

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

DESENVOLVIMENTO E IMPLEMENTAÇÃO DA TÉCNICA ELECTRIC CHARGE  
GAUSSIAN GRADATION METHOD (ECGGM) APLICADA AO MÉTODO RADIAL  
DE INTERPOLAÇÃO POR PONTOS (RPIM) COM TRUNCAGEM ADE-PML.

MARCELO BRAZÃO E SILVA BRANDÃO

DM 20 / 2016

UFPA / ITEC / PPGEE  
Campus Universitário do Guamá  
Belém-Pará-Brasil  
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

MARCELO BRAZÃO E SILVA BRANDÃO

DESENVOLVIMENTO E IMPLEMENTAÇÃO DA TÉCNICA ELECTRIC CHARGE  
GAUSSIAN GRADATION METHOD (ECGGM) APLICADA AO MÉTODO RADIAL  
DE INTERPOLAÇÃO POR PONTOS (RPIM) COM TRUNCAGEM ADE-PML.

DM 20 / 2016

UFPA / ITEC / PPGEE  
Campus Universitário do Guamá  
Belém-Pará-Brasil  
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

MARCELO BRAZÃO E SILVA BRANDÃO

DESENVOLVIMENTO E IMPLEMENTAÇÃO DA TÉCNICA ELECTRIC CHARGE  
GAUSSIAN GRADATION METHOD (ECGGM) APLICADA AO MÉTODO RADIAL  
DE INTERPOLAÇÃO POR PONTOS (RPIM) COM TRUNCAGEM ADE-PML.

Dissertação submetida à Banca  
Examinadora do Programa de  
Pós-Graduação em Engenharia  
Elétrica da UFPA para a ob-  
tenção do Grau de Mestre em En-  
genharia Elétrica na área de Tele-  
comunicações.

UFPA / ITEC / PPGEE  
Campus Universitário do Guamá  
Belém-Pará-Brasil  
2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**“DESENVOLVIMENTO E IMPLEMENTAÇÃO DA TÉCNICA ELECTRIC  
CHARGE GAUSSIAN GRADATION METHOD (ECGGM) APLICADA  
AO MÉTODO RADIAL DE INTERPOLAÇÃO POR PONTOS (RPIM)  
COM TRUNCAGEM ADE-PML.”**

**AUTOR: MARCELO BRAZÃO E SILVA BRANDÃO**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO SUBMETIDA À AVALIAÇÃO DA BANCA EXAMI-  
NADORA APROVADA PELO COLEGIADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA ELÉTRICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ E JUL-  
GADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENGENHARIA  
ELÉTRICA NA ÁREA DE TELECOMUNICAÇÕES.

APROVADA EM 19/08/2016

**BANCA EXAMINADORA:**

---

**Prof. Dr. Rodrigo Melo e Silva de Oliveira**  
(Orientador – PPGEE/UFPA)

---

**Prof. Dr. Victor Dmitriev**  
(Avaliador Interno ao Programa – PPGEE/UFPA)

---

**Prof. Dr. Karlo Queiroz da Costa**  
(Avaliador Interno ao Programa – PPGEE/UFPA)

---

**Prof. Dr. Fabrício José Brito Barros**  
(Avaliador Externo ao Programa – FEE/UFPA)

**VISTO:**

---

**Prof. Dr. Evaldo Gonçalves Pelaes**  
(Coordenador do PPGEE/ITEC/UFPA)

*“E lembre-se: você é seu próprio general. Então, tome agora a iniciativa, planeje e marche decidido para a vitória.”*

Sun Tzu.

(544 a.C. - 496 a.C.)

À minha família.

# Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador Professor Rodrigo de Oliveira, pela paciência, conselhos e aprendizados valiosos durante essa caminhada, bem como pela flexibilidade que permitiu conciliar o desenvolvimento deste trabalho científico com a minha atual carreira profissional. Agradeço também a todos os companheiros do LEMag, que sempre se mostraram dispostos a ajudar, evidenciando o espírito de equipe que reina no laboratório. Sou grato, ainda, ao meu amigo Washington Souza, que além de trabalharmos juntos nesta linha de pesquisa, dedicou horas incontáveis para me ensinar sobre o RPIM.

Também sou grato ao Exército Brasileiro, particularmente nas pessoas do Cel Fidelis e Cel Medeiros, meu atual e ex-comandante, respectivamente, onde sem o apoio, compreensão e confiança destes, jamais a realização deste mestrado seria possível.

Por fim, agradeço à minha esposa Tatiane Brazão e às minhas filhas Julia e Sofia, as quais compreenderam os diversos momentos ao seus lados que tive que abdicar, para o desenvolvimento deste trabalho.

# Lista de Símbolos

$\Omega_{SR}$	Domínio de Suporte para o Método RPIM
$\bar{x}$ e $\bar{x}_h$	Ponto de interesse e Elemento do Domínio $\Omega_{SR}(\bar{x})$
$f(\bar{x})$	Função Exata
$f^a(\bar{x})$	Função Aproximada de $f(\bar{x})$
$\Phi$	Função de Forma
$B_i(\bar{x})$	Função de Base
$R_i(\bar{x})$	Função de Base Radial
$P_i(\bar{x})$	Função de Polinomial
$c$	Fator de Forma
$Err^a$	Erro Percentual de Interpolação
$\vec{F}$	Vetor Força de Coulomb
$q$	Magnitude das Cargas Puntiformes
$q_{min}$	Magnitude da menor carga existente
$\sigma$	Desvio Padrão da Função Gaussiana
$\rho$	Distância do centro do espalhador para um nó qualquer
$\vec{E}$	Vetor Intensidade de Campo Elétrico
$\vec{H}$	Vetor Intensidade de Campo Magnético
$\vec{D}$	Densidade de Fluxo Elétrico
$\vec{B}$	Densidade de Fluxo Magnético
$\epsilon_o$	Permissividade Elétrica do Vácuo
$\mu_o$	Permeabilidade Magnética do Vácuo
$\epsilon$	Permissividade Elétrica

$\mu$	Permeabilidade Magnética
$\sigma_\alpha$	Condutividade Elétrica para UPML, CPML ou ADE-PML
$t$	Tempo
$x, y$ e $z$	Coordenadas do Sistema Cartesiano
$E_z$	Componente do Campo Elétrico
$H_x$ e $H_y$	Componentes do Campo Magnético
$D_z$	Componente de $\vec{D}$
$B_x$ e $B_y$	Componentes de $\vec{B}$
$\frac{df}{d\alpha}$	Derivada de $f$ em relação a $\alpha$
$\frac{\partial f}{\partial \alpha}$	Derivada Parcial de $f$ em relação a $\alpha$
$(i, j)$	Endereçamento no Espaço Discretizado
$N_t$	Índice Temporal
$\Delta_x$ e $\Delta_y$	Incrementos Espaciais
$\Delta_t$	Incremento Temporal
$p(t)$	Sinal de Excitação
$A_p$	Amplitude do Sinal de Excitação
$\tau$	Parâmetro Relativo à Largura Temporal do Pulso Monociclo Gaussiano
$t_0$	Instante do Centro do Pulso Monociclo Gaussiano
$f_c$	Frequência Central do Pulso Monociclo Gaussiano
$e_r^{N_t}$	Erro Relativo de reflexão no instante $N_t$
$\beta$	Fator de calibração da condutividade da ADE-PML

## Lista de Siglas

ECGGM	<i>Electric Charge Gaussian Gradation Method</i>
CLDM	<i>Coulomb's Law Discretization Method</i>
LSFCM	<i>Local Shape Factor Calibration Method</i>
RPIM	<i>Radial Point Interpolation Method</i>
PML	<i>Perfectly Matched Layer</i>
CPML	<i>Convolutional Perfectly Matched Layer</i>
UPML	<i>Uniaxial Perfectly Matched Layer</i>
ADE-PML	<i>Auxiliary Differential Equation - Perfectly Matched Layer</i>
FDTD	<i>Finite Difference Time Domain</i>
MoM	<i>Method of Moments</i>
PO	<i>Physical Optics</i>
IE	<i>Integral Equations</i>
FEFD	<i>Finite Element Frequency Domain</i>
RCS	<i>Radar Cross Section</i>
BSW	<i>Bistatic Scattering Width</i>
RMSE	<i>Root Mean Square Error</i>
MRE	<i>Maximum Relative Error</i>

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução Geral . . . . .	1
1.2	Objetivos do Trabalho . . . . .	3
1.3	Organização do Trabalho . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Embasamento Teórico</b>	<b>5</b>
2.1	Conteúdo do Capítulo . . . . .	5
2.2	O Método Radial Point Interpolation Method (RPIM) . . . . .	5
2.3	Método de Discretização do Espaço Baseado na Lei de Coulomb (CLDM) . . . . .	12
<b>3</b>	<b>O Método Electric Charge Gaussian Gradation Method (ECGGM)</b>	<b>18</b>
3.1	Conteúdo do Capítulo . . . . .	18
3.2	Electric Charge Gradation Gaussian Method (ECGGM) . . . . .	18
3.3	Qualidade da Discretização Espacial e Avaliação do Erro . . . . .	25
<b>4</b>	<b>ADE-PML para o método RPIM</b>	<b>26</b>
4.1	Conteúdo do Capítulo . . . . .	26
4.2	Formulação ADE-PML para o Método RPIM . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Resultados Numéricos</b>	<b>31</b>
5.1	Validação do Método ECGGM . . . . .	31

5.1.1	Caso de Validação 1 - RCS do Espalhador Cilíndrico Circular . . .	31
5.1.2	Caso de Validação 2 - RCS do Espalhador Cilíndrico Triangular . .	42
5.1.3	Caso de Validação 3 - RCS do Espalhador Cilíndrico Elíptico . . .	44
5.2	Avaliação Numérica da Formulação ADE-PML Proposta para Truncar o Método RPIM . . . . .	49
5.2.1	Avaliação do erro relativo de reflexão . . . . .	49
5.2.2	RCS de um Espalhador Cilíndrico Circular . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>58</b>

## Lista de Ilustrações

2.1	Exemplo de domínio de suporte $\Omega_{SR}(\bar{x})$ bidimensional, formato circular, contendo 5 (cinco) pontos em seu interior. . . . .	6
2.2	Discretização inicial de referência para o método CLDM. . . . .	13
2.3	a) Discretização simétrica e em equilíbrio, b) Instabilidade gerada devido ao deslocamento e fixação de um ponto, c) Reposicionamento das cargas móveis buscando o equilíbrio. . . . .	14
2.4	Deslocamento de pontos para representação de contornos, convertidos em nós fixos. . . . .	16
2.5	Região de borda $Rb$ , composta de cargas fixas, envolvendo a região de análise. . . . .	17
3.1	Análise da força elétrica resultante num sistema de quatro partículas com mesma carga: Neste caso, apenas $q_4$ é um nó livre: (a) quando $q_4$ é inicialmente posicionada fora do triângulo, $F_{R4}$ a empurra para fora, (b) a carga $q_4$ é arrastada por $F_{R4}$ ao ponto de equilíbrio c) a carga $q_4$ no ponto de equilíbrio de forças ( $F_{R4}=0$ ). . . . .	19
3.2	Análise do espalhador cilíndrico circular condutor com referência no centro. O círculo vermelho é a região de referência onde a função Gaussiana atinge seu mínimo. . . . .	20
3.3	Análise do espalhador cilíndrico triangular condutor com referência no centro. O círculo vermelho é a região de referência onde a função Gaussiana atinge seu mínimo. . . . .	21

3.4	Análise do espalhador cilíndrico elíptico condutor com referência no centro. O círculo vermelho é a região de referência onde a função Gaussian atinge seu mínimo. . . . .	21
3.5	Representação da magnitude das cargas no interior do espalhador cilíndrico circular. . . . .	23
3.6	Representação da magnitude das cargas no interior do espalhador cilíndrico triangular. . . . .	23
3.7	Representação da magnitude das cargas no interior do espalhador cilíndrico elíptico. . . . .	24
3.8	Fluxograma ilustrativo das etapas do ECGGM. . . . .	24
5.1	Distribuição espacial de $ E_z $ (campo total) para o espalhador circular (caso 1): (a) $t = 10,0$ ns, (b) $t = 30,0$ ns, (c) $t = 34,0$ ns, (d) $t = 40,0$ ns. . . . .	32
5.2	RCS para cilindro circular vs ângulo de observação (caso de validação 1), com espaçamento de $\lambda/20$ (grid inicial), obtido com $q_{min} = 0,8$ e 50 iterações ECGGM-CLDM. . . . .	33
5.3	Erro relativo máximo para ECGGM obtido para $0,2 \leq q_{min} \leq 0,9$ com espaçamento entre pontos de $\lambda/20$ (grid inicial), para o caso de validação 1. . . . .	34
5.4	RMSE para ECGGM obtido para $0,2 \leq q_{min} \leq 0,9$ com espaçamento entre pontos de $\lambda/20$ (grid inicial), para o caso de validação 1. . . . .	34
5.5	Aplicação de ECGGM em torno do espalhador circular (setor $90^\circ$ ) usando $q_{min} = 0,8$ . Reposicionamento dos nós após (a) zero iterações (malha retangular de referência inicial) , (b) 25 iterações, (c) 50 iterações, (d) 100 iterações. . . . .	35
5.6	RCS para cilindro circular vs ângulo de observação para $q_{min} = [0,2;0,9]$ , com espaçamento de $\lambda/20$ (grid inicial). . . . .	36
5.7	RCS para cilindro circular vs ângulo de observação (caso de validação 1), com espaçamento de $\lambda/10$ (grid inicial). . . . .	36

5.8	RCS para cilindro circular vs ângulo de observação (caso de validação 1), com espaçamento de $\lambda/30$ (grid inicial).	37
5.9	Discretização espacial para o espalhador circular após 100 iterações ECGGM utilizando $q_{min} = 0,8$ .	38
5.10	Tempos de simulação obtidos para as técnicas ECGGM e CLDM vs discretização espacial de referência ( $\Delta x$ ).	39
5.11	RCS analítico para cilindro circular vs ângulo de observação (caso de validação 1) com $f_c = 100$ kHz.	40
5.12	RCS (FDTD) para cilindro circular vs ângulo de observação (caso de validação 1), com espaçamento de $\lambda/20$ e $f_c = 100$ kHz.	40
5.13	RCS (RPIM) para cilindro circular vs ângulo de observação (caso de validação 1), com espaçamento de $\lambda/20$ (grid inicial) e $f_c = 100$ kHz.	41
5.14	Erro relativo máximo para ECGGM obtido para $q_{min} = 0,8$ com espaçamento entre pontos de $\lambda/20$ (grid inicial) e $f_c = 100$ kHz.	41
5.15	RMSE para ECGGM obtido para $q_{min} = 0,8$ com espaçamento entre pontos de $\lambda/20$ (grid inicial) e $f_c = 100$ kHz.	42
5.16	Distribuição espacial de $ E_z $ (campo total) para o cilindro triangular (caso 2): (a) $t = 10,0$ ns, (b) $t = 28,0$ ns, (c) $t = 30,0$ ns, (d) $t = 36,0$ ns.	43
5.17	Aplicação de ECGGM em torno do vértice do espalhador triangular usando $q_{min} = 0,9$ . Reposicionamento dos nós após (a) zero iterações (malha retangular de referência inicial), (b) 25 iterações, (c) 50 iterações, (d) 100 iterações.	44
5.18	Discretização espacial para o espalhador triangular após 100 iterações ECGGM utilizando $q_{min} = 0,9$ .	45
5.19	RCS para cilindro triangular vs ângulo de observação (caso de validação 2), com espaçamento de $\lambda/20$ (grid inicial).	46

5.20	Distribuição espacial de $ E_z $ (campo total) para o espalhador Cilindro Elíptico (caso 2): (a) $t = 10,0$ ns, (b) $t = 38,0$ ns, (c) $t = 50,0$ ns, (d) $t = 60,0$ ns. . . . .	46
5.21	RCS para cilindro elíptico vs ângulo de observação (caso de validação 3), com espaçamento de $\lambda/20$ (grid inicial). . . . .	47
5.22	Aplicação de ECGGM em torno do vértice do espalhador elíptico usando $q_{min} = 0,9$ . Reposicionamento dos nós após (a) zero iterações (malha retangular de referência inicial) , (b) 25 iterações, (c) 50 iterações, (d) 100 iterações. . . . .	47
5.23	Discretização espacial para o espalhador elíptico após 100 iterações ECGGM utilizando $q_{min} = 0,9$ (setor $90^\circ$ ). . . . .	48
5.24	Distribuição retangular de pontos (nós) utilizados para cálculo do erro relativo de reflexão, na região em torno do sensor localizado em $(79\Delta x, 79\Delta y)$ . . . . .	50
5.25	Cálculo do erro relativo de reflexão da região absorvente: (a) Posicionamento da fonte pontual e dos sensores para avaliação de $E_z$ , (b) Arranjo utilizado para o método RPIM e círculo hachurado indicando domínio de suporte $D_s$ para o nó elétrico posicionado em seu centro. . . . .	50
5.26	Distribuição Espacial de $ E_z $ (excitação pontual), com absorção realizada com a ADE-PML para (a) $t = 10,0$ ns, (b) $t = 16,0$ ns, (c) $t = 22,0$ ns, (d) $t = 26,0$ ns. . . . .	52
5.27	Erro relativo de reflexão para sensor posicionado em $(79\Delta x, 79\Delta y)$ . . . . .	53
5.28	Erro relativo de reflexão para sensores posicionados ao longo da reta $(x, 20\Delta y)$ para $t = 40,0$ ns. . . . .	53
5.29	Seção transversal do espalhador cilíndrico circular. . . . .	54
5.30	Distribuições Espaciais de $ E_z $ para o espalhador cilíndrico circular, calculadas usando a ADE-PML, obtidas para (a) $t = 10,0$ ns, (b) $t = 30,0$ ns, (c) $t = 34,0$ ns, (d) $t = 40,0$ ns. . . . .	55

5.31	RCS para o espalhador cilíndrico circular em função do ângulo de observação.	56
5.32	Erro Relativo do parâmetro RCS para o espalhador cilíndrico circular em função do ângulo de observação. . . . .	57
5.33	Erro eBSW (em dB) do parâmetro RCS para o espalhador cilíndrico circular em função do ângulo de observação. . . . .	57

## Lista de Tabelas

5.1	Parâmetros e resultados da RCS do espalhador cilíndrico circular . . . . .	38
5.2	PARÂMETROS DE SIMULAÇÃO PARA CASOS DE VALIDAÇÃO 1, 2 E 3 . . . . .	48
5.3	Máximos Erros Relativos de Reflexão . . . . .	52
5.4	Parâmetros e resultados . . . . .	56

## Resumo

Neste trabalho, uma metodologia aperfeiçoada de discretização *meshless*, baseada no método *Coulomb's Law Discretization Method* (CLDM), é introduzida. Com o aperfeiçoamento apresentado, é possível aumentar a densidade de nós de forma controlada em regiões de bordas e cantos de espalhadores metálicos imersos no espaço em análise de uma forma natural, modificando gradualmente as cargas dos nós usando funções Gaussianas. Além disso, a implementação computacional da ADE-PML (*Auxiliary Differential Equation - Perfectly Matched Layer*) para truncar o método *meshless* RPIM é apresentada de forma inédita. As equações usadas na região absorvente são obtidas no domínio do tempo através de equações diferenciais auxiliares, onde a formulação desenvolvida é validada através de experimentos numéricos relativos ao cálculo do erro relativo de reflexão do material absorvente, bem como através do cálculo da seção reta radar (RCS) de um espalhador cilíndrico metálico, que possui solução analítica exata conhecida. Observa-se que, com uma maior concentração de nós na vizinhança das interfaces de meios distintos, aumenta-se substancialmente a precisão das soluções numéricas das equações de Maxwell obtidas com o método *Radial Point Interpolation Method* (RPIM), devido ao cálculo apropriado dos campos próximos às regiões de fronteira. Vários outros benefícios relevantes resultantes da nova técnica são observados e destacados. A formulação ADE-PML proposta produz equações de atualização de campo livres dos chamados *split fields* característicos da PML original. As convoluções recursivas usadas pela CPML (*Convolutional Perfectly Matched Layer*) não são usadas, evitando-se assim problemas de absorção quando pequenos passos de tempo são empregados.

*Palavras-chave:* CLDM, Densidade local de nós controlada, Gradação Gaussiana do nível de discretização, Discretização *Meshless*, RPIM, Equações Diferenciais Auxiliares, ADE-PML.

### Abstract

In this work, an improved meshless discretization methodology, based on the Coulomb's Law Discretization Method (CLDM), is introduced. With the presented improvement, it is possible to controllably increase the density of nodes around edges and corners of metallic scatterers immersed in analysis space in a natural way by gradually modifying node's charges using Gaussian functions. Also, a new computational implementation of ADE-PML (Auxiliary Differential Equation - Perfectly Matched Layer) to truncate the method meshless RPIM is presented. The equations used in the absorbent region are obtained in the time domain using auxiliary differential equations, then the developed formulation is validated through numerical experiments related to the reflection error of absorbent material and also by calculating the radar cross section (RCS) of a metal cylindrical scatterer, which has a known analytical solution. It is observed that higher concentration of nodes on the neighborhood of media interfaces substantially improves the precision of numerical solutions of Maxwell's equations obtained with the Radial Point Interpolation Method (RPIM) because of the proper calculation of fields near the boundaries. Several other relevant benefits resulting from the new technique are observed and highlighted. The proposed ADE-PML formulation produces free field update equations of so-called *split fields* characteristic of the original PML. Recursive convolution used by CPML (Convolutional Perfectly Matched Layer) are not used, avoiding problems of absorption when small time steps are employed.

*Keywords:* CLDM, Controlled Local Density of Nodes, Gaussian Discretization Level Gradation, Meshless Discretization, RPIM, Auxiliary Differential Equations, ADE-PML.

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Introdução Geral

As simulações de problemas eletromagnéticos, no contexto computacional, são realizadas através do emprego de métodos numéricos para representar as equações de Maxwell, onde dentre estes podemos destacar os métodos das diferenças finitas [1], dos elementos finitos [2] e, mais recentemente, os métodos sem malha ou *meshless* [3]. Os métodos *meshless* estão sendo cada vez mais utilizados em aplicações relacionadas a problemas eletromagnéticos [4], [5], principalmente pela ausência de uma malha pré-definida fazendo com que a discretização possua maior grau de conformidade com o problema (representação apropriada de geometrias diversas), bem como não possuem a necessidade de, a cada iteração temporal, solucionar um sistema de equações matriciais como as existentes nos métodos de elementos finitos. O método RPIM (Radial Point Interpolation Method), o qual é um dos diversos métodos *meshless* existentes, foi introduzido por Wang e Liu em 2002 [3], e utilizado para solucionar equações de Maxwell em três dimensões em 2009 [6], tem se destacado como um método promissor para a solução de problemas eletromagnéticos devido a precisão alcançada, propiciada por discretizações conformais.

Um dos principais fatores para que o método RPIM possua resultados estáveis e preci-

tos, está interligado a distribuição de pontos de tal de forma que estes garantam a representatividade geométrica adequada de todo o domínio em análise, bem como satisfaçam parâmetros de qualidade da discretização, proporcionando baixos erros de interpolação.

