UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTIFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

EVERALDO RAIOL DA SILVA

O SURGIMENTO DAS TRIGONOMETRIAS EM DIFERENTES CULTURAS E AS RELAÇÕES ESTABELECIDAS ENTRE ELAS

Belém, Pará
2014

EVERALDO RAIOL DA SILVA

O SURGIMENTO DAS TRIGONOMETRIAS EM DIFERENTES CULTURAS E AS RELAÇÕES ESTABELECIDAS ENTRE ELAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto de Educação Matemática e Científica da UFPA, como requisito para obtenção do título de Mestre em Educação.
Área de Concentração: Educação Matemática.
Orientadora: Prof^a. Dr^a. Maria José de Freitas Mendes.
Co-orientadora: Prof^a. Dr^a. Maria Lucia Pessoa Chaves Rocha.

Belém, Pará
2014

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)

Raiol, Everaldo Raiol da Silva, 1967-
O surgimento das trigonometrias em diferentes culturas e as relações estabelecidas entre elas / Everaldo Raiol da Silva Raiol. - 2014.

Orientadora: Maria José de Freitas Mendes;
Coorientadora: Maria Lúcia Pessoa Chaves Rocha.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2014.

1. Matemática - história. 2. Trigonometria - história. 3. Trigonometria plana. 4. Trigonometria esferica. 5. Geometria. I. Título.

CDD 22. ed. 510.9

EVERALDO RAIOL DA SILVA

O SURGIMENTO DAS TRIGONOMETRIAS EM DIFERENTES CULTURAS E AS RELAÇÕES ESTABELECIDAS ENTRE ELAS.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática do Instituto de Educação Matemática e Científica da UFPA, como requisito para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Banca Examinadora:

____

Membro: Maria José de Freitas Mendes - Orientadora
Titulação: Doutora
Instituição: Universidade Federal do Pará - UFPA

____

Membro: Maria Lucia Pessoa Chaves Rocha - Co-Orientadora
Titulação: Doutora
Instituição: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará - IFPA

____

Membro: João Cláudio Brandemberg - Membro Interno
Titulação: Doutor
Instituição: Universidade Federal do Pará - UFPA

____

Membro: Miguel Chaquiam - Membro Externo
Titulação: Doutor
Instituição: Universidade da Amazônia - UNAMA e Universidade do Estado do Pará - UEPA

____

Membro: Bernadete Barbosa Morey - Membro Externo
Titulação: Doutora
Instituição: Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN

Dedico este trabalho a minha família em especial a minha esposa Regis Cristina Pereira Raiol, meu amor, companheira de uma vida, amiga e incentivadora, que em tantos momentos me impulsionou a trilhar os caminhos que me traria até aqui; ao meu filho Vinícius Eduardo Pereira Raiol, não só por ter ilustrado minha vida com sua presença, mas também por ter compreendido com enorme paciência, a ausência que marcou este período e me furtou de seu convívio, pela dedicação, quase que exclusiva a esta pesquisa.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me iluminado dado força e coragem nessa caminhada para enfrentar todas as dificuldades e conseguir realizar este estudo.

À minha mãe, Maria da Conceição Raiol da Silva e ao meu pai, Raimundo Ferreira da Silva por terem me incentivado em toda a minha vida acadêmica e por terem acreditado nos meus sonhos e também a todos meus irmãos e sobrinhos e em especial a minha irmã Sandra do Socorro da Silva Rocha, que dedicou um tempo da sua vida e me ajudou em muitos momentos da minha vida.

Ao meu sogro Damião Pereira da Silva e à minha sogra Edna Francisca da Silva (em memória), pelo amor e carinho que sempre me dispensaram. As minhas cunhadas Renata Pereira da Silva e Regiane Pereira Raiol pelos longos anos de convivência e amizade ao concunhado Sandro Lisboa Raiol pelo companheirismo e em especial ao concunhado Marcelo Dahan Gomes da Silva, pela força nos momentos de dificuldades e ao meu cunhado Lucas Eduardo Pereira da Silva por ter traduzido alguns textos em Inglês que foi de grande valia na elucidação de algumas dúvidas.

A todos meus professores (as) que durante a minha vida acadêmica me incentivaram, e mostraram o caminho que hoje culminou nesse momento da apresentação e defesa da minha dissertação do mestrado, entre todos queria citar alguns, primeiramente a professora Marina Silva que à época do ensino fundamental viu minha dedicação e interesse em estudar matemática, no ensino médio, o professor e grande amigo Laurence Câmara Lins que contribuiu na minha carreira profissional desde o curso técnico e é grande incentivador de minha ainda curta carreira de professor. Ainda não poderia deixar de falar de uma das mais importantes educadoras matemáticas deste estado, professora Selma Santalices que durante minha graduação e depois de formado enquanto professor substituto da Universidade do Estado do Pará, sempre dedicou um pouco do seu tempo para tirar minhas dúvidas, um exemplo de dedicação, paciência e acima de tudo sabedoria infinita, um modelo a ser seguido.

Ao professor Miguel Chaquiam que durante minha graduação e depois no curso de aperfeiçoamento sempre dedicou um pouco do seu tempo para tirar minhas dúvidas, um exemplo de dedicação, paciência e acima de tudo um grande profissional.

À minha orientadora, professora Maria José de Freitas Mendes, por sua dedicação, interesse e incentivo pelo desenvolvimento deste trabalho, pelas críticas, sugestões e “puxões de orelha” quando foi necessário, e que tanto contribuiu para o meu amadurecimento profissional e crescimento acadêmico, e principalmente ser um grande exemplo de profissional.

À minha co-orientadora, professora Maria Lucia Pessoa Chaves Rocha, por suas contribuições e análises feitas à época do exame de qualificação, e posteriormente em suas sugestões no intuito de melhorar o texto dissertativo.

À Professora Bernadete Barbosa Morey, pelo aceite em participar da banca, e mesmo não podendo estar presente quanto do exame de qualificação fez seu parecer e escreveu valiosas críticas, comentários, sugestões e que me fizeram refletir sobre aspectos que não havia avaliado neste estudo.

Aos Professores do GEHEM, Brandemberg e Natanael Cabral, pelas valiosas sugestões e apontamentos feitos à época do exame de qualificação e durante o curso favoreceram minhas reflexões e crescimento como professor e pesquisador.

Aos meus amigos e companheiros de curso Nayra, Mônica, Alailson, Cibele, Márcio Benicio e Alex Bruno entre outros pelo auxilio que deram para a construção deste estudo, acompanhando as dificuldades desta trajetória, mostrando sempre apoio e admiração em especial *Tatiana Miranda, Marcelo Serrão,* que me ajudaram em muitas situações que estive em extremas dificuldades, nas traduções Tatiana e nas ilustrações o Marcelo entre outras ajudas importantes. Obrigada pela amizade que criamos e que espero conservar sempre.

Às professoras de Língua Portuguesa e amigas, Paula Francinete de Oliveira David e Maria do Socorro Dantas da Cunha por terem feito a revisão ortográfica neste texto.

A todos que direta e indiretamente contribuíram para a elaboração e execução do estudo.

A toda equipe da Pós - Graduação e professores pela grande dedicação ao nosso curso.

À Universidade Federal do Pará que viabilizou a realização deste curso.

“A trigonometria esférica é a irmã mais velha da trigonometria plana”.

MORITZ

RESUMO

O presente estudo trata da história da trigonometria plana e esférica, tendo como proposta central compreender como surgiram as trigonometrias em diferentes civilizações quais sejam: Egípcia, Babilônica, Grega, Hindu, Árabe e Chinesa. Nossa meta foi identificar como surgiram as trigonometrias nas diferentes civilizações e quais as relações estabelecidas entre elas. Para alcançarmos esta meta, dividimos a pesquisa em três fases. Na primeira fase do estudo, adotamos como percurso metodológico a pesquisa bibliográfica, na história da matemática e da ciência, baseada na investigação histórica do desenvolvimento das trigonometrias plana e esférica. Entre os referenciais teóricos com os quais trabalhamos estão: Marconi (1986, 2007), Gil (1991, 1999), Lakatos & Martins (2005), Miguel e Miorim (2002, 2011), Valente, (2007), D Ambrosio (2007) e Valdés (2012). Na segunda fase do estudo, buscando evidenciar o surgimento e a evolução e no desenvolvimento conceitual da trigonometria plana e esférica em diferentes civilizações quais sejam: Egípcia, Babilônica, Grega, Hindu, Árabe e Chinesa, na antiguidade passando pelo medievo e até o período Renascentista com o auxilio da história da matemática. Para isso, utilizamos como referenciais teóricos: Ronan (1987), Wussing (1998), Morey (2001, 2003), Cajori (2007), Mendes (2009), Pereira (2010, 2013), Katz (2010), Rooney (2012), Rosa (2012), Brummelen (2009, 2013), Flood & Wilson (2013), entre outros. Na terceira fase do estudo fizemos um estudo histórico das geometrias e nas geometrias não euclidianas, para evidenciamos o surgimento da geometria esférica e sua implicação com a trigonometria esférica e mostramos como existem relações entre as trigonometrias plana e esférica, para isso usamos o método das séries de Taylor, nosso objetivo principal de estudo, para tanto utilizamos como referenciais teóricos: Ayres Jr. (1954), Hogben (1970), Do Carmo (1987), Wussing (1998), Imre Toth (2011), Brummelen (2009, 2013), entre outros. Como considerações finais do estudo realizado, mostramos como surgiram as trigonometrias nas diferentes civilizações e as relações estabelecidas entre elas, respondendo assim nossa questão de pesquisa, e também deixamos caminhos para outros pesquisadores realizarem novas pesquisas como consequência da apresentação e defesa da dissertação.

Palavras - chaves: História da Matemática. História da Trigonometria. Trigonometria Plana. Trigonometria Esférica.

ABSTRACT

The present study deals with the history of the plane and spherical trigonometry, with the central proposal emerged understand how the trigonometry's in different civilizations which are: Egyptian, Babylonian, Greek, Hindu, Arabic and Chinese. Our goal was to identify how trigonometry's emerged in which different civilizations and the relations between them. To achieve this goal, we divided the research into three phases. In the first phase of the study, we adopt as a methodological approach to literature, the history of mathematics and science, based on historical research into the development of flat and spherical trigonometry's. Among the theoretical frameworks with which we work are: Marconi (1986, 2007), Gil (1991, 1999), Lakatos & Martins (2005), and Miguel Miorim (2002, 2011), Valente (2007), D Ambrosio (2007) and Valdés (2012). In the second phase of the study in order to enhance the appearance and the evolution and development of the conceptual plane and spherical trigonometry in different civilizations which are: Egyptian, Babylonian, Greek, Hindu, Arabic and Chinese in antiquity through the Middle Ages and until the Renaissance period with the aid of mathematical history. For this, we use as theoretical Ronan (1987), Wussing (1998), Morey (2001, 2003), Cajori (2007), Mendes (2009), Pereira (2010, 2013), Katz (2010), Rooney (2012), Rosa (2012), Brummelen (2009, 2013), Flood and Wilson (2013), among others. In the third phase of the study made a historical study of geometry and non-Euclidean geometries, we observed for the appearance of spherical geometry and its implication with spherical trigonometry and show how relationships exist between flat and spherical trigonometry's, for this we use the method of series Taylor, our main objective of the study, both for use as theoretical: Ayres Jr. (1954), Hogben (1970), Do Carmo (1987), Wussing (1998), Imre Toth (2011), Brummelen (2009, 2013), among others. As conclusion of the study, we show how the trigonometry's in different civilizations and the relations between them arose, thus answering our research question, and also ways to let other researchers conduct further research as a result of the presentation and defense of the dissertation.

Key - Words: Mathematical of History. History of Trigonometry. Plane Trigonometry. Spherical Trigonometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

O surgimento da matemática permeou as primeiras civilizações e tornou possível o desenvolvimento de aplicações concretas: o comércio, o manejo de plantações, a medição de terra, a observação e previsão de eventos astronômicos, e por vezes, a realização de rituais religiosos. Nestas civilizações, os estudos de estruturas matemáticas, quais sejam: a geometria e a trigonometria emergiram e possibilitaram alavancar, tanto economicamente quanto culturalmente, essas sociedades.

Nesse sentido, apresentamos um estudo que objetiva evidenciar o surgimento das trigonometrias em diferentes culturas e as relações estabelecidas entre elas, para tanto identificamos, com a contribuição da história da matemática, história da ciência e da pesquisa bibliográfica como surgiram tais trigonometrias.

Temos como objetivo reconhecer, com auxilio da história da matemática e da ciência, e fundamentado na pesquisa bibliográfica, como surgiram as trigonometrias nas civilizações dentre elas: Egípcia, Babilônica, Grega, Hindu, Árabe e Chinesa e quais as relações estabelecidas entre elas ao longo da história o posterior surgimento das geometria não-euclidianas e o desenvolvimento da geometria esférica e sua implicação com a trigonometria esférica.

Este trabalho foi desenvolvido com base nos estudos de Gil (1991, 1999), Lakatos & Marconi (1986), que fundamentam a temática da pesquisa bibliográfica em seus estudos e Martins (2005), que referenda a pesquisa bibliográfica em história da ciência e nos informa a possibilidade de fazer a pesquisa em fontes secundarias, tais como os livros, além de mostrar um caminho para relacionar a pesquisa bibliográfica com a história da matemática.

Segundo Marconi (2007), as denominações referentes à pesquisa bibliográfica estão ligadas muito mais ao ambiente onde se realiza a pesquisa do que ao tipo ou características da mesma. Logo, a pesquisa bibliográfica pode ser um trabalho independente ou constituir-se no passo inicial de outra pesquisa. No meio acadêmico, é de amplo conhecimento que a pesquisa bibliográfica é básica, portanto, obrigatória em qualquer modalidade de estudo. Qualquer informação publicada (impressa ou eletrônica) é passível de se tornar uma fonte de consulta, porem os livros constituem-se nas principais fontes de referências bibliográficas.

Aprofundamos assim a nossa pesquisa com a investigação em história da matemática, onde dialogamos com alguns teóricos que nos apontam caminhos. Dentre eles estão: Miguel e Miorim (2002, 2011), Valente, (2007), D Ambrosio (2007) e Valdés (2012), os quais mostram a investigação em história da matemática tratando de diferentes temas, por exemplo, o desenvolvimento histórico de um conceito matemático, biografias de matemáticos, as relações da matemática com outras áreas do conhecimento humano.

No capitulo I, apresentamos a motivação para o estudo; a escolha do tema; os objetivos; os referenciais teóricos e a metodologia de pesquisa. Desta forma, fazemos uso da pesquisa bibliográfica para alicerçar nosso estudo e utilizaremos: Gil (1991, 1999), Lakatos & Marconi (1986) e Martins (2005).

Martins (2005) trabalha com a pesquisa bibliográfica na História da Ciência, e suas pesquisas serviram de base para realização da pesquisa bibliográfica na história da matemática, a qual também está apoiada nos estudos de: Miguel e Miorim (2002, 2011), Valente, (2007), D Ambrosio (2007) e Valdés (2012), que tratam da investigação em história da matemática.

O capitulo II está alicerçado na história da matemática e na história da ciência, abordamos o surgimento da trigonometria em diferentes civilizações que viveram na Antiguidade, dentre elas: Egípcia, Babilônica, Grega, Hindu, Árabe e Chinesa. O estudo histórico neste capítulo faz um recorte histórico desde a Antiguidade passando pelo medievo[1] até o período Renascentista[2], finalizando o

---

[1] **Medievo**: È um termo criado para referir-se ao modo como os renascentistas chamavam a era medieval, e significa medie (do latim)-medíocre, evo-era. Uma era medícre (medíocre) na referência à Idade Média. É um período da história da Europa que se inicia com a Queda do Império Romano do Ocidente em 476 e estendeu-se até 1453, com a queda do Império Romano do Oriente pela tomada de Constantinopla pelos turcos, fato esse que marca transição para a Idade Moderna é também o período intermédio da divisão clássica da História Ocidental descrita em três períodos: a Antiguidade, Idade Média, sendo frequentemente dividido em Alta e Baixa Idade Média e Idade Moderna. Divalte (2002).

[2] **Movimento Renascentista ou apenas Renascimento:** Foi o nome dado ao Renascimento Cultural que aconteceu durante os séculos XIV, XV e XVI na Europa, e que procurava resgatar as culturas esquecidas (grego-romana) durante o medievo. As principais características do Renascimento foram o Racionalismo, Experimentalismo, Individualismo e Antropocentrismo. Uma grande característica do Renascimento foi o Humanismo que valorizava o homem, que a partir daí começou a ser tratado como ser racional e posto assim no centro do Universo. O Renascimento também foi marcado por importantes descobertas científicas, notadamente nos campos da astronomia, física, medicina, matemática e geografia. O Renascimento nasceu na Itália, mais especificamente nas cidades que enriqueceram com o comércio no Mediterrâneo. Porém com a expansão marítima a ideia Renascentista foi divulgada por diversas partes do mundo como na Inglaterra, Alemanha e os Países Baixos. O Renascimento foi muito importante também, porque foi a principal influencia dos pensadores Iluministas do século XVII. Divalte (2002).

capitulo analisamos a trigonometria: de ciência auxiliar da astronomia à transformação em ciência independente na Europa.

No capítulo III, apresentamos os fundamentos e desenvolvimento da geometria esférica, e sua implicação com a trigonometria esférica e evidenciamos também a existência das relações estabelecidas entre as trigonometrias plana e esférica. Como parte final da pesquisa, apresentamos nossas considerações finais, enfatizamos os objetivos que foram alcançados, a relevância da pesquisa, e propusemos então outros desdobramentos como consequência da apresentação e defesa da dissertação.

1. DELINEANDO O ESTUDO

1.1 A MOTIVAÇÃO, A ESCOLHA DO TEMA E OS OBJETIVOS DO ESTUDO, PROBLEMA E QUESTÕES DE PESQUISA.

1.1.1 A Motivação para o Estudo

Ao estudar a disciplina Astronomia de Posição e Introdução à Geodésia Geométrica, no Curso Técnico em Agrimensura, na antiga Escola Técnica Federal do Pará, hoje Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará IFPA/Campus Belém, entrei em contato com uma trigonometria *(etimologicamente a palavra trigonometria vem do grego TRI-três, GONO-ângulo, METRIN-medida, trata-se assim, do estudo das relações entre lados e os ângulos de um triângulo, o que modernamente significa medidas de um triângulo),* bem diferente, e que se apresenta conforme figura (1), chamada de trigonometria esférica *(trigonometria esférica é um ramo da geometria esférica que lida com polígonos na esfera e as relações entre lados e ângulos*). E é de grande importância para os cálculos da astronomia e da superfície da Terra, orbital e navegação espacial. Notei que essa trigonometria possuía várias semelhanças com a que é tradicionalmente ensinada aos alunos do ensino médio, que é a trigonometria plana *(trigonometria plana é um ramo da geometria plana que lida com polígonos no plano e as relações entre lados e ângulos. E tem muitas aplicações tais como Física, Engenharia entre outras).*

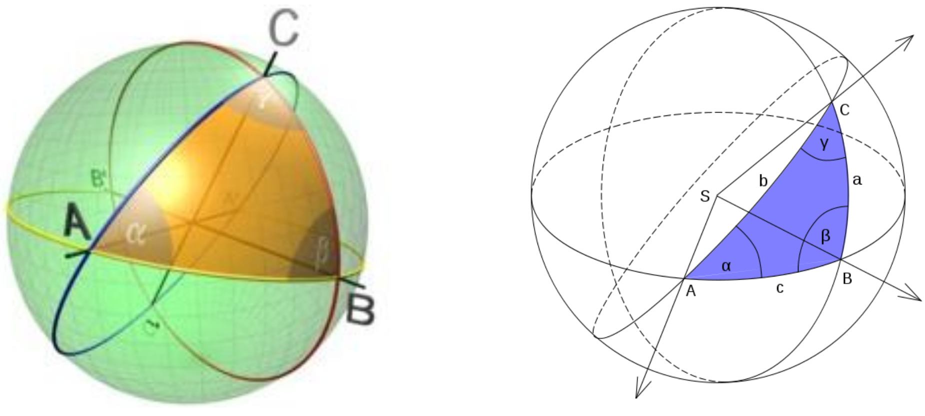


Figura 1: Triângulo Esférico[3]
Fonte: Site:www.ime.unicamp.br

---

[3] Fonte da figura disponível em http://www.ime.unicamp.br/~marcio/ps2005/hvetor14.htm, acesso em 30 de junho de 2013.

À época, o saudoso Professor Paulo de Tarso[4] ministrou um minicurso denominado “Introdução à trigonometria esférica” para os alunos do curso técnico do qual era estudante. Após este minicurso, minha curiosidade aumentou ainda mais, solicitei ao professor que me cedesse alguns livros para tirar copias, o referido professor me emprestou alguns livros para tirar cópias e assim poder aprofundar meus estudos.

Quando busquei o aprofundamento sobre trigonometria esférica, encontrei um objeto de estudo com definições e aplicações bem elaboradas em outros campos das ciências. Explicitarei aqui algumas dessas aplicações nas figuras seguintes.

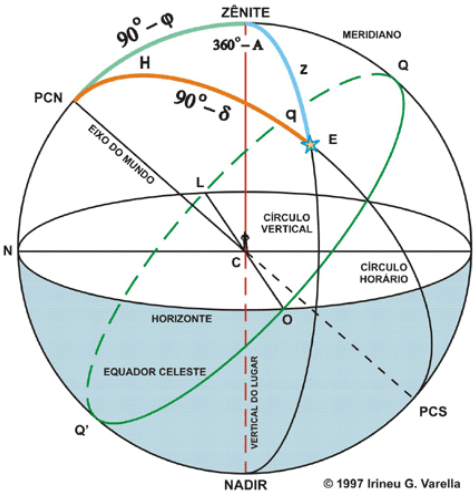


Figura 2: Triângulo de Posição para a Astronomia de Posição[5]
Fonte: Site:www.portaldoastronomo.org

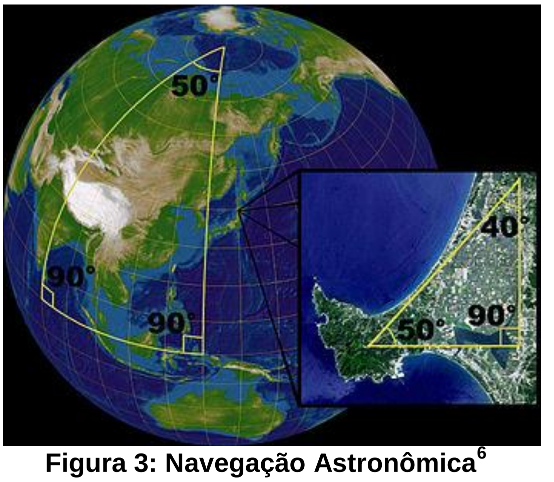


Figura 3: Navegação Astronômica[6]
Fonte: Site:www.portaldoastronomo.org

---

[4] Professor da disciplina matemática da antiga Escola Técnica Federal do Pará e Piloto da Marinha Mercante, falecido em 1999.
[5] Fonte da figura disponível em: http://www.portaldoastronomo.org, acesso em 01 de outubro de 2013, Triângulo de posição para o cálculo da astronomia de posição.
[6] Fonte da figura disponível em: http://www.portaldoastronomo.org, acesso em 01 de outubro de 2013, Triângulo de posição para o cálculo da Navegação Ortodrômica.

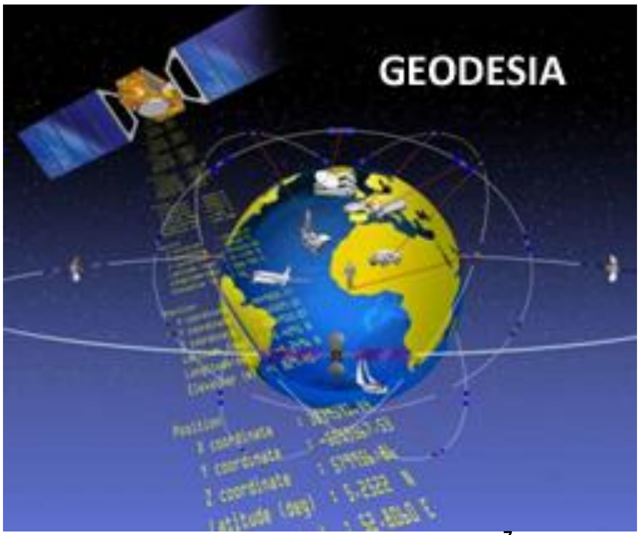


Figura 4: Aplicação a Geodesia[7]
Fonte: Site:www.geocaching.com

Figura 5: Aplicação a Cartografia[8]
Fonte: Site:www.brasilescola.com

Ainda com interesse no estudo dessa temática, procurei durante o Curso de Licenciatura em Matemática, na Universidade do Estado do Pará (UEPA), retomar as pesquisas que iniciei no curso técnico. Contudo, somente alguns professores detinham conhecimento a respeito da trigonometria esférica.

Nesse sentido Pereira (2013) afirma:

> No curso de Bacharelado em Matemática no Brasil, uma disciplina que aborda a trigonometria esférica é a geometria não-euclidiana, no estudo da geometria elíptica. Porém, na formação do professor de matemática, ou seja, nos cursos de licenciaturas, numa pesquisa realizada em 2005, por Barreto e Tavares (2007, p.02) das 47 Instituições de Ensino Superior

[7] Fonte da figura disponível em: http://www.geocaching.com, acesso em 01 de outubro de 2013, levantamento geodésico com aplicação do GPS.
[8] Fonte da figura disponível em: http://www.brasilescola.com, acesso em 22 de abril de 2014. E a projeção de Mollweide é também chamada de projeção de Aitoff, que é uma projeção cartográfica elaborada no ano de 1805, pelo astrônomo e matemático alemão Karl Mollweide (1774-1825), muito utilizada para a elaboração de mapas-múndi atualmente.

> Brasileiras pesquisadas por eles somente 5 abordavam conceitos de geometrias não-euclidianas nas suas matrizes curriculares, consequentemente o estudo de triângulos esféricos. Isso nos leva a concluir que a trigonometria esférica está perdendo lugar no ensino de matemática. (PEREIRA, 2013 p.3)

Essa afirmação de Pereira evidencia que o ensino da trigonometria esférica perdeu espaço nos cursos de licenciatura em Matemática no Brasil.

Por suas aplicações em outras áreas faz-se necessário o regate desse conteúdo de matemática nas matrizes curriculares dos cursos de graduação de matemática, porem depois de graduado, quando era professor substituto da Universidade do Estado do Pará (UEPA), tive conhecimento, por meio de conversas mantidas com o Professor Dr. Iran de Abreu Mendes, que à época era coordenador do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará e hoje é Professor da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, que a Professora Dra. Bernadete Barbosa Morey, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, desenvolvia estudos sobre a temática trigonometria no programa de Pós-graduação daquela Universidade, fato este que me despertou o interesse de elaborar um projeto para cursar uma Pós-graduação.

No entanto, a vida profissional levou-me a outros caminhos e a trigonometria esférica ficou esquecida. Mesmo assim, sempre tive vontade de desenvolver um trabalho nesse sentido com objetivo de: reconstruir, a partir dos fundamentos da geometria esférica, a definição, propriedades e suas implicações com a trigonometria esférica, e, a partir desta, fazer um estudo mais aprofundado, sobre as relações estabelecidas entre a trigonometria esférica e a trigonometria plana, para fazer frente a essa demanda de estudo alicerçamos nosso trabalho na História da Matemática e das Ciências e na pesquisa bibliográfica.

1.1.2 A Escolha do Tema

Ao ser aprovado no programa de Pós-graduação do Instituto de Educação Matemática Cientifica (IEMCI/UFPA), e nos debates no Grupo de Estudos de Historia e Ensino da Matemática, (GEHEM/IEMCI/UFPA) do qual participo como estudante, ao desenvolvermos estudos e debates sobre alguns capítulos do livro “A História da Matemática” de autoria de Anne Rooney onde constam alguns tópicos sobre trigonometria plana e esférica, expus meus conhecimentos referente à trigonometria esférica e após esses debates minha orientadora junto com a co-orientadora, me perguntaram se eu queria desenvolver a dissertação nessa temática. Pensei um pouco e respondi que sim, pois sempre tive vontade de desenvolver uma pesquisa nesse sentido, utilizando a história da matemática para resgatar o surgimento das trigonometrias esférica e plana, e as relações que se estabelecem entre elas, pois existem grandes semelhanças entre a trigonometria esférica e a trigonometria plana, porém, há uma diferença muito importante: a primeira é aplicada a triângulos esféricos enquanto a segunda a triângulos planos, por tanto a trigonometria plana trata da resolução de triângulos no plano enquanto a trigonometria esférica diz respeito à resolução de triângulos na esfera, conforme ilustrado na figura (6). Dessa forma, surgiu o tema de nossa pesquisa, e para embasar nossa pesquisa utilizamos a história da matemática para resgatar os fundamentos da geometria esférica, da trigonometria esférica e a trigonometria plana e assim podermos evidenciar as relações estabelecidas entre essas trigonometrias.

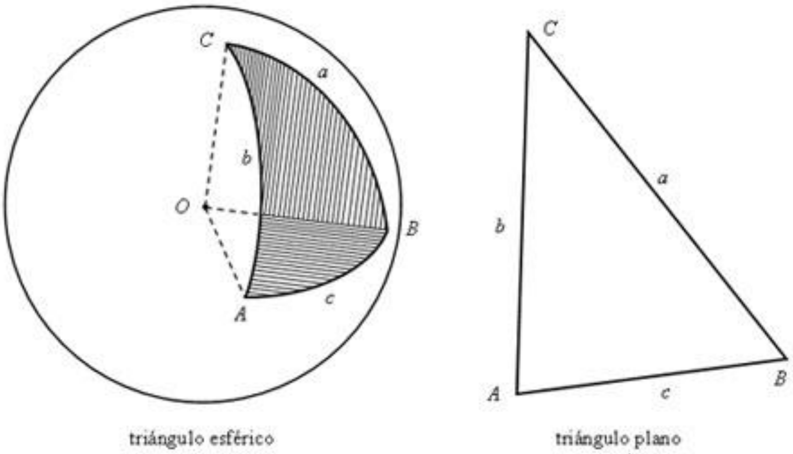


Figura 6: Triângulos Esférico e Plano[9]
Fonte: Site:www.iniganieria.anahuac.mx

Em nosso estudo, evidenciamos que ao longo da história, outras trigonometrias surgiram além da trigonometria plana e esférica, outra é a trigonometria hiperbólica que une o estudo da função logaritmo natural e da geometria analítica da Hipérbole.

A partir dessas considerações, elaboramos a seguinte questão de pesquisa: *Como surgiram as trigonometrias nas diferentes culturas e quais as relações estabelecidas entre elas?*

Para responder a questão delineada, foram elencamos os seguintes objetivos:

---

[9] Fonte da figura disponível em: http://www.iniganieria.anahuac.mx, acesso em 15 de agosto de 2013.

1.1.3 Objetivo Geral

Reconhecer, com auxilio da história da matemática e da ciência, e fundamentado na pesquisa bibliográfica, como surgiram as trigonometrias nas civilizações dentre elas: Egípcia, Babilônica, Grega, Hindu, Árabe e Chinesa e quais as relações estabelecidas entre elas ao longo da história o posterior surgimento das geometria não-euclidianas e o desenvolvimento da geometria esférica e sua implicação com a trigonometria esférica.

1.1.3.1 Objetivos Específicos

- Identificar, na história da matemática, contribuições para o entendimento do surgimento das trigonometrias em diferentes culturas e quais as relações estabelecidas entre elas ao longo da história.
- Estudar o desenvolvimento e as transformações, sofridas ao longo do tempo, da compreensão do conceito de trigonometria nas diferentes culturas quais sejam: Egípcios, Babilônios, Gregos, Hindus, Árabes e Chineses.
- Evidenciar o surgimento das geometrias não-euclidianas, o desenvolvimento da geometria esférica e suas implicações com a trigonometria esférica.
- Verificar como as relações entre as trigonometrias se estabelecem e quais os argumentos matemáticos possibilitam identificar essas relações.

1.1.4 Problema de Pesquisa

Com fundamentos na história da matemática e na história da ciência, como podemos identificar o surgimento das trigonometrias nas diferentes civilizações e as relações estabelecidas entre elas?

1.2 REFERENCIAIS TEÓRICOS DO ESTUDO

1.2.1 A pesquisa bibliográfica

Podemos definir pesquisa como o procedimento racional e sistemático que tem por objetivo proporcionar respostas aos problemas que são propostos. A pesquisa é requerida quando não se dispõe de informação suficiente para responder ao problema, ou então quando a informação disponível se encontra em tal estado de desordem que não possa ser adequadamente relacionada ao problema.

A pesquisa é desenvolvida mediante o concurso dos conhecimentos disponíveis e a utilização cuidadosa de métodos, técnicas e outros procedimentos científicos. Na realidade, a pesquisa desenvolve-se ao longo de um processo que envolve inúmeras fases, desde a adequada formulação do problema até a satisfatória apresentação dos resultados.

Nesse sentido em nosso estudo evidenciamos que referente a temática trigonometria tanto plano como esférica quando focamos a história do desenvolvimento desse conteúdo, encontramos fragmentos em livros textos em língua portuguesa superado apenas em língua estrangeira (Inglês e Espanhol).

A pesquisa bibliográfica procura auxiliar na compreensão de um problema a partir de referências publicadas em documentos, buscando conhecer e analisar as contribuições culturais ou científicas do passado sobre determinado assunto, tema ou problema, por tanto utilizamos essa modalidade de pesquisa.

A pesquisa foi embasada nos textos de Gil (1991, 1999) e Lakatos & Marconi (1986), que fundamentam a temática da pesquisa bibliográfica em seus estudos, o que nos indicam que podemos realizar a pesquisa bibliográfica a partir de material já elaborado, em livros, revistas, boletins, monografias, teses, dissertações, material cartográfico, com o objetivo de colocar o pesquisador em contato direto como todo material já escrito sobre o mesmo, utilizamos também Martins (2005), que, no artigo História das Ciências: Objetos, Métodos e Problemas, aponta um caminho para fazer pesquisa em História da Ciência.

Para Gil (1991), a pesquisa bibliográfica tem como característica ser sistemática, pormenorizada e exaustiva e deve ser organizado de forma lógica, o que implica o exercício do raciocínio e possui as seguintes etapas:

I. Definição etimológica dos termos;
II. Conceitos possíveis sobre o objeto da pesquisa;
III. Evolução do percurso histórico;
IV. Revisão da literatura existente sobre o assunto;
V. Apresentação das leis, teorias e posições dos principais autores, mesmo que contrárias;
VI. Exame e contextualização do objeto pesquisado;
VII. Análise e posicionamento do pesquisador sobre o objeto de estudo com base na fundamentação da pesquisa.

Fizemos também uso da obra de Lakatos & Marconi (1986), os quais nos indicam que a pesquisa bibliográfica compreende oito fases distintas, a saber:

a) Escolha do tema;
b) Elaboração do plano de trabalho;
c) Identificação;
d) Localização;
e) Compilação;
f) Fichamento;
g) Análise e interpretação;
h) Redação.

Analisando os textos dos autores citados, buscamos fundamentar a nossa pesquisa, e categorizá-la dentro de cada subdivisão apontada pelos autores e tendo em vista que a pesquisa bibliográfica é indispensável nos estudos históricos.

As fontes bibliográficas fornecem ao pesquisador diversos dados, exigindo manipulação e análises diferenciadas. Caracterizam-se como fontes desse tipo:

- *Imprensa escrita*: em forma de jornais e revistas, deve ser independente, ter conteúdo e orientação sem tendência, bem como difusão e influência. A análise deve ser feita de forma independente e, por fim, deve-se verificar se há grupo de interesse envolvido;
- *Meios audiovisuais:* esta mídia deve ser analisada com base nos mesmos itens especificados para a imprensa escrita;
- *Material cartográfico*: estes meios bibliográficos são específicos, de acordo com a linha de pesquisa e atualização no projeto, não havendo grandes restrições quanto a seu emprego;
- *Publicações:* livros, teses, dissertações, monografias, publicações avulsas, pesquisas, entre outros, formam o conjunto de publicações básicas para pesquisas científicas.

Para aprofundar a construção do texto dissertativo, fizemos uso do texto de Martins (2005), que caracteriza tipos de fontes de pesquisa em história da ciência, no qual afirma que em uma pesquisa em história da ciência são utilizados documentos de vários tipos. Costuma-se classificar estes documentos em fontes primárias (material da época estudada, escrito pelos pesquisadores) e fontes secundárias (estudos historiográficos e obras de apoio que podem ser trabalhos de filósofos e biógrafos a respeito do período e dos autores investigados).

Baseado nessas premissas, realizamos análise de teses, dissertações e artigos, algumas listadas abaixo, que nos mostram o papel relevante da história da matemática nessas pesquisas e em livros que tratam da história da ciência em diferentes civilizações e da evolução conceitual da trigonometria tanto plana como esférica nessas civilizações.

A tese "*De Triangulis Onunímodis Libri Quinque*" (Cinco Livros sobre Todos os Tipos de Triângulos), de Johann Muller Regiomontanus (1436-1476), uma contribuição para o desenvolvimento da trigonometria de autoria de Ana Carolina Costa Pereira, orientada pela Professora Dra. Bernadete Barbosa Morey, apresentada ao programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), no ano 2010, faz um estudo e discute a primeira obra Europeia sistemática que trata da trigonometria plana e esférica, independente da astronomia, faz um estudo de todos os tipos de triângulos planos e esféricos.

A dissertação "Um Olhar Histórico nas aulas de trigonometria: Possibilidades de uma prática pedagógica investigativa", de autoria de Gladis Bortoli, orientada pela professora Dra. Mirian Ines Marchi e Co-orientada pela professora Dra. Ieda Maria Giongo, apresentada ao programa de Pós-graduação do Centro Universitário Univates Lageados RS no ano 2012, busca explicar quais são as possibilidades da inserção da história da matemática no ensino e na aprendizagem da trigonometria presente no triângulo retângulo no Ensino Médio.

A dissertação "Estudo do sistema conceitual de trigonometria no ensino fundamental: uma leitura histórico-cultural", de autoria de Karina Rossa Fritzen, orientada pelo professor Dr. Ademir Damazio, apresentada ao programa de Pós-graduação em Educação da Universidade do Extremo Sul Catarinense - UNESC, Estado de Santa Catarina, 2011, tem como objetivo a análise do processo de elaboração do pensamento conceitual de trigonometria, particularmente o conceito de seno de um ângulo, tendo por base uma atividade de ensino planejada à luz da Teoria Histórico-Cultural.

A dissertação "Trigonometria: A mudança da prática docente mediante novos conhecimentos", de autoria de Thais de Oliveira, orientada pelo professor Dr. João Carlos Vieira Sampaio, apresentada ao programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências Exatas da Universidade de São Carlos (UFSCar-São Paulo) no ano de 2010, tem como objetivo investigar uma abordagem de ensino da trigonometria desde o triângulo retângulo até sua forma analítica no ciclo trigonométrico.

A dissertação “Geometria Esférica: Uma conexão com a Geografia”, de autoria de Irene da Conceição Rodrigues Prestes, orientada pelo Professor Dr. Vincenzo Bongiovanni, apresentada ao Programa de Pós-graduação da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) no ano de 2006, pretende contribuir com o processo de ensino e aprendizagem da geometria esférica, procurando subsidiar a implementação de propostas que visam à interação entre Matemática e Geografia.

O artigo “História da Matemática nas aulas de Trigonometria”, publicado nos Anais de VIII Encontro Nacional de Educação Matemática no ano 2004, da autoria de Francisco Canindé de Oliveira e da Professora Dra. Bernadete Barbosa Morey, apresenta um estudo de utilização de atividades de ensino com a aplicação da historia da matemática que mostra também que toda a teoria da trigonometria foi incluída na análise e até o final do século XVIII.

1.2.2 A utilização da História da Matemática

Utilizamos a história da matemática e tecemos diálogo com alguns teóricos que nos apontam caminhos nessa tendência em educação matemática. Dentre eles: Miguel e Miorim (2002, 2011), Valente, (2007), D Ambrosio (2007) e Valdés (2012), os quais mostram, em diferentes textos, que a investigação em história da matemática trata de diferentes temas.

No primeiro momento utilizamos a prática investigativa em história da matemática, com base nos estudos de Miguel e Miorim (2011), onde percebemos que tal prática investigativa se desenvolve em diferentes frentes e apresenta como temas principais: o desenvolvimento histórico de um conceito matemático, biografia de matemáticos, as relações da matemática com outras áreas do conhecimento humano.

Acreditamos que naturalmente, a pesquisa histórica resgata a essência da problemática vivida na Antiguidade, como essa problemática mobilizou aquela sociedade e como essa essência do passado pode ser conectada com o pensamento e as necessidades na atualidade, entendemos que desse ponto de vista do ensino da trigonometria esta bem caracterizada pelas suas dificuldades e a possibilidade da utilização da história da matemática como motivação de ensino/aprendizagem desse conteúdo da matemática.

Para D Ambrosio (2007), a história da matemática fornece condições para que assuntos atuais relacionados aos conteúdos trabalhados possam ser resgatados sob uma visão crítica, identificando os problemas ou as motivações que levaram à criação desses conteúdos em uma determinada época e, consequentemente, a utilidade dos mesmos no tempo vigente. Deste modo, são também esperadas as mudanças nas percepções dos alunos em relação à necessidade de se aprender Matemática.

Para Miguel e Miorim (2011) os questionamentos da investigação em história da matemática giram em torno das formas de conceber a relação entre a cultura matemática[10] e as formas de apropriação dessa cultura no presente, tanto nas práticas pedagógicas escolares, quanto nas de investigação acadêmica em matemática e educação matemática.

Quando tratamos da investigação em história da matemática verificamos a existência de um movimento amplo e diversificado, que faz com que essa investigação se constitua em campos de pesquisa autônomos. Miguel e Miorim (2011) destacam três grandes campos: a história da matemática propriamente dita, a história da educação matemática e a história na educação matemática, além desses campos os autores acrescentam ainda, Estudos Historiográficos, Teoria da História na ou da Educação Matemática e campos afins.

Segundo Miguel e Miorim (2002) a investigação em história da matemática propriamente dita é um campo do conhecimento ou conjunto cumulativo de ideias e resultados. Incluem neste campo todos os estudos de natureza histórica que investigam as dimensões da atividade matemática na história, bem como as práticas sociais que participam ou participaram da produção do conhecimento matemático. Partindo dessas primícias, acreditamos que dentre os seis campos apresentados pelos teóricos, a classificação que melhor se adéqua em nossa pesquisa é da história da matemática propriamente dita, onde o objetivo deste campo de investigação é mostrar, segundo Valdés (2006), que do ponto de vista do conhecimento mais profundo da própria Matemática, a história proporciona uma visão dos elementos matemáticos em sua verdadeira perspectiva, enriquecendo a

[10] Para ALLEC (2006, p.9) cultura matemática é toda percepção, noção e saber matemático que está intimamente ligado a todo ser humano que vive em sociedade.

concepção tanto do matemático, quanto do professor. Neste sentido o resgate dos problemas da antiguidade permite ao investigador conhecer as indagações e possíveis soluções propostas pela humanidade que se constituíram diante da necessidade gerada por uma sociedade com uma determinada cultura.

A prática investigativa contribui tanto para mudar a visão que se tem da matemática como da história. A primeira torna-se contextualizada, integrada com as demais áreas, tendo, portanto, uma imagem agradável, criativa e humanizada, enquanto que a segunda deixa de ser mostrada como uma coletânea de datas e documentos.

Este tipo de investigação mostra a história da matemática como um campo que vai além de um mero estudo das ideias matemáticas no tempo, mostrando que um objeto matemático dentro de um contexto histórico pode sair da obscuridade e ganhar sentido dentro da teoria.

Dessa forma, se estabelece uma *metodologia de pesquisa histórica* (Valente, 2007) que envolve a formulação de questões para os fatos ocorridos no passado, que são levados à posição de fontes de pesquisa por essas questões, com o objetivo de construir fatos históricos, representados pelas respostas a elas.

Valdés (2012), afirma que a matemática evolui de três maneiras diferentes: por evolução progressiva, por evolução escalonada e por evolução em recortes, as quais podem associar-se com determinados problemas resolvidos, dentre essas subdivisões, a evolução progressiva que embasa melhor nossa pesquisa, pois é uma característica das ciências, é a mais natural, que consiste no desenvolvimento lógico mediante cadeias de raciocínios que partem de princípios admitidos, claro que sempre manuseados frente ao formalismo matemático expressamente construído para isso e pelo fornecimento de inúmeros cientistas que em todo tempo se dedicaram à investigação da matemática, isso aumenta o conjunto de conhecimento humano.

Analisando o desenvolvimento da trigonometria em diferentes culturas fica bem claro, à luz da interpretação do texto de Valdés, de como o papel de vários estudiosos contribuíram para o desenvolvimento de tais trigonometrias para responder as necessidades práticas, de culturas diferentes e fizeram evoluir o conceito e o desenvolvimento das trigonometrias, pois como afirma Valdés o saber matemático evolui com o tempo.

1.3 A METODOLOGIA DA PESQUISA

Respondendo a questão norteadora da pesquisa: *Como surgiram as trigonometrias nas diferentes civilizações e quais as relações estabelecidas entre elas?*, utilizamos a pesquisa bibliográfica que, de acordo com Lakatos & Marconi (1986, p.57), “não é mera repetição do que já foi dito ou escrito sobre certo assunto, mas propicia o exame de um tema sob novo enfoque ou abordagem, chegando a conclusões inovadoras”.

Dialogamos também com a História da Matemática onde percebemos uma ciência de desenvolvimento de estruturas e ideias. Sendo assim, podemos utilizar a investigação histórica para obtermos um aprofundamento do conhecimento matemático gerado em cada contexto, desta forma Mendes (2006, p.79-80) afirma: “O percurso histórico permite estabelecer um diálogo entre o conhecimento aprendido e disseminado mecanicamente, a memória da prática manipulativa que utiliza os objetos matemáticos, os textos, os documentos, os relatos da prática e outros registros, de um modo geral, que os armazenam para torná-los públicos”.

Este diálogo ao qual o autor se refere tem como propósito estabelecer a produção de novos conhecimentos matemáticos a partir dos conhecimentos produzidos em outras gerações em uma dinâmica de armazenamento e seleção de informações que permitam ao indivíduo adicionar suas impressões ao conhecimento, que Mendes chama de “conhecimento experienciado”.

Em nosso estudo, utilizamos a história da matemática como meio para identificar o desenvolvimento das trigonometrias e suas transformações ocorridas ao longo da história, fizemos uma pesquisa bibliográfica e também a pesquisa em história das ciências, desta forma proporcionando o entendimento de como aconteceu o surgimento das trigonometrias nas diferentes civilizações e as relações estabelecidas entre elas.

Realizamos uma pesquisa bibliográfica, que está centrada nas contribuições teóricas de vários autores que desenvolveram teses, dissertações e produziram livros sobre as formas de utilização da história matemática e história das ciências que contribuíram e embasaram nosso estudo.

Desta forma evidenciamos as transformações, sofridas ao longo do tempo, da compreensão do conceito de trigonometria nas diferentes civilizações, Egípcia, Babilônica, Grega, Hindu, Árabe e Chinesa.

Utilizamos a pesquisa em história da ciência, onde mostramos que a geometria esférica possui implicações na trigonometria esférica, e caracteriza o surgimento desta última em diferentes povos, bem como sua utilização por estes, pois como afirma Kragh (2002, p.37), a história da ciência, quando bem conduzida, pode ter uma influência benéfica na ciência dos nossos dias.

Fundamentado na história da matemática, na pesquisa bibliográfica e também na pesquisa em história da ciência, pude evidenciar as relações estabelecidas entre as trigonometrias planas e esféricas, onde verificamos as suas características e peculiaridades.

No próximo capitulo apresento os primórdios da trigonometria (Plana e Esférica), nas diferentes civilizações, desde seu surgimento nos povos que viveram na Antiguidade (Egípcios, Babilônios, Gregos, Hindus, Árabes e Chineses), passando pelo medievo até o período Renascentista.

2. OS PRIMÓRDIOS DAS TRIGONOMETRIAS PLANA E ESFÉRICA

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresentamos um estudo histórico da trigonometria (Plana e Esférica), evidenciando as transformações de compreensão conceitual, sofridas ao longo do tempo, nas diferentes civilizações, desde seu surgimento nos povos que viveram na Antiguidade (Egípcios, Babilônios, Gregos, Hindus, Árabes e Chineses), passando pelo medievo até o período Renascentista. Neste sentido, evidenciamos o nascimento da trigonometria como ciência auxiliar da Astronomia e mostramos o surgimento da trigonometria como ciência independente na Europa.

Acreditamos que uma pergunta há muito tempo carece de resposta na história da matemática é “como se deu a origem da trigonometria?”. A resposta a esta pergunta é carregada de dúvida, entretanto, pode-se afirmar que o início do desenvolvimento da trigonometria se deu principalmente devido aos problemas gerados pela Astronomia, Agrimensura e Navegações, por volta do século IV ou V a.C., com os egípcios e babilônios.

Para entendermos a origem e o desenvolvimento do conceito de trigonometria, primeiramente devemos analisar qual o significado que podemos inferir à palavra Trigonometria. Sobre isso Brummelen apud Pereira (2010) tece alguns comentários:

> O significado do termo trigonometria do ponto de vista do desenvolvimento da ciência: “A própria palavra, que significa ‘medição de triângulo’, fornece pouca ajuda: é um termo muito antigo, do século XVI, e a trigonometria medieval utilizava círculos e seus arcos ao invés de triângulos, como seus valores de referência”. Se quiséssemos definir trigonometria como uma ciência, duas condições necessárias surgiriam imediatamente:
> • uma medida padrão quantitativa da inclinação de uma linha para outra linha;
> • a capacidade para, e interesse em, calcular os comprimentos dos segmentos de linha.
> Assim, a definição da trigonometria desenvolveu-se com o tempo, porém “o que fez a trigonometria uma nova ciência foi a capacidade de assumir um determinado valor de um ângulo e determinar a esse um comprimento correspondente” (PEREIRA, 2010, p.5).

Essa interpretação apresentada do conceito de trigonometria esta mais adequada a sua versão moderna, pois entendemos que a inclusão do raio unitário por Leonhard Euler possibilitou definir as funções trigonométricas aplicadas a um número não mais a um ângulo.

Porem a história da trigonometria[11] não é obra de um só homem ou nação. Sua construção foi feita em milhares de anos e está presente em todas as grandes civilizações.

Deve ser notado que, desde os tempos de Hiparco de Niceia[12](190 a.C.–120 a.C.), até os tempos modernos, não havia tal coisa como "razão" trigonométrica. Ao invés disso, os gregos e depois os hindus e os muçulmanos usaram linhas trigonométricas. Essas linhas primeiramente tomaram a forma de corda[13] só mais tarde meia corda, ou senos. Essa corda e linhas de seno então seriam associadas a valores numéricos, possivelmente aproximações e listados em tabelas trigonométricas.

Portanto os primeiros vestígios da trigonometria plana surgiram não só no Egito, mas também na Babilônia, a partir do cálculo de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes. Os babilônios tinham grande interesse pela Astronomia, tanto por razões religiosas, quanto pelas conexões com o calendário e as épocas de plantio, a esses fatos acrescentamos que não há registros de que babilônios e nem egípcios usaram em seus cálculos uma medida para ângulos.

As sociedades pré-helênicas não possuíam o conceito de medida de um ângulo e, consequentemente, eram estudados os lados do triângulo, um campo de estudo que seria melhor chamada de "Trilaterometria".

Morey (2001) informa que:

---

[11] **A trigonometria:** Foi algo completamente novo na história da geometria quantitativa, que surgiu na escola de Alexandria, e evoluiu como criação de Aristarco, Hiparco, Menelau e Ptolomeu. O estudo das trajetórias e das posições dos corpos celestes e o desejo de compreendê-los e também de obter mais recursos, e a geografia, foram as motivações para o desenvolvimento das ideias originais da trigonometria. Até então, adequadas as relações de semelhança entre lados de um triângulo retângulo eram utilizados, na prática, para resolver problemas práticos. Rooney (2012).

[12] **Hiparco de Niceia:** Foi um astrônomo greco-otomano, construtor de máquinas, exímio cartógrafo e matemático da escola de Alexandria, sendo um dos grandes representantes da Escola Alexandrina, do ponto de vista da contribuição para a mecânica. Trabalhou sobre tudo em Rodes (161 a.C.–126 a.C.). Hoje é considerado o fundador da astronomia científica e também chamado de pai da trigonometria por ter sido o pioneiro na elaboração de uma tabela trigonométrica, com valores de uma série de ângulos, utilizando a ideia pioneira de Hipsícles de Alexandria (240 a.C.–170 a.C.) inventou um método para a resolução de triângulos esféricos. Flood & Wilson (2013).

[13] **A definição de corda de circunferência:** É o segmento de reta que une dois pontos do círculo. A etimologia da palavra corda advém do latim *chorda* (corda de arco), quando esta terminologia é utilizada na matemática, entende-se que a mesma tem por finalidade fazer alusão ao segmento de reta que conecta dois pontos extremos de um arco do círculo, possibilitando a integração do raio ao ângulo central a qual intercepta a corda. Katz (2010).

> Ao falar dos estudos dos egípcios e babilônicos sobre triângulos, Boyer diz que: Dada a falta, no período pré-helênico, do conceito de medida de ângulo, um tal estudo seria melhor chamado "*Trilaterometria"* ou medida de polígonos de três lados (triláteros), do que trigonometria, a medida das partes de um triângulo. É com os gregos que vamos encontrar pela primeira vez um estudo sistemático das relações entre ângulos (ou arcos) num círculo e os comprimentos das cordas que os subtendem (MOREY, 2001, p.17).

De fato como nos primórdios a trigonometria estava relacionada aos lados do triângulo, ou seja, existia apenas relação de semelhança entre triângulos, podemos afirmar que o mais adequado chamar esse ramo da matemática de Trilaterometria. No entanto por volta dos séculos IX e VIII a.C. a matemática engatinhava na Babilônia. Os babilônios e os egípcios já tinham a álgebra e a geometria, mas somente o que bastasse para as suas necessidades práticas, não uma ciência organizada. Apesar de todo material algébrico que tinham os babilônios e egípcios, só podemos encarar a matemática como ciência, no sentido moderno da palavra, a partir dos séculos VI e V a.C. na Grécia.

Na Grécia antiga, entre os anos de 190 a.C. e 125 a.C., viveu Hiparco, um matemático que construiu a primeira tabela trigonométrica. Esse trabalho foi muito importante para o desenvolvimento da Astronomia, pois facilitava o cálculo de distâncias inacessíveis, o que lhe valeu o título de "pai da trigonometria". Os estudos da trigonometria esférica e, por conseguinte dos triângulos esféricos aparecem primeiramente com os gregos no trabalho de Menelau de Alexandria[14](70–140), que escreveu um livro sobre triângulos esféricos, chamado *Sphaerica* onde apresenta um teorema que se aplica a triângulos planos e esféricos, que serviu de base para todo desenvolvimento posterior nesse campo da matemática, o trabalho de Menelau marcou um ponto de virada na trigonometria esférica, tendo sido aplicado em Astronomia.

Um fato importante para os árabes/mulçumanos foi o incentivo que deram a astronomia, e, por conseguinte a matemática pelas suas necessidades práticas aquela ciência. Entre os campos da matemática, o que os árabes cultivaram com mais virtude pela sua aplicação à astronomia, foi a trigonometria. Pois para os

[14] **Menelau de Alexandria:** Foi um astrônomo e matemático grego, tendo estado em Alexandria até a sua juventude, mudando-se para Roma mais tarde, Menelau foi o primeiro a escrever a definição de triângulos esféricos, "o espaço incluído entre arcos de círculos máximos na superfície de uma esfera". Esses arcos são sempre menores que um "semi-círculo" ou ângulo de 180º. Tucker (2005). Posteriormente esse triângulo recebeu o nome de Triângulo Euleriano, que define-se como a porção da superfície esférica limitada por três arcos de circunferência máxima, menores que 180º ou, polígono esférico formado por três lados menores que 180º. Todo triângulo corresponde um triedro com vértice no centro da esfera a qual pertence o triângulo (ARANA, 2006, p. 23).

árabes a trigonometria esférica surgiu para resolver um problema aparentemente simples que era a seguinte pergunta, em que direção é Meca? O assunto teve origem nos califados islâmicos do Oriente Médio, África do Norte e Espanha entre VIII a XIV séculos.

Nesse sentido, Rooney (2012) afirma:

> Um incentivo para os avanços Árabes na geometria e topografia foi a necessidade de determinar a direção de Meca (*qibla*) em qualquer lugar do mundo, para que o devoto islâmico pudesse se voltar para a cidade sagrada para suas orações como manda o Alcorão ou Corão. (ROONEY, 2012, p.93)

Desta forma a necessidade dos islâmicos de rezar voltados, para Meca várias vezes ao dia foi um incentivo para o aperfeiçoamento na localização de direções, alavancando alguns ramos da matemática (geometria e trigonometria), também a Topografia e a Astronomia.

Figura 7: O devoto islâmico fazendo uma das orações feitas durante o dia[15]
Fonte: Site:www.historiapensante.blogspot.com

Portanto, os matemáticos islâmicos tinham grande interesse na utilização da trigonometria esférica, pois pela lei islâmica exige que os mulçumanos quando de suas orações durante todo dia estivessem voltados para Meca.

Tanto hindus, como os gregos, consideravam a trigonometria como uma ferramenta para a astronomia, essa trigonometria era mais aritmética do que geométrica. Mesmo que os hindus tenham adquirido seus conhecimentos de trigonometria dos gregos, o material em suas mãos tomou um novo formato. A maior obra dos gregos ficou conhecida como *Almagesto* (que significa “O grande tratado”),

[15] Fonte da figura disponível em: http://www.historiapensante.blogspot.co, acesso em 12 de março de 2014. De acordo com o Corão livro sagrado do Islã, o devoto islâmico tem por obrigação, fazer cinco rezas, espalhadas durante o dia, iniciando pela oração da alvorada, oração do meio dia, oração da tarde, oração do crepúsculo (por do sol) e por ultima a oração do inicio da noite.

o maior tratado de astronomia da antiguidade de Cláudio Ptolomeu[16] (90–170) continha uma trigonometria que se baseava na relação entre cordas de um círculo e os arcos centrais que subentendiam. No entanto os autores dos *Siddhantas*[17] transformaram a trigonometria em um estudo da relação entre metade de uma corda de um círculo e metade do ângulo subentendido no centro pela corda toda. Dessa forma, nasceu na Índia a precursora da função trigonométrica moderna que chamamos seno de um ângulo. A introdução da função seno representa a contribuição mais importante dos *Siddhantas* para a história da matemática. O termo "seno" é um acidente de tradução e provém da palavra hindu *jiva*.

Alguns estudiosos acreditam que a matemática chinesa e a matemática do mundo mediterrâneo antigo desenvolveram-se mais ou menos independentes até o momento em que a obra Os Nove Capítulos da Arte Matemática[18] chegou à sua forma final. Os textos chineses que procederam a obra citada (Reckoning[19] e Huainanzi[20]) são contemporâneos aos escritos dos matemáticos da Grécia Clássica.

Como afirma Cajori (2007, p.134), há evidências de uma ligação entre a matemática indiana e a chinesa. No quarto século e nos seguintes de nossa era, as embaixadas indianas na China e as visitas chinesas à Índia eram registradas pelas autoridades chinesas, mostrando que, indubitavelmente, houve um fluxo de matemática chinesa para a Índia.

---

[16] **Cláudio Ptolomeu:** Foi um cientista grego que viveu em Alexandria, uma cidade do Egito, é reconhecido pelos seus trabalhos em matemática, astrologia, astronomia, geografia e cartografia. Realizou também trabalhos importantes em óptica e teoria musical. Na época de Ptolomeu, a diferença entre astronomia e astrologia não era muito clara e, portanto, os estudos dessas áreas seguiam essa característica, diferente da concepção atual que distingue bem essas duas áreas. O grande mérito de Ptolomeu foi, baseando-se no sistema de mundo de Aristóteles, fazer um sistema geométrico-numérico, de acordo com as tabelas de observações babilônicas, para descrever os movimentos do céu. Tucker (2005).

[17] **Surya Siddhanta**: Era um livro-texto de astronomia hindu. Os hindus acreditam que o Surya Siddhanta foi produzido por revelação divina e veio de Surya o Deus do Sol. Katz (2010).

[18] **Nove Capítulos da Arte Matemática**: Foi um dos mais influentes livros chineses de matemática e é composto de cerca de 246 problemas em Agricultura, Engenharia e Agrimensura. Embora os autores sejam desconhecidos, eles deixaram uma contribuição enorme no mundo oriental. Os métodos foram feitos para a vida cotidiana e, gradualmente, passaram a ensinar métodos avançados. Os Nove Capítulos também contém elementos da eliminação de Gauss, e foi escrito aproximadamente em 1200 a.C. Katz (2010).

[19] **Writingson Reckoning:** O Livro Suan Shu Shu (escritos sobre acerto de contas) é um antigo texto chinês sobre matemática com cerca de sete mil caracteres, escrito em 190 tiras de bambu. Foi descoberto, em conjunto com outros escritos em 1984, quando arqueólogos abriram um túmulo em Zhangjiashan na província de Hubei, tendo tal tumba sido fechada em 186 a.C., conforme documentos da época. Katz (2010).

[20] **Huainanzi:** Este livro é uma coleção de ensaios, resultado dos debates literários e filosóficos entre Liu An e diversos sábios convidados à sua corte, especialmente os conhecidos como oito imortais de Huainan. A obra reúne conceitos do Taoísmo, do Confucionismo e do Legismo, apresentando princípios teóricos fundamentais da filosofia chinesa. Katz (2010).

Embora os chineses tivessem se destacado em outros campos da matemática, como a geometria sólida, teorema binomial, e complexas fórmulas algébricas, as primeiras formas de trigonometria não foram tão amplamente apreciadas como na matemática contemporânea indiana e islâmica.

A Yi-Xing[21] (683–727), matemático e monge budista foi creditado a criação de uma da tabela de tangente. Em vez de usarem a tabela de tangente, os chineses cedo usaram um substituto empírico conhecido como Chong cha, enquanto o uso prático da trigonometria plana em usar o seno, a tangente e a secante já eram conhecidos.

É frequentemente sugerido que algumas descobertas de matemáticos chineses são anteriores a suas contrapartes ocidentais. Um exemplo é o teorema de Pitágoras de Samos[22](a.C. 571/70–497/96 a.C.). Há controvérsias quanto a esta questão e a natureza precisa deste conhecimento na China.

Para Ronan (1987),

> Nem sempre é fácil determinar a quantidade de conhecimento científico que foi transmitida do Ocidente para a China, e vice-versa, pois linhas de pesquisas e invenções independentes, mas paralelas poderiam aparecer, e aparecem, em ambas as partes do mundo. (RONAN, 1987, p.28).

Um fato importante para entendermos o processo de transmissão de conhecimento entre ocidente e oriente referisse a origem do teorema de Pitágoras, pois temos informação de ter aparecido em ambas as partes do mundo, outro caso importante e a função tangente também existem essa duplicidade de surgimento, pois aprece primeiramente na China e depois no mundo Árabe ou vice-versa.

E segundo Rosa (2012, p.83), poucos registros se conhecem dos primeiros tempos da civilização chinesa. Além de muitos documentos terem sido feitos em bambu, material perecível, deve-se mencionar a decisão do Imperador Shi Huang-ti, em 213 a.C., de destruir todos os registros com informações e ensinamentos sobre as realizações da cultura chinesa. Assim, ainda que alguns

---

[21] **Yi-Xing:** Foi um chinês astrônomo, matemático, mecânico engenheiro, e monge budista da Dinastia Tang (618-907). Sua astronomia do globo celeste contou com um relógio, o primeiro de uma longa tradição de chineses relógios astronômicos. Katz (2010).

[22] **Pitágoras de Samos:** Foi um filósofo e matemático grego, criou uma sociedade chamada de pitagórico e segundo os pitagóricos, o cosmo é regido por relações matemáticas. A observação dos astros sugeriu-lhes que uma ordem domina o universo. Evidências disso estariam no dia e noite, no alterar-se das estações e no movimento circular e perfeito das estrelas. Por isso o mundo poderia ser chamado de cosmos, mostra a rotação da Terra sobre o eixo, mas a maior descoberta de Pitágoras ou dos seus discípulos (já que há obscuridades em torno do pitagorismo, devido ao caráter esotérico e secreto da escola) deu-se no domínio da geometria e se refere às relações entre os lados do triângulo retângulo. A descoberta foi enunciada no teorema de Pitágoras. Tucker (2005).

documentos tenham sido poupados, enquanto outros reconstituídos de memória, o material disponível não é suficiente, nem confiável, para se conhecer o exato nível de conhecimento alcançado nos primeiros séculos da matemática chinesa.

O Persa Nasir Eddin al-Tusi[23](1201–1274), foi um homem de larga cultura e um hábil astrônomo e matemático, deu contribuições importantes à trigonometria e à astronomia; foi responsável pelo primeiro tratado sistemático de trigonometria plana e esférica no ocidente medieval, intitulado de “Tratado sobre quadrilátero completo” publicado em 1260, tratando as trigonometrias (Plana e Esférica) como assunto independente da astronomia, em outro obra sua “sobre o anel” foi o primeiro a enumerar os seis casos distintos para resolução dos triângulo esférico qualquer (trigonometria esférica), dentre seus trabalhos incluem-se versões definitivas das obras de Euclides[24](325 a.C.–265 a.C.), Arquimedes Siracusa[25](287 a.C.–212 a.C.), Claudio Ptolomeu, e Teodósio da Bitínia[26](c.II–I a.C.) e ainda, tratados em álgebra, geometria e aritmética.

