



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Modelagem 2,5D por elementos finitos dos
efeitos da topografia do terreno sobre dados
obtidos com o método eletromagnético a
multifrequência**

CARLOS MATEUS BARRIGA NUNES

BELÉM-PARÁ

2014

CARLOS MATEUS BARRIGA NUNES

Modelagem 2,5D por elementos finitos dos efeitos da topografia do terreno sobre dados obtidos com o método eletromagnético a multifrequência

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Mestre em Geofísica.

Orientador: Cícero Roberto Teixeira Régis

Dados Internacionais de Catalogação de Publicação (CIP)
(Biblioteca do Instituto de Geociências/UFPA)

Nunes, Carlos Mateus Barriga, 1984-

Modelagem 2,5D por elementos finitos dos efeitos da topografia do terreno sobre dados obtidos com o método eletromagnético a multifrequência / Carlos Mateus Barriga. – 2014.

Inclui bibliografias

Orientador: Cícero Roberto Teixeira Régis

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Geociências, Programa de Pós-Graduação em Geofísica, Belém, 2014.

1. Geofísica - Modelos matemáticos. 2. Topografia. 3. Método dos elementos finitos. I. Título.

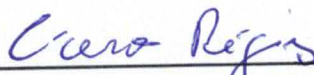
CARLOS MATEUS BARRIGA NUNES

Modelagem 2,5D por elementos finitos dos efeitos da topografia do terreno sobre dados obtidos com o método eletromagnético a multifrequência

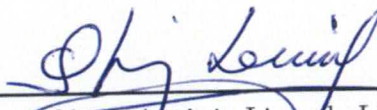
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica do Instituto de Geociências da Universidade Federal do Pará, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Mestre em Geofísica.

Data de Aprovação: 21/03/2014

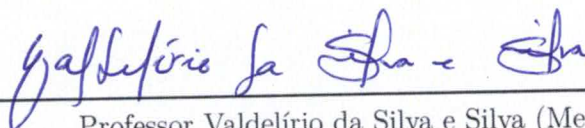
Banca Examinadora:



Professor Cícero Roberto Teixeira Régis (Orientador)
Doutor em geofísica
Universidade federal do Pará – UFPA



Professor Olivar Antônio Lima de Lima (Membro)
Doutor em geofísica
Universidade federal da Bahia – UFBA



Professor Valdelírio da Silva e Silva (Membro)
Doutor em geofísica
Universidade federal do Pará – UFPA

Aos meus filhos Davi e Samuel.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Cícero Roberto Teixeira Régis, pelas orientações, confiança e oportunidade de realização desse trabalho.

Ao Prof. Valdelírio da Silva e Silva, por sua gentil, prestativa e substancial colaboração em cada passo da implementação da metodologia empregada neste trabalho.

Aos meus familiares pelo apoio e incentivo.

As secretarias Benildes e Lucibela por estarem sempre prontas a ajudar.

À CAPES, pelo incentivo financeiro.

Ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica da UFPA.

Aos colegas do PROEM e todos aqueles, que de alguma maneira, contribuíram para meu crescimento profissional e para a realização desse trabalho.

RESUMO

Este trabalho consiste em realizar a modelagem, via elementos finitos (EF) 2,5D, do efeito da topografia do terreno sobre dados obtidos com o método eletromagnético a multi-frequência (EMMF). Este método usa como fonte uma grande espira quadrada de corrente elétrica com centenas de metros de lado, e como receptores, bobinas posicionadas na horizontal em alinhamento com o transmissor. A subsuperfície é representada por heterogeneidades bidimensionais imersas em um meio horizontalmente estratificado. A formulação, partindo das equações de Maxwell, é desenvolvida a partir da separação do campo eletromagnético em primário (campos no hospedeiro multi-estratificado) e secundário (diferença entre o campo total e o primário). O domínio discretizado é descrito por uma malha não estruturada, com elementos triangulares. Para calcular as componentes derivadas da solução de elementos finitos, em um determinado nó da malha, foi usada a média aritmética das derivadas das funções bases de EF em torno daquele nó. O código de modelagem construído permite quantificar e analisar como os gradientes topográficos influenciam as medidas dos campos eletromagnéticos gerados. A aplicação é a avaliação dessas influências sobre a componente radial do campo da espira na superfície terrestre, que é a componente empregada no método eletromagnético a multi-frequência (EMMF).

Palavras-chave: Espira Quadrada de Corrente. Topografia Irregular. Modelagem Numérica.

ABSTRACT

This dissertation shows the numerical modeling results of the effect of the terrain topography on the multi-frequency electromagnetic method (EMMF). In this method the source is a very large square current loop, with a side of a few hundreds meters. The used numerical method is the Finite Element (FE) method in a 2,5D formulation. The geo-electrical models are composed of two-dimensional structures inside layered one-dimensional media. The formulation uses the separation of the EM field in two parts called the primary field (the field of the same source in the layered medium only) and the secondary field (the difference between the complete field in the 2D model and the primary field), to avoid the difficulty of representing the singular source in the discrete representation of the media in the form of the FE mesh. The discretized domain is build with a non-structured triangular mesh. In order to calculate the field components that are derived from those given by the FE solution in a given node, it is necessary to calculate numerical derivatives on the discrete solutions. Here we have used the average value of the derivatives of the basis functions around the node, which is a simple and effective way of estimating the derivative. The resulting modeling code allow us to quantitatively analyse the influence of topographic gradients on the measured electromagnetic fields from this method.

Keywords: Square Current Loop. Irregular Terrain Topography. Numerical Modeling.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Modelo estratificado em camadas plano paralelas homogêneas e isotrópicas	14
Figura 2 – A função base Ψ_i em um nó local j é 1 se $i = j$ e 0 se $i \neq j$.	19
Figura 3 – domínio de um elemento arbitrário Ω^e em uma malha hipotética	26
Figura 4 – Interpolações na vizinhança de um nó onde a derivada será calculada	26
Figura 5 – Meio estratificado com 2 camadas e um semiespaço	27
Figura 6 – Parte real e imaginária dos campos primários E_ϕ^p , H_r^p e H_z^p obtidos a partir do modelo da figura (5). QWE-Nunes corresponde as repostas, a partir dos kernels implementados por Nunes, utilizando a rotina QWE de Silva. PC-Nunes significa a resposta obtidas pela integração no plano complexo implementada por Nunes	28
Figura 7 – Modelo de uma heterogeneidade retangular com o semi-espaco como meio encaixante. Adaptada de (SILVA, 2012).	29
Figura 8 – Campos primários e secundários comparados com resultados cedidos por (SILVA, 2012) para a frequência $f = 1000Hz$.	30
Figura 9 – Modelo de duas intrusões. Adaptada de (SILVA, 2012).	31
Figura 10 – Campos primários e secundários comparados com resultados obtidos por EI 3D para frequência $f = 1000Hz$.	31
Figura 11 – A figura descreve uma depressão na superfície de um terreno em forma de vale	34
Figura 12 – Resultados de amplitude e fase da componente H_r^T/H_z^0 para as frequências $f = 1, 10, 100$ e $1000 Hz$	36
Figura 13 – Para cada frequências $f = 1, 10, 100$ e $1000 Hz$, as curvas à esquerda mostram o percentual de quanto H_r^T é maior ou menor que H_z^0 , enquanto à direita, têm-se a diferença de fase entre esses campos	37
Figura 14 – Esta figura descreve uma relevo em forma de morro	38
Figura 15 – Resultados de amplitude e fase da componente H_r^T/H_z^0 para as frequências $f = 1, 10, 100$ e $1000 Hz$	40
Figura 16 – Para cada frequências $f = 1, 10, 100$ e $1000 Hz$, as curvas à esquerda mostram o percentual de quanto H_r^T é maior ou menor que H_z^0 , enquanto à direita, têm-se a diferença de fase entre esses campo	41
Figura 17 – A figura descreve um vale acima de um corpo retangular condutivo	42
Figura 18 – Resultados de amplitude e fase da componente H_r^T/H_z^0 para as frequências $f = 1, 10, 100$ e $1000 Hz$	44

Figura 19 – Para cada frequências $f = 1, 10, 100$ e $1000 Hz$, as curvas à esquerda mostram o percentual de quanto H_r^T é maior ou menor que $H_z^{(relevo-plano)}$, enquanto à direita, têm-se a diferença de fase entre esses campo	45
Figura 20 – Esta figura descreve uma relevo em forma de morro, em que o morro está acima de um corpo retangular condutivo	46
Figura 21 – Resultados de amplitude e fase da componente H_r^T/H_z^0 para as frequências $f = 1, 10, 100$ e $1000 Hz$	48
Figura 22 – Para cada frequências $f = 1, 10, 100$ e $1000 Hz$, as curvas à esquerda mostram o percentual de quanto H_r^T é maior ou menor que $H_z^{(relevo-plano)}$, quanto à dierita, têm-se a diferença fase entre esses campo	49

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	METODOLOGIA	13
2.1	Problema direto 1D	14
2.2	Elementos finitos 2,5D	17
2.3	Problema incluindo a topografia	24
2.4	Derivada numérica 2D	25
2.4.1	Média aritmética do gradiente das funções base	25
2.5	Resultados de validação	26
2.5.1	Problema 1D	26
2.5.2	Modelagem 2.5D	29
3	MODELAGEM 2.5D DO EFEITO DA TOPOGRAFIA	33
3.1	Modelo 1	34
3.2	Modelo 2	38
3.3	Modelo 3	42
3.4	Modelo 4	46
4	CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS	50
	REFERÊNCIAS	52

1 INTRODUÇÃO

A espira circular é uma das fontes artificiais mais importantes de campos eletromagnéticos usadas em Geofísica aplicada, sendo empregada em várias técnicas eletromagnéticas (EM). Nessas técnicas, os arranjos transmissor-receptor podem assumir diversas configurações, tais como, VCP (vertical coplanar), VCA (vertical coaxial), PERP (perpendicular) e o mais comum HCP (horizontal coplanar) (FRANK et al., 1987). Em geral, a espira é empregada em métodos puramente indutivos, nos quais não existe necessidade de se fixar eletrodos no solo. Em muitos casos, as medidas do campo magnético são usadas na determinação de resistividade aparente, normalmente a partir de uma expressão do campo de dipolo magnético tomada em um limite de número de indução muito pequeno.

O método eletromagnético a multi-frequência (EMMF) vem sendo usado por vários anos. O método emprega como fonte, bobinas quadradas de centenas de metros de lado. Neste método, medidas do componente radial do campo magnético são realizadas em posições em uma linha de medidas que pode atingir até 10 km. (DIAS; SATO; LIMA, 2005; MACHADO; DIAS, 2012). Distâncias fonte-receptor desta ordem são pouco comuns para métodos indutivos e obrigam a trabalhar com números de indução para os quais não existem expressões assintóticas das quais se possa extrair uma resistividade aparente. (MACHADO, 2009) mostrou que medidas, tomadas a uma distância de 3,5 o lado da espira transmissora, são equivalentes ao campo gerado por uma espira circular de mesmo momento. A condutividade é assumida como complexa, caracterizando assim o efeito de polarização induzida.

No método EMMF, utiliza-se uma tabela de valores da parte real e imaginária da componente magnética radial, construída como uma função do número de indução e do parâmetro de polarização, a partir da qual se pode estimar a condutividade do meio, e pela razão entre a parte imaginária e módulo da condutividade, calcula-se o efeito de polarização, (DIAS, 1968). (SATO, 1979) forneceu uma estimativa da localização de um ponto em subsuperfície que mais contribui para o campo normalizado em uma determinada posição de medida. Somado-se a isso, ele introduz a idéia de profundidade de penetração para fonte dipolar (skin-depth dipolar), e a partir da razão posição-skin, em função do número de indução, adota uma fração desse skin-depth para direcionar o ponto associado a resistividade encontrada pela tabela criada em (DIAS, 1968). Tal ponto é definido como sendo, a posição no semiespaço homogêneo que mais influencia na amplitude do campo e, (MACHADO, 2009), determina essa posição e sugere uma correção no posicionamento do ponto representativo dessa região.

Contudo, são ainda raros na literatura os trabalhos que apresentam a modelagem dos campos eletromagnéticos para a fonte sendo uma espira muito grande. Dentre eles,

pode-se citar a modelagem 1D realizada por (SINGH; MOGI, 2005) que utiliza séries hipergeométricas. Entretanto, neste trabalho, apresentou-se os resultados somente com respeito a componente H_z , e em seguida, (DEUN; COOLS, 2007) escreveram uma nota mostrando que as aproximações por séries hipergeométricas de Gauss para as demais componentes não convergem. Um trabalho mais recente, é a modelagem 2,5D realizada por (SILVA, 2012).

Limitações inerentes aos métodos eletromagnéticos em parte, deve-se a existência de ruídos. Um deles é a irregularidade do relevo que faz com que as medidas sejam feitas em posições acima ou abaixo do plano da espira, produzindo fortes distorções nos dados de campo isso pode levar a interpretações, errôneas da geologia, ao se considerar que o terreno é plano e horizontal. Portanto, é importante modelar o efeito da topografia, o qual permitirá, entre outras coisas, introduzi-la como informação a priori na inversão dos dados para obter modelos geológicos mais realísticos. Isto porque, no processo de inversão, resolve-se o problema direto para cada iteração e avalia-se a convergência para os dados discretos observados (FULLAGAR; OLDENBURG, 1984).

Esta dissertação tem como objetivo investigar e quantificar a influência da topografia sobre os campos da espira de corrente, como é empregada no método EMMF, a partir da modelagem do campo eletromagnético para uma grande bobina circular em uma formulação 2,5D pelo método dos elementos finitos.

Além desta introdução, o texto está organizado em mais três capítulos. O capítulo 2 refere-se a metodologia empregada para o cálculo dos campos eletromagnéticos no domínio da frequência, tanto para a modelagem 1D, quanto para a 2,5D. Nele se menciona, ou brevemente se discute, as técnicas abordadas para a obtenção dos campos primários seja no domínio espacial (x, y, z) , seja no domínio espectral (x, k_y, z) requerido pela formulação 2,5D. Além disso, descreve-se um procedimento de derivação numérica para calcular as componentes H_r^s e H_z^s do campo magnético, que surgem como uma combinação das derivadas direcionais da solução de elementos finitos. E finalmente, exibe-se os resultados de validação da implementações 1D e 2.5D e, conseqüentemente, de derivação numérica.

No capítulo 3 se modela e analisa o efeito da topografia sobre a componente radial H_r do campo observado no receptor. Os modelos topográficos adotados são de âmbos vales e de colinas. Os resultados são comparados com aqueles obtidos a partir dos mesmos modelos de estruturas geoeletricas limitadas por um terreno plano horizontal.

O último capítulo traz as conclusões deste trabalho e as perspectivas dos próximos passos na pesquisa do método EMMF.

2 METODOLOGIA

Os modelos tratados aqui são formados por heterogeneidades de comprimento infinito na direção y , alojados num meio estratificado (1D), formado por camadas planas horizontais homogêneas e isotrópicas. Nesta modelagem 2D, segue-se o método clássico de separar o campo eletromagnético em duas partes, chamadas de campo primário e campo secundário. O primário é o campo obtido com a fonte sobre o meio estratificado, apenas, sem nenhuma heterogeneidade 2D. O campo secundário é a diferença entre o campo total do modelo completo e o campo primário (HOHMANN, 1987). Escreve-se, então:

$$\vec{E} = \vec{E}^p + \vec{E}^s, \quad (2.1)$$

$$\vec{H} = \vec{H}^p + \vec{H}^s. \quad (2.2)$$

Esta separação permite escrever as equações diferenciais que descrevem os campos EM apenas em função do campo secundário, tendo o campo primário em todo o meio, particularmente para o método de elementos finitos, como termo fonte nas equações não homogêneas. Isto evita a necessidade de uma função que descreva a fonte no meio discretizado, eliminando assim sua singularidade.

Partindo das equações de Maxwell no domínio da frequência, com dependência temporal $e^{i\omega t}$, têm-se:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \eta \vec{E} = \vec{J}_\phi, \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \zeta \vec{H} = \vec{0}, \quad (2.4)$$

em que $\zeta = i\omega\mu$ é a impeditividade, $\eta = \sigma + i\omega\epsilon$ é a admitividade. Seguindo a mesma lógica anterior, representa-se as propriedades do meio estratificado subjacente por η^p e ζ^p e escrevemos \vec{E} , \vec{H} , $\zeta = \zeta^p + \zeta^s$, $\eta = \eta^p + \eta^s$.

