

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**“MODELAMENTO DE SISTEMAS MÓVEIS
CELULARES EM AMBIENTE *INDOOR*
USANDO EQUAÇÕES PARABÓLICAS”**

FÁTIMA NAZARÉ BARAÚNA MAGNO

UFPA / ITEC / PPGEE
Campus Universitário do Guamá
Belém – Pará - Brasil
2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

FÁTIMA NAZARÉ BARAÚNA MAGNO

**“MODELAMENTO DE SISTEMAS MÓVEIS
CELULARES EM AMBIENTE *INDOOR*
USANDO EQUAÇÕES PARABÓLICAS”**

TD 01 /2009

UFPA / ITEC / PPGEE
Campus Universitário do Guamá
Belém – Pará - Brasil
2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

FÁTIMA NAZARÉ BARAÚNA MAGNO

**“MODELAMENTO DE SISTEMAS MÓVEIS CELULARES
EM AMBIENTE *INDOOR* USANDO EQUAÇÕES
PARABÓLICAS”**

**Trabalho submetido à Banca Examinadora
do Programa de Pós-graduação em
Engenharia Elétrica para obtenção do Grau
de Doutora em Engenharia Elétrica.**

Área de Concentração: Telecomunicações

**Orientador: Prof. Dr. Gervásio P. S.
Cavalcante**

**Co-orientador: Prof. Dr. Jessé Carvalho
Costa**

UFPA / ITEC / PPGEE
Campus Universitário do Guamá
Belém – Pará - Brasil
2009

M198m Magno, Fátima Nazaré Baraúna

Modelamento de sistemas móveis celulares em ambiente indoor usando equações parabólicas / Fátima Nazaré Baraúna Magno; orientador , Gervásio Protásio dos Santos Cavalcante. -2009.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Tecnologia, Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica, Belém, 2009.

1. Sistemas de comunicação móvel. 2. Equações diferenciais parabólicas. 3. Ondas de rádio – propagação. I. Título

CDD 22. ed. 621.38456

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

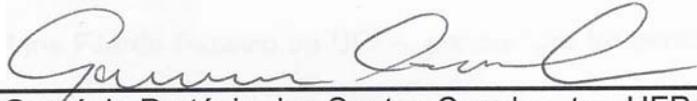
“MODELAMENTO DE SISTEMAS MÓVEIS CELULARES EM AMBIENTE
INDOOR USANDO EQUAÇÕES PARABÓLICAS”

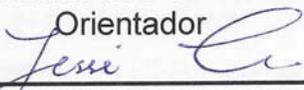
AUTORA: FÁTIMA NAZARÉ BARAÚNA MAGNO

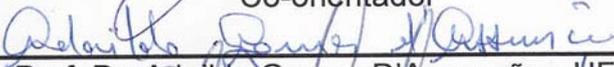
TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO DA BANCA EXAMINADORA APROVADA PELO COLEGIADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ E JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTORA EM ENGENHARIA ELÉTRICA NA ÁREA DE TELECOMUNICAÇÕES.

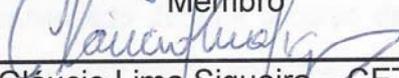
APROVADA EM 07/05/2009

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. Gervásio Protásio dos Santos Cavalcante - UFPA
Orientador


Prof. Dr. Jessé Carvalho Costa - UFPA
Co-orientador


Prof. Dr. Adaildo Gomes D'Assunção - UFRN
Membro


Prof. Dr. Gláucio Lima Siqueira – CETUC-PUC/RJ
Membro


Prof. Dr. Agostinho Luiz da Silva Castro - UFPA
Membro


Prof. Dr. José Maria Filardo Bassalo - UFPA
Membro

Visto: 
Prof. Dr. Marcus Vinicius Alves Nunes
Coordenador do PPGE/ITEC/UFPA

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha família, Luiz, Coeli, Patrícia, Paola e Marcela, pelo apoio, companheirismo, dedicação e paciência em conviver com tantas ausências.

Ao meu orientador, professor Dr. Gervásio Protásio dos Santos Cavalcante da Universidade Federal do Pará - UFPA, pela experiência e ensinamentos transmitidos. Agradeço a paciência que sempre teve em me guiar nos momentos mais difíceis, levando-me a persistir em busca dos objetivos. Certamente não teria conseguido concluir esta jornada sem o seu apoio.

Ao meu co-orientador, professor Dr. Jessé Carvalho Costa da Universidade Federal do Pará - UFPA, pela experiência e ensinamentos transmitidos, principalmente na parte computacional. Seu apoio foi importantíssimo para a conclusão deste trabalho.

Ao professor Dr. José Maria Filardo Bassalo da UFPA, por sempre ter acreditado em minha capacidade.

Ao professor e amigo Dr. Klaus Cozzolino da UFPA, sempre disposto a ajudar em todos os momentos em que foi solicitado.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da UFPA, pelo conhecimento transmitido durante o curso de Doutorado e que me deram a base para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos meus amigos da Faculdade de Física, João, Zínia, Simone, Manoel, Victor, pelo apoio e palavras de estímulo nos momentos difíceis.

A Deus, por permitir a realização de mais este sonho.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO	1
1.1 – MOTIVAÇÃO.....	3
1.2 – TRABALHOS RELACIONADOS.....	4
1.3 – OBJETIVO.....	7
1.4 – CONTRIBUIÇÕES PRINCIPAIS.....	9
1.5 – ESTRUTURA DO TRABALHO.....	9
CAPÍTULO II – METODOLOGIA	10
2.1 – A EQUAÇÃO PARABÓLICA.....	10
2.1.1 – Resolução da Equação Parabólica Escalar Bi-dimensional.....	14
2.1.2 – Aproximações do Operador Raiz Quadrada.....	17
2.1.3 – Propagação no Vácuo.....	20
2.1.4 - Algoritmo <i>split-step</i> para Grandes Ângulos.....	27
2.2 – O MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS.....	30
2.2.1 – Aproximação por Diferenças Finitas.....	32
2.3 – A TRANSFORMADA DE FOURIER.....	41
2.3.1 - Transformada de Fourier e o Teorema Integral de Fourier.....	42
2.3.2 - Condições de existência das Transformadas de Fourier.....	44
2.3.3 - Transformadas de Fourier em seno e co-seno.....	44
2.3.4 - O Teorema da Convolução para Transformadas de Fourier.....	45

2.4 - ALGORITMOS DA EQUAÇÃO PARABÓLICA.....	46
2.4.1 – Algoritmo para Pequenos Ângulos.....	48
2.5 - CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	52
2.5.1 - Condições de Contorno na Superfície.....	52
2.5.2 - A Solução Split-step para a Transformada de Fourier Mista.....	54
CAPÍTULO III - SET UP DE MEDIÇÕES	57
3.1- MEDIÇÃO NA FAIXA DE FREQUÊNCIA DE 900 MHZ.....	57
3.1.1 - Descrição do Ambiente.....	57
3.1.2 - Aparato para as Medições.....	62
3.2- MEDIÇÃO NA FAIXA DE FREQUÊNCIA DE 2,4 GHZ.....	65
3.2.1 - Descrição do Ambiente.....	65
3.2.2 - Aparato para as Medições.....	68
CAPÍTULO IV – RESULTADOS	71
4.1 – EQUAÇÕES UTILIZADAS.....	71
4.2 – CARACTERÍSTICAS ELETROMAGNÉTICAS.....	73
4.2.1 – Medição na Faixa de Frequência de 900 MHz	73
4.2.2 – Medição na Faixa de Frequência de 2,4 GHz.....	73
4.3 – RESULTADOS OBTIDOS.....	74
4.3.1 – Medição na Faixa de Frequência de 900 MHz.....	74
Sem separação das componentes de larga e pequena escala.....	74
Separando-se as componentes de larga e pequena escala.....	90
4.3.2 - Medição na Faixa de Frequência de 2,4 GHz.....	98

4.3.3 - Simulação para Grandes Ângulos com Frequência de 2,4GHz.....	107
CONCLUSÃO.....	112
REFERÊNCIAS.....	115

LISTA DE FIGURAS

Fig. 2.1 - Propagação na direção paraxial para pequenos ângulos com a horizontal.....	10
Fig. 2.2 – Solução da equação diferencial (a) parabólica e (b) elíptica.....	16
Fig. 2.3 – Difração provocada por um condutor perfeito em uma tela.....	25
Fig. 2.4 – Grade de diferenças finitas para o esquema de Crank-Nicolson.....	47
Fig. 3.1 – Vista do prédio antigo e do bloco 1.....	58
Fig. 3.2 - Corredor Térreo.....	59
Fig. 3.3 – Corredor típico do 1º ao 4º andares.....	60
Fig. 3.4 - Módulo Transmissor.....	63
Fig. 3.5 - Módulo Receptor.....	64
Fig. 3.6 - Sistema Transmissor localizado no Andar Térreo com o Sistema Receptor percorrendo os diversos Pisos do Prédio.....	65
Fig. 3.7 - Planta baixa do pavimento térreo do ambiente de teste.....	66
Fig. 3.8- Planta baixa do pavimento superior do ambiente de teste.....	67
Fig. 3.9 - Ambiente de Medição: Fotos externa e internas.....	68
Fig. 3.10 - Planta baixa do prédio com as localizações dos pontos de medição.....	70
Fig. 4.1 – <i>Layout</i> do andar térreo.....	75
Fig. 4.2 – <i>Layout</i> do primeiro andar.....	75
Fig. 4.3 – <i>Layout</i> do segundo, terceiro e quarto andares.....	76
Fig. 4.4 – Perda de propagação versus distância no andar térreo via EP.....	77
Fig. 4.5 – Perda de propagação versus distância no andar térreo experimental.....	77
Fig. 4.6 – Perda de propagação versus distância no primeiro andar via EP.....	78
Fig. 4.7 – Perda de propagação versus distância no primeiro andar experimental.....	79
Fig. 4.8 – Perda de propagação versus distância no segundo andar via EP.....	80
Fig. 4.9 – Perda de propagação versus distância no segundo andar experimental.....	80
Fig. 4.10 – Perda de propagação versus distância no terceiro andar via EP.....	81

Fig. 4.11 – Perda de propagação versus distância no terceiro andar experimental.....	82
Fig. 4.12 – Perda de propagação versus distância no quarto andar via EP.....	83
Fig. 4.13 – Perda de propagação versus distância no quarto andar experimental.....	83
Fig. 4.14 – Perda de propagação versus distância no térreo via EP com o sinal passando dentro das salas.....	86
Fig. 4.15 – Perda de propagação versus distância no primeiro andar via EP com o sinal passando dentro das salas.....	87
Fig. 4.16 – Perda de propagação versus distância no segundo andar via EP com o sinal passando dentro das salas.....	87
Fig. 4.17 – Perda de propagação versus distância no terceiro andar via EP com o sinal passando dentro das salas.....	88
Fig. 4.18 – Perda de propagação versus distância no quarto andar via EP com o sinal passando dentro das salas.....	88
Fig. 4.19 – Perda de propagação versus distância via PE com o sinal passando pelo corredor e laboratório.....	89
Fig. 4.20 - (a) Sinal composto; (b) larga escala e; (c) pequena escala.....	92
Fig. 4.21 - Perda de propagação versus distância no andar térreo via EP, medidas e através dos modelos dependente da distância e aproximação de Padé.....	95
Fig. 4.22 - Perda de propagação versus distância no primeiro andar calculada via EP, experimentalmente e através dos modelos FAP e aproximação de Padé.....	96
Fig. 4.23 - Perda de propagação versus distância no segundo andar via EP, medidas e através dos modelos FAP e aproximação de Padé.....	96
Fig. 4.24 - Perda de propagação versus distância no terceiro andar calculada via EP, experimentalmente e através dos modelos FAP e aproximação de Padé.....	97
Fig. 4.25 - Perda de propagação versus distância no quarto andar calculada via EP, experimentalmente e através dos modelos FAP e aproximação de Padé.....	97
Fig. 4.26 - Perda de propagação para o pavimento térreo calculada via EP.....	103
Fig. 4.27 - Perda de propagação para o pavimento superior calculada via EP.....	103
Fig. 4.28 - Perda de propagação versus distância no pavimento térreo calculada via EP, para pequenos ângulos de propagação, experimentalmente e através dos modelos dependente da distância, de Wong, Lau e Tse, e de Yarkoni e Blaunstein.....	105
Fig. 4.29 - Perda de propagação versus distância no pavimento superior calculada via EP,	106

para pequenos ângulos de propagação, experimentalmente e através dos modelos FAP, de Wong, Lau e Tse, e de Yarkoni e Blaunstein.....	
Fig. 4.30 - Perda de propagação versus distância no pavimento térreo calculada via EP, para grandes e pequenos ângulos de propagação, e dados experimentais.....	108
Fig. 4.31 - Perda de propagação versus distância no pavimento térreo calculada via EP, para grandes e pequenos ângulos de propagação, experimentalmente e através dos modelos dependente com a distância, de Wong, Lau e Tse, e de Yarkoni e Blaunstein.....	109
Fig. 4.32 - Perda de propagação versus distância no pavimento superior calculada via EP, para grandes e pequenos ângulos de propagação, e dados experimentais.....	110
Fig. 4.33 - Perda de propagação versus distância no pavimento superior calculada via EP, para grandes e pequenos ângulos de propagação, experimentalmente e através dos modelos FAP, de Wong, Lau e Tse, e de Yarkoni e Blaunstein.....	110

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Diferentes desenvolvimentos do operador Q para a obtenção da solução da EP para diferentes ângulos.....	19
Tabela 3.1 – Dimensões do pavimento térreo.....	61
Tabela 3.2 – Dimensões do primeiro andar.....	61
Tabela 3.3 – Dimensões do segundo, terceiro e quarto andares.....	61
Tabela 3.4 – Dimensões da mobília.....	62
Tabela 4.1 – Características elétricas dos materiais usados para frequência de 900 MHz.....	73
Tabela 4.2 – Características elétricas dos materiais usados para frequência de 2,4 GHz.....	74
Tabela 4.3 – Dados estatísticos usando a função <i>Data Statistics</i> do Matlab 7.....	85
Tabela 4.4 – Valores do erro, desvio padrão e erro rms para os dados calculados via EP e experimentalmente.....	85
Tabela 4.5 – Cálculo do expoente de perda de propagação para os vários pavimentos calculados pelo método proposto e experimentalmente.....	90
Tabela 4.6 - Erro Médio, Desvio Padrão e Erro rms para os modelos analisados.....	98
Tabela 4.7 - Expoente de Perda de Propagação.....	107
Tabela 4.8 - Cálculo do Erro Médio, Desvio Padrão e Erro rms para os modelos analisados.....	111

RESUMO

Nos últimos anos, o avanço do sistema de comunicação digital sem fio foi notável. A comunicação sem fio em recinto fechado (*indoor*) é, hoje, um dos campos com mais rápido desenvolvimento. Há uma procura crescente em modelos de propagação que proporcionem eficiência e precisão. O estudo da radiopropagação nestes ambientes é muito importante para a determinação das perdas que ocorrem em ambientes *indoor*, pois qualquer objeto com dimensões na ordem de grandeza do comprimento de onda na faixa de comunicação móvel, pode atuar como uma fonte de interferência para as ondas eletromagnéticas. Dois tipos de modelos de propagação são muito usados para ambientes *indoor*, os empíricos e os determinísticos. Os primeiros estão baseados em fórmulas muito simples e diretas, fáceis de aplicar, porém proporcionam precisão local-específica. Os modelos determinísticos seguem princípios físicos de propagação de ondas eletromagnéticas - os mais populares são o *ray tracing* e a solução numérica das equações de Maxwell (equações elípticas e por aproximação, equações parabólicas). Nesta tese é proposto um modelo baseado no método de equações parabólicas, considerando-se pequenos ângulos (até 15°) e grandes ângulos (até 90°) de propagação. Para a solução da equação parabólica para pequenos ângulos de propagação, foi utilizado o esquema implícito de diferenças finitas do tipo Crank Nicolson; já para a solução da equação que considera grandes ângulos de propagação, foi utilizada a transformada de Fourier mista. Para validação do modelo proposto foram feitas campanhas de medições para frequências de 900 MHz e 2,4 GHz e os dados obtidos nestas campanhas foram comparados ao modelo proposto na tese. Além disto, o modelo em questão foi também

comparado a alguns modelos existentes na literatura. Os resultados encontrados neste trabalho validam o modelo proposto como uma importante ferramenta para o cálculo da perda de propagação em ambientes *indoor*, com grande redução do esforço computacional e quantidade de memória necessária, quando comparado a outros métodos e ainda foi observado um melhor desempenho para grandes ângulos de propagação.

ABSTRACT

The progress of the wireless digital communication system during the last years has been remarkable, and today is one of the fields with faster development. There is a growing search in propagation models that provide efficiency and accuracy. The study of the radio propagation in these environments is very important for the determination of the propagation losses in indoor environment, because any object with dimensions in the order of greatness inside of the range of mobile communication wavelength can act as an interference source for the electromagnetic waves. Two types of propagation models are very used for indoor environment: the empirics and the deterministic. The first ones are based on very simple and direct formulas, easy to apply, however they provide local-specific precision. The deterministic models follow propagation of electromagnetic waves physical principles - the most popular are the ray tracing and the numeric solution of the equations of Maxwell (elliptic equations and for approach, parabolic equations). In this work is proposed a model based on the method of parabolic equations, being considered narrow angles (up to 15°) and wide angles (up to 90°) of propagation. For the solution of the parabolic equation for small propagation angles, the implicit finite difference scheme of the Crank-Nicholson type was used; and for the solution of the equation that considers wide propagation angles the mixed Fourier Transforms was used. In order to validate the model proposed, measurement campaigns were carried out in frequencies of 900 MHz and 2.4 GHz and the data obtained from these campaigns were compared to the model proposed in this work. Besides, the model in subject was also compared with some existent models in the literature. The results found in this work validate the

method of parabolic equations as an important tool for the calculation of the propagation loss in indoor environment, once a great reduction of computational effort and quantity of necessary memory, when compared the other methods and a better result was observed for wide propagation angles.

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O avanço dos sistemas móveis é resultado da necessidade que as pessoas têm em comunicar-se, onde quer que estejam. Uma idéia que tem conquistado espaço ao longo dos anos para resolver (ou minimizar) o problema do aumento de tráfego é a das microcélulas. Basicamente, a idéia consiste em diminuir-se o tamanho das células como uma tentativa de aumentar o reuso de frequências, gerando maior capacidade no sistema. As microcélulas apresentam distâncias de cobertura da ordem de algumas centenas de metros.

Como, hoje em dia, a maioria das pessoas mora ou trabalha em edifícios, o estudo da propagação dentro dos mesmos torna-se importantíssimo. Por este motivo, nas últimas décadas o sistema de comunicação sem fio *indoor* tem merecido grande atenção dos pesquisadores e empresas interessadas em explorar esse mercado. Esse estudo é utilizado, por exemplo, em pequenos e grandes edifícios de escritórios, *shopping-center*, centros de exibição, entre outros, onde há um grande número de usuários para este tipo de serviço.

O estudo da radiopropagação em ambientes *indoor* é importante para a determinação das perdas que ocorrem no interior de edifícios, pois qualquer objeto, na faixa de frequência considerada, pode atuar como uma fonte de interferência para as ondas eletromagnéticas que se propagam nesses ambientes. Desta maneira, o modelamento matemático de tal

ambiente é extremamente complexo, o que tem levado ao surgimento de muitos modelos empíricos utilizando dados medidos no ambiente.

1.1- MOTIVAÇÃO

Um dos fatores que ajudam a planejar o sistema de rádio móvel pessoal e veicular é o conhecimento a respeito dos diferentes tipos de ambientes onde há a propagação das ondas eletromagnéticas.

O ambiente no interior de um edifício é extremamente complexo e há o impacto de vários mecanismos de propagação, tais como reflexão, espalhamento por superfícies rugosas, difração e transmissão através de paredes e mobílias. Por este motivo é necessário conhecer-se os tipos de materiais utilizados na construção, bem como suas propriedades elétricas.

Tradicionalmente, modelos de propagação baseados em métodos empíricos e semi-empíricos têm sido utilizados nos vários ambientes. Entretanto, como o tráfego tem aumentado, o tamanho das células tem reduzido e estes modelos não mais fornecem boas predições. Como conseqüência, métodos determinísticos têm sido muito utilizados [1].

Alguns métodos propostos para o cálculo de propagação de ondas em ambiente *indoor*, tais com o *ray tracing* e a solução numérica das equações de Maxwell, requerem bastante esforço computacional e grande quantidade de memória [1].

Quando se utiliza a solução numérica das equações de Maxwell para modelar a propagação de ondas, em particular, o método de diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD), este fornece uma solução completa

para todos os pontos. Mas neste método uma equação de onda totalmente elíptica tem que ser resolvida, o que requer bastante esforço computacional e grande quantidade de memória [1].

Por esta razão, a aproximação parabólica da equação de onda tem sido usada para resolver problemas de espalhamento quando o principal interesse é a determinação das características do desvanecimento do canal, por demandar menor esforço e quantidade de memória que o método totalmente elíptico [1] , [2].

1.2- TRABALHOS RELACIONADOS

A equação parabólica (EP) foi introduzida em 1946 por Leontovich e Fock [3] em propagação de ondas de rádio. Eles utilizaram esta aproximação para demonstrar, com razoável simplicidade, os resultados obtidos por Watson (1918) [3] e Van der Pol e Bremmer (1937) [3], e estenderam o método para problemas mais complicados envolvendo refração atmosférica. Esta teoria trouxe um pequeno desenvolvimento para modelos práticos de propagação de ondas eletromagnéticas, devido a carência de técnicas numéricas e computacionais disponíveis. Na década de 40, Malyuzhinets combinou o método de equações parabólicas com óptica geométrica com o objetivo de desenvolver uma importante teoria de difração para obstáculos. Russian trabalhou a idéia de simplificar a equação de onda para certos tipos de problemas de propagação de ondas de rádio e resolveu um número considerável destes problemas utilizando funções especiais [3].

Com utilização de computadores digitais a idéia da aproximação parabólica continuou sendo levada adiante objetivando encontrar soluções numéricas, de preferência para as expressões que tinham forma fechada. Handin e Tappert (1973) [3] introduziram uma solução eficiente *split-step/Fourier* para a equação parabólica aplicada a problemas acústicos acima do nível do mar, e Claerbout (1976) [3] desenvolveu códigos de diferenças finitas para problemas geofísicos.

Ondas de rádio na faixa de VHF são afetadas pela refração atmosférica e pelos efeitos de reflexão e difração na superfície. Devido à grande dimensão do domínio de interesse, em relação ao comprimento de onda, não é possível o cálculo exato da solução através das equações de Maxwell; por este motivo têm sido procuradas várias aproximações. Por muitos anos foram encontradas soluções utilizando a teoria da óptica geométrica (GO) e teoria geométrica da difração (GTD) para problemas na superfície. Estas teorias foram surpreendidas pelo algoritmo da equação parabólica, que fornece uma eficiente e rápida solução numérica para problemas de propagação de ondas de rádio em longas distâncias.

Ko *et al.* (1983) [3] introduziram o método de equações parabólicas para calcular o campo em ambientes onde a propagação é anômala.

Para resolver problemas envolvendo cálculo de diagramas de cobertura de radar ou curvas de perda de propagação, a demanda por mais rápidos algoritmos tornou-se muito grande. Foi então que Hitney (1992) [3], com o modelo *Radio Physical Optics*, desenvolveu um método híbrido, que combina *ray-tracing* e técnicas de equações parabólicas para obter soluções mais eficientes para problemas de propagação.

O método de equações parabólicas é também utilizado para resolver problemas de espalhamento em duas dimensões para seção reta radar (*radar-cross-section* - RCS) (1995) [4]. Collins (1993) [4] desenvolveu a aproximação de Padé *split-step* para resolver problemas de propagação acústica a longas distâncias [4].

Muitos trabalhos para calcular o campo acima do nível do mar foram apresentados com o método de equações parabólicas e um grande avanço foi feito nesta área. A técnica de equações parabólicas escalares tornou-se muito usada para o cálculo de campos, propagação de ondas na água, óptica e propagação de ondas sísmicas. O método de equações parabólicas vetorial tem sido empregado para problemas mais complicados, tais como propagação de ondas acústicas em meios poroelásticos ou guias de ondas anisotrópicos (1995) [3].

Em anos posteriores, os métodos de equações parabólicas também foram utilizados para problemas de espalhamento em objetos, ligando métodos como FDTD, que resolvem com exatidão as equações de Maxwell, e métodos aproximados baseados no traçado de raios (*ray tracing*) ou óptica física [3].

Posteriormente, Donohue e Kuttler (2000) desenvolveram com mais detalhes o estudo feito por Beilis e Tappert para terrenos planos. O esquema resultou em uma formulação de equações parabólicas aplicada para propagação em grandes ângulos, até 45°, terrenos inclinados entre 10° - 15° e descontinuidades da ordem de 15° - 20° [5].

Em 2007, Valtr e Pechac propuseram uma nova técnica para resolver a equação parabólica a duas dimensões. Como a transformada de Fourier não tem um bom comportamento para condições de contorno complexas, eles estenderam sua aplicabilidade através da técnica de decomposição do domínio para a equação parabólica resolvida pela transformada de Fourier *split-step*. O procedimento descrito é utilizado quando há limite em apenas um dos lados do ambiente estudado, mas não é empregado quando há limite em ambos os lados. A idéia principal da técnica de decomposição do domínio é dividir o plano vertical em vários subdomínios verticais, onde cada um propaga-se separadamente. Com esta técnica é possível estudar o cenário com limite em ambos os lados [6].

1.3- OBJETIVO

A propagação de ondas em ambientes *indoor* é uma área bastante vasta, sendo difícil analisar com detalhes todos os problemas existentes. Pelos trabalhos apresentados anteriormente, pode-se listar alguns fatores que dificultam a propagação neste tipo de ambiente, após o aumento do valor da frequência para a faixa de VHF/UHF: (1) a variedade arquitetônica das construções; (2) o grande número de mobília existente no interior dos compartimentos; (3) a grande quantidade de paredes e janelas; (4) a diversidade de materiais que constituem os obstáculos à propagação das ondas, citados nos itens anteriores; (5) o espalhamento das ondas.

Devido à maioria dos modelos encontrados na literatura apresentarem dificuldade analítica e/ou grande esforço computacional

resolveu-se propor um modelo, com o emprego do método de equações parabólicas aplicado para ambientes *indoor*. Com o emprego deste modelo determinístico objetiva-se o cálculo da perda de propagação para ambientes *indoor* reduzindo-se o esforço computacional, considerando-se a geometria do ambiente e suas propriedades elétricas, além do emprego do índice de refração complexo.

Inicialmente, foi testado o modelo para pequenos ângulos de propagação com a direção paraxial, aproximadamente 15° , para dois valores de frequência: (1) 900 MHz, sem e com a separação das componentes de desvanecimento rápido e lento; (2) 2,4 GHz. Para estes dois valores de frequência foram obtidos bons resultados. Após isto, foi implantado o modelo utilizando-se o formalismo para grandes ângulos, até 90° , o que aumenta a precisão e aplicabilidade do modelo proposto. Em ambas as simulações foram utilizadas o índice de refração complexo.

