

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**CENTRO DE GEOCIÊNCIAS**  
**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**INVERSÃO GRAVIMÉTRICA USANDO REGULARIZAÇÃO  
ENTRÓPICA**

**FRANCISCO DE SOUZA OLIVEIRA**



BELÉM - PARÁ  
2005



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

**INVERSÃO GRAVIMÉTRICA USANDO REGULARIZAÇÃO  
ENTRÓPICA**

DISSERTAÇÃO APRESENTADA POR  
**FRANCISCO DE SOUZA OLIVEIRA**

**COMO REQUISITO PARCIAL À OBTENÇÃO DE GRAU DE MESTRE EM  
CIÊNCIAS NA ÁREA DE GEOFÍSICA**

**Data da aprovação:**

**Nota:**

**COMITÊ DE TESE:**

---

Prof. Dr. João Batista Corrêa da Silva (Orientador)

---

Prof. Dra. Valéria Cristina Ferreira Barbosa

---

Prof. Dr. Haroldo Fraga de C. Velho

BELEM

2005

**A minha família (Francisco, Ivanilde e Alexandre).**

## AGRADECIMENTOS

“Existem duas formas de se ver a vida: a primeira é acreditar que milagres não existem e a segunda é acreditar que tudo na vida é um milagre” (Albert Einstein). Devemos sempre acreditar na vida, nas pessoas, na possibilidade de renovação e crescimento do ser humano. Desta forma esses breves agradecimentos são uma tentativa de expressar o quão grato sou primeiramente a Deus e às pessoas amigas que me acompanharam nesta jornada. A Deus com sua infinita bondade que permitiu o meu ingresso nesta universidade e me proporcionou os meios necessários para o desenvolvimento deste trabalho, e às pessoas amigas com as quais tive a possibilidade de conviver e trabalhar incorporando bons princípios baseados na ética, na justiça, no respeito e no companheirismo. Gostaria de agradecer ao CNPq pelo apoio financeiro através da bolsa de pesquisa e à UFPA pelo apoio técnico. Gostaria de agradecer também a algumas pessoas em especial ao Professor João Batista que muito me honrou com sua dedicação, amizade e paciência, a qual tive o prazer de compartilhar durante esses dois últimos anos e sem o qual este trabalho não seria possível.

Gostaria de agradecer aos demais professores que contribuíram para a conclusão deste trabalho como a Professora Valéria Cristina e o Professor Haroldo Velho, membros da banca. Destaco aqui o meu pilar de sustentação constituído por três pessoas da maior importância que são meu pai Francisco Oliveira, minha mãe Ivanilde Oliveira e meu irmão Alexandre Oliveira, os quais sempre me apoiaram e me incentivaram nesta caminhada do conhecimento; meu pai com suas explanações sobre filosofia, ciência, arte, música me indicando o caminho do conhecimento desde minhas séries iniciais; minha mãe com sua grande experiência de vida e auxílio nas horas de dificuldade mostrando-se uma verdadeira amiga e meu porto seguro e meu irmão com seu espírito virtuoso, companheiro e otimista sempre irradiando os corações de todos com alegria sendo meu maior incentivador. Destaco aqui as grandes amigas que me acompanharam nesta jornada, Sr<sup>a</sup>. Benildes, Darcicléa e Lena que muito me honram com sua amizade e com as quais desfrutei momentos de grande alegria e companheirismo, e as Professoras Midore Makino e Selma Santalices pelo apoio e incentivo. Gostaria de agradecer também às meninas da biblioteca sem as quais este trabalho não poderia ser realizado (infindáveis empréstimos), ao corpo técnico administrativo, aos colegas de turma que permaneceram e aos que por motivo de força maior não puderam terminar, aos meus amigos Alexander, Rodrigo, Lúcio, Rairys, Rayrison, Jaqueline, Ana

Carla, Leomara, Hérica, Talitha, Abima e Pryscilla aos meus tios e amigos Gilberto, João, Mauro, Ivone, Ivana, Roberto Cláudio, e Orlando (em memória), as minhas avós Iolanda (em memória) e Xista. Meu avô José Duarte (em memória), tias Marina, Sandra, Dora, Sônia e Fátima, e finalmente as minhas primas Aline e Tânia (em memória).

## SUMÁRIO

<b>DEDICATÓRIA .....</b>	<b>iii</b>
<b>AGRADECIMENTOS.....</b>	<b>iv</b>
<b>LISTA DE ILUSTRAÇÕES .....</b>	<b>vii</b>
<b>RESUMO .....</b>	<b>1</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>2</b>
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>3</b>
<b>2 METODOLOGIA .....</b>	<b>6</b>
<b>3 TESTES COM DADOS SINTÉTICOS .....</b>	<b>11</b>
3.1 EXPERIMENTO 1 .....	12
3.2 EXPERIMENTO 2 .....	18
3.3 EXPERIMENTO 3 .....	24
<b>4 APLICAÇÕES A DADOS REAIS .....</b>	<b>31</b>
4.1 MATSITAMA .....	31
4.1.1 Informações geológicas e geofísicas .....	31
4.1.2 Resultados .....	34
4.2 LAND'S END, CORNUÁLIA .....	38
4.2.1 Informações geológicas e geofísicas .....	38
4.2.2 Resultados .....	40
<b>5 CONCLUSÕES .....</b>	<b>47</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>49</b>

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

### FIGURAS

Figura 1	Conjunto de $N$ observações e $M$ células retangulares tridimensionais justapostas utilizadas para a interpretação da fonte gravimétrica. . . . .	6
Figura 2	Variação da função objeto $\tau(\mathbf{p})$ ao longo das iterações.. . . .	10
Figura 3	Corpos intrusivos próximos. (a) Anomalias Bouguer observada, contaminada com a primeira seqüência de ruído pseudo-aleatório e ajustada pela solução estabilizada pela suavidade global . (b) Estimativa do contrastes de densidade estabilizada pela suavidade global com $\mu =0,02$ . (c) Anomalias Bouguer observada, contaminada com a primeira seqüência de ruído pseudo-aleatório e ajustada pela solução estabilizada pela regularização entrópica. (d) Estimativa do contraste de densidade estabilizada pela regularização entrópica com $\gamma_0=1,0$ e $\gamma_1 =0,5$ .. . . .	13
Figura 4	Corpos intrusivos próximos. Variação da função objeto $\tau(\mathbf{p})$ ao longo das iterações. . . . .	14
Figura 5	Corpos intrusivos próximos. (a) Anomalias Bouguer observada, contaminada com a segunda seqüência de ruído pseudo-aleatório e ajustada pela solução da suavidade global. (b) Estimativa do contraste de densidade usando a suavidade global com $\mu =0,02$ . (c) Anomalias Bouguer observada contaminada com a segunda seqüência de ruído pseudo-aleatório e ajustada pela solução da regularização entrópica. (d) Estimativa do contraste de densidade usando a regularização entrópica com $\gamma_0=1,0$ e $\gamma_1 =0,5$ .. . . .	16
Figura 6	Corpos intrusivos próximos. Variação da função objeto $\tau(\mathbf{p})$ ao longo das iterações. . . . .	17

Figura 7	Corpos intrusivos muito próximos. (a) Anomalias Bouguer observada, contaminada com a primeira seqüência de ruído pseudo-aleatório (e ajustada pela solução da suavidade global. (b) Estimativa do contraste de densidade usando a suavidade global com $\mu = 0,02$ . (c) Anomalias Bouguer observada, contaminada com a primeira seqüência de ruído pseudo-aleatório e ajustada pela solução da regularização entrópica. (d) Estimativa do contraste de densidade usando a regularização entrópica com $\gamma_0 = 1,2$ e $\gamma_1 = 2,1$ .. . . . .	19
Figura 8	Corpos intrusivos muito próximos. Variação da função objeto $\tau(\mathbf{p})$ ao longo das iterações.. . . . .	20
Figura 9	Corpos intrusivos muito próximos. (a) Anomalias Bouguer observada, contaminada com a segunda seqüência de ruído pseudo-aleatório e ajustada pela solução da suavidade global. (b) Estimativa do contraste de densidade usando a suavidade global com $\mu = 0,02$ . (c) Anomalias Bouguer observada, contaminada com a segunda seqüência de ruído pseudo-aleatório e ajustada pela solução da regularização entrópica. (d) Estimativa do contraste de densidade usando a regularização entrópica com $\gamma_0 = 1,2$ e $\gamma_1 = 2,1$ .. . . . .	22
Figura 10	Corpos intrusivos muito próximos. Variação da função objeto $\tau(\mathbf{p})$ ao longo das iterações.. . . . .	23
Figura 11	Corpo intrusivo com topo arqueado. (a) Anomalias Bouguer observada, contaminada com a primeira seqüência de ruído pseudo-aleatório e ajustada pela solução da suavidade global. (b) Estimativa do contraste de densidade usando a suavidade global com $\mu = 0,02$ . (c) Anomalias Bouguer observada, contaminada com a primeira seqüência de ruído pseudo-aleatório e ajustada pela solução da regularização entrópica. (d) Estimativa do contraste de densidade usando a regularização entrópica com $\gamma_0 = 0$ e $\gamma_1 = 3,0$ .. . . . .	25
Figura 12	Corpo intrusivo com topo arqueado. Curvas de contorno da profundidade (em km) do topo do corpo intrusivo que gera os dados gravimétricos da Figura 11. . . . .	26
Figura 13	Corpo intrusivo com topo arqueado. Variação da função objeto $\tau(\mathbf{p})$ ao longo das iterações.. . . . .	27

Figura 14	Corpo intrusivo com topo arqueado. (a) Anomalias Bouguer observada, contaminada com a segunda seqüência de ruído pseudo-aleatório e ajustada pela solução da suavidade global. (b) Estimativa do contraste de densidade usando a suavidade global com $\mu = 0,02$ . (c) Anomalias Bouguer observada, contaminada com a segunda seqüência de ruído pseudo-aleatório e ajustada pela solução da regularização entrópica. (d) Estimativa do contraste de densidade usando a regularização entrópica com $\gamma_0 = 0$ e $\gamma_1 = 3,0$ . . . . .	29
Figura 15	Corpo intrusivo com topo arqueado. Variação da função objeto $\tau(\mathbf{p})$ ao longo das iterações.. . . .	30
Figura 16	Mapa geológico simplificado do nordeste de Botswana.. . . .	32
Figura 17	Anomalia gravimétrica Bouguer da área mostrada na Figura 16. As curvas de contorno têm intervalo de 10 mGal. . . . .	33
Figura 18	Matsitama. (a) Anomalias Bouguer observada e ajustada pela solução da suavidade global. (b) Estimativa do contraste de densidade usando a suavidade global com $\mu = 0,02$ . (c) Anomalias Bouguer observada e ajustada pela solução da regularização entrópica. (d) Estimativa do contraste de densidade usando a regularização entrópica com $\gamma_0 = 0,01$ e $\gamma_1 = 3,0$ . . . . .	35
Figura 19	Matsitama. Variação da função objeto $\tau(\mathbf{p})$ ao longo das iterações.. . . .	36
Figura 20	Mapa geológico simplificado de Cornwall, mostrando os afloramento principais e secundários do batólito granítico de Cornubian. . . . .	38
Figura 21	Vista em perspectiva isométrica da forma espacial do Batólito de Cornubian. . . .	39
Figura 22	Mapa de anomalia Bouger do sudoeste da Cornuália (Bott et al., 1958 e outros levantamentos marinhos). O quadrilátero preto delimita a área utilizada para a inversão. Os intervalos de contorno são de 5 mGal sobre o oceano e 1 mGal sobre o continente. . . . .	41

Figura 23	Land's End. (a) Anomalias Bouguer observada e ajustada pela solução da suavidade global. (b) Estimativa do contraste de densidade usando a suavidade global com $\mu = 0,00001$ . (c) Anomalias Bouguer observada e ajustada pela solução da regularização entrópica. (d) Estimativa do contraste de densidade usando a regularização entrópica com $\gamma_0 = 0,001$ e $\gamma_1 = 0,7$ . . . . .	42
Figura 24	Land's End. Variação da função objeto $\tau(\mathbf{p})$ ao longo das iterações.. . . .	43
Figura 25	Land's End. (a) Anomalias Bouguer observada e ajustada pela solução da suavidade global. (b) Estimativa do contraste de densidade usando a suavidade global com $\mu = 20$ . (c) Anomalias Bouguer observada e ajustada pela solução da regularização entrópica. (d) Estimativa do contraste de densidade usando a regularização entrópica com $\gamma_0 = 0,001$ e $\gamma_1 = 0,7$ . . . . .	45
Figura 26	Land's End. (a) Anomalias Bouguer observada e ajustada pela solução da suavidade global. (b) Estimativa do contraste de densidade usando a suavidade global com $\mu = 250$ . (c) Anomalias Bouguer observada e ajustada pela solução da regularização entrópica. (d) Estimativa do contraste de densidade usando a regularização entrópica com $\gamma_0 = 0,001$ e $\gamma_1 = 0,7$ . . . . .	46

## RESUMO

Apresentamos um novo método para inversão gravimétrica da distribuição espacial do contraste de densidade no plano horizontal, baseado na combinação da maximização da entropia de ordem zero com a minimização da entropia de ordem um. O topo e a base das fontes gravimétricas são presumidos ser planos e horizontais e o modelo interpretativo consiste de uma malha de prismas justapostos em ambas às direções horizontais, sendo os contrastes de densidade de cada prisma os parâmetros a serem estimados. A maximização da entropia de ordem zero é similar ao vínculo de suavidade global, enquanto a minimização da entropia de ordem um favorece descontinuidades na distribuição do contraste de densidade. Conseqüentemente a combinação judiciosa de ambas pode levar a soluções apresentando regiões com contrastes de densidade virtualmente constantes (no caso de corpos homogêneos), separadas por descontinuidades abruptas. O método foi aplicado a dados sintéticos simulando a presença de corpos intrusivos em sedimentos. A comparação dos resultados com aqueles obtidos através do método da suavidade global mostra que ambos os métodos localizam as fontes igualmente bem, mas o delineamento de seus contornos é efetuado com maior resolução pela regularização entrópica, mesmo no caso de fontes com 100 m de largura separadas entre si por uma distância de 50 m. No caso em que o topo da fonte causadora não é plano nem horizontal, tanto a regularização entrópica como a suavidade global produzem resultados semelhantes.

A metodologia apresentada, bem como a suavidade global foram aplicadas a dois conjuntos de dados reais produzidos por intrusões em rochas metamórficas. O primeiro é proveniente da região de Matsitama, no nordeste de Botswana, centro sul da África. A aplicação das duas metodologias a estes dados produziu resultados similares, indicando que o topo das fontes não é plano nem horizontal. O segundo conjunto provém da região da Cornuália, Inglaterra e produziu uma distribuição estimada de contraste de densidade virtualmente constante para a regularização entrópica e oscilante para a suavidade global, indicando que a fonte gravimétrica apresenta topo aproximadamente plano e horizontal, o que é confirmado pela informação geológica disponível.

## ABSTRACT

We present a new gravity inversion method, which produces an apparent density contrast mapping on the horizontal plane by combining the minimization of the first-order entropy with the maximization of the zero-order entropy of the estimated density contrasts. The interpretation model consists of a grid of vertical, juxtaposed prisms in both horizontal directions. The top and the bottom of the gravity sources are assumed to be flat and horizontal, and the parameters to be estimated are the prism density contrasts. The maximization of the zero-order entropy is similar to the global smoothness constraint whereas the minimization of the first-order entropy favors solutions presenting sharp borders, so a judicious combination of both constrains may lead to solutions characterized by regions where the estimated density contrasts are virtually constant (in the case of homogeneous bodies), separated by sharp discontinuities. The method has been applied to synthetic data simulating the presence of intrusive bodies in sediments. The comparison of the results with those obtained with the global smoothness constraint method shows that both methods produce good and equivalent locations of the source positions, but the entropic regularization delineates the contour of the bodies with greater resolution, even in the case of 100 m wide bodies separated by a distance as small as 50 m. In the case that the depth to the top of the causative sources is neither flat nor horizontal, both method produced similar results.

Both the proposed and the global smoothness methods have been applied to two sets of real data produced by igneous intrusions into metamorphic rocks. The first one is from the Matsitama region, northeast of Botswana. The application of both methods to this data set lead to similar results, indicating that depth to the sources top is neither flat nor horizontal. The second set is from the Cornuália region, England. The results produced by both methods in this case are reasonably different, indicating that the gravity source present an approximately flat and horizontal top. This is confirmed by the available geological information.

## 1 INTRODUÇÃO

O mapeamento geológico é de fundamental importância para a determinação de possíveis alvos exploratórios. A construção de um mapa geológico envolve diversas etapas como, por exemplo, coleta de dados de campo, interpretações de fotos aéreas, interpretação de dados de poços e interpretação geológica. O mapeamento geológico, entretanto, é baseado em informações coletadas essencialmente na superfície da terra, de modo que, para o estabelecimento de um modelo geológico confiável, torna-se necessária a obtenção de informações a respeito da estrutura e composição de regiões mais profundas da crosta, através de medidas geofísicas (Maas et al., 2003).

Entre os métodos geofísicos comumente usados como ferramentas auxiliares no mapeamento geológico, citam-se a magnetometria (Silva & Hohmann, 1984) e a gravimetria (Gupta & Grant, 1985). As interpretações magnética gravimétrica consistem na estimação da distribuição espacial da magnetização e da densidade, respectivamente. Essa tarefa, entretanto não é trivial porque os dados gravimétricos e magnéticos não são suficientes para reconstruir de modo único e estável a distribuição da respectiva propriedade física na sub-superfície, sendo, portanto este, um problema mal posto no sentido de Hadamard (1902). Para se transformar um problema mal posto em bem posto, uma das possibilidades é a introdução de informação *a priori* sobre as fontes anômalas (Tikhonov & Arsenin, 1977). A incorporação da informação *a priori* desejada é feita através da escolha de um funcional estabilizante apropriado. Diferentes funcionais devem ser empregados conforme o ambiente geológico. A escolha do funcional mais adequado ao ambiente geológico a ser interpretado define o método de inversão geofísica a ser empregado. Assim qualquer que seja o método utilizado para estabilizar as soluções do problema geofísico inverso, a solução será altamente influenciada pela informação *a priori* introduzida através do funcional escolhido.

Diversos métodos estabilizadores aplicáveis a dados de campos potenciais têm sido desenvolvidos com a finalidade de localizar e delinear unidades e estruturas geológicas, contribuindo assim, para o mapeamento geológico. O procedimento de regularização clássica tem sido o da maximização da suavidade espacial da distribuição de propriedade física, que estabilizam as soluções em detrimento da resolução no delineamento das fontes anômalas. Silva & Hohmann (1984) utilizaram uma técnica de interpretação automática tridimensional para

dados aeromagnéticos usando redução ao pólo e camada equivalente, em que a distribuição estimada não nula da camada equivalente coincide com a projeção horizontal da fonte magnética, que se presume possuir lados verticais e superfície do topo plana e horizontal. Medeiros & Silva (1996) propuseram um método de inversão de dados de campos potenciais para determinar distribuições espaciais de propriedade física discreta, usando vínculos de igualdade absoluta para parâmetros cuja informação é proveniente de furos de sondagem e/ou afloramentos e no restante dos parâmetros a condição de continuidade é imposta por meio de um vínculo de suavidade. Ramos & Campos Velho (1996) e Campos Velho & Ramos (1997) desenvolveram uma técnica de inversão, denominada mínima entropia de primeira ordem combinada com a máxima entropia de ordem zero e aplicaram-na a dados magnetotelúricos. Esse método de regularização é substancialmente diferente dos métodos clássicos de regularização que maximizam a suavidade espacial da distribuição de propriedade física ou variantes dela. A minimização da entropia de primeira ordem leva a soluções apresentando contatos mais abruptos, permitindo desse modo uma melhor localização dos contatos entre as unidades geológicas mapeadas.

Este trabalho aplica, pela primeira vez, a maximização da entropia de ordem zero combinada com a minimização da medida de entropia de primeira ordem, proposta por Campos Velho & Ramos (1997), à estimação da distribuição espacial do contraste de densidade em função das coordenadas horizontais, usando dados gravimétricos. Presumem-se fontes homogêneas com topos e bases plano-horizontais e com profundidades conhecidas. A minimização da medida da entropia de ordem 1, combinada com a maximização da medida de entropia de ordem zero resulta na restrição das soluções a um conjunto de modelos geológicos compostos por regiões localmente suaves separadas por descontinuidades abruptas, permitindo assim um melhor delineamento dos limites horizontais das fontes.