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}^p - \eta^p \vec{E}^p = \vec{J}_\phi^p, \quad (2.5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}^p + \zeta^p \vec{H}^p = \vec{0}, \quad (2.6)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}^s - \eta \vec{E}^s = \vec{J}_e^s, \quad (2.7)$$

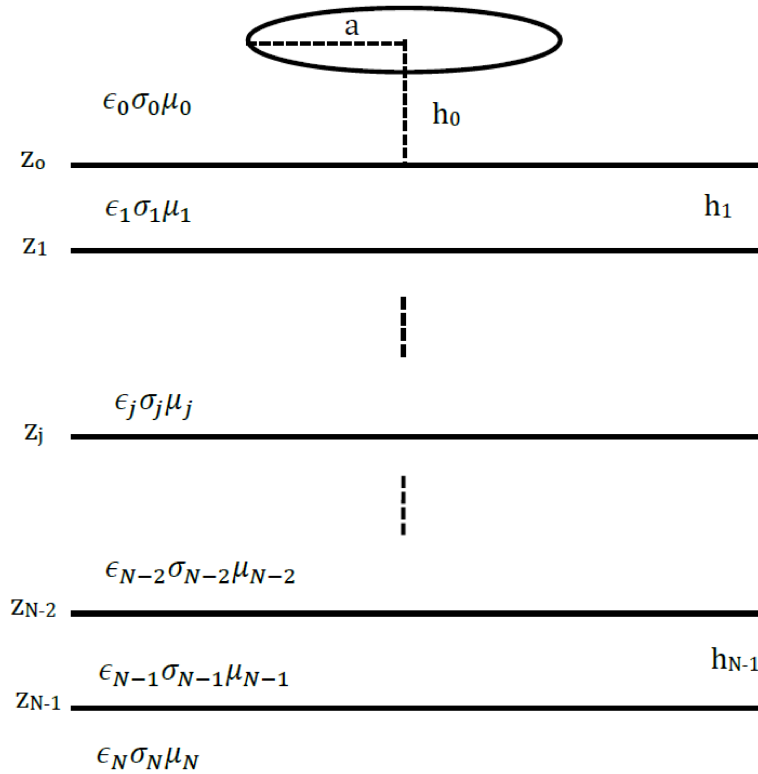
$$\vec{\nabla} \times \vec{E}^s + \zeta \vec{H}^s = \vec{J}_h^s, \quad (2.8)$$

sendo $\eta^s = \Delta\sigma + i\omega\Delta\mu$ e $\Delta\zeta = i\omega\Delta\mu$. As equações (2.5) e (2.6) governam o comportamento dos campos primários em um meio estratificado 1D. Já as equações (2.7) e (2.8), descrevem o comportamento dos campos secundários em que $\vec{J}_e^s = \eta^s \vec{E}^p$ e $\vec{J}_h^s = \Delta\zeta \vec{H}^p$. Portanto, são as equações nas quais será aplicado o método de elementos finitos. Os pormenores da formulação do problema 1D e da formulação de elementos finitos 2D, podem ser encontrados em (SILVA, 2012).

2.1 Problema direto 1D

O campo primário consiste na resposta devido a um modelo de camadas planas em que a propriedade física varia só na direção 'z', (Figura 1),

Figura 1 – Modelo estratificado em camadas plano paralelas homogêneas e isotrópicas



Fonte: Do autor

Definimos \vec{J}_ϕ^p como sendo,

$$J_\phi^p = I(\omega) \frac{a\delta(r-a)\delta(z-h_0)}{r}, \quad (2.9)$$

o componente radial do vetor densidade de corrente. A sequência clássica (WARD; HOHMANN, 1987) para solucionar este tipo de problema é primeiro encontrar o campo gerado pela fonte num meio homogêneo infinito e, em seguida, usar esta solução como campo incidente sobre o meio de camadas. Em geral, a metodologia usa uma transformada integral para gerar soluções na forma de ondas planas e o problema é resolvido no domínio da transformada. Finalmente os resultados são trazidos de volta ao espaço de coordenadas espaciais através da transformada inversa. No caso do campo da espira, com sua simetria cilíndrica, a transformada adequada é a de Hankel.

Combinando as equações (2.5) e (2.6), desenvolvendo os operadores, aplicando a transformada de Hankel de ordem 1 (\mathcal{H}_1 , da coordenada espacial r para a coordenada espectral k_r) e utilizando as seguintes identidades

$$\mathcal{H}_\nu \left[\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df(r)}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} \right] = -k_r \hat{f}(K_r) \quad (2.10)$$

$$\mathcal{H}_\nu \left[\frac{\delta(r-a)}{r} \right] = -J_\nu(K_r a) \quad (2.11)$$

chega-se à seguinte equação diferencial para um meio homogêneo ilimitado:

$$\frac{d^2 \hat{E}_\phi^p}{dz^2} - u^2 \hat{E}_\phi^p = \zeta_p I(\omega) a J_1(k_r a) \delta(z) \quad (2.12)$$

em que $k^2 = -\zeta\eta$ é o quadrado do número de onda e $u^2 = k_r^2 - k^2$. A solução dessa equação no domínio (k_r, z) da transformada de Hankel é

$$\hat{E}_\phi^p(k_r, z) = \begin{cases} -\zeta_p I(\omega) a J_1(k_r a) e^{u(z-h_0)} / 2u, & z \leq h_0 \\ -\zeta_p I(\omega) a J_1(k_r a) e^{-u(z-h_0)} / 2u, & h_0 < z. \end{cases} \quad (2.13)$$

Nota-se que a solução para o meio homogêneo, no domínio (k_r, z) , tem a mesma forma da solução do problema de ondas planas e portanto, será tratado como tal. Esta solução é usada como campo incidente sobre o meio estratificado, no qual é calculada a solução para cada camada levando-se em conta as reflexões nas interfaces. Sendo assim, aplicando a mesma metodologia do problema de ondas planas (WARD; HOHMANN, 1987), encontram-se as expressões para os campos $\hat{E}_\phi(k_r, z)$ e $\hat{H}_r(k_r, z)$, no meio de camadas. Para a fonte localizada em uma altura $h_0 \leq 0$ sobre um meio de N camadas, tem-se:

$$\hat{E}_{\phi(0)}^p(k_r, z) = T_E^{(0)} \left(e^{u_0(z-h_0)} + R_{TE}^{(0)} e^{u_0(z+h_0)} \right), \quad z \leq h_0 \leq 0 \quad (2.14)$$

$$\hat{E}_{\phi(0)}^p(k_r, z) = T_E^{(0)} \left(e^{-u_0(z-h_0)} + R_{TE}^{(0)} e^{u_0(z+h_0)} \right), \quad h_0 \leq z \leq 0 \quad (2.15)$$

$$\hat{E}_{\phi(j)}^p(k_r, z) = T_E^{(j)} \left(e^{-u_j(z-z_{j-1})} + R_{TE}^{(0)} e^{u_j(z-z_j-h_j)} \right), \quad j = 1, \dots, N-1 \quad (2.16)$$

$$\hat{E}_{\phi(N)}^p(k_r, z) = T_E^{(N)} e^{-u_N(z-z_{N-1})}, \quad z \geq z_N \quad (2.17)$$

$$\hat{H}_{r(0)}^p(k_r, z) = \chi_0 T_E^{(0)} \left(e^{u_0(z-h_0)} + R_{TE}^{(0)} e^{u_0(z+h_0)} \right), \quad z \leq h_0 < 0 \quad (2.18)$$

$$\hat{H}_{r(0)}^p(k_r, z) = -\chi_0 T_E^{(0)} \left(e^{u_0(z-h_0)} - R_{TE}^{(0)} e^{-u_0(z+h_0)} \right), \quad h_0 < z \leq 0 \quad (2.19)$$

$$\hat{H}_{r(j)}^p(k_r, z) = -\chi_j T_E^{(j)} \left(e^{-u_j(z-z_{j-1})} - R_{TE}^{(0)} e^{u_j(z-z_j-h_j)} \right), \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (2.20)$$

$$\hat{H}_{r(N)}^p(k_r, z) = -\chi_N T_E^{(N)} e^{-u_N(z-z_{N-1})}, \quad z \geq z_N. \quad (2.21)$$

Pela continuidade das componentes tangenciais dos campos em cada interface, chega-se ao coeficiente de transmissão em uma interface j , dado por

$$T_E^{(1)} = T_E^{(0)} \frac{(1 + R_{TE}^{(j-1)})}{1 + R_{TE}^{(j)} e^{-2u_j h_j}} \quad (2.22)$$

$$T_E^{(j)} = T_E^{(j-1)} \frac{(1 + R_{TE}^{(j-1)}) e^{-u_{j-1}h_{j-1}}}{1 + R_{TE}^{(j)} e^{-2u_j h_j}}, \quad j = 1, 2, 3, 4, \dots, N - 1 \quad (2.23)$$

$$T_E^{(N)} = T_E^{(N-1)} (1 + R_{TE}^{(N-1)}) e^{-u_{j-1}h_{j-1}} \quad (2.24)$$

em que a expressão (2.25) é o coeficiente de transmissão da bobina no ar.

$$T_E^{(0)} = \frac{-a\zeta_p I(\omega) J_1(K_r a)}{2u_0}. \quad (2.25)$$

O coeficiente de reflexão do modo TE em uma interface j é obtido por,

$$R_{TE}^{(j)} = \frac{(\chi_j - \hat{\chi}_{j+1})}{(\chi_j + \hat{\chi}_{j+1})}, \quad (2.26)$$

sendo χ_j a admitância intrínseca da camada $j + 1$ e $\hat{\chi}_{j+1}$ a admitância aparente da camada $j + 1$ definida por $\hat{\chi}_{j+1} = -\frac{H_r^{(j)}}{E_\phi^{(j)}}|_{z=z_j}$ e calculada recursivamente por:

$$\hat{\chi}_j = \chi_j \frac{\hat{\chi}_{j+1} + \chi_j \tanh(u_j h_j)}{\chi_j + \hat{\chi}_{j+1} \tanh(u_j h_j)}. \quad j = N - 1, \dots, 3, 2, 1. \quad (2.27)$$

Uma vez obtidas as expressões para os campos no domínio (k_r, z) , retorna-se ao domínio (r, z) aplicando a transformada inversa de Hankel. Portanto,

$$E_\phi^p(r, z) = \int_0^\infty \hat{E}_\phi^p(k_r, z) J_1(k_r r) k_r dk_r, \quad (2.28)$$

$$H_\phi^p(r, z) = \int_0^\infty \hat{H}_r^p(k_r, z) J_1(k_r r) k_r dk_r, \quad (2.29)$$

$$H_z^p(r, z) = \frac{-1}{\zeta_p} \int_0^\infty \hat{E}_\phi^p(k_r, z) k_r^2 J_0(k_r r) dk_r, \quad (2.30)$$

Na formulação do problema 2,5D da espira no domínio (x, k_y, z) , tendo em vista a simetria da fonte, não há componente $E_z^p(x, k_y, z)$. Além disso, por se considerar o meio com magnetização constante $\mu = \mu_0$, despreza-se as componente do campo $\vec{H}_p(x, k_y, z)$. Assim sendo, necessita-se somente das componentes $E_x^p(x, k_y, z)$ e $E_y^p(x, k_y, z)$ que serão usadas para se obter o vetor fonte do sistema de equações lineares no problema de elementos finitos. Logo, da equação (2.28)(ver (SILVA, 2012) apêndice B) obtêm-se

$$\hat{E}_x^p(x, k_y, z) = \int_{-\infty}^\infty \frac{ik_y}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \hat{E}_\phi^p(k_x, k_y) e^{ik_x x} dk_x, \quad (2.31)$$

$$\hat{E}_y^p(x, k_y, z) = \int_{-\infty}^\infty \frac{ik_x}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}} \hat{E}_\phi^p(k_x, k_y) e^{ik_x x} dk_x, \quad (2.32)$$

Na obtenção do campo primário, as integrais do tipo

$$F(r) = \int_0^{\infty} f(\lambda) J_i(\lambda r) d\lambda, \quad (2.33)$$

em que $f(\lambda)$ é o kernel e $J_i(\lambda r)$ é uma função oscilante de Bessel ou senoidal, são avaliadas numericamente utilizando, separadamente, filtros digitais e o método de quadratura com extrapolação QWE. Isto se deve ao fato de que, embora filtros digitais sejam bem eficientes, não funcionam em todos os casos. Desse modo, quando é necessário os campos em uma região fora do raio da bobina, far-se-á uso do método QWE que tem se mostrado eficaz na avaliação de integrais oscilante e lentamente convergente, (KEY, 2012). As integrais indefinidas da transformada inversa de Fourier, (2.31) e (2.32), que surgem ao se calcular os campos no domínio espectral (x, k_y, z) , são computadas utilizando um método de integração no plano complexo como descrito em (SILVA; RÉGIS; HOWARD, 2011).

2.2 Elementos finitos 2,5D

Nesta seção segue uma breve descrição da formulação 2,5D por elementos finitos. Em resumo, pode-se dizer que o MEF é um método numérico para resolução de equações diferenciais. Ele pode ser entendido como derivado do método de Galerkin que é baseado no método dos resíduos ponderados, porém, com as funções pesos sendo as próprias funções base. Sendo assim, o método pode ser compreendido como uma aplicação do método de Galerkin restrito a uma classe de funções base. Portanto, do MEF para o problema descrito pela equação diferencial genérica (2.34) no R^2 , obtém-se uma solução aproximada a partir das projeções ortogonais de $u(x, z)$ no espaço gerado pela combinação linear das funções base definidas no domínio $\Omega^e \subset \Omega$.

$$L(u(x, z)) = h(x, z), \quad \text{para todo } (x, z) \in \Omega \quad (2.34)$$

L é um operador diferencial linear, u e h são funções de (x, z) , e $\Omega \subset R^2$ é o domínio do problema com condições de fronteira a serem especificadas.

O método de elementos finitos provê um algoritmo que produz a forma discretizada do problema (2.34) no domínio Ω para uma solução aproximada de u . Para mais detalhes sobre o método de elementos finitos ver (BRENNER S. C. AND. SCOTT, 2008) e (MEUNIER, 2008).

Portanto, em primeiro lugar é necessário discretizar o domínio Ω em subdomínios Ω^e . Em seguida, deve-se definir as funções base que interpolarão $u(x, z)$ nesse domínio arbitrário. Então, considerando um elemento triangular genérico Ω^e da malha de elementos finitos, e considerando que a aproximação da função $u(x, z)$ é dada por um elemento finito

de primeira ordem dado por

$$u^e(x, z) = \alpha + \beta x + \gamma z, \quad (2.35)$$

a equação (2.35), corresponde a um plano que intercepta $u(x, z)$ nos valores nodais (u_1^e, u_2^e, u_3^e) em Ω^e . Pode-se determinar as constantes α , β e γ por um sistema de equações lineares a partir dos valores nodais. Em seguida, resolvendo esse sistema pela regra de Cramer, chega-se a:

$$\alpha = \frac{1}{2\Delta^e} \begin{vmatrix} u_1^e & x_1 & z_1 \\ u_2^e & x_2 & z_2 \\ u_3^e & x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \quad \beta = \frac{1}{2\Delta^e} \begin{vmatrix} 1 & u_1^e & z_1 \\ 1 & u_2^e & z_2 \\ 1 & u_3^e & z_3 \end{vmatrix}, \quad (2.36)$$

$$\gamma = \frac{1}{2\Delta^e} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & u_1^e \\ 1 & x_2 & u_2^e \\ 1 & x_3 & u_3^e \end{vmatrix}, \quad \Delta^e = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix},$$

em que Δ^e é a área do triângulo de vértices (x_1^e, z_1^e) , (x_2^e, z_2^e) , (x_3^e, z_3^e) . Então, calculando os determinante em (2.36) para α , β , γ , reorganizando os termos e substituindo em (2.35), obtém-se

$$u^e(x, z) = \frac{a_1 + b_1x + c_1z}{2\Delta^e} u_1^e + \frac{a_2 + b_2x + c_2z}{2\Delta^e} u_2^e + \frac{a_3 + b_3x + c_3z}{2\Delta^e} u_3^e \quad (2.37)$$

sendo,

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2z_3 - x_3z_2, & b_1 &= z_2 - z_3, & c_1 &= x_3 - x_2, \\ a_2 &= x_3z_1 - x_1z_3, & b_2 &= z_3 - z_1, & c_2 &= x_1 - x_3, \\ a_3 &= x_1z_2 - x_2z_1, & b_3 &= z_1 - z_2, & c_3 &= x_2 - x_1, \end{aligned} \quad (2.38)$$

definindo as funções base Ψ_1 , Ψ_2 , Ψ_3 por:

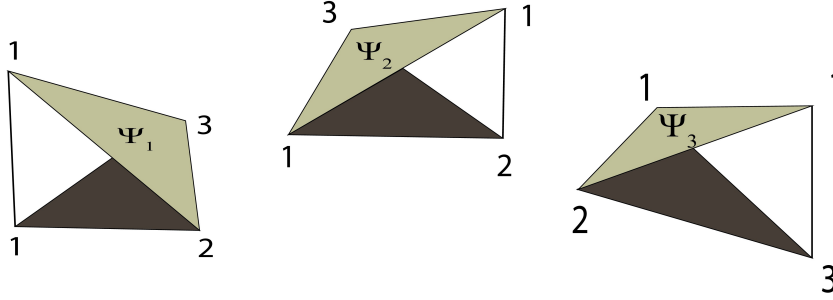
$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{1}{2\Delta^e} (a_1 + b_1x + c_1z), \\ \Psi_2 &= \frac{1}{2\Delta^e} (a_2 + b_2x + c_2z), \\ \Psi_3 &= \frac{1}{2\Delta^e} (a_3 + b_3x + c_3z), \end{aligned} \quad (2.39)$$

(2.37) pode ser escrita como uma combinação linear de (2.39)

$$u^e(x, z) = \sum_{i=1}^3 u_i^e \Psi_i \quad (2.40)$$

em que (2.39), tem as características descrita na Figura 2.

