



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA  
ÁREA DE CONCENTRAÇÃO-TÉRMICAS E FLUIDOS

Cindy Stella Fernandes

**UM MODELO DE TURBULÊNCIA BASEADO NO CONCEITO DE  
VÓRTICE**

Belém

2011

Cindy Stella Fernandes

**UM MODELO DE TURBULÊNCIA BASEADO NO CONCEITO DE  
VÓRTICE**

Dissertação apresentada para  
obtenção do grau de Mestre em  
Engenharia Mecânica, Instituto de  
Tecnologia, Universidade Federal do  
Pará. Área de concentração:  
Térmicas e Fluidos. Orientador:  
Prof. Dr. Erb Ferreira Lins

Belém  
2011

**Dados Internacionais de catalogação-na-publicação (CIP), Biblioteca do Mestrado em Engenharia Mecânica/ UFPA, Belém, PA**

F363m          Fernandes, Cindy Stella

Um modelo de turbulência baseado no conceito de vórtice / Cindy Stella Fernandes; orientador Dr. Erb Ferreira Lins, 2011.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Pará. Instituto de tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2011.

1. Vórtice. 2. Modelagem turbulenta. I. Lins, Erb Ferreira, orientador. II.

Titulo

CDD 19.ed. 669.94

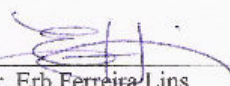

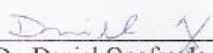
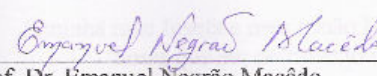
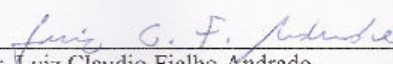
Cindy Stella Fernandes

## UM MODELO DE TURBULÊNCIA BASEADO NO CONCEITO DE VÓRTICE

Dissertação apresentada para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia Mecânica, Instituto de Tecnologia, Universidade Federal do Pará. Área de concentração: Térmicas e Fluidos. Prof. Dr. Erb Ferreira Lins

Data de aprovação: 04 de março de 2011.

Banca examinadora:

 Prof. Dr. Erb Ferreira Lins	—Orientador PPGEM/UFPA
 Prof. Dr. Augusto César de Mendonça Brasil	—Membro Externo UNB
 Prof. Dr. Daniel Onofre de Almeida Cruz	—Membro Interno PPGEM/UFPA
 Prof. Dr. Emanuel Negrão Macêdo	—Membro Interno PRODERNA/UFPA
 Prof. Dr. Luiz Claudio Fialho Andrade	—Membro Interno FEM/ITEC/UFPA

A minha mãe Josefa e meu irmão Max, pela paciência, incentivo, apoio e compreensão das horas que em detrimento do nosso convívio me dediquei a este trabalho.

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por estar sempre presente em minha vida, abençoando e iluminando meu caminho.

Aos meus pais, Antônio e Josefa, meus grandes patrocinadores, que me mostraram o caminho do estudo, sem o qual não estaria aqui hoje. Agradeço-lhes por todo amor, compreensão, dedicação e incentivo, principalmente quando estava cansada de seguir.

Ao meu irmão e segundo pai, Max, por todo apoio dado, pelo carinho, dedicação e incentivo de cada dia.

Ao querido Mineo, mais recente companheiro de percurso, porém de muita importância, por todo apoio, amor e carinho.

Ao Prof. Erb Ferreira Lins, pela orientação durante a elaboração da dissertação, pelo profissionalismo, pela compreensão, dedicação e paciência, que fez deste trabalho uma realidade.

Ao Prof. Daniel Onofre de Almeida Cruz, pela co-orientação, apoio, motivação e incentivo que foram imprescindíveis para chegar até aqui.

Aos Professores Luiz Cláudio Fialho, João Nazareno, Emanuel Negrão e Augusto Brasil que com inestimável conhecimento, incentivo e apoio, permitiram-me vislumbrar um objetivo maior, ajudando a pavimentar a estrada tornando-a menos tortuosa.

Aos amigos Márcia, Abud, Silvestre, Socorro, Hendrick, Sil, Danielly, Karla, Márcia Gisele, Bruno Lobão e a todos os amigos que em algum momento seguiram comigo, pela amizade e respeito conquistados, pelo companheirismo, pelos sorrisos, pela convivência em harmonia, por toda descontração e incentivo que me foi dado diante dos inúmeros percalços da estrada. Peço desculpas por não nominar todos meus amigos, mas tenho certeza que cada um entendeu o momento em estiveram comigo, unindo forças para continuar a caminhada.

Finalmente agradeço a FAPESPA, pelo suporte financeiro, sem o qual esta dissertação de mestrado não seria possível.

“Embora ninguém possa voltar atrás e fazer um novo começo, qualquer um pode começar agora e fazer um novo fim.”

Chico Xavier

## RESUMO

O fenômeno da turbulência está presente na maioria dos escoamentos observados na indústria e na natureza. Muitas são as considerações a respeito das dificuldades relacionadas à caracterização dos escoamentos turbulentos. Uma das muitas questões trata do procedimento de análise do problema através da descrição estatística dos campos por grandezas “médias”, o que leva ao problema de fechamento e à modelagem do tensor de Reynolds, normalmente com modelos baseados no conceito de viscosidade turbulenta. Os modelos de turbulência já existentes apresentam algumas deficiências na previsão do escoamento, além de outras limitações, o que justifica a busca por novas abordagens para o tratamento da turbulência.

Neste trabalho, o problema de fechamento é tratado segundo a modelagem turbulenta baseada no conceito de viscosidade turbulenta. Um novo modelo de turbulência é proposto, que admite a existência de vórtices imersos no escoamento e aplica conceitos e definições relacionados à identificação de vórtices, com o uso do critério de identificação  $Q$ , que caracteriza a região do escoamento ocupada pelo vórtice. Propõe-se a investigação da aplicabilidade do critério  $Q$  em conjunto com o modelo  $k - \varepsilon$ , para o desenvolvimento de um novo modelo de turbulência chamado  $k - \varepsilon - Q$ . Validou-se a aplicabilidade do modelo através de um código numérico computacional para tratamento de escoamentos turbulentos. A solução numérica foi obtida através da discretização do domínio fluido, utilizando o método de volumes finitos e o método multigrid foi utilizado para resolver o sistema linear resultante. Como verificação, foi utilizado este modelo de turbulência para simular o escoamento em uma cavidade quadrada com tampa deslizante e o escoamento turbulento sobre um degrau. Os resultados obtidos foram confrontados com dados experimentais e demonstraram que o modelo aqui proposto se apresenta mais eficiente que o clássico modelo  $k - \varepsilon$ , no tratamento da turbulência nesses dois problemas clássicos.

**Palavras chaves:** Vórtice. Modelagem turbulenta. Método de volumes finitos.



## ABSTRACT

The turbulence is present in most of the flows observed in industry and nature. There are many considerations regarding the difficulties related to the characterization of turbulent flows. One of the many issues regarding the procedure of analyzing the problem through the statistical description of the fields, which leads to the problem of closure and the modeling of the Reynolds tensor, usually with models based on the turbulent viscosity concept. The turbulence models have some shortcomings in predicting the turbulent flow field, which justifies the research of new approaches to treatment turbulence. In this work, the problem of closure is treated using the modeling based on the concept of turbulent viscosity. The proposed new turbulence model admits the existence of vortices immersed in the flow and applies concepts and definitions related to the identification of this structure, using the  $Q$ -criteria that characterizes the region of flow occupied by the vortex. It is proposed to investigate the applicability of this model, resulting in a new turbulence model called  $k - \varepsilon - Q$ . The model applicability is evaluated through a numerical code for computational treatment of turbulent flows. The numerical solution was obtained by discretization of the fluid domain, using the finite volume method and the multigrid method was used for solving the resulting linear system. As benchmark, we used the turbulence model to simulate the flow in a square cavity with sliding lid and turbulent flow over a backward-facing step. The results were compared with some experimental data and demonstrated that the model proposed here appears to be more effective than the classical  $k - \varepsilon$  in the treatment of turbulence in these two problems.

**Keywords:** Vortex. Turbulence modeling. Finite volume method.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - (a) um movimento de circulação sem rotação, vórtice sem vorticidade e (b) um movimento de circulação com rotação rígida, vórtice com vorticidade. Fonte:Andrade (2008) .....	37
Figura 2 - Estrutura básica de um domínio contínuo e um domínio discretizado.....	47
Figura 3 - Malha unidimensional mostrando típico volume de controle. Fonte: Fortuna (2000) .....	50
Figura 4 - Configuração do escoamento em uma cavidade quadrada sob ação de uma tampa deslizante.....	57
Figura 5 - Domínio discretizado por meio de uma malha.....	57
Figura 6 - Comparação dos perfis da componente de velocidade $u / U_0$ em $x = 0,5$ obtidos com as malhas 127x127, 255x255 e 511x511.....	59
Figura 7 - Comparação dos perfis da componente de velocidade $v / U_0$ em $y / H = 0,5$ obtidos com as malhas 127x127, 255x255 e 511x511 .....	60
Figura 8 – Comparação da magnitude do indicador $Q$ obtidas com a malha 127x127 e malha 511x511.....	61
Figura 9 – Linhas de Corrente coloridas pela magnitude da Velocidade do modelo $k - \varepsilon$ ....	62
Figura 10 – Linhas de Corrente coloridas pela magnitude da Velocidade do modelo $k - \varepsilon - Q$ .....	62
Figura 11 – Magnitude do Indicador $Q$ no problema da cavidade (A linha sólida marca $Q = 0$ ).....	63
Figura 12 - Comparação dos perfis da componente de velocidade $u / U_0$ em $x = 0,5$ para $Re = 3200$ obtidos com malha 127x127.....	63

Figura 13 - Comparação dos perfis da componente de velocidade $v / U_0$ em $y / H = 0,5$ para $Re = 3200$ obtidos com malha $127 \times 127$ .....	64
Figura 14 – (a) instantâneo do campo de velocidade; (b) valor médio do campo de velocidade .....	66
Figura 15 – (a) descrição do escoamento sobre um degrau; (b) domínio computacional utilizado e estações de medição analisadas .....	67
Figura 16 – Linhas de Corrente do degrau, coloridas pela magnitude da Velocidade, onde (a) caso experimental de Driver e Seegmiller (1985); (b) modelo $k - \varepsilon - Q$ e (c) modelo $k - \varepsilon$ .....	70
Figura 17 – (a) Magnitude do Indicador $Q$ no problema do degrau (A linha sólida marca $Q = 0$ );(b) zoom de uma região de (a) .....	71
Figura 18 - Perfil de velocidade na estação $x / h = 1$ .....	72
Figura 19 - Perfis de velocidade na estação $x / h = 2$ .....	73
Figura 20 - Perfis de velocidade na estação $x / h = 4$ .....	74
Figura 21 - Perfis de velocidade na estação $x / h = 8$ .....	75

## LISTA DE SÍMBOLOS

$Re$	número de Reynolds
$U$	escala de velocidade
$L$	escala de comprimento
$u, v$	componentes da velocidade nas direções $x, y$
$x, y$	coordenadas cartesianas
$p$	pressão característica
$u_i$	componentes da velocidade instantânea na direção $i$
$\bar{u}_i$	componente média da velocidade instantânea
$u_i'$	flutuação instantânea
$\Delta t$	intervalo de tempo
$k$	energia cinética turbulenta
$C_\mu$	constante empírica
$C_k$	transporte por convecção de $k$
$D_k$	transporte de $k$ por difusão
$P_k$	termo de produção de $k$
$D_\varepsilon$	termo de difusão de $\varepsilon$
$P_\varepsilon$	termo de produção de $\varepsilon$

$d_\varepsilon$	termo de destruição de $\varepsilon$
$C_{\varepsilon_1}, C_{\varepsilon_2}$	constantes empíricas
$N_k$	número de vorticidade cinemático
$ W $	taxa instantânea de rotação
$ D $	taxa instantânea de estiramento ou deformação
$L$	tensor gradiente de velocidades
$D$	tensor taxa instantânea do tensor de deformação
$W$	tensor taxa instantânea de rotação
$t_r$	Soma dos elementos da diagonal principal da matriz do tensor gradiente de velocidade $L$
$Q$	critério de identificação de vórtices
$C_Q$	constante empírica
$H$	altura do domínio
$U_0$	velocidade média do fluido
$h$	altura do degrau
$h_{montante}$	altura do canal a montante do degrau
$h_{jusante}$	altura do canal a jusante do degrau
$X_r$	região de recolamento do fluido

$X_e$  comprimento da região de entrada

$h_e$  altura da região de entrada

### Símbolos Gregos

$\nu$  viscosidade cinemática

$\mu$  viscosidade dinâmica

$\rho$  massa específica

$\delta_{ij}$  delta Kronecker

$\nu_t$  viscosidade turbulenta do fluido

$\gamma_k$  difusividade de energia cinética turbulenta

$\sigma_k, \sigma_\varepsilon$  constantes empíricas, número de Prandtl turbulento para o transporte de  $k$  e  $\varepsilon$

$\varepsilon$  taxa de dissipação de energia turbulenta  $k$

$\boldsymbol{\tau}$  Tensor de tensão

$\overline{u'_i u'_j}$  tensor de tensões de Reynolds

$w$  vorticidade

$\mu_t$  viscosidade dinâmica turbulenta

$\varepsilon_Q$  taxa de dissipação de energia cinética turbulenta do modelo  $k - \varepsilon - Q$

## SUMARIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>17</b>
1.1	MOTIVAÇÃO .....	19
1.2	OBJETIVOS .....	19
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	20
<b>2</b>	<b>EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES E MODELAGEM TURBULENTA .....</b>	<b>21</b>
2.1	EQUAÇÕES GOVERNANTES .....	21
2.2	MODELAGEM DA TURBULÊNCIA .....	22
2.2.1	<b>Metodologia de Simulação Numérica Direta (<i>DNS- Direct Numerical Simulation</i>)</b>	<b>22</b>
2.2.2	<b>Metodologia de Simulação por Grandes Escalas (<i>LES – Large Eddy Simulation</i>)</b>	<b>23</b>
2.2.3	<b>RANS – (Reynolds-Averaged Navier-Stokes).....</b>	<b>24</b>
2.3	EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES COM QUANTIDADES MÉDIAS DE REYNOLDS E O PROBLEMA DE FECHAMENTO .....	25
2.3.1	<b>Aproximação de Boussinesq.....</b>	<b>28</b>
2.4	MODELOS DE TURBULÊNCIA BASEADOS NA VISCOSIDADE TURBULENTA	29
2.4.1	<b>Modelo Algébrico do Comprimento de Mistura .....</b>	<b>29</b>
2.4.2	<b>Modelos de Uma Equação .....</b>	<b>30</b>
2.4.3	<b>Modelo de Duas Equações (Modelo <math>k- \epsilon</math>).....</b>	<b>33</b>
<b>3</b>	<b>O MODELO DE TURBULÊNCIA <math>k - \epsilon - Q</math> .....</b>	<b>35</b>
3.1	VÓRTICES E O CRITÉRIO DE IDENTIFICAÇÃO $Q$ .....	35
3.2	MODELO $k - \epsilon - Q$ .....	40
<b>4</b>	<b>MÉTODO NUMÉRICO.....</b>	<b>46</b>

4.1	INTRODUÇÃO .....	46
4.2	VOLUMES FINITOS.....	48
4.3	MULTIGRID .....	51
4.4	O CÓDIGO COMPUTACIONAL.....	52
4.4.1	<b>Modificações realizadas neste trabalho .....</b>	<b>53</b>
5	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES .....</b>	<b>55</b>
5.1	ESCOAMENTO TURBULENTO EM UMA CAVIDADE QUADRADA .....	55
5.1.1	<b>Introdução .....</b>	<b>55</b>
5.1.2	<b>Descrição da configuração.....</b>	<b>56</b>
5.1.3	<b>Condições de contorno .....</b>	<b>58</b>
5.1.4	<b>Análise de Convergência de malha .....</b>	<b>59</b>
5.1.5	<b>Comparação dos resultados .....</b>	<b>61</b>
5.2	ESCOAMENTO TURBULENTO SOBRE UM DEGRAU .....	66
5.2.1	<b>Introdução .....</b>	<b>66</b>
5.2.2	<b>Descrição da configuração.....</b>	<b>67</b>
5.2.3	<b>Condições de contorno .....</b>	<b>68</b>
5.2.4	<b>Comparação dos resultados .....</b>	<b>69</b>
6	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>76</b>
6.1	CONCLUSÃO .....	76
6.2	TRABALHOS FUTUROS .....	77
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>78</b>



## 1 INTRODUÇÃO

No presente trabalho está sendo proposto o estudo da aplicabilidade de um modelo de turbulência baseado no conceito de viscosidade turbulenta que incorpora conceitos e definições relacionados à noção de vórtice, adotando como parâmetro de identificação destas estruturas o critério  $Q$ , e a estrutura do modelo  $k - \varepsilon$ .

Apresentado como um dos fenômenos mais complexos encontrados na natureza, na indústria e em aplicações práticas, é simples avaliar a importância do estudo da turbulência, bem como dos mecanismos físicos a ela associados. Reynolds (1883) *apud* Silveira Neto (2002) em suas análises estabeleceu a existência de um parâmetro adimensional que controla a transição de um regime laminar para um regime turbulento e também é responsável pela comparação dos termos de convecção com os termos de dissipação viscosa, chamado número de Reynolds (SILVEIRA NETO, 2002). Altamente não lineares, os efeitos convectivos são efeitos que amplificam as perturbações e geram instabilidades, diferente dos efeitos difusivos que amortecem ou inibem formação da instabilidade. Define-se o número de Reynolds ( $Re$ ) a partir da razão entre os efeitos convectivos e os efeitos difusivos presentes no escoamento:

$$Re = \frac{UL}{\nu} \quad (1)$$

onde se identifica  $U$  como a escala da velocidade,  $L$  como a escala de comprimento e  $\nu$  como a viscosidade cinemática do fluido, que é descrita como

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2)$$

onde  $\rho$  é a massa específica e  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido.

O escoamento de fluidos, de maneira geral, é caracterizado por equações não lineares de conservação de massa, energia e quantidade de movimento. Já o fenômeno da turbulência é encontrado em regiões com altos números de Reynolds, quando os efeitos convectivos predominam sobre os efeitos difusivos.

Embora os métodos puramente analíticos sejam importantes para o estudo da turbulência, o aumento do desempenho, da capacidade de computadores e diminuição de seus custos, ampliou o

uso de ferramentas de simulação e modelagem numérica que tornou possível a simulação de fenômenos em âmbito natural. Este contínuo progresso na capacidade computacional somado ao desenvolvimento de técnicas numéricas mais eficazes para o tratamento da turbulência permite que se chegue a uma abordagem mais segura desses problemas complexos no que diz respeito a sua formulação matemática e domínio espacial, e também explica o fato dos métodos da Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD - *Computational Fluid Dynamics*) serem os métodos mais empregados para análise de escoamentos. Nestes métodos simula-se o comportamento de escoamentos utilizando-se ferramentas computacionais, reduzindo o número de experimentos e viabilizando a exploração de fenômenos de difícil estudo em laboratórios.

Vários fenômenos físicos podem ser modelados matematicamente por meio das equações diferenciais parciais (EDPs), como por exemplo, as equações de Navier-Stokes que são consideradas equações apropriadas para a descrição rigorosa do fenômeno da turbulência. Apesar disso, a obtenção de soluções diretas ou soluções analíticas para estas equações, quando estas abrangem não linearidades em sua formulação, continua inviável. Para contornar esse problema, se faz uso de soluções aproximadas, obtidas pelo uso de métodos numéricos. A descrição do fenômeno da turbulência abrange não só ferramentas numéricas eficientes mas, também, a criação de modelos de turbulência capazes de representar de maneira adequada e consistente o comportamento de escoamentos turbulentos.

A modelagem da turbulência possibilita o uso de malhas menos refinadas, o que diminui os custos computacionais. Existem diversos modelos de turbulência, mas mesmo os mais utilizados apresentam algumas limitações quando aplicados a determinados tipos de escoamentos, o que tem gerado a necessidade de se desenvolver novos modelos capazes de descrever de forma coerente o comportamento dinâmico dos escoamentos turbulentos.

