UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

VALDOMIRO PINHEIRO TEIXEIRA JUNIOR

A TERAPIA DE WITTGENSTEIN E O ENSINO DE ÁLGEBRA

Belém - Pará

2016

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PÓS-GRAUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

VALDOMIRO PINHEIRO TEIXEIRA JUNIOR

A TERAPIA DE WITTGENSTEIN E O ENSINO DE ÁLGEBRA

Texto final de Tese apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas sob a orientação da Prof.ª Dr.ª Marisa Rosâni Abreu da Silveira.

Belém - Pará

2016

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP) –
Biblioteca do IEMCI, UFPA

Teixeira Júnior, Valdomiro Pinheiro.
A terapia de Wittgenstein e o ensino de álgebra / Valdomiro Pinheiro Teixeira Júnior, orientadora Profa. Dra. Marisa Rosâni Abreu da Silveira. – 2016.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2016.

1. Matemática – estudo e ensino. 2. Álgebra. 3. Wittgenstein, Ludwig, 1889-1951. I. Silveira, Marisa Rosâni Abreu da, orient. II. Título.

CDD - 22. ed. 510.7

VALDOMIRO PINHEIRO TEIXEIRA JUNIOR

A TERAPIA DE WITTGENSTEIN E O ENSINO DE ÁLGEBRA

Texto final de Tese apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas sob a orientação da Prof.ª Dr.ª Marisa Rosâni Abreu da Silveira.

Comissão Examinadora:

Prof.ª Dr.ª Marisa Rosâni Abreu da Silveira (Orientadora) (UFPA)

Prof.ª Dr.ª Cristiane Maria Cornelia Gottschalk (USP)

Prof. Dr. Paulo Sampaio Xavier de Oliveira (UNICAMP)

Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes (UFPA)

Prof. Dr. José Moysés Alves (UFPA)

Belém - Pará

2016

Aos meus pais:

Rita e Vavá.

Agradeço

À minha família, minha mãe, meu pai, meus irmãos, Marcos, Rafael, Ingrid e Bia. Pelo amor que mais se mostra do que se diz;

À minha querida professora Marisa, por sua orientação e dedicação;

Aos integrantes da Banca, Cristiane Gottschalk, Paulo Oliveira, José Messildo e Moisés Alves, por suas prestimosas colaborações com este trabalho;

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa doutoral concedida;

Aos Colegas do grupo de Estudos e Pesquisas em Linguagem Matemática (GELIM/UFPA) pelas sugestões que contribuíram para o desenvolvimento desta pesquisa;

À minha Hingrid, por estar ao meu lado, mesmo sem muitas vezes estar de fato. Você me mostrou que "existe com certeza o indizível".

À palavra que se fez carne.

"Dem höchsten Gott allein zu Ehren, Dem Nächsten draus sich zu belehren" [Ao Deus Altíssimo, para O honrar; e ao próximo, para o beneficiar] (Kleines Orgelbüchlein, Johann Sebastian Bach).

“No princípio era a Palavra, e a Palavra estava com Deus e a Palavra era Deus.
A Palavra era a fonte da vida, e essa vida trouxe a luz para todas as pessoas.”

(*Evangelho de João, Capítulo I, versos 1 e 4*)

“Salve, ó revelação! Teu mais brilhante assento
é o Evangelho Santo, o Novo Testamento.
Cobiço perscrutar o texto primitivo,
e com a maior lealdade, e o escrúpulo mais vivo,
transplantar, se puder, à locução materna,
à minha língua amada, a augusta frase eterna.
No princípio era a Palavra. É esta a letra expressa;
aqui está... No sentido é que a razão tropeça.
Como hei de progredir? Há aí quem tal me aclare?
A Palavra! Mas a Palavra é coisa inacessível.
Se apurar a razão, talvez se me depare
para o lugar de Palavra um termo inteligível...
Ponho isto: *No princípio era o Senso...* Cautela
nessa primeira linha; às vezes se atropela
a verdade e a razão com a rapidez da pena;
pois o Senso faz tudo, e tudo cria e ordena?...
É melhor *No princípio era a Potência...* Nada!
Contra isto que pus interna voz me brada.
(Sempre a almejar por luz, e sempre escuridão!)
... Agora é que atinei: *No princípio era a ação.*”

(Goethe, *Fausto, Quadro IV, cena 1*)

Resumo

Esta pesquisa se baseia na terapia de Wittgenstein, proposta para uma análise do ensino de álgebra. Apresentamos concepções tradicionais filosóficas que estão presentes nas teorias educacionais, que se relacionam às concepções essencialista e referencial, entre as quais destacamos o construtivismo piagetiano. A terapia de Wittgenstein se opõe ao essencialismo platônico e à concepção referencial da linguagem**.** Esta filosofia aponta para a natureza convencional dos nossos fundamentos, inclusive das tradições filosóficas, que aqui estendemos às teorias educacionais. Nesse sentido, trazemos a epistemologia do uso de Arley Moreno como contribuição da terapia de Wittgenstein para a compreensão de como se dá o conhecimento, de onde buscamos formular alguns pressupostos teóricos de aprendizagem. Realizamos uma análise de cunho epistemológico sobre a álgebra, onde mostramos sua evolução e a relação desta com o modo de se pensar seu ensino. A álgebra se constrói como uma linguagem, e, assim, apresenta as características gramaticais, no sentido Wittgensteiniano. A partir do referencial teórico apresentado empreendemos uma análise de textos e documentos: 102 dissertações e teses entre 2006 e 2015, quatro referenciais de destaque, documentos oficiais desde os PCN e cinco livros didáticos, destacando em todos estes o ensino de álgebra e o referencial teórico seguido. As concepções essencialista e referencial estão presentes na construção do conhecimento algébrico no decorrer da história, e consequentemente, em seu ensino, apresentando-se na forma de teorias educacionais que buscam fundamentos extralinguísticos para explicar como se dá o conhecimento. A terapia filosófica de Wittgenstein pode contribuir apresentando as confusões causadas por tais fundamentos filosóficos da construção histórica da álgebra, assim como ao seu ensino, já que a ela tem um caráter não-essencialista e considera que é a linguagem a fonte de produção de significados. Objetivamos realizar uma análise baseada na terapia de Wittgenstein, para compreendermos estes fundamentos filosóficos, que causam confusões, os caminhos possíveis de pesquisa e, em consequência, do ensino de álgebra, e assim apresentar as possibilidades pedagógicas. Pretendemos apresentar não só as confusões e suas consequências, mas as possibilidades oferecidas pela terapia de Wittgenstein, para a compreensão de concepções teóricas em uso na educação, buscando trazer, então, possibilidades de pesquisa e de ensino da álgebra escolar. A partir da epistemologia do uso, a álgebra pode ser entendida como tendo uma gramática, e assim, ela é autônoma, arbitrária e possibilita relações internas de sentido. A autonomia do aluno se dá a partir do conhecimento de regras e dos seus usos em diversas situações. O aluno começa, a partir de um determinado momento não previsível *a priori*, a “fazer lances” no jogo de linguagem envolvendo a álgebra, inclusive aplicando regras a outros tipos de situações desconhecidas e não devido a um conhecimento *a priori* do conteúdo.

Palavras-chave: Terapia de Wittgenstein. Ensino de álgebra. Epistemologia do uso.

Résumé

Cette recherche est basée sur la thérapie de Wittgenstein proposée pour une analyse de l'enseignement de l'algèbre. Voici les conceptions traditionnels philosophiques qui sont présents dans les théories d'éducation qui se rapportent aux conceptions essentialistes et référentielle, lesquels nous soulignons le constructivisme piagétien. La thérapie de Wittgenstein oppose l'essentialisme platonicien et la conception référentiel du langage. Cette philosophie souligne le caractère conventionnel de nos fondations, y compris les traditions philosophiques, ici étendues aux théories de l'éducation. En ce sens, nous apportons l'épistémologie de l'usage de Arley Moreno comme contribution de la thérapie de Wittgenstein pour le compréhension comment est la connaissance de l'endroit où nous cherchons à formuler des hypothèses théoriques de l'apprentissage. Nous avons effectué une analyse épistémologique de l'algèbre, où nous montrons son évolution et sa relation avec la façon de penser leur enseignement. L'algèbre est construit comme un langage, et fournit ainsi les caractéristiques grammaticales, dans le sens wittgensteinienne. Dans le cadre théorique présenté, nous procédons à une analyse de textes et de documents: 102 dissertations et thèses entre 2006 et 2015., quatre références de premier plan, les documents officiels à partir des PCN et cinq manuels, mettant en évidence dans tous ces, le enseignement de l'algèbre et le cadre théorique suivi. Les conceptions essentialistes et référencielle sont présents dans la construction de la connaissance algébrique dans le cours de l'histoire, et donc, dans son enseignement, présentant sous la forme de théories éducatives qui cherchent fondamentaux extralinguistiques pour expliquer comment est la connaissance. La thérapie philosophique Wittgenstein peut contribuer présentant la confusion causée par de tels fondements philosophiques de la construction historique de l'algèbre, ainsi que son enseignement, car il a un caractère non-essentialiste et estime que la langue est la source de production de significations. Nous avons cherché à effectuer une analyse basée sur la thérapie Wittgenstein, pour comprendre ces fondements philosophiques qui provoquent confusions, les avenues possibles de la recherche et, par conséquent, l'enseignement de l'algèbre, et présenter ainsi les possibilités pédagogiques. Nous avons l'intention de présenter non seulement la confusion et de ses conséquences, mais les possibilités offertes par la thérapie Wittgenstein à la compréhension des concepts théoriques utilisés dans l'éducation, cherchant à apporter ensuite les possibilités de recherche et de l'enseignement de l'algèbre scolaire. À partir de la epistemologie de l'usage, l'algèbre peut être considérée comme ayant une grammaire, et ainsi, il est autonome, arbitraire et elle permet des relations internes de sens. L'autonomie de l'étudiant est donnée à partir de la connaissance des règles et de leurs usages dans diverses situations. L'élève commence à partir d'un point donné pas prévisible a priori, la «soumission» dans le jeu de langage impliquant l'algèbre, y compris l'application des règles à d'autres types de situations inhabituelles et pas en raison d'une connaissance a priori du contenu.

Mots-clés: Thérapie de Wittgenstein. L'enseignement de l'algèbre. L'epistémologie de l'usage.

Abstract

This research is based on Wittgenstein's therapy proposed for an analysis of algebra teaching. We presented here philosophical traditional conceptions in educational theories that relate to the essentialist and referential conceptions, among which the piagetian constructivism. Wittgenstein's therapy is opposed to Platonic essentialism and to the referential conception of language. This philosophy points to the conventional nature of our foundations, including the philosophical traditions, here extended to educational theories. In this sense, we bring the epistemology of the use of Arley Moreno as Wittgenstein's therapy contribution to understanding how is the knowledge of where we seek to formulate some theoretical assumptions of learning. We conducted an epistemological analysis about algebra, where we show its evolution and its relation to the way of thinking their teaching. The algebra is constructed as a language, and thus presents the grammatical features in the sense Wittgensteinian. From the theoretical framework presented undertake an analysis of texts and documents: 102 dissertations and theses between 2006 and 2015, four prominent references, official documents from the PCN and five textbooks, highlighting in all these the algebra teaching and the theoretical framework followed. The essentialist and referential conceptions are present in the construction of algebraic knowledge in the course of history, and therefore, in his teaching, presenting in the form of educational theories that seek extralinguistic fundamentals to explain how is knowledge. The Wittgenstein's philosophical therapy can contribute presenting the confusion caused by such philosophical foundations of historical algebra construction, as well as its teaching, as it has a non-essentialist character and believes that is the language the source of production of meanings. We aim to perform an analysis based on Wittgenstein's therapy, to understand these philosophical foundations, which cause confusion, the possible paths of research and, consequently, the teaching of algebra, and thus present pedagogical possibilities. We intend to present not only the confusions and their consequences, but the possibilities offered by the Wittgenstein's therapy, for the understanding of theoretical conceptions in use in education, seeking to bring, then, possibilities of research and teaching of school algebra. From the epistemology of use, algebra can be understood as having a grammar, and thus, it is autonomous, arbitrary and enables internal relations of meaning. The autonomy of the student is given from the knowledge of rules and their uses in various situations. The student starts from a given point not predivible a priori, the "bid" in the language game involving algebra, including applying rules to other types of unfamiliar situations and not due to a priori knowledge of the content.

Keywords: Wittgenstein's therapy. Algebra teaching. Epistemology of the use.

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Sumário

Considerações iniciais

“os nomes das cores não são as cores.
As cores são:
preto azul amarelo verde vermelho marrom”
(Arnaldo Antunes, *Tudos*)

O que é álgebra? A resposta desta pergunta depende da experiência com esta palavra, de quem irá responder. Alguém que nunca viu essa palavra não terá noção alguma de qual seja a resposta, enquanto que um estudante dos anos finais do ensino fundamental talvez diria que álgebra é “fazer contas com letras”. Um outro estudante, do ensino médio, poderia responder que álgebra é “resolver equação”, talvez por que este já conheça o termo, assim como poderia acrescentar outros, como inequação e/ou função, como um professor de matemática que acrescentaria a esta resposta outros conteúdos, como polinômios, corpos, anéis, etc. E assim a definição de álgebra poderia avançar, segundo as visões de matemáticos, filósofos, educadores, entre outros pensadores. Considerando ainda a evolução da álgebra na história, que inicialmente era tratada como a área que estudava as equações, mas que depois passou a estudar estruturas a partir de uma sintaxe própria. Acrescentamos[1] a isso seu papel na educação, que no decorrer dos anos, passa de técnicas operacionais de cálculos, para uma concepção abstrata de uma competência ou um raciocínio, denominada, então, como o “pensar algébrico” - a álgebra, então, parece longe de uma definição..., mas parece haver a ideia de que há uma essência do que seja álgebra, que está presente em todas as possibilidades de definição desta.

Santo Agostinho (1996, p. 261) mostra um enigma nas *Confissões*: “O que é, por conseguinte, o tempo? Se ninguém me perguntar, eu sei; se quiser explicar a quem me fizer a pergunta, já não sei”. Com Moreno (2012) entendemos que Agostinho está dentro de uma concepção que chamaremos aqui de *essencialista*, que está presente no pensamento filosófico tradicional. Para Agostinho sabe-se o que é tempo, apenas não se sabe explicá-lo, o que mostraria que há uma *essência* por trás desta palavra, e assim seria necessário buscar descobrir tal essência. Do mesmo modo a álgebra: sabe-se o que é, mas não se sabe explicar.

Isto se mostrou ao longo de toda a história do conhecimento, que tem buscado fundamentos últimos das palavras, que representam conceitos. Moreno (2012) explica que a ciência se deteve apenas em saber as causas de determinadas palavras, e para isso ofereceu

---

[1] Utilizarei durante todo o texto a primeira do plural, pois parto do pressuposto que este trabalho foi produzido em conjunto, devido às contribuições da Profª. Drª. Marisa Silveira, do GELIM (Grupo de estudos e pesquisas em linguagem da matemática), dos membros da banca e dos referenciais utilizados, com exceção desta nota e de quando eu me referir à alguma ação realizada diretamente por mim na minha experiência docente

diversos modelos, que são provisórios e falseáveis, enquanto que a filosofia buscou definir tais palavras, e assim se colocou dificuldades infindas. A filosofia não permite olhar para "o que está à nossa frente", isto é, não se olha para "as aplicações das respectivas palavras em situações específicas de uso da linguagem" (MORENO, 2012, p. 78), mas busca-se saber seus fundamentos últimos, a sua essência.

Wittgenstein (BT, §302)[2] se opõe ao essencialismo ao dizer que se lhe perguntassem o que é conhecimento, ele listaria itens de conhecimento, pois não há um elemento comum a ser encontrado em tudo que se pudesse chamar de conhecimento. Se nos perguntassem o que é cor, o que deveríamos responder? Há uma essência que define todas as cores? Ou deveríamos dizer: cor é preto, azul, amarelo, verde, vermelho, marrom e outras. Se nos perguntassem o que é álgebra, talvez o mais sensato seria dizer: álgebra é equação, inequação, função, cálculo com letras, etc.

A busca pela essência das palavras impede de se olhar apenas, e simplesmente, para os seus usos na nossa linguagem, isto é, usa-se palavras como conhecimento, cor e álgebra de vários modos, e *isto* é o que elas são. Precisa-se voltar para a linguagem, e não a tomar apenas em seu uso referencial de uma suposta essência que a fundamenta. A filosofia essencialista tem se apoiado sobre uma concepção referencial da linguagem, que também pode ser exemplificada em Agostinho nas *Confissões*: "aprendi pouco a pouco a compreender quais coisas eram designadas pelas palavras que eu ouvia pronunciar repetidamente nos seus lugares determinados em frases diferentes" (1996, p. 46). As palavras substituem os objetos, e estes então são compreendidos.

Portanto, relacionamos à filosofia tradicional estas duas concepções: essencialista e referencial. A primeira está ligada ao conhecimento e a segunda à linguagem. Uma concepção essencialista do conhecimento é aquela que se refere à crença em uma suposta essência por trás dos conceitos, um significado essencial que perpassaria o uso das nossas palavras em diferentes contextos, como se houvesse uma referência última fora da linguagem. A concepção referencial da linguagem criticada por Wittgenstein considera que a linguagem teria exclusivamente a função de se referir a algo extralinguístico desconsiderando todas as outras funções da linguagem.

---

[2] Ao citar as obras de Wittgenstein, seguiremos um padrão utilizado entre os comentadores das obras do filósofo. Usamos as iniciais do título da obra para indicá-la, como nesse caso, BT, para *Big Typescript*, seguido do número do aforismo do qual a citação foi retirada. O aforismo será indicado pelo símbolo "§". Só não faremos assim quando citarmos trechos de partes não organizadas em aforismos. Algumas obras são divididas em partes, então, nestas, indicaremos tais partes, com números romanos, antes do aforismo. As siglas utilizadas encontram-se nas referências, logo após o título de cada livro.

Mas ser essencialista implica ser referencial e vice-versa? Defendemos que sim, pois o essencialismo tem a ver com a ideia de que há uma espécie de mundo exterior que coordena todo o conhecimento, havendo assim uma relação entre suas partes e isso nos leva a noção de que a linguagem seria apenas uma espécie de “apresentação” do conhecimento deste mundo exterior. Estas concepções tem sido a marca da filosofia tradicional, que permanece viva e que tem influenciado diretrizes educacionais, além de não oferecerem a devida análise sobre a construção e transmissão do conhecimento e sobre as confusões que elas mesmas geram na educação, que apresentamos durante este texto. Tais concepções têm fundamentado teorizações sobre o ensino, a aprendizagem, a matemática e a álgebra, que é nosso objeto de estudo.

Wittgenstein não descarta a ideia de essência, pois sua crítica é em relação ao essencialismo *platônico*, ou mesmo neoplatônico, como é o caso de seu mestre Frege, quando este postula a necessidade de exatidão conceitual como condição para que a linguagem possa representar precisamente o pensamento. Mas estas críticas não significam que Wittgenstein abdique da noção de essência. Para Wittgenstein esta essência está nas regras que usamos, que são de natureza convencional, e não mais absoluta como para Platão, ou com limites precisos como exigido por Frege. Wittgenstein também não nega o uso referencial da linguagem, o problema é quando se considera este como o único papel que ela desempenha, isto é, descrever e comunicar algo fora da linguagem. O filósofo compreende que há uma função referencial da linguagem, no entanto, não entende como a única função, mas uma entre várias.

Nosso trabalho trata de matemática, mais especificamente álgebra e educação em um prisma filosófico. Thom (1973, p. 204) entende que “Na verdade, quer se queira quer não, toda pedagogia matemática, mesmo que com pouca coerência, repousa sobre uma filosofia da matemática”[3][4]. A filosofia pode auxiliar na pesquisa em educação, em particular, no nosso caso, na educação matemática, por que é a partir de escolas filosóficas que se fundamentou as ideias escolares, “[...] a educação é um campo sistematicamente aprofundado pela reflexão filosófica, ao longo de sua história” (MORENO, 2014, p. 61). Não só a educação, mas o próprio pensamento humano e a forma do homem viver no mundo foram afetadas de alguma forma pela filosofia.

A educação se dá em grupos, com a direção de um professor. Tal modelo tomou a forma que tem apenas a partir da idade média com Comenius há cerca de 500 anos. O ato de educar

[3] Todas as traduções de textos em língua estrangeira são de nossa autoria. Optamos também pela citação do original em notas de rodapé.
[4] “In fact, whether one wishes it or not, all mathematical pedagogy, even if scarcely coherent, rests on a philosophy of mathematics”

sempre existiu, pois sempre foi necessário ao homem repassar seus conhecimentos adquiridos aos seus descendentes.

Por filosofia, Marías (2004) entende ciência e modo de vida. A filosofia se inicia quando se pensa sobre o conhecimento e sobre o modo de vida que se tem a partir de tal compreensão. A epistemologia se constitui como uma área da filosofia. Os filósofos antigos, como os pré-socráticos, começaram a se perguntar o porquê das coisas e partir daí começou a se formular as respostas. Uma das perguntas que mais se fez foi: como se dá o conhecimento? A resposta ou a discussão que se fazia a partir desta pergunta fundamentou não só a ciência, mas o modo de viver humano e consequentemente a educação.

Na Grécia antiga houve o desenvolvimento do realismo, principalmente com Platão e Aristóteles, que se mantém por quase toda idade antiga e média, e o idealismo que surge com Descartes na idade moderna e se desenvolve com Kant e Hegel. Na idade moderna o realismo é remodelado por Locke, chamado agora de empirismo. E desse modo, a filosofia se desenvolveu perguntando e teorizando sobre diversas questões, e tal desenvolvimento esteve sempre atrelado ao modo de se pensar a educação. Tanto o realismo, como idealismo trazem as concepções essencialista e referencial pois consideram que o conhecimento é extralinguístico, presente em um mundo ideal platônico, mental ou empírico, e que a linguagem teria apenas a função de referência de tal conhecimento.

Nos séculos XIX e XX, há um florescimento de novas ciências, como psicologia e sociologia, e o desenvolvimento de teorias educacionais em formas mais sistemáticas, que se apoiam em desenvolvimentos filosóficos realistas e idealistas. A educação do século XX se pautou em diversas teorias, com destaque para Dewey, Skinner, Piaget e Vygotsky. O Brasil seguiu estas tendências, que vinham da Europa e dos EUA.

No final do século XIX surgiu um movimento filosófico conhecido como *virada linguística* que realizou uma revolução copernicana quanto ao conhecimento, pois passou a enfatizar a linguagem em suas análises filosóficas. Este movimento abrangeu o estruturalismo de Saussure, a hermenêutica filosófica de Heidegger e Gadamer e a filosofia da linguagem de Wittgenstein. Este novo movimento busca trazer a linguagem para o centro da discussão sobre como se dá o conhecimento. Deixa-se para trás a preocupação com o objeto, no realismo, e com o sujeito, no idealismo, e entende-se que a possibilidade de conhecimento se dá na linguagem, na comunicação e na interação social. Wittgenstein é considerado um dos expoentes da virada linguística, assim como é o autor que melhor se interpôs às concepções essencialista e referencial, questionando não apenas tais concepções, mas o próprio fazer filosófico, que por ele é tido como uma atividade.

Wittgenstein é conhecido por ter produzido duas filosofias, apresentadas em duas obras. Na primeira, *Tractatus Lógico-philosophicus*, produzida em sua juventude, busca mostrar que os problemas filosóficos só existem por que não compreendemos a lógica de nossa linguagem, no entanto ele muda seu pensamento, e em sua segunda obra, *Investigações filosóficas*, passa a entender que os problemas filosóficos existem devido à falta de compreensão do uso de nossa linguagem. Nas duas filosofias Wittgenstein se posiciona contra a existência de problemas filosóficos de fato, considerando que tais problemas existem por uma não compreensão da linguagem, no entanto na primeira por uma má compreensão de sua lógica, e na segunda do seu uso ordinário. Nesse sentido, Wittgenstein compreende que é necessário realizar uma terapia de posicionamentos filosóficos dogmáticos – do realismo, idealismo, empirismo e seu próprio posicionamento no *Tractatus* - que buscam explicações definitivas ou essencialistas e que por isso consideram a linguagem em sua função referencial, não percebendo que nela é que reside a fundamentação para toda significação. Para o filósofo o significado de uma palavra está no uso que se faz dela em nossa vida cotidiana.

Desse modo, para se saber o que é álgebra, é necessário conhecer alguns de seus usos que são realizados com tal denominação. Expressões do tipo $5a + 3a$, equações do tipo $x^2 - 4x - 5 = 0$, funções do tipo $y = 2x - 3$, são álgebra. Não se pode esperar que aprendizes que não conhecem tais usos possam descobrir[5] ou deduzir que isto seja álgebra. Claro que este é só um exemplo, pois não queremos discutir apenas sobre o termo *álgebra*, mas sobre os efeitos que as concepções essencialistas e referencial produzem quanto à compreensão sobre a álgebra em sua construção e em pesquisas educacionais, bem como, no próprio ensino de álgebra por meio de sua transmissão. Assim, pretendemos verificar algumas concepções na educação algébrica, baseados na terapia de Wittgenstein. Não realizaremos aqui a terapia nos moldes wittgensteinianos, mas nos baseamos nela para vislumbrar possibilidades pedagógicas.

Não pretendemos produzir uma proposta de ensino, pois consideramos, assim como Wittgenstein, que as teorias já estão postas e elas precisam de tratamento, ou seja, não refutamos tudo o que tais teorias produziram, mas apenas entendemos que tais causam confusões, que ocorrem quando são tomadas como fundamentos últimos e quando não se considera seu caráter convencional.

---

[5] O termo “descoberta” neste texto geralmente se refere à crença de que os seres humanos *descobrem* um conhecimento presente em algum mundo metafísico, ou seja, no sentido que tal conhecimento, de alguma forma, já exista *a priori*. Porém, alertamos que em uma perspectiva wittgensteiniana também pode haver *descoberta*, mas em um sentido diferente, pois seria *descobrir* na linguagem, *descobrir-se-iam* propriedades presentes em regras já conhecidas. Por exemplo, quando se sabe as regras da soma, pode-se *descobrir* a propriedade comutativa. Mas tal capacidade não está em um potencial natural humano ou tal propriedade não é uma referência linguística de conhecimento metafísico, ideal ou empírico, mas é uma possibilidade que a linguagem oferece.

Wittgenstein não buscou produzir uma filosofia de fato, mas realizar uma terapia de filosofias existentes, assim como, dar suporte para a terapia de filosofias que viessem a existir. O filósofo se opõe ao dogmatismo das filosofias essencialistas e busca não produzir teses, ou seja, para ele a filosofia é uma “prática de esclarecimento conceitual” (MORENO, 2012, p. 74). De acordo com Moreno (2012, p. 75), quando nos encontramos embaraçados por confusões conceituais “o esclarecimento terapêutico viria pela apresentação das regras de uso das palavras”. Tal esclarecimento é enfim realizado quando o sujeito consegue “ver que o fundamento que se atribuía ao sentido nada mais é do que um fundamento convencional elaborado no processo de uso das palavras, sob a forma de regras normativas de sentido”, e assim, “a cura consistiria em admitir que o fundamento tradicional deva ser substituído por um fundamento *linguístico*, sem outro fundamento do que as técnicas envolvendo palavras”. Moreno (2005, p. 271) mostra que a tarefa da terapia filosófica é “curar as confusões próprias e, apenas em seguida, como consequência, tratar as ilusões socialmente disseminadas através de teses realistas, idealistas, mentalistas, behavioristas, formalistas etc., a respeito dos fundamentos extralinguísticos do sentido”.

Portanto, nossa análise pretende se dar sobre a forma como a álgebra foi construída, os fundamentos teóricos (e filosóficos) do seu ensino, buscando perceber aspectos dogmáticos, que no caso são aqueles que se relacionam com o realismo ou idealismo, isto é, são os que se preocupam com causas psicológicas ou empíricas, que apresentam as concepções essencialista e referencial. Objetivamos realizar uma análise baseada na terapia de Wittgenstein, para compreendermos estes fundamentos filosóficos, que causam confusões, os caminhos possíveis de pesquisa e, em consequência, do ensino de álgebra, e assim apresentar as possibilidades pedagógicas.

Tratamos da álgebra de modo geral, a partir de sua construção histórica, sua epistemologia e de como seu ensino foi pensado no decorrer dos anos. Destacamos em nossos exemplos e análises a álgebra escolar da educação básica, principalmente do ensino fundamental, por ser o conteúdo que se apresenta em destaque nos textos e documentos que são analisados. Nossa intenção é apresentar possibilidades do ensino introdutório de álgebra, que aparece ser a questão mais problemática, já que há uma discussão sobre onde a álgebra deveria entrar no currículo, havendo tentativas teóricas e práticas da inserção na educação infantil, com Schliemann, Carraher e Brizuela (2011), assim como a inserção apenas no ensino médio, como é o caso do ensino na Inglaterra na década de 1980, apresentado em Lins e Gimenez (2001).

Muito tem se pensado e produzido sobre a educação matemática em geral no Brasil nos últimos anos. A matemática tem peculiaridades que a tornam complexa e seu ensino torna-se tão complexo quanto ela própria. Nas tentativas de diversos pesquisadores e, por consequência, do governo e dos professores, nota-se que há uma tentativa de amenizar as dificuldades inerentes a esta disciplina, criando métodos de ensino, que por sua vez são baseados em diversas teorias, algumas dentro das concepções aqui destacadas – essencialista e referencial.

A dificuldade intrínseca do conhecimento matemático não pode ser desprezada, nem "mascarada" e deve-se buscar cada vez mais entendê-la na perspectiva de obter um ensino mais eficiente. A especificidade deste conhecimento não se pode negar e, muito menos entender tal especificidade como apenas uma questão cultural devido as influências de forças sociais superiores, no decorrer da história. Devido a estas questões, Giardinetto (2004) mostrou que, em alguns estudos sobre educação matemática, a crítica à *forma de se apresentar o conteúdo matemático* passou a ser uma crítica ao próprio *conteúdo matemático*. Avaliamos que é preciso aprofundar mais o debate sobre o ensino de matemática e é imprescindível discutir sobre o ensino dos conteúdos matemáticos, visando compreender como ele deve ser e como ocorre a sua aprendizagem a partir da compreensão dos objetos matemáticos, considerando o caráter linguístico.

As peculiaridades e dificuldades da matemática em geral, consequentemente, estão na álgebra, por apresentar um caráter linguístico diferente, assim como a aritmética e a geometria. Os conteúdos algébricos devem ser analisados em sua linguagem, em seus conteúdos mais específicos, evitando uma visão essencialista da álgebra, como se esta tivesse conceitos presentes em toda a matemática e mesmo fora dela, que é o que leva a tomar sua linguagem apenas na sua função referencial. A álgebra, na perspectiva destas concepções que não destacam o papel da linguagem, é tomada então como uma área da matemática que contém conceitos mais próximos da intuição, da lógica, de aspectos abstratos da realidade. Aqueles que nascessem com algum dom nesse sentido, é que poderiam enxergar tais aspectos. No entanto quando vemos por um prisma linguístico, somos levados a pensar que diante das dificuldades, os conteúdos devem ser apresentados e as regras expostas e exercitadas, para que com o tempo e prática, juntamente com o desenvolvimento de técnicas sejam incorporadas e utilizadas em problemas de diversas formas, considerando que compreender significativamente alguns conteúdos matemáticos realmente demanda tempo e treino de uso de suas regras.

Adotamos Wittgenstein como principal referencial teórico por se opor às concepções essencialista do conhecimento e referencial da linguagem, e por apresentar uma terapia filosófica para resolver os problemas gerados por tais concepções. Trazemos o filósofo brasileiro Arley Moreno, que a partir das obras de outros filósofos, como Descartes, Husserl, Kant e Granger, mas apoiado principalmente em Wittgenstein, formulou uma teoria da representação linguística sobre o papel da linguagem na organização de nossas experiências empíricas ou mentais, que ele denomina de *epistemologia do uso*. Nosso suporte teórico está pautado nas ideias de Wittgenstein e tomamos as reflexões de Arley Moreno, devido a forma como ele sistematizou a filosofia do pensador austríaco, até porque este não propôs nenhuma teoria ou método de análise. A educadora Cristiane Gottschalk colabora em nosso trabalho pela abordagem que faz em educação, apoiando-se na epistemologia do uso de Moreno e em Wittgenstein.

Destacamos em nosso trabalho o construtivismo e teorias próximas, pois compreendemos que há concepções filosóficas que fundamentam esta atividade e que causam confusões devido as suas compreensões sobre conhecimento e linguagem. Portanto, nossa análise se realizará por meio da exposição das ideias comumente utilizadas pelos pesquisadores brasileiros, encontradas em produções acadêmicas, referenciais teóricos, documentos oficiais e livros didáticos, buscando apresentar alguns problemas, que afetam não só a forma de se fazer pesquisa, mas em consequência o ensino de álgebra, e baseando-nos em Wittgenstein, Moreno e Gottschalk, pretendemos apresentar não só as confusões e suas consequências, mas as possibilidades oferecidas pela terapia de Wittgenstein, para a compreensão de concepções teóricas em uso na educação, buscando trazer, então, possibilidades de pesquisa e de ensino da álgebra escolar.

A descrição terapêutica de acordo com Moreno (2012, p. 79) deve cumprir pelo menos três tarefas: *"situar* as confusões conceituais, *diagnosticar* as suas fontes e, finalmente, fornecer um *tratamento* para elas". Quando Wittgenstein fala em terapia ele está tratando do uso de palavras por meio da discussão de concepções filosóficas tradicionais ou mesmo do senso comum, ou seja, ele não trata de ensino. A terapia permite que se compreenda que há confusões conceituais presentes em textos e documentos que tratam do ensino de álgebra, e que os mesmos se fundamentam em princípios teóricos que uma análise detida pode levar a identificar, e assim é possível situar as confusões e diagnosticar suas fontes.

Diante disto, perguntamos: Estão presentes fundamentos filosóficos, como o realismo e o idealismo, que se apoiam em concepções essencialista e referencial, na construção do conhecimento algébrico, no decorrer da história, e em seu ensino? Quais as contribuições da terapia filosófica de Wittgenstein sobre tais fundamentos e que possibilidades de cura oferece?

Nos dois primeiros capítulos apresentaremos duas linhas teóricas opostas. No primeiro as concepções essencialista e referencial, e no segundo uma concepção que compreende de maneira diferente as noções de essência e referência, apoiada em Wittgenstein. Apresentamos no primeiro capítulo as concepções tradicionais filosóficas que compreendemos estar presentes nas discussões sobre o ensino de álgebra, ou seja, traremos uma caracterização mais profunda do realismo e idealismo, como exemplos de posicionamento filosóficos relacionados às concepções essencialista e referencial, mostrando o desenvolvimento, e a relação de suas concepções com o ensino de modo geral, mas também apresentando alguns direcionamentos referentes à matemática. Concluiremos fazendo também a carateterização de algumas teorias educacionais, como as da escola nova, o sócio-interacionismo de Vygotsky, a aprendizagem significativa de Ausubel, entre outros, mas com destaque para o construtivismo piagetiano.

No segundo capítulo contextualizaremos histórica e teoricamente a filosofia de Wittgenstein e a epistemologia do uso de Arley Moreno. Abordaremos mais detidamente a própria terapêutica wittgensteiniana e o que ela possibilita verificar, bem como a possibilidade de uma epistemologia do uso inaugurada por Moreno, e a sua contribuição para a compreensão de como se dá o conhecimento.

No terceiro capítulo trazemos uma análise de cunho epistemológico sobre a álgebra, onde mostramos sua evolução e a sua relação com o próprio desenvolvimento da filosofia. Também trazemos uma análise histórica sobre o ensino de álgebra, apresentando as influências de teorias educacionais como o construtivismo piagetiano no seu ensino. Apresentaremos o percurso histórico da álgebra, e como esta foi influenciada – e influenciou – concepções filosóficas, ou seja, faremos uma construção epistemológica da mesma, não esquecendo das repercussões educacionais desta relação entre a história da álgebra e concepções filosóficas.

No quarto capítulo apresentamos uma análise de textos e documentos. Identificamos os referenciais teóricos de 102 dissertações e teses entre 2006 e 2015 que tratam sobre o ensino de álgebra, analisamos os principais referenciais teóricos identificados relacionados à álgebra, os documentos oficiais desde os PCN, no que concerne à álgebra, e o tratamento de conteúdos algébricos presentes em cinco livros didáticos. Traremos, então, uma análise que se propõe mais em identificar alguns aspectos teóricos, que pressupomos estar baseados nas concepções apresentadas no primeiro capítulo. Buscamos, assim, apresentar o formato que se dá a educação algébrica no Brasil, dado que já teremos elementos teóricos para fazer algumas afirmações.

No quinto e último capítulo apresentamos uma categorização de problemas e pontos destacados no quarto capítulo, e assim, pretendemos apresentar repercussões e possibilidades, em forma de ensaios na perspectiva wittgensteiniana, em que buscamos tratar alguns temas que consideramos ser motivo de confusões devido aos referenciais adotados estarem inseridos ou muito próximos às concepções essencialista e referencial da linguagem. Mostraremos, assim, algumas contribuições da epistemologia do uso de Moreno e da filosofia da linguagem de

Wittgenstein para analisar a construção da álgebra na história e suas formas de transmissão. Desse modo, buscamos responder às perguntas antes colocadas.

Nossa hipótese é de que o realismo e o idealismo, carregando as concepções essencialista e referencial, influenciam no ensino de álgebra, apresentando-se na forma de teorias educacionais que buscam fundamentos extralinguísticos, como o construtivismo, para explicar como se dá o conhecimento, e assim propor metodologias de ensino. Nesse sentido, a terapia filosófica de Wittgenstein pode contribuir para que se compreenda que há confusões causadas por tais fundamentos filosóficos ao ensino de álgebra, por esta ter um caráter não-essencialista e considerar que é a linguagem a fonte de produção de significados. Desse modo, oferece possibilidades de cura, e de uma percepção diferente sobre a álgebra, por compreender que não há uma essência para álgebra, pois seu significado está no seu uso, então esta é uma atividade linguística. É a linguagem que fornece significados, de acordo com os usos que se faz em seus diferentes contextos e no caso da matemática, tais contextos podem ser intra ou extra matemáticos, ou seja, é uma concepção que adota um caráter não-essencialista do conhecimento e não-referencial da linguagem.

Esta é uma questão de fundamental importância para a análise do ensino de álgebra, pois contribui para que esta seja colocada em um âmbito próprio de análise, levando em consideração seus conceitos específicos (incógnita, variável etc.), tratando de forma particular sua linguagem e especificando nos contextos algébricos conceitos já usados em outras áreas, como adição, multiplicação, potência e igualdade na aritmética ou quadrado e cubo da geometria, além de outas áreas, como contextos cotidianos e a própria lógica. Assim, a álgebra passaria a ser compreendida como autônoma, arbitrária e que possibilita relações internas de sentido, que possibilita relações com outras áreas da matemática e em geral, devido semelhanças e não por uma essência. Dessa maneira, a utilização da comparação da álgebra com outros conteúdos deveria ser mais bem refletida pelos educadores. Portanto, apresentaremos os limites das concepções essencialista e referencial no ensino da álgebra, a partir de uma nova visão que Wittgenstein possibilita a partir de sua crítica ao uso referencial da linguagem e à busca de fundamentos últimos, de uma essência fora da linguagem.

Nossa hipótese se completa com a ideia de que as concepções essencialista e referencial levam aqueles que se apoiam nelas a buscar fundamentos últimos e a tomar a linguagem apenas em sua função referencial, e desse modo o ensino estaria pautado na crença de que o conhecimento se dá em âmbito extralinguístico, que poderia ser ideal, mental ou empírico. Na álgebra, isto é tomado, a nosso ver, pela ideia de que o conhecimento estaria em algum lugar ideal platônico, ou em uma potencialidade natural no aluno ou em atividades empíricas, concretas, cotidianas ou contextualizadas, e que sua simbologia seria apenas a expressão de tal conhecimento. Dessa forma, "$a + a$", por exemplo, deveria ser compreendido pelo aluno como uma soma de qualquer número por ele mesmo, ou como o agrupamento de dois objetos iguais. No entanto, será que o aluno consegue ter essa dedução, antes de ser apresentado às regras linguísticas? As concepções aqui criticadas parecem acreditar que há uma essência *a priori*, no entanto, consideramos tal essência *a posteriori*, com variados usos. O uso vai ampliando os significados, e com o tempo um aprendiz experiente conseguirá olhar para atividades diversas e enxergar o que há em comum entre elas.

O que é álgebra? Passado o tempo e tendo aplicado tal palavras em diversos usos, conseguimos talvez apontar para determinadas atividades, e dizer que é álgebra. Conseguimos olhar para situações diversas e ver expressões, equações e relações funcionais. Mas mesmo assim talvez não tenhamos uma resposta conclusiva, e precisamos indicar, listar, apontar, para poder explicar o que é.

O que é álgebra? Álgebra não é o nome "álgebra", álgebra é equação, inequação, função, ... álgebra é $5a + 3a$, $x^2 - 4x -5 = 0$, $y = 2x - 3$...

1 Essência e referência

“Se podes olhar, vê. Se podes ver, repara”
(José Saramago, *Ensaio sobre a cegueira*)

A partir da virada linguística, mudou-se a percepção sobre como se dá o conhecimento, que retira a linguagem de uma função apenas referencial e passa a não buscar os fundamentos últimos do conhecimento. Neste capítulo pretendemos apresentar fundamentos filosóficos que antecederam a virada linguística, alicerçados nas concepções essencialista e referencial. Apresentamos algumas teorias educacionais, com destaque para o construtivismo, que se baseiam sobre tais fundamentos, e consequentemente, sobre tais concepções. Desse modo, discorremos sobre o realismo e o idealismo, e suas consequentes compreensões sobre como é adquirido o conhecimento, e o lugar da linguagem em cada um destes fundamentos.

1.1 As bases filosóficas

Dummet (1993) em sua análise sobre as origens da filosofia analítica compreende a história da filosofia em três grandes períodos. A primeira vai do século VII a.C. até o século XIV d.C., compreendendo a idade antiga e a idade média. Esse período foi dominado pelo *realismo*. O segundo grande período vai do século XIV ao fim do século XIX, período que compreende em grande parte, a idade moderna, onde se desenvolveu o *idealismo*. O terceiro período vai do fim do século XIX até os tempos atuais, tendo sua maior efervescência no início do século XX, quando se rompe com a filosofia moderna, e a *linguagem* passa ser estudada mais profundamente. No entanto, esta classificação pode não ser tão bem aceita com esse caráter cronológico, devido as características tanto do realismo, quanto do idealismo, ou mesmo estudos sobre o papel da linguagem na filosofia, aparecerem em outros momentos da história. Discutimos os dois primeiros neste capítulo, e o terceiro deixamos para o capítulo seguinte.

O que marca o primeiro período é a preocupação fundamentalmente com a ontologia, pois se perguntava sobre *o ser*, *o existir* e *a realidade* em si. Desse modo, desejava-se saber o que é a verdade, a existência, o bem, o belo, o conhecimento, o triângulo, o número 1, etc., tomando estas questões como realidades em si, por isso é conhecido como realismo.

O realismo tem como principal pensador o filósofo grego Platão. Ele é considerado realista na medida em que suas ideias tinham uma existência própria em uma outra realidade, denominada por ele de mundo das ideias, que estaria fora de nossa realidade conhecida, esta, que para ele era apenas a aparência daquele mundo ideal e perfeito. Platão considerava que os objetos tinham uma forma divina de existência e o que havia em nossa realidade eram apenas sombras desse mundo ideal ou celestial, onde estariam as *primeiras* ideias do conhecimento e no nosso mundo estavam apenas as cópias desse mundo ideal, e nós humanos, precisaríamos descobrir essas ideias. Neste mundo em que vivemos, o sensível, precisaríamos através da *dialética* chegar ao conhecimento do mundo das ideias, o mundo inteligível. Para Platão, havia nos seres humanos um potencial natural, pois nossa alma já teria habitado esse mundo ideal antes de vir habitar no corpo terrestre. Para isso, nós precisaríamos ser levados a nos aproximar do conhecimento de fato, ou seja, recordar o que já sabíamos.

É o que se vê no diálogo *Mênon*, onde Platão conta que o filósofo Sócrates ensina um escravo que nunca havia tido aulas de geometria e mostra, por meio de perguntas - método conhecido como Maiêutica socrática - que o escravo consegue por conta própria deduzir o *Teorema de Pitágoras*. Assim, Sócrates mostra que o escravo já sabia geometria, mesmo sem nunca ter visto[6]. Pois mesmo que as noções matemáticas não sejam ideias puras, elas refletem as ideias do mundo inteligível, dessa forma quem fosse lidar com a matemática deveria fazer uso do raciocínio e não dos sentidos.

De acordo com Meneghetti (2004), no platonismo a matemática encontra-se no mundo das ideias, num lugar inferior à dialética, sendo uma espécie de introdução a esta última e o conhecimento que se poderia ter do ser e do mundo das ideias pela dialética é diferente do que se poderia ter pela matemática, por que enquanto na matemática a alma se serve dos originais do mundo sensível, que necessita de hipóteses para concluir o que quer que seja, a dialética, contrariamente, leva ao bem, a um princípio não-hipotético, sem auxílio das "sombras" do mundo sensível, como no caso dos matemáticos.

Meneghetti (2004) nos mostra que, no entanto, apesar das noções matemáticas não constituírem ideias puras, elas refletem tais ideias e possuem seus protótipos no domínio das realidades eternas e, assim, é necessário a quem faz uso da matemática, a obrigação de usar o raciocínio e não os sentidos. Dessa forma, o primitivo conhecimento matemático empírico dos egípcios e babilônios é transformado na ciência matemática grega, dedutiva, sistemática, baseada em definições e axiomas (MENEGHETTI, 2004).

Para Platão esse mundo ideal é um "mundo" fora da linguagem, que oferece os padrões, onde está a origem, o fundamento, de todo conhecimento, e nossa linguagem seria apenas uma

---

[6] Conferir Gottschalk (2007a).

forma de representar esse mundo ideal. A linguagem, para Platão deve descrever adequadamente a correspondência entre quem conhece e o que se é conhecido, mas ela não serviria para o próprio ato de conhecer, pois o real só pode ser conhecido em si mesmo, usando apenas o ato pensar, sem a necessidade da linguagem. Assim a linguagem para Platão

> é reduzida a puro instrumento, e o conhecimento do real se faz independentemente dela. O puro pensar, a contemplação das Idéias, é para Platão um diálogo sem palavras, da alma consigo mesma (...). A linguagem não é, pois, constitutiva da experiência humana do real, mas é um instrumento posterior, tendo uma função designativa: designar com sons o intelectualmente percebido sem ela. Sua tese fundamental é a distinção radical entre pensamento e linguagem, sendo esta reduzida a expressão secundária ou a um instrumento (organon) do pensamento. A palavra é reduzida a puro sinal, cujo ser se esgota em sua função designativa (OLIVEIRA, 2001, p. 22).

O realismo platônico está presente no movimento logicista[7] que surgiu no fim do século XIX. No logicismo, o mundo ideal não seria mais aquele celestial apontado por Platão, mas passa a ser de outro tipo. Para Frege, é a lógica. Frege defende que há uma ligação interna, de sentido, entre a lógica e a matemática, e que assim, a linguagem e a matemática possuem formas lógicas comuns (essência), como uma espécie de isomorfismo. No logicismo, a lógica é o mundo ideal onde há o fundamento para todas as coisas. Pela lógica sabe-se que não tem como 2 + 2 não ser 4. Imaguire (2006, p. 122) declara que para Frege as entidades matemáticas seriam objetos abstratos independentes do pensamento humano. Tal afirmação, de acordo com Imaguire (2006), pode ser considerada um “platonismo matemático” e declara que o próprio Frege coadunou sua tese matemática com uma postura metafísica platonista.

> Frege, Peano e Russell (ainda que, depois, este último suavizasse um pouco sua posição) eram, essencialmente, platônicos: acreditavam em um mundo "objetivo", existente por si mesmo, de entes e relações matemáticas, que o pesquisador deve descobrir e não inventar (REALE e ANTISERI, 2006, p. 100).

O programa logicista iniciado por Frege e desenvolvido por Russell, Whitehead, e de certa forma, por Wittgenstein e outros, foi um fracasso, por não conseguir mostrar que a matemática clássica se fundamentava na lógica por meio de provas consistentes. No entanto, é comum que os matemáticos adotem o platonismo. Frápolli (1996), por exemplo, entende que a necessidade com que os fatos se impõem ao intelecto não permite outra opção que não se deixar

[7] O logicismo é uma das três correntes filosóficas, juntamente com o intuicionismo e o formalismo, que buscaram discutir os fundamentos da matemática no fim do século XIX. Abordaremos brevemenste essas correntes, o logicismo e intuicionismo neste capítulo e o formalismo no próximo.

levar por esta necessidade tão clara. A discussão sobre onde estaria esse mundo ideal é ampla, mas o fato fundamental, para quem o defende, é que ele continua a existir.

Frege aponta para uma nova percepção a respeito da linguagem, sendo considerado, como veremos no capítulo seguinte, um dos precursores da filosofia da linguagem. Frege realiza uma separação entre sentido e referência, ou seja, uma proposição pode ter sentido sem a sua exata referência. O sentido é compreendido como independente do sujeito, mas é considerado, por Frege, como algo ideal, e apesar de refutar qualquer explicação psicologista, subjetiva ou mental, e apesar de buscar realizar sua análise a partir da linguagem, e não de intuições, mantém a noção da linguagem como expressão de uma lógica que é o fundamento das coisas. Frege se manteve preso a uma ideia representativa da linguagem, onde esta, em sua forma cotidiana e na sua função comunicativa, representaria uma linguagem ideal (platonismo), e não buscou nessa própria linguagem prática e utilizada, as origens do conhecimento, tomando-a apenas como lugar para ser realizada a análise lógica.

De acordo com Menegheti (2004), o realismo, ainda na Grécia antiga, continuou com Aristóteles. Este pretendeu desfazer a dualidade que Platão havia realizado, entre o mundo sensível e o mundo das ideias, unindo os dois mundos em um só, que ele chamou de substância. Para Aristóteles o passo inicial era a realidade empírica, de onde se faz abstrações levando em consideração características comuns dos objetos. Então, tais objetos são agrupados em grupos de equivalência e por fim chega-se a um conceito abstrato, onde estão todas as determinações em que o objeto está de acordo (MENEGHETTI, 2003), ou seja, são as essências. Os objetos próprios do intelecto nascem no sensível, mas se separam por meio da abstração e são as essências universais das coisas. Para muitos Aristóteles é considerado um empirista, pois ele avança no sentido da ação do sujeito sobre o objeto, mas ainda pode ser considerado um realista, pois entende que o objeto em si é uma realidade, ou como diz Machado (2004, p. 178), Aristóteles também é realista, pois aceita a concepção realista de verdade matemática, assim como Platão. Por exemplo, os números seriam entidades abstratas com existência própria, independentes do pensamento, que só podem ser alcançados por meio da abstração, que seria o método para a construção dos conhecimentos.

De acordo com Silva (2007), tanto Aristóteles como Platão, comungavam da ideia de que a matemática existia independente da ação do sujeito – o que os une na concepção realista -, mas discordam em qual deve ser a atitude do sujeito para descobrir as verdades matemáticas. Enquanto Platão considerava que os objetos da matemática existiam em um mundo não humano, Aristóteles compreendia que tais objetos estão neste mundo, e são acessíveis pelos sentidos. Silva (2007) nos alerta, no entanto, que para Aristóteles não se deve confiar plenamente nos sentidos, o que o afasta de uma concepção empirista mais radical, não deixando o homem como apenas um descobridor, como acreditava Platão, mas também como um construtor do mundo matemático.

O segundo período é a filosofia moderna, que iniciou no século XVII, quando inicia a epistemologia, pois não se pergunta mais sobre a realidade em si, mas sobre o conhecimento de tal realidade. Essa foi a virada epistemológica, que passou a compreender a filosofia como epistemologia, e assim, se tornaram praticamente sinônimos. Antes se pensava que a obtenção do conhecimento era algo inquestionável, precisando apenas se utilizar o método adequado, mas tal perspectiva muda na filosofia moderna, onde o sujeito de conhecimento é colocado no centro, e se questiona se este pode de fato conhecer tudo, e se pode, quais as condições para que tal conhecimento se efetue (MORENO, 2014). Nesse momento passou-se a estudar o conhecimento, sua natureza e repercussões, e daí enfatizou-se na mente, na consciência ou na subjetividade, como centro de análise sobre as possibilidades do conhecimento, gerando as filosofias apontadas pelo idealismo, empirismo e seus consequentes desenvolvimentos.

Este movimento filosófico ficou conhecido como idealismo. Não se pensa mais em um outro mundo divino do qual este nosso seria apenas uma sombra, mas passa-se a entender que a possibilidade de conhecimento está na mente. Essa concepção compreende o "mundo" fora da linguagem como sendo o mental. Para a concepção idealista, as entidades abstratas nascem do pensar, possuindo um tipo de realidade, embora não tenham existência independente, como para Platão (GOTTSCHALK, 2002). É necessário compreender que ideias que fundamentaram o idealismo, inaugurado por Descartes, não modificaram a visão sobre o conhecimento do dia para a noite, mas se colocaram dentro de um desenvolvimento que pode-se dizer que nos encontramos até hoje.

Meneghetti (2003) nos informa que a partir da certeza "Penso, logo existo", Descartes construiu toda sua filosofia, tomando como regra geral que somente o que pode ser concebido claramente é verdadeiro. Ele refutou a experiência como fonte de conhecimento e buscou fundamentar a ciência em princípios lógicos e racionais. Descartes provocou uma "virada cartesiana", mudando a ordem realista grega, com a nova ideia de um sujeito que se relaciona com o objeto, dominando-o e não sendo dominado por ele. O cartesianismo fundamentou as ideias de separação entre alma e corpo, criando os métodos de análise e síntese, dedução e indução, de experiência e observação, e a noção de razão baseado na autoconsciência do indivíduo, que fundamenta toda a idade moderna, até os nossos tempos.

A ideia de uma racionalidade subjetiva permeará os trabalhos de Kant, Hegel e Husserl e muitos outros filósofos, e toda essa filosofia baseia a educação, a partir do modo como compreende que se dá o conhecimento, antes percebido como algo metafísico exterior ao nosso mundo que precisava ser descoberto, agora compreendido como uma possibilidade que está na própria mente do sujeito. Muda-se da ideia de que se deve pensar sobre o conteúdo filosófico, mas que se deve investigar sobre o sujeito. O sujeito passa a ser o centro da discussão filosófica. Descartes mudou o foco do "ser" para o sujeito, e a partir de então a compreensão passa a ser entendida como responsabilidade do sujeito e de sua consciência, e então os filósofos que o seguiram, criticando ou não alguns pontos de Descartes, tomam a mesma linha de pensamento: a possibilidade de conhecimento encontra-se na consciência. Da existência passamos a consciência. A possibilidade de conhecimento passa a ser compreendida como algo dentro da existência e não fora dela, sendo direcionado para a consciência.

Para Descartes, as ideias surgem a partir de uma intuição intelectual e são trabalhadas pelo processo dedutivo/indutivo, sendo possível pela intuição aprender os conceitos básicos e, por dedução/indução, fazer as generalizações e relações entre os conceitos. Dessa maneira, para se conhecer algo novo é necessário analisar as partes de tal conhecimento, para estabelecer relações.

De acordo com Meneghetti (2004), a filosofia cartesiana proporcionou à matemática um alto poder de generalização, que ocorreu, principalmente, na álgebra simbólica e nas interpretações geométricas da álgebra. A álgebra formal, que vinha progredindo desde a renascença, tem seu ponto culminante em sua obra "*La géométrie*", que marca o início da matemática moderna, visto que favoreceu o advento de novas criações, entre elas, o próprio cálculo infinitesimal (MENEGHETTI, 2004). Para o idealismo, a racionalidade humana seria *matematizada* ou elas – a mente e a matemática - estariam interconectadas de alguma forma numa espécie de isomorfismo.

Paralelamente ao idealismo que vinha se desenvolvendo na Europa continental a partir de Descartes, surge na Inglaterra uma filosofia original, chamada de empirismo, fundamentada principalmente em Bacon, Locke e Hume, onde retira-se a possibilidade do conhecimento da consciência e passa para a experiência sensível. O empirismo entende que o conhecimento se daria a partir da experiência sensorial com o mundo exterior, estando aí a possibilidade de se obter o conhecimento, e por isso, tal é por vezes compreendido como uma espécie de realismo, mas ao não colocar o foco no conteúdo, nem no sujeito, mas na experiência – na ação sobre o objeto e em seus efeitos -, também pode ser compreendida como uma nova forma de pensar, ou uma espécie de desenvolvimento, a partir do realismo, e que traria também traços do idealismo, em alguns aspectos de sua concepção. No empirismo se diminui a preocupação com a questão metafísica, e aproxima-se do psicologismo, por meio da ênfase na experiência sensível. O introdutor dessa nova concepção foi Francis Bacon, que viveu antes de Descartes. Ele se destaca pela introdução do método indutivo, que entende que, em uma análise, para se obter o conhecimento pleno de algo, deve-se partir de fatos singulares para se generalizar, e assim se une o conhecimento técnico ao especulativo (MARÍAS, 2004).

Mas é Locke quem vai desenvolver a concepção empirista de modo mais pleno, compreendendo diferentemente de Descartes, que o conhecimento é fruto da experiência, e não de uma autoconsciência imanente. Para Locke a mente é uma tábula rasa, um papel em branco, algo vazio, sem qualquer ideia, que só pode ser preenchida pela experiência, que para ele era o fundamento de todo nosso conhecimento e de onde ele deriva, que só pode tirar da experiência o que se pode conhecer. Neste caso, a possibilidade de conhecimento estaria na experiência frente a uma realidade empírica.

Para Locke as ideias não são inatas, mas procedem da experiência, podendo ser uma sensação (percepção externa mediante os sentidos) ou uma reflexão (percepção interna de estados psíquicos) (MARÍAS, 2004). Deveria haver uma concordância entre estas ideias, então se há tal concordância entre as ideias e a realidade, o conhecimento é de fato real. Percebe-se que Locke ainda mantém a questão mental, mas subjuga essa à experiência, por isso o empirismo parece trazer marcas do realismo (discussão sobre os objetos, como conteúdos reais) e do idealismo (discussão sobre processos internos do sujeito).

No empirismo há uma relação muito clara da matemática com o mundo natural e a ela poderia ser aprendida por meio da experimentação, utilizando o método das ciências naturais. Assim como deve-se levar o aluno a ver os conceitos matemáticos na realidade ou como realidades, por exemplo, ao invés de mostrar uma soma com os algarismos, deve-se partir de objetos que substituam os valores, assim se vê um esforço pelo uso do cotidiano, a partir de contextualizações. Deve-se dar sentidos aos conceitos, e este sentido só pode ser tomado pela experiência, pela ação sobre o objeto que geraria sensações, percepções ou reflexões que criariam ideias na consciência, que era então vazia.

Também no empirismo a linguagem aparece em sua função referencial, pois ela se torna apenas a representação simbólica da realidade material e das experiências sensoriais. As palavras só têm significado quando se referem à realidade e elas são tomadas apenas como meio entre tal realidade e a ideia, que só pode ser expressada pela linguagem, ou seja, assumindo assim uma função comunicativa. Seria a necessidade de entendimento que leva a criação dos símbolos linguísticos que possam comunicar as ideias, os pensamentos.

Kant tentou superar tanto o idealismo quanto o empirismo com seu idealismo transcendental. Ele provocou uma revolução na história da filosofia ao tentar suprimir o problema da relação entre sujeito e objeto. De acordo com Silva (2007), Kant distingue conhecimento *a priori* do conhecimento *a posteriori* e o conhecimento analítico do conhecimento sintético. O conhecimento é denominado por Kant de juízo e pode ser: 1) juízo *a priori*: antecede as experiências sensoriais com a realidade empírica, não dependendo dela, seria universal, necessário e atemporal, mas depende apenas da razão; 2) juízo *a posteriori*: está fundamentado na empiria e só pode ser considerado após a experiência sensorial. O juízo analítico é explicativo e o juízo sintético é o que acrescenta algo de novo ao que já existe.

Assim, o juízo analítico *a priori* é o que se sabe ser verdade por análise lógica, como se fosse algo evidente, como a frase "filhos possuem pais biológicos", que é o que o idealismo defendia. O juízo analítico *a posteriori* é racionalmente impossível, pois não há como algo ser explicativo, se nem existe ainda. E o juízo sintético *a posteriori* é o conhecimento empírico em si, como já falado anteriormente. O juízo sintético *a priori* é a grande novidade da filosofia kantiana. Pode ser exemplificado pela frase "um segmento de reta é a distância mais curta entre dois pontos", pois é um acréscimo a algo já existente que são pontos e retas, mas é um juízo que, de acordo com Kant, já existe. Seria o conhecimento matemático. Esse tipo de conhecimento ocorre quando o sujeito afirma a sua própria existência a partir dos referenciais de tempo e de espaço e sintetiza toda a realidade à sua própria consciência. Ainda é um tipo de idealismo, mas mais avançado do que o iniciado por Descartes.

A solução kantiana para a interpretação das necessidades analítica e sintética em nosso conhecimento é de que as necessidades analíticas são realizadas pelo pensamento, livre de qualquer conteúdo ou forma expressiva, e as necessidades sintéticas são realizadas pelo pensamento determinado por princípios *a priori* da percepção sensível (MORENO, 1996). A necessidade sintética é uma espécie de forma de produção de conhecimentos que independe da experiência, como se o pensamento fosse capaz de produzir novos conhecimentos, isto é, para Kant o pensamento é capaz de produzir conhecimentos matemáticos que independem da experiência, pois é transcendental e *a priori*. Kant (2011) descreve o processo de sua filosofia transcendental da seguinte maneira:

> Na Estética transcendental, primeiramente iremos separar a sensibilidade, tirando tudo o que nela o entendimento pensa por seus conceitos, de modo que reste apenas a intuição empírica. Depois, ainda isolaremos tudo o que pertence à sensação, para restar somente a intuição pura e a simples forma dos fenômenos (o que a sensibilidade nos dá "a priori"). Dessa pesquisa resultará que existem duas formas puras da intuição sensível, como princípios do conhecimento "a priori": o espaço e o tempo, de cuja avaliação ocupar-nos-emos agora (KANT, 2011, p. 25).

De acordo com Gottschalk (2002), Kant acredita que os indivíduos apresentam capacidades que possibilitam a experiência e o próprio conhecimento, e tais capacidades seriam apriorísticas, que seriam as intuições, que permitiriam ligar duas coisas tão heterogêneas, de um lado os conceitos e do outro a realidade. E a matemática pode servir como exemplo desta questão: como é possível termos em nossa razão a possibilidade do conhecimento matemático e como pode, ao mesmo tempo, este ser tão bem aplicável à realidade? Kant respondeu tal questão alegando que temos intuições puras relacionadas ao espaço e ao tempo pelas quais compreendemos e organizamos a experiência. Dessa forma, a matemática é a prova de que existe o conhecimento *a priori* e este estaria em nosso intelecto, ou seja, no mental.

A intuição espacial estaria ligada à geometria, mais particularmente à geometria euclidiana. Tal geometria permite compreender que há no ser humano uma intuição espacial, não como Platão acreditava, isto é, de que a geometria estaria em um mundo ideal, mas para Kant tal geometria se encontrava em uma intuição pura, que permitia compreender o que é ponto, reta, círculo, etc. Mas, pode-se dizer, que tanto Platão, quanto Kant, acreditavam que a geometria euclidiana era um conhecimento *a priori*.

No entanto no século XIX surgiram as chamadas geometria não-euclidianas formuladas, a partir de mudanças em alguns axiomas de Euclides, pelos matemáticos Gauss, Lobachevsky, Riemann e Saccheri. Tais geometrias se mostraram logicamente consistentes - favorecendo até o desenvolvimento da teoria da relatividade de Einstein, que se utilizou da geometria de Riemann -, e enfraqueceram a ideia de que a geometria euclidiana é *a priori*, levando à ideia de que esta não passou de uma abordagem particular que ganhou o mérito de universal, devido sua aplicabilidade.

É interessante, que posteriormente Piaget, baseado na filosofia kantiana, como veremos mais adiante neste capítulo, utilizou a teoria dos conjuntos como uma descrição simbólica de estruturas mentais. A geometria euclidiana e a teoria dos conjuntos, demonstram como teorias psicológicas, a partir de suas compreensões referencialistas e essencialistas, se utilizaram de teorias matemáticas para justificar tais compreensões.

De acordo com Kant a intuição pura temporal era o fundamento da intuição numérica. De acordo com Gottschalk (2002), na filosofia kantiana, nosso conhecimento dos números decorreria da capacidade do espírito de repetir seguidamente o ato de contar e que a "pura intuição" da contagem temporal é o ponto de partida para a matemática do número. "Os objetos matemáticos como os números e os conjuntos seriam, portanto, entidades abstratas nascidas do pensar" (GOTTSCHALK, 2002, p. 19). E então, no pensamento estaria a origem de toda a matemática, pois a partir dos fundamentos da aritmética e da geometria, toda a matemática se desenvolveu, como por exemplo, a álgebra.

As ideias de Kant inspiraram Brouwer, fundador do intuicionismo ou construtivismo[8] matemático. Para esta concepção relacionada à intuição, não há o objeto como fundamento do conhecimento e se não há como conhecer tal objeto, o conhecimento é concebido como uma capacidade *a priori* do ser humano, que permite relacionar conceitos à realidade. O intuicionismo concebe o pensamento matemático como uma construção mental que parte dos números naturais, devido à intuição pura do tempo e se desenvolve de forma limitada e independente da experiência, pois, para o intuicionismo, a matemática é uma ciência que inicia e permanece na mente, não possuindo existência fora do espírito humano. Desse modo, a linguagem se constitui em uma estrutura imperfeita para comunicar as ideias matemáticas criadas na mente humana.

De acordo com Gottschalk (2002), inspirados pelas ideias de Kant, os intuicionistas postularam que a matemática é uma criação da mente humana e, portanto, não necessitaria de fundamentos, uma vez que seus resultados devem ser claros e evidentes para a mente. Também prescindiria de uma linguagem, a utilização das linguagens tanto natural como formal teria fins puramente comunicativos. Os entes matemáticos seriam construídos paulatinamente, independentemente da experiência empírica e, nesse sentido, esse conhecimento é considerado *a priori*. Por exemplo, para os intuicionistas, um número só está bem definido se é dado um método para calculá-lo. Assim, entendemos, como Gottschalk (2002), que o intuicionismo é um tipo de idealismo, pois procura fundamentos extralinguísticos, que independem da experiência, como, por exemplo, as “intuições matemáticas”.

Gottschalk (2002) ainda afirma que haveria uma autonomia do mundo matemático, condicionada apenas à exibição de sua construção. À questão de como então todos os homens chegam à mesma matemática, respondem recorrendo às estruturas mentais, comuns a todos os homens. Embora os intuicionistas não atribuam aos entes matemáticos uma existência independente do pensamento matemático – não creem numa existência transcendente dos números inteiros ou de qualquer outro objeto matemático, um “céu platônico” para o qual esses pensamentos convergiriam –, por vias “mentalistas” também concebem um mundo matemático que independe do conhecimento empírico. Nesse sentido, os intuicionistas se aproximam da concepção platônica do conhecimento, pois, para eles, os objetos matemáticos são obtidos “naturalmente” através de uma construção mental.

[8] Nesta parte usaremos apenas o termo “intuicionismo”, e mais adiante explicaremos os usos do termo “construtivismo”.

Mesmo que com Descartes e Kant tenha havido mudanças que vão do objeto ao sujeito, a base filosófica continua em concepções essencialista e referencial. Essencialista, por que, tanto a cosmologia grega, quanto o racionalismo moderno, buscam os fundamentos últimos do conhecimento e se mantém em ambos a compreensão da linguagem como secundária no conhecimento.

O desenvolvimento do idealismo no século XIX não ficou restrito a Kant, mas se alargou e ficou conhecida como *tradição idealista alemã*, que tem como alguns de seus expoentes Humboldt, Schelling e, principalmente, com o *idealismo absoluto* de Hegel. Despontou novamente no século XX com a fenomenologia de Husserl, quando este busca realizar suas análises a partir do que ele chama de *idealidade da pura expressão*. Estes desenvolvimentos filosóficos idealistas realizam consideráveis saltos com relação a concepção de conhecimento e linguagem, mas, a nosso ver, mantém-se ainda ligados às concepções essencialista e referencial[9].

De acordo com Silva (2000, p. 59), Habermas, no livro *O discurso filosófico da modernidade*, define esse período dominado pelo idealismo como *filosofia da consciência* que se refere àquelas tradições que, de Descartes a Sartre e a Merleau-Ponty, passando por Kant, Hegel e Husserl, “colocam a consciência, concebida como capacidade do ser humano de apreender o mundo e a si próprio (auto reflexividade), no centro de seus sistemas filosóficos”. A filosofia da consciência, também chamada de filosofia da subjetividade, filosofia da razão, ou simplesmente, racionalidade, marca a idade moderna e vem se desenvolvendo até nossos tempos.

Conforme Reale e Antiseri (2006), Richard Rorty, filósofo contemporâneo que buscou realizar uma síntese da filosofia, compreende que esta se divide em antes e depois da virada linguística, que ocorreu no fim do século XIX, sendo a filosofia anterior chamada por Rorty de fundacional, pois tal buscava os fundamentos, as primeiras ideias, aquilo que estaria na base de todas as coisas, e também, assim, do próprio conhecimento ou da possibilidade deste, ou seja, a essência. “A filosofia fundacional é o resultado, ao ver de Rorty, da união destas três ideias: da ideia de mente como espelho da natureza; do conhecimento como representação acurada; e da ideia de filosofia como pesquisa e posse dos fundamentos do conhecimento” (REALE e ANTISERI, 2006, p. 199). Baseia esta filosofia fundacional em três princípios: mente, representação e fundacionismo. Para Rorty após a virada linguística, há uma pós-filosofia, pois

[9] Esta nossa constatação se deve, quanto a Husserl, à análise realizada por Moreno (2003), quando este compara a fenomenologia de Husserl com o segundo Wittgenstein. Quanto a Hegel, deve-se a Rorty (REALE e ANTISERI, 2006, p. 205), que entende que no pensamento hegeliano a essência está na história.

de acordo com ele até a intenção própria de ser filosofia deixa de existir. Tanto o realismo, idealismo ou empirismo estão alicerçadas nestes princípios, o que nos leva a concluirmos e colocá-los sob às concepções essencialista do conhecimento e referencial da linguagem.

Portanto, desde Platão, passando por Descartes, nota-se um crescente desenvolvimento do subjetivismo, passando por Kant, Hegel, Husserl, e se desenvolvendo em vários ramos, como na psicologia, com Freud, Piaget, Rogers, e outros, evidentemente, tomando caminhos diferentes, mas preocupados com a consciência subjetiva. E houve, então, um crescimento do que se denominou, filosofia da consciência, como conceitua Habermas, e dentro desta se desenvolve o cognitivismo.

Segundo Rocha (2008), o termo cognitivismo, na literatura, não indica nenhuma perspectiva metodológica específica, mas um conjunto de metodologias que buscam explicar os processos mentais de níveis superiores, como a resolução de problemas e a tomada de decisão. Podemos, então, associar o cognitivismo aos estudos dos “níveis” superiores da cognição. Rocha (2008), nos informa que para Mizukami[10] o termo cognitivismo faz referência aos psicólogos que investigam os processos mentais dos indivíduos; para Lefrançois[11], às abordagens teóricas da aprendizagem preocupadas com eventos mentais; e Moreira[12], engloba nesse termo, metodologias, como as de Piaget e os gestaltistas, de Vygotsky e de Ausubel.

1.2 As teorias educacionais atuais

As teorias educacionais têm avançado seus estudos, no decorrer da história, apoiadas em desenvolvimentos da filosofia, desde as fundamentações do realismo, passando pelo idealismo, empirismo e o cognitivismo, entre outros. Nestes a linguagem sempre foi colocada em segundo plano, sendo compreendida como uma representação de um conhecimento que estava fora dela, seja em um mundo ideal, na mente ou na realidade. E assim, há atualmente diversas teorias que são usadas na educação, que se apoiam nestes fundamentos filosóficos. Tivemos, então, principalmente nos séculos XIX e XX, com o florescimento de novas ciências, principalmente as humanas e sociais, como psicologia e sociologia, o desenvolvimento de teorias educacionais em formas mais sistemáticas.

[10] MIZUKAMI, Maria da Graça Nicoletti. **Ensino**: As Abordagens do Processo, E.P.U., São Paulo, SP, 1986.
[11] LEFRANÇOIS, Guy R. **Teorias da Aprendizagem**. CENGAGE Learning, São Paulo, SP, 2008.
[12] MOREIRA, Marco Antonio. **Teorias de Aprendizagem**. E.P.U., São Paulo, SP,1999.

Gottschalk traz em alguns de seus textos críticas a teorias educacionais atuais e recentes, que se apoiam nas concepções essencialista e referencial, apresentando algumas categorizações. Em Gottschalk (2004a) a autora aponta sua crítica ao *construtivismo*, não relacionando este termo a Piaget, dividindo-o em duas vertentes, que ela denomina de psicológica (ou cognitivista) e antropológica (ou sociológica). As duas vertentes são compreendidas com a mesma noção de "desenvolvimento natural do saber matemático". Na primeira partiria "da ação de estruturas cognitivas do aluno sobre o meio físico ou social" e na segunda "como produto de interações sociais nas diversas culturas ao longo da história" (GOTTSCHALK, 2004a, p. 2). São feitas referências ao empirismo, por vezes relacionada a alguma vertente, e por vezes como se fosse outra vertente. A autora considera que na primeira vertente pressupõe-se que todos os indivíduos possuem a mesma estrutura cognitiva, na segunda vertente se relativiza, e considera que todas as formas culturais do saber matemático devam ser tomados como equivalentes. Ela não indica referenciais teóricos específicos, a não ser a etnomatemática que é colocada como representante da segunda vertente na educação matemática.

Em Gottschalk (2004b) a autora novamente trata de vertentes do construtivismo, mas agora indica quatro: experimental, cognitivista, antropológica e "complementar". Aqui ela acrescenta uma vertente diretamente relacionada ao empirismo, a experimental. As compreensões sobre as vertentes são aprofundadas. A segunda é relacionada a Piaget. A primeira e terceira não são exemplificadas com referenciais teóricos. A quarta é tida como uma solução construtivista que reúne as três anteriores. Gottschalk aprofunda sua crítica ao construtivismo, relacionando diretamente à Piaget, em textos de 2002, 2005 e 2008. Em Gottschalk (2005; 2007a) a autora apresenta uma análise do *pragmatismo*[13], considerando em particular o pragmatismo americano, relacionando à Dewey, que ela entende como uma tentativa de solução às propostas naturalista de Rousseau para a educação e do empirismo clássico. No entanto, Gottschalk (2007a) traz argumentos para mostrar que este pragmatismo, apesar dos avanços, ainda está relacionado às concepções essencialista e referencial, compreendendo que hoje o mesmo seria mais compreendido como *interacionismo*. Neste texto a autora também indica que há um desenvolvimento do pragmatismo de Dewey com algumas vertentes construtivistas apoiadas na teoria psicogenética de Piaget, e aponta duas vertentes recentes: a teoria das múltiplas inteligências de Howard Gardner e a pedagogia das competências de Philippe Perrenoud. Isto coloca o *construtivismo* como uma marca geral que abarca a maioria – e as principais – teorias educacionais da atualidade, não sendo diretamente

[13] Este é um termo que possui variados sentidos na filosofia. No próximo capítulo traremos algumas definições.

relacionado a Piaget, apesar de apresentar semelhanças. Com isto concorda Tolchinsky (1998, p. 103) quando diz que:

> A incidência das ideias piagetianas foi tão forte que muitas vertentes que pareciam se contrapor a estas ideias acabaram abrindo filiais construtivistas. Misturando suas próprias contribuições, surgiram construtivismos socioculturais, construtivismos cognitivistas e até construtivismos inatistas.

Gottschalk revela nestes textos que algumas teorias educacionais são apoiadas em concepções essencialista e referencial, e aponta algumas vertentes, enfatizando o construtivismo, baseado em Piaget. Traremos a seguir algumas dessas teorias, com ênfase também para o construtivismo piagetiano, e mostrando algumas outras que se encaixam no construtivismo de modo geral. Então, quando falarmos aqui em *construtivismo* estaremos nos referindo a esta interpretação na atualidade do construtivismo piagetiano, que engloba outras teorias. Quando quisermos nos referir ao próprio Piaget indicaremos por *construtivismo piagetiano*.

A partir da tradição kantiana há uma profunda relação entre razão e educação, sendo essa razão diretamente ligada à consciência, onde estaria o fundamento do conhecimento, e onde a linguagem continua a ser principalmente uma referência. Kant destaca o papel da responsabilidade do próprio sujeito pela sua formação. O sujeito depende de suas próprias ações, de sua própria consciência.

Piaget, seguindo esse princípio, e a partir de uma epistemologia de base biológica, defende que o "homem constrói sua própria condição de conhecer, de aprender, de se comunicar e construir sentido" (PRESTES, 1996, p. 31). A obra de Piaget está vinculada à tradição kantiana, a partir da base biológica do ser humano, isto é, a capacidade de organizar estruturas lógicas tem seu enraizamento nas estruturas ontogenéticas (PRESTES, 1996). Piaget é um "Kant" temporalizado (PRESTES, 1996).

Piaget era biólogo, e iniciou os estudos em psicologia depois do seu doutorado. Somente quando foi coordenador do instituto Jean-Jacques Rousseau é que ele tem os primeiros contatos com as pesquisas sobre o pensamento infantil. Começou a escrever artigos sobre o assunto e publicou um livro, "A linguagem e o pensamento na criança". A partir das observações de seus filhos e de outras crianças Piaget começa a desenvolver uma teoria cognitiva que se apresenta em diversas obras, como *O desenvolvimento das quantidades físicas* (1941), *A gênese do número* (1941), *A noção de tempo na criança* (1946), *A geometria espontânea na criança* (1948), *A representação do espaço na criança* (1948), *A gênese das estruturas lógicas* *elementares* (1959) e *Da lógica da criança à lógica do adolescente* (1955). Piaget trabalha estes temas em uma abordagem epistemológica, isto é, buscando compreender o conhecimento, e estruturar o mesmo, como sendo uma possibilidade de qualquer criança. Desse modo, o "sujeito epistêmico" é pensado como as características comuns a todas as crianças que esteja em um mesmo estágio de desenvolvimento.

Em 1950 Piaget publica *Introdução à Epistemologia Genética*, que é a explicação de sua teoria, resultado, então, de todas as suas pesquisas anteriores. A partir daí, Piaget buscou se relacionar com outras áreas do conhecimento, e a divulgar sua teoria, assim como, discutir a mesma, com outros pensadores. Uma das consequências da teoria de Piaget passa a ser as análises sobre a educação. No entanto, é importante destacar que a teoria de Piaget não é educacional. Nesse sentido, quando Piaget trata de epistemologia, isto é, quando busca realizar uma teoria sobre o conhecimento, ainda mais buscando os fundamentos em pesquisas de como crianças obtém certos conhecimentos, não há como não relacionar com a educação, que foi o que ele mesmo fez, mais especificamente, no fim da sua vida, e que seus seguidores continuaram. Diferenciamos a teoria de Piaget com a educação, apenas no sentido do objetivo prático, pois, enquanto Piaget está voltado mais para um desenvolvimento teórico, a partir da compreensão de como a criança aprende, na educação é de fato prático, pois objetiva-se permitir que a criança aprenda.

A Epistemologia genética de Piaget na educação é geralmente chamada de *construtivismo*, termo que Piaget passou a empregar nos últimos anos de sua vida (FRANCO, 1995). Castañon (2009) identifica o termo na obra *Lógica e conhecimento científico* de 1967. No entanto, Savedra (2007), mostra que quem cunhou o termo, de fato, relacionado à educação, foi Emília Ferrero, que denominou sua própria teoria de construtivismo, mas como era piagetiana, propagandeou a teoria de seu mestre, tal termo foi relacionado à Piaget. E hoje tal termo é relacionado não só a Piaget, mas às teorias psicopedagógicas, envolvendo Vygotsky, Ausubel e outros diversos autores.

O termo construtivismo é de certa forma polissêmico, pois é dado tanto ao movimento artístico russo do início do século XX, como para uma das correntes filosóficas da matemática, como o intuicionismo de Brouwer. Castañon (2009) realizou um trabalho sobre construtivismo social e apresenta alguns tipos de construtivismos, pois considera que há uma proliferação do termo, na filosofia, psicologia, educação, neurociência, lógica, matemática e na sociologia. Para ele a origem do termo se dá pela defesa do papel ativo do sujeito na relação com o objeto do conhecimento, e na construção de estruturas cognitivas e representações da realidade. Mas, há teorias que se autodenominam construtivistas, mas não assumem essa posição original, que de acordo com o autor foi iniciada principalmente por Kant e desenvolvida no século XX por Piaget. Foi Kant que iniciou a ideia de que há estruturas no ser humano que permitem o desenvolvimento ou a construção de representações dos objetos do conhecimento, devido, às possibilidades internas, e ao contato com o mundo externo. Piaget mantém a ideia de estruturas, mas compreende que estas também são construídas e que posteriormente possibilita a construção das representações dos objetos do conhecimento.

Piaget aprofunda o construtivismo kantiano, mas se mantém na concepção de construção em si. Castañon (2009) apresenta então outras formas de construtivismos contemporâneos: o *construtivismo radical*, o *construcionismo social*, o *socioconstrutivismo* - que tem como principal representante Vygotsky - e o *construtivismo lógico* ou intuicionismo, de Brouwer - que também é chamado construtivismo pois Brouwer, como já dissemos, se apoiou em Kant. Brouwer compreendeu que só poderia ser considerado objeto do conhecimento matemático de fato, aquilo que pudesse ser construído na mente. Por isso, também apontamos anteriormente, que existe relação entre o construtivismo piagetiano e o intuicionismo, principalmente devido à origem kantiana, mas também pelo fato de se acreditar em construções mentais. Como nos informa Castañon (2009, p. 64), "Para Piaget, construção indica o processo de *criação* mental de algo, incluindo conceitos, interpretações, deduções e análises. Esta acepção do termo pressupõe a existência de um sujeito ativo e construtor de suas cognições". Nesse sentido, concordamos com Libâneo (2010, p. 27), quando diz que

> O construtivismo, no campo da educação, refere-se a uma teoria em que a aprendizagem humana é resultado de uma construção mental realizada pelos sujeitos com base na sua ação sobre o mundo e na interação com outros. O ser humano tem uma potencialidade para aprender a pensar que pode ser desenvolvida porque a faculdade de pensar não é inata e nem é provida de fora.

Desse modo, compreendemos que o construtivismo não possui uma concepção *a priori* do conhecimento. No construtivismo o conhecimento é *construído* na interação entre estruturas cognitivas da criança e o meio físico e social. Não se trata, portanto, de um conhecimento *a priori*, que independa da experiência. No entanto, o desenvolvimento destas estruturas cognitivas pode ser visto como *a priori*, no sentido de que se dá do mesmo modo para todas as crianças, dadas as mesmas condições de aprendizagem. Estas crianças passariam de estágio para outro, elas passariam do estágio sensório-motor para os seguintes, até chegar no estágio das operações abstratas.

De acordo com Gottschalk (2002), a relação entre o construtivismo piagetiano e o intuicionismo, mostra que este atribui à intuição a evidência de suas proposições, daí decorrendo que a matemática seja uma atividade cujos fundamentos independem da linguagem. Assim, hoje, geralmente se toma o conhecimento matemático como presente em estruturas cognitivas e presentes potencialmente em todas as pessoas ou ainda que a matemática é um reflexo do mundo empírico. As atuais práticas educacionais concordam com um desenvolvimento natural da criança, como se houvesse

> uma mesma matriz em todos os indivíduos que possibilita o seu acesso ao conhecimento, processo que seria apenas mediado pelo professor [ou] desconsidera qualquer tendência inata, cabendo exclusivamente ao professor a transmissão de conhecimentos e o desenvolvimento de habilidades e capacidades no aluno (GOTTSCHALK, 2007b, p. 461).

Dentro das teorias de aprendizagem, ou que colaboram para estas, o construtivismo piagetiano, a despeito do desenvolvimento do empirismo ou do empirismo lógico, da fenomenologia, da psicanálise, do behaviorismo ou das ciências cognitivas de modo geral, dominou grande parte das ações nessa área, e também surgiu como reação aos limites dessas mesmas teorias aqui citadas.

De acordo com Rocha (2008), os precursores, desta perspectiva metodológica, foram os gestaltistas, como Koffka, Köhler e Wertheimer, que rejeitaram a exclusividade do processo de aprendizagem à tentativa e erro e enfatizaram que o aprendizado ocorre por *insight*, o que nos remete a ideia de intuição pura inaugurada por Kant. Os gestaltistas iniciaram o afastamento da ideia de tábula rasa do empirismo e se aproximaram do modelo kantiano. Contudo, por não querer se aproximar do inatismo, Piaget, desenvolveu uma epistemologia genética, uma epistemologia baseada em princípios biológicos.

Bruner teve o mérito, nos Estados Unidos, nas décadas de 1950 e 1960, de popularizar a abordagem construtivista, que, a partir de então, passou a dominar os currículos americanos, antes dominados pelas teorias de Skinner e Thorndike (ROCHA, 2008). Vale destacar que na teoria de Bruner, ele enfatizou a importância do processo da descoberta na aprendizagem, o que influenciou o construtivismo como um todo.

A influência do construtivismo foi tão grande, que tivemos o famoso caso de Robert Gagné que abandonou a abordagem behaviorista e adotou o construtivismo (ROCHA, 2008). Este autor enfatizou a ideia de hierarquia no processo de aprendizagem, para ele, cada habilidade mais simples é condição necessária para a habilidade seguinte, a qual incluem e transcende a anterior, ou seja, a noção de conhecimentos prévios ou de ancoragem, desenvolvida pelos teóricos do construtivismo e por teóricos como Ausubel com sua teoria da *aprendizagem significativa*, que considera que o conhecimento deve ter sentido para o aluno, e para tal, o professor deve considerar os *conhecimentos prévios* e partir destes para a construção de um novo conhecimento. Ausubel considera os conhecimentos prévios como *esquemas* ou estruturas, em um sentido próximo ao dado por Piaget.

O construtivismo chegou ao Brasil carregado por outras influências teóricas, que resultou em uma miscelânea, baseada nas concepções realista, idealista e empirista. Dessa forma, no caso da educação matemática, o construtivismo defende que a construção desse conhecimento é dada pela ação do aluno, que possui em sua consciência uma capacidade (estruturas) para alcançar tal conhecimento, com a mediação do professor, que se utiliza de metodologias realistas e empiristas, para colaborar nessa ação do aluno, e que por meio dela chegará ao conhecimento, que é quando pode refletir sobre sua (abstração reflexiva).

Mas entendemos que esta concepção de ensino se estruturou bem antes. A partir do século XIX o Brasil sofreu grande influência do *positivismo* de Comte, devido à divulgação da obra deste pensador e dos diversos estudantes brasileiros que foram para França na época e trouxeram os ideais positivistas para o Brasil. O positivismo se institucionalizou na reforma do ensino que se deu com o surgimento da república. Tal reforma ocorreu em 1890 por meio do ministro da educação da época, Benjamin Constant. A educação brasileira e, em consequência, o ensino de matemática pode ser considerado nesta época (final do século XIX e início do século XX) como positivista.

O positivismo de Comte compreendia que a sociedade humana segue leis naturais e invariáveis, que são independentes da vontade humana, ou seja, são princípios universais, e baseado nesta ideia que Comte fundamentou uma metodologia para se estudar as ciências naturais e sociais, cunhou a "lei dos três estados", em que o desenvolvimento humano se daria por três estados, o primeiro sendo o teológico (no qual o homem explica o mundo por meio do sobrenatural), o segundo, o metafísico (no qual o homem explica o mundo por ideias abstratas) e o terceiro, o positivo (no qual o homem explica humano pela formulação de leis gerais). O interessante é que os três estados se dariam tanto na esfera histórica quanto individual, ou seja, Comte acreditava que a humanidade caminhou de acordo com esses três estados, assim como sociedades específicas devem fazer, e também o sujeito. No aspecto histórico, Comte concede à matemática essa primazia, como a primeira a ter alcançado o estado positivo. Nesse sentido, a educação brasileira seguiu a ideia de que o sujeito repete a história na sua história individual em busca do conhecimento.

Miguel e Miorim (2004) compreendem que a influência do positivismo na educação matemática se mostra na entrada da história matemática nos livros didáticos no final século XIX, ou seja, mostrando que esta filosofia compreendia que seria necessário rever aspectos históricos, pois os mesmos colaboram na aprendizagem individual. De acordo com Miguel e Miorim (2004) a educação brasileira usou como justificativa da aplicação da história da matemática também o "princípio recapitulacionista" de Haeckel, que como biólogo e filósofo defendia que o ser humano recapitulava em sua história as etapas vividas pela humanidade, e ele defendia tal concepção com explicações biológicas, ou seja, como se tal recapitulação fosse algo natural. Na teoria educacional positivista o "princípio recapitulacionista" tornou-se o "princípio genético", adequando a recapitulação a ideia de aprendizado.

Geralmente se critica o legado do positivismo, por ter separado o conhecimento científico do conhecimento cotidiano, as ciências naturais da matemática, a compreensão da matemática como disciplina superior, e de modo geral a ideia da educação como algo instrumental e tecnicista, que se destacou com o governo dos militares. No entanto, o positivismo deixou a marca da ideia de um desenvolvimento intelectual individual baseado na história, o que vemos se mantendo, em outros moldes, compreendendo uma ação reflexiva do aluno diante dos dados da história.

O início do século XX se destaca na educação brasileira o movimento da *Escola Nova*, que tinha relação com o positivismo[14], e entrou no Brasil na década de 1920. A Escola Nova foi um movimento de renovação do ensino, que surgiu na Europa com o suíço Ferrière e nos EUA com Dewey. Chegou ao Brasil em 1882 por meio de Rui Barbosa e influenciou mudanças na educação brasileira principalmente nos anos 1920. Dorneles (2008) mostra a relação entre teorias educacionais e fatores sociopolíticos e econômicos, e enfatiza a relação do construtivismo no Brasil com estes, destacando o liberalismo[15]. É sob o ideal liberal que se começou, por exemplo, a fomentar na educação brasileira o ideário da escola nova, que se destacava por centrar o ensino no aluno e onde professor passou a ser orientador da aprendizagem, que devia ser livre e espontânea, seguindo, assim, a psicologia evolutiva da aprendizagem.

No entanto o liberalismo econômico tradicional sofreu um grande impacto com a crise de 1929. E é entre esse período e a década de 1970 - década que marcou uma retomada do liberalismo -, que o construtivismo piagetiano vai adentrando ao Brasil, ou melhor, uma

---

[14] Como se vê no "Manifesto dos pioneiros da Escola Nova" de 1932.

[15] O liberalismo se desenvolveu no século XVII e XVIII em oposição à monarquia absoluta, fundada na ideia de hierarquia divina, social e natural. Para o principal pensador liberal, John Locke (2002), assim como não existe conhecimento inato, não existe poder inato. Essa ideia revolucionou o século XVII, dando força à burguesia para conquistar o poder político, econômico e ideológico e impor o fim do poder inato do absolutismo monárquico e exigir o respeito à liberdade individual. No século XVIII, Adam Smith, principal representante do liberalismo econômico, defendia que a economia deveria ser regida pela lei da oferta e da procura de mercado, dessa forma o próprio mercado se autorregularia e daria conta das questões sociais por si mesmo, desde que o Estado garantisse ao indivíduo a livre iniciativa (DORNELES, 2008).

interpretação deste que agregava outros estudos psicológicos. Mas, este desenvolvimento foi, de certa forma, desacelerado pela ditadura militar. É neste contexto que surge o *Movimento da Matemática Moderna* que chega ao Brasil, por volta de 1970.

O retorno do liberalismo na década de 1970 defende um novo projeto econômico de globalização, onde deve-se devolver a maior parte do poder a um mercado livre, sem a gerência de um estado assistencialista, dando ênfase, então, ao individualismo e à espontaneidade e quase nenhuma à ação consciente. No cenário educacional, estas ideias abriram espaço às teorias mais psicológicas, como as de Piaget e Bruner e em alguns momentos promovendo uma mistura de teorias, como: escolanovismo, construtivismo e o tecnicismo behaviorista (DORNELES, 2008).

De acordo com Dorneles (2008), em 1932, Anísio Teixeira – um dos pioneiros da Escola Nova no Brasil e discípulo de Dewey - convidou o professor Lourenço Filho para dirigir o Instituto de Educação em Brasília, e este, que já conhecia as primeiras obras de Piaget, embora não se considerasse um piagetiano, incluiu nas disciplinas da Escola Normal uma disciplina sobre a psicologia experimental aplicada à educação, disciplina esta, que ele já ministrava na Escola Normal de São Paulo.

Vasconcelos (1996) nos informa que a partir dos anos 1950, com o desenvolvimento dos meios de comunicação, houve no país intercâmbios entre os grupos de pesquisadores interessados na temática piagetiana, preocupados com os problemas de aprendizagem com as crianças. O autor ainda acrescenta que Piaget esteve no Brasil em 1949, representando a Organização das Nações Unidas para a Educação, Ciência e Cultura (UNESCO), num Seminário de Educação e Alfabetização de Adultos, no Rio de Janeiro.

Com a ditadura militar ganhou espaço a Pedagogia Tecnicista, que nos anos 1970 era tida como uma necessidade diante da industrialização do país e da demanda de recursos humanos qualificados nos modelos taylorista-fordista e teoricamente, a educação se baseava no behaviorismo visando à modificação de comportamentos e o treinamento de habilidades (DORNELES, 2008). Com o fim da ditadura militar e a democracia reinstalada, o país inicia as discussões sobre o futuro do país nesse novo momento. Na educação, surgem várias posições teóricas, como a solução para os seus problemas. Em comum se tinha a ideia de superar o intelectualismo tradicional, o espontaneísmo da Escola Nova e a neutralidade aparente do tecnicismo e criar condições para que a educação se tornasse instrumento de emancipação e transformação da sociedade (DORNELES, 2008).

Concordamos assim, com Dorneles (2008), quando nos diz que se iniciou um processo de desvalorização dos conteúdos, que foi essencial para a mudança de foco para as chamadas *competências e habilidades* - tão repetidas atualmente no discurso educacional. Nesse contexto, para se ter a possibilidade de emprego garantido ou pelo menos ter as condições exigidas para a empregabilidade no mundo do trabalho, só mediante o desenvolvimento de competências e habilidades. Isso explica o aumento dos discursos dominados pelo imperativo da eficiência, do rendimento, da performance máxima, de obter o maior resultado possível com o mínimo de trabalho e menor tempo (DORNELES, 2008).

É neste contexto que a teoria de Piaget aparece como algo diferenciado. Ela reforça e desenvolve o ideário da escola nova[16] de que educar não é transmitir, mas provocar tipos de atividades, que seriam a base da verdadeira aprendizagem. Assim os conteúdos são considerados irrelevantes, pois o principal é fazer a criança operar sobre a realidade.

As necessidades neoliberais surgidas a partir da década de 70 geram na educação a necessidade de mudanças no papel da escola, e é baseado nisto, que se buscam as noções de competência e habilidade, além de um suporte científico de prestígio, como o construtivismo piagetiano, as ideias de César Coll, ideólogo da reforma educacional espanhola, e de Philippe Perrenoud, autor da pedagogia das competências e um dos ideólogos da reforma educacional francesa, que são a base teórica, por exemplo, dos PCN.

Mas por que o construtivismo piagetiano foi tão bem aceito no Brasil? Dorneles (2008, p. 28-29) nos fornece uma excelente comparação a partir de Newton Duarte - conhecido crítico do construtivismo - e de Lauro de Oliveira Lima - considerado o autor que mais contribuiu para a divulgação do construtivismo piagetiano no país. De acordo com o primeiro:

> (...) o construtivismo ganhou muito espaço no Brasil, por suas inovações didáticas e por seu estudo sobre as práticas pedagógicas propriamente ditas, que aparentemente oferecem propostas concretas e uma direção clara para a prática pedagógica. (...) o ideário construtivista foi a forma mais alienada e esvaziada de propor a superação do "caráter estático" da educação escolar tradicional. Além de mascarar a necessidade de solidez na formação do professor e se adequar a uma massificação do ensino e à precariedade dos cursos de formação de professores.

De acordo com Lauro Oliveira Lima:

> a Educação carecia de superação das concepções pragmáticas norte-americanas, que tratavam o educando como um futuro trabalhador, do sociologismo de esquerda, para o qual o educando era um futuro militante político e do psicologismo, que tratava o educando como eterna criança.

---

[16] Encontramos Piaget defendendo métodos da Escola Nova em duas obras: *Psicologia e pedagogia* e *Sobre a pedagogia*.

Vasconcelos (1996) nos informa que após a ditadura militar a expansão do construtivismo foi tão grande que ele lembra que na época muitos professores chamavam de “febre construtivista”.

Com isso alterou-se a ideia sobre a posição do professor no ensino, como se vê em uma entrevista da Revista Nova Escola de 1995, em que uma das especialistas em construtivismo revela o papel do professor no construtivismo “Em vez de dar a matéria, numa aula meramente expositiva, a professora organiza o trabalho didático-pedagógico de modo que o aluno seja o copiloto de sua própria aprendizagem. A professora fica na posição de mediadora ou facilitadora desse processo” (REVISTA NOVA ESCOLA, 1995, p. 11).

A partir disto, tivemos um novo movimento com relação ao papel do professor, que agora é visto como um mediador, ajudador, colaborador, motivador, etc. Assim, seu papel na educação agora é criar situações de aprendizagem que permitam a construção do conhecimento pelo próprio aluno. Para isto, ele necessita considerar os conhecimentos prévios, assim como aqueles que circundam a vivência do aluno, motivando-o a superar desafios, que devem ser bem planejados. Com isso, não há um resultado apenas, e o que mais importa é o momento de reflexão.

Na década de 1990 se viu a prática efetiva do florescimento teórico construtivista de 1980, principalmente nas análises de programas curriculares, chegando assim aos PCN em 1997 e 1998. O construtivismo chega aos PCN, devido à difusão dos estudos na década de 1980, com a criação de programas de pós-graduação em educação matemática que desenvolveram cada vez mais estudos baseados no construtivismo e áreas afins.

Com os PCN houve uma desvalorização de conteúdos, e uma substituição destes pelas chamadas competências e habilidades. Estas questões alteram a visão sobre o professor, tido agora como o mediador entre o aluno e o conhecimento, devido aquele apenas oferecer oportunidades por meio de atividades, para que este possa construir seu próprio conhecimento, onde se ganha também destaque a noção de conhecimentos prévios, o cotidiano do aluno, a necessidade de contextualização, de atividades que motivem a ação do aluno sobre os objetos, o uso de resoluções de problemas, compreendendo o conhecimento, em uma concepção essencialista e colocando a linguagem apenas como referência.

A teoria de Piaget é extensa e bastante complexa, mas que possui princípios que basearam e baseiam a educação brasileira. Por isso, que já falamos aqui que há no Brasil um desenvolvimento de uma interpretação do construtivismo, com diversas teorias educacionais, que seguem concepções próximas deste. Dessa forma, se formularam *slogans* e *máximas*, que caracterizam o construtivismo, e no interior deste, está o construtivismo piagetiano, que segue uma linha mais cognitivista. Tais *slogans* e *máximas* são: *formar espíritos inventivos, provocar a ação, estimular a criatividade, criar uma atitude experimental frente ao aprendizado, aprender a aprender, o aluno constrói seu próprio conhecimento, o professor é mediador*, etc.

O fundamental para Piaget é a autonomia, ou seja, a capacidade do indivíduo de construir o próprio conhecimento, e uma das formas de se alcançar isso é trabalhar com a solução de problemas, pois gera um trabalho intelectual e reflexivo do indivíduo, auxiliando-o na formação de sua própria autonomia, ajudando-o na capacidade de tomar decisões e de enfrentar situações novas. Piaget, então, busca compreender como ocorre o processo de formação do conhecimento, investigando a gênese das estruturas da consciência, o que nos faz perceber um espírito fundacionista, ou seja, aqui vemos o essencialismo como a base do construtivismo piagetiano, e do construtivismo em geral. Piaget compreende a construção do conhecimento das estruturas cognitivas, pelo próprio sujeito, a partir de sua ação operatória sobre o meio, em etapas sucessivas.

> o conhecimento não poderia ser concebido como algo predeterminado nas estruturas internas do indivíduo, pois que estas resultam de uma construção efetiva e contínua, nem nos caracteres preexistentes do objeto, pois que esses só são conhecidos graças à mediação necessária dessas estruturas; e estas estruturas os enriquecem e enquadram" (PIAGET, 1971, p. 7).

Quando Piaget revela que o conhecimento se dá na ação do sujeito sobre os objetos, ele evoca o conceito de *esquema*. De acordo com Wadsworth (1996) esquemas são estruturas mentais ou cognitivas utilizado pelo indivíduo para se adaptar ao meio e organizá-lo. Eles vão se desenvolvendo no ser humano, desde os reflexos quando recém-nascido, a partir de diferenciações primitivas, passando pela organização e adaptação dos estímulos, ampliando-se e se tornando cada vez mais complexos, permitindo assim, ao adulto, um maior número de diferenciações. Apesar da maleabilidade conferida aos esquemas, Piaget mostra que já há algo de estruturado neles (estruturas cognitivas), e que haveria em qualquer ser humano, o que nos mostra, mesmo que afastado da noção essencialista clássica presente em outras teorias, um essencialismo presente, pois ainda está presa às bases idealistas. Essas estruturas são representadas pelos estágios de desenvolvimento mental que todas as pessoas passariam. Piaget (1971; 2007) apresenta eles da seguinte forma:

Estágio sensório-motor (De 0 a 2 anos:): é o período mais elementar, quando a criança entra no mundo, suas capacidades estão reduzidas a manusear objetos, alimentar, e mover-se aos poucos, A criança se limita às suas sensações para entender o mundo. É onde se inicia a descentralização de ações em relação ao próprio corpo. A criança busca adquirir coordenação motora e aprender sobre os objetos que a rodeiam.

Estágio pré-operatório (De 2 a 7 anos): onde o uso da linguagem, dos símbolos e das imagens promovem uma nova etapa de desenvolvimento mental. Nesse estágio, ela inicia a nomear objetos e raciocinar intuitivamente, mas sem o poder de abstração mais desenvolvido, sendo bastante egocêntrica, e realizando representações mentais dos objetos.

Estágio operatório-concreto (De 7 a 12 anos): onde se verifica uma descentração progressiva em relação à perspectiva egocêntrica. A criança entra num mundo de várias perspectivas e seu pensamento passa a ter uma lógica reversível. A criança começa a formar conceitos como os de número e classes. Possui lógica consistente e habilidade de solucionar problemas concretos.

Estágio operatório formal (ou estágio hipotético-dedutivo) (De 12 anos em diante, a adolescência): onde o sujeito pode operar com hipóteses verbais. As hipóteses são proposições em que é possível estabelecer relações entre relações. A dedução lógica aparece aí como um novo instrumento de operar o real.

Ao final do último estágio, que ocorre mais ou menos aos 15 anos, a pessoa atinge sua maturidade intelectual. Para Piaget, nesta fase, a linguagem assume um papel mais importante, pois possibilita conceitos mais abstratos, flexibilizando ainda mais o pensamento, bem como, por que pode adquirir mais conhecimento, compreendendo melhor conceitos científicos. Para Piaget a linguagem dá suporte ao pensamento conceitual.

Piaget era biólogo, e se utiliza de seu conhecimento alinhado às ciências naturais para formular sua teoria. Por exemplo, ele se utiliza da evolução dos seres vivos, que é resultante de processos de acomodação/assimilação, além do fato de o ser humano ter desde sempre agido sobre o meio.

Para Piaget, o processo de assimilação consiste em incorporar objetos do mundo exterior a esquemas mentais já existentes, assim, ela é "o prolongamento no plano do comportamento, da assimilação biológica no sentido largo, toda a reação do organismo ao meio consiste em assimilá-lo às estruturas desse organismo. (...) A assimilação é o processo de integração cujo esquema é resultante (PIAGET, 1975. p. 373).

A acomodação se refere a modificações nos sistemas de assimilação, capacitando-os a lidar com essa assimilação, é a "diferenciação em resposta à ação dos objetos sobre os esquemas sincronizando com a assimilação dos objetos aos esquemas" (PIAGET, 1975, p. 379). De acordo com esta teoria, a criança vai *acomodando* novas formas a um conceito. Por exemplo, a criança ao aprender números negativos, vai incorporar tal ao conceito de número.

Na epistemologia genética de Piaget o desenvolvimento é o resultado da adaptação do indivíduo aos desequilíbrios provocados pela interação com o meio – novas formas de compreensão de um conceito -, que necessita de reiteradas reequilibrações, que são reorganizadas internamente pelo indivíduo. Desse modo, há dois processos simultâneos: a organização interna (*equilibração*) e a *adaptação* ao meio.

De acordo com Wadsworth (1996), equilibração é um processo dinâmico, no qual o indivíduo busca a estabilidade de suas estruturas mentais, mas tal processo demanda um esforço, quando em contato com novos objetos ou novas compreensões de conceitos, para então, poder assimilar ou acomodar esta novidade.

Para Piaget a adaptação, é "o equilíbrio entre assimilação e acomodação, o que equivale a dizer: equilíbrio dos intercâmbios entre o sujeito e os objetos" (PIAGET, 1975, p. l8). Adaptação é o próprio desenvolvimento da inteligência. Para Piaget, os esquemas de assimilação vão se modificando, por meio da acomodação, se adaptando, configurando assim, os estágios de desenvolvimento.

> Não somente uma aprendizagem não parte jamais de zero, quer dizer que a formação de um novo hábito consiste sempre numa diferenciação a partir de esquemas anteriores; mas ainda, se essa diferenciação é função de todo o passado desses esquemas, isso significa que o conhecimento adquirido por aprendizagem não é jamais nem puro registro, nem cópia, mas o resultado de uma organização na qual intervém em graus diversos o sistema total dos esquemas de que o sujeito dispõe (PIAGET, 1974, p. 69).

A *adaptação* piagetiana pode ser resumida como sendo a *equilibração* entre *assimilação* e *acomodação*. O conceito de adaptação passa por três fases: 1) pela adaptação no sentido da biologia clássica; 2) pelo equilíbrio progressivo; e 3) pela abstração reflexiva, através da qual o ser humano cresce, se socializa, conhece e se autodetermina.

A abstração reflexiva se refere aos processos mais gerais de equilibração. Para Piaget o sujeito abstrai, por meio do raciocínio, dos objetos aquilo que seu esquema de assimilação permite abstrair. Tais esquemas, evidentemente, dependem das experiências anteriores com abstrações já realizadas anteriormente. Por exemplo, se experiências anteriores já lhe permitem saber identificar as cores, ele poderá dizer, na nova experiência qual a cor do objeto. Isso lhe permite o processo de generalização de certas características a diferentes objetos. Esse processo de reflexão leva da ação à representação até chegar ao pensamento reflexivo, onde o sujeito encontra as justificativas para as relações realizadas.

> cada nova reflexão supõe a formação de um patamar superior de reflexionamento, onde o que permanecia no patamar inferior como

> instrumento a serviço do pensamento em seu processo, torna-se um objeto de pensamento e é, portanto, tematizado em lugar de permanecer no estado instrumental ou de operação” (PIAGET, 1977, p. 2).

Para Piaget, não é qualquer ação do sujeito que é produtora de conhecimento, mas somente aquelas ações que se voltam para alguma ação realizada, isto é, somente por reflexões, que é quando o sujeito busca pensar sobe a ação, se apropriando dos mecanismos que permitiram que tal ação ocorresse. Essa explicação justifica o fato de os construtivistas apoiarem a busca por sentidos sobre suas ações de ensino, como também promover açõesdo aluno com objetos concretos ou imaginados o que levou à valorização das ideias de contextualização e utilitarismo, onde só se pode ensinar o que pode ser contextualizado na vida do aluno e o que tem utilidade. Piaget defendia que os conceitos se ampliavam a partir da generalização do que se observava e se refletia, que permitiria ao sujeito adquirir formas cada vez mais desenvolvidas para agir sobre a realidade.

Piaget acreditava que o meio apresenta situações naturais de desequilíbrio, o que demanda a necessidade de uma reequilibração, e assim, a escola, ao saber disso, deve promover de modo artificial tais atividades de desequilíbrio, para de certa forma, promover reequilibrações. Nesse processo, portanto, o papel do professor passa a ser de promover situações que provoquem tais desequilíbrios, por meio de atividades artificiais e assim

> educar é provocar, artificialmente, desequilíbrios seqüenciais, altamente graduados, de acordo com o nível embriológico do desenvolvimento, de modo que o próprio organismo provoque as reequilibrações majorantes. Dentro desta concepção **não têm importância os conteúdos programáticos** (salvo no que se refere à sua sequência e graduação, com relação ao nível do desenvolvimento), pois qualquer conteúdo pode ser apresentado como situação-problema (LIMA, 2004, p. 27, *grifo nosso*).

Além das situações-problema, as atividades artificiais também podem ser debates, interações, interdisciplinaridade etc. Nesse sentido, a discussão sobre o ensino de conteúdos passa a ser uma discussão sobre a forma como serão apresentados, e então, a atividade de ensino é direcionada apenas quando se pensa sobre a sequência dos conteúdos, que devem ser pensados de acordo com as etapas de desenvolvimento da criança. Mas na atividade, o aluno deve ser incentivado a chegar de forma *espontânea* à solução do problema.

Essas noções têm ultimamente levado a se pensar mais sobre a organização do currículo, no sentido do processo de aprendizagem por competências e habilidades, do que sobre a seleção de conteúdos, ou seja, do que seria historicamente necessário ser repassado ao aluno, pois se pensa mais em determinar competências e habilidades que serão necessárias para o mundo do trabalho, como se percebe, por exemplo, nos PCN, que apesar de serem os parâmetros curriculares, pouco tratam de conteúdos, focando mais na organização destes.

Nota-se que nas últimas três décadas – não coincidentemente, a mesma época em que se desenvolveu o construtivismo no Brasil -, cresceu no país a preocupação com a interdisciplinaridade e a contextualização, como é bastante claro nos PCN e no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio).

A interdisciplinaridade busca relacionar as disciplinas em atividades didáticas e a contextualização é a prática de colocar os assuntos em situações habituais para os alunos, permitindo assim uma aproximação maior com o conteúdo. Essas situações habituais podem ser tanto outras disciplinas, como conhecimentos prévios, além de situações cotidianas.

O uso de tais tipos de conhecimentos, ditos contextualizados, como os conhecimentos prévios ou do cotidiano, apesar de possibilitar de fato uma associação mais prática com o conteúdo - assim como colocar o aluno como sujeito ativo, construindo significado e dando sentido ao que aprende -, no entanto, também pode levar o ensino a sair das vias rígidas da ciência e cair no senso comum, reforçando conhecimentos equivocados ou limitados a determinados contextos locais.

O desenvolvimento dessas ideias tem levado a ênfase na necessidade da utilidade prática no ensino. O que é da vida prática ganhou extrema relevância e todo conteúdo agora precisa ser útil. "Daí ser comum ouvir em uma sala de aula de física, no ensino médio, a seguinte pergunta: 'professor para que serve isso aí que você está ensinando? Vou usar isso em quê na minha vida?'" (DORNELES, 2008, p. 36).

A ideia de estruturas ou esquemas prévios desenvolvidos pela teoria de Piaget, levou também a uma aversão com o ensino de conteúdos totalmente novos, sendo que tais só seriam possíveis ser ensinados sobre uma estrutura que já estivesse pronta. Isto também levou a uma valorização das necessidades e vontades dos alunos - pois tal deve aprender espontaneamente – e ao desprezo pela memorização. Essas ideias levam a falas como a de Lima (2004, p. 54): "Quando a criança resiste à 'aprendizagem', significa que ela não 'precisa' (não tem esquemas de assimilação) do que se lhe quer 'ensinar'". No que se refere então à questão moral, Piaget, de certa forma, concorda com esse relativismo do espontaneísmo quando diz que:

> Existem dois princípios fundamentais e correlacionados dos quais toda educação inspirada pela psicologia não poderia se afastar: 1) que as únicas verdades reais são aquelas construídas livremente e não aquelas recebidas de fora; 2) que o bem moral é essencialmente autônomo e não poderia ser prescrito. [...] prejudica-se igualmente essa formação humana dando aos adolescentes, aulas de civismo e de internacionalismo, se estas aulas

> consomem o tempo que eles teriam podido acabar descobrindo sozinhos, esse civismo no exercício de uma vida social organizada espontaneamente. Sempre que o discurso substitui a ação efetiva, o progresso da consciência é retardado (PIAGET, 1998, p. 166).

Na compreensão de Piaget “o ideal da educação não é aprender ao máximo ou maximizar os resultados, mas é antes de tudo aprender a aprender; é aprender a se desenvolver e aprender a continuar a se desenvolver depois da escola” (PIAGET, 1975, p. 224).

No Brasil, o construtivismo demonstrou seu poder de influência ao fundamentar o documento mais importante sobre a educação no Brasil.

