



Programa de Pós-Graduação em Engenharia
de Recursos Naturais da Amazônia

ESTUDO DA MAGNETOHIDRODINÂMICA EM DUTOS USANDO TRANSFORMADAS INTEGRAIS

Benedito Lobato

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia, PRODERNA/ITEC, da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Recursos Naturais.

Orientadores: Emanuel Negrão Macêdo

Marcelo José Raiol de Souza

Belém

Dezembro de 2015

ESTUDO DA MAGNETOHIDRODINÂMICA EM DUTOS USANDO TRANSFORMADAS INTEGRAIS

Benedito Lobato

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE RECURSOS NATURAIS DA AMAZÔNIA (PRODERNA/ITEC) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA DE RECURSOS NATURAIS.

Aprovada por:

Prof. Emanuel Negrão Macêdo, D.Sc.
(FEQ/UFPA-Orientador)

Prof. Marcelo José Raiol de Souza, D.Eng.
(CCNT/UEPA-Co-orientador)

Prof. João Alves Lima, D.Sc.
(PPGER/CEAR/UFPA-Membro)

Prof. Cláudio José Cavalcante Blanco, D.Eng.
(FEC/UFPA-Membro)

Prof. João Nazareno Nonato Quaresma
(FEQ/UFPA -Membro)

Prof. Clauderino da Silva Batista, Dr. Eng
(FEQ/UFPA -Membro)

BELÉM, PA – BRASIL
DEZEMBRO DE 2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Instituto de Tecnologia/Programa de Pós-graduação em
Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia

Benedito Lobato

Estudo da Magnetohidrodinâmica em Dutos Usando Transformadas Integrais / Benedito Lobato; orientador, Emanuel Negrão Macêdo / Marcelo José Raiol de Souza. - Belém, 2015

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará. Instituto de Tecnologia. Programa de Pós-graduação em Engenharia de Recursos Naturais da Amazônia, 2015

1. Fluidos Não-newtonianos 2. MHD
3. GITT 4. Entropia I. Título

CDD xx. ed. xxx.xx

Este trabalho é dedicado a **Dona Maroca (Maria Lobato)** *in memoriam*, minha mãe, a Dona **Tomásia Lobato** *in memoriam*, também minha mãe e **Maria Estela Lobato (Tia Maria)** ... me criaram.

Também dedico aos meus irmãos: **Antônio Lobato, Arnaldo Lobato, Keila Lobato** e minha prima **Sônia Lobato**, crescemos juntos.

Especialmente dedico a **Isabel Lobato**,
minha esposa, a **Alnilan Lobato**, minha
filha e a **Állan Lobato**, meu filho, que
sempre apoiaram, incentivaram, cobraram,
perseveraram e de alguma forma
contribuíram para a elaboração do mesmo.

AGRADECIMENTOS

A DEUS, pela vida.....

Aos amigos e Professores Emanuel Negrão Macêdo e Marcelo Raiol pela orientação, incentivo e ajuda na elaboração e composição do trabalho.

Aos amigos e professores João Quaresma, Cláudio Blanco e José Antônio pelo incentivo e colaboração.

Aos Amigos Clauderino Batista, Evaldiney Monteiro, Nelsinho, Carlos Célio e Sil pela ajuda e colaboração no trabalho.

Aos demais parceiros do PRODERNA pelo incentivo, colaboração e momentos de distração durante a convivência no PRODERNA....

Resumo da Tese apresentada ao PRODERNA/UFPA como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Engenharia de Recursos Naturais (D.Eng.)

ESTUDO DA MAGNETOHIDRODINÂMICA EM DUTOS USANDO TRANSFORMADAS INTEGRAIS

Benedito Lobato

Dezembro/2015

Orientadores: Emanuel Negrão Macêdo e Marcelo José Raiol de Souza

Área de Concentração: Transformação de Recursos Naturais

O presente trabalho apresenta o estudo da magnetohidrodinâmica para o escoamento de fluidos em regiões com diferentes formas geométricas. O uso de técnicas de transformadas integrais, no caso GITT, foi utilizada para obter soluções das equações da Quantidade de Movimento e da Transferência de Energia. Em cada caso foi obtida uma solução híbrida (analítica-numérica) que foram tratadas com códigos computacionais que permitiram a análise dos campos de velocidade, de temperaturas e geração de entropia. Os resultados foram comparados com os resultados obtidos em situações clássicas da literatura e também com resultados atuais, mostrando a eficiência e capacidade da técnica utilizada.

Abstract of Thesis presented to PRODERNA/UFPA as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Natural Resources Engineering (D.Eng.)

MAGNETOHYDRODYNAMICS STUDY IN PIPELINES USING INTEGRAL TRANSFORMS

Benedito Lobato

December/2010

Advisor: Emanuel Negrão Macêdo and Marcelo José Raiol de Souza

Research Area: Transformation of Natural Resources

The present work presents the study of magnetohydrodynamics for the outflow of fluids in ducts with different geometric shapes. The integral transforms technics, in this case GITT, were used to obtain solutions of the momentum and energy transfer equations. In each case a hybrid (analytical-numerical) solution was obtained, and they were treated with computational codes that allowed the analysis of the velocity, temperature and entropy fields. The results were compared with the results obtained in classic situations of the literature and also with the actual results, showing the efficiency and capacity of the utilized technique.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO	1
1.1 – MOTIVAÇÃO	1
1.2 – OBJETIVOS	2
1.3 – ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	3
CAPÍTULO 2 – ESTADO DA ARTE	5
2.1 – MAGNETOHIDRODINÂMICA.....	5
2.2 – TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA.....	17
CAPÍTULO 3 – ESCOAMENTO MHD EM DUTOS DE UM FLUIDO VISCOELÁSTICO SEGUNDO O MODELO DE JEFFREYS	22
3.1 – INTRODUÇÃO.....	22
3.2 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA.....	25
3.2.1 – Grupos Adimensionais.....	27
3.3 – METODOLOGIA DA SOLUÇÃO.....	28
3.3.1 – Problema Particular.....	29
3.3.2 – Canal de Placas Paralelas.....	29
3.3.3 – Duto Circular.....	30
3.3.4 – Problema Homogêneo.....	30
3.3.5 – Problema de Autovalor.....	31
3.3.5.1 – Canal de Placas Paralelas.....	31
3.3.5.2 – Duto Circular.....	32
3.3.6 – Par Transformada-Inversa.....	33
3.3.7 – Fator de Atrito de Fanning e Velocidade Média.....	35
3.4 – RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	336
CAPÍTULO 4 – ESCOAMENTO MHD DE FLUIDO DE SEGUNDO GRAU GENERALIZADO	55
4.1 – INTRODUÇÃO.....	55
4.2 – DEFINIÇÃO DO PROBLEMA	56
4.3 – EQUAÇÕES DO ESTUDO	57
4.3.1 – Desenvolvimento dos Termos	58
4.3.2 – Equações de Camada Limite	64

4.3.3 – Adimensionalização das Equações	66
4.3.4 – Função Corrente – Potenciais de Velocidade	68
4.4 – METODOLOGIA DA SOLUÇÃO – Aplicação da GITT	69
4.4.1 – Problema de Autovalor	71
4.4.2 – Transformação Integral	72
4.5 – RESULTADOS E DISCUSSÃO	74
CAPÍTULO 5 – ESCOAMENTO MHD DE FLUIDO NEWTONIANO NÃO-FOURIER EM DUTOS CONCÊNTRICOS	83
5.1 – INTRODUÇÃO	83
5.2 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA.....	85
5.3 – Adimensionalização do Problema.....	86
5.4 – METODOLOGIA DA SOLUÇÃO.....	88
5.4.1 – Problema Particular.....	88
5.4.2 – Problema Homogêneo.....	90
5.5 – GERAÇÃO DE ENTROPIA	96
5.6 – RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	97
5.6.1 – Campo de Velocidades	97
5.6.2 – Campo de Temperaturas	99
CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES E SUGESTÕES.....	117
6.1 – CONCLUSÕES GERAIS	117
6.2 – PROPOSTAS DE CONTINUAÇÃO	119
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	121
APENDICE A	127

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Medindo a resistência da chama de uma vela. Fonte - http://www.newtoncbraga.com.br/index.php/artigos/51-automotivos/1258-art174.html	15
Figura 2.2	Propagação da combustão a partir da vela de ignição. Fonte - http://www.newtoncbraga.com.br/index.php/artigos/51-automotivos/1258-art174.html	16
Figura 2.3	Possível ação de campos magnéticos com objetivo de tornar a combustão mais eficiente. Fonte - http://www.newtoncbraga.com.br/index.php/artigos/51-automotivos/1258-art174.html	16
Figura 3.1	Representação esquemática da geometria do problema físico: perfil do campo de velocidade do escoamento em regime permanente, em local afastado da entrada do canal	25
Figura 3.2	Evolução temporal do campo de velocidade quando $Ha = 0$, $Re = 100$ e $\tau_1 = \tau_2 = 0$. (a) Canal de Placas Paralelas e (b) Duto Circular .	38
Figura 3.3	Evolução temporal do campo de velocidade para diferentes Ha , quando $Re = 100$ e $\tau_1 = \tau_2 = 0$. (a,b,c) Canal de Placas Paralelas e (d,e,f) Duto Circular	39
Figura 3.4	Evolução temporal do campo de velocidade para diferentes Ha quando $\tau_1 = \tau_2 = 1$ e $Re = 1000$. (a,b,c,d) Canal de Placas Paralelas e (e,f,g,h) Duto Circular	41
Figura 3.5	Efeito do número de Hartmann sobre o campo de velocidade. (a) Canal de Placas Paralelas e (b) Duto Circular	41
Figura 3.6	Evolução temporal do campo de velocidade para diferentes Ha quando $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 0$ e $Re = 100$. (a,b,c,d) Canal de Placas Paralelas e (e,f,g,h) Duto Circular	43
Figura 3.7	Evolução temporal do campo de velocidade para diferentes Ha quando $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 1$ e $Re = 100$. (a,b,c,d) Canal de Placas Paralelas e (e,f,g,h) Duto Circular	44
Figura 3.8	Evolução temporal do campo de velocidade para diferentes Ha quando $\tau_1 = \tau_2 = 1$ e $Re = 100$. (a,b,c,d) Canal de Placas Paralelas e (e,f,g,h) Duto Circular	46
Figura 3.9	Evolução temporal do campo de velocidade para diferentes Ha quando $\tau_1 = \tau_2 = 1$ e $Re = 100$. (a,b,c,d) Canal de Placas Paralelas e (e,f,g,h) Duto Circular	48
Figura 3.10	Evolução temporal do campo de velocidade para diferentes Re quando $\tau_1 = \tau_2 = 1$ e $Ha = 0$. (a,b,c,d) Canal de Placas Paralelas e (e,f,g,h) Duto Circular	49
Figura 3.11	Efeito do número de Reynolds sobre o campo de velocidade para diferentes Ha quando $\tau_1 = \tau_2 = 1$. (a,b,c,d) Canal de Placas Paralelas e (e,f,g,h) Duto Circular	50
Figura 3.12	Efeito do número de Reynolds sobre e do número de Hartmann sobre o fator de atrito quando $\tau_1 = \tau_2 = 1$. (a) Canal de Placas Paralelas e (b) Duto Circular	51
Figura 3.13	Efeito de τ_1 e τ_2 e do número de Hartmann sobre o fator de atrito	52

	quando $Re = 100$. (a) Canal de Placas Paralelas e (b) Duto Circular .	
Figura 3.14	Comportamento do fator de atrito quando $\tau_1 = \tau_2 = 1$	53
Figura 4.1	Representação esquemática da geometria do problema físico	56
Figura 4.2	Efeito do número de Hartmann em diferentes pontos ao longo do canal, com $Re = 100$, $n = 1$ e $V0 = 0$	75
Figura 4.3	Efeito do número de Hartmann com $Re = 100$, $n = 1$ e $V0 = -0,09$	76
Figura 4.4	Efeito do número de Hartmann com $Re = 100$, $n = 1$ e $V0 = 0,009$	77
Figura 4.5	Efeito do número de n com $Ha = 1$, $Re = 100$, e $V0 = -0,09$	79
Figura 4.6	Efeito do número de Re com $Ha = 1$, $n = 1$, e $V0 = 0$	81
Figura 5.1	Representação esquemática da geometria do problema físico da região anular	85
Figura 5.2	Evolução temporal do campo de velocidade quando (a) $Ha = 0$, (b) $Ha = 1$, (c) $Ha = 1,5$ e (d) $Ha = 2$	98
Figura 5.3	Evolução temporal do campo de velocidade quando (a) $\lambda = -1$, (b) $\lambda = 1$, (c) $\lambda = 3$ e (d) $\lambda = 5$	99
Figura 5.4	Evolução temporal do campo de temperatura quando $Ha = 1$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $Pr = 0,01$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$	100
Figura 5.5	Evolução temporal do campo de temperatura quando $Ha = 1$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $Pr = 0,01$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$	102
Figura 5.6	Efeito do número de Brinkman sobre o campo de temperatura quando $Ha = 1$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $Pr = 0,01$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$	103
Figura 5.7	Evolução temporal do campo de temperatura para $Pr \leq 0,09$ quando $Br = -1$, $Ha = 1$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $Pr = 0,01$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$	104
Figura 5.8	Evolução temporal do campo de temperatura para $Pr > 0,09$ quando $Br = -1$, $Ha = 1$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$	105
Figura 5.9	Evolução temporal do campo de temperatura para diferentes Pr quando $Br = 1$, $Ha = 1$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$	106
Figura 5.10	Evolução temporal da geração de entropia para diferentes Ha quando $Br = 0,1$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$	107
Figura 5.11	Efeito do número de Hartmann sobre a geração de entropia quando $Br = 0,1$, $Pr = 0,01$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$	108
Figura 5.12	Evolução temporal do campo da geração de entropia para diferentes Br quando $Ha = 1$, $Pr = 0,01$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$	109
Figura 5.13	Evolução temporal do campo da geração de entropia para diferentes Ha quando $Br = 5$, $Pr = 0,01$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$	110
Figura 5.14	Evolução temporal do campo da geração de entropia para diferentes Br quando $Ha = 1,25$, $Pr = 0,01$, $a = 0,25$, $\lambda = 0$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$	111
Figura 5.15	Evolução temporal do campo da geração de entropia para diferentes Pr quando $Ha = 1$, $Br = -1$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$	112
Figura 5.16	Evolução temporal do campo da geração de entropia para diferentes Pr quando $Ha = 1$, $Br = 1$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$	113

Figura 5.17	Efeito do número de Hartmann na geração de entropia quando $Br = 1, Pr = 1, a = 0,5, \tau_R = 0$	114
--------------------	--	-----

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1	Convergência para o campo de velocidade a meia altura da região considerada do canal, para diferentes Ha , $Re = 100$ e $\tau_1 = \tau_2 = 1.0$...	37
Tabela 3.2	Comparação para o campo de velocidades em $R = 0$ e $\tau = 1$, para os diferentes valores de Ha , $Re = 100$ e $\tau_1 = \tau_2 = 0,1$	46
Tabela 5.1	Análise de Convergência do Campo de Velocidades em $R = 0,75$ com diferentes Ha e τ	97
Tabela 5.2	Análise de Convergência do Campo de Temperatura para diferentes números de Hartmann, $Br = -5$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $Pr = 0,01$	100

NOMENCLATURA

a	Relação entre os raios
\vec{B}	Vetor Indução Magnética
B_0	Módulo do Vetor Indução Magnética
D_H	Diâmetro Hidráulico
DC	Duto circular
\vec{E}	Intensidade de campo elétrico
PP	Placas paralelas
Ha	Número de Hartmman
H	Medida do Centro do Canal até a Parede
\vec{H}	Campo magnético
\vec{j}	Densidade de corrente elétrica
N_i	Norma
P	Pressão
R	Raio Característico Adimensional
Re	Número de Reynolds Hidráulico
Re_{DH}	Número de Reynolds Diâmetro Hidráulico
T	Temperatura
T_0	Temperatura na Parede do Cilindro Interno
T_1	Temperatura na Parede do Cilindro Externo
u_x	Velocidade na Direção x
u_c	Velocidade Característica
$U(\tau, R)$	Velocidade Adimensional
$U_P(R)$	Velocidade Adimensional do Problema Particular
$U_H(\tau, R)$	Velocidade Adimensional do Problema Homogêneo
\vec{E}	Intensidade de Campo Elétrico
grad	Gradiente
S'''	Geração de Entropia
N_S	Número de Geração de Entropia
Ec	Número de Eckert

Pr	Número de Prandtl
Rot	Rotacional
c	Velocidade da luz
$k(s, t)$	Velocidade na direção z

LETRAS GREGAS

ρ	Densidade de Massa
τ_{xy}	Tensor de Cisalhamento na Direção xy
λ_1	Tempo de Relaxação do Fluido Viscoelástico
λ_2	Tempo de Retardo do Fluido Viscoelástico
μ	Viscosidade Dinâmica
μ_m	Permeabilidade magnética
η	Viscosidade Cinemática
$\dot{\gamma}$	Tensor Taxa de Deformação
T	Tempo Adimensional
σ	Condutividade Elétrica
τ_1	Constante de Tempo de Relaxação Adimensional
τ_2	Constante de Tempo de Retardo Adimensional
μ_i	Autovalor
φ_i	Autofunção
ϑ	Densidade de carga elétrica
θ	Campo de Temperatura Adimensional
Ω	Diferença de Temperatura Dimensional
τ_R	Constante de Tempo Adimensional

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 - MOTIVAÇÃO

A mecânica dos fluidos estuda os fluidos em repouso ou em movimento, com o fim de determinar os efeitos por eles produzidos sobre as fronteiras que os delimitam ou a ação que estas fronteiras exercem sobre eles.

Se considerarmos que cerca de 75% da superfície do globo terrestre se encontra coberta de água, ainda, que o conjunto Terra-água está envolvido na sua totalidade pela atmosfera (ar), fica claro o interesse prático da mecânica dos fluidos.

A interação de fluidos condutores em movimento com campos elétricos e magnéticos prevê uma rica variedade de fenômenos associados à conversão de energia eletro-fluido-mecânica. Efeitos de tais interações podem ser observados em líquidos, gases, misturas de duas fases, ou plasmas.

Existem inúmeras aplicações científicas e técnicas, tais como: o controle de fluxo e aquecimento no processamento de metais, geração de energia a partir de mistura de duas fases ou de gases a altas temperaturas, confinamento magnético de plasmas em altas temperaturas – mesmo dínamos que geram campos magnéticos em corpos planetários.

Dispositivos práticos magnetohidrodinâmicos tem sido utilizados desde o início do século 20. Um protótipo de bomba MHD foi construído em 1907. Recentemente, dispositivos MHD têm sido utilizados para mexer, fazer levitar, ainda, controlar o fluxo de líquidos para os processos metalúrgicos. Grandes esforços têm sido realizados no desenvolvimento dessa tecnologia no sentido de melhorar a eficiência de conversão elétrica, aumento da confiabilidade com a eliminação de peças móveis e reduzir as emissões de usinas a carvão e a gás. MHD do escoamento em ciclos fechados, de sistemas monofásicos ou bifásicos de metais líquidos, também são explorados.

A MHD teve sua origem com o trabalho do Físico sueco Hannes Olof Gösta Alfvén (1942), no qual estudou o comportamento de um líquido condutor através de um

campo magnético constante. Ele observou que se um líquido condutor for colocado em um campo magnético constante, cada movimento do líquido origina uma força eletromotriz que produz corrente eléctrica. Observou ainda que devido ao campo magnético, estas correntes geram forças mecânicas que alteram o estado de movimento do líquido, ainda, que era produzida um tipo de onda combinada eletromagnética-hidrodinâmica. A confirmação experimental da existência dessas ondas ocorreu sete anos depois, através do estudo de ondas em mercúrio líquido.

Pesquisas recentes têm mostrado a possibilidade de propulsão na água do mar usando MHD e o controle da camada limite turbulenta para reduzir o arrasto. Uma extensa pesquisa mundial sobre confinamento magnético de plasma tem levado a obtenção de condições semelhantes às necessárias para sustentar reações de fusão.

Uma análise rápida e interessante de como a MHD foi desenvolvida, fornece uma maneira acessível de compreender os fenômenos básicos envolvidos.

Faraday e seus contemporâneos sabiam que um material sólido ou fluido, movendo-se em um campo magnético, experimentava uma força, a fem (força eletromotriz). Se o material for condutor elétrico, surgirá uma corrente eléctrica ao longo do material. A corrente pode ser induzida pela variação do campo magnético com o tempo. Isso leva a duas consequências:

i) Surge um campo magnético induzido associado com essa corrente, perturbando o campo magnético original.

ii) Aparece uma força eletromagnética devido a interação do campo com a corrente, perturbando o movimento original.

Estes são os dois efeitos básicos da MHD, a ciência do movimento de fluidos condutores eléctricos sob a ação de campos magnéticos. A situação é necessariamente de interação mútua entre o campo de velocidade do fluido e o campo eletromagnético: o movimento afeta o campo magnético (1) e o campo afeta o movimento (2).

1.2 - OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é estudar o comportamento de fluidos newtonianos e não-newtoniano, em dutos formados por placas paralelas e/ou com geometria circular, submetidos a campo magnético, usando como metodologia para a solução das equações a técnica das Transformadas Integrais.

Especificamente, interessa o efeito do campo magnético sobre o campo de velocidade e sobre o fator de atrito, no escoamento de fluido viscoelástico em canal de placas paralelas e duto circular. Neste caso também interessa o efeito do número de Reynolds sobre esse campo de velocidade.

O presente trabalho também objetiva saber o efeito do campo magnético sobre o escoamento de um fluido de segundo grau modificado em canal de placas paralelas, com efeitos de injeção e sucção, bem como o efeito de outros parâmetros como o número de Reynolds, velocidade de injeção e sucção, índice da lei de potência.

Também de maneira específica, busca-se determinar o efeito do campo magnético, do número de Brinkman, do número de Prandtl sobre o campo de velocidade, o campo de temperatura e a geração de entropia, de um fluido newtoniano não-fourier na região anular de dois cilindros concêntricos.

1.3 - ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Neste capítulo trata-se das razões e objetivos pelos quais o estudo do escoamento de fluidos tem fundamental importância em muitos processos industriais e tecnológicos, levando em conta a natureza característica dos fluidos e a maneira de como interagem com os meios onde estão envolvidos, bem como os objetivos que se pretende alcançar.

O Capítulo 2 apresenta um Estado da Arte acerca da (MHD) e suas aplicações em vários processos industriais e tecnológicos. Também é apresentada uma abordagem dos modelos de escoamento de fluidos não newtonianos em canal de placas paralelas, duto circular e dutos concêntricos, bem como as aplicações da GITT.

O Capítulo 3 trata do estudo do escoamento de um fluido viscoelástico, segundo o modelo de Jeffreys, em canal de placas paralelas e duto circular submetido a uma força de corpo devido a um campo magnético uniforme e perpendicular ao eixo do canal.

O estudo do comportamento de um fluido de segundo grau modificado, entre placas paralelas, com injeção e sucção, submetido a um campo magnético uniforme transversal ao escoamento principal, é feito no Capítulo 4.

No Capítulo 5 é feito o estudo do comportamento de um fluido newtoniano não-Fourier, entre dois cilindros concêntricos em rotação com velocidades angulares diferentes, também submetido a um campo magnético uniforme, porém na direção axial.

No Capítulo 6 são apresentadas as principais conclusões e sugestões para a continuação do trabalho em etapas posteriores.

Por fim, são apresentadas as referências e apêndices.

CAPÍTULO 2

ESTADO DA ARTE

Neste capítulo são descritos os trabalhos relevantes e de aplicação da magnetohidrodinâmica no escoamento de fluidos de natureza não-newtoniana. As informações contidas nestes trabalhos foram utilizadas para a formulação matemática dos escoamentos dos modelos de Jeffreys em canal de placas paralelas e dutos circulares, escoamento de fluidos newtonianos não-fourier e de fluidos não-newtonianos Fourier, ambos em dutos circulares concêntricos. Também, as equações que descrevem os modelos que serão estudados foram obtidas da revisão destes trabalhos bem como as técnicas de transformadas integrais que serão utilizadas para resolução dos problemas.

2.1 – MAGNETOHIDRODINÂMICA

A MHD teve sua origem com o trabalho do Físico sueco Hannes Olof Gösta Alfvén (1942), no qual estudou o comportamento de um líquido condutor através de um campo magnético constante. Ele observou que se um líquido condutor for colocado em um campo magnético constante, cada movimento do líquido origina uma força eletromotriz que produz corrente elétrica. Observou ainda que devido ao campo magnético, estas correntes geram forças mecânicas que alteram o estado de movimento do líquido, ainda, que era produzida um tipo de onda combinada eletromagnética-hidrodinâmica. Ele descreveu este fenômeno usando as equações do eletromagnetismo de Maxwell, aqui representadas no sistema de unidades gaussianas:

$$\text{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (2.1)$$

$$\text{rot}(\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\vec{B} = \mu_m \vec{H} \quad (2.3)$$

$$\vec{j} = \sigma \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) \quad (2.4)$$

combinadas com a equação do momento da hidrodinâmica:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{1}{c} (\vec{j} \times \vec{B}) - \text{grad}(P) \quad (2.5)$$

Como resultado dessa combinação, Alfvén encontrou a equação:

$$\frac{d\vec{H}}{dz} = \frac{4\pi\rho}{H_0^2} \frac{d^2\vec{H}}{dt^2} \quad (2.6)$$

que descreve uma onda se propagando na direção z, com velocidade:

$$v_z = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (2.7)$$

A confirmação experimental da existência dessas ondas ocorreu sete anos depois, através do estudo de ondas em mercúrio líquido.

Recentemente a MHD vem sendo muito utilizada para explicações e aplicações em vários processos que envolvem o comportamento de fluidos condutores submetidos a campos magnéticos.

SETAYESH *et al* (1990) estudaram o efeito da dependência da temperatura sobre as propriedades de transporte no escoamento MHD e transferência de calor em canal de placas paralelas cujas paredes foram mantidas a temperaturas iguais e constantes. Apresentaram resultados numéricos representativos que mostram que a variação das propriedades pode, em certas circunstâncias, ter influência significativa sobre os perfis do campo de velocidades e sobre o campo de temperaturas.

VELUSAMY e GARG (1996) estudaram o escoamento permanente completamente desenvolvido de fluido newtoniano no interior de dutos elípticos verticais. Utilizaram o sistema de coordenadas cilíndricas elípticas e o método de discretização de volumes finitos. Apresentaram o perfil de velocidade, o fator de atrito e o número de Nusselt e observaram que o fator de atrito é maior em tubos de seção elíptica comparados a seções circulares.

SALAS et al (1999) estudaram dispositivos magnetohidrodinâmicos (MHD), tais como bombas de indução eletromagnética ou geradores elétricos foram analisados dentro de uma abordagem sobre a geração de entropia. O escoamento de um fluido incompressível eletricamente condutor em uma máquina de indução MHD foi descrito através do modelo de Hartmann. Irreversibilidades no sistema devido à dissipação ôhmica, o atrito do fluido com as paredes do recipiente e o fluxo de calor foram incluídos na taxa de geração da entropia. Esta quantidade foi usada para definir uma eficiência global da máquina de indução que considera a perda total causada pelo processo de irreversibilidade. Para um gerador MHD trabalhar com a potência de saída máxima, com paredes a uma temperatura constante, uma intensidade de campo magnético ótimo (isto é, número de Hartmann) foi encontrada com base na eficiência global máxima.

ATTIA e SAYED-AHMED (2000) analisaram o fluxo transiente de Hartmann de um fluido incompressível não-newtoniano do tipo Power-Law, viscoso, eletricamente condutor, ente duas placas porosas não condutoras. Estudaram a transferência de calor considerando o efeito Hall, um gradiente de pressão constante e uniforme, um campo magnético uniforme externo perpendicular a superfície das placas, uma injeção e uma sucção uniformes através das placas foram aplicados. As duas placas foram mantidas a temperaturas diferentes, porém, constantes, enquanto que a dissipação Joule e a dissipação viscosa foram levadas em consideração. Soluções numéricas para as equações da energia e do momento não linear foram obtidas usando aproximações de diferenças finitas. O efeito do termo de Hall, o parâmetro descrevendo o comportamento não-newtoniano, a velocidade de injeção e sucção, a distribuição de temperatura, bem como os termos de dissipação foram analisados.

YILBAS (2001) estudou os efeitos de condução e geração de calor devido à dissipação viscosa em anéis que é um tema de interesse para muitos pesquisadores, uma vez que as aplicações incluem processamento de alimentos, máquinas, engenharia aeroespacial, etc. Neste estudo foi considerado o aumento da temperatura e geração de entropia em anéis cilíndricos devido aos efeitos de condução e a dissipação viscosa. Na formulação matemática, o escoamento desenvolvido nos anéis foi assumido como laminar, uma vez que o número de Reynolds Re foi considerado $Re \leq 5000$. A temperatura da parede do cilindro rotativo foi considerada como sendo maior do que a temperatura da parede do cilindro interior estacionário. Os perfis de temperatura e

entropia foram previstos para diferentes números Brinkman e diferenças de temperatura através dos anéis. O ponto de geração de entropia mínima no fluido move-se para longe da parede do cilindro exterior à medida que se aumenta o número de Brinckman, Br. Além disso, o funcionamento eficiente no sistema de rolamento pode ser possível com a análise da produção de entropia.

EL-SHAHED (2005) investigou o efeito de um campo magnético transversal sobre um escoamento transiente de um fluido generalizado de segundo grau através de um meio poroso em um tubo circular. Foram usadas equações diferenciais parciais fracionais para descrever a velocidade e os campos de tensão do escoamento.

ABU-NADA (2006) investigou a segunda lei da Termodinâmica no escoamento laminar através de um canal com dimensões variáveis. Ele estudou numericamente a geração de entropia neste escoamento. Os resultados mostraram que, quando o número de Reynolds (Re) aumenta, o valor total de geração de entropia (Ns) também aumenta. Para valores baixos do número de Reynolds, quando a razão de expansão (razão entre as dimensões do canal) aumenta o valor total de geração de entropia (Ns) diminui. Observou também que para valores mais elevados do número de Reynolds, quando a razão de expansão aumenta o valor Ns diminui. Ainda que o número total de Bejan ($Be = \frac{Ns_{cond}}{Ns_{cond} + Ns_{visc}}$, em que Ns_{cond} é a geração de entropia devido a diferença de temperatura e Ns_{visc} é geração de energia aos efeitos da viscosidade) diminui à medida que aumenta o número de Reynolds. Além disso, o número total de Bejan aumenta com o aumento da razão de expansão.

MATTIUSI *et al* (2007) estudaram o escoamento de um fluido viscoplástico do tipo Herschel-Bulkley através de um tubo de seção transversal elíptica. Esse fluido é conhecido por possuir características de dois outros modelos de fluidos também viscoplásticos, o fluido de Bingham e o Power-Law. Durante o processo de perfuração de um poço de petróleo, a passagem da broca permite que o poço tome uma forma ovalizada. Este foi o motivo que chamou a atenção para estudar escoamento de fluido não-newtoniano em tubo de geometria elíptica. Eles buscaram analisar o efeito dos parâmetros geométricos, cinemáticos e reológicos deste tipo de escoamento. Eles compararam os perfis de velocidade ao longo do eixo maior e menor da elipse com tubos de seção circular. Determinaram também a perda de carga em função do comprimento do tubo, da área transversal e da vazão volumétrica de fluido. Para a

solução das equações da conservação foi utilizado o método de volumes finitos e simularam numericamente no programa comercial PHOENICS-CFD. Eles concluíram que de acordo com os resultados apresentados, foi possível afirmar que o modelo Herschel-Bulkley implementado possui excelente concordância com a solução analítica para o perfil de velocidade. Observaram também que o modelo implementado também apresentou ótima concordância entre o fator de atrito de Fanning e o fator de atrito paramétrico específico para tubo elíptico. Em relação ao comportamento do fator de atrito de Fanning mediante alterações nos parâmetros reológicos Y (Número de Escoamento) e n (índice Power-Law), observaram que há um aumento no fator de atrito para todos os números de Reynolds, sempre que o valor das propriedades reológicas aumenta. Buscaram explicar esse fenômeno através da observação que valores maiores de Y implicam em maiores valores de tensão limite de escoamento (τ_y) e que valores maiores de n implicam no aumento da viscosidade do fluido, ou seja, quanto maior o n maior é o comportamento dilatante do fluido. Ainda sobre o fator de atrito, eles notaram que é possível observar uma dependência maior com relação aos parâmetros reológicos em baixos números de Reynolds. Também que para números de Reynolds maiores, ou seja, quanto mais próximo da região de transição do escoamento laminar para turbulento, menores são os efeitos dos parâmetros reológicos no escoamento do fluido viscoplástico. Os valores dos fatores de atrito, em Números de Reynolds próximos à região de transição do escoamento, tendem para um mesmo valor.

ARIKOGLU *et al* (2008) analisaram o efeito do deslizamento na geração de entropia em um escoamento MHD ao longo de um disco rotativo através de uma técnica de solução semi-numérica-analítica. As equações que regem o escoamento e os campos térmicos foram reduzidas a equações diferenciais ordinárias pela aproximação de Von Karman, então resolvidos através do Método da Transformação Diferencial (DTM), um poderoso método analítico desenvolvido recentemente. As equações de geração de entropia relacionadas e não dimensionalizadas foram derivadas usando parâmetros geométricos e físicos dependentes do campo de escoamentos. A geração de entropia foi minimizada.

Segundo SILVA (2010), as aplicações da Magnetohidrodinâmica vão desde o controle de reações termonucleares ao desenvolvimento de ligas em reatores a plasma. Dentre as aplicações destacam-se também o uso de modelos teóricos que possibilitam a simulação em computador da evolução do arco-elétrico em dispositivos de comando e

proteção, como disjuntores e contadores. A previsão dos campos eletromagnéticos e hidrodinâmicos nos dispositivos citados é de fundamental importância para o entendimento da influência da geometria interna no decaimento da corrente com o tempo e a consequente extinção do arcoelétrico, colaborando com o desenvolvimento de dispositivos mais seguros e otimizados. Baseado nos trabalhos de DELLAR (2002), PHILIPPI *et al* (2006) e SHAN (2003), foi proposta uma equação de relaxação capaz de recuperar a equação resistiva para o eletromagnetismo acoplada, via força de Lorentz, a equação discreta de Boltzmann. Foram construídos dois modelos que diferem entre si pelo tipo e pela forma de introdução da força de Lorentz na equação discreta de Boltzmann. A validação dos modelos foi feita através da comparação entre soluções simuladas e analíticas do escoamento de um fluido magnético em um canal de placas paralelas, TODD (1966). Também foi estudado, utilizando os modelos propostos, a influência do campo magnético sobre os coeficientes de transporte.

JERY *et al* (2010) estudaram numericamente a influência de um campo magnético externo na geração de entropia da convecção natural do ar e do gálio líquido em estado estacionário instável, através da resolução das equações da conservação da massa (continuidade), conservação da quantidade de movimento e da conservação da energia. Eles estudaram a geração da entropia através dos parâmetros: número de Prandtl, diferença de temperatura (Ns_{cond}) e a aos efeitos da viscosidade (Ns_{visc}), o ângulo de inclinação do campo magnético, o número de Grashof e o número Hartmann. Também, estudaram os efeitos destes parâmetros sobre irreversibilidades total e local, bem como a transferência de calor e fluxo do fluido. Verificaram que o campo magnético tende a diminuir as correntes de convecção, a transferência de calor e de geração de entropia no interior da cavidade. A influência do ângulo de inclinação do campo magnético sobre a irreversibilidade local também foi estudada. Eles concluíram que:

- Para valores fixos do ângulo de inclinação do campo magnético, a geração de entropia transiente apresenta comportamento oscilatório para o ar quando $Gr \geq 10^4$ e valores pequenos do número Hartmann (campo magnético). Comportamento assintótico é obtido para valores consideráveis do número de Hartmann. Irreversibilidade transitória sempre apresenta um comportamento assintótico para o gálio líquido. O campo magnético induz à diminuição na geração de entropia.

- Para o ar, aumentando-se o ângulo de inclinação do campo magnético ($30^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$), tende-se a diminuir o número de Hartmann e, conseqüentemente, reduz o comportamento oscilatório da geração de entropia transiente.
- Para o ar e o ângulo de inclinação do campo magnético fixo, o aumento do número de Hartmann tende a aumentar o número Grashof crítico a partir do qual o sistema evolui para a termodinâmica não-linear de processos irreversíveis considerando o ar.
- No estado estacionário, para o menor valor do número de Hartmann ($Ha = 10$) e número de Grashof relativamente mais elevado ($Gr = 10^5$), o valor máximo de geração de entropia foi encontrado com um ângulo de inclinação do campo magnético, $\alpha = 90^\circ$ para o ar e $\alpha = 60^\circ$ para o gálio líquido. Para ambos os fluidos, a irreversibilidade devido ao efeito viscoso é a maior contribuição da geração de entropia.
- No estado de equilíbrio, para alto número de Hartmann ($Ha = 100$) e para relativamente elevado número de Grashof ($Gr = 10^5$), para ambos os fluidos estudados, a geração de entropia aumenta através do aumento da irreversibilidade magnética. O valor máximo da irreversibilidade também é obtido para $\alpha = 90^\circ$ e $\alpha = 60^\circ$, para o ar e para o gálio líquido, respectivamente.
- Aumentando-se o número Hartmann ($Ha > 50$), induz-se uma diminuição da geração de entropia para menores valores de número de Prandtl.
- A taxa de transferência de calor é sempre descrita pela condução para gálio líquido, enquanto apresenta comportamento oscilatório para o ar quando $Gr = 10^4$.
- Em nível local e para número de Grashof relativamente alto ($Gr = 10^5$), a distribuição de geração de entropia é fortemente dependente da direção do campo magnético, a magnitude das linhas de irreversibilidade aumenta até 30° , em seguida, diminui gradualmente. Não há geração de entropia no centro da cavidade.

DHINAKARAN *et al* (2010), estudaram analiticamente o escoamento electro-osmótico de um fluido viscoelástico descrito pelo modelo de Phan-Thien-Tanner (PTT) em um canal de placas paralelas, o modelo usado considera a derivada convectiva de Gordon-Schowalter. Eles apresentaram resultados para os perfis de velocidade e componentes de tensão no microcanal para diferentes valores dos parâmetros que caracterizar esse escoamento. Mostraram soluções analíticas em microcanais para o

escoamento electro-osmótica de fluidos viscoelásticos obedecendo o modelo PTT e condições de contorno simétricas com potenciais nas paredes foram assumidas. A equação de Poisson-Boltzmann não-linear que rege o campo de dupla camada elétrica e uma força de corpo gerada pelo campo eléctrico aplicado foram incluídos na equação de Navier-Stokes. Alguns dos resultados importantes podem ser resumidas da seguinte forma:

1 - A comparação dos resultados encontrados com a solução analítica para escoamento de fluidos newtonianos, disponíveis na literatura mostrou-se consistente;

2 - Perfis de velocidades adimensionais no canal são invariantes com De (número de Deborah) abaixo de $De = 0.1$;

3 - Quando a taxa de cisalhamento e o número de Deborah excedem um valor crítico, ocorre uma instabilidade constitutiva para $\xi \neq 0$ ($\xi \rightarrow$ parâmetro do modelo PTT que representa a combinação entre a rede molecular e o meio contínuo). Expressões para estes valores críticos da taxa de deformação e número são Deborah foram relatado.

4 - As tensões normais e de cisalhamento adimensionais tendem a zero na linha central e aumentam rapidamente perto das paredes do canal. Para baixos números de Deborah, ambas as quantidades são quase insignificantes. Já para De altos, os valores dessas quantidades sobem rapidamente com o raio dos micros canais.

NOGUEIRA *et al* (2011) organizaram um estado da arte da Física Contemporânea e, dentre os temas abordados está a Física do Plasma, é o quarto estado físico da matéria, em que os átomos estão ionizados, e que está presente no Sol, na poeira interestelar sendo também o responsável pelas auroras, sejam austrais ou boreais. Ele está sendo muito estudado hoje em dia com a intenção de se obter energia nuclear pelo método de fusão, pelo qual se poderia obter muito mais energia que pelos processos convencionais e também porque não utilizar materiais radioativos no seu reator, pois trabalha com átomos de núcleos leves como o hidrogênio e hélio.

Uma manifestação da natureza, no qual o plasma aparece, é quando ocorrem os relâmpagos. Conforme expresso acima, o plasma é o 4º estado da matéria. Após a matéria se tornar um gás, aplicando-se mais energia, este ioniza-se gerando o plasma. O plasma conduz eletricidade a uma temperatura altíssima. No caso do relâmpago, ocorre a ionização do ar conduzindo eletricidade das nuvens até à Terra, devido a uma

diferença de potencial (ddp) entre ambos. Quando está ddp atinge um nível que leva ao rompimento do dielétrico do ar, ocorre a ionização do ar, e, em consequência o relâmpago.

Esta característica do plasma, temperatura altíssima, leva a aplicações nas indústrias atualmente. A aplicação amplamente utilizada é de corte de chapas metálicas. Processo comumente chamado de corte a plasma. A título de esclarecimento, utiliza-se também no mercado o corte por oxicorte e o laser. O plasma é um processo que situa-se entre ambos os processos citados.

O estudo dos plasmas tem contornos tanto práticos como acadêmicos. De um lado, tem-se o estado mais comum da matéria no Universo, que caracteriza a composição das estrelas e do meio interestelar. Compreendê-los, portanto, é importante não só por responder perguntas básicas sobre a natureza, mas também por ajudar a caracterizar o Clima Espacial ao redor da Terra e mitigar potenciais efeitos de tempestades solares sobre nossa infra-estrutura tecnológica, entre outros impactos que a atividade do Sol pode ter sobre nosso planeta.

O físico-químico norte-americano Irving Langmuir começou a usar o termo plasma para um gás ionizado em 1927, durante seu trabalho na General Electric Co. Por conta desses estudos feitos com plasmas relativamente densos e frios, hoje se fala em ondas de Langmuir, e as sondas de Langmuir são colocadas a bordo de satélites. A partir daí as pesquisas sobre plasmas se expandiram em várias direções. O desenvolvimento do rádio, por exemplo, levou à descoberta da ionosfera, uma camada natural de plasma acima da atmosfera que reflete as ondas de rádio e também, algumas vezes, as absorve. Essa descoberta levou ao estudo da propagação de ondas de rádio em plasmas e ao conhecimento de uma grande variedade de ondas de plasmas que podem se propagar ao longo das linhas de campo magnético e também de forma perpendicular a elas. Sabe-se, há muitos anos, que a maior parte do Universo conhecido é composta por plasmas. Assim, o entendimento de vários processos requer um bom conhecimento da física dos plasmas, o que é particularmente verdade para o Sol, cuja atividade determina as condições do clima espacial, essencial para uma sociedade cada vez mais dependente de sistemas tecnológicos. A criação da bomba atômica de hidrogênio despertou um grande interesse sobre a energia nuclear como uma possível fonte de energia para o futuro. A liberação de energia que ocorre no Sol é resultante da combinação de núcleos

de hidrogênio para formar hélio, num processo conhecido como fusão termonuclear, que demanda temperatura e pressão extremamente altas.

O esforço para produzir fusão termonuclear controlada teve início no início da década de 1950, com o projeto Sherwood, e hoje envolve um grande número de cientistas e engenheiros da comunidade internacional em torno de máquinas cada vez maiores, complexas e mais sofisticadas. Embora bons resultados tenham sido obtidos, ainda há um longo caminho a ser percorrido até que seja viável o uso comercial desse tipo de energia.

Quando os satélites descobriram os cinturões de radiação e começaram a explorar a magnetosfera da Terra, o termo “física de plasmas espaciais” passou a ser usado com mais frequência. Da pesquisa em fusão, os cientistas espaciais emprestaram a teoria de aprisionamento de plasma por campo magnético e, da ionosfera, a teoria das ondas. A astrofísica forneceu, entre outras coisas, noções de processos magnéticos para liberação de energia e aceleração de partículas.

BRAGA (2010) em seu artigo intitulado “Carro com Combustão Magnética”, mostra o que, depois da injeção e da ignição eletrônica, pode ser acrescentado no sentido de aumentar o desempenho do motor de um automóvel. Pesquisas mostram que campos magnéticos podem ser usados de uma maneira um pouco diferente no carro, aumentando seu rendimento. Quem sabe, os próximos modelos de carros venham equipados com dispositivos magnéticos de aumento de rendimento funcionando segundo princípios que hoje, ao que parecem, ainda não estão bem claros, ou não estão sendo divulgados pelas montadoras.

BRAGA (2010) também comenta que em uma comunicação feita à revista *New Scientist* (Inglaterra), o *British Internal Combustion Engine Research* relatou que, se forem aplicados campos magnéticos ao combustível num motor comum de combustão interna, a uma velocidade de 90 km/h obtém-se uma melhoria no rendimento da ordem de 7,5%. As pesquisas foram feitas num Ford Diesel e depois do relato inicial, não se ouviu mais falar em uma possível utilização do efeito na prática.

Na verdade, a dificuldade maior estaria em explicar porque a combustão de um motor melhora na presença de um campo magnético, levando-se em conta que tanto o combustível (diesel, álcool ou gasolina) como o comburente, não possuem qualquer

propriedade magnética que justifique tal fato. Outro ponto intrigante do relatório é que os ganhos no rendimento não foram constatados imediatamente após à instalação do dispositivo no veículo mas sim algum tempo depois. Examinando-se o que ocorre no interior do cilindro de um motor no momento da combustão, vemos que a mistura combustível comburente passa para um quarto estado da matéria, denominado plasma.

É o que ocorre na chama de uma vela, em que, a combustão leva a mistura de gases que se combina a um estado de excitação em que os elétrons são perdidos, e o meio se torna um condutor. Uma chama de uma vela é condutora de eletricidade e isso pode ser constatado com uma simples experiência, conforme mostra a Fig. 1.

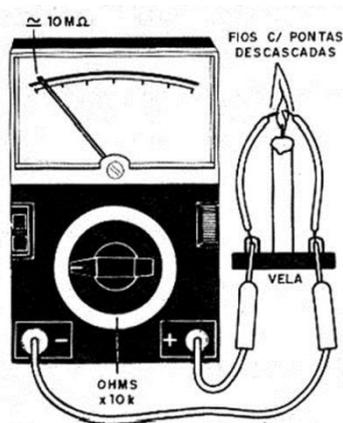


Fig. 2.1 – Medindo a resistência da chama de uma vela.