Wussing (1998) confirma.

> Um dos matemáticos mais importantes nessa época foi Nasir Eddin al-Tusi deu contribuições importantes à trigonometria e à astronomia; foi responsável pelo primeiro tratado sistemático de trigonometria plana e esférica, intitulado de *“Tratado sobre quadrilátero completo”* (1260), tratando

[23] **Nasir Eddin al-Tusi:** É talvez o primeiro matemático da antiguidade a trabalhar com a trigonometria como uma disciplina ou ramo separado da astronomia. Sua obra em trigonometria o levou a ser o primeiro astrônomo oriental de ter uma visão clara da trigonometria esférica. Ele inventou uma técnica geométrica chamada *“acoplamento Tusi”* que ajuda na solução do movimento linear na cinemática como uma soma de dois movimentos circulares. Nasir calculou o valor de 51' para a precessão dos equinócios e fez enormes contribuições para a construção e utilização de alguns instrumentos astronômicos, incluindo astrolábios e relógios de sol. Flood & Wilson (2013).

[24] **Euclides:** Nasceu na Síria estudou em Atenas, ganhou um enorme prestígio pela forma brilhante como ensinava Geometria e Álgebra na escola de Alexandria, onde foi convidado pelo próprio rei Ptolomeu do Egito, cerca de 300 a.C.. Conta-se que quando o rei pediu a Euclides que lhe indicasse um processo fácil de aprender Geometria, Euclides respondeu “Não há uma estrada real para a Geometria...”. A sua obra “Elementos” é gigantesca, dividindo-se em 13 volumes. Estes foram usados durante cerca de 20 séculos. Por isso se diz que a obra de Euclides constitui um dos maiores *best-sellers* da antiguidade sendo apenas ultrapassada pela Bíblia. Flood & Wilson (2013).

[25] **Arquimedes de Siracusa:** Nasceu na colônia grega de Siracusa, na Sicília. Filho de Fídias, um astrônomo grego, que costumava reunir em sua casa a elite de filósofos e homens da ciência foi um físico, matemático e inventor grego. A “Espiral de Arquimedes” e a “Alavanca” são algumas de suas invenções. Desenvolveu a ideia de “gravidade específica”, denominado de “Princípio de Arquimedes”, estudou em Alexandria, que na época era o centro intelectual do mundo. Teve contato com o que havia de mais avançado na ciência do seu tempo, convivendo com grandes matemáticos e astrônomos, entre os quais Eratóstenes de Cirene, o matemático que fez o primeiro cálculo da circunferência da terra. Rooney (2012).

[26] **Teodósio da Bitínia:** Foi um matemático e astrônomo da Grécia antiga conhecido por seu livro *Sphearica* composto de três livros em que o conhecimento esta relacionado à geometria esférica, utilizado especialmente para a astronomia. O primeiro livro contém 22 proposições, o segundo 23 e o terceiro 14, todos foram demonstradas de uma maneira puramente geométrica como os antigos geômetras. O objetivo do autor neste trabalho foi de estabelecer os princípios da astronomia e explicar os vários fenômenos associados a astronomia. Flood & Wilson (2013).

> a trigonometria como assunto independente da astronomia, foi o primeiro a tratar a trigonometria como uma disciplina discreta, ele é lembrado principalmente por ter inventado o astrolábio linear, que consistia numa vara de madeira graduada com uma linha chumbada e uma corda dupla. Com seu invento, mediu as altitudes das estrelas, bem como a direção de Meca. (WUSSING, 1998, p.87, tradução nossa).

A vasta obra de Nasir Eddin al-Tusi, principalmente em trigonometria contribui para o desenvolvimento desse tópico da matemática, embasando toda a trigonometria a parti de então, tronando-a uma disciplina e um ramo da matemática independente da astronomia no ocidente medieval.

Posteriormente surge Regiomontanus[27](1436–1476), que no seu trabalho mais original *"De Triangulis Omnimodis Libri Quinque"* (Cinco Livros sobre Todos os Tipos de Triângulos), foi um dos primeiros livros que apresentam trigonometria tal como estudamos atualmente e incluiu listas de perguntas para a revisão dos capítulos individuais, essa obra consiste de cinco livros, fez uma introdução completa à trigonometria e resolveu questões de Geometria plana e esférica. Foi a partir desse trabalho que a trigonometria se torna uma ciência independente da Astronomia conhecido na Europa.

Outro matemático a fazer contribuições a trigonometria foi Bartholomeu Pitiscius[28](1561–1613), quem usou a palavra "Trigonometria", pela primeira vez na seção final de seu livro *"Trigonometriae sive de solutione triangulorum Tractatus brevis et perspicuus",* obra composta de cinco livros sobre a trigonometria plana e esférica, publicado em Heidelberg em 1595. Na obra chamada de *"Scultetus Sphaericorum libri tres methodicé conscripti et utilibus scholiis expositi",* em 1600, corrigiu as tábuas de Georges Joachim conhecido como Rheticus[29](1514–1574), que

---

[27] **Johannes Muller von Konisgsberg:** Chamado também de Regiomontanus, foi um famoso matemático, astrólogo e cosmógrafo alemão do século XV. Em 1461 Regiomontanus deixou Viena com a família Bessarion e passaram os quatro anos seguintes viajando pelo Norte da Itália como um membro da família de Bessarion, procurando e copiando manuscritos matemáticos e astronômicos para os Bessarion, que possuía a maior biblioteca privada na Europa na época. Regiomontanus também aprendeu o conhecimento dos principais matemáticos italianos da época, como Giovanni Bianchinie Paolo dal Pozzo Toscanelli (1397–1482), que também tinham sido amigos de George von Peuerbach (1423–1461), durante sua permanência prolongada na Itália há mais de vinte anos antes. Flood & Wilson (2013).

[28] **Bartholomeu Pitiscius:** Foi um astrônomo e teólogo, introduziu a palavra "trigonometria" para a língua Inglesa e francesa em traduções que tinham aparecido em 1614 e 1619, respectivamente. Pitiscius às vezes é creditado como tendo inventado o ponto decimal, o símbolo que separa inteiros de frações decimais, que aparece em suas tabelas trigonométricas e posteriormente foi aceito por John Napier (1550–1617), em seus estudos sobre logarítmicos. Rooney (2012).

[29] **Georges Joachim Rheticus:** Foi um matemático e astrônomo austríaco e o único discípulo de Copérnico, conhecido por sua assistência na obra *Sobre as Revoluções das Esferas Celestes,* no verão de 1539 Rheticus chegou em Frombork (Frauenburg), a fim de aprender com o próprio

é uma versão revisada do trabalho de Pitiscius, foi publicada com o nome *"Trigonometriae sive de dimensione triangulorum libri Quinque"* (Livro de Trigonometria, ou a Medição de Triângulos). Este trabalho está dividido em três seções.

Nessa obra a primeira seção é dividida em cinco livros, no primeiro livro, ele introduziu as principais definições e teoremas da trigonometria plana e esférica. No segundo livro, ele definiu as seis funções trigonométricas dando resultados sobre as propriedades de um triângulo conhecido, a fim de resolvê-lo usando essas funções trigonométricas, e também deu técnicas para a construção de tabelas de funções trigonométricas. Por exemplo, ele mostra como construir tabelas de seno com base em conhecimento dos valores do seno 45°, seno 30° e do seno 18°. O terceiro dos cinco livros é dedicado à trigonometria plana e consiste de seis teoremas fundamentais. Talvez devêssemos notar que Pitiscius realmente chama esses "teoremas" de "axiomas", mas de fato são teoremas no sentido usual dado com provas. O quarto livro é composto por quatro teoremas fundamentais sobre trigonometria esférica, enquanto o quinto livro prova uma série de proposições sobre as funções trigonométricas.

Rheticus chamava o seno de "perpendiculum" e ao co-seno "base" do triângulo com hipotenusa fixa. Outros autores deram outros nomes às funções trigonométricas mostraremos isso ao longo do texto.

Os avanços que vieram depois são devidos a Nicolau Copérnico[30](1473–1543) em sua obra *"De Revolutionibus Orbium Coelestium*", Das revoluções das esferas celestes, considerada o ponto de partida da astronomia moderna e ao seu aluno Rheticus, em sua obra *"Opus palatinum de triangulis"*, provavelmente o primeiro livro que aparece às definições das seis funções trigonométricas diretamente em termos de triângulos retângulos ao invés de círculos, com tabelas para todas as seis funções trigonométricas. Esse trabalho foi terminado em 1596

Copérnico sobre a cosmologia, esse encontro importante entre Rheticus e Copérnico precipitou o início da astronomia moderna. Tucker (2005).

[30] **Nicolau Copérnico**: Foi um astrônomo e matemático Polonês que desenvolveu a teoria heliocêntrica do Sistema Solar. Foi também cônego da Igreja Católica, governador e administrador, jurista, astrólogo e médico. Sua teoria do Heliocentrismo, colocou o Sol como o centro do Sistema Solar, contrariando a então vigente Teoria Geocêntrica (que considerava a Terra como o centro). Tucker (2005).

pelo aluno de Rheticus, Valentino Otho[31](1550?–1605), escreveu ainda o livro *"De triangulis globias sine angulo recto libri Quinque"*.

François Viète[32](1540–1603), um dos matemático mais importante do século XVI, a partir de 1571, publicou *"Canonem mathematicum liber singularis",* um livro de trigonometria, em abreviado *"mathematicum Canonen",* onde há muitas fórmulas de seno e cosseno, criou várias tabelas trigonométricas estas tabelas trigonométricas superaram as de Regiomontanus (Triangulate Omnimodis de 1533) e a de Rheticus (1543, anexo ao De Revolutionibus de Copérnico ...), outra obra sua chamada de *"Cânon mathematicus seu ad triangula cum appendicibus"*, nela desenvolveu técnicas de resolução dos triângulos planos e esféricos e apresenta a ideia de decompor em triângulos retângulos os triângulos oblíquos (Planos e Esféricos) para determinar todas as medidas dos seus lados e ângulos, utilizou também as seis funções trigonométricas seus trabalhos adicionou um tratamento analítico à trigonometria em 1579. Desenvolveu também várias identidades trigonométricas tais como:

$$\mathrm{sen}(a) = \mathrm{sen}(60^0 + a) - \mathrm{sen}(60^0 - a)$$

$$\mathrm{cossec}(a) + \mathrm{cotg}(a) = \mathrm{cotg}\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$\mathrm{cossec}(a) - \mathrm{cotg}(a) = \mathrm{tg}\left(\frac{a}{2}\right)$$

Analisando a trigonometria de Viète, assim como sua álgebra, são caracterizadas pela generalidade. Ele foi o verdadeiro fundador de uma abordagem analítica generalizada para a trigonometria, introduziu o triângulo polar no estudo da trigonometria esférica, as fórmulas de ângulo duplo para seno e cosseno já eram conhecidas, mas Viète, usando de engenhosa manipulação, obteve as fórmulas do produto (ou logarítmicas), as fórmulas da tangente [tg(A/2), tg(B/2), tg(C/2)], num triângulo ABC de lados a, b, c e perímetro e as fórmulas do ângulo múltiplos

---

[31] **Valentin Otho:** Foi um matemático e astrônomo alemão aluno de Rheticus, contribui com os trabalhos em 1575 de Georg Joachim Rheticus na construção suas tabelas trigonométricas. No ano seguinte, eles foram para Kaschau na Hungria onde Rheticus morreu. Assim, Otho herdou o *De revolutionibus orbium coelestium* obra de Nicolau Copérnico que Rheticus tinha publicado em 1543 em Nuremberg. Brummelen (2009).

[32] **François Viète:** Foi um francês matemático cujo trabalho sobre a nova álgebra foi um passo importante para a álgebra moderna, devido a sua utilização inovadora de letras como parâmetros em equações. Ele era um advogado de profissão, e serviu como um conselheiro privado de Henry III e Henrique IV. Entre 1564 e 1568, Viète preparou para sua aluna, Catarina de Parthenay, alguns livros didáticos de astronomia e trigonometria e um tratado que nunca foi publicado *"Harmonicon coelestis".* Brummelen (2009).

[cos(nx), sen(nx), etc...], no livro *"Variorum de rebus mathematicis",* apareceu um equivalente da leis da tangentes da trigonometria plana $\dfrac{\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\cdot(A+B)\right]}{\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\cdot(A-B)\right]}=\dfrac{a+b}{a-b}$, com A e B, ângulos e a e b os lados respectivos. Essa relação, só foi publicada pelo matemático dinamarquês Thomas Fincke[33](1561–1656) no livro *"Geometria rotundi libra XIV"* sua obra mais importante escrita em Basel 1583, apesar que essa relação é creditada a Viète, essa obra foi concebida como um livro e foi enviado para Regiomontanus para mais detalhes, baseada em obras de Peter Ramus[34](1515–1572), de quem tomou a palavra "*rotundi*" do título, que significa círculo e esfera, e a palavra "raio". O livro apresenta os termos "tangente" e "secante". Essa obra, foi escrita em latim, e é dividida em 14 livros, mas seria mais apropriado pensar neles como capítulos. A teoria fundamental do círculo é apresentada em Livros 1 a 4, trigonometria plana é estudado nos livros 5 a 11, e os últimos três livros tratam trigonometria esférica. A maioria dos 14 Livros possui legendas.

A transição das razões trigonométricas para as funções periódicas começou com Viète no século XVI, teve novo impulso com o aparecimento do cálculo Infinitesimal no século XVII e culminou com os trabalhos de Euler.

Com Leonhard Euler[35](1707–1783) a trigonometria toma sua forma atual, quando adota a medida do raio de um círculo como unidade e define funções aplicadas a um número e não mais a um ângulo como era feito até então, o

[33] **Thomas Fincke:** Nascido em Flensburg (Alemanha), foi um dos cientistas mais importantes e significativos da Dinamarca, durante o século XVII, um matemático e astrólogo e médico no início da ciência moderna, um representante do humanismo e um organizador acadêmico influente. Brummelen (2009).

[34] **Peter Ramus:** Foi um lógicista, humanista e reformador educacional francês nascido na localidade de Cuts na Picardia, membro de uma família nobre, mas empobrecida: seu pai era um fazendeiro e o pai de seu avô de um carvoeiro. Ele foi morto durante o massacre da noite de São Bartolomeu, publicou mais de 50 obras em vida, entre elas temos nos campos da lógica e retórica, gramática, matemática, astronomia e ótica. Cajori (2007).

[35] **Leonhard Euler**: Foi um grande matemático e físico suíço de língua alemã que passou a maior parte de sua vida na Rússia e na Alemanha, fez importantes descobertas em campos variados em cálculo e grafos. Também fez muitas contribuições para a matemática moderna no campo da terminologia e notação, em especial para a análise matemática, como a noção de uma função matemática. Além disso, tornou-se célebre por seus trabalhos em mecânica, óptica, e astronomia. Euler é considerado um dos mais proeminentes matemáticos do século XVIII. Uma declaração atribuída a Pierre-Simon Laplace (1749–1823), que foi o último matemático importante do século XVIII, manifestada sobre Euler na sua influência sobre a matemática é: *"Leiam Euler, leiam Euler, ele é o mestre de todos nós".* Euler foi um dos mais prolíficos matemáticos, calcula-se que toda a sua obra reunida teria entre 60 e 80 volumes. Suas Principais obras: "*Introductio in analysin infinitorum", "Institutiones calculi differentialis", "Institutiones calculi integrali", "Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum", "Mechanica; Letters to a German princess".* Tucker (2005).

tratamento analítico das funções trigonométricas consta no livro *“Introductio in Analysin Infinitorum”,* (Introdução à análise de quantidades) de 1748, considerado a obra chave da Análise Matemática. Nele, o seno deixou de ser uma grandeza e adquiriu o status de número obtido pela ordenada de um ponto de um círculo unitário.

De acordo com Kennedy (1992),

> A trigonometria, talvez mais que outros ramos da matemática, desenvolveu-se como resultado de uma interação contínua e fértil entre oferta e demanda: a oferta de teorias matemáticas aplicáveis e técnicas acessíveis em qualquer momento e a demanda de uma única ciência aplicada, a astronomia. A relação era tão íntima que só no século XIII tornou-se proveitoso considerar os dois assuntos como tópicos separados. (KENNEDY, 1992, p.01).

Nesse breve relato apresentamos o desenvolvimento das trigonometrias (plana e esférica) em diferentes culturas, ao longo dos séculos e a contribuição de vários estudiosos para o desenvolvimento dessas trigonometrias.

Assim, a trigonometria, que no seu primórdio serviu à Agrimensura e à Astronomia, tornou-se primeiramente autônoma para depois ser incorporada a Análise Matemática.

No decorre desse capitulo, vamos discorrer e evidenciar com auxilio da história da matemática e da ciência, e fundamentado na pesquisa bibliográfica, como surgiram as trigonometrias nas civilizações dentre elas: Egípcia, Babilônica, Grega, Hindu, Árabe e Chinesa e quais as relações estabelecidas entre elas ao longo da história, passando pelo medievo até o período Renascentista. Finalizando esse capitulo evidenciamos o nascimento da trigonometria como ciência auxiliar da Astronomia e mostramos o surgimento da trigonometria como ciência independente na Europa.

2.2 A TRIGONOMETRIA NO EGITO

A localização geográfica do Egito Antigo se limita às áreas próximas ao Nilo, que se encontram entre os desertos da Arábia, a leste, e da Líbia, a oeste. Ao norte se encontra o Mar Mediterrâneo, onde deságua o rio Nilo. O ciclo de cheia desse rio, que acontecia de acordo com as estações do ano, determinou o tipo de cultivo na agricultura praticada.

Durante o verão, que acontece de junho a setembro, ocorriam as cheias, que invadiam os vales e deixavam aluviões no solo (sedimentos muito férteis). Depois que a água recuava no início de outubro era hora de semear a terra e começar o cultivo de alimentos durante o outono.

Figura 8: Mapa do Egito Antigo[36]
Fonte: Site:www.historiadomundo.com.br

Por volta do ano 3000 a.C., o Egito transformou-se numa nação única. Nesse período houve o desenvolvimento da agricultura, o que levou por sua vez à necessidade de saber a altura da estação das enchentes do Nilo e da elaboração de um calendário. O estudo da astronomia deu resposta a estas necessidades.

Ao longo do Nilo havia duas regiões: o Delta, conhecido como Baixo Egito e o Vale, Alto Egito. Em ambas as regiões, foram construídas sociedades com base no parentesco, as chamadas gens. Essas comunidades baseavam-se na agricultura

---

[36] Fonte da figura disponível em: http://www.historiadomundo.com.br, acesso em 30 de junho de 2013.

e na criação de animais. Com o passar do tempo cada pequeno clã foi se agrupando e formaram pequenas sociedades urbanas, os nomos. Cada Nomo era uma cidade independente. Os integrantes exerciam um tipo de trabalho coletivo baseado principalmente, na construção civil. Construíam canais e reservatórios de água com o intuito de facilitar a irrigação nas plantações.

Com o tempo, a produção dos nomos começou a exceder, o que gerou outro tipo de desenvolvimento econômico baseado em trocas de mercadorias entre essas cidades. Esse novo estágio gerou uma evolução econômica e cultural, visto que desenvolveu-se a escrita, os famosos hieróglifos. Há que se ressaltar que, a maneira de governar também mudou, nesse momento, quem governava era chamado de rei e pertencia a uma família com privilégios. Por causa dessa aproximação econômica entre eles, os nomos se fundiram por conquistas políticas ou tratados e foram transformando-se em reinos maiores que ficaram conhecidos como Baixo Egito e Alto Egito, ao norte e ao sul, respectivamente.

Mais tarde, esses dois reinos foram unificados sob o comando de Menés, que depois se tornou o faraó do Egito, comandando todo o território. Supostamente Menés idealizou a construção de uma nova capital para o Egito unificado, Mênfis, que foi seu grande legado. Não se sabe ao certo, mas é possível que ela tenha sido erguida entre o Alto e o Baixo Egito. O governo de Menés subjugou a autonomia dos nomos e de seus líderes, que se tornaram meros governadores do faraó. A partir daí teve início a era Dinástica do Antigo Egito.

O Período dinástico foi de grande importância, porque é nesse período que foram construídas as pirâmides. É quando se constata o maior crescimento econômico do Egito e também a expansão de suas terras. A unificação deu poder absoluto para os faraós. A monarquia era teocrática, ou seja, o faraó era respeitado e adorado como uma divindade, ele e seu governo eram sagrados. O faraó não era só um chefe administrativo, era também chefe religioso, militar e juiz supremo.

A primeira fase do período dinástico foi chamada de Antigo Império. O início foi marcado por prosperidade e os governantes mais poderosos foram Queóps, Quefrén e Miquerinos. Eles pertenciam à quinta dinastia, a família mais importante do Egito até então. Seguindo a tradição, foram os responsáveis pela construção das pirâmides de Gizé, usadas para abrigá-los depois da morte. Esse período de prosperidade teve fim depois de uma série de revoltas organizadas pelos administradores dos nomos, que queriam enfraquecer o poder dos faraós. O resultado foi uma guerra civil que desorganizou toda a sociedade egípcia e provocou enormes mazelas.

Os nobres do Alto Egito uniram forças através da figura do faraó e reconquistaram o poder no Egito, para tentar controlar a situação de caos que viviam. Depois que os trabalhos coletivos foram retomados na sociedade e as classes mais baixas adquiriram alguns direitos (como ingressar no exército), a situação econômica se estabilizou, as doenças diminuíram e os conflitos foram finalmente combatidos. Esse período é conhecido como Médio Império.

O crescimento territorial foi muito grande nesse período, os egípcios conseguiram conquistar a Núbia e a Palestina, o que trouxe mais riquezas, pois lá encontraram metais preciosos como ouro e cobre. Esse novo período de prosperidade atrai as tribos hebraicas, que migram para o Egito. Mas eles não foram os únicos a chegar.

Um povo nômade, vindo da Ásia, invadiu o Egito e conseguiu conquistá-lo e o principal motivo foi sua superioridade militar em relação aos egípcios. Os hicsos, como são conhecidos, lutavam montados em cavalos e possuíam enorme potencial em tecnologia de guerra que o exército egípcio não tinha. Dessa forma, eles instalaram-se no Delta do Nilo e assumiram o controle, subjugando o poder dos faraós e colocando fim a esse período.

O Novo Império teve início depois da expulsão dos hicsos do Egito. Com maior força militar, desenvolvida por influência dos próprios invasores, os egípcios conseguiram se unir e reconquistar o território. Depois que o poder foi recuperado, começou novamente uma expansão das fronteiras chegando até a Mesopotâmia. Assim como o território, o comércio também cresceu, chegou até a Ásia e atravessou o Mediterrâneo. Fizeram dos hebreus, que habitavam o Egito, escravos em suas obras de reconstrução. Porém, mais tarde, o movimento de libertação, liderado por Moisés, promoveu a retirada deles do local.

A nova centralização do poder nas mãos do faraó permitiu a Amenófis fazer uma reforma religiosa, transformando o politeísmo em monoteísmo, para controlar o poder dos sacerdotes que ameaçavam fazer uma revolta. Depois de Amenófis, o governo de Tutancâmon permitiu que os templos dos deuses politeístas fossem abertos novamente e considerou legais as práticas religiosas derrubadas por seu pai.

Já sob a liderança de Ramsés II, os egípcios sofreram ameaças de invasão, mas conseguiram vencer algumas batalhas para evitar a conquista de outros povos. O fim do Novo Império deu-se por causa dos conflitos entre os monarcas e o poder religioso dos sacerdotes, que Amenófis tentou evitar. Além desses conflitos, a classe de camponeses também se rebelou contra os tributos abusivos e o estado de miséria em que vivia em contradição à vida de luxo que os chefes de estado tinham. Assim, o poder dos faraós foi descentralizado novamente, o Egito foi dividido em Alto e Baixo Egito, enfraquecendo o governo e deixando o país suscetível a invasores estrangeiros.

Por outro lado, a administração do território levou à necessidade de registrar e de calcular para se proceder, por exemplo, a cobrança de taxas. Assim, por volta do ano 3000 a.C., os egípcios tinham já desenvolvido um sistema de escrita, os hieróglifos. Também por esta altura aparecem as primeiras pirâmides. Os numerais escritos em hieróglifos encontram-se em túmulos, em monumentos de pedra e cerâmica, e estes dão pouca informação sobre como eram realizados os cálculos com o sistema numérico desenvolvido. Ao passarem a utilizar o papiro para fazer os seus registros, os egípcios desenvolveram outro sistema de escrita mais rápido, a escrita hierática.

Na matemática, também tiveram grandes avanços. A matemática egípcia sempre foi essencialmente prática. Quando o rio Nilo estava no período das cheias, começavam os problemas para as pessoas. Para resolver este problema foram desenvolvidos vários ramos da matemática, entre eles a geometria e a trigonometria, buscando dar resposta a essas necessidades práticas.

Para Roque (2012):

> Pode-se falar de “matemática” babilônica ou egípcia tendo em mente que se trata de uma prática distinta daquela atualmente designada por esse nome. Houve um período no qual tal atividade envolvia sobre tudo ao registro de quantidade e operações. Em seguida, ao mesmo tempo em que uma parcela da sociedade começou a se dedicar especificamente à matemática, as práticas que podem ser designadas por esse nome teriam passado a incluir também procedimentos para resolução de problemas numéricos, tratados como “algébricos” pela historiografia tradicional. (ROQUE, 2012, p.39).

Nesse sentido os Egípcios também criaram uma geometria elementar (que significava cálculo de áreas das figuras planas conhecidas e também de seus volumes) e uma trigonometria básica (esticadores de corda) a função dos esticadores de corda, considerados os primeiros agrimensores, tinha a incumbência de fazer a demarcação de terras, mediam o terreno com cordas nas quais uma unidade de medida estava marcada. Com isto procedeu-se a um princípio de cálculo de áreas, raízes quadradas e frações. Também sabemos que os egípcios conheciam as relações métricas em um triângulo retângulo e já utilizavam o teorema de Pitágoras.

Devido às cheias do Nilo, os habitantes das margens precisavam medir seu terreno periodicamente para efetuar o cálculo da porção do terreno perdido para o vizinho. Essas medições eram efetuadas com cordas por encarregados do governador (os esticadores de corda).

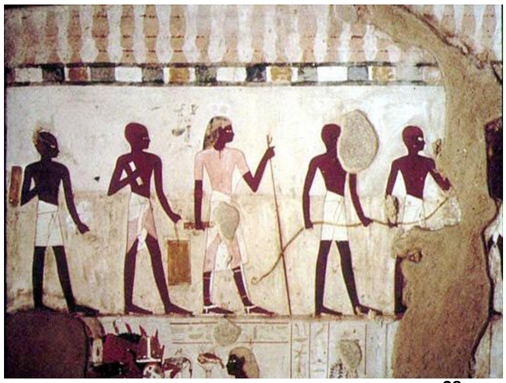


Figura 9: Esticadores da Corda[37] **Figura 10: Esticadores da Corda**[38]
Fonte: Site:www.matematicaprofissional.blogspot.com

Embora as medições fossem bastante precisas, dificilmente a área do terreno depois da cheia cabia um número inteiro de vezes na área do terreno antes das cheias. Para contornar este tipo de problema, os egípcios criaram os números fracionários, que eram representados por frações. Nesse sentido os egípcios utilizavam com frequência a fração 2/3, a qual era representada através de um símbolo hierático (como se fosse um padrão). Também eram hábeis na decomposição de frações em frações unitárias, isto é, frações onde o numerador é 1. Acredita-se, pelos registros de cálculos contidos no papiro Rhind, que dispunham de técnicas inteligentes de decomposição em frações unitárias. Por exemplo, a fração 3/5 era representada como a soma (1/3)+(1/5)+(1/15).

Os egípcios também utilizaram a trigonometria nas medições das pirâmides, essa técnica apareceu no Egito (1500 a.C. aproximadamente) a ideia de

[37] Fonte da figura disponível em: http://www.matematicaprofissional.blogspot.com, acesso em 14 de setembro de 2013, Esticadores de corda, pintura no túmulo de Menna (século XIV a.C.).
[38] Fonte da figura disponível em: http://www.matematicaprofissional.blogspot.com, acesso em 14 de setembro de 2013, Esticadores de corda, pintura no túmulo de Djeserkareseneb (1405 a 1395 a.C.).

associar sombras projetadas por uma vara vertical a sequências numéricas, relacionando seus comprimentos com horas do dia (relógios de sol).

Os mais antigos vestígios da aplicação da agrimensura, remonta ao Antigo Egito através de papiros e pinturas em monumentos ou tumbas funerárias, as quais nos ensinam a aplicação desta profissão, o agrimensor era um funcionário nomeado pelo faraó com a tarefa de avaliar os prejuízos das cheias e restabelecer as fronteiras entre as diversas propriedades.

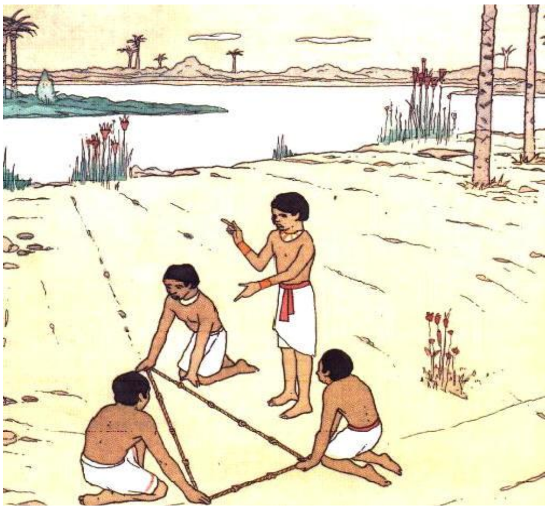


Figura 11: Agrimensores Egípcios[39]

Figura 12: Construção de um ângulo reto[40]

Fonte: Site:www.catedu.es/matematicas_mundo.

Quando o rio Nilo voltava ao seu leito normal, os egípcios chamavam os "esticadores de corda" (agrimensores da época) para fazerem a demarcação dos terrenos às margens do rio. Eles sabiam que o triângulo de lados 3, 4 e 5 são os lados de um triângulo retângulo e servia para traçar uma perpendicular, desta forma usavam uma corda com nós a igual distância e dobravam esta corda a altura do 3 nó, depois dobravam até a altura de mais 4 nós e juntavam o último nó há 5 unidades, com o nó inicial, obtendo assim, o triângulo retângulo.

Vale observar que, a expedição militar e cientifica que o imperador Napoleão Bonaparte realizou ao Egito trouxe consigo, entre inúmeras antiguidades, uma pedra encontrada em agosto de 1799 por soldados franceses que trabalhavam sob ordens de um oficial chamado Bouchard, por isso esta data é conhecida como a "redescoberta do Egito Antigo", eles estavam restaurando e preparando os alicerces

[39] Fonte da figura disponível em: http://www.catedu.es/matematicas_mundo, acesso em 06 de setembro de 2013, Agrimensores egípcios medindo os terrenos, após as enchentes do Nilo.
[40] Fonte da figura disponível em: http://www.catedu.es/matematicas_mundo, acesso em 15 de abril de 2014, construção de um ângulo reto.

para ampliação de um antigo forte medieval, posteriormente chamado de Forte de São Juliano nas proximidades da cidade egípcia de Rachid (que significa Roseta, em árabe), localizada à beira do braço oeste do Nilo, perto de Alexandria, junto ao mar. Dois anos depois, pelo tratado de Alexandria, o achado foi cedido aos ingleses e hoje se encontra no Museu Britânico de Londres, pesando cerca de ¾ de tonelada, mede 118 cm de altura, com 77 cm de largura e 30 cm de espessura, sendo composta de granito negro.

Por ordem de Napoleão Bonaparte [41] a estela [42] foi reproduzida e litografada e vários cópias enviadas a diversos especialistas em línguas mortas. Entretanto, passaram-se 23 anos desde a data de sua descoberta até que um homem pudesse decifrar integralmente o seu conteúdo, o que coube ao francês Jean François Champollion(1790–1832), foi um linguista, historiador e egiptólogo francês, considerado o pai da egiptologia, a ele se deve a decifração dos hieróglifos egípcios, e quem decifrou os escritos egípcio, contidos nessa pedra de Roseta, sua inscrição registra um decreto promulgado em 27 de março de 196 a.C., na cidade de Mênfis, em nome do rei Ptolomeu V Epifânio, registrado em três parágrafos com o mesmo texto: o superior está na forma hieroglífica do egípcio antigo, o trecho do meio em demótico, variante escrita do egípcio tardio, e o inferior em grego antigo.

Figura 13: Pedra de Roseta[43]
Fonte: Site:www.mundoeducação.com.br

[41] **Napoleão Bonaparte:** Originalmente Napoleone di Buonaparte, nasceu em Ajaccio 15 de agosto de 1769 e morreu em Santa Helena, a 5 de maio de 1821 foi um líder político e militar durante os últimos estágios da Revolução Francesa. Adotando o nome de **Napoleão I**, foi imperador da França de 18 de maio de 1804 a 6 de abril de 1814, posição que voltou a ocupar por poucos meses em 1815 (20 de março a 22 de junho). Sua reforma legal, o Código Napoleônico, teve uma grande influência na legislação de vários países. Através das guerras napoleônicas, ele foi responsável por estabelecer a hegemonia francesa sobre a maior parte da Europa. Divalte (2002).

[42] **Uma estela:** É uma coluna monolítica ou pedra destinada a inscrições, que poderiam ser governamentais ou religiosas, e era muito utilizada no antigo Egito. Divalte (2002).

[43] Fonte da figura disponível em: http://www.mundoeducação.com.br, acesso em 23 de agosto de 2013.

Quando se estuda a matemática do antigo Egito são citadas diversas informações a respeito de registros matemáticos primitivos encontrados nessa região, tais como tabuletas de barro, pedras e papiros. Estes servem como fonte de conhecimento matemático e auxílio para pesquisadores e estudiosos da área, para melhor entendimento da metodologia utilizada naquela época.

No século XVIII, foram descobertos vários papiros em escavações no Egito. E do ponto de vista da matemática os mais importantes são os Papiros de Moscou e o Papiro de Rhind. E quase tudo que sabemos sobre a matemática dos antigos egípcios se baseia nesses dois grandes papiros.

Figura 14: Papiro Rhind[44]
Fonte:Site:www.uol.com.br

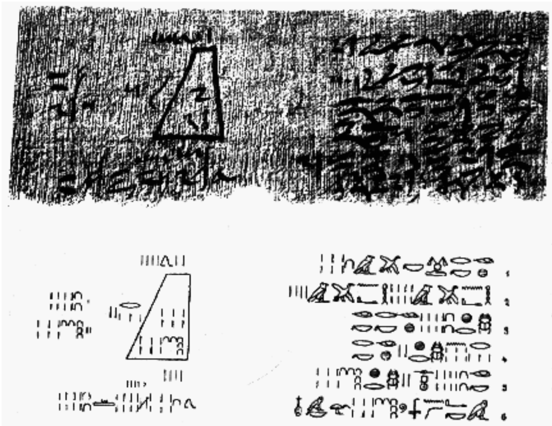


Figura 15: Papiro Moscou[45]
Fonte:Site:www.matematica.br

Estes papiros trazem uma série de problemas e coleções matemáticas em linguagem hieroglífica, que só após Champollion ter decifrado os escritos na pedra de Roseta, foi possível reconhecer as preciosidades matemáticas contidas neles.

O primeiro foi comprado em 1855, pelo advogado, egiptólogo e antiquário escocês, Alexander Henry Rhind (1833–1863) viajou, por razões de saúde, ao Egito em busca de um clima mais ameno, e lá começou a estudar objetos da Antiguidade, adquiriu o papiro na cidade de Tebas, às margens do Rio Nilo, tal documento havia sido descoberto no templo mortuário de Ramsés II (terceiro faraó da décima nona dinastia egípcia). Rhind morreu cinco anos mais tarde e o seu papiro foi adquirido pelo Museu Britânico de Londres. Em homenagem ao antigo dono, esse papiro ficou conhecido como Papiro de Rhind, continha textos matemáticos, está escrito em hierático, e é datado de 1.650 a.C. e tem aproximadamente 5,5 m de comprimento e

[44] Fonte da figura disponível em: http://www.uol.com.br/rhind.html, acesso em 10 de julho de 2013.
[45] Fonte da figura disponível em: http://www.matematica.br/historia/pmoscou.html, acesso em 10 de julho de 2013.

32 cm de largura, é conhecido também por Papiro Ahmes, no texto consta que foi copiado de um manuscrito, de cerca de, 200 anos antes, Ahmes é o nome do escriba egípcio que o copiou, contém 84 problemas, dos quais quatro fazem menção ao *seqt*[46] de um ângulo, além disso, é possível que os conhecimentos contidos neste Papiro sejam provenientes de estudos do arquiteto Imhotep[47], que teria sido um dos responsáveis pela construção da pirâmide do faraó Djezer (7000 a.C.).

A publicação do Papiro de Rhind foi realizada em 1927, no entanto, quando foi adquirido pelo Museu Britânico apresentava um tamanho menor, pois faltava uma parte. Alguns anos depois esse desfalque foi encontrado por estudiosos junto a uma aquisição de Edwin Smith na qual se acreditava que seriam papiros medicinais. A descoberta foi feita por especialistas da Sociedade Histórica de Nova York em 1932 que doou o pergaminho para o Museu Britânico completando assim o Papiro de Rhind.

Conhece-se pouco sobre a verdadeira intenção do Papiro de Rhind. Alguns historiadores defendem a ideia de que o mencionado papiro representa um guia de matemática do antigo Egito, pois é considerado o melhor texto de matemática da época, no entanto, existem indicações de que poderia ser apenas um documento com intenções pedagógicas ou mesmo um simples caderno de anotações de um aluno.

Contador (2008) afirma que o Papiro de Ahmes é considerado o documento matemático mais antigo que a história registrou, inclusive com autor. Nesse papiro não ficou bem claro ao expressar o significado da palavra *seqt*, mas, pelo contexto, pensa-se que o *seqt* de uma pirâmide regular seja equivalente, hoje, à cotangente de um ângulo.

Os egípcios usavam trigonometria para seu benefício em Agrimensura e construção de pirâmides (ADAMEK, PENKALSKI, VALENTINE, 2005, tradução nossa).

[46] **Seqt:** Os egípcios mediam a inclinação de uma face de uma pirâmide pela razão entre o "percurso e a elevação", isto é, dando o afastamento da face oblíqua da vertical para cada unidade de altura. Tomava-se como unidade vertical o cúbito e como unidade horizontal a mão; havia sete mãos num cúbito. Utilizando-se essas unidades de medidas, chamava *seqt* da pirâmide a medida dessa inclinação. Mais posteriormente, essa razão (*seqt*) seria denominada cotangente de um ângulo. Rooney (2012).

[47] **Imhotep**: Foi um polímata egípcio, que serviu a Djoser, rei da Terceira Dinastia, na função de vizir ou chanceler do faraó e sumo-sacerdote do deus-sol Rá, em Heliópolis. É considerado o primeiro arquiteto, engenheiro e médico da história antiga, embora dois outros médicos, Hesy-Ra e Merit-Ptah, tenham sido contemporâneos seus. Divalte, (2002).

No Egito Antigo existia uma trigonometria bastante diferente da que se conhece atualmente. Na realidade, as aplicações trigonométricas feitas pelos egípcios baseavam-se, na maioria das vezes, na semelhança de triângulos.

Na construção das pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces, o que levou os egípcios a introduzirem o conceito de *seqt,* que representava a razão entre afastamento horizontal e elevação vertical, e pode ter sido essa a preocupação a levar os egípcios a introduzir um novo conceito equivalente ao de cotangente de um ângulo.

Nesse sentido, Rooney (2012) afirma:

> Os egípcios tinham algum conhecimento de trigonometria, como demonstra a construção de suas pirâmides. O papiro de Ahmes inclui um problema que determina a *seqt,* a inclinação de uma pirâmide a partir da altura e da base. (ROONEY, 2012, p.87).

Daí pode-se inferir que essa deve ser a principal área onde os egípcios aplicavam conceitos trigonométricos, entre os problemas 56 a 60, do Papiro Rhind tratam de situações envolvendo medidas de pirâmide. A aplicação nesses problemas é exposta da seguinte maneira com a solução para ele:

***Problema 56*:** Qual é o *seqt* de uma pirâmide de 250 cúbitos de altura e 360 cúbitos de lado?

Solução: O escriba inicia a resolução do problema dividindo a medida do lado por 2, isto é, $\frac{360}{2}$ = 180 cúbitos.

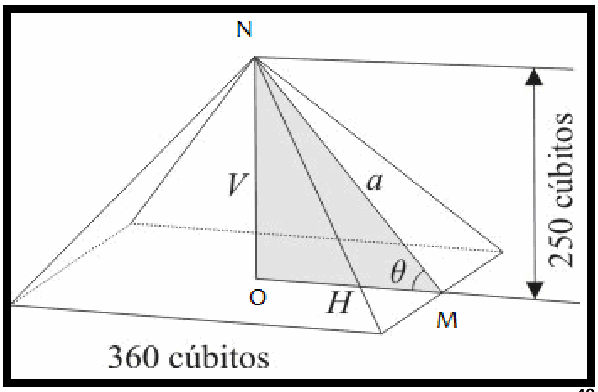


Figura 16: Ilustração referente ao problema 56[48]
Fonte: Site:www.obaricentodamente.blogspot.com

Então, se temos uma pirâmide como mostra na figura 16, destacando o triângulo retângulo sombreado, utilizando métodos modernos da trigonometria, também encontramos as seguintes relações:

---

[48] Fonte da figura disponível em: http://www.obaricentodamente.blogspot.com/2010/08/o-seqtde-uma piramide.html, acesso em 15 de agosto de 2013.

1) $\text{sen}\,\theta = \dfrac{V}{a}$ **2)** $\cos\theta = \dfrac{H}{a}$

3) $\text{tang}\ \theta = \dfrac{V}{H}$ **4)** $\text{cotg}\ \theta = \dfrac{H}{V}$

Usando a equação **(4)** e aplicando o método egípcio, temos que a cotangente do ângulo diedro formada pela base e a face da pirâmide é equivalente ao *seqt* da pirâmide. Desta forma temos:

5) $S = \dfrac{H}{V}$ cúbitos.

Substituindo os valores de H = 180 e V = 250, na equação (5), obtemos:

$S = \dfrac{180}{250} \rightarrow \dfrac{18}{25}$**,** cúbitos.

Como já falamos, os egípcios representavam uma fração com numerador maior que 1 (e diferente de 2/3), como soma de frações unitárias.

$S = \dfrac{18}{25}$ e é equivalente a: $S = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{50}$ cúbitos.

Como a unidade de medida da altura era dada em cúbitos e a unidade de medida horizontal era dada em mãos, onde em 1 cúbito cabem 7 mãos ou seja 1 cúbito = 7 mãos, será necessário multiplicar o valor encontrado anteriormente por 7. Pelo método da multiplicação egípcia, obtém-se:

$S = \dfrac{126}{25}$, mãos/cúbitos, que é equivalente à maneira de representar as frações no Egito a $S = 5\dfrac{1}{25}$ mãos/cúbitos.

Os demais problemas desse grupo de questões contidas no Papiro Rhind, de números 56 a 60 são resolvidos de forma análoga ao problema 56.

Nesse sentido, Brummelen (2009) afirma:

> Os problemas 56 a 60, em especial, apresenta cálculos sobre a inclinação de uma pirâmide dadas as suas dimensões horizontais e verticais, e alguns terem postulados estes problemas como uma espécie de proto-trigonometria. A causa destas reivindicações é a noção de *seqt*, um termo que se refere à inclinação de um lado inclinado na arquitetura egípcia usado no Papiro Rhind somente com relação a pirâmide, há evidências que sugerem que o *seqt* também foi utilizado para as inclinações da porta do templo. Como uma medida de “inclinação” e inverte o nosso uso da palavra: *seqt* é a quantidade de deslocamento horizontal, medida em palmos, para cada sete palmos de posicionamento vertical temos (portanto, s = 7/m, onde m é a definição moderna de inclinação). (BRUMMELEN, 2009, p.11, tradução nossa).

Desta forma na construção das grandes pirâmides faz supor que o conhecimento matemático dos egípcios era muito mais avançado que o contido nos papiros. Talvez o fato de a escrita parecer muito difícil tenha sido um dos motivos que impediu este registro. Talvez, ainda, estes registros tenham sido feito em papiros que não chegaram aos nossos dias.

Outra aplicação da trigonometria feita pelos egípcios esta na determinação da razão de semelhança entre triângulos retângulos, Tales efetivou a medição da altura de objetos por meio de sua sombra. Por volta de 600 a.C., Tales estava no Egito e foi chamado pelo Faraó para calcular a altura de uma pirâmide. Com uma vara fincada no solo, esperou o momento solar em que o comprimento da sombra da vara no chão medisse a sua altura. Então, pediu que medissem imediatamente a sombra da pirâmide. Ao comprimento da sombra, foi somada metade da medida da base da pirâmide, pois sendo muito grande, escondia parte da sombra. Assim, Tales demonstrou que a altura da pirâmide é igual a sua sombra mais a metade da base. (MENDES, 2009).

Estabeleceu-se, então, que a altura da pirâmide era igual “a sombra mais a metade da base (a metade da base da pirâmide oculta uma parte de sua sombra)”, ou seja, o modelo matemático que determina a altura da pirâmide conforme observamos na figura 17, e como foi descrita temos: $H = \frac{a}{2} + s$.

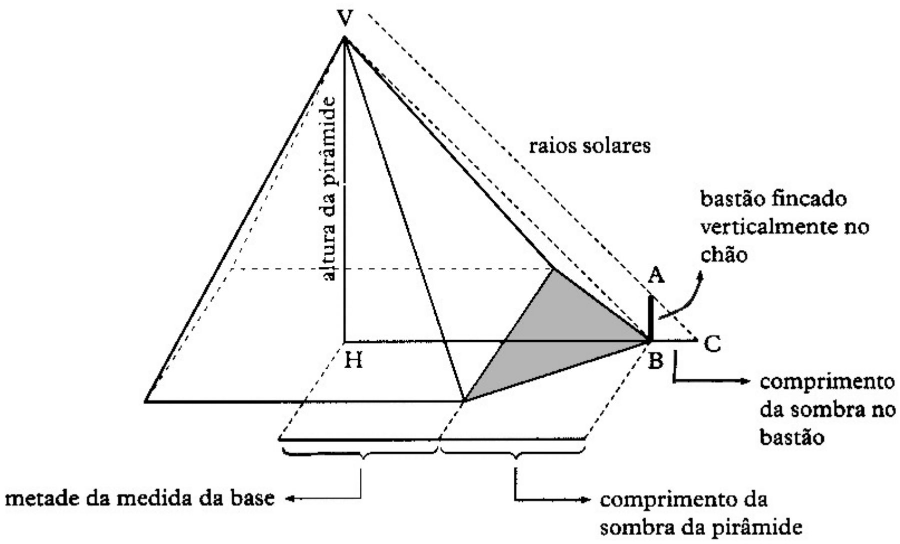


Figura 17: Medição da Altura da Pirâmide[49]
Fonte: Site:www.comahistoriadamatematica.blogspot.com

[49] Fonte da figura disponível em: http://www.comahistoriadamatematica.blogspot.com/2011/04/tales-e altura-da pirâmide, acesso em 15 de agosto de 2013.

Poderíamos dizer então que essas ideias estavam anunciando a chegada, séculos depois, da função tangente e cotangente. Os predecessores da tangente e da cotangente, no entanto, surgiram de modestas necessidades de medição de alturas e distâncias.

O outro Papiro é o Golenishchev ou de Moscou, foi escrito aproximadamente no ano 1850 a.C., e recebeu este nome, em homenagem ao egiptólogo Vladimir Semyonovich Golenishchev (1856–1947), que o comprou em 1893. Anos depois em 1917, esse Papiro foi comprado pelo Museu Estadual de Belas Artes de Pushkin, em Moscou, passando a ser conhecido por Papiro de Moscou, onde encontramos um texto matemático que contém 25 problemas. Entre outros, contém o problema envolvendo a área de um triângulo e o Volume do Tronco de Pirâmide, mas devido ao seu estado de degradação é impossível interpretar todos os problemas contidos nele, o Papiro de Moscou é uma estreita tira de 5,5 m de comprimento por 8 cm de largura, encontra-se atualmente em Moscou, não se sabe nada sobre o seu autor, no entanto, pensa-se que os conhecimentos matemáticos nele contidos datam de uma época anterior, provavelmente, do início da civilização egípcia.

Outros papiros, da mesma época, são o Papiro de Berlim, que contém dois problemas que envolvem equações do 2º grau e o Papiro de Kahun, temos ainda o Papiro de Cairo (século I a.C.), onde se encontram vários problemas com o teorema de Pitágoras e que denota uma forte influência babilônica.

O Papiro de Berlim foi comprado também por A. H. Rhind em Luxor em 1850, na mesma altura que o Papiro de Rhind, mas encontrava-se em mau estado e só foi analisado e restaurado cerca de 50 anos mais tarde por Schack-Schackenburg. O Papiro de Berlim encontra-se, ainda parcialmente estragado. Datando aproximadamente de 1800 a.C., encontra-se atualmente no Museu Staatliche em Berlim. Neste papiro aparece pela primeira vez a solução de uma equação do 2º Grau. Dois dos seus problemas dão origem a um sistema de duas equações, sendo uma delas uma equação de 2º grau. Na notação atual os sistemas de equações envolvidos nos problemas são:

$$x^2 + y^2 = 100 \text{ e } 4x - 3y = 0 \ (1) \qquad \text{e} \qquad x^2 + y^2 = 400 \text{ e } 4x - 3y = 0 \ (2)$$

O Papiro de Kahun, na verdade não é um papiro, mas sim, fragmentos de diversos papiros, nem todos de origem matemática, encontrados em Kahun, no

Egito por Flindrs Petrie (1853–1942), em 1889. Esses fragmentos foram restaurados e traduzidos por F. L. Griffith e por Schack-Schackenburg. No entanto, o seu estado de conservação só permitiu que alguns fossem decifrados. Pensa-se que data de cerca de 1800 a.C. e está escrito em hierático. Um destes fragmentos (IV, 2) contém cálculos que mostram 2 dividido por cada um dos números ímpares de 3 a 21. O outro fragmento (IV, 3, colunas 13 e 14), contém um cálculo que foi interpretado como sendo do volume de um contentor cilíndrico de cereais. No fragmento (LV, 3), encontrasse a resolução da equação 1/2x –1/4x = 5. De acordo com Gillings (1982), os três restantes fragmentos não têm, ainda, uma interpretação conclusiva.

O papiro referido anteriormente provém da época do Império Médio, época de alguma estabilidade, em que imperava o comércio com outros povos e a agricultura viu um grande desenvolvimento. Deste período até o período Persa (525 a.C.–332 a.C.), não são conhecidos papiros com conteúdos específicos de matemática no Egito, mas não podemos esquecer que o papiro é muito frágil e que a sua conservação não é fácil.

É aqui apresentado um papiro da época persa, o Papiro de Cairo que se encontra atualmente no museu do Cairo, provavelmente data do século I a.C., e está escrito em demótico. Foi descoberto em Tûna El Geber em 1938/39. Contém 22 fragmentos que combinados dão um papiro que deveria ter 2 metros de comprimento por 35 cm de largura. Alguns dos seus 40 problemas revelam uma forte influência de textos babilônicos. Entre estes estão os que envolvem o Teorema de Pitágoras, também problemas relacionados com as medidas de panos de vela, que envolvem “equações de 2º grau”, além de problemas de aritmética simples, divisões e frações unitárias. No mesmo sistema de escrita demótica estão escritos outros papiros posteriores ao Papiro de Cairo. O primeiro é da época Ptolomaica (332 a.C. a 30 a.C.), não se sabe sua origem. Foi adquirido em 1868 pelo Museu Britânico, com largura de 36,5 cm e não se sabe ao certo seu comprimento. O segundo papiro, igualmente escrito em demótico, é do início do período Romano (30 a.C. a 395 a.C.), com origem igualmente desconhecida. Tem 7,545 metros de comprimento e 25 cm de largura e parte dele contém 13 questões de matemática (cálculo de multiplicação, divisão, subtração, adição de dois números, dois envolvendo extração da raiz quadrada e dois onde temos cálculo da área de uma porção de terra dados dois dos seus lados).

Além desses papiros acima citados, existem ainda prancha de madeira de Akhim (Cairo) e um rolo de couro contendo listas de frações unitárias. Outro avanço na matemática egípcia foi tratado na criação do relógio do Sol.

O homem primitivo, primeiramente, usou sua própria sombra para estimar as horas (sombras moventes). Logo depois viu que podia, através de uma vareta fincada no chão na posição vertical, fazer estas mesmas estimativas. Estava criado o pai de todos os relógios de Sol, o famoso Gnômon. Ao amanhecer a sombra estará bem longa, ao meio dia estará no seu tamanho mínimo e ao entardecer volta a alongar-se novamente.

O Gnômon era uma vareta (PQ na figura 18) que se espetava no chão, formando com ele um ângulo de 90º, e o comprimento (AQ) seria observado num horário determinado, meio dia. Como o tamanho do Gnômon era constante, ou seja, usava-se sempre a mesma vareta, na mesma posição, o comprimento de AQ ao meio dia variava com o ângulo A. Para nós, isso significa uma colocação de $\frac{PQ}{AQ}$, como uma função do ângulo A, conhecido nos dias de hoje como cotangente. Porém, não existe em documentos, vestígio desse nome no período.

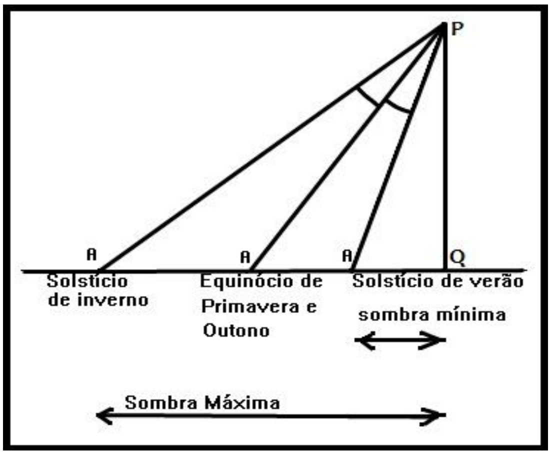


Figura 18: Modelo do Relógio do Sol[50]
Fonte: Site:www.brasilescola.com

Figura 19: Modelo do Relógio do Sol[51]
Fonte: Site:www.brasilescola.com

[50] Fonte da figura disponível em: http://www.miltonborba.org/Mat_Aplic/MAT_APLIC-Trigonometria.pdf, acesso em 16 de abril de 2014.
[51] Fonte da figura disponível em: http://www.brasilescola.com/geografia/relogio-sol.htm, acesso em 24 de agosto de 2013.
O Relógio de Sol corresponde a um método ou procedimento utilizado para medir a sucessão das horas ou do tempo por meio da visualização do modo como a luz solar incide na terra em diferentes posições e é justamente essa variação que fornece as horas. O relógio de sol pode ser como, por exemplo, um relógio de jardim, constituído por um mostrador que é confeccionado em uma superfície plana na qual são indicadas as respectivas horas, dessa forma, a sombra projetada no mostrador funciona como uma espécie de relógio convencional. Assim, a luz do sol ao variar resulta nas sucessões das horas. Katz (2010).

Também existem relógios de Sol mais complexos, com mostradores inclinados e/ou curvos, como apresentamos na figura (19). À medida que a posição do Sol varia, a sombra desloca-se pela superfície do mostrador, passando sucessivamente pelas linhas que indicam as horas.

Os egípcios apresentaram a primeira menção de um triângulo esférico encontrada em um trabalho do egípcio Menelau de Alexandria, ele desenvolveu os equivalentes aos princípios de Euclides da trigonometria plana, mas os aplicou a triângulos esféricos.

Abu'l al Hasan ibn Yunus(ca.950–1009) foi um astrônomo e matemático mulçumano egípcio, fez muitos cálculos trigonométricos, resolveu difíceis problemas de trigonometria esférica, demonstrou a seguinte identidade trigonométrica $2 \cdot \cos a \cdot \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$. Seu trabalho mais importante foi *"al-Zij al-Kabir al-Hakimi",* uma obra de grande originalidade dos quais pouco mais de metade sobreviveu até os nossos dias (c. 1000), era um manual de tabelas astronômicas, que continha observações muito precisas, muitos dos quais podem ter sido obtidos com grandes instrumentos astronômicos. Yunus expressou as soluções na sua *zij* sem símbolos matemáticos, porem Delambre[52](1749–1822) observou em 1819 em sua tradução das tabelas Hakemite dois dos métodos Ibn Yunus para determinar o tempo de altitude solar ou estelar em que continha fórmulas equivalentes à identidade trigonométrica de John Werner[53](1468–1522), em um manuscrito do século 16, na obra secções cônicas encontramos algumas dessas formulas, entre elas temos: $\cos a \cdot \cos b = \dfrac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2}$.

Essa fórmula passou a ser conhecida posteriormente como uma das fórmulas de Werner, e foi essencial para o desenvolvimento do método de prosthaphaeresis[54] e logaritmos[55] por matemáticos posteriores.

---

[52] **Jean Baptiste Joseph, Chevalier Delambre:** Foi um matemático e astrônomo francês. Foi diretor do observatório de Paris e autor de livros sobre a história da astronomia, desde os tempos antigos até ao século XVIII. Flood & Wilson (2013).

[53] **John Wener**: Seus principais trabalhos científicos foram em astronomia, matemática e geografia. Em astronomia, ele seguiu Regiomontanus, tendo acesso a todos os seus escritos, que ele estudou com cuidado, enquanto no lado prático era um fabricante especializado de instrumentos. Seus instrumentos incluem astrolábios, relógios, relógios de sol, e os instrumentos para resolver problemas teóricos na astronomia esférica. Em matemática Werner trabalhou em trigonometria esférica e seções cônicas. Um trabalho sobre triângulos esféricos não foi publicado durante a sua vida, mas foi publicado em 1907, cerca de 400 anos depois que foi escrito. Brummelen (2009).

[54] **Prosthaphaeresis**: Era um algoritmo usado no final do século XVI e início do XVII para aproximar um produto usando fórmulas da trigonometria, 25 anos antes da invenção dos logaritmos, em 1614, esta era a única forma conhecida que podia ser largamente utilizada para aproximar o resultado de

Toda a informação obtida a respeito do conhecimento produzido pelos egípcios chegou até os dias atuais por meio dos papiros, principalmente do papiro Rhind, que deixou para posteridade o legado da matemática e da trigonometria egípcia. O desenvolvimento da trigonometria levado a efeito pela civilização egípcia se deu principalmente a partir da agrimensura devido as necessidades práticas de medição de áreas alagadas para plantio e na construção de pirâmides.

Portanto, a utilização na agrimensura e na construção de pirâmides eram os objetivos principais da trigonometria egípcia.

No que se segue a matemática egípcia, serviu de sustentação para a matemática grega e também serviu de base para a matemática moderna. Isto, em geometria, trigonometria e mesmo na astronomia.

---

uma multiplicação rapidamente. Prosthaphaeresis vem do grego *"prosthesis e apharesis"* que significam "adição" e "subtração" que são dois passos do processo. Brummelen (2009).

[55] **Logaritmos:** Considerando *a* e *b* dois números reais e positivos, sempre com *a* diferente de 0, define-se **logaritmo** de *b* (**logaritmando**) na base *a*, qual número deve-se incluir no expoente de *a* afim de termos *b* como resultado. $\mathrm{Log}_a^b = x$. Dante (2011).

2.3 A TRIGONOMETRIA NA MESOPOTÂMIA

A Mesopotâmia abrigou as primeiras civilizações do planeta, por volta do IV milênio antes de Cristo. O nome Mesopotâmia significa “terra entre rios” em grego, devido a estar localizado entre os rios Tigre e Eufrates. Hoje, nessa região, localiza-se o Iraque e a Síria principalmente, a região da Mesopotâmia foi inicialmente povoada pelos Sumérios (3500 a.C.–2000 a.C.).

A região sofreu diversas invasões de outros povos que, ao invés de interferirem negativamente em sua cultura, ao contrário, aprenderam e adotaram muitos conhecimentos dos mesopotâmios.

Figura 20: Mapa da Mesopotâmia[56]
Fonte: Site:www.ohistoriador.com.br

Os povos que formavam a Mesopotâmia foram os Sumérios, Acádios, Amoritas, Caldeus e Hititas, os quais lutavam pela posse das terras aráveis.

Por estar situada em tal região geográfica, a Mesopotâmia estava mais sujeita às invasões e conquistas de vários povos, ao contrário do que ocorreu no Egito. As duas civilizações, Egípcia e Mesopotâmica, desenvolveram-se no mesmo período. Mas, este desenvolvimento deu-se em separado, não havendo um intercâmbio de informações.

Rosa (2012, p.57), afirma que a civilização mesopotâmia e das regiões vizinhas, construíram famosas cidades: Uruk, Nippur, Ur, Mari, Lagash, Ugarit,

---

[56] Fonte da figura disponível em: http://www.ohistoriador.com.br, acesso em 06 de setembro de 2013.

Ashur, Hattusas, Susa, Babilônia, Nínive e foram criados vários impérios: sumério-acadiano, babilônio, assírio, 2° babilônio-caldeu. Ao longo do 2º Período Babilônico, uma das cidades-Estados obteria hegemonia momentânea sobre as demais. A unificação da Mesopotâmia, porém, prevaleceria, a partir de 2750 a.C., com Sargão, que iniciou a dinastia Acadiana, a qual, devido à influência cultural da Suméria, é conhecida como dinastia Sumério-Acadiana, que duraria até cerca do ano 2 mil a.C. O 1° Império Babilônio foi obra de Hamurabi (2067 a.C.–2025 a.C.), mas seria conquistado, no século VIII, pelo Rei assírio Teglatefalasar III; os reis mais conhecidos da dinastia Assíria são Sargão II e Assurbanipal. Em 612, Nabucopolassar derrotou os assírios e fundou o efêmero 2° Império Babilônio, cujo governante mais famoso seria Nabucodonosor. A vitória de Ciro, Rei dos Persas, em 539, significou o colapso definitivo do Império e da cultura da Mesopotâmia, reduzida a uma mera província aquemênida. A civilização mesopotâmia teve, assim, uma duração, registrada, de cerca de 4500 anos.

Flood & Wilson (2013), informa:

> Os matemáticos mesopotâmicos (ou babilônios) se desenvolveram durante mais de 3000 anos numa vasta região, mas os problemas que analisamos aqui datam principalmente do antigo período babilônico (por volta de 1800 a.C.). (FLOOD & WILSON, 2013, p.18).

As mesmas dificuldades que acarretaram o desenvolvimento das ciências no Egito foram a mola propulsora deste desenvolvimento nesta região. Porém, ao contrário do que ocorria com as águas do rio Nilo, os períodos de cheia dos rios Tigre e Eufrates eram bastante irregulares, obrigando a realização de numerosas obras de irrigação, drenagem e medição dos campos, com períodos de observação e desenvolvimento com maior dificuldade, requerendo com isso uma sofisticação dos cálculos matemáticos. A ciência e, por consequência, a matemática mesopotâmia, teve um grande desenvolvimento por parte dos sacerdotes que detinham o saber nessa civilização. Assim como a matemática Egípcia, esta civilização teve uma matemática e/ou ciência extremamente prática. Os textos matemáticos disponíveis (cerca de 400 plaquetas) são de duas épocas muito separadas no tempo: de 2000 a 1600 (Período Babilônio[57]), e de 300 a 150 (Período

---

[57] Domínio da Suméria pelos Amoritas, que transferiram a capital para a Babilônia. O apogeu do Primeiro Império Babilônio ocorreu com Hamurabi que criou o primeiro código de leis escritas.

Selêucida[58]), e podem ser classificadas em duas categorias: tabelas numéricas e tábuas de problemas.

Em matemática, os mesopotâmios foram capazes de desenvolver técnicas para resolver problemas específicos de seu cotidiano, de acordo com seu espírito prático. As tábuas se referiam a problemas, mas nunca à teoria; as tábuas ensinavam o resultado da operação, mas não a raciocinar, a compreender.

As tábuas, que tinham sido passadas de geração em geração, sempre produziam a resposta correta, e assim não havia preocupação em examinar ou questionar a lógica subjacente daquelas equações. Desta forma, os babilônios não criaram um sistema logicamente formal, não estabeleceram princípios, postulados ou premissas, não desenvolveram uma metodologia. A matemática era, fundamentalmente, uma técnica para cálculos, sem qualquer outra preocupação intelectual.

A nosso ver parece ter existido uma relação entre o conhecimento matemático dos egípcios e dos babilônios. Ambos, por exemplo, usavam as frações de numerador **1**. Também é plausível supor que os povos posteriores tivessem conhecimento da trigonometria primitiva egípcia.

Os babilônios foram excelentes astrônomos e influenciaram os povos posteriores. Eles construíram no século 28 a.C., durante o reinado de Sargon (c. 2300 a.C.–c. 2215 a.C), que reinou por 58 anos, fez um calendário astrológico e elaboraram, a partir do ano 747 a.C., uma tábua de eclipses lunares. Este calendário e estas tábuas chegaram até os nossos dias (SMITH, 1958, tradução nossa).

Os babilônios tinham grande interesse pela astronomia, pelas conexões com o calendário e as épocas de plantio. Os astrônomos babilônios mediam os meses de acordo com as fases lunares e os anos, conforme a posição do sol. Pelo testemunho que perdura nas tábuas de argila que têm chegado até nós, sabemos que por volta do ano de 1950 a.C.

