



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA**

**FELIPE DOS ANJOS NEVES**

**Modelagem direta bidimensional do método  
magnetotelúrico com o método dos elementos  
finitos de arestas**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**BELÉM-PARÁ**

**2014**

**FELIPE DOS ANJOS NEVES**

**Modelagem direta bidimensional do método  
magnetotelúrico com o método dos elementos finitos de  
arestas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação  
em Geofísica da Universidade Federal do Pará, em  
cumprimento às exigências para obtenção do grau de  
Mestre em Geofísica.

Orientador: Victor Cezar Tocantins de Souza  
Coorientador: Saulo Pomponet Oliveira

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

---

Neves, Felipe dos Anjos, 1984-  
Modelagem direta bidimensional do método  
magnetotelúrico com o método dos elementos  
finitos de arestas / Felipe dos Anjos Neves. -  
2014.

Orientador: Victor Cezar Tocantins de  
Souza;

Coorientador: Saulo Pomponet Oliveira.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal  
do Pará, Instituto de Geociências, Programa de  
Pós-Graduação em Geofísica, Belém, 2014.

1. Prospecção magnetotelúrica. 2. Prospecção  
- Métodos geofísicos. 3. Método dos elementos  
finitos. I. Título.

CDD 22. ed. 622.153

---

**FELIPE DOS ANJOS NEVES**

**Modelagem direta bidimensional do método  
magnetotelúrico com o método dos elementos finitos de  
arestas**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Geofísica da Universidade Federal do Pará, em cumprimento às exigências para obtenção do grau de Mestre em Geofísica.

Data de Aprovação: 24/02/2014

Banca Examinadora:



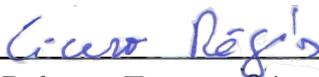
---

Professor Victor Cezar Tocantins de Souza (Orientador)  
Doutor em geofísica  
Universidade federal do Pará – UFPA



---

Professor Saulo Pomponet de Oliveira (Coorientador)  
Doutor em matemática aplicada  
Universidade federal do Paraná – UFPR



---

Professor Cícero Roberto Teixeira Régis (Membro)  
Doutor em geofísica  
Universidade federal do Pará – UFPA

Dedico este trabalho à minha família.

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a algumas pessoas que encontrei pelo caminho e que de alguma forma contribuíram para este trabalho. Não fosse o meu amigo Rodrigo Rangel ter me informado sobre as qualidades dos trabalhos publicados pela UFPA e não fosse eu ter conhecido o meu amigo paraense Rivaly Kardec, talvez eu não teria vindo para Belém. Não fosse a enorme, e talvez irrecompensável, ajuda da minha amiga Eliny e o apoio de seus pais, sr. Rui e dona Elita, não teria suportado as dificuldades que encontrei de início. Não fosse o apoio da dona Marlene, do sr. Olivaldo e principalmente da Débora, não teria persistido até o final.

Agradeço à compreensão de toda a minha família, em especial às minhas avós Marias, ao meu avô Josias, à minha mãe e aos meus irmãos Michele, Renato e Gabriela.

Gostaria de agradecer aos colegas do PROEM, principalmente ao Walesson pela enorme ajuda em diversos detalhes que contribuíram para este trabalho e ao Mateus Barriga pelas discussões sempre divergentes que afinal foram muito esclarecedoras.

Agradeço aos professores do CPGf/UFPA, em especial ao meu orientador, o professor Dr. Victor Cezar Tocantins de Souza, pelas inúmeras ideias e ao professor Dr. Cícero Régis por sua paciência em esclarecer várias dúvidas que surgiram desde o início. Agradeço à enorme contribuição de meu co-orientador Dr. Saulo Pomponet Oliveira, pois sem ele certamente não teria finalizado o mestrado a tempo. Agradeço também ao professor Dr. Abimael Fernando Dourado Loula por ter me recebido no LNCC, em companhia do professor Saulo, onde obtivemos grandes avanços.

Agradeço também ao CPGf/UFPA e à CAPES por ter financiado este trabalho.

*“Não é possível conceber coisa alguma no mundo, ou mesmo fora do mundo, que sem restrição possa ser considerada boa, a não ser uma só: a boa vontade.”*  
*(Immanuel Kant)*

## RESUMO

Fizemos a modelagem direta 2D do método magnetotelúrico (MT) com o método dos elementos finitos (MEF) de arestas em termos dos campos primários e secundários. Para usarmos modelos de maior complexidade e diminuirmos o custo computacional utilizamos malhas não estruturadas. Nas malhas utilizadas, introduzimos quatro nós em torno de cada estação MT, constituindo um quadrado alinhado nas direções dos eixos cartesianos  $x$  e  $z$ . Por meio dos campos tangentes obtidos nas arestas de cada quadrado, efetuamos derivadas numéricas por diferenças finitas. Validamos nosso código comparando nossas respostas com a solução semi-analítica de uma falha aflorante na superfície. Avaliamos a eficiência do método comparado com o método dos elementos finitos nodais. Nossos resultados sugerem que o MEF de arestas foi menos eficiente na modelagem do MT 2D em termos dos campos primários e secundários, comparado com o MEF nodais, sobretudo por demandar maior armazenamento de memória e tempo de processamento para os modelos estudados.

Palavras-chave: Método magnetotelúrico. Modelagem direta. Método dos elementos finitos de arestas

# ABSTRACT

We have modelled 2D magnetotelluric using the edge finite element method by formulating the problem in terms of primary and secondary fields. In order to explore more complex models and to reduce the computational effort we have used unstructured meshes. We constrain the mesh to include, around each MT station four nodes in a square-shaped arrangement, aligned to the Cartesian axis  $x$  and  $z$ . From the tangential fields evaluated on the edges of these squares we approximate the partial derivatives with finite differences. We validate our code comparing its responses with the semi-analytical solution of a fault. We evaluate the efficiency of the method compared to nodal based finite element method. Our results suggest that the edge finite element method was less efficient to modelling the 2D MT in terms of primary and secondary fields than the nodal based finite element method, mainly due the need of more memory storage and time of processing for the studied models.

Keywords: Magnetotelluric method. Forward modelling. Edge finite element method.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Atenuação dos campos em meios condutivos. . . . .	15
Figura 2 – Bases Nodais. . . . .	20
Figura 3 – Bases de Whitney. (a) $W_1$ referente à aresta 1. (b) $W_2$ referente à aresta 2. (c) $W_3$ referente à aresta 3. . . . .	22
Figura 4 – (a) Bases orientadas pelas arestas. (b) Para coordenadas comuns, $\vec{N}_{23}$ projetado no vetor em azul tem o mesmo valor que $\vec{N}_{32}$ projetado no vetor em vermelho. Como as integrais sobre este trecho possuem limites de integração opostos, se cancelarão na montagem. . . . .	23
Figura 5 – Exemplo de uma malha . . . . .	26
Figura 6 – Malha renumerada por meio do reordenamento reverso de Cuthill-McKee (BURKARDT, 2013b). . . . .	27
Figura 7 – (a)- Matriz simétrica original. (b)- Matriz com a banda reduzida. . . . .	27
Figura 8 – Combinação linear das bases vectoriais . . . . .	29
Figura 9 – Informações obtidas diretamente das arestas - forma diferencial . . . . .	30
Figura 10 – Informações obtidas diretamente das arestas - forma integral . . . . .	31
Figura 11 – Modelo 1 - falha vertical aflorante. . . . .	33
Figura 12 – Campos secundários calculados no centro de cada elemento. (a) Componente $x$ . (b) Componente $z$ . . . . .	34
Figura 13 – Campos secundários calculados nos nós de cada elemento. (a) Componente $E_x^s$ . (b) Componente $E_z^s$ . . . . .	35
Figura 14 – Campos secundários na superfície. (a) Obtidos pelo procedimento 1. (b) Obtidos pelo procedimento 2. (c) Diferenças entre os campos apresentados em (a) e (b). . . . .	36
Figura 15 – Resistividade aparente e fase calculados por meio dos campos obtidos pelos procedimentos 1 e 2. . . . .	37
Figura 16 – Pseudoseções de resistividade aparente e fase. (a) Resposta numérica obtida. (b) Solução semi-analítica. (c) Erro relativo percentual. . . . .	38
Figura 17 – Perfilagem. (a) Resposta numérica obtida. (b) Solução analítica. (c) Erro relativo percentual. . . . .	39
Figura 18 – Sondagem MT. (a) Resposta numérica obtida. (b) Solução analítica. (c) Erro relativo percentual. . . . .	40
Figura 19 – (a) Curvas de resistividade e fase. (b) Erros relativos percentuais dos métodos MEF nodais e de arestas . . . . .	41

Figura 20 – Modelo 2 - corpo anômalo em subsuperfície. . . . .	42
Figura 21 – MEF de Arestas - Resposta MT para o modo TM de um corpo anômalo em subsuperfície. (a) Pseudoseção. (b) Perfilagem. (c) Sondagem MT. . . . .	43
Figura 22 – MEF nodais - Resposta MT para o modo TE de um corpo anômalo em subsuperfície. (a) Pseudoseção. (b) Perfilagem. (c) Sondagem MT. . . . .	44

# SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	12
2	MÉTODO MAGNETOTELÚRICO - MT . . . . .	14
2.1	Modos transversos elétrico ( $TE_z$ ) e magnético ( $TM_z$ ) . . . . .	14
2.2	Profundidade Pelicular ( <i>Skin Depth</i> ) . . . . .	15
3	METODOLOGIA . . . . .	17
3.1	Campos primários e secundários . . . . .	17
3.2	Equação diferencial em termos do campo $\vec{E}^s$ . . . . .	18
3.3	Elementos finitos de arestas . . . . .	18
3.3.1	Discretização 2D . . . . .	19
3.3.2	Resolução das integrais . . . . .	21
3.3.2.1	Aproximações numéricas por quadratura . . . . .	24
3.3.3	Montagem . . . . .	25
3.3.4	Condições de fronteira . . . . .	28
3.3.5	Malhas e solução do sistema . . . . .	28
3.3.6	Pós processamento . . . . .	28
3.4	Equação diferencial em termos do campo $\vec{H}^s$ . . . . .	31
4	RESULTADOS . . . . .	33
4.1	Validação da metodologia . . . . .	33
4.2	Eficiência do método . . . . .	37
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	45
	REFERÊNCIAS . . . . .	47
	APÊNDICES . . . . .	49
	APÊNDICE A – CAMPOS PRIMÁRIOS . . . . .	50
A.1	Solução analítica em modelos 1D . . . . .	50
	APÊNDICE B – MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NODAIS . . . . .	52
B.1	Equações diferenciais escalares . . . . .	52
B.2	Elementos Finitos 2D . . . . .	52

# 1 INTRODUÇÃO

O magnetotelúrico (MT) é um dos poucos métodos geofísicos que pode fornecer informações de até centenas de quilômetros da superfície da terra. Pode ser aplicado a uma vasta classe de problemas, como na exploração de energia geotermal, água subterrânea, depósitos minerais, diamantes, petróleo & gás etc. Além disso, o MT é a base para a modelagem direta de diversos outros métodos eletromagnéticos indutivos.

O MT foi inicialmente proposto, de forma independente, por Tikhonov (1950) e Cagniard (1953). Possui grande facilidade na modelagem direta por ter como fonte ondas planas, de maneira que existem expressões analíticas para os campos eletromagnéticos em modelos 1D (VOZOFF, 1991; RIJO, 1996). Entretanto, na grande maioria dos modelos geológicos, com estruturas 2D ou 3D, somente soluções numéricas são viáveis ou, até mesmo, possíveis.

Dentre os métodos numéricos para a resolução do MT se destaca o método dos elementos finitos (MEF) por exigir apenas continuidade por partes das funções que serão interpoladas (VOLAKIS; CHATTERJEE; KEMPEL, 1998). Além disso, aplicado a problemas envolvendo eletromagnetismo, o MEF pode ser utilizado para obter diretamente os campos secundários, induzidos pelos corpos 2D ou 3D na presença do campo primário incidente, o que contribui para minimizar a dimensão do problema a ser resolvido, principalmente utilizando malhas não estruturadas, em que se tem melhor controle sobre as regiões de maior densidade de nós.

Nas décadas de 80 e 90 do século passado, houve um avanço com o uso das bases vetoriais de Whitney (1957), precursor do MEF de arestas, em problemas envolvendo eletromagnetismo. Bossavit (1990), por exemplo, argumenta que em problemas tridimensionais a interpolação dos campos eletromagnéticos com o uso destas bases é consistente, em detrimento das bases nodais. As bases vetoriais garantem corretamente a continuidade dos campos entre elementos adjacentes, onde somente a componente tangencial é contínua, enquanto a componente normal pode ser descontínua. Além disso, estas bases possuem divergente nulo, o que garantem que os campos interpolados também tenham divergente nulo, concordando com as equações de Maxwell quando se trata de campos eletromagnéticos numa região sem acúmulo de carga. Trabalhos como os de Volakis, Chatterjee e Kempel (1998) e Jin (2010) abordam os fundamentos destas bases e sua aplicação ao MEF de arestas.

No âmbito da geofísica, Mitsuhashi e Uchida (2004) fizeram a modelagem 3D do MT usando o MEF de arestas, utilizando os potenciais  $(\vec{T}, \Omega)$  para contornar o problema da descontinuidade no *ar*. Para isso, utilizaram bases vetoriais e nodais para interpolar o

potencial vetor elétrico e o potencial escalar magnético, respectivamente. Nam et al. (2007) fizeram a modelagem 3D do MT, incluindo topografia, por meio da interpolação do campo  $\vec{E}$  total, utilizando as bases vetoriais. O MEF de arestas também tem sido utilizado para a modelagem de outros métodos eletromagnéticos. Por exemplo, Mukherjee e Everett (2011) e Silva et al. (2012) modelaram o método eletromagnético de fonte controlada (CSEM) utilizando a bobina e o dipolo horizontal como fonte, respectivamente. Portanto, apesar de ser um método numérico relativamente recente na geofísica, o MEF de arestas está bem estabelecido e aceito pela comunidade científica.

Neste trabalho, primeiramente visamos compreender o funcionamento do método dos elementos finitos de arestas. Posteriormente, avaliar a eficiência deste método na modelagem direta 2D do método magnetotelúrico.

No próximo capítulo contextualizaremos o leitor ao método geofísico magnetotelúrico, no que se refere à modelagem direta. Em seguida, a partir dos fundamentos básicos do eletromagnetismo obteremos uma equação diferencial vetorial que rege os fenômenos envolvidos e mostraremos como esta equação pode ser solucionada pelo método numérico dos elementos finitos de arestas.

Este método numérico se mostrou coerente na modelagem do MT com a solução analítica para um modelo 2D contendo uma falha, proposta por Qin, Yang e Chen (2013). Entretanto, comparado com uma outra abordagem do método dos elementos finitos (o método dos elementos nodais), foi menos eficiente na modelagem do MT-2D.

## 2 Método magnetotelúrico - MT

Com o método magnetotelúrico, informações sobre a subsuperfície são obtidas pela interpretação da impedância e da componente  $H_z$  normalizada pela componente horizontal do campo magnético (VOZOFF, 1991). Porém, neste trabalho consideramos apenas a impedância para as respostas MT.

A partir da relação,

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{xx} & Z_{xy} \\ Z_{yx} & Z_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_x \\ H_y \end{pmatrix},$$

entre os campos, para cada frequência  $\omega$  o tensor de impedâncias  $Z$  fornece informação sobre o meio, onde os campos se atenuam.

Na ausência de estruturas 3D,

$$Z_{xx} = Z_{yy} = 0 \quad ,$$

se o "strike" estiver na direção dos eixos  $x$  ou  $y$ . Desta forma,

$$Z_{xy} = \frac{E_x}{H_y} \quad , \quad Z_{yx} = \frac{E_y}{H_x} \quad .$$

Neste trabalho adotaremos modelos contínuos com relação à direção  $y$ .