Fonte - <http://www.newtoncbraga.com.br/index.php/artigos/51-automotivos/1258-art174.html>

É esta condutibilidade do quarto estado da matéria que levou a dispositivos como as lâmpadas de neon e fluorescentes. Havendo uma mobilidade para os portadores de carga numa substância que se encontre neste estado, é evidente que um campo magnético pode influir no seu comportamento.

A magnetohidrodinâmica é uma ciência que procura explicar os fenômenos que ocorrem em substâncias que se comportam como o plasma. Assim, no interior do cilindro de um carro, no momento em que se produz a faísca da vela, a combustão não ocorre de modo instantâneo com toda a mistura combustível+comburente, mas sim se propaga a partir da vela, na forma de uma onda, conforme mostra a Fig. 2.2.

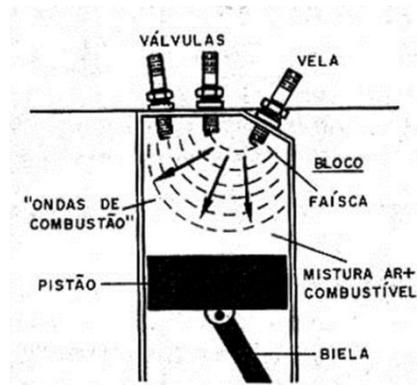


Fig. 2.2 – Propagação da combustão a partir da vela de ignição.

Fonte - <http://www.newtoncbraga.com.br/index.php/artigos/51-automotivos/1258-art174.html>

É evidente que o rendimento na combustão está condicionado à velocidade de propagação desta onda e ao fato dela poder abranger com igual eficiência todo o combustível que está no interior do cilindro. Uma "onda" irregular ou que não consiga atingir todo o combustível+comburente pode causar uma combustão imperfeita e com isso a perda do rendimento do motor.

Ora, um campo magnético poderia ter influência nesta onda. O movimento da onda, com cargas elétricas livres (um plasma) na presença de um campo magnético geraria correntes induzidas que poderiam afetar sua propagação, conforme mostra a Fig. 2.3.

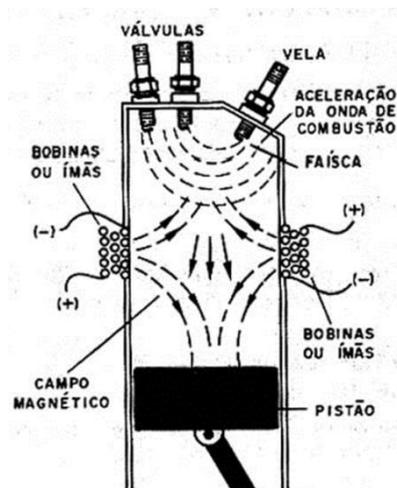


Fig. 2.3 – Possível ação de campos magnéticos com objetivo de tornar a combustão mais eficiente.

Fonte - <http://www.newtoncbraga.com.br/index.php/artigos/51-automotivos/1258-art174.html>

A maneira como essa influência poderia ocorrer, naturalmente dependeria da orientação do campo. Dependendo da orientação, as linhas de força poderiam ajudar na

propagação da onda de choque, dirigindo-a de maneira a obter mais rendimento no cilindro. Não resta dúvida que é um estudo bastante interessante que poderia ser simulado facilmente pelos modernos computadores e depois aplicado em motores experimentais. É possível que em futuro não muito distante, tenhamos no interior dos motores ou bobinas controladas por microcomputadores ou simples imãs que, como nos pescoços dos cinescópios ajudam a dirigir feixes de elétrons, teriam a finalidade de dirigir a "onda de combustão" de modo a se obter mais rendimento de um motor.

2.2 – TÉCNICA DA TRANSFORMADA INTEGRAL GENERALIZADA

As transformadas representam um papel importante na solução das equações diferenciais que surgem na ciência e na sua aplicação à tecnologia (BASSALO - 1988). Essas transformações lineares são chamadas genericamente OPERADORES INTEGRAIS LINEARES e são definidas por:

$$T\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} k(s, t)f(t)dt = F(s) \quad (2.8)$$

Onde $k(s, t)$ é chamada KERNEL ou NÚCLEO da transformação.

Esses operadores integrais essencialmente transformam uma equação diferencial dada em uma equação algébrica e, portanto, reduzem o problema de integrar uma equação diferencial ao de resolver uma equação algébrica.

Dentre as várias técnicas de transformadas, as mais conhecidas são a Transformada de Laplace (BASSALO - 1988), definida como:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt \quad (2.9a)$$

cuja transformada inversa é:

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}F(s)ds \quad (2.9b)$$

E a Transformada de Fourier (BASSALO - 1988):

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt \quad (2.10a)$$

que também tem inversa dada por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} F(\omega) d\omega \quad (2.10b)$$

Quando se depara com problemas em que a equação diferencial apresentada e as condições de contorno envolvem não homogeneidades, as técnicas conhecidas para a solução desses problemas não são convenientes (ÖZISIK, 1992).

Uma técnica que fornece solução sistemática e eficiente, tanto para problemas homogêneos quanto não-homogêneos, estacionários ou transientes, que vem sendo bastante utilizada por vários pesquisadores é conhecida como Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT, do inglês Generalized Integral Transform Technique) (ÖZISIK, 1992). O método consiste em:

- 1 – escolher adequadamente o par transformada-inversa do problema analisado;
- 2 – aplicação da transformação integral da equação diferencial dada – cujo objetivo consiste em remover da equação diferencial parcial, todas menos uma, as derivadas, com isso, a equação diferencial parcial fica reduzida a uma equação diferencial ordinária;
- 3 – a equação diferencial ordinária é resolvida e submetida às condições inicial ou de contorno, e então transformada.

Quando o potencial transformado é invertido pela fórmula de inversão, o potencial desejado é obtido. Basicamente a técnica consiste na utilização do par transformada-inversa, definido por:

$$\tilde{F}(\lambda_m, t) = \int_R \psi(\lambda_m, \vec{r}') \vec{F}(\vec{r}', t) dv' \quad (2.11)$$

que é a expressão da TRANSFORMADA, e:

$$\vec{F}(\vec{r}', t) = \sum_m \frac{\psi(\lambda_m, \vec{r}')}{N(\lambda_m)} \tilde{F}(\lambda_m, t) \quad (2.12)$$

a inversa. Os termos $\psi(\lambda_m, \vec{r}')$, $N(\lambda_m)$ e λ_m são, respectivamente, a autofunção, a norma e os autovalores do problema auxiliar de autovalor.

Vários autores vêm utilizando a GITT na solução de problemas de escoamento e transferência de calor e tem mostrado excelentes resultados comparados com outros métodos, analíticos ou numéricos.

COTTA (1993) apresenta em seu livro “Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow” uma grande variedade de problemas envolvendo o escoamento e transferência de calor em fluidos, em varias formas de geometria, utilizando a técnica da transformada integral combinada com procedimentos avançados na solução de equações diferenciais ordinárias, para resolver problemas governados por equações diferenciais parciais.

ALVES *et al* (2001) utilizaram o software computacional MATHEMATICA na solução de problemas não lineares de difusão e difusão-convecção através de equações diferenciais parciais unidimensionais em regime transiente. Eles utilizaram dois caminhos para a solução dos problemas, o primeiro envolve a transformada integral simbólica da equação diferencial que descreve o problema, com isso eliminando suas coordenadas espaciais, e resolvendo numericamente a equação diferencial ordinária resultante usando uma função intrínseca NDSOLVE do software. No segundo caminho o método adotado foi a aplicação de linhas discretas que também faz parte da função NDSOLVE, para sistemas de equações diferenciais parciais unidimensionais. Concluíram que o processo intrínseco de integração direta é uma alternativa simples de usar, fornecendo resultados numéricos com precisão suficiente para uso em diversas aplicações da engenharia. Concluem também que a técnica da transformada integral apresenta-se como um método alternativo para solução de problemas com requisitos de alta ou baixa precisão, acoplado aos sistemas de solução de equações diferenciais ordinárias que possui eficientes técnicas de solução no próprio software.

LIU *et al* (2000) aplicaram a GITT para resolver a equação da advecção-difusão unidimensional em um meio poroso heterogêneo acoplado a uma sorção com decaimento linear ou não linear. Eles aplicaram a GITT para resolver problemas de

transporte de soluto em condições complexas de advecção, dispersão, sorção, e decaimento. Eles mostraram que quando tanto a sorção e o decaimento são lineares, foram obtidas soluções analíticas utilizando a GITT, para a equação da advecção-dispersão unidimensional considerando o escoamento transiente. Já para a sorção e o decaimento não lineares, eles encontraram uma solução híbrida analítica-numérica, através da GITT.

VIANA *et al* (2001) estudaram analiticamente, usando a Técnica da Transformada Integral Clássica, o escoamento de fluido tipo Herschel-Bulkley na região anular entre dutos concêntricos, através da equação do momentum e da energia. Com esta técnica o objetivo era a determinação de parâmetros de interesses práticos a engenharia como o fator de atrito e o número de Nusselt, ao longo do duto. VIANA *et al* (2001) encontraram resultados numéricos para o produto $f \times Re$ e para o campo de velocidades, usando diferentes valores do índice power-law. Com esses resultados eles obtiveram o campo de temperatura e, ainda, outros parâmetros como a temperatura média e o número de Nusselt local, nas paredes do duto interior e do duto exterior. A comparação dos resultados obtidas por eles mostrou excelente concordância e consistência com os resultados da literatura.

LIMA *et al* (2007) estudaram o escoamento MHD de um fluido newtoniano em um canal de placas paralelas usando a Técnica da Transformada Integral Generalizada – GITT. Eles encontraram uma solução híbrida para o problema através de uma formulação matemática que evidencia o regime transiente de escoamento, mantido por um gradiente de pressão constante e o estado estacionário, também considerando o gradiente de pressão constante e um movimento da placa superior do canal, ainda, a ação de uma injeção ou sucção perpendicular as placas porosas. Os resultados encontrados e comparados com os da literatura demonstraram excelente concordância, o que mostra que a GITT é uma ótima ferramenta para a solução de problemas que oferecem um grau de dificuldade maior.

HEINEN (2005) apresentou um estudo sobre a Técnica da Transformada de Laplace Integral Generalizada (GILTT, do inglês Generalized Integral and Laplace Transform Technique) solucionando analiticamente um sistema de EDO's (Equações Diferenciais Ordinárias) de segunda ordem resultante da transformação da GITT, equações essas que surgem quando a técnica é aplicada na solução de problemas

bidimensionais estacionários. Ele observou que a solução consiste na redução da ordem do problema transformado em outro sistema de EDO's lineares de primeira ordem e a solução analítica deste problema, pela técnica da transformada de Laplace. Ele aplicou a técnica na resolução da equação da energia linear bidimensional e estacionária. Também apresentou também simulações numéricas e comparou com os resultados disponíveis na literatura.

CAPITULO 3

ESCOAMENTO MHD EM DUTOS DE UM FLUIDO VISCOELÁSTICO SEGUNDO O MODELO DE JEFFREYS

3.1 – INTRODUÇÃO

O estudo do escoamento de um fluido viscoso condutor elétrico submetido à ação de um campo magnético transversal tem inúmeras aplicações em muitos dispositivos tais como geradores de potência magnetohidrodinâmicos, bombas MHD, aceleradores, além de explicar fenômenos do tipo aquecimento aerodinâmico, precipitação eletrostática, tecnologia de polímeros e purificação de óleo bruto, os quais surgem na indústria do petróleo, em gotículas de fluido e sprays (ATTIA, 2002).

Apesar da grande aplicação dos fluidos newtonianos em muitas situações práticas da engenharia, um grande número de fluidos viscosos tem sido estudados por muitos pesquisadores. Dentre estes fluidos destacam-se, em sua maioria, os fluidos sintéticos industriais (principalmente na indústria de polímeros e de terceira geração, a qual promove a transformação dos materiais poliméricos em produtos finais), bem como ainda inúmeros fluidos de relevância biológica, que apresentam características claramente não newtonianas:

A geologia tem demonstrado que o movimento do gelo glacial, o escoamento de lava dos vulcões e a sua posterior solidificação são fenômenos só corretamente descritos, quando se assumem modelos de comportamento reológico não newtoniano.

O sangue é um fluido de constituição físico-química complexa, formado por moléculas de grandes dimensões e elevado peso molecular em solução num fluido de baixo peso molecular e estruturalmente simples. Estes são os ingredientes para um fluido com características viscoelásticas. A saliva e o fluido sinovial, que lubrifica as juntas ósseas, apresentam um elevado grau de elasticidade extensional.

Fluidos diversos como as tintas decorativas, as tintas de impressão, as colas, os produtos de cosmética e beleza, os medicamentos, os produtos alimentícios no estado

líquido (ketchup, iogurtes, molhos), inúmeros produtos alimentícios que, apresentando-se aos consumidores no estado sólido ou em pó, passaram em processo por uma fase líquida (sorvetes, produtos de confeitaria, massa de panificação), os sabões e detergentes, alguns óleos com aditivos de massa molecular elevada ou contendo partículas no estado sólido, fluidos lubrificantes utilizados na perfuração de poços de petróleo e gás natural, petróleo bruto, plásticos no estado líquido (polímero fundido), alguns fluidos térmicos, lamas de estações de tratamento de águas residuais, todo o tipo de lamas provenientes da indústria extrativa, fluidos abrasivos, etc. De fato, a lista de fluidos não newtonianos é muito mais extensa do que uma lista de fluidos com características newtonianas.

DUARTE et al (2006) estudaram numericamente, através do método dos volumes finitos, o “escoamento de arranque” plano de Poiseuille de fluidos viscoelásticos dependentes do tempo. Eles encontraram resultados para fluidos newtonianos e não newtonianos variando o número de elasticidade. Os resultados dos fluidos UCM e Oldroyd-B também foram reproduzidos analiticamente. Os resultados obtidos para os modelos PTT e FENE-MCR aproximam-se dos obtidos para os fluidos UCM e Oldroyd-B respectivamente.

AKBAR et al (2011) estudaram o escoamento do sangue através de uma artéria cônica com uma estenose, em que adotaram um modelo de fluido não-newtoniano para o sangue, assumido como um fluido de Jeffreys. Eles resolveram o sistema de equações do problema através de um método perturbativo para determinar expressões para o campo de velocidades, impedância de resistência, tensão de cisalhamento na parede e a tensão de corte na estenose. Desse estudo eles concluíram que: i) a influência do tempo de retardo, da forma da estenose e a altura de estenose sobre o perfil de velocidade são similares; ii) o perfil de velocidade aumenta com o aumento do tempo de relaxação; iii) a resistência de impedância aumenta quando a região cônica converge, também quando ela diverge, e para artérias não cônicas, quando o tempo de retardo e a forma da estenose aumenta. Enquanto que a resistência diminui quando aumenta o tempo de relaxação; iv) a tensão de corte na estenose aumenta com o aumento do tempo de relaxação e diminui com o aumento do tempo de retardo; v) com o aumento do tempo de relaxação a altura de estenose, a altura da estenose e a tensão de corte aumentam, enquanto que a tensão de corte diminui com o aumento do tempo de relaxação.

Para fluidos com características viscoelásticas, o tensor de tensões tem a forma:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_p + \boldsymbol{\tau}_s \quad (3.1)$$

onde, $\boldsymbol{\tau}_p$ é a tensão do polímero e $\boldsymbol{\tau}_s$ é a tensão do solvente, dada pela lei newtoniana, e que pode ser expressa por:

$$\boldsymbol{\tau}_s = 2\eta_s \mathbf{D} \quad (3.2)$$

em que η_s é a viscosidade constante do polímero e \mathbf{D} é o tensor da taxa de deformação, definido como:

$$\mathbf{D} = \frac{\nabla \vec{u} + (\nabla \vec{u})^T}{2} \quad (3.3)$$

A equação constitutiva para fluidos viscoelásticos é dada pela seguinte relação:

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda_1 \frac{D\boldsymbol{\tau}}{Dt} = 2\mu \left(\mathbf{D} + \lambda_2 \frac{D\mathbf{D}}{Dt} \right) \quad (3.4)$$

Sendo que $\frac{D\boldsymbol{\tau}}{Dt}$ é a derivada convectiva superior do tensor das tensões em relação ao tempo, definida como:

$$\frac{D\boldsymbol{\tau}}{Dt} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla \vec{u} - \boldsymbol{\tau} \cdot (\nabla \vec{u})^T \quad (3.5)$$

μ é a viscosidade do fluido, λ_1 é o tempo de relaxação do fluido (valor que indica a extensão da componente elástica do fluido). A medida que o tempo de relaxação aumenta, também aumenta a elasticidade do fluido. Para um tempo de relaxação zero, obtém-se a equação constitutiva newtoniana. λ_2 é o tempo de retardação do fluido. Quando as derivadas convectivas são substituídas por derivadas parciais no tempo, ou seja, $\frac{D}{Dt} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}$, as características do fluido obedecem ao chamado **Modelo de Jeffreys**. Assim, a Eq. (3.4) fica:

$$\boldsymbol{\tau} + \lambda_1 \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t} = 2\mu \left(\mathbf{D} + \lambda_2 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \quad (3.6)$$

3.2 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Será analisado o escoamento transiente unidimensional de um fluido viscoelástico e condutor elétrico, que obedece ao Modelo de Jeffreys, em dutos com diferentes geometrias. O estudo será realizado em uma região do duto afastada da entrada, onde os efeitos de borda serão desprezados. A análise será feita para dutos com geometria retangular (canal de placas paralelas) e geometria circular, sendo que as paredes dos dutos serão isolantes elétricos. O fluido estará sujeito a um campo magnético \vec{B} , uniforme e perpendicular ao escoamento e o movimento do fluido é devido a um gradiente de pressão constante. Uma geometria simplificada do problema é mostrada na Fig. 3.1 abaixo.

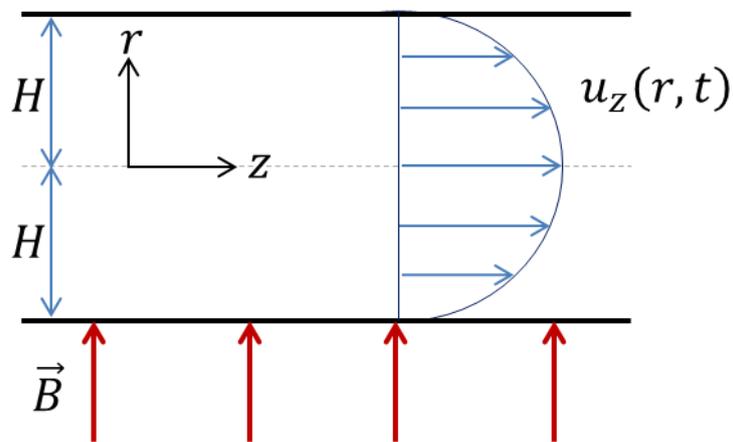


Figura 3.1 – Representação esquemática da geometria do problema físico: perfil do campo de velocidade do escoamento em regime permanente, em local afastado da entrada do canal.

Observa-se que as características do escoamento são semelhantes para os dois casos. O diâmetro hidráulico é dado por:

$$D_H = 2^{2-p}H \quad (3.7)$$

O expoente p representa a geometria do canal definido como:

$$p = \begin{cases} 0, \text{ canal de placas paralelas} \\ 1, \text{ duto circular} \end{cases} \quad (3.8)$$

Para esta situação a equação da conservação da quantidade de movimento é dada por:

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{1}{r^p} \frac{\partial}{\partial r} (r^p \tau_{rz}) - \frac{\partial P}{\partial z} - \sigma B_0^2 v_z \quad (3.9)$$

Em que a condição inicial é:

$$t = 0 \rightarrow v_z = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial t} = 0, \quad \forall r \quad (3.10a)$$

e para $t > 0$ e considerando $\frac{\partial P}{\partial z} = P_z = \text{cte}$, as condições de contorno são dadas por:

$$r = 0 \rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0 \quad (3.10b)$$

$$r = H \rightarrow v_z = 0 \quad (3.10c)$$

A equação constitutiva do fluido obedece ao Modelo de Jeffreys, definida pela Eq. (3.6) que, para este problema, é dada por (BIRD, 1993):

$$\tau_{rz} + \lambda_1 \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial t} = -\mu \left(\dot{\gamma} + \lambda_2 \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial t} \right) \quad (3.11)$$

onde λ_1 é o tempo de relaxação, λ_2 é o tempo de retardo do fluido e $\dot{\gamma} = \frac{\partial v_z}{\partial r}$, é o tensor taxa de deformação (BIRD, 1993) que levado na Eq. (3.11), esta fica:

$$\tau_{rz} + \lambda_1 \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial t} = -\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \lambda_2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial t \partial r} \right) \quad (3.12)$$

Isolando τ_{rz} na Eq. (3.12) e substituindo na Eq. (3.9), tem-se:

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{r^p} \frac{\partial}{\partial r} (r^p \tau_{rz}) \right] + \frac{\mu}{r^p} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^p \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \lambda_2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial t \partial r} \right) \right] - \frac{\partial P}{\partial z} - \sigma B_0^2 v_z \quad (3.13)$$

Isolando o termo $\frac{1}{r^p} \frac{\partial}{\partial r} (r^p \tau_{rz})$ na Eq. (3.9) este fica:

$$\frac{1}{r^p} \frac{\partial}{\partial r} (r^p \tau_{rz}) = -\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial z} - \sigma B_0^2 v_z \quad (3.14)$$

Substituindo agora a Eq. (3.14) na Eq. (3.13), esta fica:

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t} \left[-\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} - \frac{\partial P}{\partial z} - \sigma B_0^2 v_z \right] + \frac{\mu}{r^p} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^p \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \lambda_2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial t \partial r} \right) \right] +$$

$$-\frac{\partial P}{\partial z} - \sigma B_0^2 v_z$$
(3.15)

Considerando $\frac{\partial P}{\partial z} = P_z$ é constante e arrumando a Eq. (3.15), esta toma a forma:

$$\lambda_1 \rho \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} + (\rho + \lambda_1 \sigma B_0^2) \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\mu}{r^p} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^p \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\mu \lambda_2}{r^p} \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} \left(r^p \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) +$$

$$-P_z - \sigma B_0^2 v_z$$
(3.16)

Portanto, o sistema de equações que descreve completamente o escoamento de um fluido que obedece ao modelo de Jeffreys em canal de placas paralelas ($p = 0$) ou duto circular ($p = 1$), submetido a um campo magnético uniforme e perpendicular ao escoamento, será:

$$\lambda_1 \rho \frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} + (\rho + \lambda_1 \sigma B_0^2) \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\mu}{r^p} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^p \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\mu \lambda_2}{r^p} \frac{\partial^2}{\partial t \partial r} \left(r^p \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) +$$

$$-P_z - \sigma B_0^2 v_z$$
(3.17)

Em $t = 0$ e $\forall r$:

$$v_z = 0$$
(3.18a)

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = 0$$
(3.18b)

Para $t > 0$ e $P_z = \text{cte}$:

$$r = 0 \rightarrow \frac{\partial v_z}{\partial r} = 0$$
(3.18c)

$$r = H \rightarrow v_z = 0$$
(3.18d)

3.3.1 – Grupos Adimensionais

Para a solução utiliza-se grandezas adimensionais para simplificação das Eq. (3.17 – 3.18). Os grupos adimensionais empregados na solução deste problema são dados por:

$$U = \frac{v_z}{u_c}, \quad R = \frac{r}{H}, \quad \tau = \frac{u_c t}{H}, \quad R = \frac{r}{H}, \quad \bar{U} = \frac{\bar{v}_z}{u_c}$$

$$u_c = u_{\text{máx}} = \frac{(-P_z)D_H^2}{2^{5-p}\mu}, \quad Re_{DH} = \frac{\rho u_c D_H}{\mu}, \quad Re = \frac{Re_{DH}}{2^{2-p}} \quad (3.19)$$

$$\tau_1 = \frac{\lambda_1 u_c}{Re}, \quad \tau_2 = \frac{\lambda_2 u_c}{Re}, \quad Ha = hB_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}, \quad \omega = 1 + \frac{\alpha_1 (Ha)^2}{Re}$$

Onde u_c é uma velocidade característica do escoamento e será dada pela velocidade máxima no centro do canal. Desse modo, os grupos adimensionais sendo substituídos na Eq. (3.17) e nas condições iniciais e de contorno, Eq. (3.18a-d), produz o sistema adimensionalizado, dado por:

$$\tau_1 \frac{\partial^2 U(\tau, R)}{\partial \tau^2} + \omega \frac{\partial U(\tau, R)}{\partial \tau} = \frac{2^{p+1}}{Re} + \frac{1}{Re} \frac{1}{R^p} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^p \frac{\partial U(\tau, R)}{\partial R} \right] +$$

$$+ \frac{\tau_2}{Re} \frac{1}{R^p} \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{\partial}{\partial R} \left[R^p \frac{\partial U(\tau, R)}{\partial R} \right] \right\} - \frac{(Ha)^2}{Re} U(\tau, R) \quad (3.20)$$

Em $\tau = 0$ e $\forall R$:

$$U(0, R) = 0 \quad (3.21a)$$

$$\frac{\partial U(0, R)}{\partial \tau} = 0 \quad (3.21b)$$

Para $\tau > 0$:

$$R = 0 \rightarrow \frac{\partial U(\tau, 0)}{\partial R} = 0 \quad (3.21c)$$

$$R = 1 \rightarrow U(\tau, 1) = 0 \quad (3.21d)$$

3.3 – METODOLOGIA DA SOLUÇÃO

Para a solução do problema foi utilizada a Técnica da Transformada Integral Generalizada – GITT que consiste em considerar a solução geral como sendo formada por uma solução particular do problema, $U_p(R)$, que carrega a informação da não

homogeneidade da Eq. (3.20), e uma solução homogênea, $U_H(\tau, R)$, uma vez que as condições de iniciais e de contorno são homogêneas:

$$U(\tau, R) = U_P(R) + U_H(\tau, R) \quad (3.22)$$

Substituindo a Eq. (3.22) na Eq. (3.20), tem-se:

$$\begin{aligned} \tau_1 \frac{\partial^2 U_H(\tau, R)}{\partial \tau^2} + \omega \frac{\partial U_H(\tau, R)}{\partial \tau} &= \frac{2^{p+1}}{\text{Re}} + \frac{1}{\text{Re} R^p} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^p \frac{\partial U_P(R)}{\partial R} \right] + \\ &+ \frac{1}{\text{Re} R^p} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^p \frac{\partial U_H(\tau, R)}{\partial R} \right] + \frac{\tau_2}{\text{Re} R^p} \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{\partial}{\partial R} \left[R^p \frac{\partial U_H(\tau, R)}{\partial R} \right] \right\} + \\ &- \frac{(\text{Ha})^2}{\text{Re}} U_P(R) - \frac{(\text{Ha})^2}{\text{Re}} U_H(\tau, R) \end{aligned} \quad (3.23)$$

A Eq. (3.23) pode ser separada em dois problemas: um particular no qual o campo de velocidades depende apenas de R , e um problema homogêneo, no qual o campo de velocidades depende tanto do tempo quanto da posição adimensionais.

3.3.1 – Problema Particular

Para o problema particular, a equação toma a forma:

$$\frac{1}{\text{Re} \cdot R^p} \frac{d}{dR} \left[R^p \frac{dU_P(R)}{dR} \right] - \frac{(\text{Ha})^2}{\text{Re}} \cdot U_P(R) + \frac{2^{p+1}}{\text{Re}} = 0 \quad (3.24a)$$

sujeita as seguintes condições:

$$R = 0 \rightarrow \frac{dU_P(R)}{dR} = 0 \quad (3.24b)$$

$$R = 1 \rightarrow U_P(R) = 0 \quad (3.24c)$$

3.3.2 – Problema Particular – Canal de Placas Paralelas: $p = 0$

Para este caso, a Eq. (3.21a) fica:

$$\frac{d^2 U_P(R)}{dR^2} - (Ha)^2 \cdot U_P(R) + 2 = 0 \quad (3.25)$$

com as condições (3.21b) e (3.21c), que tem solução dada por:

$$U_P(R) = \frac{2}{(Ha)^2} \left[1 - \frac{\cosh(Ha \cdot R)}{\cosh(Ha)} \right] \quad (3.26)$$

3.3.3 – Problema Particular – Duto Circular: $p = 1$

Agora, a equação para esta situação é da forma:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left[R \frac{dU_P(R)}{dR} \right] - (Ha)^2 \cdot U_P(R) + 4 = 0 \quad (3.27)$$

e as condições (3.21b) e (3.21c), cuja solução é dada por:

$$U_P(R) = \frac{4}{(Ha)^2} \left[1 - \frac{I_0(Ha \cdot R)}{I_0(Ha)} \right] \quad (3.28)$$

em que I_0 é a Função Modificada de Bessel de primeira espécie.

3.3.4 – Problema Homogêneo:

Para o problema homogêneo, a equação de movimento toma a forma:

$$\begin{aligned} \tau_1 \frac{\partial^2 U_H(\tau, R)}{\partial \tau^2} + \omega \frac{\partial U_H(\tau, R)}{\partial \tau} = \frac{1}{ReR^p} \frac{\partial}{\partial R} \left[R^p \frac{\partial U_H(\tau, R)}{\partial R} \right] + \\ + \frac{\tau_2}{ReR^p} \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{\partial}{\partial R} \left[R^p \frac{\partial U_H(\tau, R)}{\partial R} \right] \right\} - \frac{(Ha)^2}{Re} U_H(\tau, R) \end{aligned} \quad (3.29)$$

sujeita as seguintes condições iniciais e de contorno:

- para $\tau = 0$ e $\forall R$:

$$U_H(0, R) = -U_P(R) \quad (3.30a)$$

$$\frac{\partial U_H(0, R)}{\partial \tau} = 0 \quad (3.30b)$$

e para $\tau > 0$:

$$R = 0 \rightarrow \frac{\partial U_H(\tau, 0)}{\partial R} = 0 \quad (3.30c)$$

$$R = 1 \rightarrow U_H(\tau, 1) = 0 \quad (3.30d)$$

3.3.5 – Problema de Autovalor:

A aplicação da GITT reque um problema auxiliar de autovalor, que para o problema em questão pode ser escrito como:

$$\frac{1}{R^p} \frac{d}{dR} \left[R^p \frac{d\psi_i(R)}{dR} \right] + \mu_i^2 \psi_i(R) = 0 \quad (3.31)$$

Que para cada caso será dado por:

3.3.5.1 – Canal de Placas Paralelas: $p = 0$

Para esta situação, o problema de autovalor é definido por (ÖZISIK, 1993):

$$\frac{d^2 \psi_i(R)}{dR^2} + \mu_i^2 \psi_i(R) = 0 \quad (3.32a)$$

com as seguintes condições de contorno:

$$R = 0 \rightarrow \frac{d\psi_i(R)}{dR} = 0 \quad (3.32b)$$

$$R = 1 \rightarrow \psi_i(R) = 0 \quad (3.32c)$$

que tem solução dada pelas autofunções (ÖZISIK, 1993):

$$\psi_i(R) = \cos(\mu_i R), \quad i = 1, 2, 3 \dots \quad (3.33)$$

A condição de normalização é dada por (ÖZISIK, 1993):

$$\int_0^1 \psi_i(R)\psi_j(R)dR = \begin{cases} 0, i \neq j \\ N_i, i = j \end{cases} \quad (3.34)$$

de onde tiramos que a Norma é dada por $N_i = \frac{1}{2}$ e os autovalores são (ÖZISIK, 1993):

$$\mu_i = (2i - 1) \frac{\pi}{2} \quad (3.35)$$

Assim, a autofunção normalizada é:

$$\tilde{\psi}_i(R) = \frac{\psi_i(R)}{\sqrt{N_i}} = \sqrt{2} \cdot \cos(\mu_i R) \quad (3.36)$$

3.3.5.2 – Duto Circular: $p = 1$

Para este caso, um problema de autovalor associado ao problema homogêneo, foi definido por (ÖZISIK, 1993):

$$\frac{d^2 \psi_i(R)}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\psi_i(R)}{dR} + \mu_i^2 \psi_i(R) = 0 \quad (3.37a)$$

cujas condições de contorno são:

$$R = 0 \rightarrow \frac{d\psi_i(0)}{dR} = 0 \quad (3.37b)$$

$$R = 1 \rightarrow \psi_i(1) = 0 \quad (3.37c)$$

com condição de normalização definida por:

$$\int_0^1 R\psi_i(\mu_i, R)\psi_j(\mu_j, R)dR = \begin{cases} 0, i \neq j \\ N_i, i = j \end{cases} \quad (3.38)$$

As autofunções são dadas por:

$$\psi_i(\mu_i, R) = J_0(\mu_i, R) \quad (3.39)$$

e a norma é dada por:

$$N_i = \frac{RJ_1(\mu_i, R)}{\mu_i} = \frac{1}{2}J_1(\mu_i) \quad (3.40)$$

Os autovalores do problema são:

$$J_0(\mu_i) = 0 \quad (3.41)$$

Portanto, a autofunção normalizada é dada por:

$$\tilde{\Psi}_i(\mu_i, R) = \frac{J_0(\mu_i, R)}{\sqrt{\frac{1}{2}J_1(\mu_i)}} \quad (3.42)$$

3.3.6 – O par transformada-inversa

Após estarem definidos os problemas auxiliares, pode-se escrever o par transformada-inversa para o problema homogêneo:

$$\bar{U}_{Hi}(\tau) = \int_0^1 R^p \tilde{\Psi}_i(\mu_i, R) U_H(\tau, R) dR \quad (3.43)$$

$$U_H(\tau, R) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Psi}_i(\mu_i, R) \bar{U}_{Hi}(\tau) \quad (3.44)$$

A transformação integral da Eq. (3.29) é dada pela aplicação do operador $\int_0^1 R^p \tilde{\Psi}_i(\mu_i, R) dR$ sobre esta que, depois de devidamente transformada, toma a forma:

$$\tau_1 \frac{d^2 \bar{U}_{Hi}(\tau)}{d\tau^2} + \left(\omega + \frac{\tau_2 \mu_i^2}{Re} \right) \frac{d\bar{U}_{Hi}(\tau)}{d\tau} + \left[\frac{\mu_i^2 + (Ha)^2}{Re} \right] \bar{U}_{Hi}(\tau) = 0 \quad (3.45)$$

Sujeita as seguintes condições iniciais: $\tau = 0$

$$\bar{U}_{Hi}(0) = - \int_0^1 R^p \tilde{\Psi}_i(\mu_i, R) U_P(R) dR = f_i \quad (3.46)$$

$$\frac{d\bar{U}_{Hi}(0)}{d\tau} = 0 \quad (3.47)$$

A solução analítica deste sistema, formada pela Eq. (3.45) e pelas condições iniciais, Eq. (3.46) e Eq. (3.47), para o problema homogêneo é:

$$\bar{U}_{Hi}(\tau) = \frac{2^{p+\frac{1}{2}} C_p \left[A_1 \left(e^{\frac{A_2}{\text{Re } \tau_1} \tau} - 1 \right) + A_2 \left(e^{\frac{A_2}{\text{Re } \tau_1} \tau} + 1 \right) \right] e^{-\frac{A_1+A_2}{2 \text{Re } \tau_1} \tau}}{\mu_i \text{Ha} (\text{Ha}^2 + \mu_i^2) A_2} \quad (3.48)$$

Sendo que o termo C_p será da seguinte maneira, conforme o caso:

- para o canal de placas paralelas, $p = 0$:

$$C_{p=0} = \frac{\mu_i \cos(\mu_i) \sinh(\text{Ha}) - \text{Ha} \cosh(\text{Ha}) \sin(\mu_i)}{\cosh(\text{Ha})} \quad (3.49)$$

- para o duto circular, $p = 1$:

$$C_{p=1} = \frac{\mu_i I_1(\text{Ha}) J_0(\mu_i) - \text{Ha} I_0(\text{Ha}) J_1(\mu_i)}{I_0(\text{Ha}) \sqrt{J_1(\mu_i)}} \quad (3.50)$$

Ainda, os demais termos são dados:

$$A_1 = \text{Re } \omega + \mu_i^2 \tau_1 \quad (3.51)$$

e

$$A_2 = \sqrt{A_1^2 - 4 \text{Re}(\text{Ha}^2 + \mu_i^2) \tau_1} \quad (3.52)$$

A solução geral, Eq. (3.20), será:

$$U(\tau, R) = U_P(R) + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Psi}_i(\mu_i, R) \bar{U}_{Hi}(\tau) \quad (3.53)$$

O primeiro termo da Eq. (3.53) corresponde ao problema particular, dado pelas Eq. (3.26), para o canal de placas paralelas, e Eq. (2.28), para o duto circular. Já a parte homogênea vem da contribuição do produto da Eq. (3.48) com suas respectivas autofunções.

3.3.7 – Fator de Atrito de Fanning e Velocidade Média

O Fator de Atrito é um número adimensional usado no cálculo de escoamentos de fluidos e está relacionado à tensão de cisalhamento na parede por:

$$\tilde{\tau} = \frac{f\rho U^2}{2} \quad (3.54)$$

Onde $\tilde{\tau}$ é a tensão de cisalhamento na parede, f é o fator de atrito de Fanning, U é a velocidade do fluido e ρ é a densidade do fluido. O fator de atrito relacionado ao diâmetro hidráulico é definido como:

$$f = \frac{(-P_z)D_H}{2\rho\tilde{u}^2} \quad (3.55)$$

Em que ρ é a densidade do fluido, \tilde{u} é a velocidade média e $(-P_z)$ é o gradiente de pressão dado pela Eq. (3.19):

$$(-P_z) = \frac{2^{5-p}\mu u_c}{D_H^2}$$

Substituindo a equação acima na Eq. (3.55), o fator de atrito de Fanning fica:

$$f = \frac{2^{4-p}}{Re_{DH}\tilde{U}^2} \quad (3.56)$$

assim, f fica:

$$f \times Re_{DH} = \frac{2^{4-p}}{\tilde{U}^2} \quad (3.57)$$

A velocidade média do escoamento é dada por:

$$\tilde{v}_z = \frac{\int v_z dA}{\int dA} = \frac{\int_0^H v_z r^p dr}{H^{p+1}}$$

Na forma adimensional:

$$\tilde{U} = \int_0^1 R^p U(\tau, R) dR \quad (3.58)$$

3.4 – RESULTADOS E DISCUSSÃO

A expressão geral para o estudo do escoamento de um fluido viscoelástico, em dutos com geometria circular e cartesiana, é dada pela Eq. (3.53). É evidente a influência dos parâmetros como o número de Hartmann, Ha , os tempos de relaxação e retardo, τ_1 e τ_2 , respectivamente, e o número de Reynolds, Re , sobre o campo de velocidades.

Este modelo está em plena concordância com o escoamento de Poiseuille, no limite quando $Ha = 0$, $\tau_1 = \tau_2 = 0$, para escoamento em regime permanente, uma vez que neste caso a Eq. (3.20) toma a forma:

$$\frac{1}{R^p} \frac{d}{dR} \left[R^p \frac{dU(R)}{dR} \right] + 2^{p+1} = 0 \quad (3.59)$$

onde p define a geometria do duto. Considerando as condições de contorno para este caso, dadas por:

$$R = 0 \rightarrow \frac{dU(R)}{dR} = 0 \quad (3.59a)$$

$$R = 1 \rightarrow U(R) = 0 \quad (3.59b)$$

Cuja solução permite a verificação do modelo desenvolvido neste trabalho, uma vez que, para ambas geometrias dos canais de escoamento, o resultado para $U(R)$ é:

$$U(R) = 1 - R^2 \quad (3.60)$$

Para os demais casos, foi desenvolvido um programa em FORTRAN, impondo uma tolerância da ordem de 10^{-6} para a soma na Eq. (3.53). Os resultados numéricos para os campos de velocidade e o fator de atrito de Fanning foram obtidos para várias combinações dos parâmetros dimensionais: número de Hartmman (Ha), tempo de relaxação e retardo (τ_1 e τ_2) e número de Reynolds (Re).

O maior interesse no estudo da MHD é sobre os efeitos da força de corpo ($\vec{j} \times \vec{B}$), devido ao campo magnético, no comportamento do fluido, tanto no perfil do campo de velocidades quanto no comportamento do fator de atrito. O efeito do campo é representado na forma adimensional pelo número de Hartmman, portanto, este parâmetro será usado como pivô para análise dos resultados.

3.4.1 – Análise de Convergência

Considerando a Eq. (3.53), é necessário analisar a convergência da série. A Tabela 3.1 mostra a convergência com o número de termos na série, N , para as duas geometrias. Verifica-se que para $N = 10$ a série já apresenta uma excelente convergência e, portanto, para a análise dos resultados será considerado $N = 100$.

Tabela 3.1 – Convergência para o campo de velocidade a meia altura da região considerada do canal, para diferentes Ha , $Re = 100$ e $\tau_1 = \tau_2 = 1.0$.

Canal de Placas Paralelas									
N	Ha = 0			Ha = 1.0			Ha = 3.0		
	$\tau = 10$	$\tau = 100$	$\tau = 500$	$\tau = 10$	$\tau = 100$	$\tau = 500$	$\tau = 10$	$\tau = 100$	$\tau = 500$
10	0.44821	0.74996	0.75000	0.38783	0.53847	0.53847	0.16735	0.17030	0.17030
30	0.44821	0.74996	0.75000	0.38783	0.53847	0.53847	0.16735	0.17030	0.17030
50	0.44821	0.74996	0.75000	0.38783	0.53847	0.53847	0.16735	0.17030	0.17030
80	0.44821	0.74996	0.75000	0.38783	0.53847	0.53847	0.16735	0.17030	0.17030
100	0.44821	0.74996	0.75000	0.38783	0.53847	0.53847	0.16735	0.17030	0.17030

Duto Circular									
N	Ha = 0			Ha = 1.0			Ha = 3.0		
	$\tau = 10$	$\tau = 100$	$\tau = 500$	$\tau = 10$	$\tau = 100$	$\tau = 500$	$\tau = 10$	$\tau = 100$	$\tau = 500$
10	0.48590	0.74998	0.75000	0.45142	0.64000	0.64000	0.27310	0.29450	0.29450
30	0.48590	0.74998	0.75000	0.45143	0.64000	0.64000	0.27310	0.29450	0.29450
50	0.48590	0.74998	0.75000	0.45141	0.64000	0.64000	0.27310	0.29450	0.29450
80	0.48590	0.74997	0.75000	0.45140	0.64000	0.64000	0.27310	0.29450	0.29450
100	0.48590	0.74997	0.75000	0.45140	0.64000	0.64000	0.27310	0.29450	0.29450

Os resultados obtidos foram analisados através de gráficos, que mostram o comportamento do campo de velocidades e do fator de atrito para os diferentes parâmetros.

Considerando $Re = 100$, foi analisada a evolução temporal do perfil de velocidade para diferentes combinações dos valores τ_1 e τ_2 , e diferentes valores de Ha .

Para $\tau_1 = \tau_2 = 0$ e $Ha = 0$, que corresponde ao caso limite, a evolução temporal se dá de forma mais lenta no canal de placas paralelas. No regime permanente ($\tau = 500$), a forma do perfil é a mesma para os dois casos e coincide perfeitamente bem com o caso limite dado pela solução analítica, Eq. (3.60). Ainda, o valor máximo da velocidade ocorre no centro do canal, como pode ser observado na Figura 3.2.

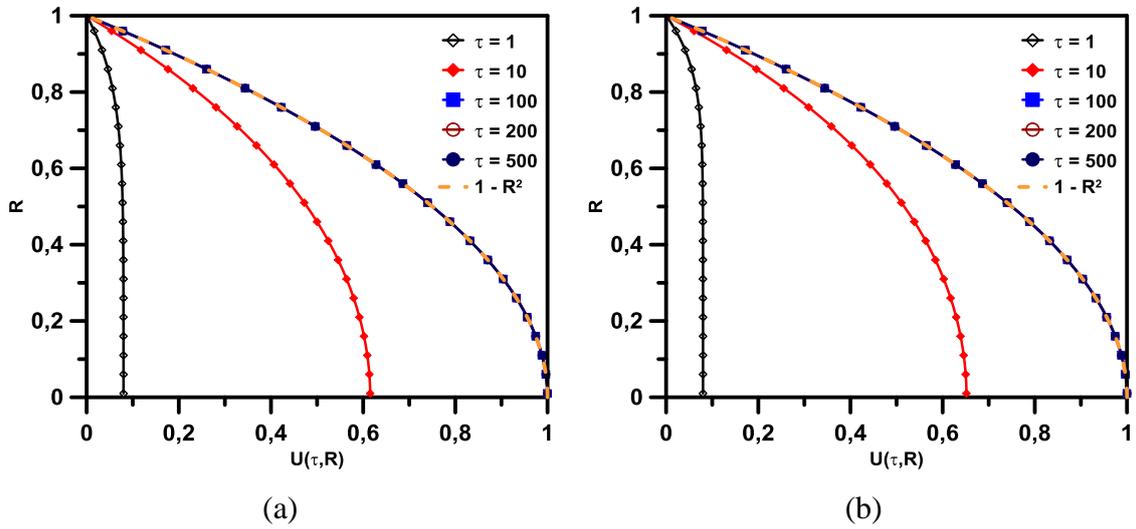
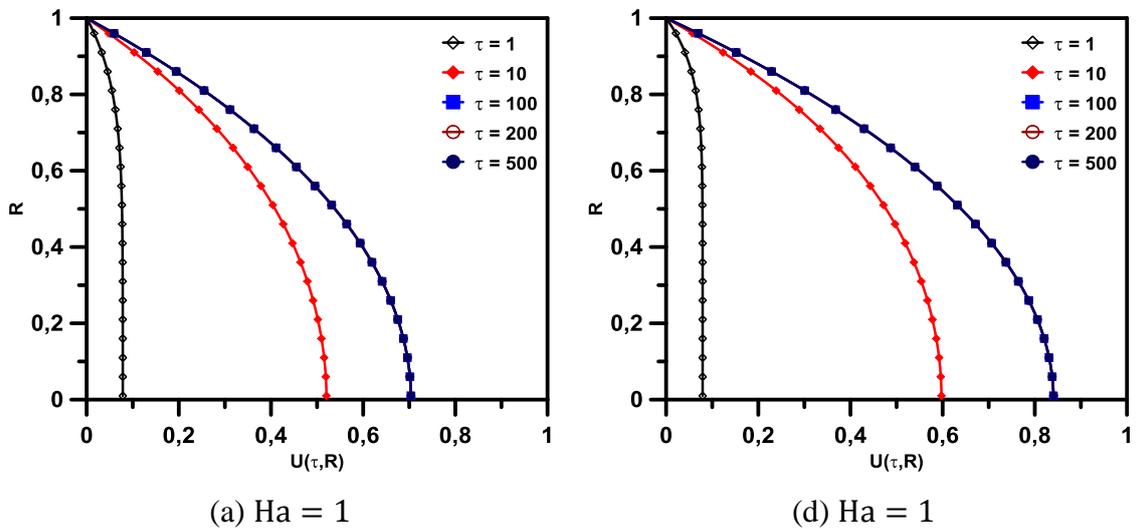


Figura 3.2: Evolução temporal do campo de velocidade quando $Ha = 0$, $Re = 100$ e $\tau_1 = \tau_2 = 0$. (a) Canal de Placas Paralelas e (b) Duto Circular.

