

Medindo a velocidade do som utilizando figuras de Lissajous

(*Measuring the speed of sound using Lissajous figures*)

Fátima Baraúna, João Furtado, Silvana Perez¹

Faculdade de Física, Universidade Federal do Pará, Belém, PA, Brasil
Recebido em 30/3/2015; Aceito em 31/5/2015; Publicado em 30/9/2015

Existem várias técnicas para obter a velocidade do som no ar à temperatura ambiente, desde as mais simples, que envolvem a razão entre distâncias percorridas e tempos até as mais sofisticadas, associadas a fenômenos oscilatórios. Neste trabalho propomos um aparato experimental de considerável baixo custo para medir esta velocidade que envolve figuras de Lissajous e tubos ressonantes. Os fenômenos físicos envolvidos no processo possibilitam ao estudante observar e se aprofundar no entendimento de vários conceitos de física ondulatória, bem como discutir o conceito de superposição de movimentos e pode ser desenvolvido por estudantes do ciclo avançado de cursos de Física e Engenharias.

Palavras-chave: velocidade do som, tubos ressonantes, figuras de Lissajous.

There are several techniques to obtain the sound velocity in air, from the very simple ones, which use the relation between distances and time, until the more sophisticated ones, associated with oscillatory phenomena. In this work we propose an experimental apparatus which involves the Lissajous figures and resonance tubes. The physical phenomena that appear in the process allow the student to observe and understand several oscillatory processes, as well as the superposition principle and can be applied to engineer and physics undergraduate students.

Keywords: speed of sound, resonance tubes, Lissajous figures.

1. Introdução

Existe uma grande variedade de procedimentos experimentais para determinar a velocidade do som no ar. Em linhas gerais pode-se separar as diferentes técnicas em duas grandes categorias, dependendo do processo de medida [1]: as técnicas diretas, que envolvem a razão entre distâncias percorridas e intervalos de tempo e as técnicas indiretas, que utilizam fenômenos ondulatórios, como ressonâncias e diferenças de fase para obter os valores da velocidade do som.

Quando a análise é de cunho didático e voltada a estudantes de ensino fundamental e médio que dominam conceitos básicos de cinemática e ondulatória, os métodos diretos são mais recomendados [2,3]. Em particular, Silva [1] propõe um procedimento experimental bastante simples para medir a velocidade do som diretamente, calculando a diferença de tempo entre dois sinais sonoros gerados simultaneamente mas que não chegam a um microfone ao mesmo tempo, pois percorrem caminhos diferentes.

As medidas indiretas em geral pressupõem um conhecimento mais aprofundado de fenômenos ondu-

latórios, em particular do conceito de diferença de fase entre ondas e o aparecimento de ondas estacionárias em tubos ressonantes [4]. Portanto, a utilização destas técnicas com estudantes de ensino fundamental e médio requer atenção especial, de forma a garantir que a discussão não se torne muito técnica em detrimento do entendimento físico dos fenômenos que contribuem para o processo. Por outro lado, para estudantes de graduação em Física e áreas afins, tais medidas reforçam o entendimento destes fenômenos e são portanto mais recomendadas. Um exemplo clássico de uma medida deste tipo pode ser encontrado em diversas referências, já aparecendo por exemplo em livros didáticos da década de 1930 [2]. No procedimento experimental utiliza-se um tubo transparente flexível e um diapasão de frequência conhecida. O experimento consiste em encher parcialmente o tubo com água, e fazer soar o diapasão. Conforme se varia a quantidade de água no tubo, encontram-se regiões de ressonância da coluna de ar com o diapasão. O estudo de ondas estacionárias em tubos fechados possibilita a determinação da velocidade no som no ar. Muito embora discuta aspectos importantes de física ondulatória, tal experimento apresenta im-

¹E-mail: silperez@ufpa.br.

precisão na determinação do ponto de ressonância pois depende da sensação auditiva do experimentador na coleta dos dados.

