



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**RAPHAEL DI CARLO SILVA DOS SANTOS**

**INVERSÃO GRAVIMÉTRICA RÁPIDA DO RELEVO DO  
EMBASAMENTO APLICANDO O FUNCIONAL DA  
VARIAÇÃO TOTAL**

**BELÉM**

**2013**

**RAPHAEL DI CARLO SILVA DOS SANTOS**

**INVERSÃO GRAVIMÉTRICA RÁPIDA DO RELEVO DO  
EMBASAMENTO APLICANDO O FUNCIONAL DA  
VARIAÇÃO TOTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará - UFPA, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Mestre em Geofísica.

Área de Concentração: Métodos Gravimétrico e Magnético

Orientadora: Darciléa Ferreira Santos.  
Co-Orientador João Batista Corrêa da Silva.

**Belém - Pará  
2013**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFPA

---

S237i Santos, Raphael Di Carlo Silva dos

Inversão gravimétrica rápida do relevo do embasamento aplicando o funcional da variação total / Raphael Di Carlo Silva dos Santos - 2013.

50 fl.: il.

Orientadora: Darcicléa Ferreira Santos

Coorientador: João Batista Corrêa da Silva

Dissertação (mestrado em geofísica) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Geociências, Programa de Pós-Graduação em Geofísica, Belém, 2013.

1. Bacias sedimentares (geofísica). 2. Gravimetria. 3. Relevo do embasamento descontínuo. 4. Interpretação gravimétrica. 5. Variação Total. 6. Norma L<sub>1</sub>. I. Santos, Darcicléa Ferreira, *orient.* II. Silva, João Batista Corrêa da, *coorient.* III. Universidade Federal do Pará. III. Título.

CDD 22° ed.: 551.483

---

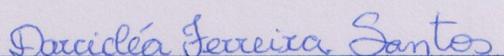
**RAPHAEL DI CARLO SILVA DOS SANTOS**

**INVERSÃO GRAVIMÉTRICA RÁPIDA DO RELEVO DO  
EMBASAMENTO APLICANDO O FUNCIONAL DA  
VARIÇÃO TOTAL**

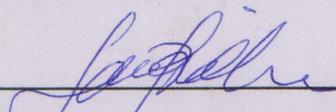
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará - UFPA, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Mestre em Geofísica.

Data de aprovação: 23/08/2013

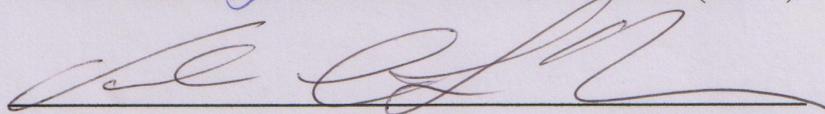
Banca examinadora:



Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. Darcicléa Ferreira Santos - Orientadora (UFPA)



Prof. Dr. João Batista Corrêa da Silva – Co-orientador (UFPA)



Prof.<sup>a</sup>. Dr.<sup>a</sup>. Valéria Cristina Ferreira Barbosa - Membro (ON)

*Aos meus pais*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Doutrina Espírita por ter me ensinado valores tão importantes para meu futuro pessoal como o amor ao próximo e a caridade.

Agradeço aos meus pais, Adalberto Júnior e Selma Santos, por me ensinarem que a paciência é uma das maiores virtudes que existem e a minha irmã Roberta Cristina, por simplesmente ser a melhor irmã que existe.

À minha namorada, Bruna Lisboa, pelo amor e convívio durante esses 6 anos de jornada acadêmica.

Às secretárias Beni e Bela pelo convívio e por serem tão extrovertidas durante todos esses anos na pós-graduação.

A minha turma de graduação: Adriano César, Maria Gabriela, Diogo Rezende, João Filho, Jorlivan Correa, Boris Freeiman, Isabela Coelho e Raíza Macambira pelos melhores anos dentro da UFPA. Aos meus colegas de pós-graduação Wilber Pinheiro, Rizimar Cunha, Alexandre Sodr e e Thiago Alves pelo convívio e em especial a minha colega de classe Karina Gomes pelas dificuldades que enfrentamos e superamos juntos ao longo do curso. Tamb em a turma de 2010 e de 2011 da gradua o pela experiência única em sala de aula.

Ao Francisco (Frank Wan) e ao grupo “Física & Matemática” de uma rede social pelo compartilhamento de materiais e referências sobre programaa o linear

A prof<sup>a</sup>. Darcicléa por sua didática, paciência, e por me acolher como orientando de mestrado, do mesmo modo como me acolheu como orientando de gradua o.

Ao prof. João Batista, meu coorientador, pelas aulas de reda o técnica na gradua o e pelas pesquisas desenvolvidas sobre inversão gravimétrica linear.

Agradeço ao Programa de Pós-Gradua o em Geofísica que me concedeu a chance de obter este título e a CAPES pelo suporte e investimento em forma de bolsa de estudo.

Por fim, agradeço a todas as institui es que me forneceram não só condi es físicas para o término deste trabalho, como tamb em alegrias e contentamentos para a minha continua o no curso.

*“A unidade é a variedade, e a variedade na unidade é a lei suprema do universo.”*  
*Sir Isaac Newton*

## RESUMO

Apresentamos um novo método de inversão linear bidimensional de dados gravimétricos produzidos por bacias sedimentares com relevo do embasamento descontínuo. O método desenvolvido utiliza um modelo interpretativo formado por um conjunto de fitas horizontais bidimensionais justapostas cujas espessuras são os parâmetros a serem estimados. O contraste de densidade entre o embasamento e os sedimentos é presumido constante e conhecido. As estimativas das espessuras foram estabilizadas com o funcional da Variação Total (VT) que permite soluções apresentando descontinuidades locais no relevo do embasamento. As estimativas do relevo são obtidas através da resolução de um sistema de equações lineares, resolvido na norma  $L_1$ . Como métodos lineares subestimam as estimativas de profundidade do embasamento de bacias maiores que cerca de 500 m, amplificamos as estimativas de profundidade através da modificação da matriz associada ao modelo interpretativo de fitas. As estimativas obtidas através deste procedimento são em geral ligeiramente superestimadas. Desse modo, elas são corrigidas através de uma correção definida pela expressão da placa Bouguer. Testes em dados sintéticos e reais produziram resultados comparáveis aos produzidos pelo método não linear, mas exigiram menor tempo computacional. A razão R entre os tempos exigidos pelo método não linear e o método proposto cresce com o número de observações e parâmetros. Por exemplo, para 60 observações e 60 parâmetros, R é igual a 4, enquanto para 2500 observações e 2500 parâmetros R cresce para 16,8. O método proposto e o método de inversão não linear foram aplicados também em dados reais do Steptoe Valley, Nevada, Estados Unidos, e da ponte do POEMA, no Campus do Guamá em Belém, produzindo soluções similares às obtidas com o método não linear exigindo menor tempo computacional.

Palavras-Chave: Bacias Sedimentares. Gravimetria. Relevo do embasamento descontínuo. Inversão gravimétrica. Interpretação Gravimétrica. Variação Total. Norma  $L_1$ .

## ABSTRACT

We present a new 2D linear inversion gravity method to estimate the discontinuous basement relief of a sedimentary basin. The method uses an interpretation model consisting of a set of 2D juxtaposed horizontal ribbons whose thicknesses are the parameters to be estimated. The density contrast between the basement and the sediments is assumed constant and known. The estimates of the thicknesses were stabilized with the Total Variation functional (TV) which permits solutions presenting local discontinuities in the basement relief. The estimates of the basement relief are produced by solving a single linear system of equations in the  $L_1$  norm. Because linear inversion methods underestimate the depth of the basement relief for sedimentary basins thicker than 500 m, we amplify the depth estimates through by modifying the matrix associated with the interpretation model. This procedure in general leads to overestimated depths which are corrected through the expression of the anomaly of a Bouguer slab. Tests on synthetic and real data produced similar results as compared with the nonlinear method, but required less computational time. The ratio  $R$  between the computational times required by the nonlinear and the proposed methods to produce similar solutions increases with the number of observations and parameters. For example, for 60 observations and 60 parameters  $R$  is equal to 4 whereas for 2500 observations and 2500  $R$  increases to 16.8. The proposed method and the nonlinear inversion method were also applied to real gravity data from Steptoe Valley, Nevada, U.S.A. and from Ponte do POEMA at the Campus of Guamá, in Belém, producing solutions which are similar to the ones produced by the nonlinear method but required a smaller computer time.

Key words: Sedimentary Basins. Gravimetry. Discontinuous basement relief. Gravimetric Inversion. Gravimetric Interpretation. Total Variation.  $L_1$  norm

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 2.1– (a) Anomalia gravimétrica e (b) modelo interpretativo de um conjunto de  $M$  prismas 2D retangulares justapostos com espessura  $p_j$ .....17
- Figura 2.2– Conjunto de  $M$  fitas 2D horizontais justapostas com mesma espessura  $t_j$ .....18
- Figura 2.3– Ilustração dados gravimétricos gerados (pontos pretos) pelas bacias sedimentares simuladas cujos relevos do embasamento (linhas pretas) apresentam profundidades máximas de 0,5 km e 1,5 km, Figuras 2.3a e 2.3b, respectivamente.....20
- Figura 2.4– Conjuntos de fitas 2D horizontais justapostas cujos topos, localizados em  $d_i$  (a) e  $d_k$  (b) são determinados, respectivamente, através das relações  $d_i = g_i / (2\pi\gamma\Delta\rho)$  e  $d_k = g_k / (2\pi\gamma\Delta\rho)$ .....22
- Figura 2.5– (a) Representação esquemática da solução  $\hat{t}$  para o relevo do embasamento sem correção e do desajuste dos dados gravimétricos. (b) Representação esquemática da solução  $\tilde{t}$  para o relevo do embasamento com correção produzindo um ajuste aceitável dos dados gravimétricos.....24
- Figura 2.6– Ilustração dos dados gravimétricos gerados (pontos pretos) pela bacia sedimentar simulada cujo relevo do embasamento (linhas pretas) apresenta profundidade máxima de 1,5 km, Figuras 2.6a e 2.6b.....25
- Figura 2.7– Relevo do embasamento descontínuo (linha azul) com desnível  $D$  e sua aproximação através das espessuras  $t_j$  e  $t_{j+1}$  do modelo interpretativo de fitas.....26
- Figura 3.1– Graben isolado: (a) anomalia Bouguer observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha). (b) Solução produzida através do método proposto (linha vermelha) e relevo do embasamento simulado (linha azul).....30
- Figura 3.2– Graben isolado: (a) anomalia Bouguer observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha). (b) Solução produzida através do método não linear (linha vermelha) e relevo do embasamento simulado (linha azul).....30
- Figura 3.3– Bacia sedimentar de margem passiva: (a) anomalia Bouguer observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha). (b) Solução produzida através do método proposto (linha vermelha) e relevo do embasamento simulado (linha azul).....32
- Figura 3.4– Bacia sedimentar de margem passiva: (a) anomalia Bouguer observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha). (b) Solução produzida através do método não linear (linha vermelha) e relevo do embasamento simulado (linha azul).....32
- Figura 3.5– Canal: (a) anomalia Bouguer observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha). (b) Solução produzida através do método proposto (linha vermelha) e relevo do embasamento simulado (linha azul).....34
- Figura 3.6– Canal: (a) anomalia Bouguer observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha). (b) Solução produzida através do método não linear (linha vermelha) e relevo do embasamento simulado (linha azul).....34

Figura 3.7–	Tempo computacional exigido pelo método proposto (pontos vermelhos) e pelo método não linear (pontos azuis) versus o número de observações.....	35
Figura 4.1–	Step toe Valley. Mapa gravimétrico Bouguer e localização do perfil gravimétrico (AA') utilizado.....	37
Figura 4.2–	Perfil AA' do Step toe Valley: (a) anomalia Bouguer observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha). (b) Relevo do embasamento estimado através do método proposto (linha vermelha).....	39
Figura 4.3–	Perfil AA' do Step toe Valley: (a) anomalia Bouguer observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha). (b) Relevo do embasamento estimado através do método não linear (linha vermelha).....	39
Figura 4.4–	Foto da topografia abaixo da Ponte do POEMA. Extremidade A no lado oeste com maior descontinuidade e gradiente topográfico, $g_1$ . Extremidade B no lado leste com menor descontinuidade e gradiente topográfico, $g_2$ .....	40
Figura 4.5–	Ponte do POEMA: (a) anomalia Bouguer observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha). (b) Relevo do embasamento estimado através do método proposto (linha vermelha).....	42
Figura 4.6–	Ponte do POEMA: (a) anomalia Bouguer observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha). (b) Relevo do embasamento estimado através do método não linear (linha vermelha).....	42
Figura A.1–	Representação do relevo do embasamento S e do modelo interpretativo consistindo de $M$ prismas 2D retangulares justapostos, com espessura $p_j$ .....	48

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	13
<b>2</b>	<b>METODOLOGIA</b>	17
<b>2.1</b>	<b>Métodos anteriores de inversão linear</b>	18
2.1.1	Método de Chavez e Garland	18
2.1.2	Método de Silva e Araújo	20
2.1.2.1	Redefinição dos valores numéricos da matriz de sensibilidade	20
2.1.2.2	Realce das estruturas através da redefinição dos valores numéricos da matriz de sensibilidade	21
<b>2.2</b>	<b>Método Proposto</b>	25
<b>3</b>	<b>APLICAÇÃO EM DADOS SINTÉTICOS</b>	28
<b>3.1</b>	<b>Graben isolado</b>	28
<b>3.2</b>	<b>Bacia sedimentar de margem passiva</b>	31
<b>3.3</b>	<b>Canal</b>	33
<b>3.4</b>	<b>Eficiência do método</b>	35
<b>4</b>	<b>APLICAÇÃO EM DADOS REAIS</b>	36
<b>4.1</b>	<b>Steptoe Valley</b>	36
4.1.1	Informações geológicas	36
4.1.2	Resultados	37
<b>4.2</b>	<b>Ponte do Poema</b>	40
4.2.1	Informações geológicas	40
4.2.2	Resultados	41
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	43
	<b>REFERÊNCIAS</b>	44
	<b>APÊNDICE</b>	47
	<b>APÊNDICE A: MÉTODO NÃO LINEAR</b>	48

# 1 INTRODUÇÃO

A identificação de feições geológicas no relevo do embasamento é de grande importância para a indústria de petróleo. Delinear o relevo do embasamento de bacias sedimentares auxilia as pesquisas em busca de acumulações de óleo e de gás associadas a altos topográficos e a falhas no embasamento. Nas bacias intracratônicas os processos geológicos, como a subsidência termal provocada pela movimentação vertical do manto e a distensão tectônica, produziram uma topografia do embasamento suavemente ondulada ou marcada localmente por sucessões de falhas escalonadas de pequeno rejeito. Tais elevações no embasamento podem levar à sedimentação de camadas em forma de cunha nos seus flancos, tal que uma camada de rocha-reservatório pode ficar aprisionada entre camadas de rochas impermeáveis e o embasamento, constituindo assim uma armadilha estratigráfica para o petróleo.

