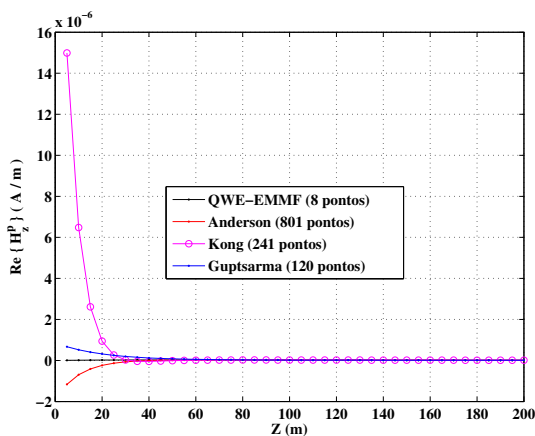
(b) $Im\{E_\phi^p\}$



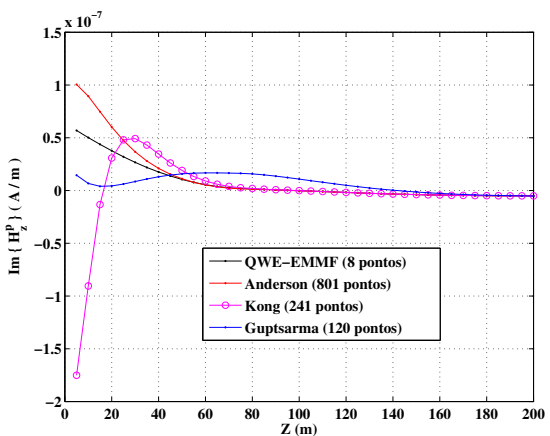
(c) $Re\{H_r^p\}$



(d) $Im\{H_r^p\}$



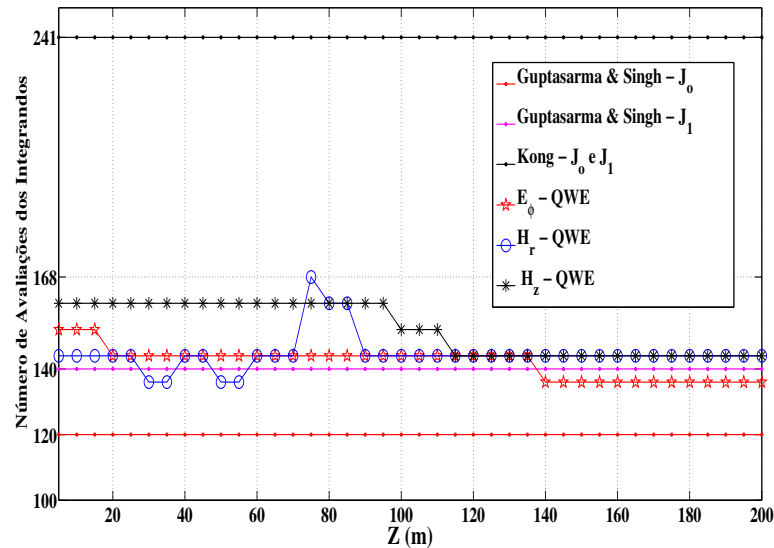
(e) $Re\{H_z^p\}$



(f) $Im\{H_z^p\}$

Fonte: Do autor

Figura 8 – Número de avaliações dos integrandos das componentes de campo com filtros digitais de Guptasarma e Singh (1997), Kong (2007) e QWE-EMMF para a investigação em profundidade do modelo da figura (6).



Fonte: Do autor

Para testarmos a precisão nos cálculos das componentes de campo no domínio espectral, realizamos a transformada inversa dupla de Fourier para passar do domínio (k_x, k_y, z) para o domínio espacial (r, z) . Nestas investigações verificamos que a otimização acontece ao fazer a transformada inversa de (k_x, k_y, z) para (x, k_y, z) com integração no plano complexo, e deste, para o espacial, com filtros de 81 pontos seno e cosseno de Key (2009) e encontrados em <http://marineemlab.ucsd.edu/Projects/Occam/IDCSEM/>. Por isso, os campos secundários obtidos pelo método de Elementos Finitos, descrito a seguir, foram obtidos com uso de integração no plano complexo sobre as componentes primárias (2.22) e (2.23). Os campos totais são então somas dos secundários obtidos pelo método de Elementos Finitos, com os primários obtidos por QWE.

2.2 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS NA MODELAGEM 2,5D

Quando as heterogeneidades num meio geoeletrico podem ser consideradas infinitas numa direção (direção do “strike”) podemos ter um problema de modelagem 2D ou 2,5D. Se uma componente de campo primário tem a mesma direção do “strike” temos um problema 2D. É o que temos, por exemplo, na modelagem excitada por ondas planas, ou por uma linha de corrente ou um conjunto de linhas de correntes infinitas paralelas ao “strike”. O mesmo acontece num poço vertical tendo como transmissor um DMV em que a componente ϕ do campo não se modifica nessa direção, sob a consideração de serem constantes as propriedades físicas tomadas

axialmente no modelo 1D. Na modelagem 2,5D, nenhuma das componentes do campo primário é invariante em qualquer direção. São os casos, por exemplo, de um DMV ou BCH na superfície, um dipolo magnético horizontal num poço ou uma linha infinita de corrente oblíqua à direção do “strike”. No uso de EF usamos transformadas integrais, geralmente Fourier ou Hankel, para simplificar a formulação das equações envolvidas, isso equivalendo a transformar um problema complexo em um mais simples de ondas planas.

A técnica de EF é baseada no método da projeção para a obtenção de uma representação matricial do problema discretizado originalmente. Com um operador L , o método das projeções consiste em obter uma solução aproximada da solução da equação

$$L(u) = b,$$

usando uma combinação linear finita de funções conhecidas, chamadas funções base. Se a solução de um certo problema pertence a algum espaço de funções de dimensão infinita, então a solução aproximada é obtida num espaço de dimensão finita, gerado pelas funções base. A projeção da solução sobre o subespaço de dimensão finita é a solução aproximada. Daí, se $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$, são as funções base, a solução aproximada u_m é dada por $u_m = \sum_{i=1}^m \alpha_i \cdot \varphi_i$. Substituindo a solução aproximada u_m no problema original, teremos o aparecimento de um resíduo r , ou seja, $L(u_m) + r = b$, e, como queremos obter u_m tal que $L(u_m)$ seja o mais próximo possível de b devemos impor que $L(u_m)$ seja a projeção ortogonal de b no subespaço que contém $L(u_m)$. Designando por $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, as funções (funções-peso) que constituem uma base para tal subespaço, devemos fazer com que o resíduo r seja ortogonal a cada uma dessas funções-peso, isto é:

$$\begin{aligned} \langle r, \omega_i \rangle &= \langle b - L(u_m), \omega_i \rangle = 0, & i = 1, \dots, m, \\ \langle L(u_m), \omega_i \rangle &= \langle b, \omega_i \rangle, \\ \langle L \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j \varphi_j \right), \omega_i \rangle &= \langle b, \omega_i \rangle, \\ \langle \sum_{j=1}^m \alpha_j L(\varphi_j), \omega_i \rangle &= \langle b, \omega_i \rangle = \sum_{j=1}^m \alpha_j \langle L(\varphi_j), \omega_i \rangle = \langle b, \omega_i \rangle. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Desta última equação obtemos um sistema matricial em que os α_j são os coeficientes a serem determinados. Quando o operador L é diferencial, o método das projeções costuma ser chamado de método de Elementos Finitos. Quando o L é integral, no caso de Equações Integrais, o método é conhecido como método dos momentos (CHEW; TONG; HU, 2009). O produto interno indicado é o usual, ou seja, para duas funções f e g tem-se que $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f g d\Omega$, com Ω o domínio das funções f e g . Assim a última equação acima pode ser reescrita como:

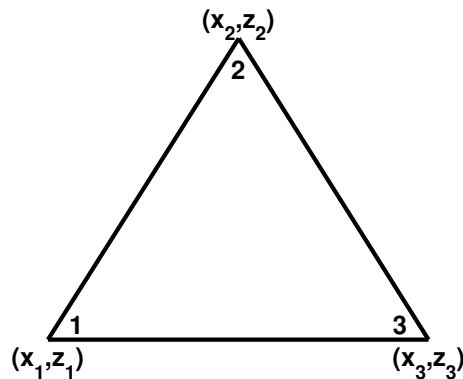
$$\sum_{j=1}^m \alpha_j \int_{\Omega} L(\varphi_j) \omega_i d\Omega = \int_{\Omega} b \omega_i d\Omega, \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.29)$$

O método de EF é um método numérico de busca de solução de equações diferenciais que possuem condições de contorno conhecidas e que se baseia no método das projeções. As funções base $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ também satisfazem as condições de contorno. Dentre várias aproximações possíveis, o método que aqui empregamos, é o de Galerkin (JIN, 2002; MEUNIER, 2010). Nesse caso, as funções-peso são as mesmas funções base. Da equação (2.29) obtemos um sistema linear $K_g c = F_g$, com incógnitas $c = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)^t$, em que $F_g = (f_1, \dots, f_m)^t$, sendo $f_i = \int_{\Omega} b \varphi_i d\Omega$, é chamado vetor fonte global, e $K_g = (k_{ij})$, com $k_{ij} = \int_{\Omega} L(\varphi_j) \varphi_i d\Omega$, matriz global. A matriz K_g depende fundamentalmente das funções base $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$ que geram o subespaço onde estamos procurando a solução aproximada u_m .

O método cria sub-regiões limitadas do domínio Ω , chamadas de elementos finitos, dentro dos quais as funções base são definidas e busca as combinações das funções base que satisfaçam as condições definidas. Para cada elemento, obtemos a matriz local K_e e o vetor fonte local F_e . Em vez de um problema contínuo, resolve-se um problema discreto cuja solução aproxima a solução da equação diferencial ou do sistema de equações diferenciais originais.

Após ter definido a região Ω como domínio da aplicação do operador que define as equações diferenciais, dividimos essa região em sub-regiões geométricas planas Ω_e , que determina um elemento e , aqui considerado como triangular (como ilustra a figura (9)), de modo que $\Omega = \bigcup_{e=1}^n \Omega_e$ e $\Omega_e \cap \Omega_s = \emptyset$, se $e \neq s$, sendo n o número de elementos. Trabalhamos aqui apenas com elementos triangulares (elementos com outras formas são discutidos em (MEUNIER, 2010)). Os nós locais (vértices dos triângulos) são numerados, conforme mostrado na figura (9).

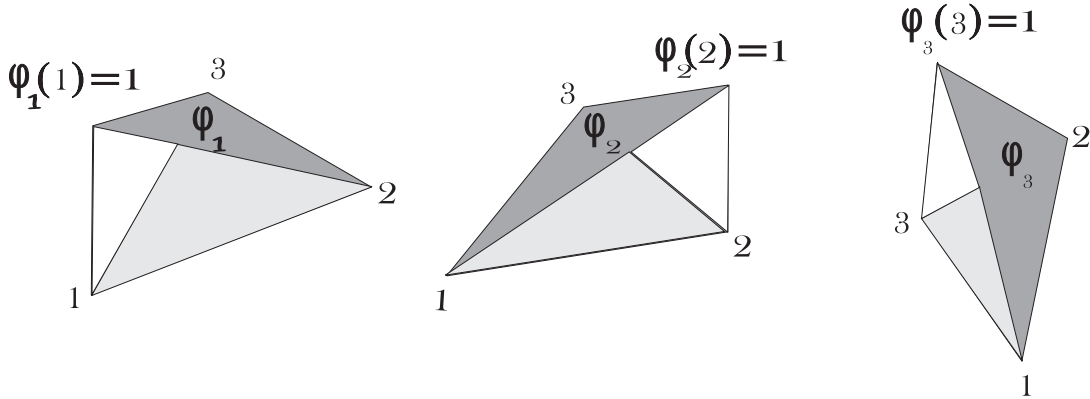
Figura 9 – Exemplo de um elemento triangular com sua numeração local de nós.



Fonte: Do autor

As funções base φ_i tomadas sobre cada elemento são os planos, que representamos na figura 10, $\varphi_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i z)$, caracterizadas por $\varphi_i(i) = 1$ e $\varphi_i(j) = 0$, se $i \neq j$, tendo $a_1 = x_2 z_3 - x_3 z_2$, $a_2 = x_3 z_1 - x_1 z_3$, $a_3 = x_1 z_2 - x_2 z_1$, $b_1 = z_2 - z_3$, $b_2 = z_3 - z_1$, $b_3 = z_1 - z_2$, $c_1 = x_3 - x_2$, $c_2 = x_1 - x_3$, $c_3 = x_2 - x_1$, e A a área do elemento e , dada por $A = \frac{1}{2} | a_1 + a_2 + a_3 |$.

Figura 10 – Funções base de um elemento triangular.



Fonte: Do autor

Apresentamos aqui de forma reduzida a formulação 2,5D via EF para fonte finita ou pontual localizada no ar, não necessariamente para o DMV ou BCH. No caso do DMV e da BCH as componentes do campo primário são E_ϕ^p , H_r^p e H_z^p . A direção do “strike” adotada aqui será na coordenada y , e na modelagem os cálculos serão realizados no plano XZ ou paralelos a ele. Assim E_ϕ^p se apresentará como sendo E_x^p e E_y^p . Desenvolvemos nosso código mediante a formulação apresentada em Mitsuata (2000) e Rijo (2005) mas apresentamos de forma semelhante a Key e Owall (2011). Aqui aparecerá a componente E_z^p pois compreende a formulação geral de EF 2,5D, mas em nosso contexto essa componente não existe. Designado $\mathbf{J}^s = \Delta\eta\mathbf{E}^p$ como densidade de corrente elétrica secundária, as equações (2.11) e (2.12) podem ser escritas como:

$$\nabla \times \mathbf{H}^s - \eta\mathbf{E}^s = \mathbf{J}^s, \quad (2.30)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^s + \mathfrak{z}\mathbf{H}^s = \mathbf{0}. \quad (2.31)$$

A fonte é tridimensional e o modelo é 2D, daí fazemos a transformada de Fourier em y para obtenção de um tratamento de ondas planas em y . Aplicando-se a transformada nas equações (2.30) e (2.31) e tendo feito algumas manipulações algébricas, que são descritas detalhadamente no apêndice C, obteremos as equações diferenciais equivalentes a (C.17) e (C.18):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{\eta}{u^2} \nabla \widehat{E}_y^s \right) - \eta \widehat{E}_y^s + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial x} \right) = \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ik_y}{u^2} \widehat{J}_x^s \right) + \widehat{J}_y^s - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{ik_y}{u^2} \widehat{J}_z^s \right), \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{\mathfrak{z}}{u^2} \nabla \widehat{H}_y^s \right) - \mathfrak{z} \widehat{H}_y^s - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial x} \right) = \\ - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mathfrak{z}}{u^2} \widehat{J}_x^s \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathfrak{z}}{u^2} \widehat{J}_z^s \right). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Aqui se fez uso do número de onda ao quadrado, $k^2 = -\mathfrak{z}\eta$, da variável k_y no domínio espectral de Fourier e da constante de propagação $u = \sqrt{k_y^2 - k^2}$.

Aplicando o método de Galerkin (MEUNIER, 2010) em cada elemento nas equações (2.32) e (2.33), inicialmente pelo passo indicado em (2.28) obteremos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \left[\nabla \cdot \left(\frac{\eta_e}{u_e^2} \nabla \widehat{E}_y^s \right) \right] \varphi_i d\Omega - \int_{\Omega_e} \eta_e \widehat{E}_y^s \varphi_i d\Omega + \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ik_y}{u_e^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial z} \right) \right] \varphi_i d\Omega \\ & - \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{ik_y}{u_e^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial x} \right) \right] \varphi_i d\Omega = - \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ik_y}{u_e^2} \widehat{J}_x^s \right) \right] \varphi_i d\Omega + \int_{\Omega_e} \widehat{J}_y^s \varphi_i d\Omega \\ & - \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{ik_y}{u_e^2} \widehat{J}_z^s \right) \right] \varphi_i d\Omega \end{aligned} \quad (2.34)$$

e

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} \left[\nabla \cdot \left(\frac{\mathfrak{z}_e}{u_e^2} \nabla \widehat{H}_y^s \right) \right] \varphi_i d\Omega - \int_{\Omega_e} \mathfrak{z}_e \widehat{H}_y^s \varphi_i d\Omega - \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ik_y}{u_e^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial z} \right) \right] \varphi_i d\Omega \\ & + \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{ik_y}{u_e^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial x} \right) \right] \varphi_i d\Omega = - \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mathfrak{z}_e}{u_e^2} \widehat{J}_x^s \right) \right] \varphi_i d\Omega + \int_{\Omega_e} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathfrak{z}_e}{u_e^2} \widehat{J}_z^s \right) \right] \varphi_i d\Omega. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Supondo que em cada elemento as propriedades físicas são constantes, e usando a identidade vetorial $\alpha \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\alpha \mathbf{u}) - \nabla \alpha \cdot \mathbf{u}$ sobre a primeira parcela de cada equação (2.34) e (2.35) obteremos:

$$\int_{\Omega_e} \left[\nabla \cdot \left(\frac{\eta_e}{u_e^2} \nabla \widehat{E}_y^s \right) \right] \varphi_i d\Omega = \frac{\eta_e}{u_e^2} \int_{\Omega_e} \nabla \cdot (\nabla \widehat{E}_y^s \varphi_i) d\Omega - \frac{\eta_e}{u_e^2} \int_{\Omega_e} \nabla \widehat{E}_y^s \cdot \nabla \varphi_i d\Omega, \quad (2.36)$$

$$\int_{\Omega_e} \left[\nabla \cdot \left(\frac{\mathfrak{z}_e}{u_e^2} \nabla \widehat{H}_y^s \right) \right] \varphi_i d\Omega = \frac{\mathfrak{z}_e}{u_e^2} \int_{\Omega_e} \nabla \cdot (\nabla \widehat{H}_y^s \varphi_i) d\Omega - \frac{\mathfrak{z}_e}{u_e^2} \int_{\Omega_e} \nabla \widehat{H}_y^s \cdot \nabla \varphi_i d\Omega. \quad (2.37)$$

Sobre a primeira parcela do segundo membro de cada identidade acima podemos aplicar o teorema da divergência $\int_{\Omega_e} \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega = \oint_{\partial\Omega_e} \mathbf{v} \cdot \widehat{\mathbf{n}} d\Omega$, a fim de chegarmos em:

$$\frac{\eta_e}{u_e^2} \int_{\Omega_e} \nabla \cdot (\nabla \widehat{E}_y^s \varphi_i) d\Omega = \frac{\eta_e}{u_e^2} \oint_{\partial\Omega_e} (\nabla \widehat{E}_y^s \varphi_i) \cdot \widehat{\mathbf{n}} d\Omega, \quad (2.38)$$

$$\frac{\mathfrak{z}_e}{u_e^2} \int_{\Omega_e} \nabla \cdot (\nabla \widehat{H}_y^s \varphi_i) d\Omega = \frac{\mathfrak{z}_e}{u_e^2} \oint_{\partial\Omega_e} (\nabla \widehat{H}_y^s \varphi_i) \cdot \widehat{\mathbf{n}} d\Omega. \quad (2.39)$$

Sobre as demais parcelas que contém derivadas parciais nas equações (2.34) e (2.35) podemos aplicar o teorema de Green

$$\int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi}{\partial x} \varphi d\Omega = - \int_{\Omega_e} \phi \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\Omega + \oint_{\partial\Omega_e} \phi \varphi n_x d\Omega$$

$$\int_{\Omega_e} \frac{\partial \phi}{\partial z} \varphi d\Omega = - \int_{\Omega_e} \phi \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\Omega + \oint_{\partial\Omega_e} \phi \varphi n_z d\Omega$$

Agrupando todas as integrais de linha tem-se as funções:

$$\widehat{E}_x^s = -\frac{\mathfrak{z}}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial z} - \frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial x} - \frac{\mathfrak{z}}{u^2} \widehat{J}_x^s, \quad (2.40)$$

$$\widehat{E}_z^s = \frac{\mathfrak{z}}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial x} - \frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial z} - \frac{\mathfrak{z}}{u^2} \widehat{J}_z^s, \quad (2.41)$$

$$\widehat{H}_x^s = \frac{\eta}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial z} - \frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial x} + \frac{ik_y}{u^2} \widehat{J}_z^s, \quad (2.42)$$

$$\widehat{H}_z^s = -\frac{\eta}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial x} - \frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial z} - \frac{ik_y}{u^2} \widehat{J}_x^s, \quad (2.43)$$

com \widehat{E}_x^s , \widehat{E}_z^s , \widehat{H}_x^s e \widehat{H}_z^s encontradas nas manipulações algébricas para as obtenção das fórmulas (2.32) e (2.33). Com essas simplificações podemos escrever (2.34) e (2.35) então da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & -\frac{\eta_e}{u_e^2} \int_{\Omega_e} [\nabla \widehat{E}_y^s \cdot \nabla \varphi_i + u_e^2 \widehat{E}_y^s \varphi_i] d\Omega + \frac{ik_y}{u_e^2} \int_{\Omega_e} R \nabla \widehat{H}_y^s \cdot \nabla \varphi_i d\Omega = \frac{ik_y}{u_e^2} \int_{\Omega_e} \widehat{\mathbf{J}}_t^s \cdot \nabla \varphi_i d\Omega \\ & + \int_{\Omega_e} \widehat{J}_y^s \varphi_i d\Omega - \oint_{\partial\Omega_e} (R \widehat{\mathbf{H}}_t^s \varphi_i) \cdot \widehat{\mathbf{n}} d\Omega \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\mathfrak{z}}{u_e^2} \int_{\Omega_e} [\nabla \widehat{H}_y^s \cdot \nabla \varphi_i + u_e^2 \widehat{H}_y^s \varphi_i] d\Omega - \frac{ik_y}{u_e^2} \int_{\Omega_e} R \nabla \widehat{E}_y^s \cdot \nabla \varphi_i d\Omega = -\frac{\mathfrak{z}}{u_e^2} \int_{\Omega_e} \widehat{\mathbf{J}}_t^s \cdot R \nabla \varphi_i d\Omega \\ & + \oint_{\partial\Omega_e} (R \widehat{\mathbf{E}}_t^s \varphi_i) \cdot \widehat{\mathbf{n}} d\Omega \end{aligned} \quad (2.45)$$

em que $\widehat{\mathbf{J}}_t^s = (\widehat{J}_x^s, \widehat{J}_z^s)$ é a densidade de corrente secundária tangencial, $R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\widehat{\mathbf{H}}_t^s = (\widehat{H}_x^s, \widehat{H}_z^s)^t$ é o campo magnético secundário tangencial e $\widehat{\mathbf{E}}_t^s = (\widehat{E}_x^s, \widehat{E}_z^s)^t$ é o campo elétrico secundário tangencial.

