



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Análise e otimização de coberturas de invisibilidade  
esféricas estratificadas em camadas homogêneas e  
isotrópicas

Tiago Carvalho Martins

TD - 12 / 2012

UFPA-ITEC-PPGEE  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO GUAMÁ  
BELÉM/PARÁ/BRASIL  
JUNHO DE 2012



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Análise e otimização de coberturas de invisibilidade  
esféricas estratificadas em camadas homogêneas e  
isotrópicas

Tiago Carvalho Martins

UFPA-ITEC-PPGEE  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO GUAMÁ  
BELÉM/PARÁ/BRASIL  
JUNHO DE 2012



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
INSTITUTO DE TECNOLOGIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

# Análise e otimização de coberturas de invisibilidade esféricas estratificadas em camadas homogêneas e isotrópicas

Tiago Carvalho Martins

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Título de Doutor em Engenharia Elétrica. Área de Concentração: Telecomunicações. Orientador: Prof. Dr. Victor Dmitriev.

UFPA-ITEC-PPGEE  
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO GUAMÁ  
BELÉM/PARÁ/BRASIL  
JUNHO DE 2012

# Análise e otimização de coberturas de invisibilidade esféricas estratificadas em camadas homogêneas e isotrópicas

Autor: Tiago Carvalho Martins. Data da defesa: 29/06/2012. Resultado: **aprovado**.

---

Prof. Dr. Victor Dmitriev  
(Orientador)

---

Prof. Dr. Adaildo Gomes D'Assunção  
(Membro da banca examinadora)

---

Prof. Dr. Fernando José da Silva Moreira  
(Membro da banca examinadora)

---

Prof. Dr. José Felipe Souza de Almeida  
(Membro da banca examinadora)

---

Prof. Dr. Danilo Teixeira Alves  
(Membro da banca examinadora)

---

Prof. Dr. Rodrigo Melo e Silva de Oliveira  
(Membro da banca examinadora)

# Dedicatória

Para Elizabete.

# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais Raimundo de Souza Martins e Francisca Izelda Carvalho Martins por todos os valiosos ensinamentos que me passaram ao longo dos anos. Agradeço aos meus irmãos Cristiano Carvalho Martins, Patricia Carvalho Martins e a minha cunhada Andreia Alfonso Martins por estarem sempre torcendo por mim.

Agradeço à minha esposa Elizabete pela luta compartilhada. Agradeço aos meus sogros Francisco Zacarias de Oliveira e Maria José Ribeiro de Oliveira por acreditarem em mim.

Agradeço aos meus sobrinhos Ruan Carlos Alfonso Martins, Nataly Lopes de Oliveira, Vidal Lopes de Oliveira, Leticia Lopes de Oliveira e Mauro Gleyson Reis de Oliveira pelo grande carinho que nutrem por mim.

Agradeço ao Prof. Dr. Raimundo Nazareno Alves pelas palavras amigas durante os anos de graduação, que me livraram de ser levado pelas águas turbulentas da crise do sistema educacional superior brasileiro do final da década de 1990.

Agradeço ao Prof. Dr. Victor Dmitriev pela sua contínua lição de honestidade e pela constante preocupação em garantir que seus orientandos tenham a melhor estrutura de trabalho possível. Serei eternamente grato por ter-me dado todas as oportunidades de desenvolver os trabalhos cujos frutos têm transformado a minha vida.

Agradeço aos amigos Solange Leal Souza, Pedro Valdo Souza, Daniel Leal Sousa, Lucas Leal Souza, Marcelo Nobuyuki Kawakatsu, Williams Kawakatsu, Luciana Gonzalez, Thaís Tavares, Arlete e a todos aqueles que conviveram comigo nestes anos de consternação.

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para que esse trabalho pudesse vir à luz.

(...)