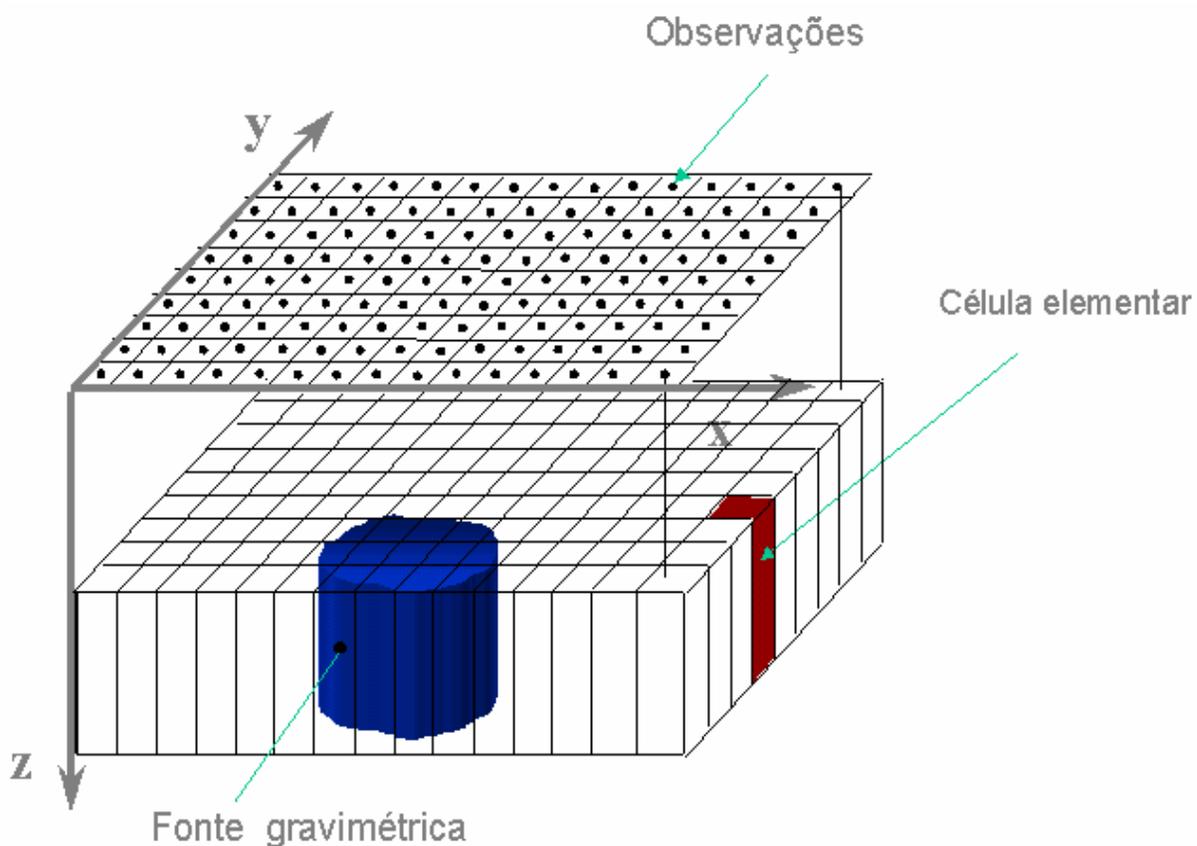
O critério de parada adotado é baseado na segunda diferença discreta da função-objeto ao longo das iterações. O processo iterativo é interrompido ao encontrar o término do primeiro patamar aproximadamente horizontal da função-objeto ao longo das iterações e é determinado pela posição em que a segunda diferença discreta da função-objeto ao longo das iterações apresenta uma mudança de sinal. Este critério foi desenvolvido neste trabalho e difere dos critérios de parada comumente usados na inversão geofísica.

Na aplicação do método de regularização entrópica a dados sintéticos, gerados por corpos intrusivos com contrastes de densidade constantes e que satisfazem as restrições estabelecidas para o modelo interpretativo, a posição e a forma geral dos corpos e seus contrastes de densidade foram obtidos com boa aproximação. Além disso, os resultados apresentaram melhor definição das bordas desses corpos em comparação com o método da suavidade, além de uma estimativa mais próxima a um valor constante para a distribuição de contraste de densidade. Quando ocorreu a violação da restrição do corpo causador da anomalia possuir superfície do topo plano e horizontal, os resultados obtidos por ambos os métodos não apresentaram diferença significativa.

O método de regularização entrópica foi aplicado também à interpretação de dados gravimétricos reais em duas regiões: Matsitama, uma região do deserto de Kalahari situada em Botswana (África) e Cornuália, na Inglaterra. Na região de Matsitama, os resultados obtidos tanto com o método da regularização entrópica quanto da suavidade não apresentaram diferença, inferindo-se assim que a superfície do topo do corpo não é plana nem horizontal. Por outro lado, na região da Cornuália a regularização entrópica produziu estimativas mais próximas a um valor constante para a distribuição de contraste de densidade, diferentemente do método da suavidade que produziu estimativas de contraste de densidade apresentando variações espaciais. Neste caso, a comparação entre os resultados produzidos pelos dois métodos indica que o topo do corpo anômalo seja aproximadamente plano-horizontal e que o seu contraste de densidade é aproximadamente constante.

## 2 METODOLOGIA

Seja um conjunto de fontes gravimétricas homogêneas, podendo apresentar diferentes contrastes de densidade entre si e possuindo topo e base planos e horizontais cujas profundidades são conhecidas. Deseja-se aproximar tais fontes por um modelo interpretativo constituído por uma malha horizontal de  $M$  prismas 3-D retangulares, justapostos, definidos dentro de uma área que presumivelmente contém as fontes anômalas. Admite-se que o contraste de densidade de cada célula é constante, que as células apresentem a mesma extensão nas direções  $x$  e  $y$ , e que, as profundidades do topo e da base de cada prisma coincidam com as profundidades do topo e da base, respectivamente, das fontes verdadeiras, conforme o modelo apresentado na Figura 1.



**Figura 1** - Conjunto de  $N$  observações e  $M$  células retangulares tridimensionais justapostas utilizadas para a interpretação da fonte gravimétrica.

A inversão gravimétrica consiste em estimar, a partir de um vetor  $\mathbf{g}^0(\mathbf{p}) \equiv [g_1^0, \dots, g_N^0]^T$  contendo  $N$  valores da anomalia gravimétrica observada, o vetor de contrastes de densidade  $\mathbf{p} \equiv [p_1, \dots, p_M]^T$  de cada célula do modelo interpretativo. Para tanto, a matriz contendo a distribuição bidimensional de contraste de densidade é transformada em um vetor através de uma ordenação padrão das posições das células. Para estimar o vetor  $\mathbf{p}$ , o primeiro passo é minimizar o funcional não linear

$$\|\mathbf{g}^0 - \mathbf{g}(\mathbf{p})\|^2 \quad (1)$$

em que  $\mathbf{g}(\mathbf{p})$  é um vetor  $N$ -dimensional contendo a anomalia computada, através do modelo interpretativo, nos mesmos pontos de observação e  $\|\cdot\|$  é a norma Euclidiana. Este problema inverso é mal-posto em decorrência da instabilidade das soluções. Assim, é necessário incorporar informação geológica *a priori*. Isto tem sido efetuado, tradicionalmente, através de técnicas clássicas de regularização como a *suavidade global*, em que é imposta a condição que a estimativa de cada parâmetro  $\hat{p}_i$  (contraste de densidade da  $i$ -ésima célula) seja a mais próxima possível da estimativa do parâmetro  $\hat{p}_j$  (contraste de densidade da célula vizinha em ambas as direções  $x$  e  $y$ ), sujeito aos dados serem explicados pelo modelo interpretativo dentro da precisão experimental dos dados. Matematicamente, esta condição é expressa por

$$\min_{\mathbf{p}} \{ \mathbf{p}^T \mathbf{W} \mathbf{p} \}, \quad (2)$$

sujeito a

$$\|\mathbf{g}^0 - \mathbf{g}(\mathbf{p})\|^2 = \delta, \quad (3)$$

em que  $\delta$  é uma estimativa da variância do ruído contido nos dados e a matriz  $\mathbf{W}$  é igual ao produto  $\mathbf{R}^T \mathbf{R}$ , sendo  $\mathbf{R}$  uma matriz cujas linhas contém apenas dois elementos não nulos iguais a 1 e  $-1$ , localizados nas colunas correspondentes aos parâmetros  $i$  e  $j$ , que são parâmetros espacialmente adjacentes e cujas estimativas devem estar o mais próximo possível. O problema acima é resolvido minimizando a função

$$\rho(\mathbf{p}) = \|\mathbf{g}^0 - \mathbf{g}(\mathbf{p})\|^2 + \mu \mathbf{p}^T \mathbf{W} \mathbf{p}, \quad (4)$$

em que  $\mu$  é um escalar não negativo escolhido de acordo com o critério descrito adiante.

Diferentemente da abordagem tradicional, neste trabalho empregaremos, na inversão gravimétrica, um método de regularização que combina a *maximização da entropia de ordem zero com a minimização da entropia de primeira ordem*.

A técnica da *máxima entropia de ordem zero* introduz informação semelhante à da *suavidade global*, pois tem como característica assegurar que a variação entre estimativas de contrastes de densidade de células contíguas seja limitada, isto é, que as soluções produzidas apresentem uma variação espacial suave. A inserção desta informação nos dados é obtida por meio de um funcional baseado no *método da máxima entropia*, que, como critério de inferência foi proposto por Jaynes (1957), com base no conceito de entropia de informação introduzido por Shannon & Weaver (1949), através da maximização da medida de entropia de ordem zero  $Q_0(\mathbf{p})$ .

A *técnica da mínima entropia de primeira ordem* baseia-se na minimização da medida de entropia  $Q_1(\mathbf{p})$  do vetor de derivadas de ordem um de  $\mathbf{p}$  (Campos Velho & Ramos, 1997; Ramos et al., 1999), o que possibilita a obtenção de estimativas de distribuições espaciais de contraste de densidade essencialmente suaves, mas apresentando bordas mais abruptas que aquelas obtidas com o funcional estabilizante da suavidade.

Desta forma a inversão gravimétrica será formulada como um problema de minimização das medidas de entropia de ordens zero e um, sujeita aos dados serem explicados dentro da precisão experimental. Matematicamente, temos:

$$\min[ -\gamma_0 Q_0(\mathbf{p}) / Q_{0\max} + \gamma_1 Q_1(\mathbf{p}) / Q_{1\max} ], \quad (5)$$

sujeito a

$$\| \mathbf{g}^0 - \mathbf{g}(\mathbf{p}) \|^2 = \delta, \quad (6)$$

em que  $Q_{0\max}$  e  $Q_{1\max}$  são constantes de normalização,

$$Q_\alpha(\mathbf{p}) = - \sum_{k=1}^L S_k \log(S_k), \quad \alpha = 0 \text{ ou } 1, \quad (7)$$

são medidas de entropia de ordens zero, se  $\alpha = 0$  e um se  $\alpha = 1$ , sendo

$$S_k = r_k / \sum_{k=1}^L r_k, \quad (8)$$

$$r_k = \begin{cases} p_k & \text{se } \alpha=0 \\ |p_{k+1}-p_k|+\varepsilon & \text{se } \alpha=1 \end{cases}, \quad (9)$$

$L$  é igual a  $M$ , se  $\alpha$  for igual a 0, ou igual a  $M-1$  se  $\alpha$  for igual a 1 e  $\varepsilon$  uma constante positiva que garante, em qualquer situação, um valor definido para a entropia de primeira ordem (Campos Velho & Ramos, 1997). Note que o sinal negativo imposto à parcela contendo  $\gamma_0$ , impõe uma maximização da medida de entropia de ordem zero. A função  $Q_\alpha(\mathbf{p})$  alcança seu máximo quando todos os seus elementos  $r_k$  forem os mesmos, e o valor mínimo quando todos os elementos  $r_k$  forem nulos com exceção de um único elemento.

Este problema de otimização vinculada é resolvido minimizando-se o funcional

$$\tau(\mathbf{p}) = \|\mathbf{g}^0 - \mathbf{g}(\mathbf{p})\|^2 - \gamma_0 Q_0(\mathbf{p})/Q_{0\max} + \gamma_1 Q_1(\mathbf{p})/Q_{1\max}. \quad (10)$$

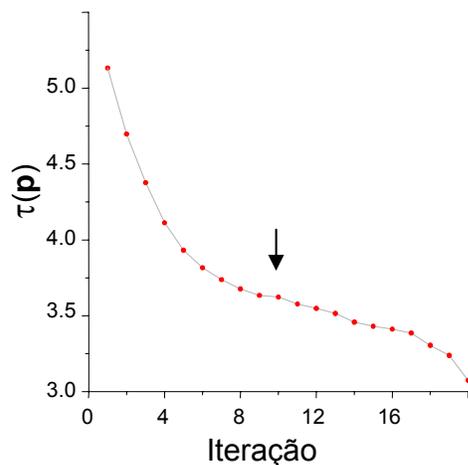
Como o funcional (10) é não linear em  $\mathbf{p}$ , e a aproximação de Gauss-Newton para a matriz Hessiana (Bard, 1974) não pode ser empregada, ele é minimizado via método Quasi-Newton, usando a implementação do método BFGS (Gill et al., 1981) para a atualização da matriz Hessiana em cada iteração.

As escolhas de  $\mu$  (equação (4)),  $\gamma_0$  (equação (10)) e  $\gamma_1$  (equação (10)) são feitas do seguinte modo. Os parâmetros  $\mu$  e  $\gamma_0$  controlam a estabilidade da solução à custa do decréscimo da resolução. Desse modo, eles devem ser iguais ao menor valor positivo ainda produzindo soluções estáveis. Valores de  $\mu$  e  $\gamma_0$  maiores que o ótimo acrescentam um grau de suavidade maior que o necessário para a produção de estimativas estáveis dos limites dos corpos, enquanto valores menores produzem soluções instáveis. O parâmetro  $\gamma_1$ , por sua vez, introduz descontinuidades nas estimativas das propriedades físicas de células contíguas. Um valor pequeno de  $\gamma_1$  produz uma solução com bordas difusas, semelhantes às obtidas com o estimador de suavidade, ao passo que um valor muito alto produz soluções exibindo muitas oscilações e descontinuidades nas estimativas dos contrastes de densidade das células. Essas oscilações, entretanto, não são devidas à instabilidade. O aparecimento de tais oscilações ou descontinuidades é uma evidência que o número de descontinuidades na propriedade física, que caracterizam os limites do corpo, está sendo superestimado. Assim,  $\gamma_1$ , deve ser o maior valor

positivo que produza soluções estáveis sem, no entanto, apresentar mais oscilações ou descontinuidades que as esperadas para o corpo geológico sendo interpretado.

A caracterização de uma solução instável é feita adicionando-se, para valores fixos de  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$ , diversas seqüência de números pseudo-aleatórios aos dados observados e obtendo as correspondentes soluções que serão consideradas estáveis se estiverem suficientemente próximas entre si. Esta proximidade é avaliada pelo intérprete através de inspeção visual.

O processo iterativo é interrompido com base no critério descrito a seguir. Considere a distribuição  $\tau(\mathbf{p})$  (equação 10) ao longo das iterações (Figura 2). Uma medida da razão de decaimento de  $\tau(\mathbf{p}_k)$  na  $k$ -ésima iteração é dada por  $d_k^{(1)} = \tau(\mathbf{p}_k) - \tau(\mathbf{p}_{k-1})$ . A diminuição dessa medida ao longo de iterações sucessivas indica a presença de um patamar em  $\tau(\mathbf{p})$ . O limite direito desse patamar no gráfico da Figura 2 será detectado por um aumento no valor absoluto de  $d_k^{(1)}$ . Assim, definindo-se uma medida da razão de decaimento de  $d_k^{(1)}$  como  $d_k^{(2)} = d_{k+1}^{(1)} - d_k^{(1)}$ , o processo iterativo será interrompido na primeira iteração,  $k$ , em que  $d_k^{(2)}$  registrar uma mudança de sinal de positivo para negativo. Em outras palavras, o critério de parada interrompe o processo iterativo ao encontrar o término do primeiro patamar aproximadamente horizontal da função  $\tau(\mathbf{p})$  ao longo das iterações. O primeiro patamar é selecionado porque soluções pertencentes a patamares produzindo valores mais baixos de  $\tau(\mathbf{p})$  apresentarão mais oscilações ou descontinuidades estáveis na solução que o esperado para o corpo geológico sendo interpretado.



**Figura 2** – Variação da função objeto  $\tau(\mathbf{p})$  ao longo das iterações. O critério de parada adotado interrompeu o processo na iteração 10 (seta vertical).

### 3 TESTES COM DADOS SINTÉTICOS

Nesta seção compararemos, através de aplicações a dados sintéticos, as soluções do problema gravimétrico inverso no plano  $x$ - $y$  usando o método clássico da suavidade [minimante da equação (4) usando-se  $\mu \neq 0$ ] com o método da combinação da mínima entropia de ordem um [minimante da equação (10) usando-se  $\gamma_0 = 0$  e  $\gamma_1 \neq 0$ ] com a máxima entropia de ordem zero [minimante da equação (10) usando-se  $\gamma_0 \neq 0$  e  $\gamma_1 = 0$ ].

O modelo interpretativo é constituído por uma malha de  $n_x \times n_y$  prismas retangulares verticais justapostos nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente, com as dimensões  $dx$  e  $dy$  (nos três experimentos com dados sintéticos  $dx=dy$ ) ao longo das direções horizontais  $x$  e  $y$ , respectivamente, tendo topos e bases coincidentes com o topo e a base do corpo anômalo e sendo suas profundidades presumivelmente conhecidas. Os corpos verdadeiros simulam rochas intrusivas em sedimentos ou metassedimentos, apresentando contrastes de densidade constantes.

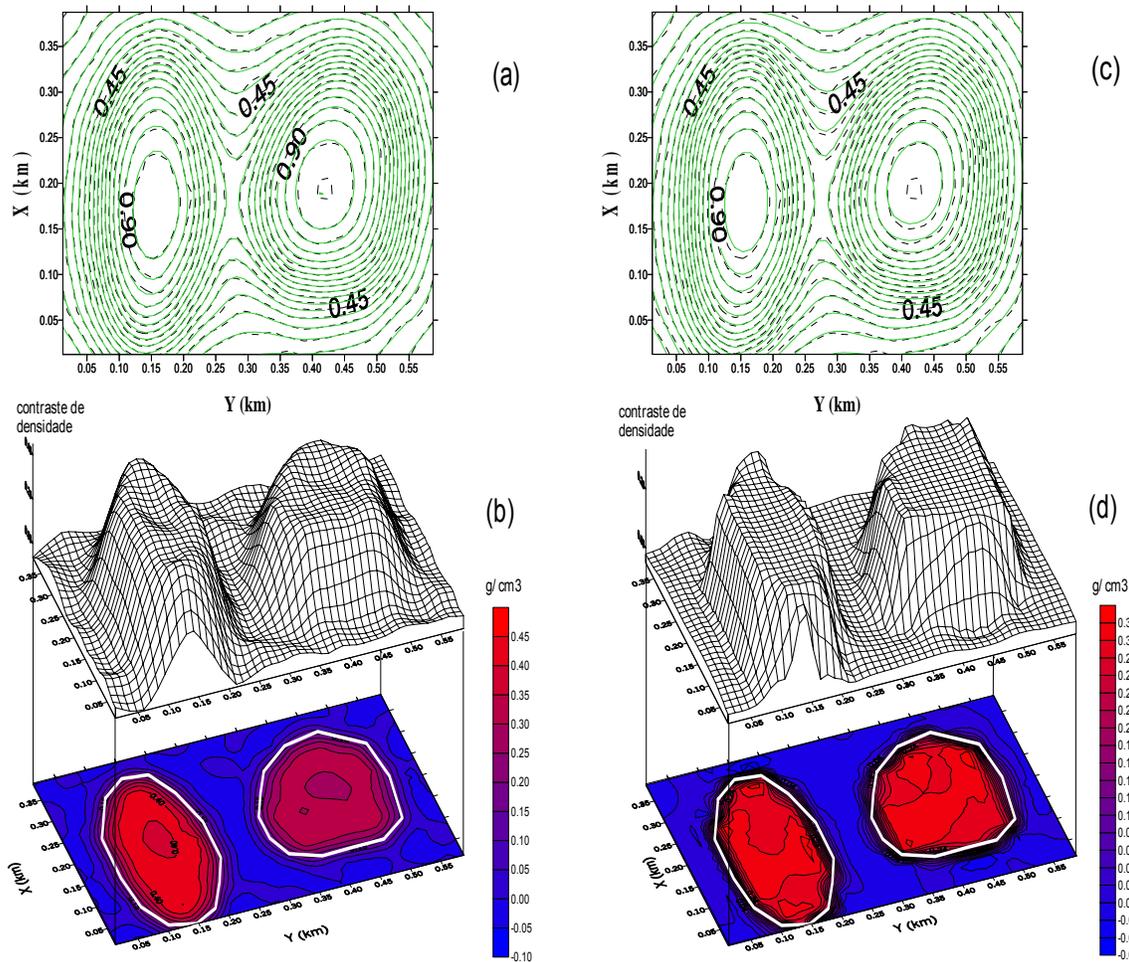
Apresentaremos três experimentos usando anomalias gravimétricas sintéticas geradas por fontes tridimensionais presumindo-se que os corpos estejam localizados dentro da área definida pela malha do modelo interpretativo. Nos dois primeiros experimentos, analisaremos a anomalia gerada por corpos com topo e base planos, simulando a intrusão de um stock granítico em rochas sedimentares. No terceiro experimento os dados sintéticos são gerados por um corpo que viola a condição do topo ser plano e horizontal ao longo de toda sua extensão.

