



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

Caio Felipe Laurindo

**ANÁLISE NUMÉRICA DE SEÇÕES REFORÇADAS DE CONCRETO ARMADO  
CONSIDERANDO O ESTADO INICIAL DE TENSÕES.**

Belém – PA  
2013



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

Caio Felipe Laurindo

**ANÁLISE NUMÉRICA DE SEÇÕES REFORÇADAS DE CONCRETO ARMADO  
CONSIDERANDO O ESTADO INICIAL DE TENSÕES..**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal do Pará como pré-requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, orientado pelo professor Dr. Remo Magalhães de Souza.

Belém – PA  
2013



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

Caio Felipe Laurindo

**ANÁLISE NUMÉRICA DE SEÇÕES DE CONCRETO ARMADO, REFORÇADAS  
OU CONSTRUÍDAS E ETAPAS, CONSIDERANDO ESTADOS INICIAIS DE TENSÕES.**

Dissertação submetida à Comissão Examinadora designada pelo Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil como pré-requisito para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil.

Belém, 30 de Setembro de 2013

Assinatura: \_\_\_\_\_  
Nome: Prof. Remo Magalhães de Souza  
Instituição: Instituto de Tecnologia – UFPA  
Orientador.

Assinatura: \_\_\_\_\_  
Nome: Prof. Luís Augusto Conte Mendes  
Veloso  
Instituição: Instituto de Tecnologia – UFPA

Assinatura: \_\_\_\_\_  
Nome: Prof. Ronaldson José de França Mendes  
Carneiro  
Instituição: Instituto de Tecnologia – UFPA

Assinatura: \_\_\_\_\_  
Nome: Prof. Sandoval José Rodrigues Junior  
Instituição: Instituto de Tecnologia – UFPA

## RESUMO

O presente trabalho trata da formulação e da implementação computacional, em MATLAB®, para a análise numérica de seções reforçadas de concreto armado, submetidas à flexão composta, considerando o estado de tensões anterior ao reforço. A referida análise se dá com a geração de diagramas de interação momento fletor esforço normal por dois métodos, quais sejam: a) varredura dos domínios de deformação da NBR6118/2003; b) determinação dos picos de diagramas momento fletor – esforço normal – curvatura. Em ambos os procedimentos utiliza-se o método numérico do ponto médio na integração do cálculo dos esforços resistentes, e o método de Newton Raphson para a obtenção de raízes é usado na determinação da deformação no eixo de referência da seção, durante a determinação dos diagramas momento fletor -esforço normal - curvatura. Preliminarmente, concluiu-se que a primeira das duas metodologias aplicadas é inviável. Posteriormente, com a confirmação da eficácia da segunda metodologia, foi possível expandir o escopo do trabalho de modo a permitir a análise de seções de formatos quaisquer executadas em várias etapas, considerando o estado de tensões inicial em cada uma das etapas. A implementação computacional referente a este trabalho se baseou no programa para análise numérica de seções SECLAB, desenvolvido pelo professor Remo Magalhães de Souza.

**Palavras Chaves: Análise numérica de seções de CA; Reforço de estruturas de CA; Diagrama de interação momento fletor esforço normal; Construção em etapas.**

## ABSTRACT

This work deals with the formulation and computational implementation, in MATLAB, for numerical analysis of reinforced concrete cross-sections, subject to bending, considering the stress state prior to reinforcement. The analysis is made by generating axial load – bending moment interaction diagrams by two methods: a) scan of the ruin domains established by the Brazilian standard NBR6118/2003 b) determination of peaks in Axial Force-Moment-Curvature Relationships. In both methods, the midpoint rule for numerical integration is applied in the resistant stress calculation, and the Newton Raphson root-finding procedure is used to determine the strain in the reference axis of the cross-section, in order to obtain the Axial Force-Moment-Curvature Relationships. Preliminarily, it was concluded that the first of the two methodologies is not feasible. Subsequently, the effectiveness of the second method was confirmed. Finally, it was possible to expand the scope of this work in order to allow the analysis of cross-sections of any shape throughout the course of staged construction, considering the initial stress state of each stage. The computational implementation for this study was based on the program for numerical analysis of sections SECLAB, developed by Professor Remo Magalhães de Souza.

**Key Words: Numerical analysis of RC sections; RC structural retrofit; axial load – bending moment interaction diagrams; staged construction.**

## SUMÁRIO

<b>CAPITULO 1 - INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1    Objetivo .....	2
1.2    Justificativa.....	3
1.3    Metodologia.....	3
1.4    Organização do Trabalho.....	3
<b>CAPITULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....</b>	<b>5</b>
2.1    Reforços aos sismos .....	5
2.2    Encamisamento em Concreto .....	7
2.2.1    Consideração do Pré-carregamento durante o reforço .....	8
2.3    Reforço por colagem de Chapas Metálicas e de Polímeros Reforçados com Fibras	16
2.4    Determinação dos Estados de Deformação e Tensão de uma Estrutura de Concreto Existente.....	20
2.5    Análise Teórica de Seções Reforçadas de Concreto Armado .....	21
2.6    Análise numérica de seções de concreto armado .....	24
2.6.1    Dos Prazeres e Gomes (2002) .....	24
2.6.2    Mendes Neto (2009) .....	25
2.6.3    Chorean (2010).....	26
<b>CAPITULO 3 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA .....</b>	<b>27</b>
3.1    Hipóteses fundamentais.....	27
3.2    Propriedade dos materiais.....	28
3.2.1    Aço .....	28
3.2.2    Concreto .....	30

3.2.3	Concreto Armado .....	32
3.2.3.1	Princípios básicos para o projeto de Estruturas de Concreto Armado .....	32
3.2.3.2	Método das Tensões Admissíveis .....	32
3.2.3.3	Método dos Estados Limites .....	33
3.2.3.4	Estádios .....	33
3.2.3.5	Domínios de Deformação na Ruína .....	35
3.2.4	Materiais de reforço .....	38
3.3	Diagrama de interação .....	41
3.3.1.1	Valores normalizados $\mu$ e $\nu$ .....	42
3.3.1.2	Implementação computacional .....	44
3.4	Determinação do momento fletor (Md) e do esforço normal (Nd) resultantes de uma seção de concreto armado .....	45
3.4.1	Cálculo analítico para seções de CA sem reforço .....	45
3.4.2	Implementação analítica para seções de CA sem reforço .....	46
3.4.3	Implementação numérica para seções de CA sem reforço .....	50
3.4.3.1	Integração numérica .....	50
3.4.3.2	A matriz de rigidez da seção .....	53
3.4.4	Cálculo analítico para seções reforçadas .....	56
3.5	Diagrama Momento Fletor – Esforço Normal - Curvatura (M-N- $\phi$ ) .....	59
3.6	O método de Newton Raphson .....	63
3.6.1	–Para funções de uma variável .....	63
3.6.1.1	Implementação Computacional .....	64
3.6.2	Para múltiplas variáveis .....	64
<b>CAPITULO 4 - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL .....</b>		<b>66</b>
4.1	Um breve histórico .....	66
4.2	Dados de Entrada .....	67
4.2.1	Para o programa 1 .....	67
4.2.2	Para o programa 2 .....	68
4.3	Análise de seções de estruturas construídas em etapas .....	69
4.4	Consideração do estado de deformações anterior ao reforço. ....	70

4.5	Implementação do método dos picos dos diagramas ( $M - N - \phi$ ).....	70
<b>CAPITULO 5 - RESULTADOS.....</b>		<b>73</b>
5.1	Aplicação do método numérico utilizado por Dos Prazeres e Gomes (2002) na análise de seções reforçadas.....	73
<b>CAPITULO 6 - CONCLUSÕES E METAS PARA TRABALHOS FUTUROS....</b>		<b>77</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRAFICAS .....</b>		<b>78</b>



## Lista de Figuras

Figura 2-1 – Métodos convencionais usados nos reforços aos sismos.....	6
Figura 2-2 – Execução das ligações viga-pilar protótipo, do enfraquecimento seletivo e da pós-tensão externa, Kam and Pampanin (2010). .....	7
Figura 2-3 - Técnicas de reforço – Reis (2003).....	9
Figura 2-4 - Seção longitudinal e seções transversais das vigas VFT, Reis (2003).....	9
Figura 2-5 – Curvas Força x Flecha de vigas reforçadas pela técnica de reforço nº1, Reis (2003) .....	10
Figura 2-6 –Deformação (em micro-strain) no concreto comprimido de vigas reforçadas pela técnica de reforço nº1, Reis (2003).....	11
Figura 2-7 - Deformação (em micro-strain) na armadura longitudinal tracionada de vigas reforçadas pela técnica de reforço nº1, Reis (2003).....	12
Figura 2-8 - Deformação (em micro-strain) na armadura transversal de vigas reforçadas pela técnica de reforço nº1, Reis (2003).....	12
Figura 2-9 - Características das vigas VFC – Reis (2003) .....	13
Figura 2-10 - Modo de Ruptura da viga VFC-1, Reis (2003) .....	14
Figura 2-11 Curvas Força x Flecha da viga VFC-1, Reis (2003).....	14
Figura 2-12 - Deformação (em micro-strain) no concreto comprimido da viga VFC-1, Reis (2003) .....	14
Figura 2-13 - Deformação no concreto comprimido das vigas reforçadas com a técnica de reforço nº2, Reis (2003).....	15
Figura 2-14 - Deformação (em micro-strain) na armadura longitudinal tracionada de vigas reforçadas pela técnica de reforço nº2, Reis (2003).....	16
Figura 2-15 – Reforço por colagem de chapa metálica à flexão e ao cisalhamento.....	17
Figura 2-16 – Vigas ensaiadas por Pinto e Cerqueira (2000).....	18
Figura 2-17 - Método de alívio de deformação combinado com a técnica do macaco, Sumitro et al (2003),.....	21
Figura 2-18 - Modos de Ruína à flexão de viga de concreto armado reforçada por encamisamento, segundo Santos (2006).....	22
Figura 2-19 - Modos de ruína de uma viga de concreto armado reforçada à flexão com CFRP, segundo Triantafillou (1998) .....	22
Figura 2-20 - Modos de ruína de uma viga de concreto armado reforçada à flexão por protensão externa, segundo Almeida (2001). .....	23

Figura 2-21- Região viável inserida em um plano ( $\epsilon_b$ x $\epsilon_t$ ), Mendes Neto (2009) .....	25
Figura 2-22 - método do comprimento de arco, Chorean (2010).....	26
Figura 3-1 - Diagrama Tensão-Deformação do aço .....	29
Figura 3-2 - Diagrama Tensão-Deformação do Aço idealizado, extraído de Ribeiro (2011) .....	30
Figura 3-3 - Diagrama Tensão-Deformação do Concreto, NBR6118(2004) .....	31
Figura 3-4 - Estádios do Concreto Estrutural .....	34
Figura 3-5 - Domínios de deformação do Concreto Estrutural ABNT(2003).....	36
Figura 3-6- seção reforçada com FRP à flexão para o ELU, CEB-FIP (2001) .....	40
Figura 3-7 – Diagrama de Interação Momento Fletor-Esforço Normal, Dos Prazeres e Gomes(2002) .....	41
Figura 3-8 - Diagrama de Interação Momento Fletor-Esforço Normal para $d'/h=0,10$ e Aço CA-50, com armadura dupla( $A_s=A'_s$ ), Fusco (1981). .....	43
Figura 3-9 Distribuição de deformações e tensões em uma seção retangular de CA.....	45
Figura 3-10 – Algoritmo geral de solução analítica, Dos Prazeres e Gomes (2002) .....	47
Figura 3-11- Propriedades geométricas do diagrama parábola retângulo, Dos Prazeres e Gomes (2002). .....	48
Figura 3-12 – Algoritmo da rotina que calcula analiticamente os esforços resistentes da seção, Dos Prazeres e Gomes (2002). .....	49
Figura 3-13 - método do ponto médio aplicado ao cálculo do esforço resultante de compressão em uma seção retangular de concreto armado extraída de Dos Prazeres e Gomes (2002). .....	51
Figura 3-14 - Variáveis do estado de deformação para a solução numérica, Dos Prazeres e Gomes (2002) .....	52
Figura 3-15 - Algoritmo da rotina que calcula numericamente os esforços resistentes da seção com o uso no método do ponto médio, Dos Prazeres e Gomes (2002).....	55
Figura 3-16 – Estado de deformação e tensão para uma peça reforçada sob carga, adaptada de Reis (2003) .....	56
Figura 3-17 - Diagrama Momento Fletor - Esforço Normal – Curvatura .....	59
Figura 3-18 - Deformação de uma seção de uma barra submetida à flexão simples, Fusco (1981).....	60
Figura 3-19 - Deformação de uma seção de uma barra submetida à flexo-compressão, Fusco (1981).....	60
Figura 3-20 - Rotina para a geração de diagramas (M - N - $1/r$ ), Fusco (1981).....	62

Figura 3-21 - Representação Gráfica do Método de Newton Raphson.....	64
Figura 4-1 - Entrada de dados das propriedades da seção.....	67
Figura 4-2 – Seqüência de pontos para a definição de uma seção vazada no SECLAB	68
Figura 4-3 – seção construída em quatro etapas.....	69
Figura 4-4 - Fluxograma da rotina do programa apresentado neste trabalho.....	72
Figura 5-1 –Diagramas de interação sem estado de tensões iniciais na região interna..	73
Figura 5-2 - Diagramas de interação com estado de tensões iniciais na região interna referente a compressão de 100kN e momento negativo de 200kN .....	74

## **Lista de Tabelas**

Tabela 2-1 – Dados de Pinto (2000) e Cerqueira (2000).....	19
Tabela 3-1 - Fatores de redução por exposição ambiental para PRFC, Ribeiro (2005). 39	
Tabela 4-1 – Propriedades da seção testada .....	73

## CAPITULO 1 - INTRODUÇÃO

---

O reforço de estruturas de concreto armado tem sido cada vez mais importante no âmbito da engenharia estrutural, Isto se deve a diversos fatores, tais como: o fim da vida útil prevista para estruturas executadas em meados do século XX, período no qual, segundo Brunauer e Coperlad (1964, apud Metha e Monteiro, 1994), em artigo publicado na *Scientific American*, o concreto armado passou a ser o material mais utilizado na construção civil mundial; necessidade de mudanças ou erros de projeto relacionados à geometria, às solicitações ou até mesmo à agressividade do meio em que a estrutura se encontra; a deterioração de seus componentes e a adequação da estrutura a parâmetros de estabilidade que passaram a ser considerados posteriormente à sua execução, onde se destaca o reforço sísmico.

O engenheiro estrutural deve selecionar a técnica e o material a serem utilizados no reforço levando em conta a viabilidade econômica, restrições arquitetônicas e estruturais, possíveis incompatibilidades entre materiais, a utilização pretendida para a estrutura e limitações à execução do mesmo, entre outras variáveis. As técnicas escolhidas podem afetar a estrutura global ou localmente, sendo que o primeiro caso inclui o aumento da estabilidade global da estrutura com a inserção de novos elementos e a utilização de sistemas de dissipação de energia; e o segundo, referente às soluções locais, tem como técnicas mais utilizadas a adição de armaduras, a aplicação de chapas ou perfis metálicos, a protensão externa, o encamisamento com concreto de alto desempenho (CAD) e a colagem de polímeros reforçados com fibras, mais conhecidos pela sigla na língua inglesa (FRP-Fiber Reinforced Concrete).

O rápido surgimento de novos materiais com propriedades mais vantajosas, a saber: maior resistência, durabilidade, aderência, trabalhabilidade e menor retração, têm proporcionado soluções mais eficientes para o reforço de estruturas de concreto armado que, no entanto, exigem mais tecnologia e mão de obra especializada. Essas demandas têm contribuído para o elevado e crescente número de publicações experimentais e sobre o tema.

Na abordagem teórica, a ausência de normas brasileiras específicas para a análise e dimensionamento de seções reforçadas de concreto armado leva os projetistas

a adaptar preconizações da NBR 6118 (2003) ou utilizar critérios isolados de normas de outros países Piancastelli (1997). Sem ter um procedimento padrão, muitos profissionais optam por adotar medidas conservadoras como dimensionar o reforço para resistir a toda solicitação desprezando a resistência do elemento original, uma vez que a sua consideração exige que sejam conhecidas as deformações e tensões iniciais do concreto presentes nesses elementos, especialmente nos pilares, onde, na maioria dos casos, a carga permanente é elevada quando comparada à carga total atuante.

Visando reduzir as deformações e tensões iniciais nos elementos de concreto a serem reforçadas, projetistas recorrem ao escoramento e ao macaqueamento da estrutura, evitando assim a complexidade envolvida na determinação e na consideração em projeto das mesmas. Ocorre que, em muitos casos, a exemplo de edificações com elevado número de pavimentos, tal solução é inviável.

Nos casos em que o escoramento e o macaqueamento são inviáveis, as deformações e tensões iniciais devem ser consideradas de forma a atender aos esforços solicitantes atentando para que a segurança e o comportamento da peça reforçada sejam satisfatórios. Nesse sentido, especial atenção deve ser dada a interface da peça original com o reforço seja com o uso de materiais adequados ou com cuidados na preparação da superfície que irá receber o reforço.

## **1.1 Objetivo**

Este trabalho trata da análise não linear física à flexão composta de seções reforçadas de concreto armado levando em consideração as deformações e tensões das mesmas, anteriores à execução do reforço, buscando avaliar a aplicabilidade de critérios da NBR 6118 (2003), relacionados ao estado limite último de deformação das seções à referida análise além de propor a elaboração de diagramas momento fletor esforço normal a partir dos picos de diagramas momento fletor– esforço normal – curvatura. Também é abordada a análise de seções construídas em etapas, a exemplo das seções parcialmente pré-moldadas presentes nas estruturas dos portos de Outeiro e Santarém, nas quais se avalia o efeito da consideração do estado de tensões na região pré-moldada anterior a execução da região moldada *in loco* da seção. Finalmente, busca-se abordar didaticamente as ferramentas teóricas utilizadas bem como a implementação computacional das mesmas na plataforma do programa MATLAB®.

## **1.2 Justificativa**

Entre os motivos para a realização deste trabalho estão: a crescente importância do reforço estrutural na engenharia civil brasileira, a demanda de projetos do Grupo de Instrumentação e Computação Aplicada à Engenharia, em especial os que tratam de reforço estrutural em pontes ferroviárias e análise estrutural de estruturas portuárias, e a escassez de programas computacionais que permitam a consideração de tensões iniciais na análise de seções reforçadas de concreto armado, ou de seções executas em etapas.

A implementação na linguagem MATLAB® se justifica pela compatibilização com o programa SECLAB, desenvolvido pelo professor Remo Magalhães de Souza, o qual o programa ora apresentado busca complementar.

## **1.3 Metodologia**

Durante a implementação computacional do programa, duas abordagens são feitas. Na primeira, a seção de concreto armado previamente deformada é reforçada e submetida a deformações que varrem os domínios de dimensionamento em Estado Limite Ultimo da NBR 6118 (2003). Posteriormente, determina-se as tensões e esforços resultantes da seção, através da divisão desta em camadas (modelo de camadas), seguida da integração numérica, pelo método do ponto médio das tensões obtidas para cada camada, para que seja obtido um diagramas de interação dos esforços da seção. A segunda abordagem consiste na obtenção de diagramas momento fletor–esforço normal–curvatura da seção através de estimativas iniciais de esforços normais e curvaturas para os quais são calculados o momento fletor e a deformação do eixo de referência com o uso do método de Newton Raphson, mantendo-se o modelo de camadas para o cálculo dos esforços resultantes, em seguida elabora-se o diagrama de interação dos esforços da seção ao se colocar em um gráfico os picos de momento para cada resultante de esforço normal adotada. Diversos materiais podem ser adotados no reforço, bastando-se implementar sua relação constitutiva. Outra importante ferramenta implementada possibilita a análise de seções construídas em várias etapas, levando-se em consideração o estado de tensões de todas as etapas anteriores.

## **1.4 Organização do Trabalho**

O desenvolvimento deste trabalho se dará em seis capítulos, com as seguintes abordagens:

O *Capítulo 2* apresenta uma revisão bibliográfica de trabalhos experimentais e teóricos relacionados ao reforço em estruturas de concreto armado.

O *Capítulo 3* aborda sucintamente os métodos utilizados na formulação do algoritmo, os critérios normativos associados ao tema e programas computacionais utilizados para analisar seções reforçadas de concreto armado.

No *Capítulo 4*, a implementação computacional do programa apresentado neste trabalho é descrita passo a passo com a utilização de fluxogramas esquemáticos e com a apresentação do algoritmo.

Já o *Capítulo 5* mostra a aplicação do programa na solução de problemas e busca validar o mesmo comparando seus resultados aos de outros programas já difundidos nos meios comercial e acadêmico.

Finalmente, o *Capítulo 6* expõe as conclusões do trabalho, além de enumerar possíveis desenvolvimentos futuros ao programa apresentado bem como a este trabalho.



## **CAPITULO 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

---

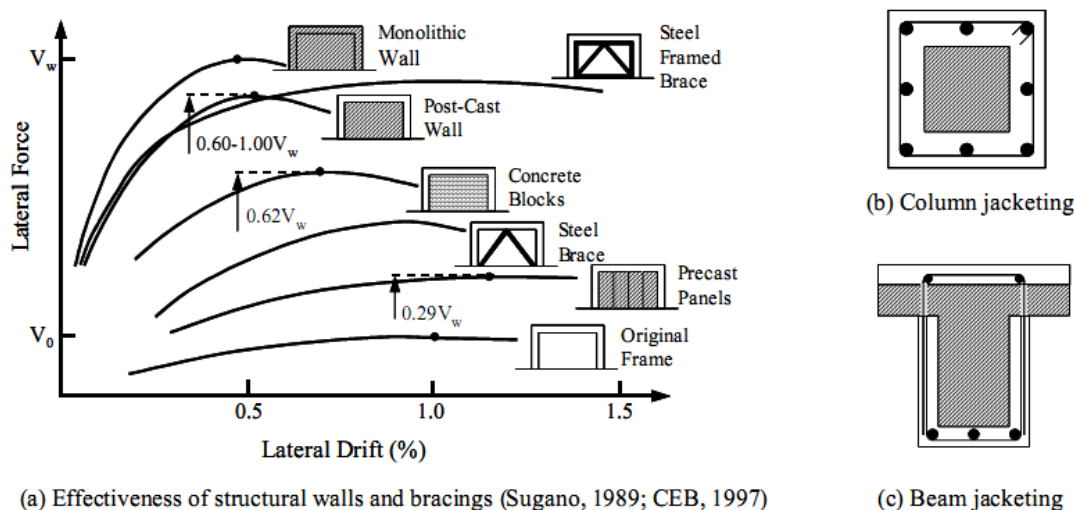
### **2.1 Reforços aos sismos**

Apesar de ser parte importante da engenharia civil e de tê-la acompanhado ao longo de sua história, o reforço de estruturas passou a ser objeto de estudos formais há um tempo relativamente curto. Após o surgimento dos primeiros códigos sísmicos ao final da década de 1960, houve necessidade de se adaptar as estruturas existentes aos novos critérios normativos, o que atraiu a atenção dos pesquisadores. Posteriormente, progressos significativos no reforço de estruturas, foram observados após a ocorrência de grandes terremotos, como os de Tokachi-oki em 1968, San Fernando em 1971 e Cidade do México em 1985 (Jirsa, 2000).

Segundo Júlio et al (2003), os trabalhos de reabilitação de estruturas que seguiram o terremoto de Tokachi-oki, levaram Sugano (1981) a publicar trabalho sobre o reforço de estruturas no Japão, em que estabelece como estratégias de reforço o aumento da resistência a cargas laterais e da ductilidade através da inclusão de novos elementos estruturais ou do reforço dos elementos estruturais existentes. Após o terremoto da Cidade do México, um estudo estatístico de Aguilar *et al* (1989) concluiu que os métodos mais utilizados à época eram a adição de paredes de cisalhamento e o encamisamento de colunas.

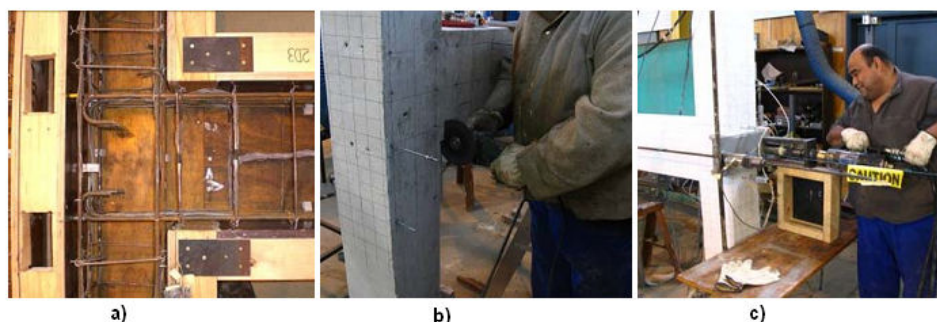
Quanto ao reforço por adição de paredes estruturais de concreto armado, Bai (2003) destaca trabalhos (Altin et al. 1992, Pincheira e Jirsa 1995, Lombard et al. 2000, Inukai e Kaminosono 2000) que mostram a importância do processo de enchimento das paredes estruturais na resposta desses painéis e da estrutura como um todo, pois o processo de enchimento tende a enrijecer a base do reforço e, um vez que os efeitos do cisalhamento se concentram nas partes mais rígidas do enchimento, ou seja, na base, o reforço das fundações da estrutura reforçada é muitas vezes necessário. Em alguns casos é possível aumentar a resistência a solicitações laterais evitando a interferência nas fundações da estrutura existente utilizando-se contraventamentos metálicos devido aos mesmos serem instalados entre membros existentes da estrutura. Entre os trabalhos que apresentaram resultados bem sucedidos de reforços com contraventamento metálico, Bai (2003) cita (Badoux and Jirsa 1990, Bush et al. 1991, Teran-Gilmore et al. 1995). A Figura 2-1 (a) traz uma comparação entre diversos tipos de paredes estruturais e

contraventamentos metálicos, já a Figura 2-1 b) mostra reforços de elementos estruturais localizados, a partir do aumento de seção por adição de concreto e armadura (emcamisamento), sobre os quais tratam o programa computacional apresentado neste trabalho.



**Figura 2-1 – Métodos convencionais usados nos reforços aos sismos**

Outro importante método global para o reforço de estruturas é a protensão externa (Figura 2-2 c)), a qual, desde 1950, vem sendo largamente utilizada para o reforço de vigas de pontes de diversos tipos: de concreto armado, de concreto protendido, de aço e mistas (ALMEIDA, 2001) e, segundo Aravinthan et al (2007), em seu trabalho sobre reforço ao cisalhamento por meio da protensão externa, a partir da década de 90, muitos pesquisadores investigaram o uso dessa técnica para o reforço de membros estruturais á flexão, a exemplo das vigas, são eles: (Harajli,1993; Mutsuyoshi, Aravinthan & Hikimura, 1998; Tan & Tjandra, 2002). Em se tratando de reforço aos sismos, a protensão externa pode ser combinada a uma estratégia de enfraquecimento seletivo (Figura 2-2 b)) visando atrair menor força sísmica, protegendo elementos estruturais frágeis como as ligações viga-pilar (Figura 2-2 a)).