”Sin embargo, el golpe de humanización no modificó su conducta profesional. Frente al cuarto de Melquíades, que estaba otra vez con candado, Santa Sofía de la Piedad acudió a una última esperanza. ”Hace como un siglo que no vive nadie en ese aposento”, dijo. El oficial lo hizo abrir, lo recorrió con el haz de la linterna, y Aureliano Segundo y Santa Sofía de la Piedad vieron los ojos árabes de José Arcadio Segundo en el momento en que pasó por su cara la ráfaga de luz, y comprendieron que aquel era el fin de una ansiedad y el principio de otra que sólo encontraría un alivio en la resignación. Pero el oficial siguió examinando la habitación con la linterna, y no dio ninguna señal de interés mientras no descubrió las setenta y dos bacinillas apelotonadas en los armarios. Entonces encendió la luz. José Arcadio Segundo estaba sentado en el borde del catre, listo para salir, más solemne y pensativo que nunca. Al fondo estaban los anaqueles con los libros descosidos, los rollos de pergaminos, y la mesa de trabajo limpia y ordenada, y todavía fresca la tinta en los tinteros. Había la misma pureza en el aire, la misma diafanidad, el mismo privilegio contra el polvo y la destrucción que conoció Aureliano Segundo en la infancia, y que sólo el coronel Aureliano Buendía no pudo percibir. Pero el oficial no se interesó sino en las bacinillas.

-Cuántas personas viven en esta casa? -preguntó.

-Cinco.

El oficial, evidentemente, no entendió. Detuvo la mirada en el espacio donde Aureliano Segundo y Santa Sofía de la Piedad seguían viendo a José Arcadio Segundo, y también éste se dio cuenta de que el militar lo estaba mirando sin verlo. Luego apagó la luz y ajustó la puerta. Cuando les habló a los soldados, entendió Aureliano Segundo que el joven militar había visto el cuarto con los mismos ojos con que lo vio el coronel Aureliano Buendía. ”

(...)

**Gabriel García Márquez in Cien años de soledad**

# Lista de Símbolos

$\sigma(\phi, \theta)$	Seção transversal de radar
$\sigma_{sca}$	Seção transversal de espalhamento total
$\sigma_g$	Seção transversal geométrica
$\lambda$	Comprimento de onda
$\epsilon_o$	Permissividade elétrica do vácuo
$\mu_o$	Permeabilidade magnética do vácuo
$\epsilon_{rel}$	Permissividade elétrica relativa
$\mu_{rel}$	Permeabilidade magnética relativa
$\epsilon_r$	Componente radial da permissividade elétrica
$\mu_r$	Componente radial da permeabilidade magnética
$\epsilon_t$	Componente tangencial da permissividade elétrica
$\mu_t$	Componente tangencial da permeabilidade magnética
$\epsilon_\theta$	Componente zenital da permissividade elétrica
$\mu_\theta$	Componente zenital da permeabilidade magnética
$\epsilon_\phi$	Componente azimutal da permissividade elétrica
$\mu_\phi$	Componente azimutal da permeabilidade magnética
$E_x, E_y$ e $E_z$	Componentes de $\vec{E}$ no sistema cartesiano
$H_x, H_y$ e $H_z$	Componentes de $\vec{H}$ no sistema cartesiano
$E_r, E_\theta$ e $E_\phi$	Componentes de $\vec{E}$ em coordenadas esféricas
$H_r, H_\theta$ e $H_\phi$	Componentes de $\vec{H}$ em coordenadas esféricas
$\rho$	Densidade de cargas
$\vec{j}$	Densidade de corrente
$g_{ij}$	Tensor métrico
$x_l$	Parâmetro de tamanho da camada $l$
$m_l$	Índice de refração da camada $l$
$y_l$	Admitância da camada $l$
$i$	Unidade imaginária
$\psi$ e $\zeta$	Funções de Riccati-Bessel
$a_n^l, b_n^l, c_n^l$ e $d_n^l$	Coefficientes de espalhamento da camada $l$
$S_1(\theta)$ e $\bar{S}_1(\theta)$	Amplitudes de espalhamento
$P_n^1(\cos\theta)$	Função de Legendre associada de primeira ordem
$\sigma(\phi, \theta)$	Seção reta radar bi-estática
$\mathbf{M}_{e1n}, \mathbf{N}_{e1n}, \mathbf{M}_{o1n}$ e $\mathbf{N}_{o1n}$	Harmônicos esféricos vetoriais de ordem $n$
$x, y$ e $z$	Coordenadas do Sistema Cartesiano
$\tau$	Largura do pulso