A partir de agora se faz uma descrição resumida da formulação 2,5D. Em primeiro lugar, a fonte é considera finita ou pontual e o meio possui permeabilidade magnética constante. Assume-se y como sendo a direção em que a propriedade física é invariante.

Figura 2 – A função base Ψ_i em um nó local j é 1 se $i = j$ e 0 se $i \neq j$.


Fonte: Do autor

Considerando o lado direito da equação (2.8) como sendo identicamente nulo, reescreve-se as equações (2.7) e (2.8) como,

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}^s - \eta^s \vec{E}^s = \eta^s \vec{E}^p, \quad (2.41)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}^s + \zeta^s \vec{H}^s = \vec{0}. \quad (2.42)$$

Sendo a fonte 3D e a geometria da subsuperfície 2D, aplica-se uma transformada de Fourier em y e assim é possível tratar o problema como uma sequência de problemas bidimensionais. Desenvolvendo os operadores diferenciais e realizando algumas manipulações algébricas, o seguinte conjunto de equações diferenciais é encontrado,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{\eta}{u^2} \nabla \hat{E}_y^s \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \hat{H}_y^s}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \hat{H}_y^s}{\partial x} \right) - \eta \hat{E}_y^s = \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ik_y}{u^2} \hat{J}_x^s \right) + \hat{J}_y^s - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{ik_y}{u^2} \hat{J}_z^s \right) \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\zeta \nabla \hat{H}_y^s) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \hat{E}_y^s}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \hat{E}_y^s}{\partial x} \right) - \zeta \hat{H}_y^s = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\zeta}{u^2} \hat{J}_z^s \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\zeta}{u^2} \hat{J}_x^s \right) \end{aligned} \quad (2.44)$$

em que $k^2 = -\zeta\eta$ e $u^2 = k_y^2 - k^2$. Das manipulações que resultaram em (2.43) e (2.44), obtêm-se as expressões para as componentes dos campos secundários \hat{E}_x^s , \hat{E}_z^s , \hat{H}_x^s e \hat{H}_z^s dadas por,

$$\zeta \frac{\partial \hat{H}_y^s}{\partial z} + ik_y \frac{\partial \hat{E}_y^s}{\partial x} + \zeta \hat{J}_x^s + u^2 \hat{E}_x^s = 0 \quad (2.45)$$

$$-\zeta \frac{\partial \hat{H}_y^s}{\partial x} + ik_y \frac{\partial \hat{E}_y^s}{\partial z} + \zeta \hat{J}_z^s + u^2 \hat{E}_z^s = 0 \quad (2.46)$$

$$-\eta \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial z} + ik_y \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial x} - ik_y \widehat{J}_z^s + u^2 \widehat{H}_x^s = 0 \quad (2.47)$$

$$\eta \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial x} + ik_y \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial z} + ik_y \widehat{J}_x^s + u^2 \widehat{H}_z^s = 0 \quad (2.48)$$

Observa-se que, (2.43) e (2.44) definem as equações dos campos acoplados \widehat{E}_y^s e \widehat{H}_y^s . Então aplicando o critério de Galerkin nessas equações, resulta

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} \nabla \cdot \left(\frac{\eta^e}{u^2} \nabla \widehat{E}_y^s \right) \phi_i d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \eta^e \widehat{E}_y^s \phi_i d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial z} \right) \phi_i d\Omega^e \\ & - \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial x} \right) \phi_i d\Omega^e = - \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ik_y}{u^2} \widehat{J}_x^s \right) \phi_i d\Omega^e \\ & + \int_{\Omega^e} \widehat{J}_y^s \phi_i d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{ik_y}{u^2} \widehat{J}_z^s \right) \phi_i d\Omega^e, \end{aligned} \quad (2.49)$$

e

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^e} \nabla \cdot (\zeta^e \nabla \widehat{H}_y^s) \phi_i d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \zeta^e \widehat{H}_y^s \phi_i d\Omega^e - \\ & \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial z} \right) \phi_i d\Omega^e - \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{ik_y}{u^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial x} \right) \phi_i d\Omega^e = \\ & - \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\zeta^e}{u^2} \widehat{J}_x^s \right) \phi_i d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\zeta^e}{u^2} \widehat{J}_z^s \right) \phi_i d\Omega^e. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Em seguida considerando a propriedade física constante em Ω^e , aplicando a identidade $\alpha \nabla \cdot A = \nabla \cdot (\alpha A) - \nabla \alpha \cdot A$, o teorema da divergência, o teorema de Green e fazendo as devidas manipulações, têm-se:

$$\begin{aligned} & \frac{-\eta^e}{u_e^2} \int_{\Omega^e} [\nabla \widehat{E}_y^s \cdot \nabla \phi_i + u_e^2 \widehat{E}_y^s \phi_i] d\Omega^e + \frac{ik_y}{u_e^2} \int_{\Omega^e} [R \nabla \widehat{H}_y^s] \cdot \nabla \phi_i d\Omega^e = \\ & \oint_{\partial \Omega^e} \left(-\frac{ik_y}{u_e^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial z} - \frac{\eta^e}{u_e^2} \widehat{E}_y^s - \frac{ik_y}{u_e^2} \widehat{J}_x^s \right) \phi_i n_x dl^e \\ & - \oint_{\partial \Omega^e} \left(-\frac{ik_y}{u_e^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial x} + \frac{\eta^e}{u_e^2} \widehat{E}_y^s + \frac{ik_y}{u_e^2} \widehat{J}_z^s \right) \phi_i n_z dl^e \\ & + \frac{ik_y}{u_e^2} \int_{\Omega^e} \widehat{J}_t^s \cdot \nabla \phi_i d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \widehat{J}_y^s \phi_i d\Omega^e \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} & \frac{-\zeta^e}{u_e^2} \int_{\Omega^e} [\nabla \widehat{H}_y^s \cdot \nabla \phi_i + u_e^2 \widehat{H}_y^s \phi_i] d\Omega^e - \frac{ik_y}{u_e^2} \int_{\Omega^e} [R \nabla \widehat{E}_y^s] \cdot \nabla \phi_i d\Omega^e = \\ & \oint_{\partial \Omega^e} \left(-\frac{\zeta^e}{u_e^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial x} + \frac{ik_y}{u_e^2} \widehat{E}_y^s + \frac{\zeta^e}{u_e^2} \widehat{J}_z^s \right) \phi_i n_x dl^e \\ & + \oint_{\partial \Omega^e} \left(-\frac{ik_y}{u_e^2} \frac{\partial \widehat{E}_y^s}{\partial x} - \frac{\eta^e}{u_e^2} \frac{\partial \widehat{H}_y^s}{\partial z} - \frac{\zeta^e}{u_e^2} \widehat{J}_x^s \right) \phi_i n_z dl^e \\ & - \frac{\zeta^e}{u_e^2} \oint_{\Omega^e} \widehat{J}^s \cdot [R \nabla \phi_i] d\Omega^e. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Substituindo apropriadamente (2.45), (2.46), (2.47) e (2.48) em (2.51) e (2.52) chega-se em,

$$\begin{aligned} \frac{-\eta^e}{u_e^2} \int_{\Omega^e} [\nabla \widehat{E}_y^s \cdot \nabla \phi_i + u_e^2 \widehat{E}_y^s \phi_i] d\Omega_e + \frac{iky}{u_e^2} \int_{\Omega^e} [R \nabla \widehat{H}_y^s] \cdot \nabla \phi_i d\Omega^e = \\ \frac{iky}{u_e^2} \int_{\Omega^e} \widehat{J}^s \cdot \nabla \phi_i d\Omega^e + \int_{\Omega^e} \widehat{J}_y^s \phi_i d\Omega^e - \oint_{\partial\Omega^e} [R \widehat{H}^s \phi_i] \cdot \widehat{n} dl^e \end{aligned} \quad (2.53)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{-\zeta^e}{u_e^2} \int_{\Omega^e} [\nabla \widehat{H}_y^s \cdot \nabla \phi_i + u_e^2 \widehat{H}_y^s \phi_i] d\Omega_e - \frac{iky}{u_e^2} \int_{\Omega^e} [R \nabla \widehat{E}_y^s] \cdot \nabla \phi_i d\Omega^e = \\ - \frac{\zeta^e}{u_e^2} \int_{\Omega^e} \widehat{J}^s \cdot [R \nabla \phi_i] d\Omega^e + \oint_{\partial\Omega^e} [R \widehat{E}^s \phi_i] \cdot \widehat{n} dl^e \end{aligned} \quad (2.54)$$

em que $\widehat{J}^s = (\widehat{J}_x^s, \widehat{J}_z^s)$, $\widehat{E}^s = (\widehat{E}_x^s, \widehat{E}_z^s)$, $\widehat{H}^s = (\widehat{H}_x^s, \widehat{H}_z^s)$ e

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vale ressaltar que os integrandos nas integrais de linha em (2.53) e (2.54) correspondem a $(\widehat{H}^s \cdot \widehat{t})$ e $(\widehat{E}^s \cdot \widehat{t})$ respectivamente. Estas integrais se anulam ao se somar as contribuições de elementos adjacentes. Contudo restarão os elementos de borda onde considera-se a condição de Dirichlet homogênea. Então, neste caso, assume-se que as integrais de linha são indenticamente nulas em todo domínio Ω . Além disso, de acordo com (RIJO, 2005), as equações, (2.53) e (2.54), representam um sistema de equações dos campos acoplados E_y^s e H_y^s caracterizando os modos de propagação **TE** e **TM**, respectivamente, enquanto as parcelas

$$\frac{iky}{u_e^2} \int_{\Omega^e} [R \nabla \widehat{H}_y^s] \cdot \nabla \phi_i d\Omega^e \quad e \quad - \frac{iky}{u_e^2} \int_{\Omega^e} [R \nabla \widehat{E}_y^s] \cdot \nabla \phi_i d\Omega^e$$

correspondem aos termos de acoplamento dos modos. Finalmente, escrevendo os campos secundários, \widehat{E}_y^s , \widehat{H}_y^s e os componentes do campo primário \widehat{E}^p que define \widehat{J}^s , como uma combinação linear das funções bases, como definido anteriormente, obtem-se

$$\widehat{E}_y^s = \sum_{j=1}^3 \widehat{E}_{y_j}^s \phi_j \quad e \quad \widehat{H}_y^s = \sum_{j=1}^3 \widehat{H}_{y_j}^s \phi_j$$

$$\widehat{E}_x^p = \sum_{j=1}^3 \widehat{E}_{x_j}^p \phi_j, \quad \widehat{E}_y^p = \sum_{j=1}^3 \widehat{E}_{y_j}^p \phi_j \quad e \quad \widehat{E}_z^p = \sum_{j=1}^3 \widehat{E}_{z_j}^p \phi_j.$$

Então, substituindo esses resultados nas equações (2.53) e (2.54), obtem-se

$$\begin{aligned} \frac{-\eta^e}{u_e^2} \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega^e} [\nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i + u_e^2 \phi_j \phi_i] d\Omega_e \widehat{E}_{y_j}^s + \frac{iky}{u_e^2} \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega^e} [R \nabla \phi_j] \cdot \nabla \phi_i d\Omega^e \widehat{H}_{y_j}^s = \\ \frac{iky \eta^{se}}{u_e^2} \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega^e} \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d\Omega^e \widehat{E}_{x_j}^p + \eta^{se} \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega^e} \phi_j \phi_i d\Omega^e \widehat{E}_{y_j}^p \\ + \frac{iky \eta^{se}}{u_e^2} \sum_{j=1}^3 \int_{\partial\Omega^e} \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial z} d\Omega^e \widehat{E}_{z_j}^p \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{-\eta^e}{u_e^2} \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega^e} [\nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i + u_e^2 \phi_j \phi_i] d\Omega^e \widehat{H}_{y_j}^s - \frac{ik_y}{u_e^2} \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega^e} [R\nabla \phi_j] \cdot \nabla \phi_i d\Omega^e \widehat{E}_{y_j}^s = \\ \frac{\zeta^e \eta^{se}}{u_e^2} \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega^e} \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial z} d\Omega^e \widehat{E}_{x_j}^p - \frac{\zeta^e \eta^{se}}{u_e^2} \sum_{j=1}^3 \int_{\partial\Omega^e} \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d\Omega^e \widehat{E}_{z_j}^p. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Em seguida, utilizando a identidade

$$\int_{\Omega^e} \phi_1^\alpha \phi_2^\beta \phi_3^\gamma dx dz = 2A \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!}, \quad (2.57)$$

em que A denota a área de Ω^e . Os resultados para as integrais em (2.55) e (2.56) são dados por,

$$\int_{\Omega^e} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i d\Omega^e = \frac{1}{4A} (b_j b_i + c_j c_i) \quad (2.58)$$

$$\int_{\Omega^e} \phi_j \phi_i d\Omega^e = \begin{cases} \frac{A}{6}, & i = j \\ \frac{A}{12}, & i \neq j \end{cases} \quad (2.59)$$

$$(2.60)$$

$$\int_{\Omega^e} [R\nabla \phi_j] \cdot \nabla \phi_i d\Omega^e = \frac{1}{4A} (b_j c_i - b_i c_j) \quad (2.61)$$

$$\int_{\Omega^e} \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial x} d\Omega^e = \frac{b_i}{6} \quad (2.62)$$

$$\int_{\Omega^e} \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial z} d\Omega^e = \frac{c_i}{6} \quad (2.63)$$

Para $i, j = 1, 2$ e 3 , chega-se as seguintes representações matriciais para as integrais das equações (2.55) e (2.56):

$$K_e^{TE} = -\frac{\eta^e}{4Au_e^2} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_2 b_1 + c_2 c_1 & b_3 b_1 + c_3 c_1 \\ b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_2^2 + c_2^2 & b_3 b_2 + c_3 c_2 \\ b_1 b_3 + c_1 c_3 & b_2 b_3 + c_2 c_3 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} - \frac{\eta_e^2 A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

$$K_e^{ACTE} = \frac{ik_y}{4Au_e^2} \begin{bmatrix} 0 & b_2 c_1 - b_1 c_2 & b_3 c_1 - b_1 c_3 \\ b_1 c_2 - b_2 c_1 & 0 & b_3 c_2 - b_2 c_3 \\ b_1 c_3 - b_3 c_1 & b_2 c_3 - b_3 c_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.65)$$

$$F_e^{TE} = \frac{ik_y \eta^{se}}{6u_e^2} \left(\left(\widehat{E}_{x_1}^p + \widehat{E}_{x_2}^p + \widehat{E}_{x_3}^p \right) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + \left(\widehat{E}_{z_1}^p + \widehat{E}_{z_2}^p + \widehat{E}_{z_3}^p \right) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \right) + \quad (2.66)$$

$$\frac{\eta^{se} A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{E}_{z_1}^p \\ \widehat{E}_{z_2}^p \\ \widehat{E}_{z_3}^p \end{bmatrix},$$

$$K_e^{TM} = -\frac{\zeta^e}{4Au_e^2} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_2b_1 + c_2c_1 & b_3b_1 + c_3c_1 \\ b_1b_2 + c_1c_2 & b_2^2 + c_2^2 & b_3b_2 + c_3c_2 \\ b_1b_3 + c_1c_3 & b_2b_3 + c_2c_3 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} - \frac{\zeta^e A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.67)$$

Como a integral que resulta em K_e^{ACTE} de (2.55) difere da integral em (2.56) por um sinal negativo, então

$$K_e^{ACTE} = -K_e^{ACTM}$$

$$F_e^{TM} = \frac{\zeta^e \eta^{se}}{6u_e^2} \left((\widehat{E}_{x_1}^p + \widehat{E}_{x_2}^p + \widehat{E}_{x_3}^p) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} - (\widehat{E}_{z_1}^p + \widehat{E}_{z_2}^p + \widehat{E}_{z_3}^p) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \right). \quad (2.68)$$

Optou-se também por escrever o vetor fonte local e matriz local, assim como a realização da montagem da matriz global, como em (SILVA, 2012). Portanto, têm-se

$$F_e = \begin{bmatrix} \widehat{E}_{y_1}^s & \widehat{H}_{y_1}^s & \widehat{E}_{y_2}^s & \widehat{H}_{y_2}^s & \widehat{E}_{y_3}^s & \widehat{H}_{y_3}^s \end{bmatrix}^t$$

$$F_e = \begin{bmatrix} F_1^{TE} & F_1^{TM} & F_2^{TE} & F_2^{TM} & F_3^{TE} & F_3^{TM} \end{bmatrix}^t \quad (2.69)$$

e

$$K_e = \begin{bmatrix} K_{11}^{TE} & K_{11}^{ACTE} & K_{12}^{TE} & K_{12}^{ACTE} & K_{13}^{TE} & K_{13}^{ACTE} \\ -K_{11}^{ACTE} & K_{11}^{TM} & -K_{12}^{ACTE} & K_{12}^{TM} & -K_{13}^{ACTE} & K_{13}^{TM} \\ K_{21}^{TE} & K_{21}^{ACTE} & K_{22}^{TE} & K_{22}^{ACTE} & K_{23}^{TE} & K_{23}^{ACTE} \\ -K_{21}^{ACTE} & K_{21}^{TM} & -K_{22}^{ACTE} & K_{22}^{TM} & -K_{23}^{ACTE} & K_{23}^{TM} \\ K_{31}^{TE} & K_{31}^{ACTE} & K_{32}^{TE} & K_{32}^{ACTE} & K_{33}^{TE} & K_{33}^{ACTE} \\ -K_{31}^{ACTE} & K_{31}^{TM} & -K_{32}^{ACTE} & K_{32}^{TM} & -K_{33}^{ACTE} & K_{33}^{TM} \end{bmatrix}. \quad (2.70)$$

Finalmente, aplicando a transformada inversa,

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x, k_y, z) e^{ik_y y} dk_y, \quad (2.71)$$

na variável k_y para as componente dos campos secundários, retorna-se ao domínio (x, y, z) . (SILVA, 2012), mostra graficamente as relações de paridade das componentes dos campos secundários exibindo tanto a parte real quanto a parte imaginária e conclui que, \hat{E}_y^s , \hat{H}_x^s e \hat{H}_z^s , são pares e, \hat{E}_x^s , \hat{E}_z^s e \hat{H}_y^s , são ímpares. Sendo assim, a transformada inversa em (2.71) reduz-se a transformada cosseno e seno para esses campos, respectivamente. Estas integrais foram sempre calculadas utilizando filtros digitais. Em todos os resultados, assume-se que $y = 1.0$ e optou-se por utilizar, o filtro de 81 pontos disponível em: <http://marineemlab.ucsd.edu/Projects/Occam/1DCSEM/>.