Ainda, para os mesmos valores de $\tau_1 = \tau_2 = 0$ e $Re = 100$, mas, diferentes números de Hartmann, a evolução temporal também é mais lenta no canal de placas paralelas que no duto circular, também observa-se que o efeito do campo magnético, de atenuar o campo de velocidade, é mais intenso no canal de placas paralelas, como é mostrado na Figura 3.3.



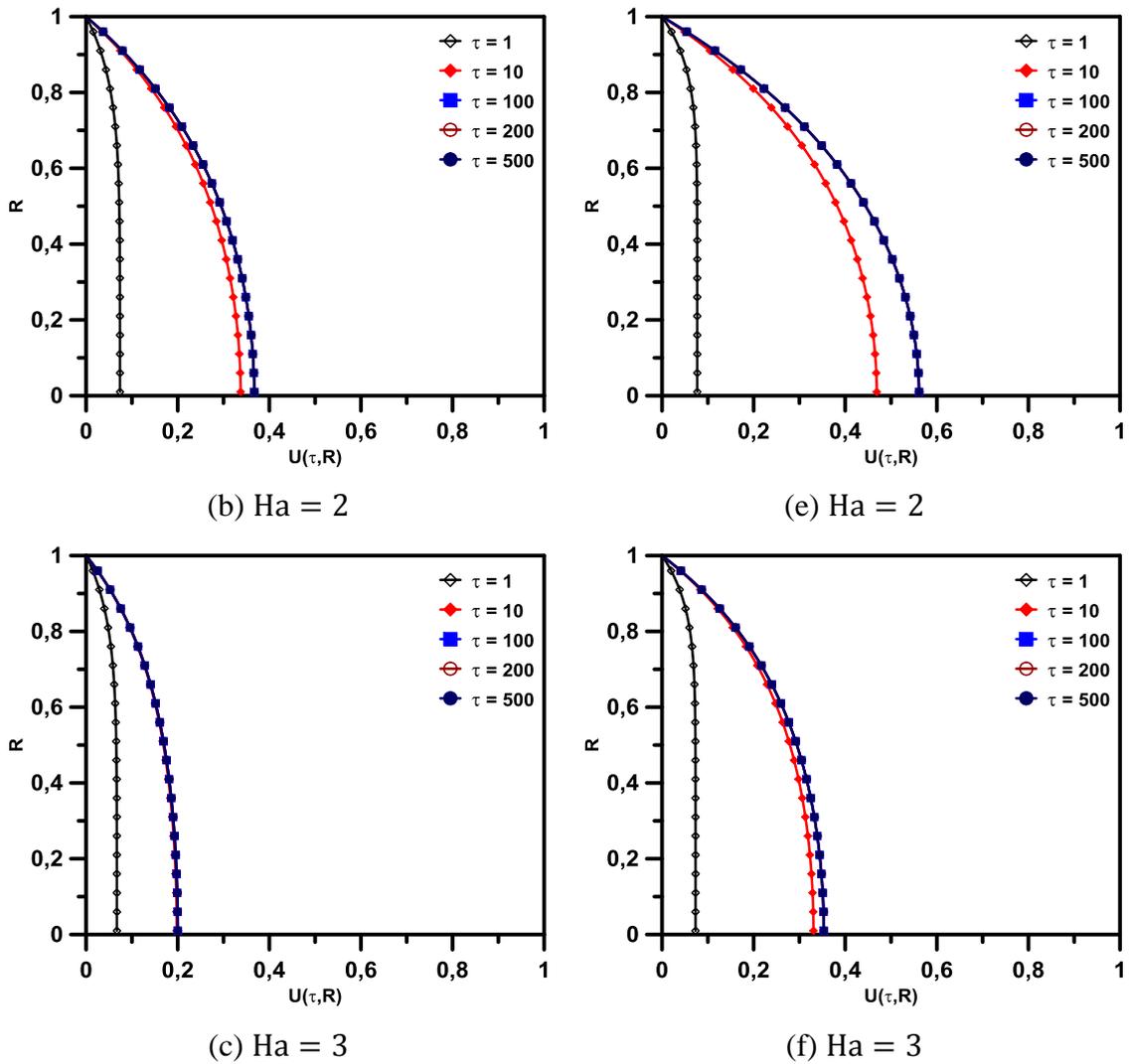
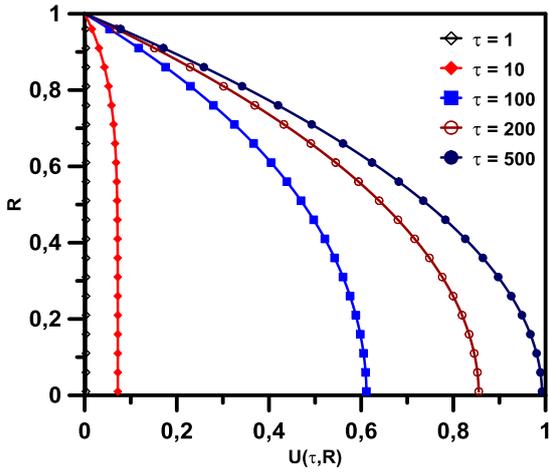
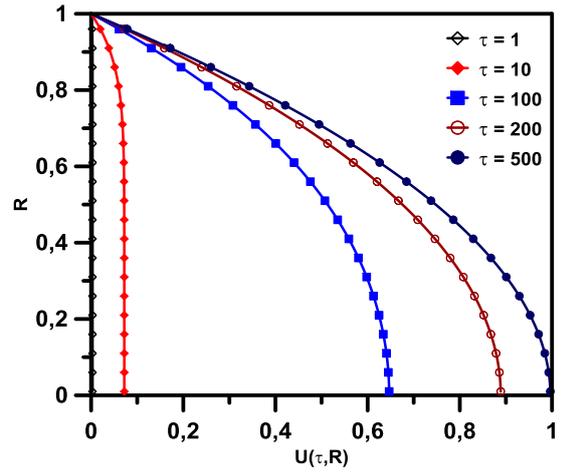


Figura 3.3: Evolução temporal do campo de velocidade para diferentes Ha , quando $Re = 100$ e $\tau_1 = \tau_2 = 0$. (a,b,c) Canal de Placas Paralelas e (d,e,f) Duto Circular.

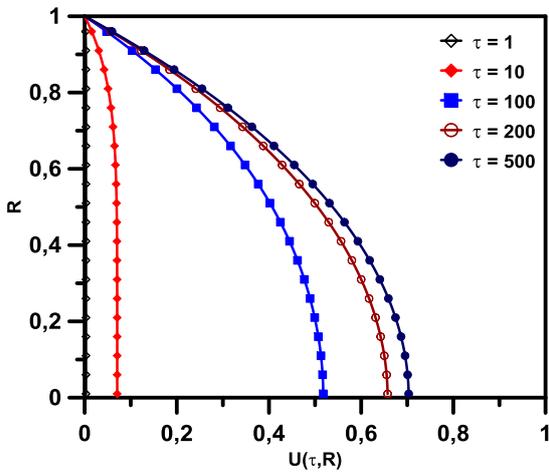
Para os valores de $\tau_1 = \tau_2 = 1$ e $Re = 1000$ a evolução temporal do campo de velocidades é mostrado na Figura 3.4, para diferentes valores do número de Hartmann. Neste caso, o escoamento, desde os instantes iniciais até o regime permanente, é mais lento que no caso anterior, quando se compara os respectivos gráficos. Também, ainda se dá de forma mais lenta no duto circular. Já no regime permanente, os perfis do campo de velocidades são semelhantes ao caso anterior, para o mesmo número de Hartmann nos respectivos canais.



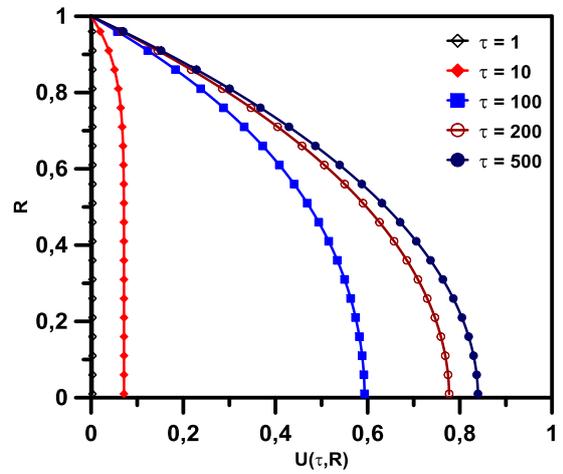
(a) $Ha = 0$



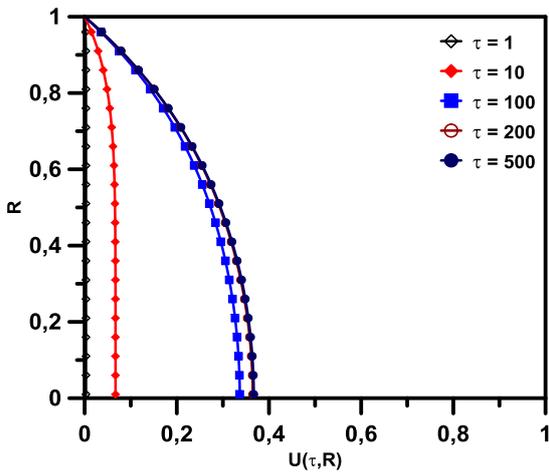
(e) $Ha = 0$



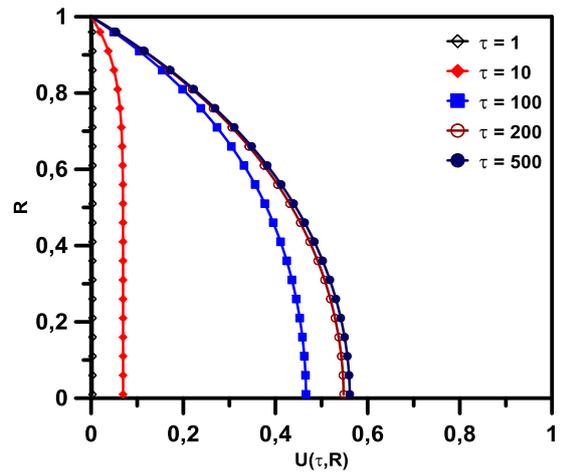
(b) $Ha = 1$



(f) $Ha = 1$



(c) $Ha = 2$



(g) $Ha = 2$

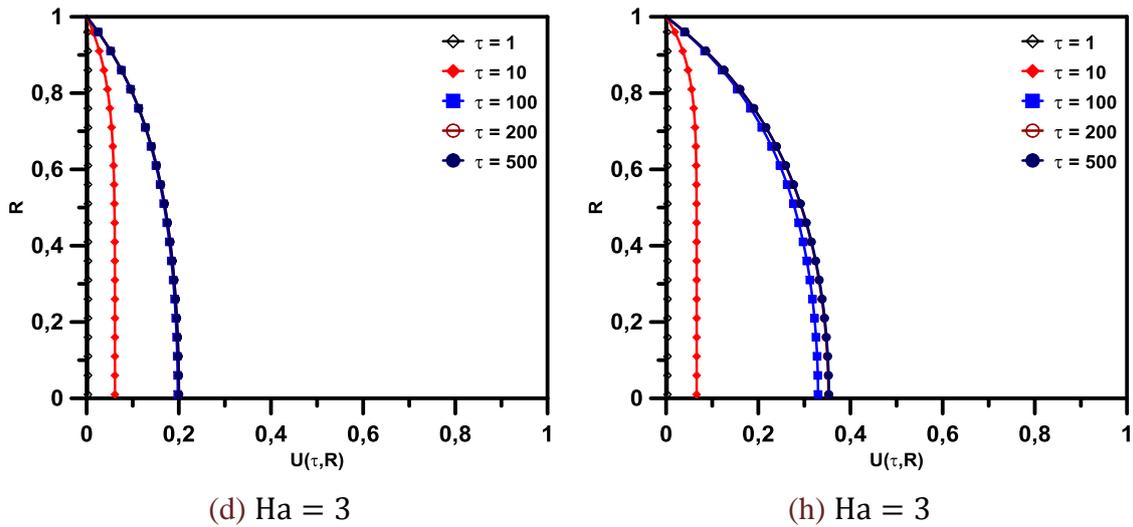


Figura 3.4: Evolução temporal do campo de velocidade para diferentes Ha quando $\tau_1 = \tau_2 = 1$ e $Re = 1000$. (a,b,c,d) Canal de Placas Paralelas e (e,f,g,h) Duto Circular.

Uma forma simplificada destas situações é mostrada na Figura 3.5, onde nota-se que, a medida que o número de Hartmann aumenta, aumenta também a atenuação sobre o campo de velocidades. Também fica evidenciado que seu efeito é mais acentuado sobre o campo de velocidades no canal de placas paralelas.

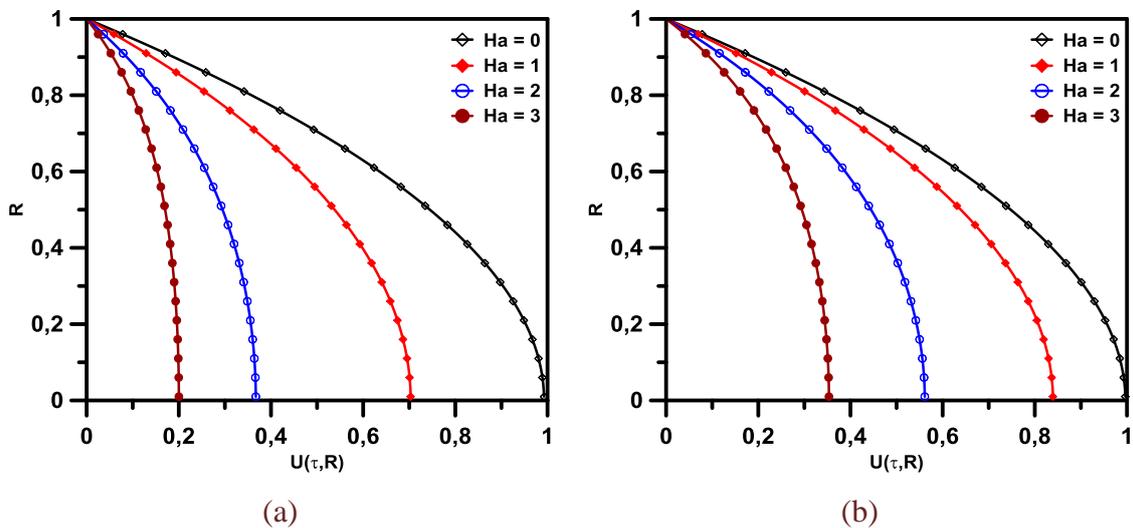
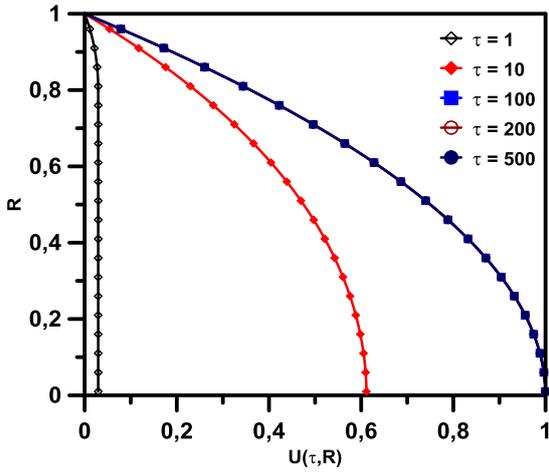
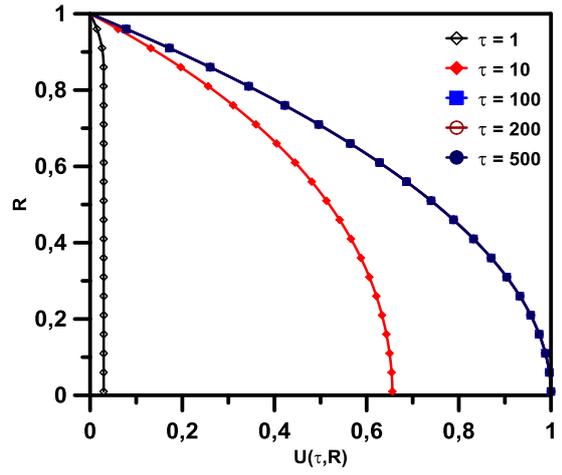


Figura 3.5: Efeito do número de Hartmann sobre o campo de velocidade. (a) Canal de Placas Paralelas e (b) Duto Circular.

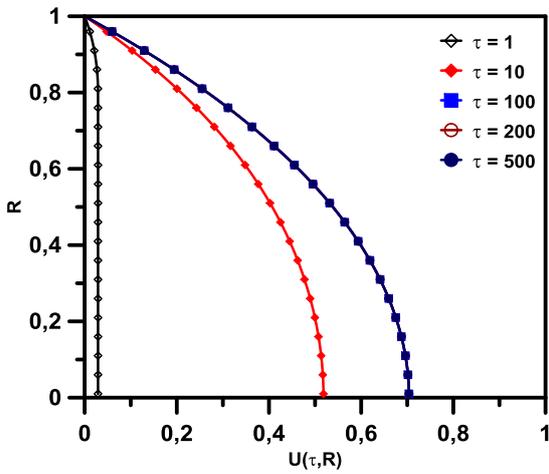
Para os valores $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 0$ e $Re = 100$, a evolução temporal do campo de velocidades é mostrado na Figura 3.6. Aqui, a atenuação é menos acentuada que no caso $\tau_1 = \tau_2 = 0$ com o mesmo Re .



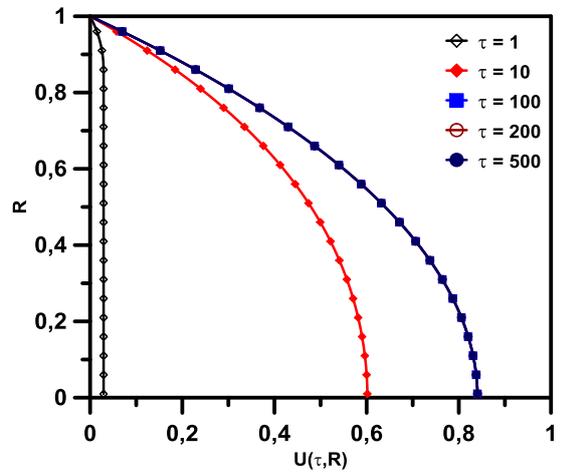
(a) $Ha = 0$



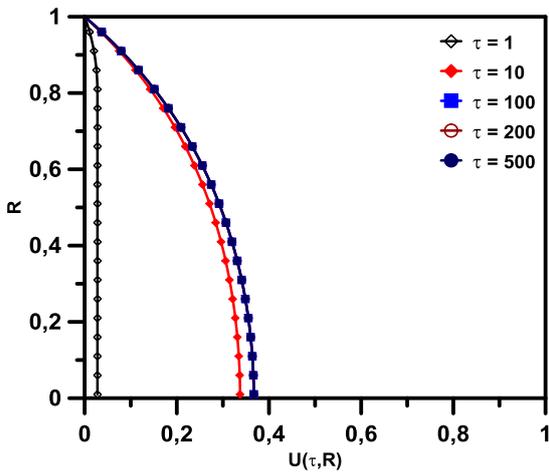
(e) $Ha = 0$



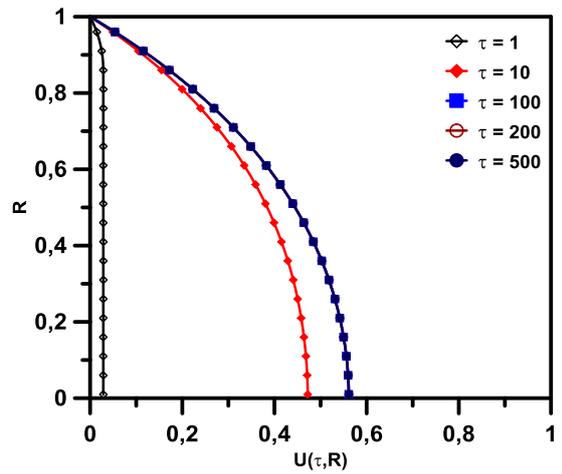
(b) $Ha = 1$



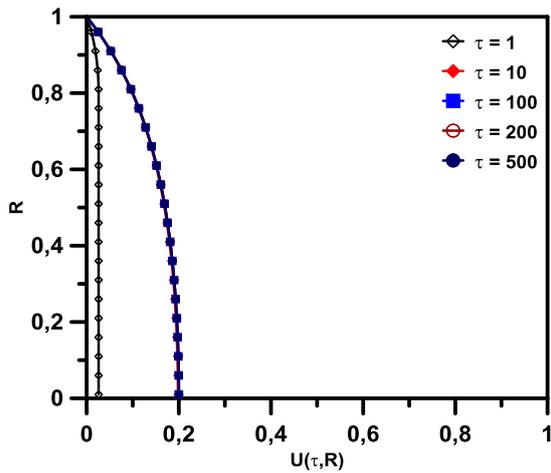
(f) $Ha = 1$



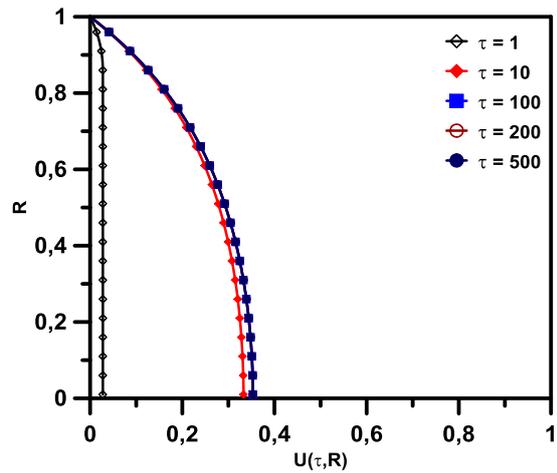
(c) $Ha = 2$



(g) $Ha = 2$



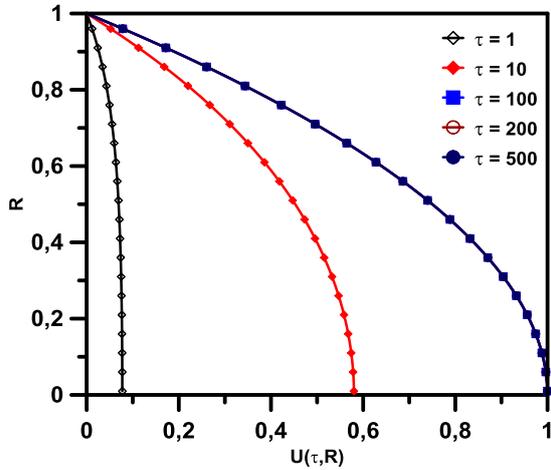
(d) $Ha = 3$



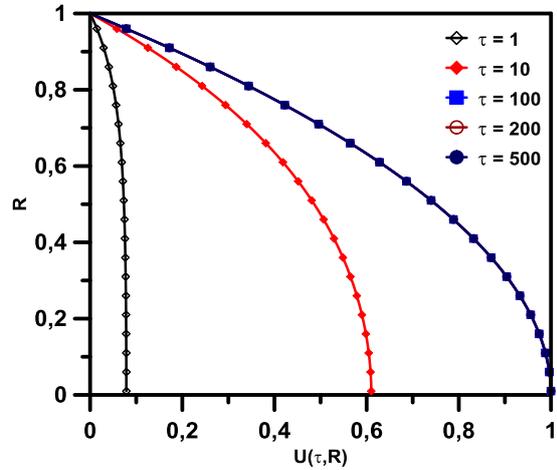
(h) $Ha = 3$

Figura 3.6: Evolução temporal do campo de velocidade para diferentes Ha quando $\tau_1 = 1$, $\tau_2 = 0$ e $Re = 100$. (a,b,c,d) Canal de Placas Paralelas e (e,f,g,h) Duto Circular.

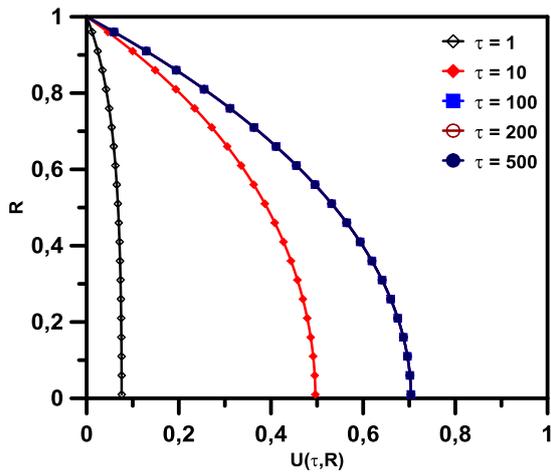
Para $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 1$ e $Re = 100$, a evolução temporal do campo de velocidades é mostrado na Figura 3.7. Aqui, a atenuação é menos acentuada que no caso $\tau_1 = \tau_2 = 0$, porém, a atenuação é mais significativa que quando $\tau_1 = 1$ e $\tau_1 = 0$.



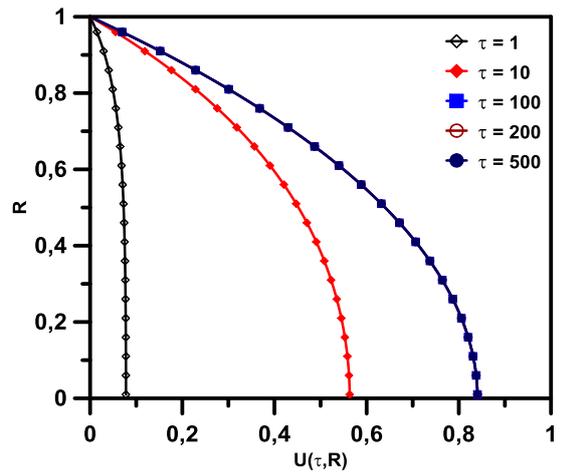
(a) $Ha = 0$



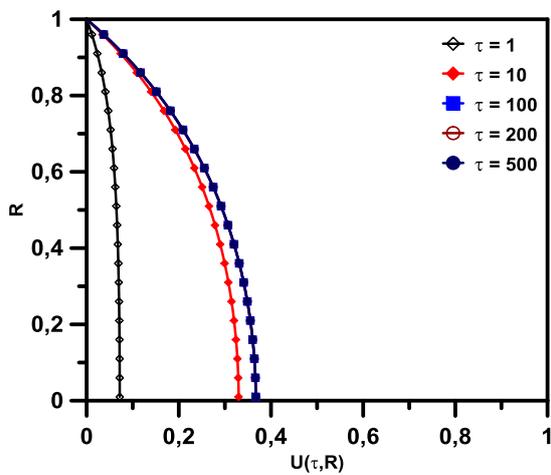
(e) $Ha = 0$



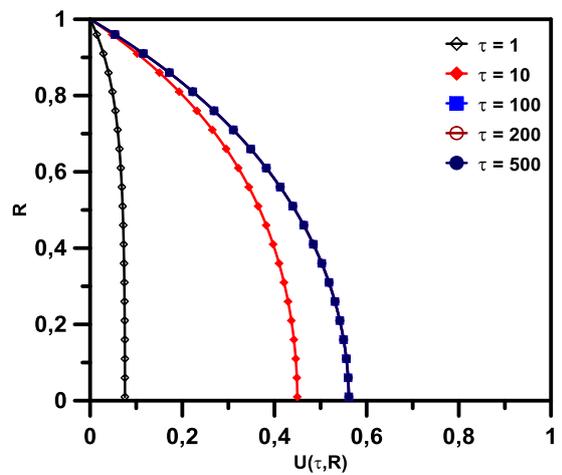
(b) $Ha = 1$



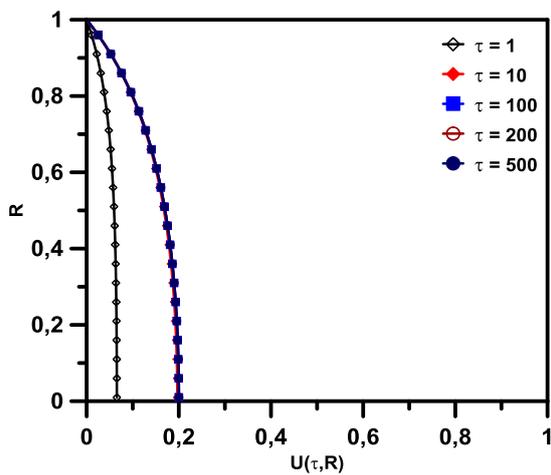
(f) $Ha = 1$



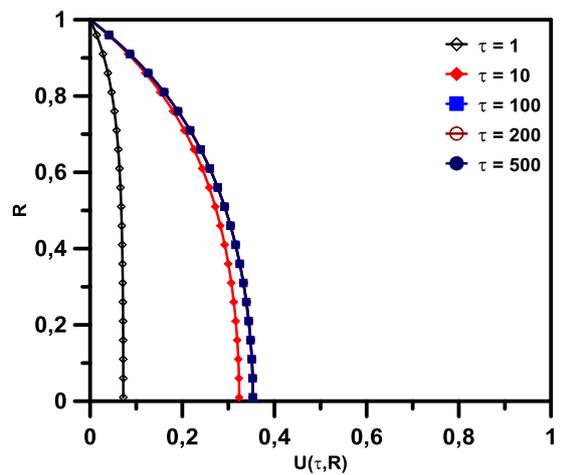
(c) $Ha = 2$



(g) $Ha = 2$



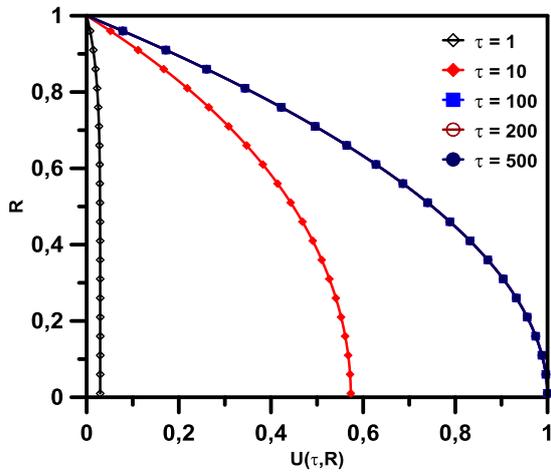
(d) $Ha = 3$



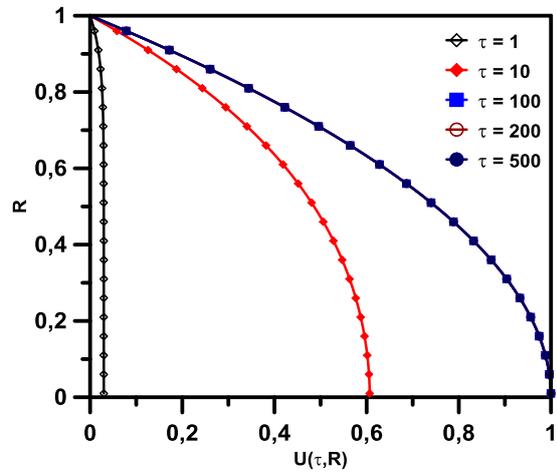
(h) $Ha = 3$

Figura 3.7: Evolução temporal do campo de velocidade para diferentes Ha quando $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = 1$ e $Re = 100$. (a,b,c,d) Canal de Placas Paralelas e (e,f,g,h) Duto Circular.

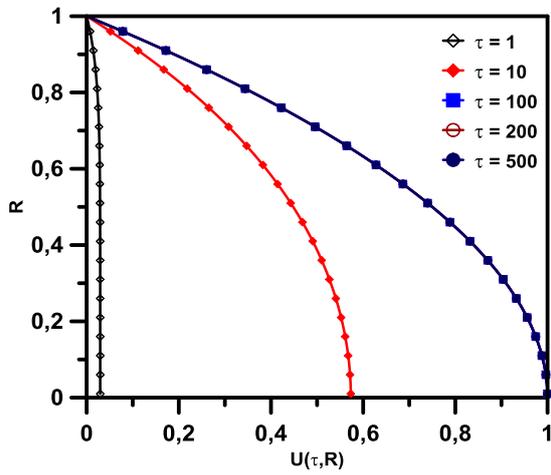
E, quando $\tau_1 = \tau_2 = 1$ e $Re = 100$, o efeito do campo, atenuando o escoamento se torna mais acentuado que nos casos anteriores, como pode ser visto na Figura 3.8.



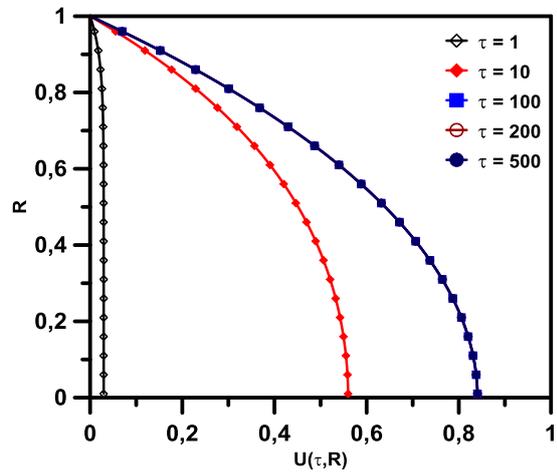
(a) $Ha = 0$



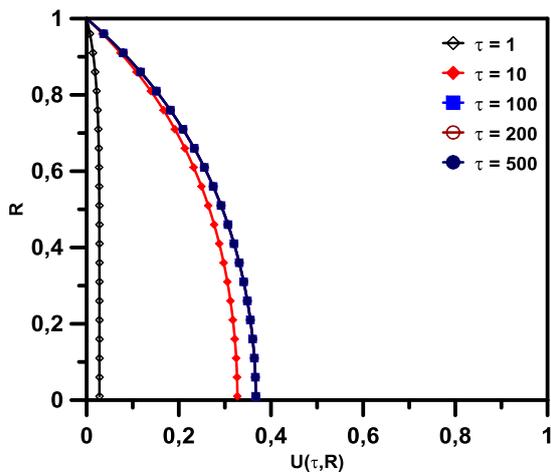
(e) $Ha = 0$



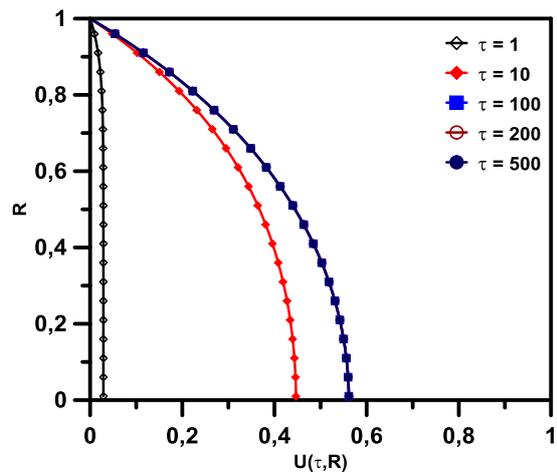
(b) $Ha = 1$



(f) $Ha = 1$



(c) $Ha = 2$



(g) $Ha = 2$

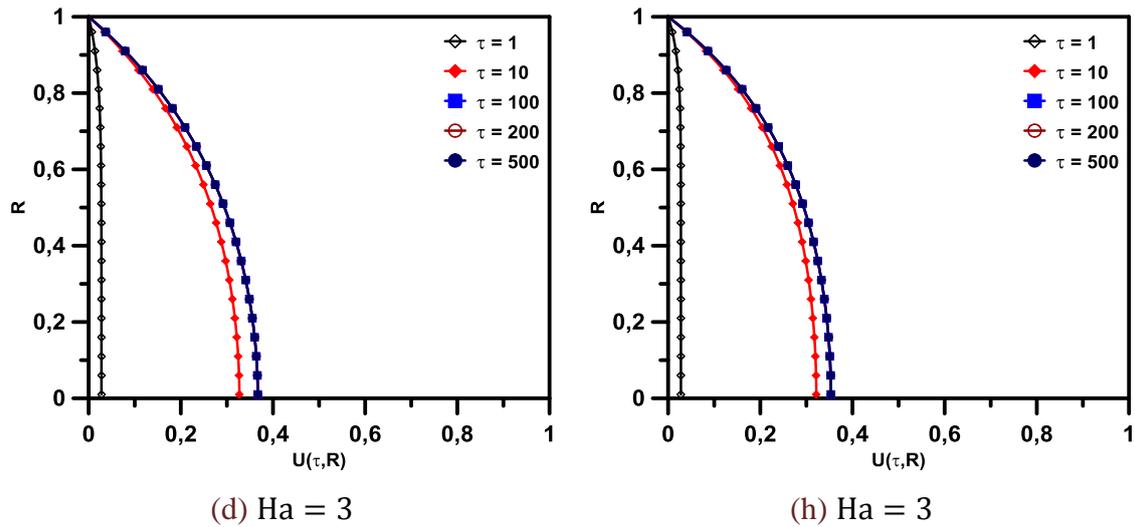


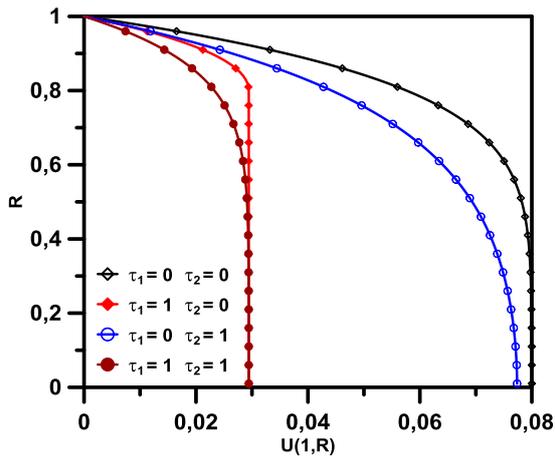
Figura 3.8: Evolução temporal do campo de velocidade para diferentes Ha quando $\tau_1 = \tau_2 = 1$ e $Re = 100$. (a,b,c,d) Canal de Placas Paralelas e (e,f,g,h) Duto Circular.

A tabela 3.2 mostra os valores do campo de velocidades, no centro do canal, $R = 0$, no instante $\tau = 1$, evidenciando melhor o comportamento do perfil de velocidade para as diferentes combinações de τ_1 e τ_2 .

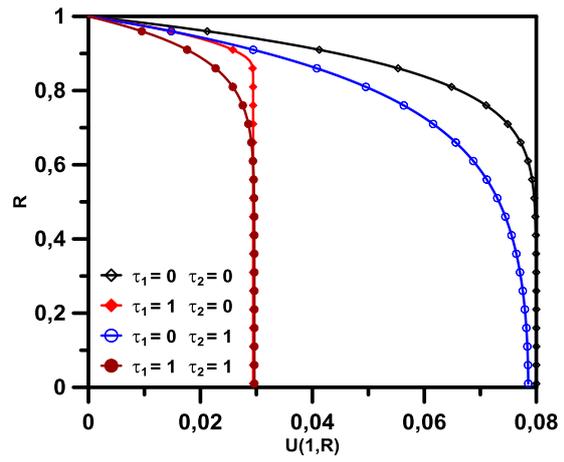
Tabela 3.2 – Comparação para o campo de velocidades em $R = 0$ e $\tau = 1$, para os diferentes valores de Ha , $Re = 100$ e $\tau_1 = \tau_2 = 0, 1$.

Canal de Placas Paralelas				
Há	$\tau_1 = \tau_2 = 0$	$\tau_1 = 1, \tau_2 = 0$	$\tau_1 = 0, \tau_2 = 1$	$\tau_1 = \tau_2 = 1$
0	0,07999	0,02943	0,07737	0,02943
1	0,07841	0,02901	0,07592	0,02901
2	0,07392	0,02781	0,07178	0,02781
3	0,06718	0,02596	0,06553	0,02596
Duto Circular				
Há	$\tau_1 = \tau_2 = 0$	$\tau_1 = 1, \tau_2 = 0$	$\tau_1 = 0, \tau_2 = 1$	$\tau_1 = \tau_2 = 1$
0	0,08000	0,02943	0,07856	0,02965
1	0,07919	0,02921	0,07778	0,02942
2	0,07684	0,02560	0,07554	0,02880
3	0,07314	0,02761	0,07199	0,02777

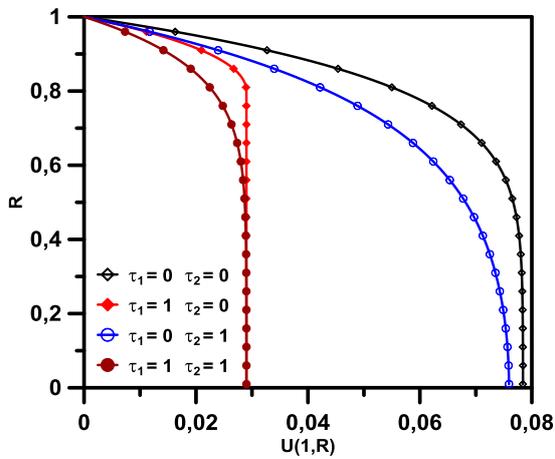
Os resultados da tabela 3.2, podem ser melhor verificados na Figura 3.8, que mostra o comportamento do campo de velocidades no centro do canal no instante adimensional $\tau = 1$.



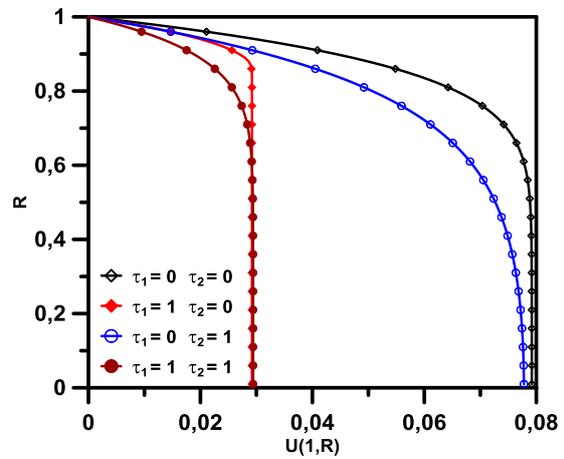
(a) $Ha = 0$



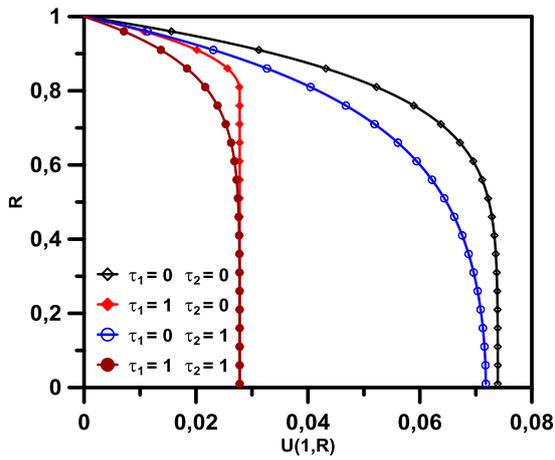
(e) $Ha = 0$



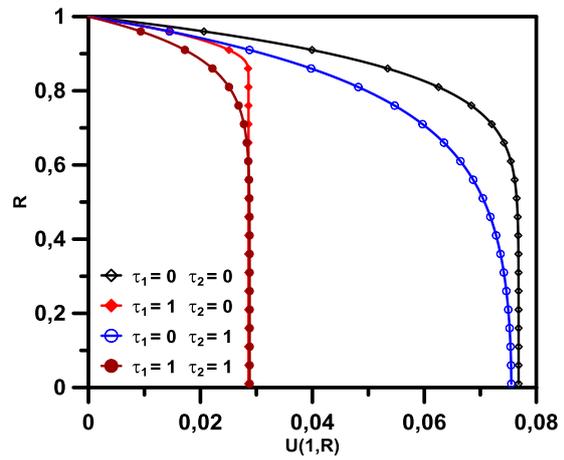
(b) $Ha = 1$



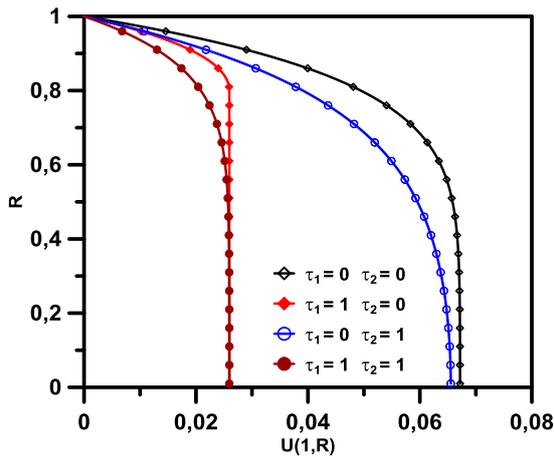
(f) $Ha = 1$



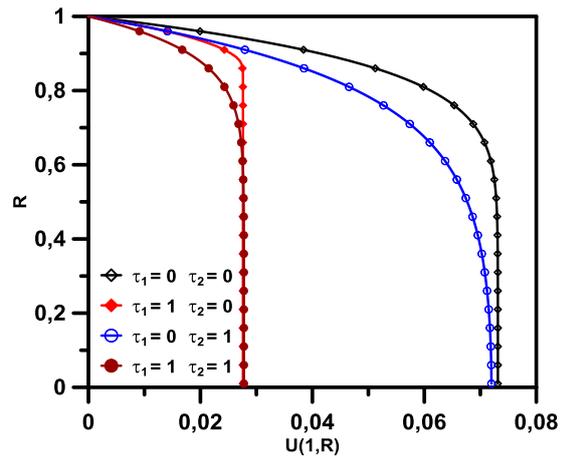
(c) $Ha = 2$



(g) $Ha = 2$



(d) $Ha = 3$

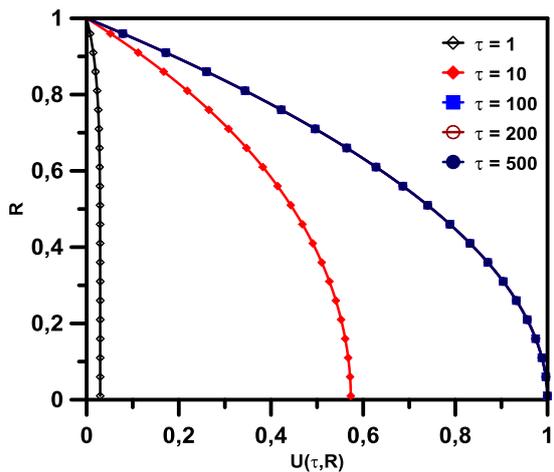


(h) $Ha = 3$

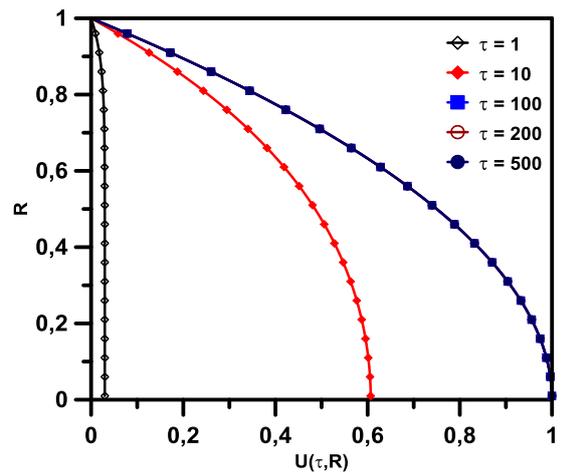
Figura 3.9: Evolução temporal do campo de velocidade para diferentes Ha quando $\tau_1 = \tau_2 = 1$ e $Re = 100$. (a,b,c,d) Canal de Placas Paralelas e (e,f,g,h) Duto Circular.