Pela continuidade das componentes tangenciais dos campos $\widehat{\mathbf{E}}_t^s$ e $\widehat{\mathbf{H}}_t^s$ as integrais de linha na fronteira de cada elemento se anularão quando computadas com as contribuições dos elementos adjacentes, sobrando apenas aquelas das bordas da malha, na qual se considera as condições de Dirichlet homogêneas; conseqüentemente desprezaremos tais parcelas dessas duas últimas equações. Segundo Rijo (2005) as equações (2.44) e (2.45) formam um sistema de equações de onda dos campos acoplados E_y^s e H_y^s , denotando os modos de propagação TE e TM, em que as parcelas $\frac{ik_y}{u_e^2} \int_{\Omega_e} R \nabla \widehat{H}_y^s \cdot \nabla \varphi_i d\Omega$ e $\frac{ik_y}{u_e^2} \int_{\Omega_e} R \nabla \widehat{E}_y^s \cdot \nabla \varphi_i d\Omega$ são os termos de acoplamento dos dois modos.

Agora, escrevendo as componentes de campo em questão como combinação linear das funções base

$$\begin{aligned} \widehat{E}_y^s &= \widehat{E}_{y_1}^s \varphi_1 + \widehat{E}_{y_2}^s \varphi_2 + \widehat{E}_{y_3}^s \varphi_3, \\ \widehat{H}_y^s &= \widehat{H}_{y_1}^s \varphi_1 + \widehat{H}_{y_2}^s \varphi_2 + \widehat{H}_{y_3}^s \varphi_3, \end{aligned}$$

e em \widehat{J}_x^s , \widehat{J}_y^s e \widehat{J}_z^s fazendo uso de

$$\begin{aligned}\widehat{E}_x^p &= \widehat{E}_{x_1}^p \varphi_1 + \widehat{E}_{x_2}^p \varphi_2 + \widehat{E}_{x_3}^p \varphi_3, \\ \widehat{E}_y^p &= \widehat{E}_{y_1}^p \varphi_1 + \widehat{E}_{y_2}^p \varphi_2 + \widehat{E}_{y_3}^p \varphi_3 \quad \mathbf{e} \\ \widehat{E}_z^p &= \widehat{E}_{z_1}^p \varphi_1 + \widehat{E}_{z_2}^p \varphi_2 + \widehat{E}_{z_3}^p \varphi_3\end{aligned}$$

chega-se às equações:

$$\begin{aligned}-\frac{\eta_e}{u_e^2} \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega_e} [\nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i + u_e^2 \varphi_j \varphi_i] d\Omega \widehat{E}_{y_j}^s + \frac{ik_y}{u_e^2} \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega_e} R \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i d\Omega \widehat{H}_{y_j}^s = \\ \frac{ik_y \Delta \eta_e}{u_e^2} \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega_e} \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} d\Omega \widehat{E}_{x_j}^p + \Delta \eta_e \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega_e} \varphi_j \varphi_i d\Omega \widehat{E}_{y_j}^p + \frac{ik_y \Delta \eta_e}{u_e^2} \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega_e} \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} d\Omega \widehat{E}_{z_j}^p;\end{aligned}\quad (2.46)$$

e

$$\begin{aligned}-\frac{\mathfrak{z}}{u_e^2} \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega_e} [\nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i + u_e^2 \varphi_j \varphi_i] d\Omega \widehat{H}_{y_j}^s - \frac{ik_y}{u_e^2} \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega_e} R \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i d\Omega \widehat{E}_{y_j}^s = \\ \frac{\mathfrak{z} \Delta \eta_e}{u_e^2} \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega_e} \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} d\Omega \widehat{E}_{x_j}^p - \frac{\mathfrak{z} \Delta \eta_e}{u_e^2} \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega_e} \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} d\Omega \widehat{E}_{z_j}^p, \quad \text{com } i, j = 1, 2, 3.\end{aligned}\quad (2.47)$$

As matrizes locais K_e e vetores-fonte locais F_e , e consequentemente matriz e vetor-fonte global, são determinados conhecendo-se os resultados das integrais acima. Com a fórmula para integração de polinômios em triângulos (JIN, 2002; KEY; OVAL, 2011):

$$\int_{\Omega_e} \varphi_1^\alpha \varphi_2^\beta \varphi_3^\gamma dx dz = 2A \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!}\quad (2.48)$$

encontramos que:

$$\int_{\Omega_e} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i d\Omega = \frac{1}{4A} (b_j b_i + c_j c_i); \quad (2.49)$$

$$\int_{\Omega_e} \varphi_j \varphi_i d\Omega = \begin{cases} \frac{A}{6} & \text{se } i = j \\ \frac{A}{12}, & \text{se } i \neq j; \end{cases} \quad (2.50)$$

$$\int_{\Omega_e} (R \nabla \varphi_j) \cdot \nabla \varphi_i d\Omega = \frac{1}{4A} (b_j c_i - b_i c_j); \quad (2.51)$$

$$\int_{\Omega_e} \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} d\Omega = \frac{b_i}{6}; \quad (2.52)$$

e

$$\int_{\Omega_e} \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} d\Omega = \frac{c_i}{6}; \quad (2.53)$$

Com a variação de i e j das equações (2.46) e (2.47) teremos então os elementos matriciais:

$$K_e^{TE} = \frac{-\eta_e}{4Au_e^2} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_2b_1 + c_2c_1 & b_3b_1 + c_3c_1 \\ b_1b_2 + c_1c_2 & b_2^2 + c_2^2 & b_3b_2 + c_3c_2 \\ b_1b_3 + c_1c_3 & b_2b_3 + c_2c_3 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} - \frac{A\eta_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

$$K_e^{ACTE} = \frac{ik_y}{4Au_e^2} \begin{bmatrix} 0 & b_2c_1 - b_1c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 & 0 & b_3c_2 - b_2c_3 \\ b_1c_3 - b_3c_1 & b_2c_3 - b_3c_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

$$F_e^{TE} = \frac{ik_y\Delta\eta_e}{6u_e^2} (\hat{E}_{x_1}^p + \hat{E}_{x_2}^p + \hat{E}_{x_3}^p) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + \frac{A\Delta\eta_e}{12} \begin{bmatrix} 2\hat{E}_{y_1}^p + \hat{E}_{y_2}^p + \hat{E}_{y_3}^p \\ \hat{E}_{y_1}^p + 2\hat{E}_{y_2}^p + \hat{E}_{y_3}^p \\ \hat{E}_{y_1}^p + \hat{E}_{y_2}^p + 2\hat{E}_{y_3}^p \end{bmatrix} + \frac{ik_y\Delta\eta_e}{6u_e^2} (\hat{E}_{z_1}^p + \hat{E}_{z_2}^p + \hat{E}_{z_3}^p) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

$$K_e^{TM} = -\frac{\mathfrak{z}_e}{4Au_e^2} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_2b_1 + c_2c_1 & b_3b_1 + c_3c_1 \\ b_1b_2 + c_1c_2 & b_2^2 + c_2^2 & b_3b_2 + c_3c_2 \\ b_1b_3 + c_1c_3 & b_2b_3 + c_2c_3 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} - \frac{A\mathfrak{z}_e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

$$K_e^{ACTM} = -K_e^{ACTE}, \quad (2.58)$$

e

$$F_e^{TM} = \frac{\mathfrak{z}_e\Delta\eta_e}{6u_e^2} (\hat{E}_{x_1}^p + \hat{E}_{x_2}^p + \hat{E}_{x_3}^p) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} - \frac{\mathfrak{z}_e\Delta\eta_e}{6u_e^2} (\hat{E}_{z_1}^p + \hat{E}_{z_2}^p + \hat{E}_{z_3}^p) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \quad (2.59)$$

As equações (2.46) e (2.47) nos dão um sistema de duas equações e duas incógnitas (\hat{E}_y^s e \hat{H}_y^s) em cada elemento que é solucionado como sistema global usando as combinações lineares $\hat{E}_y^s = \sum_{j=1}^3 \hat{E}_{y_j}^s \varphi_j$ e $\hat{H}_y^s = \sum_{j=1}^3 \hat{H}_{y_j}^s \varphi_j$, logo estamos interessados em descobrir $\hat{E}_{y_j}^s$ e $\hat{H}_{y_j}^s$. Observando a equação (2.46) percebemos que a primeira integral, que representa o produto de uma linha (os fatores de índice i) por uma coluna (os fatores com índice j) devem estar dispostos matricialmente de modo que $\hat{E}_{y_1}^s$, $\hat{E}_{y_2}^s$ e $\hat{E}_{y_3}^s$ fiquem num vetor coluna. No entanto, na mesma linha que aparecem as integrais relativas a \hat{E}_y^s deve aparecer também as integrais relativas às componentes de \hat{H}_y^s que são obviamente multiplicadas por $\hat{H}_{y_1}^s$, $\hat{H}_{y_2}^s$ e $\hat{H}_{y_3}^s$. Conseqüentemente

devemos ter cuidado ao colocar os \widehat{E}_y^s e \widehat{H}_y^s num único vetor coluna de modo a não cometer erros quando fizermos a consideração das integrais da equação (2.47).

A maneira que escolhemos foi de dispor o vetor coluna incógnita local sendo

$$[\widehat{E}_{y_1}^s \widehat{H}_{y_1}^s \widehat{E}_{y_2}^s \widehat{H}_{y_2}^s \widehat{E}_{y_3}^s \widehat{H}_{y_3}^s]^t.$$

E desse modo o vetor local de um elemento será

$$F_e = [F_1^{TE} F_1^{TM} F_2^{TE} F_2^{TM} F_3^{TE} F_3^{TM}]^t, \quad (2.60)$$

e a matriz local apresentar-se-á como

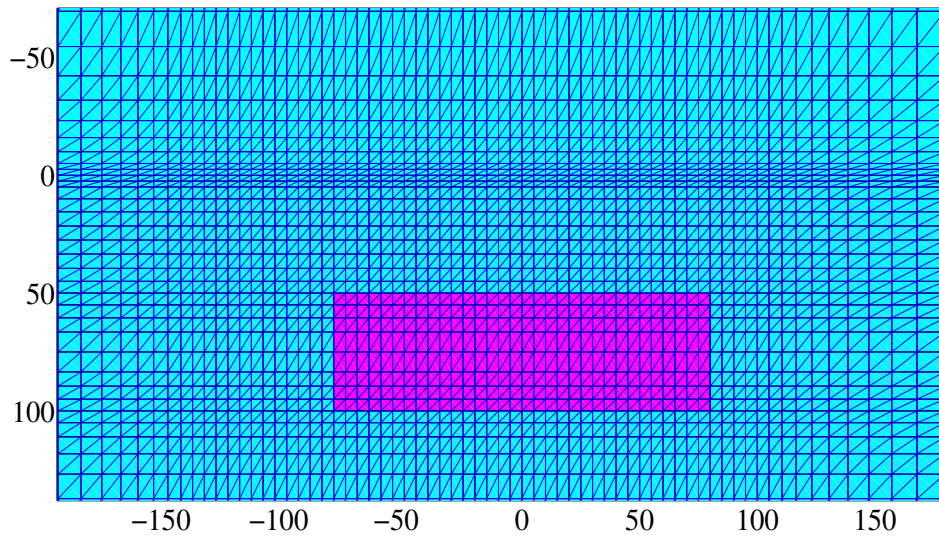
$$K_e = \begin{bmatrix} k_{11}^{TE} & k_{11}^{ACTE} & k_{12}^{TE} & k_{12}^{ACTE} & k_{13}^{TE} & k_{13}^{ACTE} \\ -k_{11}^{ACTE} & k_{11}^{TM} & -k_{12}^{ACTE} & k_{12}^{TM} & -k_{13}^{ACTE} & k_{13}^{TM} \\ k_{21}^{TE} & k_{21}^{ACTE} & k_{22}^{TE} & k_{22}^{ACTE} & k_{23}^{TE} & k_{23}^{ACTE} \\ -k_{21}^{ACTE} & k_{21}^{TM} & -k_{22}^{ACTE} & k_{22}^{TM} & -k_{23}^{ACTE} & k_{23}^{TM} \\ k_{31}^{TE} & k_{31}^{ACTE} & k_{32}^{TE} & k_{32}^{ACTE} & k_{33}^{TE} & k_{33}^{ACTE} \\ -k_{31}^{ACTE} & k_{31}^{TM} & -k_{32}^{ACTE} & k_{32}^{TM} & -k_{33}^{ACTE} & k_{33}^{TM} \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

Tendo-se K_e e F_e locais, parte-se então para construção da matriz global K_g e do vetor fonte global F_g , que são descritas detalhadamente em Jin (2002) ou Meunier (2010).

Em decorrência de termos um sistema acoplado de duas incógnitas, a discretização do domínio Ω , objeto de nossa resolução, é feita numa malha na qual cada ponto de vértices dos elementos terá computação de dois nós, um para cada incógnita. A malha que utilizamos é a chamada estruturada, como ilustrada na figura (11). A numeração dos nós foi de dois números consecutivos em cada ponto a fim de obter o menor número de diagonais, paralelas e junto à diagonal principal. Tal número é denominado de banda da matriz de elementos finitos. A matriz global K_g é simétrica, esparsa e bandeda, e por isso somente a semibanda (diagonal principal mais suas paralelas superiores ou inferiores da banda) é armazenada e computada na resolução do sistema $K_g c = F_g$, que aqui é resolvido por eliminação gaussiana.

Após a determinação das soluções $\widehat{E}_y^s(x, k_y, z)$ e $\widehat{H}_y^s(x, k_y, z)$, em cada ky encontramos \widehat{E}_x^s por (2.40), \widehat{E}_z^s por (2.41), \widehat{H}_x^s por (2.42) e \widehat{H}_z^s por (2.43) através de diferenciação numérica. Para evitar descontinuidade nas componentes verticais, tomamos uma das primeiras linhas horizontais de nós abaixo da interface ar-terra, e sobre ela calculamos, em cada nó, a derivada do

Figura 11 – Exemplo de uma malha estruturada 2D de Elementos Finitos.



Fonte: Do autor

polinômio interpolador de Lagrange de segundo grau, computando-se com os dois nós adjacentes ao de interesse. Isto é feito tanto na direção x quanto na direção z . Quando uma posição de medida horizontal está entre dois nós, fazemos então uma interpolação linear de Lagrange das derivadas destes nós. A profundidade de linha de nós aqui adotada será de 1,5 m, a menos que seja informado um outro valor. O nível de aproximação obtido com esta aproximação depende de fatores como a condutividade e a frequência. Em todos os casos estudados nesta tese, esta profundidade é suficiente para obtermos um erro menor do que 0,5%.

De posse de todas as componentes do campo eletromagnético secundário no domínio (x, k_y, z) devemos fazer a transformada inversa de Fourier em k_y para chegarmos ao domínio espacial.

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x, k_y, z) e^{ik_y y} dk_y \quad (2.62)$$

Não dispomos de solução analítica para $f(x, y, z)$ e desse modo devemos obtê-la numericamente. A técnica aqui usada foi a de filtros digitais lineares. Decorrente da relação $e^{ik_y y} = \cos(k_y y) + i \sin(k_y y)$ e da paridade das componentes $\hat{E}_x^s, \hat{E}_y^s, \hat{E}_z^s, \hat{H}_x^s, \hat{H}_y^s$ e \hat{H}_z^s podemos utilizar em cada uma das transformadas inversas dessas componentes os filtros seno ou cosseno, mas para uso de filtros necessitamos de um valor $y \neq 0$, e conseqüentemente nossas respostas serão determinadas em plano paralelo ao plano XZ (com pequeno valor de y não incorremos em erro significativo). Usaremos

$$f(x, y, z) = \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{f}(x, k_y, z) \sin(k_y y) dk_y \quad (2.63)$$

para a transformada inversa de funções ímpares, e

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \widehat{f}(x, k_y, z) \cos(k_y y) dk_y \quad (2.64)$$

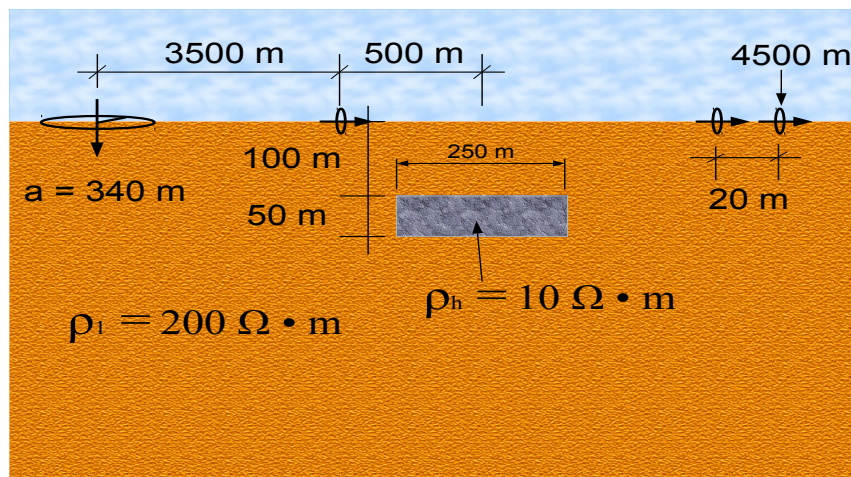
para transformada inversa de funções pares. Em todas nossas respostas 2,5D usamos o valor de $y = 1$ m, e abscissas e pesos de 81 pontos dos filtros encontrados no endereço:

<http://marineemlab.ucsd.edu/Projects/Occam/1DCSEM/>.