Uma maneira elegante de minimizar a imprecisão acima citada consiste em obter a velocidade do som indiretamente utilizando figuras de Lissajous [5]. A técnica foi proposta em meados da década de 1960 [6] e utiliza um gerador de sinais com frequência bem definida, ligado a um alto-falante, e um microfone que capta o som a distância fixa do alto-falante. O sinal gerado e o recebido são enviados a um osciloscópio que produz as diversas figuras de Lissajous, conforme a diferença de fase entre os dois sinais. Desta maneira, diminui-se consideravelmente a imprecisão na tomada de dados. Além disso, a técnica permite a discussão dos fenômenos ondulatórios por meio da soma de duas ondas defasadas e a composição dos movimentos na formação das figuras.

Neste trabalho apresentaremos uma técnica que une aspectos das experiências [2,6]. O arranjo experimental é razoavelmente simples e de baixo custo, com material em geral disponível em laboratórios didáticos. Os fenômenos físicos envolvidos no processo possibilitam ao estudante observar e se aprofundar no entendimento de vários conceitos de física ondulatória, bem como discutir o conceito de superposição de movimentos, necessário para a compreensão da formação das diversas figuras de Lissajous. Iniciaremos a apresentação da experiência com a abordagem teórica de tubos ressonantes e figuras de Lissajous na sec. 2. A seguir descreveremos o aparato experimental na sec. 3. As discussões serão apresentadas na sec. 4. Finalizaremos o trabalho com as Conclusões na sec. 5.

2. Abordagem teórica

Nesta seção apresentaremos os pré-requisitos teóricos necessários ao entendimento da experiência.

2.1. Tubos Ressonantes

Sabe-se que cordas, membranas, lâminas, barras, etc., postas a vibrar podem produzir sons; colunas de ar também podem produzir sons, quando vibram adequadamente. Assim sendo, é comum a utilização de tubos sonoros na obtenção de sons com determinadas frequências, que formam a família dos instrumentos de sopro, como por exemplo, a flauta, o saxofone e o trombone.

Quando alguém sopra a extremidade aberta de um tubo, é gerada uma onda de compressão que se propaga pelo seu interior, empurrando as moléculas de ar nele contidas. Esta onda, propagando-se ao longo de um tubo de comprimento finito, é refletida na sua outra extremidade. Como resultado da interferência da onda

incidente com a onda refletida, tem-se a formação de uma onda estacionária.

Este é o princípio de funcionamento de um tubo ressonante e ele é chamado aberto se possuir ambas extremidades abertas. Caso uma das extremidades seja fechada, ele será chamado tubo fechado.

Pode-se deduzir a expressão analítica de uma onda estacionária, como a que surge dentro de um tubo ressonante. Para construí-la, vamos admitir que dois trens de ondas senoidais unidimensionais (Fig. (1.a)) propagam-se com mesma frequência e amplitude, mas sentidos opostos. Matematicamente representamos estes dois trens de ondas por

$$y_1(x, t) = y \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) \right], \quad (1)$$

e

$$y_2(x, t) = y \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda}(x + vt) \right], \quad (2)$$

onde λ e v são o comprimento da onda e sua velocidade, respectivamente. Além disso, por simplicidade consideramos que as duas ondas possuem constante de fase nula. De acordo com o princípio da superposição, a onda resultante é dada por

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 \\ &= y \left\{ \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda}(x - vt) \right] + \cos \left[\frac{2\pi}{\lambda}(x + vt) \right] \right\} \\ &= 2y \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda}x \right) \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda}vt \right). \end{aligned} \quad (3)$$

O padrão que se observa para o deslocamento agora não é mais de uma onda se propagando e sim de uma variação da amplitude de oscilação ponto a ponto ao longo do espaço (Figs.(1.b) e (1.c)). Temos portanto uma onda estacionária. Para valores de x tais que

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \dots$$

ou

$$x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4} \dots$$

a amplitude é sempre nula. Em outras palavras, estes pontos estão sempre em repouso e são denominados nós. Já para valores de x tais que

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = 0, \pi, 2\pi \dots$$

ou

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda \dots$$

a amplitude de oscilação é máxima e igual a $2y$. Tais pontos são os ventres. Os nós, assim como os ventres, estão portanto, separados por meio comprimento de onda. Na Fig. (1.c) podemos observar o comportamento destes pontos.