Na aproximação para pequenos ângulos foi utilizada a equação parabólica padrão resolvida através do esquema implícito de diferenças finitas do tipo Crank Nicolson. A equação parabólica encontrada para o cálculo da perda de propagação com grandes ângulos de propagação foi resolvida utilizando-se a transformada de Fourier mista, considerando-se ainda as condições de contorno de impedância.

1.4- CONTRIBUIÇÕES PRINCIPAIS:

Podem-se listar algumas contribuições verificadas:

- O modelo foi aplicado para frequências de 900 MHz e 2,4 GHz (frequência utilizada em sistemas WLAN), com e sem a separação das componentes de desvanecimento rápido e lento, em ambientes *indoor*, podendo ser estendido para outras frequências.
- O modelo proposto pode ser aplicado para o cálculo da perda de propagação na faixa de 0° a 90° com a direção paraxial.
- Na aplicação deste modelo há redução do esforço computacional para o cálculo da perda de propagação, através do método de equações parabólicas, quando comparado a outros métodos utilizados em ambientes *indoor*, como o *ray tracing* e a solução numérica das equações de Maxwell.
- A utilização deste modelo permite a redução dos erros, quando comparado a outros modelos existentes na literatura, utilizados para ambientes *indoor*, a saber: Modelo Dependente da Distância, Modelo do Fator de Atenuação de Piso (FAP), Modelo de Wong, Lau e Tse, e Modelo de Yarkoni e Blaunstein.

1.5- ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: o Capítulo 1 mostra a Introdução; o Capítulo 2 apresenta a formulação teórica utilizada no trabalho, para aproximações em pequenos e grandes ângulos; no Capítulo 3

é feita uma descrição do *set up* de medições, explicando-se qual o aparato experimental utilizado na realização das medições e explicitando-se as equações usadas no programa computacional; o Capítulo 4 apresenta os resultados obtidos para os vários ambientes e frequências onde o modelo foi testado; a seguir, é apresentada a conclusão do trabalho.

CAPÍTULO II

METODOLOGIA

2.1 – A EQUAÇÃO PARABÓLICA

A Equação Parabólica (EP) é uma aproximação da equação de onda que modela a energia propagada em um cone centrado em uma direção preferencial, a direção paraxial, sendo θ o ângulo paraxial (Fig. 2.1).

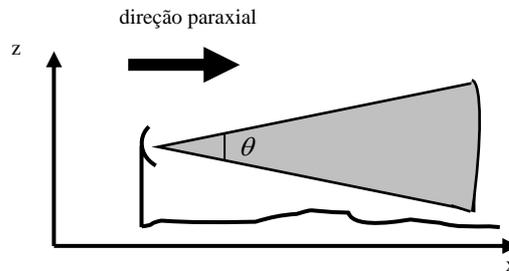


Fig. 2.1 - Propagação na direção paraxial para pequenos ângulos com a horizontal

A EP produz uma eficiente solução numérica para vários problemas de propagação de ondas. A equação de ondas é fatorada em dois termos e sua resolução requer um menor esforço computacional que a equação elíptica original. Esta técnica pode ser aplicada em acústica, propagação de ondas de rádio na atmosfera, sísmicas espalhamento óptico e eletromagnético.

A limitação paraxial imposta pelo método de equações parabólicas, mencionada anteriormente, não impede seu uso para problemas de espalhamento geral. O principal fator desta generalização é que podem resolver problemas de espalhamento de campo melhor que para o campo total, escolhendo a direção paraxial independentemente da direção

incidente. Para muitas aplicações o meio experimental é infinito e homogêneo, mas o método pode ser aplicado com propriedades mais complexas.

Assume-se que a dependência do campo com o tempo é da forma $\exp(-i\omega t)$, onde ω é a frequência angular. Não há efeitos de despolarização, e todos os campos podem ser decompostos, independentemente, em componentes polarizadas horizontalmente e verticalmente.

Para a polarização horizontal, o campo elétrico \vec{E} tem apenas uma componente não-nula E_y , enquanto que para a polarização vertical, o campo magnético \vec{H} tem somente a componente H_y diferente de zero. A componente do campo ψ é assim definida [3]

$$\psi(x, z) = E_y(x, z) \quad (2.1)$$

para a polarização horizontal, e

$$\psi(x, z) = H_y(x, z) \quad (2.2)$$

para a polarização vertical.

Se o meio de propagação é homogêneo com índice de refração n , a componente ψ satisfaz a equação de onda homogênea de Helmholtz [7]

$$(\nabla^2 + k^2 n^2)\psi(x, y, z) = 0 \quad (2.3)$$

sendo k o número de onda no vácuo. A resolução desta equação será feita admitindo-se que o índice de refração $n(x,z)$ sofre pequenas variações e assumindo que as condições de contorno apropriadas podem ser definidas pelas condições de fronteira. O interesse principal é o de resolver problemas onde há propagação de energia para pequenos ângulos da direção escolhida, a direção paraxial. Seguindo a convenção de problemas de propagação em ondas de rádio, escolhe-se a direção x positiva para a direção paraxial [3]. A equação (2.3), em coordenadas cartesianas (x,y,z) , transforma-se na equação de onda tri-dimensional [7]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 n^2 \psi = 0 \quad (2.4)$$

Considera-se o problema eletromagnético a duas dimensões, onde os campos são independentes da coordenada transversal y .

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 n^2 \psi = 0 \quad (2.5)$$

Em geral, o índice de refração varia com o comprimento x e com a altura z , fazendo com que a equação (2.5) não tenha solução analítica. Entretanto, ela fornece uma boa aproximação, desde que as variações de n sejam pequenas comparadas ao comprimento de onda [3].

2.1.1- Resolução da Equação Parabólica Escalar Bi-dimensional

➤ A equação de onda paraxial

Como o interesse é na variação do campo relacionado com o comprimento de onda é interessante escrever ψ em termos do campo reduzido $u(x,z)$

$$u(x, z) = e^{-ikx} \psi(x, z) \Rightarrow \psi(x, z) = e^{ikx} u(x, z) \quad (2.6)$$

Derivando $\psi(x,z)$ da equação (2.6) duas vezes, em relação a x e z , e empregando na equação (2.5), obtém-se [3]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 (n^2 - 1) u = 0 \quad (2.7)$$

Define-se o pseudo-operador diferencial como

$$Q = \sqrt{\frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + n^2(x, z)} \quad (2.8)$$

Utilizando o pseudo-perador Q , a equação (2.7) pode ser fatorada da seguinte maneira

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} + ik(1-Q) \right\} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} + ik(1+Q) \right\} u = 0 \quad (2.9)$$

sendo que os dois termos correspondem, respectivamente, a ondas progressivas e regressivas (a fatoração implica que algum termo de união das duas equações foi desprezado) [8]. Nesta fatoração, deve-se considerar que se o índice de refração n não varia com o comprimento x , para que o operador Q comute com a derivada do comprimento, pois caso contrário a fatoração acima se torna incorreta.

Dividindo-se a equação de onda em dois termos definidos pela equação (2.9)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -ik(1-Q)u \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -ik(1+Q)u \quad (2.11)$$

As técnicas de EP preocupam-se em obter aproximações para Q que sejam válidas para vários ângulos.

Para obter-se a solução exata para a equação (2.7) devem-se resolver as equações (2.10) e (2.11) simultaneamente, em um sistema acoplado, pois a primeira despreza o espalhamento regressivo e a segunda despreza o progressivo.

As equações (2.10) e (2.11) são equações pseudo-diferenciais de primeira ordem em x . Elas podem ser resolvidas, sendo dados o campo inicial na vertical e as condições de contorno no topo e na base da fronteira.

A equação de onda progressiva, equação (2.10), tem a solução formal

$$u(x + \Delta x, z) = e^{ik\Delta x(-1+\varrho)} u(x, z) \quad (2.12)$$

Para a obtenção deste resultado, o ganho computacional é considerável, conforme se pode verificar comparando-se a Fig. 2.2a (para a solução através da equação parabólica), onde o esforço computacional é menor, comparado à Fig. 2.2b (para a solução da equação de onda elíptica), que é de segunda ordem em x e z , e é resolvida simultaneamente para todos os pontos do domínio de integração.

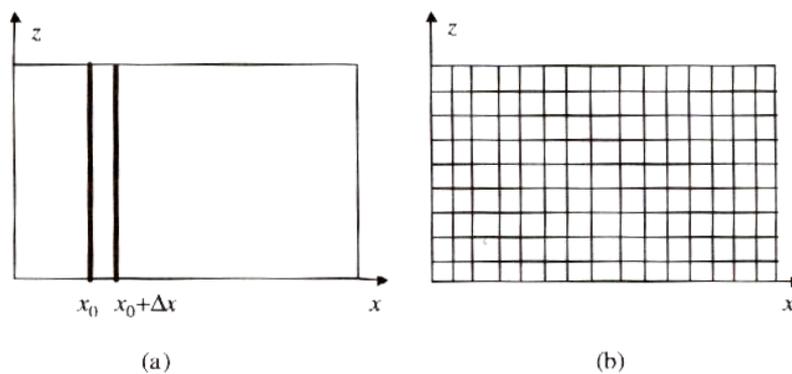


Fig. 2.2 – Solução da equação diferencial (a) parabólica e (b) elíptica

2.1.2- Aproximações do Operador Raiz Quadrada

➤ A equação parabólica padrão

Para encontrarmos a equação parabólica padrão (EPP) faz-se $Q = \sqrt{1+q}$, expande-se operador raiz quadrada em série de Taylor de primeira ordem, na equação (2.12), encontrando-se

$$u(x + \Delta x, z) = e^{ik\Delta x(-1+\sqrt{1+q})}u(x, z) = \exp\left[ik\Delta x\left(-1+1+\frac{1}{2}q\right)\right]u(x, z) \quad (2.13)$$

Após fazer uma nova expansão em série de Taylor, agora do termo exponencial, em (2.13), emprega-se o resultado na equação (2.10) obtendo-se, então, a equação parabólica padrão (EPP)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, z) + 2ik \frac{\partial u}{\partial x}(x, z) + k^2(n^2(x, z) - 1)u(x, z) = 0 \quad (2.14)$$

Esta forma simples da equação parabólica é muito utilizada para a resolução de problemas de propagação de ondas de rádio a longas distâncias na troposfera. O índice de refração do ar é muito próximo da unidade e não causa problemas significativos na precisão.

As limitações da aproximação da equação parabólica padrão são por apresentar um grande erro para a propagação de ondas em grandes ângulos com a direção paraxial. Para o ângulo de 1° , o erro absoluto é da

ordem de 10^{-7} ; para o ângulo de 10° , em torno de 10^{-3} , e para ângulos de 20° , acima de 10^{-2} [3].

➤ As diferentes equações parabólicas

A equação (2.10) é o ponto de partida para as diferentes equações parabólicas desenvolvidas para a propagação acústica. Cada variação é proveniente de um corte diferente do desenvolvimento em série de Taylor ou da forma geral de uma aproximação linear, como foi feito por Tappert, Claerbout, e Greene [9]:

$$Q = \sqrt{1+q} \cong \frac{a_0 + a_1 q}{b_0 + b_1 q} \quad (2.15)$$

com

$$q = n^2 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 1 \quad (2.16)$$

ou recorrer à desenvolvimentos em séries de Padé de ordem m , método utilizado por Bamberger et al. e Collins [9]:

$$Q = \sqrt{1+q} \sum_{r=1}^n \frac{a_{j,m} q}{1 + b_{j,m} q} \quad (2.17)$$

sendo

$$a_{j,m} = \frac{2}{2m+1} \operatorname{sen}^2\left(\frac{j\pi}{2m+1}\right) \text{ e } b_{j,m} = \cos^2\left(\frac{j\pi}{2m+1}\right) \quad (2.18)$$

A Tabela 2.1 fornece as expressões do pseudo-operador diferencial Q empregado para as equações parabólicas mais utilizadas, e também as limitações angulares associadas a estas, segundo as obras de Jensen [9].

Desenvolvimento de Q utilizado	Autor da aproximação da EP	Limitação angular
$Q = \sqrt{1+q} \cong 1+0,5q$	Tappert [Tappert, 1977] [9]	20°
$\sqrt{1+q} \cong \frac{1+0,75q}{1+0,25q}$	Claerbout [Claerbout, 1976] Ordem de Padé 1 [Collins, 1989] [9]	35°
$\sqrt{1+q} \cong \frac{0,99987+0,79624q}{1+0,30102q}$	Greene [Greene, 1984] [9]	45°
$\sqrt{1+q} \cong 1 + \frac{0,1382q}{1+0,65451q} + \frac{0,36180q}{1+0,09549q}$	Ordem de Padé 2 [Collins, 1989] [9]	55°
$Q \cong \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}} + n - 1$	Thomson e Chapman [Thomson e Chapman, 1983] [9]	90°

Tabela 2.1 - Diferentes desenvolvimentos do operador Q para a obtenção da solução da EP para diferentes ângulos

Delrieux mostrou [9] que a decomposição de Thomson e Chapman conduz a uma equação parabólica dita de “grandes ângulos”, isto é, que reduz os erros para os ângulos de propagação superiores a 15°. Ele

observou que os melhoramentos trazidos à equação parabólica por Tappert, Thomson et al. [9] obedecem ao mesmo princípio: saber desenvolver o operador raiz quadrada de Q de modo a aproximar-se o mais possível da solução exata da equação de Helmholtz. Há outro método, desenvolvido por De Santo [9], que consiste em estabelecer uma melhor relação entre a solução da equação de Helmholtz e a solução da equação parabólica.

Para resolver a equação parabólica após a introdução do operador Q , pode-se utilizar um método tipo split-step de Fourier, empregado por Tappert e Hardin, e Juvé e Blanc-Benon. Este método consiste em aplicar à equação parabólica uma Transformada de Fourier na direção z com o objetivo de resolvê-la com maior facilidade [9].

Em 1992 foi desenvolvida por Gilbert e Di [9] outra aproximação na tentativa de diminuir o tempo de cálculo para grandes distâncias de propagação: a técnica da Função de Green ou Equação Parabólica Rápida de Green (GFPE). Este método permite a utilização de comprimentos um pouco maiores que no método anterior.

2.1.3- Propagação no Vácuo

➤ Espectro angular

Considera-se o caso especial da propagação no vácuo. A técnica da transformada de Fourier fornece uma poderosa arma para a solução de certos tipos de equações diferenciais parciais. A idéia é transformar a equação diferencial parcial, resolvê-la no domínio espectral, e voltar para o domínio original com a transformada inversa [3].

Introduzindo-se a transformada de Fourier F de função $u(x,z)$ com respeito a altura. Fazendo $U=Fu$, tem-se

$$U(x, p) = Fu(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, z) e^{-2i\pi pz} dz \quad (2.18)$$

A transformada inversa de Fourier F^{-1} é dada por

$$u(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(x, p) e^{2i\pi pz} dp \quad (2.19)$$

sendo $u=F^{-1}U$.

Se a função $u(x,z)$ é regular, a transformada de Fourier parcial de segunda ordem em z é dada por

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = -4\pi^2 p^2 Fu \quad (2.20)$$

considerando a transformada de Fourier da derivada parcial de x como

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial(Fu)}{\partial x} \quad (2.21)$$

➤ A Equação Parabólica Padrão no vácuo

Quando o meio de propagação é o vácuo, deve-se tomar (2.13) e fazer o índice de refração n igual a 1, obtendo-se

$$\frac{\partial^2 u(x, z)}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial u(x, z)}{\partial x} = 0, \quad (2.22)$$

que é denominada equação parabólica padrão no vácuo. Calculando a transformada de Fourier da equação (2.22)

$$F\left(\frac{\partial^2 u(x, z)}{\partial z^2}\right) + F\left(2ik \frac{\partial u(x, z)}{\partial x}\right) = 0. \quad (2.23)$$

Utilizando as propriedades (2.20) e (2.21) e resolvendo a equação diferencial, obtém-se

$$U(x, p) = e^{-\frac{2i\pi^2 p^2 x}{k}} U(0, p) \quad (2.24)$$

Deseja-se, agora, voltar para o domínio original; para isto, deve-se calcular a transformada inversa da equação (2.24)

$$F^{-1}(U(x, p)) = F^{-1}\left(e^{-\frac{2i\pi^2 p^2 x}{k}} U(0, p)\right) \quad (2.25)$$

mas

$$F^{-1}\left\{e^{-\frac{2i\pi^2 p^2 x}{k}}\right\}(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{2i\pi^2 p^2 x}{k}} e^{2i\pi zp} dp \quad (2.26)$$

Calculando a integral e fazendo

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad e \quad i^{-1/2} = e^{-i(\pi/4)}$$

obtem-se

$$F^{-1}\left\{e^{-\frac{2i\pi^2 p^2 x}{k}}\right\}(x, z) = \sqrt{\frac{1}{\lambda x}} e^{-i\pi/4} e^{ikz^2/2x} \quad (2.27)$$

onde λ é o comprimento de onda. Voltando para o domínio original, obtém-se a fórmula da convolução

$$u(x, z) = \sqrt{\frac{1}{\lambda x}} e^{\frac{i\pi}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(0, z') e^{\frac{ik(z-z')^2}{2x}} dz' \quad (2.28)$$

o que mostra que a solução será completamente determinada desde que se conheça o campo inicial $u(0, z)$ [3].

➤ Analogia com a difração de Fresnel – Kirchhoff

Para exemplificar a técnica da transformada de Fourier, apresentada anteriormente, faz-se uma analogia com a formulação de Fresnel – Kirchhoff, onde uma onda eletromagnética propagando-se horizontalmente incide em uma tela de difração localizada abaixo do valor zero (verticalmente), podendo o campo neste caso ser escrito como uma integral do espectro angular da onda plana, ponderado por um propagador paraxial.

A função reduzida da equação parabólica é, por simplicidade, escrita como [3]

$$u_i(x, z) = 1 \quad (2.29)$$

A tela impede a passagem da onda para determinados valores, tendo o campo a seguinte forma

$$\begin{cases} u(0, z) = 1 & \text{para } z > 0 \\ u(0, z) = 0 & \text{para } z \leq 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

como indica a Fig. (2.3).



Fig. 2.3 – Difração provocada por um condutor perfeito em uma tela

Empregando-se os valores para o campo da equação (2.30) na equação (2.28) obtém-se

$$u(x, z) = \sqrt{\frac{1}{\lambda x}} e^{-\frac{i\pi}{4}} \int_0^{+\infty} e^{\frac{ik(z-z')^2}{2x}} dz' \quad (2.31)$$

Fazendo $k = 2\pi/\lambda$ e $z - z' = z''$ fica-se com

$$u(x, z) = \sqrt{\frac{1}{\lambda x}} e^{-\frac{i\pi}{4} z} \int_{-\infty}^z e^{\frac{ikz^2}{2x}} dz \quad (2.32)$$

Substituindo por z' onde há z'

$$u(x, z) = \sqrt{\frac{1}{\lambda x}} e^{-\frac{i\pi}{4} z} \int_{-\infty}^z e^{\frac{ikz^2}{2x}} dz \quad (2.33)$$

A integral de Fresnel é dada por [10]

$$F(\nu) = \int_0^{\nu} e^{-\frac{i\pi}{2} \zeta^2} d\zeta \quad (2.34)$$

Fazendo $\frac{kz^2}{x} = -\pi \zeta^2$ na equação (2.33) tem-se, após algumas manipulações matemáticas

$$u(x, \nu) = \sqrt{\frac{1}{\lambda x}} \sqrt{\frac{\pi x}{k}} e^{-\frac{i\pi}{4} \nu} \int_{-\infty}^{\nu} e^{-\frac{i\pi}{2} \zeta^2} d\zeta \quad (2.35)$$

Separando-se em duas a integral existente na equação (2.35)

$$u(x, \nu) = \frac{\sqrt{2}}{2} i e^{-\frac{i\pi}{4}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{i\pi}{2} \zeta^2} d\zeta + \frac{\sqrt{2}}{2} i e^{\frac{i\pi}{4}} \int_0^{\nu} e^{-\frac{i\pi}{2} \zeta^2} d\zeta \quad (1.36)$$

resolvendo-se a primeira integral e fazendo analogia da segunda com a integral de Fresnel, obtém-se para o campo

$$u(x, z) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/4} F(\nu) \quad (2.37)$$

Pode-se notar que para um valor do campo bastante simples, como o apresentado, o método analítico, transformada de Fourier, já é bastante trabalhoso. Por esta razão, é aconselhável resolver a equação parabólica padrão numericamente, o que começará a ser mostrado na secção 2.4.

2.1.4- Algoritmo *split-step* para Grandes Ângulos

Feit e Fleck [3] propuseram um operador *splitting* para resolver a equação de Helmholtz (2.3). Esta aproximação amplia o domínio do método da equação parabólica padrão de Tappert e Handin (2.14), incluindo a propagação para grandes ângulos e, ainda, mantendo o uso do algoritmo *split-step* para a obtenção da solução [11]. A aproximação utilizada é baseada em [3]

$$\sqrt{1+a+b} \simeq \sqrt{1+a} + \sqrt{1+b} - 1 \quad (2.38)$$

O erro encontrado é da ordem de $|ab|$. Tomando-se o operador Q , pode-se escrever

$$Q = \sqrt{1 + A + B} \quad (2.39)$$

sendo A e B definidos como

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ B &= n^2(z) - 1 \end{aligned} \quad (2.40)$$

Feit e Fleck fizeram a aproximação [3]

$$Q \sim \sqrt{1 + A} + \sqrt{1 + B} - 1 \quad (2.41)$$

No vácuo, a expressão (2.41) é exata. Pode-se calcular os vários operadores pseudo-diferenciais, antevendo as transformadas de Fourier. Utilizando-se as notações [3] - [11]

$$Q_1 = 1 + \frac{A}{2} + \frac{B}{2} \quad (2.42)$$

$$Q_2 = \sqrt{1 + A} + \frac{1}{2}B \quad (2.43)$$

$$Q_3 = \sqrt{1+A} + \sqrt{1+B} - 1 \quad (2.44)$$

A aproximação Q_1 , que é utilizada na obtenção da equação parabólica padrão (pequenos ângulos), é obtida expandindo-se Q em uma série binomial e truncando-se após o segundo termo. A aproximação Q_2 é devido a Tappert [11], baseada em uma identidade da soma de dois operadores raiz quadrada, onde apenas um dos operadores é suposto ser pequeno. Para meios uniformes a equação (2.43) é uma representação exata para a equação de Helmholtz. Entretanto, para meios não uniformes, após ser feita análise dos erros, percebe-se que (2.43) não fornece bons resultados para a aproximação parabólica. A equação (2.44) é o novo operador *split* para grandes ângulos, proposto por Feit e Fleck [11]; esta equação é válida somente quando os operadores comutam. Através de análise dos erros é comprovado que a aproximação Q_3 , proposta por Feit e Fleck, fornece significativo melhoramento no método numérico da solução da equação parabólica, baseada no algoritmo *split-step* [11].

Tomando (2.10) e substituindo o operador Q por Q_3 obtém-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ik(Q_3 - 1)u \quad (2.45)$$

Inserindo-se, agora, os valores de (2.40) e (2.44), em (2.45)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ik \left\{ \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}} + [\sqrt{1+n^2-1}-1] - 1 \right\} u$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = i \left\{ \sqrt{k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}} + k(n-2) \right\} u$$
(2.46)

obtendo-se, então

$$\frac{\partial u}{\partial x} - i \sqrt{k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}} u - ik(n-2)u = 0$$
(2.47)

que é a equação parabólica utilizada aqui para propagações em grandes ângulos com a direção paraxial.

2.2- O MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS

A formulação matemática da maioria dos problemas na ciência envolvendo taxa de troca relativa a duas ou mais variáveis independentes, usualmente representando tempo, comprimento ou ângulo, resulta nas chamadas equações diferenciais parciais (EDPs) ou em um conjunto destas equações. O caso especial da equação de segunda ordem a duas dimensões

$$a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} + c \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + d \frac{\partial \phi}{\partial x} + e \frac{\partial \phi}{\partial z} + f \phi + g = 0$$
(2.48)

sendo que a , b , c , d , e , f e g podem ser funções das variáveis independentes x e z e da variável dependente ϕ , ocorrendo frequentemente nos mais importantes princípios de conservação da física.

Esta equação é elíptica quando $b^2 - 4ac < 0$, parabólica quando $b^2 - 4ac = 0$, e hiperbólica quando $b^2 - 4ac > 0$ [12]. Esta classificação não é meramente acadêmica, uma vez que cada classe de equações está associada a uma categoria diferente de fenômenos físicos. Além disso, métodos numéricos que funcionam para uma categoria de equações podem não funcionar para as demais.

Na natureza podem-se distinguir dois tipos básicos de fenômenos físicos: aqueles que evoluem no tempo (transientes) e aqueles que estão em um estado de equilíbrio (estacionários). Esses processos frequentemente aparecem juntos.

Problemas de equilíbrio são aqueles nos quais a propriedade de interesse não se altera com o passar do tempo. Matematicamente, esses problemas são, em geral, representados por equações diferenciais parciais elípticas, cuja equação modelo é a equação de Laplace. Os problemas transientes, ou de propagação, envolvem a variação temporal das grandezas físicas de interesse. Os fenômenos transientes são modelados por equações diferenciais parabólicas ou hiperbólicas. Quando apresentam mecanismos de dissipação de energia, os fenômenos ditos dissipativos são descritos por equações parabólicas. Caso contrário, são representados por equações hiperbólicas [13].

Os métodos numéricos mais usuais em engenharia são o método das diferenças finitas e dos elementos finitos. No método das diferenças finitas, a região de interesse é representada por uma série de pontos ou nós, e a relação entre os valores nestes pontos é, geralmente, obtida através de expansão truncada em série de Taylor. Por outro lado, no método dos elementos finitos, a relação entre valores nodais é obtida por meio de polinômios de interpolação. De uma maneira geral, pode-se afirmar que a teoria básica do método das diferenças finitas é mais simples [14].

2.2.1 – Aproximação por Diferenças Finitas

A solução de uma EDP necessita de condições auxiliares adequadas. Muitas EDPs têm comportamento misto, isto é, são parabólicas em uma variável e elípticas em outra, complicando bastante a definição das condições auxiliares apropriadas.

A solução de uma EDP em uma região implica na obtenção dos valores para a variável dependente em cada ponto da região. Computacionalmente, somente pode-se lidar com uma região contínua se for determinada uma fórmula analítica para a solução do problema. O computador pode, então, ser utilizado para calcular a solução em qualquer ponto desejado da região, com o uso dessa fórmula. No caso de técnicas numéricas de solução, porém, não é possível tratar a região como contínua, já que o método numérico obtém a solução em pontos (x,z) , por exemplo, por cálculos como adição e multiplicação. Nada impede, no entanto, de escolherem-se alguns pontos dentro da região e somente neles calcular a

solução do problema. Esse processo recebe o nome de discretização e, ao conjunto de pontos discretos, é dado o nome de malha.

