



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**MIGRAÇÃO FD e FFD COM APROXIMAÇÕES DE GRANDE
ABERTURA ANGULAR**

DANIELA RÊGO AMAZONAS

BELÉM
2007



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

DANIELA RÊGO AMAZONAS

MIGRAÇÃO FD e FFD COM APROXIMAÇÕES DE GRANDE
ABERTURA ANGULAR

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Geofísica da Universidade Federal do Pará, para obtenção do título de Mestre em Geofísica.

Área de Concentração :
Métodos Sísmicos

Orientador: **JESSÉ CARVALHO COSTA**

BELÉM
2007

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação(CIP)
Biblioteca Geól. Rdº Montenegro G. de Montalvão

A489m Amazonas, Daniela Rêgo
Migração FD e FFD com aproximação de grande abertura angular. / Daniela Rêgo Amazonas; orientador, Jessé Carvalho Costa. – 2007

69 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Geofísica) – Universidade Federal do Pará, Centro de Geociências, Curso de Pós-Graduação em Geofísica, Belém, 2006.

1. Geofísica. 2. Processamento sísmico. 3. Migração. 4. Diferenças finitas. 5. Aproximação de Padé Complexa. I. Universidade Federal do Pará. II. Costa, Jessé Carvalho, orient. III. Título.

CDD 20º ed.: 550

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA

**MIGRAÇÃO FD e FFD COM APROXIMAÇÕES DE GRANDE
ABERTURA ANGULAR**

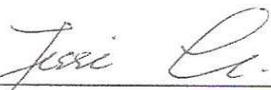
DISSERTAÇÃO APRESENTADA POR

DANIELA RÊGO AMAZONAS

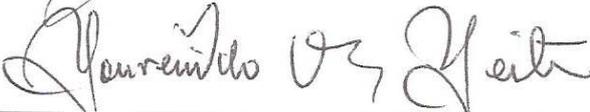
COMO REQUISITO PARCIAL À OBTENÇÃO DE GRAU DE MESTRE EM
CIÊNCIAS NA ÁREA DE GEOFÍSICA

Data da aprovação:

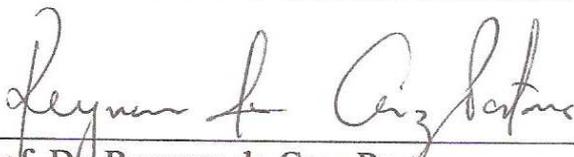
BANCA EXAMINADORA:



Prof. Dr. Jessé Carvalho Costa (Orientador)



Prof. Dr. Lourenildo Willame Barbosa Leite



Prof. Dr. Reynam da Cruz Pestana

BELÉM

2007

Aos meus pais Rosinaldo e Nelma

AGRADECIMENTOS

Durante toda a minha vida estive rodeada de pessoas que sempre me ajudaram a vencer obstáculos e acreditar que com um pouco de esforço e fé é possível realizar sonhos. Dentre estas gostaria de destacar algumas, como meus pais, Rosinaldo e Nelma, que mesmo com todas as dificuldades conseguiram transformar suas vidas e dar oportunidade de um caminho menos sofrido que o deles a suas três filhas. Em seguida gostaria de agradecer aos meus professores, tanto da graduação em Matemática quanto do Mestrado em Geofísica, em especial ao Prof. Dr. Jessé Costa, pela sua paciência e dedicação . Agradeço também ao meu companheiro, Francisco Josa, que esteve comigo nos bons e maus momentos, sempre zelando pela minha felicidade. É claro que não poderia esquecer de amigos como Brenda e Álvaro, que mesmo perto ou longe sempre tinham uma palavra de incentivo que me faziam levantar a cabeça e continuar caminhando. Finalmente, gostaria de agradecer àqueles que mesmo não tendo seus nomes citados aqui, de alguma forma, foram indispensáveis para o meu sucesso. MUITO OBRIGADA.

“Não é mérito o fato de não termos caído, e sim, o de termos levantado todas as vezes que caímos.” (Provérbio Árabe)

RESUMO

Métodos de migração baseados na equação da onda unidirecional apresentam limitações no imageamento de refletores com forte mergulho e no tratamento de ondas evanescentes. Utilizando a expansão de Padé complexa na solução da equação da onda unidirecional para imageamento em geofísica é possível tratar ondas evanescentes, estabilizando a migração e dispensando um tratamento especial para absorção nas fronteiras do domínio. Utilizando várias parcelas na expansão de Padé, refletores com forte mergulho podem ser corretamente migrados. Nesta dissertação aplicamos a equação da onda unidirecional com expansão de Padé complexa para implementar dois algoritmos de migração em profundidade pré e pós-empilhamento: a migração por diferenças finitas (FD) e a migração por diferenças finitas e Fourier (FFD).

O estudo das curvas de dispersão e da resposta impulsiva dos operadores de migração nos permitiu escolher o número adequado de parcelas na expansão de Padé e os coeficientes da expansão que garantem estabilidade à continuação do campo de onda para um ângulo de mergulho máximo prescrito. As implementações foram validadas nos dados Marmousi e no modelo de domo de sal da SEG/EAGE mostrando que refletores com forte mergulho foram corretamente migrados, mesmo na presença de forte variação lateral de velocidade. Esses resultados são comparados com outros métodos de migração baseados na equação da onda unidirecional ressaltando a qualidade da aproximação estudada neste trabalho.

ABSTRACT

Seismic Migration by downward continuation using the unidirectional wave equation approximations has two shortcomings: imaging steep dip reflectors and handling evanescent waves. Complex Padé approximations allow a better treatment of evanescent modes stabilizing the finite difference migration, and does not require special treatment for domain boundaries. Imaging of steep dip reflectors can be improved using several terms in the Padé expansion. This dissertation discuss the implementation and evaluation of complex Padé approximation for finite difference migration and Fourier finite difference migration.

The study of the dispersion relation and impulsive response associated to the migration operator is used to select the number of terms and coefficients in the Padé expansion which assures stability for a prescribed maximum reflector dip. The implementations are validated in the Marmousi and SEG/EAGE salt model datasets, and compared to other wave equation migration methods. The results of FD and FFD complex Padé migrations can handle steeper dips, and present a much lower signal to noise ratio than their real valued counterparts.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 3.1	Esquema do plano complexo e da rotação da linha de corte.	33
Figura 3.2	Erro relativo das diferentes aproximações para migração FFD com contraste de velocidade de 0,5, ângulo de rotação da linha de corte 45° e 1 termo da série de Padé.	35
Figura 3.3	Erro relativo das diferentes aproximações para migração FFD com contraste de velocidade de 0,5, ângulo de rotação da linha de corte 45° e 3 termos da série de Padé.	36
Figura 3.4	Avaliação das aproximações FFD em relação ao operador exato com contraste de velocidade de 0,5, ângulo de rotação da linha de corte 45° e 1 termo da série de Padé.	37
Figura 3.5	Avaliação das aproximações FFD em relação ao operador exato com contraste de velocidade de 0,5, ângulo de rotação da linha de corte 45° e 3 termos da série de Padé.	37
Figura 3.6	Resposta ao impulso usando o algoritmo FFD com aproximação de Padé complexa para um meio homogêneo com contraste de velocidade de 0,5, ângulo de rotação da linha de corte 45° e 3 termos da série de Padé.	38
Figura 3.7	Avaliação da aproximação FD em relação ao operador de raiz quadrada exato com ângulo de rotação da linha de corte de 90° e 1 termo da série de Padé.	39

Figura 3.8	Avaliação da aproximação FD em relação ao operador de raiz quadrada exato com ângulo de rotação da linha de corte de 90° e 3 termos da série de Padé.	39
Figura 3.9	Resposta ao impulso utilizando o algoritmo FD com aproximação de Padé complexa em um meio homogêneo com ângulo de rotação da linha de corte de 90° e 3 termos da série de Padé.	40
Figura 3.10	Resposta impulsiva no dado Marmousi utilizando o algoritmo FD real do Seismic Un*x.	41
Figura 3.11	Resposta impulsiva do dado Marmousi utilizando o método FD com aproximação de Padé complexa, com ângulo de rotação da linha de corte de 45° .	41
Figura 3.12	Resposta impulsiva do dado Marmousi utilizando o algoritmo FFD real do Seismic Un*x.	42
Figura 3.13	Resposta impulsiva do dado Marmousi utilizando o algoritmo FFD com aproximação de Padé complexa, com ângulo de rotação da linha de corte de 45° .	42
Figura 3.14	Resposta impulsiva do dado Marmousi utilizando o algoritmo FFDPI.	43
Figura 3.15	Resposta impulsiva do dado Marmousi utilizando o método PSPI do Seismic Un*x.	43
Figura 4.1	Modelo de velocidade do domo de sal da SEG/EAGE.	45
Figura 4.2	Migração <i>split-step</i> pós-empilhamento do dado SEG/EAGE usando o Seismic Un*x.	45

Figura 4.3 Migração FD pós-empilhamento com aproximação de Padé complexa do dado SEG/EAGE utilizando 3 termos da série de Padé e ângulo de rotação da linha de corte de 90 graus.	46
Figura 4.4 Migração FFD pós-empilhamento com aproximação de Padé complexa do dado SEG/EAGE utilizando 3 termos da série de Padé, contraste de velocidade de 0,5 e ângulo de rotação da linha de corte de 45 graus.	46
Figura 4.5 Modelo de velocidade do dado Marmousi.	47
Figura 4.6 Migração pré-empilhamento dos dados Marmousi utilizando o algoritmo FD com coeficientes reais usando o Seismic Un*x.	48
Figura 4.7 Migração FD pré-empilhamento com aproximação de Padé complexa com $dx_3 = 6m$, ângulo de rotação da linha de corte igual a 90 graus e 3 termos da série de Padé.	48
Figura 4.8 Migração pré-empilhamento dos dados Marmousi utilizando o algoritmo FFD com coeficientes reais usando o Seismic Un*x.	49
Figura 4.9 Migração FFD pré-empilhamento com aproximação de Padé complexa com ângulo de rotação da linha de corte igual a 45 graus, contraste de velocidade de 0,75 e 3 termos da série de Padé.	50
Figura 4.10 Migração PSPI pré-empilhamento dos dados Marmousi gerada pelo Seismic Un*x.	50
Figura 4.11 Migração FFDPI pré-empilhamento dos dados Marmousi.	51

Figura 4.12 Migração FFD pré-empilhamento com aproximação de Padé complexa do dado SEG/EAGE, com ângulo de rotação da linha de corte igual a 45 graus, contraste de velocidade 0,75, e 3 termos da série de Padé.	52
Figura 4.13 Migração FD pré-empilhamento com aproximação de Padé complexa do dado SEG/EAGE, com ângulo de rotação da linha de corte igual a 90° e 3 termos da série de Padé.	52
Figura 4.14 Migração FFDPI pré-empilhamento do dado SEG/EAGE.	53

LISTA DE SIGLAS E SÍMBOLOS

SIGLAS	DESCRIÇÃO
FD	Diferenças Finitas
FFD	Diferenças Finitas e Fourier
FFDPI	Diferenças Finitas e Fourier mais Interpolação
PSPI	Deslocamento de Fase mais Interpolação
SU	Seismic Un*x
SÍMBOLOS	DESCRIÇÃO
A	Amplitude
A_n e B_n	Coefficientes de Padé complexos
a_n e b_n	Coefficientes de Padé reais
c_r	Velocidade de referência constante
$c(\mathbf{x})$	Velocidade do meio
e	Número natural
k_1	Número de onda horizontal
k_3	Número de onda vertical
I	Matriz identidade
i	$\sqrt{-1}$
P	Campo de onda
p	Razão entre a velocidade de referência e a velocidade do meio
t	Tempo
u	Vagarosidade
W	Peso para interpolação
x	Vetor espaço
x_1	Componente horizontal do vetor espaço x
x_3	Componente vertical do vetor espaço x

α	Ângulo de rotação da linha de corte
ε	Diferença entre o operador de raiz quadrada exato e o operador aproximado
E	Erro relativo
σ	Diferentes aproximações FFD complexas
θ	Ângulo de fase
ϕ	Ângulo de incidência
ω	Frequência
*	Conjugado complexo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
2	MIGRAÇÃO COM A EQUAÇÃO DA ONDA	20
2.1	EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIRECIONAL	20
2.2	O OPERADOR DE DESLOCAMENTO DE FASE	21
2.3	O MÉTODO DESLOCAMENTO DE FASE MAIS INTERPOLAÇÃO	22
2.4	O OPERADOR <i>SPLIT-STEP FOURIER</i>	23
2.5	MIGRAÇÃO POR DIFERENÇAS FINITAS	24
2.6	O MÉTODO DIFERENÇAS FINITAS E FOURIER	25
2.7	O MÉTODO DIFERENÇAS FINITAS E FOURIER MAIS INTERPOLAÇÃO .	26
2.8	CONDIÇÕES DE IMAGEM	28
2.8.1	Condição de imagem por correlação	28
2.8.2	Condição de imagem generalizada	29
2.8.3	Condição de imagem com deslocamento temporal	29
2.8.4	Condição de imagem por deconvolução	29
2.8.5	Condição de imagem por suavização	30
3	OS ALGORITMOS FD E FFD USANDO APROXIMAÇÃO DE PADÉ COMPLEXA	31
3.1	O MÉTODO <i>SPLIT-STEP COMPLEX PADÉ</i>	32

3.2	ALGORITMOS DE DIFERENÇAS FINITAS UTILIZANDO APROXIMAÇÕES DE PADÉ COMPLEXAS	33
3.2.1	Análise numérica	33
3.2.2	Resposta ao impulso para um meio heterogêneo	37
4	MIGRAÇÃO DE DADOS SINTÉTICOS	43
4.1	MIGRAÇÃO PÓS-EMPILHAMENTO	43
4.2	MIGRAÇÃO PRÉ-EMPILHAMENTO	46
4.2.1	Migração Pré-empilhamento dos dados Marmousi	46
4.2.2	Migração pré-empilhamento do modelo SEG/EAGE	48
5	CONCLUSÃO	53
	REFERÊNCIAS	55
	APÊNDICES	57
	APÊNDICE A – EXPANSÃO DA RAIZ EM FRAÇÕES PARCIAIS	58
	APÊNDICE B – APROXIMAÇÕES PARA A MIGRAÇÃO POR DIFERENÇAS FINITAS	61
B.1	APROXIMAÇÃO 1	61
B.1.1	Implementação usando Crank-Nicholson	62
B.2	APROXIMAÇÃO 2	63
	APÊNDICE C – APROXIMAÇÕES PARA O MÉTODO DIFERENÇAS FINITAS E FOURIER	65
C.1	ORDEM ZERO	67
C.2	PRIMEIRA ORDEM	67

C.3	SEGUNDA ORDEM	67
C.4	APROXIMAÇÃO ALTERNATIVA	68
C.5	IMPLEMENTAÇÃO USANDO CRANK- NICHOLSON	68

1 INTRODUÇÃO

Algoritmos de migração baseados na equação de onda apresentam melhor desempenho na presença de forte variação lateral de velocidade, mas possuem limitações para migrar grandes ângulos¹ e não são capazes de tratar ondas evanescentes². As migrações por Deslocamento de Fase, *Split-step*, *Phase Screen*, migração por Diferenças Finitas e por Diferenças Finitas e Fourier são abordagens para migração usando a equação da onda unidirecional.

A migração por Deslocamento de Fase é um método eficiente e preciso de retropropagação do campo de ondas, uma vez que ele é capaz de migrar eventos com forte mergulho em meios sem variação lateral de velocidade. Em meios com variação lateral de velocidade, a migração por Deslocamento de Fase mais Interpolação (PSPI) é uma abordagem eficaz se vários modelos de velocidade de referência forem utilizados para efetuar a etapa de interpolação (GAZDAG; SGUAZZERO, 1984). Os métodos de migração *Split-step* e *Phase Screen* são aproximações para o operador de migração que pressupõe pequenos contrastes de velocidade.

A migração por Diferenças Finitas (FD) permite modelos com variações de velocidade arbitrárias, mas apresenta limitações na presença de grandes ângulos de incidência e no tratamento de ondas evanescentes (BIONDI, 2002).

Ristow e Rühl (1994) propuseram um algoritmo híbrido combinando os métodos de Diferenças Finitas com os métodos de Fourier, que denominaram Diferenças Finitas e Fourier (FFD). Este método apresenta vantagens em relação a cada um dos métodos citados acima. Mas, quando o método FFD é aplicado na presença de descontinuidades acentuadas no modelo de velocidade, ele pode apresentar instabilidade numérica, (BIONDI, 2002). Para corrigir

¹Abertura angular maior que 45° .