Em 2011, Machado e Oliveira introduziram um novo método para melhorar a precisão da interpolação chamado de Local Shape Factor Calibration Method (LSFCM) [7], o qual otimiza as funções de forma para cada domínio de suporte do RPIM. Em 2015, uma nova abordagem de discretização *meshless* foi introduzida por Souza e Oliveira [8], que foi chamada de Coulomb's Law Discretization Method (CLDM). O propósito do método CLDM, que é baseado no princípio da energia potencial total mínima, é estabilizar a distribuição geométrica dos nós da região de análise após uma definição preliminar de interfaces entre materiais diferentes, fixando os nós em uma determinada interface, aplicando-se em seguida a lei da Força de Coulomb aos nós e a segunda Lei de Newton.

Além disso, quando problemas abertos precisam ser resolvidos numericamente, formulações específicas devem ser usadas nos limites da região de análise para absorver as ondas eletromagnéticas. Caso contrário, a quantidade de dados requeridos para armazenamento em RAM bem como a necessidade de processamento destas informações de campo, tornariam a realização das simulações numéricas impraticável devido aos limitados recursos computacionais disponíveis.

Na década de 1990, surgiram as técnicas de absorção baseadas em camadas perfeitamente casadas (*Perfectly Matched Layers* - PML) [9]. As técnicas baseadas em PML trouxeram grandes benefícios para os métodos numéricos, permitindo que problemas abertos em eletromagnetismo fossem solucionados com reflexões na faixa de -50 a -80 dB nos limites da região de análise [9].

Recentemente, as formulações PML Uniaxial (UPML) [10] e PML convolucional (CPML) [11] foram adaptadas ao método RPIM em [12,13]. Porém, na literatura, a PML baseada em equações diferenciais auxiliares (ADE-PML) [14] é empregada apenas ao método das diferenças finitas.

## 1.2 Objetivos do Trabalho

Este trabalho tem como principal objetivo o desenvolvimento de uma nova técnica para a definição gradual de distribuição de pontos no domínio em análise, baseada em função Gaussiana, denominada Electric Charge Gaussian Gradation Method (ECGGM), onde pode-se obter de forma gradativa e controlada, níveis variados de discretização para áreas específicas, permitindo que regiões com interfaces entre diferentes materiais possuam maior grau de discretização em relação às demais, possibilitando maior precisão nos resultados alcançados devido ao maior nível de discretização em regiões com vértices e interfaces de materiais distintos, representando de forma adequada o gradiente dos campos envolvidos.

O segundo objetivo foi o desenvolvimento de uma formulação *meshless* baseada na técnica ADE-PML (*Auxiliary-Differential Equation Perfectly Matched Layers*) [14], a qual é aplicada ao método RPIM (*Radial Point Interpolation Method*) [3]. Com a formulação apresentada [15], eliminam-se as convoluções recursivas da CPML, que causam problemas de absorção quando passos de tempo muito pequenos são usados [16], e obtém-se implementações mais simples que as requeridas pelas técnicas CPML e UPML.

## 1.3 Organização do Trabalho

Esta dissertação de mestrado está organizada em seis Capítulos, incluindo esta Introdução. O conteúdo dos Capítulos subsequentes é detalhado a seguir:

- Capítulo 2 – Embasamento teórico acerca do método Radial Point Interpolation Method (RPIM) bem como a formulação matemática implementada neste trabalho, aplicada as equações de Maxwell. Em seguida, este capítulo faz uma revisão teórica do método Coulomb's Law Discretization Method (CLDM).
- Capítulo 3 – Nesta etapa é apresentada a técnica desenvolvida neste trabalho,

denominada Electric Charge Gaussian Gradation Method (ECGGM), bem como a formulação associada;

- Capítulo 4 – Descrição da teoria da ADE-PML (Auxiliary-Differential Equation Perfectly Matched Layers) e desenvolvimento da formulação para o método RPIM, proposta neste trabalho;
- Capítulo 5 – Análise das simulações numéricas dos métodos propostos nos capítulos 2 e 3, bem como validação dos resultados;
- Capítulo 6 – São feitas as considerações finais acerca dos resultados obtidos e propostas de trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Embasamento Teórico

### 2.1 Conteúdo do Capítulo

Neste capítulo, busca-se apresentar de forma sucinta os conceitos básicos do método RPIM bem como a formulação matemática utilizada para as simulações realizadas. Em seguida, apresenta-se a técnica CLDM (Coulomb's Law Discretization Method), que servirá de base para a técnica ECGGM desenvolvida neste trabalho.

### 2.2 O Método Radial Point Interpolation Method (RPIM)

O RPIM [3] é um método *meshless*, no qual o valor de uma componente de campo em um determinado ponto  $\bar{x}$  é dado pela interpolação dos valores do campo obtidos nos pontos próximos a  $\bar{x}$ . O conjunto de pontos  $\bar{x}_h$ , que são usados para determinar o valor do campo no ponto  $\bar{x}$ , é denominado domínio de suporte  $\Omega_{SR}(\bar{x})$ . A Fig. 2.1 ilustra um exemplo de domínio de suporte circular, para um caso bidimensional.

Assim, uma função escalar  $f(\bar{x})$  é aproximada através do método RPIM por

$$f(\bar{x}) \approx f^a(\bar{x}) = \sum_{h=1}^{n_p} \phi_h(\bar{x}) \cdot f(\bar{x}_h), \quad (2.1)$$

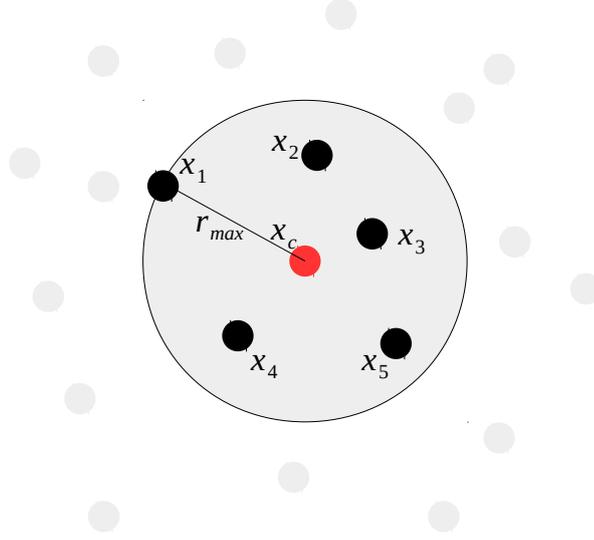


Figura 2.1: Exemplo de domínio de suporte  $\Omega_{SR}(\bar{x})$  bidimensional, formato circular, contendo 5 (cinco) pontos em seu interior.

onde  $n_p$  é a quantidade de pontos em  $\Omega_{SR}(\bar{x})$ ,  $f(\bar{x}_h)$  é o valor de  $f(\bar{x})$  avaliado em  $\bar{x}_h$  e  $\phi_h(\bar{x})$  é o valor da  $h$ -ésima função de forma em  $\bar{x}$  associado a cada  $f(\bar{x}_h)$ . É possível reescrever (2.1) na forma matricial

$$f(\bar{x}) \approx \Phi(\bar{x})F, \quad (2.2)$$

onde  $F$  é a matriz com valores do campo  $f(\bar{x}_h)$  em cada um dos pontos  $\bar{x}_h$  de  $\Omega_{SR}(\bar{x})$  e  $\Phi$  é a matriz das  $n_p$  funções de forma  $\phi_h$ .

Assim, a aproximação de uma função escalar  $f(\bar{x})$  pode ser escrita como

$$f(\bar{x}) \approx f^a(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n B_i(\bar{x})a_i + \sum_{j=1}^m P_j(\bar{x})b_j, \quad (2.3)$$

ou ainda na notação matricial

$$f(\bar{x}) \approx f^a(\bar{x}) = B^T(\bar{x})a + P^T(\bar{x})b, \quad (2.4)$$

na qual  $B^T(\bar{x}) = [B_1(\bar{x}), B_2(\bar{x}), \dots, B_n(\bar{x})]$  é o conjunto das funções de base radial, podendo

ser calculadas por (caso bidimensional)

$$B_i(\bar{x}) = e^{-\frac{c}{B_{max}^2}(\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2})^2}. \quad (2.5)$$

Em (2.1)-(2.4),  $a = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T$  são os coeficientes correspondentes às funções radiais, o índice  $n$  é a quantidade de nós indexadamente em  $\Omega_{SR}(\bar{x})$ ,  $P^T(\bar{x}) = [P_1(\bar{x}), P_2(\bar{x}), \dots, P_m(\bar{x})] = [1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots]_m$  é o vetor das funções de base polinomial,  $b = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T$  são os coeficientes associados às funções polinomiais e o índice  $m$  é quantidade de termos da base polinomial, que dependerá das dimensões do problema em análise. Para o caso bidimensional, teremos que

$$P^T(\bar{x}) = [1, x - x_c, y - y_c], \quad (2.6)$$

na qual  $x_c$  e  $y_c$  são as coordenadas do ponto  $X_c$ . Aplicando a equação (2.4) a todos os pontos contidos no domínio de suporte  $\Omega_{SR}(\bar{x})$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} f(\bar{x}_1) &\approx f^a(\bar{x}_1) = B^T(\bar{x}_1)a + P^T(\bar{x}_1)b, \\ f(\bar{x}_2) &\approx f^a(\bar{x}_2) = B^T(\bar{x}_2)a + P^T(\bar{x}_2)b, \\ &\vdots \\ f(\bar{x}_n) &\approx f^a(\bar{x}_n) = B^T(\bar{x}_n)a + P^T(\bar{x}_n)b. \end{aligned}$$

Convertendo para a forma matricial, podemos escrever

$$\begin{bmatrix} B_0 & P_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = [F], \quad (2.7)$$

onde

$$B_0 = \begin{bmatrix} B_1(x_1, y_1) & B_2(x_1, y_1) & \dots & B_n(x_1, y_1) \\ B_1(x_2, y_2) & B_2(x_2, y_2) & \dots & B_n(x_2, y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1(x_n, y_n) & B_2(x_n, y_n) & \dots & B_n(x_n, y_n) \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad (2.8)$$

$$P_0 = \begin{bmatrix} P_1(x_1, y_1) & P_2(x_1, y_1) & \dots & P_m(x_1, y_1) \\ P_1(x_2, y_2) & P_2(x_2, y_2) & \dots & P_m(x_2, y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1(x_n, y_n) & P_2(x_n, y_n) & \dots & P_m(x_n, y_n) \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (2.9)$$

e

$$F = \begin{bmatrix} f(x_1, y_1) \\ f(x_2, y_2) \\ \vdots \\ f(x_n, y_n) \end{bmatrix}_{n \times 1}. \quad (2.10)$$

Para garantir solução única [3], usa-se a base polinomial para termos

$$\sum_{i=1}^n P_j(x_i, y_i) a_i = 0; j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.11)$$

ou ainda, de forma matricial,

$$\begin{bmatrix} P_0^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Desta forma, através das equações (2.7) e (2.12), os coeficientes da interpolação podem ser calculados pela equação matricial

$$\begin{bmatrix} B_0 & P_0 \\ P_0^T & [0]_{m \times m} \end{bmatrix}_{(n+m) \times (n+m)} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}_{(n+m)} = \begin{bmatrix} F \\ [0]_m \end{bmatrix}_{(n+m)},$$

ou

$$\begin{bmatrix} B_0 & P_0 \\ P_0^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

Utilizando uma matriz auxiliar G, podemos obter

$$G = \begin{bmatrix} B_0 & P_0 \\ P_0^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

permitindo reescrever (2.13) na forma

$$G \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix},$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = G^{-1} \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Substituindo a equação (2.15) em (2.7), tem-se

$$f(\bar{x}) \approx \begin{bmatrix} B^T & P^T \end{bmatrix} \left\{ G^{-1} \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

ou ainda

$$f(\bar{x}) \approx \begin{bmatrix} B^T & P^T \end{bmatrix} G^{-1} F, \quad (2.16)$$

onde

$$B^T(\bar{x}) = [B_1(\bar{x}), B_2(\bar{x}), \dots, B_n(\bar{x})], \quad (2.17)$$

$$P^T(\bar{x}) = [P_1(\bar{x}), P_2(\bar{x}), \dots, P_m(\bar{x})], \quad (2.18)$$

e

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{G}_{11} & \bar{G}_{12} & \dots & \bar{G}_{1(n+m)} \\ \bar{G}_{21} & \bar{G}_{22} & \dots & \bar{G}_{2(n+m)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{G}_{(n+m)1} & \bar{G}_{(n+m)2} & \dots & \bar{G}_{(n+m)(n+m)} \end{bmatrix}_{(n+m)}. \quad (2.19)$$

Através das equações (2.2) e (2.16), temos que

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{x})F &= \begin{bmatrix} B^T & P^T \end{bmatrix} G^{-1} F, \\ \Phi(\bar{x}) &= \begin{bmatrix} B^T & P^T \end{bmatrix} G^{-1}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Como

$$\Phi = [\phi_1(\bar{x}), \phi_2(\bar{x}), \dots, \phi_n(\bar{x})], \quad (2.21)$$

podemos ter

$$\phi_h(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n B_i(\bar{x}_h) \bar{G}_{i,h} + \sum_{j=1}^m P_j(\bar{x}_h) \bar{G}_{j+n,h}, \quad h = 1, 2, \dots, n, \quad (2.22)$$

onde  $\phi_h(\bar{x})$  é o  $h$ -ésimo elemento de (2.21).

No tocante às equações de Maxwell, temos que a Leis de Ampère-Maxwell e de Faraday, em suas formas diferenciais, são dadas, respectivamente, para meios não-condutivos, isotrópicos e não-dispersivos por

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.23)$$

e

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}. \quad (2.24)$$

Neste trabalho, a análise dos problemas é feita no modo Transversal Magnético  $z$  (TM $_z$ ). As componentes  $x$  e  $y$  de  $\vec{H}$  e a componente  $z$  de  $\vec{E}$ , são dadas por

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} \right), \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad (2.26)$$

e

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right), \quad (2.27)$$

respectivamente.

Visando a aplicação do método RPIM, faz-se necessário o cálculo das derivadas parciais. Sabendo-se que [3]

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{\bar{x}} \approx \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \Big|_{\bar{x}} F, \quad (2.28)$$

é possível aproximar as derivadas espaciais em (2.25)-(2.27) utilizando o método RPIM e as derivadas temporais utilizando a técnica de diferenças finitas centradas. Substituindo-se (2.21) em (2.28), tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Big|_{\bar{x}} &\approx \frac{\partial[\phi_1(x, y), \phi_2(x, y), \dots, \phi_n(x, y)]}{\partial x}\Big|_{\bar{x}}F, \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Big|_{\bar{x}} &\approx \left[ \frac{\partial\phi_1(x, y)}{\partial x} \quad \frac{\partial\phi_2(x, y)}{\partial x} \quad \dots \quad \frac{\partial\phi_n(x, y)}{\partial x} \right] \Big|_{\bar{x}}F.\end{aligned}\quad (2.29)$$

Utilizando a equação (2.22) obtida para o cálculo das funções de forma, podemos escrever

$$\begin{aligned}\phi_h(\bar{x}) &= \sum_{i=1}^n B_i(\bar{x}_h)\bar{G}_{i,h} + \sum_{j=1}^m P_j(\bar{x}_h)\bar{G}_{j+n,h}, \\ \frac{\partial\phi_h(\bar{x})}{\partial x} &= \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^n B_i(\bar{x}_h)\bar{G}_{i,h} + \sum_{j=1}^m P_j(\bar{x}_h)\bar{G}_{j+n,h}\right)}{\partial x}, \\ \frac{\partial\phi_h(\bar{x})}{\partial x} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial B_i(\bar{x}_h)}{\partial x}\bar{G}_{i,h} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial P_j(\bar{x}_h)}{\partial x}\bar{G}_{j+n,h}.\end{aligned}\quad (2.30)$$

Analogamente, a derivada parcial em relação a  $y$  é dada por

$$\frac{\partial\phi_h(\bar{x})}{\partial y} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial B_i(\bar{x}_h)}{\partial y}\bar{G}_{i,h} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial P_j(\bar{x}_h)}{\partial y}\bar{G}_{j+n,h}.\quad (2.31)$$

Desta forma, o cálculo das derivadas parciais utilizando as funções de forma do método RPIM, podem ser expressas por

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\Big|_{\bar{x}} \approx \left[ \frac{\partial\phi_1(\bar{x})}{\partial x} \quad \frac{\partial\phi_2(\bar{x})}{\partial x} \quad \dots \quad \frac{\partial\phi_n(\bar{x})}{\partial x} \right] \Big|_{\bar{x}}F\quad (2.32)$$

e

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\Big|_{\bar{x}} \approx \left[ \frac{\partial\phi_1(\bar{x})}{\partial y} \quad \frac{\partial\phi_2(\bar{x})}{\partial y} \quad \dots \quad \frac{\partial\phi_n(\bar{x})}{\partial y} \right] \Big|_{\bar{x}}F\quad (2.33)$$

Por fim, as componentes  $E_z$ ,  $H_x$  e  $H_y$  em determinado ponto  $\bar{x}$  podem ser calculadas por

$$E_z^{N_{t+1}}(i) = E_z^{N_t}(i) + \frac{\Delta t}{\epsilon} \left( \sum_j^{n_p} H_y^{N_t}(j) \frac{\partial\phi_j}{\partial x} - \sum_j^{n_p} H_x^{N_t}(j) \frac{\partial\phi_j}{\partial y} \right),\quad (2.34)$$

$$H_x^{N_{t+1}}(i) = H_x^{N_t}(i) - \frac{\Delta t}{\mu} \sum_j^{n_p} E_z^{N_t}(j) \frac{\partial\phi_j}{\partial y}\quad (2.35)$$

e

$$H_y^{N_{t+1}}(i) = H_y^{N_t}(i) + \frac{\Delta t}{\mu} \sum_j^{n_p} E_z^{N_t}(j) \frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \quad (2.36)$$

Nas expressões acima,  $N_t$  é o índice relativo ao passo temporal atual e é dado por  $N_t = t/\Delta t$ ,  $j$  é o índice relativo aos pontos  $\bar{x}_{hj}$  no domínio de suporte e  $i$  é o índice do ponto  $\bar{x}$ . Para fins de estabilidade numérica, o passo temporal deve satisfazer a condição de Courant-Friedrichs-Lewy, dada por

$$\Delta t < \frac{1}{v_{max} \sqrt{\frac{2}{\Delta_{min}^2}}} = \frac{\Delta_{min}}{v_{max} \sqrt{2}} \quad (2.37)$$

onde  $\Delta_{min} = \min(\min \Delta_E, \min \Delta_H)$ .

## 2.3 Método de Discretização do Espaço Baseado na Lei de Coulomb (CLDM)

Em 2015, Souza e Oliveira desenvolveram uma nova metodologia de discretização espacial aplicada ao RPIM, denominada Coulomb's Law Discretization Method (CLDM), a qual se baseia em duas leis clássicas da física: A lei de Coulomb e a segunda Lei de Newton.

Neste método, a discretização inicial da região de análise é baseada em malha, de tal forma que a distribuição de pontos forma um *grid* retangular, conforme ilustrado na Fig. 2.2, sendo atribuídas a todos os nós cargas elétricas idênticas.

A lei de Coulomb em sua forma vetorial, descrita por

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_{1,2}|^3} \vec{r}_{1,2}, \quad (2.38)$$

é aplicada para todas as combinações entre dois pontos, de tal forma que, utilizando o princípio da superposição, podemos concluir que a força resultante em cada nó indexado por  $i$  pode ser calculada por

$$\vec{F}_{Ri} = \sum_{j=1}^n \vec{F}_{i,j}, j \neq i. \quad (2.39)$$

Entretanto, a aplicação da lei de Coulomb em quaisquer pontos da região de análise da Fig. 2.2, em virtude do arranjo retangular, acarretaria que a força resultante calculada pela equação (2.39) seria sempre nula, para o caso de o domínio ser infinito. Desta forma, para a utilização da técnica CLDM, uma quebra deste equilíbrio intrínseco é realizada por uma força externa ao sistema, alterando as coordenadas de pontos específicos da região de análise. Na técnica em questão, a classificação dos nós é feita em dois grupos distintos: móveis e fixos.

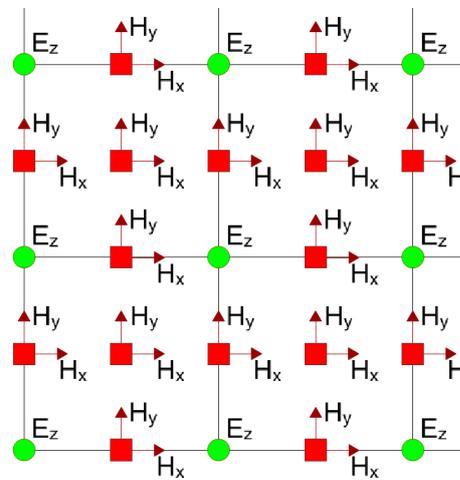


Figura 2.2: Discretização inicial de referência para o método CLDM.

Visando ilustrar o processo descrito, a Fig. 2.3a) mostra uma região de análise simétrica, onde a força resultante seria nula em todos os pontos (em um conjunto infinito de cargas). Já a Fig. 2.3b), mostra o deslocamento forçado de um nó por uma força externa controlada, gerando um desequilíbrio no sistema bem como tornando este ponto fixo, isto é, este não terá suas coordenadas alteradas por quaisquer forças existentes e, por fim, aplicando o Princípio da Energia Potencial Mínima, os nós da região de análise, mais especificamente os pontos móveis, serão reposicionados após sucessivas iterações temporais até atingirem o equilíbrio de forças, proporcionando uma distribuição de nós contrabalançada e uniforme na região de análise.

A atualização das coordenadas cartesianas de cada ponto, a cada iteração temporal,

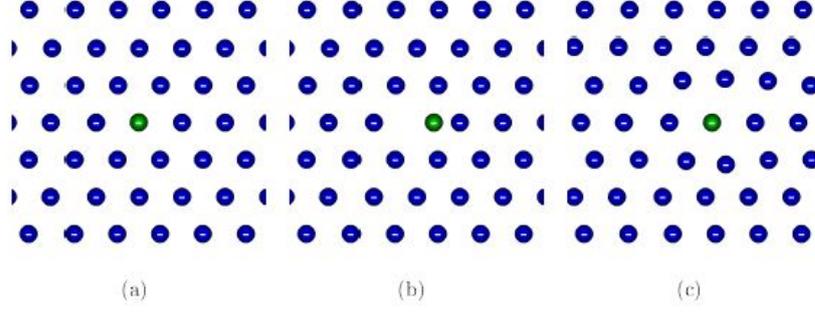


Figura 2.3: a) Discretização simétrica e em equilíbrio, b) Instabilidade gerada devido ao deslocamento e fixação de um ponto, c) Reposicionamento das cargas móveis buscando o equilíbrio.

pode ser deduzida a partir da segunda lei de Newton, dada por

$$\vec{F}_{Ri} = m_s \vec{a}_i = m_s \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial T}. \quad (2.40)$$

onde  $m_s$  é a massa do nó,  $\vec{v}_i$  a sua velocidade e  $T$  um instante qualquer.