Também inserido nesta problemática da turbulência, existe a consideração da existência de estruturas imersas no escoamento que são importantes na caracterização e definição do mesmo. São estruturas coerentes que surgem em um escoamento com uma determinada identidade que, de acordo com uma noção intuitiva seria a movimentação de um conjunto de partículas do fluido girando em volta de um referencial ou ponto em comum. Embora se tenha essa idéia intuitiva, existe uma controvérsia sobre a definição do que é vórtice e como identificá-lo em um escoamento.

Com base nessas considerações, este trabalho analisa um escoamento turbulento admitindo a existência de estruturas coerentes (estruturas vorticiais) e investigando a aplicabilidade do critério de identificação  $Q$  para modelagem turbulenta, em conjunto com o modelo  $k - \varepsilon$ . O critério  $Q$  foi escolhido por ser o critério mais simples e de fácil entendimento. Para fins de validação, o trabalho aplica o modelo  $k - \varepsilon - Q$  no tratamento dois problemas clássicos CFD através de um código computacional: um escoamento turbulento em uma cavidade quadrada (*lid-driven cavity flow*) e um escoamento turbulento sobre um degrau (*flow over a backward-facing step*), aplicando as equações de Navier-Stokes e utilizando o método de volumes finitos como ferramenta numérica para discretizá-las.

## 1.1 MOTIVAÇÃO

A motivação deste trabalho está diretamente relacionada ao esforço que ainda hoje se apresenta no tratamento numérico da turbulência, e maior ainda o esforço de se desenvolver modelos de turbulência capazes de representar de forma coerente o dinamismo dos escoamentos turbulentos, esperando-se que este novo modelo seja robusto, eficiente, de maior aplicabilidade, de baixo custo e de menor tempo de processamento.

## 1.2 OBJETIVOS

- Desenvolver e avaliar o modelo de turbulência  $k - \varepsilon - Q$ , investigando o comportamento do critério  $Q$ , o qual procura definir matematicamente um vórtice, junto ao modelo  $k - \varepsilon$ , validando sua aplicabilidade em um código numérico computacional desenvolvido em C++ para tratamento de escoamentos turbulentos.
- Desenvolver um código computacional adequado para análise de escoamentos turbulentos, viabilizando análises comparativas de ordem numérica entre os

resultados obtidos com o modelo estrutural descrito no item anterior e os resultados obtidos com modelagem tradicional e experimental; desenvolver análises comparativas de validação do código com tratamento de dois problemas clássicos CFD.

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho encontra-se dividido em 6 capítulos, dos quais o capítulo 1 compreende a introdução do trabalho.

O capítulo 2 está reservado para uma discussão sobre as equações de Navier-Stokes e a modelagem turbulenta. A apresentação do modelo de turbulência proposto para o trabalho é discutida no capítulo 3.

No Capítulo 4 será analisada a definição da metodologia numérica empregada no trabalho, e se fará uma breve apresentação do código computacional utilizado como base para este trabalho. O procedimento computacional e de solução, os dados considerados, a discretização das equações algébricas e as condições de contorno são discutidos e analisados no capítulo 5, onde também se discute os resultados comparados qualitativamente com trabalhos considerados de referência para o estudo. Finalmente, o último capítulo apresenta as considerações finais da presente dissertação, com algumas conclusões e sugestões, e logo em seguida são apresentadas nas Referências Bibliográficas ricas literaturas que foram utilizadas no trabalho.

## 2 EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES E MODELAGEM TURBULENTA

### 2.1 EQUAÇÕES GOVERNANTES

As equações de Navier-Stokes são equações que regem o movimento dos fluidos denominados newtonianos (WHITE, 1991). Essas equações são exemplos de equações diferenciais parciais (EDPs) não lineares que descrevem o movimento dos fluidos, modelam escoamento de fluidos compressíveis e incompressíveis, laminares e turbulentos e que por sua grande complexidade matemática, não dispõem de conhecida solução analítica genérica em regiões arbitrárias e condições de contorno gerais, mas podem ser aproximadas numericamente.

De acordo com as propriedades do escoamento e do fluido podem-se simplificar consideravelmente as equações de Navier-Stokes de maneira a reduzir as dificuldades da sua solução, principalmente quando se aproxima essas equações em condições de escoamentos turbulentos, onde o grau de complexidade é alto. Uma das considerações mais utilizadas é considerar o escoamento como incompressível. Neste caso a massa específica é considerada constante ao longo de toda região ocupada pelo fluido.

As equações de Navier-Stokes (Eq.(3), Eq.(4) e Eq.(5)) são derivadas dos princípios físicos de conservação da massa (equação da continuidade) e momento linear, e podem ser representadas como (FORTUNA, 2000):

Equação da Conservação da massa ou da continuidade

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Equação da conservação da quantidade de movimento para as direções  $x$  e  $y$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v^2}{\partial y} + \frac{\partial (uv)}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

## 2.2 MODELAGEM DA TURBULÊNCIA

Mesmo diante de todo avanço tecnológico, ainda tem-se dificuldades na solução das equações de Navier-Stokes. Tendo isso em vista, se faz necessário a utilização de modelagem adicional dos efeitos físicos da turbulência. Existem várias formas de se modelar e simular os efeitos da turbulência em um escoamento, indo de correlações e diagramas empíricos até metodologias mais atuais de simulação numérica, como simulação de grandes escalas.

Na simulação numérica de escoamentos incompressíveis em regime turbulento são possíveis algumas abordagens, de onde a literatura destaca três metodologias principais: DNS (*Direct Numerical Simulation*), LES (*Large Eddy Simulation*) e RANS (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes*).

### 2.2.1 Metodologia de Simulação Numérica Direta (DNS- *Direct Numerical Simulation*)

Em Abrunhosa (2003), mostra-se que a simulação conhecida como Simulação Numérica Direta (DNS) da turbulência, em geral serve somente para simulação numérica sob escoamentos de baixos números de Reynolds (inferior a 1000), sendo que todas as escalas deste escoamento turbulento são consideradas a partir da solução das equações de Navier-Stokes, sem considerar que as pequenas e grandes escalas da turbulência possuem características físicas diferentes. Em consequência disso, Deschamps (1998) afirma que a utilização da metodologia do DNS está restrita a escoamentos em regime de baixo número de Reynolds e geometria simples.

Apesar de ser limitada a escoamentos com baixos números de Reynolds, os conhecimentos obtidos por meio das pesquisas com DNS de escoamentos turbulentos, de maneira geral podem ser generalizados para números de Reynolds mais altos. Atualmente várias características de escoamentos turbulentos podem ser analisadas de maneira precisa e eficiente através de DNS (HÄRTEL, 1996).

O objetivo da Simulação Numérica Direta não é necessariamente o de reproduzir escoamentos reais, mas tornar possíveis estudos controlados que forneçam uma melhor compreensão dos

fenômenos físicos e o desenvolvimento de modelos de turbulência mais precisos (MOIN & MAHESH, 1998) *apud* Buarque (2007). Desta forma, mesmo diante de sua limitação na análise de situações complexas de escoamentos, a metodologia DNS é enfatizada como uma ferramenta de pesquisa por Modi (1999) *apud* Buarque (2007).

### **2.2.2 Metodologia de Simulação por Grandes Escalas (*LES – Large Eddy Simulation*)**

O estudo da aplicação deste tipo de simulação se iniciou com os trabalhos do meteorologista Smagorinsky (1963), com intuito de simular apenas as grandes escalas dos escoamentos atmosféricos, quando fosse impossível simular todo espectro de escalas. Assim como outros tipos de simulação, também, obtêm resultados tridimensionais e transientes das equações de Navier-Stokes. A metodologia de simulação por grandes escalas é similar a técnica de DNS, no entanto, apesar de ainda exigir malhas refinadas, permite que se possam resolver escoamentos a altos números de Reynolds.

Em Abrunhosa (2003), tem-se que o método LES está formulado sob um processo de filtragem espacial das equações de conservação, computando as escalas maiores (*grid-scale*) com aplicação de discretizações espacial e temporal adotadas somente sob esses vórtices maiores, o que diminui a quantidade de recursos computacionais utilizados para a simulação, e computando os efeitos das pequenas escalas (*subgrid-scale*). Os menores vórtices (associados às pequenas escalas de comprimento e de tempo) são aproximados pela introdução de algum modelo matemático simples, geralmente de primeira ordem, para calcular as tensões, visto que muitos usuários dessa metodologia afirmam que as pequenas escalas da turbulência são mais fáceis de modelar, já que são mais homogêneas e isotrópicas. De acordo com Laurence (2002) *apud* Silva Freire *et al.* (2006) na simulação por grandes escalas é necessária a calibração das constantes em função do escoamento a ser simulado, dificultando seu emprego em problemas com características industriais.

### 2.2.3 RANS – (Reynolds-Averaged Navier-Stokes)

A metodologia RANS é a mais usada para modelagem da turbulência, sendo que as equações RANS possuem um termo desconhecido que aparece devido a não linearidade das equações de Navier-Stokes, chamado de tensão aparente ou tensão turbulenta de Reynolds. A busca por uma forma algébrica para este termo constitui o problema de fechamento das equações médias. Logo, na metodologia RANS a simulação tem base na solução das equações médias de Reynolds, onde se utiliza a média temporal de Reynolds (determinado tipo de filtro) para simplificar a modelagem dos tensores sub-malha que aparecem.

Para o cálculo desses tensores é necessário o uso de modelos de turbulência, algébricos ou de equações diferenciais, relacionados aos valores médios do escoamento em questão, os quais devem abranger todos os efeitos médios da turbulência (SILVESTRINI, 2003). Apenas os valores médios são calculados e as flutuações são filtradas e o produto das mesmas modeladas por meio da viscosidade turbulenta e do tensor de tensões de Reynolds. Os modelos de turbulência baseados nas equações médias de Reynolds (RANS) não mostram detalhes das estruturas da turbulência, e sim as suas quantidades estatísticas médias (BUARQUE, 2007).

Apesar da vantagem de poder utilizar malhas menos refinadas do que as que seriam necessárias nas outras duas metodologias citadas, a aplicação das equações médias em simulações numéricas de escoamentos turbulentos diminui a generalidade da solução obtida, consequência da perda de informação que acompanha o processo de transformação de equações instantâneas em equações médias. O uso dessas equações médias precisa de uma solução para o problema de fechamento que é ocasionado devido ao surgimento de variáveis suplementares geradas no processo estatístico aplicado às equações conservativas. Outros detalhes sobre o assunto em questão podem ser vistos em McDonough (2004).



### 2.3 EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES COM QUANTIDADES MÉDIAS DE REYNOLDS E O PROBLEMA DE FECHAMENTO

No escoamento turbulento as grandezas são caracterizadas por flutuações existentes ao redor das características médias que podem ser variáveis ou não, sendo que geralmente o mais interessante a determinação desses valores médios. A maioria das vezes é preciso que se eliminem todos os detalhes do escoamento de maneira que as flutuações instantâneas sejam desprezadas, onde bastará apenas uma descrição do escoamento médio. A maioria dos tratamentos de turbulência procura aproximar as equações de Navier-Stokes, através da decomposição em quantidades médias e flutuantes. As equações com média de Reynolds apresentam somente as quantidades médias, não resolvem as flutuações turbulentas e somam alguns termos desconhecidos com o produto das quantidades flutuantes, que funcionam como tensores adicionais do fluido, denominados de tensões turbulentas ou tensões de Reynolds, as quais denotam os efeitos da turbulência sobre o escoamento médio.

Em 1885, Osbourne Reynolds introduziu o conceito de tensão de Reynolds (HINZE, 1975). Este propôs um processo de decomposição das equações governantes de maneira que se analisasse o comportamento médio do escoamento. Para o processo de modelagem de suas flutuações, Reynolds propôs que seja qual for à propriedade do escoamento, ela pode ser formulada por uma quantidade média e uma quantidade da flutuação.

Nos escoamentos turbulentos são aplicadas as equações de conservação médias obtidas a partir das médias temporais das equações de conservação descritas na seção 2.1, utilizando o processo conhecido como média de Reynolds. Neste contexto, de acordo com o conceito de tensão de Reynolds, se pode assumir que o valor da componente da velocidade instantânea  $u_i$ , por exemplo, na direção  $x_i$  pode ser descrita como a soma de uma componente média  $\bar{u}_i$  e uma flutuação  $u'_i$ , como:

$$u_i = \bar{u}_i + u'_i \quad (6)$$

onde  $\bar{u}_i$  é o valor médio temporal de  $u_i$  e  $u'_i$  é a flutuação de  $u_i$ . Depois que se decompõem as variáveis das equações de conservação, mostrada na seção 2.1, em valores médios e flutuações,

aplica-se o operador médio temporal sobre um intervalo de tempo  $\Delta t$  finito nos termos restantes (SILVA FREIRE, 2006).

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} u_i dt \quad (7)$$

As equações de conservação permanecem da mesma forma do balanço de quantidade de movimento linear para um escoamento laminar, mas agora as velocidades expressam valores médios temporais (ou escoamento médio) e o efeito da turbulência é incorporado nas equações através das tensões de Reynolds.

Como pode ser visto em Wilcox (1994) a decomposição das escalas de Reynolds é uma maneira de se introduzir uma formulação estatística para descrever a dinâmica dos escoamentos turbulentos, assim sendo possível sua modelagem. Este processo age como uma espécie de filtro que tira as flutuações das variáveis dependentes, o que permite que se aplique malhas menos refinadas e hipóteses bem mais simples.

Algumas relações das propriedades das médias associadas ao conceito de separação de escalas serão utilizadas no desenvolvimento do modelo. Neste caso, as propriedades estatísticas de uma variável  $A = \bar{A} + A'$  podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} A &= \bar{A} + A' \\ \bar{A} &= \overline{\bar{A} + A'} = \bar{\bar{A}} + \bar{A}' = \bar{A}, \bar{A}' = 0 \\ \overline{\bar{A}\bar{B}} &= \overline{\bar{A}\bar{B}} = \bar{A}\bar{B} \\ \overline{\bar{A}B'} &= \overline{\bar{A}B'} = \bar{A}\bar{B}' = 0, \bar{B}' = 0 \\ \overline{AB} &= \overline{(\bar{A} + A')(\bar{B} + B')} = \overline{\bar{A}\bar{B} + A'B' + \bar{A}B' + \bar{B}A'} = \bar{A}\bar{B} + \overline{A'B'} \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial n} &= \frac{\partial f}{\partial n} \end{aligned} \quad (8)$$

Especificamente para velocidade temos que:

- A média de uma flutuação é nula:

$$\bar{u}'_i = 0 \quad (9)$$

- A média do produto de uma variável média por uma flutuação de uma variável é nula:

$$\overline{\bar{u}_i u'_i} = \bar{u}_i \bar{u}'_i = \bar{u}_i \cdot 0 = 0 \quad (10)$$

- A média de uma média é igual à própria média:

$$\overline{\overline{u_i}} = \overline{u_i} \quad (11)$$

- A média do produto de duas médias é igual ao produto das duas médias:

$$\overline{\overline{u_i u_i}} = \overline{u_i} \overline{u_i} \quad (12)$$

Aplicando o modelo de Reynolds às equações instantâneas de conservação, ou seja, substituindo todas as variáveis das equações por seus valores médios temporais e suas flutuações e aplicando as considerações baseadas nas propriedades das médias, as equações de conservação mostradas na seção 2.1 são reescritas como:

Equação da Conservação da massa ou da continuidade

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} = 0 \quad (13)$$

Equação da quantidade de movimento (equação de conservação do momento) para a direção  $x$  e  $y$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{uv})}{\partial y} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} - \overline{u' u'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} - \overline{u' v'} \right) \quad (14)$$

$$\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{uv})}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} - \overline{u' v'} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} - \overline{v' v'} \right) \quad (15)$$

Após aplicação da decomposição de Reynolds nas equações de conservação da quantidade de movimento e de transporte, surgem termos adicionais que compõe o tensor de tensões de Reynolds (Eq.(16)). Diante disso a principal tarefa dos modelos de turbulência é a de completar as equações médias de Reynolds fornecendo expressões ou modelos para calcular as tensões de Reynolds.

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = -\rho \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{v' u'} & \overline{w' u'} \\ \overline{u' v'} & \overline{v'^2} & \overline{w' v'} \\ \overline{u' w'} & \overline{v' w'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix} \quad (16)$$

Após a aplicação da média de Reynolds, fica-se com mais incógnitas do que equações, já que não existem equações para os produtos das flutuações turbulentas. Desta forma é necessária definição de equações adicionais para a determinação destas novas variáveis, o que conduz o processo a uma “bola de neve”, já que quando novas equações são incluídas para a determinação

destas variáveis desconhecidas, novas variáveis desconhecidas aparecem. Este é o chamado “problema de fechamento”.

### 2.3.1 Aproximação de Boussinesq

O método mais popularmente aplicado para se resolver o problema de fechamento na modelagem da turbulência utiliza a aproximação proposta por Boussinesq em 1877, que estabelece a relação entre o tensor de Reynolds e o campo médio de velocidade (HINZE, 1975). A proposta original considerou a hipótese de que as tensões de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$  são proporcionais à deformação do escoamento médio, agindo de maneira semelhante às tensões viscosas, através do conceito de viscosidade turbulenta.

Boussinesq propôs inicialmente que as tensões viscosas moleculares poderiam ser obtidas com analogia com o modelo de Stokes. Baseado nos conceitos iniciais formulados por Boussinesq chega-se ao seguinte modelo de fechamento para o tensor de Reynolds:

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (17)$$

onde  $k$  é a energia cinética turbulenta descrita como:

$$k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (18)$$

e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, notação definida como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (19)$$

que serve para conciliar a definição de  $k$  com a soma do traço (soma dos valores da diagonal dos tensores) do tensor de tensão modelado através da hipótese de Boussinesq. Fazendo-se  $i = j$  tem-se:

$$-\overline{u'_i u'_i} = 2\nu_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} - \frac{2}{3} k \delta_{ii} = -2k \Rightarrow k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (20)$$

Destacando que diferente da viscosidade molecular, a viscosidade turbulenta  $\nu_t$  não é uma propriedade física do fluido e sim do escoamento, é uma medida local do nível da turbulência, que varia de ponto a ponto e de escoamento a escoamento, dependente do espaço e do tempo. Grande parte dos modelos de viscosidade turbulenta utiliza uma analogia com a viscosidade molecular, já que se considera a tensão turbulenta análoga a tensão viscosa, para definir a viscosidade turbulenta  $\nu_t$ . De acordo com Abrunhosa (2003), a viscosidade turbulenta é considerada proporcional à massa específica, à flutuação de velocidade e ao comprimento de escala característico da turbulência.

Modelos seguindo esta hipótese calculam a viscosidade turbulenta em vários níveis de complexidade, indo desde simples relações algébricas até mesmo equações diferenciais. Como descrito mais detalhadamente em Silva Freire (2006), os modelos de turbulência podem ser classificados como modelos algébricos e modelos diferenciais, modelos de uma equação e modelos de duas equações.

## 2.4 MODELOS DE TURBULÊNCIA BASEADOS NA VISCOSIDADE TURBULENTA

### 2.4.1 Modelo Algébrico do Comprimento de Mistura

Considerando um escoamento simples, uma das primeiras tentativas de se modelar as tensões turbulentas foi proposta por Prandtl (1925). Ele desenvolveu uma hipótese de comprimento de mistura e propôs, baseado nela, um modelo onde a viscosidade turbulenta é calculada através de expressões algébricas. O modelo de comprimento de mistura é conhecido como modelo algébrico ou modelo à zero equação (SILVA FREIRE, 2006).

Para o modelo algébrico do comprimento de mistura precisa-se somente de quantidades do campo de velocidade média do escoamento, o que acaba resultando em uma necessidade menor de recursos computacionais diante dos outros modelos, como os modelos de uma ou de duas equações. Apesar disso, o modelo de comprimento de mistura tem uma limitação no que tange o

princípio do equilíbrio local, ou seja, que a energia turbulenta é dissipada e produzida em mesma proporção. Neste modelo é preciso fazer ajustes para evitar que a viscosidade turbulenta seja nula ( $\nu_t = 0$ ) quando o gradiente de velocidade médio também for nulo em regiões do escoamento que estão plenamente desenvolvidas, o que leva muitas vezes a resultados irrealistas. O modelo de comprimento de mistura apresenta também outras limitações como a falta de generalidade dos dados calculados (uma das principais), já que é difícil especificar o comprimento de mistura em escoamentos complexos (MOREIRA, 2007).