²Um exemplo de onda evanescente ocorre quando uma onda plana incide com ângulo acima do ângulo crítico em uma interface plana separando dois meios homogêneos. Neste caso, a onda transmitida é uma onda evanescente e sua amplitude decai com a distância a interface. Matematicamente, ondas evanescentes são caracterizadas por vetores de onda em que uma ou mais componentes possuem valor complexo.

esta limitação, Biondi (2002) propôs modificações ao algoritmo FFD tornando-o incondicionalmente estável, o qual denominou Diferenças Finitas e Fourier mais Interpolação (FFDPI). Este algoritmo requer interpolação do campo de velocidades o que aumenta o seu custo computacional em relação ao algoritmo FFD.

Aproximações para a equação da onda unidirecional em série de Padé complexa, proposta por Millinazzo, Zala e Brooke (1997), permitem que os algoritmos de migração FD e FFD possam tratar ondas evanescentes e estabilizar o algoritmo FFD. Zhang, Rector e Hoversten (2003) propuseram o método de migração *Split-step Finite Difference* (YEVICK; THOMSON, 2000), no qual a expansão de Padé complexa aproxima o operador de propagação. Todavia, os autores não investigaram aproximações para grande abertura angular. Ainda utilizando a aproximação de Padé complexa, Zhang et al. (2006) apresentaram o método de migração FFD 3D para azimute comum com operador de abertura angular de 45° .

Utilizando a expansão de Padé complexa, (MILLINAZZO; ZALA; BROOKE, 1988), para aproximar diretamente o operador de raiz quadrada da equação da onda unidirecional, apresentamos um algoritmo de migração FD 2D em profundidade e um outro de migração FFD também 2D. Esses algoritmos apresentam maior estabilidade que a implementação FFD com coeficientes reais, admitem abertura angular arbitrária e desempenho equivalente ao algoritmo proposto por Biondi (2002) a um custo computacional menor.

No próximo capítulo apresentamos uma revisão dos métodos de migração baseados na equação da onda unidirecional e discutimos várias aproximações para a representação do operador de raiz quadrada em meios com variação lateral de velocidade, além de rever diferentes condições de fronteira.

Em seguida mostramos como aproximar a raiz quadrada da equação da onda unidirecional utilizando coeficientes de Padé complexos, (MILLINAZZO; ZALA; BROOKE, 1988; YEVICK; THOMSON, 2000), tomando por base os métodos de migração FD e FFD. Logo após, fazemos uma análise numérica dos algoritmos obtidos.

No último capítulo apresentamos os resultados da migração FD e FFD com aproximação de Padé complexa dos dados Marmousi e SEG/EAGE. Em seguida, comparamos esse resultados com os métodos FD e FFD com coeficientes reais, PSPI, FFDPI e *Split-step*.

2 MIGRAÇÃO COM A EQUAÇÃO DA ONDA

Neste capítulo apresentamos uma revisão dos métodos de migração usando a equação da onda, como Deslocamento de Fase, *Split-step*, Diferenças Finitas, Diferenças Finitas e Fourier e Diferenças Finitas e Fourier mais Interpolação. Estes métodos servirão de base para se discutir os operadores de migração avaliados nesta dissertação. Em seguida, apresentamos condições de imagem utilizadas com diferentes objetivos como imageamento, construção de seções de ponto de reflexão comum para análise de velocidade e condições de imagem com correção de amplitude.

2.1 EQUAÇÃO DA ONDA UNIDIRECIONAL

Antes de começarmos a revisar os métodos de migração é necessário obter a equação da onda unidirecional. Para isso, partiremos da equação da onda acústica

$$\frac{\partial^2 P(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 P(\mathbf{x}, t)}{\partial x_3^2} - \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \frac{\partial^2 P(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.1)$$

em que $P(\mathbf{x}, t)$ é o campo de onda e $c(\mathbf{x})$ é a velocidade do meio.

A partir da representação do campo de onda no domínio da frequência

$$P(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (2.2)$$

em que ω é a frequência angular, temos

$$\frac{\partial^2 P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3^2} + \frac{(i\omega)^2}{c^2(\mathbf{x})} \left(1 + \frac{c^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \right) P(\mathbf{x}, \omega) = 0. \quad (2.3)$$

Fatorando formalmente a equação (2.3), obtemos

$$\left[\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} - \frac{(-i\omega)}{c(\mathbf{x})} \sqrt{1 + \frac{c^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} \right] \left[\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} + \frac{(-i\omega)}{c(\mathbf{x})} \sqrt{1 + \frac{c^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} \right] P(\mathbf{x}, \omega) = 0 . \quad (2.4)$$

A fatoração acima permite representar duas ondas unidirecionais em relação a profundidade, que governam a propagação do campo de onda para cima e para baixo, respectivamente:

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} = \frac{(-i\omega)}{c(\mathbf{x})} \sqrt{1 + \frac{c^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} P(\mathbf{x}, \omega) \quad (2.5)$$

e

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} = -\frac{(-i\omega)}{c(\mathbf{x})} \sqrt{1 + \frac{c^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} P(\mathbf{x}, \omega) . \quad (2.6)$$

As duas representações acima para equação da onda unidirecional são formais. Para meios sem variação lateral de velocidade, estes operadores podem ser representados exatamente no domínio de Fourier (GAZDAG, 1978). Para meios com variação lateral de velocidade o operador admite aproximações em série de Taylor (STOFFA et al., 1990) e série de Padé (RISTOW; RÜHL, 1994). Aproximações para o operador de propagação unidirecional determinam diferentes métodos de migração. A solução das equações acima requer a especificação de condição de fronteira para o campo de pressão em um nível x_3^0 .

2.2 O OPERADOR DE DESLOCAMENTO DE FASE

Se a velocidade variar apenas com a profundidade, ou seja, $c = c(x_3)$, podemos solucionar a equação (2.5) para cada camada de espessura arbitrária. Neste caso, o operador da equação (2.5) admite uma representação exata.

Representando o campo de onda na forma

$$P(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(\mathbf{x}, \omega) e^{i(k_1 x_1 - \omega t)} d\omega \quad (2.7)$$

e substituindo na equação acima obtemos a solução (GAZDAG, 1978)

$$P(k_1, x_3 + \Delta x_3, \omega) = P(k_1, x_3^0, \omega) e^{-ik_3 \Delta x_3} . \quad (2.8)$$

O operador de deslocamento de fase é obtido através da simples idéia de transformar propagação unidirecional em bidirecional. Para fazer essa conversão costuma-se dividir a velocidade por dois. Assim escolhendo a profundidade $\Delta x_3 = (c(x_3)/2)\Delta\tau$, o operador de extrapolação para baixo em um único passo $\Delta\tau$ é

$$C = \exp\left(-i\omega\Delta\tau\sqrt{1 - \frac{k_1^2 c^2(x_3)}{\omega^2}}\right). \quad (2.9)$$

O operador de continuação para baixo por deslocamento de fase é uma solução exata para a onda unidirecional para abertura angular arbitrária em meios verticalmente heterogêneos.

2.3 O MÉTODO DESLOCAMENTO DE FASE MAIS INTERPOLAÇÃO

O método deslocamento de fase mais interpolação foi desenvolvido por Gazdag e Sguazero (1984) para tentar agregar variações laterais de velocidade ao método de deslocamento de fase (GAZDAG, 1978). Sua idéia central é que variações laterais de velocidade podem ser levadas em consideração interpolando os campos de onda que são continuados para baixo por deslocamento de fase, usando duas ou mais velocidades de referência. A precisão desse método está relacionada ao número de velocidades de referência usadas em cada passo em profundidade.

Para manter uma boa precisão para pequenos mergulhos, quando $k_1 c/\omega \ll 1$ o deslocamento de fase expresso pela equação (2.8) é separado em duas operações distintas

$$P'(x_3) = P(x_3^0) e^{-i\frac{\omega}{c(x_3)}\Delta x_3} \quad (2.10)$$

$$P(x_3 + \Delta x_3) = P'(x_3) e^{-i(k_3 - \frac{\omega}{c_r})\Delta x_3} \quad (2.11)$$

em que $c_r \neq c(x_1, x_3)$ é uma aproximação para $c(x_1, x_3)$. A equação (2.10) é um deslocamento de tempo aplicado para cada traço. Já a equação (2.11) envolve uma aproximação da função velocidade verdadeira por funções velocidade de referência ($c_r(x_3)$) e sua implementação é feita em vários passos. Primeiro, é aplicada uma transformada de Fourier em P' em relação à x_1 . Em seguida, é realizada a operação de deslocamento de fase expressa na equação (2.11) usando as velocidades de referência num intervalo $[c_{r_{min}}, c_{r_{max}}]$. Num segundo passo

é aplicada uma transformada de Fourier inversa nos campos que tiveram a fase deslocada, resultando num campo de onda de referência. Num terceiro passo é feita a interpolação linear dos vários campos de onda extrapolados. Por exemplo, para duas velocidades de referência, teríamos:

$$A = \frac{A_1(c_r^2 - c) + A_2(c - c_r^1)}{c_r^2 - c_r^1} \quad (2.12)$$

ou

$$A = \frac{\theta_1(c_r^2 - c) + \theta_2(c - c_r^1)}{c_r^2 - c_r^1}, \quad (2.13)$$

em que A_1 é a amplitude do campo para c_r^1 , A_2 é a amplitude do campo para c_r^2 e θ_1 e θ_2 são os ângulos de fase. A partir das equações (2.12) e (2.13) pode-se escrever

$$P(x_1, x_3 + \Delta x_3, \omega) = Ae^{i\theta}.$$

Um método para selecionar as velocidades de referencia foi proposto por Bagaini, Bonomi e Pieroni (1995).

2.4 O OPERADOR *SPLIT-STEP FOURIER*

O método *Split-step Fourier* foi desenvolvido por Stoffa et al. (1990) para migrar dados sísmicos empilhados em duas e três dimensões. Esse método de migração é implementado tanto no domínio $f-k$ (frequência-número de onda) quanto no domínio $f-x$ (frequência-espço) e permite acomodar pequenas variações laterais de velocidade em torno de uma velocidade de referência, c_r .

Usando a notação da seção anterior podemos deduzir a aproximação *Split-step* partindo da relação

$$\begin{aligned} \frac{i\omega}{c(\mathbf{x})} \sqrt{1 + \frac{c^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} &= \frac{i\omega}{c_r(x_3)} \sqrt{1 + \frac{c_r^2(x_3)}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} \\ &+ \left[\frac{i\omega}{c(\mathbf{x})} \sqrt{1 + \frac{c^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} - \frac{i\omega}{c_r(x_3)} \sqrt{1 + \frac{c_r^2(x_3)}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} \right] \end{aligned}$$

Expandindo as raízes na expressão entre colchetes acima em série de Taylor e retendo

apenas os termos de ordem zero obtemos

$$\frac{(-i\omega)}{c(\mathbf{x})} \sqrt{1 + \frac{c^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} \approx \frac{(-i\omega)}{c_r(x_3)} \sqrt{1 + \frac{c_r^2(x_3)}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} + \frac{(-i\omega)}{c_r(x_3)} \left(\frac{c_r(x_3)}{c(\mathbf{x})} - 1 \right) .$$

Substituindo esta aproximação na expressão para onda unidirecional obtemos uma equação unidirecional que contempla o termo de correção lateral (correção *Split-step*):

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} = \frac{-i\omega}{c_r(x_3)} \left[\sqrt{1 - \frac{k_1^2 c_r^2(x_3)}{\omega^2}} + \frac{c_r(x_3)}{c(\mathbf{x})} - 1 \right] P(\mathbf{x}, \omega) . \quad (2.14)$$

A solução da equação (2.14) pode ser desdobrada em duas equações

$$\begin{aligned} P'(k_1, x_3 + \Delta x_3, \omega) &= P(k_1, x_3, \omega) \exp \left[\frac{-i\omega}{c_r(x_3)} \sqrt{1 - \frac{k_1^2 c_r^2(x_3)}{\omega^2}} \Delta z \right] , \\ P'(x_1, x_3 + \Delta x_3, \omega) &= P'(x_1, x_3 + \Delta x_3, \omega) \exp \left[-i\omega \left(\frac{1}{c(\mathbf{x})} - \frac{1}{c_r(x_3)} \right) \Delta x_3 \right] , \end{aligned}$$

em que $P(k_1, x_3, \omega)$ é a transformada de Fourier de x_1 para k_1 do campo de ondas previamente migrado na profundidade e $P'(x_1, x_3 + \Delta x_3, \omega)$ é a transformada de Fourier inversa de $P'(k_1, x_3 + \Delta x_3, \omega)$.

O primeiro deslocamento de fase é idêntico àquele empregado na migração por deslocamento de fase com velocidade constante. O segundo atua como um termo de correção, fornecendo um deslocamento temporal baseado na diferença entre a vagarosidade exata e a de referência em cada posição no espaço.

Apesar deste método se mostrar incondicionalmente estável e admitir pequenas variações laterais de velocidade no modelo, ele apresenta problemas para imagear grandes ângulos.

2.5 MIGRAÇÃO POR DIFERENÇAS FINITAS

O método de migração por diferenças finitas aproxima o operador da onda unidirecional, (equação (2.5)), por uma expansão em série de Padé (BAMBERGER; ENGQUIST; JOLY, 1988; CLAERBOUT, 1985),

$$\frac{(-i\omega)}{c(\mathbf{x})} \sqrt{1 - \frac{c^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} P(\mathbf{x}, \omega) \approx \frac{-i\omega}{c(\mathbf{x})} \left[1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n \frac{c^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}}{1 + b_n \frac{c^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} \right] P(\mathbf{x}, \omega). \quad (2.15)$$

Na implementação desta expressão as derivadas parciais são aproximadas por operadores de diferenças finitas. Esta abordagem não possui limitações em relação às variações no modelo de velocidade. Entretanto, a migração de refletores com forte mergulho requer que um maior número de parcelas seja considerado na implementação.

Utilizando a técnica de *splitting* (CLAERBOUT, 1985) na equação (2.15) nos é permitido resolver a primeira parcela analiticamente, enquanto a segunda parcela pode ser resolvida utilizando o método de Crank-Nicholson (CLAERBOUT, 1985). Para $N = 1$, o esquema migra corretamente eventos com mergulho de até 45° (RISTOW; RÜHL, 1994). Condições de fronteira absorvente precisam ser utilizadas nas fronteiras laterais do domínio para evitar reflexões nestas fronteiras.

2.6 O MÉTODO DIFERENÇAS FINITAS E FOURIER

Com o objetivo de melhorar a aproximação *split-step*, Ristow e Rühl (1994) desenvolveram o método de Diferenças Finitas e Fourier (FFD) que une as vantagens do método de deslocamento de fase com a continuação para baixo por diferenças finitas.

A idéia básica de Ristow e Rühl (1994) foi dividir o campo de velocidade em um campo com velocidade constante de referência e um outro com velocidade variante.

O método pode ser obtido calculando a diferença entre o operador de raiz quadrada da equação (2.5) usando a velocidade do meio, $c(\mathbf{x})$, e o mesmo operador usando uma velocidade de referência, c_r , no domínio $\omega - x$ (frequência-espço).

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\omega^2}{c(\mathbf{x})^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} - \sqrt{\frac{\omega^2}{c_r^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}}. \quad (2.16)$$

Expandindo os operadores em série de Taylor e reorganizando os termos é possível obter a

seguinte aproximação

$$\varepsilon \approx \left(\frac{\omega}{c(\mathbf{x})} - \frac{\omega}{c_r} \right) + \frac{\omega}{c(\mathbf{x})} \left(1 - \frac{c_r}{c(\mathbf{x})} \right) \left\{ \frac{\frac{c(\mathbf{x})^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}}{a_1 + b_1 \frac{c(\mathbf{x})^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} + \frac{\frac{c(\mathbf{x})^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}}{a_2 + b_2 \frac{c(\mathbf{x})^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} + \dots \right\} \quad (2.17)$$

em que $c_r \leq c(\mathbf{x})$ e os parâmetros a_1 , b_1 , a_2 e b_2 dependem de $p = c_r/c(\mathbf{x})$. Então, combinando as equações (2.16) e (2.17) temos

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\omega^2}{c(\mathbf{x})^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} &\approx \sqrt{\frac{\omega^2}{c_r^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} + \left(\frac{\omega}{c(\mathbf{x})} - \frac{\omega}{c_r} \right) \\ &+ \frac{\omega}{c(\mathbf{x})} \left(1 - \frac{c_r}{c(\mathbf{x})} \right) \left\{ \frac{\frac{c(\mathbf{x})^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}}{a_1 + b_1 \frac{c(\mathbf{x})^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} + \frac{\frac{c(\mathbf{x})^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}}{a_2 + b_2 \frac{c(\mathbf{x})^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

A primeira parcela da soma do segundo membro da equação (2.18) corresponde ao operador de deslocamento de fase aplicado no domínio $\omega - k$ (frequência-número de onda). A segunda parcela é o termo de correção *split-step* de Stoffa et al. (1990) e a terceira parcela da soma é semelhante ao operador de diferenças finitas de 15° ($b = 0$) e de 45° ($b \neq 0$).