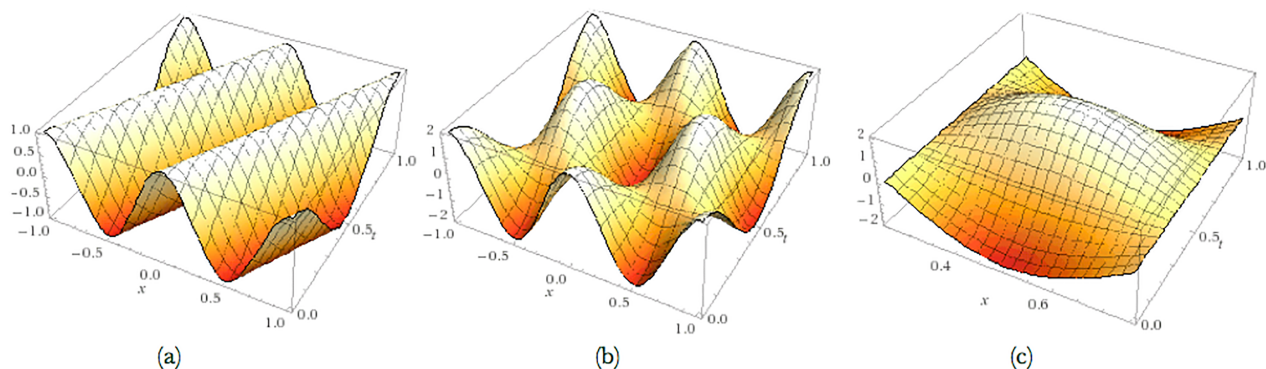


Figura 1 - (a) Onda plana (1) com $v/\lambda = 1$; (b) e (c) Onda estacionária (3) com $v/\lambda = 1$.

Caso a reflexão tenha lugar em uma extremidade fechada, o deslocamento das partículas, nessa extremidade, deve necessariamente ser nulo. Logo, essa extremidade é um nó de deslocamento. A Fig. (2) apresenta os dois primeiros modos de vibração em um tubo fechado. A primeira situação na figura representa o modo fundamental de vibração. Naturalmente, existem outros modos de vibração para este mesmo tubo (com frequências múltiplas inteiras e ímpares dessa frequência fundamental). Estes modos secundários de vibração são denominados harmônicos.

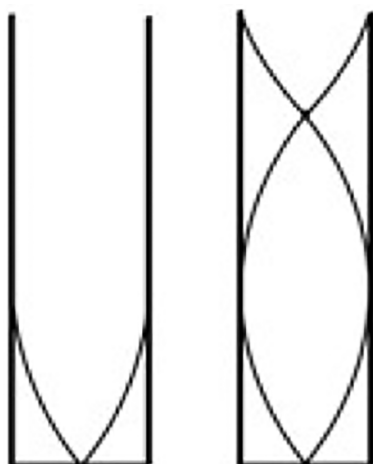


Figura 2 - Modo fundamental e primeiro harmônico em um tubo fechado.

Os harmônicos de um tubo fechado têm comprimentos de onda $\frac{4L}{3}, \frac{4L}{5}, \frac{4L}{7} \dots$ e portanto frequências de 3, 5, 7... vezes a frequência fundamental, correspondente ao comprimento de onda da vibração fundamental, que para um tubo fechado de comprimento L é $\lambda = 4L$.

Como a distância entre um nó e o ventre seguinte é um múltiplo ímpar de $\frac{\lambda}{4}$ do comprimento de onda, podemos escrever $L = (2n - 1)\frac{\lambda}{4}$ ou $\lambda = \frac{4L}{2n-1}$ e portanto

as frequências dos harmônicos são

$$f_{2n-1} = \frac{(2n - 1)v}{4L}, \tag{4}$$

onde $n = 1, 2, 3 \dots$. A frequência do som fundamental ou primeiro harmônico ($n = 1$) é $f_1 = \frac{v}{4L}$ e assim por diante. Daí podemos enunciar as "Leis de Mersenne" relativas aos tubos fechados:

1. O comprimento de onda do som fundamental emitido por um tubo fechado é o quádruplo do comprimento do tubo.
2. Os tubos fechados emitem apenas os harmônicos de ordem ímpar.