### 3.1 EXPERIMENTO 1

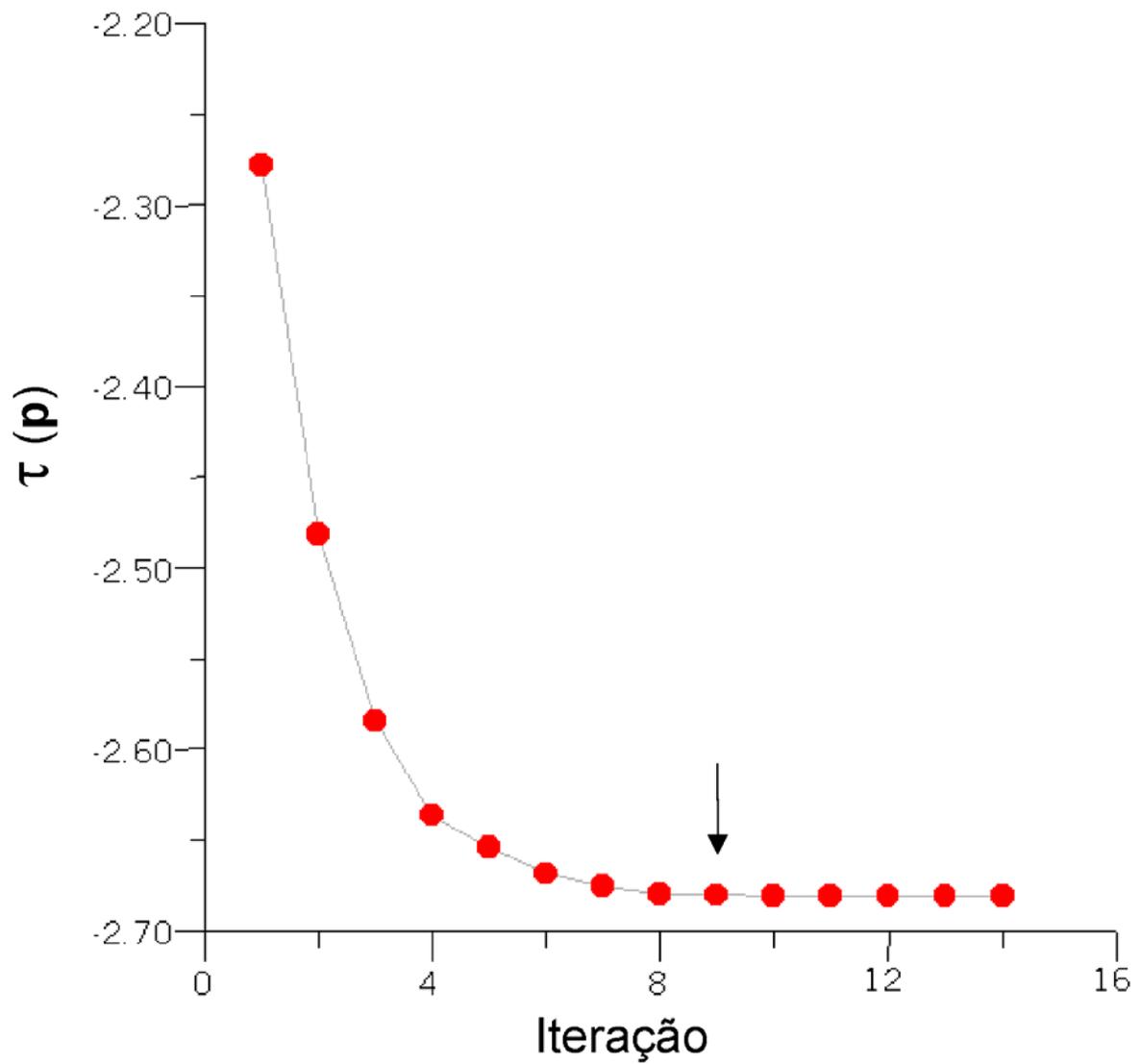
A Figura 3a mostra em linha contínua verde a anomalia Bouguer produzida por dois corpos prismáticos com seções horizontais mostradas na Figura 3b em linha branca espessa. Estes corpos têm seus topos e bases localizadas nas profundidades de 0,0105 km e 0,2105 km, respectivamente. Eles simulam intrusões de rochas ígneas com contraste de densidade uniforme de  $0,3 \text{ g/cm}^3$  em relação à rocha sedimentar circum-adjacente. Os dados teóricos foram contaminados com ruído pseudo-aleatório Gaussiano com média nula e desvio padrão de 0,01 mGal.

O modelo interpretativo, para este experimento, consiste de uma malha de  $16 \times 24$  prismas retangulares verticais nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, tendo cada prisma a mesma dimensão de 0,025 km ao longo de ambas as direções horizontais. O topo e a base do modelo interpretativo coincidem, respectivamente, com o topo e a base do corpo anômalo, ou seja, estamos considerando que neste experimento possuímos informações a respeito da estimativa da profundidade do topo e da base da fonte. Tais parâmetros são indispensáveis para se realizar a inversão dos dados e conseqüentemente obter a estimativa da propriedade física (contraste de densidade). Erros nos valores presumidos *a priori* para o topo e a base da fonte, levam a erros na estimativa da distribuição de propriedade física, mas não na estimativa do contorno horizontal das fontes (Silva e Hohmann, 1984).

A Figura 3b apresenta curvas de isovalores e vista em perspectiva da estimativa da distribuição do contraste de densidade estabilizada com a suavidade espacial usando  $\mu=0,02$ . O campo ajustado é mostrado na Figura 3a em linha tracejada preta. A Figura 3c apresenta em linha verde contínua, a mesma anomalia da Figura 3a. A Figura 3d mostra em curvas de isovalores e em perspectiva a estimativa da distribuição do contraste de densidade estabilizada pela combinação da mínima entropia de ordem um e máxima entropia de ordem zero com  $\gamma_0=1$  e  $\gamma_1=0,5$ . A Figura 4 mostra a variação da função objeto  $\tau(\mathbf{p})$  ao longo das iterações necessárias à obtenção da solução estabilizada pela regularização entrópica e indica a iteração na qual o processo foi finalizado (seta vertical). Nesta iteração verifica-se um pequeno desnível não claramente evidente graficamente neste exemplo, mas observado numericamente. O campo ajustado é mostrado na Figura 3c em linha tracejada preta.

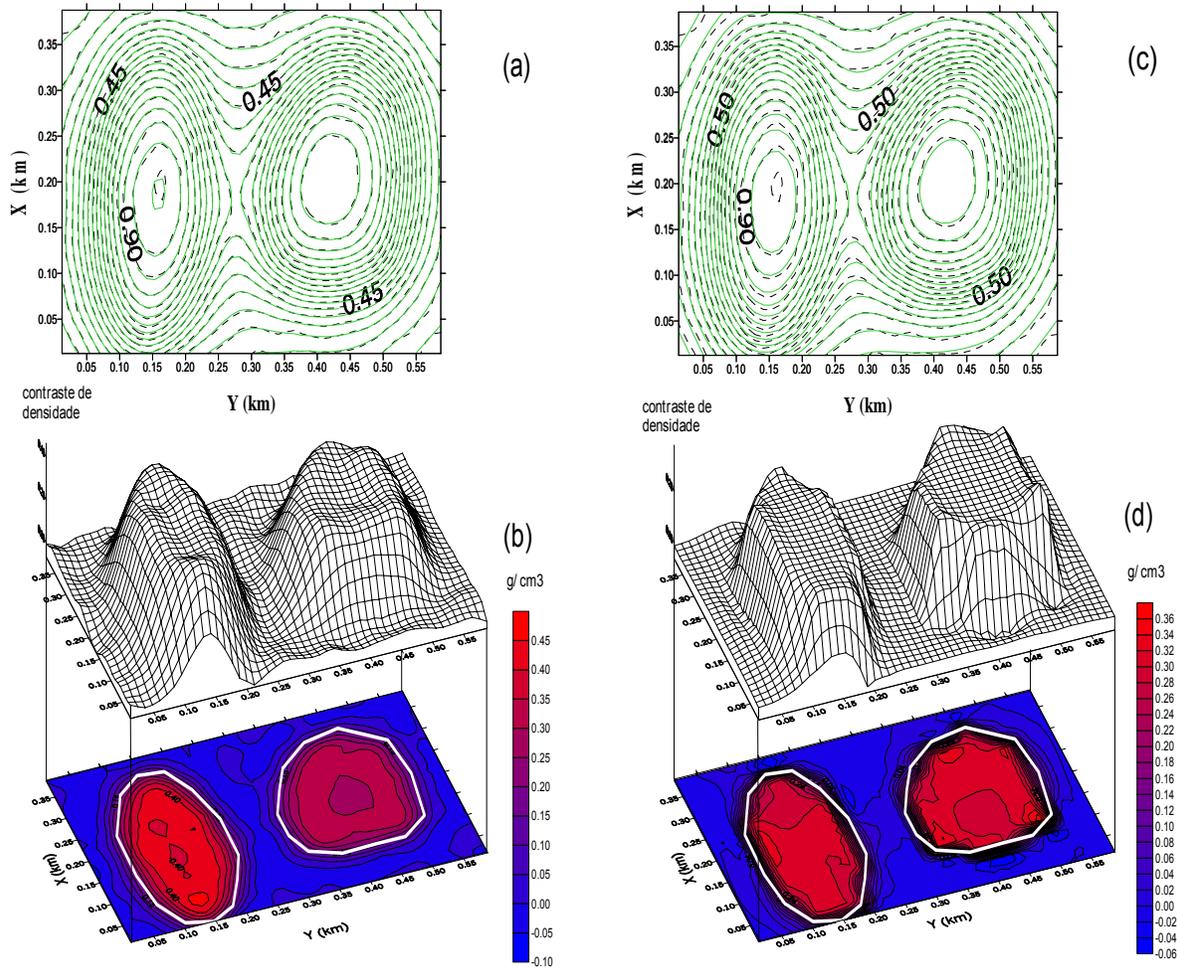


**Figura 3** – Corpos intrusivos próximos. (a) Anomalias Bouguer observada, contaminada com a primeira seqüência de ruído pseudo-aleatório (linha contínua verde) e ajustada pela solução estabilizada pela suavidade global (linha tracejada preta). (b) Estimativa do contrastes de densidade estabilizada pela suavidade global com  $\mu=0,02$ . A linha contínua branca representa o contorno horizontal do corpo. (c) Anomalias Bouguer observada, contaminada com a primeira seqüência de ruído pseudo-aleatório (linha contínua verde) e ajustada pela solução estabilizada pela regularização entrópica (linha tracejada preta). (d) Estimativa do contraste de densidade estabilizada pela regularização entrópica com  $\gamma_0=1,0$  e  $\gamma_1=0,5$ . A linha contínua branca representa o contorno horizontal do corpo.

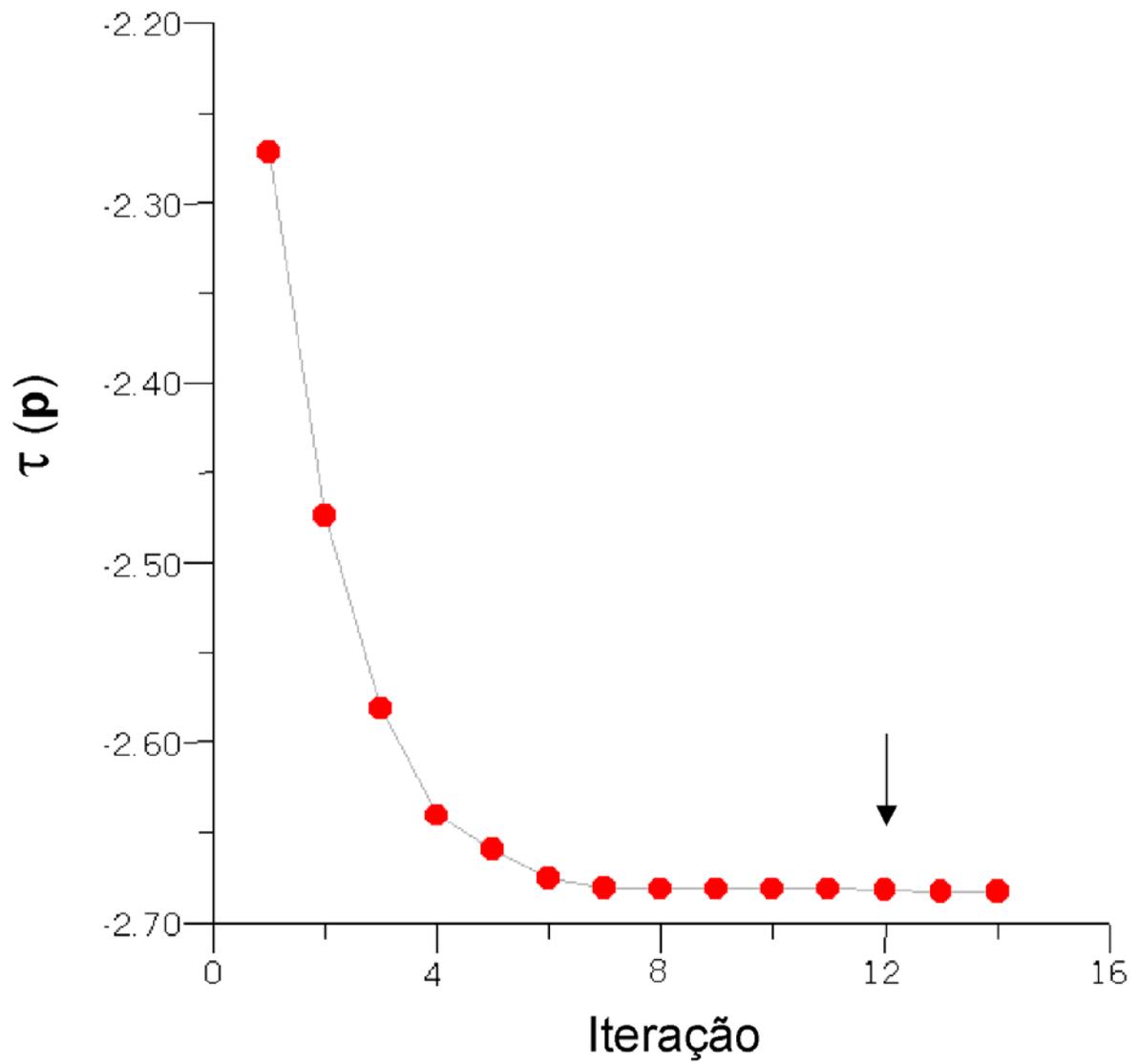


**Figura 4** – Corpos intrusivos próximos. Variação da função objeto  $\tau(\mathbf{p})$  ao longo das iterações. O critério de parada adotado interrompeu o processo na iteração 9 como indica a seta vertical.

Comparando as Figuras 3b e 3d notamos que as posições, as formas gerais dos corpos e seus contrastes de densidade são recuperadas com boa aproximação por ambos os métodos. No entanto, as bordas dos corpos são mais bem definidas no *método da máxima entropia de ordem zero combinado com a mínima entropia de ordem um*. (Figura 3d). Isto pode ser verificado pela comparação da projeção horizontal do corpo verdadeiro com o gradiente das curvas de isovalores do contraste de densidade estimado nos dois métodos. A regularização entrópica também melhor caracteriza a homogeneidade do corpo, o que é indicado pelo patamar das estimativas do contraste de densidade, situado em torno de  $0,3 \text{ g/cm}^3$  (vista em perspectiva da Figura 3d). A Figura 5 é semelhante à Figura 3, a única diferença sendo a contaminação da anomalia teórica com uma seqüência diferente de ruído pseudo-aleatório, indicando a estabilidade das soluções obtidas com ambos os métodos. Note, entretanto, o aparecimento de feições espúrias entre as estimativas de densidade dos dois corpos no caso da suavidade global (Figura 6b) causada por um resquício de instabilidade. Uma tentativa de estabilizar completamente a solução da suavidade global, no entanto degradaria ainda mais o delineamento das duas fontes, especialmente na região entre elas. A Figura 6 mostra a variação da função-objeto ao longo das iterações necessárias para a obtenção dos resultados mostrados na Figura 5.



**Figura 5** – Corpos intrusivos próximos. (a) Anomalias Bouguer observada, contaminada com a segunda seqüência de ruído pseudo-aleatório (linha contínua verde) e ajustada pela solução da suavidade global (linha tracejada preta). (b) Estimativa do contraste de densidade usando a suavidade global com  $\mu = 0,02$ . A linha contínua branca representa o contorno horizontal do corpo. (c) Anomalias Bouguer observada contaminada com a segunda seqüência de ruído pseudo-aleatório (linha contínua verde) e ajustada pela solução da regularização entrópica (linha tracejada preta). (d) Estimativa do contraste de densidade usando a regularização entrópica com  $\gamma_0 = 1,0$  e  $\gamma_1 = 0,5$ . A linha contínua branca representa o contorno horizontal do corpo.