A continuação para baixo é realizada em dois passos; no primeiro passo aplica-se o operador de deslocamento de fase no domínio $\omega - k$, no segundo passo aplica-se os outros dois operadores no domínio $\omega - x$.

Quando este método é aplicado na presença de descontinuidades acentuadas no modelo de velocidade, ele apresenta instabilidade numérica, apesar de admitir fortes variações laterais de velocidade. Para corrigir essa limitação Biondi (2002) propôs modificações ao algoritmo FFD, que será tratado na próxima seção.

2.7 O MÉTODO DIFERENÇAS FINITAS E FOURIER MAIS INTERPOLAÇÃO

Visando superar os problemas de instabilidade relacionados ao método FFD, Biondi (2002) apresentou um algoritmo FFD acrescido de algumas modificações que o tornaram incondicionalmente estável para variações arbitrárias na velocidade do meio e na velocidade de referência, o qual denominou Diferenças Finitas e Fourier mais Interpolação (FFDPI).

Neste método, o campo de ondas (P) retropropagado para a profundidade $x_3 + \Delta x_3$ é

calculado a partir do campo de ondas na profundidade x_3 usando a seguinte aproximação :

$$P_{x_3+\Delta x_3} \approx P_{x_3} e^{ik_3^{c_r} \Delta x_3 + i \frac{\Delta k_3}{\Delta u} \Delta u \Delta x_3} , \quad (2.19)$$

em que $k_3^{c_r}$ é o número de onda vertical associado à velocidade de referência c_r . A primeira derivada de k_3 em relação a vazarosidade $u = 1/c$ avaliada na velocidade de referência c_r é

$$\frac{dk_3}{du} = \frac{\omega}{\sqrt{1 - c^2 Y^2}} ,$$

com $Y^2 = \frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$, e a aproximação por frações contínuas do termo de correção é

$$\frac{\Delta k_3}{\Delta u} \approx \omega \left[1 + \frac{\frac{c_r c Y^2}{2}}{1 - \frac{(c_r^2 + c^2 + c_r c) Y^2}{4}} \right] , \quad (2.20)$$

Para mostrar a estabilidade do método FFDPI, Biondi (2002) reescreveu a equação (2.20) da seguinte forma

$$\frac{\Delta k_3}{\Delta u} \Delta u \approx \omega \left[\frac{(c_r - c)}{c_r c} + \text{sign}(c - c_r) \Theta \frac{\Sigma' Y^2 \Sigma}{\mathbf{I} + \Sigma' Y^2 \Sigma} \right] , \quad (2.21)$$

em que

$$\Sigma = \frac{1}{2} \text{Diag} \begin{bmatrix} \sqrt{1c^2 + 1c_r^2 + 1c_1c_r} \\ \vdots \\ \sqrt{i-1c^2 + i-1c_r^2 + i-1c_{i-1}c_r} \\ \sqrt{ic^2 + ic_r^2 + ic_ic_r} \\ \sqrt{i+1c^2 + i+1c_r^2 + i+1c_{i+1}c_r} \\ \vdots \\ \sqrt{nc^2 + nc_r^2 + nc_nc_r} \end{bmatrix} \quad \Theta = 2 \text{Diag} \begin{bmatrix} \frac{|1c_r - 1c|}{1c^2 + 1c_r^2 + 1c_1c_r} \\ \vdots \\ \frac{|i-1c_r - i-1c|}{i-1c^2 + i-1c_r^2 + i-1c_{i-1}c_r} \\ \frac{|ic_r - ic|}{ic^2 + ic_r^2 + ic_ic_r} \\ \frac{|i+1c_r - i+1c|}{i+1c^2 + i+1c_r^2 + i+1c_{i+1}c_r} \\ \vdots \\ \frac{|nc_r - nc|}{nc^2 + nc_r^2 + nc_nc_r} \end{bmatrix} .$$

Os valores $i c_r$ e $i c$ são , respectivamente, a velocidade de referência e velocidade do meio na localização horizontal i da malha.

Dessa forma, Biondi(2002) percebeu que multiplicando o campo de onda pelo exponencial do segundo termo da equação (2.21) é equivalente a resolver a equação diferencial

$$\frac{d}{dx_3} P = i \omega \text{sign}(c - c_r) \Theta \frac{\Sigma' Y^2 \Sigma}{\mathbf{I} + \Sigma' Y^2 \Sigma} P . \quad (2.22)$$

Observe que a equivalência é verdadeira somente se $\text{sign}(c - c_r)$ é constante. Mudando a

variável P por $\Theta^{\frac{1}{2}}Q$ a equação (2.22) torna-se

$$\frac{d}{dx_3}Q = \Theta^{\frac{1}{2}} \left(i\omega \text{sign}(c - c_r) \frac{\Sigma'Y^2\Sigma}{I + \Sigma'Y^2\Sigma} \right) \Theta^{\frac{1}{2}}Q = \Theta^{\frac{1}{2}}(i\omega S)\Theta^{\frac{1}{2}}Q .$$

A norma $\| Q \|_{\Theta^{-1}}$ é constante em relação á profundidade devido os autovalores de S serem reais, e ela obedece a equação diferencial

$$\frac{d}{dx_3} \| Q \|_{\Theta^{-1}} = Q^*(i\omega S - i\omega S^*)Q = 0 . \quad (2.23)$$

A equação (2.23) garante a estabilidade do método FFDPI, independentemente do valor de $\text{sign}(c - c_r)$. Esse resultado permite uma interpolação linear entre o campo de ondas correspondente às velocidades de referência mais baixas do que a velocidade do meio, $P_{x_3+\Delta x_3}^-$, e o campo de ondas correspondente às velocidades de referência mais altas do que a velocidade do meio, $P_{x_3+\Delta x_3}^+$, ou seja

$$P_{x_3+\Delta x_3} = W^- P_{x_3+\Delta x_3}^- + W^+ P_{x_3+\Delta x_3}^+ ,$$

em que

$$W^- = \begin{cases} \frac{k_3^c - k_3^{c_r^+} - \frac{\Delta k_3}{\Delta u} \frac{(c_r^+ - c)}{c_r^+ c}}{k_3^{c_r^-} + \frac{\Delta k_3}{\Delta u} \frac{(c_r^- - c)}{c_r^- c} - k_3^{c_r^+} - \frac{\Delta k_3}{\Delta u} \frac{(c_r^+ - c)}{c_r^+ c}} , & \text{se } \Im(k_3^{c_r^+}) = 0 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$W^+ = 1 - W^- ,$$

2.8 CONDIÇÕES DE IMAGEM

2.8.1 Condição de imagem por correlação

Uma condição de imagem tradicional para migração consiste numa correlação no tempo entre o campo de onda da fonte, P_s , e o campo de onda do receptor, P_r , (CLAERBOUT, 1985)

$$I_1(\mathbf{x}) = \sum_{\omega} P_s(\omega, \mathbf{x}) P_r^*(\omega, \mathbf{x}) ,$$

em que $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]$ é o vetor que descreve as localizações dos pontos na imagem, ω é a frequência e (*) significa o complexo conjugado. Por motivos práticos essa condição de imagem é geralmente usada durante a migração .

2.8.2 Condição de imagem generalizada

Sava e Fomel (2005a) propuseram uma condição de imagem pela qual a refletividade é estimada pela expressão

$$I_2(\mathbf{x}, \mathbf{h}) = \sum_{\omega} P_s(\omega, \mathbf{x} - \mathbf{h}) P_r^*(\omega, \mathbf{x} + \mathbf{h}) ,$$

em que $\mathbf{h} = [h_1, h_2, h_3]$ é um vetor que descreve a posição de separação fonte-receptor em subsuperfície. As componentes h_1 e h_2 do vetor \mathbf{h} correspondem a condição de imagem para deslocamento horizontal proposto por Rickett e Sava (2002), e a componente h_3 corresponde a condição de imagem para deslocamento vertical proposto por Biondi e Symes (2004).

2.8.3 Condição de imagem com deslocamento temporal

Essa condição de imagem, proposta por Sava e Fomel (2005b), pode ser implementada no domínio de Fourier usando a expressão

$$I_3(\mathbf{x}, \tau) = \sum_{\omega} P_s(\omega, \mathbf{x}) P_r^*(\omega, \mathbf{x}) e^{2i\omega\tau}$$

que envolve simplesmente um deslocamento de fase aplicado no campo de ondas antes da soma na frequência ω para imageamento no tempo zero.

2.8.4 Condição de imagem por deconvolução

Nessa condição de imagem a refletividade seria estimada dividindo P_r por P_s . Para evitar divisões por zero é somado ao denominador um parâmetro ε , portanto, temos

$$I_4(\mathbf{x}) = \sum_{\omega} \frac{P_r(\omega, \mathbf{x}) P_s^*(\omega, \mathbf{x})}{P_s(\omega, \mathbf{x}) P_s^*(\omega, \mathbf{x}) + \varepsilon} .$$

No entanto, pesquisas mostraram que o resultado final da migração é muito sensível ao parâmetro ε .

2.8.5 Condição de imagem por suavização

Na tentativa de propor uma alternativa para a condição de imagem da seção 2.8.4, Guitton, Valenciano e Berc (2006) propuseram substituir os buracos espectrais de $P_r P_s'$ por valores vizinhos em vez de algum valor arbitrário ε . Então, eles propuseram o cálculo

$$I_5(\mathbf{x}) = \sum_{\omega} \frac{P_r(\omega, \mathbf{x}) P_s'(\omega, \mathbf{x})}{\lll P_s(\omega, \mathbf{x}) P_s'(\omega, \mathbf{x}) \ggg},$$

em que " \lll " e " \ggg " indica suavização. Essa suavização pode ser realizada por um filtro gaussiano, triangular ou qualquer outro filtro.

3 OS ALGORITMOS FD E FFD USANDO APROXIMAÇÃO DE PADÉ COMPLEXA

Como vimos no capítulo anterior, os métodos de migração utilizando a equação da onda, em geral, baseiam-se em diferentes aproximações do operador de raiz quadrada da equação da onda unidirecional. Para aproximar esse operador, utiliza-se expansão de Taylor ou aproximações da forma

$$\sqrt{1+Z} = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n Z}{1+b_n Z} \quad (3.1)$$

em que a_n e b_n são coeficientes da expansão de Padé real (BAMBERGER; ENGQUIST; JOLY, 1988) e são dados por

$$a_n = \frac{2}{2N+1} \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi}{2N+1} \quad b_n = \cos^2 \frac{n\pi}{2N+1} .$$

Se $Z < -1$, o primeiro membro da equação (3.1) é complexo, e o segundo membro é real, tornando essa equação inconsistente. Fisicamente, isso significa que a representação da equação (3.1) não pode tratar de forma apropriada ondas evanescentes, o que provoca instabilidade e é responsável pelo comportamento instável do algoritmo FFD na presença de forte variação lateral de velocidade. Normalmente, essa energia seria eliminada pela aplicação de condições de fronteira.

No plano complexo, a expansão de Padé com coeficientes reais corresponde às aproximações da raiz quadrada com linhas de corte¹ ao longo do eixo real negativo. Assim, Millinazzo, Zala e Brooke (1997) propuseram a introdução de uma fase α (Apêndice A), o que rotaciona a linha de corte, conforme mostra a Figura (3.1), melhorando a representação

¹Curva pertencente ao plano complexo através da qual uma função multivalor analítica é descontínua. Por conveniência linhas de corte são tomadas como linhas ou segmentos de linha.

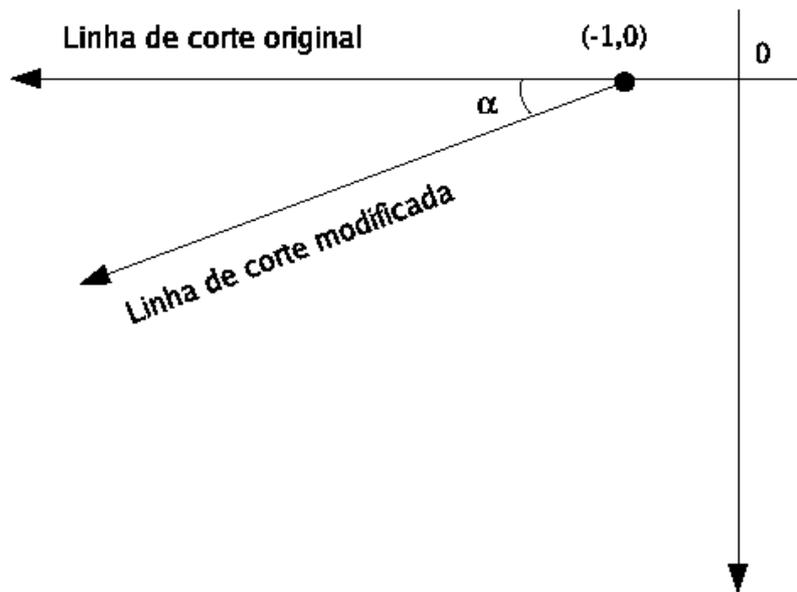


Figura 3.1: Esquema do plano complexo e da rotação da linha de corte.

da parte evanescente do espectro e, conseqüentemente, a estabilidade da aproximação. Dessa forma, a aproximação para a raiz quadrada usando os coeficientes complexos (Apêndice A) é dada por

$$\sqrt{1+Z} = C_0 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n Z}{1+B_n Z}, \quad (3.2)$$

em que

$$C_0 = e^{i\alpha/2} \left[1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1)}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)]} \right];$$

$$A_n \equiv \frac{a_n e^{-i\alpha/2}}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)]^2} \quad B_n \equiv \frac{b_n e^{-i\alpha}}{1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)}.$$

3.1 O MÉTODO *SPLIT-STEP COMPLEX PADÉ*

Fazendo uso dos coeficientes complexos de Padé, Yevick e Thomson (2000) propuseram duas novas aproximações *split-step Padé* para o operador exponencial da raiz quadrada, que são obtidas observando que uma aproximação de Padé real $[n/n]$ para $\exp(-\delta + \delta\sqrt{1+Z})$ é equivalente à primeiro realizar uma aproximação $[n/n]$ para $y = \sqrt{1+Z}$ e em seguida aplicar uma aproximação para $\exp(-\delta + \delta y)$. Por extensão, uma aproximação de Padé $[n/n]$ para o propagador completo pode ser obtida rotacionando primeiro a aproximação de Padé $[n/n]$

para sua exponencial.

Zhang, Rector e Hoversten (2003) aplicaram um algoritmo *split-step Padé* complexo para migração sísmica baseado em um dos métodos de Yevick e Thomson (2000). Todavia, esse método não é eficiente para propagação de grandes ângulos devido ter sido usada uma aproximação de Padé [1/1] para o operador de propagação exponencial.

Utilizando a aproximação de Padé complexa, Zhang et al (2004) apresentaram o método de migração *Split-step Complex Padé-Fourier 2-D*, que é baseado no operador exponencial exato, multiplicado e dividido pelo exponencial aproximado que é usado na solução de Fourier.

3.2 ALGORITMOS DE DIFERENÇAS FINITAS UTILIZANDO APROXIMAÇÕES DE PADÉ COMPLEXAS

Nesta seção propomos aproximar o operador de raiz quadrada da equação da onda unidirecional (equação (2.5)), utilizando a expansão de Padé complexa. Dessa forma, substituindo a equação (3.2) na equação (2.5) temos:

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} = \frac{(-i\omega)}{c(\mathbf{x})} \left[C_0 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n \frac{c^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}}{1 + B_n \frac{c^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} \right] P(\mathbf{x}, \omega). \quad (3.3)$$

Seguindo um método semelhante ao utilizado por Ristow e Rühl (1994) para obter o algoritmo FFD (Apêndice C), chegamos a seguinte aproximação

$$p\sqrt{1 + X^2} \approx \sqrt{1 + p^2 X^2} + C_0(p - 1) + \sum_{n=1}^N \frac{A_n p(1 - p) X^2}{1 + \sigma B_n X^2}, \quad (3.4)$$

em que $p \equiv \frac{c_r}{c(\mathbf{x})}$ é a razão entre a velocidade de propagação do meio, $c(\mathbf{x})$, e a velocidade referência em um meio homogêneo, c_r , $X^2 \equiv \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}$ e $\sigma = 1 + p + p^2$.

Experimentos numéricos, que serão apresentados a seguir, indicam que a aproximação $\sigma = 1 + p^3$ ajusta a curva de vagariedade para abertura angular melhor do que a aproximação $\sigma = 1 + p + p^2$.

3.2.1 Análise numérica

Nosso objetivo aqui é apresentar uma avaliação preliminar dos algoritmos de diferenças finitas utilizando aproximação de Padé complexa em relação aos algoritmos originais apresentados na seção anterior.