### 2.1 Modos transversos elétrico ( $TE_z$ ) e magnético ( $TM_z$ )

Um modelo 2D permite separar o problema em duas partes: nos modos de propagação  $TE_z$  e  $TM_z$ . O modo transversos elétrico com relação a  $z$  significa que o campo elétrico é perpendicular à direção  $z$  e paralelo ao "strike". Da mesma forma, o modo transversos magnético com relação a  $z$  significa que o campo magnético é perpendicular à direção  $z$  e paralelo ao "strike". Portanto, são duas perspectivas sobre o mesmo problema. Daqui em diante omitiremos o índice  $z$ .

Na grande maioria dos modelos tratados em geofísica, a propriedade magnética  $\mu$  é invariante e igual a  $\mu_0$  e, portanto o campo magnético é contínuo. Da mesma forma, no modo TE, a componente  $E_y$ , ao longo do "strike", também é contínua. Agora, no modo TM, a componente  $E_x$  atravessa o "strike" e, portanto, é descontínua nos limites entre corpos 2D. Assim, de certa forma, o modo TM se aproxima de um problema 3D e sua resposta é muito mais acentuada que a do modo TE.

Em um modelo 2D, podemos calcular a resistividade aparente e a fase em função do módulo da componente  $Z_{xy}$  do tensor de impedâncias, para o modo transversal magnético

- TM,

$$\rho_{a_{xy}} = \frac{1}{\omega\mu} |Z_{xy}|^2 ,$$

$$\phi_{a_{xy}} = \arctg \left( \frac{Im(Z_{xy})}{Re(Z_{xy})} \right) ,$$

ou  $Z_{yx}$ , para o modo transversal elétrico - TE,

$$\rho_{a_{yx}} = \frac{1}{\omega\mu} |Z_{yx}|^2 ,$$

$$\phi_{a_{yx}} = \arctg \left( \frac{Im(Z_{yx})}{Re(Z_{yx})} \right) ,$$

## 2.2 Profundidade Pelicular (*Skin Depth*)

No âmbito da modelagem direta, a partir de um dado modelo, estamos interessados em calcular as componentes horizontais dos campos eletromagnéticos na superfície da terra, por meio das quais se obtêm as curvas de resistividade aparente e fase, tema do próximo capítulo.

Para atingirmos este objetivo devemos considerar tudo o que possa influenciar os campos calculados em uma determinada coordenada. É intuitivo que objetos muito distantes pouco influenciarão no cálculo dos campos em um certo ponto. A profundidade pelicular (*Skin Depth*),

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu}} , \quad (2.1)$$

é uma medida da distância mínima a ser considerada, onde  $\rho$  e  $\mu$  são, respectivamente, a resistividade elétrica e permeabilidade magnética do meio e  $\omega$  a frequência dos campos eletromagnéticos.

A profundidade pelicular (*Skin Depth*) é a distância em que os campos eletromagnéticos decaem a  $\frac{1}{e}$  de uma amplitude inicial, o que pode ser visualizado na Figura 1. Rijo

Figura 1 – Atenuação dos campos em meios condutivos.



Fonte: do autor

(1996) considera que a influência de corpos localizados à  $5\delta$  pode ser desprezada, pois a esta distância, adentro de um meio condutivo, os campos induzidos por esses corpos possuem menos de 0,7% da amplitude inicial com origem nestes corpos.

De modo geral, o conceito de Skin Depth é importante para quantificar a profundidade de investigação do método magnetotelúrico. A partir de (2.1) podemos concluir que quanto menor a condutividade ( $\sigma = \frac{1}{\rho}$ ) do meio e frequência dos campos, maior a profundidade de investigação.

### 3 METODOLOGIA

Neste capítulo estamos em busca de calcular os campos eletromagnéticos na superfície de um dado modelo. Na primeira seção mostraremos como descrever as equações de Maxwell em termos dos campos primários incidentes  $(\vec{E}^p, \vec{H}^p)$  e dos campos secundários  $(\vec{E}^s, \vec{H}^s)$ , induzidos pelos primários. Em seguida, na segunda seção obteremos uma equação diferencial cuja incógnita é o campo  $\vec{E}^s$ . Por fim, na terceira seção apresentaremos o método dos elementos finitos de arestas e mostraremos como ele pode ser utilizado para obter uma solução numérica para esta equação diferencial vetorial.

Na seção 4 obteremos um sistema cujas incógnitas são o potencial vetor elétrico  $\vec{T}$  e o potencial escalar magnético  $\Omega$ , porém neste trabalho não resolveremos este sistema.

#### 3.1 Campos primários e secundários

Começemos pelas equações de Maxwell, na forma diferencial, no domínio da frequência, seguindo o trabalho de Ward e Hohmann (1988),

$$\nabla \cdot \epsilon \vec{E} = \rho, \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} - \eta \vec{E} = \vec{J}_t, \quad (3.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \mathfrak{z} \vec{H} = \vec{0}, \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mu \vec{H} = 0, \quad (3.4)$$

onde,  $\eta = (\sigma + i\omega\epsilon)$  e  $\mathfrak{z} = i\omega\mu$ . Seja  $\vec{E}^p$  e  $\vec{H}^p$  os campos associados ao modelo primário, em que as propriedades físicas variam somente com a profundidade, e  $\vec{E}^s$  e  $\vec{H}^s$  os campos induzidos pelos corpos anômalos a este modelo, se desmembrarmos os campos totais,

$$\vec{H} = \vec{H}^p + \vec{H}^s,$$

$$\vec{E} = \vec{E}^p + \vec{E}^s,$$

e atribuímos as relações,

$$\eta = \eta^p + \Delta\eta,$$

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z}^p + \Delta\mathfrak{z},$$

entre as propriedades físicas dos modelos primário e secundário, podemos reescrever (3.2) e (3.3) como,

$$\nabla \times (\vec{H}^p + \vec{H}^s) - (\eta^p + \Delta\eta)(\vec{E}^p + \vec{E}^s) = \vec{J}_t,$$

$$\nabla \times (\vec{E}^p + \vec{E}^s) + (\mathfrak{z}^p + \Delta\mathfrak{z})(\vec{H}^p + \vec{H}^s) = \vec{0},$$

e, devido aos campos primários também obedecerem às equações de Ampere (3.2) e Faraday (3.3), podemos expressar estas equações vetoriais em termos dos campos primários e secundários,

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{H}^s - \eta \vec{E}^s = \Delta \eta \vec{E}^p, \\ \nabla \times \vec{E}^s + \mathfrak{z} \vec{H}^s = -\Delta \mathfrak{z} \vec{H}^p, \end{cases} \quad (3.5)$$

o que faz dos campos primários  $\vec{E}^p$  e  $\vec{H}^p$  fontes dos campos secundários  $\vec{E}^s$  e  $\vec{H}^s$  (RIJO, 1996).

### 3.2 Equação diferencial em termos do campo $\vec{E}^s$

A partir de (3.5), observe que  $\vec{H}^s = -\frac{1}{\mathfrak{z}}(\nabla \times \vec{E}^s + \Delta \mathfrak{z} \vec{H}^p)$  e, portanto,

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mathfrak{z}} \nabla \times \vec{E}^s \right) + \eta \vec{E}^s = -\frac{\Delta \mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} \nabla \times \vec{H}^p - \Delta \eta \vec{E}^p,$$

Usando novamente (3.2), obtemos

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mathfrak{z}} \nabla \times \vec{E}^s \right) + \eta \vec{E}^s = -\left( \frac{\Delta \mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} \eta^p + \Delta \eta \right) \vec{E}^p - \frac{\Delta \mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} \vec{J}_t, \quad (3.6)$$

onde  $\vec{J}_t = 0$  para o MT, devido à fonte ser considerada no infinito, portanto fora do domínio. Devido ao intervalo de frequências utilizados no MT ( $10^{-3} - 10^4$ ), a menos no ar,  $\sigma \gg \omega \epsilon_0$ . Portanto,  $\eta \approx \sigma$ , o que é normalmente chamado de condição quasi-estática.

A equação (3.6) será o ponto de partida para a resolução pelo método dos elementos finitos de arestas.

### 3.3 Elementos finitos de arestas

Para reduzir a exigência sobre a solução da equação (3.6), recorreremos à formulação fraca, em que é necessário que a função obtida tenha somente primeira derivada definida. Seja  $\vec{V}$  uma função peso utilizada para minimizar outra função dentro de um intervalo e  $\vec{\epsilon}$  a função erro associado à aproximação  $\vec{E}_h^s$  que faremos,

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\mathfrak{z}} \nabla \times \vec{E}_h^s \right) + \eta \vec{E}_h^s + \left( \frac{\Delta \mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} \eta^p + \Delta \eta \right) \vec{E}^p = \vec{\epsilon}.$$

Se fizermos o produto interno entre estas funções, assumindo que sejam ortogonais entre si,  $\langle \vec{V}, \vec{\epsilon} \rangle = \vec{0}$ , o que no plano  $(x, z)$  pode ser reescrita como,

$$\int_{\Omega} \vec{V} \cdot \left[ \nabla \times \left( \frac{1}{\mathfrak{z}} \nabla \times \vec{E}_h^s \right) + \eta \vec{E}_h^s + \left( \frac{\Delta \mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} \eta^p + \Delta \eta \right) \vec{E}^p \right] dx dz = 0,$$

e se usarmos a identidade vetorial,

$$\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B} - \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}),$$

obteremos,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \times \vec{V}) \cdot \left( \frac{1}{\mathfrak{z}} \nabla \times \vec{E}_h^s \right) dx dz + \int_{\Omega} \vec{V} \cdot \eta \vec{E}_h^s dx dz = - \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta \mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} \eta^p + \Delta \eta \right) \vec{V} \cdot \vec{E}^p dx dz \\ + \int_{\Omega} \nabla \cdot \left( \vec{V} \times \frac{1}{\mathfrak{z}} \nabla \times \vec{E}_h^s \right) dx dz. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Agora, usando o teorema do divergente,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) dx dz = \int_{\partial \Omega} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} dl,$$

e a identidade vetorial

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \hat{n} = -\vec{A} \cdot (\hat{n} \times \vec{B}), \quad (3.8)$$

na última integral de (3.7), temos,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \times \vec{V}) \cdot \left( \frac{1}{\mathfrak{z}} \nabla \times \vec{E}_h^s \right) dx dz + \int_{\Omega} \vec{V} \cdot \eta \vec{E}_h^s dx dz = - \int_{\Omega} \left( \frac{\Delta \mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} \eta^p + \Delta \eta \right) \vec{V} \cdot \vec{E}^p dx dz \\ - \int_{\partial \Omega} \vec{V} \cdot (\hat{n} \times \frac{1}{\mathfrak{z}} \nabla \times \vec{E}_h^s) dl. \end{aligned} \quad (3.9)$$

No próximo item veremos que a última integral de (3.9) pode ser desconsiderada, a menos da borda do domínio, onde deve-se impor condições de fronteira.

### 3.3.1 Discretização 2D

Apesar de outros polígonos poderem ser utilizados, nós demos ênfase à discretização por elementos triangulares pela maior facilidade em representar geometrias complexas. Em cada elemento as propriedades físicas em questão serão consideradas constantes ( $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_e$  e  $\eta = \eta_e$ ). Como muitos autores, Reddy et al. (1994), Volakis, Chatterjee e Kempel (1998), Jin (2010), usaremos as bases de Whitney (1957),

$$\vec{W}_m = (\varphi_i \nabla \varphi_j - \varphi_j \nabla \varphi_i), \quad m, i, j = 1, 2, 3, \quad (3.10)$$

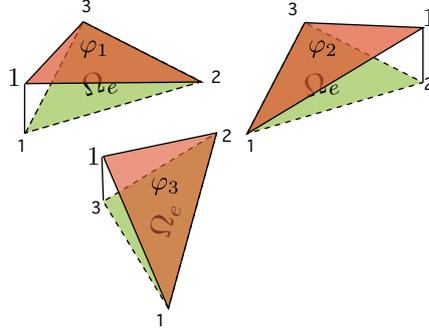
onde  $m$  faz referencia à aresta e  $(i, j)$  aos nós pertencentes à mesma.

As funções de base nodais,

$$\varphi_i = \frac{1}{2\Omega_e} (a_i + b_i x + c_i z), \quad (3.11)$$

são equações de planos que valem a unidade no  $i$ ésimo nó e zero nos demais, representadas

Figura 2 – Bases Nodais.



Fonte: do autor

na Figura 2, onde  $\Omega_e$  é a área do elemento:

$$\Omega_e = \frac{1}{2} \text{Det} \begin{bmatrix} 1 & x_1^e & z_1^e \\ 1 & x_2^e & z_2^e \\ 1 & x_3^e & z_3^e \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Assim, as bases vetoriais podem ser reescritas como,

$$\vec{W}_m = \frac{1}{4\Omega_e^2} [(A_m + B_m z)\hat{x} + (C_m + D_m x)\hat{z}] \quad m = 1, 2, 3, \quad (3.13)$$

onde,

$$\begin{aligned} A_m &= a_i b_j - a_j b_i, \\ B_m &= c_i b_j - c_j b_i, \\ C_m &= a_i c_j - a_j c_i, \\ D_m &= -B_m. \end{aligned}$$

Os coeficientes  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$  de cada elemento podem ser obtidos por meio das coordenadas  $x$  e  $z$  de seus nós,

$$\begin{aligned} a_i &= x_j^e z_k^e - x_k^e z_j^e, \\ b_i &= z_j^e - z_k^e, \\ c_i &= x_k^e - x_j^e, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde,  $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ .

Na Figura 3 podemos observar o comportamento destas bases. Observa-se a existência de componente tangencial somente na aresta  $m$  correspondente à base vetorial  $W_m$ . Além disso, podemos provar que esta componente é constante ao longo da aresta  $m_{(i,j)}$ : Seja  $\vec{t}_m = (x_j - x_i)\hat{x} + (z_j - z_i)\hat{z}$  um vetor tangente à aresta  $m$ , de (3.11), (3.14) e (3.12), temos que  $\vec{t}_m \cdot \nabla \varphi_i = -1$  e  $\vec{t}_m \cdot \nabla \varphi_j = 1$ . Como as bases nodais (3.11) são lineares,

ao longo da aresta  $m$ ,  $\varphi_i + \varphi_j = 1$ , e de (3.10) temos que  $\vec{t}_m \cdot \vec{W}_m = 1$ . Esta característica contribui para a continuidade da componente tangencial destas bases vetoriais associadas a aresta comum entre elementos adjacentes e para garanti-la, estas bases são orientadas pela aresta correspondente,

$$\vec{N}_m = \vec{N}_{ij} = l_{ij} \vec{W}_m, \quad i < j, \quad (3.15)$$

onde uma convenção adotada por Jin (2010) é que o sentido positivo das bases seja do menor nó para o maior, isto é, se  $i > j$  o sentido da base deve ser invertido.

Na Figura 4-a podemos observar que as bases  $\vec{N}_{23}^1$  e  $\vec{N}_{32}^2$ , quando orientadas pela aresta, tem o mesmo sentido e intensidade ao longo da aresta comum.

Agora, considere que dentro de cada elemento os campos secundários sejam uma combinação linear destas bases vetoriais ponderados pela intensidade dos campos tangentes,

$$\vec{E}_h^s = \sum_{n=1}^3 E_{tn}^s \vec{N}_n \quad (3.16)$$

onde  $E_{tn}^s$  é constantes ao longo da aresta  $n$ . Observe que de (3.13),  $\nabla \cdot (\vec{E}_h^s + \vec{E}^p) = 0$ , o que se adéqua perfeitamente à equação (3.1) para uma região sem acúmulo de carga.