2.3 Problema incluindo a topografia

Finalmente para se avaliar o efeito da irregularidade do relevo, de acordo com a metodologia descrita na seção anterior, considerou-se tanto o excesso quanto a falta de condutividade elétrica acima do nível da bobina, como sendo uma variação do hospedeiro estratificado. Ou seja, o contraste de resistividade na região que caracteriza tanto o morro quanto o vale representará, assim como qualquer heterogeneidade 2D da subsuperfície, fontes de campos secundários, embora, no caso do vale, não haja efetivamente correntes elétricas induzidas no ar.

No processo de subdivisão do domínio, quando se utiliza assim como em (SILVA, 2012), uma malha estruturada para descrever o domínio discretizado, adicionar a topografia, torna-se um desafio maior quanto a implementação de um algoritmo de discretização capaz de representar feições curvas. Tendo em vista tal dificuldade, utilizou-se um "software" livre de discretização 2D, chamado Triangle, que subdivide o domínio em células triangulares não estruturadas, permitindo modelar geometrias mais complexas, e além disso, é possível controlar localmente a densidade de nós da malha.

Por outro lado, diferente do que naturalmente ocorre na malha estruturada, onde tem-se nós sempre alinhados na direção ao longo da qual se quer calcular as derivadas, na malha não estruturada, a não ser que se imponha, não fornece tal alinhamento. Assim sendo, necessita-se dispor de um procedimento capaz de calcular as derivadas numéricas ao longo da irregularidade do relevo, sem que necessariamente tenha-se que alinhar nós. Para tal procedimento, como será descrito na próxima seção, optou-se por utilizar as funções bases definidas na última seção.

2.4 Derivada numérica 2D

2.4.1 Média aritmética do gradiente das funções base

O cálculo numérico de derivadas é geralmente uma tarefa indispensável na modelagem numérica dos métodos eletromagnéticos. As equações de (2.45) à (2.48) exemplificam a necessidade de derivadas numéricas na modelagem feita neste trabalho: depois de obter uma solução numérica, pelo método dos elementos finitos, para as componentes E_y e H_y , deseja-se recuperar as derivas direcionais destes campos para obter a componente H_r nos pontos de observação desejados.

Particularmente, no caso de derivadas de funções 2D, a lista de trabalhos sobre o tema não é tão extensa. Entre os que se pode citar, está o trabalho de (BANK; XU J. AND. ZHENG, 2007), onde aplica-se um operador Q_h de projeção L^2 e um operador S_h de suavidade apropriado, sendo a derivada da solução de elementos finitos u_h representada por $S_h^m Q_h \partial_h^p u_h$. Em (WANG, 2005) e em (NAKAMURA S. WANG, 2008), o problema de diferenciação numérica é considerado como um problema mal-posto e tratado pelo método de regularização de Tikhonov. Nesses trabalhos utilizaram, respectivamente, funções de Green e funções bi-harmônicas de Green. Já, (WEI Y. C. HON, 2005), trata o problema de diferenciação, também, do ponto de vista do método de regularização. Contudo, a função que minimiza o funcional é definida por uma combinação linear de funções spline.

Neste trabalho, por simplicidade em relação aos métodos mencionados acima e, por ter se mostrado eficiente no trabalho de (NUNES; RÉGIS, 2013), optou-se por utilizar a média aritmética do gradiente das funções bases interpolantes de EF.

Então, lembrando que

$$u^e(x, z) = \sum_{i=1}^3 u_i^e \Psi_i, \quad (2.72)$$

e como $u^e(x, z)$ é a aproximação de $u(x, z)$ em Ω_e , então $\nabla u(x, z) \approx \nabla u^e(x, z)$ para $(x, z) \in \Omega_e$, desde que a discretização seja pequena o suficiente, tal que o plano que interpola a solução nos valores nodais possa representar satisfatoriamente $u(x, z)$, como ilustra a Figura 3.

Levando-se em conta as equações (2.39), as derivadas são

$$\frac{\partial u^e(x, z)}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta^e} \sum_{i=1}^3 b_i u_i^e, \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial u^e(x, z)}{\partial z} = \frac{1}{2\Delta^e} \sum_{i=1}^3 c_i u_i^e. \quad (2.74)$$

Para determinar $\nabla u_g(x, z)$ em cada nó da malha a partir de 2.73 e 2.74, considera-se uma média tomando o gradiente de cada elemento na vizinhança do nó, como ilustrado na

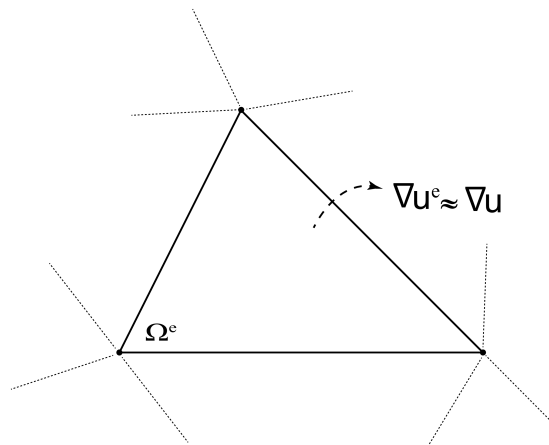
figura (4). Este procedimento é suficiente para conseguir-se uma boa aproximação para a derivada no nó, mas exige que a malha seja consideravelmente mais densa na região próxima dos pontos em que se quer simular as medidas do campo.

2.5 Resultados de validação

2.5.1 Problema 1D

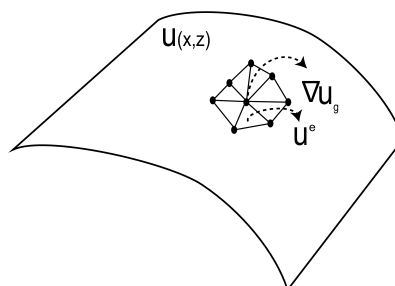
Nesta seção, o experimento numérico de validação consistirá em reproduzir os campos para um modelo de 2 camadas entre dois semiespaços exemplificado na figura(5). As camadas possuem espessura $h_1 = 75\text{m}$ e $h_2 = 50\text{m}$, as resistividades do modelo são $\rho_1 = 10 \Omega\cdot\text{m}$, $\rho_2 = 1000 \Omega\cdot\text{m}$ e $\rho_3 = 100 \Omega\cdot\text{m}$. Na figura (6), mostra-se os resultados referente a parte real e imaginária das componentes E_ϕ^p , H_r^p e H_z^p utilizando a o método de extrapolação e a integração no plano complexo. Os campos foram avaliados na coordenada

Figura 3 – domínio de um elemento arbitrário Ω^e em uma malha hipotética



Fonte: Do autor

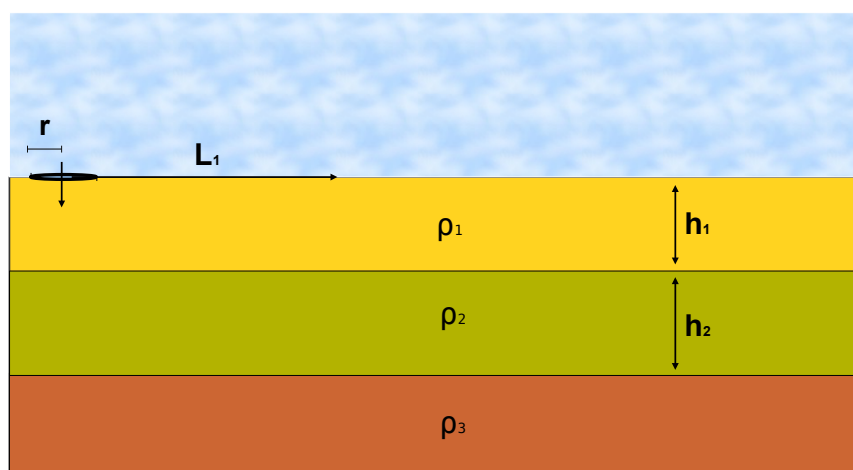
Figura 4 – Interpolações na vizinhança de um nó onde a derivada será calculada



Fonte: Do autor

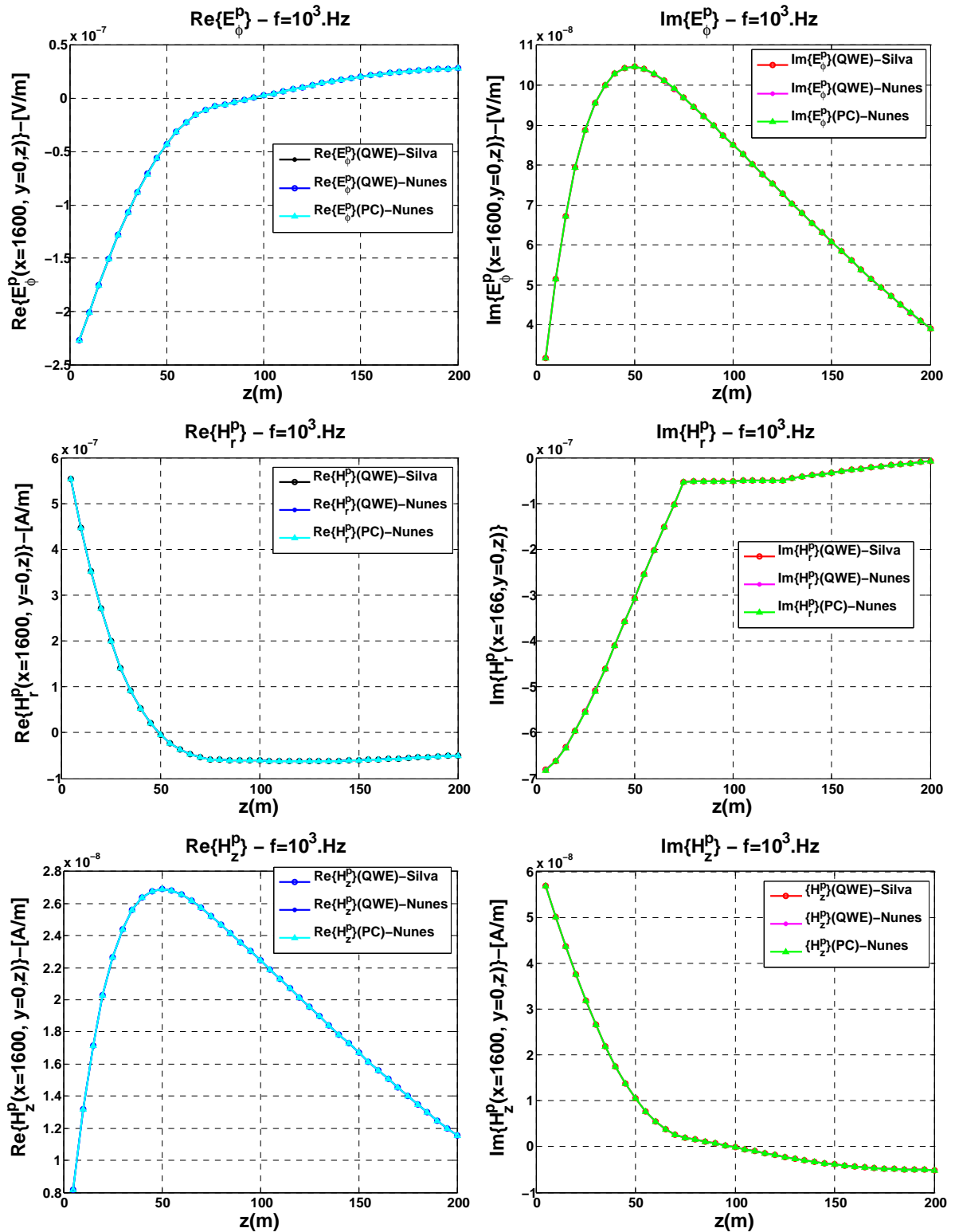
$L_1 = 1600 \text{ m}$ em profundidade, considerando uma espira transmissora de raio $r = 340 \text{ m}$ e com uma corrente com frequência de 1kHz . Silva, gentilmente, cedeu-me a rotina do QWE implementada por ele. Então de acordo com os resultados da figura(6), é possível notar a igualdade entre os resultados obtidos aqui e por (SILVA, 2012), indicando que os Kernels estão devidamente implementados, assim como a rotina de integração no plano complexo.

Figura 5 – Meio estratificado com 2 camadas e um semiespaço



Fonte: Do autor

Figura 6 – Parte real e imaginária dos campos primários E_ϕ^p , H_r^p e H_z^p obtidos a partir do modelo da figura (5). QWE-Nunes corresponde as reposta, a partir dos kernels implementados por Nunes, utilizando a rotina QWE de Silva. PC-Nunes significa a resposta obtidas pela integração no plano complexo implementada por Nunes



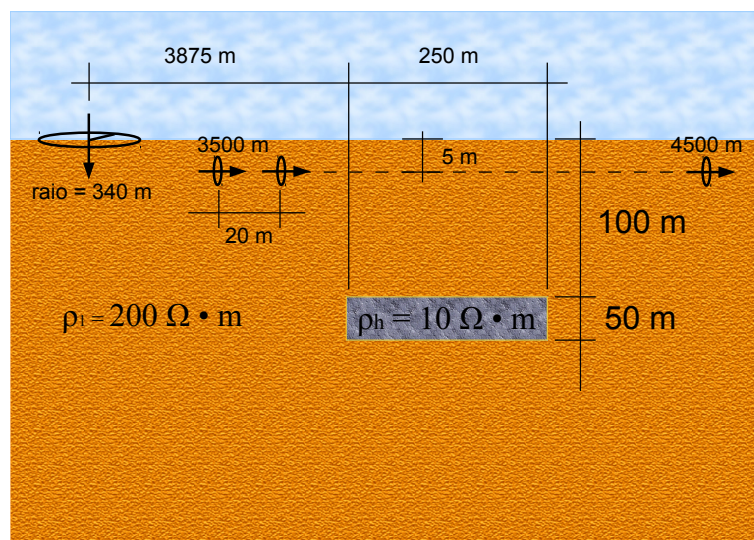
Fonte: Do autor

2.5.2 Modelagem 2.5D

Nesta seção, procura-se validar a modelagem 2.5D calculando os campos primários e secundários sobre dois modelos. O primeiro, na Figura 7, é um semiespaço encaixante, com resistividade de $200 \text{ Ohm}\cdot\text{m}$, e uma heterogeneidade retangular, com resistividade $10 \text{ Ohm}\cdot\text{m}$, localizada a 3875 m da fonte, 100 m de profundidade e com espessura de 50 m . Os resultados desse modelo são comparados com os cedidos por (SILVA, 2012).