Primeiramente, a avaliação é feita pela análise do erro relativo dos operadores de raiz quadrada em relação ao operador exato em função do ângulo de mergulho para migração FFD. O erro relativo é definido por

$$E(X) = E(\text{sen}\phi) = \frac{|\varepsilon|}{p\sqrt{1+X^2}},$$

em que ε é a diferença entre o operador de raiz quadrada exato e o operador aproximado e ϕ é ângulo de incidência.

As Figuras (3.2) e (3.3) apresentam o erro relativo de diferentes aproximações FFD, variando de 0 a 10%, em relação ao ângulo de incidência. A rotação da linha de corte utilizada foi de 45 graus e contraste de velocidade de 0.5.

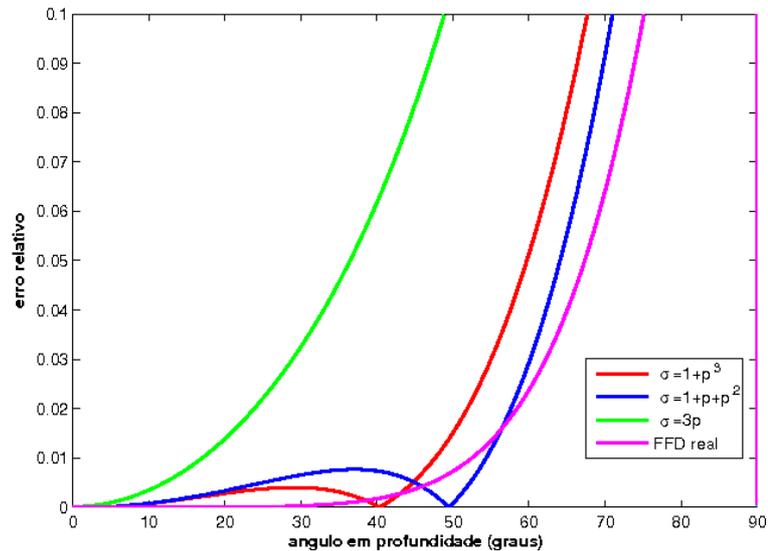


Figura 3.2: Erro relativo das diferentes aproximações para migração FFD com contraste de velocidade de 0,5, ângulo de rotação da linha de corte 45° e 1 termo da série de Padé.

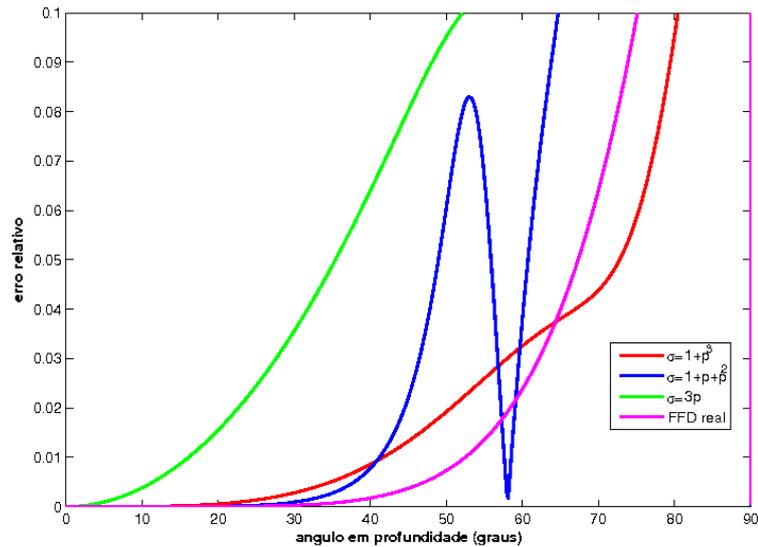


Figura 3.3: Erro relativo das diferentes aproximações para migração FFD com contraste de velocidade de 0,5, ângulo de rotação da linha de corte 45° e 3 termos da série de Padé.

Analisando a Figura (3.2) percebemos que utilizando apenas 1 termo da série de Padé os diferentes algoritmos FFD complexos apresentam-se tão ou menos eficientes em relação ao algoritmo FFD real em função do ângulo de incidência. Observando a Figura (3.3) percebemos que a utilização de 3 termos da série de Padé melhora a precisão para a aproximação $\sigma = 1 + p^3$, em relação a grandes ângulos, fornecendo-nos o primeiro indício de possuir um melhor desempenho em relação às outras aproximações .

Além disso, avaliando a curva de dispersão das aproximações FFD para o operador de raiz quadrada, Figuras (3.4) e (3.5), percebemos que quando a parte real dessas aproximações utilizando aproximação de Padé complexa não são mais capazes de aproximar a curva correspondente ao operador exato, a parte imaginária atenua o sinal, o que não acontece com a aproximação FFD real, mostrando que o operador FFD complexo é capaz de atenuar a energia de grandes ângulos e de tratar ondas evanescentes.

Outro ponto a ser destacado é que a utilização de três termos da série de Padé produz uma melhor aproximação dos algoritmos FFD complexos em relação ao operador exato, tanto da parte real quanto da parte imaginária. Além disso, é perceptível, novamente, o melhor desempenho da aproximação $\sigma = 1 + p^3$.

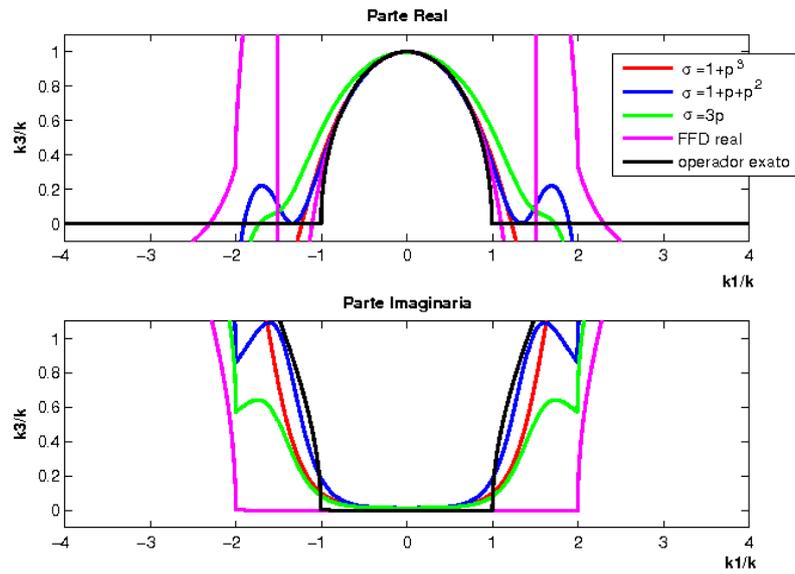


Figura 3.4: Avaliação das aproximações FFD em relação ao operador exato com contraste de velocidade de 0,5, ângulo de rotação da linha de corte 45° e 1 termo da série de Padé.

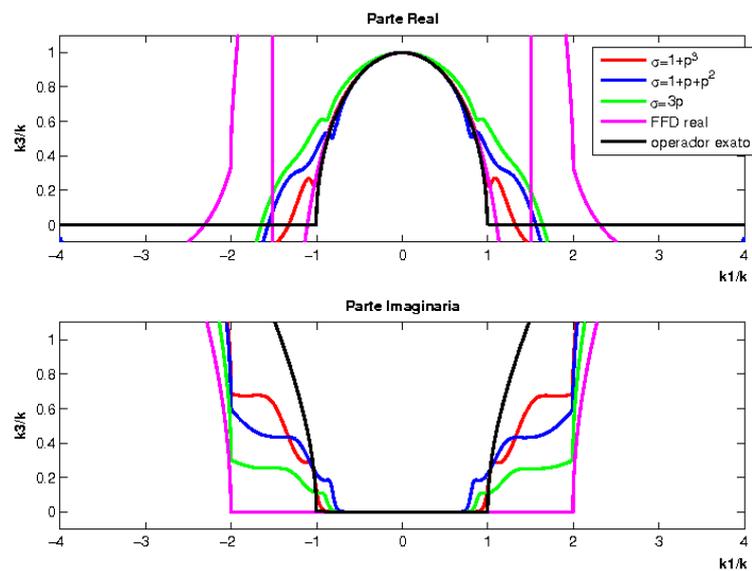


Figura 3.5: Avaliação das aproximações FFD em relação ao operador exato com contraste de velocidade de 0,5, ângulo de rotação da linha de corte 45° e 3 termos da série de Padé.

Para corroborar os testes numéricos apresentamos a Figura (3.6) que mostra a resposta ao impulso utilizando o algoritmo FFD com aproximação de Padé complexa em um meio homogêneo com uma aproximação de 3 termos da série de Padé, rotação da linha de corte de 45 graus e contraste de velocidade de 0,5.

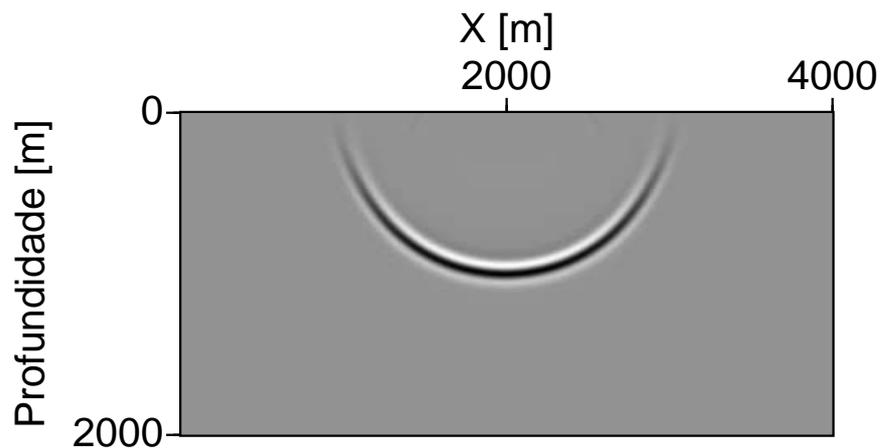


Figura 3.6: Resposta ao impulso usando o algoritmo FFD com aproximação de Padé complexa para um meio homogêneo com contraste de velocidade de 0,5, ângulo de rotação da linha de corte 45° e 3 termos da série de Padé.

Com relação ao algoritmo de diferenças finitas utilizando aproximação de Padé complexa nossas pesquisas mostraram que este também trata com eficiência ondas evanescentes e consegue excelente imageamento de refletores com grande inclinação, como mostra a curva de dispersão apresentada na Figura (3.8). Observamos ainda, comparando as Figuras (3.7) e (3.8), que utilizando 3 termos da série de Padé e 90 graus como ângulo de rotação da linha de corte obtemos bons resultados.

A Figura (3.9) mostra a resposta impulsiva resultante da migração FD em um meio com velocidade constante e utilizando os mesmos parâmetros para gerar as curvas de dispersão que avaliam o mesmo método.

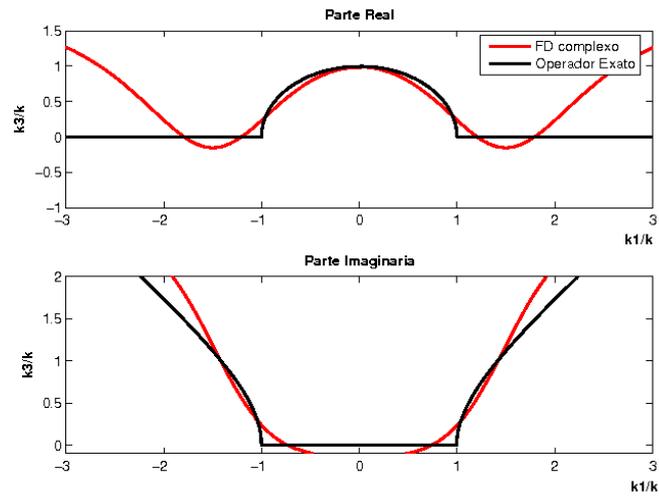


Figura 3.7: Avaliação da aproximação FD em relação ao operador de raiz quadrada exato com ângulo de rotação da linha de corte de 90° e 1 termo da série de Padé.

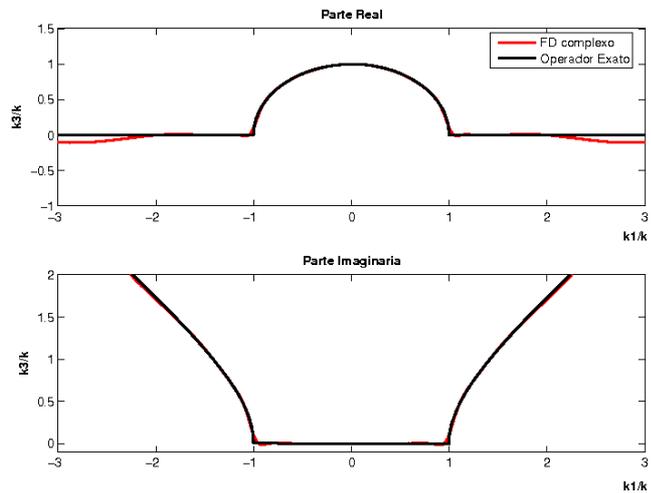


Figura 3.8: Avaliação da aproximação FD em relação ao operador de raiz quadrada exato com ângulo de rotação da linha de corte de 90° e 3 termos da série de Padé.

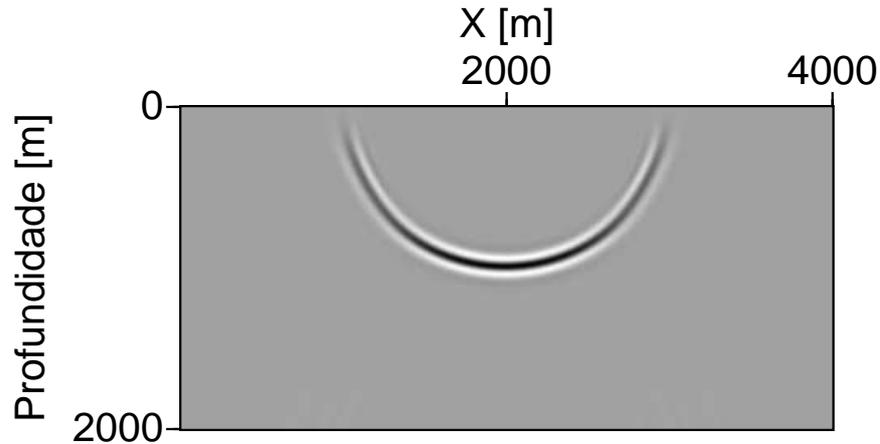


Figura 3.9: Resposta ao impulso utilizando o algoritmo FD com aproximação de Padé complexa em um meio homogêneo com ângulo de rotação da linha de corte de 90° e 3 termos da série de Padé.

3.2.2 Resposta ao impulso para um meio heterogêneo

As Figuras (3.10) e (3.11) mostram as respostas ao impulso utilizando as aproximações FD com coeficientes reais e FD com coeficientes complexos, respectivamente. Ao observar as duas imagens e comparando-as percebemos o melhor desempenho da aproximação FD complexa uma vez que há uma redução considerável da dispersão numérica e uma melhor representação da frente de onda principal. As Figuras (3.12), (3.13), (3.14) e (3.15) mostram as respostas ao impulso das aproximações FFD real, FFD complexa, FFDPI e PSPI, respectivamente. Todas as respostas são similares se considerarmos, somente, os eventos com mais energia. Os resultados do algoritmo FFD complexo estão mais próximos do FFDPI do que aqueles do algoritmo FFD real. Nota-se também que o FFD complexo cobre ângulos maiores do que a aproximação FFDPI. Já a aproximação FFD real claramente fornece resultados piores (Figura (3.12)). Ela contém claramente energia não-causal e ainda alguns eventos para cima.

Existem poucos eventos que aparecem diferentemente nas respostas ao impulso FFD complexa e FFDPI. A diferença mais óbvia é um evento mergulhante à direita da frente de onda principal, que aparece somente na FFDPI, mas que parece ser um evento não-causal artificial. Em segundo lugar, o evento no topo esquerdo da resposta ao impulso aparece com um mergulho ligeiramente diferente. Aqui, a aproximação para grandes ângulos da FFD complexa preserva melhor o verdadeiro mergulho que deve ser quase vertical. Finalmente,

existe um evento horizontal fraco dentro da frente de onda principal, ligeiramente para a direita, que é mais forte no FFDPI do que no FFD complexo. Aqui, o FFDPI preserva melhor o evento. Dessa forma, as aproximações obtidas a partir dos algoritmos FFD complexo e FFDPI são de qualidade compatível, cada uma preservando características ligeiramente diferentes da resposta ao impulso. As aproximações FD e FFD reais são de qualidade inferior.