Usando o critério de Galerkin, em que por simplicidade  $\vec{V} = \vec{N}_m$ , para cada elemento do domínio podemos aproximar as equações diferenciais em termos destas bases,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mathfrak{z}_e} \sum_{n=1}^3 \left[ E_{tn}^s \int_{\Omega_e} (\nabla \times \vec{N}_m) \cdot (\nabla \times \vec{N}_n) dx dz \right] + \mathfrak{v}_e \sum_{n=1}^3 \left[ E_{tn}^s \int_{\Omega_e} (\vec{N}_m \cdot \vec{N}_n) dx dz \right] = \\ & - \left( \frac{\Delta \mathfrak{z}_e}{\mathfrak{z}_e} \mathfrak{v}_e^p + \Delta \mathfrak{v}_e \right) \int_{\Omega_e} (\vec{N}_m \cdot \vec{E}_e^p) dx dz - \frac{1}{\mathfrak{z}_e} \sum_{n=1}^3 E_{tn}^s \int_{\partial \Omega_e} \vec{N}_m \cdot (\hat{n} \times \nabla \times \vec{N}_n) dl, \quad m = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Na Figura 4-b pode-se observar que as integrais de linha de (3.17) de elementos adjacentes se cancelam, visto que os limites de integração são opostos sobre a parcela de curva comum, e nas demais parcelas os integrandos são identicamente nulos.

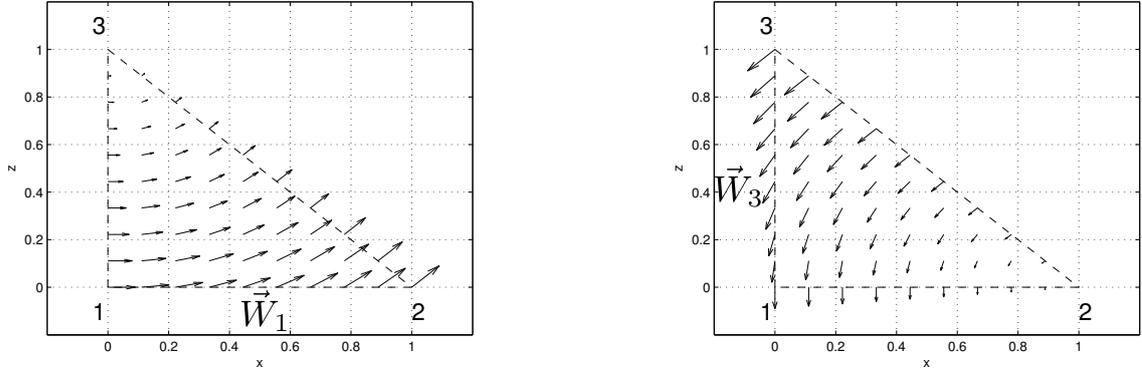
### 3.3.2 Resolução das integrais

A partir de (3.13) e (3.15),

$$\nabla \times \vec{N}_m = \frac{l_m}{2\Omega_e^2} B_m \hat{y}$$

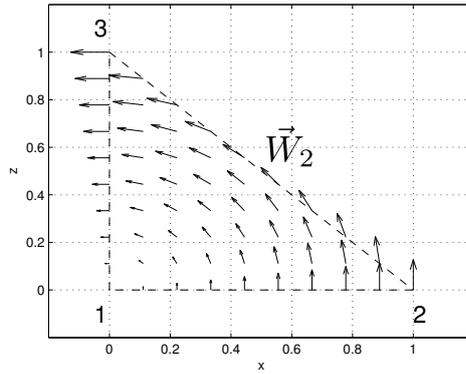
e,

$$(\nabla \times \vec{N}_m) \cdot (\nabla \times \vec{N}_n) = \frac{l_m l_n}{4\Omega_e^4} B_m B_n$$

Figura 3 – Bases de Whitney. (a)  $W_1$  referente à aresta 1. (b)  $W_2$  referente à aresta 2. (c)  $W_3$  referente à aresta 3.


(a)

(c)



(b)

Fonte: do autor

Portanto,

$$I_{mn} = \int_{\Omega_e} (\nabla \times \vec{N}_m) \cdot (\nabla \times \vec{N}_n) dx dz = \frac{l_m l_n}{4\Omega_e^3} B_m B_n$$

Também de (3.13) e (3.15),

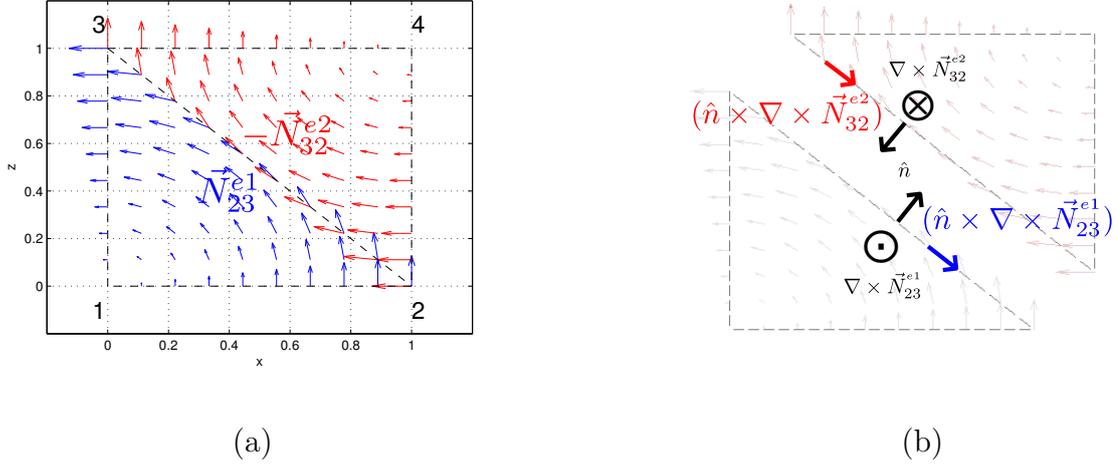
$$(\vec{N}_m \cdot \vec{N}_n) = \frac{l_m l_n}{16\Omega_e^4} [(A_m + B_m z)(A_n + B_n z) + (C_m + D_m x)(C_n + D_n x)],$$

e,

$$\begin{aligned} II_{mn} = \int_{\Omega_e} (\vec{N}_m \cdot \vec{N}_n) dx dz &= \frac{l_m l_n}{16\Omega_e^4} \left[ (A_m A_n + C_m C_n) \Omega_e + (A_m B_n + A_n B_m) \int_{\Omega_e} z dx dz \right. \\ &\quad \left. + B_m B_n \int_{\Omega_e} z^2 dx dz + (C_m D_n + C_n D_m) \int_{\Omega_e} x dx dz + D_m D_n \int_{\Omega_e} x^2 dx dz \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Para a integral restante de (3.17) podemos obter uma expressão analítica, de posse dos campos primários. Entretanto, para obter uma resposta mais imediata em um domínio

Figura 4 – (a) Bases orientadas pelas arestas. (b) Para coordenadas comuns,  $\vec{N}_{23}^{e1}$  projetado no vetor em azul tem o mesmo valor que  $\vec{N}_{32}^{e2}$  projetado no vetor em vermelho. Como as integrais sobre este trecho possuem limites de integração opostos, se cancelarão na montagem.



Fonte: do autor

triangular genérico, interpolaremos os campos primários utilizando as bases vectoriais<sup>1</sup>. Para isso, teremos que calcular a componente tangente destes campos em cada aresta.

Seja  $\vec{t}_m = (x_j - x_i, z_j - z_i)$ , um vetor na direção da aresta  $m$ , podemos calcularmos  $\cos(\theta)$  e  $\cos(\phi)$  entre a aresta  $m$  e os eixos cartesianos, por meio do produto escalar,

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \vec{t}_m, \hat{x} \rangle}{\|\vec{t}_m\| \|\hat{x}\|} = \frac{x_j - x_i}{l_m} ,$$

$$\cos(\phi) = \frac{\langle \vec{t}_m, \hat{z} \rangle}{\|\vec{t}_m\| \|\hat{z}\|} = \frac{z_j - z_i}{l_m} .$$

Assim,

$$E_{tn}^p = E_{xn}^p \cos(\theta) + E_{zn}^p \cos(\phi) ,$$

onde usamos o campo  $\vec{E}_n^p$  calculados no centro da aresta  $n$ . O apêndice A apresenta os detalhes sobre como calcular os campos primários.

Desta forma, recaímos em integrais que felizmente resolvemos, ou melhor já precisaríamos resolver. Então, para cada elemento, obtemos o sistema local,

$$\left[ \frac{1}{\mathfrak{z}} \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} + \mathfrak{v} \begin{pmatrix} II_{11} & II_{12} & II_{13} \\ II_{21} & II_{22} & II_{23} \\ II_{31} & II_{32} & II_{33} \end{pmatrix} \right] \times \begin{pmatrix} E_{t1}^s \\ E_{t2}^s \\ E_{t3}^s \end{pmatrix} =$$

<sup>1</sup> Observe que se usássemos as bases nodais para aproximarmos cada componente dos campos primários, teríamos  $\nabla \cdot \vec{E}^p \neq 0$

$$- \left( \frac{\Delta \mathfrak{z}_e}{\mathfrak{z}_e} \eta_e^p + \Delta \eta_e \right) \begin{pmatrix} II_{11} & II_{12} & II_{13} \\ II_{21} & II_{22} & II_{23} \\ II_{31} & II_{32} & II_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_{t1}^p \\ E_{t2}^p \\ E_{t3}^p \end{pmatrix}.$$

### 3.3.2.1 Aproximações numéricas por quadratura

Queremos calcular integrais de superfície sobre um domínio triangular de funções do tipo  $f(x, z) = x^q z^r$ , presentes na equação (3.18). De acordo com Hughes (1987) e Burkardt (2013a), podemos aproximar,

$$\int_{\Omega_e} f(x, z) dx dz \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i f(x_i, z_i).$$

Para o triângulo de referência,  $P = (0, 0)$ ,  $Q = (1, 0)$  e  $R = (0, 1)$ , usaremos os resultados encontrados em Burkardt (2013a), mostrados na Tabela 1.

Tabela 1 – Pesos e abscisas

$n$	$p$	$w_i$	$x_i$	$z_i$
1	1	1.0	0.333333	0.333333
3	2	0.333333	0.500000	0.000000
		0.333333	0.500000	0.500000
		0.333333	0.000000	0.500000
4	3	-0.562500	0.333333	0.333333
		0.520833	0.600000	0.200000
		0.520833	0.200000	0.600000
		0.520833	0.200000	0.200000
6	4	0.109951	0.816847	0.091676
		0.109951	0.091576	0.816847
		0.109951	0.091576	0.091676
		0.223381	0.108103	0.445948
		0.223381	0.445948	0.108103
		0.223381	0.445948	0.445948
7	5	0.225000	0.333333	0.333333
		0.125939	0.797427	0.101287
		0.125939	0.101287	0.797427
		0.125939	0.101287	0.101287
		0.132394	0.059716	0.470142
		0.132394	0.470142	0.059716
		0.132394	0.470142	0.470142

Fonte: do autor

Para um triângulo genérico, faremos a transformação,

$$(x_i, z_i) \rightarrow (X_i, Z_i) = (1 - x_i - z_i)P' + x_iQ' + z_iR',$$

$$(w_i) \rightarrow (W_i) = 2w_i\Omega_e,$$

onde  $\Omega_e$  é a área deste triângulo.

Para termos uma resposta exata, temos que  $q + r \leq p$  (BURKARDT, 2013a). Nos integrandos que iremos resolver,  $q + r \leq 2$ . Assim, usaremos a quadratura de 3 pontos,  $n = 3$ .

### 3.3.3 Montagem

Para o método dos elementos finitos de arestas, o processo de montagem se resume em mapear os valores numéricos obtidos para cada elemento, de arestas locais 1,2 e 3, em um sistema linear associado à posição das arestas no domínio. Para isso utiliza-se uma matriz que relacione as arestas locais de cada elemento às arestas globais da malha, o que denominaremos de matriz local das arestas.

Existem algumas maneiras de construir a matriz local das arestas e uma maneira é por meio da matriz local dos nós<sup>2</sup>: Cada linha desta matriz define um triângulo, obviamente com três arestas, cada uma contendo dois nós. Assim, inicialmente lista-se todas as possíveis arestas e posteriormente procura-se, por meio de seus pares de nós, as que se repetem, mantendo uma única numeração dos índices destas. Desta forma, a primeira linha da matriz local das arestas será formada pelos três primeiros índices da lista, a segunda linha pelos próximos três índices e, assim sucessivamente. De forma a ilustrarmos este procedimento, tomemos como exemplo a malha representada na Figura 5. Observe que começamos a enumerar as arestas (em vermelho) a partir do elemento 1 (em verde), seguimos para o elemento 2 e assim por diante. No elemento 3, por exemplo, como as arestas locais 1 e 2 deste elemento já havia sido enumeradas repetimos os índices, como pode ser melhor observado na Tabela 2.

Assim, tomemos como exemplo o elemento 28, de nós locais 1,2,3 e nós globais 39, 22 e 19. Os valores numéricos obtidos para o sistema linear local deste elemento devem ser posicionados nas linhas e colunas 39, 22 e 19, nesta ordem, do sistema linear global. Procedendo desta maneira para todos os elementos da malha, ao fim do processo obteremos um sistema simétrico e esparso,

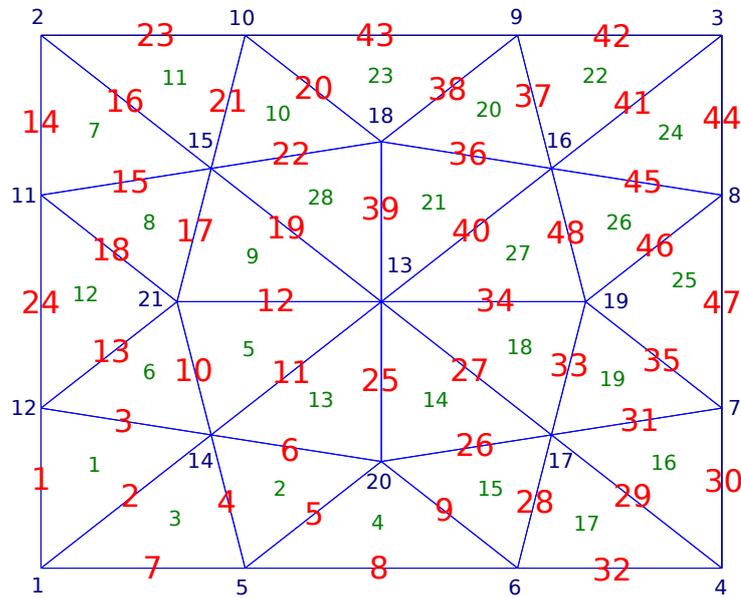
$$Ax = b,$$

como pode ser visto na Figura 7-a, onde plotamos os valores diferentes de zero da matriz  $A$ , ressaltando em vermelho a contribuição do elementos 28.