Por sua vez, bacias de margem passiva ou extensionais, formadas pelo rifteamento de continentes, produziram blocos crustais que foram rebaixados (formando grabens) ou elevados (formando horsts) e apresentando falhas de alto rejeito na topografia do embasamento. As falhas podem colocar lado a lado rochas permeáveis e impermeáveis pré-existentes, permitindo que a rocha-reservatório seja selada, constituindo assim uma armadilha estrutural para o petróleo. Desse modo, o delineamento do relevo do embasamento é de extrema importância para auxiliar a localização de possíveis armadilhas de petróleo.

O método gravimétrico é um dos métodos geofísicos utilizados para delinear o relevo do embasamento (BOTT, 1960; CORBATÓ, 1965; TANNER, 1967; EL-BATROUKH; ZENTANI, 1980; KIENIEWICZ; LUYENDYK, 1986; BARBOSA; SILVA; MEDEIROS, 1997; SILVA; COSTA; BARBOSA, 2006; BARBOSA; MENEZES; SILVA, 2007; GIMENEZ et al., 2009). A interpretação de dados gravimétricos, para ser eficaz, deve utilizar métodos de inversão de acordo com as características do ambiente geológico. Por exemplo, o método de inversão utilizando o regularizador de Tikhonov de ordem um (TIKHONOV; ARSENIN, 1977) deve ser aplicado para delinear o relevo de embasamentos suaves de bacias sedimentares. No entanto, devemos aplicar métodos de inversão que incorporem vínculos de escassez como o regularizador Variação Total (MARTINS et al., 2011; LIMA et al., 2011), por exemplo, para delinear descontinuidades abruptas no relevo do embasamento de bacias sedimentares.

A inversão de dados gravimétricos pode ser formulada através de um problema de otimização. Em geral, utilizamos na formulação deste problema um modelo interpretativo composto por um conjunto de prismas 2D retangulares justapostos cujas incógnitas são as espessuras dos prismas. A solução deste problema exige a resolução de um ou mais sistemas lineares para determinar a profundidade das fontes gravimétricas (CHAVEZ; GARLAND, 1985; BARBOSA; SILVA; MEDEIROS, 1999; SILVA; COSTA; BARBOSA, 2006). Quando a solução é obtida em várias iterações, o tempo computacional torna-se pelo menos uma ordem de grandeza superior ao tempo necessário para obter a solução em apenas uma iteração.

Para o caso de bacias sedimentares com relevo de embasamento suave, diversos procedimentos simples têm sido adotados para a redução do tempo computacional. Bott (1960) e Rao, Prakash e Babu (1990), por exemplo, obtêm na primeira iteração uma solução proporcional à anomalia gravimétrica e a partir da segunda iteração corrige as estimativas do relevo somando a elas valores proporcionais aos resíduos entre as anomalias observada e calculada. Litinsky (1989) empregou apenas a primeira iteração do método de Bott (1960). Chavez e Garland (1985) empregaram o modelo interpretativo consistindo de um conjunto de fitas 2D horizontais justapostas, cujas espessuras são os parâmetros a ser determinados através da inversão de uma matriz. As soluções são estabilizadas através da inversa generalizada ou de filtros aplicados às observações e estimam com eficácia espessuras de pacotes sedimentares inferiores a 500 m. Silva e Araújo (2010) e Ramos (2013) obtiveram estimativas do relevo através de uma modificação do método de Chavez e Garland (1985) que permitem estimar relevos com profundidades maiores que 500 m. As soluções são estabilizadas através da regularização de Tikhonov de ordem um.

Por outro lado, a redução do tempo computacional em ambientes geológicos com descontinuidades abruptas locais no relevo do embasamento é uma tarefa mais difícil, uma vez que a interpretação de dados gravimétricos voltada ao delineamento do relevo de embasamentos abruptos utiliza técnicas de inversão não linear. Barbosa, Silva e Medeiros (1999), por exemplo, apresentam uma técnica de inversão não linear conhecida como Suavidade Ponderada, presumindo uma superfície localmente abrupta do relevo do embasamento e o conhecimento da profundidade máxima do relevo do embasamento. Silva, Oliveira e Barbosa (2010) apresentam uma técnica de inversão não linear conhecida como Regularização Entrópica, que combina a maximização da medida de entropia de ordem zero com a minimização da medida de entropia de primeira ordem do vetor solução para delinear o

relevo de embasamentos abruptos. Martins et al. (2011) e Lima et al. (2011) apresentam um método de inversão não linear utilizando o funcional regularizador da Variação Total (VT), formulado através da minimização da norma  $L_2$  de uma aproximação de primeira derivada espacial dos parâmetros para delinear as superfícies de relevos de embasamentos abruptos. Em todos os métodos de inversão não lineares aplicados à delimitação do relevo do embasamento descontínuo, a solução é obtida iterativamente resolvendo-se em cada iteração um sistema linear, demandando assim um consumo de tempo computacional que aumenta progressivamente com o aumento do número de iterações, de parâmetros e de observações.

Neste trabalho propomos um novo método de inversão que reduz o tempo de processamento para delinear o relevo do embasamento descontínuo de bacias sedimentares 2D. O método proposto supõe que o contraste de densidade entre o embasamento e o pacote sedimentar seja constante e utiliza um conjunto de fitas 2D horizontais justapostas cujo parâmetro a ser estimado é a espessura da fita. Este novo método utiliza o algoritmo de Barrodale e Roberts (1973), que resolve um sistema linear de equações na norma  $L_1$  para produzir uma solução que minimiza o funcional da variação total (RUDIN; OSHER; FATEMI, 1992) sujeito ao desajuste dos dados gravimétricos estar contido dentro da precisão experimental. Após o cálculo das estimativas aplicamos uma correção, através da expressão da placa Bouguer, a todas as estimativas das espessuras.

Avaliamos o desempenho do método proposto comparando as interpretações obtidas com aquelas produzidas através do método de inversão não linear utilizando o regularizador da VT (MARTINS et al., 2011; LIMA et al., 2011), resolvendo, em cada iteração, um sistema linear utilizando o algoritmo Least Square Regression - *LSQR* (PAIGE; SAUNDERS, 1982). Ambos os métodos produziram interpretações similares. Entretanto, a solução do método proposto é gerada com tempo computacional menor do que a solução do método de inversão não linear (MARTINS et al., 2011; LIMA et al., 2011).

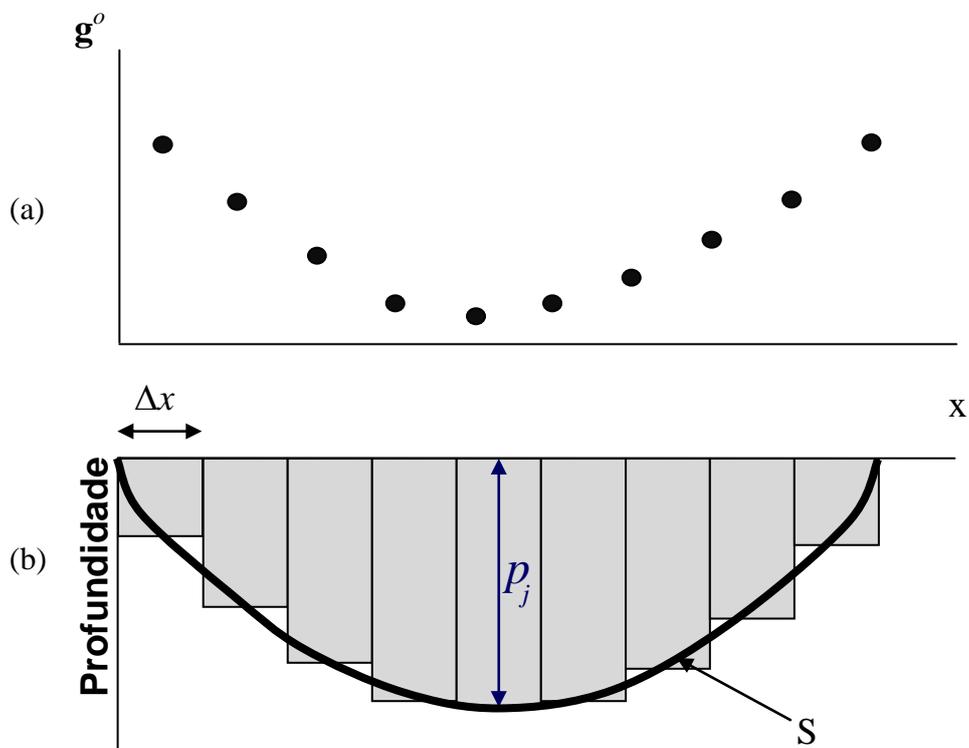
Aplicamos tanto a metodologia proposta como o método de inversão não linear da VT (MARTINS et al., 2011; LIMA et al., 2011) em dados sintéticos produzidos por três ambientes geológicos simulados apresentando descontinuidades abruptas no relevo do embasamento. Aplicamos, também, o método proposto e o método de inversão não linear em dados reais do Steptoe Valley, EUA, e da Ponte do POEMA, UFPA no Campus Belém. As interpretações gravimétricas aplicando o método proposto estimaram profundidades máximas de 3,15 km para o Steptoe Valley e 3,2 m para a ponte do POEMA, estas soluções são

próximas às soluções obtidas aplicando o método de inversão não linear que estimaram profundidades máximas de 2,9 km para o Steptoe Valley e 3 m para a ponte do POEMA. Todas as inversões dos dados reais e sintéticos foram obtidas em menor tempo computacional, em relação aos métodos não lineares como por exemplo: para o conjunto de 60 observações e 60 parâmetros, o método produziu uma solução 4 vezes mais rápido enquanto que para o conjunto de 2500 observações e 2500 parâmetros o método proposto produziu uma solução 16,8 vezes mais rápido.

## 2 METODOLOGIA

Seja  $g^o$  o conjunto de  $N$  observações gravimétricas (Figura 2.1a) referidas a um sistema destro de coordenadas cartesianas. As observações são realizadas ao longo de uma seção, paralela ao eixo  $x$ , de uma bacia sedimentar bidimensional alongada na direção  $y$  (Figura 2.1b), e o pacote sedimentar é presumido ser homogêneo, com o contraste de densidade,  $\Delta\rho$ , entre os sedimentos e o embasamento constante e conhecido.

Figura 2.1– (a) Anomalia gravimétrica e (b) bacia sedimentar apresentando relevo do embasamento  $S$  e modelo interpretativo formado por um conjunto de  $M$  prismas 2D retangulares justapostos com espessura  $p_j$ .



Fonte: Do autor

O problema de obter soluções precisas produzindo um excelente delineamento do relevo do embasamento descontínuo é resolvido utilizando técnica de inversão não linear (V. apêndice A). As soluções do problema de inversão não linear são as espessuras  $p_j$  de cada prisma do modelo interpretativo constituído por um conjunto de  $M$  prismas 2D retangulares justapostos com mesma extensão horizontal  $\Delta x$  (Figura 2.1b) e infinitos na direção  $y$ . Porém

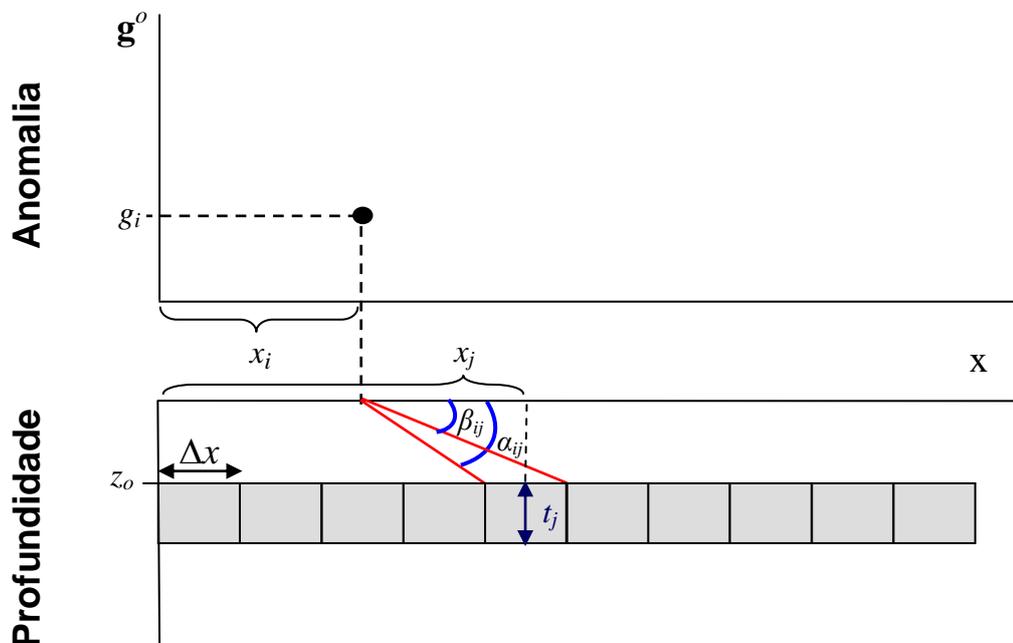
esta técnica de inversão não linear obtém a solução por procedimentos iterativos, resolvendo um sistema linear em cada iteração, o que consome um grande tempo computacional para produzir a solução.

## 2.1 Métodos anteriores de inversão linear

### 2.1.1 Método de Chavez e Garland

O tempo computacional exigido pelos métodos não lineares pode ser reduzido estabelecendo-se uma relação linear aproximada entre as observações gravimétricas e as profundidades do relevo do embasamento. A solução, neste caso, é obtida em uma única iteração. A técnica de Chavez e Garland (1985) estima o relevo do embasamento presumindo um modelo interpretativo de um conjunto de  $M$  fitas 2D horizontais justapostas ao longo do eixo  $x$  e infinitos na direção  $y$  (Figura 2.2).

Figura 2.2 – Conjunto de  $M$  fitas 2D horizontais justapostas com mesma espessura  $t_j$  e ilustração da contribuição da  $j$ -ésima fita horizontal com espessura  $t_j$  e centro em  $x = x_j$  para o cálculo do efeito gravimétrico  $g_i$  em  $x = x_i$ . Os ângulos com a superfície horizontal,  $\alpha_{ij}$  e  $\beta_{ij}$ , estão relacionados à posição de observação  $g_i$ .



