UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS - GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

TATIANA LOPES DE MIRANDA

A NOÇÃO DE VARIÁVEL DE ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

BELÉM
2014

TATIANA LOPES DE MIRANDA

A NOÇÃO DE VARIÁVEL DE ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós - Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica - IEMCI da UFPA, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática, sob orientação do Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg.

BELÉM

2014

Dados Internacionais de Catalogação - na - Publicação (CIP)
Sistemas de Bibliotecas da UFPA

Miranda, Tatiana Lopes de, 1987 -
A noção de variável de alunos do ensino fundamental / Tatiana Lopes de Miranda - 2014.

Orientador: João Cláudio Brandemberg.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2014.

1. Matemática - Noção de variável. 2 . Ensino Fundamental. I Título.
CDD 22 ed. 510.7

TATIANA LOPES DE MIRANDA

A NOÇÃO DE VARIÁVEL DE ALUNOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Exemplar correspondente a redação da dissertação apresentada para a defesa de Tatiana Lopes de Miranda submetida a banca examinadora.

Banca examinadora:

____- Orientador

Membro: Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg - UFPA

____

Membro: Prof. Dr. Pedro Franco de Sá - UEPA

____

Membro: Profª. Dra. Maria José de Freitas Mendes - UFPA

____

Membro: Prof. Dr. Natanael de Freitas Cabral - UEPA

Apresentado em: _____/____/______

Conceito:___________________

BELÉM

2014

Dedico este trabalho ao meu avô Francisco Pinheiro Lopes (em memória), que é um anjo e guia os meus passos e estará eternamente em meu coração.

AGRADECIMENTOS

À Deus, pela força e coragem que me proporcionou para enfrentar todas as barreiras e conseguir realizar este estudo.

Aos meus pais, *Odiléa* e *Crispim Miranda*, pelo amor dedicado e por acreditarem nos meus sonhos.

À minha irmã, *Daniele Miranda*, por está sempre ao meu lado e ter fé em mim.

Ao meu orientador, professor *João Cláudio Brandemberg*, por sua dedicação e interesse pelo desenvolvimento deste trabalho, pelas críticas e sugestões que tanto contribuíram para o meu amadurecimento profissional e crescimento acadêmico.

Aos Professores do GEHEM, *Maria José* e *Natanael Cabral*, pelas valiosas sugestões e apontamentos feitos por ocasião do exame de qualificação e durante o curso que favoreceram minhas reflexões e crescimento como professora e pesquisadora.

Ao Prof. *Pedro Sá*, pelo aceite em participar da banca, pelas valiosas críticas, comentários, sugestões e questionamentos feitos no momento do exame de qualificação, que me fizeram refletir sobre aspectos que não havia avaliado neste estudo.

Aos meus amigos e companheiros de curso *Marcelo, Everaldo,Nayra*, *Mônica*, *Alailson, Cibele, Márcio, Raquel, Aline*, *Aldenora e Alex Bruno* pelo auxilio que deram para a construção deste estudo, acompanhando as dificuldades desta trajetória, mostrando sempre apoio e admiração. Obrigada pela amizade que criamos e que espero conservar sempre.

À toda equipe da Pós - Graduação e professores pela grande dedicação ao nosso curso.

À Universidade Federal do Pará que viabilizou a realização deste curso.

"A álgebra é muito generosa: sempre nos dá mais do que perguntamos".

D' Alembert

RESUMO

O presente estudo trata da educação algébrica escolar, tendo como objetivo geral a busca de uma descrição da noção de variável, através da resolução de problemas por alunos que estão cursando o ensino fundamental. Verificou-se noções de variável que aparecem no processo de ensino e aprendizagem da álgebra escolar que permitiram responder as seguintes questões: Quais elementos que constituem as noções de variável são percebidos pelos alunos, de modo a proporcionar-lhes uma maior compreensão da álgebra escolar? De que maneira a identificação destes elementos em ambiente escolar nos permite propor uma descrição para álgebra no ensino fundamental? Para alcançar o objetivo, a pesquisa foi dividida em duas fases. Na primeira fase do estudo, foi adotado como percurso metodológico a pesquisa bibliográfica, baseada na investigação histórica do desenvolvimento da álgebra e de seu ensino no contexto da educação matemática, com a finalidade de estudar a evolução da concepção de álgebra e de variável ao longo da história e identificar as noções de variável descritas em pesquisas da área de educação matemática. Entre os referenciais teóricos trabalhados estão Tabak (2004), Wussing (1998), Boyer (2012), Kieran (1989), Usiskin (1995), Ursini e Trigueros (2003), entre outros. Com base nos referenciais escolhidos, estruturou-se a pesquisa de campo, que constituiu a segunda fase do estudo, a qual apresentou como instrumento diagnóstico de levantamento de dados três questionários, compostos cada um de 10 questões, que foram aplicados para 65 alunos que cursavam o 9º ano do ensino fundamental em três escolas públicas do município de Belém (PA). A aplicação dos questionários auxiliou na identificação das noções de variável e dos elementos destas noções presentes em sala de aula. Os resultados obtidos revelam que os alunos não dominam todas as noções de variável que foram classificadas em nosso referencial teórico. Foi verificado que a noção de variável como incógnita é a que apresenta maior domínio por parte dos alunos, contudo, percebe-se que elementos que constituem esta e as outras noções, relativos a manipulação, simbolização e interpretação, representam obstáculos de compreensão do pensamento e da linguagem algébrica.

Palavras-chaves: Educação Matemática. História da Álgebra. Noção de Variável. Pensamento Algébrico.

ABSTRACT

The present study deals with the algebraic school education, having as main objective the search for a description of the concept of variable, by solving problems for students who are in elementary school. There was variable notions that appear in the teaching and learning of school algebra process that allowed to answer the following questions: What are the elements that constitute the variable notions are perceived by students in order to provide them with a greater understanding of school algebra? How to identify these elements in the school environment allows us to propose a description for algebra in elementary school? To achieve the objective, the research was divided into two phases. In the first phase of the study, was adopted as a methodological approach to bibliographic search, based on historical research into the development of algebra and its teaching in the context of mathematics education, in order to study the evolution of the concept of algebra and variable along the story and identify the notions of variable described in the research area of mathematics education. Among the theoretical frameworks are worked Tabak (2004), Wussing (1998), Boyer (2012), Kieran (1989), Usiskin (1995), Ursini and Trigueros (2003), among others. Based on reference chosen was structured fieldwork, which constituted the second phase of the study, which it presented as a diagnostic tool for data collection three questionnaires, each one composed of 10 questions, which were applied for 65 students who attended the 9th year of primary school in three public schools in the city of Belém (PA). The questionnaires helped identify the notions of variable and the elements of these notions present in the classroom. The results show that students have not mastered all the concepts of variable that were classified in our theoretical framework. It was found that the notion of variable as unknown, it shows greater role for students, however, realizes that what constitutes this and other notions concerning the handling, symbolization and interpretation, represent obstacles to understanding the thinking and language of algebra.

Keywords: Mathematics Education. History of Algebra. Variable Notion. Algebra Thinking.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A álgebra escolar é vista por muitos como uma área da matemática que aumenta a capacidade de abstração e generalização e uma poderosa ferramenta para solucionar problemas. Apesar de sua importância, diversos autores apontam para as dificuldades dos alunos ao resolverem situações envolvendo seus conteúdos, como, por exemplo, as equações nas séries finais do ensino fundamental.

A relação de *importância x dificuldade* que envolve a álgebra foi o ponto que nos chamou atenção para iniciarmos uma pesquisa relacionada a este campo do conhecimento matemático.

Na história, a álgebra é relevante, pois foi através de seu desenvolvimento que a matemática passou a ser um instrumento fundamental para resolução de problemas do cotidiano. A história da construção da linguagem algébrica mostra como a matemática se consolidou como uma área altamente desenvolvida e estimada devido sua aplicabilidade em diferentes ramos do conhecimento como, por exemplo, a mecânica, física, astronomia e geodésia.

Contudo, apesar da importância que relatamos, a álgebra no âmbito do ensino é vista como uma área que apresenta grandes dificuldades em sua compreensão. Segundo Fossa (2012), um dos fatores que gera essas dificuldades é a transfiguração do uso das letras, que antes eram a chave para o entendimento da língua natural e com o início do estudo da álgebra passam a ser associadas aos números e outros símbolos matemáticos. Além disso, o autor afirma que as letras ganham um novo "nome de guerra": variáveis.

É sobre as variáveis as quais o autor se refere que concentramos nossa atenção nesta pesquisa. Fizemos um estudo histórico do desenvolvimento da álgebra e da educação algébrica, para identificarmos como a noção de variável foi se consolidando até chegar ao formato em que é apresentada atualmente. Realizamos também um levantamento teórico de pesquisas em educação matemática que tratam sobre o ensino de álgebra e a noção de variável, que posteriormente serviram de base para a elaboração de questionários que aplicamos para alunos que estavam no 9º ano do ensino fundamental, com a finalidade de verificar quais noções de variável são percebidas pelos alunos, de modo a nos possibilitar uma descrição para o ensino de álgebra no nível fundamental da educação básica.

Para realizar uma pesquisa sobre o ensino de álgebra relacionado à noção de variável, precisamos ter uma noção ampla do conceito de variável. Segundo Fossa (2012, p.23) a compreensão mais comum de variável entre os pesquisadores é que uma variável é algo que varia. O autor cita Fey (1989, apud FOSSA,2012) que define variável como uma quantidade mensurável que varia quando a situação varia e cita Kaput (1989, apud FOSSA, 2012) ao mostrar que este concorda com a definição, mas afirma que a representação "alfanumérica" da variável faz com que sua variação fique implícita, tendo de ser fornecida pelo o aluno quando este a utiliza.

Fossa (2012) ainda apresenta as concepções de Wilcox (1977, apud FOSSA, 2012), que reduz o conceito de variável a representação da incógnita; de Shulte e Perteson (1975, apud FOSSA, 2012) que definem a variável como qualquer símbolo que pode ser substituído por números; de Travers et al (1977, apud FOSSA, 2012),que define a variável como a representação de qualquer número de um dado conjunto de valores de maneira que a expressão contendo a variável pode ser avaliada para cada elemento do conjunto.

Continua sua revisão teórica com a definição de Baals et al (1971, apud FOSSA, 2012), na qual a variável é um símbolo que é usado para determinar os lugares de uma expressão nos quais podemos colocar certos números escolhidos de um dado conjunto de valores. Cita Rosnick (1980, apud FOSSA, 2012), que enfatiza a noção de variável como algo que varia continuamente, porque é este conceito da variável que mais se sobressai no cálculo.

Segundo Fossa (2012, p.24) a principal discussão sobre o conceito de variável gira em torno de dois sentidos distintos da palavra variável que foram confundidos: o sintático e o semântico. O autor afirma que sintaticamente, a variável é uma letra que tem certos papéis específicos no formalismo algébrico. Semanticamente, a variável é aquilo que a letra representa, o que frequentemente é uma quantidade mensurável ou uma quantidade variável.

A variável assume diferentes significados que são subordinados às situações nas quais a mesma é apresentada. Por exemplo, pode significar incógnitas, relações funcionais, padrões de generalização.

Os diferentes significados de variável fazem da álgebra um conjunto multifacetado de concepções que determinam as finalidades do seu ensino, ou seja, a forma como a álgebra é compreendida influência no processo de ensino e aprendizagem e na formação do pensamento algébrico de professores e alunos.

É a partir das concepções de álgebra, baseadas na noção de variável que faremos um estudo que tem por objetivo descrever a noção de variável presente no nível fundamental de ensino.

O início da pesquisa foi marcado por um estudo do percurso histórico do desenvolvimento da álgebra. O objetivo nesta fase foi identificar os elementos que constituem a álgebra e a noção de variável e os momentos de transição conceitual que ocorreram ao longo da história. Investigamos o percurso histórico da educação algébrica e as concepções de álgebra, baseadas na noção de variável, que aparecem em pesquisas da área da educação matemática, visando identificar qual (is) concepção (ões) de álgebra estão presentes no contexto escolar.

No segundo momento de estudo, realizamos uma investigação no ambiente escolar e usamos como instrumento de levantamento de dados três questionários, sendo cada um composto por dez questões que foram aplicadas a 65 alunos que no ano de 2013 estavam cursando o ensino fundamental, no 9º ano, em três escolas públicas do município de Belém–PA.

A perspectiva de análise destes momentos de estudo nos permitiu propor uma caracterização da noção de variável no ensino fundamental, baseada no significado ou significados que a mesma assume no ambiente escolar e de acordo com os elementos constituintes das noções de variável que estão presentes no processo de ensino e aprendizagem da álgebra.

O texto do nosso estudo está estruturado em 6 capítulos. No capítulo I, apresentamos o projeto de pesquisa, destacando as motivações para a escolha do tema, a questão norteadora do estudo, os objetivos que buscamos com a pesquisa, o referencial teórico adotado e a metodologia de pesquisa.

No capítulo II, trazemos a investigação bibliográfica que realizamos sobre a evolução da álgebra e da noção de variável, no contexto histórico de desenvolvimento das civilizações da antiguidade, da idade moderna e contemporânea e no contexto da educação matemática.

No capítulo III, temos como objeto central o referencial teórico que adotamos no estudo, no qual buscamos elementos que nos auxiliaram na estruturação da pesquisa de campo que realizamos no ambiente escolar.

No capítulo IV é apresentada a metodologia que adotamos na pesquisa de campo. No capítulo V, apresentamos a coleta e a análise dos dados que obtivemos nesta pesquisa. E no capítulo VI, trazemos nossas considerações a respeito do estudo que realizamos.

CAPÍTULO I
A CONSTRUÇÃO DO ESTUDO

1.1 MOTIVAÇÕES PARA O ESTUDO E ESCOLHA DO TEMA

A docência no ambiente escolar foi o ponto de partida para iniciarmos reflexões sobre a prática e o processo de ensino e aprendizagem da matemática. As recordações do percurso acadêmico na educação básica trazem a matemática como uma disciplina formada por um conjunto de regras, que caso fossem seguidas corretamente, levariam a solução do problema proposto, mesmo que as ações realizadas não fossem bem compreendidas ao manipular tais regras. A aula era como um espaço de execução de determinados procedimentos e algoritmos com pouco significado.

Esta visão a respeito da matemática adquire espaço quando pensamos sobre a docência no ensino fundamental, principalmente no que se refere ao ensino da álgebra, que é o tema principal desta pesquisa. A partir da prática profissional neste nível de escolaridade e do compartilhamento de experiências com outros docentes, constatamos que muitos alunos apresentam dificuldades na aprendizagem da álgebra, a qual em sua visão tradicional, é conhecida como um momento transitório, marcado por uma transformação no pensamento e nas propriedades que antes eram de caráter aritmético e agora adquirem aspectos de natureza algébrica.

Dessa forma, a introdução do ensino da álgebra se torna complexa para os alunos, como podemos observar na fala de Imenes e Lelis (1994, apud ARAÚJO, 1999):

> Professores e alunos sofrem com a álgebra da 7ª série. Uns tentando explicar outros tentando engolir técnica de cálculo com letras que, quase sempre, são desprovidas de significados para uns e outros. Mesmo nas tais escolas de excelência, onde aparentemente os alunos da 7ª série dominam todas as técnicas, esse esforço tem pouco resultado. (IMENES & LELIS, 1994, apud ARAÚJO, 1999, p. 32)

Observamos que os materiais didáticos utilizados em sala de aula, em sua maioria, tratam o conteúdo algébrico de forma descontextualizada, mecânica e pouco significativa para o aluno. Talvez seja por este motivo que a relação da matemática com o cotidiano ainda encontre obstáculos, como afirma Zulatto (2004, p.46): "O que se percebe, porém, é que a relação 'Matemática e vida cotidiana' ainda é limitada. Pouco se tem feito na escola de forma a relacionar os conteúdos matemáticos com o dia-a-dia dos alunos, embora muitos reconheçam a importância desta atitude".

Diante das dificuldades presentes no ensino-aprendizagem da álgebra escolar, assim como na matemática em geral, decidimos por realizar um estudo a respeito da noção de variável, a qual é um conceito/elemento essencial para a atribuição de significados para a álgebra.

Nesta pesquisa buscamos propor uma descrição para a noção de variável, no contexto do ensino fundamental, na perspectiva dos alunos que estão cursando esse nível de ensino. A investigação que amparou o estudo levou em consideração as concepções de álgebra relacionadas à noção de variável e as respostas cognitivas dos alunos em relação às mesmas.

Nosso foco investigativo é voltado para as noções de variável que aparecem em sala de aula e garantem aos alunos um maior domínio dos conteúdos e significados atribuídos à álgebra. A investigação dessas noções nos ajudou a propor uma caracterização para a álgebra escolar no nível fundamental de ensino.

Fizemos uma revisão bibliográfica sob uma perspectiva que diz respeito a noção de variável, evidenciando o desenvolvimento e evolução desta ao longo da história e na presença desta no contexto da educação matemática. Concomitante a esta fundamentação teórica, foi desenvolvida uma coleta de dados em três escolas públicas da cidade de Belém, onde foram aplicados questionários para alunos que cursavam o 9º ano sobre temas de álgebra, direcionando as atenções para a realidade que pretendíamos estudar (noções de variável presentes no ambiente escolar).

1.2 QUESTÕES DE PESQUISA

A álgebra, em particular, sua concepção, se apresenta de forma decisiva na compreensão das soluções buscadas e nas aplicações vivenciadas pelo aluno em seu cotidiano. Isso faz com que a mesma seja valorizada, porém, o estudante continua a vê-la de certa forma como sendo inatingível.

Com este estudo procuramos identificar as noções de variável que estão presentes em sala de aula e quais elementos que constituem cada noção, tais como a simbolização, a interpretação, a manipulação, entre outros, garantem ao aluno uma maior compreensão da álgebra escolar. Para melhor cumprir este objetivo, queremos responder as questões que seguem: Quais elementos que constituem as noções de variável são percebidos pelos alunos, de modo a proporcionar-lhes uma maior compreensão da álgebra escolar? De que maneira a identificação destes elementos em ambiente escolar nos permite propor uma descrição para a álgebra no ensino fundamental?

1.3 OBJETIVOS DE ESTUDO

Em nossa pesquisa, estabelecemos os seguintes objetivos:

1.3.1 Objetivo geral

Buscar uma descrição para a noção de variável presente no ensino fundamental.

1.3.2 Objetivos específicos

- Apresentar um estudo sobre o desenvolvimento da concepção de álgebra e variável ao longo da história;
- Identificar as noções de variável presentes nas pesquisas em educação matemática;
- Verificar a presença de elementos constituintes das noções de variável estudadas no ambiente escolar,que nos permitam elaborar uma descrição da álgebra no ensino fundamenta

1.4 REVISÃO TEÓRICA DA PESQUISA

Para alcançarmos os objetivos propostos, tornou-se necessário estudar o contexto que envolve a concepção de álgebra e a relação desta com a noção de variável. A perspectiva teórica foi construída a partir dos estudos no campo da educação matemática e da história da matemática. Nesse sentido, os estudos de Fiorentini, Miorim, e Miguel (1992) e (1993), Lins & Gimenez (1997), Usiskin (1995) e Ursini e Trigueros (2003), dentre outros, foram fundamentais em sua construção, uma vez que visam à melhoria da ação do processo de ensinar e aprender álgebra em contexto escolar.

Fiorentini, Miorim, e Miguel (1992) realizam a seguinte classificação para a álgebra, de acordo com o processo de ensino-aprendizagem, que será retomada nos capítulos posteriores: processológica, linguístico-estilística, linguístico-sintático semântica e linguístico-postulacional. Estas concepções tratam dos procedimentos adotados no ensino de álgebra, a relevância atribuída a linguagem e ao pensamento algébrico.

Usiskin (1995) apresenta quatro concepções de álgebra: como aritmética generalizada, como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, como estudo de relações entre quantidades, e como estudo de estruturas.

Para Lins & Gimenez (1997), o ensino deve seguir um caminho diferente do proposto pela visão tradicional, que dissocia a aritmética da álgebra. Na fala dos autores,"é preciso começar mais cedo o trabalho com a álgebra, de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra" (LINS & GIMENEZ, 1997, p.10).

Falando especificamente sobre a noção de variável, buscamos fundamentação teórica nos trabalhos de Kuchemann (1981), Kieran (1989), Usiskin (1995), Janvier (1996), Kaput (1989), Bloedy-Vinner (2000) e Ursini e Trigueros (2003).

Em seu trabalho de 1981, Kuchemann classifica as interpretações algébricas dos alunos, de acordo com a utilização das letras, em dois grandes grupos:

1.A letra é ignorada, dado um valor arbitrário, ou utilizada como o nome de um objeto.

2.A letra é utilizada como um valor desconhecido específico ou número generalizado.

A partir destes grupos, cria outras subcategorias baseadas no grau cognitivo de dificuldade de aprendizagem, sugerindo que estas categorias correspondiam aos estágios de aprendizagem propostos por Piaget. Kuchemann (1981) concluiu que a maioria de jovens de 13 à15 anos são incapazes de lidar com letras algébricas como incógnitas ou números generalizados.

1.5 PROCEDIMENTOS DE PESQUISA

Optamos por utilizar como instrumento para levantamento de dados o questionário, composto por questões que contemplam as concepções de álgebra baseadas na noção de variável. Os questionários abordaram as seguintes concepções (que foram selecionadas de acordo com o estudo teórico dos autores que tomamos como referência): a variável como padrão generalizador, como incógnita e como parâmetro.

As concepções de álgebra, bem como as particularidades relativas às noções de variável que as constituem, incluem itens que observamos nos estudantes, tais como a interpretação da variável envolvida, a capacidade de simbolizá-la e manipulá-la em uma expressão,e representá-la graficamente .

Os questionários foram aplicados à alunos que estavam cursando o 9º ano do ensino fundamental de três escolas públicas do município de Belém-PA. Avaliamos a capacidade de interpretação, a simbolização, manipulação e a representação gráfica dos alunos, de modo a possibilitar propor uma descrição para a álgebra no ensino fundamental.

Neste estudo, estamos partindo da proposta de uma descrição da noção de variável no ensino fundamental, primeiramente buscando fundamentação teórica na história do desenvolvimento da álgebra, bem como nas pesquisas em educação que envolvem este tema para entendermos o significado ou significados que a álgebra assume no ensino de matemática.

1.6 O SIGNIFICADO DE DESCRIÇÃO E A NOÇÃO DE VARIÁVEL

Neste estudo se fez necessária a compreensão do termo descrição. Quando afirmamos que buscamos uma descrição para a noção de variável e sua relevância no ensino da álgebra escolar partindo da verificação das noções de variável existentes ou mobilizadas pelos alunos em sala de aula, entendemos que o conceito de descrição pode estar relacionado ao conceito de concepção, mas não com o mesmo significado do último.

O termo descrição se refere aos elementos que constituem algo, evidenciando propriedades, diferenciando, ao mesmo tempo em que particulariza este "algo" que se deseja expor.

A descrição é mutável, sendo dependente daquele que descreve, do ponto de vista sob o qual é entendido o objeto descrito, que se transforma de acordo com a história e a evolução da sociedade. Portanto, o ato de caracterizar está intimamente ligado à pessoa que caracteriza e à forma como ela concebe aquilo que está sendo caracterizado.

Procuramos estabelecer uma descrição dos elementos formativos da álgebra escolar, segundo a opinião de sujeitos que participam do processo. No caso específico deste estudo, avaliamos o ponto de vista dos alunos. A proposta consistiu em verificar as noções de variável presentes no ambiente escolar e como os alunos entendem ou mobilizam estas noções, melhor dizendo, entendem os elementos que formam estas noções.

A verificação será baseada na observação da presença de propriedades que fundamentam uma determinada noção, tais como a simbolização, a manipulação, a interpretação, a representação gráfica e a estrutura.

A concepção, diferente da descrição, será tratada aqui como sendo referente à importância atribuída aos elementos descritos no processo de descrição. Citamos como exemplo Usiskin (1995), que apresenta concepções de álgebra conectadas aos usos da variável, baseado na relevância dos elementos que descrevem estes usos, como vemos na citação a seguir:

> Minha tese é que os propósitos que temos para ensinar Álgebra, as concepções que temos do assunto, e os usos de variáveis são intrinsecamente relacionados. Os propósitos para a Álgebra são determinados, ou estão relacionadas com, as diferentes concepções de álgebra, as quais se relacionam com a importância dada aos diferentes usos das variáveis (USISKIN, 1995, grifo nosso).

A concepção está no domínio do implícito, pois depende da importância que atribuímos a um determinado contexto, enquanto que a descrição está no explícito, pois tem como objetivo enumerar ou descrever elementos.

Propor uma descrição para a noção de variável, a partir das noções presentes em ambiente escolar é de fato uma tentativa de tornar evidente elementos de natureza cognitiva. Tentativa, pois sendo um processo descritivo e, portanto, objetivo, é difícil de ser realizado levando-se em consideração o contexto subjetivo que envolve a noção de variável, uma vez que não podemos contemplar todos os fatores que influenciam nesta.

Esta impossibilidade de elencar todos os fatores, nos fez optar nesta pesquisa por abordar apenas as noções de variável, e sob o ponto de vista de um sujeito (o aluno). Por isso, afirmamos ser apenas *uma descrição*, podendo assim existir outras descrições diferentes, que dependam dos fatores escolhidos para desenvolver o processo.

Para que esta pesquisa se concretizasse e possibilitasse avaliar a percepção dos alunos referente às noções de variável, precisamos compreender, além do conceito de descrição, a noção de variável. Entre os diversos estudos que realizamos sobre o assunto,destacamos nesta parte introdutória os elementos que constituem o conceito de variável, elementos estes que aparecem em outros trabalhos que nos serviram como referencial teórico e que serão mostrados em outros capítulos mais adiante.

A ideia de variável tem recebido considerável atenção na comunidade matemática e as pesquisas sugerem que tal ideia representa um desafio para os alunos. Segundo Steketee, Kunkel e Chanan (2007) este desafio se deve ao uso de meios estáticos e em parte sobre a ênfase insuficiente em alternar as noções de variável.

Acreditamos que esta insuficiência relativa à alternação entre as noções de variável é causada pela inexistência de uma definição de variável que abranja todos os seus usos na matemática. Por exemplo, para Caraça (2005, apud FOSSA, 2012, p.22) a variável é um símbolo representativo de qualquer elemento de um conjunto que surge diante da necessidade de generalização para introduzir o conceito de função, ou seja, para o autor a percepção de variável é ligada ao símbolo que representa qualquer valor, excluindo desta forma a multiplicidade semântica que existe para o conceito.

Segundo Fossa (2012, p.23), quando procura-se o significado de uma variável, pode-se, por um lado, determinar como a variável está funcionando na dada equação ou a que se refere em uma dada situação concreta ou pode-se tentar descobrir as características gerais das variáveis que as permitem funcionar de várias maneiras em contextos diferentes.

Fossa (2012) apresenta algumas destas características gerais da variáveis, tendo como referencial Usiskin (1988). Estas características são: tradução e generalização de padrões, simplificação e resolução de problemas, comparação entre quantidades e representação, manipulação e justificativa de estruturas matemáticas.

Fossa (2012), baseado na concepção de Usiskin (1988), mostra que num simples problema de achar uma reta com uma inclinação 11 que passa pelo ponto (6,2) acarreta mais de um dos usos da variável. Tal exemplo mostra que a interpretação e o uso que é feito das variáveis depende do contexto do problema em que elas aparecem, o que deve ser levado em conta quando se pretende explorar o conceito de variável. É necessário saber diferenciar os usos da variável, integrá-los como aspectos de um mesmo objeto matemático, simbolizá-los,manipulá-los e interpretá-los.

A simbolização, a interpretação e a manipulação são as formas de tratamento da variável na álgebra. Logo, pode-se considerar que o duplo aspecto da variável (sintático e semântico) se revela em cada um desses tipos de tratamento. São estas formas de tratamento e a capacidade de integrá-las de forma flexível que possibilita a compreensão do conceito de variável. Nos capítulos que seguem iniciamos a fundamentação teórica relativa as noções de variável, inicialmente na perspectiva da história da matemática e posteriormente na educação matemática.

CAPÍTULO II
UM BREVE PERCURSO HISTÓRICO DA ÁLGEBRA

Existem vários caminhos a serem seguidos em uma investigação de caráter histórico. No que se refere a evolução histórica da álgebra, teremos por base os princípios investigativos propostos por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993),que são denominados como *leituras do desenvolvimento histórico da álgebra*.

Cada uma das leituras propostas pelos autores leva em consideração um objeto de investigação diferente. A primeira leitura, conhecida como usual, centra-se no momento de mudança de natureza investigativa, em que o objeto de investigação da álgebra deixa de ser o estudo exclusivo das equações e operações clássicas sobre quantidades discretas ou contínuas para ser o estudo das operações arbitrariamente definidas sobre objetos abstratos.

A segunda leitura é marcada por considerar a contribuição de diversos povos a constituição da álgebra, sendo possível, portanto, se falar em uma álgebra egípcia ou europeia. Esta interpretação evidencia alguns elementos característicos do pensamento algébrico, formados através da interação entre culturas.

A terceira leitura trata do desenvolvimento da álgebra de acordo com as fases evolutivas da linguagem algébrica. A quarta leitura é voltada para o estudo da significação que é atribuída aos símbolos da linguagem algébrica. A quinta leitura fala sobre os métodos de abordagem da resolução de equações.

A proposta neste capítulo é fazer uma investigação histórica da álgebra e da noção de variável interligando cada uma destas leituras, de modo que possamos favorecer:

> O máximo de subsídios que contribuam com o processo ensino/aprendizagem. Naturalmente a pesquisa histórica resgatará a essência da problemática vivida na antiguidade, como essa problemática mobilizou aquela sociedade e como essa essência do passado pode ser conectada com o pensamento e as necessidades na atualidade. (LIMA FILHO, 2011, p.5)

Esta contribuição da investigação em história da matemática no processo de ensino e aprendizagem está ligada ao papel da história da matemática como fonte teórica de geração de conhecimento matemático. A investigação nos permite visualizar como as informações históricas sobre a noção de variável chegaram até nós, de modo a serem utilizadas no contexto de sala de aula.

A investigação histórica é o lócus onde encontramos elementos característicos da álgebra que permaneceram até os dias atuais e que se fazem presentes no entendimento que os professores e alunos têm da álgebra ensinada em sala de aula.

Para um melhor desenvolvimento do texto, dividimos o estudo histórico em três fases, de acordo com a leitura sobre a evolução da linguagem algébrica: a fase retórica ou verbal, a sincopada e a simbólica.

2.1 A NOÇÃO DE VARIÁVEL EM ÁLGEBRA NO PERÍODO RETÓRICO

Conforme a leitura do desenvolvimento histórico da álgebra baseada na evolução de sua linguagem, o período inicial é conhecido como *retórico*, o qual recebe este nome devido a utilização somente de palavras da linguagem usual de cada civilização que apresentava conhecimento algébrico.

A linguagem retórica era o primeiro passo para criação de uma linguagem matemática, assim como afirmam Lima & Moisés (2000, p.27-28):"A linguagem Matemática através de palavras é o primeiro passo da criação da linguagem especificamente matemática para a qual são escolhidas as palavras que mais direta e claramente expressam movimentos matemáticos".

Contudo, é importante ressaltar que a linguagem retórica só se consolidou como um meio de expressão do conhecimento matemático devido a invenção de um elemento que foi essencial para que as ideias desenvolvidas pelas civilizações antigas chegassem até nós: a escrita.

Foram os Sumérios os responsáveis por introduzir um sistema de símbolos para desempenhar funções práticas de registro e contabilidade e consequentemente criar e transmitir um patrimônio literário imenso.

A primeira forma de escrita que apareceu na mesopotâmia foi a pictográfica[1], que devido a evolução dos processos de abstração, acabou assumindo o valor de ideograma até se converter definitivamente num símbolo fonético, ao qual correspondia um som isolado. Paralelo ao progresso da abstração, os símbolos passaram por uma simplificação gráfica, onde estiletes em forma de cunha eram utilizados para grafar em argila fresca, dando forma à escrita que ficou conhecida como *cuneiforme*. Apesar de ter inicialmente a pretensão de atender a função fonética da língua suméria, a escrita cuneiforme foi utilizada para atender outros povos mesopotâmicos como, por exemplo, os Semitas.

[1] Forma de escrita na qual cada objeto era representado por meio de uma imagem que o reproduzia.

O material sobre o qual se escrevia era a tábua de argila, que impressa ainda fresca, era cozida para se tornar mais resistente. Os textos escritos nestas tábuas eram de diversos tipos: atos administrativos, tratados científicos, listas de palavras, hinos religiosos, esconjuros, orações, etc.

Fisher (2009, p.10) reafirma a importância da escrita para a sociedade: "A escrita fascina a todos. Por cerca de seis mil anos, cada época adotou essa maravilha, sem dúvida a ferramenta mais versátil e interessante da sociedade. [...] Tornou-se a suprema ferramenta do conhecimento humano (ciência)".

O pensamento algébrico era expresso sem fazer uso dos símbolos e abreviações que utilizamos hoje. Todos os passos relativos aos esquemas operatórios sobre números e equações eram descritos em linguagem corrente.O pensamento algébrico expresso pela linguagem retórica foi característico dos povos mesopotâmicos, hindus, árabes e egípcios, como veremos a seguir.

2.1.1 A álgebra na Mesopotâmia

Segundo Tabak (2004, p.02), os mesopotâmicos eram sofisticados matematicamente, contudo, isto não garante que eles sabiam álgebra (no sentido relacionado aos procedimentos de cálculo que consideramos hoje) . A dificuldade em determinar o conhecimento matemático mesopotâmico reside não no que eles faziam, mas no modo como faziam. Por exemplo, muitos dos problemas que hoje resolvemos por meio de métodos tipicamente algébricos eram resolvidos por estes povos por meios bastante diferentes, o que para alguns historiadores pode indicar o desconhecimento sobre a álgebra.

Os métodos de resolução de problemas eram voltados para as equações e apresentavam uma pequena linguagem simbólica nas soluções. Não podemos deixar de ressaltar que a resolução de problemas foi o caminho que levou os mesopotâmicos a desenvolverem a matemática e as ciências de seu povo. Por meio de problemas individuais, progrediam em seus estudos, avançando da teoria simples para a complexa. Começavam com a aritmética simples até chegarem aos problemas que hoje podem ser resolvidos através das equações quadráticas ou de segundo grau.

O interesse a respeito dos diferentes métodos de resolução de equações, fez com que a álgebra desenvolvida na mesopotâmia fosse denominada, segundo Tabak (2004,p.03) de pré–álgebra, ou álgebra aritmética ou ainda álgebra numérica.

Para Tabak (2004, p.03), os obstáculos na compreensão da álgebra mesopotâmica vão além dos diferentes métodos de resolução de problemas. Para o autor, o fato principal é baseado na questão da linguagem. Analisar os trabalhos mesopotâmicos segundo nossa linguagem e notação algébrica pode atrapalhar o entendimento sobre os métodos aplicados e o saber matemático utilizado neles.

As tábuas de argila que apresentam textos matemáticos mesopotâmicos datam de dois períodos bastante distintos da história da mesopotâmia (o período babilônico antigo, 2000 a 1600 a. C e o período selêucida[2]). Os problemas presentes nestas tábuas eram apresentados da seguinte maneira: primeiramente era enunciado e passo a passo a resolução era descrita por meio de frases concisas ou sentenças, ou seja, sem "sinais" ou notações convenientes.

A linguagem retórica utilizada pelos povos mesopotâmicos utilizava alguns termos que de modo grosseiro correspondem à nossa notação abstrata. Eles não usavam letras para representar valores desconhecidos, pois não haviam criado o alfabeto ainda (BOYER, 2012). Eles faziam uso de palavras do cotidiano deles, tais como comprimento e largura (variáveis x e y na nossa linguagem usual). O produto entre o comprimento e a largura era chamado de área, o que não significa dizer que o problema em questão era interpretado sob uma perspectiva geométrica.

A falta de uma simbologia específica algébrica deixava a resolução dos mesopotâmicos complexa, dada a simplicidade dos problemas com os quais trabalhavam principalmente no que se refere às equações do segundo grau, que na concepção deles poderiam ser resolvidas de maneiras diferentes, de acordo com o tipo de equação que era apresentada.

Eles perceberam a existência de três tipos básicos de equações que, na nossa notação atual, são descritas da seguinte forma:

$$x^2+bx=c$$
$$x^2+c=bx$$
$$x^2=bx+c$$

Em todas elas, os valores de b e c eram números positivos. O trabalho estava relacionado a simplificar as equações de modo que ficassem em um dos três formatos, para que assim pudessem ser resolvidas.

---

[2] É chamado *Período Babilônio Antigo* o período que vai de 1894 a 1595 a.C. O Império Selêucida foi um Estado helenista que existiu após a morte de Alexandre, o Grande da Macedônia, cujos generais entraram em conflito pela divisão de seu império.

Segundo Tabak (2004, p.05), matematicamente, a complexidade das resoluções mesopotâmicas estava relacionada à concepção de número que eles tinham (eles não aceitavam a existência de números negativos). Todas as aproximações feitas por eles consideravam somente números positivos, e por mais que fossem boas do ponto de vista prático, do ponto de vista matemático apresentavam falhas. Por exemplo, não se importavam com as diferenças entre exato e aproximado, fato este que pode ser observado nas resoluções de equações do 3º e 4º graus.

Eles faziam uma distinção bastante forte entre número abstrato, que era um número grafado na notação posicional sexagesimal, desacompanhado de unidade de medida, e o número concreto ou número de medir, que era grafado num sistema diferente, sempre acompanhado de unidade de medida.

A respeito da geometria, os indícios de tal conhecimento por parte dos mesopotâmicos aparecem com as equações indeterminadas. O mais famoso exemplo de equação determinada é do tipo: $x^2 + y^2 = z^2$, que pode ser interpretada geometricamente como o Teorema de Pitágoras. A versão indeterminada desse teorema tem como objetivo identificar o que chamamos de Triângulos Pitagóricos.

Eles desenvolveram um algoritmo para computar raízes quadradas que se aproximava de um quadrado positivo, o qual ficou conhecido como algoritmo de recursão, que consistia em muitas etapas seguidas de repetição de procedimentos para obter uma resposta exata.

Segundo Tabak (2004, p.09) em nossa notação o algoritmo mesopotâmico pode ser representado por:

$$\text{saída} = \frac{1}{2}\left(\text{entrada} + \frac{2}{\text{entrada}}\right) [1]$$

Por exemplo, substituindo como entrada 1,5 e 1,416 como saída temos:

$$1{,}416 = \frac{1}{2}\left(1{,}5 + \frac{2}{1{,}5}\right) [2]$$

E para o segundo passo, temos:

$$1{,}414215 = \frac{1}{2}\left(1{,}416 + \frac{2}{1{,}416}\right) [3]$$

Sobre as equações cúbicas, as do tipo pura como $x^3 = 0;7,30$ eram resolvidas por intermédio de tabelas de raízes cúbicas. As cúbicas mistas na forma padrão $x^3 + x^2 = a$ eram resolvidas de modo semelhante, através de tabelas para valores de $n^3 + n^2$ com inteiros entre 1 e 30. Apesar da falta de simbolismo, os métodos mesopotâmicos para resolver equações algébricas eram extremamente avançados para a época.

Com o passar do tempo, a matemática mesopotâmica foi evoluindo, bem como as técnicas de cálculo algébrico. Segundo Wussing (1998, p.24), os textos mesopotâmicos mais recentes apresentam uma escritura abreviada mediante símbolos, como por exemplo, *lal*, para a subtração e *tab* para adição ou para confirmar a igualdade de ambos os membros.

Podemos dizer que referente a noção de variável, os mesopotâmicos desenvolveram a noção de incógnita ou valor desconhecido, tendo a resolução de problemas como característica principal desta noção. A resolução de problemas neste contexto surgiu da necessidade prática de interpretar situações de ordem política e social dos mesopotâmicos, como por exemplo, questões de produtividade dos povos e cobranças de impostos.

Observa-se aqui que a noção de variável como incógnita dava à álgebra desenvolvida pelos povos mesopotâmicos um caráter pragmático, ou seja, absoluto e o mais objetivo possível, e procurava de forma intuitiva igualar duas quantidades, com a finalidade de encontrar o valor da quantidade desconhecida. A busca por soluções relacionava-se a equações particulares para resolver problemas específicos. Os métodos utilizados, em sua maior parte, estavam ligados a ideias aritméticas e não tinham como preocupação a busca por soluções gerais para esses tipos de equações (lineares e quadráticas).

2.1.2 A álgebra na Índia

Segundo Boyer (2012), a maior parte da matemática que conhecemos como indiana foi escrita em sânscrito, cuja a forma mais antiga descende de uma língua indo - iraniana falada por volta do meio do segundo milênio a. C. Muitos dos materiais que se tem conhecimento da matemática desenvolvida na Índia ainda não foram decifrados, o que torna o desafio linguístico e histórico mais complicado, uma vez que é difícil traçar um mapa do espaço tempo das atividades desenvolvidas na região. (BOYER, 2012, p.151).

No que diz respeito à álgebra indiana, a mesma foi relevante no que se refere às equações indeterminadas. De acordo com Boyer (2012) os Hindus acharam soluções gerais de equações quadráticas, com duas raízes, tanto positivas como negativas. Também consideravam as raízes irracionais dos números como números, o que significou um grande passo para a álgebra. Não tinham dificuldade para aceitar os irracionais como números e não faziam uma distinção cuidadosa entre resultados exatos e inexatos e entre grandezas comensuráveis e incomensuráveis.

Voltando à questão das equações indeterminadas, o maior contribuidor para seu desenvolvimento foi Brahmagupta (viveu em 628 d. C). Segundo Boyer (2012, p. 160), ele foi aparentemente o primeiro a dar uma solução geral da equação $ax+by=c$, onde a, b e c são inteiros. Ele sugeriu também a equação diofantina quadrática $x^2=1+py^2$, a qual foi resolvida para alguns casos pelo seu contemporâneo Bháskara. Por ter proposto uma solução geral para equações diofantinas e por ter usado exemplos da obra de Diofanto que alguns historiadores acreditam que a matemática indiana deva ter recebido influências da grega.

A respeito da linguagem algébrica, esta era predominantemente retórica e os problemas eram expostos em forma de versos. Embora ocorram obstáculos de tradução da linguagem hindu, as investigações históricas identificaram que eles avançaram nos métodos de resolução de equações se comparados com os mesopotâmicos.

Tal qual os mesopotâmicos, os hindus também desenvolveram a noção de variável como incógnita, contudo, eles trabalhavam tanto com equações originárias de ordem prática, quanto em situações que recaiam em interpretações e manipulações geométricas, dando à noção de variável um caráter mais generalizador, ao buscar formas canônicas de resolução. No sentido de variável como padrão generalizador, a equação estava relacionada a aspectos estruturais com propriedades e características bastante definidas, operando sobre ela mesma, com finalidade de encontrar soluções gerais.

Voltando ao aspecto da linguagem, observa-se na obra de Brahmagupta a transição da linguagem retórica para uma linguagem especificamente matemática através da utilização de sinais para as operações de adição, subtração, e divisão, e de abreviações de palavras para a multiplicação e extração de raízes.Para subtração colocava um ponto sobre o subtraendo e na divisão colocava o divisor abaixo do dividendo, semelhante à nossa notação, mas sem a barra. As incógnitas foram representadas por termos apropriados.

2.1.3 A álgebra árabe

No que se refere a história da álgebra árabe, destacaremos as contribuições do matemático e astrônomo Islâmico Mohammed ibu-Musa Al-Khwarizmi. Duas obras de Al-Khwarizmi foram muito notáveis na história da matemática. A primeira, o livro de número hindorum (sobre a arte hindu de calcular) foi provavelmente uma tradução da obra de Brahmagupta, e trazia uma exposição dos numerais hindus. Esta obra foi traduzida para o latim, contribuindo para divulgação destes numerais na Europa, que ficaram conhecidos como algarismos ou algoritmos, palavras que se originaram do nome de Al-Khwarizmi. A segunda obra mais importante é conhecida como Al-jabr wa'l muqabalah, da qual se originou o termo álgebra.