De maneira a aproveitarmos a esparsividade do sistema, utilizamos a rotina RCM do Burkardt (2013b) para renumerar as arestas, o que pode ser visualizado na Figura

<sup>2</sup> A matriz local dos nós pode ser fornecida pelo programa *triangle* (SHEWCHUK, 2013)

Figura 5 – Exemplo de uma malha



Fonte: do autor

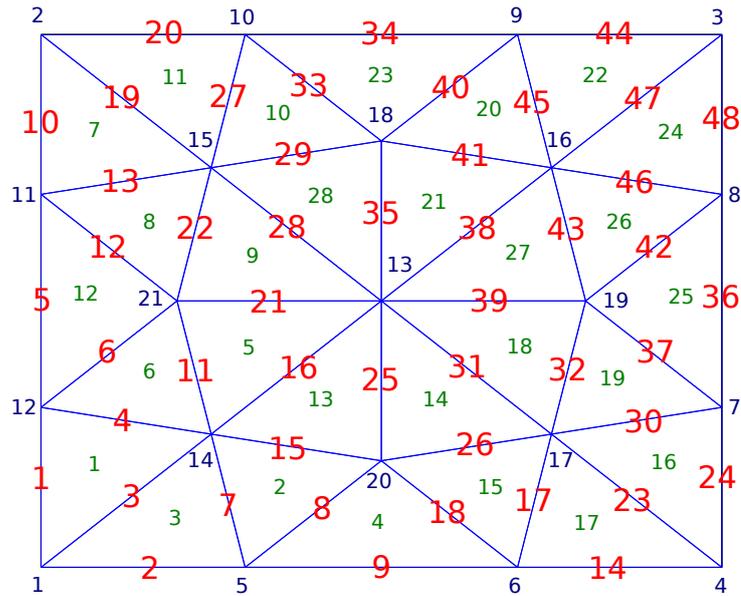
Tabela 2 – Mapeamento dos elementos na malha global

Elementos	Numeração Local	Numeração Global (nós)	Numeração Global (arestas)
1	(1,2,3)	(12,1,14)	(1,2,3)
2	(1,2,3)	(14,5,20)	(4,5,6)
3	(1,2,3)	(5,14,1)	(4,2,7)
4	(1,2,3)	(20,5,6)	(5,8,9)
5	(1,2,3)	(21,14,13)	(10,11,12)
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
13	(1,2,3)	(20,13,14)	(25,11,6)
14	(1,2,3)	(20,17,13)	(26,27,25)
15	(1,2,3)	(17,20,6)	(26,9,28)
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
24	(1,2,3)	(8,3,16)	(44,41,45)
25	(1,2,3)	(8,19,7)	(46,35,47)
26	(1,2,3)	(8,16,19)	(45,48,46)
27	(1,2,3)	(13,19,16)	(34,48,40)
28	(1,2,3)	(13,18,15)	(39,22,19)

Fonte: do autor

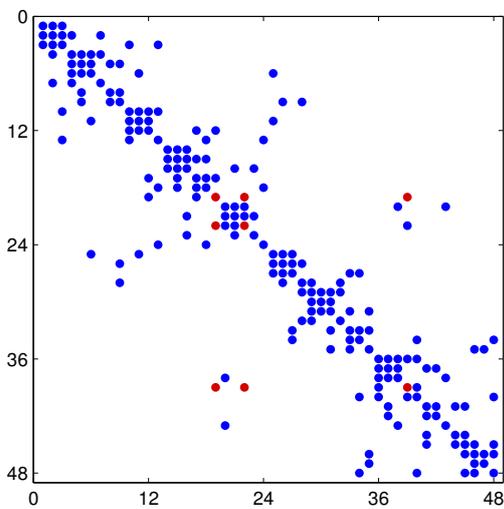
6, antes de efetuar o processo de montagem, acima descrito. Com isso, obtivemos um sistema esparço com a banda reduzida, como pode ser visto na Figura 7-b, onde plotamos os valores diferentes de zero da matriz  $A$ , ressaltando em vermelho a contribuição do elemento 28, que devido à renumeração agora possui os nós globais 35,29 e 28.

Figura 6 – Malha renumerada por meio do reordenamento reverso de Cuthill-McKee (BURKARDT, 2013b).

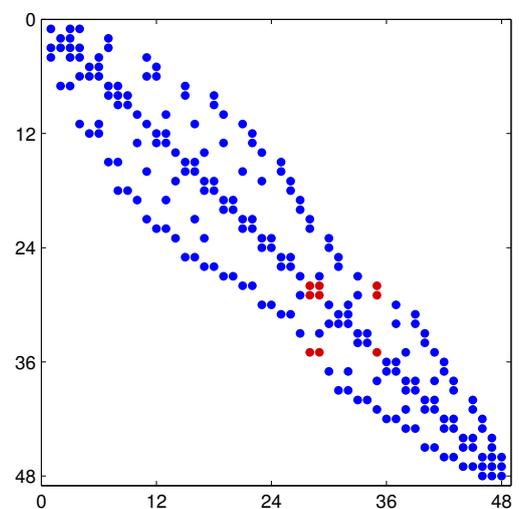


Fonte: do autor

Figura 7 – (a)- Matriz simétrica original. (b)- Matriz com a banda reduzida.



(a)



(b)

Fonte: do autor

### 3.3.4 Condições de fronteira

Antes de resolvermos o sistema linear precisamos impor condições de fronteira para obtermos solução única. Para isso, precisamos ter informações a priori nas bordas do domínio. Normalmente utiliza-se as condições de Dirichlet quando se tem informações sobre os campos e as condições de Neumann quando se impõe condições sobre a derivada dos mesmos na fronteira.

Como evoluímos o sistema de forma que as incógnitas sejam os campos secundários, basta garantirmos que a fronteira esteja distante o suficiente dos corpos 2D para sabermos que os campos tendem a zero nas bordas do domínio. Muitos autores, como por exemplo Rijo (1996), consideram  $5\delta$  suficientes para que a influência destes corpos possa ser desprezada, referente à equação (2.1),

$$\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu}}.$$

Nestes casos, utilizamos as condições de Dirichlet. Uma maneira de efetuarmos essa imposição em quebrar a simetria do sistema linear é atribui-se um valor “grande”, por exemplo  $10^{10}$ , na diagonal  $A(i, i)$  e na posição correspondente de  $b(i)$ , multiplicado pelo valor  $x_b$  que se deseja impor. Desta forma,  $x(i) = x_b$ .

Nos casos em que um corpo anômalo se estende até uma das bordas do domínio, utilizamos as condições de Neumann, onde assume-se que a derivada do campo é constante nesta borda, quando deixamos ela livre. Não utilizamos as condições de Dirichlet não homogênea, pois a borda faz parte da heterogeneidade e o campo primário referente a uma onda plana é não nulo nesta borda.

### 3.3.5 Malhas e solução do sistema

Utilizamos o software não comercial *triangle* para gerar as malhas utilizadas. Informações sobre esse programa pode ser encontrado em Shewchuk (2013). Também usamos a interface disponível em Key (2013).

Para reduzirmos a banda da matriz global utilizamos a rotina *RCM* disponível em Burkardt (2013b).

Para solucionarmos o sistema linear utilizamos a rotina *gauss\_solver.f90*, implementada pelo professor Rijo, adaptada de Dongarra et al. (1979).

### 3.3.6 Pós processamento

Após a solução do sistema linear temos os valores dos campos secundários tangenciais em cada aresta. Assim, se quisermos calcular os campos secundários, temos que

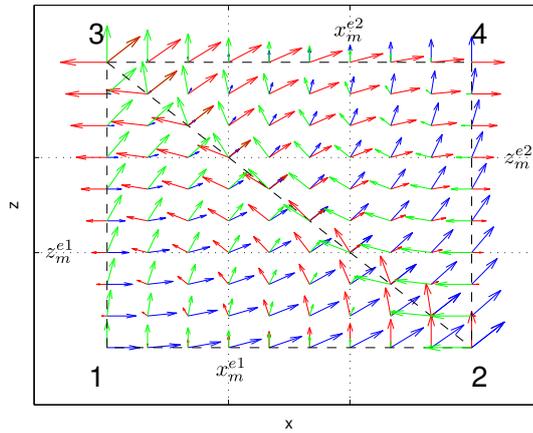
efetuar a combinação linear (3.16),

$$\vec{E}^s = \sum_{n=1}^3 E_{tn}^s \vec{N}_n ,$$

em qualquer ponto dentro de cada elemento, inclusive no ponto médio, como ilustra a Figura 8. Esse procedimento é útil para avaliar o comportamento dos campos secundários em todo o domínio.

Efetuando a combinação linear dos vetores em azul, vermelho e verde no centro do elemento, ponderados pelas intensidades dos campos tangentes, nos fornece um valor único por elemento, onde esse valor passa a estar vinculado ao centro do mesmo.

Figura 8 – Combinação linear das bases vectoriais



Fonte: do autor

Agora, se efetuarmos (3.16) nos nós de cada elemento os valores obtidos para um determinado nó referentes a elementos diferentes divergirão entre si, mesmo sem haver contraste de propriedade física. Isso ocorre primeiro porque, como usamos as bases de Whitney, assumimos que os campos são constantes nas arestas, quando sabemos que não o são; segundo devido a cada nó pertencer a no máximo uma aresta comum entre elementos adjacentes. Com o uso de bases vectoriais de grau superior este inconveniente não ocorre, pois os campos podem variar ao longo da aresta, porém o numero de graus de liberdade para cada aresta aumenta e não trataremos destas bases neste trabalho devido ao maior custo computacional.

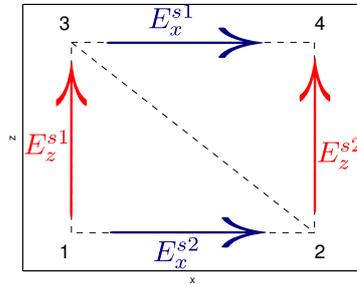
De forma a representar os campos com apenas um valor nos nós da malha, podemos efetuar a média aritmética dos valores obtidos nos mesmos para cada elemento,

$$\vec{E}^s = \sum_{i=1}^M \frac{\sum_{n=1}^3 E_{tn}^s \vec{N}_n}{M} ,$$

onde  $M$  é a quantidade de elementos que compartilham o mesmo nó. Dibben e Metaxas (1997) afirmam que com este procedimento obtém-se melhor convergência dos campos comparados com o uso das bases de grau 1 e dos elementos finitos nodais. Entretanto Huang, Li e Wu (2013) mostram que isso somente ocorre em malhas uniformes.

Existem no mínimo duas maneira de obtermos as informações que necessitamos sem o uso de (3.16). Na primeira, podemos impor a existência de quatro nós na malha (em cada estação MT) formando um quadrado alinhado com os eixos cartesianos, representado na Figura 9. Desta forma, os campos tangenciais se confundem com as componentes  $x$  e  $z$

Figura 9 – Informações obtidas diretamente das arestas - forma diferencial



Fonte: do autor

dos campos secundários. Assim, no centro deste quadrado,

$$E_x = \frac{1}{2} (E_x^{s1} + E_x^{s2}) + E_x^p ,$$

e por meio da equação de Faraday (3.3) na forma diferencial,

$$\vec{H} = -\frac{1}{\mathfrak{z}} \nabla \times \vec{E},$$

$$H_y = -\frac{1}{\mathfrak{z}} \left[ \left( \frac{E_x^{s2} - E_x^{s1}}{dz} - \frac{E_z^{s2} - E_z^{s1}}{dx} \right) + \left( \frac{\partial E_x^p}{\partial z} - \frac{\partial E_z^p}{\partial x} \right) \right] .$$

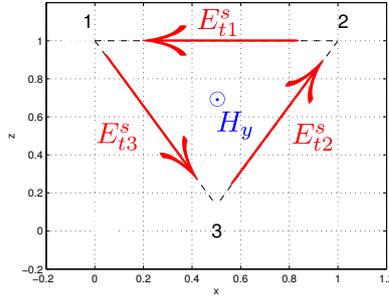
Uma outra maneira de obtermos o que necessitamos seria posicionar um elemento para cada estação MT, como representado na Figura 10. Desta forma, por meio da equação de Faraday na forma integral,

$$\int_{\Omega_e} \vec{H} \cdot \hat{n} dx dz = -\frac{1}{\mathfrak{z}} \int_{\partial\Omega_e} \vec{E} \cdot \hat{t} dl,$$

podemos obter a componente  $y$  do campo magnético,

$$H_y = -\frac{1}{\mathfrak{z}\Omega_e} \left[ (E_{t1}^s l_1 + E_{t2}^s l_2 + E_{t3}^s l_3) + \int_{\partial\Omega_e} \vec{E}^p \cdot \hat{t} dl \right],$$

Figura 10 – Informações obtidas diretamente das arestas - forma integral



Fonte: do autor

considerando o mesmo constante dentro do elemento. Assim, podemos utilizar o campo elétrico na superfície,

$$E_t = E_{t1}^s + E_{t1}^p.$$

### 3.4 Equação diferencial em termos do campo $\vec{H}^s$

Com um procedimento similar desenvolvido para o campo  $\vec{E}^s$ , a partir de (3.5), observe que  $\vec{E}^s = \frac{1}{\eta}(\nabla \times \vec{H}^s - \Delta\eta\vec{E}^p)$ , portanto,

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\eta} \nabla \times \vec{H}^s \right) + \mathfrak{z}\vec{H}^s = \frac{\Delta\eta}{\eta} \nabla \times \vec{E}^p - \Delta\mathfrak{z}\vec{H}^p.$$

Usando novamente (3.3), obtemos

$$\nabla \times \left( \frac{1}{\eta} \nabla \times \vec{H}^s \right) + \mathfrak{z}\vec{H}^s = - \left( \frac{\Delta\eta}{\eta} \mathfrak{z}^p + \Delta\mathfrak{z} \right) \vec{H}^p.$$

Entretanto, aqui devemos tomar maior cuidado com a singularidade no *ar*.

No método magnetotelúrico a fonte está fora do domínio e, portanto,  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ . Assim, podemos descrever a densidade de corrente em termos do potencial vetor elétrico  $\vec{T}$ ,

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{T}$$

No *ar*  $\vec{J} = 0$  e, convenientemente, podemos assumir que  $\vec{T} = 0$ . No interior da terra, levando em conta algumas premissas, como a condição quasi-estática ( $\eta = \sigma$ ) e  $\vec{J}_t = \vec{0}$ ,

$$\nabla \times \vec{H}^p + \nabla \times \vec{H}^s = \sigma\vec{E} = \vec{J} = \nabla \times \vec{T}, \quad (3.19)$$

onde o primeiro termo de (3.19) é nulo. Portanto,

$$\vec{H}^s = \vec{T} - \nabla\Omega,$$

já que  $\nabla \times \nabla \Omega = 0$ , onde  $\Omega$  é o potencial escalar magnético.

Assim, para garantirmos a validade de (3.4) no *ar*, podemos resolver simultaneamente,

$$\begin{cases} \nabla \times \left( \frac{1}{\sigma} \nabla \times \vec{T} \right) + \mathfrak{z} (\vec{T} - \nabla \Omega) = - \left( \frac{\Delta \sigma}{\sigma} \mathfrak{z}^p + \Delta \mathfrak{z} \right) \vec{H}^p \\ \nabla \cdot (\vec{T} - \nabla \Omega) = 0 \end{cases},$$

usando o método conhecido como o método de decomposição  $\vec{T} - \Omega$ , onde a primeira equação é válida somente no interior da “terra”. Mitsuata e Uchida (2004) fizeram a modelagem 3D do MT utilizando este método, interpolando as funções  $\vec{T}$  e  $\Omega$  com bases vetoriais e nodais, respectivamente.

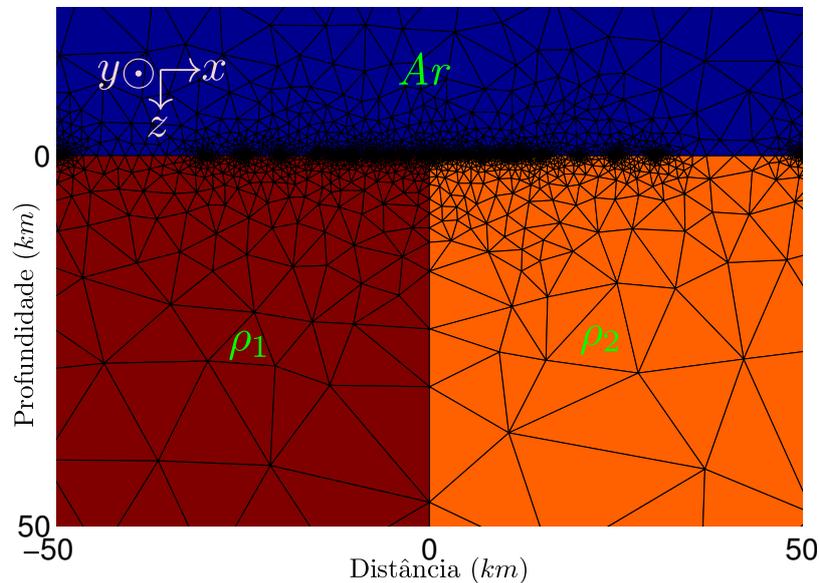
## 4 RESULTADOS

Para os exemplos numéricos estudados, consideramos meios isotrópicos em que o meio de propriedade  $\rho_1$  é anômalo a um meio encaixante de propriedade  $\rho_2$ . Utilizamos o campo primário  $\vec{E}^p = E_x \hat{x}$ , calculado em dois semi-espacos de resistividade elétrica igual a do ar  $\approx \infty$  e do meio encaixante  $\rho_2$ , onde  $E_x = 1$  na interfase entre os semiespacos e decai exponencialmente em profundidade no semiespaco condutivo.