Fonte: Do autor

Na Figura 2.2 todas as fitas apresentam a mesma extensão horizontal  $\Delta x$ , localizadas a uma profundidade  $z_o$  muito próxima à superfície. As espessuras  $t_j$  das fitas são os parâmetros a serem estimados e estão associados à anomalia gravimétrica  $g_i$  através da relação linear (CHAVEZ; GARLAND, 1985):

$$g_i = 2\gamma \Delta\rho \sum_{j=1}^M (\alpha_{ij} - \beta_{ij}) t_j, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (2.1)$$

em que  $\gamma$  é a constante gravitacional,  $\Delta\rho$  é o contraste de densidade constante, e  $\alpha_{ij}$  e  $\beta_{ij}$  são ângulos que dependem das coordenadas  $x_i$  das observações gravimétrica,  $g_i$ , em relação a cada posição do  $j$ -ésimo elemento da fita (Figura 2.2) expressas, respectivamente, por:

$$\alpha_{ij} \equiv \alpha(x_i, x_j) = \text{atan}\left(\frac{x_j - \Delta x/2 - x_i}{z_o}\right), \quad (2.2)$$

e

$$\beta_{ij} \equiv \beta(x_i, x_j) = \text{atan}\left(\frac{x_j + \Delta x/2 - x_i}{z_o}\right). \quad (2.3)$$

O sistema de equações lineares, equação (2.1), pode ser expresso em notação matricial por

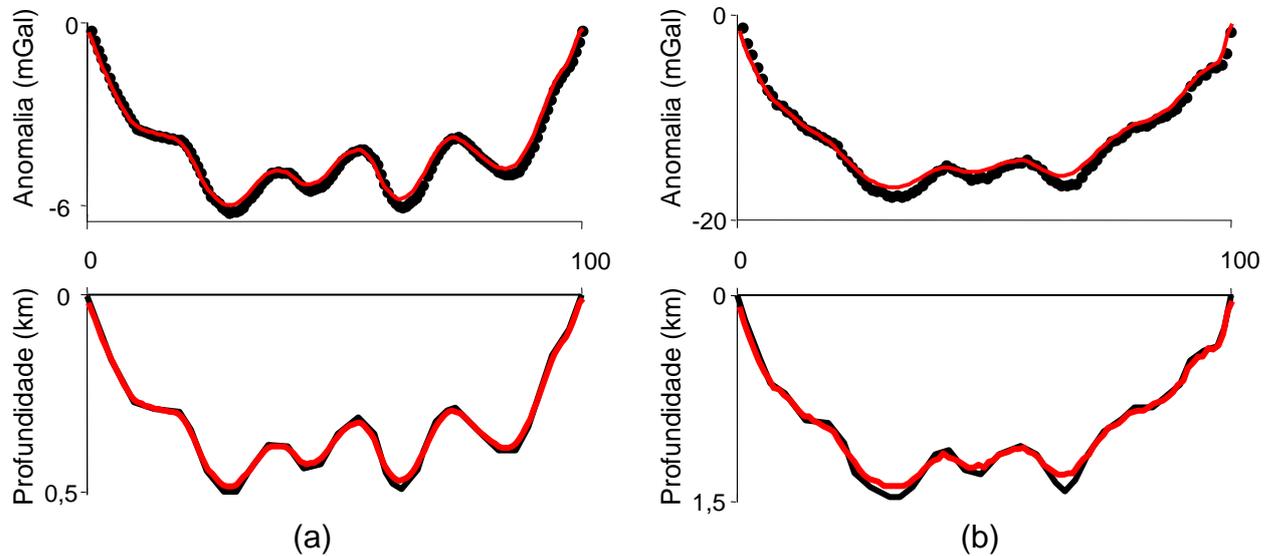
$$\mathbf{g} = \mathbf{A} \mathbf{t}, \quad (2.4)$$

em que  $\mathbf{g}$  é o vetor  $N$ -dimensional de observações gravimétricas teóricas,  $\mathbf{t}$  é o vetor  $M$ -dimensional de espessuras das fitas e  $\mathbf{A}$  é a matriz de sensibilidade de dimensão  $N \times M$  cujo elemento  $a_{ij}$  é definido por

$$a_{ij} = 2\gamma \Delta\rho (\alpha_{ij} - \beta_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (2.5)$$

Chavez e Garland (1985) resolvem o sistema linear (2.4) através da Inversa Generalizada, após aplicar um filtro passa-baixa às observações. O método de Chavez e Garland (1985) apresenta excelente desempenho para delinear relevo com profundidades inferiores a 0,5 km (Figura 2.3a). Por outro lado, a Figura 2.3 b ilustra que para relevos com profundidades de 1,5 km este método não apresenta boa solução para delinear relevo do embasamento.

Figura 2.3 – Ilustração dos dados gravimétricos gerados (pontos pretos) pelas bacias sedimentares simuladas cujos relevos do embasamento (linhas pretas) apresentam profundidades máximas de 0,5 km e 1,5 km, Figuras 2.3a e 2.3b, respectivamente. Ajuste (linha vermelha) e delineamento do relevo do embasamento (linha vermelha) utilizando o método de Chavez e Garland (1985).



Fonte: Do autor

### 2.1.2 Método de Silva e Araújo

Silva e Araújo (2010) apresentam um método que modifica o método de Chavez e Garland (1985) para permitir uma maior amplificação das estimativas de espessuras  $t_j$  proporcional à profundidade do relevo. Para tanto o método de Silva e Araújo (2010) introduz uma modificação nos valores numéricos dos elementos da matriz de sensibilidade definida na equação 2.5, mantendo o mesmo modelo interpretativo da Figura 2.2 com a profundidade  $z_o$  de cada fita muito próxima à superfície.

#### 2.1.2.1 Redefinição dos valores numéricos da matriz de sensibilidade

Os valores numéricos dos ângulos  $\alpha_{ij}$  e  $\beta_{ij}$  que definem os elementos da matriz  $\mathbf{A}$  (equação 2.5) são redefinidos por

$$\alpha_{ij} \equiv \alpha(x_i, x_j, d_i) = \text{atan}\left(\frac{x_j - \Delta x/2 - x_i}{d_i}\right), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (2.6)$$

e

$$\beta_{ij} \equiv \beta_{ij}(x_i, x_j, d_i) = \text{atan}\left(\frac{x_j + \Delta x/2 - x_i}{d_i}\right), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad (2.7)$$

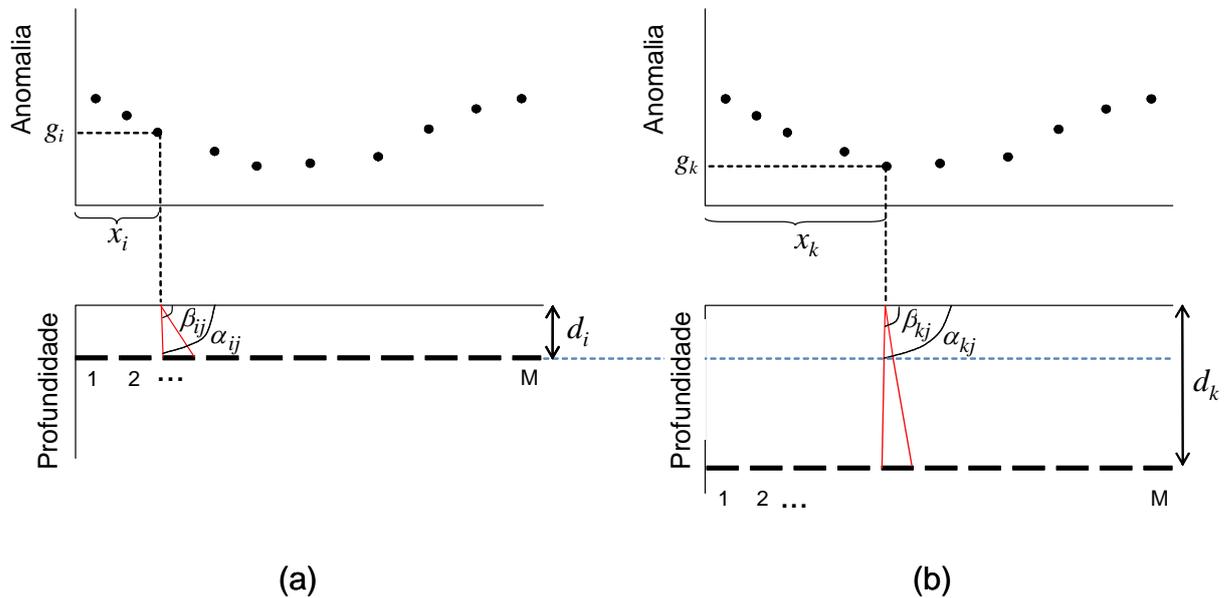
em que  $d_i$  é dado por

$$d_i = \frac{g_i^o}{2\pi\gamma\Delta\rho}. \quad (2.8)$$

### 2.1.2.2 Realce das estruturas através da redefinição dos valores numéricos da matriz de sensibilidade

Este método realça as estimativas das espessuras associadas a fontes profundas da seguinte maneira. Se a  $i$ -ésima observação tiver pequena amplitude (correspondendo a uma fonte rasa), os elementos da  $i$ -ésima linha da matriz  $\mathbf{A}$  modificada serão associados a um conjunto de fitas localizados em uma pequena profundidade (Figura 2.4a). Conseqüentemente, os valores modificados de  $a_{ij}$  serão relativamente altos porque dependem da diferença angular  $\alpha_{ij} - \beta_{ij}$  (confronte os ângulos subtendidos pelas linhas vermelhas nas Figuras 2.4a e 2.4b). Dessa maneira, as estimativas das profundidades de pequenas feições do relevo (que dependem da inversão da matriz  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ ) serão apenas um pouco mais amplificadas do que as estimativas das mesmas feições do relevo usando a matriz  $\mathbf{A}$  não modificada, isto é, a matriz cujo elemento  $a_{ij}$  é definido pelos ângulos  $\alpha_{ij}$  e  $\beta_{ij}$  dados pelas equações (2.2) e (2.3). Por outro lado, se a  $k$ -ésima observação tiver grande amplitude (correspondendo a uma fonte profunda), os valores da  $k$ -ésima linha da matriz  $\mathbf{A}$  modificada serão associados a um conjunto de fitas localizados em uma grande profundidade (Figura 2.4b). Conseqüentemente, os valores modificados de  $a_{kj}$  serão relativamente baixos porque dependem da diferença angular  $\alpha_{kj} - \beta_{kj}$  (confronte os ângulos subtendidos pelas linhas vermelhas nas Figuras 2.4a e 2.4b). Dessa forma, as estimativas das espessuras de pequenas feições do relevo (que dependem da inversão da matriz  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ ) serão substancialmente mais amplificadas do que as estimativas das mesmas feições usando a matriz  $\mathbf{A}$  não modificada, isto é, a matriz cujo elemento  $a_{ij}$  é definido pelos ângulos  $\alpha_{ij}$  e  $\beta_{ij}$  dados pelas equações (2.2) e (2.3).

Figura 2.4 – Conjuntos de fitas 2D horizontais justapostas cujos topos, localizados em  $d_i$  (a) e  $d_k$  (b) são determinados, respectivamente, através das relações  $d_i = g_i/(2\pi\gamma\Delta\rho)$  e  $d_k = g_k/(2\pi\gamma\Delta\rho)$ .



Fonte: Adaptado de Silva e Araújo (2010)

A introdução da matriz  $\mathbf{A}$  modificada no método de Silva e Araújo (2010) produz uma amplificação diferencial das estimativas de pequenas feições em grandes profundidades porque um sinal gravimétrico devido a pequenas feições do relevo em grandes profundidades é baixo e necessitará, portanto uma amplificação muito além daquela produzida pela própria inversão da matriz  $\mathbf{A}$  não modificada (CHAVEZ ; GARLAND, 1985). O método de Silva e Araújo (2010) obtém as estimativas das espessuras das fitas resolvendo o sistema linear (2.4) através do método de mínimos quadrados utilizando a matriz  $\mathbf{A}$  modificada.

O problema de estimar as espessuras das  $M$  fitas para delinear o relevo do embasamento suave a partir unicamente dos dados gravimétricos observados,  $\mathbf{g}^o$ , é um problema mal-posto no sentido de Hadamard (1902) por apresentar soluções instáveis e não únicas. No método de Silva e Araújo (2010) este problema é resolvido presumindo a informação geológica que o relevo do embasamento é suave. Assim, Silva e Araújo (2010) estabilizam a solução através da técnica do regularizador de Tikhonov de primeira ordem (TIKHONOV; ARSEININ, 1977) produzindo estimativas suaves do relevo do embasamento.