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivos do trabalho . . . . .	4
1.2	Contribuições . . . . .	4
1.3	Organização do trabalho . . . . .	5
<b>2</b>	<b>A eletrodinâmica da invisibilidade</b>	<b>8</b>
2.1	Equação e unidades de medida da seção transversal de radar . . . . .	9
2.2	Diferenciação entre coberturas absorventes e coberturas de invisibilidade . . . . .	11
2.3	Técnica de cancelamento de espalhamento . . . . .	11
2.4	Método da transformação de coordenadas . . . . .	20
2.5	Coberturas de invisibilidade anisotrópicas . . . . .	23
2.6	Transformação de coordenadas . . . . .	25
2.7	Coberturas de invisibilidade discretizadas . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Validação dos métodos de análise</b>	<b>30</b>
3.1	Validação para as análises de campo próximo . . . . .	30
3.1.1	Seção transversal de radar . . . . .	30
3.1.2	Seção transversal de espalhamento total . . . . .	32
3.1.3	Distribuição espacial de campo elétrico . . . . .	33
3.2	Transformada inversa de Fourier . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Invisibilidade em microondas via coberturas discretizadas</b>	<b>42</b>
4.1	Caso 1: "raios discretos" como parâmetros de busca . . . . .	43
4.1.1	Discretização do espaço físico . . . . .	44
4.1.2	Discretização do espaço virtual . . . . .	44
4.1.3	Discretização proposta no presente trabalho . . . . .	44
4.2	Caso 2: "posições para as camadas anisotrópicas" como parâmetros de busca . . . . .	45
4.2.1	Cálculo das "posições para as camadas anisotrópicas" como ponto médio dos raios discretos . . . . .	45

4.2.2	Cálculo das "posições para as camadas anisotrópicas" coincidindo com os raios discretos . . . . .	46
4.2.3	Cálculo das "posições para as camadas anisotrópicas" proposto no presente trabalho . . . . .	46
4.3	Comparações entre o caso 1 e o caso 2 . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Invisibilidade em microondas via coberturas discretizadas constituídas de materiais dispersivos</b>	<b>57</b>
5.1	Algoritmo utilizado no cálculo dos parâmetros eletromagnéticos das coberturas dispersivas . . . . .	58
5.2	Parâmetros eletromagnéticos em função da frequência para as coberturas dispersivas . . . . .	58
5.3	Invisibilidade em maior faixa de frequências utilizando efeitos dispersivos . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Invisibilidade em microndas via coberturas estratificadas</b>	<b>66</b>
6.1	Resultados obtidos através de otimização com PSO . . . . .	66
6.2	Análise de campo distante . . . . .	68
6.3	Análise de campo próximo . . . . .	72
<b>7</b>	<b>Invisibilidade na faixa óptica via coberturas estratificadas constituídas de materiais dispersivos</b>	<b>76</b>
7.1	Coberturas de um única e de duas camadas otimizadas por PSO . . . . .	77
7.2	Coberturas de duas camadas otimizadas por AG . . . . .	81
7.3	Cobertura de invisibilidade dispersiva na faixa óptica no domínio do tempo . . . . .	83
<b>8</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>85</b>
<b>A</b>	<b>Solução analítica do espalhamento eletromagnético por uma esfera homogênea e isotrópica</b>	<b>88</b>
A.1	Formulação geral do problema de espalhamento . . . . .	88
A.2	Solução da equação de Helmholtz vetorial em coordenadas esféricas . . . . .	89
A.3	Solução da equação de Helmholtz escalar em coordenadas esféricas . . . . .	91
A.3.1	Parte angular da solução da equação escalar de Helmholtz (hamônicos esféricos) . . . . .	91
A.3.2	Parte radial da solução da equação escalar de Helmholtz . . . . .	94
A.4	Expansão de uma onda plana em harmônicos vetoriais esféricos . . . . .	96
A.5	Campos internos e espalhados por uma esfera homogênea e isotrópica . . . . .	98
A.5.1	Cálculo dos coeficientes de espalhamento . . . . .	100
<b>B</b>	<b>Meio de transformação</b>	<b>102</b>
B.1	Divergente e rotacional em coordenadas arbitrárias . . . . .	102