O número de Reynolds é um parâmetro que influencia o escoamento, atuando como um agente "controlador", ou seja, retardando o avanço do fluido. Sua influência pode ser observada nos gráficos a seguir, que mostram o efeito do número de Reynolds sobre o perfil de velocidades considerando diferentes valores de Ha , $\tau_1 = \tau_2 = 1$.

A Figura 3.9 mostra o efeito do número de Reynolds sobre a evolução temporal do campo de velocidades quando $Ha = 0$, no instante adimensional $\tau = 100$. A medida que o número de Reynolds aumenta, fica evidente seu efeito controlador sobre o campo de velocidades, promovendo um retardamento no escoamento do fluido.



(a) $Re = 100$



(e) $Re = 100$

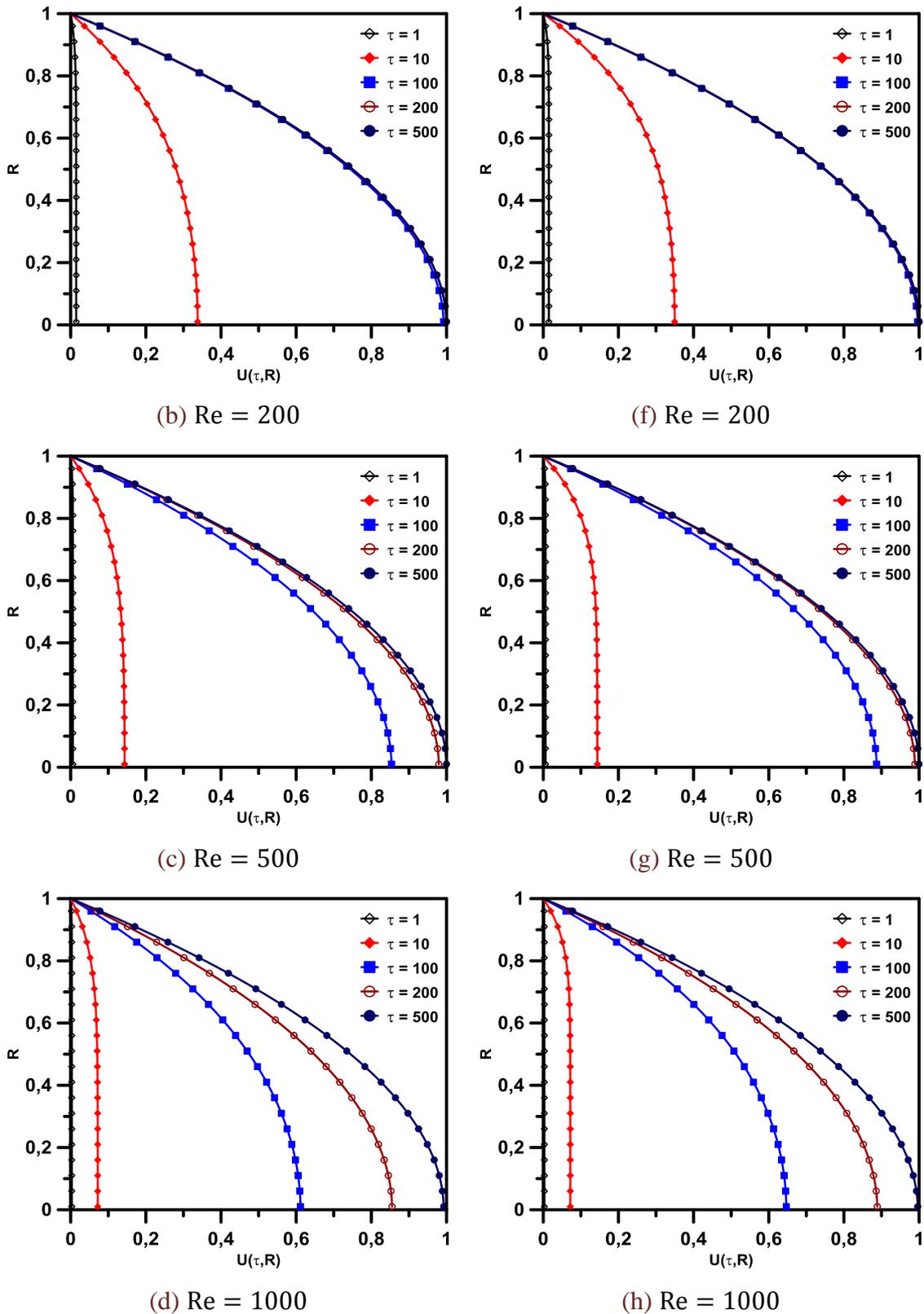
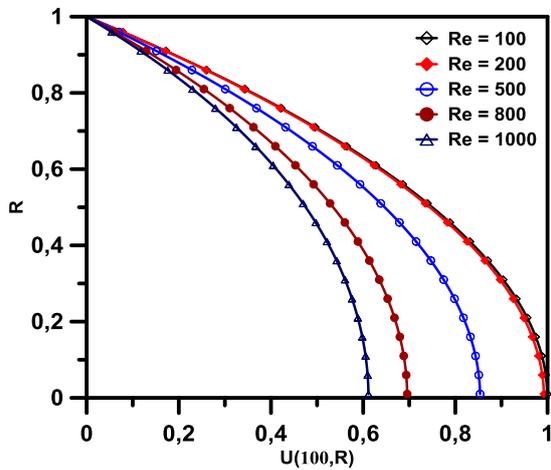


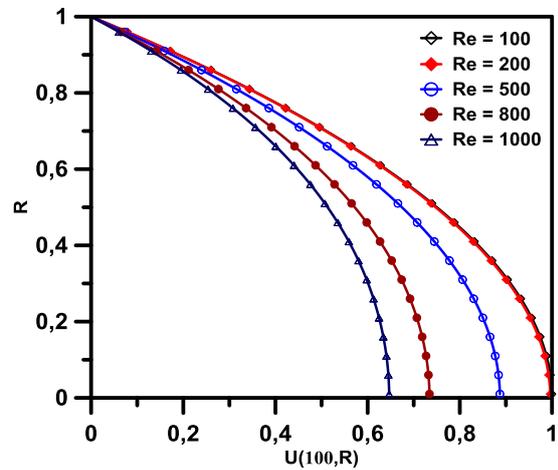
Figura 3.10: Evolução temporal do campo de velocidade para diferentes Re quando $\tau_1 = \tau_2 = 1$ e $Ha = 0$. (a,b,c,d) Canal de Placas Paralelas e (e,f,g,h) Duto Circular.

Outra forma de observar o efeito do número de Reynolds sobre o campo de velocidades é mostrada na Figura 3.10, em que são apresentados gráficos do perfil de

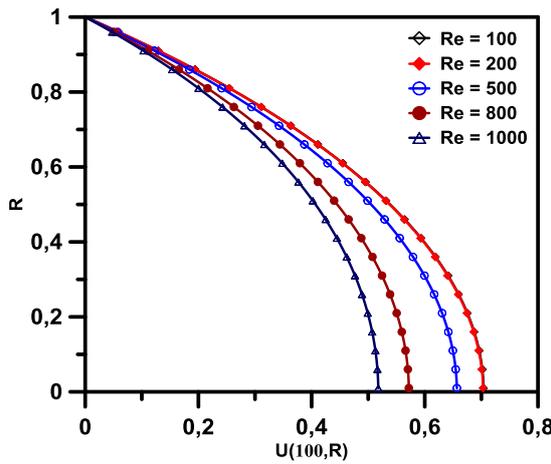
velocidade para os diferentes números de Hartmann e diferentes números de Reynolds. Nestas figuras pode-se observar o efeito controlador do número de Reynolds sobre o perfil de velocidades bem como a "compactação" das linhas do campo de velocidades, a medida que o número de Hartmann aumenta.



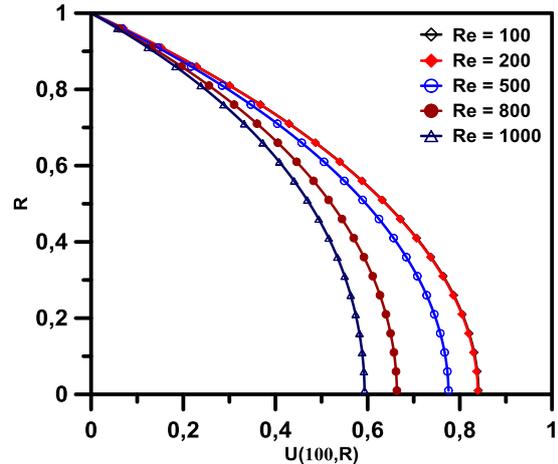
(a) $Ha = 0$



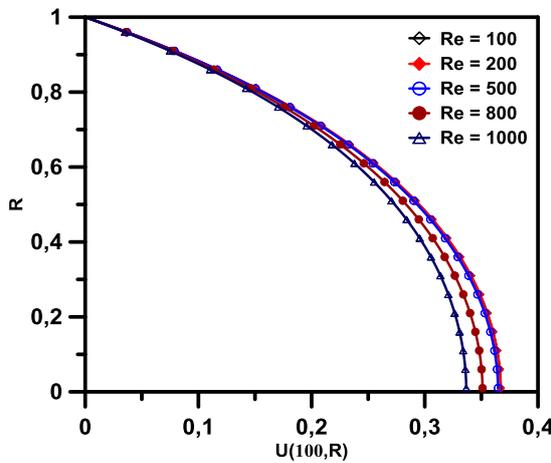
(e) $Ha = 0$



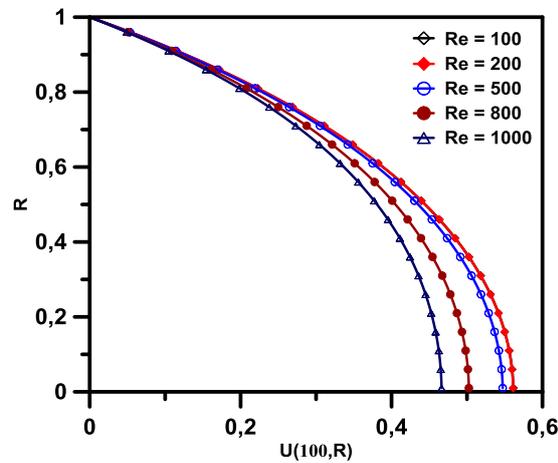
(b) $Ha = 1$



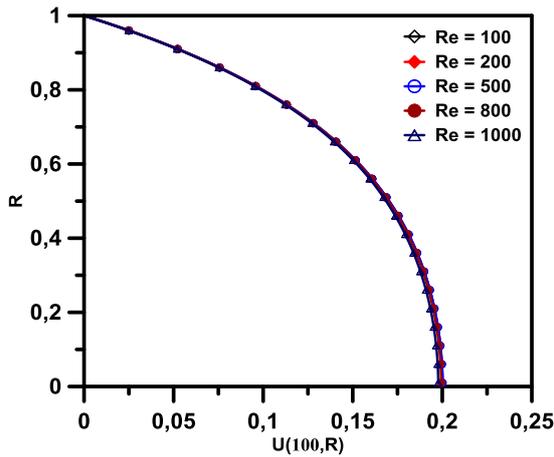
(f) $Ha = 1$



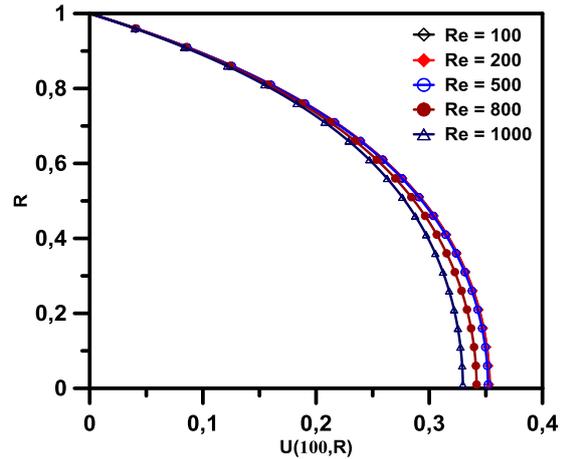
(c) $Ha = 2$



(g) $Ha = 2$



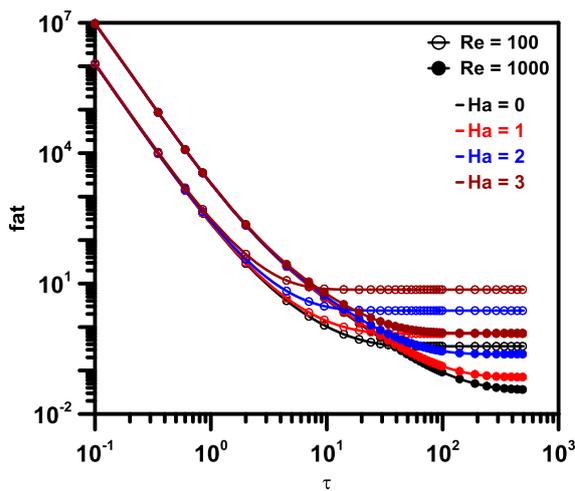
(d) $Ha = 3$



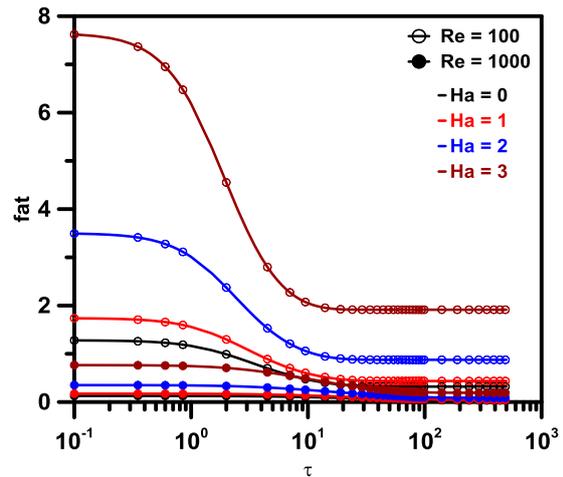
(h) $Ha = 3$

Figura 3.11: Efeito do número de Reynolds sobre o campo de velocidade para diferentes Ha quando $\tau_1 = \tau_2 = 1$. (a,b,c,d) Canal de Placas Paralelas e (e,f,g,h) Duto Circular.

Além do campo de velocidades, outro fator de interesse é o fator de atrito de Fanning. O comportamento deste fator é analisado para os diferentes parâmetros. O efeito do número de Hartmann sobre o fator de atrito é mostrado na Figura 3.11, para número de Reynolds 100 e 1000. Nota-se que, quanto maior o valor do número de Reynolds, menor o fator de atrito, como prevê a Eq. (3.56). Também é notado que, quanto maior o número de Hartmann, maior o fator de atrito, como era esperado, considerando o efeito atenuante do campo. Também nota-se que o fator de atrito tem valor muito mais elevado no canal de placas paralelas.



(a)



(b)

Figura 3.12: Efeito do número de Reynolds sobre e do número de Hartmann sobre o fator de atrito quando $\tau_1 = \tau_2 = 1$. (a) Canal de Placas Paralelas e (b) Duto Circular.

Os parâmetros τ_1 e τ_2 também influem sobre o fator de atrito. A Figura 3.12 mostra o fator de atrito para os diferentes valores destes parâmetros, bem como para os diferentes valores do número de Hartmann. O efeito dos parâmetros é observado no regime transiente do escoamento, em torno de $\tau = 1$.

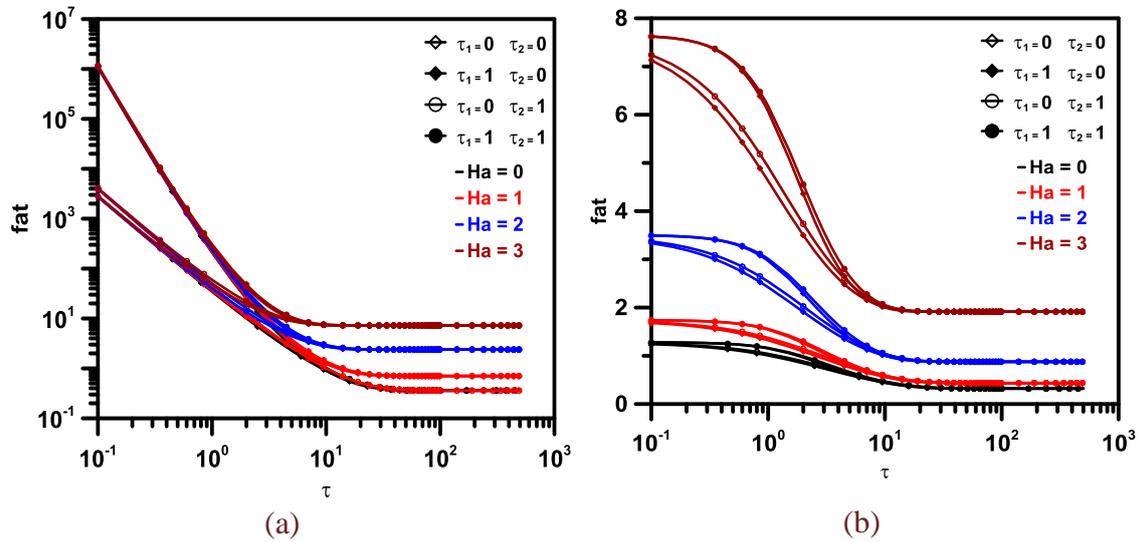


Figura 3.13: Efeito de τ_1 e τ_2 e do número de Hartmann sobre o fator de atrito quando $Re = 100$. (a) Canal de Placas Paralelas e (b) Duto Circular.

Uma comparação do fator de atrito nas duas geometrias é mostrada na Figura 3.13, em que $\tau_1 = \tau_2 = 1$, $Ha = 0$ e $Ha = 3$, $Re = 100$ e $Re = 1000$. Os gráficos mostram que para $Ha = 0$ e mesmo número de Reynolds, no regime permanente, o fator de atrito converge para valores próximos, nos dois canais, tendo um valor mais elevado para valores de número de Reynolds menores. Para $Ha = 3$ o comportamento é pouco semelhante ao anterior, porém, no regime permanente, o fator de atrito tende para valores diferentes, sendo que assume valor maior para número de Reynolds menor. Em ambas situações, o fator de atrito assume valor maior no canal de placas paralelas.

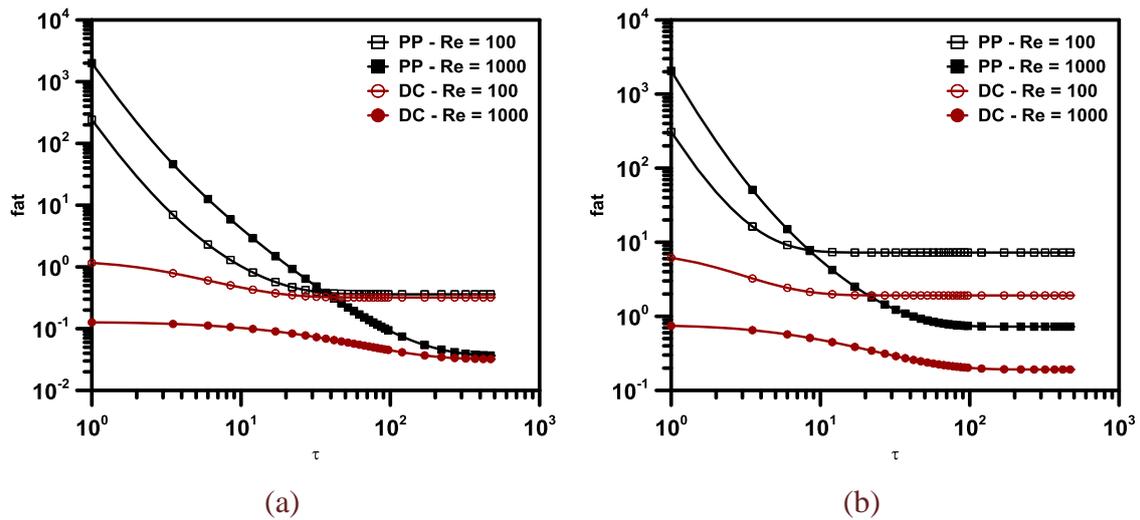


Figura 3.14: Comportamento do fator de atrito quando $\tau_1 = \tau_2 = 1$.

Através da Técnica Transformada Integral Generalizada - GITT, o escoamento de um fluido não-newtoniano, segundo o modelo de Jeffreys, em canal de placas paralelas e duto circular, submetido a um campo magnético uniforme com direção perpendicular ao escoamento foi analisado.

A GITT fornece um excelente resultado haja visto proporcionar uma solução semi-analítica para a simulação do problema, o que proporciona um custo computacional bem menor que os métodos numéricos.

Os resultados foram apresentados em tabelas e gráficos para os diferentes valores dos parâmetros: número de Hartmann de (Ha), número de Reynolds (Re), τ_1 e τ_2 .

Os parâmetros τ_1 e τ_2 , que representam as características não newtonianas do fluido, relacionadas aos tempos de relaxação λ_1 e de retardo λ_2 , respectivamente, oferecem certa influência sobre o campo de velocidades e sobre o fator de atrito de Fanning. Estes parâmetros estão relacionados aos módulos de relaxação e fluência do material como foi observado nos resultados.

Também dos resultados ficou claro a influência do número de Reynolds (Re) tanto sobre o campo de velocidades quanto sobre o fator de atrito de Fanning (f), este efeito se dá pelo fato no número de Reynolds representar fisicamente a relação entre as forças de inércia ($v\rho$) e as forças viscosas ($\frac{\mu}{D}$), portanto, aumentando a resistência ao escoamento, a medida que aumenta seu valor.

Os efeitos do número de Hartmann (Ha) sobre o campo de velocidades e o fator de atrito também foram estudados. E os resultados mostram que para valores de Ha pequenos o campo de velocidades passa a ser controlado pelos parâmetros Re , τ_1 e τ_2 . Uma vez que, quando τ_1 e τ_2 , assumem valores pequenos, o fluido se comporta com um fluido newtoniano. Já para valores de Ha maiores, fica evidente sua influência sobre de $U(\tau, R)$ e sobre f , atenuando mais intensamente o escoamento.

CAPITULO 4

ESCOAMENTO MHD DE FLUIDO DE SEGUNDO GRAU GENERALIZADO

4.1 – INTRODUÇÃO

Este modelo de fluido de segundo grau modificado surge com a necessidade de se prever os efeitos pseudoplástico e dilatante presentes em alguns escoamentos, cujo modelo de fluido de segundo grau falha. Por outro lado, em outros tipos de escoamento de fluidos não newtonianos, os efeitos de tensão normal são importantes. Um modelo que consiga prever os efeitos citados é um modelo que se adequará às mais diversas situações de escoamentos de fluidos não newtonianos. A componente do modelo do fluido de segundo grau modificado que prevê as informações físicas do comportamento pseudoplástico ou dilatante é o bem conhecido modelo da lei da potência (SOUZA, 2010).

Uma comparação entre este modelo e o modelo para um fluido de terceiro grau, indica que os modelos possuem a mesma característica, ou seja, prevê os efeitos pseudoplástico e dilatante presentes no escoamento de alguns fluidos. Enquanto no modelo de fluido de terceiro grau o parâmetro que determina a influência pseudoplástica ou dilatante do fluido é o parâmetro β_3 no modelo de fluido de segundo grau modificado este parâmetro é o índice do modelo da lei da potência (SOUZA, 2010).

Segundo AKSOY et al. (2007) modelos de fluidos que obedecem a lei de potência são os mais utilizados para expressar o comportamento não-newtoniano, estudaram o escoamento incompressível, bidimensional de um fluido não-newtoniano de segundo grau modificado. Este modelo é uma combinação de um fluido de segundo grau com um fluido que obedece a lei de potência e exhibe as tensões normais e comportamentos "shear-thinning" (cisalhamento fino) ou shear-thickening (cisalhamento espesso). Usaram os grupos de Lie no cálculo das equações de camada limite e sendo uma das simetrias, o sistema de equações diferenciais parciais foi transformado em um sistema diferencial ordinário. As equações diferenciais ordinárias foram integradas numericamente. Os resultados sobre os efeitos do índice power-law e os coeficientes do fluido de segundo grau modificado foram comparados com resultados já estabelecidos.

MEHRDAD MASSOUDI e ASHWIN VAIDYA (2008) apresentaram uma revisão sobre algumas generalizações de fluidos de segundo grau. Discutem algumas semelhanças entre esses fluidos de grau mais elevados, ao mesmo tempo que descrevem certas limitações destes modelos.

Os novos modelos que apresentam baseiam-se em alguns resultados experimentais interessantes que sugerem que não podem depender somente de coeficientes de tensões normais da taxa de cisalhamento, mas que esta dependência não é de facto a mesma taxa de variação da viscosidade de cisalhamento com velocidade de cisalhamento. Também discutiram alguns escoamentos estacionários destes modelos generalizados fluido de segundo grau.

4.2 – DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

Será analisado o escoamento de um fluido de segundo grau modificado na região de entrada de um canal de placas planas paralelas, sujeito a um campo magnético, uniforme e perpendicular ao escoamento, com efeitos de injeção e sucção. Uma geometria simplificada do problema é mostrada na Figura 4.1 abaixo.

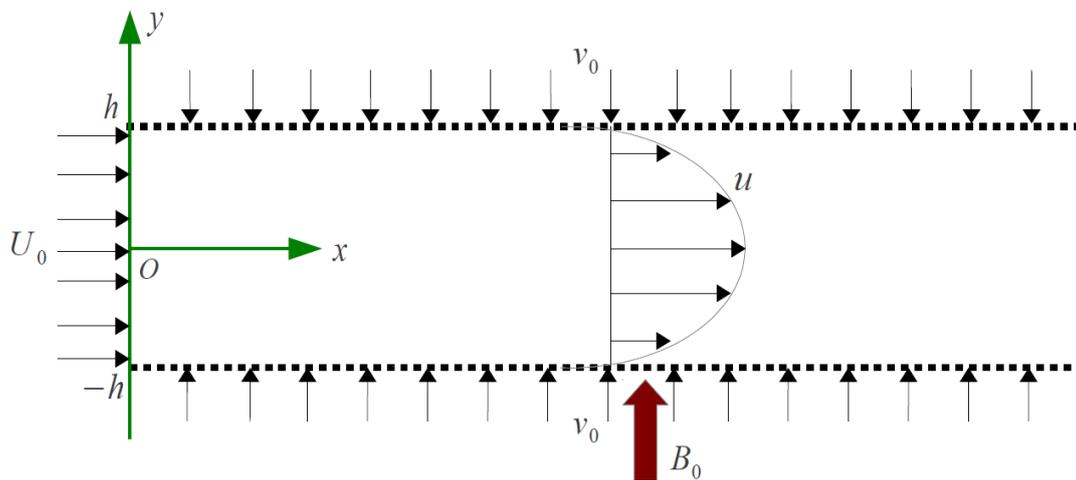


Figura 4.1 – Representação esquemática da geometria do problema físico.

Tal fluido apresenta características tanto de um fluido de segundo grau, quanto de um fluido power-law, portanto, sua equação constitutiva é dada por (AKSOY et al., 2007):

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mu\Pi^{\frac{m}{2}}\mathbf{A}_1 + \alpha_1\mathbf{A}_2 + \alpha_2\mathbf{A}_1^2 \quad (4.1)$$

onde \mathbf{T} é o tensor das tensões de Cauchy, p é a pressão, \mathbf{I} é o tensor identidade, \mathbf{A}_1 e \mathbf{A}_2 são o primeiro e o segundo tensores de Rivlin–Ericksen, respectivamente, μ , m , α_1 e α_2 são parâmetros materiais que podem ser constantes ou dependerem da temperatura e Π é um termo que depende do traço de \mathbf{A}_1 . Quando $m = 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, a equação constitutiva representa um fluido newtoniano em que μ representa a viscosidade usual. Para $m = 0$ a Eq. (4.1) representa um fluido de segundo grau, e quando $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, a Eq. (4.1) representa um fluido power-law.

O problema considerado apresenta geometria plana, de modo que os tensores que representam as quantidades físicas consideradas são cartesianos. Uma vez que o escoamento é bidimensional, fazendo-se $i = j = 1, 2$, as coordenadas são $x_1 = x$ e $x_2 = y$, as componentes de velocidade serão $v_1 = u$ e $v_2 = v$, os vetores de base são \mathbf{e}_1 na direção x e \mathbf{e}_2 na direção y . Assim, cada termo na expressão (4.1) será completamente caracterizado em termos das componentes cartesianas da geometria apresentada. Portanto, os tensores são definidos por:

$$\mathbf{I} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \quad (4.2)$$

O primeiro tensor de Rivlin–Ericksen é:

$$\mathbf{A}_1 = \nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T \quad (4.3)$$

o segundo tensor de Rivlin–Ericksen:

$$\mathbf{A}_2 = \frac{D\mathbf{A}_1}{Dt} + \mathbf{A}_1 \cdot \nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T \cdot \mathbf{A}_1 \quad (4.4)$$

e o termo Π :

$$\Pi = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{A}_1^2) \quad (4.5)$$

Na Eq. (4.4) o termo $\frac{D}{Dt}$ é a derivada material ou derivada convectiva.

4.3 – EQUAÇÕES DO ESTUDO

Equação da continuidade – conservação da massa:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{v}) = 0 \quad (4.6)$$

Equação da conservação da quantidade de movimento:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \vec{F}_m \quad (4.7)$$

onde \vec{F}_m é a força devido ao campo magnético, para este caso:

$$\vec{F}_m = -\sigma B_0^2 u \mathbf{e}_1 \quad (4.8)$$

Hipóteses em relação ao tipo de escoamento:

1 – Escoamento bidimensional com simetria retangular – coordenadas cartesianas.

2 – Escoamento incompressível (ρ constante) em regime laminar e permanente.

Considerando as hipóteses acima, a equação de conservação toma a forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.9)$$

4.3.1 – Desenvolvimento dos Termos

De acordo com BIRD et al. (1977) o gradiente do campo de velocidade é dado por:

$$\nabla \vec{v} = \sum_i \sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \quad (4.10)$$

e o transposto:

$$(\nabla \vec{v})^T = \sum_i \sum_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \frac{\partial v}{\partial x} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \quad (4.11)$$

Então, o primeiro tensor de Rivlin–Ericksen fica:

$$\mathbf{A}_1 = 2 \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \quad (4.12)$$

Para a expansão de \mathbf{A}_2 , usa-se a derivada material $\frac{D}{Dt}$, definida por:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \quad (4.13)$$

e

$$\vec{v} = u \mathbf{e}_1 + v \mathbf{e}_2 \quad (4.14)$$

Então \mathbf{A}_2 será dado pelos termos:

$$\mathbf{A}_2 = \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} + u \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial x} + v \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial y} + \mathbf{A}_1 \cdot \nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T \cdot \mathbf{A}_1 \quad (4.15)$$

e cada termo será:

$$\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} \right) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial y} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial x} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial y} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \quad (4.18)$$

Considerando a relação (BIRD et al., 1977):

$$\{\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l\} = \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_l = \delta_{jk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_l \quad (4.19)$$

onde δ_{jk} é o delta de Kronecker definido por:

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 0, j \neq k \\ 1, j = k \end{cases} \quad (4.20)$$

os demais termos ficam:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \cdot \nabla \vec{v} &= \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \\ &+ \left[2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + \left[2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

e

$$\begin{aligned} (\nabla \vec{v})^T \cdot \mathbf{A}_1 &= \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \left[2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \\ &+ \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + \left[2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Assim, o termo \mathbf{A}_2 , considerando a hipótese de escoamento em regime permanente:

$$\mathbf{A}_2 = \left[2u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}
& + \left[u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + \\
& + \left[u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + \\
& + \left[2u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2
\end{aligned}$$

O termo \mathbf{A}_1^2 , levando em consideração a relação (4.19), será:

$$\mathbf{A}_1^2 = \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \left[4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \quad (4.24)$$

O traço de \mathbf{A}_1^2 é dado por:

$$\text{tr}(\mathbf{A}_1^2) = 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (4.25)$$

o termo Π , do tensor das tensões fica:

$$\Pi = \frac{1}{2} \text{tr}(\mathbf{A}_1^2) = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (4.26)$$

Da Eq. (4.9), tira-se a relação:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = - \frac{\partial v}{\partial y} \quad (4.27)$$

que substituído na Eq. (4.26), este termo fica:

$$\Pi = 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (4.28)$$

Assim, o tensor constitutivo (\mathbf{T}) do fluido, toma a forma:

$$\mathbf{T} = T_{11} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + T_{12} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 + T_{21} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_1 + T_{22} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 \quad (4.29)$$

Em que cada componente do tensor é dada por:

$$T_{11} = -p + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}} + \quad (4.30)$$

$$+ \alpha_1 \left[2u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2v \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \alpha_2 \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]$$

$$T_{12} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}} + \quad (4.31)$$

$$+ \alpha_1 \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right]$$

$$T_{21} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}} + \quad (4.32)$$

$$+ \alpha_1 \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right]$$

$$T_{22} = -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}} + \quad (4.33)$$

$$+ \alpha_1 \left[2u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \alpha_2 \left[4 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]$$

Considerando a relação (BIRD et al., 1977):

$$[\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k] = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_k = \delta_{ij} \mathbf{e}_k \quad (4.34)$$

o divergente do tensor \mathbf{T} fica:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{21}}{\partial y} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial T_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} \right) \mathbf{e}_2 \quad (4.35)$$

Cada derivada das componentes do tensor será:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{22}}{\partial x} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}} + \\
&+ \mu b \frac{\partial v}{\partial y} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}-1} \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] \\
&+ \alpha_1 \left[2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + 2u \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + 10 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2v \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \right. \\
&\left. + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] + \alpha_2 \left[8 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.39}$$

A equação da quantidade de movimento, Eq. (4.7) toma a forma:

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{e}_1 + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \mathbf{e}_2 = \left(\frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{21}}{\partial y} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial T_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} \right) \mathbf{e}_2 - \sigma B_0^2 u \mathbf{e}_1 \tag{4.40}$$

Separando as componentes, são obtidas as equações de conservação da quantidade de movimento nas direções x e y :

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial T_{11}}{\partial x} + \frac{\partial T_{21}}{\partial y} - \sigma u B_0^2 \tag{4.41}$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial T_{12}}{\partial x} + \frac{\partial T_{22}}{\partial y} \tag{4.42}$$

Substituindo as derivadas das componentes do tensor \mathbf{T} nas equações (4.41) e (4.42), estas assumem as formas:

$$\begin{aligned}
u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\sigma}{\rho} B_0^2 u + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}} + \\
&+ \frac{\mu b}{2\rho} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}-1} \left\{ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right] + \right. \\
&\left. + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] \right\} + \\
&+ \frac{\alpha_1}{\rho} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \left(13 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + u \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) + \right.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + 3 \frac{\partial u}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \Big] + \\
& + \frac{2\alpha_2}{\rho} \left[4 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right] \\
& u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}} + \\
& + \frac{\mu b}{2\rho} \left[4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{b}{2}-1} \left\{ 2 \frac{\partial v}{\partial y} \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) \right] + \right. \\
& \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left[8 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) \right] \right\} + \\
& + \frac{\alpha_1}{\rho} \left[\frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 13 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + u \left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \right) + \right. \\
& + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + 3 \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \Big] + \\
& + \frac{2\alpha_2}{\rho} \left[4 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.44}$$

4.3.2 – Equações de Camada Limite

Para a solução deste problema, fez-se uso das equações de camada limite que são obtidas mediante uma avaliação da ordem de grandeza dos termos que compõe as equações da conservação da massa e quantidade de movimento (SCHLICHTING, 1979).

Neste problema fez-se as seguintes considerações usuais de camada limite: $u, x, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial p}{\partial x}$ são de $O(1)$ enquanto que v e y são da ordem $O(\delta)$ (δ é a espessura da camada limite) (SAJID *et al.*, 2009). Ainda pode-se considerar as seguintes relações: $v = \frac{\mu}{\rho}$ da ordem $O(\delta^{b+2})$ (AKSOY *et al.*, 2007, PAKDEMIRLI, 1994), e α_1 e α_2 são da ordem $O(\delta^2)$ (SAJID *et al.*, 2007). Assim, as equação de conservação da massa e quantidade de movimento ficam:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4.45)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\sigma}{\rho} B_0^2 u + \frac{\mu}{\rho} (b+1) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^b + \frac{\alpha_1}{\rho} \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 3 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right] + \frac{2\alpha_2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (4.46)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + 2 \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (4.47)$$

A geometria do problema proposto, através da Fig. 1, mostra que existe uma simetria em relação ao centro do canal, portanto, as condições de contorno, neste caso, devem levar em consideração esta simetria. Assim, este sistema fica sujeito as seguintes condições de contorno:

$$y = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, v = 0 \quad (4.48)$$

$$y = h, u = 0, v = V_0 \quad (4.49)$$

$$x = 0, u = U_0 \quad (4.50)$$

Estas condições são aplicadas somente se o canal for submetido a taxas de injeção ou sucção simultâneas nas paredes do canal (OXARANGO *et al.*, 2004). Caso exista diferença entre o valor das taxas, isto não é mais válido (SOUZA *et al.*, 2010).

Para melhor aplicação da técnica da transformada integral, faz-se necessário transformar o termo de potência na Eq. (4.46), através da identidade:

$$(b+1) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^b = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{b+1} \quad (4.51)$$

Considerando que não há perda de generalidade, pode-se fazer $b+1 = n$ e arrumar este termo da forma:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^n = n \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^{n-1} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} \quad (4.52)$$

Assim, a Eq. (4.46) fica (SOUZA *et al.*, 2010):

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\sigma}{\rho} B_0^2 u + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} + \frac{\alpha_1}{\rho} \left[u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right] + \frac{2\alpha_2}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (4.53)$$

4.3.3 – Adimensionalização das Equações

Para ajudar na solução do sistema de equações do problema, são usados os seguintes grupos adimensionais:

$$X = \frac{x}{h}, \quad Y = \frac{y}{h}, \quad U = \frac{u}{U_0}, \quad V = \frac{v}{U_0}, \quad P = \frac{p}{\rho U_0^2}, \quad Re = \frac{\rho U_0^{2-n} h^n}{K^*}$$

$$K_1 = \frac{k_1}{h^2}, \quad K_2 = \frac{k_2}{h^2}, \quad k_1 = \frac{\alpha_1}{\rho}, \quad k_2 = \frac{\alpha_2}{\rho}, \quad K_4 = 2(2K_1 + K_2) \quad (4.54)$$

$$R_v = \frac{V_0}{U_0}, \quad Ha = h B_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$$

A aplicação desses grupos às equações (4.45), (4.47), (4.48), (4.49), (4.50) e (4.53)

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (4.55)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial X} - \frac{(Ha)^2}{Re} U + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \frac{\partial U}{\partial Y} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} +$$

$$+ K_1 \left[U \frac{\partial^3 U}{\partial X \partial Y^2} + \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + 3 \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + v \frac{\partial^3 U}{\partial Y^3} \right] + 2K_2 \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} \quad (4.56)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial Y} + 2K_4 \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = 0 \quad (4.57)$$

As condições de contorno ficam:

$$Y = 0, \frac{\partial U}{\partial Y} = 0, V = 0 \quad (4.58)$$

$$Y = 1, U = 0, V = mR_v \quad (4.59)$$

$$X = 0, U = 1 \quad (4.60)$$

O parâmetro m que aparece na condição (4.59), estabelece se está havendo injeção ou sucção no canal. Se $m = -1$, ocorre injeção no canal, visto a orientação dos eixos coordenados do sistema. Para $m = 1$, o efeito no processo é de sucção.

Outro detalhe que deve ser notado é o fato de o gradiente de pressão na direção vertical não ser nulo. Para eliminar este termo do sistema de equações, usa-se uma pressão modificada, dada por (SOUZA, 2010):

$$P^* = P - (2K_1 + K_2) \left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \quad (4.61)$$

Tomando derivadas desta expressão em relação a X e a Y , tem-se:

$$\frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\partial P^*}{\partial X} + 2(2K_1 + K_2) \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} \quad (4.62)$$

$$\frac{\partial P}{\partial Y} = \frac{\partial P^*}{\partial Y} + 2(2K_1 + K_2) \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \quad (4.63)$$

Substituindo estas expressões nas equações (4.56) e (4.57), o sistema de equações fica:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (4.64)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P^*}{\partial X} - \frac{(Ha)^2}{Re} U + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \frac{\partial U}{\partial Y} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial Y} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} + \quad (4.65)$$

$$+ K_1 \left[U \frac{\partial^3 U}{\partial X \partial Y^2} + \frac{\partial U}{\partial X} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} - \frac{\partial U}{\partial Y} \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y} + V \frac{\partial^3 U}{\partial Y^3} \right]$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial Y} = 0 \quad (4.66)$$

$$Y = 0, \frac{\partial U}{\partial Y} = 0, V = 0 \quad (4.67)$$

$$Y = 1, U = 0, V = mR_v \quad (4.68)$$

$$X = 0, U = 1 \quad (4.69)$$

4.3.4 – Função Corrente – Potenciais de Velocidade

Antes de aplicar o processo de solução propriamente dito do problema, usa-se o procedimento de transformar as equações do movimento em termos de funções corrente, cujo objetivo são as vantagens com o custo computacional oferecido através desta análise (FIGUEIRA DA SILVA *et al.*, 1996, SOUZA *et al.*, 2010). Este processo requer que os campos de velocidade sejam expressos da forma:

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \quad (4.70)$$

$$V = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} \quad (4.71)$$

Com a substituição das expressões dos potenciais de velocidade nas equações (4.64 – 4.69), a Eq. (4.64) representa uma identidade, e a Eq. (4.65) fica:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = -\frac{\partial P^*}{\partial X} - \frac{(Ha)^2}{Re} \frac{\partial \Psi}{\partial Y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} + \quad (4.72)$$

$$+ K_1 \left[\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial X \partial Y^3} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X \partial Y} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial Y^3} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial X \partial Y^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial Y^4} \right]$$

Tomando a derivada da Eq. (4.72) em relação a Y, a derivada da Eq. (4.66) em relação a X e somando os resultados tem-se o sistema de equações do problema de forma mais simples:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial X \partial Y^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial Y^3} = -\frac{(\text{Ha})^2}{\text{Re}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left\{ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} + \quad (4.73)$$

$$+ K_1 \left[\frac{\partial \Psi}{\partial Y} \frac{\partial^5 \Psi}{\partial X \partial Y^4} - \frac{\partial \Psi}{\partial X} \frac{\partial^5 \Psi}{\partial Y^5} \right]$$

$$Y = 0, \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = 0, \Psi = C_1 \quad (4.74)$$

$$Y = 1, \frac{\partial \Psi}{\partial Y} = 0, \Psi = -mR_v X + C_2 \quad (4.75)$$

$$X = 0, \Psi = Y + C_1 \quad (4.76)$$

As constantes C_1 e C_2 representam a função corrente, Ψ , no centro, $Y = 0$, e na parede do canal, $Y = 1$, respectivamente. O balanço de massa global estabelece a relação entre as constantes (SOUZA, 2010):

$$q = C_2 - C_1 \quad (4.77)$$

4.4 – METODOLOGIA DA SOLUÇÃO - Aplicação da GITT

Para a aplicação da GITT ser mais eficiente, é necessário que as condições de contorno na direção do escoamento principal sejam homogêneas. Portanto, segundo COTTA (1993), para a homogeneização adequada das condições de contorno se faz necessário adotar um filtro na direção do escoamento, definido por:

$$\Psi(X, Y) = \Psi_C(Y; X) + \varphi(X, Y) \quad (4.78)$$

Ainda de acordo com (SOUZA, 2010), para o campo de velocidade de um fluido que obedece a lei de potência e em uma região longe da entrada do canal, o termo $\Psi_C(Y; X)$ é dado por:

$$\Psi_C(Y; X) = (q - mR_v X) \left(\frac{2n+1}{n+1} Y - \frac{n}{n+1} Y^{\frac{2n+1}{n}} \right) + C_1 \quad (4.79)$$

Efetuada todas as derivadas da Eq. (4.73) e considerando as relações Eq. (4.78-4.79), a Eq. (4.73) fica:

$$\begin{aligned}
& \left[F(X)F_1(Y) + \frac{\partial\varphi}{\partial Y} \left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial X\partial Y^2} - K_1 \frac{\partial^5\varphi}{\partial X\partial Y^4} \right) + K_1 \frac{\partial\varphi}{\partial X} \left[\frac{\partial^5\varphi}{\partial Y^5} - F(X)F_5(Y) \right] + \right. \\
& \left. - \frac{\partial\varphi}{\partial X} \left[\frac{\partial^3\varphi}{\partial Y^3} - F(X)F_3(Y) \right] = - \frac{(Ha)^2}{Re} \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \left\{ \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y) \right] \left[\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial Y^2} - F(X)F_2(Y) \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} + \right. \tag{4.80}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + mR_v [K_1 F_4(Y) - F_2(Y)] \left[\frac{\partial\varphi}{\partial Y} + F(X)F_1(Y) \right] + \\
& + mR_v F_6(Y) \left\{ K_1 \left[\frac{\partial^5\varphi}{\partial Y^5} - F(X)F_5(Y) \right] - \left[\frac{\partial^3\varphi}{\partial Y^3} - F(X)F_3(Y) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Em que $F(X)$ é dado por:

$$F(X) = q - mR_v X \tag{4.81}$$

E os demais termos $F_i(Y)$ são:

$$F_1(Y) = \frac{2n+1}{n+1} \left(1 - Y^{\frac{n+1}{n}} \right) \tag{4.82}$$

$$F_2(Y) = \frac{2n+1}{n} Y^{\frac{1}{n}} \tag{4.83}$$

$$F_3(Y) = \frac{2n+1}{n^2} Y^{\frac{1-n}{n}} \tag{4.84}$$

$$F_4(Y) = \frac{(2n+1)(1-n)}{n^3} Y^{\frac{1-2n}{n}} \tag{4.85}$$

$$F_5(Y) = \frac{(2n+1)(1-n)(1-2n)}{n^4} Y^{\frac{1-3n}{n}} \tag{4.86}$$

$$F_6(Y) = \frac{2n+1}{n+1} Y - \frac{n}{n+1} Y^{\frac{2n+1}{n}} \tag{4.87}$$

Considerando as Eq. (4.78-79), as condições de contorno, tomam a forma:

$$Y = 0, \frac{\partial^2\varphi}{\partial Y^2} = 0, \varphi = 0 \tag{4.88}$$

$$Y = 1, \frac{\partial \varphi}{\partial Y} = 0, \varphi = 0 \quad (4.89)$$

$$X = 0, \varphi = Y + C_1 - \Psi_C(Y) \quad (4.90)$$

4.4.1 – Problema de Autovalor

Um problema de autovalor apropriado para a Eq. (4.80), com as condições de contorno (4.88 – 4.90) é dado por (FIGUEIRA DA SILVA *et al.* (1996)):

$$\frac{d^4 \psi_i(Y)}{dY^4} = \mu_i^4 \psi_i(Y) \quad (4.91)$$

com as condições:

$$Y = 0, \psi_i(0) = 0, \frac{d\psi_i(0)}{dY} = 0 \quad (4.92)$$

$$Y = 1, \psi_i(1) = 0, \frac{d\psi_i(1)}{dY} = 0 \quad (4.93)$$

Onde $i = 1, 2, 3, \dots$. Para este problema, a solução é dada por:

$$\psi_i(Y) = \frac{\sin(\mu_i Y)}{\sin(\mu_i)} - \frac{\sinh(\mu_i Y)}{\sinh(\mu_i)} \quad (4.94)$$

Os autovalores são dados pela equação transcendental (4.95):

$$\tan(\mu_i) - \tanh(\mu_i) = 0 \quad (4.95)$$

As autofunções satisfazem a condição de ortogonalidade:

$$\int_0^1 \psi_i(Y) \psi_j(Y) dY = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ N_i, & i = j \end{cases} \quad (4.96)$$

A norma, N_i , é:

$$N_i = \int_0^1 [\psi_i(Y)]^2 dY = 1 \quad (4.97)$$

A autofunção normalizada toma a forma:

$$\tilde{\psi}_i(Y) = \frac{\psi_i(Y)}{\sqrt{N_i}} \quad (4.98)$$

4.4.2 – Transformação Integral

Para solução do problema via GITT, usa-se o par transformada-inversa, definido por:

$$\bar{\varphi}_i(X) = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(Y) \varphi_i(X, Y) dY \quad (4.99)$$

a transformada,

$$\varphi_i(X, Y) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\psi}_i(Y) \bar{\varphi}_i(X) \quad (4.99)$$

que é a inversa.