**Figura 2-2 – Execução das ligações viga-pilar protótipo, do enfraquecimento seletivo e da pós-tensão externa, Kam and Pampanin (2010).**

Kam and Pampanin (2010) publicou um trabalho em que são testadas três diferentes técnicas de enfraquecimento seletivo aplicadas a protótipos de ligações viga-pilar exteriores, construídos com a adoção das piores práticas construtivas encontradas em códigos anteriores a década de 70, submetidos a deslocamentos horizontais. Em um dos protótipos, aplicou-se apenas o enfraquecimento seletivo, em outro, apenas a protensão externa e, por fim, as duas técnicas foram combinadas. Conclui-se que a combinação das duas técnicas apresentou os melhores resultados tendo agregado a dissipação de energia fornecida pelo enfraquecimento seletivo e o aumento de resistência proporcionado pela pós-tensão externa.

A adoção de outras técnicas de reforço em ligações viga-pilar é amplamente abordada por Engindeniz *et al* (2005), em trabalho que visa compilar a literatura atualizada referente a performance bem como técnicas de reforço destinadas às ligações viga-pilar em concreto armada que não foram dimensionadas aos sismos. Entre os métodos abordados estão: o reparo com epóxi; a remoção de concreto deteriorado e sua substituição por concreto novo; o encamisamento em concreto armado; blocos de alvenaria armados; encamisamento metálico e adição de elementos metálicos externos; e reforço com polímeros reforçados com fibras. Cada método é revisado com ênfase nos detalhes de sua aplicação, no trabalho requerido, no leque de aplicabilidade e na performance discutindo-se suas vantagens e desvantagens relativas.

## **2.2 Encamisamento em Concreto**

Adicionalmente, trabalhos sobre recuperação por encamisamento de membros estruturais de concreto armado com adição de armaduras e concreto passaram a ser publicados, a exemplo de Hellesland & Green (1972) o qual trata de estudo

experimental em colunas de concreto armado submetidas a um complexo histórico de carregamento constituído de um período de carga sustentada, seguido de um período de carga cíclica, terminando com uma breve carga com deformação controlada até que fossem atingidas suas capacidades máximas e além (carregamento após o pico de resistência). As colunas foram reparadas com a remoção da camada deteriorada do concreto seguida de seu encamisamento. Os autores afirmam que a capacidade de carga das colunas reforçadas foi reduzida em 15-20% e suas rigidezes em 10-50%.

As técnicas de reforço por encamisamento têm evoluído com avanços da ciência dos materiais que reduzem as limitações ao seu uso, tais como: o concreto de alto desempenho (CAD) o qual permite menores dimensões para as peças tornando-as mais adaptáveis às imposições arquitetônicas; o cimento de alta resistência inicial (ARI), o qual pode ser usado onde o elevado fluxo de entrada e saída de ocupantes em uma estrutura tornaria inviável o uso do concreto devido ao seu longo tempo de cura; o jateamento do concreto, que evita o uso de formas; e as resinas epoxídicas usadas no chumbamento das armaduras de costura permitindo a transferência de esforços no contato do reforço com a seção original sem maiores interferências, função esta que pode ser desempenhada pelas fibras de aço no concreto, conforme técnica abordada em Reis (2003).

### **2.2.1 Consideração do Pré-carregamento durante o reforço**

Outros importantes aspectos do reforço de seções de concreto armado por encamisamento também foram abordados em Reis (2003), a saber: a consideração de pré-carregamento durante o reforço, bem como da fluência e da retração. No trabalho, vigas “T”, reforçadas por meio de duas técnicas diferentes, foram ensaiadas (Figura 2-3). A técnica de reforço nº 1 consistiu em adicionar barras de aço ao banzo tracionado da peça evoluindo-as com argamassa de alto desempenho com fibra de aço em substituição às armaduras de costura. A técnica de reforço nº 2 consistiu no reforço do banzo comprimido com o acréscimo de microconcreto. Os resultados obtidos foram comparados a previsões teóricas obtidas numericamente com o uso do programa CONSNOU e analiticamente por recomendações da NBR-6118.

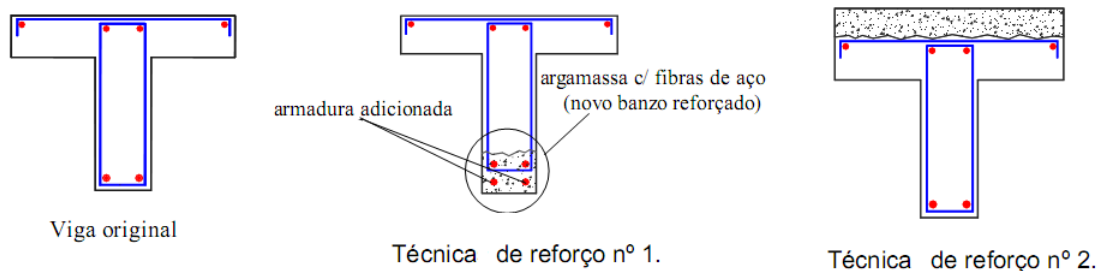


Figura 2-3 - Técnicas de reforço – Reis (2003)

As vigas reforçadas pela técnica de reforço nº1 foram submetidas a pré-carregamentos (30kN para VFT-1, 55kN para VFT-2 e 0kN para VA-3), sob os quais foram reforçadas (VFT-1 com e VFT-2 sem a exposição da armadura da seção original), e carregadas até a ruptura, conforme Figura 2-4. As vigas VFT-1 e VFT-2 romperam para carregamentos de 223 kN e 225 kN, respectivamente, em função da ocorrência de deformação plástica excessiva da armadura e esmagamento do concreto comprimido. Logo após o ensaio, foi possível concluir que o uso da fibra de aço em substituição a armadura de costura é eficaz uma vez que a não houve perda de aderência no contato entre a o reforço e o substrato.

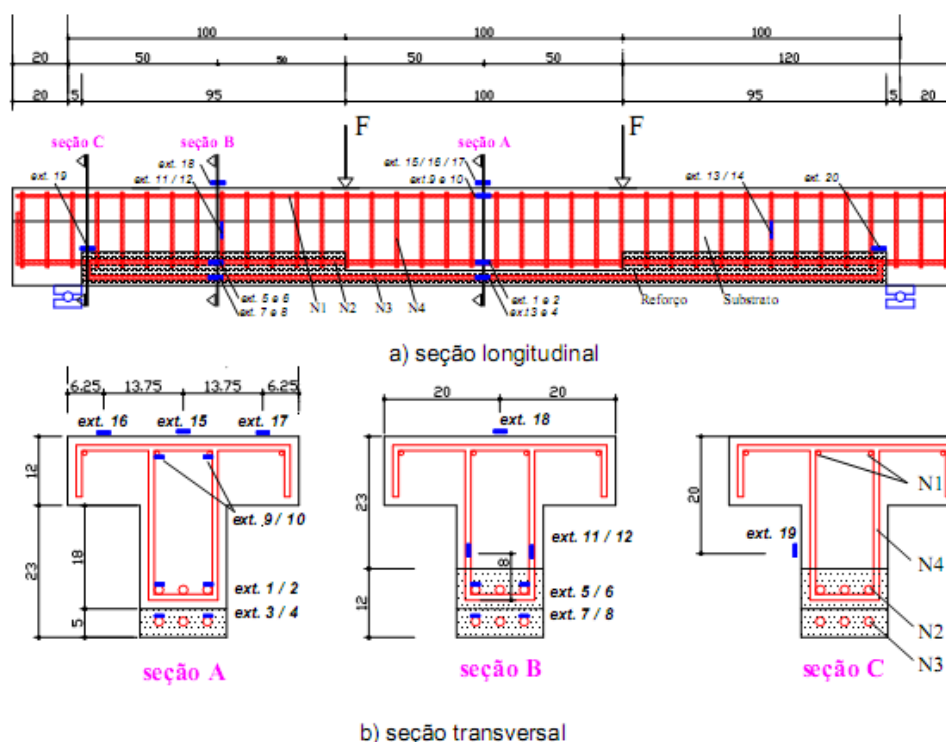


Figura 2-4 - Seção longitudinal e seções transversais das vigas VFT, Reis (2003)

Com relação às flechas, observou-se que, apesar de os valores teóricos não coincidirem com os experimentais devido a não consideração da perda de rigidez pela fissuração da seção nos métodos teóricos, a semelhança nas curvas Força x Flecha (Figura 2-5) permite que adaptações aos métodos teóricos sejam feitas para se obter previsões satisfatórias. Observa-se que tanto a viga de referência VA-3 quanto VFT-2 foram reforçadas à tração, porém a primeira não foi submetida ao pré-carregamento.

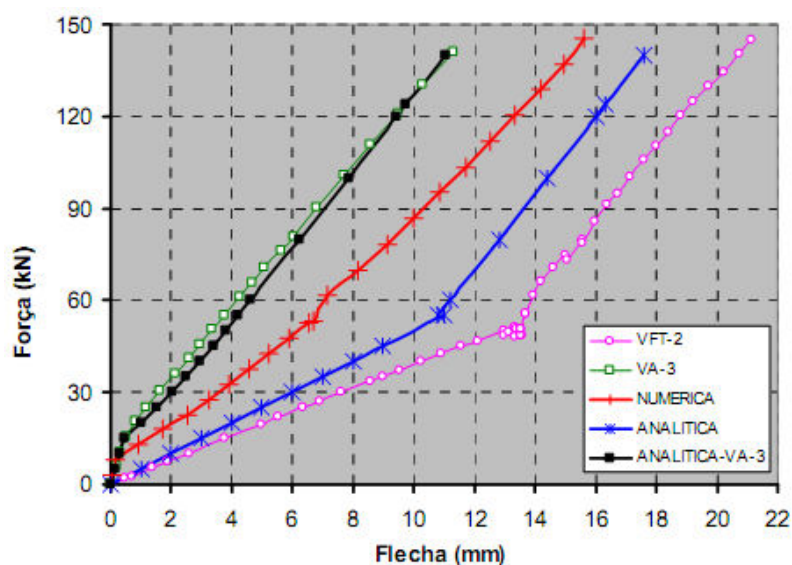
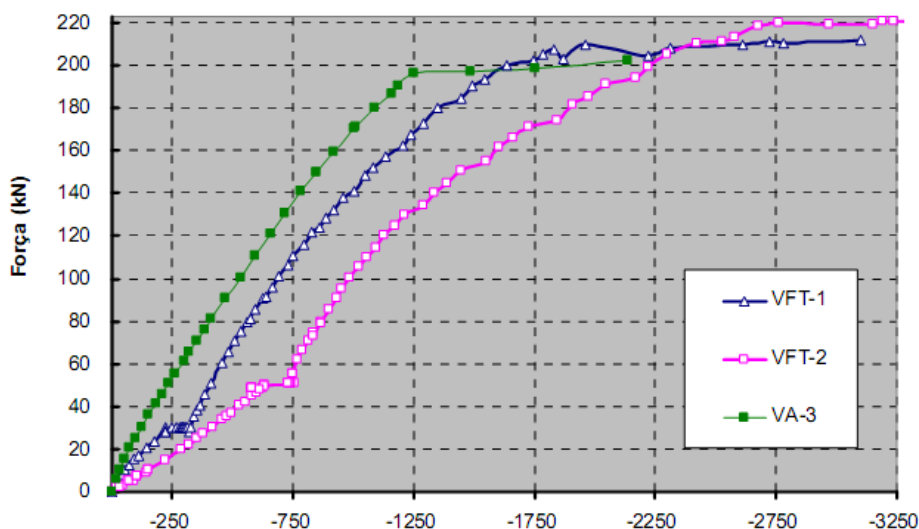


Figura 2-5 – Curvas Força x Flecha de vigas reforçadas pela técnica de reforço nº1, Reis (2003)

As observações mais relevantes para a consideração de pré-carregamento em reforço de elementos de concreto armado referem-se às deformações do concreto e das armaduras. No caso das deformações no concreto das vigas reforçadas pela técnica nº1 (Figura 2-6) as deformações ( $\epsilon_c$ ) observadas nas faces superiores das vigas no início da plastificação foram de 1,25‰ para a viga de referência VA-3 a qual não foi pré-carregada, 1,75‰ para VFT1 e 2,75‰ para VFT2 mostrando que, para um mesmo nível de carregamento, quanto maior o pré-carregamento maior é o risco de ruptura frágil.



**Figura 2-6 – Deformação (em micro-strain) no concreto comprimido de vigas reforçadas pela técnica de reforço nº1, Reis (2003)**

Com relação às deformações nas armaduras longitudinais (Figura 2-7) em VFT1, a armadura do reforço (As11), apesar de ser solicitada tardiamente com relação à armadura pré-existente (As12), alcançou o escoamento com deformação maior. Esta ocorrência não foi verificada em VFT2, o que demonstra haver aspectos de redistribuição de esforços que vão além da simples análise dos braços de alavanca das armaduras. Com relação às deformações nas armaduras transversais (Figura 2-8), a retirada de parte do concreto do bordo inferior das vigas para a execução do reforço proporcionou um alívio no esforço dessas armaduras gerado pelo pré-carregamento o que retardou o início da fissuração por cisalhamento em relação ao valor total da carga aplicada na viga.

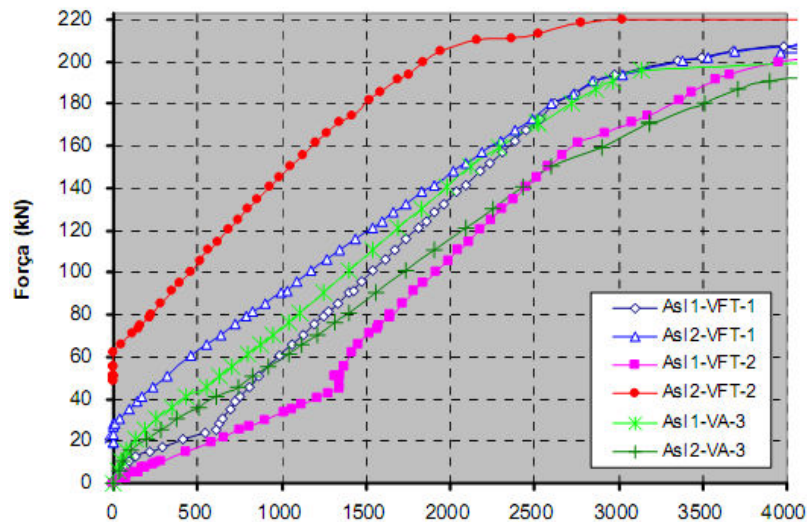


Figura 2-7 - Deformação (em micro-strain) na armadura longitudinal tracionada de vigas reforçadas pela técnica de reforço nº1, Reis (2003)

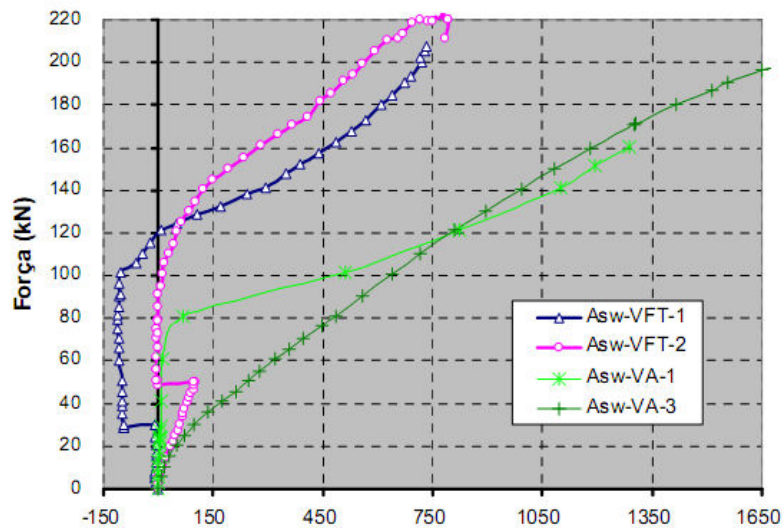
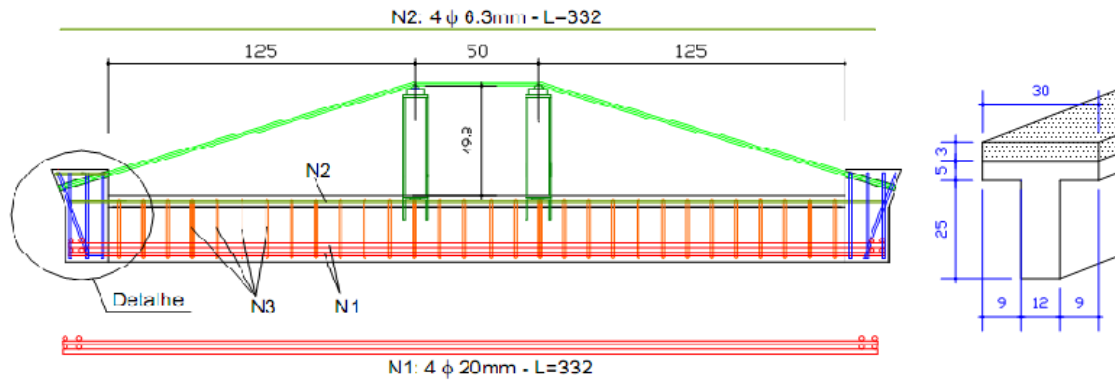


Figura 2-8 - Deformação (em micro-strain) na armadura transversal de vigas reforçadas pela técnica de reforço nº1, Reis (2003)

O ensaio das três vigas, de mesmas dimensões e taxa de armadura, reforçadas à flexão no bordo comprimido (VFC) foi dividido em duas fases, na primeira, chamada de ensaio intermediário, as peças foram armazenadas em uma câmara climatizada e submetidas a um pré-carregamento aplicado por um período superior a noventa dias. Na segunda fase, ou fase final do ensaio, as vigas foram submetidas a um carregamento de curta duração até sua ruptura. A Figura 2-9 mostra as armaduras e o esquema de carregamento das vigas VFC.





**Figura 2-9 - Características das vigas VFC – Reis (2003)**

Na viga VFC-1, a aplicação do carregamento de longa duração se deu sete dias após a moldagem do substrato (portanto, antes do reforço), com uma força vertical de 19,6 kN, ou 36% da força de serviço prevista. Após 68 dias do primeiro carregamento, executou-se o reforço e aumentou-se o carregamento de longa duração com a aplicação de forças verticais de 35,1 kN, o qual foi mantido durante o período de 29 dias, para que se avaliasse a absorção do pré-carregamento pelo material do reforço. Na viga VFC-3, apenas uma carga de 32 kN, ou 58,7% da força de serviço prevista, foi aplicada antes da execução do reforço para se avaliar o efeito da fluência somente no substrato. Para a viga VFC-2 não houve pré-carregamento.

A Figura 2-10 mostra o modo de ruptura de uma da viga VFC-1, reforçada com a técnica de reforço nº2. A Figura 2-11 e a Figura 2-12 mostram, respectivamente, as evoluções das suas flechas e da sua deformação correspondentes ao pré-carregamento de longa duração comparando valores experimentais com aqueles obtidos em análise numérica com o uso do programa CONSNOU, e analiticamente pela NBR6118 de (1978) e de (2003). Concluiu-se que os métodos teóricos utilizados para se analisar as flechas diferidas e os acréscimos de deformação decorrentes da retração e fluência do concreto são satisfatórios.

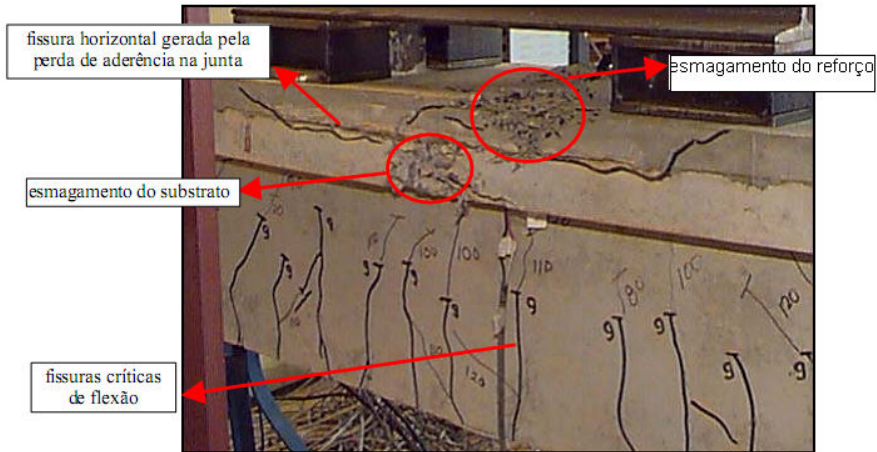


Figura 2-10 - Modo de Ruptura da viga VFC-1, Reis (2003)

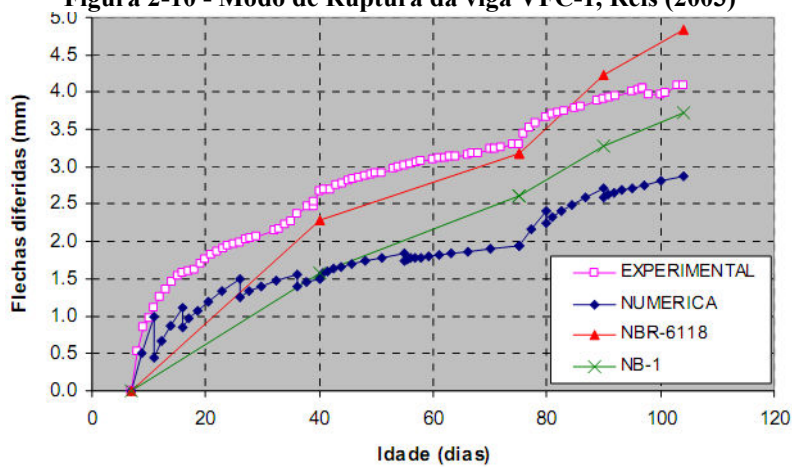


Figura 2-11 Curvas Força x Flecha da viga VFC-1, Reis (2003)

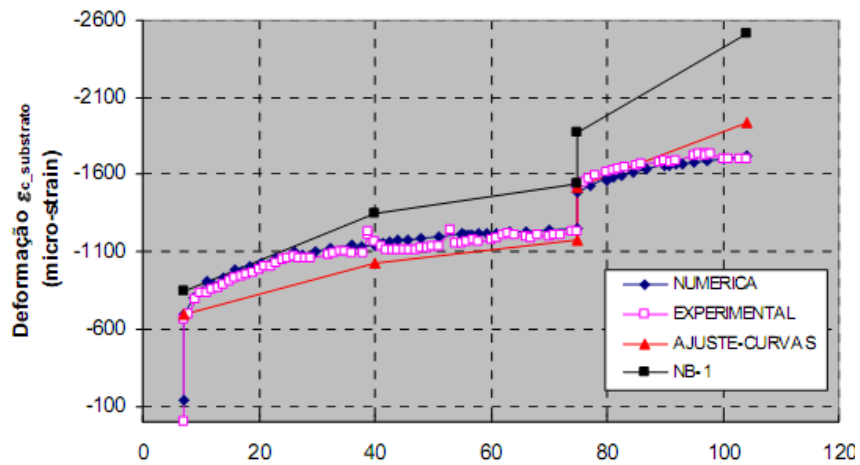


Figura 2-12 - Deformação (em micro-strain) no concreto comprimido da viga VFC-1, Reis (2003)

A mesma comparação foi feita para todas as vigas reforçadas com a técnica de reforço nº2 de modo a se mostrar a evolução das tensões e deformações nos concretos

do reforço e do substrato (Figura 2-13) durante o acréscimo de carregamento, referente ao ensaio de curta duração.

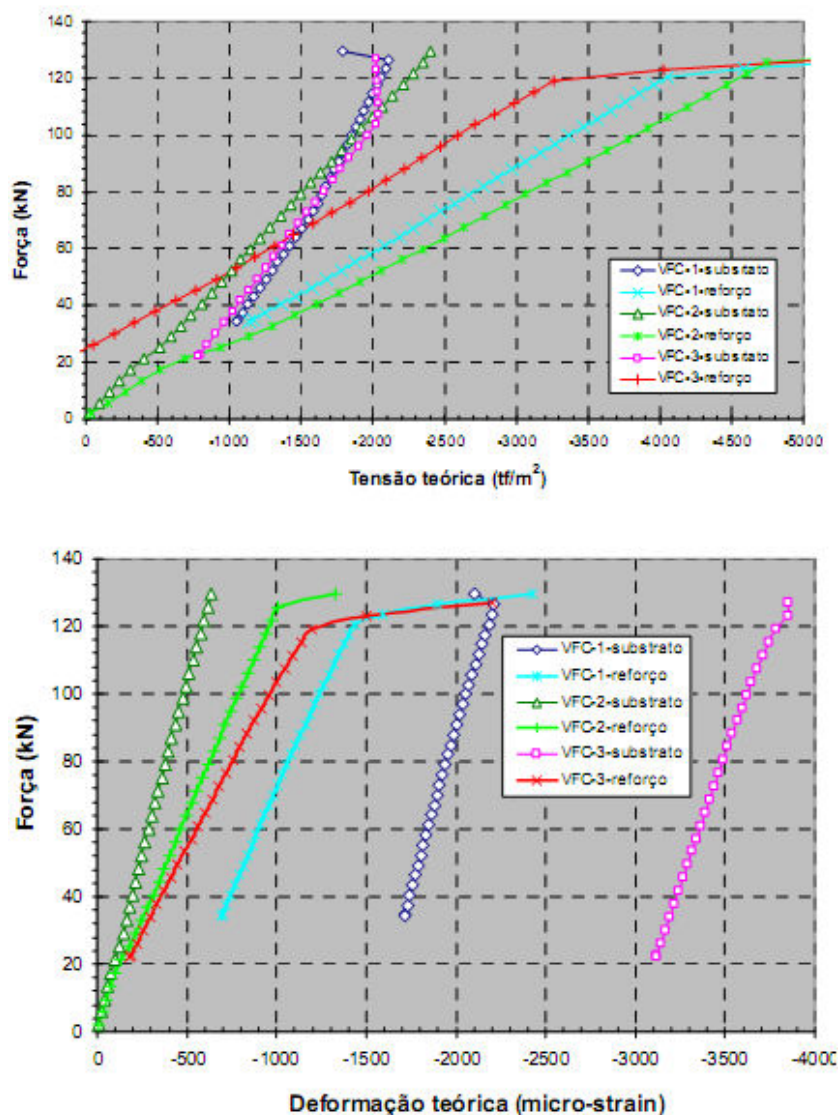
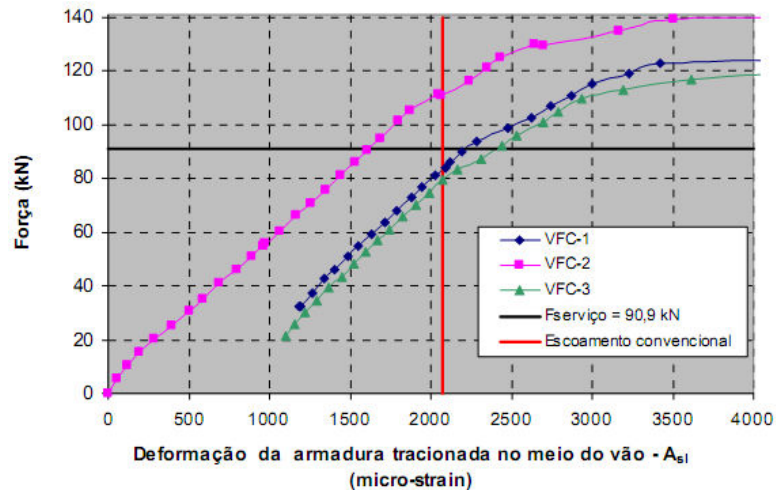


Figura 2-13 - Deformação no concreto comprimido das vigas reforçadas com a técnica de reforço n°2, Reis (2003)

A comparação entre as tensões e deformações no concreto do reforço mostra que o fato de o substrato apresentar uma deformação maior não significa que o mesmo estará submetido a uma tensão maior. Já a observação da evolução da deformação na armadura tracionada (Figura 2-14) mostra que as vigas pré-carregadas escoaram com valores de deformação maiores que o previsto devido à subestimação das deformações iniciais na curva experimental pelo programa que realizou a previsão teórica.