O segundo, (Figura 9), refere-se a dois corpos tabulares de resistividade $10 \text{ Ohm}\cdot\text{m}$ localizados em uma camada de resistividade $1000 \text{ Ohm}\cdot\text{m}$. O semiespaço inferior possui a mesma resistividade dos corpos verticais. Os campos referentes a este modelo são comparados com as respostas obtidas por modelagem tridimensional por Equações Integrais (EI) do programa INTEM3D, construído pelo grupo da Universidade de Utah, através do consórcio de modelagem e inversão eletromagnética (Consortium for Electromagnetic Modelling and Inversion – CEMI), do qual faz parte a Petrobras. Neste teste, contou-se com a colaboração do geofísico João Lucas Crepaldi, da Petrobras, que gentilmente gerou os dados das componentes magnéticas radial e vertical, perpendiculares à linha de medidas para o modelo em questão. Aqui, a idéia reside no fato de que corpos como prismas, suficientemente longos e afastados da linha de medidas, produzirão respostas equivalentes as de um modelo 2D, no qual os corpos têm comprimento infinito.

Figura 7 – Modelo de uma heterogeneidade retangular com o semi-espaco como meio encaixante. Adaptada de (SILVA, 2012).

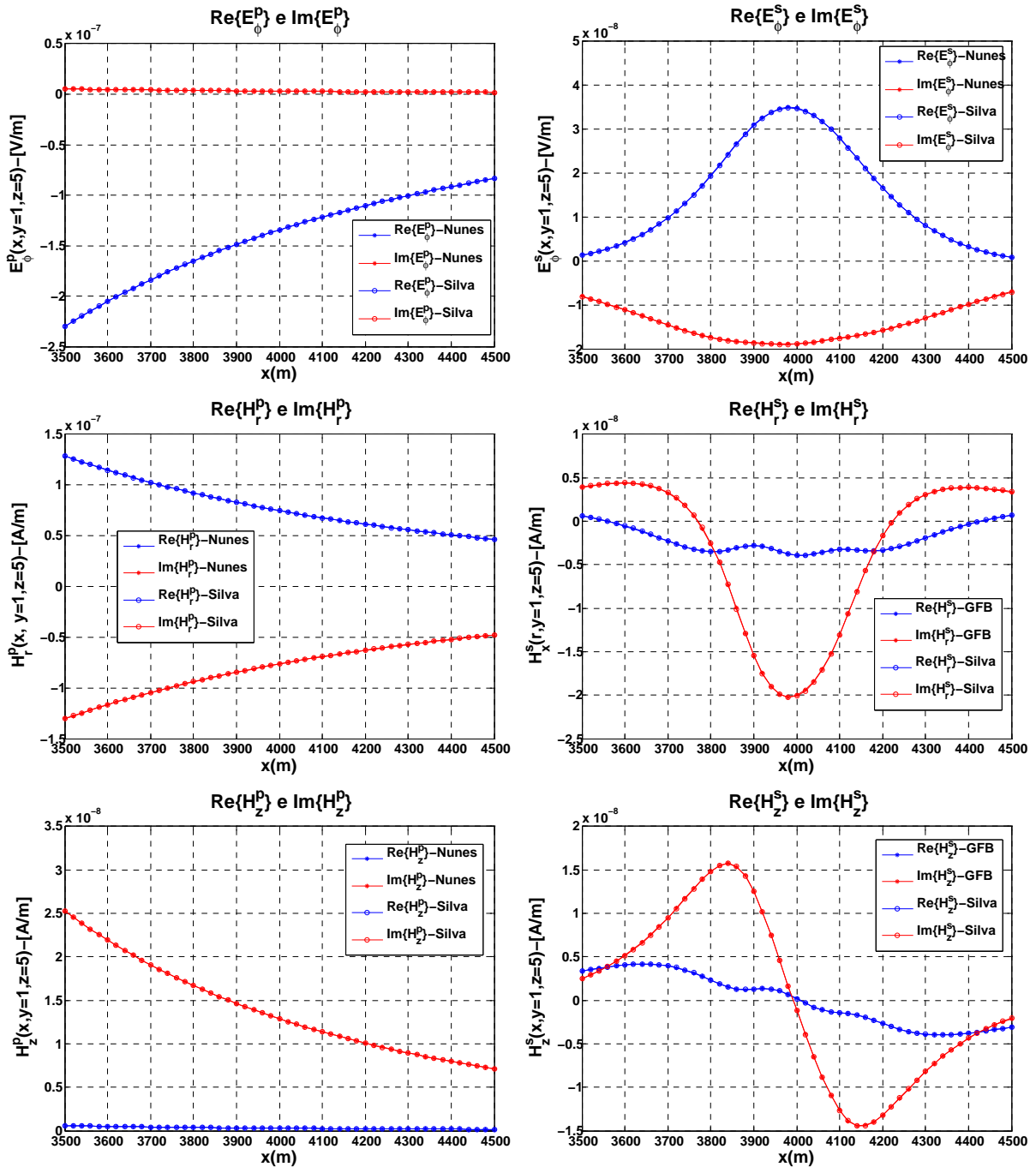


Fonte: Do autor

Os resultados mostrados na Figura 8 foram obtidos sobre o modelo da Figura 7 para as componentes E_{ϕ}^s , H_r^s e H_z^s e seus respectivos campos primários. As observações iniciaram a uma distância de 3500 m do centro do raio da espira e foram até 4500 m com um incremento de 100 m . Neste caso, compara-se os resultados gerados neste trabalho

com os de (SILVA, 2012). Então observando a figura (8), é possível notar que todos os resultados coincidem, tanto para a resposta 1D quanto para a 2,5D, dando assim, um forte indicativo que a implementação está correta.

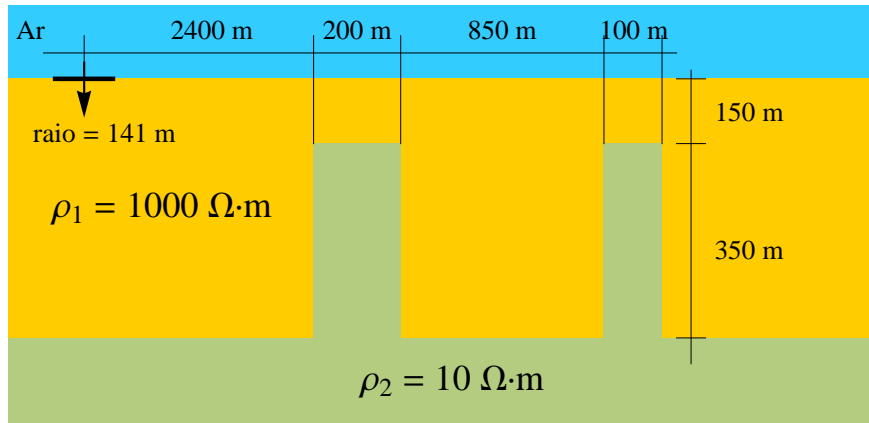
Figura 8 – Campos primários e secundários comparados com resultados cedidos por (SILVA, 2012) para a frequência $f = 1000Hz$.



Fonte: Do autor

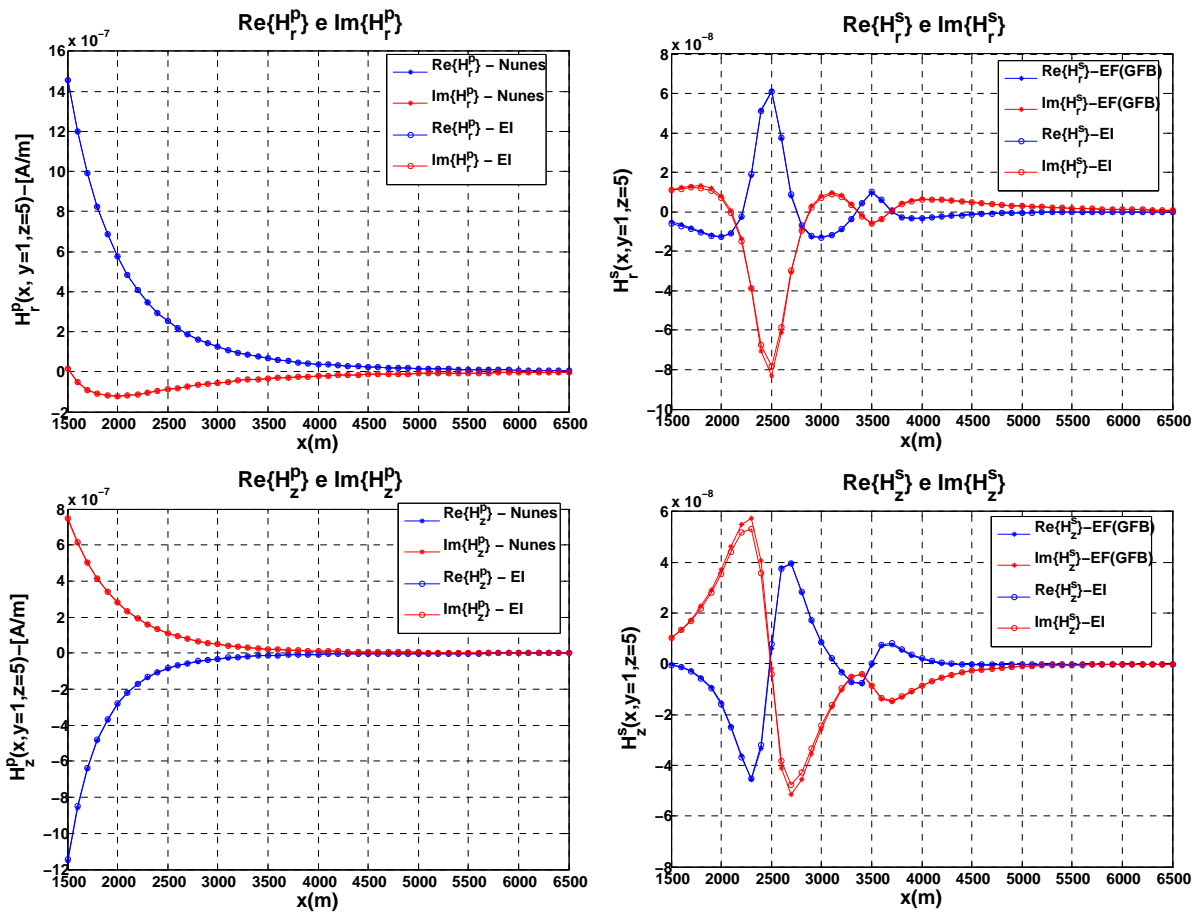
Ainda com o intuito de validar a implementação, simula-se os campos H_r^s e H_z^s e seus respectivos primários, para um modelo mais complexo descrito na figura(9). Os resultados

Figura 9 – Modelo de duas intrusões. Adaptada de (SILVA, 2012).



Fonte: Do autor

Figura 10 – Campos primários e secundários comparados com resultados obtidos por EI 3D para frequência $f = 1000Hz$.



Fonte: Do autor

obtidos são comparados com uma resposta a partir da modelagem 3D por equação integral. Sendo assim, de acordo com a figura (10), é possível notar que $Re\{H_r^p\}$ e $Re\{H_z^p\}$, assim como $Re\{H_r^s\}$ e $Re\{H_z^s\}$ coincidem. Entretanto, há uma pequena diferença em $Im\{H_r^s\}$ e $Im\{H_z^s\}$, mas essa diferença está claramente associada ao fato dos corpos, no modelo 3D, não estarem suficientemente alongados para simular as respostas de um modelo 2D.

Particularmente, com respeito a técnica de derivação numérica, nota-se que ela está se mostrando eficiente no cálculo das componentes H_r^s e H_z^s , em ambos os casos.

3 MODELAGEM 2.5D DO EFEITO DA TOPOGRAFIA

As propriedades físicas em subsuperfície, de um modo geral, apresentam-se distribuídas de uma forma bastante complexa. Entretanto, é comum em simulações numéricas versões um tanto quanto simplificadas da realidade geológica. Não obstante, simplificações também são adotadas para a superfície terrestre, frequentemente considerada como horizontalmente plana. Embora em muitos casos tais simplificações possam ser consideradas como uma boa aproximação da realidade, na maioria das vezes, necessita-se considerá-las tal é a sua influência sobre os dados observados em campo. Sendo assim, é desejável uma avaliação quantitativa do efeito que o relevo tem sobre os dados, quando a superfície deixa de ser plana e horizontal.

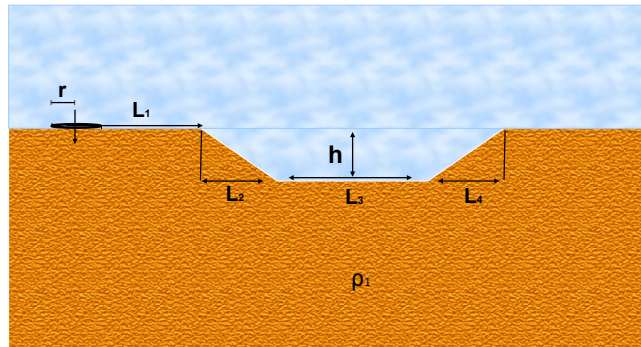
Neste capítulo, utiliza-se as ferramentas numéricas desenvolvidas nos anteriores para simular as medidas efetuadas em terrenos com variações no gradiente topográfico, adotando modelos como vales e colinas, e mensurando como estas feições afetam as respostas da componente H_r , que são os dados observados do método EMMF.

O método EMMF, atualmente, faz uso de uma bobina quadrada de centenas de metros de lado. Contudo, (MACHADO, 2009), mostrou que os campos de uma bobina quadrada equivalem aos de uma bobina circular horizontal de mesmo momento de dipolo, desde que as medidas sejam feitas a partir de uma distância de três vezes e meia o comprimento do lado da espira quadrada. Em todos os modelos assumi-se que a bobina terá um raio $r = 140$ m, e seu momento de dipolo é aproximadamente o de uma bobina quadrada de 250 m de lado. As observações serão tomadas a partir de quatro vezes esse lado.

Os experimentos iniciais consistem em avaliar a influência da topografia sobre a resposta de um semiespaço. Em seguida, introduz-se um corpo condutivo e avalia-se de que maneira as irregularidades do relevo afetam a amplitude e a fase da componente magnética radial. Os resultados mostrados correspondem ao campo normalizado por H_z^0 , como no método EMMF, e pelo campo obtido a partir do modelo com relevo plano. Optou-se por mostrar a normalização por $H_r^{(relevo-plano)}$, com o intuito de quantificar o erro cometido ao se desprezar as irregularidades do terreno.

3.1 Modelo 1

Figura 11 – A figura descreve uma depressão na superfície de um terreno em forma de vale



Fonte: Do autor

A Figura 11 descreve um vale com uma planície de inundação de profundidade máxima h . As observações são realizadas em intervalos de $50m$ a partir de $1000m$ do centro da espira e se estendem até $5500m$. A distância do início do primeiro declive ao centro da espira é representada por $L_1 = 2000m$. Os demais parâmetros indentificáveis na figura são: $L_2 = 1000m$, $L_3 = 500m$, $L_4 = 1000m$ e $h = 25m, 50m, 75m$ e $100m$, e a resistividade do semi-espaco terrestre é $\rho = 200 \text{ Ohm}\cdot m$.

Analisando os resultados das figuras (12) e (13), em geral, tanto a amplitude quanto a fase do campo são afetadas pela presença do vale, sendo que os efeitos mencionados são amplificados quando se eleva o gradiente topográfico do modelo. A variação relativa provocada pelo vale diminui com o aumento da frequência.

Observa-se que a presença do vale induz, para as frequências 1 Hz e 10 Hz , um campo de maior amplitude ao longo de suas vertentes e de sua planície de inundação. Na frequência 100 Hz , a amplitude do campo aumenta ao longo da vertente do vale mais próxima da fonte. Esse comportamento se estende por alguns metros na base do vale. Já próximo da vertente do vale mais distante, nota-se que a amplitude do campo volta a aumentar. Porém, em todos os casos, a diferença de fase diminui com o aumento da frequência, sendo bem maior em $f = 1 \text{ Hz}$.