Tomando a transformada da Eq. (4.80) através da aplicação do termo $\int_0^1 \tilde{\psi}_i(Y) dY$, em seguida expandindo devidamente as parcelas, operando termo a termo e considerando a inversa, resulta:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{\infty} (B_{ij} + C_{ij} + D_{ij} + E_{ij}) \frac{d\bar{\varphi}_j(X)}{dX} = \\
& -\frac{(Ha)^2}{Re} \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(Y) \left[\sum_{j=0}^{\infty} \bar{\varphi}_j(X) \frac{d^2 \tilde{\Psi}_i(Y)}{dY^2} - F(X)F_2(Y) \right] dY + \\
& +mR_v \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(Y)F(X)F_3(Y)F_6(Y)dY - mR_v \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(Y)F(X)F_1(Y)F_2(Y)dY + \\
& +mR_v K_1 \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(Y)F(X)F_1(Y)F_4(Y)dY - mR_v K_1 \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(Y)F(X)F_5(Y)F_6(Y)dY + \\
& -mR_v \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\varphi}_j(X) \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(Y)F_2(Y) \frac{d\tilde{\Psi}_i(Y)}{dY} dY + \\
& -mR_v \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\varphi}_j(X) \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(Y)F_6(Y) \frac{d^3 \tilde{\Psi}_i(Y)}{dY^3} dY + \tag{4.100} \\
& -mR_v K_1 \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\varphi}_j(X) \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(Y)F_4(Y) \frac{d\tilde{\Psi}_i(Y)}{dY} dY + \\
& -mR_v K_1 \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\varphi}_j(X) \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(Y)F_6(Y) \frac{d^5 \tilde{\Psi}_i(Y)}{dY^5} dY + \\
& -\frac{1}{Re} \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(Y) \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_i(Y)}{\partial Y^2} \left\{ \left[\sum_{j=0}^{\infty} \bar{\varphi}_j(X) \frac{d^2 \tilde{\Psi}_i(Y)}{dY^2} - F(X)F_2(Y) \right] \right. \\
& \left. \cdot \left[\left(\sum_{j=0}^{\infty} \bar{\varphi}_j(X) \frac{d^2 \tilde{\Psi}_i(Y)}{dY^2} - F(X)F_2(Y) \right)^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \right\} dY
\end{aligned}$$

Cada coeficiente do primeiro membro da equação acima é:

$$B_{ij} = \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(Y) \left\{ -K_1 \left[F(X)F_1(Y) + \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \frac{d^2 \tilde{\Psi}_j(Y)}{dY^2} \right] \right\} dY \quad (4.101)$$

$$C_{ij} = \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(Y) \left\{ \left[F(X)F_1(Y) + \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \frac{d^2 \tilde{\Psi}_j(Y)}{dY^2} \right] \right\} dY \quad (4.102)$$

$$D_{ij} = \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(Y) \tilde{\Psi}_j(Y) \left[F(X)F_3(Y) - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial Y^3} \right] dY \quad (4.103)$$

$$E_{ij} = \int_0^1 \tilde{\Psi}_i(Y) \tilde{\Psi}_j(Y) \left\{ K_1 \left[-F(X)F_5(Y) + \frac{\partial^5 \varphi}{\partial Y^5} \right] \right\} dY \quad (4.104)$$

A Eq. (4.100), para sua solução, deve levar em consideração a condição (4.90).

4.4 – RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Eq. (4.100) é uma EDO de primeira ordem da função $\bar{\varphi}_i(X)$, porém esta equação apresenta muitos termos não-lineares. Para análise desta equação, foi desenvolvido um programa em linguagem FORTRAN, com uso da subrotina DIVPAG do IMSL, com um erro relativo da ordem de 10^{-6} .

O efeito do número de Hartmann (Ha) sobre o campo de velocidades é mostrado na Figura 4.2. Para posições próximas a entrada do duto, o escoamento não sofre efetivamente os efeitos de Ha. A medida que o fluido avança ao longo do canal, o efeito de Ha se mostra mais evidente, e o escoamento vai sendo atenuado a medida que o número de Hartmann aumenta. O efeito de Ha atinge um estágio estacionário próximo a $X = 50$.

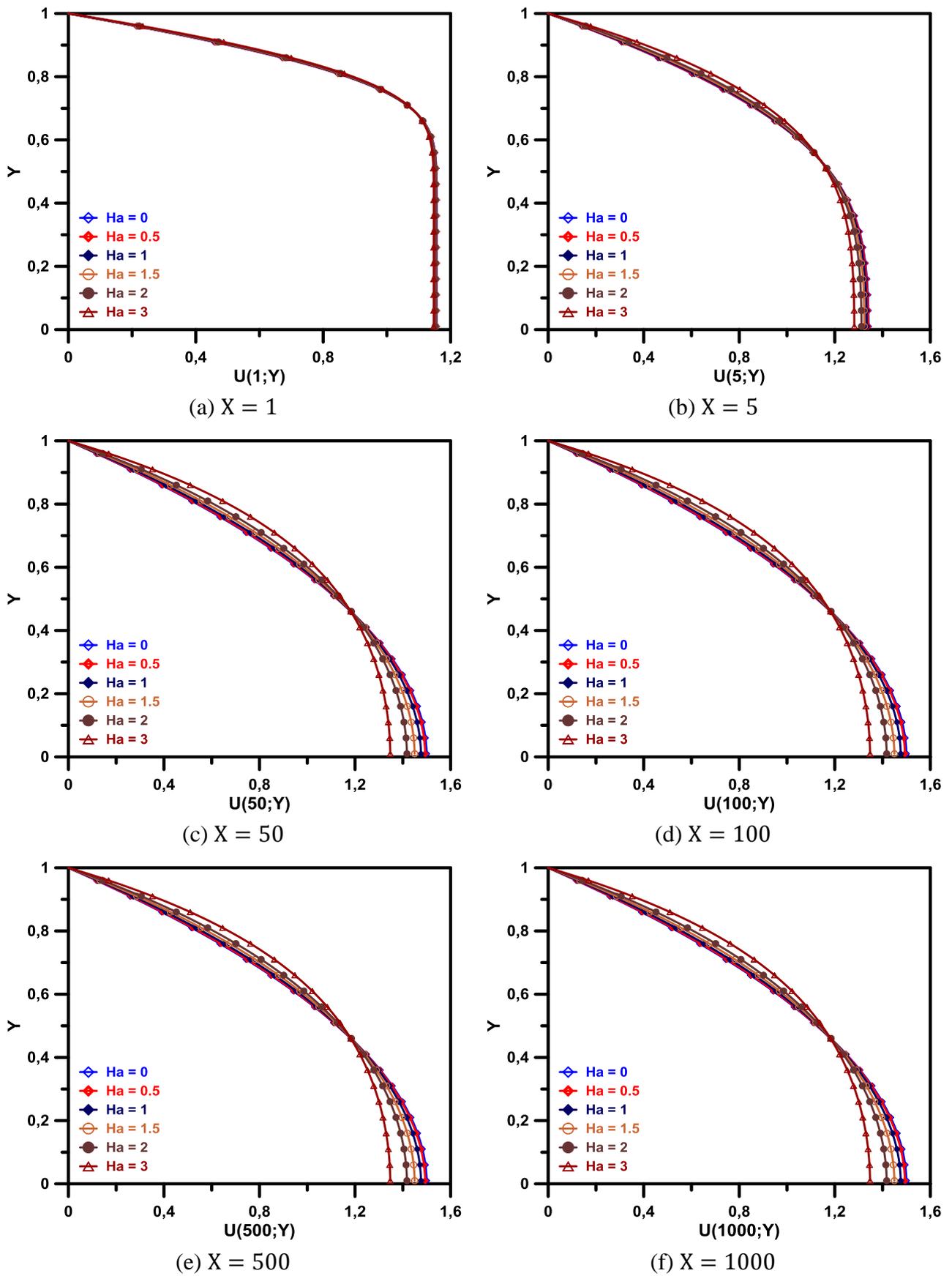
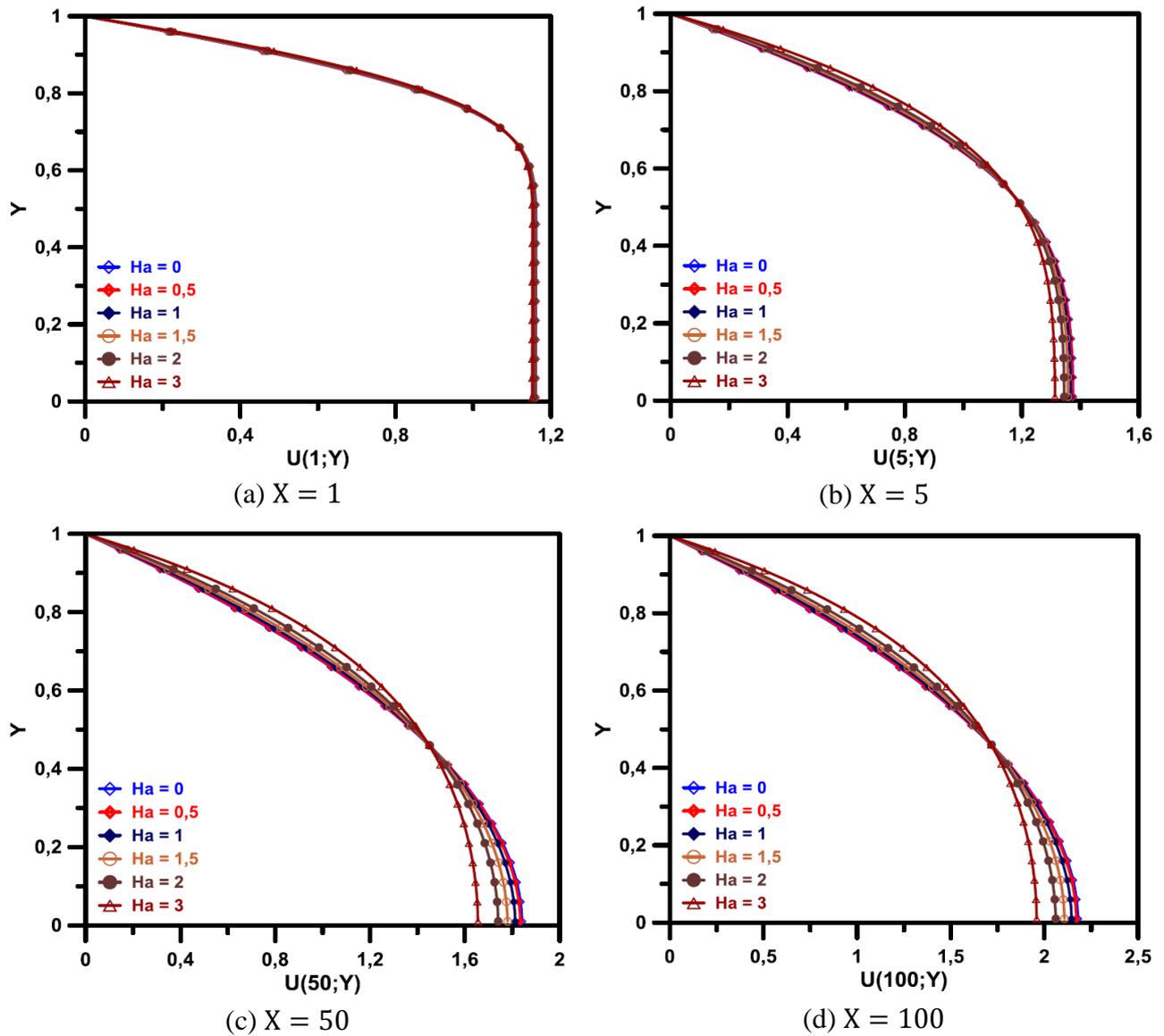
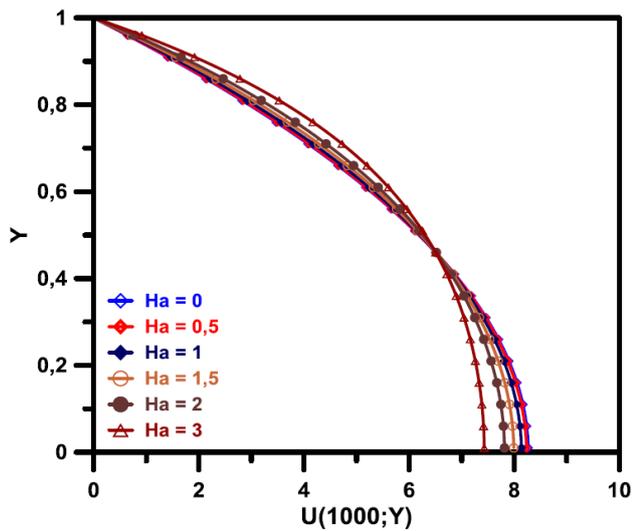


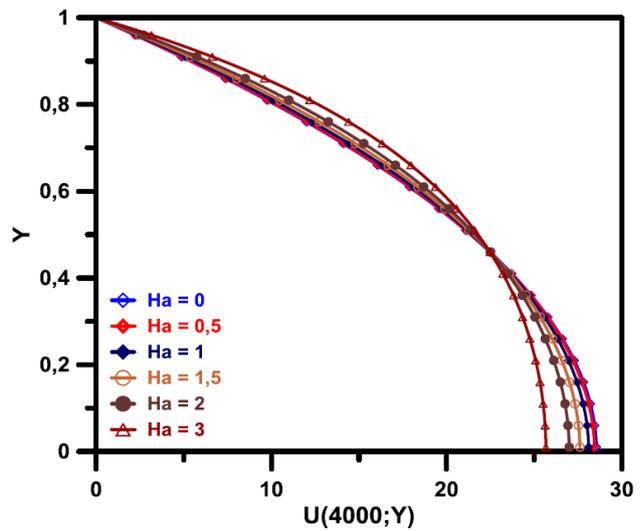
Figura 4.2: Efeito do número de Hartmann em diferentes pontos ao longo do canal, com $Re = 100$, $n = 1$ e $V_0 = 0$.

A Figura 4.3 mostra o efeito do número de Hartmann sobre o campo de velocidades, quando ocorre injeção de fluido no canal ($V_0 = -0,09$). Neste caso, o campo de velocidade sofre a atenuação com o aumento do número de Hartmann, porém o gradiente de velocidade aumenta ao longo do canal.





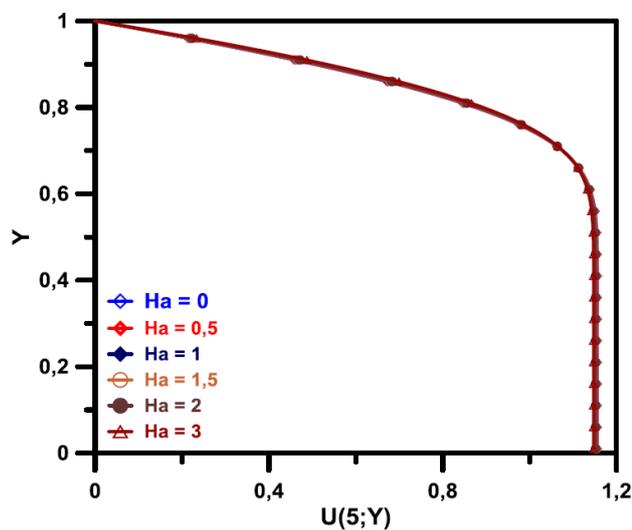
(e) $X = 1000$



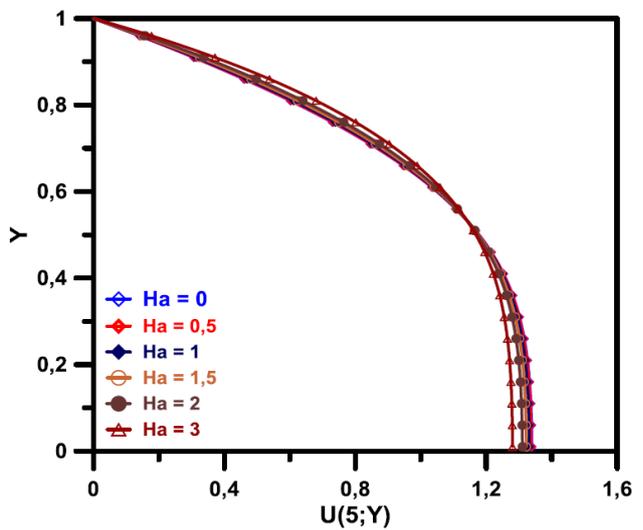
(f) $X = 4000$

Figura 4.3: Efeito do número de Hartmann com $Re = 100$, $n = 1$ e $V_0 = -0,09$.

Quando fluido é retirado do canal, através de um processo de sucção ($V_0 = 0,009$) o escoamento sofre uma atenuação mais acentuada. As Figuras 4.4 mostram que a medida que o fluido avança ao longo do canal, o perfil de velocidade vai atenuando, ficando mais intenso para maiores número de Hartmann.



(a) $X = 1$



(b) $X = 5$

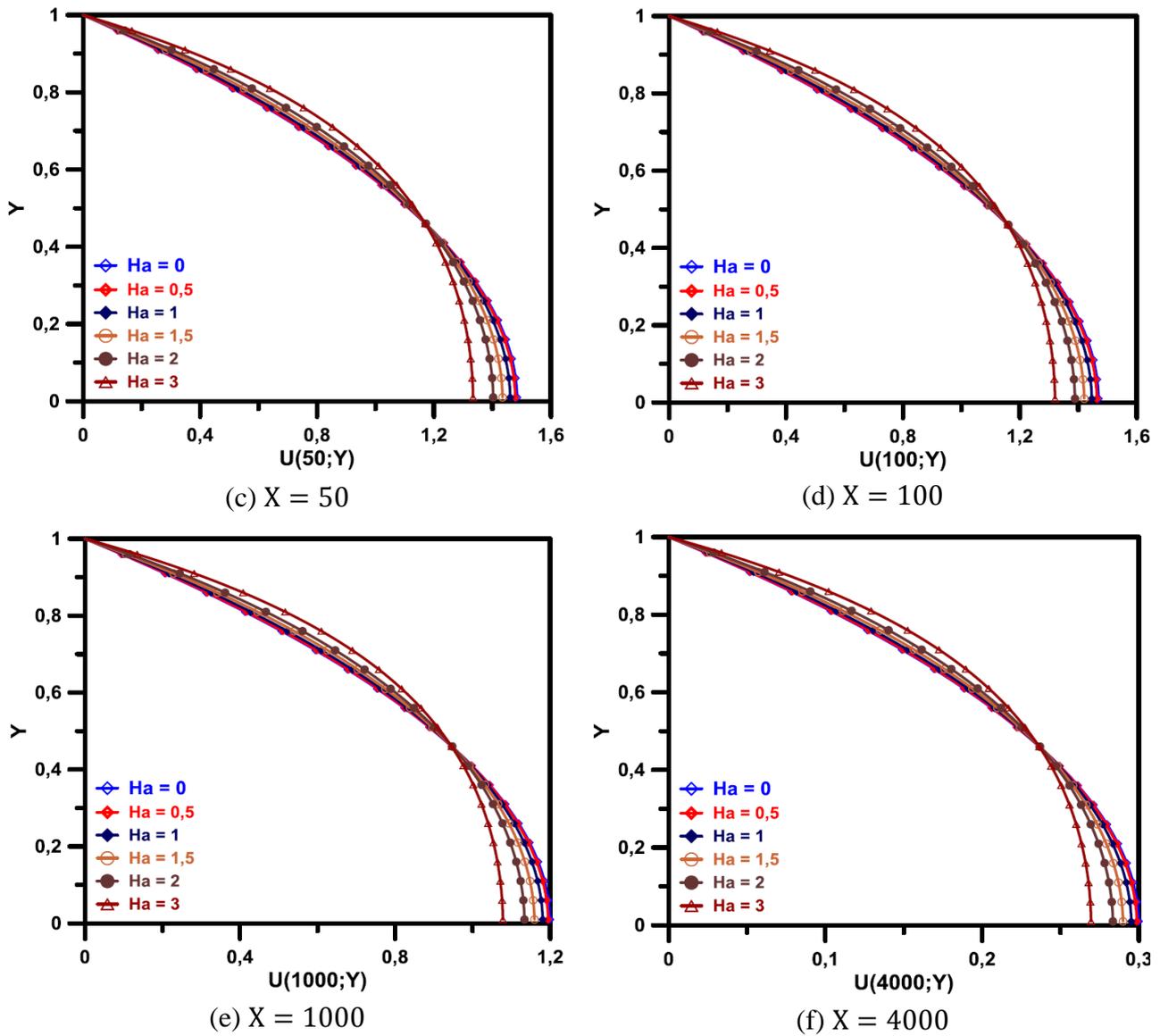
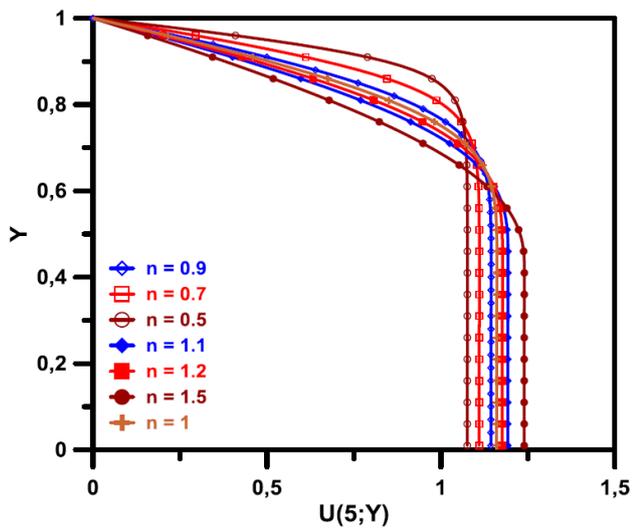
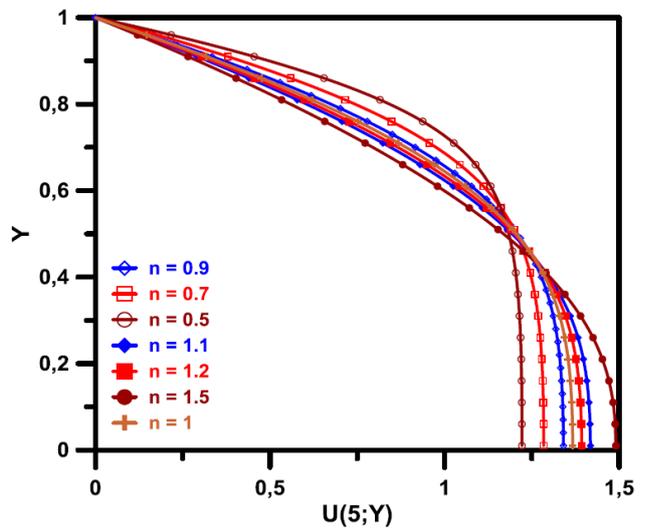


Figura 4.4: Efeito do número de Hartmann com $Re = 100$, $n = 1$ e $V_0 = 0,009$.

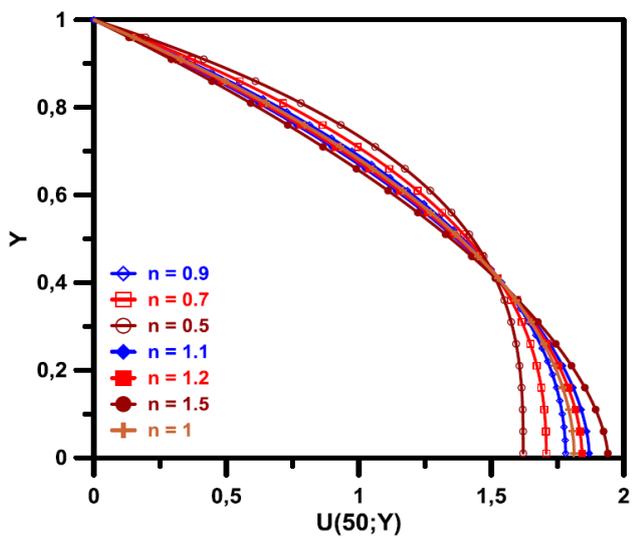
Foi analisado o efeito do expoente (n), que representa o índice de comportamento do fluido. As Figuras 4.5 mostram que os valores de n têm grande influência sobre o campo de velocidade. Para valores de $n < 1$, que caracteriza um fluido pseudoplástico, o fluido é atenuado mais intensamente que para os valores de $n > 1$, que é o caso de fluidos com características dilatantes. Com o avanço ao longo do canal, o efeito da injeção contribui para o escoamento.



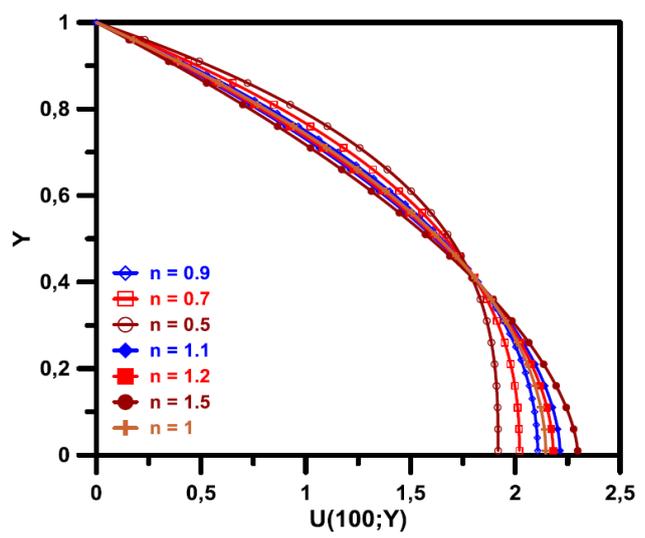
(a) $X = 1$



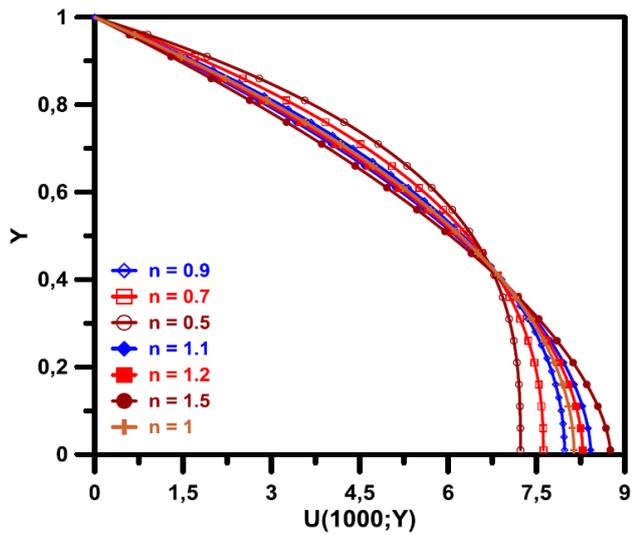
(b) $X = 5$



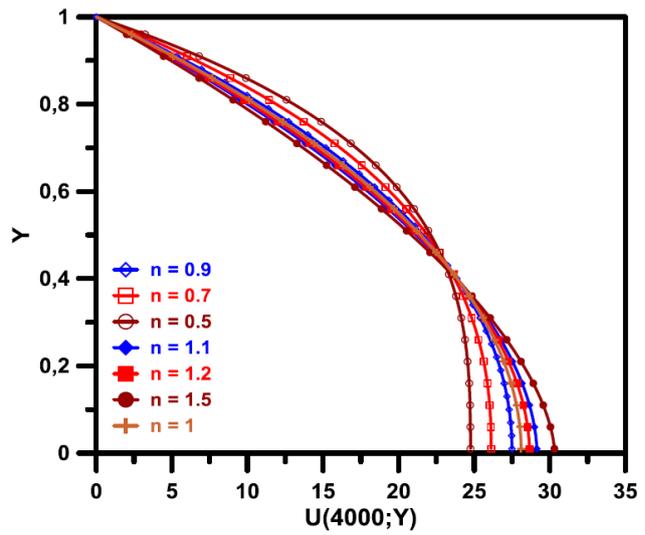
(c) $X = 50$



(d) $X = 100$



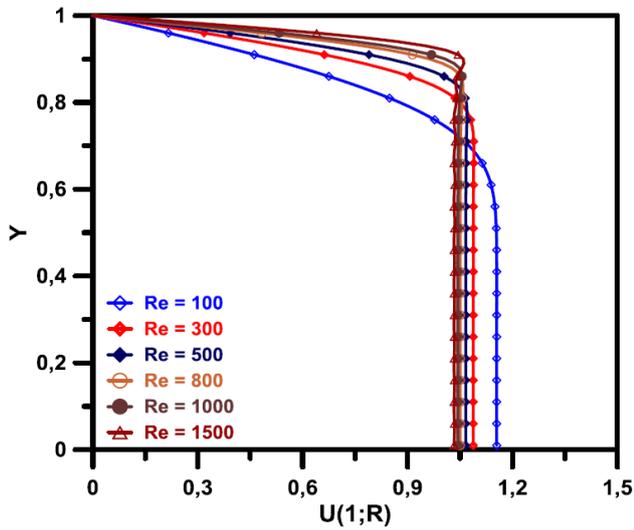
(e) $X = 1000$



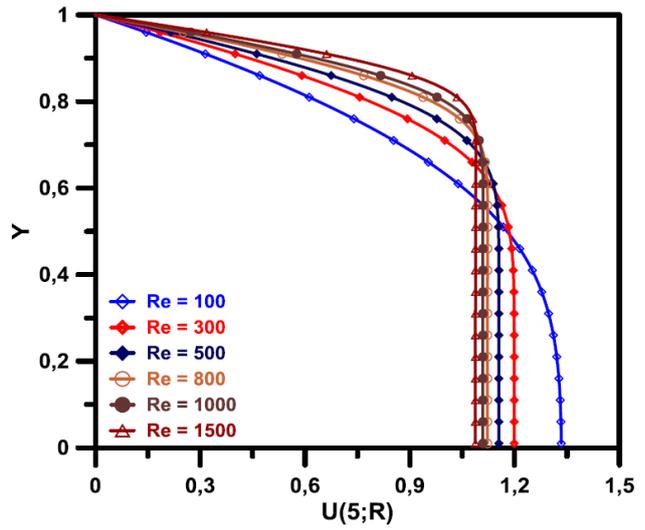
(f) $X = 4000$

Figura 4.5: Efeito do número de n com $Ha = 1$, $Re = 100$, e $V_0 = -0,09$.

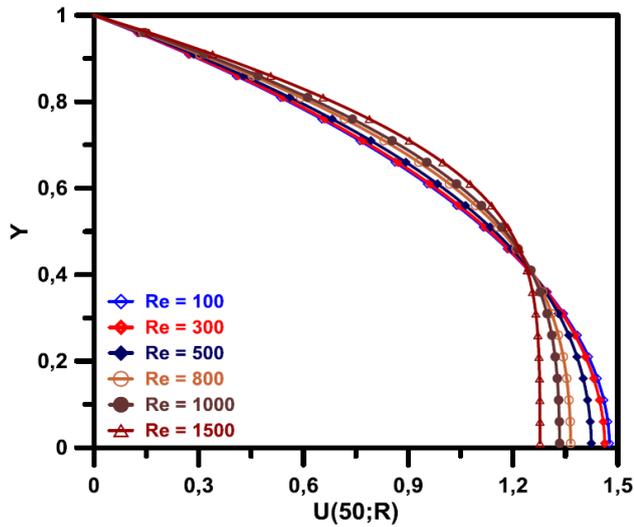
Outro parâmetro que influencia o escoamento é o número de Reynolds. O efeito deste parâmetro sobre o campo de velocidades é mostrado nas Figuras 6. Nota-se que o efeito de Re é também de atenuar o escoamento. À medida que o fluido avança ao longo do canal os perfis vão sendo envelopados até um estado estacionário em que a partir de $X = 200$ o efeito de Re não é mais percebido.



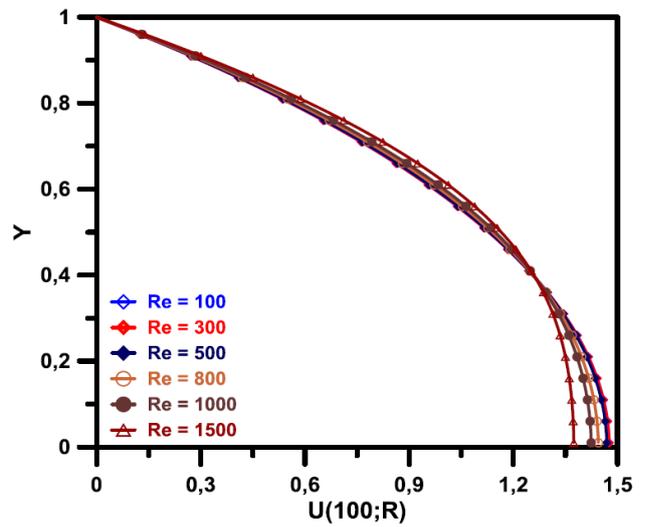
(a) $X = 1$



(b) $X = 5$



(c) $X = 50$



(d) $X = 100$

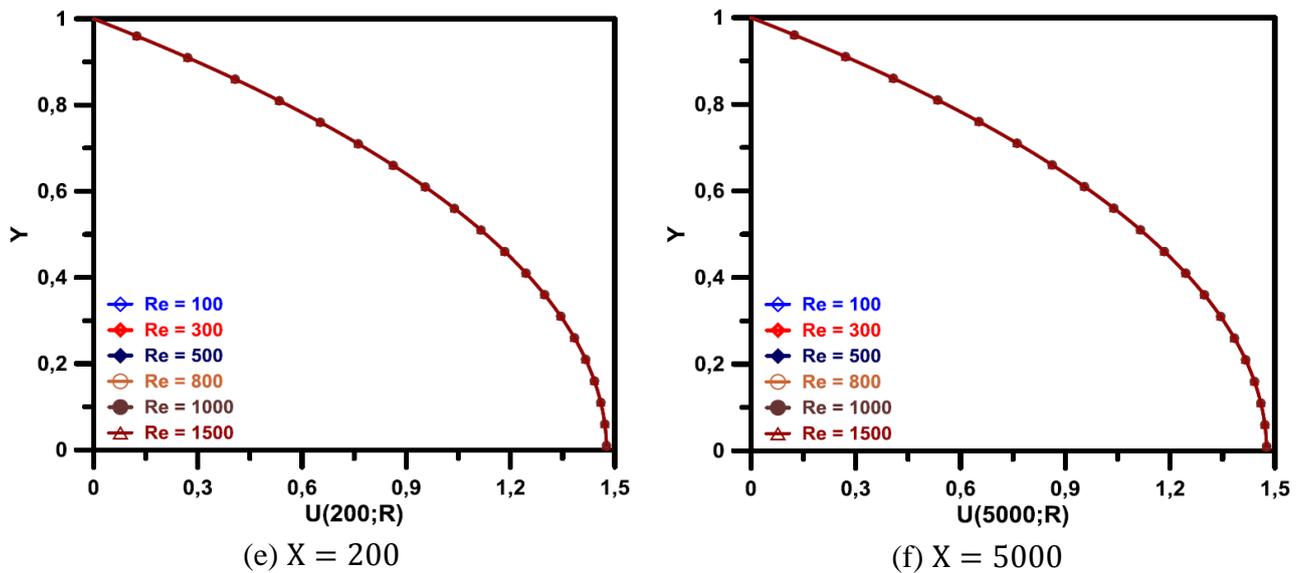


Figura 4.6: Efeito do número de Re com $Ha = 1$, $n = 1$, e $V_0 = 0$.

Os resultados obtidos através da GITT mostram claramente os efeitos sobre o escoamento dos parâmetros considerados no estudo.

O número de Hartmann (Ha), parâmetro responsável pelo efeito do campo magnético sobre o escoamento, atua sobre o perfil de velocidade atenuando o escoamento, como é mostrado nas Figuras 4.2.

Este parâmetro mantém as mesmas características quando ocorre um processo de injeção de fluido no canal, porém, a injeção contribui para o avanço do fluido ao longo do canal, fato este observado nas Figuras 4.4.

No processo de sucção de fluido do canal, mostrado nas Figuras 4.4, o efeito do número de Hartmann é parecido aos casos anteriores, com este parâmetro atuando na atenuação do escoamento, sendo mais intenso para maiores valores de Ha . O efeito da sucção contribui para a redução do escoamento.

As características da natureza do fluido, resguardadas no parâmetro n , o índice de potência, também foram analisadas. Nas Figuras 4.5 são mostrados os perfis de velocidade para diferentes valores de n com injeção de fluido no canal. O efeito provocado por n caracteriza bem a diferença entre a natureza dos fluidos, quando $n < 1$ o fluido se comporta como um fluido pseudoplástico, cuja propriedade é de diminuir a viscosidade com a aplicação de uma força, como pode ser verificado nos perfis de velocidade com gradientes maiores.

Para $n > 1$, o fluido tem características dilatantes, em que a propriedade fundamental é ter sua viscosidade aumentada com a aplicação de uma força, os perfis de velocidade são mostrados nas Figuras 4.5, onde pode-se notar que os gradientes são menores.

Também foram analisados os efeitos do número de Reynolds, parâmetro que relaciona as forças de inércia (força necessária para movimentar uma determinada massa do fluido) com as forças viscosas (força de resistência ao movimento do fluido). Os efeitos deste parâmetro foram mostrados nas Figuras 4.6 e nota-se que, nas regiões próximas à entrada do canal, as forças de inércia são mais intensas, o escoamento é retardado e os perfis de velocidade apresentam gradientes menores, para maiores valores de Re . À medida que o escoamento avança ao longo do canal, as forças de inércia e de viscosidades são superadas e o escoamento apresenta regime permanente.

Os resultados obtidos neste trabalho mostram coerência dos perfis de velocidade com os perfis apresentados por SOUZA, 2010.

ESCOAMENTO MHD DE FLUIDO NEWTONIANO NÃO-FOURIER EM DUTOS CONCÊNTRICOS

5.1 – INTRODUÇÃO

O escoamento de um fluido na região anular entre dois cilindros concêntricos tem muitas aplicações práticas tal como nos equipamentos mecânicos e químicos de mistura, bocais com redemoinho, rolamentos e viscosímetros comerciais (OMID MAHIAN *et al*, 2012), sendo estes últimos utilizados para determinar a viscosidade de fluidos tanto newtonianos quanto não newtonianos. Além disso, a transferência de calor na região anular, em que o cilindro exterior gira, é um campo de intensa investigação em diversas aplicações técnicas, tais como na indústria de exploração de petróleo, indústria de alimentos bem como na indústria de automóveis. Análises extensivas da primeira lei da termodinâmica da região anular entre dois cilindros concêntricos em rotação têm sido realizadas por muitos pesquisadores.

MOLKI *et al* (1990) investigaram experimentalmente as características da transferência de calor do escoamento laminar na região anular entre dois cilindros concêntricos, sendo que o cilindro interno apresenta movimento de rotação, na presença de um escoamento axial laminar usando a técnica de sublimação. Focaram sua investigação para a região de entrada da região anular para o desenvolvimento simultâneo os perfis do campo de velocidades e do campo de temperaturas. Eles aplicaram a técnica para a sublimação da naftalina e com a analogia entre os processos de transferência de calor e massa permitiu-lhes comparar os resultados atuais de transferência de massa com dados de transferência de calor. Para altas velocidades de rotação, ocorre uma transição para o fluxo de vórtice e os coeficientes de transferência de massa foram acentuados. Ainda, o comportamento e localização da transição estão consistentes com as observações visuais.

MAHMUD e FRASER(2002) investigaram analiticamente a Primeira e Segunda Leis da Termodinâmica características do escoamento de fluidos e a transferência de calor dentro de um anel cilíndrico. No interior do espaço anular, o movimento relativo de rotação entre os cilindros interior e exterior induz movimento de fluido. O fluxo de calor de superfície líquida é sempre igual ao dos cilindros interior e exterior, mas varia em magnitude. As equações em coordenadas cilíndricas simplificadas foram resolvidas para obter as expressões analíticas para número de geração de entropia adimensional (N_s), a razão de distribuição da irreversibilidade (Φ) e o número de Bejan (Be) em função dos parâmetros geométricos e que governam o escoamento. Distribuições

espaciais da taxa de geração de entropia, local e média, e a irreversibilidade da transferência de calor, foram apresentadas graficamente. Os efeitos da razão de velocidade (λ), o grupo de parâmetros (Br/Ω) e o número de Brinkman (Br) também foram testados em relação aos parâmetros acima.

HAYAT et al (2006) estudaram numericamente os efeitos reológicos não-lineares do fluido Oldroyd 6-constant entre cilindros concêntricos. Segundo HAYAT (2006), o fluido Oldroyd 6-constant é um caso geral do fluido Newtoniano, Maxwell, de segundo grau ou Oldroyd 3-constant, uma vez que: quando $\lambda_i = 0$, com $i = 1 - 5$, ele se reduz ao fluido newtoniano; para $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_j = 0$ quando $j = 2 - 5$, ele corresponde ao fluido de Maxwell; quando $\lambda_1 = 0$, $\mu\lambda_2 = \tilde{\alpha}_1$, $\lambda_k = 0$, com $k = 3 - 5$, ele se reduz ao fluido de segundo grau; e para $\lambda_1 \neq 0 \neq \lambda_2$, $\lambda_k = 0$, com $k = 3 - 5$, ele se torna o fluido Oldroyd 3-constant. Eles concluíram que a velocidade no fluido Oldroyd 6-constant é maior que o fluido newtoniano se $\alpha_1 < \alpha_2$, ou menor se $\alpha_1 > \alpha_2$. Ainda concluem que o campo magnético transversal diminui o movimento do fluido.

FEIZ-DIZAJI et al (2008) estudaram o campo de escoamento de um fluido não-newtoniano de terceiro grau na região anular entre dois cilindros concêntricos na presença de um campo magnético. Consideraram que as linhas de campo são perpendiculares aos vetores de velocidade, a permeabilidade magnética é constante em todo o campo e a intensidade do campo elétrico também era desprezível. Também consideraram uma simplificação da equação constitutiva do fluido e para a solução do sistema de equações que descrevem o comportamento do fluido eles usaram a técnica do Teorema do ponto fixo de Schauder. Obtiveram uma solução numérica das equações governantes através do método das diferenças finitas e apresentam uma discussão sobre os efeitos dos diferentes parâmetros sobre o campo de velocidades.

OMID MAHIAN *et al* (2012) analisaram a primeira e segunda leis da termodinâmica para mostrar os efeitos do escoamento MHD nas distribuições de geração de temperatura, velocidade e entropia entre dois cilindros concêntricos com velocidade de rotação relativa. Eles realizaram o estudo para o estado estacionário de um escoamento laminar de um fluido newtoniano, viscoso e incompressível, mantendo as paredes dos cilindros a temperaturas constantes e diferentes. Eles usaram um sistema de equações em coordenadas cilíndricas e resolveram analiticamente para obter os valores locais e valores médios da geração de entropia. A distribuição de velocidades na região anular foi dada pelas funções de Bessel modificadas, I_ν e K_ν . Para obter o campo de temperatura, eles expandiram as funções de Bessel, I_ν e K_ν , até o terceiro termo e então aplicadas na equação da energia. Eles verificaram que os valores da velocidade e a temperatura diminuem quando os valores dos números de Hartmann e Brinkman aumentam. Observaram também que, com o aumento do

número de Hartmann, o número de geração de entropia diminui nas vizinhanças do cilindro interior, e apresenta comportamento oposto em outros pontos da região anular. Também concluem que com o aumento do número de Hartmann a geração de entropia média também aumenta e que para valores do número de Hartmann entre 0 – 1.25, a geração de entropia média é mínima, enquanto o número de Brickman está no intervalo 6 – 8, também determinaram que o raio ótimo, para qualquer número de Hartmann, é aproximadamente 0.55, para o qual a geração de entropia é minimizada.