Esta técnica de regularização conhecida como suavidade global, impõe que a estimativa de cada parâmetro  $\hat{t}_i$  (espessura da  $i$ -ésima fita) esteja o mais próximo possível da estimativa do parâmetro  $\hat{t}_{i+1}$  (espessura da fita adjacente). Matematicamente, este problema consiste em minimizar o funcional

$$\tau(\mathbf{t}) = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \sqrt{\mu_s} \mathbf{R} \end{bmatrix} \mathbf{t} - \begin{bmatrix} \mathbf{g}^o \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\|_2, \quad (2.9)$$

em que  $\| \cdot \|_2$  é a norma  $L_2$ ,  $\mathbf{0}$  é o vetor nulo  $(M - 1)$  – dimensional,  $\mathbf{R}$  é a matriz de dimensão  $(M - 1) \times M$  de primeiras derivadas discretas cujas linhas contêm apenas dois elementos não nulos iguais a 1 e  $-1$ , localizados nas colunas correspondentes a parâmetros adjacentes e  $\mu_s$  é um escalar não negativo, conhecido como parâmetro de regularização que controla o quão estável e suave é a solução. Minimizando o funcional dado na equação (2.9) obtemos o vetor-solução

$$\hat{\mathbf{t}} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B} + \mu_s \mathbf{R}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{g}^o. \quad (2.10)$$

A seguir, o método de Silva e Araújo (2010) obtém o vetor  $\hat{\mathbf{g}}$  contendo as observações ajustadas computadas nas mesmas coordenadas horizontais das observações  $\mathbf{g}^o$ , através do funcional não linear (V. Apêndice A) que relaciona o ajuste das observações com as espessuras dos prismas. Neste estágio, as espessuras dos prismas são aproximadas pelas espessuras  $\hat{t}$  das fitas. O ajuste assim computado não explica o conjunto de dados gravimétricos  $\mathbf{g}^o$  dentro da precisão experimental (linha vermelha na Figura 2.5a), sendo necessário aplicar uma correção que no método de Silva e Araújo (2010) é definida por:

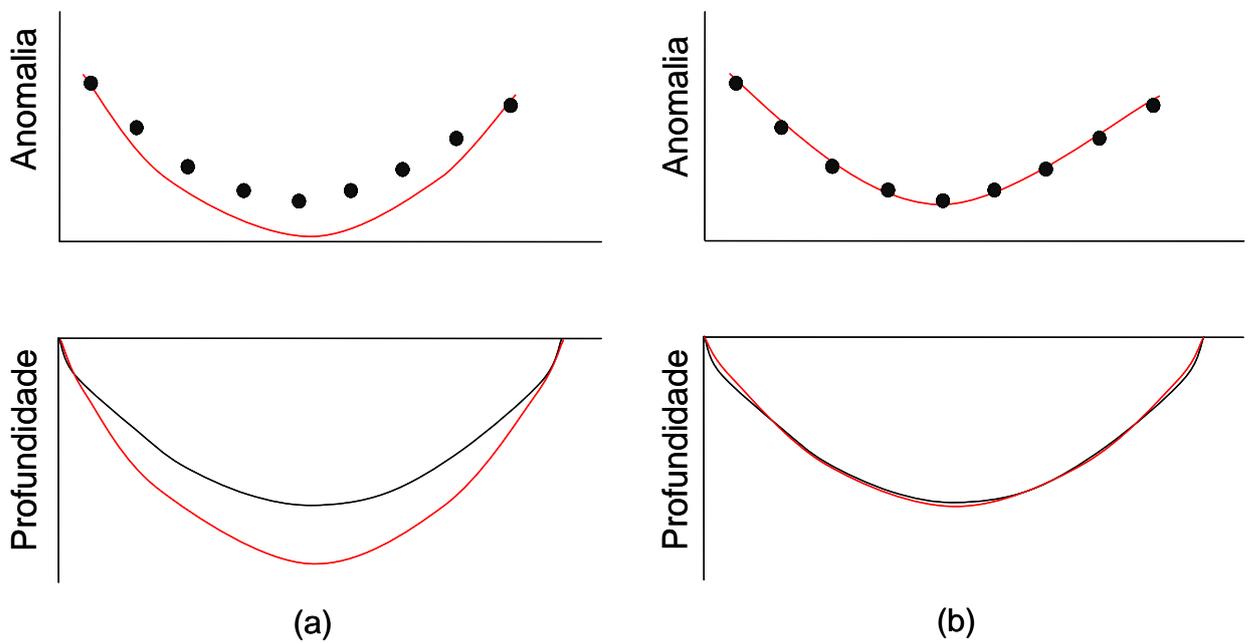
$$f = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{g}_i g_i^o}{\sum_{i=1}^N (\hat{g}_i)^2}, \quad (2.11)$$

em que  $\hat{g}_i$  é o  $i$ -ésimo elemento do vetor  $\hat{\mathbf{g}}$  definido na equação (A.1) utilizando as estimativas do vetor  $\hat{\mathbf{t}}$ . As estimativas finais são dadas pelo vetor-solução

$$\tilde{\mathbf{t}} = f \hat{\mathbf{t}}. \quad (2.12)$$

O vetor  $\tilde{\mathbf{t}}$  é então utilizado para produzir o vetor de ajuste,  $\hat{\mathbf{g}}$ , através do funcional não linear (V. Apêndice A), que, em geral, será aceitável dentro da precisão experimental (linha vermelha na Figura 2.5b).

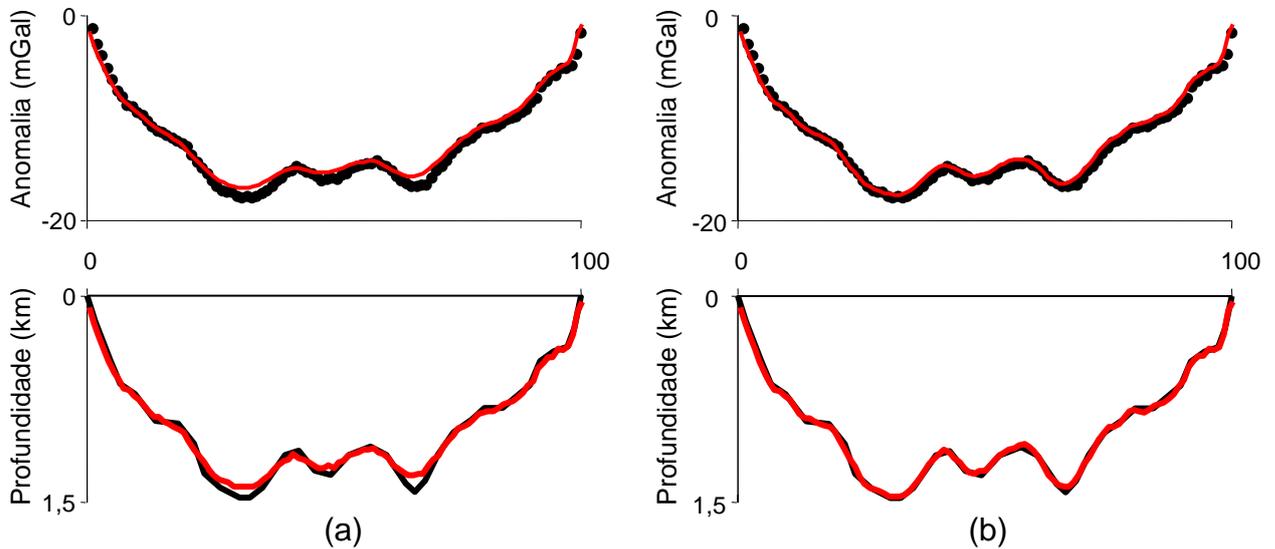
Figura 2.5 – Ilustração esquemática dos dados gravimétricos (pontos pretos) e do relevo do embasamento (linha preta). (a) Representação esquemática da solução  $\hat{\mathbf{t}}$  para o relevo do embasamento sem correção (linha vermelha) e do ajuste (linha vermelha) dos dados gravimétricos. (b) Representação esquemática da solução  $\tilde{\mathbf{t}}$  para o relevo do embasamento com correção do método de Silva e Araújo (2010) (linha contínua vermelha) produzindo um ajuste aceitável (linha vermelha) dos dados gravimétricos.



Fonte: Do autor

O método de Silva e Araújo (2010) estende assim, o método de Chavez e Garland (1985) para o delineamento do relevo do embasamento de bacias sedimentares de profundidades superiores a 1,5 km como ilustra as Figuras 2.6a e 2.6b.

Figura 2.6 – Ilustração dos dados gravimétricos gerados (pontos pretos) pela bacia sedimentar simulada cujo relevo do embasamento (linhas pretas) apresenta profundidade máxima de 1,5 km. Ajustes (linhas vermelhas) e delineamentos do relevo do embasamento (linhas vermelhas) utilizando os métodos de Chavez e Garland (1985) e de Silva e Araújo (2010), Figuras 2.6a e 2.6b, respectivamente.



Fonte: Do autor

## 2.2 Método Proposto

Neste trabalho modificamos o método de Silva e Araújo (2010) para delinear o relevo do embasamento descontínuo. Para produzir soluções estáveis e únicas incorporamos informação geológica a priori sobre as características da superfície do relevo do embasamento através da técnica de regularização da Variação Total (VT) (RUDIN; OSHER; FATEMI, 1992). A Variação Total de um vetor  $\mathbf{t}$  é expressa por (ASTER; BORCHERS; THURBER, 2012):

$$\Phi_{VT} = \|\mathbf{Rt}\|_1, \quad (2.13)$$

em que  $\|\cdot\|_1$  é a norma  $L_1$  e  $\mathbf{R}$  é a matriz de dimensão  $(M - 1) \times M$  descrita acima na seção 2.1.2.

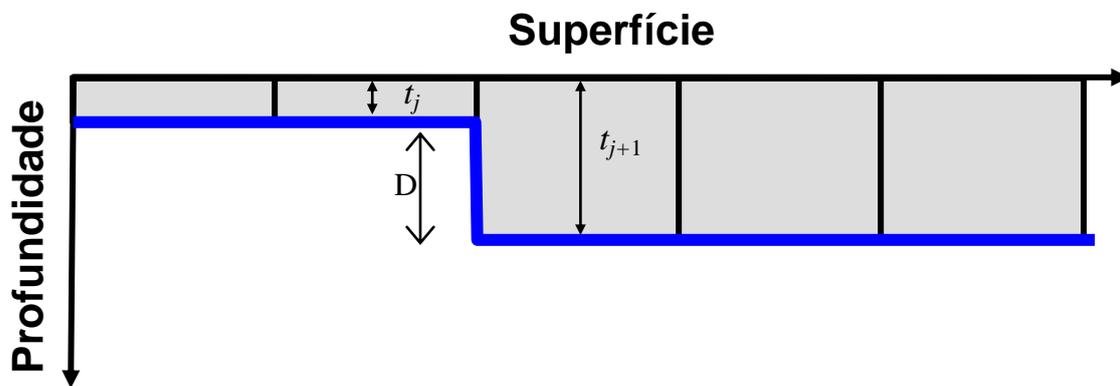
Quando empregada para estimar relevos de embasamentos de bacias sedimentares,  $\Phi_{VT}$  permite obter estimativas muito diferentes de espessuras adjacentes  $t_j$  e  $t_{j+1}$ , e o consequente delineamento de possíveis discontinuidades no relevo do embasamento (D na

Figura 2.7), computando as estimativas, dos elementos  $t_j$  do vetor  $\mathbf{t}$  que minimiza o funcional

$$\tau(\mathbf{t}) = \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mu \mathbf{R} \end{bmatrix} \mathbf{t} - \begin{bmatrix} \mathbf{g}^o \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\|_1, \quad (2.14)$$

em que  $\mathbf{0}$  é o vetor nulo  $(M - 1)$  – dimensional e  $\mu$  é um escalar não negativo que controla ao mesmo tempo o quão estável e o quão abrupta é a solução  $\hat{\mathbf{t}}$ .

Figura 2.7 – Relevo do embasamento descontínuo (linha azul) com desnível  $D$  e sua aproximação através das espessuras  $t_j$  e  $t_{j+1}$  do modelo interpretativo de fitas.



Fonte: Do autor

O problema de otimização definido na equação (2.14) equivale a obter a solução do seguinte sistema linear na norma  $L_1$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mu \mathbf{R} \end{bmatrix} \mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^o \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

através do algoritmo de Barrodale e Roberts (1973).

O método proposto modifica o método de Silva e Araújo (2010) (seção 2.1.2) substituindo o funcional  $\tau(\mathbf{t})$  da equação 2.9 (formulado na norma  $L_2$ ) pelo funcional da equação 2.14 (formulado na norma  $L_1$ ) para obter o vetor-solução  $\hat{\mathbf{t}}$ . Similarmente ao método de Silva e Araújo (2010) o ajuste definido pelo vetor  $\hat{\mathbf{g}}$  (computado utilizando a equação A.1)

produzido pela solução  $\hat{\mathbf{t}}$ , não ajusta o conjunto de dados gravimétricos  $\mathbf{g}^o$  dentro da precisão experimental (Figura 2.5a). No entanto, diferentemente de Silva e Araújo (2010), as estimativas finais do relevo,  $\tilde{t}_j$ , são obtidas através da expressão

$$\tilde{t}_j = \hat{t}_j + \frac{g_j^o - \hat{g}_j}{2\pi\gamma\Delta\rho}, \quad (2.16)$$

ao invés da expressão 2.12.

O vetor  $M$ -dimensional de espessuras  $\tilde{\mathbf{t}}$ , cujo  $j$ -ésimo elemento, definido pelas estimativas finais  $\tilde{t}_j$ , produz um ajuste  $\hat{\mathbf{g}}$  (computado através da equação A.1) aceitável dentro da precisão instrumental nos dados gravimétricos.

A correção expressa na equação (2.16) corresponde à espessura de uma placa Bouguer ajustada ao resíduo entre a anomalia gravimétrica observada e calculada. A correção (2.16) só pode ser aplicada se os vetores  $\mathbf{g}^o$ ,  $\hat{\mathbf{g}}$  e  $\tilde{\mathbf{t}}$  apresentam as mesmas dimensões, ou seja,  $N = M$ , e os centros de cada fita do modelo interpretativo se situem diretamente abaixo de cada observação. Entretanto, as dimensões dos vetores  $\mathbf{g}^o$  e  $\tilde{\mathbf{t}}$  geralmente são distintas. Se isto ocorrer obtemos um vetor  $M$ -dimensional de observações gravimétricas  $\tilde{\mathbf{g}}^o$  interpoladas linearmente entre os elementos do vetor  $\mathbf{g}^o$ . Logo, para obter as estimativas  $\tilde{\mathbf{t}}$  substituímos os elementos do vetor de observações  $\mathbf{g}^o$  pelos elementos do vetor de observações  $\tilde{\mathbf{g}}^o$  nas expressões (2.15) e (2.16).

### 3 APLICAÇÃO EM DADOS SINTÉTICOS

Neste capítulo verificamos o desempenho do método proposto aplicando-o a anomalias gravimétricas geradas por bacias sedimentares simuladas apresentando contraste de densidade com o embasamento constante e conhecido. Os ambientes geológicos simulados neste trabalho foram: (i) graben isolado com embasamento apresentando descontinuidades abruptas locais, (ii) bacia marginal com falhas escalonadas no relevo do embasamento e (iii) canal apresentando descontinuidades abruptas locais na superfície do leito entre as rochas sedimentares e o ar. Em todos os testes, as soluções obtidas pelo método proposto são comparadas com as correspondentes soluções obtidas pela metodologia de inversão não linear com VT utilizando o algoritmo LSQR (PAIGE; SAUNDERS, 1982). Detalhes do método de inversão não linear com VT utilizando o algoritmo LSQR são descritos no Apêndice A. Para todos os testes desta e das próximas seções utilizamos um notebook DELL de processador Core i5 2,25GHZ com memória DDR3 de 6GB.