É considerada uma obra muito mais próxima da álgebra elementar que conhecemos, pois, segundo Boyer (2012), a mesma contém uma exposição direta e elementar de resoluções de equações, em especial as de segundo grau. Os problemas que aparecem na obra de Al-Khwarizmi envolvem proporção e (como um apêndice adicional) algumas equações padronizadas.

Segundo Tabak (2004), em Al-jabr, Al-Khwarizmi deu a álgebra um novo significado. Esta obra tem pouco em comum com o trabalho de Brahmagupta e Diofanto, que veremos adiante. Os problemas resolvidos, eram em grande parte, menos avançados e evitava-se envolver o zero ou números negativos nas soluções, além de evitar problemas com múltiplas soluções.

Tabak (2004) afirma que o objetivo da obra era descrever soluções de problemas de ordem prática, tais como a construção de canais e partilha de propriedades. Neste trabalho, Al-Khwarizmi se expressava inteiramente em linguagem retórica, mesmo os números eram escritos em palavras, em vez de símbolos. Havia a preocupação com as soluções das equações de segundo grau, porém diferente do método elaborado por Bramagupta na Índia, Al-Khwarizmi não percebe todas as equações quadráticas como instâncias de um único termo geral. Em vez disso, tratava as equações quadráticas como vários casos particulares. Por exemplo, ele considerava a equação quadrática, tal como $x^2 = 5x$ como tendo solução 5 (não reconhecia o zero como solução legítima).

Segundo Hughes (1989) Al-Khwarizmi distingue seis formas de equações, sendo três delas classificadas como simples e três como compostas, combinando variadamente três números algébricos.Essas equações em nossa notação são escritas como:

$ax^2 = bx$

$ax^2 = c$

$ax = c$

$ax^2 + bx = c$

$ax^2 + c = bx$

$bx + c = ax^2$

A visão inicial que se tem do trabalho de Al-Khwarizmi tende a considerar que o matemático tinha uma visão de álgebra como um conjunto de técnicas de resolução de problemas. Contudo, Tabak (2004) afirma que esta visão não está correta. Observa que na obra de Al-Khwarizmi há uma mudança de foco: depois de apresentar uma coleção de técnicas de solução de problemas, ele retoma os mesmos problemas e prova geometricamente os seus métodos de solução. Este fato era um tanto novo no campo da matemática, o que faz de Al-jabr uma obra tão importante.

Para Tabak (2004) a prova geométrica que Al-Khwarizmi utilizou provavelmente foi herdada da álgebra geométrica dos gregos. Ele queria construir sua álgebra em uma fundação lógica sólida, e se apoiou no modelo de raciocínio dedutivo clássico da geometria grega.

Tabak (2004) apresenta um modelo de problema que aparecia na obra de Al-Khwarizmi. Ele tinha interesse no desenvolvimento de procedimentos para o cálculo de raízes quadradas, começando com exemplos simples. O problema seria descrito nos dias atuais:

> Pegue a raiz de nove para ser multiplicada . Se você quiser dobrar a raiz de nove faça o seguinte: 2 vezes 2 dá 4, que multiplicado por 9 , dá 36. Pegue a raiz deste , ou seja, 6, que é encontrada para ser duas raízes de nove , ou seja, o dobro de três. Para três, a raiz de nove, adiciona-se ele mesmo, obtendo 6. (TABAK,2004, p.51)

Em nossa notação expressamos essa ideia como $2\sqrt{9} = \sqrt{4.9} = \sqrt{36} = 6$. Ele estende este exemplo numérico simples em várias fórmulas algébricas mais gerais. Por exemplo , teríamos que expressar uma de suas equações retóricas da seguinte forma: $3\sqrt{x} = \sqrt{9.x}$.

Segundo Tabak (2004) o conceito de incorporação de raciocínio geométrico para reforçar seus argumentos algébricos fez da obra de Al-Khwarizmi um trabalho importante para definir o padrão de rigor na álgebra durante séculos.

Sobre a noção de variável, observasse na obra de Al-Khwarizmi que o mesmo desenvolveu a noção de variável como incógnita. A forma como apresentava suas técnicas de resolução, baseada em vários casos particulares mostra que o mesmo não utilizou padrões de generalização em seus métodos, o que pode ser justificado devido a noção de número como quantidade absoluta e mensurável que, apesar de em alguns casos ser desconhecida, está relacionada com as "coisas" que são conhecidas, tornando a determinação da quantidade desconhecida possível.

A demonstração geométrica de Al-Khwarizmi, conhecida por nós como "método de completar quadrados", embora não tenha sido generalizada, sendo desenvolvida em casos particulares, foi relevante para relacionar o campo da álgebra com a geometria, sendo que este método está presente até hoje no ensino.

2.1.4 A álgebra egípcia

Segundo Wussing (1998, p.16), pouco se sabe sobre a matemática egípcia. Todo o conhecimento que temos sobre esse povo provém de papiros, que são documentos que eram utilizados na educação dos egípcios. Cinco deles abordam questões matemáticas, sendo os mais importantes deles o papiro Rhind (também conhecido como papiro Ahmes) e o papiro de Moscou, os quais datam provavelmente do século XVIII a. C, sendo que o conteúdo destes documentos são mais antigos.

Segundo Imhausen (2007, p.8), os papiros continham diferentes problemas matemáticos que se distinguiam de acordo com o assunto. A maioria tratava de situações administrativas e apresentavam um caráter desenvolvido e prático, tais como calcular impostos, medições de terras e projeções de obras arquitetônicas.

No que se refere ao conhecimento algébrico, o papiro Rhind possuía 87 problemas de caráter algébrico, acompanhados da sua respectiva solução na escrita cursiva hierática, relacionados a situações que envolviam equações lineares. Contudo, assim como os mesopotâmicos, os egípcios resolviam esses problemas de modo diferente do convencional para situações consideradas algébricas.

O método de resolução desenvolvido pelos egípcios ficou conhecido como *método da falsa posição*, o qual se constitui em um método aritmético indireto para resolução de problemas com valores desconhecidos, que recaem em uma equação do primeiro grau. De acordo com Zuin (2013, p.5) para resolver um problema utilizando esse procedimento, supomos um determinado valor como resposta, caso o valor não verifique a equação, fazemos uma comparação entre o valor escolhido, o valor obtido e o que se quer obter, chegando à solução do problema. A autora afirma que:

> O procedimento para utilização do método da falsa posição se inicia supondo-se um determinado valor hipotético como sendo a resposta do problema. No entanto, verifica-se que se tomavam valores convenientes para se evitar o trabalho com as frações, demonstrando que prevalecia, entre os calculistas egípcios, o princípio de simplificar os cálculos. Caso o valor hipotético atribuído não verificasse a “equação”, fazia-se uma comparação entre o valor atribuído, o valor obtido a partir deste, a incógnita e o valor real do problema, o que conduziria a uma comparação de frações, ou seja, utilizando proporções, resultando num caso de regra de três simples. (ZUIN,2013,p.5)

Segundo Wussing (1998, p.19), as equações lineares que apareciam nos textos egípcios resultavam de cálculos do tipo *hau*[3]. Palavras como *montão* e *quantidade* apareciam no lugar da grandeza que se queria determinar, dando indícios do desenvolvimento da linguagem sincopada.

O método da falsa posição, segundo Medeiros & Medeiros (2004, p.547) tinha como ponto de partida o levantamento inicial de uma hipótese sobre o valor da quantidade a ser determinada. Esta hipótese não era aleatória, e sim conveniente ao propósito estabelecido de simplificar os cálculos evitando o aparecimento de frações, assim como podemos observar no exemplo de problema que aparecia nos textos egípcios apresentado por Zuin (2013, p.07):

Problema 26 - Uma quantidade adicionada ao seu 1/4 resulta 15. [Qual é essa quantidade?]

A resolução apresentada no papiro é a seguinte: “Tome-se o 4 e. então, se 1/4 dele dá 1 o total é igual a 1. Divida-se 15 por 5 e dá 3. Multiplique-se 3 por 4 e obtém-se 12”

Wussing (1998), afirma também que nos textos egípcios apareciam equações do tipo $x^2 + y^2$ que supõem a aparição dos ternos pitagóricos, assim como ocorreu com os mesopotâmicos, indicando que esta civilização também conhecia o Teorema de Pitágoras.

Vemos que os egípcios tratavam da noção de variável como incógnita, e resolviam as situações problemas por meio de substituição de valores que satisfaziam a equação e da proporcionalidade. Como eles não apresentaram nos papiros a demonstração dos seus métodos, não se pode afirmar que os mesmos alcançaram a generalidade de suas regras, ou seja, não sabemos se eles tinham a noção de variável como padrão generalizador. No entanto, o método da falsa posição demonstra um raciocínio lógico.

[3] Palavra utilizada pelos egípcios para designar uma grandeza.

2.1.5 A álgebra na China

O registro histórico mais antigo da matemática desenvolvida na China é *Matemática em Nove Livros*. Segundo Wussing (1998, p. 72), não se sabe quem escreveu a obra, contudo acredita-se que esta retroceda até o século III a. C. Foi reelaborado por Liu Hui[4] no ano de 623, sofrendo múltiplas modificações posteriormente, até ser adotado como livro texto para a formação de altos funcionários chineses, no ano de 656.

Esta obra em grande parte está voltada para problemas de ordem prática, como construção de campos, canais, diques, cobranças de impostos, etc. A respeito da álgebra, segundo Wussing (1998, p.73), os conhecimentos algébricos chineses eram voltados para a resolução de equações lineares indeterminadas, extração de raízes quadradas e cúbicas e para um procedimento de caráter algorítmico que ficou conhecido como *fangcheng*.

O apogeu do conhecimento algébrico chinês foi alcançado no século XIII. Neste período, desenvolveram um procedimento padrão válido para a resolução numérica de equações algébricas de grau superior com coeficientes numéricos que é atualmente conhecido como Método de Horner[5].

O matemático que desenvolveu esse método na China foi Ch'in Chiu-Shao (1201-1261 d.c, também conhecido como Chin Kin Shao) que o denominou de "Método do Elemento Celeste"(forma como os chineses denominavam a incógnita). Hodgkin (2005) reproduz a "equação " para o problema de Qin, traduzindo como

$$-x^4 + 15{,}245x^2 - 6{,}262{,}506.25 = 0$$

Os coeficientes são escritos em uma coluna, a partir do termo constante (1, 0, 15, 245, 0, 6,262,506.25); abaixo de cada um é o seu "grau", uma descrição verbal/simbólica da potência do desconhecido ao qual ele pertence. Coeficientes positivos e negativos são diferenciados pela escrita da palavra pertinente à eles. Não é uma equação como a conhecemos, mas que pode ser vista como uma tradução prática de uma para a linguagem de matrizes, que tinha sido tão utilizada nos nove capítulos, e as manipulações subsequentes Qin parece estar relacionada com o método Fangcheng.

[4] Foi um matemático do estado de Cao Wei durante o período dos Três Reinos da história da China.

[5] O método de Horner descreve um processo manual, através da qual pode-se aproximar as raízes de uma equação polinomial. Pode ser visto como um algoritmo rápido para dividir um polinômio por um polinômio linear com a regra de Ruffini.

Sobre este método, Boyer (2012) mostra um exemplo de como Ch'in Chiu-Shao se aproxima da raiz quadrada da equação $x^2 - 71.824 = 0$. Começando com o valor de 200, realiza uma mudança de incógnita ao tomar $x = y + p$, com $p = 200$, pelo qual a equação inicial fica como $(y - 200)^2 - 71.824 = 0$, igual a $y^2 + 400y + 40000 - 71824 = 0$, e portanto, equivalente a $y^2 + 400y - 31824 = 0$. Para esta segunda equação é determinada uma raiz com valor aproximado de 60. Realizando outra substituição de $y = z + 60$, fica $(z + 60)^2 + 400(z + 60) - 31824 = 0$, onde por procedimentos simples a terceira equação $z^2 + 520z - 4224 = 0$ obtém a raiz exata $z = 8$ e assim a original terá por substituição $x = 268$.

Observa-se que os Chineses tinham conhecimentos sobre a noção de variável como incógnita e como padrão generalizador. Os seus métodos apresentam substituições, aproximações e embora também utilizassem a linguagem retórica, eles desenvolveram um conhecimento matemático muito sofisticado que envolvia sucessões finitas, a utilização do zero, do hoje conhecido triângulo de Pascal, coeficientes binomiais e métodos de interpolação.

2.2 A NOÇÃO DE VARIÁVEL EM ÁLGEBRA NO PERÍODO SINCOPADO

Entende-se como período sincopado o momento histórico de transição da linguagem algébrica, que deixava de usar exclusivamente a linguagem usual de uma determinada civilização para começar a ter uma simbologia própria. A linguagem sincopada, sob o ponto de vista da história da matemática europeia apareceu nos trabalhos de Diofanto, que serão mostrados adiante.

Neste estágio da linguagem algébrica, observam-se palavras que aparecem continuamente nas resoluções de problemas. Estas palavras começaram a ser abreviadas para representar as estruturas comuns nas resoluções de problemas. A difusão da linguagem sincopada coincidiu com o surgimento da imprensa.

A linguagem sincopada da álgebra apareceu na obra Arhitmetica de Diofanto em um sistema simbólico baseado na abreviação que permitiu que diversas áreas do conhecimento utilizassem a álgebra como ferramenta, possibilitando que se pensasse no formalismo simbólico.

O período da linguagem sincopada foi marcado pela criação de símbolos, de modo que organizasse o pensamento algébrico de forma conexa, retirando elementos da experiência, tal como diz Whitehead (1987) para criar significados e estruturas próprias da álgebra.

2.2.1 A álgebra na Grécia

A matemática grega era diferente da matemática desenvolvida na Mesopotâmia ou na China. Segundo Tabak (2004, p.18), a natureza do conhecimento matemático grego está presente desde o início na obra de Tales de Mileto (624-548 a. C, aproximadamente) e Pitágoras de Samos (580-500 a. C, aproximadamente) e está voltada para questões relativas à natureza do número e à forma. Para eles, era a matemática em si, e não suas aplicações práticas, que gerava motivação para o seu estudo, o qual tinha como objetivo as ideias em termos de propriedades de números, pontos, curvas, planos e sólidos geométricos. Dessa maneira, os gregos se destacam aqui devido a esta motivação, que deixou de ser guiada por fatores do cotidiano e se voltou para o conhecimento com finalidade puramente matemática, sendo considerados os primeiros matemáticos "puros".

Outra diferença presente na matemática grega era a distinção que era feita entre resultados exatos e aproximados, sendo os primeiros em um sentido mais prático, mais úteis que as aproximações. Este fato influenciou no modo como eram realizadas as investigações, bem como no objeto investigado pelos gregos, o que levou este povo a descobertas importantes na matemática antiga.

A respeito da matemática desenvolvida na Grécia, temos bastante informações. Contudo, como nossa proposta é um estudo histórico da álgebra, optamos por fazer um recorte específico e voltarmos nossas atenções para o trabalho de Diofanto de Alexandria (viveu em meados do séc. III a. C), o qual contribuiu significativamente para o desenvolvimento da álgebra.

Segundo Wussing (1998, p. 63), a obra de Diofanto mostra claras evidências dos contatos dos gregos com os mesopotâmicos, tais como a extraordinária semelhança entre os problemas estudados por ele e os que aparecem em textos dessa civilização.

A obra mais importante de Diofanto que se tem conhecimento é o tratado de Arithmética, a qual é organizada progressivamente, dos problemas mais fáceis até os mais difíceis, sem que haja uma grande preocupação com a teoria geral. Segundo Derbyshire (2006), a principal parte sobrevivente do tratado consiste em 189 problemas em que o objetivo é encontrar os números, ou famílias de números, satisfazendo certas condições. O início do tratado é uma introdução em que Diofanto apresenta um esboço de seu simbolismo e método para resolver equações, o qual Wussing (1998, p. 63) reescreve:

> Se agora, em um problema qualquer, aparecem as mesmas expressões gerais em ambos os lados de uma igualdade, porém com coeficientes distintos, então se subtrai igualmente em ambos até que finalmente a expressão de um membro possa ser comparada com a do outro. Se quiser que haja expressões gerais quaisquer em um lado ou em ambos como quantidades que serão subtraídas, então se somará o mesmo a ambos os lados, de maneira que em cada lado se tenha somente as quantidades somadas. Depois novamente se subtrai igualmente, até que em cada lado se tenha uma única expressão. Continua-se seguindo esses procedimentos até que, caso seja possível, se tenha em cada lado somente um termo.(L 4.4, . p. 7 - 8, apud WUSSING, 1998, p.63, tradução nossa)

A linguagem algébrica utilizada por Diofanto, de acordo com Derbyshire (2006) parece primitiva aos nossos olhos, mas era muito sofisticada em seu tempo. Utilizava o sistema grego " alfabético " para escrever os números . Isso funcionou tomando o alfabeto grego comum de 24 cartas e aumentando-o com três letras obsoletas para dar um total de 27 símbolos. Estes foram divididos em três grupos de nove cada. As primeiras nove letras deste alfabeto representavam os dígitos de 1 a 9, o segundo representava as dezenas de 10 a 90, o terceiro representava as centenas 100-900 . Os gregos não tinham símbolo para zero.

Diofanto apresentava abreviaturas fixas para potências e variáveis, para igualdades e subtrações. Sobre os procedimentos de cálculo, estudava todos os tipos de equações quadráticas, cúbicas, biquadráticas, com coeficientes fracionários e equações indeterminadas (estas últimas conhecidas como equações Diofantinas).

Segundo Derbyshire (2006), no que se refere à notação da variável, Diofanto com a sua notação não poderia representar mais do que um valor desconhecido, ou seja, ele teria o x, mas não teria o y ou o z na mesma equação, o que era um grande obstáculo para equações indeterminadas. Contudo, tal obstáculo não impediu que Diofanto apresentasse soluções para este tipo de equação.

Segundo Wussing (1998), o caráter algébrico da obra de Diofanto corresponde a uma elevada técnica de transformações de equações, que inclui a substituição com variáveis auxiliares, algo que posteriormente fundamentaria a matemática do período moderno. Ele resolve equações cúbicas e quárticas com um único termo desconhecido; sistemas de equações simultâneas em dois, três, e quatro incógnitas, e um problema equivalente a um sistema de oito equações em 12 incógnitas.

Diofanto tinha a noção de variável como incógnita e expressava seus métodos de resolução por meio de propriedades gerais, indicando um conhecimento da noção de variável como padrão generalizador. Uma das grandes contribuições do trabalho de Diofanto foi a tentativa sofisticada para o período de expressar o pensamento algébrico de modo coerente, através de uma simbologia própria.

2.3 A NOÇÃO DE VARIÁVEL EM ÁLGEBRA NO PERÍODO SIMBÓLICO

Na história da álgebra, o período simbólico é conhecido como o momento de consolidação da notação algébrica, dando à álgebra uma linguagem simbólica própria.

A notação tinha como objetivo definir simbolicamente a variável, permitindo a escrita de equações e suas propriedades em regras gerais. Os objetos das operações matemáticas se tornaram as próprias expressões algébricas. O símbolo específico liberou a álgebra da escravidão do verbo e das ambiguidades da linguagem comum usada no cotidiano da sociedade.

Mais tarde, a linguagem algébrica se libertou de determinadas variações. Os significados se tornaram independentes dos símbolos que antes figuravam, tornando o acesso da álgebra ao abstrato mais fácil e proporcionando uma modificação conceitual, na qual a matemática passou a ser usada como ferramenta para outras ciências.

A linguagem simbólica se desenvolveu com mais intensidade na Europa, no período do renascimento. A álgebra estava passando por um período de estruturação linguística, em que símbolos específicos começaram a surgir para substituir as palavras usadas em abreviações da linguagem sincopada. Por exemplo, foi neste momento em que apareceram os primeiros registros dos sinais de "+" e "-", que mais tarde viriam a se tornar símbolos para operações aritméticas.

A consolidação linguística da álgebra foi acompanhada também pela preocupação com o estudo das equações, assim como foi observado nas outras civilizações anteriormente. E neste caso, o estudo das equações teve um avanço considerável que segundo Boyer (2012) só é comparado ao feito dos babilônicos que aprenderam a completar quadrados para equações quadráticas.

Um dos maiores contribuidores para o estudo das equações foi Gerônimo Cardano (1501-1576), o qual publicou a obra *Ars magna*, que traz a resolução de equações cúbicas e de quarto grau, marcando o início do que conhecemos como período moderno da matemática. Sobre ser o descobridor original da solução, segundo Boyer (2012), Cardano afirma que ele não o era, atribuindo o feito a Tartaglia (1500-1557) e de quarto grau a Ferrari (1552-1565), sem no entanto mencioná-los na obra.

Ars magna é uma obra que trata detalhadamente das soluções de equações, que também seguiam o pensamento de Al-Khwarizmi relativo ao método geométrico, que pode ser considerado como uma forma de completar cubos. Foi relevante para impulsionar os estudos no campo da álgebra e observações significativas no que diz respeito a números irracionais, negativos e imaginários.

2.3.1 François Viète e o surgimento da linguagem simbólica

A linguagem algébrica recebeu sua maior contribuição no período do Renascimento através dos trabalhos de François Viète (1540-1603). Segundo Boyer (2012, p.212), ele foi responsável por introduzir uma vogal para representar uma quantidade desconhecida ou indeterminada e uma consoante para representar grandezas ou números supostos conhecidos ou dados. Foi aqui que aconteceu a primeira distinção conceitual de parâmetro e a ideia de quantidade desconhecida. Ele não utilizou simbolismos em todos os seus estudos de álgebra, no entanto, ele deu o passo inicial para que a linguagem simbólica surgisse, dando à álgebra uma representação linguística própria.

Segundo Wussing (1998, p.113) Viète era consciente da necessidade da utilização de símbolos. O autor destaca uma fala do matemático em um texto intitulado " Introdução à arte algébrica" de 1591:

> Assim é também a arte que agora proponho, [...] que considero necessário eliminar todas suas falsidades para que não caia em si, nem na mais insignificante impureza [...] e para dar-lhe uma forma completamente nova, além de inventar e introduzir também novas expressões [...] minha técnica permite encontrar as soluções de todos os problemas com maior segurança. (VIÈTE, 1591,apud WUSSING, 1998, p. 113, tradução nossa)

O simbolismo proposto por Viète não contemplou toda a álgebra estudada na época, no entanto, foi precursor da linguagem simbólica que se consolidaria no período da revolução industrial.

Segundo Wussing (1998, p.191) com o simbolismo de Viète a álgebra ganhou uma certa maturidade, a qual é entendida como primeira etapa do desenvolvimento da linguagem simbólica da álgebra. O autor afirma que no período da Revolução Industrial ocorreu uma segunda etapa de desenvolvimento da linguagem simbólica algébrica.

Não diferente do que vimos nos períodos e civilizações anteriores, durante a Revolução Industrial, o estudo das equações também era relevante, sendo que neste momento a busca era voltada para resolução de equações de quinto grau.

A discussão girava em torno da possibilidade ou impossibilidade de resolver equações de quinto grau. Gauss (1777-1855) em sua tese de 1799, havia afirmado com convicção que as equações com grau superior a quatro não eram resolvidas por radicais. No mesmo ano, Ruffini (1765-1822) demonstrou a impossibilidade de resolver equações de quinto grau por meio de radicais.

Segundo Wussing (1998, p.193) os resultados de Ruffini foram ignorados durante muito tempo, tanto que Abel (1802-1829), considerado outro descobridor da impossibilidade de solução das equações de grau superior a quatro não teve conhecimento dos trabalhos de Ruffini até 1826, quando começou a publicar trabalhos sobre o tema.

2.3.2 As contribuições de Abel e Galois para o desenvolvimento da álgebra

O matemático norueguês Abel (1802-29) foi um dos mais importantes matemáticos do século XIX. Sua contribuição mais importante para a história da álgebra está relacionada às soluções de equações com grau maior que 4. Segundo Tabak (2004), Abel se dedicou a procurar um algoritmo que permitiria resolver todas as equações de 5º grau. Ele demonstrou a impossibilidade de resolver equações de quinto grau por radicais e posteriormente demonstrou para todas as equações superiores ao grau quatro. Também determinou completamente a classe de equações algébricas que podem ser resolvidas por radicais.

Outro matemático que se dedicou a resolução das equações de 5º grau foi Evariste Galois (1811-1832). Embora seja contemporâneo de Abel, segundo Tabak (2004), Galois não teve contato com os trabalhos destes sobre a resolução de equações do 5º grau.

Segundo Tabak (2004) entre as contribuições de Galois está a resolução de um problema clássico da geometria: a duplicação de um cubo. Ele provou a impossibilidade de resolver o problema com régua e compasso.

Segundo Kleiner (2007), os trabalhos de Abel e Galois proporcionaram uma mudança de objetivo e significado da álgebra, que durante cerca de 3 milênios esteve relacionada à resolução de equações polinomiais até o grau 4. Eles foram responsáveis por desenvolverem os passos iniciais da hoje conhecida *teoria dos grupos*, que é considerada a segunda etapa de desenvolvimento da linguagem algébrica, marcada pelo começo do pensamento estrutural em álgebra, o qual segundo Brandemberg (2010) trata-se do "cálculo literal", cujos elementos essenciais eram os conjuntos, as relações e as estruturas, sendo admitido como último estágio da gênese da noção de estrutura algébrica.

Derbyshire (2006, p.212) define brevemente grupo como um conjunto de objetos permutações, números, combinados por uma regra que deve obedecer os seguintes princípios ou axiomas:

- Fechamento: o resultado da operação de dois elementos de um conjunto tem que ser um elemento deste conjunto, " tem que estar no grupo".
- Associatividade: se a,b e c são elementos do grupo e X é a regra para operá-los, temos a X (b X c) = (a X b) X c sempre. Com esta regra nós podemos inequivocamente operar três ou mais elementos do grupo.
- Existência de um único: existe algum elemento do grupo que, quando operado com outro elemento, deixa o outro elemento inalterado. Nós podemos chamar este elemento especial 1, temos para todo elemento a do grupo este caso: 1 X a = a.
- Todo elemento tem um inverso: se a é um elemento do grupo, podemos encontrar um elemento b, para o qual b X a = 1. Este elemento é chamado de inverso de a e é frequentemente escrito como a^{-1}.

A natureza do trabalho de Galois foi importante para álgebra por mostrar características essenciais para a teoria dos grupos. Segundo Kleiner (2007, p.65) um dos teoremas fundamentais para o desenvolvimento desta área provado por Galois foi o Teorema do Elemento Primitivo, o qual diz o seguinte: Ele diz que se E é um grupo de divisão de um polinômio f(x) sobre um grupo F, então E = F(V) para alguma função racional V de raízes de f(x). Galois utilizou este resultado para determinar o grupo de Galois da equação f(x) = 0.

2.4 A NOÇÃO DE VARIÁVEL NA HISTÓRIA DA EDUCAÇÃO ALGÉBRICA NO BRASIL

O panorama histórico da educação algébrica foi desenvolvido através de três períodos: a introdução da disciplina álgebra no Brasil , a Reforma Francisco Campos e o Movimento da Matemática Moderna. O primeiro período foi escolhido justamente por mostrar quando a álgebra passou a fazer parte do currículo de matemática no Brasil. A Reforma Francisco Campos foi escolhida por ter representado uma importante mudança no contexto da educação matemática, unificando a disciplina matemática, que antes era dividida em aritmética, álgebra e geometria. O Movimento da Matemática Moderna foi o período em que o ensino da álgebra ganhou destaque no Brasil, se comparado, por exemplo, com o ensino da geometria.

Mostraremos como a noção de variável se fundamentou ao longo da história da educação matemática escolar, evidenciando elementos formativos da álgebra ensinada no contexto de sala de aula.

Um estudo histórico da educação algébrica no Brasil é relevante, pois para compreendermos os fatores que influenciam nas concepções de álgebra que os alunos apresentam, precisamos partir da origem de modo a identificar o momento no qual esses fatores passaram a figurar nas visões de álgebra apontadas pelos discentes. Confirmamos nosso ponto de vista na fala de Gil (2008):

> Os problemas enfrentados nos dias atuais no ensino da Álgebra no Brasil podem ser um reflexo da evolução da Álgebra desde a sua inclusão no currículo até os dias atuais. É necessário que se faça um estudo, mesmo que breve, da sua história no currículo brasileiro, para que se compreenda melhor o que ocorre hoje. (GIL, 2008, p. 21)

2.4.1 A introdução da álgebra no currículo escolar (final do século XVIII e início do século XIX)

Segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1992), a álgebra como disciplina passou a fazer parte do currículo escolar brasileiro a partir da instituição, em 1799, da Carta Régia[6]. A álgebra, assim como outras disciplinas, tais como a aritmética e a geometria, era ensinada em aulas separadas, sem que fosse estabelecida uma conexão com outras áreas, mostrando o caráter estanque de compartilhamento do conhecimento que vigorava no período, que perdurou por muito tempo. O ensino seguia uma ordem que era iniciada pelo estudo da aritmética, depois da álgebra, e posteriormente da geometria e trigonometria.

Segundo Silva (2011), uma obra que foi referência didática para o ensino de álgebra neste período foi a de Sylvestre Lacroix (1757-1833), denominada “Elementos de Álgebra”.

O conteúdo da obra compreende: noções preliminares, passagem da aritmética para a álgebra, equações do primeiro grau com uma variável, expressões algébricas, quantidades negativas, sistemas de equações, fórmulas gerais para resolução de equação do primeiro grau, equações do segundo grau, formação de potências de monômios e extração de suas raízes, equações de dois termos, cálculo de radicais, redução de equações de grau superiores ao

---

[6] Instituída pelo Príncipe Regente D. João, a carta Régia de 1799 estendeu aos *governos gerais* e aos *capitães generais* a inspeção das escolas régias ou públicas de toda a colônia. A Carta recomendava a criação de cadeiras de aritmética, geometria, álgebra e trigonometria visando a formação de técnicos.

primeiro, raízes comensuráveis, resolução por aproximação de equações numéricas, proporções e progressões, teoria das quantidades exponenciais e logarítmicas, juros simples e compostos e anuidades.

Metodologicamente, a álgebra era apresentada por meio de explanações que priorizavam a teoria (noções preliminares, definições e teoremas) e a simbolização (nomenclatura e convenções). As situações problemas propostas por meio de atividades exploravam a utilização de regras e procedimentos

A atividade algébrica no período apresenta as noções de variável como incógnita e como padrão generalizador. A concepção de álgebra era baseada na generalização de todas as questões sobre quantidades. Este caráter generalizador valoriza as técnicas de tratamento dos conteúdos. Era dada ênfase ao transformismo algébrico, o qual é entendido como processo de obtenção de expressões algébricas equivalentes entre si mediante o emprego de regras e propriedades. Seguia-se uma sequência de tópicos, que iniciava pelo estudo das expressões algébricas, pelas operações com expressões, pelas equações e por fim a resolução de problemas.

A finalidade do ensino de álgebra presente neste período, bem como durante todo o correspondente aos séculos XIX e XX, está relacionada à utilidade da mesma para o ensino, ou seja, era concebida como um instrumento para resolver equações e problemas. Todos os conteúdos de caráter algébrico eram considerados importantes e não havia clareza quanto aos objetivos do que estava sendo ensinado.

2.4.2 A Reforma Francisco Campos (século XX)

Já no século XX, aconteceram mudanças no campo da educação que refletiram no modo de ensinar álgebra. Durante a década de 30 e 40 ocorreram reformas educacionais que modificaram profundamente tanto a disciplina álgebra como as outras disciplinas lecionadas. Trataremos neste tópico da reforma educacional conhecida como Francisco Campos, que foi instituída pelo decreto 19.890, de 18 de abril de 1931 e consolidadas por meio do decreto 21.241, de 4 de abril de 1932.

Segundo Soares, Dassie e Rocha (2004), o principal objetivo da Reforma Francisco Campos era ampliar a finalidade do ensino secundário, que deixaria de ser apenas preparatório ou introdutório para o ingresso no ensino superior, passando a ter um objetivo próprio.

A Reforma Francisco Campos apresenta as ideias propostas pelo professor Euclides Roxo[7], que consistiam na fusão da aritmética, álgebra, geometria e trigonometria em uma única disciplina, cuja reestruturação curricular tinha como pilar o conceito de função. Esta fusão deu origem à disciplina que ficou conhecida como matemática.

A unificação das disciplinas prevista pela legislação da Reforma Francisco Campos fez com que gradativamente desaparecessem os livros separados de aritmética, álgebra, geometria e trigonometria.

A Reforma Francisco Campos não foi bem aceita em todo o território nacional. Soares, Dassie e Rocha (2004), citam como críticos a reforma o professor Arlindo Vieira, do Colégio Santo Inácio, localizado no Rio de Janeiro, o professor Almeida Lisboa, catedrático do Colégio Pedro II, o Exército, representado pelo colégio Militar do Rio de Janeiro e o Professor Paulo Mendes Viana, da Escola Técnica Secundária.

Segundo os autores, cada um criticava a reforma sob um ponto de vista diferente. O professor Arlindo Vieira não era contra a fusão das disciplinas, mas sim ao predomínio do ensino científico em detrimento do ensino clássico. Já Almeida Lisboa era opositor declarado das ideias de Euclides Roxo, criticando desde quando este expôs sua proposta no colégio Pedro II. O exército criticava a reforma tendo como base o positivismo, que era contrário a orientação do ensino simultâneo das disciplinas.

O professor Paulo Mendes Viana não se posicionou contrário à reforma. Ele defendeu os princípios propostos na legislação como mais do que meras mudanças curriculares, se constituindo em mudanças metodológicas, que estavam sendo deturpadas por aqueles que realizavam más interpretações destas.

Em relação especificamente à álgebra, a seleção de conteúdos e a abordagem metodológica pouco mudaram se comparadas com o período anterior à reforma. Os conteúdos ensinados podem ser verificados nos programas de ensino reunidos e publicados por Vechia e Lorenz (1998), para a disciplina Matemática:

[7] Euclides de Medeiros Guimarães Roxo (1890 - 1950) era engenheiro e professor Catedrático do Colégio Pedro II em São Paulo.

Tabela 1 - Conteúdos de álgebra para o ensino secundário propostos na Reforma Francisco Campos.(segundo Vechia e Lorenz-1998)

1ª Série	• Símbolos algébricos; fórmulas; noção de expoente; • Números relativos ou qualificados; • Operações. Explicação objetiva das regras dos sinais; • Cálculo do valor numérico de monômios e polinômios. Redução de termos semelhantes; adição e subtração; • Multiplicação de monômios e polinômios, em casos simples; • Explicação objetiva pela consideração de áreas; • Potências de monômios. Quadrado de um binômio; • Primeira noção de equação com uma incógnita; resolução de problemas numéricos simples.
2ª Série	• Noção de função de uma variável independente. Representação gráfica; • Estudo das funções $y = a.x$ e $y = \frac{a}{x}$; exemplos; • Proporções e suas principais propriedades; • Resolução de problemas sobre grandezas proporcionais; • Porcentagens,juros,desconto(comercial), divisão proporcional, câmbio; • Equações do 1º grau com uma incógnita. Problemas; • Interpretação das soluções negativas. • Sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas. Problemas; • Representação gráfica da função linear de uma variável. Resolução gráfica de um sistema de duas equações com duas incógnitas; • Divisão algébrica. Expoente zero. Expoente negativo; • Decomposição em fatores; • Frações algébricas. Simplificações.
3ª Série	• Equações e problemas de 1º grau com uma ou mais incógnitas;

	• Desigualdade do 1º grau; • Potências e raízes; • Estudo das funções y = xm, y = l / xm e y = Vx; representação gráfica; • Cálculo dos radicais; • Expoentes fracionários; • Trinômio do 2º grau; • Equação do 2º grau; • Resolução gráfica; resolução analítica; • Discussão: propriedades das raízes; Desigualdades do 2º grau.
4ª Série	• Equações biquadradas e equações irracionais; • Problemas do 2º grau; discussão; • Progressão aritmética; • Propriedades. Interpolação; • Progressão geométrica; • Propriedades. Interpolação; • Estudo da função exponencial; • Logaritmos; propriedades. Uso das tábuas; • Régua logarítmica; Juros compostos; unidades.

Metodologicamente, o ensino continuava automatizado e mecânico, que levava ao estabelecimento de uma relação de complementaridade entre aritmética e álgebra, sendo a álgebra, devido ao seu caráter generalizador, superior à aritmética, se consolidando como ferramenta de grandes possibilidades para resolução de problema.

Estas considerações sobre os conteúdos e abordagens metodológicas concordam com o que diz Fiorentini, Miorim e Miguel (1992) que afirmam que o ensino era predominantemente reprodutivo e mecânico, que conduzia a uma aprendizagem de procedimentos sem clareza de ideias.

Este panorama da educação algébrica prevaleceu mesmo durante a reforma imediatamente posterior a Reforma Francisco Campos, que ficou conhecida como Reforma Gustavo Capanema[8], que em termos de orientação curricular, representou um retrocesso se comparada à legislação anterior, pois a unificação proposta para as disciplinas foi abandonada, voltando-se a adotar um currículo composto por disciplinas avulsas. Segundo

[8] Lei nº 4.244, de 9 de abril de 1942

Fiorentini, Miorim e Miguel (1992), mudanças significativas na educação algébrica só serão vistas novamente durante o movimento educacional que ficou conhecido como Matemática Moderna.

2.4.3 O Movimento da Matemática Moderna

O Movimento da Matemática Moderna se desenvolveu no Brasil na década de 60, período em que foi instituída a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, lei 4.024, de dezembro de 1961. Soares, Dassie e Rocha (2004) afirmam que diferentemente das Reformas Francisco Campos e Gustavo Capanema, o Movimento da Matemática Moderna não foi instituído por decreto, o que segundo os autores, não impediu que o mesmo fosse divulgado em território nacional.

Para os autores, uma das razões para o Movimento da Matemática Moderna ficar conhecido no Brasil, foi o fato deste ter sido adotado por vários países da América e da Europa, tais como EUA, França e URSS.

Um elemento marcante do Movimento da Matemática Moderna foi a ênfase dada ao ensino de conjuntos, o qual era visto como elemento unificador dos ramos da matemática. Também é lembrado segundo Búrigo (2010, p.278) pela adoção de um certo formalismo na linguagem e pela valorização das estruturas algébricas.

Búrigo (2010, p.284) ressalta que o marco da instituição do movimento no Brasil foi a criação do GEEM[9], em 1961. Este grupo foi responsável por apresentar uma proposta curricular para o ensino ginasial que continha alguns tópicos novos, tais como o dos números racionais, números reais, funções lineares e funções do 2º grau. O caráter inovador da proposta residia nas sugestões para abordagem dos conteúdos tradicionais, marcadas por enfatizarem o uso das noções de conjunto e estruturas algébricas.

Sobre o ensino da álgebra, uma das inovações na proposta curricular é a inversão na ordem de abordagem dos tópicos tradicionalmente tidos como de álgebra: o cálculo literal e as equações de primeiro grau. Osvaldo Sangiorgi, em seu guia de estudos para professores justifica a alteração da ordem, mostrando os benefícios para o ensino da álgebra:

---

[9] Grupo de Estudo em Ensino de Matemática

> Foi escolhida uma *certa ordem*, na distribuição dos assuntos que compõem o programa da atual 2ª Série Ginasial, respeitada a faixa de segurança científica e pedagógica em que é colocada a modernização do ensino de Matemática em todo o mundo. Tal *ordem* garante a *unidade* da Matemática, iniciada na 1ª Série Ginasial, bem como continua assegurando-lhe o *caráter estrutural* moderno.
> Assim, por exemplo, o tratamento moderno dado à Álgebra Elementar (Cap. 4), por meio da linguagem de *sentenças matemáticas* e o uso das *propriedades estruturais* das operações já estudadas, leva uma vantagem extraordinária sobre o tratamento tradicional, pois atende ao objetivo fundamental da Álgebra do Ginásio, com muito mais precisão e num tempo incomparavelmente menor do que o normalmente empregado. (SANGIORGI, 1967,apud BÚRIGO, 2010,p.288, grifo nosso)

Essa alteração valorizava o caráter da álgebra como ferramenta para resolver problemas, mas diferente das reformas anteriores, valoriza através do rigor linguístico e das estruturas operatórias. Seria um modo de propor uma maior articulação entre a álgebra e o estudo dos conjuntos numéricos munidos de operações, que seriam referidos também como casos particulares de estruturas algébricas.

Dessa forma, a álgebra, mais precisamente o estudo das estruturas algébricas, junto com o estudo dos conjuntos, se tornariam elementos fundamentadores dos vários campos da matemática escolar. As propriedades estruturais das operações justificariam logicamente cada passagem no transformismo algébrico, de modo a auxiliar o estudante a identificar e aplicar estas estruturas em diferentes contextos.

O movimento da matemática moderna começou a ser criticado no Brasil a partir da década de 70. As críticas que influenciaram os educadores brasileiros estão presentes na obra de Morris Kline denominada "O fracasso da Matemática Moderna". Entre elas, está a negligência em relação à motivação, alegando que "despojar os conceitos de seu significado é conservar a casca e jogar fora o fruto", ou seja, a forma como estava sendo trabalhada a matemática deixava de mostrar seu verdadeiro valor.

Segundo Pais (2001, p.20-21, apud BRANDEMBERG & MENDES, 2005, p.18), o enfraquecimento do movimento da matemática moderna se deve a uma questão de transposição didática no ensino de matemática que não atingiu as metas desejadas, e ampliou alguns problemas do processo ensino-aprendizagem. Para o autor:

> O resultado da reforma foi muito diferente da proposta do plano intencional. Acreditava-se que era possível uma abordagem estruturalista para o ensino da Matemática, sendo esta tentativa incrementada com o uso de novas técnicas de ensino, esperando que fosse possível obter uma aprendizagem mais fácil do que a tradicional. Diversas criações didáticas surgiram para tentar viabilizar essa proposta. Este é o caso, dos diagramas de Venn, que de recurso para representação gráfica, passaram a ser ensinados como conteúdo em si mesmo. Nesse caso, as diversas reformulações ocorridas resultaram em inversões tão fortes que contribuíram para o fracasso do movimento, conforme análise descrita por Kline (1976).(PAIS, 2001, p.20-21, apud BRANDEMBERG & MENDES, 2005, p.18).

A ênfase tecnicista no "fazer" e a ênfase estruturalista de "compreender através da fundamentação lógica" como pressupostos teóricos começaram a ser questionadas por professores, que no final da década de 70 passaram a tentar corrigir as distorções provocadas pelo movimento modernista. Um exemplo disso seria o ensino de geometria, que foi deixado de lado durante o período da matemática moderna, e passou a ser considerado em novas propostas de ensino na década de 80.

Em relação à álgebra, pode-se dizer que após o movimento da matemática moderna esta recuperou seu valor instrumental valorizado nas reformas anteriores ao movimento, contudo, foi mantido o caráter fundamentalista de justificar os procedimentos de cálculo, só que não mais de forma lógico estrutural.

2.5 A CONSTRUÇÃO CONCEITUAL DA ÁLGEBRA E DA NOÇÃO DE VARIÁVEL NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Nesta pesquisa, a questão fundamental reside na proposta de buscar caracterizar a noção de variável presente no ensino fundamental, baseada nos diferentes significados que esta pode adquirir. Na história da matemática, percebemos que a construção conceitual da álgebra foi motivada primeiramente pela necessidade: as situações problemas que surgiram nas sociedades que estavam sendo formadas despertaram o interesse pelo desenvolvimento e registro do pensamento matemático, dando início, portanto, aos fundamentos da matemática.

O percurso histórico nos permitiu ver que dois elementos foram fundamentais para o desenvolvimento da álgebra: o simbolismo e a linguagem.

Entendemos o simbolismo segundo a concepção de Whitehead (1987) que o define como uma forma da sociedade se manifestar através de elementos que são retirados da experiência, sendo estes relacionados entre si. De outra forma, podemos dizer que é uma relação entre símbolo[10] e significado[11] que permite que uma sociedade se constitua baseada nas especificidades de seus membros. A forma de se manifestar de uma sociedade não é única. As manifestações variam de acordo com os interesses e necessidades de um determinado povo. Logo, o simbolismo não será único, existindo assim várias formas de simbolismo.