2.3 MODELAGEM 2,5D DA BCH

Como vimos acima, os elementos do vetor fonte envolvido no método de EF são as de campo elétrico no domínio espectral. Caso nossas respostas fossem procuradas no plano XZ teríamos apenas a contribuição de $\widehat{E}_y^p(x, k_y, z)$; mas como exposto no parágrafo anterior, deveremos utilizar também $\widehat{E}_x^p(x, k_y, z)$. Como não temos um método analítico para conhecer a paridade das componentes, seguimos Silva (2005). Fazemos uma variação de valores positivos e negativos de k_y em cada componente. A figura (12) mostra o modelo com o qual verificamos a paridade das componentes de campo eletromagnético secundárias do nosso código de EF-2,5D da BCH e também uma de suas validações. No modelo, a fonte tem raio $a = 340$ m, o semi-espaço inferior de resistividade $200 \Omega \cdot m$ hospeda uma heterogeneidade bidimensional, de resistividade $10 \Omega \cdot m$, que está com seu centro a 4000 m da BCH e 100 m de profundidade, e cujas dimensões são de 250 por 50 m.

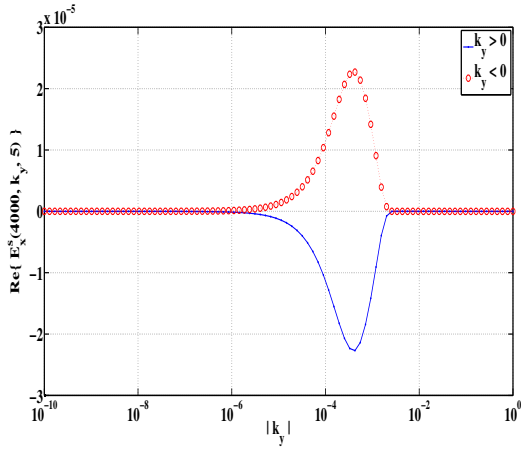
Figura 12 – Modelo para determinação da paridade das componentes secundárias de campo eletromagnético do programa de EF 2,5D da BCH.



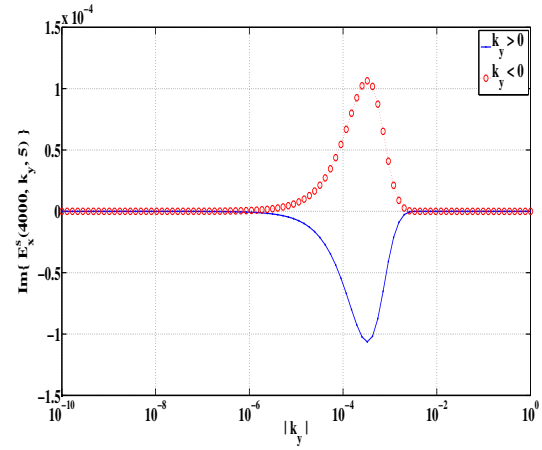
Fonte: Do autor

As figuras (13) e (14) apresentam respostas no domínio (x, k_y, z) , sobre o modelo da figura (12), que foram obtidas na subsuperfície no ponto $x = 4000$ m, $y = 1$ m e $z = 5$ m. Observamos com essas respostas que as componentes \widehat{E}_x^s , \widehat{E}_z^s e \widehat{H}_y^s são ímpares, enquanto que \widehat{E}_y^s , \widehat{H}_x^s e \widehat{H}_z^s são pares.

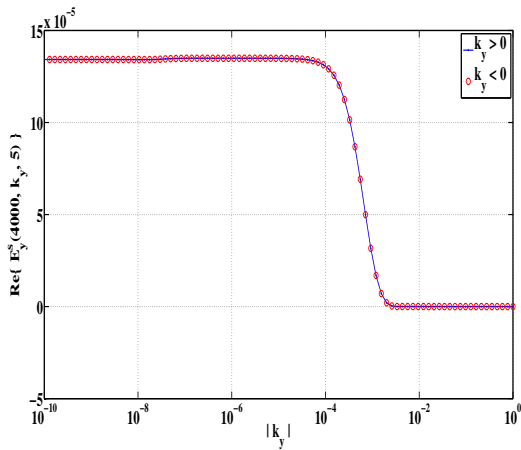
Figura 13 – Paridade do campo elétrico horizontal secundário no domínio (x, ky, z) . (a) $Re\{\widehat{E}_x^s\}$; (b) $Im\{\widehat{E}_x^s\}$; (c) $Re\{\widehat{E}_y^s\}$; (d) $Im\{\widehat{E}_y^s\}$; (e) $Re\{\widehat{E}_z^s\}$; (f) $Im\{\widehat{E}_z^s\}$.



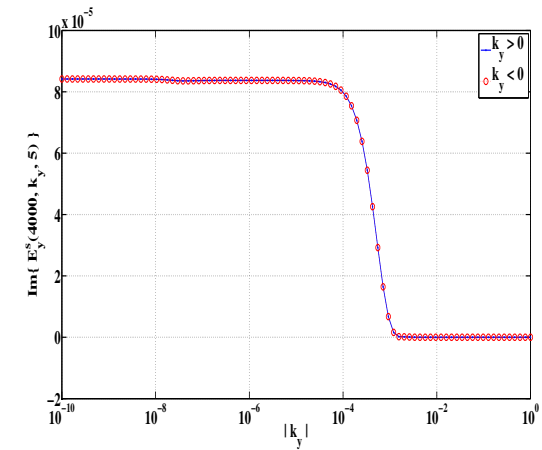
(a) Paridade de $Re\{\widehat{E}_x^s\}$



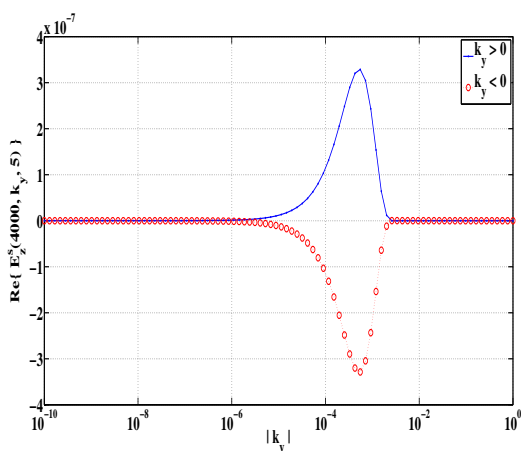
(b) Paridade de $Im\{\widehat{E}_x^s\}$



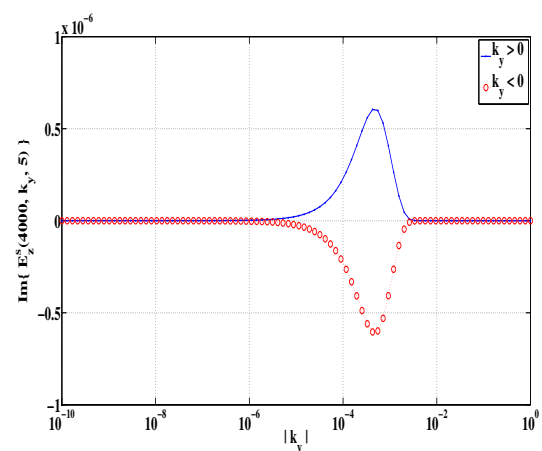
(c) Paridade de $Re\{\widehat{E}_y^s\}$



(d) Paridade de $Im\{\widehat{E}_y^s\}$



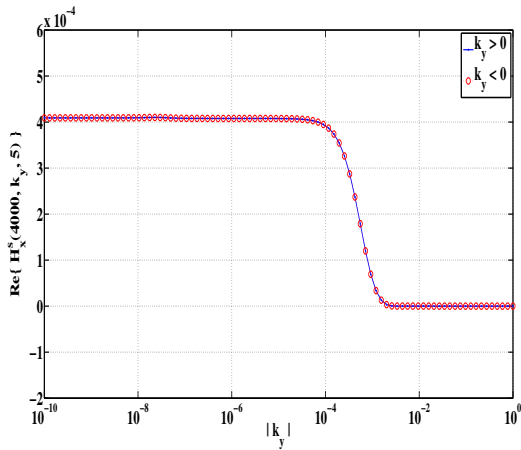
(e) Paridade de $Re\{\widehat{E}_z^s\}$



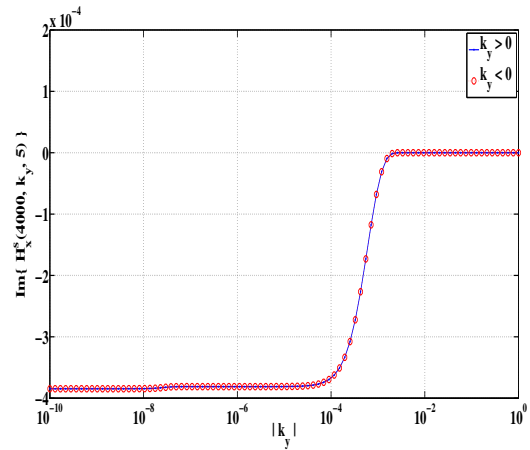
(f) Paridade de $Im\{\widehat{E}_z^s\}$

Fonte: Do autor

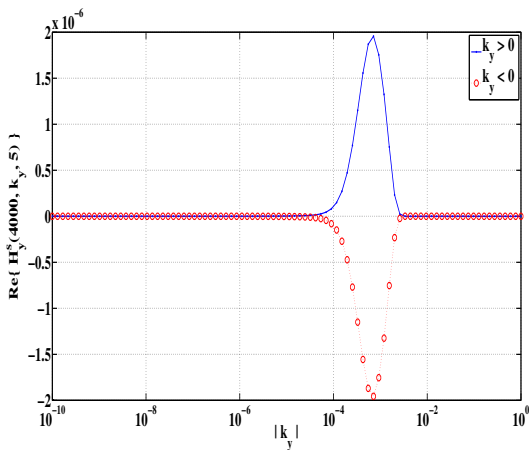
Figura 14 – Paridade do campo elétrico vertical e campo magnético horizontal secundários no domínio (x, ky, z) . (a) $Re\{\widehat{H}_x^s\}$; (b) $Im\{\widehat{H}_x^s\}$; (c) $Re\{\widehat{H}_y^s\}$; (d) $Im\{\widehat{H}_y^s\}$; (e) $Re\{\widehat{H}_z^s\}$; (f) $Im\{\widehat{H}_z^s\}$.



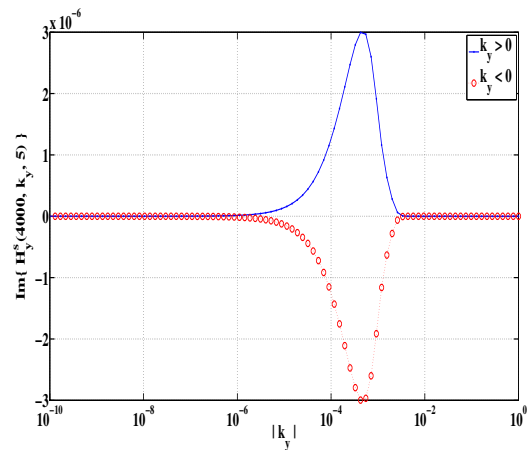
(a) Paridade de $Re\{\widehat{H}_x^s\}$



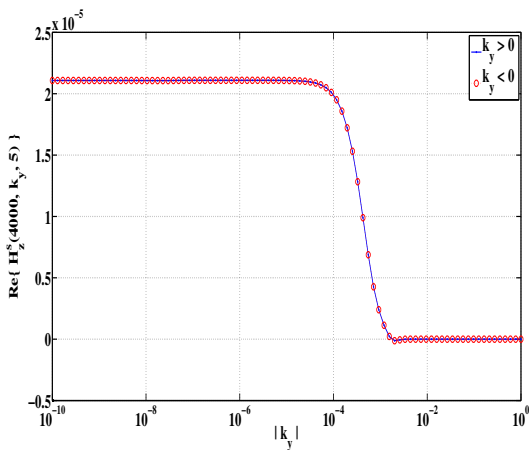
(b) Paridade de $Im\{\widehat{H}_x^s\}$



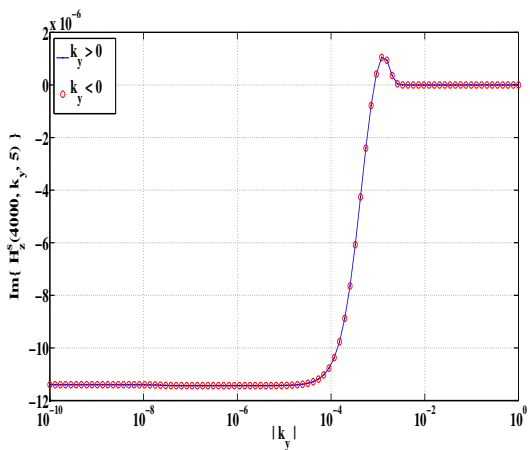
(c) Paridade de $Re\{\widehat{H}_y^s\}$



(d) Paridade de $Im\{\widehat{H}_y^s\}$



(e) Paridade de $Re\{\widehat{H}_z^s\}$



(f) Paridade de $Im\{\widehat{H}_z^s\}$

Fonte: Do autor

Após termos conhecido as paridades das componentes eletromagnéticas secundárias no domínio (x, k_y, z) realizamos suas transformadas inversa de Fourier para obtenção dos campos secundários no domínio espacial, e em seguida somamos com os campos primários para termos os campos totais.

Apesar de nosso código determinar qualquer componente de campo eletromagnético, mostramos resultados de nossa modelagem, somente sobre a componente radial H_r , já que o método EMMF utiliza apenas tal componente para gerar seções de resistividade aparente.

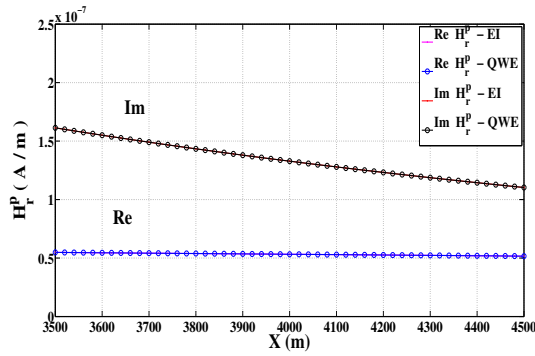
2.4 TESTES DE VALIDAÇÃO DA MODELAGEM 2,5D DA BCH

O primeiro modelo usado para validação de nosso código foi mostrado na figura (12). Aqui as observações são coletadas de 20 em 20 m, a partir de 3500 m e indo até 4500 m do centro da BCH.

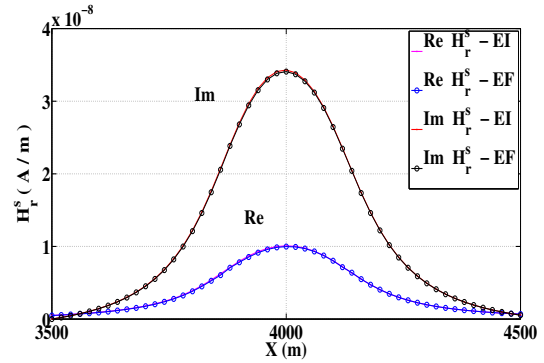
Nossas respostas para este modelo são comparadas com as de modelagem tridimensional por Equações Integrais (EI) do programa INTEM3D, construído pelo grupo da Universidade de Utah, através do consórcio de modelagem e inversão eletromagnética (Consortium for Electromagnetic Modelling and Inversion – CEMI), do qual faz parte a Petrobras. Neste teste, contamos com a colaboração do geofísico João Lucas Crepaldi, da Petrobras, que gentilmente gerou os dados da componente magnética radial para um modelo com uma heterogeneidade de 40 km de comprimento perpendicular à linha de medidas. A idéia aqui é a de que sendo o corpo um prisma longo, quanto mais afastadas estiverem as bordas em relação à linha de medidas, mais as respostas se aproximam daquelas de um modelo 2D, no qual o corpo tem comprimento infinito.

Na figura (15) mostramos as respostas de campo primário, H_r^p , e secundário, H_r^s , nas frequências de 2,4621 Hz; 60,619 Hz; 300,79 Hz e 1000 Hz. Nesta figura vemos que nossas respostas apresentam excelentes concordâncias com as de Equações Integrais do código INTEM3D, validando portanto nosso código de EF.

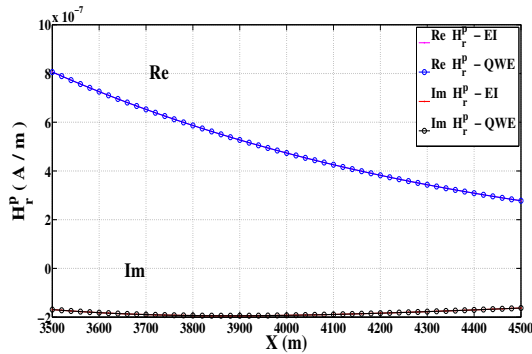
Figura 15 – H_r^p e H_r^s com EF 2,5D de nosso código e EI do CEMI. (a) H_r^p , $f = 2,4621$ Hz; (b) H_r^s , $f = 2,4621$ Hz (c) H_r^p , $f = 60,619$ Hz; (d) H_r^s , $f = 60,619$ Hz; (e) H_r^p , $f = 300,79$ Hz; (f) H_r^s , $f = 300,79$ Hz; (g) H_r^p , $f = 1$ kHz; (h) H_r^s , $f = 1$ kHz.



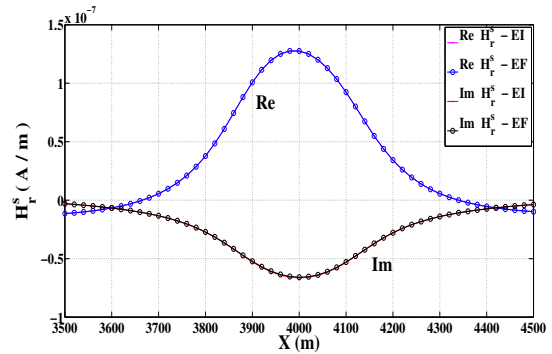
(a) H_r^p na frequência de 2,4621 Hz



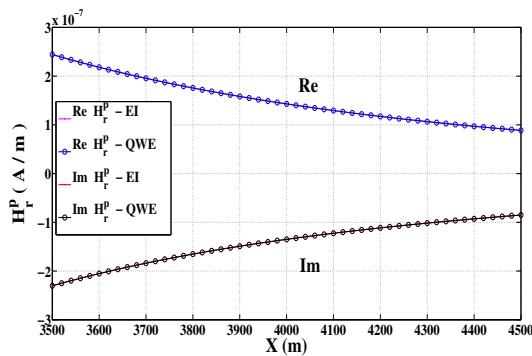
(b) H_r^s na frequência de 2,4621 Hz



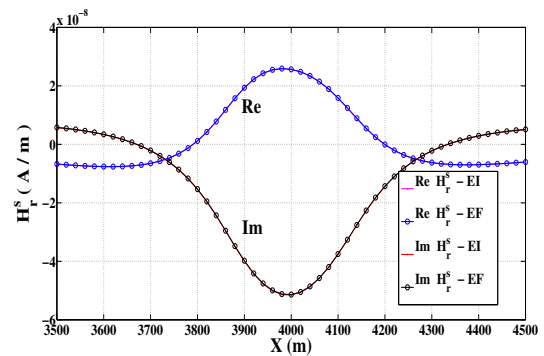
(c) H_r^p na frequência de 60,619 Hz



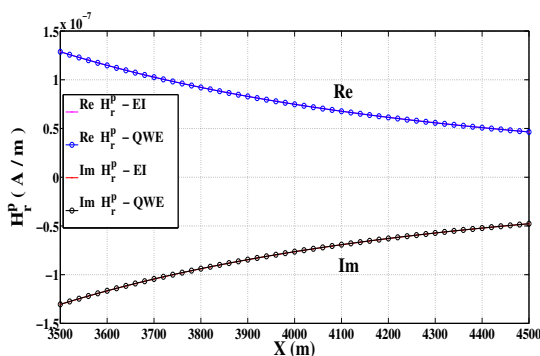
(d) H_r^s na frequência de 60,619 Hz



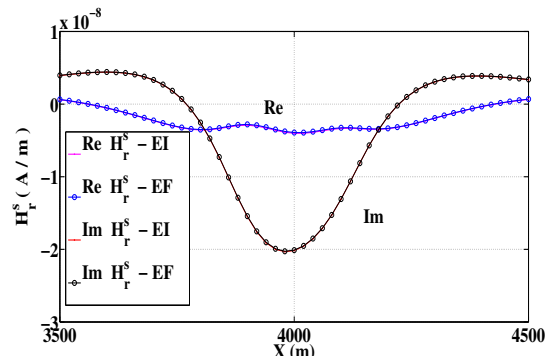
(e) H_r^p na frequência de 300,79 Hz



(f) H_r^s na frequência de 300,79 Hz



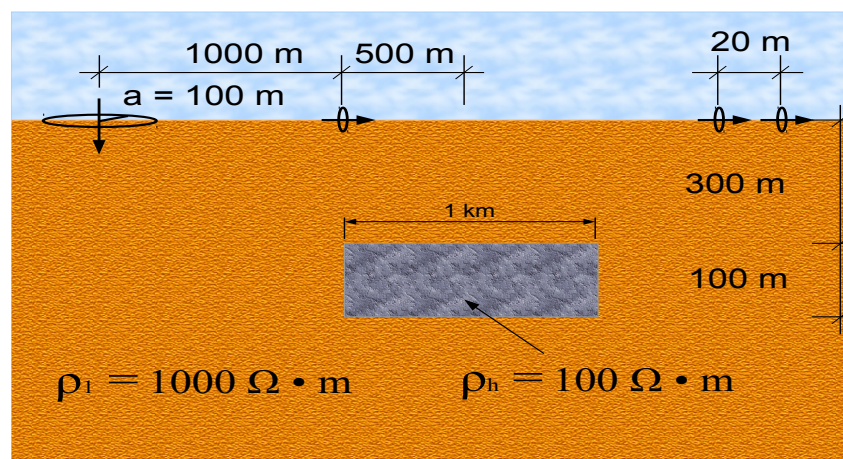
(g) H_r^p na frequência de 1000 Hz



(h) H_r^s na frequência de 1000 Hz

Uma segunda modelagem para validação do programa consiste em tomar uma heterogeneidade bidimensional isolada num semi-espço, e fazê-la variar sua extensão lateral até que ela seja tão grande que o efeito das bordas já não influencie nas posições de medida. Nesta situação, quanto mais afastadas forem as bordas do corpo 2D, mais as respostas coincidem com aquelas de um modelo 1D, constituído por uma camada de resistividade igual à do corpo 2D. O modelo inicial está ilustrado na figura (16). Aqui a BCH tem raio de 100 m. As medidas são feitas de 20 em 20 m. Neste modelo, calculamos as derivadas numéricas indicadas na equação (2.42) para gerar valores na profundidade de 5 m. O semiespaço possui resistividade $\rho_1 = 1000 \Omega \cdot m$, e o corpo, de $\rho_h = 100 \Omega \cdot m$, tem seu topo a 300 m de profundidade e espessura de 100 m. Estas heterogeneidades possuem centro horizontal a 1500 m do centro da BCH. Variamos seus comprimentos em x nos valores de 1, 3, 6, 15 e 30 km.