**Figura 2-14 - Deformação (em micro-strain) na armadura longitudinal tracionada de vigas reforçadas pela técnica de reforço nº2, Reis (2003)**

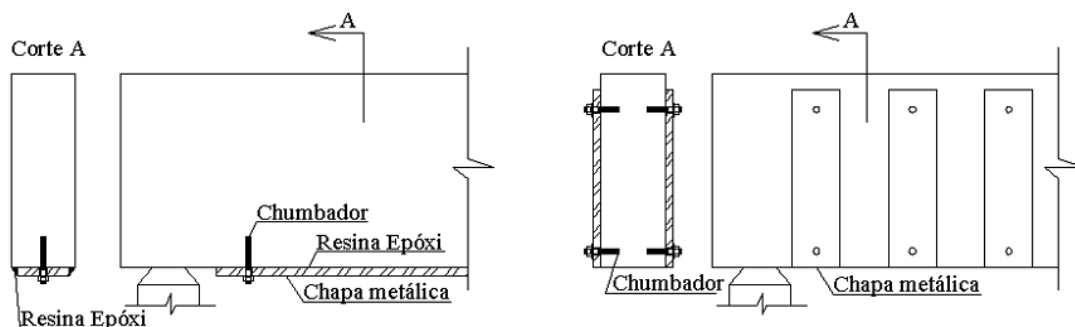
Concluiu-se que as vigas reforçadas com as técnicas testadas mostraram-se viáveis apresentando modo de ruptura semelhante ao de peças monolíticas além de atribuírem um significativo ganho de resistência às peças, devendo-se atentar na técnica de reforço nº1 para a ancoragem do banzo tracionado e, na técnica de reforço nº2, para a redução de tensões em função da fluência do material.

Apesar de descrever ensaios experimentais, o trabalho de Reis (2003) é para este trabalho, por expor fatores que influenciam o comportamento das seções reforçadas sob carga e que não estão previstos pelos métodos utilizados no programa computacional desenvolvido neste trabalho. A perda de rigidez pela fissuração e o aumento de deformação pela fluência do concreto tiveram efeitos consideráveis nos resultados experimentais. Portanto, tais considerações devem ser implementadas em trabalhos futuros.

### **2.3 Reforço por colagem de Chapas Metálicas e de Polímeros Reforçados com Fibras**

Segundo Escobar (2003), no final da década de 60, as pesquisas de Bresson e L'hermite no ITBTP na França consideraram o comportamento de vigas em concreto armada reforçadas com chapas de aço coladas com resina epoxídicas. Segundo Carneiro (2006), apesar do excelente comportamento mecânico do reforço com colagem de chapa metálica, a utilização de chapas relativamente grossas pode conduzir a rupturas

prematuras do cobrimento de concreto sem que a tensão de escoamento da chapa seja atingida (descolamento). O mesmo autor também atenta para outros dois inconvenientes das chapas metálicas, a saber: a corrosão e a dificuldade de manuseio de elementos com grandes dimensões. Na década de 90, após o sucesso comprovado do reforço por colagem, em termos estruturais, pesquisadores, entre os quais se destaca Urs Méier do Laboratório de Testes e Materiais de Zurique, dedicaram-se a encontrar alternativas para ao aço que fossem mais leves e duráveis, surgindo assim a idéia de usar compósitos a base de fibra de carbono (CFRP) os quais já vinham sendo utilizados nas indústrias naval, aeroespacial e automobilística. Segundo Juvandes (2002), a respeito dos avanços no uso de armaduras não metálicas no reforço de estruturas, destacam-se três potenciais fontes de trabalhos: o Japão interessado na pré-fabricação no pré-esforço por pré-tensão e no reforço aos sismos; a América do norte motivada pelas soluções de problemas de durabilidade e a Europa preocupada com a necessidade de preservar e reabilitar o patrimônio histórico.



**Figura 2-15 – Reforço por colagem de chapa metálica à flexão e ao cisalhamento.**

No Brasil, diversos trabalhos experimentais vêm sendo publicados a respeito de reforço com polímeros reforçados com fibras (FRP). Entre as fibras tipicamente utilizadas, carbono, vidro e aramida, a primeira ganha destaque por apresentar resistência à corrosão e a ataques químicos, além de se comporta melhor em relação à fadiga provocada por cargas cíclicas. Entre os trabalhos sobre o tema no Brasil, destacam-se Pinto (2000) e Cerqueira (2000), feitos a partir de um único programa experimental, sendo que o primeiro aborda o reforço a flexão e o segundo ao cisalhamento.

No programa experimental de Pinto (2000) e Cerqueira (2000), cinco vigas de seção retangular simplesmente apoiadas foram submetidas a duas cargas pontuais, cada

uma distando de um dos apoios aproximadamente um terço do vão da viga. Todas elas apresentavam mesma seção e comprimento, porém, taxas de armadura e tipos de reforço diferentes. As vigas V1 e V3 tiveram sua armadura longitudinal dimensionada para atingir a tensão de escoamento antes que a armadura de cisalhamento e foram reforçadas à flexão, já as vigas V2 e V4 tiveram a armadura transversal dimensionada para atingir a tensão de escoamento antes que a armadura longitudinal e foram reforçadas ao cisalhamento. V5 foi dimensionada para que as armaduras longitudinal e transversal escoassem juntas e foi reforçada tanto à flexão como ao cisalhamento. A Figura 2-16 detalha as vigas ensaiadas.

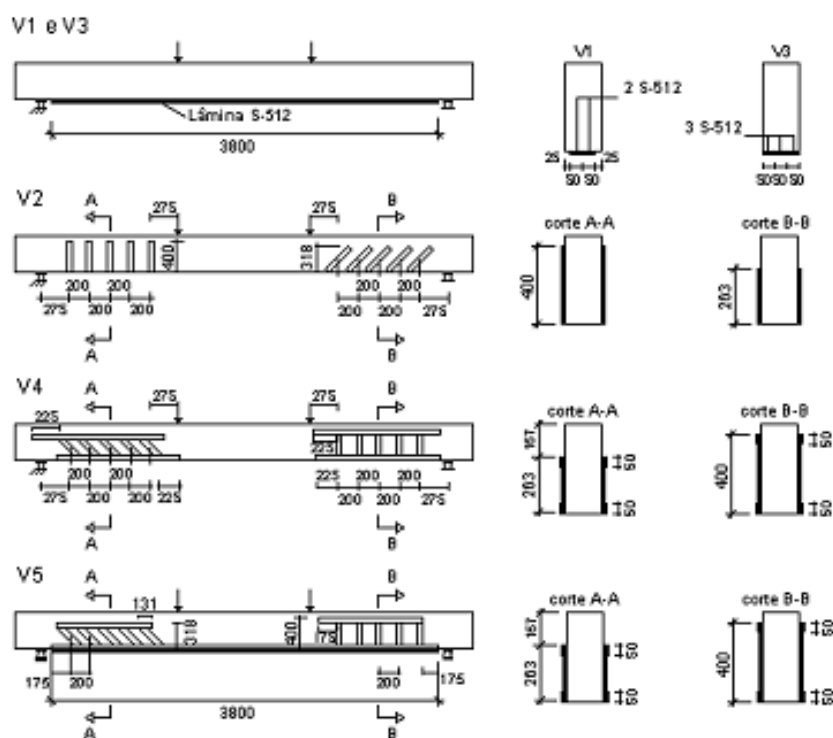


Figura 2-16 – Vigas ensaiadas por Pinto e Cerqueira (2000)

O ensaio das vigas consistiu de dois ciclos de carregamento, o primeiro indo até 70kN com incrementos de 10kN e o segundo até 60kN com incrementos de 20kN, seguidos do atirantamento das vigas à uma placa de reação. Posteriormente, o reforço era executado e, passado o tempo de cura da resina epoxídica utilizada para colar as lâminas de CFRP, as vigas foram carregadas até a ruptura. Foram medidas as deformações nas armaduras e no reforço e a flecha das vigas. A Tabela 2-1 mostra os resultados obtidos.

Viga					Laminados de fibra de carbono					Modo de ruptura				
nome	$f_{cu}$ (MPa)	$\rho_l$ (%)	$\rho_s$ (%)	$P_u$ (kN)	$t_f$ (mm)	$b_f$ (mm)	$E_f$ (MPa)	Reforço de flexão	$L_f$ (mm)		Reforço de Cisalhamento	$L_s$ (mm)		
VM-1R	34.4	0.67	2.19	200	-	-	-	-	-	-	-	escoamento da armadura longitudinal e esmagamento do concreto		
V1	34.8	0.67	0.96	140	1.2	50	165	2 lâminas na face tracionada da viga	3800	-	-	escoamento da armadura longitudinal interna e destacamento da lâmina		
V2	36.6	0.13	2.22	182				-	-	5 lâminas coladas verticalmente e 5 lâminas coladas inclinadas de 45° em cada face lateral da viga	-	400	escoamento da armadura longitudinal e esmagamento do concreto	
V3	38.3	0.67	0.96	150				3 lâminas na face tracionada da viga	3800	-	-	-	escoamento da armadura longitudinal interna e destacamento da lâmina	
V4	39.2	0.13	2.22	180				-	-	5 lâminas coladas verticalmente e 5 lâminas coladas inclinadas de 45° em cada face lateral da viga	-	400	escoamento da armadura longitudinal e esmagamento do concreto	
V5	34.7	0.13	0.96	165				3 lâminas na face tracionada e 1 lâmina na parte inferior de cada face lateral da viga	3800	-	-	bandas de amarração nas extremidades das lâminas	400	escoamento da armadura longitudinal e esmagamento do concreto

Tabela 2-1 – Dados de Pinto (2000) e Cerqueira (2000)

O trabalho concluiu que o reforço com fibra de carbono reduziu consideravelmente as deformações na armadura interna das vigas. No reforço à flexão, se observou aumento na rigidez das peças e no reforço ao cisalhamento, as lâminas colocadas inclinadas de 45° não apresentaram vantagem em relação as lâminas colocadas verticalmente que compense as dificuldades em sua execução. O sistema de ancoragem adotado nas vigas V4 e V5 (ver Figura 2-16) se mostrou eficaz em evitar o descolamento das lâminas utilizadas no reforço ao cisalhamento, mas pode ser dispensado se a deformação das fibras for limitada a 5%.

Embora vários trabalhos com o uso dos FRP tenham sido publicados no País, não há normas brasileiras que abordem procedimentos de projeto e execução de elementos estruturais reforçados com esse material. É comum a utilização por pesquisadores brasileiros da publicação americana dos sub-comitês 440 do ACI (2001), da publicação europeia do CEB-FIP (2001) e da JSCE (1997) do Japão.

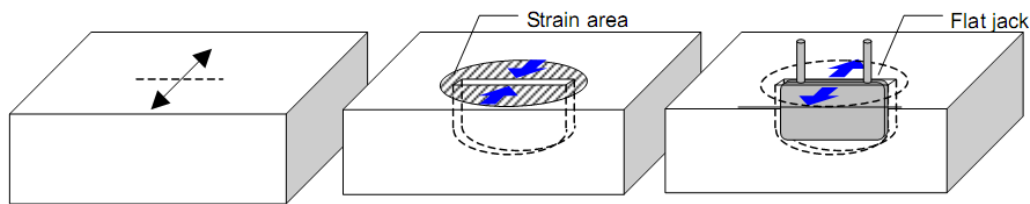
## **2.4 Determinação dos Estados de Deformação e Tensão de uma Estrutura de Concreto Existente**

Nos ensaios descritos neste capítulo, os estados de deformação e tensão das peças eram conhecidos no momento da execução dos reforços uma vez que tratavam-se de peças monitoradas desde sua execução e, mesmo nos casos em que foram aplicadas cargas de longa duração, estas eram controladas. Ocorre que, na maioria das vezes, os dados referentes aos estados iniciais de tensões e deformações de uma estrutura, bem como seu histórico de carregamento e propriedades dos seus materiais não são conhecidos, cabendo ao projetista fazer medições.

Uma possibilidade é a estimativa teórica do carregamento seguida da análise numérica da estrutura devendo-se atentar para o histórico das cargas, relacionado ao fenômeno da fluência. Outra solução consiste na determinação experimental dos estados de tensão e deformação. Em ambos os casos, é importante que se adote, para os materiais, propriedades obtidas a partir de ensaios experimentais visando à precisão dos resultados.

No caso do concreto, a técnica mais utilizada para a determinação experimental dos estados iniciais de tensão e deformação, descrita em Sumitro et al(2003), consiste em aliviar o campo de deformações em uma determinada região da estrutura por meio de um corte ou fenda. Em seguida, mede-se a variação de deformação na área aliviada e calcula-se a tensão levando em conta as propriedades elásticas do material e a geometria do corte. Este método deriva da indústria da mineração onde é utilizado para medir tensões em massas rochosas além de ser bastante usado em plásticos e metais. Devido aos vários fatores a que as propriedades do concreto estão sujeitas, pode-se simplificar a obtenção dos resultados combinando a técnica descrita com o uso de um macaco plano, inserido na fenda e pressurizado até que se restabeleça a deformação inicial na região, conforme Figura 2-17. A combinação das medições dos dados de pressão e deformação permite a obtenção das tensões na região instrumentada.





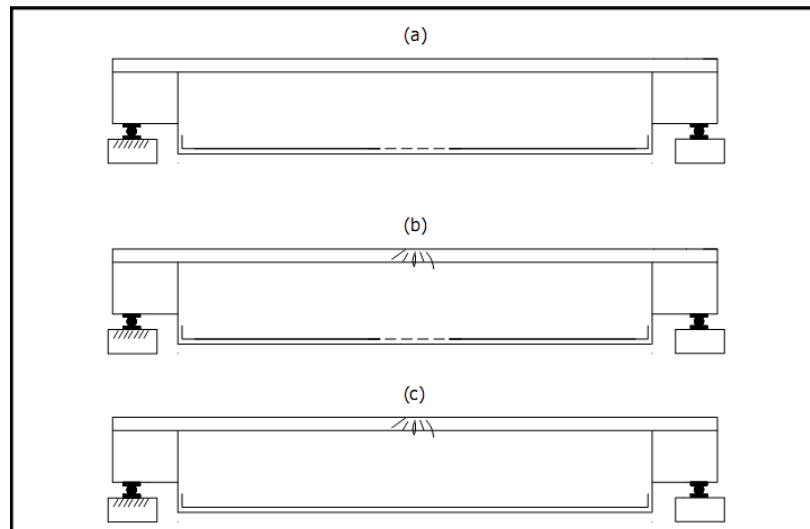
**Figura 2-17 - Método de alívio de deformação combinado com a técnica do macaco, Sumitro et al (2003),**

## **2.5 Análise Teórica de Seções Reforçadas de Concreto Armado**

Os trabalhos teóricos publicados a respeito de seções reforçadas de concreto armado, em sua maioria, fazem uso dos mesmos métodos utilizados para as seções não reforçadas, atentando para as particularidades dos materiais utilizados no reforço, sendo os mesmos dimensionados para o estado limite último. Este e outros aspectos referentes à análise de peças de concreto armado reforçadas serão abordados no capítulo seguinte.

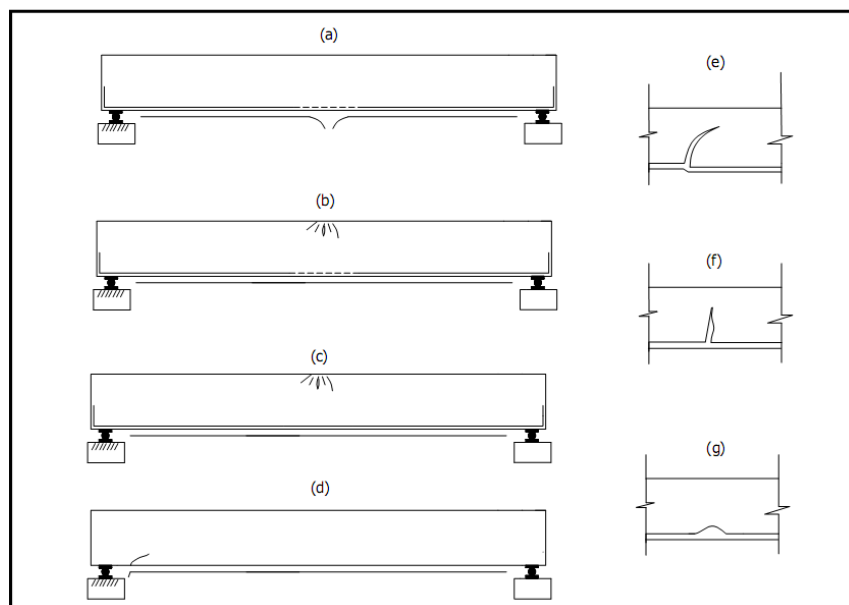
O reforço estrutural deve conferir ganho de resistência à peça, no entanto, cuidado especial deve ser tomado de modo a se evitar a ruptura frágil do elemento reforçado, pois esta subaproveita a capacidade resistente dos materiais empregados. Os modos de ruína desejados para uma peça de concreto armado reforçada à flexão são os modos de ruptura clássicos, ou seja, aqueles que se verificam em peças não reforçadas, pois estes resultam do aproveitamento do material utilizado no reforço, o qual, via de regra, tem maior custo. Entre os modos de ruptura clássicos, deve-se, sempre que possível, optar pelo escoamento da armadura em detrimento do esmagamento do concreto por este ser frágil.

Quando a peça é reforçada por encamisamento em concreto armado, podem ocorrer o escoamento da armadura longitudinal de tração do elemento composto, Figura 2-18 a), e/ou o esmagamento do concreto, Figura 2-18 b). Para esta técnica de reforço, o modo de ruína não desejável ocorre quando a armadura de costura, ou fibra de aço, utilizada é insuficiente para permitir a transferência de esforços através do contato entre o substrato e o reforço, e é caracterizado por fissuras horizontais as quais podem indicar uma perda parcial ou total de aderência.



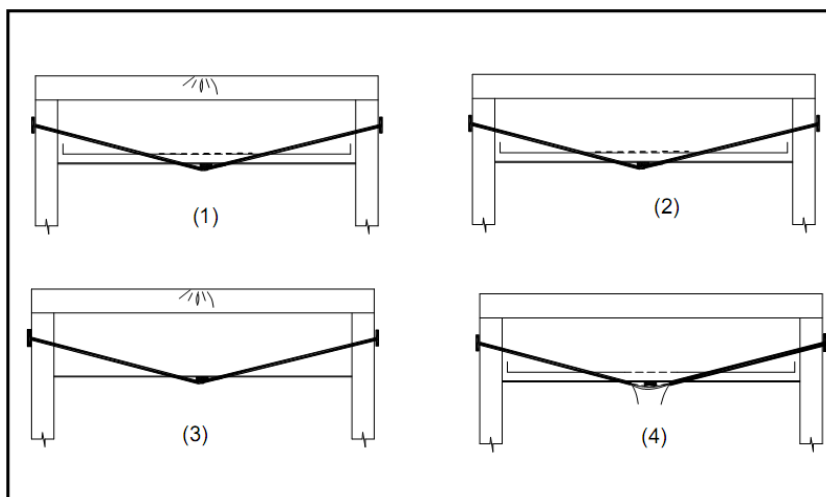
**Figura 2-18 - Modos de Ruína à flexão de viga de concreto armado reforçada por encamisamento, segundo Santos (2006)**

Para o caso de peças reforçadas a flexão com polímeros reforçados com fibra de carbono, o qual pode ser estendido para peças reforçadas com o uso de outros tipos de fibra ou chapa de aço, os modos de ruína tradicionais se combinam com a ruptura do reforço, conforme Figura 2-19 a), b) e c). Já na Figura 2-19 d), e), f) e g), são mostrados os modos de ruína indesejados dessa técnica de reforço, caracterizados pelo deslocamento do reforço ocasionados, respectivamente, por fissuras de cisalhamento, fissuras de flexão e má execução do reforço.



**Figura 2-19 - Modos de ruína de uma viga de concreto armado reforçada à flexão com CFRP, segundo Triantafillou (1998)**

Finalmente, a Figura 2-20, de Almeida (2001), mostra os modos de ruína para a técnica da protensão externa, onde os três primeiros são clássicos, e o quarto corresponde a ruptura dos fios das cordoalhas dos cabos de protensão que pode ocorrer antes ou depois do escoamento do aço passivo e está associado à falhas de projeto ou execução do reforço.



**Figura 2-20 - Modos de ruína de uma viga de concreto armado reforçada à flexão por protensão externa, segundo Almeida (2001).**

Nota-se, portanto, que o dimensionamento da seção reforçada torna-se mais complexo devido ao acréscimo de possíveis modos de ruína que devem ser levados em consideração, aumentando, conseqüentemente, a quantidade de informações necessárias ao dimensionamento. Segundo Juvandes e Figueiras (2000), ao se assumir a validade da perfeita compatibilidade de deformações entre os materiais, do princípio de Navier-Benoulli e do princípio do equilíbrio entre as forças da seção é possível prever o comportamento de uma estrutura reforçada a partir da consideração do estado inicial de tensão e deformação do elemento no ato do reforço e das leis constitutivas dos materiais utilizados. Para um dimensionamento preciso, deve-se ainda considerar a ocorrência de cisalhamento na região da junta de ligação entre o substrato e o reforço, as deformações diferidas do concreto bem como os efeitos da fissuração na peça. Tais considerações serão detalhadas no próximo capítulo.

As ferramentas computacionais usualmente utilizadas para modelar o comportamento de estruturas reforçadas são aquelas que permitem simular as diferenças

de comportamento e descontinuidades geradas em função da modificação do esquema estrutural ou das dimensões da seção transversal dos elementos em função do processo evolutivo da construção ao longo do tempo. O programa CONSNOU, de autoria do Prof. Antonio R. Marí Bernat, da Universidade Politécnic da Catalunya, tem essa finalidade específica, e o programa comercial SAP 2000® apresenta ferramenta para este fim. Ambos utilizam o método dos elementos finitos.

## **2.6 Análise numérica de seções de concreto armado**

Dada a escassez de publicações a respeito da análise numérica de seções reforçadas, iniciou-se uma pesquisa a respeito dos métodos utilizados na análise numérica à flexão de seções de concreto armado sem reforço, de modo a adaptá-los aos objetivos do presente trabalho.

### **2.6.1 Dos Prazeres e Gomes (2002)**

O trabalho de Dos Prazeres e Gomes (2002) trata do desenvolvimento de um programa na plataforma MatLAB® que se aplica à análise à flexão de seções retangulares de concreto armado a partir da elaboração de diagramas de interação esforço normal - momento fletor. Este diagrama é obtido a partir da varredura dos domínios de deformação na NBR6118, a qual é detalhada no capítulo seguinte. O trabalho também aborda a elaboração de diagramas momento fletor – esforço normal – curvatura e verifica a precisão de diversas técnicas de integração numérica (método do ponto médio, método do trapézio, método, o método de Simpson e o método da quadratura de Gauss) utilizadas no cálculo dos esforços resistentes da seção, bem como métodos numéricos para o cálculo de raízes (método de Newton-Raphson e método da Bisseção). O programa desenvolvido foi validado com a elaboração de diagramas de interações de esforços apresentados em Fusco (1981). Entre as principais conclusões estão: a validação do programa a partir da comparação dos diagramas obtidos no programa com os apresentados na literatura; a constatação de que o método de integração numérica do Ponto Médio o foi o que melhor convergiu na média (apesar de se esperar melhores resultados do método de Gauss, conclui-se que para este caso em particular, que a função das tensões no concreto não é continua o método não foi muito eficiente.); e a constatação de que o método de Newton Raphson é o mais eficiente para encontrar raízes por ter apresentado menor tempo de processamento.

### 2.6.2 Mendes Neto (2009)

Em livro intitulado Concreto Estrutural Avançado, Mendes Neto (2009) aborda a análise se seções de concreto armado estrutural sob flexão normal composta, diferenciando-se por abordar a verificação de ruptura da seção transversal, a partir de uma ferramenta gráfica chamada de região viável, a qual está inserida em um plano ( $\epsilon_b$  x  $\epsilon_t$ ), Figura 2-21 , onde  $\epsilon_b$  é a deformação na base e  $\epsilon_t$  é a deformação no topo da seção transversal, e abrange os estados de deformação que levam a seção à ruína. Para a verificação, calcula-se a distribuição de deformações que equilibra a seção em relação aos esforços aplicados com o uso do método de Newton Raphson para duas variáveis, conforme Equação (2.1), o mesmo método também é utilizado no dimensionamento da armadura. Os esforços resistentes da seção são obtidos analiticamente. Apesar dos exemplos apresentados no livro tratarem se uma seção retangular, o autor afirma que, em algumas partes do texto, a formulação apresentada pode ser aplicada a qualquer tipo de seção.

$$(N_d, M_d) \rightarrow (\epsilon_0, k) \quad (2.1)$$

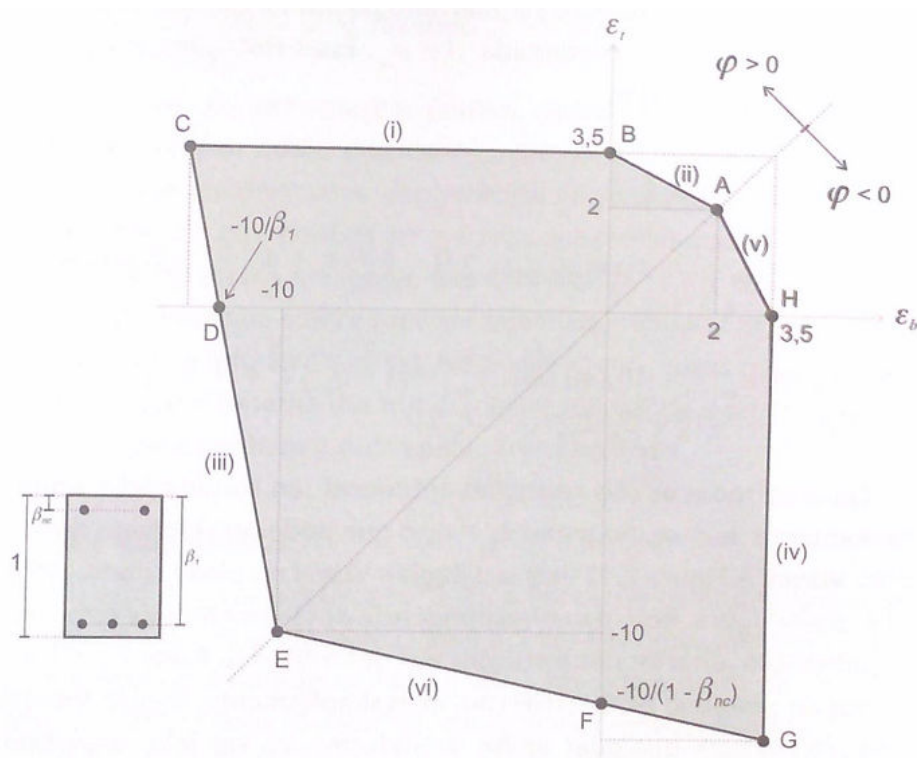


Figura 2-21- Região viável inserida em um plano ( $\epsilon_b$  x  $\epsilon_t$ ), Mendes Neto (2009)

### 2.6.3 Chorean (2010)

Chorean (2010) apresenta, em artigo, uma nova formulação para a determinação de superfícies de interação ( $N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ) e diagramas de interação ( $M_x$ ,  $M_y$ ) de seções mistas de aço e concreto. Trata-se de um procedimento incremental baseado na equação de restrição do método de comprimento de arco aplicado na solução das equações não lineares de equilíbrio por meio de uma estratégia de rigidez tangente, representada geometricamente na Figura 2-22. Os esforços resultantes e a rigidez tangente são determinados por integrais de contorno baseadas no Teorema de Green.