Vemos que a álgebra, em uma concepção inicial, é uma forma de simbolismo matemático que surgiu das experiências de cada um dos povos apresentados neste capítulo, e

[10] Símbolo é o objeto ao qual se dá uma significação abstrata.
[11] Significado é o sentido ou conteúdo semântico atribuído ao símbolo.

que se manifestou de formas diferentes diante das particularidades que cada um possuía. O simbolismo presente nos métodos de resolução possibilitou que o conhecimento algébrico fosse expresso de modo coeso, proporcionando liberdade ao mesmo tempo em que individualiza a álgebra ao respeitar a heterogeneidade presente nas sociedades responsáveis pela sua construção.

Segundo Brandemberg (2010, p.133), a matemática está fortemente associada ao simbolismo (notação). O autor afirma:

> De fato, é através da notação matemática que ideias complexas ou mesmo processos mentais, podem ser nomeados e, assim, representados fisicamente. Podendo dessa forma, serem refletidos ou manipulados para gerar novas ideias (e suas representações). (BRANDEMBERG,2010, p. 133-134)

Sendo a linguagem uma forma de simbolismo, seu uso acarretará na visão de Whitehead (1987) em uma referência simbólica dupla: das coisas para as palavras da parte de quem fala, e das palavras de volta para as coisas da parte de quem ouve. Esta referência forma o que o autor chama de jogos de linguagem, o qual determina como as regras serão aplicadas, bem como os significados que carregam.

Percebemos estes jogos no desenvolvimento da álgebra na linguagem retórica apresentada por egípcios, mesopotâmicos, árabes, hindus, chineses, na qual as argumentações eram feitas tendo como base de expressão a linguagem natural do povo que desejava enunciar um determinado conhecimento matemático, ou seja, a linguagem retórica tinha como função colocar a linguagem natural à serviço da matemática.

Na linguagem retórica, a palavra retirada da linguagem comum, estava associada ao número, representando o próprio número. A palavra guardava o valor da quantidade desconhecida (a variável como incógnita), tendo como função assegurar que ali faltava algo (o valor desconhecido). Tal fato foi fundamental para a base conceitual da álgebra. O caráter da álgebra expresso pela linguagem retórica era pragmático e intuitivo, com a finalidade de igualar quantidades em busca de encontrar o valor desconhecido em questão.

A linguagem sincopada foi marcada pela criação de símbolos, de modo que organizasse o pensamento algébrico de forma conexa, retirando elementos da experiência, tal como diz Whitehead (1987) para criar significados e estruturas próprias da álgebra. Quando a linguagem sincopada começa a aparecer, além de trazer avanços referentes à simbologia algébrica, conceitualmente, apresenta um caráter geométrico e dedutivo, que concebe a álgebra não só como relação entre quantidades desconhecidas, mas também como uma relação entre grandezas, revelando o surgimento da variável como parâmetro.

A sincopação da linguagem proposta por Diofanto constituiu um nexo conceitual com a geometria grega, auxiliando na evolução do pensamento algébrico no que se refere à elaboração de abstrações e na resolução de equações, características próprias da matemática grega.

A linguagem simbólica que apareceu nos trabalhos de Viète liberou a álgebra da escravidão do verbo e das ambiguidades e de determinadas variações da linguagem comum usada no cotidiano da sociedade. Os significados se tornaram independentes dos símbolos que antes figuravam, tornando o acesso da álgebra ao abstrato mais fácil e proporcionando uma modificação conceitual, na qual a matemática passou a ser usada como ferramenta para outras ciências.

A linguagem simbólica de Abel e Galois, que deu início à teoria dos grupos, não representava simplesmente números e era independente dos objetos ou das grandezas que deveria figurar, tendo um significado que ultrapassa a representação concreta, tornando-se segundo Ifrah (1998) "um ser matemático completo, submetido às regras do cálculo ordinário".

A criação de uma linguagem simbólica específica para a álgebra fez com que conceitualmente a mesma ganhasse um caráter estrutural, com propriedades definidas, sendo considerada não só no sentido prático, mas também em si mesma, em busca de soluções gerais.

A variável, neste contexto histórico da álgebra, representou a escrita de movimentos da realidade, ou seja, a própria fluência, a partir da palavra e da figura. Segundo Moura & Sousa (2005, p.38), longe de apenas representar o valor desconhecido da incógnita ou a relação entre grandezas, as variáveis aparecem na matemática como reflexos das “propriedades gerais do conceito de mudança”.

De acordo com as autoras, o desenvolvimento histórico do conceito de variável apresenta uma relação direta com o conceito de número, de movimento. Sob o ponto de vista lógico e formal do desenvolvimento do conceito, a variável tem sua formalização mais geral no século XIX, com a Teoria dos Grupos, a Teoria dos Conjuntos e com a Teoria dos Números.

Moura & Sousa (2005) apresentam esquemas para explicar as relações ou nexos presentes no conceito de variável a partir da palavra, da figura e da letra. O movimento da realidade apontado pelas autoras, a partir da palavra e da figura, é expresso nos períodos retórico, sincopado e geométrico. A mudança conceitual da noção de variável se consolidou no período simbólico.

Figura 1 - A construção conceitual da noção de variável

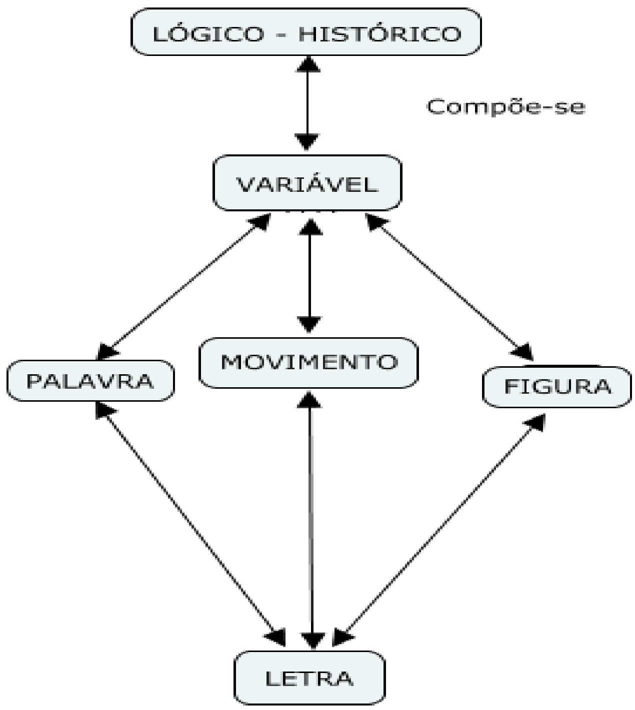


Figura 2 - Construção conceitual da álgebra de acordo com a noção de variável

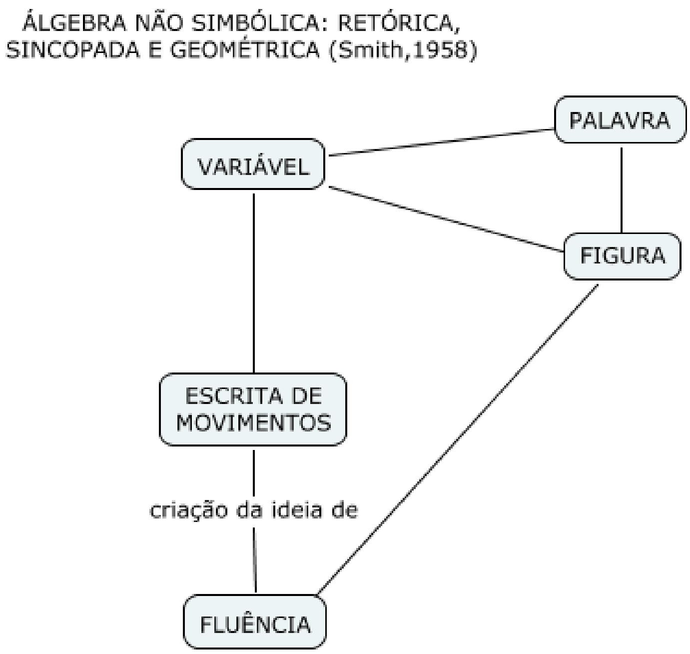
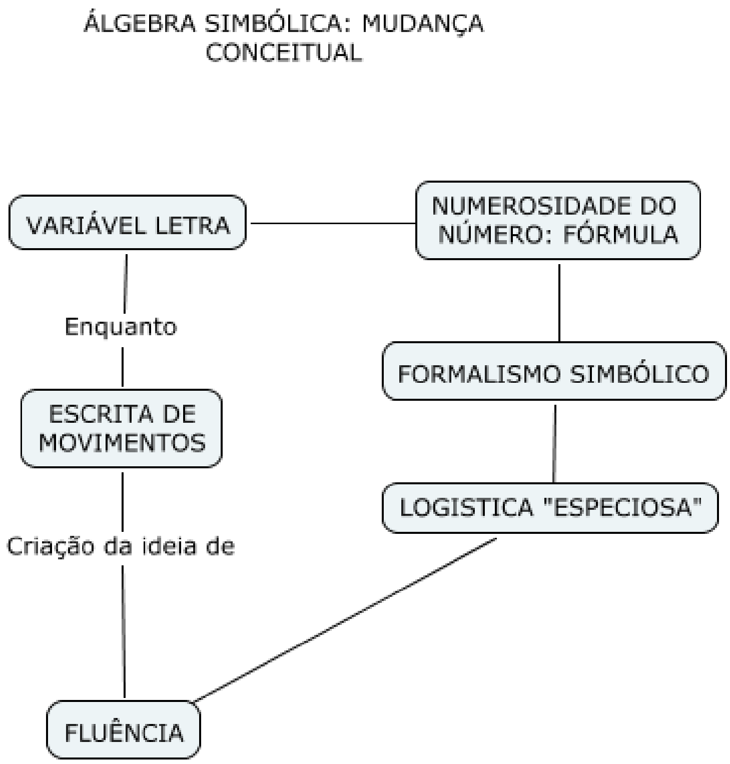


Figura 3 - A mudança conceitual da álgebra através da linguagem simbólica



No que diz respeito à história da educação algébrica, percebemos primeiramente que o ensino da álgebra está intimamente ligado ao estudo das equações. Em nenhum momento, desde que foi incluída no currículo escolar brasileiro, as equações deixaram de figurar entre os conteúdos escolhidos para compor a matriz curricular de álgebra. Tal fato acontece tanto para as de primeiro como as de segundo grau e não se repete em relação a tópicos como funções e polinômios.

Esta relação entre o ensino de álgebra e o estudo das equações pode ser justificada de acordo com o que vimos na evolução histórica da álgebra, onde o estudo das equações, seja em seu caráter prático, seja no teórico, esteve presente em todas as civilizações que estudamos, independente da linguagem utilizada por cada povo. Além disso, vimos que na Europa no período da revolução industrial, a álgebra passou por um momento de intensa evolução em sua linguagem, a qual estava se consolidando através de um simbolismo constituído de significados específicos, que se justificavam diante da necessidade que os matemáticos da época tinham de solucionar equações de terceiro e quarto graus e depois equações de graus superiores. E foi neste período que no Brasil a álgebra passou a ser ensinada nas escolas.

Outro ponto que percebemos em relação a educação algébrica que também pode ser justificado pela história do desenvolvimento da álgebra é a ideia da finalidade da álgebra como ferramenta para resolver problemas, ou seja, como uma reunião de procedimentos técnicos de resolução. Esta concepção está presente nos três períodos analisados neste capítulo, mesmo que de modos diferentes.

Vimos na história evolutiva da álgebra, que na maior parte das civilizações, o desenvolvimento dos conhecimentos algébricos ocorreu diante das necessidades práticas para resolver questões típicas do cotidiano, relacionadas com construções, contabilidade, entre outras. Dessa forma, a álgebra era constituída para se chegar a uma solução para as situações vivenciadas por cada povo. Estas considerações estão presentes no ensino da álgebra até hoje como veremos no próximo capítulo sobre as concepções de álgebra presentes no ambiente escolar.

CAPÍTULO III
A NOÇÃO DE VARIÁVEL PRESENTE NO ENSINO DE ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

A perspectiva teórica foi feita a partir de pesquisas no campo da Educação Matemática. Neste sentido, os estudos de Kuchemann (1981), Kieran (1989),Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Sfard (1994), Usiskin (1995), Claude Janvier (1996), Lins e Gimenez (1997), Kaput (1989) e Ursini & Trigueros (2003), dentre outros, foram fundamentais nesta construção, uma vez que visam a melhoria da ação do processo de ensinar e aprender álgebra em contexto escolar. A proposta do nosso estudo é buscar uma caracterização para a noção de variável presente no ensino da álgebra na educação básica (ensino fundamental), e com tal objetivo, fizemos um levantamento bibliográfico de pesquisas no campo da educação matemática, cujo tema central seja a álgebra e a noção de variável.

3.1 O ENSINO DE ÁLGEBRA NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Sobre o ensino de álgebra, temos como referencial teórico Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), que fazem uma classificação da álgebra de acordo com os elementos que a constituem, que vão desde a linguagem simbólica, o pensamento algébrico até as estruturas de ensino aplicadas. Temos por base também os trabalhos de Lins & Gimenez (1997), que apresentam como eixo principal o ensino baseado na concepção de atividade algébrica.

3.1.1 O ensino de álgebra segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993)

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) fazem uma classificação da álgebra, baseada nas técnicas de ensino, na linguagem e no pensamento algébrico, da seguinte forma:

a) Concepção processológica

Nesta concepção, a álgebra é entendida como um conjunto de elementos padronizados e técnicas algorítmicas utilizadas em situações problemas específicas. A aprendizagem, segundo esta perspectiva, é passiva e consiste na memorização e reprodução de raciocínios e procedimentos, não possuindo uma linguagem exclusiva devido ao seu caráter de insubordinação a um pensamento inerente.

b) Concepção linguístico-estilística

Nesta concepção, a álgebra é tida como uma linguagem própria, criada de modo artificial, para expressar de modo sintetizado os seus procedimentos específicos. Segundo esta ideia, existe um distinção entre a representação simbólica e os significados que caracterizam o pensamento algébrico.

A criação de símbolos organizou o pensamento algébrico de forma conexa, retirando elementos da experiência para criar significados e estruturas próprias da álgebra, libertando-a da linguagem comum usada no cotidiano da sociedade e tornando o acesso ao abstrato mais fácil e proporcionando uma modificação conceitual, na qual a matemática passou a ser usada como ferramenta para outras ciências.

c) Linguístico-sintático-semântica

Assim como a concepção anterior, também trata a álgebra como linguagem particular e precisa, porém sob um ponto de vista mais rigoroso, que impõe a existência de um pensamento algébrico autônomo a consciência de uma linguagem própria. A dimensão operatória e seu poder de transformação requerem um status na linguagem simbólica, ou seja, os signos assumem características de símbolos no processo de adoção da letra para a representação genérica de quantidades (discretas e contínuas) e para a representação de quantidades genéricas.

d) Linguístico-postulacional

Concebe a álgebra como ciência das estruturas próprias. Assemelha - se com a concepção anterior no que se refere à linguagem simbólica, porém com um nível mais alto de abstração e generalização. A característica simbólica do signo linguístico é mais abrangente, ultrapassando os limites da representação de quantidade geral (discreta ou contínua) para alcançar as entidades matemáticas que extrapolam o teor quantitativo, tais como as estruturas (ordem, topológica, algébrica e vetorial).

3.1.2 O ensino de álgebra segundo Lins & Gimenez (1997)

Lins & Gimenez (1997) afirmam que as leituras tradicionais sobre a álgebra a relacionam como "aritmética generalizada" ou como "estrutura da aritmética", tanto que na comunidade da Educação Matemática é enraizada a noção de que o ensino da aritmética deve vir antes do ensino da álgebra, ideia que os autores consideram como infundada e prejudicial.

A introdução da álgebra tardiamente, na visão desses autores, causa uma quebra ou corte na matemática escolar. Desse modo, defendem a concepção de que o ensino da álgebra e da aritmética deve ser realizado em conjunto, onde um implica no outro. Segundo os autores "É preciso começar mais cedo o trabalho com a álgebra, e de modo que esta e a aritmética desenvolvam-se juntas, uma implicada no desenvolvimento da outra ".(LINS & GIMENEZ, 1997, p. 10)

Tal concepção é uma releitura da educação aritmética e algébrica que amplia a relação destas entre si, com o mundo fora da escola e com os assuntos que envolvem a atividade algébrica em sala de aula. Esse modo de compreender a educação algébrica enfrenta resistência no que se refere à reavaliação da posição desta no ambiente escolar.

Nesta perspectiva, a matemática torna-se objeto e não mais ferramenta e o ensino simultâneo da aritmética e da álgebra permitiria que esta última fosse vista como falando de informações que envolvem, assim como a aritmética, números, operações aritméticas e igualdades ou desigualdades. Permitiria que a aritmética, assim como a álgebra, fosse vista como uma ferramenta que toma parte do processo de organização da atividade humana.(LINS & GIMENEZ, p.29-30).

Na obra dos autores, é feita referência à concepção de atividade algébrica, que segundo eles consiste no processo de produção de significados para álgebra, que por sua vez, é um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade e desigualdade (IBID, p. 137).

O processo de caracterização da atividade algébrica envolve duas etapas importantes: a *descrição*, cujo objetivo é identificar as situações em que esta ocorre,estabelecendo-se, portanto, no nível da superficialidade, e *tentar saber se há existência* de processos cognitivos peculiares a essa atividade, firmando-se em um nível de aprofundamento conceitual. A maneira como é entendida a atividade algébrica influencia na concepção de educação algébrica obtida.

Lins & Gimenez apresentam concepções de atividade algébrica. A primeira delas é a *letrista*, que segundo eles trata a atividade algébrica como procedimento de "cálculo literal", o qual é justificado por meio de uma suposta linha de desenvolvimento histórico da álgebra segundo a evolução das "notações algébricas". Sob o ponto de vista dos autores, esta concepção se mantém na primeira etapa de caracterização da atividade algébrica, sendo portanto, superficial.

Na perspectiva letrista existe a crença de que seguir a trajetória do uso de letras permite seguir a trajetória do desenvolvimento do pensamento algébrico, fato que para os autores é bastante limitado e faz com que as investigações baseadas nesta concepção estejam voltadas para um efeito bastante particular: as crianças que já passaram por processos de ensino-aprendizagem ligado a um tema deveriam naturalmente ter mais sucesso em situações que envolvam esse tema. (IBID, p. 95).

Fazendo referência novamente à justificação desta concepção através do desenvolvimento histórico das notações algébricas, Lins e Gimenez afirmam que esta ideia deixa de fora, no caso da história, a álgebra islâmica medieval (a partir de al–Khwarizmi) e a matemática chinesa. A primeira porque todo tipo de abreviação era estritamente proibida, devido o papel sagrado das palavras. A segunda devido estar organizada em torno dos métodos, dando preferência às particularidades presentes em cada problema.

A segunda concepção apresentada é a *conteudista*, que assim como a primeira, caracteriza a atividade algébrica de modo descritivo e superficial, levando em consideração a presença de certos conteúdos (temas). Lins e Gimenez afirmam que essa concepção sempre será dependente de mais informações sobre as formas de pensamento para que possa ser conferido um status de atividade algébrica a um determinado episódio.(IBID p. 99)

A terceira concepção apresentada pelos autores é a *formalista*, a qual trata a atividade algébrica como produto resultante da ação do pensamento formal, que neste ponto de vista deve ser restrito ao pensamento que opera sobre as operações aritméticas, o que evolui para a noção de álgebra como aritmética generalizada, sendo também como a segunda concepção, dependente dos conteúdos. Segundo Lins & Gimenez, esta concepção difere das outras devido seu caráter internalista, ainda que seja dependente de um elemento externo para ser válida. Mesmo assim, deixa muitas questões de fora, que os autores citam como exemplo, a noção de número que Diofanto possuía e a questão da aritmética envolver atividade algébrica.

Falam da concepção *pragmática*, que caracteriza a atividade algébrica segundo a presença de certos processos aplicados a certos conteúdos, tais como a antecipação e a transformação. Os autores destacam que nesta concepção não se está buscando descrever os mecanismos mentais que estão por traz desses processos nem reduzi - los a um caráter elementar. O interesse pode ser produzir uma descrição técnica e precisa ou uma leitura da atividade algébrica que inclua elementos heurísticos (as antecipações) e técnicos (as transformações).

A última concepção apresentada é a proposta pelo francês G. Vergnaud chamada de *Modelo dos Campos Conceituais*. Vergnaud e seus seguidores tratam do campo conceitual das equações do 1º grau. O modelo de Vergnaud é normativo, pois determina um campo conceitual em relação ao qual atividades são propostas e desempenhos considerados, ou seja, se o aluno diz ou faz coisas "certas", estas são analisadas sob o ponto de vista da perspectiva de noções implícitas, se diz ou faz coisas "erradas", estas são vistas como falta de entendimento ou inadequação em termos de desenvolvimento (LINS & GIMENEZ, 1997, p.103).

Segundo Lins & Gimenez (1997, p.111), o modelo proposto por Vergnaud propõe aos alunos sequências didáticas cuidadosamente elaboradas para mostrar o que é relevante ao tema, no caso das equações do 1º grau, do sinal de igualdade, o conceito de equação e de incógnita e o que é conhecido na engenharia didática como " comportamento de desvio" , que consiste em operar apenas com símbolos, sem que sejam atribuídos significados para eles. Vergnaud traz a complexidade do fenômeno, tornando inseparáveis aspectos como a notação e os conceitos, enfatizando que são os problemas que atribuem significados a eles.

Para Lins & Gimenez, a atividade algébrica não pode ser concebida de modo isolado, nem deve ser desenvolvida de modo tardio. Para eles a aritmética e álgebra devem ser tratadas como um elemento único, o que só é possível quando encontramos a "raiz" comum que os une.

> O que precisamos fazer é entender de que modo álgebra e aritmética se ligam, o que elas tem em comum. Feito isso, teremos encontrado uma verdadeira "raiz", o que nos permitirá repensar a educação aritmética e algébrica de forma única. (LINS & GIMENEZ, 1997,p.113)

Os autores veem a atividade algébrica como um processo de produção de significados para álgebra que depende dos conteúdos de maneira bastante particular, apenas para explicitar um recorte do mundo para estabelecer fronteiras com a álgebra, que não está necessariamente ligado à matemática acadêmica, mas sim ao que a pessoa examina como sendo atividade algébrica ou não. Essas fronteiras para os autores só são importantes sob o ponto de vista da educação matemática.

Embora a concepção de atividade algébrica proposta por Lins & Gimenez possa parecer apoiada em conteúdos, esta não confere status epistemológico especial aos significados matemáticos, o que permite segundo os autores trabalhar tanto na perspectiva de "onde o aluno está" quanto " onde queremos que o aluno esteja".

Colocam na mesma categoria de álgebra equações e expressões literais tendo como base a possibilidade de produzir significados em relação a um núcleo comum: números, operações aritméticas, igualdades e desigualdades.

Lins & Gimenez levam em consideração dois aspectos que são essenciais para a caracterização proposta por eles: o conhecimento e o significado. O primeiro é a composição do que eles chamam de crença–afirmação (corresponde ao que é novo) e justificação (corresponde ao que é dado). Já o segundo diz respeito ao conjunto de coisas que se diz sobre um objeto, o que está efetivamente no interior da atividade algébrica.

Para eles a complexidade do fenômeno da atividade algébrica envolve a transformação de significados, o papel do professor como interlocutor e dos alunos como interlocutores uns dos outros.

3.2 A NOÇÃO DE VARIÁVEL NO CONTEXTO DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Neste tópico mostramos as concepções de variável que aparecem nas pesquisas em educação matemática. As classificações apresentadas pelos autores Kuchemann (1981), Kieran (1989),Sfard (1994), Usiskin (1995), Janvier (1996), Kaput (1989), Bloedy & Vinner (2000) e Ursini & Trigueros (2003) serviram como base para a construção dos questionários aplicados na pesquisa e como critério de análise dos resultados.

3.2.1 A noção de variável segundo Kuchemann (1981)

Küchemann (1981) realizou uma pesquisa sobre o ensino de álgebra voltada para a função das letras no contexto algébrico. O autor teve como objetivo mostrar que embora as letras em expressões algébricas sempre denotem números, estas podem adquirir um significado diferente dependendo do contexto em que são aplicadas. Identificou várias formas de interpretar e usar as letras. Classificou as interpretações dos alunos em duas grandes divisões :

1. A letra é ignorada, dado um valor arbitrário, ou usada como o nome de um objeto.
2. A letra é utilizada como um número desconhecido específico ou número generalizado

Sendo nossa pesquisa relacionada com a concepção de variável, mostraremos aqui três formas de classificação do autor, que sugeriu que estas classificações correspondem aos estágios piagetianos de desenvolvimento (pré-operatório, operatório concreto e operatório formal).

a) Incógnitas específicas

A letra nesta interpretação terá um valor específico, porém desconhecido. É utilizada para resolver equações ou para a construção de expressões que traduzem situações específicas, como, por exemplo, o perímetro de uma figura de n lados,cujo comprimento de cada lado seja 2.

b) Números generalizados

Nesta interpretação, a letra é capaz de levar mais de um valor. Para exemplificar este significado que a letra pode assumir, Küchemann (1981) utiliza o seguinte exemplo: dado o seguinte problema L+M+N = L+P+N é sempre verdadeiro?,às vezes verdadeiro (quando) ?, ou nunca verdade?

c) Variáveis

Tal interpretação é usada quando as letras são vistas como representando uma gama de valores não especificados, existindo uma relação sistemática entre esse conjunto de valores. Küchemann utiliza como exemplo o seguinte problema: Qual é o maior, 2n ou n + 2?. Explica, de acordo com suas análises, que as letras são usadas como variáveis quando um problema requer o estabelecimento de uma relação (de segunda ordem) entre relações (neste caso, entre as funções 2n e n + 2)

De acordo com Küchemann (1981), essas interpretações de letras representam diferentes níveis de compreensão. Em outras palavras, a dificuldade do problema aumenta com o nível de sentido que é necessário para dar às letras. Os resultados das pesquisas de Küchemann mostraram que a maioria dos estudantes foram incapazes de lidar com problemas que requerem interpretar as letras como números generalizados ou incógnitas específicas. Ele também encontrou problemas de interpretação relativos ao significado das letras em Álgebra. O estudo destacou que os erros de interpretação das letras dos estudantes parecem ser refletidos em sua abordagem da situação-problema. Veremos mais adiante que as concepções de Küchemann estão relacionadas com as ideias apresentadas por Usiskin (1995).

3.2.2 A noção de variável segundo Kieran (1989)

Kieran (1989) Investiga os processos cognitivos envolvidos na aprendizagem da álgebra. Discute alguns temas principais como: o referencial aritmético, as variáveis, expressões e equações, resolução de equações, funções e seus gráficos.

É relevante ressaltar que Kieran (1989, p.229) não considera a álgebra como aritmética generalizada, pois acredita que sua aprendizagem vai além de tornar explícito elementos da aritmética. Segundo a autora, a álgebra requer uma mudança de pensamento do aluno a respeito das situações numéricas concretas para proposições mais gerais sobre números e operações.

Afirma que muitos estudantes, ao começarem a estudar álgebra, usam como referência elementos que antes funcionavam na aritmética. Um marco referencial aritmético diz respeito a forma como se vê o sinal de igual. Para Kieran (1988, p.94), os estudantes ao iniciarem o estudo da álgebra veem o sinal de igual como um separador das sequências de operações e o resultado, o que faz com que tenham dificuldade em aceitar equações do tipo $2x+4 = x+5$, e violem as propriedades simétrica e transitiva da igualdade.

O estudo da álgebra também é marcado, segundo a autora, por dificuldades na concatenação das convenções de notações e pela falta de habilidade para expressar formalmente os métodos e procedimentos utilizados para resolver problemas.

A autora cita como dificuldades nas convenções de notação algébrica a concatenação, que em álgebra significa multiplicação, o uso de parênteses e a ordem das operações. Estes fatores levam a um mal entendido na interpretação dos estudantes. Afirma que um estudante pode ser capaz de interpretar um problema verbalmente e ser incapaz de representá-lo matematicamente.

No que se refere às variáveis, Kieran (1989) afirma que as experiências dos alunos com as variáveis na escola primária se reduz à fórmulas, tais como $A = bxh$ e relações entre unidades de medida. Na primeira se substitui por valores numéricos b e h para achar a área de um retângulo dado. A segunda situação é usada para encontrar o valor correspondente em uma unidade de medida em relação a uma unidade previamente dada.

Na concepção da autora, o uso das variáveis nas duas situações como uma "etiqueta" prejudica frequentemente a interpretação dos alunos a respeito do significado das variáveis nas equações.Sustenta suas argumentações nos trabalhos Küchemann (1981), Collin (1975) e Harper (1981). Os dois primeiros verificaram que a maioria dos estudantes trabalham com as letras em expressões e equações como incógnitas específicas mais do que como número generalizados ou variáveis.

O terceiro sugeriu a existência de etapas na compreensão de um termo literal como variável e assinalou que os estudantes usam os termos literais muito antes de serem capazes de conceituá-los como variáveis, isto é, de perceberem o geral no particular.

Em outra pesquisa, Kieran (1996) afirma que muitos currículos propõem a introdução das letras como valores desconhecidos antes da representação de variáveis e retoma seu referencial teórico para reafirmar os obstáculos de aprendizagem que esta estrutura de ensino gera para os alunos.

Em relação à transição do "desconhecido" para a interpretação da variável como termo literal, Kieran (1989) mostra que é fácil para o estudante sair da interpretação da variável como letra para a interpretação de valor desconhecido em determinados problemas e que esta flexibilidade é aparente tanto na ação de alguns alunos ao transitar entre variáveis baseados no método de "desfazer", quanto na ação de usar representações funcionais para resolver situações problemas por meio de uma busca para um valor de entrada específico correspondente a um determinado valor de saída.

Kieran (1989) sugere que o ensino de álgebra deve ser introduzido com uma interpretação de variável como letra, e em seguida, incluir situações individuais com interpretações diferentes, ou seja, começa-se apresentando a concepção de variável como letra, depois se prossegue, por exemplo, com as concepções de constante e de relação funcional.

3.2.3 A noção de variável segundo Kaput (1989)

Kaput (1989, p.134) descreve a álgebra como algo que envolve generalizar e expressar essa generalização usando linguagens cada vez mais formais, onde a generalização se inicia na aritmética, em situações de modelagem, em geometria e virtualmente em toda a matemática que pode ou deve aparecer nas séries elementares. O autor faz uma descrição do pensamento algébrico, na qual são elencadas formas diferentes de raciocínio algébrico: generalização da aritmética e de padrões em toda a matemática; uso significativo de simbolismo; estudo de estruturas; estudo de padrões e funções; processo de modelagem matemática.

O foco do trabalho de Kaput está voltado para o sistema formal abstrato da álgebra e para os princípios do uso da linguagem algébrica, considerados como domínios complementares da aprendizagem. Para o autor também há a existência de domínios implícitos, chamados de consequências imediatas ou implicações que necessitam da incorporação de alguma "lógica natural" que considere a relação entre os significados que constituem a linguagem algébrica.

Retomando a classificação proposta por Kaput, mostraremos as formas de pensamento algébrico que o autor apresenta:

a) Álgebra como a generalização da aritmética e de padrões em toda a matemática

Segundo Kaput (1989), embora o cálculo aritmético domine o ensino fundamental, é difícil apontar sistemas matemáticos que não precisem inerentemente enfatizar a generalização e a formalização. Para o autor é complexo assinalar sistemas em contextos situacionais em que a atividade não envolva estes dois processos.

Kaput (1989, p.6) define que o processo de generalização envolve o ato de ampliar o alcance do raciocínio ou da comunicação além das situações apresentadas, explicitando a identificação e expondo a frequência com que determinado caso ocorre, elevando ambos (raciocínio e comunicação) a um nível em que o foco passa a ser os padrões, procedimentos, estruturas e as relações entre grandezas.

Para Kaput (1989) é possível distinguir duas fontes de generalização e formalização: raciocínio e comunicação dentro da matemática, e raciocínio e comunicação com base em situações fora da matemática. A distinção entre estas duas fontes (matemática e situações fora matemática) é especialmente problemática nos anos inicias, quando a atividade matemática assume formas muito concretas e é muitas vezes intimamente ligada a situações que dão subsídios para a atividade matemática. Se o ponto de partida é em matemática (e, portanto, decorrente da experiência anteriormente matematizada) ou a partir de uma situação ainda a ser matematizada, cuja fonte é em último caso, com base em fenômenos ou situações fora da matemática, porque o pensamento matemático surge a partir da experiência e só se torna matemático diante da atividade e procedimento adequado.

Kaput (1989) afirma que os alunos são mais propensos a começar por generalizar a partir de suas concepções de situações experimentadas e significativas e propõem suas formalizações de atividades conceituais baseados nestas situações. Cita um exemplo: um aluno compara diferenças de preços entre o caju (caro) e amendoim (barato) para duas marcas diferentes, pode generalizar que um pequeno aumento no preço de, digamos, amendoim da marca A não vai mudar o resultado de uma comparação de diferença, o que para o autor pode tornar a matemática mais vital/importante para o aluno, tanto à curto com à longo prazo .

b) Álgebra como uso significativo de simbolismos

Segundo Kaput (1989, p.10), quando lidamos com formalismos, sejam os tradicionais algébricos, sejam aqueles mais exóticos, nossa atenção é sobre os símbolos e regras sintáticas para manipular esses formalismos. O autor afirma que o usuário suspende a atenção para o que os símbolos significam e olha para os próprios símbolos, portanto, livre para operar em relações muito mais complexas.

O problema para Kaput, reside na possibilidade de gerar a incapacidade de muitos alunos para ver os significados em matemática e até a alienação dos mesmos em matemática. Kaput (1989, p.11) afirma que o poder de usar a forma de uma expressão matemática como base para o raciocínio é perdido quando os alunos praticam regras infinitas para manipulação de símbolos, quebrando a conexão com as relações quantitativas que os símbolos podem representar. Tal fato gera a crença por parte de alguns alunos, por exemplo, que $(a + b)^2 = a^2+b^2$, para qualquer a e b. Segundo Kaput (1989, ibid), seriam necessários reflexão e tentativas para convencer a maioria dos alunos que este padrão não se sustenta para números reais, exceto quando a ou b é zero.

c) Álgebra como estudo de estruturas

Segundo Kaput (1989, p.14) a generalização e a abstração com base em cálculos (onde a estrutura do cálculo, em vez de seu resultado torna - se o foco de atenção) dão origem a estruturas abstratas tradicionalmente associadas à "álgebra abstrata", que, por sua vez, é tradicionalmente considerada como "Fantasia" matemática de nível universitário. Este lado da álgebra, começando com cálculos sobre números conhecidos, tem algumas raízes na ideia britânica do século 19 da álgebra como universalização da aritmética, porém tem raízes mais profundas na teoria dos números .

Segundo o autor, tais estruturas:

1. Podem ser articuladas de modo pré - formal, por meio da linguagem natural;
2. Enriquecem a compreensão do aluno sobre os sistemas de que são abstraídas;

3. Proporcionam aos alunos estruturas intrinsecamente úteis para cálculos libertos das indicações daquelas estruturas, as quais foram uma vez ligadas à aritmética;
4. Fornecem uma base para níveis ainda mais altos de abstração e formalização.

d) Álgebra como estudo de padrões e funções

Segundo Kaput (1989, p.19), a ideia de função tem, talvez, suas mais profundas raízes conceituais no nosso senso de causalidade, crescimento e variação contínua conjunta, onde a mudança de uma grandeza ocorre em conjunto com a mudança em outra.

O autor cita um exemplo que ilustra como o conceito de função pode ser proveitosamente abordado, utilizando quantidades conhecidas que mudam ao longo do tempo (as alturas das plantas ou pessoas, temperatura, número de pessoas que estão comendo ou dormindo em vários momentos ao longo do dia) e representá-los tanto pictoricamente e com gráficos baseados em tempo. Da mesma forma, os alunos podem trabalhar em contextos familiares.

Para explorar, por exemplo, o custo dos grãos em função do número de pacotes de feijão adquiridos, os alunos podem empacotar o feijão e de modo apropriado o professor desenvolve ao longo do caminho os seus próprios métodos de descrever o custo de diferentes números de sacos de feijão.

Segundo Kaput (1989, p.20) as duas ideias de correspondência e variação de quantidades, que estão na base do conceito de função, atravessam e unificam diversos tipos de experiências matemáticas comuns que facilmente podem ser introduzidas nas aulas, incluindo aquelas envolvidas com a contagem, medição e estimativa . A ideia de função incorpora várias instâncias, todas recolhidas em uma única entidade (por exemplo, uma lista, tabela, gráfico), um processo que também envolve generalização.

Kaput questiona: "O que é que todos esses casos têm em comum?". O mesmo responde que várias grandes ideias associadas à funções de interpretação tornam-se vivas na sala de aula, sem valores numéricos e sem fórmulas.

e) Álgebra como processo de modelagem matemática

Kaput (1989) afirma que o raciocínio quantitativo, bem como o uso de funções e relações, envolvem a construção de sistemas matemáticos através de vários ciclos de melhoria e interpretação, que agem para descrever fenômenos ou situações, apoiando o raciocínio sobre eles. Em termos mais simples, o raciocínio quantitativo envolve a modelagem, e muitos têm argumentado que a modelagem de situações é a principal razão para o estudo da álgebra.

Segundo Kaput, na modelagem, começamos com os fenômenos e tentamos matematizá-los. Mas a utilização de computadores e calculadoras gráficas, cada vez mais comuns em salas de aula tradicionais e não-tradicionais, nos permitem repensar a forma como exploramos e modelamos fenômenos e como podemos ajudar os alunos a chegar a compreender os conceitos matemáticos por trás desses fenômenos. O autor cita como exemplo o uso da matemática para simular fenômenos dentro do computador e até mesmo conduzir dispositivos físicos, como carros motorizados em uma faixa utilizando os dados de um computador ou de calculadoras gráficas.

Kaput (1989) afirma que a linguagem de computador constitui uma linguagem algébrica, na qual podemos criar, explorar e ampliar ambientes matemáticos. Da mesma forma, coordenadas gráficas podem criar fenômenos de controle. Se esses ambientes tecnológicos são usados para modelar ou criar/fenômenos de controle, eles mudam de forma fundamental o modo como nos relacionamos com o particular para o geral e como podemos afirmar e justificar conjecturas matemáticas. E ainda mais importante, eles podem mudar a forma de ensinar e aprender matemática, até mesmo, de fato, como nos relacionamos à própria matemática.

Concluímos dessa forma, de acordo com a classificação de Kaput (1989) para o pensamento algébrico, que a noção de variável é o meio que permite os processos de generalização, formalização e manipulação de objetos algébricos e que auxilia na significação que é atribuída à álgebra, conforme o entendimento que se tem desses processos.

3.2.4 A noção de variável de Sfard & Linchevski (1994)

Sfard & Linchevski (1994) realizaram um estudo empírico com alunos do ensino médio sobre as concepções pseudoestruturais em álgebra. Segundo as autoras, a maioria das noções matemáticas desenha o seu significado a partir de dois tipos de processos: os *processos primários*, ou seja, os processos a partir dos quais a dada noção se originou, e *processos secundários*, aqueles para os quais as instâncias desta noção servem como entrada. Deste modo, definem concepções pseudoestruturais como concepções que se desenvolvem quando o aluno, incapaz de pensar em termos de objetos abstratos, usa símbolos como coisas em si e, como resultado, permanece inconsciente das relações entre os processos primários e secundários.

Sfard & Linchevski (1994) afirmam que as concepções pseudoestruturais em álgebra podem ser mais difundidas do que suspeitamos. Questionam quais os objetos que vem à mente dos alunos, quais os porquês para as decisões que eles tomam ao lidarem com variáveis presentes em expressões, quando resolvem equações padrões ou inequações.

As autoras afirmam que a compreensão da álgebra implica em querer relacionar os procedimentos algébricos formais ao sistema de conceitos desenvolvidos anteriormente, ou seja, deve ser feita a ligação entre as manipulações algébricas e os processos subjacentes aritméticos. Segundo Sfard & Linchevski (1994), na educação básica, a única forma de justificar as operações algébricas que realizamos é o campo das transformações formais nos cálculos numéricos que simbolizam e generalizam. Por exemplo, a manipulação realizada na equação algébrica é uma operação, enquanto que a relação de igualdade preservada sob a subtração de um número é uma propriedade de processos aritméticos. O significado e a solidez do procedimento algébrico são, portanto, herdados dos cálculos numéricos implícitos.

Na pesquisa, citam algumas habilidades que constituem o domínio em álgebra:

- *A habilidade em transitar entre os processos primários e secundários*: capacidade de focar nos tipos de processos e na destreza em fazer a transição de um nível para outro é o cerne da fluência na linguagem formal da álgebra.
- *Habilidade de agir temporariamente de modo automático ou "irracional"*: capacidade de executar processos secundários constantemente, sem se preocupar com a sua justificativa é o que faz a álgebra simbólica ferramenta tão poderosa para resolver problemas operatórios complexos.
- *Habilidade em lidar com objetos abstratos*: capacidade que desempenha um papel central na resolução de problemas algébricos. É através dela que as operações (secundárias) desenvolvidas dentro de expressões algébricas formais tornam-se significativas. Uma pessoa deve ser capaz de transitar entre a abordagem operacional, quando seu pensamento se concentra em processos (aqueles representados por expressões algébricas ou aqueles realizados sobre elas), e abordagem estrutural, quando incide sobre objetos abstratos que se escondem atrás dos símbolos. Na ausência desta habilidade, os elementos que são necessários para dar significado mais profundo para manipulação de símbolos e as regras da álgebra estão condenados a serem percebidos como arbitrários não sendo motivo de compreensão para os alunos, logo sendo apenas instrumentais.

- *Habilidade de flexibilidade de abordagem:* a capacidade de alternar rapidamente entre os diferentes modos de pensar e diferentes interpretações de expressões algébricas.

Sfard & Linchevski (1994, p.7) afirmam que quando uma pessoa é introduzida ao simbolismo algébrico pela primeira vez, a sua percepção dos símbolos está longe de ser mais versátil do que a de um perito. Alunos novatos no estudo da álgebra tendem a conceber problemas algébricos de uma forma puramente operacional, ou seja, como prescrições concisas para determinados cálculos. Deve normalmente demorar um pouco antes que o aluno seja capaz de pensar em uma fórmula também de modo estrutural.

Na concepção de Sfard & Linchevski (1994) os símbolos nem sempre são suficientes como um substituto para os seus referentes abstratos. Em algumas situações, o estudante sente que certas coisas inatingíveis devem ser evocadas para dar sentido ao problema. Por exemplo, é bastante difícil para falar sobre equivalência de equação se não incidir sobre os invariantes algébricos. As manipulações sobre esses objetos matemáticos que são solicitados permanecem inalteradas pela passagem de uma das equações para outra. Em outras palavras, o estudante concentra-se em expressões simbólicas, como tais, sem olhar para o seu sentido oculto.

Sendo assim, no que se refere à variável, as autoras explicam que depois que a capacidade de visualizar uma série de símbolos como um nome para um número for desenvolvida, os alunos têm ainda um longo caminho a percorrer até que eles possam enfrentar as letras nas expressões como variáveis, em vez de incógnitas e até que eles possam ver as funções escondidas atrás das expressões. Em outras palavras, as duas formas estruturais de lidar com expressões algébricas, a abordagem funcional é mais avançada do que a abordagem de "valor fixo".

3.2.5 A noção de variável segundo Usiskin (1995)

Sobre as concepções de álgebra, fizemos uma leitura do trabalho de Usiskin (1995) que afirma que a álgebra escolar não é facilmente definida e que a concepção que temos da mesma influencia no desenvolvimento do ensino-aprendizagem. O autor ressalta que a álgebra escolar tem elementos bastante diferentes da álgebra ensinada nas universidades, e tem a ver com a compreensão de "letras" (usualmente chamadas de variáveis) e suas operações.

A variável pode representar números, pontos, proposições, uma função, uma matriz ou uma operação, ou seja, tem muitas definições possíveis e tentar encaixar todas essas ideias em uma única concepção distorce as finalidades da álgebra.

Para o autor, a questão principal do ensino da álgebra escolar diz respeito às competências e habilidades dos alunos. Uma segunda questão que aparece é relativa ao papel das funções no currículo escolar, que para alguns é pouco significante e para outros é o eixo fundamental pelo qual as variáveis e a álgebra são introduzidas. Estas questões estariam relacionadas às finalidades de ensino e aprendizagem da álgebra.