B.2	O tensor métrico . . . . .	102
B.3	Componentes contravariantes e covariantes de um vetor . . . . .	103
B.4	Tensor de Levi-Civita e símbolo de permutação . . . . .	103
B.5	Equações de Maxwell para o vácuo em coordenadas arbitrárias . . . . .	104
B.6	Equações de Maxwell para um meio dielétrico em coordenadas arbitrárias .	104
B.7	Relação de equivalência entre métrica e parâmetros eletromagnéticos . . . . .	105
<b>C</b>	<b>Método da matriz de transição</b>	<b>108</b>
C.1	Método da matriz de transição . . . . .	109
C.2	Transformada inversa de Fourier . . . . .	111
<b>D</b>	<b>O método FDTD</b>	<b>113</b>
D.1	O algoritmo de Yee . . . . .	113
D.2	Precisão e Estabilidade do Método FDTD . . . . .	114
D.3	Condições de Contorno Absorvente . . . . .	116
D.3.1	Equações de atualização para a CPML . . . . .	116
D.3.2	Distribuição de parâmetros da CPML . . . . .	116
D.4	Formulação de Campo Espalhado . . . . .	117
D.4.1	Equações de atualização dos campos espalhados. . . . .	117
<b>E</b>	<b>Algoritmo da técnica AG</b>	<b>119</b>
E.0.2	Etapa de inicialização do AG . . . . .	119
E.0.3	Laço de gerações do AG . . . . .	120
<b>F</b>	<b>Algoritmo da técnica PSO</b>	<b>124</b>
F.1	Vetor posição . . . . .	124
F.2	Vetor velocidade . . . . .	124
F.3	Dinâmica do PSO . . . . .	125
F.4	Condições de contorno . . . . .	125
F.5	Meio dissipativo . . . . .	125

# Lista de Siglas

<i>FDTD</i>	Método das diferenças finitas no domínio do tempo
<i>RCS</i>	Seção transversal de radar
<i>PEC</i>	Condutor eletricamente perfeito
<i>IDFT</i>	Transformada inversa de Fourier discreta
<i>AG</i>	Algoritmo Genético
<i>PSO</i>	Técnica de otimização por enxame de partículas
<i>Matriz – T</i>	Método da matriz de transição

# Lista de Figuras

2.1	Regiões de campo próximo e campo distante de uma antena . . . . .	10
2.2	Um obstáculo é colocado entre duas antenas distantes. . . . .	12
2.3	Quando o obstáculo é envolvido por uma camada de material absorvente o espalhamento para trás é eliminado. . . . .	12
2.4	Quando o obstáculo é envolvido por uma camada de camuflagem o espalhamento é removido completamente. . . . .	13
2.5	As polarizações da partícula e da cobertura de camuflagem cancelam-se mutuamente. . . . .	14
2.6	Partes real e imaginária da permissividade relativa do ouro. . . . .	16
2.7	Partes real e imaginária da permissividade relativa de uma cobertura esférica depositada sobre um núcleo de ouro obtida por aproximação quase-estática. . . . .	17
2.8	Seções transversais de espalhamento e de absorção de um núcleo de ouro de raio 250 nm sem e com cobertura esférica de espessura 50 nm obtida pela equação (2.8). . . . .	18
2.9	Seções transversais de espalhamento e de absorção de um núcleo de ouro de raio 80 nm sem e com cobertura esférica de espessura 20 nm obtida por aproximação quase-estática. . . . .	19
2.10	Raio luminoso propagando no vácuo. . . . .	20
2.11	Vácuo em sistema de coordenadas com uma singularidade esférica: os raios incidentes são guiados ao redor de uma singularidade esférica de raio $a$ , através da região delimitada pelas superfícies esféricas de raio $a$ e $b$ , e seguem a trajetória original na direção de avanço da propagação. . . . .	22
2.12	Espaços virtual (a) e espaço físico (b) em coordenadas esféricas utilizados na obtenção de uma cobertura de invisibilidade. . . . .	24
2.13	Distribuição de campos para o perfil proposto neste trabalho com $\alpha = 1$ , obtidos a partir das equações de campo mostradas anteriormente, com valores em volt/metro, para uma onda plana incidente de amplitude 1 volt/metro. . . . .	26