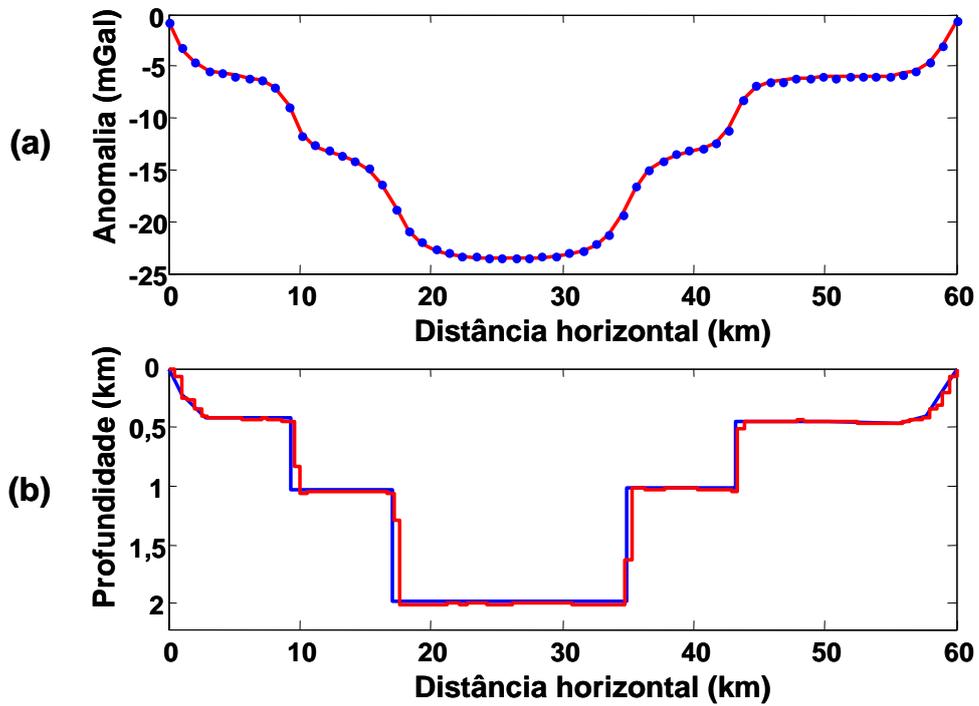
#### 3.1 Graben isolado

A Figura 3.1a mostra em pontos azuis as observações gravimétricas geradas por uma bacia sedimentar simulada, 2D, cujo relevo do embasamento (linha azul na Figura 3.1b) apresenta descontinuidades abruptas locais, simulando o ambiente geológico de um graben. O contraste de densidade entre o pacote sedimentar e o embasamento é de  $\Delta\rho = -0,3 \text{ g/cm}^3$ . As observações gravimétricas teóricas foram contaminadas com ruído pseudo-aleatório Gaussiano com média nula e desvio padrão de 0,1 mGal. O modelo interpretativo é constituído por 120 fitas regularmente espaçadas ao longo do perfil, que apresenta extensão horizontal total de 60 km.

A Figura 3.1b mostra (linha vermelha) o resultado da inversão da anomalia da Figura 3.1a, utilizando o método proposto com  $\mu = 11$ . A anomalia ajustada é mostrada na Figura 3.1a em linha vermelha. Para comparação, a solução obtida pelo método não linear é apresentada em linha vermelha na Figura 3.2b. A Figura 3.2a, mostra a anomalia ajustada (linha vermelha) produzida pelo método não linear.

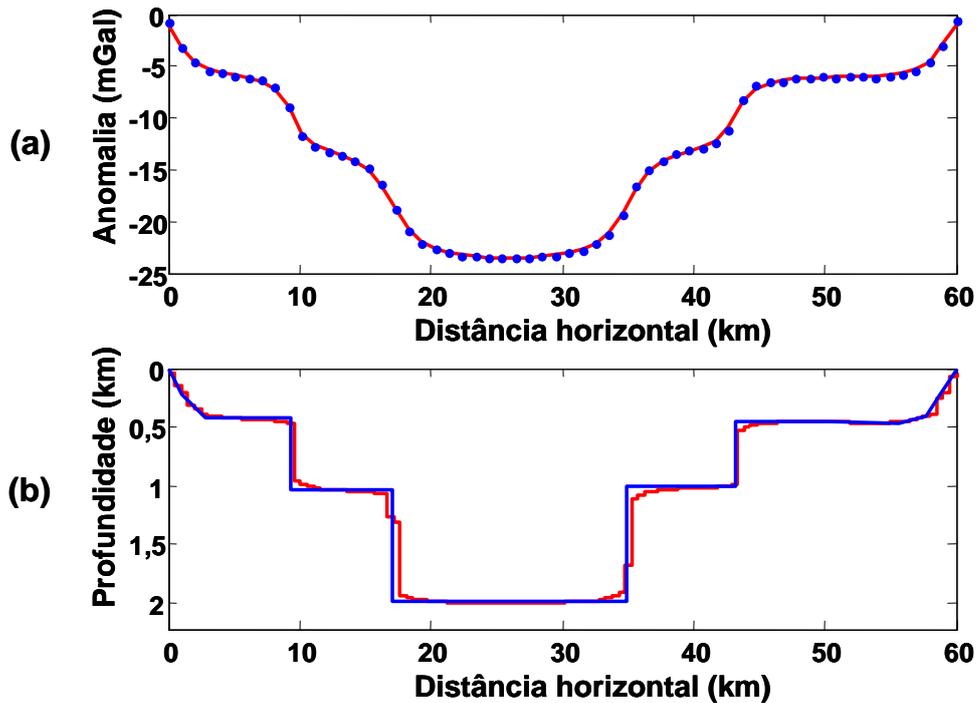
A solução produzida pelo método proposto apresentou excelente delineamento do relevo do embasamento e de suas descontinuidades com resultado equivalente ao obtido com o método não linear, mas foi obtido em um tempo computacional aproximadamente 7 vezes menor que aquele requerido pelo método não linear.

Figura 3.1 – Graben isolado: (a) anomalia Bouguer observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha). (b) Solução produzida através do método proposto (linha vermelha) e relevo do embasamento simulado (linha azul).



Fonte: Do autor

Figura 3.2 – Graben isolado: (a) anomalia Bouguer observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha). (b) Solução produzida através do método não linear (linha vermelha) e relevo do embasamento simulado (linha azul).



Fonte: Do autor

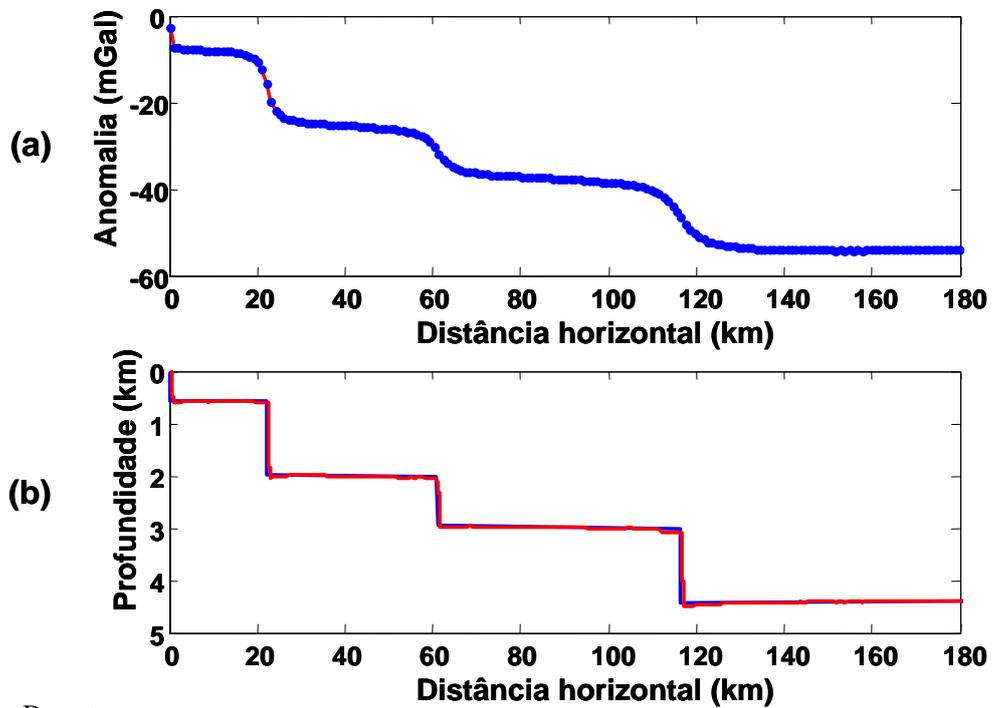
### 3.2 Bacia sedimentar de margem passiva

A Figura 3.3a mostra, em pontos azuis, as observações gravimétricas geradas por uma bacia de margem passiva simulada, 2D, cujo relevo do embasamento é em geral suave mas apresenta localmente descontinuidades abruptas (linha vermelha, Figura 3.3 b). O contraste de densidade entre o pacote sedimentar e o embasamento é de  $\Delta\rho = -0,3 \text{ g/cm}^3$ . Os dados gravimétricos teóricos foram contaminados com ruído pseudo-aleatório Gaussiano com média nula e desvio padrão de 0,1 mGal. O modelo interpretativo do método proposto possui 360 fitas regularmente espaçadas ao longo do perfil que apresenta 180 km de extensão horizontal total.

A solução obtida pelo método proposto, utilizando o parâmetro  $\mu = 5$ , apresentou um excelente delineamento do relevo do embasamento (linha vermelha na Figura 3.3b). A anomalia ajustada é mostrada na Figura 3.3a em linha vermelha. Apresentamos na Figura 3.4b (linha vermelha) a solução utilizando o método não linear e a anomalia ajustada é apresentada na Figura 3.4a em linha vermelha.

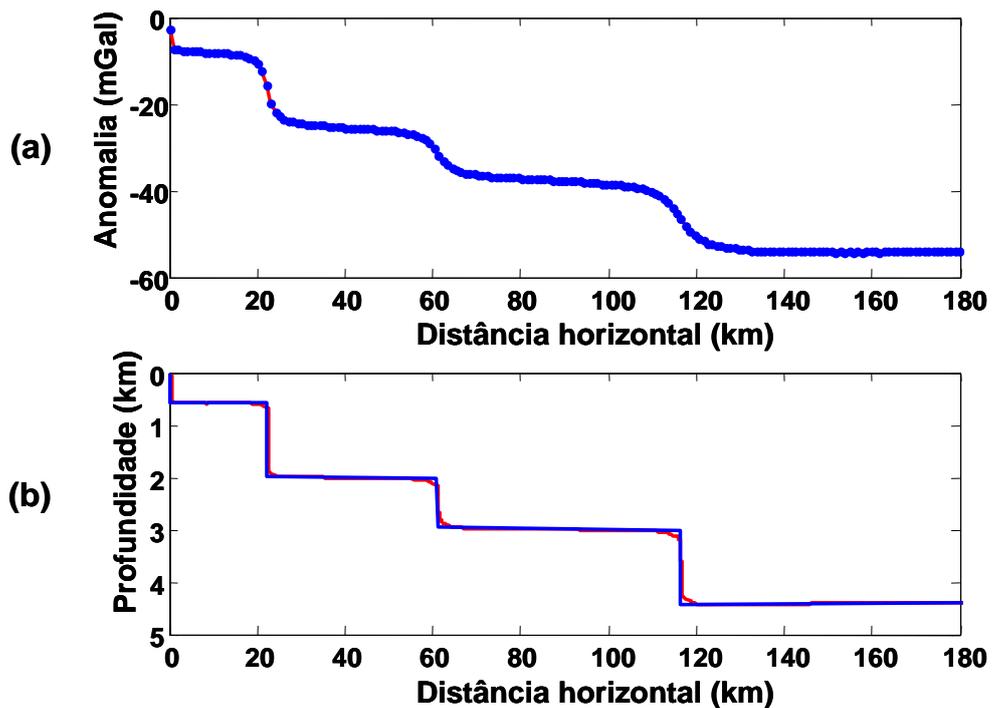
Ambas as soluções, a produzida pelo método proposto e a produzida pelo método não linear, apresentaram excelentes delineamentos do relevo do embasamento, porém o método não linear produziu a solução em um tempo computacional 21,98 vezes maior que o do método proposto.

Figura 3.3 – Bacia sedimentar de margem passiva: (a) anomalia Bouguer observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha). (b) Solução produzida através do método proposto (linha vermelha) e relevo do embasamento simulado (linha azul).



Fonte: Do autor

Figura 3.4 – Bacia sedimentar de margem passiva: (a) anomalia Bouguer observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha). (b) Solução produzida através do método não linear (linha vermelha) e relevo do embasamento simulado (linha azul).



Fonte: Do autor

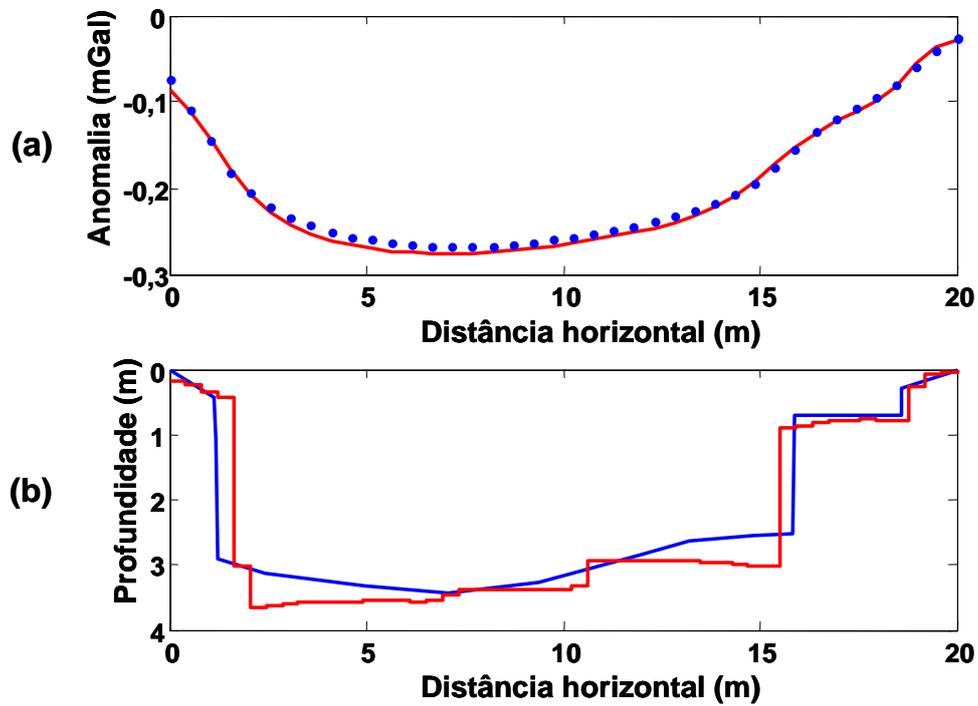
### 3.3 Canal

A Figura 3.5a mostra em pontos azuis as observações gravimétricas geradas por um canal simulado. O substrato do canal é constituído por rochas sedimentares. A topografia do canal é suave apresentando variações verticais locais (Figura 3.5a em linha azul). O contraste de densidade entre o ar e as rochas sedimentares é de  $\Delta\rho = -2,3 \text{ g/cm}^3$ . As observações gravimétricas teóricas foram obtidas sobre um local plano horizontal, como por exemplo uma ponte, localizada acima do canal. Contaminamos as observações teóricas com ruído pseudo-aleatório Gaussiano com média nula e desvio padrão de 0,001 mGal. O modelo interpretativo consistiu de 60 fitas regularmente espaçadas ao longo do perfil que apresenta extensão horizontal de 20 m.