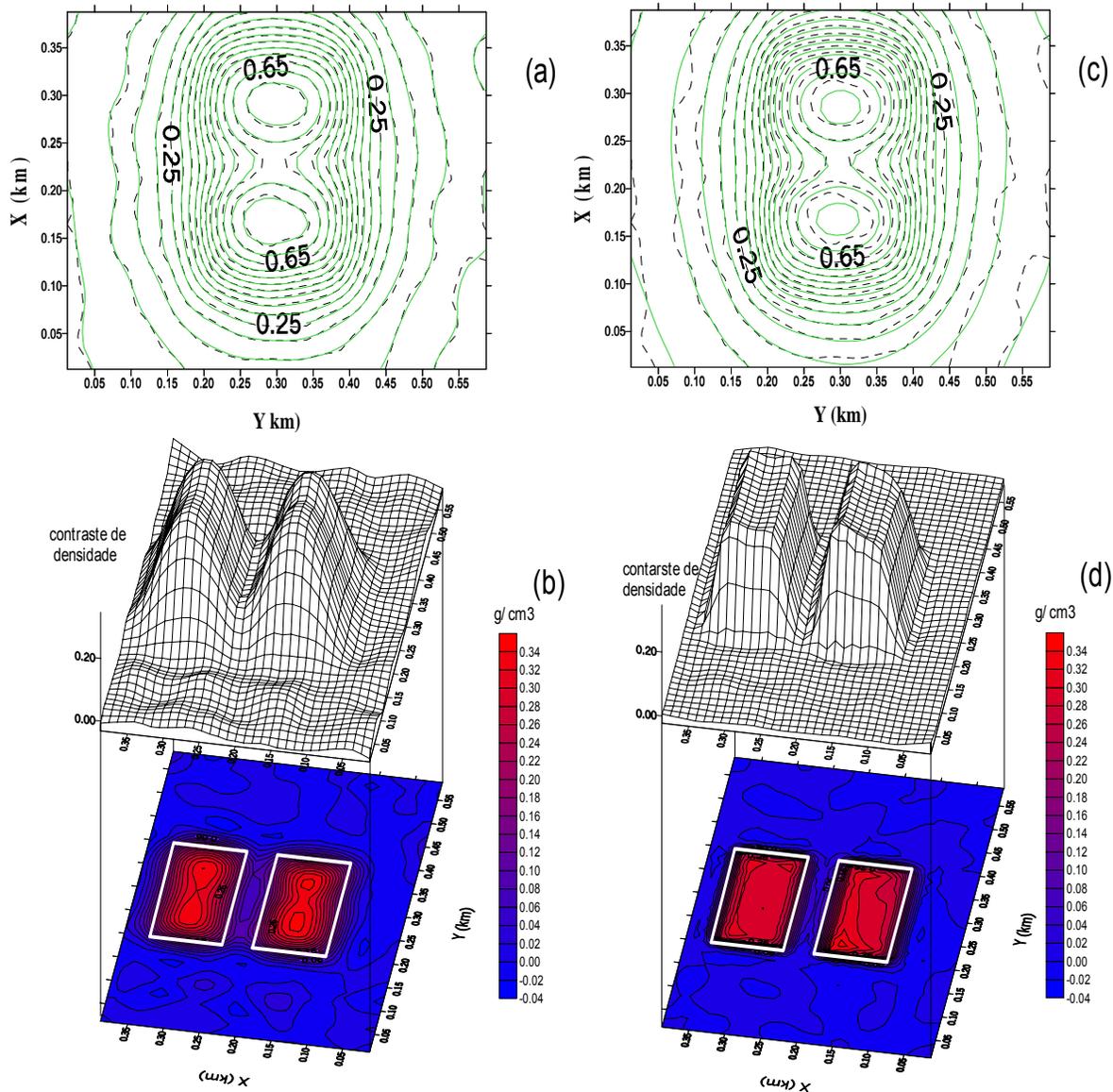
**Figura 6** – Corpos intrusivos próximos. Variação da função objeto  $\tau(\mathbf{p})$  ao longo das iterações. O critério de parada adotado interrompeu o processo na iteração 12 como indica a seta vertical.

### 3.2 EXPERIMENTO 2

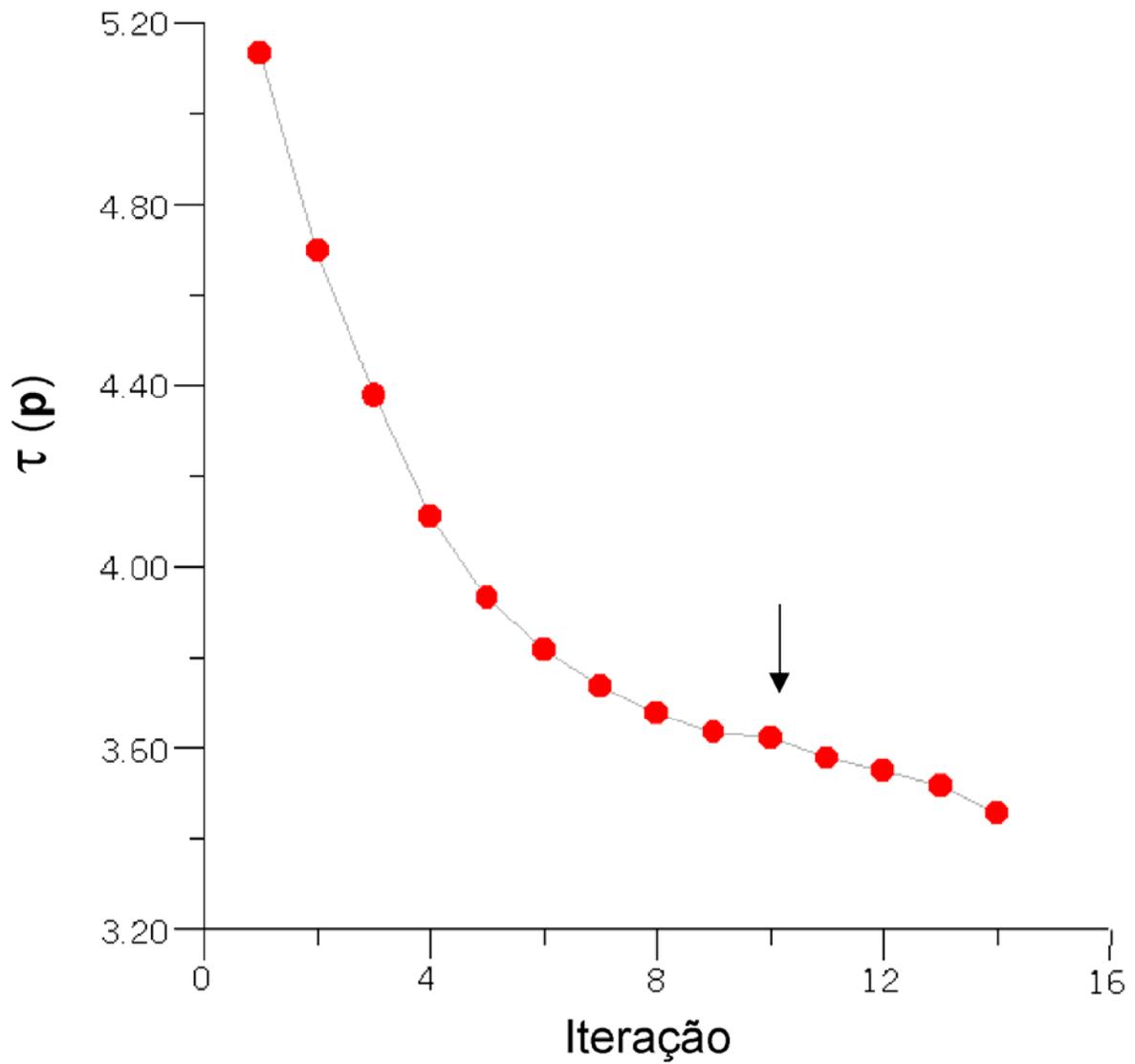
A Figura 7a mostra em linha contínua verde a anomalia Bouguer produzida por dois corpos prismáticos com seções horizontais mostradas na Figura 7b em linha branca espessa. Estes corpos têm seus topos e bases localizadas nas profundidades de 0,0105 km e 0,2105 km, respectivamente, e, em relação ao primeiro experimento, apresentam-se mais próximos entre si. Eles simulam intrusões de rochas ígneas com contraste de densidade uniforme de  $0,3 \text{ g/cm}^3$  em relação à rocha sedimentar circum-adjacente. Os dados teóricos foram contaminados com ruído pseudo-aleatório Gaussiano com média nula e desvio padrão de 0,01 mGal.

O modelo interpretativo, para este experimento, consiste de uma malha de  $16 \times 24$  prismas retangulares verticais nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, tendo cada prisma a mesma dimensão de 0,025 km ao longo de ambas as direções horizontais. O topo e a base do modelo interpretativo coincidem, respectivamente, com o topo e a base do corpo anômalo.

A Figura 7b apresenta curvas de isovalores e vista em perspectiva da estimativa da distribuição do contraste de densidade estabilizada com a suavidade espacial usando  $\mu=0,02$ . O campo ajustado é mostrado na Figura 7a em linha tracejada preta. A Figura 7c apresenta em linha verde contínua, a mesma anomalia da Figura 7a. A Figura 7d mostra em curvas de isovalores e em perspectiva a estimativa da distribuição do contraste de densidade usando como estabilizador a combinação da mínima entropia de ordem um e máxima entropia de ordem zero com  $\gamma_0=1,2$  e  $\gamma_1=2,1$ . A Figura 8 representa a variação da função objeto  $\tau(\mathbf{p})$  ao longo das iterações necessárias à obtenção da solução estabilizada pela regularização entrópica e indica o ponto de parada (seta vertical). Neste exemplo fica evidente que a iteração na qual o processo foi interrompido corresponde ao primeiro ponto de inflexão, formando antes dele um pequeno patamar. O campo ajustado é mostrado na Figura 7c em linha tracejada preta.

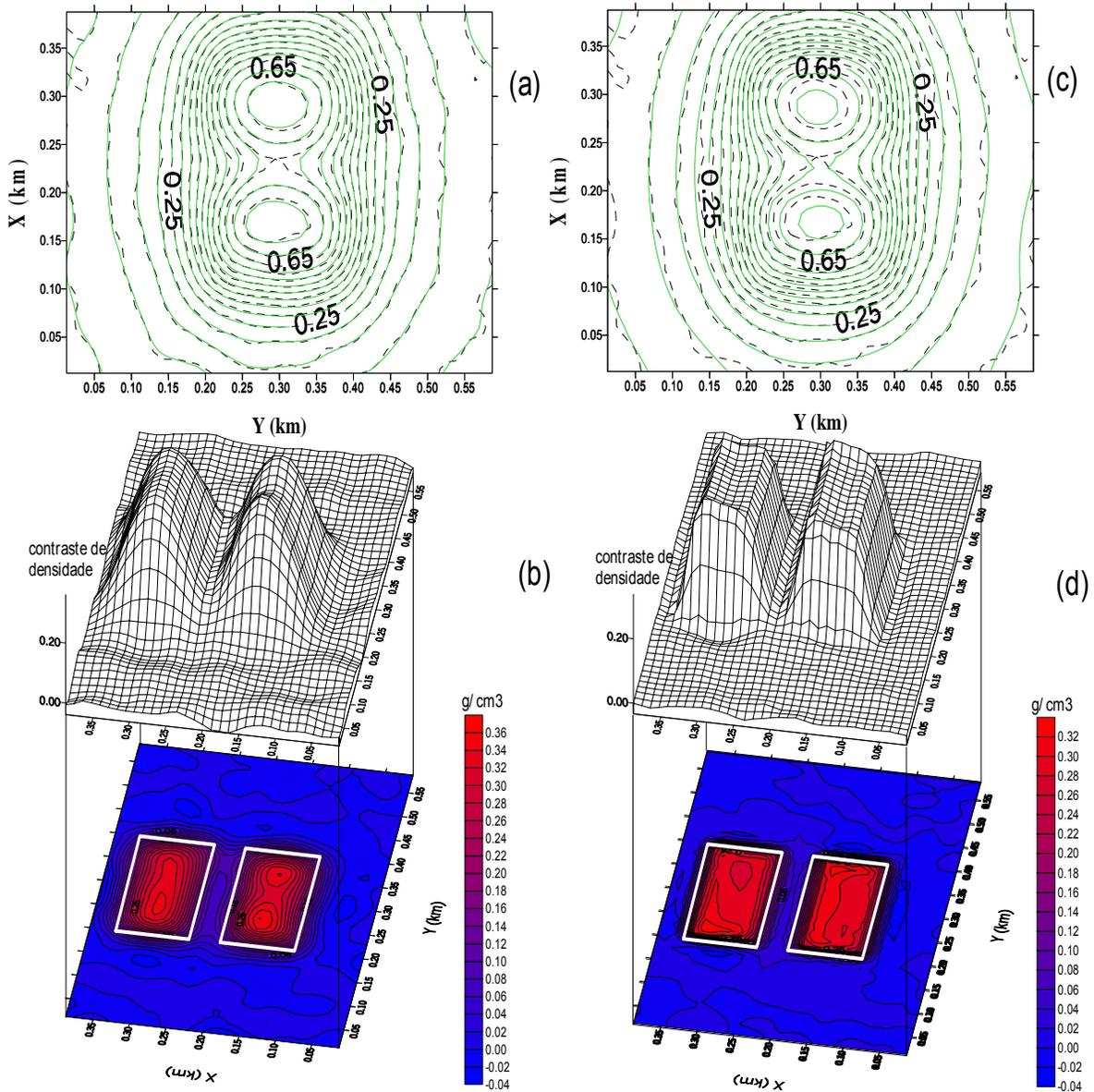


**Figura 7** - Corpos intrusivos muito próximos. (a) Anomalias Bouguer observada, contaminada com a primeira seqüência de ruído pseudo-aleatório (linha contínua verde) e ajustada pela solução da suavidade global (linha tracejada preta). (b) Estimativa do contraste de densidade usando a suavidade global com  $\mu = 0,02$ . A linha contínua branca representa o contorno horizontal do corpo. (c) Anomalias Bouguer observada, contaminada com a primeira seqüência de ruído pseudo-aleatório (linha contínua verde) e ajustada pela solução da regularização entrópica (linha tracejada preta). (d) Estimativa do contraste de densidade usando a regularização entrópica com  $\gamma_0 = 1,2$  e  $\gamma_1 = 2,1$ . A linha contínua branca representa o contorno horizontal do corpo.

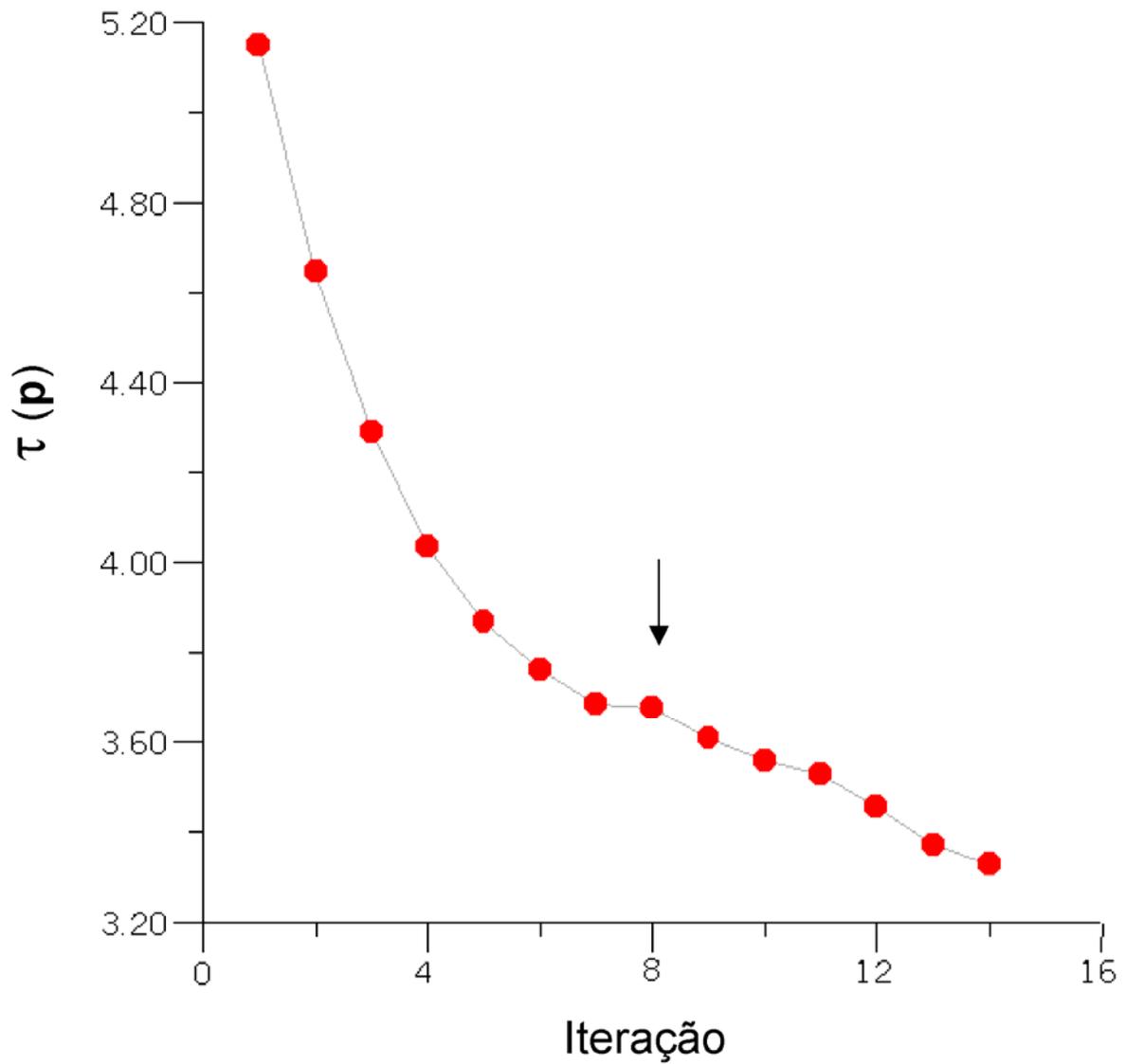


**Figura 8** – Corpos intrusivos muito próximos. Variação da função objeto  $\tau(\mathbf{p})$  ao longo das iterações. O critério de parada adotado interrompeu o processo na iteração 10 como indica a seta vertical.

As estimativas dos contrastes de densidades mostram que o *método da máxima entropia de ordem zero combinado com a mínima entropia de ordem um* apresenta um desempenho superior em relação ao método da suavidade na delimitação de corpos muito próximos entre si. Verifica-se que no método da suavidade as estimativas dos contrastes de densidade não definem muito bem os limites dos corpos havendo um acoplamento entre tais estimativas na região que separa os corpos, o que não ocorre com o método que utiliza a regularização entrópica, tendo em vista que as estimativas dos limites laterais dos corpos estão bem definidas possibilitando a distinção entre eles. Verificamos que a informação introduzida pelo *funcional da mínima entropia de ordem um* concentrou a propriedade física em um número menor de blocos, o que permitiu a estimação de mais blocos com contraste de densidade nulo entre os corpos, possibilitando dessa forma se obter uma estimativa com maior resolução dos limites laterais das fontes. Por outro lado o estimador da suavidade global apresenta uma resolução limitada entre os dois corpos. Podemos constatar este ganho de informação através da formação de uma "calha" mais profunda separando as estimativas do contraste de densidade de cada corpo (Figura 7d) em relação às correspondentes estimativas do contraste de densidade produzidas pelo método da suavidade. A Figura 9 é semelhante à Figura 7, a única diferença sendo a contaminação da anomalia teórica com uma sequência diferente de ruído pseudo-aleatório, indicando a estabilidade das soluções obtidas com ambos os métodos. A Figura 10 mostra a variação da função objeto ao longo das iterações e indica o ponto de parada (seta vertical).



**Figura 9** - Corpos intrusivos muito próximos. (a) Anomalias Bouguer observada, contaminada com a segunda seqüência de ruído pseudo-aleatório (linha contínua verde) e ajustada pela solução da suavidade global (linha tracejada preta). (b) Estimativa do contraste de densidade usando a suavidade global com  $\mu = 0,02$ . A linha contínua branca representa o contorno horizontal do corpo. (c) Anomalias Bouguer observada, contaminada com a segunda seqüência de ruído pseudo-aleatório (linha contínua verde) e ajustada pela solução da regularização entrópica (linha tracejada preta). (d) Estimativa do contraste de densidade usando a regularização entrópica com  $\gamma_0 = 1,2$  e  $\gamma_1 = 2,1$ . A linha contínua branca representa o contorno horizontal do corpo.