Usiskin acredita que os objetivos que temos, bem como as concepções de álgebra estão intrinsecamente relacionados. Afirma que a concepção que temos sobre álgebra reflete diretamente no seu ensino. Dessa forma, o autor apresenta uma classificação das concepções de álgebra baseadas nas noções de variável que aparecem no ambiente escolar.

a) Álgebra como aritmética generalizada

Esta concepção trata as variáveis como elementos padrões generalizadores e apresenta como habilidades essenciais a *tradução* e a *generalização*, as quais são essenciais não só para álgebra mas também para aritmética.

Segundo Silveira (2005) as variáveis fazem parte do referencial algébrico e precisam ser esclarecidas através da linguagem natural, ou seja, precisam ser interpretadas, e tal interpretação necessita da leitura e tradução dos signos, que constituem jogos de linguagem que são convertidos em conceitos.

Segundo Radford (2010) a generalização algébrica de padrões reside na capacidade de evidenciar elementos, analisar características comuns desses elementos e providenciar uma expressão direta para estes elementos, elaborando uma regra.

Usiskin (1995) cita como exemplo a generalização da propriedade comutativa por meio de operações aritméticas e faz uma referência histórica ao trabalho de François Viète ao afirmar que a notação criada pelo matemático foi fundamental para o desenvolvimento de outros campos da matemática, tais como a geometria analítica e o cálculo, mostrando o poder da álgebra como aritmética generalizada.

b) Álgebra como um estudo de procedimentos para a solução de certos tipos de problemas

Na concepção anterior, a noção de incógnita não está presente, e as generalizações são feitas a partir de relações conhecidas entre números. Já na concepção de álgebra como um estudo de procedimentos, as variáveis ou são incógnitas ou constantes. Os elementos essenciais nessa concepção são *simplificar* e *resolver*, que para o autor são conceitos mais semelhantes do que geralmente são feitos para ser.

A importância conferida à ação de simplificar nesta concepção se justifica através do papel da linguagem simbólica, a qual possibilita a resolução de problemas abrangendo o contexto em que a situação está inserida e transformando expressões em uma linguagem mais objetiva, manipulável e com o mesmo significado.

Resolver um problema nesta concepção se justifica pela necessidade de interpretar os significados dos símbolos para estabelecer conexões e verificar a razoabilidade dos resultados. Resolver nesta perspectiva de análise é mais do que fornecer o resultado desejado, é desenvolver uma leitura significativa das relações estabelecidas para dar subsídios para questionar o como e o porquê do valor encontrado para a incógnita.

c) Álgebra como o estudo das relações entre quantidades

Segundo Usiskin, a diferença crucial desta concepção e as anteriores é que as variáveis, neste caso, variam. É evidente um padrão de generalização, porém é diferente do padrão de generalização aritmético. Por exemplo, o autor cita a seguinte questão: o que acontece com o valor de x quando x se torna cada vez maior? Em uma situação de caráter aritmético, essa questão perde o sentido, tanto que cita a mesma pergunta com valores numéricos: o que acontece com o valor de 2 quando 2 se torna cada vez maior?

Nesta concepção, a variável é tida como um argumento, um parâmetro e somente nesta, as noções de variáveis independentes e dependentes existem. O autor ressalta que somente quando as variáveis são vistas como argumentos que podem se tornar variáveis modelos.

d) Álgebra como estudo de estruturas

Nesta concepção, a álgebra é vista como o estudo de estruturas devido as propriedades atribuídas às operações com números reais e polinômios. A variável é mais do que um símbolo, se tornando um objeto arbitrário de uma estrutura relacionada com certas propriedades. Essa concepção é encontrada quando tratamos da álgebra abstrata.

3.2.6 A noção de variável segundo Claude Janvier (1996)

Claude Janvier trabalha com as concepções de variável em álgebra sempre ressaltando quando as mesmas estão presentes ou não nas ações dos alunos quando estão manipulando expressões ou equações algébrica. Em sua pesquisa, do ano de 1996, faz uma distinção clara entre o ato de representar com letras e a concepção de variável como valor desconhecido.

Segundo Janvier (1996) a álgebra não é equivalente ao tratamento com letras, pois as letras podem ser manipuladas sem que qualquer processo mental algébrico esteja envolvido. Para o autor, o raciocínio algébrico não começa quando as letras são substituídas por números ao serem usadas pelos alunos. Na sua perspectiva, a concepção de variável como valor desconhecido nem sempre está presente na representação da letra. Afirma que este pensamento é relevante e deve ser mostrado particularmente quando as equações são manipuladas pelos alunos.

Podemos relacionar o ponto de vista de Janvier com uma das classificações de álgebra propostas por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) denominada concepção linguístico-estilística, na qual eles concebem a álgebra como uma linguagem própria, de modo que exista a distinção proposta por Janvier.

Os autores explicam que a representação por letras (representação simbólica) organiza de forma conexa o pensamento algébrico, de maneira a tornar o acesso ao abstrato mais fácil e proporcionar uma modificação conceitual, na qual a matemática passou a ser usada como ferramenta para outras ciências. O pensamento algébrico diz respeito ao modo de sintetizar os procedimentos específicos que aparecem no processo de resolução.

Janvier (1996) argumenta com o seguinte exemplo: a fórmula $A = \pi.r^2$ (a fórmula de área para um círculo de raio r) é usada para calcular a área de qualquer círculo quando o seu raio é dado. Para esta finalidade, os estudantes não estão de nenhuma maneira pensando ou considerando o raio do círculo como desconhecido. Muito pelo contrário, o raio pode ter tantos valores específicos, como previsto pelos exercícios, mais nunca se espera que seja desconhecido. Neste sentido, a letra r não tem, na mente dos alunos, o status de um número desconhecido. Similarmente, para a letra A na fórmula, não é esperado que os alunos imaginem ou suponham que o valor de A é desconhecido. Por uma questão de lógica, atribuído um valor a r, um valor de A existe automaticamente.

Contudo, o autor afirma que ao usar a fórmula "ao contrário" tem-se uma tarefa diferente. Se a área for fornecida, o comprimento do raio correspondente pode não ser facilmente encontrado. Alguns cálculos teriam que ser levados em consideração, porém estes envolveriam o uso de letras como números gerais e não teriam valores específicos. Para ele, a capacidade de resolver tais cálculos é uma das principais características do pensamento algébrico.

Javier (1996) afirma que uma representação simbólica tem o significado que o intérprete que está envolvido na solução de um problema ou exercício atribuir a ela, sendo portanto, importante observar os processos de solução para determinar este significado.

O autor assume a posição de que uma álgebra que utiliza letras corresponde minimamente à capacidade (e boa vontade) por parte do aluno imaginar que uma letra representa um número que tem de ser descoberto e à competência de o aluno a realizar os cálculos aritméticos necessários nesses números.

Janvier (1996) faz uso em seus argumentos da concepção de Collis (1972), o qual aponta que o uso de operações algébricas (operações aritméticas em letras com incógnitas) exige, de quem soluciona, a manipulação de suas operações, embora os resultados obtidos após cada operação não apareçam de forma fechada ou como um único símbolo ou entidade simbólica. Essa habilidade é denominada por Collis como "aceitação de falta de fechamento".

Segundo Janvier (1996), esta habilidade ajuda a distinguir uma expressão de uma equação, distinção sem a qual nenhum processo pode ser feito na investigação do domínio do ensino da álgebra. Uma equação deve envolver cálculos com valores desconhecidos, enquanto que uma expressão depende do tipo de atividade na qual está envolvida.

Exemplifica da seguinte forma: expressões como $y = 3x + 2$ e $t = \frac{9}{5}c + 32$ serão consideradas equações caso se peça para encontrar y (ou t) quando x (ou c) são fornecidos, pois nem y, nem t seriam realmente desconhecidos. Por outro lado , se um "ponto" ou um par ordenadas (x ,y) pertence a reta $y = 3x + 2$, ou para satisfazer $y = 3x + 2$, então a expressão simbólica pode ser considerado como uma equação de duas incógnitas.

Sobre o uso da letra como variável, Janvier (1996) se apoia nas concepções de Freudenthal (1983,apud JANVIER, 1996), Schoenfeld & Arcavi (1988, apud JANVIER, 1996) para argumentar que este não depende da representação simbólica para ser utilizado, porém é antes uma questão de interpretação particular de quem resolve o problema. Por exemplo, podemos usar por um longo período e sucessivamente expressões (como equações e como expressões), tais como $A = \pi.r^2$ ou $d = v \times t$ ou $T = \frac{9}{5}C + 32$, sem considerar em nenhum momento que r,t ou C variam e consequentemente A, d, ou T variam também. A letra pode ser (mentalmente) utilizada sem ser interpretada ora como valor desconhecido (em uma equação), ora como um valor variável (tal como em $c \to 0$).

Para Janvier (1996) a letra pode ser interpretada de quatro diferentes maneiras: como um valor indeterminado, como um valor desconhecido, como uma variável e com um sentido polivalente que dependerá da situação apresentada.

3.2.7 A noção de variável segundo Vinner (1983) e Bloedy & Vinner (2000)

Em seus trabalhos, Vinner fala sobre o conceito e a aprendizagem de função. Em sua pesquisa, do ano de 1983, apresenta uma teoria cognitivista, na qual são relatadas dificuldades de compreensão do conceito de função, destacando duas principais: a noção do próprio conceito e a determinação de quando um conceito está formado na mente do aluno. O autor elaborou um modelo explicativo desta teoria fundamentado nas noções de *imagem conceitual* e *definição conceitual*.

Segundo Vinner (1983) a noção de *imagem conceitual* está associada ao nome de um conceito que inclui todas as imagens mentais, propriedades e todos os processos que lhe estão associados. Explica que no campo da álgebra, a representação gráfica ou algébrica é construída ao longo do tempo e a partir das experiências que cada pessoa tem.

A noção de definição conceitual trata da definição verbal que explica o conceito de modo exato. De acordo com Vinner (1983), para compreender um conceito, não é suficiente conhecer a definição. O entendimento do conceito só é alcançado quando são combinadas a imagem com a definição conceitual. Muitas vezes, a definição é reconstruída tendo como referência a imagem, outras vezes a imagem é reconstruída a partir da definição conceitual.

Na pesquisa do ano de 2000, Bloedy & Vinner, ainda tratando do conceito de função conforme a teoria cognitivista que liga a imagem à definição conceitual, falam do ensino da álgebra referente à interpretação da variável como parâmetro. Os autores explicam que esta interpretação depende do modo como são aplicadas as expressões algébricas.

Segundo Bloedy & Vinner (2000), a noção de variável como parâmetro é encontrada implícita ou explicitamente quando aprendemos sobre equações, funções, e outros problemas matemáticos. Os autores apresentam alguns exemplos de problemas e declarações que envolvem equações, funções com parâmetros, incógnitas e variáveis:

(a) Na seguinte equação $(x-5) = m + 2x$, x é um valor desconhecido e m é um parâmetro. Para qual valor do parâmetro m a equação não têm solução?

(b) O gráfico de $(x - m)^2 + (y - n)^2 = R^2$ é um círculo.

(c) Encontre uma equação para a reta através de (2, 5) com inclinação 3.

(d) Escreva as coordenadas do extremo do gráfico da função quadrática

$f(x) = ax^2 + bx + c$.

(e) x é o preço de um lápis. Encontre o preço de uma borracha, se eu pago $ K por 10 lápis e por 7 borrachas .

(f) Um número A é dado. Podemos sempre encontrar uma série B, de modo que $(A - 3)(B + 2) = 1$?

Bloedy & Vinner (2000) questionam sobre como sabemos que as letras são destinadas a ser parâmetros, incógnitas ou variáveis e afirmam que a resposta não está incorporada à expressão ou à equação, podendo ser encontrada no contexto , que consiste em um dos seguintes :

(1) Uma declaração explícita sobre quais letras são utilizadas como parâmetros, e que quais são desconhecidas ou variáveis, a partir do exemplo (a).

(2) O conhecimento comum sobre forma padrão de equações ou funções, incluindo o uso comum de x e y como nomes para eixos em gráficos, e o significado da notação f(x). Assim, no exemplo (b), é comum indicar que m, n, e R são parâmetros, e x, y são variáveis.

(3) No exemplo (d) as palavras 'equação' e "quadrática" e a notação f(x) indicam que x é a variável da função, enquanto a. b, c são parâmetros.

(4) A formulação da questão, tal como nos exemplos (e) e (f). Em ambos, as letras que denotam dados são parâmetros, e as letras a serem encontradas são incógnitas.

Segundo Bloedy & Vinner (2000) a noção de parâmetro aparece em todos os lugares em matemática e pode causar muita dificuldade, que é explicada pelo fato de que o conceito de parâmetro inclui implícitas, mas inevitáveis, estruturas quantificadoras que são ainda mais complexas que avançam para noções e definições de cálculo, que os professores tentam evitar.

Bloedy & Vinner (2000) afirmam que a complexidade inerente ao conceito propriamente dito parâmetro não é meramente uma dificuldade de linguagem, estando relacionada à compreensão dos conceitos de equação e familiares das próprias equações.Em consequência, a complexidade não pode ser evitada pelo uso de outras notações, e as dificuldades devem ser superadas, encontrando melhores formas de ensinar este conceito.

Os autores destacam que o termo parâmetro em matemática refere-se à dois usos muito distintos de letras: uma letra cujo valor determina os membros de uma família de equações ou funções e o uso paramétrico, o que se refere as letras nas representações paramétricas de curvas (ou superfícies), por exemplo, $x = t-1$, $y = t^2$, onde o valor do parâmetro determina pontos da curva (ou de superfície).

3.2.8 A noção de variável segundo Ursini e Trigueros (2003)

Para Ursini e Trigueros (2003) o ensino da álgebra e seu uso para diferentes fins dependem do desenvolvimento do conceito de variável, o qual afirmam, assim como Usiskin (1995), ser multifacetado, incluindo diferentes aspectos.

Afirmam que as diferentes concepções de álgebra e os diferentes usos de variáveis aparecem misturados durante o ensino da álgebra escolar, e que embora seja ensinado o uso de cada uma, não há ênfase nas caracterizações particulares delas que permitam aos estudantes diferenciá-las entre si.

O termo genérico "variável" assume significados de valor desconhecido específico, padrão de generalização, variáveis em funções de relações, entre outros, porém tal fato não é reconhecido em pesquisas que tratam dos conceitos de álgebra e nem no ensino de álgebra.

A riqueza da noção de variável é perdida quando se analisa somente os livros didáticos e no modo como o assunto é introduzido na escola.

O currículo escolar apresenta os diferentes significados de variáveis, porém eles são apresentados isolados, sem se dar ênfase nas características que constituem estes significados e que diferenciam seus diferentes usos.

Tabela 2 - Categorização do conceito de variável, segundo Ursini e Trigueros (2003)

VARIÁVEL	CONCEITO E REPRESENTAÇÃO	INTERPRETAÇÃO DOS SÍMBOLOS	MANIPULAÇÃO
COMO UM VALOR DESCONHECIDO	Valor desconhecido em uma situação específica e / ou em uma equação	Como valor desconhecido em uma equação	Fatorar, simplificar, expandir, transpor ou balancear uma equação.
COMO UM PADRÃO GERAL	Um padrão geral envolve métodos ou regras gerais deduzidas de padrões numéricos e /ou geométricos e /ou problemas similares	Como uma generalização em expressões algébricas ou em uma expressão de métodos padrões	Fatorar, simplificar e expandir para rearranjar uma expressão.
COMO RELAÇÕES ENTRE GRANDEZAS	Como relações entre grandezas (correspondência e variação) através de tabelas, gráficos ou representações analíticas.	Como correspondências e variações em representações analíticas, tabelas e gráficos.	Fatorar, simplificar e expandir para rearranjar uma expressão, substituindo valores em determinados intervalos de variação, valores máximos e mínimos e comportamentos globais das relações.

Como dito anteriormente, Ursini e Trigueros (2003) consideram importante mostrar as características que constituem essas concepções de álgebra.

No que diz respeito às variáveis como um valor desconhecido, afirmam que primeiramente deve ser estabelecida a diferença entre situações ou problemas em que o valor da variável pode ser determinado e as situações ou problemas que envolvem quantidades desconhecidas que não podem ser determinadas. É necessário representar simbolicamente as entidades desconhecidas e desenvolver expressões algébricas que descrevam as relações estabelecidas.

Eventualmente estas expressões devem ser postas em ordem para obter uma equação ou uma lista de equações. Quando nos deparamos com equações, dadas ou construídas, precisamos manipular os símbolos envolvidos para encontrar o valor ou valores que tornam a equação verdadeira. Mais além, é também importante substituir os valores obtidos para verificar se eles satisfazem a equação.

Um pré-requisito para entender a variável como um padrão geral é a habilidade para reconhecer padrões para encontrar ou deduzir regras e métodos gerais que os descrevam. É necessário distinguir os aspectos invariantes da variável em problemas que descrevem uma variedade de situações que envolvem sequências numéricas e geométricas, ou que descrevem a estrutura ou problemas similares.

É preciso usar símbolos para representar padrões, regras ou métodos gerais, assim como um objeto indeterminado, e para manipular (fatorar, expandir) expressões que envolvem padrões gerais sem atribuir valores específicos. Padrões gerais aparecem em expressões, tautologias, fórmulas padrões e como parâmetros em equações expressas na forma generalizada. Deve-se interpretá-las como quantidades padrões e diferenciá-las das variáveis simbólicas que representam um valor desconhecido que pode ser determinado.

Para entender a variável como relação entre grandezas é relevante reconhecer situações onde há correspondência entre variável e variável conjunta. Estas situações podem envolver informações representadas em tabelas, gráficos e expressões analíticas ou problemas verbais. Para cada uma dessas representações percebe-se como a mudança de uma variável influencia na mudança da outra variável.

A relação entre grandezas implica na capacidade de ver que cada grandeza pode assumir vários valores dependendo do intervalo onde a relação é estabelecida. A capacidade de determinar esta correspondência é refletida pela capacidade de determinar o valor de uma grandeza quando a outra é conhecida. A capacidade de trabalhar com variações é refletida pela possibilidade de determinar intervalos ou encontrar onde a função está crescendo ou decrescendo.

3.2.9 A noção de variável segundo Cruz (2005)

Cruz (2005) realizou uma pesquisa qualitativa e documental com o objetivo de investigar como a noção de variável é abordada em livros didáticos brasileiros referentes aos 3º e 4º ciclos do ensino fundamental sob a ótica de organização praxeológica de Chevallard (1991).

Segundo Cruz (2005), os livros didáticos de matemática trazem várias concepções de álgebra e trabalham as noções de variável sob diferentes enfoques. Contudo, ainda há predominância de exercícios para aplicação de técnicas de cálculos.

No que se refere à noção de variável, a autora verificou que a noção de padrão generalizador é apresentada a princípio com a finalidade de traduzir e generalizar os dados da situação problema. Em seguida, a noção de valor desconhecido (incógnita) é desenvolvida com o objetivo de servir de instrumento para resolver equações e sistemas tendo como principal característica a simplificação.

De acordo com Cruz (2005), em específico no estudo das equações, as letras são percebidas pelos alunos como um valor numérico desconhecido que através dos procedimentos e técnicas de cálculo será determinado, ou seja, os alunos entendem neste caso o aspecto "invariante" da noção de incógnita. Segundo a autora, a variável é um valor desconhecido "momentaneamente e único".

Cruz (2005, p.86) afirma que a noção de variável como incógnita está em todo o trabalho desenvolvido com as equações. Outra ideia de variável só será apresentada quando se inicia o estudo de funções, onde o foco é voltado para a noção de variável como parâmetro.

Na fala da autora

> As variáveis são tradadas como incógnitas em todo o trabalho com equações, em seguida apresentam a ideia de função e apenas neste momento a variável é apresentada como substituta de vários possíveis valores de uma grandeza relacionada a outra. Entretanto,apenas em C4 a variável é explicitada utilizando o termo parâmetro. (CRUZ, 2005, p.86)

Cruz (2005) conclui que no ensino de álgebra apresentado nos livros didáticos, as ideias de variável são tratadas de modo isolado, em estudos de conteúdos específicos, sem que haja alguma relação entre os diferentes usos da variável.

3.3 A NOÇÃO DE VARIÁVEL COMO ELEMENTO EM COMUM DAS CONCEPÇÕES DOS AUTORES

Nossa pesquisa trata da concepção de álgebra segundo a noção de variável, a qual constitui a base do processo de educação algébrica, ao mesmo tempo que se torna a ideia mais difícil e complexa para ser compreendida pelos alunos, pois o significado que a variável vai assumir depende do contexto em que a mesma está sendo aplicada, ou seja, assume papéis distintos como, por exemplo, um elemento genérico, um parâmetro, uma incógnita, papéis estes que foram percebidos em todos os referenciais aqui apresentados.

Devido a complexidade do conceito de variável muitos autores defendem que seu ensino deva ser gradual, sendo iniciado durante as séries iniciais, através de experiências de generalização de padrões e sequências, da observação de regularidades e da manipulação de expressões para justificar ou estabelecer conclusões.

Estas experiências proporcionariam o aparecimento de símbolos, assim como as variáveis propriamente ditas, respeitando as etapas de aprendizagem e desenvolvimento dos alunos, além de valorizar as relações da álgebra, aritmética e geometria, evitando-se a ruptura na passagem do pensamento aritmético para o algébrico.

Dessa forma, destacamos as noções de variável que avaliamos em nossa pesquisa de campo,de acordo com as concepções dos autores.

A noção de variável como *valor desconhecido* aparece nas concepções de Kuchemann (1981), quando relaciona o uso das letras como incógnitas específicas; em Kieran (1989), quando afirma que a experiência dos alunos com variáveis se reduzem a fórmulas, onde se substitui por valores numéricos as letras para achar a o resultado desejado; em Sfard & Linchevski (1994), que relacionam a compreensão da incógnita com a capacidade de visualizar uma série de símbolos como um nome para um número; em Janvier (1996), quando classifica assim como Kuchemann, o uso das letras em uma equação como valores desconhecidos; em Usiskin (1995), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), e Lins & Gimenez (1997), quando classificam a álgebra como um *conjunto de técnicas para resolução de problemas*, em Cruz (2005) que afirma que a variável como incógnita é percebida pelos alunos como um valor numérico desconhecido momentaneamente. Esta noção de variável acompanha a álgebra desde seu surgimento, uma vez que seu objetivo primeiro advém da necessidade prática de solucionar situações do cotidiano.

A variável como *padrão generalizador* aparece nas concepções de Kieran (1989), que diz que uma das interpretações da variável é a de termo literal relacionada à capacidade de perceber o geral no particular; em Fiorentini Miorim e Miguel (1993), que classificam a linguagem simbólica na concepção Linguístico-postulacional como possuindo um nível elevado de abstração e generalização; em Usiskin (1995), quando expõe suas concepções fazendo uma distinção clara entre padrão generalizador aritmético e padrão algébrico; em Kaput (1989), que define o processo de generalização de modo a elevar o pensamento algébrico ao nível de padrões, procedimentos, estruturas e as relações entre grandezas; em Ursini & Trigueros (2003), que identificam a variável como termo geral de acordo com a habilidade para reconhecer padrões para encontrar ou deduzir regras e métodos gerais que os descrevam, em Cruz (2005) que aponta que esta variável aparece para traduzir e generalizar as informações contidas em uma situação problema.

Nesta abordagem a variável é inicialmente vista como um marcador estático que de acordo com a aprendizagem dos alunos pode assumir valores diferentes estendendo a exibição estática tanto para valores discretos como contínuos.

A variável como *parâmetro* aparece nas concepções de Kuchemann (1981) e Kieran (1989), quando se classifica o uso das letras de acordo a representação de uma gama de valores não especificados, existindo uma relação sistemática entre esses valores; em Sfard & Linchevski (1994), quando classificam uma das formas estruturais de lidar com expressões algébricas como abordagem funcional; em Usiskin (1995), quando interpreta a variável como um argumento, um parâmetro existindo as noções de variáveis independentes e dependentes; em Ursini & Trigueros (2003) que relacionam a variável como parâmetro de acordo com a habilidade de ver grandezas dependendo do intervalo onde as relações entre elas é estabelecida; em Janvier (1996), quando classifica a interpretação da letra em um sentido polivalente; em Vinner (1983) e Bloedy & Vinner (2000), quando destacam que o parâmetro em matemática refere -se a dois usos das letras: como valor que determina os membros de uma família de equações ou funções e o uso paramétrico, o que se refere às letras nas representações paramétricas de curvas, e em Cruz (2005) que afirma que esta noção de variável só aparece quando se inicia o estudo de funções.

Nesta noção é realçado o comportamento de funções e grandezas como uma forma de caracterizar as relações entre as quantidades que variam, as quais no processo de ensino e aprendizagem são exploradas por meio de seu comportamento diante da alteração do valor da variável independente.

As noções de variável como valor desconhecido, como padrão generalizador e como parâmetro são as três grandes categorias que analisamos na pesquisa. Contudo, nestas categorias aparecem dois elementos que são importantes para a construção dessas noções, conforme observamos em nosso referencial teórico: a linguagem e o estudo de estruturas.

A *linguagem simbólica,* com significados específicos está nos trabalhos de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Kaput (1989), onde é ressaltada a relevância do simbolismo na linguagem algébrica para se compreender os diferentes significados que a variável pode assumir. Para Kaput (1989) o aluno desvia sua atenção do significado simbólico para olhar o símbolo em si, operando livremente em relações complexas, fato este também evidenciado em Sfard & Linchevski (1994). Para Lins & Gimenez (1997), a linguagem está incluída na atividade algébrica, envolvendo a transformação de significados em uma relação onde o professor é interlocutor dos alunos e os alunos são interlocutores entre si.

O *estudo de estruturas* aparece em Usiskin (1995) e Kaput (1989) no sentido de ressaltar as propriedades operatórias que constituem a álgebra e que são essenciais para expressar o pensamento algébrico. Segundo Kaput (1989), estas estruturas conferem à álgebra um nível alto de generalização e abstração, enriquecendo a compreensão dos alunos e ampliando a interpretação do caráter puramente aritmético.

Construir a noção de variável é essencial para proporcionar uma formalização simbólica que produza significado para a álgebra escolar. As diferentes noções de variável têm a finalidade de organizar as ideias, negociar significados e permitir a elaboração de caminhos para solucionar problemas de caráter algébrico.

Dessa forma, a abordagem escolhida em relação à noção de variável vai influenciar no processo de ensino e aprendizagem. Trabalhar com os diferentes significados que a variável assume de modo desarticulado pode ocasionar, por exemplo, obstáculos à constituição do pensamento algébrico.

Sendo assim, a perspectiva de análise que assumimos nesta pesquisa tomou como eixo central a noção de variável, que nos levou a identificar elementos que constituem as concepções de álgebra que apresentamos em nosso referencial teórico a partir das representações dos alunos, que foram avaliadas por meio de questionários com situações problema.

No próximo capítulo, mostraremos como organizamos os procedimentos de pesquisa de modo a possibilitar a referida perspectiva de análise em um ambiente escolar.

CAPÍTULO IV
OS PROCEDIMENTOS DE COLETA DE DADOS

Em nosso estudo, definimos como objetivo central buscar uma descrição da noção de variável, na perspectiva dos alunos que cursam o 9º ano do ensino fundamental. Identificamos quais elementos que constituem as três noções de variável que pesquisamos (como valor desconhecido, como padrão generalizador e como parâmetro) estão presentes no processo de ensino e aprendizagem da álgebra escolar. Para alcançar tal objetivo, estabelecemos as seguintes metas: estudar o desenvolvimento da álgebra e da noção de variável, sob o ponto de vista histórico e da educação matemática; verificar como a noção de variável está presente nas pesquisas em educação matemática e no ambiente escolar.

A primeira meta foi contemplada no segundo e terceiro capítulo respectivamente. A segunda meta foi contemplada no capítulo 4 e foi finalizada com uma pesquisa de campo, na qual identificamos os elementos que constituem as noções de variável que optamos pesquisar de acordo com nosso estudo teórico que estão presentes no ambiente escolar, a partir de uma verificação sob o ponto de vista dos alunos no ensino fundamental.

O procedimento de levantamento de dados consistiu na aplicação de três questionários diagnósticos, compostos por 10 questões cada um, totalizando trinta questões que contemplam as seguintes noções de variável: variável como valor desconhecido, como padrão generalizador e como parâmetro. Nesta pesquisa, optamos por não trabalhar com a noção de variável como estudo de estruturas, devido esta, conforme nosso referencial teórico, estar pouco presente no contexto da álgebra escolar. Desta modo, neste capítulo mostraremos o percurso metodológico que adotamos para desenvolver a pesquisa de campo.

4.1 O INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO

Nesta etapa de pesquisa, optamos por utilizar como instrumento para levantamento de dados o questionário, composto por questões que contemplaram as noções de variável aqui abordadas.

A organização dos questionários levou em consideração o referencial teórico que adotamos em nosso estudo. Estruturalmente, foi baseado em Trigueros et al (1996) e Ursini e Trigueros (2003), dando ênfase aos elementos de cada noção de variável (interpretação,simbolização e manipulação) para que pudéssemos analisar com maior precisão quais elementos das noções de variável possuem um maior entendimento por parte dos alunos que estão no final do ensino fundamental.

Trigueros et al (1996), e Ursini &Trigueros (2003) aplicaram questionários de acordo com o modelo que ficou conhecido como modelo 3UV (3 usos da variável), que apresenta uma decomposição das noções envolvidas, destacando aspectos relevantes para a noção de variável e seus diferentes usos.

As autoras elaboraram questionários de acordo com as noções de variável e os elementos que constituem estas noções por acreditarem que é por meio da compreensão da variável e seus diferentes usos que se pode compreender o ensino de álgebra no contexto escolar. Neste sentido as autoras afirmam:

> A compreensão da noção de variável implica, pela nossa perspectiva, na possibilidade de superar a simples realização de cálculos e operações com letras e símbolos, para alcançar uma compreensão das razões por que funcionam estes procedimentos, a capacidade de prever aonde conduzem,e a possibilidade de estabelecer relações entre os distintos aspectos que as variáveis assumem no contexto da álgebra elementar. (URSINI & TRIGUEROS,2003, p. 446).

De forma geral, o modelo 3UV consistiu na interpretação da variável segundo três formatos bem delineados:

- Variável como valor desconhecido;
- Variável como padrão generalizador;
- Variável como parâmetro.

As noções de variável foram analisadas segundo três elementos que as constituem: interpretação, simbolização e manipulação. No caso da variável como parâmetro, acrescentamos ainda a representação gráfica.

A Interpretação da variável pode ser caracterizada segundo cada um dos seus usos (valor desconhecido, padrão generalizador e parâmetro) como, uma incógnita presente numa equação qualquer, uma generalização que expresse situações mensuráveis e a representação de variações conjuntas entre quantidades.

A Simbolização para cada um de seus três usos, caracteriza-se pela tradução de determinadas situações por intermédio de um termo desconhecido ou equações que a definam; pela representação por meio de um termo geral ou a dedução de uma regra particular para determinadas situações numéricas ou geométricas; ou pela reprodução de uma relação funcional tendo por base as variáveis dependentes e independentes, seja qual for a maneira pela qual estes dados sejam apresentados: tabela de valores, expressão algébrica, gráfico, ou outras.

A Manipulação da variável pode ser definida como a utilização de diversos artifícios algébricos: fatorar, simplificar, expandir, transpor ou balancear uma equação, uma expressão qualquer, ou relacionamento funcional, com a finalidade de se buscar uma solução, obter uma expressão correlata ou analisar o comportamento de uma função.

4.1.1 A variável como valor desconhecido

Para a variável como valor desconhecido, ressaltamos algumas características básicas para a sua compreensão, tais como a interpretação desta variável, a representação de quantidades desconhecidas simbolicamente e a manipulação de expressões e equações algébricas.

No caso da interpretação da variável como valor desconhecido, temos o reconhecimento de um elemento simbólico numa equação ou em situações problema como uma entidade que representa valores que possam ser determinados.

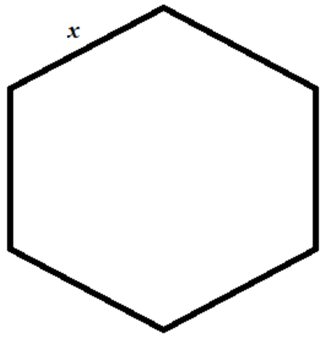
A simbolização foi caracterizada pela tradução de sentenças simples à linguagem algébrica para a resolução de problemas (equações lineares, quadráticas, etc.). No que se refere à manipulação da variável, foram avaliadas a simplificação e a expansão das equações sempre em busca de sua solução.

Desse modo, a interpretação, a simbolização e a manipulação da variável como valor desconhecido levaram em consideração as seguintes habilidades:

- Interpretar a variável como um número cujo valor ou valores específicos podem ser determinados a partir das restrições de um problema dado;
- Identificar e simbolizar a incógnita em problemas específicos, suscetíveis a apresentar - se mediante a uma equação.
- Manipular os elementos que compõem uma equação ou expressão algébrica.

Apresentamos na tabela abaixo alguns exemplos de questões que avaliam a interpretação, a simbolização e a manipulação da variável como valor desconhecido.

Tabela 3 - Exemplos de questões - variável como valor desconhecido

ITENS AVALIADOS	QUESTÕES
INTERPRETAÇÃO	A figura abaixo mostra um hexágono regular de lado x. Que expressão poderia representar o perímetro da figura? 
SIMBOLIZAÇÃO	Escreva uma expressão que represente a seguinte situação: um número desconhecido somado a 4 é igual a 10.
MANIPULAÇÃO	Escreva o valor que pode ter a letra d na equação abaixo: $3 . d = 18$

4.1.2 A variável como padrão generalizador

No que se refere à noção de variável como padrão generalizador, avaliamos a capacidade do aluno de reconhecer padrões e encontrar ou deduzir regras gerais que os descrevam. Verificamos também a habilidade de usar símbolos para representar equações, expressões, regras ou métodos, reconhecê-los como a representação de um objeto indeterminado, manipulá-lo (expandir e fatorar) em expressões que envolvam números genéricos sem a necessidade, por sua vez, de atribuir- lhes valores específicos.

Analisamos a interpretação da variável a partir da capacidade de distinguir quantidades genéricas das variáveis simbólicas que representam quantidades desconhecidas que possam ser determinadas. A interpretação baseia-se na percepção de um padrão (figura e/ou sequência), como representando qualquer número, ou no reconhecimento da variável simbólica numa expressão com ausência do sinal de igualdade.

A simbolização da variável como padrão generalizador se caracterizou pela representação de sentenças simples em termos gerais, sequências numéricas, que envolvam estes elementos para a linguagem algébrica. A manipulação se caracterizou pelo desenvolvimento das expressões algébricas por meio de simplificações, fatorações, etc.

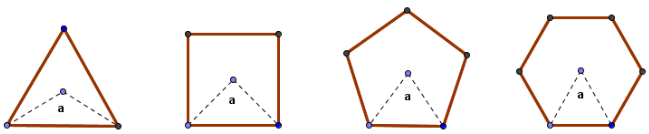
Desse modo, a interpretação, a simbolização e a manipulação da variável como padrão generalizador levaram em consideração as seguintes habilidades:

- Interpretar a variável como representação de um número qualquer em expressões algébricas, tais como tautologias e expressões abertas;
- Identificar e simbolizar o objeto geral em situações particulares que podem ser descritas em termos de uma regra ou método geral.
- Manipular a variável nesse tipo de expressão.

Apresentamos na tabela a seguir alguns exemplos de questões que avaliam a interpretação, a simbolização e a manipulação da variável como padrão generalizador

Tabela 4 - Exemplos de questões - variável como padrão generalizador

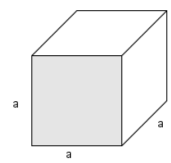
<table>
<tr><th>ITENS AVALIADOS</th><th>QUESTÕES</th></tr>
<tr><td>INTERPRETAÇÃO</td><td>
Observe os polígonos regulares e o ângulo central de medida a.



a) Agora complete a tabela

<table>
<tr><th>Número de lados do polígono regular</th><th>Cálculo</th><th>Medida do ângulo central</th></tr>
<tr><td>3</td><td>$\frac{360}{3}$</td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\frac{360}{4}$</td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td>$\frac{360}{5}$</td><td></td></tr>
<tr><td>6</td><td>$\frac{360}{6}$</td><td></td></tr>
</table>

b) Escreva uma equação que relacione a medida a do ângulo central do polígono regular com o número n de lados do polígono (n pode ser qualquer número natural maior que 2).
</td></tr>
<tr><td>SIMBOLIZAÇÃO</td><td>Escreva uma equação que expresse: um número desconhecido dividido por 6 e o resultado somado a 8.</td></tr>
</table>

MANIPULAÇÃO	É dada abaixo a equação que representa o cálculo do volume de um cubo de aresta **a**. $V = a . a . a = a^3$  Para a = 3, qual seria o valor do volume do cubo?

4.1.3 A variável como um parâmetro

A análise da variável como parâmetro foi baseada no reconhecimento de situações em que ocorram a variação simultânea de quantidades, bem como no aspecto relacional entre elas. Estas situações envolveram informações representadas em equações e expressões, problemas em linguagem verbal e representação gráfica. Para cada uma das situações problemas foi relevante a percepção da correspondência entre as variáveis, onde alterando-se uma delas, modificaria a outra. Este reconhecimento relacional implica na capacidade do aluno de determinar o valor de uma das variáveis quando a outra é conhecida.

A noção de variável como parâmetro possibilita ao aluno determinar intervalos ou encontrar situações em que uma função seja crescente, decrescente, assuma valores positivos ou negativos, bem como admita valores de máximo ou mínimo, ou outras características peculiares. Também possibilita a capacidade de representar as informações em termos de diferentes representações.

A interpretação da variável como parâmetro analisou a percepção do aluno relativa à existência de variáveis em relação funcional, levando em consideração suas correspondências exercidas entre as quantidades numéricas relatadas, e a variação comum das mesmas.

A simbolização e representação gráfica se caracterizaram pela tradução de uma expressão verbal e de um gráfico, que pressupõem a relação entre grandezas, para a linguagem algébrica. Quando se requer uma representação algébrica, é necessário simbolizar as variáveis relatadas e distinguir equações de expressões com ausência do sinal de igualdade.

A análise da manipulação teve como objetivo verificar a capacidade do aluno em reconhecer a finalidade de manuseio da variável em sua representação analítica, como meio de determinar o valor da variável independente e/ou dependente, como também intervalos da variação, produzir seu gráfico, bem como qualquer outra representação correlata. É importante poder manipular os símbolos para expressar este relação de modo que seja possível deduzir as características requeridas.

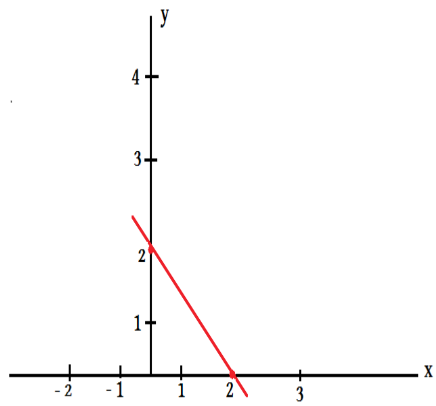
Desse modo, a interpretação, a simbolização e a manipulação da variável como parâmetro levaram em consideração as seguintes habilidades:

- Reconhecer as relações funcionais (em suas representações analítica e gráfica) e interpretar as variáveis envolvidas em forma tanto estática, quanto dinâmica, dependendo da natureza do problema;
- Simbolizar situações que envolvam uma relação funcional;
- Manipular as variáveis para determinar os valores ou intervalos de variação que cada uma delas pode tomar em termos da outra.

A tabela a seguir apresenta alguns exemplos de questões que avaliam a interpretação, a simbolização, a manipulação e a representação gráfica da variável como parâmetro.

Tabela 5 - Exemplos de questões - variável como parâmetro

ITENS AVALIADOS	QUESTÕES
INTERPRETAÇÃO	Na cidade onde Carlos mora, os táxis cobram uma quantia fixa de R$ 3,80 e mais R$ 0,70 por quilômetro rodado. Júlia, a tia de Carlos, mora em outra cidade, onde os táxis cobram uma quantia fixa de R$ 4,30 e mais R$ 0,60 por quilômetro rodado. Expresse uma fórmula para calcular o preço de uma corrida de táxi na cidade de Carlos. Faça o mesmo para uma corrida na cidade de Júlia.
SIMBOLIZAÇÃO	Um engenheiro vai projetar uma piscina em forma de paralelepípedo retângulo, cujas dimensões, em metro, são expressas por ***x***, ***(20 -x)*** e **2**. Escreva uma fórmula para calcular o volume dessa piscina.
MANIPULAÇÃO	Considere a seguinte expressão y = 3 + x. a) Se o valor de y for 10, que valor deve ter x? b) Se o valor de x for 3, que valor deve ter y?

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA	1) Observe o gráfico da função para responder a questão: Qual é o valor de y quando x = 2?  2) Represente graficamente a função y = 3x – 2.

4.2 ORGANIZAÇÃO DOS ELEMENTOS AVALIADOS NO QUESTIONÁRIO

As particularidades relativas às noções de variável (interpretação, simbolização, manipulação e representação gráfica) são os itens que observamos nos estudantes. Na tabela abaixo, estão descritos os números de questões que fizeram parte dos questionários, de acordo com os itens que serão avaliados e as noções que abordadas.

Tabela 6 - Elementos avaliados no questionário

Itens	Noções de variável	Valor desconhecido	Padrão generalizador	Parâmetro	Estrutura	Total de questões
Interpretação		4	2	3	-	9
Simbolização		3	4	2	-	9
Manipulação		3	4	3	-	10
Representação gráfica		-	-	2	-	2
Total de questões		**10**	**10**	**10**	**-**	**30**

4.3 APLICAÇÃO DOS QUESTIONÁRIOS

Os questionários foram aplicados em três turmas do 9º ano do Ensino Fundamental de três escolas do município de Belém-PA (sendo uma do distrito de Icoaraci). As escolas pertencem à esfera municipal, estadual e federal. Não identificaremos por nome nem as escolas e nem as turmas, as quais serão tratadas de turma 1, turma 2 e turma 3. Abaixo apresentamos o cronograma de visitas as escolas e aplicação dos questionários.

Tabela 7 - cronograma de visitas e aplicação dos questionários

Questionários	**Escolas (turmas)**	**TURMA 1**	**TURMA 2**	**TURMA 3**
Questionário 1: Variável como valor desconhecido		**16/09/2013** Visita na escola para entrega de documentação de pedido de permissão para a realização da pesquisa.	**11/11/2013** Visita na escola para entrega de documentação de pedido de permissão para a realização da pesquisa.	**9/12/2013** Visita na escola para entrega de documentação de pedido de permissão para a realização da pesquisa.
		Aplicado no dia 17/09/2013	Aplicado no dia 13/11/2013	Aplicado no dia 9/12/2013
Questionário 2: Variável como padrão generalizador		Aplicado no dia 18/09/2013	Aplicado no dia 14/11/2013	Aplicado no dia 10/12/2013
Questionário 3: Variável como parâmetro		Aplicado no dia 20/09/2013	Aplicado no dia 18/11/2013	Aplicado no dia 11/12/2013

4.4 ACERCA DOS SUJEITOS DE PESQUISA

Os questionários foram inicialmente aplicados para alunos que estavam cursando o ensino fundamental, entre o 7º e 9º ano de uma escola pública do município de Belém-PA. Aplicamos os questionários para uma turma do 7º ano, uma turma do 8º ano e uma turma do 9º ano. Porém, quando demos prosseguimento a um estudo mais aprofundado do nosso referencial teórico e para realizarmos uma análise mais abrangente, optamos por trabalhar somente com as turmas de 9º ano, sendo dessa forma necessário acrescentar mais duas escolas ao lócus da pesquisa.

Foram pesquisados 65 alunos que cursavam o 9º ano, sendo 33 deles pertencentes à uma turma de uma escola federal, 15 pertencentes à uma turma de uma escola estadual e 17 pertencentes à uma escola municipal.