2.14	Cobertura de invisibilidade discretizada em um número de camadas igual a $2M$ . As camadas azuis representam o dielétrico do tipo A, as camadas vermelhas representam o material do tipo B, a esfera verde é o núcleo da estrutura. Para não sobrecarregar a figura, foram colocadas as partes cinzas, que representam conjuntos com um número finito de pares de camadas dos dielétricos A e B. . . . .	29
3.1	Seção transversal de radar normalizada pela pela seção transversal de geométrica em função do ângulo de espalhamento no plano $xz$ . . . . .	31
3.2	Seção transversal de espalhamento total normalizada pela seção transversal geométrica como função de $x_1 = \frac{2\pi r}{\lambda}$ para uma esfera dielétrica sem cobertura e para uma esfera coberta por três camadas dieléticas. . . . .	32
3.3	Esfera estratificada em três camadas dielétricas utilizada para validar os resultados obtidos para as distribuições de campo. . . . .	34
3.4	Distribuição da componente de campo elétrico $E_x$ no plano H obtida pelo método da matriz de transição. . . . .	35
3.5	Distribuição da componente de campo elétrico $E_x$ no plano H obtida pelo método FDTD. . . . .	36
3.6	Distribuição da componente de campo magnético $H_y$ no plano E obtida pelo método da matriz de transição. . . . .	37
3.7	Distribuição da componente de campo magnético $H_y$ no plano E obtida pelo método FDTD. . . . .	38
3.8	Distribuição da componente de campo elétrico $E_x$ ao longo do eixo $z$ obtida pelos métodos da matriz de transição e por FDTD. . . . .	39
3.9	Comparação entre as distribuições de campo elétrico no domínio do tempo, a quais foram obtidas através dos métodos FDTD e IDFT-matriz-T. . . . .	41
4.1	Seção transversal de radar normalizada pela seção transversal geométrica em função do ângulo de espalhamento no plano $xz$ . . . . .	48
4.2	Seção transversal de radar normalizada pela seção transversal geométrica em função do ângulo de espalhamento no plano $yz$ . . . . .	49
4.3	Seção transversal de radar normalizada pela seção transversal geométrica em função do ângulo de espalhamento no plano $xy$ . . . . .	50
4.4	Distribuição espacial do campo elétrico para uma esfera de PEC com $r_1=\lambda$ para uma esfera sem cobertura . . . . .	52
4.5	Distribuição espacial do campo elétrico para uma esfera de PEC com $r_1=\lambda$ usando as técnicas propostas em na literatura . . . . .	53
4.6	Distribuição espacial do campo elétrico para uma esfera de PEC com $r_1=\lambda$ para o caso 1 proposto aqui. . . . .	54
5.1	Curvas de dispersão da permissividade para as camadas de dielétrico do tipo A da cobertura isotrópica dispersiva. . . . .	59

5.2	Curvas de dispersão da permissividade para as camadas de dielétrico do tipo B da cobertura isotrópica dispersiva. . . . .	60
5.3	Curvas de dispersão da permeabilidade para as camadas de dielétrico do tipo A da cobertura isotrópica dispersiva. . . . .	61
5.4	Curvas de dispersão da permeabilidade para as camadas de dielétrico do tipo B da cobertura isotrópica dispersiva. . . . .	62
5.5	Curvas de dispersão da permissividade e da permeabilidade para algumas camadas da cobertura isotrópica dispersiva. . . . .	63
5.6	Taxa de redução da seção transversal de espalhamento total da cobertura isotrópica dispersiva com relação ao objeto de PEC esférico de raio $r = \lambda$ sem cobertura. . . . .	65
6.1	Função custo (seção transversal de espalhamento total) versus número de iterações nas simulações com PSO. . . . .	67
6.2	Seção transversal de radar normalizada no plano xz como uma função do ângulo $\theta$ para uma esfera de PEC e para o cobertura otimizado com PSO. . . . .	68
6.3	Seção transversal de radar normalizada no plano yz como uma função do ângulo $\theta$ para uma esfera de PEC e para o cobertura otimizado com PSO. . . . .	69
6.4	Seção transversal de radar normalizada no plano xy como uma função do ângulo $\phi$ para uma esfera de PEC e para o cobertura otimizado com PSO. . . . .	70
6.5	Seção transversal de espalhamento normalizada pela seção transversal geométrica em função do raio $r/\lambda$ . . . . .	71
6.6	Distribuição espacial da parte real da componente $E_x$ do campo elétrico total. O obstáculo é uma esfera de PEC com raio igual a $0.983\lambda$ . . . . .	73
6.7	Distribuição espacial da parte real da componente $E_x$ do campo elétrico total. O obstáculo é o cobertura otimizado. . . . .	74
6.8	Distribuição espacial da parte real da componente $E_x$ do campo elétrico total. O obstáculo é o cobertura otimizado. Os valores do campo elétrico são limitados no intervalo $[-2;2]$ a fim de facilitar a visualização. . . . .	75
7.1	Comparação entre as curvas de permissividade relativa em função da frequência para a solução analítica (válida para o caso quase-estático) e para o cobertura de uma única camada obtida por PSO. . . . .	77
7.2	Comparação entre as curvas de permissividade relativa em função da frequência para as duas camadas de uma cobertura obtida por PSO, e da única camada da cobertura obtida de forma analítica. . . . .	78
7.3	Seção reta de espalhamento total em função da frequência para a cobertura de uma única camada otimizada por PSO e para a solução analítica. . . . .	79
7.4	Seção reta de espalhamento total em função da frequência para a cobertura de uma única camada e para a cobertura de duas camadas otimizadas por PSO . . . . .	80