A numeração tinha valor posicional e se baseava em um sistema sexagesimal, combinado com o decimal, com apenas dois sinais cuneiformes para registrar toda a numeração; daí certa ambiguidade e dificuldade interpretativa. Como

[58] **O Império Selêucida:** Foi um Estado helenista que existiu após a morte de Alexandre, o Grande, da Macedônia, cujos generais entraram em conflito pela divisão de seu império. Entre 323 e 64 a.C. existiram mais de 30 reis da dinastia selêucida. Seleuco, um de seus generais, estabeleceu-se na Babilônia em 312 a.C., ano geralmente usado para definir a data da fundação do Império Selêucida. Ele governou não somente a Babilônia, mas a gigantesca parte oriental do império de Alexandre o Grande. Divalte (2002).

escreveu Colin Ronan (2001), o número correto dependia do contexto, o que dificulta a decifração das plaquetas. O sistema sexagesimal babilônio teve origem, possivelmente, astronômica. A contagem dos dias de uma revolução solar ao longo da eclíptica deve ter levado à divisão desse círculo em 360 compartimentos ou graus. A fácil divisão do círculo em seis partes iguais, pela inserção de um hexágono, teria levado à adoção do numero 60 como base no sistema de numeração.

Para Mendes (2009):

> A divisão do círculo em 360º, por exemplo, teve origem na Babilônia, onde se convencionou dividir um círculo em seis partes iguais, em que cada uma equivalia a 60. Assim, o círculo passava a ter 360°, que também designava o número de dias do ano segundo o seu calendário. Essa informação se difundiu por conta das relações comerciais entre gregos, árabes e hindus, até tornar-se conhecida por toda a Europa e tomar a forma dos dias atuais (MENDES, 2009, p.119).

Desta forma, o sistema sexagesimal teve sua origem na astronomia, especificamente, na contagem do tempo, ou melhor, na divisão do tempo em horas, minutos e segundos. No qual 1 (uma) hora equivale a 60 minutos.

Para Wussing (1998):

> Este avançado sistema posicional sexagesimal foi extraordinariamente útil e superou a todos os sistemas numéricos da antiguidade. Os matemáticos helenísticos o utilizaram bastante para dar conta de seus complicados cálculos, especialmente em astronomia, o matemático e astrônomo helenístico Ptolomeu (Século II a.C.), impulsionou definitivamente os sistemas em astronomia. (WUSSING, 1998, p.22, tradução nossa).

Com o desenvolvimento posicional feito pelos babilônicos o próximo passo dado foi a construção de tábuas de trigonometria, com valores que correspondem ao seno, cosseno, tangente e cotangente de um ângulo ou arco de circunferência. As tábuas contribuíram para a apresentação dos elementos básicos da determinação das razões trigonométricas, a partir de triângulos retângulos determinados pelas cordas da circunferência. (MENDES, 2009).

Astrônomos babilônios relacionavam funções trigonométricas e arcos de círculos e os comprimentos das cordas que subtendem seus arcos (ADAMEK, PENKALSKI, VALENTINE, 2005, tradução nossa).

No final do século XIX, arqueólogos começaram a escavar a região da Mesopotâmia. As escavações forneceram, entre outras coisas, milhares de tabletes de argila com inscrições que foram reconhecidas lidarem com números em alguns deles. Somente há algumas décadas que se chegou à compreensão da matemática Babilônia. Temos à disposição mais de 400 tabletes ou fragmentos de tabletes de conteúdo matemático que foram copiados, traduzidos e explicados em alguns volumes. Os tabletes estão guardados em museus e coleções de vários países, e datam de cerca de 1700 a.C.

A escrita cuneiforme era realizada por meio de cunhas produzidas em tabletes de barro cozido, o qual garantia a sua permanência e conservação por um longo período de tempo, sendo que desta forma muitos tabletes chegaram até nossos dias, permitindo acesso à cultura babilônia.

Figura 21: Tábua Cuneiforme[59]
Fonte: Site:www.historiazine.com

A escrita cuneiforme requeria a decifração para poder compreendê-lo; não podia ser identificado intuitivamente e assim dar uma compreensão imediata ao leitor para isso o processo de decifrar esta escrita só foi conseguido no século XIX por Henry Cheswike Rawlison[60](1810–1895) e Georg Friedrich Grotenfend[61](1775–1835).

---

[59] Fonte da figura disponível em: http://www.historiazine.com/2009/10/invencao-da-historia.html, acesso em 31 de agosto de 2013.

[60] **Sir Henry Creswicke Rawlinson**: Foi um soldado e orientalista britânico. De 1826 a 1833 serviu no exército da Companhia anglo-indiana, tendo sido mandado a Pérsia, onde trabalhou na reorganização do exército do xá. Exerceu o cargo de agente político da Inglaterra em Kandahar (1840) e na Arábia (1843) e em 1844 foi nomeado cônsul-geral em Bagdá. Foi um dos pioneiros na decifração dos caracteres cuneiformes, tendo sido o primeiro a ensinar o seu caráter polifônico. Regressou a Inglaterra em 1856; foi nomeado membro do Parlamento e do conselho das Índias, recebendo em 1859 o posto de general-de-divisão. Partiu para Teerã como embaixador, onde ficou um ano. De volta a Londres, foi reeleito para o Parlamento (1865-1868). Pode ser considerado, juntamente com Opperte Hincks, um dos fundadores da assiriologia. Rosa (2012).

Os babilônios tinham maior habilidade e facilidade para efetuar cálculos, talvez em virtude de sua linguagem parecer mais acessível que a egípcia. Também conheciam as relações entre os lados de um triângulo retângulo e trigonometria básica, conforme descrito na plaqueta, "Plimpton 322", o nome faz referencia a George Arthur Plimpton(1855–1936), foi um colecionador de livros que doou antes de sua morte vários livros, dentre eles essa plaqueta para Universidade de Columbia, nela existe uma notável tábua de secantes, é a mais importante e conhecida, por ser a 322ª plaqueta da coleção Plimpton, da Universidade de Colúmbia, em Nova Iorque; pertence ao Período Babilônio antigo, foi confeccionada entre 1800 e 1600 a.C., e o conhecimento sobre seu conteúdo se deve, principalmente, ao notável trabalho de Otto Neugebauer[62](1899–1990), em 1935, no livro *Textos Matemático Cuneiforme, e a Thureau-Dangin,* em 1938.

Figura 22: Tábua Plimpton 322[63]
Fonte: Site:www.ecalculo.if.usp.com.br

[61] **Georg Friedrich Grotenfend**: Foi um alemão e pigrafista e filólogo também conhecido principalmente por suas contribuições para a decifração da escrita cuneiforme. As inscrições cuneiformes da Pérsia já tinham a algum tempo vindo atraindo atenção na Europa; cópias exatas dos cuneiformes tinham sido publicadas pelo holandês artista Cornelis de Bruijn. Grotenfend comunicou primeiramente sua descoberta à Sociedade Real de Göttingen, em 1802, e foi revisto dois anos depois por Tychsen. Em 1815, ele fez um relato de que na obra de Heeren em história antiga, e em 1837 publicou o seu *"Der Neue Beiträge zur Erläuterung persepolitanischen Keilschrift".* Três anos mais tarde escreveu outra obra *"Der babylonischen Neue Beiträge zur Erläuterung Keilschrift".* Rosa (2012).

[62] **Otto Eduard Neugebauer:** Foi um matemático e historiador da ciência austro-estadunidense. Conhecido por suas pesquisas sobre a história da astronomia e outras ciências exatas na Idade Antiga e na Idade Média. Estudando tabletes de argila descobriu que os antigos babilônios sabiam muito mais sobre matemática e astronomia do que se supunha. A Academia Nacional de Ciências dos Estados Unidos a ele referiu-se como "o mais original e produtivo pesquisador da história das ciências exatas, talvez da história da ciência, de nosso tempo". Entre seus textos clássicos, devemos mencionar *"As Ciências Exatas na Antiguidade*" (1951) e os três volumes "*History of Ancient Matemática Astronomia*" (1975). Rosa (2012).

[63] Fonte da figura disponível em: http://www.ecalculo.if.usp.com.br, acesso em 30 de junho de 2013.

Os povos mesopotâmios, desde os sumérios aos babilônios, alcançaram notável nível de conhecimentos em trigonometria esférica, que lhes servia de base para a observação do firmamento, na qual fundamentavam sua filosofia astrolátrica. Enquanto isso, os gregos desenvolviam a geometria, termo que procede etimologicamente da expressão grega “medida da Terra”. Essas duas civilizações tiveram especial importância no mundo antigo como iniciadoras do saber matemático.

Eves (1995) afirma:

> É possível que as investigações modernas sobre a matemática da Mesopotâmia antiga venham a revelar um desenvolvimento apreciável da trigonometria prática. Os astrônomos babilônios dos séculos IV e V a.C. acumularam uma massa considerável de dados de observações e hoje se sabe que grande parte desse material passou para os gregos. Foi essa astronomia primitiva que deu origem à trigonometria esférica. (EVES, 1995, p.203).

Entendemos que o desenvolvimento da matemática Mesopotâmica fica claro quando da transcrição e interpretação dos tabletes, e por estarem ali contida as vastas aplicações da matemática. Por outro lado, a utilização do sistema de base 60, fortaleceu todo o desenvolvimento posterior da matemática Babilônia e de outras civilizações.

Por tudo isto que foi descrito, a matemática da Babilônia tinha um nível mais elevado que a matemática egípcia. Há que se ressaltar que, pelo fato da Mesopotâmia estar situada no centro do mundo conhecido da época, o que propiciava grandes invasões e muitos contatos com outros povos, ela teve um papel grandioso no desenvolvimento da matemática de um povo que teve um papel importante na história, o povo grego. Graças a este contato com os gregos, muito desta matemática chegou até os nossos dias.

2.4 A TRIGONOMETRIA NA GRÉCIA

A história da civilização grega tem suas origens nas invasões de povos bárbaros (dórios, aqueus, jônicos e eólios), na península balcânica por volta do segundo milênio a.C. Estes povos foram conquistando as civilizações ali estabelecidas e avançando em direção à ilha de Creta.

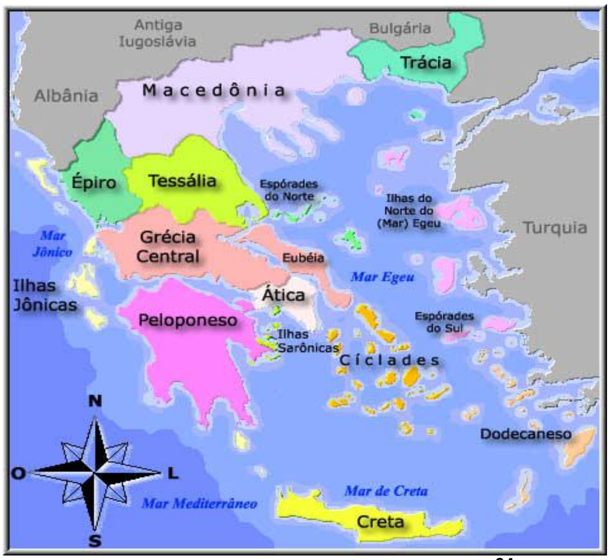


Figura 23: Mapa da Grécia Antiga[64]
Fonte: Site:www.historiadomundo.com.br

O período histórico da civilização grega teria início, por volta de 800 a.C. Nesta altura, os gregos mudaram do sistema de escrita hieroglífica para o alfabeto fenício. Isto lhes permitiu transmitir por escrito a sua literatura, utilizando o papiro. Sua cultura teve vários avanços tanto que em 776 a.C. realizaram os primeiros Jogos Olímpicos da Antiguidade. Com o crescente comércio e a necessidade de defesa, o povo reuniu-se em torno de fortificações, formando a principal unidade política da Grécia Antiga, as Cidades-Estado ou Polis (Atenas, Esparta, Tebas, Corinto, Argos...).

Os gregos espalharam-se por vários pontos do litoral dos mares Egeu e Negro, chegando a atingir a Bacia do Mediterrâneo. Fundaram diversas cidades, como Cretona, Elea e Siracusa (cidades da Magna Grécia, no sul da Itália) ou como Mileto e Samos na Ásia Menor.

[64] Fonte da figura disponível em: http://www.historiadomundo.com.br, acesso em 30 de junho de 2013.

O grande florescimento da cultura grega surgiu na colônia situada na Ásia Menor, principalmente na cidade de Mileto. No início do século VI a.C., os filósofos de Mileto, entre eles Tales[65](c.a.624–546 a.C.), começaram a tentar compreender os fenômenos da natureza sem recorrer a mitos e à religião. A utilização do raciocínio dedutivo deu origem à criação de uma matemática dedutiva e formalmente organizada, bem diferente da matemática de caráter eminentemente prático, desenvolvida no Egito e na Mesopotâmia, com quem, certamente, tinham contatos comerciais.

No final do século IV a.C. o centro do conhecimento e das Matemáticas Gregas mudou-se de Mileto e de outras cidades na Ásia Menor para a Magna Grécia, onde viveu Pitágoras(569 a.C.–475 a.C.).

Por volta de meados do século V a.C., o centro mudou-se de novo, desta vez para Atenas, onde a matemática e a filosofia se desenvolveram principalmente na Academia de Platão.

O maior desenvolvimento da matemática grega deu-se no período helênico, de (300 a.C.–200 d.C). Por volta de 300 a.C. o centro da matemática mudou-se de Atenas para a cidade construída por Alexandre, o Grande (358 a.C.–323 a.C.), Alexandria (no Egito), em cuja Biblioteca[66] serviu de base para vários estudiosos.

Flood & Wilson (2013), afirma:

> Por volta de 300 a.C., com a chegada ao poder de Ptolomeu I, a atividade matemática se deslocou para a parte egípcia do império grego. Em Alexandria, Ptolomeu fundou uma universidade que se tornou o centro intelectual da erudição grega durante mais de 800 anos. Ele também deu início à famosa biblioteca que chegou a guardar mais de meio milhão de manuscrito antes de ser destruída pelo fogo. (FLOOD & WILSON, 2013, p.26).

---

[65] **Tales de Mileto:** Foi fundador da escola Jônica, acreditava na existência de um “princípio único”. Afirmou que a água era origem de toda a existência, embora outros filósofos e discípulos seus não concordassem, como Anaximandro e Anaxímenes. Teve o grande mérito de antecipar algumas teorias evolucionistas, quando afirmou que o mundo poderia ter surgido da água, e que dessa substância, teria havido evolução, por processos naturais. Foi o primeiro filósofo a estudar astronomia e em suas observações sobre o sol e a lua, previu e explicou o eclipse solar, ao verificar que a lua era iluminada por ele, no ano de 585 a.C, o que foi comprovado pelos astrônomos posteriormente. Flood & Wilson (2013).

[66] **A Biblioteca de Alexandria:** Foi uma das maiores bibliotecas do mundo e localizava se na cidade egípcia de Alexandria. Considera-se que tenha sido fundada no início do século III a.C., durante o reinado de Ptolomeu I do Egito, depois de seu pai ter construído o Templo das Musas (Museum). Foi destruída parcialmente inúmeras vezes, até que em 646 foi destruída num incêndio acidental (acreditou se durante toda a Idade Média que tal incêndio tivesse sido causado pelos árabes). Alexandria permaneceu como centro dos estudos matemáticos durante cerca de um milênio. Rooney (2012).

Em Alexandria, às margens do Mediterrâneo, reinou quase absoluta como centro da cultura mundial entre os séculos III a.C. e IV d.C. Sua famosa biblioteca continha praticamente todo o saber da Antiguidade, em cerca de 700 mil rolos de papiro e pergaminhos. Seu lema era “adquirir um exemplar de cada manuscrito existente na face da Terra”. Nessa biblioteca trabalharam matemáticos como: Euclides, Aristarco de Samos [67] (310 a.C.–230 a.C.), Arquimedes de Siracusa, Eratóstenes de Cirene[68](276 a.C.–194 a.C.), Hipátia ou Hipácia de Alexandria[69](ca. 350/70–415) e Cláudio Ptolomeu.

Segundo Bell (1985, tradução nossa), o nascimento e desenvolvimento da matemática grega abrange aproximadamente dez séculos, do ano de 600 a.C. até 400 d.C.. A primeira escola alexandrina, foi fundada por Alexandre Magno em 332 a.C., este foi um ponto chave na história da matemática grega.

Nesta época Euclides formou rígidos sistemas de dedução em geometria plana elementar e geometria sólida, servindo de fonte de estudos científicos durante mais de dois mil e duzentos anos. Ele sistematizou a geometria grega tal como existia no seu tempo.

---

[67] **Aristarco de Samos:** Foi um astrônomo e matemático grego, sendo o primeiro cientista a propor que a Terra gira em torno do Sol (sistema heliocêntrico) e que a Terra possui movimento de rotação. Apenas uma obra sua é conhecida: *Sobre os tamanhos e distâncias entre o Sol e a Lua*. Neste tratado, Aristarco realizou cálculos geométricos das dimensões e distâncias do Sol e da Lua. Também tentou determinar as distâncias e o tamanho do Sol e da Lua. Atualmente o seu nome é atribuído a uma cratera lunar. As suas conclusões sobre a organização do Sistema Solar, mesmo sendo simples, são admiradas ainda hoje pela sua coerência. Tucker (2005).

[68] **Eratóstenes de Cirene:** Foi um matemático, gramático, poeta, geógrafo, bibliotecário e astrônomo da Grécia Antiga. Nasceu em Cirene, Grécia, e morreu em Alexandria. Estudou em Cirene, em Atenas e em Alexandria. Os contemporâneos chamavam-no de “Beta” porque o consideravam o segundo melhor nome no mundo antigo em vários aspectos. Desenvolveu um método matemático para medir as dimensões da Terra, é considerado o inventor da Esfera Armilar (astrolábio esférico), que é uma espécie de esfera celeste que serve para mostrar o movimento das estrelas ao redor do Sol e do planeta Terra, criador do Crivo de Eratóstenes, método (algoritmo) prático para encontrar números primos dentre os naturais, o pioneiro na medição do raio do planeta Terra, Elaborou um mapa de todas as terras emersas dentro de um quadriculado geográfico, fez ainda vários estudos das áreas de Geografia, Matemática, Geometria e Astronomia. Suas principais obras:*Catasterismos* (conjunto de lendas em que os personagens transformam-se em astros), *Platonicus* (obra sobre conhecimentos matemáticos), *Sobre os significados* (livro de estudos geométricos), *Sobre a medição da Terra* (estudos sobre a medição da circunferência do planeta Terra), *Erigones* e *Hermes* (poema). Tucker (2005).

[69] **Hipácia de Alexandria**: Ela é a mais antiga matemática feminina importante que conhecemos filha e aluna do geômetra Theon de Alexandria (é de sua versão dos Elementos de Euclides que derivaram todos os textos que sobreviveram). Atribuem-se a Hipácia comentários impressionantes sobre muitos textos clássicos, como as *Cônicas* de Apolônio e *Aritmética* de Diofano, e uma edição do *Almagesto* de Ptolomeu, nenhum dos seus trabalhos sobreviveu, embora seus comentários sobre o trabalho de outros matemáticos possam estar preservados em algumas das anotações que chegaram até nós. Rooney (2012).

A base da revolução matemática exercida pela civilização grega partiu de uma ideia muito simples. Enquanto Egípcios e Babilônicos perguntavam “como”?, os filósofos gregos passaram a indagar “por quê”?. Assim, a matemática que até aquele momento era, essencialmente prática, passou a ter seu desenvolvimento voltado para conceituação, teoremas e axiomas.

Todas as descobertas matemáticas realizadas pelos povos pré-históricos, egípcios e babilônios serviram como subsídio para a matemática desenvolvida pelos gregos. Esta matemática grega foi, e continua sendo, a base de nossa matemática.

Todo o desenvolvimento tecnológico obtido em nossos dias tem como ponto de partida a matemática grega. Assim, sem a axiomatização desenvolvida pelos gregos, não haveria o desenvolvimento da matemática abstrata e dos conceitos, postulados, definições e axiomas tão necessários à nossa matemática.

A maioria dos textos dos matemáticos gregos não chegaram aos nossos dias na sua versão original, uma vez que eram escritos em papiro. Pois os rolos de papiro eram muito frágeis e com a utilização estragavam-se.

Flood & Wilson (2013), confirma:

> Ao contrário do antigo Egito, do qual há alguns papiros bem preservados, e da Mesopotâmia, onde muitos milhares de placas de argila sobreviveram, temos pouquíssimas fontes primarias gregas. Como no Egito, os gregos escreviam em papiro, que não sobreviveu aos séculos, e houve desastres como incêndio da biblioteca de Alexandria nos quais muitas fontes primárias pereceram. (FLOOD & WILSON, 2013, p.20).

Assim, sendo apenas os trabalhos considerados importantes, como os Elementos de Euclides, dentre outras obras foram copiados, é chegaram até aos nossos dias.

Nesse sentido Roque (2012), afirma:

> Grande parte do que se conhece sobre a matemática na Grécia antiga parte de conclusões extraídas de um exame minucioso, por um lado, dos escritos de Platão e Aristóteles, e, por outro lado, dos Elementos de Euclides. A versão mais popular é a de que esse livro de Euclides resulta de uma compilação de conhecimentos matemáticos anteriores, ainda que a forma de exposição deva ser característica do tempo e do meio em que ele viveu. Não é possível confirmar essa tese, mas é fato que uma boa parte da matemática contida nessa obra associa-se a outros trabalhos gregos (ROQUE, 2012, p.115).

A matemática dos gregos tinha um caráter dedutivo, não havendo propriamente livros contendo problemas, em vez disso havia axiomas, proposições, teoremas e demonstrações. Percebemos então que a matemática grega se distingue da babilônia e egípcia pela maneira de encará-la. Os gregos fizeram-na uma ciência propriamente dita sem a preocupação de suas aplicações práticas, também do ponto de vista da estrutura, a matemática grega se distingue da babilônia e egípcia, por ter levado em conta problemas relacionados com processos infinitos, movimento e continuidade.

Nesse sentido Rooney (2012), afirma:

> Enquanto os matemáticos, Egípcios e Babilônios, muitas vezes se relacionam com situações práticas particulares, uma civilização posterior, os antigos gregos, tiveram mais interesse por problemas puramente abstratos (ROONEY, 2012, p.78).

As diversas tentativas dos gregos de resolverem tais problemas fizeram com que aparecesse o método axiomático-dedutivo. Este método consiste em admitir como verdadeiras certas proposições (mais ou menos evidentes) e a partir delas, por meio de um encadeamento lógico, chegar a proposições mais gerais.

Com as dificuldades com que os gregos se depararam ao estudar os problemas relativos a processos infinitos (sobretudo problemas sobre números irracionais) talvez sejam as causas que os desviaram da álgebra, encaminhando-os em direção à geometria. Realmente, é na geometria que os gregos se destacam, culminando com a obra de Euclides, intitulada “Os Elementos”. Sucedendo Euclides, encontramos os trabalhos de Arquimedes de Siracusa e de Apolônio de Perga[70](262 a.C.–194 a.C.).

Por outro lado Arquimedes desenvolve a geometria, introduzindo um novo método, denominado “método de exaustão”, que seria um verdadeiro germe do qual mais tarde iria brotar um importante ramo de matemática (teoria dos limites).

Brummelen (2009) afirma:

> Encontramos estudos similares da trigonometria nos trabalhos de Arquimedes um dos cientistas mais antigos e criativos e renomados por sua habilidade de abordar difíceis problemas, geométrico, incluindo suas determinações de áreas de figuras curvas. “Seu método de exaustão”, que funciona escrevendo gradualmente e sucessivamente a figura requerida com polígonos, aproximando a curva. Arquimedes também escreveu

[70] **Apolônio de Perga:** Foi um matemático e astrônomo grego da escola alexandrina, chamado de o *Grande Geômetra*. Viveu em Alexandria, Éfeso e Perga. Sua obra foi vasta e algumas foram perdidas: Uma dessas obras apresenta o método para efetuar cálculos de aproximação do número π mais precisa que a dada por Arquimedes; *Dividir em uma razão* (perdida), vários casos sobre o problema dado duas retas e um ponto em cada uma, traçar por um terceiro ponto dado uma reta que corte sobre as retas dadas segmentos que estejam numa razão dada; *Cortar uma área*; *Sobre secção determinada*, geometria analítica; *Tangências*, onde consta o conhecido *“problema de Apolônio”, inclinações*, sobre problemas planos utilizando régua e compasso; *“Lugares planos”.* Flood & Wilson (2013).

> inúmeros trabalhos com tópicos antes dos estudos modernos da Física, incluindo mecânica, ótica e hidrostática. Suas temidas maquinas de guerra e outros instrumentos divulgaram sua fama muito além dos confins da ciência. (BRUMMELEN, 2009, p.26, tradução nossa).

Apolônio de Perga, contemporâneo de Arquimedes, dá início aos estudos das denominadas curvas cônicas: a elipse, a parábola, e a hipérbole, que desempenham, na matemática atual, papel muito importante.

No tempo de Apolônio e Arquimedes, a Grécia já deixara de ser o centro cultural do mundo, o qual, por meio das conquistas de Alexandre, havia se transferido para a cidade de Alexandria. Depois de Apolônio e Arquimedes, a matemática grega entra no seu declínio. A matemática grega teve origem no racionalismo jônico e seu principal estimulador foi Tales de Mileto, considerado o pai da matemática moderna grega. O racionalismo jônico objetivou o estudo de quatro pontos fundamentais: compreensão do lugar do homem no universo conforme um esquema racional, encontro da ordem no caos, ordem das ideias em sequências lógicas e obtenção dos princípios fundamentais. Tais pontos partiram da observação que os povos orientais tinham deixado de fazer a respeito do processo de racionalização de sua matemática, contentando-se, tão somente, com sua aplicação.

Neste período começam a surgir as primeiras divisões nas ciências. Na Grécia surgem dois grupos distintos de filósofos: os Sofistas e os Pitagóricos, os quais passam a analisar as ciências de dois modos diferentes.

Os Sofistas abordavam os problemas de natureza matemática como uma investigação filosófica do mundo natural e moral, desenvolvendo uma matemática mais voltada à compreensão do que à utilidade. É a ênfase na abstração matemática em detrimento da matemática essencialmente prática.

Os Pitagóricos, sociedade secreta criada por Pitágoras de Samos, enfatizavam o estudo dos elementos imutáveis da natureza e da sociedade. O chefe desta sociedade foi Arquitas de Tarento[71] (428 a.C.–347 a.C.). Os Pitagóricos estudavam o *quadrivium* (geometria, aritmética, astronomia e música). Sua filosofia

---

[71] **Arquitas de Tarento:** Foi filósofo, cientista, estrategista, estadista, matemático e astrônomo grego, considerado o mais ilustre dos matemáticos Pitagóricos. Acredita-se ter sido discípulo de Filolau de Crotona e amigo de Platão. Fundou a mecânica matemática e influenciou Euclides. Foi o primeiro a usar o cubo em geometria e a restringir as matemáticas às disciplinas técnicas como a geometria, aritméticas, astronomia e acústica. Embora inúmeras obras sobre mecânica e geometria lhe sejam atribuídas, restaram apenas fragmentos cuja preocupação central é a Matemática e a Música, acredita-se que Arquitas seja o fundador da mecânica matemática. Tucker (2005).

pode ser resumida na expressão “tudo é número”, com a qual diziam que tudo na natureza pode ser expresso por meio dos números.

Aos Pitagóricos, a Pitágoras de Samos, principalmente podemos creditar duas descobertas importantes: o conceito de número irracional por meio de segmentos de retas incomensuráveis e a axiomatização das relações entre os lados de um triângulo retângulo (teorema de Pitágoras), que já era conhecido por babilônicos e egípcios.

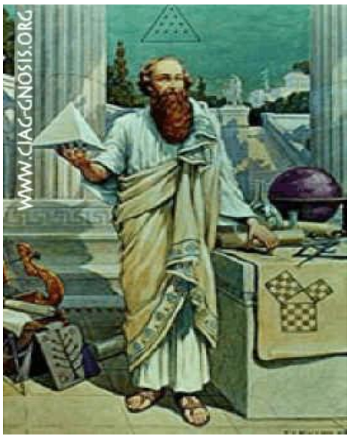


Figura 24: Pitágoras de Samos[72]
Fonte: Site:www.wordpress.com

Os matemáticos gregos do período clássico começam a trabalhar com o princípio da indução lógica apagoge[73] que é o início da axiomática, a qual foi desenvolvida por Hipócrates. Os três problemas que deram início ao estudo da axiomática foram: trissecção de um ângulo, duplicação do volume do cubo (problema délico) e quadratura do círculo.

Podemos observar que as descobertas matemáticas estão relacionadas com os avanços obtidos pela sociedade, tanto intelectuais quanto comerciais. Se no princípio a matemática era essencialmente prática, visto que as sociedades eram rudimentares, com o desenvolvimento destas sociedades a matemática também evoluiu, passando de uma simples ferramenta, que auxiliava nos problemas práticos, para uma ciência que serviu como chave para analisar o mundo e a natureza em que vivemos.

A trigonometria, no início, não era vista como uma ciência, mas sim enquanto ferramenta para auxiliar no estudo da astronomia e à medida que a

[72] Fonte da figura disponível em: http://www.gloriacansecoalvarez.files.wordpress.com.pitagoras.jpg, acesso em 10 de julho de 2013.
[73] Prova através da apresentação da falsidade do oponente; argumentação indireta que prova a impossibilidade ou falta de lógica do oponente.

trigonometria foi se desenvolvendo, ela passou a servir de base para outras áreas do conhecimento.

Segundo Rosa (2012),

> Para muitos autores, a trigonometria, ainda que incipiente e no estágio pioneiro, foi objeto de estudos na antiga Grécia. A evolução foi lenta, já que não dispunham os matemáticos helênicos de instrumental apropriado para a geometria esférica e a trigonometria. (ROSA, 2012, p.154).

Portanto os gregos antigos transformaram a trigonometria em uma ciência ordenada, e desta forma a Astronomia foi à força motriz para tais avanços em trigonometria, que nos primórdios estava na trigonometria esférica principalmente por causa daquela aplicação.

Katz (2010) afirma,

> Na aplicação da matemática ao estudo da astronomia, os gregos criaram a trigonometria plana e esférica e também desenvolveram um modelo matemático do universo, um modelo que modificaram muitas vezes durante os cincos séculos entre os tempos de Platão e Ptolomeu. (KATZ, 2010, p.171).

E os três principais nomes que conhecemos no desenvolvimento da trigonometria grega são: Hiparco, Menelau e Ptolomeu. Havia provavelmente outros colaboradores, mas ao longo do tempo suas obras foram perdidas e seus nomes foram esquecidos.

Flood & Wilson (2013), afirma:

> Embora pouco da obra de Hiparco tenha sobrevivido, Cláudio Ptolomeu o considerava o seu antecessor mais importante. Na verdade, a disciplina Trigonometria (que significa medição de ângulos), criada por Hiparco por volta de 150 a.C., foi desenvolvida por Cláudio Ptolomeu. (FLOOD & WILSON, 2013, p.32).

Nesse sentido relativo ao problema da navegação e à astronomia, encontramos, entre os gregos, grandes matemáticos que contribuíram com medições, cálculos e ideias, que poderíamos considerar como os primeiros estudos com indícios de trigonometria.

Podemos citar, por exemplo, Hipsícles de Alexandria[74](240 a.C.–170 a.C.) Aristarco de Samos, Eratóstenes de Cirene, Hiparco de Niceia, Cláudio Ptolomeu, outras fontes precursoras da trigonometria são normalmente, citadas, com a obra

[74] **Hipsícles de Alexandria:** Foi um Astrônomo e geômetra grego nascido em Alexandria, Egito, especialista em estudos de sólidos regulares e suposto autor de uma obra de astronomia, *De ascensionibus* (180 a.C.), onde dividiu o dia em 360 partes, inspirado na astronomia babilônica, popularizada mais tarde por Hiparco de Nicéia (190 a.C-126 a.C.). Tucker (2005).

Arenário de Arquimedes de Siracusa, *Óptica* de Euclides de Alexandria, Dinóstrato[75] (ca.390 a.C.–ca.320 a.C) e a descoberta, por Apolônio de Perga da projeção estereográfica da esfera sobre o plano.

Apesar de, estritamente falando, não haver nenhuma trigonometria, nos trabalhos de Euclides e de Arquimedes, existem teoremas apresentados de uma forma geométrica que são equivalentes a fórmulas ou leis trigonométricas específicas. Por exemplo, as proposições 12 e 13 do Livro II dos Elementos são a lei dos cossenos para ângulos agudos e obtusos, respectivamente. Teoremas a respeito do comprimento das cordas são aplicações da lei dos senos.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

E o teorema de Arquimedes sobre cordas rompidas é equivalente às fórmulas para o seno de somas e diferenças de ângulos. Para compensar a falta de uma tabela de cordas, os matemáticos da época de Aristarco de Samos às vezes usavam um conhecido teorema de que, em notação moderna, seria $\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\operatorname{Tg} \alpha}{\operatorname{Tg} \beta}$, sempre que 0° < (β, α) < 90°, dentre outros.

Nesse sentido Neugebauer (1983), afirma:

> Com a ajuda de tais desigualdades Aristarco estimou os valores numéricos de funções trigonométricas em alguns casos específicos de ângulos pequenos. Algumas décadas mais tarde, Arquimedes fez uso da mesma fórmula. Al-Biruni preservou um Lema de Arquimedes, o que mostra que ele tinha uma versão equivalente do teorema de Ptolomeu à sua disposição (NEUGEBAUER, 1983, p.773, tradução nossa).

A primeira amostra documentada de contribuição grega para o estudo da trigonometria apareceu por volta de 180 a.C. quando Hipsícles, influenciado pela cultura babilônia, dividiu o zodíaco em 360 partes. Essa ideia foi posteriormente generalizada por Hiparco para qualquer círculo.

A primeira tabela trigonométrica foi aparentemente compilada por Hiparco de Niceia, que passou a ser conhecido como o “pai da trigonometria”, pois na segunda metade do século II a.C., realizou muitas observações planetárias,

---

[75] **Dinóstrato:** Foi um matemático e grego irmão Menaechmus é conhecido por empregar quadratrix para resolver o problema da quadratura do círculo. Embora Dinóstrato tenha resolvido o problema da quadratura do círculo, não foi usado para essa finalidade utilizou apenas régua e compasso, por assim a sua solução violou os princípios gregos fundadores da matemática. Mais de dois mil anos mais tarde, iria provar que é impossível resolver o problema da quadratura do círculo usando apenas régua e compasso. Rooney (2012).

introduziu um sistema de coordenadas para a esfera celeste, visando relacionar as coordenadas de um ponto num sistema de coordenadas com as suas coordenadas de outro sistema, esses trabalhos serviriam para resolver problemas astronômicos, mais a ferramenta matemática para resolver tal problema era a trigonometria esférica, mais para poder utilizar a trigonometria esférica seria necessário desenvolver antes a geometria esférica, varias pesquisas históricas foram feitas em varias fontes primárias para poder ter uma imagem razoável do seu trabalho.

Nesse sentido Heath (1981, p.257, tradução nossa), afirma: “Mesmo que Hiparco não tenha inventado a Trigonometria, ele é a primeira pessoa, de quem temos provas documentais, que tenha feito uma utilização sistemática da trigonometria”.

Devido suas necessidades praticas em Astronomia os gregos criaram a uma unidade angular e dessa forma era possível medir o ângulo ou arco em graus e minutos, Hiparco decidiu usar a mesma medida para o raio da circunferência, adicionalmente, era feita a construção de uma tabela de cordas de círculo, instrumento fundamental em trigonometria, é atribuída a Hiparco, o pioneirismo na medição dos ângulos.

Katz (2010, p.180–181) afirma, o elemento básico na trigonometria de Hiparco e também, mais tarde, na trigonometria de Ptolomeu era a corda que subentende um dado arco (ou ângulo central) numa circunferência de raio fixo. Os dois deram uma tabela listando α e corda(α), para vários valores de arc.α. Notemos que a corda(α), doravante abreviada para crd (α), é simplesmente um comprimento conforme figura 25.

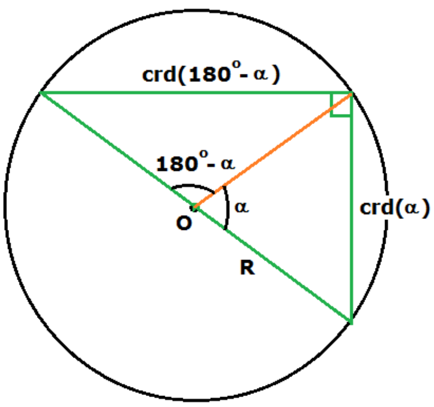


Figura 25: A representação da corda (ou ângulo central)[76]
Fonte: Vitor J. Katz 2010

[76] Fonte da figura extraída do livro História da Matemática de Vitor J. Katz 2010, p.181.

Se o raio da circunferência for representado por R, então, a corda encontra-se relacionada com o seno pelas seguintes equações abaixo.

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot \mathrm{Crd}(\alpha)}{R} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{Crd}\,(\alpha) = 2R\cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Sarton (1959, p.286, tradução nossa) afirma, Hiparco escreveu um tratado em doze livros sobre cordas em um círculo, no qual se ocupou da construção do que deve ter sido a primeira tabela trigonométrica, que se perdeu ao longo tempo. Acredita-se que este tratado continha alguma teoria trigonométrica geral conjuntamente com algumas tabelas e também fez uso sistemático do círculo de 360º.

Katz (2010) afirma,

> Para lidar quantitativamente com as posições das estrelas e dos planetas, é necessário fixar uma unidade de medida de arcos e ângulos e um método de especificar onde um corpo particular se encontra localizado na esfera celeste isto é, um sistema de coordenadas. A unidade para medida de ângulos de Euclides era simplesmente o ângulo reto. Outros ângulos eram referidos como partes ou múltiplos deste ângulo. Os babilônios, no entanto, iniciaram, antes de 300 a.C., a divisão da circunferência em 360 partes, chamadas graus, e nos dois séculos seguintes esta medida, juntamente com a divisão sexagesimal dos graus em minutos e segundos, foi adaptado no mundo grego. Hiparco foi um dos primeiros a fazer uso desta medida, embora também usasse arcos de 1/24 e 1/48 de círculo, assim denominados “passos” e “semi-passos”, em parte do seu trabalho (KATZ, 2010, p.179).

Evidentemente, Hiparco fez esses cálculos para usá-los em seus estudos de astronomia. Hiparco foi uma figura de transição entre a astronomia babilônia e a obra de Ptolomeu. As principais contribuições à Astronomia, atribuídas a Hiparco se constituíram na organização de dados empíricos derivados dos babilônios, bem como na elaboração do primeiro um catálogo estrelar com as posições de 850 estrelas, aperfeiçoamento de constantes astronômicas importantes, duração do mês e do ano, o tamanho da Lua, o ângulo de inclinação da eclíptica e, finalmente, a descoberta da precessão dos equinócios[77].

Nesse sentido Heath (1981), afirma:

> É creditado a Hiparco ser a primeira pessoa a determinar exatamente os horários do nascer e pôr os signos zodiacais. Pappus de Alexandria, que

[77] **Precessão dos equinócios:** É literalmente um círculo imaginário, riscado na esfera celeste pela projeção do eixo de rotação terrestre. Esse risco, que há milênios vem sendo acompanhado, se chama *precessão* que é um movimento para trás em relação ao avanço do ponto vernal do equador celeste. Neto (2013).

> era um professor de matemática, no século IV, observou que Hiparco em seu livro sobre a ascensão dos doze signos do zodíaco mostra por meio de cálculos numéricos que arcos iguais do início semicírculo com Câncer que fixou em tempos que têm uma certa relação uns aos outros e não mostram em toda parte a mesma relação entre os tempos em que se levantam. (HEATH, 1981, p.257. tradução nossa)

Hiparco incorporou dados das suas observações astronômicas aos modelos geométricos usados para explicar movimentos astronômicos. Também pode ter desenvolvido um instrumento do tipo de um astrolábio para calcular a hora da noite a partir da observação das estrelas.

Parece que o uso sistemático do círculo de 360° e em boa medida é devido a Hiparco, ele pode ter tirado a ideia dessa divisão de Hipsícles, que tinha anteriormente dividido o dia em 360 partes, uma divisão do dia que deve ter sido para as necessidades da astronomia babilônica, pois na astronomia babilônica antiga, o zodíaco havia sido dividido em doze “signos” ou 36 “decanos”.

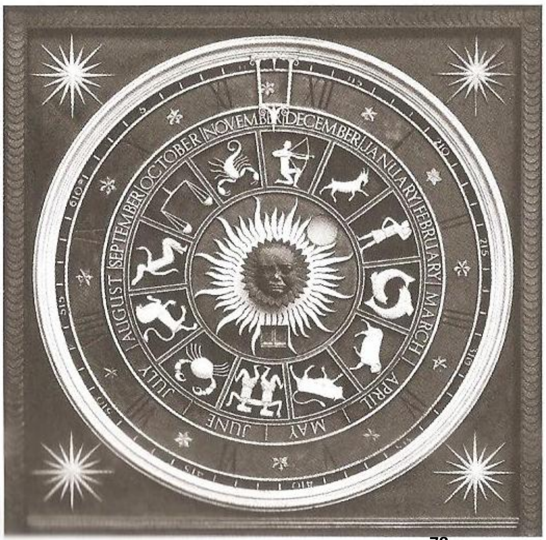


Figura 26: Relógio Zodíaco[78]
Fonte: Anne Rooney 2012

(ROONEY, 2012, p.88) afirma, foram os babilônios que dividiram o zodíaco em 12 signos ou 36 decanos, refletindo seu ciclo sazonal de aproximadamente 360 dias.

Nesse sentido um ciclo sazonal é de aproximadamente 360 dias pode ter correspondido aos signos e decanos do zodíaco, dividindo cada signo em trinta partes e cada decano em dez partes. Infelizmente toda a obra de Hiparco se perdeu, exceto uma tabela de corda, que eram uma ferramenta essencial para o

---
[78] Fonte da figura extraída do livro História da Matemática de Anne Rooney 2012.

desenvolvimento precoce da trigonometria, todavia ganhou-se o conhecimento de seu trabalho através de Ptolomeu.

Depois de Hiparco o próximo matemático grego conhecido por ter feito contribuição importante para a trigonometria foi Menelau de Alexandria, sabe-se que escreveu várias obras de trigonometria e geometria, através de comentários de sábios gregos e árabes, alguns desses comentadores foram, Pappus[79](290–350) e Proclus [80] (412/17–485) e Theon de Alexandria [81] (335–405), ficaram poucas informações sobre sua vida, mas sua obra teve grande influência na evolução da trigonometria esférica e na astronomia. Dentre as obras de Theon temos, uma coleção de seis livros sobre *"Cordas no Círculo",* um livro de *"Elementos da Geometria"* e uma série de trabalhos em geometria e astronomia, todos perdidos.

O único livro de Menelau que sobreviveu ao tempo foi o *"Sphaerica",* um tratado em três volumes sobre geometria e trigonometria esférica, no terceiro livro contém algumas excelentes informações sobre o desenvolvimento da trigonometria e é o primeiro trabalho que foi preservado em trigonometria esférica. Infelizmente, a versão grega do texto está perdida, e tudo o que resta é uma versão árabe traduzida mil anos depois que o original foi escrito.

Vários tradutores ao longo dos anos tiveram seu comentário incluído nessa obra, tornando difícil separar o original dos comentaristas. No entanto, este

---

[79] **Pappus:** Foi um dos últimos grandes matemáticos gregos da Antiguidade, conhecido por sua *Sinagoga* ou *Collection* (c. 340), coleção, sua obra mais conhecida, é um compêndio de matemática em oito volumes, o primeiro livro foi perdido e o restante dos livros sobreviveu até hoje, abrange uma ampla gama de tópicos, incluindo geometria, matemática recreativa, duplicação do cubo, polígonos e Poliedros, desenvolveu um teorema que leva seu nome Teorema de Pappu sem geometria projetiva. Rosa (2013).

[80] **Proclus**: Um dos últimos grandes filósofos clássicos, a maioria das obras de Proclus são comentários sobre os diálogos de Platão *(Alcibíades, Crátilo, Parmênides, República, Timeu).* Nestes comentários ele apresenta seu próprio sistema filosófico como uma interpretação fiel de Platão, e nisso ele não difere de outros neoplatônicos, pois ele considerava os textos platônicos ser divinamente inspirado *(ho theios Platon*) O divino Platão, inspirado pelos deuses e, portanto, eles falaram muitas vezes de coisas sob um véu, escondendo a verdade do não-iniciado filosoficamente. Proclus também escreveu um influente comentário sobre o primeiro livro de Euclides *Elementos de geometria.* Este comentário é uma das fontes mais valiosas que temos para a história da matemática antiga. Neste trabalho, Proclus também listou um conjunto dos primeiros matemáticos associados Platão (Leodamas de Tasos, Arquitas de Taras e Teeteto), um segundo conjunto de matemáticos mais jovens (Neoclides, Eudoxo de Cnido), e um terceiro conjunto ainda mais jovem (Amintas, Menaechmus e seu irmão Dinostratus, Theudius de Magnésia, Hermotimus de Colofon). Alguns desses matemáticos foram influentes na organização dos Elementos de Euclides publicados mais tarde. Rosa (2013).

[81] **Theon de Alexandria:** Foi professor de matemática e astronomia, famoso por seus comentários sobre várias obras, como *Almagesto* de Ptolomeu e a obras de Euclides, estes comentários foram escritos por seus alunos e alguns são até mesmo pensados para ser notas de aula tomadas por estudantes em suas palestras. Notabilizou por ser pai da filosofa Hipátia e por produzir em 390 uma versão mais elaborada da obra d*os Elementos* de Euclides e foi o único texto grego dos *elementos* conhecidos, até que uma versão foi descoberta no Vaticano no final do século 19. Tucker (2005).

trabalho ainda proporciona uma boa fonte para o desenvolvimento de trigonometria grega.

No Livro I, da *Sphaerica*, estabelece-se uma base teórica para estudo dos triângulos esféricos assim como Euclides fez para os triângulos planos, como teoremas usuais de congruência e teoremas sobre triângulos isósceles entre outros. Além disso, contém um teorema que não possui um análogo euclidiano, que é *"dois triângulos esféricos são congruentes quando os ângulos correspondentes são iguais"* (Menelau não fazia distinção entre triângulos esféricos congruentes e simétricos).

Menelau estabeleceu também o fato de que a soma dos ângulos de um triângulo esférico é maior que 180^o. O Livro II contém teoremas de interesse da astronomia e no livro III desenvolve-se a trigonometria esférica através da proposição conhecida como teorema de Menelau, esse teorema tem uma representação para os casos plano e esférico, vamos apresentar apenas o caso esférico.

De acordo com Katz (2010, p.191–193) temos um resultado importante desse trabalho *(Sphaerica)*, hoje conhecido como o Teorema de Menelau, que faz as relações entre os arcos dos círculos máximos, apresentado na figura abaixo.

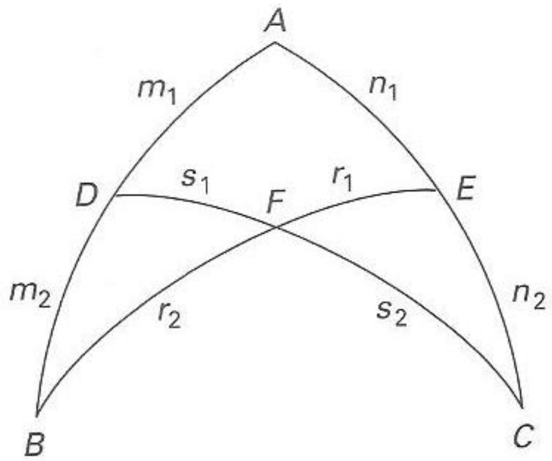


Figura 27: Teorema de Menelau para Triângulos Esféricos[82]
Fonte: Vitor J. Katz 2010

Dois arcos AB e AC são cortados por outros dois arcos BE e CD que se interceptam em F. Com os arcos rotulados na figura 27, e com os arcos $AB = m$, $AC = n$, $BE = r$ e $CD = s$, o Teorema de Menelau, escrito usando senos em vez de cordas, afirma que: $\frac{\text{sen}(n_2)}{\text{sen}(n_1)} = \frac{\text{sen}(s_2)}{\text{sen}(s_1)} \cdot \frac{\text{sen}(m_2)}{\text{sen}(m)}$ e $\frac{\text{sen}(n)}{\text{sen}(n_1)} = \frac{\text{sen}(s)}{\text{sen}(s_1)} \cdot \frac{\text{sen}(r_2)}{\text{sen}(r)}$.

[82] Fonte da figura extraída do livro História da Matemática de Vitor J. Katz 2010, p.191.

Menelau estabeleu estes resultados (e a mesma demonstração aparece também no Almagesto) provando-os primeiro para uma configuração plana (representação do triângulo plano), semelhante e projetando, então, o diagrama esférico num plano. Ptolomeu usou, então, o teorema de Menelau para resolver triângulos retângulos esféricos, triângulos compostos de arcos de circulos máximos, onde dois dos arcos e encontram num ângulo reto.

Dado um triângulo retângulo esférico com ângulo reto em C, e os lados opostos aos ângulos C, B e A, respectivamente c, b e a, conforme figura 28, Ptolomeu configuração de Menelau (representação do triângulo esférico), contendo. Por exemplo, se ABC for o triângulo retângulo, construam-se os círculos máximos PM, QN que tem A, B respectivamente, como pólo, e prolonguemos cada lado do triângulo de modo a encontrar aqueles dois círculos máximos. Existem então duas configurações de Menelau, uma com o vértice em M, a outra com o vértice em N. Visto que o comprimento de um arco de círculo máximo subentendido por um ângulo no pólo desse círculo é igual à medida em graus de ângulo, e como P e Q são polos de QM, PN, respectivamente, as duas equações podem ser simplificadas consideravelmente para obter resultados relacionando os ângulos e os lados do triângulo dado.

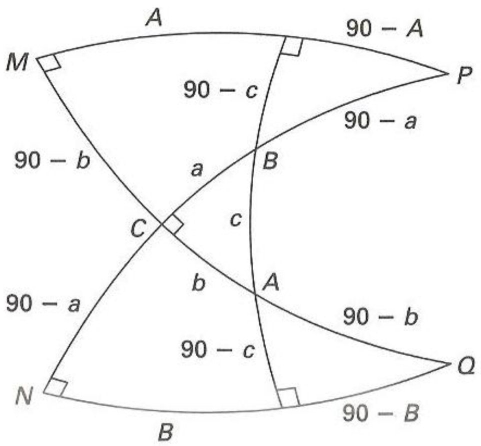


Figura 28: Triângulos Esféricos Retângulos[83]
Fonte: Vitor J. Katz 2010

Primeiro, usando a configuração com vértice M, a equação, $\frac{\operatorname{sen}(n_2)}{\operatorname{sen}(n_1)} = \frac{\operatorname{sen}(s_2)}{\operatorname{sen}(s_1)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(m_2)}{\operatorname{sen}(m)}$, fazendo as devidas substituições de acordo com a

[83] Fonte da figura extraída do livro História da Matemática de Vitor J. Katz 2010, p.192.

figura 28, torna-se, $\frac{sen(90^0 - A)}{sen(A)} = \frac{sen(90^0 - a)}{sen(a)} \cdot \frac{sen(b)}{sen(90^0)}$ que resolvendo podemos obter: $\frac{cos(A)}{sen(A)} = \frac{cos(a)}{sen(a)} \cdot \frac{sen(b)}{1}$.

$cotg(A) = cotg(a) \cdot sen(b)$, como por definição $cotg(A) = \frac{1}{tg(A)}$, onde também podemos aplicar ao lado (a) e substituindo na equação anterior essa identidade trigonométrica obtemos.

$\frac{1}{tg(A)} = \frac{1}{tg(a)} \cdot sen(b)$, portanto temos:

$tg(A) = \frac{tg(a)}{sen(b)}$. (01).

Utilizando agora a relação $\frac{sen(n)}{sen(n_1)} = \frac{sen(s)}{sen(s_1)} \cdot \frac{sen(r_2)}{sen(r)}$, fazendo as devidas substituições de acordo com a figura 28, torna-se, $\frac{sen(90^0)}{sen(A)} = \frac{sen(90^0)}{sen(a)} \cdot \frac{sen(c)}{sen(90^0)}$, que resolvendo podemos obter:

$\frac{1}{sen(A)} = \frac{1}{sen(a)} \cdot \frac{sen(c)}{1}$, logo obtemos:

$sen(A) = \frac{sen(a)}{sen(c)}$. (02).

Segundo, usando a configuração com vértice N, a equação, $\frac{sen(n_2)}{sen(n_1)} = \frac{sen(s_2)}{sen(s_1)} \cdot \frac{sen(m_2)}{sen(m)}$, fazendo as devidas substituições de acordo com a figura 28, torna-se, $\frac{sen(a)}{sen(90^0 - a)} = \frac{sen(c)}{sen(90^0 - c)} \cdot \frac{sen(90^0 - B)}{sen(90^0)}$ que resolvendo podemos obter:

$$\frac{sen(a)}{cos(a)} = \frac{sen(c)}{cos(c)} \cdot \frac{cos(B)}{1}$$

$tg(a) = tg(c) \cdot cos(B)$, portanto temos:

$cos(B) = \frac{tg(a)}{tg(c)}$ (03).

Utilizando agora a relação $\frac{sen(n)}{sen(n_1)} = \frac{sen(s)}{sen(s_1)} \cdot \frac{sen(r_2)}{sen(r)}$, fazendo as devidas substituições de acordo com a figura 28, a relação anterior torna-se, $\frac{sen(90^0)}{sen(90^0 - a)} = \frac{sen(90^0)}{sen(90^0 - c)} \cdot \frac{sen(90^0 - b)}{sen(90^0)}$, que resolvendo podemos obter:

$\frac{1}{cos(a)} = \frac{1}{cos(c)} \cdot \frac{cos(b)}{1}$, logo obtemos:

$cos(c) = cos(a) \cdot cos(b)$ (04).

Fazendo rotações nos outros vértices P, e Q, obtemos de maneira análoga as demais fórmulas, no capitulo III, desse texto mostramos um quadro na pagina (195) onde serão listadas todas as fórmulas possíveis para resolução do triângulo esférico retângulo e retilátero.

O grande legado do teorema de Menelau foi ser utilizado como a própria trigonometria esférica por vários séculos.

O restante do terceiro livro, de Menelau é composto de proposições trigonométricas que eram necessárias para resolver problemas em astronomia esférica.

Outro grande cientista a fazer contribuições importantes em trigonometria do período grego foi o astrônomo, matemático e geógrafo Cláudio Ptolomeu, que em seu trabalho expandiu as cordas em um círculo de Hiparco, obra essa intitulado de Almagesto[84], e também é chamada de *Syntaxis Mathematica* (Coleção Matemática). A obra é dividida em 13 livros é a síntese dos trabalhos dos astrônomos da Antiguidade entre eles temos Aristóteles, Hiparco, Posidônio[85](135 a.C.–51 a.C.), sendo a principal fonte a respeito do trabalho de Hiparco, que é considerado o maior astrônomo da Grécia antiga.

Toomer (1984, tradução nossa) chama o Almagesto uma obra-prima de clareza e método, superior a qualquer antigo livro científico e com alguns colegas de todo o período. Mas é muito mais do que isso. Longe de ser uma mera compilação

---

[84] **Almagesto:** Este tratado é famoso por sua compacidade e elegância, e para distingui-lo de outros foi associado a ele o superlativo magiste ou "o maior", foi chamado também de "O Grande Tratado", um tratado de astronomia, mais tarde na Arábia o chamaram de Almagesto, e a partir de então a obra é conhecida por esse nome. Rooney (2012).

[85] **Posidônio:** Foi um político, astrônomo, geógrafo, historiador e filósofo estoico grego. Racionalista e místico, reuniu diversas correntes filosóficas dentro da estrutura de um monismo estoico, e tratou de apoiar as suas teorias com o seu grande saber empírico. Zeller chamou-o de "o espírito mais universal que houve na Grécia desde a época de Aristóteles". Rooney (2012).

de astronomia antes grega, como às vezes é descrito, é em muitos aspectos um trabalho original.

O Almagesto é os mais influentes e significativos trabalhos sobre trigonometria de toda a Antiguidade, baseado na cosmologia aristotélica, apresenta o sistema cosmológico geocêntrico, o sistema que diz que a Terra é o centro do Universo e os outros astros e corpos celestes descrevem órbitas ao seu redor. Essas órbitas seriam círculos perfeitos, conforme ensinavam Platão e Aristóteles. Essa concepção foi adotada pelos teólogos medievais, que rejeitavam qualquer teoria que não colocasse a Terra em lugar privilegiado. Por isso o modelo geocêntrico foi considerado como correto por cerca de 1500 anos.

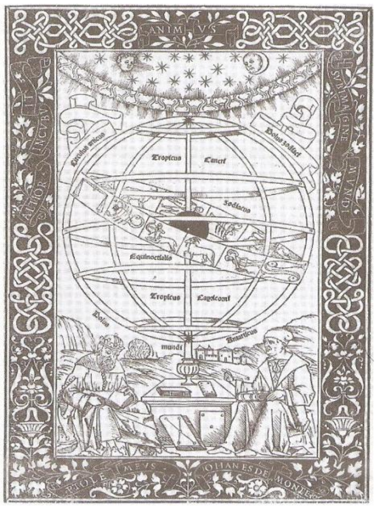


Figura 29: Capa do Livro Almagesto de Cláudio Ptolomeu[86]
Fonte: Vitor J. Katz 2010

No Almagesto está descrito todo o conhecimento astronômico babilônico e grego, e nele se basearam os astrônomos árabes, indianos e europeus e tornou-se o principal texto sobre astronomia nos dezesseis séculos seguintes, até que John Kepler[87](1571–1630), forneceu os argumentos que consolidaram definitivamente a teoria heliocêntrica formulada por Nicolau Copérnico[88](1473–1543).

[86] Fonte da figura extraída do livro História da Matemática de Vitor J. Katz 2010, essa capa consta de um trabalho gravado em madeira de uma primeira impressão de um resumo do Almagesto (1496), (Fonte: *Smithsonnian Institution Libraries*, Photo. N^0. 76-14409) p.183.

[87] **John Kepler:** Foi um astrônomo, matemático e astrólogo alemão e figura-chave da revolução científica do século XVII. É mais conhecido por ter formulado as três leis fundamentais da mecânica celeste, conhecidas como Leis de Kepler, codificadas por astrônomos posteriores com base em suas obras *Astronomia Nova*, *Harmonices Mundi*, e *Epítome da Astronomia de Copérnico*. Essas obras também forneceram uma das bases para a teoria da gravitação universal de Isaac Newton. Tucker (2005).

[88] **Nicolau Copérnico:** Foi um astrônomo e matemático polonês que desenvolveu a teoria heliocêntrica do Sistema Solar. Foi também cónego da Igreja Católica, governador e administrador, jurista, astrólogo e médico. Sua teoria do Heliocentrismo, que colocou o Sol como o centro do

E segundo Ptolomeu, os planetas, o Sol e a Lua giravam em torno da Terra na seguinte ordem: Lua, Mercúrio, Vênus, Sol, Marte, Júpiter e Saturno. Com a ajuda da trigonometria, Ptolomeu estudou o movimento desses astros, mas propôs uma explicação muito simplista para o problema do movimento aparente dos planetas: em determinados pontos de suas órbitas eles parecem deter-se, inverter seu movimento, deter-se novamente, finalmente mover-se na direção primitiva. Esses fenômenos devem-se, na realidade, ao fato de a Terra e os planetas moverem-se com velocidades diferentes em órbitas aproximadamente concêntricas e circulares. Ptolomeu, porém, para procurar explicar esse fenômeno aparentemente tão estranho, elaborou um sistema bastante complicado, embora geometricamente plausível.

Os planetas estariam fixados sobre esferas concêntricas de cristal, presididas pela esfera das estrelas Todas essas esferas girariam com velocidades diferentes, o que, julgava Ptolomeu, explicava as diferentes velocidades médias com que se moviam os diversos planetas.

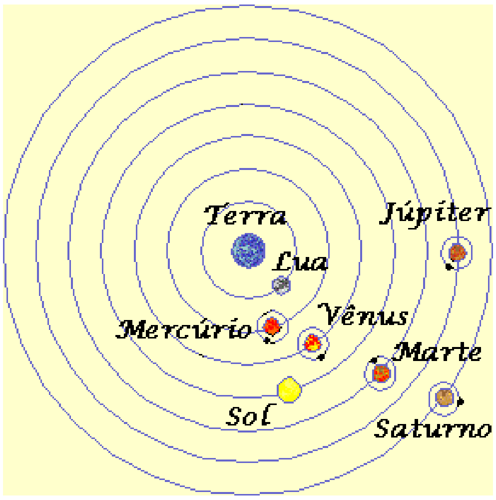


Figura 30: Sistema Geocêntrico de Ptolomeu[89]
Fonte: Site:www.mundofisico.joinvile.udesc.br

Heath (1981, tradução nossa) diz que é evidente que nenhuma parte da trigonometria, ou da questão preliminar para que, em Ptolomeu era novo. Que ele fez foi abstrair a partir de tratados anteriores e condensar no menor espaço possível,

---

Sistema Solar, contrariando até então vigente Teoria Geocêntrica (que considerava a Terra como o centro), é considerada como uma das mais importantes hipóteses científicas de todos os tempos, tendo constituído o ponto de partida da astronomia moderna. Tucker (2005).

[89] Fonte da figura disponível em: http:// www.mundofisico.joinvile.udesc.br, acesso em 29 de maio de 2014.

o mínimo de proposições necessárias para estabelecer os métodos e fórmulas utilizados.

Alguns historiadores da matemática acreditam que Ptolomeu tenha concluído a obra iniciada por Hiparco que ele trabalhou alguns detalhes necessários e compilados novas tabelas. É difícil dizer o que acréscimos e modificações feitas por Ptolomeu das obras já existentes.

Katz (2010), afirma:

> A trigonometria de Hiparco e de Ptolomeu possibilitou aos gregos ”medir” triângulos nos céus, assim como na Terra, relacionados com ocorrências nos céus. Mas seguramente os gregos necessitaram ser capazes de resolver triângulos ordinários na Terra, a fim de fazer medidas indiretas de distância e de altura (KATZ, 2010, p.197).

O Almagesto é uma fonte mais importante de informações sobre Hiparco, também pouco sabe da vida de Ptolomeu além do que aparece lá. As observações astronômicas de Ptolomeu dizem respeito ao período entre 127 e 141, e se basearam em Alexandria, por isso é conhecido como Cláudio Ptolomeu de Alexandria.

O Almagesto é um marco, nele está contido um modelo de astronomia que perdurou até Copérnico, no século XVI. Dos treze livros que compõem o Almagesto, o primeiro contém as informações matemáticas preliminares, indispensáveis na época, para uma investigação dos fenômenos celestes, tais como proposições sobre geometria esférica, métodos de cálculo, uma tabela de cordas e explicações gerais sobre os diferentes corpos celestes. Os demais livros são dedicados à Astronomia.

Katz (2010) afirma,

> Foi o trabalho astronômico com mais influência desde o tempo em que foi escrito até ao século dezessete, e foi copiado e analisado tantas vezes sem conta. Mais do que outros livros, este deu um ímpeto à nação de que os astrônomos podiam criar um modelo matemático - ou seja, uma descrição quantitativa dos fenômenos naturais - que dessa origem a previsões confiáveis. (KATZ, 2010, p.183).

Ptolomeu desenvolveu o estudo da trigonometria nos capítulos dez e onze do primeiro livro do Almagesto. O capítulo 11 consiste numa tabela de cordas e o capítulo 10 explica como a tabela pode ser calculada. Na verdade, não existe no Almagesto nenhuma tabela contendo as funções seno e cosseno, mas sim a função corda do arcoα, ou crdα, embora naturalmente esses termos não apareçam.

A função corda do arco α era definida como sendo o comprimento da corda que corresponde a um arco de α graus em um círculo cujo raio é 60. Assim, na tabela de cordas de Ptolomeu existiam três colunas: a primeira listando os arcos, a segunda, o comprimento da corda correspondente a cada arco e a terceira que dava o aumento médio de $crd\alpha$, correspondente a um acréscimo de um minuto em α. Esta coluna era usada pelas interpolações, isto é, para achar o valor de $crd\alpha$ se α estivesse entre duas entradas na coluna de arcos. A tabela de cordas de Ptolomeu é completada por arcos que subtendem ângulos crescentes a partir de 1/2 graus a 180^0 graus em passos de 1/2 graus.

Rooney (2012) afirma,

> Ptolomeu usou um raio de 60 como base de sua tabela de cordas e deu valores em passos de $1/2^0$ de 0^0 até 180^0 com precisão de 1/3600 de uma unidade. Isto é equivalente a uma tabela de senos para cada $1/4^0$ de 0^0 até 90^0. (ROONEY, 2012, p.90).

No entanto, a tabela de cordas pode ser usada em fórmulas que são equivalentes às fórmulas atuais para as funções trigonométricas. A tabela de cordas no Almagesto é provavelmente a mesma tabela de Hiparco ou uma expansão, mas não podemos ter certeza, já que não há uma cópia da tabela de Hiparco para comparar com ela. (HEATH, 1981, p.259, tradução nossa).