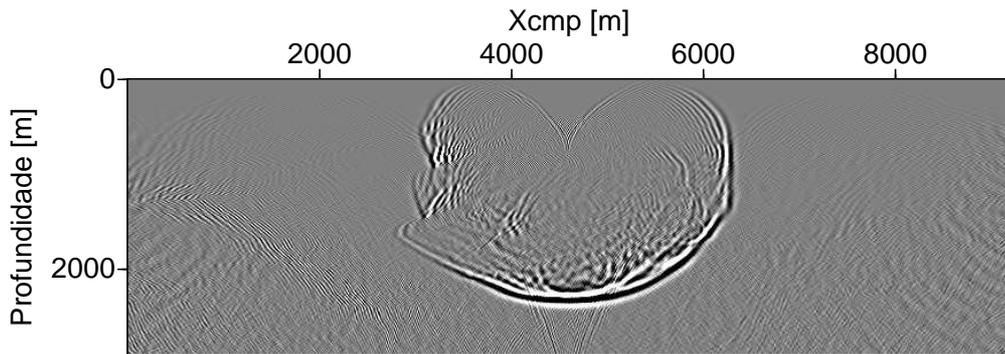


Figura 3.10: Resposta impulsiva no dado Marmousi utilizando o algoritmo FD real do Seismic Un*x.

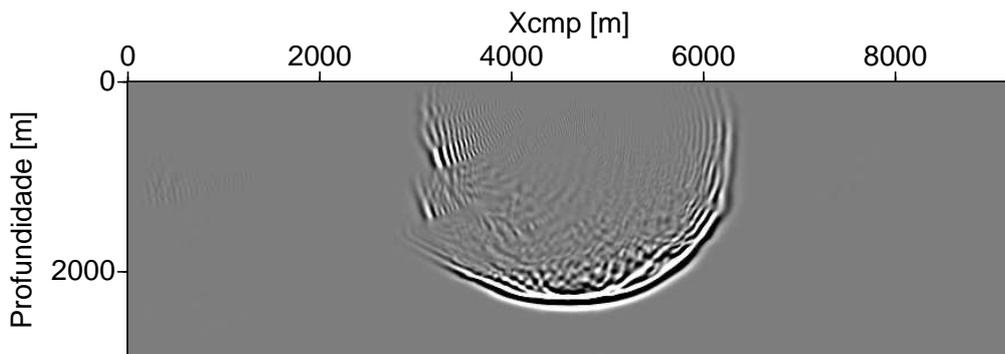


Figura 3.11: Resposta impulsiva do dado Marmousi utilizando o método FD com aproximação de Padé complexa, com ângulo de rotação da linha de corte de 45°.

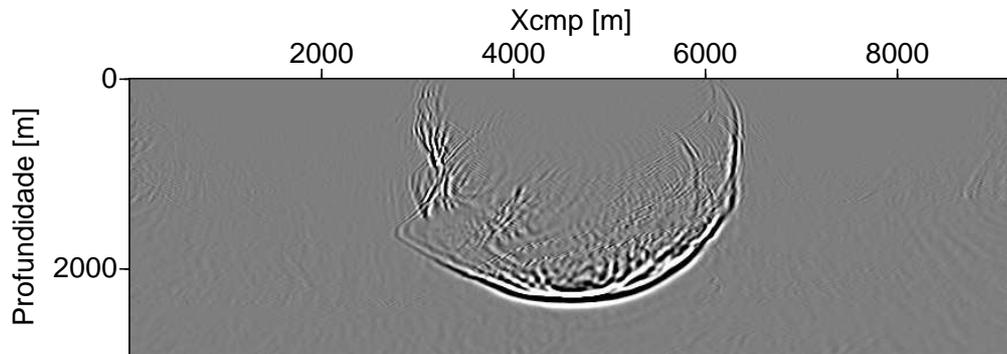


Figura 3.12: Resposta impulsiva do dado Marmousi utilizando o algoritmo FFD real do Seismic Un*x.

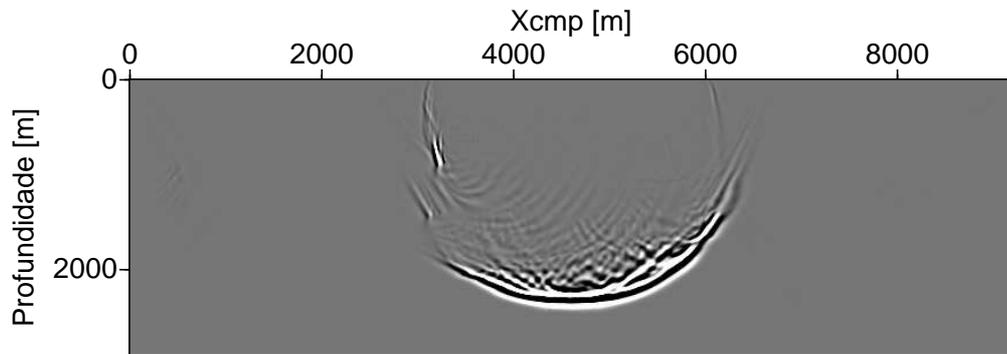


Figura 3.13: Resposta impulsiva do dado Marmousi utilizando o algoritmo FFD com aproximação de Padé complexa, com ângulo de rotação da linha de corte de 45°.

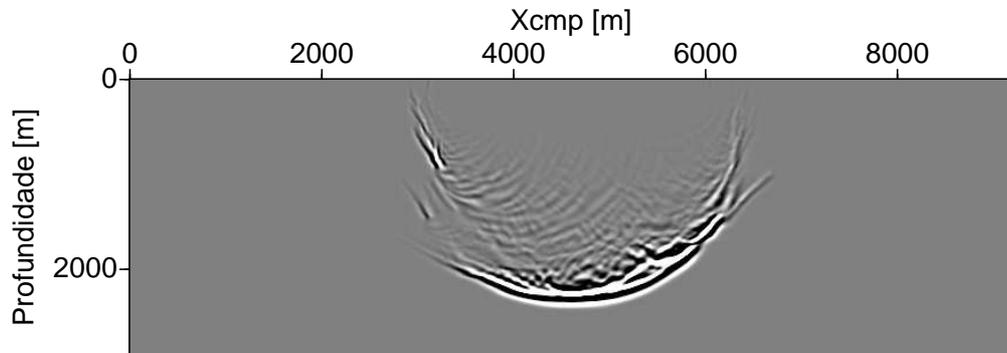


Figura 3.14: Resposta impulsiva do dado Marmousi utilizando o algoritmo FFDPI.

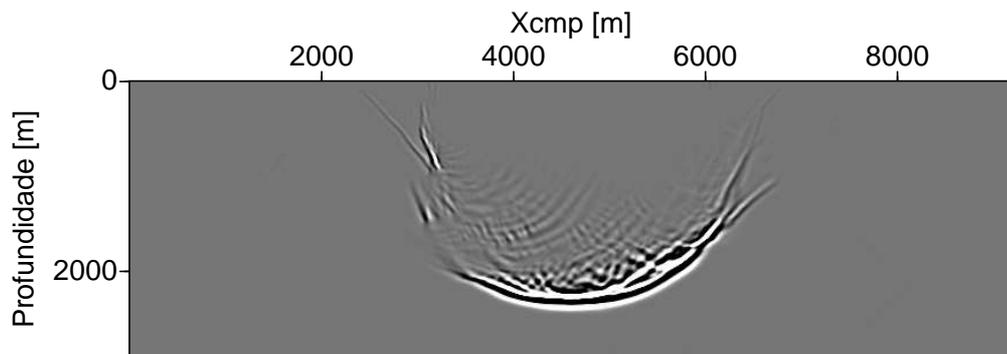


Figura 3.15: Resposta impulsiva do dado Marmousi utilizando o método PSPI do Seismic Un*x.

4 MIGRAÇÃO DE DADOS SINTÉTICOS

Neste capítulo apresentaremos os resultados das migrações pré e pós-empilhamento dos dados sintéticos Marmousi e SEG/EAGE para ilustrar o desempenho de nosso algoritmo de migração e os comparamos com os métodos FFDPI (BIONDI, 2002), PSPI (GAZDAG; SGUAZZERO, 1984), FD e FFD (RISTOW; RÜHL, 1994). Com exceção do método FFDPI, foram utilizadas as implementações do Seismic Un*x (COHEN; STOCKWELL, 2005).

4.1 MIGRAÇÃO PÓS-EMPILHAMENTO

Nesta seção apresentamos nas Figuras (4.2), (4.3) e (4.4) os resultados da migração pós-empilhamento utilizando os algoritmos *split-step*, FD e FFD com aproximação de Padé complexa, respectivamente, referentes ao dado sintético SEG/EAGE, utilizando uma malha quadrada de 40 x 40m. Para o cálculo do ângulo incidente foi utilizado um pulso Ricker com frequência máxima de 20Hz, com uma banda de frequência de 5 a 40Hz. Para fazer a migração dos dados utilizando o algoritmo *Split-step* usamos o Seismic Un*x. Nestes exemplos, chamamos a atenção para a recuperação de eventos com grande mergulho, como o flanco do domo de sal, obtidas pelos algoritmos FD e FFD com aproximação de Padé complexa, além de um bom imageamento abaixo do domo. Observamos ainda que o resultado da migração *split-step* apresenta uma perda de informação da forma do domo de sal no início do flanco, que é perceptível ao compará-lo com o modelo de velocidade apresentado na Figura (4.1).

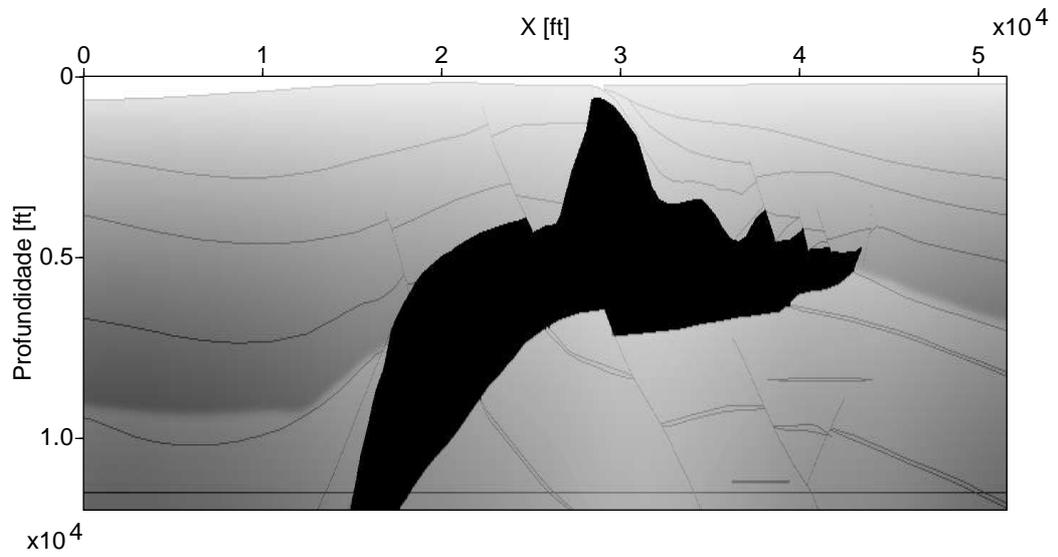


Figura 4.1: Modelo de velocidade do domo de sal da SEG/EAGE.

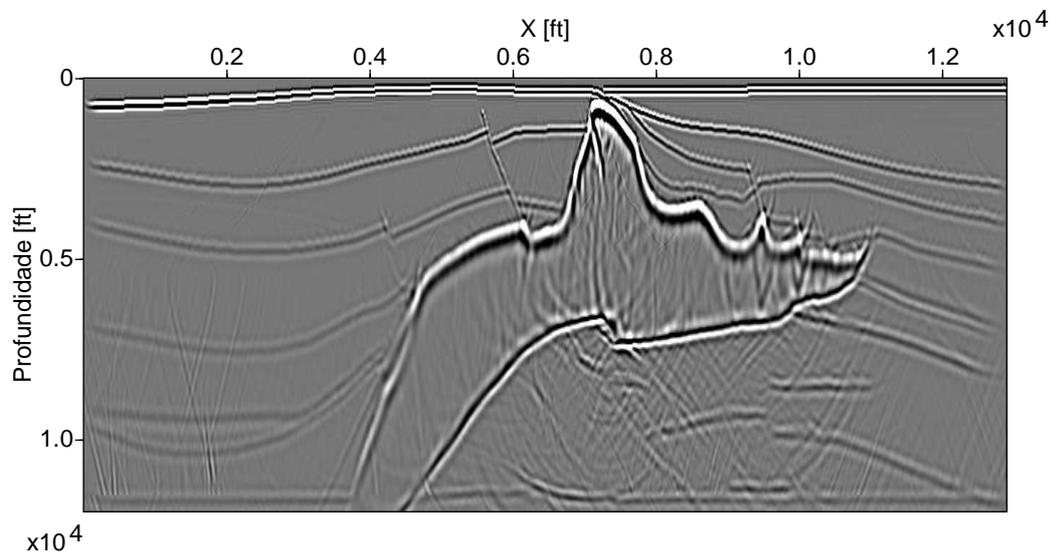


Figura 4.2: Migração *split-step* pós-empilhamento do dado SEG/EAGE usando o Seismic Unix

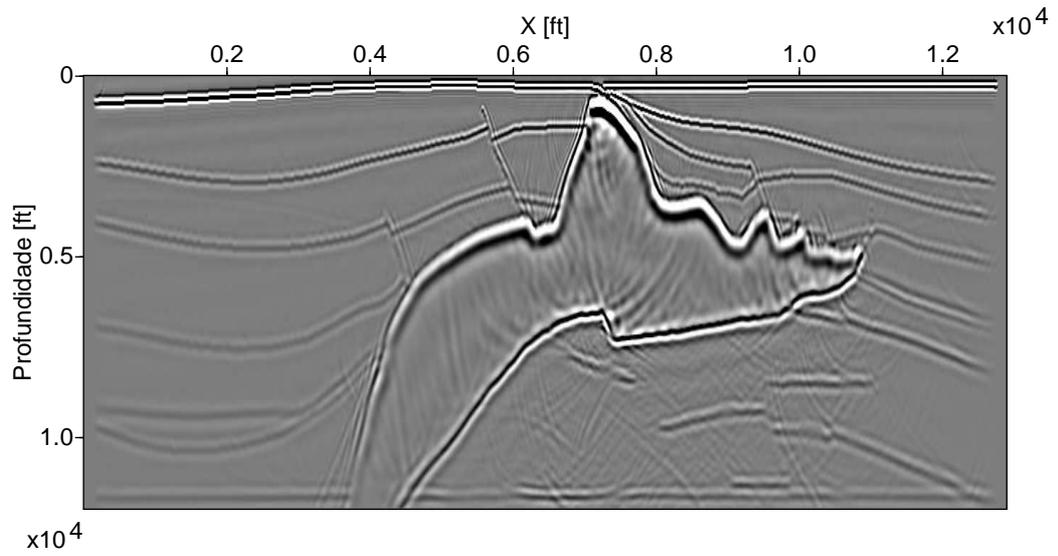


Figura 4.3: Migração FD pós-empilhamento com aproximação de Padé complexa do dado SEG/EAGE utilizando 3 termos da série de Padé e ângulo de rotação da linha de corte de 90 graus.

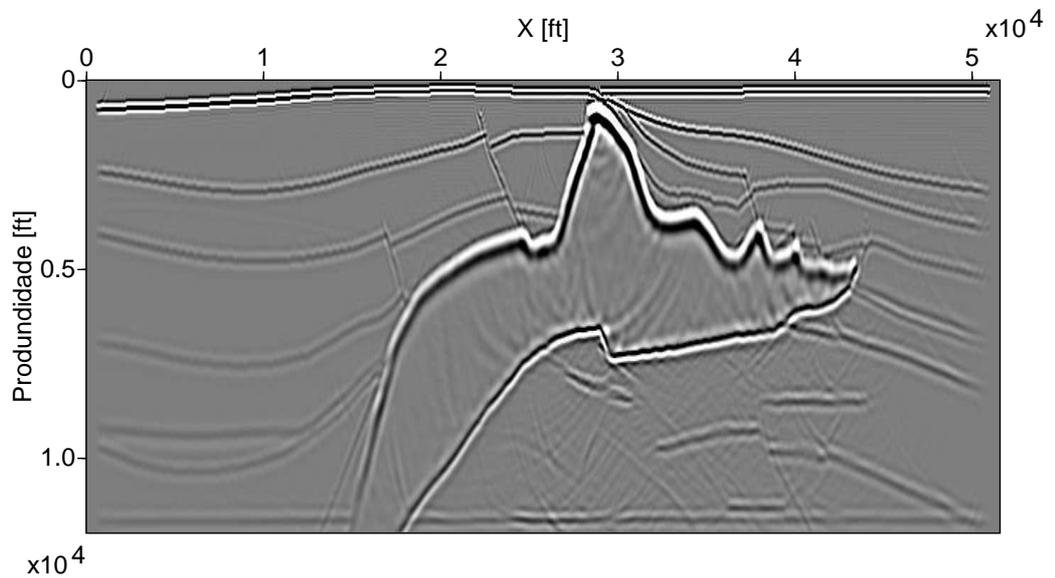


Figura 4.4: Migração FFD pós-empilhamento com aproximação de Padé complexa do dado SEG/EAGE utilizando 3 termos da série de Padé, contraste de velocidade de 0,5 e ângulo de rotação da linha de corte de 45 graus.