Os questionários aplicados foram os mesmos para as três turmas e não fizemos categorizações referentes à idade nem ao sexo dos alunos. Avaliamos somente a interpretação, simbolização, manipulação, representação gráfica dos alunos para verificarmos como a noção de variável é construída no nível fundamental de ensino.

No próximo capítulo apresentaremos os dados coletados e os resultados obtidos com a pesquisa.

CAPÍTULO V
ANÁLISE DOS RESULTADOS

5.1 COLETA DE DADOS DO INSTRUMENTO DIAGNÓSTICO

Neste capítulo, descrevemos o processo de coleta de dados e os resultados obtidos de acordo com a verificação da presença de cada uma das noções de variável que estudamos no ambiente escolar. Para cada noção de variável, são mostradas tabelas que relatam os acertos e erros dos alunos em cada uma das questões dos questionários aplicados. Os gráficos também são apresentados conforme a noção de variável analisada e trazem as médias gerais de acertos e erros por questão, a média de acertos dos itens avaliados (interpretação, simbolização, manipulação e representação gráfica)-geral e por turma.

Para cada noção de variável, mostramos os resultados obtidos em cada questão específica, analisando a forma como os estudantes realizaram cada exercício do instrumento, levando-se em consideração as capacidades e habilidades apontadas nas respectivas variáveis descritas.

5.2 UM NOVO PERCURSO METODOLÓGICO QUE SURGIU: A PESQUISA AÇÃO

Quando pensamos no caminho metodológico que iríamos adotar em nossa pesquisa, não consideramos possíveis fatores que poderiam ocorrer no momento da coleta de dados. Quando colocamos em nosso título um novo caminho metodológico, não estamos nos referindo a uma metodologia nova, mas sim a uma metodologia que surgiu de uma eventualidade ocorrida no ambiente escolar. Em nosso caso foi a pesquisa ação.

A pesquisa ação em sua definição é uma pesquisa social de fundamentação empírica, concebida e realizada com associação de uma ação, na qual o pesquisador e os participantes do estudo estão envolvidos cooperativamente.

Percebemos durante o processo de coleta de dados que os alunos estavam com dificuldades para entender e resolver os questionários, fato este que nos fez intervir no processo através da explicação e do incentivo dado aos alunos para que socializassem suas resoluções com a turma. Dessa maneira, nossa pesquisa se configurou em uma pesquisa ação de caráter estratégico uma vez que ocorreu a aplicação do projeto de pesquisa, sem levar em consideração as mudanças ocorridas no processo.

Nossa intervenção se restringiu a explicar como os alunos deveriam proceder no processo de resolução das questões e ao incentivo à socialização das resoluções pelos alunos. Nesta fase da pesquisa, percebemos a construção cognitiva da experiência dos alunos que espontaneamente foram socializando suas resoluções de modo a validar estratégias consideradas corretas pelo grupo. Tal fato é refletido nas questões que obtiveram os maiores índices de acertos, que foram as mesmas socializadas pela maioria dos alunos.

A pesquisa ação em nosso trabalho possibilitou reflexões sobre os resultados obtidos e se constituiu, segundo Pimenta (2005, p.527):" Em uma estratégia pedagógica de conscientização a partir da reflexão propiciada na interlocução com os pesquisadores - observadores e na participação nas discussões com o grupo de pesquisa".

Nossa estratégia pedagógica interventiva foi baseada na apresentação de exemplos similares às situações problemas propostas nos questionários, fato que ocorreu para todas as questões aplicadas nesta pesquisa.

5.3 ANÁLISE DO DESEMPENHO DOS ESTUDANTES - NOÇÃO DE VARIÁVEL COMO VALOR DESCONHECIDO

Para se ter uma ideia geral do desempenho dos alunos, as respostas ao questionários foram analisadas do ponto de vista quantitativo e qualitativo. Apresentaremos os dados e faremos as análises em categorias, de acordo com as três noções de variável que pesquisamos.

Para cada noção de variável que pesquisamos elaboramos um questionário específico, e cada questionário foi aplicado em um momento diferente nas três turmas de 9º ano avaliadas. Denominaremos as classes avaliadas de turma 1, turma 2 e turma 3. Respectivamente, as turmas possuem 33, 15 e 17 alunos, totalizando 65 alunos pesquisados.

Para a noção de variável como valor desconhecido foi elaborado um questionário, o qual continha as questões abaixo, distribuídas de acordo com a tabela 6 apresentada no capítulo anterior.

Tabela 8 - Itens avaliados e questões

<table>
<tr><th>INTENS AVALIADOS</th><th>QUESTÕES</th></tr>
<tr><td>INTERPRETAÇÃO</td><td>Questão 1: Escreva equações que representem as seguintes situações:
• Um número diferente de zero multiplicado por 4.
• Subtraia do resultado acima o número pensado.
• Divida o resultado acima pelo número pensado.
• Se o número pensado fosse y como seriam representadas as situações descritas?
Questão 3: Para a seguinte equação, escreva o valor que pode tomar a letra d.
3.d =15
Questão 4: . Escreva uma equação que represente: um número desconhecido que multiplicado por 32 é igual a 256.
Questão 7: . Escreva uma equação que comece assim: $3(x+2)+3=\boxed{}$.Como você completaria a equação feita para que a solução seja 5?</td></tr>
<tr><td>SIMBOLIZAÇÃO</td><td>Questão 5: Carla tinha 7 cédulas de x reais e 4 cédulas de y reais. No supermercado ela gastou 2 (x+ y) reais.
a) Escreva uma expressão que represente quanto Carla tinha antes das compras.
b) Escreva uma expressão que represente com quanto Carla ficou depois das compras.
Questão 6: Qual a expressão que representa o perímetro da figura abaixo?*
Questão 10: Suponha que um terreno tenha a forma da figura abaixo e suas medidas sejam representadas, pelas letras a,b e c. Qual expressão representa a área da figura?*
* Ver figuras em apêndice</td></tr>
<tr><td>MANIPULAÇÃO</td><td>Questão 2: De acordo com a questão 1, se o número x fosse substituído por 320, qual seria o resultado?
Questão 8: Considere o triângulo da ilustração, no qual as medidas dos lados são dadas em centímetros. Sabendo que o</td></tr>
</table>

	perímetro do triângulo é 18 cm, descubra a medida de cada lado.* ***Ver figura em apêndice** **Questão 9:** De acordo com a questão 8 calcule a área do triângulo.

Em todas as turmas, o questionário sobre a noção de variável como valor desconhecido foi o primeiro a ser aplicado e foi o que obteve o maior índice de acertos. A média geral de acertos deste questionário foi de 53,56%. Quando avaliamos as habilidades individualmente, vemos que a interpretação e a simbolização foram as que apresentaram maior domínio por parte dos alunos com índices de 57,82% e 49,41% e a habilidade de manipulação foi a que apresentou menor domínio com índice de 38,32%.

A seguir, apresentamos as tabelas com índices de acertos e erros em cada questão por turma avaliada, o gráfico com as médias gerais de acertos e erros por questão e os gráficos com a média de acertos por itens avaliados (geral e por turma).

Tabela 9 - Número de acertos e erros por itens avaliados da turma 1

Itens	**INTERPRETAÇÃO**				**SIMBOLIZAÇÃO**			**MANIPULAÇÃO**			**Total de respostas**
	Q1	**Q3**	**Q4**	**Q7***	**Q5****	**Q6**	**Q10**	**Q2**	**Q8**	**Q9**	
Acertos	24	31	28	5	20	27	24	22	14	13	208
erros	9	2	5	18	13	6	9	11	19	20	112
Total de respostas	33	33	33	23	33	33	33	33	33	33	320

***A questão Q7 não foi respondida por 10 alunos .** Considera - se acerto em todos os itens**

Tabela 10 - Número de acertos e erros por itens avaliados da turma 2

Itens	INTERPRETAÇÃO				SIMBOLIZAÇÃO			MANIPULAÇÃO			Total de respostas
	Q1	Q3	Q4	Q7*	Q5**	Q6	Q10	Q2	Q8*	Q9*	
Acertos	8	13	13	2	6	11	9	8	6	4	80
erros	7	2	2	10	9	4	6	7	5	9	61
Total de respostas	15	15	15	12	15	15	15	15	11	13	141

***As questões Q7,Q8 e Q9 não foram respondidas por todos os alunos.Respectivamente 3 alunos não responderam a Q7, 4 alunos não responderam a Q8 e 2 alunos não responderam a Q9. ** Considera - se acerto em todos os itens**

Tabela 11 - Número de acertos e erros por itens avaliados da turma 3

Itens	INTERPRETAÇÃO				SIMBOLIZAÇÃO			MANIPULAÇÃO			Total de respostas
	Q1	Q3	Q4	Q7*	Q5**	Q6	Q10	Q2	Q8*	Q9*	
Acertos	6	12	13	3	7	8	7	6	5	4	71
erros	11	5	4	7	10	9	10	11	8	6	81
Total de respostas	17	17	17	10	17	17	17	17	13	10	152

***As questões Q7,Q8 e Q9 não foram respondidas por todos os alunos.Respectivamente 7 alunos não responderam a Q7, 4 alunos não responderam a Q8 e 7 alunos não responderam a Q9. ** Considera-se acerto em todos os itens.**

Gráfico 1 - Média de acertos e erros por questão - variável como valor desconhecido

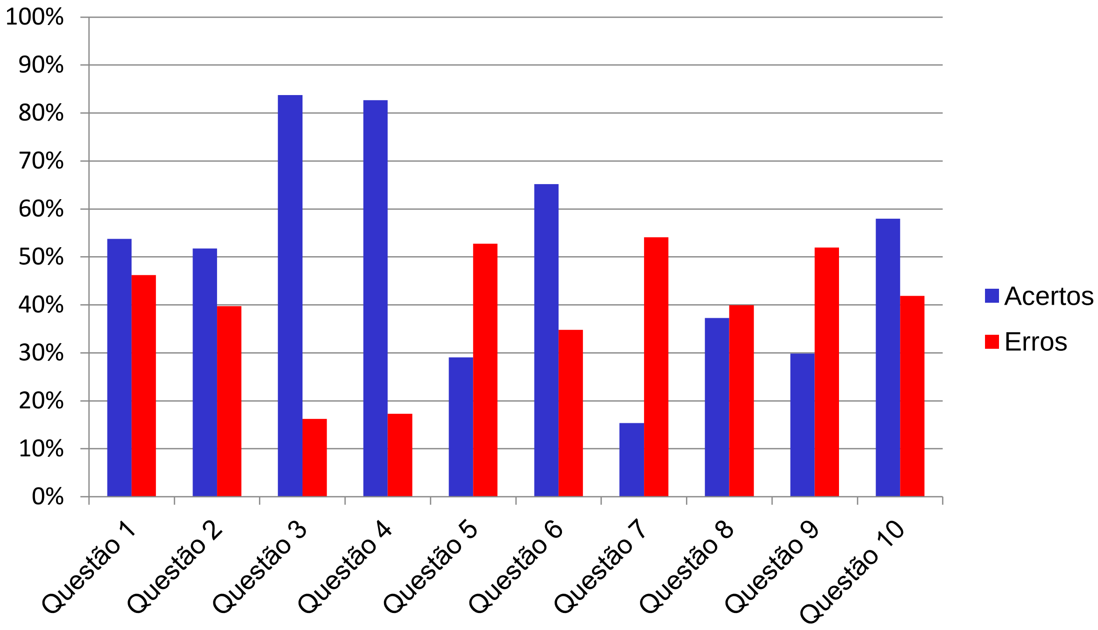


Gráfico 2 - Média de acertos por itens avaliados

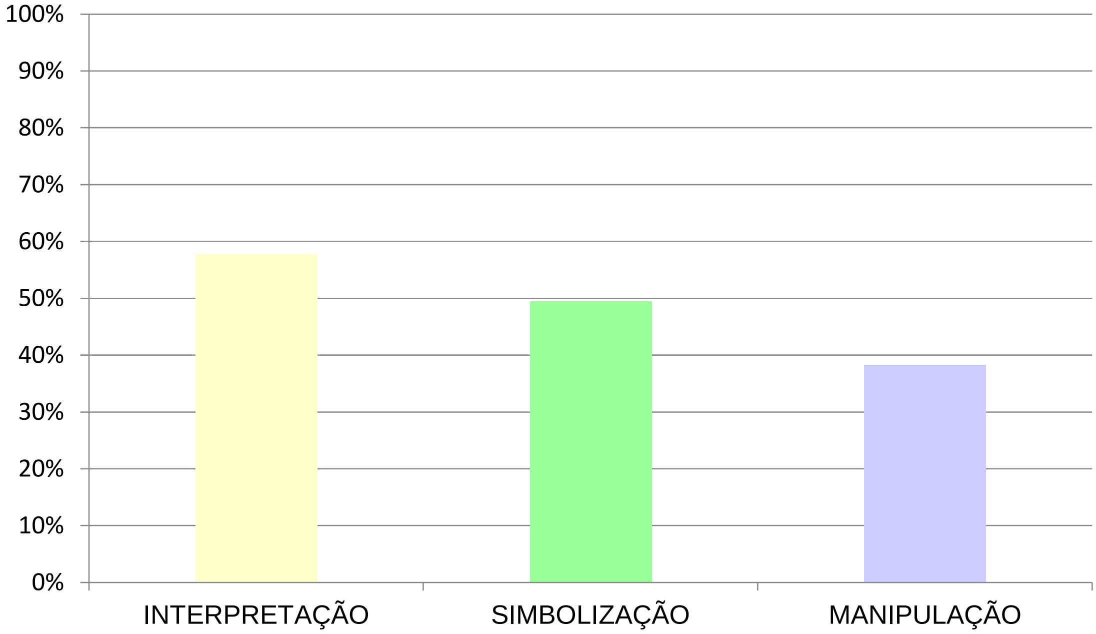


Gráfico 3 - Média de acertos por itens avaliados - turma 1

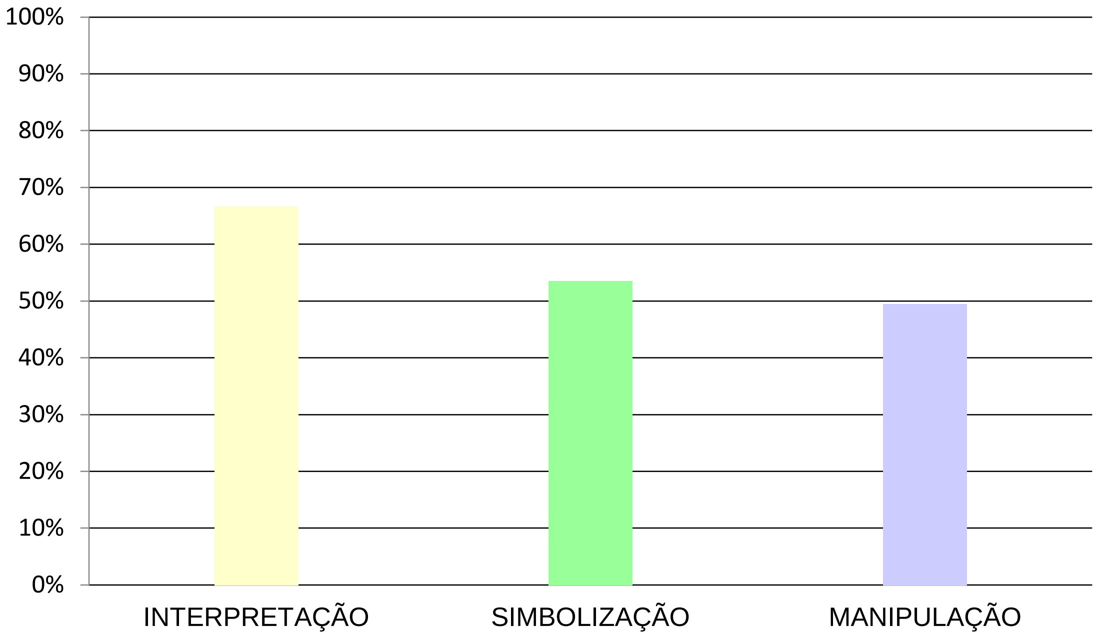


Gráfico 4 - Média de acertos por itens avaliados - turma 2

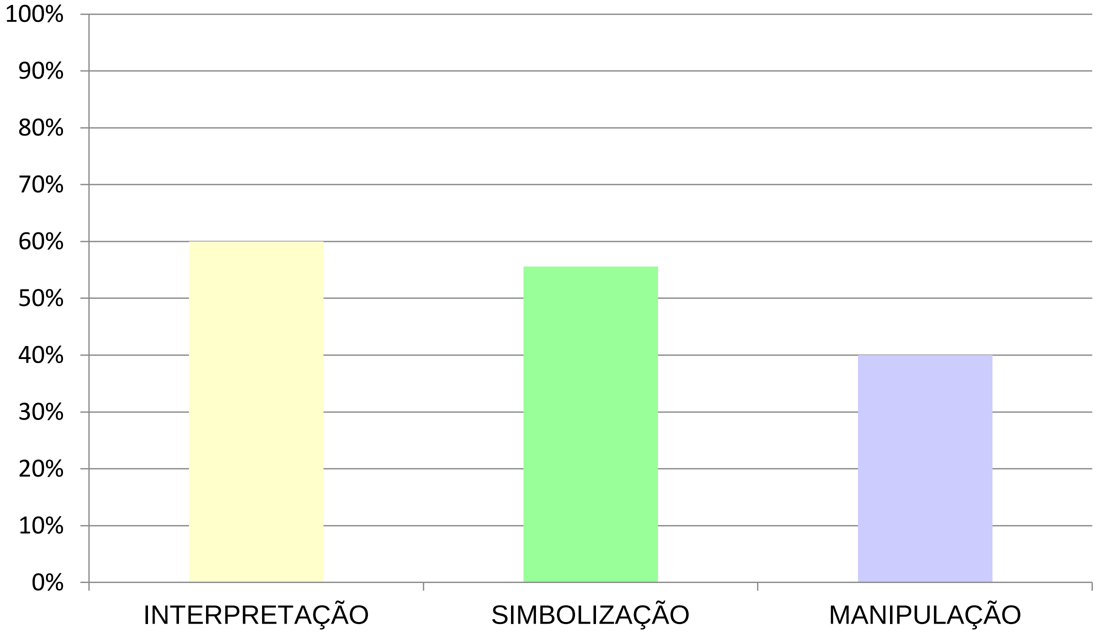
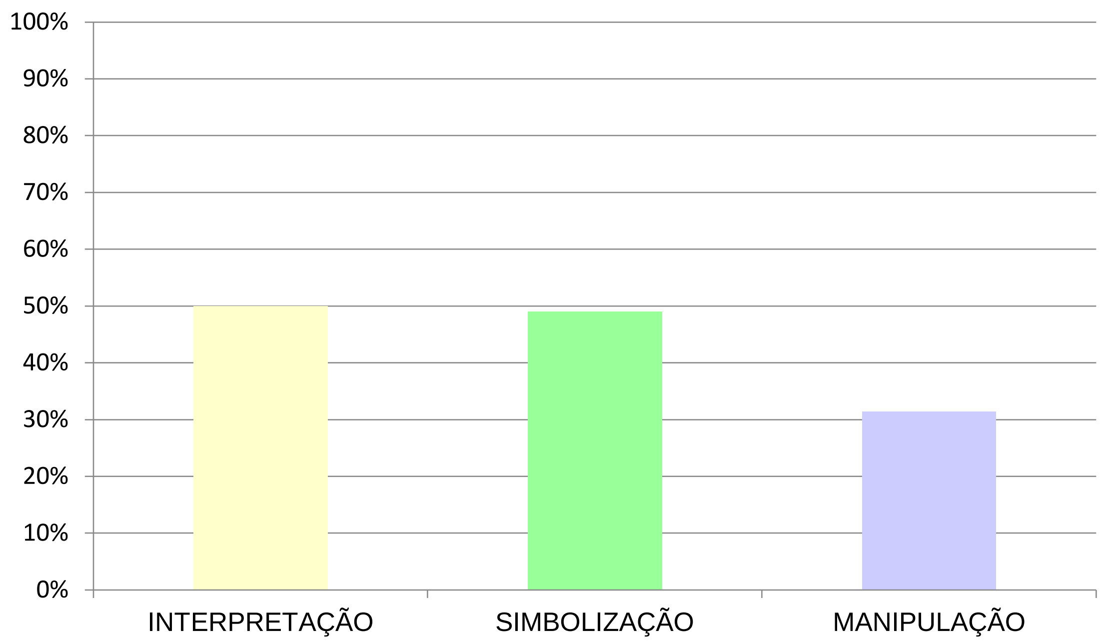


Gráfico 5 - Média de acertos por itens avaliados - turma 3



5.3.1 Análise da interpretação da noção de variável como valor desconhecido

De acordo com os dados coletados no questionário, vimos que a capacidade de interpretação da variável como valor desconhecido foi a que obteve o maior índice de acertos nas três turmas. A média geral de acertos nas questões que avaliavam a interpretação foi de 57,82%. No questionário, os itens 1, 3, 4 e 7 foram os que avaliaram tal capacidade. Considerando - se as três turmas, a questão 4 foi a que obteve o maior índice de acertos (82,65%) e a questão 7 a que obteve o menor índice (15,37%).

A questão 1 trazia uma situação problema descrita em linguagem usual e pedia que o aluno descrevesse essa situação em linguagem matemática. A média geral de acertos nesta questão foi de 53,78% e a de erros foi de 46,21%. A maior dificuldade encontrada nesta questão está relacionada à tradução para a linguagem matemática em termos algébricos. Percebemos que a parte da questão que permitia a representação por meios aritméticos foi resolvida corretamente pela maioria, porém quando tinham que utilizar a letra y, encontravam dificuldades para representar os procedimentos dos cálculos realizados. Esta dificuldade foi percebida nas três turmas, como veremos nas figuras abaixo que mostram as resoluções de três alunos, pertencentes as turmas 1, 2 e 3 respectivamente.

Enunciado da questão 1: Escreva equações que representem as seguintes situações:

- Um número diferente de zero multiplicado por 4,

- Subtraia do resultado acima o número pensado
- Divida o resultado acima pelo número pensado
- Se o número pensado fosse y como seriam representadas as situações descritas?

Figura 4 - Resolução questão 1 - aluno turma 1

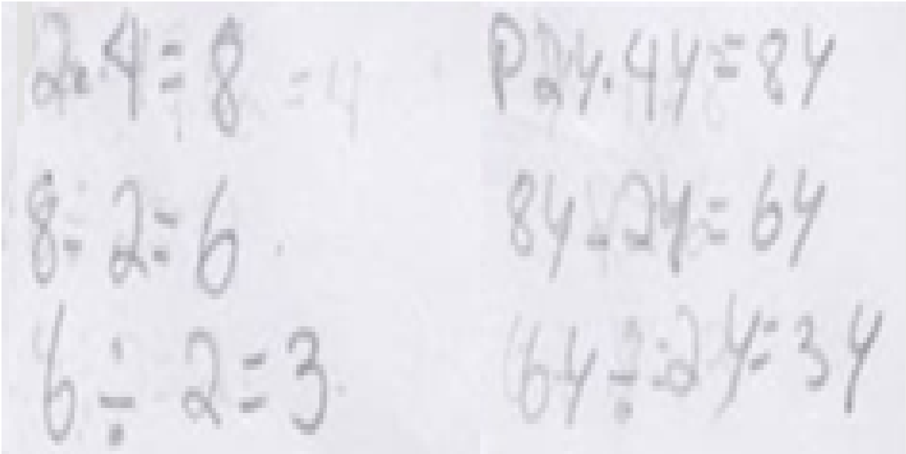


Figura 5 - Resolução questão 1 - aluno turma 2

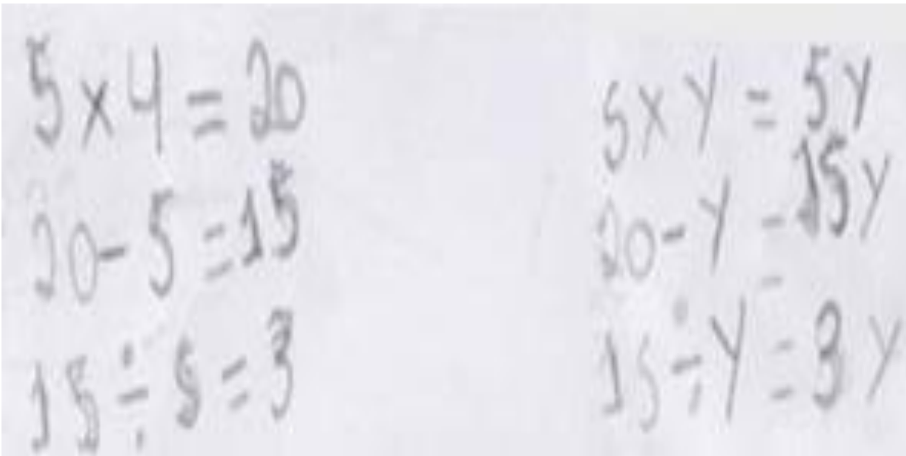
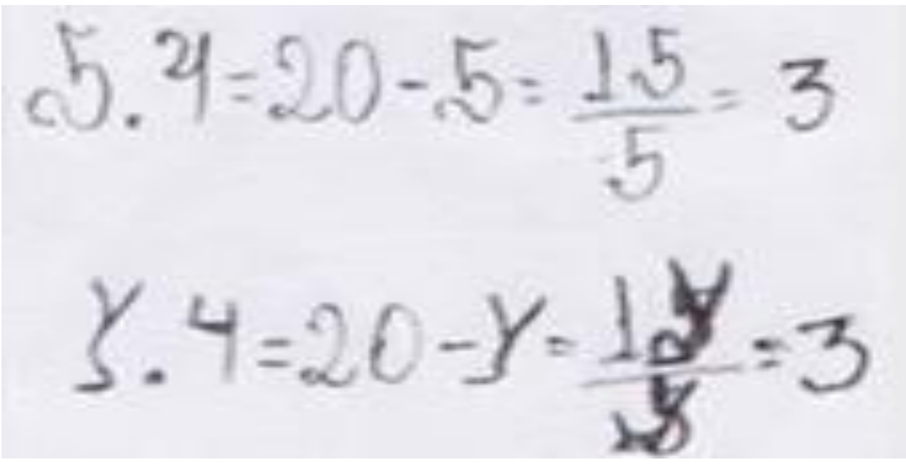


Figura 6 - Resolução questão 1 - aluno turma 3



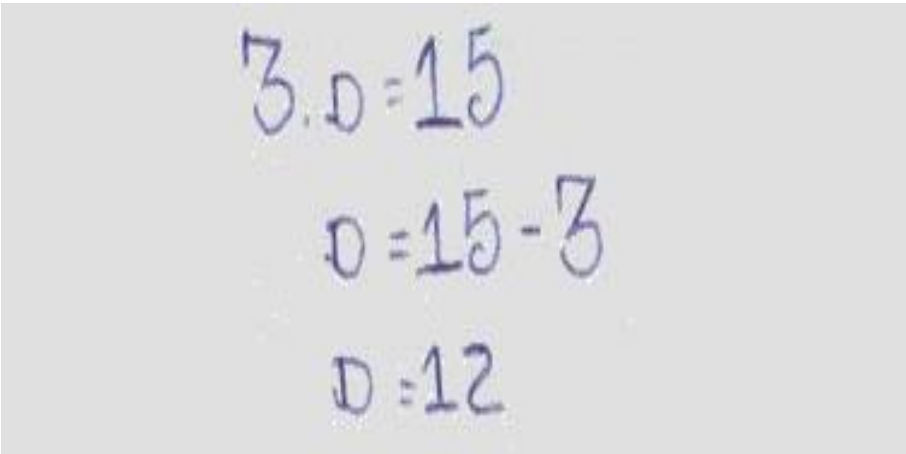
Os alunos das turmas representaram os cálculos considerando o número pensado, acrescentando a letra y . Não consideraram o y como o número pensado. No caso do aluno da turma 3, observamos também a compreensão do sinal de igualdade como o fechamento da operação, e não como a representação de equivalência entre equações. A interpretação das situações descritas prejudicou o que Ursini & Trigueros (1996) e Ursini & Trigueros (2003) julgam como elemento relevante para a compreensão da variável como valor desconhecido: a representação simbólica das entidades desconhecidas e o desenvolvimento de expressões/equações algébricas que descrevam as relações estabelecidas. Além disso, o entendimento da variável como valor desconhecido pelos alunos que Cruz (2005) verificou em sua pesquisa não foi verificado nas soluções.

Na questão 3, dava-se uma equação e era pedido que os alunos encontrassem o valor para a letra d para satisfazer a igualdade. Os erros verificados nesta questão são relativos ao uso incorreto das operações aritméticas, como vemos no exemplo abaixo, no qual o aluno ao invés de utilizar o algoritmo da divisão utilizou a subtração.

Enunciado da questão 3: Para a seguinte equação, escreva o valor que pode tomar a letra d.

$$3.d = 15$$

Figura 7 - Resolução questão 3 - aluno turma 2

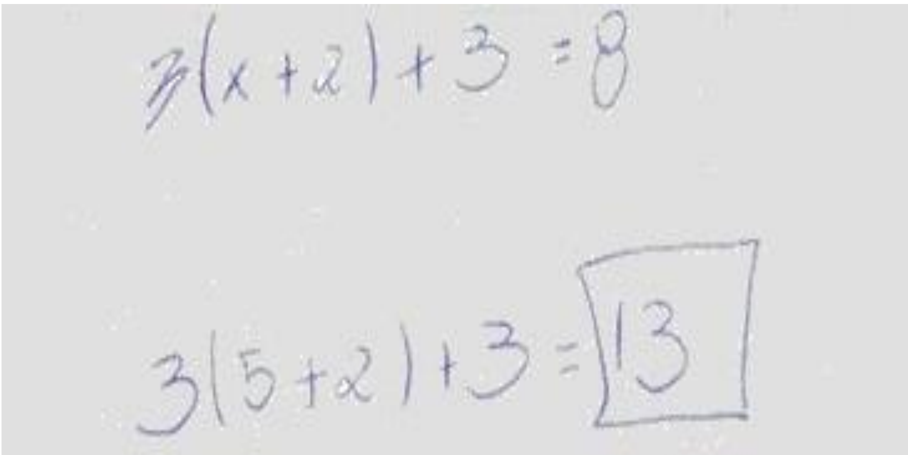


A questão 4, que foi a que obteve o maior índice de acertos nesta categoria(82,65%) é similar a questão 1. Era dada uma situação em linguagem usual e pedia-se que o aluno descrevesse a situação em linguagem matemática. A dificuldade verificada foi a mesma encontrada na questão 1: dificuldade em representar os cálculos (operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão) realizados utilizando a variável com valor desconhecido.

A questão 7 foi a que obteve o menor índice de acertos nesta categoria (15,37%). A questão dava o início de uma equação e pedia que o aluno a terminasse. Depois perguntava como teria que ser a equação para que o resultado fosse 5. A maioria dos alunos somou os números apresentados e depois substituiu no lugar do x o número 5, como no exemplo abaixo.

Enunciado da questão 7: Escreva uma equação que comece assim: 3 (x + 2) + 3= $\square$
Como você completaria a equação para que a solução seja 5?

Figura 8 - Resolução questão 7 - aluno turma 3



Verificamos que a capacidade dos alunos de interpretar a variável como valor desconhecido apresentou a dificuldade de concatenação relatada por Kieran (1989), ou seja, de conexão de ideias referentes à ordem das operações e à representação da variável em si. Tal fato prejudicou o que segundo Sfard & Linchevski (1994, p.4) pode ser descrito como o significado e a solidez dos procedimentos algébricos, os quais são herdados dos cálculos numéricos subjacentes.

5.3.2 Análise da simbolização da noção de variável como valor desconhecido

O item simbolização foi o que obteve o segundo maior índice de acertos (49,41%). A avaliação deste item se deu através das questões 5, 6 e 10 do questionário. A questão 6 foi a que obteve o maior índice de acertos (65,17%) e a questão 5 a que obteve o menor (29,07%).

Na questão 5, era apresentada uma situação (mostrando as variáveis x e y) e pedia-se que os alunos representassem por meio de uma expressão a situação proposta. No que se refere as dificuldades dos alunos, verificamos a falta da habilidade que Collis, (1972, apud Janvier 1996) denomina como aceitação da falta de fechamento, a qual, segundo o autor, ajuda a distinguir uma expressão de uma equação. Uma equação deve envolver cálculos para encontrar valores desconhecidos, enquanto que uma expressão depende do tipo de atividade na qual está envolvida. Na questão, os alunos buscavam encontrar os valores de x e y e não somente expressar a situação em linguagem matemática. O sinal de igual novamente apareceu como elemento necessário para o fechamento da operação, sendo adicionado pelos alunos para que os mesmos fossem capazes de manipular a expressão.

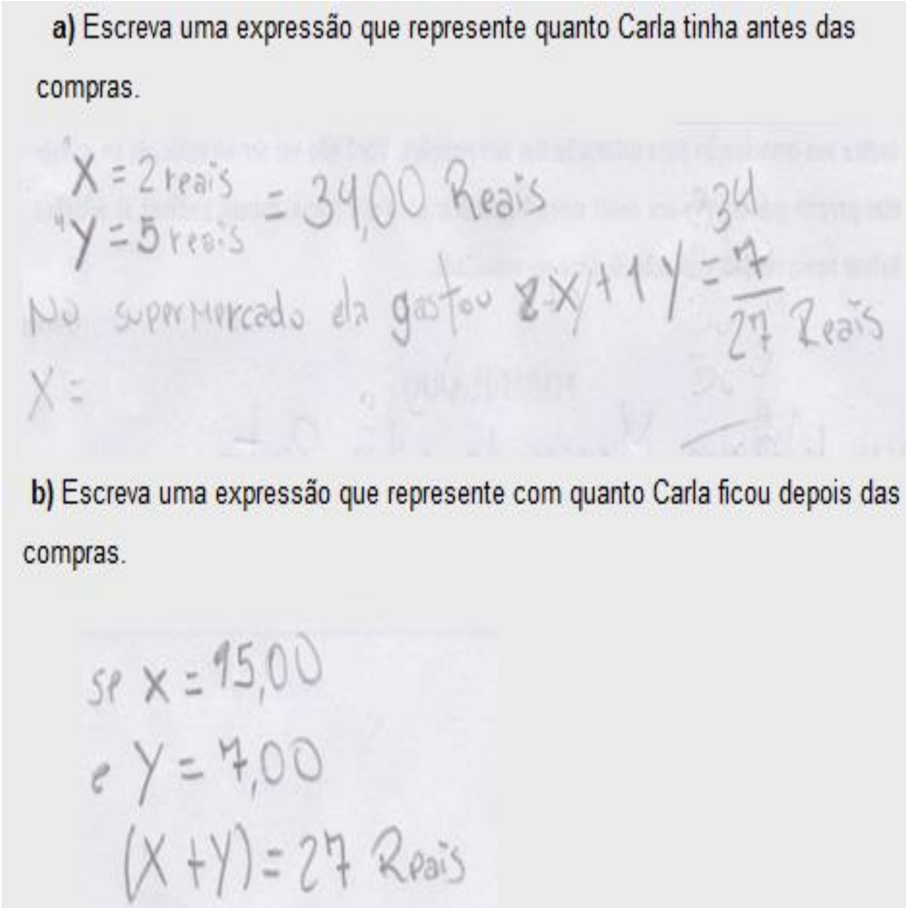
Nos exemplos a seguir, vemos resoluções de alunos que buscaram encontrar valores para as variáveis x e y. Essa busca dos valores foi representada tanto em linguagem verbal como em linguagem matemática.

Enunciado da questão 5: Carla tinha 7 cédulas de x reais e 4 cédulas de y reais. No supermercado ela gastou 2 (x + y) reais.

a) Escreva uma expressão que represente quanto Carla tinha antes das compras.

b) Escreva uma expressão que represente com quanto Carla ficou depois das compras.

Figura 9 - Resolução questão 5 - aluno turma 1



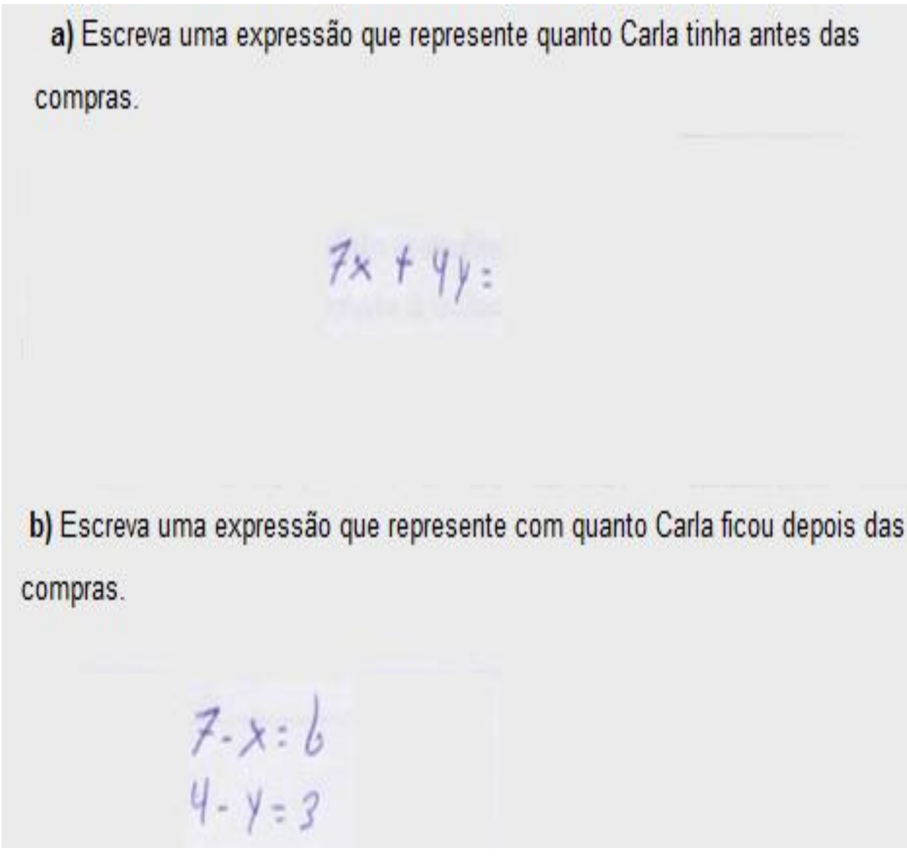
a) Escreva uma expressão que represente quanto Carla tinha antes das compras.

X = 2 reais
Y = 5 reais = 34,00 Reais 34
No supermercado ela gastou 8X + 1Y = 7
27 Reais
X =

b) Escreva uma expressão que represente com quanto Carla ficou depois das compras.

se X = 15,00
e Y = 7,00
(X + Y) = 27 Reais

Figura 10 - Resolução questão 5 - aluno turma 3



a) Escreva uma expressão que represente quanto Carla tinha antes das compras.

7x + 4y :

b) Escreva uma expressão que represente com quanto Carla ficou depois das compras.

7 - x : 6
4 - y = 3

A questão 6 foi a que obteve o maior índice de acertos nesta categoria(65,17%). Apresentava uma figura e pedia que os alunos representassem por meio de uma expressão o seu perímetro. Os erros verificados foram similares aos encontrados na questão 5, relativos à não aceitação da falta de fechamento, a busca pelo valor de x, além do não conhecimento do conceito de perímetro. A questão 10 era similar à questão 6, porém pedia que o aluno representasse por meio de uma expressão a área da figura. As mesmas dificuldades foram encontradas, além de não saberem como calcular a área da figura.

Percebemos através da simbolização da noção de variável como valor desconhecido pelos alunos o que Janvier (1996) afirma sobre o pensamento algébrico: não começa quando as letras substituem números ou números substituem letras. A noção de variável como valor desconhecido nem sempre está presente na representação da letra, e isto deve ser observado na manipulação de equações ou expressões pelos alunos. Kieran (1989) também apresenta um posicionamento semelhante ao de Janvier, ao afirmar que um estudante pode ser capaz de interpretar um problema verbalmente e ser incapaz de representá-lo matematicamente.

Verificamos também dificuldades em um dos elementos que Usiskin (1995) acredita ser essencial para a compreensão desta noção de variável: a resolução. Para o autor resolver significa proporcionar sentido às relações estabelecidas para que se possa julgar o como e o porque do valor encontrado para a incógnita.

5.3.3 Análise da manipulação da noção de variável como valor desconhecido

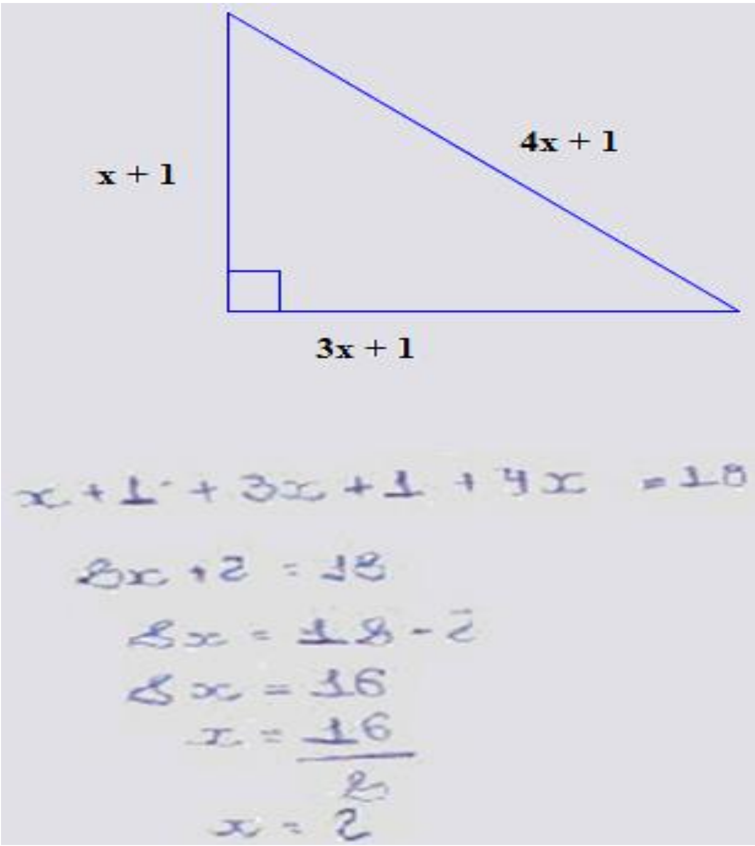
O item manipulação foi o que obteve o menor índice de acertos (38,32%). Para a avaliação deste item foram propostas as questões 2, 8 e 9 do questionário. A questão 2 foi a que obteve a maior média de acertos (51,76%) e a questão 9 foi a que obteve a menor média (29,85%).

A questão 2 estava vinculada à questão 1. Pedia que o aluno considerasse o número pensado como sendo 320 e representasse as situações propostas. A dificuldade verificada foi relativa a manipulação das operações aritméticas.

A questão 8 trazia um triângulo com suas respectivas medidas (que continham a variável x). Era fornecido o perímetro do triângulo e pedia-se que o aluno calculasse a medida de seus lados. As dificuldades encontradas foram novamente referentes ao não conhecimento do conceito de perímetro. Além disso, muitos dos alunos não perceberam que para encontrarem a solução não bastava encontrar o valor de x. No exemplo abaixo, vemos que o aluno realiza os cálculos corretamente, porém não responde o que foi perguntado: a medida dos lados do triângulo.

Enunciado da questão 8: Considere o triângulo da ilustração, no qual a medida dos lados são dadas em centímetros. Sabendo que o perímetro do triângulo é 18 cm, descubra a medida de cada lado.

Figura 11 - Resolução questão 8 - aluno turma 2



A questão 9 estava vinculada a questão 8. Pedia que calculasse a área do triângulo da questão anterior. Consequentemente verificou-se que os alunos que só calcularam o valor x na questão anterior, acabaram por não fazer a questão corretamente, além dos alunos que não resolveram por não saberem o conceito de área. Alguns chegaram a utilizar a fórmula da área do retângulo. Nos exemplos a seguir veremos dois casos das situações aqui descritas.

Enunciado da questão 9: De acordo com a questão 8, calcule a área do triângulo.