5.2 – FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Será analisado o escoamento de um fluido newtoniano não-Fourier entre dois cilindros concêntricos, submetido a um campo magnético uniforme orientado na direção axial. A figura abaixo mostra a geometria do problema.

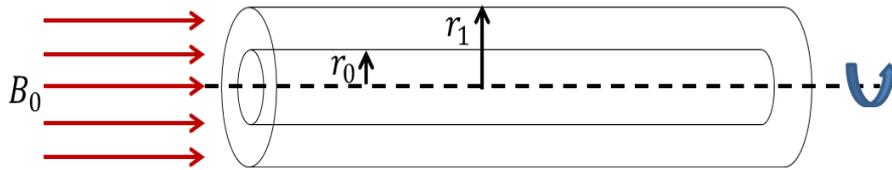


Figura 5.1 – Representação esquemática da geometria do problema físico da região anular.

Para esta situação as equações que governam o comportamento do fluido são a equação do movimento e a equação da energia, dadas, respetivamente, por:

$$\rho \frac{\partial u_{\theta}}{\partial t} = \mu \dot{\omega} - \sigma B_0^2 u_{\theta} \quad (5.1)$$

e,

$$\rho C_P \left\{ \tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} \right\} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \tau_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \varphi \quad (5.2)$$

Em que as condições iniciais e de contorno são:

$$t = 0 \rightarrow u_{\theta} = 0; T = T_a \quad (5.3a)$$

$$r = r_0 \rightarrow u_{\theta} = \omega_0 r_0; T = T_0 \quad (5.3b)$$

$$r = r_1 \rightarrow u_{\theta} = \omega_1 r_1; T = T_1 \quad (5.3c)$$

O termo $\dot{\omega}$, que é o tensor constitutivo do fluido em análise é definido como:

$$\dot{\omega} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \dot{\gamma}) \quad (5.4)$$

e $\dot{\gamma}$ é dado por:

$$\dot{\gamma} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) \quad (5.5)$$

Os termos na equação da energia são definidos por:

$$\varphi = \mu \dot{\gamma}^2 + \varepsilon P''' \quad (5.6)$$

em que P''' é o termo de geração de energia devido ao efeito joule, definido por:

$$P''' = (\vec{j} - \vartheta \vec{u}_\theta) \cdot (\vec{E} + \vec{u}_\theta \times \vec{B}) \quad (5.7)$$

Em que ϑ é a densidade de carga elétrica e \vec{j} é densidade de corrente elétrica, dado pela relação:

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{u}_\theta \times \vec{B}) \quad (5.8)$$

Considerando que o termo $\vartheta \vec{u}_\theta$ é desprezado quando comparado com \vec{j} e o campo elétrico \vec{E} também é desprezado quando comparado com $\vec{u}_\theta \times \vec{B}$, com isso o termo P''' fica:

$$P''' = \sigma B_0^2 u_\theta^2 \quad (5.9)$$

5.3 – ADIMENSIONALIZAÇÃO DO PROBLEMA

Para simplificação do problema, foram usados os seguintes parâmetros adimensionais:

$$U = \frac{u_\theta}{u_c}; \theta = \frac{T - T_1}{T_0 - T_1}; R = \frac{r}{r_1}; a = \frac{r_0}{r_1}; \lambda = \frac{\omega_0}{\omega_1}; E_c = \frac{(r_1 \omega_1)^2}{C_p \Delta T}; Ha = B_0 r_1 \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}; \quad (5.10)$$

$$Br = \frac{\mu u_c^2}{k \Delta T}; \tau = \frac{t}{t_c}; \tau_R = \frac{\tau_0}{t_c} = \frac{u_c \tau_0}{r_1}; \phi = \frac{t_c}{\rho C_p \Delta T} \varphi; Pr = \frac{\nu}{\alpha} = \frac{C_p \mu}{k}$$

$$Br = E_c Pr; \theta_a = \frac{T_a - T_1}{T_0 - T_1}, P^* = E_c (Ha)^2 U^2, \Omega = \frac{\Delta T}{T_1}, t_c = \frac{r_1}{u_c}, \Delta T = T_0 - T_1, u_c = r_1 \omega_1$$

Em que os termos são:

E_c é número de Eckert, número adimensional usado em cálculos de escoamentos. Expressa a relação entre a energia cinética de um escoamento e a entalpia, sendo usado para caracterizar a

dissipação. Neste caso $(r_1\omega_1)^2$ representa a velocidade característica, C_p é a capacidade calorífica do fluido e ΔT é a diferença de temperatura entre os cilindros;

Ha é número de Hartmman, indica a relação entre a força magnética e a força viscosa.

Pr é número de Prandtl, parâmetro adimensional que aproxima a razão de difusividade de momento (viscosidade cinemática) e difusividade térmica de um fluido, expressando a relação entre a difusão de quantidade de movimento e a difusão de quantidade de calor dentro do próprio fluido, sendo uma medida da eficiência destas transferências nas camadas limites hidrodinâmica e térmica. É um grupo adimensional importante para o estudo dos processos de transferência de calor por convecção. É nomeado em homenagem ao físico alemão Ludwig Prandtl. Em problemas de transferência de calor, o número de Prandtl controla a espessura relativa das camadas limite de momento e térmica. Quando Pr é pequeno, significa que o calor difunde-se muito facilmente comparado à velocidade (momento). Uma definição mais sofisticada pode ser feita como sendo Pr aproximadamente a razão do escoamento de entalpia pela condução de calor multiplicada pela razão entre forças viscosas e forças de inércia, o que indica claramente acoplamento entre as equações que expressam a quantidade de movimento e a de energia, pois se há um escoamento (velocidade), também há transporte de entalpia (uma forma de energia).

$$\text{Pr} = \frac{\text{escoamento de entalpia}}{\text{condução de calor}} \cdot \frac{\text{forças viscosas}}{\text{forças de inércia}} \quad (5.11)$$

Br é O número de **Brinkman (Br)** é um número adimensional relacionado com a condução de calor desde uma parede até um fluido viscoso em movimento. É habitualmente usado na fabricação de polímeros.

Substituindo estes parâmetros nas equações (5.7), (5.2) e (5.3a-c), teremos o grupo de equações na forma adimensional. Assim, a equação (5.7) fica:

$$\frac{\partial U(\tau, R)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U(\tau, R)}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U(\tau, R)}{\partial R} - \left[\frac{1}{R^2} + (\text{Ha})^2 \right] U(\tau, R) \quad (5.12)$$

a equação (5.2) ficará:

$$\tau_R \text{Pr} \frac{\partial^2 \theta(\tau, R)}{\partial \tau^2} + \text{Pr} \frac{\partial \theta(\tau, R)}{\partial \tau} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \theta(\tau, R)}{\partial R} \right] + \text{Br} \left[\tau_R \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \phi \right] \quad (5.13)$$

Submetidas as seguintes condições iniciais e de contorno também adimensionalizadas:

$$\tau = 0 \rightarrow U(0, R) = 0; \theta(0, R) = \frac{T_a - T_1}{T_0 - T_1} = \theta_a; \frac{\partial \theta(0, R)}{\partial \tau} = 0 \quad (5.14a)$$

$$R = a \rightarrow U(\tau, a) = a\lambda; \theta(\tau, a) = 1 \quad (5.14b)$$

$$R = 1 \rightarrow U(\tau, 1) = 1; \theta(\tau, 1) = 0 \quad (5.14c)$$

Em que o termo ϕ é dado por:

$$\phi = (\dot{\gamma}^*)^2 + \varepsilon(Ha)^2[U(\tau, R)]^2 \quad (5.15)$$

onde $\dot{\gamma}^*$ é:

$$\dot{\gamma}^* = R \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{U(\tau, R)}{R} \right] \quad (5.16)$$

5.4 – METODOLOGIA DA SOLUÇÃO

A aproximação da GITT para ser mais eficiente, se faz necessário que as condições de contorno, na direção da transformada integral, o caso a direção R, sejam homogeneizadas através de um processo de filtragem. Isso é conseguido escrevendo os potenciais em questão da forma:

$$U(\tau, R) = U_P(R) + U_H(\tau, R) \quad (5.17)$$

e

$$\theta(\tau, R) = \theta_P(R) + \theta_H(\tau, R) \quad (5.18)$$

Ou seja, a solução é formada de uma solução particular, que depende apenas da posição, e uma solução homogênea. Portanto, o problema é separado em dois, de modo um dependa apenas da solução particular, enquanto o outro dependerá da parte homogênea.

5.4.1 - Problema Particular

No campo de velocidades, para um filtro que torne o problema mais simples, a parcela particular de $U(\tau, R)$ é usada. Assim, tem-se a equação:

$$\frac{d^2 U_P(R)}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dU_P(R)}{dR} - \left[\frac{1}{R^2} + (Ha)^2 \right] U_P(R) = 0 \quad (5.19)$$

Sujeita as seguintes condições de contorno:

$$R = a \rightarrow U_P(a) = a\lambda \quad (5.20a)$$

$$R = 1 \rightarrow U_P(1) = 1 \quad (5.20b)$$

A solução desta equação é dada por:

$$U_P(R) = -C_1 J_1(iHaR) + C_2 Y_1(-iHaR) \quad (5.21)$$

Para tornar esta função com argumentos reais, é necessário usar as seguintes fórmulas de recorrência das funções de Bessel (ARFKEN, 1970):

$$J_1(iHaR) = iI_1(HaR) \quad (5.22)$$

$$Y_1(-iHaR) = -I_1(HaR) + \frac{2i}{\pi} K_1(HaR) \quad (5.23)$$

Substituindo as equações (5.22) e (5.23) na equação (5.21) e depois de arrumar os termos, teremos:

$$U_P(R) = A_1 I_1(HaR) + A_2 K_1(HaR) \quad (5.24)$$

Onde A_1 e A_2 são as constantes de integração, dadas pelas expressões:

$$A_1 = \frac{a\lambda K_1(Ha) - K_1(a \cdot Ha)}{I_1(a \cdot Ha)K_1(Ha) - I_1(Ha)K_1(a \cdot Ha)} \quad (5.25)$$

$$A_2 = \frac{a\lambda I_1(Ha) - I_1(a \cdot Ha)}{I_1(Ha)K_1(a \cdot Ha) - I_1(a \cdot Ha)K_1(Ha)} \quad (5.26)$$

Este resultado concorda com a solução do problema estacionário apresentado por OMID MAHIAN *et al* (2012).

Para o campo de temperaturas, um filtro será aplicado na parte convectiva da equação (5.13), de modo que:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left[R \frac{d\theta(R)}{dR} \right] = 0 \quad (5.22)$$

com as condições:

$$R = a \rightarrow \theta_P(a) = 1 \quad (5.23a)$$

$$R = 1 \rightarrow \theta_P(1) = 0 \quad (5.23b)$$

Com solução imediata é dada por:

$$\theta_p(R) = \frac{\ln(R)}{\ln(a)} \quad (5.24)$$

5.4.2 – Problema Homogêneo

O problema homogêneo do campo de velocidades fica:

$$\frac{\partial U_H(\tau, R)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 U_H(\tau, R)}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_H(\tau, R)}{\partial R} - \left[\frac{1}{R^2} + (Ha)^2 \right] U_H(\tau, R) \quad (5.25)$$

e para o campo de temperaturas será dado por:

$$\tau_R Pr \frac{\partial^2 \theta_H(\tau, R)}{\partial \tau^2} + Pr \frac{\partial \theta_H(\tau, R)}{\partial \tau} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \theta_H(\tau, R)}{\partial R} \right] + Br \left[\tau_R \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \phi \right] \quad (5.26)$$

com as seguintes condições iniciais e de contorno:

$$\tau = 0 \rightarrow U_H(0, R) = -U_P(a); \theta_H(0, R) = \theta_a - \theta_p(R) \quad (5.27a)$$

$$R = a \rightarrow U_H(\tau, a) = 0; \theta_H(\tau, a) = 0 \quad (5.27b)$$

$$R = 1 \rightarrow U_H(\tau, 1) = 0; \theta_H(\tau, 1) = 0 \quad (5.27c)$$

Um problema auxiliar de autovalor de Sturm-Liouville será utilizado na solução do problema homogêneo. Portanto, para o campo de velocidades, um problema auxiliar adequado será dado por (ÖZISIK, 1993):

$$\frac{d^2 \psi_i(R)}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\psi_i(R)}{dR} + \left(\mu_i^2 - \frac{1}{R^2} \right) \psi_i(R) = 0 \quad (5.24)$$

com as seguintes condições:

$$R = a \rightarrow \psi_i(a) = 0 \quad (5.25a)$$

$$R = 1 \rightarrow \psi_i(1) = 0 \quad (5.25b)$$

As autofunções deste problema são dadas por (ÖZISIK, 1993):

$$\psi_i(R) = Y_1(\mu_i) J_1(\mu_i R) - J_1(\mu_i) Y_1(\mu_i R) \quad (5.26)$$

onde Y_1 e J_1 são funções de Bessel. Os autovalores são dados pela equação transcendental (ÖZISIK, 1993):

$$Y_1(\mu_i) J_1(\mu_i a) - J_1(\mu_i) Y_1(\mu_i a) = 0 \quad (5.27)$$

A condição de normalização do problema é dada por:

$$\int_a^1 R \psi_i(R) \psi_j(R) dR = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ N_i, & i = j \end{cases} \quad (5.28)$$

A norma N_i é dada por (ÖZISIK, 1993):

$$N_i = \frac{2 [J_1(\mu_i a)]^2 - [J_1(\mu_i)]^2}{\pi^2 \mu_i^2 [J_1(\mu_i a)]^2} \quad (5.29)$$

Para o campo de temperaturas o problema auxiliar será da forma:

$$\frac{d}{dR} \left[R \frac{d\Gamma_1(R)}{dR} \right] + \beta_1^2 R \Gamma_1(R) = 0 \quad (5.30)$$

com as seguintes condições:

$$R = a \rightarrow \Gamma_1(a) = 0 \quad (5.31a)$$

$$R = 1 \rightarrow \Gamma_1(1) = 0 \quad (5.31b)$$

As autofunções são dadas por (ÖZISIK, 1993):

$$\Gamma_1(R) = J_0(\beta_1 R) Y_0(\beta_1) - J_0(\beta_1) Y_0(\beta_1 R) \quad (5.32)$$

e os autovalores são dados pela equação (ÖZISIK, 1993):

$$J_0(\beta_1 a) Y_0(\beta_1) - J_0(\beta_1) Y_0(\beta_1 a) = 0 \quad (5.33)$$

A condição de normalização é:

$$\int_a^1 R \Gamma_l(R) \Gamma_m(R) dR = \begin{cases} 0, & l \neq m \\ M_l, & l = m \end{cases} \quad (5.34)$$

Portanto a norma, M_l , é dada por (ÖZISIK, 1993):

$$M_l = \frac{2 [J_0(\beta_1 a)]^2 - [J_0(\beta_1)]^2}{\pi^2 \beta_1^2 [J_0(\beta_1 a)]^2} \quad (5.35)$$

A técnica da transformada integral generalizada requer a utilização do par transformada-inversa que, para o campo de velocidades será a transformada:

$$\bar{U}_{Hi}(\tau) = \int_a^1 R \tilde{\Psi}_i(R) U_H(\tau, R) dR \quad (5.36)$$

e a inversa:

$$U_H(\tau, R) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Psi}_i(R) \bar{U}_{Hi}(\tau) \quad (5.37)$$

onde, $\tilde{\Psi}_i(R)$ é a autofunção normalizada, definida por:

$$\tilde{\Psi}_i(R) = \frac{\Psi_i(R)}{\sqrt{N_i}} \quad (5.38)$$

Para o campo de temperaturas, a transformada será:

$$\bar{\theta}_{Hi}(\tau) = \int_a^1 R \tilde{\Gamma}_i(R) \theta_H(\tau, R) dR \quad (5.39)$$

e a inversa:

$$\theta_H(\tau, R) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Gamma}_i(R) \bar{\theta}_{Hi}(\tau) \quad (5.40)$$

Também $\tilde{\Gamma}_i(R)$ é a autofunção normalizada:

$$\tilde{\Gamma}_i(R) = \frac{\Gamma_i(R)}{\sqrt{M_i}} \quad (5.41)$$

Com esses pares constituídos, será realizada a transformação integral das equações diferenciais. Aplicando o termo $\int_a^1 R \tilde{\Psi}_i(R) dR$ na equação (5.25), esta fica:

$$\begin{aligned} & \int_a^1 R \tilde{\Psi}_i(R) \frac{\partial U_H(\tau, R)}{\partial \tau} dR \\ &= \int_a^1 R \tilde{\Psi}_i(R) \left\{ \frac{\partial^2 U_H(\tau, R)}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_H(\tau, R)}{\partial R} - \left[\frac{1}{R^2} + (Ha)^2 \right] U_H(\tau, R) \right\} dR \end{aligned}$$

$$\int_a^1 R\tilde{\Psi}_i(R) \frac{\partial U_H(\tau, R)}{\partial \tau} dR = -\mu_i^2 \int_a^1 R\tilde{\Psi}_i(R) U_H(\tau, R) dR - (Ha)^2 \int_a^1 R\tilde{\Psi}_i(R) U_H(\tau, R) dR$$

$$\frac{d\bar{U}_{Hi}(\tau)}{d\tau} = -[\mu_i^2 + (Ha)^2]\bar{U}_{Hi}(\tau) \quad (5.42)$$

com a seguinte condição:

$$\tau = 0 \rightarrow \bar{U}_{Hi}(0) = - \int_a^1 R\tilde{\Psi}_i(R) U_P(R) dR = \tilde{f}_i \quad (5.43)$$

A solução da equação (5.42) com a condição (5.43) é imediata e dada por:

$$\bar{U}_{Hi}(\tau) = \tilde{f}_i e^{-[\mu_i^2 + (Ha)^2]\tau} \quad (5.44)$$

Portanto, o campo de velocidades do problema fica dado por:

$$U(\tau, R) = U_P(R) + \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Psi}_i(R) \bar{U}_{Hi}(\tau) \quad (5.45)$$

Para o campo de temperaturas usaremos o mesmo procedimento anterior. Aplicamos o termo $\int_a^1 R\tilde{\Gamma}_i(R) dR$ na equação (5.26):

$$\int_a^1 R\tilde{\Gamma}_i(R) \left\{ \tau_R Pr \frac{\partial^2 \theta_H(\tau, R)}{\partial \tau^2} + Pr \frac{\partial \theta_H(\tau, R)}{\partial \tau} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \theta_H(\tau, R)}{\partial R} \right] + Br \left[\tau_R \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \phi \right] \right\} dR \quad (5.46a)$$

$$\begin{aligned} Pr \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_i(R) \left\{ \tau_R \frac{\partial^2 \theta_H(\tau, R)}{\partial \tau^2} + \frac{\partial \theta_H(\tau, R)}{\partial \tau} \right\} dR = \\ = \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_i(R) \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \theta_H(\tau, R)}{\partial R} \right] \right\} dR + Br \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_i(R) \left\{ \tau_R \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \phi \right\} dR \end{aligned} \quad (5.46)$$

Considerando o par transformada, equação (5.39), e a inversa, equação (5.40), a equação (5.46) fica:

$$\tau_R \text{Pr} \frac{d^2 \bar{\theta}_{\text{HI}}(\tau)}{d\tau^2} + \text{Pr} \frac{d\bar{\theta}_{\text{HI}}(\tau)}{d\tau} = -\beta_1^2 \bar{\theta}_{\text{HI}}(\tau) + \text{Br} A_1[U(\tau, R)] \quad (5.47)$$

com a seguinte condição:

$$\tau = 0 \rightarrow \bar{\theta}_{\text{HI}}(0) = \theta_a \int_a^1 R \tilde{\Gamma}_1(R) dR - \int_a^1 R \tilde{\Gamma}_1(R) \theta_P(R) dR = \theta_a \tilde{g}_1 - \tilde{h}_1 \quad (5.48)$$

onde:

$$\tilde{g}_1 = \int_a^1 R \tilde{\Gamma}_1(R) dR \quad (5.49)$$

e

$$\tilde{h}_1 = \int_a^1 R \tilde{\Gamma}_1(R) \theta_P(R) dR \quad (5.50)$$

Enquanto o termo $A_1[U(\tau, R)]$ é:

$$A_1[U(\tau, R)] = \int_a^1 R \tilde{\Gamma}_1(R) \left[\tau_R \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \phi \right] dR \quad (5.51)$$

Uma vez que este termo apresenta não-linearidade muito forte, para sua determinação será feita uma expansão do mesmo. Assim, para simplificação, o termo $A_1[U(\tau, R)]$ toma a forma:

$$A_1[U(\tau, R)] = \tau_R \frac{\partial}{\partial \tau} \int_a^1 R \tilde{\Gamma}_1(R) \phi dR + \int_a^1 R \tilde{\Gamma}_1(R) \phi dR \quad (5.52)$$

Portanto, o termo depende da solução de apenas um processo de integração. Chamando esta integral de B_1 , o termo fica:

$$A_1[U(\tau, R)] = \tau_R \frac{\partial B_1}{\partial \tau} + B_1 \quad (5.53)$$

onde:

$$B_1 = \int_a^1 R \tilde{\Gamma}_1(R) \phi dR \quad (5.54)$$

Substituindo o valor de ϕ na integral acima e após as devidas manipulações, o termo B_1 fica:

$$B_1 = B1_1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} B2_{li} \bar{U}_{Hi}(\tau) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B3_{lij} \bar{U}_{Hi}(\tau) \bar{U}_{Hj}(\tau) \quad (5.54)$$

sua derivada

$$\frac{\partial B_1}{\partial \tau} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} B2_{li} \frac{d\bar{U}_{Hi}(\tau)}{d\tau} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B3_{lij} \left[\frac{d\bar{U}_{Hi}(\tau)}{d\tau} \bar{U}_{Hj}(\tau) + \bar{U}_{Hi}(\tau) \frac{d\bar{U}_{Hj}(\tau)}{d\tau} \right] \quad (5.54)$$

e os coeficientes são dados por:

$$B1_1 = \int_a^1 R \tilde{\Gamma}_1(R) \left[\left(\frac{dU_P}{dR} \right)^2 - 2 \frac{U_P}{R} \frac{dU_P}{dR} + \frac{(U_P)^2}{R^2} + (Ha)^2 (U_P)^2 \right] dR \quad (A.35)$$

$$B2_{li} = \int_a^1 R \tilde{\Gamma}_1(R) \left[\frac{dU_P}{dR} \frac{\partial \tilde{\Psi}_i(R)}{\partial R} - \frac{U_P}{R} \frac{\partial \tilde{\Psi}_i(R)}{\partial R} - \frac{dU_P}{dR} \frac{\tilde{\Psi}_i(R)}{R} + \frac{U_P \tilde{\Psi}_i(R)}{R^2} + (Ha)^2 U_P \tilde{\Psi}_i(R) \right] dR \quad (A.36)$$

$$B3_{lij} = \int_a^1 R \tilde{\Gamma}_1(R) \left[\frac{\partial \tilde{\Psi}_i(R)}{\partial R} \frac{\partial \tilde{\Psi}_j(R)}{\partial R} - 2 \frac{\tilde{\Psi}_i(R)}{R} \frac{\partial \tilde{\Psi}_j(R)}{\partial R} + \frac{\tilde{\Psi}_i(R) \tilde{\Psi}_j(R)}{R^2} + (Ha)^2 \tilde{\Psi}_i(R) \tilde{\Psi}_j(R) \right] dR \quad (A.37)$$

No Apêndice A são mostrados os detalhes da expansão da integral acima.

5.5 – GERAÇÃO DE ENTROPIA

A entropia é uma grandeza termodinâmica que indica o grau de irreversibilidade de um sistema encontrando-se geralmente associada ao que se denomina por "desordem", não em senso comum, de um sistema termodinâmico. Em acordo com a segunda lei da termodinâmica, trabalho pode ser completamente convertido em calor, e por tal em energia térmica, mas energia térmica não pode ser completamente convertida em trabalho. Com a entropia procura-se mensurar a parcela de energia que não pode mais ser transformada em trabalho, em transformações termodinâmicas à dada temperatura.

Segundo OMID MAHIAN *et al* (2012), a geração de entropia na região anular entre cilindros concêntricos é dada pela relação:

$$S_g''' = \frac{k}{T_1^2} (\nabla T)^2 + \frac{\phi}{T_1} \quad (5.55)$$

onde ϕ é dado na forma não dimensional:

$$\phi = \mu \dot{\gamma}^2 + \sigma B_0^2 u_\theta^2 \quad (5.56)$$

Então a equação (5.53) toma a forma:

$$S_g''' = \frac{k}{T_1^2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^2 + \frac{\mu}{T_1} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)^2 + \frac{\sigma B_0^2 u_\theta^2}{T_1} \quad (5.57)$$

Esta equação revela que a geração de entropia é devido a três efeitos: um efeito condutivo devido a coeficiente de condutividade térmica k , um efeito viscoso, caracterizado pela viscosidade dinâmica μ e um efeito magnético representado por B_0 . Definindo um número de geração de entropia por N_s como:

$$N_s = \frac{S_g'''}{\frac{\mu \omega_1^2}{T_1}} \quad (5.58)$$

O número de geração de entropia fica:

$$N_s = \frac{\Omega}{Br} \left(\frac{\partial \theta}{\partial R} \right)^2 + (\dot{\gamma}^*)^2 + (Ha)^2 U^2 \quad (5.59)$$

5.6 – RESULTADOS E DISCUSSÕES

5.6.1 – Campo de Velocidades

Para um estudo mais detalhado deste problema foi desenvolvido um código em FORTRAN usando a subrotina DIVPAG com uma precisão da ordem de 10^{-6} para os resultados. A convergência do problema para este caso é mostrada na Tabela 5.1, a seguir:

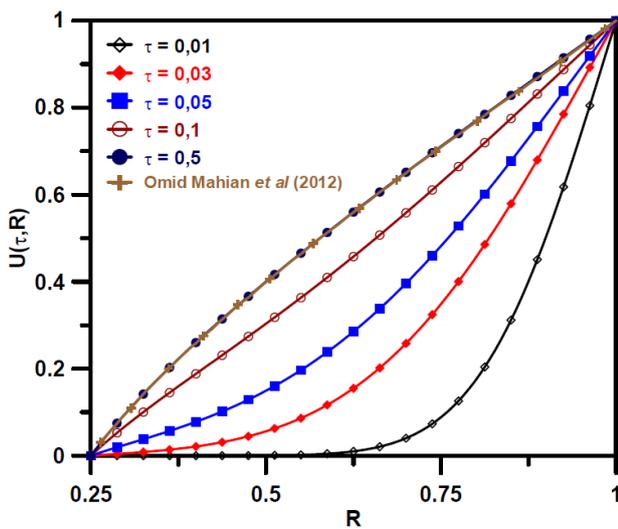
	Ha = 0			Ha = 1			Ha = 2		
N	$\tau = 0,01$	$\tau = 0,1$	$\tau = 0,5$	$\tau = 0,01$	$\tau = 0,1$	$\tau = 0,5$	$\tau = 0,01$	$\tau = 0,1$	$\tau = 0,5$

05	0,0884	0,5436	0,5556	0,0877	0,5285	0,5391	0,0860	0,4870	0,4942
10	0,0884	0,5436	0,5556	0,0877	0,5285	0,5391	0,0860	0,4870	0,4942
15	0,0884	0,5436	0,5556	0,0877	0,5285	0,5391	0,0860	0,4870	0,4942
20	0,0884	0,5436	0,5556	0,0877	0,5285	0,5391	0,0860	0,4870	0,4942
25	0,0884	0,5436	0,5556	0,0877	0,5285	0,5391	0,0860	0,4870	0,4942

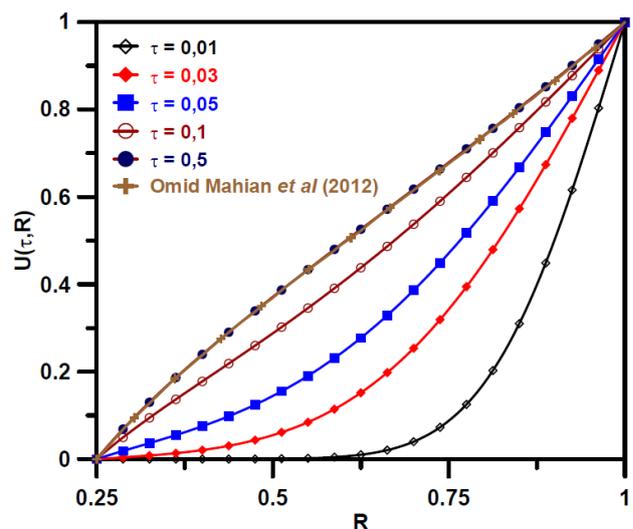
Tabela 5.1: Análise de Convergência do Campo de Velocidades em $R = 0,75$ com diferentes Ha e τ .

Os dados mostram que a convergência se dá de forma precisa e imediata. Para o campo de velocidades os únicos parâmetros que influenciam no perfil de velocidades são a razão entre os raios, a , a razão entre as velocidades angulares de rotação dos cilindros, λ e o número de Hartmann (Ha), pode-se analisar a evolução temporal do campo de velocidades através dos gráficos a seguir, para os diferentes parâmetros.

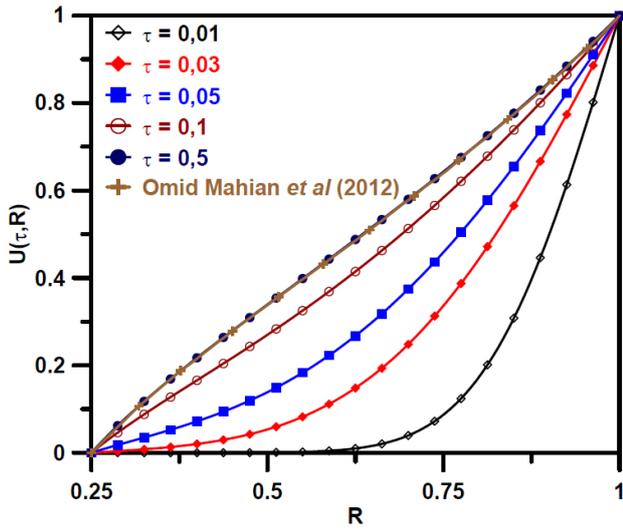
Foram gerados os gráficos do campo de velocidades quando $a = 0,25$ e $\lambda = 0$. As Figuras 5.2 mostram a evolução temporal do campo de velocidades através da metodologia desenvolvida neste trabalho, observa-se que o perfil de velocidades, quando o sistema atinge o regime permanente, coincide perfeitamente bem com o perfil proposto por OMID MAHIAN *et al* (2012), para os valores do número de Hartmann, Ha .



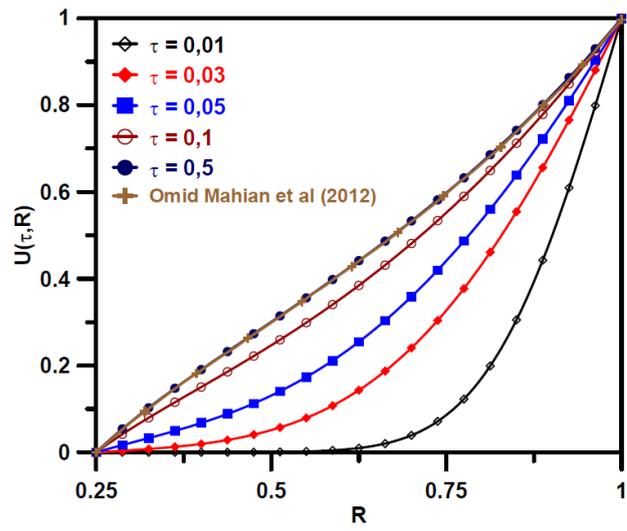
(a) $Ha = 0$



(b) $Ha = 1$



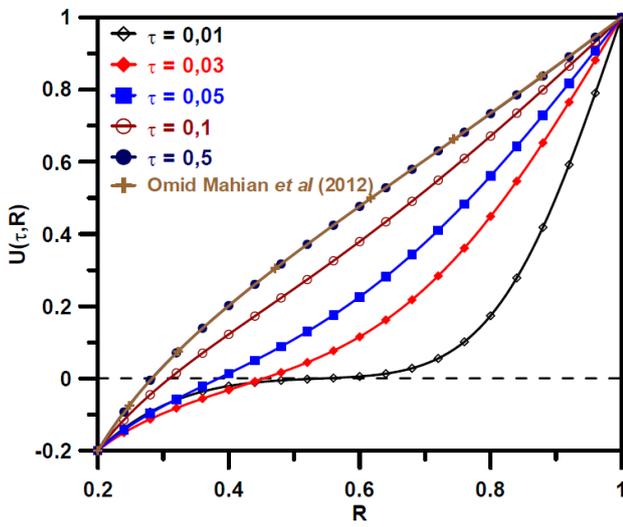
(c) $Ha = 1,5$



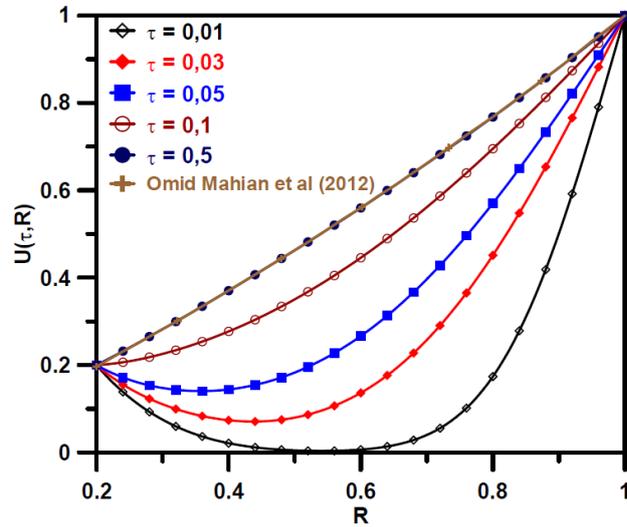
(c) $Ha = 2$

Figura 5.2: Evolução temporal do campo de velocidade quando (a) $Ha = 0$, (b) $Ha = 1$, (c) $Ha = 1,5$ e (d) $Ha = 2$.

Também foram comparados os resultados para os diferentes valores de λ , que representa a relação entre as velocidades rotacionais dos cilindros, com $a = 0,2$ e $Ha = 1$. As Figuras 5.3 mostram a evolução temporal do perfil de velocidades. Também neste caso, quando o sistema atinge o regime permanente, a coincidência com o perfil proposto por OMID MAHIAN *et al* (2012) é evidente.



(a) $\lambda = -1$



(b) $\lambda = 1$

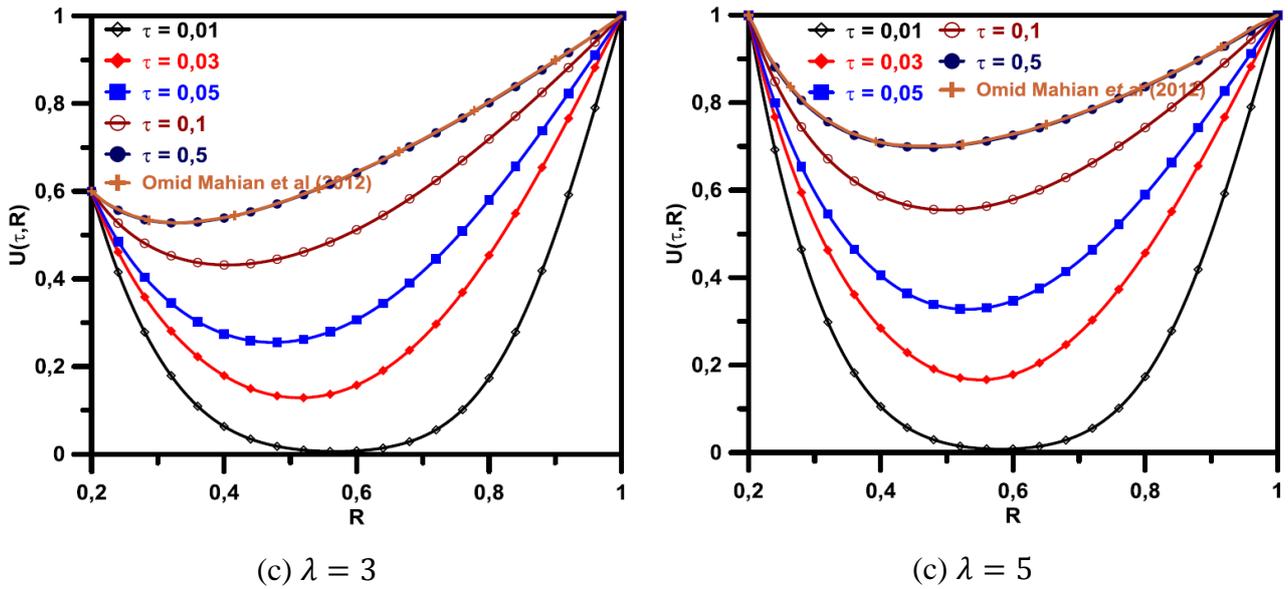


Figura 5.3: Evolução temporal do campo de velocidade quando (a) $\lambda = -1$, (b) $\lambda = 1$, (c) $\lambda = 3$ e (d) $\lambda = 5$.

5.6.2 – Campo de Temperaturas

O campo de temperaturas também foi analisado para os diferentes parâmetros que influenciam sobre o seu comportamento. O campo de temperaturas, apesar de apresentar uma não linearidade mais acentuada, tem sua convergência dada para um número de termos não muito elevado, como mostra na Tabela 2.

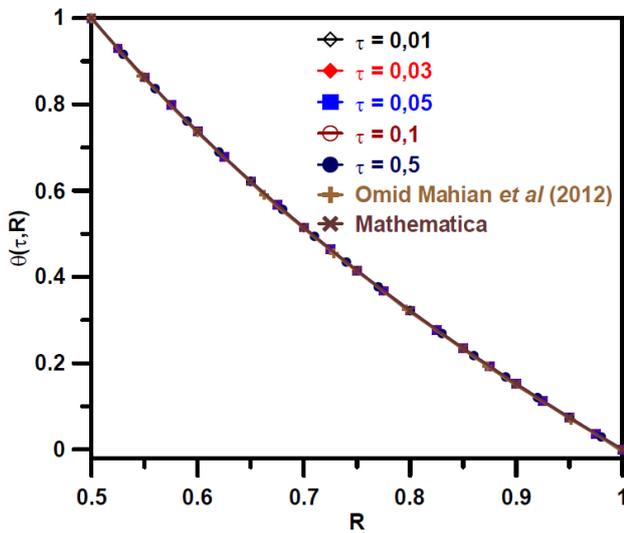
O campo de temperatura foi analisado para os diferentes parâmetros que influenciam sobre seu comportamento. Para comparar os resultados obtidos neste trabalho com os resultados propostos por OMID MAHIAN *et al* (2012), são apresentados os gráficos da evolução temporal do campo de temperaturas com os parâmetros correspondentes. Também nestes gráficos é apresentada a curva desenvolvida pela sub-rotina numérica NDSOLVE do MATHEMATICA (software disponível no laboratório LSP do PRODNERNA), aplicada sobre o modelo representado pela Eq. (6) proposto no trabalho de OMID MAHIAN *et al* (2012).

	$Ha = 0$		$Ha = 1$		$Ha = 2$	
N	$\tau = 0,01$	$\tau = 0,5$	$\tau = 0,01$	$\tau = 0,5$	$\tau = 0,01$	$\tau = 0,5$
05	-0,2715	-0,2715	-0,2639	-0,2510	-0,2604	-0,2001
10	-0,2623	0,1548	-0,2610	0,1544	-0,2572	0,1481
15	-0,2613	0,1555	-0,2600	0,1547	-0,2561	0,1480

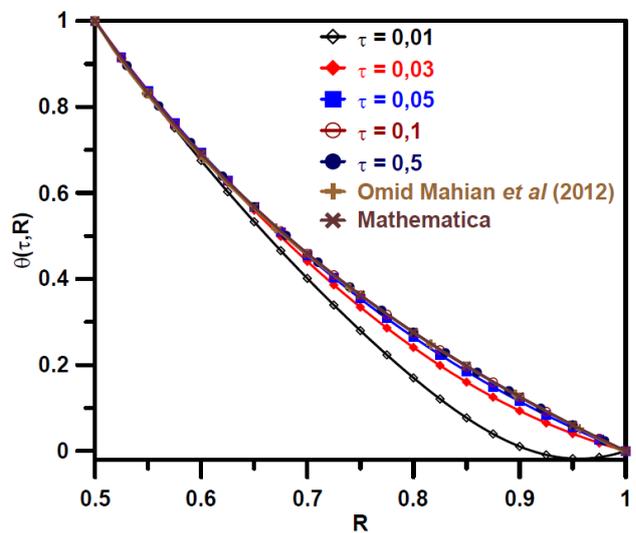
20	-0,2614	0,1554	-0,2601	0,1542	-0,2562	0,1480
25	-0,2616	0,1554	-0,2602	0,1546	-0,2563	0,1483

Tabela 5.2: Análise de Convergência do Campo de Temperatura para diferentes números de Hartmann, $Br = -5$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $Pr = 0,01$.

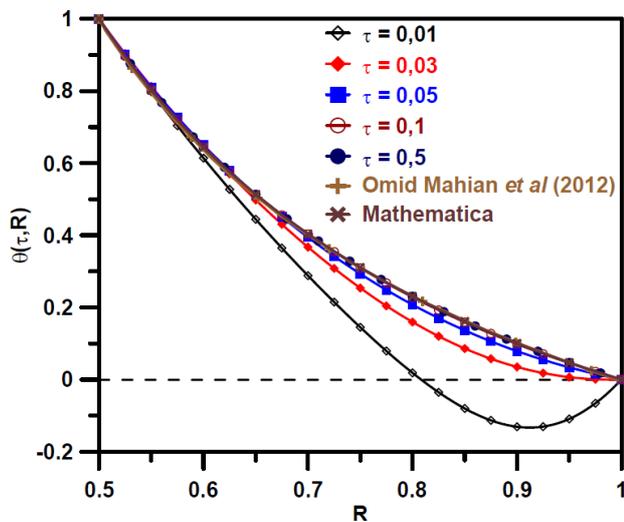
Para $Ha = 1$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $Pr = 0,01$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$ foram gerados os gráficos para diferentes números de Brinckman. As Figuras 5.4 mostram a evolução temporal do campo de temperaturas quando $Br < 0$. Nestes gráficos as linhas avançam até o regime permanente onde se aproximam bastante do resultado, em regime estacionário, apresentado no trabalho de OMID MAHIAN *et al* (2012), porém, coincidem perfeitamente bem com a curva obtida pela NDSOLVE do MATHEMATICA.



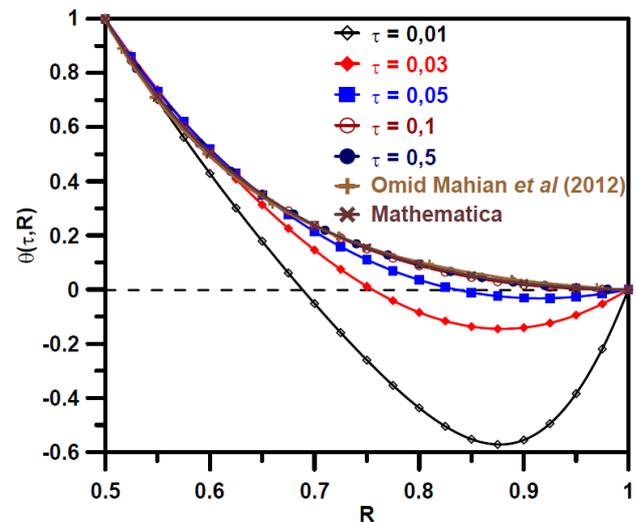
(a) $Br = 0$



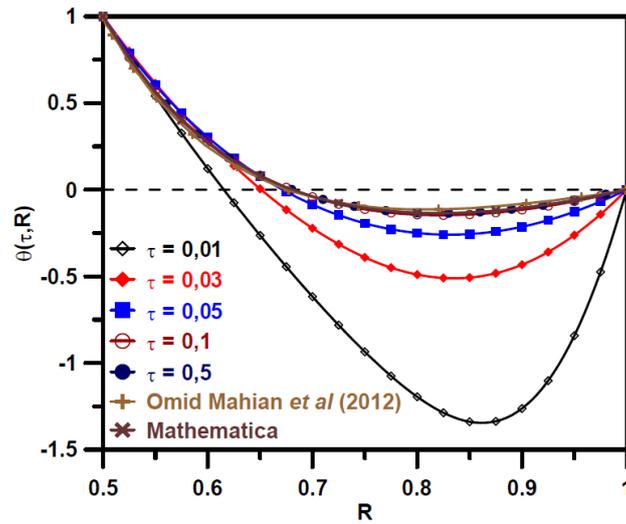
(b) $Br = -1$



(c) $Br = -2$



(d) $Br = -5$



(e) $Br = -10$

Figura 5.4: Evolução temporal do campo de temperatura quando $Ha = 1$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $Pr = 0,01$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$.

Estes resultados mostram um comportamento de queda de temperatura a medida que se afasta do cilindro interno, ficando mais acentuadas próximo ao cilindro externo, e também é mais acentuada para menores números de Brinckman. Estes resultados também mostram que para $Br < -2$ o campo de temperaturas, nos instantes iniciais, apresenta valores negativos, próximo ao cilindro externo, o que fisicamente é incompatível com as condições do problema. Pois, para $Br < 0$, ocorre transferência de calor do fluido para as paredes. É de se esperar que, no início dos tempos, a distribuição de temperatura obedeça às condições de contorno, proporcionando um perfil linear decrescente do cilindro interno ao externo.

Quando são considerados números de Brinkman positivos, a evolução temporal do campo de temperaturas apresenta comportamento inverso. As Figuras 5.5 mostram o comportamento para $Br \geq 1$. Nestes casos, pode-se observar a evolução temporal do campo de temperaturas em que, no início dos tempos, a temperatura aumenta desde o cilindro interno ($\theta(\tau; 0,5) = 1$), até um valor máximo mais próximo do cilindro externo, depois tende a zero ($\theta(\tau; 1) = 0$). Com a evolução temporal, o campo de temperatura vai sendo atenuado até atingir o regime permanente.