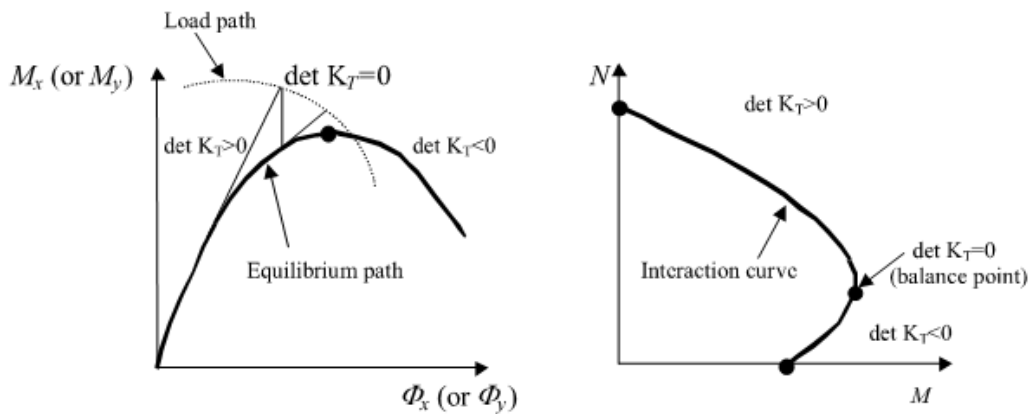


Figura 2-22 - método do comprimento de arco, Chorean (2010)

## **CAPITULO 3 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA**

---

O presente capítulo aborda os fundamentos teóricos aplicados ao programa computacional ora proposto, por meio de uma explanação sucinta das hipóteses e critérios normativos adotados e dos métodos e ferramentas matemáticas utilizados na implementação computacional ou que sejam pertinentes à esta.

### **3.1 Hipóteses fundamentais**

As hipóteses tidas como válidas ao longo da implantação computacional assemelham-se àquelas apresentadas no Item 17.2.2 da NBR 6118:2003, as quais seguem, com devidas adequações ao escopo deste trabalho:

a) hipótese das seções planas: admite-se que as seções transversais, inicialmente planas, permanecem planas e normais ao eixo da peça até a ruptura, de modo que as deformações são, em cada ponto, proporcionais à sua distância até a linha neutra (linha da seção transversal em que a tensão é nula), desprezando-se as deformações por cisalhamento (hipótese de Bernoulli).

b) aderência entre o aço e o concreto: considera-se perfeita a aderência entre o aço da armadura e o concreto adjacente, assumindo-se que a deformação específica de cada barra de aço seja igual à deformação específica do concreto que a envolve, até próximo da ruptura;

c) contribuição somente da armadura nos esforços de tração: admite-se nula a resistência do concreto à tração, assumindo-se que todo o esforço de tração seja absorvido pela armadura;

d) pequenos deslocamentos: admite-se que os deslocamentos transversais ao eixo da peça sejam pequenos em relação ao seu comprimento.

e) Admite-se para as seções reforçadas a transferência total de esforços através da junta de ligação entre o substrato e o reforço, Conceitos relacionados à essas hipóteses serão detalhados ao longo deste capítulo.

## **3.2 Propriedade dos materiais**

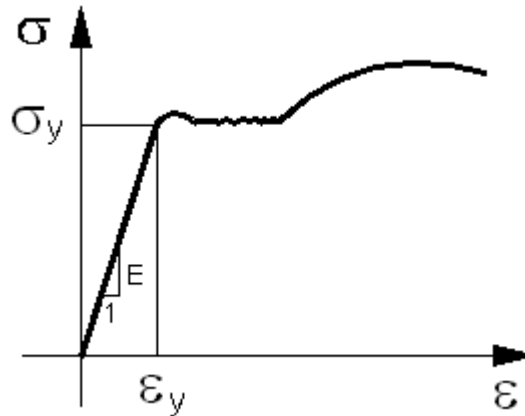
Neste item, dá-se ênfase ao concreto e ao aço, os quais compõem as seções originais das quais tratam o presente trabalho e podem compor o reforço utilizado, nos casos de encamisamento em concreto armado. Também são comentados aspectos que devem ser levados em conta quando se pretende utilizar no reforço materiais não contemplados nas normas técnicas vigentes, a exemplo dos polímeros reforçados com fibras de carbono. Ressalta-se que este capítulo não esgota as possibilidades quanto aos materiais que podem ser adotados no reforço, bastando para tanto que sejam feitas adaptações no algoritmo do programa.

### **3.2.1 Aço**

Segundo Bauer (1988), o aço é um produto siderúrgico (ferro-carbono) cujo teor de carbono situa-se ente 0,0 e 1,7%. Entre suas principais propriedades, em relação a outros produtos siderúrgicos, apresenta elevada ductilidade, maleabilidade, dureza e flexibilidade. Sua superfície é ótima para receber tratamento térmico e, a depender do teor de carbono, divide-se em aço doce, o qual contém menos de 0,2% de carbono, e aço ao carbono cuja concentração de carbono varia de 0,2 a 1,7%.

Quanto a sua resistência e durabilidade, o aço apresenta comportamento semelhante tanto à tração quanto à compressão. Aços com menor teor de carbono (aços doces) são vantajosos por apresentar patamar indicativo de escoamento em seu diagrama tensão deformação, conforme Figura 3-1. Após ser atingida a tensão de escoamento (limite elástico) o material não retorna a sua configuração indeformada ao se retirar sua carga. A resistência característica de escoamento do aço mais utilizado no Brasil como armadura longitudinal (CA50) é de 500 MPa.





**Figura 3-1 - Diagrama Tensão-Deformação do aço**

Onde:

$\sigma_y$ : é a tensão de escoamento do material

$\epsilon_y$ : é a deformação de escoamento do material

$E$ : é o módulo de deformação longitudinal ou módulo de Young, corresponde a inclinação do trecho retilíneo do diagrama.

Na implantação computacional, considera-se o aço como sendo um material elasto-plástico perfeito, o qual, ao ter sua deformação aumentada para além de sua deformação de escoamento ( $\epsilon_y$ ) mantém a sua tensão de escoamento ( $f_y$ ) até a ruptura. Observa-se que, no diagrama da Figura 3-2, a deformação última do aço que é de 10 ‰, é mostrada como sendo de 3,5 ‰ quando submetido à compressão, pois quando essa deformação é atingida sob essa tensão o estado limite último da seção de concreto armado se dá pela deformação última do concreto. No regime elástico, a tensão nas armaduras é obtida com a lei de Hooke, Equação (3.1). Neste trabalho, o aço considerado para as armaduras é o CA50 tipo A, ou seja, o aço para concreto armado cuja resistência característica é de 500MPa e o diagrama tensão – deformação apresenta patamar de escoamento. O módulo de elasticidade longitudinal do aço é admitido igual a 210 GPa.

$$\sigma_y = E\epsilon_y \quad (3.1)$$

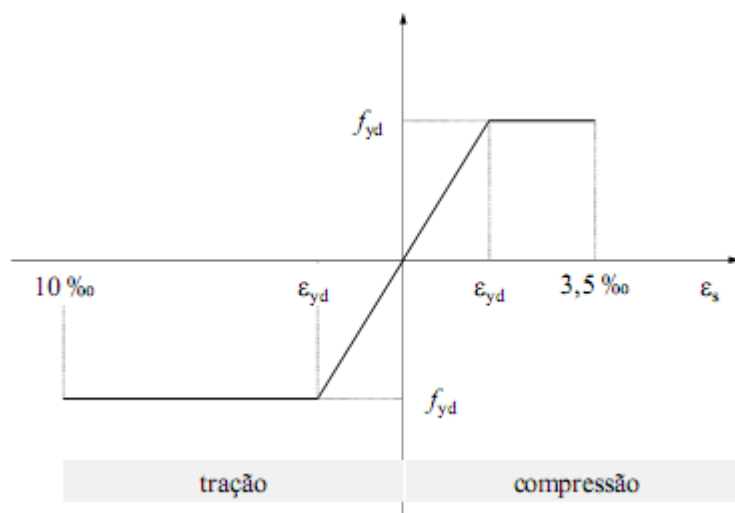
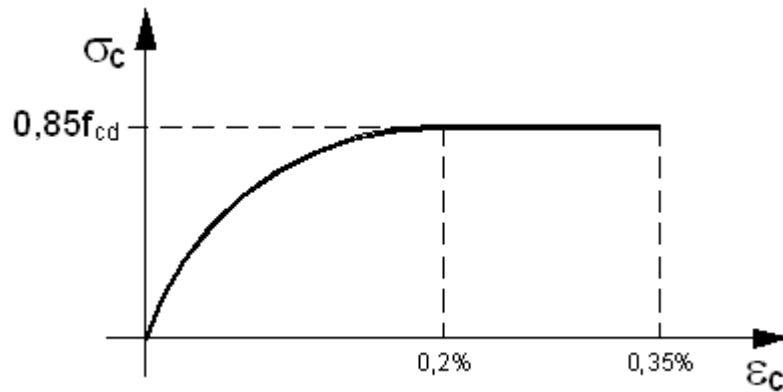


Figura 3-2 - Diagrama Tensão-Deformação do Aço idealizado, extraído de Ribeiro (2011)

### 3.2.2 Concreto

Segundo Mehta e Monteiro (2008) o concreto é o material mais utilizado no mundo atual sendo o seu consumo da ordem de 11 bilhões de toneladas métricas por ano. Tal material é composto em sua maior parte pelos agregados, os quais são comumente definidos como materiais inertes de dimensões e propriedades adequadas (areia e seixo/brita), ligados por uma pasta de material ativo chamada de aglomerante (cimento, água, adições). O concreto caracteriza-se por ser um material frágil e heterogêneo, não obstante, seu baixo custo e relativo baixo impacto ambiental justificam seu elevado uso atual tornando promissor o seu uso futuro.

Apesar da NBR6118 (2003) permitir a consideração da resistência à tração do concreto sob condições específicas, optou-se neste trabalho por desprezar tal atributo. A Figura 3-3, mostra a distribuição de tensões de compressão do concreto, proposta pela referida norma, a qual é expressa pela equação (3.2), a partir da qual se relaciona a deformação  $\varepsilon_c$  de um determinado ponto da seção em concreto armado com sua tensão  $\sigma_c$ .



**Figura 3-3 - Diagrama Tensão-Deformação do Concreto, NBR6118(2004)**

$$\sigma_{cd} = 0,85f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\frac{2}{1.000}} \right)^2 \right] \quad (3.2)$$

Convém esclarecer que este diagrama é definido como uma razoável envoltória dos diagramas obtidos experimentalmente constituída por uma parábola, com vértice correspondente a deformação de 2 ‰, e por um retângulo para as deformações que ultrapassam esse valor, sem definir a lei constitutiva do concreto comprimido. Não há relação entre a inclinação da tangente do ramo parabólico em sua origem e o módulo de deformação longitudinal do concreto (Fusco 2011).

$f_{cd}$  é a resistência à compressão do concreto adotadas no cálculo estrutural e 0,85 é um fator empírico de correção global admitido pela teoria geral da flexão do concreto estrutural para se obter a máxima tensão de compressão de longa duração atuante na seção transversal, a partir da resistência de cálculo. Para um baixo nível de carregamento, pode-se admitir a existência de um “trecho linear do diagrama tensão-deformação do concreto.

Quanto às deformações últimas, o encurtamento específico de ruptura do concreto é 3,5 ‰ nas seções fletidas e 2 ‰ nas seções submetidas à compressão simples, podendo variar de 2 ‰ à 3,5 ‰ em seções sujeitas a flexão composta nas quais só atuam tensões de compressão. Tais valores foram obtidos a partir de ensaios de flexão composta de curta e longa duração realizados por Rüsç (1981).

### **3.2.3 Concreto Armado**

Este material é formado a partir da combinação do aço, em forma de vergalhões com o concreto. Segundo Isaia (2011), a principal qualidade do concreto armado é a boa resistência mecânica do conjunto concreto-aço – compressão e tração, cujo trabalho conjunto possibilita boa resistência aos esforços de flexão, ou seja, maiores vãos livres com vigas retas ou curvas.

Segundo Carvalho e Pinheiro (2009), o momento fletor causa flexão nos elementos estruturais e nas seções transversais desses elementos surgem tensões normais (perpendiculares a seção). O cálculo dessas tensões será detalhado mais adiante.

#### **3.2.3.1 Princípios básicos para o projeto de Estruturas de Concreto Armado**

Segundo Fusco (2011), a generalização do emprego do concreto armado no começo do século XX, levou à necessidade de se iniciar um processo de regulamentação do que se entendia por segurança das novas construções. Até meados do referido século ainda se determinava as dimensões das peças por meio da comparação direta com as dimensões de peças análogas pertencentes à construções semelhantes que, empiricamente, haviam sido julgadas bem construídas. Posteriormente, avanços nas ciências das Construções permitiram a racionalização do projeto de estruturas que passou a ser feito com a aplicação do método das tensões admissíveis.

#### **3.2.3.2 Método das Tensões Admissíveis**

Fusco (2011) cita relato do Professor Julius Ratzersdorfer, segundo o qual durante a década de 50 a regulamentação dos projetos estruturais teve início com a fixação de valores de cargas de utilização normal, consideradas plausíveis para cada tipo de construção. Em seguida, passou-se a fixar valores das máximas tensões calculadas em regime elástico linear (tensões admissíveis) as quais deveriam ser comparadas as tensões atuantes. Neste método, o princípio da segurança é atendido pela condição  $\sigma_{\max} < \sigma_{\text{adm}}$  em que  $\sigma_{\max}$  é o valor absoluto da maior tensão, de tração ou de compressão, atuante em um ponto da estrutura e  $\sigma_{\text{adm}}$  é cociente da tensão correspondente ao esgotamento da capacidade resistente do material  $\sigma_R$  obtida por meio de ensaios, reduzida por um coeficiente de segurança  $\gamma$  que dependia do material

e da situação considerada. Tal método passou a ser criticado por definir a segurança das estruturas a partir de um único coeficiente global de segurança cujo ajuste era difícil ao se considerar as múltiplas causas de insegurança das estruturas.

### **3.2.3.3 Método dos Estados Limites**

Ainda segundo Fusco (2011), o método dos estados limites foi possibilitado a partir de avanços ocorridos no cálculo estrutural em regime de ruptura e na probabilização das variáveis estruturais. A primeira dessas áreas foi introduzida pelos trabalhos de Langendonck (1937, 1950) cujas idéias foram incorporadas nas NB-1:1950 e NB-1:1960 da ABNT. Já a segunda área, surgiu com a evolução da tecnologia do concreto e passou a tratar a resistência deste material como uma grandeza aleatória, com distribuição normal (gaussiana) de valores.

O método dos estados limites foi criado para racionalizar a segurança das estruturas e dividem-se em estados limites últimos caracterizados pelo esgotamento da integridade da estrutura demandando paralisação total ou parcial em seu uso, e os estados limites de utilização os quais afetam uso regular ou a durabilidade das estruturas. A definição dos estados limites, em especial dos últimos, se dá pelo estabelecimento de valores convencionais para resistências e solicitações anteriores a ruína, uma vez que a determinação do real estado do material nesta condição é inviável devido a mudanças na geometria da seção analisada bem como das propriedades dos materiais no momento da ruptura. Tais valores são designados como valores característicos, os quais são definidos em Fusco (2011) como valores inferiores (caso das resistências) e superiores (caso das solicitações), correspondentes à probabilidade de 5% de serem ultrapassados no sentido desfavorável a segurança.

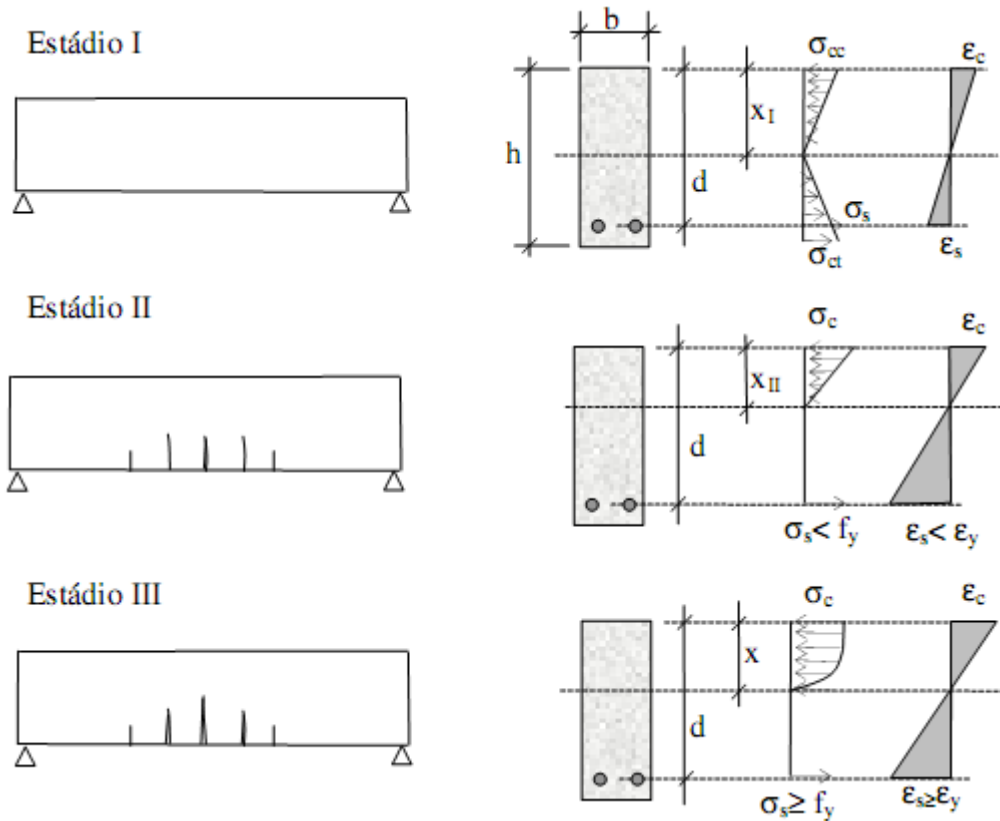
Portanto, a resistência de cálculo  $R_d$  de um material é determinada pelo cociente de sua resistência característica  $R_k$  por um coeficiente de ponderação  $\gamma_m$  (minoração) da resistência. Em contrapartida, a solicitação de cálculo  $S_d$  atuante em uma seção é obtida pelo produto da solicitação característica  $S_k$  por um coeficiente de ponderação  $\gamma_f$  (majoração) das ações.

### **3.2.3.4 Estádios**

Montoya (1991) representa o comportamento da seção transversal no centro de uma viga de concreto armado simplesmente apoiada submetida à duas cargas pontuais

localizadas, respectivamente, a um e dois terços do comprimento da peça em relação a um dos apoios. Nesta configuração, referida seção está submetida a flexão pura ( $V = 0$ ) e, ao se aumentar o momento fletor até que a mesma atinja sua ruína, esta terá passado pelos três níveis de deformação, denominados Estádios, expressos na Figura 3-4

**Fonte de referência não encontrada..**



**Figura 3-4 - Estádios do Concreto Estrutural**

Onde,

h: Altura total da seção transversal de concreto armado.

b: base da seção transversal de concreto armado.

d: Altura útil da seção transversal de concreto armado (distância entre o centro de gravidade da armadura tracionada à fibra mais comprimida da seção).

x: Profundidade da linha neutra (distância entre linha neutra e a fibra mais comprida da seção).

No Estádio I, a baixa intensidade do momento (MI) ainda não faz com que alguma fibra no concreto da seção, submetida à tensão de tração, tenha sua resistência

característica à tração ( $f_{tk}$ ) ultrapassada (não há fissuras visíveis). Também devido à baixa intensidade do momento fletor, considera-se que as tensões nas fibras comprimidas variem linearmente com suas deformações.

No Estádio II, o momento fletor atuante na seção (MII) já faz com que a maioria das fibras do concreto abaixo da linha neutra, ou seja, submetidas à tração, tenham seu  $f_{tk}$  ultrapassado (fissuras visíveis), considerando-se para a região tracionada apenas a resistência da armadura. Neste Estádio, ainda se considera linear o diagrama tensão-deformação do concreto.

No Estádio III, o momento fletor (MIII) se aproxima do valor de ruína (MU) e inicia-se o esmagamento da fibra mais comprimida da seção, o qual se dá a partir do encurtamento específico de 2 ‰ chegando a atingir, sem o acréscimo de tensão, o valor de 3,5 ‰. Quando a ruína já é iminente, o diagrama de tensões tende a ficar na vertical tendo a maioria das fibras comprimidas ultrapassado o encurtamento de ruptura do concreto. Neste Estádio, não é permitida a consideração da linearidade do diagrama tensão-deformação do concreto, e supõe-se que a distribuição de tensões ocorra segundo um diagrama parábola-retângulo.

Os Estádios I e II correspondem a situações de serviço quando são levadas em consideração as ações reais, já e o Estádio III corresponde ao Estado limite último. O programa computacional apresentado neste trabalho considera o Estádio III.

### **3.2.3.5 Domínios de Deformação na Ruína**

Os domínios de deformação da NBR 6118, Figura 3-5, representam os conjuntos de deformações específicas do concreto e do aço, ao longo de uma seção transversal retangular com armadura simples os quais atingem os valores últimos do aço, do concreto, ou de ambos. Logo, cada um desses conjuntos corresponde à ruína da seção no estado limite último.





do aço e do concreto e a profundidade da linha neutra varia de acordo com a deformação de escoamento  $\varepsilon_{yd}$  do aço podendo ser calculada por semelhança de triângulos através da Equação (3.4).

$$\frac{0,0035}{x_3} = \frac{\varepsilon_{yd}}{d - x_3} \quad (3.4)$$

O domínio 4 começa ao término do domínio 3 e segue com a reta de deformação girando em torno do ponto B ( $\varepsilon_c = 3,5 \text{ ‰}$ ) com a deformação na armadura de tração regredindo da deformação de escoamento ( $\varepsilon_s = \varepsilon_{yd}$ ) à deformação ( $\varepsilon_s = 0$ ). Neste domínio ocorre a deformação de ruptura do concreto, porém o aço é subutilizado uma vez que sua deformação fica abaixo da deformação de escoamento. Neste domínio, a profundidade da linha neutra inicia na posição determinada pela Equação (3.4) indo até o centro geométrico da armadura tracionada, posição equivalente à altura útil da seção.

O domínio 4a inicia ao término do domínio 4 e também gira em torno do ponto B ( $\varepsilon_c = 3,5 \text{ ‰}$ ). Sua diferença em relação ao domínio 4 se dá na deformação da armadura que passa a ser negativa ( $\varepsilon_s < 0$ ) de modo que o aço passa a colaborar com o concreto no esforço resistente de compressão. Neste domínio a profundidade da linha neutra varia de  $d$  a  $h$ , estando contida no cobrimento da armadura.

O domínio 5 inicia ao término do domínio 4a com  $\varepsilon_c = 3,5 \text{ ‰}$  e  $\varepsilon_s < 0$ , porém gira em torno do ponto C, o qual corresponde a um encurtamento de  $2 \text{ ‰}$  na fibra a uma distância  $a = 3/7h$  (obtida a partir da semelhança de triângulos aplicada na Equação (3.5) da fibra mais ao topo da seção. O término deste domínio é dá com o encurtamento uniforme de  $2 \text{ ‰}$  da seção, tal fato expressa os valores últimos de deformação do concreto obtidos nos ensaios realizados por Rüsç (1981). Neste domínio a seção se encontra toda comprimida e a profundidade da linha neutra varia de  $h$  a  $+\infty$ .

$$\frac{(0,0035 - 0,0020)}{a} = \frac{0,0020}{h - a} \quad (3.5)$$

### 3.2.4 Materiais de reforço

Conforme exposto no capítulo anterior, o reforço de seções em concreto armado pode ser feito com o uso dos mais variados materiais que vão desde materiais tradicionais, para os quais existem normas técnicas consolidadas no Brasil, a exemplo do próprio concreto armado e das chapas metálicas utilizados nas técnicas de encamisamento, a materiais mais recentes, a exemplo dos polímeros reforçados com fibras (PFR), cujos projetos se baseiam em resultados de trabalhos acadêmicos ou dados dos fabricantes dos produtos. Ocorre que, no tratamento dos dados destes materiais, tem sido comum a não consideração de parâmetros e filosofias de projeto relacionados a segurança estrutural.

A respeito dos polímeros reforçados com fibras, Carneiro (2006) chama a atenção para a variabilidade dos materiais, ao afirmar que: o comportamento e as propriedades dos compósitos dependem não só das características de cada componente, matriz e reforço, mas também da quantidade relativa, do arranjo estrutural e da interação entre eles. Cada combinação resulta em um grupo específico de propriedades do compósito. Essa diversidade de combinações faculta aos materiais compósitos grande versatilidade.

Ribeiro (2005), ao abordar critérios de dimensionamento para reforço do concreto armado com polímeros reforçados com fibra de carbono (PRFC), chama atenção para o problema ao concluir que os PRFC devem ter suas propriedades mecânicas determinadas em ensaios, por metodologias aplicáveis e afetadas de fatores estatísticos cabíveis sendo suas resistências afetadas pelos coeficientes de ponderação adequados. O autor cita um erro comum em projetos de reforços com o uso de PRFC o qual consiste na consideração da resistência a tração e deformação última do fio de carbono ao invés de considerar as propriedades do compósito, o qual é obtido com a laminação ou pultrusão com resinas poliméricas, como um todo.

Cabe aos projetistas de reforços que utilizam PRF buscarem parâmetros em normas já consolidadas, como é o caso da ACI 400 (2001), norma americana que estabelece recomendações para projeto e instalação para esse tipo de reforço, baseada nos estados limites. Com relação ao projeto dos reforços, os objetivos da referida norma são: Estabelecer coeficientes de ponderação adequados e garantir o comportamento dúctil da estrutura após o reforço com a fibra, bem como o comportamento monolítico

da seção reforçada. O primeiro objetivo é buscado com o estabelecimento coeficientes de minoração de resistência, sendo  $\phi$  um fator geral que reduz o momento resistente quando da sua verificação frente o momento solicitante, variando de acordo com a ductilidade da peça reforçada de 0,90 (seção dúctil) a 0,70 (seção frágil), e  $\psi_f$ , um fator de redução aplicado especificamente à contribuição do FRP ao momento resistente da seção. Para evitar rupturas prematuras, o ACI 400 (2001) estabelece parâmetros que limitam as deformações dos FRP, de modo a prevenir o deslocamento do reforço, a saber:  $k_m$ , o qual é inferior a 0,9, além do  $C_E$ , coeficiente de redução ambiental, com valores de 0,5 a 0,95. A Tabela 3-1, de Ribeiro (2005) exhibe valores adaptados do ACI à realidade brasileira. Finalmente, para que seja mantido um suficiente grau de ductilidade, a deformação no aço deve ser superior a 5 % quando o concreto esmagar ou a fibra de FRP romper Carneiro (2006).