A solução obtida pelo método proposto com  $\mu = 0,05$  é mostrada em linha vermelha na Figura 3.5b. Na Figura 3.5a (linha vermelha) apresentamos a anomalia ajustada. A Figura 3.6a (linha vermelha) mostra a anomalia ajustada utilizando o método não linear. Apresentamos a solução utilizando o método não linear na Figura 3.6b (linha vermelha).

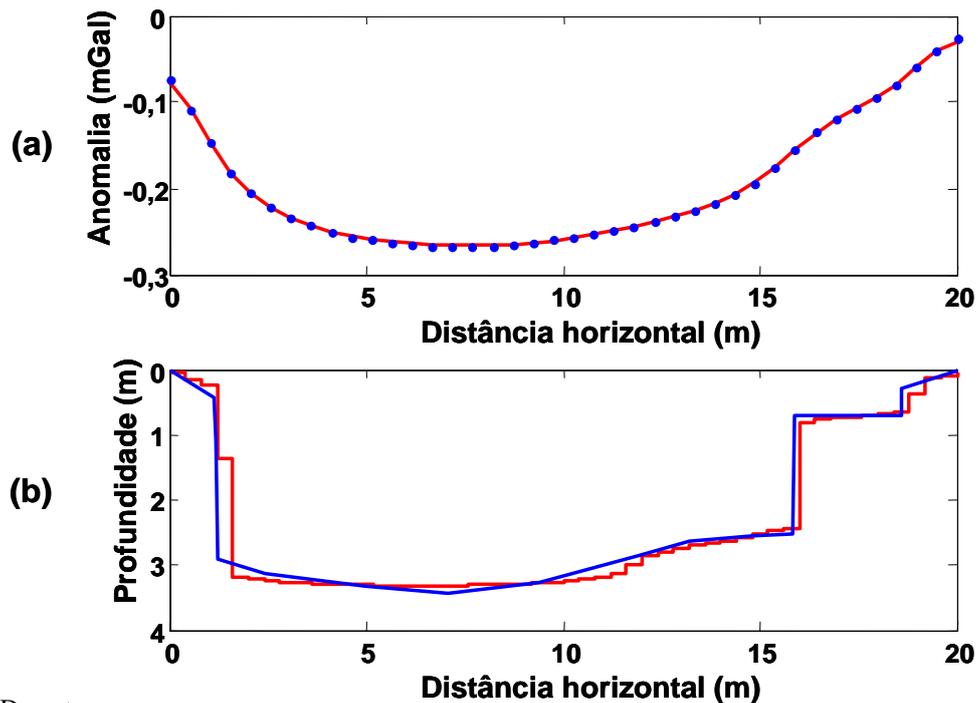
O método proposto e o método não linear produziram soluções próximas à fonte gravimétrica simulada (Figura 3.5a) mas o método proposto obteve a solução com um tempo computacional aproximadamente 21,8 vezes menor que a solução obtida pelo método não linear.

Figura 3.5 – Canal: (a) anomalia Bouguer observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha). (b) Solução produzida através do método proposto (linha vermelha) e relevo do embasamento simulado (linha azul).



Fonte: Do autor

Figura 3.6 – Canal: (a) anomalia Bouguer observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha). (b) Solução produzida através do método não linear (linha vermelha) e relevo do embasamento simulado (linha azul).

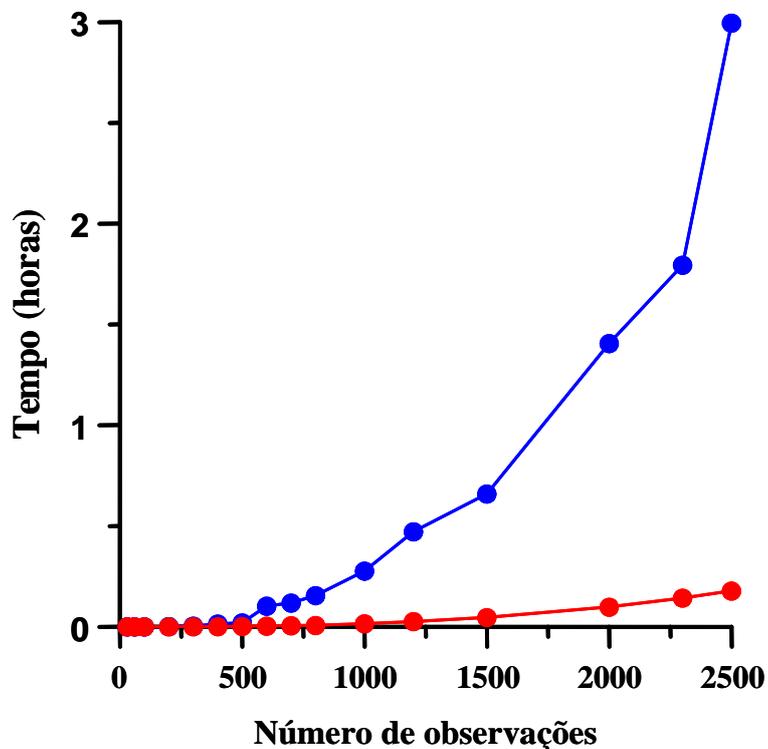


Fonte: Do autor

### 3.4 Eficiência do método

A eficiência do método proposto foi avaliada comparando-se o tempo computacional exigido pelo método proposto com o tempo exigido pelo método não linear para soluções em que as estimativas do relevo e os ajustes das observações são semelhantes aos obtidos pelo método não linear. Ambos os métodos foram aplicados a conjuntos de dados com diferentes números de observações, por simplicidade presumidos iguais ao número de parâmetros. O resultado é apresentado na Figura 3.7. Observamos que o tempo exigido pela metodologia proposta (pontos vermelhos) é sempre menor que aquele exigido pela metodologia não linear (pontos azuis). Nota-se que a diferença entre os tempos exigidos pelo método proposto e pelo método não linear cresce com o aumento do número de observações. Por exemplo, para 2500 observações, a metodologia não linear gerou a solução em aproximadamente 3 horas, enquanto que o método proposto exigiu apenas 10 minutos para obter a solução, ou seja, o método proposto reduziu o tempo para a obtenção dos resultados em 1700 %.

Figura 3.7 – Tempo computacional exigido pelo método proposto (pontos vermelhos) e pelo método não linear (pontos azuis) versus o número de observações.



## 4 APLICAÇÃO EM DADOS REAIS

Nesta seção apresentamos a aplicação do método proposto e do método não linear (V. apêndice A) em dois conjuntos de dados gravimétricos reais referentes à porção norte do Steptoe Valley e à ponte do POEMA.

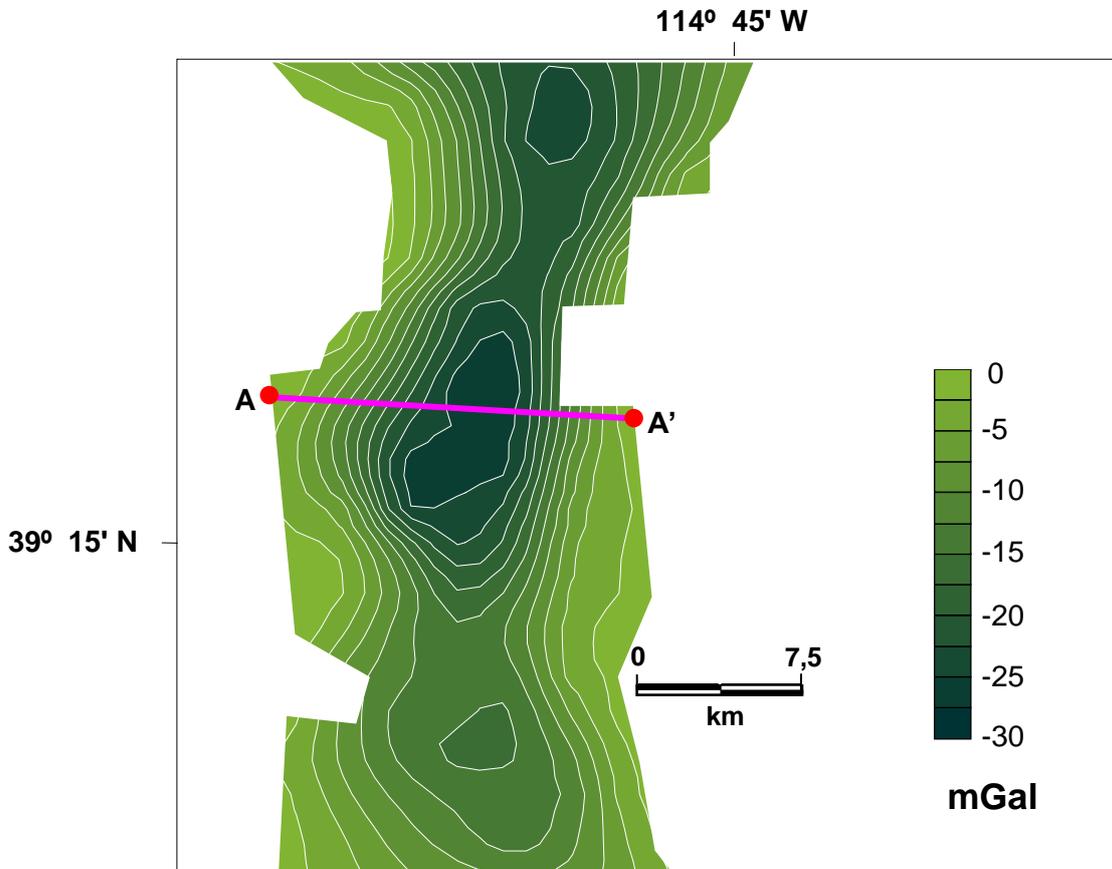
### 4.1 Steptoe Valley

#### 4.1.1 Informações geológicas

O Steptoe Valley situa-se na província tectônica *Basin and Range*, localizado no estado de Nevada nos Estados Unidos. Esta bacia de aproximadamente 160 km de extensão no sentido Norte-Sul foi formada por processos tectônicos nos quais grandes forças distensoras causaram uma série de abatimentos e soerguimentos levando à criação de várias cadeias lineares de montanhas e vales alongados intercalados. A importância econômica desta área é devida à grande variedade de depósitos minerais produzidas ao longo de sua história geológica, como ouro, prata, molibdênio, tungstênio, bário, berílio e magnésio, entre outros.

Carlson e Mabey (1963) ressaltam que as anomalias gravimétricas produzidas no Steptoe Valley são devidas a falhas de alto ângulo com amplos deslocamentos verticais, diretamente relacionadas ao processo de estiramento crustal sofrido por esta região. A Figura 4.1 apresenta a localização do perfil AA' e o mapa da anomalia residual referente à porção norte do Steptoe Valley, corrigido para o efeito de fontes profundas (BARBOSA; SILVA; MEDEIROS, 1999).

Figura 4.1 – Steptoe Valley. Mapa gravimétrico residual e localização do perfil gravimétrico (AA') utilizado.



Fonte: Barbosa, Silva e Medeiros (1999).

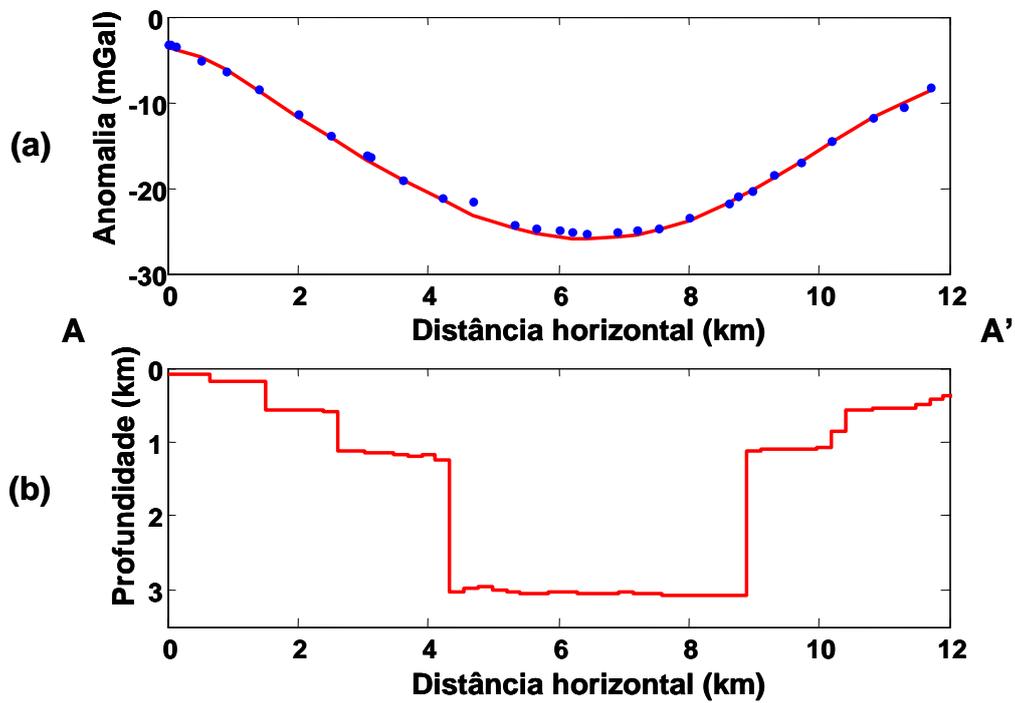
#### 4.1.2 Resultados

O modelo interpretativo utilizado contém 60 fitas regularmente espaçadas ao longo do perfil AA', o qual apresenta extensão horizontal de 12 km. Utilizamos um contraste de densidade constante de  $\Delta\rho = -0,3 \text{ g/cm}^3$ , com base na descrição geológica de Carlson e Mabey (1963).

O resultado da inversão deste conjunto de dados com o método proposto é apresentado na Figura 4.2b com  $\mu = 5$ . Nas Figuras 4.2a e 4.3a (linhas vermelhas) apresentamos as anomalias ajustadas pelo método proposto e pelo método não linear, respectivamente. A solução produzida aplicando o método não linear (Figura 4.3b) mostra resultado muito próximo daquele obtido com o método proposto, apresentando aproximadamente o mesmo número de discontinuidades e patamares.