Arcos	Cordas	1/60	Arcos	Cordas	1/60
$\frac{1}{2}$	0;31,25	0;1,2,50	6	6;16,49	0;1,2,44
1	1;2,50	0;1,2,50	47	47;51,0	0;0,57,34
$1\frac{1}{2}$	1;34,15	0;1,2,50	49	49;45,48	0;0,57,7
2	2;5,40	0;1,2,50	72	70;32,3	0;0,50,45
$2\frac{1}{2}$	2;37,4	0;1,2,48	80	77;8,5	0;0,48,3
3	3;8,28	0;1,2,48	108	97;4,56	0;0,36,50
4	4;11,16	0;1,2,47	120	103;55,23	0;0,31,18
$4\frac{1}{2}$	4;42,40	0;1,2,47	133	110;2,50	0;0,24,56

Figura 31: Tabela de Corda de Ptolomeu[90]
Fonte: Vitor J. Katz 2010

Um teorema central para o cálculo das cordas de Ptolomeu, e é conhecido ainda hoje como teorema de Ptolomeu, que é enunciado da seguinte maneira: "Em qualquer quadrilátero cíclico o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos", ou seja: $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$.

[90] Fonte da figura extraída do livro História da Matemática de Vitor J. Katz 2010, p.187.

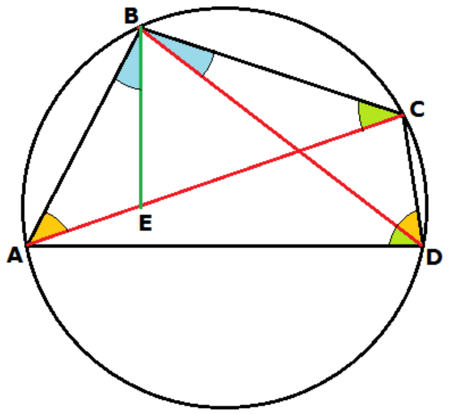


Figura 32: Teorema de Ptolomeu[91]
Fonte: Vitor J. Katz 2010

Nessa obra, aparece a percussora das fórmulas de soma e diferença de arcos da trigonometria plana, sendo formulada em função da corda e tem a seguinte representação: $120 \cdot \text{crd}(\alpha - \beta) = \text{crd}\,\alpha \cdot \text{crd}(180^0 - \beta) - \text{crd}\,\beta \cdot \text{crd}(180^0 - \alpha)$.

Esta representaçãoé facilmente transformada na fórmula moderna do seno da diferença de dois ângulos, $\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\,\alpha \cdot \cos\beta - \text{sen}\,\beta \cdot \cos\alpha$.

Usando argumentos semelhantes em função da corda, para está representação, $120 \cdot \text{crd}(180^0 - (\alpha + \beta)) = \text{crd}(180^0 - \alpha) \cdot \text{crd}(180^0 - \beta) - \text{crd}\,\beta \cdot \text{crd}\,\alpha$, essa expressão tranforma no equivalente à fórmula do cosseno da soma de dois ângulos. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \text{sen}\,\alpha \cdot \text{sen}\,\beta$.

Desta forma, o teorema de Ptolomeu leva ao equivalente das quatro fórmulas de soma e diferença para senos e cossenos, conhecidos como fórmulas de Ptolomeu, apesar de que Ptolomeu na verdade usava corda em vez de seno e cosseno. Utilizou assim, o que pode ser considerado o prenúncio da conhecida relação trigonométrica fundamental $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.

Toomer (1984) confirma,

> A fim de ter calculado é a tabela de corda Ptolomeu deve ter tido conhecimento dos equivalentes de várias identidades trigonométricas e fórmulas. Ptolomeu tinha conhecimento da fórmula, $\text{corda } 2x + (\text{corda}(180^0 - 2x)) = 4r$, o que é equivalente a fórmula $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$(TOOMER, 1984, p.57-58, tradução nossa).

Ptolomeu ainda derivou o equivalente à fórmula da metade de um ângulo $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$. Ele usou esses resultados para criar suas tabelas

[91] Fonte da figura extraída do livro História da Matemática de Vitor J. Katz 2010, p.186.

trigonométricas, juntamente com interpolação, permitiu-lhe calcular tabelas de cordas com um bom grau de precisão.

Semelhantemente, em termos de corda, Ptolomeu conhecia as propriedades de seno e cosseno. De posse do equivalente dessas fórmulas, Ptolomeu construiu uma tabela de cordas de uma circunferência, para ângulos que variam de meio em meio grau, entre 0º e 180º. Calculou comprimentos de corda, inscrevendo polígonos regulares de 3, 4, 5, 6 e 10 lados num círculo. Isso lhe possibilitou encontrar a corda subtendida por ângulos de 36º, 60º, 72º, 90º e 120º. Descobriu então, um método para encontrar a corda subtendida pela metade do arco de uma corda conhecida. E também em linguagem atual, semelhante em termos de cordas teria conhecimento das fórmulas:

$$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cdot \cos y \pm \operatorname{sen} y \cdot \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \operatorname{sen} y \cdot \operatorname{sen} x$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}$$

Não é possível determinar se essas fórmulas foram derivadas do trabalho de Hiparco. Há que se dizer que, nem as tabelas de Hiparco nem as de Ptolomeu sobreviveram aos nossos dias, mas descrições delas, feitas por outros autores antigos, deixam pouca dúvida da sua existência. Menelau avançou muito no campo da trigonometria esférica, quem sucedeu os gregos na história da trigonometria foram os hindus, os quais ainda continuaram a aplicar a trigonometria à astronomia. A mais importante contribuição do Almagesto foi tornar evidente a possibilidade de uma descrição quantitativa dos fenômenos naturais, pela matemática, já que ele desenvolveu métodos da trigonometria esférica que simplificaram bastante as interpretações e análises de tais fenômenos.

AABOA (1984) confirma:

> [...] não somente seus modelos astronômicos, mas também as ferramentas matemáticas, além da geometria elementar, necessárias para a Astronomia, entre elas a trigonometria. Mais do que qualquer outro livro, o Almagesto contribuiu para a ideia tão básica nas atividades científicas, de que uma descrição quantitativa Matemática dos fenômenos naturais, capaz de fornecer predições confiáveis, é possível e desejável (AABOA, 1984, p. 129).

A evolução dada pelos gregos no campo da trigonometria supera os feitos realizados pelos egípcios e babilônicos, a pesar de os gregos terem utilizados feitos elaborados daquelas civilizações, porem os gregos deram novo formato a trigonometria existente até essa época, alguns trabalhos trouxeram avanços significativos, como os contidos nas obras de Hiparco, Menelau e Ptolomeu, que serviram de apoio para os matemáticos posteriores, que farão compilação, tradução e aperfeiçoamento nos textos desses grandes matemáticos.

Vale resaltar que por alguns séculos a trigonometria esférica foi o próprio Teorema de Menelau, um instrumento poderoso para a solução de problemas da astronomia esférica, os matemáticos posteriores criaram métodos e os aperfeiçoaram para estudar triângulos planos e esféricos, com o intuito de simplificar os cálculos criando, fórmulas, algoritmos e regras específicas.

E apesar de se considerar que foram os gregos os grandes impulsionadores da trigonometria, é evidente que não foram eles os únicos que a estudaram. Entretanto, o essencial está feito, os sucessores indianos, persas e árabes passam a usar as linhas trigonométricas, aperfeiçoando a trigonometria existente e legando aos séculos posteriores trabalhos que serviram para melhorar várias ciências com seu auxilio.

2.5 A TRIGONOMETRIA INDIANA

A Índia é uma vasta península situada ao Sul da Ásia, entre o Oceano Índico e a Cordilheira do Himalaia. Caracteriza-se pela diversidade e complexidade das condições naturais.

A história indiana tem pelo menos 5000 anos. Perto de 3500 a.C., nasceu a civilização do Indo, no vale desse importante rio, na atual fronteira entre Índia e Paquistão. Os primeiros habitantes dessa região eram tribos nômades que cultivavam a terra e domesticavam animais. Após milhares de anos, uma cultura urbana passa a surgir nessas tribos. Por volta de 2500 a.C. grandes cidades foram estabelecidas, foco do que ficou conhecido como a cultura de Harappeana que se desenvolveu por mais de mil anos.

Figura 33: Mapa da Índia[92]
Fonte: Site:www.historiadomundo.com.br

A Civilização Indiana, também conhecida como Civilização Hindu, no início de sua história teve como principal pilar da sociedade a religião do vedismo. A história da cultura indiana é a soma de várias idades, sendo a primeira, pré-védica, a civilização harappeana. Fizeram parte dela, entre outras: Harappa, Mohenjo-Daro e Lothal, cidades que foram destruídas por volta de 1900 a.C. Esta cultura ocupou o lugar central no mundo, nos quarto e terceiro milênios a.C.

---

[92] Fonte da figura disponível em: http://www.historiadomundo.com.br, acesso em 30 de junho de 2013.

As cidades de maior destaque desse período foram Mohenjo-Daro, Harappa, ambas no atual Paquistão, e Lothal, na Índia. Tais cidades se destacam por sua organização, culto religioso e tamanho (calcula-se que Mohenjo-Daro tenha tido cerca de 50.000 habitantes). Essa civilização ainda mantinha relações comerciais com a Mesopotâmia. Eles desenvolveram sistemas avançados de pesagem e medidas. Muito dessa cultura influenciou a cultura hindu, como o culto a deuses, a figura de Shiva e outras práticas espirituais.

Figura 34: Mapa dos Povos Antigos da Índia[93]
Fonte: Site: www.historiadomundo.com.br

Harappaera, uma das cidades, é um dos sítios arqueológicos da antiga civilização harappeana, também chamada de “civilização do Vale do Indo”. Esta civilização floresceu quando o equinócio vernal do hemisfério norte ocorria na constelação do Touro. Foi esquecida por milênios, e sua existência veio à luz com escavações feitas em 1920.

Apesar da falta de adequada documentação, há algumas evidências de que a rudimentar e incipiente matemática na cultura do Indo (Harappa e Mohenjo-Daro) deva ter sido de aplicação prática, voltada para a solução dos problemas diários da sociedade, como útil instrumento no comércio, na Engenharia e na Arquitetura; teria havido, por exemplo, um sistema padronizado de pesos e medidas. A civilização harappeana, até cerca de 1980 era conhecida como civilização do Vale

[93] Fonte da figura disponível em: http://www.historiadomundo.com.br, acesso em 20 de setembro de 2013.

do Indo, se estendeu por mais de 1,5 milhão de quilômetros quadrados, mais que as antigas civilizações Egípcias e Mesopotâmia junta.

O declínio dessa civilização ocorreu por volta do segundo milênio antes de Cristo. Historiadores atribuem o fim do império às diversas inundações e o grande aumento das chuvas, que destruiu a agricultura dessa civilização. A evidência arqueológica atual indica que não foram invasores arianos, mas desastres ecológicos, que destruíram esta cultura.

No entanto, a mais duradoura (porém muito contestada) teoria é que invasões arianas[94] colocaram um fim a essa civilização. Não há muitas provas desse fato e diversos historiadores indianos mostram que a palavra Arya (que em sânscrito significa "Nobre") foi empregada erroneamente por historiadores estrangeiros.

Escavações arqueológicas ocorridas em Mohenjo-Daro nos dão a indicação de uma civilização muito antiga e de uma cultura muito rica na Índia, ocorrida na mesma época em que eram construídas as pirâmides no Egito. Posteriormente o país foi ocupado pelos invasores arianos que impuseram o sistema de castas, o qual trouxe um atraso muito grande ao desenvolvimento.

Esses invasores arianos desenvolveram na Índia a escrita sânscrita. Na mesma época em que Pitágoras começou a desenvolver seus teoremas e axiomas na Grécia, Buda agia na Índia. Especula-se que Pitágoras esteve em contato com Buda e que desenvolveu seu mais famoso teorema com os hindus.

Por volta de 1750 a.C., os arianos chegaram à região, onde encontraram os drávidas[95], um povo mercantilista. Muitos arianos dirigiram-se para o sul e, aos poucos, sua influência espalhou-se por quase toda a Índia. Eles então criaram barreiras sociais entre arianos e os drávidas considerados um povo inferior, o que originou o sistema de castas. Acredita-se que a entrada das línguas europeias na Índia ocorreu no período da primeira enchente que atravessou o Hindu Kush, alcançando as nascentes do rio Indo ou do rio Ganges (ou, provavelmente, as duas).

O período védico iniciou-se por volta de 1500 a.C. e durou até o século VI a.C. O Império Indiano formado era controlado pelos arianos. A língua falada na

[94] A palavra aryan, em Sânscrito, está ligada linguisticamente à palavra harijana (pronunciada hariyana), significando "relacionado a Deus". Então, ariano refere-se aos que praticam os ensinamentos védicos, e não significa uma raça em particular. Qualquer pessoa pode ser um ariano seguindo a clara filosofia védica, enquanto os que não a seguem são não-arianos. Rosa (2012).

[95] Os Drávidas são um povo de pele escura, cujos descendentes atuais são encontrados principalmente no sul da Índia, viviam também no norte há cerca de cinco mil anos. Porem podem até ser os indianos aborígines. Rosa (2012).

região passou a ser o Sânscrito**,** uma mistura da língua primitiva com a língua ariana. Os arianos se achavam superiores aos habitantes nativos da Índia.

Para se perpetuarem no poder eles escreveram os Vedas, os livros do conhecimento. Segundo o Vedismo, todas as pessoas ao nascerem já tinham seus destinos determinados pelos deuses. Baseado nestes preceitos a sociedade indiana foi divida em classes, as chamadas castas.

Os vedas são distribuídos em rigveda, yajurveda, samaveda e atarvaveda**.** São os quatros livros sagrados escritos em Sânscrito.

Desta forma o escrito mais antigo do sânscrito védico, preservado apenas no rigveda, é datado de aproximadamente 1200 a.C. A partir do Indo, as línguas indo-arianas se disseminaram com os migrantes que, de 1500 a.C. até 500 a.C., foram capazes de se espalhar sobre todo o norte e centro do subcontinente indiano, com exceção do extremo sul.

Os indo-arianos nestas regiões estabeleceram vários reinos poderosos e principados, do Afeganistão oriental até a entrada de Bengala. O mais poderoso destes reinos foi Magadha, que durou até o século IV a.C., quando foi conquistado por Chandragupta Maurya e anexado ao Império dos Mauryas.

No Afeganistão oriental e no sudoeste do Paquistão, não importando quais línguas indo-arianas eram faladas, elas foram finalmente engolidas pelas línguas iranianas. A maioria das línguas indo-arianas, no entanto, foram e ainda são importantes no resto do subcontinente indiano. Atualmente, as línguas indo-arianas são faladas na Índia, Paquistão, Bangladesh, Nepal, Sri Lanka e Maldivas.

Entre 327 a.C. e 325 a.C., após a invasão de Alexandre, o Grande, surge o Império Maurya, fundado por Chandragupta Maurya, que se expandiu até abranger quase toda a Índia e uma parte da Ásia Central. O imperador Asoka, governante Maurya mais famoso, converteu-se ao Budismo, deixou de guerrear e ajudou a difundir essa religião.

Flood & Wilson (2013), afirma:

> Por volta de 250 a.C., o rei Asoka, governante de quase toda a Índia, se tornou o primeiro monarca budista. A sua conversão foi comemorada em todo o reino com a construção de muitos pilares com os seus éditos esculpidos. (FLOOD & WILSON, 2013, p.42).

Séculos depois, surge outro império forte da região, conhecido como dinastia Grupta. Essa família governou o norte da Índia e partes do Afeganistão de

320 a 540, período conhecido como Idade de Ouro. Belas cidades foram construídas, universidades foram fundadas e uma grande civilização floresceu.

As principais obras escritas pelos indianos são: Os Sulvasutras e os Siddhantas. Os sulvasutras ou regras de corda, utilizadas para medidas. Já os Siddhantas, provenientes do final do quarto século e início do quinto, tratavam de astronomia.

Na Índia, como o Egito, tinha seus “Esticadores de cordas”, e as primitivas noções geométricas adquiridas em conexão com o traçado de templos e medida e construções de altares tomaram a forma de um corpo de conhecimentos, conhecido como os SULVASUTRAS, ou “Regras de Cordas”.

Corda ou sulva era uma corda usada para medidas e sutra significava um livro de regras. A origem e a data dos Sulvasutras são incertas, de modo que não é possível relacioná-los com a primitiva agrimensura egípcia ou com o problema grego de duplicar um altar. O Sulvasutra tratava-se de um compêndio de livros, todo escrito em versos.

Nesse sentido Rooney (2012), afirma:

> Os primeiros textos hindus a apresentar problemas matemáticos foram Sulvasutras, textos em Sânscritos que apresentam problemas e soluções relacionados com a construção e posicionamento dos altares de sacrifício. (ROONEY, 2012, p.76).

A matemática hindu apresenta mais problemas históricos do que a grega, pois os matemáticos indianos raramente se referiam a seus predecessores e exibiam surpreendente independência em seu trabalho matemático.

Nesse sentido, Eves (1995) comenta:

> Os textos de história da matemática mostram algumas contradições e confusões ao focalizar os hindus. Isto se deve, provavelmente, em escala considerável, ao caráter obscuro e quase ininteligível dos escritos dos autores hindus. A história da matemática hindu carece ainda de uma abordagem mais confiável e erudita. (EVES, 1995, p.252).

Por tanto entre os séculos VIII e VII a.C., temos dois dos mais antigos monumentos da cultura matemática dos hindus, os livros religiosos Sutras e Vedas, escritos em Sânscrito. O desenvolvimento da matemática na cultura indiana, nos tempos védicos e bramânicos, se deveu, principalmente, à sua utilização para fins religiosos e de Astronomia de posição. Os primeiros textos de geometria aplicada tiveram o objetivo, de fundo religioso prático, de ditar as regras, técnicas e as instruções para a construção de altares ou piras rituais de sacrifício. Os Sulvasutra, no total de quatro, anexos ao Livro dos Vedas, foram escritos pelos sacerdotes Baudaiana(800 a.C.), Manava(750 a.C.), Apastamba(600 a.C.) e Katiaiana(200 a.C.), cujas biografias são desconhecidas.

No final do Período Sulvasutra (III século a.C.) surgiram os primeiros numerais, mas sem ainda qualquer sinal para o zero. O desenvolvimento do sistema de notação para os números naturais foi certamente um das duas mais importantes contribuições da Índia para a história da matemática.

Durante os primeiros séculos da era cristã, no período do império Kushan e dos Gruptas, há testemunhos evidentes da transmissão do conhecimento astronômico grego para a Índia, provavelmente através das vias comercias romanas. Curiosamente, a astronomia e a matemática de Ptolomeu não foram transmitidas, mas sim, em particular, a obra de alguns dos seus predecessores, como Hiparco. Assim como as necessidades da astronomia grega levaram ao desenvolvimento da trigonometria, as necessidades da astronomia indiana levaram a desenvolvimentos progressivos neste campo. (KATZ, 2010, p.263).

O começo da dinastia Gruptas (290) assinalou um renascimento da cultura sânscrita e estes escritos podem ter sido um produto disto. A trigonometria de Ptolomeu se baseava na relação funcional entre as cordas de um círculo e os ângulos centrais que subentendem. Para os autores dos *Siddhantas*, a relação ocorre entre metade de uma corda de um círculo e metade do ângulo subentendido no centro pela corda toda.

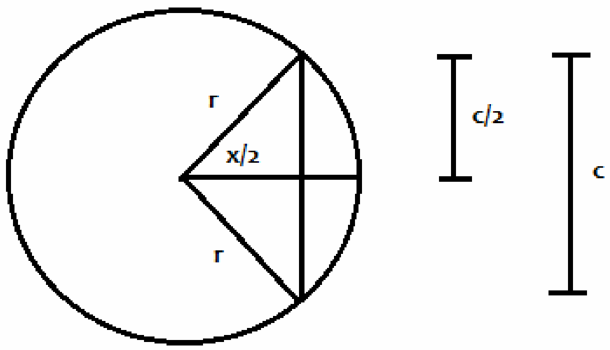
A obra indiana mais antiga conhecida incluindo texto com trigonometria é o *Paitamahasiddanta*, escrito no principio do século quinto. Esta é a mais antiga entre várias obras semelhantes que tratavam de astronomia e da matemática associada, escritas ao longo dos séculos seguintes. Nessa obra contém conteúdo de trigonometria esférica importante na resolução de problemas astronômicos, apresenta também uma tabela de “semi-corda”, que a tradução literal do termo em sânscrito é *jya-ardha*. (KATZ, 2010, p.263).

Existiam também outras obras escritas em Sânscrito, que traz trigonometria atrelada a astronomia, pois de acordo com Morey (2003, p.19), na matemática indiana antiga, a trigonometria era uma parte integrante da astronomia, referências aos conceitos trigonométricos são encontradas nas seguintes obras:

- No Surya Siddhanta (c. 400 d.C., de autor desconhecido);
- No Prancha Siddhanta de Varahamihira (c. 500 d.C.) e;

- No Brahma Sputa Siddhanta de Brahmagupta (628 d.C.).

Os hindus não seguiram o mesmo caminho de Ptolomeu, pois este relacionava as cordas de um círculo com os ângulos centrais correspondentes. Nas aplicações da função corda, era necessário dobrar o arco antes de usá-lo na tábua de cordas. Naturalmente, era mais conveniente ter uma tábua na qual o próprio arco fosse a variável independente. Finalmente, alguém pensou em calcular e usar a metade da corda de um arco duplo.



$$\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{\frac{c}{2}}{r}\right)$$

$$\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\frac{c}{2r}\right)$$

$$\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\text{crd}(x)}{2r}$$

$$\text{crd}(x) = \text{corda de } x$$

Figura 35: O "*jiva*" hindu[96]
Fonte: Lobo da Costa, N.M

Outra obra importante dos indianos é os "*Siddhantas*" que possuem várias versões épicas, que teriam sido ditadas pelo Deus do Sol, de nome Surya e se referem a regras astronômicas (gregas misturadas com o misticismo hindu), de sua leitura pode-se inferir o nascimento, na Índia, da precursora da função trigonométrica moderna chamada seno.

Wussing (1998) confirma:

> A Antiguidade helenística tinha elaborado uma trigonometria altamente desenvolvida. Na matemática Hindu ocorreu uma conexão com a astronomia uma transformação trigonométrica: passou da trigonometria da corda para trigonometria do seno a relação entre as duas é dada pela Igualdade $ch(2a) = 2 \cdot sen(a)$, que não parece ser muito significativo a primeira vista. No entanto, essa alteração repercutirá no desenvolvimento posterior por que a relação básica entre os lados e ângulos de um triângulo particularmente fáceis de formular com a trigonometria do seno. (WUSSING, 1998, p.78, tradução nossa).

Outro grande nome da matemática indiana é Aryabhata[97] (c.475–550), autor de um dos mais antigos textos matemáticos indianos, chamado de

[96] Fonte da figura extraída de Funções Seno e Cosseno: Uma Sequência de Ensino a Partir dos Contextos do Mundo Experimental e do Computador – Dissertação de Mestrado, Lobo da Costa, N.M, PUC/SP, 1997.

[97] **Aryabhata:** Também é conhecido como **Aryabhata I** para distingui-lo do matemático posterior do mesmo nome, que viveu cerca de 400 anos mais tarde. O seu texto principal que sobreviveu é a

Aryabhatiya, correspondente a “Os elementos”, de Euclides, a parte matemática dessa obra cobre tópicos de aritmética, álgebra, trigonometria plana e esférica.

Katz (1998) confirma:

> As estrofes matemáticas do *Aryabhatiya* contem muito mais do que resultados trigonométricos. De fato, fornecem regras de procedimentos para resolução de uma grande variedade de problemas matemáticos, incluindo problemas de agrimensura, cálculos numéricos e álgebra. Mas Aryabhata não dá, no texto qualquer justificativa para os seus métodos. (KATZ, 2010, p.268).

Na obra *Aryabhatiya,* também contém frações contínuas, equações do segundo grau, somas de séries de potência e uma tabela de senos. A partir do século V, os hindus passaram a trabalhar com a semi-corda, que atualmente corresponde ao seno, ao qual chamavam de *jiva*. Isto possibilitou a visão de um triângulo retângulo na circunferência, também escreveu a obra *Arya Siddhanta*, que agora está perdida, mas as contribuições em trigonometria dessa obra incluiam:

• Introduzam das quatro principais funções trigonométricas feita pelos astronomos indianos: jya, koti-jya, utkrama-jya e otkram-jya.

• Definido o seno (jya) como a relação moderna entre meio ângulo e meia corda.

• Definido o cosseno (koti-jya).

• Definido o senevero (utkrama-jya).

• Definido o seno inverso (otkram-jya).

• Trigonometria Esférica.

Para termos uma visão desses elementos da trigonometria apresentado na obra de Aryabhata, apresentamos as três funções trigonométrica representada na figura abaixo.

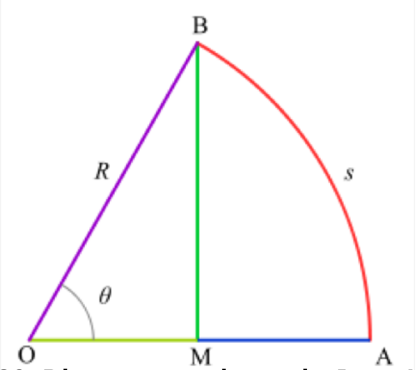


Figura 36: Diagrama moderno do Jya e Koti-jya[98]
Fonte: Elaborado pelo Autor

obra-prima *Aryabhatiya* que é um pequeno tratado astronômico escrito em 118 versos que dão um bom resumo da matemática hindu até aquele momento. Brummelen (2009).

[98] Elaborado pelo autor.

Na figura (36) no diagrama temos o arco AB, que denota um arco cujas extremidades são A e B de um circulo com o centro O. Temos o segmento BM perpendicular ao segmento OA, logo temos os seguintes segmentos:

- jya (arco AB) = BM
- Koti-jya (arco AB) = OM
- Utkrama-jya (arco AB) = MA

Mais como o raio do circulo é R e o comprimento do arco AB é s, o ângulo subtendido pelo arco AB é s, medido em radianos e é dado por $\theta = \frac{s}{R}$. Portanto temos as três funções trigonométricas:

- jya (arco AB) = $R \cdot \mathrm{sen}\left(\frac{s}{R}\right)$
- Koti-jya (arco AB) = $R \cdot \cos\left(\frac{s}{R}\right)$
- Utkrama-jya (arco AB) = $R \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{s}{R}\right)\right]$

O termo seno somente foi introduzido na cultura ocidental com os árabes. A relação entre o *jya* e o seno moderno é dada por $\mathrm{jya}(\theta) = R \cdot \mathrm{sen}(\theta)$, com R representando o raio da circunferência.

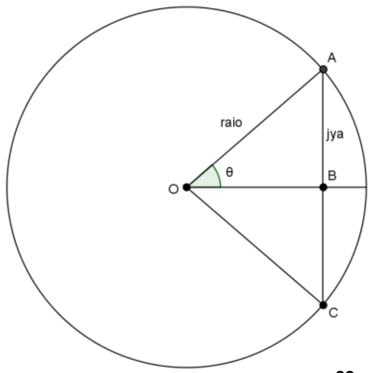


Figura 37: Meia corda (*jya*)[99]
Fonte: Morey (2003, p. 20).

Diferentes astrônomos hindus utilizaram diferentes valores para o raio da circunferência. Com isso, várias tábuas de *jya* (ou seno) foram construídas. As mais conhecidas estão descritas nos trabalhos de Aryabhata que utilizava um raio de 3438 unidades e de Varahamihira[100] (505–587), com raio de 120 unidades.

[99] Fonte presente no texto MOREY, B. B. Geometria e Trigonometria na Índia e nos países Árabes. Rio Claro, SP: Editora SBHMat, 2003. (Coleção História da Matemática para Professores).

[100] **Varahamihira:** Também chamado de Varaha ou Mihir, foi um astrônomo, matemático e astrólogo Indiano que viveu em Ujjain. Brummelen (2009).

(BRUMMELEN, 2009, p.96, tradução nossa). Provavelmente estes astrônomos utilizaram métodos de interpolação para construir suas tabelas.

Outro grande astrônomo/matemático é Varahamihira elaborou um tratado astronômico, intitulado *Panca Siddhanta,* datado de 575, continha um bom sumário de trigonometria hindu antiga, este trabalho foi importante, por trazer informações sobre textos antigos indianos, que agora estão perdidos. A obra é um tratado sobre astronomia matemática e resume cinco tratados astronômicos anteriores, ou seja, a *"Surya Siddhantas", "Romaka Siddhantas", "Paulisa Siddhantas", "Vasistha Siddhantas" e "Paitamaha Siddhantas",* continha também e uma tábua de senos aparentemente oriunda da tábua de cordas de Ptolomeu.

Esta mesma tabela foi reproduzida no trabalho de Bramahagupta[101](598–670), em 628, e um método detalhado para construir uma tabela de senos para qualquer ângulo foi dado por Bhaskara[102](1114–1185) em 1150, é um trabalho muito importante de Bhaskara para lidar com questões de aritmética, álgebra, trigonometria e astronomia, resume e baseia-se na obra. Bramahagupta neste trabalho existem tabelas de senos e outras relações trigonométricas, e até mesmo dicas de ideias subjacentes no cálculo de que estavam explicitamente a ser desenvolvidas para vários séculos mais tarde, como por exemplo.

(KATZ, 2010, p.266) afirma, que é credita a Bhaskara uma fórmula para determinar valores para senos, $R \cdot \text{sen}(\theta) = \dfrac{R \cdot \theta \cdot (180^0 - \theta)}{\frac{1}{4} \cdot \left[40{,}500 - \theta\left(180^0 - \theta\right) \right]}$.

Na obra de Bramahagupta encontramos um esquema de aproximações um pouco mais rigoroso, usando diferenças de segunda ordem. Em notação

---

[101] **Bramahagupta:** Foi um matemático e astrônomo Indiano que escreveu duas obras importantes em Matemática e Astronomia: o *Brāhmasphuṭasiddhānta* (Extenso Tratado da Brahma de 628), um tratado teórico, este livro discute a astronomia, mas pela primeira vez ele olha para como podemos estudar astronomia usando álgebra. Ele ajudou a definir como a matemática indiana desenvolveu, com seu foco em álgebra e aritmética. É também influenciou muito dos matemáticos islâmicos. O livro é interessante por várias razões e o *Khaṇḍakhādyaka*, um texto mais prático foi o primeiro a dar regras para calcular com *a zero*. Tucker (2005).

[102] **Bhaskara:** Foi um matemático, professor, astrólogo e astrônomo, o mais importante matemático do século XII é o último matemático medieval importante da Índia. Seus méritos foram logo reconhecidos e muito cedo atingiu o posto de diretor do Observatório de Ujjain, o maior centro de pesquisas matemática e de astronomia da Índia na época, fama desenvolvida por excelentes matemáticos como Varahamihira e Brahmagupta, que ali tinham trabalhado e construído uma forte escola de astronomia e matemática. Viveu na região de Sahyadri. Sua obra representou a culminação de contribuições hindu anteriores. Seis trabalhos seus são conhecidos e um sétimo trabalho, reivindicado para ele, é considerado por muitos historiadores como uma não falsificação posterior. Tucker (2005).

moderna, se D_i representa a i-ésima diferença (dada na estrofe de Aryabhata), x_i o i-ésimo arco, e $h = 3\frac{3}{4}^0$ o intervalo entre estes arcos, então o resultado é mostrado na fórmula, $\operatorname{sen}(x_i + \theta) = \operatorname{sen}(x_i) + \frac{\theta}{2h} \cdot (D_i + D_{i+1}) - \frac{\theta^2}{2h^2} \cdot (D_i - D_{i+1})$.

Para o seno 3(3/4)º tanto o *Siddhantas* como o *Aryabhatiya* tomam exatamente o número de unidades contidas no arco, ou seja, 60 [3(3/4)] = 225; traduzida em linguagem moderna, o seno de um ângulo pequeno é quase igual à medida do ângulo em radianos, que é exatamente o que fizeram os hindus. Para as entradas restantes de seno utilizavam os Hindus uma fórmula de recursão que pode ser expressa em da seguinte forma: se denotamos por S_n a e-nésima sucessão de seno que vai de n = 1 a n = 24, e se a soma dos n primeiros senos a R_n é então $S_n + S_{n+1} = S_1 - R_n/S_1$.

Portanto pode deduzir facilmente que o sen 7(1/2)° = 449, sen 11(1/4)° = 671, e o sen 15° = 890, e assim até sen 90° = 3,438, que são os valores que aparecem nas tabelas do *Siddhantas* e *Aryabhatiya*. As tabelas incluem os valores do que chamamos hoje do seno versado ou senoverso de um ângulo, ou seja, $1 - \cos\theta$, na forma trigonométrica moderna, ou $3{,}438 \cdot (1 - \cos\theta)$, na trigonometria Hindu, do senoverso 3(3/4)° = 7 a senoverso 90° = 3,438. Se dividirmos os números na tabela por 3.438 encontramos resultados que se aproximam dos valores correspondentes em tabelas trigonométricas modernas.

Rooney (2012) afirma,

> Os matemáticos hindus foram os primeiros a trabalhar com senos da forma como os definimos agora. No século IV, ou talvez mais tarde no século V, o autor desconhecido do tratado astronômico hindu *Surya Siddhanta*, calculou a função seno para intervalos de 3,75º de 3,75º até 90º. (ROONEY, 2012, p.91).

Na verdade, a mais antiga tabela dos valores de senoverso são dos séculos IV e V, contidas no *Siddhantas* da Índia, foi apenas uma tabela de valores para o seno e senoverso (em incrementos de 3,75° de 0° a 90°). Isto, talvez, é menos surpreendente, considerando que o senoverso apareceu como um passo intermediário na aplicação da fórmula de semi-arco, $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\text{senoverso}}{2}$, derivada das formulas de Ptolomeu, e foi usado para produzir tais tabelas.

Esta função senoverso foi encontrada pela primeira vez na Índia no tratado "*Surya Siddhanta*" da astronomia, e logo após nos escritos de Aryabhata, o matemático indiano, compilou uma tabela destas funções. A função seno foi chamado de "*jya*", quando girada em 90º, e ainda limitada pelo arco, tornou-se "utkrama-jya" ou "utramadjia" (versado sine / seno rodado / senoverso).

Em matemática, o senoverso (versin da latin do seio contra), é uma função da trigonometria (por vezes abreviado como "vers") definida como em termos de equação:

$$\text{senoverso}(\theta) = (1 - \cos\theta)$$

$$2 \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = (1 - \cos\theta), \text{ portanto temos.}$$

$$\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\text{senoverso}(\theta)}{2}$$

$$\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{(1 - \cos\theta)}{2}$$

Modernamente o senoverso de um arco θ é definido como complemento do seu cosseno em relação ao raio unitário do circulo trigonométrico isto é $(1 - \cos\theta)$. Historicamente, o senoverso foi considerado uma das mais importantes funções trigonometricas, mas perdeu popularidade nos tempos modernos, devido à disponibilidade de computadores e calculadoras científicas. Quando o ângulo θ tende a zero, senoverso(θ) é a diferença entre dois valores quase iguais, para os quais o utilizador de uma tabela trigonométrica que contém apenas os valores de cosseno exigiriam uma precisão muito grande, tornando-o conveniente ter tabelas separadas com os mesmos valores de senoverso. Mesmo com o computador, o erro de arredondamento, convém utilizar a fórmula $\text{sen}^2(\theta)$ para pequenos valores de θ.

Brummelen (2013) afirma:

> Na história da navegação, os navegadores tinham mais funções trigonométricas disponíveis que nós temos hoje, e algumas delas tinham propriedades muito boas. Em adição ao seno, os antigos astrônomos indianos inventaram o senoverso. Alguém poderia imaginar que a introdução desta função poderia simplificar a trigonometria só um pouco, desde que o senoverso é apenas $(1 - \cos\theta)$. No entanto, uma vantagem oculta entra em jogo com a aplicação de uma identidade conhecida: $\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{(1 - \cos\theta)}{2}$. (BRUMMELEN, 2013, p.159, tradução nossa).

Uma outra vantagem do senoverso históricamente é que é sempre não-negativa, de modo que o seu logaritmo é definido em todos os lugares, exceto para os valores individuais, onde é zero, de modo que você pode usar as tabelas de logaritmos para fórmulas de multiplicação que envolvem senoverso.

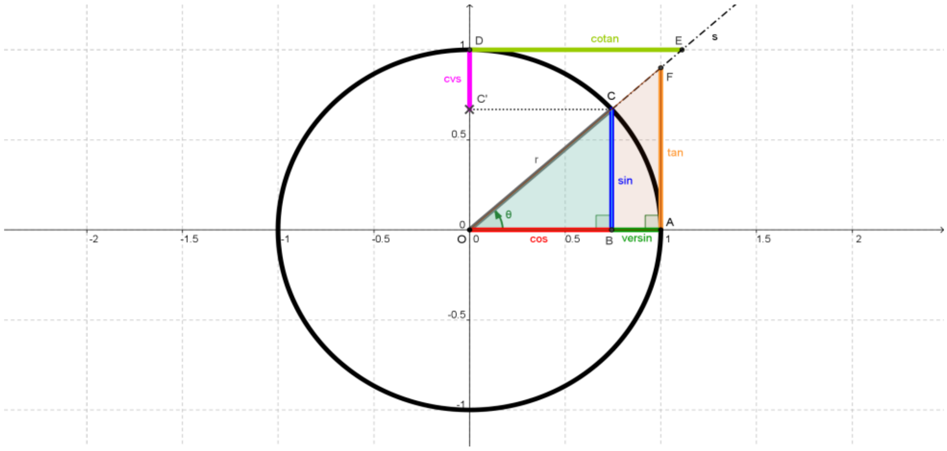


Figura 38: Representação no circulo trigonométrico do senoverso[103]
Fonte: Elaborada pelo Autor

Como já falamos, a contribuição importante dos hindus foi a introdução de um equivalente da função seno na trigonometria para substituir a tabela de cordas dos gregos. A trigonometria hindu era um instrumento útil e preciso para a astronomia, essa astronomia hindu, foi influenciada pela astronomia grega. No que se refere à trigonometria, temos uma diferença fundamental, pois a trigonometria grega tinha caráter geométrico enquanto a trigonometria hindu era fundamentada na aritmética e na álgebra.

Embora a influência grega seja evidente na trigonometria hindu, os hindus não parecem ter tido oportunidade na ocasião de adotar a geometria grega, ou não viram nenhuma vantagem nesse momento, pois eles só estavam interessados em regras de medição simples.

Wussing (1998) confirma:

> Apesar destes resultados da geometria e trigonometria hindu, particularmente, notável, o caráter geral da matemática hindu estava marcado por predomínio do cálculo algorítmico e pelo alto nível da aritmética e da álgebra (WUSSING, 1998, p.79, tradução nossa).

Em consonância com Morey (2003) enumeramos aqui a fórmulas que Joseph, fornece (2000, p.396–397). Ao lado de cada fórmula, consta o autor em cuja obra, segundo Joseph, a fórmula aparece pela primeira vez. Além disso, sempre que possível, fornecemos datas do período de vida de cada um deles.

[103] O gráfico elaborado pelo autor e nele esta representa o senoverso (verde escuro) e é mostrado no eixo horizontal, proximo do cosseno (em vermelho). A partir da figura, é visto que o senoverso é o complemento para 1 de cosseno: na verdade o senoverso em conjunto com o cosseno correspondente ao raio da circunferência trigonométrica, que é unitário.

Tabela 1. Fórmulas e relações trigonométricas e seus autores que aparecem pela primeira vez.

TABELA DE FÓRMULAS	
1) $\text{sen}(n+1)a-\text{sen}(na)=\text{sen}(na)-\text{sen}(n-1)a-\left(\frac{1}{225}\right)\text{sen}(na)$	Aryabhata I (476 d.C.)
2) $\cos a=\text{sen}\left(\frac{1}{2}\pi-a\right)$	Verahamihira (c.505 – 587 d.C.)
3) $\text{sen}^2 a+\cos^2 a=1$	Verahamihira (c.505 – 587 d.C.)
4) $\text{sen}^2 a=\frac{1}{4}\left(\text{sen}^2 2a+\text{ver}\,\text{sen}^2 2a\right)=\frac{1}{2}(1-\cos 2a)$	Verahamihira (c.505 – 587 d.C.)
5) $1-\text{sen}^2 a=\cos^2 a=\text{sen}^2\left(\frac{1}{2}\pi-a\right)$	Brahmagupta (n.598 d.C.)
6) $\text{sen}\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}a\right)=\sqrt{\frac{1}{2}(1\pm\text{sen}\,a)}$	Aryabhata[4] II (c.900.)
7) $\text{sen}(A\pm B)=\text{sen}A\cdot\cos B\pm\cos A\cdot\text{sen}B$	Bhaskaracharya (n.1114 d.C.)

Fonte: Morey, 2003 p. 23

É de amplo conhecimento pelos historiadores da matemática que a contribuição mais importante da trigonometria indiana foi a introdução da função seno na sua forma moderna, porém em nosso entendimento outra contribuição importante foi a apresentação também da função senoverso ou seno versado, que dará um novo impulso nos problemas de Astronomia de Posição aplicada a Navegação Astronômica.

Com a transformação da função senoverso, séculos depois na função semisenoverso utilizado para navegação, os cálculos aplicados ao triângulo de posição, foram modernizados e melhorados, pela transformação de todas as fórmulas da trigonometria esférica para a utilização da função semisenoverso, e no século XIX, também pela criação por John William Norie [104](1772–1843), da tábua trigonométrica chamada de Norie, aplicada aos cálculos de Navegação, com valores logaritmos de todas as funções trigonométricas e também para função semisenoverso que será bastante utilizada por navegadores em todo mundo.

Após os hindus, foram os árabes e os persas a dar sua contribuição à trigonometria, à matemática e astronomia hindu chegaram aos árabes que a absorveram, refinaram e a aperfeiçoaram antes de transmiti-la à Europa.

[104] **John William Norie**: Foi um matemático, hidrógrafo, fabricante gráfico e editor de livros náuticos, sua obra mais famosa foi *"Epítome da Navegação Prática (1805)",* que se tornou um padrão de trabalho em navegação e passou por muitas edições como fizeram muitos das obras de Norie. **A Tábua Norie**: Esta tábua era aplicada à Navegação Astronômica, e se constituía, na realidade, uma série de soluções pré-computadas de triângulos esféricos, para todas as combinações possíveis de Latitude, Declinação e Ângulos Horários (ou ângulo no polo), a fim de facilitar ao navegante a resolução do triângulo de posição e a determinação rápida e precisa do ponto no mar (Azimute de Saída e Azimute de Chegada). Tucker (2005).

2.6 A TRIGONOMETRIA ÁRABE

Até o século VII os árabes encontravam-se divididos em várias tribos, sendo originárias dos semitas (judeus, fenícios e assírios), algumas sedentárias e outros nômades. Geralmente, estas tribos eram hostis entre si e desde tempos remotos ocupavam a península arábica, localizada no oriente próximo e limitada pelo mar Vermelho, Golfo Pérsico e Oceano Índico.

Figura 39: Mapa da Expansão dos Povos Árabes[105]
Fonte: Site: www.historiadomundo.com.br

Em 613, Maomé[106](570–632) começa a pregação de uma nova religião, na condição do profeta de Alá (Deus único e verdadeiro). Esta nova religião denominou-se religião Islâmica (Islam significa: submissão).

Em 622 ocorre a "hégira"[107], mudança de Maomé de Meca, por causa das perseguições sofridas, marcando o início do calendário islâmico. Após muitos anos de luta, Maomé consegue impor a nova religião a todos os muçulmanos, sendo Meca a principal cidade sagrada. As demais cidades logo foram conquistadas e também aderiram ao islamismo. Depois da morte de Maomé, os árabes foram governados pelos califas[108]. Estes califas estenderam o domínio muçulmano da Índia

---

[105] Fonte da figura disponível em: http://www.historiadomundo.com.br, acesso em 30 de junho de 2013.

[106] Abu al-Qasim Muhammad ibn 'Abd Allah ibn 'Abd al-Muttalib ibn Hashim é o nome completo de Maomé (570–632) foi um líder religioso, fundador do islamismo, considerada a segunda religião do mundo em número de adeptos, esta uma forma aportuguesada do francês Mahomet. Nasceu em Meca, localizada na atual Arábia Saudita. Rooney (2012).

[107] Hégira, fuga de Maomé de Meca para Medina, marcou também o inicio da era maometana, era que exerceria forte influência sobre o desenvolvimento da matemática. Rooney (2012).

[108] A palavra "califa" é o termo em português para a palavra árabe "*khalifa*", que é uma abreviação de *khalifatu rasulil-lah* e que significa sucessor do mensageiro de Deus. Califa era o título que se atribuía

até a península Ibérica. Esta expansão árabe auxiliou para que a Europa interiorizasse a economia e aumentasse a ruralização da sociedade, expandindo o processo de feudos.

Com o advento do islamismo, os árabes conquistaram a Índia, a Pérsia, a Mesopotâmia, o norte da África e a Espanha. Tiveram acesso aos escritos científicos destes povos e os traduziram para a língua árabe, enquanto que, na mesma época, a Europa atravessava a Idade das Trevas.

Figura 40: Mapa da Expansão do Islã[109]
Fonte: Site:www.historiadomundo.com.br

Na península Ibérica os árabes realizaram uma revolução agrícola construindo canais de irrigação, açudes e moinhos d’água, introduzindo o cultivo de cana-de-açúcar, algodão, cânhamo e arroz. Por todo o império circulavam moedas cunhadas em Bagdá, capital do império.

Para unir as várias tribos em Meca foi construído um templo religioso, a Caaba ou Kaaba (casa de Deus), para o muçulmano, a Caaba representa a casa de Deus, não só o centro do mundo, mas o centro do próprio universo, com as principais divindades, e quando o profeta Maomé repudiou todos os deuses pagãos e proclamou um deus único, Alá poupou a Caaba e tornou-a de um centro de

---

ao chefe supremo do islamismo, durante o período de expansão do Império Árabe (entre os séculos VIII e XV). O califa possuía vários poderes relacionados à justiça, economia, ações militares e ações religiosas. Divalte (2002).

[109] Fonte da figura disponível em: http://www.historiadomundo.com.br, acesso em 01 de maio de 2014.

peregrinação pagã em um centro da nova fé (Islã), submeter-se a vontade de Deus é uma mesquita sagrada de *al Masjid al-Haram*em Meca, e é considerado pelos devotos do Islã como o lugar mais sagrado do mundo. Na Caaba, encontrava-se a pedra negra, que de acordo com a crença, veio do céu pelas mãos do anjo Gabriel, a Caaba é o centro das peregrinações (*hajj*) e é para onde o devoto muçulmano volta-se para as suas preces diárias (*salat*).

Figura 41: Caaba[110]
Fonte: Site:www.historiadomundo.com.br

As atividades matemáticas árabes começaram com a tradução do Siddhantas hindus por Ibrahin Al-Fazari[111](m.777) e culminaram com vários tratados sobre matemática e astronomia escritos por Muhammad Ibn Musa AlKhwarizmi[112] (780–850), por volta de 825. Esses tratados explicavam o sistema de numeração hindu. A Europa ficou conhecendo esse sistema de numeração graças a uma cópia latina do século XII, visto que o original árabe se perdeu.

[110] Fonte da figura disponível em: http://www.historiadomundo.com.br, acesso em 01 de abril de 2014.
[111] **Ibrahin Al-Fazari**: Foi um filósofo, matemático e astrônomo muçulmano, traduziu muitos livros científicos em árabe e persa. A ele é creditado ter construído o primeiro astrolábio no mundo islâmico. Juntamente com Ya Qub ibn Tariq e seu pai ajudou a traduzir o texto astronômico indiano de Brahmagupta, o *Brāhmasphuṭasiddhānta*, para o árabe como *Az-Zij ala Sini al-Arab.,* ou o *Siddhanta*. Esta tradução foi, possivelmente, o veículo por meio do qual os numerais hindus foram transmitidos a partir de Índia ao Islã. Katz (2010).
[112] **Al Khwarizmi:** Foi um matemático, astrônomo e geógrafo persa que viveu durante o império abássida, foi um dos primeiros estudiosos da Casa da Sabedoria, em Bagdá. As contribuições de Al-Khwarizmi a matemática, geografia, astronomia e cartografia estabeleceu a base para a inovação em álgebra e trigonometria. No século IX, é o autor de duas famosas tabelas estelares astronômicas e de um tratado influente sobre o astrolábio, ele é lembrado pelas suas obras em aritmética e álgebra Nenhum dos livros contém resultados de grande originalidade, mas a sua Aritmética foi importante por apresentar o sistema numérico indiano ao mundo islâmico e, mais tarde, ajudar a disseminar o sistema de contagem decimal na Europa cristã. Na verdade, o seu nome árabe, foi transformado em "algarismos", foi usado mais tarde na Europa para dar nome aos numerais, também usamos a palavra algoritmo, que significa procedimento passo a passo para resolver problemas. O titulo do livro de álgebra de *al-Karismi é Kitab al-jarb wal muqabala* (Compêndio sobre cálculo por conclusão (al-jabr) e redução (al-muqabala). O titulo desse livro é a origem da palavra "álgebra", quando, no século XII, as suas obras espalharam-se pela Europa através de traduções latinas, teve um profundo impacto sobre o avanço da matemática na Europa. Tucker (2005).

WUSSING (1998, p.86, tradução nossa) confirma, o ponto de partida para os trabalhos árabes em trigonometria foi a tradução de um dos *Siddhantas* hindus por Al-Fazari em Bagdá no ano de 733.

A astronomia de Al Khwarizmi era um resumo dos *Siddhantas*, que continha tabelas para as funções trigonométricas de senos e cosseno e um tratado relacionado sobre trigonometria esférica o qual mostrava uma influência grega nos textos sânscritos. A matemática do período islâmico revela a mesma mistura de influências que se tornaram familiares em Alexandria e na Índia.

Katz (2010) confirma:

> Tal como na Grécia e na Índia, a trigonometria do Islã esteve intimamente ligada à astronomia e, assim, em geral, os textos matemáticos de trigonometria foram escritos como capítulos de trabalhos astronômicos mais extensos. (KATZ, 2010, p.341).

Os Astrônomos/Matemáticos islâmicos tinham grande interesse em usar a trigonometria para resolver os triângulos esféricos, pelas aplicações nos cálculos em Astronomia, e também porque de acordo com a lei islâmica, os muçulmanos deviam se voltar para Meca quando faziam suas rezas (cinco vezes ao dia) durante o dia. De fato, foi a necessidade de descobrir a direção de Meca a mola propulsora para o desenvolvimento e o aperfeiçoamento da trigonometria plana e esférica pelos árabes.

Figura 42: Meca[113]
Fonte: Site: www.historiadomundo.com.br

[113] Fonte da figura disponível em: http://www.historiadomundo.com.br, acesso em 15 de março de 2014. De acordo com a tradição do Islã, a fundação da Meca foi realizada por descendentes de Ismael, primeiro filho de Abraão, durante o século VII, a cidade funcionava como um grande centro comercial e, naquele mesmo período, o profeta Maomé proclamou o Islã na região. Depois de 966, os xarifes locais passaram a governar a Meca. Em 1916, com o final do domínio Otomano no território, foi fundado o Reino Hashemita do Hejaz por meio de governantes regionais. Em 1925, Meca foi tomada pela Dinastia Saudita. Desde então, a cidade passou por um processo de crescimento muito rápido no que se refere à infraestrutura e ao tamanho. Geordani (1985).

Katz (2010, p.341) afirma que para determinar a direção à Meca, os matemáticos islâmicos tinham que ter um conhecimento grande de solução dos triângulos esféricos sobre a esfera terrestre. A solução tanto de triângulos planos como esféricos era também importante na determinação dos tempos corretos para as orações. Esses tempos eram definidos em relação ao inicio e o final do dia, assim como a duração da luz do dia e da altitude do Sol num dado dia. Para dar cabo a tais problemas exigia-se elaborados cálculos aplicados da trigonometria esférica.

A Casa da Sabedoria ou Casa do saber (em árabe: *Baytal-Hikmah*) foi uma biblioteca e centro de traduções estabelecido à época do Califado Abássida[114], em Bagdá, no Iraque. Foi uma instituição chave no "movimento das traduções", tendo sido considerada como o maior centro intelectual durante a Idade de Ouro do Islã.

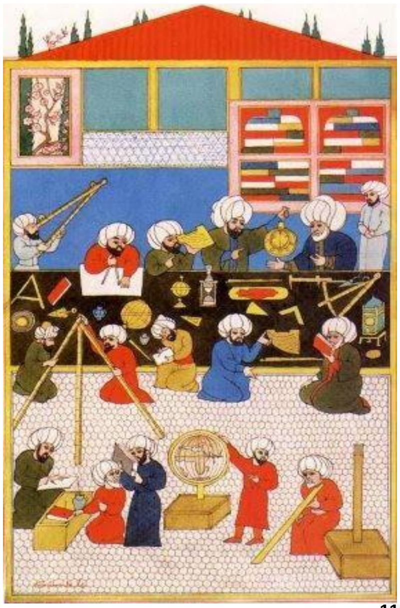


Figura 43: Casa da Sabedoria[115]
Fonte: Site:www.historiativanet.wordpress.com

A matemática e a astronomia foram enormemente incentivadas pelos califas de Bagdá; Al-Mansur [116] (754–775), Harun al-Raschid [117] (766–809) e Al-

[114] **O Califado Abássida:** Foi o terceiro califado islâmico, que construiu sua capital em Bagdá após terem destronado o Califado Omíada, cuja capital era Damasco, com exceção da região de al-Andalus. O Califado Abássida foi fundado pelos descendentes do profeta islâmico Abbas ibn Abd al-Muttalib, o tio mais jovem de Maomé, em Harran, em 750, mudou a sua capital em 762 para Bagdá. Os abássidas fora influenciados pelas mandamentos e *hadith* corânicos, que dizia "a tinta de um acadêmico é mais sagrada que o sangue de um mártir", exaltando o valor do conhecimento. Durante este período, o mundo islâmico se tornou um centro intelectual para ciência, filosofia, medicina e a educação, pois os abássidas abraçaram a causa do conhecimento e criaram a Casa da Sabedoria em Bagdá. Ali, acadêmicos muçulmanos e não muçulmanos lutaram para juntar todo o conhecimento do mundo e traduzi-lo para o árabe. Rosa (2012).

[115] Fonte da figura disponível em: http://www.historiativanet.wordpress.com/category/oriente-medio/, acesso em 12 de julho de 2013.

Mamun[118](786–833), que reinou entre 813 e 833 e estabeleceu, em Bagdá, o centro de cultura conhecido como "Casa da Sabedoria", composta de uma biblioteca e um observatório.

A Al-Mamun também é creditado o fato de ter atraído muitos eruditos conhecidos para compartilhar informações, ideias e cultura na casa da sabedoria baseada em Bagdá. Entre os séculos IX e XII, vários dos mestres muçulmanos mais eruditos fizeram parte deste importante centro educacional, visavam traduzir livros do persa para o árabe, além de preservar os livros existentes.

Flood & Wilson (2013), afirma:

> Em Bagdá, os califas promoviam ativamente a matemática e a astronomia e, no início do século IX, o califa Harun al-Rashid e o seu filho al-Mamun criaram e sustentaram a "Casa da Sabedoria", academia cientifica com extensa biblioteca e observatório. Lá, os matemáticos islâmicos traduziram e comentaram as obras de Euclides, Arquimedes e outros e desenvolveram o sistema de contagem decimal e posicional indiano até os atuais algarismos indo-arábicos. (FLOOD & WILSON, 2013, p.46).

Com o reinado de Al-Mamun, foram estabelecidos observatórios, e a casa da sabedoria tornou-se o centro de estudo das humanidades e das ciências no Islã medieval, incluindo matemáticas, astronomia, medicina, alquimia e química, zoologia e geografia e cartografia.

Diversas obras clássicas da Antiguidade, que de outra forma teriam se perdido, foram traduzidas para o árabe e o persa, e depois foram traduzidas para o turco, hebreu e o latim, baseados em textos persas, indianos e gregos, incluindo os

---

[116] **Al-Mansur:** Foi o primeiro califa abássida que reinou entre 754 e 775, é geralmente considerado como o verdadeiro fundador do califado abássida. Durante seu reinado, a literatura e as obras acadêmicas do mundo islâmico começaram a aparecer com força total, apoiada pela nova tolerância dos abássidas aos persas e outros grupos que eram oprimidos pelos Omíadas. Embora o califa Omíada, Hisham ibn Abd al-Malik tenha adotado práticas persas em sua corte, não foi no reinado de al-Mansur que a literatura persa e seus trabalhos acadêmicos passaram de fato a serem apreciados. Geordani (1985).

[117] **Harun al-Raschid:** Foi o quinto Califa abássida, reinou entre 786-809, seu governo abrangeu Iraque moderno, seu Califado foi marcado por prosperidade científica, cultural e religiosa da arte islâmica e música islâmica também floresceu significativamente a biblioteca lendária *Bayt al-Hikma* (Casa da Sabedoria), durante o seu reinado floresceu em Bagdá a mais esplêndida cidade de seu período. Geordani (1985).

[118] **Al-Mamun:** Foi o sexto Califa abássida, reinou entre 813-833, no seu reinado teve grande sucesso do ponto de vista cultural. O califa interessava-se pessoalmente pelo trabalho dos sábios, sobretudo daqueles que conheciam a língua grega. Ele reuniu em Bagdá de estudiosos de todas as religiões, os quais tratavam magnificamente e com a mais completa tolerância. Fez vir de Bizâncio manuscritos entre eles uma cópia do Almagesto, o tratado de astronomia do século II da autoria de Ptolomeu. Al Mamum era um apaixonado por astronomia e também em 829 criou um observatório no local mais elevado de Bagdá, perto da porta Chammassiya, o qual foi o primeiro observatório permanente do mundo. Geordani (1985).

textos dos seguintes autores: Pitágoras, Platão [119] (428/27 a.C.–348/47 a.C.), Aristóteles [120] (384 a.C.–322 a.C.), Hipócrates de Quíos [121] (460 a.C.–377 a.C.), Euclides, Plotino[122](460–377), Cláudio Galeno[123](130–200), e os médicos indianos Sushruta Samhita [124], Charaka [125], sem uma data de nascimento e falecimento definido e também os matemáticos indianos Aryabhata e Brahmagupta, todos estudiosos acumularam uma grande coleção de saber mundial, e desenvolveram sobre essas bases as suas próprias descobertas. Bagdá era conhecida como a cidade mais rica do mundo e centro de desenvolvimento intelectual do momento, tinha uma população de mais de um milhão de habitantes, era a cidade mais povoada da época.

Rooney (2012) afirma,

> Conta-se que o califa al-Mamum (786–833) teve um sonho no qual Aristóteles apareceu para ele. Em consequência disso, o califa ordenou que

---

[119] **Platão:** Foi um filósofo e matemático do período clássico da Grécia Antiga, autor de diversos diálogos filosóficos e fundador da Academia em Atenas, a primeira instituição de educação superior do mundo ocidental. Juntamente com seu mentor, Sócrates, e seu pupilo, Aristóteles, Platão ajudou a construir os alicerces da filosofia natural, da ciência e da filosofia ocidental. Acredita-se que seu nome verdadeiro tenha sido Arístocles. Rosa (2012).

[120] **Aristóteles:** Foi um filósofo grego, aluno de Platão e professor de Alexandre, o Grande. Seus escritos abrangem diversos assuntos, como a física, a metafísica, as leis da poesia e do drama, a música, a lógica, a retórica, o governo, a ética, a biologia e a zoologia. Juntamente com Platão e Sócrates (professor de Platão), Aristóteles é visto como um dos fundadores da filosofia ocidental. Em 343 a.C. torna-se tutor de Alexandre da Macedônia, na época com 13 anos de idade, que será o mais célebre conquistador do mundo antigo. Em 335 a.C. Alexandre assume o trono e Aristóteles volta para Atenas. Rosa (2012).

[121] **Hipócrates de Quíos:** É considerado por muitos, uma das figuras mais importantes da história da saúde, frequentemente considerado "*pai da medicina*", apesar de ter desenvolvido tal ciência muito depois de Imhotep, do Egito antigo. É referido como uma das grandes figuras entre Sócrates, Aristóteles durante o florescimento intelectual ateniense. Hipócrates era um *asclepíade*, isto é, membro de uma família que durante várias gerações praticara os cuidados em saúde. Rosa (2012).

[122] **Plotino:** Foi um filósofo neoplatônico, autor de Enéadas, discípulo de Amônio Sacas por onze anos e mestre de Porfírio. A influência de Plotino foi importantíssima para os pensadores neoplatônicos cristão, islâmico e judeu. Rosa (2012).

[123] **Cláudio Galeno:** Mais conhecido como Galeno de Pérgamo foi um proeminente médico e filósofo romano de origem grega, e provavelmente o mais talentoso médico investigativo do período romano. Suas teorias dominaram e influenciaram a ciência médica ocidental por mais de um milênio. Seus relatos de anatomia médica eram baseados em macacos, visto que a dissecação humana não era permitida no seu tempo, mas foram insuperáveis até a descrição impressa e ilustrações da dissecção humanas por Andreas Vesalius em 1543. Desta forma Galeno é também um precursor da prática da vivissecção e experimentação com animais. Rosa (2012).

[124] **Sushruta Samhita:** Foi um cirurgião e professor de Aiurveda seus trabalhos iniciais foram na cidade indiana de Benares (Kashi) no século VI a.C. O tratado médico *Sushruta Samhita* compilado em sânscrito védico é atribuído a ele. O *Sushruta Samhita* contém diversas referências detalhadas a doenças e procedimentos médicos. É considerado o “Pai da Cirurgia”. Girish & Shridhar (2007).

[125] **Charaka:** Foi um médico indiano ao qual lhe é atribuído o *Charaka Samhita* que, com o *Sushruta Samhita* (entre o século IV a.C. e o século III d.C.), são os textos fundamentais da medicina ayurveda (a tradicional da Índia). A primeira menção a Charaka aparece numa tradução para o chinês do *Tripitaka* budista, que se refere a Charaka como médico pessoal do rei caxemiriano Kanishka (que reinou 23 anos até 144, aproximadamente). Encontraram-se textos árabes do século VIII nos quais é mencionado Charaka. Tiwary (1982).

> fossem feitas traduções de todos os textos gregos que pudessem ser encontrados. Os árabes viviam em uma paz instável com o Império Bizantino e negociaram a aquisição dos textos através de uma série de tratados. Sob o califato de al-Mamum em sua casa da sabedoria, foram traduzidas versões completas dos Elementos de Euclides e o Almagesto de Ptolomeu, entre outras obras. (ROONEY, 2012, p.130).

Essa foi umas das grandes contribuições dos árabes, pois tiveram um papel muito importante na história da matemática e das ciências em geral, ao traduziram, fielmente, os clássicos gregos (Apolônio, Arquimedes, Euclides, Ptolomeu e outros). Esses clássicos estariam perdidos para nós sem as traduções árabes, devido ao fechamento da escola de Atenas, por Justiniano[126] (483–565), Imperador Romano do Oriente.

Eves (1995) confirma:

> Foi de importância fundamental para a conservação de grande parte da cultura mundial a maneira como os árabes se apoderaram do saber grego e hindu. Os califas de Bagdá foram governadores esclarecidos e muitos deles tornaram-se patronos da cultura e convidaram intelectuais eminentes para se instalarem junto às suas cortes. Inúmeros trabalhos de astronomia, medicina e matemática gregos foram laboriosamente traduzidos para o árabe e assim preservados até que posteriormente intelectuais europeus tivessem condições de traduzi-los para o latim ou outras línguas. Não fora o trabalho dos intelectuais árabes a grande parte da ciência grega e hindu teria se perdido irremediavelmente ao longo da baixa Idade Média. (EVES, 1995, p.260).

Por tudo isso, ressalta-se a importante influência do povo árabe na matemática. Contudo, vale ressaltar que os muçulmanos, ao expandir o islamismo, cometeram um dos maiores crimes contra a humanidade, no que diz respeito ao conhecimento desenvolvido no período até então. Pois após a queda de Alexandria em 642 frente aos muçulmanos, o califa Omar também chamado de (Umar) ibn al-Khattab[127] (586–644), teria ordenado ao Emir Amr Ibn Al que procedesse à destruição

---

[126] **Justiniano o Grande**: Foi imperador do Império Romano do Oriente, governou desde 01 de agosto de 527 até sua morte. Durante o seu reinado, Justiniano procurou reviver a antiga grandeza do império romano clássico, reconquistar os territórios perdidos do Império Romano do Ocidente. Uma das figuras mais importantes da Antiguidade Tardia e último imperador que usou Latim como língua materna, o governo de Justiniano é um marco na história do Império Romano do Oriente. O impacto de sua administração estendeu além das fronteiras do seu tempo e do seu. Seu reinado é marcado pelo ambicioso, mas parcial *"renovatio imperii Romanorum",* ou "restauração do império". Geordani (2008).

[127] **Omar ibn al-Khattab:** Foi o segundo califa mulçumano e reinou de 633 até seu assassinato em 644. Época de Omar como califa viu o império islâmico crescer a um ritmo sem precedentes, levando o Iraque e partes do Irã desde os sassânidas, e terminando, assim, que o império, e tendo o Egito, Palestina, Síria, Norte de África e Armênia dos bizantinos. Omar também codificou a lei islâmica, e era conhecido por seu estilo de vida simples e modesta vida. A famosa história fala de ele chegar em Jerusalém caminhando ao lado de seu camelo em que seu servo estava sentado. Omar é mais reconhecido pela origem das principais instituições políticas do estado muçulmano e estabilizar a rápida expansão do império árabe. Geordani (1985).

de todos os manuscritos encontrados na biblioteca (cerca de 600.000) argumentando que: “Se os escritos dos Gregos concordam com as Sagradas Escrituras (Corão), não são necessários, se não concordam, são nocivos e devem ser destruídos”. Conta a lenda que os escritos alimentaram as caldeiras das casas de banhos durante muito tempo.Mas, também a credibilidade desta história tem sido contestada por muitos estudiosos. De qualquer modo, as magníficas obras antigas (manuscritos) da Biblioteca teriam acabado nos fornos que, durante vários meses, aqueceram as numerosas casas de banhos públicos da cidade. Apenas teriam sido poupados os livros de Aristóteles.