O uso do modelo de comprimento de mistura é totalmente inadequado em situações que envolvem, por exemplo, regiões de separação do escoamento, já que por causa dos pequenos gradientes de velocidade média o modelo não consegue prever os níveis elevados de turbulência verificados experimentalmente em regiões de estagnação do escoamento (SILVA FREIRE, 2006).

Prandtl (1945) propôs um modelo para melhor prever as propriedades dos escoamentos turbulentos e para descrever matematicamente as tensões turbulentas de maneira mais realista. Sendo neste modelo a viscosidade turbulenta dependente da energia cinética das flutuações turbulentas  $k$ . Assim surgiu o conceito de modelo a uma equação.

#### 2.4.2 Modelos de Uma Equação

No modelo de uma equação busca-se descrever o cálculo de uma das grandezas da turbulência, usadas no cálculo da viscosidade turbulenta, como por exemplo, a energia cinética turbulenta, descrita pela Eq.(18). Kolmogorov e Prandtl (ABRUNHOSA, 2003) propuseram a seguinte relação para se obter a viscosidade turbulenta:

$$\nu_t = C_\mu k^{1/2} L \quad (21)$$

sendo  $C_\mu$  uma constante empírica,  $k$  a energia cinética turbulenta e  $L$  uma escala de comprimento.

Pode-se expressar a viscosidade turbulenta como o produto de uma velocidade característica  $U$  e uma escala de comprimento  $L$  :

$$\nu_t = UL \quad (22)$$

Kolmogorov e Prandtl sugeriram a dedução de uma equação de transporte para  $k$  , em que se obtêm a equação diferencial para a energia cinética turbulenta através de manipulações das equações de Navier-Stokes. Logo, a equação de energia turbulenta  $k$  é deduzida como (SILVA FREIRE, 2006):

$$\frac{\partial k}{\partial t} + C_k = D_k + P_k + \varepsilon \quad (23)$$

onde se define que:

$$C_k = \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (24)$$

$$D_k = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \overline{u'_j \left( \frac{u'_i u'_i}{2} + \frac{p}{\rho} \right)} - \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (25)$$

$$P_k = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (26)$$

$$\varepsilon = -\nu \overline{\left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)} \quad (27)$$

Os termos  $\frac{\partial k}{\partial t}$  e  $C_k$  da Eq.(23) indicam a taxa de variação local e o transporte por convecção de  $k$  , e não necessitam ser modelados.

$D_k$  é o termo que representa o transporte de  $k$  por meio de difusão. Em sua descrição matemática, Eq.(25), o último termo entre colchetes faz alusão ao transporte difusivo molecular de  $k$  , sendo importante somente em regiões de baixa intensidade da turbulência. Os termos restantes que aparecem na formulação de  $D_k$  estão ligados ao transporte difusivo turbulento e são aproximados por meio da idéia do conceito de viscosidade turbulenta:

$$-\overline{u'_j \left( \frac{u'_i u'_i}{2} + \frac{p}{\rho} \right)} \simeq \gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (28)$$

Na Eq.(28),  $\gamma_k$  é a difusividade determinada da analogia de Reynolds.  $\gamma_k$  é a relação entre a difusividade de qualquer propriedade linear com a difusividade da quantidade de movimento (SILVA FREIRE, 2006), ou seja,

$$\gamma_k \simeq \frac{\nu_t}{\sigma_k} \quad (29)$$

onde  $\sigma_k$  é o número de Prandtl turbulento, que normalmente assume o valor de 1 para o transporte de  $k$ .

Já o termo  $P_k$ , descrito pela Eq.(26) representa o termo de produção de energia cinética turbulenta. Este termo expressa a taxa de transferência de energia do escoamento médio para o mecanismo de turbulência. Nos modelos baseados na hipótese da viscosidade turbulenta, o tensor  $\overline{u'_i u'_j}$  em  $P_k$  é aproximado fazendo-se uso da Eq.(17).

O último termo da Eq.(23) descrito como sendo a taxa de dissipação de energia turbulenta ou taxa de dissipação viscosa de  $k$ , é a variável que precisa ser modelada, estimada por:

$$\varepsilon \simeq \frac{k^{3/2}}{L_\varepsilon} \quad (30)$$

Apesar de que em comparação com o modelo algébrico de comprimento de mistura, o modelo de uma equação melhora de maneira significativa a qualidade do cálculo das grandezas turbulentas, este modelo também apresenta deficiências, onde se destaca uma em especial que é a necessidade de se prescrever uma escala de comprimento característico para caracterização da turbulência.

O fato de ser exigido que se especifique empiricamente o comprimento de escala para o cálculo da dissipação e da viscosidade turbulenta, torna difícil a aplicação do modelo de uma equação. Isso levou à determinação do comprimento de escala através da equação de transporte de uma quantidade turbulenta e, a partir do seu valor, definir a viscosidade turbulenta  $\nu_t$  e a taxa de dissipação  $\varepsilon$ . Surgiam assim os modelos de duas equações (ABRUNHOSA, 2003).



### 2.4.3 Modelo de Duas Equações (Modelo k- ε)

Na elaboração de modelo de duas equações mantém-se a utilização da equação da energia cinética  $k$ , isso por causa do pouco empirismo usado na sua obtenção. Vários tipos de modelos foram propostos, dentre estes um dos mais conhecidos e utilizados é o modelo de duas equações  $k - \varepsilon$  trabalhadas por Launder e Spalding, (1974) *apud* Silva Freire (2006), que é baseado na equação da energia cinética turbulenta  $k$  e na taxa de dissipação da energia cinética turbulenta  $\varepsilon$ .

O modelo  $k - \varepsilon$  trabalha com duas variáveis adicionais que são introduzidas para modelar as tensões de Reynolds. Este modelo relaciona as tensões de Reynolds com os gradientes de velocidade média e a viscosidade turbulenta, conceito no qual o modelo se baseia (hipótese de Boussinesq) e apresentam duas equações de transporte que são modeladas, uma independente da outra, e são solucionadas uma para a equação da energia cinética  $k$  e outra para o termo de dissipação de energia cinética turbulenta  $\varepsilon$ .

Para se obter uma equação exata para o transporte de  $\varepsilon$ , manipula-se as equações de Navier-Stokes. Os termos da equação de transporte de  $\varepsilon$  podem ser reunidos de maneira a representarem mecanismos físicos de difusão, produção e destruição de  $\varepsilon$  (SILVA FREIRE, 2006):

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = D_\varepsilon + P_\varepsilon + d_\varepsilon \quad (31)$$

Na Eq.(31)  $D_\varepsilon$  é o mecanismo de difusão de  $\varepsilon$ ,  $P_\varepsilon$  é o mecanismo de produção de  $\varepsilon$  e  $d_\varepsilon$  é o mecanismo de destruição de  $\varepsilon$ . Para a modelagem dos termos da equação de  $\varepsilon$ , usa-se, a análise dimensional e a intuição física. A difusão de  $\varepsilon$  ( $D_\varepsilon$ ) é aproximada usando o gradiente de  $\varepsilon$ :

$$D_\varepsilon \cong \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \quad (32)$$

Por outro lado, a produção de  $k$  ( $P_k$ ) deve ser balanceada pela produção de  $\varepsilon$  ( $P_\varepsilon$ ) para evitar aumento ilimitado de  $k$ . Assim,

$$P_\varepsilon \approx \frac{\varepsilon}{k} P_k \quad (33)$$

onde a razão de  $\varepsilon$  e  $k$ ,  $(\varepsilon/k)$ , é o inverso da escala de tempo.

O termo de destruição de  $\varepsilon$  ( $d_\varepsilon$ ), na equação de  $\varepsilon$ , deve ter propensão a ser infinito quando  $k \rightarrow 0$ , senão  $k$  pode vir a se tornar negativo. Assim:

$$d_\varepsilon \approx \frac{\varepsilon}{k} \varepsilon \quad (34)$$

Utilizando todas as aproximações já citadas, o modelo  $k - \varepsilon$  para altos números de Reynolds assume a forma de:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \nu_t \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \nu_t \left[ \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \left[ \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] - \varepsilon \quad (35)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (36)$$

onde a  $\nu_t$  é a viscosidade turbulenta,

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (37)$$

e  $C_\mu$ ,  $C_{\varepsilon_1}$  e  $C_{\varepsilon_2}$  são constantes empíricas.

O modelo  $k - \varepsilon$  também tem suas deficiências. O modelo é falho em prever escoamentos afastados da condição de equilíbrio entre produção e dissipação, tem falta de generalidade, já que tem muitas constantes a serem ajustadas. De forma geral, os erros no modelo  $k - \varepsilon$  surgem por dois motivos, um por causa do uso de uma relação entre tensões turbulentas e taxas de deformação do escoamento médio, semelhante a que é utilizada para o escoamento laminar e outro pela pouca fundamentação física da equação de transporte de  $\varepsilon$ , a qual nenhuma das correções sugeridas até o momento fornece uma generalidade satisfatória. Essas sérias deficiências demonstram que o modelo deve ser utilizado com cautela na previsão de escoamentos complexos (SILVA FREIRE, 2006).

### 3 O MODELO DE TURBULÊNCIA $k - \varepsilon - Q$

#### 3.1 VÓRTICES E O CRITÉRIO DE IDENTIFICAÇÃO $Q$

A turbulência tem natureza rotacional e está associada à instabilidade do fluido. Da mesma forma que nos escoamentos laminares, os escoamentos turbulentos também apresentam a formação de vórtices, que são considerados como a expressão macroscópica de instabilidades e desordem do fluxo que se iniciam em nível molecular. Pode-se considerar a dinâmica de vórtices como uma das formas de melhor compreensão dos fenômenos relacionados ao escoamento turbulento. Portanto, conhecer os argumentos, hipóteses e fundamentos usados na formulação do conceito de vórtice são importantes para identificar, caracterizar e descrever as estruturas vorticais em investigações teóricas, experimentais e numéricas da turbulência estrutural ou de escoamentos rotacionais em transição (ANDRADE, 2008).

De acordo com as considerações de Tennekes e Lumley (1972) *apud* Andrade (2008) é natural que se analise escoamentos turbulentos e em transição com base na ótica estrutural, em um contexto de relação à definição de vorticidade e a diversos conceitos de vórtice, ou turbilhão, ‘eddy’ ou estrutura coerente como é referenciado em algumas literaturas.

Sob a ótica estrutural, a análise dos escoamentos é desenvolvida com ajuda de noções intuitivas e conceitos geométricos relacionados com a vorticidade (de ordem qualitativa) que conseguem complementar as definições objetivas (de ordem quantitativa) de vórtice. Frequentemente as definições de vórtice são formuladas em termos do vetor vorticidade  $\omega$ , das regiões do escoamento que se caracterizam por relações obtidas do tensor gradiente de velocidade, das zonas de mínima pressão e das trajetórias e linhas de corrente das partículas fluidas girantes do escoamento (ANDRADE, 2008).

Retomando alguns conceitos da hidrodinâmica, Lamb (1997) identifica na trajetória de um elemento fluido e suas velocidades em um determinado ponto, três agentes: o movimento de translação, deformação e rotação. A associação desses três movimentos gera um vetor resultante

chamado vorticidade. O movimento de translação trata do deslocamento do elemento como um todo, a deformação se refere à deformação do elemento devido a tensão tangencial e a rotação mostra a evolução do elemento como um todo ao redor de um eixo momentâneo, com suas velocidades angulares (FOX & MCDONALD, 1998). Outros detalhes sobre conceitos geométricos importantes relacionados à dinâmica da vorticidade podem ser visto melhor em Truesdell (1954).

Segundo McDonough (2004), a vorticidade, além de ser um parâmetro matematicamente definido como sendo o campo vetorial definido pelo rotacional do movimento como mostra a Eq.(38) (ou seja, uma grandeza física que quantifica a rotação de um fluido quando a molécula do fluido gira em torno de si), é considerada um ingrediente essencial de um escoamento turbulento. Assim, a vorticidade matemática é construída a partir de gradientes de velocidade da propriedade do escoamento físico, e estes gradientes são calculados a partir de campos de velocidade medidos, levando a uma melhor determinação indireta de vorticidade (MCDONOUGH,2004).

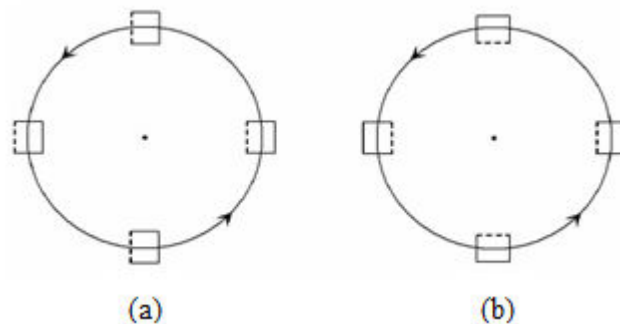
Apesar do difundido interesse contemporâneo nos vórtices, há pouca concordância na definição de “vórtice” ou “estrutura coerente”. Muitos conceitos são trabalhados para a definição dessas estruturas imersas no escoamento, o que gera diferenças significativas nas formulações e resultados obtidos (ANDRADE, 2008). Sob o ponto de vista de Hussain (1983), estruturas coerentes são movimentos do escoamento turbulento organizados em grande escala, ou seja, um componente organizado da vorticidade que é uma fase correlacionada (isto é, coerente) sobre a extensão da estrutura. Hussain (1983) também afirma que o tamanho destas estruturas coerentes se compara à dimensão transversal do fluxo de cisalhamento (identificada pela presença de vorticidade aleatória), não se sobrepondo espacialmente e tendo cada uma seu domínio e limite independente, e que as estruturas coerentes são as responsáveis pelo significativo transporte de massa, calor e movimento no escoamento, sem necessariamente ser altamente energético em si, ou seja, uma estrutura coerente se caracteriza por altos níveis de vorticidade coerente, coerentes tensões de Reynolds, coerente produção, e um coerente transporte de calor e massa, mas necessariamente um elevado nível de energia cinética.

Várias questões fundamentais à respeito dos vórtices são respondidas pela teoria avançada de Kolmogorov (1941), que é expressa em três hipóteses, como pode ser visto em maiores detalhes em Pope (2003). Destacando a primeira hipótese, que diz respeito a isotropia dos movimentos de pequena escala, tem-se que de uma maneira geral os grandes vórtices são anisotrópicos e são

afetados pelas condições de contorno do escoamento. Kolmogorov argumentou que os desvios de direção das grandes escalas são perdidos no processo de redução de escala caótica, pelo qual a energia é transferida para vórtices sucessivamente menores e menores, declarando, por isso, que para suficientemente alto número de Reynolds, os movimentos em pequena escala turbulenta são estatisticamente isotrópicos (POPE, 2003).

Jeong e Hussain (1995) questionam várias definições de vórtices, chamando atenção para a veracidade de definições intuitivas. Uma das noções intuitivas de vórtice, de Lugt (1995), considera que um vórtice consiste em um movimento girante de um grupo de partículas fluidas em torno de um ponto em comum, esta consideração complementa o sentido de classificações objetivas, de forma a caracterizar a geometria de estruturas observadas na natureza, em experimentos e a partir de visualizações obtidas com simulações numéricas e laboratoriais. Outra definição intuitiva identifica vórtices como regiões de elevada vorticidade  $\omega$ , embora não exista um princípio a partir de qual valor se possa afirmar quando a vorticidade é elevada. A vorticidade elevada nem sempre indica presença de vórtices, já que se podem ter vórtices com ou sem vorticidade  $\omega_z$ , como acontece no escoamento cisalhante simples, sendo que a afirmação da existência de um vórtice sem vorticidade (vórtice potencial), embora conceitualmente importante, em um caso real, não acontece.

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (38)$$



**Figura 1 - (a) um movimento de circulação sem rotação, vórtice sem vorticidade e (b) um movimento de circulação com rotação rígida, vórtice com vorticidade. Fonte:Andrade (2008)**

A Figura 1 ilustra o movimento circular de duas partículas fluidas em sentido anti-horário seguindo uma linha traçada. Os dois movimentos se diferem na orientação de cada partícula ao

longo da trajetória. No primeiro desenho a partícula mantém sua orientação, o que quer dizer que o movimento de translação é um movimento de circulação sem rotação, ou seja, o vórtice existe sem vorticidade da partícula. Já no caso do segundo desenho, a orientação da partícula não é preservada, o que mostra que o movimento de translação é acompanhado de uma rotação rígida, ou seja, o vórtice existe com vorticidade da partícula diferente de zero (ANDRADE, 2008).

Por essa necessidade de se estabelecer uma medida de rotacionalidade de um movimento, Truesdell (1954) introduziu a quantidade adimensional chamado de número de vorticidade cinemático  $N_k$  como uma medida de rotacionalidade do movimento,

$$N_k = \frac{|W|}{|D|} \quad (39)$$

onde o número de vorticidade cinemático  $N_k$  é definido como a relação entre a taxa instantânea de rotação  $|W|$  e a taxa instantânea de estiramento ou deformação  $|D|$ . O número de vorticidade cinemático  $N_k$  avalia a qualidade ou o grau rotacional de um movimento, onde se considera os valores de  $N_k$  variando entre zero, quando  $|W| = 0$ , o movimento é tido como irrotacional e infinito, quando  $|D| = 0$ , definido como movimento rígido. Além do argumento cinemático Truesdell (1954) também introduziu o número de vorticidade dinâmico  $N_D$  como forma de avaliar métodos de solução de equações hidrodinâmicas baseados na existência de um potencial de velocidade, como pode ser visto em maiores detalhes em Andrade (2008).

No que tange os critérios de identificação de vórtices, tem-se vários tipos, cada qual definindo uma função  $f$ , onde a função  $f$  é uma medida do tamanho da vorticidade em relação à taxa de deformação (ANDRADE, 2008). O critério de identificação de vórtice escolhido para este trabalho foi o critério proposto por Hunt, Wray e Moin (1988) *apud* Andrade (2008), chamado de critério  $Q$ . Define-se o núcleo do vórtice como uma região conexa de um escoamento cujo segundo invariante escalar do tensor gradiente de velocidade  $\mathbf{L}$  é positivo  $I_2(\mathbf{L}) = Q$ :

$$I_2(\mathbf{L}) = Q = \frac{1}{2}[(tr\mathbf{L})^2 - tr(\mathbf{L}^2)] = \frac{1}{2}[(L_{ii})^2 - (L_{ij}L_{ji})] > 0 \quad (40)$$

onde  $tr$  é a soma dos elementos da diagonal principal da matriz do tensor gradiente de velocidade  $\mathbf{L}$ . O gradiente de velocidade  $\mathbf{L} = L_{ij} = \partial u_i / \partial x_j$ , guarda informações importantes sobre essas taxas instantâneas de deformação, cisalhamento e rotação.

$$\mathbf{L} = \nabla \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (41)$$

Essa relação pode ser vista com mais clareza através da decomposição de Cauchy-Stokes:

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (42)$$

onde se obtêm a taxa instantânea do tensor de deformação  $\mathbf{D}$  (parte simétrica do tensor  $\mathbf{L}$ ) e a taxa instantânea de rotação  $\mathbf{W}$  (parte anti-simétrica do tensor  $\mathbf{L}$ ).

De acordo com o critério  $Q$  o vórtice é identificado por regiões do campo escalar  $Q$ , o que satisfaz a seguinte desigualdade:

$$Q = \frac{1}{2} \left[ (tr \mathbf{L})^2 - tr(\mathbf{L}^2) \right] = \frac{1}{2} \left[ (L_{ii})^2 - (L_{ij} L_{ji}) \right] > 0 \quad (43)$$

Para escoamentos incompressíveis, com o auxílio da decomposição aditiva Eq.(43), a equação do critério  $Q$ , Eq.(43), reduz-se a:

$$Q = -\frac{1}{2} tr(\mathbf{L}^2) = -\frac{1}{2} L_{ij} L_{ji} = -\frac{1}{2} (D_{ij} D_{ji} + W_{ij} W_{ji}) = \frac{1}{2} (|\mathbf{W}|^2 - |\mathbf{D}|^2) > 0 \quad (44)$$

onde o (duplo) produto interno entre tensores simétricos e anti-simétricos é sempre nulo  $D_{ij} W_{ji} = 0$ .