Usando diferenças finitas, a equação (2.40) pode ser reescrita por

$$\vec{F}_{Ri}^T = m_s \frac{\vec{v}_i^T - \vec{v}_i^{T-\Delta T}}{\Delta T}. \quad (2.41)$$

Explicitando  $\vec{v}_i^T$  em (2.41), obtemos que

$$\vec{v}_i^T = \vec{F}_{Ri}^T \frac{\Delta T}{m_s} + \vec{v}_i^{T-\Delta T}, \quad (2.42)$$

onde  $\Delta T$  é o passo temporal utilizado no CLDM.

Utilizando novamente as diferenças finitas, podemos obter que

$$\vec{v}_i^T = \frac{\bar{x}_i^{T+\Delta T} - \bar{x}_i^T}{\Delta T}, \quad (2.43)$$

ou ainda

$$\bar{x}_i^{T+\Delta T} = \bar{x}_i^T + \vec{v}_i^T \Delta T. \quad (2.44)$$

Desta forma, combinando (2.42) e (2.44), obtém-se

$$\bar{x}_i^{T+\Delta T} = \bar{x}_i^T + \left( \vec{F}_{Ri}^T \frac{\Delta T}{m_s} + \vec{v}_i^{T-\Delta T} \right) \Delta T. \quad (2.45)$$

No desenvolvimento do CLDM, assumiu-se  $m_s = 1$  para todos os pontos da região de análise. Analisando (2.45), temos que o passo espacial é dado pelo vetor

$$\vec{\Delta}_{\vec{x}}^i = \left( \vec{F}_{Ri}^T \frac{\Delta T}{m_s} + \vec{v}_i^{T-\Delta T} \right) \Delta T \quad (2.46)$$

e

$$\Delta T = \frac{|\vec{\Delta}_{\vec{x}min}^{T-\Delta T}| / |\vec{v}_{max}^{T-\Delta T}|}{\Upsilon}, \quad (2.47)$$

onde  $|\vec{\Delta}_{\vec{x}min}^{T-\Delta T}|$  é a menor distância absoluta entre dois pontos no instante  $T - \Delta T$ ,  $|\vec{v}_{max}|$  é a máxima velocidade absoluta do ponto em  $T - \Delta T$  e  $\Upsilon$  é uma constante utilizada para garantir a estabilidade do método CLDM, determinada heurísticamente por  $\Upsilon \geq 10$ . Ressalta-se que o  $\Delta T$  utilizado em (2.41)-(2.47), não possui relação com o passo temporal do RPIM, definido como  $\Delta_t$  em (2.37).

A aplicabilidade de alterar as coordenadas de pontos específicos da região de análise, mediante a aplicação de forças externas ao sistema, possui grande utilidade para a representação de contornos entre materiais distintos. Desta forma, fixando uma certa quantidade de pontos nestas regiões de fronteira sob critérios pré-determinados [8], pode-se obter uma distribuição conformal de nós, representando adequadamente a interface entre regiões, conforme mostra a Fig. 2.4. Em seguida, com a instabilidade gerada pela movimentação de pontos que serão fixados nos contornos em questão, a Lei de Coulomb e a segunda lei de Newton, aplicadas em conjunto, garantem que se satisfaça o Princípio da Energia Potencial Mínima, de forma a reestabelecer o equilíbrio do sistema, através da movimentação das cargas móveis e atualizando suas coordenadas pela equação (2.45), permitindo obter conformidade e uniformidade na distribuição de pontos, garantindo suavidade entre geometrias diferentes. Ressalta-se, ainda, que para permitir a truncagem da Lei de Coulomb em um domínio de análise finito, foi implementada na técnica CLDM uma região de borda  $Rb$ , em torno da região de análise, composta somente de cargas fixas e de tamanho suficientemente grande para permitir a estabilidade do método, de tal forma a garantir que as cargas móveis no interior da região de análise permaneçam contidas naquela região, conforme ilustrado na Fig. 2.5.

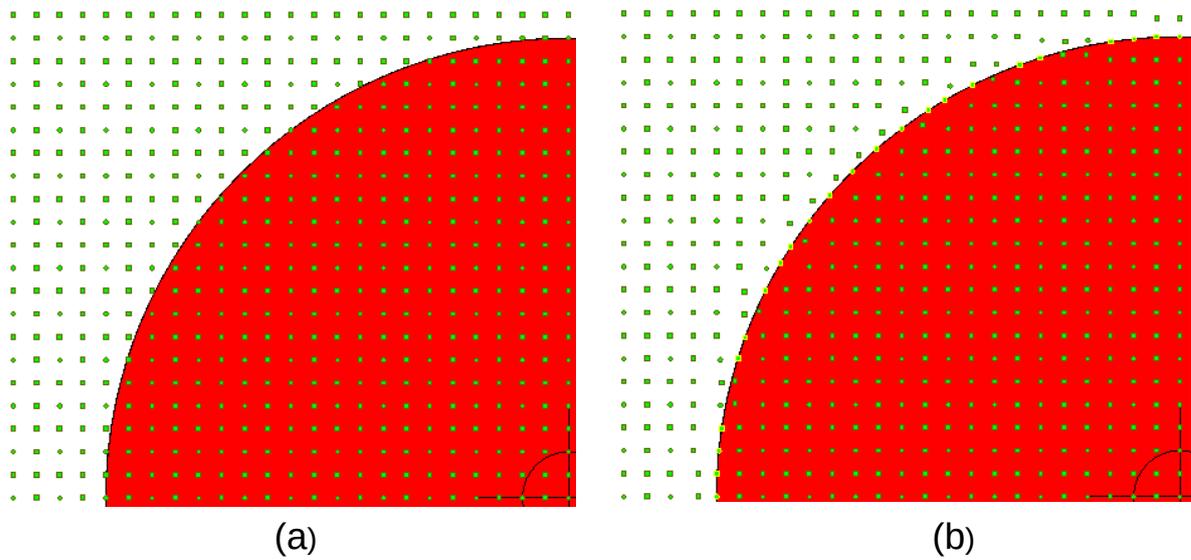


Figura 2.4: Deslocamento de pontos para representação de contornos, convertidos em nós fixos.

A principal contribuição deste método (no caso específico do RPIM) é a distribuição uniforme dos nós dentro dos domínios de suporte, propiciando baixo erro de interpolação aliada à alta precisão da definição da interface entre diferentes materiais e à adequação dos pontos posicionados, onde tais distribuições de pontos são conformais (ou seja, compatíveis geometricamente com as formas não-retangulares). Por fim, ressalta-se que as condições de contorno são impostas nos pontos fixos, que definem as linhas de interface entre materiais distintos.

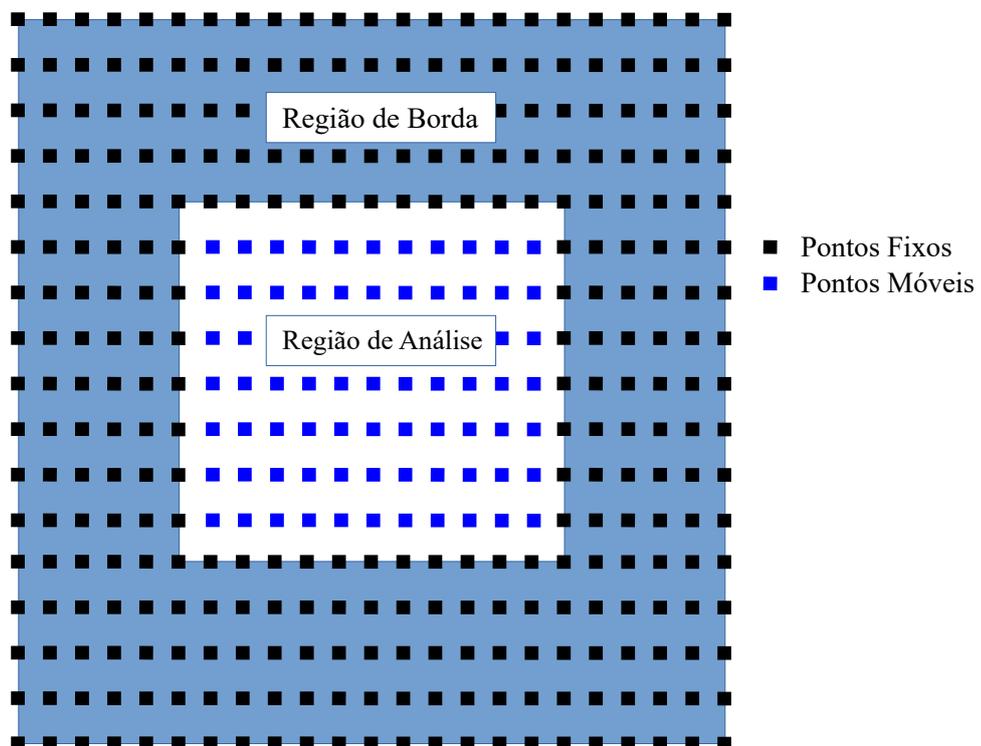


Figura 2.5: Região de borda  $R_b$ , composta de cargas fixas, envolvendo a região de análise.

## Capítulo 3

# O Método Electric Charge Gaussian Gradation Method (ECGGM)

### 3.1 Conteúdo do Capítulo

Este capítulo apresenta o desenvolvimento da técnica ECGGM, introduzida pela primeira vez na literatura, a qual é baseada no método CLDM (Coulomb's Law Discretization Method). A técnica apresentada busca controlar o grau de discretização espacial em regiões específicas, proporcionando precisão, estabilidade e menor esforço computacional à simulação numérica.

### 3.2 Electric Charge Gradation Gaussian Method (ECGGM)

Um dos fatores críticos do método CLDM é a existência de uma força externa para a definição da interface entre diferentes materiais, pois caso haja uma movimentação brusca de algum nó, a força elétrica resultante poderá causar uma instabilidade no sistema e, conseqüentemente, um resultado pouco preciso é gerado quando o método RPIM for

aplicado. A Fig. 3.1a) ilustra uma possível situação de quando uma instabilidade pode ocorrer.

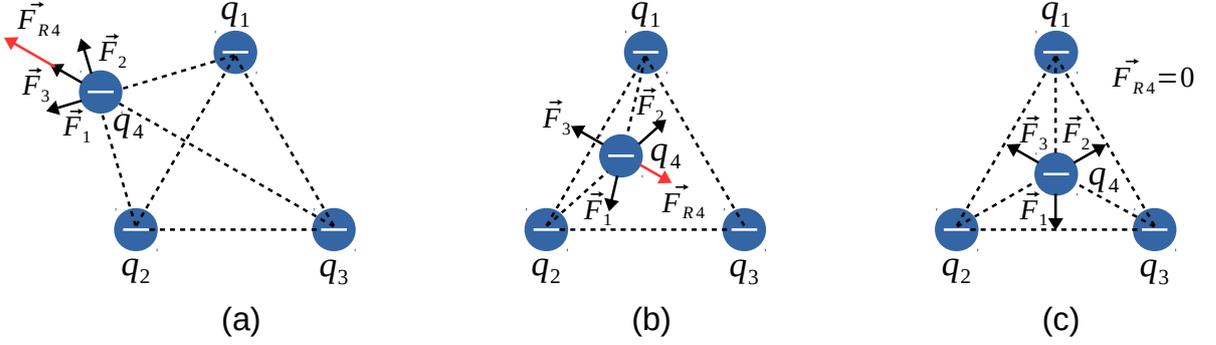


Figura 3.1: Análise da força elétrica resultante num sistema de quatro partículas com mesma carga: Neste caso, apenas  $q_4$  é um nó livre: (a) quando  $q_4$  é inicialmente posicionada fora do triângulo,  $F_{R4}$  a empurra para fora, (b) a carga  $q_4$  é arrastada por  $F_{R4}$  ao ponto de equilíbrio c) a carga  $q_4$  no ponto de equilíbrio de forças ( $F_{R4}=0$ ).

O Electric Charge Gradation Gaussian Method (ECGGM), proposto neste trabalho, se baseia nos mesmos princípios físicos do CLDM: A lei de Coulomb, a segunda lei de Newton e o princípio da energia potencial mínima. Entretanto, esta nova técnica elimina a necessidade de quaisquer forças externas, alterando de forma controlada a magnitude das cargas atribuídas para cada nó, fazendo com que a definição da interface entre diferentes materiais seja alcançada naturalmente pelas sucessivas iterações temporais da segunda lei de Newton, excitada pela lei de Coulomb, de forma a se atingir o estado de energia potencial mínima do sistema.

Neste trabalho, o método ECGGM foi implementado usando uma distribuição Gaussiana dos valores de carga elétrica assumido pelos nós, definida por

$$q_i = 1 - (1 - q_{min})e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \quad (3.1)$$

e

$$q_i = q_{min} - (q_{min} - 1)e^{-\frac{\rho^2}{2\sigma^2}} \quad (3.2)$$

sendo o mínimo da função controlado pelo fator  $q_{min}$ , que é uma variável do sistema, onde (3.1) foi aplicada ao espalhador da Fig. 3.2 e a equação (3.2) aplicada aos espalhadores das Figs. 3.3 e 3.4. Observe que a variável  $\rho$  pode ser igual a zero no centro, circuncentro ou baricentro do espalhador de interesse (veja as Figs. 3.3 e 3.4, por exemplo). Esta variação da função Gaussiana para os diferentes espalhadores faz-se necessária devido a existência de bordas e vértices dos espalhadores ilustrados pelas Figs. 3.3 e 3.4, onde a convergência de nós para estas regiões deve ser mais intensa. Isso é possível com o devido controle das repulsões mútuas existentes entre as cargas próximas às regiões de borda e vértice dos objetos espalhadores de campo. Desta forma, podemos obter um maior número de pontos para representar estas regiões onde difrações e reflexões ocorrem, produzindo importantes gradientes de campo.

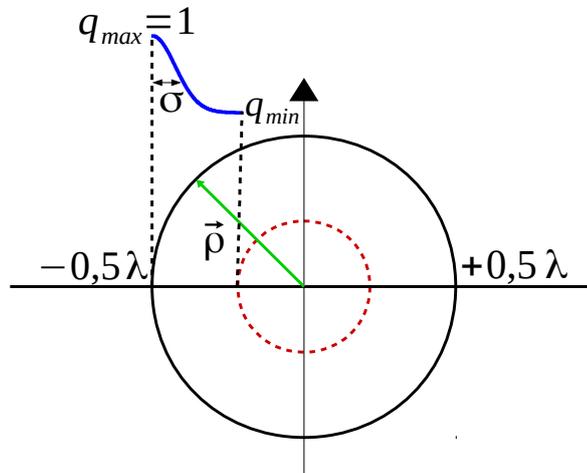


Figura 3.2: Análise do espalhador cilíndrico circular condutor com referência no centro. O círculo vermelho é a região de referência onde a função Gaussiana atinge seu mínimo.

Para as equações apresentadas em (3.1) e (3.2), estas foram modeladas baseadas em uma simetria radial com seus valores controlados pela variável  $\rho$ , que é a distância do

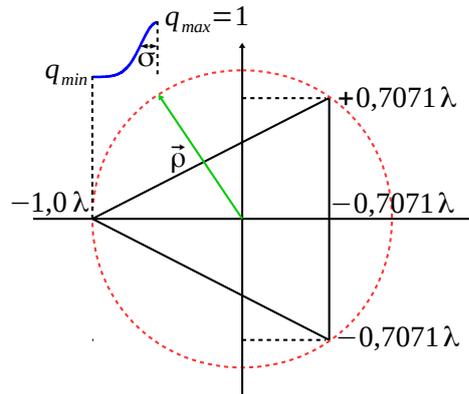


Figura 3.3: Análise do espalhador cilíndrico triangular condutor com referência no centro. O círculo vermelho é a região de referência onde a função Gaussiana atinge seu mínimo.

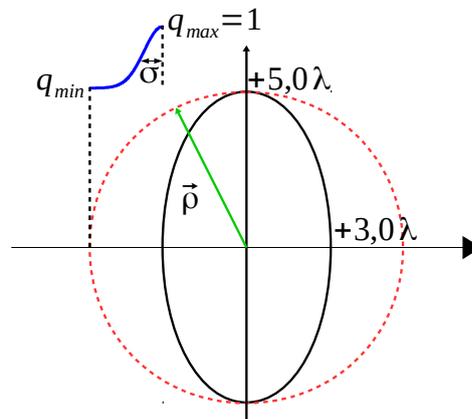


Figura 3.4: Análise do espalhador cilíndrico elíptico condutor com referência no centro. O círculo vermelho é a região de referência onde a função Gaussian atinge seu mínimo.

centro do espalhador para um nó qualquer (no cilindro triangular, este ponto de referência é o circuncentro). Entretanto, há um condição preliminar para que o módulo da carga de qualquer nó seja alterado: este ponto deve estar no interior do espalhador, onde mesmo que a função gaussiana matematicamente atinja pontos fora do espalhador, o módulo da carga de pontos externos não serão alterados. Esta condição garante uma maior densidade de pontos em regiões como vértices, aumentando a precisão da solução de problemas eletromagnéticos obtida com o método RPIM para solucionar as equações de Maxwell.

Em todos os casos apresentados, utilizou-se como desvio padrão para a função Gaussiana  $\sigma = 8\Delta x$ , onde  $\Delta x$  é o afastamento entre pontos utilizado na inicialização do problema (*grid* retangular) [8] e possui o valor de  $\Delta x = \lambda/20 = 0,05$  m. As figuras 3.5 - 3.7 ilustram a aplicação da gradação da magnitude das cargas, através de um gradiente de cores.

Esta técnica, após aplicar a gradação de cargas aos diferentes tipos de espalhadores, utiliza o método CLDM já em seu quarto estágio: reposicionamento dos nós de forma iterativa. Desta forma, devido a força elétrica resultante (2.39), os grupos de pontos móveis iniciam um movimento de convergência para o espalhador de tal forma que o sistema de partículas alcance o seu estado de energia potencial mínima, onde uma vez que os nós atinjam a interface do espalhador, estes são convertidos em pontos fixos.

No caso particular deste trabalho, somente o modo Transversal Magnético  $z$  (TM $_z$ ) foi considerado, no qual quando se analisam as condições de contorno em superfícies metálicas para este problema, somente o campo elétrico (que se encontra paralelo ao eixo  $z$ ), é forçado a zero na interface do espalhador. Assim, os nós que representam o campo magnético na região de análise devem ser convertidos em fixos imediatamente antes da interface do espalhador, visando manter a coerência com as condições de contorno. Para solucionar esta questão, em todos os casos deste trabalho, foram criadas superfícies idênticas a geometria dos espalhadores com uma área 1% maior, servindo de referência para a fixação dos pontos magnéticos na vizinhança imediata da interface metálica. Esta solução também previne que estes nós penetrem no interior do espalhador.

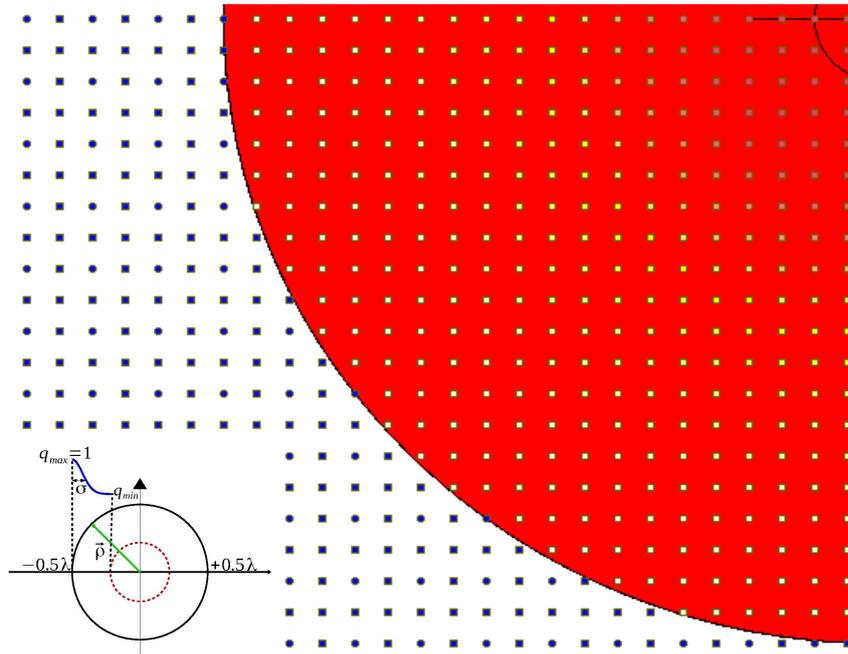


Figura 3.5: Representação da magnitude das cargas no interior do espalhador cilíndrico circular.

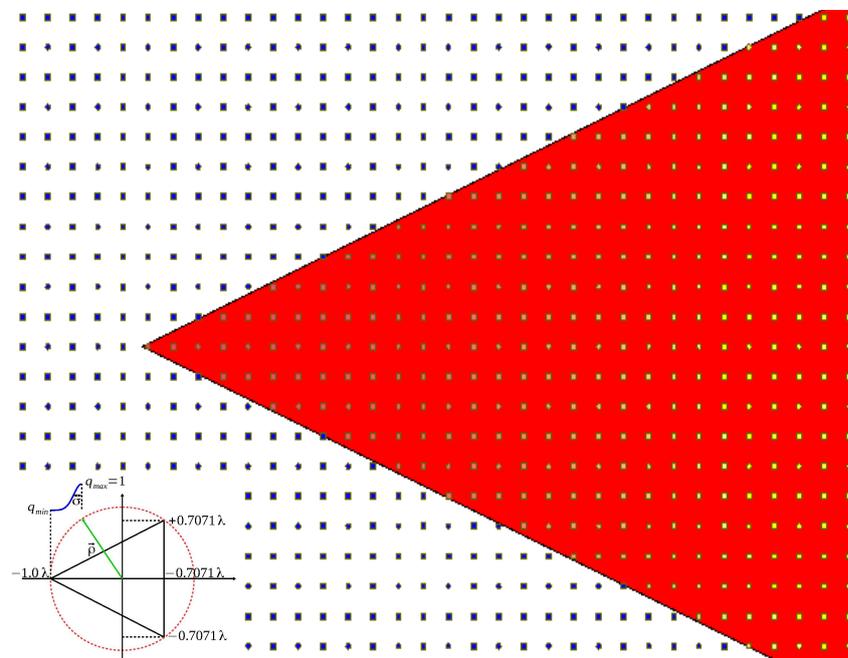


Figura 3.6: Representação da magnitude das cargas no interior do espalhador cilíndrico triangular.