### 4.1 Validação da metodologia

De forma a validarmos nosso código, calculamos a influência de uma falha, representada no modelo da Figura 11, para o modo TM. Este modelo possui solução semi-analítica (D'ERCEVILLE; KUNETZ, 1962), inclusive para meios anisotrópicos (QIN; YANG; CHEN, 2013).

Figura 11 – Modelo 1 - falha vertical aflorante.

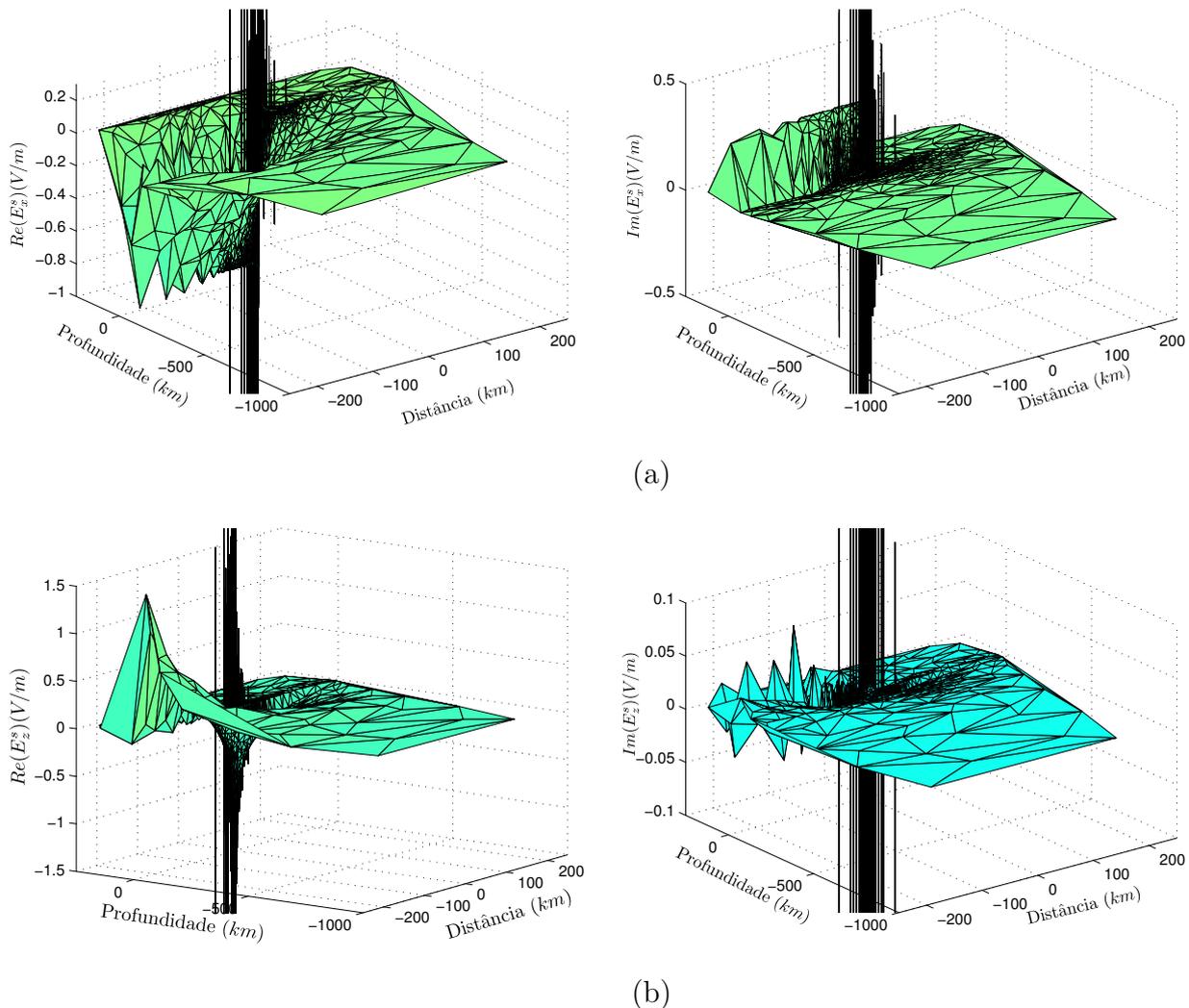


Fonte: do autor

De maneira a ilustrar o comportamento dos campos secundários em todo o domínio, em um primeiro momento, para a frequência de  $0.01Hz$ ,  $\rho_1 = 5\Omega m$  e  $\rho_2 = 100\Omega m$ , calculamos o campo secundário no centro de cada elemento, representado na Figura 12, a partir da combinação linear das bases vetoriais ponderadas pelos campos tangentes obtidos na resolução do sistema linear. Observa-se que com esse procedimento os valores obtidos

ficam associados ao centro dos elementos, o que diminui o controle que possuímos sobre malha na etapa de pós processamento.

Figura 12 – Campos secundários calculados no centro de cada elemento. (a) Componente  $x$ . (b) Componente  $z$

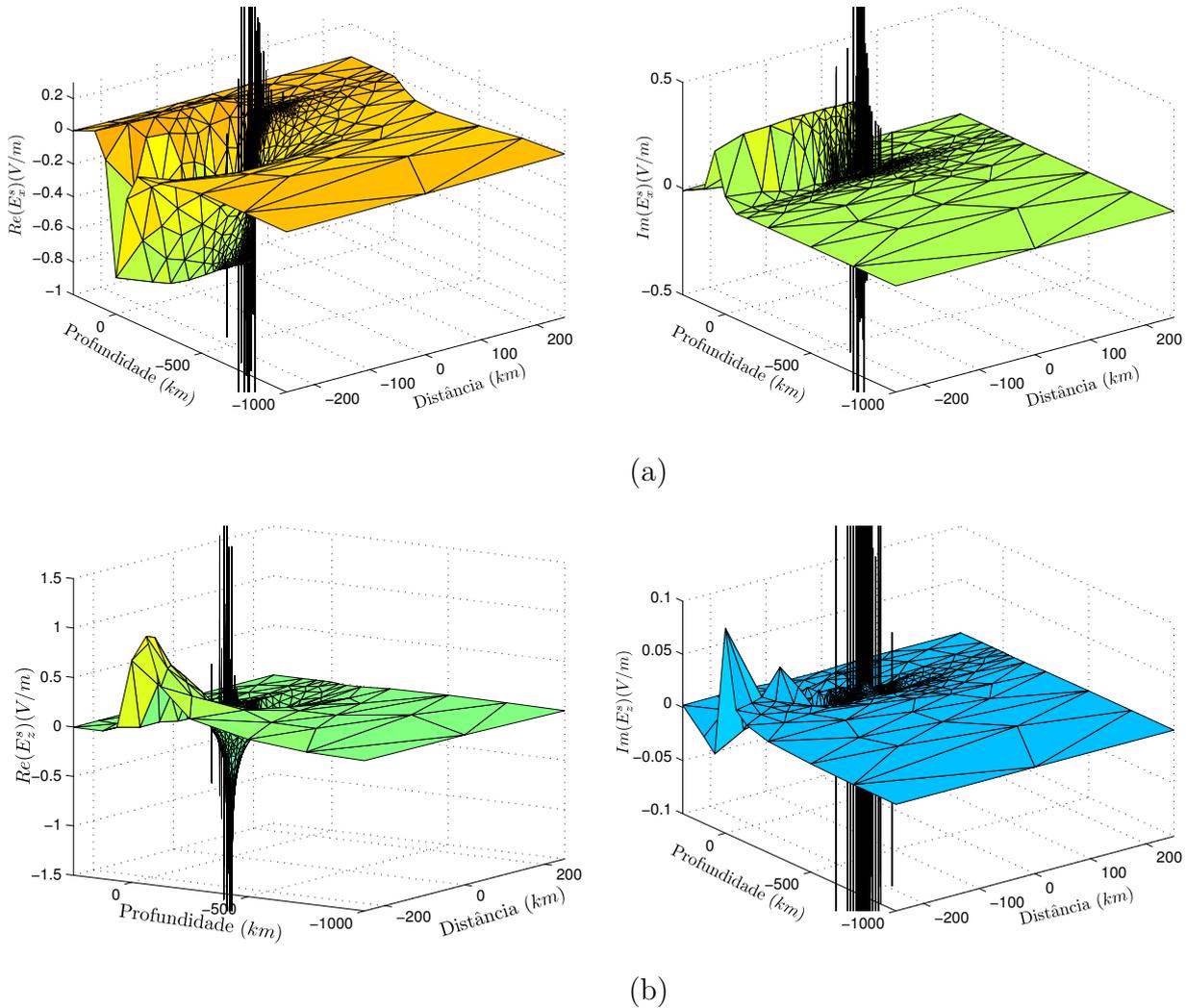


Fonte: do autor

Em seguida, para cada elemento do domínio calculamos os campos secundários em seus nós, assumindo como valor a média aritmética da contribuição de elementos que compartilham o mesmo nó da malha, representado na Figura 13. Desta forma, os valores ficam associados aos nós, porém perdemos precisão com este procedimento, o qual aqui chamamos de procedimento 1.

De qualquer maneira, as Figuras 12 e 13 servem para ilustrar o comportamento dos campos secundários em todo o domínio, porém não obtemos os perfis, em  $z = 0$ , dos campos secundários por meio destas superfícies. Para isso, adotamos o que chamamos de procedimento 2: extraímos os campos diretamente das arestas, as quais previamente

Figura 13 – Campos secundários calculados nos nós de cada elemento. (a) Componente  $E_x^s$ . (b) Componente  $E_z^s$



Fonte: do autor

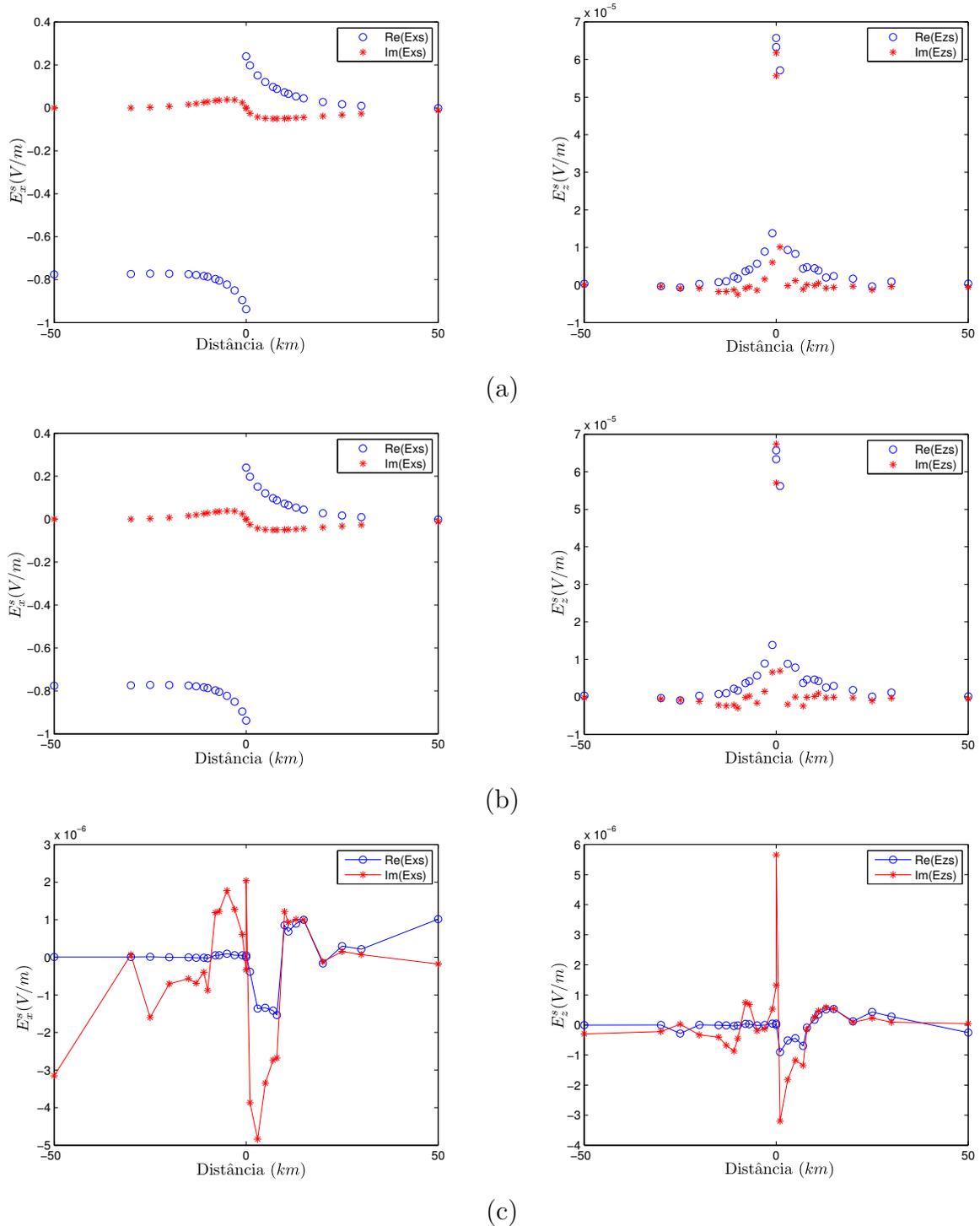
impomos estarem alinhadas nas direções dos eixos cartesianos.

Na Figura 14 pode-se observar algumas diferenças sutis entre os campos obtidos pelos procedimentos 1 e 2. Diferenças que se mostraram significativas na modelagem MT, o que pode ser observado na Figura 15.

Assim, fazendo uso do procedimento 2, calculamos a resistividade aparente e a fase em 28 estações, distribuídas entre  $x = -50 \text{ km}$  e  $x = 50 \text{ km}$ , posicionadas simetricamente em relação à falha. Utilizamos 71 frequências, igualmente espaçadas em escala logarítmica, entre  $10^{-3}$  e  $10^4 \text{ Hz}$ . A malha utilizada possui 18.917 elementos, 9.474 nós e 28.390 arestas.

Na Figura 16 podemos observar que nossas respostas são coerentes com a solução semi-analítica proposta por Qin, Yang e Chen (2013), quando extrapolada para um modelo

Figura 14 – Campos secundários na superfície. (a) Obtidos pelo procedimento 1. (b) Obtidos pelo procedimento 2. (c) Diferenças entre os campos apresentados em (a) e (b).