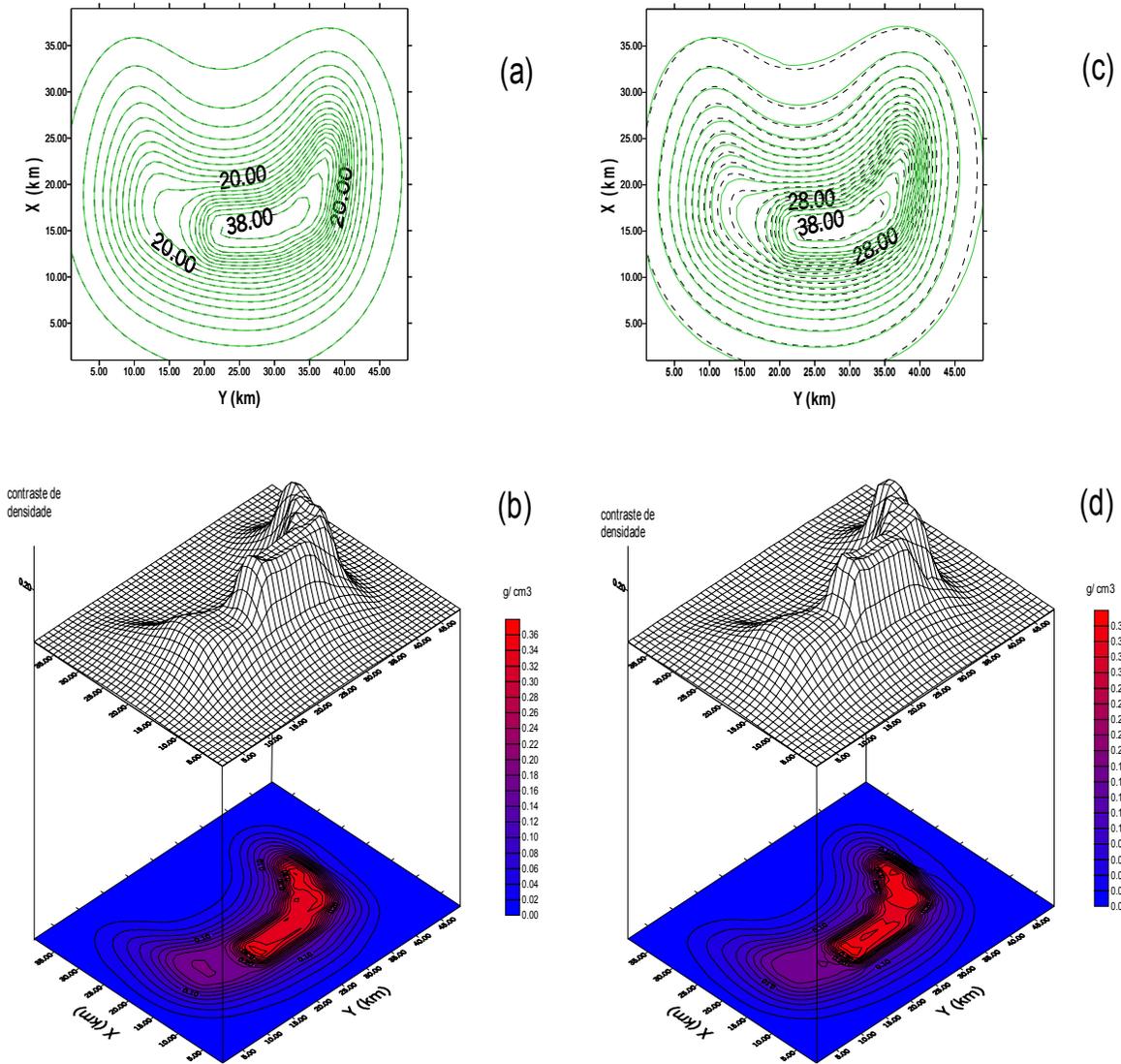
**Figura 10** - Corpos intrusivos muito próximos. Variação da função objeto  $\tau(\mathbf{p})$  ao longo das iterações. O critério de parada adotado interrompeu o processo na iteração 8 com o indica a seta vertical.

### 3.3 EXPERIMENTO 3

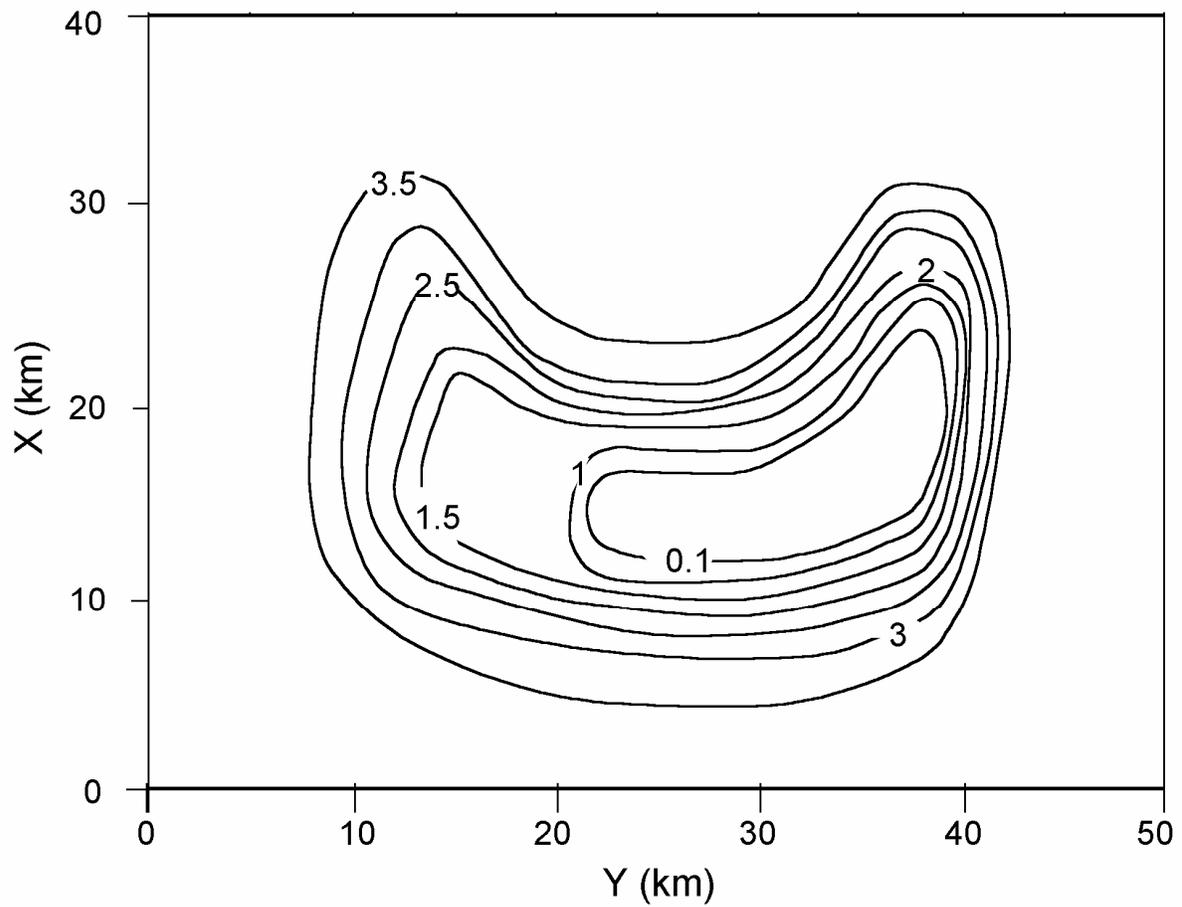
A Figura 11a mostra em linha contínua verde a anomalia Bouguer produzida por um corpo prismático cuja base é plana e horizontal e localizada a 4 km de profundidade, e cujo topo apresenta-se arqueado com concavidade para baixo (Figura 12). Este corpo simula uma intrusão de rocha ígnea com contraste de densidade uniforme de  $0,3 \text{ g/cm}^3$  em relação à rocha sedimentar circum-adjacente. Os dados teóricos foram contaminados com ruído pseudo-aleatório Gaussiano com média nula e desvio padrão de 0,1 mGal.

O modelo interpretativo para este experimento consiste de uma malha de  $20 \times 25$  prismas retangulares verticais nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, tendo cada prisma a mesma dimensão de 2 km ao longo de ambas as direções horizontais e topos e bases localizados às profundidades de 0.1 e 4 km, respectivamente.

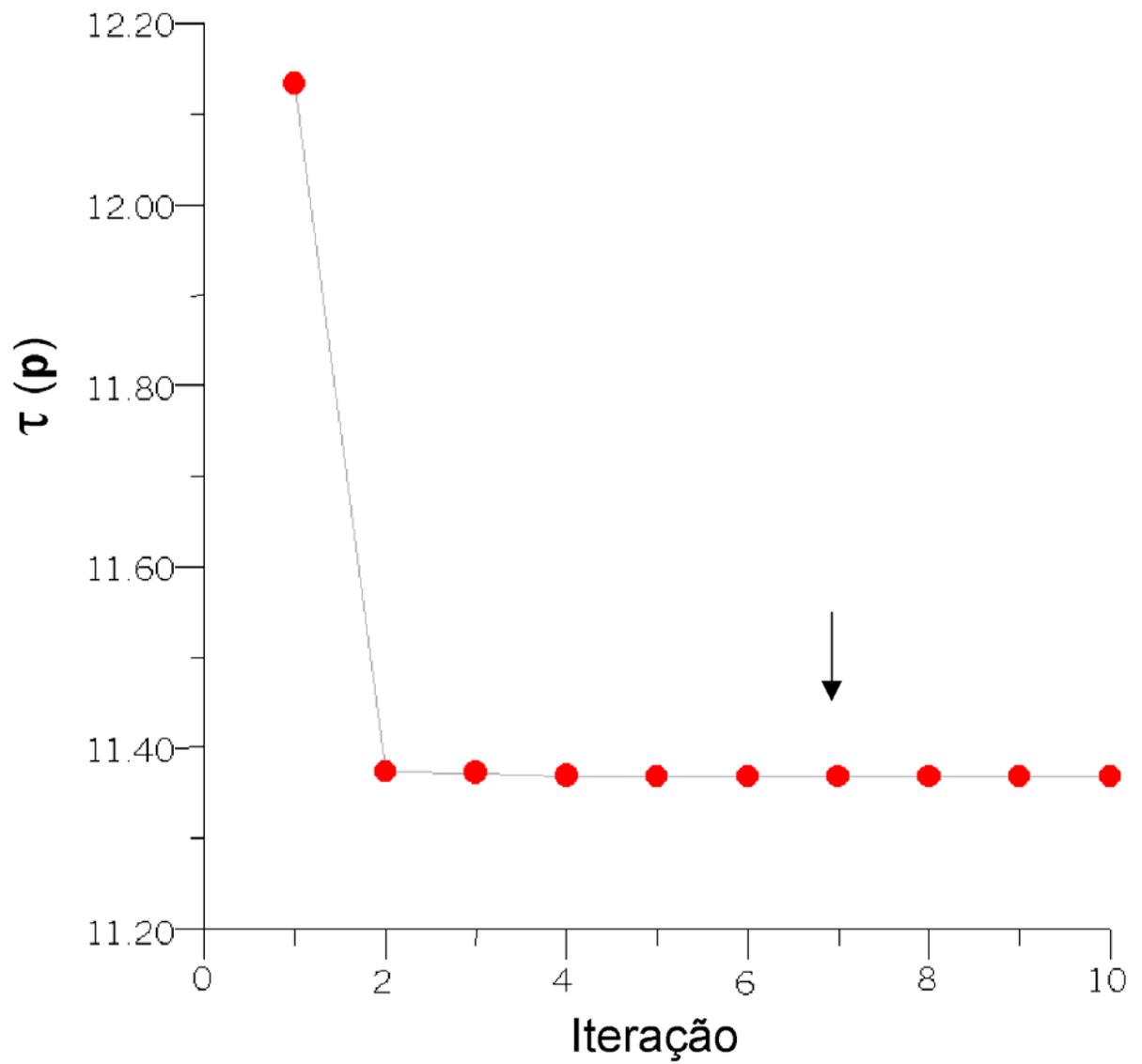
A Figura 11b apresenta curvas de isovalores e vista em perspectiva da estimativa da distribuição do contraste de densidade estabilizada com a suavidade espacial usando  $\mu=0,02$ . O campo ajustado é mostrado na Figura 11a em linha tracejada preta. A Figura 11c apresenta em linha verde contínua, a mesma anomalia da Figura 11a. A Figura 11d mostra em curvas de isovalores e em perspectiva a distribuição do contraste de densidade estimado usando como estabilizador a mínima entropia de ordem um  $\gamma_1=3,0$ . A Figura 13 mostra a variação da função objeto  $\tau(\mathbf{p})$  ao longo das iterações e indica o ponto de parada representado pela seta vertical. Neste caso a função  $\tau$  apresenta um pequeno desnível não perceptível graficamente, mas observado numericamente. O campo ajustado é mostrado na Figura 11c em linha tracejada preta.



**Figura 11** - Corpo intrusivo com topo arqueado. (a) Anomalias Bouguer observada, contaminada com a primeira seqüência de ruído pseudo-aleatório (linha contínua verde) e ajustada pela solução da suavidade global (linha tracejada preta). (b) Estimativa do contraste de densidade usando a suavidade global com  $\mu = 0,02$ . (c) Anomalias Bouguer observada, contaminada com a primeira seqüência de ruído pseudo-aleatório (linha contínua verde) e ajustada pela solução da regularização entrópica (linha tracejada preta). (d) Estimativa do contraste de densidade usando a regularização entrópica com  $\gamma_0 = 0$  e  $\gamma_1 = 3,0$ .

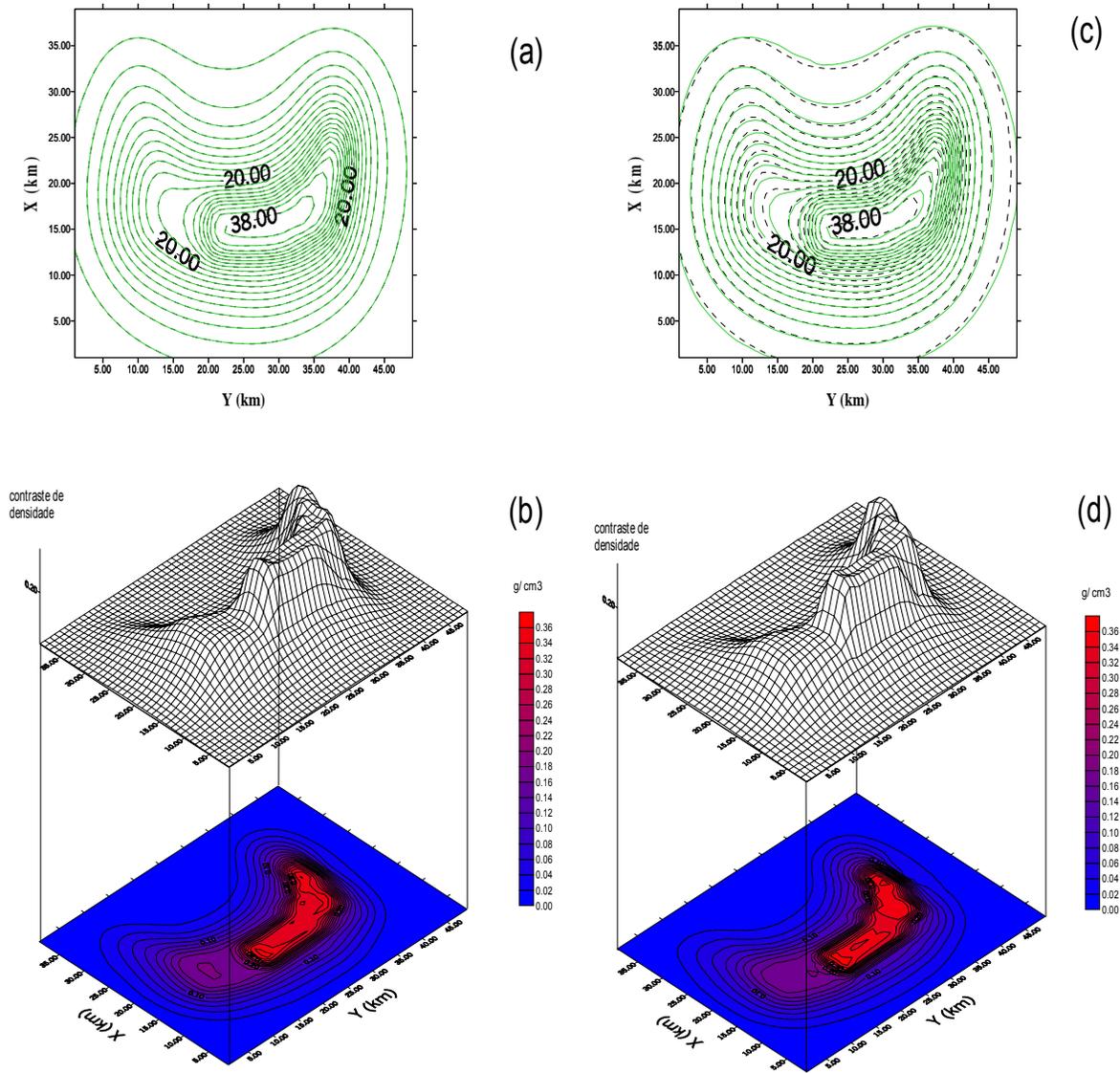


**Figura 12** – Corpo intrusivo com topo arqueado. Curvas de contorno da profundidade (em km) do topo do corpo intrusivo que gera os dados gravimétricos da Figura 11.

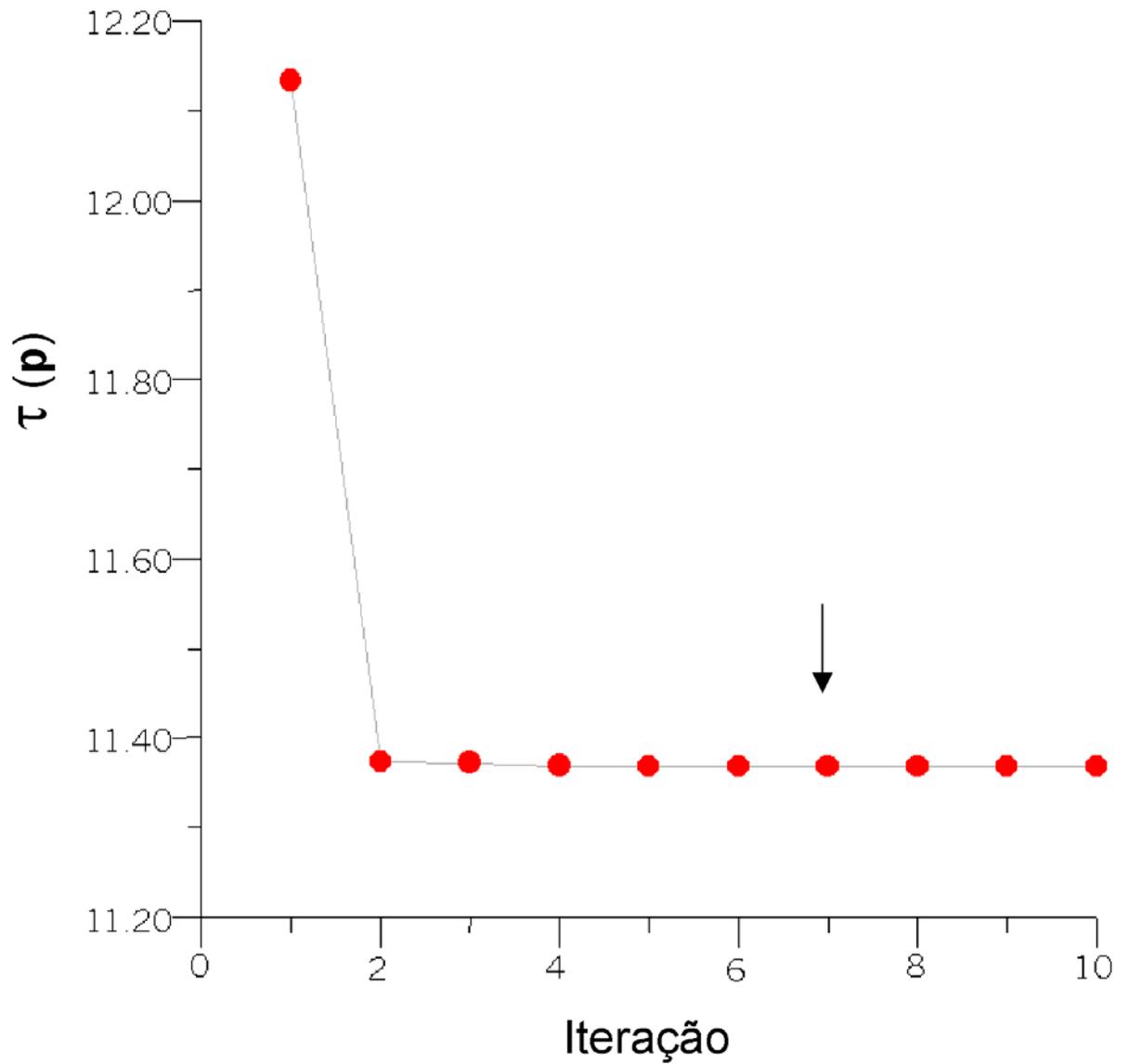


**Figura 13** - Corpo intrusivo com topo arqueado. Variação da função objeto  $\tau(\mathbf{p})$  ao longo das iterações. O critério de parada adotado interrompeu o processo na iteração 7 como indica a seta vertical.