O critério  $Q$  provê uma medida local onde existe “demasiada” taxa de deformação, identificando como vórtices os locais onde  $|W| > |D|$ . O critério  $Q$  é uma expressão matemática do número de vorticidade cinemático  $N_k$ , se buscássemos expressar matematicamente o  $N_k$  chegaria-se ao critério  $Q$ . Diante disso, considerando as Eq.(39) e Eq.(44), falar que  $Q > 0$  é o mesmo que dizer que  $N_k > 1$ , o que nos leva a seguinte relação de equivalência:

$$Q > 0 \Leftrightarrow N_k > 1 \quad (45)$$

Essa relação de equivalência confere à relação  $N_k > 1$  a “classificação” de critério de identificação, ao definir o vórtice cinematicamente através do invariante  $Q$ , como um conjunto de pontos conexos onde a “demasiada” taxa de rotação, com relação à taxa de deformação, ( $|W| > |D|$ ) é observada nas três direções invariantes. Além do argumento cinemático, o critério  $Q$  pode ser obtido através do argumento dinâmico. Maiores detalhes sobre esses assuntos podem ser visto no trabalho de Andrade (2008).

### 3.2 MODELO $k - \varepsilon - Q$

A modelagem da turbulência é importante para representar grandezas escalares, vetoriais ou tensoriais em função de grandezas conhecidas, estabelecendo relação direta para o tensor de tensões de Reynolds com o campo de velocidade média, mais particularmente seus gradientes. Existem diversos modelos de turbulência descritos na literatura, o que então faz surgir o questionamento do porquê propor um novo modelo de turbulência. Quando se propõe um modelo de turbulência se espera que este tenha mais robustez, seja eficiente, de melhor aplicabilidade, de baixo custo e que minimize o tempo total de processamento.

O novo modelo de turbulência  $k - \varepsilon - Q$  tem como base o conceito de viscosidade turbulenta ( $\nu_t$ ). Além de buscar atender as características de robustez, eficiência, aplicabilidade, custo e tempo, o modelo espera incorporar informações, conceitos e definições das microestruturas existentes imersas no escoamento, os vórtices, assim como acrescentar argumentos físicos ao modelo.

Na construção do novo modelo  $k - \varepsilon - Q$  adotou-se o modelo  $k - \varepsilon$  e o indicador  $Q$ , que é um valor do critério  $Q$  que quantifica o vórtice, e que diferentemente do critério  $Q$  em si, admite valores dicretos. Além das equações do identificador  $Q$ , é preciso uma modelagem que forneça o campo de velocidade, visto que o  $Q$  necessita de um campo de velocidade. Para solução desta questão foi escolhido o modelo  $k - \varepsilon$ , que além de ser um modelo mais simples de implementar e mais utilizado, também tem bastante embasamento na literatura.



Portanto, o modelo acoplado  $k - \varepsilon - Q$  é um modelo de duas equações utilizadas para modelagem das tensões de Reynolds, resolve uma equação de transporte turbulento, calculando a escala de velocidade através da energia cinética turbulenta  $k$ , do  $\varepsilon$  e do  $Q$ .

A equação de transporte da energia cinética turbulenta  $k$  (WILCOX, 1993) é definida como:

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_j} - \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \left( \mu + \mu_t / \sigma_k \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (46)$$

onde assume-se que o tensor tensão  $\tau_{ij}$  e a taxa de deformação  $\overline{D}_{ij}$  são definidos como

$$\tau_{ij} = 2\mu_T \overline{D}_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (47)$$

$$\overline{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (48)$$

Tendo como base a Eq.(43), a equação do indicador  $Q$  é definida como:

$$Q = \frac{1}{2} \left[ (tr \mathbf{L})^2 - tr(\mathbf{L}^2) \right] \quad (49)$$

Já que o indicador  $Q$  quantifica o vórtice, então o modelo  $k - \varepsilon - Q$  precisa de uma relação entre a energia cinética turbulenta  $k$  e a velocidade. O gradiente de velocidade  $\mathbf{L}$  a taxa instantânea de deformação  $\mathbf{D}$  e a taxa instantânea de rotação  $\mathbf{W}$  são tensores que expressam o critério  $Q$  pelas seguintes relações:

$$\mathbf{L} = L_{ij} = \partial u_i / \partial x_j, \mathbf{L}^T = L_{ji} = \partial u_j / \partial x_i \quad (50)$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (51)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T); \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (52)$$

onde  $|\mathbf{W}|$  e  $|\mathbf{D}|$  define a norma Euclidiana de  $\mathbf{W}$  e  $\mathbf{D}$  utilizados aqui:

$$\begin{aligned} |\mathbf{W}| &= tr[\mathbf{W}\mathbf{W}^T]^{1/2} = tr[W_{ij}(W_{jk})^T]^{1/2} = tr[W_{ij}W_{kj}]^{1/2} = [W_{ij}W_{ij}]^{1/2}; \\ |\mathbf{W}| &= [0^2 + W_{12}^2 + W_{13}^2 + W_{21}^2 + 0^2 + W_{23}^2 + W_{31}^2 + W_{32}^2 + 0^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{D}| &= tr[\mathbf{D}\mathbf{D}^T]^{1/2} = tr[D_{ij}(D_{jk})^T]^{1/2} = tr[D_{ij}D_{kj}]^{1/2} = [D_{ij}D_{ij}]^{1/2}; \\ |\mathbf{D}| &= [D_{11}^2 + D_{12}^2 + D_{13}^2 + D_{21}^2 + D_{22}^2 + D_{23}^2 + D_{31}^2 + D_{32}^2 + D_{33}^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (54)$$

Escrevendo a norma Euclidiana  $|\mathbf{W}|^2$  como uma função de  $\mathbf{L}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} |\mathbf{W}|^2 &= W_{ij}W_{ij} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} (L_{ij} - L_{ji})(L_{ij} - L_{ji}) = \frac{1}{4} (L_{ij} - L_{ji})^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2; \\ |\mathbf{W}|^2 &= \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 - 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \end{aligned} \quad (55)$$

De acordo com as considerações feitas na seção 2.3, Eq.(8), o campo de velocidade da norma  $|\mathbf{W}|^2$  pode ser dividido em uma parte média e uma componente de flutuação, ou seja,

$$|\mathbf{W}|^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} \frac{\partial(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_i} \right] \quad (56)$$

Quando a média é tomada sobre a decomposição da Eq.(56), pela Eq. (8) tem-se que:

$$\overline{|\mathbf{W}|^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} \right] \quad (57)$$

Se o mesmo procedimento é aplicado a norma Euclidiana  $|\mathbf{D}|^2$  tem-se:

$$\begin{aligned} |\mathbf{D}|^2 &= D_{ij}D_{ij} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} (L_{ij} + L_{ji})(L_{ij} + L_{ji}) = \frac{1}{4} (L_{ij} + L_{ji})^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2; \\ |\mathbf{D}|^2 &= \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \end{aligned} \quad (58)$$

com

$$|\mathbf{D}|^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} \frac{\partial(\bar{u}_j + u'_j)}{\partial x_i} \right] \quad (59)$$

e

$$|\mathbf{D}|^2 = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} \right] \quad (60)$$

Desta forma, com auxílio das Eq.(57) e Eq.(60) e aplicando as considerações da seção 2.3, pode-se escrever a equação da média para  $Q$  como:

$$\bar{Q} = \overline{\bar{Q} + Q'} = \bar{\bar{Q}} + \bar{Q}' = \bar{Q} = \frac{1}{2}(\overline{|\mathbf{W}|^2} - \overline{|\mathbf{D}|^2}) \quad (61)$$

ou seja,

$$\bar{Q} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right] - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right] \right\} \quad (62)$$

que de maneira simplificada:

$$\bar{Q} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \quad (63)$$

Destacando somente os valores médios da Eq.(63) obtemos o  $\bar{\bar{Q}}$

$$\bar{Q} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \quad (64)$$

Particularizando a Eq.(64) para um problema bidimensional como:

$$\bar{\bar{Q}} = \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \quad (65)$$

Assumindo que argumentos dimensionais como  $\frac{\partial u'}{\partial x} \approx \frac{u'}{x}$  podem ser isolados, pode-se utilizar esta relação para obter as escalas de velocidade e comprimento em termos da energia cinética turbulenta  $k$ , definida como, e do critério  $\bar{Q}$ ,

$$k = \frac{\overline{u'_i u'_i}}{2} = k = \frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{2} \quad (66)$$

$$\sqrt{k} = \frac{\sqrt{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}}{\sqrt{2}} \quad (67)$$

onde considera-se que a velocidade flutuante característica seja de mesma ordem de grandeza da energia cinética  $\sqrt{k}$ , ou seja,

$$O(\sqrt{k}) \cong O(u') \quad (68)$$

$$\sqrt{k} = u' \quad (69)$$

Assume-se que:

$$\bar{\bar{Q}} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \quad (70)$$

$$\frac{C_2}{2} \left( \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x} + \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2 \approx \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} \quad (71)$$

Logo temos que a eq.(63) é igual a

$$\bar{Q} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} \right) \therefore \bar{Q} = \frac{1}{2} \left( \bar{\bar{Q}} + \frac{C_2}{2} \left( \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial x} + \frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2 \right) \quad (72)$$

onde  $C_2$  é uma constante a ser definida.

Já com a definição matemática do  $Q$ , é necessário aplicar a definição dentro do conceito de viscosidade turbulenta, relacionar o  $Q$  com a viscosidade turbulenta.

Para o modelo de turbulência  $k - \varepsilon$  a equação da viscosidade turbulenta é definida como:

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (73)$$

onde a escala de comprimento é:

$$l = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad (74)$$

Por meio de análise dimensional obtém-se que para o modelo  $k - \varepsilon - Q$  a escala de comprimento é aproximadamente:

$$l^2 \approx \frac{k}{Q} \quad (75)$$

A partir da definição da escala de comprimento do modelo  $k - \varepsilon - Q$  e inserindo esta na Eq.(74) do modelo  $k - \varepsilon$ , obtém-se a equação da taxa de dissipação da energia cinética  $\varepsilon$  para o modelo  $k - \varepsilon - Q$ , que é definida como:

$$\varepsilon_Q = k \overline{Q}^{\frac{1}{2}} \quad (76)$$

Aplicando a Eq. (76) na Eq. (73), defini-se a equação da viscosidade turbulenta  $\nu_t$  para o modelo de turbulência  $k - \varepsilon - Q$  como:

$$\nu_{t_Q} = \rho C_\mu k \left| \overline{Q} \right|^{-1/2} \quad (77)$$

Após essa manipulação de equações, acaba por se ter duas equações de  $\varepsilon$ . Diante disso, as duas tem que ser compostas em uma mesma equação. Desta forma a dissipação é calculada como:

$$\varepsilon = (1 - C_Q)\varepsilon_\varepsilon + C_Q.\varepsilon_Q \quad (78)$$

Neste trabalho, o  $C_Q$  foi testado com vários valores, sendo demonstrado nos resultados o  $C_Q$  obtido de melhor desempenho e utilizamos  $C_2 = 0$ . Esta consideração foi feita para simplificar a análise, uma vez que, isso evitará a calibração de duas constantes  $C_2$  e  $C_Q$ . Nesta primeira etapa se está interessado apenas na calibração de uma parte do modelo. Em uma etapa futura o valor de  $C_2$ , bem como outras constantes do modelo  $k - \varepsilon$ , serão calibradas.

## 4 MÉTODO NUMÉRICO

### 4.1 INTRODUÇÃO

Existem duas maneiras de se tratar um problema físico, uma experimental e outra teórica. Dentro do regime de análise teórico, utilizado neste trabalho, é usual a aplicação dos modelos matemáticos que em sua maioria são constituídos de equações diferenciais. As equações diferenciais possuem condições de contorno, que são responsáveis por descrever o comportamento nas fronteiras do sistema em análise, e geralmente são de difícil formulação e solução.

Segundo Maliska (2004) dispõe-se basicamente de três formas, fundamentalmente diferentes, para tratar e resolver um problema na área de tecnologia; o experimento em laboratório, o método analítico e o método numérico.

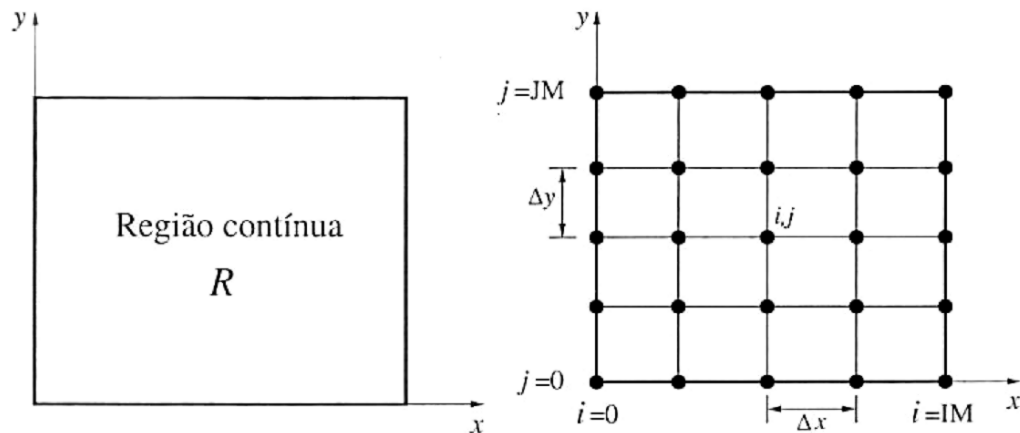
O método analítico deve ser aplicado quando as hipóteses consideradas para o problema não desviem excessivamente o modelo da real configuração do fenômeno em estudo, exigência que nem sempre pode ser atendida. Diante deste impedimento o método numérico não oferece nenhuma resistência e, conforme descrito por Patankar (1980), apresenta vantagens em relação aos outros métodos.

Os métodos numéricos têm alguns pontos delicados em sua aplicação, sendo os principais:

- *Elaboração do Modelo Matemático* - deve estar de acordo com o fenômeno estudado;
- *Seleção do Método Numérico mais apropriado* - abrange uma solução dos modelos matemáticos, e esta escolha deve atender à complexidade do fenômeno;
- *Implementação em âmbito computacional* - deve reduzir os erros no processo de cálculo, já que permite que se faça uso de um grande número de graus de liberdade no tratamento dos fenômenos, e permitir uma diminuição de esforço computacional e de programação.

De acordo com Maliska (2004) o método numérico é uma das ferramentas mais empregadas pelo setor industrial na solução de variados problemas de grande interesse prático. A aplicação do método numérico tem por fim resolver uma ou mais equações diferenciais substituindo as derivadas da equação por expressões algébricas que envolvem a discretização da função incógnita, ou seja, transformar as equações diferenciais em um sistema de equações algébricas correspondentes.

Neste caso o processo parte de um ponto importante que é a seleção de uma região de estudo, domínio físico de cálculo, que será discretizado, o que significa que será dividido em um número de pontos finitos, ou dividido em volumes de controle que é a unidade fundamental do domínio, e cada um deste associado a um ponto nodal ou, simplesmente, nó, o que transforma um domínio contínuo de pontos em um domínio discreto de pontos, como ilustrado na Figura 2.



**Figura 2 - Estrutura básica de um domínio contínuo e um domínio discretizado.**

**Fonte: Fortuna (2000)**

A dimensão espacial é dividida em um conjunto discreto de pontos ou células e o tempo é discretizado em intervalos. O conjunto discreto de pontos ou subdomínios chama-se de malha. Quando se escolhe fazer uma aproximação numérica da equação diferencial, a solução obtida será para um número finito e discreto de pontos, ou seja, para cada um dos pontos da malha. O número de pontos e o tipo de malha adequado dependem tanto do tipo de fenômeno quanto do nível de precisão necessária.

A troca das derivadas pelas funções algébricas tem, em seu processo, a integração das equações. A substituição consiste em se calcular um sistema de  $N$  equações algébricas lineares

com  $N$  incógnitas, uma para cada nó. A maneira como essa substituição é feita difere os métodos numéricos uns dos outros.

Existem métodos numéricos de diferentes naturezas, os mais aplicados à simulação numérica de problemas de escoamentos de fluidos são: Método de Diferenças Finitas – MDF (*Finite Difference Method - FDM*), Método de Volumes Finitos – MVF (*Finite Volume Method - FVM*) e Método de Elementos Finitos – MEF (*Finite Element Method - FEM*). O interesse deste trabalho está na utilização do Método Numérico de Volumes Finitos (MVF) para a discretização espacial e temporal das equações de Navier-Stokes de um escoamento bidimensional turbulento.

A aplicação de métodos numéricos na modelagem da turbulência partiu da necessidade de solução das equações de Navier-Stokes para número de Reynolds alto, simulando efeitos turbulentos nos fluidos analisados, possibilitando assim o uso de malhas menos refinadas, diminuindo os custos computacionais envolvidos.

## 4.2 VOLUMES FINITOS

O método dos Volumes Finitos é, em algumas situações, confundido com o método numérico de Diferenças Finitas, isso porque em muitos casos as equações discretizadas obtidas pelos dois métodos são iguais. Mesmo assim, os dois métodos muito se diferem nas suas bases de formulação. Enquanto em Diferenças Finitas têm-se uma dedução puramente matemática a partir das aproximações de derivadas, em Volumes Finitos a formulação é de mais simples compreensão, já que todos os termos que precisam ser aproximados têm base física (FERNANDEZ, 2007).

Define-se o método dos Volumes Finitos como um método que além de se basear na conservação da propriedade em estudo (determinada quantidade física expressa pelas equações governantes) dentro de cada volume finito (ou Volume de Controle), também é usado na obtenção de soluções aproximadas das equações diferenciais parciais (EDPs), tendo como propósito transformar as equações diferenciais parciais em um sistema de equações algébricas correspondentes por meio de um simples balanço da propriedade no Volume de Controle (VC) ou por integração da equação diferencial na forma conservativa no tempo e no espaço. As duas



formas representam balanços de tudo que atravessa as fronteiras e é gerado ou consumido no Volume de Controle (VC). A este processo de se obter as equações aproximadas chama-se de processo de discretização do modelo.

Segundo Patankar (1980) e Maliska (2004), a idéia principal da formulação por volumes finitos (ou volumes de controle) está na divisão do domínio de cálculo de uma malha com um número finito de volumes de controle que não se sobrepõe, onde cada volume de controle possui em seu interior um único ponto da malha, um ponto nodal. O método é especialmente poderoso em malhas grossas não uniformes.

Então, o método dos Volumes Finitos pode ser aplicado tanto em geometrias simples como em geometrias complexas, onde as malhas são na maioria não-estruturadas, já que as malhas estruturadas são difíceis ou até mesmo impossíveis de construir. De acordo com Fortuna (2000), a aproximação por volumes finitos é especialmente útil quando a malha utilizada não é uniforme, particularmente em duas e três dimensões.

Além de não exigência de uma malha estruturada, vista como vantagem sobre os métodos de Diferenças Finitas, o método de Volumes Finitos é preferível a outros métodos ao aplicar condições de contorno, isso se comprova porque os valores das variáveis conservadas estão localizados dentro do elemento de volume e não em nós ou superfícies. O método dos Volumes Finitos pode ser empregado na solução de problemas que tenham pelo menos uma coordenada espacial, ou seja, é um método desenvolvido basicamente para solução de problemas de valor de contorno, o que não o mantêm de fora da solução de determinados problemas de valor inicial compostos pela solução de consecutivos problemas de valor de contorno, um para cada intervalo de tempo. Dessa forma, o método pode ser aplicado na solução de modelos que sejam, parcial ou totalmente, de parâmetros distribuídos.

Um exemplo simples de como o método dos Volumes Finitos age, pode ser visto com uma estrutura básica de uma malha unidimensional de volumes finitos (Figura 22). Os valores das variáveis dependentes geralmente são mantidos nos centros dos volumes (P,W,E) ou nos centros de determinadas faces (w,e). Por meio de processos convenientes de interpolação são obtidos os valores importantes destas variáveis em outras posições. No mesmo problema, algumas das variáveis dependentes têm a possibilidade de serem armazenadas nos centros dos volumes, “*cell-centered*”, enquanto outras ficam guardadas em pontos sobre as faces, comumente chamado na literatura de esquema “*cell-vertex*”. Desta forma o método dos Volumes Finitos tem a capacidade

de fazer uso de várias malhas para um mesmo problema (malhas entrelaçadas). Outras informações a respeito do método dos Volumes Finitos e suas discretizações podem ser encontradas nos textos clássicos de Métodos Numéricos ou em Pinto e Lage (2001).