Figura 16 – Modelo para validação do programa de EF 2,5D da BCH comparando-se com respostas de meio estratificado.

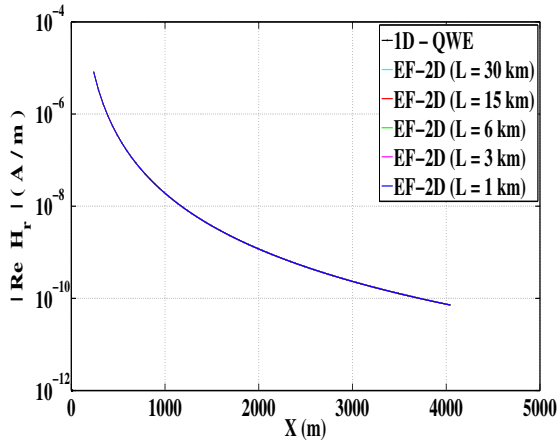


Fonte: Do autor

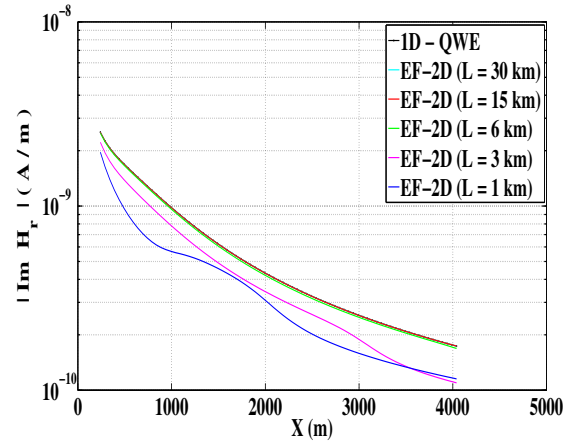
As primeiras curvas que mostramos na figura (17) desta segunda validação são do módulo das partes real e imaginária de H_r , computadas variando-se os pontos de observações de 240 a 4040 m nas frequências de 0,1; 15 e 666 Hz. Nela percebemos que heterogeneidades com extensão lateral a partir de 6 km são praticamente indistinguíveis das respostas do modelo estratificado, e que nas frequências de 0,1 e 15 Hz existe, na parte imaginária, sinalizações das extremidades dos corpos de 1 e 3 km.

O caso em que variamos a frequência em alguns pontos de observações fixos está mostrado na figura (18). Nas distâncias de aproximadamente 10, 15 e 20 vezes o raio da BCH, apresentamos o módulo das partes real e imaginária de H_r , na quantidade de 120 frequências no intervalo entre 0,1 e 10000 Hz. Novamente para corpos a partir de 6 km de extensão lateral, as curvas são quase idênticas às respostas do modelo 1D, sendo indistinguíveis para corpos com comprimentos maiores que 6 km.

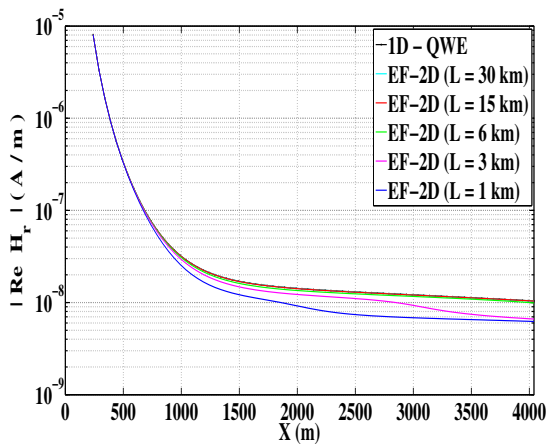
Figura 17 – Curvas de H_r , variando-se as posições de medida, obtidas na segunda validação da modelagem 2,5D da BCH. (a) $|Re\{H_r\}|$, $f = 0,1$ Hz; (b) $|Im\{H_r\}|$, $f = 0,1$ Hz; (c) $|Re\{H_r\}|$, $f = 15$ Hz; (d) $|Im\{H_r\}|$, $f = 15$ Hz; (e) $|Re\{H_r\}|$, $f = 666$ Hz; (f) $|Im\{H_r\}|$, $f = 666$ Hz.



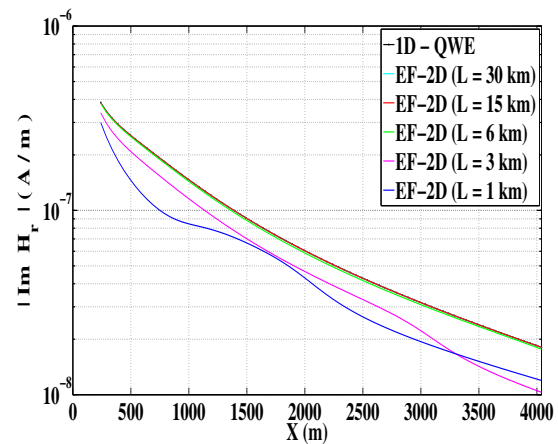
(a) $|Re\{H_r\}|$ na frequência de 0,1 Hz



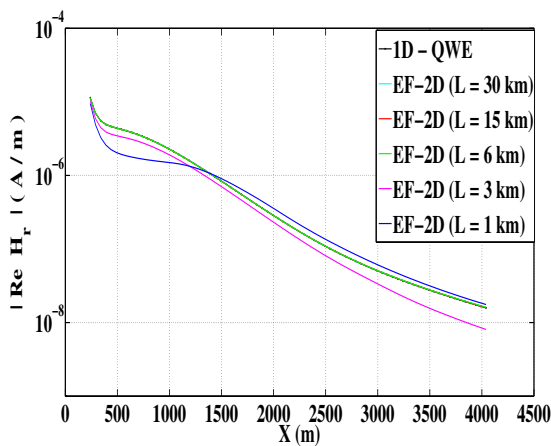
(b) $|Im\{H_r\}|$ na frequência de 0,1 Hz



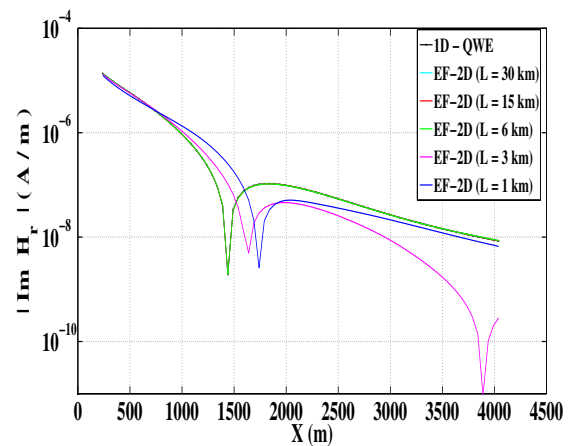
(c) $|Re\{H_r\}|$ na frequência de 15 Hz



(d) $|Im\{H_r\}|$ na frequência de 15 Hz



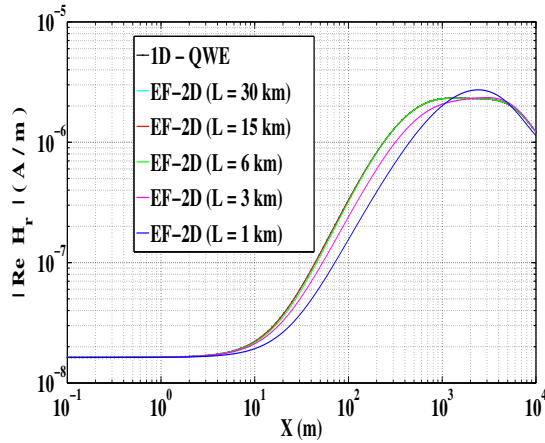
(e) $|Re\{H_r\}|$ na frequência de 666 Hz



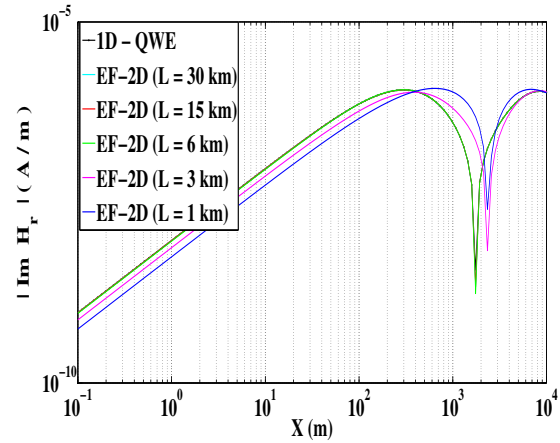
(f) $|Im\{H_r\}|$ na frequência de 666 Hz

Fonte: Do autor

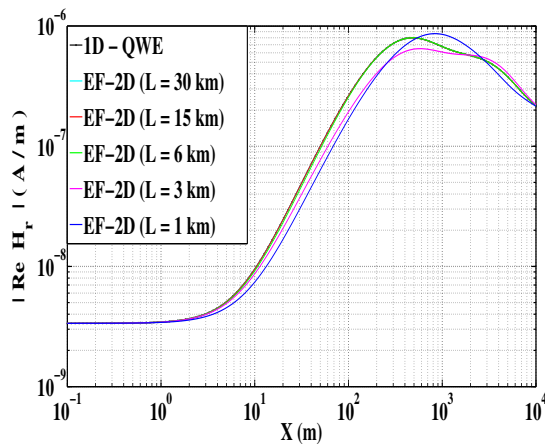
Figura 18 – Curvas de H_r , variando-se as frequências, obtidas na segunda validação da modelagem 2,5D da BCH. (a) $|Re\{H_r\}|$, $x = 1040$ m; (b) $|Im\{H_r\}|$, $x = 1040$ m; (c) $|Re\{H_r\}|$, $x = 1540$ m; (d) $|Im\{H_r\}|$, $x = 1540$ m; (e) $|Re\{H_r\}|$, $x = 2040$ m; (f) $|Im\{H_r\}|$, $x = 2040$ m.



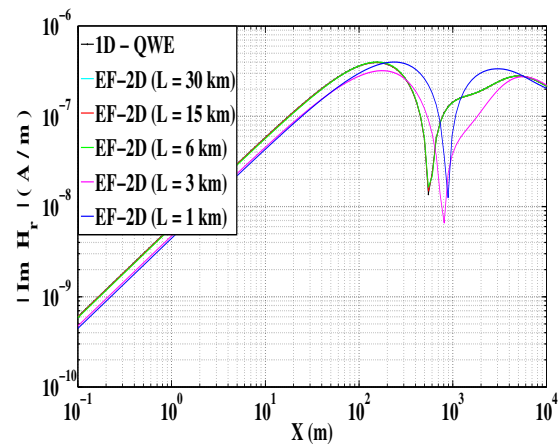
(a) $|Re\{H_r\}|$ em 1040 m



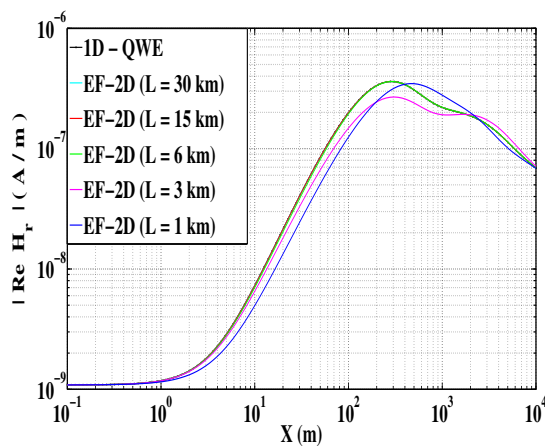
(b) $|Im\{H_r\}|$ em 1040 m



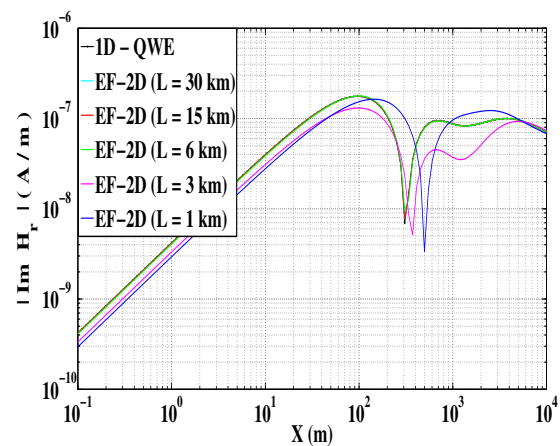
(c) $|Re\{H_r\}|$ em 1540 m



(d) $|Im\{H_r\}|$ em 1540 m



(e) $|Re\{H_r\}|$ em 2040 m



(f) $|Im\{H_r\}|$ em 2040 m

3 ANÁLISE DE RESPOSTAS DE MODELOS 2D

Neste capítulo, observaremos as respostas das partes real e imaginária do campo magnético horizontal sobre vários modelos bidimensionais, para tentar inferir sobre a sensibilidade dos dados do método EMMF às estruturas presentes nestes ambientes. Serão apresentadas as respostas normalizadas H_r/H_z^o , em seções de posições de medida versus frequência. O campo H_z^o é referente à resposta magnética vertical no plano de um DMV no vácuo (WARD; HOHMANN, 1987):

$$H_z^o = \frac{-m_z}{4\pi r^3}, \quad (3.1)$$

em que m_z é o momento de dipolo magnético do DMV com mesmo momento da BCH (πa^2), e r a distância do centro da BCH à posição de medida.

Os valores de H_r/H_z^o são usados para a obtenção de resistividade aparente do método EMMF, e por isso as pronunciações das heterogenidades nesta medida refletem a boa ou má “visibilidade” de tais corpos em ambientes geológicos.

Algumas características importantes destes dados podem ser vistas nas seções correspondentes às respostas do semi-espço homogêneo. Duas influências opostas contribuem para gerar os valores de campo medidos: nas frequências mais altas, a atenuação é mais forte (o *skin depth* é menor) o que contribui para medidas de campo de menor intensidade; nas frequências mais baixas, a atenuação é menos intensa, mas o campo gera correntes em profundidades maiores, mais distantes dos pontos de medida. Estes efeitos fazem com que, fixada uma posição de medida, exista uma frequência na qual a intensidade do campo observado normalizado será máxima. Esta frequência depende da condutividade do meio e da posição de medida.

Quando observamos as seções na frequência, a região na qual a parte real mostra um máximo na intensidade corresponde a uma zona de transição na parte imaginária, na qual os valores passam pelo zero ao trocar de sinal. As seções da parte imaginária do campo normalizado correspondentes à resposta de semi-espço homogêneo apresentam duas zonas distintas, uma na qual os valores são positivos e a outra na qual os valores observados são negativos, sendo que a transição acontece justamente na zona de máximo do sinal da parte real. Veremos nos exemplos a seguir que as respostas de corpos isolados afetam as duas zonas da parte imaginária separadamente.

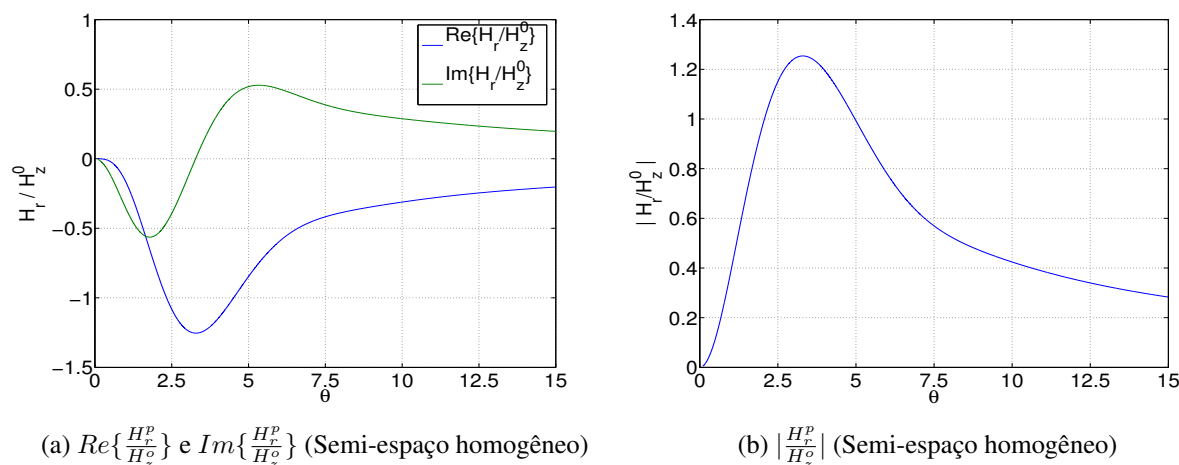
Estas características que observaremos nas seções a seguir poderão ser melhor analisadas à luz do comportamento do campo do dipolo magnético vertical sobre um semi-espço uniforme. No caso do dipolo sobre um semi-espço de condutividade puramente real, a função H_r/H_z^o pode ser expressa em termos do número de indução θ da seguinte forma:

$$\theta = r \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} \quad (3.2)$$

$$\frac{H_r}{H_z^o} = -(1+i)\theta \left[I_1 \left(\frac{(1+i)\theta}{2} \right) K_1 \left(\frac{(1+i)\theta}{2} \right) - I_2 \left(\frac{(1+i)\theta}{2} \right) K_2 \left(\frac{(1+i)\theta}{2} \right) \right]. \quad (3.3)$$

Os gráficos desta função estão mostrados na figura (19), na forma das curvas das componentes real e imaginária, e em módulo.