Comparando as Figuras 11b e 11d notamos que as posições, as formas gerais dos corpos intrusivos e seus contrastes de densidade são recuperados igualmente bem por ambos os métodos. Além disso, constata-se que, tanto a solução apresentada pelo método da suavidade (Figura 11b) quanto à solução apresentada pelo método da mínima entropia de ordem um (Figura 11d), não apresentam diferença em relação à delimitação do contorno do corpo. Isto ocorre porque a condição do corpo possuir o topo plano e horizontal ao longo de toda sua extensão foi violada. Note também que a estimativa do contraste de densidade, tanto no caso da suavidade como no da regularização entrópica, não apresenta um valor constante. Assim, num problema prático a obtenção de resultados semelhantes produzidos pelos métodos da suavidade e da regularização entrópica, permite inferir que o corpo não possui topo plano. Os máximos das estimativas do contraste de densidade estão em torno de  $0.3 \text{ g/cm}^3$  (vistas em perspectiva das Figuras 11b e 11d). A Figura 14 é semelhante à Figura 11, a única diferença sendo a contaminação da anomalia teórica com uma seqüência diferente de ruído pseudo-aleatório, mostrando a estabilidade das soluções obtidas com ambos os métodos. A Figura 15 mostra a variação da função objeto ao longo das iterações e indica o ponto de parada (seta vertical).



**Figura 14** - Corpo intrusivo com topo arqueado. (a) Anomalias Bouguer observada, contaminada com a segunda seqüência de ruído pseudo-aleatório (linha contínua verde) e ajustada pela solução da suavidade global (linha tracejada preta). (b) Estimativa do contraste de densidade usando a suavidade global com  $\mu = 0,02$ . (c) Anomalias Bouguer observada, contaminada com a segunda seqüência de ruído pseudo-aleatório (linha contínua verde) e ajustada pela solução da regularização entrópica (linha tracejada preta). (d) Estimativa do contraste de densidade usando a regularização entrópica com  $\gamma_0 = 0$  e  $\gamma_1 = 3,0$ .



**Figura 15** - Corpo intrusivo com topo arqueado. Variação da função objeto  $\tau(\mathbf{p})$  ao longo das iterações. O critério de parada adotado interrompeu o processo na iteração 7 como indica a seta vertical.

## 4 APLICAÇÕES A DADOS REAIS

Para avaliar o desempenho do novo método de inversão gravimétrica proposto neste trabalho, ele foi aplicado a dois conjuntos de dados gravimétricos reais. O primeiro é proveniente da localidade de Matsitama, situada na Botswana, centro Sul da África (Reeves, 1985) e o segundo de Land's End, situada na Cornúlia, sudoeste da Inglaterra.

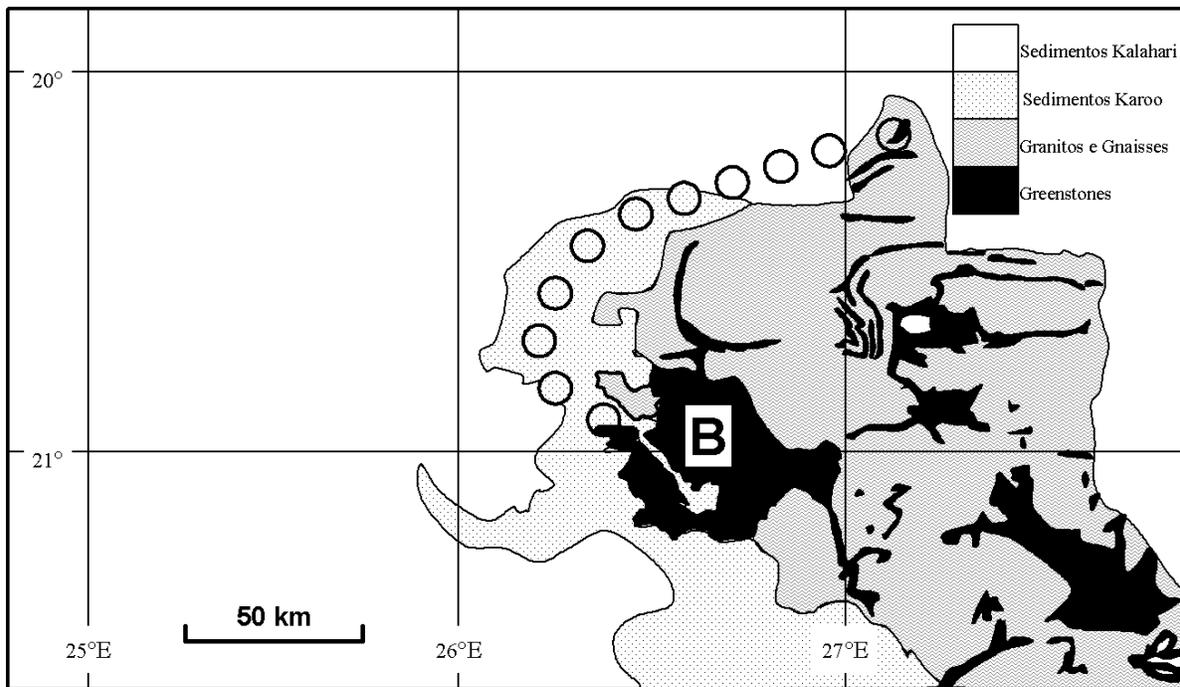
### 4.1 MATSITAMA

#### 4.1.1 Informações geológicas e geofísicas.

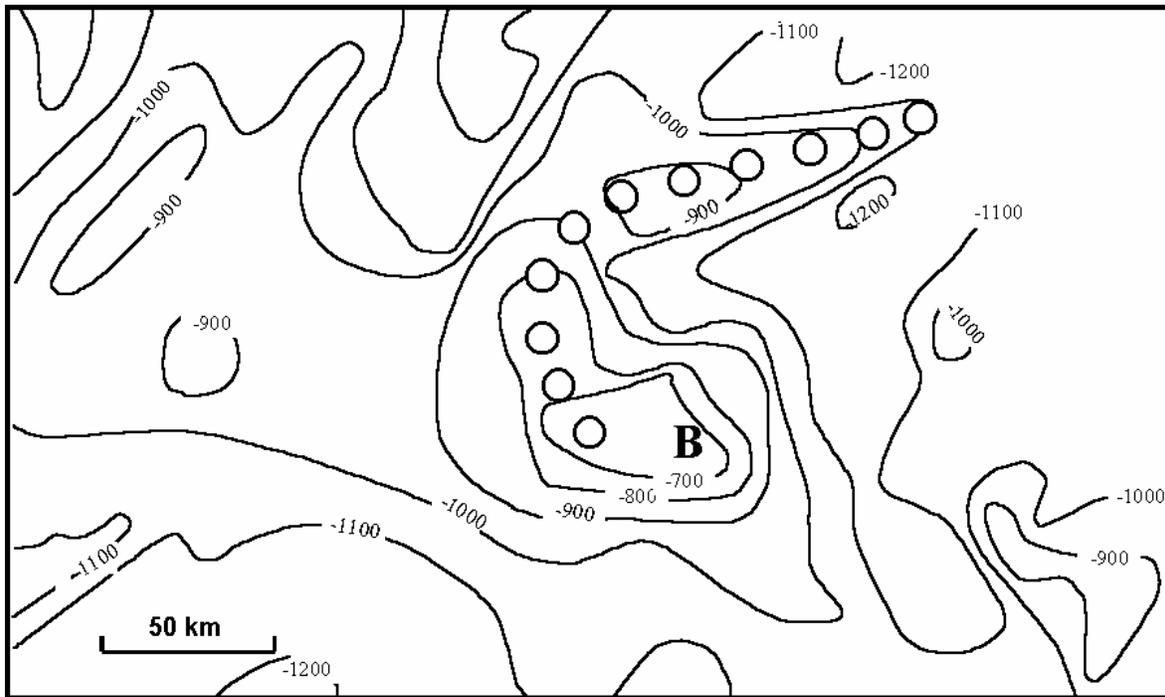
Botswana situa-se numa área de alto potencial mineralógico, onde o mapeamento geológico é dificultado pela existência de uma fina camada de rochas sedimentares (arenitos) provenientes de Kalahari e Karoo. Alguns levantamentos apontam para a existência de terrenos metamórficos pré-Cambrianos não expostos.

Em terrenos metamórficos pré-cambrianos ao redor do mundo, geofísicos têm localizado com sucesso depósitos economicamente importantes tanto de metais-base como de metais nobres em rochas vulcano-sedimentares do tipo “greenstone”, ocorrendo localmente entre granitos e gnaisses, sendo que estes últimos correspondem a 70 – 80 por cento de tais terrenos metamórficos pré-cambrianos, (Pretorius & Maske apud Reeves, 1985).

A Figura 16 é um mapa geológico do nordeste de Botswana na escala de 1:1000000, e a Figura 17 é o correspondente mapa da anomalia gravimétrica Bouguer na mesma escala, indicando que a alta proporção de minerais máficos nos “greenstone belts” produz um contraste de densidade positivo em relação às rochas graníticas circum-adjacentes, gerando, portanto, uma anomalia gravimétrica positiva. Nesta figura, o mais extensivo “greenstone belt” de Matsitama (B), torna-se progressivamente mascarado para oeste pelo capeamento dos sedimentos Kalahari e Karoo. A anomalia gravimétrica positiva acima desta feição indica que rochas densas se estendem para oeste. Nesta área foi confirmada a existência de rochas ultra-máficas pré-cambrianas através de um furo de sondagem raso para exploração de carvão realizado na cobertura sedimentar.



**Figura 16** – Mapa geológico simplificado do nordeste de Botswana. **B** assinala a região de rochas ígneas de Matsitama e sua extensão, presumivelmente coberta por uma camada de rochas mais novas, é inferida (círculos) pela inspeção do mapa de anomalia Bouguer mostrado na Figura 17. Segundo Reeves (1985).



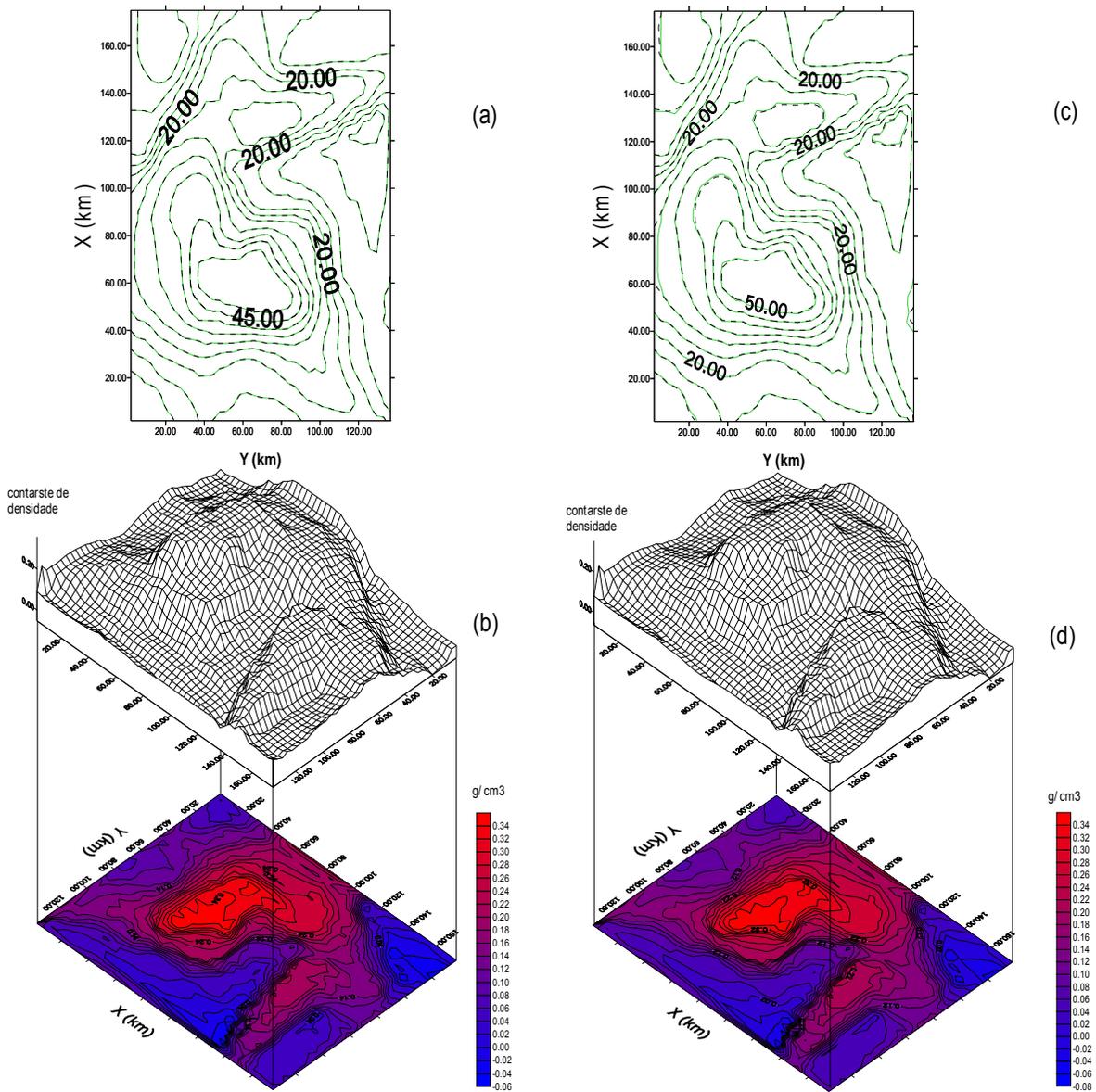
**Figura 17** – Anomalia gravimétrica Bouguer da área mostrada na Figura 16. As curvas de contorno têm intervalo de 10 mGal. Segundo Reeves (1985).

#### 4.1.2 Resultados.

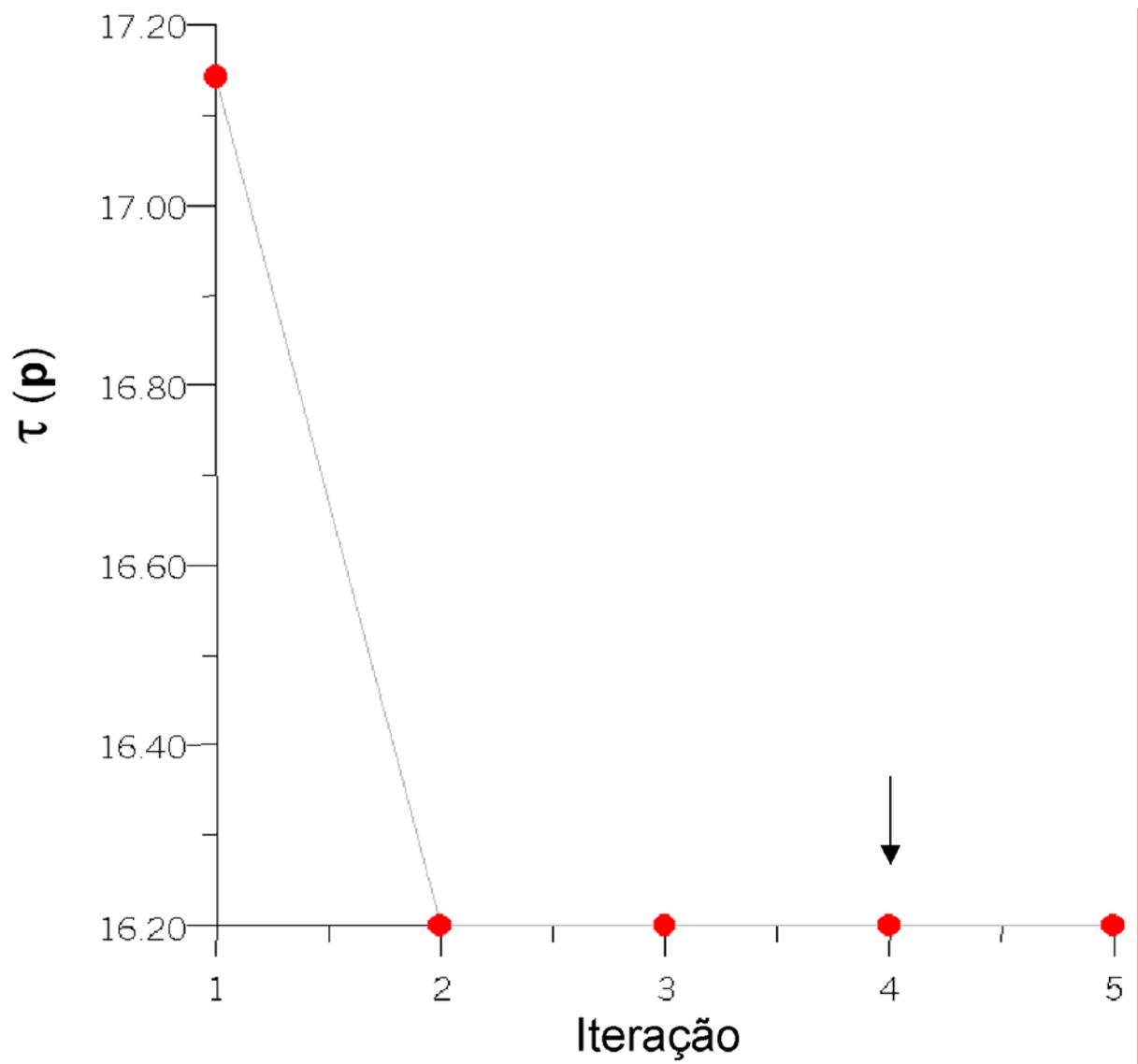
A Figura 18a mostra em linha contínua verde a anomalia Bouguer observada, presumivelmente produzida por um corpo intrusivo, que, de acordo com um furo de sondagem realizado na área, encontra-se localizado a uma profundidade de algumas dezenas de metros (localmente, o furo interceptou o corpo a cerca de 100 metros). A profundidade da base presumida para aplicação do método proposto (4 km) foi aquela que produziu estimativas de contraste de densidade aceitáveis para o corpo (no entorno de  $0,3 \text{ g/cm}^3$ ).

O modelo interpretativo, para este experimento, consiste de uma malha  $46 \times 36$  prismas retangulares verticais nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, tendo cada prisma a mesma dimensão de 3,85 km ao longo de ambas as direções horizontais e topos e bases localizados às profundidades de 0.1 e 4 km, respectivamente. A estimativa da profundidade da base do corpo em 4 quilômetros produziu estimativas para o contraste de densidade em torno de  $0.34 \text{ g/cm}^3$  (vista em perspectiva na figura 18d), o que é geologicamente factível para o contraste de propriedade física entre os greenstones e os sedimentos ou granitos.

A Figura 18b apresenta curvas de isovalores e vista em perspectiva da distribuição do contraste de densidade estimado usando como estabilizador a suavidade espacial com  $\mu=0,01$ . O campo ajustado é mostrado na Figura 18a em linha tracejada preta. A figura 18c apresenta em linha verde contínua, a mesma anomalia da Figura 18a. A Figura 18d mostra em curvas de isovalores e em perspectiva a distribuição do contraste de densidade estimado usando como estabilizador a combinação da mínima entropia de ordem um e máxima entropia de ordem zero com  $\gamma_0=0,01$  e  $\gamma_1=3,0$ . A Figura 19 mostra a variação da função objeto  $\tau(\mathbf{p})$  ao longo das iterações e indica a iteração em que o processo foi interrompido (seta vertical). O campo ajustado é mostrado na Figura 18c em linha tracejada preta.