<b>Condição de Exposição</b>	<b>Fibra/Tipo de Resina</b>	<b>Fator de redução Ambiental</b>
Elementos protegidos (interiores)	Carbono/Epóxi	0,95
Elementos exteriores (pontes, piers, estacionamentos abertos e etc...)	Carbono/Epóxi	0,85
Ambientes agressivos (indústrias, ETA's ou ETE's e etc...)	Carbono/Epóxi	0,85

**Tabela 3-1 - Fatores de redução por exposição ambiental para PRFC, Ribeiro (2005)**

Cabe ressaltar que tanto a norma americana já mencionada quanto a publicação europeia do CEB-FIP (2001) abordam a consideração de deformações existentes na seção reforçada, enfatizando a necessidade de considerá-las, não devendo as mesmas, porém, compor a deformação do compósito utilizado no reforço. O CEB-FIP (2001) afirma ainda que a distribuição das deformações em uma seção pode ser determinada a partir do momento de serviço atuante,  $M_o$ . Como o momento de serviço é normalmente superior ao momento de fissuração  $M_r$ , o cálculo é feito com base na seção fissurada. A mesma norma permite a desconsideração de  $M_o$ , caso este seja inferior a  $M_r$ .

A mostra a análise de uma seção reforçada com FRP à flexão para o ELU, em que o modo de ruptura se inicia com o esmagamento do concreto  $\epsilon_c = \epsilon_{cu}$ .

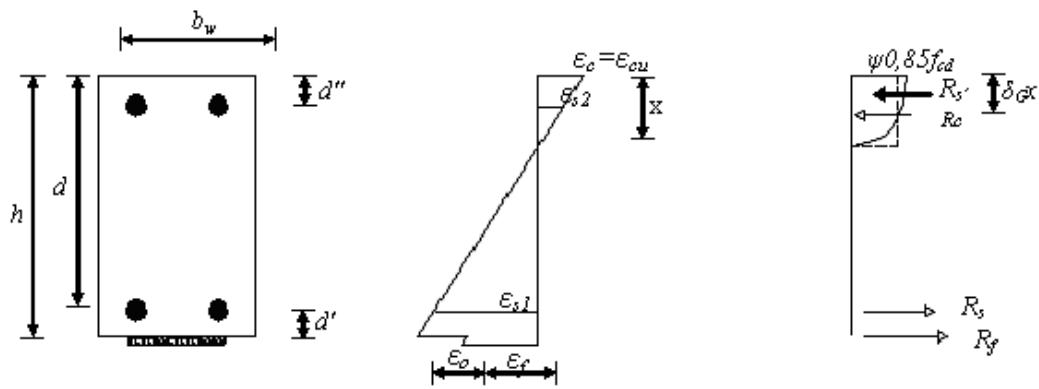


Figura 3-6- seção reforçada com FRP à flexão para o ELU, CEB-FIP (2001)

### 3.3 Diagrama de interação

Cada uma das retas de deformação da seção de concreto armado representada na Figura 3-5 - Domínios de deformação do Concreto Estrutural ABNT(2003), no Item 353.2.3.5, corresponde a um par de esforços (momento fletor e esforço normal) que provocam a ruína da seção no estado limite último. Em suma, para cada par de valores ( $\varepsilon_c$ ,  $\varepsilon_s$ ) corresponde um par de valores resistentes ( $N_d$ ,  $M_d$ ). Ao se relacionar estes esforços em um diagrama sobre um plano cartesiano em que a abscissa contenha os esforços normais e, a ordenada, os momentos fletores, tem-se o Diagrama de Interação Momento Fletor -Esforço Normal da referida seção, Figura 3-7 .

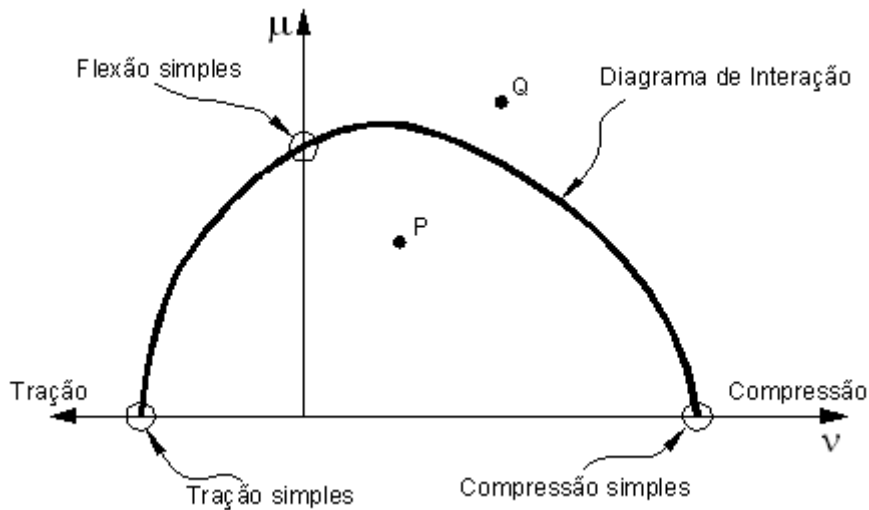


Figura 3-7 – Diagrama de Interação Momento Fletor-Esforço Normal, Dos Prazeres e Gomes(2002)

A aplicação do Diagrama de Interação Momento Fletor – Esforço Normal se deve à praticidade com que este permite que se verifique a ruína de uma seção de concreto armado submetida à Flexão Composta. Basta para tanto a representação no plano cartesiano dos esforços solicitantes (momento fletor e esforço normal) da seção que se pretende analisar (No caso do carregamento estático, tal representação se dará em forma de pontos), se o ponto representado for interno ao diagrama, a exemplo do ponto **P**, significa que a seção resiste, caso contrário, a exemplo do ponto **Q**, há necessidade de redimensionar ou reforçar a seção analisada, uma vez que todos os pontos do diagrama representam combinações de esforços que levam a seção à ruína no estado limite último.

Da aplicação do teorema dos máximos e mínimos para os diagramas de interação dos esforços resistentes da seção, conclui-se que os mesmos devem ser convexos, pois, caso possuíssem um trecho côncavo, uma linha que fosse traçada ligando os dois pontos do referido trecho estaria fora do diagrama. Tal ocorrência permitiria que combinações intermediárias dos esforços correspondentes aos pontos citados levassem a seção à ruína representando uma inconsistência.

### 3.3.1.1 Valores normalizados $\mu$ e $\nu$ .

As letras gregas  $\mu$  e  $\nu$  correspondem a grandezas adimensionais e representam, respectivamente, o momento fletor normalizado, Equação (3.6) e o Esforço normal normalizado pela Equação (3.7). Tal normalização, aliada ao conceito de taxa de armadura ( $\omega$ ), Equação (3.8), possibilita a elaboração de ábacos adimensionais, a exemplo do apresentado na Figura 3-8, com os quais é possível dimensionar um grande leque de seções com razoável precisão de maneira simples. O ábaco apresentado na Figura 3-8 se aplica a seções cuja armadura, composta pelo aço CA50, é simétrica em relação ao eixo horizontal sendo seu cobrimento igual a um décimo da altura total da peça. Nestes casos, basta calcular  $\mu$  e  $\nu$  da peça, localizar o ponto do ábaco correspondente a tais valores adimensionais, obtendo-se de imediato a taxa de armadura da seção e o domínio de deformação no qual a mesma se encontra. A partir daí, basta utilizar a Equação (3.8) para se obter a área de aço resistente aos esforços considerados. Diversos outros exemplos da aplicação de ábacos podem ser encontrados em Fusco (1981).

$$\mu = \frac{M_d}{A_c h f_{cd}} \quad (3.6)$$

$$\nu = \frac{N_d}{A_c f_{cd}} \quad (3.7)$$

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{A_c f_{cd}} \quad (3.8)$$

Onde:

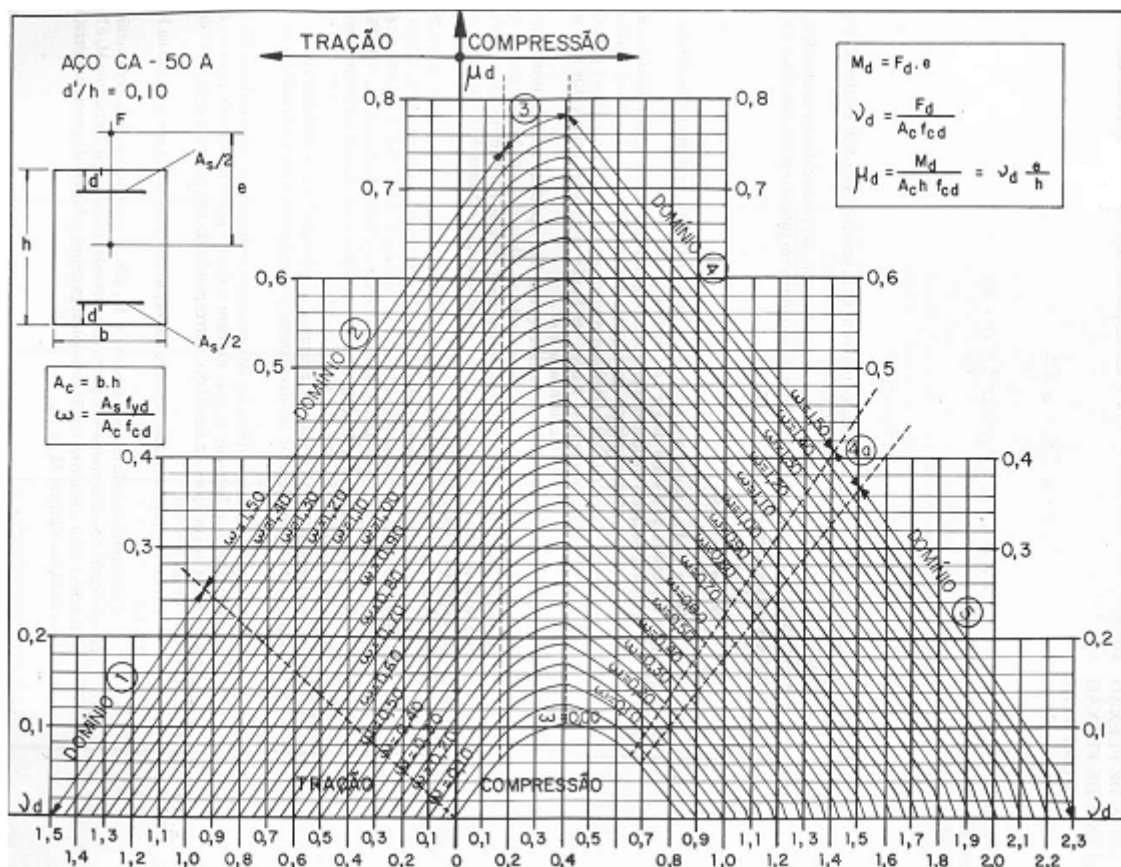
$M_d$  é o momento resistente de cálculo da seção;

$N_d$  é o esforço normal resistente de cálculo da seção;

$A_c$  é a Área da seção de concreto;

$h$  é a altura da seção de concreto ;

$f_{cd}$  é resistência de cálculo do concreto armado.



**Figura 3-8 - Diagrama de Interação Momento Fletor-Esforço Normal para  $d'/h=0,10$  e Aço CA-50, com armadura dupla( $A_s=A's$ ), Fusco (1981).**

Tais ábacos são inviáveis para o dimensionamento de seções de concreto armado reforçadas dada a grande variabilidade de: formatos que estas podem assumir; materiais de reforço que nestas podem ser utilizados; e, principalmente, de estados de tesões aos quais estas podem estar submetidas, os quais, conforme se buscou demonstrar, devem ser considerados. Deste modo, faz-se necessária a obtenção caso a caso dos diagramas de interação Momento fletor-Esforço normal das seções de concreto armado reforçadas.

Do mesmo modo, a utilização dos valores adimensionais das Equações (3.6), (3.7) e (3.8) pedem o sentido para seções de concreto armado reforçadas, uma vez que,

em uma análise individualizada, basta que se obtenha o diagrama de interação da referida seção diretamente a partir dos esforços Md e Nd. As dificuldades advindas de uma análise individualizada podem ser contornadas com o uso de ferramentas computacionais a exemplo do programa apresentado neste trabalho, implementado na plataforma MATLAB®, com o qual se pretende obter diagramas de interação momento fletor - esforço normal de seções de concreto armado reforçadas considerando o estado de tensão da mesma quando da execução do reforço.

### 3.3.1.2 Implementação computacional

A implementação computacional adotada em Dos Prazeres e Gomes (2002) para a obtenção de diagramas de interação momento fletor - esforço normal inicia com a geração automática de pares de deformações  $\epsilon_t$  e  $\epsilon_s$ , no topo da seção de concreto e no centro de gravidade da armadura mais tracionada, respectivamente, os quais varrem N pontos de cada um dos domínios de deformação na ruína da seção, apresentados no item 3.2.3.5, em seqüência, sendo N um dado de entrada do programa.

Conforme se apresentou no item citado, os domínios de deformação 1 e 2 têm sua deformação  $\epsilon_s$  fixada em um alongamento de 10 ‰ e os domínios 3, 4 e 4ª têm sua deformação  $\epsilon_c$  fixada em um alongamento de 3,5 ‰. O programa determina para cada um dos domínios de deformação os valores iniciais e finais dos seus intervalos de deformação variável, para os quais são obtidos incrementos de deformação, a partir da Equação (3.9). Desta forma, são obtidos N+1 valores de deformação variável para cada domínio de deformação somando-se seu incremento ao seu valor inicial de deformação variável, ao resultado desta soma e assim sucessivamente, até que seja atingido seu valor final de deformação variável. Para o domínio 5, os valores de  $\epsilon_t$  e  $\epsilon_s$ , não são fixos, devendo-se aplicar os incrementos em um desses e calcular o outro em função do primeiro. Para a seção da Figura 3-5, o valor de  $\epsilon_t$  em função de  $\epsilon_s$  é dado pela Equação (3.10).

$$incremento = ( \epsilon_{final} - \epsilon_{inicial} ) / N \quad (3.9)$$

$$\epsilon_t = -(0,002 + \epsilon_s)(3h/7)/(d-3h/7) - 0.002 \quad (3.10)$$



### 3.4 Determinação do momento fletor (Md) e do esforço normal (Nd) resultantes de uma seção de concreto armado.

O cálculo dos esforços resultantes da seção é uma etapa crucial na elaboração dos diagramas de interação momento fletor – esforço normal. Uma vez que a precisão do diagrama de interação momento fletor esforço normal será tão maior quanto maior for a quantidade de pontos, pares de esforços. Portanto, o estabelecimento de uma metodologia eficiente para o cálculo dos esforços resistentes influencia o desempenho de um programa computacional destinado a gerar tal diagrama.

#### 3.4.1 Cálculo analítico para seções de CA sem reforço

A Figura 3-9 ilustra os estados de deformações e tensões de uma seção de concreto armado submetida à flexão composta. O cálculo dos esforços resistentes dessa seção é obtido a partir da soma dos esforços no concreto e em cada uma das camadas da armadura, conforme a Equação (3.11).

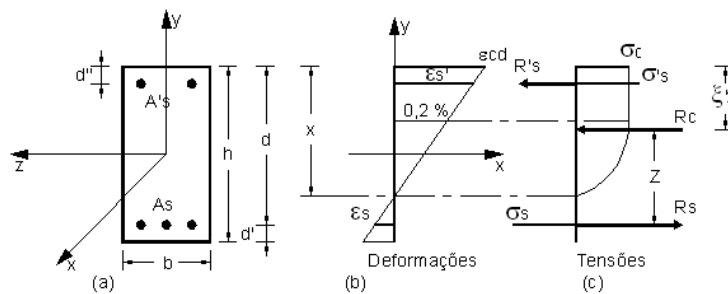


Figura 3-9 Distribuição de deformações e tensões em uma seção retangular de CA

$$N_d = R_c + R_s + R'_s \quad (3.11)$$

Para o cálculo do momento resultante, tendo como eixo de referência aquele adotado por Fusco(1981) (o eixo que passa pelo centro de gravidade da armadura tracionada (inferior)), é necessário calcular os braços de alavanca do eixo de referência ao pontos de aplicação do esforço resultante do concreto, Equação (3.12), e da armadura comprimida (superior). Este último braço de alavanca equivale à altura útil da seção subtraída da distância  $d''$ . Finalmente, o referido momento é calculado com a Equação (3.13)

$$Z = d - \xi'x \quad (3.12)$$

$$M_{ds} = -R_c Z - R'_s (d - d') \quad (3.13)$$

O cálculo das resultantes das forças nas armaduras, nas camadas inferior e superior, consiste no simples produto da área de aço por sua tensão de cálculo  $\sigma_{yd}$ , mostrado nas Equações (3.14) e (3.15)

$$R_s = A_s \sigma_s \quad (3.14)$$

$$R'_s = A'_s \sigma'_s \quad (3.15)$$

Já o cálculo do esforço resultante na seção do concreto é dado pela integral da tensão ao longo de sua área, Equação (3.16), uma vez que se trata de um material cuja distribuição de tensões é não linear.

$$R_c = \int \sigma(y) A_c \quad (3.16)$$

### 3.4.2 Implementação analítica para seções de CA sem reforço

No fluxograma da Figura 3-10, verifica-se que as entradas do algoritmo da implementação analítica são  $\epsilon_t$  e  $\epsilon_s$ , as deformações no topo da seção e no centro de gravidade da armadura tracionada, respectivamente. A partir dessas entradas calcula-se a variável  $\xi$  que equivale à forma adimensional da profundidade da linha neutra obtida a partir do cociente desta pela altura útil  $d$  da seção, Equação (3.17). Com a variável  $\xi$  é possível saber em qual domínio a seção se encontra uma vez que os cada domínio corresponde a um intervalo fixo de valores de  $\xi$ . A cada domínio também corresponde um par de valores  $\alpha$  e  $\xi'$  os quais são valores adimensionais obtidos a partir da integral de área do diagrama parábola retângulo do concreto, Figura 3-9 c), sendo  $\alpha$  um fator que relaciona a área real do referido diagrama com um retângulo de base  $\sigma_{cd}$  e altura  $x$ , e  $\xi'$  a relação entre a distância da fibra mais comprimida ao centro do diagrama parábola e a profundidade  $x$  da linha neutra. A figura mostra a distribuição de tensões no concreto para os domínios 3, 4 e 4a (encurtamento de 3,5 ‰ no topo da seção).

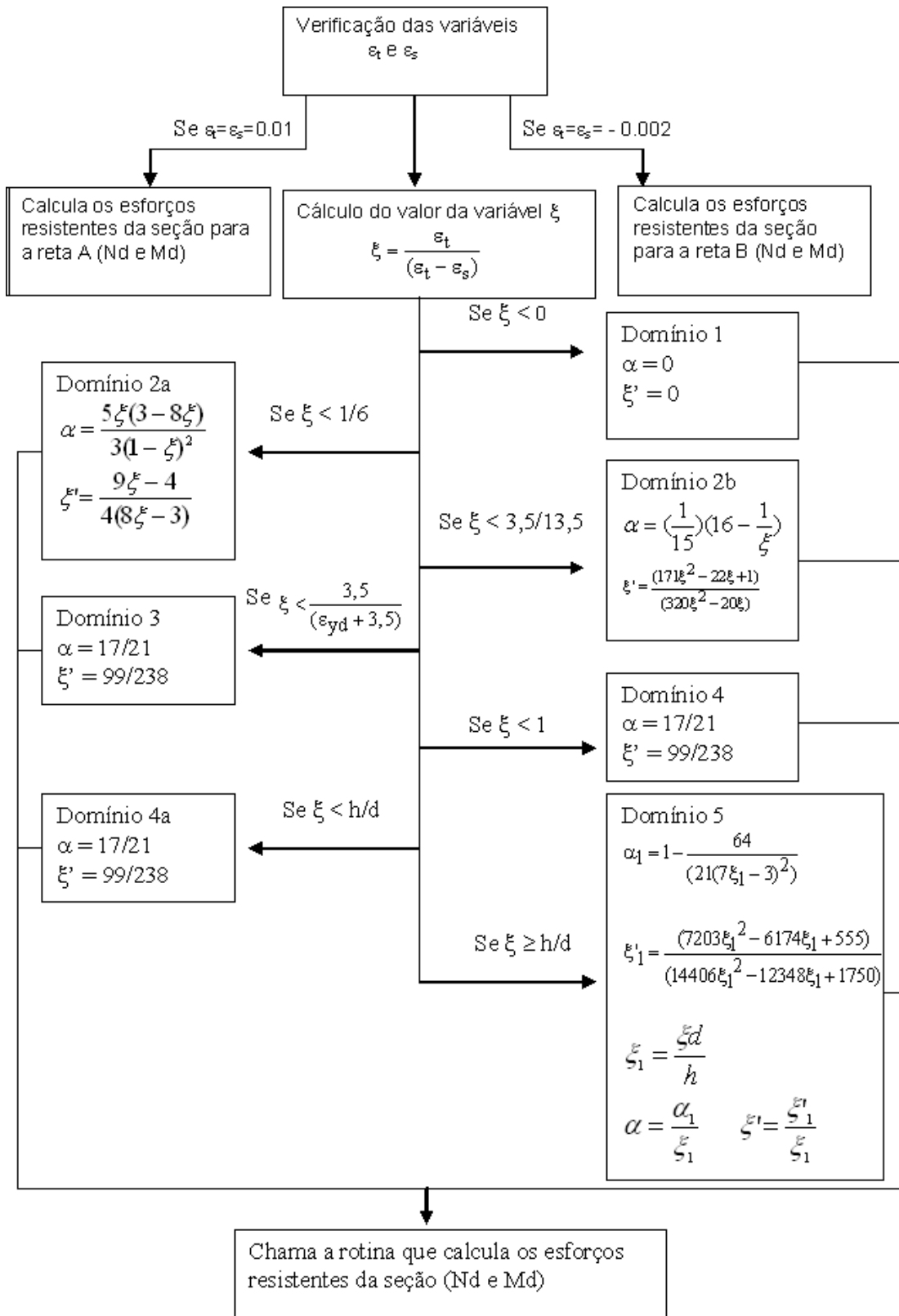
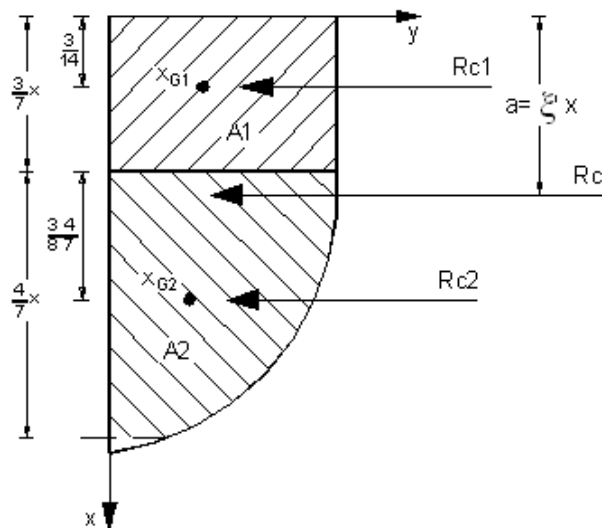


Figura 3-10 – Algoritmo geral de solução analítica, Dos Prazeres e Gomes (2002)



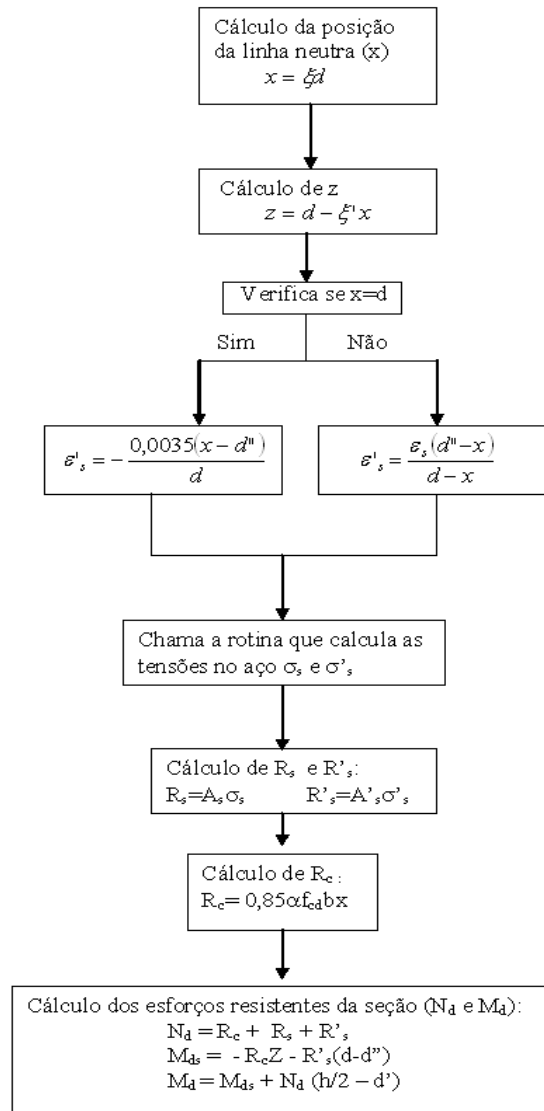
**Figura 3-11- Propriedades geométricas do diagrama parábola retângulo, Dos Prazeres e Gomes (2002).**

Finalmente, de posse das variáveis ora definidas, calcula-se a resultante de compressão **Rc** da seção com a Equação (3.18). Este procedimento numérico baseado na adoção de fatores válidos para seções retangulares de concreto armado substitui a integração da Equação (3.16) a cada posição da linha neutra.

$$\xi = \frac{x}{d} \quad (3.17)$$

$$R_c = abx\sigma_{cd} \quad (3.18)$$

O fluxograma da Figura 3-12 ilustra o algoritmo da rotina que calcula os esforços resistentes da seção (Nd e Md), apresentado em Dos Prazeres e Gomes (2002).



**Figura 3-12 – Algoritmo da rotina que calcula analiticamente os esforços resistentes da seção, Dos Prazeres e Gomes (2002).**

A implantação computacional analítica dos esforços resultantes de seções de concreto armado, apesar de precisa, resulta em códigos complexos voltados para situações específicas, como no caso da solução analítica implementada por Dos Prazeres e Gomes (2002), a qual se restringe ao estado limite último de seções retangulares de concreto armado, Figura 3-9. Neste código, duas variáveis ( $\alpha$  e  $\xi'$ ) apresentam nove condicionantes, conforme se pode observar em seu fluxograma na Figura 3-10. As complexidades ficariam ainda maiores se o esta abordagem fosse feita para vigas de concreto armado reforçadas, dado o número da variabilidade de variáveis relacionadas à geometria da seção e às propriedades dos materiais.