Figura 19 – Função H_r/H_z^o para o campo de um DMV sobre um semi-espço homogêneo.



Fonte: Do autor

O valor mínimo da componente real acontece no número de indução igual a 3,29, enquanto que o zero da componente imaginária se dá em $\theta = 3,28$. Estes valores terão grande influência sobre as seções da função H_r/H_z^o correspondentes aos modelos bidimensionais. Estas curvas se combinam na curva de amplitude da função H_r/H_z^o , mostrada na figura (20b), que apresenta um máximo em $\theta = 3,30$. Nos casos que analisaremos, o comportamento do campo gerado pela bobina se aproxima daquele observado para o campo do dipolo quando calculado sobre o semi-espço uniforme.

Machado e Dias (2012) mostraram que dada uma posição de medida e uma frequência, existe uma zona do semi-espço que terá a máxima influência sobre o campo observado. As curvas da figura (19) nos indicam que o efeito da zona de máxima influência se faz sentir de maneira máxima nos pontos de número de indução indicados.

Observaremos nas seções a seguir uma faixa de máximos da componente real atravessando toda a extensão das figuras nas posições correspondentes ao número de indução 3,29 e uma faixa correspondente aos pontos de *cross over* da componente imaginária nas posições de $\theta = 3,28$. Nas figuras das seções referentes aos modelos bidimensionais observaremos que a influência das heterogeneidades é sentida fortemente nestas faixas, e diminui quando os corpos 2D se posicionam fora destas zonas.

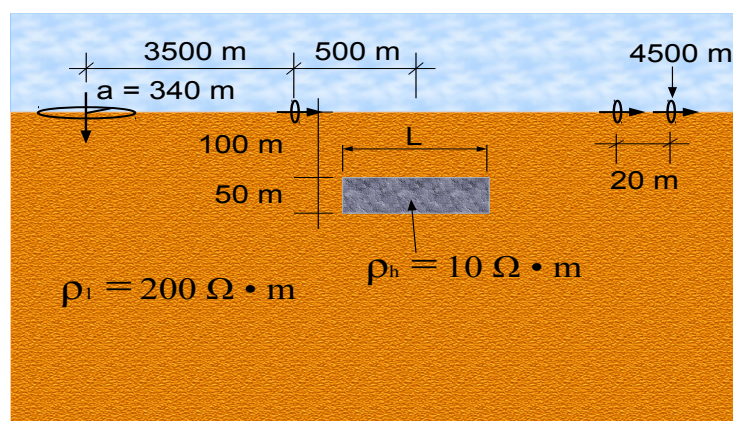
Nos vários exemplos a seguir, estudaremos os efeitos de diferentes estruturas geológicas sobre os dados do método EMMF. Inicialmente, estudaremos os limites de sensibilidade a modelos de corpos isolados de diferentes tamanhos e profundidades. Em seguida, veremos as respostas de modelos mais complexos, incluindo camadas e intrusões. Em todos os

casos, apresentaremos os resultados em figuras cuja coluna esquerda apresenta a parte real e a direita a parte imaginária do campo H_r/H_z^o , iniciando sempre com a resposta do meio encaixante, como referência.

3.1 VARIAÇÃO NA LARGURA DE UM CORPO CONDUTIVO ISOLADO

Nossa primeira investigação compreende a observação de variação da extensão lateral de um corpo condutivo, de $10 \Omega \cdot m$, inserido num semi-espaco de $200 \Omega \cdot m$, como ilustra a figura (20). Tal heterogeneidade apresenta-se a 100 m de profundidade e seu centro está a 4000 m da BCH de raio 340 m. Este corpo tem 50 m de espessura e nesta investigação a largura L possui valores de 50, 250, 500, 1000, 2000 ou 16000 m. Nossas respostas estão sobre as observações tomadas a cada 20 m, de 3500 a 4500 m, em 120 frequências, de 0,1 a 1000 Hz.

Figura 20 – Modelo para investigação de variação de extensão lateral de um corpo condutivo num meio homogêneo.

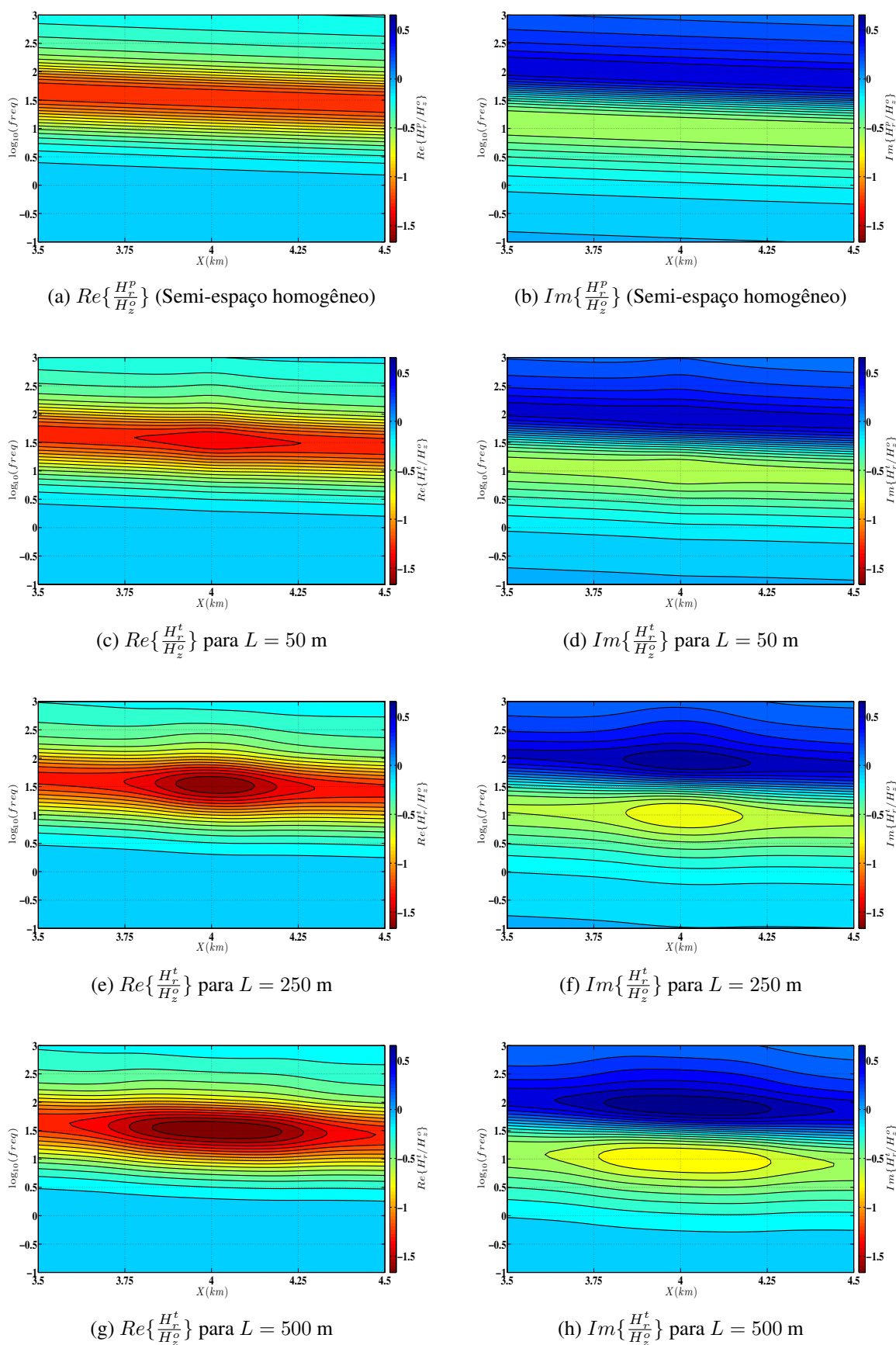


Fonte: Do autor

Nas figuras (21) e (22) apresentamos os comportamentos de $Re\{H_r/H_z^o\}$ e $Im\{H_r/H_z^o\}$. A primeira linha de cada uma dessas figuras mostra a feição obtida com apenas o semi-espaco de $200 \Omega \cdot m$. As demais, mostram a presença do corpo sob o aumento de sua largura.

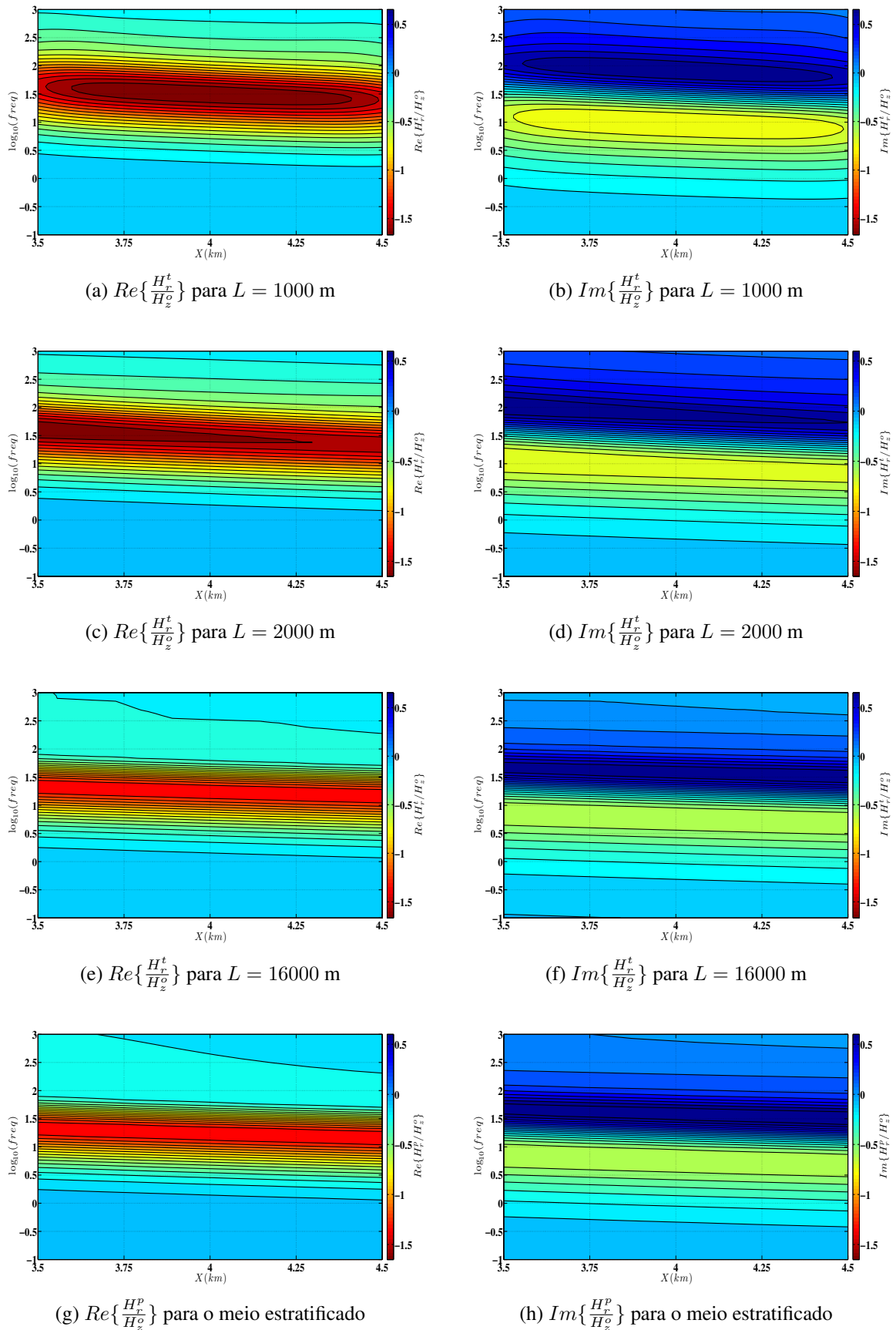
Em uma profundidade de 100 m, em um meio encaixante de $200 \Omega \cdot m$, o bloco quadrado com 50 m de lado ainda é discernível nos dados, sobretudo na parte real da função, mas já é próximo do limite de detecção para esta configuração. À medida que a largura aumenta, as seções de campo retratam bem esta variação, sendo que nos casos até uma largura de 250 m, percebe-se que a influência do corpo diminui em direção às bordas da linha de medidas e os dados tendem a recuperar as características daqueles do semi-espaco. Isso ilustra como os dados do campo H_r/H_z^o apresentam uma boa resolução lateral. Se fazemos o corpo com largura grande o suficiente, ou seja, com as bordas longe o suficiente das posições de medida, as respostas são indistinguíveis das de um modelo com uma camada infinita com resistividade igual à do corpo. Esta tendência é claramente visível na figura (22).

Figura 21 – Seções de parte real e imaginária para o modelo da figura (20) variando-se a extensão lateral em 50, 250 m e 500 m.



Fonte: Do autor

Figura 22 – Seções de parte real e imaginária para o modelo da figura (20) variando-se a extensão lateral em 1000, 2000 e 16000 m, e comparando-se com o meio estratificado.



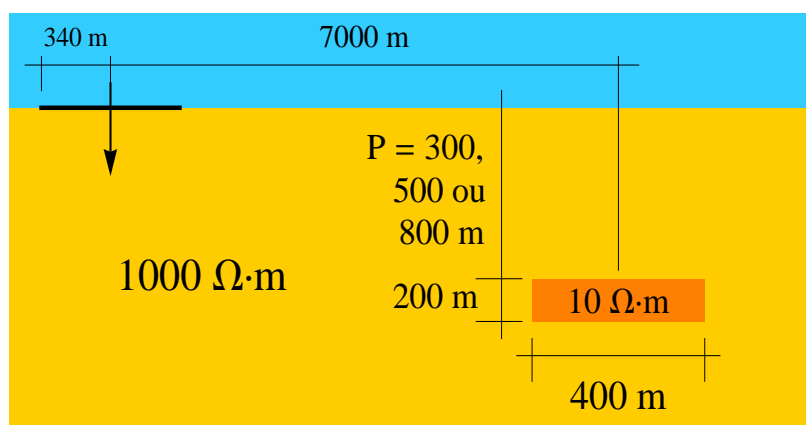
Fonte: Do autor

3.2 VARIAÇÃO NA PROFUNDIDADE DE UM CORPO CONDUTIVO ISOLADO

A figura (23) ilustra o modelo feito para investigação na variação da profundidade, P , da heterogeneidade. Neste caso, o corpo tem a largura de 400 m e espessura de 200 m, e ainda é condutivo ($10 \Omega \cdot \text{m}$) em relação ao meio encaixante resistivo de $1000 \Omega \cdot \text{m}$. O raio da BCH é de 340 m. O corpo tem seu centro a 7000 m de distância do centro da bobina. Sob 80 frequências, variando de 0,1 a 1000 Hz, e observações de 100 em 100 m tomadas de 4500 m a 9500 m, apresentamos na figura (24) as respostas obtidas sob variação de $P = 300, 500$ e 800 m. Como se esperava, as amplitudes, na região que compreende o sinal do corpo, diminuem à medida que o corpo se afasta da superfície. Nas seções da parte imaginária do campo normalizado, a presença do corpo é percebida como um pico em cada uma das zonas de sinais positivo e negativo, enquanto que nas seções da componente real, onde não ocorre inversão do sinal nos valores, o corpo isolado é percebido como um único pico na amplitude do sinal.

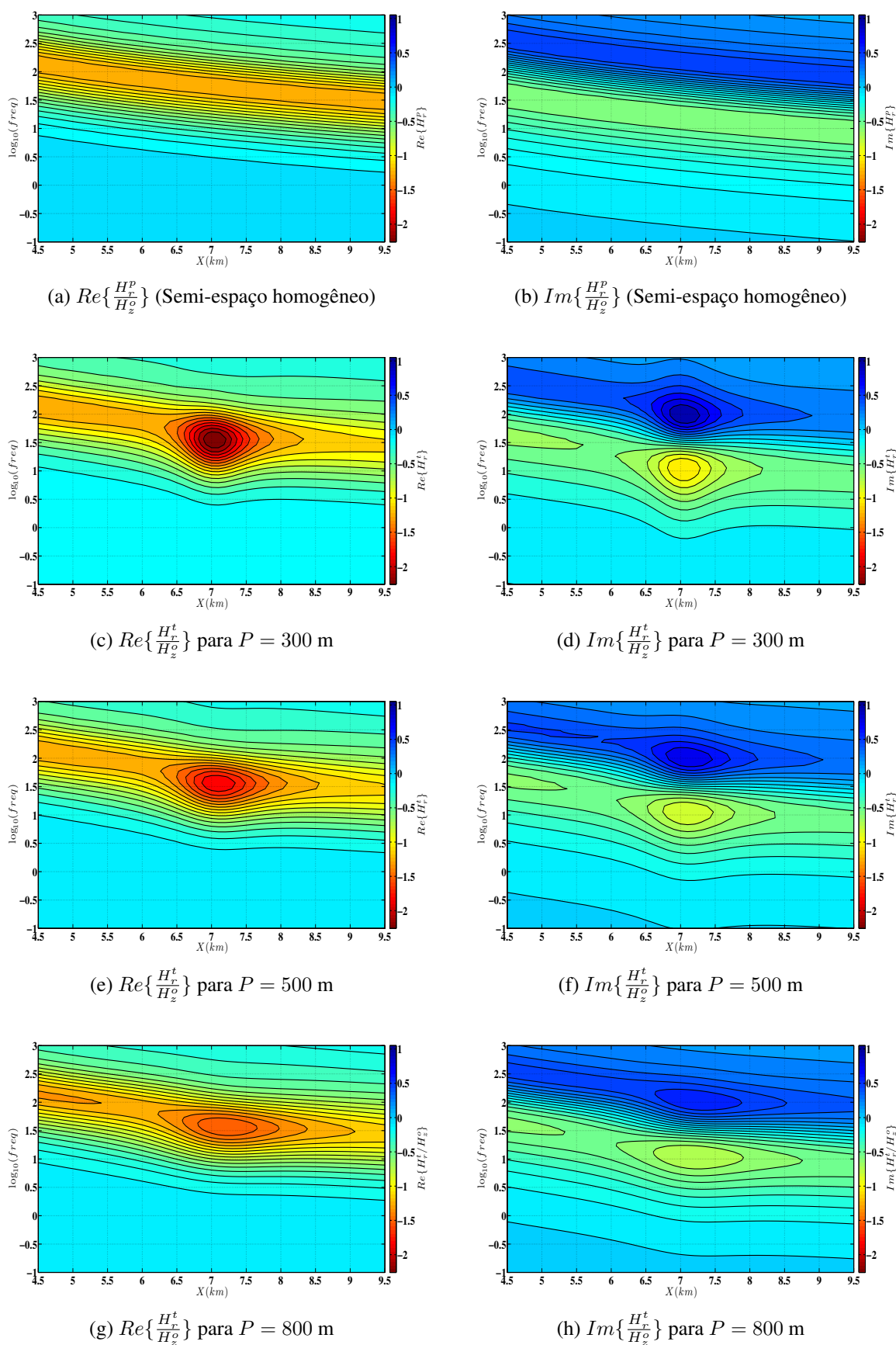
A intensidade do sinal detectado depende, obviamente, do ambiente em que se encontra o alvo a ser visto. Em um ambiente resistivo, como aquele mostrado neste exemplo, o campo eletromagnético anômalo gerado pela presença do corpo condutor sofre menos atenuação até chegar nos receptores do que se o meio for mais condutivo. Isto é um fator importante que determina a limitação em termos de profundidade de investigação do método e se reflete no posicionamento e na delimitação da zona de máxima influência em um semi-espaço homogêneo, conforme mostrada por Machado e Dias (2012), para cada receptor e cada frequência.

Figura 23 – Modelo para investigação de variação de profundidade de um corpo condutivo num meio homogêneo.



Fonte: Do autor

Figura 24 – Seções de parte real e imaginária para o modelo da figura (23) variando-se a profundidade.