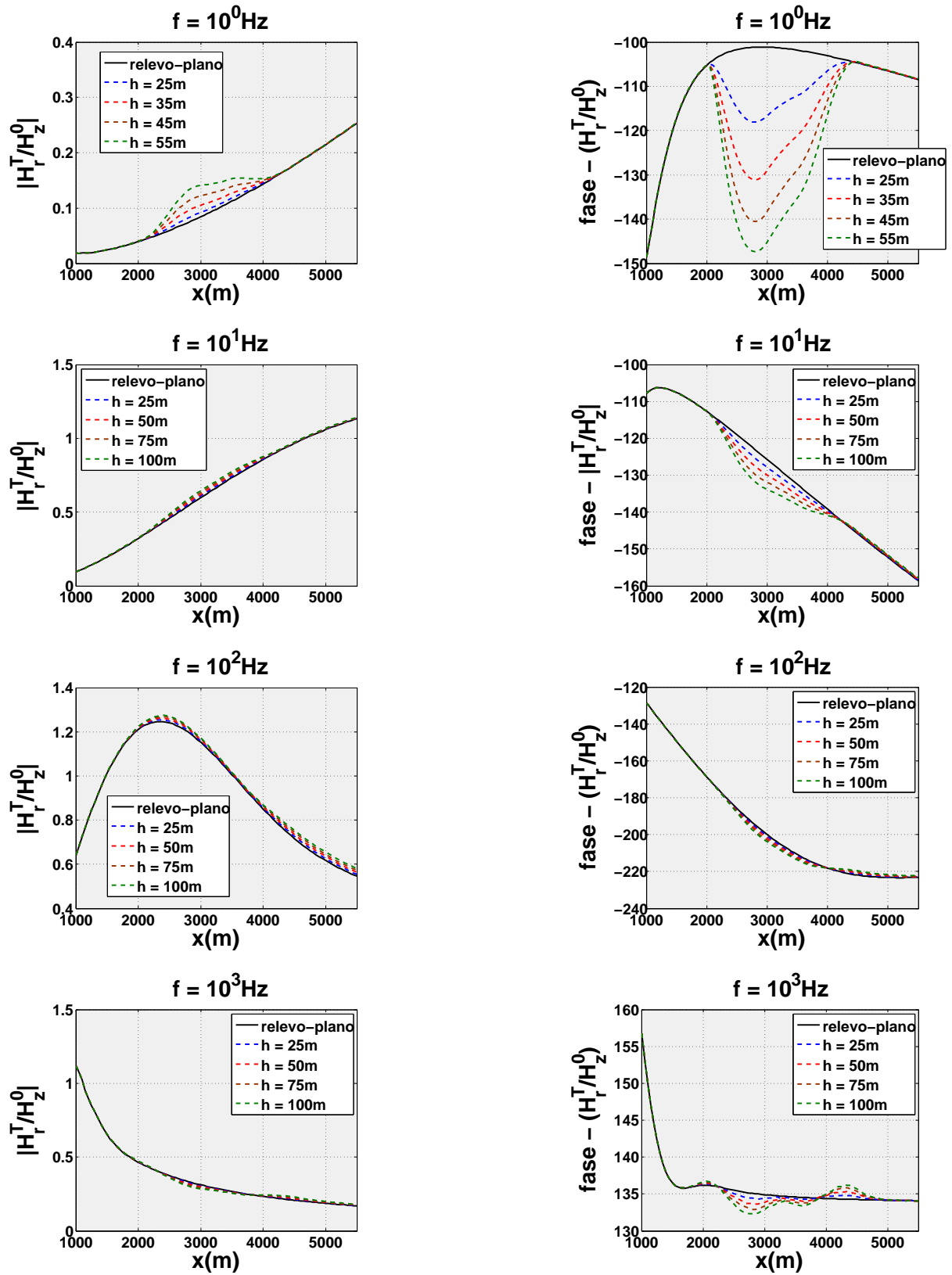
Para $f = 1000 \text{ Hz}$, ver Figura 13, observa-se que o campo é ligeiramente amplificado no início da primeira rampa do vale, e em relação a rampa mais distante da fonte o campo apresenta-se bem amplificado. Contudo, o campo diminui na maior parte dos pontos de observação ao longo da planície, assim como há uma mudança na fase ainda menor do que o resultado em $f = 100 \text{ Hz}$.

Quanto a fase, em geral, os resultados sugerem, a partir das curvas de diferença de fase, que a topografia exerce uma forte influência nas frequências mais baixas, mas

reduz-se gradativamente, com o aumento da frequência, como pode ser visto na Figura 13.

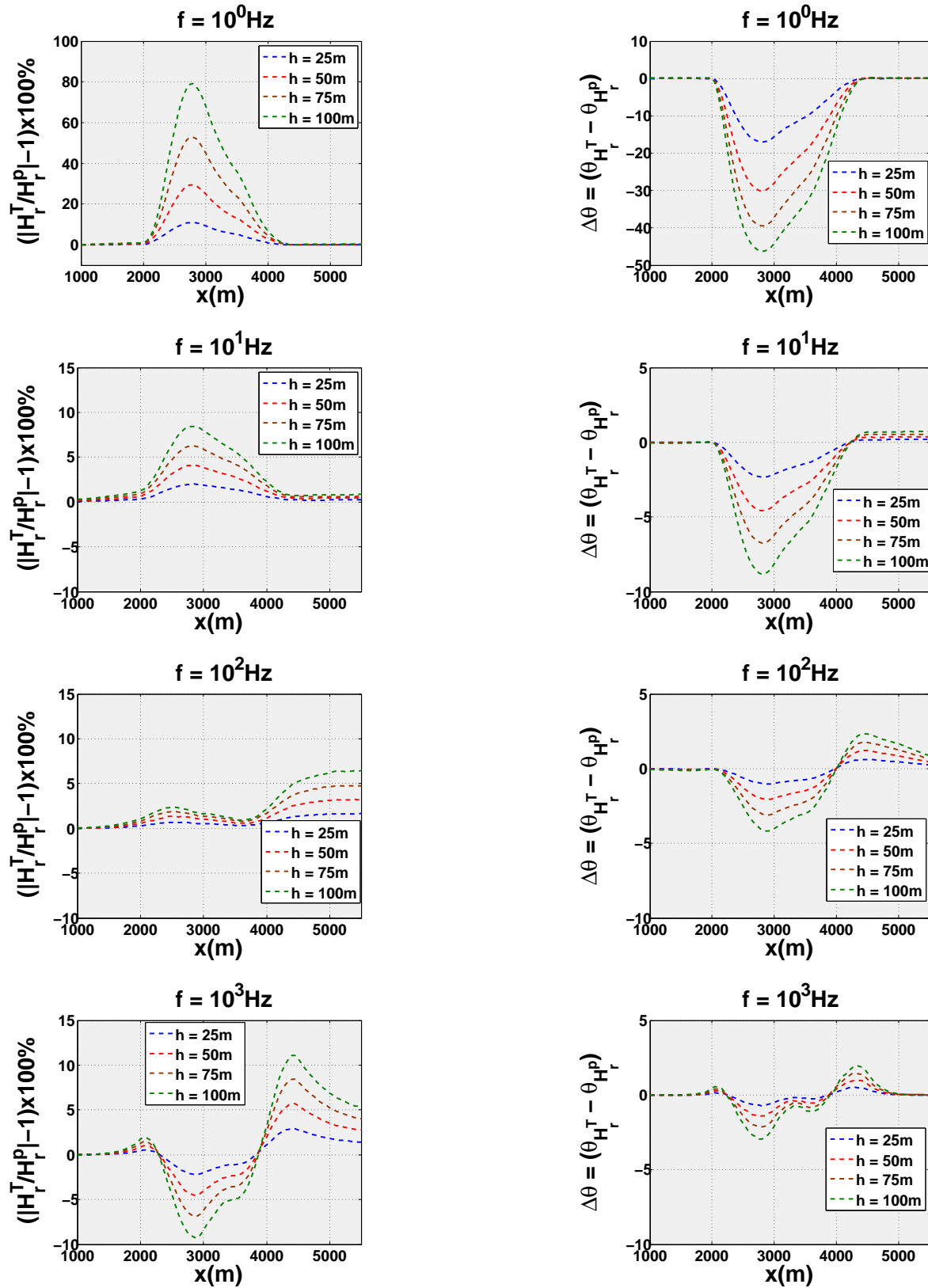
De acordo com os resultados em (13), as distorções mais relevantes sobre o campo estão ocorrendo no valor mais alto e mais baixo de frequência. Os valores percentuais máximos associados ao maior gradiente topográfico, $h = 100m$, estão, respectivamente para cada frequência, em torno de 80%, 8.5%, 6.5% e (+) ou (-) 10% em $f = 1000Hz$

Figura 12 – Resultados de amplitude e fase da componente H_r^T/H_z^0 para as frequências $f = 1, 10, 100$ e 1000 Hz



Fonte: Do autor

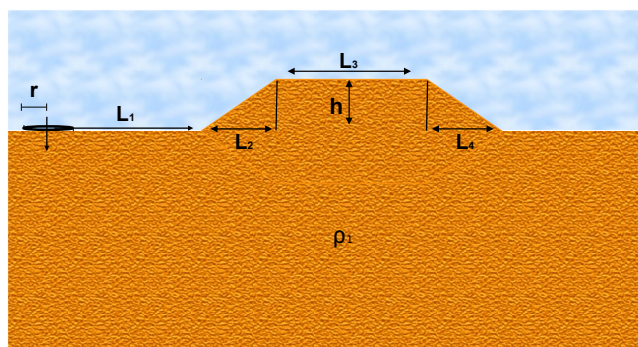
Figura 13 – Para cada frequências $f = 1, 10, 100$ e 1000 Hz , as curvas à esquerda mostram o percentual de quanto H_r^T é maior ou menor que H_z^0 , enquanto à direita, têm-se a diferença de fase entre esses campos



Fonte: Do autor

3.2 Modelo 2

Figura 14 – Esta figura descreve uma relevo em forma de morro



Fonte: Do autor

Nesta seção, os parâmetros que definem o modelo descrito pela Figura 14 são: $L_1 = 2000$, $L_2 = 1000$, $L_3 = 500$ e $L_4 = 1000$. A altura do tabuleiro assume os valores $h = 25, 50, 75$ e 100 m , e a resistividade do meio é $\rho = 200\ \Omega$.

Nos resultados das figuras (15) e (16), exceto pela amplitude do campo para $f = 1\text{ Hz}$, observa-se que a variação da topografia, caracterizada por um suposto volume de rocha acima do nível da fonte, produz mudanças sobre a amplitude e a fase do campo opostas aquelas vistas nas Figuras 12 e 13, e tais mudanças, são acentuadas a medida que h cresce.

Nos resultados relacionados a $f = 1\text{ Hz}$, observa-se que a amplitude do campo é novamente amplificada. Observa-se também que as paredes do morro induzem uma grande diferença de fase ao longo de toda a irregularidade do relevo, sendo mais acentuada na subida do morro.

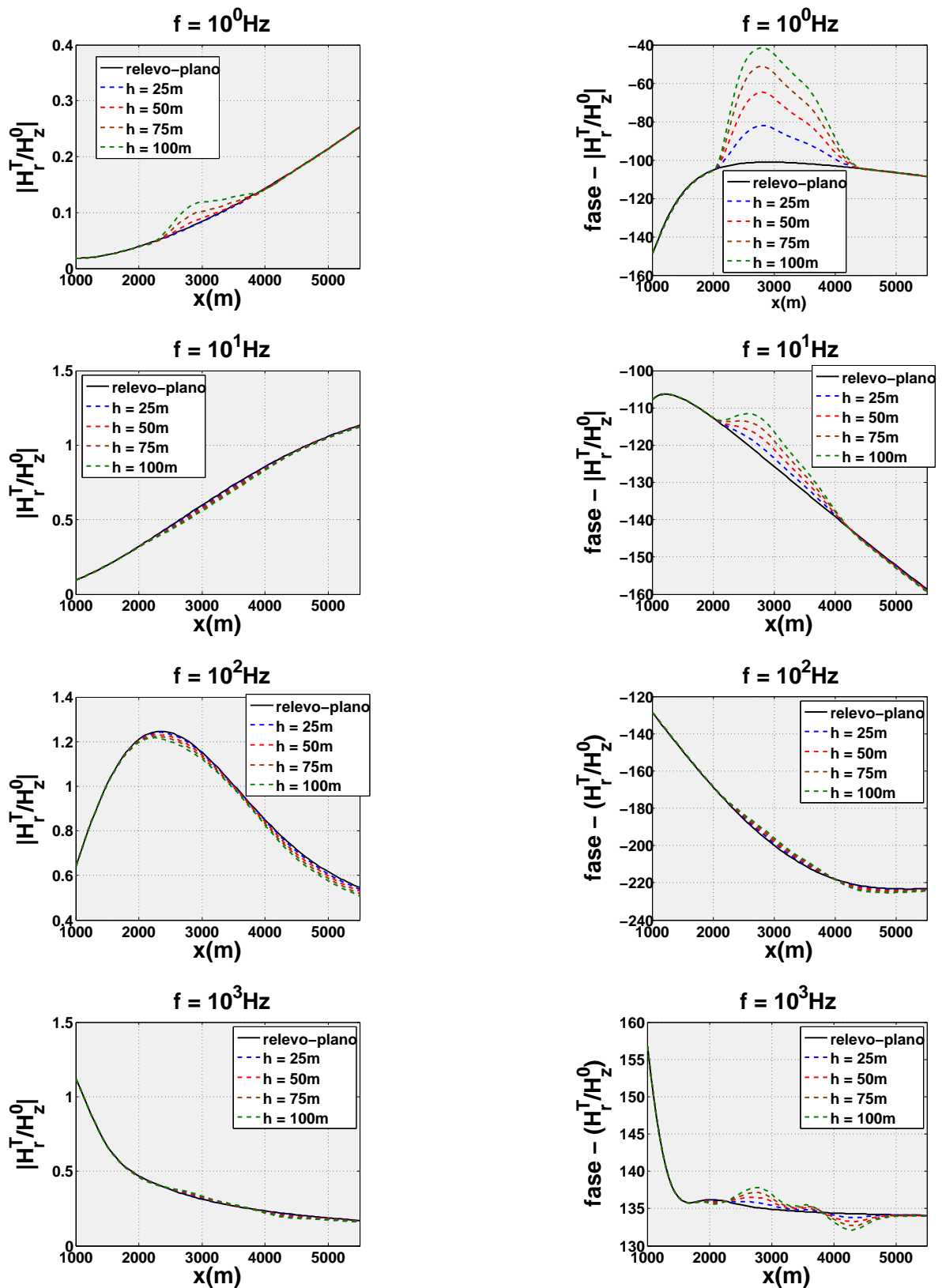
Nas frequências de 10, 100 Hz, observa-se uma redução na amplitude do campo, sendo em $f = 10\text{ Hz}$, mais acentuada nos pontos ao longo da irregularidade do relevo, enquanto em $f = 100\text{ Hz}$, este efeito se estende além das paredes do morro, na porção mais distante da fonte.

Em $f = 1000\text{ Hz}$, tem-se um aumento na amplitude associada ao primeiro aclave do morro. Entretanto, verifica-se uma diminuição no outro aclave estendendo-se além da planície mais distante da fonte.

Quanto as diferenças de fase, elas se apresentam relativamente maiores para esta feição. Contudo, é possível novamente notar que elas diminuem a medida que a frequência da fonte aumenta. Além disso, novamente pode-se ver que as maiores mudanças na amplitude do campo estão ocorrendo em $f = 1$ e 1000 Hz . Os valores máximos obtidos

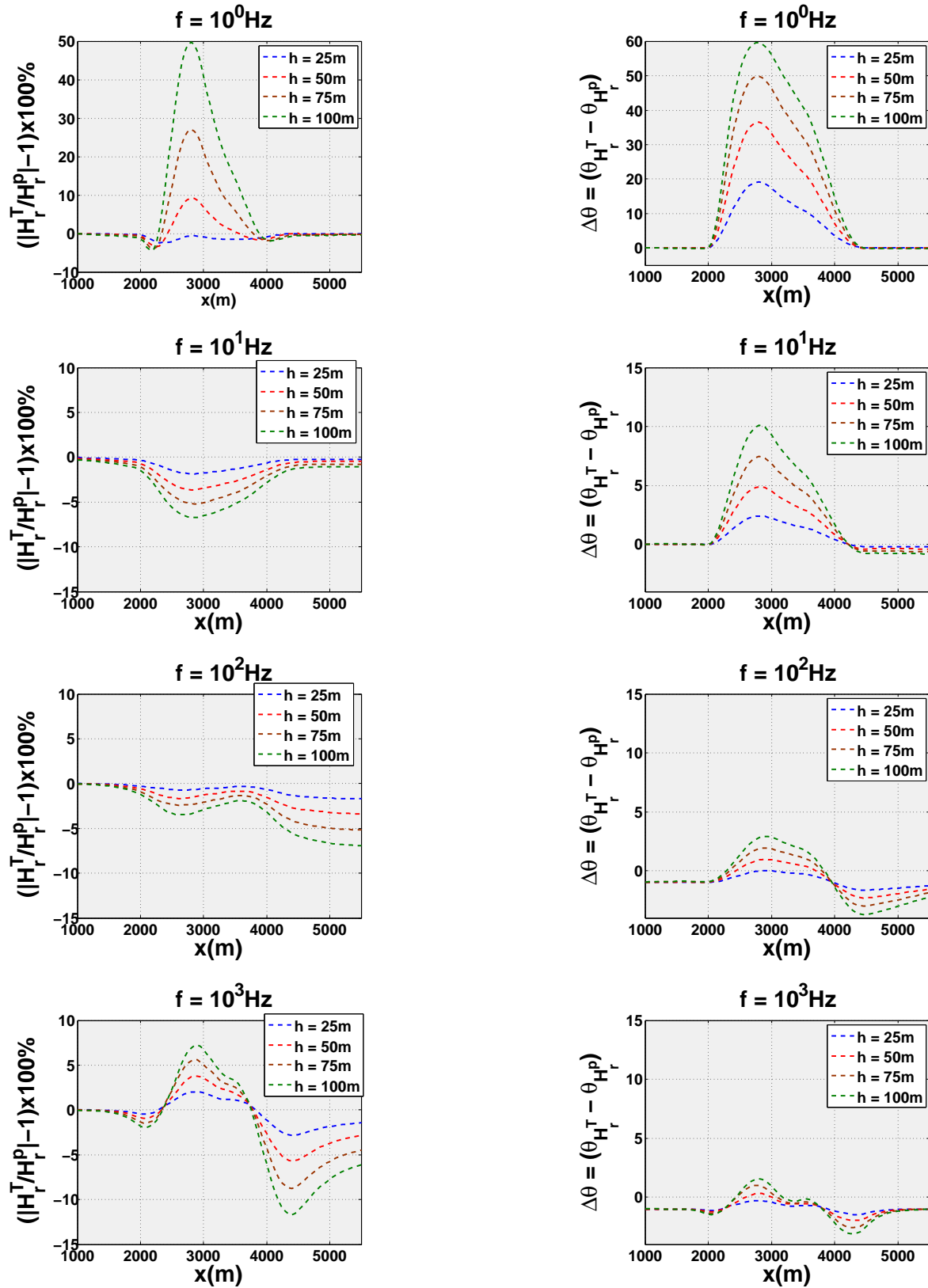
no maior gradiente topográfico, são, aproximadamente, para $f = 1$, $f = 10$ e $f = 100$ respectivamente, 50%, -7% e -7%, assim como 8% e -12% em $f = 1000Hz$.