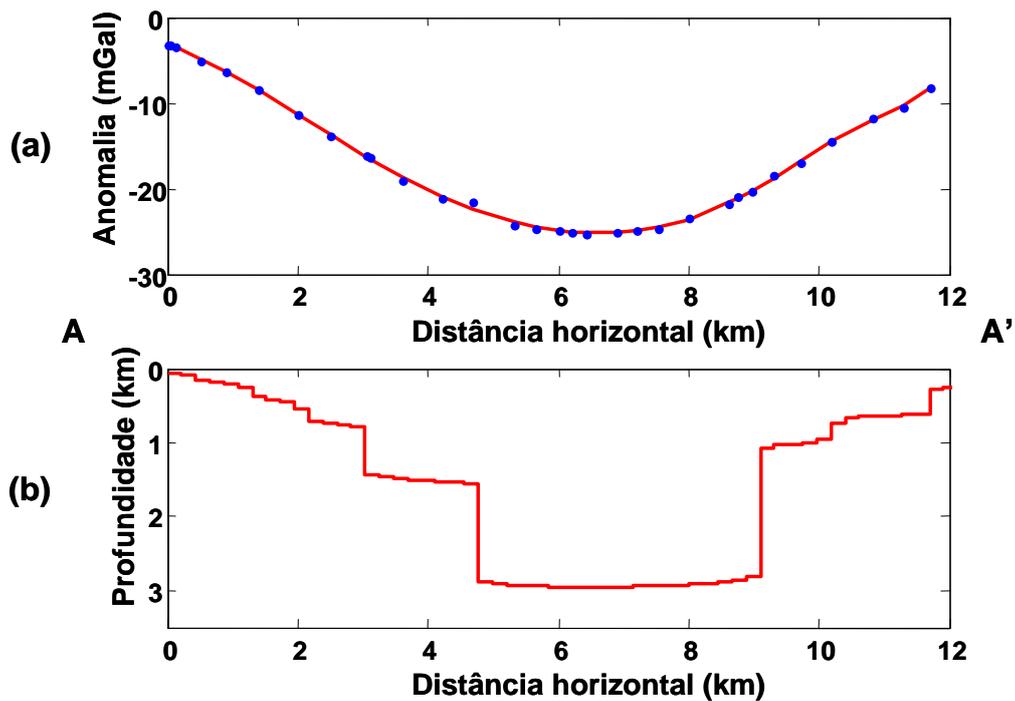
A profundidade máxima estimada por ambos os métodos é aproximadamente a mesma, 3 km para a metodologia proposta e 2,9 km para o método não linear. Os relevos dos embasamentos estimados (Figuras 4.2b e 4.3b) apresentam uma extensão horizontal equivalente entre o intervalo de 5 km a 8,5 km, para a parte central da bacia. Ambos os métodos apresentam aproximadamente os mesmos valores para o rejeito das falhas. O método proposto exigiu um tempo total de processamento 56 vezes menor que o tempo exigido pelo método não linear.

Figura 4.2 – Perfil AA' do Steptoe Valley: (a) anomalia Bouguer observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha). (b) Relevo do embasamento estimado através do método proposto (linha vermelha).



Fonte: Do autor

Figura 4.3 – Perfil AA' do Steptoe Valley: (a) anomalia Bouguer observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha). (b) Relevo do embasamento estimado através do método não linear (linha vermelha).



Fonte: Do autor

## 4.2 Ponte do Poema

### 4.2.1 Informações geológicas

A ponte do Poema (Figura 4.4) está localizada no campus Belém da Universidade Federal do Pará, Brasil (LIMA, 2009; SILVA; OLIVEIRA; BARBOSA, 2010). A ponte situa-se próximo à desembocadura do rio Guamá e no período de maré baixa, seu leito fica quase seco, permitindo o conhecimento preciso do relevo topográfico. As medidas gravimétricas foram tomadas sobre esta ponte.

A anomalia observada é causada pelo contraste de densidade entre o ar e as rochas sedimentares do aterro constituída principalmente por argila, areia e seixos compactados, que constituem o leito do canal, assim como as estacas de concreto e vigas de reforço em cada extremidade (A e B na Figura 4.4). Observamos também na Figura 4.4 os gradientes topográficos  $g_1$  e  $g_2$ , linhas brancas, de cada lado da ponte. Notamos que do lado oeste a topografia é mais achatada e apresenta uma descontinuidade maior do que o lado leste da topografia. O relevo a ser estimado é o conjunto formado pela topografia do aterro abaixo do vão e das estruturas de concreto A e B.

Figura 4.4 – Foto da topografia abaixo da Ponte do POEMA. Extremidade A no lado oeste com maior descontinuidade e gradiente topográfico,  $g_1$ . Extremidade B no lado leste com menor descontinuidade e gradiente topográfico,  $g_2$ .



Fonte: Silva; Oliveira e Barbosa (2010)

#### 4.2.2 Resultados

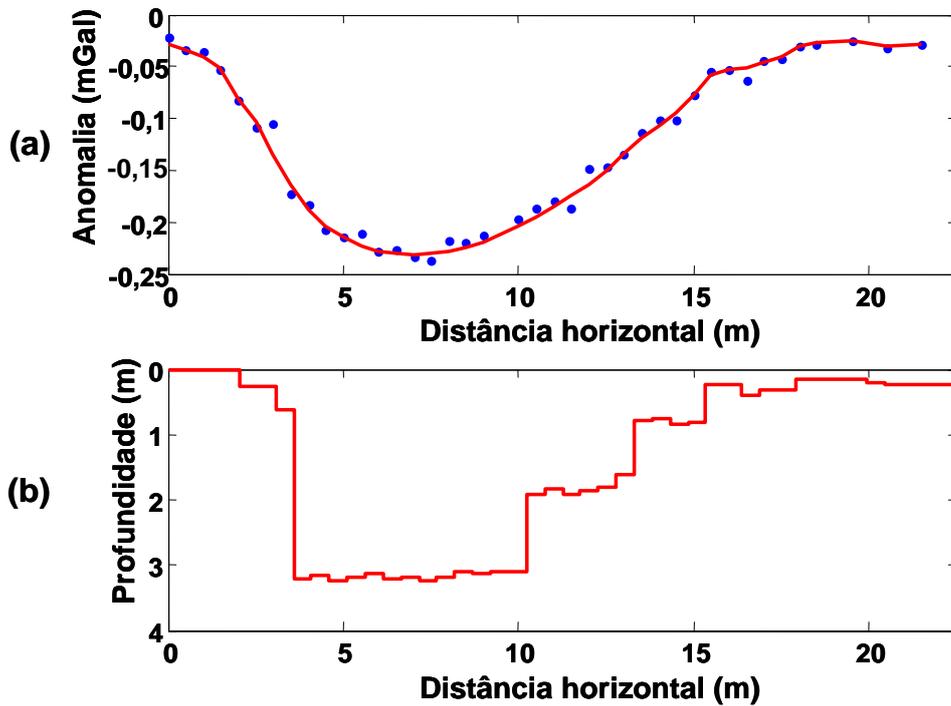
O modelo interpretativo utilizado consistiu de 45 fitas regularmente espaçadas ao longo de uma extensão horizontal de 22,5 m. Utilizamos um contraste de densidade de  $\Delta\rho = -2,3 \text{ g/cm}^3$ , referidos à densidade do aterro situado de ambos os lados do vão (SILVA; OLIVEIRA; BARBOSA, 2010).

O resultado obtido com o método proposto para  $\mu = 0,11$  é exibido na Figura 4.5 b e a anomalia ajustada é apresentada na Figura 4.5a em linha vermelha. A solução do método não linear é apresentada na Figura 4.6b produzindo um ajuste aceitável nos dados gravimétricos (linha vermelha, na Figura 4.6a).

O método proposto e o método não linear obtiveram as mesmas estimativas da profundidade máxima de 3,16 m, entretanto, segundo Silva, Oliveira e Barbosa (2010), a profundidade máxima registrada do relevo é de 3,88 m. Os resultados das Figuras 4.5 b e 4.6 b apresentam um delineamento do relevo plano no vão (gradiente topográfico  $g_1$ ) compreendida entre as posições espaciais 4 m e 9 m. O método proposto exigiu um tempo de processamento sete vezes menor que o tempo exigido pelo método não linear.

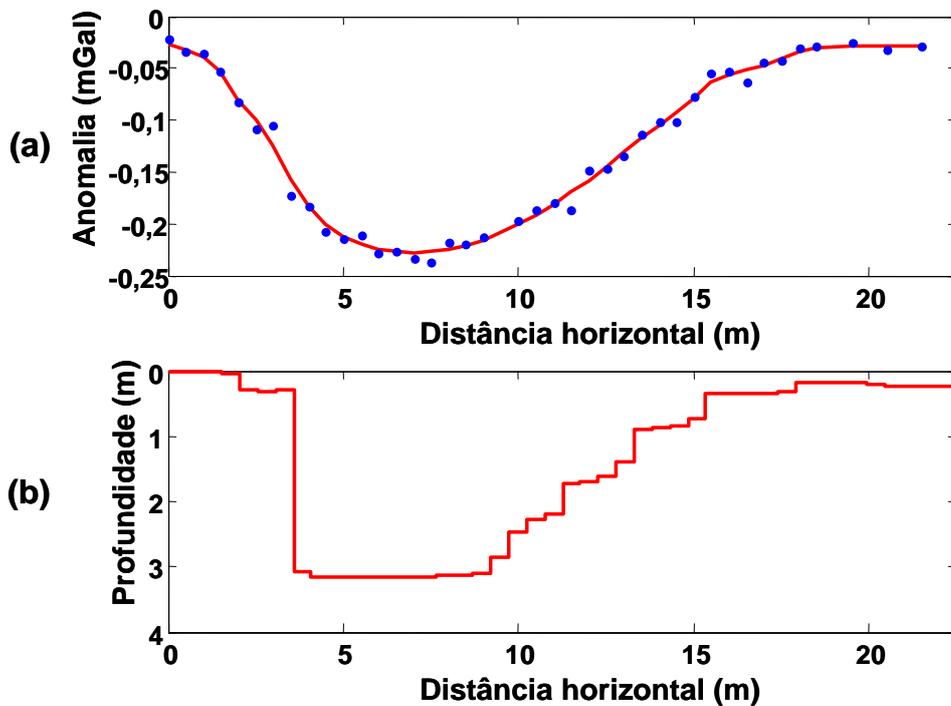
Segundo Silva, Oliveira e Barbosa (2010) a diferença entre as estimativas e a profundidade máxima mensurada é principalmente devida às medidas de gravidade que sofrem influência da distribuição de massas das estacas de concreto e vigas de reforço, ao passo que, a topografia do aterro é constituída exclusivamente de rochas sedimentares constituídas de argila, de areia e de seixos compactados.

Figura 4.5 – Ponte do POEMA: (a) anomalia Bouguer observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha). (b) Relevo do embasamento estimado através do método proposto (linha vermelha).



Fonte: Do autor

Figura 4.6 – Ponte do POEMA: (a) anomalia Bouguer observada (pontos azuis) e ajustada (linha vermelha). (b) Relevo do embasamento estimado através do método não linear (linha vermelha).



Fonte: Do autor

## 5 CONCLUSÕES

Apresentamos um novo método de inversão que reduz o tempo de processamento, para delinear o relevo de embasamentos abruptos de bacias sedimentares, 2D, através das estimativas das espessuras do modelo interpretativo de fitas 2D horizontais. O método proposto supõe que o contraste de densidade entre o embasamento e o pacote sedimentar é constante e conhecido. O método estabiliza a solução utilizando o funcional da variação total (VT). As estimativas do relevo do embasamento são obtidas resolvendo um sistema de equações lineares na norma  $L_1$ , produzindo soluções das estimativas das espessuras das fitas. As soluções finais são produzidas empregando uma correção definida pela estimativa da espessura de uma placa Bouguer que explica a diferença entre a  $i$ -ésima observação e o  $i$ -ésimo ajuste gravimétrico.

Neste trabalho comparamos as soluções das interpretações do método proposto com as soluções obtidas pelo método não linear. Testes em dados sintéticos e dados reais mostraram soluções equivalentes com aquelas produzidas pelo método de inversão não linear, no entanto o método proposto exigiu sempre menor tempo computacional. A razão entre os tempos computacionais exigidos pelo método não linear e o método proposto cresce à medida que aumenta o número de observações e de parâmetros, como por exemplo, para o conjunto de 60 observações e 60 parâmetros a razão é 4, enquanto que para 2500 observações e 2500 parâmetros a razão é 16,8.

A metodologia proposta foi desenvolvida para aplicação em perfis de dados gravimétricos, dados 1D, entretanto o método pode ser estendido para aplicação a dados 2D. O método pode ser formulado para obter soluções 3D de ambientes sedimentares com contraste de densidade variando monotonicamente com a profundidade segundo uma lei matemática. Além disso, o método pode ser aplicado a dados gravimétricos reais de bacias marginais ou bacias interiores do tipo “strike-slip” que apresentam relevos de embasamento abruptos.

## REFERÊNCIAS

- ACAR, R.; VOGEL, C. R. Analysis of total variation penalty methods. *Inverse Problems*, v. 10, p. 217–1229, 1994
- ASTER, R.; BORCHERS, B.; THURBER, C. *Parameter estimation and inverse problems*. Elsevier, 2012. 376p.
- BARBOSA, V. C. F.; MENEZES, P. T. L.; SILVA, J. B. C. Gravity data as a tool for detecting faults: In-depth enhancement of subtle Almada's basement faults, Brazil. *Geophysics*, n. 72, n. 3, p. B59-B68, 2007.
- BARBOSA, V. C. F.; SILVA, J. B. C.; MEDEIROS, W. E. Gravity inversion of a discontinuous relief stabilized by weighted smoothness constraints on depth. *Geophysics*, n. 64, p. 1429-1438, 1999.
- BARBOSA, V. C. F.; SILVA, J. B. C.; MEDEIROS, W. E. Gravity inversion of basement relief using approximate quality constraints on depths. *Geophysics*, v. 82, n. 6, p.1745-1757, 1997.
- BARRODALE, I.; ROBERTS, F. D. K. An improved algorithm for discrete  $L_1$  linear approximation. *Journal on Numerical Analysis*, v.10, n. 5, p. 839-848, 1973
- BERTETE-AGUIRRE, H.; CHERKAEV, E.; ORISTAGLIO, M. Non-smooth gravity problem with total variation penalization functional. *Geophys. J. Int.*, v. 149, p. 499-507, 2002.
- BOTT, M. H. P. The use of rapid digital computing methods for direct gravity interpretation of sedimentary basins. *Geophysics J. Roy. Astr. Soc.*, n. 3, p. 63-67, 1960.
- CARLSON, J. E.; MABEY, D. R. *Gravity and aeromagnetic map of the Ely area*, White Pine County. Nevada: U.S. Geological. Survey., mapa GP-392, escala 1: 250.000, 1963.
- CHAVEZ, R. E.; GARLAND, G. D. Linear inversion of gravity data expansion method. *Geophysics*, n. 50, p. 820-824, 1985.
- CORBATÓ, C. E. A least-squares procedure for gravity interpretation. *Geophysics*, n. 30, p. 228-233, 1965.
- EL-BATROUKH, S. I.; ZENTANI, A. S. Gravity interpretation of Raguba field, Sirte basin, Libya. *Geophysics*, n. 45, p. 1153-1163, 1980.
- GIMENEZ, M. E.; MARTINEZ, M. P.; JORDAN, T.; RUÍZ, F.; KLINGER, F. L. Gravity characterization of the La Rioja Valley Basin, Argentina. *Geophysics*, n. 74, p. B83-B94, 2009.
- HADAMARD, J. *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*. Bull Princeton Univ., v. 13, p. L-20. 1902.