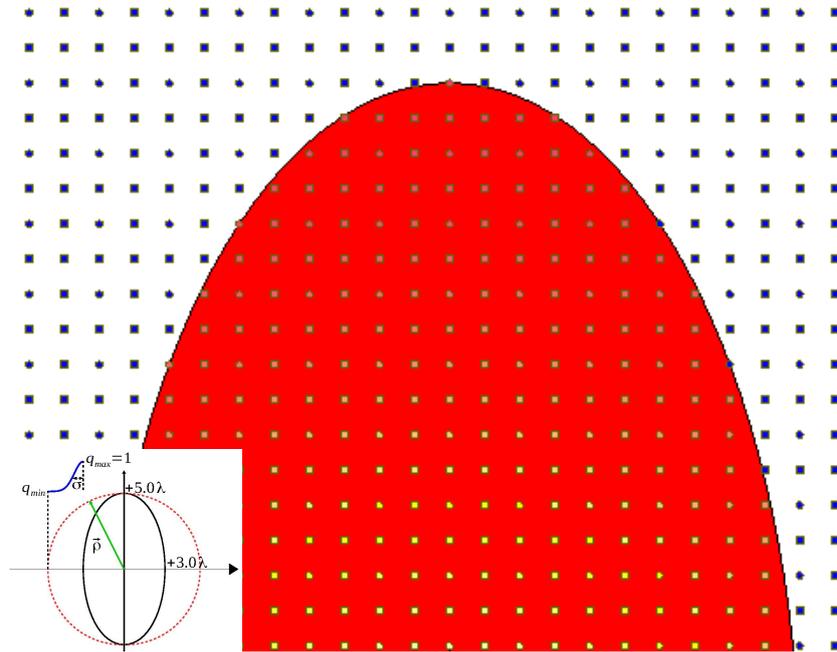


Figura 3.7: Representação da magnitude das cargas no interior do espalhador cilíndrico elíptico.

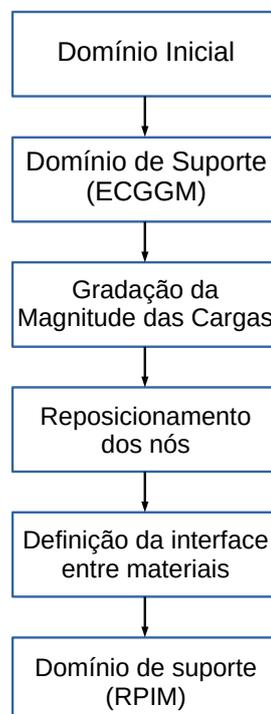


Figura 3.8: Fluxograma ilustrativo das etapas do ECGGM.

### 3.3 Qualidade da Discretização Espacial e Avaliação do Erro

Em virtude dos métodos *meshless* não possuírem uma malha estruturada, a representatividade da região de análise através da distribuição dos pontos deve ser avaliada. Desta forma, visando manter os mesmos parâmetros de avaliação do método CLDM descrito em [8], também foi usada neste trabalho a mesma quantificação para avaliar o erro de interpolação espacial para o método ECGGM, que foi definida em [7] como

$$E_{rr}^a \% = 100 \times \left[ \frac{f^a(\bar{x}) - f(\bar{x})}{f(\bar{x})} \right], \quad (3.3)$$

onde  $f(\bar{x})$  é o valor exato de uma função de referência (definida para o domínio de suporte relacionado) em  $\bar{x}$  e  $f^a(\bar{x})$  é o valor obtido através da interpolação usando como função de referência  $f(\bar{x}) = \sin(kx) + \sin(ky)$ . Desta forma, a qualidade espacial da malha foi definida como  $Q = 1/\max(|E_{rr}^a \%|)$ .

Além disso, no caso do espalhador cilíndrico circular mostrado na Fig. 3.2, o qual é o único usado neste trabalho que possui uma solução analítica exata, os resultados obtidos numericamente pelo RCS foram comparados utilizando uma segunda métrica de erro, a Raiz do Erro Médio Quadrático (RMSE) definida por

$$RMSE = \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{[f^a(\bar{x}) - f(\bar{x})]^2}{n}}. \quad (3.4)$$

A métrica definida em 3.4 é uma medida global de qualidade média para se avaliar todo o sinal  $f^a(\bar{x})$ , que tem  $n$  amostras.

# Capítulo 4

## ADE-PML para o método RPIM

### 4.1 Conteúdo do Capítulo

Este capítulo apresenta o desenvolvimento de uma formulação *meshless* baseada na técnica técnica ADE-PML (*Auxiliary-Differential Equation Perfectly Matched Layer*), a qual é aplicada ao método RPIM (*Radial Point Interpolation Method*).

### 4.2 Formulação ADE-PML para o Método RPIM

Em coordenadas retangulares e no domínio da frequência, as equações de Maxwell podem ser descritas para a região absorvente utilizando coordenadas estendidas (*stretched coordinates*) [17], [9, 14], de tal forma que os campos são regidos por

$$\nabla_s \times \mathbf{H} = jw\mathbf{D}, \quad (4.1)$$

e

$$\nabla_s \times \mathbf{E} = -jw\mu\mathbf{H}, \quad (4.2)$$

onde o operador  $\nabla_s$  é definido no espaço estendido, usando-se a notação compacta de [14], por

$$\nabla_s = \hat{a}_x S_x^{-1} \partial x + \hat{a}_y S_y^{-1} \partial y + \hat{a}_z S_z^{-1} \partial z. \quad (4.3)$$

Em (4.3),  $S_\alpha$  é definido por

$$S_\alpha = 1 + \frac{\sigma_\alpha}{jw\varepsilon_0}, \quad (4.4)$$

com  $\alpha = x, y$  ou  $z$ . Calculando-se  $S_\alpha^{-1}$ , chega-se a

$$S_\alpha^{-1} = jw/(jw + \sigma_\alpha/\varepsilon_0) = 1 - (\sigma_\alpha/\varepsilon_0)/(jw + \sigma_\alpha/\varepsilon_0). \quad (4.5)$$

Utilizando o modo Transversal Magnético  $z$  (TM $z$ ), temos que através de (4.1) e (4.3) a equação

$$jw\tilde{D}_z = S_x^{-1}\partial_x\tilde{H}_y - S_y^{-1}\partial_y\tilde{H}_x \quad (4.6)$$

para a componente  $z$  do vetor  $\mathbf{D}$ . Utilizando (4.5) e (4.6), obtemos

$$jw\tilde{D}_z = \partial_x\tilde{H}_y - \tilde{f}_{zx} - \partial_y\tilde{H}_x + \tilde{f}_{zy}, \quad (4.7)$$

onde  $\tilde{f}_{zx}$  e  $\tilde{f}_{zy}$  são variáveis auxiliares dadas por

$$\tilde{f}_{zx} = (\sigma_x/\varepsilon_0)\partial_x\tilde{H}_y/(jw + \sigma_x/\varepsilon_0) \quad (4.8)$$

e

$$\tilde{f}_{zy} = (\sigma_y/\varepsilon_0)\partial_y\tilde{H}_x/(jw + \sigma_y/\varepsilon_0). \quad (4.9)$$

Visando aplicar a transformada inversa de Fourier às equações (4.8) e (4.9), podemos escrever as referidas expressões da seguinte forma:

$$jw\tilde{f}_{zx} + (\sigma_x/\varepsilon_0)\tilde{f}_{zx} = (\sigma_x/\varepsilon_0)\partial_x\tilde{H}_y \quad (4.10)$$

e

$$jw\tilde{f}_{zy} + (\sigma_y/\varepsilon_0)\tilde{f}_{zy} = (\sigma_y/\varepsilon_0)\partial_y\tilde{H}_x. \quad (4.11)$$

A transformada inversa de Fourier aplicada a (4.7), (4.10) e (4.11), produz, respectivamente, as seguintes expressões no domínio do tempo:

$$\partial_t D_z = \partial_x H_y - f_{zx} - \partial_y H_x + f_{zy}, \quad (4.12)$$

$$\partial_t f_{zx} + (\sigma_x/\varepsilon_0)f_{zx} = (\sigma_x/\varepsilon_0)\partial_x H_y \quad (4.13)$$

e

$$\partial t f_{zy} + (\sigma_y/\varepsilon_0) f_{zy} = (\sigma_y/\varepsilon_0) \partial y H_x. \quad (4.14)$$

Utilizando aproximações centradas para discretizar as derivadas temporais e aproximações *meshless* baseadas em funções de forma [3] para as derivadas espaciais dos campos  $H_x$  e  $H_y$ , temos para a equação (4.12) a seguinte equação de atualização para  $D_z$ , baseada no método RPIM:

$$D_z^{n+1}(i) = D_z^n(i) + \Delta t \left( \sum_j^{n_p} H_y^n(j) \frac{\partial \phi_j}{\partial x} - \sum_j^{n_p} H_x^n(j) \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) - \Delta t (f_{zx}^{n+1} + f_{zx}^n)/2 + \Delta t (f_{zy}^{n+1} + f_{zy}^n)/2. \quad (4.15)$$

Em (4.15),  $n_p$  é a quantidade de pontos no domínio de suporte utilizado para realizar a interpolação corrente. Ressalta-se que esta quantidade varia na região de análise.

Utilizando raciocínio análogo para as variáveis auxiliares  $f_{zx}$  e  $f_{zy}$ , as equações (4.13) e (4.14) podem ser aproximadas por

$$(f_{zx}^{n+1} - f_{zx}^n)/\Delta t + \sigma_x(i)(f_{zx}^{n+1} + f_{zx}^n)/2\varepsilon_0 = \sigma_x(i)/\varepsilon_0 \left( \sum_j^{n_p} H_y^n(j) \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right) \quad (4.16)$$

e

$$(f_{zy}^{n+1} - f_{zy}^n)/\Delta t + \sigma_y(j)(f_{zy}^{n+1} + f_{zy}^n)/2\varepsilon_0 = \sigma_y(j)/\varepsilon_0 \left( \sum_j^{n_p} H_x^n(j) \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right). \quad (4.17)$$

Ou ainda:

$$f_{zx}^{n+1} = g_{zx_1}(i) f_{zx}^n + g_{zx_2}(i) \left( \sum_j^{n_p} H_y^{N_t}(j) \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right), \quad (4.18)$$

$$f_{zy}^{n+1} = g_{zy_1}(j) f_{zy}^n + g_{zy_2}(j) \left( \sum_j^{n_p} H_x^{N_t}(j) \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right). \quad (4.19)$$

As variáveis auxiliares  $g_{zx_1}$ ,  $g_{zx_2}$ ,  $g_{zy_1}$  e  $g_{zy_2}$ , são definidas por

$$g_{zx_1} = (1 - \alpha_x(i))/(1 + \alpha_x(i)), \quad (4.20)$$

$$g_{zx_2} = 2\alpha_x(i)/(1 + \alpha_x(i)), \quad (4.21)$$

$$g_{zy_1} = (1 - \alpha_y(j))/(1 + \alpha_y(j)), \quad (4.22)$$

e

$$g_{zy_2} = 2\alpha_y(j)/(1 + \alpha_y(j)). \quad (4.23)$$

Os parâmetros  $\alpha_x(i)$  e  $\alpha_y(j)$  são dados por

$$\alpha_x(i) = \Delta t \sigma_x(i) / 2\varepsilon_0, \quad (4.24)$$

e

$$\alpha_y(j) = \Delta t \sigma_y(j) / 2\varepsilon_0. \quad (4.25)$$

Utilizando desenvolvimento análogo, obtemos as seguintes equações de atualização para os campos  $H_x$  e  $H_y$ :

$$H_x^{n+1}(i) = H_x^n(i) - \frac{\Delta t}{\mu} \left( \sum_j^{n_p} E_z^n(j) \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) + \frac{\Delta t}{\mu} (f_{xz}^{n+1} + f_{xz}^n) / 2 \quad (4.26)$$

e

$$H_y^{n+1}(i) = H_y^n(i) + \frac{\Delta t}{\mu} \left( \sum_j^{n_p} E_z^n(j) \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right) - \frac{\Delta t}{\mu} (f_{yz}^{n+1} + f_{yz}^n) / 2. \quad (4.27)$$

Para concluir a formulação, as condutividades artificiais [9]  $\sigma_x(x)$  e  $\sigma_y(y)$  nas paredes absorventes, que efetivamente produzem a atenuação dos campos, são dadas por

$$\sigma_x(x) = \begin{cases} \left( \frac{|x-x_1|}{L_x} \right)^m \sigma_{xmax} & , \text{ se } x \leq x_1 \\ 0 & , \text{ se } x_1 < x < x_2 \\ \left( \frac{|x-x_2|}{L_x} \right)^m \sigma_{xmax} & , \text{ se } x \geq x_2 \end{cases} \quad (4.28)$$

e

$$\sigma_y(y) = \begin{cases} \left( \frac{|y-y_1|}{L_y} \right)^m \sigma_{ymax} & , \text{ se } y \leq y_1 \\ 0 & , \text{ se } y_1 < y < y_2 \\ \left( \frac{|y-y_2|}{L_y} \right)^m \sigma_{ymax} & , \text{ se } y \geq y_2 \end{cases} \quad (4.29)$$

onde a condutividade artificial máxima  $\sigma_{\alpha max}$ , é dada por

$$\sigma_{\alpha max} = \beta \frac{1+m}{15\pi L_\alpha}, \quad (4.30)$$

$x$  e  $y$  são as coordenadas (em metros) do ponto considerado da ADE-PML,  $\beta$  é um fator de calibração (obtido através de experimentação numérica),  $\alpha = x$  ou  $y$  e  $x_1, y_1, x_2$  e  $y_2$  são as coordenadas (em metros) que definem as interfaces entre as camadas absorventes e a região de análise,  $L_\alpha = L_x$  ou  $L_y$  são as espessuras das camadas absorventes (em metros) e  $m$  é o grau do polinômio que define o perfil de variação da curva da condutividade. Os resultados obtidos através da formulação ADE-PML para o método RPIM, desenvolvida neste trabalho, são apresentados no Capítulo 5, no qual também mostra-se uma análise de eficiência de absorção para a presente formulação.

# Capítulo 5

## Resultados Numéricos

### 5.1 Validação do Método ECGGM

#### 5.1.1 Caso de Validação 1 - RCS do Espalhador Cilíndrico Circular

Para validar a técnica proposta neste trabalho, o ECGGM foi aplicado primeiramente ao espalhador cilíndrico circular da Fig. 3.2 que possui um raio de  $r = 0,5\lambda$ . Essa geometria, para fins de comparação, possui uma solução analítica exata descrita em [18]. Por esta razão, este caso foi amplamente explorado neste trabalho, através da gradação do parâmetro  $q_{min}$  definido em (3.1) entre o intervalo  $[0,2;0,9]$  com um passo de 0,1.

Para fins de ilustração, a Fig. 5.1 mostra a distribuição espacial de  $|E_z|$ , excitado por uma onda plana e espalhado pelo cilindro condutor circular, para diversos valores de  $t$ . A Fig. 5.2 mostra o RCS obtido utilizando RPIM-ECGGM, FDTD (método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo) [19] e a solução analítica exata dada em [18]. Para o FDTD, a discretização espacial foi definida como  $\lambda/20$ . Pode-se observar que a solução obtida com a técnica proposta é quase idêntica à solução analítica exata. Entretanto, uma sensível diferença, com valor máximo da ordem de 5% em relação à solução exata, pode ser notada no intervalo de 70 a 100 graus.

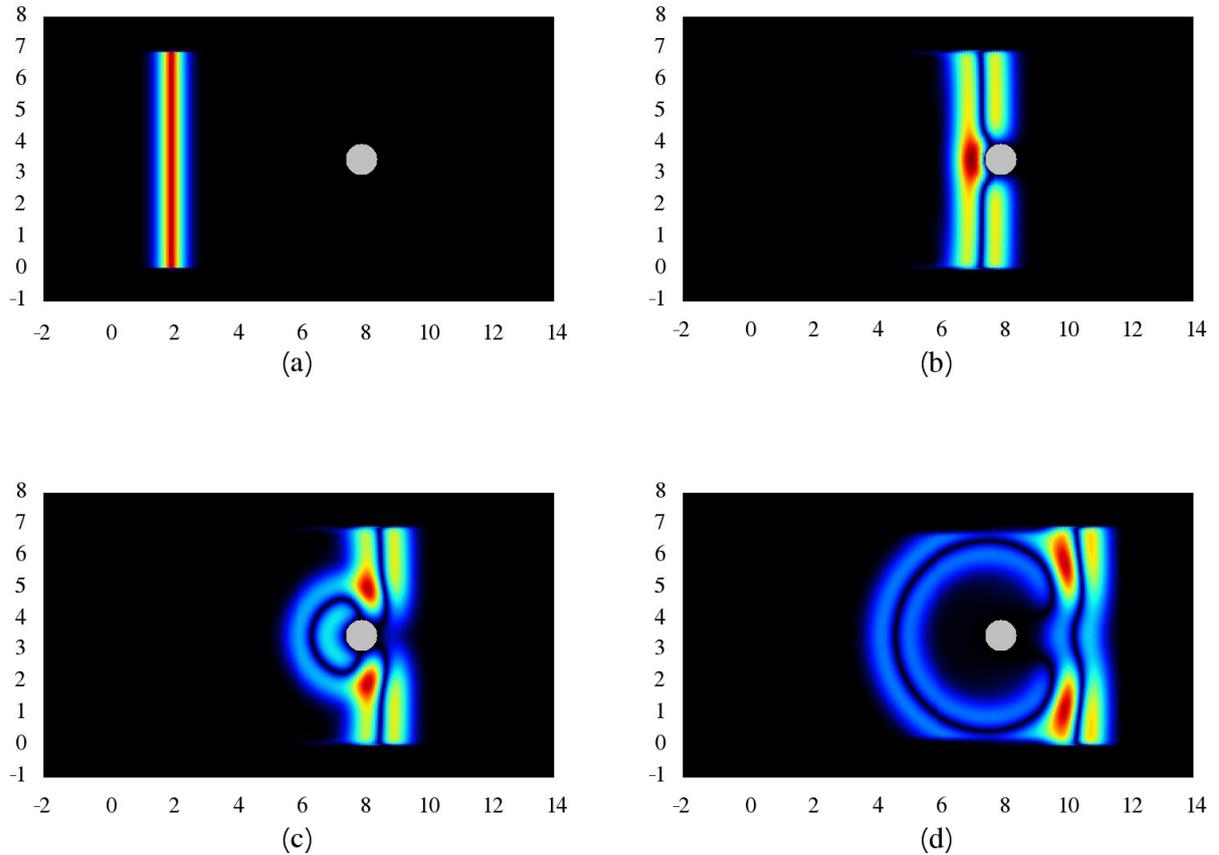


Figura 5.1: Distribuição espacial de  $|E_z|$  (campo total) para o espalhador circular (caso 1): (a)  $t = 10,0$  ns, (b)  $t = 30,0$  ns, (c)  $t = 34,0$  ns, (d)  $t = 40,0$  ns.

Já as Figs. 5.3 e 5.4 ilustram o Erro Relativo Máximo (MRE) e a Raiz do Erro Médio Quadrático (RMSE), obtidos para o RCS do cilindro circular em função das iterações ECGGM-CLDM por diversos valores de  $q_{min}$ . Uma observação importante em ambas as figuras é que, para cada valor de  $q_{min}$ , MRE e RMSE tendem a diminuir à medida que as iterações ECGGM-CLDM aumentam. Nota-se também que, para a maioria dos valores testados para o parâmetro  $q_{min}$ , a convergência é obtida por volta de 90 iterações. Além disso, quando  $q_{min} = 0,8$  é utilizado, obtêm-se os valores de MRE de cerca de 5% e RMSE de 0,04 utilizando 50 iterações. Desta forma, o RCS mostrado na Fig. 5.2 e os arranjos espaciais de pontos mostrados na Fig. 5.5 foram obtidos utilizando  $q_{min} = 0,8$ .

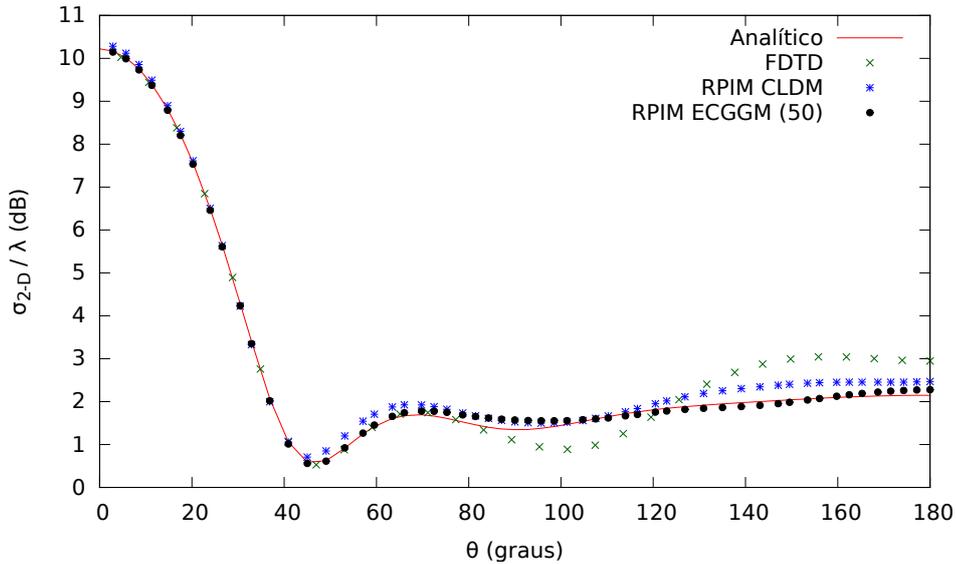


Figura 5.2: RCS para cilindro circular vs ângulo de observação (caso de validação 1), com espaçamento de  $\lambda/20$  (grid inicial), obtido com  $q_{min} = 0, 8$  e 50 iterações ECGGM-CLDM.

Ressalta-se que, no método CLDM sem modificações, são necessárias 150 iterações para a obtenção de convergência associada a um erro mínimo [8], onde pode-se ver ainda nas Figs. 5.3 e 5.4, que o método CLDM apresenta índices MRE e RMSE bem elevados quando comparados ao método ECGGM, evidenciando a eficiência da técnica desenvolvida. Uma observação interessante é que, as convergências para os diversos valores de  $q_{min}$ , foram atingidas quando 76 pontos fixos estavam sendo utilizados para definir a interface do espalhador metálico, equivalendo a aproximadamente 24,2 pontos por comprimento de onda sobre o perímetro circular.

A Fig. 5.6 ilustra a RCS obtida para os diversos valores de  $q_{min}$  quando a interface do espalhador metálico atinge 76 pontos, onde nota-se a convergência destas em todos os casos. Ressalta-se que, a diferença existente no intervalo de 70 a 100 graus, permanece na ordem de 5% independente do valor adotado para  $q_{min}$ .