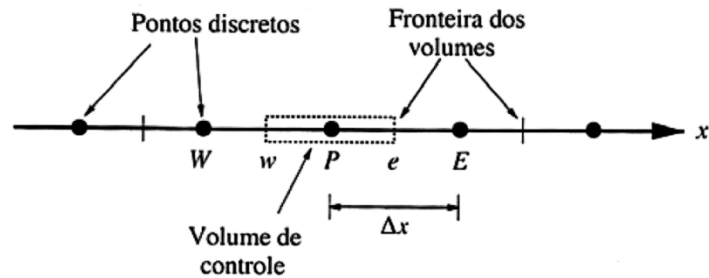


Figura 3 - Malha unidimensional mostrando típico volume de controle. Fonte: Fortuna (2000)

A resolução numérica de tais problemas requer a discretização do espaço domínio, usando um espaçamento  $h$ , e o problema discretizado consiste num sistema de equações lineares ou não lineares que envolvem um número de variáveis que aumenta à medida que a discretização é realizada com espaçamentos menores. Neste trabalho consideramos o processo de discretização por diferenças finitas com uma malha deslocada, o que equivale ao método de Volumes Finitos, onde as velocidades são aproximadas nas faces do volume de controle, enquanto a pressão é centrada na célula.

O processo de resolução do sistema de equações algébricas resultante, basicamente descrito no seguinte item, é uma etapa computacional trabalhosa, uma vez que esses sistemas geralmente são muito grandes e detentores de características muito distintas, como esparsidade e mau condicionamento. O uso dos métodos diretos fica restringido também por causa de memória computacional. Diante disso, a solução quase sempre pede o uso de métodos iterativos eficientes. Neste caso, o método multigrid é adequado para este tipo de problema, visto que, além de ter características desejáveis de convergência e de custo computacional, pode ser utilizado tanto como método iterativo como pré-condicionador para outro método iterativo apropriado.

### 4.3 MULTIGRID

A técnica *multigrid* surgiu da necessidade de se reduzir tempo no processamento de obtenção de soluções numéricas para equações diferenciais e integrais. No que está relacionado com análise numérica, o método multigrid nada mais é que um grupo de algoritmos utilizados para a solução de equações diferenciais, que faz uso da hierarquia de discretizações. A idéia consiste basicamente em realizar um pequeno número de iterações em uma malha fina, o suficiente para eliminar as altas frequências da estimativa inicial, e depois, quando se tem somente as componentes de baixa frequência da estimativa inicial, corrigir essa solução, fazendo iterações em uma malha mais grossa (BRIGGS *et al.*, 2000).

O método multigrid é um método iterativo que pode ser empregado junto de qualquer técnica comum de discretização, ele é independente da separabilidade das equações ou de outras propriedades da equação, tem muita eficiência em sistemas lineares como em sistemas mais complicados não-lineares e não-simétricos, como as equações de Navier-Stokes, o que significa que este acelera a convergência do método iterativo e reduz o esforço computacional.

Escolhido o método iterativo para resolver o sistema resultante da discretização, a técnica multigrid consiste em realizar um número de iterações em uma determinada malha, com espaçamento  $h$ , e em seguida corrigir esta solução, realizando iterações em uma malha mais grossa, com espaçamento  $2h$

São muitas as variações de algoritmos de multigrid, sendo que a característica mais representativa inerente a qualquer destes é que existe uma hierarquia de discretizações, ou seja, hierarquia de malhas onde se possa explorar a utilização de vários níveis, variados *grids* na resolução de um problema, para que todos os elementos do vetor erro tendam a zero. O termo *grid* se refere, no contexto geométrico, ao conjunto dos pontos obtidos da discretização do domínio ou, simplesmente, ao conjunto dos índices que representam as incógnitas em um contexto algébrico. Os principais passos são (BRIGGS *et al.*, 2000):

- Hierarquia de matrizes – onde se representa a matriz original em cada *grid*;
- Suavização – reduzir os erros de alta frequência, por exemplo, com o uso de algum método iterativo estacionário, como os de Jacobi, Gauss-Seidel;

- Restrição – transferência do erro residual de uma malha mais fina para uma malha mais grossa;
- Correção (interpolação ou prolongamento) – passa informações calculadas na malha mais grossa para uma malha mais fina e
- Método direto – onde se resolve a equação residual no *grid* mais grosseiro.

Dentro do contexto algébrico, esses componentes são construídos fazendo-se uso somente das informações da matriz de coeficientes do sistema. A idéia é de transformar a estimativa inicial, onde a alta frequência tenha sido eliminada, novamente em estimativa de alta frequência, só que agora utilizando uma malha grossa, de forma que possa se aproveitar as características dos métodos iterativos, que é o de eliminar com mais velocidade de decaimento as estimativas de alta frequência.

É possível afirmar que, se de certa maneira os métodos iterativos estacionários são muito eficientes na eliminação dos componentes de alta frequência do erro, por outro lado, são ineficazes na remoção dos componentes suaves, assim, são também chamados de suavizadores. Embora essa propriedade de suavização se mostre uma limitação na melhora da convergência, por outro lado, o aumento no valor de  $h$  pode tornar menor o valor dos autovalores ligados as componentes de baixas frequências, deixando que elas sejam minimizadas por um método estacionário, o que mostra que os métodos iterativos estacionários desempenham um papel importante no que tange o método multigrid. Maiores detalhes sobre os métodos iterativos fogem ao escopo principal deste trabalho, mas podem ser encontrados em Pereira (2007).

#### 4.4 O CÓDIGO COMPUTACIONAL

O código utilizado neste trabalho foi uma versão modificada do NAST2D. Desenvolvido por Michael Griebel, Thomas Dornseifer, Tilman Neunhoffer (GRIEBEL *et al.*, 1998), o NAST2D é um programa escrito em C++ que utiliza o método de volumes finitos para modelar o comportamento de um fluido incompressível em um escoamento 2D, transiente.

O pacote de programa NAST2D trata as equações de Navier-Stokes incompressíveis dependente do tempo (velocidade e pressão), bem como a equação de energia. O programa pode manipular problemas de fronteira livre. O NAST2D resolve as equações de Navier-Stokes discretizadas em uma malha estruturada regular deslocada para a discretização das derivadas, com discretização central e upwind (donor-cell) do termo convectivo e um esquema de avanço no tempo explícito, para condições de contorno dado com o método SOR (successive over relaxation).

A versão básica do programa NAST2D 2.0 serve para simulação numérica de escoamentos bidimensionais, viscosos, instáveis, laminares, incompressíveis e turbulentos. O modelo de baixo número de Reynolds (*low-Reynolds number model*) e o modelo  $k - \varepsilon$  padrão são implementados como modelos de turbulência. O pacote do programa contém os arquivos-fonte em linguagem de programação C, um manual de instruções detalhadas como um arquivo HTML, as amostras de entrada para todos os problemas de aplicação. O pacote do programa NAST2D está disponível gratuitamente em Bauerfeind (2006), em uma versão C++ e uma versão Fortran90.

#### 4.4.1 Modificações realizadas neste trabalho

O código numérico apresentado neste trabalho é voltado para uma extensão modificada da versão básica do programa Nast2D 2.0, para o cálculo de escoamentos turbulentos do modelo  $k - \varepsilon$ , com implementação de dois problemas CFD no programa, bem como a preparação de dados para a visualização dos resultados calculados com o software livre PARAVIEW.

A versão original do código realizava a solução utilizando o método SOR como técnica iterativa para solução do sistema linear obtido pelo método de Volumes Finitos. Durante a execução deste trabalho optou-se por implementar uma versão mais otimizada deste solver através da técnica multigrid.

Além disso, diversas melhorias, principalmente no que trata da implementação das condições de contorno e do modelo de turbulência empregado, foram feitas. Na implementação dos dois problemas utilizados, procurou-se as implementações de problema semelhante para a execução

de todos os ajustes necessários convenientemente. O capítulo a seguir mostra visão dos problemas para os quais foram executadas as simulações.

## 5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo serão exibidos os resultados calculados pelo código numérico aplicado no contexto do presente trabalho. A análise do modelo de turbulência para as equações de Navier-Stokes incompressíveis foi feita utilizando dois problemas clássicos CFD: o primeiro é o escoamento em uma cavidade quadrada sob ação de uma tampa deslizante, conhecido na literatura como “*lid-driven cavity flow*” (GHIA *et al.*, 1982), um típico escoamento confinado. O segundo é um escoamento sobre um degrau, mais conhecido como “*flow over a backward-facing step*” (DRIVER E SEEGMILLER, 1985).

As metodologias anteriormente descritas no trabalho foram aplicadas em código computacional em linguagem de programação C++ e para a visualização dos resultados foi utilizado o software livre Paraview (BAUERFEIND, 2006). O código numérico foi validado aplicando-o aos dois problemas CFD citados, sendo estes de característica bidimensional e os resultados obtidos foram confrontados com dados provenientes da literatura.

### 5.1 ESCOAMENTO TURBULENTO EM UMA CAVIDADE QUADRADA

#### 5.1.1 Introdução

De acordo com Ghia *et al.*(1982) e Fortuna (2000), o escoamento em uma cavidade conduzido em um domínio quadrado é um tipo de problema muito utilizado na avaliação de algoritmos numéricos para solução de problemas incompressíveis. Este tipo de escoamento é caracterizado pela simplicidade da geometria e das condições de contorno. A parte da configuração simples deste tipo de problema, o escoamento no interior da cavidade pode ser de padrão bastante

complexo, com a existência de recirculações periódicas e outras estruturas turbilhonares, que interagem entre si, o que torna o problema muito útil na melhor análise do comportamento do modelo de turbulência (ERTURK *et al.*, 2005).

### 5.1.2 Descrição da configuração

A configuração do escoamento é mostrada na Figura 4, na qual o interior da cavidade é totalmente preenchido com um fluido. Inicialmente a tampa da cavidade e o fluido estão em repouso. A partir de um determinado instante  $t_0$  a tampa da cavidade é instantaneamente acelerada para a velocidade  $u_0$  estabelecida. As três faces restantes são consideradas paredes sólidas e impermeáveis, e são submetidas à condição de não deslizamento  $u = v = 0$ .

Devido às tensões viscosas tem-se uma transferência de quantidade de movimento da tampa para as camadas de fluido adjacentes, as quais também sofrem os efeitos retardantes das paredes sólidas. Com isso, o resultado no estado estacionário para o escoamento em uma cavidade é a circulação do fluido limitado ao longo dos contornos. Isto ocorre de forma que seja possível perceber um vórtice principal, o qual é dependente, em sua respectiva forma e posição, do número de Reynolds, assim como das dimensões de altura  $H$  e comprimento  $L$  do domínio. Em alguns casos também podem ser identificados vórtices secundários, que também dependem das condições citadas. O problema testado neste trabalho é o de cavidade quadrada ( $L = H$ ), ou seja, com comprimento e altura iguais. Apesar desta consideração, outras relações entre  $L$  e  $H$  são possíveis.



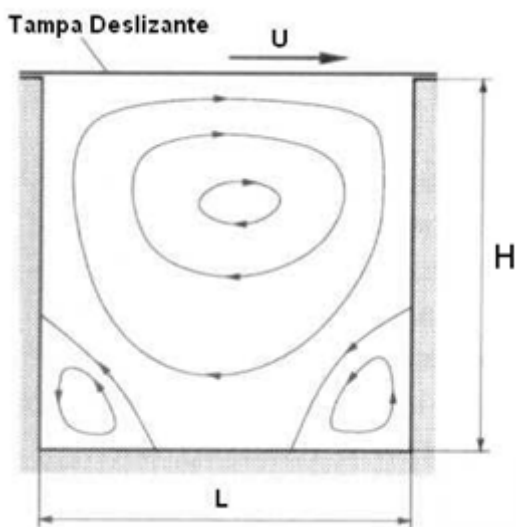


Figura 4 - Configuração do escoamento em uma cavidade quadrada sob ação de uma tampa deslizante

O número de Reynolds que caracteriza esse escoamento é definido pela Eq.(1), em função da velocidade  $u_0$ , da altura  $H$  da cavidade e da viscosidade cinemática  $\nu$  do fluido.

Na Figura 5, representamos a típica discretização, por meio de uma malha deslocada do domínio demonstrado na Figura 4. De maneira demonstrativa, diferente da real configuração utilizada neste trabalho, o número de células da malha nas direções  $x$  e  $y$  na Figura 5 é, respectivamente,  $NI = 10$  e  $NJ = 10$ . As fronteiras do domínio estão na interface e nas células internas mostradas na Figura 5.

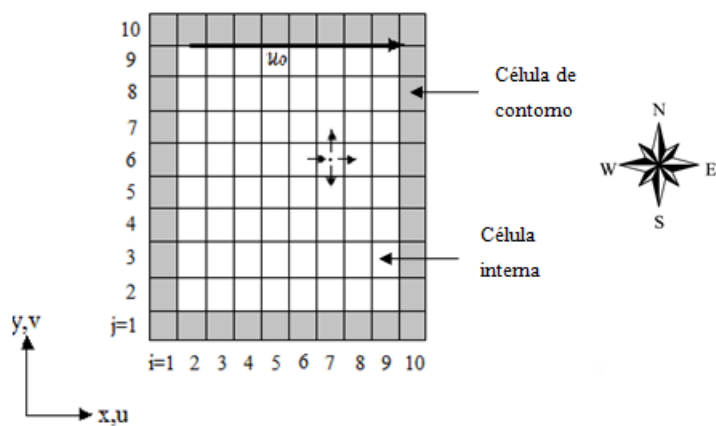


Figura 5 - Domínio discretizado por meio de uma malha

A discretização foi feita utilizando o domínio quadrado e dividindo-o em células. Como pode ser visto na Figura 5, têm-se dois tipos de células, as células de contorno que ficam na borda dessa geometria, que servem para aplicações de condições de contorno, e as células internas, que se utilizaria para calcular o escoamento ou a velocidade do fluido. Sendo a malha basicamente estruturada e regular.

Neste trabalho foi simulado o caso bidimensional da cavidade com número de Reynolds igual a 3200. Como referência serão utilizados os resultados numéricos de Guia *et al.* (1982) e comparados aos resultados obtidos.

### 5.1.3 Condições de contorno

O problema da cavidade foi simulado com número de Reynolds igual a 3200, utilizando o método de volumes finitos. As condições de contorno para o problema da cavidade quadrada adotadas neste trabalho são duas diferentes condições de contorno, que podem ser identificadas na Figura 4. A primeira condição de contorno, que é para a fronteira horizontal superior, corresponde à entrada e recebe um valor constante para o vetor velocidade. Nas três fronteiras restantes que correspondem a paredes sólidas com condição de não deslizamento o vetor velocidade será igual a zero.

Para a simulação computacional do problema, o algoritmo requer a definição de alguns parâmetros, que são descritos a seguir.

Dados de geometria:

- $xlength = 1,0$       Tamanho do domínio na direção  $x$ ,
- $ylength = 1,0$       Tamanho do domínio na direção  $y$ ,
- $i_{max} = 127$       Número de células internas na direção  $x$ ,
- $j_{max} = 127$       Número de células internas na direção  $y$ .

Quantidades dependentes do problema:

- $Re = 3200$       Número de Reynolds,

### 5.1.4 Análise de Convergência de malha

A análise de convergência de malha foi feita utilizando o problema da cavidade. Analisou-se o perfil da componente de velocidade horizontal ( $u$ ), obtido pela inserção de uma linha vertical no centro da cavidade ( $x = 0,5$ ) e o perfil da componente de velocidade vertical ( $v$ ), obtido pela inserção de uma linha horizontal no centro da cavidade ( $y = 0,5$ ). A região do domínio da cavidade considerada foi definida pelas coordenadas adimensionais  $x^* = x / L$ ;  $x^* \in [0,1]$  e  $y^* = y / H$ ;  $y^* \in [0,1]$ .

Três malhas foram testadas na análise de convergência, a primeira foi de 127x127, a segunda de 255x255 e a última de 511x511. A comparação dos perfis da componente de velocidade  $u$  e  $v$  ao longo do eixo vertical  $x^* = 0,5$  e  $y^* = 0,5$  são mostrados na Figura 6 e na Figura 7.

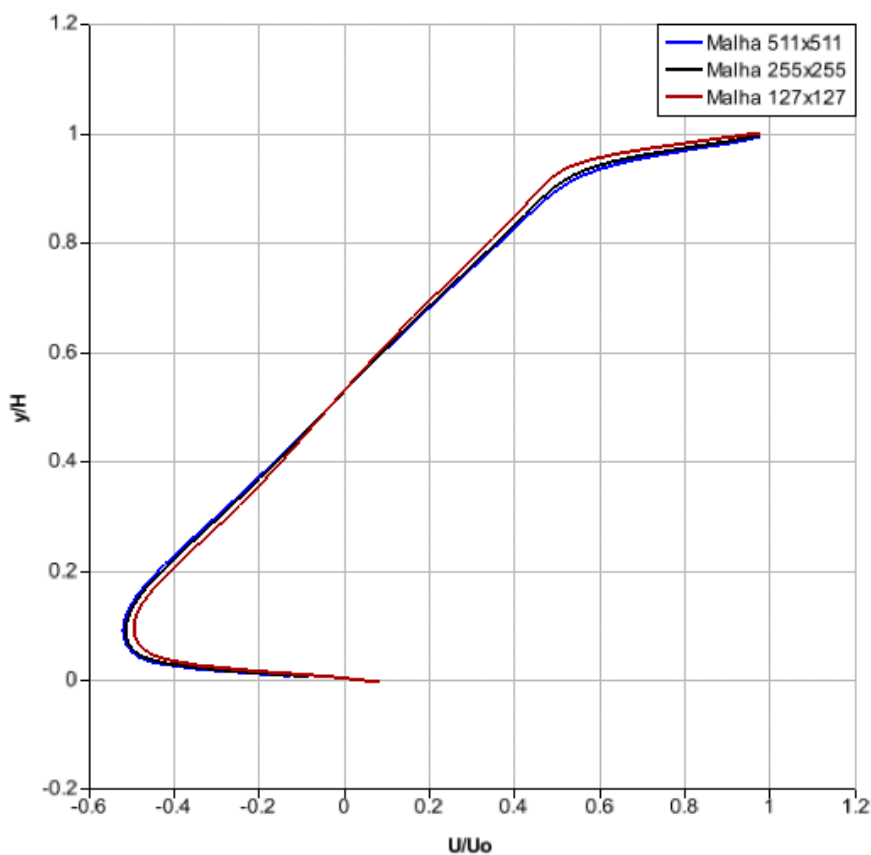
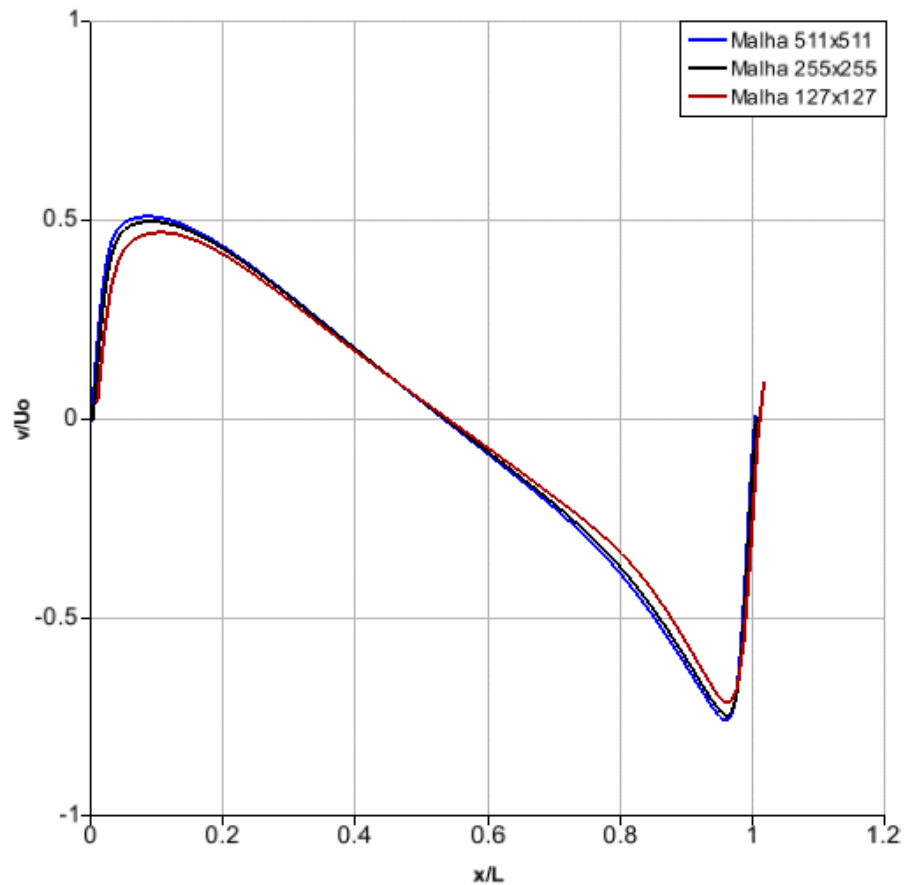