### 3.4.3 Implementação numérica para seções de CA sem reforço

Dos Prazeres e Gomes (2002) definem a obtenção dos diagramas de interação através dos processos de integração numérica aproximada com sendo, de certa forma mais simples e mais intuitiva que o processo analítico, podendo ser implementada para seções de diferentes formatos e composta por outros materiais, que não o concreto armado, além de ser aplicável a qualquer estado de deformação e não apenas ao ELU.

#### 3.4.3.1 Integração numérica

Na prática, a solução numérica consiste em aplicar um método de integração numérica na solução da integral da Equação (3.16), que calcula o esforço resultante no concreto da seção, bem como na determinação do centro de gravidade da área do diagrama de tensões do concreto. A integração numérica consiste na aproximação de uma integral analítica (Equação 3.19) por um somatório (Equação 3.20), onde  $f(x_i)$  é o valor da função no ponto  $x_i$  e  $w_i$  é o peso referente a este ponto.

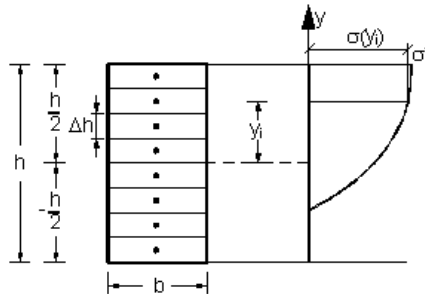
$$y = \int_a^b f(x)dx \quad (3.19)$$

$$y \cong \sum_{i=1}^n f(x_i)w_i \quad (3.20)$$

Em Dos Prazeres e Gomes (2002) são apresentados quatro métodos para a integração numérica, a saber, os métodos: do ponto médio, dos trapézios, e de Simpson, além da quadratura de Gauss. No mesmo trabalho, todos os referidos métodos foram submetidos a uma análise de convergência a qual concluiu que o método do ponto médio é o que apresenta melhores resultados, aproximando-se da solução analítica com precisão de quatro dígitos decimais com dois pontos de integração a menos que os outros métodos, sendo este, portando, o método adotado neste trabalho.

O método do ponto médio, assim como os métodos dos trapézios e de Simpson, quando aplicados ao cálculo do esforço resultante de compressão no concreto de uma seção retangular, partem da divisão da seção transversal em  $n$  camadas de igual altura  $\Delta h$ , sendo mais preciso o resultado quanto maior o número de camadas. Os três métodos citados distinguem-se pelos pesos  $w_i$  atribuídos as camadas no somatório da Equação

(3.20) e pelos pontos representativos de cada região  $y_i$ . No caso do método do ponto médio, o mesmo peso é atribuído a todas as camadas e, como sugere seu próprio nome, o ponto representativo de cada camada é seu ponto médio, conforme ilustra a Figura 3-13.



**Figura 3-13 - método do ponto médio aplicado ao cálculo do esforço resultante de compressão em uma seção retangular de concreto armado extraída de Dos Prazeres e Gomes (2002).**

Nota-se que a tensão do concreto é função dos pontos distribuídos ao longo da altura da seção referenciados em relação ao eixo horizontal que corta a seção na metade de sua altura, o qual passa a ser o eixo de referência da seção. É importante observar que, na comparação entre a solução analítica e numérica deve haver a transformação do momento resultante da seção da primeira solução, na qual adotou-se como eixo de referência a armadura tracionada, visando-se obter o momento resultante em relação ao eixo de referência adotado para a solução analítica, a partir da Equação (3.21)

$$M_d = M_{ds} + N_d (h/2 - d') \quad (3.21)$$

Com o uso das Equações (3.22) e (3.23) obtém-se as soluções aproximadas do esforço e do momento resultantes da seção, respectivamente, pelo método do ponto médio.

$$N_d = \sum_{i=1}^n \sigma(y_i) \Delta h b \quad (3.22)$$

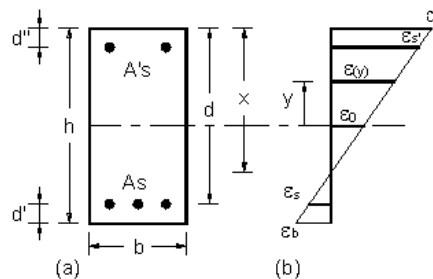
$$M_d = \sum_{i=1}^n \sigma(y_i) y_i \Delta h b \quad (3.23)$$

Onde,  $\sigma(y_i)b$  na Equação (3.22) e  $\sigma(y_i)y_i b$  na Equação (3.23) são as funções e  $\Delta h$  o peso, que no método do ponto médio é constante.

O cálculo de  $\Delta h$  feito pelo programa é dado pela divisão da altura  $h$  da seção pelo número de divisões da mesma  $n$ .

$$\Delta h = \frac{h}{n} \quad (3.24)$$

As deformações no topo da seção e no centro de gravidade da armadura tracionada,  $\varepsilon_t$  e  $\varepsilon_s$ , já não determinam diretamente o estado de deformação da seção. Faz-se necessário calcular a deformação no eixo de referência  $\varepsilon_0$  adotado para a solução numérica, o que é feito em duas etapas com o uso da semelhança de triângulos, a partir da Figura 3-14. Na primeira etapa, calcula-se a deformação na base da seção com a Equação (3.25) e, na segunda etapa, a deformação no eixo de referência é obtida com a Equação (3.26). Outra importante variável a ser calculada é a curvatura  $\phi$  da seção, dada pela Equação (3.27), que, junto com  $\varepsilon_0$ , permite calcular a deformação  $\varepsilon(y)$  de uma fibra distante  $y$  do eixo central da seção a partir da Equação (3.28). Finalmente, a tensão em cada ponto representativo  $\sigma(y)$  é calculada a partir da deformação  $\varepsilon(y)$  com a Equação (3.2), apresentada no início do capítulo, para valores de deformação até 2 ‰ a partir do qual permanece constante até atingir o valor de ruptura de 3,5 ‰.



**Figura 3-14 - Variáveis do estado de deformação para a solução numérica, Dos Prazeres e Gomes (2002)**

$$\varepsilon_b = \varepsilon_t - (\varepsilon_t - \varepsilon_s) \frac{h}{b} \quad (3.25)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_t + \varepsilon_b}{2} \quad (3.26)$$

$$\phi = \frac{-\varepsilon_t + \varepsilon_b}{h} \quad (3.27)$$

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_0 - y_i \phi \quad (3.28)$$



### 3.4.3.2 A matriz de rigidez da seção

Com o uso da solução numérica, é possível obter este importante parâmetro da seção. Sua dedução parte das equações gerais para o cálculo dos esforços resistentes de seção de material homogêneo, Equações (3.29) e (3.30), os quais são função de  $\varepsilon_0$  e de  $\phi$ , conforme o método numérico exposto.

$$N(\varepsilon_0, \phi) = \int \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi)) dA \quad (3.29)$$

$$M(\varepsilon_0, \phi) = - \int \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi)) y dA \quad (3.30)$$

As Equações (3.31) e (3.32) mostram as derivadas parciais da Equações (3.29) e (3.30), respectivamente, as quais relacionam os diferenciais os esforços resistentes da seção com os diferenciais de suas variáveis  $\varepsilon_0$  e  $\phi$ .

$$dN = \frac{\partial N}{\partial \varepsilon_0} d\varepsilon_0 + \frac{\partial N}{\partial \phi} d\phi \quad (3.31)$$

$$dM = \frac{\partial M}{\partial \varepsilon_0} d\varepsilon_0 + \frac{\partial M}{\partial \phi} d\phi \quad (3.32)$$

Da Equação (3.33), obtida ao se colocar as Equações (3.31) e (3.32) na forma matricial, tem-se que a matriz  $k$  é a matriz de rigidez da seção.

$$\begin{Bmatrix} dN \\ dM \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial N}{\partial \phi} \\ \frac{\partial M}{\partial \varepsilon_0} & \frac{\partial M}{\partial \phi} \end{bmatrix}}_k \begin{Bmatrix} d\varepsilon_0 \\ d\phi \end{Bmatrix} \quad (3.33)$$

A Equação (3.35) substitui as Equações (3.29) e (3.30) nos termos da matriz de rigidez  $k$ , e seu desenvolvimento é dado pela Equação (3.34)

$$k = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \int \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi)) dA & \frac{\partial}{\partial \phi} \int \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi)) dA \\ - \frac{\partial}{\partial \varepsilon_0} \int \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi)) y dA & - \frac{\partial}{\partial \phi} \int \sigma(\varepsilon(\varepsilon_0, \phi)) y dA \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$k = \begin{bmatrix} \int \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_0} dA & \int \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} dA \\ -\int \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon_0} y dA & -\int \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} y dA \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

A derivada da tensão em relação à deformação equivale ao módulo de deformação tangente  $\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = E_t(\varepsilon)$ , e as derivadas da Equação (3.28), com a qual se obtém a deformação  $\varepsilon$  em qualquer ponto da seção, em relação à deformação no eixo de referência  $\varepsilon_0$  e da curvatura  $\phi$  da seção resultam, respectivamente, em 1 e  $-y$ , de modo que a Equação (3.35) pode ser reescrita na forma da Equação (3.36).

$$k = \begin{bmatrix} \int E_t(\varepsilon) dA & -\int E_t(\varepsilon) y dA \\ -\int E_t(\varepsilon) y dA & \int E_t(\varepsilon) y^2 dA \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Considerando-se que a seção de concreto armado, representada pela Figura 3-14, é composta pelo concreto e pelas camadas inferior ( $A_s$ ) e Superior ( $A'_s$ ) de armadura da seção, sua matriz de rigidez equivale à soma das matrizes de rigidez dos elementos citados dada pela Equação (3.37), a qual pode ser reduzida à forma da Equação (3.38), onde  $a(y) = \langle 1 \quad -y \rangle$ .

$$k = \begin{bmatrix} E_t \int dA & -E_t \int y dA \\ -E_t \int y dA & E_t \int y^2 dA \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_s(\varepsilon) A_s & -E_s(\varepsilon) y_s A_s \\ -E_s(\varepsilon) y_s A_s & E_s(\varepsilon) y_s^2 A_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E'_s(\varepsilon) A'_s & -E'_s(\varepsilon) y'_s A'_s \\ -E'_s(\varepsilon) y'_s A'_s & E'_s(\varepsilon) y'^2_s A'_s \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

$$k = \int a'(y) E_c(y) a(y) dA + a'(y_s) E_s a(y_s) A_s + a'(y'_s) E'_s a(y'_s) A'_s \quad (3.38)$$

Apesar de se calcular a matriz de rigidez completa, apenas seu primeiro termo  $k_{11}$  é utilizado como parâmetro de rigidez da seção nos diagramas em que a rigidez a flexão é relacionada com o momento fletor e com a curvatura da mesma. Tal parâmetro equivale ao somatório das rigidezes da seção de concreto  $k_{c11}$ , e das camadas superior e inferior da armadura,  $E_s$  e  $E'_s$ , apresentado na Equação (3.39)

$$k_{11} = k_{c11} + E_s + E'_s \quad (3.39)$$

A Figura 3-15 ilustra a rotina da solução numérica para o cálculo dos esforços resistentes com o uso do método do ponto médio.

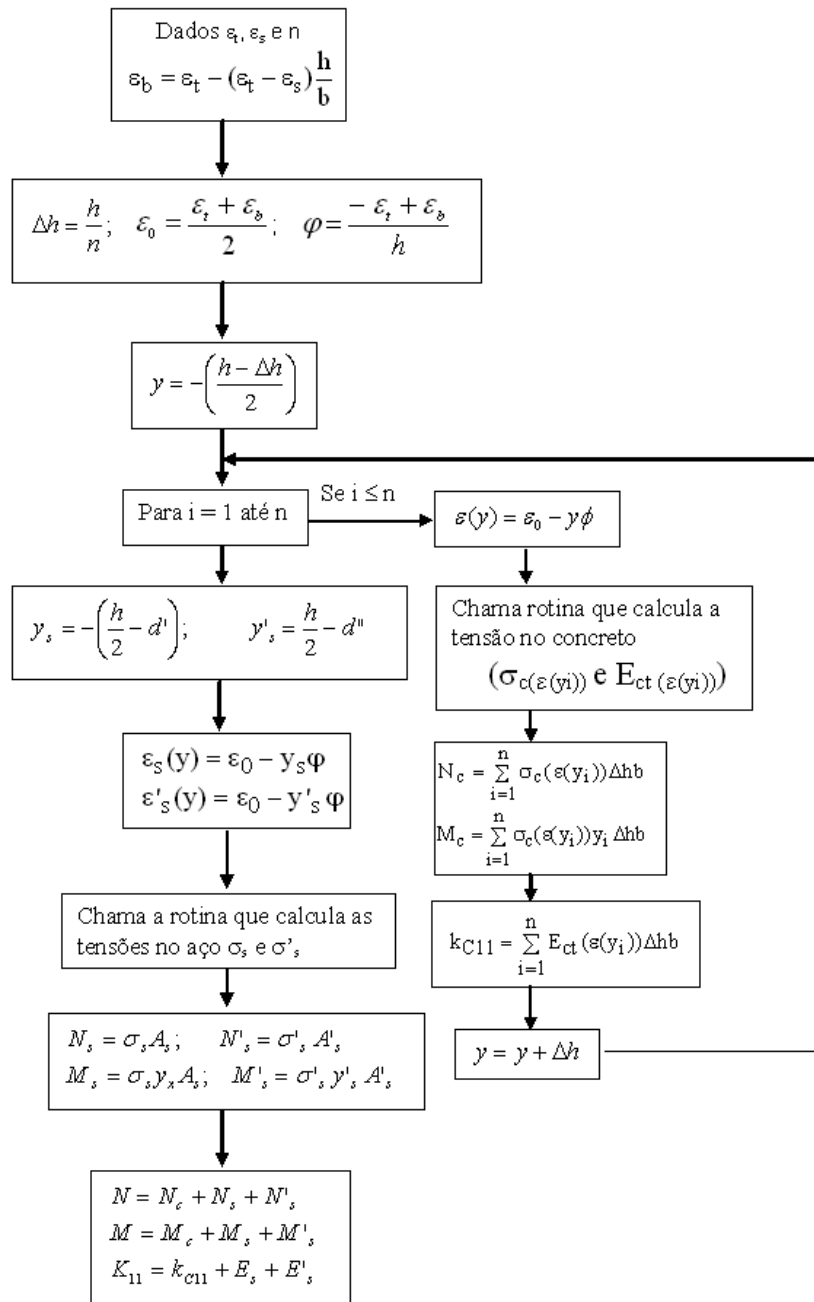


Figura 3-15 - Algoritmo da rotina que calcula numericamente os esforços resistentes da seção com o uso no método do ponto médio, Dos Prazeres e Gomes (2002).

No que se refere à implementação computacional para a aplicação da solução numérica, em adição às propriedades dos materiais, à geometria da seção e seu estado de deformação deve ser fornecida a variável  $n$ , a qual representa o numero de camadas

em que a seção será dividida para a aplicação do método de integração numérica do ponto médio. Ressalta-se que as etapas referentes ao “loop” da rotina apresentada devem ser executadas  $n$  vezes, e que as integrais utilizadas para a obtenção do esforço resultante, do momento fletor e do termo  $k_{C11}$  da matriz de rigidez da seção são calculadas pelos somatórios das Equações (3.22), (2.23) e (3.39), respectivamente.

O procedimento da solução numérica para o cálculo dos esforços resistentes das armaduras é o mesmo da solução analítica uma vez que linearidade do diagrama tensão – deformação de aço e a pequena área deste em relação à área do concreto na seção permitem que o mesmo seja considerado como homogeneamente distribuído ao longo da base da seção, apresentado, cada camada de armadura, uma única distância representativa em relação ao eixo de referência.

### 3.4.4 Cálculo analítico para seções reforçadas

A Figura 3-16 ilustra os estados de deformação e tensão em três situações distintas de uma seção retangular de uma viga de concreto armado sob flexão, a qual é reforçada sob carregamento, à tração. A situação I, conforme já foi exposto, ocorre antes da execução do reforço, e as situações II e III, as se dão posteriormente a execução de reforço e mostram, respectivamente, os estados de deformação e tensão da referida seção com e sem a retirada do carregamento da situação I. Neste trabalho é dada ênfase à situação III.

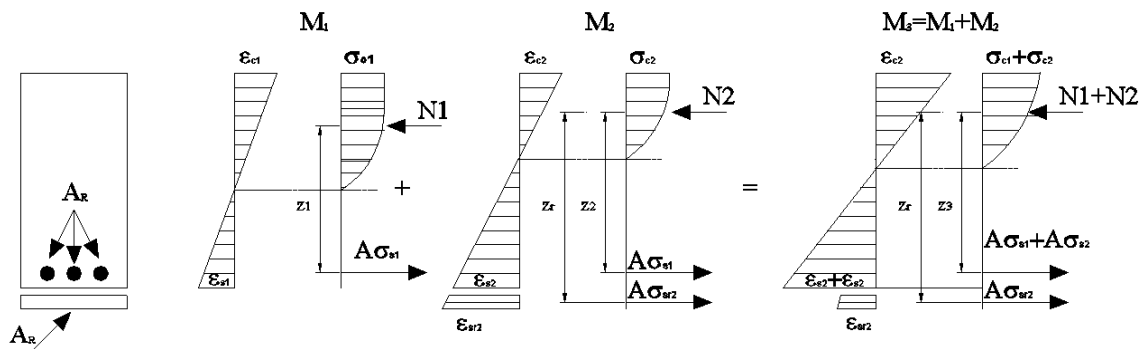


Figura 3-16 – Estado de deformação e tensão para uma peça reforçada sob carga, adaptada de Reis (2003)

Onde,

$M_1$  - momento gerado pela aplicação do pré-carregamento;

$M_2$  - momento gerado pelo acréscimo de carga aplicado após a execução do reforço;

$M_3$  - momento total (pré-carregamento + acréscimo de carga após o reforço);

$A = A_{s1}$  - Área de aço do substrato;

$A_R = A_{s2}$  - Área do material do reforço;

$\epsilon_{c1}$  e  $\sigma_{c1}$  - Deformação e tensão do concreto gerados pelo pré-carregamento;

$\epsilon_{s1}$  e  $\sigma_{s1}$  - Deformação e tensão do aço do substrato gerados pelo pré-carregamento;

$\epsilon_{c2}$  e  $\sigma_{c2}$  - Deformação e tensão do concreto gerados pelo acréscimo de carga após o reforço;

$\epsilon_{s2}$  e  $\sigma_{s2}$  - Deformação e tensão do aço do substrato gerados pelo momento M2;

$\epsilon_{sr2}$  e  $\sigma_{sr2}$  - Deformação e tensão do aço do reforço gerados pelo momento M2;

$N_1$  e  $N_2$  - Resultantes de compressão no concreto em relação a M1 e M2 respectivamente;

$z_r$  - Braço de alavanca da armadura do reforço;

$z_1$  - Braço de alavanca da armadura do substrato devido M1;

$z_2$  - Braço de alavanca da armadura do substrato devido M2;

$z_3$  - Braço de alavanca da armadura do substrato devido M3;

Conforme se observa na Figura 3-16, o estado de tensão na região comprimida das seções leva em consideração a não linearidade física do concreto, obrigatória para o Estádio III. Dessa forma, o cálculo analítico das resultantes de compressão no concreto é feito a partir da integral de área das tensões atuantes no concreto, Equação (3.40)

$$N_1 + N_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{c1} b dh + \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{c2} b dh \quad (3.40)$$

A partir do somatório das forças resultantes em cada um dos materiais da seção (concreto, aço e material do reforço) é possível calcular o esforço normal resultante da mesma, conforme a Equação (3.41).

$$Nd = N_1 + N_2 + A \times (\sigma_{s1} + \sigma_{s2}) + A_R \times \sigma_{sr2} \quad (3.41)$$

No cálculo do momento resultante de seções de concreto armado submetidas à flexão composta, Fusco (1981) adota como eixo de referência aquele que passa pelo cento de gravidade da armadura tracionada, ao se adotar tal eixo para a viga reforçada, obtém-se a Equação (3.42).

$$Md = (N_1 + N_2) \times z_3 + A_R \times \sigma_{sr2} \times (z_R - z_3) \quad (3.42)$$

Importa a escolha do eixo de referência, pois esta influência no valor do momento resistente da peça. Deste modo, o eixo de referência adotado no momento de gerar o diagrama momento fletor – esforço normal de uma seção deve ser o mesmo adotado no momento de se obter os esforços resistentes da mesma. Neste trabalho, o eixo de referência da seção, seja antes ou depois do reforço, coincide com o eixo do centro de gravidade da seção anterior ao reforço.

Os conceitos ora abordados são suficientes para a elaboração de diagramas de interação momento fletor - esforço normal pela varredura dos dominós da NBR 6118, a qual consistia no escopo do presente trabalho, porém revelou-se inviável, conforme se detalha no capítulo seguinte. A abordagem teórica a seguir diz respeito às ferramentas necessárias a um método alternativo para a elaboração dos referidos diagramas, o qual também se detalha no capítulo seguinte, baseado nos picos dos diagramas momento fletor - esforço normal – curvatura.

### 3.5 Diagrama Momento Fletor – Esforço Normal - Curvatura (M-N- $\phi$ )

O diagrama Momento Fletor – Esforço Normal – Curvatura (M-N- $\phi$ ), apresentado na Figura 3-17, assim como os diagramas de interação momento fletor – esforço normal, já apresentados, é uma importante ferramenta gráfica para a análise de seções submetidas à flexão, com o diferencial de conter um parâmetro de deformação da mesma, a saber, sua curvatura. Constitui-se de várias curvas, cada uma correspondendo a um valor fixo de esforço normal aplicado à seção, sendo que cada curva relaciona o momento fletor, nas ordenadas, com curvatura da seção, nas abscissas, partindo da origem (quando o momento fletor e a curvatura da seção são nulos, estando esta submetida apenas a seu esforço normal correspondente) e indo até o vértice da curva (ponto a partir do qual considera-se que a seção não mais resiste ao par de esforços ao qual está submetida). Os valores adimensionais normalizados,  $\mu$ ,  $\nu$  e  $\omega$ , são usualmente aplicados nesta representação gráfica, porém, pelas razões expostas no item 3.3.1.1, não foram utilizados neste trabalho.

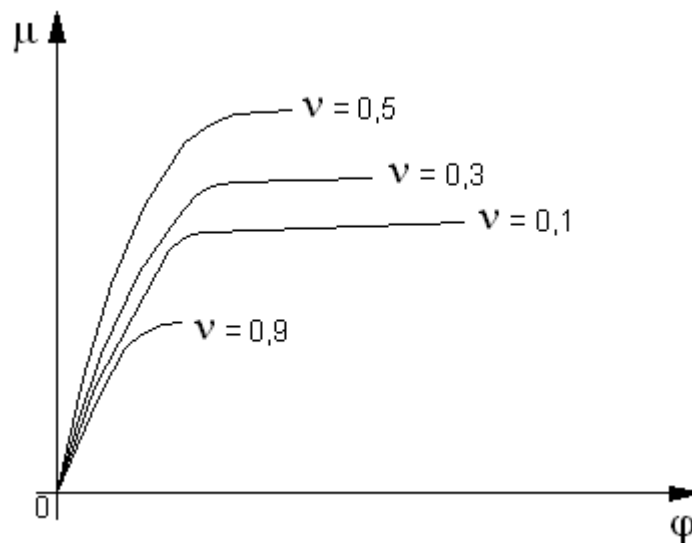


Figura 3-17 - Diagrama Momento Fletor - Esforço Normal – Curvatura

Em seu estudo sobre a deformação de seções de concreto armado, Fusco (1981) parte da consideração de uma barra submetida à flexão simples, conforme a Figura 3-18, da qual tem-se que:

$$AB = r d \phi = ds \quad (3.43)$$

$$CD = (r + y)d\varphi = rd\varphi + yd\varphi = ds + yd\varphi \quad (3.44)$$

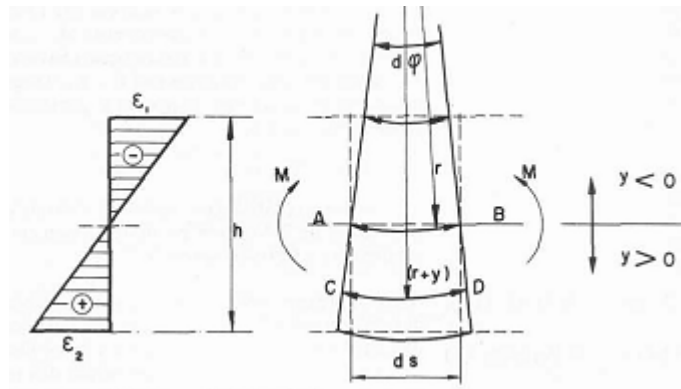


Figura 3-18 - Deformação de uma seção de uma barra submetida à flexão simples, Fusco (1981)

Alternativamente, considerando-se o alongamento da fibra CD, tem-se que:

$$CD = ds(1 + \varepsilon) = ds + \varepsilon ds \quad (3.45)$$

Da substituição de (3.44) em (3.45), resulta

$$yd\varphi = \varepsilon ds \quad (3.46)$$

Logo

$$\frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\varepsilon}{y} \quad (3.47)$$

Em seguida, Fusco (1981) apresenta o caso de uma barra sujeita à flexo-compressão, Figura 3-19, e conclui que sob tal sollicitação, a curvatura da barra não depende da deformação total de suas fibras, mas tão somente da diferença  $\varepsilon - \varepsilon_0$  entre a deformação total e a deformação da fibra situada no nível do centro de gravidade da seção, conforme é dado pela Equação (3.48).

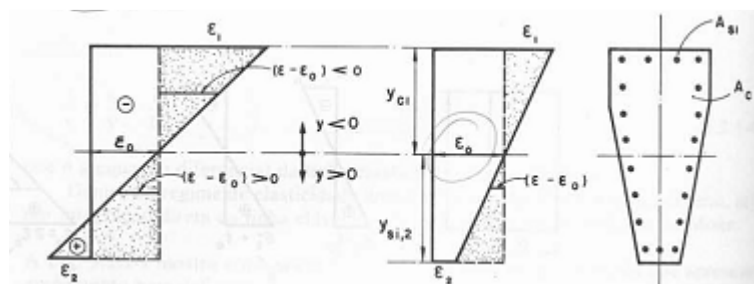


Figura 3-19 - Deformação de uma seção de uma barra submetida à flexo-compressão, Fusco (1981)



$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{y} \quad (3.48)$$

Para o caso da seção de concreto armado, as condições de compatibilidade de deformações são dadas pelas Equações (3.49) e (3.50).