É importante ressaltar que todos os harmônicos estão presentes nas vibrações de um tubo aberto, ao passo que nas vibrações de um tubo fechado, apenas os harmônicos ímpares estão presentes. A qualidade ou timbre do som emitido por um tubo fechado difere, pois, da de um tubo aberto, mesmo que, por uma escolha adequada de comprimentos, as alturas ou frequências fundamentais sejam as mesmas.

2.2. Figuras de Lissajous

Figuras de Lissajous são um exemplo clássico de superposição de movimentos ondulatórios. Os primeiros estudos destas curvas foram desenvolvidos por Bowditch e Lissajous durante o Século XIX [7]. Atualmente elas são utilizadas em diversas aplicações, tanto de cunho didático quanto tecnológico, como por exemplo para obter a frequência de um sinal desconhecido, ou determinar a diferença de fase entre dois sinais [8].

Para entender como as figuras são formadas, considere que na placa horizontal de um osciloscópio é aplicada uma tensão senoidal do tipo:

$$x = x_0 \cos(\omega t), \tag{5}$$

e que na placa vertical é aplicada uma tensão de mesma frequência mas defasada de θ , ou seja,

$$y = y_0 \cos(\omega t + \theta). \quad (6)$$

A imagem formada na tela do osciloscópio corresponde à composição dos dois movimentos. Matematicamente, ela é obtida ao eliminarmos o parâmetro t do sistema de equações e após algumas manipulações algébricas chegamos a

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} - 2\frac{xy}{x_0y_0} \cos \theta = \sin^2 \theta. \quad (7)$$

A Eq. (7) descreve, para um ângulo θ qualquer, uma elipse cujos semieixos em geral tem direções que não coincidem com as direções x e y . Em particular, para $\theta = 0$ obtemos

$$\left(\frac{x}{x_0} - \frac{y}{y_0}\right)^2 = 0,$$

ou seja, a elipse colapsa para a reta

$$y = \frac{y_0}{x_0} x.$$

Quando $\theta = \pi$ a reta obtida é

$$y = -\frac{y_0}{x_0} x.$$

Outra situação interessante acontece quando $\theta = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Neste caso, a elipse obtida tem seus eixos coincidindo com os eixos coordenados. Em particular, quando as amplitudes dos dois sinais são iguais, a elipse colapsa para uma circunferência.

A situação onde as frequências das tensões aplicadas são diferentes leva a figuras mais complexas.

3. Descrição experimental

O aparato experimental usado na determinação da velocidade do som é mostrado na Fig. (3). As ondas senoidais são geradas no gerador de sinais (G) e conectadas ao canal vertical do osciloscópio. O sinal capturado pelo microfone (M), que corresponde à superposição da onda incidente com a refletida, alimenta o canal horizontal. Água é inserida no sistema de vasos comunicantes (V) de forma a controlar a coluna de ar. Sempre que a coluna tiver a altura necessária para formar um harmônico dentro do tubo com a mesma frequência da onda incidente, ocorre ressonância entre os dois sinais, que se observa no osciloscópio pela formação de aproximadamente uma circunferência (situação análoga à utilização de um diapasão). A escolha da frequência no gerador de sinais deve levar em consideração dois aspectos: de um lado, os limites da audição humana, de outro a necessidade de se obter um número considerável de harmônicos dentro do tubo. Assim, foram utilizados dois valores de frequência: 1290 Hz e 2000 Hz.

Para a tomada dos dados, inicialmente a coluna de água no tubo fechado é elevada de modo que não se tenha nenhum harmônico dentro dele. A seguir a coluna de água deve descer lentamente até que se obtenha o primeiro harmônico ou harmônico fundamental (isso acontece quando a figura formada na tela do osciloscópio for aproximadamente uma circunferência). Neste ponto é medida a altura da coluna de ar. Este procedimento é repetido sucessivamente, e as alturas dos harmônicos seguintes são obtidas.