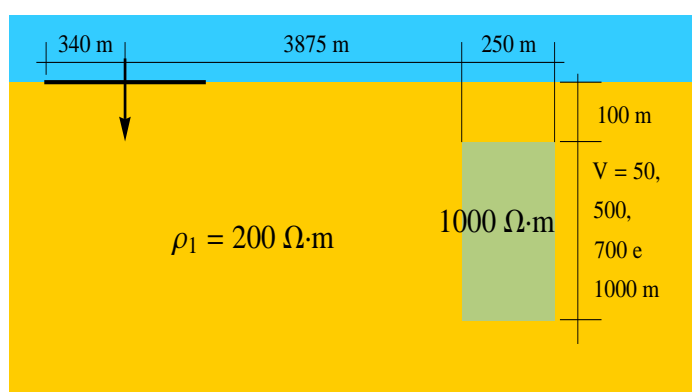


Fonte: Do autor

3.3 INVESTIGAÇÃO DE UMA ZONA RESISTIVA NO SEMI-ESPAÇO CONDUTIVO

Vimos, nas investigações anteriores, que um corpo mais condutivo que o meio excaixante propicia uma boa sensibilidade. Isto acontece pelo fato de, neste caso, ocorrer no corpo condutor uma concentração de corrente induzida, que por sua vez gera campo magnético secundário, que medido na superfície reforça o campo observado. Para ilustrar como o método EMMF percebe uma heterogeneidade mais resistiva que o meio hospedeiro, tomamos o modelo, representado na figura (25), com o semi-espaco ainda de $200 \Omega \cdot m$ e nele inserido uma heterogeneidade vertical de $1000 \Omega \cdot m$, cuja distância ao centro da BCH é de $4000 m$. Este corpo tem dimensão lateral de $250 m$, com topo em profundidade de $100 m$. Neste cálculo adotamos seu comprimento vertical, V , de $50, 500, 700$ e $1000 m$. A figura (26) apresenta as resposta para estas situações.

Figura 25 – Modelo para investigações de variação de extensão vertical de um corpo resistivo num meio homogêneo.

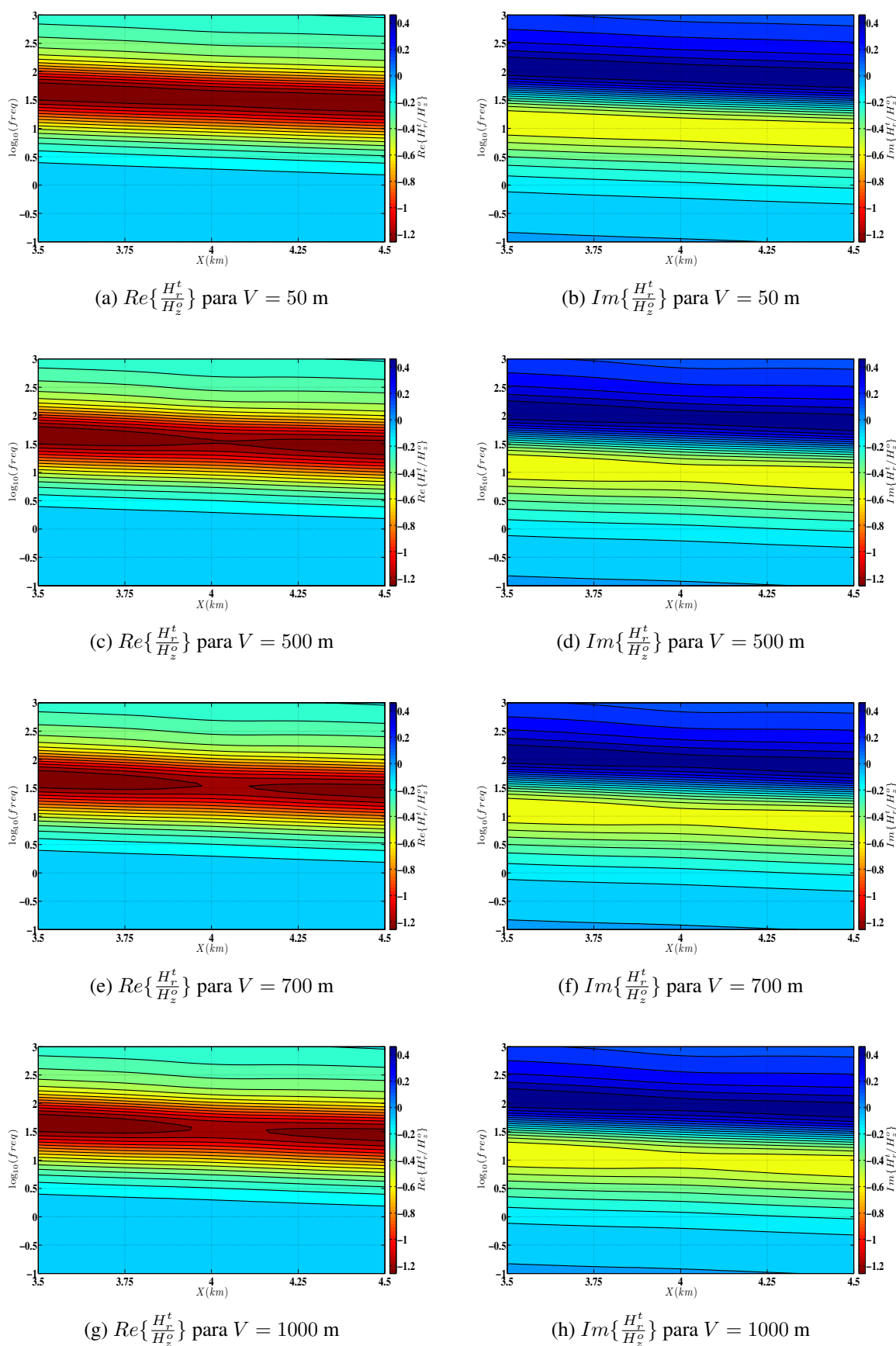


Fonte: Do autor

Vemos que o corpo com apenas $50 m$ de espessura praticamente não é sinalizado nos dados. Comparando com estas feições, nota-se que aumentando o comprimento vertical, o corpo resistivo diminui a amplitude de campo normalizado na sua localização horizontal e tal região aumenta, mas num crescimento muito lento, de modo que é de esperar que a partir de um certo comprimento não haja mais aumento lateral sinalizando o corpo, o que confirma a boa resolução lateral deste tipo de dado.

Este exemplo ilustra um comportamento comum aos métodos eletromagnéticos, que em geral respondem mais fortemente a zonas condutivas do que resistivas. É interessante notar que o processo de determinação de resistividades aparentes é altamente não linear e que ao usar as contribuições das partes real e imaginária observadas pode ser possível mapear variações de resistividade a partir de variações sutis nos dados de campo. A construção de seções de resistividade aparente a partir dos dados sintéticos será o próximo passo nesta pesquisa, além do escopo desta tese neste momento.

Figura 26 – Seções de parte real e imaginária para o modelo da figura (25) variando-se a extensão vertical.



Fonte: Do autor

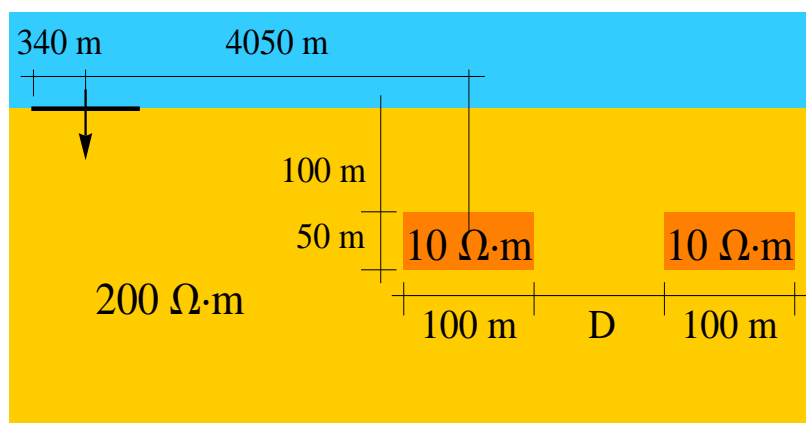
3.4 INVESTIGAÇÃO DA RESOLUÇÃO DE DOIS CORPOS ISOLADOS

Mediante a boa visualização de corpos condutivos, verificamos num caso específico, até que ponto os dados conseguem distinguir dois corpos separados. É claro que isto depende das dimensões dos corpos, suas profundidades, e distâncias à fonte, assim como o contraste com o meio que os hospeda. Para o modelo que a figura (27) ilustra, realizamos três simulações com variação na distância D entre dois corpos idênticos. A figura (28) apresenta as respostas para $D = 900, 400$ e 150 m.

Verifica-se que, para o ambiente geo-elétrico observado, os dois corpos são claramente identificados como alvos distintos até estarem separados por uma distância de 150 m, quando observados a uma distância horizontal entre 4 e 5 km, neste caso os dados só indicando a presença de uma única zona condutiva.

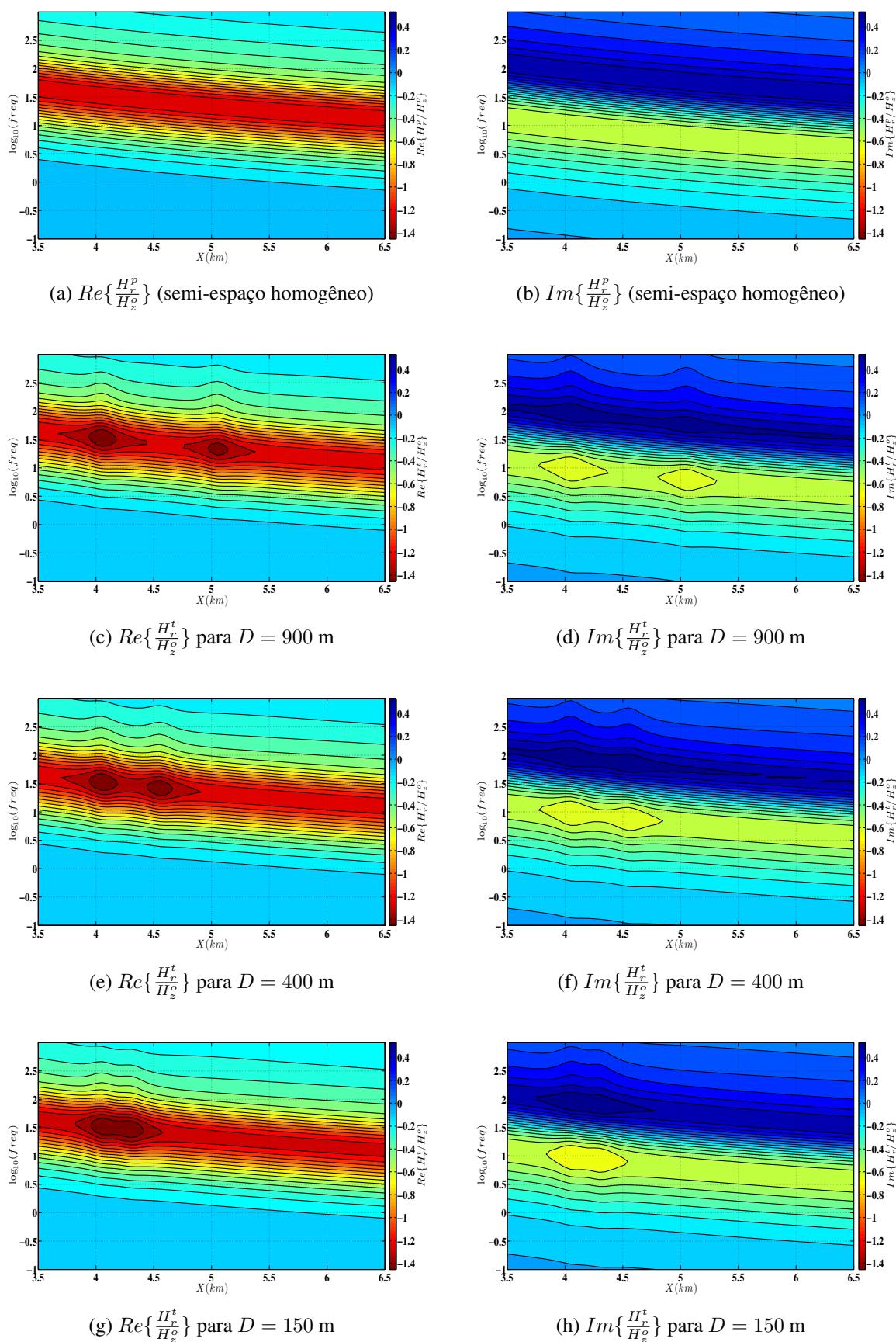
Uma característica do método EMMF é o uso exclusivo da componente H_r do campo da bobina. Este exemplo ilustra muito bem que esta componente pode dar uma boa resolução conseguida a partir dos dados. Note que 150 m é uma distância muito pequena, quando comparada com as demais distâncias envolvidas nestes modelos, bem como com relação aos parâmetros eletromagnéticos, como a profundidade de penetração, ou o comprimento de onda, envolvidos neste problema. A possibilidade de discernir dois corpos isolados se refletirá de modo fundamental quando for feita a inversão destes dados, nas próximas etapas, na continuação desta pesquisa.

Figura 27 – Modelo da investigação sobre variação da separação de corpos.



Fonte: Do autor

Figura 28 – Seções de parte real e imaginária para o modelo da figura (27) de variação da separação entre dois corpos.

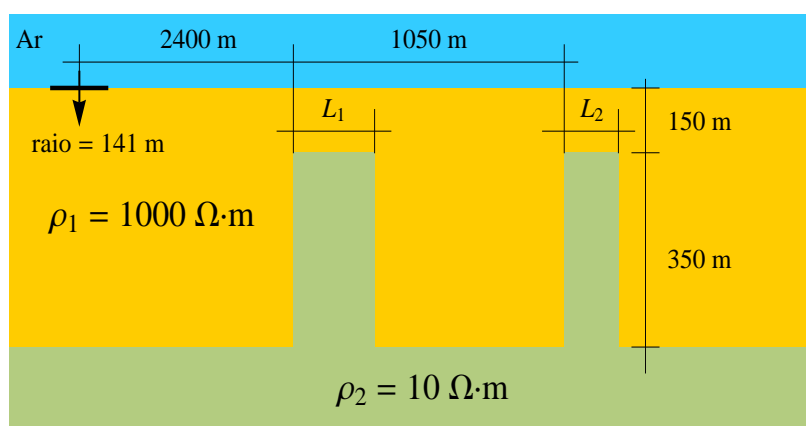


Fonte: Do autor

3.5 MODELO COM BACKGROUND ESTRATIFICADO

Em uma bacia sedimentar, encontraremos estruturas menos simples do que aquelas representadas nos modelos acima, com corpos isolados em um semi-espaço homogêneo. Uma característica comum é a existência de zonas estratificadas de condutividades diferentes. Para ilustrar as respostas obtidas em meios de camadas, examinaremos um modelo formado por uma camada resistiva sobre um semi-espaço condutivo e com a presença de duas estruturas intrusivas verticais na camada, sendo uma mais espessa que outra, como ilustrado na figura (29). Mostraremos este modelo em duas configurações: a primeira com a intrusão de maior espessura sendo mais próxima da fonte e a segunda com a intrusão de menor espessura mais próxima da fonte. Em ambos os casos a fonte é uma BCH com raio de 141 m.

Figura 29 – Modelo de duas intrusões.



Fonte: Do autor

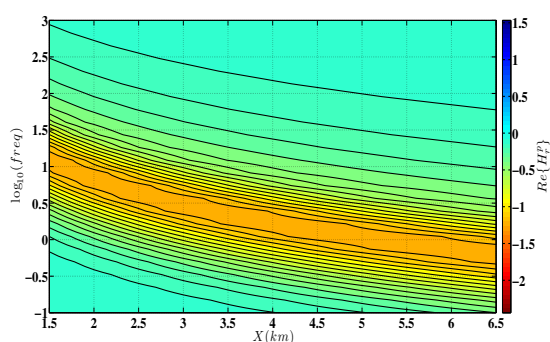
As respostas para este modelo são mostradas na figura (30). Na primeira linha de figuras, temos, para efeito de comparação, a resposta de um semi-espaço homogêneo com resistividade igual a do substrato do modelo (10 Ω·m). Observamos na segunda linha (figuras (c) e (d)) as seções para o modelo somente com a camada e o substrato: nota-se que a presença da camada altera significativamente os valores do campo, sendo que conforme as distâncias em relação à fonte aumentam as respostas tendem a recuperar as características daquelas do semi-espaço.

As figuras (e) e (f), de (30), mostram os campos com a presença das intrusões, $L_1 = 200$ m e $L_2 = 100$ m. Vemos que elas são muito bem localizadas e podemos observar suas características que refletem as feições do modelo: a intrusão mais larga gera um sinal de amplitude mais forte do que aquela mais estreita. Entretanto, um fator que pode influir na intensidade da anomalia observada correspondente a cada intrusão é a distância delas à fonte, sendo que aquela feição mais próxima da fonte certamente apresenta um sinal mais intenso nos valores de campo. Para verificar a sensibilidade dos dados às diferenças nos tamanhos dos corpos intrusivos, alteramos o modelo invertando as posições dos dois corpos, fazendo o corpo mais estreito ser mais

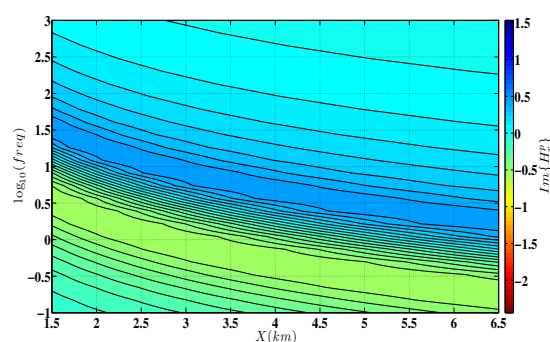
próximo da fonte, isto é, $L_1 = 100$ m e $L_2 = 200$ m. O resultado é mostrado nas figuras (g) e (h) de (30): o corpo mais largo, ainda que esteja mais distante da fonte, é identificado claramente com um sinal mais intenso do que o mais fino, ainda que a diferença seja menos pronunciada do que no caso anterior, justamente pelo efeito da maior proximidade da intrusão fina com a fonte.

Este resultado é extremamente promissor, pois indica a excelente capacidade destes dados em acusarem as estruturas, tanto a camada, quanto as intrusões. Isso nos dá uma ótima perspectiva para o desenvolvimento posterior desta pesquisa, tanto para a construção de seções de resistividade aparente quanto para a inversão destes dados.

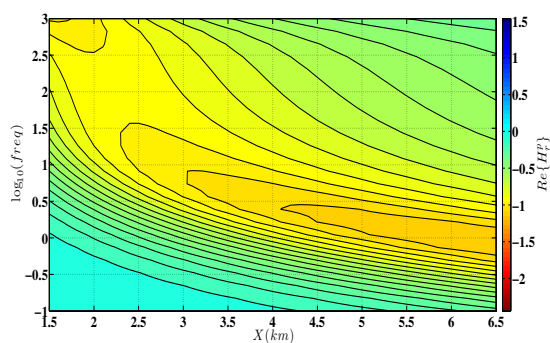
Figura 30 – Seções de parte real e imaginária para o modelo da figura (29) de duas intrusões.