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_c - \varepsilon_0}{y_c} \Rightarrow \varepsilon_c = \frac{\varepsilon_0 + y_c}{r} \quad (3.49)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_{si} - \varepsilon_0}{y_{si}} \Rightarrow \varepsilon_{si} = \frac{\varepsilon_0 + y_{si}}{r} \quad (3.50)$$

Uma vez que as relações constitutivas do concreto e do aço são conhecidas, é possível se obter as tensões em função da curvatura, conforme as Equações (3.51) e (3.52)

$$\sigma_c = \text{função} \varphi_1 \left( \varepsilon_0, \frac{\varepsilon_c}{r} \right) \quad (3.51)$$

$$\sigma_{si} = \text{função} \varphi_2 \left( \varepsilon_0, \frac{\varepsilon_{si}}{r} \right) \quad (3.52)$$

Aplicando-se as condições de equilíbrio de uma seção de concreto armado submetida à flexão composta, dadas pelas Equações (3.53) e (3.54), chega-se as Equações (3.55) e (3.56), as quais permitem a determinação de N e M a partir de 1/r.

$$N = \int \sigma_c dA_c + \sum \sigma_{si} A_{si} \quad (3.53)$$

$$M = \int \sigma_c dA_c y_c + \sum \sigma_{si} A_{si} y_{si} \quad (3.54)$$

$$N = \int \varphi_1 \left( \varepsilon_0, \frac{\varepsilon_c}{r} \right) dA_c + \sum \varphi_2 \left( \varepsilon_0, \frac{\varepsilon_{si}}{r} \right) A_{si} \quad (3.55)$$

$$M = \int \varphi_1 \left( \varepsilon_0, \frac{\varepsilon_c}{r} \right) dA_c y_c + \sum \varphi_2 \left( \varepsilon_0, \frac{\varepsilon_{si}}{r} \right) A_{si} y_{si} \quad (3.56)$$

Com as equações apresentadas neste item, é possível implementar a rotina de Fusco (1981) para a geração de diagramas Momento Fletor - Esforço Normal –

Curvatura, apresentada na Figura 3-20. Para tanto, deve-se estabelecer  $\varepsilon_0$  como parâmetro a ser determinado pelas condições limites das Equações (3.57) e (3.58)

$$\varepsilon_{c,\max} = \varepsilon_{0,\max} + \frac{y_{cl}}{r} < \varepsilon_{cd,\lim} = (-3,5\% \leq \varepsilon_{cd} \leq -2\%) \quad (3.57)$$

$$\varepsilon_{si,\max} = \varepsilon_{0,\max} + \frac{y_{si,2}}{r} < \varepsilon_{sd,\lim} = 10\% \quad (3.58)$$

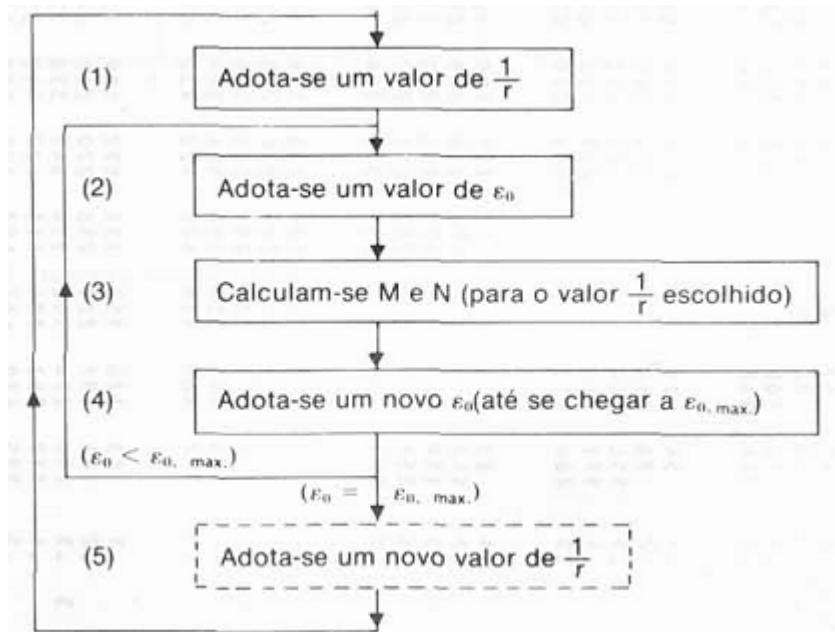


Figura 3-20 - Rotina para a geração de diagramas (M - N - 1/r), Fusco (1981)

Nas Equações (3.55) e (3.55) é possível observar que os esforços internos da seção são funções da deformação no eixo de referência e da curvatura da seção, conforme as Equações (3.59) e (3.60), onde  $\phi = 1/r$ .

$$N_{\text{int}} = N(\varepsilon_0, \phi) \quad (3.59)$$

$$M_{\text{int}} = M(\varepsilon_0, \phi) \quad (3.60)$$

Os passos 2 a 4 da rotina estabelecida por Fusco (1981) consistem basicamente em determinar o valor da deformação no eixo de referencia que levará a seção ao seu ELU. Tal procedimento equivale a buscar o valor de deformação  $\varepsilon_0$  no eixo de

referência que para uma curvatura imposta  $\phi$ , torne o esforço normal resistente igual ao esforço normal solicitante. Trata-se, portanto, de encontrar a raiz da função da Equação (3.59) que satisfaça a Equação (3.61).

$$N_{sd} - N_d(\epsilon_0) = 0 \quad (3.61)$$

Dos Prazeres e Gomes (2002) adota dois métodos numéricos para encontrar raízes de funções com o objetivo de gerar diagramas  $(M - N - \phi)$  de seções não reforçadas de concreto armado, a saber: o método da bisseção e o método de Newton Raphson, concluindo que este último é melhor por apresentar menor tempo de processamento.

### 3.6 O método de Newton Raphson

Trata-se de um método numérico baseado em um procedimento incremental iterativo. Por ser de rápida convergência, é bastante popular na obtenção de raízes de equações não lineares em uma variável, podendo ser facilmente generalizado para funções de varias variáveis.

#### 3.6.1 -Para funções de uma variável

Uma maneira de introduzir o método se baseia no polinômio de Taylor, apresentado na Equação (3.62). O método assume que o valor inicial  $x_0$  adotado se aproxima da raiz  $x$  da função. Ao se igualar o polinômio da Equação (3.62) à zero, obtêm-se a aproximação dada pela Equação (3.63)

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0) + \dots \quad (3.62)$$

$$x \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (3.63)$$

A aproximação obtida pela Equação (3.63) será melhor que o valor inicial adotado, o mesmo vale para as aproximações que se seguirem de modo que quanto maior for o numero  $n_{int}$  de interações apresentado na Equação (3.64) mais preciso será o resultado.

$$x_n \approx x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, n \geq 1 \quad (3.64)$$

A interpretação geométrica do Método de Newton Raphson a partir da equação (3.65) é apresentada na Figura 3-21, extraída de Silva (2011).

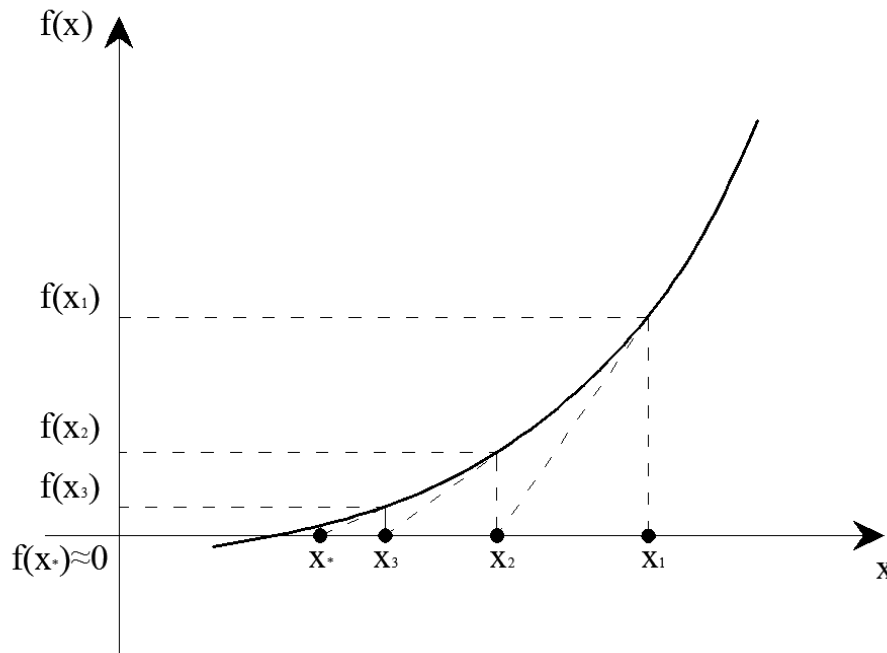


Figura 3-21 - Representação Gráfica do Método de Newton Raphson

### 3.6.1.1 Implementação Computacional

Na prática, por se tratar de um método que aproxima um valor inicial adotado da raiz da função através de várias iterações, convém estabelecer um parâmetro que avalie se uma aproximação obtida é satisfatória (em caso negativo, realiza-se uma nova interação até o limite  $n_{int}$ , em caso positivo, a aproximação obtida é considerada como sendo a raiz da função). Tal parâmetro é denominado tolerância.

### 3.6.2 Para múltiplas variáveis

Analogamente, para um sistema de duas variáveis e usando a série de Taylor, tem-se:

$$\begin{aligned}
f_1(x, y) &= f_1(x_0, y_0) + \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + \dots \\
f_2(x, y) &= f_2(x_0, y_0) + \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + \dots
\end{aligned}
\tag{3.65}$$

Desprezando os termos de ordem superior e reescrevendo a Equação (3.65) na forma matricial, obtêm-se a Equação, onde  $J$  é denominada matriz Jacobiana.

$$\begin{Bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{Bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{bmatrix}}_J \begin{Bmatrix} (x - x_0) \\ (y - y_0) \end{Bmatrix}
\tag{3.66}$$

Igualando as funções  $f_1(x, y) = 0$  e  $f_2(x, y) = 0$ , obtêm-se a seguinte fórmula de iteratividade dada pela equação (3.67).

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x} & \frac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_1(x_0, y_0) \\ f_2(x_0, y_0) \end{Bmatrix}
\tag{3.67}$$

Em um caso mais geral, para um sistema de  $n$  equações e  $n$  variáveis, tem-se.

$$\begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ \vdots \\ x_n^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} f'_{11} & f'_{12} & \dots & f'_{1n} \\ f'_{21} & f'_{22} & \dots & f'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f'_{n1} & f'_{n2} & \dots & f'_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \\ f_2(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \\ \vdots \\ f_n(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \end{Bmatrix}
\tag{3.68}$$

Reescrevendo a equação (3.68) de forma compacta, é obtida a forma geral de iteratividade para sistemas de varias variáveis a partir do método de Newton Raphson.

$$\{x^{k+1}\} = \{x^k\} - [J(x^k)]^{-1} \{f(x^k)\}
\tag{3.69}$$

## **CAPITULO 4 - IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL**

---

### **4.1 Um breve histórico**

A partir do estudo da formulação desenvolvida no capítulo anterior, buscou-se a implementação de um método para gerar diagramas de interação dos esforços resistentes de seções reforçadas de concreto armado baseado no método numérico adotado por Dos Prazeres e Gomes (2002), o qual inicia com a varredura dos domínios de deformação da NBR6118. Ressalta-se que o programa desenvolvido por estes autores é válido para seções retangulares e esta limitação foi mantida, a princípio, uma vez que o principal interesse estava na viabilidade do método. A implementação para seções reforçadas que teve como base o programa desenvolvido em Dos Prazeres e Gomes (2002) será doravante chamado de programa 1.

Uma vez que o método testado provou-se inviável, conforme será detalhado mais adiante, partiu-se para o desenvolvimento de uma nova metodologia para a elaboração de diagramas de interação de esforços resistentes, sem a utilização de valores normativos. Neste método, a seção é submetida a um “ensaio teórico”, em que esforços normais solicitantes e curvaturas crescentes são impostos e, quando ocorre o esmagamento de alguma fibra da seção de concreto, ou o alongamento excessivo do aço em alguma camada, os valores de esforço normal e momento são armazenados, e o “ensaio teórico reinicia com novos valores de esforços normais solicitantes e curvaturas.

Com a apresentação de resultados consistentes pela metodologia desenvolvida, buscou-se expandir o escopo do trabalho de modo a permitir a generalização dos formatos de seções bem como a consideração de múltiplas regiões compondo a seção analisada, possibilitando a análise de seções de estruturas construídas em etapas, conforme será detalhado mais adiante. Visando simplificar a implementação desta expansão, optou-se por utilizar o programa SECLAB, desenvolvido pelo Professor Remo Magalhães de Souza, o qual realiza a análise de seções poligonais quaisquer de concreto armado pela varredura dos domínios da NBR 6118. A implementação para seções reforçadas que teve como base o programa SECLAB será doravante chamado de programa 2.

## 4.2 Dados de Entrada

### 4.2.1 Para o programa 1

No programam apresentado em Dos Prazeres e Gomes (2002) a geometria da seção é definida a partir da base ( $b$ ) e altura ( $h$ ) da seção de concreto armado, cobrimento das armaduras inferior ( $d$ ) e superior ( $d'$ ), taxa de armadura ( $\omega$ ), resistências características do concreto ( $f_{ck}$ ) e do aço ( $f_{yk}$ ), módulo de elasticidade do aço ( $f_{yk}$ ). Na implementação inicial referente ao escopo do presente trabalho, programa 1, faz-se necessário informar os dados do reforço utilizado. Optou-se por estabelecer como método de reforço padrão o encamisamento em concreto armado, devido à complexidade envolvida em sua análise, a qual permite que outros métodos e materiais de reforço (chapas metálicas e polímeros reforçados com fibras) sejam implantados com simplicidade. Logo, os parâmetros que devem ser informados para a seção do reforço são os mesmos da seção original (os primeiros se diferenciam dos segundos por apresentarem a letra r) acrescidos da distância vertical entre o centro de gravidade da seção original e o da seção reforçada ( $o_{sy}$ ), conforme se pode observar na Figura 4-1.

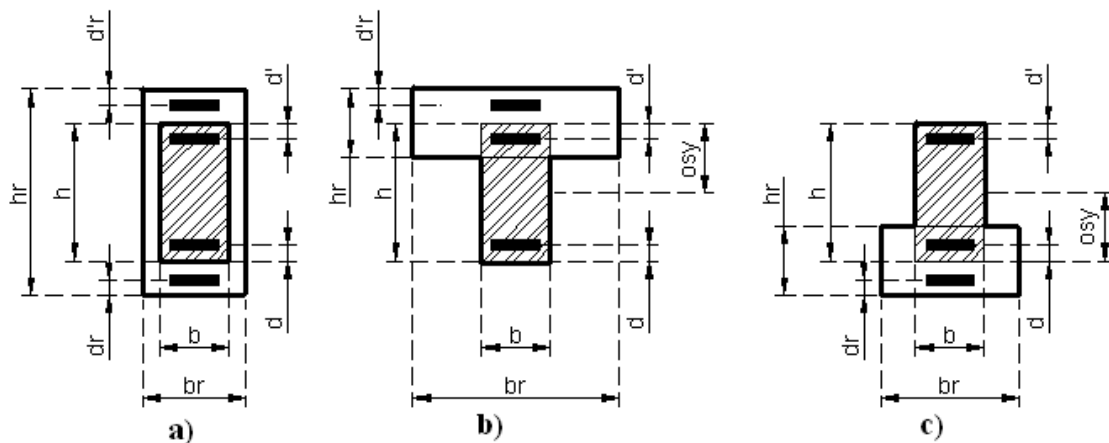


Figura 4-1 - Entrada de dados das propriedades da seção

A Figura 4-1 mostra três seções que podem ser obtidas a partir dos dados de entrada disponíveis. Cada uma delas é composta por duas formas retangulares sendo a que contém hachura correspondente à seção original. Nota-se que a interseção entre o retângulo da seção original e o da seção reforçada é considerada como pertencente à seção original. Na letra (a), tem-se uma seção completamente encamisada, típica de um pilar reforçado. Neste caso  $o_{sy} = 0$  uma vez que o centro geométrico da seção original

coincide com o da seção reforçada. Na letra (b), apresenta-se uma seção típica de uma viga reforçada à compressão, com  $osy > 0$ . Finalmente, a letra (c) representa uma seção típica de uma viga reforçada à tração, com  $osy < 0$ .

#### 4.2.2 Para o programa 2

No programa 2, a maneira como é definida a geometria da seção de concreto é a mesma utilizada no SECLAB, a partir de uma matriz que contem as coordenadas dos nós do polígono que define a seção, com o diferencial de que deve ser feita uma matriz para cada região da seção reforçada. As intercessões entre regiões não são consideradas automaticamente de modo que, tomando como exemplo a seção da Figura 4-1 a), a região da seção correspondente ao reforço deve ser definida como uma seção vazada. A Figura 4-2 mostra a seqüência de pontos necessários para a definição de uma seção vazada no SECLAB/Programa 2. Nota-se que a seqüência dos pontos externos da região vazada seguem o sentido anti-horário, e a dos internos segue o sentido horário. A armadura correspondente a cada região é definida por um vetor para cada camada, o qual contem: coordenadas iniciais e finais, diâmetro das barras e número de barras na camada. As propriedades dos materiais também são definidas por região.

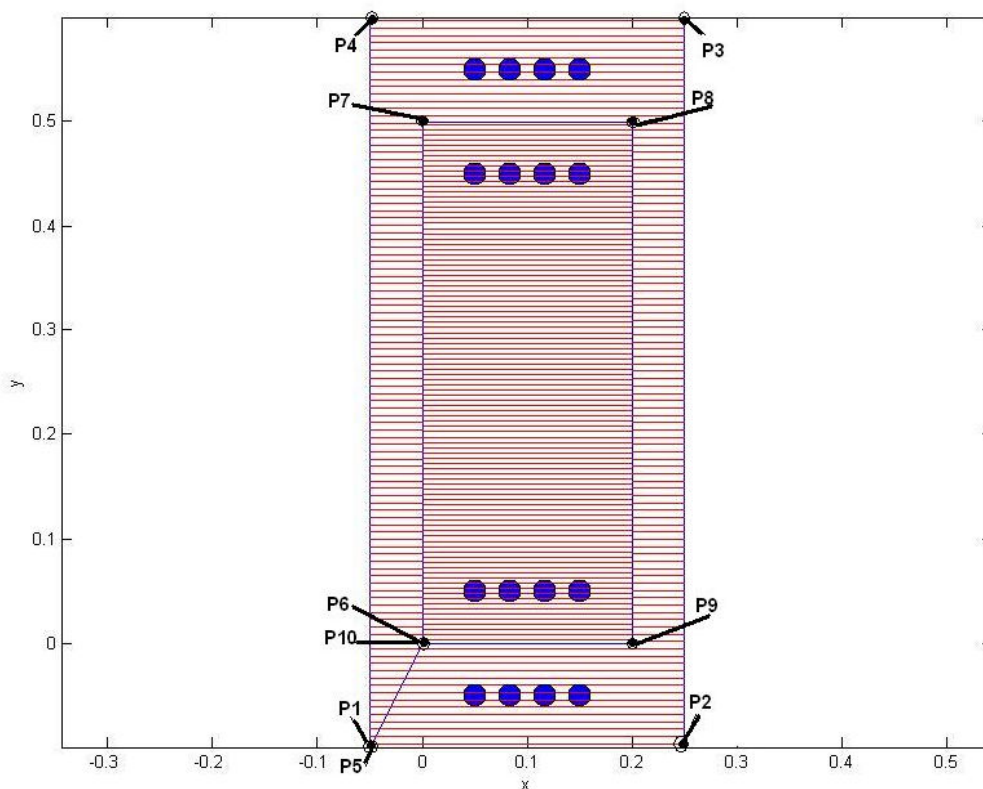


Figura 4-2 – Seqüência de pontos para a definição de uma seção vazada no SECLAB



O Programa 2 dois processa cada região individualmente, calculando suas propriedades geométricas e dividindo-as em camadas com o uso de um algoritmo de hachura. Os esforços resultantes também são calculados pelo método dos pontos médios, sendo que, no cálculo dos momentos resultantes em todas as regiões, toma-se como eixo de referência aquele que passa pelo centróide da primeira região.

### 4.3 Análise de seções de estruturas construídas em etapas

A análise de uma seção reforçada considerando o estado de tensões anterior ao reforço pode ser interpretada como a análise de uma seção construída em duas etapas considerando o estado de tensões da primeira etapa quando da construção da segunda. Assim, foi possível generalizar o Programa 2 de modo a permitir a análise de uma seção construída em várias etapas, considerando, a cada etapa  $n$ , o estado de tensões da etapa  $n-1$ . A Figura 4-3 ilustra uma seção construída em quatro etapas, cada uma delas acrescentando uma região à seção. Ao se analisar esta seção definindo as quatro regiões pelo programa 2, inicia-se com a determinação do estado de deformação da primeira etapa, composta pela região 1, o qual é considerado na determinação do estado de tensões da segunda etapa, composta pelas regiões 1 e 2, e assim por diante, até a última etapa, cujo estado de tensões leva em consideração os estados de tensões acumulados de todas as etapas anteriores. O Programa 1 só se aplica a duas etapas.

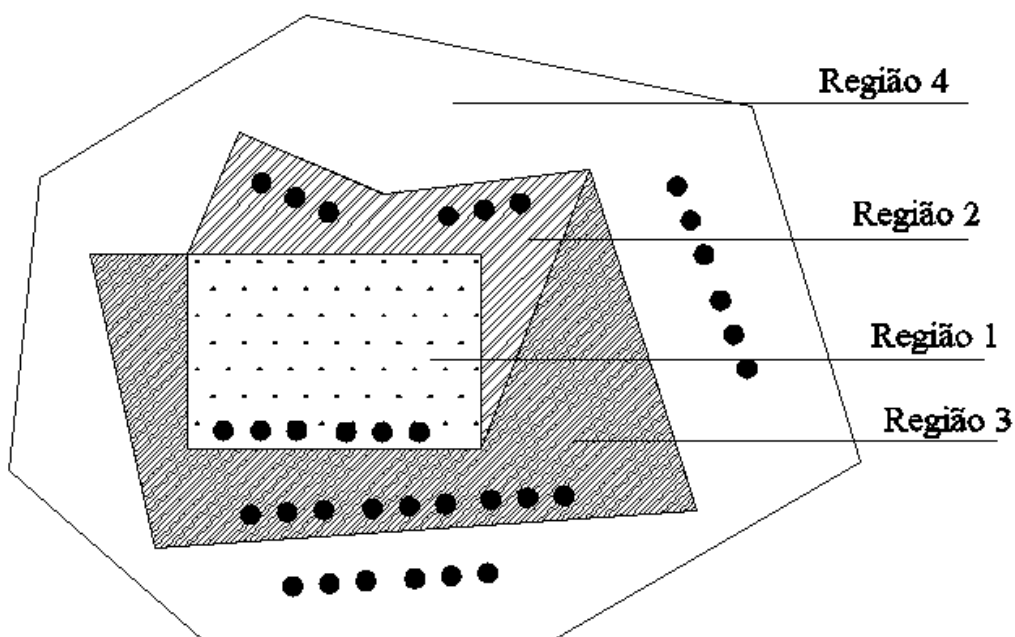


Figura 4-3 – seção construída em quatro etapas

#### 4.4 Consideração do estado de deformações anterior ao reforço.

A consideração do estado de tensões anterior ao reforço inicia com a definição do referido estado. No Programa 1, o mesmo é definido a partir de um vetor de deformações iniciais  $g = (\varepsilon_{0g}, \phi_g)$  contendo a deformação no eixo de referência e a curvatura da seção anterior ao reforço. Durante a integração numérica dos esforços da seção, o programa realiza um teste lógico para detectar as fibras contidas pela seção anterior ao reforço. Neste caso, a deformação é dada pela deformação inicial somada a deformação da seção reforçada na referida fibra, a partir da Equação (4.1), caso contrário, apenas a deformação na seção reforçada é considerada, mantendo-se a Equação (3.28). Observa-se que a deformação da seção reforçada refere-se àquela provocada pelo acréscimo de carga.

$$\varepsilon(y) = (\varepsilon_{0g} - y_i \phi_g) + (\varepsilon_0 - y_i \phi) \quad (4.1)$$

No Programa 2, define-se para cada região um par esforço e momento solicitantes, referentes ao acréscimo de carga de cada etapa construtiva. O programa calcula o estado de deformações na primeira região, referente ao par de esforços definido para a mesma com o uso da Equação (3.28), em seguida, para a segunda região, calcula-se as deformações da seção com o uso da equação (4.1). Para o caso de mais de duas regiões definidas, cada uma das etapas subsequentes, considera os acúmulos de deformação das etapas anteriores.

#### 4.5 Implementação do método dos picos dos diagramas (M – N – $\phi$ )

A geração de diagramas de interação com picos dos diagramas (M – N –  $\phi$ ) consiste em submeter a seção de concreto armado à um “ensaio teórico”, onde aplica-se à esta um esforço normal constante seguido da imposição de curvaturas que iniciam do zero e crescem até que se atinja a ruína da seção, caracterizada pela mudança de trajetória do seu diagrama momento fletor – curvatura. Desta forma os picos do referido diagrama, correspondem a combinações de esforço normal e momento fletor que levam a seção à ruína, bastando que essas combinações sejam inseridas em um eixo cartesiano, para que seja obtido o diagrama de esforços reais da seção.

Com a imposição de um esforço normal solicitante e de uma curvatura à seção, faz-se necessário encontrar a deformação no eixo de referência que, combinada a esta

última, faça com que o esforço resistente da peça se iguale ao esforço solicitante imposto de modo a atender a Equação (3.61), isso é feito com a utilização o método de Newton Raphson. Com o par de valores  $(\varepsilon_0, \phi)$  que satisfaz a referida condição, calcula-se o momento fletor resistente da seção. Em seguida, verifica-se se o pico do referido diagrama foi atingido. Em caso negativo, impõe-se um curvatura maior à seção, repetindo-se os procedimentos seguintes a este, em caso afirmativo, o momento fletor resistente do pico do diagrama momento fletor – curvatura, e o esforço normal solicitante imposto são inseridos no diagrama de interação momento fletor – esforço normal, passando-se a buscar um no ponto, a partir da imposição de um novo esforço normal solicitante seguida da repetição dos procedimentos seguintes, conforme fluxograma da Figura 4-4.

A verificação se cada um dos momentos fletores resistentes calculados corresponde ao pico do seu respectivo diagrama momento fletor – curvatura é feita a partir da obtenção do coeficiente angular de uma reta secante ao diagrama (EI) da qual fazem parte o ponto que esta sendo obtido (n) e o ponto obtido anteriormente (n-1), dado pela Equação (4.2). Caso o referido coeficiente angular seja negativo, o ponto (n) corresponderá ao pico do seu diagrama momento fletor – curvatura.

$$EI_{(n-1)} = \frac{(Md_{(n)} - Md_{(n-1)})}{(\phi_{(n)} - \phi_{(n-1)})} \quad (4.2)$$

A Figura 4-4 mostra o fluxograma do programa que gera diagrama de interação de esforços a partir dos picos dos diagramas (M – N –  $\phi$ ) da seção. Observa-se que a rotina chega ao fim quando o intervalo pré-estabelecido de esforços normais solicitantes impostos é varrido completamente. Tal intervalo é determinado com uma análise preliminar em que se calcula o esforço resistente de compressão referente a um encurtamento uniforme de 3,5 ‰ e o esforço resistente das armaduras alongadas, uniformemente, em 10 ‰ (retas b e a dos domínios de deformação da NBR 6118).