> Se por um lado não é mais possível deixar de se ter preocupações com o domínio de conhecimentos formais para a participação crítica na sociedade, considera-se também que é necessário uma adequação pedagógica às características de um aluno que pensa, de um professor que sabe e aos conteúdos de valor social e formativo. Esse momento se caracteriza pelo enfoque centrado no caráter social do processo de ensino e aprendizagem e é marcado pela influência da **psicologia genética** (BRASIL, 1997, p. 42-43, *grifo nosso*).

Para Duarte (2001) os PCN usam *slogans* pseudopolitizados do discurso de Coll e Perrenoud na tentativa de atrair educadores defensores das mais diversas ideias. Os PCN, elaborados entre 1995 e 1999, publicado pelo Ministério da Educação e do Desporto, são documentos que objetivam uma ação educacional brasileira, que objetiva orientar a educação nacional nas escolas, a partir de um direcionamento nas práticas dos professores da educação básica.

Na introdução dos PCN há uma análise da situação educacional no país onde se mostra que as pedagogias correntes se concentram principalmente no ensino de conteúdos e não dão o enfoque necessário à aprendizagem. Tal demanda seria atendida, segundo os PCN, pela perspectiva construtivista de ensino e aprendizagem, considerada por esse documento um “marco explicativo” para os processos de educação escolar que sofreu influências da psicologia genética, da teoria sociointeracionista e das explicações da atividade significativa.

> O núcleo central da integração de todas essas contribuições refere-se ao reconhecimento da importância da atividade mental construtiva nos processos de aquisição do conhecimento. Daí o termo construtivismo, denominando essa convergência (BRASIL, 1997a, p. 50).

Segundo os PCN, a explicação para o processo de aquisição do conhecimento é dada fundamentalmente pelas teorias psicogenéticas de Piaget e de seus colaboradores.

> A psicologia genética propiciou aprofundar a compreensão sobre o processo de desenvolvimento na construção do conhecimento. Compreender os mecanismos pelos quais as crianças constroem representações internas de conhecimentos construídos socialmente, em uma perspectiva psicogenética, traz uma contribuição para além das descrições dos grandes estágios de desenvolvimento. (BRASIL, 1997a, p. 43)

Segundo este documento é necessário destacar a unidade entre aprendizagem e ensino, pois sem aprendizagem, não haveria ensino. É nesse sentido que o aluno é colocado agora como o principal responsável por sua aprendizagem. Os PCN concordam com o construtivismo com as ideias do "aprender a aprender" e da "autonomia". Em particular, a autonomia é vista pelos PCN não só como uma capacidade a ser desenvolvida, mas também como princípio didático geral, orientador das práticas pedagógicas.

> Este é o sentido da autonomia como princípio didático geral proposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais: uma opção metodológica que considera a atuação do aluno na construção de seus próprios conhecimentos, valoriza suas experiências, seus conhecimentos prévios e a interação professor-aluno e aluno-aluno, buscando essencialmente a passagem progressiva de situações em que o aluno é dirigido por outrem a situações dirigidas pelo próprio aluno" (BRASIL, 1997a, p. 94).

Os conteúdos escolares são vistos pelos PCN como meios para aquisição e desenvolvimento de determinadas capacidades para responder às necessidades do mundo atual. As escolas e professores escolhem os conteúdos, mas é o aluno que constrói os significados e então o conhecimento seria produzido "como decorrência de processos internos em interação com o meio ou, na terminologia construtivista, que 'o aluno constrói o seu próprio conhecimento' a partir de seu conhecimento prévio e por meio de suas experiências individuais" (GOTTSCHALK, 2002, p. 11). Gottschalk (2002) identifica, então, três princípios construtivistas que, a nosso ver, norteiam a proposta pedagógica dos PCN, e que podem ser resumidamente assim explicitados:

> 1) Os conteúdos devem ser meios para o desenvolvimento de capacidades.
> 2) O aluno deve construir seu próprio conhecimento a partir de seus conhecimentos prévios e por aproximações sucessivas.
> 3) A metodologia mais apropriada para que o aluno "construa seu próprio conhecimento" é a das ciências naturais (GOTTSCHALK, 2002, p. 11).

Seguindo a perspectiva construtivista, na crítica que os PCN fazem da educação brasileira, colocam como maior responsável o professor, que de acordo com este documento deve ser um mediador entre o aluno e o conhecimento e não um transmissor de conhecimentos.

No que diz respeito ao ensino de matemática, no volume sobre a disciplina, os PCN iniciam a crítica pelo movimento da matemática moderna.

> O ensino proposto fundamentava-se em grandes estruturas que organizam o conhecimento matemático contemporâneo e enfatizava a teoria dos conjuntos, as estruturas algébricas, a topologia etc. Esse movimento provocou, em vários países, inclusive no Brasil, discussões e amplas reformas no currículo de Matemática.
> No entanto, essas reformas deixaram de considerar um ponto básico que viria tornar-se seu maior problema: o que se propunha estava fora do alcance dos alunos, em especial daqueles das séries iniciais do ensino fundamental. O ensino passou a ter preocupações excessivas com formalizações, distanciando-se das questões práticas (BRASIL, 1997b, p. 19).

Algumas das ideias apresentadas em 1980 pelo *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) dos Estados Unidos, no documento "Agenda para Ação", serviram como base em discussões sobre currículo escolar para se contrapor ao movimento da matemática moderna. Este documento dá ênfase ao ensino de matemática a partir de *resolução de problemas*, problemas cotidianos e encontrados nas diversas disciplinas escolares, ou seja, em problemas contextualizados.

Os resultados das provas aplicadas em 1993 e 1995 pelo SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) mostraram que "as maiores dificuldades se encontravam nas questões relacionadas à aplicação de conceitos e à resolução de problemas" (BRASIL, 1998, p. 24). É interessante que os PCN interpretem este fato no sentido de que as escolas não aplicaram as ideias do NCTM e que selecionariam os conteúdos de modo linear, colocando a resolução de problemas como mais uma atividade e não uma contextualização mais abrangente, um ensino de matemática mais interligado ao cotidiano e às outras disciplinas. Nesse sentido, os conteúdos deveriam ser escolhidos levando em consideração o desenvolvimento do raciocínio e sua aplicação prática. "As formas de raciocínio e os processos a serem desenvolvidos seriam dedução, indução, intuição, analogia e estimativa. Quanto às aplicações práticas da matemática, estas deveriam se voltar mais para a resolução de *situações-problema*" (GOTTSCHALK, 2002, p. 13).

Gottschalk (2002) defende que os PCN se apoiam no realismo e no idealismo. Realista por que transparece uma concepção de investigação e descoberta que se inspira nos modelos das ciências naturais e idealista por afirmar que existiria uma "inteligência matemática" prática na criança, que se potencializada pela escola a levaria à construção de significados e procedimentos matemáticos.

> Em outras palavras, ancorados nos pressupostos das teorias psicogenéticas de Jean Piaget, os PCN entendem que os objetos matemáticos sejam produtos do pensamento. Assim, em seus pressupostos teóricos, a experiência empírica já não é vista como *causa* dos significados matemáticos, mas como pretexto para sua construção. Por conseguinte, adotam uma certa interpretação da psicologia genética que conduz a um idealismo mentalista, ao passo que sugerem métodos de ensino em que transparece uma visão realista empirista. (GOTTSCHALK, 2002, p. 1)

Mesmo que não se aceite que o construtivismo é majoritário nos PCN, entendemos que este documento está baseado nas concepções referencial da linguagem e essencialista do conhecimento.

A relação do construtivismo piagetiano com a educação matemática foi marcado pela publicação, em 1941, do livro *A gênese do número na criança*, de Jean Piaget e Alina Szeminzka. Nesta obra, os autores trazem todo o corpo teórico já pensado para o conhecimento de modo geral para fundamentar como a criança compreende o conceito de número. Para eles, o número é uma espécie de categoria lógica que se constrói a partir da ação da criança sobre o seu meio, como, os atos de contar e comparar.

> Essas investigações indicaram que a criança não constrói separadamente a adição e a subtração, tampouco constrói separadamente os dois sistemas numéricos, o cardinal e o ordinal. O número é, ao mesmo tempo, cardinal e ordinal e sua estrutura seria uma síntese operatória original, ultrapassando as estruturas lógicas elementares de tipo qualitativo. (MORO, 2009, p. 119)

Percebemos, então, a concepção essencialista, pois se nota que há uma base comum, denominada de estrutura, que não diferencia adição de subtração, nem número cardinal de ordinal, mas tudo estaria sobre uma síntese operatória.

Piaget (1985a) entende que no ensino de matemática deve haver um ajuste entre as estruturas internas do sujeito e os programas e metodologias de ensino da matemática escolar. E nesse sentido, ele volta a trazer o tema da reflexão sobre a ação, ou seja, de que se deve buscar provocar por meio de atividades criadas a reflexão sobre estruturas naturais que ainda não foram refletidas. Por isso, seria importante apresentar situações, que não dirão imediatamente o que o aluno vai aprender, isto é, não dá a definição de modo direto, mas busca que o aluno "descubra". Vemos atualmente nos livros didáticos de matemática, que geralmente os capítulos iniciam por exemplos, e não pelas definições.

> Daí a necessidade de intervenções do professor que levem os alunos prioritariamente à reflexão e, então, a descobrir noções, relações, propriedades matemáticas, em vez de ser-lhes imposta a elaboração adulta, pronta, formalizada a respeito (MORO, 2009, p. 128).

Sobre essa intervenção do adulto e a possibilidade de a criança construir espontaneamente o conhecimento, Piaget (1985) se opõe ao pensamento de Vygotsky.

> Eu não penso assim, como parece admitir Vygotsky, que a aquisição de conceitos novos, mesmo no nível escolar, é sempre o resultado da intervenção didática do adulto. Este pode ser o caso, mas há uma forma muito mais produtiva de ensino: as escolas chamadas "ativas" se esforçam para criar situações que por si só não são "espontâneas", mas que provocam uma elaboração espontânea por parte da criança quando conseguimos por vezes desencadear o interesse e levantar problemas sob a forma que corresponde às estruturas já construídas pela própria criança[17] (PIAGET, 1985, p. 134).

Piaget discorda de Vygotsky, que entende que um aprendiz em nível escolar só aprenderia com a ajuda de um adulto, e defende a possibilidade de se aprender de forma espontânea. Com relação à matemática, de acordo com Bringuier (1978 *apud* MORO, 2009), para Piaget há uma relação intrínseca entre a matemática, a razão humana e a natureza.

> as matemáticas são a união das possibilidades e o real, incluindo a razão humana... as matemáticas estão na natureza, a natureza englobando a razão humana; a razão humana as elabora com um organismo, um sistema nervoso e todo o organismo que o envolve, e que faz parte da natureza física, de tal sorte que há um acordo entre as matemáticas e a realidade através do organismo... (BRINGUIER 1978 *apud* MORO, 2009, p. 129).

O construtivismo piagetiano serviu como fundamento para diversas teorias sobre a gênese psicológica dos conceitos matemáticos no ser humano, como a didática da matemática francesa. Quanto à didática de modo geral, preocupações com os modos de ensino de forma mais específica e sistemática, do modo como se conhece hoje, iniciou-se com o educador tcheco Comênio no século XVII, e deu um grande salto no século XX, com o apoio principalmente do desenvolvimento da psicologia, que se direcionava para educação, com as teorias de Vygotsky e Piaget, e é nesse século que também se dá o direcionamento da didática para um estudo específico na matemática, que tem um progresso reconhecido na França, que como toda a didática sofreu influências dos estudos construtivistas piagetianos.

---

[17] "Je ne crois pas donc, comme semble l'admettre Vygotsky, que l'acquisition de concepts nouveaux, même au niveau scolaire, résulte toujours de l'intervention didactique de l'adulte. Ce peut être le cas, mais il existe une forme bien plus féconde d'instruction: les écoles dites « actives » s'efforcent de créer des situations qui par elles-mêmes ne sont pas « spontanées », mais qui provoquent une élaboration spontanée de la part de l'enfant lorsque l'on a réussi à la fois à déclencher son intérêt et à poser les problèmes sous une forme qui corresponde aux structures déjà construites par l'enfant lui-même".

A didática da matemática é a própria educação matemática na França, ou seja, ela não é uma única teoria, mas seria um conjunto de teorias que nasce com educadores matemáticos franceses, que se espalhou pelo mundo, tendo grande influência, a se ver pelas produções, no Brasil. Esse processo de pesquisa educacional em matemática na França se aprofunda a partir do progresso do movimento da matemática moderna, que é aceita oficialmente em 1966, pelo então ministro da educação Christian Fouquet. Esse movimento foi influenciado pelos estudos do grupo Bourbaki e da epistemologia genética de Piaget. Em 1969 é criado o primeiro IREM (*Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques* – Instituto de pesquisa sobre o ensino de matemática), em Paris, que foi criado para acompanhar a reforma que vinha se dando no país. Atualmente há 36 IREM. No entanto, esta teoria se ampliou na década de 1990.

De acordo com Pais (2001, p. 11) a didática da matemática francesa objetiva estudar “a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos”, tanto no sentido prático pedagógico, quanto de pesquisa acadêmica.

A didática da matemática francesa é um corpo de teorias e envolve: a *Teoria das Situações Didáticas*, a *Teoria do Contrato Didático* e a *Teoria dos Obstáculos Didáticos* (baseada na Teoria dos Obstáculos Epistemológicos de Bachelard) de Guy Brousseau; a *Teoria da Transposição Didática* e a *Teoria Antropológica do Didático* de Yves Chevallard; a *Teoria dos Campos Conceituais* de Gérard Vergnaud; a *Engenharia Didática* de Michèle Artigue, a *Dialética-Ferramenta-Objeto* de Regine Douady e a *Teoria dos Registros de Representação Semiótica* de Raymond Duval.

Se não se pode afirmar que a didática da matemática francesa é piagetiana, podemos considerar que ela tem o cognitivismo interacionista como fundamento para suas reflexões. Brousseau (1986) compreende que o aluno é o sujeito cognitivo e que a teoria de Piaget oferece fundamentos para se acreditar que o conhecimento pode ser construído pelo aluno. De certa forma, Brousseau adequa a teoria piagetiana às necessidades particulares da matemática.

Dessa forma, de acordo com Castorina (2011), a didática não é vista como um conjunto de métodos de ensino, mas como uma antropologia, que modifica o lugar da psicologia no estudo sobre a aprendizagem, deixando de ser uma ciência de referência aplicada à didática, e passando a ser uma ferramenta para interpretar as aprendizagens, como diz o autor:

> A problemática didática é o verdadeiro desafio para a psicologia genética: produzir investigações que contribuam para resolver as questões relacionadas com a construção de conceitos que se aproximem daquelas

> que compõem os saberes das disciplinas sociais para ensinar[18]. (CASTORINA, 2011, p. 191).

Da didática da matemática francesa ainda podemos citar Gérard Vergnaud, que foi orientado por Piaget, e buscou aprofundar a teoria de seu mestre, exclusivamente na matemática, com a Teoria dos Campos Conceituais, onde usa principalmente as noções piagetianas de esquema e de ação sobre as situações para explicar as operações fundamentais da matemática, mas que hoje tem sua teoria ampliada para os diversos ramos das ciências.

Fora da didática da matemática francesa, utilizando Piaget para estudar a matemática, temos o educador americano Martin Simon, que se utiliza do construtivismo piagetiano para fundamentar suas pesquisas em matemática, e assim busca formular modelos de ensino. Ele criou o THA (Trajetória Hipotética de Aprendizagem)[19].

O construtivismo influenciou o documento "Currículo e normas de avaliação para a matemática escolar" de 1989 do NCTM. O documento explica que depois do documento "agenda para uma ação" de 1980, percebeu-se a emergência do construtivismo na educação matemática, e em 1986 havia sido estabelecida uma comissão sobre normas para a matemática escolar e que está baseada no pressuposto de que aprendizagem é um processo ativo, fez a seguinte consideração:

> Extraindo de uma crescente pesquisa base em psicologia, a Comissão reivindica uma visão construtivista de aprendizagem. Recomendações para atividades e instrução em sala de aula inclui uma variedade de formas, incluindo "trabalho de projeto adequado, atribuições em grupo e individual, discussão entre o professor e alunos e entre alunos, prática em métodos matemáticos, e exposição pelo professor[20] (NCTM, 1989, p. 3, a parte entre aspas é do texto de 1986).

O NCTM colaborou no desenvolvimento de um conceito que exploraremos nesta tese: pensamento algébrico. Este conceito compreende o conteúdo algébrico como uma possibilidade mental de construção de conhecimento.

---

[18] "la problemática didáctica es el verdadero desafío para la psicología genética: producir investigaciones que contribuyan a resolver las cuestiones referidas a la construcción de conceptos que se aproximen a los que conforman los saberes de las disciplinas sociales a enseñar".

[19] Para mais informações sobre o THA (em inglês é *hypothetical learning trajectory*) ver artigo do próprio autor Martin Simon, "Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective" de 1995 e o artigo de Célia Pires, "Perspectivas construtivistas e organizações curriculares: um encontro com as formulações de Martin Simon" de 2009.

[20] "Drawing from a growing research base in psychology, the Commission claims a constructivist view of learning. Recommendations for classroom activities and instruction include a variety of forms including "appropriate project work, group and individual assignments, discussion between teacher and students and among students, practice on mathematical methods, and exposition by the teacher."

Nos EUA ainda podemos citar David Carraher, que trabalha com cognição social e tem trabalhos na área da matemática e álgebra, sendo um dos promulgadores do *Early Algebra*[21]. Também é professor na UFPE. Mas quem mais desenvolve o *Early Algebra* atualmente é a educadora americana Bárbara Brizuela. Nesta relação entre matemática e construtivismo, podemos citar a nipo-americana Constance Kamii, que foi orientada por Piaget. É autora do livro *A criança e o número*.

No Brasil temos Terezinha Carraher (ou Terezinha Nunes) e Analúcia Schliemann, que seguem o construtivismo de Piaget, e Jorge Tarcisio da Rocha Falcão, que foi orientado por Verganud, e tem muitos estudos sobre álgebra, inclusive sua tese de 1992.

Nas categorizações de Gottschalk que apresentamos anteriormente, identificamos o construtivismo e suas vertentes – experimental, cognitivista e antropológica - e o pragmatismo de Dewey[22]. Quando a autora trata da vertente antropológica e do pragmatismo, ela mostra relações com o que atualmente se chama *Interacionismo*, *Sócio-interacionismo* ou *Teoria Histórico-Cultural*, bastante utilizado atualmente na educação.

Estas teorias estão ligadas principalmente a Vygotsky e seus seguidores, como Luria, Leontiev e Davydov. Vygotsky foi um professor de literatura, que em sua curta vida produziu importantes escritos sobre psicologia, que assim como Piaget, tem sido utilizado na educação. Em duas de suas obras, *A formação social da mente* e *Pensamento e linguagem*, Vygotsky se afasta da teoria piagetiana por destacar o papel das interações sociais – devido, talvez, à influência marxista - no desenvolvimento intelectual, destacando assim o papel da linguagem e da comunicação, ou seja, de aspectos intersubjetivos. No entanto, a preocupação a respeito da linguagem em Vygotsky está no sentido de compreender processos mentais, ou seja, ainda se mantém a ideia de que o conhecimento principal estaria em outro lugar fora da linguagem e essa, para o teórico, é um instrumento ou uma ferramenta, tanto que ele chamava de *instrumento simbólico* e considerava os signos como *construções mentais* e não caracteres transmitidos.

Criou-se nas pesquisas educacionais uma separação entre piagetianos e vygotskyanos, sendo os primeiros taxados de "mentalistas" e os segundos de "interacionistas", sendo que os primeiros argumentam, com razão, que Piaget também considerou os aspectos sociais e linguísticos, assim como, vale destacar, Vygotsky também se preocupou com questões mentalistas, pois mesmo tendo se detido sobre questões externas ou não-mentalistas em si, sua preocupação estava em como estas colaboravam na formação da consciência. Nesse sentido,

[21] É uma abordagem, com origem nos EUA e na noção de pensamento algébrico, que defende o ensino de álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental.

[22] Abordaremos esta concepção quando tratarmos do pragmatismo americano no próximo capítulo.

Vygotsky se aproxima de um essencialismo, pois considera que os conceitos são desenvolvidos cognitivamente até alcançar um tipo superior, que seria o científico, e assim, considera que a linguagem ainda tem uma função representacionista, mas enaltece a função comunicativa e o papel desta na construção de conceitos, como talvez, ninguém na psicologia havia feito até então.

Entre Piaget e Vygotsky há aproximações, como a questão da existência de uma essência extralinguística, a concepção referencial da linguagem e a questão da *autonomia*. Consideramos que a autonomia é mais destacada em Piaget, mas também aparece em Vygotsky quando este trata da *Zona de desenvovimento proximal* (ZDP), que é a diferença entre o que criança consegue realizar sozinha e o que não consegue, mas que poderá ser capaz de aprender com a ajuda de uma pessoa mais experiente. Vale ressaltar que no construtivismo de Piaget não há a ideia de que uma criança consiga tudo sozinha, mas destaca a necessidade de um mediador. Para Bernstein (1994, p. 14) "Vygotsky viu a zona de desenvolvimento proximal em termos de uma extensão das funções cognitivas a níveis de crescente complexidade e generalização" (1994, p.14). Portanto, apesar das diferenças de enfoque Vygotsky está próximo ao construtivismo piagetiano, principalmente quando destacamos as concepções essencialista e referencial.

Impulsionados pelo uso da psicologia na educação, desenvolveram-se diversos métodos ao longo do século XX. Entre estes citamos o exponencial crescimento da *Resolução de problemas*, que tem como maior expoente o matemático húngaro George Polya (1887-1985). Polya publicou a obra *A arte de resolver problemas* em 1945, onde elaborou um método de ensino original sobre o uso da resolução de problemas matemáticos, formulando quatro etapas: compreender o problema; traçar um plano; colocar o plano em prática; comprovar os resultados. Esse se tornou um método defendido por construtivistas, reforçado pelo NCTM e PCN, devido sua adequação a noção de contextualização e interdisciplinaridade.

Nesse contexto, desenvolveu-se na educação matemática uma noção já utilizada na matemática aplicada, que é a *Modelagem matemática*. Esta é a prática de gerar modelos matemáticos para diversos tipos de situações. Acredita-se que a evolução da matemática, ou seria melhor dizer de sua linguagem, e podemos nesta noção colocar a evolução da álgebra, está relacionada diretamente à modelagem, pois compreende-se geralmente a matemática torna possível transformar *tudo* em modelos, em fórmulas e em linguagens específicas. No entanto, defendemos que a matemática, e a álgebra em particular, teve uma evolução não devido a fatores externos, mas internos à própria matemática e a forma como sua linguagem foi sendo construída no decorrer dos tempos. Nesse sentido, podemos dizer que a modelagem matemática tem sido usada na educação matemática no sentido essencialista e referencial, pois compreende que os conceitos são realidades fora da linguagem, e assim deveria se levar o aluno a construir modelos de situações, sejam de outras áreas das ciências, como física, biologia, geografia, etc., assim como de situações reais. No entanto, discordamos quando se admite potencialidades cognitivas que o aluno poderia construir como vemos em alguns teóricos do *Early Algebra*.

Portanto, consideramos que há uma tendência educacional em voga que se fundamenta ora em um realismo, ora em um idealismo, que tem no construtivismo sua maior representação, que traz aspectos da epistemologia de Piaget, assim como interpretações equivocadas deste, além de outros teóricos, como Vygotsky, Ausubel, Dewey, entre outros – que também são às vezes mal interpretados. No entanto, segue na educação matemática brasileira uma miscelânea que se baseia nas concepções realista e idealista.

No próximo capítulo mostraremos a virada linguística, suas vertentes e consequências, aprofundando nesta um estudo mais específico sobre Wittgenstein e sobre a epistemologia do uso de Arley Moreno, que a nosso ver possibilitam uma análise sobre o ensino de álgebra que apresentaremos adiante.

2 A linguagem como ponto de partida

“En *Fausto* Goethe se preguntaba si ‘al principio fue la *palabra*’ o el acto. Según ella, la filosofia lingüística ha resuelto ese dilema: la palabra es un *acto*”
(Ernest Gellner, *Palabras y cosas*)

No capítulo anterior, baseados em Dummet (1993), dividimos a história da filosofia em três grandes períodos. Tratamos do realismo e do idealismo, e deixamos o terceiro – a filosofia da linguagem - para este capítulo. No fim do século XIX, houve uma virada na compreensão epistemológica, onde o sujeito deixou de ser compreendido como um ser totalmente autônomo e autoconsciente, pois entendeu-se que este reflete questões que são externas a ele.

É tomado agora como dependente da *intersubjetividade*, e nesse sentido, a *linguagem* é privilegiada (mesmo as teorias fora da filosofia da linguagem passaram a dar mais destaque a esta). O conhecimento não pôde mais ser pensado independentemente da linguagem. Por isso, o que prevalece nesse período é a análise da linguagem, de onde praticamente vem se desenvolvendo a filosofia até hoje. Apresentamos como ocorreu a mudança de paradigma da construção e transmisão do conhecimento, que se afasta da visão referencialista da linguagem, não sendo mais ela um meio, mas sim o ponto de partida.

Assim como nas concepções filosóficas apresentadas no capítulo anterior, mesmo dentro da mesma linha filosófica, houve posicionamentos divergentes em alguns aspectos (como as diferenças entre Descartes, Kant, Hegel e Husserl, dentro do idealismo), houve também divergências entre pensadores da filosofia da linguagem.

A abordagem anunciada será realizada da seguinte forma: no primeiro tópico contextualizamos histórica e teoricamente a virada linguística, apresentando de forma breve seus principais pensadores e suas vertentes; no segundo tópico apresentamos mais detalhadamente o filósofo Wittgenstein que fundamentou as duas principais vertentes da filosofia da linguagem, apontando para a sua segunda filosofia como o fundamento teórico principal da teoria que baseia esta tese, que é a epistemologia do uso que será detalhada no terceiro tópico.

2.1 A virada linguística

De acordo com Rorty (1990) o termo *virada linguística* é primeiramente utilizado por Gustav Bergman, em um artigo de 1953, intitulado *Positivismo lógico, linguagem e a reconstrução da metafísica*. Mas o termo se tornou canônico de fato com a obra de Rorty ("The linguistic Turn" de 1967), quando apresenta os pensadores que desenvolveram o que ele denomina *filosofia linguística*.

A partir do idealismo absoluto de Hegel, da fenomenologia de Husserl e do logicismo de Frege, inicia-se na filosofia de modo geral, uma maior atenção com a linguagem. No entanto estas teorias ainda não são consideradas pertencentes à filosofia da linguagem em si, pois ainda não lhe dão o protagonismo na construção do conhecimento, apenas elevam seu patamar em tal processo. Frege reserva à lógica o patamar suprassumo, enquanto Hegel e Husserl reservam tal lugar à subjetividade, cada um ao seu modo. Mas não se pode desprezar que estes pensadores iniciaram um novo "afluente" para a filosofia, que foi "desaguar" na filosofia da linguagem.

De modo sintético a filosofia da linguagem passa a dizer que os problemas filosóficos são na verdade problemas na linguagem. No entanto, que linguagem é esta? Onde ela estaria? Daí vem as correntes diversas que se formaram na filosofia da linguagem.

Habermas considera que um novo paradigma se firmou, afastando-se de um paradigma anterior denominado *filosofia da consciência*. Neste novo paradigma a linguagem passa a protagonizar a cena filosófica e daí surgem duas vertentes que ele chama de *hermenêutica filosófica* e *filosofia pragmática*. Os pensadores da filosofia pragmática são também conhecidos como *filósofos analíticos* - ou como *filósofos de língua inglesa*, como diz Marías (2004) -, pois se desenvolveram a partir dos estudos realizados por Frege e Russell, considerados analíticos, de fato, mesmo que alguns tenham se afastado destes, indo em uma linha mais pragmática, como o segundo Wittgenstein e Austin. Os pensadores da hermenêutica filosófica são chamados de *filósofos continentais*, pois são da França e Alemanha, principalmente. De acordo com Habermas (1989, p. 24) a filosofia pragmática e a hermenêutica filosófica

> [...] abandonam o horizonte no qual se move a filosofia da consciência com seu modelo do conhecimento baseado na percepção e na representação de objetos. No lugar do sujeito solitário, que se volta para objetos e que, na reflexão se toma a si mesmo por objeto, entra não somente a idéia de conhecimento lingüisticamente mediatizado e relacionado com o agir, mas também o nexo da prática e da comunicação quotidianas, no qual estão inseridas as operações cognitivas que têm, desde a origem um caráter intersubjetivo e ao mesmo tempo cooperativo.

Bernstein (2013) concorda com essa separação, e ainda destaca, que se considerado o desenvolvimento da hermenêutica filosófica, a virada linguística teria se dado a partir de Hamann, na Alemanha, no início do idealismo alemão, ou em algum dos que o sucederam, como Humboldt e Herder, acrescentando as contribuições de Dilthey, da filosofia tardia de Heidegger e da hermenêutica ontológica de Gadamer.

Com Heidegger e Gadamer o fenômeno hermenêutico ganhou força e importância, e a discussão filosófica se afasta do paradigma metafísico, trazendo-a para o mundo do sujeito, ou melhor, dos sujeitos, pois a hermenêutica filosófica enfatiza a intersubjetividade, buscando fazer a interpretação no interior dessas relações humanas. Heidegger propõe um novo método para explicar a apreensão do conhecimento que busca se afastar da concepção idealista. O filósofo parte de uma analítica existencial que se volta para o ser, como sujeito existencial, e compreende que tal análise só pode ser feita na linguagem, não a partir dela, mas nela em si, pois passa a considerá-la como a "morada do ser". "A linguagem deixa de ser transmissora de imanências humanas para se tornar condição de possibilidade do ser, condição de possibilidade de manifestação do sentido" (MARCELLINO JR, 2007, p. 553). Assim não se buscaria mais verdades eternas, pois tais tornam-se relativas, já que dependem das relações humanas.

De acordo com Rocha (2008), esta hermenêutica existencialista levou a ideia de um sujeito autônomo, livre e intencional, que é capaz de produzir sentido, assumir responsabilidades e transformar a realidade, e assim, o sujeito não poderia ser conduzido para fins pré-determinados, mas necessitaria ser auto motivado, isto é, que deveria conduzir a si mesmo. "Para Heidegger, por exemplo, o professor tem de deixar seus alunos aprenderem, e não impor a eles os ensinamentos" (ROCHA, 2008, p. 73). Heidegger e a hermenêutica buscam partir da reflexão na linguagem, destacando aspectos intencionais do sujeito.

Azevedo (2007) apresenta algumas diferenças entre os filósofos analíticos e os continentais. Os primeiros compreenderam a hermenêutica mais no sentido teológico, e assim se afastaram desta concepção. O autor ainda acrescenta que as diferenças não se deveram só as tradições nacionais, mas às diferentes abordagens.

> Se de um lado a filosofia analítica do significado parte da semântica lógica de uma linguagem ideal, terminando por desenvolver uma semântica e uma pragmática da linguagem natural, a hermenêutica moderna, por outro lado, parte de uma metodologia da interpretação histórico-filológica, resultando por fim numa filosofia quase-transcendental da compreensão comunicativa. [...]. No seu desenvolvimento histórico a fundação da hermenêutica filosófica no século XIX foi excessivamente marcada pelo psicologismo, enquanto a filosofia analítica do significado, partindo do anti-psicologismo do século XX que inspirou a semântica lógica dos fundadores, manteve a recusa de enfrentar o problema do sujeito da

> interpretação, o que está implícito na questão da compreensão comunicativa e da intencionalidade, sendo isto remetido para o âmbito da pragmática de corte behaviorista (AZEVEDO, 2007, p. 38).

Geralmente a virada linguística é associada à filosofia analítica, e a hermenêutica filosófica é tida como participante que usufruiu deste desenvolvimento. No entanto, esse processo de mudança se deu gradualmente, e não ocorreu a partir de um exato pensador ou de uma exata teoria, referente a uma data ou a publicação de alguma obra – nota-se, por exemplo, aspectos semelhantes à discussão da filosofia da linguagem em Rousseau e em Humboldt (NIGRO, 2009). A fundamentação filosófica na linguagem foi um movimento que se desenvolveu, ganhando corpo a partir de diversos pensadores e obras, que foram influenciando os pensadores seguintes.

Mas alguns autores defendem que a virada linguística se deu a partir de um determinado ponto. De acordo com Bernstein (2013), o mais defendido é que a virada linguística se deu a partir da obra *Tractatus lógico-philosophicus* de Wittgenstein. No entanto, ele lembra que muitos acreditam que na verdade, a virada se deu com o inspirador de Wittgenstein, Frege.

Além da direção hermenêutica e analítica/pragmática, a filosofia da linguagem se desenvolveu a partir da corrente filosófica denominada *estruturalismo*, que nasceu dos estudos em linguística do suíço Saussure, considerado pai da linguística moderna. Ibañez (2004), por exemplo, considera que a virada linguística se inicia em Saussure. Em sua obra *Curso de Linguística Geral*, Saussure apresenta o conceito de semiologia (estudo dos signos), que de acordo com ele, estuda os signos na vida, em todos os aspectos, não só linguísticos, mas de todo tipo, como os ritos simbólicos e a moda, por exemplo. Dessa forma, os estudos de semiologia podem colaborar na psicologia, antropologia, sociologia e outros estudos (REALE e ANTISERI, 2006). Saussure entendeu que era possível extrair estruturas a partir da empiria que se revela por meio da fala, isto é, leis gerais a partir das observações sobre os processos comunicativos. Por isso o desenvolvimento de sua teoria é chamado de *estruturalismo*, onde se crê ser possível perceber sistemas a partir das observações sobre as relações que existem. Assim, o estruturalismo se afasta da ideia de essência autocontida, mas de que se deve as essências, a partir das estruturas sistemáticas, serem percebidas. De acordo com Rocha (2008), o estruturalismo se diferencia da hermenêutica filosófica, no sentido de que enquanto essa busca adentrar na intersubjetividade, o estruturalismo busca ver por fora dela.

Rocha (2008), em sua discussão mais geral sobre metodologias científicas na aprendizagem, faz uma abordagem sobre a relação entre os termos “estruturalismo” e “construtivismo”. O autor compreende que a utilização dos termos na aprendizagem não tem o mesmo significado para a filosofia, e assim ele busca recuperar os significados originais dos mesmos. O estruturalismo que começou com Saussure, se transformou, com Lévi-Staruss em um estruturalismo histórico ou de desenvolvimento, como feito por Foucault, onde começou a se entender que as grandes culturas tradicionais são opressivas, marginalizantes, patriarcais e monológicas. Dessa forma, passou a se entender que estruturas foram criadas por tais culturas, com a pretensão de serem universais, para impor e manter seus privilégios históricos. Então, a partir do estruturalismo se avançou para os estudos culturais e se entendeu que as consciências coletivas não são dadas, mas construídas. Disto temos o desenvolvimento do *construtivismo social*, que entende que as realidades físicas e biológicas, como raça e sexo, são socialmente construídas.

Rocha (2008) nos alerta também para uma outra modificação a partir do estruturalismo original, que se realizou a partir de 1950, com o desenvolvimento do construtivismo epistemológico, que tem em Piaget seu principal representante. Piaget baseado na ideia de estrutura de Kant, se contrapõe a esta, não a compreendendo como inata, mas como desenvolvida em estágios, como apresentamos no capítulo anterior. Rocha (2008) traz uma citação de Piaget sobre a contribuição e o problema do estruturalismo original:

> Para além dos esquemas de associação atomista, por um lado, e as totalidades emergentes, por outro, há, todavia, um terceiro caminho, a saber, o estruturalismo operacional. [...] nos aparece, o problema realmente central do estruturalismo: Estas totalidades compostas são compostas desde todo sempre? Como pode ser que seja assim? Não foi “alguém” que as compôs? Ou elas estariam inicialmente (ou ainda estão) em processo de composição? [...] O estruturalismo, ao que parece, deve escolher entre uma gênese a partir de partes sem estruturas, por um lado, ou totalidades sem geração, por outro; no primeiro caso estaríamos de volta à associação atomista que os empiristas já haviam nos acostumados; no segundo caso somos constantemente ameaçados a cairmos nas teorias das essências husserlianas, ou das formas platônicas, ou das formas a priori de síntese kantianas. A menos, é claro, que haja uma maneira de passarmos pelos espinhos deste dilema. [...]. Logo, uma vez que nós tomamos o problema central, não ainda como a história ou a psicogênese da estrutura, mas de sua construção, a relação entre estruturalismo e construtivismo não pode mais ser evitada. [...] (PIAGET, 1981 *apud* ROCHA, 2008, p. 64).

Como vemos o construtivismo piagetiano tem influências também do estruturalismo, ou seja, esta teoria mistura uma análise subjetivista, de Kant, com uma abordagem intersubjetivista, vista pelo lado de fora, isto é, procurando estruturas que expliquem como o indivíduo adquire conhecimento. No entanto, se mantém a noção essencialista e referencial da linguagem, pois se busca uma essência em estruturas internas ao sujeito, que se constroem na relação com outros sujeitos, colocando a linguagem como um meio para tal relação.

Uma área muito importante na filosofia da linguagem é a matemática, aparecendo dentro da discussão filosófica da matemática, de maneira bastante original. Dentro da filosofia da matemática, há a corrente *formalista* que geralmente não é relacionada à virada linguística, mas que acreditamos ser importante citar, pois vemos nessa corrente um destaque para a questão linguística na matemática. Além do que, o pioneiro dessa corrente, Hilbert, teve relações com o círculo de Viena – que abordaremos adiante - como o fato de ter influenciado Carnap (CASANAVE, 1995; CARRION, 1990).

Criado por volta de 1910 por Hilbert, o formalismo tinha por objetivo encontrar uma técnica matemática que pudesse demonstrar que a matemática estava livre de contradições. Para tal desenvolveu uma linguagem formal, com regras e propridades, e se propôs a demonstrar que não haveria contradições. Ponte *et al.* (1997, p. 16) sintetiza:

> Com o formalismo a Matemática torna-se um sistema formal que partindo dos axiomas e dos termos iniciais, se desenvolve numa cadeia ordenada de fórmulas, mediadas por teoremas, sem nunca sair de si mesma. Torna-se nem mais nem menos, do que "um jogo linguístico" fundado exclusivamente nas próprias regras do jogo, como acontece, por exemplo, com o jogo do xadrez. Neste contexto, fazer Matemática consiste em manipular símbolos sem significado de acordo com regras sintácticas explícitas.

Nesse sentido, o formalismo não se relaciona exatamente com uma concepção ideal, mental ou empírica, mas estaria muito mais próxima de uma ideia puramente linguística, mas não no mesmo sentido dos autores envolvidos na virada linguística, citados até aqui, pois, o formalismo compreende a matemática como uma manipulação de símbolos sem significado fora da própria manipulação, tendo apenas regras sintáticas bem elaboradas, ou seja, como nos diz Machado (2004, p. 176), no formalismo de Hilbert, o significado estava nas regras de manipulação dos símbolos. Gottschalk (2002, p. 20), quando se refere ao formalismo, nos diz que para este:

> a matemática é uma ciência que se limita exclusivamente a operar com símbolos, independentemente de qualquer significado que eles possam ter. As proposições matemáticas são consideradas meras seqüências de sinais, sem vínculos com a realidade empírica, evitando-se incertezas derivadas da ambigüidade da linguagem (GOTTSCHALK, 2002, p. 20).

Porém os resultados alcançados pelo matemático Gödel mostraram que o projeto de Hilbert era irrealizável e, assim, o programa formalista também não conseguiu provar a certeza dos métodos matemáticos. Os teoremas de Gödel também golpearam o logicismo iniciado por Frege e Russel, pois desfez a noção que se tinha sobre a relação entre a lógica e a matemática, o que repercurtiu na filosofia analítica iniciada a partir de Frege e desenvolvida pelo círculo de Viena, e levou ao enfraquecimento desta, pelo menos em sua linha como filosofia da linguagem ideal, abrindo mais espaço para a filosofia da linguagem ordinária, que aqui chamaremos de filosofia pragmática.

Talvez a maior influência do formalismo no ensino da matemática em níveis mais elementares tenha sido o movimento da matemática moderna que dava destaque aos conteúdos algébricos em detrimento a conteúdos como a geometria, por exemplo. É importante falar desta filosofia, pois foi base do que os PCN criticam, a favor de um ensino mais contextualizado. No entanto, Ponte *et al* (1997) já aponta para um problema com esse “descaso” com os conteúdos, e concordamos com ele quando diz que as estratégias atuais obtêm mais resultados com conteúdos mais básicos. Esse autor sugere um equilíbrio, pois se já erramos por tornar o ensino muito formal, referindo-se ao movimento da matemática moderna e ao formalismo, erramos também ao contextualizar, pois assim perdemos a perspectiva do que está sendo ensinado.

Portanto, tivemos no fim do século XIX e século XX um crescimento exponencial nos estudos que trazem a linguagem para o centro da discussão, seja na linguística com Saussure, na matemática, com Hilbert, ou na filosofia com a hermenêutica e a filosofia analítica (ou pragmática), também chamada de filosofia de língua inglesa.

A virada linguística que se inicia na Inglaterra vai tomar dois rumos diferentes, aquele que busca uma *linguagem ideal* e a que vai buscar analisar o uso da linguagem, isto é, a pragmática na *linguagem ordinária*. De acordo com Rorty a filosofia analítica é uma espécie de continuidade da filosofia fundacionista, pois essa ainda busca os fundamentos, isto é, ainda pretendem uma essência, assim como, do conhecimento como representação e a filosofia como base para análise das outras áreas (REALE e ANTISERI, 2006)

Para Rorty os principais pensadores que rompem com essa filosofia fundacionista são Heidegger, Dewey e Wittgenstein. Heidegger representante da hermenêutica filosófica, Dewey como representante do pragmatismo americano, e Wittgenstein como representante, primeiramente da filosofia analítica e posteriormente da filosofia pragmática inglesa (REALE e ANTISERI, 2006). É interessante que Rorty lembra que, tanto Heidegger, Dewey e Wittgenstein, tentaram em um primeiro momento de suas reflexões também construir filosofias fundacionais, como é o caso do primeiro Wittgenstein com seu *Tractatus*, mas abandonaram em algum momento tal ideia, buscando não mais buscar essências fundacionais, mas justamente passaram a alertar sobre tal perigo na filosofia. Devido a isto, Rorty os coloca como *terapeutas da filosofia*.

As filosofias analítica e pragmática se desenvolveram a partir dos estudos realizados em duas cidades inglesas, Cambridge e Oxford, que originaram a filosofia analítica e a filosofia pragmática, respectivamente. Aqui separamos, pois estas apresentam posicionamentos diferentes, mas que muitas vezes são colocadas juntas sob o nome de uma ou de outra. A filosofia analítica estuda a linguagem ideal e a pragmática investiga a linguagem ordinária e seu uso efetivo nos diversos contextos cotidianos, por isso a virada linguística também é chamada, em alguns textos, de *virada pragmática* ou *virada linguístico-pragmática*. A primeira é representada pela Escola Analítica de Cambridge (Frege[23], Russell, Moore e o primeiro Wittgenstein) que resultará no positivismo lógico do Círculo de Viena. A segunda, pela Escola de Oxford, também conhecida como filosofia da linguagem ordinária (Gilbert Ryle, o segundo Wittgenstein e Austin).

A origem da filosofia analítica se deve aos estudos logicistas de Frege e Russell. De acordo com Batista Neto (2015, p. 177), a filosofia analítica se utiliza dos desenvolvimentos logicistas e da ideia de análise conceitual que deve buscar revelar a forma lógica genuína dos enunciados, por isso, considerado, uma espécie de realismo metafísico, pois coloca a fundação em uma lógica, que tem uma realidade independente, ou seja, a filosofia buscava uma linguagem ideal. A filosofia analítica ganha corpo filosófico de fato, como análise linguística, com a obra *Tractatus* de Wittgenstein - que havia sido influenciado por Frege e Russel -, que exercerá enorme influência no desenvolvimento da filosofia analítica.

> O conceito de análise envolve, assim, nos primórdios da filosofia analítica, um procedimento de decomposição de um complexo, a proposição, visando a estabelecer seus elementos constituintes e a explicitar sua forma lógica e, desse modo, esclarecer dificuldades envolvidas na maneira de se considerar sua relação com o real. A medida que a proposição pode ser formulada de maneira mais perspícua e rigorosa em uma linguagem lógica, a análise constitui-se também como tradução (MARCONDES, 1989, 35).

O desenvolvimento da filosofia analítica vai ser chamado de *empirismo lógico* (ou neopositivismo ou positivismo lógico), que será desenvolvido pelo Círculo de Viena, na Áustria. Os filósofos deste círculo declaram que haviam sido influenciados pelo *Tractatus* de Wittgenstein e desenvolveram a filosofia analítica. O círculo de Viena foi um grupo de filósofos da universidade de Viena que existiu entre 1929 a 1937, e entre seus principais pensadores que participaram efetiva ou ocasionalmente, estão, Waissman, Neurath, Carnap, Tarski, Gödel e

[23] Frege não era de Cambridge, era alemão, da Universidade de Jena. É colocado aqui, pois influenciou profundamente o pensamento de Russell.

Ayer (ABBAGNANNO, 2007; REALE e GIOVANNI, 2006), além de ter recebido sugestões e críticas de Popper e do próprio Wittgenstein.

O empirismo lógico desenvolvido pelo Círculo de Viena entende que o conhecimento está alicerçado em dois princípios, como o próprio nome diz, no empirismo e no logicismo. Como vimos no capítulo anterior, o empirismo entende que a única base legítima do conhecimento é a experiência sensível e que somente a empiria é capaz de fornecer ao conhecimento de um conteúdo. O logicismo entende que a linguagem deve estar relacionada à lógica, para ser válida cientificamente. Isto nos leva a entender que este grupo de pensadores compreendia que as experiências sensíveis e o próprio pensamento poderiam ser relacionados isomorficamente com a lógica. Por isso, o Círculo de Viena pode ser considerado o ápice da filosofia analítica, ao buscar uma linguagem ideal pela ciência.

Rorty (1990) chama à filosofia analítica de filosofia da linguagem ideal, opondo aos estudos realizados em Oxford, que ele denominou filosofia da linguagem ordinária, que aqui chamamos de filosofia pragmática. Tanto os filósofos de Oxford, quanto o próprio Rorty, criticaram a filosofia analítica ou filosofia da linguagem ideal, pois, entendiam que tal filosofia procurava, por meio do método científico, construir uma linguagem lógica e ideal (IBAÑEZ, 2004). A filosofia pragmática criticou este cientificismo ao igualar a linguagem cotidiana como tão importante quanto a linguagem científica, colocando a linguagem como de fato a fonte de produção dos significados.

A filosofia analítica continuou a se desenvolver, mesmo que de modo heterogêneo, pelo século XX, com destaque para Kripke e Putnam na filosofia da mente e Burge que busca reinterpretar Frege.

> Mais recentemente, novos desenvolvimentos no campo da filosofia da psicologia e das ciências cognitivas fizeram com que os filósofos analíticos retomassem questões sobre a natureza da mente e da consciência, sobre a relação entre a mente e a realidade e a mente e a linguagem (MARCONDES, 2004, p. 50)

Assim, a filosofia analítica de fato esmoreceu, principalmente com o trabalho de Quine na década de 1950, que buscou diluir

> as fronteiras entre a filosofia e as ciências, atacando os princípios que ora recomendavam o método da "análise linguística" (tais como a distinção entre enunciados analíticos e sintéticos e o isolamento do conteúdo cognitivo das sentenças) e abrindo espaço para as discussões sobre ontologia (BATISTA NETO, 2015, p. 178).

Batista Neto (2015) informa que Rorty, ao se referir 25 anos após sua coletânea “a virada linguística”, já fala que alguns filósofos analíticos não se reconhecem mais como “filósofos linguísticos”. E é, então, que já se fala em uma filosofia pós-analítica. Batista Neto (2015, p. 178) confirma com Marcondes (2004), ao dizer que

> a partir da década de 1960, o paradigma linguístico vai gradualmente perdendo seu monopólio no campo da filosofia analítica. No interior dos debates que esse paradigma ocasionava, especialmente com Grice e Searle, houve mesmo um afastamento de algumas premissas metodológicas próprias à virada linguística, abrindo espaço para a projeção da chamada “filosofia da mente”, que chegou mesmo a dominar o panorama de produção e publicação no ambiente filosófico “analítico” e representa, em certo sentido, um retorno a Descartes e sua progênie filosófica imediata

Santos (2014) levanta a possibilidade de a filosofia da linguagem estar em um processo de esgotamento, como um todo. Gamboa (2007) fala em “giro ontológico” e Bensusan (2009) em virada metafísica, como movimentos que iniciaram no fim do século XX que reagem à virada linguística. No entanto Ghiraldelli (2003) lembra uma afirmação de Davidson - grande expoente da filosofia analítica -, que no fim de sua vida declarou que a virada linguística é um movimento que não tem mais como retroceder ou acabar.

Batista Neto (2015) considera que uma corrente mais voltada para o pragmatismo se desenvolve em meados do século XX a partir da crise da filosofia analítica. De acordo com Marcondes (2005), Neurath e Carnap organizaram, em 1938, juntamente com o filósofo norte-americano, Charles William Morris, uma obra denominada *Enciclopedia Internacional de Ciência Unificada*. A introdução intitulada *Fundamentos de uma teoria dos signos*, escrita por Morris é considerada um marco na filosofia da linguagem, pois é nela que pela primeira vez se vê a divisão da linguagem em *sintaxe, semântica* e *pragmática*. De acordo com as definições de Morris, sintaxe examina as relações entre signos, a semântica, as relações dos signos com os objetos a que se referem e a pragmática, a relação dos signos com os seus usuários (MARCONDES, 2005).

A *sintaxe* preocupa-se com a forma da linguagem, e está ligada ao desenvolvimento de uma ciência formal, que se preocupa com os signos enquanto entidades abstratas, a partir da possibilidade de combinações entre os signos, por exemplo, na língua portuguesa a expressão “João lá fora corre” é sintaticamente errada, pois não segue as regras da língua portuguesa (MARCONDES, 2005). Na matemática, essa ideia pode ser compreendida neste mesmo sentido. Por exemplo, não poderíamos escrever +2 = 5.

Para Marcondes (2005), a *semântica* não se preocupa com a forma, mas com o conteúdo significativo dos signos e à verdade que estes signos revelam. Na matemática compreendemos o significado da expressão 2 + 3 = 5. Percebe-se que a sintaxe e a semântica estão conectadas, por que se os signos não estiverem corretamente escritos, isto é, na forma correta, eles tampouco, terão um significado correto, pois a forma altera o significado, como vemos no fato de que "João ama Maria" é diferente do inverso, "Maria ama João", apesar de aí estar os mesmos signos, apenas em ordem diferente (MARCONDES, 2005).

Santos e Mulinari (2015) fazem uma interessante relação: entendem que a sintaxe trata do estudo dos signos e suas relações entre si, aspectos, estes, desenvolvidos pela filosofia analítica; a semântica trata do estudo dos signos e sua relação com os objetos, aspecto das teorias hermenêuticas; e a pragmática é o estudo da relação entre signo e seu uso, raciocínio ligado a filosofia pragmática.

A pragmática diz respeito ao uso da linguagem pelos sujeitos nas diferentes situações da vida. Talvez por isso Carnap, considerava a parte da linguagem de mais difícil análise (MARCONDES, 2005). "[...] a pragmática consiste na nossa experiência concreta da linguagem" (MARCONDES, 2005, p. 10). Talvez por parecer de difícil análise, o que se tem feito geralmente são as generalizações presentes nos estudos da semântica e da sintaxe. Marcondes (2005) lembra que Morris também foi influenciado por Peirce em seus estudos sobre a pragmática.

No século XX emerge uma filosofia original nos Estados Unidos, denominada *pragmatismo*, que é atualmente mais relacionado a William James, que primeiramente usou o termo, mas que tem em Peirce as primeiras ideias sobre a nova concepção filosófica, que ele depois denominou *pragmaticismo*. De acordo com Bernstein (2013), o pragmatismo americano nega a ideia de uma linguagem ideal, como visto na filosofia analítica, e busca manter o contato com a vida cotidiana dos seres humanos, faz justiça aos modo como a experiência nos conduz, não limitando esta.

Herrero e Niquet (2002) consideram Peirce um semiótico, que elaborou a noção sobre a tríplice função do sinal. Peirce entende que o signo é "algo que representa algo diferente de si para os intérpretes" (HERRERO E NIQUET, 2002, p. 12), isto é, por meio do signo, compreendemos alguma coisa. De acordo com Herrero e Niquet (2002), para Peirce o signo se relaciona com algo que quer representar, com o seu significado e com os intérpretes, ideia que se assemelha, a divisão entre sintaxe, semântica e pragmática. Peirce, então, destaca a dimensão pragmática da linguagem, colocando a sintaxe e a semântica como integrantes da pragmática.

William James foi extremamente influenciado pelo seu contemporâneo Peirce. Mas desenvolveu um pensamento diferente, apesar de ainda ser colocado dentro do que se denomina como pragmatismo. James desenvolveu uma espécie de *empirismo radical*, e é nesse sentido que ele é colocado como pragmatista, e não como Peirce, que colocou a linguagem como alicerce para tal. James criticou o empirismo tradicional e desenvolveu a concepção de experiência pura e compreendeu que a linguagem é uma das diversas experiências que o sujeito tem. O filósofo americano não considerava as experiências como unidades que se seguem e se associam, mas que se experimenta "relações", e por isso não há como conceituar a experiência, pois ela é como é e o que é de fato, assim ela não tem um papel primordial de fornecer conhecimento, e é desse modo que ele vai entender que a linguagem não representa entidades, mas funções (BERNSTEIN, 2013). A experiência é a vida de cada indivíduo e como ela se apresenta para tal. Assim, James não separa a experiência em objeto e consciência, pois uma mesma experiência pode ser tanto mental quanto física, devido essa concepção ele se afasta de teorias representacionaistas da mente, nas quais ele mesmo inclui as cartesianas, lockeanas, humeanas, kantianas e neo-kantianas, como a fenomenologia de Husserl. Assim, James avança na ideia de retirar do interior do sujeito as possibilidades únicas de compreender como se dá o conhecimento. (BERNSTEIN, 2013)

O pragmatismo americano se desenvolve com a teoria de Dewey que ele mesmo chamava de *instrumentalismo*. De acordo com Bernstein (2013), Dewey buscou realizar uma *naturalização darwiniana de Hegel*. Ele relacionou o historicismo de Hegel à teoria biológica de Darwin, ou seja, tomou a ideia de experiência como produto da história como uma questão biológica. Assim, ele entendia que a experiência tem um alcance tanto espacial quanto temporal, não sendo apenas subjetiva ou objetiva, nem mental ou física, e a partir da ideia de que a experiência surge nas situações cotidianas, desenvolve também um processo pedagógico desta concepção, pois o conhecimento, segundo ele, advém das experiências, e daí ele entende que a educação pode fornecer e enriquecer as experiências formando indivíduos para desenvolver uma sociedade cada vez melhor. A partir de Hegel, ele compreendia que a experiência possui um papel de mudança na história. Esses pensamentos educacionais de Dewey influenciaram a reforma educacional dos anos 20 e 30 dos Estados Unidos, que influenciou também o Brasil, quando da entrada do movimento da escola nova. A esse respeito, Gottschalk (2005; 2007a; 2008) realiza uma análise da aplicação do pragmatismo de Dewey na educação. Gottschalk (2007a, p. 462) entende que o pragmatismo de Dewey é uma tentativa de superar os ´roblemas de outras concepções educacionais

> ao introduzir um novo sentido para o conceito de experiência, vista não apenas como um processo empírico, mas como uma relação entre dois corpos quaisquer do universo interagindo entre si, incorporando, assim, a noção de atividade como constituinte do processo de aprendizado. O filósofo e educador, para quem o aluno deve aprender fazendo, inaugura, assim, um empirismo que leva em consideração a práxis, ou seja, a idéia de que tudo deve ser ensinado em função do seu uso e da sua função na vida. Um conhecimento é considerado verdadeiro se for útil, se resolver os problemas enfrentados pelo homem.

Dewey não é fundacionista, mas seu pragmatismo leva a noção de uma educação como prática sobre a realidade, que se aproxima do construtivismo aplicado no Brasil. Dewey partiu do *idealismo* hegeliano, enquanto Piaget do *idealismo* kantiano, e os dois sobre bases biológicas.

O pragmatismo americano se desenvolveu de forma diferente do pragmatismo europeu. No entanto, o pragmatismo desenvolvido na Europa, apesar das semelhanças e influências mútuas, apresenta uma diferença que consideramos fundamental: o pragmatismo americano buscou descrever estruturas lógico-científicas por meio da dimensão pragmática da linguagem, que é o uso que os usuários fazem desta, mas não atentando para a comunicação usual de fato, para a linguagem cotidiana, como buscou o pragmatismo britânico.

De acordo com Nigro (2009) a filosofia pragmática britânica "pretende realizar uma investigação da linguagem concreta, em pleno funcionamento, e determinar, na medida do possível, o sentido de uma proposição através da análise da nova unidade de significação, o *ato de fala*". Essas pretensões vão de encontro ao pensamento da filosofia analítica, que excluíram tal investigação.

> Com forte inspiração na lógica simbólica de Frege e Russell, a filosofia analítica aborda a dimensão pragmática da linguagem como algo que é preciso dominar, controlar, visando impedir que os inúmeros e indeterminados efeitos do discurso contaminem o processo de determinação do significado. Desse modo, a filosofia analítica se livra do fardo de explicar o processo de significação nos múltiplos contextos de uso dos enunciados, recolhendo-se na cômoda antessala da semântica (NIGRO, 2009, p. 181).

Também pode-se entender que mesmo na linha pragmática tal pensamento continua como uma forma de análise, pois a filosofia analítica nada mais é do que entender que filosofia é análise, e tal análise deve ser realizada sobre a linguagem. Como a linha pragmática envereda por outro caminho, tal concepção de análise também passa a ser entendida de outra forma, não mais como uma busca por uma linguagem ideal, como se somente esta pudesse ser analisada, mas indo ao mundo concreto da comunicação, ou como diz Wittgenstein, retornando ao solo áspero (IF, §107), isto é, à linguagem cotidiana. A análise na filosofia pragmática é um procedimento de elucidação, de esclarecimento do uso da linguagem, do que torna tais usos possíveis e das regras que constituem e validam estes usos, não sendo determinado de forma definitiva, como pretendido na filosofia da linguagem ideal, mas sendo um processo de análise que sempre é parcial e retorna aos usos e dependem das questões que se quer elucidar (MARCONDES, 1989).

De acordo com Marcondes (2005) o estudo da pragmática britânica se desenvolveu a partir da noção do *significado determinado pelo uso*. Essa ideia resume-se no princípio de que "a linguagem é uma forma de ação e não de descrição do real" (MARCONDES, 2005, p. 12). Essa linha de pensamento se desenvolveu a partir dos estudos da escola de Oxford, que ficou conhecida como filosofia da linguagem ordinária ou como preferimos chamar, *filosofia pragmática*, que se dividiu em duas vertentes, a do *significado como uso* da segunda filosofia de Wittgenstein, apresentada pela sua obra *Investigações filosóficas*, e a da *teoria dos atos de fala*, iniciado por Austin, e desenvolvida principalmente por Searle.

Na teoria de Austin, os atos da fala são núcleos comunicacionais, onde uma mensagem enviada pode ser compreensível pelo seu destinatário, causando certa reação neste último, que pode ser positiva, pois é desejada pelo emissor da mensagem, ou negativa, quando o receptor se recusa a aceitar ou acatar a mensagem dada. Mas em qualquer um dos casos, há a compreensão da mensagem emitida. Esta compreensão só é possível por que há um conjunto de regras estabelecidas e compartilhadas pelo emissor e receptor. De acordo com Marcondes (2005, p. 16), Austin tentou com esta teoria "dar conta de modo sistemático dos fenômenos pragmáticos, isto é, do uso da linguagem", e assim o filósofo Britânico compreendia que era sim possível teorizar esta dimensão da linguagem. Para Austin toda a linguagem é performativa, pois em qualquer ato de fala haverá uma forma de agir (MARCONDES, 2005), tornando assim toda linguagem uma dimensão puramente pragmática, e assim entendia que os atos de fala é que são os elementos mais básicos da comunicação, e não, o símbolo, a palavra ou a frase, ou mesmo proposições linguísticas como sentenças da lógica, como na filosofia analítica inicial.

Outros pensadores se detiveram sobre os aspectos pragmáticos da linguagem, como Ryle, um dos iniciadores sobre essa nova forma de pensar, e também considerado como uma das influências filosóficas, juntamente com Wittgenstein, do behaviorismo (GLOCK, 1998), além de um dos inauguradores da filosofia da mente na Europa; Searle, continuando, mas de modo original, a teoria dos atos de fala de Austin; Grice, com a *teoria das implicaturas conversacionais*; Strawson, com a *teoria causal da percepção*; Quine, com as teses da *inescrutabilidade da referência* e da *indeterminação da tradução*; Davidson, com a *teoria da* *interpretação radical*; Sellars com a *doutrina do nominalismo psicológico*; Apel, principal formulador da *Ética do discurso* e colaborador de Habermas na formulação da *teoria da ação comunicativa* na busca de uma pragmática universal. Esses dois últimos podem ser considerados como pertencentes ao *neopragmatismo*, que busca realizar uma reelaboração do pragmatismo. Também é colocado como neopragmático o autor já citado aqui, Richard Rorty.

Habermas busca a partir da reflexão sobre a pragmática reabrir a discussão sobre a ideia de uma razão moderna, e vem influenciando bastante a pesquisa não só na filosofia e no direito, como nas ciências humanas e sociais em geral, assim como a educação. O autor busca reafirmar que há uma razão moderna que pode ser repensada na perspectiva da virada linguística, mas evitando cair no relativismo pós-moderno. Ele não busca uma razão baseada na filosofia da consciência, como uma razão autoconsciente como Descartes e Kant ou Histórica como pretendeu Hegel, mas uma razão comunicativa, não-subjetiva, mas intersubjetiva, que se dá linguisticamente. As pessoas pela comunicação entram em consensos, em busca de um objetivo comum, de uma verdade que valha para o conjunto e que se dá em um processo constante, que é argumentativo. Por isso, Habermas chama de *pragmática universal*.

Há um conhecido debate atualmente, entre o pensamento de Habermas e Rorty. Este entendia que não poderia haver uma verdade universal, mesmo que baseada em consensos. Ele compreendeu que as verdades dependem dos contextos sociais. Rorty também é chamado de *contextualista* ou *etnocentrista*, ou até mesmo, *pós-modernista*. Em sua análise histórica, que já foi apresentada aqui, foi um grande crítico do fundacionismo, e assim demonstrava uma extrema repulsa a qualquer tipo deste, como ele percebeu no pragmatismo americano, que de acordo com ele se voltou para o fundacionismo ao colocar como base para todo conhecimento a experiência, assim como também considera fundacionista o tipo de pragmatismo realizado por Habermas.

Enquanto Habermas acredita na verdade universal e na reconstrução da razão moderna a partir de um consenso comunicativo ideal, Rorty aposta num saber pós-moderno, emergido das interações intersubjetivas dentro dos contextos, grupos ou comunidades. E com relação à educação, Rorty propõe dissolver o tema da verdade em favor da ideia de liberdade, enquanto que para Habermas a educação deve desenvolver consensos universais sobre a educação, mostrando os fundamentos da teoria pedagógica e a legitimidade do discurso educacional (VIERO, TREVISAN e CONTE, 2004).

A pós-modernidade é considerada um fenômeno contemporâneo que busca rever os princípios da modernidade ou colocando no sentido de um relativismo radical. Geralmente se associa a virada linguística (no sentido hermenêutico, analítico, pragmático e até o estruturalista) à pós-modernidade. A realidade, a verdade, os critérios não existiriam mais, pois tudo seria relativo aos contextos ou aos *jogos de linguagem*. Canning (1994 *Apud* BERNSTEIN, 2013, p. 292) diz que a virada linguística se transformou

> em uma expressão vale-tudo para críticas divergentes de paradigmas históricos estabelecidos, narrativas e cronologias, que abrangem não apenas o criticismo linguístico pós-estruturalista, a teoria linguística e a filosofia, mas também a antropologia cultural e simbólica, o novo historicismo e a teoria de gênero.

No entanto, não concordamos com a relação, geralmente feita, entre Wittgenstein e o pós-modernismo relativista. Compreendemos que as vertentes relacionadas à virada linguística em alguns casos e em certas linhas de desenvolvimento, nos diversos que houve – o que necessitaria uma análise caso a caso para poder compreender como se deu certos desenvolvimentos -, se afastou dos princípios pelos quais elas se fizeram. Mas os princípios se mantiveram e as rupturas da virada linguística provocaram drásticas alterações na forma de conceber e praticar o conhecimento, mantendo dois princípios em todas as suas vertentes, que são: o deslocamento do estudo das ideias, que eram compreendidas como internas ao sujeito, pelos estudos da linguagem, que são públicas, e a mudança da concepção de que não são as ideias que captam os objetos da realidade, mas sim que a própria linguagem as constrói.

É interessante como no desenvolvimento de algumas concepções teóricas, estes princípios foram sendo esquecidos ou relativizados. Não ocorreu assim devido à fraqueza de tais, mas sim pela necessidade que há de se buscar essências, de descobrir fundamentos, e assim uma teoria antifundacionista, passou a buscar fundamentos ou radicalizar, ignorando quaisquer possibilidades de tais.

Discordamos que a filosofia da linguagem tem completa associação com o pós-modernismo relativista, abandonando qualquer busca científica objetiva, e concordamos assim com Nigro (2009), para quem “nem todo pensador que realizou a virada lingüística abandonou as pretensões da teoria do conhecimento, mas apenas traduziu as questões epistemológicas clássicas – colocadas pela filosofia da consciência – nos termos do paradigma linguístico”.

Destacamos autores como Moreno, Gottschalk e Condé (2004) que não consideram Wittgenstein um pós-modernista relativista. Wittgenstein é um filósofo original, e assim sua leitura necessita um grande esforço para compreender. Muitos tem tentado dar uma direção para a filosofia wittgensteiniana, e por muitas vezes tal direção acaba se afastando um pouco do que pretendia o filósofo. Wittgenstein parece não se encaixar em definições, por isso concordamos com Condé (2004) que coloca Wittgenstein entre o moderno e o pós-moderno. Ele busca se afastar de todo tipo de dogmatismo, mas nem por isso toma para si o relativismo.

Neste desenvolvimento após a virada linguística, destacamos a epistemologia do uso de Arley Moreno, que desenvolveremos em um tópico mais adiante.

2.2 As duas filosofias da linguagem de Wittgenstein

Wittgenstein nasceu em Viena, na Áustria, em 1889. Depois de estudar engenharia, em 1911 foi para Cambridge, na Inglaterra, estudar filosofia com Bertrand Russell. Iniciou então as reflexões que originaram o *Tractatus logico-philosophicus*, que foi produzido durante a primeira Guerra mundial, da qual Wittgenstein participou como voluntário, e na qual foi peso na Itália. Em 1921 a obra é publicada, tendo sido a única publicação em vida do filósofo. Depois da guerra, Wittgenstein abandonou a filosofia e buscou uma vida mais simples. Foi quando se tornou professor do primário no interior da Áustria, além de jardineiro de um mosteiro. Mas em 1929 ele retornou à Cambridge, onde doutorou-se usando o *Tractatus* como tese, e em seguida tornou-se professor, e começou a refletir sobre os erros de sua primeira obra. A princípio buscou refletir para corrigir, mas depois compreende que se deve fazer uma nova obra. Nesse período, chamado de intermediário, Wittgenstein produziu obras postumamente publicadas, como *Observações filosóficas* (1929-1930), *Gramática filosófica* (1931-1934) e *Observações sobre os fundamentos da Matemática* (1937-1944). É chamado de período intermediário pois está entre sua primeira grande obra e sua segunda grande obra, que também foi publicada postumamente, as *Investigações Filosóficas* (1953). Em 1938 ele se naturalizou britânico. Wittgenstein também se voluntariou na segunda guerra mundial. Em 1947 abandonou a vida acadêmica. Foi acometido de câncer e morreu em 1951.

Wittgenstein se interessou por filosofia a partir de seus estudos em matemática nos estudos de engenharia, que o levaram a refletir sobre os fundamentos da mesma e o levou às obras logicistas de Frege e Russell. Ele viveu entre Viena e Cambridge, berços da filosofia analítica. Em Cambridge, a filosofia analítica teve como fundadores, Russel e Moore, e em Viena com o círculo de Viena, que desenvolveu a mesma. Nesse contexto, sob às influências apresentadas, e devido suas próprias inquietações, Wittgenstein escreve o *Tractatus*, obra que representa o ápice da filosofia analítica na época e que influenciou desenvolvimentos futuros. Anos depois, ao discutir sua obra com participantes do círculo de Viena, com Ramsey, do contato com os escritos de Brouwer, de Heidegger, Wittgenstein dá um giro em seu próprio pensamento, uma virada pragmática (MORENO, 2009), passando a considerar agora a linguagem cotidiana, formulando as bases da filosofia da linguagem ordinária que aqui chamamos filosofia pragmática.

Há um debate que por vezes é trazida nas discussões sobre Wittgenstein sobre a existência de fato de uma separação entre a primeira e a segunda filosofia deste filósofo. Para alguns autores (MARCONDES, 2004; COSTA, 2015; NIGRO, 2009) a filosofia do segundo Wittgenstein é um desenvolvimento do primeiro, pois mantém a ideia analítica, ou seja, para estes Wittgenstein se mantém analítico, no entanto, o segundo não busca mais analisar para chegar a uma linguagem ideal, mas busca analisar o próprio uso da linguagem. Outros consideram que foi um rompimento completo, pois modificou-se totalmente a visão sobre a linguagem, como Fann (2013), com quem concordamos, que defende que há de fato uma separação, e que Wittgenstein deixa de ser um filósofo analítico.

A primeira fase de Wittgenstein é caracterizada pela única obra publicada em vida: o *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921) que, como vimos, sofreu influência do logicismo filosófico de Frege e Russell. Glock (1998) nos informa que de Frege, Wittgenstein, adotou a exigência de que o sentido de uma proposição deve ser determinado, e de Russel, o programa atomista da análise das proposições em termo de seus elementos mais simples. No entanto, Wittgenstein foi além de seus mestres, aprofundando o tema e chegando ao ápice da filosofia analítica, de uma maneira bastante original.

O *Tractatus* é uma leitura densa e diferente, que demanda leituras anteriores, como de Frege e Russel, e uma percepção sobre o contexto histórico/social/filosófico em que se coloca. O *Tractatus* se estrutura em sete teses principais, correlacionadas em aforismos, determinados por números.

1 O mundo é tudo o que ocorre.

2 O que ocorre, o fato, é o subsistir dos estados de coisas.

3 Pensamento é a figuração lógica dos fatos.

4 O pensamento é a proposição significativa.

5 A proposição é uma função de verdade das proposições elementares.
(A proposição elementar é uma função de verdade de si mesma.)

6 A forma geral da função de verdade é

$$[\, p, \xi, N(\xi)]$$

Esta é a forma geral da proposição.

7 O que não se pode falar, deve-se calar.

Wittgenstein apresenta a tese principal enumerada de 1 a 7, e em cada uma vai tecendo outras sub-teses, também enumeradas de acordo com a tese principal, ou seja, se se refere a tese 1, estará 1.1, 1.2, etc., e se se refere ao 1.1, veremos 1.11, ou 1.12, seguindo assim.

> Os algarismos que enumeram as proposições isoladas indicam o peso lógico dessas proposições, a importância que adquirem em minha exposição. As proposições n.1, n.2, n.3, etc. constituem observações, à proposição n.° *n; es* proposições *n.fnl, n.m2, etc.*, observações à proposição n.° *n.m, e assim* por diante (TLP, *primeira nota de rodapé*).

Nas teses 1 e 2 notamos uma ontologia, o mundo e os fatos (estado de coisas), ou seja, o que ocorre nestes. Na tese 3 temos a relação entre o mundo e o pensamento, estando na sua base a figuração lógica. Na tese 4 temos o estudo da linguagem de fato, onde as proposições só têm sentido se são possíveis de serem formuladas no pensamento. As teses 3 e 4 tratam da relação do pensamento com a proposição. As teses 5 e 6 tratam do fundamento dos conceitos de acordo com a natureza lógica deles, isto é, tratam da função de verdade das proposições. Vale dizer que por vezes assuntos classificados aqui em uma tese surgem em outros, como a questão do valor de verdade que aparece na tese 4, mas não passa de uma necessidade para discutir o assunto da tese principal. A tese 7 é uma espécie de constatação diante de tudo que foi apresentado, não tendo nenhuma explicação posterior, sendo o último aforismo. Isso mostra que Wittgenstein compreende que o que pode ser falado em filosofia é o que está falado no *Tractatus*, com relação às outras questões, não se pode falar, como ele diz no prefácio:

> [Este livro] Trata de problemas filosóficos e mostra, creio eu, que o questionar desses problemas repousa na má compreensão da lógica de nossa linguagem. Poder-se-ia apanhar todo o sentido do livro com estas palavras: em geral o que pode ser dito, o pode ser claramente, mas o que não se pode falar deve-se calar (*acréscimo nosso*)

Ainda no prefácio, Wittgenstein anuncia seu objetivo com o *Tractatus*:

> [...] estabelecer um limite ao pensar, ou melhor, não ao pensar, mas à expressão do pensamento, porquanto para traçar um limite ao pensar deveríamos poder pensar ambos os lados desse limite (de sorte que deveríamos pensar o que não pode ser pensado).
> O limite será, pois, traçado unicamente no interior da língua; tudo o que fica além dele será simplesmente absurdo.

Como vemos, Wittgenstein busca tratar dos limites da linguagem, que são os limites do pensamento, e os limites do mundo. "*Os limites de minha linguagem* denotam os limites de meu mundo" (TLP, §5.6). Wittgenstein intenta resolver os problemas filosóficos, ou melhor, mostrar que tais surgem de uma má compreensão da lógica da linguagem.

De acordo com Hacker (2000, p. 7), os principais temas desenvolvidos nesta obra são “a natureza geral da representação, os limites do pensamento e da linguagem e a natureza da necessidade lógica e das proposições da lógica”. Wittgenstein busca discutir a natureza da lógica e da filosofia, analisando apenas a linguagem – pois, é a única possibilidade, e não há como ir além disso -, considerando esta em uma relação isomórfica com a realidade, sustentada pela lógica.

Conforme Moreno (2006, p. 14), no *Tractatus* Wittgenstein compreende que “Os elementos linguísticos possuem algumas propriedades que são comuns a todos eles. [...] uma dessas propriedades comuns consiste em que todos os elementos da linguagem representam algo”. Moreno (2006), ao tratar das propriedades comuns, coloca tais propriedades como possíveis mediante duas condições, que é tanto a existência de diferenças, quanto de semelhanças. Deve haver diferença entre aquilo que representa e aquilo que é representado, para poder se distinguir o que é linguístico do que não é, assim como, deve haver semelhanças entre o representante e o representado, sem o que não seria possível a relação entre realidades diferentes.

A condição de diferença é explicada por Moreno (2006) a partir de dois sentidos. O primeiro é que a linguagem não se caracteriza por um conjunto de elementos materiais, como os símbolos que formam um alfabeto, mas por seus conjuntos de funções, ou seja, elementos materiais podem ser caracterizados como linguagem quando apresentam funções de linguagem, isto é, de representação, devendo haver apenas uma diferença entre o que é o representante e o que é o representado. Por isso que a proposição da linguagem é considerada pelo primeiro Wittgenstein uma figura, uma imagem da realidade, que se une a esta devido a forma lógica. O outro sentido para essa condição de diferença é a atribuição do caráter lógico à representação linguística, que é o critério para a distinção dos elementos em uma relação simbólica, quando a relação de representação é lógica, de quando não o é. Assim, Moreno (2006) define que a linguagem, no *Tractatus* é um conjunto de funções caracterizadas por sua natureza lógica.

Para Moreno (2006), assim como devemos diferenciar entre o representante e o representado, também é necessário perceber semelhanças, que se relaciona ao que existe (ontológico) e ao que pode ser dito (linguístico). A condição de semelhança se dá por que analisamos o que existe, por que o mundo existe e os fatos existem no mundo, e é isto que os assemelha. Tanto a linguagem quanto a realidade estão existentes no mundo, e esse caráter ontológico, os deixa em uma mesma esfera, e assim, Wittgenstein entende que há uma isomorfia entre a estrutura do mundo e a estrutura da linguagem (SCHMITZ, 2004), que é revelada pela proposição como imagem dos fatos. Ao analisar essa relação ele chega à noção sobre a composição da proposição, pois, no *Tractatus*, Wittgenstein busca fazer uma teoria pictórica do significado, ou como Moreno (2006) chama, a teoria da proposição como imagem dos fatos, pois o pensamento do mundo se dá pela projeção figurativa da linguagem, que seria o modelo por excelência que toda linguagem deve ter para ter sentido, onde a proposição substitui um fato da realidade em um isomorfismo correspondente, isto é, a forma substitui o fato real só podendo falar sobre o que é possível - é possível por que pode ser pensável logicamente. Assim a estrutura da linguagem se corresponde à estrutura do mundo devido a lógica, mas Wittgenstein alerta que as proposições elementares são independentes, pois a verdade ou falsidade de uma não interfere em outra. Esse é o ponto de vista linguístico do *Tractatus*. E aqui temos a relação entre o ponto de vista ontológico e o linguístico, que se complementam, pois, o primeiro, o mundo, fornece a forma dos objetos, que é fixa e estável, e o segundo, a linguagem, fornece a forma de representação, essas são as duas faces da *forma lógica*, que é o tema central da obra.

De acordo com o *Tractatus*, não há relação lógica entre as proposições elementares, mas há entre as proposições e os fatos, o que une a linguagem e o mundo. "Não podemos pensar nada ilógico, porquanto, do contrário, deveríamos pensar ilogicamente" (TLP, §3.03). Para Moreno (2006, p. 16), a proposição é "algo que representa de uma maneira particular". A proposição é a imagem do fato. Ela espelha o fato, em uma forma particular de representação e a linguagem é a totalidade das proposições (TLP, §4.001).

Dessa forma, Wittgenstein intentou dar continuidade ao projeto logicista de Russell, onde ele busca fundamentar a linguagem na lógica, mostrando que há uma forma lógica comum à linguagem e ao mundo representado por ela. Para o primeiro Wittgenstein a linguagem e o mundo têm uma lógica como base comum, e a linguagem é composta por proposições, e estas, são compostas por nomes, que são o elemento mais básico da linguagem. No *Tractatus* são os nomes que se referem aos objetos simples do mundo e é neste nível que Wittgenstein faz uso referencial da linguagem. Para Wittgenstein os nomes seriam os átomos da formação da linguagem, desenvolvendo assim a noção de atomismo lógico de Russell. Os átomos formam as moléculas, que seriam as proposições. A relação da linguagem com o mundo se dá em uma correspondência biunívoca, cada nome da linguagem se refere a um objeto do mundo, e as proposições formadas pelos nomes se referem aos fatos do mundo. "A proposição elementar é constituída de nomes. É uma conexão, um encadeamento de nomes" (TLP, §4.22). No entanto, Wittgenstein não exemplifica tais nomes e as proposições elementares (FANN, 2013), ele entende que assim se dá a correspondência, mas que não conseguimos enxergar esses elementos mais básicos, ficando para nós apenas as proposições e os fatos. O filósofo parece acreditar que apenas uma linguagem ideal que apresentasse tais elementos mais básicos e a forma lógica que os fundamenta, explicaria, de fato, mas ele não exemplifica como seria isso (FANN, 2013), dando a entender que se deve apenas aceitar que a lógica está no domínio das relações entre a linguagem e o mundo. Como mostra Schmitz (2004, p. 127), citando Frege em seus escritos póstumos, “se nossa linguagem fosse logicamente mais perfeita, não teríamos mais necessidade da lógica, ou antes, poderíamos apreendê-la diretamente da linguagem”. Assim, não podendo se falar mais nada além do que pode ser dito, pois não tem como alcançarmos essa lógica profunda, podendo apenas se mostrar, por meio, das proposições. “[...] a forma lógica é indizível e pode apenas mostrar-se em um simbolismo adequado” (SCHMITZ, 2004, p. 119).

Wittgenstein na tese 6 passa a tratar de um tipo de proposição mais específica, que são as proposições da lógica, que de acordo com ele são tautologias (TLP, §6.1), que seriam as verdades incontestáveis, ou mesmo, obviedades. Estas não podem figurar a realidade (TLP, §4.462). Então as tautologias nem sequer podem ser consideradas proposições. São, então, pseudoproposições. Proposições, de fato, carregam consigo a característica de poder ser considerada verdadeira ou falsa, e as tautologias são verdades sob qualquer condição, e não precisam da realidade empírica para as confirmar (TLP, §6.1222). Por isso é lógico, pois é verdadeiro.

Assim, Wittgenstein coloca a lógica na base de todas as relações entre proposições elementares, como se vê na tabela em TLP §5.101. Dessa forma, o filósofo se afasta das tentativas logicistas de Frege e Russel de axiomatizar leis lógicas que estariam na base, dando origens a outras leis lógicas e assim consequentemente. Mas compreende que formas lógicas estão presentes, mesmo não podendo exibí-las. Wittgenstein transmite esse princípio de verdade incontestável das proposições lógicas para as linguagens formais do mundo, pois a tautologia revela uma propriedade formal, como a da disjunção (ou), que diz que um estado de coisas possível ou existe ou não existe (SCHMITZ, 2004), como na proposição “Chove ou não chove”. “Ao conhecermos a sintaxe lógica de uma linguagem simbólica qualquer, já estão dadas todas as proposições da lógica” (TLP, §6.124). Considerando a matemática uma linguagem formal, ou uma linguagem simbólica, suas proposições também ganham o estatuto de verdades incontestáveis, ou seja, são tautologias, pseudoproposições, equações, e nada dizem a respeito da realidade. “A matemática é um método lógico” (TLP, §6.2).

> 6.211 Na vida, não é da proposição matemática que precisamos, usamo-la *apenas para* inferir, de proposições que não pertencem à matemática, outras que igualmente não pertencem a ela. (Na filosofia, a questão "para que precisamos efetivamente de tal palavra ou de tal proposição" sempre conduz a valiosas visualizações) (TLP)

Notamos assim, que Wittgenstein compreendia que a matemática não se relacionava com a realidade. Nas *Investigações* Wittgenstein muda sua filosofia, mas não muda essa concepção, apenas não entenderá mais que as proposições matemáticas sejam proposições lógicas, mas *proposições gramaticais*, e assim ele mantém o estatuto de verdade da matemática independente de sua confirmação na realidade, como veremos mais adiante.

Para o primeiro Wittgenstein a questão do sentido é vista como dependente da relação da linguagem com o mundo, pois para ele a proposição só tem sentido se descreve um fato do mundo, se não há essa referência, não há sentido. A realidade do mundo deve confirmar ou não as proposições, que deve figurar os fatos. Para tal decisão seria necessária a análise lógica, que é a decomposição da linguagem em partes, que seriam as proposições, e estas em nomes, para decidir se é verdadeiro ou falso, sendo verdadeiro quando o fato existe e falso se o fato não existe, ou seja, a condição de verdade das proposições depende das funções de verdade das proposições elementares. Aqui vemos o significado na linguagem como algo *a priori*, independente do uso. "*Nada* é acidental na lógica: se uma coisa *puder* aparecer num estado de coisas, a possibilidade do estado de coisas já deve estar antecipada nela" (TLP, §2.012). "Há, portanto, em toda linguagem, um *a priori* 'lógico' que só pode se mostrar, mas sobre o qual nada se pode dizer" (SCHMITZ, 2004, p. 133). Dessa forma é a análise da proposição que revela o significado, e este seria o único modelo capaz de dar sentido à linguagem.

> 4.4 A proposição é a expressão da concordância e da discordância com as possibilidades de verdades proposições elementares.
> 4.41As possibilidades de verdade das proposições elementares são as condições da verdade e falsidade das proposições.
> 4.411 É de antemão provável que a introdução de proposições elementares seja fundamental para a compreensão de todos os outros modos de proposição. A compreensão das proposições universais, com efeito, depende *palpavelmente da* das proposições elementares (TLP).

Esta análise realizada no *Tractatus* pode levar a entender que Wittgenstein buscava uma linguagem ideal, como parecem ter tentado Frege e Russell, mas Wittgenstein caminha em outro sentido. Ele entende que uma linguagem ideal revelaria todo o desconhecido, mas não traz nenhum exemplo. Ele parece também entender que como o fato é composto por elementos, que são os objetos, na correspondência, a proposição é composta por nomes, estes elementos mais básicos formariam essa linguagem ideal, no entanto Wittgenstein não traz exemplos destes nomes, ou parece que tal não importa para Wittgenstein, pois só se pode analisar os fatos e inferir que há a relação entre os elementos mais básicos do mundo (objetos) e da linguagem (os nomes), fundamentados na lógica. Como nos diz Glock (1998, p. 28), "A lógica baseada em uma teoria das funções não proporciona uma linguagem ideal, mas sim uma notação ideal que traz à luz a ordem lógica que subjaz a toda representação simbólica". Assim, o que Wittgenstein faz é uma proposta metodológica, pois ele não está tratando esta linguagem que usamos, mas mostrando como seria em qualquer linguagem, pois qualquer linguagem terá proposições elementares, que dependerá de como tal linguagem teria sido formada convencionalmente, pois tal, deverá ter sido formada baseada em algum significado, que terá a lógica como fundamento.

Ele admite no *Tractatus* outras linguagens, mas entende que qualquer uma, em qualquer mundo, terá como base a forma lógica, pois compreendeu que não há como existir um mundo fora disso. De certa forma, isto já remete para o conceito de jogos de linguagem e principalmente formas de vida, que ele desenvolverá em sua segunda fase, pois demonstra que depende de qual linguagem se está falando em que contexto, mas depois ele resolve lançar tal ideia para a linguagem ordinária e não mais à lógica. Talvez por isso, Wittgenstein depois do *Tractatus* não quis mais saber da filosofia, pois acreditou ter encontrado a resposta para tudo, e entendeu que para certas coisas, não há o que se falar, como o que se refere ao místico ou metafísico (FANN, 2013).

De acordo com Wittgenstein, no *Tractatus*, "A lógica não é uma teoria, mas um reflexo do mundo. A lógica é transcendental" (TLP, §6.13), assim, ele não transforma a lógica em uma linguagem ideal, mas a vê como uma obviedade do que se percebe no mundo, quando se vê para o mesmo e se nota que há uma estrutura que baseia os fatos deste.

O *Tractatus* traz a linguagem para o centro da discussão, mas ainda em uma visão essencialista, pois busca um pano de fundo comum entre a linguagem e o mundo, que é a lógica. Não se considera então a linguagem ordinária como a base para se explicar o mundo e o conhecimento que se tem deste, por que esta não pode ser analisada, como se pode fazer usando a lógica.

O pensamento é lógico, e seria a lógica que estaria na base do mesmo. A lógica é o fundamento do conhecimento, e o poder que Wittgenstein dá a ela nos faz ver um aspecto essencialista no *Tractatus*. Ele acredita que há traços essenciais que permitem compreender o sentido de uma proposição.

> 3.34 A proposição possui traços essenciais e acidentais. Acidentais são os traços que derivam da maneira particular de produzir o signo proposicional; essenciais, aqueles que sózinhos tornam a proposição capaz de exprimir seu sentido.
> 3.341 É pois essencial na proposição o que é comum a todas as proposições que podem exprimir o mesmo sentido. E do mesmo modo é em geral essencial no símbolo o que é comum a todos os símbolos que podem preencher o mesmo fim.
> 3.3421 Um modo particular de designação pode ser desimportante, mas é sempre importante que seja um modo *possível* de designação. Esta é a

> situação na filosofia em geral: o singular se manifesta repetidamente como desimportante, mas a possibilidade de cada singular nos dá um esclarecimento sobre a essência do mundo (TLP).

O primeiro Wittgenstein se afasta de princípios da filosofia da consciência, como a ideia kantiana de que os pensamentos seriam entidades mentais ou abstratas, mas para o filósofo, são proposições que foram projetadas sobre a realidade, podendo ser, expressas na linguagem (GLOCK, 1998). Assim, Glock (1998, p. 26) mostra que Wittgenstein entende que as proposições lógicas possuem um estatuto apriorístico, pois refletem regras descritivas da realidade empírica, e, portanto, “A forma lógica essencial da linguagem é idêntica à forma metafísica essencial da realidade, uma vez que encerra os traços estruturais que a linguagem e a realidade precisam ter em comum para que aquela possa representar esta”, ou seja, a lógica é a essência que existe entre o mundo e a realidade, que pode ser percebida na linguagem, pois fundamenta esta, como o todo.

> 5.471 A forma proposicional geral é a essência da proposição.
> 5.4711 Dar a essência da proposição quer dizer dar a essência de todas as descrições e, por conseguinte, a essência do mundo.
> 5.472 A descrição da forma proposicional mais geral é a descrição de um e um só signo primitivo universal da lógica (TLP).

Glock (1998) chega a dizer que Wittgenstein adotou uma versão linguística do idealismo transcendental, pois entende que o que projeta as proposições sobre a realidade são os atos ostensivos de um eu metafísico. O *Tractatus* parece ser um ápice de toda a filosofia idealista, buscando alcançar uma explicação final para todo e qualquer problema.

> Sua abordagem alternativa da verdade lógica constitui um avanço definitivo, ainda que obscurecido por sua ligação com uma metafísica inefável do simbolismo. Tal metafísica é o clímax de uma tradição atomista e fundacionalista que hesita entre o racionalismo, o empirismo e o kantismo: os constituintes últimos da linguagem e sua estrutura lógica devem refletir a estrutura metafísica do mundo (GLOCK, 1998, p. 27).

O primeiro Wittgenstein não descarta a linguagem ordinária, pois para ele esta disfarça a forma lógica, e se analisada resultará em refletir a estrutura do pensamento (GLOCK, 1998, p. 28), que é lógica. Assim como Frege deu um passo importante na sua concepção sobre linguagem ao separar sentido e referência, consideramos que o primeiro Wittgenstein deu um passo mais a frente ainda ao alargar a esfera da proposição para além da decisão sobre ser verdadeira ou falsa, pois ele relacionou a proposição à realidade, dizendo que a proposição é uma figuração da realidade, e assim compreender uma proposição é saber qual é o caso se ela for verdadeira, mas a proposição ainda mantém a qualidade de ser um modelo fixo e exato do mundo, sendo uma forma estável de representação (NIGRO, 2009).

Como já vimos, Wittgenstein abandonou a filosofia – até por que achava já ter encontrado a resposta que necessitava -, e foi em busca de uma vida simples e comum (jardineiro, professor do primário, soldado e arquiteto). O *Tractatus* é lançado em 1921, e Wittgenstein retorna a Cambridge em 1929, e passa a escrever diversas obras - nenhuma publicada -, que são consideradas obras do período intermediário, em que ele começa a apresentar pensamentos contrários à sua primeira obra, mas ainda não apresenta uma nova filosofia de fato. Em 1936 ele começa a redigir as *Investigações Filosóficas* que vai até o fim de sua vida, em 1951.

Na sua volta à filosofia, Wittgenstein parece querer resolver os problemas do *Tractaus* que ele agora percebia, então, de certa forma, ele parece querer fazer emendas ou testar táticas. Essa fase de Wittgenstein é chamada, por vezes, fase do cálculo, ou como Azize (2009) chama, a metáfora do cálculo, que é uma tentativa de Wittgenstein começar a fugir do referencialismo, que conectava biunivocamente, no *Tractatus,* os nomes aos objetos, as proposições aos fatos, a linguagem ao mundo. Wittgenstein passa a buscar um contexto mais estrutural, que são chamados de sistemas de regras, que é o que vai levar a futuramente ele propor os jogos de linguagem (AZIZE, 2004). O filósofo deixa uma concepção do critério geral da significação e adota uma concepção dos critérios de significação. De acordo com Azize (2004), Wittgenstein parte da univocidade para a vagueza, da ideia de uma proposição como figura (imagem, espelho) da realidade, para uma ideia de uma gramática autônoma, onde as regras começam a se destacar, mas em um uso na linguagem ordinária, quando veremos a pragmática linguística se revelando como fonte de significados na filosofia wittgensteiniana, enfim, nas *Investigações*.

A segunda fase da filosofia da linguagem de Wittgenstein é representada principalmente pela obra *Investigações filosóficas* (1953), postumamente publicada. A obra é composta de duas partes, e Schmitz (2004) revela que a primeira parte foi finalizada por Wittgenstein, e muito provavelmente foi publicada de acordo como ele queria, mas a segunda parte talvez esteja incompleta e a princípio, Wittgenstein tinha o objetivo de tratar da análise dos conceitos matemáticos, mas de fato ficaram apenas algumas anotações que parecem mais ser uma revisão da primeira parte (SCHMITZ, 2004).

De acordo com esta nova concepção, a tarefa da filosofia não consiste em corrigir o uso ordinário da linguagem, mas em compreender seu funcionamento de forma correta, o que chamamos de terapia filosófica ou até de autoterapia, pois já no prefácio das *Investigações*, o *segundo* Wittgenstein reconhece que há “graves erros” no *Tractatus*, e muda o modo de análise dos problemas da linguagem, mas tomando sua primeira obra, seu *velho modo de pensar*, como *pano de fundo* para redigir as *Investigações*, ou seja, só se pode compreender as *Investigações* tendo o *Tractatus* como base.

Conforme Schmitz (2004), Wittgenstein se afasta do *Tractatus* ao mudar duas concepções. Primeiramente quanto a independência das proposições elementares, pois ele passa admitir que existe relações lógicas entre elas, e assim, não haveria uma correspondência biunívoca entre as proposições e os fatos, mas a relação se dá entre os sistemas da linguagem e os sistemas do mundo, não tendo mais uma lógica limitada como pano de fundo, ou seja, ela não se resume às funções de verdade apresentada na tabela do aforismo 5.101.

Wittgenstein, assim, abandona a concepção referencial da linguagem. Esta concepção é representada pela concepção agostiniana da linguagem, que Wittgenstein considera que dominou a filosofia desde os tempos antigos até a modernidade, chegando ao *Tractatus*. Essa concepção é apresentada já no primeiro aforismo das *Investigações*, quando Wittgenstein cita uma passagem do capítulo 8 das *Confissões* de Santo Agostinho, da qual já citamos um trecho na introdução.

> Quando os adultos nomeavam um objeto qualquer voltando- se para ele, eu o percebia e compreendia que o objeto era designado pelos sons que proferiam, uma vez que queriam chamar a atenção para ele. Deduzia isto, porém, de seus gestos, linguagem natural de todos os povos, linguagem que através da mímica e dos movimentos dos olhos, dos movimentos dos membros e do som da voz anuncia os sentimentos da alma, quando esta anseia por alguma coisa, ou segura, ou repele, ou foge. Assim, pouco a pouco eu aprendia a compreender o que designam as palavras que eu sempre de novo ouvia proferir nos seus devidos lugares, em diferentes sentenças. Por meio delas eu expressava os meus desejos, assim que minha boca se habituara a esses signos.

De acordo com Wittgenstein, para Agostinho as palavras denominam objetos, e cada palavra tem um significado, assim, primeiro viriam a designação dos nomes, os substantivos e depois a designação de atividades, numa espécie de *etiquetagem*, ou de correspondência biunívoca entre as proposições da linguagem e os fatos do mundo. Wittgenstein utiliza a concepção referencialista de Agostinho por dois motivos: o primeiro diz respeito ao fato de Wittgenstein ter percebido na concepção agostiniana um retrato daquilo que ele mesmo havia feito no *Tractatus,* e assim ele notou que ele, no *Tractatus,* estava preso em uma concepção que dominava toda a filosofia, que agora, havia percebido como um erro.

O segundo motivo se refere ao seu próprio novo projeto filosófico. Wittgenstein viu na concepção agostiniana a relação entre a linguagem e seu uso, isto é, Agostinho acreditava que aprendemos a linguagem, e assim expressamos nossas ideias, descrevemos fatos, a partir deste *uso referencial da linguagem*, que é o de etiquetar objetos e fatos. Para o filósofo medieval, apontavam-nos para um objeto e diziam, isto é uma cadeira, um abajur, uma porta, ..., ao ver uma situação, nos diziam isto é uma guerra, isto é o amor de um pai pelo filho, e assim, íamos aprendendo. Wittgenstein reconhece que aprendemos pelo uso, como ainda aprofundaremos nesta tese, mas que tal processo não se dá de modo referencial, ou seja, a linguagem não é apenas uma referência ao mundo.

No entanto, Wittgenstein não desconsidera o uso referencial, apenas entende que tal não é a única forma de uso da linguagem, pois ele considera o ensino ostensivo - que é o ato de apontar para ensinar alguém o significado de uma palavra - como um uso primitivo da linguagem, que é útil em determinadas situações e momentos, mas não é o único modo, e assim ele critica a definição ostensiva como uma regra geral de significação. O ensino ostensivo é uma parte de todo o processo de significação que se dá pelo uso da linguagem em situações diversas da vida. A ideia de uma definição ostensiva como regra geral nos leva a segunda mudança efetuada por Wittgenstein, de acordo com Schmitz (2004), que é a base de sua crítica ao essencialismo.

A segunda mudança efetuada por Wittgenstein foi quanto ao sentido das proposições. No *Tractatus*, a condição de verdade das proposições depende das funções de verdade das proposições elementares. Wittgenstein percebe que para compreendermos uma proposição não recorremos às verdades últimas. O sentido de uma proposição não depende de suas condições de verdade, mas do "contexto no qual ela é enunciada e do uso que dela se faz nesse contexto" (SCHMITZ, 2004, p. 140). De acordo com Moreno (2006), a concepção de proposição deixa de ser um modelo exato da realidade, e passa a ser compreendida como uma hipótese, que se adequa à realidade, que pode ser reformulada a depender das circunstâncias em que é usada.

Como vimos o *Tractatus* continha uma dificuldade, que era a não exibição de exemplos das proposições elementares, sendo apenas deduzida a existência da lógica por trás da relação linguagem e mundo. Desse modo, a concepção agostiniana de certa forma estava travestida por uma dimensão dedutiva lógica, mas que no fundo ainda se remetia ao referencialismo, no sentido de correspondência um a um, entre os nomes e os objetos. O primeiro Wittgenstein compreendia que o sentido apenas se mostra, mas não pode ser dito, logo, os problemas filosóficos só surgem por que não compreenderíamos a lógica de nossa linguagem. E é, paradoxalmente a partir dessa ideia, que Wittgenstein, começa a compreender que ele estava enganado. Não é a lógica que está no fundo, mas a própria linguagem (MORENO, 2004, p. 292). Pois, se o sentido só se mostra, não necessitamos apenas do que se mostra, ou seja, podemos compreender uma proposição ao simplesmente usá-la. Talvez por isso no *Tractatus*, ele já parece apontar essa constatação.

> 5.5563 Tôdas as proposições de nossa linguagem corrente são, de fato, tais como são, perfeitamente ordenadas de um ponto de vista lógico. — Tudo o que fôr mais simples e que devemos aqui admitir não é símile da verdade mas a própria verdade plena. (Nossos problemas não são abstratos, mas talvez os mais concretos que existem) (TLP).

Para resolver esse problema o *Tractatus* recorre a uma concepção essencialista, e assim entende que se deve exibir a essência de toda linguagem (SCHMITZ, 2004). “ Essa ‘essência’, ou ‘lógica’, de toda linguagem está ‘submersa’ nela e não é, em particular, visível nas linguagens ordinárias” (SCHMITZ, 2004, 144).

Nas *Investigações*, Wittgenstein trata da linguagem não mais sob um ponto de vista da lógica, ou melhor, considera esta sob outra perspectiva, não sendo mais ela, pura e simplesmente - em uma perspectiva única -, que daria conta de tudo, mas ainda se encontra existente, nas relações internas da linguagem. De acordo com Moreno (2005, p. 246) “as condições de significação serão situadas, após o *Tractatus*, nos usos da linguagem, e não mais em sua forma lógica; a própria forma lógica será considerada um dos usos possíveis, vindo a perder seu antigo privilégio”.

Wittgenstein passa a entender que a busca de uma *essência* na linguagem está fadada ao fracasso, já que não há uma essência a ser descoberta. O segundo Wittgenstein se opõe ao essencialismo, ou melhor, ao tipo de essencialismo que praticava, pois de certa forma, ele ainda continua a crer na existência de uma essência, porém não mais *a priori* e não mais externa a linguagem, mas uma essência que é construída na linguagem. Só seria possível colocar as ideias do *Tractatus* em prática se fosse possível exibir as proposições elementares, algo que é rejeitado posteriormente por Wittgenstein. Fann (2013), informa-nos que em seu período intermediário, logo quando voltou à Inglaterra em 1929, na obra “Algumas observações sobre a forma lógica”, Wittgenstein já criticava o *Tractatus*, pois, apesar de ainda crer que a análise de proposições ordinárias conduz a proposições elementares, não vê mais estas com uma forma dada *a priori*, o que levava todo o processo ser *a priori*, mas que tal processo deve ser agora *a posteriori*, ou seja, investigando os fenômenos como são e não deduzindo questões antes das informações da investigação.

> O método puramente *apriorístico* do *Tractatus* é submetido à crítica e agora recomenda (em certo sentido) o método *a posteriori* de investigar os fenômenos reais da linguagem. Esta virada quanto ao método é o que

> constitui a ruptura entre o primeiro e o último WITTGENSTEIN[24] (FANN, 2013, p. 62).

Wittgenstein, no entanto, não descarta o *a priori*, mas compreende que o mesmo é construído, e não possui uma existência anterior a estrutura linguística. “[...] não é que não haja essências por trás do mundo das aparências, mas apenas que elas são de natureza convencional: somos *nós* que determinamos os paradigmas que constroem as nossas certezas” (GOTTSCHALK, 2007b, p. 22). Para o Wittgenstein das *Investigações filosóficas* “a essência está expressa na gramática” (IF, §371). Por isso, Wittgenstein não abandona a concepção fundamental do *Tractatus*, que “o que dizemos tem sentido em função de um certo número de restrições” (SCHMITZ, 2004, p. 146), no entanto, a restrição que Wittgenstein colocava era a forma lógica, desse modo, só haveria sentido dentro uma certa delimitação, que no *Tractatus*, é chamado de forma lógica. Wittgenstein, no entanto, passa a acreditar que tal delimitação é o próprio contexto da prática humana, e é assim que ele deixa de entender a existência de apenas uma única linguagem, mas a existência de diversas linguagens, que tem sua compreensão dependente do contexto e das regras, que ele considera agora como o que regula nosso fazer e pensar, isto é, tomam plenamente o lugar antes reservado à lógica, mas agora, não se pressupõe uma essência que esteja na base de toda e qualquer atividade. Wittgenstein, então, substitui a lógica pelo que ele chama agora de gramática.

> Eis um resultado terapêutico que só será inteiramente assimilado pelo pensamento do próprio Wittgenstein bem depois de sua formulação no início dos anos 30 – quando ele finalmente puder dizer da gramática aquilo que ele dizia outrora acerca da lógica: que ela não tem contas a prestar com a realidade e, especialmente, que as relações entre a linguagem e a realidade são definidas no interior da linguagem (MORENO, 2009, p. 161).

O conceito de Gramática usado por Wittgenstein a partir dos anos 30 é diferente do nosso conceito geralmente usado, relacionado à língua portuguesa, por exemplo, além de ser um conceito considerado de difícil definição na filosofia de Wittgenstein. Silva (1996) realizou um estudo em que apresenta três concepções, baseadas no que dá a entender alguns aforismos sobre o tema nas *Investigações*. A primeira concepção é de uma gramática do significado que descreve as regras do uso do signo nas suas relações com os modos semânticos do uso, baseado nos aforismos §354, §373 e §496 das *Investigações*. Nesse caso, a gramática seria uma ciência das regras do uso linguístico, pois o que se busca é uma “elaboração de uma sintaxe das regras

---

[24] “El método puramente *apriorístico* del *Tractatus* es sometido a critica y ahora recomenda (em certo sentido) el método *a posteirori* de investigar los fenómenos reales del lenguaje. Este viraje em cuanto al método es lo que constituye la ruptura entre el primero y el último WITTGENSTEIN”.

que possa reger as combinações, excluindo as que sejam destituídas de sentido" (SILVA, 1996, p. 116). A segunda concepção é que a gramática é as próprias regras do jogo linguístico, ou seja, não se refere à realidade ou a qualquer aplicação, e daí se tem que a gramática é autônoma e arbitrária. A gramática é as regras de uso de termos como "palavra" (IF, § 187), "significado" (IF, § 257), "proposição" (IF, §353) "querendo significar com estas expressões as estruturas gramaticais do signo ou do uso do signo resultantes das regras do uso" (SILVA, 1996, p. 120). E a terceira concepção diz que a gramática é o uso efetivo, o uso da fala. Esta se aproxima da segunda e traz consigo a noção de gramática profunda, que é compreendida pelo autor como "prática humana".

Para Wittgenstein, há a gramática superficial, sistemática ou formal (IF, §572, §573, §664), é a que fornece regras formais, isto é, que se referem aos fatos, que se detém nas características imediatamente evidentes das expressões, em detrimento de seu uso geral. A gramática profunda (IF, §464) é seu uso prático em uma determinada linguagem, é a que fornece as regras do uso da linguagem em seu funcionamento interno, diz respeito às regras de uso que não podem revelar-se imediatamente na forma superficial da nossa gramática. De acordo com Silva (1996, p. 120), "quando Wittgenstein fala de gramática profunda, não fala de um sistema gramatical (que comportaria regras a transformar, etc.) [...] o uso linguístico reenvia sempre a uma práxis". Wittgenstein sabia bem que a nossa gramática tem falta de clareza, e que daí procedem os problemas filosóficos (SILVA, 1996).

A gramática de Wittgenstein é o conjunto de regras que permitem que demos significados ao nosso uso da linguagem, assim, a gramática nos limita e nos permite (ou nos leva) a usar a linguagem dentro de um sistema, que é acordado pelos usuários de tal linguagem. "Aquilo que Wittgenstein denomina 'gramática' pode ser entendido, em uma primeira aproximação, como sendo o conjunto de usos que fazemos das palavras que podem ser expressos sob a forma de um sistema de regras" (MORENO, 2003, p. 116).

Wittgenstein compara a gramática com o conjunto de regras que se têm no xadrez, onde para se jogar o jogo deve-se seguir as regras previamente acordadas, onde pode-se até fazer algum movimento diferente da regra, mas do qual se dirá não se estar jogando xadrez, mas outro jogo. "Mas olhamos para os jogos e a linguagem sob o disfarce de um jogo jogado segundo regras. Isto é, estamos sempre *comparando* a linguagem com um procedimento desse tipo" (GF, I, §26). As regras determinam o jogo, elas constituem o jogo. O jogo não existe antes das regras, ele só é jogo - só dizemos que é jogo - devido a existencia de regras. Por isso "Não é razovável entender as regras como o desenvolvimento de algo assim como a intuição ou o conceito da peça de jogo”[25] (CASTAÑEDA, 2002, p. 60). Não há um conceito do rei no xadrez - *o rei não é*, ele faz, *ele é suas regras*. Não há um conceito oculto, pois, as regras não podem estar ocultas. As regras não descrevem, elas orientam, elas constituem sentidos, nos dizem o que podemos ou não podemos dizer. Mas não podemos verificá-las como verdadeiras ou falsas - são proposições gramaticais. As regras constituem os significados, elas não descrevem os significados. Os significados não existem independentemente das regras.

As regras do jogo não têm um fundamento justificado, como busca a filosofia tradicional, mas são arbitrárias. Schmitz (2004) aponta dois sentidos nessa conclusão: Primeiramente, escolhemos regras (assim como poderíamos ter escolhido outras). Por exemplo, Wittgenstein compara uma regra a uma unidade de medida, pois é escolhida arbitrariamente e a usamos. Outro sentido é que não há, de fato, qualquer justificação para o uso de tal regra, ou seja, usamos por que é assim que fazemos (assim sempre fizemos). Se encontramos uma justificativa, é por que já estamos de posse da regra, e se usamos a regra é por que já temos a justificativa. “[...] se me pedem a razão pela qual escrevi 24 depois de 22, rapidamente invocarei a regra que pretendo seguir, mas se me perguntam o que significa “seguir a regra” ‘+ 2’” irei infalivelmente responder que isso significa, por exemplo, escrever 24 depois de 22” (SCHMITZ, 2004, p. 166). Estamos andando em círculos. Não conseguimos imaginar um mundo diferente, estamos de certa forma presos às regras que seguimos, e assim somos treinados a agir do modo que agimos. A linguagem é uma atividade guiada por regras e o caráter apriorístico da lógica, matemática e da filosofia provém dessas regras (GLOCK, 1998, p. 312). “Compreender a regra é saber como aplicá-la, saber o que pode ser considerado como agir em conformidade com ela ou transgredi-la” (GLOCK, 1998, p. 315).

As regras normatizam nosso modo de viver. Elas podem ter alguma origem na empiria, mas a partir de um determinado momento, tornam-se regras, e são usadas então para descrever, mas não são mais dependentes da empiria. Por exemplo, em algum momento da história, percebeu-se empiricamente que um objeto com outro poderia ser definido pela regra 1 acrescentado de 1 resulta em 2, mas a partir do ponto em que virou uma regra, em que se entrou em um acordo sobre o significado de tal, e se construiu uma linguagem (a aritmética) usando-se tal regra, não há mais relação de tal regra com a realidade, esta fica servindo agora como uma norma, podendo ser usado como descrição de uma situação: “Na segunda vi um pássaro, na quinta vi outro. Esta semana já vi dois pássaros”. A realidade não tem mais nenhum domínio sobre a regra. A matemática no *Tractatus* tem proposições que não falam de nada do mundo,

---

[25] “No es razonable entender las reglas como el desarrollo de algo así como la intuición o el concepto de la pieza de juego”.

pois são consideradas tautologias, ou seja, proposições lógicas verdadeiras. Nas *Investigações* as proposições matemáticas são proposições gramaticais, pois não são proposições empíricas ou descritivas, e são consideradas, então, proposições normativas, que podem até ser usadas para descrever, mas que são critérios que usamos e pelas quais compreendemos a realidade. Em nossa forma de vida não conseguimos enxergar outra matemática, que por exemplo, 1 + 1 não seja 2.

Mas o fato de escolhermos esse jeito de viver, essas regras, essa matemática, não é algo que aconteceu em algum momento determinado da história, mas resultado de várias escolhas. De fato, tratar da origem da arbitrariedade é uma tarefa que parece impossível, pois não conseguimos sequer imaginar como seria o mundo de outra forma. Repetindo: não conseguimos imaginar um mundo em que 1 + 1 não seja igual a 2! No entanto, para o primeiro Wittgenstein isso se devia a uma lógica *a priori*, quase platônica, já estabelecida, enquanto que o segundo Wittgenstein considera que isso se deve a escolhas que o ser humano fez.

Isso não relativiza a realidade, não estamos dizendo que qualquer prática poderia ser considerada correta, mas dizendo que é assim não por fatores fora da linguagem – como um mundo ideal platônico, ou a mente, ou mesmo a empiria -, mas que são escolhas que foram em consenso consideradas como o padrão de correção. Schmitz (2004) nos alerta que qualquer precisão ainda continuará a ser incompreensível se se quiser buscar para além da linguagem, ou seja, quando os filósofos se colocam problemas para além do que a linguagem mostra. Por isso, o segundo Wittgenstein é um terapeuta, pois ele tenta curar essa doença, ao dizer, que o que temos é só o que temos e que se deve a convenções.

De acordo com Moreno (2006), a garantia de uma significação se perde no turbilhão imprevisível das formas de vida. As formas de vida são nossos hábitos, costumes, ações e instituições que fundamentam nossas atividades, determinando formações culturais e sociais, são as características humanas, seus comportamentos, a forma como se comporta a natureza. A esse respeito diz Wittgenstein:

> Apenas em casos normais o uso das palavras nos é claramente prescrito; não temos nenhuma dúvida, sabemos o que é preciso dizer neste ou naquele caso. Quanto mais o caso é anormal, tanto mais duvidoso torna-se o que devemos dizer. E se as coisas se comportassem de modo totalmente diferente do que se comportam de fato – e se não houvesse, por exemplo, a expressão característica da dor, do terror, da alegria; se o que é regra se tornasse exceção e o que é exceção, regra, ou se as duas se tornassem fenômenos de frequência mais ou menos igual – então nossos jogos de linguagem normais perderiam seu sentido. – O procedimento de colocar um pedaço de queijo sobre uma balança e fixar o preço segundo o que marca o ponteiro perderia seu sentido, se acontecesse frequentemente que

> tais pedaços, sem causa aparente, crescessem ou diminuíssem repentinamente (IF, §142)

A partir deste chão, regras são criadas e determinadas se servem aos homens ou não, ou seja, as formas de vida não determinam a criação das regras, mas sim os homens, tendo como base tais formas de vida. Moreno (2006), considera que as formas de vida possuem um ancoradouro que não é constituído por princípios normativos, como as leis da natureza ou da razão, nem a ausência de qualquer princípio, mas é caracterizado por convenções de regras. A noção de formas de vida nas *Investigações* substitui a forma lógica do *Tractatus*, isto é, a noção de formas de vida são agora o critério que oferece o significado às proposições, antes, a forma lógica seria tal critério, ela daria a *forma* do fato para a proposição, agora tal forma, não é uma correspondência figurativa, mas uma *adequação* à forma de vida, ou seja, adequamos as proposições em nossa linguagem usada de acordo com o jeito que vivemos, ou melhor, com o jeito que concordamos com os outros em viver. Por exemplo, não podemos dizer "a cor de sua camisa é tristeza", pois sabemos que "tristeza" se adequa a noção de sentimento e não a uma cor, ou seja, esta forma de vida nos ajuda a não cometer este erro de significado, ela dá a *forma* com a qual devemos usar a proposição. Vivemos de um modo, por que concordamos em viver assim. Definimos regras comuns para podermos nos compreender coletivamente. Os objetos do mundo estão aí, mantendo-se, não desaparecendo ou mudando de lugar sem explicação, continuamos falando, comprando, etc., e assim vamos vivendo.