Aplicando a técnica desenvolvida a outros valores de afastamento entre pontos (grid inicial), as Figs. 5.7 e 5.8 ilustram as curvas RCS obtidas para  $\lambda/10$  e  $\lambda/30$ , respectivamente. Nota-se, novamente, o aumento da precisão da simulação numérica quando a

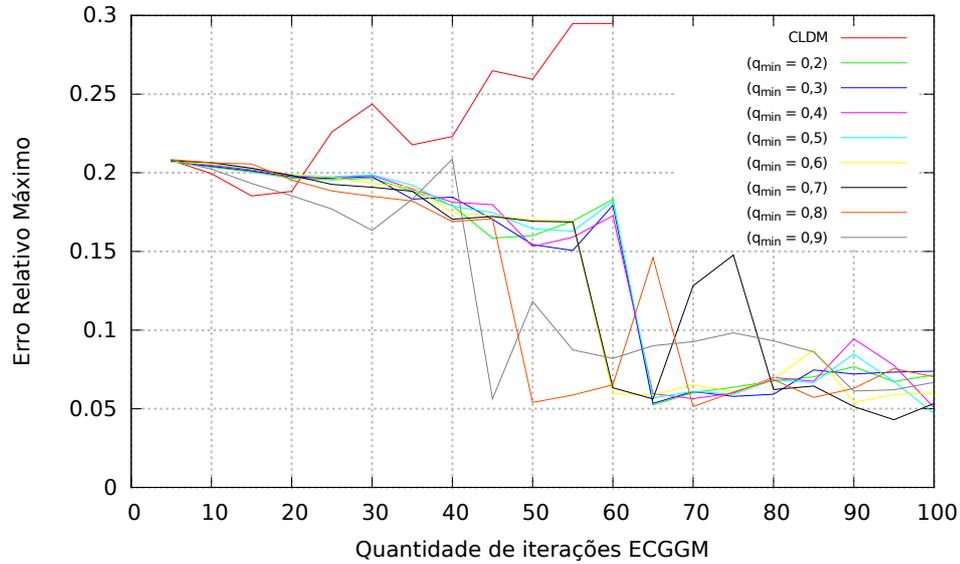


Figura 5.3: Erro relativo máximo para ECGGM obtido para  $0,2 \leq q_{min} \leq 0,9$  com espaçamento entre pontos de  $\lambda/20$  (grid inicial), para o caso de validação 1.

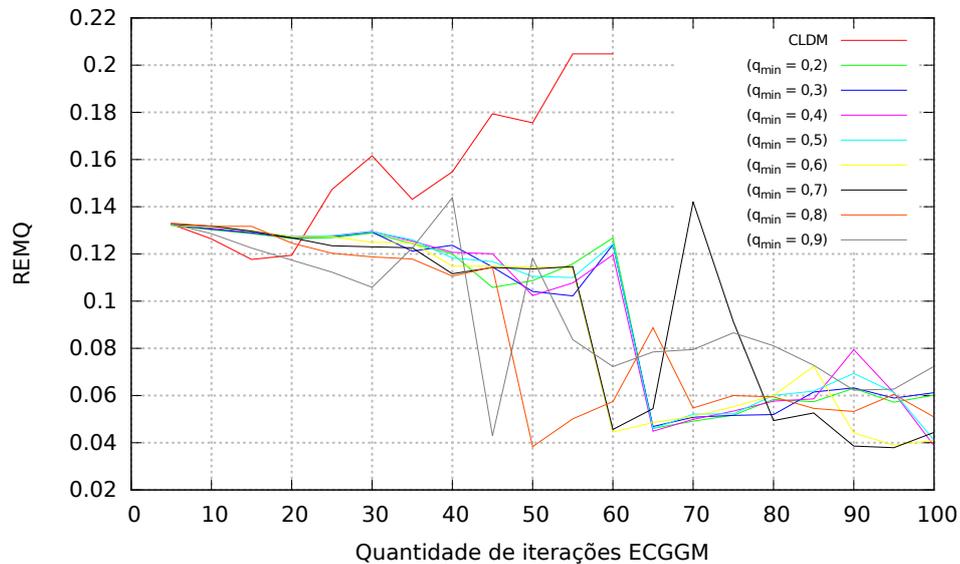


Figura 5.4: RMSE para ECGGM obtido para  $0,2 \leq q_{min} \leq 0,9$  com espaçamento entre pontos de  $\lambda/20$  (grid inicial), para o caso de validação 1.

técnica ECGGM é aplicada, em relação ao CLDM, onde a tabela 5.1 apresenta os resultados obtidos de Erro Relativo Máximo (MRE) e a Raiz do Erro Médio Quadrático

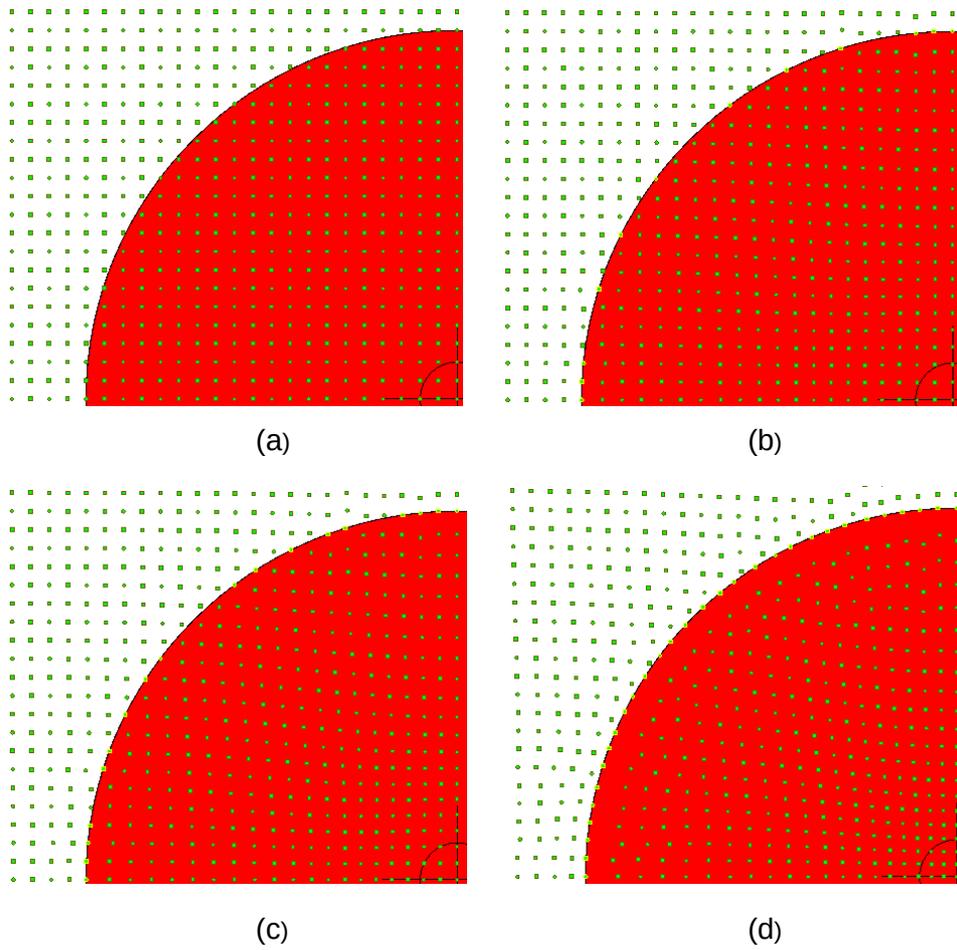


Figura 5.5: Aplicação de ECGGM em torno do espalhador circular (setor  $90^\circ$ ) usando  $q_{min} = 0,8$ . Reposicionamento dos nós após (a) zero iterações (malha retangular de referência inicial) , (b) 25 iterações, (c) 50 iterações, (d) 100 iterações.

(RMSE), para diversos valores de espaçamento entre pontos.

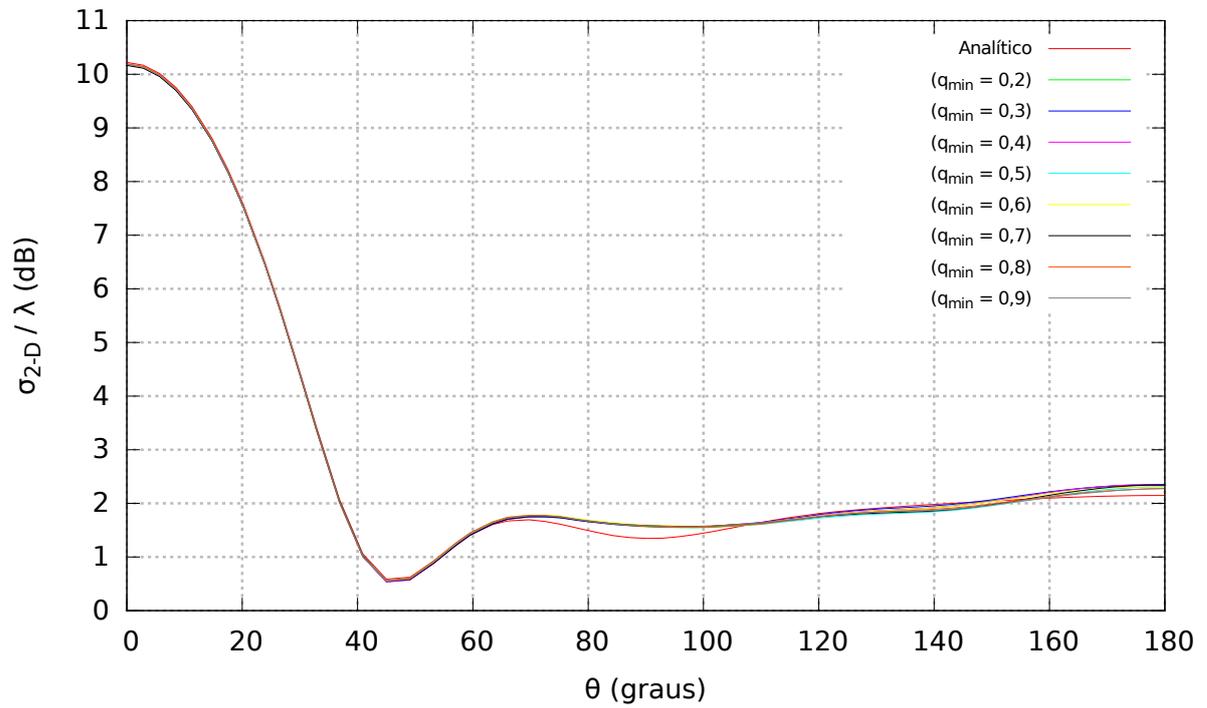


Figura 5.6: RCS para cilindro circular vs ângulo de observação para  $q_{min} = [0,2;0,9]$ , com espaçamento de  $\lambda/20$  (grid inicial).

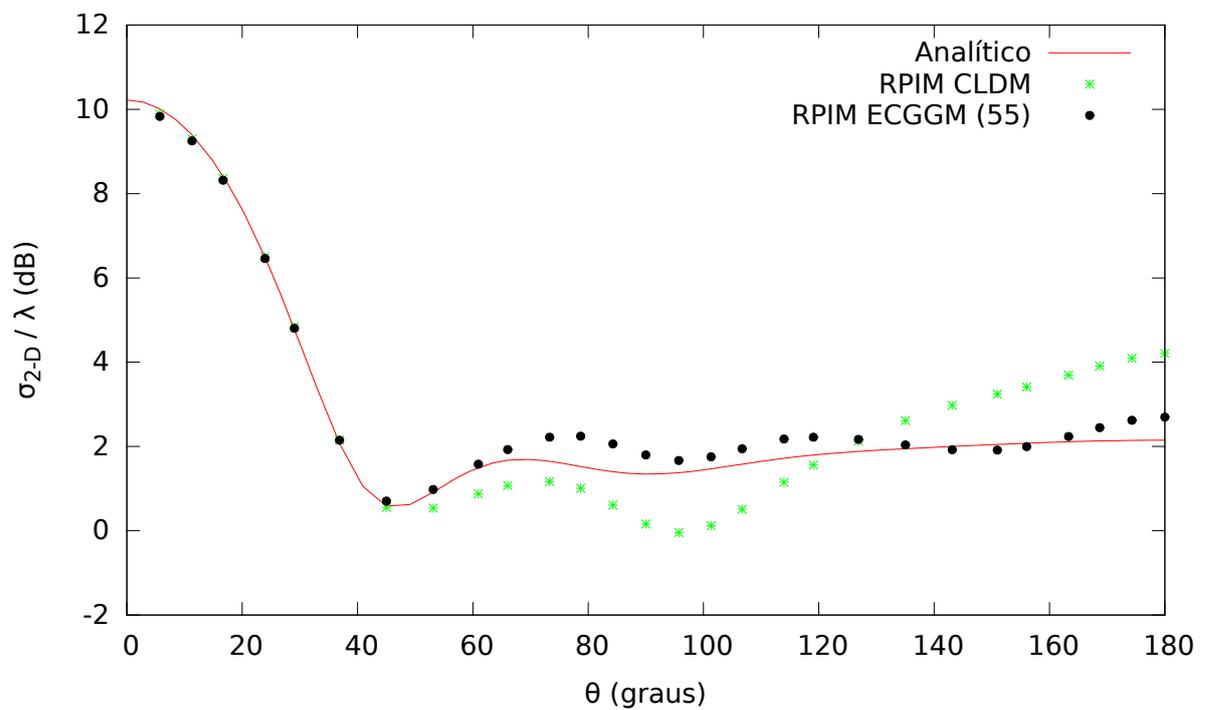


Figura 5.7: RCS para cilindro circular vs ângulo de observação (caso de validação 1), com espaçamento de  $\lambda/10$  (grid inicial).

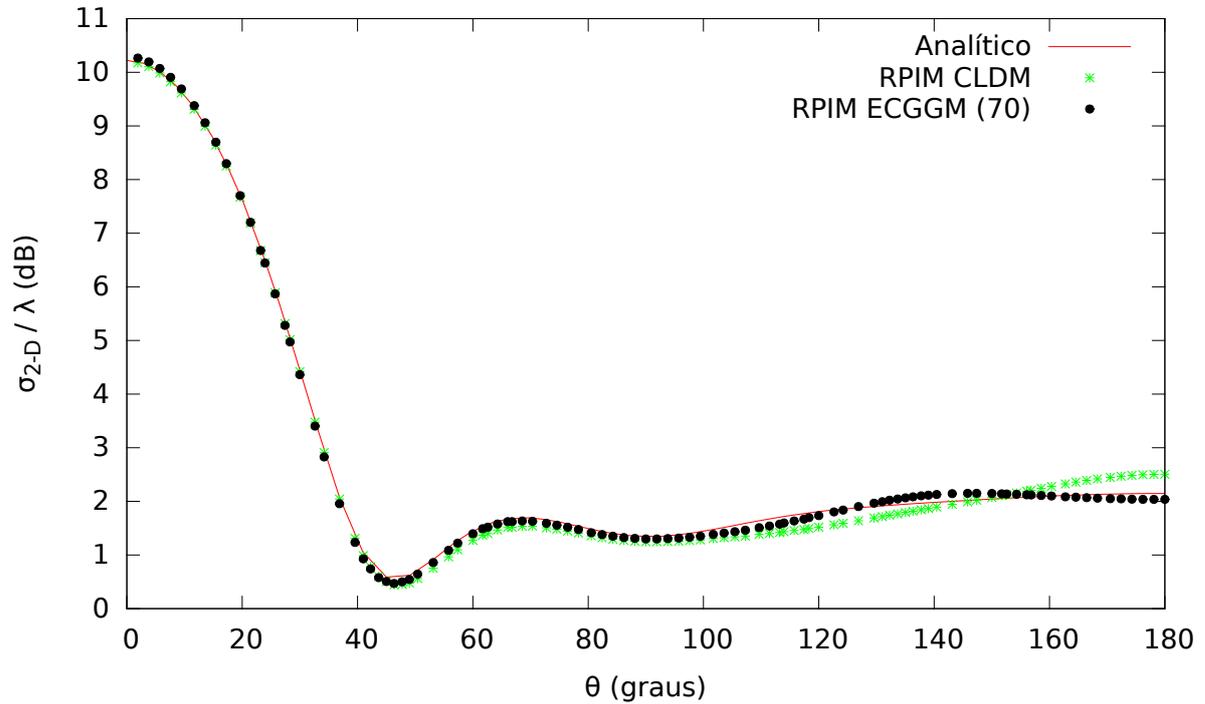


Figura 5.8: RCS para cilindro circular vs ângulo de observação (caso de validação 1), com espaçamento de  $\lambda/30$  (grid inicial).

Uma outra vantagem existente é a diminuição da distância média entre pontos próximos às regiões de fronteira, conforme ilustrado na Fig. 5.9, onde para o caso em que  $q_{min} = 0,8$ , com espaçamento inicial de  $\lambda/20$ , temos que após 50 iterações ECGGM-CLDM, os pontos mais próximos passam a distar entre si de 0,040 m, o que corresponderia a uma discretização de  $\lambda/25$ . Ressalta-se que, utilizando  $\lambda/20$  como discretização espacial inicial, obtém-se 185364 pontos na região de análise e tempo de processamento de 91,9 s (aplicando-se o limite da condição de Courant-Friedrichs-Lewy), sendo que para  $\lambda/25$ , teríamos 265524 e 131,33 s, respectivamente. Desta forma, a ECGGM possibilita uma redução do esforço computacional em torno de 30%, proporcionando um maior nível de discretização próximo ao espalhador, em comparação ao espaçamento inicial entre pontos.

Tabela 5.1: Parâmetros e resultados da RCS do espalhador cilíndrico circular

Parâmetros	Geometria Circular (caso 1)		
$\Delta x$ (m) (Grid inicial)	$\lambda/10$	$\lambda/20$	$\lambda/30$
$f_c$ (GHz)	0,3		
$\Delta t$ (s)	$2 \times 10^{-11}$		
$\lambda = C_0/f_c$ (m)	1		
Número de passos de tempo	6000		
Número de pontos de observação	56	112	200
Quantidade de pontos na região de análise	61004	185364	376924
Erro Relativo Máximo ECGGM (%)	18,85	5,40	3,41
Erro Relativo Máximo CLDM (%)	61,49	11,11	8,57
REMQ ECGGM	0,1621	0,0383	0,04626
REMQ CLDM	0,43500	0,1204	0,0650

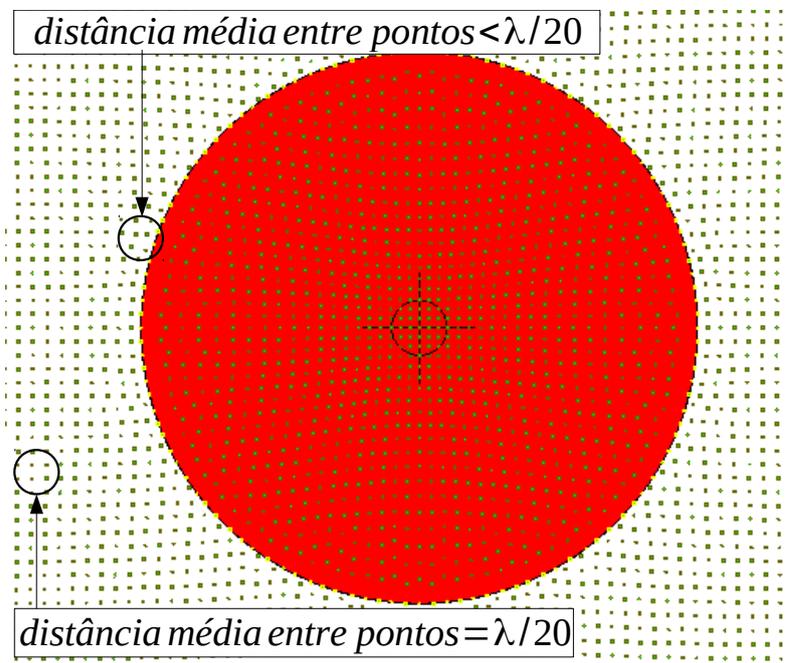


Figura 5.9: Discretização espacial para o espalhador circular após 100 iterações ECGGM utilizando  $q_{min} = 0,8$ .

Nota-se ainda da Tabela 5.1, que a técnica ECGGM com  $\Delta x = \lambda/20$ , apresenta maior precisão numérica que a técnica CLDM com  $\Delta x = \lambda/30$ , sendo os tempos de simulação para as duas técnicas evidenciados na Fig. 5.10, quando aplicada a condição de Courant-Friedrichs-Lewy para o passo temporal, dada por (2.37). Como a técnica ECGGM proporciona maior densidade de pontos próximos ao espalhador, o passo temporal torna-se menor quando comparado ao passo obtido para o método CLDM (para um mesmo  $\Delta x$  de referência).

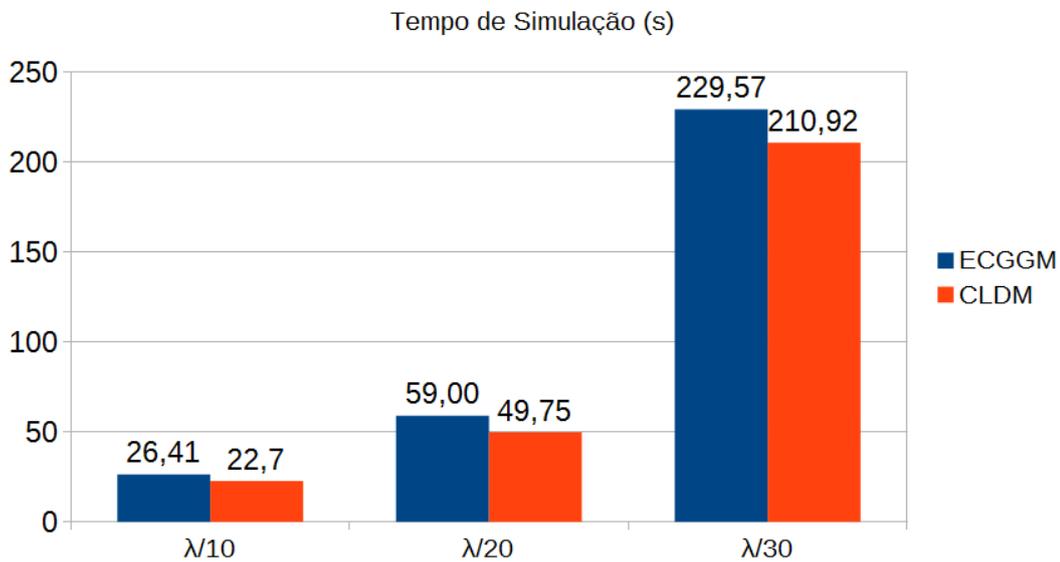


Figura 5.10: Tempos de simulação obtidos para as técnicas ECGGM e CLDM vs discretização espacial de referência ( $\Delta x$ ).

Por fim, o caso em questão foi simulado com a utilização de baixas frequências, para fins de comparar o comportamento da técnica proposta em outras possíveis aplicações. Para esta simulação específica, adotou-se a frequência  $f_c = 100$  kHz, onde as Figs. 5.11 a 5.13, ilustram a RCS obtida para os casos analítico, FDTD e RPIM ECGGM, respectivamente. Nota-se que, devido as dimensões do espalhador cilíndrico e o comprimento de onda para a frequência utilizada, os valores de amplitude dos campos são relativamente baixos, devido à redução do espalhamento do campo pelo cilindro metálico.