Figura 15 – Resultados de amplitude e fase da componente H_r^T/H_z^0 para as frequências $f = 1, 10, 100$ e 1000 Hz



Fonte: Do autor

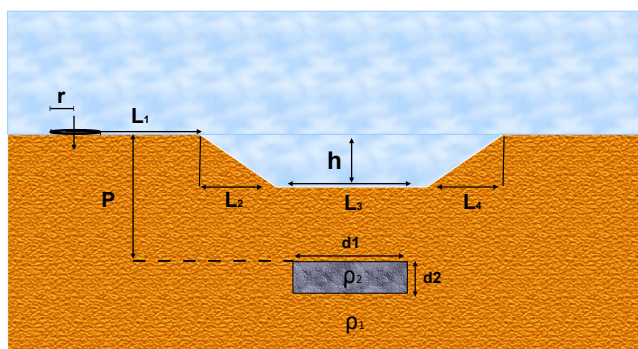
Figura 16 – Para cada frequências $f = 1, 10, 100$ e 1000 Hz , as curvas à esquerda mostram o percentual de quanto H_r^T é maior ou menor que H_z^0 , enquanto à direita, têm-se a diferença de fase entre esses campo



Fonte: Do autor

3.3 Modelo 3

Figura 17 – A figura descreve um vale acima de um corpo retangular condutivo



Fonte: Do autor

Nesta seção, a Figura 17 descreve um semiespaço encaixante e um corpo condutivo retangular localizado abaixo de um vale. O vale assume profundidades que variam de 25 a 55 m com incremento de 10 m . Para os demais parâmetros têm-se: $L_1 = 2000 m$, $L_2 = 1000 m$, $L_3 = 500 m$ e $L_4 = 1000 m$. A profundidade P do corpo é de 100 m , e suas dimensões laterais são $d_1 = 250 m$ e $d_2 = 50 m$. Sua coordenada ' x ' de centro corresponde a do centro do vale. A resistividade do modelo são $\rho_1 = 200 \Omega \cdot m$ e $\rho_2 = 10 \Omega \cdot m$.

Nas Figuras 18 e 19, pode-se claramente constatar a existência de um máximo associado à presença da heterogeneidade condutiva. Além disso, nota-se que todos os efeitos induzidos pela presença do vale, seja na amplitude do campo seja na diferença de fase, são novamente amplificados ao se elevar o gradiente topográfico. Sendo assim, para $f = 1 Hz$, observa-se uma forte mudança, tanto na amplitude quanto na fase do campo, restrita aos pontos ao longo da irregularidade do relevo. A influência da topografia sobre o campo induz um aumento na sua amplitude, amplificando a anomalia condutiva. Tais considerações também são válidas para a diferença de fase onde, claramente, se nota a resposta condutiva.

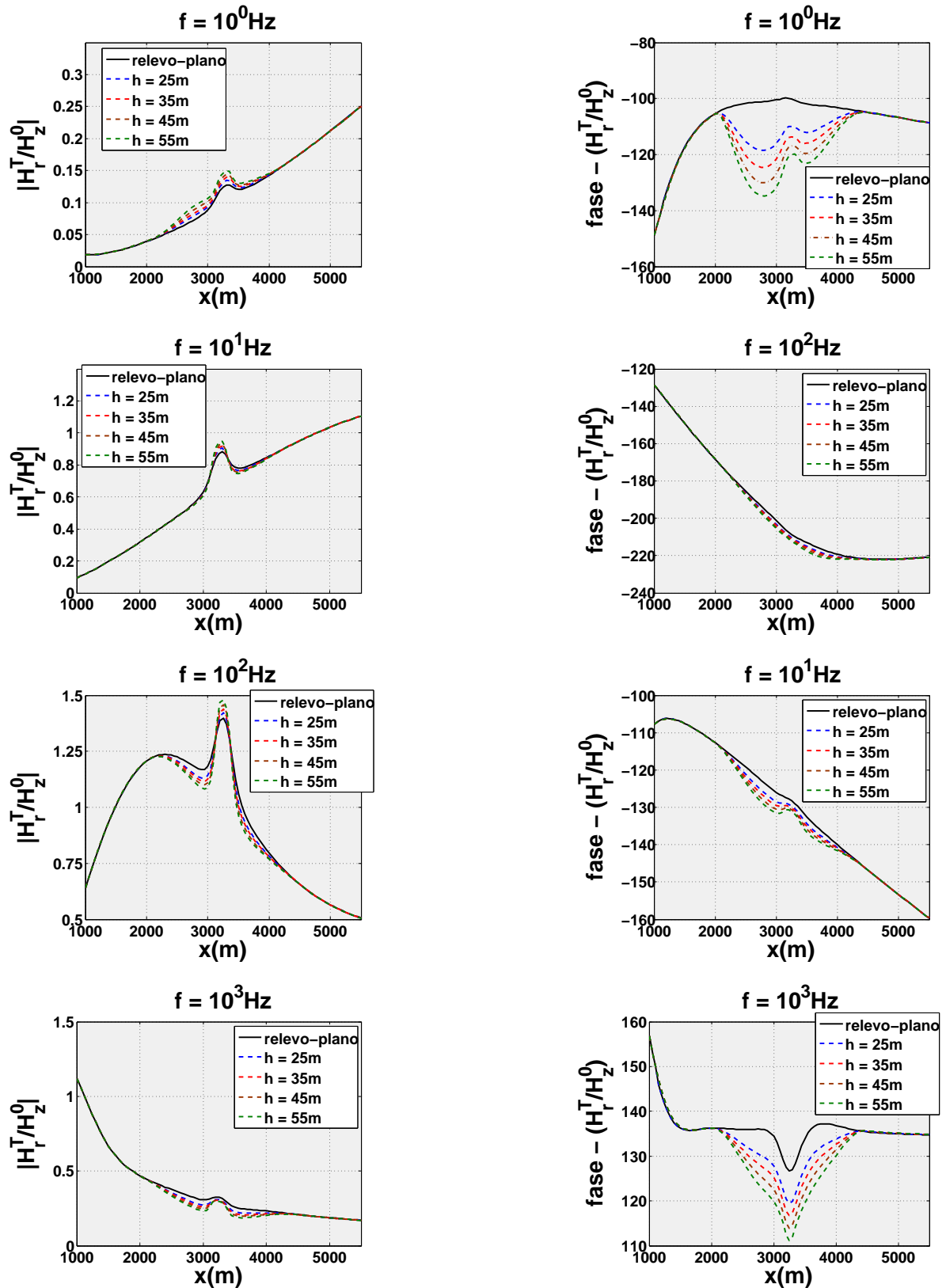
Na frequência $f = 10 Hz$, têm-se um aumento na amplitude do campo, restrito a presença do condutor. Contudo, verifica-se uma diminuição na diferença de fase, sobretudo, nos pontos sobre a heterogeneidade condutiva.

Em $f = 100 Hz$ a resposta da heterogeneidade condutiva, torna-se relativamente maior pela presença do vale. No entanto, é quando se tem a menor diferença de fase. Já em $f = 1000 Hz$, mesmo com uma considerável redução na amplitude do campo, observa-se que a resposta do corpo condutivo tornar-se mais evidente e, ao contrário das respostas sem o condutor, há um aumento na diferença de fase principalmente sobre o corpo condutivo.

Portanto, para $h = 100m$, pode-se notar que os valores percentuais indicando a

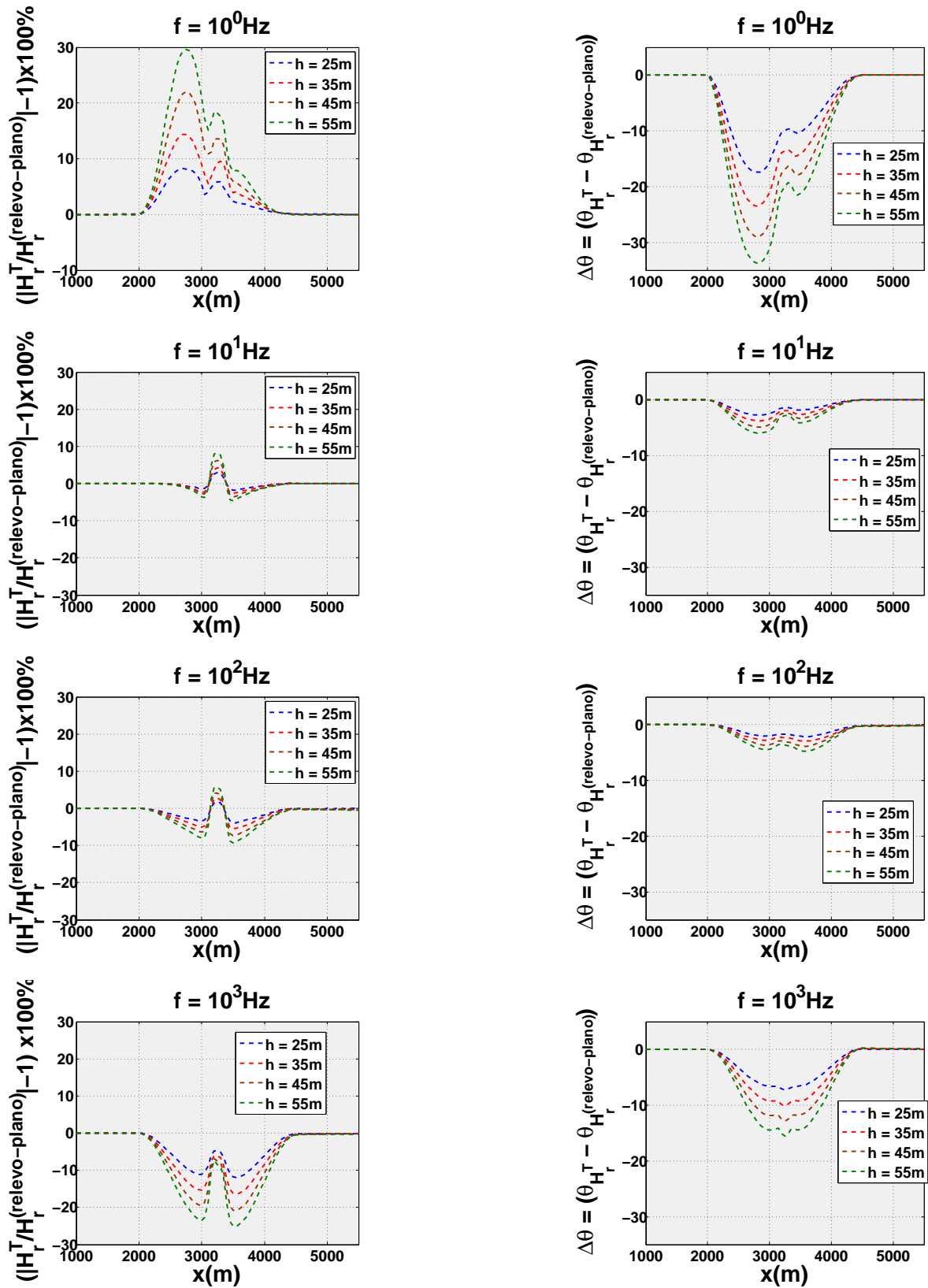
maior distorção na amplitude do campo, para $f = 1$ e $f = 10$, estão em torno de 18% e 8% respectivamente. Para $f = 100$, 6%, -8% e -9%. Por fim, para $f = 1000Hz$, -25%.

Figura 18 – Resultados de amplitude e fase da componente H_r^T/H_z^0 para as frequências $f = 1, 10, 100$ e 1000 Hz



Fonte: Do autor

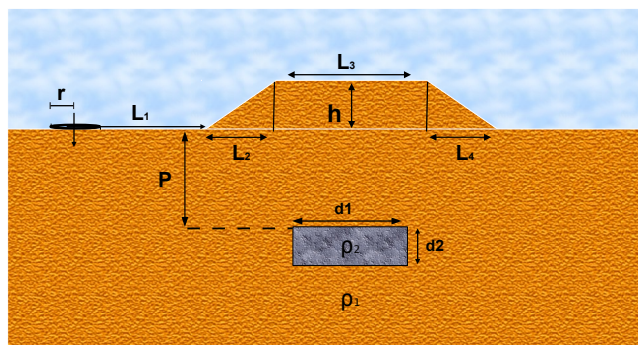
Figura 19 – Para cada frequências $f = 1, 10, 100$ e 1000 Hz , as curvas à esquerda mostram o percentual de quanto H_r^T é maior ou menor que $H_z^{(\text{relevo-plano})}$, enquanto à direita, têm-se a diferença de fase entre esses campo



Fonte: Do autor

3.4 Modelo 4

Figura 20 – Esta figura descreve uma relevo em forma de morro, em que o morro está acima de um corpo retangular condutivo



Fonte: Do autor

Na Figura 20, tem-se um semiespaço encaixante e um corpo condutivo retangular localizado abaixo de uma morro. O topo do morro varia de 25 a 55 *m* com incremento de 10 *m*. Os demais parâmetros são os mesmos adotados para o modelo da seção anterior.

Dos resultados das figuras 21 e 22, para a frequência de 1 *Hz*, a amplitude do campo sofre uma suave diminuição, restrita a resposta do corpo condutivo. Isso pode ser visto claramente no primeiro gráfico a esquerda da Figura 21 para $h = 25\text{m}$. Entretanto, quando h cresce, vê-se, aproximadamente a partir de 2500 *m* da fonte, um aumento na amplitude associada as paredes do morro. Em relação a diferença de fase, assim como nos resultados anteriores, ela é grande mesmo para gradientes topográficos suaves. Então, novamente se nota um decréscimo nessa diferença até $f = 100\text{Hz}$, voltando a aumentar em $f = 1000\text{Hz}$.