Para que seja possível tratar numericamente as EDPs, elas devem ser expressas na forma de operações aritméticas que o computador possa executar. Essencialmente, devem-se representar os diferenciais da EDP por expressões algébricas, ou seja, discretizar a EDP. Portanto, antes de resolver-se a EDP de forma numérica, precisa-se encontrar, para os termos que nela aparecem, as respectivas expressões escritas em função dos pontos da malha (conjunto de pontos discretos). Essas expressões são denominadas de aproximações por diferenças finitas. O resultado final desse processo é uma equação algébrica, denominada equação de diferenças finitas (EDF). A EDF é escrita para cada ponto da região discretizada em que se deseja calcular a solução do problema. Resolvendo-se as EDFs, encontra-se a solução aproximada do problema. Ela não é exata devido a erros

- inerentes ao processo de discretização.
- de arredondamento nos cálculos feitos no computador.
- na aproximação numérica das condições auxiliares.

As aproximações de diferenças finitas podem ser obtidas de várias formas. A seguir se dá uma breve explicação da aproximação de diferenças finitas pela expansão em série de Taylor [13].

➤ Expansões em Série de Taylor

As aproximações de diferenças finitas têm como base a expansão em série de Taylor de uma função f . Supondo que f seja contínua no intervalo $[a,b]$ de interesse e que possua derivadas até ordem N contínuas nesse intervalo, o Teorema de Taylor permite que se escreva, para todo ponto $x \in [a,b]$ [13],

$$f(x) = f(x_0) + (\Delta x) \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_0} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_{x_0} + \dots + R_N \quad (2.49)$$

em que $\Delta x = x - x_0$ e R_N é o resto.

Quer-se determinar a primeira derivada de uma função f no ponto $x_i = i\Delta x$. Expandindo $f(x_i + \Delta x)$ em torno do ponto x_i e isolando a primeira derivada, pode-se escrever

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} + \left[-\frac{(\Delta x)}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i - \dots \right] \quad (2.50)$$

O termo entre colchetes é chamado de erro local de truncamento (ELT). Esse erro aparece devido à utilização de um número finito de termos na série de Taylor. Como Δx é um valor pequeno, o maior erro desprezado é igual a uma constante vezes Δx , ou seja, é da ordem de Δx (emprega-se a

notação $O(\Delta x)$). Uma vez que não podemos tratar os infinitos termos dessa série na aproximação numérica para a derivada de f , a série foi truncada a partir da derivada de segunda ordem inclusive.

Pode-se simplificar a notação se escrever f_i para $f(x_i)$ ou, em geral, $f_{i \pm k}$ para $f(x_i \pm k \Delta x)$. Com isso, a expressão (2.50) torna-se [13]

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.51)$$

A expressão (2.51) é uma equação de diferenças finitas que representa uma aproximação de primeira ordem para a primeira derivada de f , utilizando diferenças progressivas, uma vez que se utiliza o ponto x_{i+1} , que fica adiante do ponto x_i .

Uma segunda aproximação de diferenças finitas pode ser obtida a partir da expansão de $f(x_i - \Delta x)$ obtendo-se, para a primeira derivada,

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.52)$$

que é outra aproximação de primeira ordem para a primeira derivada de f , considerada uma aproximação por diferenças atrasadas, pois utiliza um ponto que fica atrás de x_i , o ponto x_{i-1} , diferentemente da equação (2.51), que utiliza o ponto adiante de x_i .

Pode-se obter uma aproximação de $O(\Delta x)^2$ para a primeira derivada de f , manipulando convenientemente as expansões em série de Taylor para $f(x_i + \Delta x)$ e $f(x_i - \Delta x)$ obtém-se a aproximação por diferenças centrais

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (2.53)$$

A aproximação fornecida pela equação (2.53) recebe este nome por usar os pontos x_{i-1} e x_{i+1} para o cálculo da primeira derivada de f no ponto central, intermediário, x_i .

Nota-se que ao dividir-se o espaçamento por dois, na equação (2.53), o erro é dividido por quatro, sem precisarmos de quatro vezes mais pontos, como nas expressões (2.51) e (2.52). Isso é uma propriedade extremamente útil, já que, com menor número de pontos e, portanto, menor esforço computacional, pode-se conseguir uma aproximação melhor que aquelas fornecidas pelas aproximações de primeira ordem.

Expressões para derivadas de ordem superior a primeira podem ser construídas da mesma maneira como foram obtidas as fórmulas para as primeiras derivadas, isto é, por meio de manipulações adequadas da série de Taylor. A expressão mais comum encontrada na literatura para derivadas de segunda ordem é [13]

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad (2.54)$$

➤ Notação para funções de várias variáveis

Seja f uma função das variáveis independentes x e z . Então, o valor de f para o ponto de malha $P (x_i, z_j)$ é [12]

$$f_P = f(i\Delta x, j\Delta z) = f_{i,j} \quad (2.55)$$

Após algumas manipulações matemáticas, a aproximação por diferenças progressivas para a variável x é

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x} \quad (2.56)$$

para derivada de primeira ordem. Para derivadas de segunda ordem ela torna-se

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (2.57)$$

Similarmente, para a variável z

$$\left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j}}{\Delta z} \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \right|_{i,j} = \frac{f_{i,j+1} - 2f_{i,j} + f_{i,j-1}}{(\Delta z)^2} \quad (2.58)$$

As equações (2.56), (2.57) e (2.58) são chamadas de discretização explícita, pois o valor desconhecido é calculado em termos do valor conhecido, calculado anteriormente.

Um outro esquema de discretização, chamado implícito, foi proposto por Crank e Nicolson (1947) [12]. Eles propuseram e utilizaram um método de discretização que reduz o volume total de cálculos. Eles consideraram a equação diferencial parcial sendo satisfeita por um ponto médio $\{(i(\Delta x), (j+1/2)(\Delta z))\}$ e substituíram $\partial^2 f / \partial x^2$ por uma aproximação de diferenças finitas para o j -ésimo e $j+1$ -ésimo níveis da extensão. Então [12]

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j+1/2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{f_{i+1,j+1} - 2f_{i,j+1} + f_{i-1,j+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{f_{i+1,j} - 2f_{i,j} + f_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \right\} \quad (2.59)$$

Uma grande diferença entre os métodos explícitos e implícitos é que no primeiro as equações resultantes são independentes, permitindo, portanto, solução direta. Já no segundo, elas são acopladas, o que exige a resolução de um sistema de equações a cada passo no tempo.

➤ Consistência, convergência e estabilidade

Quando se resolve uma EDP numericamente, é natural questionar-se se a solução calculada se aproxima de alguma forma, da solução real da EDP. O que se quer é determinar, fundamentalmente, quando e sob que condições a solução das equações lineares é representativa da solução real da EDP. Isto depende, como se vê a seguir, da consistência das equações de diferenças finitas e da estabilidade e convergência do método numérico empregado [13].

Uma característica importante de uma dada aproximação de diferenças finitas é que ela seja consistente com a equação diferencial parcial que ela discretiza. Para que uma discretização seja consistente com a equação diferencial parcial, seu erro local de truncamento deve tender a zero quando $\Delta x, \Delta z \rightarrow 0$. Para que se verifique a consistência de uma discretização, substitui-se as expansões em série de Taylor na equação de diferenças finitas, e faz-se $\Delta x, \Delta z \rightarrow 0$. Caso o erro local de truncamento vá para zero, a discretização é consistente com a EDP. Esse é, essencialmente, o caminho inverso do processo de discretização.

Caso a solução numérica no domínio de interesse se aproxime da solução exata da EDP, conforme $\Delta x, \Delta z \rightarrow 0$, diz-se que o método numérico é convergente. A consistência é uma condição necessária para a convergência, pois, se ao fazer-se $\Delta x, \Delta z \rightarrow 0$ e não se recuperar a EDP original, então, também a solução numérica não se aproximará da solução exata da EDP original, mas sim de outra, aquela com a qual a discretização

é consistente. No entanto, um esquema consistente é inútil se a solução numérica não for convergente [12].

Um método numérico estável é aquele no qual quaisquer erros ou perturbações na solução não são amplificados sem limite. Quando um método numérico qualquer é instável, uma pequena perturbação, tal como um erro de truncamento, tende a crescer na medida em que o processo de cálculo avança no tempo. Na maioria das vezes, essa amplificação é de ordem exponencial e o erro cresce acima de limites razoáveis após um pequeno número de passos do processo computacional [14]. Portanto, como afirmou Fletcher em 1992 [12], o conceito de estabilidade está relacionado ao crescimento, ou diminuição dos erros introduzidos nos cálculos.

Em relação à estabilidade dos métodos numéricos, eles podem ser classificados em [13]:

- Condicionalmente estáveis: para fornecerem soluções numéricas estáveis, devem satisfazer uma condição de estabilidade. Métodos explícitos, em geral, são desse tipo.
- Incondicionalmente estáveis: não necessitam satisfazer quaisquer critérios de estabilidade para produzirem soluções estáveis. Em geral, métodos implícitos, aí se incluindo o método implícito de Crank e Nicolson, e alguns métodos explícitos muito particulares, como o método de DuFort-Frankel [13], pertencem a essa categoria.
- Incondicionalmente instáveis: não existem valores de Δz que permitem a eles fornecerem soluções estáveis. Não devem ser utilizados.

A grande vantagem de métodos implícitos sobre os métodos explícitos é a maior estabilidade dos primeiros [13].

A escolha de discretizações implícitas, semi-implícitas ou explícitas, na solução de problemas, devem se basear nas características do problema estudado e dos recursos computacionais disponíveis para a sua resolução. As discretizações semi-implícitas são, frequentemente, uma boa alternativa, pois combinam estabilidade incondicional com um sistema linear que pode ser resolvido de forma eficiente.

2.3- A TRANSFORMADA DE FOURIER

As transformadas lineares, especialmente Fourier e Laplace, são bastante conhecidas por fornecer técnicas para resolver problemas em sistemas lineares. Uma característica do uso destas transformadas como ferramenta matemática ou física é alterar o problema de maneira que, com esta transformação o mesmo possa ser resolvido.

Para resolver problemas de contorno na Teoria da Condução do Calor, Jean-Batpiste-Joseph Fourier apresentou no fim do século XVIII e começo do século XIX, uma nova técnica da solução das equações diferenciais ordinárias e parciais, técnica esta apresentada em seu famoso livro *Theorie Analytique de la Chaleur*, e chamada posteriormente de Técnica das Séries de Fourier. Nesta técnica operacional é permitido representar as funções não periódicas por meio de séries de Fourier. Esta representação, chamada de representação em frequência da função dada, é muito útil em situações físicas, principalmente no estudo da Análise Espectral.

O número de campos onde se aplica a transformada de Fourier é surpreendente; ela representa importante papel na teoria em muitos ramos da ciência. Embora algumas vezes seja considerada como uma função puramente matemática, como é usual no tratamento de outras transformadas, ela é, também, importante no campo da definição do sentido físico das funções de onde se origina [15] , [16].

2.3.1- A Transformada de Fourier e o Teorema Integral de Fourier

Seja $f(x)$ uma função definida no intervalo $(-\infty, \infty)$ e absolutamente integrável, ou seja

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$

A nova função definida por [15]

$$F\{f(x)\} \equiv F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi xs} dx \quad (2.60)$$

é chamada Transformada de Fourier da função $f(x)$.

Similarmente, podemos definir a operação inversa chamada Anti-transformada ou Conjugada ou Transformada Inversa, através da equação [15] , [16]

$$F^{-1}\{F(s)\} \equiv \bar{F}\{F(s)\} \equiv f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{i2\pi xs} ds \quad (2.61)$$

Desta forma, duas sucessivas transformações são feitas para produzir a função original. Escrevendo estas duas transformações repetindo a integral, obtém-se o usual teorema da integral de Fourier [15]

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i2\pi xs} dx \right] e^{i2\pi xs} ds \quad (2.62)$$

É preciso observar que os autores que tratam do estudo das transformadas de Fourier não são unânimes em sua definição. Existem várias definições e a passagem de uma para outra se faz através de uma mudança adequada de variáveis. O fator 2π que aparece com frequência nas fórmulas da transformada pode ser definido juntamente com s , produzindo a versão seguinte [15]

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixs} dx \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{ixs} ds \end{aligned} \quad (2.63)$$

Ainda há autores que, ocasionalmente, escrevem [15]

$$\begin{aligned}
 F(s) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ixs} dx \\
 f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{ixs} ds
 \end{aligned}
 \tag{2.64}$$

2.3.2- Condições de existência das Transformadas de Fourier

Para que a transformada de Fourier possa ser calculada, é necessário que a função $f(x)$ esteja sujeita às seguintes condições:

1. $f(x)$ e $f'(x)$ devem ser seccionalmente contínuas em qualquer intervalo finito.
2. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ converge, isto é, $f(x)$ é absolutamente integrável em $(-\infty, \infty)$.

2.3.3- Transformadas de Fourier em seno e co-seno

Se $F_c(s)$ representa a transformada co-seno, e $F_s(s)$ representa a transformada em seno de $f(x)$, então a transformada e a transformada inversa de $f(x)$, em co-seno, são obtidas da maneira seguinte [15]

$$\begin{aligned}
 F_c(s) &= 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos 2\pi sx dx \\
 f(x) &= 2 \int_0^{\infty} F_c(s) \cos 2\pi sx ds
 \end{aligned}
 \tag{2.65}$$

E, de forma idêntica, a transformada e a transformada inversa de $f(x)$ em seno [15]

$$\begin{aligned} F_s(s) &= 2 \int_0^{\infty} f(x) \operatorname{sen} 2\pi s x \, dx \\ f(x) &= 2 \int_0^{\infty} F_s(s) \operatorname{sen} 2\pi s x \, ds \end{aligned} \tag{2.66}$$

2.3.4- O Teorema da Convolução para Transformadas de Fourier

Define-se convolução das funções $f(x)$ e $g(x)$ por

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u) \, du \tag{2.67}$$

Um teorema importante, conhecido como teorema da convolução, afirma que a transformada de Fourier da convolução de $f(x)$ e $g(x)$ é igual ao produto das transformadas de Fourier de $f(x)$ e $g(x)$ [16]. Em símbolos,

$$F\{f * g\} = F\{f\} F\{g\} \tag{2.68}$$

2.4- – ALGORITMOS DA EQUAÇÃO PARABÓLICA

O objetivo é resolver a equação parabólica padrão, (2.14), que é utilizada para calcular o campo para pequenas aberturas, até 15°, com a direção paraxial, e, para isso, deve-se discretizá-la. O esquema de diferenças finitas mais comumente empregado para discretizar este tipo de equação é o esquema implícito de Crank-Nicolson, que permite o modelamento dos contornos arbitrários, aplicado na equação parabólica padrão. Como mencionado anteriormente, o esquema de Crank-Nicolson, citado anteriormente, é um método convergente e estável para todo valor finito de $\Delta x / \Delta z$.

Para resolver este problema, será utilizada a grade ou malha apresentada na Fig. 2.4. Inicialmente, observe-se que os pontos da malha localizam-se na intersecção das linhas horizontais com as verticais, estando separadas entre si por uma distância Δx e Δz , respectivamente, não necessariamente iguais. Os pontos m e j identificam um ponto na m -ésima linha e na j -ésima coluna, respectivamente.

O mais baixo contorno horizontal está localizado em $z=0$. Para iniciar, deve-se definir a grade de integração, que é fixada na direção vertical, mas não na distância, de forma que pode ser adaptada em um terreno plano. Seja

$$z_j = j\Delta z, \quad j = 0, N \quad (2.69)$$

os pontos da grade vertical e x_0, \dots, x_m, \dots são as sucessivas distâncias tomadas horizontalmente na grade de integração. Para auxiliar a solução de x_{m-1} para x_m , considera-se o ponto médio

$$\xi_m = \frac{x_{m-1} + x_m}{2}. \quad (2.70)$$

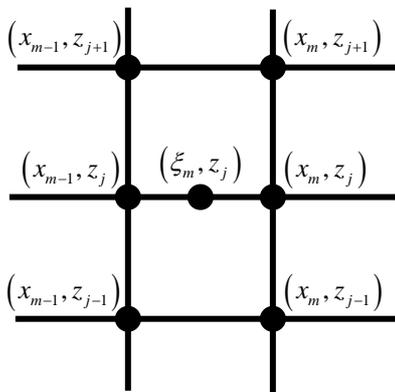


Fig. 2.4 – Grade de diferenças finitas para o esquema de Crank-Nicolson

A aproximação de diferenças finitas centrais da derivada na distância é

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_m, z_j) \sim \frac{u(x_m, z_j) - u(x_{m-1}, z_j)}{\Delta x_m} \quad (2.71)$$

sendo

$$\Delta x_m = x_m - x_{m-1} \quad (2.72)$$

Usando expansão de Taylor, pode-se verificar que o erro é da ordem de $(\Delta x)^2$ (vide equação (2.53)).

A aproximação de diferenças finitas centrais para derivadas de segunda ordem na altura é

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, z_j) \sim \frac{u(\xi_m, z_{j+1}) - 2u(\xi_m, z_j) + u(\xi_m, z_{j-1}))}{\Delta z^2} \quad (2.73)$$

O erro aqui é da ordem de $(\Delta z)^4$. Na expressão (2.73) todos os pontos envolvidos estão dentro do domínio de integração, ou seja, j pode ser 0 ou N [3].

2.4.1 – Algoritmo para Pequenos Ângulos

Tomando-se a equação parabólica padrão (2.13)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, z) + 2ik \frac{\partial u}{\partial x}(x, z) + k^2 (n^2(x, z) - 1)u(x, z) = 0$$

e combinando-se com (2.71) e (2.73) obtém-se

$$\frac{u(\xi_m, z_{j+1}) - 2u(\xi_m, z_j) + u(\xi_m, z_{j-1}))}{\Delta z^2} + 2ik \frac{u(x_m, z_j) - u(x_{m-1}, z_j)}{\Delta x_m} + k^2 (n^2(\xi_m, z_j) - 1) u(\xi_m, z_j) = 0 \quad (2.74)$$

O próximo passo é aproximar u para a distância ξ_m através da média de valores de x_{m-1} e x_m . Fazendo-se

$$u_j^m = u(x_m, z_j) \quad (2.75)$$

$$b = 4ik \frac{\Delta z^2}{\Delta x} \quad (2.76)$$

$$a_j^m = k^2 (n^2(\xi_m, z_j) - 1) \Delta z^2 \quad (2.77)$$

obtém-se

$$u_j^m (-2 + b + a_j^m) + u_{j+1}^m + u_{j-1}^m = u_j^{m-1} (2 + b - a_j^m) - u_{j+1}^{m-1} - u_{j-1}^{m-1} \quad (2.78)$$

para $j = 1, \dots, N-1$. São fornecidas $N-1$ equações. Para completar o sistema é necessário incluir equações para o topo e base do domínio. Aqui, considera-se que a região é perfeitamente condutora, então u deve ser zero para a base e $u(x, z_N) = 0$, pois utiliza-se camadas absorventes para evitar reflexões no topo do domínio.

É necessário expressar os valores de x_m como uma função de x_{m-1} na forma de um sistema linear. A solução não é obtida explicitamente,

somente implicitamente, pois é necessário inverter a matriz para obter u para a distância x_m . Este esquema implícito é do tipo Crank-Nicolson. Na forma matricial, o esquema é dado por

$$A_m U_m = V_m \quad (2.79)$$

sendo que U_m é um vetor que fornece o campo para a distância x_m

$$U_m = \begin{bmatrix} u_0^m \\ \vdots \\ u_N^m \end{bmatrix}, \quad (2.80)$$

A_m é a matriz tridiagonal

$$A_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_1^m & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha_2^m & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 & \alpha_{N-1}^m & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

com

$$\alpha_j^m = -2 + b + a_j^m \quad (2.82)$$

e o valor de V_m é obtido do campo U_{m-1} para a distância anterior através da matriz

$$V_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & \beta_1^m & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \beta_2^m & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 0 & -1 & \beta_{N-1}^m & -1 \\ 0 & \dots & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} U_{m-1} \quad (2.83)$$

sendo

$$\beta_j^m = 2 + b - a_j^m, \quad j = 1, \dots, N-1 \quad (2.84)$$

Já que a matriz A_m é tridiagonal, a inversão com o esquema de eliminação de Gauss fornece diretamente A_m não-singular. A seguir, omite-se o índice m por simplicidade. Na primeira passada, a subdiagonal mais baixa é eliminada, com um laço para frente

$$\begin{aligned}\Gamma_0 &= \frac{V_0}{\alpha_0} \\ \Gamma_j &= \frac{V_j - \Gamma_{j-1}}{\alpha_j}, \quad j = 1, \dots, N\end{aligned}\tag{2.85}$$

A subdiagonal mais alta é então eliminada com um laço para trás , obtendo-se a solução como

$$\begin{aligned}U_N &= \Gamma_N \\ U_j &= \Gamma_j - \frac{U_{j+1}}{\alpha_j}, \quad j = N-1, \dots, 0\end{aligned}\tag{2.86}$$

O número de operações é da ordem de N [3].

2.5- – CONDIÇÕES DE CONTORNO

2.5.1- Condições de Contorno na Superfície

Quando se representa a propagação acima de uma superfície perfeitamente condutora, pode-se simplesmente aplicar as condições de contorno de Dirichlet (polarização elétrica horizontal) ou Neumann (polarização vertical). Para encontrar a solução *split-step*, através da transformada de Fourier, da equação (2.47), isto é feito tomando-se a simetria apropriada para u , em $z=0$. Para muitos problemas, entretanto, não é suficiente a consideração de que a superfície é perfeitamente condutora e é necessário, também, levar em conta as condições de contorno da

impedância. Para polarização vertical, a condição de contorno da impedância é [6]

$$\left. \frac{\partial H_y}{\partial z} \right|_{z=0} + \alpha H_y(z=0) = 0 \quad (2.87)$$

sendo H_y o campo magnético tangencial transversal ou, em termos de u

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} + \left[\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial z} + \alpha \right] u(z=0) = 0 \quad (2.88)$$

Para a polarização horizontal, procede-se da mesma forma, com a substituição de H_y por E_y , o campo elétrico tangencial transversal, na equação (2.87), e o termo $\frac{\partial n}{\partial z}$, em (2.88), não existe. O coeficiente α está relacionado com a impedância da superfície η da seguinte forma [6]

$$\alpha = \frac{ik}{\sqrt{\eta}} \quad (\text{polarização vertical}) \quad (2.89)$$

$$\alpha = ik\sqrt{\eta} \quad (\text{polarização horizontal}) \quad (2.90)$$

2.5.2- A Solução Split-step para a Transformada de Fourier Mista

Quando um algoritmo tem misturado transformadas em seno e co-seno, então é chamada “transformada de Fourier mista”. O par de transformadas de Fourier mistas é definido da seguinte maneira [17]

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(z) [\alpha \operatorname{sen}(pz) - p \operatorname{cos}(pz)] dz \quad (2.91)$$

para a transformada direta e

$$f(z) = Ke^{-\alpha z} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(p) \frac{\alpha \operatorname{sen}(pz) - p \operatorname{cos}(pz)}{\alpha^2 + p^2} dp \quad (2.92)$$

sendo

$$K(x) = \begin{cases} 2\alpha \int_0^{\infty} f(z) e^{-\alpha z} dz; & \operatorname{Re}(\alpha) > 0 \\ 0; & \operatorname{Re}(\alpha) \leq 0 \end{cases} \quad (2.93)$$

para a transformada inversa. O uso das transformadas direta e inversa, descritas em (2.91) e (2.92), no lugar da transformada usual de Fourier, (2.60) e (2.61), garante que a condição de contorno mista (2.87) seja satisfeita. A variável transformada p representa o número de onda vertical

$k \text{ sen}\phi$, onde ϕ pode ser associado com o ângulo local de propagação para $|p| \leq k$.

Aplicando-se a transformada de Fourier na equação (2.47), que é a equação para grandes ângulos de propagação

$$F \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} - i \sqrt{k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}} u - ik(n-2)u \right\} = 0$$

$$\frac{\partial Fu}{\partial x} - iF \left\{ \sqrt{k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}} u \right\} - ik(n-2)Fu = 0$$

tem-se, então,

$$\frac{\partial U(x, p)}{\partial x} - i \sqrt{k^2 - 4\pi^2 p^2} U(x, p) - ik(n-2)U(x, p) = 0 \quad (2.94)$$

sendo

$$U(x, p) = \int_0^{\infty} u(x, z) [\alpha \text{ sen}(\pi pz) - \pi p \cos(\pi pz)] dz \quad (2.95)$$

e aplicando-se a transformada de Fourier inversa ao resultado obtido, a solução encontrada para o campo u , considerando a equação parabólica para propagação em grandes ângulos, (2.47), é [6]

$$u(x + \Delta x, z) = e^{ik(n-1)\Delta x/2} \left[\frac{2}{\pi} F_s \left\{ \frac{\alpha}{\alpha^2 + p^2} e^{i\Delta x(\sqrt{k^2 - p^2} - k)} U(x, p) \right\} + \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi} F_c \left\{ \frac{p}{\alpha^2 + p^2} e^{i\Delta x(\sqrt{k^2 - p^2} - k)} U(x, p) \right\} + e^{i\Delta x(\sqrt{k^2 - \alpha^2} - k)} e^{-\alpha z} K(x) \right] \quad (2.96)$$

sendo

$$U(x, p) = \alpha F_s \left\{ e^{ik(n-1)\Delta x/2} u(x, z) \right\} - p F_c \left\{ e^{ik(n-1)\Delta x/2} u(x, z) \right\} \quad (2.97)$$

F_s e F_c são as transformadas em seno e co-seno, respectivamente, definidas como

$$F_s [f(x, z)] \equiv \int_0^{\infty} f(x, z) \text{sen}(pz) dz \\ F_c [f(x, z)] \equiv \int_0^{\infty} f(x, z) \text{cos}(pz) dz \quad (2.98)$$

CAPÍTULO III

SET UP DE MEDIÇÕES

3.1- MEDIÇÃO NA FAIXA DE FREQUÊNCIA DE 900 MHz

3.1.1- Descrição do Ambiente

O edifício utilizado para as medições foi o do Instituto de Estudos Superiores da Amazônia (IESAM), na Avenida Governador José Malcher. No endereço há dois prédios, um de arquitetura antiga, tombado pelo Patrimônio Histórico, e outro localizado atrás do mencionado, denominado bloco 1, de arquitetura moderna, contendo cinco andares (Fig. 3.1).

O prédio antigo, que está localizado em frente a uma avenida fartamente arborizada, tem dois andares, janelas e portas de madeira e vidro, escada em mármore, paredes em alvenaria, piso e forro em madeira e em seu interior funciona parte da administração da Faculdade.



Fig. 3.1 – Vista do prédio antigo e do bloco 1

As medições foram realizadas no térreo, primeiro, segundo, terceiro e quarto andares do bloco 1; em seu interior há salas de aulas, laboratórios, corredores, etc. O andar térreo tem aproximadamente 35 m de comprimento, 8,5 m de largura e 3,5 m de altura e os demais andares têm aproximadamente 45 m de comprimento, com a mesma largura e altura do pavimento térreo; inicialmente consideram-se apenas as dimensões de comprimento e largura, posteriormente serão feitas simulações com a altura do prédio. O forro é de concreto e o piso de cerâmica. As paredes que dividem os ambientes são de alvenaria, as bancadas dos laboratórios são de fórmica, alguns armários e as mesas para professores são fabricados de madeira e as carteiras de estudantes são de madeira com as laterais de ferro; há, também armários constituídos de aço. Existem portas de madeira e

janelas de vidro, com esquadrias de alumínio, nas paredes. O elevador é constituído de aço.