> Diz-se muitas vezes: os animais não falam por que lhes faltam as capacidades espirituais. E isso significa: "eles não pensam, por isso não falam". Mas: eles não falam mesmo. Ou melhor: eles não empregam a linguagem – se abstrairmos as mais primitivas formas de linguagem. Comandar, perguntar, contar, tagarelar, pertencem à história de nossa natureza assim como andar, comer, beber, jogar (IF, §25).

Para Wittgenstein as formas de vida são resultados de nossa própria natureza humana, isto é, o jeito de "ser" humano, caracterizado principalmente pelo ato de falar e se comunicar de um modo diferente de outras espécies, levou às regras admitidas hoje. Desse modo Wittgenstein relaciona a linguagem com a cultura, que se mostra em nossas atividades comuns em sociedade. Isto mostra que os conceitos são vagos, que não são definições precisas, mas sim um conjunto impreciso de regras, que não indetermina seu significado, pois sabemos usar as palavras nas devidas situações em que somos colocados. Sabemos usar a palavra "vermelho" nas diferentes situações: "sua camisa é vermelha", "ele está vermelho de raiva", "Moisés abriu o Mar Vermelho", "Parei por que o sinal está vermelho", ...A palavra "vermelho" não está ligada a apenas um objeto ou fato, mas é usada em diferentes situações para diferentes objetivos, onde em cada situação é aplicada de forma diferente, mas nem por isso dizemos que não sabemos o que é vermelho, no entanto, não há uma essência do que é vermelho. Essas diferentes situações em que uma mesma palavra pode ser empregada são os jogos de linguagem.

Condé (1998, p. 86) revela que Wittgenstein sugere que nos questionemos sobre "de que modo a linguagem funciona" e não "o que é linguagem". Para Wittgenstein não existe linguagem, mas sim linguagens, uma variedade de usos, que são técnicas que desenvolvemos para manipular a linguagem, em diferentes situações, que ele chama de *jogos de linguagem.* Wittgenstein decide chamar de jogo de linguagem "a totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais ela vem entrelaçada" (IF, §7). E diz em outra parte:

> Mas quantas espécies de frases existem? Porventura asserção, pergunta e ordem? - Há inúmeras de tais espécies: "signos", "palavras", "frases ". E essa variedade não é algo fixo, dado de uma vez por todas; mas, podemos dizer, novos tipos de linguagem, novos jogos de linguagem surgem, outros envelhecem e são esquecidos. (As mutações da matemática nos podem dar uma imagem aproximativa disso.)
> A expressão *"jogo* de linguagem" deve salientar aqui que falar uma língua é parte de uma atividade ou de uma forma de vida. Tenha presente a variedade de jogos de linguagem nos seguintes exemplos, e em outros:
> Ordenar, e agir segundo as ordens -
> Descrever um objeto pela aparência ou pelas suas medidas -
> Produzir um objeto de acordo com uma descrição (desenho) –
> Relatar um acontecimento -
> Fazer suposições sobre o acontecimento –
> Levantar uma hipótese e examiná-la-
> Apresentar os resultados de um experimento por meio de tabelas e diagramas-
> Inventar uma história; e ler -
> Representar teatro -
> Cantar cantiga de roda -
> Adivinhar enigmas -
> Fazer uma anedota; contar-
> Resolver uma tarefa de cálculo aplicado –
> Traduzir de uma língua para outra -
> Pedir, agradecer, praguejar, cumprimentar, rezar.
> -É interessante comparar a variedade de instrumentos da linguagem e seus modos de aplicação, a variedade das espécies de palavras e de frases com o que os lógicos disseram sobre a estrutura da linguagem. (Inclusive o autor do *Tratado Lógico-Fi*losófico) (IF, §23)

Para Moreno (2006) a diversidade dos usos está relacionada com vários outros tipos de atividades extralinguísticas, que são envolvidas, inevitavelmente, pela linguagem, e assim o autor relaciona o termo jogo de linguagem ao termo formas de vida, quando ainda revela, que na expressão "jogo de linguagem", a palavra "jogo" procura assimilar essas atividades extralinguísticas a formas de vida. De acordo com Moreno (2006, p. 47), a palavra jogo na expressão jogo de linguagem busca salientar "a importancia da *práxis* da linguagem, multiplicidade de atividades nas quais se insere a linguagem; concomitantemente, essa expressão salienta o elemento essencialmente dinâmico da linguagem – por oposição, como vemos, à fixidez da forma lógica". Moreno (2001, p. 246) ressalta que tais jogos de linguagem são "apenas objetos de comparação criados para lançar novas perspectivas sobre as situações conhecidas", e por isso, não há uma essência que defina o jogo de linguagem, pois o mesmo pode ser aplicado em diversos casos, sem que exista algo em comum que os defina. E essa variedade de usos das palavras em diferentes contextos é o que favorece a significação das mesmas.

Portanto, existe semelhanças, mas não há uma essência *a priori*. Por exemplo, a palavra "mesa" tem diversos usos, como mesa de jantar, mesa de bilhar, mesa de som, mesa diretora e mesa redonda. No primeiro é um objeto para se colocar alguma coisa, no segundo para se jogar bilhar, no terceiro é um aparelho central que controla o som de outros aparelhos ligados a ela, no quarto é uma comissão que preside uma direção na política ou em uma empresa, no quinto é um debate sobre um tema em um congresso, assim como pode ser apenas uma mesa, como no primeiro exemplo, mas, especificamente redonda. Apesar de não haver uma essência por trás de seus usos, há semelhanças, o que Wittgenstein chamou de semelhanças de família, pois ele faz analogia com as semelhanças entre membros de uma mesma família, que não são iguais, mas possuem algumas semelhanças, ou como em outra comparação:

> Pense nas ferramentas em sua caixa apropriada: lá estão um martelo, uma tenaz, uma serra, uma chave de fenda, um metro, um vidro de cola, cola, pregos e parafusos. – Assim como são diferentes as funções desses objetos, assim são diferentes as funções das palavras. (E há semelhanças aqui e ali.) (IF, §11).

Esses diversos usos parecem mostrar uma indefinição sobre o significado, pois uma só palavra parece ter diversas interpretações, mas o significado versa nesse conjunto de usos, e a situação mostra um aspecto desse conjunto, desse modo, formamos o significado sobre uma palavra nos usos diversos que efetuamos, considerando as semelhanças quando usamos nessas diversas situações, não tendo, como já dito, uma essência, mas semelhanças.

No aforismo 9 das *Investigações*, Wittgenstein questiona como ensinar ostensivamente "ali" e "isto", pois posso dizer, "ali está uma cadeira", "isto é vermelho", mas como explicar o que é "ali". Seria: "ali é o lugar daquilo que aponto"? A criança poderia entender que "ali" é a "cadeira" e dizer "o nome daquele objeto é 'ali'!". Tal situação chega a ser absurda, pois, a criança aprende pelo uso o que é "ali" e "isto", assim, como ela aprende as outras palavras. Portanto, o significado é o uso.

A noção de semelhanças de família pode levar a uma ideia de relativismo, mas deve-se atentar que Wittgenstein compreende que o significado fica determinado pelo uso, ou seja, não ficamos vagando pelo inexplicável, como se qualquer coisa fosse permitida. No entanto, Moreno (2006) alerta que a noção de uso não tem a função de fundamento do mesmo modo que a noção de razão tem na filosofia tradicional, pois o uso é um fundamento instável. Uso também é um conceito vago. As regras definem os usos, e usamos as palavras de acordo com as regras, e é nesse uso que o significado vai se expandindo.

A regra já não contém em si sua aplicação, como o referencialismo leva a entender, como se um signo já contivesse seu significado, independente de como é aplicado. E isto só é possível devido primeiramente um consenso e em seguida o treino. Desse modo, "Ensinar uma linguagem aqui não é explicar, mas antes é adestrar" (OF, §5). Adestramento aqui, se refere ao fato de inserir o indivíduo no ambiente em que se usam determinadas palavras, e então pelo uso, ele passa a conhecer os seus significados. Por exemplo, não aprendemos a chamar e saber o que é "copo" por que alguém nos apontava para o objeto e nos dizia que ele se chamava "copo" e para que ele servia, mas sim aprendemos pelo uso em seu contexto. Essa é a preparação para adentrar o jogo de linguagem de fato. Percebemos com o treino qual o significado de "ali", ou de uma seta (IF, §454), ou melhor, aprendemos a usar o "ali" e uma seta. A constatação de que se aprende inserido em uma cultura pode parecer uma obviedade, porém Wittgenstein faz isso baseado na linguagem e não credita tal fato a um caráter essencialista do conhecimento. Desse modo, de acordo com Moreno (2006), a partir do momento que passou a se considerar que a significação se faz independente do modelo referencial da linguagem adotado no *Tractatus*.

> Assim, a linguagem passa a ser considerada do ponto de vista da multiplicidade de usos que podem ser feitos das palavras e enunciados, e o mecanismo referencial será, então, relativizado e situado em seu justo ligar: corresponderá a um dos usos possíveis (MORENO, 2006, p. 50).

Desse modo, a linguagem torna-se autônoma, ela contém a gramática que fornece as regras para o seu uso, do que depreendemos que a linguagem se torna em algum instante liberta da necessidade de justificativas externas a ela, mas, sim, das regras, que compreendemos devido às formas de vida, dentro de jogos de linguagem, com as semelhanças e diferenças com outros jogos. O segundo Wittgenstein passa a não ver mais a linguagem apenas como função de referência a um significado externo a ela, mas como a própria fonte de significados. Moreno (2005, p. 245) afirma que Wittgenstein "passa a incidir sobre o *pensamento expresso linguisticamente*, e não mais sobre a *expressão linguística* do pensamento".

Com o tempo e os mais variados usos de uma palavra, expandimos seu significado, ou até reformulamos. Por exemplo, uma criança pode usar uma palavra de forma errada, por exemplo, chamar sua irmã de tia, mas com o tempo, as repreensões, e o uso, saberá o significado de “irmã”, ou seja, como filha de seus pais, assim como ela. Mas pode ser que ela descubra que seu pai teve uma filha com outra mulher além de sua mãe, ou que seus pais adotaram uma criança, ou ela pode usar o termo para uma amiga muito próxima, ou seja, o significado se alargará para ela. Com o tempo podemos descrever outros usos possíveis de uma determinada palavra, inventar novos usos, descrevê-los em uma situação particular (MORENO, 2006), e assim, com o tempo e o domínio das mais variadas técnicas de uso, estaremos cada vez mais em domínio de tais usos, logo, podemos, até não saber definir uma palavra, mas sabemos usar amplamente tal, ou até poderemos sugerir uma definição, por que teremos domínio de tal palavra, mas seria nesse ponto que entraria o dogmatismo da filosofia tradicional, que Wittgenstein busca curar.

Os usos de uma palavra podem ser direcionados, como é feito, na escola, por exemplo. Assim, o ensino pode ser compreendido como um treino de variadas técnicas de uso, como se faz com os ditados na língua portuguesa ou a tabuada na matemática. Com o uso frequente e variado, os significados vão se ampliando, mas podem ser direcionados, e assim, promover redirecionamentos, quando se perceber que o significado não está sendo construído, ou se está de forma equivocada sobre como deve ser.

Nesse sentido vale destacar os conceitos de *ver* e *ver como* também analisados por Wittgenstein. Esses conceitos são oriundos dos estudos do filósofo sobre a noção de aspecto, que se deu a partir dos anos 1930, que vem da psicologia experimentalista, mas que Wittgenstein utiliza para descrever as regras gramaticais dos conceitos *ver* e *ver como*. Tanto o *ver* como o *ver como* são conceituais, mediados por jogos de linguagem, ou seja, não existe um *ver* imediato, que se dê pela intuição, mas já é direcionado, e o *ver como* é um outro modo de ver, também mediado. O aspecto é aquilo que resulta de comparações entre objetos que vemos e outros que conhecemos ou imaginamos, ou seja, são as comparações que sugerem novos aspectos, que podem não ser percebidos no *ver*, mas deve-se atentar que tais aspectos não existem nos objetos intuitivamente, mas devem ser sugeridos, isto é, criados a partir das comparações e assim, a percepção de um aspecto não é uma consequência necessária de uma dedução, mas depende de nossa boa vontade (MORENO, 2009). Não há fundamentos externos que justifiquem os diferentes aspectos, sejam eles contidos em uma experiência sensível, mental ou ideal, mas estão contidos na própria linguagem, ou seja, à propriedades internas. “O conceito de *aspecto* é, portanto, a versão pragmática da propriedade interna lógica" (MORENO, 2009, p. 164).

Ver algo de determinada forma depende de algum direcionamento nesse sentido, ou seja, somos treinados a ver algo desta ou daquela forma. Somos cotidianamente levados a ver algumas coisas de um determinado modo, mas a educação formal pode nos levar a ver de outro modo. Um músico experiente ouve uma música percebendo notas, acordes, harmonias e ritmos que talvez um leigo não perceba. Um pintor experiente percebe nuances em uma chamada obra-prima que um leigo não percebe. Um matemático, com certo tempo de estudo, enxerga matemática ao seu redor. Mas será que uma criança que entrou há poucos anos no mundo consegue isso? Precisamos ser treinados a *ver como*, ver como alguém quer que vejamos. *Ver como* não é exatamente uma maneira melhor do que o *ver*, mas é uma forma diferente, que podem ser apresentadas e treinadas.

Isso pode levar a se pensar que Wittgenstein acreditava que somos máquinas que repetem tudo o que nos dizem. Ele havia dito no *Tractatus* que devemos nos calar sobre o que não podemos falar, mas nas *Investigações* ele acredita que "Aquilo que se sabe quando ninguém nos interroga, mas que não se sabe mais quando devemos explicar, é algo sobre o que se deve *refletir*. (E evidentemente algo sobre o que, por alguma razão, dificilmente se reflete)" (IF, §89). Portanto, Wittgenstein destaca que devemos refletir, e não simplesmente aceitar. Mas esta reflexão passa por uma compreensão de significados, pois como se poderia refletir sobre o que não se sabe nem o que significa? Como uma criança pode refletir na sua aprendizagem matemática, se ela não tem elementos para tal? A transmissão de conteúdos permite fornecer elementos para que a criança possa fazer *lances* e *tentativas* no jogo em que ela está colocada.

Para o segundo Wittgenstein os problemas filosóficos surgem devido a uma má interpretação das nossas formas de linguagem, e são na verdade, problemas linguísticos, ou melhor, conceituais, que estão profundamente arraigadas em nós, e dos quais devemos nos curar. Para Wittgenstein a filosofia é uma atividade, e não a fundamentação de uma teoria.

> [...] não devemos construir nenhuma teoria. Não deve haver nada de hipotético nas nossas considerações. Toda *elucidação* deve desaparecer e ser substituída apenas por descrição. E esta descrição recebe sua luz, isto é, sua finalidade, dos problemas filosóficos. Estes problemas não são empíricos, mas são resolvidos por meio de um exame do trabalho de nossa linguagem e de tal modo que este seja reconhecido: *contra* o impulso de mal compreendê-lo. Os problemas são resolvidos não pelo acúmulo de novas experiências, mas pela combinação do que é já há muito tempo conhecido. A filosofia é uma luta contra o enfeitiçamemto do nosso entendimento pelos meios da nossa linguagem (IF, §109).

Wittgenstein compreende que a filosofia é uma atividade terapêutica, pois "O filósofo trata uma questão como uma doença" (IF, §255). O segundo Wittgenstein não deseja realizar uma análise, mas clarificar nossa experiência pelo uso da linguagem. Pode-se pensar que as regras são os elementos mais básicos da linguagem nas *Investigações*, mas não parece essa a intenção do filósofo, pois Wittgenstein não deseja definições últimas. Por isso acreditamos que Wittgenstein corta os vínculos com a filosofia analítica. Nas *Investigações*, o método, ou melhor, os métodos, são terapias (IF, §133), que serão usadas de acordo com a enfermidade identificada (FANN, 2013), seja de cunho idealista, realista, empirista ou *tractasiana*, assim como se faz na psicoterapia, onde não se trata todos os males da mesma forma. Para Moreno (2004, p. 292):

> a filosofia não visa, é claro, uma cura psicológica, mas linguística, e isso significa que não é mais a linguagem que será criticada, e expressões linguísticas substituídas por outras, mais rigorosas, segundo as exigências da forma lógica, mas é o pensamento que deverá ser curado, ao deixar-se perder nos labirintos linguísticos que ele próprio constrói. O filósofo terapeuta não possui um critério normativo para regulamentar expressões linguísticas, por contraste com o filósofo do *Tractatus* – que o tinha –, e aceita qualquer expressão como sendo, por princípio, significativa, com a finalidade de descrever os usos e aplicações que dela são feitos e compreender, dessa maneira, as confusões em que o pensamento se perde ao afastar-se da prática linguística.

De modo geral, a terapia filosófica terá que passar pela disposição dos fatos da linguagem sob regras, para que assim se possa perceber a gramática dos nossos usos linguísticos. Nesse sentido, diz Wittgenstein:

> Uma fonte principal de nossa incompreensão é não termos uma visão panorâmica do uso de nossas palavras. – Falta clareza à nossa gramática. A representação panorâmica permite a compreensão, que consiste justamente em "ver as conexões". Daí a importância de encontrar e inventar *articulações intermediárias* (IF, §122).

Portanto, a terapia filosófica pode ser compreendida como uma terapia gramatical, pois é uma terapia baseada nas regras da linguagem. Nas *Investigações* a realidade não mais pode ser representada por átomos proposicionais, mas sim por sistemas de regras, ou melhor, pela gramática. Agora são as regras da gramática que definem o que tem e não tem sentido dizer. A filosofia só pode descrever o uso da linguagem; não pode fundamentá-la; a filosofia deixa tudo como está (IF, §124), e assim só compete à filosofia clarificar a gramática dos enunciados que causam confusões, devido a não se ater às regras em determinado jogo de linguagem.

Wittgenstein, portanto, com sua terapia, busca mostrar as confusões de teorias dogmáticas fundadas sob a égide do essencialismo e que apequena a linguagem a um status referencial, tão somente, e desse modo suplanta teses fundacionistas, sejam elas realistas, idealistas ou empiristas, com a percepção de que não é possível buscar um fundamento último, um algo por trás da aparência, uma essência *a priori*, pois tal é apenas uma construção gramatical que se dá no uso efetivo da linguagem, e torna esta o solo sob o qual se pode compreender o conhecimento.

O segundo Wittgenstein não pretende formular uma teoria, e nesse sentido consideramos seu método terapêutico como um método de analisar os problemas de teorias dogmáticas na educação, como já vem fazendo a Profª Drª Cristiane Gottschalk na educação. Compreendemos, então, que a epistemologia do uso de Arley Moreno, fornece não apenas comentários, mas uma teoria que pode acrescentar a esta terapia – pois é uma teoria que passou pelo crivo da terapia – e fornece, a nosso ver, também possibilidades pedagógicas.

2.3 A epistemologia do uso de Arley Moreno

Inicialmente a teoria de Moreno era denominada de “pragmática filosófica”, mas para se diferenciar de outras pragmáticas filosóficas ou mesmo de teorias da linguística, Moreno tem intitulado ultimamente de *epistemologia do uso*. No texto de 2012 o autor busca ressaltar essa diferença, no que diz respeito, principalmente ao termo pragmática, tanto em seu desenvolvimento norte-americano - com Peirce, James, Dewey, Quine e Rorty – quanto europeu – com Apel e Habermas, que de acordo com Moreno (2012), seguem a linha dos estudos de Grice. No americano o destaque seria o utilitarismo e no europeu, uma pretensa universalidade dada ao uso linguístico.

Epistemologia é uma palavra de origem grega, onde *episteme* é conhecimento, e *logos* é estudo ou teoria. A epistemologia é também conhecida como “teoria do conhecimento”, é a ciência que estuda o conhecimento, ou o conhecimento que estuda a ciência, pois é o que pode ser pensado sobre a natureza, desenvolvimento e reflexos do conhecimento. A epistemologia é um estudo sobre o conhecimento ou sobre como chegamos a conhecer, e nesse sentido, o propósito qualquer de uma epistemologia é a análise de relações entre um sujeito que quer conhecer e um objeto a ser conhecido e a forma como se gera o conhecimento através dessa interação. Já vimos no primeiro capítulo que a epistemologia surge de fato na idade moderna, que é quando se deixa de se questionar sobre realidades, e busca-se pensar sobre o conhecimento de tal. Com a virada linguística o conhecimento passa a ser entendido como dependente da linguagem, e não mais como uma ação que depende apenas da ação mental do sujeito, ou da ação deste sobre a realidade.

Nesse sentido, as epistemologias, em geral, baseadas em uma tradição essencialista, tem formulado teses que compreendem a existência de algum fundamento que possibilita ou dá forma a essa interação entre o sujeito e o objeto de conhecimento, e assim, tem se formulado teses como as apresentadas no primeiro capítulo, realista, idealista, empirista, entre outras teses, psicológicas, behavioristas, etc.

No *Tractatus* Wittgenstein afirma que "A epistemologia é a filosofia da psicologia" (TLP, §4.1121). A psicologia a que o filósofo austríaco se referia era a que se interessa pelos atos lógicos, como implicação, negação, inferência, etc. e não aos aspectos psicológicos da mente empírica. Wittgenstein, assim como Husserl e Frege, combate o psicologismo. Moreno (2012, p. 74) entende que tal compreensão de Wittgenstein nos leva a entender que a epistemologia seria então

> uma atividade exclusivamente esclarecedora de expressões linguísticas de atos do pensamento envolvidos em processos epistêmicos – duvidar, acreditar, estar certo, opinar, conhecer, etc. – e terapêutica das confusões geradas pela interpretação unilateral da significação dos conceitos relativos a esses atos segundo o modelo referencial.

Dessa forma, a epistemologia não conduziria à construção de teses filosóficas a respeito do conhecimento e nem de atos mentais a ele relacionados. Wittgenstein não busca uma teoria, nem no *Tractatus*, nem nas *Investigações*, ele compreende que os problemas filosóficos só existem por incompreensões da linguagem. Em sua primeira fase, no sentido de uma incompreensão da lógica de nossa linguagem, e em sua segunda fase pela incompreensão da gramática de nossa linguagem.

O próprio jeito de fazer filosofia de Wittgenstein é algo diferente. A filosofia para ele não é uma ciência, como são as ciências naturais. Bouveresse (1991) destaca que para Wittgenstein os métodos e objetivos da filosofia são diferentes daqueles das ciências, e assim, o filósofo austríaco foi um defensor da especificidade da filosofia, e não desejava competir com cientistas ou teóricos, mas nem tampouco, facilitar-lhes a vida, por isso, então, concentrava-se em problemas de filosofia da linguagem, jamais querendo propor teorias, como disciplinas propriamente ditas. Compreendemos que Wittgenstein não concordava em buscar a resposta para todas as coisas pela filosofia, e que esta seria uma tarefa improdutiva.

Moreno (2012) explica que ele desenvolve uma teoria, mas Wittgenstein não. De certa forma, compreender a epistemologia como filosofia da psicologia parece ser algo menor diante do amplo leque de possibilidades que a linguagem oferece, desse modo Moreno busca elaborar uma epsitemologai que se aprofunda sobre tais possibilidades. O filósofo brasileiro percebe teses onde Wittgenstein não pretendia. Desse modo, quanto a questão do conhecimento, Moreno, o concebe "como o conjunto de relações internas de sentido e de sua aplicação, sob a forma de regras". Essa é uma tese construída por Moreno a partir da filosofia de Wittgenstein, mas não realizada por este. Mas por que Wittgenstein não faz teses? Moreno (2012, p. 75), então, responde:

> Ora, a razão para não fazê-lo é que, segundo ele, teses limitam nossa percepção para apenas um aspecto dos objetos, aquele colocado por elas: cada tese se torna um sistema de referência a partir do qual passamos a julgar os objetos a serem descritos e, por consequência, a atribuir a eles propriedades que não lhes pertencem, mas que pertencem ao sistema de referência [...] Daí a precaução exclusivamente terapêutica de Wittgenstein, com um fundo ético – para evitar, inclusive, o tão disseminado fascínio pelo modelo lógico da significação que o levara ao dogmatismo tractariano da juventude.

Moreno, então, aponta o desafio, que é fazer teses que não sejam usadas de forma dogmática, pois tem a descrição terapêutica de Wittgenstein como fundamento. É nesse sentido que Moreno se afasta dos que buscaram (e buscam) fazer uma teoria baseado em Wittgenstein, pois Moreno toma a própria descrição gramatical e terapêutica, que é o cerne da filosofia wittgensteiniana como base para fundamentar sua teoria, e não busca nem uma teoria universal como Habermas, nem um relativismo contextual como Rorty.

No *Tractatus* surge uma epistemologia apresentada como uma lógica transcendental, pois é a lógica que permite realizar uma teoria do conhecimento, que agora se fundamenta na linguagem, saindo da esfera subjetiva. O primeiro Wittgenstein concebe a filosofia como a teoria da forma lógica, e compreende que é esta que pode fornecer todos os fundamentos para a compreensão do mundo. Como já dissemos na tese 3 do *Tractatus* vemos uma epistemologia, pois temos a relação entre o mundo e o pensamento, onde são colocados limites ao pensamento, ou melhor, limites à linguagem, que é expressão do pensamento. Tal delimitação sempre foi o papel da epistemologia que no primeiro Wittgenstein é compreendida como uma lógica transcendental. A lógica torna-se assim, no *Tractatus*, a definidora do valor de verdade das proposições elementares, por isso, para Wittgenstein é o fundamento, é a visão além da realidade, isto é, da metafísica. A lógica não é apenas uma abstração formal, torna-se, então, a própria epistemologia, pois ela mesma é uma teoria do conhecimento, é onde podemos definir os significados das proposições, a partir de sua relação referencial com o mundo. A lógica, então, é uma espécie de passagem entre o conhecimento e a realidade, pois é a partir dela que podemos ter o conhecimento exato da realidade.

Esse tipo de epistemologia tractariana se afasta da epistemologia moderna, que considerava o sujeito como centro, e o conhecimento ficava limitado a este, desconsiderando-se assim a linguagem. “E assim se torna claro porque muitas vezes sentimos como se as ‘verdades lógicas’ fossem *postuladas* por nós; podemos com efeito postulá-las enquanto podemos postular uma notação satisfatória” (TLP, §6.1223). Dessa forma, Wittgenstein retira o sujeito do centro, e funda a linguagem e o mundo na lógica, que está para além dele. Por isso, o empirismo lógico avançará nesse sentido ao reconsiderar a importância da realidade, mas como dissemos, buscando evitar qualquer aspecto metafísico, mas que com o tempo fazem alguns caírem em psicologismos como vemos com o avanço da filosofia da mente a partir da filosofia analítica.

Nas *Investigações* Wittgenstein radicaliza sua intenção de não fazer uma teoria. Se no *Tractatus* ainda pode se perceber uma teoria - a teoria pictórica da linguagem -, nas *Investigações*, tal tarefa é mais complicada. Neste mesmo sentido é também bastante complicado perceber uma epistemologia nas *Investigações.* Enquanto o primeiro Wittgenstein pretende uma correspondência entre linguagem e mundo, com base na lógica, tal pretensão é abandonada na segunda fase. O segundo Wittgenstein se recusa a buscar uma essência comum por trás da linguagem e o mundo, considerando que agora estamos reféns da vagueza de nossas proposições cotidianas. No *Tractatus* ainda se vê uma tentativa de definir valor de verdade às proposições elementares por meio da lógica, mas nas *Investigações* tal está condicionado ao uso ordinário da linguagem. A possibilidade de conhecimento no *Tractatus* é real por que a proposição é uma figura da realidade. Se a linguagem é uma imagem do mundo, podemos então conhecer o mundo. Nas *Investigações* Wittgenstein não entende mais assim. No entanto, o conhecimento é possível, por que pelo uso podemos construir significados. É nesse sentido que Moreno começou a entender a possibilidade de realizar uma epistemologia a partir da filosofia wittgensteiniana, uma epistemologia, uma teoria do conhecimento, apoiada no uso de nossa linguagem. Enquanto na primeira fase a lógica é tomada como o cerne da possibilidade de se ter conhecimento, na segunda fase, a gramática ganha esse protagonismo, não considerando mais uma linguagem, mas jogos de linguagem.

Moreno (2012) entende que após o *Tractatus* com a concepção de contexto linguístico sendo ampliada para a dimensão pragmática, pode-se pensar que uma filosofia da psicologia não mais seria um ramo da epistemologia, mas seria “uma filosofia geral da significação linguística tendo como uma de suas partes a teoria dos conceitos epistemológicos" (MORENO, 2012, p. 74). Moreno (2012) defende que a descrição terapêutica dos usos das palavras, devido ao processo de variações metodológicas, sugere que há elementos que permitem a exploração do conceito de *uso* como campo esclarecedor da atividade epistêmica de *constituição* da significação, por meio do trabalho com a linguagem e elementos do mundo extralinguístico, desse modo, a atividade epistêmica não se limitaria à elaboração de modelos cognitivos, mas precisa ser compreendida como a que permite a significação em geral, tendo os modelos cognitivos, como partes constituintes, dessa construção de significados. Moreno (1996) reflete sobre questões epistemológicas, referentes aos fundamentos do conhecimento, à possibilidade de aplicação dos conceitos à experiência e ao papel desempenhado pelo simbolismo linguístico na organização dos conteúdos da experiência em formas conceituais. Moreno (2012, p. 76) entende que "Conhecer é construir regras de sentido e operar com elas aplicando-lhes aos objetos de pensamento".

Gottschalk (2015, p. 301) entende que a epistemologia do uso de Moreno tem em vista "a sistematização dos processos de constituição do sentido linguístico e suas relações com o pensamento e o mundo". Ela indaga, se não seria esta epistemologia, dogmática como as demais, e responde que as afirmações de Moreno, tais como as de Wittgenstein, não são teses, como nos dogmatismos tradicionais, mas observações que passaram pelo crivo da terapia filosófica wittgensteiniana.

Mas o que seria uma tese filosófica não dogmática? De acordo com Silva (2005), a pragmática de Moreno toma dois cuidados a esse respeito: o primeiro é que "cada tese sua descreveria processos simbólicos de natureza pragmática. Ofereceria assim esclarecimentos conceituais e não explicações hipotéticas, a exemplo de fatos linguísticos quaisquer", e o segundo cuidado é que se sustenta em resultados da terapia e não de proposições

> Com isso, o que se afigurava como claro paradoxo mostrar-se-ia uma incomum afirmação de coerência. Tratar-se-ia apenas de ver as regras efetivamente operando, a gramática dos usos das palavras, enquanto que, sobre sua justificação ou suas causas, não caberia formular hipóteses (SILVA, 2005, p. 105).

O autor, então, conclui que a epistemologia do uso de Moreno é "livre de pressupostos dogmáticos" (SILVA, 2005, p. 105). Araújo (2004, p. 36) sem tratar da epistemologia do uso, defende a possibilidade de tal na filosofia de Wittgenstein, quando diz que "a questão epistemológica é algo que nossas formas de vida requerem, não podemos prescindir da possibilidade de validar, de objetivar, de lidar com o mundo e aprender com isso, sempre que for necessário" e acrescenta que após a virada linguística não tem sentido perguntar mais pela natureza do conhecimento, que não leve em consideração as práticas e atividades e "não fruto da mente pensante ou de formas *a priori* do entendimento estruturadas por um eu transcendental".

A epistemologia do uso desenvolvida por Moreno se fundamenta em conceitos wittgensteinianos, mas partindo de uma análise mais geral dentro dos estudos filosóficos, como Kant, Husserl e Granger. Moreno pretende formular uma nova teoria de representação linguística sobre o papel da linguagem na organização de nossas experiências empíricas ou mentais, dentre tantas que já realizadas, como a concepção agostiniana referencial da linguagem. Moreno (1996) explica que ele reflete sobre questões epistemológicas, que são questões referentes aos fundamentos do conhecimento, à possibilidade de aplicação dos conceitos à experiência e ao papel desempenhado pelo simbolismo linguístico na organização dos conteúdos da experiência em formas conceituais. A partir da reflexão destas questões ele busca desenvolver uma concepção que sugere que uma interpretação filosófica da ligação entre o empírico e o simbolismo linguístico deve passar pela aplicação dos conceitos de natureza pragmática. Se tal interpretação não passar por essa aplicação, cairá em um dogmatismo, que pode ser tanto realista, quanto empirista.

Moreno (1996) explica que as raízes de sua então pragmática filosófica[26] estão em Kant, Granger e Wittgenstein. Ele toma, inicialmente, como referencial a solução de Kant para a interpretação das necessidades analítica e sintética em nosso conhecimento, que de acordo com o que já apresentamos no capítulo 1, tanto as necessidades analíticas quanto sintéticas são realizadas pelo pensamento, mas as sintéticas são determinadas pela intuição pura, que é *a priori*, e ela independe da experiência, como no caso do conhecimento matemático, ou seja, o pensamento seria capaz de produzir tais conhecimentos que independem da experiência, pois é transcendental e *a priori*. Moreno toma emprestado de Kant o termo "transcendental", modificando seu escopo, para caracterizar o "gramatical" do segundo Wittgenstein como tendo essa função.

O empirismo lógico, desenvolvido pelo círculo de Viena, tendo como um dos grandes fundamentos, o *Tractatus*, buscou eliminar a ideia de transcendental, substituindo a interpretação kantiana que colocava o transcendental a partir de um *a priori* da percepção do sujeito por uma interpretação da ideia de natureza lógica que independe da apreensão do sujeito. Nesse sentido, o lógico substituiria o transcendental. Assim só haveria necessidades analíticas,

[26] No texto de 1996, Moreno ainda utilizava o termo pragmática filosófica. A mudança para epistemologia do uso se deu em textos a partir de 2006.

pois, o sujeito não seria capaz de construir conhecimento, que já está estruturado nas operações lógicas. Por esta questão, tal concepção se aproxima, mesmo que tangenciando, de um realismo platônico.

Esse protagonismo da lógica favoreceu um estudo mais profundo sobre a linguagem, mas ainda se buscando uma linguagem ideal, e assim, a origem de como se dá o conhecimento parecia estar mais próxima dos que defendem a linguagem do que os que defendem a percepção sensível. Moreno, porém, parece compreender que o problema seria investigar como se dão estas relações entre o que percebemos e o simbolismo linguístico, e assim, o conhecimento não está em um destes extremos, na linguagem ou na percepção, mas vai sendo constituído ao longo de um trabalho do simbolismo linguístico que envolve elementos do empírico. É a partir disto que Moreno formula uma nova teoria da representação, pois "se os princípios formais do conhecimento não são colocados na percepção, mas, no simbolismo, como será então possível, não apenas representar, mas, principalmente, *constituir* os conteúdos da experiência sensível enquanto *objeto* através de formas do simbolismo linguístico?" (MORENO, 1996, p. 10). Gottschalk (2007b, p. 459), abordando a então denominada pragmática filosófica de Moreno, argumenta que:

> Entre o transcendental e o empírico, a pragmática filosófica nos dá instrumentos para ver a atividade do ensino como a apresentação de uma determinada visão de mundo, fundamentada em regras de natureza convencional, e que, portanto, não são passíveis de ser descobertas pelo aluno, mas ao mesmo tempo são as condições de sentido para que o aluno, uma vez persuadido pelo professor, possa organizar de uma outra maneira a sua experiência orientada por essas regras.

Então, Moreno (1996) *retém alguns pontos* do empirismo formal de Granger. Primeiramente, quanto à concepção de transcendental. Parte-se de Kant, para alargar e mudar o foco da função transcendental. Alarga no sentido de agregar a dimensão histórica ao conceito de transcendental de Kant, ou seja, é *a priori*, mas também é sujeito a transformações internas em diferentes campos do conhecimento, "a vida e as transformações dos conceitos passam, aqui, a indicar *a priori* os campos provisórios de possibilidade para as operações cognitivas" (MORENO, 1996, p. 11). Muda o foco da função transcendental no sentido que a mesma, diferentemente de Kant, deve ser exercida pela lógica formal, isto é, a linguagem passa a exercer papel preponderante. Tal lógica terá o estatuto de metalinguagem e "fornecerá as regras gerais a que todo simbolismo linguístico deve submeter-se para ser capaz de exprimir os legítimos objetos" (MORENO, 1996, p. 11).

Em seguida, Moreno (1996) retém a concepção de significação. Assim, chega-se ao conceito de estilo de Granger, no sentido de uso do simbolismo. “O estilo é o resultado de um trabalho sistemático sobre o conjunto de elementos que ficam sempre explicitamente excluídos da construção de uma estrutura” (MORENO, 1996, p. 12). Gottschalk (2015) informa que para Granger o estilo seria o aspecto negativo da estrutura, e para Moreno é o contrário, no estilo já haveria necessidade, e o aspecto formal já se encontra no caos do empírico e de nossas ações imersas em uma forma de vida, incorporado e expresso pela linguagem: o estilo é a parte positiva da estrutura. Moreno compreende que a significação corresponde aos usos realizados nas primeiras relações entre o signo e seu objeto de reenvio, ou seja, o significado de uma proposição se desenvolve desde os primeiros usos que ocorrem, quando se relaciona o signo e o objeto (ou fato). Nessa organização da experiência por meio da linguagem constrói-se uma estabilidade, pressupondo um universo já organizado pela própria linguagem. Então, Moreno compreende que se devem explorar as formas mais elementares do simbolismo, que pode ser considerado como uma das lacunas da filosofia de Wittgenstein. O filósofo austríaco parte de proposições, mas Moreno tenta explicar a construção de nível linguístico, ele trata das relações de sentidos proposicionais, das condições mais gerais para a formação do símbolo, que são a base da formação do conhecimento, que assim se dariam no uso da linguagem, ou seja, na pragmática.

Moreno (1996), então, tendo analisado a noção de necessidades analíticas e sintéticas em Kant, se pergunta como interpretar a noção de necessidade nas formas linguísticas pré-lógicas, ou seja, nas formas mais elementares do simbolismo. Para Wittgenstein, quando o pensamento formalizante elimina ações e atitudes – nomear, chamar, esperar, desejar, etc. (o que seria incluído como o “sensível” em Kant) -, não elimina os conteúdos empíricos, pois para o filósofo, estes são considerados atividades linguísticas.

Desse modo, Moreno (1996) formula o que consideramos ser a ideia central de sua epistemologia, ao colocar como formas simbólicas elementares, isto é, como regras para a aplicação de palavras, os dados da percepção sensível, as ações e os estados mentais, quando expressos linguisticamente. São estes que formam o universo pré-lógico, que é a base de origem da metalinguagem lógica e do pensamento formalizante. Ao fazer isso, Moreno continua a acreditar que há uma diferença entre a expressão e seus conteúdos, mas destaca que qualquer elemento fora da linguagem simbólica só pode ser entendido como objeto do pensamento por ser relacionado à linguagem por meio de sua própria expressão. “Ao relatar que alguém ama ou esquece, não estou apenas descrevendo comportamentos, mas, principalmente, aplicando conceitos a determinadas atividades que são, por sua vez, regradas segundo o uso que fazemos desses mesmos conceitos” (MORENO, 1996, p. 13). Sem a expressão na linguagem não teríamos acesso, não conseguimos compreender algo como um objeto.

Por isso, Moreno (1996) compreende que Wittgenstein busca agregar as formas mais elementares do simbolismo à concepção de significação linguística. Então, mantém-se a ideia de que a verdade analítica perdeu seu antigo caráter lógico extralinguístico, pois agora depende da linguagem. Assim proposições do tipo “todo triângulo é uma figura geométrica de três lados” são expressões conceituais que compreendemos, e é nesse sentido que são analíticas, mas não é uma verdade absoluta, independente da linguagem. É como se mesmo que tal realidade existisse, ela só existe por que pode ser expressa linguisticamente. Como falar de algo sobre o que não conseguimos falar? (Por isso, talvez, Wittgenstein no *Tractatus* propôs se calar sobre o que não se pode falar). Assim, todas as verdades necessárias e contingentes são de natureza sintética. O *a priori* está na linguagem.

Mesmo no momento mais elementar, em que houve a relação da linguagem com o mundo, houve algum tipo de informação, onde foram feitas escolhas arbitrárias. Moreno (1996) conclui que mesmo atividades como nomeação são complexas, pois podem envolver gestos ostensivos, repetição de sons, apresentação de paradigmas etc. Já há alguma informação nestas atividades e, desse modo, não é como Wittgenstein supõe no *Tractatus*, como apenas uma substituição lógica. Essas informações são dadas por sistemas de referência, que são objetos de comparação ou critérios de natureza convencional, e não mais como pré-juízos normativos, de natureza idealizada, aos quais os fatos devam necessariamente corresponder (MORENO, 2004). De acordo com Moreno (2004), tais sistemas são denominados nas *Investigações* de jogos de linguagem, que são o fundamento da terapia. De acordo ainda com o autor, a diferença com o modelo lógico é que os jogos de linguagem serão usados como critérios arbitrários, “Daí que as afirmações feitas no decorrer das descrições, e que aparentam ser teses emergindo de uma teoria normativa, sejam, na verdade, produzidas na perspectiva de um determinado jogo de linguagem arbitrariamente escolhido, e sem qualquer pretensão normativa” (MORENO, 2004, p. 300).

Nesse sentido, vale destacar os três aspectos comuns da terapia wittgensteiniana que são as ideias principais sobre as quais nos apoiamos nesta tese: os fundamentos da significação não são exteriores, a gramática é autônoma e a gramática arbitrária. Wittgenstein nega qualquer exterioridade como fundamento de significação, mesmo no *Tractatus*, tal estava subserviente a uma lógica, mas ainda presente na linguagem, ou melhor, na sua relação com o mundo, e assim, não estava em um mundo ideal platônico, na mente, ou mesmo na empiria. Wittgenstein com a ideia de que a gramática é autônoma, entende que sua significação é sempre interna, já que é a própria gramática que define suas relações com a realidade fora da linguagem, servindo para descrever a realidade, mas não partindo dela em si, a partir do ponto em que as proposições se tornam normativas, tornam-se linguísticas. Com a ideia de a gramática é arbitrária, Wittgenstein compreende que as relações internas são decididas arbitrariamente por quem tenta fazer a comparação - o terapeuta -, se compreendermos a gramática como arbitrária, também compreenderemos que a concepção de linguagem é uma expressão arbitrária da natureza e arbitrária das gramáticas descritas. “A multiplicidade e a imprevisibilidade dos usos da linguagem é a fonte da *autonomia* e, por consequência, da *arbitrariedade* da gramática” (MORENO, 2012, p. 83).

Moreno (2004, p. 133) destaca duas funções exercidas pela gramática. Primeiro, no momento inicial na relação entre linguagem e mundo, ela estabelece normas, convenções que estabelecem limites nas operações linguísticas. Este é o momento regulador, ou a função reguladora da gramática, onde “o mundo é integrado ao simbolismo linguístico sob a forma de regras”. Essa função é devedora de atos gerais, circunstâncias, regularidades, da natureza, do ser humano, da vida, *as formas de vida.* A partir desta etapa reguladora, se dá a etapa constitutiva (ou a função constitutiva da gramática), que é quando se constituem como proposições gramaticais, de fato, que são afirmações introduzidas paradigmaticamente, através de aplicações de palavras formando, assim, enunciados. “As regras para a formação de tais proposições, todavia, tornam-se independentes de seu solo de origem, de tal maneira que a experiência dos eventos naturais em nada poderá contrariá-las” (MORENO, 2004, p. 135). É neste momento que a gramática inicia sua autonomia. De acordo com Bouveresse (1987) a ideia de autonomia da gramática em Wittgenstein comporta dois aspectos: a gramática não é responsável sobre a realidade e as regras são independentes sendo que uma regra não nos compromete a outra, somos nós que nos comprometemos.

Essa sistematização que Moreno (2005) realizou da filosofia do segundo Wittgenstein ratifica mais ainda a importância que o filósofo austríaco dá à linguagem, pois ele nega que os fundamentos da significação sejam externos, isto é, nossas construções de significados não se dão por fatores externos à linguagem – ideais, mentais ou empíricos. E ainda, a gramática não depende de nada externo, seus significados são dependentes de relações internas, e são decididos arbitrariamente. Assim, a gramática de uma linguagem é sempre autônoma e arbitrária, por isso não se pode pensar nela apenas na função de referência de algum conhecimento externo a ela própria. “A gramática não é responsável por nenhuma realidade. São as regras gramaticais que determinam o significado (que o constituem) e, portanto, elas próprias não são responsáveis por qualquer significado e, nessa medida, são arbitrárias” (GF, I,

§133). Wittgenstein defende que o significado está no uso, que é determinado por regras, ou seja, as regras constituem os significados, mas se tal é arbitrária, então não pode justificar os significados que ela mesmo gera, e, portanto, a realidade não pode questionar as regras. Se não considerarmos a gramática da linguagem como arbitrária, isto nos levaria facilmente a uma concepção essencialista da linguagem, em algum dos caminhos filosóficos já assinalados anteriormente, ou, como foi no caso do primeiro Wittgenstein, nos levaria a forma lógica tractatariana.

Moreno (2005), a partir da noção de arbitrariedade, resolve considerar dois aspectos: um relacionado à atividade simbólica e que a descrição gramatical é realizada pela exemplificação. De acordo com Moreno (2005), o aspecto da atividade simbólica deve ser compreendido em dois sentidos: primeiramente como reflexão sobre o sentido, interno ao simbolismo gramatical, e depois compreendendo a filosofia como uma espécie de ritual simbólico, que faz da terapia uma atividade que independe de causas extra simbólicas, pois sendo um ritual, é arbitrária. O autor chega a uma nova concepção pragmática do que seria um sistema simbólico, decorrente da descrição gramatical das palavras, que trata de explorar as relações internas que constituem a significação. O autor faz isso a partir de um *solo áspero*, que é a *práxis* da linguagem, que envolve indivíduos e expressões linguísticas de suas experiências privadas e públicas e de suas ações sobre objetos e fatos do mundo. Assim, pode-se afirmar que a descrição gramatical corresponde à exploração da natureza pragmática das ligações internas de sentido, presentes nos sistemas simbólicos perpassados pela linguagem. É nesse sentido que os sistemas simbólicos poderão ser explorados, respeitando sua autonomia e esclarecendo os diversos sentidos que permitem exprimir.

Wittgenstein assume a existência de vários elementos presentes nas formas mais elementares do simbolismo, mas que ainda assim, são elementos linguísticos. Há algo de empírico na origem do simbolismo, mas esse *algo* ainda é linguístico. Há algo de informação misturado à linguagem, porém não conseguimos determinar exatamente onde se deu isso. Não conseguimos saber por que alguém ou um conjunto de pessoas resolveu nomear um objeto por tal nome. Por isso, não podemos dizer que o empírico gera a linguagem, pois mesmo que alguém tenha pensado lá na origem que “dois mais dois é quatro” por que postulou que dois objetos e mais dois objetos resultam quatro, hoje, tal proposição é totalmente linguística e normativa e mesmo que em alguma situação tal proposição não se confirme, ela nunca negará que 2 + 2 é 4.

A partir do universo linguístico existente, foram e vão se ampliando os campos de aplicação, gerando novas técnicas que são regidas por tal universo linguístico. É um automovimento[27] dentro da linguagem que ganha certa autonomia. Mas a origem dos significados que damos às palavras está imersa em uma complexa rede de atividades, relacionados a dados da percepção, às emoções, aos sentimentos e comportamentos e é esta variedade que está na base da constituição de um significado. São as situações que permitem a definição do objeto e aplicação do conceito. São casos particulares da significação que não podem ser generalizados, isto é, não devem ser tomados como essências apriorísticas extralinguísticas. O significado depende do uso em seu contexto.

Moreno (1996) compreende que uma teoria da representação deve levar em consideração as formas elementares do pensamento objetivo que antecedem sua forma lógica, que é o produto mais bem-acabado do pensamento objetivo. No entanto, uma teoria que busca compreender que a significação está no uso deve situar a forma lógica também na linguagem, deixando de considerá-la como os produtos mais útil, eficaz, único e fundamental. Para o filósofo brasileiro, na epistemologia do uso não se busca integrar o empírico na significação, mas indicar os processos de integração do empírico pela atividade simbólica que conduzem à organização formal da experiência e à constituição de objetos do pensamento. Também não busca, em um sentido sociológico ou psicológico, integrar uma relação de uso entre indivíduos e nem convenções sociais que regem uma comunidade na significação. A significação, para Moreno, é a atividade simbólica que institui relações pessoais e convenções sociais como regras linguísticas que constituem objetos para o pensamento.

Moreno (1996) compreende que a tarefa da sua, então, pragmática filosófica é reconhecer o processo contínuo de inserção de regras particulares em contextos mais amplos, e interpretar tal processo como uma condição de natureza *simbólica* da significação, entendendo como uma função unificadora da diversidade. Em outros termos, a epistemologia do uso não irá fixar-se na análise efetiva de regras particulares, mas, por meio da diversidade de tais, conduz sua atenção para a análise das relações entre essas regras (reciprocidades e dependências) procurando, assim, formular as condições gerais que permitem e que exigem o estabelecimento de tais relações para a constituição da significação e dos objetos do pensamento. É dessa maneira que os elementos pré-lógicos se agregam. Esses elementos podem ser as convenções sociais em geral, linguísticas ou outras, e as relações interpessoais, que também são regidas por convenções sociais, linguísticas ou outras. Nesse sentido Moreno

[27] Este termo é utilizado por Caveing (2004) para se referir ao movimento intrateórico da matemática, isto é, ao desenvolvimento da matemática devido necessidades internas à mesma. Conferir: CAVEING, Maurice. **Le problème des objets dans la pensée mathématique**. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 2004.

compreende que existe uma função reguladora, unificadora da diversidade e constitutiva dos objetos referidos através dos conceitos.

Moreno (1996) destaca dois conceitos de natureza pragmática: uso e contexto. O autor amplia o conceito de uso dado por Wittgenstein, pois além de acrescentar a noção wittgensteiniana de aplicação, introduz a ideia de construção da ligação de reenvio simbólico. Este é um automovimento dentro da própria linguagem. Assim é tal noção que Moreno agrega ao conceito de uso de Wittgenstein. Moreno (1996) amplia o conceito de contexto, pois defende que seria uma ampliação do conceito estruturalista chamado de sistema e que é denominado por Wittgenstein como formas de vida. Moreno (1996) compreende que os conceitos de uso e contexto orientam princípios para a compreensão e para a construção da significação conceitual, que são formas de organização simbólica da experiência. Estes conceitos regulam a atividade linguística, de onde pode se tirar estes princípios, que são princípios gerais de organização linguística da experiência. São eles: exemplificação, descrição e definição.

Primeiramente, o princípio da exemplificação, referente à atividade de ensino e aprendizagem, que é a apresentação de exemplos de ocorrência de aplicação do signo. Já dissemos que Moreno (2005), a partir da noção de arbitrariedade, considera dois aspectos: relacionado à atividade simbólica (que já abordamos) e que a descrição gramatical é realizada pela exemplificação. A descrição a partir da exemplificação é uma possibilidade. Moreno (2005) defende que não se devem fazer exemplos de descrições de propriedades empíricas, mas de relações internas de sentido, pois nesse caso a exemplificação fornece o contexto ideal para que transições de sentido se apresentem. A exemplificação sugerida é da própria linguagem e não de alguma contextualização, a não ser que tal colabore exatamente para a construção de sentidos em suas relações internas. Para Moreno (2005) o uso de exemplos amplia a prática linguística até os limites do que será possível e impossível, isto é, mostra as possibilidades de determinada descrição. Ele ainda revela que a produção de exemplos se utilizará de instrumentos variados, como a sugestão de diferentes analogias, de diferentes formas de comparar objetos e situações, de diferentes objetos e situações e de entrecruzamento entre esses instrumentos. A terapia procura um caminho a partir de cada dificuldade, não seguindo regras pré-estabelecidas para todas as análises dos conceitos.

O segundo é o princípio da descrição, que é a aplicação do signo em um determinado contexto. “É possível multiplicar o número de exemplos de *descrições* parciais de aplicação dos signos sem que este processo se confunda com o de simples exemplificação de *aplicações* dos signos” (MORENO, 1996, p. 19).

O terceiro princípio é o da definição, que se trata da apresentação de critérios necessários para a identificação do signo por meio de sua aplicação.

Portanto, a pragmática filosófica/epistemologia do uso, segundo Moreno (1996), pretende analisar a relação primitiva de reenvio simbólico em termos de princípios elementares de organização linguística da experiência. Tais princípios estariam sujeitos aos conceitos de uso e contexto aqui apresentados. Desse modo, o solo de origem do conhecimento deixa de ser de natureza lógica, passando a depender das operações mais gerais e elementares de uso e de contexto, realizadas pelo pensamento humano.

3 Álgebra: construção histórica e ensino

> “Mas não falemos de fatos. Já a ninguém importam os fatos. São meros pontos de partida para a invenção e o raciocínio”
> (Jorge Luis Borges, *O livro de areia*)

Neste capítulo apresentaremos a construção do conhecimento algébrico ao longo da história, destacando o desenvolvimento da linguagem e como tal apresenta características arbitrárias e autônomas, em um automovimento gerenciado por criações que buscam afastar a matemática de contradições, bem como de consensos entre a comunidade de matemáticos que decide aceitar ou não – mesmo que depois de muito tempo – determinadas soluções para problemas. Em seguida, apresentaremos a história do ensino de álgebra, como se deu em outras partes do mundo, mas destacando seu desenvolvimento no Brasil.

3.1 A construção da álgebra

A compreensão sobre o desenvolvimento da álgebra se faz principalmente na observação com o estudo de equações em diferentes povos, babilônicos, egípcios, gregos, hindus, árabes, etc. que alcançam um período de até 1700 a.C. Equações são igualdades entre quantidades, ou seja, são apenas formas de apresentar que há igualdade entre duas quantidades. Por exemplo, 7 = 7 pode ser considerada uma equação, assim como, 2 + 5 = 7, 7 = 2 + 5, 2 + 5 = 2 + 5, 3 + 4 = 2 + 5, 9 – 2 = 6 + 1, etc. Equações são igualdades entre expressões, que revelam quantidades. Wittgenstein no *Tractaus* compreendeu que as proposições da matemática são equações (TLP, §6.2), e que a equação é a forma da matemática revelar a lógica do mundo (TLP, §6.22).

Os primeiros avanços em álgebra são percebidos quando se olha para as formas que os diferentes povos trataram as equações, e quando buscaram encontrar valores desconhecidos nas mesmas, as chamadas incógnitas. Como no exemplo dado, qual o valor de x na equação: $x + 5 = 7$. O valor de x deve ser 2 para a proposição se manter como equação. Os primeiros povos que trataram de alguma forma de álgebra não tinham esta forma de escrita, até por que os próprios números indo-arábicos – que se usa atualmente - começaram a surgir no século VII d.C, e se difundiram na Europa no século XIII d. C. Também o uso de letras em equações foi mais tardio, no século XVI d.C. Desse modo, os primeiros estudos com equações com incógnitas se deram com as escritas cursivas que os povos detinham. Foram encontrados estudos bem avançados, com equações até do segundo, terceiro e quarto graus com os povos antigos.

A história da álgebra se divide em duas fases: a primeira se deteve no estudo de equações e foi de 1700 a.C. a 1700 d. C, e a segunda se detém ao estudo de estruturas algébricas, que é um desenvolvimento da primeira fase (BAUMGART, 1992). Com relação a forma de representação geralmente se divide a história da álgebra em três fases: álgebra retórica, álgebra sincopada e a álgebra simbólica. Na retórica as expressões são escritas por extenso, na sincopada há o uso de abreviaturas e na simbólica o uso de letras. Esta evolução representa o desenvolvimento da própria linguagem matemática. Esta classificação foi feita pelo filologista e historiador da matemática alemão Georg Ferdinand Nesselmann em seu livro *Versuch einer kritischen Geschichte der Algebra* (Ensaio sobre uma história crítica da álgebra) de 1842, que é adotada por quase todos historiadores da matemática.

Abaixo apresentaremos um breve histórico de como a álgebra se desenvolveu. Para isto usamos como referências Eves (2004), Boyer (1996), Aaboe (1984), Baumgart (1992), Ponte, Branco e Matos (2009), Struik (1989), Pratt (1993) e Milies (2004), algumas vezes os citando, mas outras vezes não, por que são questões que vemos presentes na maioria destas referências.

Os primeiros povos em que se percebe o estudo de equações são os egípcios e babilônicos, próximo do século XVII a.C. Eles faziam uso da álgebra retórica. Os babilônicos produziram estudos aritméticos complexos e relacionados à álgebra, como vemos num exemplo típico oferecido por Baumgart (1992) dos problemas encontrados em escrita cuneiforme, em tábuas de argila que remontam ao tempo do rei Hamurabi (1700 a.C.). “Comprimento, largura. Multipliquei comprimento por largura, obtendo assim a área: 252. Somei comprimento e largura: 32. Pede-se: comprimento e largura” (BAUMGART, 1992, p. 5). O autor aqui usa a notação decimal indo-arábica em vez da notação sexagesimal cuneiforme para exemplificar a fase retórica. Baumgart (1992) defende que a escrita cuneiforme babilônica, por ser mais avançada que a escrita egípcia parece ter favorecido os estudos matemáticos, o que já nos mostra um primeiro exemplo de como uma linguagem mais desenvolvida tem estreita relação com o desenvolvimento da matemática. Os babilônios já usavam um método semelhante ao atual da substituição por uma fórmula geral, para resolver equações quadráticas.

No Egito, apesar de não apresentar métodos tão avançados quantos os babilônicos, também percebemos algo próximo do que denominamos hoje de álgebra, seguindo a nossa relação com a resolução de equações com valores desconhecidos. Um importante documento que se tem sobre esta época é o papiro de Rhindi ou Ahmes, escrito pelo escriba Aahmesu.

Boyer (1996, p. 10) nos oferece um exemplo contido neste papiro da álgebra retórica egípcia; "Um montão, sua metade, seus dois terços, todos juntos são 26. Diga-me: Qual é a quantidade?". O montão (ou *aha*) neste caso é o número procurado - é a incógnita. Os egípcios já apresentaram símbolos para representar *mais* e *menos* (um par de pernas da esquerda para direita como mais e fazendo o movimento contrário, menos) e ideogramas para os sinais de igual e a incógnita. Os egípcios resolviam equações por estimativa.

É importante dizer que apesar de se ver na história da álgebra a relação ou a necessidade de se resolver problemas do cotidiano, na maioria são estudos com os números e um trabalho formal, que não parte diretamente do empírico, como se percebe na fala de Eves (2004, p. 57), quando este trata da matemática babilônica e egípcia:

> A ênfase inicial da matemática ocorreu na aritmética e na mensuração [...]. Nesse contexto, todavia, desenvolvem-se tendências no sentido da abstração e, até certo ponto, passou-se então a estudar a ciência por si mesma. Foi dessa maneira que a álgebra evolveu ao fim da aritmética e a geometria teórica originou-se da mensuração.

A partir do século IV a.C. percebe-se na Grécia, sob influência da álgebra babilônica, um avanço na álgebra. Com Diofanto de Alexandria no século III d.C., com sua grande obra *aritmética,* que fez uso de abreviaturas, houve a chamada álgebra sincopada. Apesar do avanço, a forma retórica se manteve por muito tempo, pois a forma sincopada não se tornou padrão unânime. Diofanto é por muitos, considerado, o fundador da álgebra. Ele usou o símbolo ς para indicar incógnita. Usou símbolos para potências da incógnita, até o expoente 6. Incógnita ao quadrado era $\boldsymbol{\Delta^y}$, incógnita ao cubo $\boldsymbol{K^y}$, incógnita a quarta potência $\boldsymbol{\Delta^y\Delta}$, incógnita a quinta potência $\boldsymbol{\Delta K^y}$ e a incógnita a sexta potência $\boldsymbol{K^y K}$. Ele indicava a adição pela justaposição e criou sinais para subtração, igualdade e inversos. Por exemplo, escrevia uma expressão como $x^3 + 13x^2 + 5x$, da seguinte forma: $\boldsymbol{K^y \alpha \Delta^y \iota\gamma\varsigma\varepsilon}$.

Euclides de Alexandria, autor dos *Elementos*, no século III a.C. também tem parte de sua obra dedicada à álgebra. Os Elementos contêm treze livros, dos quais os livros II e V são sobre álgebra. No entanto, como em toda sua matemática, a álgebra euclidiana também é geométrica, e desse modo ele compreende quantidades desconhecidas como figuras geométricas, ou seja, a^2 é um quadrado, a^3 um cubo, ab um retângulo, etc. Assim, os gregos não chegaram nem próximo à forma de álgebra dos tempos atuais, talvez em decorrência do desprezo com o trabalho com números, que era relegado aos escravos, e considerado desonroso para cidadãos livres, além de terem dificuldades na aceitação de certos números, como os negativos e os irracionais, o que revela o extremo rigor dos matemáticos gregos, o que mostra a ação do homem influenciando no desenvolvimento da matemática. Também é devido à própria forma de escrita numérica dos gregos, que era limitada, devido à semelhança com os numerais romanos, o que resultava em dificuldades práticas para o trabalho numérico, mesmo em operações mais simples, o que mostra mais uma vez como a linguagem condiciona nossa formas de pensamento, limitando os gregos antigos, e causando um desenvolvimento ilimitado e veloz depois dos numerais indo-arábicos, para a matemática de modo geral, e da álgebra simbólica, isto é, do uso de letras na álgebra, a partir do século XVI com os avanços de Viète. Uma outra explicação talvez esteja na filosofia, e no modo como os gregos compreendiam o conhecimento. A base filosófica apoiada no realismo, talvez não possibilitou um avanço com relação à álgebra, pois a forma de fazer matemática era muito prática, sendo geométrica, e ainda demonstrada com régua e compasso, assim a falta de uma sistematização de formas ou modelos gerais impossibilitou um avanço no simbolismo algébrico e tenha limitado uma evolução na matemática.

Houve também uma outra álgebra sincopada, assim, como a de Diofanto, que ocorreu com os Hindus entre o século VI e XII, de onde se destacam os matemáticos Brahmagupta e Bhaskara Akaria. Os hindus, assim como Diofanto, indicavam a adição pela justaposição, a subtração colocando-se um ponto sobre o subtraendo, a multiplicação com ***bha*** (de *bhavita*, que significa produto) depois dos fatores, a divisão escrevendo o divisor debaixo do dividendo e a raiz quadrada com ***ka*** (de *karana*, que significa irracional) antes da quantidade. Brahmagupta indica incógnita por ***yā*** (de *yāvattāvat*, que significa tanto quanto), os números negativos por ***rū*** de (*rūpa*, que significa número puro) e uma segunda incógnita era indicada por ***kā*** (*kālaka*, que significa a cor preta), e as demais incógnitas eram representadas pelas iniciais de outras cores. Uma expressão como $8xy + \sqrt{10} - 7$, era escrita ***yā kā 8 bha ka 10 rū̇ 7***. Os indianos passaram a resolver equações por substituição. Isto mostra que tal desenvolvimento de resolução foi avançando para modelos cada vez mais econômicos e eficazes.

No século VIII d.C. surgiu de fato o termo *álgebra*. O nome foi retirado do título do livro *Hisab al-jabr wa-almuqãbalah*, do matemático árabe Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi[28], nascido em Khwarizmi, atual Uzbequistão, a quem também é dado o desenvolvimento dos algarismos indo-arábicos e a notação decimal posicional. O livro foi escrito em Bagdá por volta de 825 d.C. O título do livro pode ser compreendido como “ciência da confrontação (ou restauração, ou reunião) e da redução”, ou “ciência da transposição e do

[28] *Al-Khowarizmi* também escreveu outro livro do qual não tem mais cópia, mas que era sobre o uso dos numerais hindus. Com o tempo o nome do autor do livro passou a ser associado ao modo de calcular, que hoje chamamos de *Algoritmo*, influenciado pelo nome do autor do livro (EVES, 2004).

cancelamento” ou é um livro que trata das operações *al-jabr* e *qabalah*, sendo *al-jabr*, o termo que deu origem ao nome “álgebra”, que tem o significado de “restauração”, enquanto que o termo *qabalah* significa “redução”. A “restauração” faz referência à mudança de haver nos dois membros de uma equação e a “redução” se refere ao cancelamento de termos semelhantes nos dois membros de uma equação. Esse livro deixa muito claro o que é a álgebra ao tratar de equações e fazer referência à ideia de se imaginar uma equação como uma balança em equilíbrio, para comparar com o sistema matemático que busca resolver problemas que envolvam números desconhecidos. Mas o modo de fazer álgebra de Al-Khowarizmi ainda era retórico e as resoluções são de equações do 1º e 2º graus, com alguns casos particulares de graus superiores. Um fato interessante é que como o termo álgebra significava “restauração”, tal termo empregado pelos mouros na Europa, principalmente na Espanha, também adquiriu um outro sentido. Chamavam de algebristas para quem consertava ossos fraturados, que era uma tarefa adicional de muitos barbeiros na época, que ficaram também conhecidos como algebristas.

O simbolismo algébrico foi em princípio se desenvolvendo lentamente. Antes do século XVI quando de fato surge a álgebra simbólica, alguns algebristas usavam *p* e *m* para representar adição e subtração, pois eram as iniciais, respectivamente, de *Plus* (mais) e *Minus* (menos). Robert Recorde foi o primeiro a usar o símbolo = para representar igualdade e o símbolo + para representar adição em 1557. Mesmo matemáticos e cientistas famosos como Kepler, Torricelli, Cavalieri, Pascal, Napier e Fermat ainda usavam principalmente a forma retórica ao invés de símbolos, como no uso de *aeq* ou *aequales* para representar igualdade. Viète usou *aequales* e mais tarde usou ~ e Descartes usava α, talvez numa referência a *aequalis*. Johannes Widman usou os sinais + e – indicando adição e subtração, respectivamente, em 1489. O sinal + era uma referência à palavra latina *et*, que quer dizer “e”. Nicolas Chuquet (século XV) foi o primeiro a usar a notação dos expoentes praticamente da forma como conhecemos hoje. Simon Stevin (século XVI) foi quem primeiramente abordou o conceito de polinômios e o seu uso para a formulação de problemas de resolução de equações.

Somente no século XVI d.C., ou seja, há pouco mais de 400 anos de nosso tempo, que surge na Europa a álgebra simbólica. As notações matemáticas já vinham se desenvolvendo, mas a álgebra alcança o que podemos chamar de álgebra simbólica com o matemático francês François Viète, que introduziu o uso de letras para indicar números desconhecidos e dos símbolos nas operações, da forma como são utilizados até hoje. Destaca-se que Viète desenvolveu a álgebra em si como um sistema simbólico, buscando estudar o comportamento das equações, perceber propriedades, não fazendo relação com o cotidiano, mas no interior da própria matemática, ou seja, não apenas colocou letras para representar números, mas possibilitou um sistema operatório. Ele apresenta suas principais ideias sobre álgebra na obra "Introdução à arte analítica" de 1591. Eves (2004) nos diz que Viète adotou o uso de vogais para representar um valor desconhecido e consoantes para representar os valores conhecidos, as grandezas, fazendo, assim, uma distinção entre o conceito de parâmetro e a ideia de uma quantidade desconhecida. No entanto, pensava-se em *parâmetro* e *incógnita* como segmentos e não como números. Vale informar que Viète não utilizou o termo álgebra, talvez por um preconceito europeu em usar um termo árabe, mas usava o termo *análise*. Viète (1646 *apud* MILIES, 2004, p. 8) explica seu simbolismo da seguinte forma:

> Este trabalho pode ser ajudado por um certo artifício. Magnitudes dadas serão distinguidas das desconhecidas e requeridas por um simbolismo, uniforme e sempre fácil de perceber, como é possível designando as quantidades requeridas pela letra A ou por outras letras vogais A, I, O, V, Y e as dadas pelas letras B, G, D ou outras consonantes.

Desse modo escrevia equação $bx^2 + cx = d$ da seguinte forma: *B in A quadratum + C plano in A aequalia D* solido, que se pode escrever como: BA2 + CA *aequalia* D. Viète escrevia dessa forma, pois pensava geometricamente, por isso os termos, *quadratum, plano* e *solido*. Apesar da diferença que ainda há para os tempos de hoje, essa forma de escrita foi um grande avanço para a época.

O uso de letras para representar números e tratar equações não foi logo aceito. Sendo Descartes quem vem a completar o trabalho de Viète, nesse sentido, ao criar as notações que chegam muito próximas ao que se usa hoje. Descartes aperfeiçoou a álgebra simbólica ao colocar as primeiras letras do alfabeto (a, b, c) para representar quantidades conhecidas e as últimas (x, y, z) para representar as incógnitas.

Baumgart (1992, p.12 e 13) apresenta um histórico do desenvolvimento do simbolismo algébrico a partir do século XVI, como reproduzimos abaixo, com algumas alterações do que foi feito originalmente:

Cardano (1545): *cubus* $\bar{p}$ *rebus aequalis 20*

$$x^3 + 6x = 20$$

Bombelli (1572): $\overset{\underset{\smile}{6}}{\mathrm{I}} \cdot \mathrm{p} \cdot \overset{\underset{\smile}{3}}{8} \cdot$ Eguale à 20

$$x^6 + 8x^3 = 20$$

Viète (1591): *B in A quadratum + C plano in A aequalia D* solido

$$bx^2 + cx = d$$

Harriot (1631): aaa -3bba === +2 · ccc.

$$x^3 - 3b2x = 2c^3$$

Descartes (1637): $x^3 - 6xx + 13x - 10 \alpha 0$

Wallis (1693): $x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$

Viète e Descartes ainda não utilizavam coeficiente negativos, sendo John Hudde o primeiro a fazer isso em 1657, ao utilizar letras para representar coeficientes que podiam ser tanto positivos quanto negativos, e a inclusão de expoentes, além de negativos, também os fracionários, se deve a Isaac Newton. Já havia formas gerais para equações quadráticas, mas não para equações cúbicas e maiores que elas. Scipione del Ferro, resolveu a equação geral do 3.º grau, mas não publicou seu trabalho. Tartaglia também resolveu, mas não publicou, sendo publicado, enfim, por Cardano na sua *Ars Magna*. A equação geral do 4.º grau foi resolvida por Ferrari. Aqui se percebe matemáticos italianos, da época do renascimento, marcando a história da matemática.

Baumgart (1992) destaca que o sistema indo-arábico, a invenção da imprensa e o desenvolvimento do comércio foram fatores que contribuíram para a evolução da álgebra na Europa, tanto que as cidades italianas que eram comercialmente fortes foram o berço de certos avanços na álgebra, também devido ao intercâmbio de ideias favorecido pelo comércio entre a Europa e outros países.

A álgebra não se desenvolve a partir de problemas concretos, talvez isso estivesse mais próximo dos avanços dos logaritmos e trigonometria, mas que se utilizaram dos avanços algébricos ou de uma linguagem simbólica mais econômica. Um dos poucos usos cotidianos que colaboraram no desenvolvimento da álgebra está na matemática financeira que buscou modelos para previsões econômicas e de aplicações financeiras que envolvem juros. Mas até nesse caso há muitos exemplos de problemas formulados como desafios, e não necessariamente problemas reais. Portanto, o avanço da álgebra se deu muito por disputas e desafios intelectuais, isto é, encontrar respostas a determinados problemas, que ocorria desde a Grécia, como a trissecção do ângulo, a quadratura do círculo, e na idade moderna, alguns destes problemas constava de resolver determinadas equações que continham raízes reais quadradas negativas e encontrar formas gerais de resolução de equações de graus maiores que 4, como foi o caso da busca da resolução da equação quíntica.

> Wittgenstein assegura um papel aos pseudo-problemas: eles cumprem uma função em matemática, mesmo que não sejam ‘problemas’ reais. A sua função é apenas direcionar a pesquisa matemática; as conjecturas enquanto

> estímulos ou guias da pesquisa matemática *podem* nos ajudar a ver *novos aspectos* dos sistemas matemáticos em que operamos (ENGELMANN, 2009, 178)

Os quatro exemplos dados anteriormente - a trissecção, a quadratura, a resolução, a forma geral – tiveram suas possibilidades refutadas, mas permitiram grandes avanços na matemática, devido os processos enfrentados por quem intentou encontrar as respostas, e que possibilitou outras formulações. A busca por raízes reais quadradas negativas possibilitou a criação do conjunto dos complexos, como foi o caso de Cardano, que mesmo não aceitando determinados resultados, chamando-os de fictíveis, prosseguiu a resolução. Vale destacar, que nesta época não se aceitavam os números imaginários, e até números negativos ainda eram pouco aceitos, dificuldade que se assemelha à dos gregos com os números irracionais. Euller resolveu usar números imaginários, mas tais números só foram definitivamente aceitos com a representação geométrica proposta por Argand e Gauss. Baumgart (1992) revela que Gauss dizia que a metafísica da raiz quadrada de -1 era difícil, mas que o sucesso dos resultados na matemática fez o mesmo ser aceito.

A busca por formas gerais de resoluções de equações maiores que 4 possibilitou a passagem para o estudo de estruturas algébricas. Por exemplo, Lagrange tentou encontrar uma forma geral para a equação quíntica, na intenção de encontrar para qualquer equação, mas "Embora Lagrange não tenha alcançado seu objetivo principal, sua abordagem do problema fez uso das permutações das raízes da equação, levando-o a descobrir a chave da teoria dos grupos das permutações" (BAUMGART, 1992, 23-24). Abel e Galois, por exemplo, se basearam nas criações de Lagrange. Depois de solucionadas as equações do 4º grau, finaliza-se o desenvolvimento da teoria das equações algébricas, compreendido como a primeira fase da álgebra. De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009, p. 7), dois fatores contribuíram para isso: 1) a prova da impossibilidade de encontrar uma solução geral para uma equação com coeficientes arbitrários de grau superior ao 4º, dada por Abel e 2) a formulação das condições necessárias e suficientes para que uma equação de grau superior ao 4º tenha solução por métodos algébricos, dada por Galois. Abel e Galois são ambos do início do século XIX.

A partir desse desenvolvimento linguístico da álgebra, a matemática avançou, talvez como nunca se fez antes. Ela avançou sobre si mesma. Como diz Devlin (2004, p. 11) que defende que "sem os símbolos algébricos, uma grande parte da matemática simplesmente não existiria". Compreendemos que o desenvolvimento filosófico de modo geral também possibilitou esse desenvolvimento na matemática, pois consideramos que um pensamento mais dedutivo baseado no idealismo cartesiano permitiu uma aceitação maior da abstração algébrica.

O trabalho de Descartes foi um dos propoulsores dessa álgebra, que começa a se desenvolver ainda mais, com estudo sobre equações não-algébricas e as equações diferenciais, relacionadas então com as funções. O mundo avançou a partir do desenvolvimento da álgebra, como entende Pierobon (2003, p. 200) ao dizer que "Embora seja verdade que a revolução científica e industrial reformulou radicalmente o universo de nossa vida cotidiana, trata-se do epifenômeno de uma mutação profunda cuja 'revolução algébrica' é um outro epifenômeno do mesmo nível"[29].

É importante destacar que enquanto as equações algébricas foram se desenvolvendo, paralelamente também foi o conceito de função, com as funções polinomiais, ou seja, diretamente relacionadas às equações algébricas, e depois envolvendo outros campos, como os logaritmos e a trigonometria, assim como a relação com a geometria, com o desenvolvimento da geometria analítica e do cálculo diferencial e integral. De acordo com Eves (2004), Galileu Galilei, Descartes, Newton e Leibniz colaboraram para a progresso do conceito de função. Galileu utilizou em suas experiências relações funcionais e as expressou em palavras e em linguagem de proporção; Descartes instituiu a relação de dependência entre quantidades variáveis; Newton e Leibniz introduziram as palavras constante, variável e função; foi Newton o primeiro a utilizar o termo função.

No século XIX Gauss demonstra finalmente o teorema fundamental[30] da álgebra, que estabeleceu a criação do conjunto dos complexos, que se deu a partir da evolução dos estudos das equações. "Na verdade, a 'prova do teorema fundamental da álgebra' constrói um novo tipo de número" (GF, II, §23). Os números complexos foram criados e aceitos, por ser um sistema, em que suas operações não entram em contradição. Considerando os reais de fato as raízes não existiriam – como não existia para Kant, por exemplo - e o teorema fundamental seria falho. Não estamos com isso querendo diminuir os progressos matemáticos, como se fossem simples invenções – a invenção do avião não é uma simples invenção – mas são engenhosas e brilhantes criações de verdadeiros gênios, mas que devem ser compreendidos como produtores de soluções e não de descobridores de verdades eternas.

---

[29] "S'il est vrai que là révolution scientifique et industrielle a radicalement refaçonné l'univers de notre vie quotidienne, il s'agit là de l'épiphénomène d'une mutation profonde dont la 'revolution algébrique' est um autre épiphénomène de même rang"

[30] O teorema fundamental da álgebra afirma que toda equação de grau *n* tem *n* raízes. Parece ter sido pensado primeiramente por Viète, mas foi de fato proposto por Albert Girard (1595-1632), em 1629, num livro intitulado *Invention nouvelle en l'Algèbre*. Teve diversas propostas de demonstração por matemáticos famosos como Leibniz (1646-1716), Euler (1707-1783), D'Alembert (1717-1783) e Lagrange (1736-1813). Todas elas foram refutadas. A demonstração final também foi realizada por Argand (1768-1822), mas a demonstração mais aceita (ou mais famosa) é de Gauss, que definiu que qualquer polinômio p(z) com coeficientes complexos de uma variável e de grau $n \geq 1$ tem alguma raiz complexa, o que leva a dizer que a equação $p(z) = 0$ tem n soluções.

Para Wittgenstein as proposições matemáticas não são descobertas, são convenções, são criações humanas. Os usuários da matemática se apropriam destas proposições no uso que fazem delas e então as regras são postas em prática. Ao mesmo tempo que o filósofo afirma que a matemática se fundamenta nas práticas humanas, Wittgenstein estabelece diferenças entre a matemática e suas aplicações, já que esta disciplina constitui um campo próprio, autônomo e independente. O filósofo também derruba a tese de que haveria um pano de fundo comum (essencialismo) escondido por trás de todos os conhecimentos. De acordo com Frascolla (2004), para Wittgenstein, a tarefa principal de preencher o buraco deixado pelo fim desta tese é confiado ao acordo quase unânime entre os membros da comunidade ligados pelas inclinações partilhadas e um treino uniforme. Portanto, a partir do acordo de uma sociedade quanto ao que deve ser considerado com sentido ou não, o treino dará às gerações posteriores a continuidade e desenvolvimento, a partir da gramática definida, como o que tem sentido ou não. Frascolla (2004), apoiado em Wittgenstein, afirma que os matemáticos não são descobridores de verdades eternas concernentes a um domínio de entidades situadas fora do espaço e do tempo, mas são inventores de novas significações para nossas expressões, inventores de novas regiões da estrutura conceitual por trás da linguagem da comunidade. A construção dessas estruturas não tem outro fundamento que o acordo da comunidade para atribuir um papel paradigmático às configurações dos signos construídos pelos matemáticos. Schmitz (1988) compreende que um cálculo pode ser apenas um jogo que nada no mundo pode justificar, que um jogo pode ser apenas inventado, pois não tem nenhuma realidade antecipadamente dada, ou seja, a justificativa do cálculo seria dada pela sociedade, o que deixa de ser justificativa, mas sim aplicação. O autor considera que a metáfora do jogo tem o mérito de destacar que poderíamos talvez compreender o que é do cálculo matemático sem recurso a metafísicas perigosas e pouco seguras. Ao tratar da aritmética Wittgenstein nos diz que:

> Temos sempre aversão a dar à aritmética um fundamento, dizendo algo a respeito de sua aplicação. Ela parece firmemente fundamentada em si mesma. E isso, naturalmente, deriva do fato de que a aritmética é sua própria aplicação (GF, §15, p. 15).

As construções da aritmética são autônomas e garantem sua aplicabilidade. Se da aritmética se pode dizer isso, muito mais da álgebra, que como temos visto tem um desenvolvimento ainda mais desligado de uma realidade concreta direta. A matemática se desenvolve por necessidades lógicas, que surgem no interior da linguagem matemática, para que esta continue coerente com o próprio sistema de regras e convenções que gerou. Por isso, o movimento desse campo é autônomo, autorregulado e dessa forma se torna independente.

Quando falamos da criação dos complexos nos remetemos ao próprio desenvolvimento dos conjuntos numéricos. Inicialmente o homem teve a necessidade social de contar, posteriormente desenvolveu símbolos para representar quantidades e então criou o conjunto dos números inteiros porque antes havia criado o conjunto dos números naturais. A criação dos números inteiros surge de uma necessidade criada a partir da existência dos naturais, ou seja, criamos outros conjuntos por necessidades conceituais e teóricas. Pode-se pensar claramente em adições de quaisquer números naturais, mas subtrações, apenas de naturais maiores por menores e não o contrário. Mas a ideia de subtrair um número natural menor por um maior precisava de um novo sistema que abarcasse tal possibilidade e sua sistematização só foi possibilitada pela criação de um novo conjunto e principalmente da aceitação de tal, pois como já vimos, os números negativos foram rejeitados por algum tempo. Assim como a ideia de fração e o problema posterior dos incomensuráveis, que deu origem aos números irracionais e ao problema de raízes de índice par de números negativos, que originou os números complexos. Por isso, concordamos com Moreno (2003, p. 125) que "as novas regras gramaticais irão recuperar toda necessidade e evidência perdidas ao substituírem as velhas gramáticas, de tal maneira que sua autonomia e independência sempre estarão presentes com as novas ideias de necessidade e evidência". Sobre a criação dos complexos Granger (2002, p. 53) revela que:

> O encontro do irracional como obstáculo e a história de sua resolução, com efeito, são particularmente significativos no caso dos números chamados "imaginários". De início denominados "impossíveis", eles se apresentam como resultados de operações algébricas, impossíveis com efeito segundo as regras anteriormente admitidas da álgebra, (...) Progressivamente, regras específicas de manipulação são implícita ou explicitamente introduzidas, e tentativas de interpretação desses novos objetos se sucedem com êxitos diversos. Eles só são definitiva e oficialmente integrados no século XIX – por Gauss – num universo de novos números chamados "complexos".

Os complexos eram entidades que ainda não existiam na linguagem matemática. Nesse sentido, abordando a integração de novas entidades à linguagem, Moreno (2003, p. 118) nos diz que:

> Se tais entidades não puderem sequer ser consideradas como casos-limite, mas, como casos imprevistos para os quais não temos conceitos, será preciso que novas formas de vida venham a integrá-las à linguagem criando conceitos novos, introduzindo critérios para sua identificação, ou melhor, construindo novos sentidos de objetos. A criação de novos usos e de novos conceitos não será uma função das entidades, mas das formas de vida, de suas convenções.

Moreno (2005), a partir da noção de arbitrariedade da gramática, e do seu aspecto de atividade simbólica, conclui que esta não depende de causas extra simbólicas, sendo, portanto autônoma. *A partir de sua formação, o objeto simbólico ganha vida própria.* Por exemplo, objetos geométricos euclidianos nasceram na Grécia antiga, mas tiveram aplicações em outros contextos sociais e épocas, por que os símbolos ganham um aspecto linguístico e conceitual, que é explorado em processos pragmáticos, que instauram e esclarecem regras de aplicação. Tal aspecto linguístico e conceitual é a gramática dos usos das palavras, ou seja, os símbolos ganham significado devido ao seu uso e o seu uso passa a definir o seu significado, e assim passa-se a usar os símbolos para explicar fatos do mundo, como no caso dos objetos geométricos euclidianos. Tais objetos foram retirados e arbitrariamente definidos a partir de percepções da realidade e se passou a usar esses objetos para perceber o mundo a nossa volta (retas, círculos, quadrados etc.), mas estes objetos não existem de fato, enxergamo-os a partir do que a linguagem – os símbolos – nos faz/permite enxergar.

Castañeda (2002, p. 64) entende que "É possível ampliar o conceito de 'arbitrariedade' referente às regras da linguagem extendendo-lhe para sua relação frente a qualquer realidade"[31], o que significa que assim como posso dizer que as regras, por serem arbitrárias (não terem sido forjadas da realidade) não se referem a nenhuma realidade, posso dizer então que elas podem se referir a qualquer uma. Por exemplo, a álgebra, seria algo que eu poderia relacionar a qualquer realidade.

Para compreender esta questão, e até afastar de qualquer aproximação ao estruturalismo, Moreno (2005) nos oferece um exemplo: compare a *descrição estrutural de um quadro épico* com a *descrição gramatical da expressão épica do quadro*. No primeiro caso, há relações entre cores, volumes e linhas que exprimem o sentido do quadro e no segundo é um sentido convencional que permite organizar os materiais do quadro e que o tornam significativo, ou seja, a descrição gramatical mostra como vemos e usamos as palavras. A descrição não está no fato em si, mas na gramática, pois, é ela que decide como veremos e usaremos as palavras, isto é, como pensaremos sobre determinada situação. Assim nos conduzimos à ideia de que a compreensão do sentido é obtida no interior do próprio simbolismo, devido a sua autonomia e arbitrariedade (MORENO, 2005). Moreno (2005) adverte que a terapia, mesmo quando destaca o aspecto simbólico, nega a superioridade do pensamento formal, ainda que tal seja um dos produtos mais bem acabados das construções humanas, o mesmo deve ser situado na linguagem ordinária. A descrição gramatical nos leva a entender que as ligações internas presentes nos

---

[31] "Es posible ampliar el concepto de 'arbitrariedad' referido a las reglas de lenguaje extendiéndolo a su relación frente a cualquier realidade".

jogos de linguagens formais são tão arbitrárias e autônomas quanto aos presentes nos jogos de linguagens não-formalizáveis (MORENO, 2005). Portanto, mesmo tendo alguma relação com a empiria, ou seja, razões empíricas, não há, no entanto, fundamentos empíricos (GOTTSCHALK, 2004a, 2013a, 2014) -, são elementos linguísticos, que sendo assim entendidos perdem a necessidade de justificativas externas à linguagem. A álgebra, ao contrário da geometria e aritmética, parece ainda mais afastada, ainda que aquela seja considerada generalização destas, no momento em que se tornou linguagem, ganha uma autonomia, e os campos de aplicação podem se ampliar, de acordo com as necessidades e convenções. Depois de se entrar em consenso, se pode em uma ou outra situação encontrar alguma aplicação prática para empregar os números complexos. Enfim, a matemática responde a questões empíricas, mas não é dependente delas.

> A história social da matemática se distingue de outra história, digamos, *transcendental* da matemática, história das renovadas condições de possibilidade dos conceitos. Estas condições são de natureza convencional que até podem ser eventualmente alteradas a partir de razões empíricas, como interesses sociais ou políticos; o que leva, todavia, a estas modificações, são obstáculos de natureza epistemológica, ou seja, são razões *internas* a este conhecimento que obrigam os matemáticos a reverem determinados postulados, axiomas ou procedimentos (GOTTSCHALK, 2009a, p. 10).

Gottschalk (2009a, p. 12-13) oferece o exemplo da resolução do problema da continuidade da reta que foi abordado simultaneamente por Dedekind e Cantor, que a autora define como “qualquer que seja o corte de uma reta em duas partes, existe sempre um ponto da reta que separa as duas partes”. Esse grande avanço do conhecimento matemático não foi baseado em nenhuma demonstração, mas apenas se sugeriu outro modo de ver a continuidade da reta. Não há como justificar à exaustão os conceitos matemáticos, pois, por serem convencionais, não têm um fundamento último, que não seja definido como arbitrário, relacionada às nossas formas de vida. “[...] o matemático também convive com paradoxos e contradições que o obrigam a *inventar* novos objetos e a formular novas teorias matemáticas, abrindo, assim, novos campos de investigação, e *criando* novas condições de sentido para organizar o mundo empírico”

Após a revolução causada pelos complexos, é criada a teoria dos Grupos por Galois e a álgebra avança tendo como objeto principal as estruturas algébricas abstratas, com a teoria dos corpos e a teoria dos anéis. A partir de então, “novas álgebras” surgiram, como a de Peacock, que buscou esclarecer os fundamentos da álgebra, onde tentou axiomatizá-la, do mesmo modo que a geometria nos Elementos de Euclides. Peacock percebeu que um cálculo formal poderia ser realizado sem considerar a natureza dos entes com os quais se trabalha, sendo suficiente preocupar-se com as operações entre estes, conforme regras prefixadas (MILIES, 2004). De Morgan contribuiu para o desenvolvimento da álgebra abstrata, mas ainda utilizando axiomas abstraídos da aritmética. Foi Hamilton que procedeu ao desenvolvimento da álgebra, independente da experiência aritmética. Hamilton utilizou o termo "vetor" no sentido algébrico moderno e criou os quaternários, quarterniões ou quaternions, que é um sistema de números complexos de quatro unidades, que foi essencial para o desenvolvimento da mecânica quântica. Essa criação de acordo Boyer (1996) demonstrou a ampla liberdade que há na matemática em se construir álgebras que não precisam satisfazer às restrições impostas pelas ditas "leis fundamentais". Cayley desenvolveu o estudo da álgebra das matrizes. A álgebra invade definitivamente o campo científico da lógica com Boole, que hoje é conhecida como álgebra booleana ou álgebra dos conjuntos, que colaborou no desenvolvimento da computação moderna, e se aplica ainda em probabilidades, teoria da informação, análise, problemas de seguros, etc. (MILIES, 2004). É interessante que o matemático Grassmann criou uma teoria até mais geral que a de Hamilton, mas que não foi tão divulgada ou aceita pela comunidade matemática, e só foi ser reconhecida no uso que Einstein fez dela na Teoria da Relatividade. Isto demonstra a liberdade de criação, onde o que prevalece é o consenso. Ao se derrubar alguns axiomas, como que AB = BA, como fez Hamilton, muitos sistemas passaram ser permitidos, onde os mesmos devem ser correntes no sistema em si, e assim, "Nas concepções modernas da matemática, empregam-se definições com o objetivo de aumentar o poder dedutivo dos sistemas. Podemos ter várias definições, todas igualmente legítimas, contanto que preservem a verdade dos teoremas e a falsidade das sentenças falsas" (GOTTSCHALK, 2002, p. 47).

Fazendo uma comparação com a derrubada da universalidade da geometria euclidiana, é como se passássemos a ter *álgebras não-euclidianas* ou seria *não-diofantinas* ou *não-vietianas*. Nesse sentido vale destacar que a álgebra, diferentemente da geometria não partiu de axiomas pré-estabelecidos em sua construção histórica, mas sim, como temos visto, a álgebra se deu por manipulações simbólicas em si mesmas. Os axiomas vieram a ser formulados *a posteriori*. Eves (2004) revela que já foram estudas mais de duas centenas de estruturas algébricas. E tais não partem da realidade, mas podem ser usadas para colaborar em outras ciências, como na Física, como em alguns exemplos já dados, genética, sociologia, estatística, engenharia e na lógica computacional, como é o caso da álgebra booleana, bem como, colaboram também com a própria matemática, como os quaternions de Hamilton, que permitiram um desenvolvimento interno da matemática.

No século XX surge Nicolas Bourbaki que é o pseudônimo de um grupo de matemáticos, a maioria franceses, que teve entre outros membros, os matemáticos Dieudonné e Weil. Esse grupo buscou axiomatizar as diversas teorias matemáticas por meio da Teoria dos Conjuntos, teoria que já havia sido axiomatizada pelo grupo. Ele foi extremamente influenciado por matemáticos alemães, como Hilbert, Artin e a matemática Emmy Noether. Foi o grupo Bourbaki que difundiu a ideia de estrutura na matemática, que eles compreendem como "uma classe particular de definições de objetos abstratos, tendo em mente que estes objetos têm um certo número de propriedades características, que poderiam ser eventualmente exibidas" (DUARTE, 2007, p. 72). Bourbaki popularizou notações que se usa atualmente como $\cap$, $\cup$ e φ e o uso da letra Q para designar o conjunto dos números racionais. Dieudonné se envolveu com a questão do ensino de matemática na França e foi um dos que influenciaram o movimento da matemática moderna. Influenciado pelo grupo Bourbaki e seu estudo primordialmente algébrico influenciou um movimento educacional que, como diz Duarte (2007), se espalhou por toda Europa, EUA e alcançou o Brasil. A este assunto voltaremos no próximo tópico. Foi o grupo Bourbaki que trouxe o formalismo - corrente da filosofia da matemática abordada neste trabalho no capítulo anterior -, para a educação matemática.

Esse modo de fazer álgebra que surgiu a partir do século XVII é tão diferente e avançado que alguns consideram ser uma nova álgebra, como defende Baumgart (1992) que divide a álgebra em duas fases. O desenvolvimento da álgebra dado a partir do estudo sobre equações, também originou a criação e o estudo de novos conjuntos numéricos, pois mesmo o desenvolvimento da álgebra abstrata dos últimos dois séculos só foi possível devido os desenvolvimentos e caracterização das propriedades existentes nas equações algébricas. O próprio conceito de função nasce a partir das equações algébricas, sendo as primeiras funções, as polinomiais. Mas em seu *automovimento* a matemática deu possibilidades cada vez mais amplas, sendo a causa principal a formulação de uma linguagem simbólica que permitiu se estudar a álgebra como uma linguagem. Hoje a álgebra é considerada um ramo da matemática juntamente com a aritmética, geometria, topologia e análise, e considera-se que a álgebra estuda as equações, as estruturas algébricas - que na sua versão mais simples se traduzem nas expressões algébricas, com o estudo dos polinômios -, e as funções.

No *Big Typescript*, Wittgenstein, coloca as regras como em catálogos, e diz que há duas maneiras de vermos tal, ou como um catálogo de regras determinado, como é o caso das regras do jogo de xadrez, ou como catálogo variável de regras, como a álgebra, que é um substrato de um processo histórico. Na visão essencialista, a matemática seria completa, e necessitaria ter suas partes descobertas, ou seja, ela seria extensionalista, pois se estenderia, a partir das novas descobertas, no entanto, Wittgenstein a toma como *intensionalista*, e não compreende o desenvolvimento matemático como um processo, mas como a passagem de um sistema matemático a outro, e assim, cada sistema é em si mesmo completo e distinto dos sistemas anteriores, onde ao introduzirmos novas regras, mudamos o significado de antigos sinais. Mas se as regras são arbitrárias e, portanto, não há justificativas, então, como se pode pensar em mudança ou transformação da linguagem nesse sentido? Castañeda (2002) compreende que há linguagens que permitem como parte de suas regras a introdução de novas, ou que devido a complexidades, permitem o que ele chama de "esclarecimentos gramaticais", que surgem no uso. Isso nos remete à matemática e suas necessidades internas, e nos permite aprofundar ainda mais sobre a possibilidade de mudança na linguagem, mesmo considerando esta arbitrária. A aritmética já dizia tudo o que tinha a dizer, não se mudou para tentar melhorar tal sistema, se criou novos sistemas, sob novos axiomas, e que não pode se alterar por si mesma, mas depende da ação dos usuários de tal linguagem.

Por isso concordamos com Granger (2013), para quem as regras de cálculo são reguladoras, diferente das regras de formação, que são estruturais. Este autor entende que os sistemas simbólicos nas ciências exatas, por exemplo, podem ser compreendidos tanto como meio de comunicação do pensamento quanto aspecto essencial do próprio pensamento, sendo tanto instrumentos quanto o próprio conteúdo. Como a matemática é um sistema simbólico ela não é apenas um instrumento, uma linguagem de referência, mas é um conteúdo em si e assim ela tem "vida própria", ou seja, é autônoma. Granger (2013) defende que a matemática necessita de um simbolismo formal para o seu desenvolvimento, não só por ser indispensável na sua prática, como também condição de progresso e isso pode ser exemplificado com a história dos números e do cálculo diferencial e integral. Para o autor há uma linguagem da matemática, mas a matemática não se reduz a uma linguagem, porém pode ser usada como uma linguagem por outras ciências. Nesse sentido, a matemática não trata de comunicação, mas de expressão, e desse modo ela não é apenas uma referência a um determinado conhecimento, do qual serviria como mero meio de comunicação, mas pode ser entendida como criadora em símbolos de objetos de pensamento, ou seja, é a expressão para as estruturas que são propostas como modelos abstratos dos fenômenos.

Granger (2013), baseado em Husserl, nos apresenta uma diferença entre a generalização e a formalização. A primeira constrói noções tiradas da experiência e a segunda propõe conceitos que podem ser inspirados na experiência e que lhe seriam eventualmente aplicáveis, mas que não são tirados dela por uma indução. Para o autor o trabalho de conceituação se manifesta pelo desenvolvimento e pela manipulação de sistemas simbólicos que realizam a correlação efetiva de uma matéria e de uma forma, que é a dualidade operação/objeto. Essa dualidade é a relação de correspondência entre dois registros de entidades de pensamento. Assim, para o autor, qualquer pensamento que se desdobra em um sistema simbólico e visa descrever um “mundo” repousa sobre a dualidade entre um sistema de objetos e um sistema de operações e essa dualidade é o que torna possível qualquer pensamento simbólico, onde os símbolos deixam de ser apenas impressões, mas colaboram na construção de uma combinatória.

Nesse sentido, Granger (2013) argumenta que signos têm função de representação que torna possível manipulações dentro de sistemas, e claro, assim eles só têm sentido dentro de respectivos sistemas. Para o autor, apenas merecerá o nome de lógica o cálculo das proposições, para o qual a perfeita adequação do operativo e do objetal se manifesta pelas metapropriedades de não contradição, de completude e de solvibilidade. É aqui que para Granger (2013) começa a matemática com seus objetos específicos, pois são novas relações que se instituem com o simbolismo, pelo fato de aparecerem conteúdos de objetos, conteúdos formais ou conteúdos empíricos.

A partir destas observações de Granger (2013), percebemos que a matemática assume uma posição de sistema simbólico formal por excelência, o ápice do desenvolvimento. Nesse caso, ela não é um fundamento, o *a priori*, no sentido metafísico, mas pode ser considerada como no sentido de um *a priori* linguístico. O desenvolvimento da matemática nos últimos dois séculos se deu principalmente pelo desenvolvimento da álgebra, ou melhor, do simbolismo algébrico, e nesse sentido os pensamentos em torno da linguagem como fonte de conhecimento colaboraram nesse sentido.

O simbolismo algébrico mais evoluído permitiu uma evolução exponencial no tratamento dos diversos assuntos matemáticos, entre eles, a própria teoria dos números e, particularmente, a teoria dos conjuntos, criada pelo matemático russo Georg Cantor, que apresenta sua teoria em um artigo de 1874 chamado *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen* (A respeito de uma propriedade característica de todos os números algébricos reais). Essa teoria busca estudar, entre outras questões, a questão do infinito e sua relação com os conjuntos numéricos, e para a possibilidade de tal estudo, o desenvolvimento do simbolismo algébrico foi preponderante. Freiria (1992, p. 72) nos informa que a Teoria dos conjuntos de Cantor:

> [...] revelou-se muito adequada para ser o fundamento de toda a matemática. Além disso, com o surgimento de novas disciplinas matemáticas, como a Topologia, a Álgebra Abstrata, a teoria da Medida e Integração, a teoria da Probabilidade, a Análise Funcional, entrelaçadas e

> de fronteiras indistinguíveis, onde a linguagem, a notação e os resultados da teoria dos conjuntos se revelaram instrumento natural de trabalho.

Vechio Jr (2010, p. 10) então conclui que

> A partir da definição de seus conceitos básicos, como os de elemento e de conjunto, Cantor não faz mais que definir rigorosamente o significado e o alcance de ideias que sempre nortearam todas as operações da aritmética e da álgebra, mesmo que implicitamente, mas enfrentando o desafio que consiste em por às claras o conceito formal de infinito matemático.

A teoria dos conjuntos no fim do século XIX trouxe à tona uma discussão sobre os fundamentos da matemática, que se deu, não só pelos paradoxos apontados na teoria de Cantor, como também na própria evolução que a matemática havia tido nas últimas décadas, que havia ocasionado também a criação e fundamentação matemática, principalmente por vias da álgebra, de geometrias não-euclidianas, assim como o esforço de Lagrange e Cauchy de tornar mais rigorosa a matemática, com relação às suas demonstrações, rejeitando o papel da intuição, como se vê na aritmetização da análise. Silva (2007), por exemplo, relaciona todo esse processo com a álgebra dos árabes que chegou na Europa na Idade Média, que levou a um formalismo cada vez maior na matemática.

Os matemáticos começaram a se perguntar sobre conceitos básicos na matemática, como números, figuras geométricas e funções, e como estes se desenvolvem para estruturas mais complexas, que era apresentada por fórmulas generalistas. É nesse contexto que se desenvolvem as correntes filosóficas da matemática: logicismo, formalismo e intuicionismo. O logicismo buscando justificar toda a matemática na lógica, fundamentando a matemática, então, em princípios lógicos; o formalismo enfatizando a forma sobre o conteúdo, fundamentando a matemática em sua própria estrutura sintática; e o intuicionismo enfatizando a intuição humana, fundamentando a matemática nesta. E como vimos, Wittgenstein produz sua filosofia neste contexto, tanto que tem sua primeira obra, ligada à filosofia analítica, o *Tractatus*, relacionado ao logicismo. O logicismo foi um dos precursores da filosofia analítica, que buscou se desenvolver a partir de estudos sobre os fundamentos da matemática, que agora não poderiam mais ser fundamentados na filosofia kantiana, sendo que a teoria dos conjuntos limita a explicação de intuição pura do tempo para a compreensão aritmética, e as geometrias não-euclidianas, o fazem com relação a intuição do espaço para a compreensão geométrica, nos dois casos alicerçadas no desenvolvimento do simbolismo algébrico.

Os filósofos analíticos parecem não ver mais razões nas justificações kantianas, e se voltam assim para explicações semânticas, que só poderiam ser dadas na linguagem. Mas não se pode criticar Kant completamente, pois o mesmo ainda está em um tempo em que alguns desenvolvimentos da matemática ainda não haviam sido feitos ou aceitos definitivamente. Desse modo, é a partir de uma fundamentação largamente aceita da formalização algébrica que algumas críticas são feitas a Kant, que não teve acesso a isso, e assim, é este simbolismo algébrico que permite o logicismo se afastar da lógica tradicional, e ampliá-la como uma fundamentação da matemática e do mundo como um todo. Portanto, o formalismo algébrico seria a própria formulação das leis do pensamento, pois este seria a representação mais evoluída do pensamento abstrato humano. Tanto é que vemos nos desenvolvimentos logicistas de Frege, Russell, Whitehead, Peirce, Giuseppe Peano, Ernst Schröder essa relação intrínseca entre a lógica e álgebra, como algo similar, ou mesmo, em correspondência direta entre si e com o pensamento humano. Desse modo há uma relação vista entre a lógica e a matemática, em particular a álgebra, como revela Batista Neto (2015, p. 185).

> A matematização da lógica se apresenta nesse contexto, paradoxalmente, como instrumento da tese logicista, que pretende reduzir a matemática à lógica. Nem sempre se trata somente da construção de uma "lógica simbólica", cujas operações são definidas de modo análogo às das teorias matemáticas, mas frequentemente do emprego de recursos matemáticos na própria lógica.

Desse modo, a lógica apoiada na fundamentação algébrica assume uma posição universal. Wittgenstein de certa forma colabora com isso ao atribuir às equações matemáticas a noção de verdades incontestáveis, devido estar fundamentada em uma lógica formal, no *Tractatus*, fundamento que mudará nas *Investigações*, quando continuará a entender que as proposições matemáticas como independentes do mundo, mas no sentido de serem normativas, ou seja, serem proposições gramaticais. E como já mostramos o *Tractatus* de Wittgenstein influenciou o empirismo lógico do Círculo de Viena, que buscou justificar a ciência como um todo com uma linguagem ideal, que estaria baseada na lógica.

Essa relação entre lógica e álgebra parece ser indubitável para muitas pessoas, principalmente matemáticos e professores de matemática. Talvez isso leve alguns a pensarem que o logicismo de Frege e Russel está muito próximo do realismo platônico, como dissemos no primeiro capítulo, tanto que percebermos nos matemáticos certo platonismo, como se a matemática fosse uma verdade indubitável. Desse modo, a matemática parece ser uma realidade metafísica, como se estivesse em uma espécie de abstração pura, que foi ratificada pela álgebra nestes últimos séculos.

A relação entre lógica e matemática sofre um golpe com os teoremas de Gödel em 1930. Mas a lógica voltou a ser relacionada com a álgebra com o matemático polonês Alfred Tarski no século XX e o seu projeto de uma semântica científica baseada em estruturas abstratas "semiformalizadas" que introduziram uma dimensão interpretativa às teorias lógicas e que prepararam o terreno para a teoria de modelos[32], que hoje é uma das áreas centrais dos estudos sobre lógica. De acordo com Batista Neto (2015), com os trabalhos de Gödel e Tarski se desenvolveu uma distinção cada vez maior entre teoria e metateoria em lógica, e desse modo, a noção de uma lógica como fundamentação única começou a ser questionada, e a surgir diversas teorias, distintas e não equivalentes, e começou, então, a crescer a ideia da existência de um pluralismo de lógicas, dentro da própria matemática.

> A partir do final da década de 1920 e dos primeiros anos da de 1930, com os trabalhos de Glivenko, Gödel, Gentzen e Kolmogorov, já se realizavam as traduções entre diversos sistemas lógicos (com alguns resultados surpreendentes, como a inter-traduzibilidade entre as lógicas clássica e intuicionista, com preservação de teoremas em ambas as direções). (BATISTA NETO, 2015, p. 188)

Parece, então, que a lógica atinge um estágio pós-moderno na primeira metade do século XX, e a própria concepção original do logicismo, de uma linguagem ideal, perde seu protagonismo dentro da filosofia em geral, assumindo então uma versão mais voltada para o pragmatismo, como em Carnap e Quine, aquele vendo na lógica, mesmo que relativa, uma função instrumental, e este, buscando justificar a lógica clássica em termos pragmáticos (BATISTA NETO, 2015). Mas na segunda metade do século XX a preocupação com a linguagem se voltou para análise da linguagem ordinária com o segundo Wittgenstein e os filósofos de Oxford, Ryle e Austin, e mais recentemente com o também britânico Grice, além do americano Searle. Eles perceberam que linguagens ideais ou a busca de tais baseadas em uma lógica, da qual já não se tinha mais noção exata do que era, não poderia oferecer os fundamentos para uma análise linguística, e passaram a compreender que tal possibilidade só podia se encontrar no uso comum da linguagem. Esta visão mais pragmática pode favorecer um estudo sobre o ensino de álgebra na atualidade, distanciada da noção logicista, realista e idealista dada à álgebra.

No entanto, Batista Neto (2015) mostra que os últimos desenvolvimentos, com Grice e Searle, tem feito tais estudos pragmáticos da linguagem retornarem para a busca de representações mentais e a preocupação com a mente, discussão que tem se apoiado no desenvolvimento da neurociência e da inteligência artificial, onde se volta a querer se perceber uma lógica *a priori* determinando nossas formas de pensar, tendo os Estados Unidos como lugar

---

[32] "A teoria dos modelos é precisamente o ramo da lógica matemática que estuda em geral as relações entre as noções sintáticas (linguagem, teoria, dedução, ...) e as noções semânticas (estrutura, verdade, consequência)" (SHAPIRO, 2015, p. 88). Conferir SHAPIRO, Stewart. **Filosofia da matemática**. Tradução e notas de Augusto J. Franco de Oliveira. Lisboa: edições 70, 2015.

de maior desenvolvimento dessas concepções, talvez devido à cultura científica apoiada no pragmatismo e behaviorismo americanos, quando, então, vemos a evolução de um *pragmatismo lógico* ou *pós-pragmatismo* com Quine e Davidson, numa espécie de repetição histórica do que já aconteceu no início do século XX, quando na tentativa de se reinventar o empirismo, sobre outros moldes, criou-se o *empirismo lógico*. Concordamos com o pragmatismo, não nos baseamos, no entanto, nos rumos citados neste parágrafo, pois escolhemos os estudos de Wittgenstein e seu desenvolvimento com a epistemologia do uso.

3.2 O ensino de álgebra

Compreendemos muitas coisas hoje por meio de fórmulas, que se desenvolveram devido o aspecto lógico percebido na matemática, e apresentado pelas expressões algébricas. A álgebra representa o mundo falado a partir de outros símbolos. Muitos compreendem a álgebra como uma metamatemática. A álgebra se desenvolveu como uma particularidade na matemática, mas que ao mesmo tempo possibilitou um desenvolvimento de todo o restante desta, por se tratar de uma linguagem que permite uma abstração maior ainda, onde símbolos tratam de referentes matemáticos como os números e certos conceitos, como incógnita e variável, e apresentando uma sintaxe própria, isto é, uma forma de manipular os símbolos que deve seguir determinadas regras, o que leva seu usuário a ter que dominar certas técnicas de uma nova linguagem.

Os conteúdos de álgebra são geralmente considerados obstáculos na educação, dada essa especificidade, por envolver outras maneiras de ver e operar as relações e os objetos matemáticos, pois diferentemente da aritmética, a álgebra não é estática, nem atemporal, já que possui um caráter dinâmico, ao serem introduzidos conceitos que variam no espaço e no tempo, como os conceitos de variável e incógnita. Como trabalhar com conceitos que em si são variáveis e/ou desconhecidos, a princípio? É bastante complicado relacionar diretamente a álgebra com questões empíricas ou até mesmo com outras áreas da matemática, como aritmética e geometria. É um conteúdo que geralmente causa estranheza no primeiro contato, devido ao aluno estar acostumado com uma matemática que só tem números. As dificuldades específicas e intrínsecas à álgebra se mostram quando os PCN nos resultados do SAEB, mostram que “os itens referentes à álgebra raramente atingem o índice de 40% de acerto em muitas regiões do país” (BRASL, 1998).

A álgebra pode ser vista como uma generalização da aritmética, como uma manipulação de símbolos (cálculo literal), como um estudo sobre a manipulação formal etc., mas o que de fato ela é? Será que a reduzir a uma generalização da aritmética não causa problemas para a aprendizagem? Será a aritmética tão necessária à álgebra, ou esta pode “andar com suas próprias pernas”? Ou: seria possível aprender álgebra sem fazer referência à aritmética ou à geometria ou a outra área da matemática ou até a algo externo a ela, como na empiria? A álgebra não seria apenas uma linguagem formal a ser transmitida? Até que ponto é problemático ensiná-la como uma manipulação de símbolos? Mas não seria toda a matemática assim? Ou o melhor seria ensinar os significados por trás dos símbolos e processos sintáticos, isto é, os conceitos de variável, incógnita etc.? A álgebra não seria a representação de significados? Ou seria apenas um outro tipo de linguagem formal? Será que um aluno pode compreender, sem ter estudado álgebra, que $x + x = 2x$ é uma generalização de qualquer cálculo entre dois números iguais somados, como $3 + 3 = 2.3$ ou ele apenas cria uma nova forma para resolver isto, ou seja, o uso o faz compreender como se deve resolver com letras? A álgebra seria a generalização da aritmética pelo fato daquela aparecer depois desta no ensino básico, além da aritmética ser vista como essencial para a compreensão da álgebra. Mas, será que de fato existe esta necessidade? Ou isto é apenas uma cultura curricular herdada de uma prática social?

Como vimos no tópico anterior, a álgebra deve algo de seu desenvolvimento, tanto às necessidades empíricas, quanto sua relação com a aritmética, mas seu progresso se deve a estudos que eram completamente internos à matemática, numa espécie de estudo de uma linguagem, na intenção de buscar melhorá-la (como vimos na evolução da linguagem retórica, para a sincopada e enfim para a simbólica), e que dá, em um automovimento. Os matemáticos criaram regras que, mesmo quando originadas no empírico, em um dado momento não dependiam mais dele, o que nos permite entender a álgebra como uma gramática, possuindo as características de arbitrariedade e autonomia.

A álgebra não é apenas uma generalização da aritmética? Seria possível antecipar este processo, no ensino básico, por exemplo? Ou: a álgebra é uma forma de uso com um simbolismo intrínseco e que pode ser trabalhado em qualquer momento? Haveria possibilidade antecipar o ensino de álgebra? São sobre tais indagações que as pesquisas sobre o ensino e aprendizagem da álgebra em particular têm se colocado, assim como a presente pesquisa. O grande diferencial da álgebra é sua linguagem, pois diferentemente da aritmética e da geometria, ela parece mais distante da realidade, tanto que a aritmética e geometria são muitas vezes usadas para dar algum sentido para a álgebra. Se o simbolismo algébrico demorou a ser sistematizado, não podemos considerar que o mesmo seja algo próximo ao ser humano. Desse modo, podemos dizer que se o simbolismo algébrico alavancou a matemática a patamares nunca vistos antes, ele também potencializou dificuldades que já estavam presentes na matemática dos números e das formas, mas que parecem ter evoluído com a matemática das equações, por isso, é tão evidente a dificuldade que os alunos têm quando se chega nesta parte da matemática. Assim, muitos educadores tentaram e tentam formas de possibilitar este ensino, alguns pensando que a álgebra é uma forma de calcular com letras, outros buscando significados externos a essa linguagem.