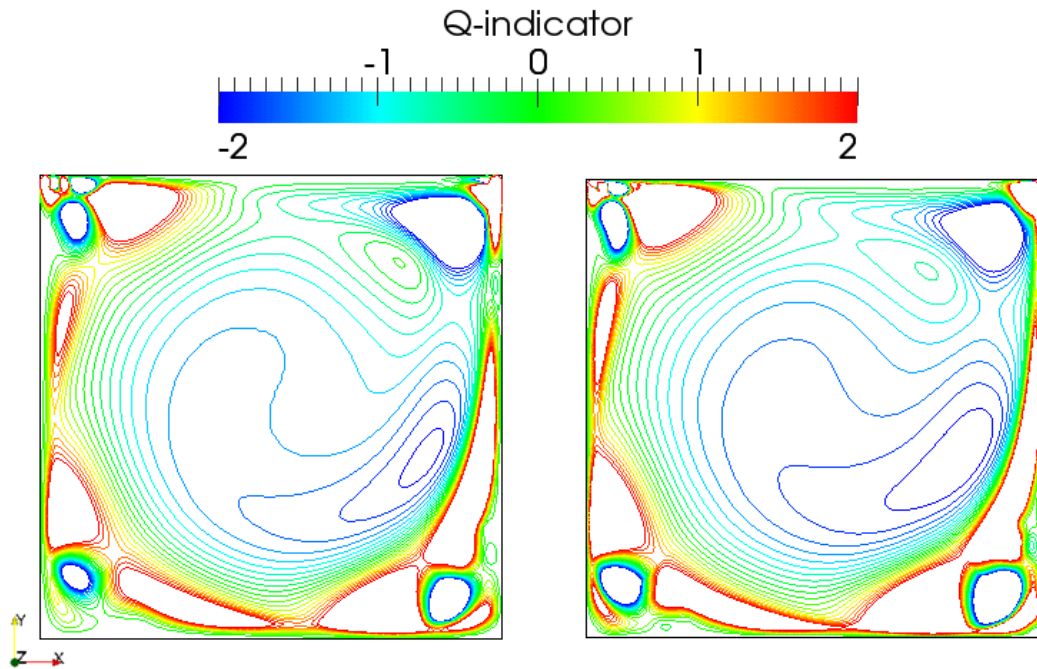
Figura 6 - Comparação dos perfis da componente de velocidade  $u / U_0$  em  $x = 0,5$  obtidos com as malhas 127x127, 255x255 e 511x511.



**Figura 7 - Comparação dos perfis da componente de velocidade  $v / U_0$  em  $y / H = 0,5$  obtidos com as malhas 127x127, 255x255 e 511x511**

Na Figura 6 e Figura 7, observa-se que as três curvas próximas as paredes da cavidade, atendem a condição de contorno aplicada de não-deslizamento e tendem a zero, assim como atendem a condição de velocidade prescrita determinada para a tampa. Isso pode ser visualizado ao longo linha em que  $y^* = 1$ , onde os perfis de velocidade atingem o valor de  $u/u_0 = 1$ . O comportamento das curvas dos perfis de velocidade longe da parede, intervalo da curva considerado de turbulência livre, atingem valores máximos e mínimos semelhantes.

Após a análise, foi escolhida para a malha de 127x127, por ser a malha que gerou resultados mais rápidos e em menor tempo computacional, agilizando o processo de simulação.



**Figura 8 – Comparação da magnitude do indicador  $Q$  obtidas com a malha 127x127 e malha 511x511.**

De acordo com a Figura 8, que mostra as linhas de contorno do indicador  $Q$ , pode-se ver que o indicador  $Q$  é invariante com a malha. Mesmo refinando a malha,  $Q$  apresenta resultados semelhantes ao da malha mais grossa. Essa constatação é importante para mostrar que as quantidades estatísticas turbulentas a serem calculadas com base nesse indicador permanecerão as mesmas.

### 5.1.5 Comparação dos resultados

De modo a validar o modelo aqui tratado, nesta seção será apresentada as comparações entre os resultados obtidos e os resultados numéricos de referência obtidos por Ghia *et al.* (1982). A comparação desses resultados foi feita utilizando o perfil da componente de velocidade  $u$ , obtido pela inserção de uma linha vertical no centro da cavidade ( $x = 0,5$ ) e o perfil da componente de velocidade  $v$ , obtido pela inserção de uma linha horizontal no centro da cavidade ( $y = 0,5$ ).

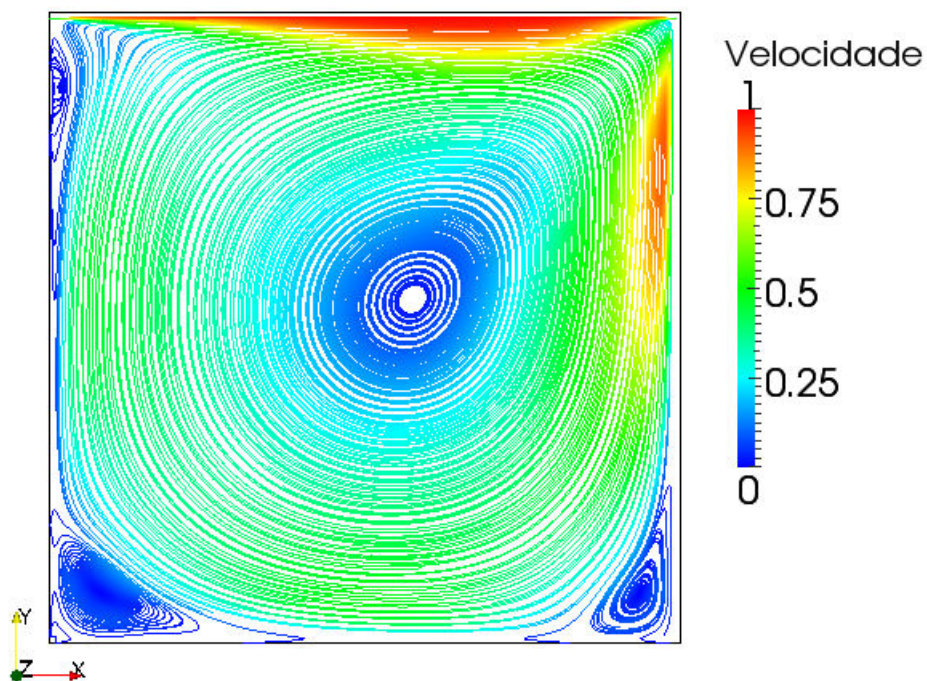


Figura 9 – Linhas de Corrente coloridas pela magnitude da Velocidade do modelo  $k - \epsilon$

Estruturalmente o modelo  $k - \epsilon$  (Figura 9) tem o mesmo comportamento que o modelo  $k - \epsilon - Q$  (Figura 10), ambos apresentam um vórtice principal e três vórtices secundários.

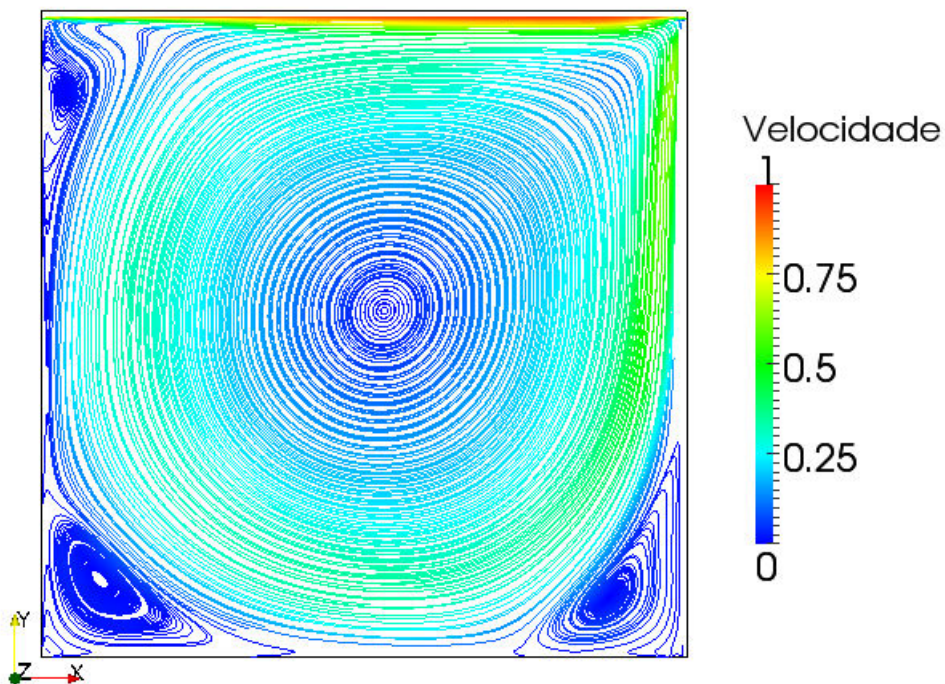


Figura 10 – Linhas de Corrente coloridas pela magnitude da Velocidade do modelo  $k - \epsilon - Q$

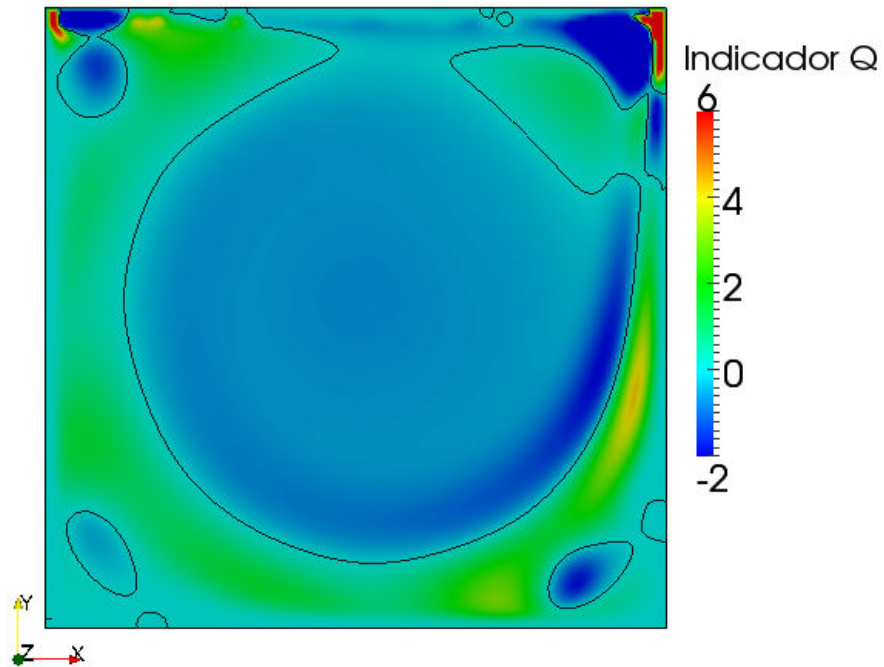


Figura 11 – Magnitude do Indicador  $Q$  no problema da cavidade (A linha sólida marca  $Q = 0$ ).

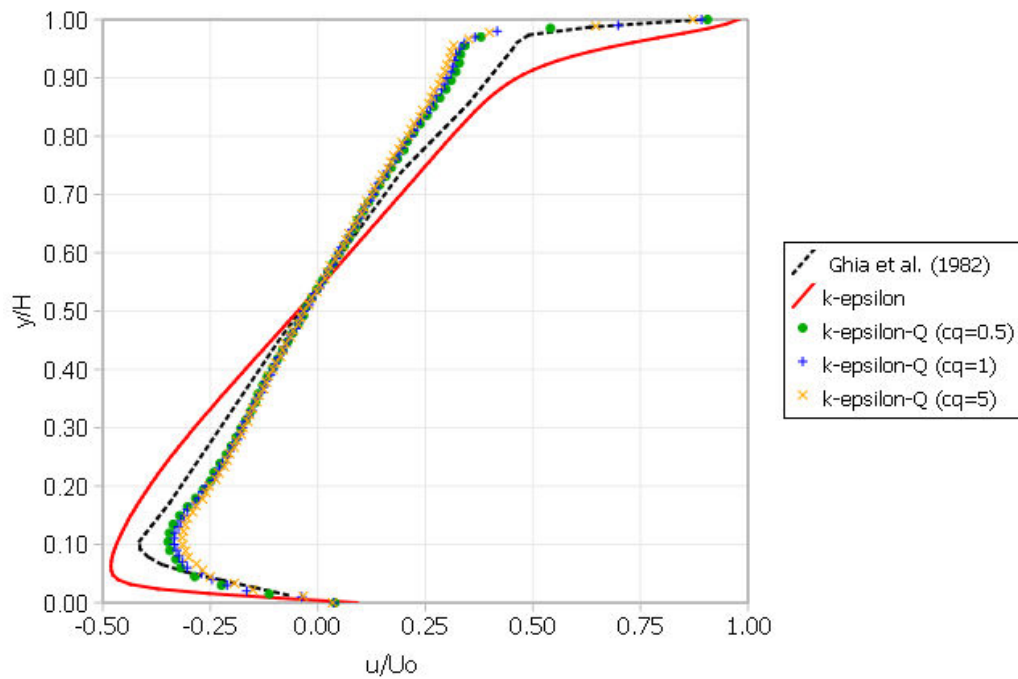
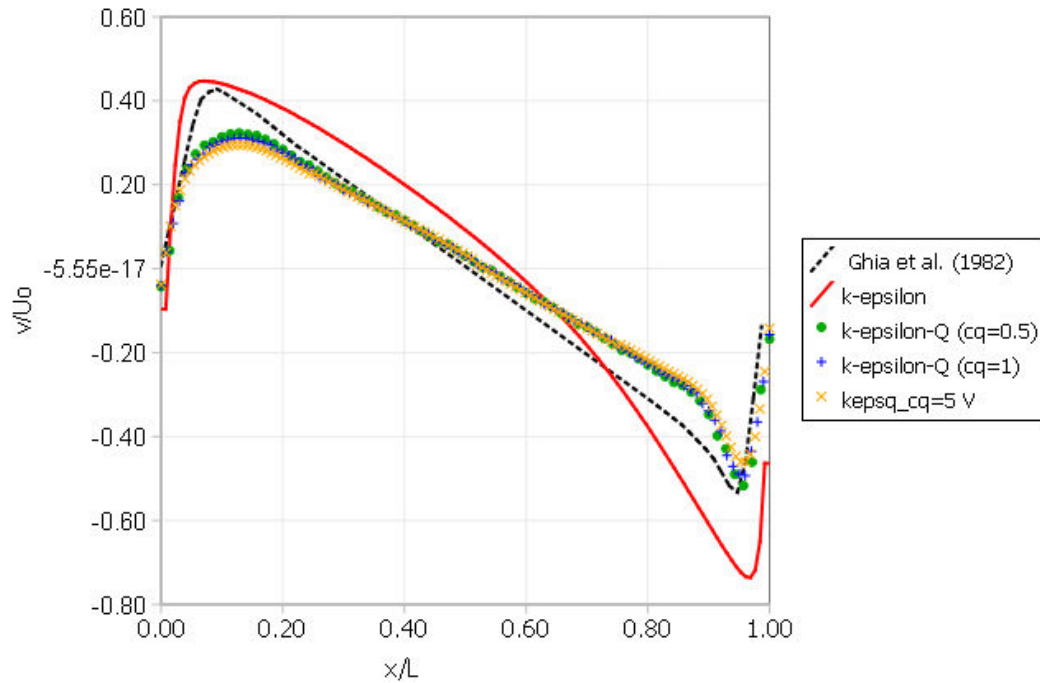


Figura 12 - Comparação dos perfis da componente de velocidade  $u / U_0$  em  $x = 0,5$  para  $Re = 3200$  obtidos com malha  $127 \times 127$



**Figura 13 - Comparação dos perfis da componente de velocidade  $v / U_0$  em  $y / H = 0,5$  para  $Re = 3200$  obtidos com malha  $127 \times 127$**

Sendo a região do domínio da cavidade definida pelas coordenadas adimensionais  $x^* = x / L$ ;  $x^* \in [0,1]$  e  $y^* = y / H$ ;  $y^* \in [0,1]$ , a Figura 12 e Figura 13 mostram a comparação dos perfis da componente de velocidade  $u$  e  $v$  ao longo do eixo vertical  $x^* = 0,5$  e  $y^* = 0,5$ . Verifica-se que próximo as paredes da cavidade onde a condição de contorno aplicada é de não-deslizamento, o comportamento dos perfis de velocidade do modelo  $k - \varepsilon$  e do modelo  $k - \varepsilon - Q$  tendem a zero, assim como o perfil de velocidade de Guia *et al.*(1982). Desta forma, os métodos aplicados satisfazem a condição de contorno prescrita. O mesmo acontece para a condição de contorno determinada para a tampa, onde se define a condição de velocidade prescrita. Novamente, o modelo  $k - \varepsilon$  e o modelo  $k - \varepsilon - Q$  atendem a condição, que pode ser identificado no gráfico ao longo linha em que  $y^* = 1$ , onde os perfis de velocidade atingem o valor de  $u / u_0 = 1$ .

Outro ponto de análise muito importante é a tendência dos perfis de velocidade nas extremidades das curvas da Figura 12, aproximadamente na região em que  $y^* = [0;0,1]$  e



$y^* = [0, 9; 1]$ , e da Figura 13, em  $x^* = [0; 0, 1]$  e  $x^* = [0, 9; 1]$ . Essas inclinações são importantes na engenharia, pois o gradiente de velocidade nestas regiões é utilizado diretamente no cálculo da tensão da parede e, por conseguinte do arrasto fluidodinâmico, parâmetro importante para vários ramos da engenharia, como a aerodinâmica.

O comportamento dos perfis de velocidade longe da parede na Figura 12, intervalo da curva considerado de turbulência livre, é evidente que o resultado do modelo  $k - \varepsilon - Q$  apresenta-se levemente superior que o resultado do modelo  $k - \varepsilon$ . Apesar de não atingir exatamente os valores máximos e mínimos dos dados de velocidade de Guia *et al.*(1982), a solução do modelo  $k - \varepsilon - Q$  chega bem mais próximo dos pontos críticos apresentados pelo resultado de referência, além de captar de forma coerente o comportamento da curva, diferente do que acontece com o resultado do modelo  $k - \varepsilon$ . Já na Figura 13, o resultado do modelo  $k - \varepsilon - Q$  na região em que  $x^* = [0; 0, 2]$  fica distante dos pontos críticos apresentados pelo resultado de referência e na região em que  $x^* = [0, 8; 1]$  o resultado do modelo  $k - \varepsilon - Q$  chega mais próximo dos pontos críticos apresentados pelo resultado de referência. Embora tenha tido comportamento diferenciado na região em que  $x^* = [0; 0, 2]$  e na região em que  $x^* = [0, 8; 1]$ , o modelo  $k - \varepsilon - Q$  captou o formato da curva do perfil de velocidade de referência de forma mais coerente que o modelo  $k - \varepsilon$ .