No térreo existe um corredor e quatro laboratórios de informática. Nos laboratórios há vinte e cinco bancadas em cada (Fig. 3.2).



Fig. 3.2- Corredor Térreo

No primeiro andar há um corredor e seis salas de aula. Em duas das salas há cinquenta carteiras para estudantes e nas outras quatro, trinta e cinco carteiras; há, ainda, uma mesa destinada ao professor em cada sala.

Nos segundo, terceiro e quarto andares há cinco salas de aula e um laboratório em cada andar. Em cada sala de aula existem cinquenta carteiras para estudantes e em cada laboratório, dezesseis bancadas; há, também, uma mesa para o professor em cada sala de aula (Fig. 3.3).



Fig. 3.3 – Corredor típico do 1º ao 4º andares

Foram feitas simulações utilizando a frequência de 850 MHz e analisadas as curvas encontradas para o sinal transpondo vários obstáculos, como por exemplo: a) no corredor, onde há apenas a parede de fundo; b) transpondo várias paredes, carteiras de estudantes, bancadas de laboratório, etc.

➤ Dimensões dos compartimentos

Abaixo são listadas as dimensões (comprimento e largura) dos vários compartimentos existentes nos andares (térreo, primeiro, segundo, terceiro e quarto) onde foram realizadas as medidas para a simulação:

TÉRREO			
N^o	COMPARTIMENTO	COMPRIMENTO (m)	LARGURA (m)
01	Corredor	35,00	2,00
02	Laboratório 01	9,00	6,50
03	Laboratório 02	8,50	6,50
04	Laboratório 03	8,50	6,50
05	Laboratório 04	8,50	6,50

Tabela 3.1 – Dimensões do pavimento térreo

1^o ANDAR			
N^o	COMPARTIMENTO	COMPRIMENTO (m)	LARGURA (m)
01	Corredor	45,00	2,00
02	Sala 01	8,80	6,50
03	Sala 02	8,80	6,50
04	Sala 03	6,80	6,50
05	Sala 04	6,80	6,50
06	Sala 05	6,80	6,50
07	Sala 06	6,80	6,50

Tabela 3.2 – Dimensões do primeiro andar

2^o, 3^o e 4^o ANDAR			
N^o	COMPARTIMENTO	COMPRIMENTO (m)	LARGURA (m)
01	Corredor	40,00	2,00
02	Sala 01	7,90	6,50
03	Sala 02	7,90	6,50
05	Sala 03	7,90	6,50
06	Sala 04	7,90	6,50
07	Sala 05	7,90	6,50
08	Laboratório	5,00	8,50

Tabela 3.3 – Dimensões do segundo, terceiro e quarto andares

➤ Dimensões dos móveis

As dimensões dos vários móveis existentes no interior das salas, laboratórios, etc. são apresentadas abaixo:

Nº	MÓVEL	COMPRIMENTO (m)	LARGURA (m)
01	Bancada de Laboratório	2,00	0,80
02	Bancada de Informática	1,10	0,60
03	Mesa do professor	1,10	0,50
04	Carteira de estudante	0,60	0,60

Tabela 3.4 – Dimensões da mobília

2.1.2- Aparato para as Medições

O sistema utilizado para a coleta dos dados *indoor* é um protótipo de medição de intensidade de sinal para ambientes *indoor* composto por um gerador de varredura, um amplificador, uma antena transmissora, uma antena receptora, um analisador de espectro, uma placa de aquisição de dados USB, o protótipo de medição de distância, um computador tipo *notebook* e um estabilizador tipo *nobreak*, além de cabos e conectores (Fig. 3.4) [18].

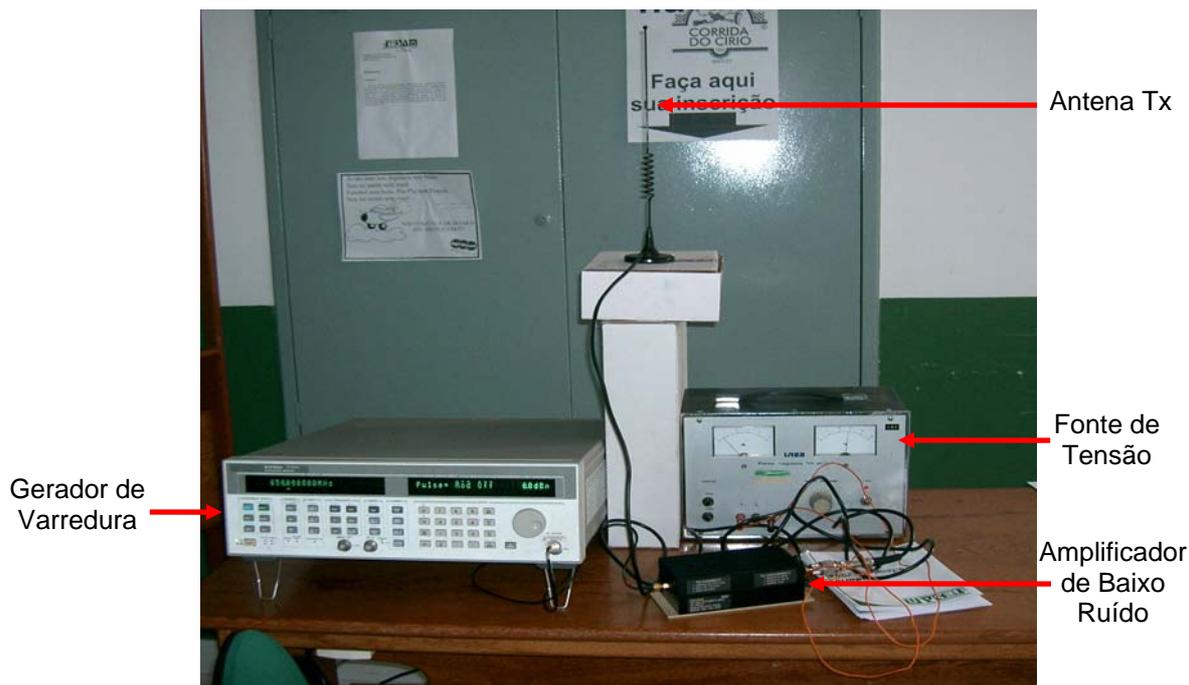


Fig. 3.4 - Módulo Transmissor

O funcionamento do sistema é descrito da seguinte maneira: o gerador de varredura emite um sinal na frequência de 850 MHz, que é amplificado e transmitido por uma antena monopolo. Esse sinal é captado por uma antena monopolo que está acoplada a um analisador de espectro. Após ser detectado, o sinal analógico é enviado à placa de aquisição de dados USB. O protótipo implementado para medir a distância, também envia paralelamente sinais de variação de tensão para a placa de aquisição e essa os converte em sinais digitais e os envia para o *notebook*, onde as duas informações (intensidade do sinal e distância) recebidas serão tratadas. O transmissor é colocado em uma posição fixa do prédio (térreo) e o protótipo (carrinho) percorre os corredores do mesmo com os equipamentos receptores sobre ele, fazendo a aquisição de dados (Fig. 3.5).

O sinal transmitido foi de uma onda CW com 850 MHz de frequência. A antena transmissora foi instalada a 1,5 m de altura, com faixa

de operação de 860 a 896 MHz e ganho de 3 dBi, e a antena receptora, a 1,0 m de altura com faixa de operação de 824 a 896 MHz e ganho igual a 2,5 dBi.



Fig. 3.5 - Módulo Receptor

O sistema é composto, basicamente, pelos seguintes equipamentos

[18]:

- 01 gerador de varredura modelo HP 83752A;
- 01 amplificador *Mini-Circuits* Modelo ZHL – 42W;
- 01 analisador de espectro modelo HP 8593E;
- 01 placa de aquisição de dados USB modelo *LabJackU12*;
- 01 protótipo de medição de distância (carrinho com uma 5ª roda);
- 01 *notebook*;
- 01 antena transmissora monopolo;
- 01 antena receptora monopolo;

➤ 01 Inversor modelo SMS *Manager III* Senoidal

Neste ambiente foram realizadas medições de intensidade de sinal na frequência de 850 MHz com o protótipo *indoor* de medição de distância e intensidade do sinal descrito anteriormente. O transmissor foi colocado em uma posição fixa no Térreo e o receptor móvel percorreu os corredores do Térreo, 1º, 2º, 3º e 4º andares, com os equipamentos receptores sobre ele, fazendo a aquisição de dados (Fig. 3.6).

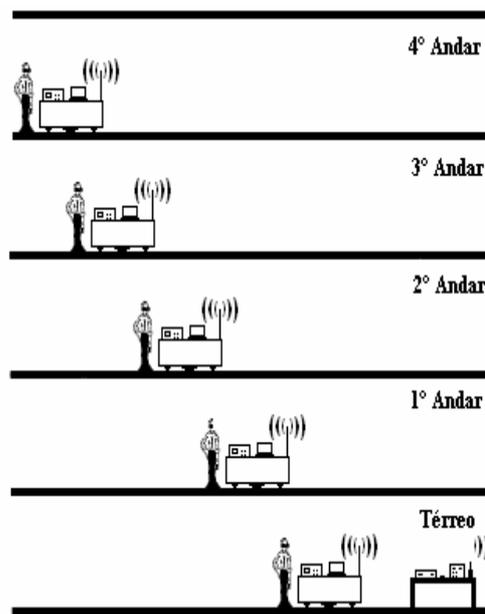


Fig. 3.6 - Sistema Transmissor localizado no Andar Térreo com o Sistema Receptor percorrendo os diversos Pisos do Prédio

3.2- MEDIÇÃO NA FAIXA DE FREQUÊNCIA DE 2,4 GHZ

3.2.1- Descrição do Ambiente

Para a campanha de medições com a frequência de 2,4 GHz o ambiente de teste foi o prédio Anexo II do Laboratório de Engenharia Elétrica e de Computação, da Universidade Federal do Pará, composto de um prédio

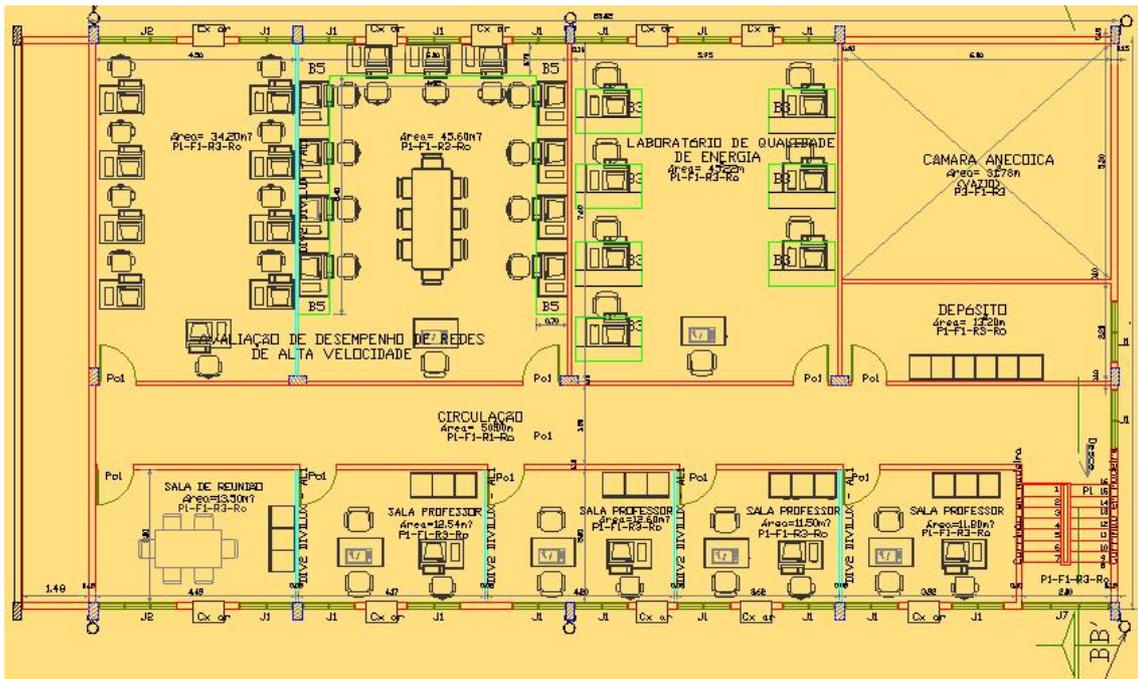


Fig. 3.8 - Planta baixa do pavimento superior do ambiente de teste

No ambiente de teste, observa-se a semelhança entre os corredores existentes no pavimento térreo e superior, modificando-se apenas a disposição das portas e janelas e salas existentes ao longo deles. Na Fig. 3.9 apresenta-se uma foto externa e três fotos internas do ambiente de medições; vê-se que o corredor inferior é semelhante ao superior sendo que, no final do corredor do pavimento térreo, encontra-se uma grande porta em ferro.



Fig. 3.9 - Ambiente de Medição: Fotos externa e internas

3.2.2- Aparato para as Medições

Na campanha de medições foram, inicialmente, marcados no chão os pontos onde a medição seria realizada, totalizando 21 pontos no andar superior e 25 no pavimento térreo (Fig. 3.10). Escolheram-se, então, duas paredes próximas para que os pontos-medidas fossem posicionados na planta baixa do prédio, utilizando o programa AUTOCAD.

Após esta etapa, um ponto de acesso foi posicionado na entrada do corredor do andar térreo; a rede originada desse ponto de acesso foi chamada de rede em estudo. A arquitetura desta rede, que estava utilizando frequência central de 2,4 GHz, onde o ponto de acesso estava conectado,

era ligada, através de um cabo de rede a um *notebook* [19]. Um outro *notebook* fazia a medição da potência em cada ponto, através do *Network Stumbler*[®] *software* [20].

Na Fig. 3.10, as linhas vermelhas e verdes representam as paredes em alvenaria, sendo as verdes as paredes que possuem espessura maior; as linhas azuis são as representações das paredes construídas em *divilux*. Os pontos em róseo são os pontos onde as medições foram realizadas, e a seta branca, no início do corredor do andar térreo, é o ponto de acesso, localizado neste andar.

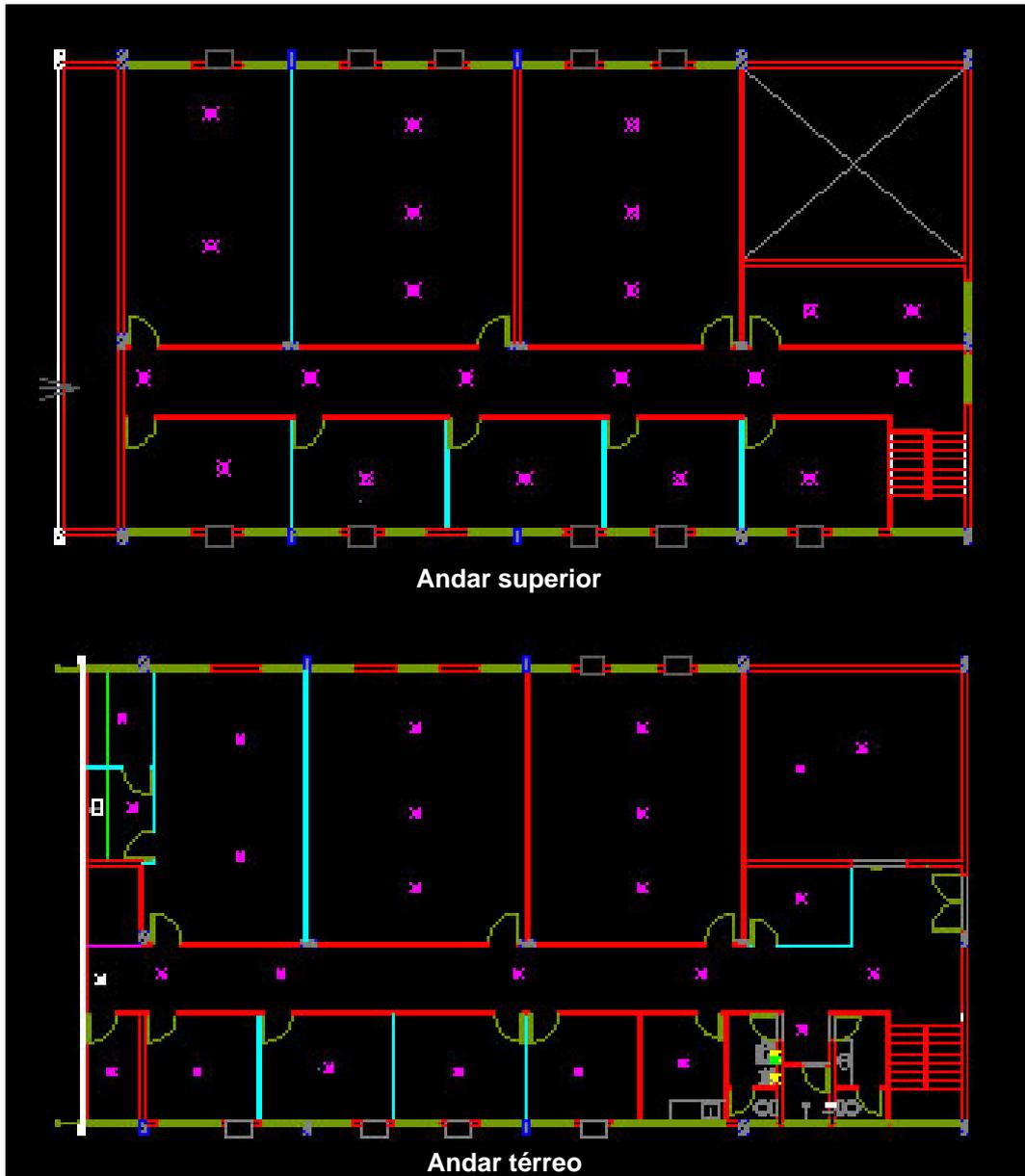


Fig. 3.10 - Planta baixa do prédio com as localizações dos pontos de medição

Foram armazenados alguns parâmetros, tais como potência recebida (que será usada neste trabalho para determinar a perda de propagação), distância entre o transmissor e o receptor, etc.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS

4.1- EQUAÇÕES UTILIZADAS

No programa computacional foi utilizada a equação parabólica padrão, equação (2.14), para a propagação em pequenos ângulos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, z) + 2ik \frac{\partial u}{\partial x}(x, z) + k^2 (n^2(x, z) - 1)u(x, z) = 0$$

e, para a propagação em grandes ângulos, a equação (2.47)

$$\frac{\partial u}{\partial x} - i\sqrt{k^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}u - ik(n-2)u = 0$$

A equação (2.14) foi discretizada, obtendo-se (2.74)

$$\frac{u(\xi_m, z_{j+1}) - 2u(\xi_m, z_j) + u(\xi_m, z_{j-1}))}{\Delta z^2} + 2ik \frac{u(x_m, z_j) - u(x_{m-1}, z_j)}{\Delta x_m} + k^2 (n^2(\xi_m, z_j) - 1)u(\xi_m, z_j) = 0$$

resultando em (2.78)

$$u_j^m (-2 + b + a_j^m) + u_{j+1}^m + u_{j-1}^m = u_j^{m-1} (2 + b - a_j^m) - u_{j+1}^{m-1} - u_{j-1}^{m-1}$$

A equação (2.47) foi resolvida utilizando-se a transformada de Fourier mista, resultando em (equação 2.96)

$$u(x + \Delta x, z) = e^{ik(n-1)\Delta x/2} \left[\frac{2}{\pi} F_s \left\{ \frac{\alpha}{\alpha^2 + p^2} e^{i\Delta x(\sqrt{k^2 - p^2} - k)} U(x, p) \right\} + \right. \\ \left. - \frac{2}{\pi} F_c \left\{ \frac{p}{\alpha^2 + p^2} e^{i\Delta x(\sqrt{k^2 - p^2} - k)} U(x, p) \right\} + e^{i\Delta x(\sqrt{k^2 - \alpha^2} - k)} e^{-\alpha z} K(x) \right]$$

O índice de refração utilizado tem a seguinte expressão [21]

$$n = \left[\mu_r \left(\varepsilon_r + \frac{j\sigma}{2\pi f \varepsilon_0} \right) \right]^{1/2}, \quad (4.1)$$

sendo μ_r a permeabilidade magnética, ε_r a permissividade relativa, σ a condutividade (S/m), f a frequência (Hz) e ε_0 é a permissividade no vácuo (F/m). Para meios não magnéticos, como é o caso, $\mu_r = 1$.

A equação utilizada para o cálculo da perda de propagação é [22]

$$L(\text{dB}) = 36,57 + 20 \log_{10} f + 20 \log_{10} |u_0| - 20 \log_{10} |u| - G_T - G_R, \quad (4.2)$$

sendo u_0 o campo na distância de referência (d_0), u o campo recebido, f a frequência expressa em GHz e G_T e G_R os ganhos das antenas transmissora e receptora (dB), respectivamente.

4.2- CARACTERÍSTICAS ELETROMAGNÉTICAS

4.2.1- Medição na Faixa de Frequência de 900 MHz

Ocasionado pelas diferenças nas características elétricas entre os vários materiais existentes (tijolo, madeira, fórmica, tecido, aço, concreto, etc.), é necessário que se utilizem os valores das constantes eletromagnéticas relativas aos diferentes materiais utilizados. Na Tabela 4.1 apresenta-se a faixa dos valores utilizados no Instituto de Estudos Superiores da Amazônia (IESAM):

Nº	MATERIAL	PERMISSIVIDADE RELATIVA	CONDUTIVIDADE (S/m)
01	Alvenaria [23]	5,05 - 5,52	0,28
02	Madeira [23]	3,00 – 3,12	0,01
03	Fórmica [10]	5,00	0,00

Tabela 4.1 – Características elétricas dos materiais usados para frequência de 900 MHz

4.2.2- Medição na Faixa de Frequência de 2,4 GHz

A Tabela 4.2 apresenta os valores da permissividade relativa e da condutividade dos vários materiais empregados na construção do prédio do Anexo II do Laboratório de Engenharia Elétrica e de Computação da Universidade Federal do Pará.

Nº	MATERIAL	PERMISSIVIDADE RELATIVA	CONDUTIVIDADE (S/m)
01	Alvenaria [23]	5,05 - 5,52	0,28
02	Madeira [23]	3,00 – 3,12	0,01
03	PVC [10]	2,26	0,00
04	Ferro [10,24]	12,00	$1,03 \times 10^7$

Tabela 4.2 – Características elétricas dos materiais usados para frequência de 2,4 GHz

4.3 – RESULTADOS OBTIDOS

4.3.1 – Medição na Faixa de Frequência de 900 MHz

A. Sem separação das componentes de larga e pequena escala

Os dados coletados foram obtidos por um grupo de mestrandos do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica no prédio citado (bloco 1 do Instituto de Estudos Superiores da Amazônia). A campanha de medições foi realizada ao longo do corredor existente no térreo, primeiro, segundo, terceiro e quarto andares, mantendo fixo o transmissor no início do corredor e variando a posição do receptor em toda a sua extensão.

A simulação numérica foi realizada considerando-se uma onda plana polarizada verticalmente incidindo sobre o corredor em linha direta. Para a aplicação da equação parabólica foi escolhida a direção paraxial, utilizando a aproximação para pequenos ângulos, até 15° . Na implementação foi utilizado um programa FORTRAN, para resolução da equação (2.78), e para os gráficos utilizou-se o Matlab 7.

O corredor tem paredes laterais em alvenaria, portas em madeira, piso em cerâmica e forro em concreto.

A Fig. 4.1 ilustra o resultado da simulação do *layout* do pavimento térreo no bloco 1 do prédio do IESAM, onde foram realizadas as medições.

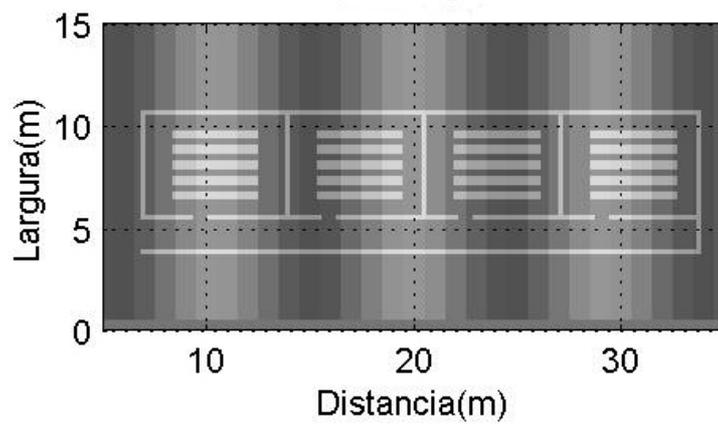


Fig. 4.1 – *Layout* do andar térreo

O resultado da simulação do *layout* do ambiente do primeiro andar é visto na Fig. 4.2.

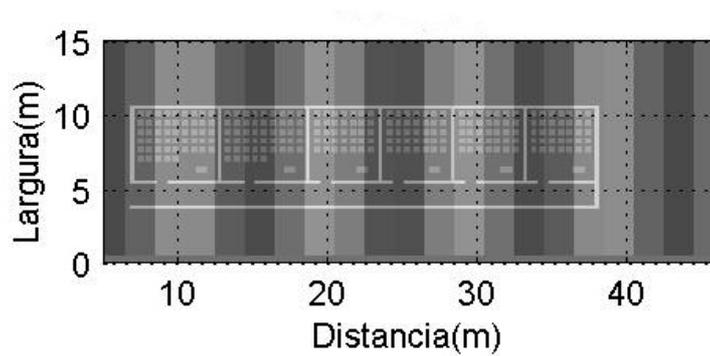


Fig. 4.2 – *Layout* do primeiro andar

Na Fig. 4.3 é apresentado o resultado da simulação do *layout* para o segundo, terceiro e quarto andares do prédio.

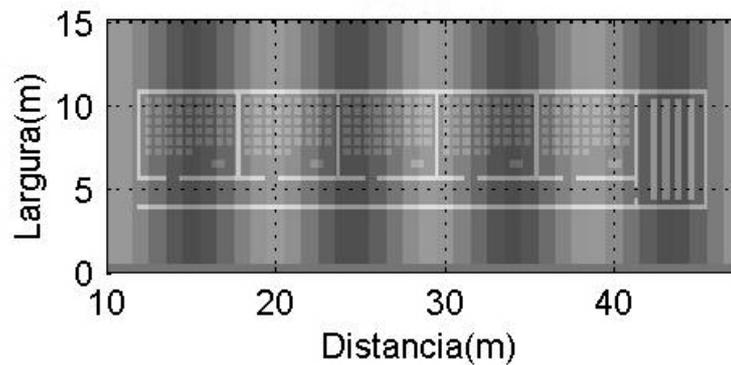


Fig. 4.3 – *Layout* do segundo, terceiro e quarto andares

- Resultados Encontrados via Equação Parabólica e Experimentalmente para os mesmos intervalos

Foram analisados os resultados encontrados via equação parabólica (EP) e coletados experimentalmente para a perda de propagação versus distância do transmissor para o térreo, primeiro, segundo, terceiro e quarto andares. Os dados foram plotados para os valores calculados em ambos os casos [25].