Com o advento da álgebra simbólica no século XVII, tal perspectiva, com o passar do tempo e sua inserção na matemática como um todo, passou a ser pensada também como disciplina de ensino, principalmente a partir do fim do século XIX. Em 1897, foi realizado o 1º Congresso Internacional de Matemática em Zurique e depois, em 1899, foi criada a revista "*L'Enseignement Mathématique*", pelos matemáticos Henri Fehr e Charles-Ange Laisant, já atentando para a questão educacional da matemática. Em 1908 foi criado o Comitê Internacional de Matemática (IMUK/CIEM) em Roma que objetivava acompanhar as reformas curriculares que ocorriam principalmente na Europa.

Felix Klein formou um movimento de professores a fim de modernizar os programas e os métodos de ensino de matemática. O trabalho de Klein surtiu efeito e em 10 anos mudou-se a prática e as concepções do ensino escolar na Alemanha. Uma reforma educacional iniciou na França em 1900, e em outros países, como Inglaterra e Itália, mesmo que lentamente, mas as mudanças aconteciam. Enquanto isso nos Estados Unidos, os educadores, influenciados pelas mudanças na Europa, iniciavam reflexões sobre mudanças necessárias na educação matemática, e alguns chegaram a participar de eventos na Europa, como o quarto IMUK de 1908. Miranda (2003, p. 28-29) informa que nos Estados Unidos:

> A Matemática estava presente no currículo das primeiras universidades do País (1636) e, por volta de 1890, os cursos de Álgebra e Geometria tinham seu lugar garantido no ensino secundário. Embora o objetivo do ensino de Matemática fosse preencher as exigências para admissão ao ensino superior, havia outro propósito. A idéia era que a Matemática beneficiasse os estudantes pela disciplina mental que fornecia, ou seja, os princípios da Álgebra e os teoremas da Geometria podiam disciplinar a mente, capacitando dessa forma o desenvolvimento de sua função de raciocínio, com rapidez e precisão. Sendo assim, os vários ramos da Matemática eram considerados "puros" e qualquer assunto externo com o estudo associado à Física, por exemplo, perturbaria a unidade lógica da matéria e diminuiria seu valor disciplinar.

A autora esclarece que os EUA resolveram organizar o currículo da escola secundária com a intenção de torná-la mais utilitária, pois compreendiam que isto era uma necessidade econômica para o país, e assim após a segunda fase da revolução industrial do final do século XIX, a instrução pública foi estimulada a desenvolver o ensino das Ciências. Nesse contexto de reformulação curricular a álgebra se expandiu de 1865 a 1900, de um curso de um ano, passou para um ano e meio. Aritmética avançada, álgebra e geometria eram requeridas para entrada nas instituições secundárias. Essa reforma curricular se deu no sentido de se unificar aritmética, álgebra e geometria, que até este momento eram vistas como disciplinas separadas. Depois de muitas tentativas e debates, com educadores como Eliakim Moore, George Myers e Ernst Breslich, na década de 1920, a matemática passou a ser uma disciplina que unifica aritmética, álgebra e geometria.

Conforme Miguel, Fiorentini e Miorim (1992) a álgebra passou a fazer parte do currículo brasileiro a partir de 1799. A partir desse período o Brasil sofreu grande influência do positivismo, que se institucionalizou na reforma do ensino de 1890. O positivismo compreendia que o sujeito repete a história na sua história individual em busca do conhecimento, o chamado “princípio recapitulacionista” de Haeckel ou “princípio genético”[33]. Os autores em que nos detemos para compreender a relação entre positivismo e a educação brasileira, apontados no capítulo 1, apresentam vários textos, documentos e principalmente livros didáticos que mostram o uso da história da matemática, e a álgebra estava nesse contexto, ensinada como instrumento. Entendemos, então, que a álgebra era apresentada baseada em uma percepção histórica, ou seja, baseada na forma como foi construída historicamente, inicialmente escrita e apenas depois de forma simbólica, inicialmente para resolver equações específicas e depois generalizada, como se vê no “curso elementar de matemática: álgebra” de 1902 escrita por Aarão Reis. Mas talvez o grande legado desta noção tenha sido o posicionamento da álgebra no currículo escolar, sendo tomada como uma compreensão obtida apenas a partir da aritmética, e assim, esta ficou para o 6º ano após a entrada do aluno na educação básica, como se vê até hoje, pois se historicamente a álgebra apareceu muito depois da aritmética, o positivismo compreendeu que da mesma forma seria no ensino, seguindo assim o “princípio genético”.

Miguel e Miorim (2004) destacam que vários matemáticos se tornaram partidários da noção do “princípio genético”, como Poincaré e Klein, que entendiam que a escola deveria recapitular a história, tendo este último influenciado as reformas do ensino de matemática na Europa e nos EUA, que influenciaram o Brasil. Portanto, a educação matemática brasileira se fundamenta no período destacado aqui (século XIX a meados do século XX) por um lado no

[33] Estes princípios também chamados de paralelismo onto-filogenético. Segundo Miguel e Miorim (2004) o paralelismo onto-filogenético é o termo usado para sintetizar o “estabelecimento de vínculos entre a filogênese e a psicogênese do conhecimento matemático” (p. 73). A filogênese trata da produção sócio-histórica do conhecimento no passado e a psicogênese é a produção ou apropriação pessoal desse conhecimento no presente e estas formas de análise da produção do conhecimento são vistas como semelhantes, ou seja, “a filogênese recapitula a ontogênese”.

positivismo e por outro, mesmo que indiretamente, nas ideias de Klein, e ambos se relacionam com a noção de “princípio genético”.

A matemática até início do século XX era apresentada dividida em disciplinas separadas - aritmética, álgebra, geometria e trigonometria -, sem relação entre elas, até que em 1929, no Colégio Pedro II, no Rio de janeiro, resolveu-se unir essas disciplinas em uma só disciplina denominada matemática. Essa mudança foi realizada pelo Professor Euclides Roxo, que se baseou nas mudanças que já vinham ocorrendo na Europa e principalmente nos EUA. Esta medida foi ampliada para todo país em 1931, no governo Vargas, na chamada reforma Francisco Campos (nome do Ministro da educação na época) também liderada por Euclides Roxo, que se baseou principalmente no texto da reforma americana de Ernst Breslich, que havia sido publicado em 1928. A ideia de unificação completa da aritmética, álgebra e geometria na matemática tentou ser revista pela reforma Capanema de 1942, promovida pelo ministro da educação Gustavo Capanema, mas a ideia da disciplina como uma única disciplina se manteve.

O ensino de álgebra, como toda a educação brasileira também sofreu influência, a partir de 1920, do movimento da Escola Nova, que tinha relação com o positivismo. O Brasil ainda passa por influências do ensino tecnicista do período da ditadura, e do construtivismo piagetiano, por volta da década de 1930 e mais fortemente depois da ditadura. Por volta de 1960 chegam ao Brasil os ideais do movimento da matemática moderna, que consiste basicamente em se levar ao ensino os últimos avanços da matemática na modernidade, com destaque para a teoria dos conjuntos e os avanços da álgebra. As reflexões sobre a matemática moderna iniciaram na década de 1950 na Europa, e as bases desse movimento foram estabelecidas em duas conferências em 1959, em Royaumont, na França, e em 1960, em Dobrovnik, na Eslovênia (na época Iugoslávia), realizadas pela OECE (organização europeia de cooperação econômica). Antes, em 1958, já havia sido fundado nos EUA o SMSG (School Mathematics Study Group), que tinha influência do grupo Bourbaki, e enfatizava também a teoria dos conjuntos e o estudo de estruturas algébricas, e teve seus livros traduzidos e publicados no Brasil a partir de 1964. No Brasil tais ideais se manifestaram primeiramente em 1959, no 3º congresso de ensino de matemática, realizado no Rio de Janeiro.

O Brasil sofreu influências do movimento da matemática moderna, por meio do professor Osvaldo Sangiorgi, professor da Universidade Mackenzie de São Paulo, que escreveu vários livros didáticos de matemática em que preconizava o ensino da álgebra nos moldes da matemática moderna, com destaque para o estudo de monômios e polinômios, representação algébrica, expressão algébrica, valor numérico, coeficiente e parte literal. Tais conteúdos estão presentes até hoje nos currículos de matemática do ensino fundamental, que vemos a partir do

7º ano. Foi Sangiorgi também o primeiro a usar "quadradinhos" para representar incógnitas em equações para classes do ensino fundamental I. Este movimento se fortaleceu no Brasil com a fundação do GEEM (Grupo de Estudos do Ensino da Matemática) em São Paulo em 1961, coordenado por Sangiorgi. Também destacamos o GEPEM (Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática), no Rio de Janeiro e o GEEMPA (Grupo de Estudos sobre o Ensino da Matemática de Porto Alegre), no Rio Grande do Sul.

Esse movimento como já dissemos teve relação com o grupo Bourbaki, principalmente no matemático Jean Dieudonné, que tinha profundas preocupações com as questões educacionais, tendo dedicado sua obra *"Algébre linéaire et geométrie élementaire"* aos professores secundários, que desejam mudanças nos métodos de ensino e estavam indecisos sobre como fazer tais mudanças. O movimento da matemática moderna foi uma época em que se tornou hegemônico um modo de pensar, que sustentava que a matemática tem como ponto de partida, conceitos precisos e delimitados, plena e claramente definidos, além de proposições e teoremas explícitos, demonstrados em sua totalidade de forma rigorosa, apresentados em linguagem única (DUARTE, 2007).

Baseados no grupo Bourbaki a matemática moderna introduziu a teoria dos conjuntos e as estruturas algébricas na educação básica. A álgebra passou a ter destaque, mas a geometria foi diminuída. Para além da questão dos pontos positivos e negativos da matemática moderna, fato é, que se desenvolveram os estudos em educação matemática, na busca de outras alternativas, devido aos problemas que a matemática moderna trouxe ou que ela revelou. Desse modo, nas décadas de 1980 e 1990 buscou-se resgatar a geometria nas pesquisas acadêmicas e propostas curriculares, como a do Estado de São Paulo em 1992, o que nos faz ver novamente um abandono da álgebra pela educação matemática.

De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), referindo-se ao âmbito mundial, a partir da década de 1980 desenvolveu-se um novo modo de pensar a álgebra na educação, quando passou a se refletir sobre o que deve ser incluído na álgebra e o que deve ser considerado algébrico, desse modo, buscou-se caracterizar o pensamento algébrico. Um dos incentivadores desta forma de caracterização foi o educador americano James Kaput, que compreende de forma semelhante ao NCTM (Nacional Council of Teachers of Mathematics), que pode ser considerada a maior organização de educação matemática do mundo.

No Brasil, observamos a produção de três documentos oficiais que nortearam e norteiam o ensino da álgebra no Brasil, que claro não são exclusivamente sobre álgebra, nem sobre matemática, mas que tem estas incluídas, que são "os Guias Curriculares" da década de 1970, a "proposta Curricular para o Ensino de 1º Grau" da década de 1980, os PCN (Parâmetros

Curriculares Nacionais), da década de 1990, além de outros mais recentes. Em tais, a álgebra, aritmética e geometria são tomadas como partes da matemática, e em alguns desses documentos a álgebra aparece como parte dos estudos com números ou ligada a outros conteúdos da matemática. Isso se deve à concepção essencialista que busca ver um pano de fundo comum em toda a matemática. Não somos defensores da divisão em disciplinas, mas compreendemos que as especificidades devem ser entendidas, pois a concepção essencialista leva a problemas, por se esperar uma percepção holística dos alunos mediante um apanhado de conteúdos que são diferentes.

Acredita-se que a divisão em disciplinas se deve ao pensamento baconiano e cartesiano de se pensar a ciência e que antes o conhecimento não era fragmentado. Não julgamos tal questão, pois isso se deve às formas de vida. O ser humano teve necessidade de formular epistemologias particulares e que isto sempre existiu, mas sem sistematização, intercâmbio entre culturas, imprensa e a quantidade crescente de conteúdos e estudos que a partir da idade moderna começaram a surgir. A necessidade de sistematização tornou-se um consenso, um hábito, uma forma de vida. Hoje alguns estudiosos desejam ressuscitar um espírito holístico perdido em algum momento antes de Descartes.

De acordo com Glock (1998, p. 174) “uma forma de vida é uma formação cultural ou social, a totalidade das atividades comunitárias em que estão imersos os nossos ‘jogos de linguagem’”. As formas de vida constroem instituições, e entre estas a educação formal é uma, e esta tem o papel de transmitir o conhecimento construído pela humanidade, as pessoas adultas assim como as instituições e práticas institucionais são modelos para as crianças, pois, “o consenso gramatical é intersubjetivo, por tratar-se de acordos sobre formas de vida” (MORENO, 2001, p. 256), ou seja, o consenso sobre as regras a serem seguidas são definidas na comunidade de usuários por acordos, não de opiniões, mas de formas de vida, isto é, de uma forma de viver que foi construída do modo que foi. Nesse sentido, acordamos que a álgebra faz parte da matemática, que deve se ensinar determinados conteúdos, em determinadas séries, etc. Houve para isso consensos, influenciados por forças tanto sociais, mas mesmo geopolíticas, bem como teóricas... seguimos então teorias muitas vezes sem reflexão. Wittgenstein sugere uma terapia de posições dogmáticas, não para propor algo em troca, mas para apresentar determinados limites e confusões destas. Em nossa história aceitamos o positivismo, a escola nova, o tecnicismo, o construtivismo – sempre criticando o passado, o tradicional, e assim construímos uma forma de compreender a educação. Nesse sentido se propõem teorias pedagógicas que dominam períodos, mas que depois são criticadas. Abandonou-se a álgebra na escola nova por se considerar que se deveria trabalhar com conteúdos mais concretos, abandonou-se a geometria no movimento da matemática moderna, por se considerar que deveria enfatizar estruturas algébricas, e hoje temos uma ênfase em competências e habilidades, diminuindo a importância dos conteúdos, compreendendo que estes devem aparecer nas atividades. Ao defender o sentido formativo da matemática, Gottschalk (2009a, p. 19) compreende que

> O sentido formativo da matemática, a exemplo do sentido formativo das humanidades, também contribui significativamente para a formação de um homem autônomo, que convive com paradoxos e contradições (fonte de criação) e que é capaz de imaginar outras realidades possíveis, ampliando, assim, o leque de perspectivas que atribuem sentido ao mundo em que vive. Um sentido muito próximo ao da formação do poeta e a dos que combatem qualquer tipo de dogmatismo.

Não podemos definir ou prever o futuro de nossos estudantes, assim como não sabemos se toda a matemática que estuda na escola um dia lhes será útil, o que sabemos é que devemos ensiná-la na esperança de contribuir com suas expectativas de uma vida melhor.

Ao aderir a uma teoria, é preciso conhecer as críticas feitas a ela. Sendo assim, o professor deve estar continuamente atualizando-se e buscando novas perspectivas que o ajudem na tarefa de ensinar matemática. Não podemos acreditar cegamente numa teoria educacional, já que a nossa compreensão sobre uma teoria não pode prever as suas possíveis falhas quando aplicada em sala de aula. Devemos ficar atentos ao aderirmos a uma prática, pois esta pode abrir outras possibilidades de intervenção na aprendizagem do aluno.

O conhecimento matemático parece ter perdido o sentido estético e, a não ser pelo sentido prático a matemática não tem valor algum para os alunos. Na busca por soluções, imediatas, dos problemas de ensino os professores se filiam as teorias que impõem comportamentos que parecem mais orientar a produção de uma conduta segundo um compromisso moral e político do que propriamente epistemológico, se veem como "soldados" obedecendo as teorias pedagógicas e não se dando conta de que elas não compreendem e muito menos respondem a grande parte dos problemas de ensino e aprendizagem. De acordo com Baruk (1996) esses professores são traídos por essas teorias devido a não apresentarem soluções às dificuldades encontradas em suas práticas de sala de aula. Para Silveira e Silva (2013, p. 5),

> Não podemos acreditar cegamente numa teoria educacional, já que a nossa compreensão sobre uma teoria não pode prever as suas possíveis falhas quando aplicada em sala de aula. Devemos ficar atentos ao aderirmos a uma prática, pois esta pode abrir outras possibilidades de intervenção na aprendizagem do aluno.

Citando o construtivismo Gottschalk (2002, p. 153) compreende que ao se adotar uma teoria como dogmática

> a conseqüência mais danosa para o professor seja a frustração que sobrevém quando seus alunos não aprendem sob a metodologia construtivista, uma vez que foi levado a acreditar que sua falta de competência fez com que não construíssem o conhecimento matemático, apesar de ter seguido à risca os preceitos construtivistas recomendados. Sem falar do professor que já se sente incompetente *a priori*, por não entender como implantar essas novas diretrizes em sala de aula e que, ao abandonar seus antigos métodos de ensino (muitas vezes, até então, bastante eficazes), sente-se desamparado e inseguro diante dessas novas demandas transmutadas em metodologia.

A terapia wittgensteiniana possibilita uma melhor percepção sobre tais questões, e de acordo com Gottschalk (2015, p. 314), esta pode ainda prevenir outras atitudes dogmáticas,

> relativizando os pressupostos subjacentes às políticas educacionais neoliberais que se guiam pelo mito da eficiência, imagem a ser dissolvida em todos os campos do conhecimento, em particular no contexto educacional. Podemos começar este trabalho terapêutico dentro da escola, esclarecendo as confusões advindas, em última instância, de uma concepção exclusivamente referencial da linguagem.

No capítulo seguinte apresentamos a forma como se encontra o ensino de álgebra, e seus principais referenciais teóricos, para que no capítulo 5, possamos, baseados na terapia wittgensteiniana, apresentar os limites, e baseados em uma interpretação da epistemologia do uso, indicar possibilidades epistemológicas, mas que intentam não ser dogmáticas. Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), a partir de uma análise histórica, concluíram na época de produção de seu texto, que apesar da álgebra ocupar boa parte dos livros didáticos não recebia a devida atenção nos debates, estudos e reflexões a respeito do ensino da matemática, o que consideramos ter mudado nos últimos anos, com a crescente produção de trabalhos referentes ao assunto. No entanto, nossa pesquisa não encontrou nenhum trabalho que faça relação entre álgebra e a epistemologia do uso.

4 Análise de um padrão teórico

“Ora, x + x dá quatro. São quatro traços,
dois de cada x!”
(*Um aluno do 7º ano*)

Buscamos apresentar no primeiro capítulo que compreendemos que o construtivismo piagetiano posto em prática nos estudos acadêmicos, programas curriculares, livros didáticos e no ideário dos professores de matemática no Brasil é uma interpretação da epistemologia genética de Piaget e de teorias próximas a esta, pois a filosofia da consciência ainda se mostra em crescimento, e, como já apresentamos no segundo e terceiro capítulos, a filosofia analítica da linguagem, tem de certa forma se voltado nos últimos anos para uma preocupação com a mente. Percebemos que a preocupação com processos mentais se mantém muito forte, o que nos autoriza a dizer que se mantém na educação brasileira uma perspectiva essencialista do conhecimento e referencialista da linguagem, representadas a nosso ver, pela versão do construtivismo piagetiano colocado em prática por teóricos e educadores - mesmo em sua teoria pura pensada por Jean Piaget, livre de interpretações e/ou modificações (como socioconstrutivismo ou o pós-construtivismo) ou ligações a outras teorias sociológicas, psicológicas (como de Vygotsky, Walon e Ausubel) e filosóficas - apresenta o essencialismo, com as noções de estruturas e esquemas, e o referencialismo, com a ideia de pensamento anterior à linguagem, e que se fortalece ao observar o conjunto teórico em geral.

Nesse capítulo apresentaremos quatro blocos de análises, que vai da identificação do referencial teórico utilizado em dissertações e teses produzidas no país nos entre 2006 e 2015 primeiramente, passando pela análise de algumas das principais referências utilizadas, e análise sobre o que diz a respeito da álgebra nos documentos oficiais, como os PCN, as orientações curriculares do ensino médio (OCEM), a base nacional curricular comum (BNCC), o plano nacional do livro didático (PNLD), a matriz curricular do ENEM e a análise de alguns livros didáticos usados em escolas de Belém do Pará, buscando assim mostrar que tais orientações oficiais estão ligadas a referenciais teóricos dogmáticos. Mas devemos destacar que não realizaremos aqui a terapia de fato, no mesmo estilo de Wittgenstein, mas nos baseamos nela para construir um arcabouço analítico sobre o ensino de álgebra realizado no Brasil. Aqui pretendemos comprovar que o ensino de álgebra se alicerça nas concepções essencialista e referencial e retirar alguns pontos importantes para aprofundarmos no próximo capítulo.

4.1 Dissertações e teses

Nosso objetivo é apresentar os referenciais teóricos, para mostrar o padrão teórico que temos no Brasil. Então, não analisaremos minuciosamente cada dissertação e tese, mas identificar, principalmente, quais os referenciais teóricos utilizados nas pesquisas sobre álgebra na educação ultimamente. Definimos previamente alguns critérios. Buscamos dissertações e teses entre os anos 2006 a 2015, por considerarmos um tempo relevante de produção científica. Realizamos a busca no portal de periódicos da CAPES[34], pois no mesmo há na maioria dos casos a possibilidade de visualização do arquivo do trabalho. Buscamos pelos termos "pré-álgebra", "álgebra", "ensino álgebra", "educação álgebra", "equação", "função", "inequação", "variável", "incógnita", "polinômio" e termos similares, mudando gênero e número, quando possível. Compreendemos que todos estes termos fazem referência à álgebra, assim como há estudos sobre números inteiros e de outros tipos que fazem referência à álgebra ou pré-álgebra, mas esperamos que de alguma forma os termos buscados aparecessem no resumo ou nas palavras-chave, e assim, encontramos trabalhos que pelo título poderiam nem parecer de álgebra, mas que continham no resumo ou nas palavras-chave o uso de algum dos termos, e que por fim, compreendemos como trabalhos sobre o ensino de álgebra. Filtramos a busca delimitando para dissertações e teses e relacionadas à educação matemática e educação. Mesmo com essa delimitação apareceram muitos trabalhos que não faziam a relação com ensino ou não abordavam a álgebra, assim como, trabalhos que citavam em alguma parte as palavras buscadas, mas não se relacionavam com o que buscávamos. Também realizamos uma busca de trabalhos no site do PPGECM/IEMCI/UFPA, para acrescentar trabalhos realizados no estado do Pará. Não encontramos no site da UEPA trabalhos publicados.

No fim da busca contamos com 102 trabalhos, 16 teses e 86 dissertações, sendo, 35 referentes à mestrados profissionais e 51 à mestrados acadêmicos. Abaixo listamos os mesmos em uma tabela, com as IES (instituições de ensino superior) na primeira coluna, nas colunas seguintes estão as quantidades nos 10 anos buscados, e em seguida P, são os mestrados profissionais, M, são os mestrados acadêmicos e D são os doutorados de cada instituição. Na coluna final há os totais de trabalhos por instituição, e na linha final os totais por ano, e no encontro da última linha com a última coluna o total geral.

[34] http://www.periodicos.capes.gov.br/

Tabela - quantidades de produções por IES e ano

IES	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	P	M	D	TOTAL
PUC/SP	5	19	6	12	5	5	1	-	-	-	27	20	6	53
UNESP/RC	1	-	-	1	2	1	1	1	-	-	-	5	2	7
UFSC	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	1
UFPE	-	1	-	-	-	1	-	-	-	-	-	1	1	2
USP	-	1	-	-	-	-	1	-	2	-	-	2	2	4
UNICAMP	-	1	-	-	-	2	-	1	-	-	-	3	1	4
UFRGS	-	1	1	-	-	-	1	-	-	-	1	2	-	3
PUC/RJ	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1
PUC/RS	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	1
UNESP/PP	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	1	-	1
UEL	-	-	-	-	2	2	1	1	2	1	2	6	1	9
FURB	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	1	-	1
UFMS	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	1	-	1
UNIBAN	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	1	-	1
UFCE	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	1	1
UNIFRA	-	-	-	-	-	1	1	-	-	-	2	-	-	2
UFJF	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	1	-	-	1
UFG	-	-	-	-	-	2	-	-	-	-	-	2	-	2
UFOP	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	1	-	1
UEPB	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	1	-	-	1
UNIVATES	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	1	-	-	1
UFPA	-	-	-	-	-	-	1	1	1	-	-	3	-	3
UNIAN	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	1	1
	7	**23**	**9**	**14**	**12**	**16**	**10**	**4**	**5**	**2**	**35**	**51**	**16**	**102**

Fonte: o autor.

Das 16 teses, 6 são da PUC/SP, 2 são da UNESP/RC, 2 da USP, e as outras 6 são da UFPE, PUC/RJ, UFCE, UEL, UNICAMP e da UNIAN, com uma cada.

Das 35 dissertações em mestrados profissionais, 27 são da PUC/SP, 2 são da UEL, 2 da UNIFRA e as outras 4 são da UFRGS, UFJF, UEPB e UNIVATES, com uma cada.

Das 51 dissertações de mestrado acadêmico, 20 são da PUC/SP, 6 da UEL, 5 da UNESP/RC, 3 da UNICAMP, 3 da UFPA, 2 da USP, 2 da UFG, 2 da UFRGS, e as outras 8 são da UFSC, UNESP/PP, UFOP, UFPE, FURB, UFMS, UNIBAN e PUC-RS, com uma cada.

No período buscado há outros trabalhos sobre o tema de outras regiões do país, mas que talvez não encontramos por não estarem no portal de periódicos. Mas talvez o Sudeste aparece com mais trabalhos também devido à quantidade populacional e ao avanço científico.

É notório o predomínio de trabalhos sobre álgebra, no período, produzidos na PUC/SP. No total são 53 trabalhos, entre teses e dissertações, que é mais da metade do total. Mas percebemos que ultimamente este número tem se reduzido.

Nossa análise consiste primeiramente em verificar o referencial teórico principal dos trabalhos, que muitas vezes é perceptível no título, mas mesmo assim efetuamos a leitura do resumo. No entanto, em alguns casos o resumo não foi suficiente, e tivemos que ver o sumário, a introdução, as considerações finais e a bibliografia, e em alguns poucos casos ler capítulos ou tópicos referentes ao referencial teórico.

No apêndice A temos em um quadro a lista com os 102 trabalhos agrupados por ano, ou seja, desde 2006 até 2015, com os dados de autor, título e o tipo de pesquisa (P, M ou D) com a definição de referenciais teóricos, nível e/ou público analisado na pesquisa, o conteúdo matemático e o tipo de pesquisa.

Com relação ao referencial teórico buscamos perceber um principal ou principais referenciais, mencionados no título, resumo e/ou sumário. Em alguns casos isso não fica evidente e tivemos que recorrer a leituras de mais partes do trabalho. Há casos de existir vários autores de uma determinada tendência teórica, então optamos por considerar termos referentes a estas tendências, como teoria histórico-cultural. Optamos por não colocar tendências teóricas referentes a estudos sobre tipos de metodologias, por entendermos que não indicam fundamentos teóricos, mas as formas de se fazer pesquisa. Assim priorizamos por teorias e autores que fazem, primeiramente relação com o ensino de álgebra, em seguida com a educação matemática, depois com a educação em geral, e por fim com as outras áreas relacionadas a educação. Mas vale destacar que prevalece aquilo que o autor indica claramente como seu referencial teórico, seja no resumo, no sumário, etc. Há casos em que consideramos uma teoria ou autor quando o pesquisador se utilizou de comentadores da mesma ou mesmo. Em seguida, apresentaremos uma análise geral das 102 dissertações e teses, onde usamos os dados de referenciais secundários, que não estão listados no quadro do apêndice A, mas que consideramos pertinente apontar, sempre destacando os que tratam de álgebra, matemática e educação, nessa ordem.

Verificamos diversos autores e teorias[35], como: Piaget (Epistemologia Genética); Vygotsky (Sóciointeracionismo); Heidegger e Gadamer (Hermenêutica Filosófica); Husserl e

[35] As referências constam apenas com o nome do autor que faz referência às suas teorias, referências que já constam nesta tese, e outros que apresentamos em notas de rodapé no apêndice A. Quando é mais de uma obra, há uma breve descrição sobre o autor utilizado, indicando os anos das obras utilizadas, sem indicar as obras, apenas para colocar o período de publicação dos autores.

Merleau-Ponty (Fenomenologia); Ausubel (Aprendizagem Significativa); Papert (Construcionismo); Chevallard (Teoria Antropológica do Didático e Transposição Didática); Brousseau (Teoria das Situações Didáticas e Obstáculos Epistemológicos e/ou Didáticos); Douady (Dialética Ferramenta-Objeto); Duval (Teoria dos Registros de Representação Semiótica); Artigue (Engenharia Didática); Vergnaud (Teoria dos Campos Conceituais); Simon (Trajetórias Hipotéticas de Aprendizagem); Shulman (Conhecimento Pedagógico do Conteúdo); Bassanezi, Biembemgut, Barbosa e Hein (Modelagem Matemática); Ursini (Modelo 3UV); Polya (refere-se à obra “A arte de resolver problemas” de 1945); Kaput (influente teórico sobre o ensino de álgebra); Ponte (teórico de educação matemática, que tem extensa publicação sobre ensino de álgebra); Kieran (possui uma extensa produção sobre o ensino de álgebra); também consideramos os PCN como referencial teórico, já que é bastante utilizado em várias pesquisas.

Pela observação nas 102 dissertações e teses concluímos que há três linhas teóricas que prevalecem, que chamaremos aqui de francesa, americana e brasileira. A linha francesa diz respeito principalmente à teoria da educação matemática denominada didática da matemática francesa, e envolve os autores: Duval, Douady, Artigue, Chevallard, Vergnaud, Brousseau, Balacheff e Bosch. A linha americana, na verdade não é totalmente americana, mas a chamamos assim por que são autores ligados teoricamente ao NCTM, mas que são do Canadá, Autrália e outros países e que se encontram principalmente na obra organizada por Coxford e Shulte (1995), e são eles: Usiskin, Kieran, Kaput, Lee, Booth, Kücheman, Locheade e Mestre e Marchand e Bednarz. A linha brasileira conta com autores, em sua maioria, brasileiros, mas que estão ligados às linhas anteriores, como, Lins e Gimenez (1997), Lins, Da Rocha Falcão, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005), Ribeiro (2007), Almouloud, e Schliemann, Carraher e Brizuela.

Percebemos que há no referencial teórico principal, não poucas vezes, o uso de mais de uma linha teórica. Isso se deve por que elas estão próximas conceitualmente, assim como, da sua relação com o construtivismo ou um desenvolvimento deste. Portanto, a maioria dos trabalhos apresenta referenciais teóricos cognitivistas, próximos aos avanços teóricos possibilitados ou relacionados com o construtivismo, mas que de modo mais amplo resolvemos considerar como trabalhos essencialistas/referencialistas.

Da linha francesa contabilizamos 39 trabalhos entre os 102, que apresentam autores dessa linha no referencial teórico principal. Destacamos Duval, que contém 17 trabalhos, baseados em sua teoria dos registros de representação semiótica. Duval faz um trabalho sobre álgebra, nesse sentido, é justificável seu uso maior que outros autores da linha francesa.

Da linha americana, temos 19 trabalhos com uso desta em sua referência principal, com destaque para Usiskin e Kieran, com 6 trabalhos cada.

Da Linha brasileira 20 trabalhos têm em seu referencial principal, com destaque para Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) com 13 e Lins e Gimenez (1997) com 11.

Além destas linhas que destacamos, vimos como referencial principal em 5 trabalhos os documentos oficiais brasileiros, que em sua maioria são os PCN, assim como também há em dois trabalhos o uso particular dos PCN como referencial principal.

Há ainda o uso de teorias ou teóricos de determinadas linhas de pesquisa. São 17 trabalhos: 3 que usam teóricos sobre o uso de jogos na matemática, 3 que usam teóricos sobre as TIC, 2 com teóricos sobre estado da arte e 2 com teóricos da história da matemática, 2 com teóricos histórico-culturais e outros dois que tratam de metacognição e estilos cognitivos. Chamamos a atenção para o trabalho de Dalto (82[36]) que utiliza o behaviorismo como teoria principal, o que é algo bastante raro na educação atualmente.

E há os trabalhos que utilizam teóricos e teorias que não encaixamos nestas categorias anteriores, que apresentamos adiante com quantidade trabalhos que contém entre parênteses: O modelo 3UV de Ursini (6), Ponte (5), Vygotsky (5), Simon (4), Piaget (3), modelagem matemática (3), Davidov (3), Ausubel (3), Polya (3), Shulman (3), Husserl (2), Steffe e Thompson (2), Campbell e Zazkis (2), Arcavi (2), Cury (2), Romberg (2), e teóricos que aparecem em um trabalho: Tall, Tall e Vinner, Cortés e kavafian, Passoni, Wu, Hart, Papert, Castro et al, Resende, Chaves, Merleau-Ponty, Heidegger, Gadamer, Lévy, Leontiev, e Wittgenstein.

Os trabalhos encontrados apresentam um padrão teórico que se aproxima das concepções essencialista e referencial, como buscaremos mostrar em seguida. Notamos isto mesmo nos trabalhos que se baseiam Vygotsky ou em Duval, que poderiam ser mais próximos da concepção de linguagem que aqui defendemos. Os trabalhos baseados na fenomenologia não utilizam esta teoria para uma análise do ensino da álgebra, mas de concepções no decorrer dos anos. O único trabalho que utiliza Wittgenstein é o 93, que foi orientado pela Prof.ª Dr.ª Marisa Rosâni Abreu da Silveira e se insere no mesmo programa e linha de pesquisa a que pertence esta tese e usa a filosofia de Wittgenstein para comparar a linguagem escrita com a linguagem computacional.

Mas além da análise sobre o referencial teórico principal conferimos o que chamamos de referencial teórico auxiliar ou secundário. Consideramos aquele referencial que encontramos

---

[36] Utilizaremos o número referente ao trabalho no quadro no apêndice A.

na bibliografia do trabalho, buscando conferir se o seu é consistente ou apenas citações passageiras nos trabalhos, priorizando os consistentes. Consideramos estes, pois há situações em que os trabalhos utilizam algum referencial principal para análise, mas se baseia em outros teóricos e teorias de forma expressiva, mas que o mesmo não cita no resumo ou no sumário ou até no referencial teórico. Também fizemos isso devido a alguns referenciais teóricos principais não serem de álgebra, matemática ou mesmo da educação em si.

Contabilizamos na linha francesa 48 trabalhos entre os 102. Destacamos Brousseau, que consta em 16 trabalhos, Chevallard em 13, Duval em 12 trabalhos e Vergnaud em 8.

A linha americana possui 64 trabalhos, com destaque para Booth com 35 referências, Kieran e Usiskin com 32 cada e Kaput com 11. Há 17 referências ao NCTM. Vale lembrar que na obra de Coxford e Shulte (1995) há 33 artigos e alguns outros artigos são também utilizados por alguns trabalhos, com destaque para Schoen com 9, Bednarz, Kieran e Lee com 7, House com 7, Lee com 7 e Lochead e Mestre com 5.

A Linha brasileira apresenta 74 trabalhos, com destaque para Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) com 31, Lins e Gimenez (1997) com 35, Miguel, Fiorentini, Miorim (1992) com 9, Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) com 11, Da Rocha Falcão com 10, Ribeiro (2007) com 7, Schlieman, Caharrer e Brizuela (2005) com 7 e Almouloud com 6.

Além destas linhas que destacamos como referencial secundário em 61 trabalhos os documentos oficiais brasileiros, que em sua maioria são os PCN.

Há ainda concepções que ficam muito claras nas partes lidas de certos trabalhos, por meio de termos, como *pensamento algébrico*, em 44 trabalhos. O termo *construtivismo* relacionado à Piaget, que aparece em 10 trabalhos. Em 13 trabalhos aparece o termo *Early Algebra*.

E há os trabalhos que utilizam teóricos que não encaixamos nestas categorias anteriores, que apresentamos adiante com quantidade de trabalhos que contém entre parênteses: Ponte (35), Piaget (25), Vygotsky (15), Polya (11), Perrenoud (9), Arcavi (9), Ursini (7), Radford (7), Bachellard (6), Shulman (5), Coll (4), Davidov (4), Cortés e Kavafian (3), Gómez-Granell (3), Dienes (3), Campbell e Zazkis (3), Leotiev (2), Ausubel (2), Steffe e Thompson (2), Romberg (2), Lévy (2), e destacamos que há citações em um trabalho de Dewey, Papert, Kamii, Bruner, Wallon, e ainda autores que fazem abordagens sobre linguagem como Peirce, Danyluk, Nilson José Machado, Ricouer, Pimm e Santaella. Vimos em apenas um trabalho uma crítica a documentos oficiais e também ao construtivismo que foi o trabalho 93, sobre o qual já falamos.

Dos 102 trabalhos, 94 apresentam autores da linha francesa, americana ou brasileira, de duas ou das três linhas, além dos PCN e outros documentos oficiais, como referencial principal e/ou secundário. Nos 8 trabalhos que não entram neste grupo, temos que o de Signorelli (26) se utiliza de Perrenoud em seu referencial secundário; o Carvalho Jr (32) se utiliza do construcionismo de Papert no referencial principal; Mesquita (44) se utiliza das THA de Simon no referencial principal; Brucki (71) se utiliza de autores da modelagem matemática e de Ausubel no referencial principal; Uberti (77) se utiliza de 4 dissertações sobre o uso de jogos na matemática, ou seja, não apresenta um referencial teórico mais consistente; o 102 se utiliza no referencial principal de Polya e no secundário de Papert.

Os trabalhos de Figueiredo (54) e Melo (93), com a fenomenologia e a filosofia da linguagem de Wittgenstein, respectivamente, são os únicos trabalhos que não entram no padrão teórico essecialista/referencialista que estamos considerando aqui, sendo que o Figueiredo (54) é um trabalho de análise e se utiliza de uma teoria que como já explicamos faz parte do idealismo. Desse modo apenas o trabalho de Melo (93) foge dessa tendência, mas não aprofunda em um estudo sobre linguagem algébrica, pois trata de um conteúdo específico que é função e, como já falamos, faz parte do mesmo grupo de pesquisa desta tese.

Há um número considerável de propostas de ensino ou inovações no ensino de álgebra, que, no entanto, parte de um referencial teórico essencialista/referencialista, próximo ao construtivista, pois mesmo quando vemos autores diferentes, no corpo teórico geral encontramos autores já conhecidos. Isto acontece até no trabalho de Dalto (82) que é baseado no behaviorismo e que propõe uma intervenção também, mas tem em seu corpo teórico autores como Lins e Gimenez (1997), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Ponte, além de um trabalho de Caharrer e Brizuela sobre o *Early Algebra*.

Em nossa pesquisa percebemos que ao investigar a história da álgebra ou do seu ensino, ou de concepções sobre o ensino de álgebra nos deparamos com os mesmos autores usados na maioria das 102 pesquisas, ou seja, não podemos considerar que apenas por se utilizar de tais autores tais trabalhos devam ser tachados definitivamente de essencialistas e referencialistas. Para isto realizamos uma análise destes aspectos nos trabalhos aqui observados.

Com relação à concepção essencialista, entendemos que poderíamos fazer esta conclusão por meio do referencial teórico utilizado, mas resolvemos ir um pouco mais além e observar como era considerado o estudo sobre o ensino de álgebra nos trabalhos. Como já dissemos 44 trabalhos consideram a noção de pensamento algébrico, 10 a de construtivismo e 13 do *Early Algebra*, sendo que destes, 9 trabalhos tratam especificamente de séries que antecedem o ensino tradicional de álgebra no 7º ano, ou seja, em mais da metade dos trabalhos esse caráter essencialista fica mais reforçado.

Consideramos 17 trabalhos que tratam diretamente da relação da álgebra com a aritmética, 5 com a geometria e 2 com aritmética e geometria. Nos trabalhos que notamos que conteúdo foi uma introdução à álgebra, temos os que buscam a introdução da noção de variável por problemas, como o trabalho de Crhisto (4); a introdução da álgebra por números inteiros como em Todesco (5); por situações diferenciadas, como na pesquisa de Scarlassari (28); do uso de frações, como em Sant'Anna (31); por problemas, como em Panossian (35), Poffo (62), Ramos (79), Fernandes (80) e Silva (95); por divisibilidade, como em Gergorutti (47); por percepção de padrões, como em Grecco (37) e Trevisani (91); por relações funcionais, como em Gil (38); pelo uso da geometria como no trabalho de Padilha (90); e por operações aritméticas, como na pesquisa de Martins (101). Nos trabalhos que não consideramos como conteúdo a introdução à álgebra há trabalhos que tratam da mesma utilizando relações funcionais, como os de Kern (39) e Castro (68) e operações aritméticas, como os de Yamanaka (43), Freire (66), Quintiliano (67), Almeida (78), Pereira (89) e Santos (100).

Além destes há os trabalhos que tratam conteúdos algébricos a partir de outros, como o de Silva (2) que trata da álgebra em geral, mas se utiliza do conteúdo de números e operações da aritmética; o de Martins (6) que trata de equações com uso de radicais; o de Souza (8) que trata de inequações se utilizando do estudo de gráficos de funções; o de Resende (12) que trata da teoria dos números e toma como apoio a álgebra; os de Lima (14) e Cardia (15) que tratam da relação entre expressões algébricas e a geometria; os de França (25) e Figueiredo (54) que tratam da álgebra linear a partir do estudo de geometria dinâmica; o de Carvalho Jr. (32) que trata do estudo da cinemática da física com o estudo de funções; o de Conceição Jr. (69) que trata de inequações a partir de relações funcionais; o de Puti (81) que estuda equações a partir da aritmética e geometria; o de Aguiar (96) que trata da álgebra em geral a partir da aritmética e geometria; e o de Coser (98) que trata de equações do 3º grau em diante a partir de métodos numéricos.

Para o construtivismo e teorias educacionais que se apoiam no essencialismo, o aluno necessita de relações da álgebra com outras áreas, como a aritmética, geometria, contextos cotidianos, a lógica etc., pois há a ideia de que há uma essência por trás da álgebra e outros conteúdos. Compreendemos que esta necessidade é real, pois são necessários paradigmas ou exemplos de uso - como vimos na epistemologia do uso - para que um aluno possa compreender significados, porém precisamos nos perguntar até que ponto há esta necessidade ou até que ponto ela é eficaz.

Não podemos apenas pelo uso da comparação com conteúdos dizer que são trabalhos essencialistas, até por que não negamos a grande utilidade que tem para o ensino o uso de conteúdos para o ensino de outro determinado conteúdo, mas por que tomam a álgebra a partir de conceitos que se encontram presentes em diversas áreas, mesmo fora dela, não identificando na própria linguagem algébrica a base para o seu ensino, mas sim o ensino de sua linguagem como necessitante de uma base. A concepção essencialista se relaciona à referencial, então consideramos necessário analisar esta concepção nos trabalhos aqui listados.

Com relação à linguagem realizamos uma análise em que categorizamos por grau de importância dada a esta. Buscamos perceber isto pelo título, resumo e no sumário, sendo que este revela quando há capítulo ou tópico específico sobre o tema. Não consideramos apenas o termo "linguagem", mas também "simbologia", "escrita", "representação" e palavras derivadas destas.

Mesmo quando não detectamos isso buscamos a bibliografia e o referencial teórico para perceber se haveria autores ou análises de determinados autores sobre a linguagem como fundamentação teórica. Dessa forma, consideramos 5 trabalhos com nenhum tratamento a respeito da linguagem, que são os trabalhos 17, 27, 33, 45 e 102 que podem ser verificados no apêndice A.

Consideramos 24 trabalhos que se utilizam de autores que tratam da linguagem, mas que não apresentam no referencial teórico tal preocupação e nem categorias de análise sobre o tema. São os trabalhos: 9, 20, 31, 34, 37, 40, 42, 44, 46, 51, 54, 55, 58, 59, 71, 72, 77, 79, 86, 89, 90, 92, 98 e 100 (conferir apêndice A).

Contabilizamos 39 trabalhos que não contém tópicos específicos sobre linguagem, mas apresentam em seu referencial alguma preocupação e/ou o uso na análise em categorias ou de concepções, isto é, na análise e/ou autores que tratam sobre linguagem como Duval, Vygotsky, Vergnaud, Piaget, Arcavi, Klüsener, Santaella, Gómez-Granell, além de autores como Lins e Gimenez (1997), Usiskin (1995) e Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) que definem concepções para a análise do ensino da álgebra e de sua linguagem.

São os trabalhos: 1, 2, 3, 4, 6, 11, 12, 13, 14, 15, 19, 21, 22, 23, 25, 32, 36, 39, 41, 47, 48, 49, 50, 52, 53, 56, 57, 61, 67, 69, 70, 78, 81, 83, 85, 87, 91, 94 e 96 (conferir apêndice A). Percebemos pelos autores que fundamentam principalmente e de forma geral os trabalhos que o tratamento sobre a linguagem neste não sai da tendência referencialista, no entanto não tinham a preocupação com a linguagem como principal, então vamos aos trabalhos que tem esta preocupação.

Consideramos 16 trabalhos que contém tópicos específicos sobre linguagem, que são: 5, 10, 26, 28, 30, 38, 62, 63, 64, 65, 66, 75, 76, 82, 97 e 101 (conferir apêndice A). São 18 os trabalhos que trazem no título referência ao estudo sobre linguagem, que são: 7, 8, 16, 18, 24, 29, 35, 43, 60, 68, 73, 74, 80, 84, 88, 93, 95 e 99 (conferir apêndice A).

Nos 16 trabalhos com tópicos específicos vemos em alguns o tratamento da linguagem algébrica, linguagem matemática, representação ou escrita, na sua história e/ou por concepções a partir de autores frequentes sobre o assunto como Lins e Gimenez (1997), que aparece em 3, Usiskin (1995) em 5, e Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) em 8, assim como notamos trabalhos que baseiam a parte que tratam da linguagem em Duval, Piaget, Gómez-Granell, Klüsener, destacando Vygotsky que aparece em 4.

Mas na sua maioria são baseados em teóricos já apontados nos referenciais principais e secundários, além dos citados aqui. No entanto, destacamos o trabalho de Todesco (5) que traz Peirce na discussão sobre linguagem; Signorelli (26) que se baseia em Gómez-Granell, que segue a linha teórica de Vygotsky; faro (64) que trata dos ostensivos e não-ostensivos de acordo com Bosch e Chevalllard; e Dalto (82) que tem como principal referencial o behaviorismo, mas quando trata da linguagem se utiliza de autores da linha americana como Usiskin, Kieran e Lee.

Trazemos abaixo uma lista com os 18 trabalhos que trazem no título referência à linguagem, com o mesmo número indicado no quadro do apêndice A, o sobrenome do autor, o referencial teórico principal e entre parênteses o título do trabalho:

7. Jacomelli/Duval (A linguagem natural e a linguagem algébrica: nos livros didáticos e em uma classe de 7ª série do ensino fundamental)

8. Souza/Duval; Artigue (O uso de vários registros na resolução de inequações: uma abordagem funcional gráfica)

16. Santos/ Balacheff (1998). Balachef (1987) (Argumentação e Prova: Análise de Argumentos algébricos de alunos da Educação Básica).

18. Barbosa/Balacheff (Argumentação e prova no ensino médio: análise de uma coleção didática de matemática).

24. Clara/Douady (Resolução de inequações logarítmicas: um olhar sobre a produção dos alunos)

29. Souza/ Teóricos da metacognição; Piaget; Vygotsky (Metacognição e ensino da álgebra: análise do que pensam e dizem professores de matemática da educação básica)

35. Panossian/ Vygotsky; Leontiev e Davidov (Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica de estudantes: indicadores para a organização do ensino)

43. Yamanaka/ Vergnaud; Ponte; Tall e Vinner (Estudo das concepções e competências dos professores: a passagem da aritmética à introdução da representação algébrica nas séries iniciais do ensino fundamental)

60. Santos/ Fiorentini, Miorim e Miguel (1993); Kieran; Lins e Gimenez (1997); Arcavi (Como professores e alunos do ensino médio lidam com conteúdos algébricos em sua produção escrita)

68. Castro/Artigue; Duval (Um estudo exploratório das relações funcionais e suas representações no terceiro ciclo do ensino fundamental)

73. Salgueiro/Artigue; Duval; Kieran; Usiskin (1995); Cury; Lins e Gimenez (1997) (Como estudantes do ensino médio lidam com registros de representação semiótica de funções.)

74. Pepece jr/Artigue; Almouloud; Lins e Gimenez (1997); Cury (Análise da produção escrita de estudantes da EJA em atividades algébricas)

80. Fenandes/Usiskin (1995); Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) (Iniciação a práticas de letramento algébrico em aulas exploratório-investigativas)

84. Santos/Vygotsky; Artigue (Equações no contexto de funções: Uma proposta de significação das letras no estudo de álgebra)

88. Araújo Segundo/Publicações do NCTM sobre representações múltiplas; Vygotsky (Do ensino-aprendizagem da álgebra ao ensino de equações polinomiais do 1º grau: representações múltiplas)

93. Melo/Lévy; Wittgenstein (Dois jogos de linguagem: a informática e a matemática na aprendizagem de função quadrática)

95. Silva/Steffe e Thompson (Aspectos do pensamento algébrico e da linguagem manifestados por estudantes do 6º ano em um experimento de ensino)

99. Fernandes/Ponte; Kaput; Fiorentini, Miorim e Miguel (1993); Kieran; Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005); Lins e Gimenez (1997) (Manifestação de pensamento algébrico em registros escritos de estudantes do ensino fundamental I)

Desses 18 trabalhos, apenas o 16 não contém tópicos específicos, nem demonstra em seu referencial teórico tratar consistentemente de linguagem, apesar de no título conter termos que aparentam um trabalho que considera a linguagem.

Com relação aos 17 restantes, estes estão baseados principalmente nos mesmos autores que se segue no geral, com 4 referenciais baseados em Duval, Lins e Gimenez (1997), e Vygotsky, além de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e Kieran que aparecem em três trabalhos como referências principais.

Mais uma vez apenas o trabalho 93 se diferencia do referencial em geral pelos motivos já explicados.

O referencial destes 18 trabalhos, quando trata da linguagem, segue basicamente o mesmo referencial quando falamos dos 16 trabalhos que trazem linguagem e afins em tópicos específicos, com destaque para o uso dos PCN e Lins e Gimenez (1997) em 7 trabalhos cada; Kieran e Vygotsky, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) em 6 cada; também se destacam Kaput e Duval em 4 e Usiskin em 3. Portanto, a maioria segue a noção de pensamento algébrico - tanto que 3 apresentam o termo em seus títulos e outros três deixam claro no interior do trabalho nas partes analisadas -, e as teorias e teóricos próximos ao construtivismo ou resultados de seu desenvolvimento, ou como temos falado, apresentam uma concepção referencial da linguagem, isto é, tomam a linguagem como uma forma de representação de um conhecimento que se constrói ou se origina de fato em lugares extralinguísticos.

4.2 Referenciais teóricos no Brasil

Compreendemos, então, ser necessário analisar os principais referenciais utilizados no Brasil percebidos no tópico anterior, onde identificamos as linhas francesa, americana e brasileira, além do uso de documentos oficiais brasileiros e de concepções, teóricos e teorias nos referenciais principais e secundários que não se encaixam nas linhas consideradas. Com relação aos documentos oficiais realizaremos uma análise destes no tópico 4.3 deste capítulo. Quanto às concepções identificadas nos referenciais secundários – pensamento algébrico, construtivismo e *Early Algebra* -, voltaremos a abordar durante esta tese.

Percebemos nos referenciais principais algumas teorias, onde não identificamos autores específicos, como as que tratam sobre o uso de jogos na matemática, sobre as TIC, da história da matemática, as histórico-culturais, do behaviorismo, da fenomenologia e da metacognição e estilos cognitivos. É complicado definir tais tendências em uma concepção essencialista e/ou referencial, por se tratarem de um conjunto de teóricos sobre os quais demandaria um esforço maior ainda para perceber suas concepções teóricas. Por exemplo, o trabalho de Melo (93) se utiliza além de Lévy e de outros teóricos das TIC, mas o próprio autor da dissertação se baseia principalmente em Wittgenstein, que o coloca fora da tendência essência/referência. Outro exemplo é o trabalho de Dalto (82), que se utiliza do behaviorismo, mas a própria tese se utiliza de um referencial secundário dentro da tendência aqui analisada.

A única que talvez possamos colocar diretamente dentro destas concepções é a que trata da metacognição e estilos cognitivos, mas mesmo assim não podemos determinar. Com relação aos teóricos que tratam de jogos, TIC e história da matemática, notamos que geralmente são trabalhos de cunho metodológico-educacional, isto é, são propostas de ensino diferenciadas.

Quanto aos trabalhos que tratam de fenomenologia, já dissemos que usam para análise histórica, e que está dentro de uma concepção idealista sobre a qual já falamos no capítulo 1, mas vale acrescentar que os trabalhos que se apoiam na fenomenologia são de Fabiane Mondini, Dissertação e tese, (52 e 92), respectivamente, além do trabalho de Figueiredo (54). Na dissertação de Monidini (2009, p. 29) é revelado que

> em termos de proporção, se tomarmos a seguinte afirmação como metáfora: "a Álgebra é tão importante para a Matemática como a Matemática é para a Física", podemos entender que, do mesmo modo como a Matemática dá sustentação à Física, em termos de Linguagem, de estruturas e concepções teóricas, a Álgebra sustenta, explicita e fundamenta inúmeros conceitos nucleares da Matemática. Com ela há uma nova organização estrutural da Matemática[37].

Notamos uma compreensão próxima a uma concepção essencialista, pois compreende a álgebra como um fundo comum de diferentes partes da matemática, e não como um conhecimento fora deste, ou podendo ser usado como comparação. Como se a álgebra fosse a linguagem ou a forma e revela alguns conceitos e/ou conteúdos matemáticos.

Com relação aos teóricos histórico-culturais identificamos três trabalhos, os de Lemes (75), Oliveira (83) e Panossian (97). Os três trazem um estudo histórico para colaborar na análise do ensino da álgebra, mas diferente dos que colocamos como história da matemática, utilizam uma teoria própria para tal. No caso do trabalho Oliveira (83), ele se utiliza de três teorias, a perspectiva histórico-cultural da matemática - que tem vários autores da história da matemática, com destaque para Fiorentini, Miguel e Miorim (1993) -, também usa uma teoria de cunho antropológico chamada de "fundos do conhecimento", e ainda uma que relaciona o estudo cultural à educação chamada de "pedagogia culturalmente relevante". Mas quanto à álgebra se utiliza principalmente da linha americana em seu referencial teórico. Os outros dois trabalhos seguem uma linha mais próxima de Vygotsky, ligados a uma linha teórica chamada de "movimento lógico-histórico" que resultou em um livro chamado "Do movimento lógico e histórico à organização do ensino: o percurso dos conceitos algébricos" de Maria do Carmo de Sousa, Wellington Lima Cedro e Maria Lucia Panossian, que é autora do trabalho 97. No trabalho Lemes (75), a relação com Vygotsky é diretamente declarada. No trabalho de

[37] A metáfora utilizada pela autora é do Prof. Irineu Bicudo.

Panossian (97) há um destaque maior para Davidov, e ainda para o materialismo histórico-dialético de Marx. Já apresentamos a relação entre Vygotsky e as concepções essencialista e referencial, bem como, com o construtivismo de Piaget. Estes dois trabalhos quando tratam de álgebra se utilizam das linhas americana e brasileira.

Voltando para as referências destacadas no tópico anterior identificamos algumas teorias e teóricos, além de Piaget e Vygotsky. Temos nos referenciais principais: o modelo 3UV de Ursini, a modelagem matemática, Simon, Ausubel, Ponte, Polya, Romberg, Shulman, Steffe e Thompson, Campbell e Zazkis, Arcavi, Cury, Tall, Cortés e kavafian, Wu, Hart e Papert. E nos referenciais secundários: Perrenoud, Coll, Bachellard, Radford, Gómez-Granell, Dienes, Dewey, Kamii, Bruner e Peirce.

Faremos então breves comentários sobre estes autores e as teorias usadas nos trabalhos analisados. Já abordamos no capítulo 2, brevemente, sobre Peirce e Dewey. No capítulo 1 sobre Ausubel, Simon, Perrenoud, Coll, Kamii e Bruner e a relação ou influência com o construtivismo piagetiano.

Papert criou uma teoria denominada construcionismo que analisa a construção do conhecimento por meio do computador, influenciada principalmente em Piaget e Vygotsky. Dienes foi um matemático húngaro-canadense que se dedicou ao ensino da matemática e está relacionado ao construtivismo piagetiano, principalmente quando este propôs o ensino de lógica para crianças com uso de blocos[38]. Gómez-Granell é da linha construtivista, sendo influenciada por Piaget e Vygotsky e escreveu sobre linguagem na educação matemática. Radford é um teórico canadense, que tem realizado um trabalho sobre álgebra bastante profundo, analisando sua história, epistemologia e possibilidades educacionais. Está ligado à linha de pensamento de Vygotsky. Ponte é um educador matemático português que escreve sobre diversos assuntos da área, mas que nos trabalhos, aqui analisados, é usado principalmente quando se refere a álgebra, que demonstra estar alinhado ao pensamento algébrico americano, como vemos em Ponte, Branco e Matos (2009).

Ursini elaborou um modelo chamado 3UV, que significa 3 usos da variável, como incógnita, como número genérico e com variáveis relacionadas. Este é um modelo de ensino que relaciona pensamento e linguagem, apresentado na obra “Enseñanza del álgebra elemental: una propuesta alternativa” escrito por Sonia Ursini, Fortino Escareño, Delia Montes e María Trigueros, publicado em 2005 pela editora Trillas do México, que pelo que pudemos perceber pelos trabalhos aqui analisados, que a tomam como referência, busca trabalhar com as diversas

[38] Conferir DIENES, Zoltan Paul. **Lógica e Jogos lógicos**. 2. Ed. Ver. São Paulo, EPU; Brasília. INL, 1974.

formas de representação e de atividades consideradas algébricas nos moldes semelhantes a noção do *Early Algebra*.

Já abordamos sobre a tendência da modelagem matemática no capítulo 1. Mas podemos acrescentar que pelas leituras dos autores usados nos trabalhos analisados aqui, como Biembengut, Hein, Bassanezi e Barbosa, não percebemos o uso da linguagem como fonte de produção de sentidos, até por que a maioria dos trabalhos espera que os alunos construam linguagens para explicar situações-problema.

Além de Polya, que já abordamos no capítulo 1, Romberg também trabalha com a resolução de problemas matemáticos. Polya publicou a obra “A arte de resolver problemas” de 1945 e Romberg o artigo “Perspectives on Scholarship and Research Methods” em 1992, bastante usados nos trabalhos observados.

Steffe e Thompson apresentam um experimento de ensino que se aproxima aos moldes construtivistas. Cortés e Kavafian apresentam um estudo de análise de erros de alunos em equações baseados em Vergnaud. Cury também teoriza sobre análise de erros baseada pincipalmente na análise do discurso. Campbell e Zazkis realizaram uma pesquisa para identificar a cognição e o ensino de professores da disciplina teoria dos números. Tall faz um estudo sobre o desenvolvimento cognitivo da álgebra e se aproxima dos estudos de Piaget. Wu e Hart apresentam propostas de ensino. Wu destaca o papel da fração no ensino de matemática, tomando esta como medida e utilizando-a para a introdução de álgebra. Hart é uma psicóloga e trabalha com a matemática no ensino fundamental, que tem proposto metodologias de ensino de matemática, guiada por princípios piagetianos. Arcavi é um educador matemático que tem realizado um trabalho bastante original, com destaque ao estudo sobre símbolos algébricos. Pela obra em que tivemos acesso - Arcavi (1994) - percebemos aproximação com a noção de pensamento algébrico.

Shulman é um psicólogo educacional, bastante frequente nos estudos sobre formação de professores, que tem desenvolvido uma teoria própria sobre saberes docentes e o conhecimento pedagógico do conteúdo, ou seja, ele uniu a importância de compreender o conteúdo em sua maneira pedagógica para que possa ser ensinado. Shulman elaborou reflexões para gerar nos professores e em seus formadores esta necessidade, mas não se afasta ou critica os padrões aqui apresentados.

Bachelard é um filósofo e epistemólogo que tratou do desenvolvimento da ciência em geral, mas que é usado nos trabalhos em que foi encontrado como referência devido à sua análise sobre obstáculos epistemológicos que desenvolveu com relação à ciência, mas que foi adequada, principalmente por Brousseau, para análise de obstáculos de aprendizagem, que é a maneira mais comum em que é usada nos trabalhos analisados.

Tendo feito algumas considerações sobre teorias, teóricos, é importante fazermos alguns apontamentos sobre as linhas aqui indicadas por francesa, americana e brasileira. Com relação a francesa já fizemos no capítulo 1, mas destacamos uma entre as teorias presentes na didática da matemática francesa que é amplamente utilizada nas pesquisas aqui analisadas, que é a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Esta teoria se diferencia do restante das teorias da didática matemática francesa, mas mantém seu vínculo com o cognitivismo, tanto que é considerada uma teoria psicológica cognitivista. Duval em sua teoria aborda a relação entre o simbolismo e o pensamento humano, estudando assim os registros de representação que o ser humano efetiva na aprendizagem matemática, dando destaque para o estudo sobre o ensino de álgebra. No primeiro capítulo de sua obra "semiósis e pensamento humano", que temos acesso em português pela edição de 2009, vemos que Duval utiliza pressupostos de Peirce, Vygotsky e Piaget, para fundamentar sua teoria.

Quanto à linha americana, já dissemos no capítulo 1 que há uma forte influência do construtivismo piagetiano em autores como Simon, Gagné e Bruner, que são, juntamente com Ausubel e Dewey as bases do NCTM, que orienta o ensino de matemática e álgebra, tendo desenvolvido as concepções de pensamento algébrico e o *Early Algebra*. O NCTM lança coleções de artigos sobre assuntos específicos quatro vezes por ano. Uma das coleções de 1988, que tratou de álgebra, foi organizada por Arthur Coxford e Albert Shulte e lançada em no Brasil 1995 e se tornou uma das grandes referências no assunto no Brasil. Faremos uma breve análise sobre os artigos de Usiskin, Booth e Kieran presentes nesta obra no subtópico 4.2.2, pois são os autores mais citados desta nos trabalhos aqui analisados.

Quanto à linha brasileira faremos também uma breve análise sobre Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) no subtópico 4.2.3 e de Lins e Gimenez (1997), subtópico 4.2.4, pois também foram os mais citados nas dissertações e teses analisadas. Apresentaremos no próximo subtópico (4.2.1) uma análise do livro "El carácter algebraico de la aritmética" de Schliemann, Carraher e Brizuela, pois os mesmos unem autores de três países diferentes, da américa latina aos EUA, estão relacionados à noção de pensamento algébrico e o *Early Algebra*, e estão declaradamente baseados no construtivismo piagetiano, além de ter aparecido como referência de alguns trabalhos. A obra analisada é de 2011 e ainda não foi traduzida para o português.

4.2.1 “El carácter algebraico de la aritmética” de Schliemann, Carraher e Brizuela de 2011

Alguns autores apontam para uma essência por trás da álgebra e da aritmética, como vemos no livro “El carácter algebraico de la aritmética” de Schliemann, Carraher e Brizuela de 2011, que têm declaradamente uma fundamentação teórica construtivista piagetiana e utilizam o método clínico piagetiano em suas pesquisas. A concepção essencialista deste livro é representada pela relação que há entre álgebra e aritmética, ou de que há um *caráter algébrico* por trás da aritmética. Os autores se apoiam no construtivismo que é uma teoria educacional baseada na ideia de um ensino por descoberta e por construção espontânea. O construtivismo não rechaça a escolarização, mas se aproxima da ideia de que a escola pode repetir a prática cotidiana e assim o aluno construiria na escola um conhecimento da mesma forma que construiria em seu cotidiano.

Schliemann, Carraher e Brizuela (2011), no prefácio, afirmam que é preciso considerar a aritmética como uma parte da álgebra. Essa ideia é aceita de forma unânime entre os matemáticos, pois desde Peano, é aceito que a construção de núemro é algébrica, no entanto, estamos analisando aqui a questão do ensino, e não puramente matemática. Tal caráter cremos que de fato existe, pois como afirma Wittgenstein (OF, §167), “uma equação algébrica como uma equação entre números reais é, com certeza, uma equação aritmética, já que alguma coisa aritmética está atrás dela. Mas algo está atrás da equação algébrica de uma maneira diferente da que está atrás de 1 + 1 = 2”. Nesta pesquisa tratamos da construção do conhecimento algébrico escolar e é evidente que cremos haver uma relação entre álgebra e aritmética, o que duvidamos é que tal percepção seja possível a alunos que não foram iniciados em certos aspectos da linguagem matemática ou que não foram apresentados a certas linguagens matemáticas, como a álgebra. A essência existe, mas para quem já domina vários níveis e tipos de linguagem e tal essência é construída, pois de fato o que há são apenas semelhanças de família.

A concepção essencialista em Schliemann, Carraher e Brizuela (2011) estimula a estes autores verem exemplos e temas isolados como instâncias de ideias e conceitos abstratos. Nesse sentido exemplificam dizendo que a soma é uma forma de calcular, mas que também é uma função com propriedades gerais, assim como a multiplicação por 2 é uma tabela de dados, mas também uma relação que atribui a um conjunto de valores iniciais um conjunto único de valores finais, ou seja, é uma função e poderia ser representada de uma forma algébrica, como vemos na sequência a seguir:

$$0 \rightarrow 2 \times 0 = 0$$

$$1 \rightarrow 2 \times 1 = 2$$

$$2 \rightarrow 2 \times 2 = 4$$

$$3 \rightarrow 2 \times 3 = 6$$

$$4 \rightarrow 2 \times 4 = 8$$

$$5 \rightarrow 2 \times 5 = 10$$

...

$$a \rightarrow 2 \times a = 2a$$

Os autores acreditam que nesse caso, o aluno pode deduzir a noção de variável, tomando as tabuadas como funções com variáveis dependentes e independentes. Eles partem da ideia de que se apresentaria os dados numéricos, já conhecidos da aritmética, como 2×0 é zero, 2×1 é 2 até que o aluno possa por conta própria deduzir que $2 \times a$ é $2a$. Nesse sentido, o aluno descobriria que há uma relação que se mantém, onde um dos fatores da multiplicação, no caso *2*, permanece e o outro fator varia e esse valor qualquer pode ser representado por uma letra. Os autores creem que mesmo que o aluno não chegue a um símbolo para representar o conceito de variável, pode formar em sua mente tal conceito, ou seja, que ele teria uma estrutura cognitiva para tal conceito, bastando uma simbologia para referenciá-lo. Dessa forma, se o aluno não deduzisse, poderia compreender o significado da expressão: $a \rightarrow 2 \times a = 2a$.

Comparando as expressões “2 + 2 = 4” e “a + a = 2a”, onde estariam essas semelhanças? Parece, de fato, que há uma essência por trás da álgebra e da aritmética. Porém, o que analisamos principalmente é a compreensão para o aluno e não o que vemos depois de já se dominar, tanto a aritmética, quanto a álgebra. De fato, é verdadeiro que $2 \mathrm{x} a = 2a$ é uma representação generalizada da tabuada de *2*, onde *a* pode representar qualquer número, mas daí o professor esperar que aluno sozinho chegue a essa conclusão, parece-nos equivocado. Compreendemos que o aluno necessita do exercício do uso desta nova linguagem para compreender tal relação. A linguagem algébrica terá sentido para o aluno em séries posteriores, depois de ter sido colocado em contato com diferentes exemplos de cálculos com variáveis. Não descartamos a possibilidade destes tipos de relações, como entre álgebra e aritmética, mas fazemos estas relações a partir de um contato com vários exemplos deste tipo, ou seja, a formação do conceito não ocorre por uma descoberta que o aluno pode vir a fazer, mas está no uso que se faz em diversas situações.

Desse modo, o exemplo dado seria apenas uma das diversas situações que poderiam ser utilizadas, além do que, a diferença crucial entre a teoria construtivista em que se baseiam Schliemann, Carraher e Brizuela (2011) neste livro e a epistemologia do uso não é a questão do uso, pois poderia se argumentar que o construtivismo também defende diversos usos, mas a questão do uso na epistemologia de Moreno tem mais destaque devido ao seu ponto fundamental, que é de que a construção de conceitos está na linguagem, enquanto que o construtivismo entende que esta construção ocorre por meio de estruturas cognitivas relacionadas ao meio físico e social e coloca a linguagem apenas como uma referência para estes conceitos, como o conceito de variável, no exemplo dado pelos autores.

Schliemann, Carraher e Brizuela (2011, p. 20) deixam claro sua intenção ao dizer no prefácio que "À primeira vista, pode parecer que os problemas que temos dado para as crianças resolverem são aritméticos. Porém, vendo-os mais de perto, o leitor notará seu caráter algébrico. As categorias *aritmética* e *algébrica* não são mutuamemte exclusivas"[39].

Schliemann, Carraher e Brizuela (2011, p. 109-112) exemplificam mais uma vez a ideia da soma como função. A pesquisa, neste caso, é realizada com crianças de 8 e 9 anos de idade. Para os autores uma soma deixa de ser simplesmente uma soma se ela deixar de ser vista apenas como uma operação binária entre números e for vista como uma operação sobre um conjunto de números. Eles destacam, ao narrar sua pesquisa, que já haviam na semana anterior trabalhado com a turma tabelas de multiplicação, porém notaram que os alunos não faziam as relações que eles, os pesquisadores, desejavam, mas apenas completavam as tabelas. Então, um dos pesquisadores decidiu "representar um jogo de números que introduziria a convenção para traçar as correspondências dos valores de um conjunto com outro"[40] (SCHLIEMANN, CARRAHER e BRIZUELA, 2011, p. 110). Ele partia de certos números e dava resultados e a tarefa dos alunos era descobrir que regra estava sendo utilizada. O pesquisador apresentou os seguintes pares:

$$3 \rightarrow 6$$

$$7 \rightarrow 10$$

Depois perguntou qual seria o resultado se começasse com 5, e então um aluno respondeu 8. Porém, ele queria saber a regra e não apenas o resultado. Até que uma aluna respondeu que a regra era "más 3" (+ 3). O pesquisador perguntou qual seria o resultado se

[39] "A primera vista, puede parecer que los problemas que hemos dado a resolver a los niños son aritméticos. Pero, mirándolos más de cerca, el lector notará su carácter algebraico. Las categorias *aritmético* y *algebraico* no son mutuamente exclusivas".

[40] "plantear un juego de números que introducíria la convención para trazar las correspondências de los valores de um conjunto a outro".

começasse com ***n***. Um aluno responde que a regra continua sendo + 3, e continuou perguntando: como ficaria com ***n***? Outro aluno respondeu que é ***n + 3***. Então, o pesquisador escreveu no quadro a regra: ***n* → *n* + 3**. Para o pesquisador, neste caso, o aluno demonstrou ter abstraído o conceito, o que nos parece apressado dizer. Os PCN sugerem um exemplo semelhante.

Este exercício de fato é muito interessante e bastante proveitoso, porém dizer que ele possibilita uma algebrização para as crianças é equivocado. Como já dissemos, não há aí uma descoberta, mas sim a apresentação de uma nova forma de cálculo, que se utiliza das semelhanças do cálculo feito por números, mas que agora se fez com letras, no caso a letra ***n***. Algum aluno pode compreender que ***n*** é uma generalização de qualquer número, mas isto não é garantido para todos. Nesse caso há uma confusão entre a repetição de uma regra com uma generalização algébrica, sendo que a regra teve de ser ensinada antes e a letra ***n*** foi apresentada. Neste caso, confundiu-se um trabalho linguístico do aluno, com uma capacidade natural de generalizar da aritmética para a álgebra. Compreendemos neste exemplo que a regra já existia, pois, os alunos já dominavam adição e o ***n*** foi falado pelo pesquisador, não foi uma descoberta espontânea do aluno, e + 3, foi de certa forma treinado antes, como se quisesse dizer que se soma 3 com 3, 3 com 7 e 3 com 5, ele também pode ser somado com ***n***. Houve um treino, baseado em compreensões já desenvolvidas pelos alunos. O problema não está no exercício, mas na análise que se fez dele e as consequentes concepções que se fundamentam a partir desta percepção. Silveira (2005, p. 145) corrobora com nossa análise ao exemplificar a soma de números inteiros, que é realizada por professores "construtivistas" a partir de objetos como palitinhos azuis e vermelhos, representando números positivos e negativos. Destas atividades se entende que os alunos compreendem o conceito, mas a autora discorda ao afirmar "que todos os diferentes procedimentos de ensinar não deixam de ser regras e são interpretadas pelo aluno".

Não descartamos esta prática, mas entendemos que não há aí uma descoberta, mas sim uma apresentação de uma nova forma de cálculo, que se utiliza das semelhanças do cálculo feito por números. É possível que algum aluno tenha entendido que ***n*** é uma generalização de qualquer número, mas isto não é garantido. O problema não está no exercício, mas na análise que se fez dele e as consequentes concepções que se fundamentam a partir dessa percepção.

4.2.2 "As ideias da álgebra" de Coxford e Shulte de 1995

O NCTM foi uma das referências fundamentais para a construção dos PCN de matemática. Kaput e o NCTM não são baseados declaradamente em Piaget, mas são bastante próximos à teoria de Piaget, principalmente quando apresentam a sua noção de pensamento algébrico. Assim como, vale dizer que o NCTM é usado como referência para os PCN, e também usa igualmente Piaget. Kaput é considerado como uma das grandes referências no que diz respeito à noção de pensamento algébrico, e é um dos grandes referenciais neste tema no NCTM. Para Kaput

> o pensamento algébrico é algo que se manifesta quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, expressas através de linguagens cada vez mais formais. Este processo de generalização pode ocorrer com base na Aritmética, na Geometria, em situações de modelação matemática e, em última instância, em qualquer conceito matemático leccionado desde os primeiros anos de escolaridade. (PONTE, BRANCO e MATOS, 2009, p. 9)

Percebemos claramente que Kaput considera que o pensamento algébrico é uma espécie de essência que se constrói a partir de diversas formas de apresentação de conteúdos matemáticos, seja aritmético, geométrico, e em diversas situações. Assim o pensamento algébrico iria se construindo na mente como uma forma de conhecimento, que ele iria pôr em prática por meio da generalização. Para Ponte, Branco e Matos (2009) nas últimas décadas tem se compreendido que o objetivo de se estudar álgebra no ensino básico é desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. Esta concepção se vê claramente também no NCTM. De acordo com Ponte, Branco e Matos (2009, p. 10), o NCTM compreende que o pensamento algébrico diz respeito ao estudo das estruturas, à simbolização, à modelação e ao estudo da variação.

> o pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções. Inclui, igualmente, a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios.

Ponte acrescenta que para o NCTM o pensamento algébrico entende que a capacidade de manipulação de símbolos é um dos elementos do pensamento algébrico, mas que também é o “sentido de símbolo”, e nisto, inclui a capacidade de interpretar e usar de forma criativa os símbolos matemáticos, na descrição de situações e na resolução de problemas, e deve-se ter também como um dos elementos centrais do pensamento algébrico a ideia de generalização, que é a percepção do que se mantém nos diversos objetos da álgebra. Desse modo, continua Ponte, Branco e Matos (2009), dá-se atenção não só aos objetos, mas principalmente às relações existentes entre eles, buscando assim as generalizações e a abstração, que é o que permite o pensamento algébrico. Dessa maneira, aprender álgebra é ser capaz de pensar algebricamente em diversas situações.

Como já dissemos no primeiro capítulo, na década de 1980 o NCTM chama a atenção para a necessidade de se analisar os progressos construtivistas na educação. O NCTM entra de vez nos estudos acadêmicos no Brasil pela publicação da obra “As ideias da álgebra”, organizado por Coxford e Shulte, que se tornou grande referência para o ensino de álgebra no Brasil, onde temos autores muito citados como, Usiskin, Booth, Kieran, Lochhead e Mestre, House, Chalouh e Herscovics, Thompson, Schoen, entre outros. Destacamos dentre os 33 artigos em Coxford e Shulte (1995), os produzidos por Usiskin, Booth e Kieran, por se encontrarem em maior número nas referências das teses e dissertações analisadas anteriormente. Outros artigos também são utilizados, no entanto, estes já são suficiente para reforçar o que já falamos sobre a concepção de ensino de álgebra da linha americana.

Notamos durante todo o livro uma abordagem permanente da concepção do pensamento algébrico, do *Early Algebra* e a influência do construtivismo piagetiano principalmente na abordagem bastante semelhante do método clínico de Piaget nas pesquisas apresentados durante o livro, assim como situações semelhantes às já mostradas em Carraher, Schliemann e Brizuela (2011), assim como do uso do cotidiano, da geometria, da lógica, etc.

Os autores que se destacam como referenciais teóricos das pesquisas analisadas trazem uma abordagem mais voltada para categorização de concepções: Usiskin no que se refere ao uso de variáveis, Booth às dificuldades com álgebra dos alunos e Kieran às abordagens dos alunos frente a problemas considerados algébricos. Estes autores não tomam declaradamente partido de concepções teóricas – apesar de em alguns momentos percebermos certas inclinações - o que fica mais claro em outros artigos de Coxford e Shulte (1995).

Coxford e Shulte (1995) possui variados artigos baseados no *Early Alegebra*, usando a informática, a resolução de problemas e situações diferenciadas, que nos revelam concepções essencialista e referencial da álgebra, pois a compreendem como uma abstração que requer referenciais externos à linguagem para poder ser aprendida significativamente.

Salman Usiskin é um educador matemático norte-americano. No artigo, em Coxford e Shulte (1995), intitulado “Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis” traz uma discussão sobre concepções da álgebra e do uso de variáveis ou letras, que são muito utilizadas por aqueles que o citam. O autor mostra que os alunos não compreendem uma expressão 3 + ___ = 7 da mesma forma que 3 + x = 7, ou seja, mostra que há uma relação direta entre o conceito de variável e letra e que, geralmente, os alunos não conseguem ver o significado por trás de equações com letras.

Nesse sentido, Usiskin discute duas questões, a primeira diz respeito à necessidade de se ensinar técnicas manipulatórias no ensino de álgebra, que, de acordo com o autor, parecia algo fundamental até o fim da década de 70, mas que depois passou a ser questionada, compreendendo-se que alguns exercícios poderiam ser dispensados. A segunda questão colocada por Usiskin é sobre o momento de se introduzir o ensino de funções, parecendo então defender que conceitos funcionais deveriam ser antecipados, ou seja, mesmo sem a apresentação do sistema simbólica de funções, o que revela as concepções essencialista e referencial. O autor revela que é necessário compreender os diversos usos das variáveis, para compreender as concepções de álgebra, para, então, definir as finalidades da álgebra, ou seja, o autor propõe um esquema de análise, e talvez por isso é tão utilizado pelos pesquisadores.

Usiskin definiu quatro concepções em relação à álgebra no que se refere ao uso da letra ou variável. São elas: 1) álgebra como aritmética generalizada, 2) álgebra como estudo de processos para a resolução de problema, 3) álgebra como expressão de variação de grandezas e 4) álgebra como estudo das estruturas matemáticas.

No primeiro caso, as letras são variáveis algébricas que são vistas como padrões numéricos, onde o aluno precisa traduzir as letras como se fossem números. As letras são generalizadoras de modelos. Entende-se que a partir de várias situações numéricas chega-se à generalização. Por exemplo, como $2.7 = 7.2$, generaliza-se: $ab = ba$. E daí, viriam outras ideias, como a de dobro (2x), por exemplo. De acordo com o autor, nesta concepção há duas ideias-chave, tradução e generalização, pois nesta concepção é necessário traduzir as letras em números, ou ver as letras como a generalização de números. Voltaremos à discussão sobre estas noções no capítulo 5.

O segundo caso é semelhante ao primeiro, no entanto dentro de um contexto de operação ou equação, ou seja, as letras são incógnitas que se referem a números que precisam ser descobertos. Neste caso, a álgebra é um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas. Exemplo dessa situação seria a resolução de problema, como: *Adicionando 2 ao dobro de um certo número, a soma é 12, qual é esse número?* O autor destaca duas ideias-chave também nesta concepção, que são simplificação e resolução, que de acordo com o autor são praticamente sinônimos, pois de certa forma, se simplificam situações, como possibilita a linguagem algébrica, para poder resolver de forma mais simples. Voltaremos também a esta discussão no capítulo 5.

No terceiro caso, a álgebra se relaciona com o conceito de função, neste caso as letras são parâmetros. É o estudo de relações entre grandezas, se mostra, por exemplo, no estudo de fórmulas, como a fórmula $A = bh$, que fornece a área de um retângulo. É, de acordo com o autor, uma concepção difícil para o aluno, pois aqui não se quer saber o valor de x ou que se traduza a expressão, mas é necessário enxergar como uma operação abstrata, ou seja, é um estudo do que realiza as letras em determinadas situações. O autor destaca que alguns educadores matemáticos defendem que o ensino de álgebra se iniciasse por essa concepção pois nesta a álgebra apareceria de fato.

E no quarto caso, a letra representa uma variável como um objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades (grupos, anéis, domínios de integridade, corpos e espaços vetoriais, por exemplo) e o aluno tende a tratar as variáveis como sinais no papel, sem nenhuma referência numérica. O objetivo de tal estudo é que o aluno tenha em mente os referenciais (geralmente números), quando utilizam as variáveis e, ao mesmo tempo, que sejam capazes de operar com variáveis sem precisar voltar ao nível desse referencial. Aqui as letras aparecem como símbolos abstratos com os quais podemos operar. Nessa dimensão da álgebra enquadram-se as operações com polinômios, os produtos notáveis, entre outros. Como exemplo, Usiskin usa o problema que pede para fatorar $3x^2 + 4ax - 132a^2$, onde obteremos como resposta $(3x + 22a)(x - 6a)$. Temos neste exemplo uma concepção para letra que não coincide com nenhuma das concepções apresentadas anteriormente, pois não é uma generalização, incógnita, relação ou função. A letra torna-se assim um objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas propriedades.

Usiskin destaca esse caráter linguístico ao revelar que, nós professores, desejamos que os alunos construam sentidos, trabalhem com a álgebra a partir de referenciais, mas que também é necessário que eles possam operar com letras sem precisar voltar constantemente ao nível dos referenciais, isto é, manipular as expressões e equações algébricas como sintaxes com regras próprias. É interessante a discussão que autor faz sobre o que ele chama de “manipulação e teoria”, que é a discussão sobre a manipulação de símbolos na álgebra, isto é, seria melhor focar o ensino na manipulação ou na abstração? Retornaremos a essa discussão no capítulo 5.

Estas concepções apresentadas por Usiskin não seguem uma sequência cronológica na educação, pois se iniciam no ensino da álgebra no 6º ano com atividades de generalização de padrões numéricos e geométricos presentes em alguns livros didáticos, mas que é pouco colocado em prática, sendo feito mais no início do 7º ano, quando na introdução de equações se vê algo próximo dessas atividades generalizadoras, e em seguida passa-se para a resolução de equações de primeiro grau. No 8º ano apresenta-se a álgebra como uma estrutura, pois as letras são tratadas como sinais no papel, sem nenhuma referência numérica, ou seja, não acreditamos que tal concepção só apareça nos estudos superiores de matemática. No 9º ano, a álgebra volta a ser abordada como estudo de equações, e em alguns livros didáticos, vemos a abordagem como relações entre grandezas, mas que geralmente é colocada em prática mesmo no 1º ano do ensino médio, com o estudo de funções.

Desse modo, podemos dizer que Usiskin é utilizado principalmente devido seu caráter de análise de concepções, ou seja, os trabalhos que o usam geralmente o fazem para categorizar concepções percebidas em sujeitos, textos ou documentos escolhidos, ou para apresentar em um estudo teórico as possibilidades de ensino de álgebra. No entanto, não vimos em nenhum trabalho um destaque para discussão iniciada por Usiskin sobre a manipulação da linguagem algébrica, a não ser para criticar, como Usiskin o faz, mostrando que é um uso que pode estar em extinção.

Lesley Booth é uma educadora matemática australiana. Seu artigo da coleção Coxford e Shulte (1995) denominado “Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra” inicia pela questão do por que é difícil aprender álgebra e defende que a resposta para tal pergunta só pode ser feita identificando os tipos de erros cometidos pelos alunos nesse conteúdo. O artigo se baseia em uma pesquisa realizada no Reino Unido com alunos entre 13 e 16 anos. Esse é um tipo de estudo que também se viu bastante nas dissertações e tese analisadas, e assim alguns trabalhos tomaram esta pesquisa como modelo, ou para ver os tipos de erros observados ou em um estudo teórico sobre o ensino de álgebra.

A autora apresenta quatro categorias de erros identificados nos alunos pesquisados, mostrando pelos exemplos dados, um método semelhante ao clínico piagetiano. Os exemplos usados envolvem geometria e situações cotidianas, em que os alunos são induzidos a formular respostas que respondam às situações, de forma semelhante ao que já mostramos em Carraher, Schliemann e Brizuela (2001), como na situação em que se pede que se encontre o perímetro de uma figura com a quantidade de lados não determinados, mas que medem igualmente 2, ou seja, deseja-se que o aluno chegue ao modelo *2n*, onde *n* ou qualquer letra representaria o número de lados.

Booth se mantém dentro da concepção do pensamento algébrico, mas ressaltamos que a autora faz uma discussão bem relevante sobre a linguagem, e, pelo menos neste artigo em particular, Booth é utilizada muito mais como modelo de pesquisa em ensino de álgebra. Diferentemente de Usiskin que é citado nas obras destacadas apenas pelo seu artigo em Coxford e Shulte (1995), Botth tem outras obras citadas, com destaque para o livro “Algebra: Children’s Strategies and erros” de 1984.

O terceiro artigo em destaque de Coxford e Shulte (1995) é da educadora matemática canadense Carolyn Kieran, que possui diversas obras como referência nas teses e dissertações analisadas, além desta aqui destacada, com ênfase para as abordagens sobre o ensino de álgebra. O artigo em Coxford e Shulte (1995) é "Duas abordagens diferentes entre os principiantes de álgebra", em que a autora analisa a prática de 6 alunos que nunca tinham tido contato com álgebra diante de situações algébricas. Kieran destaca que há duas abordagens preponderantes destes alunos, que ela denomina aritmética e algébrica.

A primeira é quando os alunos resolvem as equações focando as operações dadas, isto é, por tentativa-e-erro, e a segunda, quando resolvem pelas operações inversas, isto é, transpondo termos de membro. A autora parece privilegiar a abordagem aritmética, propondo um avanço com o uso do ensino da resolução pela mesma operação em ambos os membros. É interessante que Kieran destaca que o grupo da abordagem aritmética que busca valores para as letras de uma equação consegue entender que uma letra representa um valor, enquanto que o grupo da abordagem algébrica que faz o cálculo por operações inversas, isto é, buscando compreender o valor do símbolo dentro da equação não consegue ter a mesma compreensão. Kieran oferece um exemplo de um aluno do grupo de álgebra que não consegue resolver a equação 3a + 3 + 4a = 24, pois ao tentar resolver por operações inversas, respondendo da seguinte forma "24 dividido por 4, menos 3, menos..." o aluno se atrapalha com outro termo com *a*, o que a nosso ver mostra a necessidade da compreensão de técnicas manipulativas, enquanto que a autora vê como problema de não abstração de conceitos.

Desse modo, a autora não elogia o aspecto desse grupo de álgebra no que diz respeito ao trabalho mais linguístico, que consiste com o que já dissemos em transpor termos de membro, pois defende que este método causa dificuldades, destacando a abordagem aritmética, que oferece uma visão da equação como equivalência, ou seja, há uma excessiva preocupação da autora com o significado que os alunos dão ao que estão fazendo e não a aplicação exata de regras, sendo que entendemos que estas podem ser associadas ao significado.

Concordamos com o uso da efetuação da mesma operação em ambos os membros, mas não acreditamos que isto possa oferecer a ideia de equilíbrio em equação por si só, pois talvez no fim os alunos irão ver apenas como regras a ser seguidas, e assim destaca-se muito mais o papel das regras do que de abstrações construídas espontaneamente, como veremos no capítulo 5.

Portanto, notamos em Usiskin, Booth e Kieran procedimentos de pesquisa que tem se repetido no Brasil, e a noção de pensamento algébrico, isto é, de que há uma abstração que existe para além da existência de uma linguagem aritmética ou algébrica, principalmente no artigo de Booth com o uso do método clínico piagetiano, e nos três artigos quando percebemos a ideia de conceitos existentes nos símbolos ou por meio deles, o que nos leva a dizer que há uma preocupação com a linguagem, mas que não se compreende que esta é a fonte da produção de significados, mas os significados são sempre buscados fora da linguagem algébrica.

4.2.3 “Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar” de Fiorentini, Miguel e Miorim de 1993

O Artigo foi produzido por Antônio Miguel, Dario Fiorentini e Maria Ângela Miorim, que são pesquisadores brasileiros da UNICAMP em educação matemática. Miguel e Miorim têm suas pesquisas voltadas principalmente para área de filosofia e história e Fiorentini para a formação de professores. Miguel e Miorim têm produções conjuntas sobre história da matemática e na educação matemática, assim como o próprio Fiorentini. No início da década de 90 os três produziram alguns artigos em conjunto, com destaque para a história e o ensino de álgebra. Dois artigos se destacaram nos trabalhos analisados: “Álgebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo?” de 1992 e “Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar” de 1993. Os dois foram publicados pela revista Pro-posições da UNICAMP. Também destacamos o artigo de 2005 “Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico” escrito por Fiorentini, Fernando Fernandes e Eliane Cristovão, publicado no V CIBEM, que apresentou uma boa frequência nos trabalhos analisados, além de trabalhos de Fiorentini, fora do âmbito de educação algébrica, que também aparece bastante, quando trata de metodologias de pesquisa ou sobre a formação de professores, assim como Miguel e Miorim quando tratam da história da matemática em geral. Vale destacar que Miguel tem ultimamente se dedicado também à Wittgenstein, analisando-o juntamente com a desconstrução de Derrida[41], ou seja, é uma interpretação diferente da que temos considerado em nosso grupo de pesquisa (GELIM), mas que mostra, que este filósofo vem crescendo como referencial não só na filosofia, mas também na educação matemática, entre outras áreas.

No texto de 1992, Miguel, Fiorentini e Miorim tratam do ensino de álgebra e geometria antes do movimento da matemática moderna, as orientações deste movimento e as tendências contemporâneas ao artigo. No texto de 1993 os autores focam no ensino da álgebra, onde tentam

[41] Conferir MIGUEL, Antônio. A Terapia Gramatical-Desconstrucionista como Atitude de Pesquisa (Historiográfica) em Educação (Matemática). **Perspectivas em Educação Matemática**, v. 8, p. 607-647, 2015.

"repensar" o mesmo. Buscam explicar a importância da álgebra frente ao desprezo que esta vinha sofrendo, dado o fracasso da matemática moderna. Compreendemos que este texto é bastante utilizado devido às concepções de álgebra e de educação algébrica apresentadas, o que possibilita a análise dos pesquisadores em educação matemática.

Os autores apresentam cinco formas de desenvolvimento histórico da álgebra. A primeira separa a álgebra em clássica ou elementar e moderna ou abstrata, como apresentamos aqui, e toma como critério o momento histórico em que se percebeu que álgebra ultrapassou a preocupação apenas com as equações. A segunda considera o que cada povo ou cultura fez sobre álgebra, e assim, considera-se a "álgebra egípcia", "álgebra grega", "álgebra europeia", etc. A terceira leitura, que foi a que realizamos aqui referente à linguagem, considera o desenvolvimento da linguagem separando em retórica, sincopada e simbólica. A quarta leitura, realizada por Klein, considera a álgebra antes e depois de Viète. A quinta leitura também considera as equações e foi proposta por Piaget e Garcia (2011) e considera os períodos intraoperacional, interoperacional e transoperacional.

Miguel, Fiorentini e Miorim (1992; 1993) também apresentam quatro concepções sobre o conhecimento algébrico, que são formas de se categorizar como se pode compreender a álgebra como um conhecimento construído na história, que são as concepções *processológica*, *linguístico-estilística*, *linguístico-sintático-semântica* e *linguístico postulacional*. A *processológica* compreende a álgebra como um conjunto de procedimentos, com a preocupação principalmente algorítmica para resolver problemas. A concepção *linguístico-estilística* toma a álgebra como uma linguagem criada artificialmente para dar conta dos procedimentos necessários. A terceira concepção, a *linguístico-sintático-semântica* também é uma linguagem criada artificialmente, mas que vai além da necessidade de representar procedimentos, tendo um poder de autodesenvolvimento, devido a sua forma e o significado desta. A quarta concepção é a *linguístico postulacional*, que encara a álgebra como uma ciência das estruturas gerais de todas as partes da matemática e da lógica. Percebe-se que em todas a linguagem se destaca e se assemelha à nossa apresentação no capítulo 3, sendo a última mais voltada para uma questão estrutural e lógica, mas ainda assim é uma explicação de como se construiu a álgebra.

Os autores também apresentam três concepções sobre o ensino da álgebra elementar baseadas na história desse ensino no Brasil, que eles denominam como *linguístico-pragmática*, *fundamentalista-estrutural* e *fundamentalista-analógica*. A primeira concepção, *linguístico-pragmática* compreendia que o papel do ensino da álgebra buscava fornecer um instrumental técnico, que seria superior ao da aritmética, para a resolução de equações ou de problemas que podem ser equacionáveis, e para que o aluno pudesse adquirir essa capacidade era necessário e suficiente primeiramente dominar, mesmo que de forma mecânica, técnicas de manipulação sintática da álgebra, isto é, de transformações na linguagem algébrica. Desse modo, de acordo com os autores, até meados do século XX, predominou no Brasil uma concepção de ensino da álgebra como *cálculo literal*, que só poderia ser desenvolvido por meio de muitos exercícios, pois o aluno deveria aprender a manipular o simbolismo algébrico e depois eram colocados problemas de aplicação da álgebra. A álgebra era, então, compreendida principalmente como generalização da aritmética, isto é, se fazia uma álgebra de números, focando-se na questão de descobrir as incógnitas das equações. Este é considerado o ensino tradicional de álgebra.

A segunda concepção marca as décadas de 1970 e 1980. De acordo com os autores esta é a concepção *fundamentalista-estrutural*, e busca se contrapor a ideia anterior e compreende que o papel do ensino da álgebra seria o de fornecer os fundamentos lógico-matemáticos para toda a matemática escolar, e que isto poderia ser feito tendo como introdução a teoria dos conjuntos, com o estudo primeiramente dos números, porém, de forma estruturada, e já levando tal estudo na direção do estudo de funções, que seria uma forma de apresentar os aspectos algébricos por meio das relações e funções, mas diretamente relacionados aos números, que é o que vemos ainda hoje nos livros, principalmente do primeiro ano do ensino médio, além do que a teoria dos conjuntos inicia o ensino fundamental I e o ensino fundamental II. Desse modo, na educação brasileira saímos de uma tendência linguística, para uma que buscou uma justificativa para tal.

A terceira concepção seria a atual. Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), em um texto mais atualizado, ratificam a tentativa dos textos do início da década de 1990, quando buscam sintetizar as duas concepções que antecederam esta terceira, a *fundamentalista-analógica*, fazendo uso de materiais como blocos de madeira e da balança, com a ideia de equilíbrio das equações. Esta concepção busca recuperar o valor linguístico da álgebra, isto é, aquele aspecto mais instrumentalista, e manter sua justificação, mas não em bases estruturais das operações numéricas, mas sim por meio do uso de modelos analógicos, isto é, de comparações e relações com a geometria com o uso de blocos de madeira e de figuras geométricas, e com a empiria, por meio do uso da balança, pela representação do equilíbrio da equação. Esses usos possibilitariam a visibilidade da álgebra, que é tão abstrata. É uma concepção que valoriza a linguagem, mas se mantém em um caráter essencialista.

Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) compreendem nestas três concepções um ponto problemático em comum, que é o fato de elas reduzirem o ensino da álgebra aos seus aspectos linguísticos e sintáticos, enfatizando mais estes do que o pensamento algébrico e seu processo de significação, que seria a semântica. Os autores compreendem que as três concepções de ensino de álgebra que foram colocadas em prática na educação brasileira priorizam habilidades manipulativas das expressões algébricas, que não consideram que a álgebra se reduza a um instrumento técnico-formal que serve apenas para facilitar a resolução de determinados problemas, e ainda ressaltam que após o movimento da matemática moderna que ocorreu em 1960, a álgebra parece ter retomado esse papel. Fiorentini, Miorim e Miguel (1993, p. 84) destacam que nesse período passou a se pensar em uma “álgebra geométrica”, que não significa a impossibilidade de o aluno aprender pelo simbolismo, mas “acreditar que a etapa geométrico-visual se constitui em um estágio intermediário e/ou concomitante à abordagem simbólico-formal”. Eles não justificam essa análise devido à influência construtivista, mas pelo que apresentamos, vemos na parte retirada literalmente do texto dos autores, quando os mesmos falam em “etapa geométrico-visual” como “estágio intermediário”, isto é, semelhante com o que Piaget considera, de que o concreto é uma passagem intermediária, mas essencial para a chegada ao pensamento formal. E Fiorentni revela em um texto de 1995[42] que a teoria construtivista é uma tendência pedagógica que influenciou o ensino da matemática trazendo-lhe inovações.

Os autores criticam os três momentos, pois consideram que os mesmos reduzem o pensamento algébrico à linguagem algébrica, mesmo que os dois últimos tenham buscado justificações, tais consideram que o simbolismo algébrico já é considerado constituído por essas concepções, e só trabalham sobre as operações em tal simbolismo. Os autores, então, defendem que a solução para tal problema seria colocar o pensamento algébrico em diálogo com a linguagem algébrica, e não subordinado a esta, e assim, entendem, que tanto na história da álgebra, a linguagem sempre foi uma expressão do pensamento algébrico e dessa forma, apresentam 7 situações-problema que, de acordo com eles, caracterizam o pensamento algébrico, que envolvem situações cotidianas, geométricas, que estão na história da matemática e lógicas, considerando que há um pensamento algébrico subentendido nas situações, pois não são situações, que à primeira vista, parecem ser algébricas, consideradas assim, pelos próprios autores, e nesse sentido, eles declaram que:

> [...] se para efeito de análise **suspendermos provisoriamente os aspectos linguísticos dessas situações**, perceberemos a existência de **elementos** que consideramos **caracterizadores do pensamento algébrico**, tais como: percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a

[42] FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. **Zetetiké**, Campinas, v. 3, n. 4, p. 1-37, nov. 1995.

> estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização (FIORENTINI, MIORIM e MIGUEL, 1993, p. 87, *grifo nosso*)

A "suspensão provisória de aspectos linguísticos das situações" e os "elementos caracterizadores do pensamento algébrico" representam as concepções essencialista e referencial na álgebra, pois parece que *se retira a linguagem da frente* para poder se ver o que está por trás, assim como, a linguagem é vista apenas em seu papel de referência ao pensamento algébrico, sendo este considerado pelos autores, um tipo especial de pensamento que pode se manifestar em outras áreas da matemática, assim como em outras áreas do conhecimento (semelhante à noção atual de interdisciplinaridade), podendo ser expresso pela linguagem natural, aritmética, geométrica, além da algébrica em si, podendo então trabalhar com o pensamento algébrico ainda nas séries iniciais, que consideramos, que seria um trabalho indireto, pois tal pensamento algébrico estaria, de certa forma, *escondido*, nas atividades propostas, que seria percebido pelo trabalho com regularidades e generalizações.

No entanto, os autores não negam a importância do simbolismo puramente algébrico, mas compreendem que tal deve aparecer no momento adequado do ensino. Estes autores destacam que o ensino de álgebra deve começar pela resolução de problemas, pois seria de acordo com a ação dos alunos sobre situações, que geraria reflexões que possibilitariam a construção do pensamento algébrico, ou que poderíamos chamar de formal, no sentido piagetiano. Tais autores não citam Piaget como fundamento para a sua concepção de ensino, mas fica evidente a aproximação. Mas mostram clara aproximação com a noção de pensamento algébrico da linha americana.

4.2.4 "Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI" de Lins e Gimenez[43] de 1997

Esta obra foi publicada em 1997 e busca apresentar uma nova perspectiva para o ensino de aritmética e álgebra, diferente, mas considerando os aspectos positivos, de abordagens anteriores, entre estas são citadas a tradicional, a matemática moderna, o método de Montessori e o construtivismo piagetiano. A fundamentação teórica tomada pelos autores está baseada em Vygotsky, mas principalmente nos métodos pesquisados por Davydov. O livro contém 4

[43] Apesar de colocarmos esta obra dentro da linha brasileira, Joaquim Gimenez é um educador matemático espanhol, que tem produzido sobre a formação de professores, metodologias de ensino, e em particular, sobre a contextualização em matemática.

capítulos, sendo o primeiro e o quarto, introdução e conclusão, respectivamente, o segundo sobre aritmética e o terceiro sobre álgebra.

Apesar da separação feita entre aritmética e álgebra nos capítulos, o que os autores desejam mostrar é que há uma relação entre as duas, ou seja, de que se pode trabalhar com aritmética já tratando de aspectos algébricos, que compreendemos como a noção de pensamento algébrico, e pode-se trabalhar com álgebra de acordo com o que os autores chamam de "sentido numérico". Podemos a princípio, ao ver as críticas realizadas pelos autores a outras concepções teóricas, como a piagetiana, ser levados à ideia de que os autores concordam com nosso posicionamento, no entanto, os mesmos partem do que vamos chamar aqui de *aprofundamento* nas concepções essencialista e referencial, pois acreditam que as noções de aritmética e álgebra são tão próximas que podem ser trabalhadas em atividades em que não há uma divisão exata entre as áreas. Desse modo se posicionam contra a ideia do ensino de conteúdos e técnicas, e defendem a construção de significados, que deve ser feita em atividades, semelhante ao que vemos nas noções de competências e habilidades.

Lins e Gimenez (1997) se posicionam contra algumas concepções teóricas, como a piagetiana, e consideram que esta delimitou, pela noção de estágios definidos em idades o momento de se ensinar alguns conteúdos e, assim, aprofundam uma noção de essencialismo e se aproximam do *Early Álgebra*, que entende que há álgebra na aritmética, que há pensamento algébrico em atividades que poderiam ser consideradas aritméticas, ou podem ser desenvolvidas atividades diversas que envolvam o pensamento algébrico, de alguma forma.

Na introdução, os autores fazem uma interessante discussão sobre a matemática da escola e a da rua, onde defendem que há uma diferença muito grande entre as duas, pois há conteúdos que são tratados na rua e na escola, e outros que são tratados exclusivamente na escola, que é algo que concordamos, como veremos no capítulo 5. No entanto, parecem recair em um caráter utilitário para o ensino de matemática na escola, dizendo, por exemplo, que alguns conteúdos não têm significados, já que não têm um uso concreto e que alguns conteúdos não serão utilizados no cotidiano dos alunos. Nesse sentido, os autores não defendem que se traga os conteúdos da rua para a sala de aula, apenas como ponto de partida, mas chegam a defender uma co-existência entre os dois, ou seja, *aprofundam* ainda mais o caráter de contextualização. Compreendemos que a escola é de fato diferente da rua, mas que assim devem ser entendidas, e não que se busque construir uma *essencialização* entre as duas, mas tal essência só seria percebida por alguém com experiência no tratamento de conteúdos das duas, a partir das semelhanças de família notadas.

Ainda na introdução, Lins e Gimenez (1997) buscam apresentar a superioridade de significados sobre conteúdos, exemplificando na aritmética, onde dizem que o ensino desta está cristalizada pelo ensino tradicional, e que geralmente não se busca a co-existência entre a rua e a escola, e assim, criticam o conteúdo, pois geralmente quando se pensa na educação matemática se destaca este, e os autores acreditam que é esta concepção que deve ser modificada, já que, de acordo com os autores, “Qualquer que seja a matemática que se institucionalize como escolar, o mesmo processo de fossilização acontecerá” (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 20). A fossilização no caso é o fato de que sempre os conteúdos se tornariam ultrapassados e obsoletos, e nesse caso deveria se focar em significados. Haveria, para os autores, um conhecimento essencial por trás do conteúdo. Já na introdução os autores iniciam a defesa de uma essência da aritmética e álgebra, onde entendem que uma está na outra e vice-versa, e assim chegam a dizer que assim como se trabalha, por exemplo, com uma aritmética para tratar de dinheiro, deveria se trabalhar com uma álgebra do dinheiro, que de acordo com eles, seriam afirmações genéricas sobre quantidades, e aqui citam um termo que se repetirá por todo o livro, *a lógica das operações*. Lins e Gimenez (1997) acreditam que há uma lógica das operações em comum, tanto em situações ditas aritméticas, quanto algébricas, e assim defendem que “o que dizemos na aritmética deve poder ser dito de forma genérica [...], ao passo que o que dizemos na álgebra deve poder ser dito em casos particulares” (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 30).

No segundo capítulo, sobre a aritmética, apresentam princípios para uma mudança no currículo, que são: reconhecer o valor social da aritmética – onde se enfatizam competências como o cálculo mental, que abordaremos adiante neste capítulo, e o espírito investigativo, onde os alunos são levados a pensar em soluções em situações dadas -, enfatizar os processos de aproximação, da resolução de problemas, em detrimento à operação com algoritmos, reconhecer padrões e generalizações, reconhecer diferentes significados de frações, decimais ou proporção. Portanto, os autores destacam o que eles chamam de justificativas de relações significativas da aritmética, com destaque para o uso de situações reais, e a relativização da importância dos algoritmos, onde defendem que regras e técnicas devem ser descobertas mediantes diversas situações, concretas, gráficas, etc.

A partir de então, Lins e Gimenez (1997) passam a entrar em uma concepção defendida por eles, que é a do *sentido numérico*, onde inicialmente tratam do raciocínio numérico, e a dificuldade com alguns tipos de números, como os naturais, frações, decimais e o zero. Então, apresentam diversas formas de raciocínio relacionadas às atividades algébricas, como o raciocínio figurativo e intuitivo, relativo e absoluto, estruturado aditivo e o pensamento proporcional. Os autores acreditam que tais formas de raciocínio se apresentam em atividades aritméticas, mas que permitem uma abstração progressiva. Tais atividades passam a ser mostradas a partir do tópico “Raciocínio e investigação aritmética”. São atividades que buscam que os alunos percebam padrões ou o que há em comum, e assim os alunos investigariam nestas situações, fazendo conjecturas, refutações, generalizações, pois, de acordo com os autores, cálculos operatórios desempenham um papel apenas instrumental. Aqui vemos uma relação com a concepção referencial, pois o cálculo algorítmico estaria apenas à serviço de conceitos mais abstratos.

Lins e Gimenez (1997) acreditam que se deve buscar alcançar conceitos sem a necessidade de explicitar as regras e que o mais importante é promover experiências e reflexões. Portanto, o conhecimento se dá pela experiência, aprofundando a noção empirista, que mostramos no capítulo 1, pois para o empirismo clássico o conhecimento se dá pela experiência, mas havia uma definição de tal conhecimento, já em Lins e Gimenez (1997) parece haver a noção de que a própria experiência em si já é um conhecimento, que se dá, a nosso ver, pela visão não-conteudista dos autores, e o mesmo vale para as reflexões, que também são vistas como conhecimentos. “O ensino-aprendizagem de ‘aritmética’ deixa de ser o importante. O central é promover experiências potencialmente ricas, que talvez não sejam somente aritméticas (LINS e GIMENEZ, 1997, p. 57).

Para os autores o termo “sentido numérico” é a intuição sobre o aspecto quantitativo de situações. Eles se aprofundam na ideia de cálculo mental e da percepção de padrões em situações diversas. Como em uma tabela apresentada na página 61, em que os autores chegam a falar em uma “forma quase simbólica”. Compreendemos pela epistemologia do uso de Moreno, que mesmo os fundamentos mais elementares da linguagem já são completamente simbólicos, pois já são passíveis de ser simbolizados formalmente, isto é, não há uma fase intermediária na mente humana que estaria em construção, mas podemos dizer que há um conteúdo que ainda não foi totalmente apreendido e que é representado ainda de forma equivocada.

A noção de sentido numérico é aprofundada por Lins e Gimenez (1997) com a apresentação de relações numéricas, como “parte-todo”, “o uno e o múltiplo”, “ordem, situação e separação”, “estimativa” e “aproximação”, e então definem que entendem o sentido numérico sempre em relação a um problema ou situação, e dentro desta concepção, o cálculo tem um papel ampliado, de informação - pois possibilita compreender os tipos de cálculos que existem -, de explicitação de relações numéricas, de instrumentalização, uso de estratégias próprias – pois, permite generalização, análise e síntese – e análise da melhor proposta de resolução. Com relação ao cálculo destaca-se o mental, mas são citados outros tipos, como o cálculo oral, com barrinhas, com regras de cálculo, com calculadora, o aproximativo, etc. Lins e Gimenez (1997) posicionam o cálculo principalmente como um conceito, que permite uma melhor reflexão sobre a situação, mas não aprofundam seu caráter linguístico, isto é, a questão da manipulação de símbolos.

No capítulo 3, sobre a álgebra, Lins e Gimenez (1997) buscam mostrar que a álgebra, também contém um pensamento inerente a ela, o que a coloca sobre a ideia de conteúdo. Para os autores apesar de não haver um consenso sobre pensamento algébrico, há sobre quais são os conteúdos algébricos (equações, inequações, funções, cálculo literal, etc). Os autores buscam durante o capítulo definir uma concepção de pensamento algébrico, buscando mostrar que a álgebra não pode ser reduzida a conteúdos, e que de certa forma, nem deveria haver de fato uma delimitação do que seria álgebra ou pensamento algébrico, pois tanto este quanto o sentido numérico estariam presentes em atividades, que não seriam definidas como esta ou aquela.

Neste terceiro capítulo, Lins e Gimenez (1997), apresentam um estudo sobre concepções de atividade algébrica. A primeira identificada é a concepção de atividade algébrica como calcular com letras, denominada pelos autores de *letrista*, que pode se dividir na compreensão da álgebra por determinadas notações, como letras, ou mais em particular x, y, f(x), etc. e outra que o faz por determinados conteúdos, como equação ou função. Lins e Gimenez (1997, p. 99) entendem que "caracterizações por conteúdo ou notação deixam de fora coisas que gostaríamos de caracterizar como atividade algébrica" e apresentam uma situação numérica em que acreditam estar presente a álgebra, como números iguais divididos pela quantidade de números, e a possibilidade que existe, segundo os autores, de um aluno enxergar um modelo geral nesta situação, que só apresenta números. A segunda concepção é chamada de *internalista*, e entende que o pensamento formal se dá em um determinado período, como o faz Piaget. Mas tal posicionamento é criticado pelos autores, por compreender que este deixa um horizonte muito amplo, onde o próprio pensamento formal seria considerado algébrico, mas ao mesmo tempo por limitar a álgebra a uma evolução da aritmética, ou seja, considerar que a álgebra é uma generalização da aritmética, o que reduziria ainda a atividade algébrica a conteúdos. Os autores criticam Piaget por este não ver em atividades aritméticas uma álgebra por trás, e não acreditar que crianças mais jovens podem fazer álgebra, mesmo que não seja trabalhando com a simbologia tradicional de álgebra. Por isso entendemos que os autores se aprofundam em uma concepção essencialista. Lins e Gimenez (1997) apresentam uma terceira concepção, que eles denominam de *pragmática*, que defende que se deve trabalhar com padrões onde se busca trabalhar com processos de antecipação e transformação. Eles revelam que essa concepção defende um trabalho investigativo e que a proposta deles se aproxima desta, pois os autores defendem que sua proposta busca se trabalhar com padrões (antecipação), mas que destaca o papel das técnicas de manipulação (transformação).

Depois de tratar de concepções de atividades algébricas Lins e Gimenez (1997) tratam de concepções de educação algébrica. Eles apresentam três concepções. A primeira também denominada *letrista* ocorre quando os professores resumem a atividade algébrica a um "cálculo com letras". A segunda concepção é a *facilitadora*, onde os professores ainda seguem uma tendência letrista, mas, buscariam *facilitar*, apresentando alguns elementos, como situações concretas ou material concreto, associando a álgebra a situações reais e à geometria. Os autores discordam destas duas concepções, pois a primeira ignoraria que apenas as letras não podem ter significado algum, e que necessitaria ser colocado em um contexto que promovesse sentido, e a segunda acredita erradamente que a passagem de um campo semântico a outro se dá de modo suave, seja por abstração, generalização ou qualquer outro processo que sugira uma relação de ligação entre o real e o abstrato. Para os autores uma concepção mais adequada para a atividade de ensino de álgebra precisa levar em consideração a produção de diferentes significados para a mesma e tais significados produzidos devem ser investigados e justificados. Esta seria a terceira concepção apresentada pelos autores, que é a *modelagem*, é quando os professores propõem atividades concretas, sendo estas o ponto de partida. Assim, as atividades escolares seriam atividades de investigação de situações reais, e dessa maneira, a álgebra tornar-se-ia um instrumento de leitura das situações reais, não sendo o objeto primário de estudo. Nessa concepção os resultados do ensino e aprendizagem não seriam perceptíveis de imediato e se tentaria fazer com que os alunos utilizem a álgebra como uma forma de organizar o mundo, e aqui se foca a ideia de aprender na ação, semelhante ao construtivismo piagetiano. Os autores defendem que os professores deveriam colocar situações abertas em que eles próprios se engajariam para resolver, ou seja, eles se envolveriam juntamente com os alunos para resolver as situações. Lins e Gimenez (1997) acrescentam a esta concepção a teoria de Davydov, para quem a atividade algébrica tem seu ponto de partida na atividade de lidar com relações quantitativas. Tais relações seriam o início da álgebra já em ação na aritmética.

Nesse ponto os autores apresentam a diferença entre generalização e genérico, onde a primeira seria apenas um padrão que é percebido em situações, isto é, parte-se do particular para situações em geral, mas genérica seria a situação em que se pode perceber conceitos gerais, isto é, o geral é aplicado às situações particulares. E este seria objetivo, trabalhar com concepções genéricas, e não apenas com generalizações. Portanto, o genérico seria o abstrato, o significado, a essência compreendida, seja qual for a situação.