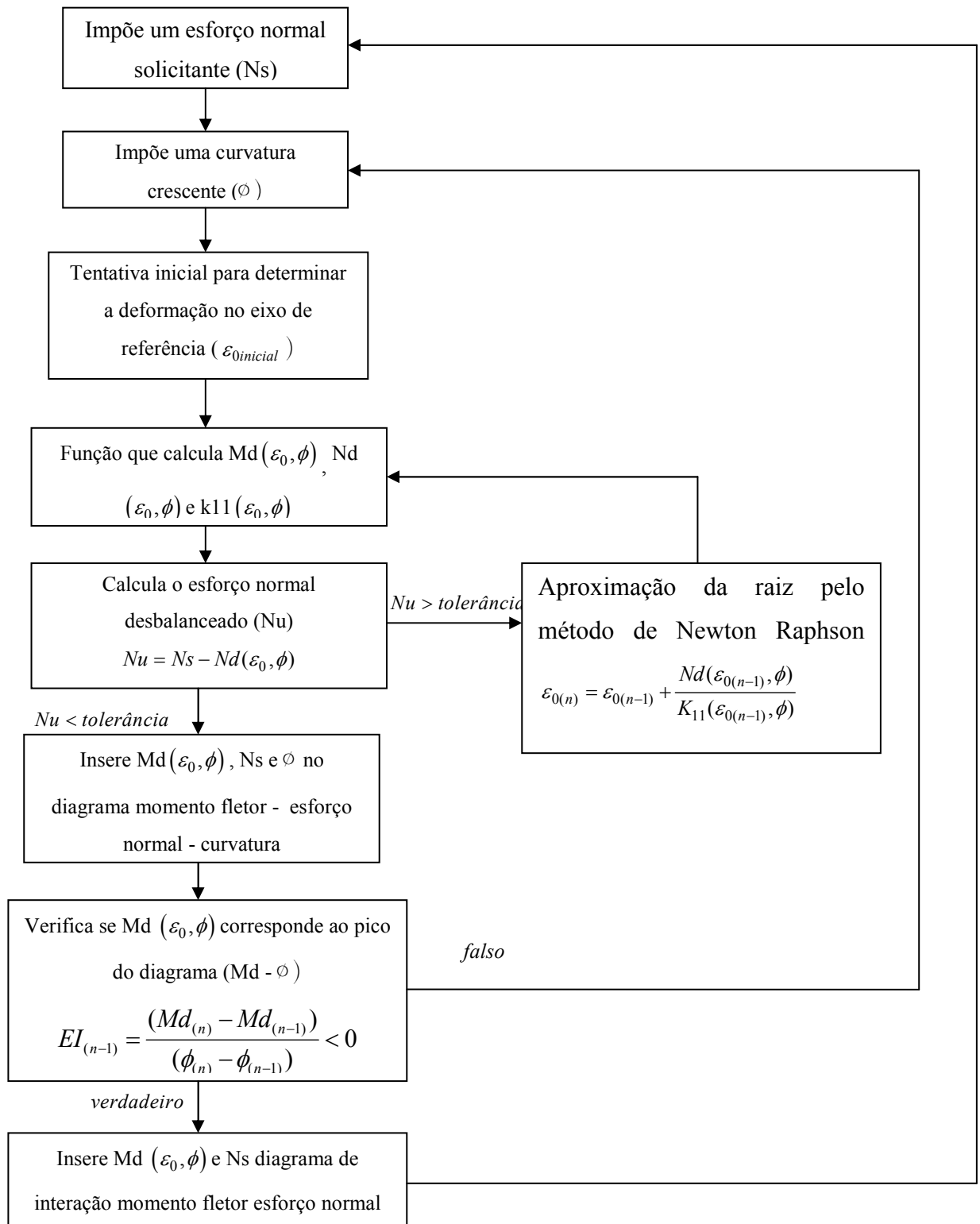


Figura 4-4 - Fluxograma da rotina do programa apresentado neste trabalho

## CAPITULO 5 - RESULTADOS

### 5.1 Aplicação do método numérico utilizado por Dos Prazeres e Gomes (2002) na análise de seções reforçadas

A Figura 5-1 mostra os diagramas de interação de esforços da seção mostrada na Figura 4-2, a qual consiste em uma seção composta por duas regiões concêntricas (pode-se tratar de uma seção reforçada por encamisamento total) e cujos dados de entrada pra o programa 1 encontram-se na Tabela 5-1.

b (cm)	h(cm)	dlb(cm)	dl(cm)	fck(kgf/cm)	fyk(kgf/cm)	Es(kgf/cm)
20	50	5	5	200	5000	2100000
br(cm)	hr(cm)	dlbr(cm)	dlr(cm)	fckr(kgf/cm)	fykr(kgf/cm)	osy(cm)
30	70	5	5	200	5000	0

Tabela 5-1 – Propriedades da seção testada

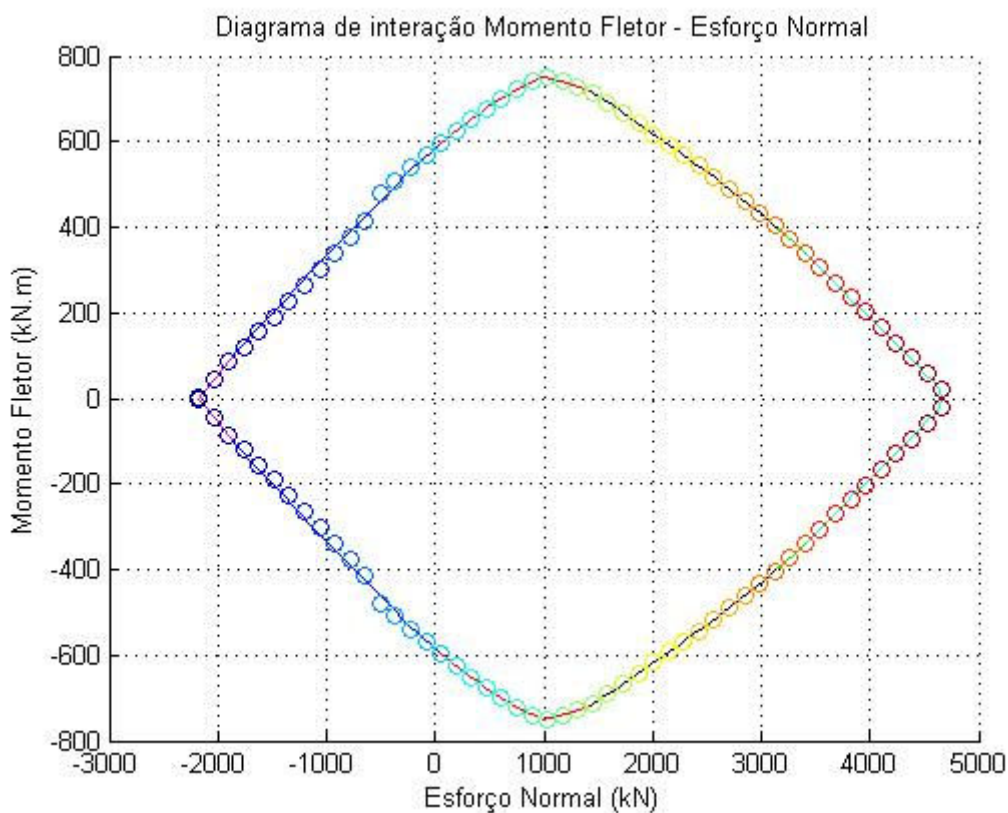


Figura 5-1 –Diagramas de interação, obtido com o programa 1, sem estado de tensões iniciais na região interna

Este exemplo mostra a comparação entre os dois métodos desenvolvidos, sendo que a linha contínua representa o diagrama de interação obtido com o método da varredura dos domínios da NBR 6118 e os círculos representam os picos do diagramas momento fletor – esforço normal - curvatura, quando não há estado de tensões iniciais na região interna da seção. A equivalência mostra a eficácia do segundo método, uma vez que a aplicação do método da varredura dos domínios da NBR 6118 tem eficácia comprovada, quando não há tensões iniciais.

No entanto, ao se adotar para a mesma seção um estado de deformações anterior ao reforço (estado inicial de tensões), cujo vetor de deformações iniciais  $(\varepsilon_0, \phi)$  adotado apresenta os valores  $(0,0003 -0,0072)$  os quais correspondem a um par de esforços de 100kN, compressão, e 200kN, momento negativo, observou-se que os diagramas de interação de esforços, Figura 5-2, resistentes não mais coincidem. O diagrama em linha perde a forma esperada ao apresentar trechos côncavos.

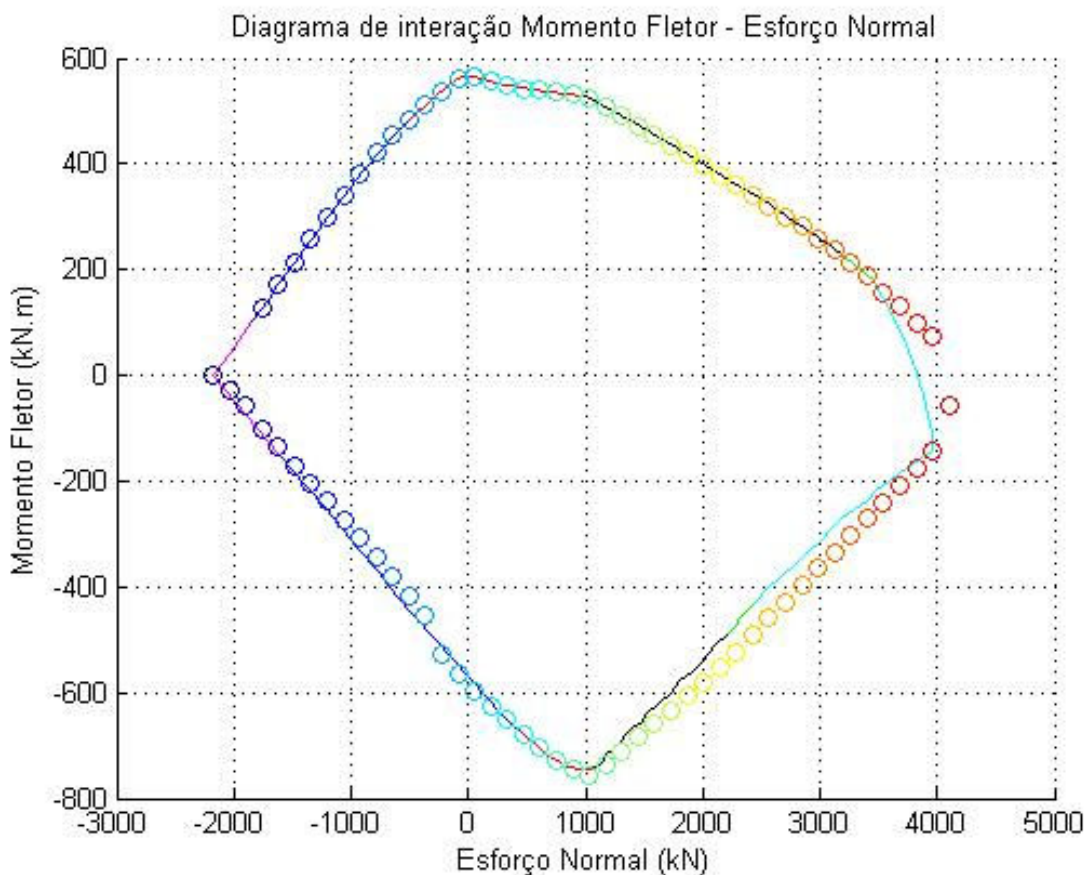
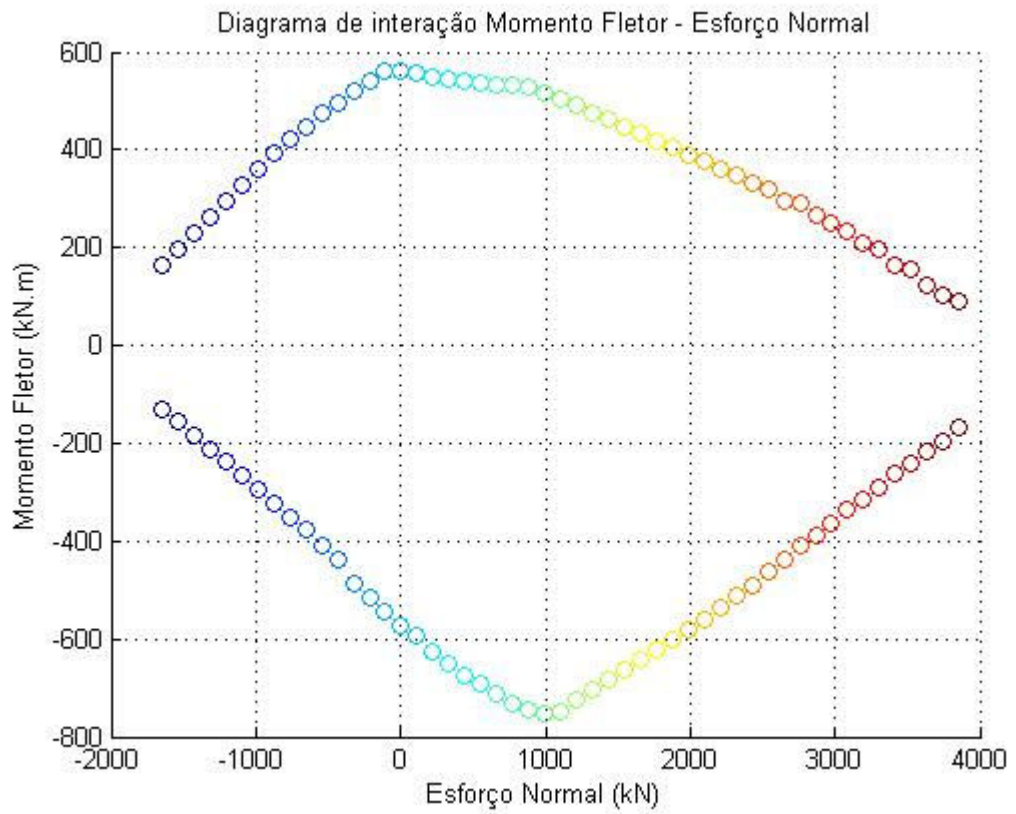


Figura 5-2 - Diagramas de interação, obtido com o programa 1, com estado de tensões iniciais na região interna referente a compressão de 100kN e momento negativo de 200kN

Após a análise da metodologia utilizada por Dos Prazeres e Gomes (2002), concluiu-se que as inconsistências observadas se deram pelo fato de os domínios de deformação da Norma brasileira não serem válidos para seções submetidas a estados de deformações iniciais, pois, neste caso, as condições de ELU, a saber: encurtamento de 3,5 ‰ no concreto do topo da seção e alongamento de 10 ‰ no aço da armadura inferior, adotadas não abrangem todos os estados de deformação que levam a seção à ruína, uma vez que, a depender do estado inicial de tensões a ruína pode ocorrer em uma fibra interna da seção. Estudou-se a possibilidade de implementar novas condições limites de modo a reparar a inconsistência encontrada. No entanto, a solução encontrada é restrita ao caso estudado, prejudicando o objetivo do trabalho ao dificultar a implementação de seções de concreto com geometria variada reforçadas por diversos tipos de matérias. Passou-se a estudar uma nova metodologia de análise. Portanto, a obtenção de diagramas de interação a partir da varredura dos domínios da NBR 6118 para os casos em que se deve considerar o estado de tensões iniciais da seção mostrou-se inviável. Entretanto, o dos picos dos diagramas ( $M - N - \phi$ ) apresentou problemas de convergência nas proximidades da tração ou da compressão uniforme (retas a e b dos domínios de deformação).

A Figura 5-3 apresenta o diagrama obtido com o uso do Programa 2, considerando a mesma seção e o mesmo estado inicial aplicado na obtenção dos diagramas da Figura 5-2 com o Programa 1. Apesar de ambos os diagramas compostos por círculos terem sido obtidos por meio dos picos dos diagramas ( $M - N - \phi$ ) da seção, a equivalência verificada na comparação entre os mesmos permitiu a validação, em ambos os programas, das rotinas de cálculo dos esforços resistentes, bem como das metodologias adotadas na consideração de seções compostas por múltiplas regiões.



**Figura 5-3 - Diagramas de interação, obtido com o programa 2, com estado de tensões iniciais na região interna referente a compressão de 100kN e momento negativo de 200kN**



## CAPITULO 6 - CONCLUSÕES E METAS PARA TRABALHOS FUTUROS

---

A inviabilidade da aplicação da varredura dos domínios da NBR6118 para a obtenção de diagramas de interação de esforços resistentes de seções submetidas a deformações anteriores à execução do reforço possibilitou uma importante reflexão a respeito das complexidades envolvidas neste tipo de análise, levando à implementação de um método predominantemente teórico o qual possibilita o cumprimento da tarefa a que se propôs o presente trabalho sem que o programa desenvolvido se limite a critérios normativos específicos, aumentando assim sua versatilidade.

A elaboração de diagramas de interação de esforços por meio dos picos dos diagramas momento fletor – esforço normal – curvatura mostrou ser um método consistente no que se refere a análise de seções de concreto reforçadas (ou construídas em etapas) considerando o estado inicial de tensões.

A implementação realizada com base no programa SECLAB, denominada programa 2, possibilitou uma importante ampliação no escopo deste trabalho uma vez que possibilita a análise de seções quaisquer construídas em n etapas construtivas.

Faz-se necessário a implementação de métodos numéricos mais estáveis (melhoramentos no método de Newton Raphson), a exemplo do método do comprimento de arco, não suscetíveis a problemas de convergência nas proximidades retas a e b dos domínios de deformação da seção.

Resta desenvolver um método que possibilite a aferição do programa uma vez que não se encontrou um programa que realize a análise ora proposta utilizando diagramas de interação momento fletor – esforço normal.

Comparar os resultados do programa apresentado com aqueles obtidos em ensaios experimentais, resguardadas as considerações de fissuração e fluência no concreto.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACI Committee 440. **Guide for the Design and Construction of Externally Bonded FRP Systems for Strengthening Concrete Structures**, 2001.
- AGUILAR J, JUAREZ H, ORTEGA R & IGLESIAS J. **The Mexico earthquake of September 19, 1985. Statistics of damage and retrofitting techniques in reinforced concrete buildings affected by the 1985 earthquake.** Earthquake Spectra, 1989.
- ALMEIDA, T. G. M. **Reforço de Vigas de Concreto Armado por Meio de Cabos Externos Protendidos.** Tese M.Sc. Escola de Engenharia de São Carlos /USP, São Carlos, SP, Brasil, 2001.
- ALTIN, S., ERSOY, U. and TANKUT, T. **Hysteretic Response of Reinforced-Concrete Infilled Frames.** Journal of Structural Engineering, 1992. Vol. 118, No. 8, pp. 2133-2150.
- ARAÚJO, C. M. **Reforço De Vigas De Concreto À Flexão E Ao Cisalhamento Com Tecidos De Fibra De Carbono.** Tese M. Sc. COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 2002.
- ARAVINTHAN, THIRU and SUNTHARAVADIVEL, T. G. **Effects of existing shear damage on externally post tensioned repair of bent caps.** Journal of Structural Engineering, 2007. 133 (11). pp. 1662-1669.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT).  
NBR 6118:2003. **Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento.**  
Rio de Janeiro: ABNT, 2004.
- BADOUX, M. and JIRSA, J.O. **Steel Bracing of RC Frame for Seismic Retrofitting.** Journal of Structural Engineering, 1990. Vol. 116, No. 1, pp. 55-74.
- BAI, Jong-Wha. **Seismic retrofit for RC building Structures.** University of Texas, 2003.
- BAUER, L. A. F. **Materiais de Construção.** 3.ed. Rio de Janeiro, 1988.
- BOLETIM 14 DO FIB (CEB-FIP) – **Externally Bonded FRP Reinforcement for RC Structures** Technical Report, Lausanne, Suíça, 2001.
- BUSH, T.D., JONES, E.A., and Jirsa, J.O. **Behavior of RC Frame Strengthened Using Structural Steel Bracing.** Journal of Structural Engineering, 1991. Vol. 117, No. 4, pp. 1115-1126.
- CARNEIRO, R. J. de F. M. **Análise de vigas protendidas de pontes Reforçadas à flexão com polímeros estruturados com fibras de carbono submetidas a carregamentos estático e cíclico.** Tese de Doutorado UNB, 2006.
- CARVALHO, R. C. e PINHEIRO, L. M. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado.** Volume 2. São Paulo, 2009.

CERQUEIRA, E. **Reforço ao Cisalhamento de Vigas de Concreto Armado com Fibras de Carbono**. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2000.

CHIOREAN, C. G. **Computerised Interaction Diagrams And Moment Capacity Contours For Composite Steel-Concrete Cross-Sections**. Engineering Structures, 2010.

DE SOUZA, R. M. **Laboratório de seções - SECLAB Programa para a análise estrutural de seções quaisquer**. NICAIE/ UFPA, Belém, 2010.

DOS PRAZERES, P. G. C. e GOMES, J. J. dos S. **Aplicação De Métodos Numéricos Na Análise Computacional De Seções De Concreto Armado Submetidas A Flexão Composta**. TCC, UFPA, Belém, 2002.

ENGINDENIZ, M., KAHN, L. F. and ZUREICK, A. H. **Repair and Strengthening of Reinforced Concrete Beam-Column Joints: State of the Art**. ACI Structural Journal, March-April 2005

ESCOBAR, C. J. **Avaliação Do Desempenho Estrutural De Vigas De Concreto Armado Reforçadas Com Lâminas De CFRP Tensionadas**. Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Construção Civil, setor de Engenharia, Universidade Federal do Paraná, 2003.

FUSCO, Péricles Brasiliense. **Estruturas de concreto: solicitações normais**. Rio de Janeiro: LTC, 1981.

FUSCO, Péricles Brasiliense. **Princípios Básicos para Projeto de Estruturas de Concreto Armado**. Concreto: Ciência e Tecnologia. IBRACON, São Paulo, 2011.

HARAJLI, M. H. **Strengthening of Concrete Beams by External Prestressing**. PCI Journal, 1993. 38(6), 76-88.

HELLESLAND, J. & GREEN R. **Tests of repaired reinforced concrete columns**. Journal of the American Concrete Institute, December 1972: 770–774.

INUKAI, M. and KAMINOSONO, T. **Seismic Performance of an existing RC frame retrofitted by Precast Prestressed Concrete Shear Walls**. 12th World Conference on Earthquake Engineering. 2000. Paper No. 2246.

ISAIA, Geraldo Cechella. **A evolução do Concreto Estructural**. Concreto: Ciência e Tecnologia. IBRACON, São Paulo, 2011.

JCI TC 952 – **JCI Committee TC 952**, Tokyo, 1997.

JIRSA, James O. **Research on seismic rehabilitation of RC Structures – Past and Future**. University of Texas , 2000.

JÚLIO, E. S., BRANCO, F. and SILVA, V. D. **Structural rehabilitation of columns with reinforced concrete jacketing**. Prog. Struct. Engng Mater, 2003. 5:29–37

JUVANDES, L. F. P. e FIGUEIRAS, J. A. **Critérios de Dimensionamento e Segurança para projetos de reforço com compósitos FRP**. Encontro Nacional Sobre Betão Estrutural, FEUP, Porto, 2000.

JUVANDES, L. F. P. **Reforço e Reabilitação de Estruturas - Módulo 2**. Formação profissional - Ordem dos Engenheiros, 2002.

KAM, W. Y. and PAMPANIN, S. **Selective Weakening and Post-tensioning for Retrofit of Non-Ductile R.C. Exterior Beam-Column Joints**. Dept. of Civil and Natural Resources Engineering. University of Canterbury, Christchurch, New Zealand, 2010.

LANGENDONCK, T. van. **Os Novos Métodos de Dimensionamento das Peças Flectidas de Concreto Armado**. Boletim de Instituto de Engenharia, São Paulo, 1937.

LANGENDONCK, T. van. **Cálculo de Concreto Armado**. Associação Brasileira de Cimento Portland, São Paulo, 1950.

LOMBARD, J., HUMAR, J.L. and CHEUNG, M.S. **Seismic Strengthening and Repair of Reinforced Concrete Shear Walls**. 12th World Conference on Earthquake Engineering, 2000. Paper No. 2032.

MEHTA, P. K. e MONTEIRO, P. J. M. **Concreto – Microestrutura, propriedades e Materiais**. 3ª Ed. São Paulo, 2008.

MENDES NETO, F. **Concreto Estrutural Avançado**, PINI, 1ª Edição. São Paulo, 2009

MONTOYA, P. J., MESEGUER, A. G. y CABRÉ, F. M. **Hormigón armado**. 13. Ed. Barcelona, 1991.

MUTSUYOSHI, H., ARAVINTHAN, T., and HIKIMURA, T. **Retrofitting of RC and PC Beams with External Tendons and Steel Plate**. Proceedings of Second International Conference on Concrete under Severe Conditions-Environment and Loading (CONSEC'98), 1998. Tromso, Norway, 1176-1184.

PIANCASTELLI, Elvio Mosci. **Patologia e Terapia das Estruturas – Reforço com Concreto**. Ed. Depto. Estruturas da EEUFMG, 1997

PINCHEIRA, J.A. and JIRSA, J.O. **Seismic Response of RC Frames Retrofitted with Steel Braces or Walls**. Journal of Structural Engineering, 1995. Vol. 121, No. 8, pp. 1225-1235.

PINTO, C. **Reforço à Flexão de Vigas de Concreto Armado com Fibras de Carbono**. Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2000.

REIS, A. P. A. e DE HANAI, J. B. **Reforço De Vigas De Concreto Armado Submetidas A Pré-Carregamento E Ações de Longa Duração com Aplicação de**

- Concretos de Alta Resistência e Concretos Com Fibras De Aço.** Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, 2003. V. 8, n. 33, p. 29-52.
- RIBEIRO, P. de T. P. **Critérios para Dimensionamento de Reforço de Concreto Armado Com Elementos Compósitos de Fibra de Carbono.** Congresso de Pontes e Estruturas, 2005.
- RÜSCH, H. **Researches Toward a General Flexural Theory for Structural Concrete.** Journal of the American Concrete Institute, Detroit, 1960.
- RÜSCH, H. **Concreto Armado e Protendido.** Rio de Janeiro, 1981.
- SANTOS, E. W. F. **Reforço De Vigas De Concreto Armado À Flexão Por Encamisamento Parcial.** Dissertação de Mestrado COPPE/UFRJ, 2006.
- SILVA, E. M. **Formulação e Implementação Computacional para Análise Não-Linear Física de Estruturas de Concreto Armado sob o Estado Plano de Tensões, Utilizando o Método dos Elementos Finitos.** Dissertação de Mestrado PPGEC/UFPA, 2011.
- SUGANO S. **Seismic strengthening of existing reinforced buildings in Japan.** Bulletin of the New Zealand National Society for Earthquake Engineering, 1981.14(4): 209–222.
- SUMITRO, S., HIDA, K. and LE DIOURON, T. **Structural Health Monitoring Paradigm For Concrete Structures.** Japan, 2003.
- TAN, K. H., and TJANDRA, R. A. **Strengthening of Continuous Beams Using Various External Tendon Profiles.** 1st fib Congress, 2002. Osaka, Japan.
- TERAN-GILMORE, A., BERTERO, V.V., and YOUSSEF, N. **Seismic Rehabilitation of Framed Buildings Infilled with Unreinforced Masonry Walls Using Post-tensioned Steel Braces.** UCB/EERC-95/06, Berkeley: Earthquake Engineering Research Center (EERC), University of California, CA, 1995.
- TRIANAFILLOU, T. **Strengthening of Structures with Advanced FRPs.** Progress in Structural Engineering and Materials, 1998, v.1, N.2, p.126-134.