Com a comparação dos perfis das componentes de velocidade  $u$  e  $v$ , demonstrando, após vários testes, somente os valores de  $C_D$  com melhor desempenho, é possível identificar que o modelo de turbulência  $k - \varepsilon - Q$ , quando comparado com o modelo  $k - \varepsilon$ , apresenta resultados de melhor concordância com os resultados numéricos de Ghia *et al.* (1982). Isso permite dizer que a modelagem  $k - \varepsilon - Q$  apresentou resultados para a modelagem melhores que o modelo  $k - \varepsilon$ .

## 5.2 ESCOAMENTO TURBULENTO SOBRE UM DEGRAU

### 5.2.1 Introdução

O clássico caso do escoamento sobre o degrau é um excelente teste para validar novos códigos de dinâmica dos fluidos (GRIEBEL *et al.*, 1998; DRIVER E SEEGMILLER, 1985). Um dos motivos é que os escoamentos com descolamento por uma mudança brusca na geometria e recolamento são de muita importância em diversas atividades práticas de engenharia. Também do ponto de vista fundamental, existe um forte interesse em poder entender a instabilidade e transição para turbulência.

Neste tipo de escoamento o fluido é submetido a uma súbita separação, gradientes adversos de pressão ou obstáculos, causam o descolamento do escoamento que pode apresentar uma posterior recolamento, formando entre essas duas regiões uma bolha de recirculação. As variações espaciais no campo de velocidade causam a produção da turbulência também fora da região de parede e sua interação com o fluxo médio influencia no tamanho da bolha de recirculação. Além disso, o escoamento possui uma multiplicidade de escalas, como exemplificado na Figura 14(a), que com a presença do descolamento promove a interação entre estruturas turbilhonares que se desligam da região de recirculação e são transportadas à jusante do degrau com largo espectro de frequências características de emissão de vórtices. Já a solução obtida através do processo de média de Reynolds elimina essas flutuações de alta frequência (Figura 14(b)).

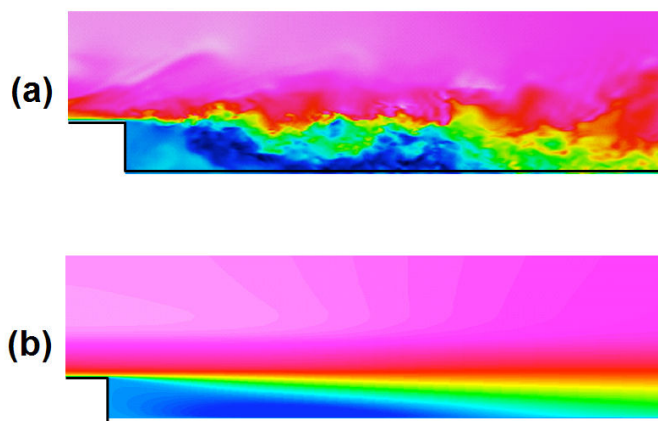


Figura 14 – (a) instantâneo do campo de velocidade; (b) valor médio do campo de velocidade

Neste contexto, considerando todas as propriedades mencionadas e o complexo comportamento associado a separação do fluido e recolamento deste, o escoamento sobre o degrau é um atraente caso teste, o que o torna interessante para estudar a estratégia de atuação e solução de um modelo de turbulência. A modelagem de turbulência é justificável neste tipo de escoamento principalmente a altos números de Reynolds, já que existe uma multiplicidade de escalas e frequências características.

### 5.2.2 Descrição da configuração

A configuração do escoamento é demonstrada na Figura 15, na qual se tem uma região com degrau. O escoamento considera o movimento de um fluido viscoso contido entre duas placas fixas, aonde o fluxo ocorre esquerda para a direita. O fluido entra no domínio computacional a uma velocidade média  $U_0$ , passando pelo degrau de altura  $h$ , com diferente altura de canal a montante e a jusante do degrau. Depois que o escoamento sofre separação no degrau, o escoamento recola na parede inferior a uma distância  $X_r$ .

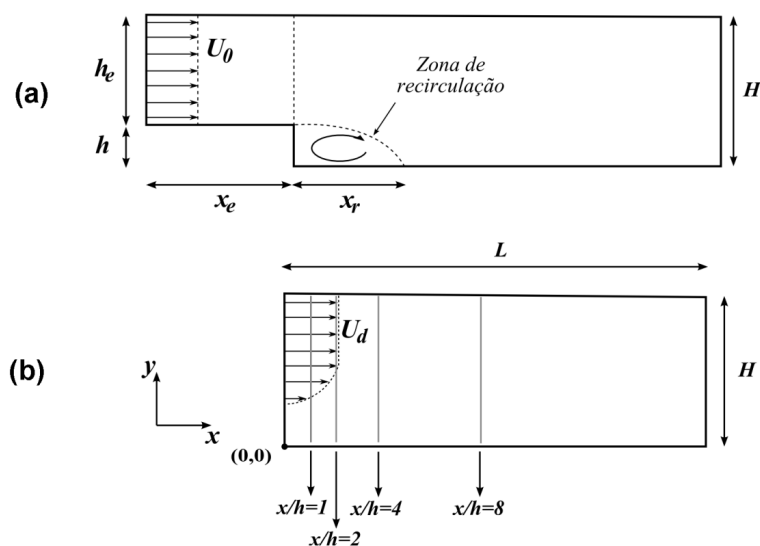


Figura 15 – (a) descrição do escoamento sobre um degrau; (b) domínio computacional utilizado e estações de medição analisadas

A geometria padrão do escoamento considerado tem seguintes dimensões (DRIVER E SEEGMILLER, 1985):

- Altura do degrau  $h = 0,0127m$  ;
- Altura da região de entrada  $h_e = 8h$  ;
- Comprimento do domínio  $L = 32h$  ;
- Altura do domínio  $H = 9h$  ;
- $X_r$  é o ponto de recolamento do fluido e
- $U_0$  é a velocidade média do fluido.
- O sistema de coordenadas é posicionado no canto inferior do degrau, a partir do qual será medido o comprimento ao longo das coordenadas  $x$  e  $y$  .

Na entrada da região o perfil de velocidade é reto, o que quer dizer que as velocidades ao longo do limite de entrada são iguais. Da mesma forma que no caso do escoamento dentro de uma cavidade, o valor da velocidade  $U_0$  pode ser determinado dado o número de Reynolds do escoamento sobre o degrau, a altura  $h$  e a viscosidade cinemática  $\nu$  , a partir da eq.(2):

$$\text{Re} = \frac{U_0 h}{\nu} \quad (79)$$

### 5.2.3 Condições de contorno

O problema do escoamento sobre o degrau foi simulado com  $\text{Re} = 38000$  , utilizando o método de volumes finitos. Utilizou-se para análise somente a segunda região do domínio, ou seja, a região que está após o degrau, conforme mostrado na Figura 15(b). As condições de contorno consideraram uma velocidade definida na entrada, condição de parede de não deslizamento e condição outflow para saída do escoamento.

O domínio foi truncado em  $x = 0$ . A região de entrada foi retirada do domínio por razões de simplicidade computacional. Assim, o domínio mostrado na Figura 15(b), foi efetivamente utilizado na simulação. Isso foi feito para otimizar o trabalho no que diz respeito ao tempo de processamento, visto que a região próxima ao degrau é a mais interessante para este trabalho, o que desta forma caracteriza os resultados fora desta região como valores não tão relevantes para este trabalho. Sendo que o perfil de entrada utilizado foi o campo de velocidade já desenvolvido obtido por Driver e Seegmiller (1985) na posição  $x = 0$ .

Para a simulação computacional do problema, o algoritmo requer a definição de alguns parâmetros, que são descritos a seguir.

Dados de geometria:

- $xlength = 32$  tamanho do domínio na direção  $x$  ;
- $ylength = 8$  tamanho do domínio na direção  $y$  ;
- $i_{max} = 255$  número de células internas na direção  $x$  ;
- $j_{max} = 255$  número de células internas na direção  $y$  .

Quantidades dependentes do problema:

- $Re = 38000$  número de Reynolds,

O domínio foi discretizado por uma malha 2D, com um total de 65025 volumes.

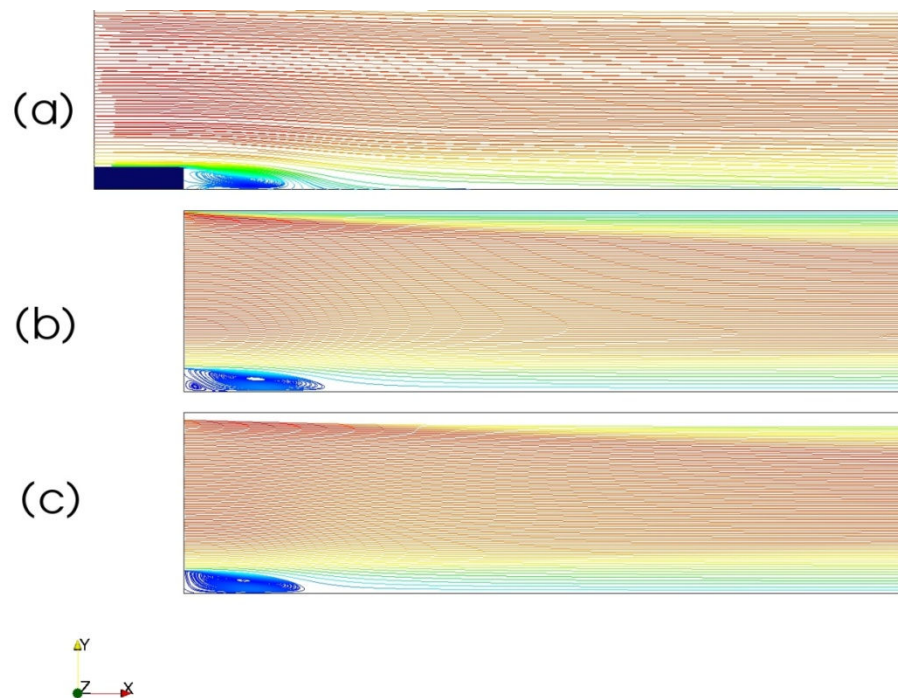
#### 5.2.4 Comparação dos resultados

Para avaliação da qualidade dos resultados obtidos e validação do código numérico, os resultados computados foram confrontados com os resultados experimentais de Driver e Seegmiller (1985). Os resultados medidos experimentalmente por Driver e Seegmiller são os mais utilizados como referência na validação do método numérico em escoamentos sobre degrau.

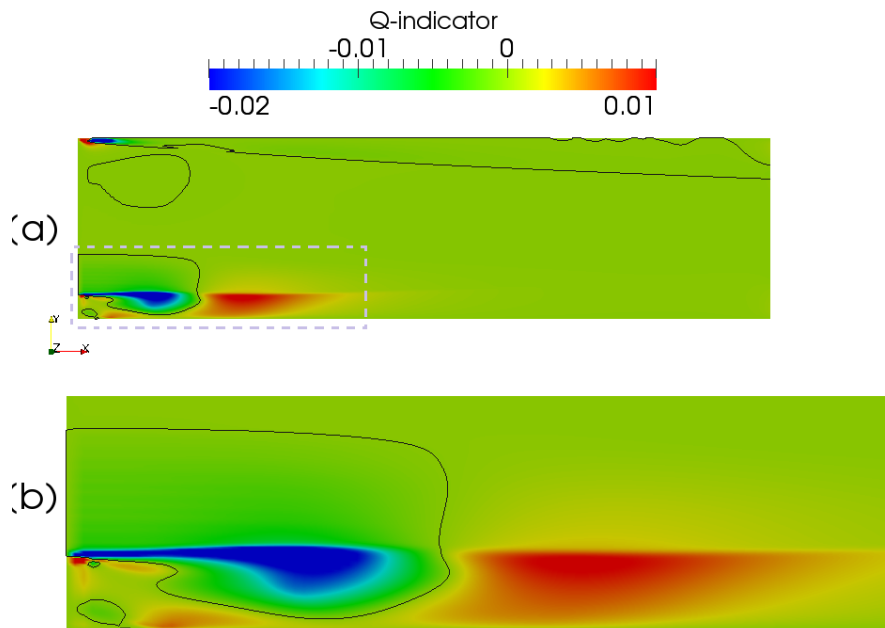
A análise mais importante dos resultados é sobre a qualidade destes na região onde o escoamento é submetido a uma transição brusca de volume, local onde surge uma região de recirculação do fluido, visto que muitos modelos de turbulência que existem não conseguem resultados muito precisos nesta região.

Para analisar e observar as propriedades do escoamento escolheu-se determinadas seções, as quais se denominaram de estações de análise. Essas estações são linhas de análise situadas a distância característica em relação ao final do degrau.

As linhas no desenho da Figura 15(b) indicam a posição das estações, a primeira linha é a estação  $x/h=1$ , a segunda linha é a estação  $x/h=2$ , a terceira linha é a estação  $x/h=4$  e a última linha é a estação  $x/h=8$ . Dessas linhas as três primeiras são as mais relevantes porque comparam o campo de velocidade dentro de uma região de recirculação, já a oitava estação mostra o campo de velocidade fora da bolha de recirculação.

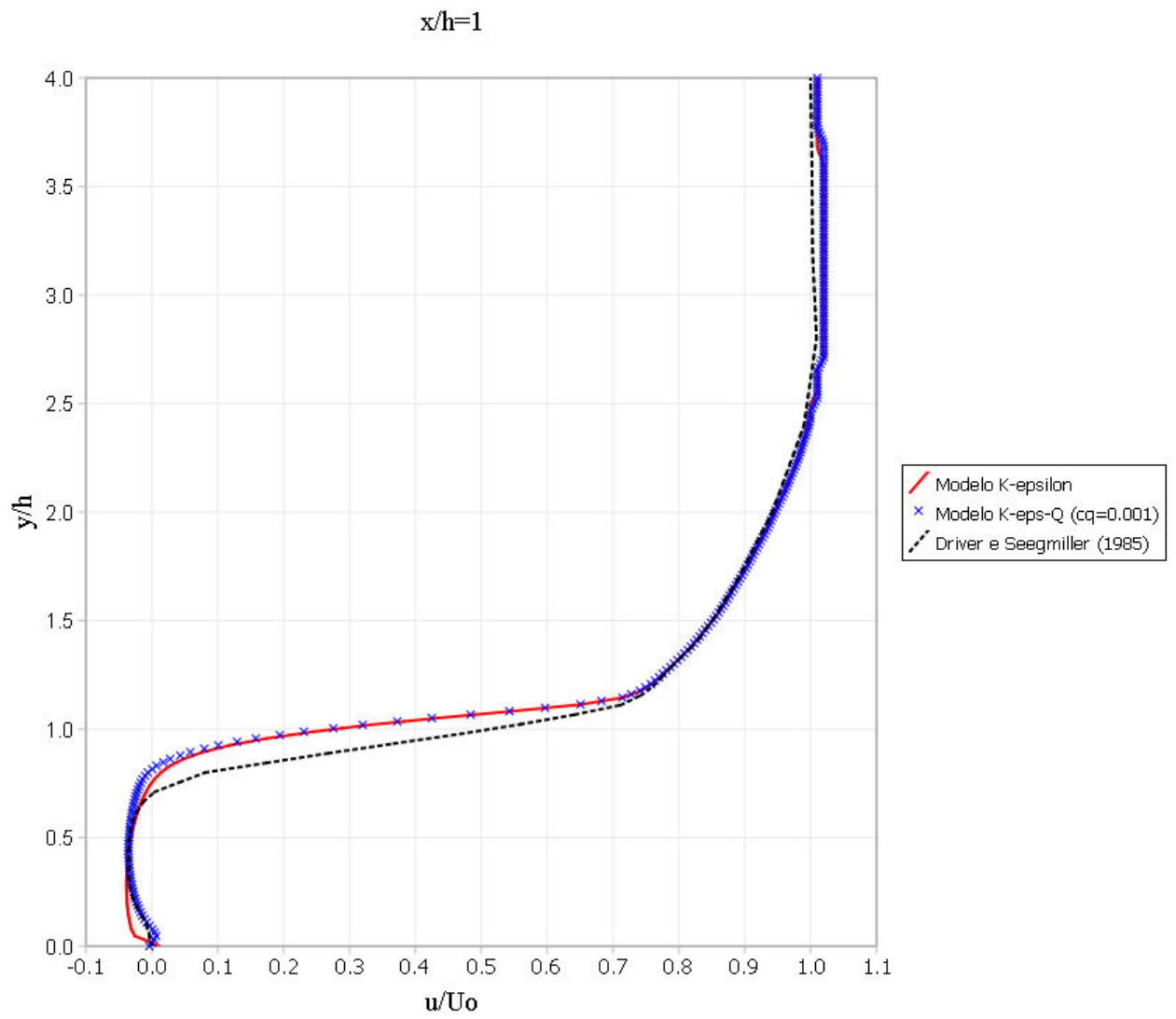


**Figura 16 – Linhas de Corrente do degrau, coloridas pela magnitude da Velocidade, onde (a) caso experimental de Driver e Seigmiller (1985); (b) modelo  $k-\epsilon-Q$  e (c) modelo  $k-\epsilon$**



**Figura 17 – (a) Magnitude do Indicador  $Q$  no problema do degrau (A linha sólida marca  $Q = 0$ ); (b) zoom de uma região de (a)**

A Figura 17 (b) mostra o indicador  $Q$  mais intenso nas regiões de elevada intensidade turbulenta, então nota-se que nas regiões de mais elevada intensidade turbulenta, o  $Q$  tem valor em magnitude e em módulo maior do que nas regiões do escoamento livre. O  $Q$  é mais intenso onde a turbulência é mais intensa, pelo menos essa é a proposta do modelo  $k - \varepsilon - Q$ .