4.2 MIGRAÇÃO PRÉ-EMPILHAMENTO

4.2.1 Migração Pré-empilhamento dos dados Marmousi

Nesta seção apresentamos os resultados da migração pré-empilhamento 2D do modelo Marmousi usando o algoritmo FD e FFD com aproximação de Padé complexa e comparamos aos métodos FFDPI, PSPI, FFD e FD com coeficientes reais. Novamente, com exceção do algoritmo FFDPI, foram utilizadas as implementações do SU. Usamos a prescrição de Bagaini, Bonomi e Pieroni (1995) na escolha de velocidades para o termo de deslocamento de fase em nossa implementação do algoritmo FFDPI.

A condição de imagem em todos os algoritmos foi a correlação entre o campo incidente e o campo retropropagado. Para todos os exemplos a seguir, o campo incidente foi calculado usando um pulso Ricker com frequência de pico de 25Hz. A banda de frequência utilizada foi de 5 a 60Hz. Nenhum pré-processamento foi aplicado aos dados de entrada. Usamos três parcelas da expansão de Padé complexa para as aproximações FD e FFD.

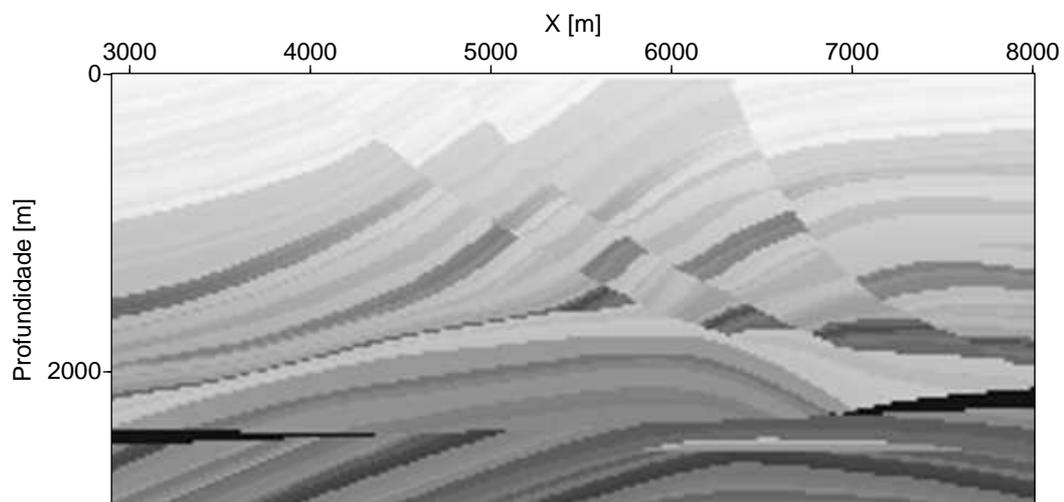


Figura 4.5: Modelo de velocidade do dado Marmousi.

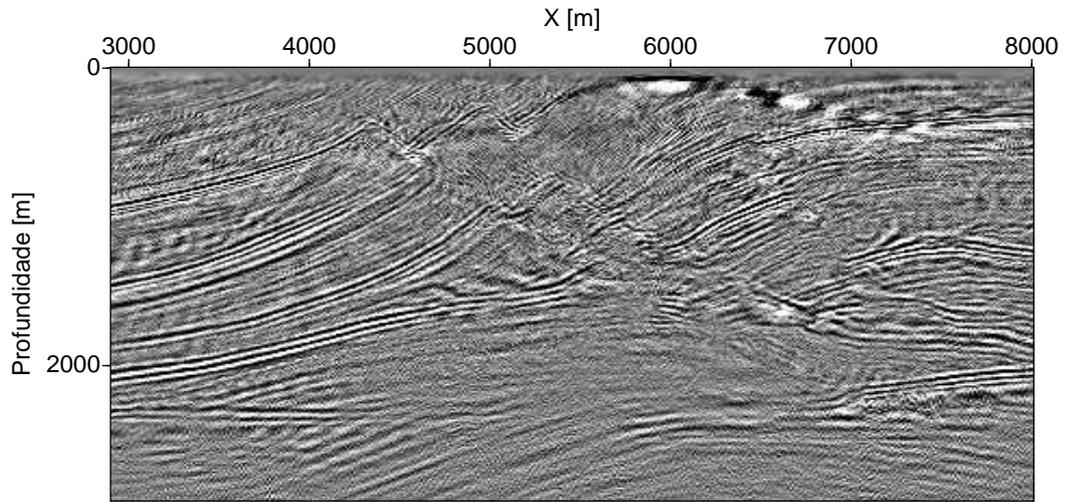


Figura 4.6: Migração pré-empilhamento dos dados Marmousi utilizando o algoritmo FD com coeficientes reais usando o Seismic Un*x.

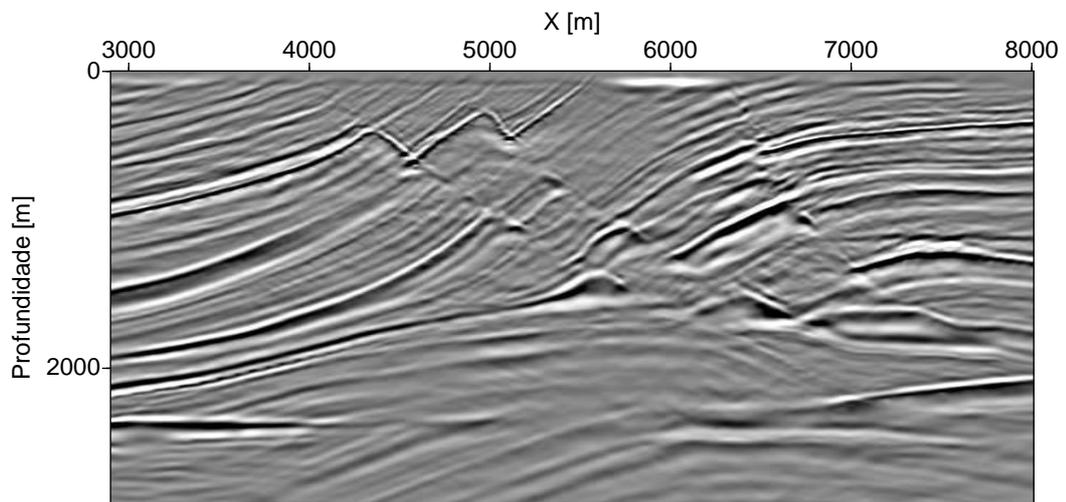


Figura 4.7: Migração FD pré-empilhamento com aproximação de Padé complexa com $dx_3 = 6m$, ângulo de rotação da linha de corte igual a 90 graus e 3 termos da série de Padé.

A Figura (4.6) mostra o resultado da migração utilizando o método FD com coeficientes reais, e a Figura (4.7) mostra os dados migrados pelo método FD com aproximação de Padé complexa, usando um espaçamento vertical $dx_3 = 6m$. É evidente a melhoria na definição de refletores e falhas presentes no modelo.

A Figura (4.8) mostra o resultado da migração FFD com coeficientes reais, que comparado ao algoritmo FFD com aproximação de Padé complexa, Figura (4.9), apresenta menor qualidade de definição nas falhas estruturais do modelo, embora o resultado da migração FFD real pareça preservar altas frequências. Comparando ainda o método PSPI, Figura (4.10), com o método FFD com coeficientes complexos é perceptível a dificuldade do método PSPI em imagear estruturas até aproximadamente 1500m em profundidade, enquanto o algoritmo FFD com aproximação de Padé complexa mostra essas estruturas com uma boa definição. Ao analisar a Figura (4.11), que mostra a aplicação do método FFDPI é possível perceber sua semelhança com o método FD com aproximação de Padé complexa, porém obtido a um menor custo computacional.

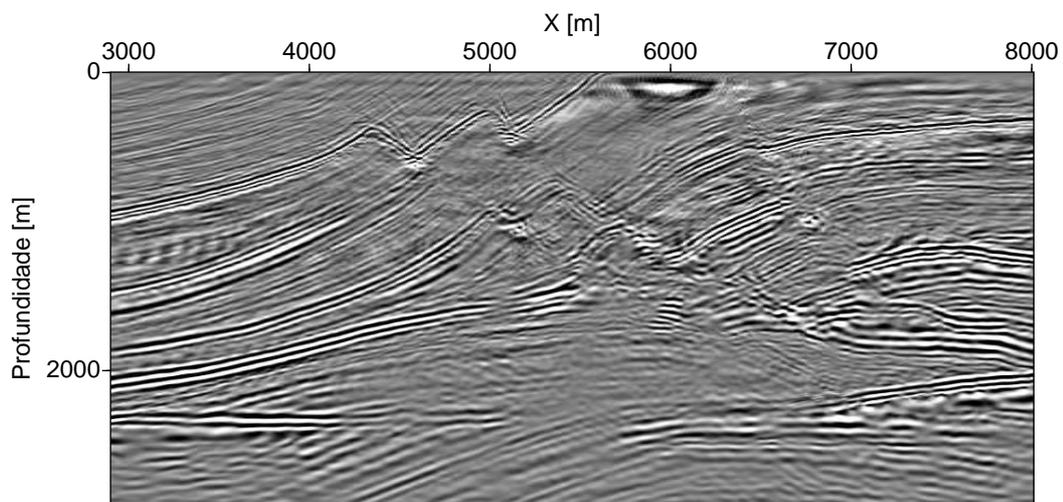


Figura 4.8: Migração pré-empilhamento dos dados Marmousi utilizando o algoritmo FFD com coeficientes reais usando o Seismic Un*x.

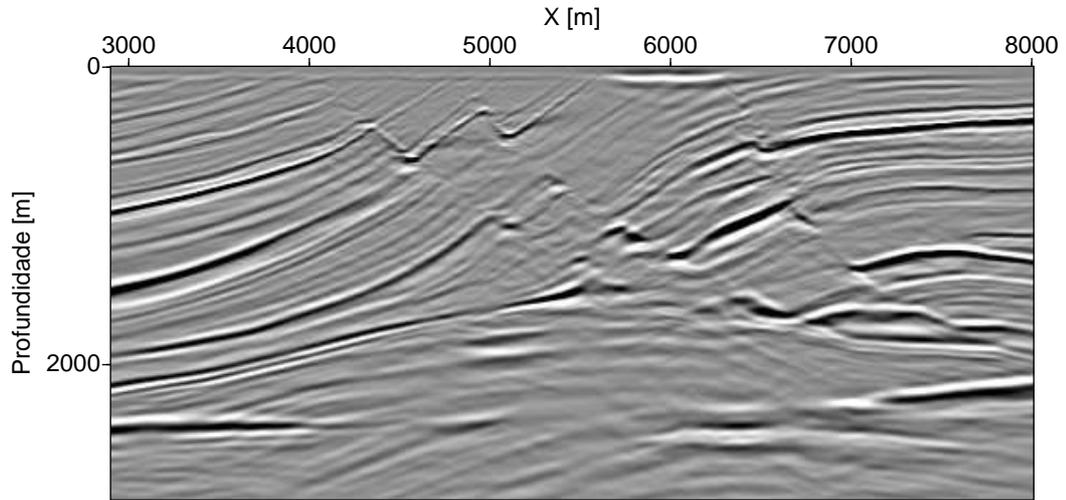


Figura 4.9: Migração FFD pré-empilhamento com aproximação de Padé complexa com ângulo de rotação da linha de corte igual a 45 graus, contraste de velocidade de 0,75 e 3 termos da série de Padé.

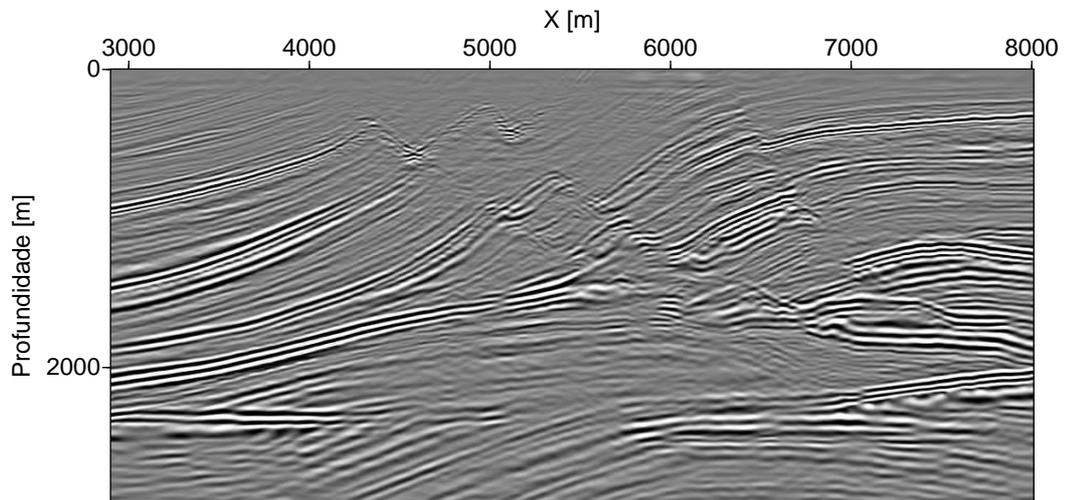


Figura 4.10: Migração PSPI pré-empilhamento dos dados Marmousi gerada pelo Seismic Un*x.

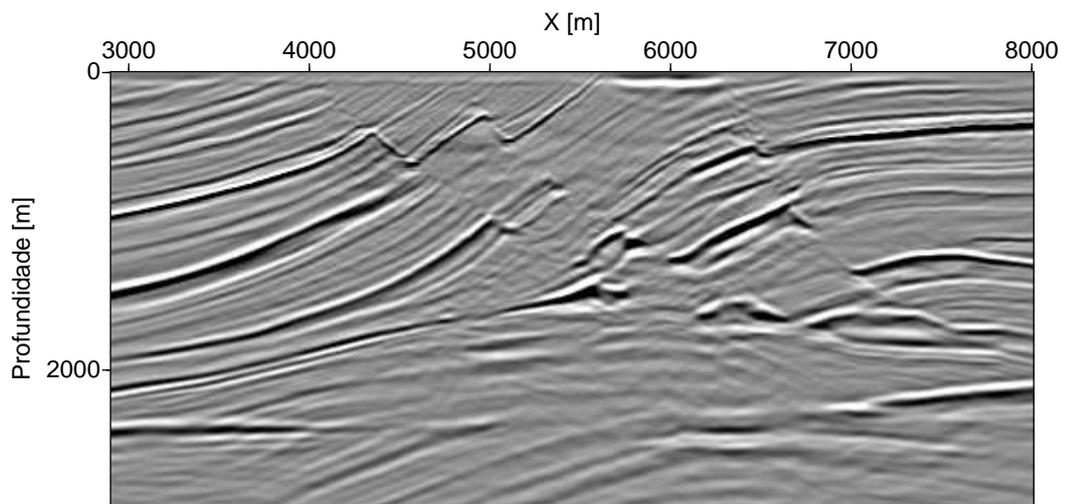


Figura 4.11: Migração FFDPI pré-empilhamento dos dados Marmousi.

4.2.2 Migração pré-empilhamento do modelo SEG/EAGE

Apresentamos a migração FD e FFD com aproximação de Padé complexa dos dados SEG/EAGE, Figura (4.13) e Figura (4.12), respectivamente, e as comparamos à migração FFDPI, Figura (4.14). Nosso objetivo com esses resultados é corroborar a afirmação de que o algoritmo FD e FFD com aproximação de Padé complexa é capaz de imagear estruturas com forte inclinação, como o flanco do domo do sal, além de alcançar uma boa resolução abaixo do domo tanto quanto a migração EFDPI.