Figura 12 - Resolução questão 9 - aluno turma 1

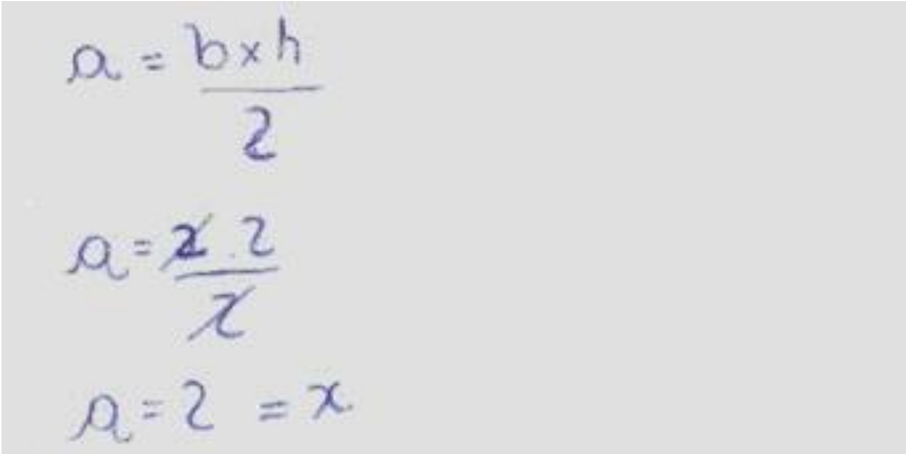
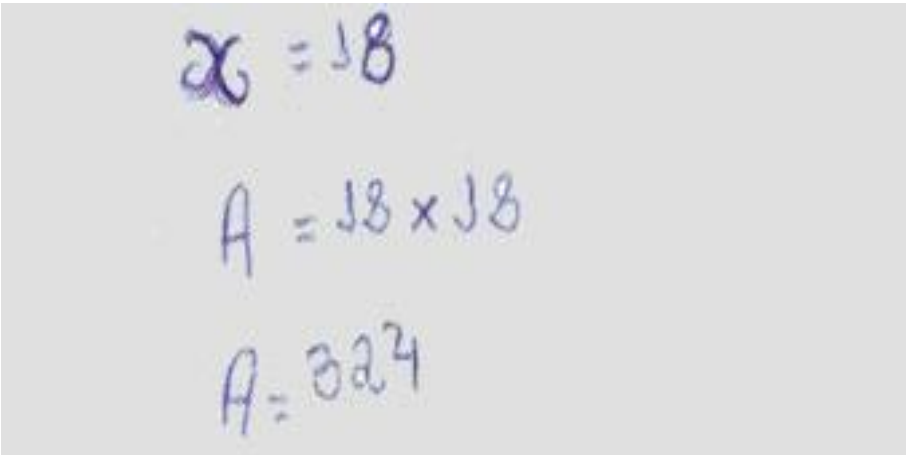


Figura 13 - Resolução questão 9 - aluno turma 3



Verificamos por meio da manipulação, da simbolização e da interpretação da noção de variável como valor desconhecido que os alunos ainda estão no estágio primário de desenvolvimento da álgebra, que segundo Sfard & Linchevski (1994) é caracterizado pelas operações aritméticas codificadas nas equações/expressões. Ainda não desenvolveram um link sólido com os processos secundários que as autoras denominam como aqueles que se deve realizar em equações de modo a resolvê-las e não percebem os objetos abstratos por trás dos símbolos como conjuntos de verdades.

De maneira geral, os alunos não tendem a utilizar procedimentos algébricos se for possível resolver a equação utilizando somente operações aritméticas. Os alunos também não estão habituados a substituir o valor ou valores da variável que fazem a equação ser verdadeira.Para eles, resolver uma equação algébrica significa encontrar o valor através do procedimento algébrico (ou aritmético) e não para encontrar um valor que satisfaça.

A resolução de problemas aqui foi diferente da perspectiva apresentada por Usiskin (1995). Os alunos não interpretaram os resultados que encontraram e não questionaram o porquê do valor encontrado para o valor desconhecido. Embora a interpretação e a simbolização tenham tido os maiores índices de domínio, observamos que a interpretação no contexto da noção de variável como valor desconhecido está mais voltada para tradução da linguagem usual para a linguagem matemática (sendo a tradução o maior obstáculo da interpretação) do que para o entendimento da situação problema proposta, o que afeta a simbolização e manipulação de uma equação ou expressão.

5.4 ANÁLISE DO DESEMPENHO DOS ESTUDANTES - NOÇÃO DE VARIÁVEL COMO PADRÃO GENERALIZADOR

O questionário que avaliava a noção de variável como padrão generalizador foi organizado de acordo com a distribuição de questões por itens da tabela 6. A seguir apresentamos as questões que fizeram parte deste questionário.

Tabela 12 - Itens avaliados e questões

INTENS AVALIADOS	QUESTÕES
INTERPRETAÇÃO	**Questão 8**: Reescreva as frases em linguagem matemática **a)** Um número natural é somado com seu sucessor. **b)** O triplo de um número é somado com 10% do número **c)** Um número é multiplicado por 3 e dividido por 2. **d)** De determinado número, subtraímos sua terça parte. **Questão 9**: Para a equação abaixo, escreva o valor que pode ter a letra x. Se tiver mais de um valor, escreva alguns deles $x + 5 = 5 + x$
SIMBOLIZAÇÃO	**Questão 2:** De acordo com a questão 1, escreva a uma equação que relacione a medida a do angulo central com o

	número n de lados do polígono (n pode ser qualquer número natural maior que 2) **Questão 4:** Complete a tabela e escreva uma equação para calcular o número de bolinhas da figura. **Questão 6:** Observe as duas figuras formadas por retângulos* Podemos escrever uma fórmula para área da figura da esquerda de duas maneiras. $A = a\,.\,b + a\,.\,c$ ou $A = a\,.\,(b + c)$ Mostre uma maneira de escrever uma equação para representar a área da figura da direita. **Questão 10:** Observe a figura e escreva uma equação para representar seu volume.* *** Ver figura em apêndice**
MANIPULAÇÃO	**Questão 1:**Observe a figura e complete a tabela.* ***Ver figura e tabela em apêndice** **Questão 3:**De acordo com as questões 1 e 2, quanto mede o ângulo central do polígono regular de 30 lados? **Questão 5:** De acordo com a questão 4, qual o formato da figura com 23 bolinhas? **Questão 7:** Para os valores de a = 2, b = 3 e c = 5, qual a área da figura da esquerda? Para d = 4, e = 7 e f = 6, qual a área da figura da direita?

A média geral de acertos do questionário sobre a noção de variável como padrão generalizador foi de 52,31%, resultado este que foi muito próximo do da noção de variável como incógnita. No geral a capacidade de manipulação foi a que apresentou maior domínio(55,22%) e a interpretação o menor domínio (45,05%)

A seguir, apresentamos as tabelas com índices de acertos e erros em cada questão por turma avaliada, o gráfico com as médias gerais de acertos e erros por questão e os gráficos com a média de acertos por itens avaliados (geral e por turma).

Tabela 13 - Número de acertos e erros por itens avaliados - turma 1

Itens	INTERPRETAÇÃO		SIMBOLIZAÇÃO				MANIPULAÇÃO				Total de respostas
	Q8**	Q9	Q2	Q4**	Q6*	Q10*	Q1	Q3	Q5	Q7*/**	
Acertos	16	23	23	21	18	24	26	26	29	17	223
erros	17	10	10	12	7	6	7	7	4	6	86
Total de respostas	33	33	33	33	25	30	33	33	33	23	309

***As questões Q6, Q7 e Q10 não foram respondidas por todos os alunos.Respectivamente 8 alunos não responderam a Q6, 3 alunos não responderam a Q10,10 alunos não responderam a Q7.**
**** Considera - se acerto em todos os itens**

Tabela 14 - Número de acertos e erros por itens avaliados - turma 2

Itens	INTERPRETAÇÃO		SIMBOLIZAÇÃO				MANIPULAÇÃO				Total de respostas
	Q8**	Q9	Q2	Q4**	Q6*	Q10	Q1	Q3	Q5	Q7*/**	
Acertos	4	10	7	7	5	3	9	13	12	5	75
erros	11	5	8	8	7	12	6	2	3	6	68
Total de respostas	15	15	15	15	12	15	15	15	15	11	143

***As questões Q6 e Q7 não foram respondidas por todos os alunos.Respectivamente 3 alunos não responderam a Q6, 4 alunos não responderam a Q7.**
**** Considera-se acerto em todos os itens**

Tabela 15 - Número de acertos e erros por itens avaliados - turma 3

Itens	INTERPRETAÇÃO		SIMBOLIZAÇÃO				MANIPULAÇÃO				Total de respostas
	Q8**	Q9	Q2	Q4**	Q6*	Q10	Q1	Q3	Q5	Q7*/**	
Acertos	2	8	6	5	5	9	10	11	10	5	71
erros	15	9	11	12	6	8	7	6	7	6	87
Total de respostas	17	17	17	17	11	17	17	17	17	11	158

***As questões Q6 e Q7 não foram respondidas por todos os alunos.Respectivamente 6 alunos não responderam a Q6,6 alunos não responderam a Q7. ** Considera-se acerto em todos os itens.**

Gráfico 6 - Média de acertos e erros por questão - variável como padrão generalizador

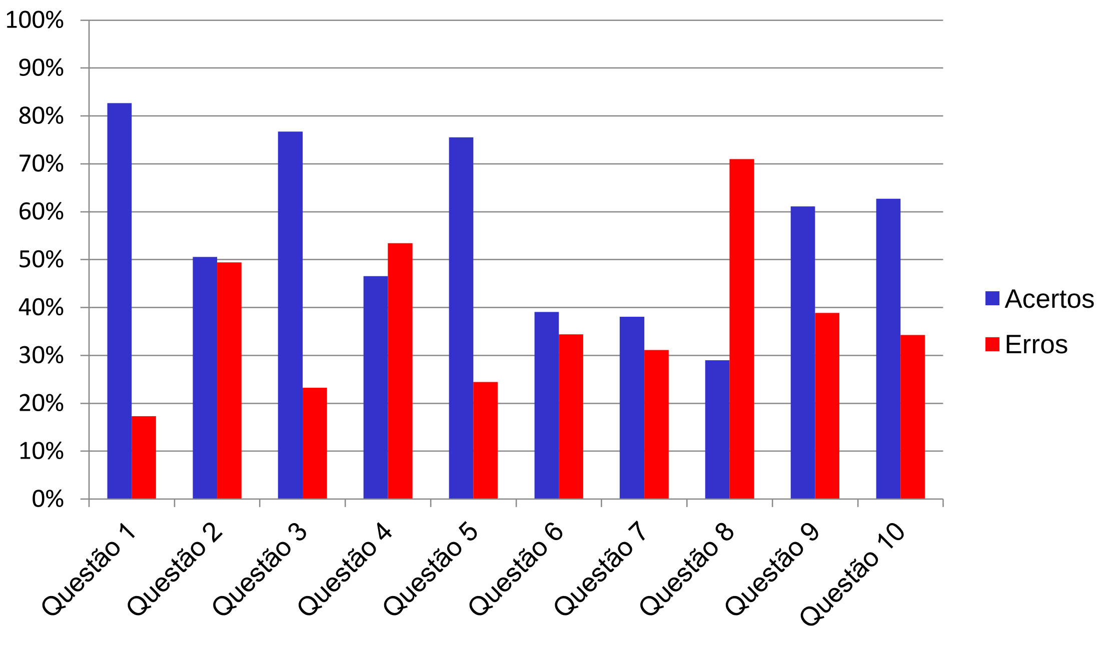


Gráfico 7 - Média de acertos por itens avaliados

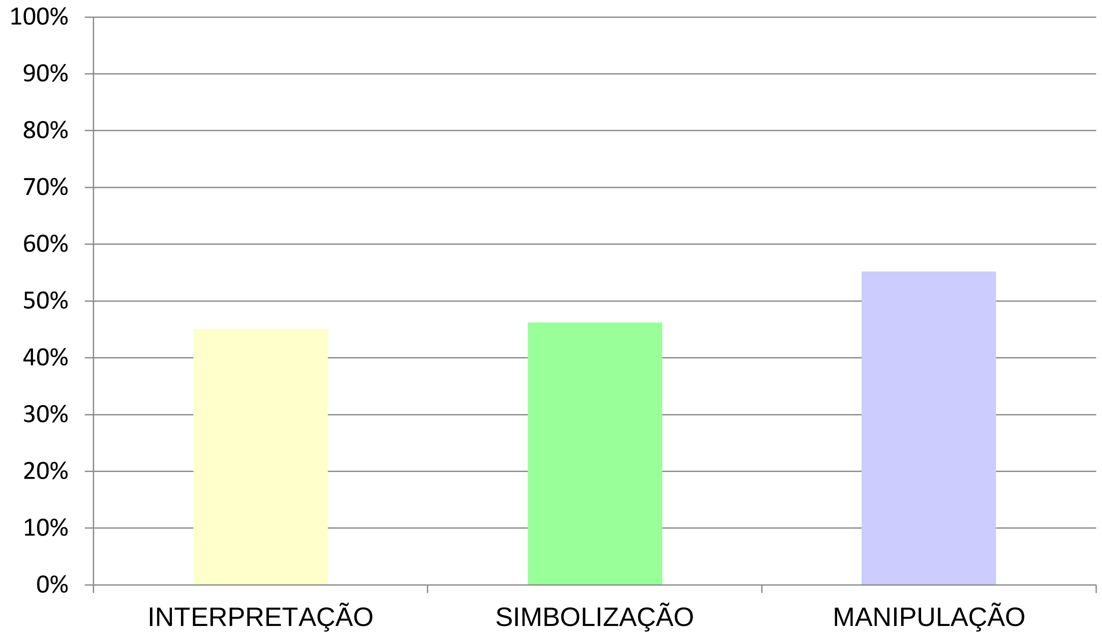


Gráfico 8 - Média de acertos por itens avaliados - turma 1

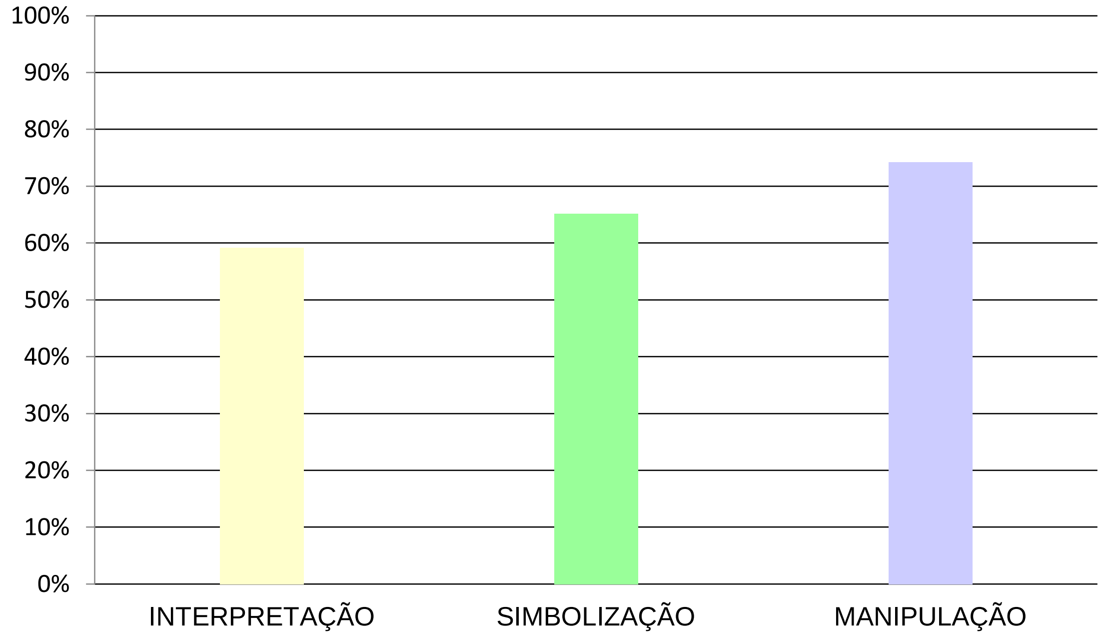


Gráfico 9 - Média de acertos por itens avaliados - turma 2

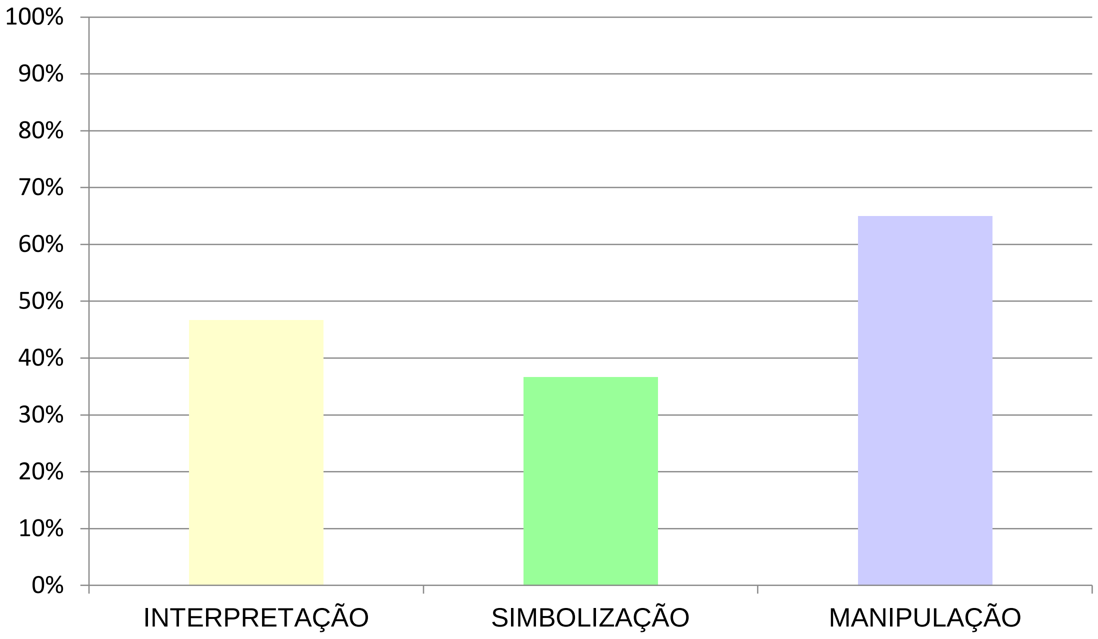
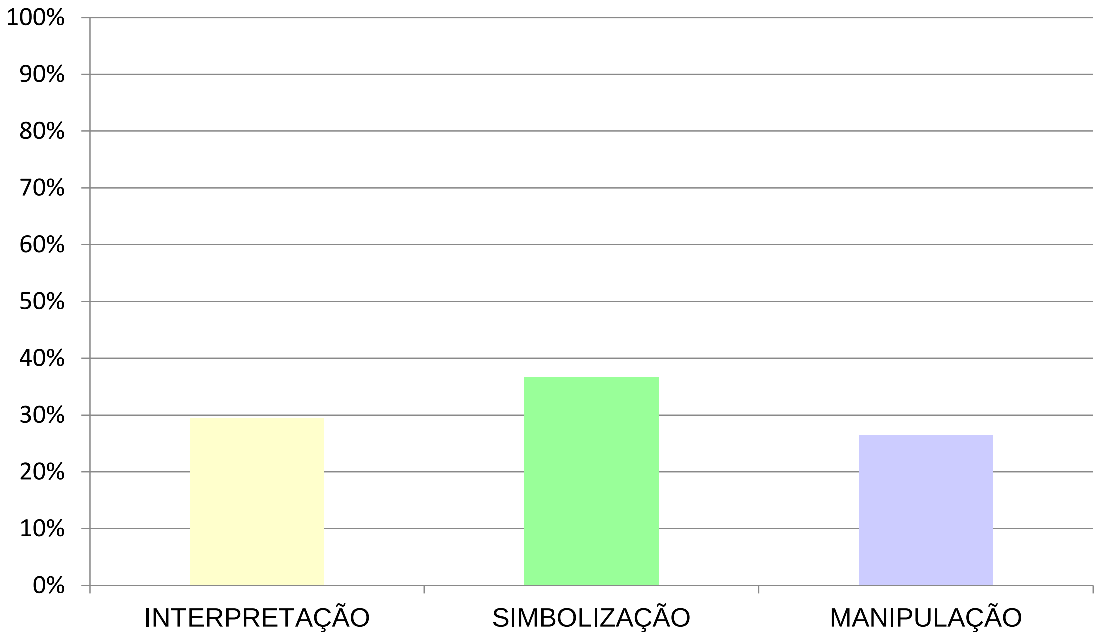


Gráfico 10 - Média de acertos por itens avaliados - turma 3



5.4.1 Análise da interpretação da noção de variável como padrão generalizador

A variável como padrão generalizador teve a interpretação como item de menor índice de acertos dos alunos (45,05%). Para este item foram dedicadas as questões 8 e 9 do questionário proposto. A questão 9 foi a que apresentou o maior índice de acertos (61,12%), enquanto que a questão 8 apresentou o menor índice (28,96%).

A questão 8 apresentava situações descritas em linguagem natural e pedia que os alunos reescrevessem as frases em linguagem matemática. Como anteriormente, os alunos já haviam respondido o questionário sobre a noção de variável como valor desconhecido e já haviam utilizado as letras para representação, poucas respostas continham números determinados nas frases reescritas.

A maioria dos alunos teve dificuldade em passar o texto do enunciado para a expressão mais adequada. A dificuldade de transcrição da situação para a linguagem algébrica ficou evidenciada pela transposição linear das palavras para a simbolização, pois a ordem utilizada, por alguns alunos, para representar as expressões ocorreu exatamente na forma que se faz a leitura do texto, da esquerda para a direita. Como podemos observar nos exemplos a seguir.

Enunciado da questão 8: Reescreva as frases em linguagem matemática.

a) Um número natural é somado com seu sucessor.

b) Um número natural é somado com seu sucessor.

c) Um número é multiplicado por 3 e dividido por 2.

d) De determinado número, subtraímos sua terça parte.

Figura 14 - Resolução questão 8 - aluno turma 1

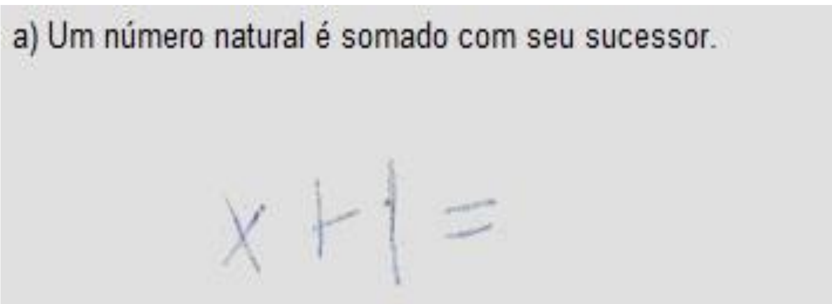
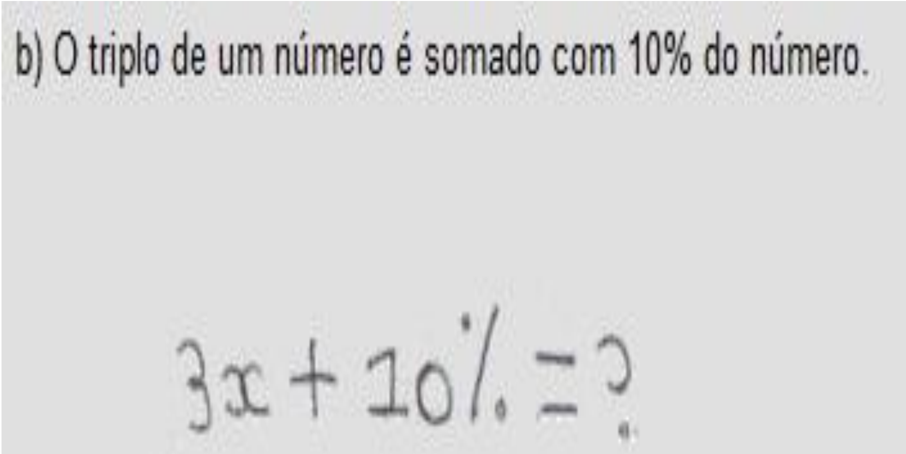
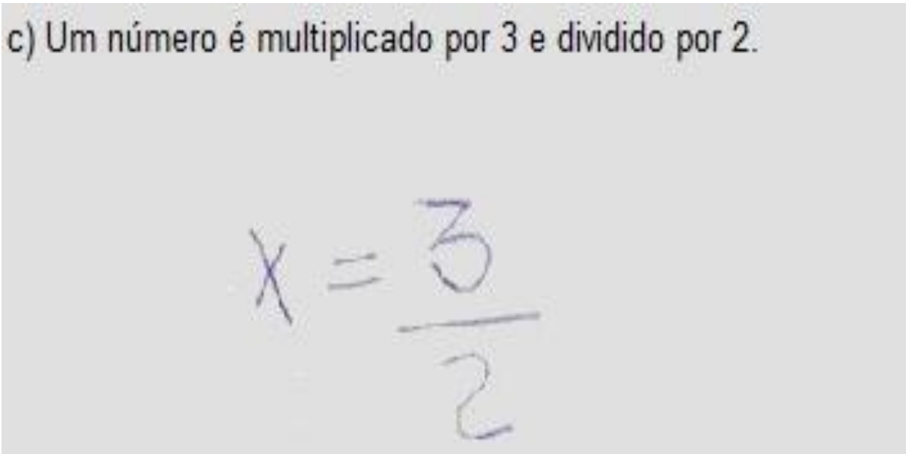


Figura 15 - Resolução questão 8 - aluno turma 2


b) O triplo de um número é somado com 10% do número.

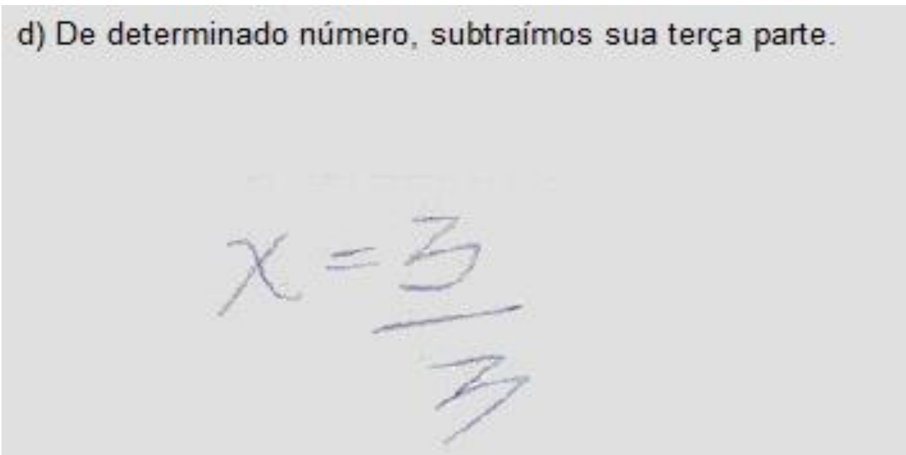
$3x + 10\% = ?$

Figura 16 - Resolução questão 8 - aluno turma 3


c) Um número é multiplicado por 3 e dividido por 2.

$x = \frac{3}{2}$

Figura 17 - Resolução questão 8 - aluno turma 3


d) De determinado número, subtraímos sua terça parte.

$x = \frac{3}{3}$

Podemos interpretar esta dificuldade de tradução para a linguagem algébrica segundo a concepção de Kieran (1989), como sendo de concatenação, que no caso das situações acima estavam relacionadas à ordem as operações, levando-se em consideração a variável. Constatamos nesta questão o que a autora afirma em relação à interpretação verbal e à representação matemática: "As crianças que podem resolver problemas de palavras[12] muitas vezes não podem escrever equações/expressões para representar as relações quantitativas desses problemas"(KIERAN,1989, p.32).

A questão 9 é baseada nos exemplos de Usiskin (1995) para mostrar a concepção de álgebra como aritmética generalizada. A questão dava uma equação e pedia que os alunos escrevessem o valor que poderia ter a letra x, e caso houvesse mais de um valor, os alunos teriam que escrever alguns deles. Dos erros que verificamos, muitos deles foram relacionados à eliminação da variável x, mostrando a dificuldade relatada por Ursini & Trigueros (1996) em generalizar a partir de um padrão dado. Confirmamos a fala das autoras em relação à variável como padrão generalizador: "Os alunos tem dificuldade para conceber a variação de forma dinâmica".

5.4.2 Análise da simbolização da noção de variável como padrão generalizador

A simbolização da noção de variável como padrão generalizador teve um índice geral de acertos de 46,19%. As questões 2, 4, 6 e 10 do questionário avaliaram este item. A questão 2 foi a que obteve o maior índice de acertos (50,54%), enquanto que a questão 6 foi a que obteve o menor índice (39,09%).

A questão 2 estava vinculada a questão 1 do questionário e pedia que os alunos escrevessem uma equação para relacionar a medida **a** do ângulo de um polígono com o número **n** de lados do polígono. Dos erros que verificamos, o mais presente foi a não representação das duas variáveis (a e n) na equação, assim como nos exemplos a seguir.

Enunciado da questão 2: De acordo com a questão 1, escreva uma equação que relacione a medida **a** do ângulo central com o número **n** de lados do polígono (n pode ser qualquer número natural maior que 2).

[12] Consideramos aqui problemas de palavras como problemas escritos em linguagem usual, a qual é a linguagem utilizada por uma determinada comunidade (ex: inglês, português,...)

Figura 18 - Resolução questão 2 - aluno turma 2

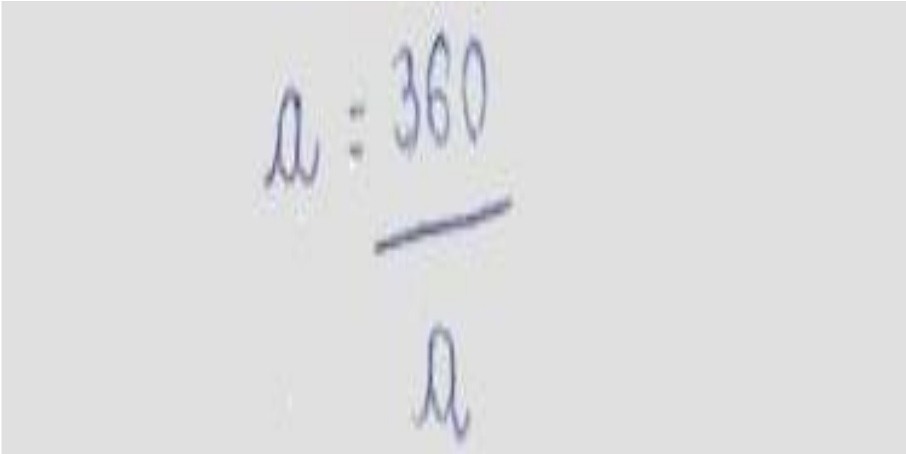
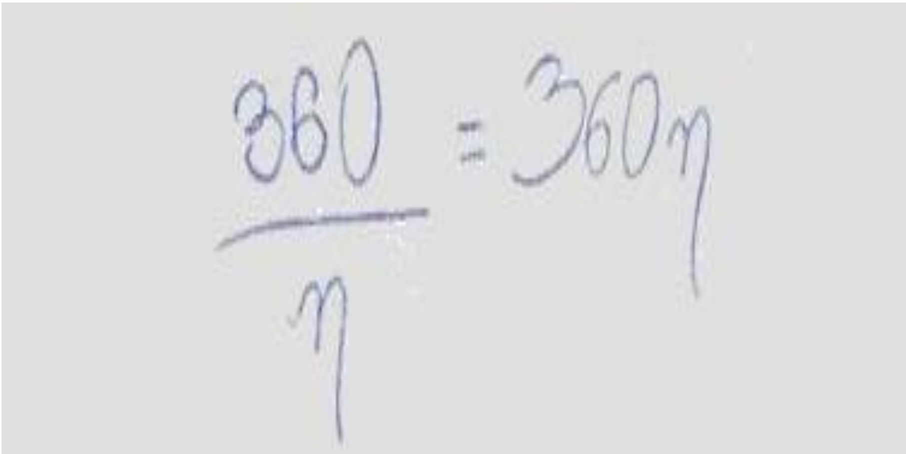


Figura 19 - Resolução questão 2 - aluno turma 3



Não verificamos, como em questões anteriores, dificuldades em representar a operação que estava envolvida no problema. Acreditamos que tal fato se deve a ocorrência somente da operação de divisão, diferente de outras questões que envolviam mais de uma operação

A questão 4 era similar às questões 1 e 2. Novamente, verificamos que os alunos tiveram dificuldades para representar os procedimentos de cálculos envolvidos. Alguns alunos, no entanto, escreveram por meio de palavras como poderiam calcular o número de bolinhas, confirmando mais uma vez a concepção de Kieran (1989) sobre a representação em linguagem matemática.

A questão 6 apresentava duas figuras e a equação para calcular a área de uma delas. Pedia - se que o aluno mostrasse uma equação para calcular a área da outra figura. A questão 10 era similar à questão 6 e apresentava uma figura com suas respectivas dimensões e pedia que o aluno representasse uma equação para calcular o volume da figura. Em ambas as questões, a maior parte dos erros estava relacionada à noção de área e volume. Como vemos nos exemplos seguintes.

Figura 20 - Resolução questão 6 - aluno turma 1

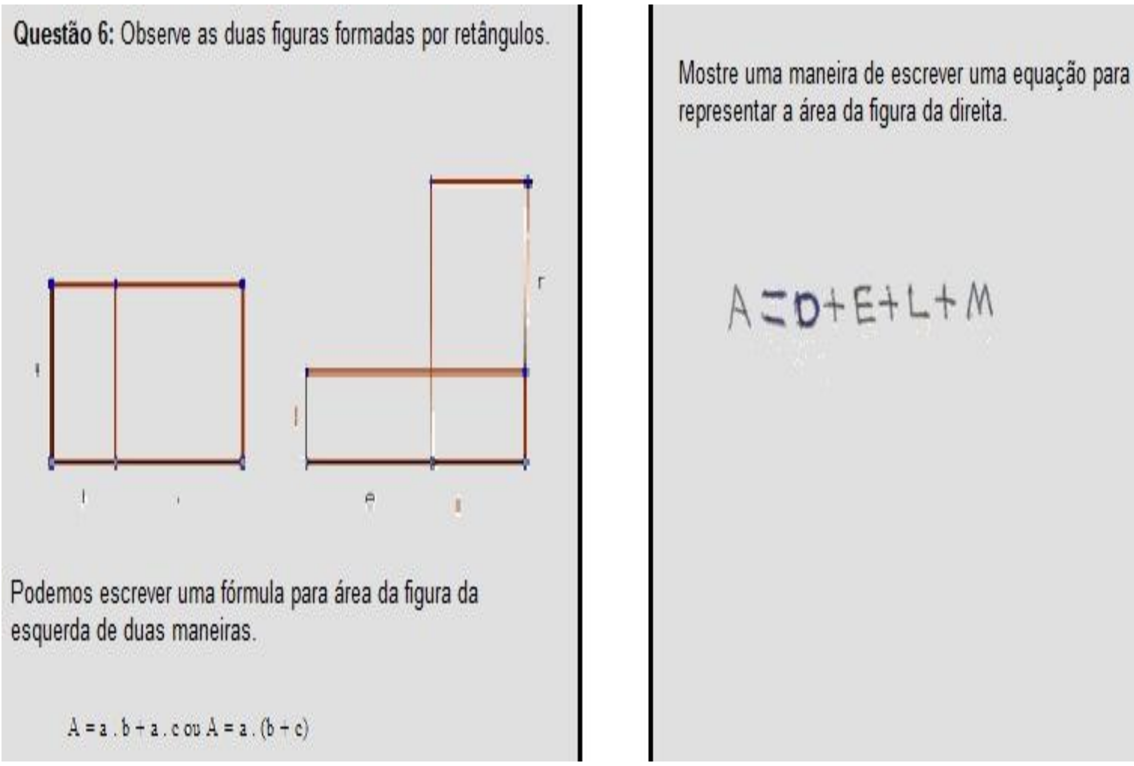
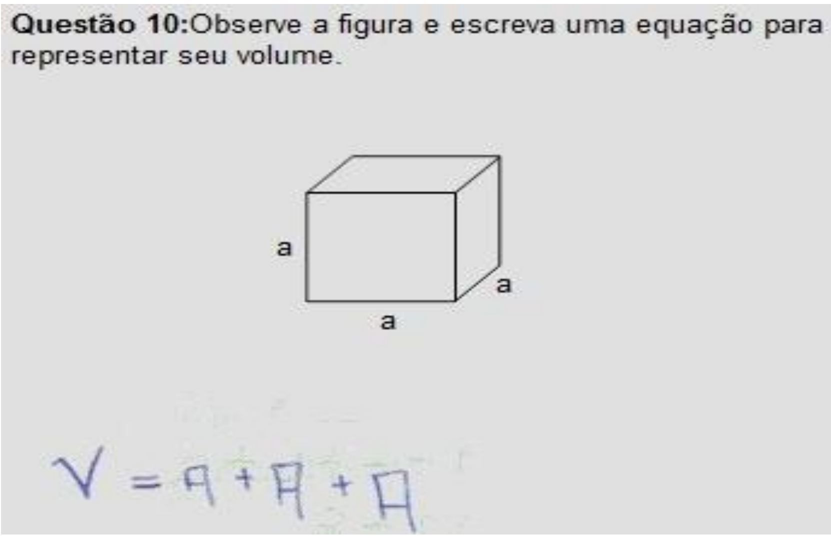


Figura 21 - Resolução questão 10 - aluno turma 3



Esta dificuldade em tratar de componentes do campo conceitual geométrico, tais como área, volume e perímetro influenciou na relação com os campos conceituais das estruturas aditivas, o das estruturas multiplicativas e da álgebra. Verificamos que a simbolização da noção de variável como padrão generalizador é prejudicada pela falsa analogia entre a linguagem algébrica e a linguagem usual, essencialmente, porque as regras gramaticais de uma e outra linguagem não são as mesmas. Os alunos sentem dificuldade em traduzir por meio de uma expressão algébrica simples, os procedimentos que pensam ou de que falam, o que constituiu um obstáculo, por exemplo, à formulação de expressões a partir de padrões ou tabelas e à utilização da linguagem algébrica na resolução de problemas. A dificuldade de simbolização prejudica o objetivo fundamental da variável como padrão generalizador, na visão de Usiskin (1995), o qual é descrever matematicamente a relação entre números.

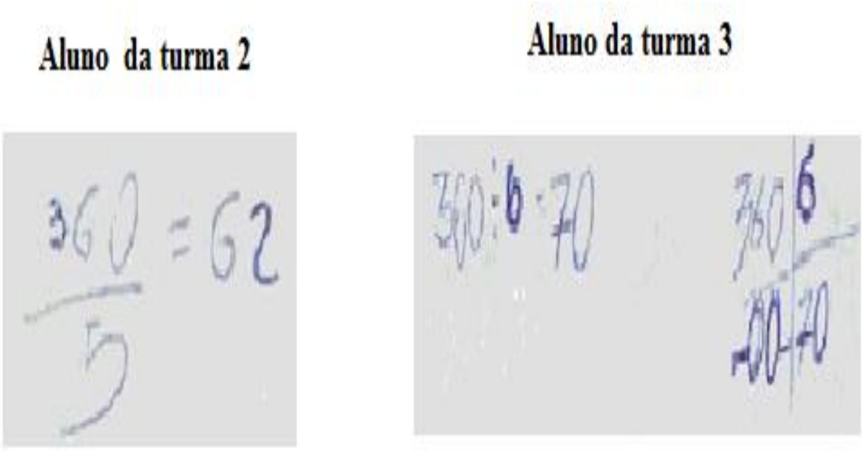
5.4.3 Análise da manipulação da noção de variável como padrão generalizador

O item manipulação foi o que obteve o maior índice de acertos na categoria de variável como padrão generalizador (55,22%). As questões 1, 3, 5 e 7 do questionário avaliaram este item e todas estavam vinculadas à outras questões que avaliavam ou a simbolização ou a interpretação. A questão 3 foi a que obteve o maior índice de acertos (76,71%) e a questão 7 a que obteve o menor índice de acertos (38,08%).

A questão 1 trazia uma figura com a representação de polígonos regulares e as respectivas medidas de seus ângulos centrais (***a***). Em seguida era apresentada uma tabela que mostrava como calcular a medida ***a*** do ângulo central do polígono de acordo com o número de lados do polígono. Esta tabela deveria ser completada pelo aluno. A proposta desta questão está de acordo com que Ursini & Trigueros (2003) propõem como pré - requisito para entender a variável como um padrão generalizador: o reconhecimento de padrões que permitam encontrar ou deduzir regras ou métodos gerais. Este reconhecimento seria feito através da manipulação por meio de procedimentos aritméticos que depois seria generalizado através da representação de uma equação que descrevesse a situação proposta (o que foi feito na questão 2).

Os erros encontrados nesta questão foram referentes à procedimentos incorretos com o algoritmo da divisão como vemos nos dois exemplos a seguir.

Figura 22 - Resolução questão 1 - alunos turma 2 e 3



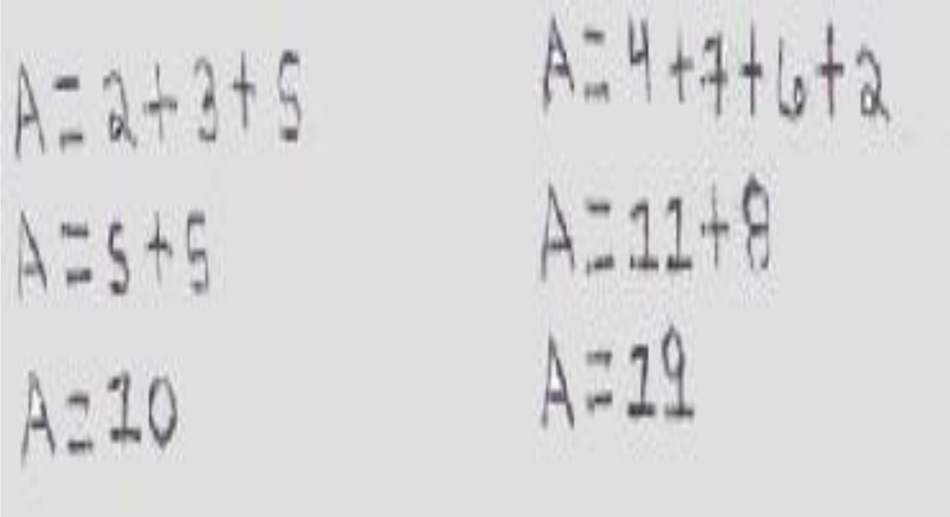
A questão 3 estava vinculada às questões 1 e 2 e pedia que os alunos calculassem a medida do ângulo central de um polígono de 30 lados. Esta questão obteve o maior índice de acertos (76,71%), pois mesmo que o aluno não tivesse representado a situação corretamente por meio de uma equação (de acordo com a questão 2), ele poderia resolver a questão por meio de procedimentos aritméticos. Os erros encontrados nesta questão foram similares aos da questão 1 no que diz respeito à manipulação do algoritmo da divisão.

A questão 5 estava vinculada à questão 4 e pedia que o aluno representasse a figura que seria formada com 23 bolinhas. O objetivo era similar ao da questão 3, que era avaliar a capacidade do aluno em reconhecer padrões por meio de manipulações aritméticas (questão 3) e geométricas (questão 5).

A questão 7 estava vinculada à questão 6, e dava valores para as variáveis a,b,c,d,e,f,l,m. Pedia-se que os alunos calculassem as áreas das figuras para essas variáveis. Esta questão foi a que obteve o menor índice de acertos (38,08%), pois a maioria dos alunos não conseguiu representar por meio de uma equação uma das áreas da figura (proposta da questão 6). Dos erros que encontramos nesta questão, muitos foram provenientes da representação incorreta da área da figura na questão anterior.

Enunciado da questão 7: Para os valores de a = 2, b = 3 e c = 5, qual a área da figura da esquerda? Para d = 4, e = 7, l = 6, m = 2, qual a área da figura da direita?