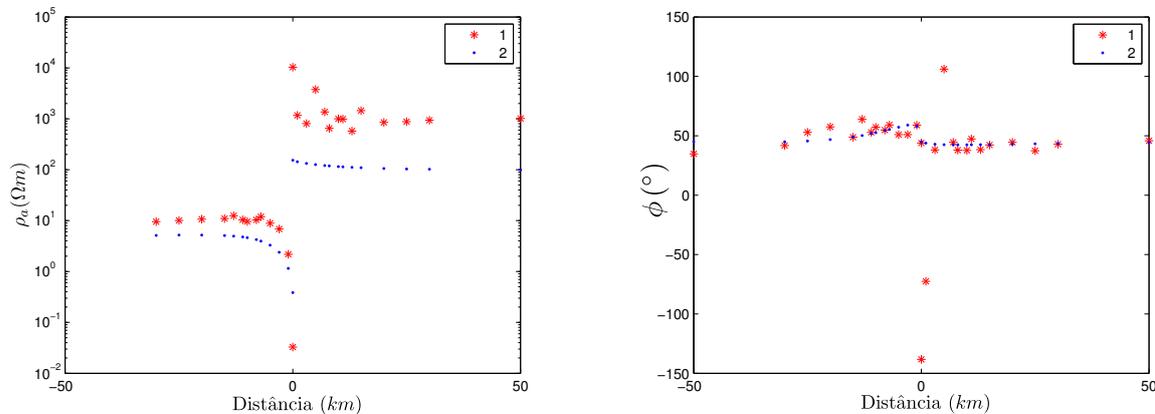
Fonte: do autor

isotrópico. Na maioria dos casos, o erro relativo percentual,

$$\epsilon_r = 100 \times \frac{\|Solucao_{analitica} - Solucao_{numerica}\|}{Solucao_{analitica}}, \quad (4.1)$$

não ultrapassou 2 por cento do valor total, o que pode ser melhor visualizado nas Figuras

Figura 15 – Resistividade aparente e fase calculados por meio dos campos obtidos pelos procedimentos 1 e 2.



Fonte: do autor

17 e 18. Podemos observar ainda que os erros relativos percentuais obtidos nas estações posicionadas sobre o corpo anômalo em geral foi maior, possivelmente devido às condições de fronteira.

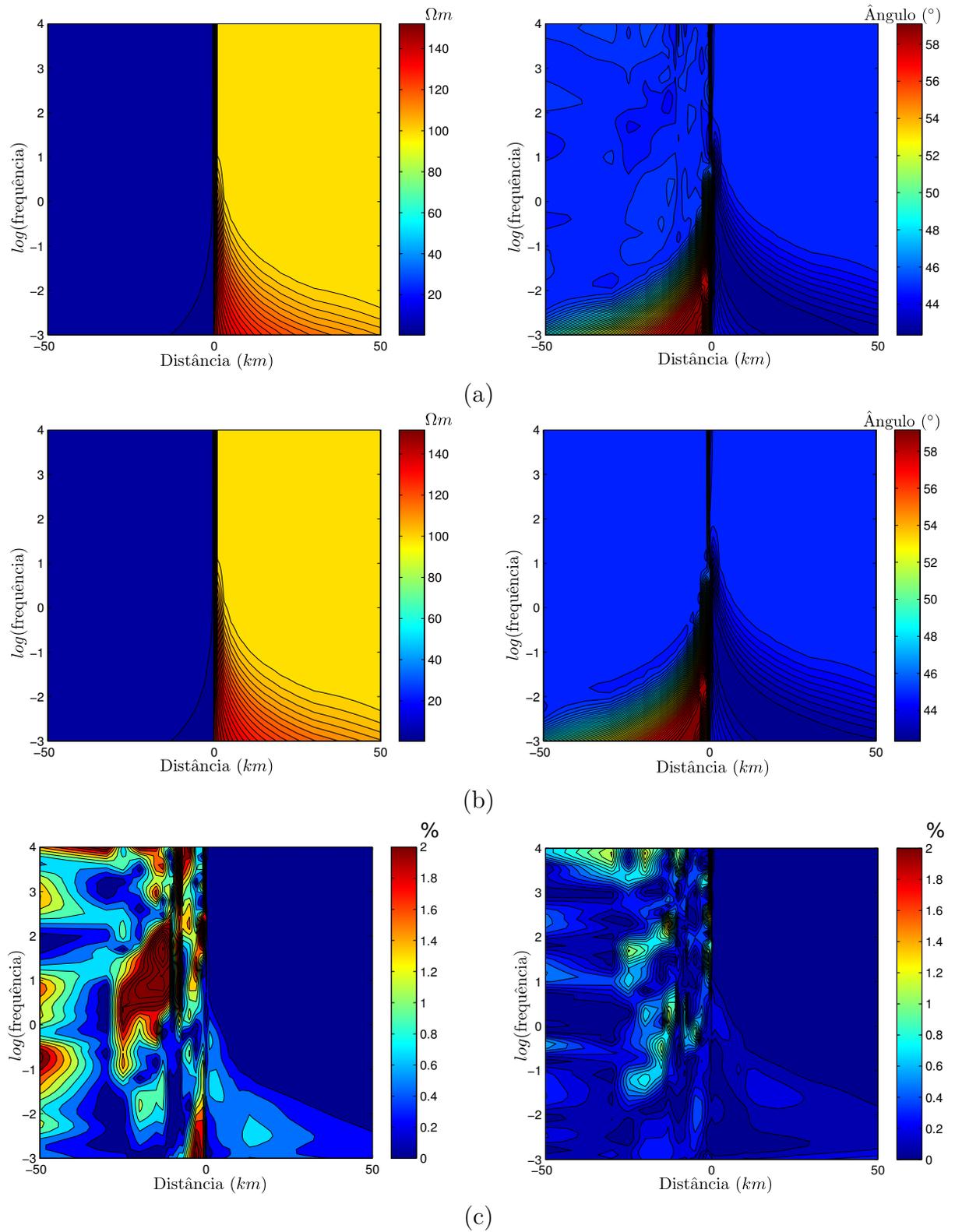
Uma análise imediata é que o efeito da falha nas curvas de resistividade e fase é tanto mais presente quanto menor a frequência e/ou quanto mais próximo estivermos da descontinuidade. Este efeito foi mais pronunciado sobre o corpo de menor condutividade tanto para a fase quanto para a resistividade aparente, onde esta tornou-se menor sobre o corpo de menor resistividade e ligeiramente maior sobre o corpo de maior resistividade.

## 4.2 Eficiência do método

De forma a avaliarmos a eficiência do MEF de arestas, ainda para um modelo da Figura 11, mas com  $\rho_1 = 10$  e  $\rho_2 = 1000$ , comparamos nossas respostas para a frequência de  $0.1 \text{ Hz}$  com as soluções obtidas pelo MEF nodais, apresentadas na Figura 19. Informações sobre este método se encontram no apêndice B.

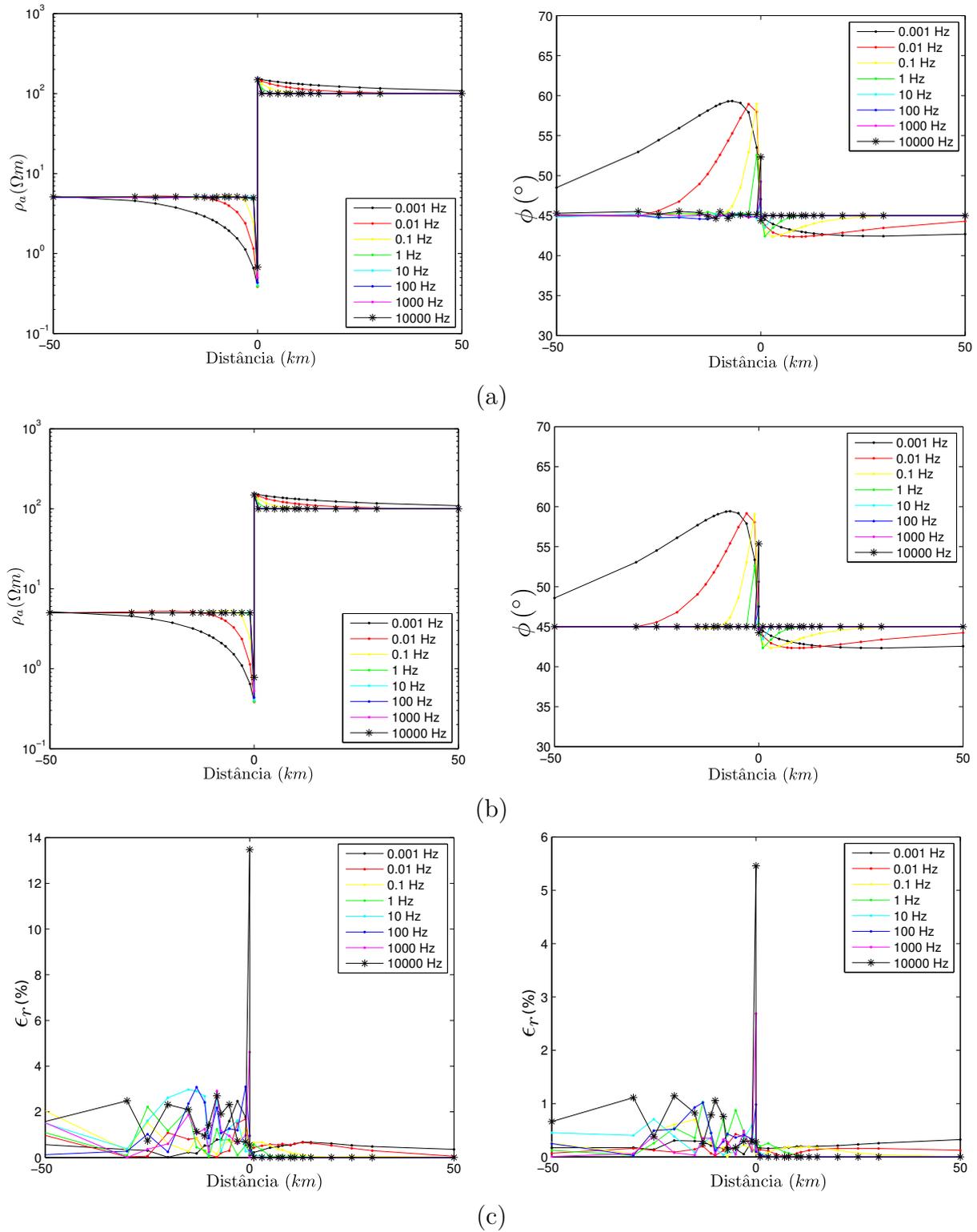
Observamos que para atingirmos uma convergência similar ao MEF nodais, precisamos demandar muito mais recursos: para o MEF nodais foi utilizada uma malha de 13.182 elementos e 7.248 nós, enquanto que para o MEF de arestas utilizamos uma malha de 18.291 elementos e 27.451 arestas. Em parte, isso se deve a, nesse caso, termos que discretizar o ar, o que contribuiu com 9.517 elementos a mais na malha. E, apesar da matriz global obtida com o MEF nodais não ser tão esparsa quanto a obtida com MEF de arestas, a quantidade de posição de memória necessária para este método ( $882 \times 27.451 = 24.211.782$ ) foi muito maior do que aquele ( $1.037 \times 7.248 = 7.516.176$ ). Além disso, com o MEF de arestas o

Figura 16 – Pseudoseções de resistividade aparente e fase. (a) Resposta numérica obtida. (b) Solução semi-analítica. (c) Erro relativo percentual.



Fonte: do autor

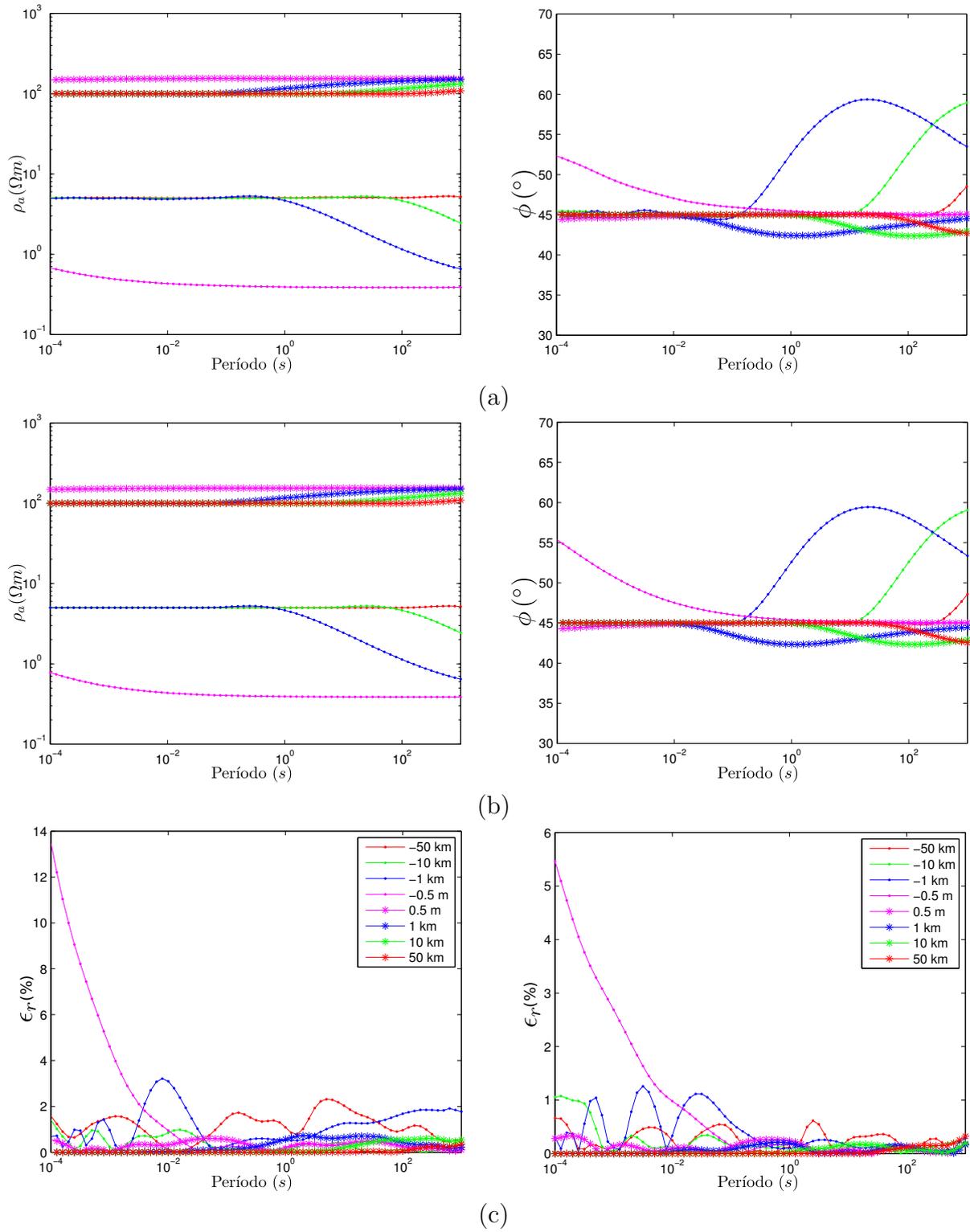
Figura 17 – Perfilagem. (a) Resposta numérica obtida. (b) Solução analítica. (c) Erro relativo percentual.