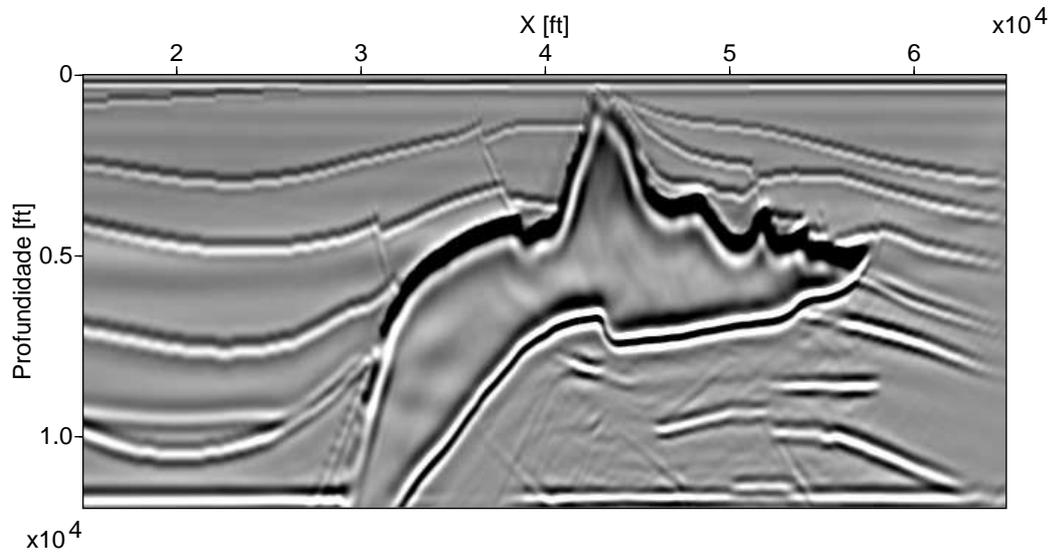


Figura 4.12: Migração FFD pré-empilhamento com aproximação de Padé complexa do dado SEG/EAGE, com ângulo de rotação da linha de corte igual a 45 graus, contraste de velocidade 0,75, e 3 termos da série de Padé.

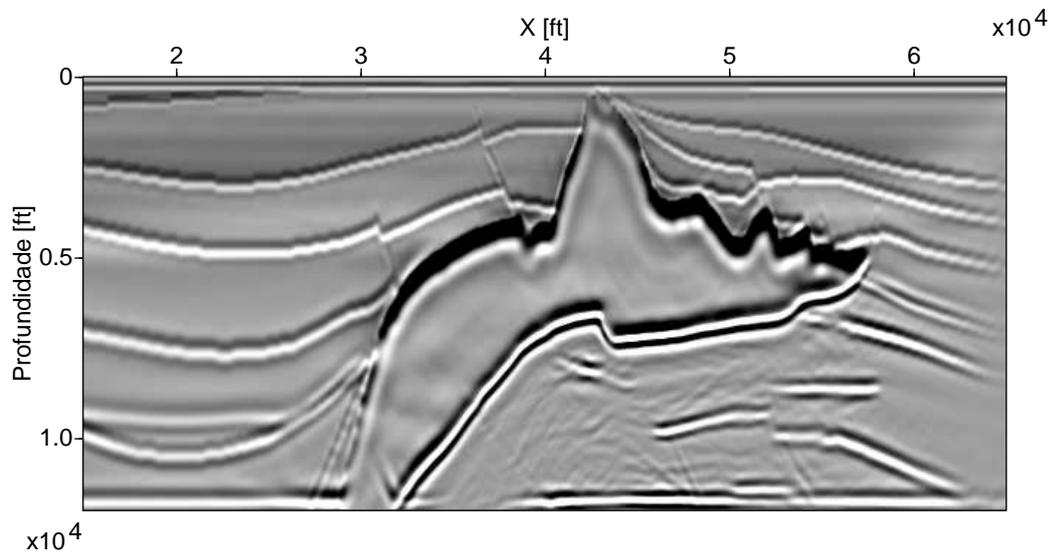


Figura 4.13: Migração FD pré-empilhamento com aproximação de Padé complexa do dado SEG/EAGE, com ângulo de rotação da linha de corte igual a 90° e 3 termos da série de Padé.

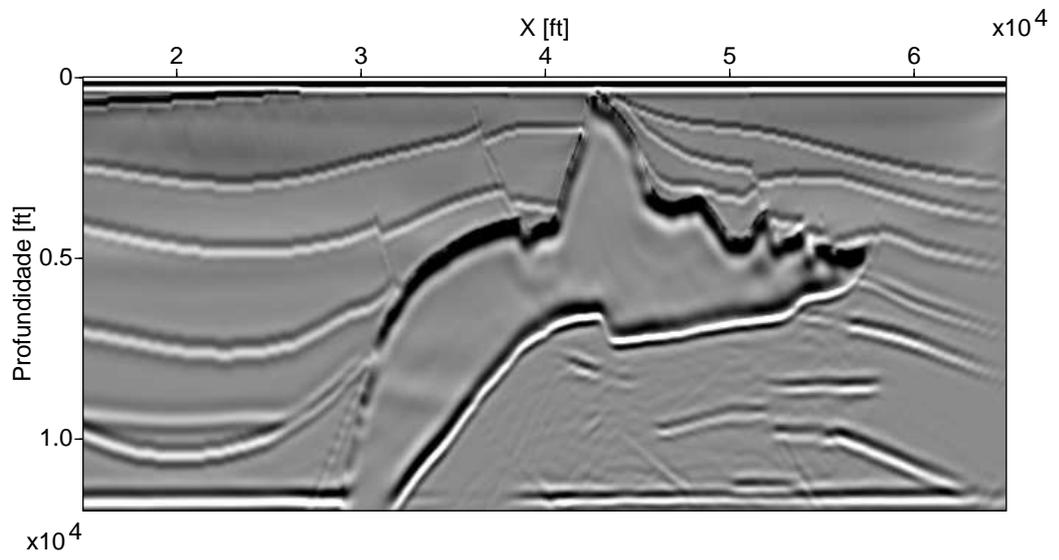


Figura 4.14: Migração FFDPI pré-empilhamento do dado SEG/EAGE.

5 CONCLUSÃO

Aplicamos a expansão de Padé complexa (MILLINAZZO; ZALA; BROOKE, 1997) para implementar a migração FD e FFD. Recentemente, Zhang et al. (2004) implementaram a migração FD usando o primeiro termo desta expansão. Nesta dissertação, estendemos o trabalho destes autores. Em primeiro lugar, investigamos o uso de mais de um termo da expansão na aproximação do operador para equação da onda unidirecional. Aproximando o espectro do operador em um meio homogêneo obtivemos o número de termos da expansão de Padé e ângulo para rotação de fase no plano complexo que geram bons resultados. Em segundo lugar, propomos uma expressão para a aproximação FFD que apresentou melhores resultados do que a aproximação de Ristow e Rühl (1994) na presença de fortes contrastes de velocidade.

Os métodos de continuação do campo usando FD e FFD foram aplicados na implementação da migração pós e pré-empilhamento em 2D. A análise da resposta ao impulso do operador de migração usando as duas abordagens apresenta resultados semelhantes a migração PSPI e FFDPI.

Os algoritmos FD e FFD foram validados em dois conjuntos de dados sintéticos, os dados Marmousi e os dados do modelo de sal SEG/EAGE. Os resultados da migração pós e pré-empilhamento, com os dois algoritmos desenvolvidos, mostram sua capacidade de migrar eventos com forte mergulho, na presença de forte variação lateral de velocidade. Estes resultados também demonstram a estabilidade do algoritmo FFD usando a aproximação de Padé complexa. A migração FD e FFD apresentam resultados semelhantes ao método FFDPI a um custo computacional muito inferior. Adicionalmente, a migração FFD com aproximação de Padé complexa permite um maior passo de avanço na direção x_3 do que a migração FD com aproximação de Padé complexa.

Os algoritmos estudados permitem varios tipos de extensão. A implementação em 3D

da migração FD pode ser efetuada usando a técnica de *splitting*. Anisotropia numérica tem sido reportada em relação à migração FFD em 3D (BIONDI, 2002). Uma abordagem sem usar a técnica de *splitting* pode ser efetuada usando-se o método de gradientes conjugados (CLAERBOUT, 1985). A migração usando fontes generalizadas, como ondas planas, é outra extensão imediata destes algoritmos.

REFERÊNCIAS

BAGAINI, C.; BONOMI, E.; PIERONI, E. Data parallel implementation of 3-d PSPI. In: ANNUAL INTERNATIONAL MEETING SOCIETY EXPLORATION GEOPHYSICS, 65th., 1995. **SEG Technical Program Expanded Abstracts**, 1995. p. 188–191.

BAMBERGER, A.; ENGQUIST, L. H.; JOLY, P. Higher order paraxial wave equation approximations in heterogeneous media. **J. Appl. Math.**, v.48, p. 129-154, 1988.

BIONDI, B. Stable wide-angle Fourier finite-difference downward extrapolation of 3-d wavefields. **Geophysics**, v. 67, n. 3, p. 872–882, 2002.

BIONDI, B.; SYMES, W. W. Angle domain common-image gathers for migration velocity analysis by wavefield-continuation imaging. **Geophysics**, v. 69, p. 1283–1298, 2004.

CLAERBOUT, J. F. **Imaging the Earth's Interior**. [S.l.]: Blackwell Scientific Publications, 1985.

COHEN, J. K.; STOCKWELL, J. J. W. **Cwp/su: Seismic un*x release n. 39 a free package for seismic research e processing**. 2005.

GAZDAG, J. Wave equation migration with the phase-shift method. **Geophysics**, v. 73, p. 1342–1351, 1978.

GAZDAG, J.; SGUAZZERO, P. Migration of seismic data by phase-shift plus interpolation. **Geophysics**, v. 49, n. 2, p. 124–131, 1984.

GUITTON, A.; VALENCIANO, A.; BEVC, D. Robust illumination compensation for shot-profile migration. In: EAGE CONFERENCE & EXHIBITION, 68th, 2006, Viena - Austria. **SEG Technical Program Expanded Abstracts**, 2006. p. 2519–2523.

MILLINAZZO, F. A.; ZALA, C. A.; BROOKE, G. H. Square-root approximations for parabolic equation algorithms. **J. Acoust. Soc. Am.**, v. 101, n. 2, p. 760–766, 1997.

RICKETT, J.; SAVA, P. Offset and angle-domain common image-point gathers for shot-profile migration. *Geophysics*, v. 67, n. 3, p. 883–889, 2002.

RISTOW, D.; RÜHL, T. Fourier finite-difference migration. **Geophysics**, v. 59, n. 12, p. 1882–1893, 1994.

SAVA, P.; FOMEL, S. Coordinate-independent angle-gathers for wave equation migration. In: ANN. INTERNAT. MTG. SOC. OF EXPL. GEOPHYS., 2005a. **SEG Technical Program Expanded Abstracts**, 2005. p. 2052–2055.

SAVA, P.; FOMEL, S. Time-shift imaging condition. In: ANN. INTERNAT. MTG. SOC. OF. EXPL. GEOPHYS., 75th., 2005b. **SEG Technical Program Expanded Abstracts**, 2005. p. 1850–1853.

STOFFA, P. L. et al. Split-step Fourier migration. **Geophysics**, v. 55, n. 4, p. 410–421, 1990.

YEVICK, D.; THOMSON, D. J. Complex padé approximants for wide-angle acoustic propagators. **J. Acoust. Soc. Am.**, v. 108, n. 6, p. 2784–2790, 2000.

ZHANG, L.; RECTOR, J. W.; HOVERSTEN, G. M. Split-step complex padé migration. **Journal of Seismic Exploration**, v. 12, p. 229–236, 2003.

ZHANG, L. et al. Split-step complex padé-fourier depth migration. **SEG Int'l Exposition and 74th Annual Meeting**, 2004.

ZHANG, L. et al. 3d fourier finite-difference common azimuth depth migration. **Journal of Seismic Exploration**, v. 14, p. 287–294, 2006.

APÊNDICES

APÊNDICE A – EXPANSÃO DA RAIZ EM FRAÇÕES PARCIAIS

Aproximações racionais da forma

$$R_N(Z) = 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n Z}{1 + b_n Z}, \quad (\text{A.1})$$

para $\sqrt{1+Z} \approx R_N(Z)$ são de interesse para algoritmos de equações parabólicas desde que forneçam uma boa estimativa para ser usada em equações como a equação (2.5) e permitam implementações numéricas eficientes. Os coeficientes de valores reais a_n e b_n são dados por

$$a_n = \frac{2}{2N+1} \text{sen}^2 \left(\frac{n\pi}{2N+1} \right)$$

e

$$b_n = \cos^2 \left(\frac{n\pi}{2N+1} \right)$$

e correspondem as aproximações de Padé da raiz quadrada com linha de corte ao longo da linha real negativa de $Z = -1$. Consiando a rotação da linha de corte no plano complexo a representação para a raiz quadrada tem a forma

$$S_\alpha(Z) = e^{i\alpha/2} \sqrt{(1+Z)e^{-i\alpha}} = e^{i\alpha/2} \sqrt{1 + [(1+Z)e^{-i\alpha} - 1]}. \quad (\text{A.2})$$

Usando a equação (A.1) para aproximar a raiz quadrada na equação (A.2) temos

$$R_{\alpha,N}(Z) = e^{i\alpha/2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n [(1+Z)e^{-i\alpha} - 1]}{1 + b_n [(1+Z)e^{-i\alpha} - 1]} \right\}$$

$$R_{\alpha,N}(Z) = e^{i\alpha/2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n (e^{-i\alpha} - 1) + a_n e^{-i\alpha} Z}{1 + b_n (e^{-i\alpha} - 1) + b_n e^{-i\alpha} Z} \right\}$$

$$R_{\alpha,N}(Z) = e^{i\alpha/2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1) + a_n e^{-i\alpha} Z}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)] \left[1 + \frac{b_n e^{-i\alpha} Z}{1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)} \right]} \right\},$$

definindo

$$B_n \equiv \frac{b_n e^{-i\alpha}}{1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)} \quad (\text{A.3})$$

temos

$$R_{\alpha,N}(Z) = e^{i\alpha/2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1) + a_n e^{-i\alpha} Z}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)] [1 + B_n Z]} \right\}$$

$$R_{\alpha,N}(Z) = e^{i\alpha/2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1)}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)] [1 + B_n Z]} + \sum_{n=1}^N \frac{a_n e^{-i\alpha} Z}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)] [1 + B_n Z]} \right\}$$

$$R_{\alpha,N}(Z) = e^{i\alpha/2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1)}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)]} + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1)}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)] [1 + B_n Z]} - \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1)}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)]} + \sum_{n=1}^N \frac{a_n e^{-i\alpha} Z}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)] [1 + B_n Z]} \right\}$$

também definindo

$$C_0 = e^{i\alpha/2} \left[1 + \sum_{n=1}^N \frac{a_n(e^{-i\alpha} - 1)}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)]} \right] \quad (\text{A.4})$$

temos

$$R_{\alpha,N}(Z) = C_0 + e^{i\alpha/2} \left\{ - \sum_{n=1}^N \frac{a_n B_n (e^{-i\alpha} - 1) Z}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)] [1 + B_n Z]} + \sum_{n=1}^N \frac{a_n e^{-i\alpha} Z}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)] [1 + B_n Z]} \right\}$$

$$R_{\alpha,N}(Z) = C_0 + e^{i\alpha/2} \sum_{n=1}^N \left\{ -a_n B_n (e^{-i\alpha} - 1) + a_n e^{-i\alpha} \right\} \frac{Z}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)] [1 + B_n Z]}$$

substituindo o valor de B_n na expressão entre chaves

$$R_{\alpha,N}(Z) = C_0 + e^{i\alpha/2} \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{a_n e^{-i\alpha}}{1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)} \right\} \frac{Z}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)] [1 + B_n Z]}$$

$$R_{\alpha,N}(Z) = C_0 + \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{a_n e^{-i\alpha/2}}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)]^2} \right\} \frac{Z}{[1 + B_n Z]}$$

e finalmente definindo

$$A_n \equiv \frac{a_n e^{-i\alpha/2}}{[1 + b_n(e^{-i\alpha} - 1)]^2} \quad (\text{A.5})$$

pode-se escrever

$$R_{\alpha,N}(Z) = C_0 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n Z}{1 + B_n Z} \quad (\text{A.6})$$

APÊNDICE B – APROXIMAÇÕES PARA A MIGRAÇÃO POR DIFERENÇAS FINITAS

É possível obter dois algoritmos para a migração por diferenças finitas os quais apresentamos a seguir.