Como já dissemos os autores se fundamentam em princípios Vygotskyanos, e talvez aqui resida a explicação para as críticas à Piaget, pois há uma divergência sobre alguns pontos entre as teorias de Piaget e Vygotsky. Já destacamos aqui que Vygotsky enfatiza o papel do aspecto social, da comunicação e da linguagem, mas de modo geral, essa ênfase ainda se encontra alicerçada nas concepções essencialista e referencial. Isso leva os autores a enfatizar o papel da linguagem e do aspecto social, revelando que o pensamento humano se dá primeiramente no plano social, assim como destacam o papel do professor, como aquele que deve intervir no ensino, evitando que o aluno fique a "adivinhar" nas atividades, mesmo que em alguns momentos, como já citado, os autores sugiram que o professor se coloque no mesmo patamar do aluno, ao pesquisar sobre uma situação. Apesar da concordância com alguns aspectos apontados, nosso referencial teórico e nossa crítica às concepções essencialista e referencial nos faz perceber, como já mostrado ao longo desta análise, que os autores se mantém mais próximos destas concepções – em alguns momentos se mostram bem inseridos – do que afastados dela.

Os autores usam Davydov para corroborar com as ideias de sentido numérico, lógica das operações e a noção de genérico. Os autores nos dizem que "o trabalho de Davydov estabelece uma raiz comum para a álgebra e a aritmética, e é importante explicitar que essa raiz comum é o trabalho com relações quantitativas" (LISN e GIMENEZ, 1997, p. 120). Depois os autores se aprofundam em Davydov, e partem para construir uma proposta própria. Nesse sentido, como eles mesmo afirmam, vão além de Davydov, pois este, de acordo com os autores, acreditava que quando se falava das relações quantitativas, estava se tratando de algo próximo a número, e os autores já pensam que se pode ir além, e que os alunos estão produzindo significados, que são tão genéricos, que não se pode definir como alguma coisa, pois são conceitos que não podem ser definidos. Abordaremos sobre a produção de significados no próximo capítulo, e por que estes podem ser considerados vagos, mas não no sentido mentalista, que aqui parecem supor os autores. Eles sugerem que se deve levar os alunos a falar sobre e nas situações propostas em sala de aula. Nesse sentido, percebemos que esta proposta se assemelha a algumas construtivistas.

Na página 123 são propostas atividades, como "Em um certo jogo, Júlia completou 12 pontos em duas jogadas. Na primeira ela fez 17 pontos. O que aconteceu na segunda jogada?". A questão é sobre números negativos, mas como uma criança que nunca estudou estes números negativos resolveria? Os autores defendem que se busca ver nos alunos uma noção de número negativo e não necessariamente a escrita do mesmo, assim como pode acontecer com letras que representam alguma coisa em situações dadas. As crianças poderiam entender estas situações?

Talvez sim, mas por que seguem algumas regras e técnicas já conhecidas e não por que construíram abstrações ou perceberam uma essência subjacente.

Então é apresentada a situação dos tanques em que se mostra um em que falta 9 baldes para encher e outro em que falta 5 baldes. É uma atividade nos moldes da clínica piagetiana em que se busca tirar noções algébricas da situação apresentada, bem como vemos afirmações diferentes dos alunos consideradas dentro de um mesmo aspecto. A proposta se desenvolve utilizando principalmente o exemplo dos tanques, e então são feitas algumas definições sobre atividade algébrica, álgebra e conhecimento que se encontram dentro das concepções criticadas em nosso trabalho. A noção de "aprender a aprender" já citada aqui aparece em Lins e Gimenez (1997, p. 149), quando dizem que "os alunos podem ir desenvolvendo a consciência de seus próprios processos cognitivos, ainda que em relação a um aspecto particular desses processos".

Lins e Gimenez (1997, p. 151) defendem o pensamento algébrico como uma representação da aritmética. "Pensar algebricamente [...] é produzir significado para situações em termos de números e operações aritméticas". Os autores alertam para a importância da manipulação formal, que de acordo com eles estaria presente na caracterização do pensamento algébrico, e que eles evitam uma convenção sobre o mesmo de forma muito genérica, pois entendem que é necessário destacar as propriedades dos números e das operações, dentro das atividades desenvolvidas. No entanto, logo na sequência ao apresentar os dois objetivos de seu projeto de educação algébrica - que a saber são: permitir que os alunos sejam capazes de produzir significados para a álgebra e que desenvolvam a capacidade de pensar algebricamente - os autores revelam o seguinte: "pensamos que o desenvolvimento de habilidades 'técnicas' (domínio de técnicas manipulativas, por exemplo) deve ser uma consequência desses dois pontos", isto é, a manipulação da linguagem algébrica é vista como consequência dos dois objetivos assinalados, que são a produção de significados e o pensar algebricamente, o que demonstra o caráter referencial da proposta.

Compreendemos que o significado se produz juntamente com a linguagem, e que não há uma separação entre estes. Considera-se, geralmente, que o sentido não pode vir apenas pela linguagem escrita pois esta não teria sentido, mas qual seria o sentido para o aluno ficar vendo dois tanques que faltam tantos baldes para completar? Lins e Gimenez (1997, p. 156) reforçam a ideia de sentido quando dizem que os "exercícios só podem ser eficazes caso os alunos compreendam a natureza do que estão fazendo, para saber que, naquele momento, trata-se de praticar um certo conjunto de técnicas, mas que essa prática está inserida em um quadro maior, e que ela não se justificaria em si mesma".

Para alguns alunos isto pode fazer tão pouco sentido quanto aprender regras sintáticas. Não negamos a utilidade pedagógica no uso de situações como esta, mas não concordamos com a ideia de que a linguagem não possa oferecer significados também. Na verdade, são situações diferentes, são jogos de linguagem diferentes, que apresentam semelhanças de família que apenas com o tempo são claramente percebidas, e construída, então, uma essência. Esta não existe *a priori*.

4.3 Documentos oficiais

Neste tópico faremos análise de documentos oficiais, dos PCN produzidos no fim da década de 90 à BNCC, que está em andamento. Nossa análise será mais detida nos PCN devido este ser o documento base, sendo que teoricamente os seguintes se mantém sobre os mesmos fundamentos. Nos PCN as fundamentações teóricas estão mais explícitas, além de haver exemplos de possibilidades de ensino.

4.3.1 Documentos nacionais do ensino fundamental I e II: PCN (1997 e 1998)

Os PCN de toda a educação básica (ensino fundamental I e II e ensino médio), se baseiam em diretrizes legais, como a LDB (lei de diretrizes e bases da educação) e nas DCN (diretrizes curriculares nacionais). No ensino fundamental I há uma crítica a “insistência no trabalho com os conjuntos nas séries iniciais, o predomínio absoluto da álgebra nas séries finais, a formalização precoce de conceitos e a pouca vinculação da matemática às suas aplicações práticas” (BRASIL, 1997b, p. 17).

Os PCN demonstram preocupação com a formalização em excesso no ensino fundamental, mas sugerem como solução *a vinculação da matemática a situações práticas.* Os PCN do ensino fundamental I (1997b, p. 35) defendem que é possível desenvolver uma pré-álgebra nas séries iniciais, mas que tal conteúdo deve ser ampliado nas séries finais do ensino fundamental.

> trabalhando com situações-problema, o aluno reconhecerá diferentes funções da álgebra (como modelizar, resolver problemas aritmeticamente insolúveis, demonstrar), representando problemas por meio de equações (identificando parâmetros, variáveis e relações e tomando contato com fórmulas, equações, variáveis e incógnitas) e conhecendo a “sintaxe” (regras para resolução) de uma equação.

Percebe-se o enfoque na resolução de problemas. Claramente os PCN defendem que tal atividade pode gerar deduções e generalizações, possíveis para a álgebra. Porém, esta teria uma forma diferente de apresentação, pois, agora são letras e não mais números. Os PCN falam na importância de se conhecer a sintaxe, no entanto, pelo contexto da citação e dos PCN em geral, esta sintaxe é entendida como referência dos conceitos que seriam construídos nas situações problema.

Os PCN de matemática do ensino fundamental II dividem suas sugestões em quatro categorias: números e operações, espaço e forma, grandezas e medidas e tratamento de informação. A álgebra aparece praticamente apenas na categoria números e operações.

Na parte que trata da "Organização de Conteúdos" há uma defesa de que os conteúdos devem ser conectados e busca-se dar alguns princípios gerais para tal. Percebe-se aí o caráter essencialista, onde se busca ver relações, uma essência, por trás dos diferentes conteúdos. O conteúdo de álgebra aparece apenas na categoria números e operações, talvez para facilitar a compreensão do leitor ou por que de fato há uma dificuldade em mostrar relações da álgebra com outros conteúdos além da aritmética.

Os PCN do ensino fundamental II tratam primeiramente do terceiro ciclo (6º e 7º anos) e em seguida do quarto ciclo (8º e 9º anos). Na introdução da parte do terceiro ciclo aborda-se o fato de que no 6º ano há uma retomada dos conteúdos vistos nas séries iniciais e tal atividade geralmente não causa tanta animação nos alunos, o que não ocorre no 7º ano, já que neste, há assuntos diferentes. Porém, os PCN alertam para o fato de que a abstração de alguns assuntos, que a princípio podem ser interessantes, passam a causar certa repulsa devido a falta de relação com questões práticas.

Os PCN defendem que os alunos chegam ao terceiro ciclo com bagagem razoável de conhecimentos matemáticos e que é necessário continuar e consolidá-los, porém alerta que "ocorre muitas vezes que esses alunos não conseguem exprimir suas ideias usando adequadamente a linguagem matemática; isso não significa que não tenham construído nenhum tipo de conceito ou desenvolvido procedimentos" (BRASIL, 1998, p. 62). Esse trecho deixa clara a concepção referencial da linguagem presente nos PCN, pois considera que os alunos tenham conhecimentos sem dominar a linguagem de tais conhecimentos, enquanto que em uma análise não-referencial, como a do segundo Wittgenstein, não há como se construir conhecimento fora da linguagem.

Para Wittgenstein, uma palavra ou um símbolo por si só é vazio, ele ganha significado no uso (IF, §432). Nesse sentido, é necessária alguma técnica que permita aplicá-lo para então compreender o significado da palavra ou símbolo. Alguém poderia alegar que o que importa é a compreensão do significado, como se um aluno pudesse não saber o que significa $(a + b)^2$, mas pudesse trabalhar com o seu significado. O problema desse argumento reside na ideia de que tal significado encontra-se em um mundo extralinguístico, ideal, mental ou empírico. Compreendemos que no próprio significado já há uma aplicação linguística. Qual seria o sentido de se pensar na soma de dois quadrados que resulta em um quadrado maior? Seguir tal argumento é o que está levando hoje a uma desvalorização dos conteúdos matemáticos, pois só seria útil ensinar o que fosse útil para a vida e o que pudesse ser contextualizado. Defendemos que os conteúdos matemáticos são construções convencionais que normatizam nossas experiências e que podem também ser utilizados para descrever determinadas situações e colaborar no desenvolvimento de certas técnicas e tecnologias humanas. Por isso concordamos com Gottschalk (2008, p. 92), "que os conteúdos não são meros *meios* para o desenvolvimento intelectual do aluno e, tampouco, ferramentas úteis para a produção de novas experiências (como afirmava Dewey), mas *a condição* para que o aluno possa continuar aprendendo".

Para o problema do ensino e aprendizagem de matemática no terceiro ciclo os PCN apontam que a solução seria, entre outras, "explorar o potencial crescente de abstração, fazendo com que os alunos descubram regularidades e propriedades numéricas, geométricas e métricas" (BRASIL, 1998, p. 63). Por isso os PCN priorizam tanto o desenvolvimento de processos como intuição, analogia, indução e dedução e não um trabalho que destaca o papel da linguagem nesse sentido. Os PCN apontam os objetivos para o terceiro ciclo, no que diz respeito ao pensamento algébrico:

> * reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções;
> * traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras;
> * utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico (BRASIL, 1998, p. 64).

Segundo os PCN a álgebra serve para desenvolver a capacidade de abstração e generalização. Eles compreendem essa possibilidade a partir da estreita relação entre a álgebra e a aritmética. Disso, temos que os PCN percebem a álgebra como um suporte para desenvolvimento de capacidades de síntese e de análise de conceitos, isto é, a álgebra é uma forma de ver de um determinado modo alguns conceitos. Um símbolo (uma letra, por exemplo) representa um número qualquer, ou vários possíveis números (variável), ou um determinado valor em um determinado contexto de valores (incógnita) etc. Tal símbolo ou abstrai uma ideia geral ou generaliza uma ideia mais simples. Nesse sentido, vemos que sempre fará referência a algo.

Gottschalk (2002) defende que não há um caminho natural para chegar a uma determinada forma matemática, que no nosso caso é a algébrica. Não há uma existência *a priori* de álgebra nas mentes humanas, mesmo que sejam conceitos e muito menos, as formas e símbolos. Os conceitos, formas e símbolos da álgebra foram construídos e definidos de forma arbitrária na história e se desenvolveram devido às suas relações internas, conexões e semelhanças de família com outras áreas, como a aritmética. Para que se considere que alguém construiu determinado conceito algébrico é necessário que ele demonstre saber transitar nesse novo espaço, nessa nova gramática que agora lhe é apresentada. Não se pode esperar que o aluno venha a descobrir regras pertinentes à álgebra, mesmo que contenham semelhança com a aritmética, como é o caso da soma e das outras operações fundamentais. As semelhanças podem ser usadas, mas não no sentido de uma existência *a priori*, ou de uma essência pré-existente, mas sim usada, como exemplos de comparação, a fim de facilitar a aprendizagem. Essas relações são possiblidades *a posteriori* e não fundamentos extralinguísticos *a priori*. O caminho para a aprendizagem não é natural, mas convencional.

Nesse sentido, um problema que não tem suas regras para resolução conhecidas, não é um problema, pois necessita de sentido, que só existe se for colocado num sistema conhecido. Wittgenstein (OF §152) observa que "o problema é um problema, no qual a pergunta tem um sentido". Por isso, "É função do professor introduzir as novas gramáticas que vão dar sentido à atividade matemática (GOTTSCHALK, 2002, p. 106)", ou seja, o professor deve apresentar as regras de um novo conteúdo a ser ensinado. Wittgenstein (OF, §152) entende que um estudante que não dispusesse do aparato para responder a uma pergunta que ele não compreendesse o sentido não poderia simplesmente não a responder, pois ele nem sequer compreenderia e aprofunda esta questão ao dizer:

> Um estudante que dispusesse do arsenal da trigonometria elementar e ao qual fosse pedido examinar a equação sen x = x etc., simplesmente não encontraria aquilo de que precisa para atacar o problema. Se o professor, não obstante, espera uma solução dele, está supondo que esteja presente, de uma ou outra maneira, a multiplicidade da sintaxe que tal solução pressupõe, em uma outra forma, na cabeça do estudante – presente de tal maneira que o estudante vê o simbolismo da trigonometria elementar como parte desse simbolismo não-escrito e agora traduz o resto da forma não-escrita para uma forma escrita (OF, §152).

Há uma relação entre álgebra e aritmética e a álgebra pode ser ensinada a partir da aritmética, porém, deve-se entender que são sintaxes diferentes, que podem se apoiar devido às suas semelhanças de família, mas que não há uma essência extralinguística, não há como esperar que o aluno possa por conta própria construir tal relação, mas sim, devemos falar, esclarecer, mostrar e apresentar em um determinado instante a sintaxe algébrica como ela é. Mas os PCN apresentam um ponto de vista diferente:

> No decorrer do trabalho com os números, é fundamental estudar algumas relações funcionais pela exploração de padrões em sequências numéricas que levem os alunos a fazer algumas generalizações e compreender, por um processo de aproximações sucessivas, a natureza das representações algébricas. A construção dessas generalizações e de suas respectivas representações permite a exploração das primeiras noções de álgebra. (BRASIL, 1998, p. 68)

Para o terceiro ciclo, os PCN recomendam que a álgebra não seja dada de fato, mas que ela possa aos poucos ser percebida pelos alunos. É o próprio aluno que iria descobrir, mesmo que ainda não domine a sintaxe, seria possível compreender certos significados:

> É suficiente nesse ciclo que os alunos compreendam a noção de variável e reconheçam a expressão algébrica como uma forma de traduzir a relação existente entre a variação de duas grandezas. É provável que ao explorar situações-problema que envolvam variação de grandezas o aluno depare com equações, o que possibilita interpretar a letra como incógnita. Nesse caso, o que se recomenda é que os alunos sejam estimulados a construir procedimentos diversos para resolvê-las, deixando as técnicas convencionais para um estudo mais detalhado no quarto ciclo. (BRASIL, 1998, p. 68).

Na parte referente ao quarto ciclo, os PCN criticam a ênfase aos conteúdos algébricos abordados de forma mecânica e defendem que deva ser feito por situações-problema do cotidiano e relacionando com conteúdos anteriores, tanto que defendem que ainda se dê bastante importância à aritmética (BRASIL, 1998). Nos objetivos para o quarto ciclo, no que diz respeito ao pensamento algébrico os PCN dizem:

> * produzir e interpretar diferentes escritas algébricas, expressões, igualdades e desigualdades, identificando as equações, inequações e sistemas;
> * resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;
> * observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis (BRASIL, 1998, p. 81).

Permanece muito forte neste ciclo a questão da linguagem algébrica como possibilidade de significado para algo além dela (concepção referencial), a resolução de problemas e a busca por regularidades e a partir delas estabelecer lei (essencialismo), mas percebe-se que já há uma importância maior da sintaxe, com a questão da produção e interpretação das diferentes escritas algébricas, mesmo que não seja um dos objetivos saber manipular as equações ou expressões algébricas, apenas como manipulação de signos seguindo regras pré-definidas.

Os PCN criticam a ênfase aos conteúdos algébricos abordados de forma mecânica e defendem a resolução de problemas do cotidiano e relacionando com conteúdos anteriores. Porém, a álgebra é um conteúdo novo, é uma nova forma de lidar, é uma outra linguagem, não podemos sustentar que ela será compreendida tão facilmente pelos alunos como uma generalização da aritmética, mas é necessário mostrar sua especificidade e a partir do uso com essa linguagem o aluno construirá significados e fará relações.

Percebemos nos PCN a noção de regularidade, mas no sentido essencialista. Compreendemos que percebemos regularidades quando adquirimos a linguagem natural, que é de onde aprendemos as regras de uso, como vemos em Al-saleh (2015, p. 101), quando trata do conceito de regra em Wittgenstein, diz que "é apenas estando atento a estes fenômenos que é possível 'de ver uma vida sinótica do objetivo e do funcionamento das palavras'"[44]. Os fenômenos a que o autor se refere são os fenômenos de linguagem nas formas primitivas de seu uso e a visão sinótica sobre a qual o autor fala é o que entendemos como "ver o que é comum", "perceber a essência", mas para Wittgenstein "a essência está expressa na gramática" (IF, §371), ou seja, ela se mostra no conjunto de regras, é algo dado na linguagem e só poderá ser percebido pela mesma. Não acreditamos que estas regularidades podem inevitavelmente levar a uma produção e leis se não houver um treino para tal.

Posteriormente à apresentação dos ciclos, há um tópico chamado de "Orientações Didáticas" e nele há uma parte dedicada à álgebra. Já no início afirma-se que:

> a ênfase que os professores dão a esse ensino não garante o sucesso dos alunos, a julgar tanto pelas pesquisas em Educação Matemática como pelo desempenho dos alunos nas avaliações que têm ocorrido em muitas escolas. Nos resultados do SAEB, por exemplo, os itens referentes à Álgebra raramente atingem o índice de 40% de acerto em muitas regiões do país. (BRASIL, 1998, p. 115-116)

Os PCN comentam que isto leva os professores a aumentar mais o tempo dedicado à álgebra, mas propondo apenas repetição de exercícios. Não defendemos a unicidade desta prática, pois parece mais eficiente quando se busca alguma forma de motivar os alunos, o que não é possível apenas com uma lista de exercícios, porém a contextualização também não é

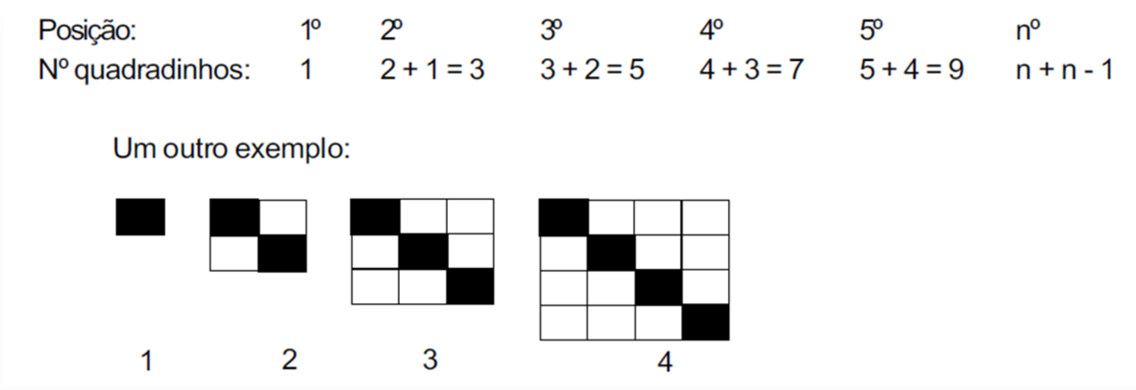
[44] "c'est uniquement en étant attentif à ces phénomènes qu'il est possible 'd'voir une vie synoptique du but et du functionnement des mots'".

uma solução eficaz para todas as situações. Como contextualizar simplificadamente a questão da divisão por polinômios, por exemplo? Assim, devemos buscar todas as formas possíveis de colaborar na aprendizagem. Mas entendemos que o papel da linguagem nesse processo tem sido mal interpretado. Os PCN deixam claro sua preferência:

> é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as manipulações com expressões e equações de uma forma meramente mecânica. (BRASIL, 1998, p. 116).

Nessas orientações didáticas os PCN oferecem algumas situações que representam algumas de suas ideias principais. Um primeiro exemplo (Figura 1), de acordo com este documento, favorece que o aluno construa a ideia de álgebra como uma linguagem para expressar regularidades.

Figura 1– Exemplo de generalização da álgebra nos PCN



Fonte: Brasil (1998, p. 117)

Nessa situação, propõe-se que o professor possa encaminhar uma atividade para que os alunos encontrem a expressão $n^2 - n$ que determina o número de quadradinhos brancos da n-ésima figura. Os PCN defendem que esta é uma situação que permite o aluno ter conceitualizações (deduções) algébricas. De fato, matematicamente a álgebra está presente neste caso, mas isto não pertence à compreensão de um aluno que ainda não conhece o jogo de linguagem algébrico. Para Wittgenstein a compreensão se fortalece no uso das regras ou técnicas apresentadas para determinados contextos ou sistemas linguísticos e aqui temos dois contextos diferentes. As semelhanças são percebidas a partir da apropriação dos jogos de linguagem que se busca comparar.

> *Toda* proposição matemática correta tem de prover uma escada para seu problema, da maneira como o faz a proposição 12 x 13 = 137 – na qual posso subir se quiser.
> Isso vale para proposições de qualquer tipo de universalidade. Suponhamos agora que tenho dois sistemas: Não posso perguntar por um sistema que abarque os dois, já que não somente sou incapaz *agora* de procurar esse sistema como, mesmo no caso de surgir um sistema que abarque os dois sistemas análogos aos originais, percebo que nunca poderia ter procurado por ele (OF, §152).

Um aluno que nunca viu álgebra *nunca poderia ter procurado por ela*.

Outro exemplo dado pelos PCN que visa que os alunos expressem e generalizem relações entre números é a solicitação que adivinhem a regra para transformar números, inventada pelo professor, em um exemplo semelhante ao que já vimos anteriormente, na análise de outras obras, como citamos abaixo:

> um aluno fala 3 e o professor responde 8, outro fala 5 e o professor 12, para o 10 o professor responde 22, para o 11, responde 24 etc.; o jogo termina quando concluírem que o número respondido é o dobro do pensado, acrescentado de 2 unidades ou o número respondido é sempre o dobro do consecutivo do pensado. Poderão também discutir as representações $y = 2x + 2$ ou $y = 2(x + 1)$ e a equivalência entre elas. (PCN, v. 3, 1998, p. 118).

De fato, este exercício é muito instigante. Porém, não concordamos que ele possibilita uma algebrização para as crianças, no sentido de uma dedução natural. Compreendemos neste exemplo que a regra já existe, pois, os alunos, neste nível, já dominam adição e a letra para representação deverá ser falada pelo professor, pois não há como um aluno que nunca tenha visto este tipo de linguagem deduza que uma letra generaliza a ideia de número. A criança já tem algum conhecimento para poder resolver esta questão, e de acordo com Wittgenstein, seria melhor dizer, que o aluno já conhece algumas regras e já domina algumas técnicas e, portanto, não será uma *descoberta espontânea* do aluno, e a regra "o número respondido é o dobro do pensado, acrescentado de 2 unidades ou o número respondido é sempre o dobro do consecutivo do pensado" foi de certa forma treinado antes, como se quisesse dizer que se faz isso com número também pode ser feito com letras. Não criticamos o uso deste problema, mas buscamos analisar em que concepção a utilização deste problema está fundamentada. O uso deste problema ele permite a apresentação de uma nova forma de cálculo, que se utiliza das semelhanças do cálculo feito por números, mas o problema é acreditar que tal exercício pode favorecer uma generalização algébrica espontânea no aluno, pois compreendemos que há uma confusão entre a repetição de uma regra com uma generalização algébrica, sendo que a regra teve de ser ensinada antes e as letras deverão ser apresentadas. Neste caso, pode-se confundir um simples trabalho linguístico do aluno, com uma capacidade natural de generalizar da aritmética para a álgebra.

A ideia de generalização nos PCN existe não só com a aritmética, mas também com a geometria.

> No desenvolvimento de conteúdos referentes à geometria e medidas, os alunos terão também oportunidades de identificar regularidades, fazer generalizações, aperfeiçoar a linguagem algébrica e obter fórmulas, como para os cálculos das áreas. O aluno também poderá ser estimulado a construir procedimentos que levam à obtenção das fórmulas para calcular o número de diagonais ou determinar a soma dos ângulos internos de um polígono. (BRASIL, 1998, p. 118).

Os PCN incentivam que se busque explorar o conceito de variável nos alunos, para que ele não se prenda unicamente à noção de incógnita. A soma é uma forma de calcular, mas também seria uma função com propriedades gerais, assim como a multiplicação por 2 é uma tabela de dados, mas também uma relação que atribui a um conjunto de valores iniciais a um conjunto único de valores finais, ou seja, é uma função e poderia ser representada de uma forma algébrica. Tabuadas seriam funções com variáveis dependentes e independentes. A soma deixa de ser simplesmente uma soma se ela deixar de ser vista apenas como uma operação binária entre números e for vista como uma operação sobre um conjunto de números.

Nesse documento fica clara a tentativa de defender que a partir de situações-problema, através de estimativas, o aluno possa generalizar em uma equação: “Para isso, não é necessário que eles já conheçam as técnicas de resolução de equações do primeiro grau, mas que percebam o novo significado da letra P, agora uma incógnita: $P + P \times 0{,}4 = 11{,}20$”. Percebe-se que a sintaxe fica de fora novamente, o mais importante é o conceito e este pode ser aprendido e usado mesmo sem domínio linguístico. Porém, é válido citar, que mais adiante os PCN reconhecem a importância da sintaxe se referindo a um exemplo.

> A situação-problema citada poderá favorecer o desenvolvimento de um trabalho que visa à simplificação de expressões algébricas. Para tanto, os alunos devem se apropriar de algumas convenções da notação algébrica, como: escrever as constantes antes das variáveis e eliminar o sinal de multiplicação. Desse modo, poderão escrever $P + 0{,}4P$ em vez de $P + P \times 0{,}4$. Para simplificar a expressão $P + 0{,}4P$ eles se defrontarão com a propriedade distributiva: $P + 0{,}4P = (1 + 0{,}4)P = 1{,}4P$. Assim, o aluno resolve mais facilmente a equação $1{,}4P = 11{,}20$, descobrindo qual é o número que multiplicado por 1,4 resulta 11,20. (BRASIL, 1998, p. 120).

Percebemos que aqui está mais presente a questão da manipulação de símbolos e não o uso da linguagem como fonte de significados. Os PCN concluem esta parte defendendo mais uma vez sua concepção referencial ao dizer que

> As atividades algébricas propostas no ensino fundamental devem possibilitar que os alunos construam seu conhecimento a partir de situações-problema que confiram significados à linguagem, aos conceitos e procedimentos referentes a esse tema, favorecendo o avanço do aluno quanto às diferentes interpretações das letras. (BRASIL, 1998, p. 121-122)

Entendemos que é a linguagem que confere significados às situações de aprendizagem e não o contrário. A sintaxe ou as regras não são construídas pelo aluno, como na citação acima, mas são apresentadas a eles.

4.3.2 Documentos nacionais do ensino médio: PCNEM (2000), PCN+ (2002) e OCEM (2006)

Assim como os PCN do ensino fundamental, os PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio) de 2000, também destacam as competências e habilidades, sendo os conteúdos, subservientes a elas. Destaca-se igualmente a necessidade de interdisciplinaridade e contextualização. Quanto à matemática vemos na introdução dos PCNEM a associação com Piaget, quando defendem a contextualização nessa disciplina

> Capacidades que permitam transitar inteligentemente do mundo da experiência imediata e espontânea para o plano das abstrações e, deste, para a reorganização da experiência imediata, de forma a aprender que situações particulares e concretas podem ter uma estrutura geral.
> De outra coisa não trata Piaget quando, a propósito do ensino da Matemática, observa que muitas operações lógico-matemáticas já estão presentes na criança antes da idade escolar sob formas elementares ou triviais, mas não menos significativas. Mas acrescenta, em seguida: Uma coisa é aprender na ação e assim aplicar praticamente certas operações, outra é tomar consciência das mesmas para delas extrair um conhecimento reflexivo e teórico, de tal forma que nem os alunos nem os professores cheguem a suspeitar de que o conteúdo do ensino ministrado se pudesse apoiar em qualquer tipo de estruturas naturais (BRASIL, 2000, p. 76).

No tópico “Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, objetivando a constituição de habilidades e competências que permitam ao educando” são colocados 12 objetivos do PCNEM, entre os quais destacamos, dois pontos que tratam de álgebra:

> • identificar, analisar e aplicar conhecimentos sobre valores de variáveis, representados em gráficos, diagramas ou expressões algébricas, realizando previsão de tendências, extrapolações e interpolações, e interpretações;
> • analisar qualitativamente dados quantitativos, representados gráfica ou algebricamente, relacionados a contextos socioeconômicos, científicos ou cotidianos (BRASIL, 2000, p. 12).

De modo geral, temos que a matemática aqui aparece relacionada às ciências naturais, tendo esta como auxílio, numa concepção empirista da matemática, mas também colocando a matemática como auxílio para representação e interpretação dos dados das ciências naturais. Tanto que o simbolismo algébrico (expressões algébricas), quanto outros simbolismos, como gráficos e diagramas, aparecem como uma ferramenta de identificação, análise e aplicação, em contextos reais. Portanto, a álgebra aparece como uma ferramenta das competências e habilidades, que são categorizadas em três: "representação e comunicação", "investigação e compreensão" e "contextualização sociocultural".

No documento específico sobre "Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias", na parte III do PCNEM, é dito que o "caráter algébrico" é uma *habilidade*, assim como os caracteres gráficos, geométricos, estatísticos e probabilísticos. Aqui percebemos que a álgebra é vista como forma de representação e comunicação, destacando-se assim apenas sua concepção referencial. Na parte sobre o conhecimento matemático, vemos que os PCNEM (2000) defendem que:

> [...] é preciso que o aluno perceba a Matemática como um sistema de códigos e regras que a tornam uma linguagem de comunicação de idéias e permite modelar a realidade e interpretá-la. Assim, os números e a álgebra como sistemas de códigos, a geometria na leitura e interpretação do espaço, a estatística e a probabilidade na compreensão de fenômenos em universos finitos são subáreas da Matemática especialmente ligadas às aplicações (BRASIL, 2000, p. 40).

Nota-se que a álgebra aqui aparece como uma linguagem, e é interessante destacar que os PCNEM avançam na preocupação com a linguagem, mas ainda a mantendo em um aspecto referencial, pois ela é vista como uma linguagem que possibilita modelar a realidade.

Volta-se a falar de álgebra quando se aborda o uso de conceitos matemáticos como exemplos de possibilidade de contextualização e interdisciplinaridade, dentro de um contexto maior que é a necessidade de se aprender competências e habilidades. Dessa forma, este documento compreende que se deve alocar os conteúdos por núcleos comuns, que abrangem temas matemáticos escolhidos de acordo com as habilidades requeridas. Parte-se então da ideia de que há conexões entre os diversos conceitos matemáticos e é partir dessas conexões que devem ser definidos os núcleos comuns. E o primeiro exemplo dado são as funções, que é relacionada com trigonometria, com as progressões, geometria analítica, que apresentam funções de outros modos, assim como o estudo de polinômios está relacionado ao estudo das funções polinomiais. E além das conexões internas, os PCNEM defendem que há relação das funções com âmbitos externos à matemática, e pode se relacionar com o cotidiano, a física, geografia ou economia. Desse modo, o aluno poderá construir o conceito de função.

Portanto, os PCNEM indicam uma álgebra para o ensino médio mais voltada para a contextualização e sua aplicação na realidade do aluno, e que nesse sentido, seus conceitos devem ser buscados em diversas áreas revelando a continuação da concepção essencialista, e ainda tomando sua linguagem apenas em sua função referencial, isto é, como representação de conceitos que seriam extralinguísticos.

Em 2002 foram elaborados os PCN+, que são orientações complementares aos PCNEM. Mantém-se o referencial teórico, e a defesa da necessidade de se ensinar competências e habilidades, além do destaque à contextualização e à interdisciplinaridade. No capítulo 2, em que trata da área "Ciência da natureza e matemática", de modo geral, os PCN+, no tópico "linguagens partilhadas pelas ciências", a álgebra aparece também como uma competência de representação e comunicação, e no tópico "Instrumentos de investigação utilizados em comum pelas várias ciências", a álgebra é colocada como um desses instrumentos, que podem aparecer nas diversas partes em uma só disciplina, assim como entre elas. Os PCN+ exemplificam com uma situação da álgebra, em que uma expressão algébrica pode representar diversas situações, como uma fórmula usada em uma casa de câmbio, uma representação geométrica ou gráfica. E a mesma expressão algébrica ainda poderia representar situações em outras ciências, como na física, química e biologia.

Na parte específica da matemática, continua a abordagem baseada em competências e habilidades, e além da "representação e comunicação" citada no capítulo 2, agora são acrescentadas "investigação e compreensão" e "contextualização sociocultural". Enquanto na primeira competência a álgebra aparece como linguagem, na segunda ela é ferramenta para investigar. Em seguida nos PCN+, a álgebra aparece em um dos três temas estruturadores do ensino de matemática, em *álgebra: números e funções*. Os PCN+ compreendem que a álgebra está mais desenvolvida, e assim ela trata dos números, suas formas mais evoluídas historicamente, os números reais e os complexos, e suas relações no plano cartesiano, que leva aos estudos de equações e funções. Para os PCN+ este é um tema que aparece por todo o ensino médio, pois os conjuntos numéricos e o tratamento funcional aparecem nos diversos conteúdos da matemática.

De acordo com os PCN+ (2002), a linguagem algébrica é a linguagem das ciências, que é compreendida pelo estudo de funções, e desse modo destaca que se deve dar ênfase aos conceitos e não à prática simbólica, pois pressupõe-se que os alunos já estudaram os conjuntos, então, agora deve-se estudar primeiramente os conceitos de função, a partir de situações contextualizadas, para que se perceba a relação de dependência entre grandezas, não sendo necessário o estudo inicial de conjuntos, pois estes entrariam depois. Os PCN+ enfatizam a necessidade de se construir conceitos, com o uso mínimo da linguagem formal e de definições que não colaborem nos conceitos fundamentais. Assim os PCN+ (2002, p. 121) entendem que "Toda a linguagem excessivamente formal que cerca esse tema deve ser relativizada e em parte deixada de lado, juntamente com os estudos sobre funções injetoras, sobrejetoras, compostas e modulares". Também se defende a supressão, por exemplo, do estudo de equações logarítmicas e exponenciais. Vê-se, então, o desprezo a alguns conteúdos, em nome da construção de competências e habilidades. Propõe-se trabalhar com progressões aritméticas e geométricas a partir do estudo de funções e de situações, assim como o estudo de trigonometria, que deve focar na resolução de problemas de medidas, e não no cálculo algébrico de identidades e equações. Com relação ao estudo de números e operações propõe-se manter os estudos dos diversos conjuntos numéricos, mas pode-se flexibilizar o ensino dos números complexos, pois esses serão mais estudados por quem se manter na área.

A álgebra aparece no segundo tema estruturador "Geometria e medidas", colocada como forma de tratamento da geometria analítica, pois esta transforma problemas geométricos em equações e sistemas de equações. Diferente dos PCN do ensino fundamental, não se tem nestes documentos do ensino médio propostas de atividades didáticas.

Os PCN+ mantém, como se vê, as concepções essencialista e referencial.

As OCEM (Orientações Curriculares do Ensino Médio) de 2006 se apoiam nas produções passadas, os PCNEM e os PCN+, e, assim, repete muito do que já está nos outros documentos. Então, mostraremos algumas novidades.

Este documento se utiliza de algumas teorias da educação matemática, com destaque para algumas teorias da didática da matemática francesa, que se apresentam por termos como, *situação didática*, *contrato didático* e *transposição didática*, além de destacar a contextualização. Critica-se o ensino de matemática pela transmissão do conhecimento e propõe que seja pela construção que deve ser realizada pelo próprio aluno, além de se basear em "ideias socioconstrutivistas", como vemos abaixo:

> Uma segunda corrente, ainda pouco explorada em nossos sistemas de ensino, transfere para o aluno, em grande parte, a responsabilidade pela sua própria aprendizagem, na medida em que o coloca como ator principal desse processo.
> As idéias socioconstrutivistas da aprendizagem partem do princípio de que a aprendizagem se realiza pela construção dos conceitos pelo próprio aluno, quando ele é colocado em situação de resolução de problemas. Essa idéia tem como premissa que a aprendizagem se realiza quando o aluno, ao confrontar suas concepções, constrói os conceitos pretendidos pelo professor. Dessa forma, caberia a este o papel de mediador, ou seja, de elemento gerador de situações que propiciem esse confronto de concepções, cabendo ao aluno o papel de construtor de seu próprio conhecimento matemático (BRASIL, 2006, p. 81)

Partindo desta concepção, as OCEM estabelecem uma forma de ensino que se assemelha com a dos PCN do ensino fundamental, quando defendem que “A aprendizagem de um novo conceito matemático dar-se-ia pela apresentação de uma situação-problema ao aluno, ficando a formalização do conceito como a última etapa do processo de aprendizagem” (BRASIL, 2006, p. 81), ou seja, acredita-se aqui que a linguagem escrita ou formal é o último passo da aprendizagem.

Apoiando-se nas noções de contrato didático e transposição didática, as OCEM acreditam que se deve romper com o contrato didático tradicional do transmissionismo e desenvolver um processo de ensino pela construção do próprio aluno, a partir de uma transposição direcionada nesse sentido pelo professor, e é neste ponto, que este documento destaca a contextualização. “É na dinâmica de contextualização/descontextualização que o aluno constrói conhecimento com significado, nisso se identificando com as situações que lhe são apresentadas, seja em seu contexto escolar, seja no exercício de sua plena cidadania” (BRASIL, 2006, p. 83). As OCEM defendem que é a partir da contextualização que se pode dar sentido para o conhecimento matemático. Para a efetivação da contextualização, recomenda-se o uso de “problemas abertos”, que são as situações-problema, e não o uso de problemas fechados, que de acordo com este documento, são aqueles problemas que o aluno já sabe do conteúdo que se trata, ou seja, sugere-se o uso de situações-problema que leva o aluno à construção de um novo conhecimento matemático (BRASIL, 2006).

As próprias OCEM entendem que isto pode parecer paradoxal, pois como se pode esperar que um aluno aprenda um conteúdo que ele não sabe ainda? Eles respondem apelando para a construção da matemática na história, ou seja, dizendo que esta se deu também a partir de situações-problema, lembrando assim, o paralelismo onto-filogenético, que já abordamos nesta tese. As OCEM sugerem a modelagem matemática, que como estratégia de ensino, pode colaborar nesse sentido. Também se propõe o trabalho com projetos e com a história da matemática.

Portanto, os documentos nacionais que surgiram na primeira década do século XXI mantiveram, com alguns pequenos avanços, a consideração sobre a linguagem presente nas concepções aqui criticadas, baseadas no padrão teórico até aqui observado.

4.3.3 BNCC (2015)

A BNCC (Base Nacional Comum Curricular) ainda é um documento preliminar que está em construção e busca traçar uma base comum nacional do currículo no Brasil para a educação básica, isto é, ensino fundamental I e II e o ensino médio. Nesse documento, mantém-se as noções de contextualização e interdisciplinaridade, e apesar de não se ver claramente as palavras competências e habilidades, estas estão implícitas, pois é dado uma sequência de capacidades que se espera desenvolver com a educação, que vão para além de uma educação formal.

Na parte sobre matemática, mantém-se o que se vê nos documentos passados: a relação da aprendizagem de matemática com o exercício da cidadania; a exploração do cotidiano do aluno; a repulsa pela transmissão; o incentivo em se levar o aluno a construir seu próprio conhecimento; a noção de que este pode descobrir conceitos novos; a relação entre os conteúdos da matemática com outras áreas; o estímulo em se considerar os conhecimentos prévios; o apelo à contextualização; a sugestão em se partir do prático, do concreto, para então apresentar a simbologia, e assim sugere-se que a aprendizagem em matemática demanda a exploração de três momentos distintos e ordenados. No primeiro, o estudante deve fazer matemática, depois ele deve desenvolver registros de representação pessoais para, finalmente, apropriar-se dos registros formais (BRASIL, 2015). Nesse trecho, percebe-se claramente a concepção referencial da linguagem, onde se entende que o conceito já pode existir no “fazer matemática” proposto pelo documento, em que o aluno não só constrói o conhecimento, nesse sentido mais abstrato, como deve ser estimulado a construir uma linguagem própria para representar os conceitos aprendidos.

A álgebra aparece neste documento em um eixo próprio. Nos documentos que vimos até aqui há uma variação com relação a álgebra, que por vezes aparece relacionada aos números e outras vezes às funções. Isto demonstra a percepção atual de que a álgebra é bem mais ampla do que era compreendida antigamente, ou seja, ela não trata mais apenas de equações, mas por vezes é colocada em relação com os números, devido ao seu caráter generalista e por vez é associado às funções, por se considerar que o conceito de função é um avanço dos estudos das equações.

A proposta da BNCC é feita em etapas, classificados por anos agrupados. Na primeira etapa, os três primeiros anos do ensino fundamental, a BNCC entende que a álgebra está associada à capacidade de identificar atributos sobre a formação de sequências, que é uma das primeiras evidências de organização do pensamento, ou seja, a álgebra, é vista como uma forma de pensamento que permite perceber regularidades em sequências. Também se aconselha a se trabalhar com mudanças e relações, que são de acordo com este documento os primeiros indícios de função. Na segunda etapa, quarto e quinto ano, entende-se que se deve aprofundar o trabalho com situações-problema, utilizando-se da contextualização, e nesse sentido, a álgebra colabora, pois permite relacionar conceitos, que à primeira vista parecem isolados. A terceira etapa compreende os quatro anos do ensino fundamental II. Nesta, a BNCC considera que se deve incentivar o aluno a descobrir os novos conjuntos numéricos, como inteiros e racionais, e quanto à álgebra se diz que esta, juntamente com a função, ganha densidade, o que permite o aumento do raciocínio lógico e a resolução de problemas pela construção de modelos.

Na parte sobre o ensino médio, a BNCC diz que este faz parte da educação básica, como etapa final desta, e assim justifica a manutenção das concepções do ensino fundamental, sendo que neste nível devem ser ampliadas e interpretar em diferentes contextos, conceitos já vistos no nível anterior. Nessa parte já vemos claramente álgebra aparecer em outros eixos, como na geometria do 1º ano, no sentido de uma iniciação à geometria analítica e o estudo de vetores.

É interessante notar que não há uma descrição das referências bibliográficas, assim como são raras as citações durante todo o documento, seja de autores ou teorias. No entanto, pela leitura anterior dos outros documentos, fica evidente a influência das referências dos outros documentos neste, principalmente quando se vê as propostas de contextualização e interdisciplinaridade, que estão relacionadas com um desenvolvimento construtivista piagetiano na educação. Nesse sentido a linguagem se mantém com seu papel referencial, assim como a noção essencialista, isto é, de que há uma relação entre os diversos conceitos, e que os alunos detêm potencialidades de construção de tais.

4.3.4 Matriz curricular do ENEM (2012)

A última matriz de referência do ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) foi elaborada em 2012. O ENEM representa um desenvolvimento já esperado, pelo que se vê em outros países[45], com exames nacionais, e pelo que previu com a elaboração da LDB em 1996 e dos PCN em 1997/1998. O ENEM foi criado em 1998 no governo de Fernando Henrique Cardoso, inicialmente com o propósito de avaliar a qualidade do ensino médio, seguindo as orientações dos PCN. De 1998 até 2008 a prova era realizada em um dia e demandava uma redação e continha 63 questões que não eram divididas em áreas, pois pretendia-se avaliar competências e habilidades, que muitas vezes demandavam em uma só questão, conhecimentos de mais de uma disciplina – pelo menos assim esperava seus elaboradores. Em 2005 com a criação do PROUNI (programa universidade para todos), no governo Lula, que concedia bolsas integrais e parciais em universidades particulares, o ENEM passou a ser usado como avaliação destas universidades para a entrada de alunos pelo PROUNI. Em 2009, ainda no governo Lula, o ENEM mudou seu formato, e passou a ser em dois dias, com a elaboração de uma redação e 180 questões, divididas em quatro grandes áreas, as mesmas da BNCC, com 45 questões de cada área. A proposta desde 2009 passou a ser unificar o vestibular no país, o que de fato aconteceu, com atualmente a maioria das universidades, públicas e privadas, utilizando o ENEM, como exame de avaliação para o ingresso no ensino superior, tanto pelo modo tradicional, como pelo PROUNI e FIES.

A matriz curricular é bem simples, sem textos explicativos ou referências justificadoras. Inicia com a apresentação de cinco "eixos cognitivos" que são comuns a todas as áreas que envolve o domínio de linguagens, a compreensão de fenômenos, a resolução de problemas, a construção de argumentos e a elaboração de propostas. As áreas são divididas em competências. A área "Matemática e suas tecnologias" apresenta 7 competências. A matriz segue a linha dos documentos citados até aqui, pois aborda questões como contextualização, situações do cotidiano, situações-problema, interpretação, identificação de padrões, etc. O conceito de

---

[45] Como exemplos de exames que são usados para admissão em universidades citamos os que ocorrem EUA, França, Inglaterra, Alemanha, Espanha e Japão. Nos EUA há dois exames nacionais: o SAT (Scholastic aptitude test) que existe desde 1926 e o ACT (American College Testing) que existe desde 1959. Na França há o Baccalauréat ou "le bac", como é conhecido popularmente. O "le bac" existe desde 1808, isto é, desde a era napoleônica. No reino Unido há o General Certificate of Education Advanced Level, também conhecido como GCE Advanced Level, A-Level ou Advanced Levels, que existe desde 1951. Na Alemanha há o Abitur, que tem sua origem em 1788. Na Espaha há o Bachillerato desde 1953. No Japão há o Aigaku Nyuushi Sentaa Shiken desde 1979. Os exames citados aqui, não são semelhantes de todo ao ENEM, mas guardam semelhanças, por serem usados como parâmetros avaliativos do ensino, e/ou como conclusão deste, assim como para admissão nas universidades, públicas e privadas.

função está na quarta competência pois se utiliza termos como “Construir noções de variação de grandezas”, “Identificar a relação de dependência entre grandezas”, etc, mas não se usa o termo função de fato. A álgebra, propriamente dita aparece na quinta competência.

> **Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.**
> H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
> H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
> H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos
> H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
> H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos. (BRASIL, 2012, p. 7)

Vemos a noção de função nesta competência também, assim como a relação com a geometria. Percebe-se a noção de álgebra como ferramenta, assim como a noção essencialista, ao se referir a outros conteúdos, e a concepção referencial, ao ser uma espécie de formalização de conceitos. O ENEM segue o padrão estabelecido pelos documentos oficiais, como não deveria deixar de ser, mas estabelece mais diretamente, alguns conteúdos, mesmo que seja na perspectiva de competências e habilidades.

4.3.5 Guias do PNLD

A escolha de livros didáticos é realizada pelo governo brasileiro desde 1929, mas o PNLD (Plano Nacional do Livro Didático) passou a existir, de fato, em 1985, com objetivo de distribuir livros didáticos gratuitamente. Nessa época a escolha era feita pelo professor, e o MEC realizava a distribuição. Mas a partir de 1995 passou a se fazer do modo atual, a partir da indicação pelos guias do PNLD.

O PNLD é um guia que contém resenhas de coleções aprovadas para cada triênio. Cada guia de cada nível da educação básica, ensino fundamental I e II e o ensino médio, é feito no ano anterior ao triênio. Por exemplo, em 2012, foi elaborado o guia para o triênio 2013-2015 do ensino fundamental I. Os guias são separados por disciplina. No caso da matemática, escolhemos quatro guias: do ensino fundamental I, o triênio 2013-2015, do ensino fundamental II, os triênios 2011-2013 e 2014-2016; e do ensino médio, o triênio 2015-2017.

Nos quatro guias, percebe-se o mesmo teor e, muitas vezes, as mesmas palavras, de outros documentos, mantendo as concepções já tão citadas aqui: definição de competências, contextualização, relação com outras áreas (interdisciplinaridade), resolução de problemas, percepção de regularidades, crítica à transmissão do conhecimento, estímulo à descoberta e construção pelo próprio aluno, etc. Parece bem óbvio que as orientações para a escolha de livros didáticos sigam as orientações dos documentos curriculares oficiais, e que desse modo se escolham livros que se adequem a linha de pensamento consagrada, que se vê claramente na definição dos critérios para a escolha dos livros.

O Guia do PNLD do ensino fundamental I de 2013, no único momento que cita a álgebra, relaciona esta à noção de regularidades e ao cotidiano como vemos abaixo:

> A percepção de regularidades, que pode levar à criação de modelos simbólicos para diversas situações, e a capacidade de traduzir, em linguagem matemática, problemas encontrados no dia a dia, ou provenientes de outras áreas do conhecimento, devem ser, gradativamente, desenvolvidas. Desse modo, iniciam-se os alunos nas ideias da álgebra que, ao longo dos 9 anos do ensino fundamental, ampliam-se e aprofundam-se no sentido do uso da linguagem e das técnicas da álgebra. (PNLD, 2013, 13-14)

Os Guias do PNLD do ensino fundamental II de 2011 e de 2014 mantém a concepção de álgebra como percepção matemática de regularidades, mas agora sendo ampliada para o conceito de funções e sugere que a linguagem seja aos poucos introduzida.

O Guia do PNLD do ensino médio de 2015 sugere 11 competências, em que a álgebra aparece em 3:

> - saber empregar os conceitos e procedimentos algébricos, incluindo o uso do conceito de função e de suas várias representações (gráficos, tabelas, fórmulas etc.) e a utilização das equações;
> - reconhecer regularidades e conhecer as propriedades das figuras geométricas planas e sólidas, relacionando-as com os objetos de uso comum e com as representações gráficas e algébricas dessas figuras, desenvolvendo progressivamente o pensamento geométrico;
> - estabelecer relações entre os conhecimentos nos campos de números, funções, equações algébricas, geometria analítica, geometria, estatística e probabilidade, para resolver problemas, passando de um desses quadros para outro, a fim de enriquecer a interpretação do problema, encarando-o sob vários pontos de vista. (PNLD, 2015, 13).

Percebe-se o mesmo padrão teórico presente nos outros guias e nos documentos em geral apresentados aqui. No próximo tópico analisaremos alguns livros didáticos.

4.4 Livros didáticos

Os livros didáticos no Brasil seguem geralmente a linha dos PCN e acreditamos - não podendo afirmar que o construtivismo piagetiano seja a base de todos os livros didáticos - que dificilmente encontraremos nos livros atuais algo fora da teoria cognitivista-interacionista.

Geralmente o assunto de álgebra se inicia no 7º ano com a introdução do conteúdo de equações do 1º grau, que por vezes vem com introduções envolvendo assuntos elementares da álgebra. Mas ultimamente tem crescido o uso de noções de álgebra nos primeiros anos do ensino fundamental, a chamada pré-álgebra, onde se tenta abordar conteúdos algébricos nas atividades de ensino, que entendemos, abrange tanto o uso de letras, para representar de forma geral algumas regras e propriedades, como no conteúdo de fração, com a simbolização *a/b*, ou em geometria, principalmente nas representações de comprimento e área, além de representações de unidades de medida. Porém, também se faz tentativas na aritmética, quando se usa símbolos ou objetos e se pede que o aluno resolva. Por exemplo, a soma de 5 maçãs mais 3 maçãs, com as maçãs representadas em desenhos. Outra tentativa é uso de quadrinhos que substituem locais vagos em operações, como $\square + 8 = 11$, que seria uma representação de uma equação do 1º grau, mas sem a utilização de letras, além da tentativa de iniciação a noções como variável, no estudo de relação de grandezas.

Apresentaremos a análise de alguns livros que constam nos guias do PNLD de 2011 e 2014, referentes ao ensino fundamental. A escolha se deve à minha experiência como professor, pois trabalhei na educação básica, desde 2011, apenas com ensino fundamental II, e dessa forma, por dois triênios do PNLD, 2011-2013 e 2014-2016. Nas escolas em que fui professor no triênio 2011-2013 trabalhei com três livros:

- “Matemática” de Edwaldo Bianchini de 2006.
- “Matemática e realidade” de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado de 2009.
- “A conquista da matemática” de José Ruy Giovanni Jr e Benedicto Castrucci de 2009.

E nas escolas em que fui professor no triênio 2014-2016 trabalhei com dois livros:

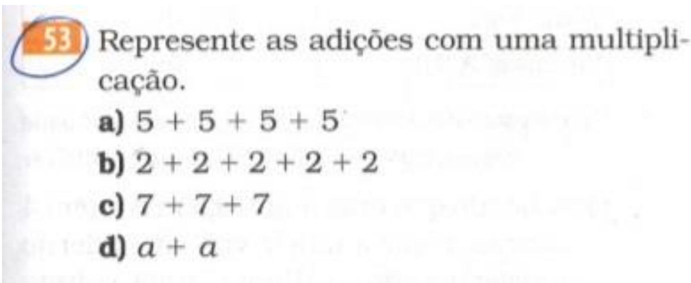
- “Projeto teláris: Matemática” de Luiz Roberto Dante de 2012.
- “Projeto Araribá: Matemática” de Editora Moderna (org) de 2010.

Nossa análise focará mais especificamente os livros de 7º ano, como forma de delimitar a análise, e devido ser a série em que se inicia a álgebra propriamente dita, além de ter sido a série em que eu escolhi trabalhar nestes últimos anos. Mas também trabalhei com os 6º, 8º e 9º anos, e assim, trazemos uma análise breve e geral destas séries, nos livros citados.

Como já dissemos é perceptível a tentativa de se iniciar álgebra em séries anteriores ao 7º ano, com alguns exemplos que já demos na apresentação deste tópico. Nos guias do PNLD de 2011-2013 e 2014-2016 há um gráfico colorido que apresenta a distribuição dos temas nos livros e os mesmos são separados em cores diferentes para ficar bem clara a proporção dos deles. A quantidade de álgebra no 6º ano é irrisória ou inexistente nos livros analisados, de acordo com estes guias e com nossa análise, aumentando consideravelmente no 7º ano, e geralmente dominando no 8º e 9º anos, o que muitas vezes é alvo de críticas da análise dos guias do PNLD, devido ao exagero do uso da linguagem algébrica.

Nas coleções analisadas, temos geralmente nos livros do 6º ano, o uso de letras como simbolização das propriedades da adição e multiplicação, o uso de quadradinhos simbolizando valores desconhecidos em operações fundamentais, não só na aplicação de algoritmos, mas também em problemas escritos do tipo em que se pede para encontrar um número, como, “O triplo de um número é igual a metade de 48. Que número é esse?” (MODERNA, 2010, p. 64) e o uso de fórmulas em geometria. Mas de acordo com os Guias do PNLD a álgebra só estaria presente em livros do 6º ano nas obras “Matemática” de Edwaldo Bianchini de 2006 e ”Matemática e realidade” de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado de 2009. Compreendemos que esta interpretação se deve pelo fato de nos livros citados haver o uso de letras em alguns exercícios, como no livro de Bianchini (2006) referente ao 6º ano, como vemos na figura 2 abaixo:

Figura 2 – Álgebra no 6º ano



53 Represente as adições com uma multiplicação.

a) $5 + 5 + 5 + 5$
b) $2 + 2 + 2 + 2 + 2$
c) $7 + 7 + 7$
d) $a + a$

Fonte: Bianchini (6º ano, 2006, p. 53)

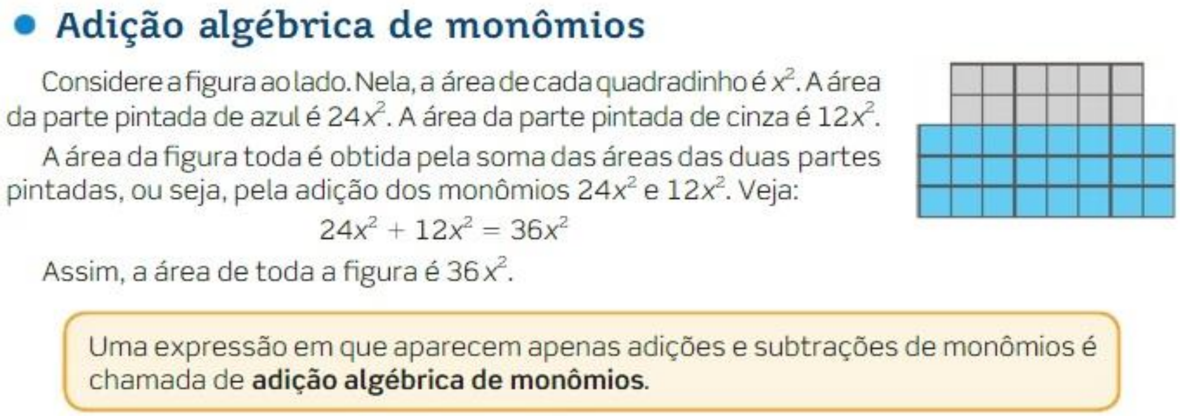
O autor demonstra ter a intenção de - mesmo sem ainda ter sido apresentado ao aluno o conteúdo e as regras para a álgebra anteriormente em seu livro – buscar por meio dos outros exemplos, que o aluno chegue à conclusão *2.a* ou *2*x*a*, pois o aluno representaria, por exemplo, *5 + 5 + 5 + 5* como *4* x *5*. Eu verifiquei, certa vez, em minha prática docente utilizando este livro, que nenhum aluno consultado alcançava o resultado esperado, mesmo acertando os outros itens, pois para eles era bastante estranha a simples expressão $a + a$, e assim muitos respondiam a, ou b ou diziam apenas que não sabiam.

Em uma outra vez em sala de aula, com uma turma do 7º ano, que ainda não tinha visto álgebra até aquele momento, perguntei qual seria o resultado de $x + x$. A maioria achou que a pergunta não fazia sentido e até, acredito que por isso, alguns responderam que o resultado seria zero. Alguns responderam que o resultado seria x. Outros responderam números aleatórios, como que se através de "chutes" pudessem acertar o resultado correto ou por alguma relação com os exercícios anteriores que envolviam apenas números. Então escrevi no quadro a expressão, com letras maiúsculas "X + X". Um aluno respondeu: "Ora, x + x dá quatro. São quatro traços, dois de cada x!", como se ele fizesse a soma de tais traços. Isto foi uma motivação para eu iniciar meus estudos sobre o ensino de álgebra. Aquele aluno buscou perceber alguma regra que pudesse fazer sentido àquela soma, o que mostra que ele necessitava ser apresentado a tais regras e que seria equivocado se esperar que ele pudesse deduzir as mesmas.

Outros casos de álgebra antes do 7º ano são atividades semelhantes ao estudo de valor numérico de expressões algébricas, quando se coloca letras com determinados valores e se pede para resolver operações diversas entre as letras, que é algo bastante usado, principalmente no livro de Bianchini (2006). Também se tem o uso de fórmulas para perímetro, área, volume, a relação de grandezas, com o uso de gráficos e tabelas, que lembra o conceito de função, mais presentes no livro de Iezzi, Dolce e Machado (2009).

No 8º ano a novidade é o estudo com estruturas algébricas, os polinômios, e um trabalho mais frequente com o cálculo algébrico, com produtos notáveis e fatoração de expressões algébricas. No 9º ano a novidade é o estudo das equações do 2º grau e a introdução à função. Com relação ao 8º ano, alguns livros buscam contextualizar o assunto de polinômios, mas na parte de divisão de polinômios, tem-se apenas a apresentação de regras. Bianchini (2006) busca desde o livro do 7º ano pautar a apresentação dos conteúdos por meio da analogia com a geometria, o que se mantém nos anos seguintes, mas também na parte de divisão de polinômios, o autor apenas apresenta as regras. Iezzi, Dolce e Machado (2009) mantém uma linha que explora mais a manipulação de símbolos, trazendo no início dos capítulos alguns exemplos cotidianos, mas pautando suas explicações basicamente pela apresentação de regras, o que fica mais claro ainda no livro do 8º ano. O estudo de operações com monômios, geralmente é atrelado ao de operações com números. Mas também são feitas analogias com a geometria. Como vemos abaixo na figura 3 abaixo do livro do 8º ano de Bianchini (2006):

Figura 3 – Álgebra e Geometria



Adição algébrica de monômios

Considere a figura ao lado. Nela, a área de cada quadradinho é x^2. A área da parte pintada de azul é $24x^2$. A área da parte pintada de cinza é $12x^2$.

A área da figura toda é obtida pela soma das áreas das duas partes pintadas, ou seja, pela adição dos monômios $24x^2$ e $12x^2$. Veja:

$$24x^2 + 12x^2 = 36x^2$$

Assim, a área de toda a figura é $36x^2$.

Uma expressão em que aparecem apenas adições e subtrações de monômios é chamada de **adição algébrica de monômios**.

Fonte: Bianchini (8º ano, 2006, p. 49)

No capítulo sobre produtos notáveis e fatoração o uso da geometria é unânime nas cinco obras analisadas. Além de apresentarem também demonstração manipulada da fórmula, isto é, a partir de $(a + b)^2$, define-se que $(a + b).(a + b)$, e, então, $a^2 + 2ab + b^2$. No entanto, nos exercícios prevalece o cálculo literal, mesmo em livros como de Dante (2012), que poderia ser considerado o mais contextualista, ficando apenas a cargo da geometria alguma contextualização. Também vemos geralmente o uso da linguagem lúdica, onde personagens animados falam ou dialogam sobre problemas matemáticos, como em Iezzi, Dolce e Machado (2009, p. 172), em que uma aluna pergunta a dois colegas “Quanto é $(2x + 3)(3x + 4)$?”, de forma direta. No entanto, não percebemos contextualizações destes conteúdos com a realidade. Consideramos que a questão da contextualização é algo muito forte na educação matemática devido à concepção essencialista, que leva à noção de que há algo em comum por trás dos conteúdos, e nesse caso, haveria entre os conteúdos formais e a realidade. Discutiremos mais sobre a questão da contextualização no capítulo 5.

Outro tipo de exercício que percebemos foi a representação da linguagem simbólica pela linguagem escrita por extenso, no que consideramos uma tentativa de tradução. A contextualização também é a nosso ver uma forma de tradução, pois se busca traduzir a realidade para o conteúdo formal. No entanto, de modo mais específico, os livros tentam trabalhar também com a transposição de uma linguagem para outra, como é o caso de se pedir que escreva por extenso uma equação algébrica. A tradução também será discutida no capítulo 5.

Na nossa observação que coincide com a dos Guias do PNLD, a coleção menos contextualista é de Iezzi, Dolce e Machado (2009), e a mais contextualista e interdisciplinar é de Dante (2012), como já dissemos. Em Iezzi, Dolce e Machado (2009) vemos o uso de letras de forma mais comum em outros conteúdos além da álgebra, como na apresentação das propriedades das operações dos números Reais. Já em Dante (2012) prevalece o uso de situações-problema. Iezzi, Dolce e Machado (2009) abordam a resolução de problemas em uma parte separada da parte em que mostram as equações e sistemas, apresentando um passo-a-passo para resolução.

Notamos que quanto mais se avança nos anos do ensino fundamental II, mais se diminui o uso da contextualização, pois esta é mais fácil ser realizada com conteúdos mais simples, o que mostra sua limitação.

Apresentamos abaixo uma breve análise de cada livro didático citado, focando principalmente no tratamento inicial da álgebra nos livros do 7º ano.

4.4.1 “Matemática (7º ano)” de Edwaldo Bianchini de 2006

Bianchini (2006) diz na apresentação que busca ajudar o aluno a ver que a matemática está presente em tudo que acontece à sua volta, e que mostrará situações que mostram isso. Na apresentação da estrutura do livro ele declara que iniciará cada capítulo apresentando situações, seguido da teoria e de exercícios, que é o padrão dos livros didáticos atuais. Destaca-se neste livro o uso da geometria na explicação das regras da álgebra.

No capítulo 1 (Números inteiros) o termo “álgebra” aparece quando se fala das “adições algébricas”, que compreendemos que são chamadas assim pelo motivo histórico da origem da álgebra, isto é, nas adições algébricas se faz “cancelamentos” de valores, como era feito nos primeiros estudos de equações, ou seja, o sentido de álgebra aqui ainda não é aquele relacionado às letras, mas não há qualquer explicação do porquê do termo nos livros analisados.

Ainda no capítulo 1 temos um primeiro uso de letras e a demanda pelo cálculo mental, quando trata da multiplicação de inteiros, como vemos na figura 4 abaixo. Em outras operações há exemplos semelhantes.

Figura 4 – Determinação mental do valor da letra

77 Determine mentalmente o valor do fator desconhecido, representado pela letra, nos seguintes casos:

a) $(-8) \cdot x = (-8)$ **d)** $(+9) \cdot t = (+9)$

b) $(-4) \cdot y = (+4)$ **e)** $(+6) \cdot n = 0$

c) $(-5) \cdot z = 0$ **f)** $0 \cdot m = 0$

Fonte: Bianchini (7º ano, 2006, p. 36)

O capítulo 4 é sobre equações. O capítulo inicia com “um pouco de história”, onde se fala dos povos antigos, egípcios, babilônicos e hindus, e cita, o papiro de Rhind e o lilavati de Bháskara, e mostra os primeiros estudos de equações. Em todos os 5 livros analisados há o uso da história, mas sempre como informação, seja no início, no meio ou no fim do capítulo, não sendo utilizada como contexto para explicação do conteúdo de fato. Em seguida, vêm as “expressões algébricas” que inicia mostrando que as operações com letras são do mesmo modo que as operações com números, iniciando com exemplos numéricos, e fazendo uso da língua natural. Por exemplo, o autor mostra “dois vezes cinco → 2 . 5”, e para representar “qualquer número racional” diz que se pode se usar letras. Então, o autor mostra que “o dobro de um número” pode ser escrito na forma *2 . x*. São dados outros exemplos, e é explicado que podem ser usadas outras letras além do x, e para representar a multiplicação entre um número e uma letra, pode-se ignorar o ponto, e ao invés de escrever, por exemplo, *2 . y*, pode-se escrever *2y*, e que como uma letra pode representar qualquer número, pode, então ser chamado de variável. Consideramos interessante que o autor busque explicar o uso da linguagem.

Na figura 5 abaixo vemos um exercício que demanda que se descubra a regra usada:

Figura 5 – Determinação da regra

Pense mais um pouco...

Reúna-se com um colega para resolver este problema no caderno.
Em uma brincadeira, Lucas falava um número e, segundo uma regra criada por Lia, ela dizia outro número. O objetivo da brincadeira era fazer que Lucas descobrisse a regra inventada por Lia. Veja a sequência de números que eles falaram:

Lucas	1	2	3	4	5	9	15	20
Lia	4	5	6	7	8	12	18	23

a) Descubram a regra que Lia criou para falar os números e escrevam essa regra na forma de expressão algébrica.
b) Se Lucas falasse o número 25, que número Lia diria? E se ele falasse −3?
c) Que número Lucas deveria dizer para que Lia falasse o maior número possível?
d) Mais tarde, Lia passou a falar os números, e Lucas, segundo uma nova regra, dizia outro número. Veja a nova sequência de números que eles falaram:

Lia	1	2	3	4	5	9	15	20
Lucas	7	9	11	13	15	23	35	45

Descubram a regra de Lucas e a escrevam na forma de expressão algébrica.
e) Se Lia falasse o número zero, que número Lucas diria? E que número ele deve dizer de forma que ela fale o número 5?
f) Que número Lia deveria dizer para que Lucas falasse o maior número possível?

Fonte: Bianchini (7º ano, 2006, p. 97)

A regra seria $x + 3$, ou outra letra no lugar de x. Este exemplo é semelhante a um proposto pelos PCN apresentado aqui, no entanto, Bianchini (2006) já antecipou em seu livro, tanto na explicação quanto nos exercícios, a possibilidade de se usar letras para representar números.

No assunto "valor numérico de uma expressão algébrica" se utiliza como situação inicial um retângulo com base x e altura y, e onde depois são propostos valores para as letras, a partir da escrita de expressões que indicam perímetros. Na parte sobre "termos algébricos", utiliza-se mais uma vez da geometria também, para mostrar de forma concreta o que representariam os termos algébricos, como $20x$ que poderia representar um perímetro de uma figura com 20 segmentos de tamanho x, e $3y^2$, que representaria 3 quadrados de lado y. Depois trata do estudo de coeficientes e partes literal, termos semelhantes e a simplificação destes. Nesse ponto ele explica, por exemplo, que "$a + a + a$" é $3a$, utilizando o exemplo de um perímetro de um triangulo equilátero de lado a.

No tópico sobre sentenças matemáticas, mais uma vez se usa o método de relação com a língua natural, para mostrar como tal linguagem se traduz para a matemática, ou seja, "cinco mais três é igual a oito" ($5 + 3 = 8$) ou "dois é menor que 20" ($2 < 20$), antecipando o tópico seguinte, "as equações", que no caso seriam sentenças que usam o símbolo de igual. O estudo de equações é iniciado pelo exemplo da balança de dois pratos, apresentando primeiramente a ideia de equidade entre os dois lados da equação, e depois mostrando o método para encontrar a raiz da equação, que inicialmente é feito como uma espécie de descoberta do número escondido ou que falta, para que a igualdade dê certo. Esse é um método comum em todos os livros analisados, que geralmente é denominado "conjunto verdade da equação", já que se tenta resolver a operação com valores errados, para mostrar que a igualdade só se mantém com determinado valor. Em seguida então são apresentadas as equações do 1º grau com uma incógnita e o modo de resolver tais equações são apresentadas pelo método do cancelamento, e não pelo uso de passar o número para o outro lado da equação, o que também é comum nos 5 livros analisados. Nos exercícios são apresentados problemas diretos e com a balança de dois pratos. A seguir vem a interpretação de problemas escritos em equações, que se utiliza primeiramente de exemplos numéricos. Os exercícios apresentam o uso de termos como dobro, triplo, metade, etc. e a comparação de idades de duas ou mais pessoas e outros exemplos cotidianos. Portanto, é frequente o direcionamento do livro para outros conteúdos fora da linguagem da álgebra, para que esta possa ter sentido para os alunos. A explicação das regras existe, mas elas aparecem muito mais como deduções de um desenvolvimento do conteúdo do que o fundamento do mesmo.

Já fizemos na análise deste livro de Bianchini (2006) algumas considerações gerais, que percebemos nos outros livros didáticos analisados, que evitaremos repetir na sequência, focando nas particularidades de cada livro, tornando assim, as análises seguintes mais sucintas possíveis.

4.4.2 “Matemática e realidade (7º ano)” de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado, de 2009.

Iezzi, Dolce e Machado (2009) declaram na apresentação do livro que buscaram utilizar uma linguagem acessível para o aluno de ensino fundamental II, e que buscam introduzir os conteúdos por meio de problemas cotidianos. Destaca-se neste livro a apresentação das regras na parte de álgebra.

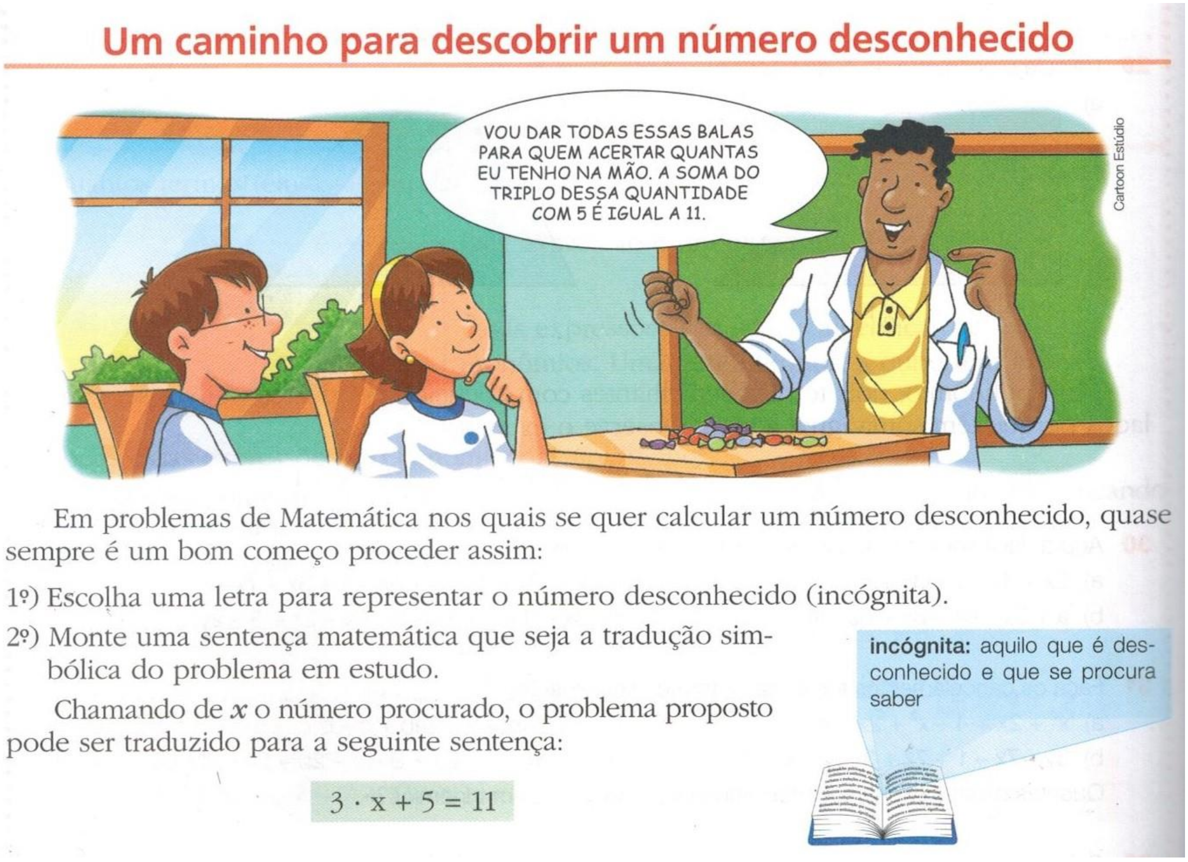
Nas quatro primeiras unidades, quando trata de diferentes conjuntos numéricos e suas operações, nos exercícios não se vê o uso de letras, como números desconhecidos, mas apenas são vistos losangos com asteriscos, uso de recurso semelhante ao “quadradinho”. É uma tentativa de introdução da álgebra, mas se utilizando de outras ferramentas além de letras.

Na unidade 6 (Equações, sistemas e inequações), temos a interpretação com letras de sentenças escritas, trazendo a ideia de tradução, e diferentemente do livro anterior analisado, não faz comparações com operações com números. Nesse capítulo o autor não inicia com uma situação cotidiana, mas dizendo que a álgebra permite resolver problemas e os exercícios são de aplicação das regras, não contendo situações-problema, propriamente ditas. Diferentemente dos outros livros, já apresenta o termo monômio para se referir aos termos algébricos, com a identificação de parte literal e coeficiente. Em seguida aborda os termos semelhantes e as operações com eles, definindo a regra que para adicionar termos semelhantes estes devem ter partes literais iguais, e assim, na adição, por exemplo, soma os coeficientes e conserva a parte literal. Não faz como Bianchini (2006) que buscou contextualizar geometricamente essa soma. Em seguida aborda os polinômios, também de forma bem direta e apresentando as regras de operação com eles.

Nas indicações teóricas para o ensino de álgebra há uma crítica à apresentação de regras, bem como ao uso, por vezes, considerado excessivo da linguagem algébrica, mas com Wittgenstein compreendemos que é pelo uso que se obtém significados, então, não valeria a pena esconder as regras e simbologias, pois é necessário que o aluno possa se habituar com tais. Falar de regras na teoria educacional é um tabu, mas Wittgenstein mostra um caminho inovador na análise de regras, não como algo que deve ser imposto, mas como estas fazem parte de nossas formas de vida e estão na base dos nossos jogos de linguagem. Se não forem as regras declaradamente explícitas, serão outras as tomadas pelos alunos, e que podem ser equivocadas. Como já dissemos, não discordamos de certas propostas na educação matemática para o ensino de álgebra, apenas apontamos também na direção da importância da apresentação explícita de regras, como vemos em Iezzi, Dolce e Machado (2009). Aprofundaremos a discussão sobre regras no capítulo 5.

No capítulo 22 (equações) de Iezzi, Dolce e Machado (2009), da unidade 6, os autores abordam equação não a partir da ideia de equilíbrio, mas como interpretação matemática de sentenças, assim é dada uma situação (Figura 6).

Figura 6 – Descoberta do valor desconhecido



Fonte: Iezzi, Dolce e Machado (2009, p. 172)

Dessa forma, equação é apresentada como uma interpretação algébrica, e a partir daí são mostradas possibilidades de resolução de equação, primeiramente "arriscando" valores para substituir a letra e depois com o método de cancelamento em ambos os membros. É interessante notar que em nenhum momento os autores usam o termo equação do 1º grau durante o livro. Esse termo só aparece no livro do 8º ano. Os exercícios que apresentam contextualizações cotidianas são dados em um capítulo à parte, o que é bem interessante nesse livro, pois os autores parecem entender que aqui se apresenta uma outra forma de conteúdo e não que se deva trabalhar todos os conteúdos como se houvesse uma essência comum por trás deles. Dessa forma, os autores estabelecem um passo-a -passo para se resolver problemas e depois oferecem 6 problemas como exemplo, e mais 34 exercícios.

Em Iezzi, Dolce e Machado (2009), a geometria aparece antes da álgebra, pois compreendemos que os autores consideram importante apresentá-la antes para servir de base para apresentar alguns exemplos na parte de álgebra, enquanto que Bianchini (2006), parece ter a geometria como um pressuposto, um conteúdo que os alunos já têm algum conhecimento, e realiza quase todas as explicações de álgebra baseada nela. O que parece mostrar que Iezzi, Dolce e Machado (2009) têm uma ideia de separação de conteúdos e que a comparação pode ser feita apenas depois de conhecidas algumas regras.

4.4.3 "A conquista da matemática (7° ano)" de José Ruy Giovanni Jr e Benedicto Castrucci de 2009.

Na apresentação deste livro vemos uma ênfase à contextualização e ao uso prático da matemática, mas "sem fugir ao rigor que a matemática exige". Diferente dos livros anteriores, este inicia com potências e raízes e só depois trata de números inteiros e racionais. É interessante que já no primeiro capítulo vemos o estudo de potências a partir de uma analogia com a geometria, e já vemos o uso de letras no primeiro bloco de exercícios, como no exemplo na figura 7 abaixo:

Figura 7 – Comparação de valores numéricos

10. Compare os números x e y, dados a seguir, usando o sinal =, > ou <.

a) $x = 2^4 \times 2^2$ e $y = 2^8$.

b) $x = 2^2 \times 5^2$ e $y = (5 \times 2)^2$.

Fonte: Giovanni Jr e Castrucci (2009, p. 11)

Na questão 12, na sequência da questão da imagem acima, vemos novamente o uso de letras, mas dessa vez dando valores iniciais, e pedindo para se fazer uma operação entre elas, por exemplo, x – y. Isto mostra que os autores parecem buscar uma habituação com o uso de letras, e este uso se mantém pelos 3 blocos de conteúdos seguintes. No entanto este uso acontece mais nos exercícios e não nos exemplos ou nas explicações.

No bloco que iniciam as equações, os autores iniciam por uma contextualização histórica e pela explicação do que seria a palavra “incógnita”, o que consideramos interessante, visto a significação das palavras muitas vezes ser um problema para os alunos. Os autores iniciam a parte do conteúdo no capítulo 24, denominado “igualdade’”, o que mostra que eles resolvem estudar as equações a partir da ideia do sinal de igual, apresentando até a diferença entre 1º membro, à esquerda, e 2º membro, à direita. Também usam a comparação com sentenças em língua natural para formar as expressões algébricas. É interessante que eles mostram as propriedades de igualdade, reflexiva, simétrica e transitiva, o que consideramos importante para o estudo de equações, e só então apresentam a balança de dois pratos como exemplo do princípio de equivalência, ou seja, o exemplo vem depois das definições, algo diferente do restante dos livros analisados.

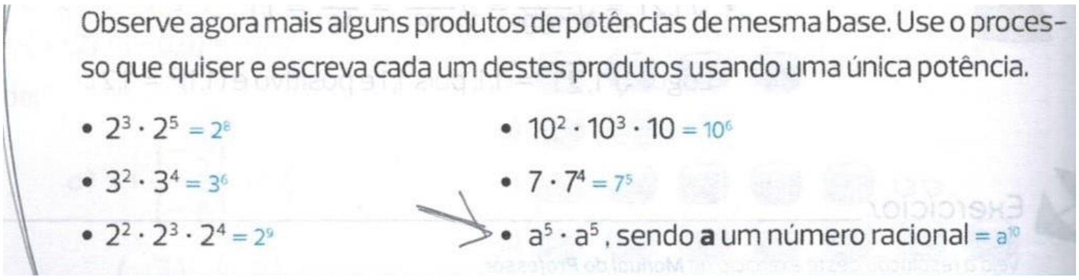
Giovanni Jr e Castrucci (2009) destacam o uso de problemas contextualizados, mas nos exercícios a maior parte são de exercícios de aplicação de regras sintáticas, o que nos parece dizer que os autores buscam ensinar pela contextualização, para que o aluno possa resolver exercícios, mas para que estes alunos pelo menos saibam que o conteúdo algébrico pode ser relacionado à realidade.

4.4.4 “Projeto teláris: Matemática (7º ano)” de Luiz Roberto Dante de 2012

O livro de Luiz Roberto Dante, já na apresentação declara que a matemática está presente em todos os lugares e em todas as situações do cotidiano, como a escola, o lazer, as brincadeiras e nas casas, além de revelar que escreveu este livro para que os alunos pudessem compreender as ideias matemáticas e aplicá-las em seu dia a dia e isto será pautado em um método que envolve a resolução de problemas, a interatividade, a relação com o cotidiano, a utilização da história da matemática e a utilização do lúdico.

Dante (2012) divide seu livro em 4 unidades: 1) números inteiros e geometria; 2) números racionais e introdução à álgebra; 3) álgebra e geometria e 4) proporcionalidade e estatística. O autor parece querer mostrar em blocos a relação entre diferentes partes da matemática. Prevalece no livro o uso de problemas, tanto na parte teórica, quanto nos exercícios propostos. Demora no livro em aparecer o uso de letras, mas na parte sobre números inteiros já se apresenta o plano cartesiano. Ainda no capítulo 3, da unidade 2, Dante (2012) aborda a álgebra, mas não de forma direta, pois busca aos poucos vir trazendo a mesma para próximo do aluno, isto é, ele vai aos poucos acostumando o aluno a *ver* letras nos conteúdos algébricos. Neste mesmo sentido, Dante (2012) prossegue buscando relações entre os números racionais e generalizações com letras, como vemos na figura 8 a seguir, quando trata das propriedades de potenciação. Exercícios semelhantes vemos com outras operações.

Figura 8 – Dedução com letras de propriedades de potenciação



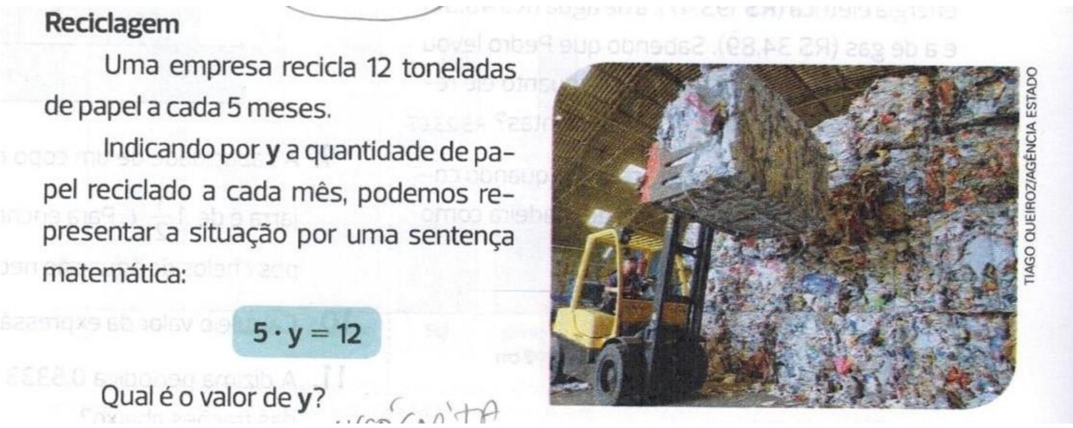
Observe agora mais alguns produtos de potências de mesma base. Use o processo que quiser e escreva cada um destes produtos usando uma única potência.

- $2^3 \cdot 2^5 = 2^8$
- $3^2 \cdot 3^4 = 3^6$
- $2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 = 2^9$
- $10^2 \cdot 10^3 \cdot 10 = 10^6$
- $7 \cdot 7^4 = 7^5$
- $a^5 \cdot a^5$, sendo **a** um número racional $= a^{10}$

Dante (2012, p, 98)

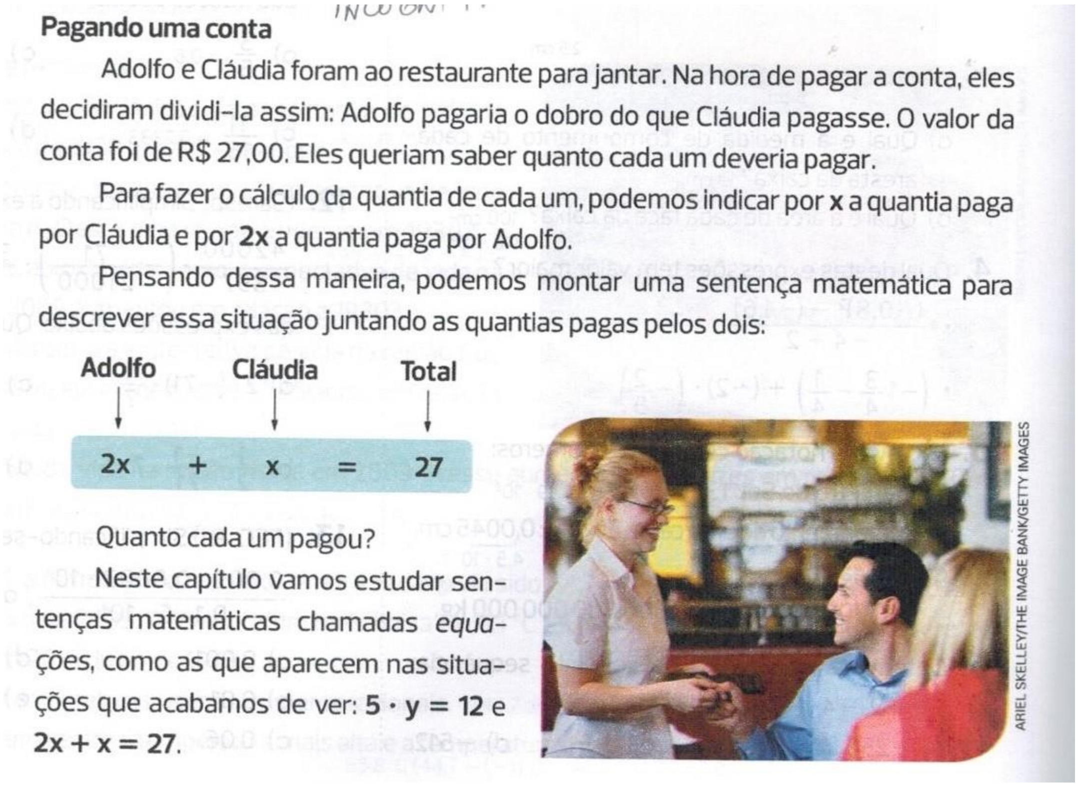
Durante praticamente todo o livro, Dante inicia os tópicos com situações-problema. No capítulo 4 (equações do 1º grau com uma incógnita) não é diferente. Dante inicia por uma *introdução à álgebra*, com o propósito de chegar às equações. O tópico 1, denominado “introdução” é composto por dois problemas (figuras 9 e 10) baseados no cotidiano, que de acordo com o autor serão resolvidos durante o capítulo.

Figura 9 – Letras no cotidiano (a)



Fonte: Dante (2012, p. 116)

Figura 10 – Letras no cotidiano (b)


Pagando uma conta

Adolfo e Cláudia foram ao restaurante para jantar. Na hora de pagar a conta, eles decidiram dividi-la assim: Adolfo pagaria o dobro do que Cláudia pagasse. O valor da conta foi de R$ 27,00. Eles queriam saber quanto cada um deveria pagar.

Para fazer o cálculo da quantia de cada um, podemos indicar por **x** a quantia paga por Cláudia e por **2x** a quantia paga por Adolfo.

Pensando dessa maneira, podemos montar uma sentença matemática para descrever essa situação juntando as quantias pagas pelos dois:

$$\underset{\text{Adolfo}}{2x} + \underset{\text{Cláudia}}{x} = \underset{\text{Total}}{27}$$

Quanto cada um pagou?

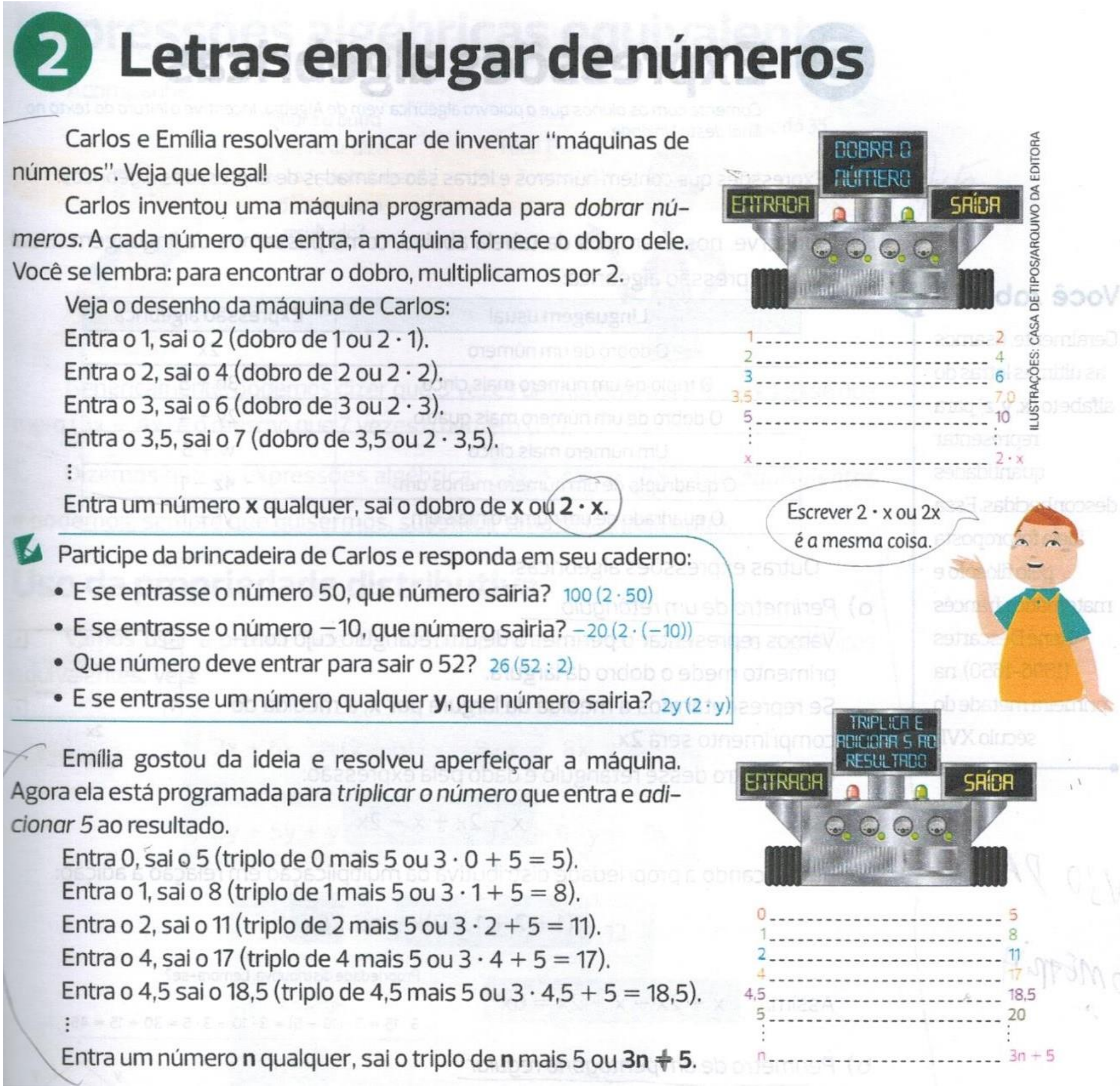
Neste capítulo vamos estudar sentenças matemáticas chamadas *equações*, como as que aparecem nas situações que acabamos de ver: $\mathbf{5 \cdot y = 12}$ e $\mathbf{2x + x = 27}$.

Fonte: Dante (2012, p. 116)

Entendemos que o autor buscou com isso iniciar o assunto de álgebra pelas equações, mas por meio de problemas, ou seja, de situações que levam a pensar que valores numéricos que tratamos diariamente podem ser escritos com letras, que representam esses valores. A ideia aqui não é de variável, mas de incógnita, ou seja, a letra representa um valor desconhecido, mas que pode ser conhecido pela situação fornecida. Acreditamos que para o autor os resultados podem ser conhecidos pelo simples entendimento da situação, isto é, o aluno pode dividir, no primeiro problema (figura 9) 12 toneladas pelos 5 meses e encontrará o resultado, assim, a sentença, é uma espécie de “maneira de ver de outra forma”, em um sentido de uma tradução, talvez nem tanto melhorada, pois o uso das letras pode causar muito mais dificuldades.

O tópico 2, denominado “letras em lugar de números” é composto também por dois problemas, só que agora resolvidos por completo, que são interligados. No primeiro problema (figura 11), vemos o seguinte:

Figura 11 – Dedução da álgebra pela aritmética



2 Letras em lugar de números

Carlos e Emília resolveram brincar de inventar "máquinas de números". Veja que legal!

Carlos inventou uma máquina programada para *dobrar números*. A cada número que entra, a máquina fornece o dobro dele. Você se lembra: para encontrar o dobro, multiplicamos por 2.

Veja o desenho da máquina de Carlos:

Entra o 1, sai o 2 (dobro de 1 ou $2 \cdot 1$).
Entra o 2, sai o 4 (dobro de 2 ou $2 \cdot 2$).
Entra o 3, sai o 6 (dobro de 3 ou $2 \cdot 3$).
Entra o 3,5, sai o 7 (dobro de 3,5 ou $2 \cdot 3{,}5$).
⋮
Entra um número **x** qualquer, sai o dobro de **x** ou **$2 \cdot x$**.

Participe da brincadeira de Carlos e responda em seu caderno:

- E se entrasse o número 50, que número sairia? 100 ($2 \cdot 50$)
- E se entrasse o número -10, que número sairia? -20 ($2 \cdot (-10)$)
- Que número deve entrar para sair o 52? 26 ($52 : 2$)
- E se entrasse um número qualquer **y**, que número sairia? $2y$ ($2 \cdot y$)

Emília gostou da ideia e resolveu aperfeiçoar a máquina. Agora ela está programada para *triplicar o número* que entra e *adicionar 5* ao resultado.

Entra 0, sai o 5 (triplo de 0 mais 5 ou $3 \cdot 0 + 5 = 5$).
Entra o 1, sai o 8 (triplo de 1 mais 5 ou $3 \cdot 1 + 5 = 8$).
Entra o 2, sai o 11 (triplo de 2 mais 5 ou $3 \cdot 2 + 5 = 11$).
Entra o 4, sai o 17 (triplo de 4 mais 5 ou $3 \cdot 4 + 5 = 17$).
Entra o 4,5 sai o 18,5 (triplo de 4,5 mais 5 ou $3 \cdot 4{,}5 + 5 = 18{,}5$).
⋮
Entra um número **n** qualquer, sai o triplo de **n** mais 5 ou **$3n + 5$**.

Fonte: Dante (2012, p. 117)

Percebemos aqui a tentativa – parecida com a de Bianchini (2006) – de mostrar vários valores aritméticos, para então chegar ao algébrico. Diferenciando-se pelo fato de que Dante (2012) apresenta o resultado. O autor propõe posteriormente um exercício, semelhante a este, em que o aluno deve se utilizar da máquina de Carlos, para ver o dobro de outros números e também da letra *y*. O segundo problema tem relação com o primeiro. Agora a máquina é de Emília, e a tal máquina triplica e adiciona 5 aos números que entram nela. Assim, se entra o 1 sai o 8, pois o triplo de 1 mais 5 é 8 (ou $3.1 + 5$). Outros exemplos são dados, até que se chega a letra *n*, que terá como resultado a expressão $3n + 5$. Com estes problemas o autor pretende mostrar a questão da generalização da aritmética pela álgebra, assim como mostra a relação da álgebra com a linguagem natural (o triplo de um número mais cinco é o mesmo que $3n + 5$).

O tópico 3, denominado “expressões algébricas” apresenta inicialmente duas relações da álgebra, primeiramente com a linguagem natural e depois com a geometria. A relação com linguagem natural é a mesma apresentada antes, só que agora é feita de forma mais objetiva e com mais exemplos. E a segunda relação, com a geometria, pede que se ache o perímetro de um retângulo e de um pentágono, ambos regulares. Aqui ele inicia a tentativa de chegar a soma de monômios. Nos exercícios posteriores o autor propõe que se passe da linguagem usual para uma expressão algébrica e vice-versa. No subtópico “expressões algébricas equivalentes” chega-se de fato à soma de monômios. Mais uma vez inicia-se pelo contexto aritmético. Ele usa desenhos de dois garotos em um diálogo. O primeiro diz: *Qual a outra maneira de dizer “3 vezes 5 mais 4 vezes 5”, sem dar o resultado?* O segundo responde: *Fácil! É só fazer 7 vezes 5!* Dante (2012, p. 119), então observa que “genericamente, podemos dizer que 3 vezes um número mais 4 vezes esse número ($3x + 4x$) é o mesmo que 7 vezes o número ($7x$)”. Ele diz que $3x + 4x$ é equivalente a $7x$. O autor parte da linguagem natural, que vem tentando relacionar com a álgebra.

Dante (2012) trata do tema valor numérico, a partir de uma contextualização geométrica e com exemplos de aplicação direta da regra. O Assunto sobre incógnitas é iniciado num subtópico denominado “Procura-se elemento desconhecido” brincando com a ideia de um bandido procurado pela polícia e depois apresenta como se pode usar letras como valores desconhecidos, e enfim chega ao tópico “equação, incógnita e solução ou raiz”, em que se apresenta como se pode passar da linguagem natural para a escrita com letras, em um persistente uso da ideia de tradução, e explica que a solução pode ser encontrada “arriscando” valores para encontrar o valor que mantém a igualdade e mostra assim como a equação pode ser resolvida mentalmente.

A parte sobre equações do 1º grau com uma incógnita é apresentada primeiramente a partir de textos em linguagem natural e o método de resolução é o cancelamento, mas Dante (2012), diferentemente dos livros anteriores apresenta o método de resolução que é o de passar o valor para outro lado da equação e isolando a incógnita. Essa variedade de resoluções apresentada consideramos muito interessante, pois defendemos o uso variado, já que entendemos que este que fornece a ampliação dos jogos de linguagem. Em seguida, explora-se “a ideia de equilíbrio” a partir da balança de dois pratos, quando são apresentadas outras formas de uso de equações, com frações, com parênteses, o que também concordamos. Apesar do autor usar bastante a resolução de problemas, ele reserva um tópico para este assunto e oferece um passo-a-passo para esse tipo de atividade, o que concordamos, pois coloca a resolução de problemas como um conteúdo à parte.

4.4.5 "Projeto Araribá: Matemática (7º ano)" da Editora Moderna (org.) de 2010

O livro mostra mais uma vez um projeto, agora não com um autor apenas, mas como uma obra coletiva que foi desenvolvida pela editora moderna, com coordenação de Fábio Martins de Leonardo. Na apresentação, diferentemente dos anteriores, não enfatiza a contextualização ou utilidade da matemática, mas propõe a matemática como uma atividade interessante, "uma aventura". A parte 4 (Equações, sistemas e inequações) inicia com uma situação do cotidiano que é o uso de combustível em automóveis, comparando os rendimentos com gasolina e etanol (figura 12).

Figura 12 – Álgebra no cotidiano

Automóvel bicombustível

Em 2003, foi lançado no Brasil o carro bicombustível, ou flex.

Esse sistema permite o abastecimento com gasolina ou etanol, ou ainda com a mistura dos dois combustíveis, oferecendo liberdade de escolha ao consumidor.

Para conseguir isso, desenvolveu-se uma tecnologia que utiliza um sensor eletrônico acoplado ao motor que identifica o combustível ou a mistura e ajusta a injeção eletrônica na regulagem correta, possibilitando o perfeito funcionamento do motor do automóvel, sem danificá-lo com as mudanças de combustível.

RENDIMENTO DE UM CARRO POPULAR 1.0

Tipo de combustível	Distância média que o carro percorre a cada litro de combustível (km)	
	Cidade	Estrada
Gasolina	10,1	13,8
Etanol	8,1	10,6

Dados obtidos em: <http://www.quatrorodas.abril.com.br>. Acesso em: 11 maio 2007.

Preço médio de combustíveis no Brasil no mês de dezembro de 2011 (R$)	
Gasolina	2,75
Etanol	2,06

Dados obtidos em: <http://www.anp.gov.br>. Acesso em: 4 jan. 2012.

Para começar...

Considere as informações apresentadas nas tabelas e no texto e responda no caderno.

1. Um carro flex oferece quantas opções para ser abastecido? Quais são?
2. Considere as condições de tráfego em uma metrópole brasileira e em uma autoestrada bem conservada. Com a mesma quantidade de combustível, um automóvel percorre a mesma distância na metrópole e na estrada? Em qual via o carro percorre maior distância? não; na estrada
3. Imagine um carro flex abastecido com 40 litros de combustível. Escreva uma expressão para o cálculo do gasto em reais de gasolina e outra para o gasto de etanol.
4. Considerando apenas as opções de consumo só de gasolina e só de etanol, com 40 litros de combustível, quantos quilômetros, em média, um carro flex poderá rodar? Escreva as expressões para o cálculo das distâncias.
5. Agora escreva as expressões das atividades **3** e **4** imaginando que o carro foi abastecido com x litros de combustível.

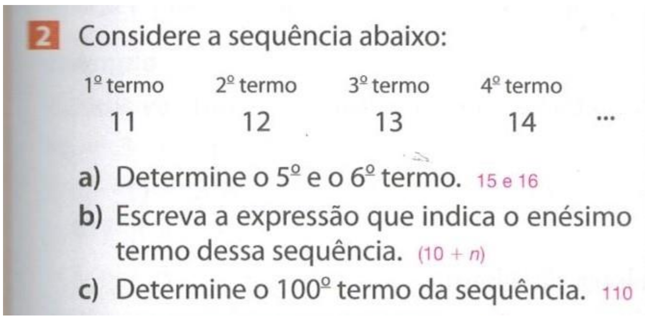
1. São três opções: só gasolina, só etanol ou uma mistura dos dois.
3. gasolina: $2{,}75 \cdot 40$
etanol: $2{,}06 \cdot 40$
4. gasolina na cidade: $10{,}1 \cdot 40$
gasolina na estrada: $13{,}8 \cdot 40$
etanol na cidade: $8{,}1 \cdot 40$
etanol na estrada: $10{,}6 \cdot 40$
5. gasto com gasolina: $2{,}75 \cdot x$
gasto com etanol: $2{,}06 \cdot x$
distância com gasolina na cidade: $10{,}1 \cdot x$
distância com gasolina na estrada: $13{,}8 \cdot x$
distância com etanol na cidade: $8{,}1 \cdot x$
distância com etanol na estrada: $10{,}6 \cdot x$

Fonte: Moderna (2010, p. 122)

Até aqui, neste livro, ainda não se havia feito tal tipo de atividade, então se tenta introduzir o uso de letras para representar números dentro de uma situação cotidiana, que apesar de estar contextualizada, não explica o motivo de se usar a letra "x" em determinada situação, ou seja, espera-se uma dedução do aluno de tal uso, o que consideramos bastante complicado.

A unidade 9 (equações) dentro da parte 4, não faz nenhuma definição ou apresentação de regras ou de expressões algébricas comparando com expressões numéricas ou com textos escritos, mas apresenta 4 situações-problema que são denominadas "situações", seguindo o que se viu na introdução da unidade. Sem qualquer explicação, iniciam-se os exercícios, onde já se vê a transformação para a linguagem algébrica de situações em língua natural, com pedido para representar dobro, triplo, metade, etc., assim, como o uso de contextualizações geométricas. O assunto valor numérico é dado no meio dos exercícios, tendo a definição aparecendo em um quadro em destaque no meio dos mesmos. E então, no tópico "calculando com letras" o autor usa a comparação com o cálculo com números, quando diz que $5.3 + 5.2 = 5\,(3 + 2)$ e conclui que o mesmo pode se fazer com $3.x + 2.x$, pois isto resulta em $x.(3 + 2)$. Em seguida, usa-se o exemplo com perímetro de polígonos. Vimos um caso de generalização em letras a partir de números, que também vimos nos PCN, em Bianchini (2006) e em Dante (2012), muito clara na questão mostrada na figura 13 abaixo:

Figura 13 – Dedução de fórmula algébrica


2 Considere a sequência abaixo:

1º termo	2º termo	3º termo	4º termo	
11	12	13	14	...

a) Determine o 5º e o 6º termo. 15 e 16

b) Escreva a expressão que indica o enésimo termo dessa sequência. $(10 + n)$

c) Determine o 100º termo da sequência. 110

Fonte: Moderna (2010, p. 129)

Na sequência do estudo de equações temos a comparação de operação com números e com letras, o exemplo com a balança de dois pratos, o método de resolução por "tentativa e erro", exercícios para se resolver equações mentalmente, exercícios contextualizados no cotidiano, passo-a-passo para a resolução de problemas com equações, como geralmente se vê em outros livros.

4.4.6 Análise geral dos livros escolhidos

Consideramos importante verificar a análise realizada pelos guias do PNLD com relação aos livros aqui escolhidos. Deve-se destacar que a análise do PNLD se dá sobre a coleção (6º ao 9º ano) e não de anos específicos.

Com relação ao livro de "Matemática" de Edwaldo Bianchini de 2006, o guia de 2011 do PNLD, traz críticas ao uso do que se considera um exagero no uso de regras – como nas regras de divisibilidade no 6º ano -, procedimentos e exercícios de fixação, assim como entendem que há um excesso de informações nos temas: "números e operações", "geometria plana" e "álgebra", como no estudo de equações que se considera com concentração excessiva de conteúdos. O aspecto contextualista é sempre elogiado pelo PNLD em todos os livros que se utilizam deste recurso, e quando este aspecto se sobressai nesta coleção não é diferente. Sempre que se enfatizam as regras, o livro analisado é criticado. O guia considera que o uso de problemas de Bianchini (2006) coloca o aluno apenas para aplicar as fórmulas ou propriedades aprendidas, e não para construir modelos, formular argumentos, etc. O guia destaca o uso da geometria na obra, assim como o uso desta para abordar os conceitos de álgebra.

O livro "Matemática e realidade" de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado de 2009 chama a atenção dos guias do PNLD quanto à variedade dos exercícios com diferentes graus de dificuldades, "Entretanto, a obra dá atenção excessiva a procedimentos, algoritmos e fórmulas e, após a apresentação de poucos exemplos, passa rapidamente à sistematização dos conteúdos. Assim, não oferece muitas oportunidades para o aluno pensar de forma autônoma" (PNLD, 2011, p. 65). Portanto, se critica o aspecto linguístico, e concorda quando há exploração de um conceito por meio de vários exemplos. Na análise de cada tema é comum a crítica à falta de justificação, e percebe-se que se condena a falta de incentivo da ação do aluno, para que este seja autônomo, a falta de incentivo ao cálculo mental e na parte de álgebra, mais especificamente, é elogiado quando se faz uso de situações cotidianas, quando se apresenta ideias, mesmo que não diretamente, como de funções, mas se crítica o domínio de técnicas algébricas para a realização de atividades repetitivas.

Quanto ao livro "A conquista da matemática" de José Ruy Giovanni Jr e Benedicto Castrucci de 2009, o guia de 2011 do PNLD, como nos livros analisados anteriormente, elogia quando o livro mostra contextualizações, no entanto critica quando há apresentação de regras sem justificações. Posicionam-se contrariamente ao predomínio de regras e procedimentos, sem incentivo ao uso de materiais concretos, informática e do cálculo mental. Os guias destacam a antecipação da linguagem algébrica ainda no estudo de números e como fórmulas geométricas, “No entanto, a transição do raciocínio aritmético para o algébrico é feita de maneira mais rápida que o desejável e o cálculo com expressões algébricas é extenso demais” (PNLD, 2011, p. 44). O guia considera inadequado quando o livro destaca o papel da linguagem dizendo que “Na obra, privilegia-se a apresentação formal dos conteúdos e é dada ênfase à habilidade de cálculo” (PNLD, 2011, p. 45). Critica-se o pouco espaço que é dado para o aluno exercer sua criatividade e “A apresentação muito diretiva dos conteúdos também não favorece uma participação ativa dos alunos na construção de seus conhecimentos” (PNLD, 2011, p. 45).

No livro “Projeto teláris: Matemática” de Luiz Roberto Dante de 2012, o guia do PNLD de 2014 destaca o papel da contextualização e a interdisciplinaridade presentes em toda obra, mas se opõe à extensão do conteúdo e ao detalhamento do mesmo. “Na metodologia adotada, o trabalho com os conceitos tem início pela proposição de problemas. No entanto, os conceitos e procedimentos são apresentados sem muitas oportunidades para o aluno tirar conclusões, estabelecer relações e fazer generalizações” (PNLD, 2014, p. 74). Na parte de álgebra, exalta-se a relação desta com as outras áreas da matemática, e pelo fato da linguagem algébrica aparecer na aritmética e na geometria, mostrando, assim, uma diversidade de enfoques para o uso de letras e estratégias de resolução e equações, que nos chamou a atenção também. Elogia-se o uso da modelagem e a preocupação em se construir um pensamento algébrico. Critica-se que o aluno não é levado a problematizar com a frequência desejada, mas que se têm muitas atividades em que isso acontece. Este guia de 2014 apresenta uma novidade com relação ao guia de 2011, que é o tópico denominado “contextualização”. Como não poderia deixar de ser se destaca isto nesta obra.

Com relação ao livro “Projeto Araribá: Matemática” de Editora Moderna (org.) de 2010, o guia do PNLD de 2014, como de costume elogia a contextualização, que de fato se sobressai nessa obra, e critica-se a extensão e o detalhamento excessivo de alguns conteúdos. Há uma crítica ao excesso de conteúdo algébrico nos dois últimos anos. No assunto de álgebra considera-se que não há explicação dos conceitos de incógnita e variável e que a passagem da escrita algébrica para o estudo de equações é feita de modo rápido. Critica-se também que nem sempre o aluno é chamado a argumentar, ficando mais na aplicação de regras, mesmo com o uso de problemas contextualizados. Reclama-se o fato de não se apresentar jogos como dicas de ensino. No tópico “contextualização” a obra é bastante elogiada, tendo pecado apenas pela falta de aprofundamento na contextualização histórica.

Portanto, verifica-se que os guias destacam quando há contextualização, o que acreditamos leva os autores de livros didáticos no Brasil a serem direcionados nesse sentido.

No entanto, os livros parecem não adotar plenamente as propostas nacionais, como se vê nas críticas dos guias do PNLD. Consideramos que isto se deva pela dificuldade em se fazer isso, sendo que os autores também se preocupam em mostrar as regras, pois parecem preocupados nesta questão e não apenas em buscar contextualizações, o que se torna mais difícil ainda na parte de álgebra e nos últimos anos.