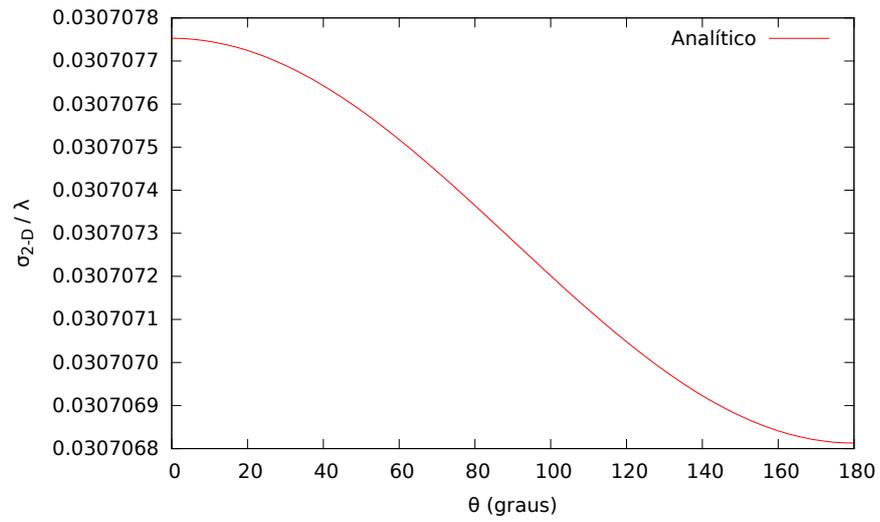


Figura 5.11: RCS analítico para cilindro circular vs ângulo de observação (caso de validação 1) com  $f_c = 100$  kHz.

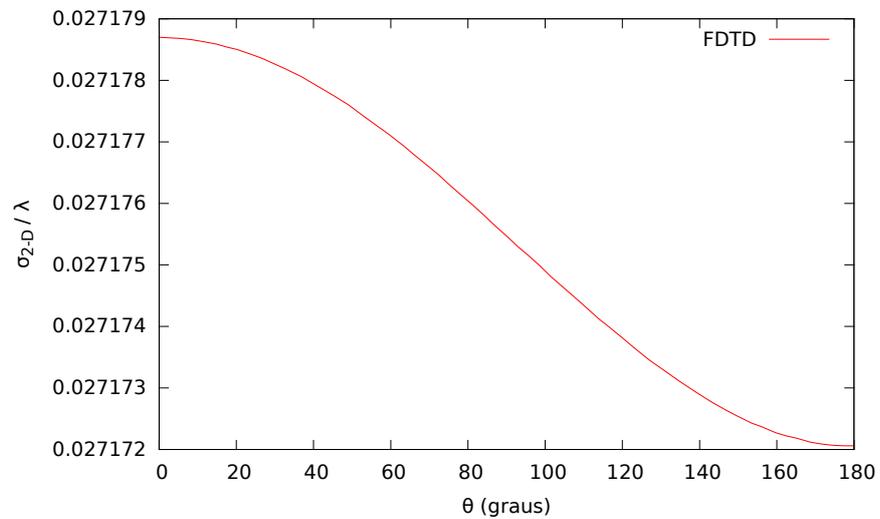


Figura 5.12: RCS (FDTD) para cilindro circular vs ângulo de observação (caso de validação 1), com espaçamento de  $\lambda/20$  e  $f_c = 100$  kHz.

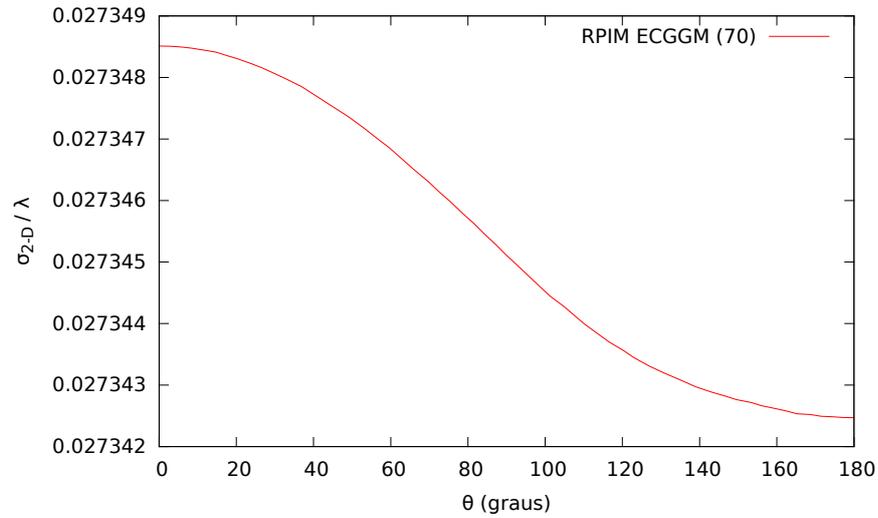


Figura 5.13: RCS (RPIM) para cilindro circular vs ângulo de observação (caso de validação 1), com espaçamento de  $\lambda/20$  (grid inicial) e  $f_c = 100$  kHz.

Para fins de comparação da precisão da solução numérica nesta frequência, em relação a curva analítica, as Figs. 5.14 e 5.15 mostram o Erro Relativo Máximo (MRE) e a Raiz do Erro Médio Quadrático (RMSE), onde após 70 iterações RPIM ECGGM, obtém-se um MRE da ordem de 10,98% e RMSE 0,003362, enquanto que para o método FDTD, temos 11,51% e 0,003532.

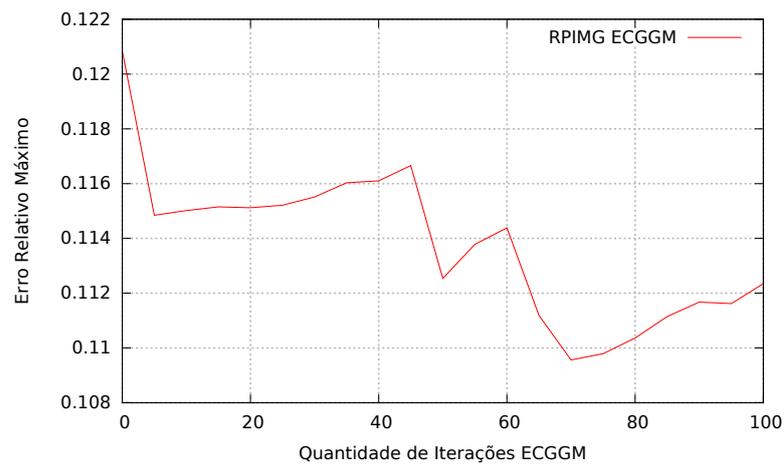


Figura 5.14: Erro relativo máximo para ECGGM obtido para  $q_{min} = 0,8$  com espaçamento entre pontos de  $\lambda/20$  (grid inicial) e  $f_c = 100$  kHz.

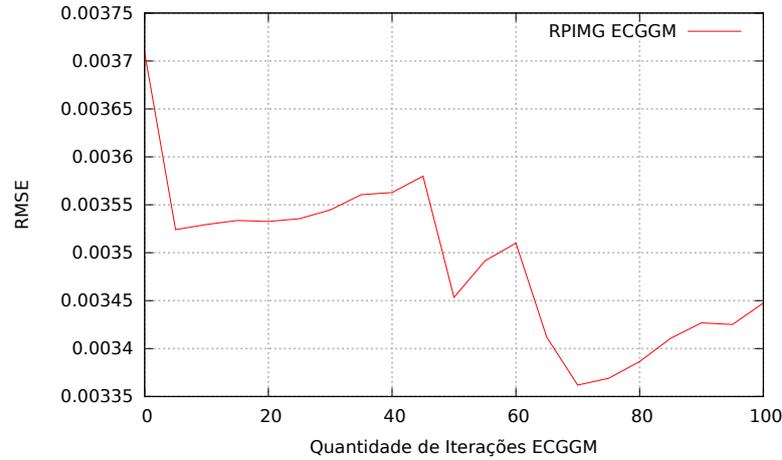


Figura 5.15: RMSE para ECGGM obtido para  $q_{min} = 0,8$  com espaçamento entre pontos de  $\lambda/20$  (grid inicial) e  $f_c = 100$  kHz.

### 5.1.2 Caso de Validação 2 - RCS do Espalhador Cilíndrico Triangular

Neste caso, o espalhador considerado é um cilindro triangular conforme ilustrado na Fig. 3.3. Sua secção transversal é um triângulo isósceles com base  $\sqrt{2}\lambda$  e altura  $(1 + \sqrt{2})\lambda$ . A Fig. 5.16 mostra a distribuição espacial de  $|E_z|$  para vários instantes de tempo.

A fim de assegurar uma distribuição simétrica de pontos em torno do espalhador (Figs. 5.17 and 5.18), foi utilizado como referência para gerar a distribuição Gaussiana dos valores das cargas, um círculo centrado no circuncentro do triângulo isósceles. Para esta geometria, os resultados obtidos através do método ECGGM-CLDM foram comparados com soluções obtidas por Equações Integrais (IE) [20] e pelo método dos Elementos Finitos no Domínio da Frequência (FEFD) [21], observando-se boa conformidade entre ECGGM, IE e FEFD em todos os ângulos de observação, conforme mostrado na Fig. 5.19.

É importante notar que, os resultados obtidos com a metodologia proposta neste trabalho, trazem uma melhoria substancial quando comparados com os resultados obtidos com o CLDM original, conforme mostrados em [8] e na Fig. 5.19. Ressalta-se que  $\Delta x =$

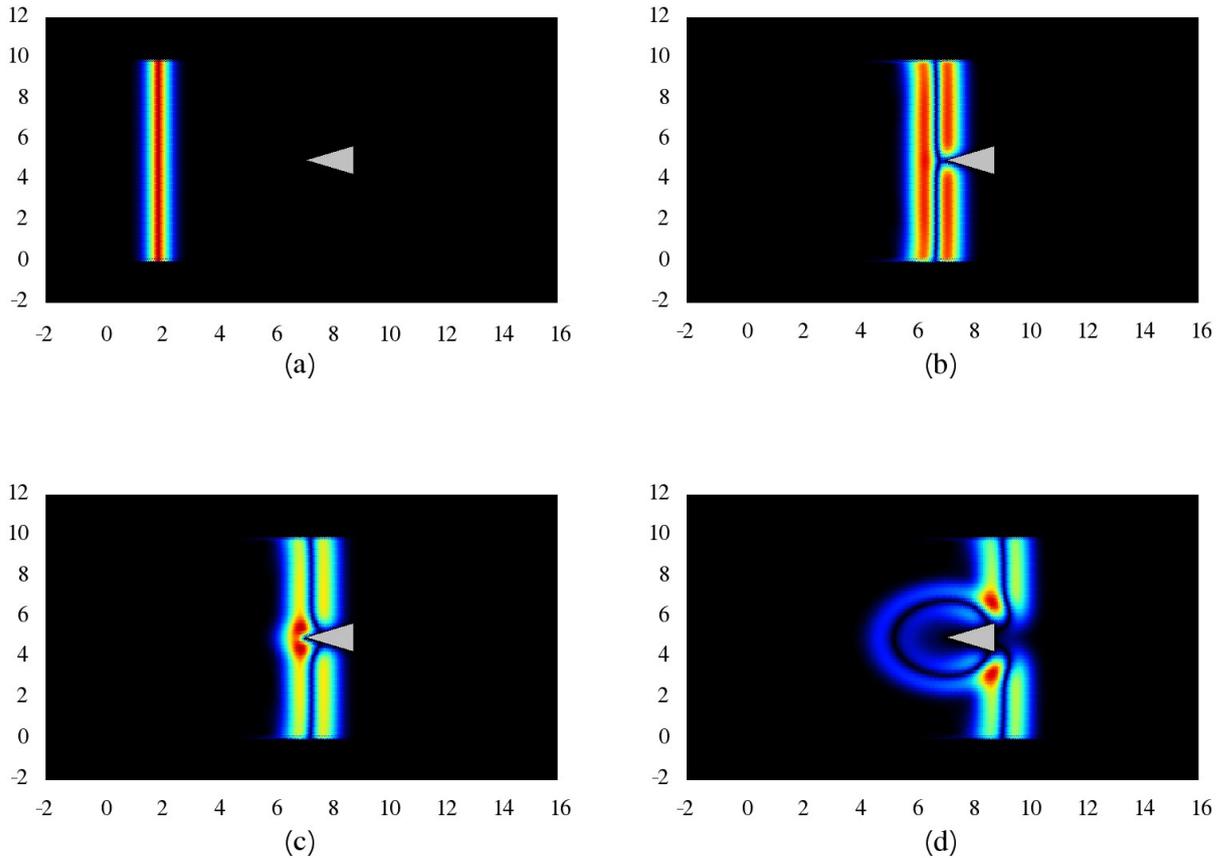


Figura 5.16: Distribuição espacial de  $|E_z|$  (campo total) para o cilindro triangular (caso 2): (a)  $t = 10,0$  ns, (b)  $t = 28,0$  ns, (c)  $t = 30,0$  ns, (d)  $t = 36,0$  ns.

$\lambda/20$  foi utilizado para as simulações CLDM-RPIM e ECGGM-CLDM-RPIM. Observe-se, ainda na Fig. 5.19, que a partir da curva de referência do RCS, nota-se uma grande melhoria na precisão quando o método ECGGM é usado, principalmente no intervalo  $100 \leq \theta \leq 180$ . O aumento desta precisão pode ser atribuído ao refinamento da discretização em torno dos vértices do espalhador, claramente visível na Fig. 5.18, com  $q_{min} = 0,9$ . Este resultado mostra que o método ECGGM é particularmente importante quando se busca a modelagem de geometrias com vértices e bordas acentuadas, onde podemos observar que a melhoria dos resultados obtidos com o espalhador circular, quando comparados aos obtidos em [8], não foram tão expressivas quanto ao refinamento e precisão alcançados no

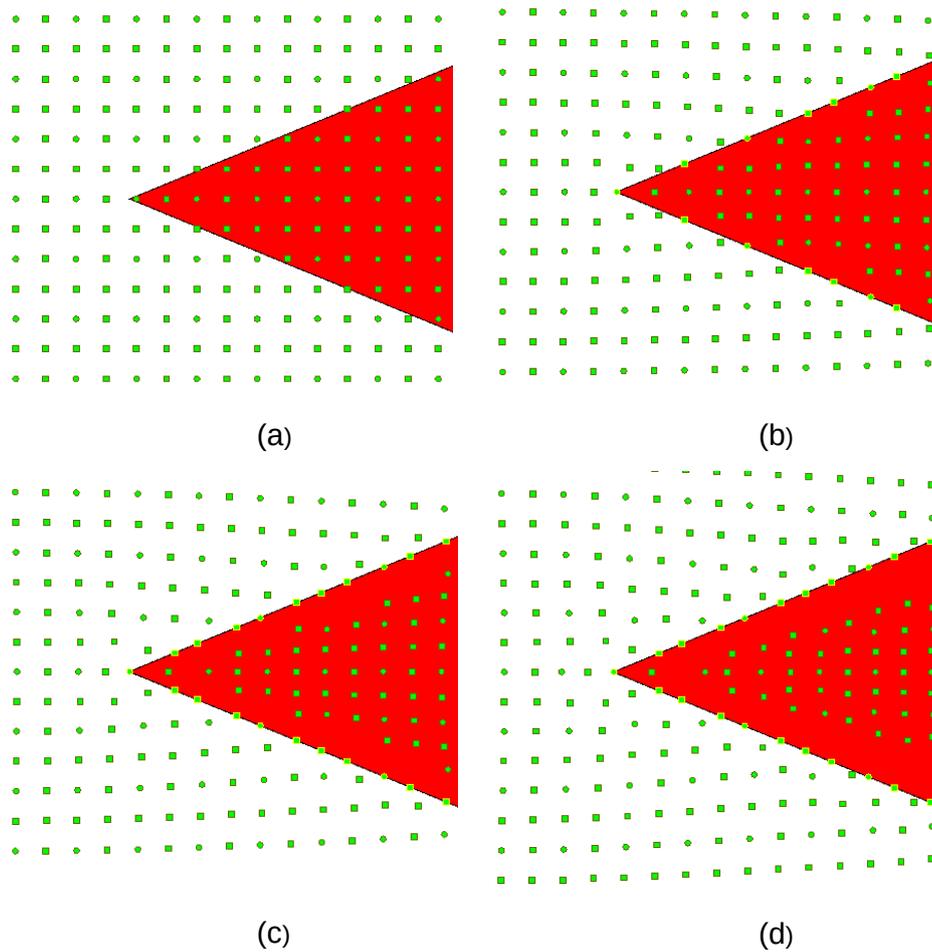


Figura 5.17: Aplicação de ECGGM em torno do vértice do espalhador triangular usando  $q_{min} = 0,9$ . Reposicionamento dos nós após (a) zero iterações (malha retangular de referência inicial) , (b) 25 iterações, (c) 50 iterações, (d) 100 iterações.

caso triangular.

### 5.1.3 Caso de Validação 3 - RCS do Espalhador Cilíndrico Elíptico

O terceiro caso consiste na análise do espalhador cilíndrico elíptico, o qual possui vértices consideravelmente afiados, com semieixo maior  $a = 5\lambda$  (paralelo ao eixo  $y$ ) e semieixo menor  $b = 3\lambda$  (paralelo ao eixo  $x$ ), ilustrado na Fig. 3.4. A Fig. 5.20 mostra a distribuição espacial de  $|E_z|$  ao longo do tempo.

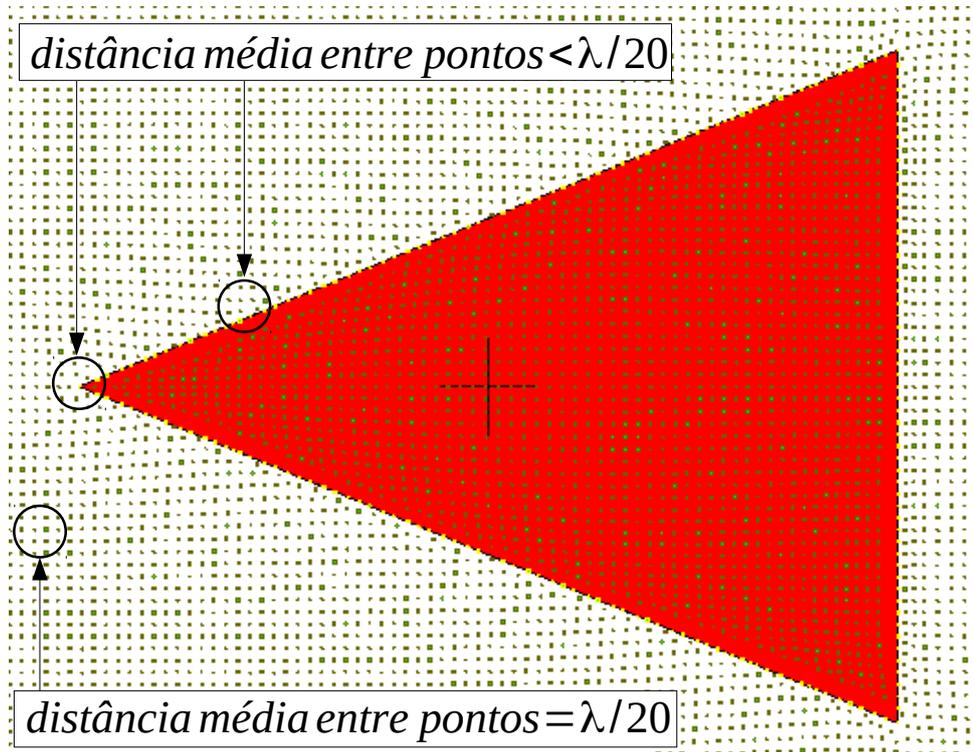


Figura 5.18: Discretização espacial para o espalhador triangular após 100 iterações ECGGM utilizando  $q_{min} = 0,9$ .

Assim como o caso anterior, o cilindro elíptico também não possui solução analítica exata, e os resultados obtidos através do método ECGGM foram comparados com soluções obtidas pelo Método dos Momentos (MoM) e da Física Óptica (PO), ambos descritos em [22]. A Fig. 5.21 ilustra o RCS obtido numericamente para este caso e, novamente, observa-se uma boa concordância entre ECGGM, MoM e PO em todos os ângulos de observação. Ressalta-se que, devido as aproximações utilizadas no método da Física Óptica [22], esta técnica possui resultados divergentes quando o ângulo de observação se afasta do ângulo de incidência da onda plana.

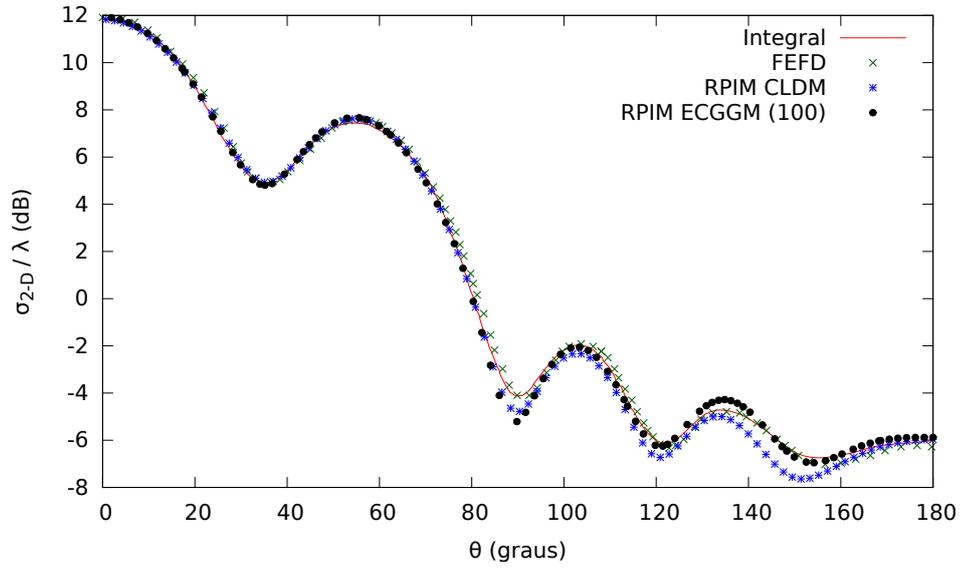


Figura 5.19: RCS para cilindro triangular vs ângulo de observação (caso de validação 2), com espaçamento de  $\lambda/20$  (grid inicial).

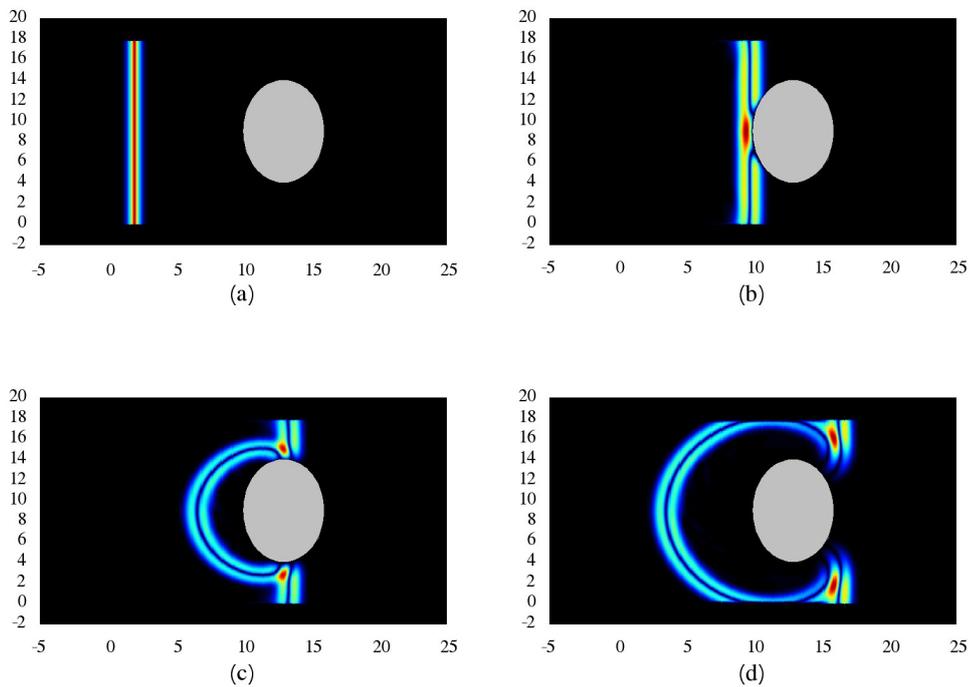


Figura 5.20: Distribuição espacial de  $|E_z|$  (campo total) para o espalhador Cilindro Elíptico (caso 2): (a)  $t = 10,0$  ns, (b)  $t = 38,0$  ns, (c)  $t = 50,0$  ns, (d)  $t = 60,0$  ns.