Katz (2010) afirma,

> Para muitos chefes islâmicos, as ciências estrangeiras eram potencialmente subversivas da fé, e certamente supérfluas para as necessidades da vida, seja aqui na Terra, seja no além. E embora os primitivos chefes religiosos islâmicos encorajassem o estudo das ciências estrangeiras, ao longo dos séculos o apoio para um tal estudo diminui quando mais chefes religiosos se impuseram. (KATZ, 2010, p.410).

No entanto a matemática árabe selecionou e aperfeiçoou a tradição matemática originada na Grécia e na Índia, a matemática árabe foi um vetor para a divulgação dos algarismos hindus no Ocidente, esse desenvolvimento trouxe para os cálculos astronômicos dois tipos de trigonometria: a geometria grega das cordas, como é encontrada no Almagesto, as tabelas hindus de senos, derivadas dos *Siddhanta*, os avanços conseguidos pelos árabes serviram para a matemática que utilizamos até hoje.

Morey (2001) confirma,

> Como em outra área da matemática, os árabes selecionaram conceitos de trigonometria helenístico e indianos e as combinaram numa disciplina que ficou com poucos similares com suas precursoras. Neste trabalho consideramos três aspectos da trigonometria árabe.
> a) A introdução de seis funções trigonométricas básicas: seno e cosseno, tangente e cotangente, secante e cossecante;
> b) A dedução da regra do seno e o estabelecimento de outras identidades e;
> c) A construção de tábuas trigonométricas detalhadas com ajuda de vários procedimentos de interpolação. (MOREY, 2001, p.29).

Entendemos que os avanços realizados pelos árabes na matemática trouxeram um desenvolvimento e aperfeiçoamento a trigonometria que foi instituída como um ramo distinto das matemáticas, os matemáticos muçulmanos, principalmente Al Battani[128] (c.850–929), Al-Biruni[129](973–1055), Abu'I Wafa[130](940–997/8), Ibn Yunus e Abu Ali Ibn al Haytham[131](965–1039), também estudaram e desenvolveram a trigonometria esférica e aplicaram-na na solução de problemas astronômicos.

Podemos dizer que a influência árabe começou com a fundação da Escola de Bagdá, no século IX, e um dos seus maiores expoentes foi o príncipe da Síria Mohamed-ben-Geber, conhecido como AL Battani ou Albategnius, nas traduções latinas, chamado também de Ptolomeu de Bagdá.

Os estudos de Al Battani, ficaram entre o *Almagesto* e o *Siddhanta* e foi por sua influência que a trigonometria hindu foi adotada pelos árabes, o mais importante foi a utilização que hoje chamaríamos de trigonometria o estudo das proporções relativas aos lados e ângulos de triângulos para fazer seus cálculos. Al-Battani fez uso de conceitos como o seno, cosseno, tangente e cotangente, fez melhoria em relação aos métodos utilizados pelo maior dos astrônomos gregos, Cláudio Ptolomeu, principalmente a partir de sua genial ideia de introduzir o círculo

---

[128] **Al Battani:** Foi um astrônomo e matemático árabe é mais conhecido na astronomia por suas melhorias e correções da tradição ptolomaica. Seu *Kitab al-Zij,* que em tradução latina foi muito influente na Idade Média e do Renascimento, contém um conjunto elaborado de tabelas astronômicas e discute uma ampla gama de problemas práticos na astronomia esférica, alguns dos quais foram concebidos com a finalidade de resolver problemas relacionados astrológicos. Ele reconheceu a possibilidade de um eclipse anular do Sol e obteve o valor muito preciso de 23° 35' para a obliquidade da eclíptica. Vários outros aspectos específicos da obra de al-Battani exerceu uma forte influência sobre as gerações posteriores de estudiosos. Katz (2010).

[129] **Al-Biruni:** É considerado como um dos maiores estudiosos da era islâmica medieval e era bem versado em física, matemática, astronomia e ciências naturais, e também se distinguiu como um historiador e linguista. Ele também fez contribuições para as ciências da Terra e é considerado como o "pai da geodesia" por suas contribuições importantes para essa área do conhecimento, junto com suas contribuições significativas para a geografia. Noventa e cinco dos 146 livros conhecidos escrito por Biruni, foram dedicados à astronomia, matemática e geografia e assuntos relacionados. O principal trabalho de Al Biruni em astrologia é um texto astronômico e matemático, apenas o último capítulo possui preocupações e prognóstico astrológico. Katz (2010).

[130] **Muhammah Abu'l Wafa:** Foi um matemático e astrônomo persa que trabalhou em Bagdá. Ele fez importantes inovações em trigonometria esférica, astronomia e valiosos trabalhos em geometria, e seu trabalho em aritmética para empresários contém o primeiro exemplo do uso de números negativos em um texto islâmico medieval. Katz (2010).

[131] **Abu Ali Ibn al Haytham:** Foi um astrônomo, matemático e físico persa, ficou conhecido no Ocidente por Alhazen e de acordo com biógrafos medievais, escreveu mais de 200 obras em uma ampla gama de assuntos, elaborou um extenso trabalho sobre Óptica também escreveu sobre, uma teoria sobre a luz e uma sobre a visão, escreveu também sobre Astronomia e Matemática, incluindo Geometria e Teoria de Números dos quais pelo menos 96 de seus trabalhos científicos são conhecidos a maioria de suas obras estão agora perdidas, 50 delas sobreviveram até certo ponto. Quase a metade de suas obras sobreviventes são em matemática, 23 deles estão em astronomia, e 14 delas estão em óptica, o restante são sobre outros assuntos. Nem todas as suas obras sobreviventes foram ainda estudados. Seus trabalhos em Geometria tiveram muito influência sobre os geômetras árabes. Das obras em astronomia que continham alguns estudos em trigonometria plana e esférica temos: *Correções do Almagesto, Dúvidas sobre Ptolomeu, Resolução de Dúvidas sobre o Almagesto, A Correção das Operações em Astronomia e A Direção de Meca*. Tucker (2005).

de raio unitário e é responsável também pela formulação e estabelecimento de algumas das relações trigonométricas importantes, quais sejam:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1}} \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 1}} \qquad \sec x = \sqrt{\operatorname{tg} x^2 + 1}$$

No século IX os árabes conheciam a tangente e a cotangente, que a tabularam pela primeira vez nessa época, Introduziu-as nos cálculos gnômicos e chamou-as de “sombras ampliadas”. É o que nós chamamos na moderna trigonometria de tangente, a ideias associadas a sombras projetadas por uma vara colocada na horizontal. A variação na elevação do Sol causava uma variação no ângulo que os raios solares formavam com a vara e, portanto modificava o tamanho da sombra.

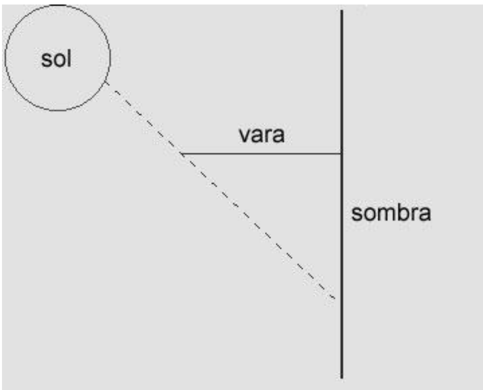


Figura 44: Figura da Sombra[132]
Fonte: Site:www.historiativanet.wordpress.com

A introdução da tangente na trigonometria provou ser de capital importância. As primeiras tabelas de sombras conhecidas foram produzidas pelos árabes por volta de 860.

Rooney (2012) afirma,

> A primeira tabela de tangente e cotangente foi criada por volta de 860 pelo astrônomo persa al-Hãsib al-Marwazy[133] (c.778–870), o astrônomo sírio al Battani (c.858–929) formulou uma regra para determinar a elevação do sol

---

[132] Fonte da figura disponível em: http://www.historiativanet.wordpress.com/category/oriente-medio/, acesso em 15 de fevereiro de 2014.

[133] **Al Hãsib al-Marwazy:** Foi um astrônomo, o geógrafo e matemático um persa, fez observações entre 825-835, e compilou três tabelas astronômicas: a primeira ainda estava na forma Hindu, o segundo, chamado de tabelas, foram os mais importantes, pois eles são provavelmente idênticos com os testados Mamunic ou tabelas árabes e pode ser um trabalho coletivo de astrônomos de Al-Mamun, o terceiro, chamado de tabelas do xá, eram menores. A propósito do eclipse solar de 829, Al Hãsib nos dá o primeiro exemplo de uma determinação de tempo por uma altitude (neste caso, do sol) um método que foi amplamente adotado por astrônomos muçulmanos. Katz (2010).

> acima do horizonte medindo uma sombra (o princípio de funcionamento dos relógio de sol). Sua “tabela de sombras” é efetivamente uma tabela de cotangente para ângulos de 1º até 90º, com intervalos de 1º. (ROONEY, 2012, p.91).

(KATZ, 2010, p.342) informa: As funções tangentes, cotangentes, secantes e cossecante apareceram em trabalhos islâmicos no século IX, talvez mais cedo na obra de Al Hãsib, apesar de que a função tangente já ter sido usada na china no século VIII.

Depois de Al-Battani, foi Al Hãsib a fazer contribuições em trigonometria, que descreveu pela primeira vez as relações trigonométricas: sen, cos, tan e cotg, no seu trabalho em 830, parece ter introduzido a noção de “sombra”, cujo nome original era umbra (versa), equivalente a nossa tangente em trigonometria, e ele compilou uma tabela de tais sombras que parece ser a mais antiga do seu tipo. Ele também introduziu a co-tangente, e produziu as primeiras tabelas para essa função.

Assim, a tangente e a cotangente vieram por um caminho diferente daquela da corda que geraram o seno. Foram conceitos desenvolvidos juntos e não foram primeiramente associados a ângulos, sendo importante para calcular o comprimento da sombra que é produzida por um objeto, o comprimento das sombras foi também importante no relógio de sol.

Depois de Al Hãsib, digno de nota é o matemático e astrônomo persa Abu’l-Wafa que fez importantes inovações em trigonometria esférica, compilação das tabelas de senos e tangentes em intervalos de 15', com até oito casas decimais, introduziu as funções sec e cossec, estudou as inter-relações entre as seis linhas trigonométricas associadas a um arco. Entre seus trabalhos sobre astronomia, apenas os primeiros sete tratados de seu *Almagesto (Kitab al-Majisṭī)* são agora existentes, consta uma teoria planetária e soluções para determinar a direção de Meca, essa obra foi amplamente lida por astrônomos árabes medievais, nos séculos após sua morte. Iniciou uma organização e sistematização de provas e teoremas de trigonometria, definiu todas as relações trigonométricas no circulo, pois até então, as relações trigonométricas haviam sido introduzidas no triângulo retângulo.

Estabeleceu várias identidades trigonométricas como soma e diferença de arcos $(x \pm y)$ onde os matemáticos gregos antigos tinham feito as identidades equivalentes em termo de corda, que em sua forma moderna é $\operatorname{sen} 2x = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$, embora isso pudesse facilmente ter sido deduzido pela fórmula de Ptolomeu $\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}x\cdot\cos y+\operatorname{sen}y\cdot\cos x$, fazendo x = y, também deu os equivalentes das seguintes formulas trigonométricas:

$$\frac{\operatorname{tg}x}{1}=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} \qquad \frac{\operatorname{tg}x}{1}=\frac{1}{\operatorname{cotg}x} \qquad \sec x=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} \qquad \cos(2x)=1-2\cdot\operatorname{sen}^2(x)$$

Abul‘l-Wefa definiu todas as relações trigonométricas no círculo, relação que até então havia sido introduzida no triângulo retângulo. Para as demonstrações, utilizou primeiro o teorema de Menelau, sendo paulatinamente desprezado a partir do século X, por ter sido a época descoberto o teorema do seno. No século XIII, se conheceu também o teorema do cosseno introduzido por Al-Jalili.

Grande parte do trabalho Abul‘l-Wefa foi perdida, porem em seus estudos introduziu também a função tangente, criou métodos novos para calcular tabelas trigonométricas, seu uso da tangente ajudou a resolver problemas envolvendo triângulos retângulos esféricos, demonstrando outros casos especiais do teorema de Menelau, obtendo os seguintes resultados:

$$\frac{\cos a}{\cos b}=\frac{1}{\cos c} \qquad\qquad \frac{\operatorname{sen}c}{\operatorname{tg}a}=\frac{1}{\operatorname{tg}A}$$

Desenvolveu uma nova técnica para calcular tabelas de seno, permitindo-lhe construir tabelas mais precisas do que os seus antecessores, deu prova a fórmula do seno para a geometria esférica: $\frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{sen}(\widehat{A})}=\frac{\operatorname{sen}(b)}{\operatorname{sen}(\widehat{B})}=\frac{\operatorname{sen}(c)}{\operatorname{sen}(\widehat{C})}$.

Depois de Abu’l-Wafa, o próximo grande sábio mulçumano a fazer contribuições à trigonometria plana e esférica foi Al Biruni, escreveu mais de 146 obras, principalmente em matemática trabalhou a trigonometria fazendo aplicações em vários campos, na astronomia, na geografia e no calendário.

Entre suas principais realizações em trigonometria temos:

- A utilização de todas as seis funções trigonométricas.
- Determinação e utilização de várias identidades trigonométricas;
- Simplificação e organização e provas de teoremas da trigonometria esférica;
- Maior precisão das tabelas trigonométricas;

Em matemática foi um dos primeiros a investigar as funções trigonométricas: tangente, cotangente, secante e cossecante no seu *“Tratado Exaustivo sobre Sombras”,* neste tratado apresenta várias demonstrações de identidades trigonométricas, que serviam para resolução de problemas astronômicos.

$$\text{tg}\,x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} \qquad \text{sen}\,x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{sen}\,x = \text{sen}(90^0 - x)$$

$$\text{cotg}\,x = \text{tg}(90^0 - x) \qquad \sec x = \sqrt{\text{tg}\,x^2+1} \qquad \text{cossec}\,x = \sqrt{\text{cotg}\,x^2+1}$$

Essas identidades trigonométricas serviram para padronização de técnicas de resolução de triângulos e aplicadas nos cálculos da trigonometria plana e esférica.

Rodrigues (2011) confirma:

> Uma inovação dos matemáticos árabes foi a introdução e utilização das funções trigonométricas tangente, cotangente, secante e cossecante que aparecem plenamente estudadas nos trabalhos Al Biruni no seu *“Tratado Exaustivo sobre Sombras*”. (RODRIGUES, 2011, p.8)

Outra obra sua importante para o desenvolvimento da trigonometria foi *“Canon sobre a astronomia e as estrelas”*, pois nela se reuniu todos os conhecimentos de seus predecessores, completados e enriquecidos pelas suas próprias contribuições.

Uma das grandes realizações feita por Al Biruni está na aplicação do teorema do seno, para determinar a direção de Meca, as suas obras tiveram uma influência considerável sobre os cientistas mulçumanos seus contemporâneos, mas nenhuma das suas obras foi traduzida para uma língua europeia até o século XX. Assim, a sua influencia foi apenas indireta e mínima sobre a ciência do Renascimento, na Europa.

O matemático Abu Nasr Mansur[134](c. 960–1036), foi um dos professores de al-Biruni, trabalhou em muitos temas, como resultado de solicitações de al-Biruni escreveu um total de vinte e cinco obras, dessas apenas dezessete trabalhos sobreviveram até os nossos dias. Dessas produções, sete são em matemática, o restante sobre astronomia. Todas as obras que sobreviveram foram publicados, a maioria tem sido traduzida em pelo menos uma língua europeia, e isso demonstra alguma indicação sobre a importância de seu trabalho, e mostrando ser um excepcional astrônomo e matemático.

[134] **Abu Nasr Mansur:** Foi um matemático persa e muçulmano a maioria do seu trabalho foi em matemática, mas alguns de seus escritos eram sobre astronomia. Na matemática, ele tinha muitos escritos importantes sobre trigonometria, que foram desenvolvidos a partir dos escritos de Ptolomeu. Ele também preservou os escritos de Menelau de Alexandria e reelaborando muitos dos teoremas gregos. Katz (2010).

Katz (2010) informa,

> Os matemáticos islâmicos foram capazes de derivar métodos mais simples para tratar estes problemas do que os de Ptolomeu. Parece que os resultados básicos para tratar estes problemas foram descobertos, independente, por dois contemporâneos de al-Biruni, Abu Nasr Mansur, foi um dos professores de al-Biruni, e Abu'l-Wafa um astrônomo importante de Bagdá. (KATZ, 2010, p.344).

A principal realização de Abu Nasr Mansur foi o comentário e reformulação da *“Sphaerica”,* de Menelau, foi particularmente importante uma vez que o original grego do trabalho Menelau foi perdido, embora existam várias versões em árabe. O trabalho está dividido em três livros: o primeiro livro estuda as propriedades dos triângulos esféricos, o segundo livro investiga propriedades de sistemas de círculos paralelos em uma esfera, como eles se cruzam em grandes círculos, enquanto o terceiro livro dá uma prova do teorema Menelau, que também descobriu a lei dos senos, da trigonometria esférica.

Vale ressaltar que, diversos astrônomos árabes se deslocaram para a Espanha para trabalhar e passaram a difundir o saber. Os mais importantes escritores foram os astrônomos Abu Ishaq ibn Ibrāhīm Yahya al-Naqqāsh al Zarqali [135] (1029–1087), conhecido como Abû Ishâq ou Ibn al-Zarqâla ou, nas traduções latinas como Arzachel, e que viveu em Córdoba, autor de um conjunto de tábuas trigonométricas em 1050, que serviram para melhorar as observações e simplificar os cálculos astronômicos, suas obras inspiraram uma geração de astrônomos islâmicos na Andaluzia.

Outro grande matemático islâmico a trabalhar na Espanha foi Abu Muhammad ibn Jābir Aflah[136](1100–1150), conhecido como Jeber ibn Aphla, e em traduções latinas é Geber/Gebir, viveu em Sevilha, na obra *“Islah al-Majisṭi”* (Correção do Almagesto*)* fez um comentário e a reformulação do Almagesto de Ptolomeu, nessa obra fez critica a base matemática incluída nela. Por exemplo, ele substituiu o uso do Teorema de Menelau baseados em trigonometria esférica, no que parece ser uma tentativa de aumentar a precisão matemática da obra. As correções foram desenvolvidas por um grupo de matemáticos islâmicos do século X

[135] **Abu Ishaq Ibrahim al-Zarqali**: Foi um muçulmano fabricante de instrumentos, astrólogo, e um dos principais astrônomos do seu tempo. Embora seu nome é convencionalmente dada como al-Zarqali, é provável que a forma correta era al-Zarqalluh. Ele viveu em Toledo em Castela, Al-Andalus (hoje Espanha), mudou-se para Córdoba mais tarde. Katz (2010).

[136] **Jeber ibn Aphla:** Foi um astrônomo, matemático e inventor árabe, conhecido pela invenção do torquetum, um dispositivo mecânico para realizar transformação entre os sistemas de coordenadas esféricas e por seus trabalhos em matemática que foram traduzidos para o latim. Brummelen (2009).

que incluíam Abu al-Wafā depois também por Abu Abd Allah Muhammad ibn Al-Muadh Jayyani[137](989–1079), também trabalhou na Andaluzia atual Espanha durante o século XI. Seus estudos astronômicos se mostraram tão interessantes que, séculos mais tarde mais precisamente em (1543), foram publicados em Nuremberg.

Al-Jayyani escreveu o tratado chamado de *"Kitab Mayhulat qisi al-kura", (*Determinação das magnitudes dos arcos na superfície de uma esfera), que é considerado o primeiro tratado sobre trigonometria esférica separado da astronomia no ocidente medieval, nessa obra esta reunida toda trigonometria oriental introduzida nos séculos anteriores por importantes matemáticos árabes: Abu Nasr Mansur, Abu al-Wafā, al-Biruni, entre outros, apesar da trigonometria esférica em sua forma antiga helenística ter sido abordada por matemáticos anteriores, como Menelau de Alexandria, que criou o teorema de Menelau para lidar com problemas da esfera.

Brummelen (2009) afirma,

> É de se esperar que os desenvolvimentos fundamentais que tornaram o Teorema de Menelau obsoleto provocaria alguém para escrever um tratado abrangente no campo reformulado, e não ficaria desapontado. No entanto, a chegada muito rápida de um primeiro tipo de trabalho e, especialmente, a sua chegada não no leste do Islã, mas para longe para o oeste, na Espanha, deve levantar as sobrancelhas. O livro em questão é a *"Determinação das magnitudes dos arcos na superfície de uma esfera"* por Al Jayyani, que parece ter passado a maior parte de sua vida em Córdoba. Não se sabe muito sobre ele, escreveu vários tratados em astronomia e astrologia, alguns dos quais foram traduzidos por Gerard de Cremona, e uma defesa de concepção de raio por Euclides. Mais tentador para nós é o fato de que ele passou vários anos, ainda muito jovem no Cairo, onde estudou com Ibn al Haytham e soube da nova trigonometria esférica do Oriente. Determinação das magnitudes é a obra mais antiga que conhecemos de trigonometria esférica independente de aplicação astronômica. Ele começa com uma apresentação da figura transversal (sem provas), e segue-se com problemas de mesma forma: dada a soma ou a diferença de dois arcos e a relação de seus senos, e encontrar os dois arcos. Este resultado acaba por ser útil na resolução de certos triângulos esféricos e levou Al-Jayyani, a construir uma tabela de tangentes não pelo comprimento da sombra, mas explicitamente definindo como a "divisão do seno pelo cosseno". (BRUMMELEN, 2009, p.186, tradução nossa).

O trabalho de Al-Jayyani sobre trigonometria esférica apresenta fórmulas para triângulos retângulos, e lei geral dos senos e a solução de triângulo esférico por

[137] **Al-Muadh Jayyani:** Foi um matemático, estudioso islâmico, em Qadi de Al-Andalus (na atual Espanha). Al-Jayyani viveu durante o século XI, alcançou grande fama no mundo árabe e no final do Renascimento Europeu, especialmente por suas pesquisas e realizações, tanto na trigonometria, como no conceito de razão matemática, seus manuscritos científicos e obras foram impressas em árabe, latim, hebraico e italiano, assim sua reputação foi importante nos séculos XI e XII em Al-Andalus e nos séculos XV e XVI para os Europeus, atualmente suas principais obras encontram-se espalhadas em algumas Bibliotecas, como a Nacional da Argélia, Paris e Medicea Laurenziana de Florencia. Villeundas (1979).

meio do seu triângulo polar, a principal finalidade foi fazer um compendio de resolução todos os seis casos de triângulos esféricos, sendo conhecidos quatros elementos do triângulo esférico, poder encontrar os outros elementos desconhecidos. Esse tratado mais tarde teve uma forte influência sobre a matemática da Europa, e sua definição de índices como números e “método de resolver um triângulo esférico quando todos os lados são desconhecidos” são susceptíveis de ter influenciado os estudos de Regiomontanus.

De acordo com STRUIK (1992), quando a Escola de Bagdá entrou em declínio, o centro das atividades intelectuais deslocou-se para o sul da Europa, na Península Ibérica, e com ele o estudo da trigonometria, particularmente nos triângulos esféricos necessários aos estudos astronômicos. A cidade de Toledo tornou-se o mais importante centro da cultura, a partir de 1085, quando foi libertada pelos cristãos do domínio mouro. Isto ocorreu porque para ela afluíram os estudiosos ocidentais, visando a adquirir o saber muçulmano. O século XII na história da matemática foi, então, um século de tradutores dos quais citamos: Platão de Tivoli, Gerardo de Cremona, Adelardo de Bath e Robert de Chester. Com isso, a Europa teve acesso à matemática árabe e à herança grega que havia sido conservada, na medida do possível, por eles.

Apresentamos no quadro abaixo as principais obras que se relacionam com a trigonometria feita por tradutores, conforme Katz (2010, p. 360).

TABELA 2. TRADUTORES E OBRAS QUE FORAM TRADUZIDAS

TRADUTORES E AS SUAS TRADUÇÕES
Adelar de Bath (1116–1142)
Tabelas Astronômicas de al-Khwarizmi. *Elementos de Euclides.* *Liber ysagogarum Alchorismi,* a obra aritmética de al-Khwarizmi.
Platão de Tivoli (1134–1145)
Spherica de Teodósio (c.100) *De motu stellarum* de al-Battani, que contém material importante sobre Trigonometria. *Sobre a medida do círculo* de Arquimedes. *Libre embadorum* de Abraham bar Hiyya.
Robert de Chester (1141–1145)
Álgebra de al-Khwarizmi. *Revisão das Tabelas* de astronomia de al-Khwarizmi para o meridiano de Londres.
Gerardo de Cremona (1150–1185)

Posterior Analítica de Aristóteles. *De sphera mota* de Autólico. *Elementos* de Euclides. *Data* de Euclides. *Sobre a medida do círculo* de Arquimedes. *Spherica* de Teodósio. *Almagesto* de Ptolomeu. *De figuris sphaericis* de Menelau. *Álgebra* de al-Khwarizmi. *Elementa astronômica* de Jabit ibn Aflah.

É preciso lembrar, também, o papel das cruzadas, pois com as cruzadas a Europa cristã teve, novamente, contato com a matemática grega, traduzida para o árabe. Isto veio influenciar muito a Europa medieval e serviu como fonte para o desenvolvimento da matemática durante a Idade Média.

Um dos últimos grande expoente da matemática/astronomia islâmica a fez contribuições importantes a trigonometria plana e esférica foi Nasir Eddin al-Tusi (1201–1274), quando trabalhava em Bagdá, estava descontente com sua ocupação de astrólogo do governador e planejou fugir da corte, mas teve seus planos descobertos e foi aprisionado. Quando em 1256 os mongóis tentaram tomar a cidade de Bagdá, que tinha se tornado a capital sede do islamismo, Nasir foi libertado por eles em troca de ajudá-los a derrubar as defesas da cidade.

Em 1258 ocorreu a queda do Império Árabe e os mongóis assumiram a cidade de Bagdá. O chefe dos mongóis, em reconhecimento a ajuda de Nasir, construiu para ele um observatório de Astronomia, onde ele tinha acesso a mais de quatrocentos mil livros e todo material que precisava para realizar suas pesquisas. Ele dedicou-se a pesquisar a respeito das seis funções trigonométricas. O produto final de suas pesquisas foi a obra *"Kitab al shakl al-qita",* (Tratado sobre Figuras Transversais), conhecido como *"Tratado sobre quadrilátero completo"* (1260), tratando a trigonometria tanto plano e esférica, como assunto independente da astronomia, foi o primeiro a tratar a trigonometria como uma disciplina discreta.

Nessa obra aprece a técnica de dividir os triângulos plano e esférico nos casos duvidosos de solução, em dois triângulos retângulos tanto no caso plano ou esférico, e apresentou ainda a primeira discussão da solução do caso em que os três ângulos são conhecidos. Os trabalhos de al-Tusi, pouco influenciaram os matemáticos, na Europa, por não ter sido amplamente conhecida a sua obra, porem seu trabalho foi um marco importante para a separação da trigonometria da astronomia.

Figura 45: Astrolábio Linear, criado por Al-Tusi, no século XII[138]
Fonte: Site:www.if.ufrgs.br

Nasir é lembrado principalmente por ter inventado o astrolábio linear, que consistia numa vara de madeira graduada com uma linha chumbada e uma corda dupla. Com seu invento, mediu as altitudes das estrelas, bem como a direção de Meca.

No desenvolvimento da trigonometria pelos árabes, um fato importante foi dado a palavra hindu *jiva*, meia corda, dada ao seno que foi traduzida para o árabe que chamou o seno de *jiba*, uma palavra que tem o mesmo som que *jiva*. Daí, *jiba* se tornou *jaib* nos escritos árabes. A palavra árabe adequada que deveria ter sido traduzida seria *jiba*, que significa a corda de um arco, em vez de *jaib*, pois foi o estudo das cordas de arcos numa circunferência que originou o seno.

Uma justificativa para esse erro de tradução seria o fato de que em árabe, como em hebraico, é frequente escrever-se apenas as consoantes das palavras, cabendo ao leitor a colocação das vogais. Além de *jiba* e *jaib* terem as mesmas consoantes, a primeira dessas palavras era pouco comum, pois tinha sido trazida da Índia e pertencia ao idioma sânscrito.

Katz (2010) informa,

> A palavra "seno" vem de uma série de traduções incorretas do sânscrito *jya-ardha* (semi-corda). Aryabhata frequentemente abreviou este termo *jya*, ou o seu sinônimo *jyva*. Quando, mais tarde, algumas das obras hindus foram traduzidas em árabe, a palavra foi simplesmente transcrita foneticamente numa palavra sem qualquer significado, *jiba*. Mas como o árabe é escrito sem vogais, escritores, mais tarde, interpretaram as consoantes *jb* como *jaib*, que significa peito ou seio. No século doze, quando uma obra árabe foi traduzida para o latim, o tradutor usou a palavra latina equivalente *sinus*, que também significa peito e, por extensão, *dobra* (como uma toga sobre o peito), ou baía, ou golfo. Esta palavra latina originou então a palavra que usamos "seno". (KATZ, 2010, p.265).

[138] Fonte da figura disponível em: http://www.if.ufrgs.br/category/oriente-medio/, acesso em 30 de setembro de 2013.

Porem o nome seno vem do latim *sinus* que significa seio, volta, curva, cavidade. Muitas pessoas acreditam que este nome se deve ao fato de o gráfico da função correspondente ser bastante sinuoso. Mas, na verdade, *sinus* é a tradução latina da palavra árabe *jaib*, que significa dobra, bolso ou prega de uma vestimenta que não tem nada a ver com o conceito matemático de seno, trata-se de uma tradução defeituosa que dura até hoje. Quando os autores europeus traduziram as palavras matemáticas árabes para o latim, eles traduziram *jaib* na palavra *sinus*. Em particular, o uso de Fibonacci do termo *sinus rectus arcus* rapidamente encorajou o uso universal de seno.

Como base nos estudos de Katz (2010, p.299), afirma que não é possível escrever uma história completa da matemática árabe, uma vez que muitos manuscritos ainda não foram estudados ou mesmo nunca foram lidos. Esta situação é ainda mais complicada quando o que se pretende estudar são a transmissão e a originalidade de problemas do cotidiano, uma vez que alguns dos manuscritos já estudados contêm partes com problemas deste tipo que não foram estudados. Katz, ainda acrescenta uma dificuldade ainda maior, que são as dificuldades políticas que não permitiam o acesso a muitas coleções importantes.

Do mundo grego, a Trigonometria passou em 400, para a Índia onde era usada nos cálculos astrológicos (ainda eram problemas de Astronomia). Por cerca de 800, ela chega ao mundo islâmico, onde foi muito desenvolvida e aplicada na Astronomia, Agrimensura e Cartografia. Por cerca de 1100, a trigonometria chegou, junto com os livros de Ptolomeu, na Europa Cristã. Aí, inicialmente estudada tão somente por suas aplicações na Astronomia, com os portugueses da Escola de Sagres encontra uma aplicação de enorme valor político e econômico na navegação oceânica.

Rooney (2012) afirma,

> O conhecimento combinado grego e árabe de triângulos veio para a Europa com a tradução de muitos textos árabes para o latim a partir do século XI. Os europeus aderiram ao astrolábio entusiasticamente e ele permaneceu como o principal instrumento de navegação até o desenvolvimento do sextante no século XVIII. (ROONEY, 2012, p.94).

Os matemáticos islâmicos exerceram influência sobre o desenvolvimento da ciência na Europa, enriquecido tanto por suas próprias descobertas como as que eles tinham herdado pelos gregos, os indianos, os sírios, os babilônios. Mesmo assim, os avanços dado pelos matemáticos árabes à trigonometria serviram de base para todo desenvolvimento em outras culturas no que se refere a esse tópico da matemática e exerceram uma notável influência sobre o pensamento ocidental.

A próxima civilização a contribuir com os avanços da trigonometria é a chinesa que sofreu influência da trigonometria Indiana, vale ressaltar que também os árabes sofreram influência chinesa e vice-versa no que refere ao inicio do estudo da tangente, e em alguns momentos da história o desenvolvimento da matemática foi concomitante com as outras civilizações, mas também os chineses ofereceram contribuições importantes à trigonometria.

2.7 A TRIGONOMETRIA NA CHINA

A civilização chinesa desenvolveu-se, desde o 3º milênio a.C., ao longo das margens do rio Amarelo e do Azul, bem como a civilização indiana, são muito mais antigas que as civilizações grega e romana, mas não mais antigas que as civilizações egípcia e mesopotâmica.

Figura 46: Mapa da China[139]
Fonte: Site:www.historiadomundo.com.br

Podemos dividir a história chinesa em quatro grandes períodos:

- China Antiga (2000 a.C.–600 a.C.)
- China Clássica (600 a.C.–221 d.C.)
- China Imperial (221 d.C.–1911 d.C.)
- China Moderna (1911 d.C.–hoje)

Apesar de a china antiga ter sido governada por monarquias Hsia, Shang e Chou, o poder real estava nas mãos de pequenos senhores, governantes de pequenas cidades. Este período foi caracterizado por inúmeras guerras, taxas sobre a população e muita pobreza do povo.

Durante o período clássico, o filósofo Confúcio[140] (551 a.C.–479 a.C.) pregava uma total reestruturação social e política. Confúcio pregava o respeito pelas

[139] Fonte da figura disponível em: http://www.historiadomundo.com.br, acesso em 30 de junho de 2013.

[140] **Confúcio:** Foi um pensador e filósofo chinês do Período das Primaveras e Outonos. A filosofia de Confúcio sublinhava uma moralidade pessoal e governamental, também os procedimentos corretos nas relações sociais, a justiça e a sinceridade. Estes valores ganharam valor na China sobre outras doutrinas, como o legalismo e o taoismo durante a Dinastia Han (206 a.C.–220 a.C.). Os

autoridades, cuidados com a pobreza, humildade, ética por parte dos governantes e não fazer aos outros o que não queremos que nos façam. Confúcio não conseguiu, em vida, fazer com que suas ideias fossem aceitas pela aristocracia. Neste mesmo período é criado o taoísmo por Chang Tzu(399 a.C.–295 a.C.), o qual proclamava uma ordem no universo e recomendava a paz e a benevolência governamental. Estes conceitos foram criados em virtude dos desgovernos dos senhores e a miséria de seus súditos. Em 200 a.C. a dinastia Han criou um império que durou até o fim da china clássica. Esta dinastia expandiu os limites da china e adotou o confucionismo como religião oficial. Vindo da Índia, o budismo fundiu-se com o taoísmo e ganhou ampla aceitação entre os camponeses.

Os chineses se interessavam mais por literatura e arte, a matemática e a ciência chinesa sofreram um atraso em relação às outras matérias.

A Matemática chinesa era essencialmente prática, de cunho utilitário, motivada por problemas de calendário, observação celeste, registros governamentais, impostos, mensuração agrária, comércio.

Katz (2010) afirma,

> Na China houve matemáticos que aplicaram os seus talentos não só aperfeiçoaram velhos métodos de resolução de problemas práticos, mas também alargando esses métodos muito para além das exigências das necessidades práticas. (KATZ, 2010, p.240).

Neste sentido, pouco diferia da matemática prática dos mesopotâmios e dos egípcios. O primeiro documento matemático desse povo, que data de aproximadamente mil anos a.C.. O *“Chou Pei Suang Shing”* (Calendário das Horas Solares), um pergaminho de dois metros e trinta, que aborda diversos assuntos científicos sob a forma de diálogos entre o imperador e um de seus ministros. O autor, desconhecido, inicia sua obra afirmando ser o quadrado o símbolo da Terra, e o círculo, do céu. Em seguida apresenta a primeira demonstração Geométrica que conhecemos do Teorema de Pitágoras, o qual chama de *hsuang-thu*e às vezes de *chi-chu* (agrupamento de quadrados).

O diagrama do *“Chou Pei Suang Shing”* demonstra a identidade $3^2 + 4^2 = 5^2$, é uma raridade, pois os chineses dessa época, ao que tudo indica não se interessavam pela geometria. Desse documento conclui-se também que o conhecimento de então era tutelado pelo imperador.

---

pensamentos de Confúcio foram desenvolvidos num sistema filosófico conhecido por *confucionismo*. Divalte (2002).

Abaixo transcrevemos o enunciado do problema:

"... o quadrado formado pelo lado maior (hipotenusa) *do triângulo a, b, c é constituído de quatro triângulos e um quadradinho* (quadrado de lado unitário). *Somando os quatro triângulos, dois a dois, encontram-se mais doze quadradinhos, que somados com o quadradinho central, resulta 25".*

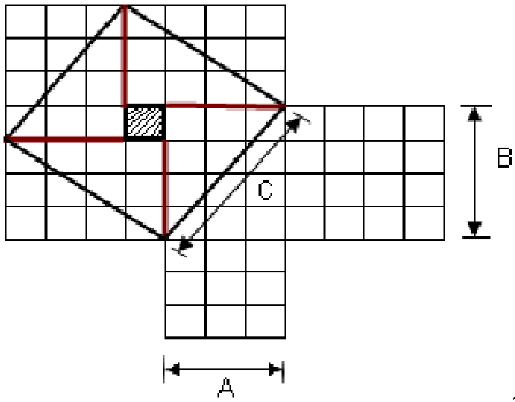


Figura 47: Agrupamentos de Quadrados[141]
Fonte: Site:www.pitagorica.blogspot.com.br

A utilização da identidade $x^2 + y^2 = z^2$, a números relacionados com profundidades de lagos, bambus quebrados, sombra de árvores, enfim, exercícios de triângulos e retângulos. Chou Pei apresenta igualmente a mais antiga demonstração chinesa da teoria de ângulos retos através do diagrama *hsuan-thu*, muito séculos antes do nome de Pitágoras ter sido atribuído ao famoso teorema.

Na figura 48 refere-se ao famoso problema do bambu quebrado, cuja aplicação na associação geométrica de quadrados, popularizada como *chi-chu* (a montagem vertical de quadrados) viria a ser crucial na engenharia chinesa.

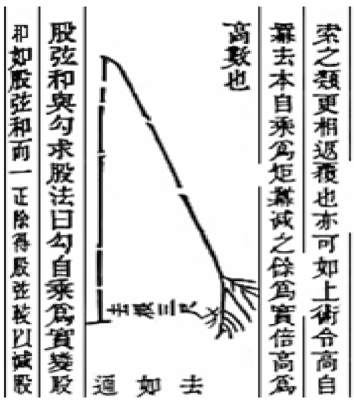


Figura 48: Problema do Bambu Quebrado[142]
Fonte: Site:www.gave.mim.edu.pt

[141] Fonte da figura disponível em: http://www.ccmn.ufrj.br/curso/trabalhos/pdf/matematica, acesso em 14 de julho de 2013.
[142] Fonte da figura disponível em: http://www.gave.mim.edu.pt /o-livro-de-chui-chang.html, acesso em 14 de julho de 2013.

Esse problema é um clássico problema chinês chamado de problema do bambu quebrado onde *chi* é uma unidade de comprimento de acordo com (Flood & Wilson, 2013, p.41), seu enunciado é *"Um bambu com 10 chi de altura se quebra e a ponta superior chega ao chão a 3 chi da base". Determine a altura da quebra?*

Solução: Na notação algébrica moderna, chamamos de x a altura onde o bambu se quebrou e de $10-x,$ o comprimento do resto do bambu. Pelo teorema de Pitágoras, $x^2+3^2=(10-x)^2,$ Ao resolver a equação, encontramos $x=4\frac{11}{20}\text{chi}.$

Outra publicação tão antiga quanto o Chou Pei, é o livro de matemática *"Chui Chang Suan Shu"* (Nove capítulos sobre a arte da matemática, em torno de 1200 a.C.). Entre vários assuntos abordados, o que chama a atenção são os problemas sobre mensuração de terras, agricultura, sociedades, engenharia, impostos, cálculos, soluções de equações e propriedades dos triângulos retângulos. Nesta mesma época os Gregos compunham tratados logicamente ordenados e expostos de forma sistemática. Os chineses seguiam a mesma linha babilônica, compilando coleções com problemas específicos. Assim como os Egípcios, os chineses alternavam, em seus experimentos, resultados precisos e imprecisos, primitivos e elaborados. Nesta publicação aparecem soluções de sistemas lineares com números positivos e negativos.

Desde os primeiros tempos, foi adotado um sistema de numeração centesimal de posição, em barras (precursor do ábaco), que se utilizava de arranjos com varetas de bambu e que representava o zero por um espaço em branco; nenhuma outra cultura, que se saiba, usou o sistema de barras para cálculo na dinastia que se seguiu, a dinastia Han(200 a.C.–220 d.C.), muitos dedicaram o seu tempo a transcrever, de memória, textos literários e científicos destruídos pelo imperador Shih Huang Ti[143] (260–210), que tinha mandado queimar os livros existentes, e mesmo que algumas cópias tenham sido salvas, a perda foi irreparável, centralizou o poder, construiu cidades, palácios e estradas, e, para deter as

[143] **Shih Huang Ti:** (Shi Huang Ti ou Qin) era o herdeiro do trono de Chin, um poderoso estado feudal, no noroeste da China. Em sua ascensão ele começou a unir China, anexando os outros estados feudais, com eficiência, ajudado por espionagem, suborno e guerra. Fundando a dinastia Chin, a China a partir do qual deriva seu nome e encerrou o período dos Reinos Combatentes, completando a conquista da China em 221 a.C.. Ao invés de manter o título de rei suportados pelos Shang e Zhou governantes, Qin governou como o primeiro imperador da dinastia Qin 220-210 a.C. O título vai continuar a ser usado pelos governantes chineses nos próximos dois milênios. Divalte (2002).

invasões das tribos mongólicas, iniciou a construção da "Grande Muralha", que só viria a ser terminada no século XV, durante a dinastia Ming.

China foi reunificada pelo imperador Shih Huang Ti, por volta de 221 a.C. É também desse período o texto *"Shu Shu Chi Yi"* onde se encontra uma primeira abordagem dos quadrados mágicos.

Dessa forma, Ronan (2001) nos informa:

> "Quadrados mágicos" são quadrados formados por compartimentos preenchidos com números cuja soma dá sempre o mesmo total, quer se tomem os números no sentido vertical, horizontal ou diagonal. O quadrado mágico poderia tornar-se elaborado até se imaginaram quadrados tridimensionais mas, em sua forma mais simples, parece ter origem pelo menos no ano 100 a.C., ou ainda mais cedo, embora esse assunto não se tenha desenvolvido senão 1.400 anos depois (RONAN, 2001, p.31).

A obra *"Suan shu shu"* (escritos sobre acerto de contas) é um antigo texto chinês sobre matemática com cerca de sete mil caracteres, escrito em 190 tiras de bambu, e uma coleção de noventa problemas envolvendo as quatros operações fundamentais recuperado. Essa obra foi descoberta em conjunto com outros escritos em 1984, quando arqueólogos abriram um túmulo em *Zhangjiashan* na província de Hubei. Foi encontrada na tumba uma prova documental que a coleção teria sido transcrito por volta de 186 a.C., no início da dinastia Han do Oeste.

Embora a sua relação com os nove capítulos ainda esteja em discussão pelos estudiosos, alguns dos seus conteúdos são claramente paralelos. O texto do *Suan Shu Shu* é, contudo muito menos sistemático do que os nove capítulos, e parece consistir de um número de mais ou menos independentes secções curtas de texto extraídas a partir de um número de fontes, atualmente é o trabalho matemático chinês mais antigo.

Figura 49: San Shu Shu escrito em tiras de bambu[144]
Fonte: Site:www.cam.ac.uk

---

[144] Fonte da figura disponível em: http://www.cam.ac.uk, acesso em 14 de julho de 2013.

Essa notação em barras não era simplesmente utilizada em placas de calcular (escrita). Barras de bambu, marfim ou de ferro eram carregadas em sacolas pelos administradores para que os cálculos fossem efetuados. Este método era mais simples e rápido do que o cálculo realizado com ábaco, soroban ou suanphan.

Durante toda sua história, a ciência chinesa sofreu com vários problemas, que impediram sua continuidade e aprimoramento, foi nesse período que o mais influente dos textos matemáticos chineses foi compilado, o *Jiu zhang suanshu* (Os nove capítulos da arte matemática), o livro contém 246 problemas distribuídos por 9 capítulos, onde destacamos trechos do nono capítulo, Um capítulo inteiro sobre o conhecidíssimo teorema de Pitágoras.

Flood & Wilson (2013), afirma:

> A maior parte da antiga matemática chinesa foi escrita em bambu ou papel, que perecem com o tempo. Uma peça extraordinária que nos restou, possivelmente datada de 200 a.C., é o *Jiu zhang suan shu* (Os nove capítulos da arte matemática). Essa obra notável contém 246 questões com as respostas, e pode ter sido usado como livro didático. (FLOOD & WILSON, 2013, p.41).

Com essa maneira de representar os cálculos chineses, seus métodos chegaram até nós, e provavelmente houve contato cultural entre Índia e China e entre a China e o ocidente. Muitos dizem que houve influência babilônica na matemática chinesa, apesar de que a China não utilizava frações sexagesimais. O sistema de numeração chinês era decimal, porém com notações diferentes das conhecidas na época.

Katz (2010) confirma,

> Para certas ideias, as linhas de transmissão são claras. Assim, a trigonometria moveu-se da Grécia para a Índia, para o Islã e voltou à Europa, com cada cultura modificando o conteúdo para satisfazer as suas exigências. Também o sistema posicional com os seus começos na China ou na Índia (ou talvez na fronteira entre ambas) moveu-se para Bagdá no século oitavo e depois, para a Europa (por via tanto da Itália como na Espanha) nos séculos XI e XII. (KATZ, 2010, p.448).

Nesse período, viveu o matemático Liu Hui (c. 260), que comentou os Nove Capítulos e escreveu *Haidao Suanjing,* o manual matemático da ilha do mar. Escrito inicialmente como apêndice ao capítulo 9º dos Nove Capítulos, esse livro contém 9 problemas, versando sobre o teorema de Pitágoras com soluções, continha também a determinação da altura do Pinheiro, da dimensão da distância da cidade a muralha da profundidade de uma vale, da altura de um edifício visto de cima de um monte, largura da foz de um rio, da profundidade de um lago, largura de um rio e do tamanho de uma cidade visto de um ponto mais alto.

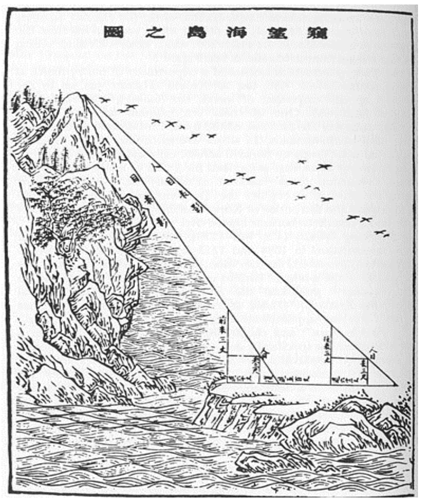


Figura 50: Uma das aplicações da trigonometria na China[145]
Fonte: Site:www.ccmn.ufrj.br

No Manual Matemático da Ilha do Mar, contém uma das aplicações da trigonometria utilizada pelos chineses, a topografia para determinar a distância a uma ilha e qual a sua altura.

Katz (2010) afirma,

> Com o objetivo de observar uma ilha marítima cravei duas varas da mesma altura, 5 metros, sendo de 1000 metros a distância entre e elas. Suponha que a vara mais próxima está alinhada com a mais afastada. Afasta-se 123 metros da vara da frente e observe o pico da ilha situando-se ao nível do solo. Afasta-se 127 metros para trás da vara mais afastada, e observe de novo, do solo, o pico da ilha; a extremidade da vara faz-se coincidir como o pico. Qual é a altura da ilha e quão longe fica da vara da frente?. A resposta de Liu Hui a esse problema é que a altura da ilha é 1255 metros enquanto que a sua distância da vara da frente é de 30.750 metros. Também apresenta a regra para a resolução do problema para determinar a altura h utilizavam a seguinte fórmula $h = a + \dfrac{a \cdot b}{c - d}$ e a distancia entre as varas s é dada por $s = \dfrac{b \cdot d}{c - d}$. (KATZ, 2010, p.241).

O método apresentado no manual matemático da Ilha do mar indica que uma trigonometria básica já existia na China, com vastas aplicações, portanto mostrando que existia uma antiga trigonometria na China.

Uma trigonometria primitiva foi encontrada no Oriente. Na China, no reinado de Chóu-pei Suan-king, aproximadamente 1110 a.C., os triângulos retângulos eram frequentemente usados para medir distâncias, comprimentos e

---

[145] Fonte da figura disponível em: http://www.ccmn.ufrj.br/curso/trabalhos/pdf/matematica, acesso em 14 de julho de 2013.

profundidades. Existem evidências tanto do conhecimento das relações trigonométricas quanto do conceito de ângulo e a forma de medi-lo, mas, infelizmente não ficaram registro de como eram feitas as medições e quais as unidades de medida usadas.

Na literatura chinesa, segundo COSTA (s/d), encontramos uma certa passagem que podemos traduzir por*: "O conhecimento vem da sombra, e a sombra vem do gnômon",* o que mostra que a trigonometria plana primitiva já era conhecida na China no segundo milênio a.C.

Em 589, a dinastia Suí(589 a 618), reunificou de novo o país, seguida pela dinastia Táng(618–907). Durante essa época, a China conheceu grande desenvolvimento artístico (poesia e pintura) e científico e entrou em contato com outras civilizações, como a japonesa, a coreana, a indiana e a árabe e o desenvolvimento das matemáticas floresceu.

Formas antigas de trigonometria aparecem na matemática chinesa no século VI, mas grandes avanços na trigonometria não vão aparecer até os séculos XII e XIII, para utilização nos cálculos astronômicos e do calendário e resolver problemas de arcos e cordas.

A tabela de senos construída pelo matemático indiano, Aryabhata, foi traduzida para o livro chinês do *Zhanjing Kaiyuan*[146]*,* compilado em 718, durante a dinastia Táng(618–907), essa tabela começou a ser distribuída em cópias desde o século X, mas recebeu uma atenção especial pelo estudioso Cheng Mingshan em 1616 e mais tarde foi incluído nas Siku quanshu coleções do século XVIII.

Embora os chineses tenham se destacado em outros campos da matemática, como a geometria sólida, teorema binomial, e complexas fórmulas algébricas, as primeiras formas de trigonometria não foram tão amplamente apreciadas como na matemática contemporânea indiana e islâmica.

Katz (2010) confirma,

---

[146] **Zhanjing Kaiyuan:** É um tratado chinês de astrologia enciclopédia compilada pelo editor principal Gautama Siddha que foi um astrônomo e astrólogo e com ajuda de vários estudiosos no período de (714-724). O título completo é considerado como o *Great Tang Treatise on Astrologia do Kaiyuan* na época. Ele também é referido como as observações Kaiyuan Star. O livro é dividido em 120 volumes e consistia de cerca de 600.000 palavras. A compilação dos escritos tinham-se baseado em muitos materiais previamente catalogados em astrologia e adivinhação, e, provavelmente, um clássico similar conhecido como o *Yisizhan,* compilado por Li Chunfeng aproximadamente em 645. Ele incorporou muitas obras fragmentos, incluindo os catálogos de estrelas de Shi Shen e Gan De, e continha uma versão traduzida do Navagraha. Katz (2010).

> Parece que apenas a trigonometria faltou à China, embora mesmo os indianos tivessem introduzido os elementos da disciplina nas suas visitas no século VIII. É provável que a trigonometria não fosse considerada simplesmente útil para os chineses nos seus próprios cálculos astronômicos e calendários. (KATZ, 2010, p.406).

A Yi-Xing(683–727), matemático e monge budista é creditado a criação da primeira da tabela da tangente, no início do século VIII, na china foi determinada pela fórmula $s(\alpha) = 8 \cdot tg(\alpha)$, provavelmente Yi-Xing teve como ajuda os conhecimentos contidos nas tabelas dos senos Indianos.

Durante as dinastias anteriores Suí e Táng(960–1368) foi introduzido na China conhecimento sobre trigonometria esférica, através da Índia, porém estes não foram interessantes para os matemáticos e astrônomos chineses deste período.

O estado embrionário de trigonometria na China começou lentamente a mudar e avançar durante a dinastia *Sung* (Song ou Sung de 960 a 1279) onde matemáticos chineses começaram a expressar maior ênfase para a necessidade de trigonometria esférica em ciência calendarical e cálculos astronômicos. Ainda que nos Nove Capítulos sobre a arte matemática se mencione uma breve relação sobre o arco o segmento e a corda, só no século XI é quando realmente se introduz uma fórmula que relaciona o arco, o segmento e a corda.

Katz (2010) confirma,

> De fato o cientista chinês polímata[147] matemático e oficial Shen Kuò, usou funções trigonométricas para resolver problemas matemáticos de cordas e arcos, "escreve que, na fórmula técnica de intersecção de círculos", *Shen* criou uma aproximação do arco de um círculo dado o diâmetro d, segmento v, e comprimento de corda c subentendendo o arco, cujo comprimento ele aproximou pela fórmula, $S = c + 2v^2/d$. (KATZ, 2007, p.308).

Esta fórmula foi dada por Shen Kuò[148] (1031–1095) e foi chamado de "Técnica de intersecção Círculos" que foi usado pelos astrônomos da época para calcular "a inclinação até o equador", isto é, a Longitude e "os graus acumulados ao longo do equador", que quer dizer, Latitude, de fato estes cálculos pertencem ao campo da trigonometria esférica.

---

[147] **Um Polímata** (é aquele que aprendeu muito) é uma pessoa cujo conhecimento não está restrito a uma única área. Em termos menos formais, um polímata pode referir-se simplesmente a alguém que detém um grande conhecimento. Muitos dos cientistas antigos foram polímatas de acordo com os padrões atuais. Katz (2010).

[148] **Shen Kuo** ou **Shen Kua:** Foi um geólogo, astrônomo, embaixador, general militar, matemático, cartógrafo, engenheiro hidráulico, botânico, zoólogo, farmacólogo, escritor, e burocrata do governo da Dinastia Song (960-1279), na China. Katz (2010).

No entanto, este conhecimento não seguiu desenvolvendo-se, pois com a "Técnica de Interpretar Círculos", os cálculos que se realizavam eram inexatos, já que consideravam o valor de $\pi = 3$.

Sal Restivo (1992, p.32) escreve também que o trabalho de *Shen* sobre os comprimentos de arcos de círculo forneceu a base para trigonometria esférica desenvolvida durante os séculos XII e XIII pelo matemático e astrônomo Guo Shoujing[149] (1231–1316).

Cajori (2007, p.123) nos informa que "no século XIV, a astronomia e o calendário foram estudados". Esses estudos envolveram rudimentos de geometria e trigonometria esférica. Neste campo foram feitas importações dos árabes. Muitos avanços da matemática chinesa foram transmitidos para Europa através da Índia e Arábia, tais avanços se concretizaram depois do declínio da matemática grega clássica.

De acordo com os historiadores L. Gauchet e Joseph Needham[150] (1900–1995)**,** Guo Shoujing usou o manuscrito sobre trigonometria esférica que em chinês chama-se "*Shou shi li"* (Obras e dias de calendário), nos seus cálculos para melhorar o sistema de calendário e a astronomia chinesa. Junto de uma ilustração do século XVII depois de provas matemáticas de Guo.

Needham (1986) afirma:

> Guo usou uma pirâmide quadrangular esférica, cujo quadrilátero de base consistia em um arco equatorial e outro elíptico, juntos com dois arcos meridianos, um dos quais passava pelo ponto do solstício de verão... Através desses métodos ele foi capaz de obter os *du lü* (graus de equador correspondentes aos graus da eclíptica), os *ji cha* (valores das cordas para dados arcos elípticos) e os *cha lü* (diferença entre cordas de arcos com diferença de 1 grau). (NEEDHAM, 1986, V. 3, p.109-110, tradução nossa).

Apesar das conquistas nos trabalhos de Shen e Guo na trigonometria outro trabalho substancial em trigonometria chinesa não seria publicado novamente

---

[149] **Guo Shoujing:** Foi um astrônomo, engenheiro e matemático chinês, nascido em Xingtai que viveu durante a dinastia Yuan (1271-1368). Quanto mais tarde Johann Adam Schall von Sino (1591-1666) ficou tão impressionado com os instrumentos astronômicos preservados de Guo, ele chamou de "O Tycho Brahe da China". Katz (2010).

[150] **Noel Joseph Terence Montgomery Needham**: Mais conhecido como Joseph Needham, foi um embriologista, historiador de ciências, bioquímico e sinologista inglês. Ficou famoso por seu trabalho sobre ciência, tecnologia e medicina tradicional chinesa, sua obra mais famosa é Ciência e Civilização na China (*Science and Civilisation in China)* dividida em 15 volumes, iniciada em 1954 é um estudo sobre a evolução da ciência chinesa, foi realizado por Joseph Needham e uma equipe internacional de colaboradores, publicada pela Cambridge University Press em sete volumes. A partir do volume 4, cada volume é dividido em volumes menores. O projeto teve continuidade sob a orientação do Conselho de Publicações do Instituto de Pesquisa Needham (*Needham Research Institute)*, presidido por Christopher Cullen. Divalte (2002).

até 1607, quando da publicação da obra Os Elementos de Euclides, um livro fundamental da geometria, e várias obras de astronomia (ex: sobre eclipses, sobre a tese de que a Terra é redonda, etc.), de trigonometria (consideradas as primeiras obras de trigonometria na China e em chinês), obras essas traduzidas para o chinês pelo jesuíta italiano Matteo Ricci[151](1552–1610) com a colaboração do astrônomo Hsu Kuang-Ching (1562–1634).

Nesse sentido Cajori (2007) nos informa:

> No século XVI, quando missões cristãs entraram na China, o jesuíta italiano Matteo Ricci (1552–1610) levou para lá a astronomia e a matemática europeia. Com a ajuda de um cientista chinês, chamado Hsu Kuang-Ching, publicou em 1607 uma tradução dos primeiros seis livros de Euclides. Logo depois surgiu uma continuação de Euclides e um tratado em agrimensura. (CAJORI, 2007, p.124).

Matteo Ricci supondo as limitações de seus conhecimentos sem trigonometria enviou várias cartas a missionários que tinham conhecimento desses temas, os quais não tardaram em chegar. Depois de várias propostas erradas o governo *Míng* decretou que o método ocidental deveria ser adotado e, portanto, mudar o calendário. Pouco depois o exército *Manchú* penetrou na China e a dinastia *Míng* deixou de existir. Ao segundo ano do começo da dinastia *Qíng* o governo decretou a adoção do novo calendário baseado no calendário ocidental, o qual foi chamado calendário *Shíxìan*.

Existem várias matemáticas incluídas em vários livros de calendário. A mais importante é de trigonometria plana e esférica e as tabelas que são requeridas para tais matemáticas. Dentre as quais destacamos: As longitudes de segmentos que eram usadas para definir o significado de funções trigonométricas.

Com por exemplo no Capitulo sete da Completa Teoria de Observação. Cada arco e cada ângulo têm oito tipos de linhas conforme o segmento descrito na figura (51), a saber: seno (*zhengxiàn*), tangente (*zheng* que *xiàn*), secante

---

[151] **Matteo Ricci**: Foi um sacerdote jesuíta, missionário, cientista, geógrafo e cartógrafo renascentista italiano. É conhecido pela sua actividade missionária na China da dinastia Ming, onde era conhecido por *Lì Mădòu*. Ele é considerado o fundador das modernas missões católicas na China, contribuindo assim de modo fulcral para a introdução do catolicismo na China. Recebeu a sua primeira formação na sua cidade natal de Macerata (Itália). Em 1568, partiu para Roma para estudar Direito na Universidade La Sapienza, dado que seu pai ambicionava para si a ascensão na administração pontifícia. Foi em Roma que começou a frequentar as reuniões da *Annunciata*, uma associação cristã de jovens ligada à Companhia de Jesus, que promovia a oração e os exercícios espirituais de Santo Inácio de Loyola. Este desenvolvimento espiritual leva a que a 15 de Agosto de 1571, contra a vontade do seu pai, solicitou ingresso na Companhia de Jesus. Ingressou depois no Colégio Romano, onde estudou Retórica, Filosofia e Teologia. Aí estudou também Matemática, Cosmologia, Geografia e Astronomia, sob a orientação do célebre padre Cristóvão Clávio. Katz (2010).

(*zhengqexiàn*), senoverso[152](*zhengshi*), cosseno (*yúxìan*), cotangente (*yúqiexìan*), cossecante (*yúgexìan*) e cossenoverso[153](*yúshi*).

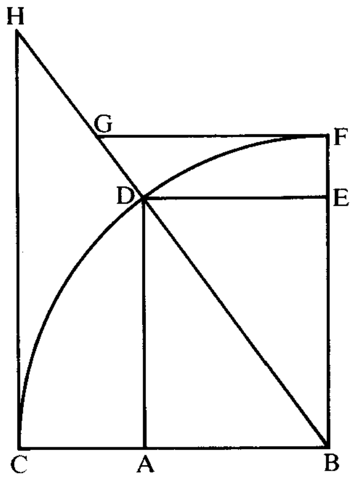


Figura 51: Completa teoria da observação descrição das funções trigonométricas[154]
Fonte: Site:www.gave.mim.edu.pt

Desta forma temos AD é o seno, CH a tangente, BH a secante, AC o senoverso, DE o cosseno, GF a cotangente, BG a cossecante e EF o cossenoverso.

Também na obra completa teoria de observação, contém varias fórmulas da trigonometria plana, que são apresentadas em notação moderna da seguinte forma:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x)\cdot\operatorname{cosec}(x)=1 \\ \cos(x)\cdot\sec(x)=1 \\ \operatorname{tg}(x)\cdot\operatorname{cotg}(x)=1 \\ \operatorname{tg}(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \\ \operatorname{cotg}(x)=\dfrac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \\ \operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\widehat{A} \\ b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos\widehat{B} \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\widehat{C} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(2x)=2\cdot\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(x) \\ \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)=\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{2}} \end{cases}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\widehat{A}-\widehat{B}}{2}\right)=\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\widehat{A}+\widehat{B}}{2}\right)$$

$$\frac{\operatorname{sen}(\widehat{A})}{a}=\frac{\operatorname{sen}(\widehat{B})}{b}=\frac{\operatorname{sen}(\widehat{C})}{c}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x)=\operatorname{sen}(60^0+x)+\operatorname{sen}(60^0-x) \\ \sec(x)=\operatorname{tg}(x)+\operatorname{tg}\left(\dfrac{90^0-x}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{sen}(x\pm y)=\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(y)\pm\cos(x)\cdot\operatorname{sen}(y) \\ \cos(x\pm y)=\cos(x)\cdot\cos(y)\pm\operatorname{sen}(x)\cdot\operatorname{sen}(y) \end{cases}$$

Na Europa nessa época não havia notação para funções trigonométricas, portanto as fórmulas eram escritas em palavras, na obra teoria de observação apresenta fórmulas equivalentes às da trigonometria atual.

---

[152] $(1-\cos x)$.

[153] $(1-\operatorname{sen} x)$.

[154] Fonte da figura disponível em: http://www.gave.mim.edu.pt/o-livro-de-chui-chang.html, acesso em 14 de março de 2014.

Na China chegou uma multiplicidade de fórmulas da trigonometria esférica, pelos trabalhos de Jen Mikollaj Smogulecki [155] (1610–1656) e Xue Fèngzuò[156](1600–1680) os quais implementaram métodos para calcular os lados e ângulos de triângulos usando logaritmos, assim eles introduziram os logaritmos nas funções trigonométricas e também métodos gerais para vários tipos de cálculo trigonométricos logarítmicos. Por exemplo, a regra do seno, $\frac{\operatorname{sen}(\hat{A})}{a} = \frac{\operatorname{sen}(\hat{B})}{b}$, fica transformada usando logaritmo, $\operatorname{Log} b = \operatorname{Log} a + \operatorname{Log} \operatorname{sen}(\hat{B}) - \operatorname{Log} \operatorname{sen}(\hat{A})$.

Na China os "logaritmos" eram chamados de "números correspondentes" *(Bi lìshù)* ou números poderosos *(jia shù).*

Depois de termos uma visão da história da matemática chinesa, os estudos do historiador George Rusby Kaye (1866–1929), foram capazes de estabelecer comparações entre a matemática chinesa e a indiana, mostrou então que a Índia esta em dívida com a China (CAJORI, 2007, p.151).

Em trigonometria os Chineses fizeram contribuições na construção de tabela de tangente, em várias obras civis trabalharam com a trigonometria plana para aplicação na Engenharia em geral, e em trigonometria esférica, para utilização de calendário e astronomia e com o advento da visita dos jesuítas na China outras obras clássicas dos gregos, árabes e hindus foram traduzidas para o chinês. Posteriormente, os próprios chineses fizeram aperfeiçoamento na trigonometria existente.

No próximo item apresentamos a trigonometria: De ciência auxiliar da astronomia e como se deu à transformação em ciência independente na Europa.

---

[155] **Jen Mikollaj Smogulecki**: Foi um nobre polonês, politico, missionário, estudioso e jesuíta, foi creditado com a introdução do estudo dos logaritmos a China, ele escreveu obras sobre manchas solares e eclipses e também foi professor do astrônomo Xue Fèngzuò, que seria o primeiro Chinês a publicar trabalhos usando logaritmos. Cajori (2007).