Fonte: do autor

número de incógnitas é o número de arestas, e esse é o mesmo número de substituições no processo de eliminação gaussiana, o que também contribuiu para o aumento de tempo de

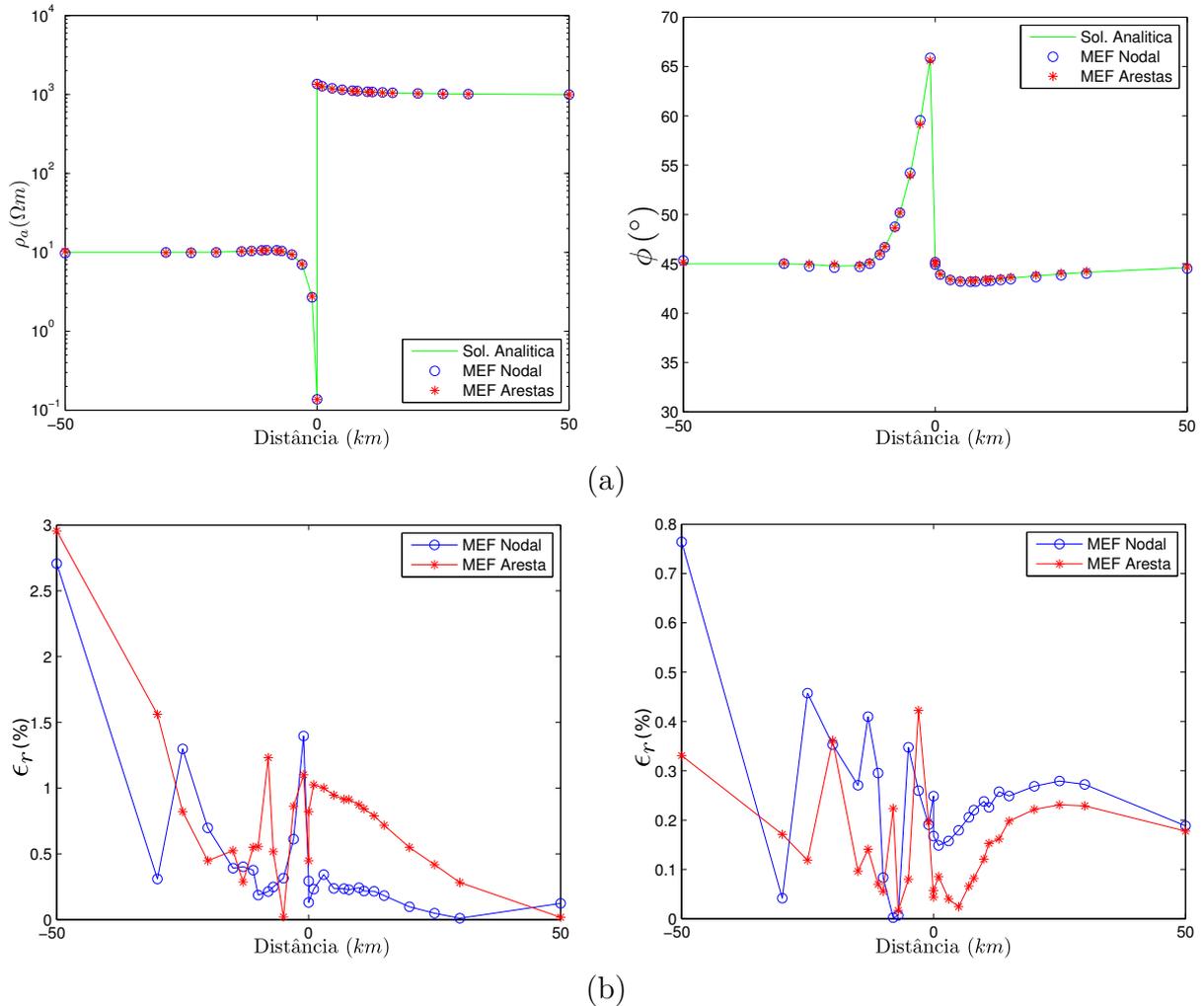
Figura 18 – Sondagem MT. (a) Resposta numérica obtida. (b) Solução analítica. (c) Erro relativo percentual.



Fonte: do autor

processamento em relação ao MEF nodais, onde a quantidade de incógnitas é igual ao número de nós da malha.

Figura 19 – (a) Curvas de resistividade e fase. (b) Erros relativos percentuais dos métodos MEF nodais e de arestas .

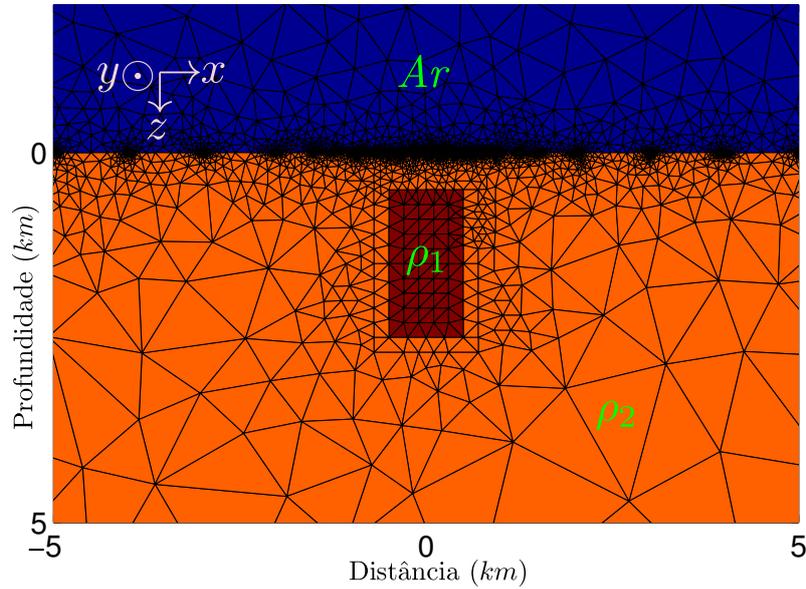


Fonte: do autor

Uma maneira de compararmos os métodos numéricos para uma mesma malha é utiliza-los para calcular o campo elétrico secundário em todo o domínio, independentemente do modo de propagação. Isso porque, neste caso, as condições de fronteira são praticamente idênticas. Uma ressalva é que aqui estamos interessados no tempo de processamento. Para isso utilizamos o modelo representado na Figura 20, com  $\rho_1 = 5\Omega m$  e  $\rho_2 = 100\Omega m$ .

Assim, por meio do campo elétrico secundário obtido em todo o domínio, obtivemos as demais componentes e calculamos a resistividade aparente e a fase em 41 estações, distribuídas entre  $x = -5 km$  e  $x = 5 km$ , posicionadas simetricamente em relação à origem. Utilizamos 71 frequências, igualmente espaçadas em escala logarítmica, entre  $10^{-3}$  e  $10^4 Hz$ . A malha utilizada possui 18.564 elementos, 9.307 nós e 27.870 arestas e a quantidade de posição de memória necessária foi de  $1.135 \times 27.870 = 31.632.450$  para o MEF de arestas e  $1.849 \times 9.307 = 17.208.643$  para o MEF nodais. A demanda de tempo

Figura 20 – Modelo 2 - corpo anômalo em subsuperfície.



Fonte: do autor

para ambos métodos se encontra na Tabela 3.

Tabela 3 – Demanda de tempo

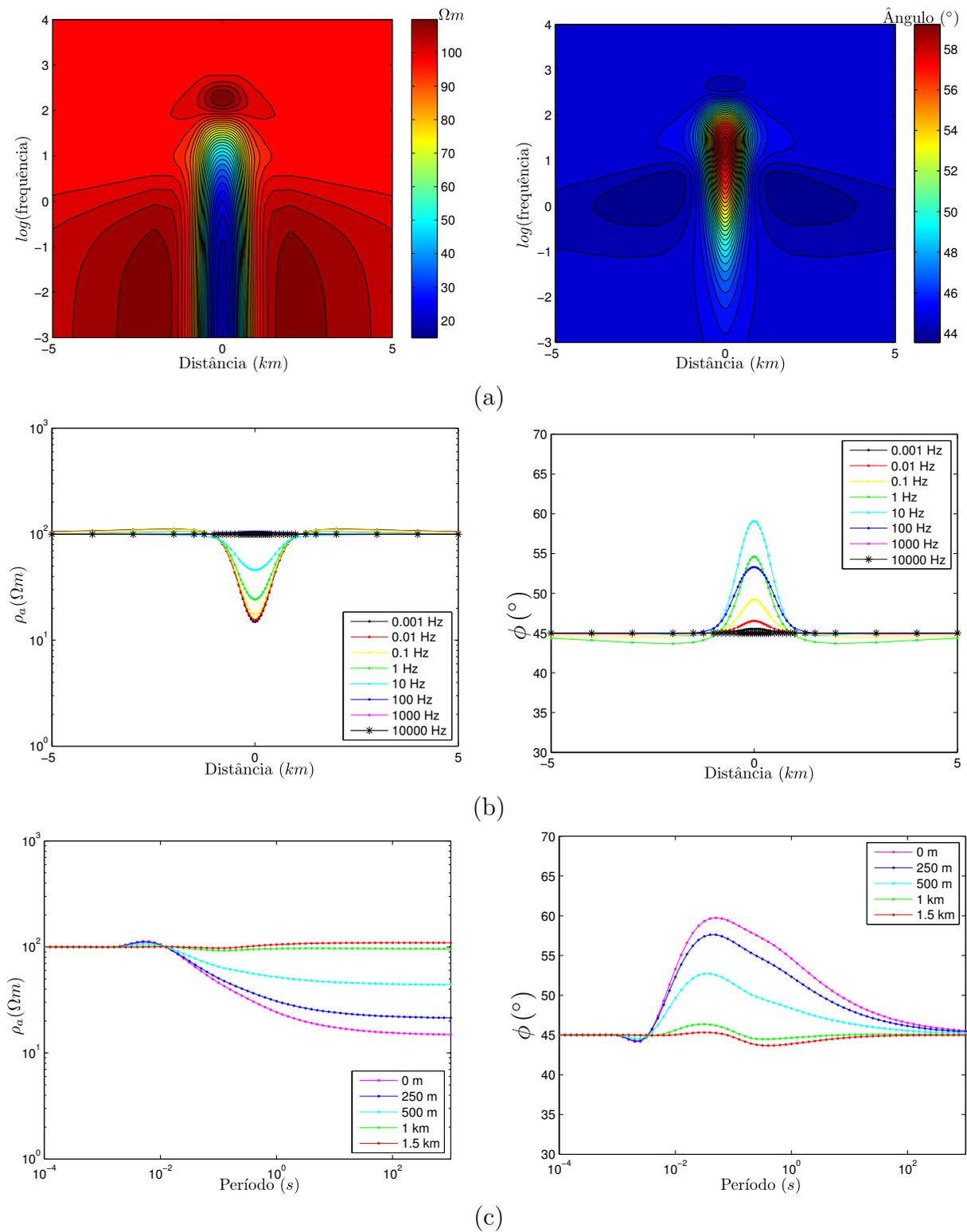
	MEF de arestas	MEF nodais
Tempo total de execução	5931,92 s	2074,24 s
Tempo médio para a Montagem do sistema	0,35 s	0,16 s
Tempo médio para a solução do sistema	83,18 s	27,77 s

Fonte: do autor

Medimos a demanda de tempo utilizando a função intrínseca *cpu\_time* na linguagem fortran. Para rodar os códigos utilizamos um computador pessoal com processador intel pentium Dual Core T3400, com 4G de memória RAM.

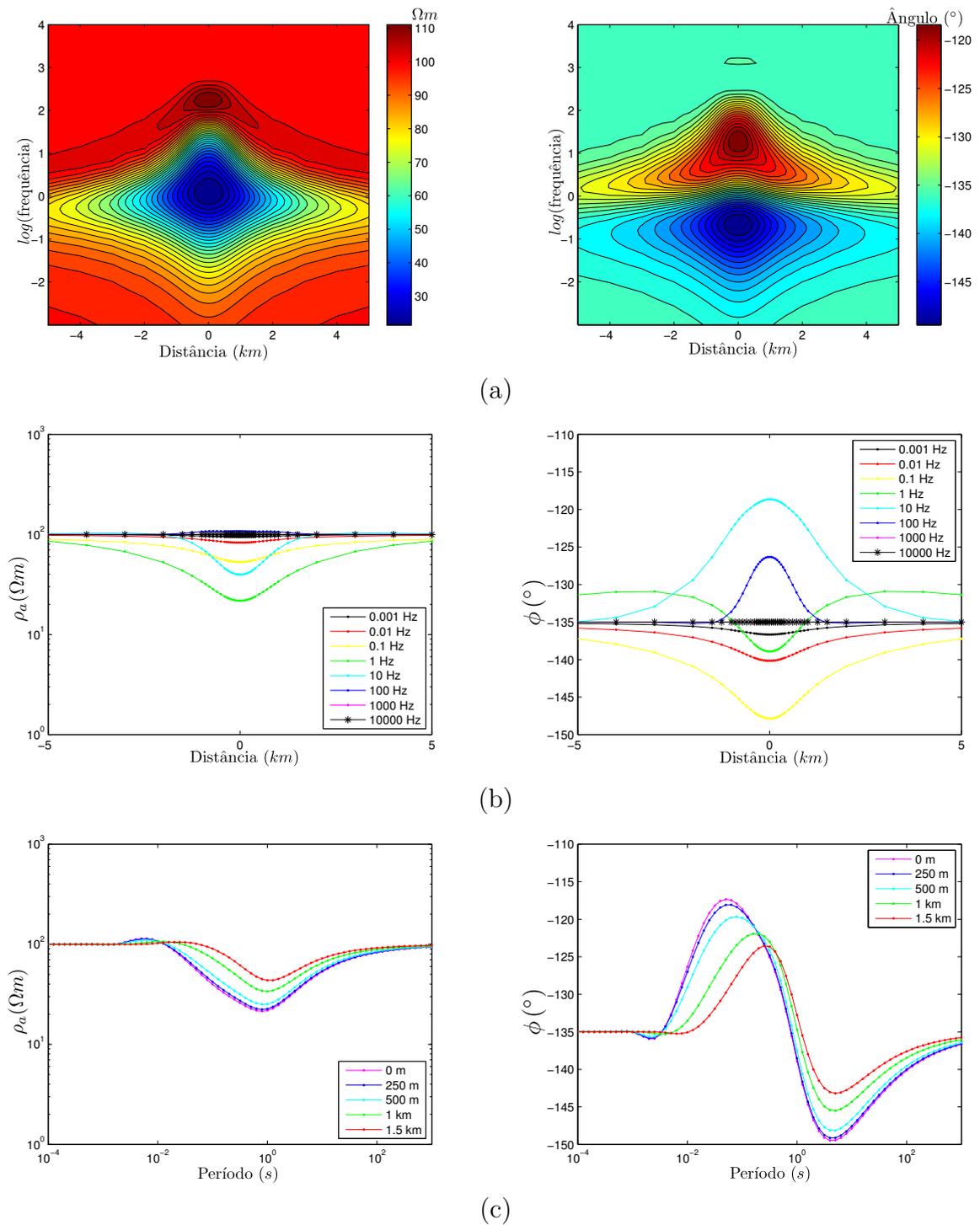
As respostas MT obtidas neste experimento numérico podem ser observadas nas Figuras 21, onde obtivemos a resposta MT para o modo TM com o MEF de arestas, e 22, onde mostramos a resposta MT para o modo TE com o MEF nodais.

Figura 21 – MEF de Arestas - Resposta MT para o modo TM de um corpo anômalo em subsuperfície. (a) Pseudoseção. (b) Perfilagem. (c) Sondagem MT.



Fonte: do autor

Figura 22 – MEF nodais - Resposta MT para o modo TE de um corpo anômalo em subsuperfície.  
 (a) Pseudoseção. (b) Perfilagem. (c) Sondagem MT.



Fonte: do autor

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho apresentamos uma formulação para a modelagem 2D do problema direto do método magnetotelúrico com o método dos elementos finitos de arestas. Este método numérico, promissor na resolução de problemas envolvendo eletromagnetismo, está em fase inicial de estudo nesta intuição de ensino e maiores investigações serão necessárias para extrair vantagens com o uso deste método numérico em problemas geofísicos.

O método dos elementos finitos de arestas não contempla algumas simplificações que um modelo 2D permite na modelagem MT. Com o procedimento que adotamos, com a solução do sistema linear obtemos as componentes descontínuas  $x$  e  $z$  do campo  $\vec{E}^s$ , por meio das quais calculamos a componente  $y$  do campo  $\vec{H}$ . Como consequência disso, em cada estação MT foi necessário efetuar derivadas nas duas direções principais do plano  $x - z$ .