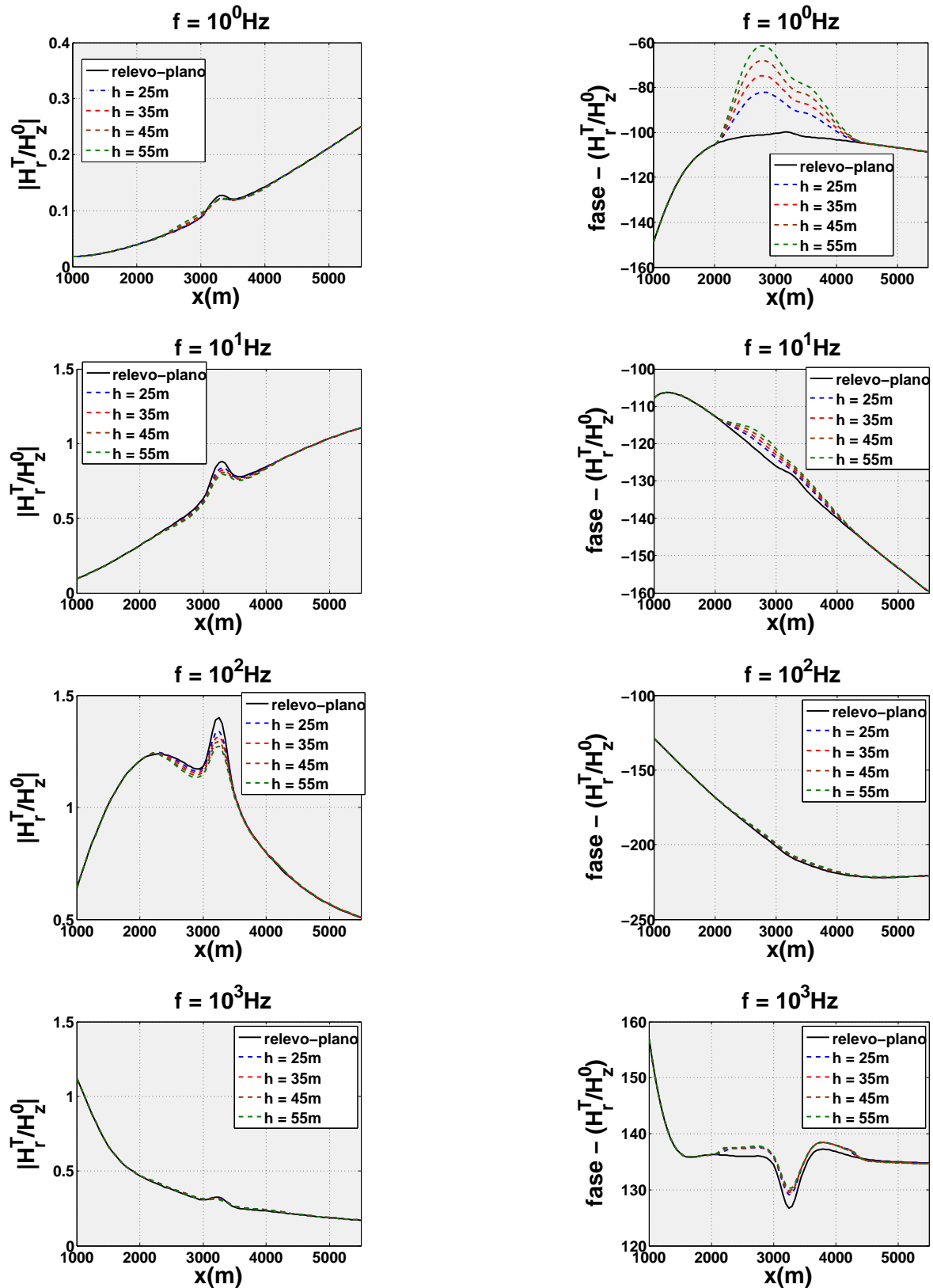
Em $f = 10\text{Hz}$ e $f = 100\text{Hz}$, a amplitude do campo é atenuada aproximadamente no intervalo de 2500 à 4000 *m* da fonte, sendo este efeito mais acentuado nos pontos sobre o corpo condutivo. Então, novamente se vê uma redução na diferença de fase ao diminuir a frequência da fonte sendo menor em $f = 100\text{Hz}$.

Finalmente, em $f = 1000\text{Hz}$, observa-se que os valores de campo ao longo das paredes do morro sofre um pequeno aumento na amplitude, enquanto a amplitude da anomalia associada ao corpo condutivo sofre um decréscimo. Quanto a diferença de fase, nota-se que os seus valores tornam a crescer nos pontos ao longo da irregularidade do relevo sendo bem maiores sobre a heterogeneidade condutiva.

Portanto, em geral, pode-se dizer que a presença do morro tende a atenuar a contribuição da heterogeneidade condutiva sobre os valores medidos.

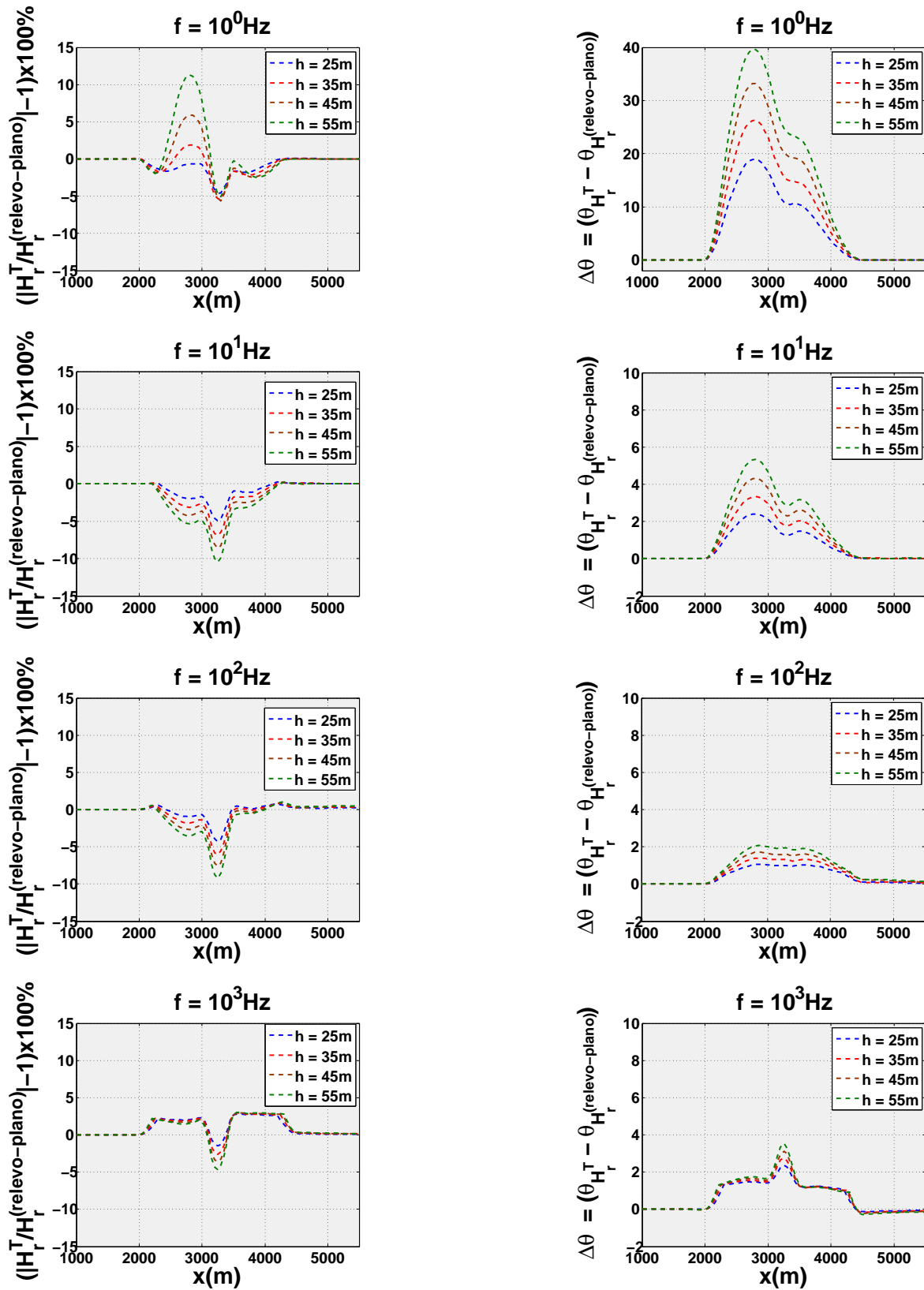
Para $h = 100m$, os valores percentuais que indicam a maior distorção na amplitude do campo para $f = 1Hz$ estão próximos de 12% e -5%. Para $f = 10Hz$ e $f = 100Hz$, -10% e -8% respectivamente. Por fim, para $f = 1000Hz$, 2%, 3% e , -4%.

Figura 21 – Resultados de amplitude e fase da componente H_r^T/H_z^0 para as frequências $f = 1, 10, 100$ e 1000 Hz



Fonte: Do autor

Figura 22 – Para cada frequências $f = 1, 10, 100$ e 1000 Hz , as curvas à esquerda mostram o percentual de quanto H_r^T é maior ou menor que $H_z^{(\text{relevo-plano})}$, quanto à direita, têm-se a diferença fase entre esses campo



Fonte: Do autor

4 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, mostra-se os resultados numéricos inerentes a dois tipos de relevo, morros e vales, dos quais variou-se a diferença de altitude gradativamente. Além do Campo H_r^T normalizado por H_z^0 , apresenta-se o percentual do campo total normalizado pelo campo sem a presença de irregularidades na topografia, ou seja, $H_r^T / H_r^{(relevo-plano)}$. Isto nos permitiu quantificar o quanto se pode errar ao se ignorar a presença de irregularidades na topografia.

A função formada pela razão entre a componente radial do campo da bobina sobre um semi-espaco condutivo e o campo direto da fonte (que é o dado a ser analisado no método EMMF) apresenta características particulares que dependem das condutividades envolvidas, da frequência e da distância entre fonte e receptor. Para uma dada linha de receptores, as curvas desta função apresentam um valor máximo de amplitude cuja posição varia com a frequência, sendo mais próximo da fonte quanto maior é a frequência. Por causa desta característica, a alteração no campo observado provocada pela presença da topografia não plana do terreno, em termos relativos à resposta dos modelos de relevo plano horizontal, depende criticamente da frequência.

Observou-se que a influência de feições como vales e morros induziram efeitos opostos sobre as respostas em que o relevo é plano, exceto pela amplitude em $f = 1Hz$ para os modelos sem a presença de um corpo condutivo, onde ambas feições, aumentaram a amplitude do campo.

Nas respostas dos modelos sem heterogeneidade condutiva, a fase apresentou uma grande variação, e que tais variações são menores quando aumenta-se a frequência. Contudo, ao introduzir-se um corpo condutivo, verificou-se esse mesmo comportamento para a fase nas frequências $f = 1, 10$ e $100Hz$, mas voltando a aumentar em $f = 1000Hz$.

Os resultados obtidos a partir dos modelos (3) e (4), onde adicionou-se uma heterogeneidade condutiva, permitem inferir que a presença de vale tende a realçar a resposta de corpos condutivos, enquanto morros tendem a atenuar o efeito da heterogeneidade sobre as medidas, devido às variações na proximidade dos receptores em relação ao corpo condutivo.

Dos fatores que influenciam no quanto o campo pode variar em relação a resposta obtida com relevo plano, pode-se mencionar um efeito puramente geométrico sobre as medidas de campo primário. Isto é, ao se posicionar a fonte na interface entre dois meios, as linhas de campo apresentarão configurações distintas em cada meio, isto implicará, dependendo da frequência da fonte e das resistividades do modelo, em forte variações na amplitude ao se variar a coordenada 'z' das posições de medida. Esta assinatura é

claramente observada e, preponderante, nos resultados associados a frequência $f = 1\text{Hz}$, onde se nota as distorções sobre o campo apresentarem-se restritas a irregularidade do relevo. Contudo, reduzem-se com o aumento da frequência.

Outro fator responsável pelas distorções observadas nos resultados, são as correntes induzidas nas rampas do vale, bem como no suposto excesso de rocha acima do nível de medida. Portanto, notou-se que tal efeito, como esperado, é amplificado nas altas frequências, pois as distorções estenderam-se, cada vez mais, ao longo da planície mais distante a medida que aumentou-se a frequência da fonte.

Assim sendo, os efeitos se combinam. Contudo, quantitativamente, as distorções são mais ou menos evidentes, a medida que as irregularidades do relevo coincidem ou não, com a região na superfície em que se observa a maior amplitude do campo primário. Isto é, em linhas gerais, com base na expressão para o dipolo magnético, observa-se que existe um número de indução que é responsável por um máximo na amplitude do campo e, esse máximo, migra lateralmente dependendo do valor desse parâmetro. Como o valor de θ depende da distância radial, da condutividade do meio e da frequência da fonte, embora os resultados mostrem as maiores distorções em $f = 1\text{Hz}$, é evidente que as distorções provocadas pela irregularidade do relevo sobre a resposta do modelo 1D dependeram, também, dos demais parâmetros de θ . Portanto, de acordo com os resultados apresentados neste trabalho, é possível inferir que a influência relativa da irregularidade do relevo, tende a ser menor, a medida que ela coincide com as posições em que a resposta 1D apresenta maior amplitude.

A contribuição, e o produto final, desta dissertação é a ferramenta que nos permite simular os efeitos das variações na topografia dos terrenos sob a linha de medidas. Além dos tipos de modelos analisados aqui, o código de modelagem criado tem flexibilidade suficiente para simular outras geometrias para o relevo, com a possibilidade de introduzir feições mais complexas que possam ser representadas pela introdução de heterogeneidades bidimensionais. A partir deste trabalho, a pesquisa sobre o método EMMF poderá investigar a influência das variações topográficas tanto sobre a determinação da resistividade aparente e do parâmetro de polarização, que é feita atualmente a partir da resposta do dipolo sobre um semi-espaço com interface plana horizontal, quanto sobre a inversão dos dados.

REFERÊNCIAS

- BANK, R. E.; XU J. AND. ZHENG, B. Superconvergent derivative recovery for lagrange triangle elements of degree p on unstructured grids. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 21, n. 5, p. 2032–2046. 2007.
- BRENNER S. C. AND. SCOTT, L. R. *The mathematical theory of finite element methods*. Louisiana: Springer Science, 2008.
- DEUN, J.; COOLS, R. Note on “electromagnetic response of a large circular loop source on a layered earth: a new computation method” by n. p. singh and t. mogi. *Pure and Applied Geophysics*, v. 164, p. 1107–1111. 2007.
- DIAS, C. A. *A non-grounded method for measuring induced electrical polarization and conductivity*. Tese (Doutorado) — University of California, Berkley, September 1968.
- DIAS, C. A.; SATO, H. K.; LIMA, O. A. L. de. Multi-frequency em method for hydrocarbon detection and for monitoring fluid invasion during enhanced oil recovery. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, SEG, v. 24, n. 1, p. 602–604, 2005.
- FRANK, C. F. et al. Profiling methods using small sources. In: _____. *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics, Vol. 2, Theory*. [S.l.]: SEG, 1987. (Investigations in Geophysics, v. 2), chapter 3.
- FULLAGAR, P. K.; OLDENBURG, D. W. Inversion of horizontal loop electromagnetic frequency soundings. *Geophysics*, v. 49, n. 2. 1984.
- HOHMANN, G. W. Numerical modeling for electromagnetic methods of geophysics. In: _____. *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics, Vol. 1, Theory*. [S.l.]: SEG, 1987. (Investigations in Geophysics, v. 1), chapter 5.
- KEY, K. Is the fast hankel transform faster than quadrature? *Geophysics*, v. 77, n. 3, p. F21–F30. 2012.
- MACHADO, M. V. B. *Estudo analítico e aplicação do método eletromagnético a multi-frequência ao mapeamento e identificação de fluidos e reservatórios continentais de petróleo*. Tese (PhD Thesis. In portuguese) — Universidade Estadual Norte Fluminense Darcy Ribeiro, 2009.
- MACHADO, M. V. B.; DIAS, C. A. Zone of main contribution to the measured signal for a circular current loop source and receiver on the surface of a conductive half-space. *Geophysical Prospecting*, v. 60, n. 6, p. 1167–1185, nov. 2012.
- MEUNIER, G. *The finite element method for electromagnetic modeling*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008.
- NAKAMURA S. WANG, Y. W. G. Numerical differentiation for the second order derivatives offunctions of two variables. *Computational and Applied Athematics*, v. 212, p. 341–358. 2008.

- NUNES, C. M. B.; RÉGIS, C. R. T. Diferenciação numérica 2d na modelagem de métodos eletromagnéticos. In: SBGF. *13th International Congress of the Brazilian Geophysical Society Expanded Abstracts*. [S.l.]: SBG. 2013.
- RIJO, L. 2.5-d finite element algorithm for mcsem modeling. In: SBGF. *Anais do 9o. Congresso da SBGF*. [S.l.], 2005.
- SATO, H. K. *Método eletromagnético para interpretação de polarização induzida e resistividade, usando o protótipo de um sistema eletromagnético a multi-frequência*. Dissertação (Dissertação de mestrado) — Universidade Federal da Bahia, Salvador, 1979.
- SILVA, V. d. S. e. *Modelagem 2,5D do campos usados no método eletromagnético a multi-frequência - EMMF*. Tese (Tese de doutorado) — Universidade Federal do Pará, 2012.
- SILVA, V. S. e.; RÉGIS, C.; HOWARD, A. Q. J. Numerical integration in the calculation of the 2.5-d response of a very large loop. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, SEG, v. 30, n. 1, p. 756–760, 2011.
- SINGH, N. P.; MOGI, T. Electromagnetic response of a large circular loop source on a layered earth: A new computation method. *Pure and Applied Geophysics*, Birkhäuser Basel, v. 162, p. 181–200, 2005.
- WANG, T. W. Y. Numerical differentiation for two-dimensional scattered data. *Mathematical Analysis and Applications*, v. 312, p. 121–137, 2005.
- WARD, S. H.; HOHMANN, G. W. Electromagnetic theory for geophysical applications. In: _____. *Electromagnetic Methods in Applied Geophysics, Vol. 1, Theory*. [S.l.]: SEG, 1987. (Investigations in Geophysics, v. 1), chapter 4.
- WEI Y. C. HON, Y. B. W. T. Reconstruction of numerical derivatives from scattered noisy data. *Institute of Physics Publishing*, v. 312, n. 2, p. 657–672, 2005.