Figura 23 - Resolução questão 7- aluno turma 2



A análise da noção de variável como padrão generalizador mostra que os alunos têm dificuldades para desenvolver a habilidade que segundo Ursini &Trigueros (1996) é um pré-requisito para entender esta noção, a qual é o reconhecimento de padrões para encontrar ou deduzir regras e métodos gerais que possam descrevê-los. A deficiência nesta habilidade prejudica não só uma das formas de raciocínio algébrico descritas por Kaput (1999), generalização da aritmética e de padrões em toda a matemática, como a capacidade elencada por Usiskin (1995) de evidenciar elementos e características comuns, providenciando uma expressão direta para estes elementos, por meio de uma regra.

Segundo Sfard & Linchevski (1994), esta dificuldade de ver os objetos abstratos por trás das equações/expressões algébricas muitas vezes se transforma em uma desvantagem para o aluno. Na ausência dos elementos que são necessários para dar significado mais profundo para manipulação de símbolos, as regras da álgebra estão condenadas a serem percebidas como arbitrárias não sendo motivo de compreensão para os alunos, logo sendo apenas instrumentais.

5.5 ANÁLISE DO DESEMPENHO DOS ESTUDANTES - NOÇÃO DE VARIÁVEL COMO PARÂMETRO

A noção de variável como parâmetro foi a que obteve o menor índice geral de acertos (26,75%). Neste tipo de variável a habilidade de interpretação foi a que obteve os maiores índices de acerto (34,88%) e a habilidade de representação gráfica obteve o menor índice (13,94%).

Tabela 16 - Itens avaliados e questões

INTENS AVALIADOS	QUESTÕES
INTERPRETAÇÃO	**Questão 4:** Em uma certa loja, uma camiseta custa R$ 40,00 a unidade, não importando a quantidade que se compre. **a)** Na compra de duas dessas camisetas, qual será o preço pago? **b)** Na compra de 10 dessas camisetas, qual será o preço pago? **c)** Represente por meio de uma equação o preço pago P em função da quantidade c de camisetas compradas. **Questão 5:** Na cidade onde Carlos mora, os táxis cobram uma quantia fixa de R$ 3,80 e mais R$ 0,70 por quilômetro rodado. Represente uma equação para calcular o preço de uma corrida de táxi na cidade de Carlos. **Questão 6:** Certo fabricante de pirulitos tem uma despesa diária fixa de R$ 27,00 mais R$ 0,30 por pirulito produzido. Ele vende cada pirulito por R$ 1,20. **a)** Se ele vender 40 pirulitos, qual será o lucro obtido? **b)** Represente por meio de uma equação o custo diário c em função da quantidade n de pirulitos produzidos.
SIMBOLIZAÇÃO	**Questão 1*:** Observe os retângulos a seguir e escreva equações para representar os perímetros e as áreas deles. ***Ver figuras em apêndice.** **Questão 8:** Um engenheiro vai projetar uma piscina em forma de paralelepípedo retângulo, cujas dimensões, em metro, são expressas por x, (20-x) e 2. Escreva uma equação para calcular o volume dessa piscina.
MANIPULAÇÃO	**Questão 2:** Use as equações da área e do perímetro dos dois retângulos da questão 1 para calcular seus valores para y = 5 e z = 6. **Questão 3:** De acordo com a questão 1 calcule y e z, sendo

	que os perímetros dos retângulos medem, respectivamente 72cm e 102cm. **Questão 7:** De acordo com a questão 6, para que o fabricante tenha um lucro de R$ 45,00, quantos pirulitos ele deverá vender?
REPRESENTAÇÃO GRÁFICA	**Questão 9*:** Observe o gráfico da função abaixo para responder os itens **a)** Qual é o valor de y quando x = 2? **b)** Para que valor de x temos y = 4? *** ver o gráfico em apêndice.** **Questão 10:** Represente graficamente a função $y = 3x - 2$

Tabela 17 - Número de acertos e erros por itens avaliados - turma 1

Itens	**INTERPRETAÇÃO**			**SIMBOLIZAÇÃO**		**MANIPULAÇÃO**			**REPRESENTAÇÃO GRÁFICA**		**Total de respostas**
	Q4**	**Q5**	**Q6****	**Q1**	**Q8***	**Q2**	**Q3**	**Q7**	**Q9****	**Q10***	
Acertos	26	13	10	15	7	15	12	8	6	7	119
erros	7	20	23	18	20	18	21	25	27	17	196
Total de respostas	33	33	33	33	27	33	33	33	33	24	315

***As questões Q8, e Q10 não foram respondidas por todos os alunos.Respectivamente 6 alunos não responderam a Q8, 9 alunos não responderam a Q10. ** Considera - se acerto em todos os itens**

Tabela 18 - Número de acertos e erros por itens avaliados - turma 2

Itens	INTERPRETAÇÃO			SIMBOLIZAÇÃO		MANIPULAÇÃO			REPRESENTAÇÃO GRÁFICA		Total de respostas
	Q4**	**Q5***	**Q6****	**Q1**	**Q8***	**Q2**	**Q3***	**Q7**	**Q9****	**Q10***	
Acertos	9	4	3	5	3	3	3	2	2	2	36
erros	6	7	12	10	10	12	9	13	13	11	103
Total de respostas	15	11	15	15	13	15	12	15	15	13	139

***As questões Q3, Q5, Q8 e Q10 não foram respondidas por todos os alunos.Respectivamente 3 alunos não responderam a Q3 , 4 alunos não responderam a Q5, 2 alunos não responderam a Q8 e 2 alunos não responderam a Q10 . ** Considera - se acerto em todos os itens.**

Tabela 19 - Número de acertos e erros por itens avaliados - turma 3

Itens	INTERPRETAÇÃO			SIMBOLIZAÇÃO		MANIPULAÇÃO			REPRESENTAÇÃO GRÁFICA		Total de respostas
	Q4**	**Q5**	**Q6****	**Q1**	**Q8***	**Q2**	**Q3**	**Q7***	**Q9****	**Q10***	
Acertos	7	2	1	5	1	5	4	0	2	1	28
erros	10	15	16	12	11	12	13	10	15	9	123
Total de respostas	17	17	17	17	12	17	17	10	17	10	151

***As questões Q7,Q8 e Q10 não foram respondidas por todos os alunos.Respectivamente 5 alunos não responderam a Q8,7 alunos não responderam a Q10.**
**** Considera - se acerto em todos os itens**

Gráfico 11 - Média de acertos e erros por questão - variável como parâmetro

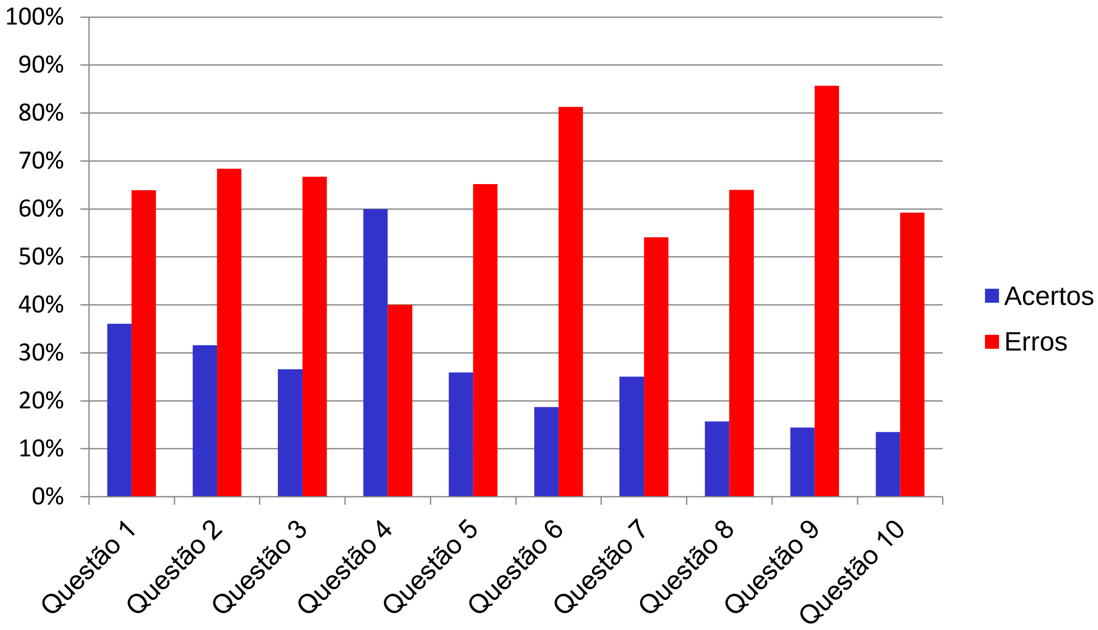


Gráfico 12 - Média de acertos por itens avaliados

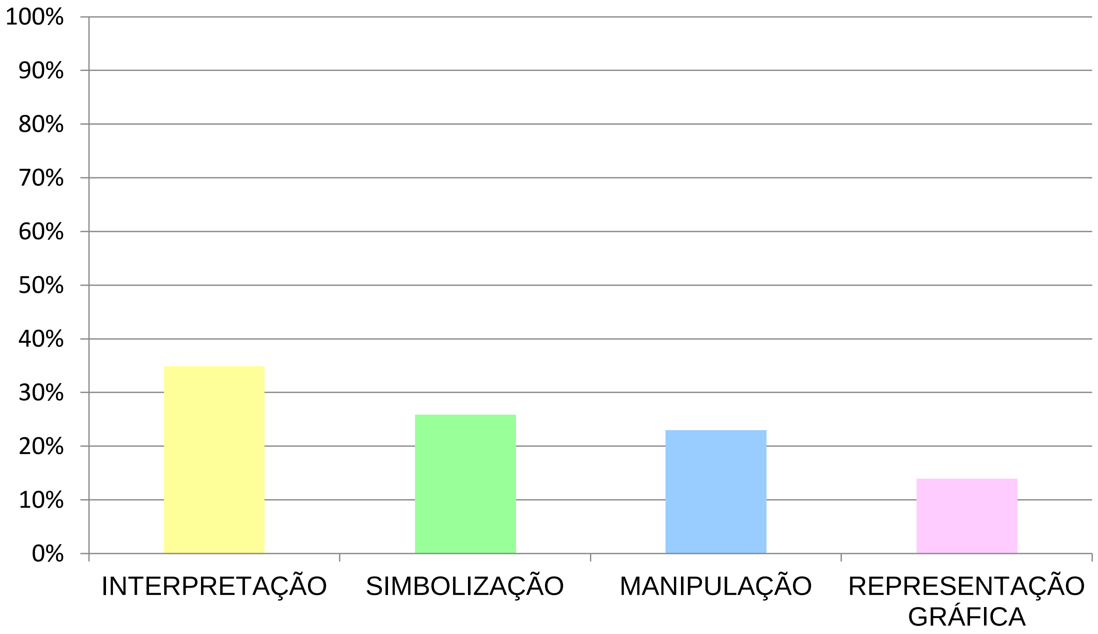


Gráfico 13 - Média de acertos por itens avaliados - turma 1

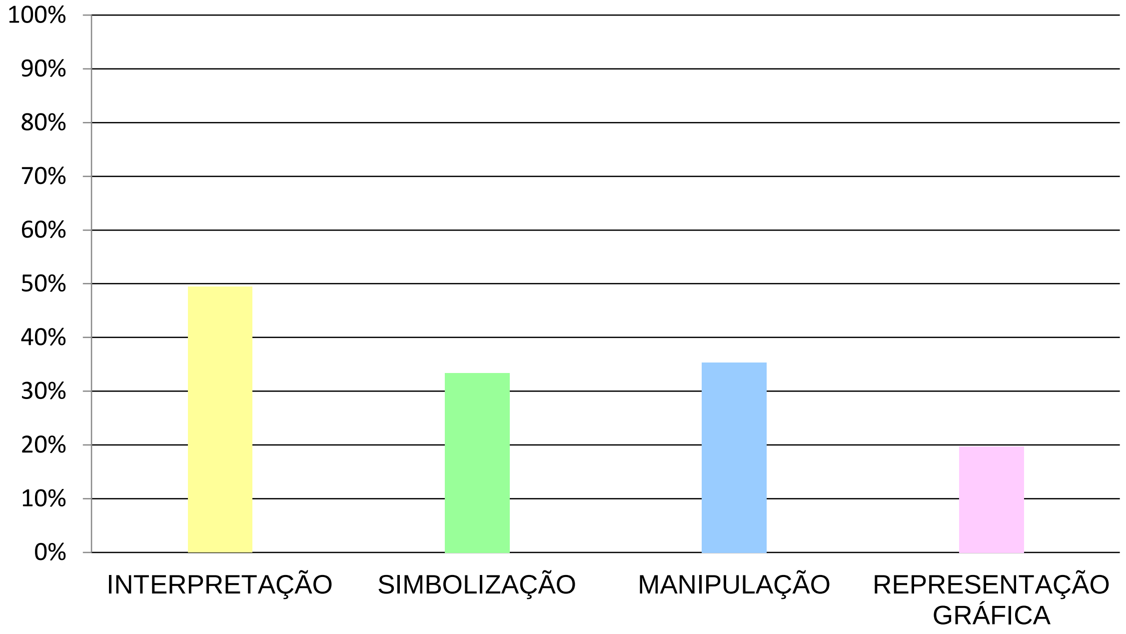


Gráfico 14 - Média de acertos por itens avaliados - turma 2

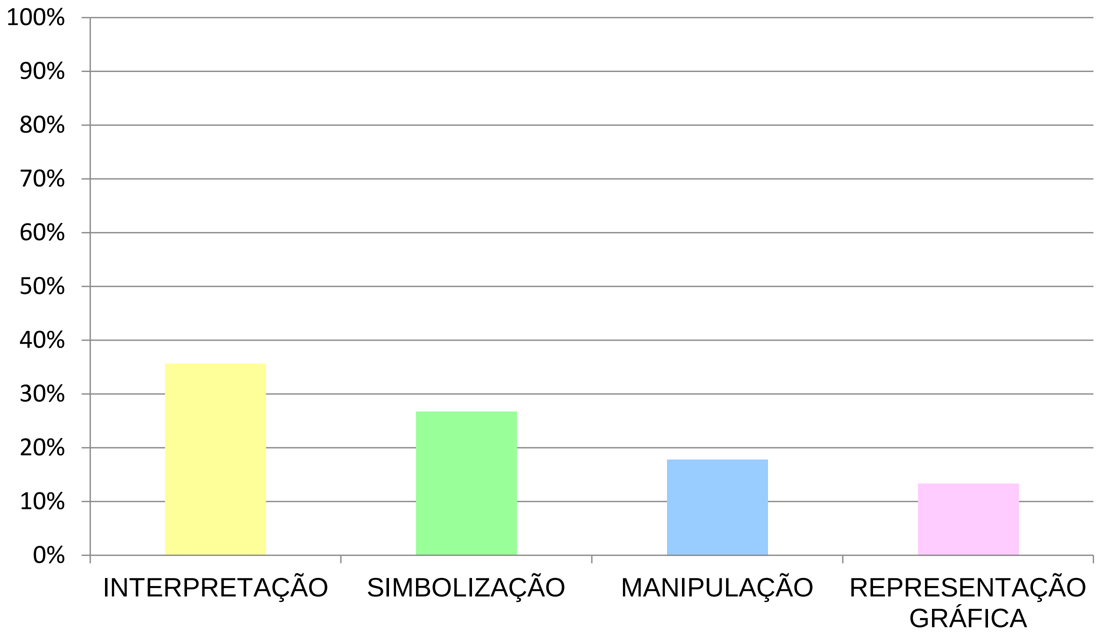
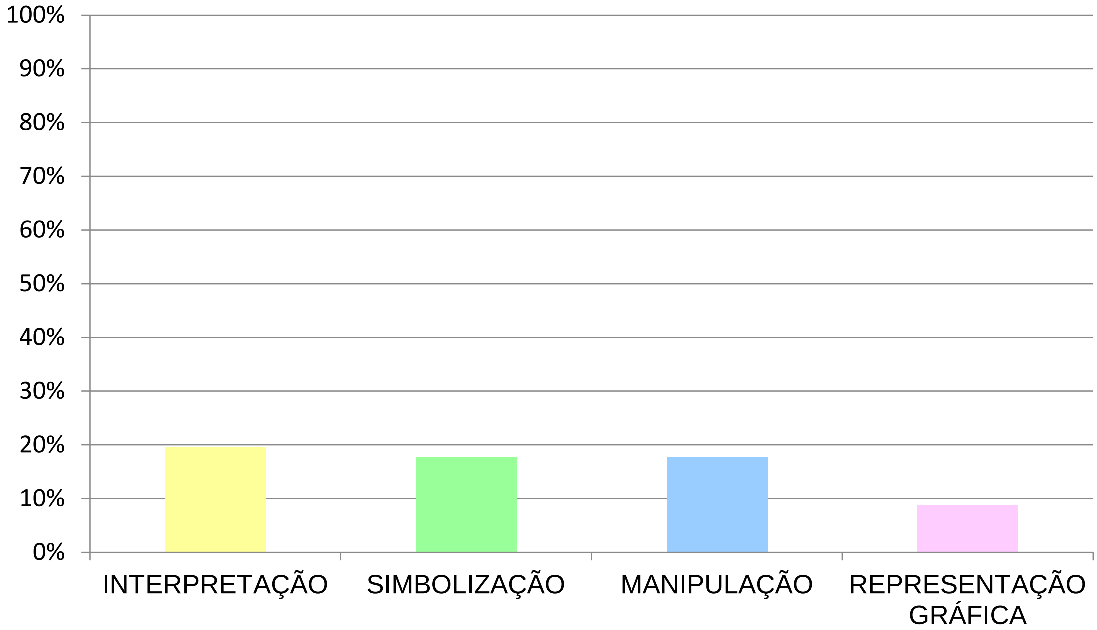


Gráfico 15 - Média de acertos por itens avaliados - turma 3



5.5.1 Análise da interpretação da noção de variável como parâmetro

A interpretação da noção de variável como parâmetro foi a que obteve o maior índice de acertos (34,88%). As questões 4, 5 e 6 do questionário avaliaram este item, sendo a questão 4 a que obteve o maior índice de acertos (59,98%) e a questão 6 a que obteve o menor índice (18,72%).

A questão 4 trazia uma situação problema que relacionava o custo de camisetas com o número de unidades compradas. Esta questão foi a única do questionário que obteve um índice de acertos maior que 50%. Os dois primeiros itens da questão poderiam ser respondidos utilizando - se procedimentos aritméticos, porém o terceiro item pedia que os alunos representassem por meio de uma equação, conforme a interpretação que fizeram da questão, a relação de dependência entre o custo e o número de unidades vendidas. Os erros encontrados nesta questão foram relacionados à representação incorreta do procedimento de cálculo envolvido na questão, como vemos no exemplo a seguir.

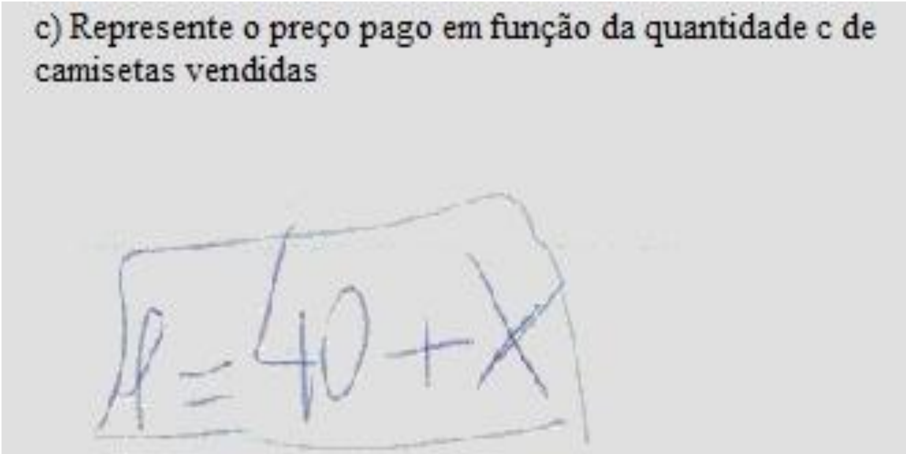
Enunciado da questão 4: Em uma certa loja, uma camiseta custa R$ 40,00 a unidade, não importando a quantidade que se compre.

a) Na compra de duas dessas camisetas, qual será o preço pago?

b) Na compra de 10 dessas camisetas, qual será o preço pago?

c) Represente por meio de uma equação o preço pago P em função da quantidade c de camisetas compradas.

Figura 24 - Resolução questão 4 - aluno turma 2



A questão 5, assim como o item c da questão 4, pedia que o aluno representasse por meio de uma equação a relação entre o preço de uma corrida de táxi e os quilômetros rodados. Nesta questão, diferente da questão 4, haviam variáveis dependentes e independentes, as quais causaram a maioria dos erros nesta questão. Vejamos os exemplos seguintes.

Enunciado da questão 5: Na cidade onde Carlos mora, os táxis cobram uma quantia fixa de R$ 3,80 e mais R$ 0,70 por quilômetro rodado. Represente uma equação para calcular o preço de uma corrida de táxi na Cidade de Carlos.

Figura 25 - Resolução questão 5 - aluno turma 1

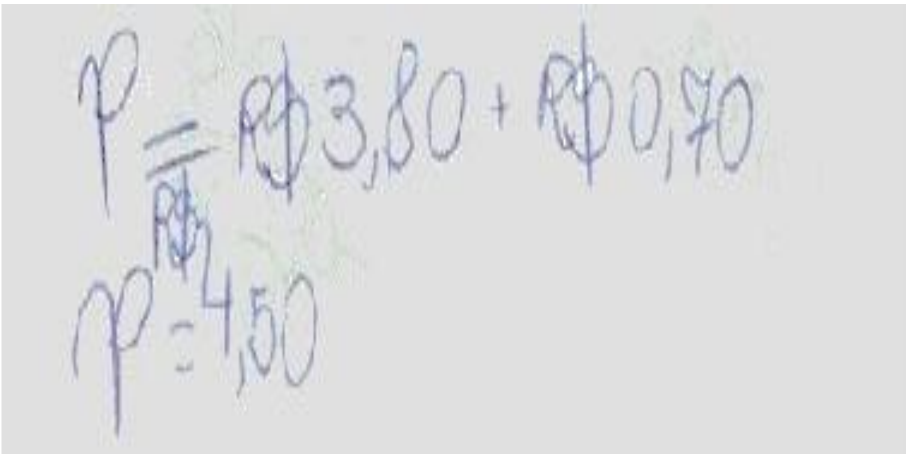
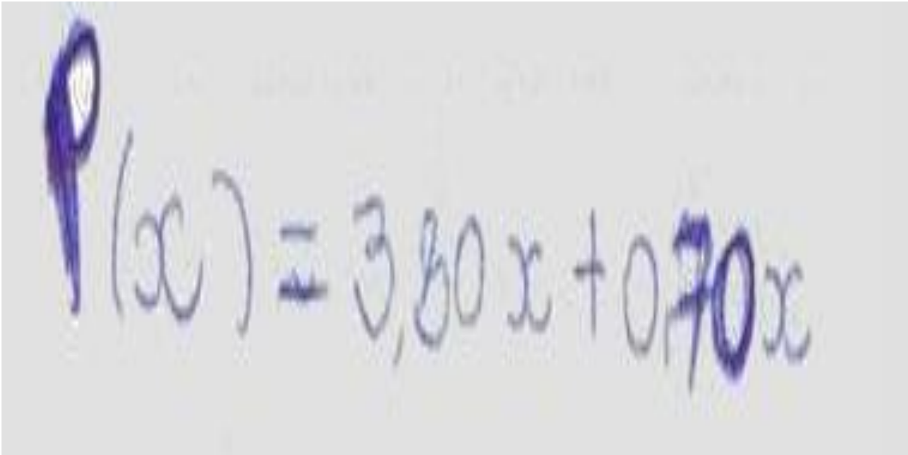


Figura 26 - Resolução questão 5 - aluno turma 3



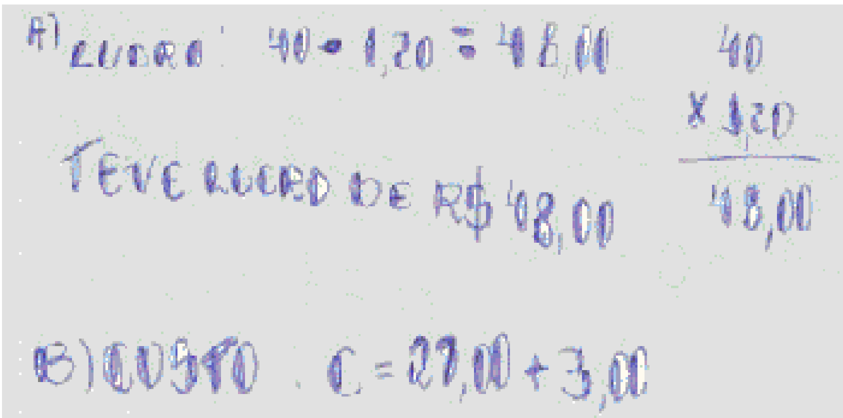
Os erros encontrados na questão 6 foram similares aos da questão 5. A questão trazia uma situação que relacionava o custo da produção de pirulitos e seu preço de venda. Vejamos o exemplo a seguir.

Enunciado da questão 6: Certo fabricante de pirulitos tem uma despesa diária fixa de R$ 27,00 mais R$ 0,30 por pirulito produzido. Ele vende cada pirulito por R$ 1,20.

a) Se ele vender 40 pirulitos, qual será o lucro obtido?

b) Represente o custo diário **c** em função da quantidade **n** de pirulitos produzidos.

Figura 27 - Resolução questão 6 - aluno turma 1



Vemos que no contexto da variável como parâmetro os alunos, com exceção de casos em que o problema é familiar para eles, não sabem como agir quando confrontados com equações com variáveis dependentes entre si, tendo dificuldades para representá - las em linguagem matemática.

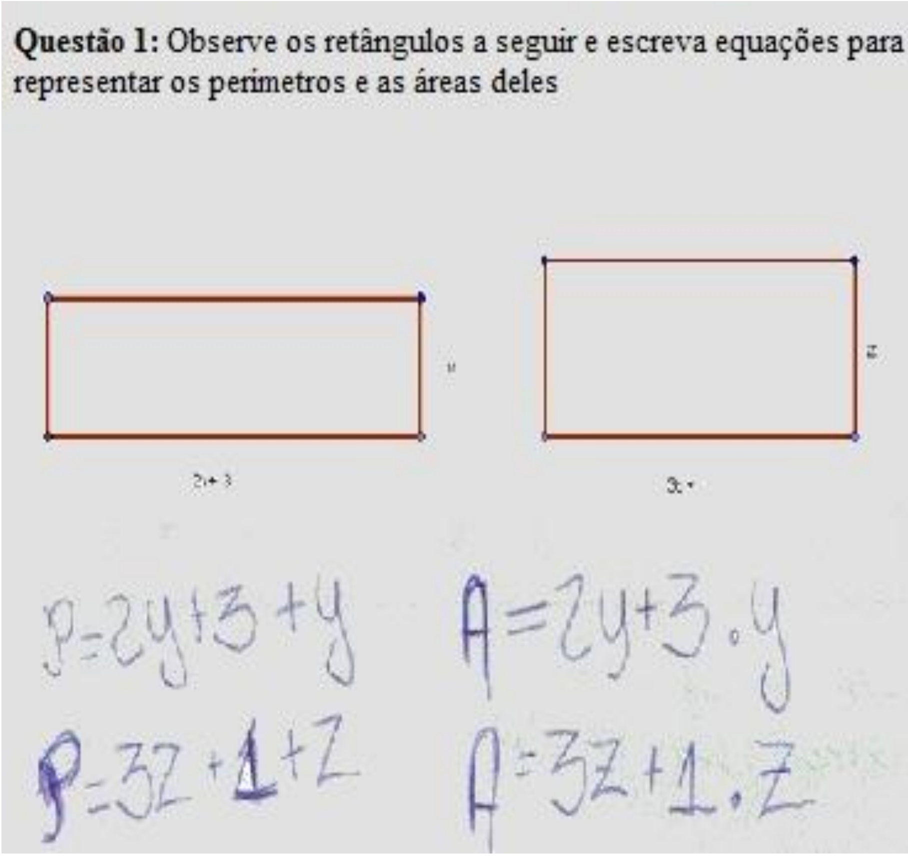
Os alunos têm dificuldade em interpretar o padrão de generalização da noção de variável como parâmetro destacado por Usiskin (1995) que é diferente da generalização aritmética. Verificamos nas questões obstáculos de generalização no reconhecimento de correspondência entre variável dependente e independente, os quais prejudicaram a capacidade apontada por Ursini & Trigueros (2003) relacionada a determinação do valor de uma grandeza quando outra é conhecida.

A interpretação da variável como parâmetro é complexa, segundo Bloedy & Vinner (2000), devido ao fato de que o conceito de parâmetro inclui implícitas mas inevitáveis estruturas quantificadoras que são ainda mais complexas: uma letra cujo valor determina os membros de uma família de equações ou funções; letras nas representações paramétricas de curvas (ou superfícies) , por exemplo, $x = t\ 1$, $y = t^2$, onde o valor do parâmetro determina pontos da curva (ou de superfície) .

5.5.2 Análise da simbolização da noção de variável como parâmetro

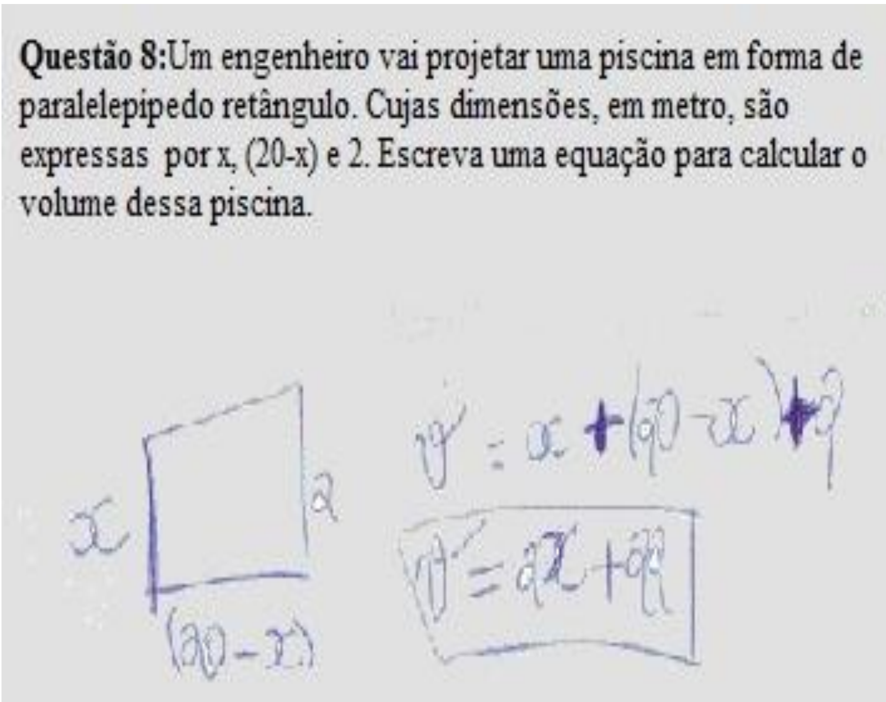
Para avaliar a simbolização da noção de variável como parâmetro foram elaboradas as questões 1 e 8 do questionário. A questão 1 teve um índice de acertos de 36,06% e a questão 8, 15,69%. As questões estavam relacionadas às noções de área, perímetro e volume e com suas respectivas representações por meio de equações. Embora o objetivo fosse avaliar a simbolização, ambas as questões também avaliavam a interpretação geométrica, sendo esta última, de acordo com o que observamos, a responsável pela maior parte dos erros cometidos nestas questões.

Figura 28 - Resolução questão 1 - aluno turma 2



Questão 1: Observe os retângulos a seguir e escreva equações para representar os perimetros e as áreas deles

Figura 29 - Resolução questão 8 - aluno turma 3



Questão 8: Um engenheiro vai projetar uma piscina em forma de paralelepipedo retângulo. Cujas dimensões, em metro, são expressas por x, (20-x) e 2. Escreva uma equação para calcular o volume dessa piscina.

A simbolização da noção de variável como parâmetro é totalmente relacionada à interpretação desta. Neste caso, a interpretação geométrica dos conceitos de área, perímetro e volume foram um obstáculo para simbolizar as funções. Acreditamos que a origem destas dificuldades dos alunos é referente a ausência de construção das relações pertinentes entre os campos numéricos e geométricos.

Verificamos através da análise da simbolização um dos fenômenos que constituem o que Sfard & Linchevski (1994) chamam de concepção pseudo estrutural: os símbolos algébricos são tratados como coisas em seu próprio direito e não como passo para qualquer outra coisa, a forma da expressão / equação torna-se a única base para julgamentos e decisões. Para justificar suas escolhas, o aluno recorre à regras implícitas da aritmética.

5.5.3 Análise da manipulação da noção de variável como parâmetro

A manipulação da noção de variável como parâmetro foi avaliada nas questões 2, 3 e 7 do questionário. A questão 2 obteve o maior índice de acertos (31,62%), enquanto que a questão 7 obteve o menor índice de acertos (25,04%).

As questões 2 e 3 estavam vinculadas à questão 1. A primeira pedia que o aluno calculasse a área e o perímetro dos retângulos da questão anterior, sendo dadas as medidas de y e z. A outra fornecia os perímetros dos dois retângulos e pedia que os alunos achassem os valores para y e z. Os erros encontrados nas duas questões foram ocasionados pela interpretação incorreta da equação da área dos retângulos.

Figura 30 - Resolução questão 2 - aluno turma 1

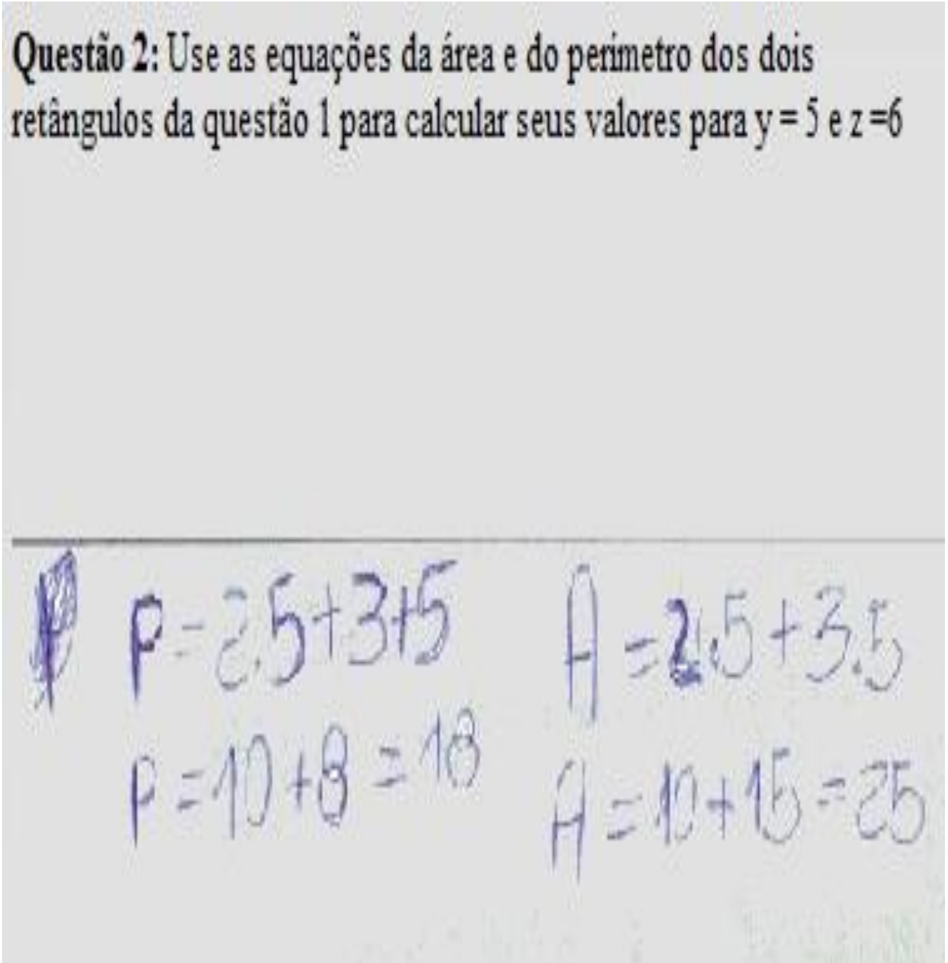
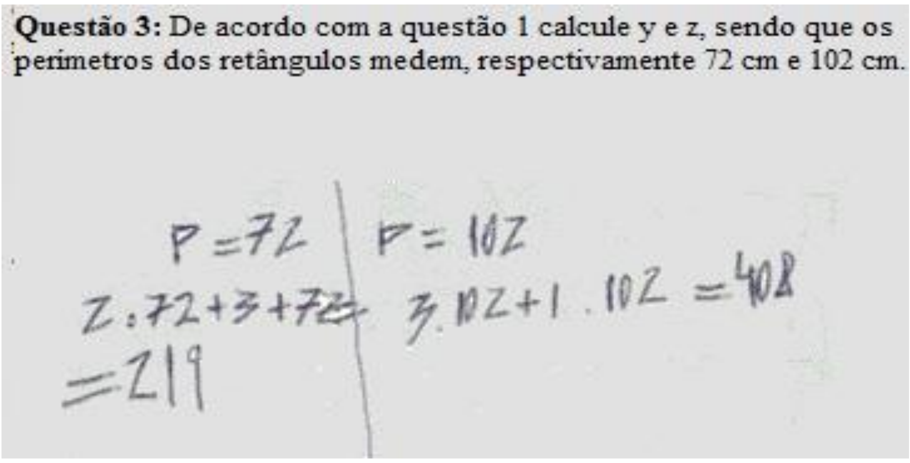
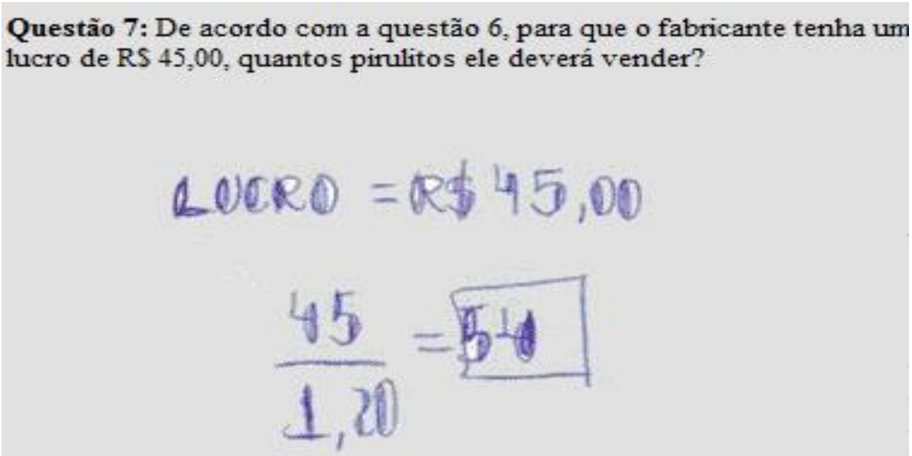


Figura 31 - Resolução questão 3 - aluno turma 2



A questão 7 estava vinculada à questão 6 e pedia que o aluno calculasse o número de pirulitos que deveriam ser fabricados para que fosse obtido um lucro de R$45,00. Os erros foram relativos à noção incorreta da ideia de lucro e a interpretação e simbolização não adequadas para descrever a situação.

Figura 32 - Resolução questão 7 - aluno turma 1



A análise da manipulação da variável como parâmetro revelou que os alunos por não interpretarem e simbolizarem a variável corretamente, acabam por recorrer a procedimentos aritméticos numa tentativa de justificar suas ações. Verificamos o que Sfard & Linchevski (1994) afirmam sobre a manipulação simbólica: quando não são atribuídos significados aos símbolos, os mesmos são injustificáveis para os alunos, não sendo relevantes para eles.

5.5.4 Análise da representação gráfica da noção de variável como parâmetro

A representação gráfica da noção de variável como parâmetro foi o item que obteve o menor índice de acertos nesta categoria (13,94%). As questões 9 e 10 do questionário tinham como objetivo analisar a capacidade do aluno de interpretar e representar graficamente uma relação funcional. A questão 9 fornecia um gráfico e perguntava para os alunos os valores das variáveis x e y, quando uma delas era apresentada. Já a questão 10 dava uma equação e pedia que os alunos a representassem graficamente. Os exemplos abaixo apresentam algumas resoluções dos alunos nesta categoria.

Figura 33 - Resolução questão 9 - aluno turma 1

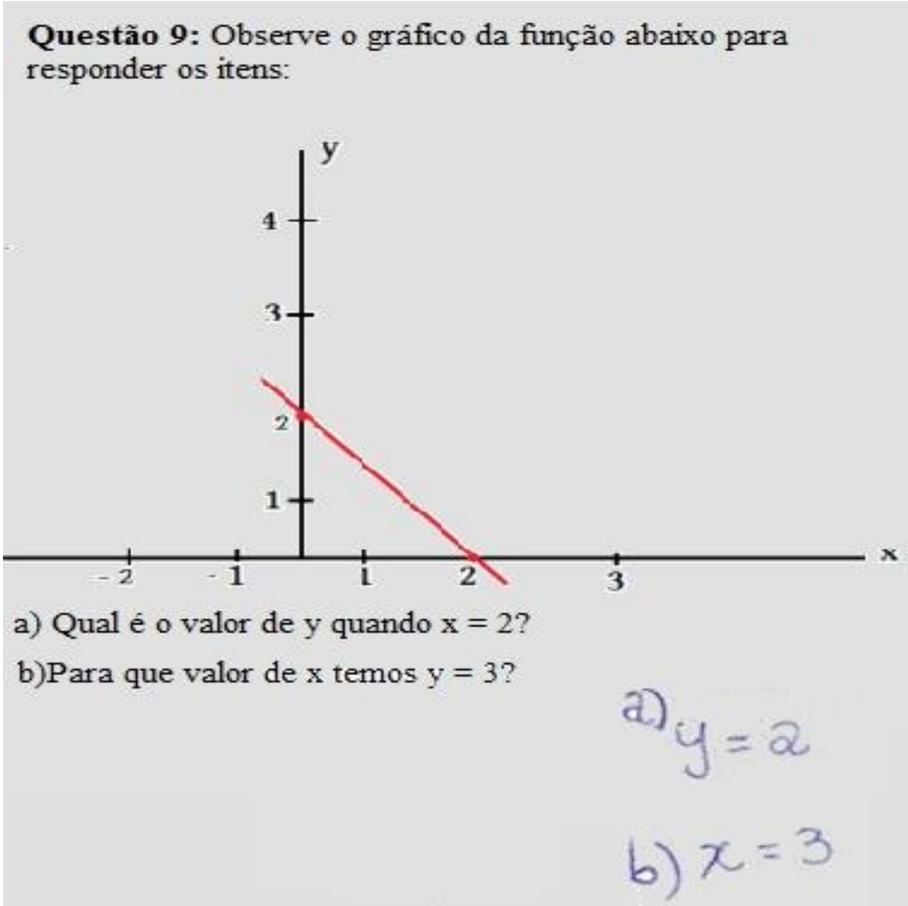
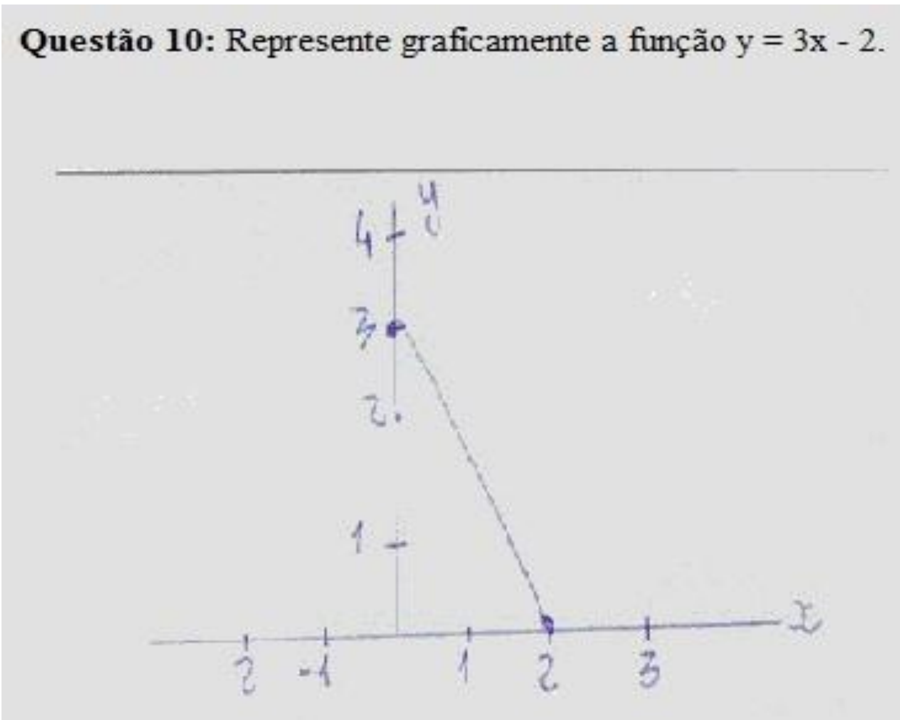


Figura 34 - Resolução questão 9 - aluno turma 1



A análise da representação gráfica nos permitiu verificar o que Sfard & Linchevski (1994) apontaram como obstáculo interpretativo: a relutância em usar meios visuais, enquanto a resolução de problemas algébricos, revelando a inconsciência da relação entre as representações analíticas e gráficas de funções. As resoluções apresentadas pelos alunos foram similares a descrita por Sfard & Linchevski (1994), como vemos na citação a seguir:

> Falamos apenas com uma jovem de 16 anos, que deveria ser hábil na elaboração de gráficos de funções lineares. Na verdade, quando apresentamos a ela uma equação, tal como y = kx-1 e pedimos um exemplo de uma forma que podemos obtê-la (no plano Cartesiano) escolhendo um certo valor de K, ela desenhou uma reta com -1 e -0,5 como intercepções de y e x, respectivamente. Aqui está um trecho do diálogo que se seguiu na produção do gráfico.
> **Entrevistador:** Você pode explicar a relação entre este desenho e nossa equação?
> **Orly:** Isso [a imagem] é uma representação gráfica desta [equação] .
> **E:** O que significa isso?
> **O:** Que todo x, que cada número que substituir aqui [na equação] deve ser um dos pontos no gráfico. Por exemplo, se o gráfico cruza aqui [aponta para a interseção], de 0,5 e aqui [aponta para interseção] em -1, então esta deve ser uma solução verdadeira para equação.
> **E:** O que quer dizer? Você pode explicar? Onde é que vamos substituir -1 e -0,5?
> **O:** Em vez de x e y [aponta para interseção] colocamos -0,5 no lugar de x e -1 no lugar de y.
> **E:** Mas esses dois números não são... Eles vêm de dois diferentes pontos.
> **O:** O que você quer dizer? Que estes dois pontos são diferentes? Não demorou muito para Orly perceber o problema. Depois de um tempo ela seria capaz de endireitar as coisas e decidir que um ponto na reta, em vez de coordenadas de dois pontos diferentes deve ser considerada como uma solução da equação. No entanto, nossa breve troca mostra como superficial era a sua compreensão da natureza do vínculo entre a equação e o gráfico do seu conjunto verdade. (SFARD & LINCHEVSKI, 1994, p.8)

Nas questões 9 e 10, observamos que assim como aconteceu no exemplo de Sfard & Linchevski (1994), os alunos consideram coordenadas distintas como soluções das equações, baseados na percepção visual incorreta e sem perceber a relação entre as variáveis x e y. Dessa maneira, a capacidade apontada por Ursini & Trigueros (2003) de perceber os valores que a grandeza pode assumir dependendo do intervalo onde a relação é estabelecida ficou prejudicada, além de outras habilidades como a determinação de intervalos ou encontrar onde a função está crescendo ou decrescendo.