[156] **Xue Fèngzuò**: Foi o aluno mais importante do Smogulecki, em 1664 publicou também *Lixue Huitong* (Integração das ciências astronômicas), no qual ele reeditou e elaborou o conteúdo do trabalho anterior, somando também informações de outros campos. O trabalho é composto por 50 capítulos e está dividido em três partes: *Zheng Jí*, *Kǎoyàn* (experimentos) e *Zhiyong* (aplicação). A principal inovação consistia de tabelas logarítmicas *Bǐlì sì Xian xiin biǎo* (Novas tabelas de funções trigonométricas Quatro logarítmicas), *Bǐlì duìshù biǎo* (tábuas de logaritmos com explicações) e *Sānjiǎo suànfǎ* (Fundamentos da Trigonometria) Xue Fèngzuò com Smogulecki os traduziu para o chinês, e o texto original foi provavelmente, como Shi Yunli argumenta, *"Tabulae motuum coelestium perpetuae"* de Philip von Lansberge (1561–1632), que servia para prever as posições planetárias. Esta foi a primeira descrição e aplicação de logaritmos para cálculos astronômicos na China, e os conteúdos matemáticos desse trabalho já foram bastante estudado. O exame dos conteúdos astronômicos, no entanto, mostra que esses tratados também são os primeiros a fazer os chineses conhecer com a teoria heliocêntrica. Cajori (2007).

2.8 A TRIGONOMETRIA: DE CIÊNCIA AUXILIAR DA ASTRONOMIA À TRANSFORMAÇÃO EM CIÊNCIA INDEPENDENTE NA EUROPA

A observação do céu e da terra criou a necessidade de uma disciplina de medição e cálculo. Os povos egípcios, mesopotâmicos, desde os sumérios aos babilônios, alcançaram notável nível de conhecimentos em trigonometria plana e esférica, que lhes servia de base para medição terrestre, e observação do firmamento na qual fundamentavam sua filosofia astrolátrica.

Enquanto isso, os gregos desenvolviam a geometria, termo que procede etimologicamente da expressão grega "medida da terra". Essas duas culturas tiveram especial importância no mundo antigo como iniciadoras do saber matemático. Para isso contribuíram também outras importantes civilizações pré-cristãs, como as que se estabeleceram no Oriente Médio, na bacia do Nilo e, mais distante dos centros ocidentais, na China e na Índia.

Como fonte primordial da cultura ocidental, a sociedade grega representa o ponto de convergência do estudo histórico das ciências. O mérito principal da abordagem helenística do conhecimento firma-se, mais do que nas conquistas realmente alcançadas por suas escolas filosóficas mais ilustres, na originalidade de seu método de raciocínio e trabalho.

Algumas das descobertas na geometria, aritmética e na trigonometria que geralmente se atribuem a figuras transcendentes na história dessas ciências são, na realidade, versões revistas de trabalhos anteriores da tradição matemática do Oriente Médio.

Katz (2010) confirma,

> Na aplicação da matemática ao estudo da astronomia, os gregos criaram a trigonometria plana e esférica e também desenvolveram um modelo matemático do universo, um modelo que modificaram muitas vezes durante os cinco séculos entre os tempos de Platão e Ptolomeu. (KATZ, 2007, p.170).

Dessa feita, a matemática grega desempenhou papel importante também na transmissão, recopilação e fusão do saber herdado de culturas passadas e de povos vizinhos. Sobre esse alicerce, a força e o brilho da filosofia helenística se manifestaram na formulação de importantes definições, postulados lógicos e raciocínios dedutivos que muitas vezes eram expressos com auxílio da geometria. Esses trabalhos foram reunidos em tratados que conseguiram sobreviver à passagem dos séculos e constituem a base da matemática na idade contemporânea.

Os príncipes árabes e os mongóis estimularam o estudo das matemáticas e mandaram traduzir as obras gregas de Bizâncio, mas prenderam-se, sobretudo à ciência da Índia. Os árabes adotaram o sistema de numeração escrita dos hindus; denominaram a Geometria-handasa (arte hindu), utilizou também, a trigonometria o seno (em lugar da corda) e a tangente.

Wussing (1998) confirma:

> A trigonometria hindu deve seu desenvolvimento pelas necessidades da astronomia, no entanto os resultados obtidos pela astronomia hindu não superou em nenhum momento a da antiguidade helenística. (WUSSING, 1998, p.78, tradução nossa).

Lembremos que o islamismo absorveu muito da cultura grega. Aos poucos, os textos científicos gregos foram sendo trabalhados pelos intelectuais islâmicos. As obras de Euclides e de outros matemáticos gregos foram traduzidas. E particularmente importante, foi a tradução da obra de Ptolomeu sobre o sistema planetário, denominada Almagesto (A Maior) pelos árabes, e os tratados de geografia.

Os árabes não se limitaram a assimilar os conhecimentos existentes avançaram, legando-nos a sua contribuição. A partir da Tábua de Cordas de Hiparco, criaram a Tábua dos Senos e das Tangentes, que foi o início definitivo da Trigonometria.

Wussing (1998) confirma:

> Os matemáticos dos países islâmicos introduziram as relações trigonométricas tangentes e cotangentes e investigaram suas propriedades, assim como as relações seno e cosseno, se ocuparam de todos os tipos de triângulos planos e esféricos e ampliaram passo a passo a trigonometria até que se tornou um ramo científico independente e fechado. (WUSSING, 1998, p.86, tradução nossa).

A importância da contribuição islâmica para a geometria foi obscurecida pela relevância de suas descobertas sobre as técnicas de cálculo. O confuso sistema de numeração clássico europeu tinha dificultado o desenvolvimento da aritmética, o problema foi solucionado com a adoção do sistema árabe, de influência indiana, que empregava pela primeira vez o dígito zero e atribuía valores relativos aos algarismos, dependendo de sua posição num determinado número.

Os primórdios da Idade Média assinalaram na Europa Ocidental a paralisação das Matemáticas teóricas e, até mesmo, sua decadência. Durante a Idade Média e na Renascença, difundiu-se no ocidente a ciência dos gregos, dos árabes e dos hindus. Na antiga civilização hindu foram cultivados métodos matemáticos e sua astronomia também se desenvolveu bastante, embora pouco se conheça a respeito.

O Conhecimento aperfeiçoado pelos árabes da Antiguidade foi transferido para Europa com a tradução de muitos textos árabes para o latim a partir do século XI. A trigonometria no período medieval não foi usada para resolver triângulo plano e sim para resolver triângulos esféricos, pelas necessidades da astronomia.

Poucas inovações importantes podem ser atribuídas ao pensamento matemático romano e cristão da alta Idade Média, razão pela qual ficou para a civilização islâmica o trabalho de reunir e reelaborar as grandes conquistas gregas nessa ciência.

Rooney (2012) afirma,

> Embora os estudiosos europeus da Idade Média tenham traduzido trabalhos árabes e gregos sobre trigonometria e geometria, eles não acrescentaram nada próprio a esses trabalhos. (ROONEY, 2012, p.94).

Os povos árabes, em seu processo de rápida expansão, tiveram a oportunidade de adotar a sabedoria indiana e a filosofia mediterrânea, a partir das quais uma brilhante geração fixada na Pérsia extraiu uma síntese que teve importância vital para a evolução da matemática.

Na Europa, as universidades do final da Idade Média incorporaram os sistemas árabes de numeração. A eles somaram-se os textos gregos, frequentemente traduzidos para o árabe, graças ao contato direto que as duas culturas mantinham através das fronteiras espanhola e bizantina.

Flood & Wilson (2013), afirma:

> O renascimento do estudo da matemática durante a Idade Média se deveu principalmente a três fatores:
> - A tradução de textos clássicos árabes para o latim durante os séculos XII e XIIII.
> - A fundação das primeiras universidades europeias.
> - A invenção da imprensa. (FLOOD & WILSON, 2013, p.50).

Um aspecto da consolidação da trigonometria como disciplina independente da astronomia, é evidenciado com o surgimento de tratados específicos de trigonometria, dentre eles o que culminou com a separação foi o tratado sobre quadrilátero completo, escrito em 1260, de autoria do matemático e astrônomo árabe Nasir Eddin al-Tusi. Essa obra exercerá uma decisiva influência no trabalho de Regiomontanus.

Wussing (1998) confirma:

> Este desenvolvimento alcança o ponto culminante com o tratado sobre quadrilátero completo em 1260 de Nasir Eddin al-Tusi (1201-1274), que reuniu neste trabalho todos os aspectos anteriormente, apresentando uma construção completa e sistemática da trigonometria desde os conceitos e relações básicas e ainda procedimentos para resolução de todos os problemas típicos de seu tempo. Dele procedem também novos e importantes, resultados, como por exemplo, a determinação dos triângulos de ângulos oblíquos a partir dos três lados e dos ângulos. Sua obra exerceu uma decisiva influência na obra de Regiomontanus, constitui-o os trabalhos deste ultimo o ponto de partida para o desenvolvimento da trigonometria na Europa. (WUSSING, 1998, p.87, tradução nossa).

Essa informação é bastante discutida e cheia de dúvidas pelos historiadores da matemática tanto que: Pereira (2010), afirma em sua tese que autores como Zeller (1944) e Zinner (1990) discordam na questão de Regiomontanus ter tido ou não acesso à obra de al-Tusi. Deste modo, a autora comenta: “nada podemos inferir sobre a influência da obra de al-Tusi no desenvolvimento da Trigonometria na Europa”, apesar que alguns autores afirmem o contrário.

No final do século XII, muitas obras dos matemáticos gregos e de alguns islâmicos estavam ao dispor dos estudiosos na Europa que sabiam latim. Durante os séculos seguintes essas obras foram assimiladas e os próprios europeus começaram a criar uma nova matemática. Deve, no entanto notar-se que alguns dos estudiosos hispano-judaicos tinham já anteriormente lidos as obras em árabe, no original, e tinham produzido trabalhos pessoais em hebraico.

(KATZ, 2010, p.361) afirma, durante o século XII, de fato, o intercâmbio cultural entre as três maiores civilizações da Europa e da bacia do Mediterrâneo, judaica, a cristã e a islâmica foi muito intensa. Porém ao acontecer o declínio da cultura islâmica, e ascensão das culturas judaica cristã, temos contribuições de matemáticos judeus desse período à trigonometria, a saber:

Abraham Bar Hiyya[157](1092–1167), também era conhecido pelo seu nome em hebraico, que no seu tempo era Ha-Nasi e significava o líder, mas ele também é

---

[157] **Abraham Bar Hiyya:** Foi um matemático e astrônomo judeu que viveu na Espanha. Foi educado em um dos principados árabes do califado de Córdoba, mas foi em Barcelona que Abraham escreveu as suas obras originais em hebraico. Katz (2010).

conhecido pelo nome latino Savasorda que vem de sua descrição de trabalho, mostrando que ele tinha uma posição oficial no governo, em Barcelona.

Conhecem-se duas obras suas com conteúdos matemáticos: a primeira enciclopédia escrita em hebraico, sobre matemática, astronomia, óptica e música, chamada de *"Yesodey ha-Tevuna u-Migdal ha-Emuna"*, (Fundação de Entendimento e a Torre de Fé) e uma obra de geometria prática, chamada de *"Hibbur ha-Meshiha we-ha-Tishboret"*, de 1116. Esta obra foi traduzida para latim, em 1145, por Platão de Tivoli, com o nome "*Liber embadorum".*

Katz (2010, p.363) diz, o texto de Abraham, em hebraico, foi uma das mais antigas obras de geometria prática a aparecer na Europa medieval.

Essa obra teve como objetivo ajudar os judeus espanhóis e franceses no cálculo da medição dos campos, nele encontram-se algumas definições, axiomas e teoremas de Euclides. É interessante ver as áreas da matemática e os matemáticos com que Abraham estava familiarizado. É claro que ele sabia geometria através das obras de Euclides, mas ele também sabia que as contribuições para a geometria de outros textos gregos como Theodosius *Sphaerica* em três livros, Sobre *a Esfera Movendo* que é um trabalho sobre a geometria da esfera de Autólico de Pitane[158] (360 a.C.–290 a.C.), ainda as *Cônicas* de Apolônio*,* e as contribuições posteriores do trabalho de Heron de Alexandria[159](10–70) e Menelau de Alexandria. Abraham também havia estudado algumas das importantes obras sobre álgebra dos matemáticos árabes, em particular, al-Khwarizmi e al-Karaji[160](c. 953–c. 1029).

---

[158] **Autólico de Pitane:** Foi um astrônomo, matemático e geógrafo grego. Uma cratera lunar recebeu o seu nome em sua homenagem. Autólico nasceu em Pitane, uma cidade da Eólia, na Anatólia Ocidental. De sua vida pessoal nada é conhecido, a não ser que foi contemporâneo de Aristóteles e suas obras parecem ter sido concluídas em Atenas entre os anos 335 a.C. e 300 a.C. Euclides faz referência a alguns trabalhos de Autólico, as obras sobreviventes de Autólico incluem um livro sobre esferas, intitulado *Sobre a esfera móvel* (ou *A esfera em movimento*) e outra *Dos nascentes e dos Poentes* de corpos celestes. As obras de Autólico foram traduzidas no século XVI por Francesco Maurolico (1494–1575) foi um matemático e astrônomo italiano de origem grega que realizou contribuições nos campos da geometria, óptica, cônica, mecânica, música e astronomia. Tucker (2005).

[159] **Heron de Alexandria:** Foi um geômetra e engenheiro grego, esteve ativo em torno do ano 62, é especialmente conhecido pela fórmula que leva seu nome e se aplica ao cálculo da área do triângulo. Seu trabalho mais importante no campo da geometria, foi *Métrica*, que versa sobre a medição de figuras simples de planos sólidos, com prova das fórmulas envolvidas no processo. Tratava da divisão das figuras planas e sólidas e contém a fórmula de Herão (embora esta talvez tenha sido descoberta por Arquimedes) para o cálculo da área de um triângulo e um método (já antecipado pelos babilônios) de aproximação a uma raiz quadrada de números não quadrados, que permaneceu desaparecido até 1896. Tucker (2005).

[160] **Ibn al Husayn al-Karaji** (ou **al-Karkhi)**: Foi um matemático do século 10 e engenheiro que trabalhou em Bagdá. Suas três principais obras que chegou até nos, em matemática: *Al-Badi 'fi'l-hisab* (Wonderful em cálculo), *Al-Fakhri fi'l-jabr wa'l-muqabala* (Glorioso em álgebra) e *Al-Kafi fi'l-hisab* (suficiente sobre cálculo). Tucker (2005).

Abraham também escreveu uma série de textos sobre astronomia; em particular, ele escreveu sobre a forma da Terra e para o cálculo dos caminhos das estrelas na esfera celeste. Seus *quatros livro do Príncipe* refere-se às tabelas de al-Battani, enquanto o tratado de Abraham *Sefer ha-Ibbur* (Livro de intercalação), escrito entre 1122/23, é o primeiro trabalho hebraico dedicado exclusivamente ao estudo do calendário.

Talvez uma das características mais importantes do trabalho de Abraham bar do Hiyya é o fato de que parece ter estimulado o interesse em matemática árabe e, em conjunto com Abraham ibn Ezra, marca o início do estudo acadêmico hebreu em matemática.

Abraham ben Meir ibn Ezra[161](1092/93–1167) que em hebraico também conhecido por Abenezra, foi um importante escritor judeu da idade média. Nasceu em Tudela, no artigo reino Navarra (hoje, Espanha). Os seus comentários sobre o Antigo Testamento são notáveis por uma grande ousadia de opiniões. Abraham ibn Ezra, foi homenageado dando seu nome a uma cratera lunar.

Foi um dos primeiros a traduzir obras do árabe para o hebreu. Sua obra abrigava vários livros sobre matemática, introduzindo o sistema decimal para o povo judeu (e, por via de consequência, para os cristãos), e astrologia.

Escreveu diversos livros relativos à navegação náutica, astronomia e matemática como:

a) *"Tratado do Astrolábio"* (Náutico) antigo instrumento para medir a altura de determinados astros, permitia determinar a latitude em que estavam as naus pela altura de outras estrelas acima do horizonte, conforme o prisma utilizado de acordo com o meridiano. Também foi chamado de Régua dos Planetas, foi bastante aperfeiçoado pelos judeus na idade áurea da Espanha.

b) *"Keli Nechoshe"* - Instrumentos de Cobre e a obra filosófica e

c) *"Yessod Morá"* - Fundamento do Temor/Respeito - Foi contemporâneo do Rabenu Yaacov Tam (neto de Rashi), com quem trocou muitas cartas.

---

[161] **Abraham ben Meir ibn Ezra:** Foi um sábio e rabino espanhol, cultivou todas as ciências, e mais particularmente a astronomia. Viveu em vários lugares, em sua terra natal Tudela, ele já tinha ganhado a reputação de um distinto poeta e pensador, mas para além de seus poemas, suas obras, que foram todos na língua hebraica, foram escritas no segundo período de sua vida. Com estas obras, que abrangem em primeira instância o campo da filologia hebraica e exegese bíblica, ele cumpriu a grande missão de tornar acessíveis aos judeus da Europa Cristã os tesouros dos conhecimentos consagrados nas obras escritas em árabe que tinha trazido com ele da Espanha. Katz (2010).

Outro judeu a fazer contribuições a trigonometria foi o Rabino Levi ben Gerson[162](1288–1344), viveu em Barcelona, parte de seus escritos consistem em comentários sobre trabalhos de Aristóteles e Ptolomeu, alguns deles são as primeiras edições latinas dessas obras. Seu tratado mais importante, na história da filosofia, é intitulado *"Sefer Ha-Shem"* (As Guerras do Senhor), ocupou 12 anos na sua composição. Uma parte dele, contendo um levantamento elaborado de astronomia como conhecido dos árabes, e foi traduzido para o latim, em 1342, a pedido do Papa Clemente VI, também no ano de 1342, escreveu *"Em Sines, acordes e Arcs",* que examinou a trigonometria, em particular comprovando a lei do seno para triângulos planos e dando cinco dígitos para tabelas de seno.

Katz (2010) informa,

> A trigonometria de Levi baseia-se, principalmente, em Ptolomeu, embora, novamente, como Richard, Levi use geralmente senos em vez de cordas. A diferença principal de Levi relativamente a Ptolomeu e, também, a Richard, é a de indicar procedimentos pormenorizados para resolução de triângulos planos. (KATZ, 2010, p.371).

Levi também mostrou que o modelo de Ptolomeu para órbita linear, embora reproduzisse corretamente a evolução da posição da Lua, falha completamente em prever tamanho aparente da Lua em seu movimento. Infelizmente, não há nenhuma evidência de que os resultados tiveram um impacto sobre as gerações posteriores de astrônomos, embora escritos Levi tenham sido traduzidos e estivessem disponíveis, para seus contemporâneos, os métodos apresentados por Levi são sempre para resolver triângulos astronômicos, ou seja, triângulos de posição, nunca para resolver triângulos planos.

Richard de Wallingford[163] (1291–1336) foi um monge que passou os últimos noves anos da sua vida como abade escreveu o *Quadripartium*, obra em quatro partes sobre fundamentos da trigonometria, que foi escrita por volta de 1320,

---

[162] **Levi ben Gerson:** Foi um filósofo judeu, matemático e astrônomo/astrólogo, escreveu *"Maaseh Hoshev"* em 1321, que continha operações aritméticas incluindo extração de quadrados e cubos de raízes, várias identidades algébricas, determinadas quantias, incluindo somas de números inteiros consecutivos, quadrados e cubos, coeficientes binomiais e identidades combinatórias simples. A obra é notável por seu uso precoce de prova por indução matemática, e um trabalho pioneiro na análise combinatória, o título desse livro significa literalmente uma obra de Cálculo, mas também é um trocadilho com uma frase bíblica que significa "trabalho inteligente". Katz (2010).

[163] **Richard de Wallingford:** Foi um matemático e astrônomo inglês, estava na Universidade de Oxford como estudante entre os anos 1308-1314 e ensinou lá no período de 1317-1326 antes de se tornar o abade de St. Albans. Existia uma série de estudiosos, que incluíram Richard em sua referencias, pois estavam profundamente conscientes das limitações impostas pelos métodos matemáticos tradicionais para lidar com praticamente qualquer problema de Física. Foi Richard quem introduziu trigonometria na Inglaterra, em sua forma moderna e em uma série de manuscritos que ele produziu. Katz (2010).

reescreveu esse tratado num outro chamando de *De sectore*. O objetivo dos dois trabalhos, como os de trigonometria dessa época era desenvolver métodos para resolução de problemas de trigonometria esférica, visando melhorar os cálculos astronômicos.

Katz (2010) informa,

> Parece que a fonte principal do *Quadripartium*, foi o *Almagesto* de Ptolomeu, modificado para incorporar os senos hindus, além das cordas, mais antigas. Mas ao tempo em que Richard reviu a obra, tinha-se familiarizado com a trigonometria esférica de al-Jabir. (KATZ, 2010, p.370).

No período medieval a trigonometria estava ainda estritamente relacionada com a astronomia, desta forma as necessidades dessa ciência, tinha aporte da trigonometria esférica, para soluções dos problemas apresentados.

O desenvolvimento da Trigonometria na Europa foi apoiado nos cálculos da Antiguidade e nos conhecimentos procedentes do âmbito cultural islâmico. A atenção se centrou em primeiro lugar no melhoramento e aperfeiçoamento das tabelas astronômicas e trigonométricas e também com a utilização das técnicas de resolução de triângulos planos e esféricos.

As Tabelas Afonsinas foi uma das mais importantes tabelas astronômicas elaboradas por iniciativa de Afonso X, o Sábio, no século XIII, contêm as posições exatas dos corpos celestes em Toledo desde 1 de janeiro de 1252, ano da coroação do rei Afonso, e consignam o movimento dos respectivos corpos celestes sobre a eclíptica, calculadas entre 1260 e 1266 por ordem do Rei Afonso X[164](1221–1284), de Castilla, que haviam desempenhado um papel muito destacado, porém não lograram alcançar suficiente exatidão por não serem suficientemente completas. Também colaborou no *“El Libro del Saber de Astronomia”,* obra baseada no sistema ptolomaico. Esta obra teve a participação e contribuição de vários cientistas que o rei congregara, e aos quais proporcionava meios de estudo e investigação, tendo mesmo mandado instalar um observatório astronômico em Toledo.

[164] **Rei Afonso X:** (em espanhol: Alfonso X), o Sábio ou o Astrólogo foi rei de Castela e Leão de 1252 até a sua morte em 1284. Criou famosa escola de tradutores de Toledo juntou um grupo de estudiosos cristãos, judeus e muçulmanos. Foi principalmente nesta escola que se realizou o importantíssimo trabalho de traduzir para as línguas ocidentais os textos da antiguidade clássica, entretanto desenvolvidos pelos cientistas islâmicos. Estas obras foram as principais responsáveis pelo renascimento científico de toda a Europa medieval, que forneceria inclusivamente os conhecimentos necessários para o subsequente período dos descobrimentos. A verdadeira revolução cultural que impulsionou foi qualificada do renascimento do século XIII. Divalte (2002).

Como tributo à sua influência para o conhecimento da astronomia, o seu nome foi atribuído à cratera lunar Alfonsus.

No *El Libro del Saber de Astronomia,* continha as Tabelas Afonsinas, que foram influenciadas em alto grau por trabalhos dos muçulmanos, senão baseadas inteiramente nelas. As observações originais das Tabelas Afonsinas foram feitas pelo astrônomo árabe cordovês, Azarquel, (nascido em córdoba/Espanha) no século XI, posteriormente foi realizada revisões baseadas nas observações levadas a cabo em Toledo pelos cientistas judeus, Yehuda ben Moshe[165] e Isaac ben Sid[166] entre 1262 e 1272.

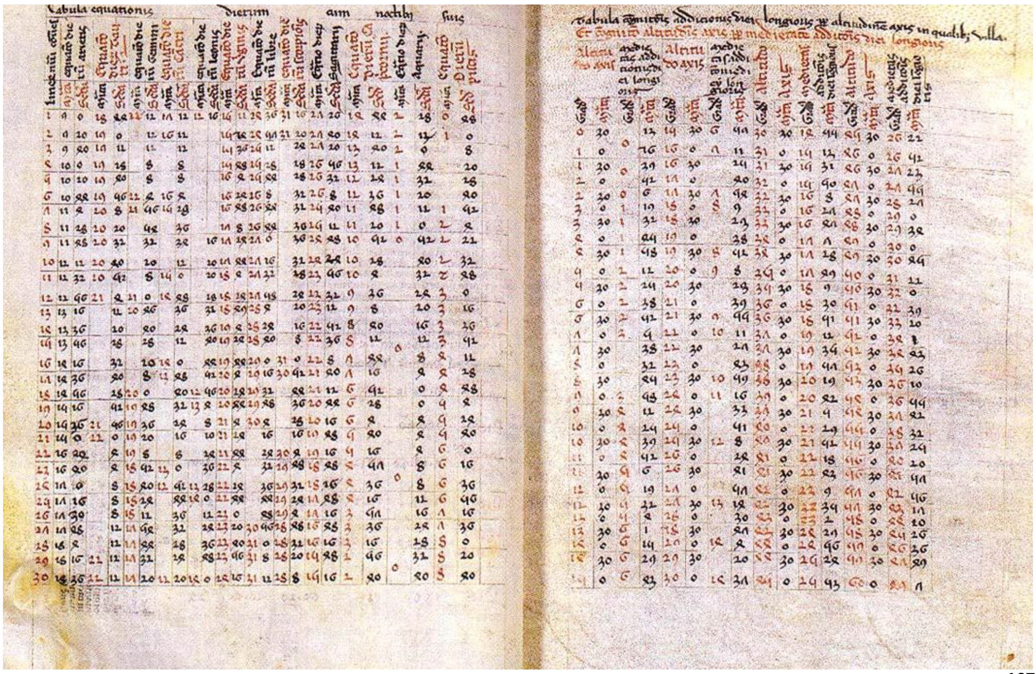


Figura 52: Tabelas afonsinas, contida no livro *"El Libro del Saber de Astronomia"*[167]
Fonte: Site:www.pt.wikipedia.org

A influência das *tabelas afonsinas* abrangeu toda Europa através de uma revisão francesa do começo do século XIV, cuja utilização chegou mesmo até o Renascimento.

A queda de Constantinopla frente aos Turcos, fez com que houvesse grande fluxo de refugiados para a Itália, principalmente. Por este motivo, vários

[165] **Yehuda ben Moshe:** Viveu no século XIII, foi médico de verdade, astrônomo e um dos principais escritor da Escola de Tradutores de Toledo, no tempo de Alfonso X, o Sábio, para traduziu obras importantes cientista árabe e hebraico para o castelhano. Foi rabino da sinagoga de Toledo, passou a ser o médico pessoal do rei sábio, e se destacou como uma das personalidades mais influentes da comunidade judaica da cidade das três culturas do seu tempo. Katz (2010).
[166] **Isaac ben Sid:** Foi um astrônomo espanhol-judeu, trabalhou na Escola de Tradutores de Toledo, na segunda metade do século XIII, tomou parte importante na compilação das Tabelas Afonsinas. Katz (2010).
[167] Fonte da figura disponível em: http://www.pt.wikipedia.org, acesso em 05 de junho de 2014.

escritos da civilização grega retornam ao ocidente. Assim, a Europa volta a ter contato com os originais gregos, agora acrescidos das influências orientais.

Nesse ritmo de permanente transmissão das ideias matemáticas do mundo, a sociedade europeia da primeira fase do Renascimento possuía uma riqueza intelectual resgatada da tradição greco-romana e um poderoso sistema de cálculo, enriquecida pelas contribuições islâmicas, que faltou aos sábios da Antiguidade. Essa sedimentação secular do saber haveria de se cristalizar nos séculos seguintes numa revolução dos princípios da ciência, cuja reelaboração se praticou com o espírito de abstração, simbolização e raciocínio que caracterizava o pensamento matemático da época.

Na aritmética tivemos a invenção dos logaritmos que, não só veio em socorro da grandeza dos cálculos astronômicos, como ainda facilitou os cálculos dos navegantes que se lançavam ao Atlântico.

A navegação no oceano Atlântico, de longo alcance, única alternativa possível, exigia técnicas mais avançadas que a navegação no mediterrâneo. A navegação neste oceano era extremamente adversa e desafiava a perícia dos navegadores.

Para que essa navegação fosse plena de êxito era necessário aprimorar as técnicas de construção de navios, confecção de instrumentos para navegação, melhoria e criação de novas cartas náuticas e geográficas e o aprimoramento da matemática.

Foram instrumentos valiosos nessa etapa:

- Invenção da bússola, que aliada ao astrolábio, auxiliou a leitura de latitudes e longitudes;
- Descoberta da imprensa de tipos móveis, que auxiliou a difusão e a confecção de cartas de navegação;
- Descoberta da pólvora e;
- Aprimoramento dos cálculos matemáticos.

Flood & Wilson (2013, p.51) afirma: Tudo isso contribui para a evolução da noção de que o universo é um livro escrito na linguagem da matemática. Conforme os instrumentos ficavam cada vez mais sofisticados, crescia a matemática com objetivos práticos, principalmente na navegação, na cartografia, na astronomia e na guerra.

Flood & Wilson (2013), confirma:

> O espírito investigativo e a inventividade da Idade Média e do Renascimento levaram a uma atitude mais critica perante as ideias aceitas durante séculos. Isso se revelou de muitas maneiras:
> - As viagens para descobrir terras desconhecidas.
> - O desenvolvimento e a invenção de instrumentos científicos e matemáticos com vários propósitos.
> - O uso da perspectiva geométrica na pintura e em outras artes visuais.
> - A solução de equações cúbicas e quárticas.
> - O desenvolvimento e a padronização da terminologia e da notação matemática.
> - A abordagem revolucionária do movimento planetário.
> - A redescoberta e a reinterpretação dos textos clássicos.
> - O desenvolvimento da mecânica.
> - A remoção da dependência entre a álgebra e a geometria. (FLOOD & WILSON, 2013, p.51).

Mesmo com todas as descobertas realizadas, ainda havia um grande empecilho para a expansão marítima: os altos custos financeiros. Este problema foi solucionado pela burguesia que começou a financiar as grandes expedições em troca de futuros benefícios. As cortes reais também passaram a financiar essas expedições, em troca de ouro, prata e especiarias.

É evidente que esta expansão marítima necessitava de altos conhecimentos matemáticos e científicos de uma Europa que começava a sair do isolamento marcado pela Idade Média. Esse processo de expansão marítima e comercial foi um dos fatores que fizeram com que a matemática, bem como as demais ciências, tivesse a maior expansão em todos os tempos da história. Tal expansão fez com que o continente europeu chegasse à revolução industrial como potência mundial. Vale observar que, os conhecimentos matemáticos na península ibérica eram muito diferentes, no conteúdo e nos objetivos. O estilo da matemática ibérica era outro.

Há que acrescentar que, já no final do século XIII, Portugal, ao decidir se tornar independente dos reinos da Espanha, viu-se forçado a procurar opções comerciais pelo Atlântico. Assim definiu-se a vocação portuguesa pela navegação. Na era das grandes navegações, no final do século XV e início do século XVI, a matemática incluía um interesse em geometria, desenvolvido com vistas aos estudos astronômicos e às navegações. Particularmente, o estudo da geometria da esfera, por Johannes ou John de Holywood ou Sacrobosco [168] (1195–1256), foram importantíssimos no movimento das grandes navegações.

[168] **Johannes de Sacrobosco:** Também é conhecido também pelo nome de John of Holywood, foi um matemático e astrônomo, professor da Universidade de Paris e autor da obra medieval *“Tractatus de sphaera”* (Tratado da esfera) viveu na Escócia. Katz (2010).

Figura 53: Mapa das Grandes Navegações[169]
Fonte: Site:www.geocities.ws

Nos séculos XV e XVI em Portugal desenvolveu estudos sobre navegação que culminaram com as viagens de Cristóvão Colombo[170](1451–1506), no hemisfério norte, em 1492, de Vasco da Gama[171](1460/69–1524), que chegou à Índia em 1498, pelo hemisfério Sul, e de Fernão de Magalhães[172](1480–1521), que encontrou a passagem marítima para o Pacífico em 1520.

O planeta então se globalizou. Observações do céu no hemisfério sul, a descoberta de outros povos e de outras civilizações, e as novas possibilidades

[169] Fonte da figura disponível em: http://www.geocities.ws, acesso em 15 de outubro de 2013.
[170] **Cristóvão Colombo:** Foi um explorador italiano, navegador, e colonizador, nascido na República de Génova (Itália). Sob os auspícios dos Reis Católicos de Espanha, ele completou quatro viagens através do Oceano Atlântico, que levaram a consciência europeia geral dos continentes americanos. Essas viagens, e os seus esforços para estabelecer assentamentos permanentes na ilha de Hispaniola, iniciaram a colonização espanhola do Novo Mundo. Divalte (2002).
[171] **Vasco da Gama:** Foi um navegador e explorador português. Na Era dos Descobrimentos, destacou-se por ter sido o comandante dos primeiros navios a navegar da Europa para a Índia, na mais longa viagem oceânica até então realizada, superior a uma volta completa ao mundo pelo Equador. No fim da vida foi, por um breve período, Vice-Rei da Índia. Divalte (2002).
[172] **Fernão de Magalhães:** Foi um navegador português, que se notabilizou por ter organizado a primeira viagem de circum-navegação ao globo de 1519 até 1522. Nascido em família nobre, Magalhães era inquieto por natureza: queria ver o mundo e explorá-lo. Em 1506 viajou para as Índias Ocidentais, participando de várias expedições militares nas Molucas, também conhecidas como as Ilhas das Especiarias. A serviço do rei de Espanha, planejou e comandou a expedição marítima que efetuou a primeira viagem de circum-navegação ao globo. Foi o primeiro a alcançar a Terra do Fogo no extremo sul do continente americano, a atravessar o estreito que hoje leva seu nome e a cruzar o Oceano Pacífico. Divalte (2002).

econômicas oferecidas às nações da Europa tiveram consequências profundas no conhecimento.

O tesouro do conhecimento científico e matemático, adquirido pelos práticos, foi assimilado teoricamente pelos representantes da ciência oficial, esse elo entre a teoria e a prática foi uma fusão gradual que traria consequências revolucionárias aos conhecimentos até o século XVII.

Durante os séculos XIV-XV, se desenvolveu em Viena uma importante escola astronômica-matemática, nela ensinaram o professor John von Gmunden[173] (1380–1442), e seu seguidor Georg von Peurbach[174](1423–1461) e um dos seus alunos e amigo Johann Müller, o Regiomontanus.

Ronan (1987), afirma que um ramo da geometria cujos estudos foram iniciados pelos gregos e ampliados pelos matemáticos do mundo muçulmano foi o método de cálculos que empregava as relações entre os lados dos triângulos e os ângulos compreendidos entre eles, que é a técnica hoje chamada de trigonometria. Sua evolução durante o século XV deveu-se principalmente a Georg von Peuerbach e Johann Muller (Regiomontanus), que fundamentaram a trigonometria moderna.

Posteriormente Peurbach sugeriu a Regiomontanus, ordenar todos os teoremas sobre trigonometria dispersos nos escritos clássicos, islâmicos e europeus, os resultados e as tabelas auxiliares e oferecer uma apresentação sistemática de todo este material, dai surgiu a sua obra intitulada *“De Triangulis Omnimodis Libri Quinque”* (Cinco livros sobre todas as classes de Triângulos), nessa obra o autor reuniu todas as fórmulas necessárias para trabalhar com trigonometria plana e esférica, e foi escrita por volta de 1464 e publicada postumamente em 1533.

Flood & Wilson (2013), afirma:

---

[173] **John von Gmunden:** Foi um humanista, matemático, teólogo, filósofo, astrônomo e fabricante de instrumentos, austríaco é o fundador da Escola de Matemática de Viena. O asteroide 15955, descoberto em 26 de Janeiro de 1998 pelo astrônomo austríaco *Erich Meyer*, recebeu a denominação de Johannes gmunden em sua homenagem. A partir de 1420, John Von Gmunden se permitiu restringir suas aulas para o campo especializado de matemática e astronomia, focando-se particularmente nos Elementos de Euclides e na *Sphaera materialis* de John de Hollywood. Com a ajuda de seus alunos criou volumosas tabelas astronômicas (que constam na obra *Historia astronomiae* de 1741, escrita por Weidler, onde Georg Pruneck de Ruspach, Georg de Neuenburg, Johannes Schinkelius, e Johannes Feldner também são mencionados). Tucker (2005).

[174] **Georg von Peurbach:** Foi um astrônomo e professor da Universidade de Viena, considerado um dos precursores europeus da visão heliocêntrica do mundo da cosmologia e depois adaptada por Nicolau Copérnico e John Kepler. Foi um dos precursores do humanismo na Europa Central, adaptando as ideias que tinham chegado a Viena com Enea Silvio Piccolomini (mais tarde eleito Papa Pio II). Primeiro professor de astronomia em Viena, construiu instrumentos de medida inovadores, tendo parte da sua obra sido traduzida para o português por Pedro Nunes. Tucker (2005).

> Em *"De Triangulis Onunímodis Libri Quinque"* (Cinco Livros sobre Todos os Tipos de Triângulos), Regiomontanus continuou esse desenvolvimento e organizou de forma sistemática a sua obra trigonométrica anterior, usando como modelo a abordagem dos Elementos de Euclides. A obra consiste de cinco livros. O primeiro contém definições e axiomas seguidos de soluções geométricas de triângulos planos. A trigonometria começa no segundo livro, no qual vemos, pela primeira vez, um resultado que deduz a fórmula da área de um triângulo em termos do comprimento de dois lados e do ângulo entre eles. Os três últimos livros tratam de geometria e trigonometria esférica. (FLOOD & WILSON, 2013, p.61).

Com essa obra de fato temos o primeiro tratamento exaustivo e sistemático de trigonometria plana e esférica, que pelo seu rigor e aprofundamento teórico passaram a chamar-se do primeiro texto de trigonometria "pura", escrito na Europa, e caracteriza a separação definitiva da trigonometria da astronomia.

Com as informações e trabalhos realizados por Regiomontanus, a matemática, e como consequência a trigonometria, se consolidou em um marco europeu e como disciplina matemática independente da astronomia.

A partir da obra *De triangulis sphaericis*, sobre Triângulos Esféricos de John Werner(1468–1522), escrita em quatros livros e não publicada até 1907, apresenta o método chamado de próstaferece, que aparece no livro IV, onde consta a fórmula matemática $\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$, tal fórmula serviu para o aprimoramento dos cálculos astronômicos até o século XVII.

Brummelen (2009) afirma,

> O livro IV de John Werner, da sua obra *De triangulis sphaericis*, era o que mais o interessava. Pois como um cientista teria evidenciado o tédio de realizar multiplicação, com cinco casas decimais, principalmente aplicadas a seno e cosseno. Uma maneira inteligente de contornar isso é sugerida pelas soluções de triângulos contida no livro IV, que dependiam do equivalente de uma das chamadas fórmulas do produto de senos: $\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$.
>
> O produto como aparece do lado esquerdo desta equação ocorrem o tempo todo, especialmente na astronomia esférica. Substituir o produto da esquerda, com diferença do lado direito estava a tornar-se uma ferramenta muito útil, conhecido como próstaferece. Foi usada por várias décadas até os logaritmos uma poderosa ferramenta que veio depois consegui um resultado semelhante. Por não ter sido publicado de imediato o trabalho de Werner, a próstaferece não se propagou, na verdade, a história de seu desenvolvimento e totalmente obscura. A fórmula do produto de senos apareceu pela primeira vez na década 1580 mais tarde, em 1588, na obra de Nicolai Reymers Baer (1551-1600), conhecido também como Ursus. Intitulada de *Fundamentum Astronomicum,* junto com a regra correspondente para produto de cossenos.
>
> $\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2} \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$. (BRUMMELEN, 2009, p.264-265, tradução nossa).

O método de próstaferece, junto com a invenção dos logaritmos, deu novo impulso e melhoramento dos cálculos Astronômicos, trazendo mais precisão e rapidez nas soluções desse tipo de problemas.

O matemático Escocês John Napier[175](1550–1617), deixou como legado, quatro produtos de seu gênio: os logaritmos, um dispositivo para reproduzir fórmulas usadas na resolução de triângulos esféricos, fórmulas trigonométricas úteis na resolução de triângulos esféricos obliquângulos e um instrumento usado para multiplicações, divisões e extrair raízes quadradas de números.

Napier ao inventar os logaritmos, publicou a obra com o nome *“Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio”* (Descrição da admirável tabela de logaritmos) em 1614.

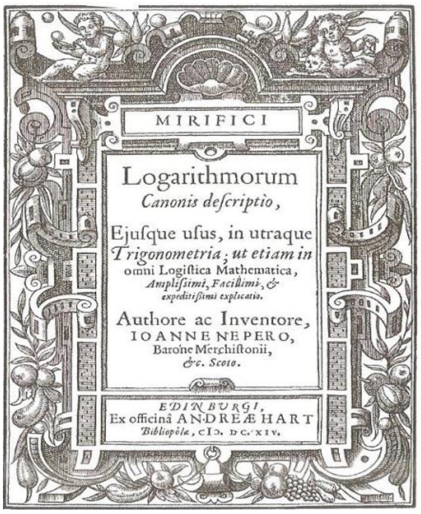


Figura 54: Frontispício dos Logaritmos de Nepier[176]
Fonte: Flood & Wilson, 2013

A obra contém extensas tabelas de logaritmos dos senos e tangentes de todos os ângulos de 0º a 90º graus, em passos de 1 minuto, o uso desses logaritmos por Napier surgiu porque ele teve a ideia de aproveitá-los como auxilio nos cálculos de navegação e astronomia, como exemplo desse tipo de cálculo, aplicado a triângulo retângulo cuja hipotenusa é c e lado *a* são conhecidos. O problema é encontrar o ângulo α oposto ao lado dado. Napier utiliza a relação trigonométrica básica. $\frac{\operatorname{sen}\alpha}{r} = \frac{a}{c}$, onde $r = 10^7$, é o raio do círculo no qual os senos são definidos.

[175] **John Napier:** Também assinou como Neper, foi um fazendeiro escocês conhecido como um matemático, físico e astrônomo. John Napier é mais conhecido como o inventor de logaritmos. Ele também inventou os chamados “ossos de Napier” e fez comum o uso do ponto decimal em aritmética e matemática. Flood & Wilson. (2013).

[176] Fonte da figura extraída do livro A História dos Grandes Matemáticos de Flood & Wilson, 2013, p.88.

Napier utiliza então a sua tabela e a regra para a proporção dada acima serve calcular utilizando a teoria dos logaritmos que resolvendo essa equação temos:

$N \cdot \text{Log sen}\alpha = N \cdot \text{Log a} - N \cdot \text{Log c} + N \cdot \text{Log r}$, como $N \cdot \text{Log r} = 0$. Desta forma determina-se o sen α em termos dos logaritmos dos lados.

Napier também mostra muitos outros exemplos da utilização da tabela de logaritmo, aplicando nas resoluções de triângulos retângulos com o auxilio da lei dos senos e triângulo qualquer com a utilização da lei das tangentes.

$$\frac{\text{sen}\alpha}{a} = \frac{\text{sen}\beta}{b} \qquad \frac{\text{tg}\left[\frac{1}{2} \cdot (A + B)\right]}{\text{tg}\left[\frac{1}{2} \cdot (A - B)\right]} = \frac{a + b}{a - b}$$

O estudo dos logaritmos de Neper foi aperfeiçoado por Henry Briggs[177] (1561–1630) em 1616 Briggs visitou Napier em Edimburgo, a fim de discutir a alteração sugerida por Neper para o seu trabalho em logaritmos. No ano seguinte, ele visitou novamente para um propósito similar. Durante estas conferências a alteração proposta por Briggs foi acordado, e em seu retorno a partir de sua segunda visita a Edimburgo, em 1617, publicou num pequeno panfleto impresso o trabalho, *“Logarithmorum Chilias Prima”,* (Os primeiros mil logaritmos) e também completou uma tabela de senos e tangentes logarítmicas para a centésima parte de cada grau com quatorze casas décimas posteriormente essa obra foi revisada e ampliada por Briggs.

A evolução posterior na trigonometria vai acontecer com advento da notação moderna da matemática, desta forma passamos a ter o nome e abreviaturas das funções trigonometrias sendo dado por vários matemáticos.

A invenção das palavras tangente, e secante foram usadas primeiramente por Thomas Fincke[178](1561–1656), no livro *“Geometria rotundi libra XIV”* publicado em (1583), obra escrita em 14 livros, apresenta a teoria fundamental do círculo é apresentado em Livros 1 a 4, trigonometria plana é estudado nos livros 5 a 11, e os últimos três livros tratam trigonometria esférica. A maioria dos 14 Livros têm legendas. Também chamava as três co-funções de seno, tangente e secante de “complemento de seno”, “complemento de tangente” e “complemento de secante”.

---

[177] **Henry Briggs**: Foi um matemático notável, aperfeiçoou os logaritmos originais inventados por John Napier em comum (base 10), o seu trabalho ficou conhecidos como logaritmos Briggsian em sua honra. Katz (2010).

[178] **Thomas Fincke:** Foi físico, matemático e médico dinamarquês e professor da Universidade de Copenhague por mais de 60 anos. Katz (2010).

Muitos destes textos de trigonometria davam vários exemplos numéricos para ilustrar os métodos de resolver triângulos planos e esféricos (Katz, 2010, p.505).

O termo co-seno e co-tangente foi primeiro usado por Edmund Gunter[179] (1581–1626), na sua obra *"Tabela de Sines Artificial e tangentes",* publicada em (1620), é a primeira publicação dos Logaritmos de Briggs para as funções trigonométricas, continha os logaritmos dos senos e tangentes dos arcos variando de minuto a minuto, até sete casas decimais.

As notações para a tangente e a cotangente seguiram um desenvolvimento semelhante àquele do sen e cos. Nesse sentido temos Boaventura Cavalieri[180] (1598–1647) usando Ta e Ta.2, publicou, também em 1632, o livro *"Directorium Universale Uranometricum"* (Diretório Universal de Uranometria). O termo *uranométrico* está relacionado à medição de distâncias celestes. Entretanto, Cavalieri adotou esse nome provavelmente apenas com o significado de medições. O trabalho divulgou tabelas de senos, tangentes, secantes, cossenos e logaritmos. Este trabalho foi responsável pela introdução na Itália do logarítmo de funções trigonométricas para o emprego em cálculos astronômicos.

William Oughtred[181](1575–1660) usou também a notação t arc e co arc, para tangente e a cotangente na obra *Trigonometrie* publicada em 1675, alguns de seus contemporâneos ingleses, Richard Norwood[182](1590–1675) e John Speidell e

---

[179] **Edmund Gunter:** Foi um clérigo, matemático, geômetra e astrônomo inglês, é mais lembrado por suas contribuições matemáticas que incluem a invenção da cadeia de Gunter, o quadrante de Gunter, e a escala de Gunter, foi professor de astronomia no Gresham College, em Londres, a partir de 1619 até sua morte. As descrições de algumas de suas invenções foram dadas em seus tratados sobre o sector, arco, quadrante e outros instrumentos. Ele também sugeriu a seu amigo Henry Briggs, o inventor dos logaritmos, o uso do complemento aritmético. Tucker (2005).

[180] **Boaventura Cavalieri:** Foi um matemático italiano conhecido por seu trabalho sobre os problemas de ótica e movimento, percussor do cálculo infinitesimal, e a introdução de logaritmos para a Itália, o princípio da Cavalieri em geometria parcialmente introduziu o cálculo integral. Cavalieri também escreveu sobre seções cônicas, trigonometria esférica, ótica, astronomia e astrologia, desenvolveu uma regra geral para a distância focal das lentes e descreveu um telescópio refletor, trabalhou também em uma série de problemas de movimento chegou a publicar também uma série de livros sobre astrologia, um em 1639 e outro, seu último trabalho, *"Trattato della ruota planetaria perpetuaem",* publicado em 1646. Tucker (2005).

[181] **William Oughtred:** Foi um matemático Inglês e pastor anglicano. Depois de John Napier ter inventado os logaritmos, e Edmund Gunter ter criado as escalas logarítmicas (linhas, ou regras) e é creditado como o inventor da régua de cálculo, em 1622. Oughtred também introduziu o símbolo "x" da multiplicação, bem como as abreviaturas "sen" e "cos" para as funções seno e cosseno. Tucker (2005).

[182] **Richard Norwood:** Foi um matemático, mergulhador e topografo Inglês. Ele foi chamado de "gênio excepcional das Bermudas do século XVII", suas obras em trigonometria foram *Trigonometrie, ou a Doutrina Triângulos,* publicada em 1631 e *Epitomy de Norwood, sendo a aplicação da doutrina de Triângulos,* publicada em 1667. Tucker (2005).

outros criaram varias abreviaturas para as funções trigonométricas: s, se, ou sen para a função seno; sco ou seco para "seno complementar" ou co-seno, se para a função secante.

John Wallis[183](1616-1703) usou para tangente T e t. A abreviação comum usada hoje é tan (ou tg) sendo que a primeira ocorrência desta abreviação é devida a Albert Girard[184](1595–1632) em 1626, com tan escrito por cima do ângulo e cot foi primeiro usada por Sir Jonas Moore[185](1617–1679) usou também pela primeira vez a notação "cot" abreviado para o termo trigonométrico co-tangente em 1674.

A função secante e a cossecante não foram usados pelos antigos astrônomos ou agrimensores. Estas surgiram quando os navegadores por volta do século XV começaram a preparar tabelas, para utilização em cálculos de navegação. Copérnico sabia da secante que ele chamou a hipotenusa. Viète conhecia as relações $\frac{\operatorname{cossec} x}{\sec x} = \operatorname{cotg} x$ e $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$, outra relação que Viète conhecia era a $\frac{1}{\operatorname{cossec} x} = \frac{\cos x}{\operatorname{cotg} x}$ e $\frac{\cos x}{\operatorname{cotg} x} = \operatorname{sen} x$.

As abreviações usadas por vários autores foram semelhantes para as funções trigonométricas, secante e cossecante. Cavalieri usou Se e Se.2, Oughtred usou se arc. E sec co arc, enquanto John Wallis(1616–1703) usou s e σ. Albert Girard, usou sec, escrito por cima do ângulo como tinha feito para a tan.

Em nosso estudo evidenciamos o ponto de partida na separação da trigonometria da astronomia dada por Al-Jayyani, na obra intitulada *"Determinação das magnitudes dos arcos na superficie de uma esfera",* publicada por volta 1060, nesse sentido Brummelen (2009) considera essa obra o primeiro tratado sobre trigonometria esférica, apresentada em sua forma moderna, além de traduções de

---

[183] **John Wallis:** Foi um matemático Inglês a ele é creditado parcialmente o desenvolvimento do cálculo infinitesimal. Entre 1643 e 1689 atuou como chefe criptógrafo para o Parlamento e, mais tarde, da corte real, fez contribuições significativas para a trigonometria, cálculo, geometria, e da análise de séries infinitas. Em sua *Opera Mathematica* I (1695) Wallis introduziu o termo "fração contínua". Tucker (2005).

[184] **Albert Girard:** Foi um matemático francês estudou na Universidade de Leiden, "teve o pensamentos inicial sobre o teorema fundamental da álgebra" e deu a definição indutiva para os números de Fibonacci. Ele foi o primeiro a usar as abreviações "sen", "cos" e "tan" para as funções trigonométricas em um tratado de sua autoria. Girard também mostrou como a área de um triângulo esférico depende dos ângulos internos esse resultado é chamado teorema de Girard. Tucker (2005).

[185] **Sir Jonas Moore:** Foi um matemático, topógrafo, Inglês, e patrono da astronomia. Ele participou de dois dos mais ambiciosos projetos de engenharia civil inglês do século 17: A drenagem do grande nível de Fens e do Edifício do Mole em Tânger. O seu trabalho, *"Um novo sistema de Mathematicks"* publicado em 1681, escreveu também sobre as seções sobre aritmética, geometria, trigonometria e cosmografia. Tucker (2005). Tucker (2005).

suas obras a partir do árabe, seu trabalho influenciou alguns matemáticos europeus, entre eles temos Regiomontanus, porem outros autores como Wussing (1998), Cajori (2007), Katz (2010) consideram a obra de Al-Tusi intitulada *“Tratado sobre quadrilátero completo”* publicada em 1260, sendo a primeira obra a tratar trigonometria plana e esférica como assunto separado da astronomia, e como conseguência criando uma disciplina discreta tal qual temos na atualidade.

Mais a obra definitiva que transforma a trigonometria como ciência independente na Europa foi *“De Triangulis Onunímodis Libri Quinque”* (Cinco Livros sobre Todos os Tipos de Triângulos), de Regiomontanus, reunindo a trigonometria plana e esférica conhecia até esse momento em cinco livros independente da astronomia, e publicado postumamente em 1533, passando a ser a obra de referência dos matemáticos posteriores e é o marco definitivo da separação da trigonometria da astronomia.

Há de se considerar também, que a transformação e aperfeiçoamento da trigonometria no medievo possibilitou o movimento das grandes navegações, alargando o conhecimento do mundo nessa época. No período Renascentista a obra de Regiomontanus, *“De Triangulis Onunímodis Libri Quinque”*, forneceu uma base sólida em trigonometria plana e esférica, para fins astronômicos na Europa e serviu de base para todos os avanços da trigonometria posterior, tanto que a invenção dos logaritmos tornou os cálculos astronômicos mais simples.

No próximo capitulo realizamos um estudo histórico das geometrias não-euclidianas, suas implicações com a geometria esférica e esta com a trigonometria esférica onde as fórmulas fundamentais serão apresentadas e mostramos a transição para a trigonometria plana quando o raio da circunferência tende para o infinito e por fim apresentamos as relações estabelecidas entre as trigonometrias planas e esféricas.

3. A GEOMETRIA ESFÉRICA E SUA IMPLICAÇÃO COM A TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

3.1 AS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS E EUCLIDIANAS

Neste capitulo fazemos um estudo sucinto das geometrias não-euclidianas embasado na história da matemática, mostrando as implicações com a geometria esférica e essa com a trigonometria esférica e evidenciamos também a existência das correlações entre as trigonometrias plana e esférica quando o raio da circunferência tende para o infinito.

Os primórdios das geometrias não euclidianas surgiram nas discussões feitas, por vários matemáticos ao longo da história, do quinto postulado de Euclides, que consta nos Elementos, publicado por volta de 300 a.C. contemplando áreas como a Aritmética e a Geometria. Tal documento é um conjunto de 13 volumes abrangendo diversas matérias como teoria dos triângulos, álgebra geométrica, teoria dos números, geometria dos sólidos entre outros, onde Euclides apresenta a Geometria com estrutura de Ciência, sistematizando a grande massa de conhecimentos matemáticos adquiridos ao longo do tempo, dando ordem lógica e estabelecendo o conceito de lugar geométrico.

No Livro I dos Elementos, os postulados são assim enunciados (EUCLIDES, 2009, p. 98):

- Postulado I: Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto;
- Postulado II: Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta;
- Postulado III: E, com todo centro e distância, descrever um círculo;
- Postulado IV: E serem iguais entre si todos os ângulos retos;
- Postulado V: E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Este último postulado é conhecido como o postulado das paralelas. Por não possuir, aparentemente, o mesmo grau de evidência que os restantes, este postulado recebeu muitas críticas. O próprio Euclides deve ter considerado o

Postulado V pouco evidente, pois retardou o quanto pôde o seu uso. Euclides demonstra as 28 primeiras proposições do Livro I sem utilizar o Postulado V.

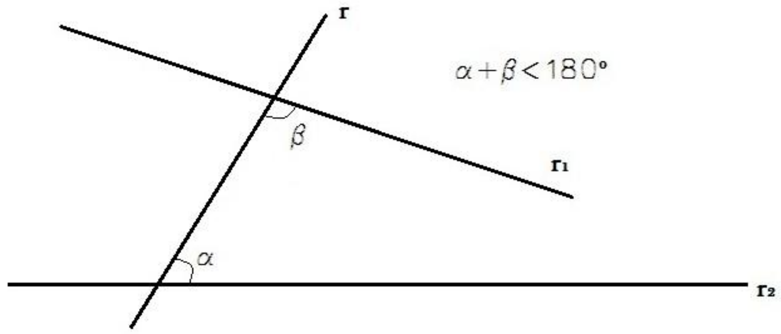


Figura 55: Postulado V ou das Paralelas[186]
Fonte: Elaborada pelo autor

O Postulado V, dos Elementos, foi objeto de muitas tentativas de demonstração, mas a maioria delas ou admitiam fatos equivalentes a ele ou não podiam ser concretizadas, utilizando-se apenas os outros quatro postulados.

Hoje o quinto postulado de Euclides é apresentado por um enunciado equivalente, denominado Postulado das paralelas, apresentado por John Playfair[187](1748–1819) em 1795, “Por um ponto P exterior a uma reta r, consideradas em um mesmo plano, existe uma única reta paralela à reta dada”.

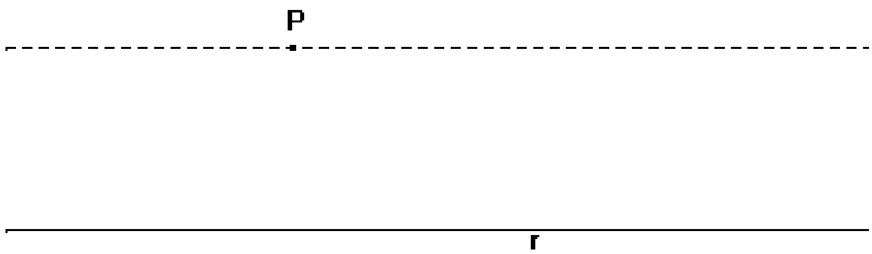


Figura 56: Postulado V na formulação de John Playfair[188]
Fonte: Elaborada pelo autor

Desde a primeira formulação dos postulados de Euclides para a geometria, os matemáticos acreditavam que o quinto postulado de Euclides poderia ser demonstrado como teorema. Entre os que tentaram demonstrá-lo encontraram-se os seguintes matemáticos: Ptolomeu(85–165), Proclus(410–485), Ibn al–Haitham conhecido por Alhazen (965–1039), Omar Khayyam[189](1048–1131), Nasir Eddin al-

[186] Elaborado pelo autor.
[187] **Professor John Playfair:** Foi um matemático e geólogo escocês, lecionou matemática na Universidade de Edimburgo. É responsável pela formulação moderna do quinto postulado de Euclides.
[188] Elaborado pelo autor.
[189] **Omar Khayyam:** Foi um poeta, matemático e astrônomo persa dos séculos XI e XII. Khayyam corrigiu o calendário persa, escreveu um livro intitulado *Declarações de as dificuldades de os postulados em Elementos de Euclides.* O livro é composto por várias seções sobre o postulado das

Tusi(1201–1274), John Wallis [190] (1616–1703), Girolamo Saccheri [191] (1667–1733), Johann Heinrich Lambert [192](1728–1777) e Adrien Marie Legendre[193](1752–1833).

Wussing (1998) confirma:

> Já desde a antiguidade o quinto postulado de Euclides, conhecido como postulados das paralelas possuía um caráter excepcionalmente claro de exceção e registraram-se numerosos intentos de demonstrar este postulado com ajuda dos demais. Em âmbito da matemática islâmica se conheciam intentos similares, por exemplo, com al-Tusi no século XIII. Na cadeia dos esforços de demonstração chega até mesmo Legendre no seu importante livro Elementos de Geometria (1794). (WUSSING, 1998, p.240, tradução nossa).

Durante dois mil anos de fato, muitos matemáticos tentaram fazer uma demonstração do quinto postulado com base nos quatros anteriores, tentativas frustradas porque há geometrias “não-euclidianas” que satisfazem aos quatros primeiros postulados mas não ao quinto.

Esse processo culminou com a descoberta das Geometrias não-euclidianas. Então, aceitando-se uma nova redação para o quinto postulado é possível construir outras geometrias, tão consistentes como a de Euclides.

As Geometrias não-euclidianas surgiram formalmente no século XIX, mas esta descoberta não se deve unicamente aos matemáticos do século XIX. Elas são um produto de árduo trabalho de matemáticos em tentativas frustradas de

---

paralelas (Livro I), sobre a definição euclidiana de relações e a proporção Anthyphairetic (modernos frações contínuas) (Livro II), e na multiplicação de relações (Livro III) publicou também sobre álgebra e mecânica. Flood & Wilson (2013).

[190] **John Wallis:** Foi um matemático britânico cujos trabalhos sobre o cálculo foram precursores aos de Isaac Newton contribuiu substancialmente para a origem do Cálculo e foi o matemático inglês mais influente antes de Newton. Estudou os trabalhos de Kepler, Cavalieri, Roberval, Torricelli e Descartes. Wallis foi também um historiador da matemática. O seu livro *“Treatise on Algebra”* tem uma enorme riqueza histórica. Flood & Wilson (2013).

[191] **Girolamo Saccheri:** Foi um italiano jesuíta padre, filósofo escolástico e matemático, é conhecido principalmente hoje para sua última publicação, em 1733, pouco antes de sua morte. Agora considerado o segundo trabalho em geometria não-euclidiana, *“Euclides ab Omni Naevo Vindicatus”* (Euclides inocente de todas falhas) definhava na obscuridade até que foi redescoberto por Eugenio Beltrami (1835–1900) em meados do século XIX. Flood & Wilson (2013).

[192] **Johann Heinrich Lambert:** Foi um matemático físico e astrônomo suíço radicado na Prússia. A obra de Lambert inclui a primeira demonstração de que π é um número irracional (1768), o desenvolvimento da geometria da regra, o cálculo da trajetória de cometas. Também se interessou por cartografia e definiu a projeção de Lambert. Foi um dos criadores da fotometria e autor de trabalhos inovadores sobre geometrias não euclidianas. Cajori (2007).

[193] **Adrien Marie Legendre:** Foi um matemático francês, fez importantes contribuições à estatística, teoria dos números, álgebra abstrata e análise matemática, foi educado no Colégio Mazarin, uma das escolas mais avançadas do século XVII, em Paris, durante cinco anos, de 1775 a 1780, trabalhou junto com Laplace, quando ambos lecionavam na *École Militaire de Paris*. Legendre fez inúmeras contribuições para a matemática. Bem conhecido e conceitos importantes, tais como os polinômios de Legendre e transformação de Legendre. Tucker (2005).

demonstração do Postulado V de Euclides. A busca por resultados serviu como guia para outros matemáticos na descoberta de novas geometrias.

Os primeiros matemáticos suspeitarem que era impossível obter uma contradição negando o postulado das paralelas, ou seja, que ele era independente dos outros postulados, foram: o alemão Carl Friederich Gauss[194] (1777–1855), o húngaro János Bolyai[195] (1802–1860) e o russo Nikolai Ivanovich Lobatchevski[196] (1793–1856). Todos os três chegaram às suas conclusões analisando o quinto postulado através da forma de representar de Playfair, considerando as três possibilidades.

O eminente matemático alemão Carl Friedrich Gauss(1777–1855), "entreviu" a nova geometria desde 1792, com apenas 15 anos. A negação do V axioma também não o levava a resultados contraditórios com os axiomas mais básicos e sintéticos da geometria, hoje dita "geometria absoluta", foi o primeiro a descobrir a nova geometria, embora não tivesse publicado nada, pois a Geometria Euclidiana ainda era vista como uma verdade infalível. Qualquer um que se atrevesse a contradizer isso era desprestigiado, e a última coisa que Gauss desejaria, seria manchar a reputação que tinha frente ao meio científico.

Segundo o professor Manfredo P. do Carmo (1987), Gauss estudou as superfícies de curvatura negativa constante e provou que se considerarmos como reta uma curva de menor comprimento que liga dois pontos, então a soma dos ângulos internos de um triângulo traçado na superfície é menor que dois ângulos retos (180º) e a diferença entre essa soma e dois retos é proporcional à área do

---

[194] **Carl Friederich Gauss:** Foi um matemático, astrônomo e físico alemão que contribuiu muito e em diversas áreas da ciência, dentre elas a teoria dos números, estatística, análise matemática, geometria diferencial, geodésia, geofísica, eletroestática, astronomia e óptica. Alguns o referem como *princeps mathematicorum* (em latim, "o príncipe da matemática" ou "o mais notável dos matemáticos") e um "grande matemático desde a antiguidade", Gauss tinha uma marca influente em muitas áreas da matemática e da ciência e é um dos mais influentes na história da matemática. Ele refere-se à matemática como "a rainha das ciências". Flood & Wilson (2013).

[195] **János Bolyai:** Foi um matemático húngaro, entre 1818 e 1822, estudou no Royal College of Engineering, em Viena, um dos fundadores da geometria não-euclidiana, a sua obra foi um tratado sobre um sistema completo de geometria não-euclidiana, escrita entre 1820 e 1823. O trabalho de Bolyai foi publicado em 1832 como um apêndice de um livro didático de matemática por seu pai. Flood & Wilson (2013).

[196] **Nikolai Ivanovich Lobatchevski:** Foi um matemático russo. Estudou no Instituto de Kazan, a partir de 1802, destacando-se, desde cedo, por seu pendor pela matemática. Aos 14 anos estava preparado para ingressar na Universidade de Kazan, recentemente fundada, iniciando seus estudos superiores em 1807. Passou quarenta anos de sua vida ligados a essa universidade, como aluno, professor ajudante (1824), professor ordinário (1826) com apenas 23 anos, bibliotecário, conservador do museu e, por fim, reitor (1827), cargo que ocupou até 1846. Lobatchevski foi considerado por Clifford (1845-1879) como o "Copérnico da geometria", em virtude de suas descobertas relacionadas com as chamadas geometrias não-euclidianas. Tucker (2005).

triângulo. A constante de proporcionalidade é precisamente o valor absoluto da curvatura e tais curvas são chamadas geodésicas[197].