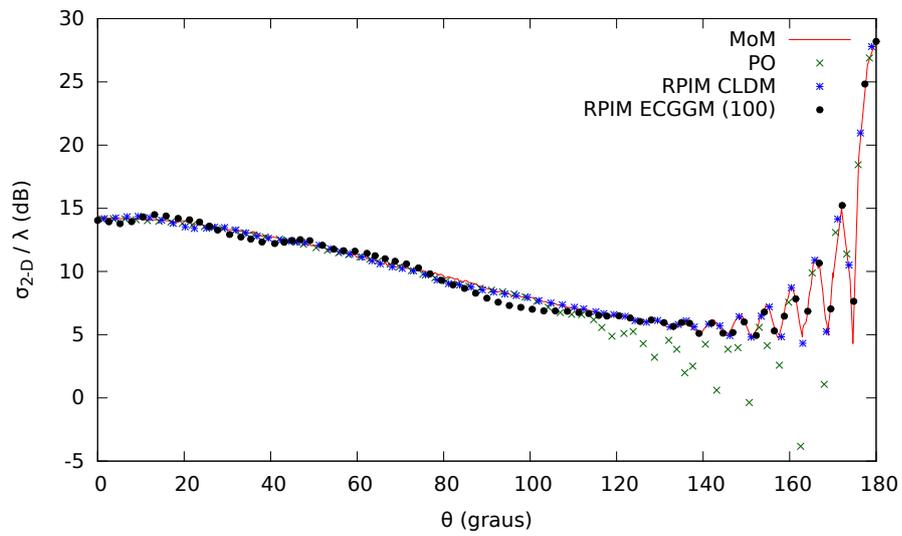


Figura 5.21: RCS para cilindro elíptico vs ângulo de observação (caso de validação 3), com espaçamento de  $\lambda/20$  (grid inicial).

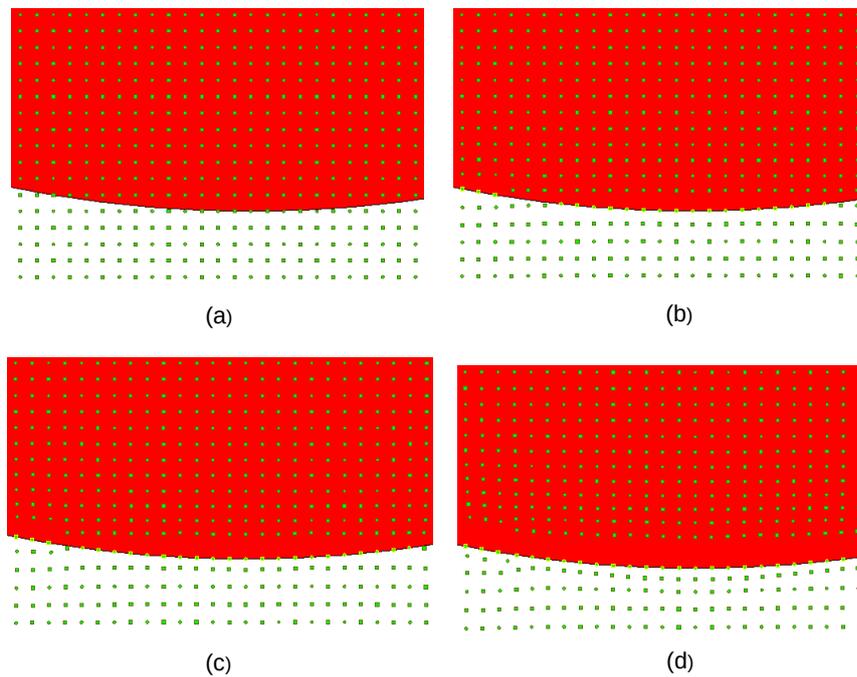


Figura 5.22: Aplicação de ECGGM em torno do vértice do espalhador elíptico usando  $q_{min} = 0,9$ . Reposicionamento dos nós após (a) zero iterações (malha retangular de referência inicial), (b) 25 iterações, (c) 50 iterações, (d) 100 iterações.

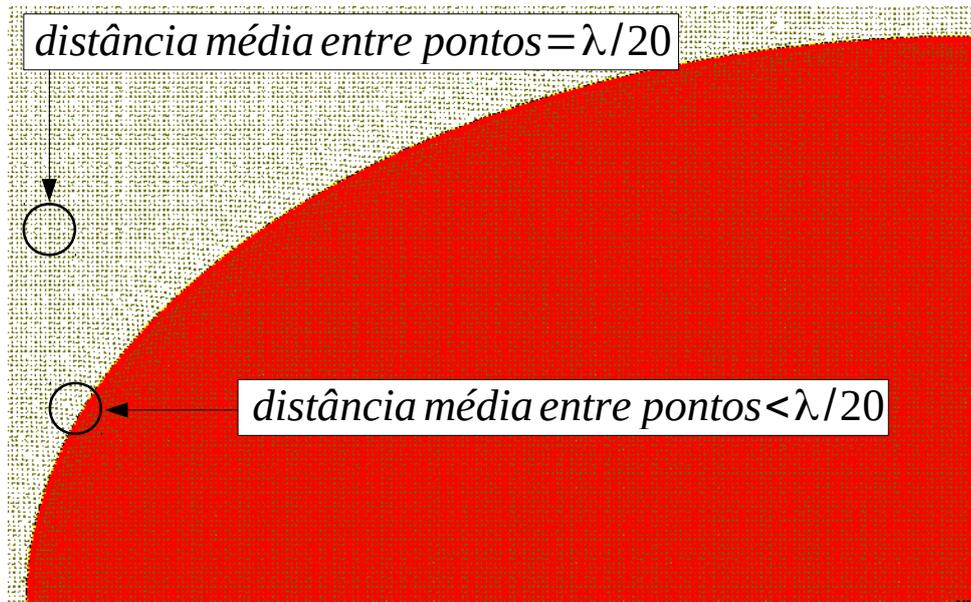


Figura 5.23: Discretização espacial para o espalhador elíptico após 100 iterações ECGGM utilizando  $q_{min} = 0,9$  (setor  $90^\circ$ ).

Tabela 5.2: PARÂMETROS DE SIMULAÇÃO PARA CASOS DE VALIDAÇÃO 1, 2 E 3

Parâmetros	Geometria (corte transversal)		
	Circular	Triangular	Elíptico
$f_c$ (GHz)	0,3		
$\Delta t$ (s)	$2 \times 10^{-11}$		
$\lambda = C_0/f_c$ (m)	1		
$\Delta x$ (m) (Grid inicial)	$\lambda/20$		
Número de passos de tempo	6000		
Número de pontos de observação	112	194	720
Quantidade de pontos na região de análise	185364	305844	641604
Tempo de Processamento (s)	161.00	265.64	557.27

## 5.2 Avaliação Numérica da Formulação ADE-PML

### Proposta para Truncar o Método RPIM

#### 5.2.1 Avaliação do erro relativo de reflexão

Para validar a formulação proposta para a ADE-PML, foram realizados testes numéricos em duas dimensões para o método RPIM em um meio sem perdas, com região de análise com dimensões  $80\Delta x \times 80\Delta y$ , onde  $\Delta x = \Delta y = 0,05$  m. O ponto central da região de análise, localizado em  $(40\Delta x, 40\Delta y)$ , foi excitado por uma fonte pontual, onde o campo  $E_z$  é regido pela função

$$p(t) = A_p(t - t_0) \sqrt{\frac{2e}{\tau^2}} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{\tau^2}}, \quad (5.1)$$

na qual  $t$  é o tempo em segundos,  $A_p = 1000$  V/m,  $\tau = 200 \times 10^{-11}$  s e  $t_0 = 1200 \times 10^{-11}$ . Para avaliar o erro relativo de reflexão da ADE-PML, um sensor foi posicionado em  $(79\Delta x, 79\Delta y)$  (Fig. 5.24) visando calcular o nível de sinal refletido oriundo das paredes absorvente. Também foram posicionados sensores ao longo da reta  $(x, 20\Delta y)$ . A Fig. 5.25(a) ilustra o posicionamento tanto da fonte como dos sensores existentes, enquanto que a Fig. 5.25(b) mostra uma parte do domínio de análise, na qual pode-se observar o arranjo de pontos de discretização (posições relativas entre os nós elétricos e magnéticos) [8] utilizado para o método RPIM bem como o domínio de suporte  $D_s$  de um nó elétrico, cujo raio é de  $1,4\Delta x$ . Os nós magnéticos deslocados apenas horizontalmente ou verticalmente em relação aos nós elétricos possuem domínios de suporte com raio de  $2,2\Delta x$ . Por fim, qualquer nó magnético central ao arranjo tem domínio de suporte com raio de  $1,8\Delta x$ . Estas variações se fazem necessárias devido a particularidades geométricas intrínsecas ao arranjo utilizado [8].

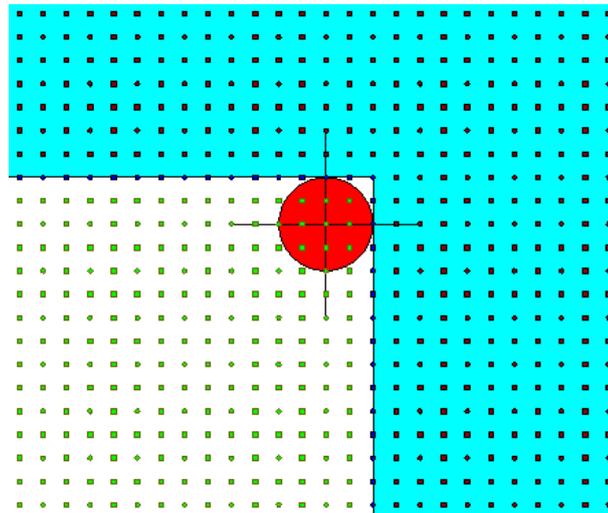


Figura 5.24: Distribuição retangular de pontos (nós) utilizados para cálculo do erro relativo de reflexão, na região em torno do sensor localizado em  $(79\Delta x, 79\Delta y)$ .

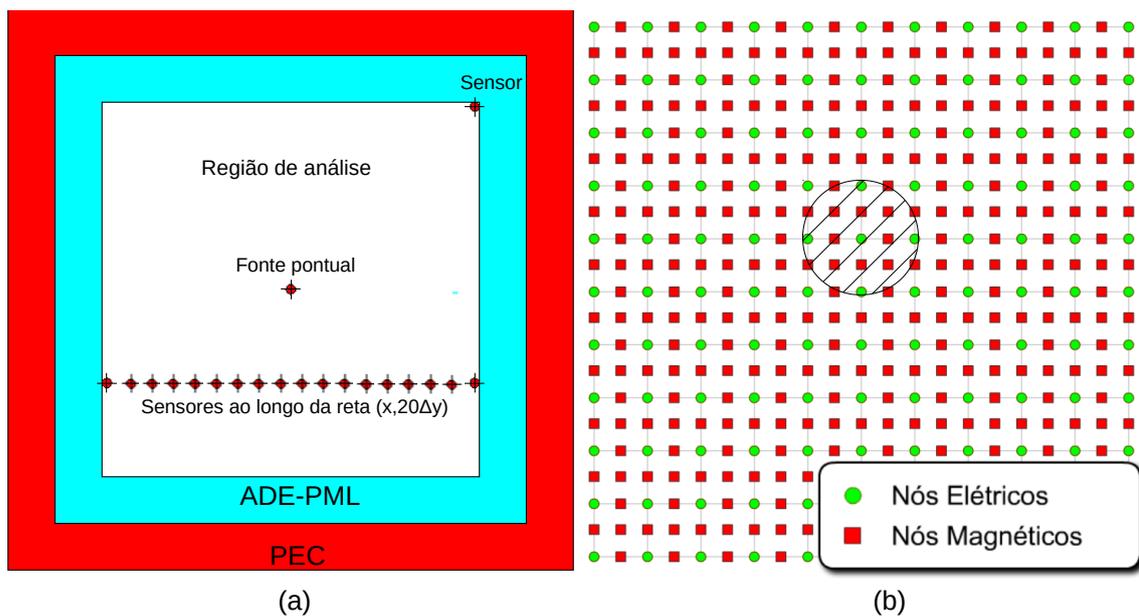


Figura 5.25: Cálculo do erro relativo de reflexão da região absorvente: (a) Posicionamento da fonte pontual e dos sensores para avaliação de  $E_z$ , (b) Arranjo utilizado para o método RPIM e círculo hachurado indicando domínio de suporte  $D_s$  para o nó elétrico posicionado em seu centro.

Os resultados obtidos no ambiente numérico descrito acima foram comparados aos resultados obtidos em uma região de análise com dimensões  $600\Delta x \times 600\Delta y$ , a qual não possui erros de reflexão devido à quantidade usada de iterações temporais não ser suficiente para que os campos alcancem a região de fronteira. Dessa forma, os sinais obtidos nesta região com 360.000 pontos são usados como referência. Matematicamente, o erro relativo de reflexão é definido por [9]

$$e_r^{N_t} = \frac{|E_{ADE-PML}^{N_t}(i) - E_{ref}^{N_t}(i)|}{|E_{refmax}(i)|}, \quad (5.2)$$

onde  $E_{ADE-PML}^{N_t}(i)$  é uma componente de  $\vec{E}$  obtida no ponto  $i$  no instante  $N_t$  na região truncada pela formulação ADE-PML,  $E_{ref}^{N_t}(i)$  é a mesma componente do campo  $\vec{E}$  obtida na região de referência, com  $600 \times 600$  pontos, e  $E_{refmax}(i)$  é o valor máximo de  $E_{ref}^{N_t}(i)$ . Em decibéis, o erro relativo de reflexão é dado por

$$e_r^{N_t}|_{dB} = 20 \log_{10}(e_r^{N_t}). \quad (5.3)$$

A Fig. 5.26 ilustra a distribuição de campo para quatro instantes de tempo, evidenciando a absorção da onda pela formulação desenvolvida. Na Fig 5.27 são apresentados os erros relativos de reflexão obtidos para a ADE-PML ao longo do tempo. Neste trabalho, os parâmetros da região absorvente são dados utilizando-se a seguinte notação: [Quantidade de Camadas, Grau  $m$  do Polinômio, Fator de Calibração  $\beta$ ]. Os resultados obtidos para o máximo erro relativo de reflexão, para as diversas simulações executadas, estão consolidados na Tabela 5.3. A Fig. 5.28 fornece os erros relativos de reflexão obtidos para sensores posicionados ao longo da reta  $(x, 20\Delta y)$  para  $t = 40, 0$  ns.

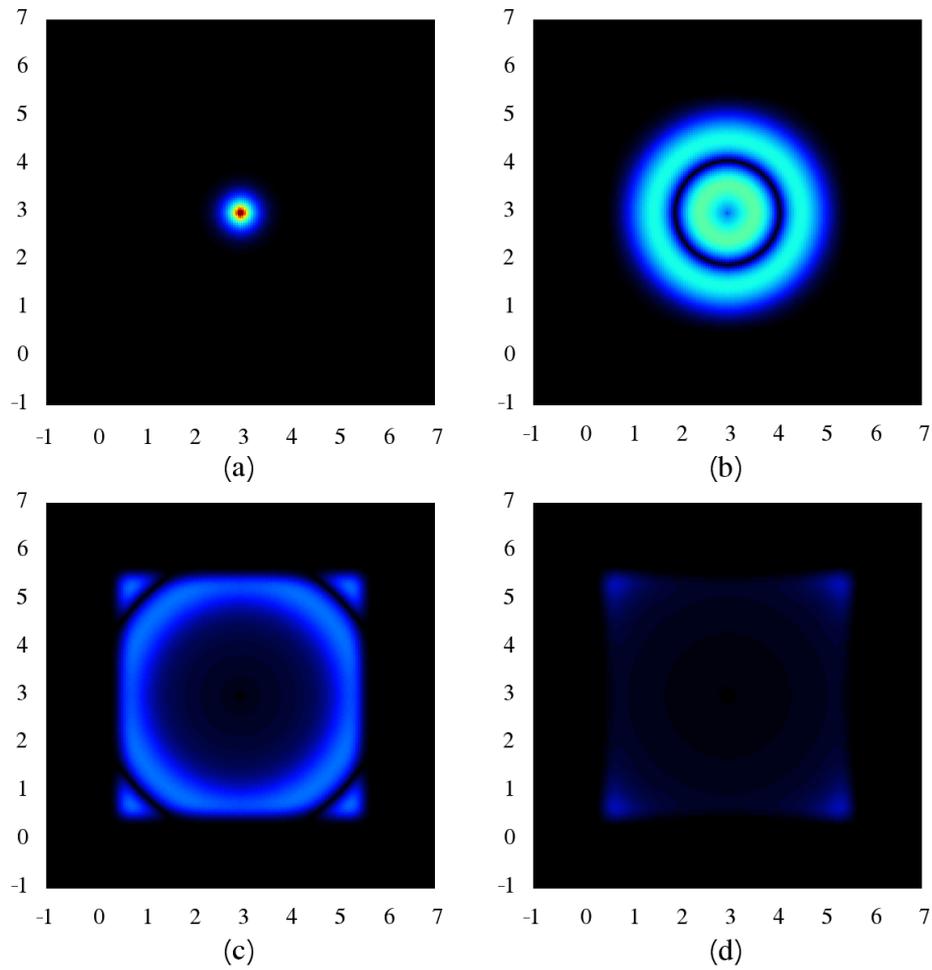


Figura 5.26: Distribuição Espacial de  $|E_z|$  (excitação pontual), com absorção realizada com a ADE-PML para (a)  $t = 10,0$  ns, (b)  $t = 16,0$  ns, (c)  $t = 22,0$  ns, (d)  $t = 26,0$  ns.

Tabela 5.3: Máximos Erros Relativos de Reflexão

ADE-PML (Parâmetros)	Erros Relativos de Reflexão (dB)
[10; 02, 0,8]	-76,57
[10; 03, 0,8]	-84,14
[15; 02, 0,9]	-86,64
[15; 03, 0,9]	-98,42
[20; 02, 0,9]	-94,69
[20; 03, 0,9]	-108,28

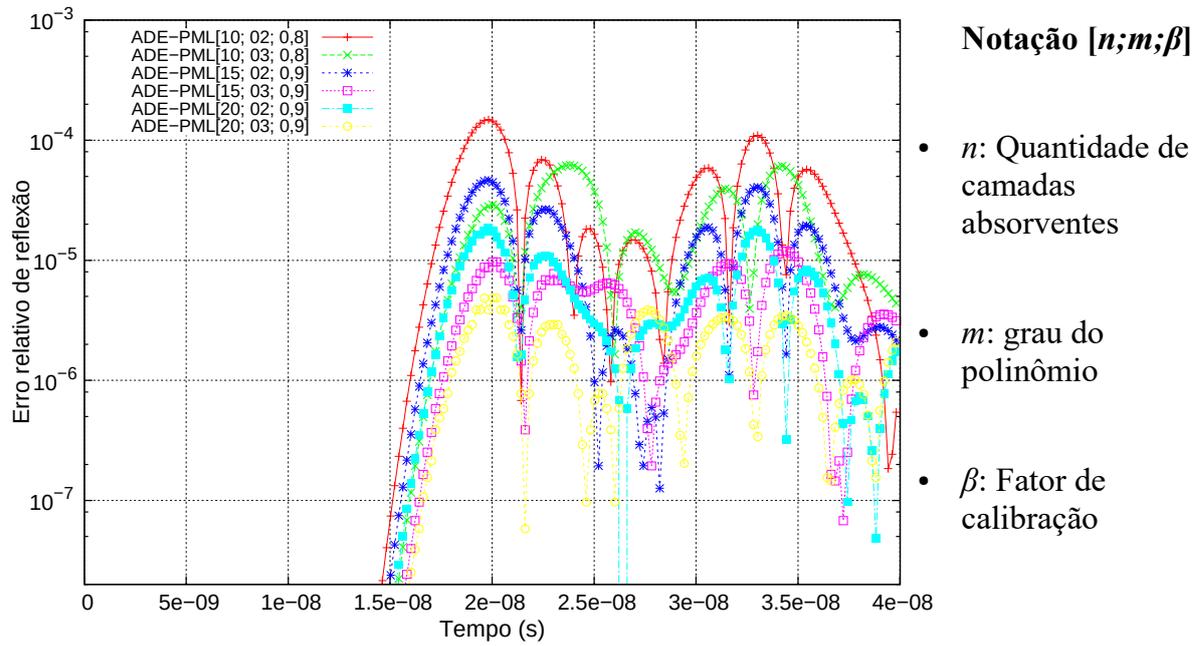


Figura 5.27: Erro relativo de reflexão para sensor posicionado em  $(79\Delta x, 79\Delta y)$ .

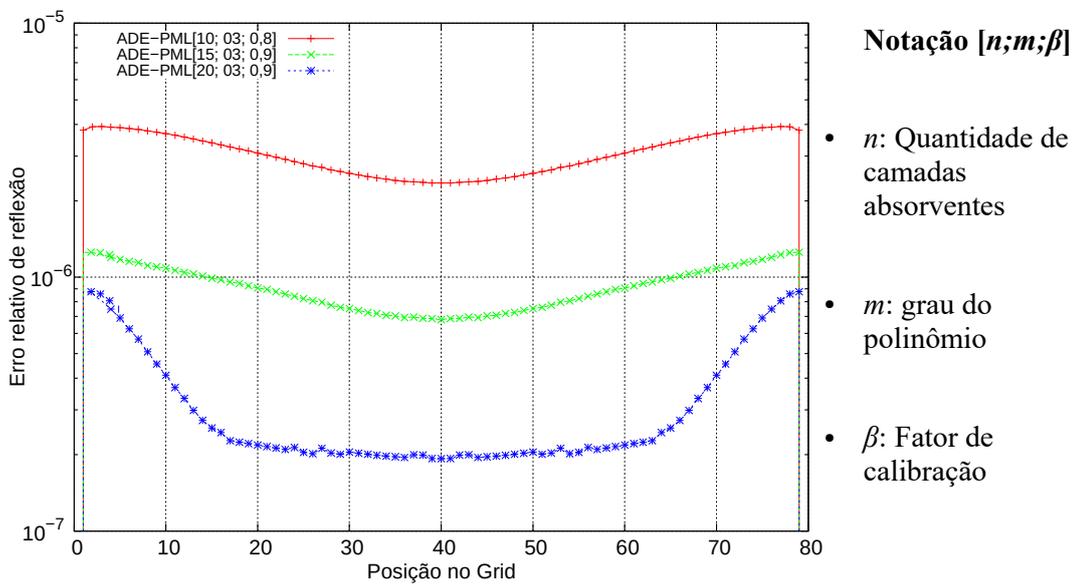


Figura 5.28: Erro relativo de reflexão para sensores posicionados ao longo da reta  $(x, 20\Delta y)$  para  $t = 40,0$  ns.