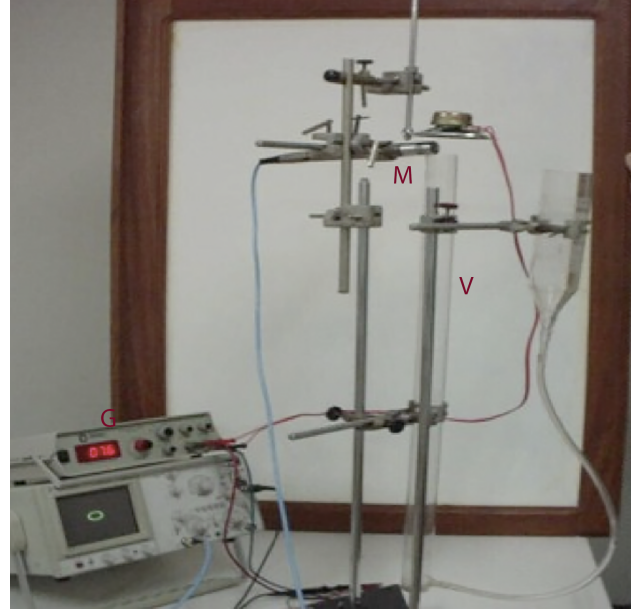


Figura 3 - Aparato experimental.

4. Resultados

As Tabelas 1 e 2 apresentam os dados com os resultados obtidos para as frequências no gerador de 1290 e 2000 Hz.

Tabela 1 - Resultados experimentais para a frequência de 1290 Hz.

$f = 1290 \text{ Hz}$	
n	L (mm)
1	59 (± 5)
2	190 (± 5)
3	323 (± 5)
4	461 (± 5)
5	590 (± 5)

Tabela 2 - Resultados experimentais para a frequência de 2000 Hz.

$f = 2000 \text{ Hz}$	
n	L (mm)
3	202 (± 5)
4	289 (± 5)
5	375 (± 5)
6	460 (± 5)
7	547 (± 5)
8	632 (± 5)

Os gráficos foram traçados para as duas situações (Figs. 4 e 5) e os valores obtidos pelo ajuste de curva linear para a velocidade do som no ar foram de

$$v(f = 1290 \text{ Hz}) = 343,9(\pm 1,8) \text{ m/s} \quad (8)$$

$$v(f = 2000 \text{ Hz}) = 346,8(\pm 0,4) \text{ m/s} \quad (9)$$

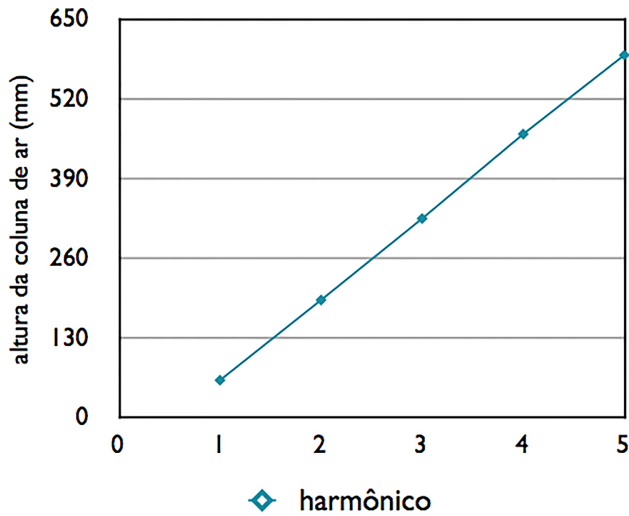


Figura 4 - Gráfico da altura da coluna de ar pelo harmônico, para a frequência de 1290 Hz.