Além disso, quando o método dos elementos finitos de arestas é utilizado para resolver uma equação diferencial vetorial em termos do campo  $\vec{H}$ , as condições de fronteira não são tão imediatas, necessitando de um calibre adicional, devido à não unicidade da relação  $\frac{\partial H_x}{\partial z} = \frac{\partial H_z}{\partial x}$ . Mitsuhashi e Uchida (2004) apresenta uma resposta coerente pelo método de decomposição  $\vec{T} - \Omega$ .

Comparamos nossas respostas relacionadas a um modelo contendo uma falha com o método dos elementos finitos nodais. Não obtivemos vantagem na modelagem 2D em relação a este método, pois o custo computacional foi mais elevado para resolver o mesmo problema. Em parte isso se deve a termos que discretizar o  $ar$  e aos graus de liberdade estarem associado às arestas da malha, o que contribuiu para aumentar a dimensão do sistema linear. Porém, este sistema é extremamente esparsa, o que contribui para diminuir a quantidade de posição de memória necessária para a resolução do problema.

De forma a comparar os métodos utilizando a mesma malha, calculamos o campo elétrico secundário  $E^s$  em todo o domínio de um modelo contendo um corpo anômalo em subsuperfície. Mais uma vez tivemos maior custo computacional com MEF de arestas. Entretanto, comparando com o experimento numérico anterior, podemos inferir que quanto maior a dimensão do problema, maior será a discrepância entre as bandas reduzidas obtidas para cada método. Assim, em problema de grande porte possivelmente isso será uma vantagem em favor do método de elementos finitos de arestas.

Outra possível vantagem: o método dos elementos finitos de arestas permite que os modos de propagação sejam acoplados, o que será muito útil na formulação de outros métodos eletromagnéticos, como por exemplo nos métodos eletromagnéticos de fonte controlada (CSEM). Para isso, basta ter em mãos as componentes  $x$  e  $z$  dos campos

primários gerados pela fonte, por exemplo o dipolo elétrico horizontal. Neste método geofísico, a informação mais relevante da subsuperfície é a componente  $E_x$ , que pode ser extraída diretamente da solução do sistema linear.

Em trabalhos futuros pretendemos aprimorar a resolução das integrais de superfície relacionadas ao vetor fonte, para aumentar a eficiência do método. A aproximação que fizemos, de certa forma, é grosseira, pois os pesos que utilizamos na interpolação dos campos primários não são informações precisas destes campos. De fato, os campos variam ao longo da aresta e, aproximar o campo tangente como a projeção no centro da aresta pode não ser a melhor metodologia.

Pretendemos também estudar modelos com topografia. Utilizando a equação de Faraday na forma integral, na etapa de pós-processamento, se torna evidente uma vantagem do método dos elementos finitos de arestas na inclusão de topografia, pois os valores obtidos para a componente tangencial do campo elétrico corresponde melhor à realidade de aquisição.

Estudaremos também se haverá melhor convergência do método utilizando quadri-láteros para discretizar o domínio.

## REFERÊNCIAS

- BOSSAVIT, A. Solving Maxwell equations in a closed cavity, and the question of ‘spurious modes’. *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 26, n. 2, p. 702–705, 1990.
- BURKARDT, J. *Computational Geometry Lab: Quadrature*. [S.l.], 2013. [Http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/presentations/cg\\_lab\\_quadrature.pdf](http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/presentations/cg_lab_quadrature.pdf).
- BURKARDT, J. *TRIANGULATION\_RCM Reverse Cuthill-McKee Node Reordering*. 2013. Disponível em <[http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/f\\_src/triangulation\\_rcm/triangulation\\_rcm.html](http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/f_src/triangulation_rcm/triangulation_rcm.html)>.
- CAGNIARD, L. Basic theory of the magneto-telluric method of geophysical prospecting. *Geophysics*, v. 18, p. 605–645, 1953.
- D’ERCEVILLE; KUNETZ, G. The effect of a fault on the earth’s natural electromagnetic field. *Geophysics*, v. 27, n. 5, p. 651–665, 1962.
- DIBBEN, C. D.; METAXAS, R. A comparison of the errors obtained with Whitney and linear edge elements. *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 33, n. 2, p. 1524–1527, 1997.
- DONGARRA, J. J. et al. *LINPACK Users’ Guide*. Philadelphia: SIAM, 1979.
- HUANG, Y.; LI, J.; WU, C. Averaging for superconvergence: Verification and application of 2d edge elements to maxwell’s equations in metamaterials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 255, p. 121–132, 2013.
- HUGHES, T. J. R. *The finite element method : linear static and dynamic finite element analysis*. [S.l.]: Englewood Cliffs, N.J. Prentice-Hall International, 1987.
- JIN, J. *The Finite Element method in Electromagnetics*. New York: Wiley-IEEE PRESS, 2002.
- JIN, J. *Theory and Computation of Electromagnetic Fields*. Hoboken, New Jersey: Wiley-IEEE PRESS, 2010.
- KEY, K. *Triangle.m*. 2013. Disponível em <<http://marineemlab.ucsd.edu/~kkey/software.php>>.
- MITSUHATA, Y.; UCHIDA, T. 3d magnetotelluric modeling using the T- $\omega$  finite element method. *Geophysics*, v. 69, n. 1, p. 108–119, 2004.
- MUKHERJEE, S.; EVERETT, M. E. 3d controlled-source electromagnetic edge-based finite element modeling of conductive and permeable heterogeneities. *Geophysics*, v. 76, n. 4, p. F215–F226, 2011.
- NAM, M. J. et al. 3d magnetotelluric modelling including surface topography. *Geophysical Prospecting*, v. 55, p. 277–287, 2007.
- QIN, L.; YANG, C.; CHEN, K. Quasi-analytic solution of 2-d magnetotelluric fields on an axially anisotropic infinite fault. *Geophysical Journal International*, v. 192, p. 67–74, 2013.

- REDDY, C. J. et al. Finite element method for eigenvalue problems in electromagnetics. *National Aeronautics and Space Administration*, Hampton, Virginia, 1994.
- RIJO, L. *Teoria dos Métodos Elétricos e Eletromagnéticos*. [S.l.], 1996.
- SHEWCHUK, J. R. *A Two-Dimensional Quality Mesh Generator and Delaunay Triangulator*. 2013. Disponível em <<http://www.cs.cmu.edu/~quake/triangle.html>>.
- SILVA, N. V. da et al. A finite element multifrontal method for 3d csem modeling in the frequency domain. *Geophysics*, v. 77, n. 2, p. E101–E115, 2012.
- TIKHONOV, A. N. The determination of the electrical properties of deep layers of the earth's crust. *Dokl. Acad. Nauk*, v. 73, p. 295–297, 1950.
- VOLAKIS, J. L.; CHATTERJEE, A.; KEMPEL, L. C. *Finite Element Method for Electromagnetics: Antennas, microwave circuits and scattering applications*. New York: Wiley-IEEE PRESS, 1998.
- VOZOFF, K. The magnetotelluric method. In: NABIGHIAN, M. N. (Ed.). [S.l.]: Society of Exploration Geophysicists SEG, 1991, (Investigations in Geophysics, v. 2).
- WARD, S. H.; HOHMANN, G. W. Electromagnet theory for geophysical applications. In: NABIGHAM, M. N. (Ed.). [S.l.]: Society os Exploration Geophysicists SEG, 1988, (Investigations in Geophysics, v. 1).
- WHITNEY, H. *Geometric integration theory*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1957.

## **APÊNDICES**

## APÊNDICE A – CAMPOS PRIMÁRIOS

### A.1 Solução analítica em modelos 1D

Assumindo que a componente  $\hat{z}$  dos campos primários sejam nulas e que  $\vec{J}_t = 0$ , em um modelo 1D as equações de Maxwell se resumem a,

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z} - \eta E_x = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \eta E_y = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial z} + \mathfrak{z} H_x = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} + \mathfrak{z} H_y = 0. \quad (\text{A.4})$$

Assim, substituindo (A.4) em (A.1) e (A.3) em (A.2) podemos obter duas equações diferenciais independentes em termos das componente  $x$  dos campos,

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \kappa^2 E_x^s = 0, \quad (\text{A.5})$$

e,

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \kappa^2 H_x^s = 0, \quad (\text{A.6})$$

onde  $\kappa^2 = -\eta\mathfrak{z}$  é o número de onda destas equações de Helmholtz homogêneas (A.5) e (A.6). O mesmo procedimento pode ser feito em termos da componente  $y$ , obtendo equações idênticas, a menos do índice.

A solução das equações escalares (A.5) e (A.6) são conhecidas em meios estratificados (RIJO, 1996). Para a equação (A.5), por exemplo,

$$\begin{cases} E_x^{(j)} = E_j \left[ e^{-u_j(z-z_j)} + R^j e^{u_j(z-z_j)} \right] e^{-i\lambda x} \\ E_x^{(n)} = E_n e^{-u_n(z-z_{n-1})} e^{-i\lambda x} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

onde  $u_j = \sqrt{\lambda^2 - \kappa^2}$  é a constante de propagação de onda no meio  $(j)$ ,  $E_j$  e  $R^j$  os coeficientes de transmissão e reflexão na interface  $j$ , respectivamente;  $\lambda = \kappa_j \sin(\theta_j)$ , onde  $\theta$  é o ângulo de incidência na interface  $j$ . No MT, devido ao contraste  $ar$ -terra,  $k_1 \gg k_0$  e, portanto independente do ângulo de incidência, os campos penetram verticalmente na terra, assim  $\lambda = 0$ .

Agora, para obter os coeficientes de transmissão e reflexão em cada interface recorre-se também à equação (A.4),

$$H_y^{(j)} = -\mathcal{Y}_j E_j \left[ e^{-u_j(z-z_j)} - R^j e^{u_j(z-z_j)} \right] e^{-i\lambda x}$$

$$H_y^{(n)} = -\mathcal{Y}_n E_n e^{-u_n(z-z_{n-1})} e^{-i\lambda x},$$

onde,  $\mathcal{Y} = \frac{u_j}{3}$ . Devido às condições de fronteira, na interface  $j$ ,  $E^{(j)} = E^{(j+1)}$  e  $H^{(j)} = H^{(j+1)}$ . Assim, igualando estes campos é possível obter,

$$\begin{aligned} E_j &= E_{j-1} \frac{1 + R^{j+1}}{e^{u_j h_j} + R^j e^{-u_j h_j}}, \quad j = 1, \dots, n-1 \\ E_n &= E_{n-1} (1 + R^{n-1}), \end{aligned}$$

a partir de,

$$R^j = \frac{\mathcal{Y}_{(j)} - \hat{\mathcal{Y}}_{j+1}}{\mathcal{Y}_{(j)} + \hat{\mathcal{Y}}_{j+1}},$$

que por sua vez é obtido a partir de,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{Y}}_j &= \mathcal{Y}_{(j)} \frac{\hat{\mathcal{Y}}_{j+1} + \mathcal{Y}_{(j)} \tanh(u_j h_j)}{\mathcal{Y}_{(j)} + \hat{\mathcal{Y}}_{j+1} \tanh(u_j h_j)}, \\ \hat{\mathcal{Y}}_n &= \mathcal{Y}_n. \end{aligned}$$

onde  $h_j$  é a espessura da camada  $j$ .

Desta forma a componente  $E_x$  pode ser obtida em qualquer coordenada do domínio a partir de (A.7).

## APÊNDICE B – MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NODAIS

O texto que segue é uma breve referência ao método dos elementos finitos, referido por MEF nodal ao longo da dissertação. Detalhes da teoria e implementação podem ser consultados em outras fontes (RIJO, 1996; VOLAKIS; CHATTERJEE; KEMPEL, 1998; JIN, 2002).

Aqui demos ênfase à discretização por elementos triangulares, apesar de outros polígonos poderem ser utilizados.

### B.1 Equações diferenciais escalares

Assumindo que os campos sejam constantes na direção  $\hat{y}$  e que a componente  $\hat{z}$  dos campos primários sejam nulas, de (3.5) podemos obter duas equações diferenciais independentes,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\eta} \frac{\partial H_y^s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\eta} \frac{\partial H_y^s}{\partial z} \right) - \mathfrak{z} H_y^s = \Delta \mathfrak{z} H_y^p - \frac{\Delta \eta}{\eta} \frac{\partial E_x^p}{\partial z},$$

ou,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mathfrak{z}} \frac{\partial E_y^s}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\mathfrak{z}} \frac{\partial E_y^s}{\partial z} \right) - \eta E_y^s = \Delta \eta E_y^p + \frac{\Delta \mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} \frac{\partial H_x^p}{\partial z}.$$

Estas equações escalares são o ponto de partida para a resolução pelo método dos elementos finitos “nodais”.

### B.2 Elementos Finitos 2D

Vamos resolver equações do tipo,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, z) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k(x, z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + q(x, z)u = h(x, z). \quad (\text{B.1})$$

Para isso, discretizaremos o domínio e consideraremos as propriedades físicas constantes dentro de cada elemento,  $k(x, z) = k_e$  e  $q(x, z) = q_e$ .

Para reduzirmos às exigências da solução da equação (B.1) recorreremos à formulação fraca. Se fizermos o produto interno entre a função peso  $\varphi$  e o vetor erro, assumindo que sejam ortogonais entre si,

$$\int_{\Omega} \varphi \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( k_e \frac{\partial u(x, z)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k_e \frac{\partial u(x, z)}{\partial z} \right) + q_e u(x, z) \right) - h(x, z) \right] dx dz = 0,$$

e usarmos a identidade diferencial,

$$\varphi \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x},$$

(B.1) pode ser reescrita como,

$$k_e \int_{\Omega_e} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \varphi \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dx dz - k_e \int_{\Omega_e} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dx dz + q_e \int_{\Omega_e} \varphi u dx dz = \int_{\Omega_e} h \varphi dx dz. \quad (\text{B.2})$$

Agora, usando o teorema de Green,

$$\int_{\Omega_e} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \varphi \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \varphi \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dx dz = \int_{\partial \Omega_e} \left( \varphi \frac{\partial u}{\partial x} dz - \varphi \frac{\partial u}{\partial z} dx \right) dx dz = \int_{\partial \Omega_e} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \hat{t} dl,$$

vemos que a primeira integral de (B.2) pode ser desprezada para elementos internos ao domínio, pois a integral de linha se anula se considerarmos a contribuição de elementos adjacentes. Nas fronteiras do domínio deve-se impôr condições de fronteira.

Interpolando  $u$  pelas funções bases,

$$u = \sum_{j=1}^n u_j \varphi_j,$$

e usando o critério de Galerkin, para cada elemento obtemos o sistema local,

$$-k_e \sum_{j=1}^n u_j \int_{\Omega_e} \left[ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z} \right] dx dz + q_e \sum_{j=1}^n u_j \int_{\Omega_e} \varphi_i \varphi_j dx dz = \int_{\Omega_e} h \varphi_i dx dz \quad (\text{B.3})$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

onde  $n = 3$  em domínios triangulares.

Muitos autores, como Rijo (1996) e Jin (2002), utilizam as bases nodais representadas pela equação (3.11),

$$\varphi_i = \frac{1}{2\Omega_e} (a_i + b_i x + c_i z),$$

equações de planos que valem a unidade no *i*ésimo nó e zero nos demais. Assim, recorrendo à integração exata,

$$\int_{\Omega_e} \varphi_1^\alpha \varphi_2^\beta \varphi_3^\gamma dx dz = 2\Omega_e \frac{\alpha! \beta! \gamma!}{(\alpha + \beta + \gamma + 2)!},$$

as integrais encontradas no sistema local (B.3) são de fácil resolução.

Da mesma forma, o vetor fonte local pode ser interpolado pelas funções bases,

$$h = \sum_{i=1}^n h_i \varphi_i,$$

o que recai em integrandos similares.

Resolvido cada sistema local, estes devem ser mapeados no sistema global (RIJO, 1996; VOLAKIS; CHATTERJEE; KEMPEL, 1998). Ao final desse processo obtêm-se um sistema linear e, com a resolução do mesmo, a intensidade da componente  $y$  do campo  $E^s$  ou  $H^s$  associada aos nós da malha.