Quando $Br = 1$ e $Br = 2$ a evolução temporal do campo de temperaturas mostra um perfil em que o campo de temperatura, nos instantes iniciais, tem valores mais elevados próximos ao cilindro externo e, a medida que o tempo avança, estes perfis tornam-se praticamente lineares, no regime permanente. Já para $Br = 5$ e $Br = 10$, o campo de temperatura, no início dos tempos, apresenta valores, próximo ao cilindro externo, maiores que o valor da fronteira no cilindro interno. Com o avanço do tempo, a distribuição de temperatura vai sendo atenuada, porém, no regime

permanente, apresenta valores maiores próximo ao cilindro interno. Isso se deve ao fato que, com o movimento do cilindro externo ocorre transferência de energia ao fluido, aumentando sua energia interna, porém, no cilindro externo, pra garantir a condição de temperatura zero, parte dessa energia é dissipada.

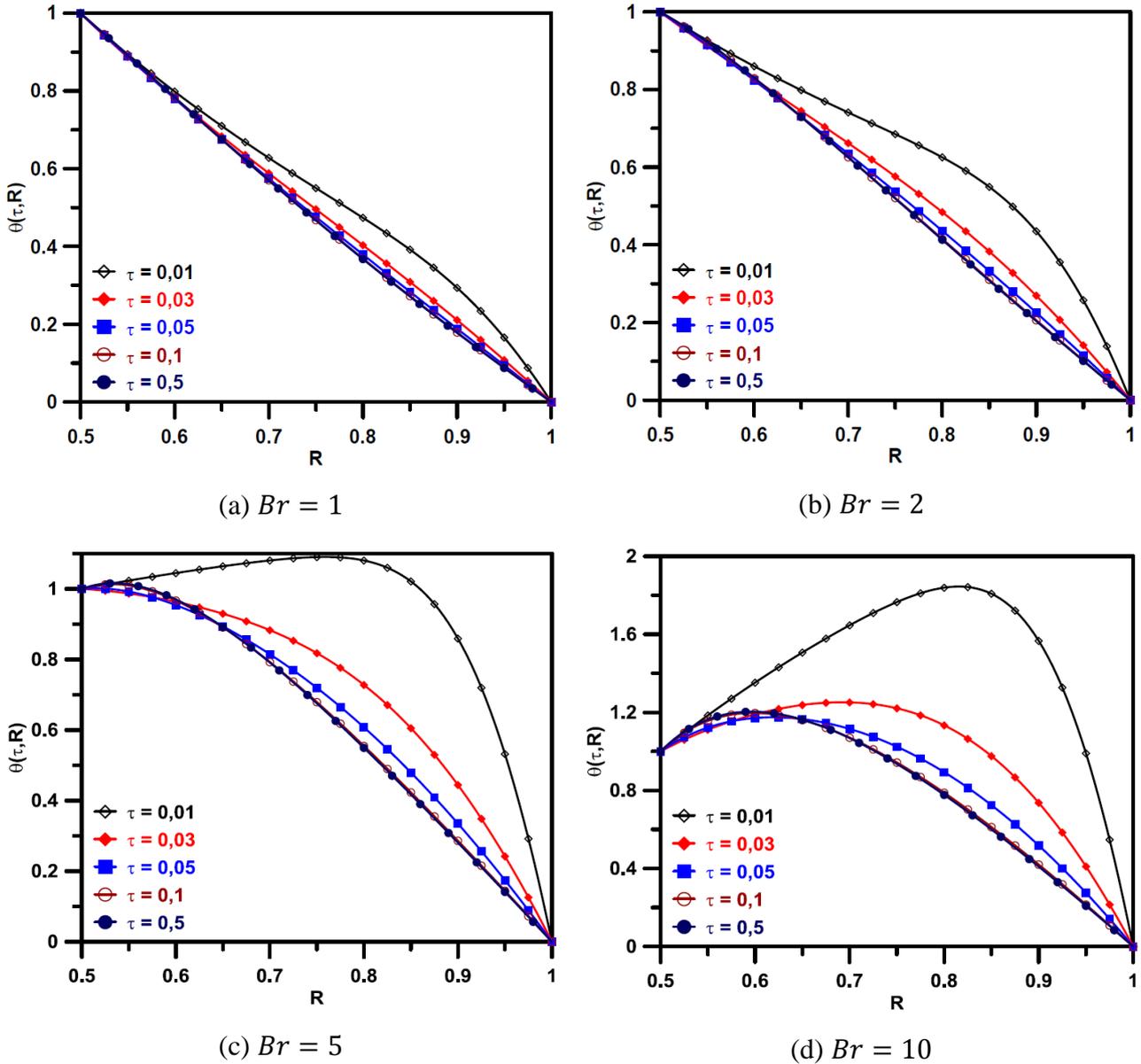


Figura 5.5: Evolução temporal do campo de temperatura quando $Ha = 1$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $Pr = 0,01$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$.

A Figura 5.6 mostra o efeito do número de Brinkman sobre o campo de temperatura em regime permanente. Neste gráfico é observado que a medida que aumenta o número de Brinkman os valores da temperatura também aumenta na região anular, e para valores de $Br \geq 10$ o campo de temperaturas apresenta valores maiores que o da fronteira no cilindro interno.

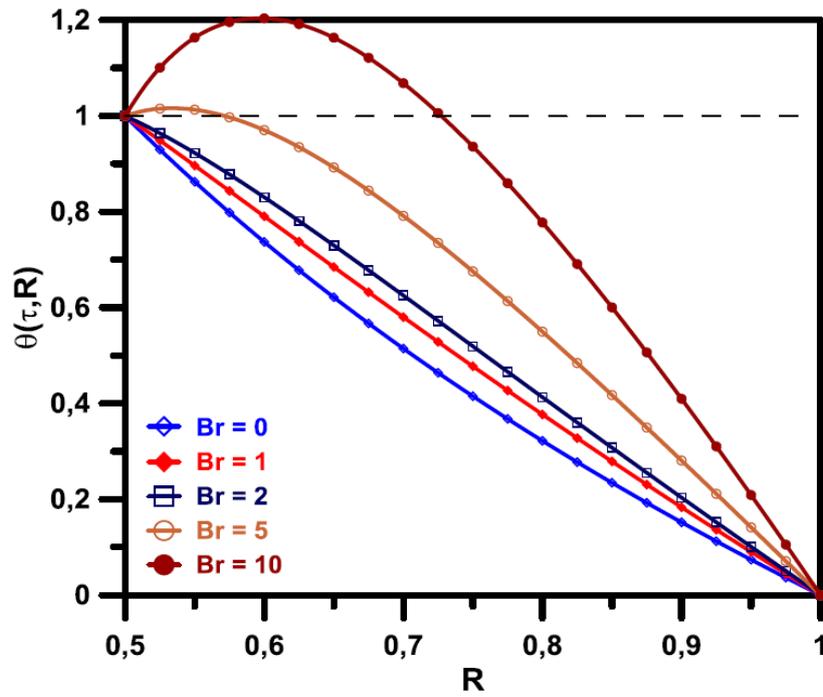
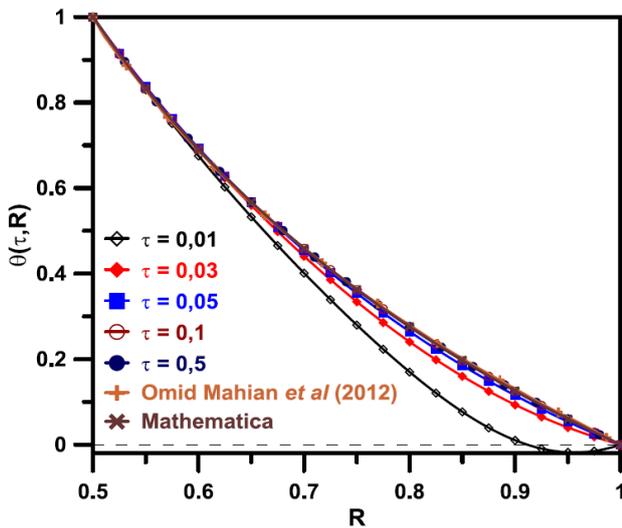
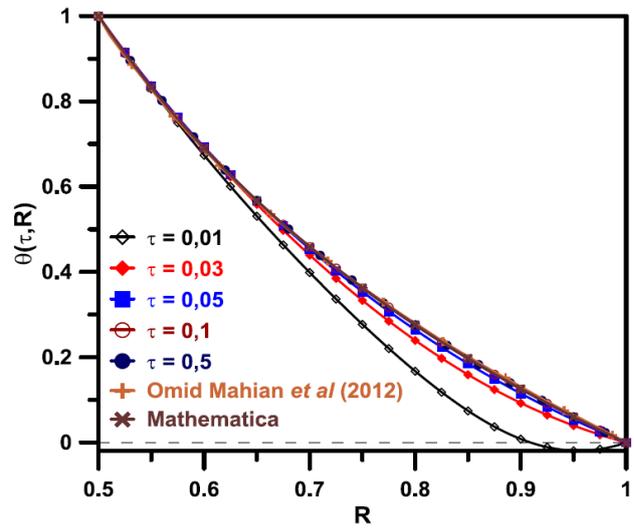


Figura 5.6: Efeito do número de Brinkman sobre o campo de temperatura quando $Ha = 1$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $Pr = 0,01$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$.

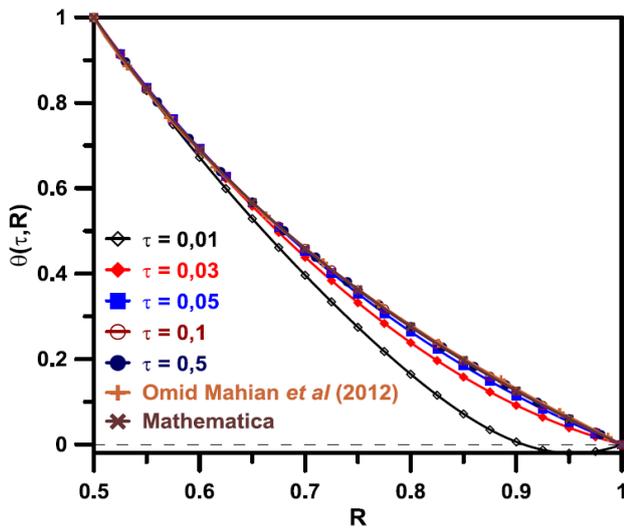
Outro parâmetro de grande influência sobre o campo de temperatura é o número de Prandtl. A Figura 5.7 mostra o comportamento do campo de temperaturas para $Pr \leq 0,09$ e $Br = -1$. Para estes casos, o campo de temperatura não apresenta variações significativas.



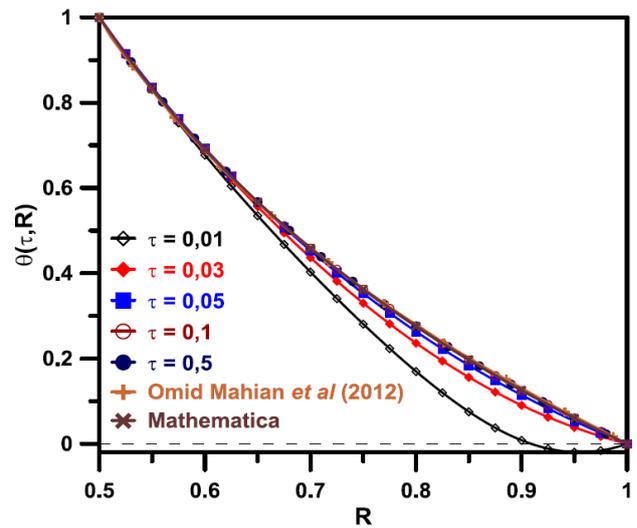
(a) $Pr = 0,01$



(b) $Pr = 0,03$



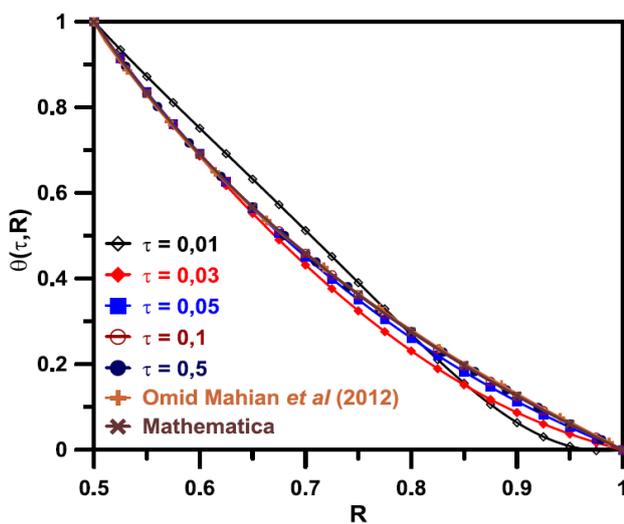
(c) $Pr = 0,05$



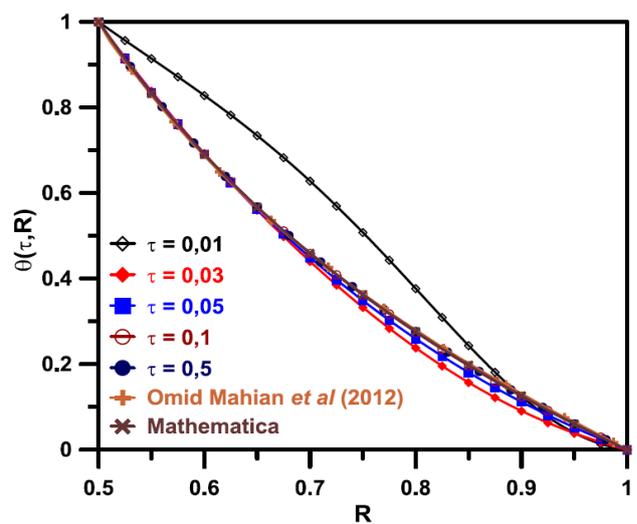
(d) $Pr = 0,09$

Figura 5.7: Evolução temporal do campo de temperatura para $Pr \leq 0,09$ quando $Br = -1$, $Ha = 1$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $Pr = 0,01$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$.

Para valores de $Pr > 0,09$ e $Br = -1$, o campo de temperaturas apresenta comportamento diferente e o efeito de Pr se sobressai sobre Br , devido a geração de energia por advecção. As Figuras 5.8 mostram que, a medida que aumenta o número de Prandtl, o avanço com o tempo torna-se mais lento e, no início dos tempos, a distribuição de temperatura se mantém com valores mais próximos ao valor da temperatura no cilindro interno. Porém, no regime permanente, todos os perfis apresentam as mesmas características.



(a) $Pr = 0,2$



(b) $Pr = 0,3$

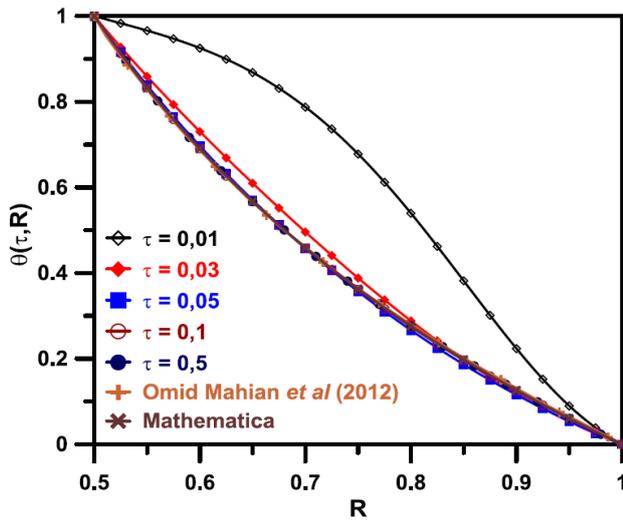
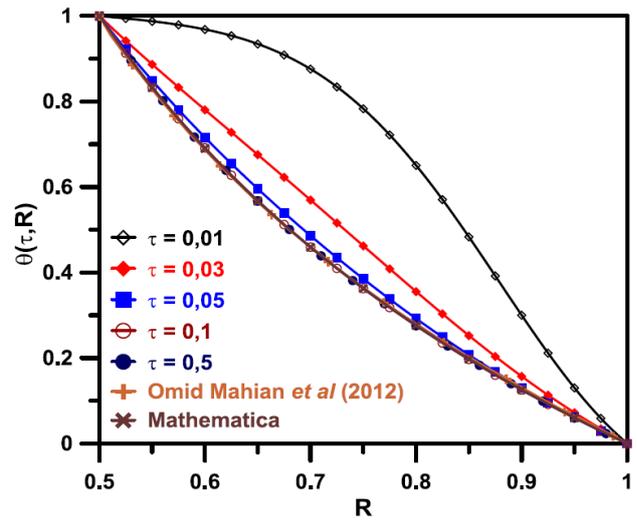
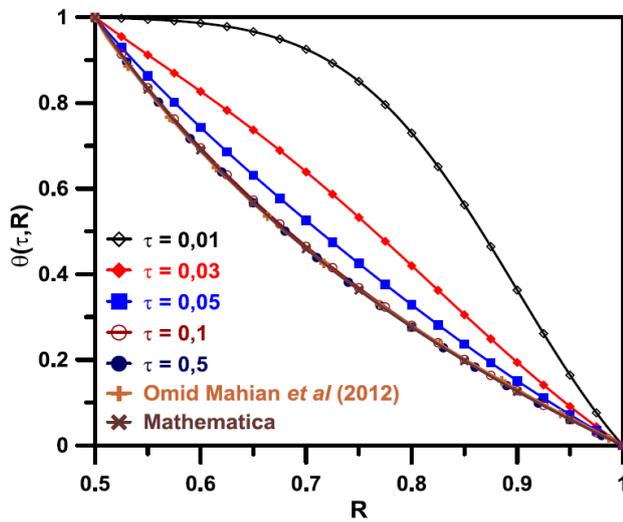
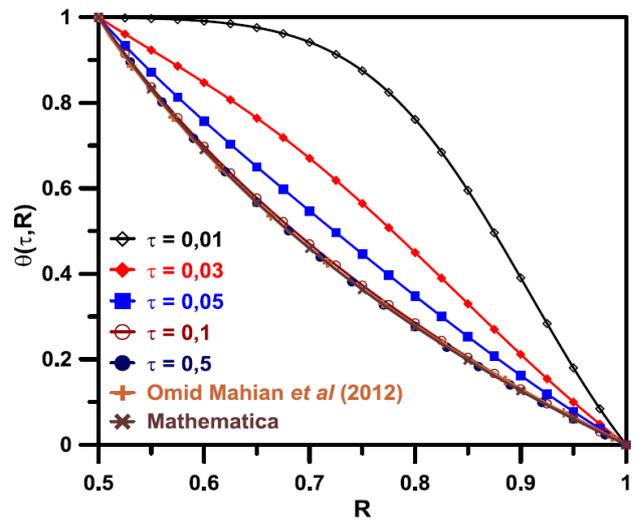
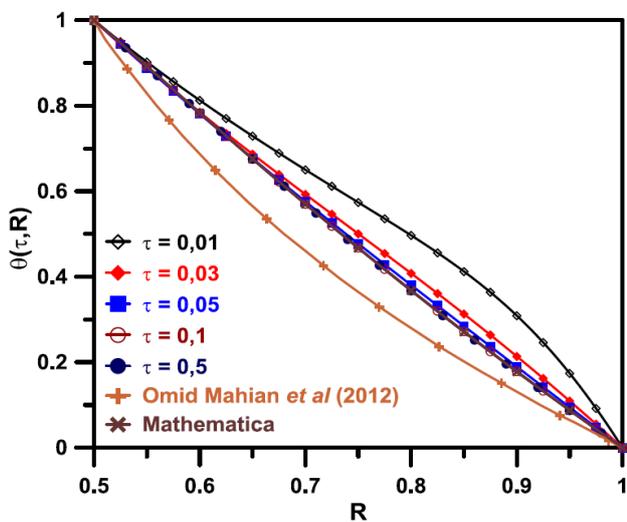
(c) $Pr = 0,5$ (d) $Pr = 0,7$ (e) $Pr = 0,9$ (f) $Pr = 1$

Figura 5.8: Evolução temporal do campo de temperatura para $Pr > 0,09$ quando $Br = -1$, $Ha = 1$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$.

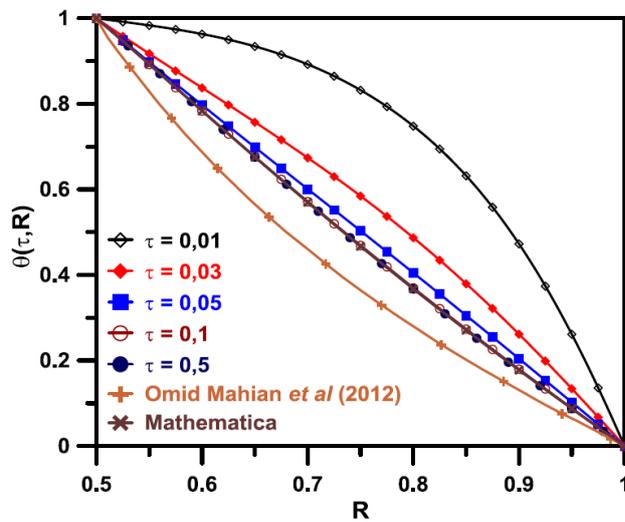
Quando $Br = 1$, ou seja, para número de Brinkman positivo, o comportamento do campo de temperatura é semelhante ao caso quando Br é negativo e $Pr > 0,1$. Também neste caso, o perfil do campo de temperatura apresenta valores bem próximos ao valor da temperatura no cilindro interno, no início dos tempos, a medida que aumenta o número de Prandtl.

O efeito do campo magnético sobre o campo de entropia é significativo. As Figuras 5.10 mostram a evolução temporal da geração de entropia, N_s , de acordo com os parâmetros apresentados no trabalho de Omid Mahian *et al* (2012).

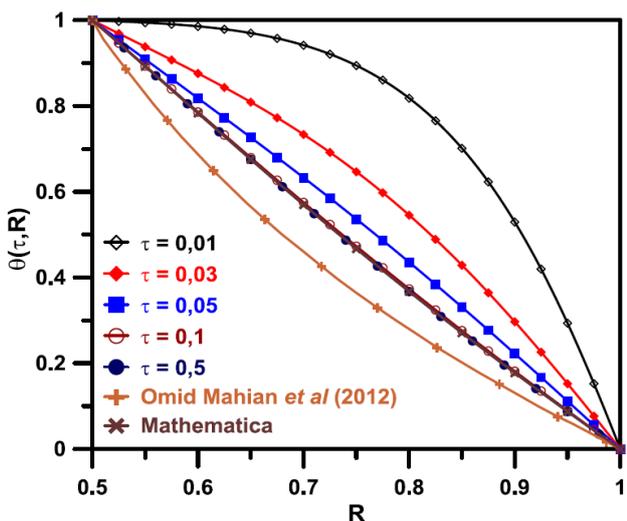
No início dos tempos a geração de entropia é bastante elevada próximo ao cilindro externo, devido a transferência de energia por advecção, causada pela rotação deste, aumentando a geração de energia.



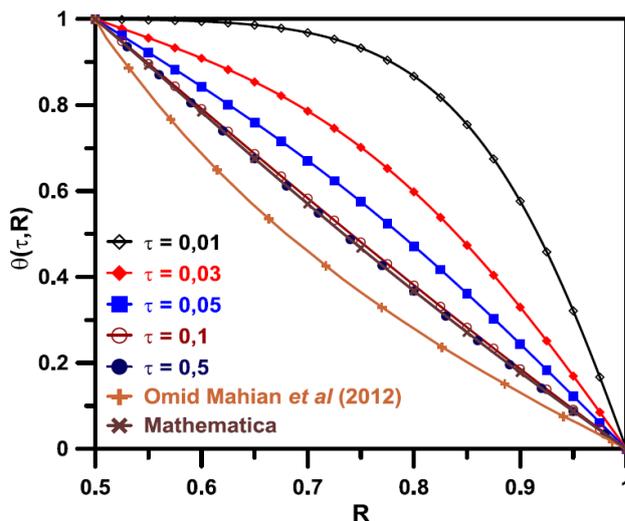
(a) $Pr = 0,1$



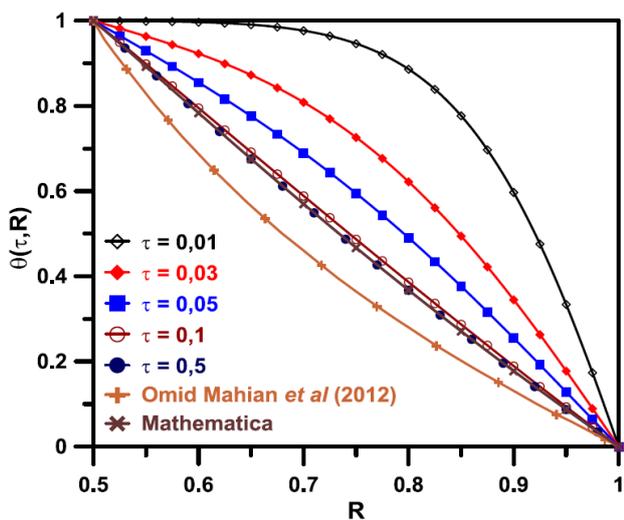
(b) $Pr = 0,5$



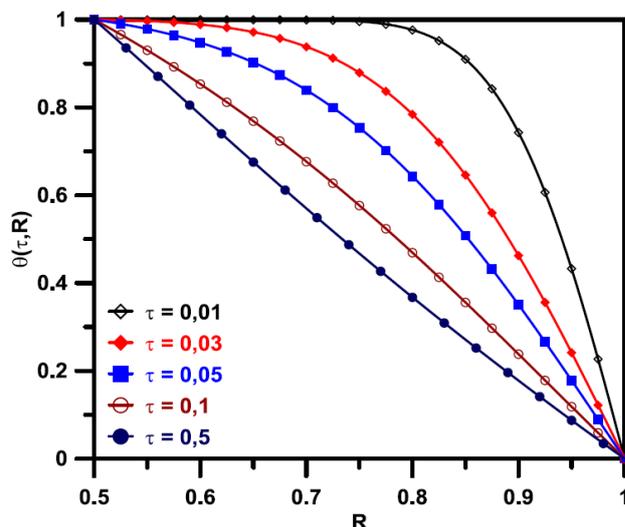
(c) $Pr = 0,7$



(d) $Pr = 0,9$



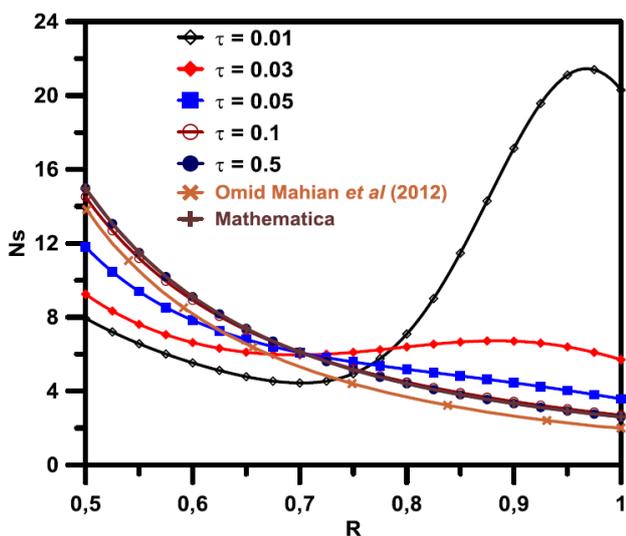
(e) $Pr = 1$



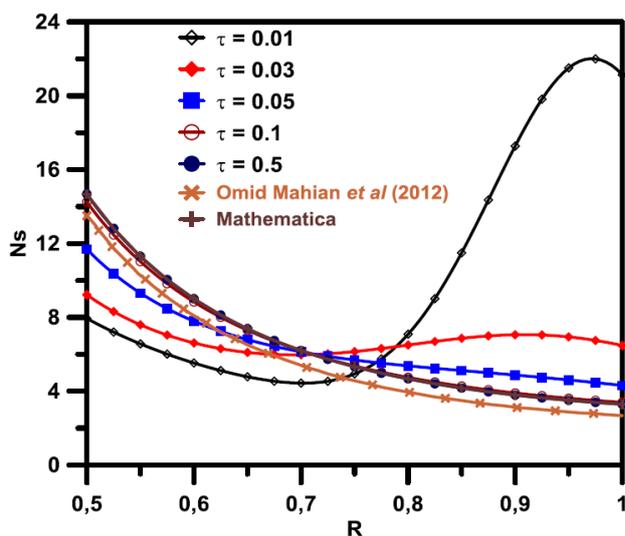
(f) $Pr = 2$

Figura 5.9: Evolução temporal do campo de temperatura para diferentes Pr quando $Br = 1$, $Ha = 1$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$.

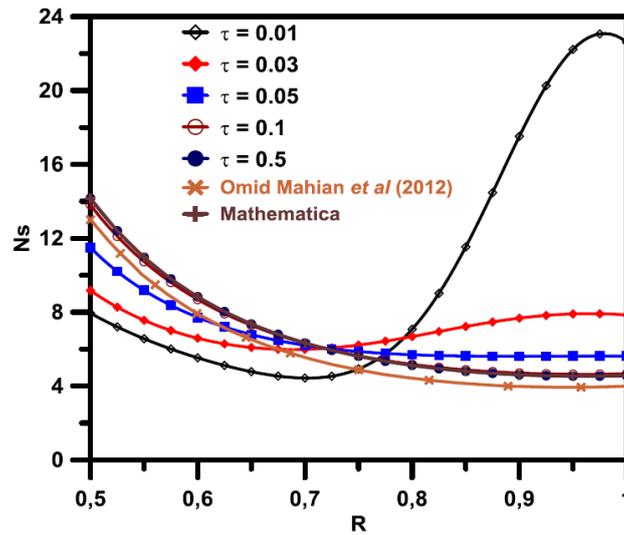
Com o avanço do tempo, a geração de entropia diminui. No regime permanente ela decai do cilindro interno até o cilindro externo. O resultado obtido neste trabalho, apesar de ter perfil semelhante ao proposto no trabalho de referência, não coincide com o resultado deste. Mas, coincide perfeitamente com os resultados obtidos através da rotina numérica NDSOLVE do software MATHEMATICA, para o regime permanente, aplicada sobre as equações do trabalho de referência.



(a) $Ha = 0$



(b) $Ha = 0,75$



(c) $Ha = 1,25$

Figura 5.10: Evolução temporal da geração de entropia para diferentes Ha quando $Br = 0,1$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$.

A Figura 5.11 compara os perfis de geração de entropia no regime permanente, para as três formas de análise. Também fica evidente que a geração de entropia é maior próximo ao cilindro interno e menor próximo ao cilindro externo, a medida que o número de Hartmann aumenta, a geração de entropia também vai aumentando próximo ao cilindro externo. A Figura 5.11 também mostra a diferença entre os resultados obtidos neste trabalho e o trabalho de referência.

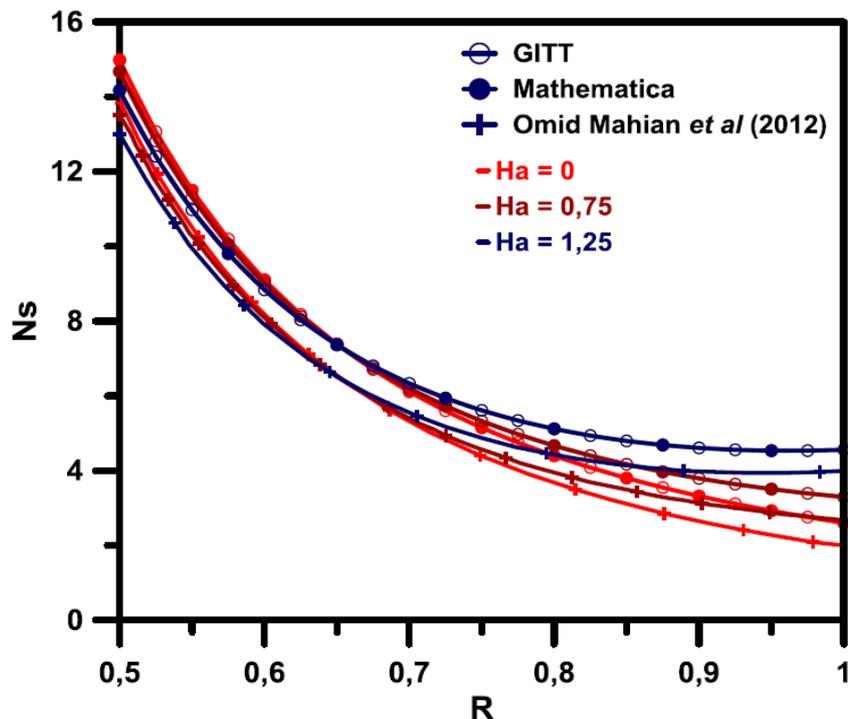
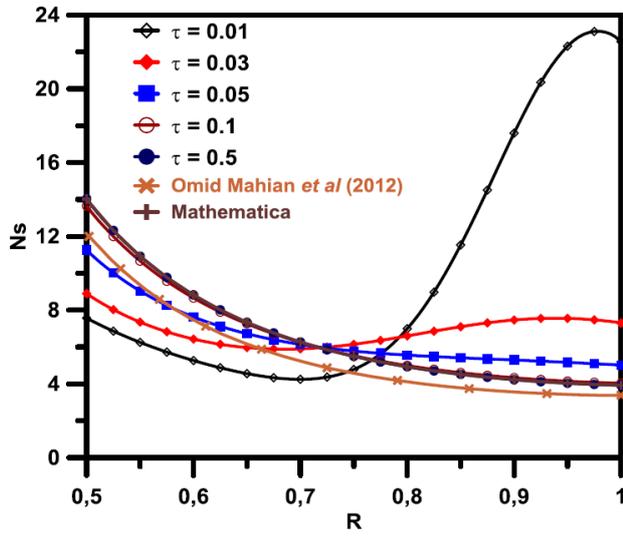
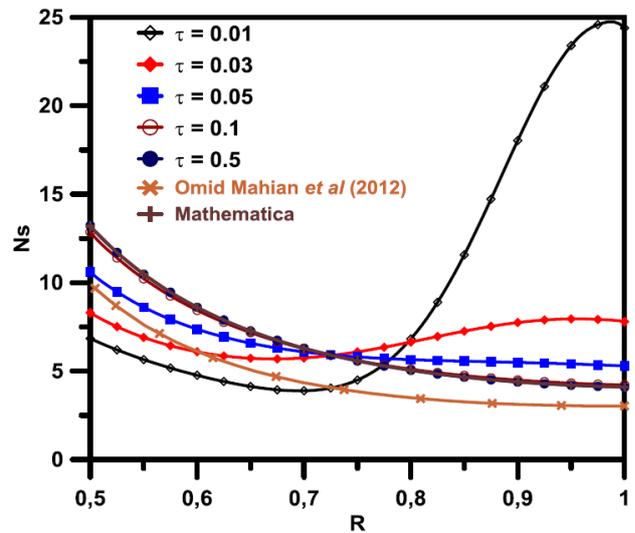


Figura 5.11: Efeito do número de Hartmann sobre a geração de entropia quando $Br = 0,1$, $Pr = 0,01$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$.

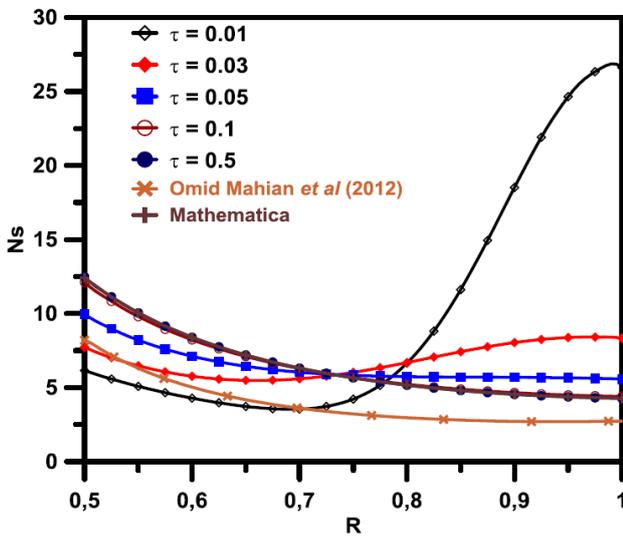
A Figura 5.12 também mostra a evolução temporal do número de geração de entropia para diferentes números de Brinkman. A geração de entropia, no início dos tempos é mais elevada próximo ao cilindro externo, com o avanço no tempo o comportamento varia e, em regime permanente, a geração de entropia é maior próximo ao cilindro interno. Mais uma vez, os resultados deste trabalho coincidem perfeitamente bem com o obtido pela rotina NDSOLVE do MATHEMATICA, mas não coincidem com os resultados do trabalho de referência.



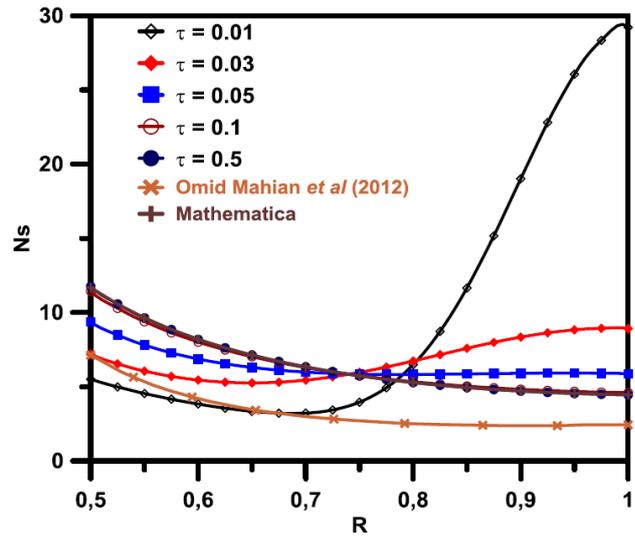
(a) $Br = 0,2$



(b) $Br = 0,4$



(c) $Br = 0,6$



(d) $Br = 0,8$

Figura 5.12: Evolução temporal do campo da geração de entropia para diferentes Br quando $Ha = 1$, $Pr = 0,01$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$.

Foram analisados também os resultados para o número de geração de entropia para o caso em que a região anular é aumentada ($a = 0,25$). O avanço no tempo da geração de entropia é mostrado nas Figuras 5.13 para diferentes Ha . Nota-se também que, no regime permanente, a

coincidência dos resultados obtidos neste trabalho com os da rotina do MATHEMATICA, é total, porém, discordando do trabalho adotado como referência.

Nota-se que no início dos tempos a geração de entropia é bastante elevada próximo ao cilindro externo e no regime permanente é mais elevada próximo ao cilindro interno, decrescendo até o cilindro externo.

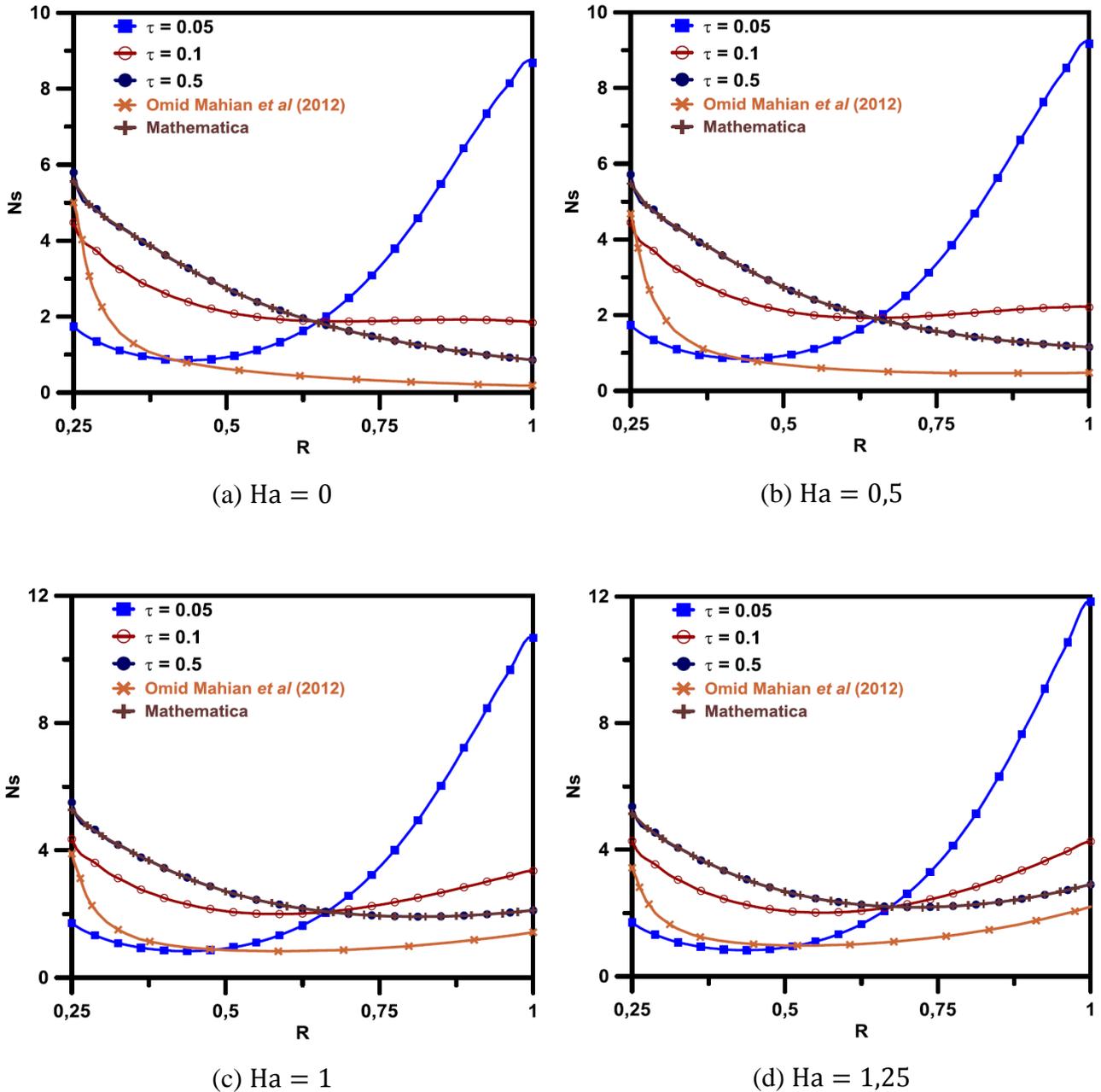
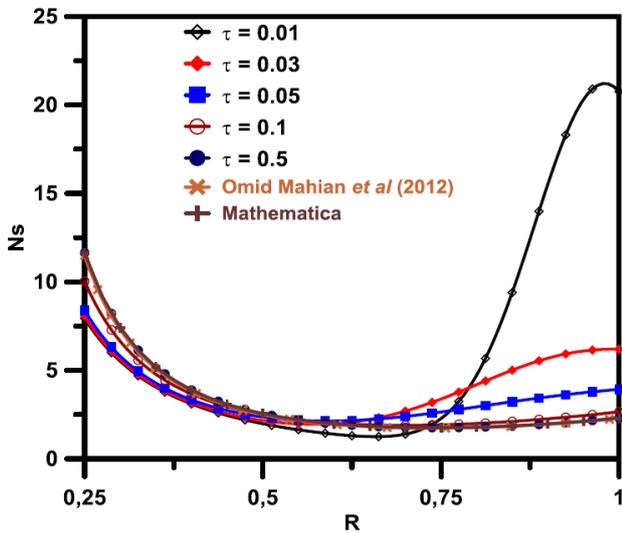


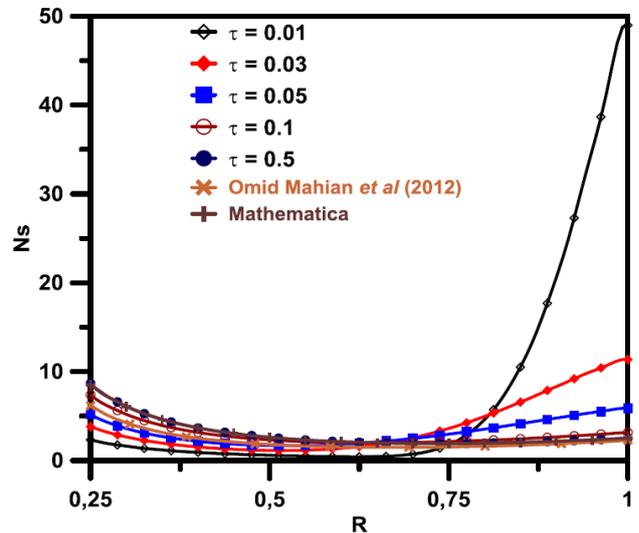
Figura 5.13: Evolução temporal do campo da geração de entropia para diferentes Ha quando $Br = 5$, $Pr = 0,01$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$.

Também foi feita a análise, com a região anular estendida, para diferentes números de Brinkman. As Figuras 5.13 mostram a evolução temporal da geração de entropia. Quando $Br = 0,1$,

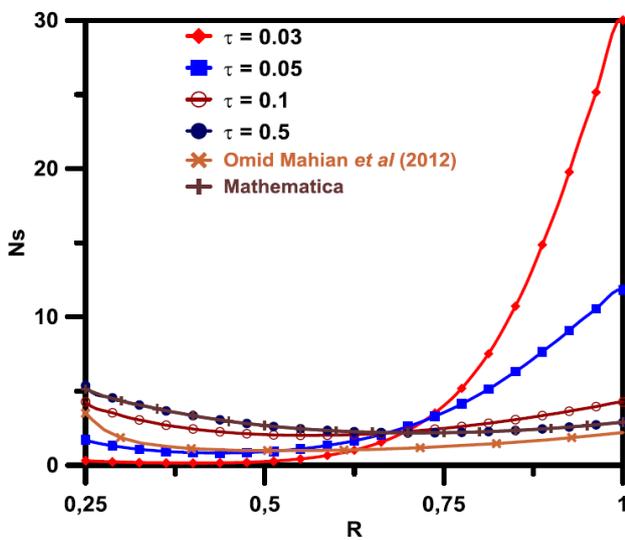
há uma aproximação muito boa dos resultados obtidos nos três métodos. Com o aumento do número de Brinkman, os resultados deste trabalho com a rotina numérica coincidem, porém, divergem do trabalho referencia em regime permanente. Aqui, a geração de entropia nos instantes iniciais é maior próximo ao cilindro externo. No regime permanente, a geração de entropia torna-se quase constante na região anular, para números de Brinkman maiores.