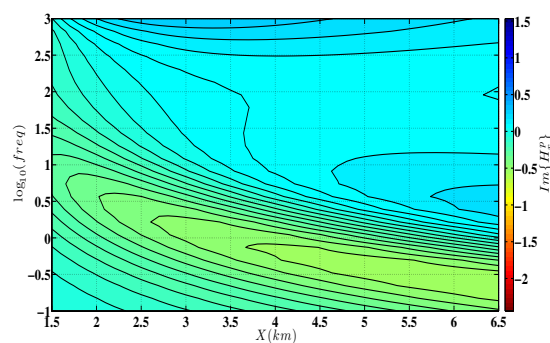
(a) $Re\{\frac{H_r^p}{H_z^p}\}$ (semi-espaco homogêneo de 10 $\Omega \cdot m$)



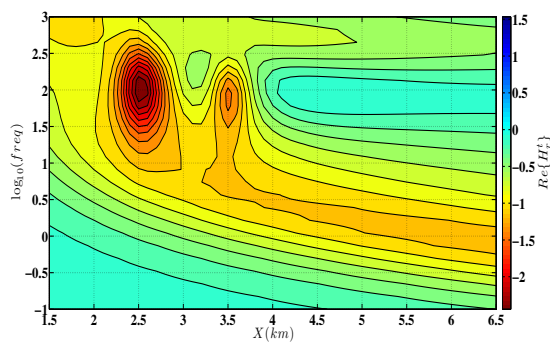
(b) $Im\{\frac{H_r^p}{H_z^p}\}$ (semi-espaco homogêneo de 10 $\Omega \cdot m$)



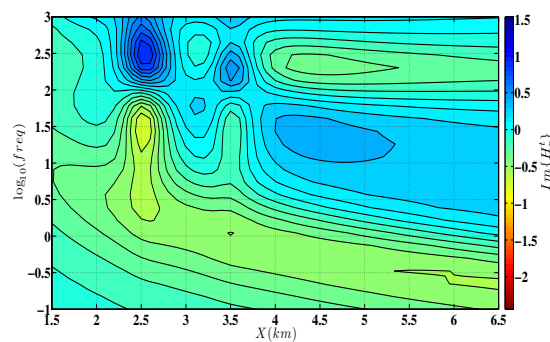
(c) $Re\{\frac{H_r^p}{H_z^p}\}$ (meio de camadas)



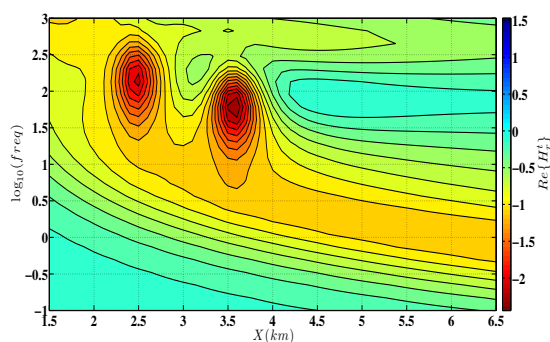
(d) $Im\{\frac{H_r^p}{H_z^p}\}$ (meio de camadas)



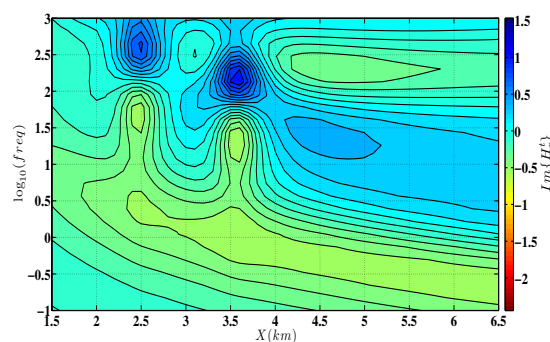
(e) $Re\{\frac{H_r^t}{H_z^t}\}$ para $L_1 = 200$ m e $L_2 = 100$ m



(f) $Im\{\frac{H_r^t}{H_z^t}\}$ para $L_1 = 200$ m e $L_2 = 100$ m



(g) $Re\{\frac{H_r^t}{H_z^t}\}$ para $L_1 = 100$ m e $L_2 = 200$ m



(h) $Im\{\frac{H_r^t}{H_z^t}\}$ para $L_1 = 100$ m e $L_2 = 200$ m

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta tese contribui para o desenvolvimento do método EMMF ao desenvolver a modelagem numérica de dados sintéticos do método em ambientes bi-dimensionais. Apresentamos aqui exemplos desses dados gerados por vários modelos geo-elétricos diferentes, ainda sem incorporar as etapas de processamento para a construção das seções de resistividade aparente e parâmetro de polarização.

Um dos desafios que enfrentamos para realizar esta modelagem foi, surpreendentemente, no cálculo dos campos em meios estratificados. Os métodos tradicionais para a avaliação das integrais de transformadas de Hankel não foram satisfatórios para resolver nosso problema. Tanto o uso de filtros digitais quanto das quadraturas convencionais, encontradas na literatura, geraram resultados imprecisos ou que demandam um tempo de computação excessivamente longo. Para resolver estas integrais, cujos integrandos são funções altamente oscilantes e de lenta convergência, usamos duas técnicas diferentes em situações distintas: para o cálculo dos campos no domínio espacial, aplicamos o algoritmo de Quadraturas com Extrapolação, que adaptamos do que foi feito por Key (2012); para o cálculo dos campos no domínio espectral, aplicamos a integração no plano complexo, conforme descrita em Silva, Régis e Howard (2011). Estas duas técnicas são baseadas em idéias que não são novas, mas as formas como foram implementadas para este problema são inovadoras e não encontradas na literatura.

A principal observação que sobressai dos exemplos mostrados aqui é a de que os dados do campo magnético radial normalizado H_r/H_z^o apresentam excelente resolução para identificar e delinear estruturas geo-elétricas. Os exemplos mostrados ilustram que estes dados trazem informações que indicam a presença de camadas, corpos isolados, intrusões.

Nos levantamentos simulados nesta tese, a fonte sempre está fixa em uma posição com centro na linha de medidas, à esquerda dos pontos de observação. Nestas condições, uma análise ingênua poderia pressupor que a presença de uma estrutura, como um corpo isolado, iria influenciar todos os receptores, principalmente aqueles nas posições à direita da heterogeneidade, o que tornaria difuso o delineamento dos limites dos corpos em uma área de influência muito maior do que seus tamanhos, afinal a baixa resolução é uma característica geral dos métodos eletromagnéticos. Entretanto, o fato de um corpo isolado ter uma resposta que delimita muito bem sua posição sob a linha de medidas é uma consequência direta do fato de que nem todos os pontos do meio condutor influenciam os receptores da mesma maneira, nem com a mesma intensidade. Como é mostrado no trabalho de Machado e Dias (2012), a zona de máxima influência do semi-espaco sobre as medidas da componente magnética radial na superfície é bem delimitada e é localizada em uma região estreita do semi-espaco, particularmente em condições de números de indução mais altos. Observamos exatamente este tipo de comportamento nos dados: eles delimitam bem os corpos isolados, no sentido em que as respostas das posições de medida afastadas do corpo rapidamente tendem para aquelas do background de cada modelo. Em todos os casos, podemos perceber certa assimetria nas respostas, pelo posiciona-

mento em relação à fonte, mas as faixas de influência dos corpos isolados é sempre delimitada, acompanhando o mesmo tipo de comportamento das zonas de máxima influência definidas no semi-espaço homogêneo, sendo estas mais estreitas nos números de indução maiores e mais espalhadas nos números de indução menores.

A intensidade de sensibilidade destes dados às estruturas geo-elétricas, e o poder de discriminação que eles apresentam nos exemplos mostrados aqui são fortes indicadores de que eles serão um excelente material para a inversão, com potencial para mapear as condutividades da sub-superfície com precisão.

Na continuação desta pesquisa, para além do trabalho apresentado nesta tese, um passo imediato será a implementação do método para a construção de seções de resistividade aparente e do parâmetro de polarização, o que permitirá a análise detalhada do tipo de resposta gerada por cada tipo de estrutura e auxiliará no trabalho de interpretação.

Finalizamos listando algumas linhas que acreditamos ser importantes para o desenvolvimento futuro do método:

- Realizar a inversão dos dados em meios bi-dimensionais. Neste caso, o uso das seções de resistividade aparente e parâmetro de polarização serão úteis para a construção de modelos iniciais, de modo a otimizar o processo e realizar a inversão com o menor número possível de iterações. Parte deste estudo será a determinação de que tipos de vínculos melhor contribuirão como introdução de informação *a priori* para a inversão.
- Realizar a modelagem numérica incluindo topografia irregular na área em estudo. Esta pesquisa será feita diretamente a partir dos resultados atuais, sendo necessária a aplicação de técnicas eficientes de derivadas parciais numéricas, para a determinação do campo nas direções que acompanham o relevo nas posições onde se localizam os receptores.
- Realizar estudos de viabilidade para a aplicação do método em ambiente marinho. A partir da modelagem numérica desenvolvida nesta tese, um passo natural será simular o posicionamento da fonte no fundo do mar e realizar um estudo comparativo em relação aos dados do atual método marinho de fonte controlada – mCSEM, uma vez que os mesmos receptores empregados no mCSEM poderão ser usados para registrar os campos da bobina.

Estes e outros objetivos de pesquisa sobre o método EMMF serão possíveis com base na contribuição da modelagem numérica realizada nesta tese.

Referências

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover Publication, Inc, 1964. Citado na página 15.
- ANDERSON, W. L. Numerical integration of related Hankel transforms of orders 0 and 1 by adaptive digital filtering. v. 44, n. 07, p. 1287–1305, 1979. Citado 3 vezes, nas páginas 14, 19 e 20.
- CHAVE, A. D. Numerical integration of related Hankel-transforms by quadrature and continued fraction expansion. v. 48, n. 12, p. 1671–1686, 1983. Citado na página 14.
- CHEW, W. C.; TONG, M. S.; HU, B. *Integral Equation Methods for Electromagnetic and Elastic Waves*. [s.n.], 2009. 1-241 p. Disponível em: <<http://www.morganclaypool.com/doi/abs/10.2200/S00102ED1V01Y200807CEM012>>. Citado na página 22.
- DEUN, J.; COOLS, R. Note on “electromagnetic response of a large circular loop source on a layered earth: A new computation method” by n. p. singh and t. mogi. Birkhäuser-Verlag, v. 164, p. 1107–1111, 2007. ISSN 0033-4553. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00024-007-0202-y>>. Citado na página 15.
- DIAS, C. A. *A Non-Grounded Method for Measuring Induced Electrical Polarization and Conductivity*. Tese — Universidade da Califórnia, Berkeley, 1968. Citado na página 8.
- GUPTASARMA, D.; SINGH, B. New digital linear filters for Hankel J0 and J1 transforms. v. 45, n. 05, p. 745–762, 1997. Citado 5 vezes, nas páginas 14, 16, 19, 20 e 21.
- HOHMANN, G. W. Numerical modeling for electromagnetic methods in geophysics. In: NABIGHIAN, M. N. (Ed.). *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics, Vol. 1, Theory*. [S.l.]: SEG, 1987, (Investigations in Geophysics, v. 3). Citado 2 vezes, nas páginas 14 e 62.
- JIN, J. *The Finite Element Method in Electromagnetics*. Wiley, 2002. (A Wiley-Interscience publication). ISBN 9780471438182. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=N6yVQgAACAAJ>>. Citado 3 vezes, nas páginas 23, 27 e 29.
- KEY, K. 1d inversion of multicomponent, multifrequency marine csem data: Methodology and synthetic studies for resolving thin resistive layers. v. 74, n. 2, p. F9–F20, 2009. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/abs/10.1190/1.3058434>>. Citado na página 21.
- KEY, K. Is the fast hankel transform faster than quadrature? v. 77, n. 3, p. F21–F30, 2012. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/abs/10.1190/geo2011-0237.1>>. Citado 4 vezes, nas páginas 9, 15, 16 e 53.
- KEY, K.; OVAL, J. A parallel goal-oriented adaptive finite element method for 2.5-d electromagnetic modelling. Blackwell Publishing Ltd, v. 186, n. 1, p. 137–154, 2011. ISSN 1365-246X. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-246X.2011.05025.x>>. Citado 2 vezes, nas páginas 24 e 27.
- KONG, F. Hankel transform filters for dipole antenna radiation in a conductive medium. Blackwell Publishing Ltd, v. 55, n. 1, p. 83–89, 2007. ISSN 1365-2478. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2478.2006.00585.x>>. Citado 4 vezes, nas páginas 14, 19, 20 e 21.

- MACHADO, M. V. B. *Estudo analítico e aplicação do método eletromagnético a multi-frequência ao mapeamento e identificação de fluidos e reservatórios continentais de petróleo*. Tese (Tese de doutorado) — Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro, 2009. Citado 3 vezes, nas páginas 8, 9 e 11.
- MACHADO, M. V. B.; DIAS, C. A. Zone of main contribution to the measured signal for a circular current loop source and receiver on the surface of a conductive half-space. Blackwell Publishing Ltd, v. 60, n. 6, p. 1167–1185, 2012. ISSN 1365-2478. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1111/j.1365-2478.2011.01042.x>>. Citado 3 vezes, nas páginas 40, 44 e 53.
- MEUNIER, G. *The Finite Element Method for Electromagnetic Modeling*. Wiley, 2010. ISBN 9780470393802. Disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=WdiEo7DEIUC>>. Citado 3 vezes, nas páginas 23, 25 e 29.
- MITSUHATA, Y. 2-d electromagnetic modeling by finite-element method with a dipole source and topography. SEG, v. 65, n. 2, p. 465–475, 2000. Disponível em: <<http://link.aip.org/link/?GPY/65/465/1>>. Citado na página 24.
- RIJO, L. 2.5-d finite element algorithm for mcsem modeling. In: SBGF. *Anais do 9o. Congresso da SBGF*. [S.l.], 2005. Citado 2 vezes, nas páginas 24 e 26.
- RYU, J.; MORRISON, H. F.; WARD, S. H. Electromagnetic fields about a loop source of current. SEG, v. 35, n. 5, p. 862–896, 1970. Disponível em: <<http://link.aip.org/link/?GPY/35-/862/1>>. Citado 2 vezes, nas páginas 15 e 59.
- SATO, H. K. *Método eletromagnético para interpretação de polarização induzida e resistividade, usando o protótipo de um sistema eletromagnético a multi-frequência*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal da Bahia, Salvador, 1979. Citado na página 8.
- SHANKS, D. Nonlinear transformations of divergent and slowly convergent sequences. v. 34, p. 1–42, 1955. Citado na página 15.
- SILVA, M. W. C. *Influência de estruturas geológicas bidimensionais no campo geoeletromagnético na presença do eletrojato equatorial*. Tese — Universidade Federal do Pará, 2005. Citado na página 31.
- SILVA, V.; RÉGIS, C.; HOWARD, A. Q. Numerical integration in the calculation of the 2.5d response of a very large loop. In: _____. *SEG Technical Program Expanded Abstracts 2011*. [s.n.], 2011. cap. 146, p. 756–760. Disponível em: <<http://library.seg.org/doi/abs/10.1190/1-.3628187>>. Citado 3 vezes, nas páginas 9, 14 e 53.
- SINGH, N. P.; MOGI, T. Emlcler-a program for computing the em response of a large loop source over a layered earth models. Elsevier, v. 29, n. 29, p. 1301–1307, 2003. Citado 3 vezes, nas páginas 14, 15 e 16.
- SINGH, N. P.; MOGI, T. Electromagnetic response of a large circular loop source on a layered earth: A new computation method. Birkhäuser Basel, v. 162, p. 181–200, 2005. ISSN 0033-4553. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s00024-004-2586-2>>. Citado na página 15.

WARD, S. H.; HOHMANN, G. W. Electromagnetic theory for geophysical applications. In: NABIGHIAN, M. N. (Ed.). *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics, Vol. 1, Theory*. [S.l.]: SEG, 1987, (Investigations in Geophysics, v. 3). Citado na página 39.

WENIGER, E. J. Nonlinear sequence transformations for the acceleration of convergence and the summation of divergent series. v. 10, n. 5-6, p. 189 – 371, 1989. ISSN 0167-7977. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0167797789900117>>. Citado na página 15.

WYNN, P. On a device for computing the $e_m(s_n)$ transformation. v. 10, n. 54, p. 91–96, 1956. Citado na página 15.

ZHDANOV, M. S. *Geophysical electromagnetic theory and methods*. 1st ed. ed. Amsterdam, Netherlands: Elsevier, 2009. (Methods in geochemistry and geophysics, v. 43). ISBN 9780444529633. Disponível em: <<http://www.loc.gov/catdir/enhancements/fy1205-/2011292417-d.html>>. Citado na página 11.

Apêndices

APÊNDICE A – Campo Primário da BCH e do DMV no domínio (r, z)

Decorrente das geometrias da BCH, do DMV, e do meio de camadas horizontais, é conveniente que as componentes de campo eletromagnético sejam escritas em coordenadas cilíndricas. Com a intensidade de corrente elétrica no domínio da frequência sendo $I(w)$, o vetor densidade de corrente elétrica tem direção ϕ e é escrito convenientemente como sendo (RYU; MORRISON; WARD, 1970):

$$\vec{J}_\phi = J_\phi \hat{\phi} = \frac{aI(w)\delta(r-a)\delta(z-h_o)}{r} \hat{\phi},$$

em que a é o raio da bobina, r , a distância horizontal do ponto de medida ao centro da bobina, h_o , a altura (≤ 0) na superfície do meio estratificado, e δ , a função delta de Dirac representando a fonte como uma concentração de corrente no anel de raio a .

Nestas fontes, teremos apenas as componentes primárias sendo E_ϕ^p , H_r^p e H_z^p (caracterizando o modo TE de propagação), e a inexistência de variação dos campos na direção axial. Se em coordenadas cilíndricas o operador rotacional configura-se como

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \hat{z},$$

então para o meio infinito, isotrópico e homogêneo usando (2.7) e (2.8) teremos as equações:

$$\frac{\partial H_r^p}{\partial z} - \frac{\partial H_z^p}{\partial r} - \eta_p E_\phi^p = J_\phi, \quad (\text{A.1})$$

$$-\frac{\partial E_\phi^p}{\partial z} + \mathfrak{z}_p H_r^p = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\phi^p)}{\partial r} + \mathfrak{z}_p H_z^p = 0. \quad (\text{A.3})$$

Isolamos H_r e H_z dessas duas últimas equações e substituímos em (A.1), do que resulta em:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rE_\phi^p)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 E_\phi^p}{\partial z^2} + k_p^2 E_\phi^p = \frac{\mathfrak{z}_p a I(w) \delta(r-a) \delta(z)}{r},$$

sob as considerações de \mathfrak{z}_p ser constante, $h_o = 0$ e usando a definição do quadrado do número de onda, $k_p^2 = -\mathfrak{z}_p \eta_p$.