Às vezes se tem a impressão de que algumas contextualizações são forçadas ou estão disfarçadas de um ar contextualista, mas não são de fato, pois se colocam problemas que muitas vezes não têm relação com os alunos, ou se pede, no caso do uso de letras, que se faça determinada questão usando "x", por exemplo, mas sem explicar o porquê disto, assim como se vê em Dante (2012), o uso da ideia de uma máquina que dobra números que não pode ser considerado contextualização, mas que teria muito mais um aspecto lúdico, o que no final das contas seria a apresentação de como chegar a ideia de 2.x a partir de vários exemplos com números. Consideramos interessante em Bianchini (2006) e a analogia com a geometria e a ênfase na apresentação de regras em Iezzi, Dolce e Machado (2009) e Giovanni Jr e Castrucci (2009), que assim também são considerados – e, por isso mesmo, criticados – pelos guias do PNLD. Consideramos válido o uso variado de formas de resolver equações em Dante (2012), como também considera os guias.

Percebemos de forma geral nos livros didáticos, a tentativa de que por meio de operações com números se possa gerar uma dedução no aluno para o uso com letras. Compreendemos que não é tão clara para os alunos essa relação, preocupação que também vemos nos guias do PNLD, quando entendem que a passagem da aritmética para a álgebra deve ser feita de maneira compassada e por meio de analogias e contextualizações. Não se pode esperar que o aluno consiga por si só chegar a compreensão do cálculo com letras, pois este lhe parece algo estranho, pelo fato de ter sido habituado a operar com números. No entanto, parece haver uma compreensão, a partir dos documentos oficiais e que se revela em alguns momentos nos livros didáticos, de que há uma relação de mesmo caráter entre a álgebra e a aritmética, a geometria, sentenças escritas e problemas cotidianos. Não discordamos do uso destas analogias, mas como aparato comparativo, e não como se houvesse um pensamento algébrico inerente em todas as áreas da matemática, pois consideramos que a álgebra tem um caráter próprio.

O fato de se tentar a partir de operações com números, ou a partir de outras situações, fazer o aluno "construir por si só" o conhecimento algébrico, remete-nos ao conceito de arbitrariedade da gramática apresentado por Moreno (2005). Antecipamos aqui uma discussão que será aprofundada no capítulo 5, ao dizer que consideramos que a álgebra possui uma gramática, e por isso é autônoma, e consequentemente, é arbitrária, isto é, a formação de suas regras ocorre de forma arbitrária, o que nos impede de pensar a álgebra sob as óticas essencialista e/ou referencial. Dessa forma, um aluno pode não saber quanto é $x + x$ ou responder o que para nós seriam absurdos como resposta, pois ele ainda não conhece tal linguagem. Nesse caso, qualquer resposta seria possível, pois para ele é uma nova gramática, e assim, qualquer coisa dita seria aceitável.

Baruk (1996) constatou em suas pesquisas que algumas situações em matemática, e ao citar situações em álgebra, desencadeia nos alunos a ideia de magia, pois não conseguem explicar o porquê desse fato ocorrer na regra matemática, reforçando o juízo de que a matemática se constitui de um conjunto de regras inexplicáveis, restando apenas aceitá-las, decorá-las e fazer a aplicação, quando possível, justificando nesse contexto seus usos. Nesse sentido as relações com a aritmética deveriam ser feitas anunciando tal possibilidade, como objeto de comparação e não esperando deduções de regras que ainda não foram apresentadas. Entendemos que não há como esperar por uma intuição matemática superior, que aliada ao conhecimento das regras da aritmética ou da geometria, possa efetuar a mesma operação na álgebra, pois é outra gramática.

Alguns livros do 7º ano analisados buscam usar letras em outras áreas e em exercícios anteriores ao estudo da álgebra, para que de certa forma o aluno se acostume com tal uso. Mas deve-se observar que as regras ainda não foram apresentadas e, por isso, mesmo assim não se pode esperar deduções, nem mesmo se pode esperar que as generalizações pretendidas possam ter sido realmente compreendidas. Não defendemos uma simples manipulação de símbolos, mas, compreendemos que é necessária a construção de significados que se dá no interior da linguagem, o que Moreno (2005) chama de relações internas de sentido. Portanto, não basta apenas a apresentação de letras, mas o uso dentro dos jogos de linguagem. De fato, não estamos criticando os exercícios propostos pelos autores, pois como sempre dissemos, nossa análise se remete aos fundamentos filosóficos dogmáticos, logo, buscamos superar a ideia de que a simples apresentação de letras aliada à apresentação de situações cotidianas, possa causar ou revelar processos de descobertas, advindos de uma dedução presente naturalmente no aluno.

Com relação ao uso da contextualização cotidiana, entendemos pela epistemologia do uso, quando analisa o papel da linguagem na organização de nossas experiências empíricas ou mentais, que as compreensões de situações do cotidiano se dão a partir da linguagem e não as situações do cotidiano que formariam conceitos que seriam, enfim, representados em uma linguagem.

Devido à estranheza que há no início da apresentação do conteúdo de álgebra, percebemos que os alunos buscam resolver essas situações cotidianas de forma aritmética e entendem a forma equacionária como uma outra operação, isto é, quando eles forem resolver uma equação escrita com letras estarão usando outras regras, mas talvez não farão tão facilmente a relação com a situação dada. Isso demanda tempo. Essa relação necessita de usos diversos da linguagem. É evidente que a proposição dos autores de livros didáticos destes tipos de problema não é um equívoco, mas seria do professor se este pensar que de fato essa relação – cotidiano, aritmética e álgebra – pudesse ser feita nesse início.

Uma característica comum em quatro livros, com exceção de Iezzi, Dolce e Machado (2009), é o uso de um artifício bastante usado na aritmética, que é o cálculo mental, que em álgebra é feito principalmente para encontrar raízes de equações, em que se utiliza o modo escrito para se fazer as operações sem precisar efetuar o cálculo no papel. Nos livros analisados vemos este uso nas partes lúdicas ou em exercícios. Geralmente não é fornecida nenhuma técnica diferente para resolver mentalmente, sendo apenas uma atividade a mais. O uso desse tipo de atividade e a cobrança dos PNLD por tal tipo de atividade demonstra a existência do cognitivismo no ensino de álgebra, nos documentos oficiais, como já falado, e também nos livros didáticos.

Consideramos que a “imagem mental” que há na mente do aluno não tem uma forma diferente da “imagem real” que está no papel. Baseados em Hebeche (2002), que trata do “cálculo de cabeça” sob uma perspectiva wittgensteiniana, dizemos que ao olhar para a equação $3x = 15$ na folha de papel, tal equação também é vista na mente, ou seja, não há uma abstração transcendente à linguagem ou um conceito como algo superior, pois, “O cálculo na imaginação é então tomado como um processo interno como que acompanhando o cálculo externo papel ou na lousa” (HEBECHE, 2002, p. 195). Um exemplo que é dado por Hebeche é o cálculo com números muito grandes que necessitam um esforço maior para serem realizados devido à dificuldade de visualização dos signos, precisaríamos talvez “escrever no ar”. Assim, também acontece para resolver uma equação como $3x^2 + x/2 - 1 = 0$, que provavelmente demandaria um “trabalho mental” maior. Portanto, mesmo o cálculo mental “é um modo de seguir regras publicamente aprendidas” (HEBECHE, 2002, p. 195).

No próximo capítulo realizaremos uma análise de alguns apontamentos neste tópico. Nesse sentido, destacam-se a contextualização, o problema com a relação entre diferentes linguagens, que toca a tradução e a manipulação de símbolos, e consequentemente o problema do significado e das regras, bem como o pouco apreço dado à questão da linguagem como fonte de produção de sentidos, quando abordaremos a álgebra como gramática.

5 Ensaio de uma terapia

“Repetir repetir — até ficar diferente.
Repetir é um dom do estilo”
(Manoel de Barros, *Uma didática da invenção*)

Gottschalk (2007a, p. 461) destaca que apesar da revolução causada pela virada linguística e por Wittgenstein, “ao deslocar os fundamentos cognitivos do sujeito para a linguagem”, “são praticamente inexistentes os estudos pedagógicos que se apoiam em concepções pragmáticas do conhecimento”, apontando como exceção alguns estudos dos filósofos Ryle, Oakeshott, Scheffler e Passmore. Mesmo na pedagogia de línguas – que poderia ser considerada uma área mais próxima -, não há essa fundamentação, como informa Oliveira (2004), apontando que tal está mais baseada em Austin e Searle. Na educação matemática há alguns estudos em etnomatemática com Antônio Miguel, Gelsa Knijnik, Fernanda Wanderer, Cláudia Glavam Duarte e Denise Vilela, mas que realizam uma interpretação diferente da linha que seguimos no GELIM (grupo de estudos e pesquisas em linguagem matemática), que se aproxima dos estudos de Cristiane Gottschalk, em relação à educação matemática.

Pretendemos, então, neste capítulo - tendo como base a percepção do que foi apresentado no tópico anterior – levantar as possibilidades de uma análise terapêutica do ensino de álgebra. Visto que analisamos até aqui interpretações e usos de fundamentos teóricos, mas não os fundamentos em si, no que diz respeito ao ensino de álgebra, apresentamos inicialmente um tópico em que abordamos o ensino de álgebra, sob a concepção construtivista, que consideramos predominar entre as teorias educacionais existentes, apesar das interpretações equivocadas.

A existência de poucos estudos em educação baseados em Wittgenstein se deve ao caráter não proposicional da obra do mesmo. Pelo fato de ser um trabalho filosófico-terapêutico, não se vê possibilidades de propostas de ensino. Nesse sentido, não buscamos nos afastar totalmente de tal propósito terapêutico, mas enxergamos na epistemologia do uso de Arley Moreno possibilidades pedagógicas, pois é uma análise epistemológica que passou pelo crivo da terapia, e assim, analisa a natureza e as possibilidades relativas à questão do conhecimento, nesta perspectiva, isto é, evitando dogmatismos. Apontaremos repercussões pedagógicas, tributárias da epistemologia do uso e da filosofia do segundo Wittgenstein, no segundo tópico, destacando o papel terapêutico - no sentido de uma recusa persistente do dogmatismo, do fundacionismo, do essencialismo extralinguístico e da concepção, exclusivamente, referencial da linguagem -, mas indicando reflexões que podem ser realizadas referentes ao ensino de álgebra, com possibilidades, não só epistemológicas, mas pedagógicas. Assim, tomamos como pano de fundo a crítica a um padrão teórico que se fundamenta nas concepções essencialista e referencial e que fundamentam o ensino de álgebra, apresentadas na prática – pelo menos como indicação da mesma - no capítulo anterior. As discussões se darão a respeito de temas que tocam o ensino de álgebra destacados no capítulo anterior, como a contextualização, a tradução, a determinação de significados, a manipulação de símbolos e as regras.

No terceiro tópico apresentamos uma reflexão sobre a gramática da álgebra, como compreensão a respeito desta disciplina, que indica uma visão não dogmática, não essencialista e não referencial, e que amplia o leque de possibilidades pedagógicas, colocando na linguagem a perspectiva de uma construção e transmissão do conhecimento algébrico, como algo que deve ser realizado, por este ser um conteúdo historicamente construído, e que eticamente, nós professores, temos o dever de transmitir aos nossos alunos, que é uma discussão que aprofundamos no quarto e último tópico deste capítulo.

5.1 Construtivismo e o ensino de álgebra

À primeira vista, Piaget pode ser aproximado do ensino de álgebra por seus estudos referentes ao pensamento formal ou à formação do símbolo na criança, mas em tais estudos Piaget não trata diretamente de álgebra. Geralmente se tem utilizado de sua teoria para defender que o conhecimento algébrico é algo que vai além do símbolo e do formal, como se fosse um pensamento conceitual que vai se construindo no aluno, a partir de sua ação sobre os objetos (interação do sujeito com o ambiente), principalmente no estágio operatório concreto, possibilitando, enfim, que este chegue ao operatório formal. No entanto, a álgebra está associada na teoria piagetiana muito mais no estágio operatório formal, compreendendo-se que é neste período que se considera que a álgebra de fato pode entrar na educação do sujeito, ou seja, por volta dos 11-12 anos, isto é, 7º ano do ensino fundamental no Brasil. A teoria de Piaget entende que no estágio anterior o sujeito vai desenvolvendo, devidos às operações concretas, o raciocínio lógico e abstrato, mas é apenas no quarto estágio que, de fato, esse se solidifica, mostrando que a lógica está intimamente ligada com a álgebra nesta teoria, algo que parece uma espécie de senso comum para professores, estudantes mais maduros e para a parte da sociedade que tem algum conhecimento matemático. Piaget (1969, p. 31) também acredita que há uma relação evidente entre a lógica e álgebra:

> A Inteligência elabora e utiliza estas estruturas sem tomar consciência em uma forma reflexiva, não como M. Jurdain, que escrevia em prosa sem sabê-lo, senão, melhor ainda, como qualquer adulto não especialista em lógica manipula aplicações. Distinções, etc., sem ter a menor ideia da forma em que a lógica simbólica chega a pôr essas operações em fórmulas abstratas e algébricas.[46]

Essa concepção de lógica evidente apareceu no logicismo e no *Tractatus* de Wittgenstein, e é interessante destacar que as mesmas 16 combinações possíveis a partir de 4 classes, que aparecem em uma tabela no *Tractatus*, também aparecem em Piaget e Inhelder (1975), justificando a partir destas combinações com conjunto das partes. Wittgenstein se utilizou da tabela em um sentido lógico, propriamente dito, e Piaget, em um sentido mais psicológico.

De acordo com o construtivismo piagetiano, a mudança do concreto para o formal é possível, devido ao desenvolvimento das capacidades de abstração, generalização, explicação, levantamento de hipóteses, experimentação e comprovação destas, devido ao conjunto de operações de inversões e reciprocidades que passa a existir neste estágio e que permitem o desenvolvimento da autonomia do sujeito. Esse conjunto de operações, que Piaget chama de proposicionais, admite as transformações: idêntica (I), uma inversa (N), uma recíproca (R) e uma correlativa (C), que é denominado o grupo INRC, onde "de cada proposição (I) pode-se tirar sua inversa (N) e sua recíproca (R) e a recíproca da inversa (C) e ainda voltar à mesma posição (I), sem perder as referências do raciocínio" (FRANCO, 1995, p. 44), de onde se tira as propriedades associativa, reversiva, comutativa e de identidade. Portanto, o pensamento formal seria composto por estas propriedades, que são as que permitem transformações variadas, que permitem as 16 combinações citadas antes, ou seja, há aqui uma associação direta entre lógica e psicologia.

No estágio operatório-formal da vida do sujeito é que entraria a linguagem de forma mais direta como auxílio para representar as hipóteses pensadas, os conceitos abstratos, tanto que Piaget e Inhelder (1975) em seu estudo sobre a origem das estruturas lógicas elementares na criança, defendem que o desenvolvimento intelectual desta se faz pela ação do sujeito e não somente na linguagem. Piaget (1969) revela que o ensino da abstração não pode ser feito pela linguagem, mas a partir de operações concretas. É nesse sentido, que que o simbolismo algébrico entraria na educação infantil no construtivismo, como uma representação de conceitos

[46] "La inteligencia elabora y utiliza estas estructuras sin tomar consciencia en una forma reflexiva, no como M. Jurdain, que escribía en prosa sin saberlo, sino, mejor aún, como cualquier adulto no especialista en lógica manipula aplicaciones, distinciones, etc., sin tener la menor idea de la forma en que la lógica simbólica o algebraica llega a poner esas operaciones en fórmulas abstractas y algebraicas".

generalizados e abstratos, por exemplo, como letras indicando quaisquer números, como incógnitas e variáveis.

A relação entre Piaget e a álgebra de forma mais direta está no capítulo 5 do livro *Psicogênese e a história das ciências* de 1982, que este produziu com Rolando Garcia. É importante destacar três questões com relação a esta obra de Piaget: Primeiramente, que aqui Piaget já se encontrava no fim de sua obra, ou seja, de certa forma este livro apresenta uma síntese de sua teoria, aplicada aqui à história das ciências; Piaget não intentou com esta obra um trabalho sobre pedagogia, mas que percebe-se claramente a possibilidade de uma relação com a educação; e por fim, que Piaget já vinha utilizando nos anos que antecederam esta obra o termo "construtivismo", e aqui ele parece querer definir uma epistemologia construtivista.

Em semelhança com o fazem para toda a história das ciências, Piaget e Garcia (2011) tratam de classificar a história do conhecimento algébrico, dividindo-o em três períodos, *Intraoperacional, interoperacional e transoperacional*, no caso da álgebra, baseados em uma análise sobre o tratamento das equações. De acordo com os autores o primeiro período, *Intraoperacional*, foi longo, que seria o período que durou até a simbolização realizada por Viète, onde se buscava uma solução para cada tipo de equação que surgia, inicialmente as de primeiro grau, depois as de segundo, de terceiro, etc. e com as formas diferentes que estas poderiam apresentar, ou seja, até aqui não havia um método geral de resolução. No período *interoperacional*, buscou-se fórmulas para a resolução, como no caso da fórmula atribuída à Bháskara, e outros casos, como a adequação de uma equação de grau maior a outra que já tivesse resultado conhecido, como no caso de uma equação por exemplo do tipo $ax^2 + bx = 0$, em que até se faz uma fatoração e transforma esta em uma equação do primeiro grau, sendo uma das raízes o valor zero. No terceiro período, *Transoperacional*, com os estudos mais avançados de Galois e Gauss, possibilitados pelo cálculo infinitesimal, quando se percebeu que as propriedades das equações não dependiam que as variáveis e coeficientes fossem números, ou seja, poderia existir uma sintaxe própria da álgebra, sem a perda da semântica, também própria ao simbolismo, o que levou ao surgimento dos números complexos por Gauss e do desenvolvimento das estruturas algébricas por Galois.

Como diz o próprio título da obra de Piaget e Garcia, eles pretendem relacionar ou tratar a história das ciências, a partir da psicogênese, que é o estudo da origem dos processos mentais, ou seja, eles buscam tratar da história das ciências na perspectiva de uma compreensão sobre a origem dos processos mentais referentes a esta. Como já dissemos, Piaget não era um pedagogo de fato, no entanto, além de ter se envolvido com a educação, sua teoria se aproxima desta, por tratar do estudo sobre o conhecimento, numa abordagem genética. Desse modo, relacionamos aqui o estudo sobre a formação da álgebra na história apresentado pelos autores, Piaget e García, com a ideia mais geral do livro.

Na introdução os autores apresentam duas teses que pretendem defender. A primeira tese é a existência de uma relação parcial, no sentido psicogenético ou filogenético (que está relacionado ao estudo da evolução da espécie humana), entre a formação do conhecimento nos estágios mais elementares e nos estágios superiores. A segunda tese é a dependência de um conceito construído na atualidade, em sua versão mais desenvolvida, com o modo em que foram construídos na história humana, tanto no sentido filogenético quanto psicogenético. Na primeira tese os autores acreditam que há etapas cognitivas que se dão em ambos os níveis de construção de conhecimento, tanto histórico, quanto individual, ou seja, de que há etapas cognitivas que foram enfrentadas pela humanidade que se mostram no indivíduo também, que exemplificamos com a estranheza com conteúdos matemáticos que parecem “antinaturais”, que foram difíceis de ser aceitos na história da humanidade, como números negativos, os irracionais, os complexos e a própria demora em se construir um simbolismo algébrico, que os autores parecem acreditar se dá também com os alunos. Na segunda tese os autores parecem acreditar que pelas etapas cognitivas existirem em ambos os níveis, o modo de construção torna-se semelhante, mas que devido às estruturações de tais conteúdos, o aluno não demoraria os mesmos séculos da humanidade para compreender estes, pois os mesmos já estão estruturados, pois já estão institucionalizados, e formatados em modelos bem-acabados e não mais em processo de construção, mas que tal compreensão serve para se entender as dificuldades dos alunos. Os autores consideram que o que aqui chamamos de estruturação é um mecanismo que se dá pela *abstração reflexiva* e a *generalização completiva*.

A abstração reflexiva, neste contexto, assemelha-se ao que já apresentamos no capítulo 1, mas que serve para justificar o que os autores defendem, que é o fato de que o sujeito possui a capacidade mental de atribuir aos objetos ações, operações e propriedades que estes não possuem. Desse modo, por meio da reflexão o sujeito pode estabelecer uma forma de ver determinados objetos, ou seja, se na história da humanidade se demorou a compreender os números negativos, o sujeito por ter a capacidade abstrativa reflexiva, de certa forma, impõe, ao seu intelecto - claro, por que há justificativa, de acordo com os construtivistas para tal – a noção de números negativos, e o mesmo serviria para a álgebra. De acordo com Piaget e Garcia (2011, p. 10) a abstração reflexiva

> tem lugar através de dois processos necessariamente conjugados: 1) um ‘ato de se fazer refletir’ em um nível superior (por exemplo, em um nível de representação) aquilo que foi extraído de um nível inferior (por

> exemplo, de um nível de ação); 2) uma ‘reflexão’ que reconstrói e reorganiza, ampliando-o, aquilo que foi transferido ou refletido anteriormente.

A generalização completiva existe, de acordo com Piaget e Garcia (2011, p. 10), “quando uma estrutura, conservando suas características essenciais, se vê enriquecida por novos subsistemas que se agregam sem modificar os precedentes”. Exemplificamos pela própria noção de número que foi agregando novos subconjuntos. Hoje poderia se pensar que o conjunto mais geral é o dos complexos e que este foi ao longo da história, agregando novos subconjuntos. Mas os autores exemplificam com a própria álgebra, quando dizem que a álgebra incorporou as álgebras não-comutativas, que vieram a completar as álgebras comutativas[47]. A álgebra não-comutativa é o estudo dos anéis não-comutativos e que está no interior da álgebra geral. Os autores, então, relacionam a abstração reflexiva com a generalidade completiva:

> O processo de ‘reflexão’ é duplamente construtivo por duas razões complementares. Em primeiro lugar, porque o ato de se fazer refletir consiste de um processo de estabelecimento de uma correspondência, e o mecanismo assim posto em ação conduz, em um nível superior, a novas correspondências. Estas últimas não apenas associam os conteúdos transferidos a novos conteúdos que são integráveis na estrutura inicial, mas também permitem generalizá-los. Em segundo lugar, estes começos de morfismos conduzem igualmente à descoberta de conteúdos próximos, mas não diretamente assimiláveis, à estrutura precedente: opera-se então uma transformação que, por um processo completivo, chega a integrar a dita estrutura precedente como subestrutura de uma estrutura mais ampla e, por conseguinte, parcialmente nova. Este modo de construção por abstração reflexiva e generalização completiva se repete indefinidamente. (PIAGET E GARCIA, 2011, p. 10)

Posteriormente, os autores ainda defendem uma terceira tese que diz respeito a estas questões, caracterizando-as por dois aspectos, o primeiro sendo que o nível superior integra os elementos que eram do nível inferior, ou seja, os aprendizados que se tem de um conhecimento, em sua versão mais ampla, abrangem também as versões superadas, e o segundo faz referência ao que apresentamos com relação ao conhecimento algébrico defendido por esses autores, que diz respeito aos prefixos *intra*, *inter* e *trans* que será considerado para a toda a história das ciências nesta obra, assim como para a aprendizagem dos sujeitos, como se vê na citação:

> A sucessão intra, inter e trans tem de notável três propriedades fundamentais: 1º está em todas as disciplinas, 2º não é específico do pensamento científico, encontra-se a mesma ordem de sucessão e em função dos mesmos mecanismos nas crianças e 3º cada etapa repete em suas próprias fases o processo total (PIAGET E GARCIA, 2011, p. 158).

---

[47] A álgebra comutativa estuda os anéis comutativos, que podem ser exemplificados pelos anéis de polinômios, que é uma generalização dos reais, do tipo $p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$.

Portanto, a relação que eles fazem com a álgebra como conhecimento científico pode ser relacionado ao ensino, isto é, as crianças aprendem seguindo as mesmas etapas da história, sendo consideradas as adequações permitidas pela abstração reflexiva e generalidade completiva, que são os mecanismos que permitem que um sujeito possa passar do nível, que os autores, de modo mais geral, chamam de *Intraobjetal*, que seria a análise dos objetos, ou seja, seria uma fase em que as crianças ainda veem as equações como situações específicas, que merecem tratamento. É nesse sentido, que defendemos que o construtivismo e as teorias educacionais ligadas a uma tradição filosófica da consciência, ou que buscam compreender tais fenômenos por processos mentais, defendem a ideia de um pensamento algébrico, pois, de acordo com eles, haveria uma essência desse pensamento existente na criança mesmo quando essa lida com situações que não são de fato algébricas. Por exemplo, quando uma criança é colocada diante de uma situação do tipo "João tem 7 petecas à noite, pela manhã tinha 2, quantas ele conseguiu durante o dia?", esta situação já seria algébrica, mas o aluno ainda estaria em um nível *Intraobjetal*, de análise dos objetos, que se dá no ensino fundamental com situações com valores a se descobrir, com valores variáveis, "quadradinhos" escondendo os números em igualdades, e devido às possibilidades oferecidas pela abstração reflexiva e generalidade completiva ele poderia avançar para o nível *Interobejetal*, que já é um estudo das relações entre os objetos, que na história foi quando se percebeu que poderia se usar modelos para resolver equações e para os alunos é o uso de fórmulas, que acontece a partir do 7º ano, o que por meio dos mesmos mecanismos, poderia alcançar o nível *Transobjetal*, que é da construção de estruturas, que pode ser representada pelo estudo de polinômios no 8º ano.

Piaget e García (2011) relacionam ainda estes três níveis aos três últimos estágios do desenvolvimento das estruturas cognitivas das crianças, deixando de lado o estágio sensório motor, nesse sentido, o estágio pré-operatório corresponderia ao nível intraobjetal, o estágio operatório concreto ao nível interobjetal e o estágio operatório formal ao nível transobjetal. Fica claro o pensamento que os autores têm sobre a álgebra quando dizem que a álgebra "é a ciência das estruturas gerais comuns a todas as partes da matemática, incluindo a lógica" (PIAGET e GARCIA, 2011, p. 167).

Piaget teve relação com o grupo Bourbaki e o movimento da matemática moderna. Há uma correspondência entre as estruturas cognitivas do construtivismo piagetiano e as estruturas matemáticas do grupo Bourbaki. Pinto (2009) considera que a matemática moderna é filha de Bourbaki e Piaget, assim como Piaget aparece como um dos principais autores no livro organizado por Jesús Hernandez, de 1986, intitulado *La enseñanza de las matemáticas* *modernas*, ao lado de Jean Dieudonné, entre outros. Nessa obra há dois textos de Piaget, o nono texto, *La iniciación matemática, las matemáticas modernas y la psicologia del niño* (tradução em espanhol de um texto originalmente publicado em 1966 em francês) e o décimo terceiro texto, *Observaciones sobre la educación matemática* (tradução em espanhol de um texto já traduzido para o inglês em 1973 de um texto originalmente publicado também em 1973 em francês). A relação da teoria de Piaget com a matemática moderna também é vista na obra "Psicologia e Pedagogia", quando este trata das "didáticas de las matemáticas".

O movimento da matemática moderna compreendia que as chamadas "estruturas-mãe", propostas pelo grupo Bourbaki – estruturas algébricas, de ordem e topológicas -, faziam parte do sujeito psicológico. Piaget (1986a) defende que as estruturas-mãe estão relacionadas às estruturas lógicas da criança, sendo as estruturas algébricas correspondentes aos sistemas de classe, as estruturas de ordem correspondentes às seriações e as estruturas topológicas correspondentes às separações, e que por volta dos 11-12 anos estas estruturas elementares se combinam para formar um grupo quaternário de transformações que ele denominou INRC. Já dissemos no capítulo 1 que para a epistemologia genética a classificação e seriação assumem determinadas formas, partindo do pressuposto de que elas se convertem como que naturalmente para estruturas lógico-matemáticas por uma construção espontânea do próprio sujeito. Dessa maneira, Piaget no texto "Observaciones sobre la educacion matematica" aborda a necessidade de se estudar o desenvolvimento espontâneo das operações lógico-matemáticas dos sujeitos, no caso, a criança e do adolescente. Nesse texto, Piaget afirma que crianças de 3-4 anos adquirem noções topológicas elementares antes de outras noções de geometria, que são noções como vizinhança e aderência, que são mais anteriores aos desenhos de figuras geométricas, ou seja, não são operações topológicas de fato, são como que projeções destas. Piaget entendia que a reforma no ensino da matemática moderna deve se aproximar mais das operações espontâneas do sujeito do que o ensino tradicional, e nesse sentido, deveria se obedecer às etapas de desenvolvimento da criança, que compreendemos como os estágios de desenvolvimento apontados na teoria piagetiana.

Piaget considera que se se está lidando com uma matemática moderna, os métodos de ensino devem ser modernos também e desse modo não se pode apenas transmitir conteúdos, mas incentivar a construção pelo próprio aluno. Para Piaget, o aluno faz continuamente operações de conjunto, de grupo, de espaço vetorial, mas não de forma consciente, pois são, de acordo com o autor, esquemas fundamentais do comportamento, ou seja, há um conhecimento de diversos objetos matemáticos, que só são construídos pela abstração reflexiva, a partir de estruturas mais concretas, e assim, Piaget defende que o desenvolvimento da inteligência da criança se dá na ação do sujeito e não na linguagem. Ele, então, defende que é esta preocupação que o ensino de matemática deve ter: pensar sobre ação do sujeito, pois é a partir desta que ele constrói o seu conhecimento. Portanto, Piaget oferece ao movimento da matemática moderna, a noção de ação sobre o concreto para a construção de conhecimentos formais. Para o epistemólogo suíço, é a partir destas ações que o sujeito pode chegar às deduções necessárias no estágio operatório-formal. Piaget explica que antes desse estágio a criança se encontra no estágio operatório-concreto, ou seja, ela necessita do concreto para alcançar o formal, mas no estágio concreto há tendências espontâneas na criança de operações dedutivas, mas que ainda não chegam de fato a ser formais, e não podem, de acordo com Piaget, ser antecipadas, isto é, deve-se ir colocando o aluno diante de situações concretas para que este possa construir os objetos formais mais desenvolvidos.

Piaget acredita que a origem das estruturas lógicas elementares acontece no estágio operatório concreto. Para Piaget os professores deveriam conhecer mais teorias psicológicas para ter capacidade de proporcionar para os alunos atividades em que estes pudessem desenvolver sua criatividade. Na sua concepção, o professor deve conhecer dois princípios psicopedagógicos básicos para entender os distintos níveis de desenvolvimento do aluno. O primeiro deles é que a "compreensão real de uma noção ou de uma teoria supõe sua reinvenção pelo sujeito" (PIAGET, 1986b, p. 225) e o segundo princípio é que "a tomada de consciência está sempre atrasada em relação à ação propriamente dita" (PIAGET, 1986b, p. 227). Assim, o professor poderia ajudar o aluno a chegar mais rapidamente a tomada de consciência de suas ações mediante situações de estudo, como discussão, trabalhos em equipe, etc. Nas palavras de Piaget (1986a, p. 186), "se se consegue pôr de acordo as matemáticas modernas e os dados psicológicos, a pedagogia tem em si um futuro luminoso".

Depois do fracasso da matemática moderna houve, então, no ensino de álgebra o resgate de uma visão mais instrumentalista, onde se passou a se buscar justificações, por meio de analogias, mas não só com a aritmética, como também, com a geometria, no uso de figuras e blocos, e com o empírico, como o uso da balança, que é o formato de ensino mais próximo do atual. Essa combinação se deveu, por um lado, no aspecto instrumental que persistiu, não só a herança tecnicista do período militar, mas também ao aspecto formal enfatizado pela matemática moderna, e por outro, no aspecto analógico com o concreto, devido às influências do construtivismo.

Desenvolveu-se nas últimas décadas na educação matemática a noção de pensamento algébrico. Beck e Silva (2015), em seu estudo sobre o estado da arte do pensamento algébrico no Brasil, defende que na base deste está a concepção de pensamento lógico-matemático de

Piaget. Também se tem no Brasil trabalhos baseados na didática da matemática francesa, que como já vimos no capítulo 1, está associada ao construtivismo.

É interessante notar que ao mesmo tempo em que os PCN criticam a matemática moderna, eles se utilizam de Piaget, que como vimos, foi a base teórica daquele movimento. Por isso, o que temos atualmente é um misto teórico que é chamado de construtivismo, que como vimos tem algum fundamento na teoria de Piaget, mas que tem outras influências, que se aproximam desta. No caso da matemática moderna, abandonou-se a noção linguística forte deste movimento, mas ficou com a parte do uso da teoria dos conjuntos nos primeiros anos de cada nível, devido à noção de que a síntese da matemática moderna que se intentou aplicar na educação básica tinha algum fundamento, pois se entende que há uma correspondência entre conteúdos lógico-matemáticos e o pensamento humano.

Com os PCN houve uma desvalorização de conteúdos, e uma substituição destes pelas chamadas competências e habilidades, que se aproxima da noção que apresentamos de pensamento algébrico, ou seja, como uma competência e habilidade superior percebida no enfrentamento de situações e podendo ser expressada em diversas formas linguísticas, que também são colocados em prática com a álgebra, compreendendo o conhecimento, ou mais particularmente o pensamento algébrico, em uma concepção que consideramos essencialista e tomando a linguagem apenas como referência de tal, e colocando isto em prática apoiados por uma interpretação do construtivismo piagetiano e teorias semelhantes.

Nesse contexto, a álgebra é vista como um conhecimento que deve ser construído pelo próprio aluno pois o mesmo apresenta em atividades, mesmo nas séries iniciais, mostras de que tem consigo um potencial pensamento algébrico, que necessita ser estimulado, para ser de fato construído. Nesse sentido, vai-se colocando assuntos com uma álgebra escondida, para que os mesmos possam aos poucos ir descobrindo a álgebra existente ali, como vimos nas propostas de textos e documentos analisados anteriormente, que defendem que se deve levar os alunos a irem construindo uma linguagem algébrica própria, atitude que consideramos semelhante ao que aconteceu na história, quando foram surgindo várias formas de linguagens algébricas. No construtivismo, o aluno deve ser levado a ver generalizações, regularidades, e a construir espontaneamente o conhecimento algébrico, pois o ideal da educação é “aprender a aprender”. Portanto, não se poderia apresentar a linguagem algébrica como uma linguagem em si, a ser aprendida e operada nas diversas situações.

5.2 Uma “terapia” para a educação algébrica

A filosofia de Wittgenstein não tinha como maior preocupação a educação, no entanto, tanto a filosofia de Wittgenstein, quanto a epistemologia do uso de Moreno trazem a possibilidade de extrairmos consequências pedagógicas, e, no nosso caso, para a educação matemática. Ao compreenderem e desenvolverem a ideia de que o significado está no uso, Wittgenstein e Moreno, fornecem elementos para uma análise sobre construção e transmissão do conhecimento. Wittgenstein aborda amplamente questões matemáticas, pois não só iniciou sua reflexão filosófica devido seus estudos em matemática, assim como esteve rodeado por filósofos da matemática, oferecendo, então, uma leva de exemplos retirados do uso da matemática. Gottschalk (2013a) informa que metade dos escritos de Wittgenstein no período entre 1929 e 1944 tematizaram a filosofia da matemática. Nesse sentido, direcionamos sua filosofia para a compreensão de como ocorre a construção e transmissão de conceitos, no nosso caso, de conceitos algébricos. É interessante que Moreno (2005, p. 263) afirma que o

> importante a ser notado é que o procedimento terapêutico apresenta as mesmas características que descreve Wittgenstein a respeito do ensino e aprendizado, no início das Investigações, assim como de seu próprio ensino de filosofia em Cambridge, a saber, dão-se alguns exemplos espera-se que o aprendiz seja capaz de prosseguir por si próprio sem o auxílio do professor.

Vale ressaltar que Moreno aqui não está defendendo a aprendizagem espontânea, pois em se tratando de Wittgenstein devem-se entender os exemplos como parâmetros, que são formas de apresentação de regras, ou seja, são formas de como proceder, como se o professor dissesse “assim como eu fiz, você deve fazer”, e não como se apresentasse noções ou exemplos, e a partir deles se pedisse formulações de conceitos ou fórmulas. Moreno (2005, p. 264) reforça esta ideia em seguida quando revela que “não são novas informações que interessa ao terapeuta acumular, esboçar sempre novas paisagens, mas aprofundar os mesmos temas de diferentes pontos de vista, percorrer os mesmos caminhos com novo olhar”, ou seja, no caso do pesquisador, pode-se buscar a análise do mesmo conceito/situação de diversas formas, bem como no caso do aluno, este pode buscar sempre novos caminhos ou andar por eles com diferentes olhares, e assim vai se ampliando o uso de conceitos em diferentes contextos, em ambos os casos.

A pesquisadora Cristiane Gottschalk tem desenvolvido pesquisas em educação que buscam na filosofia wittgensteiniana e na epistemologia do uso de Moreno as bases paras as suas reflexões. Ao se referir à epistemologia do uso, Gottschalk (2007a, p. 461) apresenta de que forma esta teoria pode colaborar para a educação, quando revela que esta

> considera elementos da práxis da nossa linguagem como constituintes dos sentidos que construímos para a nossa experiência, não para sugerir novos métodos de ensino, mas para questionar determinadas orientações de teorias pedagógicas atuais e apontar para um novo modo de ver as relações entre ensino e aprendizagem.

Moreno (2005) revela que apesar de Wittgenstein não querer formular uma teoria, pode-se perceber teses ou afirmações sobre alguns assuntos, como o aprendizado, estados mentais internos, relações entre ação e comportamento, e principalmente sobre a linguagem e sobre as relações entre a lógica e a matemática. O autor explica que não há contradição em Wittgenstein realizar afirmações, já que ele crítica as teorias dogmáticas que assim fazem. O filósofo tinha consciência de que suas próprias afirmações poderiam ser entendidas como dogmáticas, e não pretendia com isso realizar uma teoria, mas uma terapia, assim como as próprias afirmações mostram-se diferentes das realizadas nas teorias dogmáticas, pois são afirmações resultantes de uma atividade, neste caso, terapêutica, e não princípios absolutos.

Gottschalk (2015, p. 304) compreende que a inovação "tão exigida pelos atuais governos, pode vir não de uma nova teoria educacional, mas, simplesmente, de uma abordagem terapêutica deste complexo uso de conceitos educacionais, que já se encontre liberta de uma concepção referencial da linguagem", que esclareça confusões e que não tente impor modelos. A autora mostra que tais teorias se incorporam nas formas de vida, tornam-se instituições, o que deixa muitos de nós, educadores, atrelados a teorias, que não conseguimos nos desvencilhar, por fazer parte de nossas formas de vida – parece impensável uma educação que não tenha o utilitarismo como marca principal. Nesse sentido, a autora propõe, assim como faz Wittgenstein, relativizar tradições filosóficas, mesmo que pareça algo absurdo, para mostrar que mesmo nossas convicções são convencionais. Para além de teorias educacionais, em um âmbito filosófico, Moreno (2003, p. 115) defende que

> Wittgenstein se esforça para mostrar que os legítimos fundamentos da razão já estão dados pela própria reflexão dogmática, de tal maneira que não seria pertinente procurar por outros fundamentos mais legítimos que pudessem vir a substitui-los. Não se trata, neste caso, de empreender uma *crítica* propriamente do dogmatismo, mas, apenas, fazer a *terapia* de seu *pensamento*: mostrar que aquilo que é colocado como fundamento é, de fato, o fundamento, mas deve ser reconhecido em sua natureza meramente *convencional*.

Usando o conceito de estilo de Granger, Gottschalk propõe um “outro estilo de investigação” em que não haja a “pretensão de se chegar a novas teses” ou “um fundamento com critérios rigorosos que orientem nossa política e prática educacionais. No estilo dialógico são produzidas, apenas, novas significações, novos usos do simbolismo já existente, o que possibilita o esclarecimento de certos equívocos” (GOTTSCHALK, 2015, p. 312). Oliveira (2004, p. 345), tratando da pedagogia de línguas, afirma que a terapia consiste em desvendar confusões e “O que fazer com a clareza daí advinda, não é mais tarefa da filosofia, mas da própria pedagogia. Nesse ponto começa a *teoria*, ou seja, a elaboração de hipóteses que podem e devem ser verificadas”, ou seja, a terapia apresenta as confusões, e a pedagogia com os problemas detectados elaboraria mecanismos didáticos. Moreno (2012, p. 83) compreende, portanto, que o objetivo da terapia é detectar os usos em sua enorme diversidade, *sem levantar* perspectivas generalizantes, ou teorias explicativas. Não realizamos aqui a terapia aos moldes de Wittgenstein, mas a que este filósofo realizou é a base de nossas análises, que caminha em dois objetivos: por um lado, colaborar com os pesquisadores que se prendem a certas opções teóricas, e por outro, refletir sobre o ensino, que tem, devido às direções teóricas dogmáticas, produzido teses, e consequentemente confusões que prejudicam tal prática. Baseamo-nos na terapia de Wittgenstein para construir um arcabouço analítico sobre o ensino de álgebra realizado no Brasil.

Wittgenstein realizou a terapia de alguns fundamentos filosóficos, iniciando por si mesmo, em uma autoterapia do seu *Tractatus.* Com relação aos estados mentais internos e as suas inter-relações com processos físicos externos, Wittgenstein visou esclarecer concepções mentalistas ou behavioristas sobre os fundamentos da ação significativa e do pensamento. Chamamos a atenção para dois assuntos sobre os quais Wittgenstein refletiu, o aprendizado e as relações entre ação e compreensão. Estas reflexões nos ajudam a pensar, como se pode compreender a construção e transmissão do conhecimento, além de nos ajudar a entender melhor sua filosofia. Com relação ao aprendizado, Wittgenstein realizou afirmações quanto às distinções entre um *saber como* fazer, prático, e um saber a respeito de regras, um *saber que* é teórico, que guia as nossas ações. Essas distinções é que permitem a Wittgenstein esclarecer o conceito de *seguir regras* enquanto fundamento da ação significativa e do pensamento, ou seja, o aprendizado está relacionado ao ato de seguir regras. Sobre as relações entre ação e compreensão, que esclarecem o conceito de interpretação das regras, Wittgenstein mostrou que se trata de uma atividade de manipulação simbólica exercida em contextos sociais permeados pela linguagem, e não um ato mental solipsista. Wittgenstein considera o ato de *seguir regras* como fundamento na construção de significados e a interpretação de tais regras se dá em uma atividade de manipulação simbólica que se exerce na linguagem, em contextos sociais. Dessas reflexões compreendemos que Wittgenstein passou, em sua segunda filosofia, a entender que a construção e transmissão do conhecimento ocorrem na linguagem e a partir da linguagem, e não se justifica por fatores externos a ela, sejam eles empíricos ou mentais.

No *Tractatus*, Wittgenstein tomou a lógica como campo transcendental de análise dos fatos do mundo. Moreno (2005), então, esclarece que no *Tractatus*, a lógica não é uma teoria, uma vez que não pode ser verificada, mas apenas aceita, e também não é uma prática, pois não é uma atividade, mas apenas uma espécie de especulação do que seria uma explicação transcendental dos fatos do mundo, que deve ser aceita como é e pode ser utilizada apenas dessa forma, como algo transcendental. Com base no aforismo §3.3421 do *Tractatus* - “Esta é a situação da filosofia em geral: o singular se manifesta repetidamente como desimportante, mas a possibilidade de cada singular nos dá um esclarecimento sobre a essência do mundo” -, Moreno (2005) revela que o essencial é o que há em comum a todas as ocorrências particulares de um mesmo tipo e dessa forma se apreendemos o elemento comum, tal como o símbolo, passa a ser compreendido como uma marca característica comum a uma classe de proposições.

> 3.344 O que designa no símbolo é o que é comum a todos os símbolos pelos quais o primeiro pode ser substituído de acordo com as regras da sintaxe lógica.
> 3.3441 É possível, por exemplo, exprimir do seguinte modo o que é comum a todas as notações para as funções de verdade: é-lhes comum, por exemplo, *poderem ser substituídas* pela notação "'-p" ("não p") e "p v *q" ("p* ou g"). (Com isso se indica a maneira pela qual uma notação especialmente possível nos pode dar esclarecimentos gerais) (TLP).

Moreno (2005) observa que, de acordo com o *Tractatus*, apreendemos a essência pela exploração exaustiva das possibilidades, retendo o que é comum. O autor entende que esta é uma concepção tradicional de conceito. Mas como se faria tal exploração de possibilidades? Como se perceberia propriedades comuns? Para o Wittgenstein do *Tractatus*, isto se faria por meio da lógica matemática, pois ela permite analisar possibilidades e enxergar propriedades através de deduções. Dessa forma, a essência existiria e poderia ser delimitada na linguagem, pois a lógica percorreria todas as possibilidades, deixando apenas o que é necessário, aquilo que é de fato essencial. A ideia do *Tractatus* é que o pensamento só poderia pensar o que é possível, e como não pensaríamos nada ilógico, o fato de haver pensamento geraria possibilidades dentro de uma lógica que fundamentaria a relação entre a linguagem e o mundo. Logo, se pensamos, deduz-se que tal é essencial, por ser possível, pois desse modo o pensamento estaria no campo da possibilidade que a lógica oferece, por ser pensável, o que permitiria compreender sentidos ainda desconhecidos, o que ratificaria as concepções essencialistas aqui mostradas. Nesse sentido, poder-se-ia compreender conceitos ainda não apresentados, devido à uma possibilidade lógica do pensamento ou ao fato de o pensamento ser lógico, como vemos nas teorias educacionais de concepção essencialista.

No que tange à matemática, o *Tractatus* compreende que as proposições desta são tautologias (pseudoproposições) que Wittgenstein denomina como equações. Não há como as proposições matemáticas figurarem o mundo, pois não são de fato proposições, não podem ser consideradas verdadeiras ou falsas, elas não necessitam dos fatos do mundo para serem comprovadas. Desse modo, o jogo de linguagem matemático não descreve a realidade, assim como, as proposições matemáticas não podem ser descobertas. Não se poderia associar o ensino de matemática a uma utilização de suas posições na realidade, ou como, se tais só fossem comprovados pelo uso empírico. Tal pensamento parece se manter na segunda fase do filósofo, mas compreendendo as proposições matemáticas não como tautologias, mas como gramaticais.

Moreno (2005) explica que o primeiro Wittgenstein teve problemas no *Tractatus* com os objetos lógicos, pois assim como são abstratamente definidos e necessários para a determinação dos sentidos, são também exigidos pela realidade, contudo, sem qualquer critério para identificá-los nesta realidade. A saída desta dificuldade, para Wittgenstein, foi abandonar o campo transcendental da lógica e se voltar para sua aplicação, onde situou um novo campo transcendental, a gramática dos usos cotidianos das palavras, isto é, sobre a pragmática (MORENO, 2005, p. 235). Relembremos, então, os três aspectos comuns da terapia wittgensteiniana: *as ideias de que os fundamentos da significação não são exteriores, que gramática é autônoma e arbitrária*. Consideramos a matemática como uma linguagem independente e autônoma, com regras que foram definidas arbitrariamente, e que com o tempo e uso tornaram-se normas que podem ser utilizadas para compreender a realidade, mas não que sejam hoje dependentes desta. Assim, não podemos pensar na matemática apenas com a função referencial de um conhecimento extralinguístico. Rorty (1990) compreende que Wittgenstein nos “arrancou” do nosso mundo mental cartesiano-lockeano e nos ajudou a superar a tentação de tomar a linguagem como captura da realidade. Dessa forma, não descartou a metafísica, apenas entende que tal é perda de tempo.

Moreno (2004, p. 196) compreende que a terapia deve ser aplicada radicalmente para todo uso dogmático de super-sistemas que se consideram referências para descrições, e cita duas características de tais modelos teóricos: pretendem determinar completamente os fatos descritos e colocam “a forma de descrição a ser adotada, tornando-se assim o sistema de referência que determina formalmente e *a priori* a descrição dos objetos”. Estes super-sistemas seriam o realista, idealista, empirista, construtivista, entre outros. Um desses super-sistemas que

Wittgenstein realizou a terapia foi o mentalismo, que pode ser relacionada a quaisquer dos outros sistemas já citados. Nas *Investigações*, Wittgenstein analisou termos como "querer-dizer" ou "ter em mente", que de acordo com ele são a ideia de um pensamento interior que constrói significados independentemente da linguagem, ou seja, haveria entes mentais que não dependem da linguagem. Para Wittgenstein "querer-dizer" ou "ter em mente" são conceitos vagos, que possuem regras imprecisas de aplicação, e assim, o filósofo adverte que ao relacionarmos estados mentais à determinadas palavras, estamos dando uma realidade a algo que não possui, "Lá onde nossa linguagem autoriza a presumir um corpo, e não existe corpo algum, lá desejaríamos dizer, existe um *espírito*" (IF, §36). Ele, então, analisa alguns usos dos termos e mostra que tais se devem às regras definidas em determinados jogos de linguagem, e assim, a linguagem não é apenas uma referência a algo interno, mas a fonte dos significados, pois é a partir dela, que determinamos regras e assim damos às palavras determinadas funções. Nesse sentido, o autor mostra as confusões que podem enredar quem envereda por vertentes teóricas que dogmatizam expressões, como definições de estados mentais. A concepção referencial não é abandonada, mas é colocada como um dos usos possíveis da linguagem. Gottschalk (2010, p. 72), ao mostrar as ressonâncias do mentalismo na educação apresenta um exemplo: "um professor que seja movido por convicções epistemológicas de cunho mentalista verá o aprendizado da leitura como um processo cognitivo, ou até mesmo espiritual". Assim como aquele movido por qualquer epistemologia dogmática enxergará de acordo com tal.

Por considerar que o construtivismo está aliado à uma corrente filosófica, compreendemos que seria possível realizar uma terapia filosófica do mesmo, mas resolvemos neste trabalho, focar em aspectos de consequências pedagógicas, trilhando um caminho próximo da terapia wittgensteiniana, mas não realizando ela de fato, no sentido filosófico, como foi aplicado pelo mestre de Viena. O construtivismo foi desenvolvido por educadores que se seguiram à Piaget, e que este mesmo, não pretendia, a princípio, com sua epistemologia, desenvolver uma teoria educacional, mas assim como acontece com a epistemologia de Moreno, e com qualquer epistemologia – já que este termo se refere à análise do conhecimento -, há consequências pedagógicas que podem ser retiradas das reflexões realizadas por esta epistemologia.

Como dissemos no primeiro capítulo, compreendemos a epistemologia genética dentro da filosofia da consciência, por ter um fundamento filosófico kantiano. A epistemologia genética busca uma teoria do conhecimento baseada em princípios biológicos ou genéticos, como um desenvolvimento humano natural, em situações normais. Desse modo, Piaget "biologizou" ou "psicologizou" Kant, compreendendo que as estruturas são construídas a partir de pré-disposições internas em contato com a realidade empírica. Porém, uma teoria do conhecimento seria mais possível se realizada sobre o uso da linguagem do que em questões biológicas, pois a própria interpretação de tais já é condicionada à linguagem.

Wittgenstein faz afirmações, baseando-se justamente na crítica ao dogmatismo das teorias anteriores e os conceitos formulados por ele são vagos, pois para ele jogos de linguagem, por exemplo, podem ser quaisquer contextos linguísticos, que serão considerados de acordo com a análise do terapeuta. Moreno (2005) explica que Wittgenstein entende que há o risco de dogmatismo em sua filosofia, mas ele busca fundamentar sua terapia como antidogmática.

A atividade terapêutica serve para curar os problemas existentes com os dogmatismos. Por exemplo, tentar ver a construção e transmissão do conhecimento, como aqui fazemos, desviando-se do olhar dogmático, baseado em concepções essencialista e referencial, é tentar ver de outro modo, e que assim se possa perceber outras possibilidades, que também podem gerar outras confusões, mas que nos farão refletir sobre outra ótica. Como afirma Moreno (2005, p. 254), não se busca um resultado definitivo, mas um esclarecimento contínuo. Moreno (2005) defende que a descrição terapêutica não pretende mostrar fundamentos relativos ao conhecimento ou aos fatos do mundo, mas quer mostrar *o que nós próprios fazemos com as palavras e os conceitos*. Quer mostrar o que vemos à nossa frente.

Dessa forma, devemos buscar mudar nosso modo de ver habitual e reconhecer que há outras maneiras de ver. Então Moreno (2005) observa o destaque que Wittgenstein faz quanto à *persuasão* e à *disponibilidade da vontade*. É necessário que queiramos ver de outro modo, para tal, devemos nos livrar dos dogmatismos e reconhecer a legitimidade de sentidos desconhecidos ou até absurdos, em relação ao nosso modo de ver habitual. Moreno (2005, p. 255) entende que quem quiser aceitar isso deverá "deixar-se persuadir de que são meramente convencionais as fronteiras categoriais com que trabalha o seu pensamento" e que nesse sentido, há outros modos de ver possíveis, e assim há limites na forma que compreendemos os conceitos, que dependem da forma como vemos ou usamos as palavras relacionadas com tal conceito. O *Tractatus* também tinha essa preocupação com os limites do sentido, porém usava a lógica como forma de análise, o segundo Wittgenstein tem a mesma preocupação, mas agora analisa a partir da prática linguística.

De acordo com Moreno (2005, p. 265) a atividade filosófica como terapia tem início com a terapia de uma determinada concepção de linguagem assumindo outra concepção bastante diferente. Para analisar a questão do ensino e aprendizado da álgebra, partimos de uma análise da concepção de linguagem sob a qual está baseada atualmente, e de onde destacamos construtivismo piagetiano – que poderia ser qualquer outro. Como na terapia de Wittgenstein sugerimos uma comparação com uma concepção de linguagem bastante diferente, que não considera como fundamentais o essencialismo e nem o referencialismo, que apontamos ser uma visão pragmática da linguagem. No entanto, esta nova concepção tem como fundamento não vir a ser dogmática, mostrando os problemas presentes na concepção criticada, e faremos isso a partir de esclarecimentos conceituais fornecidos por exemplos.

Moreno (2005, p. 272) compreende que vivenciamos confusões conceituais, como dificuldades filosóficas profundas, por que as soluções apresentadas são interpretadas como causas definitivas, quando, de fato, elas são normas ou critérios convencionais. De acordo com o autor, causas são hipóteses que podem ser confirmadas ou não e que não tem limites para sua criação, por serem externas, enquanto que normas tem limite de criação, uma vez que são internas. O dogmatismo trabalha com causas, ou seja, propõe soluções externas para dificuldades conceituais e coloca tais soluções como definitivas, seriam no caso, causas ideais, mentais ou empíricas, que põe suas próprias exterioridades como garantia de objetividade de suas soluções apresentadas. Enquanto que o dogmatismo filosófico contém fundamentos externos definitivos, mas infinitos, a terapia filosófica contém ligações internas não definitivas, mas finitas. Esta comparação aparenta ser paradoxal, mas que podemos exemplificar. O dogmatismo construtivista tem causas externas que são definitivas, por exemplo, que $a + a = 2a$ é uma generalização da aritmética, possível devido aos fatores externos à linguagem, como a intuição humana, por exemplo, e que são infinitas, por que há várias relações possíveis com um mundo ideal, ou lógico, ou mental, ou empírico etc. A terapia tem normas internas à linguagem, não definitivas por que são arbitrárias, isto é, podem ser pensadas quaisquer relações no interior de uma gramática, mas são finitas, por que a partir da definição arbitrária das relações, por serem internas à gramática, elas se esgotam.

Defendemos que não há uma essência comum por trás dos diversos conteúdos da matemática, ou do conhecimento de modo geral, mas semelhanças, que podem ser apontadas arbitrariamente para favorecer determinado ensino de um conteúdo e por isso não nos lançamos em uma crítica aos métodos de ensino, mas à base filosófica que os fundamenta, que pode fazer com que os professores esperem que tais métodos alcancem resultados além do que lhes é possível alcançar. Em um sentido mais amplo, realizamos uma comparação nas descrições dos fatos com concepções dogmáticas, como o construtivismo piagetiano.

> Tal descrição não visa a defesa de teses colhidas nos sistemas de referência que são os jogos de linguagem, uma vez que jogos são substituídos, freqüentemente, por jogos antagônicos. Trata-se, sempre, de descrever a aplicação dogmática de jogos, através da sua contraposição a outros jogos, variando as circunstâncias e possibilidades de aplicação dos conceitos, de

> maneira a mostrar que o dogmatismo do uso é encobridor das possibilidades de sentido ao forçar o nosso pensamento em uma única direção – vindo daí, aliás, o suposto domínio do pensamento sobre a vontade, quando, na verdade, como mostrará a terapia, é a vontade gramaticalmente cristalizada que limita o pensamento. (MORENO, 2005, p. 254)

Por isso, Wittgenstein se distancia da maiêutica socrática já apresentada, pois se distancia da ideia de que há algum fundamento a ser descoberto ou alguma essência *a priori* que definisse alguns conceitos exata e absolutamente, deixando toda análise dependente daquilo que se pode ver, ou, "isso é tudo o que há à nossa frente". O segundo Wittgenstein compreende que "não existe um mundo em si independente da linguagem, que deveria ser copiado por ela. Só temos o mundo na linguagem; nunca temos o mundo em si, imediatamente, sempre por meio da linguagem" (OLIVEIRA, 2001, p. 127). E ainda que não há consciência sem linguagem, como parece ter inaugurado Descartes com sua separação entre mente e corpo, com mente e consciência sendo algo independente de fatores externos, desse modo "a pergunta pelas condições de possibilidade do conhecimento humano não é respondida sem uma consideração da linguagem humana" (OLIVEIRA, 2001, p. 128). Ao criticar o dogmatismo, Wittgenstein critica as filosofias fundacionistas, pois ao não considerarem a linguagem, saíram em busca de fundamentos de todo tipo, sempre enxergando que havia uma essência comum, alguma explicação última para as coisas do mundo serem como são.

O construtivismo piagetiano, tem sua origem e mantém certas noções dessa tradição filosófica dogmática, mesmo que ele possa ser considerado um avanço se comparado com as concepções anteriores. Wittgenstein nunca teceu uma crítica diretamente ao construtivismo, sendo esta questão percebida pela comparação entre elas, considerando suas possibilidades pedagógicas. Mas, por ser um dos fundadores da filosofia da linguagem contemporânea que se caracteriza por analisar filosoficamente a natureza e o funcionamento da linguagem, seja em qual for de suas fases, ele se opõe aos estudos filosóficos da consciência. O construtivismo é um avanço no interior da própria filosofia da consciência, por ter aspectos diferentes e por trazer outras reflexões, mas que devido suas raízes filosóficas kantianas, de acordo com o que apresentamos aqui, consideramos o construtivismo piagetiano dentro desta concepção. Enquanto que a filosofia da consciência, de modo geral, relega à linguagem um papel, muitas vezes, apenas referencial, na filosofia da linguagem a linguagem torna-se o ponto de partida para a compreensão. Não existe possibilidade de compreensão fora da linguagem, sendo que esta não se refere apenas à fala e à escrita, mas também aos modos de pensar e agir. Não há pensamento sem linguagem, isto é, o pensamento é linguístico. Hebeche (2002) defende que consciência já é linguagem.

O construtivismo piagetiano é uma espécie de desenvolvimento da filosofia da consciência, trazendo para a educação essa perspectiva. Desse modo, toma o conhecimento como algo que pode se desenvolver na mente do aluno por meio de um processo natural que relaciona o cognitivo, o meio físico e social. Nessa concepção, a linguagem tem um papel apenas comunicativo e descritivo. O pensamento antecede a linguagem. O construtivismo considera também o pragmático, mas em uma perspectiva empírica e utilitária, pois crê que alguém aprende o significado de um objeto ao usar o objeto e fazer uma construção de tal em suas estruturas cognitivas[48], que dependerão do estágio de desenvolvimento em que tal indivíduo se encontra, mas não considera este pragmático na perspectiva linguística, não desenvolvendo possibilidades de se aprender pelo uso da linguagem. O pragmatismo ou uso que defendemos está inteiramente ligado à linguagem. A epistemologia do uso compreende que a aprendizagem se faz pelo uso na linguagem, e que, consequentemente, pode servir para descrever fatos empíricos, ou mesmo podem ser dados exemplos empíricos, mas como dados exemplares que favorecem a construção do significado.

Essa foi a grande revolução feita por Wittgenstein: deslocou os fundamentos cognitivos do sujeito e do mundo empírico para a linguagem. "Segundo Wittgenstein, o significado de uma palavra é construído à medida em que ela vai sendo aplicada em diferentes situações e em meio a atividades que estão envolvidas com a linguagem" (GOTTSCHALK, 2007a, p. 22), desse modo, para Gottschalk (2007a, p. 466) a epistemologia do uso

> não nega a existência de estruturas a priori, condições para a construção de nossos conhecimentos e a transmissão de sentidos, mas contrariamente ao pragmatismo americano, essas estruturas não são internas ao indivíduo, mas externas a ele, pois estão presentes na práxis da linguagem, nos usos convencionais que fazemos de nossos símbolos lingüísticos, imersos em nossas formas de vida. (GOTTSCHALK, 2007a, p.466).

Wittgenstein traz uma visão completamente oposta ao que antes se pensava sobre o conhecimento. Para o construtivismo, o indivíduo constrói seu próprio conhecimento, pois ele já detém *a priori* a possibilidade de desenvolvimento de estruturas cognitivas que permitem o conhecimento. Defendemos a transmissão do conhecimento, mas, compreendemos que o aluno constrói o conhecimento, não devido estruturas pré-existentes e em desenvolvimento

[48] Conferir Silveira (2002, p. 76), que apoiada em Baruk (1996), critica a defesa construtivista do uso de objetos concretos para o ensino.

potencialmente presentes no aluno, mas a partir de regras que lhe são apresentadas e com as quais ele jogará nos jogos em que for colocado.

Enquanto no construtivismo se entende que a estrutura do conhecimento matemático decorre naturalmente de estruturas cognitivas presentes potencialmente na criança, e que a tarefa principal do professor é dar suporte para que tal desenvolvimento ocorra da forma mais espontânea possível, nos estudos de linguagem matemática a construção do conhecimento matemático provém da capacidade de se seguir regras, pois são *invenções* dos homens e a tarefa do professor é ensinar estas regras, "para que o aluno comece a partir de um determinado momento não previsível *a priori*, a 'fazer lances' no jogo de linguagem no qual está sendo introduzido, inclusive aplicando-o a situações empíricas". (GOTTSCHALK, 2008, p. 93).

A educação brasileira hoje está baseada principalmente nos ideais realista, idealista e empirista, unindo muitas vezes paradoxalmente, essas concepções para formatar metodologias e teorias educacionais. Nossa crítica ao construtivismo se deve ao fato deste ver conceitos da linguagem matemática como tendo um uso apenas referencial, ou seja, estes conceitos teriam como referência processos mentais ou seus significados seriam extraídos da experiência empírica. Mesmo sendo bastante adotado atualmente o construtivismo colocado em prática, muitas vezes, não apresenta o sucesso anunciado ao professor. Esta promessa não cumprida frustra o professor, que o leva a um crescente descrédito de seu papel na escola e ainda a uma desilusão com o processo educacional quando percebe que seu aluno não aprende.

As pesquisas em educação matemática precisam buscar uma discussão maior sobre a linguagem, não se fechando apenas em algumas teorias. De fato, o problema maior está quando se adotam tais teorias sem uma reflexão mais profunda e isso ocorre, muitas vezes, devido a uma busca apressada do professor por melhorar seu ensino, pela simples adesão ao que parece estar na "moda" ou por seguir as recomendações recebidas em sua formação.

Baruk (1996) destaca o uso de teorias construtivistas e psicológicas, quanto à educação matemática e a educação em geral. Mas são tais teorias que vêm fundamentando ultimamente a educação matemática. Compreendemos que a epistemologia do uso apoiada em Wittgenstein, comparando com o construtivismo, pode favorecer essa discussão. Entendemos que não temos acesso ao pensamento do aluno, temos acesso apenas àquilo que é expresso por meio da fala e da escrita e até de outras formas de expressão. Por isso uma atenção maior à linguagem é tão necessária. Segundo Gottschalk (2008, p. 77), o construtivismo

> Concebe as estruturas matemáticas como produtos de um determinado desenvolvimento mental do aluno, descrito pelas teorias psicogenéticas de

> Jean Piaget como se tratando de um processo natural de interação entre estruturas cognitivas e o meio físico e social.

Assim, toda criança, em situações favoráveis, percorreria os mesmos estágios para o desenvolvimento matemático e o professor seria apenas um “organizador da aprendizagem” que permitiria que o aluno construísse espontaneamente o conhecimento matemático. Esta concepção relega à linguagem um papel apenas referencial. Acreditamos que seu papel é maior, pois os problemas que os alunos enfrentam não são resolvidos a partir de uma tentativa de construção espontânea do aluno ou a partir de contextualizações, mas a partir de uma maior habilidade com a linguagem matemática, às vezes até sem um sentido absolutamente claro para os alunos inicialmente.

Como vimos no capítulo 1, o construtivismo compreende que a matemática está presente, potencialmente, nas estruturas cognitivas humanas, sendo também um reflexo do mundo empírico, e por isso a aprendizagem se daria na ação do sujeito sobre o objeto a ser conhecido. É nesse sentido que Gottschalk (2002) compreende que o construtivismo relaciona aspectos do idealismo (ou mentalismo) e do realismo empirista.

Desse modo que a educação construtivista toma os conceitos da epistemologia genética de Piaget, como assimilação, a acomodação, a equilibração, a adaptação e a abstração reflexiva, que é realizada pelo raciocínio, dados esquemas já existentes que dependem das experiências anteriores com abstrações já realizadas anteriormente. Por isso é tão destacado na educação construtivista a noção de reflexão sobre a ação - “o aprender a aprender” -, e assim, recomenda-se provocar tais reflexões por meio de atividades que permitam tal, e nesse sentido entra a “pedagogia de projetos”, o uso de situações-problema, da contextualização, interdisciplinaridade, destacando a necessidade de deixar o aluno buscar as respostas para tais atividades, como vimos na análise no capítulo anterior. Acredita-se na construção espontânea do aluno, pois o mesmo *constrói seu próprio conhecimento,* e ainda, que ele deve ter autonomia nesse sentido. Recomenda-se, então, que não se deve apresentar as regras diretamente, e o professor deve suscitar atividades que provoquem o aluno. Daí vêm os *slogans*: *formar espíritos inventivos, provocar a ação, estimular a criatividade, criar uma atitude experimental frente ao aprendizado, aprender a aprender, o aluno constrói seu próprio conhecimento, o professor é mediador, etc.* E dessas noções parece ter saído as diversas teorias já apresentadas aqui, ou que a estas noções se aproximam, pois mesmo quando buscam se afastar – como vimos no livro de Lins e Gimenez (1997) – aprofundam tais noções, principalmente as concepções destacadas nesta tese: essencialismo e referencialismo.

O construtivismo e a noção de pensamento algébrico estão próximos, pois a partir da teoria de Piaget, notamos a noção do conhecimento algébrico como algo que vai além do seu aspecto linguístico, como uma abstração que o aluno constrói, a partir de conhecimentos – ou esquemas anteriores -, como aritmética, geometria, em um processo de generalização, que se aproxima do conceito de *generalização completiva* que apresentamos também no primeiro tópico do presente capítulo, que é a ideia de que uma estrutura, conserva características essenciais, mas se enriquece com novos subsistemas que se agregam sem modificar os precedentes. Aqui também se destacam as noções de contextualização e interdisciplinaridade. Além do que Piaget considera que o indivíduo repete o desenvolvimento humano, que devido a abstração reflexiva, possibilita fazer isto de forma mais célere, como vimos com a noção do paralelismo onto-filogenético.

Contrapondo-se ao construtivismo, Gottschalk (2004b, 326-327) entende que as proposições matemáticas são normativas e assim "não há *algo* (*a priori*) que as fundamente fora da linguagem, ou que a elas corresponda", portanto, não há sentido em se esperar que um aluno descubra entidades matemáticas por processos mentais ou empíricos. Mas, alerta a autora, não se deve esperar que o aluno invente uma matemática, aceitando, ao contrário da descoberta, que qualquer produção do aluno deveria ser permitida, mas sim que "Os critérios estabelecidos pela comunidade dos matemáticos é que vão guiar a atividade do aluno, o qual transitará em um campo gramatical pré-estabelecido que até possibilita *descobertas*, mas em um sentido diferente do das ciências empíricas". São descobertas, dentro do jogo linguístico, como alguém que descobre uma jogada que leve ao xeque-mate no xadrez, mas que evidentemente já era prevista em suas regras.

Notamos, então, os aspectos ligados ou próximos, às noções construtivistas aqui apresentadas no capítulo anterior, em teses e dissertações, referenciais na área, documentos oficiais e livros didáticos, que tem em sua maioria um referencial teórico essencialista e referencial. Percebemos que o construtivismo, ou se preferirmos, algumas noções deste, consequências de concepções que retiram da linguagem seu papel primordial na obtenção do conhecimento, revelam um *modus operandi* de se pensar a educação, que a nosso ver causa confusões e problemas, devidos seus limites. Propomos, então, uma análise de aspectos mais particulares, relacionados à questão da linguagem e a álgebra, possibilitados pela aproximação da terapia de Wittgenstein, e que podem conduzir a novas reflexões de ensino e aprendizagem da álgebra. Elencamos a partir da análise empreendida alguns desses aspectos:

1) A questão da contextualização, que é recorrente nos textos e documentos analisados e quase uma unanimidade na educação matemática;

2) A questão da tradução na matemática, pois a álgebra é vista como uma linguagem que necessita ser traduzida, porém, intentaremos apresentar uma possibilidade não essencialista e nem referencial para este aspecto, apontando os limites de algumas tentativas na educação;

3) A questão da determinação de significado, visto que em Wittgenstein isto não se dá de modo absoluto, e quando se pensa em álgebra em uma concepção essencialista, se tem que seus significados podem ser determinados absolutamente, mas também defendemos que Wittgenstein não recai em um relativismo epistemológico;

4) No que se refere à álgebra, consideramos fundamental abordar a questão da manipulação simbólica, tratando de seus limites e possibilidades;

5) Abordaremos o conceito de regras, que é vital em Wittgenstein para compreendermos a aprendizagem, acrescentando uma abordagem sobre aplicação e generalização;

Estes cinco pontos serão analisados, cada um e na ordem estabelecida, nos cinco subtópicos seguintes. Após esses cinco pontos discutiremos as possibilidades de se tomar a álgebra como gramática. E por fim, no último tópico, buscaremos traçar uma análise geral sobre a construção e transmissão do conhecimento na filosofia do segundo Wittgenstein.

5.2.1 Contextualização

A contextualização pode ser compreendida como uma forma de ensino que busca colocar o conteúdo matemático dentro de um determinado contexto, para que com isso ele ganhe sentido. Não negamos a utilidade da contextualização, mas a consideramos limitada, pois a aproxima também de uma visão utilitarista e empirista, principalmente quando esta é associada a questão do cotidiano. É principalmente a questão da contextualização da matemática no cotidiano que criticamos aqui. Há uma compreensão quase geral de que o ensino de matemática deve se utilizar de contextualizações, a partir do uso de situações-problema, de situações do cotidiano ou de situações abertas, em que busca fazer o aluno argumentar e tentar resolver de uma maneira própria. Recomenda-se também o uso de outras disciplinas, como a matemática na geografia, biologia, etc., a chamada interdisciplinaridade. Vimos que o construtivismo e sua interpretação em uso, tenta justificar o ensino de alguns conteúdos, como se viu na ideia de reflexão sobre a ação, defendida por Piaget, entre outros. A ideia principal aqui criticada é a de que o significado se revelaria por uma justificação externa à linguagem, enquanto que defendemos que é na linguagem que podemos compreender o significado dos termos a partir do uso dos mesmos.

Como Wittgenstein entende que o significado está no uso, tal noção pode levar à ideia de que Wittgenstein defende a contextualização. De fato, as formas de vida são determinantes para a compreensão, mas isso não concorda em usar o cotidiano ou o pré-escolar ou extraescolar para ensinar. A filosofia de Wittgenstein, e principalmente sua concepção de regras, oferece-nos razão para pensar que tal relação pode causar problemas, pois na escola há regras que são diferentes das do cotidiano, que apresentam semelhanças, mas que não são as mesmas. Também, deve-se destacar que não refutamos o uso da contextualização, mas que a consideramos como um outro jogo de linguagem, e não, como na visão essencialista, de que exista uma essência nas atividades cotidianas e a atividade escolar, principalmente quando se demanda que o aluno descubra tal.

> Daí que a matemática utilizada no cotidiano tenha um outro significado para o aluno. Não há uma transposição imediata de contextos do cotidiano para o escolar. Os raciocínios empregados no cotidiano estão ligados a contextos específicos e são de natureza diferente dos raciocínios empregados na matemática escolar, e, por conseguinte, os significados de proposições ou termos matemáticos podem diferir radicalmente em função dos contextos lingüísticos ou empíricos em que estão sendo usados (GOTTSCHALK, 2004a, p. 6).

Ao se falar sobre as dificuldades de contextualizar conteúdos matemáticos, muitos podem pensar sobre a dificuldade de exercer essa prática em assuntos mais avançados como binômio de Newton, números complexos, trigonometria, cálculo diferencial e integral, etc. - tanto que já há até a defesa da retirada de alguns conteúdos da educação básica -, mas dentro da própria aritmética podemos exemplificar esta dificuldade, no seguinte exemplo: quando se pergunta a um aluno qual é o resultado da soma de 0,75 com 0,25, ele pode ter dificuldades na forma algorítmica, mas pode ser facilitado em uma situação cotidiana, como fazer relação com dinheiro. No entanto, como facilitar a compreensão da multiplicação ou divisão de 0,75 por 0,25, através de uma contextualização no cotidiano?

Contextualização é a demonstração mais clara da ideia de utilidade social da matemática que alguns tem, o que leva a um desmerecimento de certos conteúdos ou técnicas na matemática, por não terem sentido no mundo que cerca o aluno. Defendemos, que em muitos casos é necessário fazer o aluno ter controle da linguagem e de sua sintaxe, mesmo que em algum ponto se perca a relação com a realidade empírica.

Wittgenstein nega a existência de algo que seja comum aos diversos usos de uma expressão linguística, isto é, nega a existência de uma essência ou traço definidor, mas observa a presença de semelhanças, as quais chama de semelhanças de família. Assim, até mesmo um conceito matemático não possui um “traço característico” ou um uso específico. Isto é, a aplicação de um conceito matemático na academia, na escola ou no cotidiano, por exemplo, não possui uma essência extralinguística. Para Wittgenstein a linguagem é uma prática pública, uma instituição humana que possui regras e convenções à disposição de seus usuários.

Com relação à matemática, Wittgenstein (OF) afirma que suas proposições são utilizadas como regras (ou normas), isto é, *deve* ser assim. Por exemplo, dizemos que 2 + 2 = 4 porque alguém nos disse (2 + 2 = 4 é uma convenção) e não por uma constatação empírica. Mas isto não significa que as proposições matemáticas não tenham nenhuma relação com a experiência; ao contrário, as proposições da matemática organizam nossa experiência empírica, isto é, têm uma função normativa. Nesse sentido, Putnam (2002) afirma que as proposições matemáticas não precisam ter aplicação para ter significado e que elas são enunciados com significado apenas onde os conceitos matemáticos têm aplicação no domínio do não-matemático.

A dificuldade se enraíza no fato que nós utilizamos na matemática proposições que formalmente assemelham-se muito às proposições empíricas, como se faz no caso da contextualização. A questão do contexto é importante para Wittgenstein, porém para ele esta questão é mais profunda. Como já dissemos, não é problema buscar contextualizações para alguns conteúdos, mas deve-se entender que ela é limitada. Ter controle e fazer uso de uma linguagem e de sua sintaxe é adentrar em um contexto, mesmo que não exista relação com a realidade empírica. Por exemplo, para multiplicar 0,75 por 0,75, pode não existir uma situação no cotidiano que facilite a resolução, mas se o aluno estiver dentro do contexto (ou sistema) de uso de números fracionários ele poderá não só resolver, como também compreender o que ocorreu.

Uma proposição matemática só tem um sentido caso ela seja verdadeira, nisto a contradição é evidente com a definição que se tem do sentido de uma proposição em geral. A dificuldade desaparece caso não vejamos as proposições matemáticas como proposições em geral. Não podemos ter proposições matemáticas como proposições no sentido habitual justamente por que tais proposições não têm um “sentido” como as proposições usuais, mesmo se um “ar de família” comum os caracteriza. Os paradoxos surgem apenas caso busquemos manter o sentido usual do termo proposição e, simultaneamente, reconhecer, contudo esta particularidade das “proposições” matemáticas de apenas ter verdadeiramente sentido depois de ter sido provada. É evidente que, caso abandonemos a primeira afirmação, o paradoxo se desvanece. Na matemática não é necessária a verificação, mas sim a descrição. Não há como definir se uma proposição é verdadeira ou falsa, mas se pode apenas descrevê-la. Porém, deve-se destacar que essa invariabilidade das proposições matemáticas só ocorre dentro de seus sistemas de uso. Então, compreender uma proposição matemática quer dizer de fato saber o que podemos fazer, quais são as regras que foram aplicadas para conduzir a ela, qual gênero de cálculo pode ser conduzido a partir dela.

Schmitz (1988) nos diz que Wittgenstein distingue as proposições matemáticas das proposições empíricas. No *Tractatus* Wittgenstein ainda entendia a proposição como uma imagem, quando qualquer "nome" constituinte está ligado a uma coisa e permite à proposição significar. Mas, posteriormente, Wittgenstein passou a entender que se pode chegar ao sentido de uma proposição através de verificação, e para ele isto parte da própria gramática, isto é, o sentido está no uso da proposição que deriva do uso da linguagem.

A proposição matemática não indica um caminho de verificação, mas apenas de aceitação, pois a verdade de uma proposição matemática não pode ser estabelecida sem anteriormente ela ter um sentido. Na matemática não pode haver refutações, pois sua linguagem tem um sentido *a priori*, no contexto do ensino, é claro. As proposições matemáticas são chamadas de proposições necessárias, pois são proposições gramaticais, isto é, fazem parte de uma gramática, que por ser um conjunto de regras, deve se manter coerente, por isso, as proposições são ditas necessárias, pois são imprescindíveis ou indispensáveis para manutenção da coerência gramatical como um todo. As proposições matemáticas não são empíricas, elas são normativas porque seguem regras, entretanto, podem possuir um uso empírico. Wittgenstein afirma:

> Não devemos ter vergonha de considerar os números e somas da mesma maneira que a aritmética cotidiana de todo comerciante. Na vida cotidiana, não resolvemos 2 + 2 = 4 nem qualquer das regras da tabela de multiplicação; nós os temos como certos como axiomas e *os usamos* para calcular (GF, II, §19).

Do mesmo modo que:

> Dois homens que vivem em paz entre si e três homens que vivem em paz entre si não fazem cinco homens que vivem em paz entre si. Mas isso não significa que 2 + 3 não seja mais 5; é apenas que a adição não pode ser aplicada dessa maneira (GF, II, §19).

A aritmética, nesse sentido, não se justifica "para dar troco" nas relações comerciais. Aliás, "dar troco" se aprende mesmo sem frequentar a escola.

> Você poderia dizer: por que se incomodar com limitar a aplicação da aritmética? Isso se resolve sozinho. (Posso fazer uma faca sem me

> preocupar com os tipos de material que cortarei com ela; isso será evidente em breve.). [...], Mas (como sabemos todos muito bem) a aritmética não está interessada na sua aplicação. A sua aplicabilidade toma conta de si mesma (GF, II, §15).

Enfim, a matemática responde a questões empíricas, mas não é dependente delas, como exemplifica Wittgenstein (GF, II, §15),

> A equação 4 maçãs + 4 maçãs é uma regra de substituição que uso se, em vez de substituir o signo "4 + 4" pelo signo "8", substituo o signo "4 + 4 maçãs" pelo signo "8 maçãs".
> Mas devemos ter cuidado ao pensar que "4 maçãs + 4 maçãs = 8 maçãs" é a equação concreta e 4 + 4 = 8 é a proposição abstrata, da qual a primeira é apenas um caso especial, de modo que a aritmética das maçãs, embora muito menos geral que a aritmética verdadeiramente geral, é válida em seu domínio restrito (para as maçãs). Não existe "aritmética das maçãs" porque a equação 4 maçãs + 4 maçãs = 8 maçãs não é uma proposição a respeito de maçãs. Podemos dizer que, nessa equação, a palavra "maçãs" não tem nenhuma referência. (E sempre podemos dizer isso a respeito de um signo em uma regra que ajuda a determinar seu significado).

A lógica pode ser o fundamento que sustenta muitas relações, sejam elas com maçãs, moedas ou estrelas, como também pode não haver relação alguma. As aplicações da matemática não estão garantidas por sua generalidade.

> Uma máquina é uma extensão de um motor, uma aplicação não é, no mesmo sentido, uma extensão de um cálculo.
> Estamos interessados em usos diferentes da palavra "aplicação". "A divisão é uma aplicação da multiplicação"; "a lâmpada é uma aplicação do cilindro de vidro"; "o cálculo é aplicado a estas maçãs".
> Neste ponto, podemos dizer: a aritmética é a sua própria aplicação. O cálculo é a sua própria aplicação (GF, II, §15).

Uma aplicação não é uma extensão do cálculo porque não é na gramática da linguagem do cotidiano que encontraremos uma realidade que o cálculo não tinha antes. A matemática é como a gramática, possui regras que são aplicáveis. "A gramática, para nós, é um cálculo puro (não a aplicação de um cálculo à realidade)" (GF, II, §15). Não é a ligação com a realidade que faz a gramática e o cálculo funcionarem; tanto a gramática quanto o cálculo seguem regras que se estendem à realidade. Isto é, criamos nossas expressões linguísticas sem a necessidade de uma aplicação prática.

Nossa linguagem quando é objetivada pela escrita ou por uma expressão formal pode apresentar outros "aspectos". Assim, cálculos no cotidiano e cálculos na sala de aula podem ser diferentes na perspectiva dos estudantes. Silveira (2005) em sua tese mostra que um sujeito aprendente ao se deparar com um conceito matemático já construído por ele, pode, em outro contexto, atribuir-lhe novos sentidos ou ressignificá-lo. Para a autora, o conceito matemático está sempre em mudança para o aluno, mesmo que o rigor da matemática diga o contrário, isto é, o conceito se desenvolve de acordo com o contexto. Nesse caso o contexto da sala de aula é diferente de contextos cotidianos.

Os educadores matemáticos muitas vezes têm o seu ensino pautado na concepção da utilidade prática ou concreta da matemática, daí que, para eles, a importância da matemática reside no fato de que esta é útil apenas na prática, isto é, apenas em problemas reais concretos.

A pesquisa feita por Albarracín, Dujet-Sayyed e Pangaud (2008), ressalta que a visão utilitarista do ensino se reflete na dificuldade em matemática de estudantes latino-americanos de engenharia que estudam na França. Nesse sentido, percebemos que o sentido de que a matemática é importante apenas nas situações nas quais é útil concretamente causa prejuízos à aprendizagem desses estudantes, na perspectiva dos pesquisadores.

A pesquisa de Barros (2012), ao analisar se o "ferramental matemático" que os aluno do ProJovem utilizam cotidianamente (fora da escola) é o mesmo que ele utiliza em sala de aula, chegou à conclusão que há muito mais "rupturas" do que convergências quando se compara as situações do cotidiano que envolvem conteúdos matemáticos e esses conteúdos matemáticos, em situações escolares contextualizadas em termos do dia a dia dos alunos, apontando os limites da contextualização em sala de aula.

Diferente do que pode parecer, não estamos desqualificando os conhecimentos cotidianos, nem mesmo excluindo a possibilidade de usá-los na escola. Giardinetto (2002) sugere que os conhecimentos cotidianos devem ser usados, na escola, como ponto de partida para se chegar aos conhecimentos formais escolares, que, segundo o autor, são mais refinados e generalizam as situações cotidianas. Mas, pensar que apenas os conhecimentos cotidianos (aqueles que podem ser imediatamente aplicados à vida do aprendiz) devem ser ensinados na escola poder ser um equívoco com relação a compreensão do que vem a ser contextualizar.

Sem dúvida o conhecimento matemático pode ser visto como "ferramenta" útil ao cidadão para compreender as faturas de suas contas mensais; questionar a cobrança de taxas ou valores indevidos no pagamento de uma dívida; mensurar a quantidade de lajota que deve comprar para revestir o piso de sua casa; assim como outras situações do cotidiano. No entanto, será que a finalidade da matemática enquanto componente curricular da educação básica se resume às aplicações práticas?

Com o foco na resolução de problemas e na expectativa de que os professores desenvolvam práticas pedagógicas que se amparem na contextualização do conhecimento matemático em situações concretas, espera-se que os alunos possam (re)significar os conceitos matemáticos nas mais diversas atividades do cotidiano, criando assim, a crença de que os objetos matemáticos estão presentes no mundo sensível.

> No entanto, não são as aplicações cotidianas que são as mais ‘significativas’ dentro desse corpo de conhecimento. O pressuposto construtivista que de que o professor deve ensinar a partir de aplicações dos diversos saberes no cotidiano limita e empobrece o ensino (GOTTSCHALK, 2002, p. 150).

Do nosso ponto de vista uma das tarefas ainda a ser realizada pelos professores é desfazer esta imagem unilateral da matemática que acaba por lhe conferir um sentido que não é o único, que é o sentido de ser útil ou de resolver problemas do dia a dia.

Diante do exposto, pensamos que as práticas pedagógicas que se baseiam na contextualização para despertar o interesse dos alunos pela matemática e fundamentar o seu ensino, pode ao invés de contribuir para atenuar as dificuldades da aprendizagem dessa disciplina e torná-la ainda mais difícil aos alunos, além de potencializar na escola a visão utilitária da matemática. Conforme destaca Hardy (2000 *apud* GOTTSCHALK, 2002, p. 150):

> Na verdade, é surpreendente o quão ínfimo é o valor prático que o conhecimento científico tem para o homem comum, o quão aborrecidos e banais são os conhecimentos que têm algum valor, e o quanto esse valor parece variar segundo a ordem inversa de sua reputada utilidade.

Concordamos com o autor, pois, do nosso ponto de vista, o conhecimento matemático parece ter perdido o sentido diletante, a não ser pelo sentido prático, a matemática não tem valor algum para os alunos. Ao invés de incentivar a contextualização como forma de assegurar o sentido do ensino e da aprendizagem da matemática na escola, ao contrário, deve-se questioná-la sob pena de incorrermos no sério risco de deixar de refletir acerca das metodologias de ensino da matemática e passarmos à discussão sobre, se devemos ou não ensinar tal ou tal conteúdo aos alunos.

Nesse sentido, Machado (2012, p. 11) chama atenção para o fato de que “muitas das novas metodologias representam apenas modificações periféricas nas práticas tradicionais”. Como é o caso das recomendações dos PCN acerca da contextualização do conhecimento matemático como forma de atenuar as dificuldades de seu ensino.

Nesse sentido, destacamos a noção de generalizações do pensamento algébrico a partir de ideias aritméticas. A noção de equivalência entre essas duas áreas do conhecimento matemático está presente nas práticas de grande parte de professores e licenciandos. De uma forma geral, mostrando que a álgebra é uma extensão da aritmética evidenciando que a primeira se utiliza da segunda para desenvolver e expressar generalizações, já a segunda consiste na identificação de padrões, particularmente numéricos.

Situações bastantes frequentes dessas generalizações ocorrem, por exemplo, no ensino das propriedades de potenciação, na educação básica, em que é recorrente os professores ensinarem do seguinte modo: $x^a. x^b = x^{(a+b)}$ buscando justificar a partir de exemplos numéricos, $3^4. 3^2 = 81. 9 = 729$, então, $3^4. 3^2 = 3^{(4+2)} = 3^6 = 729$. Muito embora, isso recorre com grande frenquência na escola básica, Wittgenstein (GF) diz que não houve uma generalização, mas, apenas uma substituição de signos, haja vista que para esse autor não há generalização, e sim um processo abreviado. Neste caso, ocorre quando usamos letras para representar as possíveis aplicabilidades da arimética à álgebra.

Baruk (1996) apresenta exemplos de possíveis abreviações cometidos por licenciandos a partir da expressão algébrica $\frac{(x+2).(x-2)}{(x-2)} = x - 2$, com $x \neq -2$ em que procurando generalizar esse pensamento, ao se deparar com a situação $\frac{x+4}{x+2}$, com $x \neq -2$, procura simplificar o x do numerador com o x do denominador, e em casos extremos o 4 com o 2, apresentando equívocos na realização desse cálculo matemático, pois apresenta como solução da expressão $\frac{x+4}{x+2}$ o número 2. Isso nos remete ao conceito de magia de Baruk (1996). Discutiremos mais detidamente sobre a questão da abreviação em Wittgenstein quando tratarmos do conceito de regras no subtópico 5.2.5. No próximo subtópico e na sequência, abordaremos ainda a questão da contextualização.

5.2.2 Tradução

Entendemos que a maior parte dos problemas que os alunos enfrentam com o conteúdo de matemática geralmente está relacionada com a linguagem matemática, e não é diferente com a álgebra. Mas quando o significado da linguagem matemática se torna claro, fica bem mais simples entender a teoria e resolver os exercícios. Mas, como tornar o significado da linguagem matemática claro? Alertamos mais uma vez, que não objetivamos entrar em meandros psicológicos ou cognitivos, no que diz respeito a uma observação sobre os processos que ocorrem no interior das mentes dos indivíduos e que seriam os geradores ou processadores da aprendizagem. Ao perguntar como podemos tornar a linguagem matemática mais clara, estamos perguntando *como* traduzir textos matemáticos para a linguagem natural. Essa ideia de dar significado, é geralmente abordada pelas teorias educacionais cognitivistas como uma espécie de justificativa para o que se aprende. Não discordamos completamente desta tentativa, mas tal justificação algumas vezes é impossível, e outras vezes leva ao utilitarismo.

Tratarei de duas formas comumente usadas e defendidas por alguns educadores matemáticos como maneiras de traduzir a linguagem matemática, que são: linguagem "mais próxima" do aluno e utilização de conteúdos anteriores para ensinar conteúdos atuais. Consideramos que a contextualização seria uma outra forma de tradução.

A utilização de uma linguagem "mais próxima" do aluno (ou uma linguagem mais simples) seria a prática de falar a "língua" do aluno, e isto dependeria da idade, do contexto social etc. Em um certo sentido seria a facilitação daquilo que pode parecer complicado. Alguns autores, como Machado (2011), apontam uma análise sobre a própria língua natural e a linguagem matemática, como se devessem andar juntas, para que ambas ganhassem significados múltiplos e mútuos.

Há a necessidade da língua para ler e compreender o texto de matemática e, se esse for um problema, de dar significado à sua solução. Por outro lado, é necessário ler e escrever em linguagem matemática, compreender os significados dos símbolos, dos sinais ou das notações próprias dessa linguagem. Aponta-se até para a possibilidade de se ensinar matemática, desde as séries iniciais, a partir de uma mediação intrínseca da língua materna.

De fato, parece haver na linguagem matemática um processo de "tradução" da linguagem natural para uma linguagem formalizada (e/ou vice-versa), específica dessa disciplina. Os enunciados emitidos em língua natural passam a ser escritos para o equivalente em símbolos matemáticos ou compreendidos sob uma interpretação matemática. Essa tradução "é o que permite converter os conceitos matemáticos em objetos mais facilmente manipuláveis e calculáveis", como revela Gómez-Granell (2003, p. 261) - que baseada em Vygotsky, realiza excelentes trabalhos a respeito da linguagem

Esta "tradução" nem sempre é tão evidente ou uma tarefa tão fácil, pois os símbolos e as regras da matemática não constituem uma linguagem familiar. A própria Gómez-Granell (2003) ressalta que na linguagem natural o sentido atribuído às palavras utilizadas é demasiadamente amplo e, por esse motivo, esses termos não expressam o rigor necessário de uma linguagem formalizada, ou seja, na linguagem natural o sentido das palavras é muito mais vago e impreciso; termos como comprido, estreito, largo, pequeno, grande, muito, etc., que fazem parte da linguagem natural para expressar magnitudes, não se aplicam numa linguagem formalizada.

Oliveira (2004), ao tratar do ensino de línguas, alerta que na busca de uma facilitação didática, muitas vezes se estabelecem confusões conceituais, "a facilitação didática deve cessar no instante em que começa a criar confusão conceitual. A explicação conceitualmente confusa pode gerar a impressão de ter facilitado o processo, momentaneamente, mas seus efeitos no longo prazo são absolutamente perniciosos" (OLIVEIRA, 2004, p. 343). Na tentativa de se facilitar a álgebra, com aritmética, geometria, o cotidiano, ou com uma linguagem mais simples, acaba mais se causando confusão, "não é preciso criar confusão conceitual para se alcançar clareza didática. Não é preciso ser confuso para ser claro. E nem é tão difícil assim ser claro, sem que surja a necessidade de se explicar coisas demais ao mesmo tempo" (OLIVEIRA, 2004, p. 346), "Tudo isso indica que não vale a pena procurar a facilitação didática quando se ultrapassa o limite da clareza conceitual, e quando não se leva em conta o trato real dado pelos aprendizes aos diferentes *jogos de linguagem* envolvidos" (OLIVEIRA, 2004, p. 358).

A leitura de textos que envolvem matemática, seja na conceitualização específica de objetos desse componente, seja na explicação de algoritmos, ou ainda, na resolução de problemas, vai além da compreensão do léxico: exige do leitor uma leitura interpretativa. Para interpretar, o aluno precisa de um referencial linguístico e, para decifrar os códigos matemáticos, de um referencial de linguagem matemática. Mas, deve-se tomar cuidados com a relação apressada de jogos de linguagens diferentes. Não se pode ficar apenas na tentativa de simplificação, mas realmente deve-se buscar envolver o aluno na compreensão da linguagem matemática em si. Esta simplificação pode ser uma ferramenta de auxílio, mas não será suficiente, se o aluno não controlar a linguagem própria da matemática, ou no caso da álgebra, não controlar a sintaxe desta, e não apenas ver atrelado a outro jogo de linguagem.

Abordando essa relação entre jogos de linguagens, vamos à segunda forma de ensino já indicada anteriormente: a utilização de conteúdos anteriores para ensinar conteúdos atuais" ou (comparação), que é quando se utiliza de conhecimentos prévios para ensinar um determinado conteúdo. Vimos isto em Piaget com a noção de abstração reflexiva, principalmente, e vemos em Ausubel com o conceito de ancoragem.

Utilizaremos um exemplo que é a "aritmetização" da álgebra ou a noção de que a álgebra é a generalização da aritmética, ou seja, de que se pode se utilizar do mesmo processo de ensino usado na aritmética para álgebra, e sintetizando mais ainda, é a noção de que se um aluno aprende que $2 + 2$ é igual a 4, ele entenderá também que $x + x$ é igual a $2x$. A generalização é, em muitos aspectos, vista como uma espécie de contextualização e/ou "facilitação de palavras".

Glock (1998, p. 228) compreende que "a confusão filosófica se origina de um entrecruzamento de jogos de linguagem [...] isto é, da utilização de palavras de um jogo de linguagem conforme as regras de outro jogo", e Oliveira (2004, p. 346) complementa ao dizer que "aprender significa assimilar algo de *novo*. Algo que pode até ser *introduzido* pela via do já conhecido, mas não pode a ele ser *reduzido*. É essa tendência a reduzir uma coisa à outra que está na base da confusão conceitual". Portanto, podemos usar diferentes conteúdos, mas como introdução e não como redução ao mesmo. A álgebra não pode se reduzir à aritmética – até por que em algum momento ela irá além -, mas não há problema em tomá-la como introdução.

Castañeda (2002) parte da ideia de que os jogos de linguagem possuem gramáticas, então, partir disto, o autor destaca que se se deseja justificar a gramática de uma linguagem a partir de outra linguagem, deve-se entender que de fato, esta corresponde a outra gramática, ou seja, corresponde a outras regras. Se considerarmos isto realmente necessário deveria haver uma regressão em cadeia de justificações, ou seja, se álgebra se justifica pela aritmética, esta se justificaria por outra linguagem. Mesmo que fôssemos regredindo chegaríamos a um ponto em que as escolhas na linguagem seriam arbitrárias.

> Se se pretende justificar a gramática de uma linguagem a partir da descrição da realidade que resulta de outra linguagem, tão somente se está cotejando o que se ppode jogar em um determinado jogo com o que se pode jogar em outro. No entanto, desta maneira não se rompe com o condicionamento do sistema de regras da linguagem sobre o que se pode dizer a partir dele. Este se mantém na medida em que se impõe la gramática de outra linguagem[49] (CASTAÑEDA, 2002, p. 67).

Querer justificar álgebra com a gramática de outra linguagem, como aritmética, geometria ou cotidiano, não é problema, mas isto não torna a gramática da álgebra algo não arbitrário, até por que se formos regredindo veremos que a aritmética ou qualquer outra gramática usada como suporte também seria arbitrária.

Castañeda (2002), então, levanta possibilidades de se pensar a relação de uma linguagem a partir de outra. A primeira "se pode pensar em linguagens cuja gramática permita a possibilidade de fazer uso de certas expressões sem ter que ter em conta as regras de outras expressões do mesmo sistema"[50] (CASTAÑEDA, 2002, p. 71), como se fosse o uso limitado de regras de uma gramática, como alguém que jogasse xadrez sem fazer uso de algumas peças, como se fosse um subjogo, ou um jogo mais simples ou uma sublinguagem. No entanto, Castañeda (2002) argumenta que não se pode dizer que ao se jogar parte de um jogo, se estaria jogando todo o jogo, ou seja, que ao se conhecer partes das regras, não se pode dizer que se conhece a linguagem por completo, e nesse sentido ainda se estaria de posse de outra gramática.

---

[49] "si se pretende justificar la gramática de un lenguaje a partir de la descripción de la realidad que resulta de otro lenguaje, tan sólo se está cotejando lo que se puede jugar en un determinado juego con lo que se puede jugar en otro. Sin embargo, de esta manera no se rompe con el condicionamiento del sistema de reglas de lenguaje sobre lo que se puede decir a partir de él. Este se mantiene en la medida en que se impone la gramática de otro lenguaje".
[50] "se puede pensar en lenguajes cuya gramática permita la posibilidad de hacer uso de ciertas expresiones sin tener que tener en cuenta las reglas de otras expresiones del mismo sistema".

Portanto, não se pode ter a ideia de que ao se conhecer parte das regras da álgebra, advindas da aritmética, possa-se assegurar que o aluno já compreende álgebra, e assim, ele estaria jogando ainda outro jogo e não a álgebra em si, mas tal aproximação já mostra uma possibilidade.

No segundo caso, Castañeda (2002, p. 72) aponta que as linguagens formais têm suas regras explícitas, enquanto outras não as têm, como no caso da linguagem ordinária, “Neste tipo de linguagens é possível que se apresentem termos que se podem utilizar de múltiplas maneiras, que não seja possível definir de uma maneira completa e exaustiva, dada sua riqueza semântica”[51]. Isso pode causar confusões, e ao se pensar que se joga um mesmo jogo, quando se faz comparação com esta, na verdade pode haver embaraços, como no caso da álgebra, que ao se comparar com a linguagem cotidiana, percebe-se confusões, mal-entendidos, que a álgebra em si não contém.

A terceira possibilidade deriva da primeira, pois se se pode considerar que há sublinguagens, pode-se entender que ao conhecer parte de uma linguagem, esta permite o acréscimo de regras, no que Castañeda (2002) chama de contextualização gramatical. Se a álgebra historicamente permitiu adicionar regras, tal possibilidade deve ser considerada no ensino, não devido um paralelismo entre a espécie e o indivíduo, mas devido nossa capacidade de seguir regras.

As duas formas apresentadas neste tópico como soluções para clarear a compreensão dos textos matemáticos estão geralmente baseadas em argumentos do construtivismo, pois têm como base a construção do conhecimento por parte do aluno, e importa ao professor estimular este conhecimento já existente em potencialidade no aluno. A linguagem simples e a comparação seriam formas de fazer este estímulo. A filosofia da linguagem de Wittgenstein nos mostra uma possibilidade de tradução baseada no *uso* (de regras ou técnicas) dentro de contextos (sistemas) linguísticos específicos.

5.2.3 Determinação de significado

Há problemas com relação à determinação do significado de símbolos em matemática. Por exemplo, qual o significado do sinal de igual? Na aritmética parece ser um definidor de resultados, quando, por exemplo, dizemos $2 + 3 = 5$, apesar de geralmente também ser mostrado que $5 = 2 + 3$, a noção de resultado permanece muito forte. Na álgebra o sinal de

[51] “En este tipo de lenguajes es posible que se presenten términos que se pueden utilizar de múltiplas maneras, que no sea posible definir de una manera completa y exhaustiva dada su riqueza semântica”.

igual já aparece como um sinal de equilíbrio entre dois lados e por isso poderíamos escrever $x + 3 = 5$, tanto quanto escrever $5 = x + 3$, compreensão que seria mais útil ainda para equações do tipo $2x + 11 = 5x + 3$. Porém, o que se percebe é que os alunos, geralmente, têm dificuldades nestas questões, entre outros motivos, pelo fato de não compreenderem a noção de equilíbrio representado pelo sinal de igualdade. Geralmente se tem usado o exemplo da “balança de dois pratos” para reforçar esta noção, o que mostra o quanto é difícil fazer o aluno pensar o sinal de igual como sinal de equilíbrio entre duas partes.

Outros exemplos são os sinais de menos e mais. Eles aparecem como operações nas séries iniciais, mas depois se tornam objetos, como no caso dos “jogos de sinais”. Outro exemplo é o “x”, que por certo tempo da vida escolar é sinal de multiplicação, mas depois se torna uma incógnita, além do fato de que por um tempo os alunos entendem que o “x” é o sinal da multiplicação, mas depois é trocado pelo *ponto*, e este tem funções diferentes na língua portuguesa (ponto final, ponto em seguida etc.) e na geometria.

O problema do significado não passa apenas pelos signos, mas também pelos sistemas ou estruturas de resolução de problemas matemáticos, isto é, pelas sintaxes, como nas equações, que temos as formas de resolução da equação do 1º grau completamente diferente da equação do 2º grau, ou na aritmética básica, onde geralmente os alunos resolvem “contas” para chegar a resultados, como em $2 + 3.2 – 7$, mas a partir de um determinado momento, como no conteúdo de fatoração algébrica e produtos notáveis, o que se busca é uma reorganização dos signos e não um apenas um resultado, como em $x^2 + xy + ax + ay$.

Segundo Glock (1998), de acordo com correntes já apresentadas aqui, como o logicismo e o mentalismo, o significado de uma palavra é uma ideia, uma imagem na mente do falante. Mas de acordo com Wittgenstein, o significado está no uso. Para Moreno (1986), a compreensão depende dos diversos usos que se pode fazer de determinada palavra em diferentes “jogos de linguagem” e, nesse sentido, compreender implica considerar o “jogo”, isto é, o uso de regras gramaticais que está sendo feito em determinadas circunstâncias para se pronunciar. Compreender uma palavra proferida não é ter uma experiência, mas é uma capacidade, manifesta no modo como se reage ao proferimento. Nesse sentido, para Glock (1998, p. 92) “Compreender uma palavra também é uma capacidade, manifesta de três formas: no modo como usamos a palavra, no modo como reagimos quando outros a utilizam e no modo como a explicamos”. Assim, de acordo com Glock (1998), Wittgenstein rejeitou que compreensão fosse uma família de fenômenos, pois a compreensão não é um processo ou estado, de natureza física ou mental, porém não nega que não possa ter acompanhamentos mentais ou fisiológicos. Glock (1998, p. 92) apresenta três argumentos usados por Wittgenstein para defender isso: em primeiro lugar, nenhum fenômeno mental ou psicológico é necessário para a compreensão, pois podemos ter imagens ou sensações quando compreendemos, mas não há uma necessidade disso. Por exemplo, é impossível compreender a ordem “Imagine um retalho amarelo!”, sem antes executá-la. Em segundo lugar, tais fenômenos não são suficientes, pois se nos mandam apanhar uma flor amarela, posso ter uma imagem de uma flor amarela, mas posso por acaso não compreender a ordem, ou seja, a imagem não teria sido suficiente. Então, o que é mais necessário, a ordem ou a imagem mental? Ler um texto não depende do que passa na cabeça de quem ler na ocasião, mas daquilo que ele é capaz de fazer com o texto. Ler é o exercício de uma capacidade, não a manifestação de um mecanismo, mental ou biológico. E em terceiro lugar, a compreensão linguística não é um ato, não é algo que façamos voluntária ou involuntariamente, e tampouco é um evento ou processo, pois não é algo que acontece ou que se passa. A compreensão é uma condição permanente, ela é mais potência do que ato. A compreensão linguística é uma *capacidade*, é o domínio de técnicas de utilização de palavras em incontáveis atividades discursivas.

Compreender não seria atribuir significados? Sendo assim, o que seria, então, significado para Wittgenstein? Em Frege e no *Tractatus* as regras para o uso de uma palavra derivam de seu significado. Para o segundo Wittgenstein, embora uma regra possa seguir-se de outra regra, não é claro como uma regra poderia seguir-se de um significado. “São as regras gramaticais que determinam o significado” (GF, I, §133). Se nós alteramos a regra, alteramos o significado, disto, segue-se que se não alteramos o significado, obtemos a regra. Conforme Glock (1998, p. 111), os signos em si mesmos não possuem significados, conferimos significados aos signos, explicando-os e utilizando-os de uma determinada maneira e ao empregá-los de forma diferente, podemos alterar os seus significados, ou seja, o significado está no uso e este depende do contexto. Desse modo, o significado poderá estar ou não determinado. Então, como pensar em uma capacidade sobre algo possivelmente indeterminado? Seria, então, impossível compreender qualquer coisa de fato? Como requerer a compreensão de signos e sintaxes matemáticas?

Medina (2007) apresentou um estudo sobre a determinação do significado em sua análise sobre a linguagem, em particular o ensino de línguas, que é bastante útil para nossa discussão. De acordo com este autor, tende-se a dizer que há uma forte convergência entre os argumentos de Wittgenstein e Quine quanto à indeterminação do significado. Porém, para Medina não podemos simplesmente qualificar o trabalho de Wittgenstein como uma tentativa de mostrar que o significado é indeterminado.

Medina apresenta três formas de determinação de significado: A *determinação absoluta* defende a tese de que há somente uma interpretação que fixa o sentido do termo (tese da unicidade semântica) e que pode ser representada por realistas, platonistas, logicistas, kantianos, entre outros, que apesar de se diferenciarem de muitas maneiras, assemelham-se ao fato de buscarem essências ou razões últimas (ou primárias, ideais ou racionais) dos significados que damos às coisas, os chamados *fundamentos semânticos*. Outra forma seria o outro extremo da determinação absoluta, a *indeterminação radical* que defende a tese do igualitarismo cognitivo, onde todas as interpretações rivais são igualmente dignas de crença ou cuja aceitação é igualmente racional, representada pelos céticos do significado, tal como Quine. E, por fim, a terceira forma, a *determinação contextual*. Diferente da determinação absoluta, esta não exclui a possibilidade de interpretações alternativas, isto é, admite certos graus de indeterminação, porém não chega a ser como a indeterminação radical, ou seja, não aceita que todas as interpretações sejam aceitáveis.

Os contextos de comunicação cotidiana restringem nossas interações linguísticas, de tal forma que nossos significados podem adquirir certos graus de determinação, mesmo que alguns graus de indeterminação ainda subsistam, ou seja, os significados são determinados em certos contextos restritos, ou melhor, são determinados o suficiente para que seja possível a comunicação (MEDINA, 2007). Portanto, a determinação do significado ou um significado determinado depende de um contexto restrito ou só será *determinado* para *determinados* contextos. Isto ocorre quando os participantes em uma comunicação restringem as possibilidades de interpretações por meio de um acordo, no qual certas interpretações diferentes são rejeitadas.

Com o argumento do regresso Wittgenstein tenta estabelecer que nem definições ostensivas nem interpretações podem fixar o significado. Wittgenstein (IF, §28) mostra que as definições ostensivas não são suficientes, pois, seguindo o argumento do regresso, definições ostensivas necessitam também de outras definições que também necessitam de outras definições, palavras explicam outras palavras e assim sucessivamente. Alguém poderia apontar para algo vermelho e dizer "esta cor é vermelho?", porém "o que é cor?", poderia algum desconhecedor da palavra perguntar e ao definir o que é cor, outras palavras seriam necessárias, outras definições precisariam ser dadas, como "cor é uma percepção visual provocada pela ação de um feixe de fótons sobre células especializadas da retina, que transmite através de informação pré-processada no nervo óptico, impressões para o sistema nervoso" [52]. De fato,

[52] Cor: Fenômeno Ótico. Universidade Federal do Pará (26 de Julho de 2009). http://www.ufpa.br/dicas/htm/htm-cor4.htm, Página visitada em 02 de Janeiro de 2013.

para algumas pessoas – talvez, para nós mesmos - seria necessário explicar algumas das palavras da definição anterior, o que levaria a necessidade de explicar outras palavras. Mas para a maioria das pessoas seria um absurdo dizer-lhes que não sabem o que é cor, pois talvez dissessem “cor é o vermelho, verde, branco, azul” e se não soubessem alguma bastaria lhes apontar para algum exemplo mais próximo possível. Wittgenstein, com o seu argumento do regresso, diz que o significado não pode ser fixado por definição.

O argumento do regresso também é usado para mostrar que interpretações não podem fixar o significado, como apresenta a discussão da continuação de uma série numérica, por exemplo, da regra “+2”. Para este caso, pensamos na formulação algébrica “*x + 2*”, no entanto, uma formulação algébrica poderia ser interpretada de outras formas. O que determina o uso da regra? Estamos inclinados a dizer que não é apenas a expressão da regra, mas sim o seu significado e assim não bastaria dizer a alguém “*x + 2*”, se para ela isto não tivesse significado, ou seja, seus elementos e o próprio sistema (sintaxe) deveriam estar bem definidos para quem ouve. Dessa forma, parece que se fixamos a interpretação da regra fixamos o significado e suas aplicações. A seguinte interpretação para a regra “+ 2” seria plausível: “escreva o penúltimo número depois de cada número” (IF, §186), mas até esta interpretação pode ser compreendida de modos distintos e ela é também outra formulação da regra, assim como a formulação algébrica, também necessita de definições para seus elementos (palavras) e o sistema em que está inserido, sua sintaxe, ou seja, necessita ter significado para quem ouve. Para Wittgenstein não há interpretação, há apenas compreensão. O filósofo conclui que “qualquer interpretação ainda fica pendurada no ar, juntamente com o que ela interpreta e não pode dar qualquer suporte. As interpretações por si próprias não podem determinar o significado” (IF, §198).

Então, para o Filósofo, definições e interpretações deixam o significado exato indeterminado, porém ele não se alia com uma indeterminação radical, pois isto surge quando procuramos fundamentos inatingíveis devido à adoção de teorias filosóficas descontextualizadas que distorcem o uso da linguagem ou não dão à questão do uso a importância que este tem. Ele busca justamente refutar o *fundacionismo semântico*, isto é, o ato de procurar a origem dos sentidos ou os primeiros significados. Estes fatos são ficções filosóficas, originárias de uma ideia de causa primeira, que poderia ser um mundo ideal ou uma intuição pura, de onde tudo partisse e onde tudo fizesse sentido. Eles são os adeptos da *determinação absoluta* e neste caso haveria uma essência por trás de tudo, uma lógica controladora de todas as coisas. Dentro desta noção criamos expectativas a respeito do significado das palavras e se nos dermos conta de que tais expectativas não podem se realizar, somos tentados a ir para o outro extremo, para a *indeterminação radical*. Wittgenstein busca uma nova abordagem do uso cotidiano da linguagem, seu objetivo é se livrar das fundações semânticas e ir de volta ao solo rude da nossa linguagem cotidiana (IF, §107), mas sem cair em um relativismo permissivo.

Para o segundo Wittgenstein, na linguagem natural as proposições estão em perfeita ordem, mas falar uma língua não é mais operar um cálculo, de acordo com regras definidas, como acreditava no *Tractatus*, pois é incoerente que todos os aspectos da linguagem sejam governados por regras e equivocada a ideia de que as regras excluam possibilidade de vagueza sob todas as circunstâncias possíveis. Segundo Glock (1998, p. 127), Wittgenstein não quer promover a vagueza, apenas resiste ao dogmatismo da exigência de uma determinabilidade do sentido e indo contra a ideia de que a dúvida ou desacordo devam ser eliminados. Wittgenstein não rejeita a exatidão, apenas crê que a inexatidão não é impossível. De acordo com Machado (2004, p. 156), em WVC[53], Wittgenstein diz que o dogmatismo é arrogante, mas pior que isso, segundo ele, o dogmático pensa que a resposta a uma pergunta filosófica pode ser uma informação surpreendente, uma descoberta. Então, complementa:

> A concepção errônea contra a qual pretendo objetar em relação a isso é a seguinte: que possamos encontrar alguma coisa que hoje não podemos ainda ver, que possamos descobrir alguma coisa completamente nova. Isso é um erro. A verdade a esse respeito é que já temos tudo; e o temos realmente presente; não precisamos esperar por nada. Nos movemos no reino da gramática da nossa linguagem ordinária, e essa gramática já está aí. Desse modo, temos tudo e não precisamos esperar pelo futuro.