KIENIEWICZ, P. M.; LUYENDYK, B. P. A gravity model of the basement structure in the Santa Maria Basin, California. *Geophysics*, n. 51, p. 1127-1140, 1986.

LIMA, W. A. *Inversão gravimétrica do relevo de bacias extencionais através da variação total*. 2009. 54f. Dissertação (Mestrado em Geofísica) – Instituto de Geociências, Universidade Federal do Pará, Belém, 2009.

LIMA, W. A. ; MARTINS, M. C.; SILVA, J. B. C.; BARBOSA, V. C. F. Total variation regularization for depth-to-basement estimate: Part 2 - Physicogeologic meaning and comparisons with previous inversion methods. *Geophysics*, v. 76, n. 1, p. I13-I20, 2011.

LITINSKY, V. A. Concept of effective density: Key to gravity determinations for sedimentary basins. *Geophysics*, v. 54, n. 11, p. 1474-1482, 1989.

MARQUARDT, D. W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal Of The Society For Industrial And Applied Mathematics*. v. 11, n. 2, p. 431-441.1963.

MARTINS, C. M.; LIMA, W. A.; BARBOSA, V. C. F.; SILVA, J. B. C. Total variation regularization for depth-to-basement estimate: Part 1 – mathematical details and applications. *Geophysics*, v. 76, n. 1, p. I1-I12, 2011.

PAIGE, C. C.; SAUNDERS, M. A. LSQR: An algorithm for sparse linear equations and sparse least squares, *ACM Trans. Math. Softw*, v. 8, n. 1, p 43-71, 1982.

RAMOS, L. C. *Procedimentos lineares de inversão gravimétrica para estimar o relevo 3D do embasamento de bacias sedimentares*. 2013. 40f. Dissertação (Mestrado em Geofísica) – Instituto de Geociências, Universidade Federal do Pará, Belém, 2013.

RAO, D. B.; PRAKASH, M. J.; BABU, N. R. 3D and 2½ D modelling of gravity anomalies with variable density contrast. *Geophysical Prospecting*, v. 38, n. 4, p. 411 – 422, 1990.

RUDIN, L. I.; OSHER, S.; FATEMI, E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms. *Physica D*, v. 60, p. 259-268, 1992.

SILVA, J. B. C; ARAÚJO, A. C. M. Inversão gravimétrica linear do relevo do embasamento de bacias sedimentares. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE GEOFÍSICA, 4, 2010, Brasília. *Resumos Expandidos*. Brasília: [SBGf], 2010. 1 CD-ROM.

SILVA, J. B. C; COSTA, D. C. L; BARBOSA, V. C. F. Gravity inversion of basement relief and estimation of density contrast variation with depth. *Geophysics*. v.71. n.5. p.151-158, 2006.

SILVA, J. B. C. ; OLIVEIRA, A. S. ; BARBOSA, V. C. F. Gravity inversion of 2D basement relief using entropic regularization: *Geophysics*, v. 75, p. I29-I35, 2010.

TALWANI, M.; WORZEL, J. C.; LANDISMAN, M. Rapid gravity calculations for two-dimensional bodies with application to the mendocino submarine fracture zone: *Journal of Geophysical Research*, n. 64, p. 49-59, 1959.

TANNER, J. G. An automated method of gravity interpretation. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, n.13, p. 339-347, 1967.

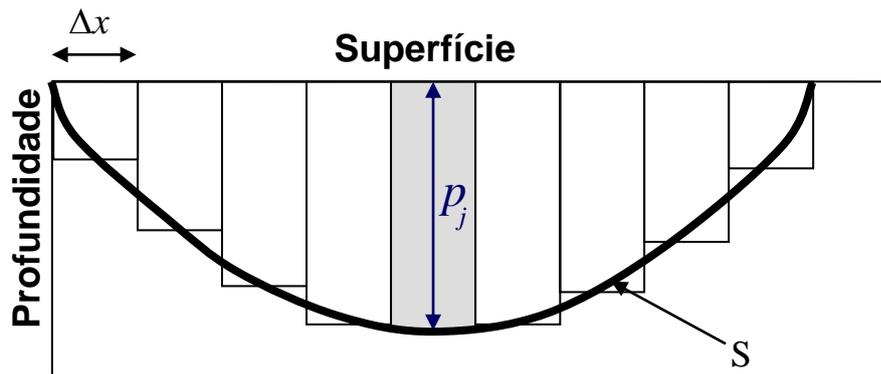
TIKHONOV, A. N.; ARSENIN, V. Y. *Solutions of ill-posed problems*. Washington: V.H. Winston & Sons, 1977. 258p.

## **APÊNDICE**

## APÊNDICE A: MÉTODO NÃO LINEAR

Seja o conjunto de dados gravimétricos  $\mathbf{g}^o$  definido na seção 2. Para delinear o relevo do embasamento  $S$  (Figura A.1) o método de inversão não linear utiliza um modelo interpretativo de um conjunto de  $M$  prismas 2D retangulares justapostos. Todos os prismas possuem os topos localizados na superfície terrestre, apresentam a mesma espessura horizontal  $\Delta x$  (Figura 2) e são infinitos na direção  $y$ . As espessuras  $p_j$  de cada prisma são os parâmetros a serem estimados (Figura A.1).

Figura A.1 – Representação do relevo do embasamento  $S$  e do modelo interpretativo consistindo de  $M$  prismas 2D retangulares justapostos, com espessura  $p_j$ .



Fonte: Do autor

Os parâmetros  $p_j$  estão relacionados com as observações gravimétricas através da relação não linear

$$\hat{\mathbf{g}} \equiv \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \Delta\rho, \mathbf{r}, \mathbf{p}) \equiv \{\hat{g}_i(x_i, \Delta\rho, \mathbf{r}, \mathbf{p})\} = \sum_{j=1}^M f(x_i, \Delta\rho, r_j, p_j), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (\text{A.1})$$

em que  $\mathbf{p}$  é o vetor  $M$ -dimensional de espessuras dos prismas,  $\mathbf{r}$  é o vetor  $M$ -dimensional das coordenadas horizontais dos centros dos prismas e  $f(x_i, \Delta\rho, r_j, p_j)$  é um funcional não linear (e.g. TALWANI; WORZEL; LANDISMAN, 1959) fornecendo a observação teórica  $\hat{g}_i$  na  $i$ -ésima posição  $x_i$ .

Para estabilizar a solução utilizamos o funcional da VT,  $\Phi_{VT}$  definido na seção 2.2, equação (2.13). Assim o problema de inversão gravimétrica não linear consiste na minimização do funcional

$$\min \Phi_{VT} , \quad (\text{A.2})$$

sujeito a

$$\| \mathbf{g}^o - \hat{\mathbf{g}} \|_2^2 = N\varepsilon, \quad (\text{A.3})$$

em que  $\| \cdot \|_2$  é a norma  $L_2$ ,  $\mathbf{g}^o$  é o vetor  $N$ -dimensional contendo os dados gravimétricos,  $\hat{\mathbf{g}}$  é o vetor  $N$ -dimensional contendo as observações gravimétricas teóricas calculadas nas mesmas coordenadas horizontais das observações a partir do conjunto de  $M$  prismas, definido na equação (A.1) e  $\varepsilon$  é a estimativa de variância do ruído contido nos dados gravimétricos. Resolvendo o problema formulado através das expressões (A.2) e (A.3) usando o método das funções penalty obtemos

$$\min_{\mathbf{p}} \| \mathbf{g}^o - \hat{\mathbf{g}} \|_2^2 + \mu \| \mathbf{R}\mathbf{p} \|_1, \quad (\text{A.4})$$

em que  $\| \cdot \|_1$  é a norma  $L_1$ ,  $\mathbf{R}$  é a matriz de dimensão  $(M - 1) \times M$  de primeiras derivadas discretas definida na seção 2.1.2,  $\mu$  é um número real não negativo, denominado parâmetro de regularização da variação total, que garante a estabilização e o quão abrupta é a solução das espessuras dos prismas. No entanto, a expressão (A.4) apresenta problemas de singularidades numéricas não tendo garantia de ser diferenciável em todo o domínio de interesse. Para contornar este problema utilizaremos a seguinte aproximação (ACAR; VOGEL, 1994; BERTETE-AGUIRRE; CHERKAEV; ORISTAGLIO, 2002; MARTINS et al., 2011)

$$\phi = \sum_{i=1}^{M-1} \sqrt{(p_i - p_{i+1})^2 + \delta}, \quad (\text{A.5})$$

em que  $\delta$  é um valor fixo da ordem de  $10^{-4}$  responsável por garantir a diferenciabilidade da função-objeto. Portanto, substituindo o funcional (A.5) na equação (A.2) e resolvendo novamente através do método das funções penalty, reescrevemos a expressão (A.4) por

$$\min_{\mathbf{p}} \| \mathbf{g}^o - \hat{\mathbf{g}} \|_2^2 + \mu\phi. \quad (\text{A.6})$$

O problema de minimização (A.6) não permite uma solução explícita para  $\mathbf{p}$ . Em geral, podemos resolver a expressão (A.6) aplicando o algoritmo iterativo de Gauss-Newton modificado pelo método de Marquardt (MARQUARDT, 1963) que encontra a solução por meio de sucessivas aproximações lineares. Na  $k$ -ésima iteração, este método parte de uma estimativa inicial de vetor  $M$ -dimensional  $\hat{\mathbf{p}}_k$ , estima um vetor-correção  $M$ -dimensional  $\Delta\hat{\mathbf{p}}_k$  e determina um novo vetor de parâmetros,  $\hat{\mathbf{p}}_{k+1}$ ,  $M$ -dimensional dado por

$$\hat{\mathbf{p}}_{k+1} = \hat{\mathbf{p}}_k + \Delta\hat{\mathbf{p}}_k . \quad (\text{A.7})$$

O algoritmo iterativo de Gauss-Newton modificado pelo método de Marquardt estima o vetor  $\Delta\hat{\mathbf{p}}_k$  minimizando o seguinte funcional

$$\Psi_k = \left\| \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_k \\ \sqrt{\mu}(\mathbf{Q}_k \mathbf{R}) \\ \sqrt{\lambda} \mathbf{I} \end{bmatrix} \Delta\hat{\mathbf{p}}_k - \begin{bmatrix} \mathbf{g}^o - \hat{\mathbf{g}}_k \\ \sqrt{\mu} \mathbf{q}_k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\|_2 , \quad (\text{A.8})$$

através do algoritmo Least Square Regression - *LSQR* (PAIGE; SAUNDERS, 1982), em que  $\lambda$  é um escalar positivo que é modificado em cada iteração denominado de parâmetro de Marquardt,  $\mathbf{0}$  é o vetor nulo  $M$  – dimensional,  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de dimensão  $M \times M$ ,  $\mathbf{Q}_k$  é uma matriz diagonal de dimensão  $(M - 1) \times (M - 1)$  avaliada em  $\hat{\mathbf{p}}_k$ ,  $\mathbf{q}_k$  é o vetor  $(M-1)$ -dimensional avaliada em  $\hat{\mathbf{p}}_k$  e  $\hat{\mathbf{A}}_k$  é a matriz Jacobiana, de dimensão  $N \times M$ , do vetor de anomalia gravimétrica teórica  $\hat{\mathbf{g}}$  avaliada em  $\hat{\mathbf{p}}_k$ , com elemento  $\hat{a}_{ij}$  definido por

$$\hat{a}_{ij(k)} = \left. \frac{\partial \hat{g}_i}{\partial p_j} \right|_{p_j = \hat{p}_{j(k)}} . \quad (\text{A.9})$$

Os elementos da matriz  $\mathbf{Q}_k$  e do vetor  $\mathbf{q}_k$  são obtidos a partir, respectivamente, dos elementos da matriz Hessiana e do vetor gradiente do funcional  $\phi$  apresentados por Martins et al. (2011). Modificamos o  $jj$ -ésimo elemento da matriz Hessiana e o  $j$ -ésimo elemento do vetor gradiente, referentes ao funcional  $\phi$ , para aplicar o método LSQR.

O  $jj$ -ésimo elemento da matriz  $\mathbf{Q}_k$ , modificado de Martins et al. (2011), é definido por

$$Q_{jj(k)} = \sqrt{\frac{\delta}{\sqrt{((\hat{p}_j - \hat{p}_{j+1})^2 + \delta)^3}}}, \quad (\text{A.10})$$

e apresentamos o  $j$ -ésimo elemento do vetor  $\mathbf{q}_k$ , também modificado de Martins et al. (2011), por

$$\{q_j\}_k = -(\hat{p}_j - \hat{p}_{j+1}) \sqrt{\frac{\sqrt{(\hat{p}_j - \hat{p}_{j+1})^2 + \delta}}{\delta}}. \quad (\text{A.11})$$

Após calcular  $\Delta\hat{\mathbf{p}}_k$  produzimos a solução  $\hat{\mathbf{p}}_{k+1}$  utilizando expressão (A.7) e realizamos a preparação para a próxima iteração através das expressões (A.8) a (A.11). O algoritmo iterativo termina quando o número máximo de iterações permitido é atingido ou quando satisfaz o critério de convergência estabelecido pela seguinte equação:

$$\frac{|\Psi_{k+1} - \Psi_k|}{|\Psi_k|} \leq 10^{-5}. \quad (\text{A.12})$$