Realizando a derivação da primeira parcela chegamos à equação diferencial:

$$\left(\frac{\partial^2 E_\phi^p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\phi^p}{\partial r} - \frac{1}{r^2} E_\phi^p \right) + \frac{\partial^2 E_\phi^p}{\partial z^2} + k_p^2 E_\phi^p = \frac{\mathfrak{z}_p a I(w) \delta(r-a) \delta(z)}{r}. \quad (\text{A.4})$$

Para simplificação na resolução usamos as transformadas direta e inversa de Hankel, que de ordem ν ($\nu > 0$) são definidas como:

$$\begin{aligned} \hat{f}(k_r) &= \mathbb{H}_\nu [f(r)] = \int_0^\infty f(r) J_\nu(k_r r) r dr, \\ f(r) &= \mathbb{H}_\nu^{-1} [\hat{f}(k_r)] = \int_0^\infty \hat{f}(k_r) J_\nu(k_r r) k_r dk_r, \end{aligned}$$

e que apresentam as seguintes propriedades de nosso interesse:

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_\nu \left[\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} f(r) \right] &= (ik_r)^2 \widehat{f}(k_r), \\ \mathbb{H}_\nu \left[\frac{\delta(r-a)}{r} \right] &= J_\nu(k_r a).\end{aligned}$$

Assim, para $\nu = 1$ a equação (A.4) transformada na coordenada r e usadas as propriedades acima, teremos:

$$-k_r^2 \widehat{E}_\phi^p + \frac{\partial^2 \widehat{E}_\phi^p}{\partial z^2} + k_p^2 \widehat{E}_\phi^p = \mathfrak{z}_p a I(w) J_1(k_r a) \delta(z) \iff \frac{\partial^2 \widehat{E}_\phi^p}{\partial z^2} - (k_r^2 - k_p^2) \widehat{E}_\phi^p = \mathfrak{z}_p a I(w) J_1(k_r a) \delta(z),$$

fazendo uso da constante de propagação ao quadrado, $u^2 = k_r^2 - k_p^2$, teremos:

$$\frac{\partial^2 \widehat{E}_\phi^p}{\partial z^2} - u^2 \widehat{E}_\phi^p = \mathfrak{z}_p a I(w) J_1(k_r a) \delta(z).$$

Agora, aplicando a transformada de Fourier em z obteremos:

$$-k_z^2 \widehat{E}_\phi^p - u^2 \widehat{E}_\phi^p = \mathfrak{z}_p a I(w) J_1(k_r a),$$

e conseqüentemente ficamos com:

$$\widehat{E}_\phi^p = \frac{-\mathfrak{z}_p a I(w) J_1(k_r a)}{u^2 + k_z^2}.$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier em z :

$$\widehat{E}_\phi^p(k_r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\mathfrak{z}_p a I(w) J_1(k_r a)}{u^2 + k_z^2} e^{ik_z z} dk_z.$$

A solução dessa integral dá as expressões:

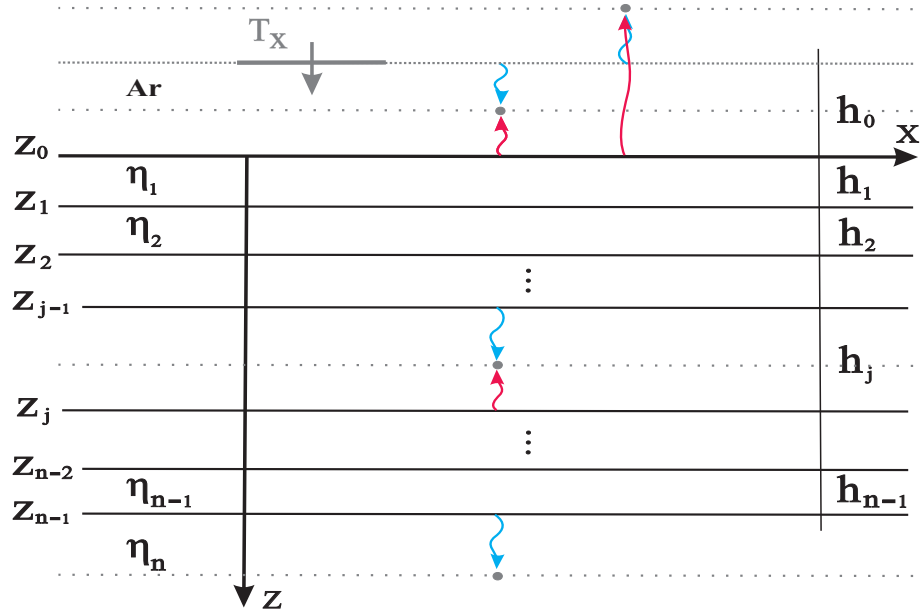
$$\widehat{E}_\phi^p(k_r, z) = \begin{cases} \frac{-\mathfrak{z}_p a I(w) J_1(k_r a)}{2u} e^{-uz}, & \text{se } z \geq 0 \\ \frac{-\mathfrak{z}_p a I(w) J_1(k_r a)}{2u} e^{uz}, & \text{se } z < 0. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Repare que no caso de $h_o < 0$, a componente $\widehat{E}_\phi^p(k_r, z)$ terá as expressões:

$$\widehat{E}_\phi^p(k_r, z) = \begin{cases} \frac{-\mathfrak{z}_p a I(w) J_1(k_r a)}{2u} e^{u(z-h_o)}, & \text{se } z \leq h_o < 0 \\ \frac{-\mathfrak{z}_p a I(w) J_1(k_r a)}{2u} e^{-u(z-h_o)}, & \text{se } h_o < z \leq 0. \end{cases}$$

No domínio da transformada de Hankel (k_r, z) , os campos podem ser interpretados como de ondas planas. Num meio estratificado, o campo que emana de uma fonte se propaga até uma interface e, aí, uma parte dele é transmitida e outra refletida (figura (31)).

Figura 31 – Ilustração de ondas no domínio (k_r, z) transmitidas e refletidas num meio estratificado horizontal.



Fonte: Do autor

No meio que contém a fonte podemos tomar como referência sua posição vertical para expressar tanto o campo transmitido como o refletido. Em qualquer outra camada podemos adotar que a onda transmitida tem como referência a interface superior e a onda refletida sua interface imediatamente abaixo. Sob essas condições a componente elétrica tem as expressões:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{E}_{\phi(0)}^p(k_r, z) = T_E^{(0)}(e^{u_0(z-h_0)} + R_{TE}^{(0)}e^{u_0(z+h_0)}), \text{ se } z \leq h_0 < 0 \\ \widehat{E}_{\phi(0)}^p(k_r, z) = T_E^{(0)}(e^{-u_0(z-h_0)} + R_{TE}^{(0)}e^{u_0(z+h_0)}), \text{ se } h_0 < z \leq 0 \\ \widehat{E}_{\phi(j)}^p(k_r, z) = T_E^{(j)}(e^{-u_j(z-z_{j-1})} + R_{TE}^{(j)}e^{u_j(z-z_j-h_j)}), \text{ para } j = 1, \dots, n-1 \\ \widehat{E}_{\phi(n)}^p(k_r, z) = T_E^{(n)}e^{-u_n(z-z_{n-1})}. \end{array} \right. \quad (\text{A.6})$$

Decorrente de (A.2) temos que $H_r = \frac{1}{\partial p} \frac{\partial E_{\phi}}{\partial z}$, que nos dá:

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{H}_{r(0)}^p(k_r, z) = Y_0 T_E^{(0)}(e^{u_0(z-h_0)} + R_{TE}^{(0)}e^{u_0(z+h_0)}), \quad z \leq h_0 < 0 \\ \widehat{H}_{r(0)}^p(k_r, z) = -Y_0 T_E^{(0)}(e^{-u_0(z-h_0)} - R_{TE}^{(0)}e^{u_0(z+h_0)}), \quad h_0 < z \leq 0 \\ \widehat{H}_{r(j)}^p(k_r, z) = -Y_j T_E^{(j)}(e^{-u_j(z-z_{j-1})} - R_{TE}^{(j)}e^{u_j(z-z_j-h_j)}), \quad \text{para } j = 1, \dots, n-1 \\ \widehat{H}_{r(n)}^p(k_r, z) = -Y_n T_E^{(n)}e^{-u_n(z-z_{n-1})} \end{array} \right. \quad (\text{A.7})$$

onde $Y_j = \frac{u_j}{\partial p}$ é admitância intrínseca da camada j .

Com a fonte no ar consideramos

$$T_E^{(0)} = \frac{-a \partial p I(\omega) J_1(k_r a)}{2u_0}. \quad (\text{A.8})$$

Pela continuidade da componente tangencial E_ϕ nas interfaces chegaremos aos valores de $T_E^{(1)}$, $T_E^{(j)}$ e $T_E^{(n)}$:

$$\begin{cases} T_E^{(1)} = T_E^{(0)} \frac{1 + R_{TE}^{(0)}}{1 + R_{TE}^{(1)} e^{-2u_1 h_1}} \\ T_E^{(j)} = T_E^{(j-1)} \frac{(1 + R_{TE}^{(j-1)}) e^{-u_{j-1} h_{j-1}}}{1 + R_{TE}^{(j)} e^{-2u_j h_j}}, \quad \text{para } j = 2, \dots, n-1 \\ T_E^{(n)} = T_E^{(n-1)} (1 + R_{TE}^{(n-1)}) e^{-u_{n-1} h_{n-1}}, \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

em que o coeficiente de reflexão do modo TE é dado por:

$$R_{TE}^{(j)} = \frac{Y_j - \tilde{Y}_{j+1}}{Y_j + \tilde{Y}_{j+1}}, \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (\text{A.10})$$

onde $\tilde{Y}_{j+1} = -\frac{H_r^{(j)}}{E_\phi^{(j)}} \Big|_{z=z_j}$ é a admitância aparente da camada $j+1$, e que pode ser encontrada recursivamente por Hohmann (1987):

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_j &= Y_j \frac{\tilde{Y}_{j+1} + Y_j \tanh(u_j h_j)}{Y_j + \tilde{Y}_{j+1} \tanh(u_j h_j)}, \quad \text{para } j = 1, \dots, n-1 \text{ e} \\ \tilde{Y}_n &= Y_n. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

De posse de todos os termos conhecidos fazemos então a transformada inversa de Hankel para a obtenção das componentes no domínio (r, z) :

$$E_\phi^p(r, z) = \int_0^\infty \hat{E}_\phi^p(k_r, z) J_1(k_r r) k_r dk_r \quad (\text{A.12})$$

e

$$H_r^p(r, z) = \int_0^\infty \hat{H}_r^p(k_r, z) J_1(k_r r) k_r dk_r \quad (\text{A.13})$$

Por (A.3) e pela identidade

$$\frac{1}{r} \frac{d(r J_1(k_r r))}{dr} = k_r J_0(k_r r),$$

vem que

$$H_z^p(r, z) = -\frac{1}{\hat{\mathfrak{z}}_p} \int_0^\infty \hat{E}_\phi^p(k_r, z) J_0(k_r r) k_r^2 dk_r. \quad (\text{A.14})$$

Para um DMV, as respostas podem ser obtidas a partir da formulação da BCH. O que se faz é tomar o raio da bobina muito pequeno comparado a distância do centro da bobina ao ponto de observação e isso equivale fazer $\lim_{a \rightarrow 0} J_1(k_r a)$ cuja aproximação é $\frac{k_r a}{2}$. Portanto para as componentes de campo eletromagnético primário de um DMV tomamos as mesmas fórmulas das de BCH alterando apenas o coeficiente (A.8) de transmissão do ar, que passa a ser

$$T_E^{(0)} = \frac{-a^2 \hat{\mathfrak{z}}_p I(\omega) k_r}{4u_0} = \frac{-m_z \hat{\mathfrak{z}}_p}{4\pi}, \quad (\text{A.15})$$

sob as considerações de $m_z = I(\omega) \pi a^2$ ser o momento do dipolo e, $u_0 = k_r$ considerando-se $\sigma_{ar} = 0$ e o regime quase-estático.

APÊNDICE B – Campo Primário da BCH e do DMV no domínio (x, k_y, z)

Na modelagem bidimensional, além da necessidade de se ter as componentes de campo no domínio espacial (r, z) , precisamos também das expressões do campo elétrico no domínio espectral associado à direção infinita das heterogeneidades. Aqui, tomaremos como sendo y , a direção invariante das propriedades físicas dos corpos anômalos. Nesse caso, a componente E_ϕ^p em coordenadas cilíndricas deve ser primeiramente modificada para E_x^p e E_y^p do sistema retangular. Isso é feito mediante as fórmulas de conversão

$$E_x^p = \frac{-y}{r} E_\phi^p \text{ e } E_y^p = \frac{x}{r} E_\phi^p.$$

As expressões \widehat{E}_ϕ^p de (A.6) estão no domínio (k_r, z) , então usando a identidade

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k_x, k_y) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y = \int_0^{\infty} \widehat{f}(k_r) J_0(k_r r) k_r dk_r,$$

podemos passar para o domínio (k_x, k_y, z) , sendo $k_r = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Percebemos, todavia, que o integrando do lado direito envolve a função de Bessel de primeira espécie e ordem zero, e, no entanto (A.12) está em função de J_1 . Para contornar esse problema fazemos uso das fórmulas

$$\frac{\partial}{\partial x} J_0(k_r r) = \frac{-x}{r} J_1(k_r r) k_r \text{ e } \frac{\partial}{\partial y} J_0(k_r r) = \frac{-y}{r} J_1(k_r r) k_r.$$

A dedução então é feita a seguir.

Para $E_x^p(x, k_y, z)$:

$$\begin{aligned} E_x^p &= \frac{-y}{r} E_\phi^p = \frac{-y}{r} \int_0^{\infty} \widehat{E}_\phi^p(k_r, z) J_1(k_r r) k_r dk_r = \int_0^{\infty} \widehat{E}_\phi^p(k_r, z) \frac{-y}{r} J_1(k_r r) k_r dk_r \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\infty} \widehat{E}_\phi^p(k_r, z) J_0(k_r r) dk_r = \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\infty} \frac{\widehat{E}_\phi^p(k_r, z)}{k_r} J_0(k_r r) k_r dk_r \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{E}_\phi^p(k_x, k_y, z)}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} e^{ik_x x} dk_x e^{ik_y y} dk_y \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ik_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \widehat{E}_\phi^p(k_x, k_y, z) (\cos(k_x x) + i \operatorname{sen}(k_x x)) dk_x \right] e^{ik_y y} dk_y \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[2 \int_0^{\infty} \frac{ik_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \widehat{E}_\phi^p(k_x, k_y, z) \cos(k_x x) dk_x \right] e^{ik_y y} dk_y. \end{aligned}$$

Portanto:

$$E_x^p(x, k_y, z) = 2 \int_0^{\infty} \frac{ik_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \widehat{E}_\phi^p(k_x, k_y, z) \cos(k_x x) dk_x. \quad (\text{B.1})$$

E para $E_y^p(x, k_y, z)$:

$$\begin{aligned}
 E_y^p &= \frac{x}{r} E_\phi^p = \frac{x}{r} \int_0^\infty \widehat{E}_\phi^p(k_r, z) J_1(k_r r) k_r dk_r = - \int_0^\infty \widehat{E}_\phi^p(k_r, z) \frac{-x}{r} J_1(k_r r) k_r dk_r \\
 &= - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \widehat{E}_\phi^p(k_r, z) J_0(k_r r) dk_r = - \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{\widehat{E}_\phi^p(k_r, z)}{k_r} J_0(k_r r) k_r dk_r \\
 &= - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\widehat{E}_\phi^p(k_x, k_y, z)}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} e^{ik_x x} dk_x e^{ik_y y} dk_y \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[- \int_{-\infty}^\infty \frac{ik_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \widehat{E}_\phi^p(k_x, k_y, z) (\cos(k_x x) + i \operatorname{sen}(k_x x)) dk_x \right] e^{ik_y y} dk_y \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left[2 \int_0^\infty \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \widehat{E}_\phi^p(k_x, k_y, z) \operatorname{sen}(k_x x) dk_x \right] e^{ik_y y} dk_y.
 \end{aligned}$$

Portanto:

$$E_y^p(x, k_y, z) = 2 \int_0^\infty \frac{k_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \widehat{E}_\phi^p(k_x, k_y, z) \operatorname{sen}(k_x x) dk_x, \quad (\text{B.2})$$

com $\widehat{E}_\phi^p(k_x, k_y, z)$ sendo dado pelas fórmulas de (A.6), com utilização da constante de propagação $u_j = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 - k_j^2}$ para $j = 0, 1, \dots, n$.

APÊNDICE C – Obtenção das Equações Diferenciais para EF 2,5D

Este apêndice se destina explicitar as manipulações algébricas para a obtenção das equações diferenciais parciais usadas para formulação 2,5D via EF para fonte finita localizada no ar. No caso da BCH e do DMV as componentes do campo primário são E_ϕ^p , H_r^p e H_z^p . Em modelagem 2D os cálculos são realizados no plano XZ ou paralelos a ele. E assim E_ϕ^p se apresentará como sendo E_x^p e E_y^p ; assim como H_r^p por H_x^p e H_y^p , mas estas últimas não aparecem na formulação que desenvolveremos a seguir. Realizando as operações dos rotacionais sobre (2.30) e (2.31), teremos:

$$\frac{\partial H_z^s}{\partial y} - \frac{\partial H_y^s}{\partial z} - \eta E_x^s = \Delta \eta E_x^p, \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial H_x^s}{\partial z} - \frac{\partial H_z^s}{\partial x} - \eta E_y^s = \Delta \eta E_y^p, \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial H_y^s}{\partial x} - \frac{\partial H_x^s}{\partial y} - \eta E_z^s = \Delta \eta E_z^p, \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{\partial E_z^s}{\partial y} - \frac{\partial E_y^s}{\partial z} + \mathfrak{z} H_x^s = 0, \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{\partial E_x^s}{\partial z} - \frac{\partial E_z^s}{\partial x} + \mathfrak{z} H_y^s = 0, \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{\partial E_y^s}{\partial x} - \frac{\partial E_x^s}{\partial y} + \mathfrak{z} H_z^s = 0. \quad (\text{C.6})$$

A fonte é tridimensional e o modelo é 2D, daí fazemos a transformada de Fourier em y para obtenção de um tratamento de ondas planas em y .

$$ik_y \widehat{H}_z^s - \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial z} - \eta \widehat{E}_x^s = \Delta \eta \widehat{E}_x^p, \quad (\text{C.7})$$

$$\frac{\partial \widehat{H}_x^s}{\partial z} - \frac{\partial \widehat{H}_z^s}{\partial x} - \eta \widehat{E}_y^s = \Delta \eta \widehat{E}_y^p, \quad (\text{C.8})$$

$$\frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial x} - ik_y \widehat{H}_x^s - \eta \widehat{E}_z^s = \Delta \eta \widehat{E}_z^p, \quad (\text{C.9})$$

$$ik_y \widehat{E}_z^s - \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial z} + \mathfrak{z} \widehat{H}_x^s = 0, \quad (\text{C.10})$$

$$\frac{\partial \widehat{E}_x^s}{\partial z} - \frac{\partial \widehat{E}_z^s}{\partial x} + \mathfrak{z} \widehat{H}_y^s = 0, \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial x} - ik_y \widehat{E}_x^s + \mathfrak{z} \widehat{H}_z^s = 0. \quad (\text{C.12})$$

Isolando \widehat{E}_z^s em (C.9), teremos:

$$\widehat{E}_z^s = \frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial x} - ik_y \widehat{H}_x^s - \Delta \eta \widehat{E}_z^p \right).$$

Substituindo em (C.10) chegaremos a:

$$\begin{aligned} \frac{ik_y}{\eta} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial x} + \frac{k_y^2}{\eta} \widehat{H}_x^s - \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial z} + \mathfrak{z} \widehat{H}_x^s &= \frac{ik_y \Delta \eta}{\eta} \widehat{E}_z^p \Leftrightarrow \left(\frac{k_y^2}{\eta} + \mathfrak{z} \right) \widehat{H}_x^s = \frac{ik_y \Delta \eta}{\eta} \widehat{E}_z^p + \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial z} - \frac{ik_y}{\eta} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial x} \Leftrightarrow \\ \left(\frac{k_y^2 - k^2}{\eta} \right) \widehat{H}_x^s &= \frac{ik_y \Delta \eta}{\eta} \widehat{E}_z^p + \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial z} - \frac{ik_y}{\eta} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{u^2}{\eta} \widehat{H}_x^s = \frac{ik_y \Delta \eta}{\eta} \widehat{E}_z^p + \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial z} - \frac{ik_y}{\eta} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial x}. \end{aligned}$$

Em que se fez uso do número de onda ao quadrado, $k^2 = -\mathfrak{z}\eta$, e da constante de propagação em k_y , $u = \sqrt{k_y^2 - k^2}$. Obtemos dessa maneira que:

$$\widehat{H}_x^s = \frac{\eta}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial z} - \frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial x} + \frac{ik_y \Delta \eta}{u^2} \widehat{E}_z^p. \quad (\text{C.13})$$

Isolando \widehat{E}_x^s de (C.7) e substituindo em (C.12) ficaremos com:

$$\widehat{H}_z^s = -\frac{\eta}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial x} - \frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial z} - \frac{ik_y \Delta \eta}{u^2} \widehat{E}_x^p. \quad (\text{C.14})$$

Substituindo \widehat{H}_z^s de (C.12) em (C.7) teremos a expressão:

$$\widehat{E}_x^s = -\frac{\mathfrak{z}}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial z} - \frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial x} - \frac{\mathfrak{z} \Delta \eta}{u^2} \widehat{E}_x^p. \quad (\text{C.15})$$

Finalmente, substituindo \widehat{H}_x^s de (C.10) em (C.9) chegaremos a:

$$\widehat{E}_z^s = \frac{\mathfrak{z}}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial x} - \frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial z} - \frac{\mathfrak{z} \Delta \eta}{u^2} \widehat{E}_z^p. \quad (\text{C.16})$$

Substituindo (C.13) e (C.14) na equação (C.8) teremos a equação diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\eta}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\eta}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial z} \right) - \eta \widehat{E}_y^s + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial x} \right) = \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ik_y \Delta \eta}{u^2} \widehat{E}_x^p \right) + \Delta \eta \widehat{E}_y^p - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{ik_y \Delta \eta}{u^2} \widehat{E}_z^p \right). \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Agora tomando as equações (C.15) e (C.16) e as substituindo na equação (C.11), ficaremos com a equação diferencial:

$$\begin{aligned} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathfrak{z}}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mathfrak{z}}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial z} \right) + \mathfrak{z} \widehat{H}_y^s + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial x} \right) = \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\mathfrak{z} \Delta \eta}{u^2} \widehat{E}_x^p \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathfrak{z} \Delta \eta}{u^2} \widehat{E}_z^p \right). \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$