5.6 A NOÇÃO DE VARIÁVEL ENSINADA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

A partir do que verificamos nos questionários aplicados aos alunos concluintes do ensino fundamental, propomos uma descrição para noção de variável no contexto da educação básica.

De acordo com o que analisamos nos questionários, a noção de variável como valor desconhecido é a que apresenta maior domínio de um modo geral, sendo que os itens que compõem esta noção não são compreendidos plenamente pelos alunos.

A interpretação da noção de variável como valor desconhecido, baseada na habilidade de reconhecimento da incógnita como um valor que possa ser determinado é identificada nas ações dos alunos, de acordo com a concepção de Cruz(2005), porém os alunos não percebem a variável como um valor numérico momentâneo e único. Apresenta problemas de solidez relacionados as operações e à representação da variável, o que Kieran (1989) atribui à uma dificuldade de conexão das ideias do campo aritmético com o algébrico, e que afeta segundo Sfard & Linchevski (1994) o significado e os procedimentos algébricos a serem adotados pelos discentes.

A simbolização da variável como valor desconhecido, baseada na habilidade de identificar e simbolizar a incógnita, nem sempre representa a interpretação que o aluno fez da variável. Este ponto se deve a dificuldades de tradução de uma linguagem para outra (da usual para a matemática), devido as diferenças semânticas entre elas. A simbolização da situação interpretada pelo aluno reflete diretamente no modo como manipula e resolve problemas algébricos que lhe são propostos. A manipulação é marcada pelo predomínio das operações aritméticas em detrimento de procedimentos algébricos e pela falta de hábito em substituir o valor da incógnita para tornar uma sentença verdadeira.

A noção de variável como padrão generalizador também está presente nos registros dos alunos, mas assim como acontece com a noção de variável como valor desconhecido, os itens que a constituem não são dominados pela maioria dos alunos, o que Cruz (2005) justifica devido a inserção desta ideia de variável somente no ciclo final do ensino fundamental.A habilidade de reconhecer padrões ainda não está totalmente formada. O aluno reconhece a generalização de padrões aritméticos, porém tem dificuldades em generalizar por meio de padrões algébricos, influenciando na interpretação deste tipo de variável, a qual necessita que o aluno veja os objetos abstratos que estão envolvidos em uma equação ou expressão algébrica.

A falta de domínio no reconhecimento de padrões faz com que a simbolização não adquira um significado mais profundo, tornando a manipulação da variável como padrão generalizador arbitrária, fazendo com que os alunos retomem os procedimentos aritméticos, numa tentativa de justificar as escolhas que fazem ao trabalharem com equações ou expressões.

A noção de variável como parâmetro está presente no cotidiano dos alunos, porém os mesmos apresentam pouco domínio desta. De modo geral, a interpretação baseada na habilidade de reconhecimento da relação funcional entre quantidades só é de fato favorecida quando a situação proposta ao aluno é familiar a ele.

Quando aparece a variável independente, por exemplo, é difícil para o estudante reconhecer a relação entre quantidades que lhe está sendo mostrada, assim como quando aparece a representação gráfica, onde ele encontra obstáculos para encontrar os valores que satisfaçam a relação funcional entre quantidades.

Se a interpretação da relação funcional entre quantidades não estiver consolidada, a simbolização e a manipulação da noção de variável como parâmetro serão afetadas. A primeira no que se refere à forma como o aluno simboliza as variáveis e as operações envolvidas na relação entre estas variáveis. A manipulação das operações é influenciada pela forma como o aluno vê as variáveis: como valores a serem encontrados ou os valores que satisfazem a relação entre as variáveis.

CAPÍTULO VI
CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo 3UV, proposto por Ursini & Trigueros (1996,2003) como ferramenta direcionadora na elaboração de nosso instrumento diagnóstico e de análise dos dados coletados a respeito da compreensão dos alunos do 9º ano do ensino fundamental sobre as noções de variável possibilitou que pudéssemos responder as nossas questões de pesquisa, as quais destacamos novamente*: Quais elementos que constituem as noções de variável são percebidos pelos alunos, de modo a proporcionar - lhes uma maior compreensão da álgebra escolar? De que maneira a identificação destes elementos em ambiente escolar nos permite propor uma descrição para a álgebra no ensino fundamental?*

Primeiro, estudamos o desenvolvimento da álgebra na história para vermos como cada elemento surgiu no percurso evolutivo da noção de variável.

A história nos permitiu ver que um elemento foi fundamental para o desenvolvimento da álgebra: a linguagem. Esta na forma de simbolismo acarretará, na visão de Whitehead (1987), uma referência dupla entre símbolo e significado. Esta relação ele define como jogos de linguagem. Percebemos estes jogos no desenvolvimento da álgebra na linguagem retórica, quando o pensamento matemático começou a ser expresso por meio da linguagem natural. No período retórico, a palavra retirada da linguagem comum, estava associada ao número(objeto), representando o próprio número(objeto).

A palavra representava o valor da quantidade desconhecida, com a finalidade de assegurar que ali faltava algo (o valor desconhecido), de modo a constituir um caráter pragmático e intuitivo, caracterizado pela busca de igualar quantidades para encontrar o valor desconhecido em questão.

A linguagem sincopada trouxe avanços referentes à simbologia algébrica, apresentando conceitualmente um caráter geométrico e dedutivo, concebendo a álgebra e a noção de variável não só como relações entre quantidades desconhecidas, mas também como uma relação entre grandezas (noção de parâmetro).

Na linguagem simbólica que apareceu nos trabalhos de Viète, houve a separação entre símbolo e significado, proporcionando o acesso ao abstrato mais fácil, dando uma nova finalidade para a matemática, passando a ser usada como ferramenta para outras ciências.

A consolidação da linguagem simbólica que aparece nos trabalhos de Abel e Galois, representava a independência dos objetos ou das grandezas que deveria figurar, ultrapassando a representação concreta, entrando segundo Brandemberg & Mendes (2005, p.18), no domínio da sintaxe, marcado pelo "cálculo com regras próprias e ignorantes de qualquer sistema particular que funcione com elas (números, por exemplo)".

Dessa forma, criou-se o mito de que o significado é irrelevante para matemática, levando a mesma a ser concebida como objeto de estudo, e não mais como ferramenta, sendo desvinculada das aplicações e tornando - se pouco compreensível aos não estudiosos da área. A linguagem simbólica representou conceitualmente a criação de um caráter estrutural para a álgebra, com propriedades definidas em si mesmas, em busca de soluções gerais.

A variável representou a escrita de movimentos da realidade, a partir da palavra e da figura. Segundo Moura & Sousa (2005,p.38), as variáveis aparecem na matemática como reflexos dos movimentos de mudança. De acordo com as autoras, o desenvolvimento histórico do conceito de variável apresenta uma relação direta com o conceito de número, de movimento. A variável teve sua formalização mais geral no século XIX, com a Teoria dos Grupos. O movimento da realidade apontado pelas autoras, a partir da palavra e da figura, é expresso nos períodos retórico e sincopado. A mudança conceitual da noção de variável se consolidou no período simbólico.

Dando prosseguimento ao estudo, verificamos como a noção de variável se desenvolveu no contexto da história da educação algébrica no Brasil.Vimos que o ensino da álgebra está intimamente ligado ao estudo das equações, assim como foi verificado na evolução da álgebra nos diferentes povos e períodos históricos.

Quando a álgebra foi introduzida no ensino brasileiro, por volta do século XIX, a noção de variável como incógnita e como padrão generalizador foram as que prevaleceram, onde metodologicamente eram valorizadas as técnicas mecanizadas de resolução de problemas baseadas no transformismo algébrico.

Mesmo durante a reforma Francisco Campos, a mecanização das técnicas de resolução estava presente no ensino da álgebra. A mesma era vista como sendo superior à aritmética devido ao caráter generalizador proveniente da noção de variável. Neste período foi a generalização característica da álgebra que a consolidou como ferramenta para resolução de problemas.

Com o Movimento da Matemática Moderna, o ensino da álgebra ganhou um caráter fundamentalista, marcado pela justificativa dos procedimentos de cálculo, de maneira lógico - estrutural. Neste período, o ensino da noção de variável como parâmetro ganhou destaque. Após o declínio do movimento, voltou-se a valorizar o caráter instrumental (ferramenta) proposto nas reformas anteriores, no entanto, manteve - se a justificação das técnicas de resolução.

Para fundamentar teoricamente nossa pesquisa, buscamos trabalhos em educação matemática que falassem da educação algébrica e da noção de variável. As contribuições de Kuchemann (1981), Kieran (1989), Kaput (1989), Sfard & Linchevski (1994), Janvier (1996), Usiskin (1995), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Lins e Gimenez (1997), Vinner (1983) e Bloedy & Vinner (2000), Ursini & Trigueros (2003), Cruz (2005) junto com as conclusões que obtivemos na investigação histórica, foram essenciais para a elaboração de um percurso metodológico para a pesquisa de campo que realizamos no ambiente escolar, onde verificamos a presença de elementos que constituem as noções de variável (interpretação, simbolização, manipulação e representação gráfica) e o modo como os alunos mobilizam esses elementos, de maneira que nos fornecesse subsídios para propor uma descrição para a álgebra ensinada no nível fundamental de ensino.

Com o estudo teórico, percebemos que a construção da noção de variável é importante para uma formalização simbólica significativa para a álgebra escolar, com o objetivo de organizar as ideias, os significados e de elaborar caminhos para solucionar problemas, articulando as diferentes noções de variável que constituem o pensamento algébrico.

A partir dos dados coletados com a aplicação dos questionários, podemos, tendo como base de análise o modelo 3UV, identificar como as noções de variável pesquisadas (valor desconhecido, padrão generalizador e parâmetro) aparecem em ambiente escolar e como são articuladas pelos alunos.

De acordo com o que analisamos nos dados, vimos que os usos da variável como padrão generalizador e como parâmetro não são tão bem compreendidos pelos alunos quanto o uso como valor desconhecido.

Além disso, identificamos habilidades, relativas aos três usos da variável apresentados no modelo 3UV, que deveriam ser melhor exploradas no processo de ensino e aprendizagem da álgebra, tais como a identificação e simbolização do objeto geral que pode ser descrito em termos de uma regra ou método geral; identificação e simbolização da incógnita em problemas específicos; a simbolização de situações que envolvam uma relação funcional.

Percebemos que, muitas vezes, a interpretação da variável, de acordo com as três noções pesquisadas, como elemento representativo de um conjunto enfrenta certa resistência por parte dos alunos. Notamos, também, que a maioria demonstrou a necessidade de encontrar um resultado numérico para as operações realizadas com variáveis em situações em que essas representariam números genéricos, interpretando - as, muitas vezes, como incógnitas.

A relação de dependência e correspondência entre as variáveis de uma função, dada sua representação algébrica e gráfica, não foi identificada por alguns estudantes, demonstrando que o relacionamento entre variáveis não é devidamente explicitado no estudo de funções.

Identificamos que, apesar de a maioria dos alunos perceber a dependência entre as variáveis sugeridas, muitos não reconheceram a correspondência entre elas e não observaram devidamente sua variação conjunta, o que demonstra a falta de mobilização da habilidade de interpretação, prejudicando a simbolização e a manipulação da relação funcional.

A maioria dos estudantes que participou de nossa investigação demonstrou dificuldades para encontrar, dada uma relação funcional, o intervalo de variação de uma variável quando é conhecido o intervalo de variação da outra.

Com relação ao uso da variável como padrão generalizador, a compreensão dos alunos investigados apresentou lacunas. Notamos que os sujeitos investigados tiveram dificuldades para deduzir uma regra e generalizar o padrão sugerido nas questões, demonstrando obstáculos na capacidade apontada por Usiskin (1995) de mostrar elementos e características em comum por meio de uma regra, confirmando - se o obstáculo verificado por Sfard & Linchevski (1994), relacionado a visualização de objetos por trás de equações e expressões algébricas que dão significado às regras da álgebra.

Sobre a noção de variável como valor desconhecido, os alunos revelaram dificuldades em interpretar, simbolizar e manipular situações cuja solução não é tão visível. Neste ponto, demonstraram insegurança e desconforto ao operar com a variável ao invés de um valor numérico. Os recursos utilizados anteriormente na aritmética não eram suficientes para as justificações algébricas.

Retomando nossas questões de pesquisa, apresentamos as seguintes considerações:

De acordo com as noções de variável que trabalhamos (valor desconhecido, padrão generalizador e parâmetro) e os elementos escolhidos que constituem estas noções (interpretação, simbolização, manipulação e representação gráfica), verificamos que os alunos interpretam as situações problemas, de modo que a interpretação proporciona uma maior compreensão do campo algébrico.

No entanto, a compreensão não é consolidada devido a interpretação ter um obstáculo de grande influência: a tradução da linguagem usual para a linguagem matemática. Na noção de variável como incógnita, a tradução ainda está presa a princípios aritméticos que se refletem no modo como o aluno lida com as operações ao descrever ou desenvolver equações e expressões algébricas.

Na noção de variável como padrão generalizador, a tradução é influenciada pela falsa analogia entre linguagem usual e linguagem matemática, que se verifica quando o aluno transpõe linearmente as palavras da linguagem usual para a simbolização matemática, sem levar em consideração o caráter semântico das linguagens em questão.

Na noção de variável como parâmetro, a tradução encontra barreiras na compreensão do processo de generalização, o qual, neste tipo de variável, é referente ao reconhecimento das relações entre variáveis dependentes e independentes. O aluno ainda está vinculado à generalização aritmética e tem dificuldades em aceitar que nesta noção de variável, este tipo de generalização perde o seu significado (vamos lembrar do exemplo de Usiskin (1995): " não é apropriado perguntar o que acontece com o valor de $\frac{1}{2}$ quando o 2 se torna maior!")

A interpretação influencia nos outros elementos que constituem a noção de variável, a simbolização e a manipulação, que são percebidos pelos alunos e auxiliam na compreensão da álgebra escolar. Porém, assim como a interpretação, ainda não estão consolidados no pensamento algébrico destes.

Verificamos que o processo de simbolização realizado pelos alunos segue a premissa de Janvier (1996) e Kieran (1989), que afirmam que o mesmo nem sempre reflete o que de fato o aluno interpretou, afetando o significado que é atribuído aos símbolos nas resoluções de problemas que envolvem a noção de variável como incógnita, a representação de regras em problemas direcionados para a noção de variável como padrão generalizador e o reconhecimento da relação entre variáveis na noção de parâmetro.

A manipulação é influenciada pela base aritmética que o aluno traz de experiências matemáticas anteriores, demonstrando que este ainda está no estágio primário de desenvolvimento da álgebra (SFARD & LINCHEVSKI, 1994). O aluno insere as operações aritméticas nas equações e expressões ao trabalhar com a noção de variável como incógnita, nas regras relacionadas a um determinado objeto que envolvem a noção de variável como padrão generalizador e nas relações de dependência e independência da noção de parâmetro.

A representação gráfica é um elemento que é pouco percebido pelos alunos, tanto que sua influência é pequena na compreensão da álgebra. Este fato, em nossa concepção, é prejudicial, pois afeta a percepção visual da variável como parâmetro. O aluno tem dificuldades em vincular as representações analíticas e gráficas das funções porque não interpreta a relação entre variáveis em uma função.

Analisar as noções de variável mostradas no referencial teórico e os elementos que as constituem, mostra um panorama do ensino da álgebra no nível fundamental que nos permitiu propor uma caracterização da noção de variável no contexto escolar, que é baseada na interpretação da linguagem algébrica, a qual está vinculada à linguagem usual, sem que haja uma separação clara entre o caráter semântico das linguagens.

Esta falta de separação entre os significados faz com que a interpretação realizada pelos alunos não saia do estágio de desenvolvimento fundamentado nos princípios aritméticos, criando obstáculos para o estabelecimento de links com os princípios algébricos, tais como os que Usiskin (1995) cita ao falar da variável como parâmetro (a concepção de argumento - que representa um valor de domínio de uma função - e a concepção de parâmetro - que representa um número do qual outros números dependem).

A interpretação que desvincula a aritmética da álgebra induz a compreensão dos elementos simbolização, manipulação e representação gráfica que também formam a noção de variável no contexto escolar. A desarticulação do conhecimento aritmético e as invariantes pertinentes à interpretação simbólica, faz com que a álgebra não adquira a representatividade necessária para os alunos a relacionarem com suas vidas. Na fala de Silveira (2005):

> O signo matemático é "morto" na perspectiva do aluno. Na sala de aula, o professor, como leitor modelo, auxilia o aluno a dar vida a este signo "morto". Porém, a significação do signo isolado, as vezes, não adquire sentido na operação. (SILVEIRA, 2005, p.2)

Na descrição que propomos, identificamos que a noção de variável acaba por se prender ao símbolo, de maneira a não conseguir contemplar seu significado no contexto matemático. A tradução escrita da linguagem usual para a linguagem algébrica se transforma em um obstáculo de ordem epistemológica para a noção de variável, porque como diz Wittgenstein (1987, apud Silveira, 2005), a intuição não caminha com o material morto da escrita, os símbolos universais da matemática não garantem sua significação na leitura do aluno sobre a representatividade da variável.

Dessa maneira, pensamos que questões futuras de pesquisa que poderiam dar continuidade a este estudo estão ligadas a inter relação entre as noções de variável no processo de ensino e aprendizagem, ao contexto inicial do estudante que ainda não concebeu a ideia de variável, ou ainda ao contexto do estudante do ensino médio.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, E. A. **Influências das habilidades e das atitudes em relação à matemática e a escolha profissional.** 1999. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação - UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

BLOEDY, H. VINNER,S . Beyond Unknowns and Variables: Paramemters and Dummy Variables in High School Algebra. In: SUTHERLAND,R; ROJANO,T; BELL, A;LINS, R. **Perspectives of School Algebra**. Dordrecht / Boston/ London: Kluwer Academic Publishers. Mathematics Education Library. v.22.2000.

BOYER, C. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

BRANDEMBERG,J.C; MENDES,I,.A. A estrutura de grupo e o ensino da álgebra: influências no ensino da matemática no Brasil na segunda metade do século XX.In: I SEMINÁRIO PAULISTA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2005, São Paulo (Brasil).**Diálogos Temáticos 4 - História da Matemática**. São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística - USP, 2005.p. 16 - 21.

BRANDEMBERG,J.C. **Uma Análise Histórico--Epistemológica do Conceito de Grupo**. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

BÚRIGO, E. Z. Tradições Modernas:reconfigurações da matemática escolar nos anos 1960. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 23, nº 35B, p. 277 -300, abril. 2010.

CRUZ, E.S. **A noção de variável em livros didáticos de ensino fundamental:** um estudo sob a ótica da organização praxeológica. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - PUC - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

DERBYSHIRE, J. **Unknown quantity:** a real and imaginary history of algebra. Washington, D.C. Joseph Henry press.2006.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. MIGUEL, A. Álgebra ou geometria para onde pende o pêndulo?. **Proposições**. vol. 3.n.1[7].Março de 1992.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A. MIGUEL, A. Contribuição para um repensar: a educação algébrica elementar. **Proposições**. vol. 4. n.1[10]. Março de 1993.

FISCHER,S. R.**História da Escrita**. São Paulo: Editora da Unesp, 2009. 293 p.

FOSSA, J. A. **O ensino do conceito de variável.**São Paulo/SP. Editora Livraria da Física. 2012

GIL, K. H. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra.** 2008. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) - PUC - Pontifícia Universidade Católica, Porto Alegre, Rio Grande do Sul.

HODGKIN, L. **A History of Mathematics**: from Mesopotâmia to Modernity. Nova York: Oxford University Press. 2005.

HUGHES, B B Robert of Chester's Latin translation of al-Khwarizmi's 'al-Jabr'. In: **Boethius: Texts and Essays on the History of the Exact Sciences XIV**. Stuttgart. 1989.

IFRAH, G. **Os números: a história de uma grande invenção**. São Paulo/SP, 9a. Edição, Editora Globo, 1998.

IMHAUSEN, A. Egyptian Mathematics. In: KATZ,V.(org).**The Mathematics of Egypt, Mesopotamia, China, India and Islam**: A source book. Princeton University Press. New Jersey, 2007.

JANVIER, C. Modeling and Initiation in to Algebra. In: BEDNARZ, N; KIERAN, C; LEE, L. (orgs). **Approaches to algebra :** Perspectives for Research and Teaching. Dordrecht / Boston/ London: Kluwer Academic Publishers. Mathematics Education Library. v.18.1996.

KAPUT, J.J. Linking representations in the symbol systems of algebra. In: KIERAN, S.W.C (ed). **Research issues in the learning and teaching of algebra**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 1989, p 167 - 194.

KIERAN, C. El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica **Enseñanza de las ciencias,** 7 (3),p. 229-240,1989.

KIERAN, C. Two different approaches among algebra learners. In: A.F. Coxford (Ed.). **The ideas of algebra**. Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. Reston, VA: NCTM.1988.

KIERAN, C.The changing face of school algebra. In: C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, & A. Perez (Eds.). **8th International Congress on Mathematical Education:** Selected Lectures. Sevilla, Espanha: S.A.E.M. Thales. 1996.

KLEINER, I. **A history of abstract algebra**. Boston/EUA. Birkhauser Boston,2007.

KÜCHEMANN, D. Algebra. In : HART K. M.; BROWN M. L., KUCHEMANN D. E., et all (Eds.), **Children's Understanding of Mathematics :11-16**. Oxford, Reino Unido: John Murray. 1981.

LIMA FILHO, R. R. C. Investigação histórica de práticas de medição: Um estudo sobre o livro Instrumentos Nuevos de Geometria (1606). In: IX SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 2011, Aracaju. **Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática**. Aracaju: UFS, 2011.

LIMA, L. & MOISÉS, R. P. A variável: escrevendo o movimento. **A linguagem Algébrica 1.** São Paulo/SP, CEVEC/CIARTE,2000.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética a álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

MEDEIROS,C.F,MEDEIROS,A. O método da falsa posição na história e na educação matemática. **Ciência e Educação**,v.10,n.3, p. 545 - 547, 2004.

MOURA, A. R. L.; SOUZA, M. C. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes. **Zetetiké:** Revista semestral do Cempem, Campinas, v. 13, n. 24, p. 11-45, jul./dez. 2005.

PIMENTA,S.G. Pesquisa - ação crítico - colaborativa: construindo seu significado a partir de experiência com formação docente. **Educação e Pesquisa.** São Paulo, v.31,n.3,p.521 - 539,set/dez.2005

RADFORD, L. Elementary Forms of Algebraic Thinking in Young Students. In: M. F. Pinto. & T. F. Kawasaki (Eds.). **Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Vol. 4, pp. 73-80. Belo Horizonte, Brasil: PME. 2010.

SFARD, A; LINCHEVSKI, L. Between arithmetic and algebra: In the search of a missing link the case of equations and inequalities .In: MATHEMATICS SEMINARY. 1994, Torino. **Proceedings of Mathematics Seminary**,V.52. Torino: Universidade Politécnica de Torino, 1994.

SILVA, C. M. S. Os "espinhos" da álgebra para Lacroix. In: **Educação. Matemática. Pesquisa**.São Paulo, v.13, n.1, pp.219-237, 2011.

SILVEIRA, M.R.A. A crítica ao ensino da matemática. **Amazônia**: Revista de Educação em Ciências e Matemática. v.2.n.3. Jul.2005/dez.2005.p.1-7.

SOARES, F. S. DASSIE, B.A . ROCHA, J. L. Ensino de matemática no século XX – da Reforma Francisco Campos à Matemática Moderna. **Horizontes**, Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 7-15, jan./jun. 2004.

STEKETEE,S; CHANAN, S, KUNKEL, P. **Exploring Algebra 1 with the Geometer's Sketchpad**. Dallas, Tx. Key Curriculum Press. 2007

TABAK, John. **Algebra**: Sets, Symbols, and the Language of Thought (History of Mathematics). United States of America – USA: Library of Congress, 2004, 240p.

TRIGUEROS, M. URSINI, S. REYES, A.QUINTERO, R**.** Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. **Enseñanza de las ciências.** 1996, 14 (3), 351-363.

URSINI, S. TRIGUEROS, M. (2003). A model for the uses of variable in elementary algebra. In: **Proceedings of the XYIPME Conference,** Lahti, Finland pp 4-254 to 4-26 1.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Alberto P.(Org). **As ideias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

VECCHIA, A; LORENZ, K. M. **Programa de Ensino da Escola Secundária Brasileira (1850-1951)**. Curitiba: s/e., 1998.

VINNER, S. Concept definition, concept image and the notion of function. In: **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.** V.14, 1983.

WHITEHEAD, A. N. **Simbolismo:** o seu significado e efeito. São Paulo: Edições 70, 1987.

WUSSING, H. **Lecciones de historia de las matemáticas**. Madrid: Siglo XXI de España Editores.1998.

ZUIN, E. S. L. Os papiros egípcios como fontes para um trabalho com a história da matemática em sala de aula . In: XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2013.Curitiba. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**.Curitiba: PUCPR,2013.

ZULATTO, R. B. A. Projeto Interdisciplinar no Ensino das Metodologias: O Ponto de Vista da Matemática. **Revista de Educação Matemática,** Nº. 9, p. 45-48. 2004.

APÊNDICES

QUESTIONÁRIOS APLICADOS NA PESQUISA

Questionário 1: noção de variável como valor desconhecido

Prezado Aluno:

Estas questões fazem parte do trabalho de pesquisa que estou realizando no curso de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática da UFPA com o objetivo de compreender as dificuldades encontradas na aprendizagem de Álgebra. Com base nisso, conto com a sua colaboração e agradeço desde já sua atenção.

Se optar por responder as questões, estará confirmando sua participação na pesquisa. Você não será identificado por nome nas análises.

Questão 1: Escreva equações que representem as seguintes situações:

- Um número diferente de zero multiplicado por 4.
- Subtraia do resultado acima o número pensado.
- Divida o resultado acima pelo número pensado.
- Se o número pensado fosse y como seriam representadas as situações descritas?

Questão 2: De acordo com a questão 1, se o número x fosse substituído por 320, qual seria o resultado?

Questão 3: Para a seguinte equação, escreva o valor que pode tomar a letra d.

$$3.d = 15$$

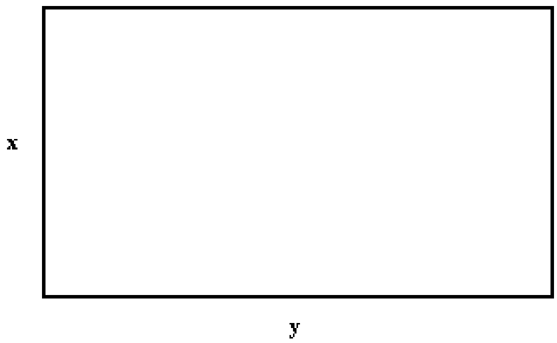
Questão 4: . Escreva uma equação que represente: um número desconhecido que multiplicado por 32 é igual a 256.

Questão 5: Carla tinha 7 cédulas de ***x*** reais e 4 cédulas de ***y*** reais. No supermercado ela gastou ***2 (x+ y)*** reais.

a) Escreva uma expressão que represente quanto Carla tinha antes das compras.

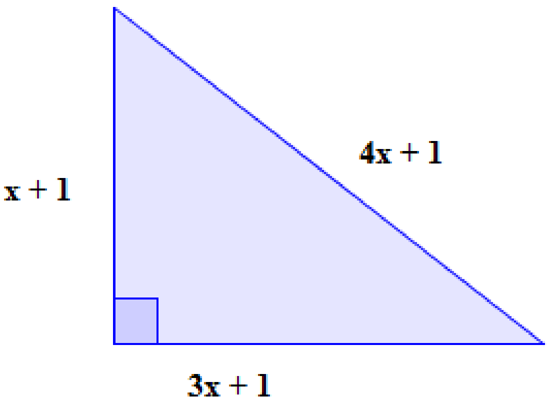
b) Escreva uma expressão que represente com quanto Carla ficou depois das compras.

Questão 6: Qual a expressão que representa o perímetro da figura abaixo?



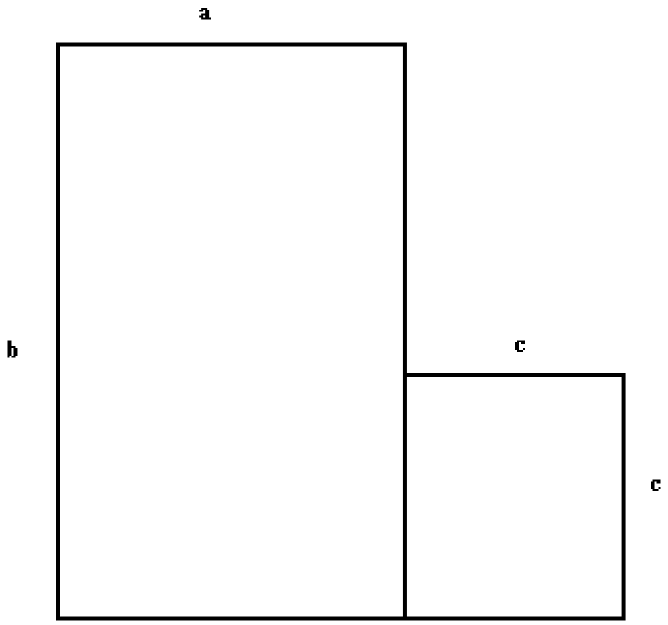
Questão 7: . Escreva uma equação que comece assim: $3(x + 2) + 3 = \square$ Como você completaria a equação feita para que a solução seja 5?

Questão 8: Considere o triângulo da ilustração, no qual as medidas dos lados são dadas em centímetros. Sabendo que o perímetro do triângulo é 18 cm, descubra a medida de cada lado.



Questão 9: De acordo com a questão 8 calcule a área do triângulo.

Questão 10: Suponha que um terreno tenha a forma da figura abaixo e suas medidas sejam representadas, pelas letras a,b e c. Qual expressão representa a área da figura?



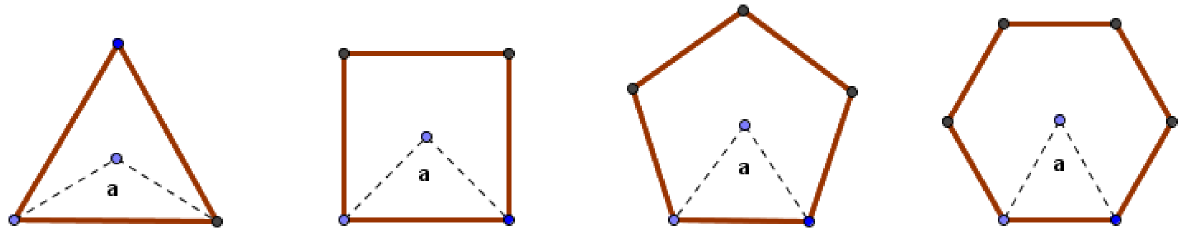
Questionário 2: noção de variável como padrão generalizador

Prezado Aluno:

Estas questões fazem parte do trabalho de pesquisa que estou realizando no curso de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática da UFPA com o objetivo de compreender as dificuldades encontradas na aprendizagem de Álgebra. Com base nisso, conto com a sua colaboração e agradeço desde já sua atenção.

Se optar por responder as questões, estará confirmando sua participação na pesquisa. Você não será identificado por nome nas análises.

Questão 1: Observe a figura e complete a tabela.



Número de lados do polígono regular	Cálculo	Medida do ângulo central
3	$\frac{360}{3}$	
4	$\frac{360}{4}$	
5	$\frac{360}{5}$	
6	$\frac{360}{6}$	

Questão 2: De acordo com a questão 1, escreva a uma equação que relacione a medida a do angulo central com o número n de lados do polígono (n pode ser qualquer número natural maior que 2)

Questão 3: De acordo com as questões 1 e 2, quanto mede o ângulo central do polígono regular de 30 lados?

Questão 4: Complete a tabela e escreva uma equação para calcular o número de bolinhas da figura.

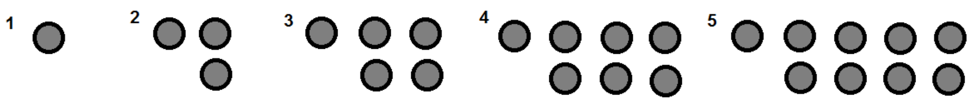


Figura	Número de bolinhas
1	
2	
3	
4	
5	
6	
10	
100	
200	
n	

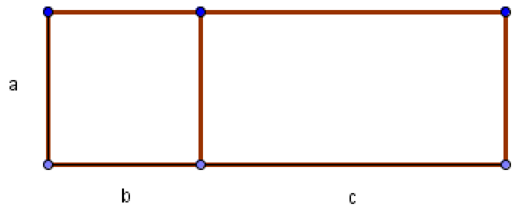
Questão 5: De acordo com a questão 4, qual o formato da figura com 23 bolinhas?

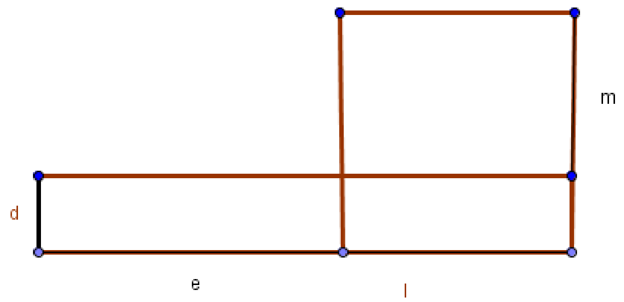
Questão 6: Observe as duas figuras formadas por retângulos

Podemos escrever uma fórmula para área da figura da esquerda de duas maneiras.

$$A = a\,.\,b + a\,.\,c \text{ ou } A = a\,.\,(b + c)$$

Mostre uma maneira de escrever uma equação para representar a área da figura da direita.





Questão 7: Para os valores de a = 2, b = 3 e c = 5, qual a área da figura da esquerda? Para d = 4, e = 7 e f = 6, qual a área da figura da direita?

Questão 8: Reescreva as frases em linguagem matemática

a) Um número natural é somado com seu sucessor.

b) O triplo de um número é somado com 10% do número

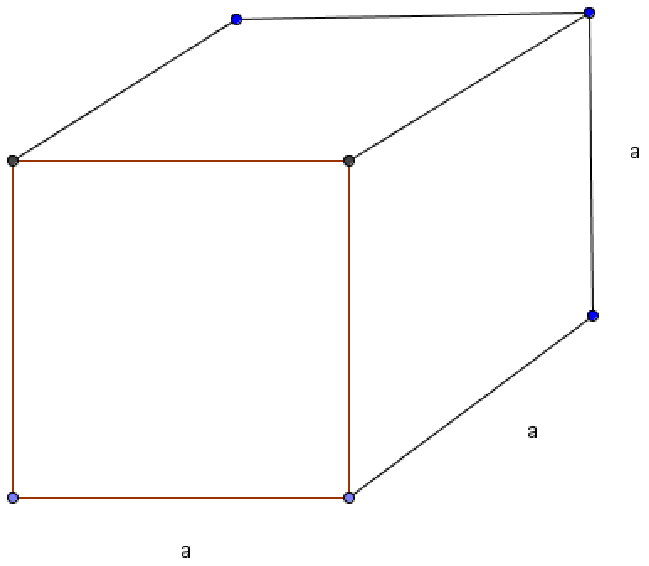
c) Um número é multiplicado por 3 e dividido por 2.

d) De determinado número, subtraímos sua terça parte.

Questão 9: Para a equação abaixo, escreva o valor que pode ter a letra x. Se tiver mais de um valor, escreva alguns deles

$$x + 5 = 5 + x$$

Questão 10: Observe a figura e escreva uma equação para representar seu volume.



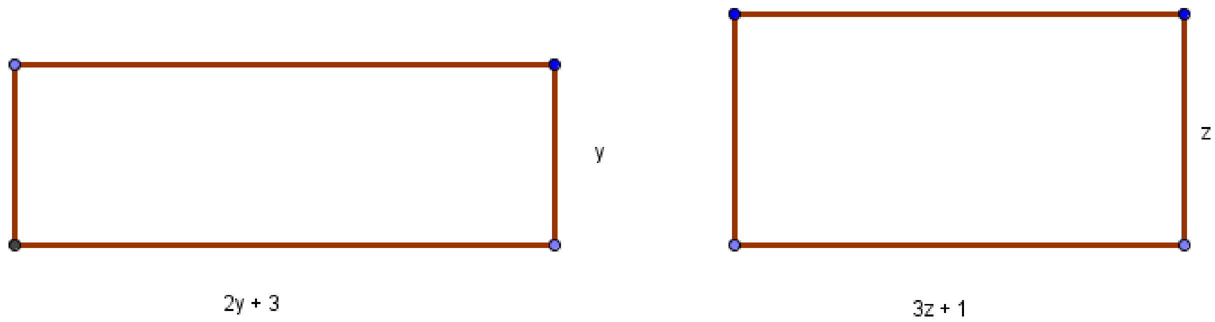
Questionário 3: noção de variável como parâmetro

Prezado Aluno:

Estas questões fazem parte do trabalho de pesquisa que estou realizando no curso de Mestrado em Educação em Ciências e Matemática da UFPA com o objetivo de compreender as dificuldades encontradas na aprendizagem de Álgebra. Com base nisso, conto com a sua colaboração e agradeço desde já sua atenção.

Se optar por responder as questões, estará confirmando sua participação na pesquisa. Você não será identificado por nome nas análises.

Questão 1: Observe os retângulos a seguir e escreva equações para representar os perímetros e as áreas deles.



Questão 2: Use as equações da área e do perímetro dos dois retângulos da questão 1 para calcular seus valores para y = 5 e z = 6.

Questão 3: De acordo com a questão 1 calcule y e z, sendo que os perímetros dos retângulos medem, respectivamente 72cm e 102cm.

Questão 4: Em uma certa loja, uma camiseta custa R$ 40,00 a unidade, não importando a quantidade que se compre.

a) Na compra de duas dessas camisetas, qual será o preço pago?

b) Na compra de 10 dessas camisetas, qual será o preço pago?

c) Represente por meio de uma equação o preço pago P em função da quantidade c de camisetas compradas.

Questão 5: Na cidade onde Carlos mora, os táxis cobram uma quantia fixa de R$ 3,80 e mais R$ 0,70 por quilômetro rodado. Represente uma equação para calcular o preço de uma corrida de táxi na cidade de Carlos.

Questão 6: Certo fabricante de pirulitos tem uma despesa diária fixa de R$ 27,00 mais R$ 0,30 por pirulito produzido. Ele vende cada pirulito por R$ 1,20.

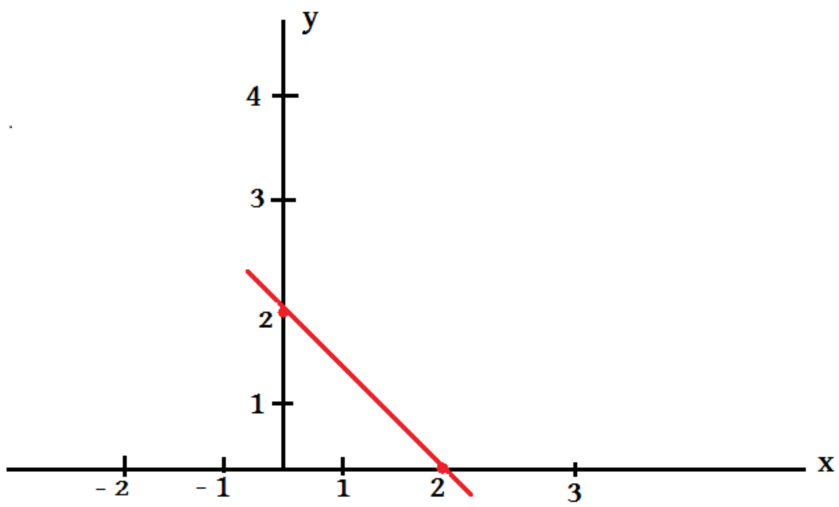
a) Se ele vender 40 pirulitos, qual será o lucro obtido?

b) Represente por meio de uma equação o custo diário c em função da quantidade n de pirulitos produzidos.

Questão 7: De acordo com a questão 6, para que o fabricante tenha um lucro de R$ 45,00, quantos pirulitos ele deverá vender?

Questão 8: Um engenheiro vai projetar uma piscina em forma de paralelepípedo retângulo, cujas dimensões, em metro, são expressas por x, (20 -x) e 2. Escreva uma equação para calcular o volume dessa piscina.

Questão 9: Observe o gráfico da função abaixo para responder os itens



a) Qual é o valor de y quando x = 2?

b) Para que valor de x temos y = 4?

Questão 10: Represente graficamente a função y = 3x - 2