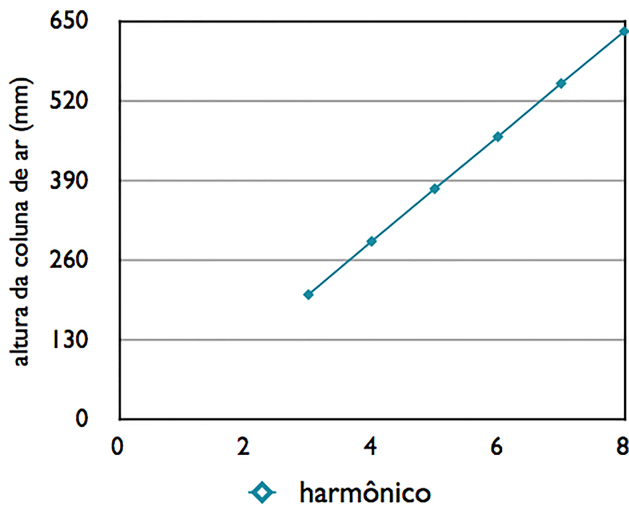


Figura 5 - Gráfico da altura da coluna de ar pelo harmônico, para a frequência de 2000 Hz.

Considerando portanto estes dois valores obtemos um valor para a velocidade do som como sendo

$$v = 345,4(\pm 1,5) \text{ m/s} \quad (10)$$

Teoricamente, a velocidade do som no ar seco é dada por [9]

$$v_{teo} = 20,05\sqrt{T_k} \text{ m/s}, \quad (11)$$

onde T_k é a temperatura ambiente na escala Kelvin. Considerando a temperatura ambiente na tomada dos dados como sendo de 299 K, obtemos o valor teórico de 345,8 m/s, que concorda com o valor obtido experimentalmente dentro da margem de erros.

5. Conclusões

Neste trabalho apresentamos uma técnica para medir a velocidade do som no ar que envolve o uso de tubos ressonantes e a construção de figuras de Lissajous em osciloscópios. O aparato experimental proposto é de considerável baixo custo e pode ser obtido facilmente em um curso de graduação em Física e áreas afins.

Ao fim do estudo o estudante deverá estar mais familiarizado com o princípio da superposição de movimentos utilizado para explicar a formação das figuras de Lissajous.

A técnica para obter a velocidade do som apresentou uma concordância muito boa com os resultados teóricos. Para o valor mais baixo de frequência, onde não foi possível obter muitos dados experimentais, o erro foi maior. Já para o valor maior de frequência os valores concordaram mais ainda. Vale salientar que o valor teórico utilizado na comparação foi o do ar seco. Conforme a umidade do ar aumenta, o valor teórico também aumenta, influenciado pelo aumento da massa molar média das partículas constituintes do ar [1]. Uma vez que o experimento foi realizado em uma região com alta umidade do ar, observou-se também este efeito, em particular para o valor de frequência de 2000 Hz.

Referências

- [1] S.T. Silva, *Propagação do Som: Conceitos e Experimentos*. Dissertação de Mestrado, UFRJ, 2011.
- [2] R.M. Sutton, *Demonstration Experiments in Physics* (Editora McGraw-Hill, EUA, 1938).
- [3] J.C. Albergotti, *Am. J. Phys.* **49**, 595 (1981); G.B. Karshner, *Am. J. Phys.* **57**, 920 (1989); R.S. Worland and D.D. Wilson, *The Physics Teacher* **37**, 53 (1999); V.B. Barbeta, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **22**, 447 (2000); I.H.S. Pettersen, *The Physics Teacher* **40**, 284 (2002); C.E. Aguiar, M.A. Freitas, L. Laudares, *Anais do XVI Simpósio Nacional de Ensino de Física, RJ* (2005); R.M. Grala, E.S. Oliveira, *A Física na Escola* **6**, 26 (2005); C.C. Carvalho, J.M. Santos e M.B. Marques, *The Physics Teacher* **46**, 428 (2008).
- [4] H.M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica 2 - Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor* (Editora Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1999).
- [5] E. Maor, *Trigonometric Delights* (Editora Princeton University Press, EUA, 2002).
- [6] H.J. Wintle, *Am. J. Phys.* **31**, 942 (1963); Jon P. Vickery, *The Physics Teacher* **3**, 170 (1965); R.E. Berg and D.R. Brill, *The Physics Teacher* **42**, 40 (2004).
- [7] J. Lissajous, *Annals de Chimie et de Physique* **51**, 140 (1849).
- [8] J. Fleming e A. Hornes, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **35**, 3702 (2013) e referências nele contidas.
- [9] R.E. Cohen, D. Lide and G. Trigg *A Physicist's Desk Reference* (Springer, New York, 1981).