B.1 APROXIMAÇÃO 1

O primeiro algoritmo pode ser obtido substituindo a equação (A.6) na equação (2.5) obtendo

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} = \frac{(-i\omega)}{c(\mathbf{x})} \left[C_0 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n \frac{c^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}}{1 + B_n \frac{c^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} \right] P(\mathbf{x}, \omega) .$$

Utilizando a técnica de *splitting* este operador pode ser implementado usando Crank-Nicholson para valores arbitrários de N . Uma estratégia de *splitting* é

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} = \frac{(-i\omega)}{c(\mathbf{x})} C_0 P(\mathbf{x}, \omega)$$

seguida de cada parcela no somatório

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} = \frac{(-i\omega)}{c(\mathbf{x})} \left[\frac{A_n \frac{c^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}}{1 + B_n \frac{c^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} \right] P(\mathbf{x}, \omega) .$$

A primeira parcela tem solução analítica, para modelos de velocidade em que $c(\mathbf{x}) = c(x_1, x_2)$

$$P(z + \Delta z, \omega) = P(z, \omega) \exp \left[\frac{(-i\omega)}{c(\mathbf{x})} C_0 \Delta z \right] .$$

A equação associada a cada parcela é

$$\frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} + B_n \frac{c^2(\mathbf{x})}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_3} = -A_n \frac{c(\mathbf{x})}{(-i\omega)} \frac{\partial^2 P(\mathbf{x}, \omega)}{\partial x_1^2}. \quad (\text{B.1})$$

B.1.1 Implementação usando Crank-Nicholson

A implementação do algoritmo de Crank-Nicholson para a equação (B.1) pode ser feita definindo

$$X^2 \equiv \frac{c^2}{\omega^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right).$$

Dessa forma, podemos reescrever a equação (B.1) na forma

$$\frac{\partial P}{\partial x_3} = -i \left(\frac{\omega}{c} \right) \frac{A_n X^2}{1 + B_n X^2} P.$$

Aproximando a derivada em relação a x_3 por diferenças finitas e aplicando o operador do lado direito ao ponto médio do intervalo de continuação, $[x_3, x_3 + \Delta x_3]$, temos

$$(1 + B_n X^2) \frac{P^{j+1}(\mathbf{y}, \omega) - P^j(\mathbf{y}, \omega)}{\Delta x_3} = -i \left(\frac{\omega}{c} \right) A_n X^2 \frac{P^{j+1}(\mathbf{y}, \omega) - P^j(\mathbf{y}, \omega)}{2}, \quad (\text{B.2})$$

em que $P^j(\mathbf{y}, \omega) \equiv P(x_1, j\Delta x_3, \omega)$ e $\mathbf{y} \equiv (x_1, x_2)$. A equação (B.2) pode ser reescrita como

$$\left[1 + \left(B_n + i \left(\frac{\omega \Delta x_3}{2c} \right) A_n \right) X^2 \right] P^{j+1}(\mathbf{y}, \omega) = \left[1 + \left(B_n - i \left(\frac{\omega \Delta x_3}{2c} \right) A_n \right) X^2 \right] P^j(\mathbf{y}, \omega). \quad (\text{B.3})$$

Para obter a solução da equação (B.3) aproxima-se X^2 por um operador de diferenças finitas. Para o caso 2-D, uma aproximação por diferenças finitas de segunda ordem em Δx_1 para X^2 é

$$X^2 P^j(x_1, \omega) \approx \frac{c^2}{\omega^2} \frac{1}{\Delta x_1^2} D_x^2 P_i^j = \frac{c^2}{\omega^2} \frac{1}{\Delta x_1^2} (P_{i+1}^j - 2P_i^j + P_{i-1}^j),$$

e $P_i^j(\omega) = P(i\Delta x_1, j\Delta x_3, \omega)$. Utilizando esta aproximação o esquema de diferenças finitas para continuação do campo de ondas é

$$\left\{ \left(\frac{\omega \Delta x_1}{c} \right)^2 + \left[B_n + i \left(\frac{\omega \Delta x_3}{c} \right) A_n \right] D_x^2 \right\} P_i^{j+1} = \left\{ \left(\frac{\omega \Delta x_1}{c} \right)^2 + \left[B_n - i \left(\frac{\omega \Delta x_3}{c} \right) A_n \right] D_x^2 \right\} P_i^j$$

B.2 APROXIMAÇÃO 2

Para obtermos o segundo algoritmo para a migração por diferenças finitas é necessário aplicarmos uma fatoração diferente daquela aplicada para obtermos a equação (2.5). Assim, aplicando a transformada de Fourier no tempo

$$P(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\mathbf{x}, \omega) e^{-i\omega t} d\omega .$$

à equação (2.1) temos

$$\frac{\partial^2 P(x_1, x_3, \omega)}{\partial x_3^2} + \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{(-i\omega)^2}{c^2(x_1)} \right] P(x_1, x_3, \omega) = 0 . \quad (\text{B.4})$$

Escrevendo $P(x_1, x_3, \omega)$ na forma

$$P(x_1, x_3, \omega) = Q(x_1, x_3, \omega) e^{ik_0 x_3} ,$$

e substituindo na equação (B.4) temos

$$\frac{\partial^2 Q(x_1, x_3, \omega)}{\partial x_3^2} + 2ik_0 \frac{\partial Q}{\partial x_3} + \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\omega^2}{c^2(x_1)} - k_0^2 \right] Q(x_1, x_3, \omega) = 0 .$$

Somando e subtraindo k_0^2 nesta expressão pode-se reescrevê-la na forma

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_3} + ik_0 \right)^2 + k_0^2 \left[1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{k_0^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2(x_1)} - k_0^2 \right) \right] \right\} Q(x_1, x_3, \omega) = 0 .$$

Esta expressão admite a seguinte fatoração

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_3} + ik_0 \right) Q(x_1, x_3, \omega) = \pm ik_0 \sqrt{1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{k_0^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2(x_1)} - k_0^2 \right)} Q(x_1, x_3, \omega) ,$$

e a equação da onda unidirecional em x_3 , para uma onda progressiva, é dada por:

$$\frac{\partial Q}{\partial x_3} = -ik_0 \left[1 - \sqrt{1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{k_0^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2(x_1)} - k_0^2 \right)} \right] Q .$$

A equação da onda unidirecional em x_3 para uma onda progressiva é

$$\frac{\partial Q}{\partial x_3} = -ik_0 \left[1 + \sqrt{1 + \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{k_0^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2(x_1)} - k_0^2 \right)} \right] Q .$$

Tomando-se $k_0 = \omega/c_r$, em que c_r é uma velocidade de referencia no meio obtem-se, ainda formalmente,

$$\frac{\partial Q}{\partial x_3} = -i \frac{\omega}{c_r} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{c_r^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \left(\frac{c_r^2}{c^2(x_1)} - 1 \right)} \right] Q . \quad (\text{B.5})$$

Substituindo (A.6) em (B.5) obtem-se

$$\frac{\partial Q}{\partial x_3} = -i \frac{\omega}{c_r} \left[1 - \left(C_0 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n \left(\frac{c_r^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \left(\frac{c_r^2}{c^2(x_1)} - 1 \right) \right)}{1 + B_n \left(\frac{c_r^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \left(\frac{c_r^2}{c^2(x_1)} - 1 \right) \right)} \right) \right] Q .$$

Utilizando a técnica de *splitting*

$$\frac{\partial Q}{\partial x_3} = ik_0(C_0 - 1)Q .$$

$$\frac{\partial Q_n}{\partial x_3} = i \frac{\omega}{c_r} \left[\frac{A_n \left(\frac{c_r^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \left(\frac{c_r^2}{c^2(x_1)} - 1 \right) \right)}{1 + B_n \left(\frac{c_r^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \left(\frac{c_r^2}{c^2(x_1)} - 1 \right) \right)} \right] Q_n .$$

APÊNDICE C – APROXIMAÇÕES PARA O MÉTODO DIFERENÇAS FINITAS E FOURIER

A estabilidade da expansão (A.6) permite uma nova implementação do algoritmo de diferenças finitas e Fourier. Neste algoritmo o erro entre o operador (A.6) usando a velocidade verdadeira e o mesmo operador usando a velocidade de referência é avaliado. Portanto, partindo da diferença

$$\varepsilon = \frac{i\omega}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} - \frac{i\omega}{c_r} \sqrt{1 + \left(\frac{c_r}{\omega}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}},$$

e definindo

$$\begin{aligned} k &\equiv \frac{\omega}{c}, \\ k_r &\equiv \frac{\omega}{c_r}, \\ p &\equiv \frac{k}{k_r} = \frac{c_r}{c} \\ X^2 &\equiv \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \end{aligned}$$

pode-se reescrever a diferença acima na forma

$$\varepsilon = ik_r \left\{ p \sqrt{1 + X^2} - \sqrt{1 + p^2 X^2} \right\}.$$

Expandindo as raízes em frações parciais,

$$\varepsilon = ik_r \left\{ p \left[C_0 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n X^2}{1 + B_n X^2} \right] - \left[C_0 + \sum_{n=1}^N \frac{A_n p^2 X^2}{1 + B_n p^2 X^2} \right] \right\}$$

e reagrupando as parcelas na forma

$$\varepsilon = ik_r \left\{ \left[C_0(p-1) + \sum_{n=1}^N \left(\frac{A_n p X^2}{1+B_n X^2} - \frac{A_n p^2 X^2}{1+B_n p^2 X^2} \right) \right] \right\}$$

que pode ser escrita na forma

$$\varepsilon = ik_r \left\{ \left[C_0(p-1) + \sum_{n=1}^N A_n p X^2 \left(\frac{1}{1+B_n X^2} - \frac{p}{1+B_n p^2 X^2} \right) \right] \right\} .$$

podemos expandir as frações em série de potência

$$\varepsilon = ik_r \left\{ C_0(p-1) + \sum_{n=1}^N A_n p X^2 \left([1 - B_n X^2 + B_n^2 X^4 - B_n^3 X^6 + \dots] - [p - B_n p^3 X^2 + B_n^2 p^5 X^4 - B_n^3 p^7 X^6 + \dots] \right) \right\} .$$

Agrupando as parcelas

$$\varepsilon = ik_r \left\{ C_0(p-1) + \sum_{n=1}^N A_n p X^2 \left(1 - p - B_n(1-p^3)X^2 + B_n^2(1-p^5)X^4 - B_n^3(1-p^7)X^6 + \dots \right) \right\} ,$$

obtem-se

$$\varepsilon = ik_r \left\{ C_0(p-1) + \sum_{n=1}^N A_n p(1-p)X^2 \left(1 - B_n \frac{(1-p^3)}{1-p} X^2 + B_n^2 \frac{(1-p^5)}{1-p} X^4 - B_n^3 \frac{(1-p^7)}{1-p} X^6 + \dots \right) \right\} .$$

Observando que

$$\frac{1-p^{n+1}}{1-p} = 1 + p + p^2 + \dots + p^n ,$$

a expressão para a diferença dos operadores de continuação pode ainda ser representada na forma

$$\varepsilon = ik_r \left\{ C_0(p-1) + \left[\sum_{n=1}^N A_n p(1-p)X^2 \left(1 - B_n(1+p+p^2)X^2 + B_n^2(1+p+p^2+p^3+p^4)X^4 - B_n^3(1+p+p^2+p^3+p^4+p^5+p^6)X^6 + \dots \right) \right] \right\} . \quad (C.1)$$

Nossa tentativa agora é encontrar aproximações para a equação (C.1).

C.1 ORDEM ZERO

A aproximação de ordem zero é representada pelo primeiro termo da equação (C.1) e é conhecida como a aproximação *split-step* (STOFFA et al., 1990)

$$\varepsilon \approx ik_r C_0(p-1) .$$

C.2 PRIMEIRA ORDEM

Essa aproximação é dada pela inclusão dos dois primeiros termos da equação (C.1)

$$\varepsilon \approx ik_r \left\{ C_0(p-1) + \sum_{n=1}^N A_n p(1-p) X^2 \right\} .$$

C.3 SEGUNDA ORDEM

Levando em conta mais um termo da equação (C.1) temos

$$\varepsilon \approx ik_r \left\{ C_0(p-1) + \sum_{n=1}^N A_n p(1-p) X^2 [1 - B_n(1+p+p^2)X^2] \right\} .$$

trocando a expressão entre colchetes por um termo racional temos

$$ik_r \left\{ p\sqrt{1+X^2} - \sqrt{1+p^2X^2} \right\} \approx ik_r \left\{ C_0(p-1) + \sum_{n=1}^N \frac{A_n p(1-p)X^2}{1 + (1+p+p^2)B_n X^2} \right\} ,$$

que nada mais é do que a aproximação de Ristow e Rühl (1994). Para pequenos contrastes de velocidade a aproximação pode ser expressada como

$$ik_r \left\{ p\sqrt{1+X^2} - \sqrt{1+p^2X^2} \right\} \approx ik_r \left\{ C_0(p-1) + \sum_{n=1}^N \frac{A_n p(1-p)X^2}{1 + 3pB_n X^2} \right\} . \quad (C.2)$$

C.4 APROXIMAÇÃO ALTERNATIVA

É possível obter uma aproximação alternativa para a equação (C.1) tomando novamente termos até segunda ordem e obtendo a seguinte aproximação racional

$$\varepsilon \approx ik_r \left\{ \left[C_0(p-1) + \sum_{n=1}^N A_n p X^2 \left(\frac{1}{1+B_n X^2} - \frac{p}{1+B_n p^2 X^2} \right) \right] \right\},$$

ou ainda,

$$\varepsilon \approx ik_r \left\{ \left[C_0(p-1) + \sum_{n=1}^N A_n p X^2 \left(\frac{(1-p) - B_n(p-p^2)X^2}{1+B_n(1+p^2)X^2 + B_n^2 p^2 X^4} \right) \right] \right\}.$$

Desconsiderando termos de ordem $\mathcal{O}(X^4)$ no numerador e no denominador obtém-se

$$\varepsilon \approx ik_r \left\{ \left[C_0(p-1) + \sum_{n=1}^N \frac{A_n p(1-p)X^2}{1+B_n(1+p^2)X^2} \right] \right\}.$$

Observando que $k = k_r p$, pode-se reescrever a expressão como

$$\varepsilon \approx ik \left\{ \left[C_0 \frac{(p-1)}{p} + \sum_{n=1}^N \frac{A_n(1-p)X^2}{1+B_n(1+p^2)X^2} \right] \right\}.$$

C.5 IMPLEMENTAÇÃO USANDO CRANK-NICHOLSON

A forma geral das aproximações para o operador de continuação mostrado neste apêndice é

$$-i \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} \approx -i \frac{\omega}{c_r} \sqrt{1 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}} - i \frac{\omega}{c} \left\{ \left[C_0 \frac{(p-1)}{p} + \sum_{n=1}^N \frac{A_n(1-p)X^2}{1+B_n \sigma X^2} \right] \right\},$$

em que σ pode ser:

$$\sigma = 1 + p^3; \quad \sigma = 1 + p + p^2; \quad \sigma = 3p.$$

A equação de continuação é:

$$\frac{dP}{dx_3} = \left\{ -ik_1^r \sqrt{1 + p^2 X^2} - ik_1^r \left[C_0(p-1) + \sum_{n=1}^N \frac{A_n p(1-p)X^2}{1+B_n \sigma X^2} \right] \right\} P.$$

Aplicando a técnica de *splitting* na equação acima temos

$$\frac{dP}{dx_3} = -ik_1^r \sqrt{1+p^2 X^2} P ,$$

e

$$\frac{dP}{dz} = -ik_1^r C_0(p-1)$$

cujas soluções analíticas são respectivamente

$$P(x_3 + \Delta x_3) = e^{-ik_1^r \sqrt{1+p^2 X^2} \Delta x_3} P ;$$

$$P(x_3 + \Delta x_3) = e^{-ik_1^r \Delta x_3 C_0(p-1)} P ,$$

as outras parcelas do operador de continuação pode ser escritas na forma

$$\frac{dP}{dx_3} = -ik_1 \frac{A_n(1-p)X^2}{1+B_n\sigma X^2} P .$$

Aplicando o método Crank-Nicholson no termo acima

$$\frac{P_i^{j+1} - P_i^j}{\Delta x_3} = -ik_1 \frac{A_n(1-p)X^2}{1+B_n\sigma X^2} \frac{P_i^{j+1} + P_i^j}{2}$$

$$(1+B_n\sigma X^2)(P_i^{j+1} - P_i^j) = -i \frac{k_1 \Delta x_3}{2} A_n(1-p)X^2(P_i^{j+1} + P_i^j)$$

$$\left\{ 1 + \left[B_n\sigma + i \frac{k_1 \Delta x_3}{2} A_n(1-p) \right] X^2 \right\} P_i^{j+1} = \left\{ 1 + \left[B_n\sigma - i \frac{k_1 \Delta x_3}{2} A_n(1-p) \right] X^2 \right\} P_i^j$$

lembrando que $X^2 = \frac{v^2}{\omega^2 \Delta x_1^2} D_{x_1}^2$ temos

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\omega^2 \Delta x_1^2}{c^2} + \left[B_n\sigma + i \frac{k_1 \Delta x_3}{2} (1-p) A_n \right] D_{x_1}^2 \right\} P_i^{j+1} \\ & = \left\{ \frac{\omega^2 \Delta x_1^2}{c^2} + \left[B_n\sigma - i \frac{k_1 \Delta x_3}{2} A_n(1-p) \right] D_{x_1}^2 \right\} P_i^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\omega^2 \Delta x_1^2}{c^2} + \left[B_n\sigma + i \left(\frac{\omega \Delta x_3}{2c} \right) (1-p) A_n \right] D_{x_1}^2 \right\} P_i^{j+1} \\ & = \left\{ \frac{\omega^2 \Delta x_1^2}{c^2} + \left[B_n\sigma - i \left(\frac{\omega \Delta x_3}{2c} \right) A_n(1-p) \right] D_{x_1}^2 \right\} P_i^j \end{aligned}$$