De acordo com Machado (2004), com o abandono da ideia de que o lógico é algo oculto a ser descoberto, também é abandonada a ideia de que nossa linguagem ordinária não contém tudo de que precisamos para a análise. Para determinar o significado de uma palavra, devem-se considerar todos os aspectos do uso que determina esse significado. Por exemplo, quanto à palavra "entendimento", se nos usos que fazemos desta palavra, ela expressa o mesmo significado, assim parece porque em todos estes usos estamos nos referindo à mesma coisa: o entendimento. Logo, deve haver algo em comum em todos os usos quando me refiro à tal palavra. Se nem todos os usos possuíssem algo em comum, então estaríamos usando a palavra "entendimento" ambiguamente. Sendo assim, a palavra "entendimento" possui uma essência? Isto não seria ir contra o que Wittgenstein defende nas *Investigações*?

Para Wittgenstein é possível determinar limites precisos para um conceito determinando condições necessárias e suficientes para a aplicação correta da expressão conceitual. Logo,

[53] Wittgenstein and the Vienna Circle. Conversations recorded by Friedrich Waismann. Brian McGuinness (ed.). Trad. Schulte, Joachim & McGuinness, Brian. Oxford: Basil Blackwell, 1979.

rejeita a determinação absoluta do significado, pois rejeita a ideia de significação como um ato mental. A significação é um aspecto das nossas práticas cotidianas e a manutenção de tais práticas depende da ocorrência de determinados fatos. (MACHADO, 2004, p. 138). “Isso parece abolir a lógica, mas não abole” (IF, §242), pois a essência deve estar refletida no uso. Wittgenstein não abole a lógica ou a essência, apenas muda a forma de vê-las, isto é, não mais como *aprioristicamente* presentes em outro mundo ou em nossas intuições puras, mas sim dependentes das ações humanas. Para Wittgenstein a *essência* vem da linguagem, nesse caso, ela não viria antes, mas seria uma forma de organização, de “como ver” aquilo que aí está, sendo que isto que há, já foi influenciado pelas ações dos jogos de linguagem. “A essência está expressa na gramática” (IF, §371). A essência está no uso. A lógica é construída.

Nesse sentido o significado se dá pela nossa prática, pelo nosso costume. Wittgenstein entende que não seria coerente dizer que em contextos comuns de comunicação não há significados nas palavras proferidas e escutadas pelos usuários desta linguagem. Na comunicação há esta possibilidade por que o estado da interação linguística e o conhecimento dos participantes, assim como as circunstâncias sócio-históricas que afetam o uso do termo impõem todos os tipos de restrições interpretativas. O contexto fica mais restrito e a comunicação se torna mais possível. Glock (1998, p. 127) complementa ao dizer que o exato e o inexato são relativos ao contexto e o propósito e uma definição inexata não é aquela que deixa de satisfazer o fugaz ideal da determinabilidade, mas sim aquela que deixa de satisfazer os requisitos para a compreensão em um dado contexto. A questão não é se há ou não determinação, mas sim que tal determinação não é algo solto das ações humanas, algo além das vontades dos usuários da linguagem, a determinação é algo que depende de nossas ações, pois dependem de um acordo de ações (CHAUVIRÉ, 2008). Então, é neste contexto que se tem a tese da determinação contextual.

Os argumentos de Wittgenstein enfatizam que o significado está sob a crucial dependência de um contexto particular do uso da linguagem que é o contexto de uma prática compartilhada, uma *forma de vida*, que para ele é um conjunto de técnicas ou de procedimentos comuns. É no uso que uma palavra adquire significado. Para Wittgenstein, compreender uma frase é saber o que fazer com ela, é saber o papel que ela desempenha na comunicação e ser capaz de usá-la apropriadamente em um jogo de linguagem (MEDINA, 2004, p. 101).

Wittgenstein (IF, §201) explica que há uma tendência em afirmar que todo agir segundo uma regra é uma interpretação, porém “interpretação” é apenas a substituição de uma expressão da regra por outra, “Eis por que ‘seguir a regra’ é uma *práxis*” (IF, §202). Desse modo, a nossa forma de compreensão mais básica e imediata, em contextos cotidianos de comunicação, não parece envolver esforços interpretativos explícitos de nossa parte, mas parece muito mais ser uma compreensão tácita que depende de capacidades básicas, isto é, do nosso domínio de linguagem. Wittgenstein (IF, §138) trata da questão da compreensão que ocorre em um instante, porém quando fala isto ele também diz que o uso de uma palavra se estende no tempo e é este uso que fará com que a compreensão se torne uma capacidade e permite compreensões futuras dentro de um mesmo jogo de linguagem ou em aplicações semelhantes. Gottschalk (2009a, p. 16) colabora neste ponto ao afirmar que o ensino da matemática:

> pressupõe um conjunto de regras a serem apresentadas pelo professor, digamos *a parte ante*, e em um segundo plano, *modos* de apresentação destas regras que vão constituir o significado dos objetos matemáticos e que serão apropriados pelos alunos ao longo deste segundo plano, mediante um simbolismo não dado *a parte ante*, mas, construídos *a parte post*.

É o caso do aluno, quando começa a aprender outros usos de letras na matemática, ao estudar álgebra, normalmente a partir do 7º ano. Novos *usos* de letras são introduzidos, além dos novos usos de determinados sinais, como igual, mais e menos, etc. O aluno aprende a calcular com letras, a operar com sinais, a resolver equações, a manipular expressões, sem a necessidade de resultados simples, etc. Em outras palavras, o que o professor está transmitindo é um outro modo de ver as letras. Este novo uso de termos como *a*, *b*, *x* ou *y* não invalida o uso anterior, ou o uso que se fazia das operações com números, é apenas um novo procedimento introduzido (uma nova técnica), que amplia o significado de determinados signos.

> Neste processo recursos didáticos são empregados e o aluno é persuadido (ou não) a aceitar novos empregos de conceitos já aprendidos e a operar com eles de modos inusitados. Em outras palavras, a autoridade do professor e a dos livros didáticos são os modos de que dispomos para a transmissão de uma imagem do mundo, a qual é vista por Wittgenstein como *condição* para que haja conhecimento. É o que permite a organização e descrição de fatos empíricos e mentais, e atribuição de sentido às nossas ações (GOTTSCHALK, 2009a, p. 18).

Nossas certezas mais fundamentais não são decididas por justificativas externas à linguagem, como em nossa experiência empírica ou em processos mentais, mas decorrem de um acordo em nossas formas de vida, parcialmente apresentado pelo professor no contexto escolar. É nesse sentido, que uma criança não pode ser motivada a duvidar do que aprende inclusive de seu professor, pois assim seria incapaz de aprender qualquer coisa.

Wittgenstein enfatiza que nas fases iniciais do aprendizado, certas associações entre palavras e objetos são estabelecidas por meio de processos causais. Estes são processos habituais como o ato daquele que ensina ao apontar o objeto para o aprendiz e dizer seu nome e no ato do aluno repetir o que o professor disse. Estes exercícios se assemelham à linguagem, mas ainda não são linguagens, pois uma linguagem envolve mais do que articular sons repetidos em determinados contexto após certos sinais. E como a criança passa desses simples processos causais para níveis mais altos de competência linguística? Para Wittgenstein isto não ocorre por meio de processos indutivos de formação e testagem de hipóteses, pois estes requerem capacidades que as crianças ainda não têm. Este é um engano, por exemplo, de Santo Agostinho que

> descreve o aprendizado da linguagem humana como se a criança chegasse a um país estranho e não compreendesse a língua do país; isto é, como se ele já tivesse uma linguagem, só que não era essa. Ou novamente, como se criança já pudesse pensar, somente ainda não falar" (IF, §32).

Como platonista, Santo Agostinho estava seguindo um princípio básico da filosofia que segue, ou seja, de que a linguagem é apenas uma referência àquilo que o pensamento já faz, porém para Wittgenstein não há pensamentos sem linguagem, se a criança já pensa algo, isto já é uma linguagem, pois sendo a linguagem expressão, o pensamento é uma forma de expressar. Para Wittgenstein, linguagem é até mais do que uma simples forma de expressão: é condição necessária para que possa haver expressão, pensamento etc. Pois quando se expressa, se expressa algo, e esse algo é constituído na linguagem[54].

Para Wittgenstein, a abordagem agostiniana erra ao colocar criança e o adulto com a mesma competência cognitiva, e em suas interações o que ocorre é apenas que um sabe algo que o outro não sabe. Seria como se fosse um jogo de adivinhação e dessa maneira seria necessário à criança descobrir, descoberta esta que já pertenceria a sua competência cognitiva. Do ponto de vista agostiniano, a aquisição da linguagem é um processo no qual o aprendiz exercita suas competências cognitivas autônomas de um modo independente, o aluno pode formular hipóteses sobre o significado das palavras e as confirma ou não à luz da evidência que lhe é disponível, e isto não se reduz somente ao significado das palavras, no sentido restrito de uma linguagem natural, mas a significados diversos, ou seja, o aluno teria a capacidade de formular qualquer significado e confirmar com alguma evidência. Seria como se um aluno pudesse já ter a capacidade de calcular com letras, mesmo sem antes ter visto esta prática de fato, e poder-se-ia, então, apresentar-lhe sugestões, através de objetos e relações entre letras (ou outros símbolos) ou através de problemas que o levarão a deduzir como calcular com letras.

---

[54] Neste parágrafo eu obtive a colaboração do Prof. Paulo Oliveira

Porém, para Wittgenstein o objetivo no aprendizado não é de juntar informações que já se tem condições de usar, ou seja, não é descobrir por meio de hipóteses baseadas em algo que já sabemos. Seria bastante equivocado chegar a um aluno e lhe dizer que o que lhe será ensinado é algo que ele já sabe, quando na verdade ele não terá que resolver apenas problemas costumeiros, mas sim deverá (ou deveria) ser apresentado a outros tipos de problemas, resolver por meio de algoritmos questões de um tipo diferente (que poderão ou não se assemelhar às questões cotidianas). Seriam novas situações, novos sistemas, outros jogos de linguagem, que talvez por causa de sua semelhança com outras situações pareça ser exatamente a mesma coisa. Schmitz (1988, p. 162), nesse sentido, comenta:

> A criança wittgensteiniana não compreende que os problemas para os quais lhe fornecemos um sistema e, apesar das similaridades de escrita ou de notação, não consideram duas questões como com diferentes graus de dificuldade, mas como sendo de natureza diferente, portanto eles não pertencem ao mesmo sistema.

Resolver um problema significa que buscamos garantir que a aplicação das regras do “sistema” ao qual a proposição pertence permite realizar esta “configuração” particular que é a proposição. Por isso que defendemos que o grande problema de compreensão não está na linguagem natural ou no uso de alguma linguagem que pode ser usado como suporte, ou seja, que não seria uma linguagem simples que resolveria tal problema, mas o problema está na adequação ao próprio sistema que pertence àquela teoria, proposição ou problema que o aluno busca compreender. É o que Wittgenstein chama de uso. É na prática linguística que o aluno vai se adequando ao sistema em que está colocado.

Não existe em matemática problema difícil, isto é, um problema para o qual nenhum método para esperar uma solução não está disponível. O problema difícil seria então aquilo para o qual não existe um sistema escrito. Um problema para um experiente pesquisador matemático não é simplesmente problema no mesmo sentido que o problema do estudante.

Wittgenstein distingue em geral entre as questões: “toda equação de grau *n* tem no máximo *n* raízes em G?” das questões do gênero “*a x b* = (*63 x 18* = ?)”. As primeiras não estão apenas esperando por uma resposta, mas que o seu conteúdo será fornecido e apenas indicam vagamente em qual direção buscar. O outro tipo de questão ao contrário parece ter imediatamente um sentido e podemos o comparar a uma questão empírica. Os problemas “difíceis” correspondem ao primeiro tipo de questão. Encontrar uma solução em um problema difícil quer dizer, geralmente, construir um novo sistema, que não é evidentemente o caso quando se trata de um problema do estudante.

Contudo, a reconciliação entre estes tipos de problema é esclarecedora: confrontada com um problema para o qual ele não dispõe ainda de um "sistema", o estudante espera que lhe forneçamos um novo sistema, como, confrontado com um problema difícil, o pesquisador-matemático é levado a abandonar os sistemas que ele já controla e a inventar um novo sistema, como vimos na história da álgebra. Por isso que não defendemos por completo, a comparação entre diferentes sistemas da matemática, pois em alguns casos isto pode causar confusão, já que o aluno deve abandonar um sistema e adentrar em outro, como é o caso da álgebra. Por isso, não se deve esperar que a partir da aritmética o aluno construa por si mesmo a álgebra.

Wittgenstein (IF, §31) mostra que aprendemos a jogar jogos mais complicados depois que aprendemos jogos mais simples. Então, o filósofo não descarta a utilidade de conhecimentos anteriores para o aprendizado de outros conteúdos, mas deve-se esclarecer que para ele não há uma essência por trás dos conteúdos, no máximo há semelhanças de família, então, se deve tomar cuidado com estas comparações. E assim, para Wittgenstein a compreensão se fortalece no uso das regras ou técnicas apresentadas para determinados contextos ou sistemas linguísticos. Uma proposição ou uma frase que faz sentido se manifesta no fato que é utilizada inicialmente precisando de explicação, mas depois, com o tempo e uso, não mais.

De fato, podemos, para Wittgenstein, falar em um mesmo sentido de "problema" somente no interior de um mesmo "sistema": não somente por que os métodos para encontrar as soluções e os resultados eventuais serão relativos a qualquer sistema, mas também por que a maneira de ser problema é definida somente no interior de um sistema. Em matemática inventamos mais do que descobrimos. Esta é uma expressão do "anti-platonismo" afirmado por Wittgenstein que encontra aqui sua origem: em matemática não há "ainda não", nem resultado previsível, etc., conforme o caso de "sistema" determinado por um conjunto de regras, nada não "existe" que não seja uma estipulação, que não corresponda a alguma realidade antes de ser solicitada.

Assim o problema do estudante é que não há uma maneira para colocar à prova o controle que ele já tem do "sistema" correspondente, pois o problema "difícil" - para o qual não se dispõe imediatamente de um método de resolução, e que não poderia ter tal método descoberto espontaneamente, sem que tenha sido fornecida uma sintaxe determinada - não seria verdadeiramente um problema matemático. O uso de um método só pode ser interno a um "sistema" e não pode, portanto, haver um método para buscar um novo sistema. Ele só pode ser inventado.

Para Wittgenstein (OF) a proposição que parece a menos clara se conserva inalterada depois de analisado o conteúdo, pois somente em sua gramática ela fica mais clara. Com o uso de determinados conteúdos, estes vão sendo melhor compreendidos. Schimtz (1988) declara, então, que "compreender uma proposição matemática, é compreender um sistema". A ideia de que há algo em comum por trás, mesmo de questões diferentes, se deve à noção de essência presente nas concepções de ensino e aprendizagem de alguns educadores. O problema é pensar que a percepção desta essência é uma competência já presente no aluno.

Na concepção essencialista, entende-se que ao se ensinar um conteúdo para um aluno, fornece-lhe a capacidade de compreender conteúdos posteriores ou questões mais difíceis. Como se lhe ensinando a forma de se resolver equações do primeiro grau e mostrando-lhe alguns exemplos simples, acrescentado ao aprendizado anterior de potência, fração, radiciação, pudesse levar o aluno a resolver questões mais complexas de equação do primeiro grau envolvendo estas outras operações. Quantas vezes não ouvimos nossos alunos falarem: "Na aula o professor passa um assunto, e na prova cobra outro".

Esta concepção subsiste por que ainda se pensa que a mente mantém um isomorfismo com uma lógica racional, por isso o termo "raciocínio lógico" é tão relacionado com a matemática. Por exemplo, não há como não pensar que não haja algo por trás de questões como:

- *Qual número somado com 40 é 90?*

- $x + 40 = 90$

- *João deverá caminhar 90 metros, até aqui caminhou 40, quanto ainda resta?*

- *Qual o complemento de 40? (esta questão ainda poderia ser apresentada em forma da figura).*

Há algo comum por trás destas questões? Mesmo que os valores fossem diferentes a ideia de uma lógica por trás de todas estas questões permaneceria, porém, estas atividades são diferentes e não se podem exigir deduções que ainda não foram apresentadas. *A lógica é construída.* Talvez para um usuário com um pouco mais de experiência haverá uma lógica. Para analisar a compreensão, precisamos estar dentro dos jogos e não fora, pois, vendo do lado de fora, vemos a tal lógica. Os professores vendo o conteúdo que ensinam se perguntam: como estes alunos não aprendem? Adultos vendo conteúdos pelos quais passaram se perguntam: como eu não entendia isso?

No entanto, esclarecemos que a lógica não é o problema, mas sim o fato de vê-la como fundamento de todas as coisas, quando na verdade ela é mais uma prática que pode ser muito útil para a aprendizagem. Ela permite determinadas generalizações (mas deve-se lembrar de que algumas práticas generalizadoras também atrapalham em matemática) e até uma instrumentação dos pensamentos. Pode-se ensinar lógica, buscar fazer os alunos verem semelhanças por trás de questões. O que não se pode é tê-la como uma competência potencialmente presente no aluno.

Pensa-se muitas vezes que a deficiência de alguns alunos está em uma possível falta de competência cognitiva ou um nível baixo de intelectualidade, pois se espera que o aluno tenha deduções que podem ou não aparecer em uma resolução de um problema ou aprendizado de um conteúdo mais abstrato, quando na verdade o que aconteceu é que tais exercícios mais difíceis não lhe foram mostrados, ou seja, ele não foi apresentado a tais sistemas, por isso é tão necessário a exemplificação. É evidente que sabemos que há competências, talvez naturais em determinados aspectos, que levam a uma diferenciação das pessoas em diferentes atividades, porém, isto não pode ser usado toda vez que, nós professores, estivermos diante de um possível fracasso em nosso ensino.

De acordo com Medina (2007, p. 107), segundo Wittgenstein há certos aspectos do domínio de uma linguagem que uma abordagem cognitivista (construtivista, comportamentalista, empirista e/ou psicológica) não pode explicar, pois não há como explicar como o comportamento do aprendiz se estrutura por meio de normas, pois estas não podem ser reduzidas a generalizações, sendo que o que se adquire na aprendizagem de uma linguagem é mais do que um conjunto de disposições verbais e de hipóteses bem confirmadas, trata-se de um conjunto de normas para a aplicação de palavras, ou seja, envolve um processo de estruturação normativa de comportamento que vai além do simples condicionamento e tal estruturação ocorre por meio de uma socialização ou entrada na cultura, isto é, por meio de um treinamento em práticas de uso de linguagem governadas por regras. Entender o que é seguir uma regra é entender como a linguagem produz seu significado.

De acordo com Wittgenstein o processo de aprendizado linguístico é um processo inteiramente social, não só ocasionado, mas mediado e estruturado pelo meio social. A linguagem não é aprendida de uma pessoa, mas por intermédio de outra pessoa. Esse meio social é o contexto adequado para a efetivação da comunicação, mas para isso é necessário um praticante competente que delimita, seleciona e retroalimenta o uso das palavras do aprendiz. Nesse sentido, Wittgenstein eleva a importância do mestre (professor), pois este desempenha um papel estruturador indispensável no processo de aprendizagem. O que caracteriza os estágios iniciais do aprendizado linguístico é a relação de dependência cognitiva do aluno em relação ao professor. Ele pode fornecer esse pano de fundo normativo. Tal pano de fundo é colocado progressivamente à disposição do aluno por meio do treinamento, até o ponto em que o comportamento do aprendiz torna-se regulado por normas sem necessitar mais da assistência do professor.

O professor deve mostrar ao aluno o que se deve fazer e como se pode seguir o exemplo. O aluno olha o modo como aprendeu como o único modo de proceder. Assim, conforme Wittgenstein, a partir daí o aluno seguirá as regras cegamente, ele compreenderá todas as coisas de acordo com as regras interiorizadas, ficando cego para certos aspectos, precisando assim se dispor a mobilizar sua vontade para “ver como”, isto é, perceber outros aspectos. Não devemos entender isto como uma crítica do filósofo, não é esta sua intenção, mas sim mostrar como as coisas são, se não seguíssemos cegamente as regras que seguimos seriam outras, o que reforça é que somos sempre guiados por regras, por que sempre seremos colocados em alguma determinada cultura, que já possui significados determinados em contextos restritos.

5.2.4 Manipulação de símbolos

Muitos estudos em educação matemática defendem a relação da matemática com o cotidiano, um ensino de matemática contextualizado, visto que o aluno parece desempenhar bem seu papel com cálculos no cotidiano, mas fracassa nas atividades escolares, quando nelas se defrontam com símbolos, algoritmos etc. Porém, o oposto também ocorre, pois alguns alunos sabem usar regras e algoritmos em suas formas convencionais, mas não compreendem os enunciados dos problemas matemáticos escritos em linguagem natural, como no caso das situações-problema tão enfatizadas pelos documentos oficiais. Isto revela um paradoxo no ensino de matemática.

Esta é uma questão bastante intrigante, pois se um aluno consegue realizar cálculos em seu cotidiano, como juntar valores, passar um troco ou até efetuar multiplicações e divisões, como pode no ambiente escolar tais alunos sentirem dificuldades com os algoritmos, mesmo quando são colocados os próprios valores usados no cotidiano? Se buscamos uma espécie de contextualização para aproximar a atividade do ambiente escolar com o dia a dia do aluno, tais atividades ainda parecem não exercer a eficiência esperada. Muitos alunos, depois de aprenderem a utilizar o algoritmo, resolvem uma subtração do tipo “12500 – 4850”, mas sentem dificuldade em resolver um problema do tipo “João emprestou R$ 4850 para seu primo. Sabe-se que ele tinha R$ 12500, com quantos reais ele ficou?”. Tal paradoxo nos faz repetir uma constatação que já fizemos anteriormente: muitos dos problemas relacionados ao ensino de matemática estão relacionados aos problemas da linguagem.

Podemos supor que a matemática é difícil, devido à dificuldade de compreensão de sua linguagem. Mas em que sentido esta relação se estabelece? Neste contexto, podemos perguntar: a matemática possui uma linguagem ou ela é uma linguagem? Dependendo da resposta, a compreensão quanto à relação entre linguagem e matemática pode variar. Se a matemática possui uma linguagem, teríamos que a dificuldade pode passar pela linguagem, mas não é propriamente dela, pois tal seria vista apenas como suporte e a matemática em si seria *um algo além*. Mas se a matemática é uma linguagem, a dificuldade estaria principalmente na compreensão dos signos e sistemas sintáticos matemáticos, pois a matemática em si já seria a ferramenta e o problema está em sua utilização.

A ideia da matemática vista como portadora de uma linguagem tem subentendido a matemática como algo além da linguagem, em um mundo ideal, na mente ou no empírico. Assim, a linguagem seria apenas uma forma de representação de tal realidade externa à linguagem. Esta seria uma interpretação realista. Na educação, isto poderia ser visto como se a matemática fosse um pensamento superior, o pensamento que envolve um raciocínio lógico, algo presente em uma realidade ideal, inerente ao próprio indivíduo ou em algum lugar da natureza física, algo que poderíamos ter posse – ter uma estrutura *a priori* -, antes mesmo de uma linguagem. Nesse sentido, a linguagem em si seria algo usado apenas para representar tal forma de pensamento. A matemática vista como uma linguagem poderia ser compreendida como uma espécie de manipulação de símbolos, com um sentido apenas interno à própria linguagem.

Então, chegamos a pergunta: a linguagem matemática é uma abstração da realidade ou manipulação de símbolos? O termo *abstração da realidade* usado aqui, representa uma síntese de diversas atividades, isto é, a linguagem matemática como uma espécie de representação de uma outra realidade através de símbolos, como uma linguagem, que busca mostrar conceitos abstratos que estão no ideal, mental ou empírico. E assim poderíamos chamá-la meta-realidade. E o termo *manipulação de símbolos* representa uma sintaxe que possui um sentido com possibilidades de sua aplicação

Por muito tempo compreendeu-se a matemática como a ciência das quantidades, e dessa forma o matemático construía sua teoria, abstraindo a quantidade, deixando de lado todos os outros aspectos matemáticos, e passando a considerar apenas a quantidade, nas dimensões possíveis e com suas respectivas propriedades. Nesse sentido, a matemática era tomada como possuidora de uma linguagem que assim apenas reproduz o que é visto. Tal concepção é fortalecida principalmente pelos gregos, visto que o platonismo teve força na noção de número e de medida. A matemática teria uma existência em um mundo ideal além do nosso mundo e o homem teria apenas criado uma linguagem para tentar reproduzir esse mundo ideal.

Com o tempo a matemática passou a lidar com relações, internas e externas, crescendo como um sistema lógico e funcionando como um modo de compreender e colaborar com as demais ciências. Desse modo, para além da aritmética e geometria, criou-se a álgebra, como um sistema que buscava generalizar a aritmética e representar dados aritméticos e geométricos, por meio de uma simbologia própria. Mas a álgebra, em um desenvolvimento próprio, evoluiu, e tornou-se um sistema simbólico com regras próprias. Esse desenvolvimento da matemática, a partir principalmente do desenvolvimento da álgebra, trouxe indagações quanto ao próprio sentido da matemática, o que levou à crise dos fundamentos da matemática.

Se a matemática é uma linguagem, como explicar o fato dela coincidir com fatos empíricos ou mentais? Mas se ela apenas possui uma linguagem, como explicar o fato de sua linguagem ter tido um desenvolvimento tão expressivo, que muitas vezes, foi além de explicações empíricas ou mentais nas épocas em que foram criadas, tendo problemas sido solucionados a partir de manipulações com os signos matemáticos, como foi o caso da manipulação do infinito antes de Cantor? Segundo Machado (1993, p. 33), a língua e a matemática constituem os dois sistemas básicos de representação da realidade.

> São instrumentos de expressão e de comunicação e, conjuntamente, são uma condição de possibilidade do conhecimento em qualquer área. O par Língua/Matemática compõem uma linguagem mista, imprescindível para o ensino e com as características de um degrau necessário para alcançar-se as linguagens específicas das disciplinas particulares.

O aparente exagero de Machado em mesclar a língua e a matemática se deve justamente ao fato de ser muito complicado compreender qual a relação que há entre elas, ou melhor, quais os limites, se é que há, dessa relação. Nesse sentido, apresentamos as possibilidades desta relação na classificação feita por Pimm (2002, p. 274-278), quanto a relação entre matemática e linguagem:

1) matemática *e* linguagem: entidades coexistentes, que se comparam e se contrastam, mas que para o autor não parece ser a mais apropriada. Acrescento que esta classificação parece revelar um caráter referencialista, pois a matemática estaria em um lugar – metafísico, empírico ou mental – e a linguagem é uma possível referência para tal.

2) matemática *da* linguagem: uma espécie de matemática da língua natural, onde é vista como matemática por natureza, elevando o pensamento a uma forma matemática de ser. Neste caso, também parece que temos uma concepção referencialista, pois a matemática é que é a

referência, sendo uma espécie de lógica sobre a qual está a linguagem natural e até o pensamento, que seria, uma espécie de linguagem.

3) linguagem *da* matemática: é a linguagem em que se fala e se escreve a matemática e também temos o referencialismo, pois a linguagem é vista como um instrumento para expressar o conteúdo matemático.

4) matemática *como* linguagem: para o autor é uma melhor forma de compreensão, pois ambas se fundem e assim, seria preciso construir a matemática em termos linguísticos. Esta categoria já mostra uma situação que relaciona a linguagem e a matemática.

Pimm (2002) entende que tais relações dependem da forma como se quer considerar e ele escolhe trabalhar com a matemática como linguagem, pois crê que esta é a melhor forma de compreensão quando se trata do ensino de matemática. Tal posicionamento é semelhante ao de Alcalá (2002) que considera a compreensão da matemática como uma linguagem necessária para efeitos práticos em sala de aula, pois é preciso priorizar certos aspectos e tarefas que favoreçam os processos de simbolização e o manejo adequado de símbolos, porém o autor entende que a linguagem matemática é um suporte. Percebemos então, que a consideração dos autores, é muito mais uma escolha de cunho pedagógico do que uma conclusão teórica geral.

A partir da compreensão da matemática como linguagem, Pimm (2002, p. 283) é levado não a um formalismo exacerbado, mas a uma contextualização ainda maior, tanto que para ele deveria se rechaçar o lugar de privilégio que ocupam os símbolos enquanto objetos de investigação matemática e ressalta que o ensino de matemática deveria ser mais comunicativo, dando importância ao aspecto oral. Pimm (2002) entende que podemos pensar no ensino da matemática como o ensino do idioma materno ou de um segundo idioma, e isto levaria a trocar o ensino de regras pela comunicação, o trabalho apenas com a sintaxe pelo trabalho com a semântica e a forma pelas ideias.

Alcalá (2002), contrariamente, adverte para o perigo, que é pensar a matemática como um segundo idioma, e desse modo seu ensino poderia ser como o ensino de tal, pois, de acordo com o autor, a matemática não tem caráter idiomático, pois o sistema matemático não é usado com fins meramente comunicativos ou expressivos, mas em atividades específicas, buscando sempre evitar aspectos conotativos, típicas dos idiomas. Apesar da visão referencialista da matemática, Alcalá (2002) mostra a importância de na sala de aula compreender a matemática, não como idioma, mas como uma linguagem, pois na sala de aula, o que mais se sobressai em uma aula de matemática é o simbolismo. Pimm (2002) compreende que a matemática não é uma linguagem natural, no sentido que é o inglês e o japonês, e tampouco é um dialeto, e entende que ela dispõe de um sistema de escrita que é complexa e está regida por regras e possui uma sintaxe que tem uma força considerável para descrever as manipulações de símbolos que a formam. Mesmo tendo pensamentos semelhantes ao considerar a matemática como linguagem, Alcalá e Pimm, tomam caminhos diferentes, concordando apenas ao destacar, cada um ao seu modo, a importância do aspecto simbólico da matemática.

Gómez-Granell (1989) discute também a questão da linguagem matemática, baseando-se em duas teses – 1) a matemática se refere em último termo a uma realidade concreta e 2) seu formalismo exige um conteúdo e este formalismo não se constrói interna e individualmente, mas externamente e na interação social – para analisar os problemas dos alunos com a matemática e entender como se adquire a linguagem matemática. A autora chega a uma conclusão em que vê que tal aquisição só é possível através de um equilíbrio entre o rigor e o significado, ou seja, entre o formal e o sentido. Assim, pelas suas duas teses, percebemos que a autora aceita um lado concreto da matemática, mas não desvaloriza a questão formal, que está em profunda relação com o social. Para a autora, o pensamento matemático é essencialmente de caráter linguístico, como é o caso de um teorema que se demonstra através de uma validação interna da linguagem.

No entanto, Gómez-Granell (1989), apoiada em exemplos da história da matemática, na pedagogia e na psicologia, destaca que é necessário vincular expressões formais com seus referentes situacionais e conceituais. Nesse sentido, a manipulação de símbolos própria de uma linguagem com uma sintaxe bem desenvolvida, não poderia ser completamente separada de uma busca pelo sentido. A linguagem matemática não é uma mera sintaxe, nem uma simples expressão notacional do significado e a aquisição dos símbolos matemáticos teria origem em contextos de interação social, comportando uma construção conceitual que implica uma função reguladora e construtiva não estritamente dependente da significação de conceitos matemáticos (GÓMEZ-GRANELL, 1989). Hvaeria, de acordo com a autora, uma certa origem empírica na linguagem matemática e a história da matemática mostra que a desvinculação entre o conteúdo e o formal é um processo complexo, que exige uma diferenciação entre os aspectos matemáticos e extra matemáticos da situação. Na educação tal desvinculação é possível através da apresentação das diversas situações matemáticas ao aluno. Talvez a autora compreenda o extra matemático como algo ideal, mental ou empírico, mas nós entendemos o extra matemático como um outro uso da matemática que colabora na formação dos significados da matemática.

Gómez-Granell (1989) enfatiza que a natureza dos simbolismos matemáticos é social e cultural e não estritamente lógica. Consideramos que a natureza da linguagem matemática *não estritamente lógica* a que se refere a autora é aquela que não está baseada em uma abstração superior, de um céu platônico, da mente ou da experiência, que possibilita a compreensão e a se fazer deduções, posteriormente, e a *natureza social e cultural* não se reduz a uma necessidade para a autora, pura e simplesmente, de contextualizações da matemática, mas vai além, pois é o uso da matemática em seus diversos contextos que estão no cotidiano, na academia, mas também, na escola. Na escola, há usos sociais e culturais da matemática, próprios do seu contexto, como é o caso dos algoritmos. Nesse sentido, deve haver, por parte de quem ensina, a preocupação em relacionar as tarefas matemáticas, quando possível e necessário, seja comparando, exemplificando, para tornar lúdico ou interessante, mas se deve compreender que são contextos diferentes, que se aproximam para fornecer sentidos, bem como aprimorar técnicas e habilidades.

Gómez-Granel (1989) lembra que crianças e adultos conferem sentido a conteúdos abstratos inserindo em um contexto familiar, isto é, próximo do aluno. Entendemos que tal prática é uma forma de facilitar a assimilação de certos conteúdos novos, como é o caso da álgebra que é comparada no início com a aritmética ou até com objetos, como na soma algébrica $3a + 4a = 7a$ pode ser dito que *3 cadeiras mais 4 cadeiras são 7 cadeiras*, comparando *a* com cadeiras. Porém, há conteúdos posteriores que são ensinados à revelia de uma aplicação a contextos reais, usando no máximo, comparações com conteúdos matemáticos anteriores, como é o caso da multiplicação e divisão com polinômios. Se o aluno já entendeu o funcionamento de certas operações com letras, como soma de expoentes em bases iguais e soma de termos semelhantes, já não é mais necessário recorrer a contextualizações. No entanto, isto não invalida a importância de certas aplicações possíveis quando ensinamos certos conteúdos.

Gómez-Granell (1998, p. 32) compreende que é necessário, além de um ensino conceitual da matemática, um ensino também das regras sintáticas de sua linguagem formal e mostra como a matemática evoluiu a partir de criações dentro de sua própria linguagem, como foi o caso da criação do zero e a introdução do uso de letras para as incógnitas em equações, "Assim, aprender matemática é aprender uma forma de discurso que, ainda que tenha estreita relação com a atividade conceitual, mantém sua própria especificidade como discurso linguístico".

> Não existe uma relação de subordinação entre desenho e escrita ou desenho e notação numérica, isto é, não é verdade que as crianças primeiro desenham ou escrevem e depois, por necessidade de abstração e convencionalização, passem a usar letras, números ou símbolos matemáticos. Ao contrário, parece que, graças à interação com o meio social e cultural, as crianças conhecem e usam de forma diferenciada letras, cifras e desenhos. Entretanto, no início esse conhecimento é de caráter mais formal que funcional, ou seja, as crianças diferenciam as características formais de cada sistema e sabem muito bem o que é uma palavra escrita, uma cifra, um símbolo aritmético ou um desenho, mas isso não significa que tenham um conhecimento mais profundo da semântica interna de cada um deles e de seus usos. No caso concreto da

> notação numérica, o uso do desenho ou da linguagem comum constitui um recurso usado em um nível de desenvolvimento em que é preciso explicitar a semântica do sistema para possibilitar sua apropriação interna. Só então seria possível prescindir do significado referencial do símbolo e ficar apenas com o formal. (GÓMEZ-GRANELL, 1989, p. 35)

Este posicionamento mostra que a autora não compreende a linguagem em um caráter referencial e essencialista, ou seja, a linguagem matemática não é apenas uma referência a uma matemática transcendental e nem há uma essência extralinguística dos usos da matemática. Gomez-Granell (1989) critica a psicologia piagetiana, pois tal teoria entende que o progresso cognitivo se dá por uma crescente competência lógica do sujeito.

Para Wittgenstein, não há pensamento sem linguagem, ou seja, para um aluno pensar em um conteúdo matemático ele já deve ter sido apresentado a uma forma linguística de apresentação de tal conteúdo. Dessa forma, a linguagem matemática não é uma mera manipulação de signos sem sentido, mas também não é a abstração de uma realidade transcendental *a priori*. Wittgenstein não compreende que o pensamento é algorítmico, mas que ele necessita de uma linguagem para poder ser efetuado. “Diga uma sentença, talvez ‘O tempo está muito bom hoje’; certo, e agora pense o pensamento da sentença, mas sem adulteração, sem a sentença” (GF, I, §106), ou seja, *pense sem a linguagem!*

Portanto, podemos compreender que a matemática é uma linguagem ou a matemática como uma linguagem, porém não apenas como uma escolha arbitrária ou devido uma possível facilitação de tal concepção para fins didáticos, mas é uma linguagem vista para além da concepção referencial, como vê o platonismo, o logicismo, o intuicionismo ou o construtivismo piagetiano, além de outras filosofias mais gerais, como o empirismo, idealismo ou realismo; em todas essas há uma noção de que a linguagem tem apenas função referencial de alguma realidade externa a ela, um mundo ideal, uma lógica transcendental, uma intuição pura ou a realidade concreta. No entanto, como criticamos a concepção referencial e essencialista, pode haver uma relação daquilo que defendemos nesta tese com o movimento da matemática moderna e/ou com o formalismo, o que não é correto. Não concordamos aqui com o formalismo, pois seguindo Wittgenstein, concordamos com ele, quando este diz que “Todo signo, *sozinho,* parece morto. O *que* lhe confere vida? - Ele *está vivo* no uso” (IF, §432), ou seja, em nenhum momento concordamos com uma mera manipulação de símbolos sem significado. A filosofia da linguagem de Wittgenstein agrega à linguagem a questão de construção de significados, no interior de contextos de uso desta linguagem. Pelo uso que se faz da linguagem podemos compreender a realidade, pois ela é normativa e não descritiva, mas pode ser usada como descritiva, para descrever outras realidades, externas à linguagem, como os fatos empíricos. "A matemática não é descritiva, ela apenas nos dá as condições necessárias para a compreensão do sentido de certos fatos em determinados contextos" (GOTTSCHALK, 2014a, p. 79).

Assim, não podemos concluir que a linguagem matemática se refere a uma sintaxe, tão somente, mas também não podemos afirmar que é a abstração de alguma realidade externa à linguagem, desse modo somos levados a concluir que ela está entre os dois. Ela é uma manipulação de símbolos, que, no entanto, possui um sentido, claramente interno, mas que regula a compreensão do que é externo. Porém, tal relação com outras realidades é uma forma de visão que é aprendida, e não há aí, uma competência *a priori*, mas sim uma habilidade, uma técnica que permite que vejamos *semelhanças*, por exemplo, entre álgebra e aritmética ou geometria e objetos da realidade e por isso que o uso de tais semelhanças não seria negativo, mas apropriado, se compreendido os limites desta comparação.

Não há algo comum por trás das diferentes formas em que a matemática é aplicada ou em seus diferentes ramos ou conteúdos? Quando olhamos a álgebra, não vemos lá a aritmética, a geometria, a lógica etc.? Não há de fato uma lógica por trás de todas as coisas? Gottschalk (2006, p. 74) observa que para Wittgenstein "é apenas no uso das palavras que podemos apreender a essência", porém, tal essência, não tem uma existência para além das práticas humanas, mas deriva delas, ou seja, as práticas humanas no decorrer da história formaram modos de viver e de se entender os fatos da vida que agora nos servem como normas para viver e ver a vida. No caso da matemática, a aritmética, a geometria, a álgebra, por exemplo, não tem uma origem comum que transcende a realidade, mas foram construções com peculiaridades e que tiveram o auxílio, uma da outra, em diversos momentos.

Dessa forma, a essência que hoje vemos nelas é uma construção nossa e é nesse sentido que é no uso que apreendemos a essência, pois é ao ser colocado diante dos diversos usos da aritmética, da álgebra e da geometria que poderemos ver o que há em comum entre eles. Gottschalk (2006) desenvolve esta discussão, ao analisar as expressões *ver* e *ver como* para Wittgenstein. Para Wittgenstein, *ver* e *ver como* são capacidades aprendidas, atitudes diferentes, mas de um mesmo processo que constitui nossos significados. O *ver* poderia ser compreendido como as primeiras concepções de alunos sobre números, operações e letras e o *ver como* ocorre quando se podem ver outros aspectos que remetem a estes signos e sistemas, como diferenciar o cálculo com números do cálculo com letras, saber o que é incógnita e variável, e saber usá-los nas atividades em que nos pedem esse conhecimento, etc. Esses novos modos de ver, esses novos aspectos é o que amplia os significados e formam novos conceitos. Porém Gottschalk (2006) destaca que esses diferentes modos de ver não constituem uma essência, mas supõe um domínio de técnicas, ou seja, é algo que precisa ser ensinado e não é construído espontaneamente pelo aluno. As regras não são óbvias nos problemas matemáticos e é justamente por isso que elas devem ser mostradas.

Para Wittgenstein, a linguagem não é uma referência de uma matemática presente em um mundo ideal, da experiência ou de intuições, pois para ele é a própria linguagem que constitui significados, por isso que em sua visão as proposições matemáticas não são descritivas de fatos empíricos, mas sim são normativas. Por exemplo, não se pode alegar que esteja errado que x é 2 na equação $x + 5 = 7$, mesmo que em uma situação real como "*João tem 7 petecas às10 horas, às 9 horas, ele tinha 5. Quantas ele ganhou ou perdeu na última hora?"* o fato não se confirme. Isso poderia ser aplicado às situações em que engenheiros, estatísticos e contabilistas utilizam fórmulas ou verifiquem o comportamento de funções. A matemática nunca estará errada, mesmo se não se adequar à situação. O que pode acontecer é que não se esteja fazendo o uso correto, pois a álgebra pode descrever a situação, mas sua função não é esta. Sua função é normativa, podendo ser usada para realizar descrições.

É preferível ensinar com sentido, como busca a contextualização ou ensinar a manipular os símbolos? O ensino por uma manipulação de símbolos não exclui a ideia do sentido, pois seu sentido pode ser dado na própria linguagem, além do que a linguagem matemática é normativa, e pode ser usado para descrição de situações, podendo ser usada para explicar determinadas situações.

Tal discussão favorece a compreensão do paradoxo apresentado no início deste subtópico: no cotidiano os alunos parecem saber abstrair a matemática nas situações em que estão inseridos, mas não sabem fazer a relação com os algoritmos, por exemplo. E na escola, quando já sabem manipular os símbolos matemáticos, como os algoritmos, já parecem não saber fazer a relação com problemas contextualizados.

Resolver um problema matemático da vida cotidiana é diferente de resolver um problema matemático escolar. Eles têm naturezas diferentes, como vemos no exemplo de Gómez-Granell (1998, p. 28), "quando alunos e alunas de uma classe de primário resolvem problemas de comprar e vender, estão aprendendo matemática, não estão fazendo compras no supermercado, e não entram em jogo as mesmas variáveis contextuais, nem as mesmas metas ou finalidades". Assim também, exercícios com algoritmos e problemas escritos pertencem a contextos diferentes. Tomemos como exemplo o sistema de numeração indo-arábico: Fayol (2012, p. 129) revela que "as notações escritas são em geral descobertas mais tardiamente do que as formas verbais dos nomes dos números", ou seja, muitos alunos quando veem os signos escritos dos primeiros algarismos, já ouviram no seu cotidiano e possivelmente já até os utilizam em suas falas e já saibam relacionar com as quantidades, então, quando começam a estudar os signos escritos, eles precisam apenas relacionar com o que já sabem sobre tais. De acordo com Fayol, o problema começa quando os alunos têm que lidar com valores com dois, três e mais algarismos, pois é necessária a compreensão de um novo mecanismo que é o valor posicional. Fayol (2012, p. 130) observa que "a utilização da notação escrita exige a manipulação de estruturas pluriunitárias e sua correlação com denominações orais e sequências escritas ao mesmo tempo", isto é, a forma escrita dos números passa a não ser compreendida de forma tão direta como antes, pois as crianças não estão acostumadas com estes tipos de números escritos, falados ou codificados e necessitam aprender a manipular com tais valores e compreender que o 2, por exemplo, pode ser 20, 200 ou 2000, a depender de sua posição no número. O numérico não causa confusão, mas o escrito pode causar. "Por exemplo, as operações apresentadas sob forma de palavras escritas (sete vezes três) provocam 30% mais erros do que as mesmas oferecidas com algarismos arábicos (7 x 3)" (FAYOL, 2012, p. 36-37).

No cotidiano, uma criança vende 3 coxinhas e 4 sucos, cada coxinha custa R$ 1,50 e cada suco R$ 0,50. Na escola tal situação pode ser apresentada pela expressão *3 x 1,5 + 4 x 0,5*. Porém, devemos entender que estas são situações diferentes e o problema é pensar que a expressão passa pela mente do aluno quando ele resolve a situação cotidiana e daí chegar a tal conclusão, na escola, espontaneamente.

Portanto, não é possível dizer que se um aluno entende no cotidiano, a escola é que não se adequa por não levar o cotidiano à escola, pois são realidades diferentes. Na escola, são exercícios com algoritmos e problemas escritos em meio a uma linguagem formal, no cotidiano, são trocas comerciais que estão sujeitas a negociações. Dessa maneira, a concepção essencialista/referencialista traz mais problemas que soluções, pois é na linguagem que podemos compreender os significados das palavras, é uma espécie de manipulação de símbolos, que podem necessitar, para que determinadas compreensões possam ser facilitadas, de relações com outras realidades, através das semelhanças existentes. A compreensão depende do uso da linguagem em um determinado contexto.

5.2.5 Regras, aplicações e generalizações

Neste tópico, a partir do conceito de regras, buscaremos compreender também as noções de aplicação, generalização e abstração. Qual a relação entre a regra e sua aplicação? Seriam as letras generalizações de números, que funcionam como regras nesse sentido? Ou seriam as letras uma forma linguística de representar o número visto de forma abstrata?

Regras têm a função de modelos que seguimos para dar sentido às nossas experiências. O método de resolução de uma equação não é uma ferramenta que utilizamos para alcançar a solução da equação, mas é uma espécie de explicação da equação em si, ou seja, seu resultado já era conhecido e se criou uma forma de mostrar isso. Por exemplo, na equação $2.x + 3 = 11$, temos que a raiz da equação é 4. Mas, não será 4 por causa do método pelo qual será resolvida, mas se criou um método, devido ao resultado ser 4, e o método pode ser o de balanceamento ou de passar para o outro lado com operação diferente. É nesse sentido que é uma regra, seguimos para explicar, não para revelar o resultado. A matemática é normativa.

Este é o mesmo sentido que Wittgenstein dá à prova. Marion (2011) mostra que Wittgenstein defendia que a prova era uma característica que a matemática poderia apresentar. Para Marion (2011), em Wittgenstein, a prova na matemática tem um caráter sinóptico, ou seja, é uma sinopse ou um resumo de todo um conteúdo ou processo. Desse modo, não se partiria da prova para demonstrar isto ou aquilo, mas tal demonstração já existe e a prova apenas resume o que de fato já é. De acordo com Marion (2011), Wittgenstein compreendia no *Tractatus* que o método que se usa em matemática para se obter equações é o da substituição, pois temos várias expressões que substituímos até perceber uma igualdade, como as expressões “$2 + 2$” e “4” que podem ser colocadas em uma equação, como “$2 + 2 = 4$”. Esta seria a *maneira abreviada* do que essa equação quer informar. Wittgenstein não concorda em usar as equações como asserções ou afirmações no sentido lógico como pretendia Frege e Russell. Wittgenstein compreende que a verdade da proposição $2 + 2 = 4$ está no fato de que já aceitamos tal proposição, ou seja, ela já não é passível de verificação, mas serve como uma norma. Seguimos a partir da norma estabelecida que $2 + 2 = 4$.

Nesse sentido, o *a priori* está na linguagem. Para Wittgenstein, a exatidão matemática pode ser percebida, mas ela não precisa ser comparada com os fatos para dizer que é exata. Ao se conhecer as regras da linguagem, pode-se conhecer a verdade das proposições que as constitui, sem necessitar recorrer às relações extralinguísticas (ou fora do jogo de linguagem considerado, a não ser no sentido de exemplos de comparação) ou no caso da álgebra, entendemos que suas regras permitem a compreensão de suas proposições, sem necessitar de relações com algo fora dela, a não ser como modelos de comparação, como no caso da aritmética e geometria.

Wittgenstein (IF, §319-320) defende que uma fórmula da álgebra pode ter um caráter sinóptico, mas devido ao treino, e não por deduções ou descobertas espontâneas.

> Posso num mesmo sentido, num relance, ver um pensamento diante de mim ou compreendê-lo, como posso anotá-lo em poucas palavras ou traços.
> O que torna esta anotação um resumo deste pensamento?
> O pensamento-relâmpago pode se comportar em relação ao falado como a fórmula algébrica em relação à série de números que dela se desenvolve.
> Se me é dada, por exemplo, uma função algébrica, estou CERTO de poder calcular seus valores, dados os argumentos 1, 2, 3, até 10. Diremos que esta certeza é "inteiramente fundamentada", pois aprendi a calcular estas funções etc. Em outros casos, não será fundamentada – mas sempre justificada pelo êxito.

Esta linguagem ordinária a que estamos submetidos em nossas formas de vida nos faz pensar como se houvesse uma ligação causal entre regras e suas aplicações, pois observamos uma criança arrumando seus brinquedos, ou uma pessoa cumprimentando outra de acordo com regras que lhes foram ensinadas. Observamos regularidades de certas aplicações, que nos leva a pensar nessa relação causal. Então, temos a tendência em acreditar que a regra contém a totalidade das aplicações. Mostramos no capítulo anterior a questão da regularidade em textos e documentos sobre o ensino de álgebra. Consideramos a existência, assim como, a necessidade da regularidade, como algo fundamental para que possam existir regras. No entanto é preciso refletir sobre a natureza dessa regularidade e o que dela se pode depreender. Sem regularidade, não há linguagem, como o próprio Wittgenstein deixa claro nas *Investigações.* Então, problema não está exatamente em se crer na relação causal entre regra e aplicação, mas em acreditar que tal relação se deva a um caráter essencialista do conhecimento, mais particularmente, no sentido de colocar o pensamento como um potencial "conhecedor" das regras.

De acordo, com Sarrazy (2002), o Wittgenstein no *Tractatus* diria que uma placa sinalizadora não comporta nela mesma as condições de sua aplicação. Sarrazy (2002) acrescenta que não é suficiente que um aluno domine um algarismo para que ele saiba todas as suas formas de utilização. Portanto, as aplicações não estão nas regras, mas sim no uso que se faz delas. Mas não significa que qualquer um decide o que fazer, pois a regra é decisão pública. Decidimos que o símbolo "+" representa a adição, então utilizamos tal regra. No entanto, não se pode dizer que um sujeito ao compreender isto poderá deduzir todas as aplicações possíveis dessa regra, por isso não se pode considerar que se aluno sabe que $2 + 2 = 4$, ele consequentemente saberá que $a + a = 2a$. Só se pode seguir uma regra, se se deixa ser guiado por ela. "Sou obrigado a seguir a uma linha? - Não; mas se eu decidi usá-la como modelo e, então sou obrigado - Não; então eu me obrigo a usá-la assim"[55] (OFM, VII §48). Desse modo,

[55] "¿Me obliga uma línea a seguirla? – No; pero si me he decidido a usarla *así* como modelo, entonces me obliga – No; entonces me obligo *yo* a usarla así".

é necessário que aluno conheça as regras, para que ele possa decidir quais decisões tomar, de acordo com o contexto.

Dessa forma, é preciso que o aluno aceite certas convenções, é preciso que ele aceite o novo formato de cálculo presente na álgebra, que é diferente da aritmética. As regras devem ser ensinadas com o devido pano de fundo, que seria dentro de formas de vida compreensíveis ao aluno, e assim, a comparação de letras com números não seria um grande problema, mas sim, que tal fato não demonstra que há uma essência por trás da álgebra e aritmética. Não há uma uma potencialidade *a priori* no aluno que o leve a compreender, em um primeiro momento, o cálculo com letras da mesma forma que compreendeu com números. Há apenas algumas semelhanças e não há nenhum problema em se trabalhar no ensino essas semelhanças.

Wittgenstein (OF, §167) afirma que "uma proposição algébrica é uma equação tanto quanto $2.2 = 4$, embora seja aplicada de outra maneira". Se seguimos a regra que $2.2 = 2^2$, também se pode seguir a regra $x.x = x^2$. Existem semelhanças entre essas regras. No entanto, a regra $x + x = 2x$ é diferente do uso da regra $3 + 3 = 2.3$ na aritmética, pois alguns professores podem dizer que $3 + 3$ é igual a 6 e a forma de compreensão não é mesma para os dois casos. Matematicamente é a mesma coisa, mas não podemos garantir que a compreensão do aluno também seja.

Mas assim como há semelhanças entre a álgebra e outros conteúdos, dentro da própria álgebra há semelhanças entre seus conteúdos internos e não uma essência, como no caso do uso do sinal de + em $a + a$ que é diferente do uso em $(a + b)^2$, pois na primeira a resolução é realizada por uma soma direta e na segunda por uma reorganização. São jogos diferentes com regras diferentes. Por meio do uso, o aluno sabe diferenciar o que deve fazer em cada situação, até por que já entende o conceito de forma mais ampla. Operações como $2 + 2 = 4$ ou $a + a = 2a$ ou mesmo uma cadeira mais uma cadeira igual a duas cadeiras são práticas institucionais, que se tornam regras de como proceder com o decorrer de sua utilização. São operações linguísticas que se tornam habituais, assim como as atividades citadas no aforismo 23 das *Investigações Filosóficas*.

Tais práticas institucionais geram regras que devem ser seguidas devido à uma habitualidade que não nos permite pensar mais de outra forma, o que gera os chamados "problemas" filosóficos, segundo as concepções essencialista e referencial, ou, preferimos dizer, gera *insinuações* de que a álgebra teria correspondência direta – como uma isonomia entre linguagens - com a aritmética, e em consequência, com a empiria e princípios lógicos, como é defendido por construtivistas, empiristas e logicistas (ou platonistas). Regras não podem ser confundidas com propriedades e estas "insinuações" permitem confusões, como é o caso da distributividade que é tomada como uma propriedade da multiplicação, mas que de fato é uma regra, pois a distributividade não é própria da multiplicação, pois envolve a adição.

É evidente a relação entre a aritmética e práticas sociais, mas passar tal relação para a álgebra, que claramente tem um caráter diferente, é desprezar a especificidade desta linguagem. As regras da aritmética podem ser deduzidas, pois temos os algarismos indo-arábicos e as operações com os mesmos presentes em nosso cotidiano, mesmo que não concordemos que tal possibilidade seja colocada como razão para a não apresentação de certas regras da aritmética ou com um ensino por meio apenas de “adivinhações”. Tais artifícios poderiam surgir às vezes, mas como formas de “diferenciar” uma aula e não como o método definitivo de ensino.

Consideramos que tal método é inviável para o ensino de álgebra, e defendemos um ensino objetivo da mesma, com a clara apresentação das suas regras, pois não podemos esperar quaisquer deduções referentes ao conteúdo algébrico, porque o cálculo com letras ou determinadas generalizações e abstrações não são comuns em nosso cotidiano, sendo a própria linguagem algébrica, muitas vezes, o único meio de apresentação de certos conteúdos. Por exemplo, como ensinar a trabalhar com gráficos e a sintaxe de função, sem utilizar a própria linguagem da função? Será que um aluno aprenderia que $f(x) = 3.x + 4$ representa uma situação do tipo “o pagamento de um taxi que cobra R$ 3,00 por km rodado adicionado de um valor fixo de R$ 4,00 cobrado pelo taxista em cada corrida”? Este é um exemplo clássico de contextualização de função do primeiro grau. O aluno até pode concordar com a formalização do problema, mas com muita dificuldade ele formalizaria sozinho, sem o auxílio do professor

A álgebra geralmente está relacionada a termos como generalização e abstração. O primeiro nos traz a ideia de tornar algo que é particular como algo geral. Nesse sentido a generalização seria a característica da álgebra de tornar compreensões que são particulares em gerais, que é o que vemos nas noções de generalização da aritmética, quando se entende que cálculos do tipo $a + b$, são representações de quaisquer somas entre dois números diferentes, ou mesmo quando vemos equações, funções ou fórmulas que funcionam como a formalização de várias situações. A abstração em sua etimologia diz que é a *ação de extrair para fora*, ou seja, abstrair seria como poder ver algo além do que se vê. Nesse caso, quando falamos que a álgebra é abstrata, estamos dizendo que ela, com seus símbolos e formas, representa coisas para além do que vemos escrito. Por exemplo, quando vemos $x^2 + x = 6$, podemos entender que é uma expressão que representa o quadrado de número mais ele mesmo que é igual a seis ou que é a informação de que um quadrado somado com um comprimento de mesmo dimensão do lado do quadrado é igual a seis, ou a representação escrita de um comportamento em um gráfico cartesiano. Parece-nos que a álgebra reforçou a ideia da matemática como ciência universal, pois permite generalizar e abstrair conceitos, que sem ela seriam mais complicados para se operar, assim como para se compreender.

Entendemos que noções como abstração, generalização ou mesmo universalização na matemática estão geralmente fundamentadas na ideia de existência de essências, e consequentemente, na concepção referencial da linguagem, que surgiu devido a uma busca de noções fundacionais do conhecimento. Ao se perceber, por exemplo, as relações da matemática com situações empíricas, pensou-se que haveria uma espécie de explicação transcendental. Porém, entendemos a álgebra como abstração, generalização ou universalização, a partir da linguagem.

Aspeitia (2002) realizou um estudo sobre a aplicação e a aparente universalidade da matemática. Trazemos esta questão para mostrar a saída que Wittgenstein deu para a questão da aplicabilidade da matemática, assim como, com o objetivo de também trazer dados sobre como a álgebra é vista neste contexto de aplicação e universalização. Aspeitia (2002) defende que Wittgenstein buscou ver a matemática como gramática, em oposição à explicação empirista logicista, que compreendeu a matemática como uma ciência universal.

O autor mostra que com o intuito de refutar esta tese, Wittgenstein faz uma análise sobre pontos fundamentais do empirismo logicista: o cálculo e a lógica. O autor esclarece que para Wittgenstein o cálculo é apenas um estudo de formas lógicas e de estruturas, ele não está previsto no sentido logiscista (*a priori transcendental*), mas linguístico, por um acordo (um consenso), logo não pode produzir nada novo, por que ele já está definido, mesmo para objetos empíricos. O mesmo autor fundamenta sua análise no aforismo 15 da segunda parte da *Gramática filosófica* de Wittgenstein: "Neste ponto, podemos dizer: a aritmética é sua própria aplicação. O cálculo é sua própria aplicação" (GF, II, §15).

> Suponha que eu deseje usar este cálculo para solucionar o seguinte problema: se tenho 11 maçãs e quero dividi-las entre algumas pessoas, de tal maneira que cada uma receba 3 maçãs, quantas pessoas pode haver? O cálculo fornece-me a resposta 3. Agora suponha que eu tivesse de percorrer todo o processo de divisão e, no fim, 4 pessoas tivessem, cada uma, 3 maçãs nas mãos. Eu diria, então, que o cômputo deu um resultado errado? Naturalmente, não. E isso, naturalmente, significa que o cômputo não foi apenas um experimento (GF, II, §15).

Aspeitia (2002) aborda a relação que Wittgenstein faz entre o cálculo e a empiria, pois o filósofo busca saber se o papel dos cálculos matemáticos na solução de problemas é o mesmo, tanto no interior da matemática como fora dela e isto está relacionado com o seu interesse em distinguir cálculo e experimento. O autor mostra que no exemplo das maçãs, o resultado do cálculo é também a solução do problema prático, mas observa que apesar de o cálculo ter a capacidade de fazer predições, ele não pode garantir a verdade. Por exemplo, um cálculo pode predizer que 11 divido por 3 é 4, mas não garante que na prática isto ocorrerá. Assim, a matemática pode viver em ambos os espaços, no cálculo puro e no empírico, porém, não se pode esperar que a predição feita no espaço matemático, seja encarada como uma verdade empírica.

Wittgenstein deixa claro que a solução ao problema das maçãs é o número 3, mas não que possa haver 3 pessoas. Aspeitia (2002) indica que isto pode parecer estranho, mas é uma diferença fundamental para compreender a natureza gramatical da matemática. O cálculo está em seu próprio ambiente, nós é que o utilizamos para *guiar* nossas práticas. Assim, não se pode considerar um cálculo errado, pelo fato de na prática ter ocorrido algo diferente. Poderia se argumentar que na prática 2 + 2 sempre é 4, mas a questão levantada não é essa, mas sim, de que não é essa prática que nos permite pensar que 2 + 2 é 4, mas sim que já entendendo que 2 + 2 é 4, percebemos situações no mundo real que adequamos às regras da linguagem. A resposta é uma regra gramatical fornecida pelo cálculo, que só mostra o que tem sentido ou não predizer, mas que não justifica o fato (ASPEITIA, 2002).

Poderíamos então, utilizando o mesmo raciocínio, entender que na álgebra, no caso $a + a$ sempre é $2a$. Isto de fato não ocorre porque na prática entendemos a letra a como qualquer número, e assim, “qualquer número” somado, ao próprio número seria 2 vezes “qualquer número”. Se já entendemos que $a + a$ é igual a $2a$, percebemos na realidade o que podemos adequar a esta regra. Esta percepção pode ser feita na aritmética, como no exemplo do “qualquer número”, ou na geometria (um quadrilátero de largura 2 e um outro comprimento qualquer denominado a) ou na realidade, onde a seria uma cadeira ou uma bola e assim, $2a$ seria o seu dobro.

Frascolla (2004) em sua análise sobre a prova em matemática de acordo com Wittgenstein revela que se fosse colocado 37 + 18, por exemplo, com as regras definidas, mesmo sem nunca ter sido feita esta operação na experiência, resultaria em 55 porque seguiria as regras, definidas pelas configurações dos signos. A passagem da experiência para a prova é feita desde que nos engajemos em uso rotineiro específico da construção dos signos. 37 + 18 = 55, que é então depositada nos arquivos da linguagem. A experiência só é dita verdadeira se se assemelha às regras da linguagem.

Schmitz (1988) - em sua crítica sobre a noção de cálculo, concorda com o que temos apresentado até aqui, em Aspeitia (2002) e Frascolla (2004), sobre a matemática e o cálculo, quando se refere a estes - considera a matemática como calculatória, em oposição à ideia de Frege e Russel de que a matemática é teórica. Isto favorece a ideia de que os enunciados matemáticos não apelam a uma experiência. Então a partir da definição da matemática como cálculo, concluímos que a matemática não é uma ciência como a física é, e assim o uso das noções de cálculo, sistema, regra, etc. tem uma função explicativa que expressamos dizendo que a matemática é *a priori* e diferente do discurso empírico, por que nós obtemos apenas as proposições matemáticas como cálculo.

Mas, para Schmitz (1988) isto implica em concordarmos que há uma objetividade no cálculo, sem a qual uma tal explicação perderia todo seu valor, que é que os dados de uma regra definem um sistema de cálculo já estabelecido com antecedência. Esta objetividade justifica o fato de que Wittgenstein utilize a noção de uma maneira que parece atribuir uma produtividade ao cálculo independentemente do que ele calcula, ou seja, o cálculo é autônomo. Para o autor o cálculo é admitido por Wittgenstein como uma realidade que existe com um certo grau de autonomia em relação ao calculador, de tal sorte que podemos compreender que haja uma ligação de proposições que não depende do empírico e sobre a qual todo mundo esteja de acordo. Wittgenstein (OFM, VI, §27) dá a entender que se utilizo um símbolo, devo me engajar, pois, não é simplesmente um uso de sons e de fatos. Se digo “isto é verde”, devo dizer que outras coisas também são verdes. Devo me engajar em um uso futuro. Quando utilizamos um símbolo nos comprometemos a utilizar de tal maneira no futuro: uma proposição não é uma proposição, a menos que pertença a um sistema gramatical (SCHMITZ, 1988, p. 171).

Os signos remetem às formas de vida e aos significados que atribuímos a eles nos usos. Wittgenstein (IF, §167) diz que “Naturalmente nem toda forma de signo impregnou-se em nós *profundamente*. Um signo da álgebra da lógica, por exemplo, pode ser por qualquer outro, sem que sejam provocados em nós sentimentos profundos”, destacando a natureza arbitrária do uso que fazemos dos símbolos, Floyd (2011, p. 144) destaca que

> Não há, naturalmente, necessidade alguma no uso dos sinais de “1” a “9” neste jogo: poderíamos ter jogado com os sinais “*”, “&”, “^” ou palavras, cores ou letras. Provavelmente não refletimos sobre o fato contingente, mas significativo, de que a maioria de nós foi treinada para perceber rapidamente a distinção entre a ordem dos sinais numéricos com facilidade.

Nesse sentido, Wittgenstein diminui a força da representação, e prefere falar em apresentação.

> Não se vê claramente qual o papel que a *representabilidade* desempenha em nossa investigação. Em que medida ela assegura o sentido de uma frase. Representar-se algo com uma frase é tão pouco essencial para a compreensão desta como projetar um desenho segundo ela.
> Em lugar de “representabilidade” pode-se aqui dizer também: apresentabilidade (*Darstellbarkeit*) num meio determinado de

> apresentação. E partindo de tal apresentação, um caminho mais seguro *pode* contudo levar a um emprego mais amplo. Por outro lado, uma imagem pode se impor a nós e não servir para nada (IF §395-397).

Dessa forma, a linguagem não representa, mas apresenta em um determinado meio, que pode ou não servir. Seu significado é aceito pelos usuários, e posteriormente é transmitido. Mas a partir do momento em que se torna gramatical, torna-se regra, daí que temos que "A certeza envolvida em nossas manipulações simbólicas implica que os componentes gramaticais que as condicionam possam manter-se autônomos em relação ao curso das práticas que os constituem necessários" (OLIVEIRA, 2011, p. 44).

O símbolo, a partir de uma arbitrariedade inicial, torna-se parte de um sistema autônomo. O símbolo se confunde com a regra, como o cavalo no xadrez se confunde com o movimento em "L", como os sinais na matemática se confundem com suas regras, "A definição de um símbolo é apenas uma regra para o uso desse símbolo" (GOTTSCHALK, 2013a, p. 8). Daí vem o apego ao essencialismo e referencialismo, pois as regras dos símbolos parecem tão inerentes aos mesmos, que parecem ter um "ar metafísico".

Para Schmitz (1998), o cálculo é injustificável, pois nenhum fato pode lhe conferir uma legitimidade ou eminência particular. Esta ideia é fundamental para entender a diferença entre discurso matemático e discurso empírico. Wittgenstein afirma, que não somente se pode calcular independente e anteriormente a toda relação com o mundo empírico, mas se coloca em evidência a impossibilidade de trazer as regras que regem o cálculo das proposições descritivas comuns. Um sistema de regras não pode ser considerado como a transcrição normativa de uma descrição.

Para Schmitz (1988) a propriedade de uma regra é estar correta a partir do momento em que podemos aplicá-la, o que implica que não pode ter antes do enunciado da regra uma proposição descritiva que seria sua fiança, ou seja, não há nada escondido atrás das regras, não há um poder secreto. O cálculo é arbitrário e o *a priori* é implantado no cálculo e não todo cálculo é *a priori*, onde sim seria injustificável e não teria relação com qualquer realidade. Nesse sentido destaca-se a independência das regras de fatores externos. A álgebra não se altera devido às dificuldades intrínsecas de se aprender ela, ou mesmo por que ela não represente a realidade como um usuário deseja.

Desse modo, entendemos quando Aspeitia (2002) diz que aplicar um cálculo significa usá-lo como regra gramatical, é como o uso de uma palavra que para ter sentido deve ser empregada no contexto correto. A resposta já existe, dentro do contexto considerado e por isso a matemática não depende do cotidiano, pois ela já tem sentido em seu próprio sistema, o que precisamos é saber usá-lo corretamente, aplicando aos contextos de forma correta. Nesse sentido, Aspeitia (2002), compreende que Wittgenstein, com a noção de regra gramatical, explica a aplicação da matemática e escapa da noção universalista do empirismo logicista.

De acordo com Aspeitia (2002), a concepção universalista da matemática se desenvolveu, partindo da aritmética com Frege, chegando a toda a matemática com Russell. Assim, a formalização matemática seria desenvolvida pelos processos de abstração e generalização, assim como nas ciências naturais, mas a matemática seria sua máxima expressão, pois seria a ciência formal por excelência, a ciência do abstrato, do geral e do universal. De certa forma, este é um desenvolvimento no conteúdo algébrico da matemática, pois é considerado como aquele que lida com a abstração e a generalização. Nesse sentido, a álgebra seria a expressão máxima dessa abstração, generalização, e até de universalização da matemática. No entanto, de acordo com Aspeitia (2002), para Wittgenstein, as operações matemáticas não são gerais ou abstratas. Por exemplo, a adição matemática não é uma generalização abstrata de todas as adições possíveis. Não é porque se acrescenta o termo "maçãs" à adição aritmética que se transforma essa operação em uma proposição da matemática aplicada. Para compreender essa aparente generalidade das proposições matemáticas, Aspeitia (2002) considera que é necessário distinguir entre casos e aplicações: os casos derivam de generalizações e as aplicações de regras. Enquanto que entre generalização e caso há uma relação de consequência lógica (toda proposição geral implica em seus casos particulares), não há nenhuma relação lógica entre regra e aplicação. O autor fornece quatro proposições como exemplos de casos e aplicações:

(1) $a + (b + c) = (a + b) + c$

(2) $(3 + 4) + 6 = 3 + (4 + 6)$

(3) Todos os camelos são herbívoros.

(4) Meu camelo é herbívoro.

O autor destaca destes exemplos: (2) é uma aplicação de (1), enquanto que (4) é um caso de (3). A generalização realizada em (3) é possível devido aos casos particulares como (4), no entanto, a verdade de regras como (1) não depende de que (2) seja verdade, mesmo que esta possa ser usada na prova de (1). É por isso que a indução matemática é diferente da indução realizada nas ciências naturais. Na matemática não há casos, por isso não há nenhuma generalização. A proposição (2) não é menos geral que (1), mesmo que pareça que (1) é sobre todos os números e (2) um caso particular.

Aspeitia (2002) chama a atenção para a importância que Wittgenstein dá para o papel das letras na matemática, em particular, o papel das letras como variáveis nos aforismos 148 a 169 das *Observações filosóficas*. Aspeitia (2002) indica que Wittgenstein apresenta 3 funções possíveis das letras em matemática. Indo diretamente à citação percebemos que estas funções são apresentadas por meio de questionamentos:

> Que questões podem ser levantadas no que diz respeito a uma forma, por exemplo, fx = gx? – É ou não verdade que fx = gx (**x como constante geral**)? As regras fornecem uma solução para essa equação ou não (**x como desconhecido**)? As regras proíbem a forma fx = gx ou não (**x entendedido como uma posição vazia**)? (OF, § 150, *grifo nosso*).

Aspeitia (2002) analisa que como constante geral a letra pertence à linguagem do sistema de cálculo e nos outros casos é um elemento externo, mas que de qualquer maneira, cada letra em um enunciado de cálculo é uma constante geral. O autor apresenta as três possíveis interpretações, dependendo do papel sintático de suas letras, isto é, de uma fórmula matemática. Da primeira interpretação temos: se todas suas letras são constantes no sistema de cálculo, a fórmula é um enunciado do cálculo. Seria o caso, por exemplo, que tivéssemos a + b = c, porém todos sendo constantes, isto é, com valores fixos. Tal fórmula com letras não tem sentido, pois teria seus valores todos conhecidos, poderia ser, por exemplo, "*3 + 4 = 7*", sendo *a = 3*, *b = 4* e *c = 7*. Da segunda: se pelo menos uma letra é uma incógnita, então não temos um enunciado, mas um esquema. Nesse caso um valor de fato não é conhecido a princípio, por exemplo, a fórmula "3 + 4 = x" não é um enunciado da aritmética de números naturais por que inclui uma letra que não pertence ao vocabulário desse sistema de cálculo, pois a letra "x" não é um símbolo aritmético nem um numeral, expressa uma incógnita, mas esta pode ser substituída por símbolos da aritmética (numerais) e produzir equações do primeiro tipo, isto é, enunciados. Substituir o "x" pelo numeral "3" neste exemplo resulta na fórmula "3 + 4 = 3". Substituí-la por "35" dá "3 + 4 = 35", etc, porém umas destas substituições – "x" por "7" – resulta em uma fórmula correta, – "3 + 4 = 7". Isto significa que a equação original tem solução. Da terceira: se pelo menos uma das letras marca um conjunto espaço vazio, então a expressão está incompleta. Neste caso, a expressão é apenas permitida pela sintaxe do sistema de cálculo, mas que não tem sentido. Posso escrever a fórmula "x = $\sqrt{-4}$, para o conjunto dos reais", por exemplo, mas se eu tomo "x" como um conjunto espaço vazio, escrevo a fórmula por uma possibilidade sintática, a fórmula não tem solução no conjunto dos reais.

Esta classificação wittgensteiniana apresentada por Aspeitia (2002) pode ser compreendida como uma tentativa do filósofo austríaco de combater a ideia de que a matemática tem diferentes níveis de generalidade e que as letras e fórmulas – o conteúdo algébrico – seria uma representação disso. Expressões com letras não são mais gerais que expressões com outros tipos de constantes matemáticas, como os números, mas são expressões de uma linguagem com uma sintaxe construída, isto é, é apenas uma formalização mais desenvolvida, dentro da complexidade que é uma gramática.

Na nota de rodapé 3 referente à OF (§150), Wittgenstein escreve: “Ainda não enfatizei bastante 25 x 25 = 125 está precisamente no mesmo nível e é precisamente do mesmo tipo que $x^2 + y^2 + 2xy = (x + y)^2$”. Wittgenstein não nega esta relação, pois ele compreende que é possível utilizar proposições análogas. No entanto, é necessário conhecer as regras para se calcular com letras e as regras para se calcular com números e compreender exatamente qual a relação que existe entre elas. Não negamos que casos possam vir a ser generalizações, porém não se pode a partir de casos particulares, determinar generalizações, ou seja, não poderíamos partir apenas da aritmética (*25 x 25 = 125*) chegar a compreensão geral algébrica, sem conhecer as regras deste novo sistema.

> As induções correspondem às fórmulas algébricas (cálculo com letras) - porque as relações internas entre as induções são iguais às relações internas entre as fórmulas. O sistema de cálculo com letras é um novo cálculo; mas não se relacionando com o cálculo numérico comum como um metacálculo com respeito a um cálculo. O *cálculo com letras não é uma teoria*. Eis o que é fundamental. A “teoria” do xadrez - quando investiga a impossibilidade de certas posições - é como a álgebra em relação ao cálculo numérico. (OF, Apêndice 2, p. 274)

Aspeitia (2002) acrescenta uma ilustração de Wittgenstein, para mostrar a distinção entre álgebra e aritmética, com a expressão “a + (b + c) = (a + b) + c”. Dado que as letras são parte do vocabulário algébrico, mas não do aritmético, esta fórmula pode expressar tanto uma expressão algébrica como uma lei da associatividade para a adição aritmética. Na álgebra as letras são constantes gerais. Na aritmética, só podem ocorrer como incógnitas ou marcas de espaços vazios. A lei da associatividade aditiva da aritmética “a + (b + c) = (a + b) + c” parece expressar uma propriedade geral de todos os números ou todas as adições. No entanto, não é assim, já que não é uma proposição geral, mas apenas um esquema.

Para Wittgenstein, na matemática, não é só impossível generalizar a partir de casos particulares, como também, de uma série de verdades matemáticas conhecidas é impossível generalizar para casos similares. Para o filósofo não há conceitos gerais em matemática, os conceitos não são generalizações, mas disjunções e mesmo se agrupássemos proposições matemáticas sob um conceito apenas, não seria uma proposição geral, mas uma mera conjunção das proposições originais. Nesse sentido o enunciado matemático não é mais nem menos geral que suas partes (ASPEITIA, 2002).

5.3 A álgebra e sua gramática

A partir do que foi apresentado no segundo tópico (5.2) e nos seus respectivos subtópicos, é possível aprofundar a relação entre álgebra e linguagem, mais precisamente, compreendendo a álgebra a partir do conceito de gramática em Wittgenstein e Moreno, que é nosso objeto no presente tópico.

Podemos usar a linguagem sem que precisemos de antemão uma definição precisa para nossas palavras – simplesmente usamos. Podemos usar uma linguagem sem que haja anterior e exteriormente a ela um conceito pré-concebido no intelecto. Consideramos esta possibilidade, pois entendemos a álgebra como uma linguagem, e por isso, os fundamentos de seus significados não são exteriores e ela é arbitrária e autônoma, como uma gramática. Assim, a álgebra tem a possibilidade de produção de significados a partir de sua própria sintaxe. Crianças aprendem a usar números, muitas vezes sem saber o significado deles. Os pais pedem para que elas repitam “um, dois, três...”, assim, como fazem com o alfabeto. Algumas aprendem que “dois mais dois são quatro”, “três mais três são seis”, etc., mas apenas por repetição. Os significados, de fato, são construídos com o uso em diversos jogos de linguagem.

Defendemos que o sentido pode - e deve – ser construído, por meio do uso de semelhanças com outros conteúdos, contra a concepção essencialista, isto é, não se pode esperar que um aluno aprenda regras algébricas pelo fato de já conhecer regras da aritmética. As diferentes áreas da matemática podem ser vistas como jogos autônomos de linguagem. É sua relação com o mundo e suas aplicações que fazem com que tenha tanta importância em nossas formas de vida. Aprendemos pelo uso e com a prática vamos ampliando os limites do emprego de nossos conceitos. Compreender uma palavra é simplesmente ser capaz de seguir uma ou mais regras da gramática, ou seja, ao usarmos um símbolo linguístico já estamos atribuindo um significado a ele.

Assim, como é possível usar certas regras que não tenham uma aplicação empírica? Compreendemos que se aprende a seguir a nova regra, do mesmo modo que aprendemos a efetuar novas somas, que não tínhamos ainda aprendido. Entendemos que para um aluno que nunca viu um cálculo com letras, uma soma simples do tipo $a + a$ lhe aparece como algo extremamente estranho e sobre o qual não podemos esperar ou exigir do aluno uma intuição, pois operar com letras necessita de novas regras, de um novo conjunto de regras, portanto, de uma nova gramática.

Podemos pensar a matemática como um conjunto de jogos de linguagem aparentados entre si. Em termos de atividade matemática, podemos pensar como jogos de linguagem as atividades de substituir valores numa equação, resolver um algoritmo, interpretar um problema, encontrar um ponto no plano cartesiano, dadas suas coordenadas, etc., e outros citados no aforismo 23 das *Investigações.* Nesse sentido as atividades algébricas poderiam ser consideradas jogos de linguagem também. Não há uma essência de jogo de linguagem, assim é a variedade de usos que favorece o significado. Desse modo é necessário apresentar ao aluno as várias possibilidades de uso das letras em conteúdos matemáticos, por exemplo, e não se esperar que ele possa compreender por alguma "racionalidade natural" que o uso de uma letra como variável é diferente do uso como incógnita ou que o uso que se faz de uma soma aritmética é diferente da soma algébrica. Não há uma essência por trás das atividades que podem ser consideradas algébricas e aritméticas, mas apenas semelhanças de família.

Não é possível construir significados através de meras explicações, mas a partir do uso, ou seja, não adianta explicar como se resolve uma equação ou não se pode esperar que um aluno faça relações abstratas ou generalize conceitos aritméticos, em um âmbito algébrico, se ainda não lhe foram dadas oportunidades de uso dessa nova linguagem. É no uso que um aluno começa a construir significados e é nele que um professor consegue transmitir conteúdos. Nesse sentido vale destacar os conceitos de *ver* e *ver como* também analisados por Wittgenstein. Alguém que conhece somente a aritmética verá equações e expressões algébricas como um emaranhado de letras escritos num quadro ou no papel, por isso ele precisa ser ensinado a ver de outro modo, ou seja, a *ver como* uma equação do 2º grau que tem determinadas raízes como solução, por exemplo. Mas do que depende essa nova forma de ver, esse *ver como*? Depende do domínio das regras do novo jogo apresentado, que não são óbvias, nem dedutíveis, nem descobertas, em geral, mas devem ser aprendidas. Gottschalk (2008, p. 81) afirma que a atividade matemática se distingue dos procedimentos empíricos.

> Não se trata de descobrir algo que já exista de alguma maneira: não há nada a ser descoberto antes que disponhamos de um método que nos permita procurar. As proposições da matemática não se referem a algo a ser descoberto, não têm uma função descritiva, mas sim paradigmática, ou seja, são vistas por Wittgenstein como regras de como proceder.

Para Wittgenstein há gramáticas que regem os jogos de linguagem, que é autônoma e arbitrária. É nesse sentido que compreendemos a questão da essência, ou seja, não mais como dependente de fatores externos à linguagem, mas dependentes da gramática, que passa a ser considerada como *a priori*. No entanto, tal necessidade se dá no uso da linguagem, negando a possibilidade de compreensão antes do contato com determinadas regras da gramática, por parte de indivíduos em processo de aprendizagem.

Nossa tese é que a álgebra se constitui como uma gramática, pois ela é um conjunto de regras sobre como se realizar o cálculo com outros símbolos, que muitas vezes apresentam semelhanças com as regras da aritmética, geometria e situações do cotidiano, mas que apresenta uma arbitrariedade e autonomia própria, além de hoje ter uma significação em si mesma, a partir do desenvolvimento das estruturas algébricas. A álgebra é um conceito vago, que vai se ampliando no decurso da história como mostramos no capítulo 3, e mesmo na sua versão escolar apresenta um caráter de um conceito que se amplia com o tempo. Com os diversos usos vamos ampliando o conceito de álgebra, e agregando atividades ao seu conceito. Nesse sentido, qualquer definição de álgebra é *a posteriori*. Assim, ao compreendermos a álgebra como um jogo de linguagem, e que, por consequência, possui uma gramática, estamos tomando um critério de referência, como na terapia de Wittgenstein, isto é, para mostrar que a mesma possui natureza e fundamentos convencionais.

Para Bouveresse (1987), Wittgenstein não compreendia a matemática como uma linguagem, mas como preparação de uma, e um simples sistema de regras não pode ser considerado uma linguagem, só o pode na sua aplicação. A matemática, então, seria o oposto de uma linguagem, que não trata de nada, e que pode, na verdade, se aplicar a tudo. Portanto, para Bouveresse (1987), a matemática é um sistema de regras, que se torna linguagem apenas na sua aplicação.

Gottschalk (2004a) já compreende a matemática como um jogo de linguagem, ou mesmo uma lingaugem, e ainda diz, referindo-se mais detidamente à matemática escolar, que esta “pode ser vista como mais uma imagem do mundo, no sentido de que nos dá condições de sentido para a nossa experiência de um determinado ponto de vista” (GOTTSCHALK, 2004a, p. 5). Em outro artigo, Gottschalk (2004b, p. 323) compreende que a “matemática também é uma de nossas ‘Gramáticas’”, e na mesma página revela que as proposições matemáticas constituem uma imagem do mundo. Ao se referir ao episódio do escravo Mênon, Gottschalk (2007, p. 27) entende que este teve acesso a uma outra *gramática*. Quanto à álgebra, a mesma autora compreende como um jogo de linguagem. Glock (1998) compreende a aritmética e a geometria como sistemas de regras, mas não cita a álgebra.

Não vemos nestas diferentes definições de autores que se apoiam em Wittgenstein uma contradição, pois o filósofo não quis que seus conceitos definissem, mas os jogos de linguagem são critérios de comparação, isto é, olhamos para a matemática e percebermos nas diversas atividades ligadas a ela os conceitos wittgensteinianos. Consideramos, assim, que a álgebra tem jogos de linguagem algébricos, que são usos que consideramos como tais jogos de linguagem, e que, portanto, podemos considerar como álgebra, ou seja, aquilo que chamamos de álgebra, também um jogo de linguagem. Podemos dizer que há jogos de linguagem matemáticos e que a própria matemática é um jogo de linguagem. A matemática é um jogo, que possui jogos, como a álgebra, aritmética, ou mesmo quaisquer atividades matemáticas poderiam ser consideradas jogos de linguagem. Mas, ao fazer uma definição deste tipo correremos o risco de dogmatização, buscando um fundamento último. Não há limites pré-definidos sobre o que seja jogo de linguagem, pois pode-se considerar a matemática um jogo de linguagem, com a álgebra em seu interior, bem como dentro da própria álgebra considerar diferentes jogos de linguagem, como equação e função, por exemplo.

Escolhemos falar em uma gramática da álgebra, pois no sentido wittgensteiniano, gramática é o conjunto de usos que fazemos de uma palavra no interior de um jogo de linguagem, ou mesmo em diferentes jogos de linguagem. Nesse sentido, compreendemos a álgebra como uma gramática, considerando ela como um conjunto de usos que fazemos de palavras no interior de jogos de linguagem. Wittgenstein esclarece essa questão ao deixar bem claro que realiza uma terapia, e assim não são necessárias definições dogmáticas, mas esclarecimentos gramaticais.

> Para que a matemática necessita de uma fundamentação? Necessita de uma, tão pouco, creio eu, do que as proposições que tratam de objetos físicos ou as que tratam das impressões dos sentidos necessitam de uma análise. Ainda que se precisam, tanto as proposições matemáticas como as outras, de uma clarificação de sua gramática[56] (OFM, VII, §16).

É necessário esclarecer a gramática da álgebra, isto é, suas regras de aplicação. Wittgenstein (BT, §108) nos diz que aritmética não é um jogo, mas fala que há jogos aritméticos. Ele parece dar argumentos para dizer que a álgebra é uma gramática, quando diz que a aritmética não é um jogo da mesma forma que o deslocamento das peças do xadrez não são o jogo, ou seja, as regras são o jogo, ou melhor o conjunto de regras são o jogo em si. Se considerarmos a aritmética como um conjunto de regras, esta seria uma gramática. Por isso, entendemos, que seria melhor definir que a álgebra é um conceito vago, que pode ser compreendido como um jogo de linguagem que possui uma gramática. Compreendemos que

[56] "¿¡Para qué necesita la matemática una fundamentación?! La necesita tan poco, creo, como las prosicones que tratan de objetos físicos o las que tratan de impresiones de los sentidos, necessitan un análisis. Aunque si precisan, tanto las proposiciones matemáticas como las otras, de una clarificación de su gramática".

há uma gramática da álgebra, pois na sua construção se fez a partir da arbitrariedade e tornou-se autônoma, ou seja, tornou-se potencialmente uma linguagem com regras definidas. Quanto à sua transmissão, ela se dá por regras, pela inserção nos usos, nos jogos de linguagens algébricos.

Nossa tese é de que, pela epistemologia do uso, apoiada na filosofia da linguagem do segundo Wittgenstein, podemos compreender que não há uma essência para a álgebra, pois seu significado está no seu uso, e então podemos dizer que há jogos de linguagem algébricos, que possuem uma gramática, ou seja, um conjunto de regras, que rege os jogos de linguagem algébricos, e estes, possuem semelhanças de família com outros jogos de linguagem (da matemática, da lógica, do cotidiano, etc.) e não uma essência. No aforismo 23 das IF, Wittgenstein antes de citar alguns jogos de linguagem diz:

> Quantas espécies de frases existem? Afirmação, pergunta e comando, talvez? – Há inúmeras de tais espécies diferentes de emprego daquilo que chamamos de "signo", "palavras", "frases". E essa pluralidade não é nada fixo, um dado para sempre; mas novos tipos de linguagem, novos jogos de linguagem, como poderíamos dizer, nascem e outros envelhecem e são esquecidos. (Uma imagem disto pode nos dar as modificações da matemática.).

A álgebra possibilita tais "novos jogos de linguagem", pois ela permitiu a existência de alguns novos a partir de diversas modificações que a matemática passou ao longo da história. Wittgenstein continua no aforismo 23: "O termo '*jogo* de linguagem' deve aqui salientar que o falar da linguagem é uma parte de uma atividade ou de uma forma de vida". A forma de viver humana, a cultura ocidental, o modo de se fazer matemática, a necessidade de usar símbolos para abreviar conceitos, para facilitar cálculos, promoveu jogos de linguagem algébricos.

> A expressão "jogo de linguagem" enfatiza o papel que nossas formas de vida têm na utilização de nossas palavras. Todo jogo de linguagem envolve uma gramática dos usos, as quais estão ancoradas em uma *práxis*, em uma forma de vida. Nesse sentido, o elo semântico entre a linguagem e a realidade não é dado apenas pelas regras que governam a linguagem, mas pelos próprios jogos de linguagem, pois as regras só têm sentido contra o pano de fundo de um determinado jogo de linguagem. Por conseguinte, os jogos de linguagem têm primazia sobre as regras. Com o conceito de "jogo de linguagem" Wittgenstein esclarece como atribuímos significado às nossas palavras. Segundo ele, estas só adquirem significados quando operamos com elas, portanto, dentro de um jogo de linguagem, que seria para Wittgenstein, a totalidade formada pela linguagem e pelas atividades com as quais vem entrelaçada (GOTTSCHALK, 2004b, 317-318)

Não são somente as regras algébricas que determinam o que significa, mas o uso em um jogo de linguagem que pode ser, por exemplo, resolver uma equação. Há diversos jogos de linguagens matemáticos e particularmente algébricos, em que regras da aritmética não valem para álgebra, então, é nesse ponto que o jogo de linguagem oferece uma delimitação.

Ao repetir alguns jogos de linguagem listados por Wittgenstein no aforismo 23, como *comandar, e agir segundo comandos, relatar um acontecimento, expor uma hipótese e prová-la, ler, cantar uma cantiga de roda, resolver enigmas, contar, resolver um exemplo de cálculo aplicado, traduzir de uma língua para outra, saudar, orar*, e acrescentamos “e tantos outros”. Podemos dizer que entre esses tantos outros pode estar, *calcular com letras, resolver equações algébricas, modelar situações, perceber relações funcionais, etc.* ou podemos mesmo usar alguns dos já citados por Wittgenstein, pois em problemas algébricos, temos que *agir segundo comandos*, que poderiam ser fórmulas, ou *traduzir de uma língua para outra*, se entendermos que compreender expressões e fórmulas com letras ou alguns tipos exercícios demandam uma tradução para a língua natural ou simplesmente *resolver um exemplo de cálculo aplicado*.

A gramática da álgebra é arbitrária, por isso é imprudente pensá-la como uma referência de algum conhecimento suprassensível e/ou que tal existiria na mente do aluno. A noção de arbitrariedade, destacada por Moreno, enfatiza que a descrição gramatical é realizada pela exemplificação e a relação com a atividade simbólica. Baseados em Moreno (2005), entendemos que a descrição gramatical, ou a descrição das regras da álgebra, a partir da exemplificação é uma possibilidade, no entanto, que sejam das relações internas de sentido, pois nesse caso a exemplificação forneceria o contexto ideal para que transições de sentido se apresentem. Portanto, a exemplificação proposta está principalmente na linguagem, ou seja, na própria álgebra, e não fora dela, seja na aritmética, geometria ou na contextualização, a não ser que tal colabore exatamente para a construção de sentidos em suas relações internas. Nesse sentido, defendemos que se deveria buscar uma imersão do aluno na linguagem, isto é, na sintaxe, nos seus diversos usos, a partir de exemplos. Para Moreno (2005), o uso de exemplos amplia a prática linguística e que estes se utilizarão de instrumentos variados, como analogias e situações. Assim, entendemos que na tentativa de soluções às dificuldades de aprendizagem, deve-se buscar um caminho, que deve estar pautado no conteúdo e em como tal pode ser transmitido para o aluno.

O aspecto da atividade simbólica deve ser compreendido como reflexão sobre o sentido, interna ao simbolismo gramatical, e como ritual simbólico. As ligações internas de sentido da linguagem não têm explicações causais, mas se faz no uso simbólico que fazemos em variadas situações. Moreno (2005) entende que o objeto simbólico é autônomo e, a partir de sua criação e aceitação, torna-se independente da história. O símbolo ganha significado devido ao seu uso e o seu uso passa a definir o seu significado, e assim passa-se a usar os símbolos para explicar fatos do mundo, como as fórmulas, equações e funções algébricas fazem com relação a muitas situações.

A álgebra, considerada como um jogo de linguagem formal, seria tão arbitrária e autônoma quanto um jogo de linguagem não-formalizável, como um dialeto não escrito ou algumas atitudes humanas, como gestos, que são compreendidos em algum contexto. Há em qualquer jogo de linguagem relações internas de sentido, que só são compreendidas quando se está imerso no sistema simbólico, ou seja, no caso da álgebra, não haveria como esperar compreensões, sem a apresentação das regras, sem o uso, sem a imersão na sintaxe algébrica.

Alguém que trabalha no comércio lida com uma matemática própria daquele contexto, que tem semelhanças, mas se diferencia em alguns usos da matemática que o aluno faz na escola ou que um matemático faz na academia. Todas são aplicações de uma gramática da matemática, mas acontecem no interior de suas formas de vida com jogos de linguagem próprios. Alguém que não tenha tido contato com a matemática dita formal, pode no interior de sua forma de vida trabalhar com a matemática que lhe auxilie em suas atividades, porém isto não significa dizer que esta é uma matemática diferente da matemática dita formal, consideramos que seria uma aplicação da matemática, que é usada em um contexto de forma correta porque seus usuários estão imersos nessa forma de vida. Porém, este mesmo sujeito ao ingressar na escola ou ainda avançar em seus estudos não terá contato com outra matemática, mas ampliará seu conceito de matemática, a partir das diversas aplicações que ele irá se deparar e também da relação que ele fará com "aquela matemática" já vista no seu cotidiano, devido às semelhanças de família. Ele conhecerá outros jogos de linguagem da matemática.

Da mesma forma acontece em outros aspectos, como é o caso das chamadas áreas que formam a matemática, como a aritmética, álgebra e geometria. Cada uma pode ser considerada como contendo uma gramática, pois possuem um conjunto de regras próprio, e que possibilitam jogos de linguagem, e que por ter conteúdos convencionais, poderiam até ser aprendidas separadamente, mas que fazem parte de uma gramática mais ampla que é a da matemática. Quando um aluno começa aprendendo aritmética na educação básica, ele está sendo inserido nessa gramática, e que para ele é toda a matemática que existe. Em seguida ele é apresentado à geometria e depois à álgebra, que são contextos diferentes. São gramáticas diferentes, com semelhanças de família entre seus jogos de linguagem, mas que precisam ter seus limites de comparação, devido às particularidades de cada conteúdo. Porém, com o tempo, o conceito em si de matemática será mais amplo, permitindo se fazer mais relações entre as áreas.

Com o tempo, devido às semelhanças e às conexões realizadas, podem-se ver as relações entre as áreas, parecendo que tudo faz parte de uma mesma gramática, de um mesmo jogo –

parece haver uma *essência* por trás de todo conteúdo matemático. Não teria problema em se ver assim – pois entendemos essas áreas como parte de uma gramática denominada matemática -, mas é problemático pensar que um aluno que ainda não teve contato com outras áreas possa, por exemplo, a partir apenas da aritmética intuir noções algébricas. Compreendemos que as concepções filosóficas apontadas no primeiro capítulo desta tese colaboram nesse sentido. O conceito de matemática para um aluno que está no 3º ano do ensino fundamental I é diferente de um aluno que está no 9º ano. No 3º ano ele poderia resumir a matemática a números, mas no 9º ano ele poderá falar em muito mais objetos. Com o tempo ele poderá ver os conteúdos já dominados como pertencentes a uma só gramática. *A essência é expressa na gramática*.

A álgebra pode ter nascido de um desenvolvimento da aritmética, mas ela ganhou vida própria de uma gramática, que se auto desenvolveu, e permitiu então que possamos hoje ver nas regras algébricas suportes para compreensões em outras áreas da matemática, assim como da própria experiência prática.

Para Wittgenstein as proposições matemáticas são de natureza gramatical. Esta compreensão é fundamental para entender o posicionamento da filosofia da linguagem de Wittgenstein sobre todos os aspectos da matemática, já que isto vai desde sua natureza até seus aspectos pedagógicos. Portanto, dentro da matemática, a álgebra está em um âmbito maior de formalização. A álgebra não seria generalização, mas formalização, ou seja, muito mais do que um desenvolvimento natural em que letras passaram a representar números e símbolos representar operações mais complexas, a álgebra faz parte de um desenvolvimento de formalização de conceitos, e a partir disso ela pode ser entendida como tendo autonomia. Normalmente se considera que este é o desenvolvimento no conteúdo algébrico da matemática, pois é considerado como aquele que lida com a abstração e a generalização, mas que de fato é a formalização mais desenvolvida da matemática, que já traz uma gama de outros desenvolvimentos, mesmo da prática, como também de seu autodesenvolvimento.

Geralmente causa surpresa aos professores quando percebem que o aluno não realiza generalizações ou abstrações do modo esperado. O problema é que o peso disso recai sobre o aluno e não sobre o método de ensino do professor, ou quando isto ocorre, recorre-se às teorias cognitivas e não à linguagem. O trabalho do professor deve ser sobre a linguagem algébrica e sua estrutura própria de um jogo com regras próprias, que possui sim semelhanças com outras áreas, mas que tem uma gramática particular.

Para Schmitz (1988), Wittgenstein entende que um jogo não pode ser contraditório e se as regras de um jogo se contradizerem, algumas regras devem ser modificadas, e/ou outras regras devem ser adicionadas para o jogo continuar, e nesse caso se trataria de um novo jogo.

Um jogo só pode ser contraditório se uma regra decide assim, mas seria apenas uma estipulação interna ao jogo que não coloca em perigo. Se um dia aparece uma dificuldade em tal jogo, não pode afetar retroativamente o valor do jogo que nós jogamos até agora, simplesmente porque não significa que desde o início a contradição estava "escondida" nas regras. Essa atitude de Wittgenstein refuta qualquer potencialismo: a regra não contém sua aplicação, isto não existe antes e, portanto, uma contradição não é uma propriedade que observaríamos um dia, de um conjunto de regras, e que afetaria, retrospectivamente, a realidade e a regra. A realidade contém unicamente a aplicação que é feita no presente. A ideia de que se poderia descobrir alguma contradição escondida é mais uma confusão da matemática com o discurso empírico.

A álgebra é pública, é um consenso social, e possui técnicas de empregarem-se os signos que no caso geralmente são letras, que são as variáveis, incógnitas, em operações, equações, funções etc. A álgebra demanda habilidades próprias de uma linguagem que é, e devemos conhecer essas habilidades para dominar esta área, e isso não envolve um processo mental, mas linguístico. Hebeche (2002) esclarece que as ilusões gramaticais surgem, quando se concebe a palavra representação ou imagem como objetos, que é a posição da metafísica tradicional, que se origina na concepção agostiniana da linguagem. Assim a linguagem seria apenas um meio que transporta informações sobre algo que originalmente não se encontra nela. Para Hebeche o único critério é a exteriorização e assim, “uma representação mental não é uma amostra interna que possa ser comparada com a realidade” (HACKER, 1990, *apud* HEBECHE, 2002, p. 199).

5.4 Construção e transmissão

Neste último tópico, pretendemos abordar algumas repersussões pedagógicas – mesmo já tendo apontado algumas durante a tese – a partir do que foi dito nesta tese e, em particular, a partir deste capítulo, referente ao ensino de álgebra.

Compreendemos que há dois desafios na educação matemática em geral: o primeiro se refere à necessidade de que o professor esteja preparado para ensinar matemática dando ênfase à linguagem, e o segundo desafio é o de compreender que a matemática faz parte de nossas instituições, o que implica que todos os estudantes devem ter acesso a este campo do saber, independentemente de suas diferenças.

Com relação ao primeiro desafio, é necessário aprender a ensinar, enfatizando as diferentes linguagens que interagem na sala de aula, a saber, a linguagem natural, a linguagem matemática, a linguagem do professor e do aluno. Cada uma dessas linguagens tem características próprias que podem influenciar umas nas outras e colaborar com a interação necessária para que o aluno aprenda matemática na escola. O ensino de matemática com ênfase na linguagem propicia a comunicação entre aluno e professor, nesse sentido, é preciso que a linguagem do professor esclareça os significados dos símbolos matemáticos, bem como as regras que governam os textos em que esses símbolos se inserem.

Com base nessas ideias apontamos também, como segundo desafio, que é preciso romper com a ideia de que se aprende e ensina matemática apenas porque ela é útil, o que acarreta a necessidade de contextualizar os conteúdos matemáticos para dar sentido aos conceitos matemáticos. Apesar deste fato ser verdadeiro, não podemos esquecer que o conhecimento matemático é importante para a formação de um cidadão que compreende e é capaz de superar as contradições do mundo no qual vive, sem contar que tal conhecimento fornece ao sujeito um leque maior de perspectivas de refletir sobre os problemas sociais da sociedade. O dever do professor de democratizar os saberes matemáticos por meio de seu ensino quando concebemos a matemática como um bem cultural que deve ser socializado com todos os alunos de todas as classes sociais, já que os conhecimentos matemáticos construídos pela humanidade podem ser compreendidos como uma instituição. Giardinetto (1999) compreende que a supervalorização do conhecimento cotidiano frente à situação atual do ensino de matemática mostra uma secundarização da importância da apropriação do saber escolar, ou seja, o saber matemático historicamente construído está sendo, muitas vezes, colocado em segundo plano e até menosprezado quando não mostra possibilidades de contextualização. Este é outro fato que a abordagem na linguagem potencializa, que é conceber a matemática como um bem cultural que deve ser socializado e não fragmentado quando contextualizado apenas no entorno do aluno.

Os educadores têm buscado amparo em metodologias que forneçam destaque na experiência do aluno com o objeto de estudo, na intenção de que este construa o seu próprio conceito do objeto. A ênfase passa a ser dada não para o conhecimento a ser aprendido, mas às ações do sujeito com o objeto de aprendizagem. As atuais pesquisas na área da educação matemática estão alicerçadas principalmente nesta linha de investigação.

Grande parte dos problemas de aprendizagem de conteúdos da matemática está relacionada com a compreensão da escrita de seus enunciados em que os significados dos símbolos devem ser interpretados. Entendemos que não temos acesso ao pensamento do aluno, temos acesso apenas àquilo que é expresso em suas palavras, faladas e escritas, por isso uma atenção maior à linguagem é tão necessária.

Para Wittgenstein (DC, §61), “um significado de uma palavra é um gênero de utilização desta. Porque é aquilo que aprendemos quando a palavra é incorporada na nossa linguagem”. As palavras são atos cujo significado está no uso: “compreender uma frase significa compreender uma língua. Compreender uma língua significa dominar uma técnica” (IF, §199). As palavras que designam algo têm um significado intersubjetivo. Gottschalk (2008, p. 92) nos diz que “Compreender não é um processo mental, mas ser capaz de seguir uma regra, ou seja, é dominar uma técnica” e Moreno (2012, p. 76) acrescenta que “conhecer é construir regras de sentido e operar com elas, aplicando-as aos objetos de pensamento”. Portanto, compreender e conhecer estão relacionados às regras, o que significa que se dão na linguagem, pois, “um algo se torna objeto de pensamento ao ser expresso linguisticamente através de conceitos” (MORENO, 2012, p. 76). O pensamento está em estreita relação com a linguagem pois se dá a partir de regras linguísticas. Para Moreno (2003, p. 130) “pensar é meramente *saber aplicar* regras e normas – o que supõe a capacidade prévia de *aprender* tanto as regras e normas quanto suas aplicações, o que supõe, finalmente, a possibilidade de *ensiná-las*”. Desse modo,

> ensinar regras, normas e suas aplicações significa, meramente, fornecer instruções, prestar esclarecimentos, lançar mão de técnicas pedagógicas, fazer perguntas e julgar as respostas a respeito das associações convencionais de sentido erigidas em regras e normas, e de suas aplicações (MORENO, 2003, p. 130).

Assim, tanto o ensinar quanto o aprender estão ligados às regras, estas estão claramente na linguagem e não ocultas, esperando ser descobertas, “pois não existe o enigma”. É nesse sentido que Moreno (2001, p. 246) revela que “As semelhanças não são, pois, relações previamente existentes”, pois até estas devem ser clarificadas na linguagem, e não se deve esperar que os alunos percebam. Mas não se pode dizer que o aluno não possa “fazer lances” no jogo, mas tal só é possível a partir de um conhecimento prévio de algumas regras. Mesmo em jogos mais básicos, como a nomeação, como apresentado por Wittgenstein no início das *Investigações*, há técnicas introdutórias que permitem uma relação de habituação com determinadas palavras, “O aprendiz é treinado a ver relações internas, uma vez que a familiaridade com diversos jogos consiste em desenvolver a habilidade de compará-los entre si e aprender a ver semelhanças entre casos diferentes, usando, para isso, a linguagem” (MORENO, 2012, p. 84). Mas tal habituação, familiaridade ou regularidade são linguísticas, isto é, são relações internas de sentido – internas à linguagem.

Moreno (2012) nos apresenta o processo que se dá na relação entre a linguagem e a realidade, baseado em Wittgenstein. De acordo com o autor, é a partir de jogos mais básicos, como a nomeação, com técnicas básicas como a *etiquetagem*, que se inicia o aprendizado, é a partir disto que são possíveis jogos mais complexos como a descrição. O momento inicial da relação entre nomes e objetos se dá por adestramento, pois o sentido da relação ainda não é colocado pelo aprendiz, o que é apresentado a este é apenas uma *etiqueta*, que a princípio ele seguirá como regra, é um primeiro passo arbitrário, que no *Tractatus* Wittgenstein defendeu como único e essencial, ainda preso a uma concepção referencial da linguagem. No caso do ensino da álgebra, pode ser necessário a *etiquetagem*, o adestramento, a apresentação da relação de sentido de nomes aos objetos, isto é, do uso que é possível ser feito em determinadas operações mais básicas, como na adição, multiplicação, etc., onde as regras devem ser apresentadas claramente. Mesmo as ligações de sentido com outros jogos, devido às semelhanças, devem ser apresentadas claramente. Mas tal questão é um dos possíveis jogos, pois a terapia nos alerta que é necessário não se fechar em determinados métodos, mas compreender que como os jogos de linguagem são variados, as possibilidades de ensino e aprendizagem também o são, devido às ligações de sentido que os aprendizes podem vir a fazer.

> O ambiente pragmático permite esclarecer que, embora de natureza causal e mecânica, o próprio aprendizado por adestramento é relativo a diversos tipos de ensino, ou contextos de uso do que é ensinado, a diferentes lições com diferentes finalidades. As mesmas técnicas de adestramento inseridas em diferentes contextos de ensino, com diferentes lições, terão diferentes resultados na compreensão e nas aplicações por parte do aprendiz (MORENO, 2012, p. 87).

Portanto, precisamos, nós professores, estar atentos às confusões que podem acontecer, devido às possibilidades de sentidos que os alunos podem vir a dar aos conteúdos algébricos, e assim, devemos focar no ensino de técnicas, regras, enfim, conteúdos. “Daí concluirmos que os conteúdos não são meros *meios* para o desenvolvimento intelectual do aluno e, tampouco, ferramentas úteis para a produção de novas experiências (como afirmava Dewey), mas *a condição* para que o aluno possa continuar aprendendo (GOTTSCHALK, 2008, p. 92).

Moreno (2012, p. 88) destaca que para Wittgenstein o domínio de técnicas “é uma condição para que os aprendizes compreendam, podendo, assim, seguir e inventar novas ligações internas de sentido – ao incorporarem *normas* à sua ação através de *aplicações* da linguagem ao mundo no interior de contextos que orientam essas aplicações”. Não conseguimos pensar sem conteúdo, pois tal, é o que nos oferece os meios de realizar qualquer ação. Mesmo interpretação e reflexão, se dão partir de alguma base de informação.

> Dominar (*beherschen*) previamente algumas técnicas permite ao aprendiz interpretar, e não apenas reagir a novas instruções que lhe forem dadas; é o

> que o torna capaz de ver relações de sentido, além de relações empíricas, ao ser afetado por estímulos. Em outros termos, o aprendiz será capaz de *compreender* novas técnicas e aplicá-las adequadamente (MORENO, 2012, p. 84).

Isto não significa que a partir do conhecimento de determinadas regras poderíamos descobrir algo oculto, pois não há isso, o que há são criações, invenções, dentro de uma forma de vida, mas "é o aprendizado destas regras (o que envolve um adestramento) que nos permite prosseguir agindo regularmente em novas situações, sem mais recorrer ao auxílio do professor" (GOTTSCHALK, 2013b, 69). As regras nos libertam. Elas são as ferramentas para que posamos "fazer lances" nos jogos algébricos.

Um indivíduo que não conhece determinada linguagem não irá demonstrar dedutivamente algum conhecimento de regra, a não ser por um acerto casual ou por alguma relação que ele faça com algum outro conteúdo, que ainda assim pode ser arbitrário. As regras devem ser apresentadas claramente. Deve-se inserir o indivíduo nos jogos de linguagem. Não se pode esperar que alguém deduza conteúdos que foram construídos e desenvolvidos, na história humana, arbitrariamente.

Nesse sentido, defendemos que deveria se buscar uma imersão do aluno na linguagem, ou no jogo de linguagem, nos seus diversos usos, para que ele comece a aprender os significados, a partir dos exemplos. Na tentativa de soluções às dificuldades de aprendizagem, deve-se buscar um caminho, que deve estar pautado no conteúdo e em como tal pode ser transmitido para o aluno, não se fundamentando em teorias gerais sobre o conhecimento, como modelos irrepreensíveis para a análise destas dificuldades.

Como consideramos que os conceitos matemáticos não estão presentes em algum mundo extralinguístico e que eles se encontram na própria linguagem, são necessários exemplos dos conceitos para que eles possam ser compreendidos. O uso se dá pela apresentação dos alunos a diversos exemplos ou paradigmas. Talvez não se mostre todas as possibilidades de usos em um determinado período de ensino, mas certa quantidade pode levar a formação do conceito. Por exemplo, se eu disser a um aluno que uma equação é uma igualdade? E se eu mostrasse vários exemplos de equações? Esses vários exemplos seriam os paradigmas que aos poucos levariam o aluno a saber o que é equação ou a apontar uma, ainda não mostrada, e dizer, que é ou não uma equação.

A epistemologia do uso aponta a exemplificação como uma possibilidade, mas sua ideia de ensino estaria mais ligada a ideia de uma imersão. O treino, o adestramento, a repetição, não são colocadas aqui como imposições de ensino, mas como o que de fato acontece, e que não atentar para tal é não oportunizar que nossas crianças aprendam como qualquer um de nós aprende. Aprendemos o significado no uso, na imersão em jogos de linguagem, conhecendo claramente a gramática.

Nesse ponto, surge a questão de explicar como são incorporadas as normas gramaticais de maneira a engajarem nossa convicção e certeza. A resposta de Wittgenstein é simples e direta: pela inserção, ou imersão, nos jogos de linguagem e nas formas de vida, e não pelo aprendizado de regras. Imersão em conjuntos de ações e hábitos, como em um adestramento, que nos faz agir convenientemente em determinadas situações sem que sejamos capazes de descrever as regras que supostamente seguimos – assim como primeiro aprendemos a falar nossa língua materna para depois aprender sua gramática. Aprendemos a agir agindo, e não pensando sobre as regras da ação (MORENO, 2012, p. 250). Nesse sentido, revela Gottschalk (2004b, p. 322):

> Uma criança ao aprender sua língua materna é imersa em uma forma de vida onde essas técnicas são essencialmente incorporadas através de treino. Ela aprende o uso de determinadas palavras sem que haja uma explicação *a priori* sobre os seus significados: “Vem sentar aqui na cadeira!”, “Cuidado para não cair da cadeira!”, e assim por diante. Em nossa cultura o conceito de cadeira vai sendo formado sem que haja a necessidade de se definir o conceito de cadeira, ou de que este seja incorporado através de acordos consensuais.

Aprendemos os significados por uma habituação, a partir de uma arbitrariedade inicial, mas que dados os consensos, comunitários em nossas formas de vida, nos permitem considerar como certezas, assim formamos uma imagem do mundo a partir da linguagem, e assim, nem notamos que aprendemos, na verdade, convenções. Nesse sentido, consideramos a exemplificação, o exercício como parte fundamental na aprendizagem.

Não concordamos com a concepção do *Early Algebra*, no sentido de que a antecipação do ensino de álgebra é proposta como se tal conhecimento fosse uma abstração lógica existente no indivíduo. Compreendemos que tal é possível, mas por habituação, isto é, fazer as crianças verem desde cedo cálculos com simbologias diferentes. É interessante que Gottschalk (2009b, p. 7), analisando a época em que Wittgenstein foi professor, revela que

> ao ensinar conteúdos das diferentes disciplinas, Wittgenstein tinha uma certa predileção em começar com casos particularmente interessantes, mesmo se fossem de difícil compreensão, contrariando assim o costume vigente de se introduzir os temas através de exemplos mais fáceis de serem apreendidos, para só depois ir apresentando situações mais complexas.

Reis (2010, p. 95), também citando um momento da vida de professor de Wittgenstein, nos lembra que

> Esta atitude de Wittgenstein, de antecipar conteúdos próprios de séries posteriores, foi duramente criticada pelos educadores defensores da reforma. Entretanto, o filósofo chegou a resultados excelentes não só no ensino de Literatura, mas também em Álgebra e Geometria Avançada, com alunos de 10 e 11 anos, além dos progressos relevantes obtidos com eles em História.

O construtivismo baseado em Piaget, argumenta que o ensino deve seguir os estágios estabelecidos por este. Outros construtivistas, como os defensores do *Early Algebra,* defendem que é possível antecipar determinados conteúdos, mas no sentido de "ideias", não de conteúdos de fato.