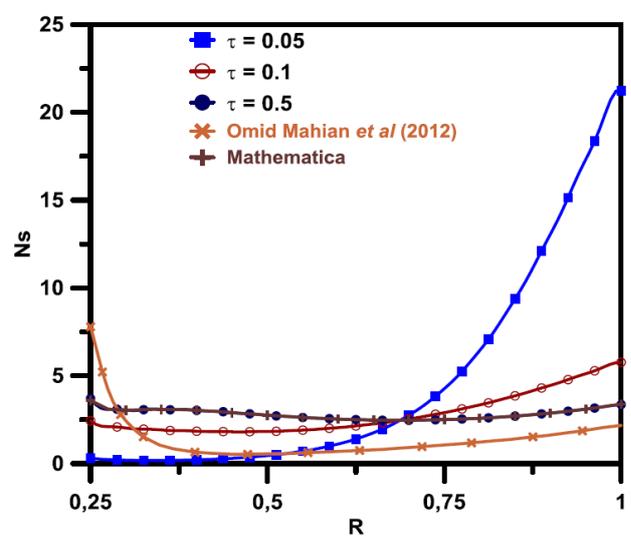
(a) $Br = 0,1$



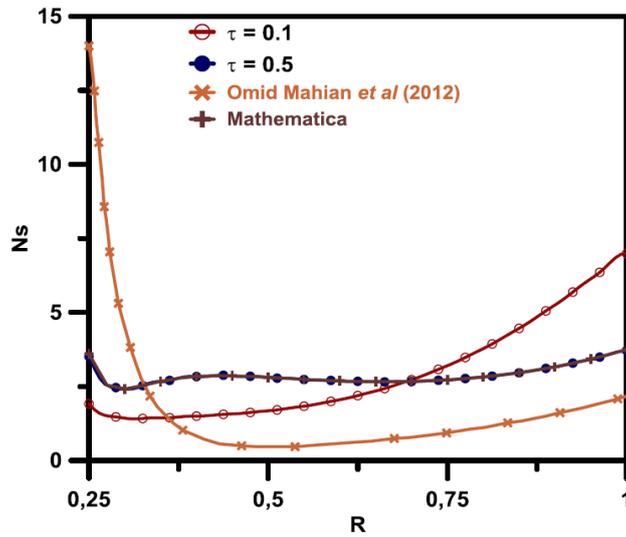
(b) $Br = 2$



(c) $Br = 5$



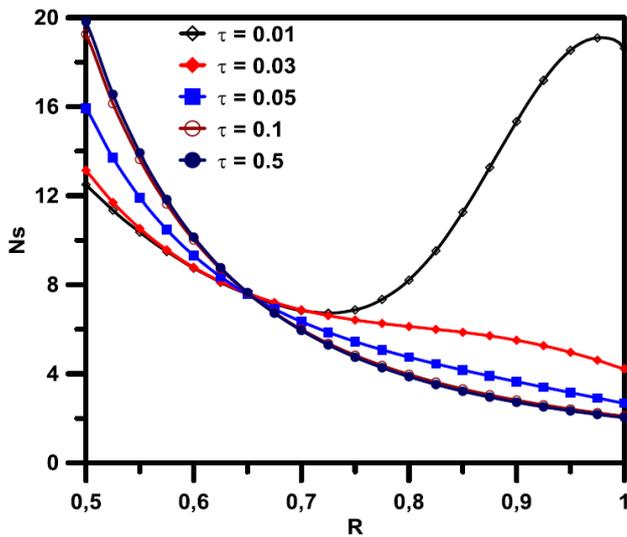
(d) $Br = 8$



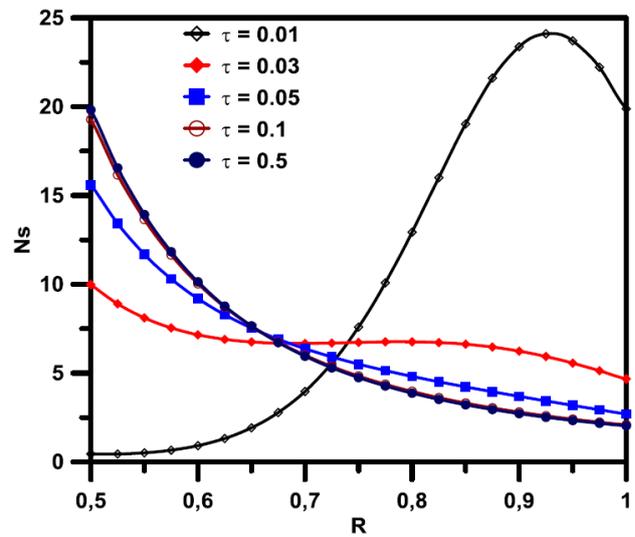
(d) $Br = 10$

Figura 5.14: Evolução temporal do campo da geração de entropia para diferentes Br quando $Ha = 1,25$, $Pr = 0,01$, $a = 0,25$, $\lambda = 0$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$.

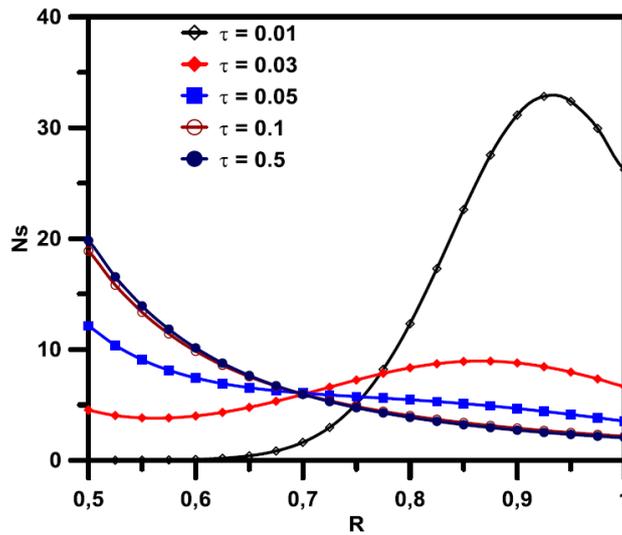
O efeito do número de Prandtl sobre a geração de entropia também foi analisado. Nas Figuras 5.15 é mostrada a evolução temporal do número de geração de entropia para $Br = -1$, $Ha = 1$ e diferentes Pr . Os gráficos mostram que nos instantes iniciais a geração de entropia oscila na região anular, sendo mais elevada nas proximidades do cilindro externo. No regime permanente, a geração de entropia decai do cilindro interno ao externo. E com o aumento do número Brinkman, a geração de entropia também cresce na região anular.



(a) $Pr = 0,09$



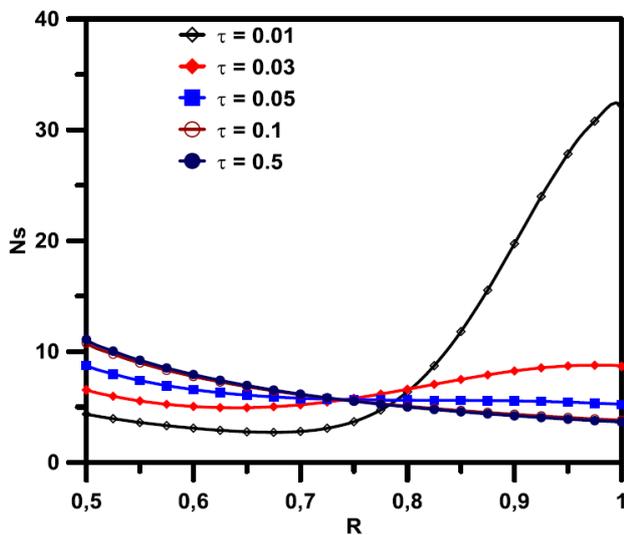
(b) $Pr = 0,5$



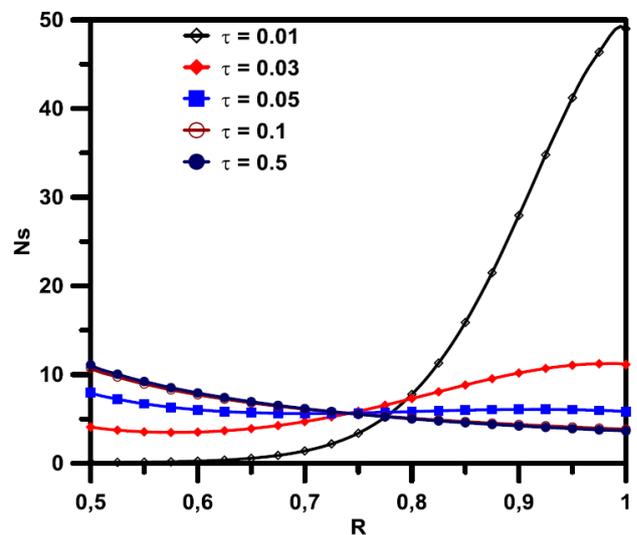
(c) $Pr = 0,9$

Figura 5.15: Evolução temporal do campo da geração de entropia para diferentes Pr quando $Ha = 1$, $Br = -1$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$.

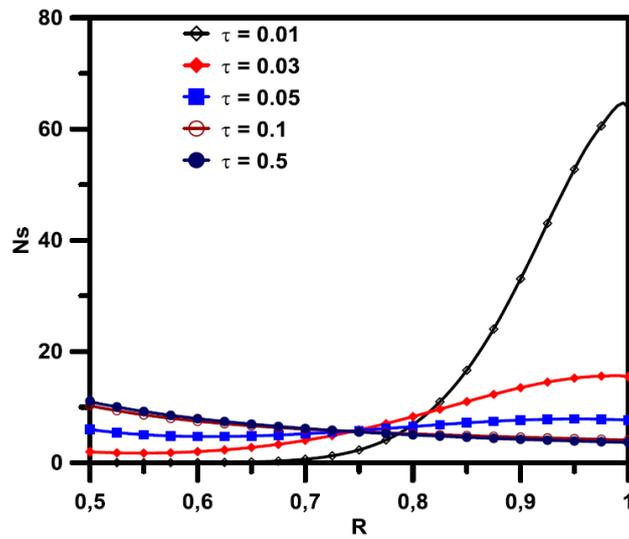
Quando o número de Brinkman é positivo a geração de entropia é mais elevada próximo ao cilindro externo, nos instantes iniciais, e apresenta semelhança com o caso anterior ($Br = -1$). No regime permanente, também Ns é maior próximo ao cilindro interno e decai na região anular, até o cilindro externo.



(a) $Pr = 0,09$



(b) $Pr = 0,5$



(b) $Pr = 0,9$

Figura 5.16: Evolução temporal do campo da geração de entropia para diferentes Pr quando $Ha = 1$, $Br = 1$, $a = 0,5$, $\lambda = 0$, $\varepsilon = 0$ e $\tau_R = 0$.

A Figura 5.17 mostra o comportamento da geração de entropia, no regime permanente, para diferentes números de Hartmann quando o efeito Joule é considerado $\varepsilon = 1$. Para Ha pequenos, a geração de entropia é maior nas vizinhanças do cilindro interno e vai diminuindo até o cilindro externo. Com o aumento do número de Hartmann, a geração de entropia apresenta comportamento inverso, N_s é menor próximo ao cilindro interno e vai aumentando até o cilindro externo.

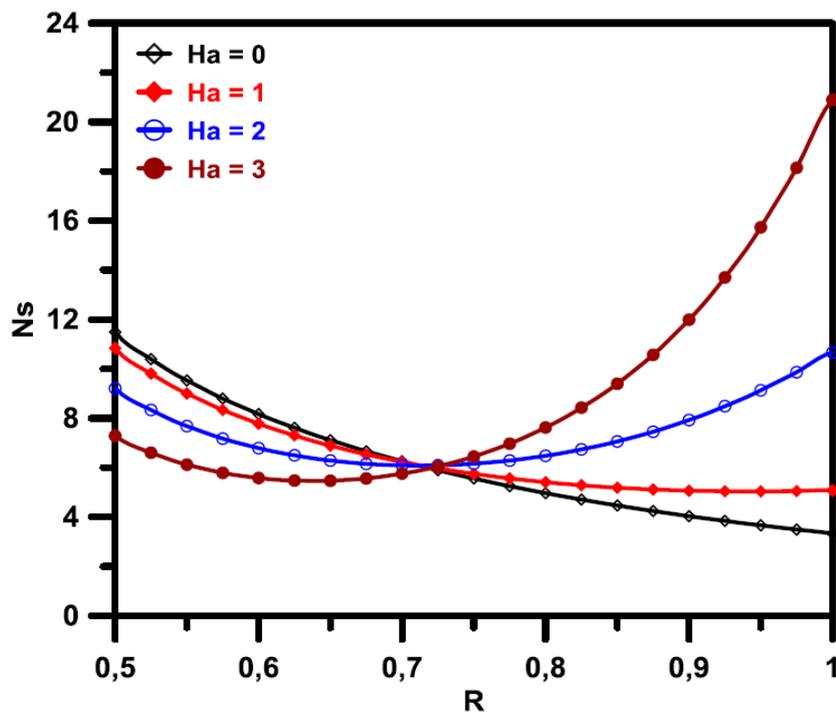


Figura 5.17: Efeito do número de Hartmann na geração de entropia quando $Br = 1$, $Pr = 1$, $a = 0,5$, $\tau_R = 0$.

Neste problema, assim como nos problemas anteriores, foi analisada a Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) na solução do problema de escoamento em regime transiente de um fluido newtoniano não-Fourier na região anular entre dois cilindros concêntricos, como movimentos de rotação relativos.

Também foi analisada a influência dos parâmetros adimensionais que governam o escoamento, como o número de Hartmann, do número de Brinckman e do número de Prandtl sobre os campos de velocidade, temperatura e geração de entropia.

Para a solução deste problema foi utilizada a subrotina DIVPAG da biblioteca IMSL (1989) a qual resolve sistema de equações diferenciais ordinárias, bem como a subrotina NDSOLVE do software MATHEMATICA, para a geração de resultados em regime permanente, do modelo proposto no trabalho de referência (OMID MAHIAN *et al*, 2012).

Os resultados gerados foram comparados com os resultados apresentados no trabalho de referência.

1 – Em relação ao campo de velocidade, a evolução temporal produzida neste trabalho, quando atinge o regime permanente, apresenta excelente concordância com o trabalho de referência;

2 – A evolução temporal do campo de temperatura obtido através da GITT, também em regime permanente, quando número de Brinkman é negativo, se aproxima bastante dos resultados do trabalho de referência, porém, concorda perfeitamente bem com os resultados obtidos através a subrotina NDSOLVE do software MATHEMATICA.

3 – O número de geração de entropia, dado pela Eq. (5.59), também foi analisado pelos dois métodos (GITT e NDSOLVE) e comparados com os resultados da referência. Quando em regime permanente, a coincidência entre os resultados obtidos via GITT e NDSOLVE é total, porém, não concordam com os resultados do trabalho de referência. Apesar de apresentar curvas com perfil semelhantes, mas o valores do trabalho de referência são sempre inferiores aos resultados obtidos através da GITT e NDSOLVE.

O número de Prandtl (Pr) também tem grande influência sobre o campo de temperaturas e a geração de entropia. À medida que aumenta o valor de Pr , aumenta a difusão da quantidade de movimento no interior do fluido, elevando o campo de temperatura, conseqüentemente, aumenta a geração de entropia.

O tempo de duração dos cálculos envolvido neste trabalho se torna mais elevado a medida que aumenta o número de Brinkman. Pela Eq. (5.13), em que Br é o coeficiente do termo não linear,

portanto, a medida que este parâmetro tem seu valor aumentado, a não linearidade fica mais intensa, o que aumenta o custo computacional.

A análise do campo de velocidades e do campo de temperaturas, obtidos com a metodologia desenvolvida neste trabalho, através da GITT, proporciona a validação do código computacional desenvolvido, quando comparados com os resultados apresentados no trabalho de referência.

CAPÍTULO 1

CONCLUSÕES

1.1 – CONCLUSÕES GERAIS

Neste trabalho foi analisado o potencial da Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) na solução de problemas de escoamento MHD, em regime transiente, de fluidos newtoniano e não-newtoniano em dutos de diferentes formas geométricas.

As simulações dos modelos desenvolvidos em cada problema foram feitas através de códigos computacionais em linguagem de programação FORTRAN, usando a subrotina DIVPAG, da biblioteca IMSL, a qual produziu resultados que, quando comparados com resultados da literatura, apresentaram excelente concordância. Portanto, a eficiência da técnica híbrida na solução dos problemas, mostra ser esta uma ferramenta eficaz na obtenção de resultados precisos, quando trata com problemas cujo grau de não-linearidade é bastante elevado.

O custo computacional dos cálculos envolvidos neste trabalho se torna mais elevado quando da determinação do campo de temperaturas e geração de entropia, no problema do capítulo 5, quando o número de Brinkman é aumentado, uma vez que da, Eq. (5.13), em que Br é o coeficiente do termo não-linear. Portanto, a medida que este parâmetro tem seu valor aumentado, a não linearidade fica mais intensa, o que aumenta o custo computacional.

Nos três problemas estudados foi analisado o desenvolvimento do campo de velocidades através da influência do número de Hartmann, sendo que este parâmetro atua como atenuador do escoamento retardando o movimento do fluido. Este efeito se deve ao fato que o campo magnético, aplicado na direção transversal à direção do escoamento faz surgir a força de Lorentz contrária ao sentido do escoamento. Efeito que também é observado sobre o fator de atrito de Fanning, parâmetro adimensional usado no cálculo de escoamentos de fluidos e está relacionado à tensão de cisalhamento na parede. Com o aumento do número de Hartmann, aumenta a força contrária ao escoamento, conseqüentemente, aumenta o contato do fluido com a parede do duto aumentando a tensão de cisalhamento.

O efeito do número de Reynolds sobre o campo de velocidades sobre o escoamento apresentados nos problemas dos capítulos 3 e 4, também foi analisado. O número de Reynolds é um parâmetro que relaciona as forças de inércia (força necessária para movimentar uma determinada massa do fluido) com as forças viscosas (força de resistência ao movimento do fluido). Os efeitos deste parâmetro foram mostrados que as forças de inércia são mais intensas, tornando o escoamento mais lento, proporcionando perfis de velocidade com gradientes menores, para maiores valores de Re . À medida que o escoamento avança ao longo do canal, as forças de inércia e de viscosidades são superadas e o escoamento apresenta regime permanente.

Os parâmetros τ_1 e τ_2 relacionados aos tempos de relaxação λ_1 e de retardo λ_2 , respectivamente, do problema do capítulo 3, oferecem certa influência sobre o campo de velocidades e sobre o fator de atrito de Fanning. Estes parâmetros estão relacionados aos módulos de relaxação e fluência do material como foi observado nos resultados.

No capítulo 4, as características da natureza do fluido, representadas no parâmetro n , o índice de potência, foram analisadas. O efeito provocado por n caracteriza bem a diferença entre a natureza dos fluidos, quando $n < 1$ o fluido se comporta como um fluido pseudoplástico, cuja propriedade é de diminuir a viscosidade com a aplicação de uma força, como pode ser verificado nos perfis de velocidade com gradientes maiores e para $n > 1$, o fluido tem características dilatantes, em que a propriedade fundamental é ter sua viscosidade aumentada com a aplicação de uma força.

Também no capítulo 4 foi analisado o efeito de injeção de fluido no canal, e verificado que a injeção contribui para o avanço do fluido ao longo do canal. Por outro lado, no processo inverso, ou seja, de sucção de fluido do canal, este efeito atua na atenuação do escoamento, sendo mais intenso para maiores valores de Ha . O efeito da sucção contribui para o retardo do escoamento.

No capítulo 5, além do campo de velocidade, também foram analisados os campos de temperatura e a geração de entropia.

O número de Brinkman atua diretamente sobre o campo de temperatura e a geração de entropia. Nos casos analisados nota-se que quando $Br < 0$, o campo de temperaturas decai na região anular, o que, fisicamente, contraria a distribuição de temperatura na região considerando as condições de fronteira propostas no problema. Por outro lado, quando $Br > 0$, a distribuição de temperaturas na região anular é se torna mais elevada nas proximidades do cilindro interno com o aumento do número de Brinkman. Fisicamente esta situação é mais correta que o caso anterior, pois, com o movimento do fluido ocorre transferência da quantidade de movimento do

cilindro externo para o fluido, este movimento provoca o atrito entre as partículas do fluido, aumentando o campo de temperaturas.

O efeito do número de Brinkman ($Br > 0$) também foi analisado sobre a geração de entropia. É observado que a geração de entropia decai do cilindro interno para o cilindro externo, no regime permanente de escoamento. Isto se deve ao fato que o gradiente de temperatura é maior nas proximidades do cilindro interno por conta da temperatura deste e devido ao aumento do número de Brinkman, tornando os movimentos mais desordenados dos constituintes do fluido próximo ao cilindro interno.

Também no capítulo 5 foi analisado o efeito do número de Prandtl (Pr) sobre o campo de temperatura. É notado que, mesmo quando $Br < 0$, o campo de temperatura apresenta perfil semelhante ao caso quando $Br > 0$ para $Pr > 0,1$, o que reforça os resultados obtidos neste trabalho, pois, o número de Prandtl relaciona a difusão de quantidade de movimento e a difusão de quantidade de calor dentro do próprio fluido.

1.2 – PROPOSTAS DE CONTINUAÇÃO

Considerando os resultados obtidos é evidente que a técnica empregada na solução dos problemas apresenta excelente eficiência, com isso, a continuação da aplicação da técnica nessa linha de trabalho envolvendo escoamentos MHD em outras geometrias.

Portanto, para trabalhos futuros, serão tratados problemas do tipo:

1 – Escoamento MHD em Uma Fenda Estreita:

1.1 – Perfil de velocidade

1.2 – Velocidade Máxima, Velocidade Média e Vazão

1.3 – Tensão e Taxa de Cisalhamento

1.4 – Força

1.5 – Potência

1.6 – Efeitos de Bordas

1.7 – Efeitos de Entrada

1.8 – Efeitos Térmicos

2 – Escoamento MHD em Tubo Cilíndrico

–

- 2.1 – Balanço de Forças na Direção Axial
 - 2.2 – Perfil de Velocidade Velocidade Máxima, Velocidade Média e Vazão
 - 2.3 – Efeitos de Entrada e Saída
 - 2.4 – Efeitos Térmicos
-
- 3 – Escoamento MHD Axial em Anel Cilíndrico
 - 3.1 – Perfil de Pressão e Velocidade
 - 3.2 – Velocidade Máxima e Vazão
 - 3.3 – Tensão e Taxa de Cisalhamento
 - 3.4 – Efeitos Térmicos
-
- 4 – Escoamento MHD Tangencial em Um Anel Cilíndrico
 - 4.1 – Perfil de Velocidade e Taxa de Cisalhamento
 - 4.2 – Perfil de Pressão
 - 4.3 – Efeitos Térmicos
-
- 5 – Escoamento MHD Radial entre Dois Discos Paralelos
 - 5.1 – Perfil de Velocidade e de Pressão
 - 5.2 – Taxa de Deformação
 - 5.3 – Força e Deslocamento
 - 5.4 – Vazão
 - 5.5 – Efeitos Térmicos

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAMOWITZ, M., STEGUN, I. A., (1964), “**Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables**”, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 55.

ABU-NADA, E., 2006, “**Entropy generation due to heat and fluid flow in backward facing step flow with various expansion ratios**”, Int. J. Exergy, Vol 3, No. 4, pp 419-435.

AKBAR, N. H., NADEEM, S., ALI, M., (2011), “**Jeffrey Fluid Model for Blood Flow Through a Tapered Artery with a Stenosis**”, Journal of Mechanics in Medicine and Biology, Vol. 11, n. 3, pp. 529-545

AKSOY, Y., PAKDEMIRLI, KHALIQUE, M. C., “**Boundary Layer Equations and Stretching Sheet Solutions for the Modified Second grade Fluid**”, International Journal of Engineering Science 45, 829-841.

AKSOY, Y., PAKDEMIRLI, M., KHALIQUE, C. M., 2007, “**Boundary Layer Equations and Stretching Sheet Solutions for the Modified Second grade Fluid**”, International Journal of Engineering Science 45, 829-841.

ALFVÉN, H. O. G., 1942, “**Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves**”, Nature, Vol 150, pp. 405-406.

ALVES, L. S. B, COTTA, R. M., MIKHAILOV, M. D, (2001), “**Covalidation of Integral Transform and Method of Lines in Non-linear Convection-Diffusion with Mathematica.**”, Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences, Vol. 23, n. 3, pp. 303-319.

ANDERSON, J. D. JR., (1995), “**Computational Fluid Dynamics: The Basics with Applications**”, McGraw-Hill.

ARFKEN, G., (1970), “**Mathematical Methods for Physicists**”, Academic Press, 2^a ED.

ARIKOGLU, A., OZKOL, I., KOMURGOZ, G., 2008, “**Effect of slip on entropy generation in a single rotating disc in MHD flow**”, Applied Energy, Vol 85, Issue 12, pp 1125-1236.

ARIS, R., (1989), “**Vectors, Tensors, and Basic Equations of Fluid Mechanics**”, Dover Publications, Inc, New York.

ASTARITA, G., MARRUCCI, G.; **Principles of non-Newtonian Fluid Mechanics**, McGRAW-HILL Book Company (UK) Limited, Maidenhead-Berkshire-England, 1974.

ATTIA, H. A., SAYED-AHMED, M. E.; “**A Transient Hartmman Flow with Heat Transfer of a Non-Newtonian Fluid with Suction and Injection, Considering the Hall Effect**”, J. Plasma Physics, 67, 27-47, 2002.

BASSALO, J. M. F, 1988, “**Métodos da Física Teórica I**”, Gráfica e Editora Universitária – UFPA, Vol. 1, 2ª ED

BASSALO, J. M. F, 1989, “**Métodos da Física Teórica II**”, Gráfica e Editora Universitária – UFPA, Vol. 2, 2ª ED

BASTOS, F. A. A., (1983), “**Problemas de Mecânica dos Fluidos**”, Guanabara Koogan S.A.

BIRD, R. B., ARMSTRONG, R. C., HASSAGER, O.; “**Dynamics of Polymeric Liquids**”, Vol 1, John Wiley & Sons.

BIRD, R. B., STEWART, W. E., LIGHFOOT, E. N.; “**Fenômenos de Transporte**”, LTC, 2ª ED.

BRAGA, N. C., (2010), “**O carro com combustão magnética**”, <http://www.newtonbraga.com.br/index.php/artigos/51-automotivos/1258-art174.pdf>

COTTA, R. M., 1993, “**Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow**”, CRC Press.

DELLAR, P. J., 2002, “**Lattice Kinetic Schemes for Magnetohydrodynamics**”, Journal of Computational Physics, Vol 179, pp 95-126.

DHINAKARAN, S., AFONSO, A. M., ALVES, M. A., PINHO, F. T., 2010, “**Steady viscoelastic fluid flow between parallel plates under electro-osmotic forces: Phan-Thien–Tanner model**”, Journal of Colloid and Interface Science, 344, pp. 513-520

DUARTE, A. S. R., OLIVEIRA, P. S., (2006), “**ESTUDO DE ESCOAMENTOS VISCOELÁSTICOS SIMPLES EM REGIME VARIÁVEL: ANÁLISE DETALHADA DE UM “ESCOAMENTO DE ARRANQUE”**”, CONFERÊNCIA NACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EM MECÂNICA DOS FLUIDOS E TERMODINÂMICA, APMTAC, Portugal.

ESCUQUIER, M. P., PRESTI, F., 1996, “Pipe flow of a thixotropic liquid”, Journal Non-Newtonian Fluid Mechanics, Vol 62, Número 2-3, pp 291-306.

FEIZ-DIZAJI, A., SALIMPOUR, M. R., JAM, F., (2008), “Flow field of a third-grade non-Newtonian fluid in the annulus of rotating concentric cylinders in the presence of magnetic field”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol. 337, pp. 632-645.

FIGUEIRA DA SILVA, E., 1996, “**Transformação Integral das Equações de Camada Limite em Convecção Interna nas Formulações Funções de Corrente e Variáveis Primitivas.**”, Dissertação de Mestrado, Engenharia Mecânica/UFRJ.

FOX, R. W., McDONALD, A. T., (2001), “**Introdução à Mecânica dos Fluidos**”, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro.

HAINEN, I. R., 2005, **Solução analítica da equação da energia estacionária e bidimensional para simulação de escoamento plenamente desenvolvido em placa plana paralela pelo método da GILTT.** Dissertação (Mestrado), PROMEC/UFRS, Porto Alegre, RS, Brasil.

HAYAT, T., KHAN, M., WANG, Y., “**Non-Newtonian flow between concentric cylinders**”, Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol 11, pp 297-305.

HOLMAN, J. P., (1983), “**Transferência de Calor**”, McGraw-Hill do Brasil Ltda, São Paulo.

INCROPERA, F. P., (1998), “**Fundamentos de Transferência de Calor e Massa**”,

Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro.

JERY, A., HIDOURI, N., MAGHERBI, M., BRAHIM, A. B., 2010, “**Effect of an External Oriented Magnetic Field on Entropy Generation in Natural Convection**”, Entropy, Vol 12, Número 6, pp 1391-1417.

LAI, M., KREMPL, E., RUBEN, D., (2010), “**Introduction to Continuous Mechanics**”, Elsevier, 4ª Ed.

LIMA, J. A., QUARESMA, J. N. N., MACÊDO, E. N., 2007, “**Integral Transform Analysis of MHD Flow and Heat Transfer in Parallel-Plates Channels**”, International Communications in Heat and Mass Transfer, Vol 34, pp 420-431.

LIU, C., SZECSDY, J. E., ZACHARA, J. M., BALL, W. P., (2000), “**Use of the Generalized Integral Transform Method for solving equation of solute transporte in porous media**”, Advances in Water Resources, Vol 23, USA, 483-492.

MAHMUD, S., FRASER, R. A., 2002, “**Second law analysis of heat transfer and fluid flow inside a cylindrical annular space**”, An International Journal Exergy, Vol 2, Número 4, pp 322-329.

MALVERN, L. E., (1969), “**Introduction to the Mechanical of a Continuous Medium**”, Prentice-Hall, Inc.

MASSOUDI, M., VAIDYA, A., 2008, “**On some generalizations of the second grade fluid**”, Journal of Nonlinear Analysis: Real World Applications, 9(3), 1169-1183.

MATTIUSI, E. M., et al, 2007, “**Escoamento laminar de fluidos não-newtonianos em tubos de seção transversal elíptica**”, In: 4º PDPETRO – Campinas – São Paulo.

MOLKI, M., ASTILL, K. N., LEAL, E., (1990), “**Convective heat-mass transfer in the entrance region of a concentric annulus having a rotating inner cylinder.**”, Int. J. Heat and Fluid Flow, Vol. 11, n. 2.

OMID MAHIAN, SHOHEL MAHMUD, IOAN POP, 2012, “**Analysis of first and second laws of thermodynamics between two isothermal cylinders with relative rotation in the presence of MHD flow**”, International Journal of Heat and Mass

Transfer, 55, pp. 4808-4816

OXARANGO, L., SCHMITZ, P., QUINTARD, M., 2004, “**Laminar ow in channels with wall suction or injection: a new model to study multi-channel 'ltration systems**”, Chemical Engineering Science 59 1039–1051.

ÖZISIK, M. N.; “**Heat Conduction**”, 2 ED, John Wiley & Sons, 1993.

PHILIPPI, P. C., HEGELE JR., L. A., SANTOS, L. O. E., SURMAS, R., 2006, “**From the continuous to the lattice Boltzmann equation: The discretization problem and thermal models**”, Physical Review E, Vol 73.

SADIKU, M. N. O, 2000, “Elementos de Eletromagnetismo”, Bookmman, 3^a Ed.

SAJID, M., HAYAT, T., 2009, “**The application of homotopy analysis method for MHD viscous flow due to a shrinking sheet**”, Chaos, Solitons and Fractais, 39, 1317-1323.

SALAS, H., CUEVAS, S., HARO, M. L., 1999, “**Entropy generation analysis of magnetohydrodynamics induction devices**”, Journal of Physics D: Applied Physics, Vol 32, Número 20, pp 2605.

SCHLIRTING, H., 1979, “**Boundary Layer Theory**”, McGraw-Hill Book Company.

SETAYESH, A., SARAI, V, (1990), “**Heat transfer in developing magnethydrodynamic Poiseuille flow and variable transport properties**”, Int. J. of Heat and Mass Transfer, Vol. 33, n. 8, pp. 1711-1720.

SHAN, X., YUAN, X., CHEN, H., 2006, “**Kinetic theory representation of hydrodynamics:a way beyond the Navier–Stokes equation**”, Journal of Fluid Mechanics, Vol 550, pp 413-441.

SHERCLIFF, J. A.; **A Textbook of Magnethydrodynamics**, Pergamon Press, 1965.

SOUZA, M. J. R., 2010, “**Análise de escoamento com Transferência de Calor em Fluidos Viscoelásticos Utilizando a Técnica da Transformada Integral Generalizada.**”, Tese de Doutorado, PRODERNA/ITEC/UFPA.

SPALDING, D. B.; **The PHOENICS Encyclopedia**, CHAM Ltda, UK, 1994.

SUTERA, S. P., SKALAK, R., 1993, “The History of Poiseuille’s Law”, Annu. Rev. Fluid Mech., Vol. 25, pp 1-19.

TILLACK, M. S., MORLEY, N. B.; Magnethydrodynamics, McGraw Hill – Standard Handbook for Electrical Engineers, 14^a Edition, 1998.

TODD, L., 1966, “**Hartmann Flow between Parallel Planes**”, Physics of Fluids, Vol. 9, pp 1602-1603.

VELUSAMY, K., GARG, V. K., 1996, “Laminar mixed convection in vertical elliptic ducts”, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol 39, Número 4, pp 745-752.

VIANA, M. J. G., NASCIMENTO, U. C. S, QUARESMA, J. N. N, MACÊDO, E. N., (2001), “**Integral transform methods for laminar heat and transfer convection of Herschel-Bulkley fluids within concentric annular ducts**”, Braz. J. Chem. Eng., Vol 18, N. 04, São Paulo.

WHITE, F. M., (1991), “**Viscous Fluid Flow**”, MacGraw-Hill, Inc, 2^a Ed.

WHITE, F. M., 1999, “**Mecânica dos Fluidos**”, MacGraw-Hill, Inc, 4^a Ed.

YAMAGUCHI, H., (2008), “**Engineering Fluids Mechanics**”, Springer.

YILBAS, B. S., 2001, “**Entropy analysis of concentric annuli with rotating outer cylinder**”, An International Journal Exergy, Vol 1, Número 1, pp 60-66.

APÊNDICE A1

Cálculo da integral B_1 , Eq. (5.54):

O coeficiente B_1 , da Eq. (5.54) é dado por:

$$B_1 = \int_a^1 R \tilde{\Gamma}_1(R) \phi dR \quad (\text{A.1})$$

Em que R é o raio adimensional na região anular, $\tilde{\Gamma}_1(R)$ é a autofunção do campo de temperatura normalizada, Eq. (32), dada por:

$$\Gamma_1(R) = J_0(\beta_1 R) Y_0(\beta_1) - J_0(\beta_1) Y_0(\beta_1 R) \quad (\text{A.2})$$

e ϕ :

$$\phi = \left[\frac{\partial U(\tau, R)}{\partial R} - \frac{U(\tau, R)}{R} \right]^2 + \varepsilon(Ha)^2 [U(\tau, R)]^2 \quad (\text{A.3})$$

Substituindo a Eq. (A.3) na Eq. (A.1), o termo B_1 fica:

$$B_1 = \int_a^1 R \tilde{\Gamma}_1(R) \left[\frac{\partial U}{\partial R} - \frac{U}{R} \right]^2 dR + \varepsilon(Ha)^2 \int_a^1 R \tilde{\Gamma}_1(R) [U]^2 dR \quad (\text{A.4})$$

Arrumando a equação acima:

$$B_1 = \int_a^1 R \tilde{\Gamma}_1 \left\{ \left[\frac{\partial U}{\partial R} \right]^2 - 2 \frac{\partial U U}{\partial R R} + \left[\frac{U}{R} \right]^2 \right\} dR + \varepsilon(Ha)^2 \int_a^1 R \tilde{\Gamma}_1 [U]^2 dR \quad (\text{A.4})$$

Uma vez que $U(\tau, R)$ é dado por:

$$U(\tau, R) = U_P + U_H \quad (\text{A.5})$$

$$[U(\tau, R)]^2 = (U_P + U_H)^2 = (U_P)^2 + 2U_P U_H + (U_H)^2 \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial U(\tau, R)}{\partial R} = \frac{dU_P}{dR} + \frac{\partial U_H}{\partial R} \quad (\text{A.7})$$

$$\left[\frac{\partial U(\tau, R)}{\partial R} \right]^2 = \left(\frac{dU_P}{dR} + \frac{\partial U_H}{\partial R} \right)^2 = \left(\frac{dU_P}{dR} \right)^2 + 2 \frac{dU_P}{dR} \frac{\partial U_H}{\partial R} + \left(\frac{\partial U_H}{\partial R} \right)^2 \quad (\text{A.8})$$

$$\frac{\partial U U}{\partial R R} = \left(\frac{dU_P}{dR} + \frac{\partial U_H}{\partial R} \right) \left(\frac{U_P}{R} + \frac{U_H}{R} \right) = \frac{U_P}{R} \frac{dU_P}{dR} + \frac{U_H}{R} \frac{dU_P}{dR} + \frac{U_P}{R} \frac{\partial U_H}{\partial R} + \frac{U_H}{R} \frac{\partial U_H}{\partial R} \quad (\text{A.9})$$

Substituindo os termos das equações (A.5) até (A.9) na Eq. (A.4), o termo B_1 toma a forma:

$$\begin{aligned}
B_1 = & \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1 \left[\left(\frac{dU_P}{dR} \right)^2 + 2 \frac{dU_P}{dR} \frac{\partial U_H}{\partial R} + \left(\frac{\partial U_H}{\partial R} \right)^2 \right] dR + \\
& -2 \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1 \left(\frac{U_P}{R} \frac{dU_P}{dR} + \frac{U_H}{R} \frac{dU_P}{dR} + \frac{U_P}{R} \frac{\partial U_H}{\partial R} + \frac{U_H}{R} \frac{\partial U_H}{\partial R} \right) dR + \\
& + \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1 \left\{ \frac{1}{R^2} [(U_P)^2 + 2U_P U_H + (U_H)^2] \right\} dR + \\
& + (Ha)^2 \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1 [(U_P)^2 + 2U_P U_H + (U_H)^2] dR
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Separando cada integral da expressão acima, tem-se:

$$I_1 = \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \left(\frac{dU_P}{dR} \right)^2 dR \tag{A.12}$$

$$I_2 = \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \left(\frac{dU_P}{dR} \frac{\partial U_H}{\partial R} \right) dR \tag{A.13}$$

$$I_3 = \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \left(\frac{\partial U_H}{\partial R} \right)^2 dR \tag{A.14}$$

$$I_4 = \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \left(\frac{U_P}{R} \frac{dU_P}{dR} \right) dR \tag{A.15}$$

$$I_5 = \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \left(\frac{U_P}{R} \frac{\partial U_H}{\partial R} \right) dR \tag{A.16}$$

$$I_6 = \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \left(\frac{U_H}{R} \frac{dU_P}{dR} \right) dR \tag{A.17}$$

$$I_7 = \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \left(\frac{U_H}{R} \frac{\partial U_H}{\partial R} \right) dR \tag{A.18}$$

$$I_8 = \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \frac{(U_P)^2}{R^2} dR \quad (\text{A.19})$$

$$I_9 = \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \frac{U_P U_H}{R^2} dR \quad (\text{A.20})$$

$$I_{10} = \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \frac{(U_H)^2}{R^2} dR \quad (\text{A.21})$$

$$I_{11} = \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) (U_P)^2 dR \quad (\text{A.22})$$

$$I_{12} = \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) U_P U_H dR \quad (\text{A.23})$$

$$I_{13} = \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) (U_H)^2 dR \quad (\text{A.24})$$

O termo fica dado por:

$$B_1 = I_1 + 2I_2 + I_3 - 2I_4 - 2I_5 - 2I_6 - 2I_7 + I_8 + 2I_9 + I_{10} + (\text{Ha})^2 I_{11} + \quad (\text{A.25})$$

$$+ 2(\text{Ha})^2 I_{12} + (\text{Ha})^2 I_{13}$$

Verifica-se que muitas integrais apresentam o potencial desconhecido U_H . Para solução, faz-se uso da inversa da transformada, Eq. (4.37), dada por:

$$U_H(\tau, R) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Psi}_i(R) \bar{U}_{Hi}(\tau)$$

Substituindo a Eq. (4.37) nas integrais, estas ficarão:

$$I_2 = \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \frac{dU_P}{dR} \frac{\partial}{\partial R} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Psi}_i(R) \bar{U}_{Hi}(\tau) \right] dR = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \frac{dU_P}{dR} \frac{\partial \tilde{\Psi}_i(R)}{\partial R} dR \right] \bar{U}_{Hi}(\tau) \quad (\text{A.26})$$

$$I_3 = \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \left[\frac{\partial}{\partial R} \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Psi}_i(R) \bar{U}_{Hi}(\tau) \right]^2 dR \quad (\text{A.27})$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \frac{\partial \tilde{\Psi}_i(R)}{\partial R} \frac{\partial \tilde{\Psi}_j(R)}{\partial R} dR \right] \bar{U}_{Hi}(\tau) \bar{U}_{Hj}(\tau)$$

$$I_5 = \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \frac{U_P}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Psi}_i(R) \bar{U}_{Hi}(\tau) \right] dR = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \frac{U_P}{R} \frac{\partial \tilde{\Psi}_i(R)}{\partial R} dR \right] \bar{U}_{Hi}(\tau) \quad (\text{A.28})$$

$$I_6 = \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \frac{1}{R} \frac{dU_P}{dR} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Psi}_i(R) \bar{U}_{Hi}(\tau) \right] dR \quad (\text{A.29})$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \frac{dU_P}{dR} \frac{\tilde{\Psi}_i(R)}{R} dR \right] \bar{U}_{Hi}(\tau)$$

$$I_7 = \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \frac{1}{R} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Psi}_i(R) \bar{U}_{Hi}(\tau) \right] \frac{\partial}{\partial R} \left[\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\Psi}_j(R) \bar{U}_{Hj}(\tau) \right] dR \quad (\text{A.30})$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \frac{\tilde{\Psi}_i(R)}{R} \frac{\partial \tilde{\Psi}_j(R)}{\partial R} dR \right] \bar{U}_{Hi}(\tau) \bar{U}_{Hj}(\tau)$$

$$I_9 = \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \frac{U_P}{R^2} \left[\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Psi}_i(R) \bar{U}_{Hi}(\tau) \right] dR = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \frac{U_P}{R^2} \tilde{\Psi}_i(R) dR \right] \bar{U}_{Hi}(\tau) \quad (\text{A.31})$$

$$I_{10} = \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \frac{(U_H)^2}{R^2} dR = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \frac{\tilde{\Psi}_i(R) \tilde{\Psi}_j(R)}{R^2} dR \right] \bar{U}_{Hi}(\tau) \bar{U}_{Hj}(\tau) \quad (\text{A.32})$$

$$I_{12} = \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) U_P \left[\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Psi}_i(R) \bar{U}_{Hi}(\tau) \right] dR = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) U_P \tilde{\Psi}_i(R) dR \right] \bar{U}_{Hi}(\tau) \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned}
I_{13} &= \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \left[\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\Psi}_i(R) \bar{U}_{Hi}(\tau) \right]^2 dR \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \tilde{\Psi}_i(R) \tilde{\Psi}_j(R) dR \right] \bar{U}_{Hi}(\tau) \bar{U}_{Hj}(\tau)
\end{aligned} \tag{A.34}$$

Observa-se que muitos desses termos assemelham-se, de modo que podemos agrupá-los. As integrais I_1 , I_4 , I_8 e I_{11} , podem ser agrupadas na Eq. (A.25) para formar o coeficiente que depende apenas do índice l :

$$B_{1l} = \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \left[\left(\frac{dU_P}{dR} \right)^2 - 2 \frac{U_P}{R} \frac{dU_P}{dR} + \frac{(U_P)^2}{R^2} + (Ha)^2 (U_P)^2 \right] dR \tag{A.35}$$

Agrupando os termos que apresentam dependência nos índices l e i , que são as integrais I_2 , I_5 , I_6 , I_9 e I_{12} :

$$\begin{aligned}
B_{2li} &= \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \left[\frac{dU_P}{dR} \frac{\partial \tilde{\Psi}_i(R)}{\partial R} - \frac{U_P}{R} \frac{\partial \tilde{\Psi}_i(R)}{\partial R} - \frac{dU_P}{dR} \frac{\tilde{\Psi}_i(R)}{R} + \frac{U_P \tilde{\Psi}_i(R)}{R^2} \right. \\
&\quad \left. + (Ha)^2 U_P \tilde{\Psi}_i(R) \right] dR
\end{aligned} \tag{A.36}$$

Finalmente, agrupam-se os termos com índices l , i e j , que surgem nas integrais I_3 , I_7 , I_{10} e I_{13}

$$\begin{aligned}
B_{3lij} &= \int_a^1 R\tilde{\Gamma}_1(R) \left[\frac{\partial \tilde{\Psi}_i(R)}{\partial R} \frac{\partial \tilde{\Psi}_j(R)}{\partial R} - 2 \frac{\tilde{\Psi}_i(R)}{R} \frac{\partial \tilde{\Psi}_j(R)}{\partial R} + \frac{\tilde{\Psi}_i(R) \tilde{\Psi}_j(R)}{R^2} \right. \\
&\quad \left. + (Ha)^2 \tilde{\Psi}_i(R) \tilde{\Psi}_j(R) \right] dR
\end{aligned} \tag{A.37}$$

O termo B_l pode ser escrito como:

$$B_l = B_{1l} + 2 \sum_{i=1}^{\infty} B_{2li} \bar{U}_{Hi}(\tau) + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{3lij} \bar{U}_{Hi}(\tau) \bar{U}_{Hj}(\tau) \tag{A.38}$$

E sua derivada em relação ao tempo adimensional será:

$$\frac{\partial B_l}{\partial \tau} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} B_{2li} \frac{d\bar{U}_{Hi}(\tau)}{d\tau} + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} B_{3lij} \left[\frac{d\bar{U}_{Hi}(\tau)}{d\tau} \bar{U}_{Hj}(\tau) + \bar{U}_{Hi}(\tau) \frac{d\bar{U}_{Hj}(\tau)}{d\tau} \right] \tag{A.39}$$