A aproximação linear para os gráficos foi obtida através da função *Basic Fitting* do Matlab 7.

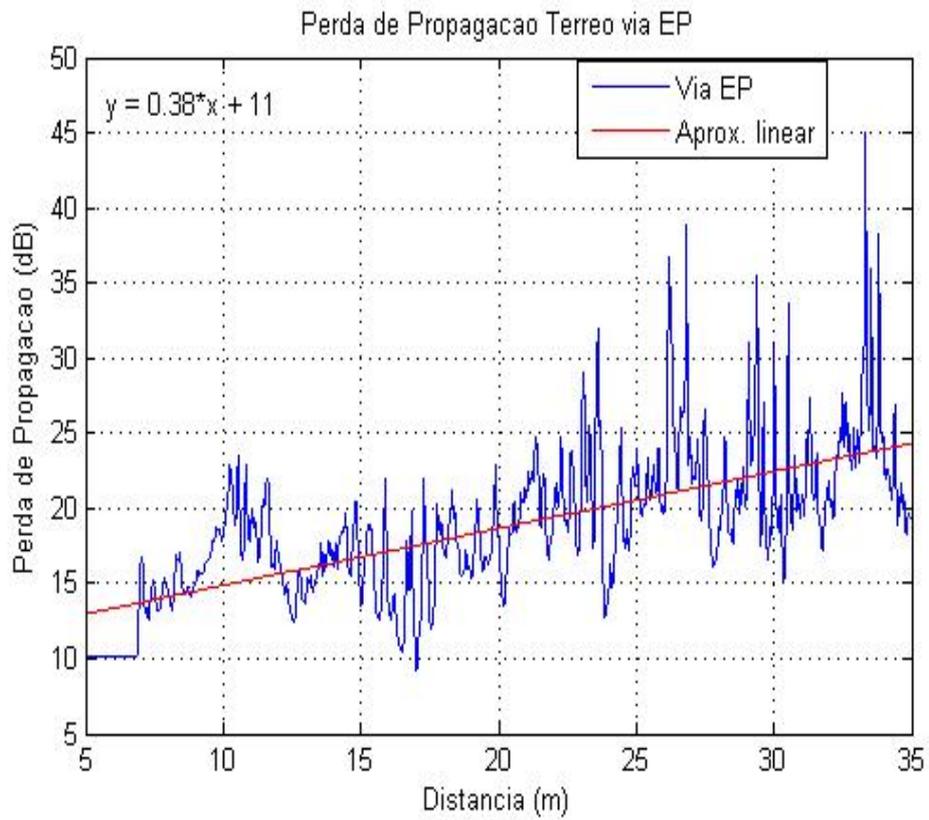


Fig. 4.4 – Perda de propagação versus distância no andar térreo via EP

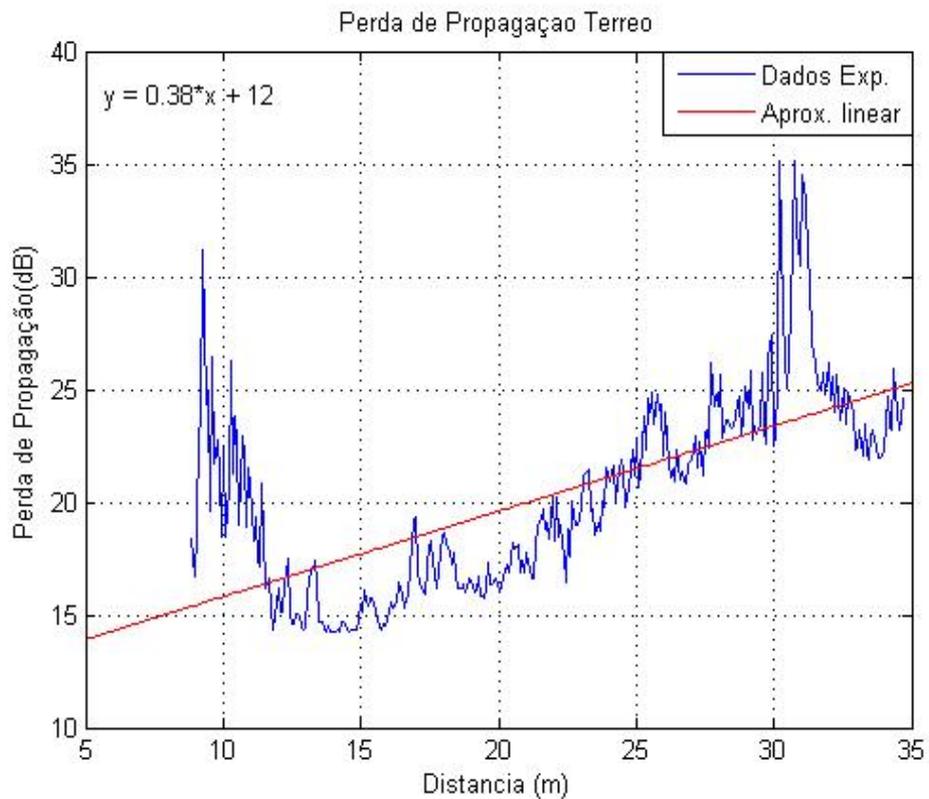


Fig. 4.5 – Perda de propagação versus distância no andar térreo experimental

No cálculo da perda de propagação para o pavimento térreo nota-se um desvanecimento regular do início ao fim do corredor, com leves alterações a partir de 25 m da antena transmissora. A inclinação média encontrada, associada ao expoente de perda de propagação, foi de 0,38 dB/m.

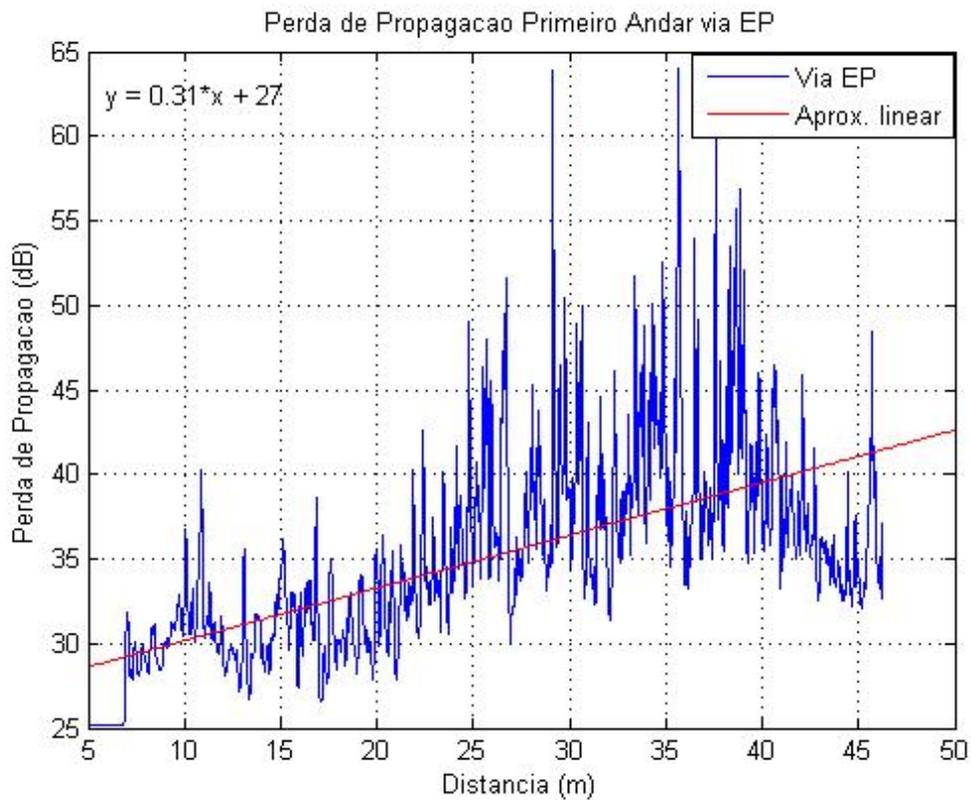


Fig. 4.6 – Perda de propagação versus distância no primeiro andar via EP

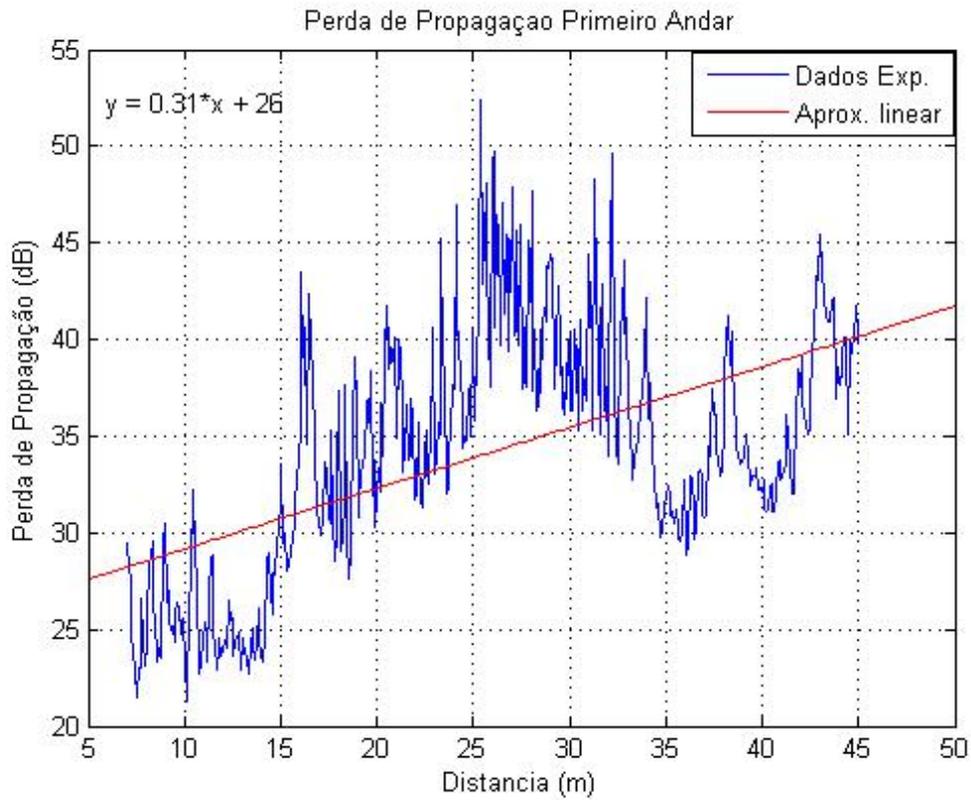


Fig. 4.7 – Perda de propagação versus distância no primeiro andar experimental

No primeiro andar percebe-se um desvanecimento lento no início do corredor com aumento significativo após, aproximadamente, 28 m da antena transmissora. Encontrou-se uma inclinação média, associada ao expoente de perda de propagação, foi de 0,31 dB/m.

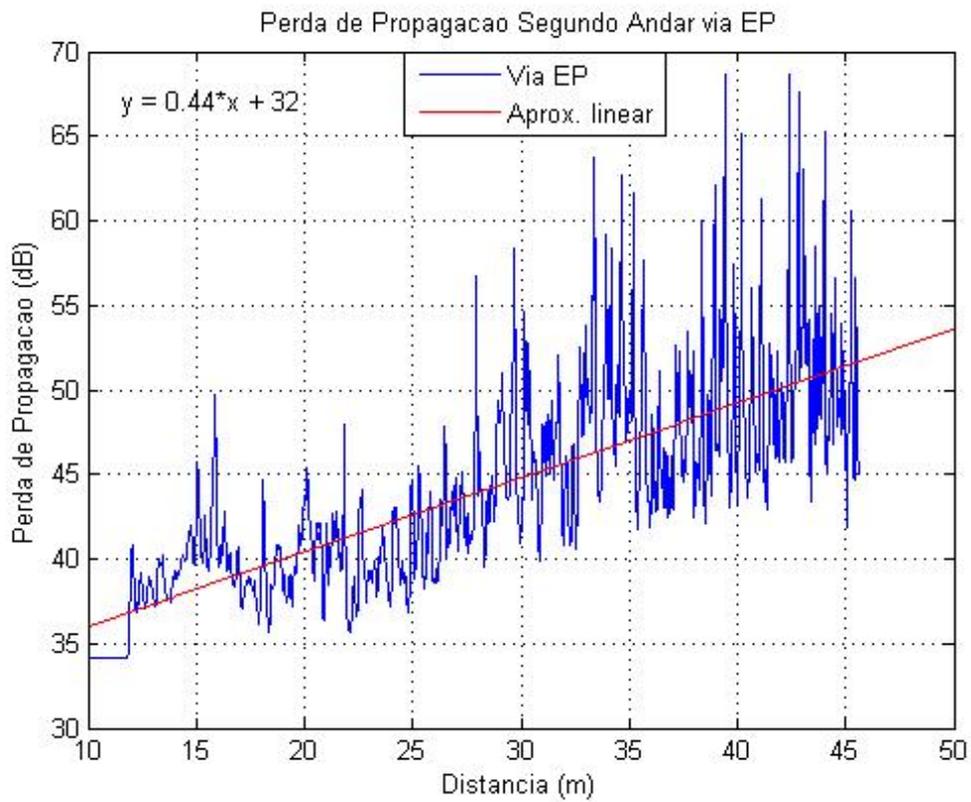


Fig. 4.8 – Perda de propagação versus distância no segundo andar via EP

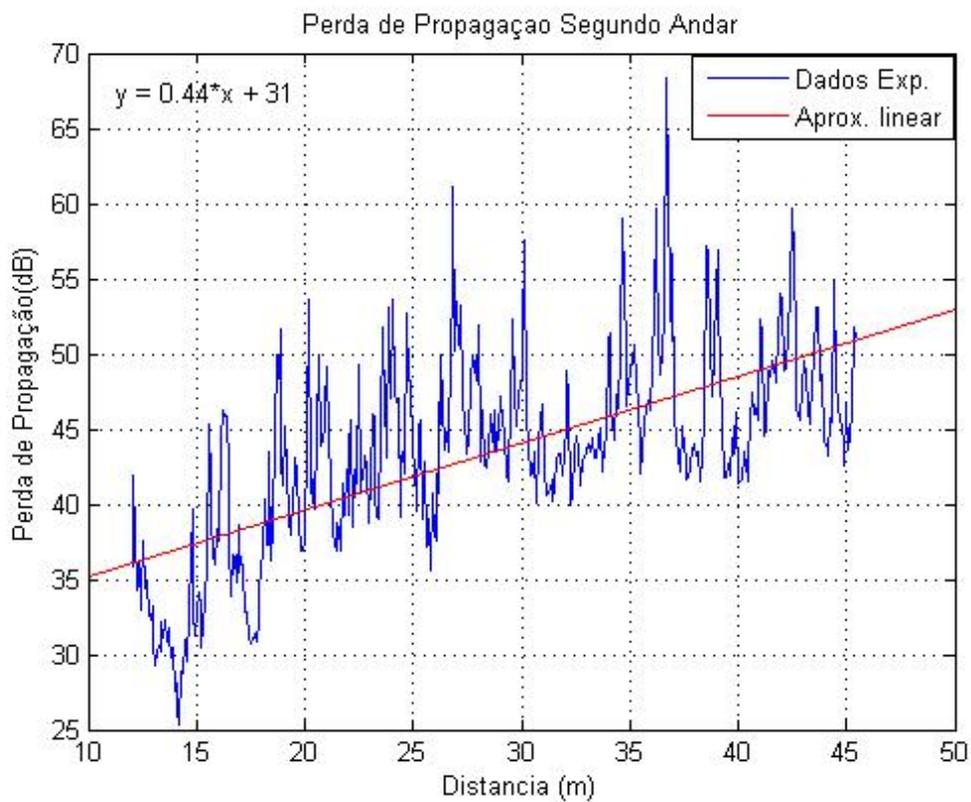


Fig. 4.9 – Perda de propagação versus distância no segundo andar experimental

Quando se analisa o segundo andar nota-se o desvanecimento aumentar a partir de 28 m da antena transmissora. A inclinação média encontrada, associada ao expoente de perda de propagação, foi de 0,44 dB/m.

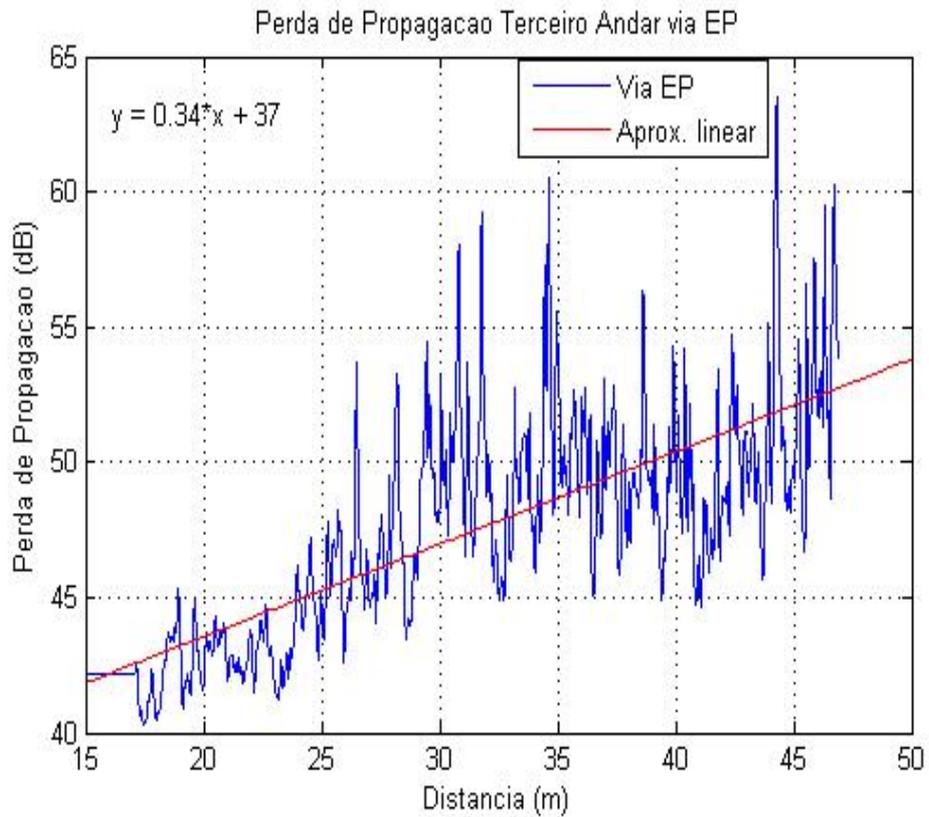


Fig. 4.10 – Perda de propagação versus distância no terceiro andar via EP

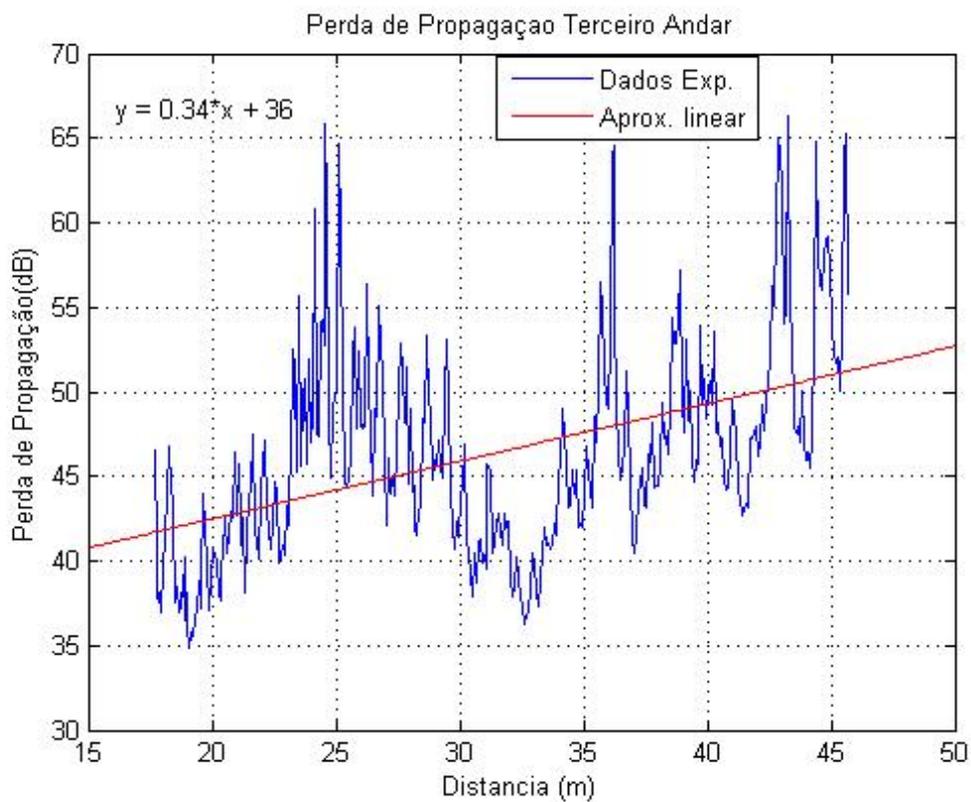


Fig. 4.11 – Perda de propagação versus distância no terceiro andar experimental

No terceiro andar verifica-se que acontece um desvanecimento regular em todo o percurso do sinal no corredor. A inclinação média encontrada, associada ao expoente de perda de propagação, foi de 0,34 dB/m.

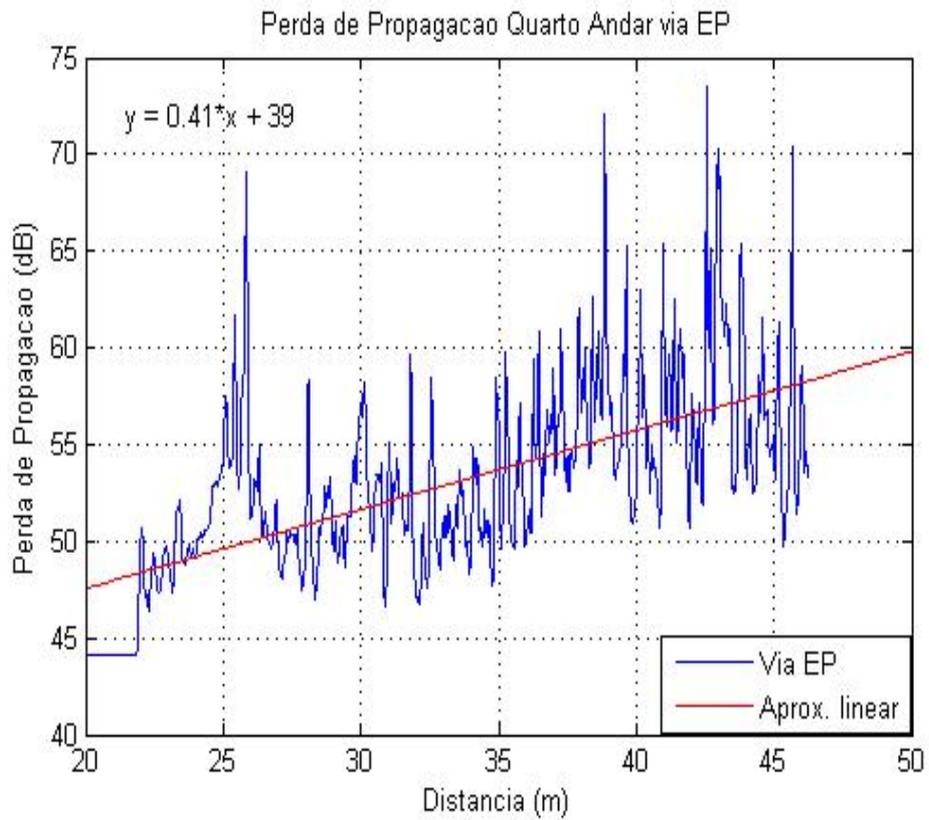


Fig. 4.12 – Perda de propagação versus distância no quarto andar via EP

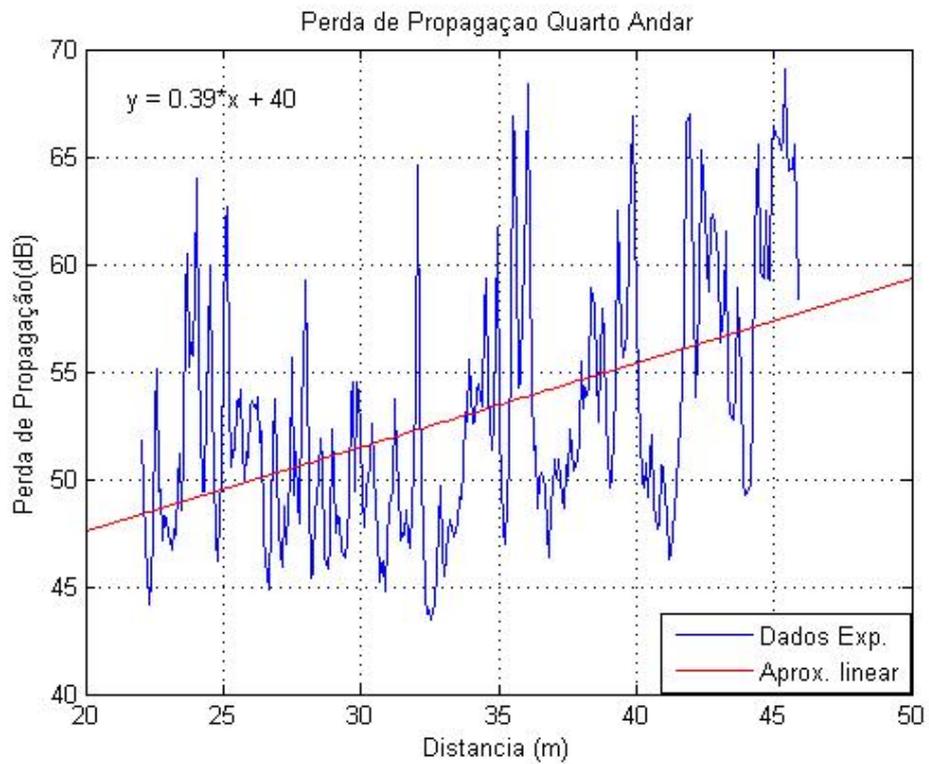


Fig. 4.13 – Perda de propagação versus distância no quarto andar experimental

No quarto andar verifica-se que o desvanecimento manteve-se praticamente estável, com aumento, aproximadamente, em 25 m e a partir de 40 m da antena transmissora; isto se deve, provavelmente, à diversidade do material empregado na construção e mobília do prédio, assim como à variedade e quantidade de mobília existente nos vários pavimentos. A inclinação média encontrada, associada ao expoente de perda de propagação, foi de 0,41 dB/m.

Os dados experimentais, relativos ao segundo, terceiro e quarto andares foram coletados apenas no corredor, desprezando o laboratório localizado no final do pavimento; os gráficos anteriores para o cálculo através do método da equação parabólica utilizaram o mesmo intervalo de valores dos dados experimentais.