**Figura 18 - Perfil de velocidade na estação  $x / h = 1$**



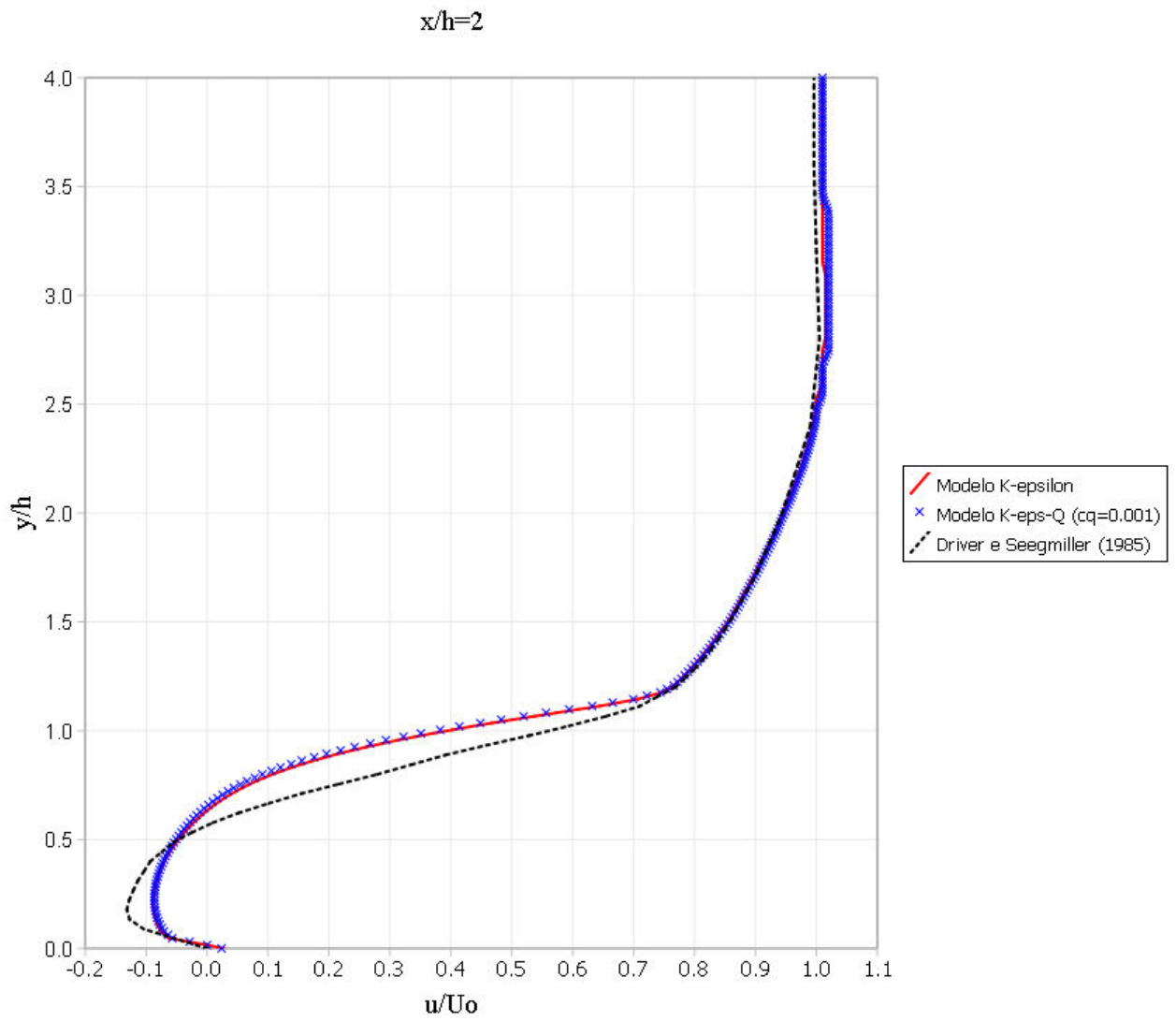


Figura 19 - Perfis de velocidade na estação  $x / h = 2$

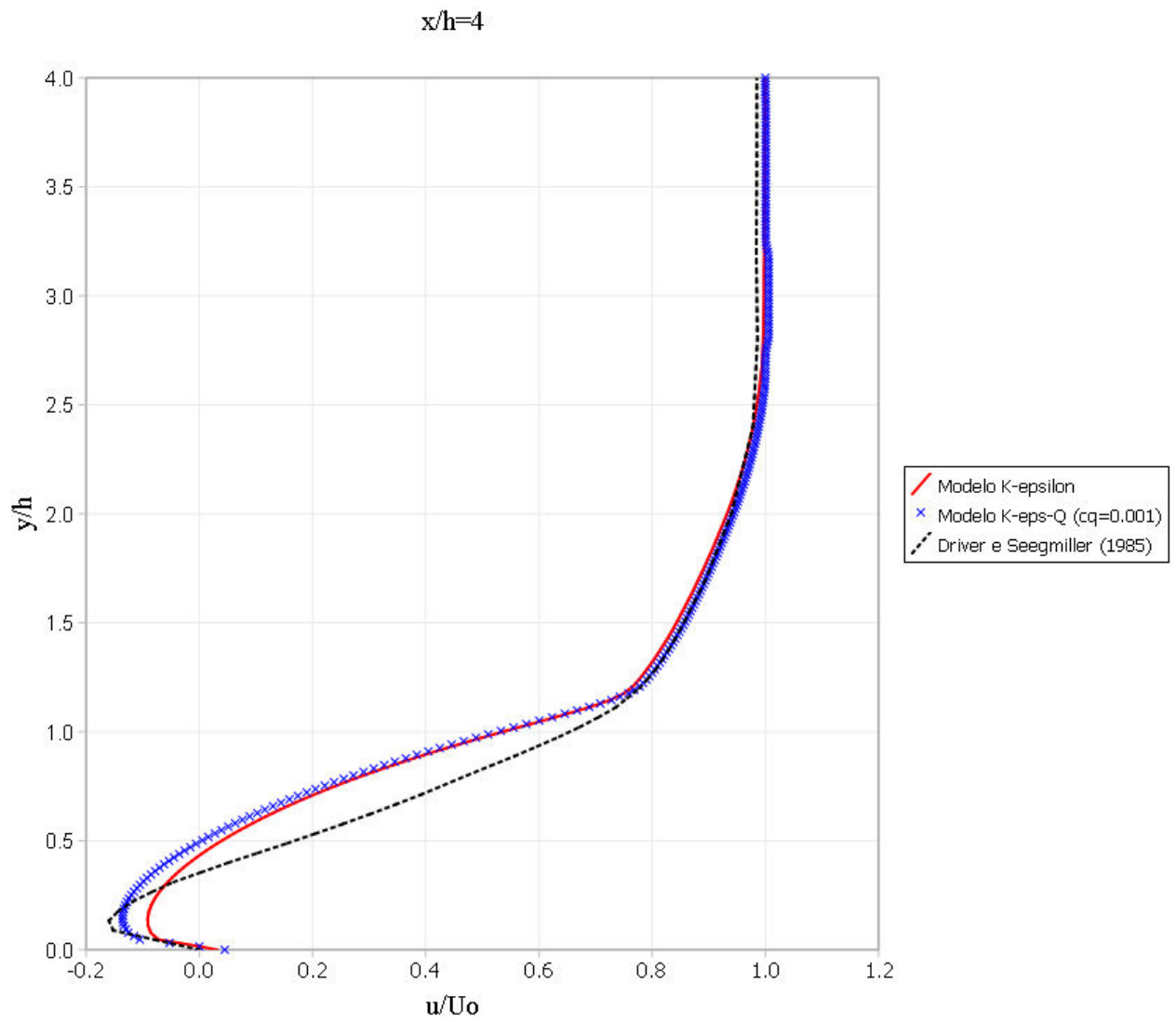
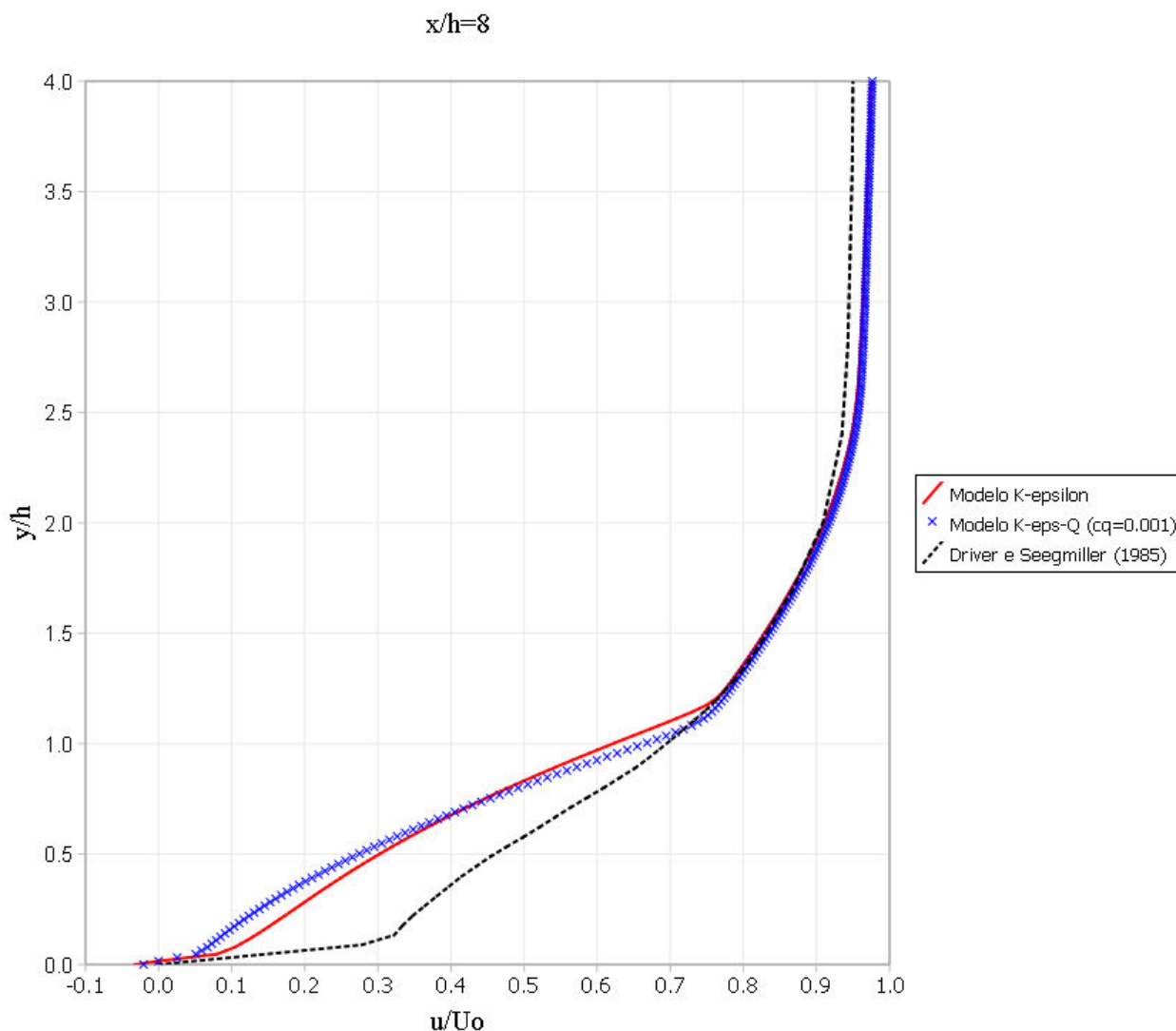


Figura 20 - Perfis de velocidade na estação  $x / h = 4$



**Figura 21 - Perfis de velocidade na estação  $x / h = 8$**

Como pode ser notado nas Figura 18 a Figura 21, o modelo  $k - \varepsilon - Q$  apresenta resultados tão bons ou melhores quanto os resultados apresentados pelo modelo  $k - \varepsilon$ . Isso pode ser observado no comportamento dos perfis de velocidade próximos a parede, visíveis nos resultados das estações  $x / h = 1$  e  $x / h = 4$ . Nas estações  $x / h = 2$  e  $x / h = 8$  os resultados do modelo  $k - \varepsilon - Q$  mostraram-se semelhantes ao modelo  $k - \varepsilon$ . Os dois modelos conseguiram captar de forma coerente o comportamento da curva do resultado experimental de Driver e Seegmiller (1985).

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 6.1 CONCLUSÃO

Neste trabalho foi proposto um modelo de turbulência de duas equações e que, *a priori*, tem fundamentação física mais consistente que outras formulações comumente empregadas em simulações computacionais de escoamento fluidodinâmicos no campo da engenharia. O objetivo estava em investigar o comportamento do critério  $Q$ , critério de identificação de vórtices, junto do modelo de turbulência  $k - \varepsilon$  na modelagem da turbulência, com uso de um código numérico computacional. Analisou-se a contribuição deste modelo e sua influência no tratamento da turbulência, utilizando para validação do código computacional dois problemas comuns CFD e confrontando os resultados com resultados de literaturas já conhecidas.

A análise mostrou que o modelo  $k - \varepsilon - Q$  gerou resultados significativos para os casos analisados, bem próximos dos resultados experimentais utilizados como referência. Isso mostra que os resultados obtidos pelo modelo  $k - \varepsilon - Q$  são qualitativamente mais adequados que os resultados obtidos com o modelo de turbulência mais comumente utilizado, o modelo  $k - \varepsilon$ .

Apesar de fazer uso de um número restrito de constantes empíricas, o que de alguma forma restringiu melhora do modelo  $k - \varepsilon - Q$ , o modelo atingiu seu objetivo e mostrou que alcança bons resultados em sua aplicação. Para que o modelo de turbulência proposto consiga alcançar resultados com mais estabilidade numérica, exatidão e confiabilidade são necessários ajustes, caracterizados por modificações nas constantes das equações de  $Q$  e do modelo  $k - \varepsilon$ .

Embora os resultados para os casos de escoamentos turbulentos, analisados neste trabalho, se apresentem adequados, é importante destacar que vários testes em outros problemas de natureza turbulenta são úteis para ajudar no desenvolvimento de um modelo  $k - \varepsilon - Q$  mais eficiente. Continuar o desenvolvimento do código é importante, fazendo algumas modificações do código, utilizando numa próxima etapa uma análise de convergência e análise de todas as outras

constantes, de forma que os resultados fiquem a contento e atinjam resultados cada vez mais fiéis ao caso experimental, visando aumentar a capacidade do código para simular escoamentos turbulentos e consolidar a validação do código.

## 6.2 TRABALHOS FUTUROS

Os modelos de turbulência são de uma forma geral muito utilizado em vários campos da ciência, mas ainda é necessário que se continue as pesquisas sobre formas de atingir resultados com grau de precisão e tempo de processamento computacional melhores.

Com base nisso, como sugestão para trabalhos futuros, a otimização dos parâmetros computacionais, calibrando-se as constantes, de maneira que os resultados fiquem mais próximos dos resultados experimentais existentes para cada caso de escoamento turbulento. Aplicação do modelo de turbulência  $k - \varepsilon - Q$  no tratamento de outros problemas de escoamentos turbulentos, com melhor investigação e mais testes computacionais, apresentando as características e comportamento do modelo para qualquer escoamento de natureza turbulenta.

Outra sugestão de trabalho seria a verificação da performance do modelo  $k - \varepsilon - Q$  junto de outros métodos numéricos, como elementos finitos e diferenças finitas. Composição do modelo  $k - \varepsilon - Q$  com outros modelos de turbulência ou com aplicação de outros critérios, assim como estender o programa para problemas tridimensionais e axissimétricos.

Com estas pesquisas, é possível se formar uma base mais sólida de conhecimento amplo e prático para o modelo de tratamento da turbulência  $k - \varepsilon - Q$ . Estas obras popularizariam o modelo ainda mais e conseqüentemente contribuiriam para sua maior eficácia.

## REFERÊNCIAS

- ABRUNHOSA, J. D. M. **Simulação de escoamento turbulento complexo com modelagem clássica e de grandes escalas**. Tese (doutorado). Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, 2003.
- ANDRADE, L. C. F. **Sobre estruturas vorticiais e a turbulência estrutural**. Tese (doutorado). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, p.67-76, 2008.
- BAUERFEIND, K. **Paraview**. Disponível em:  
<<http://home.arcor.de/drklaus.bauerfeind/nast/dNaSt2DA.html>>. Acesso em: 02 fev. 2011, 14: 55.
- BRIGGS, W.L.; HENSON, V.E., MCCORMICK, S.F., **A Multigrid Tutorial**, 2. ed. [s.l.]: SIAM, 2000.
- BUARQUE, D. C. **Simulação Numérica Direta de um escoamento turbulento em um canal com fundo ondulado**. Dissertação (mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Departamento de Pós-Graduação em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental, 2007.
- DESCHAMPS, C. J. , A. **Modelos Algébricos e Diferenciais**.In: I Escola de Primavera em Transição e Turbulência. Rio de Janeiro: ABCM, 1998.
- DRIVER, D. M.; SEEGMILLER, H. L. Features of a reattaching turbulent shear layer in divergent channel flow. **AIAA Journal**, v. 23, n.2, p. 163-171, 1995.
- ERTURK, E.; GOKCOL, C.; CORKE, T. C. Numerical Solutions of 2-D Steady Incompressible Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers, **International Journal for Numerical Methods in Fluids**. v. 48, p. 747-774, 2005.

FERNANDEZ, L. C. **Simulação da propagação de poluentes utilizando transformação de backlund – modelo bidimensional**. Dissertação (mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Departamento de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, 2007.

FORTUNA, A.O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos**. [s.l.]: EDUSP, 2000.

FOX, W.R.; MCDONALD, T.A. **Introdução à Mecânica dos Fluidos**. 5. ed. [s.l.]: LTC, 1998.

GHIA, U.; GHIA, N.; SHIN, C.T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a *Multigrid* method. **Journal of Computational Physics**, v. 48, 1982.

GRIEBEL, M.; DORNSEIFER, T.; NEUNHOEFFER, T. **Numerical Simulation in Fluid Dynamics: a practical introduction**. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics - SIAM, 1998. 217 p.

HÄRTEL, C. **Handbook of Computational Fluid Mechanics**. In: Turbulence flows: direct numerical simulation and large-eddy simulation. v.1, London: Academic Press, London, 1996.

HINZE, J. O. **Turbulence**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1975.

HUNT, J. C. R.; WRAY, A. A.; MOIN, P. **Eddies, Stream, and Convergence Zones in Turbulent Flows**. [s.l.]: Center for Turbulence Research, 1988. p. 193-208. ( Report CTR-S88).

HUSSAIN, A. K. M. F., “**Coherent Structures – Reality and Myth**”. v. 26, n. 10, p. 2816-2850, 1983. (Phys. Fluids).

JEONG, J.; HUSSAIN, A. K. M. F. **On the Identification of a Vortex**. v. 285, p. 69-94, 1995. (J. Fluid Mech.).

- KOLMOGOROV, A.N. **The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers**. Dokl. Akad. Nauk SSSR 30. p. 299-303, 1941. (in Russian).
- LAMB, H., **Hydrodynamics**. 6. ed. [s.l.]: Cambridge University Press, 1997.
- LAUNDER, B.E., SPALDING, D.B.; **The numerical computation of turbulent flows**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 3, p.269-289, 1974.
- LAURENCE, D. **Large Eddy Simulation of Industrial Flows ?** In Closure Strategies for Turbulent and Transitional Flows. Cambridge University Press, 2002. p. 392-406.
- LUGT, H. J. **Vortex Flow in Nature and Technology**. 2. ed. Malabar: Krieger Publishing Co., 1995.
- MALISKA, C. R. **Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional**. 2.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004.
- McDONOUGH, J. M. **Introductory Lectures on Turbulence**. [s.l.]: University of Kentucky, 2004. (*Physics, Mathematics, and Modeling- Lectures Notes*).
- MODI, A. **Direct Numerical Simulation of turbulent flows**. (Unpublished). Disponível em: < [www.anirudh.net/courses/ae525/paper](http://www.anirudh.net/courses/ae525/paper)>. Acesso em: 19 jan. 2011
- MOFFATT, H.K.; KIDA, S.; OHKITANI K. **Stretched vortices – the sinews of turbulence; large – Reynolds – number – asymptotics**. J. Fluid Mech. 259, p. 241 – 264. 1994.
- MOIN, P.; MAHESH, K. **Direct Numerical Simulation: a tool in turbulence research.**, p. 539-578, 1998. (Annu. Ver. Fluid Mech., 30).
- MOREIRA, G. A. A. **Modelagem Numérica da Camada Limite Atmosférica com validação experimental**. Dissertação (mestrado). Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Engenharia Mecânica, p.44-134, 2007.



PATANKAR, S. V., **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**. New York: Taylor & Francis Group, 1980.

PEREIRA, F.H., **O Método Multigrid Algébrico na resolução de sistemas lineares oriundos do Método dos Elementos Finitos**. Tese (doutorado). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia Elétrica, 2007.

PINTO, J. C.; LAGE, P. L. C. **Métodos Numéricos em Problemas de Engenharia Química**. Rio de Janeiro: E-papers, 2001.

POPE, S. B. **Turbulent Flows**. 1. ed. Edinburgh: Cambridge University Press, 2003.

PRANDTL, L. On the fully developed turbulence. **Journal of Applied Mathematics and Mechanics**. v. 5, p.136-139, 1925.

SILVA FREIRE, A.P.; ILHA, A.; COLAÇO, M. J. **Turbulência**. V Escola de Primavera em Transição e Turbulência, Instituto Militar de Engenharia. Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Ciência Mecânica 2006. (Coleção caderno de Turbulência, v. 5, Tomo 1).

SILVEIRA NETO, A. **Fundamentos da Turbulência nos Fluidos**. 1. ed. In: UFSC. (Org.). III Escola de Primavera Transição e Turbulência. Florianópolis: UFSC, v. 1, p. 1-52., 2002.

SILVETRINI, J.H., **Turbulência**. In: Simulação numérica direta e de grandes escalas de escoamentos transicionais e turbulentos, II Escola de Primavera em Transição e Turbulência, Associação Brasileira de Ciência Mecânica, p. 01-81, 2003.

SMAGORINSKY, J. General circulation experiments with the primitive equations, in. the basic experiment. p. 99-164, 1963. (Monthly Weather Review, 91).

TENNEKES, H.; LUMLEY, J. L. **A First Course in Turbulence**. 1. Ed. Cambridge: MIT Press, 1972.

TRUESDELL, C. A. **The Kinematics of Vorticity**. 1. ed. Bloomington: Indiana University Press, 1954.

WHITE, Frank M. 2. ed. **Viscous Fluid Flow**. [s.l.]: McGraw - Hill, 1991.

WILCOX, D. C. **Turbulence Modeling for CFD**. 1ed, DCW Industries, Inc.,  
La Cañada, 1994