O ensino de álgebra, por exemplo, de equações algébricas, no construtivismo, seria do seguinte modo: o professor deve partir dos conhecimentos prévios do aluno, que seriam hipóteses iniciais sobre o que seria equação, por exemplo, as equações numéricas, ou da noção de valores desconhecidos, e então se apresentaria situações empíricas que pudessem levar o aluno à formulação de hipóteses mais sofisticadas para se apropriar da ideia de equação algébrica, e principalmente do conceito de incógnita; um exemplo, disto seria o uso de balanças, que comumente vemos em livros didáticos. Esse processo se daria a partir de intuições ou deduções. É o que notamos nos documentos e textos analisados no capítulo anterior, por exemplo, nos PCN, percebemos práticas de "não se apresentar de forma clara e transparente o arcabouço lógico da matemática em seu ensino" (GOTTSHALK, 2002, p. 29).

Então, defendemos que não há um significado essencial de equação ou incógnita comum a todas as aplicações deste conceito, mas é aplicando diversas técnicas de resolução de equação que se atribui significado a estas palavras, em determinados jogos de linguagem. Por isso, é necessário que o professor ensine diversas formas de resolução de equação, e não achar que ao mostrar alguns o aluno poderá resolver outros tipos, pois como já dissemos, não há problema difícil em matemática; se não foram apresentadas as regras do sistema, é um sistema desconhecido, pois "só é possível procurar de posse de uma gramática", como diz Gottschalk (2004a, p. 7), que ainda defende que um conceito matemático não se constrói verticalmente, mas horizontalmente, pois tal conceito vai se ampliando com a diversidade de usos que vão se acrescentando. Uma equação passa a ter mais graus, mais raízes, a incógnita passa a ter mais de um resultado, depois tais representam pontos em gráficos, descobre-se que algumas raízes não são reais, etc. "O significado de um objeto para uma criança vai se tornando mais complexo à medida que os usos desse objeto vão se diferenciando, e, com isso, novos aspectos serão percebidos em função do lugar que passa a ocupar em diferentes jogos de linguagem".

Quando Wittgenstein nas *Investigações* cita álgebra, geralmente o faz relacionando à continuação de séries, ou melhor, quando analisa a gramática de termos como "agora sei continuar" (IF, §146-148, 179-180). Nesse sentido Gottschalk (2002, p. 102) colabora ao dizer que dada uma fórmula, compreender é saber usá-la, pois tal não é uma proposição gramatical, uma regra de como proceder, isto é, não é verdadeira ou falsa, mas adquire significado no uso. Gottschalk (2002, p. 103) alerta que em uma sequência o aluno não pensa abstratamente em uma fórmula, apenas segue, da forma como lhe foi pedido, e "quando ocorre uma fórmula ao aluno que lhe permite continuar a sequência corretamente, esse caminho foi possível pelo fato de o aluno já ter aprendido álgebra, já ter esse universo presente em grau suficiente para que seja capaz de formular expressões algébricas".

Compreendemos, então, que o indivíduo não seria o construtor do seu próprio conhecimento, no sentido de que ele não tem, por exemplo, $5 + 7 = 12$ em estruturas como esquemas mentais antes mesmo de lhe ser apresentado tal situação. O cálculo $5 + 7 = 12$ está na linguagem e é quando ele entra em contato com esta que ele entrará em contato com o $5 + 7 = 12$. Ele entra em contato com o conhecimento humano construído no decorrer dos anos. Ele entra em contato com normas socialmente aceitas e estabelecidas.

Consideramos que os termos construção e transmissão mostram o caráter institucional e histórico da matemática, isto é, como algo que foi construído e transmitido no decorrer da história e que pode ser realizado quando o professor ensina e quando o aluno aprende. Porém não compreendemos como no paralelismo onto-filogenético, ou seja, de que haveria uma repetição no desenvolvimento educacional do indivíduo, nos mesmos passos dados pela espécie humana no decorrer da história. Diferentemente disso, compreendemos que o professor transmite conteúdos desenvolvidos e aceitos pelo meio em que se vive e o aluno pode construir tal conhecimento, mas no sentido pragmático, isto é, no uso. É no uso que o aluno aprende os significados. É no uso que o aluno aprende as técnicas transmitidas pelo professor. É uma construção em um sentido de recepção e prática de regras que permite um desenvolvimento dos conteúdos transmitidos.

O conhecimento já existe e já foi construído na história, mas os significados que compõe tal conhecimento são construídos por cada um de nós no uso que fazemos deles, a partir do momento em que eles são transmitidos a nós. Por isso, não cremos que o aluno possa chegar a essa noção por conta própria ou por "pistas". "Não se pode adivinhar como uma palavra funciona. É preciso que se *veja* a sua aplicação e assim se aprenda" (IF, §340).

> Também poderíamos caracterizar essa ideia da seguinte maneira: é-nos impossível descobrir regras de um novo tipo que sejam válidas para uma forma com a qual estamos familiarizados. Se são regras novas para nós, então não é a velha forma. O edifício de regras tem de ser *completo* para podermos trabalhar com um conceito – *não podemos fazer nenhuma descoberta na sintaxe* – Pois somente o grupo de regras *define* o sentido dos nossos signos e qualquer alteração (por exemplo, complementação) das regras significa uma alteração do sentido.
> Exatamente como não podemos alterar as marcas de um conceito sem alterar o próprio conceito. (Frege). (OF §154)

Nesse sentido, o papel do professor deve ser o de transmissor de conteúdos. É ele que deve apresentar ao aluno essas novas aplicações, que são de natureza convencional, isto é, criadas pelo homem no decorrer da história e que serão agora transmitidas. Entendemos assim que as situações apresentadas vão aos poucos fazendo parte da forma de vida do aluno, ajudando-o a ter contato e a ampliar conceitos. As novas aplicações são transmistidas pelo professor por meio de treinamento, no mesmo sentido em que somos treinados diariamente a dizer os nomes das coisas e usá-las de forma correta e depois de um tempo de uso sabemos os nomes e a utilização. Gottschalk (2008, p. 88) sugere que esse ensino por meio do uso pretende um aprender a *ser capaz de ver de outra maneira*, que não pode ocorrer naturalmente, mas necessita da intervenção do professor.

> O que vai nos dar a essência de um conceito matemático é a sua aplicação, pois é no momento do uso do conceito que nos conectamos com toda a sua gramática. Só adquire sentido para o aluno, portanto, ao aplicá-lo, o que envolve técnicas que são *aprendidas* e não de alguma forma intuídas ou descobertas. Nesse sentido, é fundamental a atuação do professor, pois é ele que pode libertar o aluno de determinadas imagens, introduzindo novos pontos de vista: outros empregos de conceitos já conhecidos como também apresentando *novos* conceitos.

Nesse sentido é o professor que mostra esse novo modo de ver. Ele tem que apresentar para que o aluno possa saber como fazer. É o professor que deve introduzir o aluno a alguns dos jogos de linguagem da matemática. Nessa perspectiva pedagógica tributária da epistemologia do uso, compreendemos que o sucesso no ensino passa a depender tanto do professor, que é responsável por apresentar esses novos modos de ver para o aluno, como também do próprio aluno e a sua disposição em aceitar esses novos modos de ver, que também já deve ter em seu "arsenal" alguns significados já construídos. Nossas certezas se constituem pela crença em quem nos passam as informações.

> A autoridade do professor é veículo de outras crenças, que não são *aprendidas* pelo aluno, mas que são os pressupostos para que ele *aprenda*. É o modo como o professor expõe sua disciplina que imbui novas crenças,

> as quais se tornarão condições de significado para o conhecimento a ser transmitido, construindo-se, assim, nossas certezas primeiras, inquestionáveis (GOTTSCHALK, 2008, p. 89).

Uma instituição, tal como o conjunto das regras aritméticas ou algébricas, é uma *forma de vida* que consiste em instituir regras de jogos que são aceitas socialmente e que com o passar do tempo transformam-se em normas. As instituições são responsáveis pelos saberes, pois designam um sistema de relações sociais dotadas de certa estabilidade provenientes de certas normas que regularizam a sociedade. Os indivíduos precisam de regras e querem seguir regras, pois elas são necessárias para normatizar as ações de quem vive em sociedade. Assim, Wittgenstein alerta:

> O que denominamos "seguir uma regra" é algo que apenas *um* homem poderia fazer apenas *uma vez* na vida? - Trata-se, naturalmente, de uma observação para a *gramática* da expressão "seguir a regra". Não é possível um único homem ter seguido uma regra uma única vez. Não é possível uma única comunicação ter sido feita, uma única ordem ter sido dada ou entendida uma única vez, etc. - Seguir uma regra, fazer uma comunicação, dar uma ordem, jogar uma única partida de xadrez, são *hábitos* (usos, instituições) (IF, §199).

As observações que faz o filósofo são gramaticais, pois não está aqui a questão de possibilidade material de alguem seguir uma regra, mas de convencionabilidade: seguir uma regra "privada" é conceitualmente impossível. Nesse sentido, Chauviré (2008) destaca que é importante colocar a convenção no âmbito da sua função antropológica, para daí reconhecer a nossa profunda necessidade de convenção e de ver também uma expressão de nossa natureza de animal cerimonial que precisa de convenções e instituições para viver. Ter convenções é, sem dúvida, uma necessidade de nossa natureza, e a natureza fala através de nossas regras.

Gottschalk (2007a, p. 461) revela que "o papel do professor ao longo dos séculos tem sido o de transmitir algo a seu aluno, e a natureza do que se transmite determina os meios de sua transmissão". É nesse sentido que a natureza do conhecimento algébrico deve ser considerada no momento em que se vai transmitir, e natureza do mesmo, não é algo de simples obtenção, mas de um trabalho árduo frente novas manipulações simbólicas, que demandam tempo e uso variado, para que se possa se considerar que o aprendizado de fato se deu e assim se possa se fazer uso nos diversos jogos de linguagem. Qualquer conteúdo tem natureza pragmática, como nos diz Moreno (2001, p. 262):

> Qualquer que seja o conteúdo escolhido, a terapia filosófica mostra sua natureza pragmática e relacional, embora seja possível atribuir a ele o estatuto de universal absoluto no interior do jogo de linguagem em que opera. Será considerado como universal absoluto, porque é aplicado como

> norma para o sentido e sem qualquer poder descritivo; com a terapia filosófica, entretanto, não mais poderá encobrir sua natureza pragmático-relacional e, portanto, convencional.

Essa citação ainda nos leva a dizer que há a possibilidade de universalidade na terapia. A terapia concorda com o universal, mas que é definido convencionalmente. A matemática, por exemplo, pode ser universal, mas é convencional. Nesse sentido, não consideramos a universalidade como devedora de uma natureza metafísica, mas devido aos nossos consensos. E é consenso que temos uma herança cultural, uma produção matemática riquíssima que não podemos negar aos nossos alunos, como concorda Gottschalk (2002, p. 15):

> Reduzir os fins da educação ao desenvolvimento de competências e habilidades em abstrato, como propõem os PCN, é, a nosso ver, privar o aluno de uma riqueza muito maior, que é a nossa herança cultural, com todas as suas múltiplas linguagens ancoradas nas mais diversas formas de vida.

Nesse ponto, portanto, concordamos com o que na educação atual se chama de ensino tradicional, pois este destaca os conteúdos a ser ensinados. Não defendemos o uso único dos métodos do ensino tradicional como não defendemos nenhum aqui -, mas destacamos que muitos deles eram efetivos na aprendizagem. É interessante que a piagetiana Consance Kamii revela em uma de suas obras, quando aceita o fato de haver aprendizagem através de exercícios e da transmissão, e ainda reconhece que este modelo seria mais célere que o esforço empregue na tentativa de construção do próprio aluno, mas se contrapões a tal modelo, chamado de mecânico pois este iria contra o objetivo primordial da educação, que é a autonomia (KAMII, 1986). A autora parece destacar um papel ético do professor que deve levar o aluno a construir o próprio conhecimento, e não lhe "impor" determinados conteúdos, mesmo que este seja mais eficiente. Gottschalk (2004a, p. 6) faz uma defesa de um dos métodos, que considera eficiente, do ensino tradicional:

> Nesse sentido, pensamos que a forma tradicional de apresentar novos conteúdos aos alunos, mostrando-lhes as diversas aplicações dos conceitos através de exemplos de *como* esses conceitos são utilizados no jogo de linguagem em questão, não deve ser descartada, uma vez que esses paradigmas iniciais são essenciais para que o aluno passe a proceder corretamente (isto é, como a comunidade referente ao jogo de linguagem em questão assim o espera).

Ponderamos, portanto, que o mais ético é transmitir o que de melhor a humanidade produziu ao longo da história, da forma mais eficiente que o professor encontrar. A autonomia só vem com a aprendizagem de conteúdos, e não é algo potencialmente presente no processo para aprendê-los. Não há autonomia, se não conhecemos o caminho para tal.

Considerações finais

“os nomes das cores não são as cores
as cores são:
tinta cabelo cinema sol arco-íris tevê”
(Arnaldo Antunes, *Tudos*)

Consideramos nosso trabalho um ensaio de uma terapia para a educação matemática, em particular para o ensino de álgebra. O termo ensaio refere-se ao fato de compreendermos que este é um trabalho em construção, visto que este é o cerne da própria concepção de terapia: uma atividade que busca se desvencilhar do dogmatismo, sendo que isto deve ser feito até mesmo por quem realiza a terapia. Baseamo-nos na terapia wittgensteiniana, mas sem intentar fazer propriamente uma terapia aos moldes de Wittgenstein, para analisar questões referentes ao ensino da álgebra, onde buscamos analisar aquilo que consideramos ser as bases filosóficas das principais teorias educacionais em uso na atualidade, e como tais repercutem na educação, como buscamos mostrar tanto a partir de um estudo teórico, com maior ênfase ao construtivismo piagetiano, quanto da análise de texto e documentos oficiais a respeito de indicações para o ensino de álgebra.

A terapia filosófica encontra-se no contexto da virada linguística em que a linguagem passa a ser analisada de forma mais profunda, em oposição à tradição filosófica que toma como concepções basilares o essencialismo e o referencialismo. Buscamos demonstrar que estas concepções estão presentes na teoria educacional e nas indicações governamentais para o ensino de álgebra. No entanto, a terapia de Wittgenstein se opõe ao essencialismo platônico e à concepção referencial da linguagem. Nesse sentido, trouxemos a epistemologia do uso de Arley Moreno como contribuição da terapia wittgensteiniana para a compreensão de como se dá o conhecimento, de onde buscamos formular alguns pressupostos teóricos de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, realizamos uma análise baseada na terapia, para compreendermos os fundamentos filosóficos, que causam confusões, os caminhos possíveis de pesquisa e, em consequência, do ensino de álgebra, e assim apresentar algumas possibilidades pedagógicas. Desse modo, apontamos principalmente no capítulo questões que acreditamos que devem ser mais discutidas pelos pesquisadores da educação matemática para compreender o ensino de álgebra como a questão da tradução, a determinação de significados e a manipulação de símbolos, bem como, a possibilidade e consequências de se tomar a álgebra em seu aspecto linguístico e como uma gramática, no sentido de Wittgenstein, como fizemos aqui.

Defendemos que a partir da epistemologia do uso, a álgebra pode ser entendida como tendo uma gramática, e assim, ela é autônoma, arbitrária e possibilita relações internas de sentido. A autonomia do aluno se dá a partir do conhecimento de regras e dos seus usos em diversas situações. O aluno começa, a partir de um determinado momento não previsível *a priori*, a "fazer lances" no jogo de linguagem envolvendo a álgebra, inclusive aplicando regras a outros tipos de situações desconhecidas e não devido a um conhecimento *a priori* do conteúdo. Para Wittgenstein, as palavras têm significado no uso e quando mudam os contextos de aplicação de tais palavras, mudam também os seus significados. A linguagem deve ser apresentada ao aluno e com o uso que ele faz dela, ele terá, em um determinado momento, domínio sobre o que lhe foi apresentado e por ele usado. Desse modo, compreender um significado, segundo Wittgenstein, é ser capaz de usá-lo em determinadas situações e a partir de um momento não previsto usá-lo em várias situações de acordo com a contingência. A concepção de significado como uso de palavras está sujeita a regras que devem ser compartilhadas e aplicadas da mesma maneira. Os diferentes contextos de aplicação das regras como formas de vida mostram que podemos considerar de acordo com Wittgenstein a linguagem como uma instituição, pois passamos a compreendê-la como resultado de ações e acordos sociais, que normatiza a partir de tais acordos ações futuras.

Nosso trabalho não se resume em uma crítica a tudo e a todos, mas decidimos partir de nosso referencial teórico, que se apoia na terapia de Wittgenstein, e assim, entendemos que qualquer referencial teórico pode se tornar dogmático com o tempo e nesse sentido necessita de uma "cura", quando deve ser compreendida suas confusões e desse modo, buscamos efetuar o esclarecimento de que nossos fundamentos são convencionais e não extralinguísticos, isto é, de que não se deve buscar fundamentos fora da linguagem. Wittgenstein não tentou fazer uma teoria, mas simplesmente esclarecer.

Algumas teorias e metodologias citadas aqui nem são de fato usadas nas salas de aula, mas no geral as teorias apresentam e divulgam concepções que se cristalizam nos professores e na sociedade como um todo, e assim, promovem formas de se pensar a educação. Mesmo quando professores não aplicam a contextualização ou métodos construtivistas, eles parecem esperar avanços intelectuais nos alunos devido explicações e relações dadas com outros conteúdos, externos ou prévios, a resolução de exercícios de níveis diferentes a partir da resolução de exercícios mais básicos, ou seja, esperam-se reações dos alunos que muitas vezes não se efetivam. Acreditamos que alguns alunos antecipam conceitos esperados pelos professores, por que de alguma forma fazem lances aceitáveis, mas as teorias em uso, e muitos professores, interpretam isso como se fosse uma potencialidade, que se torna um padrão e que acaba sendo esperada em outros alunos, o que gera confusões conceituais. Esta análise seria mais aprofundada em uma pesquisa com grupos de professores sobre suas concepções a respeito de algumas questões percebidas e criticadas aqui mais no nível teórico.

Acreditamos que se muitos métodos citados aqui fossem colocados em prática, teríamos um avanço maior na educação, pois não criticamos e refutamos tais métodos, apenas apontamos limitações, assim como elencamos pontos positivos de métodos considerados fracassados ou antiquados. O que entendemos é que seja qual método for, a linguagem precisa tomar um espaço maior. Defendemos uma análise mais profunda sobre o papel da linguagem na educação matemática, em particular no ensino de álgebra. Não pretendemos, então, produzir uma proposta de ensino, pois a terapia wittgensteiniana não pretende produzir teses, sendo que ela se baseia em uma análise sobre outras concepções – e até sobre teorias que ela mesma pode gerar -, ou seja, é necessário analisar construções históricas, usos efetivos, etc. e assim buscar tratar determinadas confusões. Não negamos que tal análise baseada na terapia não possa apresentar horizontes novos, mas que não deixariam de ser discutidos, no entanto, como novos conceitos, também poderão estar propensos a passar por uma terapia.

A forma como é compreendida a linguagem nos estudos de ensino e aprendizagem da matemática atualmente não atribui a devida importância à linguagem[57]. Em tais estudos, geralmente, compreende-se a linguagem sob uma concepção referencial, que acredita que o conhecimento de fato está fora da linguagem e deve-se buscar em um local extralinguístico como deve ser o ensino para que ocorra a aprendizagem, sendo esse local um céu platônico, uma lógica perfeita, a mente humana ou o mundo empírico, ou seja, busca-se a essência. Desprezam-se as possibilidades presentes na linguagem e o fato de que talvez não haja como compreendermos questões fundantes do conhecimento, a não ser pela via linguística. A filosofia da linguagem se opõe a praticamente toda compreensão anterior a ela, por trazer a linguagem para o centro da discussão, ela deixa de ser mero acessório, ferramenta ou referência e passa ser a construtora, o pilar de sustentação de toda compreensão e construção de significados.

Com relação ao conhecimento matemático discutido aqui, destacamos que tal contém especificidades próprias de uma linguagem independente, autônoma e rigorosa, sendo que esta especificidade se tornou ainda mais evidente com o desenvolvimento da álgebra, que deu à matemática um caráter ainda mais formal, a partir do desenvolvimento das equações e de um sistema simbólico mais simples que viesse a traduzir as operações nas equações, o que em nosso entender, possibilitou um desenvolvimento ainda maior da matemática como um todo. Foram

[57] Podemos citar como exceção as pesquisas do Grupo de Estudos e Pesquisas em Linguagem Matemática (GELIM), da Universidade Federal do Pará: gelimufpa.blogspot.com.br.

necessidades e possibilidades internas ao sistema simbólico algébrico que possibilitaram o crescimento teórico, simbólico e prático da matemática, visto no desenvolvimento dos conceitos de função, geometria analítica, cálculo diferencial e integral, e outras áreas, como estatística e probabilidade, a matemática financeira, a teoria dos conjuntos, as matrizes e determinantes, assim como outras disciplinas, como física, química, biologia, etc.

Não concordamos com a ideia de que tudo é álgebra, como se esta fosse atualmente uma *metamatemática*, mas que o desenvolvimento no simbolismo algébrico possibilitou todo este desenvolvimento, que como já dissemos, é o desenvolvimento de toda a linguagem matemática, tanto da aritmética, quanto da geometria, mas que parece ter sido motivada devido aos estudos das equações e suas possibilidades, que gerou, como já dissemos, até a necessidade da criação de um outro conjunto numérico: os complexos. Não concordamos com a visão essencialista, que busca colocar todos os seres humanos no mesmo patamar de potencial natural de aprendizagem e também refutamos a visão empirista, que não considera fatores internos ao ser humano e que sua aprendizagem dependeria exclusivamente de fatores externos. Entendemos que essas são duas visões completamente opostas e acreditamos que nossa concepção busca outro caminho e esse caminho está na linguagem.

Analisamos as contribuições da epistemologia do uso de Arley Moreno, apoiada na filosofia de Wittgenstein para a construção e transmissão do conhecimento algébrico, em oposição às concepções essencialista e referencial, destacando o construtivismo na atualidade. Apresentamos os fundamentos teóricos, tanto do construtivismo, quanto da epistemologia do uso e suas consequências para o entendimento da construção e transmissão do conhecimento, e de forma mais particular, para o conhecimento algébrico. Destacamos que as concepções criticadas aqui, apoiadas pelo avanço de teorias educacionais como o construtivismo, têm levado a um destaque da relação com situações do cotidiano com a álgebra (contextualização, situações-problema, etc.); a generalização da aritmética para a álgebra, em uma concepção essencialista e não como uso de uma linguagem de apoio; a linguagem algébrica como referência para os conceitos algébricos, sendo que estes viriam antes da linguagem, isto é, a linguagem não é compreendida como produtora de significados. Durante a tese buscamos analisar estas questões, relacionando-as aos conceitos wittgensteinianos (uso, contexto, jogos de linguagem, semelhanças de família, regras, etc.), além de relações diretas com a teoria de Moreno.

Quanto ao uso das situações do cotidiano na álgebra, mostramos que Moreno (1996, 2005) entende que a epistemologia do uso posiciona a linguagem como organizadora dos fatos do mundo, isto é, não se parte dos fatos para a linguagem, mas sim o contrário. Quanto à noção de generalização da aritmética, entendemos haver uma relação entre álgebra e aritmética, assim como entre a álgebra e outros conteúdos, o que duvidamos é que tal percepção seja possível a alunos que não foram iniciados a certos aspectos da linguagem matemática ou até mesmo, que foram apresentados a certas linguagens matemáticas, como a álgebra. O que há por trás desta noção é uma explicação platônica, kantiana ou piagetiana, onde tudo já existe de forma perfeita em algum lugar, necessitando apenas ser descoberto. O construtivismo piagetiano baseado em tal ideia acredita em um ensino por descoberta e por construção espontânea, o que se opõe à epistemologia do uso, que entende que a construção dos significados ocorre pela linguagem. A essência existe para quem já domina vários níveis e tipos de linguagem e mesmo assim tal essência é construída, pois de fato o que há são apenas semelhanças de família.

Quanto à concepção referencial que leva à ideia de que os conceitos vêm antes da linguagem, entendemos a partir da noção de arbitrariedade apresentada por Moreno (2005), que a linguagem algébrica é independente de fatos e pode ser construída arbitrariamente, sendo necessária uma condução, o que vai de encontro com as ideias construtivistas de "descoberta" e "dedução". Cremos na existência de processos mentais, mas seguindo Wittgenstein, consideramos complicada a tarefa de percebê-los exatamente e sistematizar a maneira como funcionam, e que daí se pudesse compreender como se dá o processo de compreensão/aquisição dos sentidos de nossos conceitos. A epistemologia do uso visa analisar aquilo que o aluno fala ou escreve, isto é, externaliza, sem buscar por meio disto, meandros ou pressuposições psicológicas, mas sim o que de fato podemos ver ou ouvir do aluno, aquilo que ele expressa pela voz e escrita. Não descartamos a forma de análise realizada por construtivistas, mas apresentamos mais uma alternativa. Por vezes, percebemos se confundir *a repetição de uma regra com uma generalização algébrica*, sendo que nas atividades as regras já são apresentadas e o uso de letras sugerido, às vezes indicando até, quais letras usar. Entendemos que a confusão está em ver no trabalho do aluno com a linguagem, uma capacidade natural de generalizar da aritmética para a álgebra.

Como dissemos durante a análise, não criticamos os problemas propostos em si, mas sim a pretensão didática que há por trás deles e o que se requer dos alunos, que entendemos ser consequência da filosofia adotada, e que conduz à elaboração de problemas do mesmo tipo, pois não se abandona tão facilmente tais concepções. Uma prática docente que viesse a valorizar a linguagem poderia tentar entender como o aluno compreende o universo da aula de matemática. O aporte teórico em Ludwig Wittgenstein se justifica pelo fato dele nos mostrar como a linguagem se comporta perante os jogos de linguagem, isto é, perante os diversos contextos de usos da linguagem. Tais jogos seguem regras e os alunos devem conhecer essas regras e não se deve apenas esperar que eles possam descobri-las por algum tipo de intuição.

Consideramos de fundamental importância que as pesquisas em educação matemática se voltem atualmente cada vez mais para a sala de aula e aos conteúdos, e assim, destaquem o papel da linguagem nesse contexto. Tal análise pode favorecer a educação matemática e, particularmente, os estudos da álgebra, por se tratar de uma área onde a linguagem talvez tenha papel mais preponderante, mesmo que se pense que a álgebra tenha relação na empiria ou em uma lógica ideal ou mental.

A construção do conhecimento matemático é um processo longo, presente e dependente do que Wittgenstein chama de *Jogos de linguagem*. O uso nestes jogos de linguagem ancorado em formas de vida contém *semelhanças de família* e *regras* e variam de acordo com o contexto em que são colocadas. Acredito que a perspectiva do segundo Wittgenstein pode contribuir bastante para a compreensão da construção por parte do aluno do conhecimento algébrico escolar, e permitir que possamos analisar de forma mais profunda o ensino deste conteúdo.

A matemática é uma disciplina difícil. Por isso, percebe-se tantas críticas, e muitas vezes até um desprezo, criticando a mesma por não ter utilidade ou relação com a realidade em alguns de seus conteúdos. De certa forma, algumas pessoas já pensam que a matemática deveria ser assim, cotidinianizada, ludicizada, contextualizada, pois a maioria dos estudantes já não tem apreço pela mesma, então qualquer crítica ao seu modo de ensino é aceita facilmente. É muito comum vermos nas salas de aula de licenciatura em matemática, e em muitos ambientes acadêmicos, alunos que facilmente tecem críticas à matemática, ou ao seu ensino, e apontam aspectos utilitaristas ou lúdicos como solução. Acreditamos que algumas teorias educacionais em voga apenas oferecem mais "munição" para quem "ataca" a matemática.

Defendemos que a matemática deve ser transmitida a todos. Esse é nosso dever ético. Nós professores devemos estudar, aperfeiçoar-nos, com este ideal. Devemos, então, evitar atitudes dogmáticas, compreender que os alunos podem ter diversas compreensões possíveis, devidos as possibilidades de jogos que eles podem estar jogando, e que por isso, as regras devem ser dadas claramente. Esta pesquisa destaca o papel que deve ter o professor. Papel de transmissor do conhecimento algébrico e que não pode esperar que o aluno descubra conceitos sobre algo que ainda nem sequer lhe foram apresentados, nem sequer a forma linguística de lidar com tais. O professor deve mostrar a partir do uso de palavras, termos, simbologias que possibilitam que os significados sejam construídos, e assim o aluno pode ser autônomo a partir da prática do uso da linguagem, em jogos de linguagem introduzidos pelo professor.

Consideramos necessário que se continue a analisar fundamentos teóricos, para que se evite dogmatismos e para que os mesmos possam passar por frequentes correções e dessa forma possam colaborar ainda mais com o desenvolvimento da educação. Buscamos aqui apresentar não só as confusões e suas consequências, mas as possibilidades oferecidas pela terapia de Wittgenstein, para a compreensão de concepções teóricas em uso na educação, buscando trazer, então, possibilidades de pesquisa e de ensino da álgebra escolar e a partir da epistemologia do uso, defendemos que a álgebra pode ser entendida como tendo uma gramática, e assim, ela seria considerada autônoma, arbitrária, onde a ênfase seria para as relações internas de sentido, ou seja, em uma análise como linguagem, no sentido pragmático de Wittgenstein, isto é, do uso ordinário desta linguagem, mas destacando que o ordinário não se limita ao cotidiano, mas agrega o formal, sendo que no ordinário já há a necessidade formal. Nesse sentido, a linguagem se dá a partir do empírico, pois nesse já existe o formal, mas a partir de sua constituição normativa, torna-se algo independente da empiria, torna-se norma a ser seguida. Por isso, destacamos que defendemos que a autonomia do aluno se dá a partir do conhecimento de regras e dos seus usos em diversas situações, mas como habituação aos conteúdos e não que as situações sejam suficientes para a existência da aprendizagem. O aluno começa, a partir de um determinado momento não previsível *a priori*, a "fazer lances" no jogo de linguagem envolvendo a álgebra, inclusive aplicando regras a outros tipos de situações desconhecidas e não devido a um conhecimento *a priori* do conteúdo. São os conteúdos que possibilitam a autonomia.

O aluno aprende o que é álgebra usando álgebra. Álgebra não é o nome "álgebra", álgebra é equação, inequação, função, ... álgebra é $5a + 3a$, $x^2 - 4x - 5 = 0$, $y = 2x - 3$... Não há uma essência para o que seja álgebra, ela é todos os usos atribuídos ao que seja álgebra. Não podemos esperar que haja algo potencialmente no aluno que o leve a compreender o que seja álgebra, que não seja por aquilo que a linguagem pode lhe dizer o que é.

Referências Bibliográficas

AABOE, Asger. **Episódios da história antiga da matemática**. SBM, 1984.

ABBAGNANO, Nicola. **Dicionário de Filosofia**. S.Paulo: Martins Fontes, 1999.

AGOSTINHO, Santo. **Confissões**. Coleção Os Pensadores, São Paulo: Nova Cultural, 1996.

ALBARRACÍN, E. S.; DUJET-SAYYED, C.; PANGAUD, C. Les facteurs socioculturels dans le représentations mathématiques: édude de cas sur une population d'élèves ingénieurs français et latino-américains. **SÉMINAIRE D'ESCHIL**, 3., 2008. Anais... 2008.

ALCALÁ, Manuel. **La construcción del lenguaje matemático**. Barcelona: Editorial Graó, 2002.

AL-SALEH, Christophe. **Ludwig Wittgenstein**. Paris: Sils Maria (Collection 5 Concepts), 2015.

ARAÚJO, Inês Lacerda. A natureza do conhecimento após a virada lingüístico-pragmática. **Revista de Filosofia**, Curitiba, v. 16 n.18, p. 103-137, jan./jun. 2004

ASPEITIA, Axel Arturo Barceló. **Universalidad y aplicabilidad de las matemáticas en Wittgenstein y el empirismo logicista**. Theoría: Revista del Colegio de Filosofía 13 (2002): 119-136.

AZEVEDO, Edmilson. A linguagem na hermenêutica e na filosofia analítica. **Perspectiva filosófica** – vol. I – nº 27 – janeiro-junho/2007

AZIZE, Rafael lopes. Os inícios da abertura pragmática de Wittgenstein: o princípio do contexto. **Cognitio/Estudos**: Revista Eletrônica de Filosofia. Centro de Estudos do Pragmatismo – Programa de Estudos Pós-Graduados em Filosofia. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Número 1, 2004.

________. A metáfora do cálculo no período intermediário de Wittgenstein. **Dois Pontos** (UFPR), v. 6, p. 125-144, 2009.

BARUK, Stella. **Insucesso e matemáticas**. Tradução de Manoel Alberto. Lisboa: Relógio D'Água Editores, 1996.

BATISTA NETO, A. L. Para uma crítica macintyreana da filosofia analítica. **Pensando – Revista de Filosofia**, Vol. 6, Nº 11, 2015.

BAUMGART, John K. **História da álgebra**. Tradução de Hygino Domingues. São Paulo: Atual, 1992. (Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula; vol. 4)

BECK, Vinicius Carvalho; SILVA, João Alberto da. O Estado da Arte das Pesquisas sobre o Pensamento Algébrico com Crianças. **Revemat**: Revista Eletrônica de Educação Matemática, v. 10, p. 197-208, 2015.

BERNSTEIN, B. Prefácio. In: DANIELS, H. (Ed.), **Vygotsky em foco: Pressupostos e desdobramentos** (pp. 9-22). Campinas, SP: Papirus, 1994.

BERNSTEIN, Richard. Experiência após a virada linguística. Tradução de Ana Guiomar Calazans. **Cognitio**, São Paulo, v. 14, n. 2, p. 291-318, jul./dez. 2013

BIANCHINI, Edwaldo. **Matemática**. 6. Ed. São Paulo: Moderna, 2006. (6º ao 9º ano).

BOUVERESSE, Jacques. **La force de la règle**: Wittgenstein et l'invetion de la necessité. Paris: Les Éditions de Minuit, 1987.

________. **Hermeneutique el Linguistique suivi de Wittgenstein et la philosophie du langage**. Paris: L'eclat, 1991.

BOYER, Carl. **História da matemática**. Revista por Uta MarzBach; Tradução de Elza Gomide. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. **Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Vol. 1. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, DF, 1997a. 126 p.

________. **Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª a 4ª Séries) Matemática**. Vol. 3. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, DF, 1997b. 142 p.

________. **Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª Séries) Matemática.** Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, DF, 1998. 142 p.

________. Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio. Matemática. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, DF, 2000.

________. **Diretrizes Curriculares Nacionais para os cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura**. Brasília: Ministério da Educação, Conselho Nacional de Educação / Câmara de Educação Superior 2001.

________. **PCN+ Ensino Médio:** Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação /SEMTEC, 2002.

________. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. Brasília: 2006.

________. **Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM)**. Ministério da Educação e do Desporto. Brasília: SEF, 2007.

________. Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos:** PNLD 2008: Matemática. Brasília: MEC/SEB/FNDE, 2007.

________. **Exame Nacional do Ensino Médio**. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação, 2009.

________. **Guia de livros didáticos:** PNLD 2011: Matemática. Brasília: MEC/SEB/FNDE, 2010.

________. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2013: Matemática. Brasília: MEC/SEB/FNDE, 2012.

________. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2014: matemática. Brasília: MEC/SEB/FNDE, 2013.

________. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2015: matemática: ensino médio. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2014.

________. **Base nacional comum curricular.** Texto em construção. Brasília: Ministério da Educação, 2015.

BROUSSEAU, G. **Fondements et méthodes de la didactique**. Rech Did Math, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-115, Mars 1986.

CASANAVE, A. L. David Hilbert e o Círculo de Viena. In: **III Encontro de Filosofia Analítica**, 1995, Florianópolis/SC, 1995.

CASTAÑEDA, Felipe. Arbitrariedade y posbilidad de alteracion del enguajes em Witigenstein. **Ideas y valores**, n° 118, Bogotá, abril de 2002.

CASTORINA, José Antonio. La psicología genética de los conocimientos sociales en el contexto didáctico: una mirada crítica. MONTOYA, Adrián Oscar Dongo et al (orgs.). **Jean Piaget no século XXI**: escritos de epistemologia e psicologia genéticas. São Paulo: Cultura Acadêmica, Marília: Oficina Universitária, 2011.

CARRION, R.M.M. **Ciência Empírica e Justificação (Por uma leitura epistemológica do *Aufbau*).** 1990. 278f. Tese (Doutorado) - Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, 1990.

CASTAÑON, Gustavo Arja. **Construtivismo Social: A ciência sem sujeito e sem mundo.** Rio de Janeiro, 2009. Dissertação (Mestrado em Filosofia: Lógica e Metafísica) – Programa de Pós-graduação Lógica e Metafísica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

CHAUVIRÉ, Christiane. **Le moment anthropologique de Wittgenstein**. Paris: Editions Kimé, 2008.

CONDÉ, Mauro Lúcio Leitão. **Wittgenstein:** Linguagem e mundo. São Paulo: Annablume, 1998.

________. **As Teias da Razão**: Wittgenstein e a crise da racionalidade moderna. 1. ed. Belo Horizonte: Argvmentvm, 2004. 240p.

COSTA, Claudio. **Filosofia da Linguagem**. Rio de Janeiro: Jorge Zaher Editora, 2015.

COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Alberto P. **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris**: Matemática. São Paulo: Ática, 2012. (6º ao 9º ano).

DORNELES, Lucienne. **Construtivismo**: uma contribuição para a racionalização da educação? Dissertação de mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação – Universidade Metodista de Piracicaba, 2008.

DEVLIN, K. **O gene da matemática**. Rio de Janeiro: Record, 2004.

DUARTE, Newton. **Vigotski e o "aprender a aprender"**: crítica às apropriações neoliberais e pós-modernas da teoria vigotskiana. 2. ed. rev. e ampl. Campinas, SP: Autores Associados, 2001. (Coleção educação contemporânea)

DUARTE, Aparecida. **Matemática e educação matemática: a dinâmica de suas relações ao tempo do movimento da matemática moderna no Brasil**. Dissertação de Mestrado. PUC-SP, 2007.

DUMMETT, Michael. **Origins of Analytical Philosophy**. London: Duckworth; Cambridge: Harvard University, 1993.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução: Lênio Levy e Marisa Silveira. São Paulo: Editora da Física, 2009, 113p.

ENGELMANN, Mauro. As Filosofias da matemática de Wittgenstein: Intensionalismo sistêmico e a aplicação de um novo método (sobre o desenvolvimento da filosofia da matemática de Wittgenstein). **doispontos**, Curitiba, São Carlos, vol. 6, n. 2, p.165-184, outubro, 2009.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas, Editora Unicamp, 2004

FANN, K. T. **El concepto de filosofía en Wittgenstein**. Madri: Editorial Tecnos, 2013.

FAYOL. Michel. **Numeramento:** aquisição das competências matemáticas. São Paulo: Parábola Editorial, 2012.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M.A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-Posições** (Unicamp), v. 4, n.1(10), p. 78-91, 1993.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E.M. **Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico**. In: CIBEM V - Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática, 2005.

FLOYD, Juliet. Das Überraschende: Wittgenstein sobre o surpreendente em Matemática. **Bolema**, vol. 24, núm. 38, abril, 2011, pp. 127-169

FRANCO, Sergio Roberto Kieling. **O construtivismo e a educação**. 4º ed. Porto Alegre: Mediação, 1995.

FRÁPOLLI, Mariá J. Releitura de Miguel Espinoza. **El desmigajador de la realidad: Wittgenstein y las matemáticas**. Mod. Log. 6, no. 1, 1996.

FRASCOLLA, P. Wittgenstein sur la preuve mathématique. In: FLOYD, J. et al. **Wittgenstein et les mathématiques**. Paris: T. E. R., 2004, p. 43-60.

FREIRIA, A. C. A teoria dos conjuntos de Cantor. **Paidéia**, Ribeirão Preto, n. 2, p.70-77, 1992.

GIARDINETTO, José Roberto Boettger. **Matemática escolar e matemática da vida cotidiana**. Campinas: Autores Associados, 1999. 134p.

________. A matemática em diferentes contextos sociais: diferentes matemáticas ou diferentes manifestações da matemática? Reflexões sobre a especificidade e a natureza do trabalho educativo escolar. In: **25ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação**, 2002, Caxambu. 25ª Reunião Anual - Resumos de Trabalhos. Petropolis: Vozes, 2002. p. 147-148.

________. **O questionamento da objetividade e universalidade da matemática a partir da crítica à neutralidade do conhecimento matemático em pesquisas etnomatemáticas:** algumas reflexões. In: VII ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo. São Paulo/SP: USP, 2004.

GIOVANNI JR., José Ruy e CASTRUCCI, Benedicto. **A Consquista da Matemática.** Ed. Renovada. São Paulo: FTD, 2009. (6º ao 9º ano).

GLOCK, Hans-Johann. **Dicionário de Wittgenstein.** Rio de Janeiro: Zahar, 1998.

GÓMEZ-GRANELL, Carmem. **La adqusición del languaje matemático:** un difícil equilíbrio entre el rigor y el significado. Comunicación, Lenguaje y Educación, 1989.

________. **Rumo a uma epistemología do conhecimento escolar:** o caso da educação matemática. In: RODRIGO, Maria J.; ARNAY, J. (Org.). Domínios do conhecimento, prática educativa e formação de professores. São Paulo: Ática, 1998.

________. A aquisição da linguagem matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, Ana. TOLCHINSKY, Liliana. (Orgs.). **Além da alfabetização**: a aprendizagem fonológica ortográfica, textual e matemática. São Paulo: Editora ática, 2003, p. 257-282.

GOTTSCHALK, Cristiane. **Uma reflexão filosófica sobre a matemática nos PCN**. 154 f. Tese (Doutorado em filosofia da Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

________. A Natureza do Conhecimento Matemático sob a Perspectiva de Wittgenstein: algumas implicações educacionais. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência** (UNICAMP), v. 14, p. 305-334, 2004a.

________. **Reflexões sobre contexto e significado na educação matemática**. In: VII ENCONTRO PAULISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2004, São Paulo. VII Encontro Paulista de Educação Matemática. São Carlos: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2004b.

________. O papel da linguagem no ensino e na aprendizagem da perspectiva de uma pragmática filosófica de inspiração wittgensteiniana. In: **28º Reunião da ANPED**, 2005, Caxambu. 40 anos de Pós-Graduação em Educação no Brasil - 28ª Anped. Petropólis - RJ: Editora Vozes, 2005. v. 1. p. 389-389.

________. Ver e ver como na construção do conhecimento matemático. In: IMAGUIRE, Guido; MONTENEGRO, M.A.P.; PEQUENO, T. (Org.). **Colóquio Wittgenstein** - Série Filosofia. 1ª ed. Fortaleza: UFC, 2006, v. 3, p. 73-93.

________. Uma concepção pragmática de ensino e aprendizagem. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v.33, n.3, p. 459-470, set./dez. 2007a.

________. O Papel do Mestre: Mênon revisitado sob uma perspectiva wittgensteiniana. **Revista Internacional d´Humanitats** 11, CEMOrOCFeusp/ Núcleo HumanidadesESDC/ Univ. Autónoma de Barcelona, 2007b.

________. A construção e transmissão do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana. **Cad. cedes**, campinas, vol. 28, n. 74, p. 75-96, jan./abr. 2008.

________. **O sentido formativo da matemática**. São Paulo: Instituto de Estudos Avançados da USP, 2009a (Publicações do Instituto de Estudos Avançados da USP).

________. O conceito de compreensão - a mudança de perspectiva de Wittgenstein após uma experiência docente. In: **32ª Reunião anual da ANPED** - Sociedade, cultura e educação: novas regulações? 2009, Caxambu. Sociedade, cultura e educação: novas regulamentações? Rio de Janeiro: ANPED, 2009b.

________. O Papel do Método no Ensino: da Maiêutica Socrática à Terapia Wittgensteiniana. **ETD: Educação Temática Digital**, v. 12, p. 64-81, 2010.

________. O paradoxo do ensino da perspectiva de uma epistemologia do uso. **Educação e Filosofia** (UFU. Impresso), v. 27, p. 659-674, 2013a.

________. A inserção nos jogos de linguagem da perspectiva de uma epistemologia do uso. **International Studies on Law and Education**, v. 15, p. 63-70, 2013b.

________. Fundamentos filosóficos da matemática e seus reflexos no contexto escolar. **International Studies on Law and Education**, v. 18, p. 73-82, 2014a.

________. A terapia wittgensteiniana como esclarecedora de conceitos fundamentais do campo educacional. IXTLI **Revista Latinoamericana de Filosofía de la Educación**, v. 2,4, p. 299-315, 2015.

GRANGER, Gilles-Gaston. **O irracional**. Trad. De Alvaro Lorencini. São Paulo: Editora UNESP, 2002.

________. **Filosofia, linguagem, ciência.** São Paulo: Ideias & Letras, 2013.

HABERMAS, Jurgen. **Consciência Moral e Agir Comunicativo**. Trad. Guido de Almeida. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 1989.

HACKER, P. M. S. **Wittgenstein:** sobre a natureza humana. (Tradução: João Vergílio Gallenari Cuter). São Paulo: Editora UNESP, 2000.

HEBECHE, Luiz. **O mundo da consciência.** Porto Alegre: EDIPUCRS, 2002.

HERNANDEZ, J. (org). **La ensenanza de las matemáticas modernas**. 3ª ed. Madrid: Alianza Editorial, 1986, p 140 - 156.

HERRERO, Francisco Javier; NIQUET, Marcel. **Ética do discurso:** novos desenvolvimentos e aplicações. São Paulo: Francisco Javier Herrer, 2002.

IBAÑEZ, T. O “giro lingüístico”. In: IÑIGUEZ, L. **Manual de Análise do Discurso em Ciências Sociais**. Petrópolis, Vozes, 2004.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Oswaldo; MACHADO, Antônio. **Matemática e Realidade**. 6. Ed. São Paulo: Atual, 2009. (6º ao 9º ano).

IMAGUIRE, G. A filosofia da matemática de Wittgenstein para além do platonismo e do nominalismo In: MORENO (org.) **Wittgenstein**: ética, estética, epistemologia. Campinas: UNICAMP, Centro de lógica, epistemologia e história da ciência, 2006.

KAMII, Constance. **Reinventando a aritmética**: implicações da teoria de Piaget. São Paulo: Papirus, 1986.

KANT, Immanuel. **Crítica da razão pura**. Tradução de Lucimar Anselmi e Fulvio Lubisco. 3ª ed. São Paulo: Ícone, 2011.

MODERNA. Obra coletiva. Editor Responsável: Fábio Martins Leonardo. **Projeto Araribá**: Matemática. 3. Ed. São Paulo: Moderna, 2010. (6º ao 9º ano).

LIBÂNEO, José Carlos. As teorias pedagógicas modernas revisitadas pelo debate contemporâneo na educação. In: LIBÂNEO, José Carlos; SANTOS, Akiko (Orgs.). **Educação na era do conhecimento em rede e transdisciplinaridade**. 3. ed. Campinas: Atomoealinea, 2010. p. 19-62.

LINS, Rômulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. São Paulo: Papitus, 1997.

MACHADO, Alexandre Noronha: **Lógica e Forma de Vida – Wittgenstein e a natureza da necessidade lógica e da filosofia –** Tese de Doutorado, UFRGS, Porto Alegre, 2004.

MACHADO, Nilson José. Interdisciplinaridade e Matemática. **Pro-Posições**, v. 4 n.1 [10], p. 24-33, 1993. Disponível em: http://www.nilsonjosemachado.net/partigos.html

________. **Matemática e Educação**: alegorias, tecnologias, jogo, poesia. 6ª ed. São Paulo: Cortez, 2012 (Coleção questões da nossa época; v. 43)

________. **Matemática e Língua Materna** - Edição ampliada. 6. ed. São Paulo: Cortez Editora, 2011.

MARCELLINO JR, Julio Cesar. O giro linguístico contemporâneo e os contributos de Heidegger e Gadamer: o renascer da hermenêutica jurídica. **Revista Eletrônica Direito e Política**, Itajaí, v.2, n.3, 3º quadrimestre de 2007. Disponível em:www.univali.br/direitoepolitica.

MARCONDES, Danilo. Duas concepções de análise no desenvolvimento da filosofia analítica. In: CARVALHO, Maria Cecília M. (Org.) **Paradigmas filosóficos da atualidade.** Campinas, Papirus, 1989.

________. **Filosofia Analítica**. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2004.

________. A Pragmática na Filosofia Contemporânea. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2005.

MARÍAS, Julián. **História da filosofia**. Trad. Claudia Berliner. São Paulo: Martins Fontes, 2004.

MARION, Mathieu. Wittgenstein et la preuve mathématique comme vérifacteur. **Philosophiques**, vol. 38, n° 1, 2011, p. 137-156.

MEDINA, José. **Linguagem:** conceitos-chave em filosofia. Porto Alegre: Artmed, 2007.

MENEGHETTI, Renata. O conhecimento matemático no realismo e no idealismo: compreensão e reflexão. **Episteme**, Porto Alegre, n. 16, p. 137-149, jan./jun. 2003.

________. O realismo e o idealismo: focalizando o conhecimento matemático. *In*: MARTINS, R. A.; MARTINS, L. A. C., P.; SILVA, C. C.; FERREIRA, J. M. H. (eds.). **Filosofia e história da ciência no Cone Sul**: 3º Encontro. Campinas: AFHIC, 2004. Pp. 371- 377.

MIGUEL, A. e MIORIM, M. A. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. Belo Horizonte, Brasil: Autêntica, 2004.

MIGUEL, A.; FIORENTINI, D.; MIORIM, M.A. Algebra ou Geometria: para onde pende o pêndulo? **Pro-Posições** (Unicamp), v. 3, n.7, p. 39-54, 1992.

MILIES, César Polcino. **Breve história da álgebra abstrata**. Minicurso da II Bienal da SBM, 2004.

MIRANDA, Marilene. **A fusão da aritmética, álgebra e geometria, no período de 1890 a 1930, no Brasil**. Dissertação de Mestrado. PUC-SP, 2003.

MORENO, Arley Ramos. Descrição gramatical como terapia filosófica: Ilusão ontológica. **Revista Latinoamericana de Filosofia**, 12 (3):323, 1986.

________. **Wittgenstein - Através das Imagens**. Campinas: Editora da UNICAMP, 1995.

________. Por uma pragmática filosófica. **Caderno de Estudos Linguísticos**, Campinas, (30): 9-20, Jan./Jun. 1996.

________. Wittgenstein e os valores: do solipsismo à intersubjetividade. **Natureza Humana**, v. 3, p. 233-288, 2001.

________. Descrição fenomenológica e descrição gramatical: idéias para uma pragmática filosófica. **Revista Olhar**, UFSCar, v. IV, n.7, p. 94-139, 2003.

________. Uma concepção de Atividade Filosófica. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência** (UNICAMP), CLE / UNICAMP, v. 14, n.2, p. 275-302, 2004.

________. **Introdução a uma pragmática filosófica**: de uma concepção de filosofia como atividade terapêutica a uma filosofia da linguagem. Campinas, São Paulo. Editora da UNICAMP, 2005.

________. **Wittgenstein**: os labirintos da linguagem. Campinas: Editora Moderna, 2006.

________. Pragmática da relação/propriedade interna. **doispontos**, Curitiba, São Carlos, vol. 6, n. 1, p.145-166, abril, 2009.

________. Wittgenstein: um projeto epistemológico - Em direção a uma epistemologia do uso. In: MORENO, Arley Ramos. (Org.). **Wittgenstein - Certeza?** Campinas: Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2010, v. 58, p. 11-47.

________. Introdução a uma epistemologia do uso. **Caderno crh**, Salvador, v. 25, n. spe 02, p. 73-95, 2012.

________. **Wittgenstein**: apontamentos para uma epistemologia do uso. Salvador: Quarteto, 2013.

________. Breves anotações sobre educação e filosofia contemporânea. In: GOTTSCHALK, Cristiane M. C.; PAGOTTO-EUZEBIO, Marcos Sidnei; ALMEIDA, Rogério de. (Org.). **Filosofia e Educação**: Interfaces. 1ª ed. São Paulo: Képos, 2014, v. 1, p. 101-110

MORO, Maria Lúcia. Construtivismo e educação matemática. **Educ. Mat. Pesqui**., São Paulo, v. 11, n. 1, pp. 117-144, 2009.

NIGRO, Rachel. A virada linguístico-pragmática e o pós-positivismo. **Direito, Estado e Sociedade**, n.34 p. 170 a 211 jan/jun 2009.

OLIVEIRA, Manfredo Araújo de. **Reviravolta lingüístico-pragmática na filosofia contemporânea**. 2ª Ed. São Paulo: Edições Loyola, 2001.

OLIVEIRA, Paulo Sampaio Xavier de. Implicações do Pensamento de Wittgenstein para o Ensino de Línguas. **Cadernos de História e Filosofia da Ciência** (UNICAMP), v. 14, p. 335-363, 2004.

OLIVEIRA, Wagner Teles. Wittgenstein e o pragmatismo. **Ideação**, Feira de Santana, n. 24 p. 33-48, jan./jun. 2011.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**; uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PIAGET, Jean. **Psicología y pedagogia**. Título original: Psychologie et pédagogie. Recoge dos obras del autor: Education et instruction depuis 1935 (1965) y Les méthodes nouvelles, leurs bases psychologiques (1935). Traducción: Francisco Fernández Buey. Editor digital: Mowgli (ePub), 1969.

________. **A epistemologia genética**. Trad. Nathanael C. Caixeira. Petrópolis: Vozes, 1971.

_______. Aprendizagem e conhecimento. In: PIAGET, Jean e GRÉCO, Pierre. **Aprendizagem e conhecimento**. Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1974. p.33-91.

_______. **Problemas de epistemologia genética**. São Paulo: Abril Cultural, 1975. (Os pensadores, 51)

________. **Abstração reflexionante**; relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995 (Tradução de Fernando Becker e Petronilha B. G. da Silva), 1977.

_______. Commentaires sur les remarques critiques de Vygotsky. In: SCHNEWLY, B. e BRONCKART, J. P. (dir.). **Vygotsky aujourd'hui**. Neuchâtel/Paris, Delachaux et Niestlé, 1985.

________. La iniciación matemática, las matemáticas modernas y la psicologia del niño. In: HERNANDEZ, J. (org). **La ensenanza de las matemáticas modernas**. 3ª ed. Madrid: Alianza Editorial, 1986a, p 140 - 156.

________. Observaciones sobre la educación matemática. In: HERNANDEZ, J. (org). **La ensenanza de las matemáticas modernas**. 3ª ed. Madrid: Alianza Editorial, 1986b, p 140 - 156.

________. **Sobre a Pedagogia** (textos inéditos). São Paulo: Casa do Psicólogo, 1998.

________. **Seis estudos de psicologia.** Trad. Maria A.M. D'Amorim; Paulo S.L. Silva. Rio de Janeiro: Forense, 2007.

PIAGET, J; INHELDER, B. **Gênese das estruturas lógicas elementares.** 2 ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1975.

PIAGET, Jean; GARCIA, Rolando. **Psicogênese e história das ciências**. Petrópolis: Editora Vozes, 2011.

PIEROBON, Frank. **Kant et les mathématiques**. La conception kantienne des mathématiques, Paris, Vrin, 2003.

PIMM, David. **El lenguaje matemático en el aula**. Madrid: Morata, 2002.

PINTO, Neuza Bertoni. Desafios e Contribuições da História Cultural para a Escrita da História da Educação Matemática. In: **IX EDUCERE, 2009**, Curitiba. Anais do IX EDUCERE. Curitiba, 2009.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P., BOAVIDA, A., GRAÇA, M., & ABRANTES, P. **Didáctica da matemática**. Lisboa: DES do ME, 1997.

PONTE, J.; BRANCO, N; MATOS, A. **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: DGIDC, 2009.

PRATT, G. V. **História da álgebra**. In: Tópicos de história da matemática: para uso em sala de aula. Trad. Hygino H. Domingues. 1ª Ed. São Paulo. Atual, 1993.

PRESTES, Nadja Hermann. **Educação e Racionalidade**: conexões e possibilidades de uma razão comunicativa na escola. Porto Alegre: Edipucrs, 1996.

PUTNAM, Hilary. Wittgenstein, le réalisme et les mathématiques. In: BOUVERESSE, J.; LAUGIER, S.; ROSAT, J-J. (Orgs). **Wittgenstein, dernières pensées**. Marseille: Agone, 2002.

REALE, Giovanni e ANTISERI, Darlo. **Historia da filosofia**, v. 7: de Freud a atualidade. São Paulo: Paulus, 2006.

REIS, Maria Fernanda de Moura. **O Dicionário para escolas primárias de Ludwig Wittgenstein e a virada linguística.** Dissertação (Mestrado – Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de Concentração: Filosofia da Educação) - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 2010.

REVISTA NOVA ESCOLA. “O tira-teima do Construtivismo: 50 grandes e pequenas dúvidas esclarecidas”, **Nova Escola**, n° 82, março/1995.

ROCHA, Gustavo Rodrigues. Perspectivas metodológicas: Uma Proposta de Modelo Meta-Teórico para as Teorias de Aprendizagem. **Caderno de Física da UEFS** 06 (01 e 02): 31-85, 2008.

RORTY, R. **El giro linguistico.** Madri: Paidos, 1990.

SANTOS, Ivanaldo. A possibilidade do esgotamento do giro linguístico. **Notandum**. 34, jan-abr, CEMOrOC-Feusp/IJI-Universidade do Porto, 2014.

SANTOS, bento; MULINARI, Filicio. Agostinho e Wittgenstein em torno da linguagem: o problema da significação. Mirabilia 20 (2015/1). **Arte, Crítica e Mística** – Art, Criticism and Mystique Jan-Jun 2015.

SARRAZY, Bernard. Pratiques d’éducation familiale et sensibilité au contrat didactique dans l’enseignement des mathématiques chez des élèves de 9-10 ans. **Revue Internationale de l’Éducation Familiale**. 2002.

SAVEDRA, Vera Lucí Alves. **Difusão da perspectiva construtivista na FaE/UFPel (décadas de 80-90)**. Dissertação de Mestrado em Educação. Universidade Federal de Pelotas, 2007.

SCHLIEMANN A., CARRAHER D. e BRIZUELA B. **El carácter algebraico de la aritmética**: de las ideas de los niños a las atividades em el aula. Traducido por Rolf Biekofsky. 1ª Ed. Buenos Aires, Paidós, 2011.

SCHMITZ, François. **Wittgenstein, la philosophie et les mathématiques**. Paris: PUF, 1988.

________. **Wittgenstein**. São Paulo: Liberdade, 2004.

SILVA, Jairo José da. **Filosofias da matemática.** São Paulo: Editora da UNESP, 2007.

SILVA, João Carlos. Filosofia e terapia em Wittgenstein. **Analytica** (UFRJ), Rio de janeiro, v. 9, n. 2, p. 87-114, 2005.

SILVA, José Moreira da. Linguagem, metalinguagem e gramática em Ludwig Wittgenstein. **Philosophica 7**, Lisboa, Edições Colibri, 1996, pp. 105-123.

SILVA, Tomaz Tadeu da. **Teoria Cultural e Educação: um vocabulário crítico**. Belo Horizonte: Autentica, 2000.

SILVEIRA, Marisa R. A interpretação da matemática na escola, no dizer dos alunos: ressonâncias do sentido de. **Educação Matemática em Revista**, Rio Grande do Sul, v. 4, n.4, p. 23-32, 2002.

_________. **Produção de sentidos e construção de conceitos na relação ensino/aprendizagem da Matemática.** Porto Alegre: UFRGS, 2005. Tese (Doutorado).

SILVEIRA, Marisa Rosâni Abreu da; SILVA, Paulo Vilhena da. A Compreensão de Regras Matemáticas na Formação Docente: uma pesquisa sob o ponto de vista da linguagem. **Arquivos Analíticos de Políticas Educativas**, vol. 21, nº. 27. Dossiê Formação de Professores e Práticas Culturais: descobertas, enlaces, experimentações, 2013.

STRUIK, Dirk J. **História Concisa das Matemática**s. Gradiva. Lisboa: 1989

THOM, R. Modern Mathematics: does it exist? In: HOWSON, A.G. (Ed.). **Developments in mathematical education.** Cambridge: Cambridge University Press, 1973. p.194-209

TOLCHINSKY, L. Construtivismo em educação: consensos e disjuntivas. In: RODRIGO, M. J.; ARNAY, J. (Orgs.). **Domínios do conhecimento, prática educativa e formação de professores**: A construção do conhecimento escolar. São Paulo, SP: Ática, v.2, 1998, p.103-123.

VASCONCELOS, M. S. **A difusão das ideias de Piaget no Brasil**. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1996.

VECCHIO JR, Jacintho Del. **Metafisica e racionalidade científica**: um ensaio sobre os fundamentos da matemática. 2011. Tese (Doutorado em Filosofia) - Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/8/8133/tde-15122011-154001/>. Acesso em: 2016-04-30.

VIERO, Cátia; TREVISAN, Amarildo; CONTE, Elaine. Filosofia da educação a partir do diálogo contemporâneo entre analíticos e continentais. **Abstracta** 1:1 pp. 92 – 107, 2004.

VYGOTSKY, Lev. **Pensamento e linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 1995.

________. **A formação social da mente.** Rio de Janeiro: Martins Fontes, 1996.

WADSWORTH, Barry. **Inteligência e Afetividade da Criança na teoria de Piaget.** São Paulo: Pioneira, 1996.

WITTGENSTEIN, Ludwig. **Observaciones sobre los fundamentos de la matemática (OFM).** Edición de G. Henrik von Wright, R. Rhees y G. E. M. Anscombe. Versión espanola de Isidoro Reguera. Alianza Editorial, Madrid, 1987.

________. **Zettel (Z)**. Lisboa: Edições 70, 1989.

________. **Tractatus logico-philosophicus (TLP).** Tradução de Luiz Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: Edusp, 1993.

________. **Investigações filosóficas (IF).** Tradução de José Carlos Bruni. São Paulo: Nova cultural, 1999 (coleção os pensadores).

________. **Da certeza (DC).** Tradução de Maria Elisa Costa. Lisboa: Edições 70, 2000.

________. **Gramática Filosófica (GF).** São Paulo: Edições Loyola, 2003.

________. **Observações Filosóficas (OF).** Tradução de Adail sobral e Maria Stela Gonçalves São Paulo: Loyola, 2005.

________. **The Big Typescript - Escrito a máquina (BT)**. Madrid: Editorial Trotta, 2014.

APÊNDICE A - Quadro com lista de teses e dissertações

Na primeira coluna há um número de identificação do trabalho que vai de 1 a 102. Na segunda coluna colocamos, na ordem, o nome do autor, em seguida o título, e depois o orientador ou orientadora, o grau e o nome do título, e a universidade. Na terceira coluna temos os dados de nossa análise, que contém o referencial teórico, o nível/público, o conteúdo matemático e a pesquisa.

Com relação ao *referencial teórico* apontamos como definimos este na página 147 desta tese.

Na parte *Nível/Público* entendemos como o nível ou o público alvo da pesquisa. Em alguns casos a análise é de livros, documentos, textos, etc. e não há um público definido, mas é direcionado para uma série ou nível, o ensino fundamental I ou II, ensino médio, toda a educação básica ou o ensino superior. Não delimitamos a pesquisa nesse sentido. Há casos em que pesquisas utilizaram um público como alvo, mas realizaram também análise de documentos, livros, etc. Nesses casos destacamos o nível apenas.

Com relação ao *conteúdo matemático* há conteúdos específicos, mas há análise da álgebra em geral, da introdução à álgebra e até da pré-álgebra, que seriam os trabalhos que buscaram analisar a álgebra antes do 7º ano.

Com relação ao tópico *pesquisa* buscamos apontar de modo mais sucinto possível o tipo de pesquisa e seu objetivo, algumas vezes deixando mais claro um do que o outro.

Na terceira coluna buscamos traçar uma relação entre os tópicos destacados, ou seja, quando apontamos um público, seja alunos ou professores, dizemos na pesquisa que houve questionário ou análise de atividades, estamos nos referindo ao público informado.

As referências constam apenas com o nome do autor que faz referência às suas teorias, referências que já constam nesta tese, e outros que apresentamos em notas de rodapé e quando for mais de uma obra, faremos uma breve descrição sobre o autor utilizado, indicando os anos das obras utilizadas, sem indicar as obras, apenas para colocar o período de publicação dos autores.

Colocamos a seguir os nomes que utilizaremos nas tabelas e em parênteses as teorias: **Piaget** (Epistemologia genética); **Vygotsky** (Sóciointeracionismo); **Heidegger** e **Gadamer** (Hermenêutica filosófica); **Husserl** e **Merleau-Ponty** (Fenomenologia); **Ausubel** (Aprendizagem significativa); **Papert** (Construcionismo); **Douady** (Dialética Ferramenta-Objeto); **Duval** (Teoria dos registros de representação semiótica); **Artigue** (engenharia didática); **Vergnaud** (Teoria dos Campos Conceituais); **Simon** (Trajetórias hipotéticas de aprendizagem); **Shulman** (conhecimento pedagógico do conteúdo); **Bassanezi, Biembemgut, Barbosa e Hein** (Modelagem matemática); **Ursini** (Modelo 3UV); **Polya** (refere-se à obra "a arte de resolver problemas" de 1945).

Com relação a **Chevallard**, apontaremos Chevallard (TAD), para a relação com a teoria antropológica do didático e Chevallard (TD), quando for relacionada à transposição didática, e apenas Chevallard, se for referência à sua obra de modo geral. Com relação a **Brousseau**, apontaremos Brousseau (TSD), para a relação com a Teoria das Situações Didáticas e Brousseau (OED), para a relação com os obstáculos epistemológicos e didáticos. Citaremos também **Kaput -** fazendo referência a James Kaput que foi um influente teórico sobre o ensino de álgebra -, **Ponte**, que se refere a João Pedro da Ponte, teórico de educação matemática, que tem extensa publicação sobre ensino de álgebra – e **Kieran** – referente a Carolyn Kieran que possui uma extensa produção sobre o ensino de álgebra, sendo um dos referenciais mais conhecidos e usados da coletânea Coxford e Shulte (1995). Kaput, Ponte e Kieran já apresentados nesta Tese defendem a noção de pensamento algébrico. O termo **PCN**, refere-se aos parâmetros curriculares nacionais do ensino fundamental. O termo **Documentos oficiais** se refere a diversos documentos nacionais e estaduais.

Quadro: Lista de tese e dissertações

	Dados da dissertação/tese	**Informações principais**
	2006	
1	MARTINS, Lourival Pereira. **Análise da Dialética Ferramenta Objeto na Construção do Conceito de função.** Orientador: Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Douady.** Nível/Público: 9º ano do ensino fundamental Conteúdo matemático: Função Pesquisa: Sequência didática.
2	SILVA, Maria Helena. **Estudos das visões sobre álgebra presentes nos parâmetros curriculares nacionais de matemática do ensino fundamental em relação a números e operações.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Bárbara Lutaif Bianchini.	Referencial teórico: **PCN; Lins e Gimenez (1997); Lee**[58]. Nível/Público: ensino fundamental. Conteúdo matemático: álgebra em geral. Pesquisa: análise de documentos, livros didáticos e Entrevistas.

[58] LEE, Lesley. **Earley Alegbra – but Which Algebra?** Proceedings of the 12 th ICMI Study Conference: The Future of the Learning of Algebra. Editado por Helen Chick, Kaye, Stacey, Jill Vincent & John Vincent. Vol. 2, p. 392-399, dez. 2001.

	Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP.	
3	GRANDE, André Lúcio. **O conceito de independência e dependência linear e os registros de representação semiótica nos livros didáticos de álgebra linear.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Bárbara Lutaif Bianchini. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Duval** Nível/Público: ensino superior Conteúdo matemático: dependência e independência linear. Pesquisa: Análise de livros didáticos.
4	CHRISTO, Danilo dos Santos. **Introdução da noção de Variável em expressões algébricas por meio da resolução de problemas: uma abordagem dinâmica.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Anna Franchi. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Kieran; Kücheman**[59]**; Arcavi**[60]**.** Nível/Público: 7º ano do ensino fundamental Conteúdo matemático: Função. Pesquisa: Análise de registros.
5	TODESCO, Humberto. **Um estudo com números inteiros nas séries iniciais: Re-aplicação da pesquisa de Passoni.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Sandra Magina. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Passoni**[61]**; Piaget; Duval.** Nível/Público: Alunos do 4º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: números inteiros. Pesquisa: Intervenção pedagógica.
6	MARTINS, César Ricardo. **Resolução de equações algébricas por radicais.** Orientador: Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNESP/RC.	Referencial teórico: **Teóricos de história da matemática.** Nível/Público: Ensino Superior. Conteúdo matemático: Equações algébricas/radicais. Pesquisa: Análise histórica como auxílio para o ensino.
7	JACOMELLI, Karina Zolia.	Referencial teórico: **Duval.** Nível/Público: ensino fundamental II

[59] KÜCHEMAN, D. **Algebra**. Chidren's understanding of mathematics. 11-16. London, England.: John Murray, 1981.
[60] ARCAVI, A. **On the Meaning of Variable**. Technical Report, School of Education, University of California, Berkeley, 1987.
[61] PASSONI, João. **(pré)Álgebra: introduzindo os números inteiros negativos**. Dissertação de mestrado. São Paulo: PUC, 2002.

	A linguagem natural e a linguagem algébrica: nos livros didáticos e em uma classe de 7ª série do ensino fundamental. Prof.ª Dr.ª Neri T. Both Carvalho. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e tecnológica). UFSC.	Conteúdo matemático: Inequações algébricas. Pesquisa: Análise de livros didáticos e observação de uma classe em aula.
	2007	
8	SOUZA, Vera Helena. **O uso de vários registros na resolução de inequações: uma abordagem funcional gráfica.** Orientador: Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Duval; Artigue.** Nível/Público: alunos do ensino superior, 1º ano de licenciatura em matemática e professores de matemática da educação básica. Conteúdo matemático: Inequações algébricas. Pesquisa: Análise de livros didáticos e sequência didática.
9	LIMA, Rosana Nogueira de. **Equações algébricas no ensino médio: Uma jornada por diferentes mundos da matemática.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Siobhan Healy. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Tall**[62]. Nível/Público: 1º e 2º anos do ensino médio. Conteúdo matemático: Equações algébricas. Pesquisa: Análise de concepções por questionário, entrevista e testes.
10	FIGUEIREDO, Auriluce de Carvalho. **Saberes e concepções de educação algébrica em um curso de licenciatura em matemática.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Cristina Maranhão. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Fiorentini, Miorim e Miguel (1993); Lee**[63]**; Shulman.** Nível/Público: Alunos e professores do ensino superior. Conteúdo matemático: álgebra em geral. Pesquisa: Observações de aula.
11	RIBEIRO, Alessandro Jacques. **Equações e seus multisignificados no ensino de matemática: contribuições de um estudo epistemológico.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Silvia Dias Alcântara Machado.	Referencial teórico: **Duval; Chevallard (TD)**. Nível/Público: Educação básica. Conteúdo matemático: Equações algébricas.

[62] David Tall é o criador da Teoria de processos-objeto, Cognição corporificada e do Quadro teórico dos três mundos da matemática, que são utilizadas na Tese. A autora da Tese se utiliza de diversas publicações do autor, com destaque para três de 2004.

[63] Já vimos Lee na nota 58. Quando houver outras repetições estaremos nos referindo à obras (ou obras) já citadas, salvo exceções, que serão devidamente identificadas em notas.

	Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC/SP.	Pesquisa: Estudo epistemológico a partir da análise histórica, de livros didáticos e de artigos científicos.
12	RESENDE, Marilene Ribeiro. **Re-significando a disciplina teoria dos números na formação do professor de matemática na licenciatura.** Prof.ª Dr.ª Silvia Dias Alcântara Machado. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Chevallard (TD); Shulman; Campbell & Zazkis**[64]**.** Nível/Público: ensino superior. Conteúdo matemático: Teoria dos números. Pesquisa: Análise de propostas curriculares, livros didáticos e entrevistas com educadores matemáticos.
13	TELES, Rosinalda. **Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Paula Bellemain. Tese (Doutorado em Educação). UFPE.	Referencial teórico: **Vergnaud.** Nível/Público: Educação básica. Conteúdo matemático: Fórmulas de área. Pesquisa: Análise em textos de história, nos livros didáticos, provas de vestibular e aplicação de testes.
14	LIMA, Diana Maia de. **Função Quadrática: um Estudo Didático de uma Abordagem Computacional.** Orientador: Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Artigue; Duval; Brousseau (TSD).** Nível/Público: 9º ano ensino fundamental. Conteúdo matemático: Função do 2º grau. Pesquisa: Sequência didática e análise de livros de didáticos.
15	CARDIA, Liciana Simoneti. **Integrando a geometria com a álgebra na construção de expressões algébricas.** Orientador: Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Douady**; **Duval.** Nível/Público: Professores da educação básica e alunos do 8º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Expressões algébricas. Pesquisa: Sequência didática.
16	SANTOS, Jonas Borseti Silva. **Argumentação e Prova: Análise de Argumentos algébricos de alunos da Educação Básica.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Sonia Coelho.	Referencial teórico: **Balacheff**[65]**.** Nível/Público: Professores e alunos do 9º ano do ensino fundamental e 1º ano do ensino médio. Conteúdo matemático: álgebra em geral.

[64] CAMPBELL, S. & ZAZKIS, R. **Learning and Teaching Number Theory - Research in Cognition and Instruction.** Monograph series of the Journal of Mathematical Behavior, vol. 2, Ablex Publishing, Westport, 2002.
[65] Nicolas Balacheff pertence à Didática da Matemática Francesa e tem várias publicações, sendo muitas em prova e argumentação, das quais o autor da dissertação faz uso de quatro, de 1982, 1987, 1988 e 1999.

	Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). PUC/SP	Pesquisa: Análise de concepções por questionário e entrevista.
17	BORGES, Antônio José. **Polinômios no ensino médio: Uma investigação em livros didáticos.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Sonia Coelho. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). PUC/SP	Referencial teórico: **Documentos oficiais.** Nível/público: ensino médio. Conteúdo matemático: Polinômios e funções. Pesquisa: Análise de livros didáticos.
18	BARBOSA, Edna Santos. **Argumentação e prova no ensino médio: análise de uma coleção didática de matemática.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Sônia Coelho. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). PUC/SP	Referencial teórico: **Balacheff**[66]**.** Nível/público: ensino médio. Conteúdo matemático: álgebra e geometria em geral. Pesquisa: Análise de livros didáticos.
19	KEPPKE, Charston Lima. **A álgebra nos currículos do ensino fundamental.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Célia Maria Carolino Pires. Dissertação (Mestrado profissional de Educação Matemática). PUC/SP	Referencial teórico: **Fiorentini, Miorim e Miguel (1993); Lins e Gimenez (1997); Usiskin (1995).** Nível/público: Professores de 7º, 8º e 9º anos do ensino fundamental. Conteúdo matemático: álgebra em geral. Pesquisa: Análise de documentos oficiais e depoimentos
20	DANIEL, José Anísio. **Um estudo de equações algébricas do 1º grau com o auxílio do software APLUSIX.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Bárbara Lutaif Bianchini. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Cortés e kavafian**[67]**.** Nível/público: Alunos do 9º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Equações algébricas do 1º grau. Pesquisa: Análise de registros e Intervenção pedagógica.
21	SILVA, Umberto almeida. **Análise da abordagem de função adotada em livros didáticos de matemática da educação básica.** Orientadora: Profª Drª Bárbara Lutaif Bianchini.	Referencial teórico: **Duval.** Nível/público: Educação básica. Conteúdo matemático: Função. Pesquisa: Análise de livros didáticos.

[66] Balacheff aparece nesta dissertação como referência principal, mas o tempo todo em *apud*, pois a autora se utiliza de fato da Tese de Maria Alice Gravina.
[67] CORTÉS, A. & KAVAFIAN, N. **Les principles qui guident la pensée dans la résolution des équations.** ESA 7021, Cognition e activités finalisés, CNPS, Université Paris 8.

	Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). PUC/SP	
22	SALDANHA, Maria Sueli Gomes. **Análise de uma intervenção didática sobre desigualdades e inequações logarítmicas no ensino médio.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Cristina Maranhão. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). PUC/SP	Referencial teórico: **Douady.** Nível/público: Alunos do 2º ano do ensino médio. Conteúdo matemático: Inequações logarítmicas. Pesquisa: Intervenção pedagógica.
23	MELO, Marcelo de. **O ensino de desigualdades e inequações em um curso de licenciatura em matemática.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Cristina Maranhão. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Duval**. Nível/público: Professores de licenciatura em matemática. Conteúdo matemático: inequações algébricas. Pesquisa: Análise de documentos oficiais e Entrevistas.
24	CLARA, Margarete da Silva. **Resolução de inequações logarítmicas: um olhar sobre a produção dos alunos.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Cristina Maranhão. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Douady.** Nível/público: Alunos de 2º ano do ensino médio. Conteúdo matemático: Inequações logarítmicas. Pesquisa: Análise de registros.
25	FRANÇA, Michele Viana. **Conceitos fundamentais de álgebra linear: uma abordagem integrando geometria dinâmica.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Ana Paula Jahn. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP	Referencial **Duval; Vergnaud; Steffe e Thompson**[68]**.** Nível/público: alunos de 3º ano de licenciatura em matemática. Conteúdo matemático: álgebra linear. Pesquisa: Intervenção pedagógica.
26	SIGNORELLI, Shirley Ferreira.	Referencial teórico: **Chaves (2000)**[69]**; Castro et al**[70]**.**

[68] STEFFE, L. & THOMPSON, P. **Taching Experiment Methodology**: Underlying Principles and Essential Elements. In: KELLY, A. & LESH, R. (Eds.) Research Design in Mathematics and Science Education. London: LEA, p. 267-307, 2000.
[69] CHAVES, E. O. C. **A avaliação de software para EaD via internet**: algumas considerações preliminares. Edutec: 2000.
[70] CASTRO, M. et al. O conceito de montagem para análise e compreensão do discurso. In: **Boletim GEPEM**, n. 44, p. 43-62, jan/jun 2004.

	Um ambiente virtual para o ensino semipresencial de funções de uma variável real: design e análise. Orientadora: Prof.ª Dr.ª Janete Bolite Frant. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP.	Nível/público: Alunos e professores de cursos de bacharelado em ciência da computação e sistemas de informação. Conteúdo matemático: Função. Pesquisa: Intervenção pedagógica.
27	COSTA, Eduardo Sad da. **As equações diofantinas lineares e o professor de matemática do ensino médio.** Prof.ª Dr.ª Silvia Dias Alcântara Machado. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Campbell e Zazkis; Resende**[71]**.** Nível/público: Professores de ensino médio. Conteúdo matemático: Equações lineares. Pesquisa: Análise de entrevistas.
28	SCARLASSARI, Nathalia Tornisiello. **Um estudo de dificuldades ao aprender álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do ensino fundamental.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Anna Regina Lanner de Moura. Dissertação (Mestrado em Educação). UNICAMP.	Referencial teórico: **Construtivismo; Booth (1995)**[72]**; Vygotsky**. Nível/público: Alunos de 7º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Introdução à álgebra. Pesquisa: Análise de dificuldades em duas formas de ensino.
29	SOUZA, Adilson Sebastião de. **Metacognição e ensino da álgebra: análise do que pensam e dizem professores de matemática da educação básica.** Orientador: Prof. Dr. Vinício de Macedo Santos. Dissertação (Mestrado em Educação). PUC/SP.	Referencial teórico: **Teóricos da metacognição; Piaget; Vygotsky.** Nível/público: Professores do ensino fundamental II. Conteúdo matemático: álgebra em geral. Pesquisa: análise de falas.
30	BONADIMAN, Adriana. **Álgebra no ensino fundamental: produzindo significado para as operações básicas com expressões algébricas.** Orientação: Prof.ª Dr.ª Elisabete Zardo Burigo. Dissertação (mestrado em ensino de matemática). UFRGS.	Referencial teórico: **Küchemann; Booth; Ursini; Usiskin; Lins e Gimenez (1997); Polya; Vergnaud.** Nível/público: alunos do 8º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Expressões algébricas. Pesquisa: Intervenção pedagógica.
	2008	

[71] Trabalho 12 desta tabela.
[72] BOOTH, L. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. **As idéias da álgebra.** São Paulo, Atual Editora, 1995.

31	SANT'ANNA, Neide da F. Parracho. **Práticas pedagógicas para o ensino de frações objetivando a introdução à álgebra.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Gilda Palis. Tese (Doutorado em Educação). PUC/RJ.	Referencial teórico: **Wu**[73]**; Hart**[74]**.** Nível/público: Alunos de 7º e 8º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Introdução à álgebra. Pesquisa: Intervenção pedagógica.
32	CARVALHO JR, José Carlos. **Física e matemática – Uma abordagem construcucionista: Ensino e aprendizagem de cinemática e funções com auxílio do computador.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Sonia Coelho. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: PUC.	Referencial teórico: **Papert.** Nível/público: Alunos de 2º ano do ensino médio. Conteúdo matemático: Função. Pesquisa: Intervenção pedagógica.
33	MARTINS, Adriano de Morais. **Uma metanálise qualitativa das dissertações sobre equações algébricas no ensino fundamental.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Cristina Maranhão. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Metanálise qualitativa em Severino**[75]**; Fiorentini e Lorenzato**[76]**.** Nível/público: ensino fundamental II. Conteúdo matemático: Equações algébricas. Pesquisa: Estado da arte.
34	RODRIGUES, Daniela Milaneze. **A compreensão de alunos, ao final do ensino médio, relativa ao conceito de variável.** Orientador: Prof. Dr. Benedito Antônio Da Silva. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Ursini.** Nível/público: Alunos de 3º ano de ensino médio. Conteúdo matemático: Variável. Pesquisa: Análise em um teste e em entrevistas.
35	PANOSSIAN, Maria Lúcia. **Manifestações do pensamento e da linguagem algébrica de estudantes: indicadores para a organização do ensino.** Orientador: Prof. Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura.	Referencial teórico: **Vygotsky; Leotiev e Davidov**[77]**.** Nível/público: Alunos de 7º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Introdução à álgebra.

[73] Hung-Hsi Wu é um educador matemático que discute ensino, currículo, avaliação, etc. Possui muitas publicações. A autora da Tese utiliza seis, uma de 1999, dois de 2001, dois de 2002 e uma de 2005.
[74] HART, K. **Children's Understanding of Mathematics: 11~16**. London: John Murray, 1981.
[75] SEVERINO, A. **Metodologia do trabalho científico.** 22ª edição, São Paulo: editora Cortez, 2002.
[76] FIORENTINI, D. & LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percurso teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.
[77] Alexei Leontiev e Vasily Davidov são autores que se aproximam do pensamento de Vygotsky, são considerados da escola russa de psicologia educacional.

	Dissertação (Mestrado em Educação). USP.	Pesquisa: Análise de resoluções coletivas de problemas.
36	BATTAGLIOLI, Carla dos Santos. **Sistemas lineares na segunda série do ensino médio: um olhar sobre os livros didáticos.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Bárbara Lutaif Bianchini. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Duval; Ausubel; Documentos oficiais.** Nível/público: 2º ano do ensino médio. Conteúdo matemático: Sistemas lineares. Pesquisa: Análise de livros didáticos.
37	GRECCO, Emily. **O uso de padrões e sequências: uma proposta de abordagem para a introdução à álgebra para alunos de sétimo ano do ensino fundamental.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Cileda Coutinho. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Artigue.** Nível/público: Alunos de 7º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Introdução à álgebra. Pesquisa: Sequência didática.
38	GIL, Katia Henn. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Ruth Portanova. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). PUC/RS.	Referencial teórico: **Vygotsky; Lins e Gimenez (1997).** Nível/público: Professores e alunos de 8º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Introdução à álgebra. Pesquisa: Observações em sala de aula, aplicação de testes e entrevistas.
39	KERN, Newton Bohrer. **Uma introdução ao pensamento algébrico através de relações funcionais.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Alice Gravina. Dissertação (mestrado em Ensino de Matemática). UFRGS.	Referencial teórico: **Artigue.** Nível/público: Alunos de 7º ano ensino fundamental. Conteúdo matemático: Introdução à álgebra. Pesquisa: Intervenção pedagógica.
	2009	
40	MAGALHÃES, André Ricardo. **Mapas conceituais digitais como estratégia para o desenvolvimento da metacognição no estudo de funções.** Orientador: Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Ausubel; Brousseau (TSD); Artigue.** Nível/público: Alunos do 1º ano do curso de ciências da computação Conteúdo matemático: Função. Pesquisa: Intervenção pedagógica.
41	BARBOSA, Américo Augusto.	Referencial teórico: **Simon.**

	Trajetória hipotéticas de aprendizagem relacionadas ás razões e funções trigonométricas, visando uma perspectiva construtivista. Orientador: Prof. Dr. Armando Traldi Jr. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). PUC/SP	Nível/público: Professores e alunos de 2º ano do ensino médio. Conteúdo matemático: razões e funções trigonométricas. Pesquisa: observações de aula.
42	PIRES, Rogério Fernando. **O uso da modelação matemática na construção do conceito de função.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Sandra Maria Magina. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Bassanezi; Biembemgut e Hein.** Nível/público: Alunos de 7º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Função. Pesquisa: Intervenção pedagógica.
43	YAMANAKA, Otávio Yoshio. **Estudo das concepções e competências dos professores: a passagem da aritmética à introdução da representação algébrica nas séries iniciais do ensino fundamental.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Sandra Maria Magina. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Vergnaud; Ponte; Tall e Vinner**[78]**.** Nível/público: Professores de ensino fundamental I e alunos em conclusão do curso pedagogia. Conteúdo matemático: Pré-álgebra Pesquisa: Análise de Questionários.
44	MESQUITA, Maria Aparecida Nunes. **Ensinar e aprender funções polinomiais do 2º grau, no ensino médio: construindo trajetórias.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Célia Maria Carolino Pires. Dissertação (Mestrado profissional de Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Simon.** Nível/público: Professores e alunos de 1º ano do ensino médio. Conteúdo matemático: Funções do 2º grau. Pesquisa: observações em sala de aula.
45	LIMA, Patrick Oliveira de. **Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções logarítmicas.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Célia Maria Carolino Pires. Dissertação (Mestrado profissional de Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Simon**. Nível/público: Professores e alunos de 1º ano do ensino médio. Conteúdo matemático: Funções logarítmicas. Pesquisa: observações em sala de aula.
46	BELTRAME, Juliana Thais.	Referencial teórico: **Ursini.** Nível/público: 7º ano do ensino fundamental

[78] TALL, J. & VINNER, S. **Concept image and conception definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity.** In educational studies in Mathematics, 1981, v. 12, p. 151-169.

	A álgebra nos livros didáticos: um estudo do uso das varáveis, segundo o modelo 3UV. Orientadora: Prof.ª Dr.ª Bárbara Lutaif Bianchini. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). PUC/SP.	Conteúdo matemático: Introdução à álgebra. Pesquisa: Análise de livros didáticos.
47	GREGORUTTI, Juliana de Lima. **Construção dos critérios de divisibilidade com alunos de 5ª série do ensino fundamental por meio de situações de aprendizagem.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Bárbara Lutaif Bianchini. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Artigue; Duval.** Nível/público: alunos de 6º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: divisibilidade. Pesquisa: Intervenção pedagógica.
48	SCANO, Fabio Correa. **Função afim: uma sequência didática envolvendo atividades com geogebra.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria José Ferreira da Silva. Dissertação (Mestrado profissional de Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Duval; Brousseau (TSD).** Nível/público: alunos de 9º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Função do 1º grau. Pesquisa: Sequência didática.
49	SANTOS, Sérgio Aparecido dos. **Ambiente informatizado: para o aprofundamento da função quadrática para alunos da 2ª série do ensino médio.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria José Ferreira da Silva. Dissertação (Mestrado profissional de Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Duval; Brousseau (TSD).** Nível/público: Alunos de 2º ano do ensino médio. Conteúdo matemático: Função do 2º grau. Pesquisa: Intervenção pedagógica.
50	CASTRO, Taís Freitas de Carvalho. **Aspectos do pensamento algébrico revelados por professores-estudantes de um curso de formação continuada em Educação Matemática.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Cristina Maranhão. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Fiorentini, Miorim e Miguel (1993); Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005).** Nível/público: Alunos de especialização em educação matemática Conteúdo matemático: álgebra em geral. Pesquisa: Análise de questionário.

51	PINTO, Glaucia. **Tecnologias no ensino e aprendizagem da álgebra: análise das dissertações produzidas no programa de estudos de pós-graduados em educação matemática da PUC-SP de 1994 até 2007.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Celina Abar. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Teóricos estado da arte e TIC (tecnologias da informação e comunicação).** Nível/público: Geral Conteúdo matemático: Introdução à álgebra. Pesquisa: Estado da arte.
52	MONDINI, Fabiane. **Modos de conceber a álgebra em cursos de formação de professores de matemática.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Aparecida Viggiani Bicudo. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNESP/RC.	Referencial teórico: **Bicudo**[79]**.** Nível/público: Professores do curso de matemática. Conteúdo matemático: álgebra em geral. Pesquisa: análise de entrevistas.
53	SANTOS, Daniela M. Fernandes. **Ensino de equação do 1º grau: concepções de professores de matemática e formação docente.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Raquel Miotto Morelatti. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNESP/PP.	Referencial teórico: **Ribeiro**[80]**; Usiskin (1995); Fiorentini, Miorim e Miguel (1993); Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005); Lins e Gimenez (1997); Lee.** Nível/público: professores do 8º ano ensino fundamental. Conteúdo matemático: Equação do 1º grau. Pesquisa: Análise de questionários
	2010	
54	FIGUEIREDO, Orlando de Andrade. **Sentidos de percepção e educação matemática: geometria dinâmica e ensino de funções com auxílio de representações dinâmicas.** Orientador: Prof. Dr. Marcelo Borba. Tese (Doutorado em Educação Matemática). UNESP/RC.	Referencial teórico: **Husserl e Merleau-Ponty.** Nível/público: Geral. Conteúdo matemático: Função. Pesquisa: Estudo teórico.
55	ROSENBAUM, Luciane Santos. **Uma trajetória hipotética de aprendizagem sobre funções trigonométricas numa perspectiva construtivista.**	Referencial teórico: **Simon.** Nível/público: Professores e alunos de 2º ano do ensino médio.

[79] Maria Aparecida Vigianni Bicudo é uma pesquisadora que escreve sobre fenomenologia, educação e educação matemática. A autora da dissertação usa três textos, de 1994, 1999, 2000 e 2004.
[80] Ver Trabalho 11 desta tabela.

	Orientador: Prof. Dr. Armando Traldi Jr. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). PUC/SP.	Conteúdo matemático: Funções trigonométricas. Pesquisa: Análise de atividades em sala de aula.
56	SILVA, Lígia Maria da. **O tratamento dado ao conceito de função em livros didáticos da educação básica.** Orientador: Prof. Dr. Benedito Silva. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Duval.** Nível/público: 1º ano do ensino médio. Conteúdo matemático: Função. Pesquisa: Análise de livros didáticos.
57	HAMAZAKI, Adriana Clara. **Análise da situação de aprendizagem de equações e inequações logarítmicas apresentada no caderno do professor de 2009 do estado de São Paulo.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Cristina Maranhão. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Fiorentini, Miorim e Miguel (1993); Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005); Ursini; Ribeiro.** Nível/público: 1º ano ensino médio. Conteúdo matemático: equações e inequações logarítmicas. Pesquisa: Análise de documento de orientação ao professor.
58	ATAYDE, Alan Florêncio de. **A abordagem da noção de função nos livros didáticos: possibilidades de investigação, exploração, problemas e exercícios.** Orientador: Prof. Dr. Armando Traldi Jr. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Documentos oficiais; Ponte.** Nível/público: 1º ano ensino médio Conteúdo matemático: Função. Pesquisa: Análise de livros didáticos.
59	COSTA, Ricardo Carvalho. **A formação de professores de matemática para uso das tecnologias de informação e comunicação: uma abordagem baseada no ensino de funções polinomiais de primeiro e segundo graus.** Orientador: Prof. Dr. Gerson Oliveira. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Teóricos das TIC.** Nível/público: Professores do ensino médio. Conteúdo matemático: Funções de 1º e 2º graus. Pesquisa: Análise de oficinas de planejamento de aulas.
60	SANTOS, Gefferson Luiz dos.	Referencial teórico: **Fiorentini, Miorim e Miguel (1993); Kieran; Lins e Gimenez (1997); Arcavi[81].**

[81] ARCAVI, A. Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. **For the learning of mathematics**, v. 14, n. 1, 24-35, 1994.

	Como professores e alunos do ensino médio lidam com conteúdos algébricos em sua produção escrita. Orientadora: Prof.ª Dr.ª Ângela Marta Savioli. Dissertação (mestrado em ensino de ciências e educação matemática). UEL.	Nível/público: Professores e alunos de 3º ano do ensino médio. Conteúdo matemático: álgebra em geral. Pesquisa: Análise de registros.
61	CALDEIRA, Janaína Soler. **Um estudo sobre o pensamento algébrico em uma comunidade de prática de formação de professores de matemática.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Marcia Cristina Cyrino. Dissertação (mestrado em ensino de ciências e educação matemática). UEL.	Referencial teórico: **Kaput; Lins e Gimenez (1997), Fiorentini, Miorim e Miguel (1993); Documentos oficiais.** Nível/público: alunos e professores de licenciatura em matemática. Conteúdo matemático: álgebra em geral. Pesquisa: Análise de reuniões em comunidade prática de formação de professores de matemática.
62	POFFO, Janaína. **Álgebra nos anos finais do ensino fundamental: reflexões e atividades pedagógicas.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Tânia Baier. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). FURB.	Referencial teórico: **Locheade e Mestre**[82]**.** Nível/público: Alunos de 8º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Introdução à álgebra. Pesquisa: Intervenção pedagógica.
63	POLLA, Gaziela Baldessar. **As pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de álgebra nos anos finais do ensino fundamental: panorama de 10 anos da pesquisa brasileira pós PCN.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Neusa Maria de Souza. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UFMS.	Referencial teórico: **Teóricos do estado da arte; Coxford e Shulte (1995); Lins e Gimenez (1997); Fiorentini, Miorim e Miguel (1993); Ponte; PCN.** Nível/público: Geral Conteúdo matemático: álgebra em geral. Pesquisa: Estado da arte.
64	FARO, Sérgio Destácio **Os conhecimentos supostos disponíveis na transição entre o ensino médio e o Ensino Superior: o caso da noção de sistemas de equações lineares.**	Referencial teórico: **Robert**[83]**; Douady; Bosch e Chevalard**[84]**.** Nível/público: ensino médio e superior. Conteúdo matemático: Sistemas lineares.

[82] LOCHHEAD, J. & MESTRE, J. P. Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas. In: COXFORD, A. F. & SHULTE, A. P. (Org.). **As Idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, p.144-154, 1995.
[83] ROBERT, A. L'Acquisition de la notion de convergence des suítes numériques dans l'Enseignement Supérieur, **Recherches en Didactiques des Mathématiques, 3**(3), 307- 341, 1982.
[84] BOSCH, M, & CHEVALLARD, Y. **La sensibilité de l´activité mathématique aux ostensifs**, *RDM 19.01*, Grenoble. 1999.

	Orientadora: Prof.ª Dr.ª Marlene Dias. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNIBAN.	Pesquisa: Análise de documentos e livros didáticos.
65	BOTTA, Eliane Saliba. **O Ensino do Conceito de Função e Conceitos relacionados a partir da Resolução de Problemas.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Lourdes de la Rosa Onuchic. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). UNESP/RC.	Referencial teórico: **Romberg**[85]**; Polya.** Nível/público: Alunos de Ensino fundamental II e ensino médio. Conteúdo matemático: Função. Pesquisa: Análise de registros.
	2011	
66	FREIRE, Raquel Santiago. **Desenvolvimento de conceitos algébricos por professores dos anos iniciais do ensino fundamental.** Orientador: Prof. Dr. José Aires de Castro Filho. Tese (Doutorado em educação brasileira). UFCE.	Referencial teórico: **Kieran; Ponte; Kaput; Lins e Gimenez (1997); Da Rocha Falcão**[86]**; Davidov; Shulman; Schliemann, Carraher e Brizuela (2011); Vergnaud.** Nível/público: Professores do ensino fundamental I. Conteúdo matemático: Pré-álgebra. Pesquisa: Observações em uma oficina e estudo de caso.
67	QUINTILIANO, Luciane de Castro. **Relações entre os estilos cognitivos, as estratégias de solução e o desempenho dos estudantes na solução de problemas aritméticos e algébricos.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Márcia Regina Dias. Tese (Doutorado em Educação). UNICAMP.	Referencial teórico: **Teorias psicológicas sobre estilos cognitivos.** Nível/público: Alunos de ensino médio. Conteúdo matemático: aritmética e álgebra em geral. Pesquisa: Análise de registros.
68	CASTRO, Edson Eduardo. **Um estudo exploratório das relações funcionais e suas representações no terceiro ciclo do ensino fundamental.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Bárbara Lutaif Bianchini.	Referencial teórico: **Artigue; Duval.** Nível/público: Alunos de 7º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Função. Pesquisa: Sequência didática.

[85] ROMBERG, T. A. Perspectivas sobre o conhecimento e métodos de pesquisa. In: **Bolema: Boletim de Educação Matemática,** v.20, n.27, p. 93-139, 2007.Artigo traduzido por Lourdes de La Rosa Onuchic e Maria Lúcia Boero.

[86] DA ROCHA FALCÃO, J. T. a álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. In: SCHILLIEMANN, A.; CARRAHER, D.; SPINILLO, A.; MEIRA, L.; DA ROCHA FALCÃO, J. T. (Orgs.). **Estudos de psicologia da educação matemática.** Recife: Ed. Universitária da UFPE, 1993.

	Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). PUC/SP.	
69	CONCEIÇÃO JR, Fernando da Silva. **Uma abordagem funcional para o ensino de inequações no ensino médio.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Bárbara Lutaif Bianchini. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Duval.** Nível/público: Alunos de 2º ano do ensino médio. Conteúdo matemático: Função e inequação. Pesquisa: Intervenção pedagógica.
70	BAILO, Fernanda Roberta Ravazi. **Análise dos usos da variável presente no Caderno do aluno na introdução à álgebra da Proposta Curricular do Estado de São Paulo do ensino fundamental II de 2008 e 2009.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Bárbara Lutaif Bianchini. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Ursini; Usiskin (1995); Documentos oficiais.** Nível/público: 7º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Variável. Pesquisa: Análise de documento de orientação ao professor.
71	BRUCKI, Cristina Maria. **O uso de modelagem no ensino de função exponencial.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Sonia Igliori. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Barbosa; Ausubel.** Nível/público: Alunos de 1º ano do ensino médio. Conteúdo matemático: Função exponencial. Pesquisa: Intervenção pedagógica.
72	GONÇALVES FILHO, Luiz. **Modelagem matemática e o ensino de função de 1º grau.** Orientador: Prof. Dr. Antônio Carlos Brolezzi. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Bassanezi; Biembengut.** Nível/público: Alunos de 1º ano do ensino médio. Conteúdo matemático: Função do 1º grau. Pesquisa: Intervenção pedagógica.
73	SALGUEIRO, Nilton César Garcia. **Como estudantes do ensino médio lidam com registros de representação semiótica de funções.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Ângela Marta Savioli. Dissertação (mestrado em ensino de ciências e educação matemática). UEL.	Referencial teórico: **Artigue; Duval; Kieran; Usiskin (1995); Cury[87]; Lins e Gimenez (1997).** Nível/público: Alunos de 8º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Função. Pesquisa: Sequência didática.

[87] CURY, H. N. **Análise de erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. Belo Horizonte: autêntica, 2007.

74	PEPECE JR, Antônio Rafael. **Análise da produção escrita de estudantes da EJA em atividades algébricas.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Ângela Marta Savioli. Dissertação (mestrado em ensino de ciências e educação matemática). UEL.	Referencial teórico: **Artigue; Almouloud[88]; Lins e Gimenez (1997); Cury.** Nível/público: Alunos de 4º etapa do EJA. Conteúdo matemático: Equação do 1º grau Pesquisa: análise de registros.
75	LEMES, Núbia Cristina dos Santos. **Evidências da produção de sentidos dos princípios da proposta didática lógico-histórica da álgebra por professores de Matemática em atividade de ensino.** Orientador: Prof. Dr. Wellington Lima Cedro. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). UFG.	Referencial teórico: **Teoria histórico-cultural; Davidov**. Nível/público: Professores do ensino fundamental II. Conteúdo matemático: Introdução à álgebra. Pesquisa: Observações em um curso de formação.
76	VIEIRA, Lygianne Batista. **Implicações pedagógicas do lúdico para o ensino e aprendizagem da álgebra.** Orientador: Prof. Dr. Márlon Soares. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). UFG.	Referencial teórico: **Teóricos de jogos no ensino de matemática; Vergnaud; Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), Kieran; Kaput.** Nível/público: Alunos de 2º ano do ensino médio. Conteúdo matemático: Introdução à álgebra. Pesquisa: Análise de atividades lúdicas (jogos).
77	UBERTI, Angelita. **Avaliação da aplicação de jogos na 6ª série: equações, inequações e sistemas de equações do 1º grau.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Helena Noronha Cury. Dissertação (Mestrado profissional em ensino de física e matemática). UNIFRA.	Referencial teórico: **Teóricos de jogos no ensino de matemática**. Nível/público: Alunos de 7º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: equações, inequações e sistemas de equações do 1º grau. Pesquisa: Análise de atividades lúdicas (jogos).
78	ALMEIDA, Jadilson ramos de. **Problemas propostos para o ensino de equações polinomiais do 1º grau com uma incógnita: um estudo exploratório nos livros de didáticos de matemática do 7º ano do ensino fundamental.**	Referencial teórico: **Marchand e Bednarz[89].** Nível/público: 7º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: equações do 1º grau com uma incógnita. Pesquisa: Análise de livros didáticos.

[88] AUMOULOUD, S. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba, UFPR, 2007.
[89] MARCHAND, P. & BEDNARZ, N. **L'enseignement de l'algèbre au secondaire**: une analyse des problèmes présentés aux Élèves. In Bulletin AMQ, vol. XXXIX, nº 4. Québec: AMQ, 1999.

	Orientador: Prof. Dr. Marcelo Câmara dos Santos. Dissertação (Mestrado em educação matemática e tecnológica). UFPE.	
79	RAMOS, Mageri Rosa. **Uma Investigação Sobre a produção de tarefas algébricas para o 6º ano do ensino fundamental.** Orientador: Prof. Dr. Amarildo Melchiades da Silva. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). UFJF.	Referencial teórico: **Lins**[90]**.** Nível/público: Alunos de 6º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Introdução à álgebra. Pesquisa: Análise de registros.
80	FERNANDES, Fernando Luís Pereira. **Iniciação a práticas de letramento algébrico em aulas exploratório-investigativas.** Orientador: Prof. Dr. Dario Fiorentini. Dissertação (Mestrado em Educação). UNICAMP.	Referencial teórico: **Usiskin (1995); Fiorentini, Miorim e Miguel (1993)**. Nível/público: Alunos de 7º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Introdução à álgebra. Pesquisa: Análise da própria prática em sala de aula.
81	PUTI, Tatiane da Cunha. **A produção de significados durante o processo de ensino-aprendizagem: avaliação de equações polinomiais.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Lourdes de la Rosa Onuchic. Dissertação (Mestrado em educação matemática). UNESP/RC.	Referencial teórico: **Romberg.** Nível/público: Alunos de 9º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: equações do 2º grau. Pesquisa: Intervenção pedagógica.
	2012	
82	DALTO, Jader Otavio. **Ensino e aprendizagem de função do primeiro grau por meio do modelo de equivalência de estímulos.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Verônica bender Haydu. Tese (Doutorado em ensino de ciências e educação matemática). UEL.	Referencial teórico: **Teóricos do Behaviorismo**. Nível/público: Alunos de 5º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Função do 1º grau. Pesquisa: Intervenção pedagógica.

[90] Rômulo Campos Lins tem vários trabalhos publicados na área de ensino da álgebra, tendo escrito com Joaquim Gimenez uma das referências da área, que é a obra indicada em Lins e Gimenez (1997). Também escreveu com a referência internacional James Kaput. A autora da dissertação em questão se utiliza de um modelo teórico proposto por Lins, o modelo dos campos semânticos. A autora utiliza 13 publicações do autor, com destaque para a de 1994, quando ele apresentou pela primeira vez seu modelo teórico.

83	OLIVEIRA, Davidson Paulo Azevedo. **Um estudo misto para entender as contribuições de atividades baseadas nos fundos de conhecimento e ancoradas na perspectiva sociocultural da história da matemática para a aprendizagem de funções por meio da pedagogia culturalmente relevante.** Orientadores: Prof.ª Dr.ª Marger da Conceição Ventura Viana. Dissertação (Mestrado Educação Matemática). UFOP.	Referencial teórico: **Teóricos da perspectiva histórico-cultural da história da matemática, dos fundos de conhecimento e da pedagogia culturalmente relevante.** Nível/público: Alunos de 1º ano do Ensino Técnico de nível médio. Conteúdo matemático: Funções. Pesquisa: Análise de questionários, entrevistas, documentos e observações de grupo.
84	SANTOS, Rita de Cássia Viegas dos. **Equações no contexto de funções: Uma proposta de significação das letras no estudo de álgebra.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Alice Gravina. Dissertação (Mestrado profissionalizante em ensino de matemática). UFRGS.	Referencial teórico: **Vygotsky; Artigue.** Nível/público: Alunos de 5º e 6º anos do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Equações e funções. Pesquisa: Sequência didática.
85	SILVA, Antônia Zulmira da. **Pensamento algébrico e equações no ensino fundamental: uma contribuição para o caderno do professor do oitavo ano.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Cristina Maranhão. Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). PUC/SP.	Referencial teórico: **Fiorentini, Miorim e Miguel (1993); Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005); Ursini; Ribeiro.** Nível/público: 8º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: equação. Pesquisa: Análise de documento de orientação ao professor.
86	GUEDES, Roseliane Forgiarini. **Uma investigação sobre a aprendizagem de álgebra por meio do uso de jogos, com alunos da 6ª série.** Orientador: Prof. Dr. Valdir Pretto. Dissertação (Mestrado profissional em ensino de física e matemática). UNIFRA.	Referencial teórico: **Teóricos de jogos no ensino de matemática.** Nível/público: Alunos de 7º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Introdução à álgebra. Pesquisa: Análise de atividades lúdicas (jogos).
87	KIKUCHI, Luzia Maia. **Obstáculos à aprendizagem de conceitos algébricos no ensino fundamental: uma aproximação entre obstáculos espistemológicos e a teoria dos campos conceituais.**	Referencial teórico: **Brousseau (OED); Vergnaud; Piaget.** Nível/público: Alunos de 9º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Introdução à álgebra. Pesquisa: Análise de registros.

	Orientador: Prof. Dr. Elio carlos Ricardo. Dissertação (Mestrado em Educação). USP.	
88	ARAÚJO SEGUNDO, Salvino Izidro. **Do ensino-aprendizagem da álgebra ao ensino de equações polinomiais do 1º grau: representações múltiplas.** Orientador: Prof. Dr. Silvanio de Andrade. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática). UEPB.	Referencial teórico: **Publicações do NCTM sobre representações múltiplas; Vygotsky.** Nível/público: Alunos de 7º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Equações do 1º grau. Pesquisa: Análise da própria prática em sala de aula.
89	PEREIRA, José Carlos de Souza. **Análise praxeológica de conexões entre aritmética e álgebra no contexto do desenvolvimento profissional do professor de matemática.** Orientador: Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas). UFPA.	Referencial teórico: **Chevallard (TAD).** Nível/público: 8º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Operações polinomiais. Pesquisa: Análise autobiográfica.
90	PADILHA, Terezinha Aparecida. **Conhecimentos geométricos e algébricos a partir da construção de fractais com uso de software geogebra.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Maria Madalena Dullius. Dissertação (Mestrado profissional em ensino de ciências exatas). UNIVATES.	Referencial teórico: **Teóricos das TIC.** Nível/público: Alunos de 8º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Introdução à álgebra. Pesquisa: Intervenção pedagógica.
91	TREVISANI, Fernando de Melo. **Estratégias de generalização de padrões matemáticos.** Orientadora: Prof. Dr. Marcus Vinicius Maltempi. Dissertação (Mestrado em educação matemática). UNESP/RC.	Referencial teórico: **Autores sobre generalização em matemática.** Nível/público: Alunos de 7º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Introdução à álgebra. Pesquisa: Intervenção pedagógica.
	2013	
92	MONDINI, Fabiane. **A presença da álgebra na legislação escolar brasileira.** Orientadora: Profª Drª Maria Aparecida Viggiani Bicudo. Tese (Doutorado em educação matemática). **UNESP/RC**	Referencial teórico: **Husserl; Heidegger; Gadamer.** Nível/público: Geral Conteúdo matemático: Introdução à álgebra. Pesquisa: Análise de documentos.

93	MELO, Luciano Augusto da Silva. **Dois jogos de linguagem: a informática e a matemática na aprendizagem de função quadrática.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Marisa Rosâni Abreu da Silveira. Dissertação (Mestrado em educação em ciências e matemáticas). UFPA.	Referencial teórico: **Lévy;**[91] **Wittgenstein**. Nível/público: Alunos de 1º ano do ensino médio. Conteúdo matemático: Função do 2º grau. Pesquisa: Intervenção pedagógica e análise de testes.
94	SANTOS, Sueli dos Prazeres. **Erros e dificuldades de alunos em álgebra elementar: uma metanálise qualitativa de dissertações brasileiras de mestrado.** Orientador: Prof. Dr. Dario Fiorentini. Dissertação (Mestrado em Educação). UNICAMP.	Referencial teórico: **Fiorentini, Miorim e Miguel (1993).** Nível/público: Geral Conteúdo matemático: Álgebra em geral. Pesquisa: Estado da arte.
95	SILVA, Edilaine Pereira da. **Aspectos do pensamento algébrico e da linguagem manifestados por estudantes do 6º ano em um experimento de ensino.** Profª Drª Angela Marta Savioli. Dissertação (mestrado em ensino de ciências e educação matemática). UEL.	Referencial teórico: **Steffe e Thompson.** Nível/público: Alunos de 6º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Introdução à álgebra. Pesquisa: Intervenção pedagógica e análise de registros.
	2014	
96	AGUIAR, Marcia. **O percurso da didatização do pensamento algébrico no ensino fundamental: uma análise a partir da transposição didática e da teoria antropológica do didático.** Orientador: Prof. Dr. Elio Carlos Ricardo. Tese (Doutorado em Educação). USP.	Referencial teórico: **Chevallard.** Nível/público: 7º, 8º e 9 anos do ensino fundamental. Conteúdo matemático: álgebra em geral. Pesquisa: Análise de livros didáticos e de documento de orientação ao professor.
97	PANOSSIAN, Maria Lúcia. **O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para a constituição do objeto de ensino da álgebra.** Orientador: Prof. Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura. Tese (Doutorado em Educação). USP.	Referencial teórico: **Teóricos do Materialismo dialético e da teoria histórico-cultural.** Nível/público: Professores da educação básica. Conteúdo matemático: Introdução à álgebra.

[91] Pierre Lévy escreve sobre as TIC. O autor da dissertação usa dois textos, de 2010 e de 2012.

		Pesquisa: Estudo teórico de desenvolvimento histórico, análise de textos e documentos e em um curso de formação de professores
98	COSER, Ivan José. **Equações algébricas polinomiais de 3º grau ou superior: solucionando problemas com auxílio de métodos numéricos.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Neyva maria Lopes Romeiro. Dissertação (mestrado profissional em matemática). UEL.	Referencial teórico: **Teóricos da história da matemática e livros de matemática.** Nível/público: ensino médio Conteúdo matemático: Equações do 3º grau ou superior. Pesquisa: Descrição de proposta de atividades.
99	FERNANDES, Renata Karoline. **Manifestação de pensamento algébrico em registros escritos de estudantes do ensino fundamental I.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Angela Marta Savioli. Dissertação (mestrado em ensino de ciências e educação matemática). UEL.	Referencial teórico: **Ponte; Kaput; Fiorentini, Miorim e Miguel (1993); Kieran; Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005); Lins e Gimenez (1997).** Nível/público: Alunos de 5º ano do ensino fundamental. Conteúdo matemático: Pré-álgebra. Pesquisa: Análise de registros.
100	SANTOS, Alex Bruno Carvalho dos. **Investigando Epistemologias Espontâneas de Professores de Matemática sobre o Ensino de Equações do Primeiro Grau.** Orientador: Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas). UFPA.	Referencial teórico: **Chevallard (TAD); Usiskin (1995).** Nível/público: Alunos de especialização em educação matemática. Conteúdo matemático: Equações de 1º grau. Pesquisa: Percurso de estudo e pesquisa com questionário e observações em grupo, com socialização, discussão sobre teorias e práticas de ensino.
	2015	
101	MARTINS, Lourival Pereira. **Estudos sobre aspectos da álgebra na passagem da aritmética para a álgebra.** Orientadora: Prof.ª Dr.ª Marlene Alves Dias. Tese (Doutorado em Educação Matemática). UNIAN.	Referencial teórico: **Chevallard (TAD); Robert; Douady.** Nível/público: ensino fundamental. Conteúdo matemático: Introdução à álgebra. Pesquisa: análise de livros didáticos, desenvolvimento e aplicação de teste e análise dos protocolos apresentados pelos estudantes.
102	SIRINO, Carlos Eduardo.	Referencial teórico: **Polya.** Nível/público: Professores e alunos de 8º ano do ensino fundamental.

	Aplicações da álgebra linear através do método Gauss-Jordan no contexto do ensino médio utilizando o software máxima. Orientador: Prof. Dr. Ulysses Sodré. Dissertação (mestrado profissional em matemática). UEL.	Conteúdo matemático: Sistemas de equações linearaes. Pesquisa: Intervenção pedagógica.