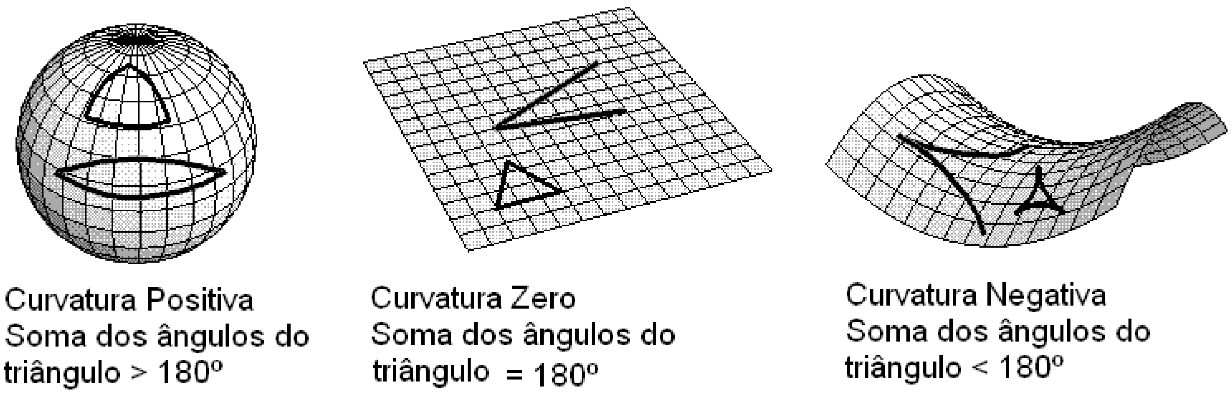


Figura 57: Superfícies de curvatura[198]
Fonte: site:www.on.br

Nikolai Ivanovich Lobatchevski(1793–1856), com a publicação, em 1829, de seu artigo sobre os Princípios da Geometria, marca o nascimento oficial da geometria não-euclidiana. Neste artigo ele se mostra completamente convencido de que o quinto postulado de Euclides não pode ser provado com base nos outros quatro, e constrói a ideia da nova geometria fundamentada na hipótese, contrária ao V Postulado de Euclides, de que por um ponto fora de uma reta pode-se traçar mais de uma reta no plano que não encontra a reta dada.

Estes resultados se tornaram um marco revolucionário da geometria, mostrando que a Geometria Euclidiana não era a verdade absoluta suposta até então, e tornando necessário fazer-se uma revisão completa nos conceitos fundamentais da Matemática. O principal trabalho de Lobatchevski foi *"Geometrya"* terminado em 1823, mas somente no dia 23 de fevereiro de 1826 é que ele fez sua famosa apresentação "Sobre os Fundamentos da Geometria" em uma sessão do conselho científico do departamento de Física e Matemática da Universidade de Kazan. Lobatchevski foi perseguido por seu trabalho. Membros da comunidade de matemáticos russos faziam zombarias e publicavam rudes comentários sobre ele.

Imre Toth (2011) confirma:

> Na Rússia, Ostrogradski é considerado pela historiografia soviética corrente não somente como um dos maiores matemáticos do séc. XIX, mas também como um sábio progressista, materialista e ateu, que se torna acusador público da geometria do Lobatchevski. Nomeado em 1828, aos 27 anos

[197] Geometrias não-euclidianas. In Aprendendo pelas raízes: alguns caminhos da matemática na história. Tenório, Robinson Moreira. Ed. UFBA, Salvador, 1995. p.33.
[198] Fonte da figura disponível em: http://www.on.br/site.edu.dist/pdf/modulo3, acesso em 15 de novembro de 2013.

> para a academia de São Petersburgo, tornou-se mais tarde inspetor geral do ensino de matemática na Rússia sob Nicolau I, Ostrogradski tornou-se autoridade matemática suprema de seu pais. Entre 1832 a 1842, em dois relatórios oficias (em francês) apresentado á Academia de Ciências, ele julgou os trabalhos de Lobatchevski como incompreensíveis e marcados de erros, segundo ele, eles não merecem a atenção Acadêmica. Em 1834, isto é, entre esses dois relatórios, Ostrogradski publicou uma ata menos acadêmica no jornal Le Fils de La Patrie (Os filhos da Pátria), não assinado mas redigido por um dos jornalistas reacionários mais notório da época S.O. Bouratchek: Geometria Imaginária? Por que, com efeito não se imaginar que o preto é branco, o quadrado e redondo e a soma dos ângulos do triângulo é menor que dois retos? Pergunta-se por que se escrever e, sobretudo se publicar tais fantasmagorias. O verdadeiro alvo do Sr. Lobachevski foi certamente jogar uma farsa aos matemáticos. E por que então o titulo "Os Fundamentos da Geometria" e não a "Sátira da Geometria" a "A Caricatura da Geometria". (IMRE TOTH, 2011, p.37-52, tradução nossa).

Outro matemático a desenvolver estudos em geometria não-euclidianas foi János ou (Johann) Bolyai(1802–1860), tinha apenas 20 anos quando começou a desenvolver uma geometria independente do "Quinto postulado" de Euclides sobre as paralelas, ao invés de tentar o impossível, desenvolveu o que chamou de "Ciência absoluta do espaço", partindo da hipótese que por um ponto fora de uma reta podem ser traçadas infinitas retas do plano, não uma só, cada uma paralela à reta dada.

János foi educado para o exército, chegando a ser oficial do corpo de engenheiros militares do exercito húngaro. Mas, János estudou matemática com seu pai, e, devido a isto, acabou se interessando pela teoria das paralelas. Seu pai saturado com esse problema pede que deixe de lado essa questão: "Pelo amor de Deus, te peço que abandones. Ela teme mais do que paixões sensuais, porque ela também ocupa todo o seu tempo, te priva de saúde, paz de espírito e felicidade na vida".

Wussing (1998) confirma:

> Bolyai pai advertiu seu filho várias vezes, e com palavras fortes, das consequências que poderia ter de ocupasse com o problema das paralelas, dos perigos graves em que qualquer um poderia sofrer um naufrágio, o de lidar com inquietante campo de batalha, essa fortaleza inexpugnável que confiava a ambição de todo o espírito penetrante. Apesar disso, seu filho não foi dissuadido de sua paixão. Inicialmente, dedicou-se também à hipótese do ângulo agudo, mais tarde, com uma demonstração indireta do postulado das paralelas, János Bolyai com a idade de 20 anos desenvolveu as ideias fundamentais da geometria não-euclidiana. (WUSSING, 1998, p.243, tradução nossa).

János continuou trabalhando, e, admitindo que por um ponto fora de uma reta passam pelo menos duas retas paralelas a reta dada, conseguiu resultados de natureza diferenciada, de modo que sua atenção foi voltando para a possibilidade de formular outra Geometria. Inicialmente imaginou uma Geometria geral que tivesse a Geometria Euclidiana como caso particular. No entanto, o trabalho de János foi publicado pela primeira vez por volta de 1830.

Admitindo uma proposição que contrariasse o postulado das paralelas, János alcançou diversos resultados, que vieram a constituir a geometria que mais tarde seria chamada de Geometria Hiperbólica.

Quando anunciou suas descobertas em geometria para seu pai, este lhe escreve recomendando a publicação: "Parece-me aconselhável que, se tem obtido uma solução para o problema, por duas razões, sua publicação deve ser acelerada: em primeiro lugar, porque as ideias passam facilmente de um para outro, que pode publicar; em segundo lugar, porque parece ser que muitas coisas tem uma época na qual são descobertas em muitos lugares simultaneamente, igual as violetas que surgem por toda parte na primavera".

János Bolyai publicou seu trabalho em um apêndice de 26 paginas em um livro do seu pai, chamado de o *"Tentamen iuventutem studiosam em elementa matheosos introducendi"*, publicado em 1832. Wolfgang ou (Farkas) Bolyai[199](1775–1856) enviou uma cópia deste livro a seu amigo Gauss. Wussing (1998, p.243) confirma: "Após algumas discussões com seu pai, a geometria euclidiana de János apareceu como apêndice de um livro de geometria de seu pai (Tentamen) no ano de 1832".

Wolfgang Bolyai apresentou os feitos de seu filho a Gauss, que recebe a noticia com certo descrédito, porem Gauss aceitou os resultados, mas declarou-os seus:

"Se eu começasse dizendo que sou incapaz de elogiar esse trabalho, sem dúvidas ficaria um momento surpreso. Mas não posso dizer outra coisa. Elogiá-lo seria elogiar a mim mesmo. Na verdade, todo o conteúdo do trabalho, o caminho adotado por teu filho, os resultados aos quais foi levado, coincidem quase

[199] **Wolfgang Bolyai:** Foi um matemático húngaro, conhecido principalmente por seu trabalho em geometria, pai do matemático János Bolyai, amigo de Carl Friedrich Gauss. Principais interesses de Bolyai foram os fundamentos da geometria e do axioma paralelo. Sua principal obra, a *"Tentamen iuventutem studiosam em elementa matheosos introducendi",* foi uma tentativa de uma fundamentação rigorosa e sistemática da geometria, aritmética, álgebra e análise. Neste trabalho, mostrou iterativos procedimentos para resolver equações que depois provou ser convergente, mostrando-lhes a ser monótona crescente e delimitada acima. Wussing (1998).

inteiramente com as minhas meditações, que ocuparam em parte a minha mente nos últimos trinta ou trinta cinco anos”. Flood & Wilson (2013, p.139).

János ficou completamente decepcionado com a carta do grande matemático amigo do seu pai, pois esta lhe trouxe a noticia que outra pessoa já havia feito as mesmas descobertas. Depois disto, János Bolyai não voltou a publicar seus resultados. Mesmo assim continuou suas investigações e deixou mais de 20.000 paginas de manuscritos matemáticos. Estes podem ser encontrados na Biblioteca Bolyai-Teleki em Morosvásáhely, atual Târgu-Mures, Roménia.

Outro matemático a estudar as geometrias não-euclidianas foi Georg Friedrich Bernhard Riemann[200](1826–1866). Em 1851, na sua aula inaugural para admissão como professor-adjunto na Universidade de Göttingen, Riemann apontou possibilidades para outras Geometrias, criando a Geometria Elíptica.

Na verdade, Riemann fez mais do que criar uma nova geometria, ele colocou tanto a Geometria Euclidiana como a não-euclidiana em um quadro teórico mais geral. Em 1854, em seu trabalho “Sobre os fundamentos nos quais se assenta a geometria” desenvolveu o que ele chamou de teoria geral das variedades. Riemann defende uma mudança completa na ideia de Geometria, onde esta será formulada a partir das hipóteses consideradas (que devem ser bem postas).

Do Carmo (1987) afirma,

> Segundo Riemann, o objetivo da geometria é tratar de modelos gerais aos quais se podem adicionar hipóteses particulares (as de Euclides, por exemplo), a validade das quais é verificada experimentalmente, pela Física. Como um exemplo de modelo geral, Riemann desenvolveu as ideias principais do que hoje chamamos de Geometria Riemanniana; com hipóteses adicionais, tal geometria reobtém a geometria euclidiana, a geometria hiperbólica e outra geometria, chamada elíptica. (DO CARMO, 1987, p. 32)

Desse modo, já não se tratava apenas de cumprir ou não o postulado das paralelas. Mas, qualquer outro axioma poderia ser questionado e substituído, e é claro que isso acarretaria em consequências estruturais da Geometria que se formaria.

---

[200] **Georg Friedrich Bernhard Riemann:** Foi um matemático alemão, com contribuições fundamentais para a análise e a geometria diferencial. Obteve o doutorado na Universidade de Göttingen, com uma tese no campo da teoria das funções complexas. Na tese encontramos as equações diferenciais de Cauchy-Riemann, que garantem a análise de uma função de variável complexa e o conceito de superfícies de Riemann, que trouxe considerações topológicas à análise. Com uma definição própria integral de Riemann, tornou mais claro o conceito de integrabilidade abrindo caminho para a generalização deste conceito no século XX, a integral de Henri Lebesgue (1875–1941) e daí para horizontes mais amplos como a relatividade geral. Tucker (2005).

Dentro deste raciocínio surge a Geometria Elíptica, onde o postulado das paralelas também é substituído por uma proposição que o contraria. Ao negar o postulado das paralelas que no seu enunciado diz que: Por um ponto fora de uma reta passa uma única paralela à reta dada", existem duas possibilidades: a primeira admite a existência de pelo menos duas paralelas, o que é equivalente à existência de uma infinidade delas, como foi feito para estudar a Geometria Hiperbólica; a segunda, que é adotada na Geometria Elíptica, diz que: "Por um ponto fora de uma reta não passa nenhuma reta paralela à reta dada". Equivalentemente pode-se dizer que, na Geometria Elíptica, duas retas quaisquer sempre se cruzam, ou simplesmente, pode-se dizer que nessa geometria não existem retas paralelas.

Mas, já foi visto que este axioma contraria alguns resultados da Geometria Absoluta (Euclidiana). Riemann propôs outra mudança. Ele abandona a ideia de que a reta é infinita, porém continua admitindo que o processo de se estender um segmento não tem fim, ou seja, que a reta é ilimitada. Foi Riemann o primeiro a apontar a importância de distinguir os termos infinito e ilimitado em relação com os conceitos geométricos. Neste sentido, é importante salientar que muitos dos resultados da Geometria Absoluta não se aplicam à Geometria Elíptica. O modelo mais simples da Geometria Elíptica é o modelo da Esfera (e neste caso especifico, a Geometria Elíptica pode ser chamada de Geometria Esférica). Neste modelo os pontos são pontos de uma esfera e as retas são círculos máximos desta.

Da Geometria Euclidiana Plana, estamos acostumados a ver a reta que passa por dois pontos como aquela que determina "a menor distancia entre esses dois pontos". Essa propriedade sugere que uma boa interpretação de "reta" para a Geometria Elíptica, onde ela deve descrever o caminho mais curto, sobre a superfície da esfera, entre dois pontos desta. Uma curva que dá o caminho mais curto entre dois pontos de uma superfície é chamada de geodésica.

Observando a figura 58, verificamos que quaisquer duas retas (círculos máximos) sempre se cruzam. Aliás, se cruzam em dois pontos distintos. Nesta Geometria não vale a ideia de que dois pontos quaisquer determinam uma única reta. Vale notar ainda que por estes dois pontos passam, na verdade, infinitas retas.

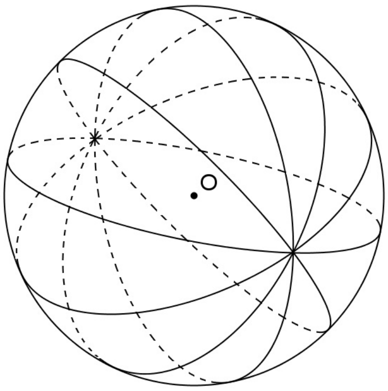


Figura 58: Superfícies de curvatura[201]
Fonte: Elaborada pelo autor

Em 1871, Felix Klein[202](1849–1925) deu forma e nome aos três tipos de geometria: Geometria hiperbólica (de Bolyai e Lobachevsky), Geometria parabólica (geometria Euclidiana) e Geometria elíptica (geometria de Riemann).

Wussing (1998, p.246) nos informa que a Felix Klein se deve também os nomes de geometria elíptica, parabólica, e hiperbólica. E quanto à existência de paralelas, temos o seguinte:

- Geometria Elíptica: Nenhuma Paralela.
- Geometria Euclidiana Exatamente uma Paralela.
- Geometria Hiperbólica Infinitas Paralelas.

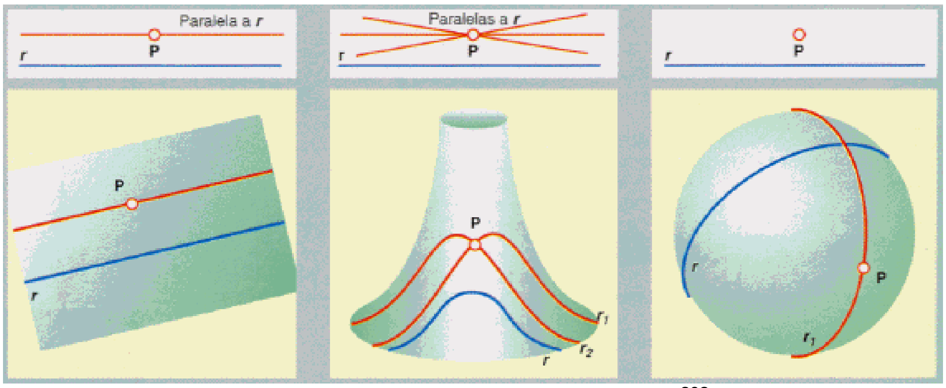


Figura 59: Comparação dos planos[203]
Fonte: Site:www.bertolo.pro.br

Na figura 59, no quadro da esquerda, está representada a geometria Euclidiana, onde por um ponto exterior a uma reta passa apenas uma paralela a essa reta. Ainda na mesma figura temos no do centro aparece a Geometria Hiperbólica, onde por um ponto exterior a uma reta passam infinitas paralelas à reta inicial.

---

[201] Elaborado pelo autor.
[202] **Felix Christian Klein:** Foi um matemático alemão seu trabalho incidiu nas geometria não-euclidianas e nas interligações entre a teoria dos grupos e a geometria.
[203] Fonte da figura disponível em: http://www.bertolo.pro.br, acesso em 19 de novembro de 2013.

Finalmente, na figura da direita, está representada a Geometria Esférica, em que por um ponto exterior a uma reta (circunferência máxima) não passa nenhuma paralela à reta inicial.

Nessas novas geometrias os espaços definem também triângulos que estão na figura 60, onde ainda temos também um triângulo da geometria euclidiana, e para as outras geometrias.

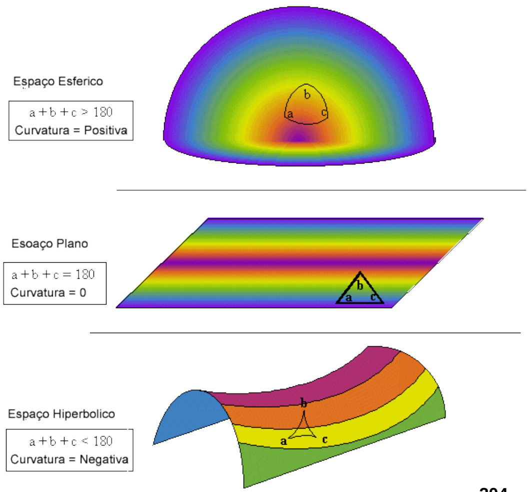


Figura 60: Comparação dos Espaços[204]
Fonte: Site:www.bertolo.pro.br

Os estudos de Bolyai, Lobachevsky e Riemann demonstraram que o quinto postulado de Euclides se trata de um axioma independente dos outros quatro, supuseram que o postulado de Euclides não era verdadeiro e substituíram-no por outros axiomas. Foi demonstrado que se alguma das Geometrias não-euclidianas apresentar uma contradição, a própria Geometria Euclidiana seria contraditória.

Wussing (1998) afirma:

> O reconhecimento das geometrias não-euclidianas aconteceu muito lentamente. Com a publicação da correspondência de Gauss demonstrou-se que ele estava convencido de que as geometrias não-euclidianas eram possíveis. Sua eminente autoridade proporcionou que se considerassem seriamente os resultados de Lobachevsky e Bolyai e avançadas propostas de Riemann. De todos os documentos publicados só pode inclusive concluir que Gauss, Lobachevsky e Bolyai estavam convencidos da ausência de contradição interna das geometrias não-euclidianas, porém faltava uma demonstração. Esta se obteve quando se pode dispor de modelos de geometrias não-euclidiana. (WUSSING, 1998, p.245, tradução nossa).

Essas novas Geometrias permitiram às ciências uma série de avanços, entre os quais a elaboração da Teoria da Relatividade de Einstein, provando que ao contrário do que muitos afirmavam essas teorias tinham sim aplicações teóricas.

[204] Fonte da figura disponível em: http://www.portalescolar.net, acesso em 19 de novembro de 2013.

3.2 A GEOMETRIA ESFÉRICA

A Geometria Esférica (É também conhecida como Geometria Riemanniana ou Geometria Elíptica) é a geometria da superfície bi-dimensional de uma esfera. É um exemplo de geometria não-euclidiana.

Uma esfera é um corpo tridimensional limitado por uma superfície, designada por superfície esférica, cujos pontos são equidistantes de um ponto interior a que se chama centro. Uma superfície esférica pode supor-se gerada por uma circunferência que gira em torno do seu diâmetro. Uma esfera será, então, um conjunto formado pelos pontos de uma superfície esférica e pelos pontos interiores a essa superfície. De forma idêntica ao que se diz em relação à circunferência e ao círculo no plano, chama-se raio de uma esfera à distância entre o seu centro e qualquer ponto da sua superfície.

Um segmento de reta cujos extremos se situem na superfície esférica e que contenha o centro da esfera tem o nome de diâmetro, e a um plano que passe pelo centro dá-se o nome de plano diametral. Este plano divide a esfera em duas partes iguais que recebem o nome de semiesferas ou hemisférios.

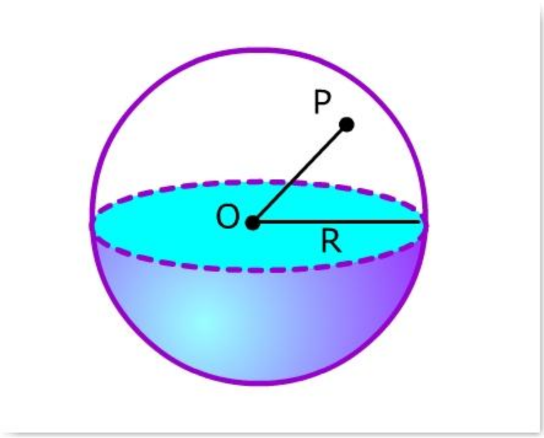


Figura 61: Superfície Esférica[205]
Fonte: Site:www.kaubysantos.blogspot.com

Na geometria plana, os conceitos básicos são ponto e alinha. Na esfera, os pontos estão definidos no sentido usual. Os equivalentes das linhas não estão definidos no sentido usual da "linha reta" e sim no sentido de "as trajetórias mais curtas entre os pontos", o qual é chamado de geodésica. Na esfera as geodésicas são os grandes círculos, e assim os outros conceitos geométricos são definidos como na geometria plana, mas com as linhas substituídas pelos grandes círculos.

[205] Fonte da figura disponível em: http://www.kaubysantos.blogspot.com, acesso em 19 de outubro de 2013.

Temos então na próxima figura as geodésicas, que são os grandes círculos, formando triângulos na superfície da esfera.

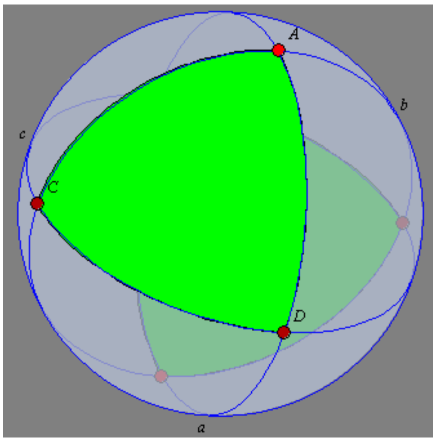


Figura 62: Geodésicas da superfície esférica[206]
Fonte: Site:www.Impa.br

Na geometria esférica os ângulos estão definidos entre os grandes círculos, resultando numa trigonometria esférica que se diferencia da trigonometria plana em muitos aspectos (por exemplo, a soma dos ângulos interiores do triângulo esférico excede os 180º).

A geometria esférica é o modelo mais simples da geometria elíptica, na qual numa linha não há nenhuma paralela através de um ponto dado. O uso do modelo esférico ajuda a explicar o que significa uma reta ilimitada. Embora um círculo máximo na esfera, representando uma reta da Geometria Elíptica, tenha um comprimento finito, ele não pode ser enclausurado por uma curva da superfície. Podemos fazer as seguintes comparações entre a geometria esférica com a geometria euclidiana, em seus fundamentos:

Geometria Euclidiana	Geometria Esférica
Plano	Superfície esférica
Ponto	Ponto
Reta	Geodésica, círculo máximo ou grande círculo
Segmento de reta	Arco da geodésica
Dois pontos determinam uma reta	Dois pontos determinam uma (reta) geodésica

Na geometria esférica o plano euclidiano é substituído pela superfície esférica. Os pontos desta Geometria são os pontos da superfície esférica e as figuras geométricas são traçadas sobre esta superfície.

[206] Fonte da figura disponível em: http://www.Impa.br, acesso em 19 de outubro de 2013.

As geodésicas são círculos máximos (grandes círculos) obtidos pelos planos que interceptam a esfera e passam pelo seu centro. Os outros círculos são menores quando for esse o caso.

Figura 63: Círculos máximos na superfície esférica[207]
Fonte: Site:www.atractor.pt

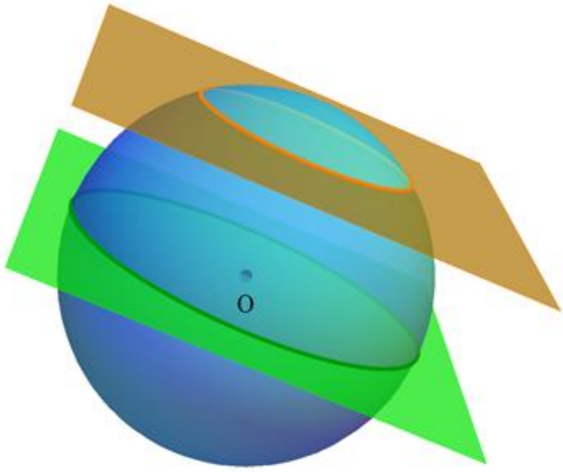


Figura 64: Círculos máximo e mínimo na superfície esférica[208]
Fonte: Site:www.atractor.pt

Desse modo, na superfície de uma esfera a reta pode ser chamada além de geodésica, como círculo máximo ou grande círculo e são determinadas por dois pontos como na geometria euclidiana. A partir dai, é possível que uma reta na superfície esférica possua propriedades próprias. Ela deixa de ser infinita e torna-se ilimitada.

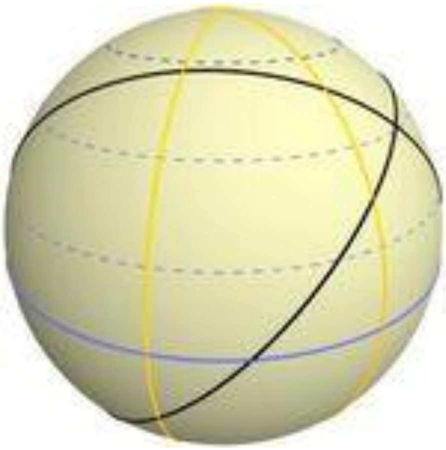


Figura 65: Círculos máximos na superfície esférica[209]
Fonte: Site:www.pt.wikipedia.org

Duas geodésicas são perpendiculares se formam um ângulo reto quando se interceptam. Enquanto na geometria euclidiana, retas perpendiculares a uma

[207] Fonte da figura disponível em: http://www.atractor.pt, acesso em 19 de novembro de 2013.
[208] Fonte da figura disponível em: http://www.atractor.pt, acesso em 19 de novembro de 2013.
[209] Fonte da figura disponível em: http://www.pt.wikipedia.org, acesso em 19 de novembro de 2013.

terceira são paralelas entre si, na geometria esférica isto não acontece, pois as geodésicas perpendiculares a uma geodésica não são paralelas entre si, mas sim concorrentes, isto é, todas as geodésicas perpendiculares têm um ponto comum chamado de polo.

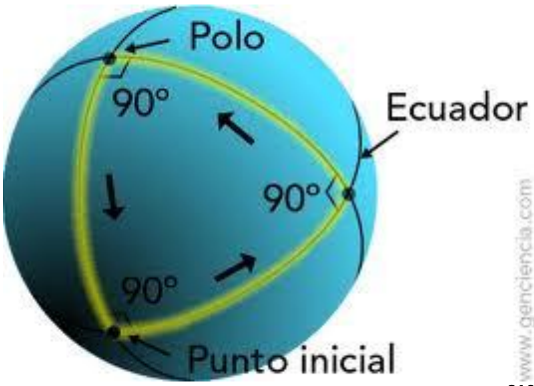


Figura 66: Geodésicas Perpendiculares[210]
Fonte: Site:www.foro.elhacker.net

Na superfície esférica, quaisquer dois círculos máximos são secantes, ou seja, se interceptam, aliás, em dois pontos e evita-se esse inconveniente considerando-se idênticos os dois pontos de intersecção. Considerando a esfera a seguir, podemos observar que duas retas AC e AB, interceptam-se em dois pontos distintos (A e A', chamados pontos antípodas, que são pontos diametralmente opostos ou extremidades de um mesmo diâmetro da esfera).

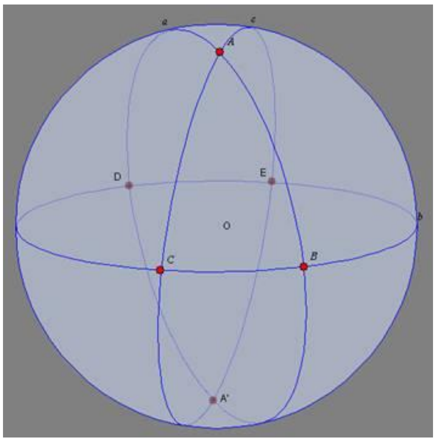


Figura 67: Identificação de pontos antípodas[211]
Fonte: Site:www.prof2000.pt

A distância dos pontos Antípodas A e A' a qualquer ponto da reta CB é a mesma. Polar comum do ponto A é o círculo máximo CE, perpendicular aos círculos máximos AC e AB. Diz-se que o ponto A é o polo de CE. Embora uma reta na

[210] Fonte da figura disponível em: http://www.foro.elhacker.net, acesso em 19 de novembro de 2013.
[211] Fonte da figura disponível em: http://www.prof2000.pt, acesso em 19 de novembro de 2013.

geometria esférica, tenha um comportamento finito, não pode ser enclausurada por uma curva da superfície. Não há como rodear, isto é, dar uma volta em torno de um círculo máximo, sem interceptá-lo.

Outro ponto importante a considerar é que na geometria esférica não existem retas paralelas nem retas secantes, pois quaisquer duas retas dessa geometria sempre se encontram. Para poder ter clareza em relação aos elementos da geometria esférica que serviram de subsídios para a trigonometria esférica vamos definir ângulos sobre a superfície esférica.

Sendo os círculos máximos as “retas” da superfície esférica, define-se ângulo esférico como sendo a intersecção de dois círculos máximos e sua medida é a mesma do ângulo plano.

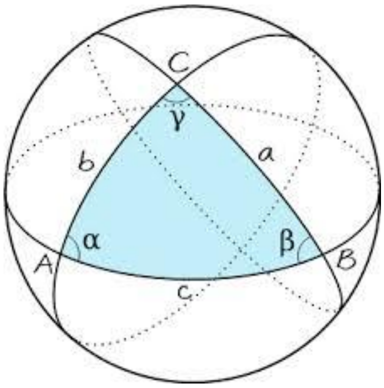


Figura 68: Ângulos na superfície esférica[212]
Fonte: Site:www.cienciaxreligiao.blogspot.com

Denomina-se polígono esférico a porção da superfície esférica limitada exclusivamente por arcos da circunferência máxima, e desta forma sejam A, B e C três pontos distintos sobre uma esfera e não pertencentes ao mesmo círculo máximo. A figura formada pelos arcos de círculos máximos que unem esses pontos dois a dois chama-se triângulo esférico ABC. Os lados a, b e c são arcos e os lados do triângulo esférico, conforme mostrado na figura 68.

Além dos lados e ângulos, os triângulos esféricos possuem três alturas, três bissetrizes, três medianas, enfim, todos esses elementos são definidos igualmente como se faz na geometria euclidiana para os triângulos planos, com a diferença que para aqueles triângulos fala-se em retas, na superfície esférica, que são geodésicas, para termos uma visão geral dessas comparações apresentamos o quadro a seguir.

[212] Fonte da figura disponível em: http://www.cienciaxreligiao.blogspot.com, acesso em 19 de novembro de 2013.

Classificação dos triângulos quanto aos ângulos	
Geometria Euclidiana	**Geometria Esférica**
Retângulo: Um dos ângulos é reto.	**Retângulo:** Um ângulo reto.
Acutângulo: Os três ângulos são agudos.	**Biretângulo:** Dois ângulos retos.
Obtusângulo: Um ângulo obtuso.	**Triretângulo:** Três ângulos retos.
Classificação dos triângulos quanto aos lados	
Geometria Euclidiana	**Geometria Esférica**
Equilátero: Três lados congruentes.	**Retilátero:** Um lado medindo 90^0.
Isósceles: Dois lados congruentes.	**Biretilátero:** Dois lados medindo 90^0.
Escaleno: Três lados de medidas diferentes.	**Triretilátero:** Três lados medindo 90^0.
Retas notáveis de um triângulo	
Geometria Euclidiana	**Geometria Esférica**
Bissetrizes de um triângulo: Possui três. São semirretas que dividem o ângulo ao meio.	**Bissetrizes de um triângulo:** Possui três. São círculos máximos.
Alturas de um triângulo: Possui três. São segmentos de retas.	**Alturas de um triângulo:** Possui três. São arcos de círculos máximos.
Medianas de um triângulo: Possui três. São segmentos de retas.	**Medianas de um triângulo:** Possui três. São arcos de círculos máximos.

Convém notar que, se um triângulo esférico é triretângulo, sê-lo-á também triretilátero e, reciprocamente, ou seja, trata-se de um triângulo que cobre exatamente a oitava parte da superfície esférica associada.

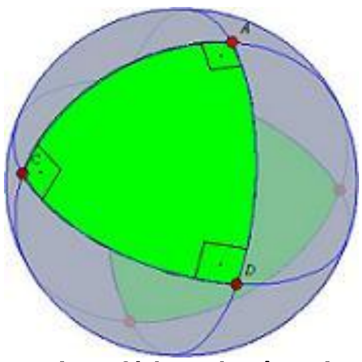


Figura 69: Triangulo esférico triretângulo e triretilátero[213]
Fonte: Site:www.experienciasnamatematica.blogspot.com

No quadro seguinte apresentamos alguns resultados que apontam condições que garantem a congruência de triângulos, tanto na geometria euclidiana como na geometria esférica.

Geometria Euclidiana	Geometria Esférica
As seguintes combinações de lados e ângulos congruentes garantem a congruência de triângulos: LLL, LAL, ALA e LAA_0.	As seguintes combinações de lados e ângulos congruentes garantem a congruências de triângulos: LLL, AAA, LAL e ALA.
A condição LLA garante a congruência somente para certos triângulos (retângulos).	As condições LLA e AAL não garantem a congruência de triângulos.
A correspondência AAA garante que dois triângulos sejam semelhantes.	Não há triângulos semelhantes na esfera.

[213] Fonte da figura disponível em: http://www.experienciasnamatematica.blogspot.com, acesso em 19 de novembro de 2013.

Pode-se ainda fazer as seguintes comparações entre a geometria euclidiana e a geometria esférica, conforme quadro a seguir:

Dois segmentos de retas (arcos geodésicos) com a origem em comum	
Geometria Euclidiana	**Geometria Esférica**
Dois segmentos de reta com a origem em comum nunca se encontram.	Dois arcos de círculos máximos se encontram nos polos formando um biângulo.
É impossível criar um polígono de dois lados	É possível criar um polígono de dois lados, chama-se biângulo tem dois lados e dois ângulos congruentes. Cada lado mede 180^0.
Dois segmentos de reta com a origem em comum dividem o plano em duas regiões infinitas.	Dois meridianos com origem em comum dividem a esfera em dois biângulos (infinitos).
Triângulos e Polígonos	
Geometria Plana	**Geometria Esférica**
Um par de pontos pode ser conectado por um único segmento de reta, três pontos não colineares determinam um único triângulo.	Um par de pontos que não os polos, podem ser ligados por dois arcos do círculo máximo. Como resultado, três pontos não colineares determinam oito triângulos esféricos diferentes. Se um par de pontos for o polo, o triângulo não é único.
A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^0.	A soma dos ângulos internos varia e depende do tamanho desse triângulo, mas é maior que 180^0.
Um triângulo tem no máximo um ângulo reto.	Um triângulo pode ter um, dois, ou três ângulos retos.
É possível ter polígonos semelhantes no plano.	Não é possível ter polígonos semelhantes na superfície esférica.
O caso AAA, no plano, não garante a congruência de dois triângulos.	O caso AAA garante a congruência de triângulo para dois triângulos esféricos.
Quadrados e Áreas	
Geometria Plana	**Geometria Esférica**
É possível construir um quadrado.	Não é possível construir um quadrado, contudo pode-se construir um quadrilátero com quatro lados congruentes e quadro ângulos congruentes (porém não retos).
Um quadrado pode ser dividido em quadrados menores congruentes entre si e semelhantes ao primeiro.	O quadrilátero acima mencionado pode ser dividido em quadriláteros menores congruentes, contudo apenas os ângulos são iguais, os lados não.
A área é medida em unidades de área.	A área é medida em graus.
A área de um triângulo é o produto da medida da base pela medida da altura dividida por dois.	Para se calcular a área de um triângulo esférico, deve-se encontrar a soma das medidas de seus ângulos internos e subtrair 180^0, multiplicando este resultado por r^2.
Pode-se encontrar a área de um polígono por triangulação, somando-se a área dos triângulos que dividem o polígono.	Pode-se encontrar a área de um polígono por triangulação, somando-se a área dos triângulos que dividem o polígono.

Assim como os triângulos planos, os triângulos esféricos possuem fórmulas fundamentais, propriedades e teoremas importantes que servem para resolução de tal triângulo, tendo dado alguns elementos, encontraremos os outros desconhecidos, para isso precisamos conhecer essas fórmulas.

Na sequência, vamos apresentar e demonstrar as fórmulas mais importantes para a resolução de triângulos esféricos.

3.3. FORMULAS FUNDAMENTAIS DA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

3.3.1. Lei dos Cossenos para lados da Trigonometria Esférica

A lei dos cossenos é conhecida como uma das ***fórmulas fundamentais da trigonometria esférica*** ou ***fórmula dos quatro elementos***, pois, por meio dela é possível calcular a medida de um lado, conhecendo as medidas dos outros dois e o ângulo compreendido entre eles.

Para demonstrarmos a fórmula fundamental, vamos inicialmente considerar a Figura 70, baseada em Hogben (1970), que apresenta uma superfície esférica de centro e raio, e contém um triângulo esférico ABC de lados a, b e c, e de ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, internos formados pelas intersecções de três circunferências máximas, portanto temos.

$$\cos(a) = \cos(b)\cdot\cos(c) + \text{sen}(b)\cdot\text{sen}(c)\cdot\cos(\widehat{A})$$
$$\cos(b) = \cos(a)\cdot\cos(c) + \text{sen}(a)\cdot\text{sen}(c)\cdot\cos(\widehat{B})$$
$$\cos(c) = \cos(a)\cdot\cos(b) + \text{sen}(a)\cdot\text{sen}(b)\cdot\cos(\widehat{C})$$

Demonstração: Para a demonstração apresentamos a figura 70, onde por construção temos as retas $\overleftrightarrow{AP}$ e $\overleftrightarrow{AQ}$ são tangentes à superfície esférica S e concorrem no ponto A. Isso quer dizer que os segmentos de reta AO e AP e, AO e AQ são, respectivamente, perpendiculares. A intersecção da reta $\overleftrightarrow{AQ}$ com a reta que passa pelos pontos O e B, obtém-se o ponto Q. Já a intersecção da reta $\overleftrightarrow{AP}$ com a reta que passa pelos pontos O e C, determina o ponto P. Note que os pontos O, A, P e Q, são os vértices de uma pirâmide triangular.

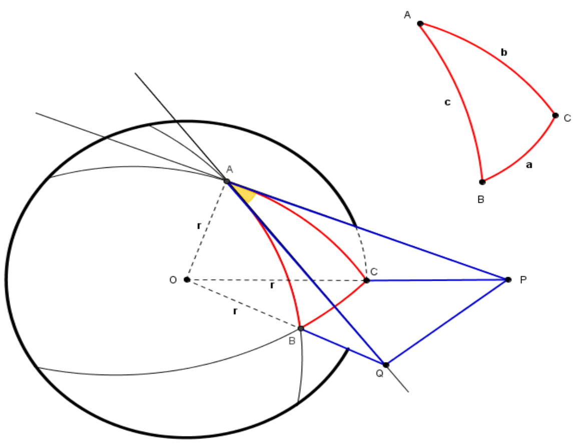


Figura 70 – Demonstração da fórmula fundamental – parte espacial [214]
Fonte: Hogben (1970)

[214] Fonte da figura extraída de Hogben (1970).

Para tornar mais didática essa demonstração, o próximo passo é planificar tal pirâmide (Figura 71), pois, com isso, aplicaremos algumas regras de resolução dos triângulos planos conhecidas, facilitará a demonstração.

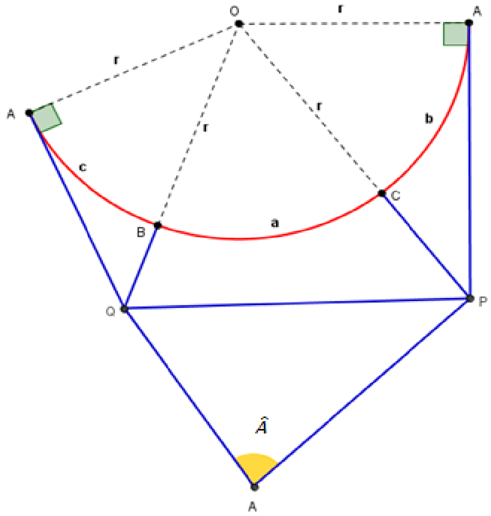


Figura 71 – Demonstração da fórmula fundamental – parte planificada[215]
Fonte: Hogben (1970)

Analisando a figura anterior, verificamos que os triângulos ΔOAP e ΔOAQ, são retângulos em A, então temos:

$$\cos(b) = \frac{\overline{AO}}{\overline{PO}} \quad (01) \qquad \cos(c) = \frac{\overline{AO}}{\overline{QO}} \quad (03)$$

$$\mathrm{sen}(b) = \frac{\overline{AP}}{\overline{PO}} \quad (02) \qquad \mathrm{sen}(c) = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QO}} \quad (04)$$

Também como os triângulos ΔOAP e ΔOAQ, retângulos em A, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras nesses triângulos, onde obtemos:

$$\overline{PO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AP}^2 \quad (05) \qquad \overline{QO}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{AQ}^2 \quad (07)$$

$$\overline{AO}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{AP}^2 \quad (06) \qquad \overline{AO}^2 = \overline{QO}^2 - \overline{AQ}^2 \quad (08)$$

Somando as equações (06) e (08) em ambos os lados, obtemos:

$$\overline{AO}^2 = \overline{PO}^2 - \overline{AP}^2$$

$$\underline{\overline{AO}^2 = \overline{QO}^2 - \overline{AQ}^2}$$

$$2 \cdot \overline{AO}^2 = (\overline{PO}^2 - \overline{AP}^2) + (\overline{QO}^2 - \overline{AQ}^2) \quad (09)$$

Aplicando, a lei dos cossenos para triângulos planos nos triângulos ΔPQO e ΔPQA, obtemos:

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - 2 \cdot \overline{PO} \cdot \overline{QO} \cdot \cos(a) \quad (10)$$

$$\overline{PQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{AQ} \cdot \cos(\widehat{A}) \quad (11)$$

[215] Fonte da figura extraída de Hogben (1970).

Fazendo a subtração das equações (10) – (11), obtemos:

$$\overline{PQ}^2 - \overline{PQ}^2 = 0$$

$$\overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - 2\cdot\overline{PO}\cdot\overline{QO}\cdot\cos(a) - \left(\overline{AP}^2 + \overline{AQ}^2 - 2\cdot\overline{AP}\cdot\overline{AQ}\cdot\cos(\widehat{A})\right) = 0$$

$$\overline{PO}^2 + \overline{QO}^2 - 2\cdot\overline{PO}\cdot\overline{QO}\cdot\cos(a) - \overline{AP}^2 - \overline{AQ}^2 + 2\cdot\overline{AP}\cdot\overline{AQ}\cdot\cos(\widehat{A}) = 0 \qquad (12)$$

Reorganizando, a equação (12), obtemos:

$$2\cdot\overline{PO}\cdot\overline{QO}\cdot\cos(a) = (\overline{PO}^2 - \overline{AP}^2) + (\overline{QO}^2 - \overline{AQ}^2) + 2\cdot\overline{AP}\cdot\overline{AQ}\cdot\cos(\widehat{A}) \quad (13)$$

Substituindo a equação (09) em (13), obtemos:

$$2\cdot\overline{PO}\cdot\overline{QO}\cdot\cos(a) = 2\cdot\overline{AO}^2 + 2\cdot\overline{AP}\cdot\overline{AQ}\cdot\cos(\widehat{A})$$

$$2\cdot\overline{PO}\cdot\overline{QO}\cdot\cos(a) = 2\cdot(\overline{AO}^2 + \overline{AP}\cdot\overline{AQ}\cdot\cos(\widehat{A})) \qquad (14)$$

Agora, dividindo a equação (14) pelo fator ($2\cdot\overline{PO}\cdot\overline{QO}$), temos:

$$\frac{2\cdot\overline{PO}\cdot\overline{QO}\cdot\cos(a)}{2\cdot\overline{PO}\cdot\overline{QO}} = \frac{2\cdot(\overline{AO}^2 + \overline{AP}\cdot\overline{AQ}\cdot\cos(\widehat{A}))}{2\cdot\overline{PO}\cdot\overline{QO}}$$

$$\cos(a) = \frac{\overline{AO}^2 + \overline{AP}\cdot\overline{AQ}\cdot\cos(\widehat{A})}{\overline{PO}\cdot\overline{QO}}$$

$$\cos(a) = \frac{\overline{AO}^2}{\overline{PO}\cdot\overline{QO}} + \frac{\overline{AP}\cdot\overline{AQ}\cdot\cos(\widehat{A})}{\overline{PO}\cdot\overline{QO}}$$

$$\cos(a) = \frac{\overline{AO}\cdot\overline{AO}}{\overline{PO}\cdot\overline{QO}} + \frac{\overline{AP}\cdot\overline{AQ}}{\overline{PO}\cdot\overline{QO}}\cdot\cos(\widehat{A})$$

$$\cos(a) = \frac{\overline{AO}}{\overline{PO}}\cdot\frac{\overline{AO}}{\overline{QO}} + \frac{\overline{AP}}{\overline{PO}}\cdot\frac{\overline{AQ}}{\overline{QO}}\cdot\cos(\widehat{A}) \qquad (15)$$

Agora substituindo as equações (01), (02), (03) e (04), na equação (15), obtemos a fórmula fundamental, lei dos cossenos para lado da Trigonometria Esférica. $\cos(a) = \cos(b)\cdot\cos(c) + \operatorname{sen}(b)\cdot\operatorname{sen}(c)\cdot\cos(\widehat{A})$

De maneira análoga obtemos as demais fórmulas.

$$\cos(b) = \cos(a)\cdot\cos(c) + \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(c)\cdot\cos(\widehat{B})$$

$$\cos(c) = \cos(a)\cdot\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b)\cdot\cos(\widehat{C})$$

Esta fórmula também é conhecida como fórmula dos 4 elementos, em que os 3 lados do triângulo esférico são associados a um de seus ângulos. Note que o lado cujo cosseno aparece no lado esquerdo é aquele oposto ao ângulo que entra na fórmula.

A lei dos cossenos para lados também pode ser descrita dessa maneira “O cosseno de um lado é igual ao produto dos cossenos dos outros dois lados mais o produto dos senos desses dois lados multiplicado pelo cosseno do ângulo oposto ao lado inicial”.

Esse grupo de fórmulas também tem uma versão para ângulos, chamada de lei dos cossenos para ângulos, mas para isso precisamos conhecer os teoremas dos triângulos polares para trigonometria esférica.

Triângulos Polares

Dois triângulos esféricos são polares um em relação ao outro se os vértices de um deles são os polos dos lados do outro.

Polar é o lugar geométrico dos pontos da superfície esférica que distam 90^{o} dos polos; assim, todas as circunferências máximas perpendiculares a polar contém os polos. Dois triângulos esféricos são polares quando os vértices do primeiro são os polos dos lados homônimos do outro, e reciprocamente.

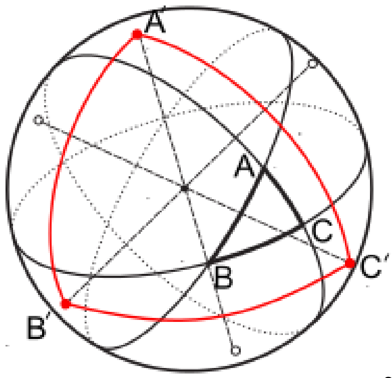


Figura 72 – Triângulos Polares[216]
Fonte: Elaborada pelo autor

A relação existente entre os triângulos polares diz: "*os lados de um triângulo esférico polar são suplementos dos ângulos do triângulo dado, e seus ângulos são os suplementos dos lados do triângulo dado".*

Sejam os triângulos esféricos polares ΔABC e $\Delta A'B'C'$. Os vértices A', B' e C' são polos dos lados correspondentes a, b e c do outro.

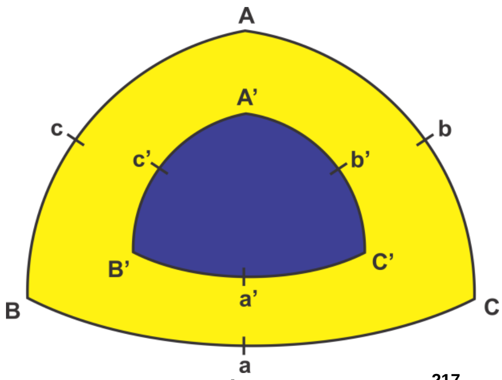


Figura 73 – Triângulos Polares[217]
Fonte: Elaborada pelo Msc. Marcelo Serrão

[216] Elaborado pelo autor.
[217] Elaborado pelo Msc. Marcelo Serrão.

Desde que os lados de um triângulo esférico são arcos de círculos máximos, segue-se que cada ponto do lado a, dista de 90º do seu pólo A' o mesmo se dá para outros lados e os seus respectivos polos. Portanto, o arco de grande círculo que liga dois vértices correspondentes, A e A' por exemplo, é menor do que 90º em outros termos temos **"dois vértices correspondentes devem estar num mesmo hemisfério, em relação a um deles".**

Os teoremas fundamentais relativos aos triângulos polares são:

Teorema 1: Se um triângulo esférico é polar de outro, reciprocamente este outro é polar do primeiro.

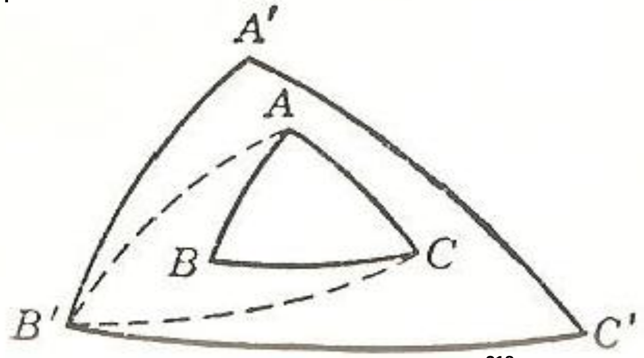


Figura 74 – Triângulos Polares[218]
Fonte: Ayres Jr (1954)

Demonstração: Seja o triângulo $\Delta A'B'C'$, polar do triângulo ΔABC.

Se B' é o pólo do lado AC, o arco B'A é de 90º.

Se C' é o pólo do lado AB, também o arco C'A é de 90º.

Os pontos B' e C' estão, pois, a 90º do ponto A, e o ponto A é o polo do lado B'C', pois que B'C' é um arco de círculo máximo.

De modo análogo provaríamos que os vértices B e C do triângulo ΔABC são os polos do triângulo $\Delta A'B'C'$.

Teorema 2: Em dois triângulos polares, cada ângulo de um deles tem por medida o suplemento do lado que lhe é diretamente oposto no outro triângulo.

Sejam os triângulos $\Delta A'B'C'$ é o triângulo polar do ΔABC. Devemos ter, por exemplo, $\hat{A} = 180^0 - B'C'$ ou seja $\hat{A} = 180^0 - a'$, que é apenas uma das relações que obtemos analisando os triângulos polares.

$\hat{A} = 180^0 - a'$	$\hat{B} = 180^0 - b'$	$\hat{C} = 180^0 - c'$
$\hat{A}' = 180^0 - a$	$\hat{B}' = 180^0 - b$	$\hat{C}' = 180^0 - c$

218 Fonte da figura extraída de Ayres Jr (1954).

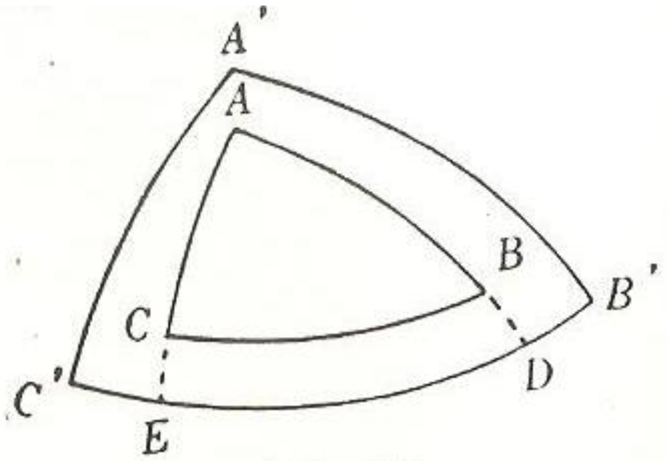


Figura 75 – Triângulos Polares[219]
Fonte: Ayres Jr (1954)

Demonstração: Para os triângulos polares ABC e A'B'C', (Figura 75), provaremos a primeira relação $\hat{A} = 180^0 - B'C'$ ou seja $\hat{A} = 180^0 - a'$, as demais relações obtém-se analogamente.

Com efeito, prolonguem-se AB e AC respectivamente até D e E, pontos do lado B'C'. A medida de ângulo de $\hat{A}$ é o arco DE, pois DE é o arco de círculo máximo descrito de $\hat{A}$ como polo. Além disso, os arcos B'E e C'D são iguais a 90º. Logo temos:

$$DE = DC' - EC' = 90º - EC',$$

$$B'C' = B'E + EC' = 90º + EC',$$

Somando-se membro a membro, obtemos:

$$\begin{array}{l} DE = DC' - EC' = 90º - EC' \quad + \\ \underline{B'C' = B'E + EC' = 90º + EC'} \\ \quad DE + B'C' = 180º \end{array}$$

Como DE é o vértice A e B'C' é igual ao lado a', trocando esses elementos temos;

$$DE + B'C' = 180º$$

$$\hat{A} + a' = 180º$$

$$\hat{A} = 180º - a'$$

Do mesmo modo mostraríamos que os ângulos B e C são suplementares dos lados A'C' e A'B', e obteríamos as outras expressões relacionando lado e ângulo.

3.3.2. Lei dos Cossenos para ângulos da Trigonometria Esférica

---

[219] Fonte da figura extraída de Ayres Jr (1954).

Para demonstrar esse grupo de fórmulas utilizaremos o triângulo polar $\Delta A'B'C'$ de ΔABC, para o qual temos: $a' = 180^0 - \hat{A}$ e $\hat{A}' = 180^0 - a$.

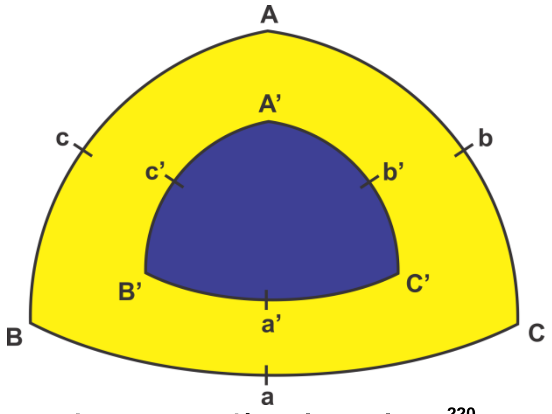


Figura 76 – Triângulos Polares[220]
Fonte: Elaborada pelo Msc. Marcelo Serrão

Utilizando a lei dos cossenos para lados e aplicando as transformações de triângulo polar, e também recordando da trigonometria plana as identidades $sen(180^0 - a) = sen(a)$ e $\cos(180^0 - b) = -\cos(b)$, substituindo as identidades na equação abaixo, obtemos:

$$\cos(a') = \cos(b') \cdot \cos(c') + sen(b') \cdot sen(c') \cdot \cos(\widehat{A}')$$

$$\cos(180^0 - \hat{A}) = \cos(180^0 - \hat{B}) \cdot \cos(180^0 - \hat{C}) + sen(180^0 - \hat{B}) \cdot sen(180^0 - \hat{C}) \cdot \cos(180^0 - a)$$

$$-\cos \hat{A} = -\cos(\hat{B}) \cdot -\cos(\hat{C}) + sen(\hat{B}) \cdot sen(\hat{C}) \cdot -\cos(a)$$

$$-\cos \hat{A} = \cos(\hat{B}) \cdot \cos(\hat{C}) + sen(\hat{B}) \cdot sen(\hat{C}) \cdot -\cos(a)$$

$$-\cos \hat{A} = \cos(\hat{B}) \cdot \cos(\hat{C}) - sen(\hat{B}) \cdot sen(\hat{C}) \cdot \cos(a)$$

Multiplicando a equação anterior por: -1, obtemos.

$$\left[-\cos \hat{A} = \cos(\hat{B}) \cdot \cos(\hat{C}) - sen(\hat{B}) \cdot sen(\hat{C}) \cdot \cos(a)\right] \times (-1)$$

$$\cos \hat{A} = -\cos(\hat{B}) \cdot \cos(\hat{C}) + sen(\hat{B}) \cdot sen(\hat{C}) \cdot \cos(a)$$

Analogamente obteríamos as outras expressões.

$$\cos \hat{B} = -\cos(\hat{A}) \cdot \cos(\hat{C}) + sen(\hat{A}) \cdot sen(\hat{C}) \cdot \cos(b)$$

$$\cos \hat{C} = -\cos(\hat{A}) \cdot \cos(\hat{B}) + sen(\hat{A}) \cdot sen(\hat{B}) \cdot \cos(c)$$

3.3.3. Lei dos Senos Ou Analogia dos Senos para a Trigonometria Esférica

Ela é conhecida também como uma das ***fórmulas fundamentais da trigonometria esférica*** por relacionar a medida de um lado, com a medida de seus ângulos opostos, respectivamente.

---

[220] Elaborado pelo Msc. Marcelo Serrão.

$$\frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{sen}(\widehat{A})}=\frac{\operatorname{sen}(b)}{\operatorname{sen}(\widehat{B})}=\frac{\operatorname{sen}(c)}{\operatorname{sen}(\widehat{C})}$$

Para demonstrarmos essa fórmula fundamental, vamos inicialmente considerar a Figura 77, baseada em Hogben (1970), que apresenta o triângulo esférico de lados a, b e c, de ângulos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$, internos, respectivamente, o ponto O é o centro da superfície esférica que contém o triangulo esférico ΔABC.

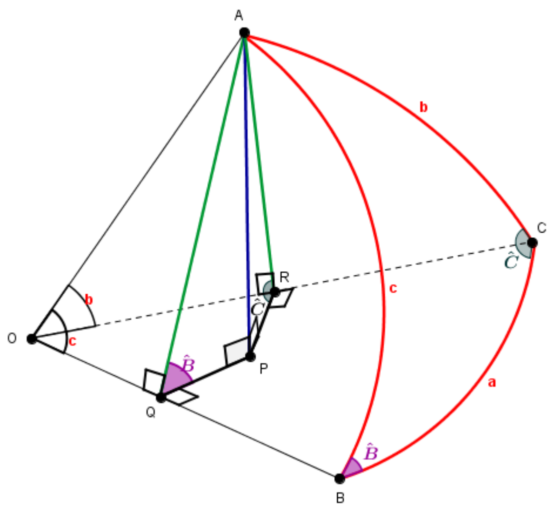


Figura 77 – Demonstração da Lei dos senos para triângulos esféricos [221]
Fonte: Hogben (1970)

Demonstração: Vamos considerar a reta perpendicular ao plano BOC cuja intersecção determina o ponto P e que tal reta passa pelo vértice A. Por P traçamos as retas perpendiculares aos segmentos BO e CO que resulta nos pontos Q e R respectivamente. Agora pelo ponto A, também traçamos as perpendiculares aos segmentos BO e CO cujas intersecções são os pontos Q e R.

O ângulo $\widehat{B}$ é formado pela intersecção dos planos que passam por COA e COB. Como as retas $\overleftrightarrow{AQ}$ e $\overleftrightarrow{QP}$ são perpendiculares no ponto Q, então o ângulo $A\widehat{Q}P$ é congruente ao ângulo $\widehat{B}$.

O ângulo $\widehat{C}$ é formado pela intersecção dos planos que passam por BOA e BOC. Como as retas $\overleftrightarrow{AR}$ e $\overleftrightarrow{RP}$ são perpendiculares no ponto R, então o ângulo é $A\widehat{R}P$ congruente ao ângulo $\widehat{C}$.

No que acabamos de descrever, temos quatro triângulos planos retângulos na figura 78.

[221] Fonte da figura extraída de Hogben (1970).

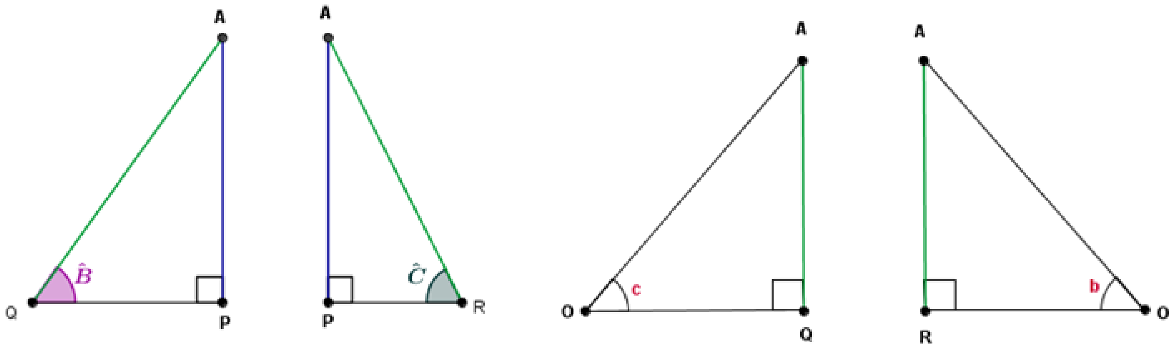


Figura 78 – Quatro triângulos planos retângulos[222]
Fonte: Elaborada pelo autor.

Analisando esses triângulos retângulos obtemos as seguintes equações.

$$\operatorname{sen}(\hat{B}) = \frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} \quad (01) \qquad \operatorname{sen}(c) = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AO}} \quad (03)$$

$$\operatorname{sen}(\hat{C}) = \frac{\overline{AP}}{\overline{AR}} \quad (02) \qquad \operatorname{sen}(b) = \frac{\overline{AR}}{\overline{AO}} \quad (04)$$

Reorganizando as equações (01), (02), (03) e (04), obtemos:

$$\overline{AP} = \overline{AQ} \cdot \operatorname{sen}(\hat{B}) \quad (05) \qquad \overline{AQ} = \overline{AO} \cdot \operatorname{sen}(c) \quad (07)$$

$$\overline{AP} = \overline{AR} \cdot \operatorname{sen}(\hat{C}) \quad (06) \qquad \overline{AR} = \overline{AO} \cdot \operatorname{sen}(b) \quad (08)$$

Substituindo a equação (07) em (05) e a equação (08) em (06), obtemos:

$$\overline{AP} = \overline{AO} \cdot \operatorname{sen}(c) \cdot \operatorname{sen}(\hat{B}) \quad (09) \qquad \overline{AP} = \overline{AO} \cdot \operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(\hat{C}) \quad (10)$$

Igualando as equações (09) com a (10), obtemos:

$$\overline{AP} = \overline{AP}$$

$$\overline{AO} \cdot \operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(\hat{C}) = \overline{AO} \cdot \operatorname{sen}(c) \cdot \operatorname{sen}(\hat{B})$$

$$\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(\hat{C}) = \operatorname{sen}(c) \cdot \operatorname{sen}(\hat{B})$$

$$\frac{\operatorname{sen}(b)}{\operatorname{sen}(\hat{B})} = \frac{\operatorname{sen}(c)}{\operatorname{sen}(\hat{C})} \qquad (11)$$

Usando construção semelhante, e considerando agora o vértice B ou C, encontramos para a igualdade anterior a razão $\frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{sen}(\hat{A})}$, onde podemos concluir que.

$$\frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{sen}(\hat{A})} = \frac{\operatorname{sen}(b)}{\operatorname{sen}(\hat{B})} = \frac{\operatorname{sen}(c)}{\operatorname{sen}(\hat{C})}$$

A lei dos senos também conhecida como analogia dos senos pode ser descrita dessa maneira “O seno dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos

[222] Elaborado pelo autor.

e vice-versa ou então a razão dos senos dos lados para os senos dos ângulos opostos é constante".

As demais fórmulas que servem para a resolução dos triângulos esféricos surgem dessas duas principais fórmulas, leis dos cossenos para lados e a leis dos senos ou Analogias dos senos. A trigonometria esférica estabelece relações convenientes entre os 6 elementos de um triângulo esférico (3 lados e 3 ângulos), tornando possível o cálculo de 3 desses elementos, quando forem conhecidos os outros 3, utilizando a análise combinatória podemos confirmar a quantidade de fórmulas possíveis que servem para resolver um triângulo esférico qualquer.

Assim, cada elemento desconhecido é calculado em função de outros 3, proporcionando, em cada caso, uma combinação de 4 elementos. Como são 6 os elementos de um triângulo, temos que determinar quantas combinações podemos fazer com esses 6 elementos combinado 4 a 4, portanto.