**Figura 18** – Matsitama. (a) Anomalias Bouguer observada (linha contínua verde) e ajustada pela solução da suavidade global (linha tracejada preta). (b) Estimativa do contraste de densidade usando a suavidade global com  $\mu = 0,02$ . (c) Anomalias Bouguer observada (linha contínua verde) e ajustada pela solução da regularização entrópica (linha tracejada preta). (d) Estimativa do contraste de densidade usando a regularização entrópica com  $\gamma_0 = 0,01$  e  $\gamma_1 = 3,0$ .



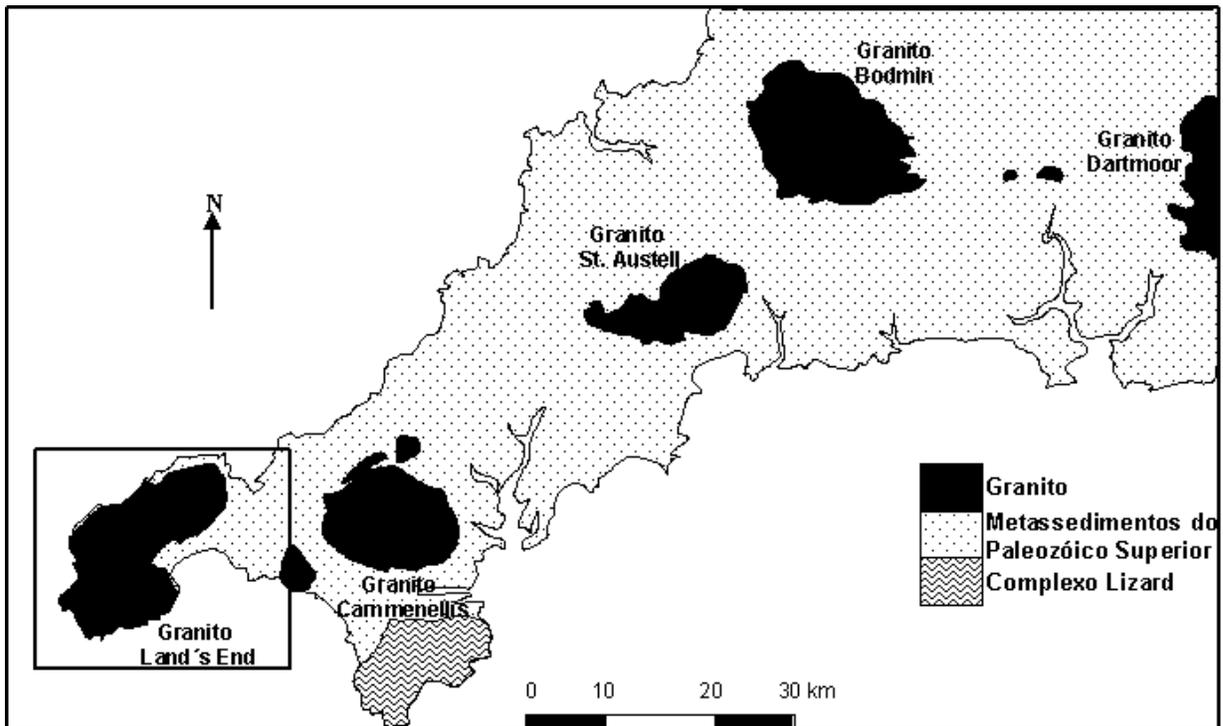
**Figura 19** – Matsitama. Variação da função objeto  $\tau(\mathbf{p})$  ao longo das iterações. O critério de parada adotado interrompeu o processo na iteração 4 como indica a seta vertical.

As Figuras 18b e 18d mostram que a posição, a forma geral do corpo intrusivo e seu contraste de densidade são recuperado com resultados semelhantes por ambos os métodos. Além disso, constata-se que, tanto a solução apresentada pelo método da suavidade (Figura 18b) quanto a solução apresentada pelo *método da máxima entropia de ordem zero combinado com a mínima entropia de ordem um* (Figura 18d), não apresentam diferença em relação á delineação do contorno do corpo. Com base em resultados semelhantes, obtidos no experimento 3 com dados sintéticos, inferimos que o topo do corpo causador da anomalia de Matsitama não é plano, como é constatado pelas informações geológicas, uma vez que apenas no ponto B o topo do corpo é exposto na superfície (ou muito próximo a ela), ao passo que no caminho dos círculos (Figura 16) o greenstone está coberto por sedimentos. Portanto, de acordo com as informações geológicas, podemos dizer que topo do greenstone está, pelo menos, em dois diferentes níveis de profundidade: exposto na superfície (B) e soterrado (trajetória dos círculos).

## 4.2 LAND'S END, CORNUÁLIA.

### 4.2.1 Informações geológicas e geofísicas.

O batólito de Cornubian está localizado no sudoeste da Inglaterra estendendo-se na direção do eixo da península por mais de 200 km e aflora em terra sob a forma de cinco plútons principais (de leste para oeste: Dartmoor, Bodmin Moor, St Austell, Carnmenellis and Land's End) e onze corpos intrusivos secundários de idade permiana inferior (Chen et al., 1993). Levantamentos gravimétricos realizados pelo Instituto de Oceanografia Bedford entre 1963 e 1965 indicam a extensão desse batólito por mais de 160 km em direção ao oceano, a oeste de Land's End (Figura 20). O batólito, de origem granítica penetra metassedimentos de baixo grau de idade devoniana e carbonífera inferior.

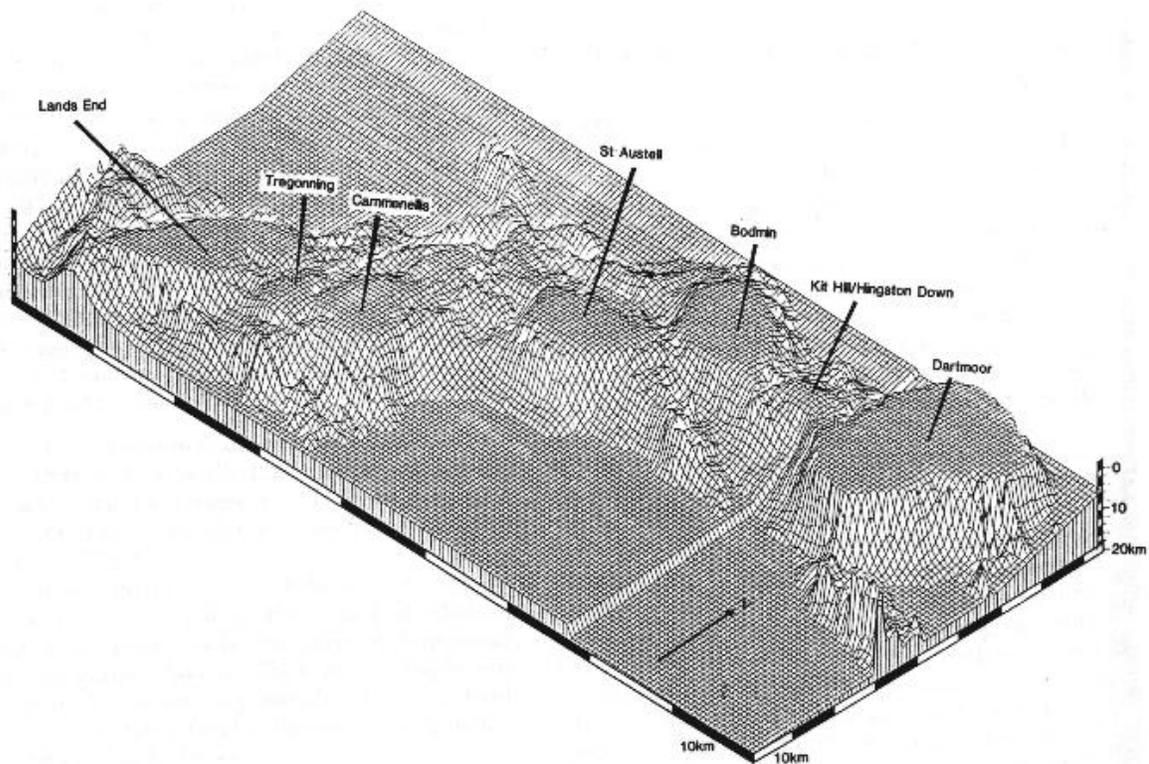


**Figura 20** - Mapa geológico simplificado da Cornuália, mostrando os afloramentos principais e secundários do batólito granítico de Cornubian. O retângulo mostra a área estudada.

O primeiro trabalho geofísico importante cobrindo a região da Cornuália foi o levantamento gravimétrico realizado com pêndulo por Bullard & Jolly (1936). Este levantamento estabeleceu o padrão das anomalias Bouguer (anomalias negativas acima dos afloramentos graníticos), mas tais dados não foram interpretados. A este trabalho seguiu-se um

grande levantamento gravimétrico no final da década de 50 cobrindo o sudoeste da Cornúlia (Bott et al., 1958).

Willis-Richards & Jackson (1989) propuseram um modelo para esse batólito com profundidade média da base em 13.5 km sob Land's End, Carnmenellis, St Austell e partes de Bodmin Moor. Este modelo é mostrado na Figura 21.



**Figura 21** – Vista em perspectiva isométrica da forma espacial do Batólito de Cornubian. Segundo Willis-Richards & Jackson (1989).

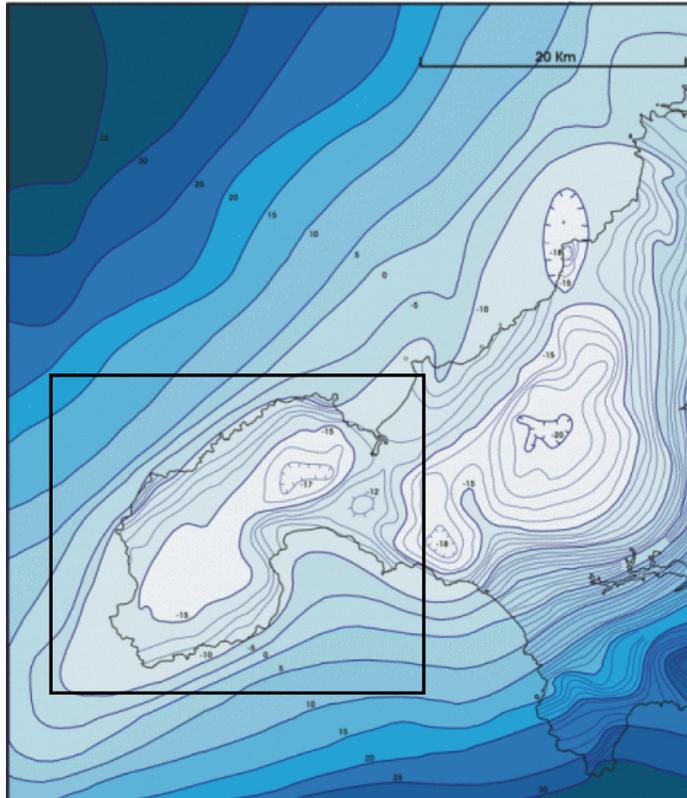
#### 4.2.2 Resultados.

A Figura 22 mostra os dados desse levantamento combinados com outros dados obtidos sobre a parte oceânica. A Figura 23a mostra em linha contínua verde a anomalia Bouguer, na área selecionada (retângulo preto na Figura 22), produzida pelo corpo ígneo intrusivo de Land's End. Este corpo, de acordo com informações provenientes da geologia, aflora e possui a superfície do topo plana, o que significa que este corpo intrusivo apresenta as condições necessárias para a aplicação do método de inversão proposto neste trabalho. A informação geológica que o topo está aflorando, é extremamente importante para se estimar a profundidade da base do corpo. Esta estimativa é obtida escolhendo a profundidade da base do modelo interpretativo que produza estimativas geologicamente razoáveis para o contraste de densidade, uma vez que a profundidade do topo considerada é de zero quilômetro levando em conta a condição do corpo aflorar.

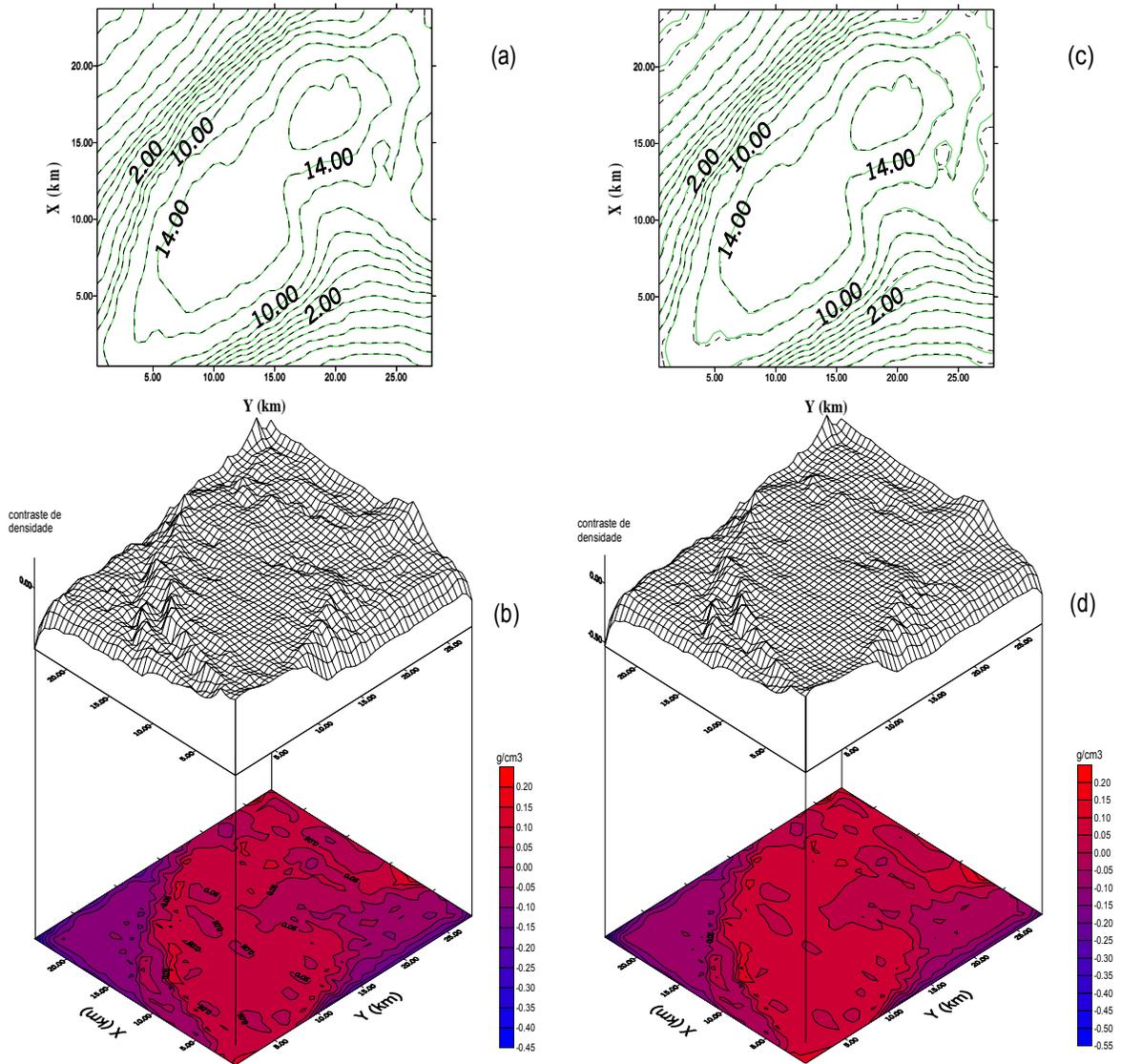
O modelo interpretativo, para este experimento, consiste de uma malha de 29 x 34 prismas retangulares verticais nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, tendo cada prisma a mesma dimensão de 0,833 km ao longo de ambas as direções horizontais e topos e bases localizados às profundidades de 0 e 20 km, respectivamente. A profundidade da base do corpo ígneo intrusivo foi estabelecido em 20 quilômetros, de forma a produzir estimativas para o contraste de densidade em torno de 0,2 g/cm<sup>3</sup>, o que é geologicamente razoável, uma vez que o modelo produzido por Willis-Richards & Jackson (1989), visto anteriormente, determinou uma estimativa para o contraste de densidade em torno de 0.1-0.15 g/cm<sup>3</sup> e uma profundidade para a base em torno de 13.5 quilômetros para o corpo.

A Figura 23b apresenta curvas de isovalores e vista em perspectiva da estimativa da distribuição do contraste de densidade estabilizada com a suavidade espacial usando  $\mu=0,00001$ . O campo ajustado é mostrado na Figura 23a em linha tracejada preta. A figura 23c apresenta em linha verde contínua, a mesma anomalia da Figura 23a. A Figura 23d mostra em curvas de isovalores e em perspectiva a estimativa da distribuição do contraste de densidade estabilizada com a combinação da mínima entropia de ordem um e máxima entropia de ordem zero com  $\gamma_0=0,001$  e  $\gamma_1=0,7$ . A Figura 24 mostra a variação da função objeto  $\tau(\mathbf{p})$  ao longo

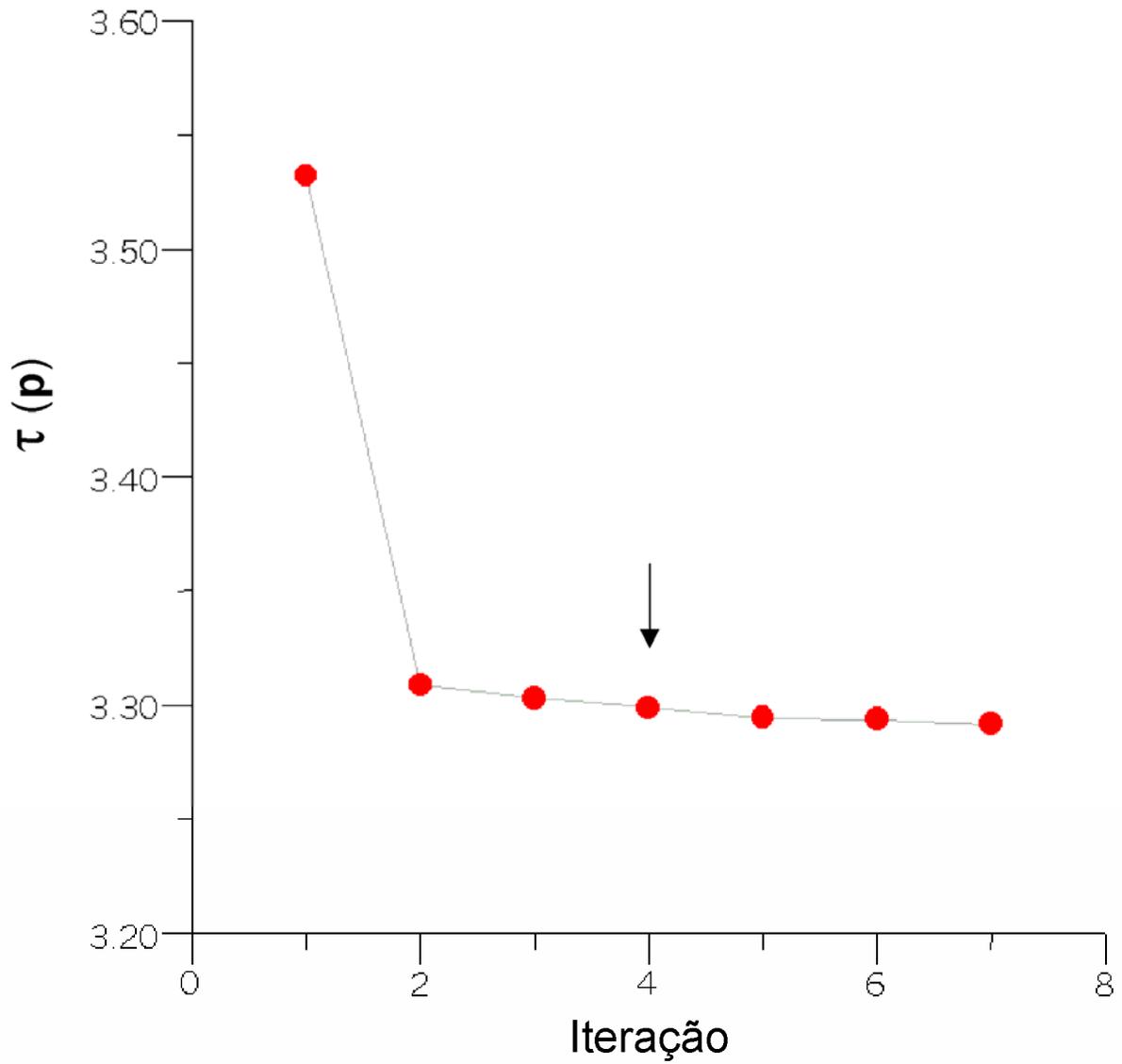
das iterações e indica o ponto de parada representado pela seta vertical. O campo ajustado é mostrado na Figura 23c em linha tracejada preta.