A Tabela 4.3 fornece os dados estatísticos para o para os vários pavimentos do prédio [25]:

PAVIMENTO	PARÂMETRO	VIA EP (dB)	DADOS EXPERIMENTAIS (dB)
TÉRREO	Mínimo	8,80	14,26
	Máximo	44,57	35,17
	Média	18,16	20,27
	Desvio padrão	4,81	4,28
PRIMEIRO ANDAR	Mínimo	24,66	21,25
	Máximo	63,55	52,37
	Média	34,54	34,13
	Desvio padrão	5,81	6,22
SEGUNDO ANDAR	Mínimo	34,66	25,28
	Máximo	69,21	68,42
	Média	44,35	43,35
	Desvio padrão	5,90	6,59

PAVIMENTO	PARÂMETRO	VIA EP (dB)	DADOS EXPERIMENTAIS (dB)
TERCEIRO ANDAR	Mínimo	39,80	34,91
	Máximo	63,00	66,28
	Média	46,80	46,37
	Desvio padrão	4,11	6,18
QUARTO ANDAR	Mínimo	43,66	43,45
	Máximo	72,99	69,12
	Média	52,43	53,15
	Desvio padrão	4,85	5,78

Tabela 4.3 – Dados usando a função *Data Statistics* do Matlab 7

A Tabela 4.4 apresenta a estatística dos erros (médio e rms) e o desvio padrão para a simulação via equação parabólica e os dados experimentais.

PAVIMENTO	ERRO (dB)	DESVIO PADRÃO (dB)	ERRO RMS (dB)
TÉRREO	3,46	3,15	4,68
PRIMEIRO ANDAR	5,27	4,23	6,76
SEGUNDO ANDAR	5,20	4,01	6,57
TERCEIRO ANDAR	4,88	3,94	6,28
QUARTO ANDAR	4,65	3,94	6,10

Tabela 4.4 – Valores do erro, desvio padrão e erro rms para os dados calculados via EP e experimentalmente

➤ Resultados Encontrados apenas via Equação Parabólica

Alguns resultados encontrados não puderam ser comparados com dados experimentais por não terem sido coletados na campanha de medições realizada, porém, devem ser analisados para comprovação da utilização do método proposto. Apresenta-se a seguir a simulação (Figs. 4.14 a 4.18), via equação parabólica (EP), para estes casos: a) sinal passando pelas paredes e dentro das salas, em todos os pavimentos; b) nos andares

onde há um laboratório no final do corredor, passa-se o sinal em todo o corredor e dentro do laboratório [25].

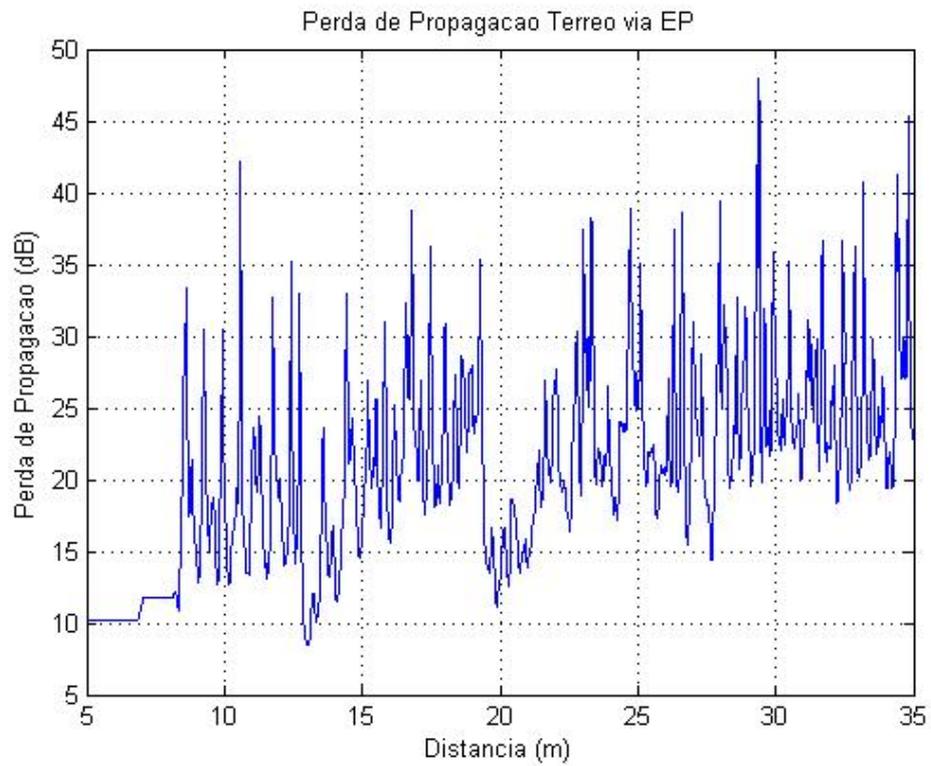


Fig. 4.14 – Perda de propagação versus distância no térreo via EP com o sinal passando dentro das salas

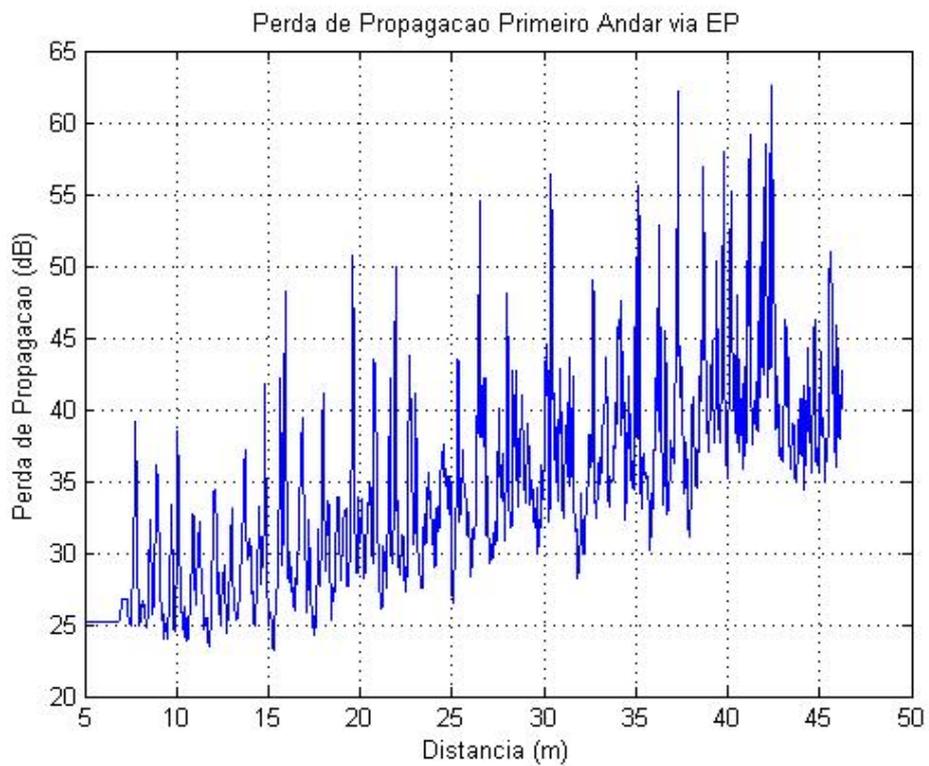


Fig. 4.15 – Perda de propagação versus distância no primeiro andar via EP com o sinal passando dentro das salas

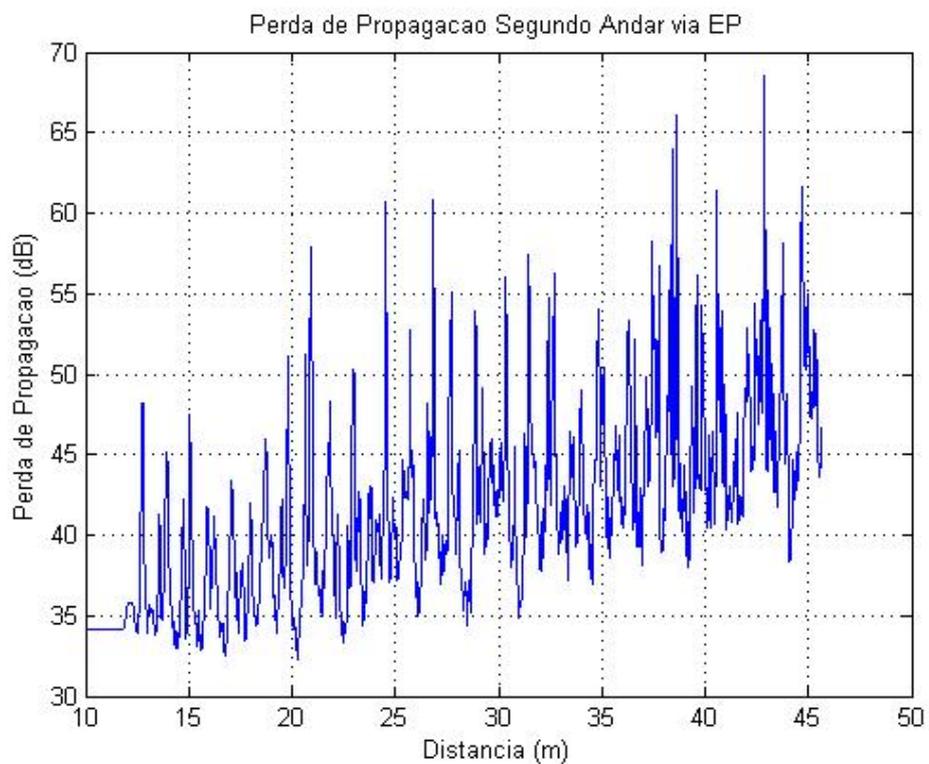


Fig. 4.16 – Perda de propagação versus distância no segundo andar via EP com o sinal passando dentro das salas

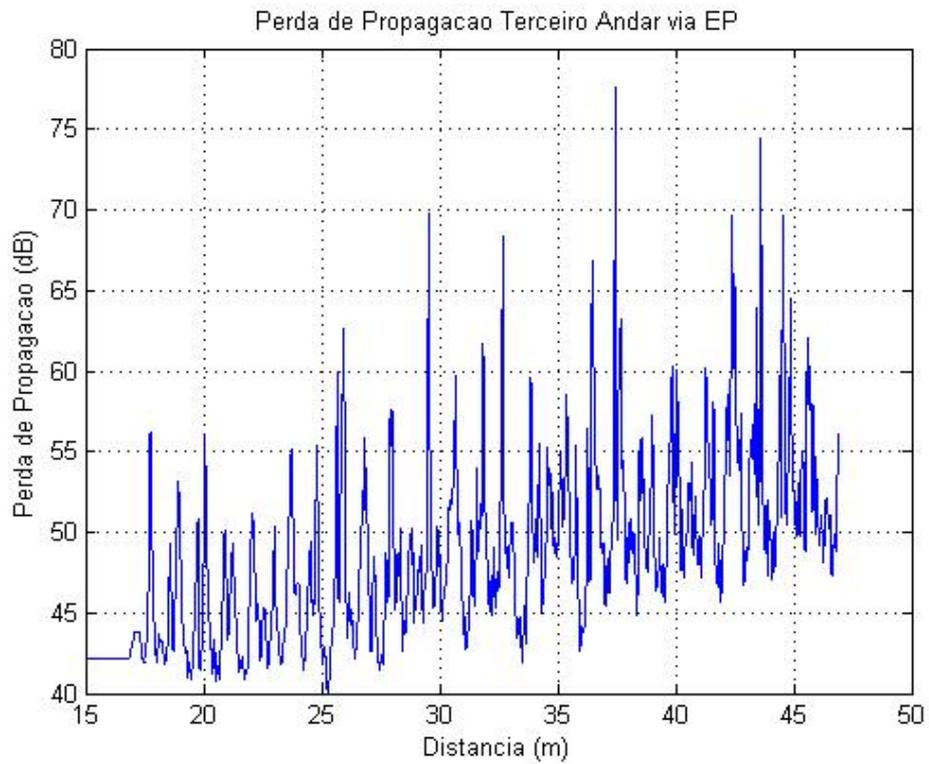


Fig. 4.17 – Perda de propagação versus distância no terceiro andar via EP com o sinal passando dentro das salas

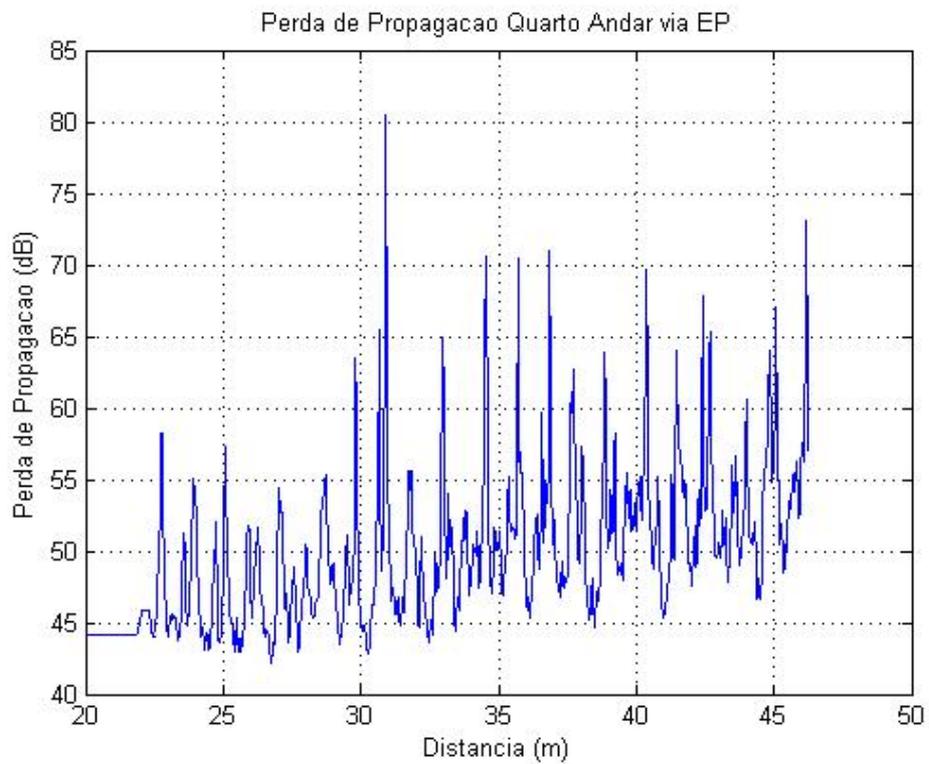


Fig. 4.18 – Perda de propagação versus distância no quarto andar via EP com o sinal passando dentro das salas

Comparando-se as Figs. 4.4, 4.6, 4.8, 4.10 e 4.12 com as Figs. 4.14 a 4.18, notam-se a diferença existente entre o desvanecimento existente quando o sinal é transmitido no corredor, em linha direta, e quando o mesmo passa dentro das salas. No último caso, há vários obstáculos, tais como paredes e carteiras para estudantes e professores.

O aumento na atenuação do sinal ocorrido nos vários pavimentos deve-se aos obstáculos mencionados, observando-se que os maiores valores para a perda de propagação é na passagem do sinal pelas paredes em alvenaria.

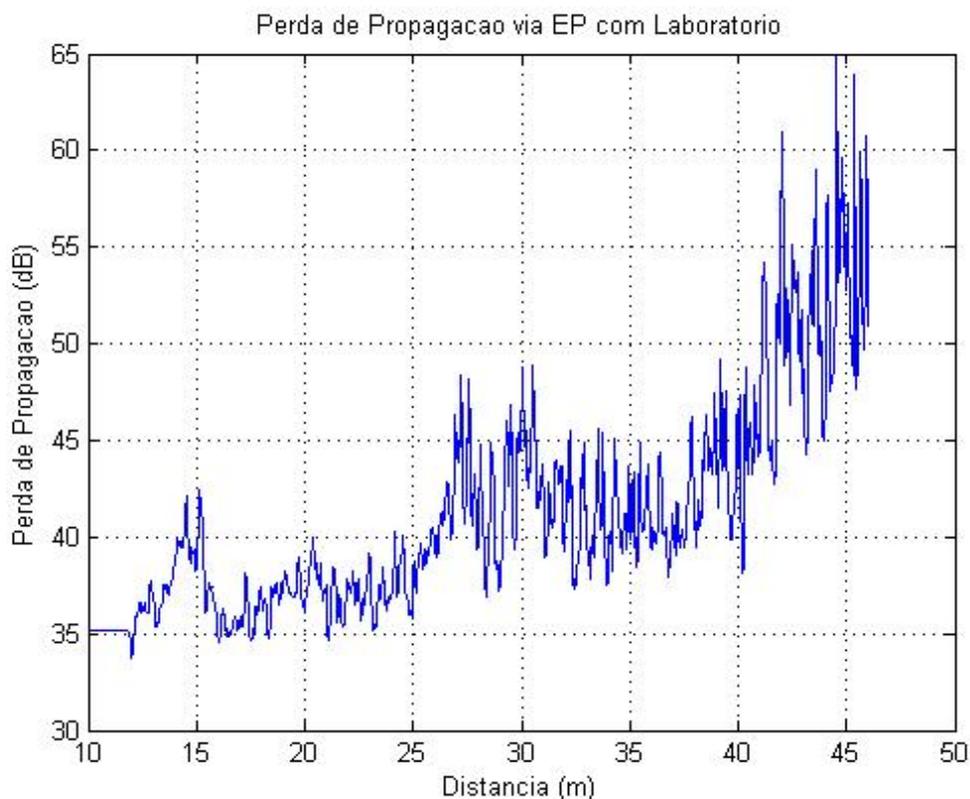


Fig. 4.19 – Perda de propagação versus distância via EP com o sinal passando pelo corredor e laboratório

Na Fig. 4.19 percebe-se a diferença ocorrida na perda de propagação até 40 m (do início ao fim do corredor) e a atenuação após este valor.

Observa-se que a partir de 40 m o sinal sofre uma grande atenuação, quando ultrapassa obstáculos como as paredes e as bancadas em fórmica existentes no interior do laboratório no fim do pavimento, onde não foram coletados dados experimentais.

A Tabela 4.5 mostra o expoente de perda de propagação para o térreo, primeiro, segundo, terceiro e quarto andares. Nota-se que este fator depende do ambiente e do cenário, isto é, se há um maior confinamento, como no térreo e primeiro andar, ou ambiente sem prédios contornando o do teste, como nos outros andares.

PAVIMENTO	EXPOENTE DE PERDA DE PROPAGAÇÃO	
	VIA EP	DADOS EXPERIMENTAIS
TÉRREO	1,5	1,5
PRIMEIRO ANDAR	1,6	1,8
SEGUNDO ANDAR	2,5	2,8
TERCEIRO ANDAR	2,3	2,3
QUARTO ANDAR	3,0	2,9
	2,18	2,26

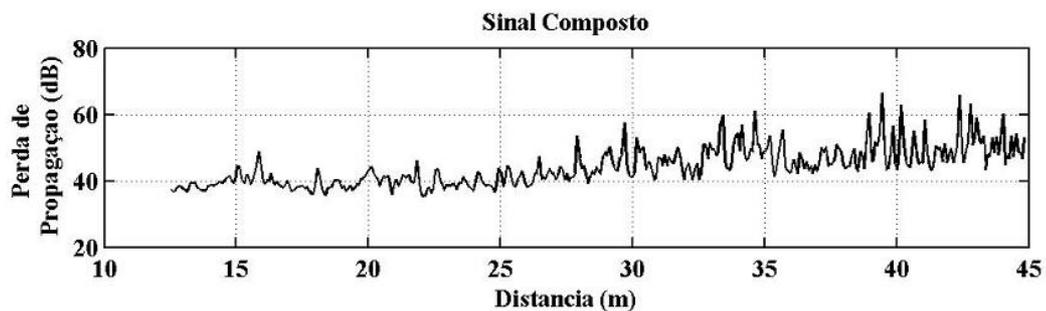
Tabela 4.5 – Cálculo do expoente de perda de propagação para os vários pavimentos calculados pelo método proposto e experimentalmente

B. Separando-se as componentes de larga e pequena escala

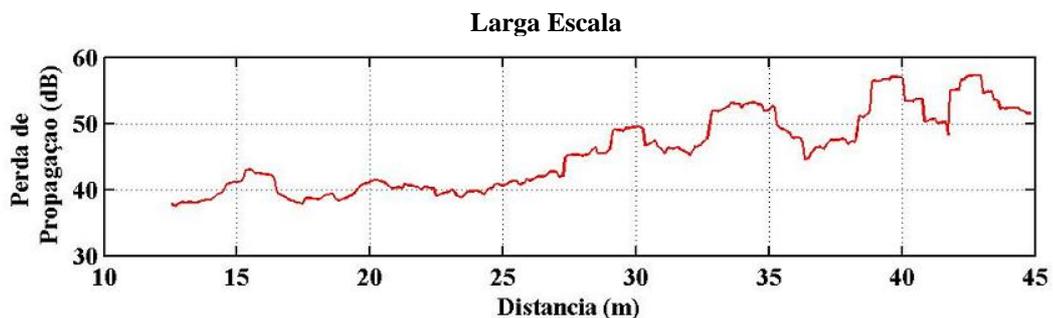
Os dados obtidos foram coletados da forma descrita anteriormente, como no item A. A simulação numérica foi realizada, também, da mesma forma anterior, utilizando-se os mesmos programas computacionais, ainda para a propagação até 15°.

Após a obtenção da perda de propagação via equações parabólicas (EP) e experimentalmente, foi feita a separação das componentes de larga e pequena escala, através de um “janelamento”. Esta janela é utilizada para delimitar uma parcela do sinal, observando assim a variação do sinal, como a parcela de larga e pequena escala.

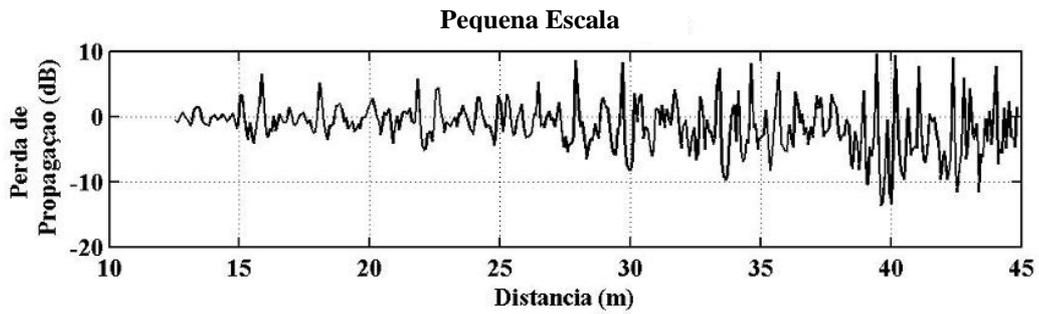
As Figs. 4.20a, 4.20b e 4.20c mostram o sinal composto, a componente de larga escala e a componente de pequena escala, obtidas via equações parabólicas, para um dos andares do ambiente de teste. Os dados de entrada para o cálculo do gráfico foram os valores da perda de propagação, em decibéis, relacionada com a distância, em metros.



(a)



(b)



(c)

Fig. 4.20 - (a) Sinal composto; (b) larga escala e; (c) pequena escala

Após a separação das duas componentes, a componente de larga escala foi, então, comparada com alguns modelos existentes na literatura, a saber:

- Modelo do Fator de Atenuação de Piso (FAP)

Quando há um ou mais pisos separando o transmissor e o receptor, um fator de atenuação, FAP (em decibéis), que é uma função do número de pisos e do tipo de edifício, pode ser adicionado à perda de propagação [26]

$$PL(dB) = PL(d_0) + 10\gamma \log\left(\frac{d}{d_0}\right) + FAP(dB) \quad (4.3)$$

As perdas entre os pisos de um edifício são determinadas pelas dimensões externas e materiais do edifício, assim como pelo material utilizado para a construção do piso e áreas que o cercam.

- Modelo da Aproximação de Padé

Este modelo adiciona à equação do modelo de perda no espaço livre, um termo que descreve a aleatoriedade do sinal e uma função empírica (aproximação de Padé) dependente do número de pisos entre a antena transmissora e receptora e seus parâmetros de ajuste. A perda de propagação ao longo do percurso torna-se [27]

$$PL(dB) = PL(d_0) + 10\gamma \log\left(\frac{d}{d_0}\right) + X + f(n_p, a, b) \quad (4.4)$$

sendo X uma variável aleatória em dB, $f(n_p, a, b)$ caracteriza as perdas entre pisos, n_p o número máximo de pisos entre o transmissor e o receptor, e a e b os parâmetros de ajuste da função de pisos.

A componente X pode ser expressa por [27]

$$X = x\sigma \quad (4.5)$$

com x sendo uma variável aleatória normalizada que caracteriza o comportamento da distribuição encontrada nos andares estudados e σ é o desvio padrão dos dados medidos.

O termo $f(n_p, a, b)$ é dado por [27]

$$f(n_p, a, b) = \frac{a + \left(\frac{abn_p}{2}\right) + \left(\frac{ab^2n_p^2}{12}\right)}{1 - \left(\frac{bn_p}{2}\right) + \left(\frac{b^2n_p^2}{12}\right)} \quad (4.6)$$

onde a e b são parâmetros de ajuste de uma aproximação de Padé de grau dois para o numerador e para o denominador da função exponencial.

- Resultados Encontrados via Equação Parabólica e Experimentalmente para os mesmos intervalos

A Fig. 4.21 mostra a componente do sinal em larga escala da perda de propagação, em decibéis, versus distância, em metros, para o cálculo utilizando o método de equações parabólicas (EP), modelo da aproximação de Padé e através dos dados experimentais, no andar térreo do ambiente de teste [28].

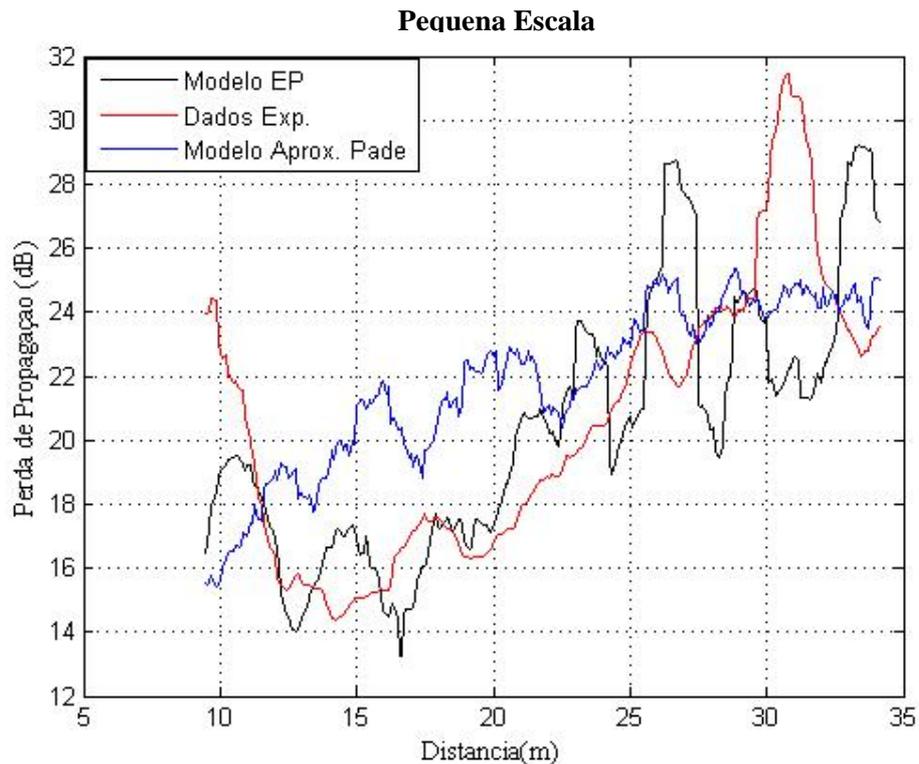


Fig. 4.21 - Perda de propagação versus distância no andar térreo via EP, medidas e através do modelo da aproximação de Padé.