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{A_6^4}{P_4} = \frac{6\times 5\times 4\times 3}{1\times 2\times 3\times 4} = 15$$

3.3.4. Fórmulas dos cincos elementos para a Trigonometria Esférica

Esse grupo de fórmulas é derivado das leis dos cossenos para lados e da lei dos senos, envolve três lados e dois ângulos.

Demonstração: Aplicando a fórmulas dos quatros elementos aos lados *a* e *c* e utilizando as equações abaixo:

$$\cos(a) = \cos(b)\cdot\cos(c) + \operatorname{sen}(b)\cdot\operatorname{sen}(c)\cdot\cos(\widehat{A}) \quad (01)$$

$$\cos(c) = \cos(a)\cdot\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b)\cdot\cos(\widehat{C}) \quad (02)$$

Substituindo a equação (02) na equação (01), obtemos:

$$\cos(a) = \cos(b)\cdot\left[\cos(a)\cdot\cos(b) + \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b)\cdot\cos(\widehat{C})\right] + \operatorname{sen}(b)\cdot\operatorname{sen}(c)\cdot\cos(\widehat{A})$$

$$\cos(a) = \cos(a)\cdot\cos^2(b) + \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b)\cdot\cos(b)\cdot\cos(\widehat{C}) + \operatorname{sen}(b)\cdot\operatorname{sen}(c)\cdot\cos(\widehat{A})$$

$$\cos(a) - \cos(a)\cdot\cos^2(b) = \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b)\cdot\cos(b)\cdot\cos(\widehat{C}) + \operatorname{sen}(b)\cdot\operatorname{sen}(c)\cdot\cos(\widehat{A})$$

$$\cos(a)\cdot\left[1 - \cos^2(b)\right] = \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b)\cdot\cos(b)\cdot\cos(\widehat{C}) + \operatorname{sen}(b)\cdot\operatorname{sen}(c)\cdot\cos(\widehat{A})$$

$$\cos(a)\cdot\operatorname{sen}^2(b) = \operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b)\cdot\cos(b)\cdot\cos(\widehat{C}) + \operatorname{sen}(b)\cdot\operatorname{sen}(c)\cdot\cos(\widehat{A})$$

Agora, dividindo ambos os membros da equação por $\operatorname{sen}(b)$, teremos:

$$\frac{\cos(a)\cdot\operatorname{sen}^2(b)}{\operatorname{sen}(b)} = \frac{\operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b)\cdot\cos(b)\cdot\cos(\widehat{C}) + \operatorname{sen}(b)\cdot\operatorname{sen}(c)\cdot\cos(\widehat{A})}{\operatorname{sen}(b)}$$

$$\frac{\cos(a)\cdot\operatorname{sen}^2(b)}{\operatorname{sen}(b)} = \frac{\operatorname{sen}(a)\cdot\operatorname{sen}(b)\cdot\cos(b)\cdot\cos(\widehat{C})}{\operatorname{sen}(b)} + \frac{\operatorname{sen}(b)\cdot\operatorname{sen}(c)\cdot\cos(\widehat{A})}{\operatorname{sen}(b)}$$

$$\cos(a)\cdot \text{sen}(b) = \text{sen}(a)\cdot\cos(b)\cdot\cos(\widehat{C}) + \text{sen}(c)\cdot\cos(\widehat{A}) \quad (03)$$

Reorganizando a equação anterior obtemos:

$$\text{sen}(c)\cdot\cos(\widehat{A}) = \text{sen}(b)\cdot\cos(a) - \text{sen}(a)\cdot\cos(b)\cdot\cos(\widehat{C}) \quad (04)$$

Analogamente encontramos as outras fórmulas que compõe esse grupo tais como: $\text{sen}(c)\cdot\cos(\widehat{B}) = \text{sen}(a)\cdot\cos(b) - \text{sen}(b)\cdot\cos(a)\cdot\cos(\widehat{C})$

$$\text{sen}(a)\cdot\cos(\widehat{B}) = \text{sen}(c)\cdot\cos(b) - \text{sen}(b)\cdot\cos(c)\cdot\cos(\widehat{A})$$

$$\text{sen}(a)\cdot\cos(\widehat{C}) = \text{sen}(b)\cdot\cos(c) - \text{sen}(c)\cdot\cos(b)\cdot\cos(\widehat{A})$$

$$\text{sen}(b)\cdot\cos(\widehat{C}) = \text{sen}(a)\cdot\cos(c) - \text{sen}(c)\cdot\cos(a)\cdot\cos(\widehat{B})$$

$$\text{sen}(b)\cdot\cos(\widehat{A}) = \text{sen}(c)\cdot\cos(a) - \text{sen}(a)\cdot\cos(c)\cdot\cos(\widehat{B})$$

3.3.5. Fórmula da Co-Tangente para a Trigonometria Esférica

Esse grupo de fórmulas é derivado da fórmula dos cincos elementos e da lei dos senos e relaciona dois lados e dois ângulos.

Demonstração: Aplicando a fórmulas dos cincos elementos e utilizando a lei dos senos, desta forma obtemos a equação que relaciona dois lados e dois ângulos num triângulo esférico.

$$\text{sen}(c)\cdot\cos(\widehat{A}) = \text{sen}(b)\cdot\cos(a) - \text{sen}(a)\cdot\cos(b)\cdot\cos(\widehat{C})$$

Agora, dividindo a equação anterior em ambos os membros por $\text{sen}(a)$, teremos:

$$\frac{\text{sen}(c)\cdot\cos(\widehat{A})}{\text{sen}(a)} = \frac{\text{sen}(b)\cdot\cos(a) - \text{sen}(a)\cdot\cos(b)\cdot\cos(\widehat{C})}{\text{sen}(a)}$$

$$\frac{\text{sen}(c)\cdot\cos(\widehat{A})}{\text{sen}(a)} = \frac{\text{sen}(b)\cdot\cos(a)}{\text{sen}(a)} - \frac{\text{sen}(a)\cdot\cos(b)\cdot\cos(\widehat{C})}{\text{sen}(a)}$$

$$\frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(a)}\cdot\cos(\widehat{A}) = \text{sen}(b)\cdot\frac{\cos(a)}{\text{sen}(a)} - \cos(b)\cdot\cos(\widehat{C}) \quad (01)$$

Utilizando a lei dos senos, $\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(\widehat{A})} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\widehat{B})} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\widehat{C})}$, e reorganizando a lei dos senos obtemos $\frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(a)} = \frac{\text{sen}(\widehat{C})}{\text{sen}(\widehat{A})}$ (02).

Agora substituindo (02) em (01), obtemos:

$$\frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(a)}\cdot\cos(\widehat{A}) = \text{sen}(b)\cdot\frac{\cos(a)}{\text{sen}(a)} - \cos(b)\cdot\cos(\widehat{C})$$

$$\frac{\text{sen}(\widehat{C})}{\text{sen}(\widehat{A})}\cdot\cos(\widehat{A}) = \text{sen}(b)\cdot\text{cotg}(a) - \cos(b)\cdot\cos(\widehat{C})$$

$$\text{sen}(\hat{C})\cdot\frac{\cos(\hat{A})}{\text{sen}(\hat{A})}=\text{sen}(b)\cdot\text{cotg}(a)-\cos(b)\cdot\cos(\hat{C})$$

$$\text{sen}(\hat{C})\cdot\text{cotg}(\hat{A})=\text{sen}(b)\cdot\text{cotg}(a)-\cos(b)\cdot\cos(\hat{C}) \quad (03)$$

Analogamente encontraríamos as outras fórmulas que compõe esse grupo tais como: $\text{sen}(\hat{C})\cdot\text{cotg}(\hat{B})=\text{sen}(a)\cdot\text{cotg}(b)-\cos(a)\cdot\cos(\hat{C})$

$$\text{sen}(\hat{B})\cdot\text{cotg}(\hat{A})=\text{sen}(c)\cdot\text{cotg}(a)-\cos(c)\cdot\cos(\hat{B})$$

$$\text{sen}(\hat{B})\cdot\text{cotg}(\hat{C})=\text{sen}(a)\cdot\text{cotg}(c)-\cos(a)\cdot\cos(\hat{B})$$

$$\text{sen}(\hat{A})\cdot\text{cotg}(\hat{B})=\text{sen}(c)\cdot\text{cotg}(b)-\cos(c)\cdot\cos(\hat{A})$$

$$\text{sen}(\hat{A})\cdot\text{cotg}(\hat{C})=\text{sen}(a)\cdot\text{cotg}(c)-\cos(b)\cdot\cos(\hat{A})$$

Com esse grupo de fórmulas, mais a lei dos cossenos para lados e lei dos senos, completamos o total de 15 fórmulas que servem para resolver qualquer triângulo esférico. Todo o trabalho restante da trigonometria esférica se resume, praticamente, na simplificação destas fórmulas gerais, que são suficientes para resolver qualquer caso clássico que se apresente.

Existem outras fórmulas que podem ser aplicadas na resolução de problemas em triângulos esféricos. Algumas dessas fórmulas são conhecidas como:

- Fórmulas da Borda;
- Fórmulas dos Marinheiros;
- Fórmulas de Briggs;
- Analogias de Gauss/Delambre;
- Analogias de Neper.
- Fórmulas de L' huillier (Para cálculo de área e excesso esférico)

A semelhança que se observa entre algumas fórmulas da trigonometria plana e da trigonometria esférica é uma consequência da correlação que existe entre elas, pois sendo um plano o limite de uma esfera cujo raio cresce até o infinito, deduz-se que todo triângulo plano pode considerar-se como limite de um triângulo esférico em que o raio da esfera cresce sem cessar. Desta forma a trigonometria plana vem a ser um caso particular da trigonometria esférica, e as fórmulas desta surgem, com efeito, das fórmulas da trigonometria plana, quando se supõe o raio igual ao infinito.

Para verificar esta propriedade, é preciso observar que as fórmulas foram deduzidas na hipótese de utilizar o raio da esfera igual à unidade, e estas fórmulas não são aplicáveis em todos os casos. Com efeito, se considerar os lados por seu valor em grau, nenhuma influência tem o valor do raio, pois os valores em grau dos lados homólogos de triângulos semelhantes traçados sobre esferas quaisquer são sempre iguais, todavia isso não acontece quando utilizamos os comprimentos dos lados, por que estes são proporcionais aos raios das esferas, e torna-se necessário restabelecer o raio.

Para tornar essa explicação clara, utilizamos a leis dos senos e dos cossenos da trigonometria esférica para mostrar que podemos passar das fórmulas fundamentais de uma trigonometria para outra, utilizamos para isso o estudo de série de Taylor.

Demonstração 1: Vamos mostrar que, no limite, quando o raio da esfera tende para o infinito, a lei dos senos da trigonometria esférica tronar-se-á, a lei dos senos da trigonometria plana.

A lei dos senos fórmula da trigonometria esférica é $\frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{sen}(\widehat{A})} = \frac{\operatorname{sen}(b)}{\operatorname{sen}(\widehat{B})} = \frac{\operatorname{sen}(c)}{\operatorname{sen}(\widehat{C})}$. Desta forma reorganizando a equação anterior temos, $\frac{\operatorname{sen}(\widehat{A})}{\operatorname{sen}(a)} = \frac{\operatorname{sen}(\widehat{B})}{\operatorname{sen}(b)}$, agora supondo que os lados são expressos por seu valor linear, e que são proporcionais ao raio da esfera, temos $\frac{\operatorname{sen}(\widehat{A})}{\operatorname{sen}\left(\frac{a}{R}\right)} = \frac{\operatorname{sen}(\widehat{B})}{\operatorname{sen}\left(\frac{b}{R}\right)}$ (01).

Utilizando a série de Taylor, para o seno e expandindo com $x_0 = 0$, temos: $\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$ (02).

Substituindo (02) em (01) obtemos:

$$\frac{\operatorname{sen}(\widehat{A})}{\frac{a}{R} - \frac{a^3}{3!\cdot R^3} + \frac{a^5}{5!\cdot R^5} - \frac{a^7}{7!\cdot R^7}\cdots} = \frac{\operatorname{sen}(\widehat{B})}{\frac{b}{R} - \frac{b^3}{3!\cdot R^3} + \frac{b^5}{5!\cdot R^5} - \frac{b^7}{7!\cdot R^7}\cdots}$$

e multiplicando os dois lados pelo raio R, e depois fatorando temos,

$$\frac{\operatorname{sen}(\widehat{A})}{a - \frac{1}{R^2}\left(\frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!\cdot R^2} - \frac{a^7}{7!\cdot R^4}\cdots\right)} = \frac{\operatorname{sen}(\widehat{B})}{b - \frac{1}{R^2}\left(\frac{b^3}{3!} + \frac{b^5}{5!\cdot R^2} - \frac{b^7}{7!\cdot R^4}\cdots\right)}$$

Mas, pelo teste da razão de séries, uma série com termo geral da forma $\frac{k}{2n!}$ é convergente. De fato $\frac{k}{(2n+2)!}\cdot\frac{2n!}{k}=\frac{1}{(2n+2)(2n+1)!}\to 0$, quando $n\to\infty$.

Como esta série é maior, em modulo, para $R>1$, que a série com termo geral $\frac{k}{(R^{2n}\cdot 2n!)}$, assim ambas convergem, e ao tomarmos o limite de $R\to\infty$, em ambos os lados (note que o ângulo $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$, podem mudar se mantivermos o comprimento dos três lados fixos), quando temos o limite de $R\to\infty$, caso este em que a esfera se reduz a um plano e, por conseguinte o triângulo esférico a um plano, a fórmula se transforma em, $\frac{sen(\widehat{A})}{a}=\frac{sen(\widehat{B})}{b}$, e de maneira análoga obteríamos.

$$\frac{sen(\widehat{A})}{a}=\frac{sen(\widehat{B})}{b}=\frac{sen(\widehat{C})}{c}$$

Demonstração 2: Vamos mostrar que, no limite, quando o raio da esfera tende para o infinito, a lei dos cossenos da trigonometria esférica tronar-se-á, a lei dos cossenos da trigonometria plana.

A lei dos cossenos da trigonometria esférica é $\cos(a)=\cos(b)\cdot\cos(c)+sen(b)\cdot sen(c)\cdot\cos(\widehat{A})$, Desta forma reorganizando a equação anterior temos, $\cos(\widehat{A})=\frac{\cos(a)-\cos(b)\cdot\cos(c)}{sen(b)\cdot sen(c)}$, agora supondo que os lados são expressos por seu valor linear, e que são proporcionais ao raio da esfera, temos, $\cos(\widehat{A})=\frac{\cos\left(\frac{a}{R}\right)-\cos\left(\frac{b}{R}\right)\cdot\cos\left(\frac{c}{R}\right)}{sen\left(\frac{b}{R}\right)\cdot sen\left(\frac{c}{R}\right)}$ (01).

Utilizando a série de Taylor, para o cosseno e o seno e expandindo com $x_0=0$, temos $\begin{cases}\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots \text{ (02)}\\ sen(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots \text{ (03)}\end{cases}$, Substituindo (02) e (03) em (01) obtemos:

$$\cos(\widehat{A})=\frac{1-\frac{(a/R)^2}{2!}+\frac{(a/R)^4}{4!}+\cdots-\left(1-\frac{(b/R)^2}{2!}+\frac{(b/R)^4}{4!}+\cdots\right)\cdot\left(1-\frac{(c/R)^2}{2!}+\frac{(c/R)^4}{4!}+\cdots\right)}{\left(\frac{b}{R}-\frac{(b/R)^3}{3!}+\cdots\right)\cdot\left(\frac{c}{R}-\frac{(c/R)^3}{3!}+\cdots\right)}$$

$$\cos(\widehat{A})=\frac{1-\frac{1}{R^2}\cdot\left(\frac{a^2}{2!}+\cdots\right)-1+\left(\frac{-1}{R^2}\right)\cdot\left(-\frac{c^2}{2!}+\cdots-\frac{b^2}{2!}+\cdots\right)-\left(-\frac{(b/R)^2}{2!}+\cdots\right)\cdot\left(-\frac{(c/R)^2}{2!}+\cdots\right)}{\frac{bc}{R^2}+\frac{b}{R^4}\left(-\frac{c^3}{3!}+\cdots\right)+\frac{1}{R^3}\left(\frac{b^3}{3!}+\cdots\right)}$$

$$\cos(\widehat{A})=\frac{-\frac{a^2}{2!}+\frac{c^2}{2!}+\frac{b^2}{2!}+\frac{1}{R^2}\cdot\left(\frac{a^4}{4!}+\cdots+\frac{c^4}{4!}+\cdots+\frac{b^4}{4!}+\cdots\right)-\frac{1}{R^2}\cdot\left(-\frac{b^2}{2!}+\cdots\right)\cdot\left(-\frac{c^2}{2!}+\cdots\right)}{bc+\frac{b}{R^2}\left(-\frac{c^3}{3!}+\cdots\right)+\frac{1}{R}\left(\frac{b^3}{3!}+\cdots\right)}$$

Mas, pelo teste da razão de séries, uma série com termo geral da forma $\frac{k}{2n!}$ é convergente. De fato $\frac{k}{(2n+2)!}\cdot\frac{2n!}{k}=\frac{1}{(2n+2)(2n+1)!}\to 0$, quando $n\to\infty$.

Como esta série é maior, em modulo, para $R>1$, que a série com termo geral $\frac{k}{(R^{2n}\cdot 2n!)}$, assim ambas convergem, e ao tomarmos o limite de $R\to\infty$, em ambos os lados (note que o ângulo $\widehat{A}$, pode mudar se mantivermos o comprimento dos três lados fixos), quando temos o limite de $R\to\infty$, caso este em que a esfera se reduz a um plano e, por conseguinte o triângulo esférico a um plano, a fórmula se transforma em, $\cos(\widehat{A})=\frac{-\frac{a^2}{2!}+\frac{c^2}{2!}+\frac{b^2}{2!}}{bc}$, reorganizando essa equação obtemos:

$$\cos(\widehat{A})=\frac{-\frac{a^2}{2!}+\frac{c^2}{2!}+\frac{b^2}{2!}}{bc}$$

$$\frac{a^2}{2!}=\frac{c^2}{2!}+\frac{b^2}{2!}-bc\cdot\cos(\widehat{A})$$

$$\frac{a^2}{2}=\frac{c^2}{2}+\frac{b^2}{2}-bc\cdot\cos(\widehat{A})$$

$$a^2=c^2+b^2-2bc\cdot\cos(\widehat{A})$$

Desta forma obtemos a lei dos cossenos para a trigonometria plana.

Outro aperfeiçoamento adveio na transformação moderna, do senoverso que apareceu no desenvolvimento da trigonometria Indiana antiga transformando-se para a função semisenoverso e com o aperfeicoamento do estudo do logaritmo e a posibilidadede de logaritmizar todas as fórmulas das trigonometrias tanto plana como da esférica o que melhorou e simplificou os cálculos trigonométricos. Isso em particular, foi importante na navegação, pois o semisenoverso é utilizado para calcular com precisão as distâncias, as datas de posições angulares, por uma esfera (por exemplo, longitude e latitude), onde você pode usar diretamente a função semisenoverso. O termo semisenoverso foi cunhado nos textos de navegação precisamente para esta aplicação, vamos demonstrar aqui algumas fórmulas fundamentais da trigonometria esférica que podemos transforma-lás com o auxilio da função semisenoverso.

Brummelen (2013) afirma:

> O semisenoverso foi primeiramente tabelado por James Andrew em 1805, e aos poucos se tornou favorito entre os marinheiros. Uma vantagem natural do semisenoverso é que seus valores, quando tomamos o quadrado do seno, será sempre positivos. Essa propriedade significativa garantia ao marinheiro nunca precisava se preocupar, pois o valor do semisenoverso é positivo ou negativo, ainda melhor, desde que o semisenoverso tende de 0 para 1, para ângulos de 0º para 180º, a função é inversível nessa variação. (BRUMMELEN, 2013, p.160, tradução nossa).

Como temos uma expressão para o senoverso $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{(1-\cos\theta)}{2}$, obtida na página (97), arrumando essa equação $2\cdot\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=(1-\cos\theta)$, divindo essa equação por 2 em ambos os lados $\frac{2\cdot\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2}=\frac{(1-\cos\theta)}{2}$, obtemos uma nova equação que é $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{(1-\cos\theta)}{2}$, (01).

E como por definição a função semisenoverso é metade do senoverso ou seja $\frac{\text{senoverso}(\theta)}{2}$, logo a função semisenoverso é $\frac{\text{senoverso}(\theta)}{2}=\operatorname{ssv}\theta$ (02).

Finalmente comparando (01) com (02), temos a expressão matemática para a função semisenoverso $\operatorname{ssv}\theta=\frac{(1-\cos\theta)}{2}$ ou $\operatorname{ssv}(\theta)=\frac{1}{2}\cdot(1-\cos\theta)$.

Demonstração: Utilizando as leis dos cossenos para lados da trigonometria esférica, $\cos(a)=\cos(b)\cdot\cos(c)+\operatorname{sen}(b)\cdot\operatorname{sen}(c)\cdot\cos(\widehat{A})$, vamos mostrar que essa equação fica pode ser representada na versão semisenoverso da seguinte maneira $ssv(a) = ssv(b-c) + sen(b)\cdot sen(c)\cdot ssv(\widehat{A})$.

Para nos auxiliar nessa demonstração veremos algumas propriedade da função semisenoverso.

1) $ssv(0^0) = 0$ 3) $ssv(-\theta) = ssv(\theta)$

2) $ssv(180^0) = 1$ 4) $\cos(\theta) = 1 - 2\cdot ssv(\theta)$

Utilizando a lei dos cossenos para lados e substituindo a função semisenoverso e suas propriedades obtemos.

$\cos(a) = \cos(b)\cdot\cos(c) + sen(b)\cdot sen(c)\cdot\cos(\widehat{A})$, subtraindo de um, ambos os lados essa equação obtemos.

$$1-\cos(a) = 1-\left[\cos(b)\cdot\cos(c) + sen(b)\cdot sen(c)\cdot\cos(\widehat{A})\right]$$

$1-\cos(a) = 1-\cos(b)\cdot\cos(c) - sen(b)\cdot sen(c)\cdot\cos(\widehat{A})$, vamos multiplicar por $\frac{1}{2}$ ambos lados da equação anterior.

$\frac{1}{2}\cdot\left[1-\cos(a)\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[1-\cos(b)\cdot\cos(c) - sen(b)\cdot sen(c)\cdot\cos(\widehat{A})\right]$, substituindo na equação anterior a propriedade (4) $\cos(\widehat{A}) = 1-2\cdot ssv(\widehat{A})$, obtemos.

$$\frac{1}{2}\cdot\left[1-\cos(a)\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[1-\cos(b)\cdot\cos(c) - sen(b)\cdot sen(c)\cdot\left(1-2\cdot ssv(\widehat{A})\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left[1-\cos(a)\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[1-\cos(b)\cdot\cos(c) - sen(b)\cdot sen(c) + 2\cdot sen(b)\cdot sen(c)\cdot ssv(\widehat{A})\right]$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left[1-\cos(a)\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[1-\left(\cos(b)\cdot\cos(c) + sen(b)\cdot sen(c)\right) + 2\cdot sen(b)\cdot sen(c)\cdot ssv(\widehat{A})\right]$$

$$\frac{1}{2}\cdot\left[1-\cos(a)\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[1-\cos(b-c) + 2\cdot sen(b)\cdot sen(c)\cdot ssv(\widehat{A})\right]$$

$$ssv(a) = \frac{1}{2}\cdot\left[2\cdot ssv(b-c) + 2\cdot sen(b)\cdot sen(c)\cdot ssv(\widehat{A})\right]$$

com efeito multiplicando por $1/2$, o segundo membro da equação obtemos.

$$ssv(a) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot ssv(b-c) + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot sen(b)\cdot sen(c)\cdot ssv(\widehat{A})$$

$ssv(a) = ssv(b-c) + sen(b)\cdot sen(c)\cdot ssv(\widehat{A})$, que é a fórmula procurada, e de maneira análoga obteríamos as outras fórmulas.

$$ssv(b) = ssv(a-c) + sen(a)\cdot sen(c)\cdot ssv(\widehat{B})$$

$$ssv(c) = ssv(a-b) + sen(a)\cdot sen(b)\cdot ssv(\widehat{C})$$

Demonstração: Para podermos determinar uma fórmula para ângulos internos de um triângulo esférico a partir da aplicação da função semisenoverso, utilizamos para essa demonstração umas das fórmulas da trigonometria esférica chamada de fórmula da Borda ou dos Marinheiros, também conhecida como fórmula de Briggs.

$\operatorname{sen}\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)=\sqrt{\frac{\operatorname{sen}(p-b)\cdot\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}(b)\cdot\operatorname{sen}(c)}}$, onde $p=\frac{1}{2}\cdot(a+b+c)$. Vamos mostrar que essa equação fica representada na versão semisenoverso da seguinte maneira $\operatorname{ssv}(\widehat{A})=\operatorname{sen}(p-b)\cdot\operatorname{sen}(p-b)\cdot\operatorname{cossec}(b)\cdot\operatorname{cossec}(c)$.

Utilizando umas das equações da trigonometria esférica chamada de fórmula da Borda ou dos Marinheiros, substituindo algumas co-funções e suas propriedades obtemos.

$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)=\frac{\operatorname{sen}(p-b)\cdot\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}(b)\cdot\operatorname{sen}(c)}$ e como $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)=\frac{(1-\cos\widehat{A})}{2}$, ou seja fazendo a comparação com $\operatorname{ssv}\widehat{A}=\frac{(1-\cos\widehat{A})}{2}$, portanto podemos dizer que $\operatorname{ssv}\widehat{A}=\operatorname{sen}^2\left(\frac{\widehat{A}}{2}\right)$, logo substituindo na equação chamada da Borda ou dos Marinheiros, também conhecida como fórmula de Briggs. temos:

$$\operatorname{ssv}\widehat{A}=\frac{\operatorname{sen}(p-b)\cdot\operatorname{sen}(p-c)}{\operatorname{sen}(b)\cdot\operatorname{sen}(c)}$$

$$\operatorname{ssv}\widehat{A}=\operatorname{sen}(p-b)\cdot\operatorname{sen}(p-c)\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}(b)\cdot\operatorname{sen}(c)}$$

$\operatorname{ssv}\widehat{A}=\operatorname{sen}(p-b)\cdot\operatorname{sen}(p-c)\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}(b)}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen}(c)}$, utilizando a co-função para a função seno tais como $\operatorname{cossec}(b)=\frac{1}{\operatorname{sen}(b)}$ e $\operatorname{cossec}(c)=\frac{1}{\operatorname{sen}(c)}$, fazendo as devidas substituições obtemos: $\operatorname{ssv}\widehat{A}=\operatorname{sen}(p-b)\cdot\operatorname{sen}(p-c)\cdot\operatorname{cosec}(b)\cdot\operatorname{cosec}(c)$, que é a fórmula procurada e de análogas podemos obter as demais fórmulas:

$$\operatorname{ssv}(\widehat{B})=\operatorname{sen}(p-a)\cdot\operatorname{sen}(p-c)\cdot\operatorname{cosec}(a)\cdot\operatorname{cosec}(c)$$

$$\operatorname{ssv}(\widehat{C})=\operatorname{sen}(p-a)\cdot\operatorname{sen}(p-b)\cdot\operatorname{cosec}(a)\cdot\operatorname{cosec}(b)$$

Observando as transformações das fórmulas fundamentais da trigonometria esférica feitas com o advento da função semisenoverso, e com o auxilio dos logaritmos, temos a ideia de como facilitou em sobremaneira os cálculos para as aplicações da trigonometria esférica.

Apresentamos também um estudo similar para os triângulos esféricos retângulos como consequência do estudo da trigonometria esférica.

3.4 TRIÂNGULOS ESFÉRICOS RETÂNGULOS

O estudo dos triângulos retângulos esféricos que nos seu primórdio apareceu como aplicação do teorema de Menelau e posteriormente apareceu também no Almagesto, ao longo da história foi objeto de estudo de vários matemáticos e desta forma passando a servir para varias aplicações.

O triângulo esférico com pelo menos um ângulo reto se denomina triângulo retângulo, uma característica importante é que qualquer triângulo esférico pode descompor-se em dois triângulos esféricos retângulos.

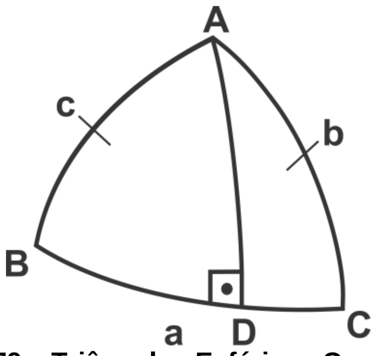


Figura 79 – Triângulos Esféricos Qualquer [223]
Fonte: Elaborado pelo MSc. Marcelo Serrão

Sendo já conhecido um ângulo reto, temos apenas 5 elementos dos seis possíveis do triângulo esférico retângulo, como serão ainda fornecidos dois elementos quaisquer, dentre os cinco restantes. Desta forma podemos obter os dois outros elementos desconhecidos, do triângulo, utilizando a análise combinatória podemos fazer a combinação de cinco elementos dois a dois, que fornecerá o total de fórmulas possíveis para resolução dos triângulos retângulos esféricos.

$$C_m^2 = \frac{m(m-1)}{n!} = \frac{5(5-1)}{2!} = \frac{5\times 4}{1\times 2} = 10$$

[223] Elaborado pelo Msc. Marcelo Serrão.

Podemos obter todas as fórmulas, a partir de um triângulo retângulo em C, conforme figura 80.

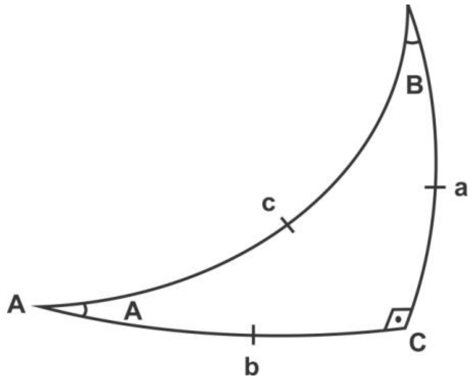


Figura 80 – Triângulos Retângulos Esféricos[224]
Fonte: Elaborado pelo MSc. Marcelo Serrão

Fazendo parte dos 3 elementos dados de um triângulo um ângulo ou lado igual a 90º (triângulo esférico retângulo ou retilátero), é evidente que este elemento irá simplificar a combinação escolhida, como podemos verificar no quadro abaixo, no qual consta as fórmulas gerais e as fórmulas simplificadas da trigonometria esférica que servem para resolver qualquer caso dos triângulos retângulos e retiláteros.

QUADRO DEMONSTRATIVO DAS FÓRMULAS SIMPLIFICADAS PARA TRIÂNGULOS ESFÉRICOS RETÂNGULOS E/OU RETILATEROS

FÓRMULAS GERAIS	FÓRMULAS SIMPLIFICADAS	
	Ângulo A = 90º	**Lado a = 90º**
$\cos(a)=\cos(b)\cdot\cos(c)+\mathrm{sen}(b)\cdot\mathrm{sen}(c)\cdot\cos(\hat{A})$	$\cos(a)=\cos(b)\cdot\cos(c)$	$\cos(\hat{A})=-\mathrm{cotg}(b)\cdot\mathrm{cotg}(c)$
$\cos(b)=\cos(a)\cdot\cos(c)+\mathrm{sen}(a)\cdot\mathrm{sen}(c)\cdot\cos(\hat{B})$		$\cos(b)=\mathrm{sen}(c)\cdot\cos(\hat{B})$
$\cos(c)=\cos(a)\cdot\cos(b)+\mathrm{sen}(a)\cdot\mathrm{sen}(b)\cdot\cos(\hat{C})$		$\cos(c)=\mathrm{sen}(b)\cdot\cos(\hat{C})$
$\cos\hat{A}=-\cos(\hat{B})\cdot\cos(\hat{C})+\mathrm{sen}(\hat{B})\cdot\mathrm{sen}(\hat{C})\cdot\cos(a)$	$\cos(a)=\mathrm{cotg}(\hat{B})\cdot\mathrm{cotg}(\hat{C})$	$\cos(\hat{A})=-\cos(\hat{B})\cdot\cos(\hat{C})$
$\cos\hat{B}=-\cos(\hat{A})\cdot\cos(\hat{C})+\mathrm{sen}(\hat{A})\cdot\mathrm{sen}(\hat{C})\cdot\cos(b)$	$\cos(\hat{B})=\mathrm{sen}(\hat{C})\cdot\cos(b)$	
$\cos\hat{C}=-\cos(\hat{A})\cdot\cos(\hat{B})+\mathrm{sen}(\hat{A})\cdot\mathrm{sen}(\hat{B})\cdot\cos(c)$	$\cos(\hat{C})=\mathrm{sen}(\hat{B})\cdot\cos(c)$	
$\frac{\mathrm{sen}(a)}{\mathrm{sen}(\hat{A})}=\frac{\mathrm{sen}(b)}{\mathrm{sen}(\hat{B})}$	$\mathrm{sen}(b)=\mathrm{sen}(a)\cdot\mathrm{sen}(\hat{B})$	$\mathrm{sen}(\hat{B})=\mathrm{sen}(b)\cdot\mathrm{sen}(\hat{A})$
$\frac{\mathrm{sen}(a)}{\mathrm{sen}(\hat{A})}=\frac{\mathrm{sen}(c)}{\mathrm{sen}(\hat{C})}$	$\mathrm{sen}(c)=\mathrm{sen}(a)\cdot\mathrm{sen}(\hat{C})$	$\mathrm{sen}(\hat{C})=\mathrm{sen}(c)\cdot\mathrm{sen}(\hat{A})$
$\frac{\mathrm{sen}(b)}{\mathrm{sen}(\hat{B})}=\frac{\mathrm{sen}(c)}{\mathrm{sen}(\hat{C})}$		
$\mathrm{cotg}(a)\cdot\mathrm{sen}(c)=\mathrm{cotg}(\hat{A})\cdot\mathrm{sen}(\hat{B})+\cos(c)\cdot\cos(\hat{B})$	$\mathrm{cotg}(a)=\mathrm{cotg}(c)\cdot\cos(\hat{B})$	$\mathrm{cotg}(\hat{A})=-\cos(c)\cdot\mathrm{cotg}(\hat{B})$
$\mathrm{cotg}(a)\cdot\mathrm{sen}(b)=\mathrm{cotg}(\hat{A})\cdot\mathrm{sen}(\hat{C})+\cos(b)\cdot\cos(\hat{C})$	$\mathrm{cotg}(a)=\mathrm{cotg}(b)\cdot\cos(\hat{C})$	$\mathrm{cotg}(\hat{A})=-\cos(b)\cdot\mathrm{cotg}(\hat{C})$
$\mathrm{cotg}(b)\cdot\mathrm{sen}(a)=\mathrm{cotg}(\hat{B})\cdot\mathrm{sen}(\hat{C})+\cos(a)\cdot\cos(\hat{C})$		$\mathrm{cotg}(b)=\mathrm{cotg}(\hat{B})\cdot\mathrm{sen}(\hat{C})$
$\mathrm{cotg}(b)\cdot\mathrm{sen}(c)=\mathrm{cotg}(\hat{B})\cdot\mathrm{sen}(\hat{A})+\cos(c)\cdot\cos(\hat{A})$	$\mathrm{cotg}(\hat{B})=\mathrm{cotg}(b)\cdot\mathrm{sen}(c)$	
$\mathrm{cotg}(c)\cdot\mathrm{sen}(a)=\mathrm{cotg}(\hat{C})\cdot\mathrm{sen}(\hat{B})+\cos(a)\cdot\cos(\hat{B})$		$\mathrm{cotg}(c)=\mathrm{cotg}(\hat{C})\cdot\mathrm{sen}(\hat{B})$
$\mathrm{cotg}(c)\cdot\mathrm{sen}(b)=\mathrm{cotg}(\hat{C})\cdot\mathrm{sen}(\hat{A})+\cos(b)\cdot\cos(\hat{A})$	$\mathrm{cotg}(\hat{C})=\mathrm{cotg}(c)\cdot\mathrm{sen}(b)$	

[224] Elaborado pelo Msc. Marcelo Serrão.

No quadro acima apresentamos uma versão para o teorema de Pitágoras do triângulo plano, que também tem uma versão para geometria esférica que se apresenta dessa forma $\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c)$.

Demonstração: Para demonstrar o teorema de Pitágoras para a geometria esférica, utilizaremos a lei dos cossenos para a trigonometria esférica e como o ângulo $\widehat{A} = 90º$ do triângulo esférico, portanto temos $\cos 90º = 0$.

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c) \cdot \cos(\widehat{A})$$
$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c) \cdot \underbrace{\cos(90º)}_{0}$$
$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c) + \operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c) \cdot 0$$
$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c)$$

Ao longo da história da matemática, vários algoritmos foram desenvolvidos para demonstrar as dez fórmulas para resolução de triângulos retângulos. Demonstraremos aqui apenas dois desses algoritmos.

Regra de Neper ou Algoritmo de Neper: Recorrendo-se ao artifício abaixo, devido a Neper, é possível escrever-se, imediatamente, as dez fórmulas fundamentais, (Ayres Jr, 1954, p.271-272).

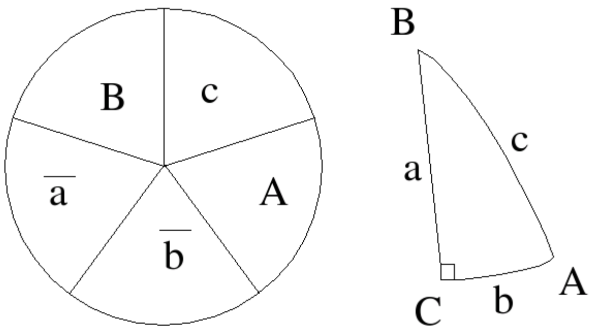


Figura 81 – Esquema para aplicação da Regra de Neper [225]
Fonte: Elaborada pelo autor

Na figura 81, mostramos um triângulo esquemático obtido a partir do triângulo esférico figura 80, pela substituição de c por co - c = 90^0 – c; A por co - A = 90^0 – A; B por co - B = 90^0 – B. Note que a letra C é omitida no círculo, no círculo é apresentado apenas cinco elementos.

Escolhendo qualquer um dos cinco elementos e denominar-se-ão de médio, ou meio, os dois próximos serão os adjacentes e os dois restantes em opostos. Então, as regras de Neper são:

1 - O seno do meio é igual ao produto das tangentes adjacentes;

[225] Elaborado pelo autor.

2 - O seno do meio é igual ao produto dos cossenos opostos.

Exemplos:

01) Toma-se por co – B, como meio, então co – c, e a são os adjacentes e co – A e b são os opostos, utilizando a 1ª Regra, obtemos.

$$\mathrm{sen}(90^0 - B) = \mathrm{tg}(90^0 - c) \cdot \mathrm{tg}(a)$$
$$\cos(B) = \mathrm{cotg}(c) \cdot \mathrm{tg}(a)$$

02) Toma-se por co – B, como meio, então co – c, e a são os adjacentes e co – A e b são os opostos, utilizando a 2ª Regra, obtemos.

$$\mathrm{sen}(90^0 - B) = \cos(90^0 - A) \cdot \cos(b)$$
$$\cos\,(B) = \mathrm{sen}(A) \cdot \cos(b)$$

Regra de Mauduit: É uma regra para facilitar a memorização das fórmulas que servem para resolver um triângulo esférico retângulo, (Ferraz, 2006, p.15).

E é enunciado da seguinte maneira "O cosseno do elemento médio é igual ao produto das cotangentes dos elementos conjuntos ou produtos dos senos dos senos dos elementos separados", representando de outra maneira teríamos:

$$\mathrm{Cos} = \mathrm{Co} \cdot \mathrm{Co} = \mathrm{Se} \cdot \mathrm{Se}$$

Na aplicação desta regra, há que se considerar:

1 - Admitindo ***a*** como elemento médio (poderia ser escolhido qualquer elemento do triângulo, exceto o ângulo reto), seus elementos conjuntos serão os lados **B** e **C**, seus elementos separados serão **b** e **c**.

2 - O Elemento reto é considerado inexiste na aplicação da regra. Se admitirmos **b** como elemento médio, seus conjuntos serão **C** e **c;** e

3 - Não se "tomam" os catetos, e sim seus complementos: Se **A** for o ângulo reto, utilizaremos $(90^0 - c)$ e não **c**; $(90^0 - b)$ e não **b**.

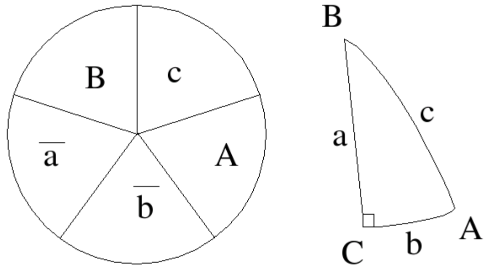


Figura 82 – Esquema para aplicação da Regra de Mauduit[226]
Fonte: Ferraz, 2006

[226] Fonte da figura disponível em Ferraz, 2006, p.15.

Para entendermos, o significado das palavras médio, conjunto e separado, descrevemos: O elemento médio é aquele escolhido aleatoriamente entre os demais elementos do triângulo esférico (exceto o ângulo reto), e que servirá de base para obtenção dos elementos conjuntos e separados.

Exemplos:

01) Sendo dados os dois catetos b e c, utilizando a 1ª Regra, calcule a hipotenusa a, obtemos. $\cos(a) = \operatorname{sen}(90^0 - b) \cdot \operatorname{sen}(90^0 - c)$

$$\cos(a) = \cos(b) \cdot \cos(c)$$

02) Sendo dados os dois catetos b e c, utilizando a 2ª Regra, calcule o ângulo C, obtemos. $\cos(90^0 - b) = \operatorname{cotg}(C) \cdot \operatorname{cotg}(90^0 - c)$

$$\operatorname{sen}(b) = \operatorname{cotg}(C) \cdot \operatorname{tg}(c)$$

$$\operatorname{cotg}(C) = \frac{\operatorname{sen}(b)}{\operatorname{tg}(c)}$$

Entendemos que com o advento do estudo logaritmo no século XVII, propiciou que os cálculos trigonométricos fossem simplificados, desta forma todas as fórmulas da trigonometria tanto plana como esférica passam a ser utilizadas com logaritmo. Quase exatamente meio século após a publicação de seus logaritmos, surgiu a análise matemática, e com o aprofundamento do estudo das séries matemática pode-se demonstrar que as fórmulas fundamentais de uma trigonometria transformam-se da outra trigonometria, semelhante com suas próprias características.

Finalizando esse capitulo, afirmamos como os estudos da geometria não-euclidiana desenvolveu a geometria esférica e como essas relações fundamentam a trigonometria esférica.

Evidenciamos também que com advento da análise matemática, a trigonometria passou a ser incorporada por essa área da matemática, e o estudo das series matemáticas as fórmulas fundamentais da trigonometria esférica se transformam nas da trigonometria plana, desde que consideremos o raio da circunferência tendendo para o infinito.

A seguir, apresentamos nossas considerações finais do estudo realizado, que buscou responder nosso questionamento inicial *"Como surgiram as trigonometrias nas diferentes civilizações e quais as relações estabelecidas entre elas"?,* pergunta essa feita por nós como objeto de pesquisa.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao concluir nosso estudo faremos uma reflexão sobre o objeto de pesquisa, com o intuito de evidenciar as transformações ocorridas no conceito da trigonometria e de *como surgiram as trigonometrias nas diferentes civilizações; também analisamos quais as relações estabelecidas entre elas* e o quanto nosso estudo é relevante para entendermos as relações historicamente construídas nas sociedades da Antiguidade. Neste compasso, procuramos entender em que medida se deu o processo de desenvolvimento das trigonometrias plana e esférica como base propulsora da evolução cultural de grupos humanos da antiguidade oriental e ocidental e também do medievo na busca da sobrevivência humana ao longo do tempo. Para atender as demandas teóricas que evidenciamos na pesquisa fizemos um recorte histórico, compreendendo o período da Antiguidade em algumas civilizações (Egípcia, Babilônica, Grega, Hindu, Árabe e Chinesa) até o período Renascentista.

Quando iniciamos nosso estudo tínhamos a intenção de responder a nossa questão norteadora, essa que se tornou o objeto de pesquisa, que surgiu na época de aluno do curso no Curso Técnico em Agrimensura, na antiga Escola Técnica Federal do Pará, hoje Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará IFPA/Campus Belém ao estudar as disciplinas Astronomia de Posição e Introdução à Geodesia Geométrica, onde tivemos contato com a trigonometria esférica, pela primeira vez, tendo em vista que tal conteúdo faz parte das matrizes curriculares dessas duas disciplinas.

No desenvolvimento do nosso estudo dialogamos com teóricos que em seus estudos fundamentam a tendência em história da matemática e da ciência e alicerçamos nossa investigação em história da matemática acrescentamos ainda a pesquisa bibliográfica, pois esse ramo da pesquisa serviu de apoio no estudo do objeto de pesquisa, desta forma foi possível responder a nossa questão norteadora.

Inicialmente recorremos aos primórdios da trigonometria (Plana e Esférica), com auxilio da história da matemática para evidenciarmos as transformações de compreensão conceitual, sofridas ao longo do tempo, nas diferentes civilizações, desde seu surgimento nos povos que viveram na Antiguidade (Egípcios, Babilônios, Gregos, Hindus, Árabes e Chineses), passamos pelo medievo até o período Renascentista, também evidenciamos o nascimento da trigonometria como ciência auxiliar da Astronomia e como trigonometria tornou-se independente na Europa.

Evidenciamos em nosso estudo que a principal contribuição da civilização egípcia em trigonometria estava contida no papiro Rhind, pois consta nesse papiro a ideia inicial da função cotangente, para utilização na construção de pirâmides, outra contribuição importante foi dada pela agrimensura para fins de demarcação de áreas alagadas para cultivo e plantio e posterior taxação feita pelo Faraó.

Investigar o desenvolvimento da matemática babilônica só foi possível quando foram feitas as transcrições e interpretações das tábuas, que contém as vastas aplicações da matemática deste povo, como por exemplo, a utilização do sistema de base 60, o qual fortaleceu todo o desenvolvimento posterior da matemática babilônia e de outras civilizações, e a criação das tabelas trigonométricas.

As contribuições dos gregos em trigonometria começam na reelaboração e resignificação dos conhecimentos oriundos dos egípcios e babilônicos, também na primeira definição do triângulo esférico, que aparece no trabalho de Menelau de Alexandria, porém a mais importante contribuição, foi a obra Almagesto de Cláudio Ptolomeu, o mais importante tratado da trigonometria da antiguidade essa obra é uma Sintaxe de toda conhecimento em Astronomia até esse período histórico e que contém uma boa base da trigonometria plana e esférica utilizada até então, a serviço da astronomia. Outro marco significativo foi o teorema de Menelau que será a própria trigonometria esférica, por alguns séculos, as contribuições dos gregos em trigonometria serviram de sustentação para avanços dados por outras civilizações.

A contribuição dos matemáticos indianos foi primordial para o desenvolvimento moderno da trigonometria com a apresentação da função seno na sua forma moderna, legando aos matemáticos a possibilidade de criarem outras funções trigonométricas na sua forma moderna, como fruto dessa inovação, apresentaram também a função senoverso ou seno versado, que dará um novo impulso na resolução dos problemas de Astronomia de Posição aplicados a Navegação Astronômica e no posterior aperfeiçoamento da função senoverso para função semisenoverso no século XIX, tais avanços foram evidenciados e disseminados pelos navegadores, os métodos de solução dos triângulos esféricos com a utilização da função semisenoverso, que em muito facilitou os cálculos aplicados a Navegação Astronômica.

A importância da civilização árabe foi preservar o conhecimento da antiguidade porém, além disso, acrescentaram e melhoraram os conceitos e métodos, em trigonometria, apresentaram tratados que culminaram com a separação da trigonometria da astronomia. O primeiro desses tratados foi *“Kitab Mayhulat qisi al-kura”, “*Determinação das magnitudes dos arcos na superfície de uma esfera”, publicado por volta de 1060, por Al-Jayyani, cujo o objetivo principal foi apresentar métodos para resolução de todos os casos de triângulos esféricos: qualquer e retângulos, sendo conhecido quatro dos seis elementos do triângulo, tratando a trigonometria separada da astronomia no ocidente medieval.

Outro tratado que também contribui para separação da trigonometria da astronomia foi *“Kitab al shakl al-qita”,* (Tratado sobre Figuras Transversais), conhecido também pelo nome “Tratado sobre quadrilátero completo” de 1260, de Nasir Eddin al-Tusi, e o primeiro a tratar a trigonometria separado da astronomia no oriente medieval.

Nesse sentido existe uma dualidade de interpretação para definir qual foi a primeira obra de fato a tratar a trigonometria independente da astronomia no medievo.

Na china a trigonometria esférica foi o aporte fundamental para o estudo do calendário e cálculos astronômicos e a trigonometria plana para utilização em Engenharia, porem a primeira tabela da função da tangente e creditada ao matemático Yi-Xing, posteriormente a trigonometria foi aperfeiçoada e melhorada pelos chineses.

No Renascimento europeu entre os séculos XV e XVI, Georg von Peuerbach incumbiu ao seu aluno e amigo Regiomontanus, compilar e ordenar todos os teoremas dispersos nos textos clássicos, islâmicos e europeus e todas as tabelas trigonométricas, importante para os cálculos astronômicos, esses estudos iniciaram em 1464 e desse trabalho surge então a obra definitiva que transforma a trigonometria como ciência independente na Europa *“De Triangulis Onunímodis Libri Quinque”* (Cinco Livros sobre Todos os Tipos de Triângulos), reunindo a trigonometria plana e esférica conhecia até esse momento histórico em cinco livros independente da astronomia, e publicado postumamente em 1533, passando a ser a obra de referência dos matemáticos posteriores e é o marco definitivo da separação da trigonometria da astronomia na Europa, e servirá de apoio a todas as pesquisas em trigonometria feitas a partir de então.

Igualmente realizamos uma pesquisa histórica e pormenorizada das geometrias não-euclidianas, quando evidenciamos o surgimento da geometria esférica e as implicações dessa com a trigonometria esférica, onde as fórmulas fundamentais surgem. Na sequência verificamos como ocorre a transição das fórmulas fundamentais da trigonometria esférica para a trigonometria plana utilizando para essas afirmações o argumento matemático da série de Taylor, desta forma verificamos as relações estabelecidas entre as trigonometrias planas e esféricas, objetivo primordial de nossa pesquisa e alcançado em nosso estudo.

Muitas dificuldades foram encontradas no desenvolvimento da pesquisa, a principal foi no que se refere à leitura de textos sobre história da matemática e particularmente sobre o tópico trigonometria principalmente quando focamos as culturas Indiana e chinesa, em língua portuguesa devido à escassez de bibliografia sobre o assunto, tal dificuldade somente foi superada com leituras em língua Espanhola e Inglesa, onde encontramos bibliografias antigas e atuais que se tornaram contribuições importantes, na construção e produção do texto dissertativo.
Não tivemos intenção de esgotar o assunto, pois novas ideias surgiram no desenvolvimento deste, portanto propomos outros desdobramentos de nossa pesquisa, para que outros pesquisadores possam dar continuidade a nosso estudo em teses, dissertações, artigos e monografias, e nesse sentido indicamos um objeto de estudo que é verificar as aplicações da trigonometria esférica nos campos da astronomia, agrimensura, cartografia, geodesia e na navegação, pois essa temática ainda está aberta para novas pesquisas, desta forma também poderão contribuir com a ampliação do campo de visão sobre esse tópico da matemática.

Minha curiosidade e anseio no estudo sobre o surgimento e origem da trigonometria plana e esférica se iniciou desde o primeiro contacto que tive no ensino fundamental com a trigonometria plana e depois no ensino médio com a trigonometria esférica foi amplamente saciada. O estudo em tela possibilitou o resgate da história desse conteúdo e me possibilitou o amadurecimento profissional e a percepção do quanto é importante esse tópico da matemática e quanto a história da matemática pode ser um instrumento para a melhoria na tríade ensino/aprendizagem/avaliação, saciando amplamente o interesse que possuía na temática.

A importância da trigonometria na atualidade consiste em ser uma ferramenta bastante poderosa e é usada em muitas áreas do saber, temos inúmeras aplicações do seu uso nos mais modernos instrumentos tecnológicos de medida, bem como em ciências de Cartografia, Sistemas de Informação Geográfica, Biologia, Geologia e até mesmo na Economia, para obtenção de resultados nos mais variados problemas, além de inúmeras aplicações na Física, nas Engenharias.

Esperamos que nosso estudo seja útil para pesquisas de alunos e profissionais da disciplina matemática e áreas afins que tenham interesse nessa temática, tendo em vista que o estudo da trigonometria esférica, na atualidade faz parte de poucas matrizes curriculares de curso de licenciatura em matemática, sendo objeto de estudo apenas de alguns cursos de graduação, como por exemplo, Astronomia, Ciências Geodésicas, Engenharia: Cartográfica, de Agrimensura, Aeronáutica e curso de Formação para Oficial da Marinha de Guerra e Mercante.

E é possível encontrar fragmentos de conceitos de Trigonometria Esférica em outras disciplinas como em geometria não-euclidianas, no cálculo diferencial e integral aplicados a problemas de Astronomia, e por tudo isso ressaltamos e reafirmamos a necessidade dos cursos de graduação de matemática resgatar e incluir o conteúdo de trigonometria esférica nas suas matrizes curriculares.

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

AYRES JR, FRANK. **Trigonometria Plana e Esférica.** Coleção Schaum. São Paulo: McGraw-Hill, 1954.

AABOA, A. **Episódios da História Antiga da Matemática.** Trad. J. B. Pitombeira de Carvalho. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

ARANA, J. M. **Trigonometria Esférica:** Notas de aula. Presidente Prudente: FCT/UNESP, Departamento de Cartografia, 2006.

ADAMEK, T.; PENKALSKI, K.; VALENTINE, G.; **The History of Trigonometry,** 2005. Disponível em: http://www,math.rutgers.ed/mjraman/History of Trig., acesso em: 08/08/2013.

BELL, E. T. **Historia de las matematicas**. 2. Ed. Mexico, D.F: Fondo de Cultura Economica, 1985.

BORTOLI, G. **Um olhar histórico nas aulas de trigonometria:** possibilidades de uma prática pedagógica investigativa. 2012. 149 p. Dissertação (mestrado profissional em ensino de ciências exatas) - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas - PPGECE, UNIVATES, Lajeado.

BRUMMELEN, Glen Van. **The mathematics of the heavens and the earth**: The Early, History of Trigonometry. New Jersey: Princeton University, 2009.

BRUMMELEN, Glen Van. **Heavenly Mathematics:** The Forgotten Art of Spherical Trigonometry. New Jersey: Princeton University, 2013.

CONTADOR, Paulo Roberto Martins. **Matemática uma breve história**. 2. ed. São Paulo, SP: Editora Livraria da Física, 2006, 3v.

CAJORI, F. **Uma história da matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007.

COSTA, Nielce M. Lobo. http://www.paulofreire.org/Biblioteca/histtrigon.pdf. Consultado em: 08/09/2013.

DO CARMO, M. P. Geometrias não-euclidianas. Revista Matemática Universitária, v. 6, p. 25-48, 1987.

DIVALTE Garcia Figueira. **História (volume único).** São Paulo: Ática, 2002.

Dante, Luiz Roberto, **Matemática - Contexto e Aplicações 1** - Ensino Médio - 1º Ano, 5ª Ed, São Paulo, Editora Atica, 2011.

Dwivedi, Girish & Dwivedi, Shridhar (2007). **History of Medicine: Sushruta – the Clinician – Teacher par Excellence.** National Informatics Centre.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática.** Tradução por Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp. 1995.

EUCLIDES. Os Elementos. Tradução e Introdução de: Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. UNESP, 2009.

FERRAZ, Antônio Santana. **Trigonometria Esférica:** Fundamentos. Minas Gerais: Editora UFV, 2006.

FRITZEN, K. R. **Estudo do sistema conceitual de trigonometria no ensino fundamental: uma leitura histórico-cultural**. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade do Extremo Sul Catarinense, UNESC, Criciúma, Santa Catarina.

FLOOD, R. & WILSON, R.**A História dos Grandes Matemáticos:** As descobertas e a propagação das vidas dos grandes matemáticos, M. Books, São Paulo, 2013.

GAUCHET, L. Note **Sur La Trigonométrie Sphérique,** de Kouo Cheou-King. 1917.

GILLINGS, J. Richards. **Matemática no tempo dos Faraós**: Editora: Dover Science, 1982.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa.** São Paulo: Atlas, 1991.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social.** São Paulo: Atlas, 1999.

GIORDANI, Mario Curtis. **História do Mundo Árabe Medieval.** 5ª Ed. Rio de Janeiro. Editora Vozes, 1985.

GIORDANI, Mario Curtis. **História de Roma.** 18ª Ed. Rio de Janeiro. Editora. Vozes, 2008.

HOGBEN, Lancelot. **Maravilhas da Matemática: Influência e Função da Matemática nos Conhecimentos Humanos**. Porto Alegre: Editora Globo, 1970.

HEATH, Sir Thomas, **A História da Matemática Grega**, Dover Publications, Inc., New York, Volume II, 1981.

H. Wussing, **Lecciones de Historia de las Matemáticas**, Siglo XXI de España Editores, S.A 1998.

HAWKING, Stephen. Nicolau Copérnico Vida e Obra. **Os Gênios da Ciência: Sobre Ombros de Gigantes**; Rio de Janeiro: Elsevier Editora, 2005, pág 13-51.

KENNEDY, E. S. **História da Trigonometria.** Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual Editora, 1992.

KATZ, Victor J. (2010). **História da Matemática.** Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

LAKATOS E. M, & MARCONI, M. A. **Metodologia Científica.** São Paulo: Atlas, 1986. 248 p.

HELGE, Krage, **Introdução à História da Ciência**. Editora Porto, Porto, Portugal. 2002.

MORITZ, R. F. A **Textbook on Spherical Astronomy.** 5ª Ed. University of Washington, Nova Iorque, 1913.

MOREY, Barbosa. Bernadete. **Tópicos da história da trigonometria**. Natal: Editora SBHMat, 2001. (Coleção História da Matemática para Professores).

MIGUEL, A; MIORIM, M. A. **História da Matemática:** uma prática de investigação em construção. Educação em Revista, Belo Horizonte nº 36, dez. 2002 p 177-203.

MOREY, B. B. **Geometria e trigonometria na índia e nos países árabes**. Rio Claro, SP: Editora SBHMat, 2003. (Coleção História da Matemática para Professores).

MARTINS, L. A. P. **História das Ciências:** Objetivos, métodos e Problemas. **Ciências e Educação,** 2005, v.11, nº 2, p.305-317.

McELROY, Tucker. Ph. D. **Notable Scientists, A to Z of Mathematicians.** Facts on file Science Library, Nova Iorque, 2005.

MARCONI, M. A. **Técnicas de pesquisa**: planejamento e execução de pesquisas, amostragens e técnicas de pesquisa, elaboração, análise e interpretação de dados. 6 ed. São Paulo: Atlas, 2007.

MENDES, I. A. **Atividades históricas para o ensino da Trigonometria.** In: MIGUEL, A. et al. **Histórias da matemática em atividades didáticas**. 2. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009. p. 105-178.

MIGUEL, A; MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática:** propostas e desafios. 2. ed. Belo Horizonte: autentica editora, 2011. 208 p.

NEUGEBAUER, **A History of Ancient Mathematical Astronomy Part Two,** Springer-Verlag, New York, 1975.

NEUGEBAUER, **Astronomia e História,** Springer-Verlag, New York, 1983.

NEEDHAM, Joseph. **Science and Civilization in China**: Volume 3, Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth. Taipei: Caves Books, Ltda, 1986.

NETO, Gastão Bierrenbach Lima. **Astronomia de Posição: Notas de aula.** Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas Universidade de São Paulo: IAG/USP, 2013.

OLIVEIRA, F. C; MOREY, B. B. **História da matemática nas aulas de trigonometria.** In: VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2004, Recife. **Anais do VIII ENEM.** Recife: UFPE, 2004.

OLIVEIRA, T. **Trigonometria**: a mudança da prática docente mediante novos conhecimentos. 2010. 177p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) UFSCAR, São Carlos (SP).

PEREIRA, Ana Carolina Costa**. A obra "de Triangulis Omnimodis Libri Quinque" de Johann Müller Regiomontanus (1436 – 1476)**: uma contribuição para o desenvolvimento da trigonometria. 2010. 329 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação, UFRN, Natal, Rio Grande do Norte.

PEREIRA, Ana Carolina Costa. **A História da Trigonometria sob o olhar de Regiomontanus**. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 9., 2011, Aracajú. **Anais...** Aracajú: SBHMat, 2011. v. 1, p. 1 - 10.

PEREIRA, Ana Carolina Costa. **A Trigonometria Esférica presente na obra de Triangulis de Regiomontanus**. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 10., 2013, Campinas. **Anais...** Campinas: Sbhmat, 2013. v. 1, p. 1 - 8.

PRESTES, I. C. R. **Geometria esférica**: Uma conexão com a Geografia. 2006. 210 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), PUC, São Paulo, São Paulo.

RONAN, C. A. **História Ilustrada das Ciências**, Vol. 1, 2 e 3, Universidade de Cambridge, Rio de Janeiro: Ed. Zahar, 1987.

RESTIVO, Sal. **Mathematics in Society and History:** Sociological Inquiries. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1992.

RODRIGUES, Maria Isabel Ferreira**. Projeções Cartográficas: Estudo Matemático das Representações Planas de uma Esfera**. 2011. 138 p. Dissertação (Mestrado em Matemática-Formação Contínua de Professores)–Universidade do Minho Portugal.

ROSA, C. A. de P. **História da Ciência**, **da Antiguidade ao Renascimento Cientifico**, Vol. 1, Brasília: Fundação Alexandre de Gusmão, 2012.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas, Ed. Zahar, Rio de Janeiro, 2012.

RONNEY, Anne. **A História da Matemática:** Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito, M. Books, São Paulo, 2012.

SARTON George, **Ciência helenística e Cultura nos últimos três séculos antes de Cristo,** Dover Publications, Inc., New York. 1959.

SMITH, D.E. **History of Mathematics**. Vol.I, Dover Publications, INC. New York, 1958.Trigonometry-History.Retrieved 18 April 2005.

TOOMER, **Almagesto de Ptolomeu**, Springer-Verlag, New York, 1984.
TOTH, Imre**, Caderno de Física da UEFS 09,** (01 e 02): p.37-52, 2011.

TIWARI, Lalit. **A Summary of the Late D. Chattopadhyaya's.** Acessado em 14 de Maio, 2014. A cite of D. Chattopadhyaya (1982). Case for a critical analysis of the Chark Samhita In Studies in the History of Science in India (Ed. D. Chattopadhyaya). Vol.1 New Delhi: Editorial Entreprises. P 209-236).

VALENTE, W. R. **História da Educação Matemática:** interrogações metodológicas. **REVEMAT**: Revista Eletrônica de Educação. 2007.

VALDES, J. E. N. **Sobre a história da matemática:** um enfoque baseado nos problemas matemáticos. In: DANYLUK, O. S. (org.). História da Educação Matemática: escrita e reescrita de histórias. Porto Alegre: Sulina, 2012. 207p.

VILLUENDAS, M.V. **La Trigonometría en el siglo XI.** Estudio de la obra de Ibn Muad, el "Kitab mayhulat", Barcelona. 1979.

Sites Consultados

http://www.ime.unicamp.br/~marcio/ps2005/hvetor14.htm.
http://www.portaldoastronomo.org.
http://www.geocaching.com.
http://www.brasilescola.com.
http://www.iniganieria.anahuac.mx.
http://www.historiapensante.blogspot.co.
http://www.historiadomundo.com.br.
http://www.matematicaprofissional.blogspot.com.
http://www.catedu.es/matematicas_mundo.
http://www.mundoeducação.com.br.
http://sandroatini.sites.uol.com.br/rhind.html.
http://www.matematica.br/historia/pmoscou.html.
http://obaricentodamente.blogspot.com/2010/08/o-seqtde-uma piramide.html.
http://comahistoriadamatematica.blogspot.com/2011/04/tales-ealtura-da pirâmide.
http://miltonborba.org/Mat_Aplic/MAT_APLIC-Trigonometria.pdf.
http://www.brasilescola.com/geografia/relogio-sol.html.
http://www.ohistoriador.com.br.
http://www.historiazine.com/2009/10/invencao-da-historia.html
http://www.ecalculo.if.usp.com.br.
http://www.historiadomundo.com.br.
http://www.gloriacansecoalvarez.files.wordpress.com.pitagoras.jpg.
http://www.mundofisico.joinvile.udesc.br.
http://www.historiativanet.wordpress.com/category/oriente-medio.
http://www.if.ufrgs.br/category/oriente-medio.
http://www.ccmn.ufrj.br/curso/trabalhos/pdf/matematica.
http://www.gave.mim.edu.pt /o-livro-de-chui-chang.html.
http://www.cam.ac.uk.
http://www.ccmn.ufrj.br/curso/trabalhos/pdf/matematica.
http://www.pt.wikipedia.org.
http://www.geocities.ws
http://www.on.br/site.edu.dist/pdf/modulo3.
http://www.bertolo.pro.br
http://www.portalescolar.net.
http://www.kaubysantos.blogspot.com.
http://www.Impa.br.
http://www.atractor.pt.
http://www.pt.wikipedia.org.
http://www.foro.elhacker.net.
http://www.prof2000.pt.
http://www.cienciaxreligiao.blogspot.com.
http://www.experienciasnamatematica.blogspot.com.