## 5.2.2 RCS de um Espalhador Cilíndrico Circular

Neste tópico, a ADE-PML é aplicada para o cálculo da seção reta radar (*Radar Cross-section* - RCS) do espalhador cilíndrico circular ilustrado pela Fig. 5.29. O cilindro possui um raio  $a = 0,5\lambda$ . A RCS para esta geometria, para fins de comparação, possui uma solução analítica exata dada em [18]. Foi utilizado o grupo de pontos, ilustrado parcialmente pela Fig. 5.9, de forma a representar de maneira conformal a geometria analisada. Distribuições de campo podem ser vistas, para diversos instantes de tempo, na Fig. 5.30.

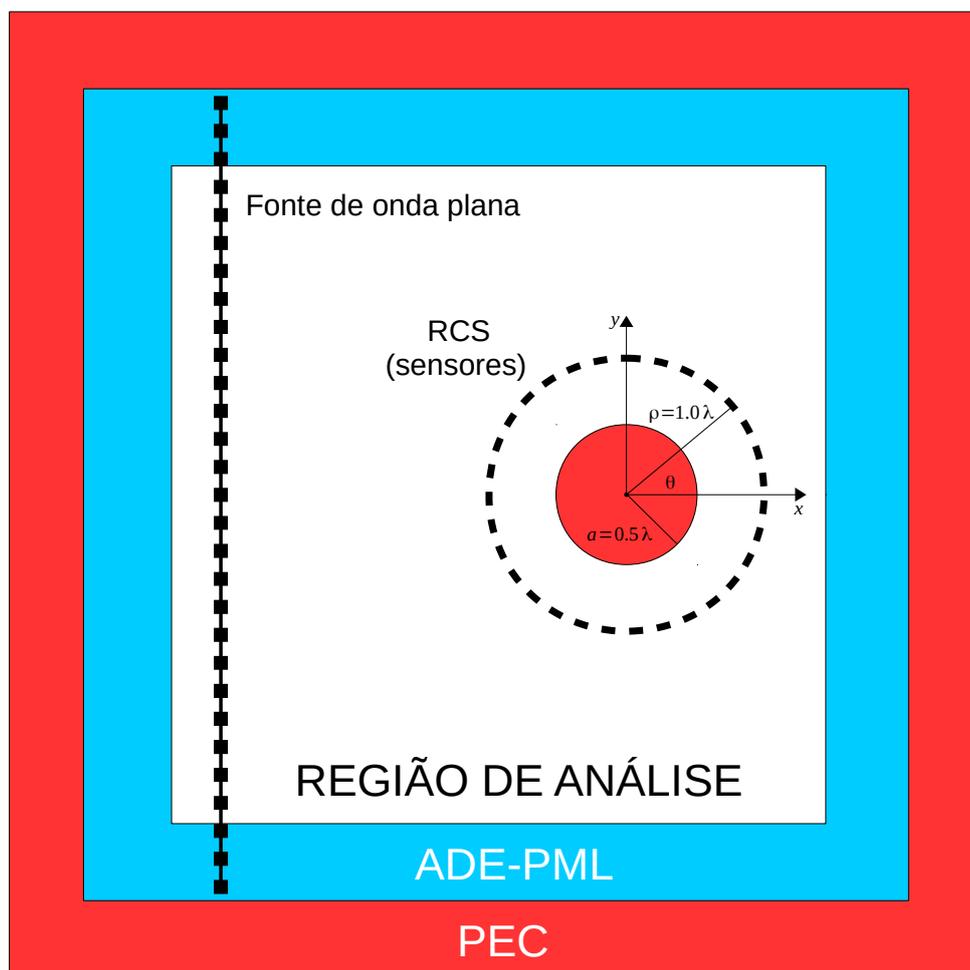


Figura 5.29: Seção transversal do espalhador cilíndrico circular.

Após a realização das simulações, a RCS para este espalhador foi numericamente

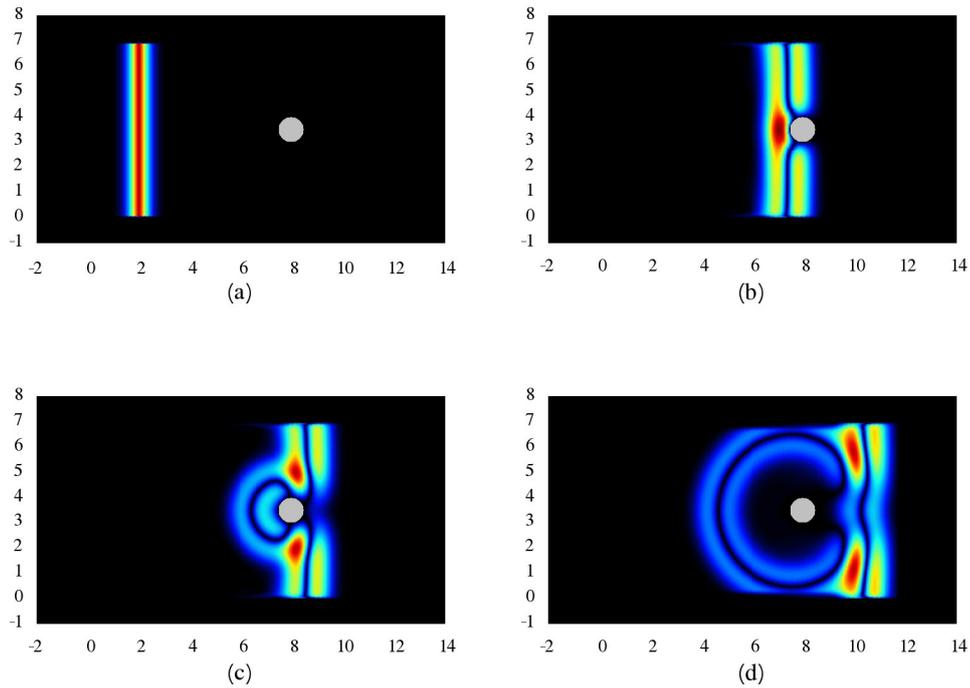


Figura 5.30: Distribuições Espaciais de  $|E_z|$  para o espalhador cilíndrico circular, calculadas usando a ADE-PML, obtidas para (a)  $t = 10,0$  ns, (b)  $t = 30,0$  ns, (c)  $t = 34,0$  ns, (d)  $t = 40,0$  ns.

calculada usando a equação definida em [21] para o  $RCS_{2-D}$ . Em seguida, estes resultados foram comparados com a solução analítica exata descrita por [18] através de três métricas, sendo elas o Erro Relativo (ER), a Raiz do Erro Médio Quadrático (REMQU) e o erro BSW (*Bistatic Scattering Width*), definidos respectivamente por

$$ER = \left| \frac{f^a(\bar{x}) - f(\bar{x})}{f(\bar{x})} \right|, \quad (5.4)$$

$$REMQU = \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{[f^a(\bar{x}) - f(\bar{x})]^2}{n}} \quad (5.5)$$

e

$$eBSW = f^a(\bar{x}) - f(\bar{x}), \quad (5.6)$$

onde  $f(\bar{x})$  é o valor analítico em  $\bar{x}$ , conforme descrito por [18],  $f^a(\bar{x})$  é o valor numérico calculado pelas simulações deste trabalho e  $n$  é a quantidade de sensores posicionados

para o cálculo da RCS. As Figs. 5.31 - 5.33 ilustram os resultados obtidos para a ADE-PML utilizando a formulação desenvolvida neste trabalho. Os parâmetros utilizados na simulação estão consolidados na Tabela 5.4.

Tabela 5.4: Parâmetros e resultados

Parâmetros	ADE-PML[20; 03; 0,9]
$f_c$ (GHz)	0,3
$\Delta t$ (s)	$2 \times 10^{-11}$
$\lambda = C_0/f_c$ (m)	1
$\Delta x$ (m)	$\lambda/20$
Raio do $D_s$ (m) para campo $E$	$1,4\Delta x$
Raio do $D_s$ (m) para campo $H$ central	$1,8\Delta x$
Raio do $D_s$ (m) para demais campos	$2,2\Delta x$
Quantidade de pontos de observação	112
Quantidade de passos de tempo	4000
Erro Relativo Máximo (%)	5,31
REMQ	0,0624

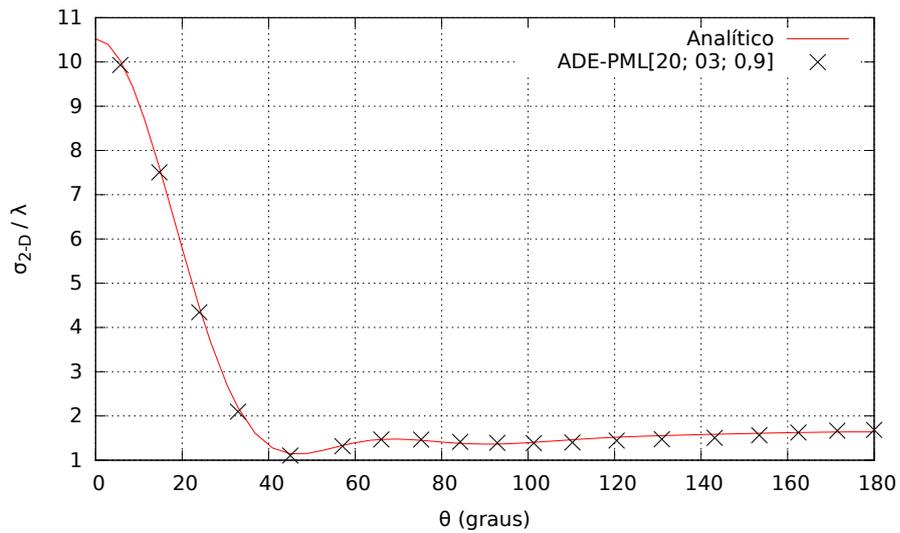


Figura 5.31: RCS para o espalhador cilíndrico circular em função do ângulo de observação.

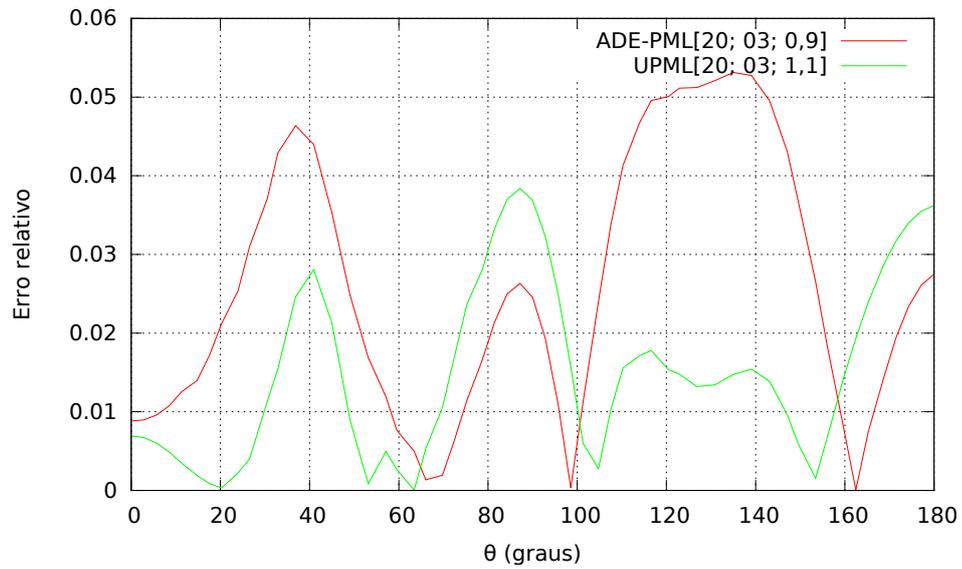


Figura 5.32: Erro Relativo do parâmetro RCS para o espalhador cilíndrico circular em função do ângulo de observação.

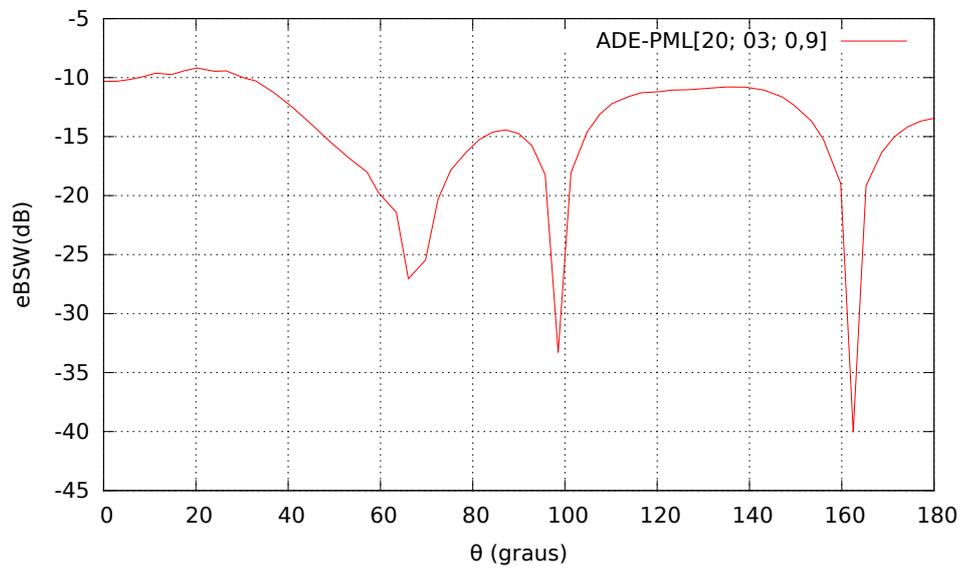


Figura 5.33: Erro eBSW (em dB) do parâmetro RCS para o espalhador cilíndrico circular em função do ângulo de observação.

## Capítulo 6

### Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos uma nova técnica chamada Electric Charge Gradation Gaussian Method (ECGGM), que melhora significativamente os resultados obtidos anteriormente pelo método CLDM, usando o princípio da mínima energia potencial do sistema aliado ao controle seletivo do módulo da carga elétrica de cada nó. Com a técnica proposta, torna-se possível aumentar a densidade de pontos de forma controlada em regiões de bordas e cantos de espalhadores metálicos. Esta concentração de pontos, ao redor das interfaces de diferentes materiais, produz melhoria substancial nos resultados numéricos devido ao aumento de precisão no cálculo dos campos próximos às regiões de fronteira. Vários outros benefícios relevantes foram observados, resultantes da nova técnica, onde podemos destacar: 1) Aumento de precisão do cálculo de campos quando espalhadores estão presentes; 2) considerável redução do número total de pontos no domínio de análise, em comparação com o método CLDM, para um nível de precisão similar; 3) redução no número de iterações CLDM (de aproximadamente 150 para cerca de 50); 4) redução do tempo de processamento de cada iteração CLDM, em virtude da redução total de pontos; 5) redução drástica do tempo de processamento para simulações utilizando o método RPIM (considerando precisões de cálculo semelhantes para CLDM original e ECGGM); e 6) A definição da discretização espacial nas regiões de fronteira é realizada de forma natural, através da fixação de pontos que gradualmente se aproximam das interfaces dos

objetos (forças externas não são mais necessárias, como no método CLDM original, para definição das interfaces), evitando possíveis divergências no processo de discretização para  $0,2 \leq q_{min} \leq 0,9$ .

Os resultados obtidos para o cilindro circular metálico (Caso 1) mostram que o método FDTD simulado possui um Erro Relativo Máximo de 25,0 % e um RMSE de 0,1996. Para o método CLDM original, temos 11,11 % e 0,1204, respectivamente, conforme ilustrado nas Figs. 5.3 e 5.4. Em comparação com a solução exata, o resultados obtidos utilizando o método de discretização ECGGM obtiveram Erro Relativo Máximo e RMSE de cerca de 5% e 0,0383, respectivamente, para um  $q_{min}$  em  $[0,2;0,9]$  (Figs. 5.3 e 5.4), o que claramente ilustra a precisão de cálculo obtida utilizando a técnica ECGGM para este problema. Além disso, a técnica proposta reduziu em 30% o esforço computacional, devido a redução da quantidade de pontos na região de análise.

Nos casos de validação 2 e 3, os resultados obtidos através do método ECGGM foram comparados com outros métodos, como o IE e FEFD para o espalhador triangular e MoM e PO para o espalhador elíptico, observando-se uma boa concordâncias entre os diferentes métodos analisados. Isto demonstra que a metodologia proposta (ECGGM) é adequada para representar adequadamente bordas e cantos com RPIM, proporcionando melhorias de precisão relevantes para o método CLDM original.

Foi desenvolvida ainda, uma formulação ADE-PML para o método RPIM, a qual simplifica a utilização de camadas absorventes em relação às formulações UPML e a CPML, permitindo obter erros relativos de reflexão da ordem de  $-108,28$  dB, para o caso ADE-PML  $[20; 03; 0,9]$ . Quando dez camadas são usadas, foi obtido o erro relativo de reflexão de  $-84,14$  dB. A técnica ADE-PML foi ainda validada para o método RPIM confrontando-a com solução analítica exata da RCS do espalhador cilíndrico circular, obtendo-se erro relativo máximo da ordem de 5% e Raiz do Erro Médio Quadrático (RMSE) de 0,0624, evidenciando que a formulação desenvolvida pode ser utilizada com excelente eficiência de absorção de ondas eletromagnéticas nos limites da região de análise.

Uma vantagem-chave para o uso da ADE-PML no método RPIM é que, além de garantir baixos erros relativos de reflexão (menores que -75 dB) e de apresentar uma formulação consideravelmente mais simples de implementar em *software*, a formulação desenvolvida não sofre dos problemas de reflexão causados por arredondamento numérico das exponenciais presentes na formulação CPML. Estes problemas são críticos quando pequenos passos de tempo são utilizados, tornando a formulação ADE-PML muito mais robusta para aplicações em que espaçamentos entre nós (que definem o passo temporal) muito pequenos são necessários.

Nota-se que o trabalho em questão não esgota as variadas possibilidades de utilização e expansão da técnica. Desta forma, são propostos trabalhos futuros implementando as seguintes melhorias:

- Incluir diversos espalhadores na mesma região de análise;
- Implementação da técnica com a utilização de geometrias mais complexas;
- Utilização do ECGGM e da ADE-PML em problemas 3-D;
- Aplicação da técnica ECGGM em problemas de engenharia.

## Referências Bibliográficas

- [1] K. Yee, “Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell’s equations in isotropic media,” *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 14, no. 3, pp. 302–307, May 1966.
- [2] M. N. Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetics*, 2nd ed. CRC Press LCC, 2011.
- [3] J. G. Wang and G. R. Liu, “A point interpolation meshless method based on radial basis functions,” *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 54, no. 11, pp. 1623–1648, 2002.
- [4] A. Afsari and M. Movahhedi, “An adaptive radial point interpolation meshless method for simulation of electromagnetic and optical fields,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 50, no. 7, pp. 1–8, July 2014.
- [5] Y. Tanaka, R. Tone, and Y. Fujimoto, “Study of an explicit meshless method using RPIM for electromagnetic fields,” *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 49, no. 5, pp. 1577–1580, May 2013.
- [6] Y. Yu and Z. Chen, “A 3-D radial point interpolation method for meshless time-domain modeling,” *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, vol. 57, no. 8, pp. 2015–2020, Aug 2009.

- [7] P. L. Machado, R. M. S. de Oliveira, W. C. B. Souza, R. C. Araújo, M. E. Tostes, and C. Gonçalves, “An automatic methodology for obtaining optimum shape factors for the radial point interpolation method,” *Journal of Microwaves, Optoelectronics and Electromagnetic Applications*, vol. 10, pp. 389 – 401, 12 2011.
- [8] W. C. B. Sousa and R. M. S. de Oliveira, “Coulomb’s law discretization method: a new methodology of spatial discretization for the radial point interpolation method,” *Antennas and Propagation Magazine, IEEE*, vol. 57, no. 2, pp. 277–293, April 2015.
- [9] A. Taflove and S. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-difference Time-domain Method*, ser. Artech House antennas and propagation library. Artech House, 2005.
- [10] S. D. Gedney, “An anisotropic perfectly matched layer absorbing media for the truncation of FDTD lattices,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 44, no. 12, pp. 1630–1639, 1996.
- [11] J. A. Roden and S. D. Gedney, “Convolution PML (CPML): An efficient FDTD implementation of the CFS-PML for arbitrary media,” *Microwave and Optical Tech. Letters*, vol. 27, no. 5, pp. 334–339, 2000.
- [12] Z. Shaterian, T. Kaufmann, and C. Fumeaux, “On the late-time instability of perfectly matched layers in the meshless radial point interpolation method,” in *Microwave Conference Proceedings (APMC), 2013 Asia-Pacific*, Nov 2013, pp. 845–847.
- [13] Y. Yu and Z. Chen, “The CPML Absorbing Boundary Conditions for the Unconditionally Stable Meshless Modeling,” *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 11, pp. 468–472, 2012.
- [14] O. Ramadan, “Auxiliary differential equation formulation: an efficient implementation of the perfectly matched layer,” *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 13, no. 2, pp. 69–71, Feb 2003.

- [15] M. B. S. Brandão, R. M. S. de Oliveira, and W. C. B. Sousa, “Formulação de Camadas Perfeitamente Casadas (PML) Baseada em Equações Diferenciais Auxiliares (ADE-PML) para Truncagem Espacial do Método de Interpolação Radial por Pontos (RPIM),” *12º CBMag - Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo (MOMAG)*, 2016.
- [16] R. M. S. de Oliveira, N. R. N. M. Rodrigues, and V. Dmitriev, “FDTD Formulation for Graphene Modeling Based on Piecewise Linear Recursive Convolution and Thin Material Sheets Techniques,” *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, vol. 14, pp. 767–770, 2015.
- [17] W. C. Chew and W. H. Weedon, “A 3D perfectly matched medium from modified Maxwell’s equations with stretched coordinates,” *Microwave and Optical Tech. Letters*, vol. 7, no. 13, pp. 599–604, 1994.
- [18] C. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*. Wiley, 2012.
- [19] A. Taflové and S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics, The Finite-Difference Time-Domain Method*, 3rd ed. Artech House Inc., 2005.
- [20] A. Peterson and S. Castillo, “A frequency-domain differential equation formulation for electromagnetic scattering from inhomogeneous cylinders,” *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 37, no. 5, pp. 601–607, May 1989.
- [21] K. Bavelis, “Finite-element time-domain modelling of cylindrical structures with a modal non-reflecting boundary condition,” PhD Thesis, School of Engineering, University of Warwick, 2010.
- [22] C. Bourlier, N. Pinel, and G. Kubické, *Method of moments for 2D scattering problems: basic concepts and applications*, ser. FOCUS Series. Wiley, 2013.