As Figs. 4.22, 4.23, 4.24 e 4.25 mostram os resultados gráficos encontrados para a componente do sinal em larga escala da perda de propagação, em decibéis, versus a distância de separação entre o transmissor e o receptor, em metros, para o cálculo utilizando o método de equações parabólicas (EP), modelo do fator de atenuação de piso (FAP), modelo da aproximação de Padé e através dos dados experimentais, no primeiro, segundo, terceiro e quarto andares do bloco 1 do Instituto de Estudos Superiores da Amazônia (IESAM) [28] , [29].

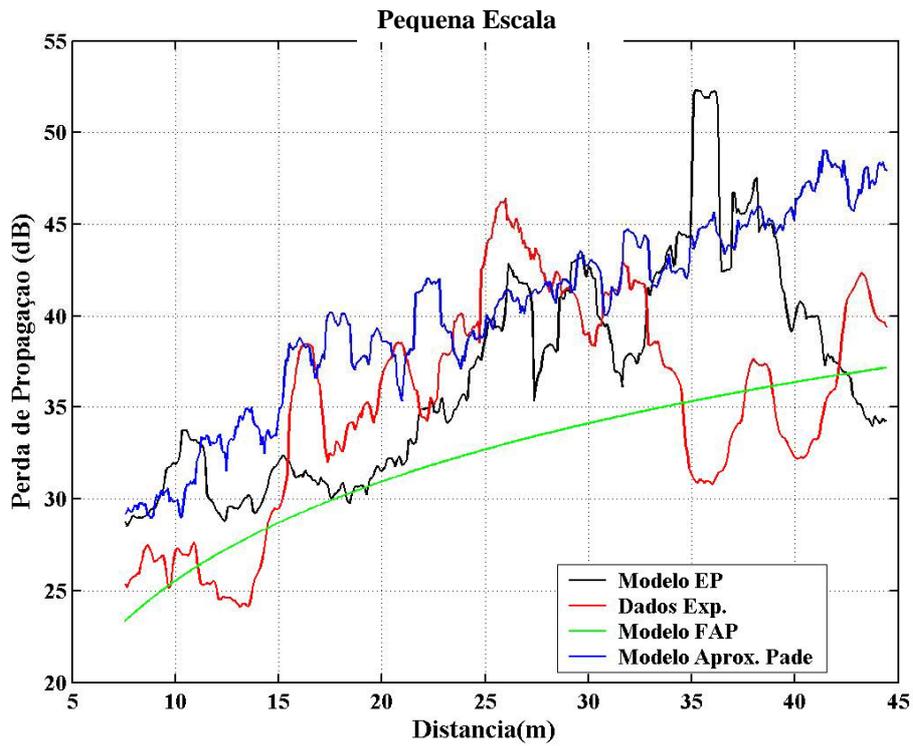


Fig. 4.22 - Perda de propagação versus distância no primeiro andar calculada via EP, experimentalmente e através dos modelos FAP e aproximação de Padé.

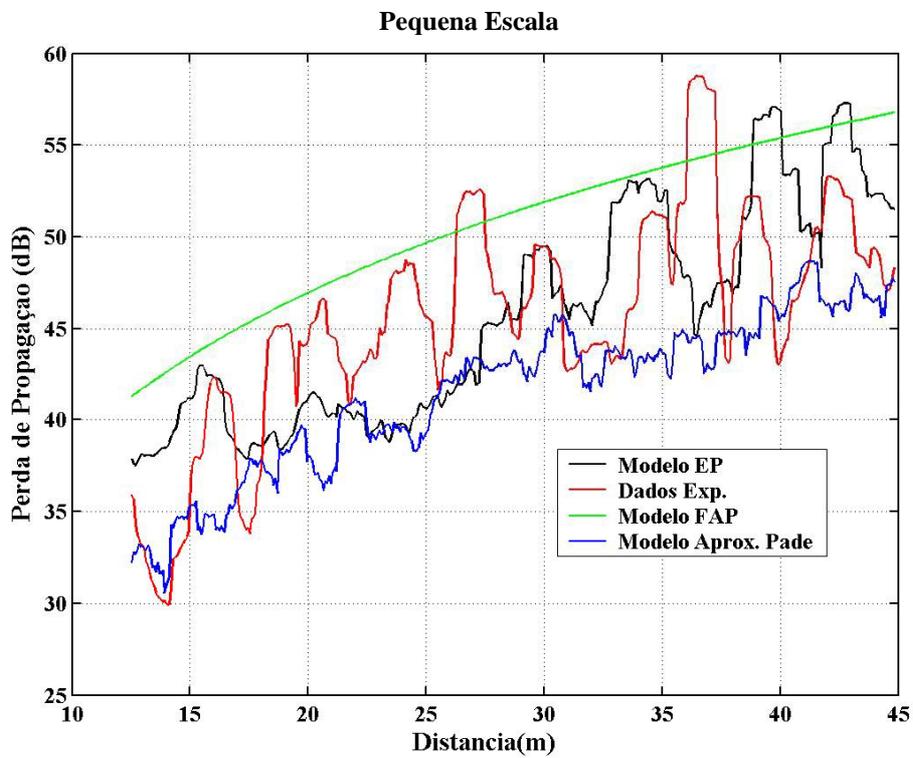


Fig. 4.23 - Perda de propagação versus distância no segundo andar via EP, medidas e através dos modelos FAP e aproximação de Padé.

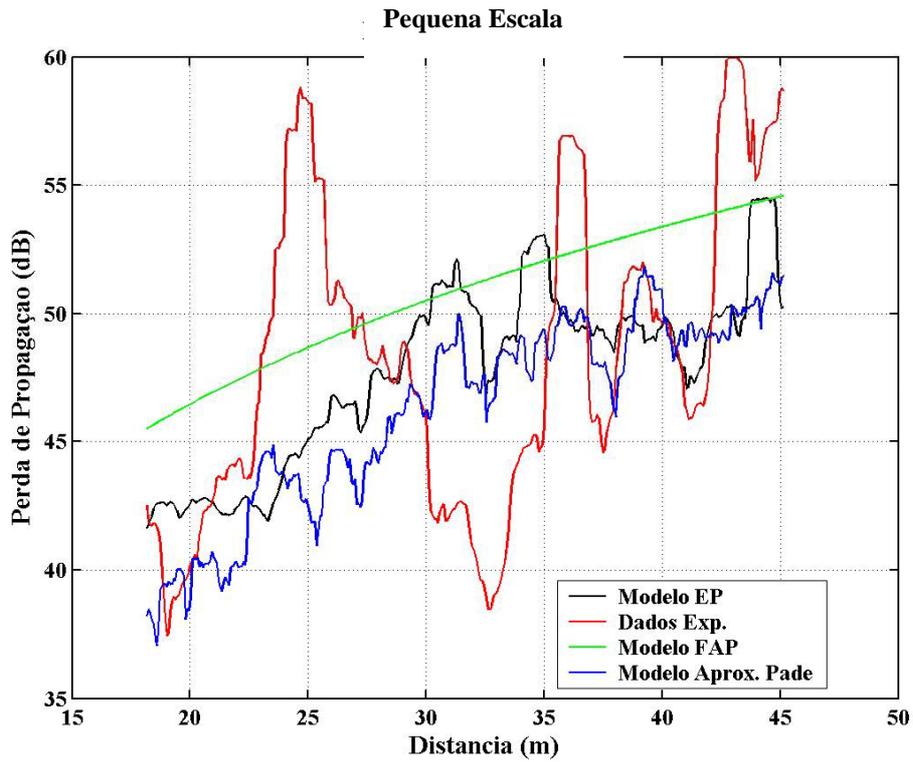


Fig. 4.24 - Perda de propagação versus distância no terceiro andar calculada via EP, experimentalmente e através dos modelos FAP e aproximação de Padé.

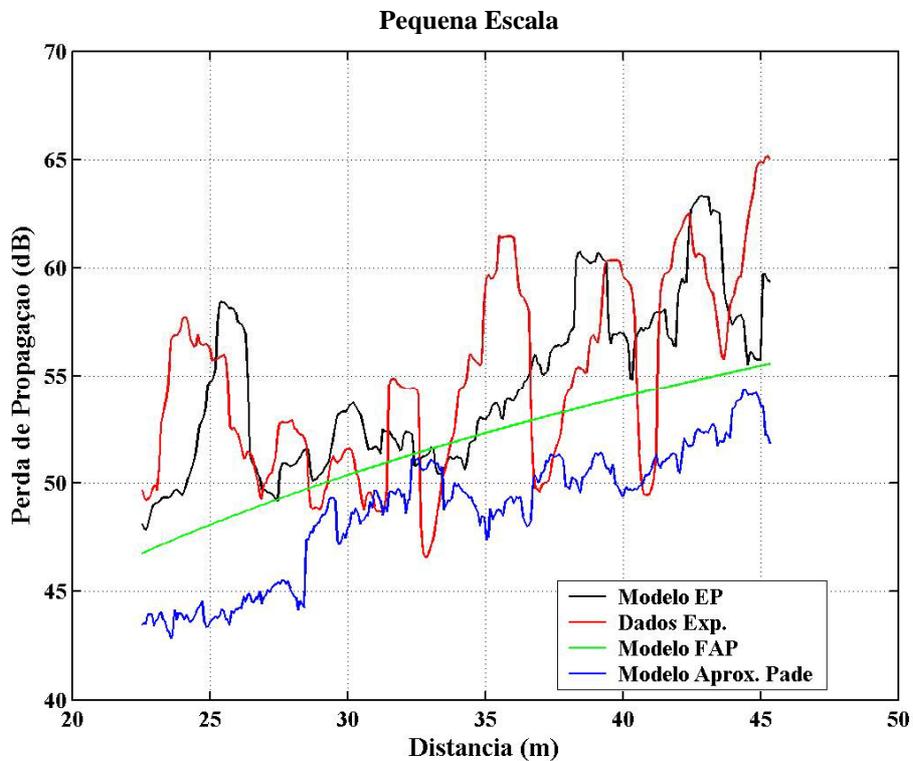


Fig. 4.25 - Perda de propagação versus distância no quarto andar calculada via EP, experimentalmente e através dos modelos FAP e aproximação de Padé

A Tabela 4.6 fornece o erro médio, desvio padrão e erro rms para os vários modelos, nos diversos pavimentos estudados no ambiente de teste, comparados aos dados experimentais [28] , [29].

PAVIMENTO	MODELO	ERRO MÉDIO (dB)	DESVIO PADRÃO (dB)	ERRO RMS (dB)
TÉRREO	Via EP	2,66	2,31	3,52
	Aprox. Padé [27]	3,08	1,81	3,57
1 ^o	Via EP	5,30	3,92	6,60
	FAP [26]	4,50	3,03	5,42
	Aprox. Padé [27]	5,14	3,60	6,27
2 ^o	Via EP	4,47	3,19	5,49
	FAP [26]	5,54	3,20	6,40
	Aprox. Padé [27]	5,09	3,43	6,15
3 ^o	Via EP	4,63	3,72	5,94
	FAP [26]	5,06	3,00	5,88
	Aprox. Padé [27]	4,76	3,44	5,87
4 ^o	Via EP	3,46	2,16	4,09
	FAP [26]	4,14	2,73	4,95
	Aprox. Padé [27]	6,19	3,68	7,20

Tabela 4.6 - Erro Médio, Desvio Padrão e Erro rms para os modelos analisados

4.3.2 – Medição na Faixa de Frequência de 2,4 GHz

Os dados coletados para esta simulação foram obtidos por um grupo de doutorandos do Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica no Anexo II do Laboratório de Engenharia Elétrica e de Computação (LEEC) da Universidade Federal do Pará. Na campanha de medições o sistema transmissor foi fixado no corredor do pavimento térreo e o sistema receptor foi posicionado nos vários pontos de medição distribuídos pelos

andares térreo e superior do ambiente de teste. O sinal foi transmitido através de uma rede com frequência central de 2,4 GHz.

Para a simulação via equações parabólicas (EP) considerou-se o sinal transmitido por uma onda plana polarizada verticalmente incidindo sobre o corredor em linha direta, com frequência de 2,4 GHz; foi escolhida inicialmente a direção paraxial, com aproximação para pequenos ângulos, até 15°. Consideraram-se as dimensões de comprimento e largura dos pavimentos térreo e superior. Na implementação foi utilizado um programa FORTRAN, para resolução de (2.78), e para os gráficos utilizou-se o Matlab 7.

A perda de propagação, encontrada através do método de equações parabólicas, foi comparada com alguns modelos existentes na literatura descritos a seguir:

- Modelo Dependente da Distância

Os modelos de propagação, teóricos e experimentais, indicam que a potência do sinal recebida decresce logaritmicamente com a distância, tanto para ambiente *outdoor* como para *indoor*. A perda de propagação é expressa como uma função da distância como [30]

$$PL(dB) = PL(d_0) + 10\gamma \log\left(\frac{d}{d_0}\right) \quad (4.7)$$

sendo $PL(d_0) = 20 \log\left(\frac{4\pi d_0}{\lambda}\right)$, em dB, a perda de propagação referente à distância de referência d_0 (1 m), γ o expoente de perda de propagação que indica a razão com que a perda de propagação aumenta com a distância, e d a distância de separação entre o transmissor e o receptor.

- Modelo do Fator de Atenuação de Piso (FAP)

Como uma alternativa à (4.7), quando há um ou mais pisos separando o transmissor e o receptor, um fator de atenuação, FAP (em dB), que é uma função do número de pisos e do tipo de edifício, pode ser adicionado à perda de propagação (4.4) [27]

$$PL(dB) = PL(d_0) + 10\gamma \log\left(\frac{d}{d_0}\right) + FAP(dB)$$

As perdas entre os pisos de um edifício são determinadas pelas dimensões externas e materiais do edifício, assim como pelo material utilizado para a construção do piso e áreas que o cercam.

- Modelo de Simon Wong, Francis Lau e Chi Tse

No ambiente estudado pelos autores, foi percebida a vantagem em se adotar uma aproximação empírica por considerar todos os fatores que influenciam a propagação da onda. O modelo de propagação é baseado na perda de propagação descrito em [30]. Além disso, os efeitos de

desvanecimento em pequena escala podem também ser caracterizados através de um parâmetro de desvanecimento devido ao sombreamento, χ_σ , dado por [31]

$$PL(dB) = PL(d_0) + 10\gamma \log\left(\frac{d}{d_0}\right) + \chi_\sigma \quad (4.8)$$

sendo χ_σ uma variável aleatória (em dB) de uma distribuição Gaussiana de média zero e desvio padrão σ (em dB). Os valores de γ e σ dependem da propagação no ambiente onde foram tomadas as medidas.

- Modelo de N. Yarkoni e N. Blaunstein

Neste modelo é apresentada uma aproximação semi-empírica e um modelo analítico para a predição da perda de propagação total em ambientes *indoor* (entre pisos e ao longo de corredores). Os autores consideram as propriedades físicas do ambiente e os parâmetros da atenuação total obtidos através das medidas experimentais. É sugerido, então, para a perda de propagação a seguinte fórmula [32]

$$PL_{total} = PL(d_0) + 10\gamma \log\left(\frac{d}{d_0}\right) + PL_{desvanecimento} \quad (4.9)$$

sendo

$$PL_{desvanecimento} = PL_{SF} + PL_{FF} \quad (4.10)$$

Aqui $PL_{SF} = 10 \log \sigma_{SF}$, onde σ_{SF} é uma distribuição lognormal de uma variável aleatória de média zero e desvio padrão σ_L (em dB); PL_{SF} é uma atenuação provocada pela difração das ondas que se propagam (também chamada de efeito do sombreamento devido às obstruções). Já $PL_{FF} = 10 \log \sigma_{FF}$, sendo σ_{FF} uma distribuição de Rice de uma variável aleatória com desvio padrão σ (em dB), e é decorrente do fenômeno das múltiplas reflexões e espalhamentos causado pela localização das obstruções que circundam os terminais das antenas.

- Resultados Encontrados via Equação Parabólica e Experimentalmente para os mesmos intervalos

Inicialmente, foi obtido o mapa da perda de propagação, em dB, versus comprimento e largura do ambiente, em metros, para os pavimentos térreo e superior, calculada via equações parabólicas, mostrando os locais onde a perda é maior ou menor (ver Figs. 4.26 e 4.27) [33]. Nota-se que no pavimento superior a perda de propagação é bem maior que no pavimento térreo, devido ao piso existente entre os dois pavimentos.

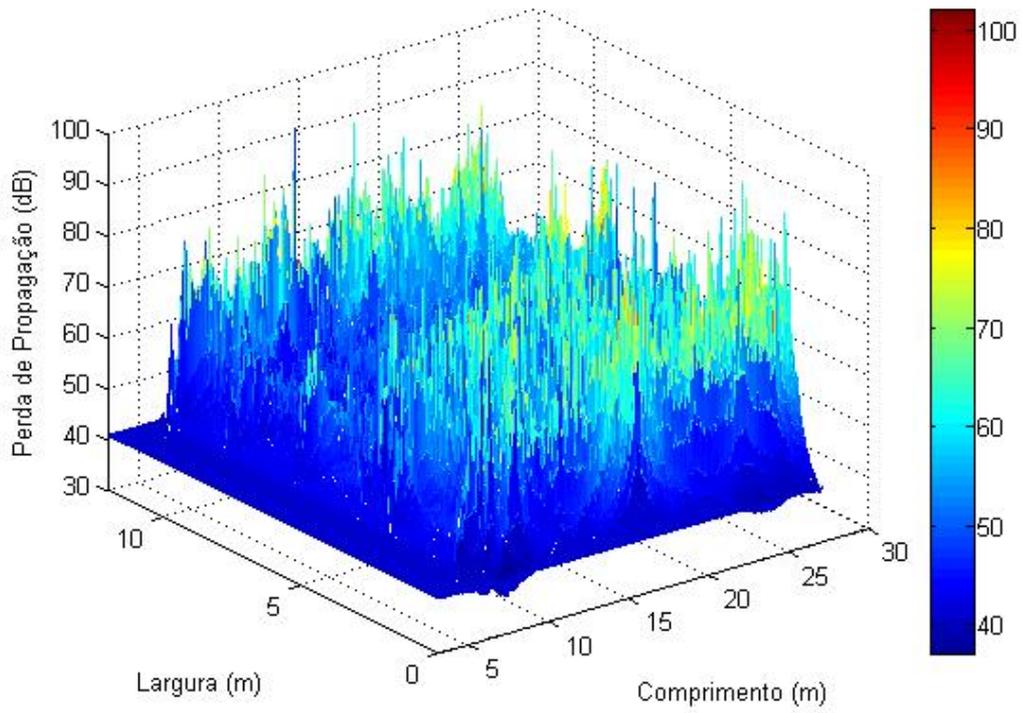


Fig. 4.26 - Perda de propagação para o pavimento térreo calculada via EP

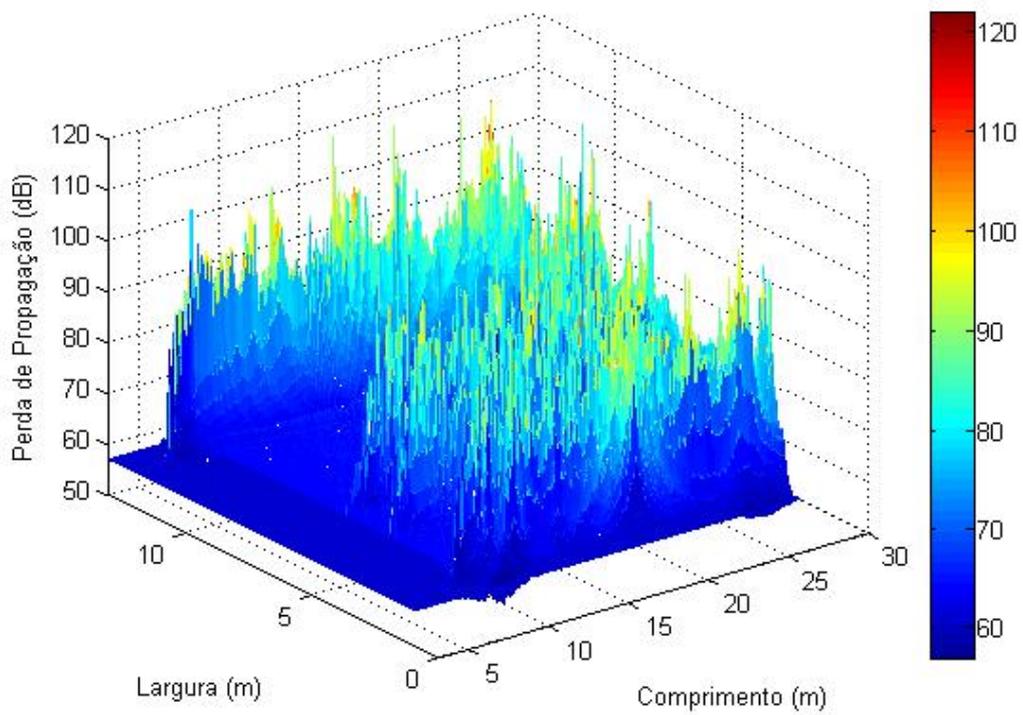


Fig. 4.27 - Perda de propagação para o pavimento superior calculada via EP

Como o número de pontos experimentais, obtidos na campanha de medições, era pequeno para a comparação com o modelo proposto, procedeu-se da seguinte forma:

- a) foram obtidos os valores de x e y , no AUTOCAD, e construída uma tabela onde constavam os parâmetros x , y e perda de propagação experimental;
- b) foi feito, no MATLAB, um programa de interpolação bidimensional linear, de 1,0 em 1,0 m, em distâncias radiais;
- c) foram construídos, então, os gráficos comparativos.

A Fig. 4.28 mostra as curvas da perda de propagação, em dB, versus distância, em metros, para o cálculo usando o método de equações parabólicas (EP), para pequenos ângulos de propagação, modelo dependente com a distância, modelo de Simon Wong, Francis Lau e Chi Tse, modelo de N. Yarkoni e N. Blaunstein e valores medidos experimentalmente, no pavimento térreo. Neste cenário foi considerada a propagação em visada direta, observando-se boa concordância entre o método proposto, os dados experimentais e os outros modelos [33].

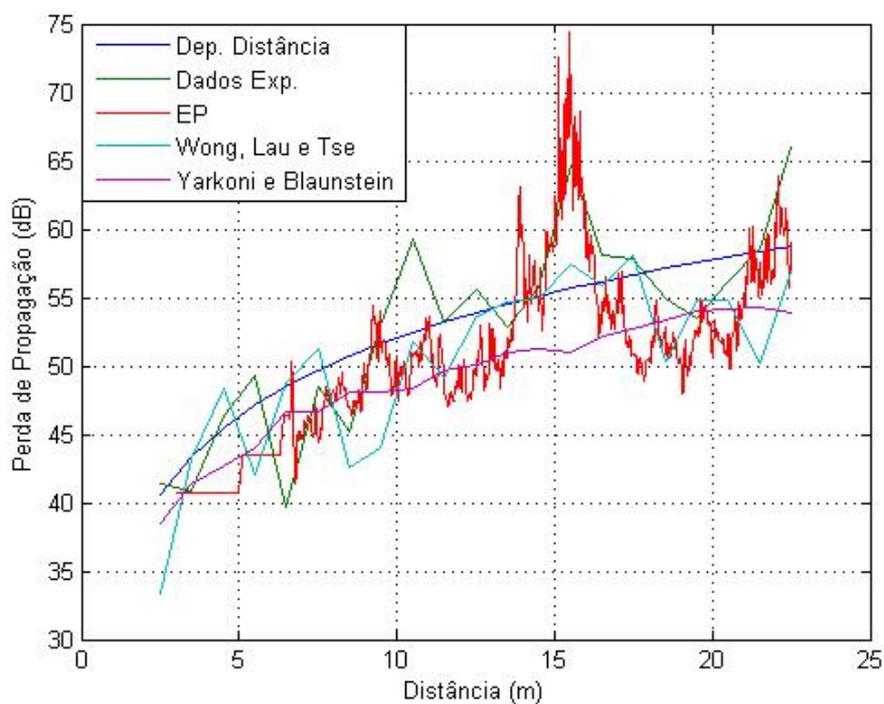


Figura 4.28 - Perda de propagação versus distância no pavimento térreo calculada via EP, para pequenos ângulos de propagação, experimentalmente e através dos modelos dependente da distância, de Wong, Lau e Tse, e de Yarkoni e Blaunstein

A Fig. 4.29 mostra as curvas da perda de propagação, em dB, versus distância, em metros, para o cálculo usando o método de equações parabólicas (EP), para pequenos ângulos de propagação, modelo Fator de Atenuação de Piso (FAP), modelo de Simon Wong, Francis Lau e Chi Tse, modelo de N. Yarkoni e N. Blaunstein e dados experimentais, no pavimento superior. Novamente, pode-se observar a boa concordância entre o método de equações parabólicas e os outros modelos, assim como com as medidas experimentais [33].

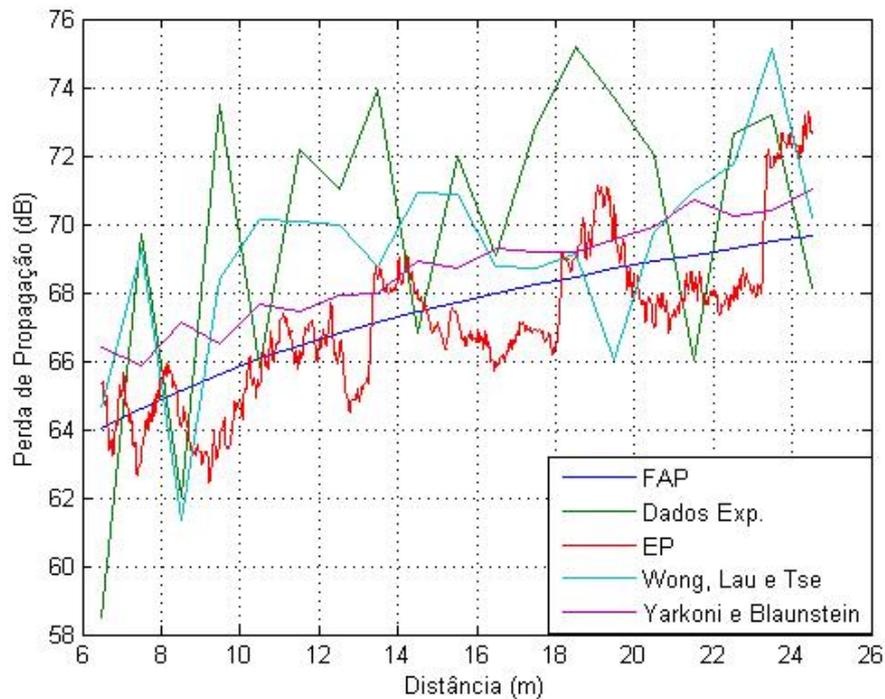


Fig. 4.29 - Perda de propagação versus distância no pavimento superior calculada via EP, para pequenos ângulos de propagação, experimentalmente e através dos modelos FAP, de Wong, Lau e Tse, e de Yarkoni e Blaunstein

Analisando-se as Figs. 4.28 e 4.29, nota-se, novamente, uma diferença de, aproximadamente, 19 dB para uma mesma posição, ao comparar-se os dois pavimentos, o que se deve ao piso de concreto, com aproximadamente 20 cm de espessura, existente entre a antena transmissora e a antena receptora.