**Figura 22** - Mapa de anomalia Bouger do sudoeste da Cornuália (Bott et al., 1958 e outros levantamentos marinhos). O retângulo preto limita a área utilizada para a inversão. Os intervalos de contorno são de 5 mGal sobre o oceano e 1 mGal sobre o continente.



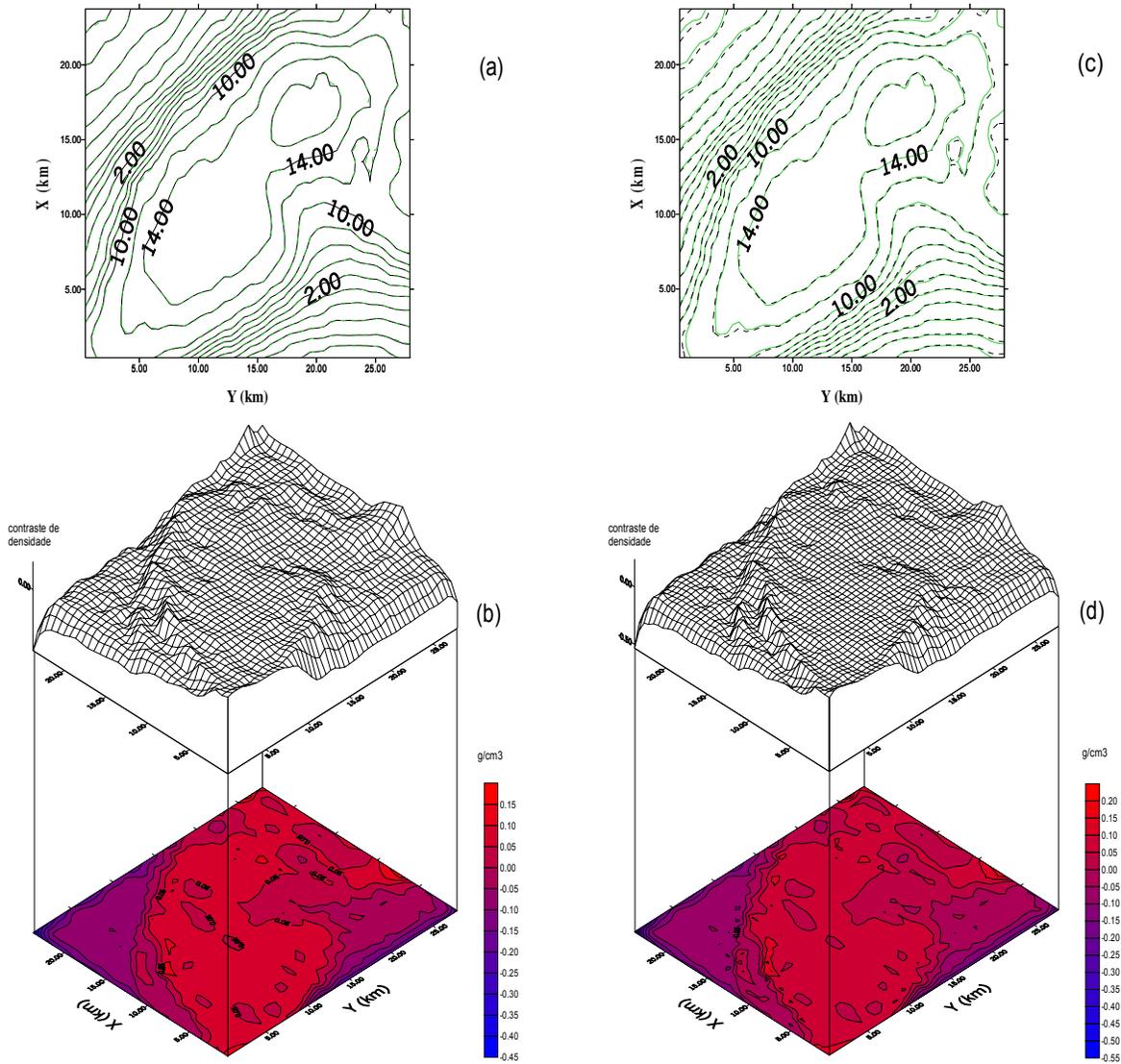
**Figura 23** – Land's End. (a) Anomalias Bouguer observada (linha contínua verde) e ajustada pela solução da suavidade global (linha tracejada preta). (b) Estimativa do contraste de densidade usando a suavidade global com  $\mu=0,00001$ . (c) Anomalias Bouguer observada (linha contínua verde) e ajustada pela solução da regularização entrópica (linha tracejada preta). (d) Estimativa do contraste de densidade usando a regularização entrópica com  $\gamma_0=0,001$  e  $\gamma_1=0,7$ .



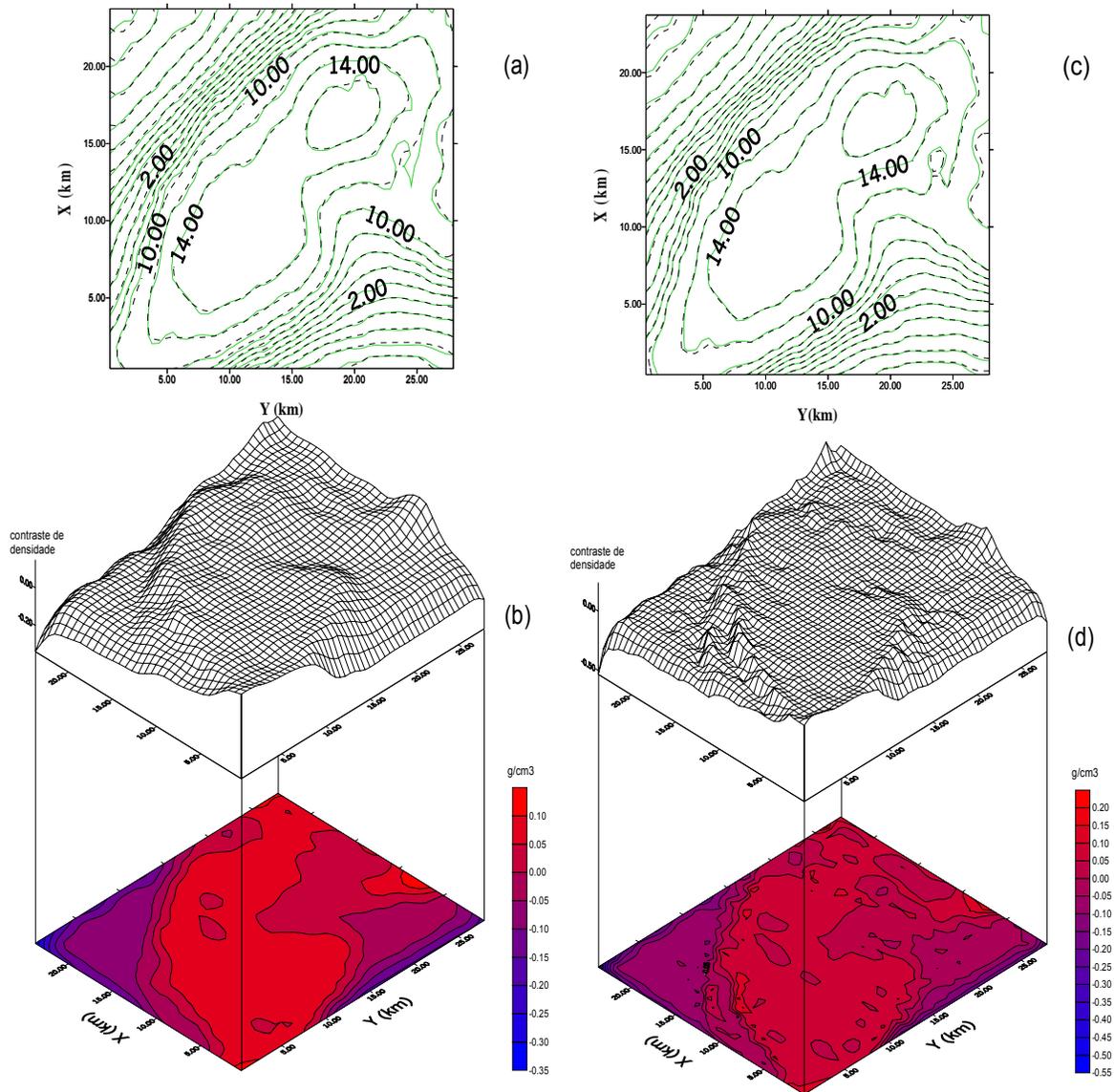
**Figura 24** - Land's End. Variação da função objeto  $\tau(\mathbf{p})$  ao longo das iterações. O critério de parada adotado interrompeu o processo na iteração 4 como indica a seta vertical.

Comparando as Figuras 23b e 23d notamos que a superfície representando a estimativa da distribuição espacial de contraste de densidade é mais suave na solução apresentada pelo método da máxima entropia de ordem zero combinado com a mínima entropia de ordem um (Figura 23d) do que na solução apresentada pelo método da suavidade. Observe que a solução da Figura 23d não apresenta estruturas em forma de pequenos pináculos. Esta diferença é melhor evidenciada na vista em perspectiva dessas duas figuras. Fica, assim, melhor caracterizada a homogeneidade do corpo pela regularização entrópica, indicada pelo patamar das estimativas do contraste de densidade em torno de  $0,2 \text{ g/cm}^3$  (vista em perspectiva da Figura 26d).

Para comprovar que a maior suavidade da superfície representando a estimativa da distribuição espacial de contraste de densidade apresentada pelo método da suavidade não é devida à instabilidade nem à escolha conservativa do parâmetro de estabilização  $\mu$ , mostramos nas Figuras 25b e 26b e as estimativas da distribuição espacial de contraste de densidade produzidos pelo método da suavidade usando  $\mu=20$  e  $\mu=250$ . Note a progressiva perda de resolução na estimativa da borda do corpo intrusivo sem que as irregularidades do topo da superfície representando a estimativa da distribuição espacial de contraste de densidade se tornem tão pequenas como aquelas produzidas pela regularização entrópica (Figuras 23d, 25d e 26d). Este resultado está de acordo com aqueles obtidos em testes com dados sintéticos em que as estimativas da distribuição espacial de contraste de densidade, produzidas pelo método da regularização entrópica, são mais próximas de um valor constante, do que as estimativas produzidas pelo método da suavidade quando o corpo verdadeiro é homogêneo e apresenta topo e base planos e horizontais (V. Figura 4, por exemplo). As informações geológicas confirmam que o topo do corpo é plano e que as variações do contraste de densidade são pequenas. Esta aplicação mostra que essas informações, caso não fossem disponíveis, poderiam ser inferidas através da comparação dos resultados produzidos pelos métodos da suavidade e da regularização entrópica.



**Figura 25** - Land's End. (a) Anomalias Bouguer observada (linha contínua verde) e ajustada pela solução da suavidade global (linha tracejada preta). (b) Estimativa do contraste de densidade usando a suavidade global com  $\mu = 20$ . (c) Anomalias Bouguer observada (linha contínua verde) e ajustada pela solução da regularização entrópica (linha tracejada preta). (d) Estimativa do contraste de densidade usando a regularização entrópica com  $\gamma_0 = 0,001$  e  $\gamma_1 = 0,7$ .



**Figura 26** - Land's End. (a) Anomalias Bouguer observada (linha contínua verde) e ajustada pela solução da suavidade global (linha tracejada preta). (b) Estimativa do contraste de densidade usando a suavidade global com  $\mu = 250$ . (c) Anomalias Bouguer observada (linha contínua verde) e ajustada pela solução da regularização entrópica (linha tracejada preta). (d) Estimativa do contraste de densidade usando a regularização entrópica com  $\gamma_0 = 0,001$  e  $\gamma_1 = 0,7$ .

## 5 CONCLUSÕES

Apresentamos uma nova técnica de inversão gravimétrica estável para mapeamento de corpos homogêneos, baseada na combinação da maximização da medida de entropia de ordem zero com a minimização da medida de entropia de ordem um, que favorece soluções consistindo de regiões localmente suaves separadas por descontinuidades abruptas. O critério de parada adotado é baseado na segunda diferença discreta da função-objeto ao longo das iterações. O processo iterativo é interrompido quando a função objeto  $\tau(\mathbf{p})$  encontra o término do primeiro patamar aproximadamente horizontal ao longo das iterações. Este ponto de parada é determinado pela posição em que a segunda diferença discreta da função-objeto ao longo das iterações apresenta uma mudança de sinal. Este critério foi desenvolvido nesse trabalho especialmente para a minimização da função-objeto envolvendo medidas de entropia e difere substancialmente do critério usual para minimização de funções não lineares comumente usadas em Geofísica.

O desempenho do método foi avaliado através de testes com dados sintéticos simulando corpos intrusivos. A comparação com o método da suavidade mostrou que, no caso da fonte apresentar topo plano e horizontal, as posições, as formas gerais dos corpos e seus contrastes de densidade são recuperados com boa aproximação por ambos os métodos. No entanto, as bordas dos corpos são mais bem definidas no *método da máxima entropia de ordem zero combinada com a mínima entropia de ordem um*, observando-se uma melhor resolução nos limites laterais e uma melhor caracterização da homogeneidade do corpo, indicada por um patamar mais bem definido nas estimativas do contraste de densidade. O desempenho do método foi testado também em situações em que ocorre a violação da premissa que o corpo verdadeiro tenha topo plano e horizontal. Observou-se que nessa situação, ambos os métodos produzem resultados muito próximos entre si.

O método foi aplicado a dados gravimétricos reais de duas áreas: a primeira localizada na região de Matsitama no nordeste de Botswana, centro Sul da África e a segunda localizada na região da Cornuália, no sudoeste da Inglaterra com o objetivo de se delinear fontes intrusivas que, no primeiro caso, estão associadas a corpos mineralizados. Os resultados mostraram que, na área de Matsitama, os métodos da regularização entrópica e da suavidade apresentaram resultados semelhantes permitindo concluir que os corpos causadores da anomalia possuem

topo arqueado ou topo em diferentes níveis de profundidade. No corpo intrusivo de Land's End, na Cornuália, a sensível diferença observada entre os resultados produzidos pelos dois métodos permitiu concluir que o corpo intrusivo apresenta topo plano e é aproximadamente homogêneo. As informações geológicas confirmaram esta conclusão.

A combinação judiciosa da maximização da entropia de ordem zero com a minimização da entropia de primeira ordem se fez necessária nesse trabalho em virtude da necessidade de se obter simultaneamente uma solução estável e com boa resolução, pois a maximização da entropia de ordem zero introduz a informação que distribuição espacial da propriedade física estimada pelo modelo interpretativo deve ser globalmente suave enquanto a minimização da medida de entropia de ordem um estabelece a possibilidade de descontinuidades locais na estimativa da distribuição discreta de propriedade física. Esta é uma diferença em relação à aplicação do mesmo método a dados magnetotélúricos (Campos Velho & Ramos, 1997), em que a combinação da maximização da entropia de ordem zero com a minimização da entropia de ordem um produziu um resultado levemente inferior àquele obtido com a minimização apenas da entropia de ordem um.

A interpretação de dados geofísicos tem sido de fundamental importância para a determinação de alvos exploratórios. Conhecendo-se os problemas envolvidos na interpretação devido à instabilidade e à não-unicidade do problema inverso, o melhor caminho tem sido a utilização dos métodos de regularização que permitam a incorporação de informações quantitativas e qualitativas provenientes da geologia. O método apresentado permite melhor delineamento de corpos intrusivos no plano horizontal, contribuindo assim como uma ferramenta auxiliar no mapeamento geológico.

O método pode ser facilmente adaptado para interpretar o relevo descontínuo de bacias sedimentares em cuja formação predominaram esforços de extensão, tais como as bacias costeiras brasileiras.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARD, Y. 1974. *Nonlinear parameter estimation*. Academic Press Inc.
- BOTT, M.H.P.; DAY, A.A.; MASSON-SMITH, D. 1958. The geological interpretation of gravity and magnetic surveys in Devon and Cornwall. *Philosophical Transactions of the Royal Society, (A)*, **251**: 161-191.
- BULLARD, E. C. & JOLLY, H. L. P. 1936. Gravity measurements in Great Britain. Mon. Not. Royal Astrological Society, *Geophysics Supplement*, **3**: 443-477.
- CAMPOS VELHO, H. F. & RAMOS, F. M. 1997. Numerical Inversion of Two-Dimensional Geoelectric Conductivity Distributions From Eletromagnetic Ground Data. *Revista Brasileira de Geofísica*, **15**: 133-144.
- CHEN, Y.; CLARK, A.H.; FARRAR, E.; WASTENEYS, H.A.H.P.; HODGSON, M.J.; BROMLEY, A.V. 1993. Diachronous and independent histories of plutonism and mineralisation in the Cornubian Batholith, southwest England. *Journal of the Geological Society*, London, **150**: 1183-1191.
- GILL, P. E.; MURRAY, W.; WRIGHT, M. H. 1981. *Practical Optimization*. Academic Press.
- GUPTA, V. K. & GRANT, F. S. 1985. Minearal-exploration asécts of gravity and aeromagnetic surveys in the Sudbury-Cobalt area, Ontario. In HINZE, W. J. *The utility of regional gravity and magnetic anomaly maps*. Tulsa, Society of Exploration Geophysicists. 393-412.
- HADAMARD, J. 1902. Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Bull Princeton Univ.*, **13**: 1-20.
- JAYNES, E.T. 1957. Information Theory and Statistical Mechanics, *Physical Review*, **106**: 620-630.
- MAAS, M. V. R.; OLIVEIRA, C. G.; PIRES, A. C. B.; MORAES, R. A. V. 2003. Airbone geophysics applied to mineral exploration and geological mapping in the southwest sector of Orós-Jaguaribe copper belt, northeastern Brazil. *Revista Brasileira de Geociências*, **33**: 279-288.

- MEDEIROS, W. E. & SILVA, J. B. C. 1996. Geophysical inversion using approximate equality constraints. *Geophysics*, **61**: 1678–1688.
- RAMOS, F. M. & CAMPOS VELHO, H.F. 1996. Reconstruction of Geoelectric Conductivity Distributions Using a Minimum First-Order Entropy Technique. *In: International Conference on Inverse Problems on Engineering, 2., Le Croisic, France. V.2*: 199-206.
- RAMOS, F. M.; CAMPOS VELHO, H. F.; CARVALHO, J. C.; FERREIRA, N. J. 1999. Novel Approaches on Entropic Regularization. *Inverse Problems*, **15**: 1139 – 1148.
- REEVES, C.V. 1985. *The Kalahari desert, Central Sour then Africa: a case history of regional gravity and magnetic exploration*: Society Exploration Geophysicists. 144 -153.
- SHANNON, C. E. & WEAVER, W. 1949. *The Mathematical Theory of Communication*, Urbana, Univ. of Illinois Press.
- SILVA, J. B. C. & HOHMANN, G. W. 1984. Airborne magnetic susceptibility mapping. *Exploration Geophysics*, **15**: 1-13.
- TIKHONOV, A. N. & ARSENIN, V. Y. 1977. *Solutions of ill-posed problems*. V. H. Winston & Sons.
- WILLIS-RICHARDS, J. & JACKSON, N.J. 1989. Evolution of the Cornubian Ore Field, southwest England: part 1. Batholith modelling and ore distribution. *Economic Geology*, **84**: 1078-1100.