A Tabela 4.7 mostra o expoente de perda de propagação para os pavimentos térreo e superior [33].

PAVIMENTO	EXPOENTE DE PERDA DE PROPAGAÇÃO	
	VIA EP	DADOS EXPERIMENTAIS
TÉRREO	1,9	2,2
SUPERIOR	0,98	1,1
	1,44	1,65

Tabela 4.7- Expoente de Perda de Propagação

4.3.3 – Simulação para Grandes Ângulos na Faixa de Frequência de 2,4 GHz

A seguir, com o objetivo de aumentar a precisão do modelo proposto, foi feita a simulação para o método de equações parabólicas, considerando grandes ângulos de propagação, até 90°, com frequência de 2,4 GHz.

A solução da equação parabólica para propagação até 90° foi obtida através da transformada de Fourier mista. Esta escolha deu-se ao fato de que, caso se continuasse a utilizar o esquema de diferenças finitas, este seria mais complexo, produzindo não mais matrizes tridiagonais e sim pentadiagonais, o que aumentaria bastante o esforço computacional [5]. Caso a opção fosse pela aproximação de Padé, para propagação com abertura de 80°, por exemplo, seriam necessários 10 termos na equação, para se ter uma perfeita aproximação da solução, o que também aumentaria o esforço computacional [4].

A simulação para ângulos com abertura até 90° é feita para os pavimentos térreo e superior do ambiente de teste, do Anexo II do Laboratório de Engenharia Elétrica e de Computação (LEEC) da Universidade Federal do Pará, para a frequência de 2,4 GHz.

Na simulação para grandes ângulos foi considerado o piso do ambiente de teste como condição de contorno, feito do material conhecido como paviflex, composto de resinas de PVC, plastificantes, cargas minerais e pigmentos. Foram tomados os parâmetros elétricos do paviflex com os seguintes valores: permissividade relativa, $\epsilon_r = 3,00$ [34] e condutividade, $\sigma = 10^{-6}$ S/m [35].

Na Fig. 4.30 é feita a comparação entre a perda de propagação versus distância, para o pavimento térreo, entre o modelo proposto, considerando pequenos e grandes ângulos de propagação, e os dados experimentais. A seguir, na Fig. 4.31, esta perda de propagação é comparada também a alguns modelos existentes na literatura.

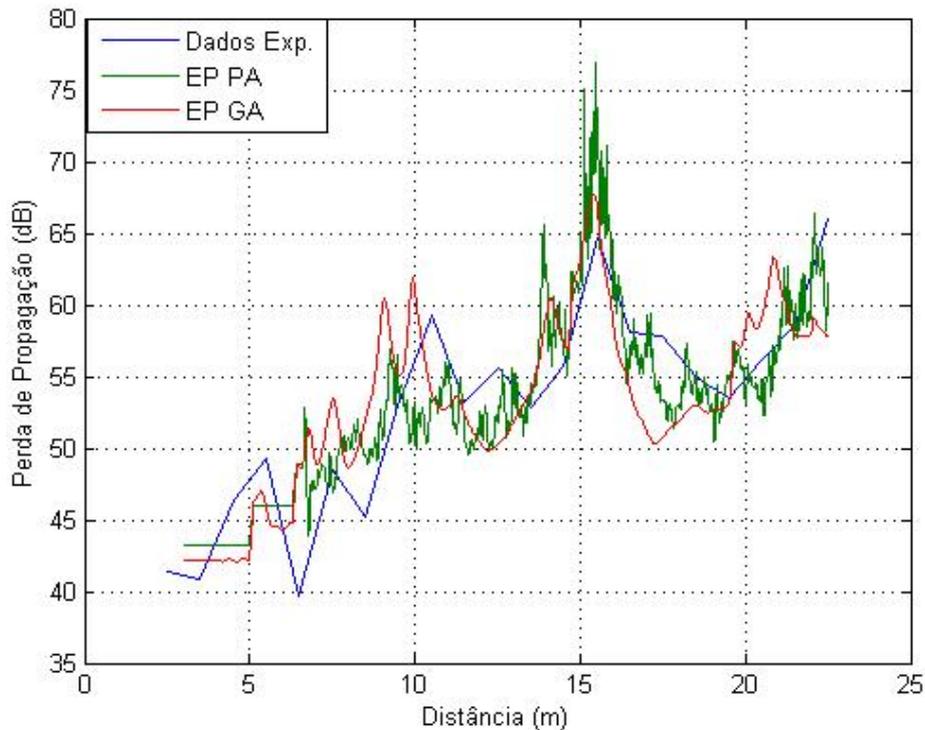


Fig. 4.30 - Perda de propagação versus distância para o pavimento térreo calculada via EP, para grandes (GA) e pequenos ângulos (PA) de propagação, e dados experimentais

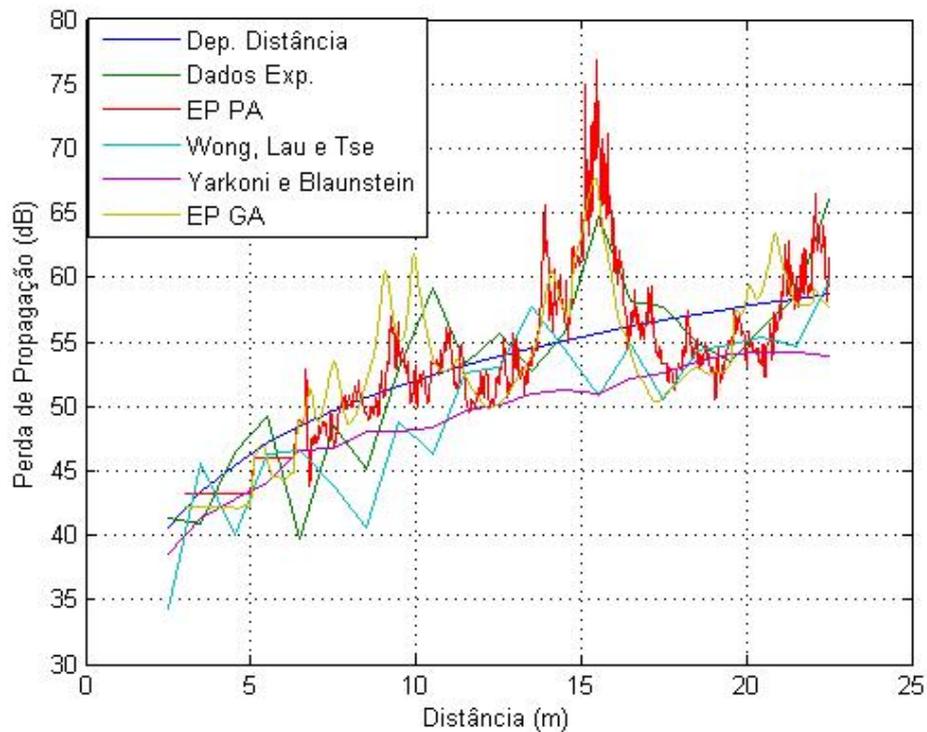


Fig. 4.31 - Perda de propagação versus distância para o pavimento térreo calculada via EP, para grandes (GA) e pequenos ângulos (PA) de propagação, experimentalmente e através dos modelos dependente com a distância, de Wong, Lau e Tse, e de Yarkoni e Blaunstein

A Fig. 4.32 mostra a perda de propagação versus distância, para o pavimento superior do ambiente estudado, em relação apenas aos dados experimentais e ao modelo considerando pequenos e grandes ângulos de propagação e, na Fig. 4.33, ela é comparada a, além dos dados experimentais, alguns modelos existentes na literatura.

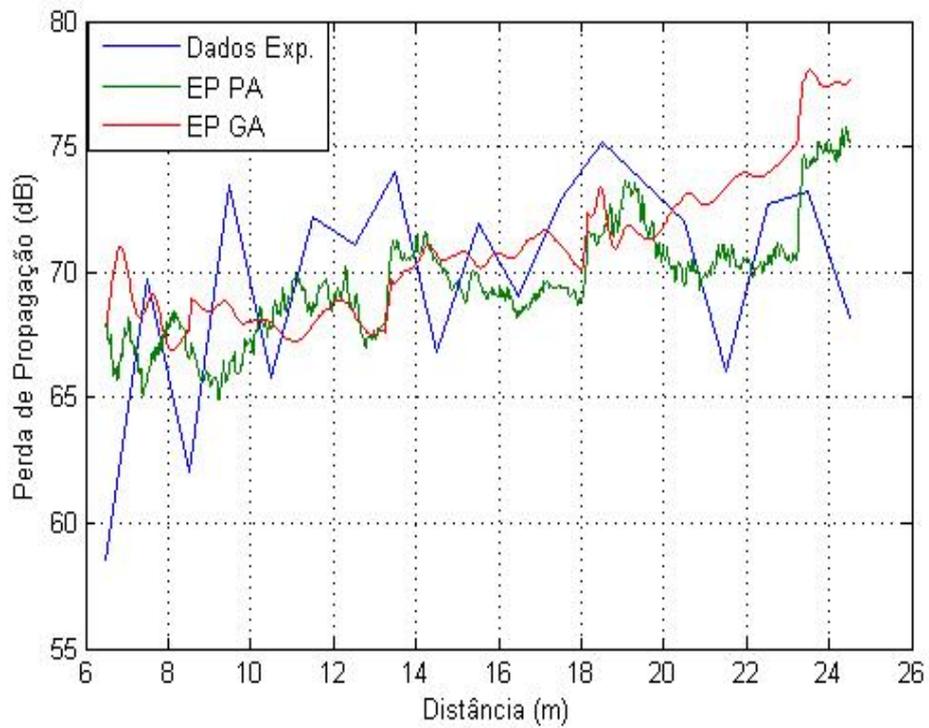


Fig. 4.32 - Perda de propagação versus distância para o pavimento superior calculada via EP, para grandes (GA) e pequenos ângulos (PA) de propagação, e dados experimentais

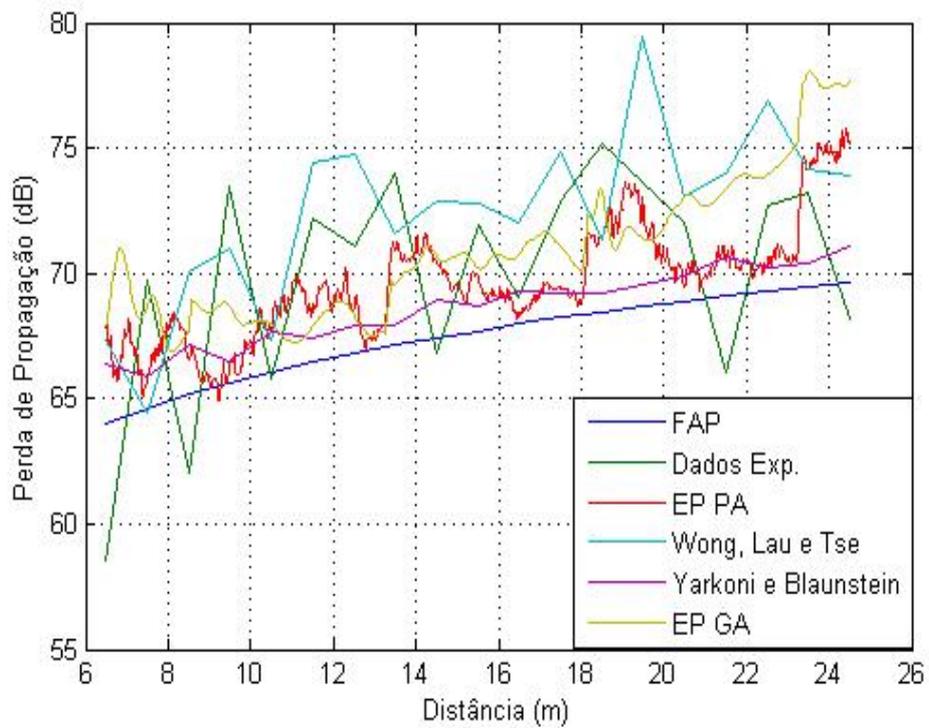


Fig. 4.33 - Perda de propagação versus distância para o pavimento superior calculada via EP, para grandes (GA) e pequenos ângulos (PA) de propagação, experimentalmente e através dos modelos FAP, de Wong, Lau e Tse, e de Yarkoni e Blaunstein

A Tabela 4.8 fornece o erro médio, desvio padrão e erro rms para os pavimentos estudados no ambiente de teste, comparados às medidas experimentais e aos modelos da literatura. Vê-se que a propagação considerando grandes ângulos fornece melhor aproximação que a propagação considerando pequenos ângulos.

PAVIMENTO	MODELO	ERRO MÉDIO (dB)	DESVIO PADRÃO (dB)	ERRO RMS (dB)
TÉRREO	Via EP PA (até 15°)	2,74	2,19	3,51
	Via EP GA (até 90°)	2,12	2,01	2,92
	Dep. Distância [26]	3,26	2,98	4,41
	Wong, Lau e Tse [31]	4,78	2,83	5,56
	Yarkoni e Blaunstein [32]	3,94	3,53	5,29
SUPERIOR	Via EP PA (até 15°)	2,96	2,33	3,77
	Via EP GA (até 90°)	2,30	1,87	2,96
	FAP [27]	3,44	2,03	4,00
	Wong, Lau e Tse [31]	3,09	2,89	4,23
	Yarkoni e Blaunstein [32]	3,35	1,85	3,83

Tabela 4.8- Cálculo do Erro Médio, Desvio Padrão e Erro rms para os modelos analisados

O modelo proposto, de cálculo da perda de propagação via equações parabólicas para pequenos e grandes ângulos de propagação, aplica-se não somente a ambientes *indoor*, mas também a outros tipos de ambientes [36 – 41].

CONCLUSÃO

Neste trabalho foi aplicado o modelo de equações parabólicas para a resolução da equação utilizada para o cálculo da perda de propagação em ambientes *indoor*. Objetivou-se, também, com este modelo determinístico, uma redução do esforço computacional gasto nesta resolução.

Quando se considera a propagação para pequenos ângulos com a direção paraxial, observou-se que a utilização deste modelo teve grande rapidez no processamento dos dados e não requereu grande quantidade de memória. Isto é possível pelo fato de que, na resolução do sistema, utilizou-se o esquema implícito de diferenças finitas do tipo Crank Nicolson onde, em lugar de ter-se que resolver uma matriz com todos os elementos diferentes de zero, resolveu-se uma matriz tridiagonal.

Para a propagação em grandes ângulos com a direção paraxial, a equação parabólica foi resolvida pela transformada de Fourier mista, conforme justificado anteriormente, observando-se ainda grande rapidez no processamento dos dados, aproximadamente da mesma ordem de grandeza do tempo gasto para propagação com pequenos ângulos. Com esta consideração (ângulos com abertura até 90°), tem-se uma abrangência espacial maior e consegue-se levar em consideração outras componentes do campo espalhado, aumentando assim a precisão do modelo proposto para qualquer ambiente, inclusive ambientes *indoor*.

No modelo proposto, tanto para pequenos como para grandes ângulos de propagação, foram consideradas as partes real e imaginária do índice de refração.

A Tabela 4.8 mostra os valores calculados para o erro, desvio padrão e erro médio quadrático. É feita a comparação do modelo proposto para pequenos e grandes ângulos de propagação com os dados obtidos na campanha de medições, assim como a comparação deste método com modelos encontrados na literatura, para o Anexo II do Laboratório de Engenharia Elétrica e de Computação (LEEC) da Universidade Federal do Pará, para a frequência de 2,4 GHz. O erro encontrado, entre a perda de propagação simulada e a medida, para o pavimento térreo, foi de 2,12 dB para grandes ângulos e de 2,74 dB para pequenos ângulos, e desvio padrão de 2,01 dB e 2,19 dB, respectivamente. Para o pavimento superior, o erro médio foi de aproximadamente 2,30 dB, para grandes ângulos, e de 2,86 dB, para pequenos ângulos de propagação, e desvio padrão de 2,07 dB e 2,33 dB respectivamente.

Pelo descrito no parágrafo anterior, verifica-se uma pequena melhoria nos resultados quando se considera a propagação para ângulos até 90°, verificando-se que a equação parabólica para grandes ângulos pode ser usada sem grande gasto computacional e considerando-se que sua aplicação para outros ambientes com outras condições de contorno o resultado pode ser ainda melhor.

Como foi mencionado anteriormente, após fazer-se a comparação com modelos existentes na literatura, foi verificado que os resultados encontrados através da modelagem de equações parabólicas estão dentro

da faixa de erro de outras abordagens, validando-se, então, o modelo proposto através dos resultados experimentais obtidos nas campanhas de medições realizadas.

Conforme foi comprovado, o modelo proposto aplica-se também a outros tipos de ambientes, além do ambiente *indoor*.

Como trabalhos futuros, sugerem-se: (1) ser adicionado ao modelo, como condição de contorno, o forro do ambiente de teste; (2) ser feita a simulação para ambientes considerando-se os ambientes em 3D; (3) considerar outras faixas de frequências para atender esses novos sistemas de comunicação sem fio; (4) resolver-se a equação parabólica para pequenos ângulos através da Transformada de Fourier; (5) resolver-se a equação parabólica para grandes ângulos através do esquema de diferenças finitas.

REFERÊNCIAS

- [1] N. Noori e H. Oraizi, *A Parabolic Wave Equation Approach for Modelling Propagation Through Windows*, IEEE, 3rd International Conference on Computational Electromagnetics and Its Applications Proceedings, pp. 21-24, 2004.
- [2] A. Aragón-Zavala, B. Belloul, V. Nikolopoulos e S. R. Saunders, *Accuracy evaluation analysis for indoor measurement based radio-wave-propagation predictions*, IEE Proceedings.-Microwave Antennas and Propagation, Vol. 153, No. 1, February 2006.
- [3] M. Levy, *Parabolic Equation Methods for Electromagnetics Wave Propagation*, The Institution of Electrical Engineers, London, pp. 1-152, 2000.
- [4] A. Z. Hyaric-Le Hyaric, *Wide-Angle Nonlocal Boundary Conditions for the Parabolic Wave Equation*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 49, No. 6, pp. 916-922, June 2001.
- [5] P. D. Holm, *Wide-Angle Shift-Map PE for a Piecewise Linear Terrain—A Finite-Difference Approach*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 55, No. 10, pp. 2773-2789, October 2007.
- [6] P. Valtr e P. Pechac, *Domain Decomposition Algorithm for Complex Boundary Modeling using the Fourier Split-Step Parabolic Equation*, IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, Vol. 6, pp. 152-155, 2007.
- [7] K. H. Craig e M. F. Levy, *Parabolic Equation Modeling of the Effects of Multipath and Ducting on Radar Systems*, IEE Proceedings-F, Vol. 138, No 2, pp. 153-162, April 1991.

- [8] M. F. Levy, *Diffraction Studies in Urban Environment with Wide-angle Parabolic Equation Method*, Electronics Letters, Vol. 28, No. 16, pp. 1491-1492, July 1992.
- [9] E. Premat, *Prise en Compte d'effets Météorologiques dans une Méthode d'Eléments finis de Frontière*, Thèse de Doctorat, L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, France, pp. 259-261, 2000.
- [10] C. A. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*, John Wiley & Sons, United States of America, 1989.
- [11] D. J. Thomson e N. R. Chapman, *A wide-angle split-step algorithm for the parabolic equation*, Journal Acoustic Society of America, Vol. 74, No. 6, pp.1848-1854, December 1983.
- [12] G. D. Smith, *Numerical Solution of Partial Differential Equations – Finite Difference Methods*, Oxford:Clarendon, 3rd edition, pp. 11-38, 1984.
- [13] A. de O. Fortuna, “Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos”, Editora da Universidade de São Paulo, Brasil, pp. 73-83, 2000.
- [14] L. C. Wrobel, S. Eiger, P. C. Rosman, C. E. Tucci, J. A. Cirillo, J. P. Cabral, “Métodos Numéricos em Recursos Hídricos”, Associação Brasileira de Recursos Hídricos – ABRH, Rio de Janeiro, pp. 2-4, 1999.
- [15] R. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw-Hill Book Company, United States of America, pp. 01-21, 1965.
- [16] J. M. F. Bassalo, “Métodos da Física Teórica I”, Gráfica e Editora Universitária, Brasil, pp. 117-130, 1988.
- [17] J. R. Kuttler e G. D. Dockery, *Theoretical description of the parabolic approximation/Fourier split-step method of representing electromagnetic*

propagation in the troposphere, Radio Science, Vol. 26, No. 2, pp. 381-393, March-April 1991.

- [18] R. N. S. Barbosa, “Modelo Empírico para Estimativa da Perda de Propagação *Indoor* para Comunicações Móveis”, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica – UFPA, Tese de Mestrado, 2005.
- [19] <http://www.openh323.org/> acessado em 12/05/2006.
- [20] <http://www.netstumbler.com/> acessado em 12/19/2006.
- [21] R. K. Wangsness, *Electromagnetic Fields*, John Wiley & Sons, United States of America, pp. 34 – appendices, 1979.
- [22] Li, L. W., T. S. Yeo, P. S. Kooi, M. S. Leong, e J. H. Koh, *Analysis of Electromagnetic Wave Propagation in Forest Environment along Multiple Paths*, Journal of Electromagnetic Waves and Applications, Vol. 13, No. 8, pp. 1057-1059, 1999.
- [23] D. I. Axiotis e M. E. Theologou, *2 GHz Outdoor to Indoor Propagation at high Elevation Angles*, IEEE, PIMRC 2002.
- [24] W. H. Hayt, *Engineering Electromagnetic*, McGraw-Hill, New York, 4th edition, pp. 508-509, 1981.
- [25] F. N. B. Magno, Z. A. Valente, J. F. Souza, J. C. Costa e G. P. S. Cavalcante, *A Model for Radio Propagation Loss Prediction in Buildings using Parabolic Equations*, 2006 IEEE Ninth International Symposium on Spread Spectrum Techniques and Applications, pp. 351-355, 2006.
- [26] S. Seidel e T. Rappaport, *914 MHz Path Loss Prediction Models for Indoor Wireless Communications in Multifloored Buildings*, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 40, No. 2, February 1992.

- [27] S. G. C. Fraiha, J. C. Rodrigues, R. N. S. Barbosa, H. S. Gomes e G. P. S. Cavalcante, *An Empirical Model for Propagation-loss prediction in Indoor Mobile Communications Using the Padé Approximant*, Microwave and Optical Technology Letters, Vol. 48, No. 2, pp. 255-261, February 2006.
- [28] F. N. B. Magno, J. F. Souza, Z. A. Valente, J. C. Costa e G. P. S. Cavalcante, *Study of the slow fading in indoor environment using parabolic equations*, Microwave and Optical Technology Letters, Vol. 49, No. 7, pp. 1676-1679, July 2007.
- [29] F. N. B. Magno, J. F. Souza, Z. A. Valente, J. C. Costa e G. P. S. Cavalcante, *Estudo do Desvanecimento Lento em Ambiente Indoor usando Equações Parabólicas*, MOMAG 2006, Belo Horizonte - MG.
- [30] T. S. Rappaport, *Wireless Communications: Principles and Practice*, Prentice Hall PTR, Upper Saddle River, NJ, United States of America, 2nd edition, 2002.
- [31] S. S. M. Wong, F. C. M. Lau e C. K. Tse, *Propagation Characteristics of UWB Radio in a High-Rise Apartment*, Advanced Communication Technology, ICACT 2006, pp. 914-918, 2006.
- [32] N. Yarkoni e N. Blaunstein, *Prediction of Propagation Characteristics in Indoor Radio Communication Environments*, Progress in Electromagnetics Research, PIER 59, pp. 151-174, 2006.
- [33] F. N. B. Magno, J. F. de Souza, K. Cozzolino, J. C. Costa e G. P. S. Cavalcante, *Modelamento de Sistemas WLAN em 2,4 GHz para Ambiente Indoor usando Equações Parabólicas*, SBrT 2007, 03-06 de setembro de 2007, Recife - PE.

- [34] S. Ramesh e A. K. Arof, *Electrical conductivity studies of polyvinyl chloride-based electrolytes with double salt system*, Solid State Ionics, Vol. 136-37, pp. 1197-1200, 2000.
- [35] G. de Rosny, A. Chanzy, M. Pardé, J-P. Frangi e J-P. Laurent, *Numerical Modeling of a Capacitance Probe Response*, Soil Science Society of America Journal, Vol 65, pp. 13-18, 2001.
- [36] J. F. Souza, Z. A. Valente, F. N. B. Magno, G. P. S. Cavalcante e J. C. Costa, *Propagation Path Loss through the Urban Foliated Semi-confined Environment Using Parabolic Equations*, 2006 IEEE Ninth International Symposium on Spread Spectrum Techniques and Applications, pp. 356-360, Manaus – AM, 2006.
- [37] J. F. Souza, F. N. B. Magno, Z. A. Valente, G. P. S. Cavalcante e J. C. Costa, *Estudo do Desvanecimento Lento em Sistemas Móveis Celulares em Ambiente Semi-Confinado Usando Equações Parabólicas*, MOMAG 2006, Belo Horizonte - MG.
- [38] J. F. Souza, F. N. B. Magno, Z. A. Valente, J. C. Costa e G. P. S. Cavalcante, *Mobile Radio Propagation along Mixed Paths in Forest Environment using Parabolic Equation*, URSI 2007, Rio de Janeiro - RJ.
- [39] F. N. B. Magno, J. F. Souza, Z. A. Valente, J. C. Costa e G. P. S. Cavalcante, *Estudo da Perda de Propagação através de ambientes de florestas usando um modelo híbrido com Equações Parabólicas*, SBrT 2008, 02-05 de setembro de 2008, Rio de Janeiro - RJ.
- [40] J. F. Souza, F. N. B. Magno, K. Cozzolino, J. C. Costa e G. P. S. Cavalcante, *Propagação de Rádio Móvel em Percursos Mistos de Florestas para 1,8 GHz*

usando Equações Parabólicas, pp. 1148-1152, MOMAG 2008, Florianópolis - SC.

- [41] J. F. Souza, F. N. B. Magno, Z. A. Valente, J. C. Costa e G. P. S. Cavalcante, *Mobile Radio Propagation along Mixed Paths in Forest Environment using Parabolic Equation*, Microwave and Optical Technology Letters, Vol. 51, No. 4, pp. 1133-1136, April 2009.