7.5	Permissividades elétricas relativas em função da frequência para coberturas de invisibilidade de duas camadas, para a camada mais interna (camada 1) e para a camada mais externa (camada 2), obtidas através de otimização por PSO e por AG. . . . .	81
7.6	Seção reta de espalhamento total em função da frequência para coberturas de invisibilidade de duas camadas, para a camada mais interna (camada 1) e para a camada mais externa (camada 2), obtidas através de otimização por PSO e por AG. . . . .	82
7.7	Campos elétricos totais no domínio do tempo para um objeto sem e com a cobertura de invisibilidade de duas camadas otimizada. . . . .	84
A.1	Representação de um ponto P no sistema de coordenadas esféricas . . . . .	92
A.2	Onda plana polarizada na direção x incidindo sobre uma esfera homogênea isotrópica de raio R . . . . .	99
B.1	Espaço virtual em coordenadas esféricas. . . . .	106
B.2	Espaço físico em coordenadas esféricas. . . . .	107
C.1	Esquema de cálculo para uma estrutura esférica estratificada em múltiplas camadas. . . . .	112
D.1	Distribuição espacial das componentes dos campos $\vec{E}$ e $\vec{H}$ para a célula de Yee $(i, j, k)$ . . . . .	115
E.1	O cromossomo reserva um certo número de genes para cada variável . . . . .	120
E.2	Roleta ponderada. . . . .	121
E.3	Cruzamento entre pares de cromossomos selecionados. A partir do ponto de cruzamento, é feita quebra dos cromossomos, os quais são posteriormente recombinados. . . . .	122
E.4	Diagrama de blocos da minimização da seção reta de espalhamento através da técnica de algoritmos genéticos. . . . .	123
F.1	Diagrama de blocos da minimização da seção reta de espalhamento total através da técnica de otimização por enxame de partículas. . . . .	126

# Lista de Tabelas

4.1	Valores otimizados para os parâmetros apresentados nas equações 4.6, 4.13 e 4.14, obtidos via PSO. . . . .	55
4.2	Redução média da seção transversal de espalhamento total da cobertura de camuflagem do "caso 1" para diferentes variações de parâmetros. . . . .	56
6.1	Parâmetros da cobertura otimizada: propriedades materiais (permissividade e permeabilidade relativas) e os raios das camadas. . . . .	67

## Resumo

Neste trabalho, foram analisadas e otimizadas coberturas de invisibilidade estratificadas em camadas esféricas concêntricas constituídas por materiais dielétricos homogêneos e isotrópicos, em que tanto a seção reta de espalhamento total quanto o número de camadas foram minimizados. Também foram realizadas otimizações para aumentar a faixa de frequências na qual há invisibilidade, para isso, efeitos dispersivos foram levados em conta.

Foram obtidas coberturas discretizadas (obtidas a partir de coberturas anisotrópicas) com reduções significativas (maiores do que 20 dB) da seção reta radar com relação ao espalhador sem cobertura em todas as direções de espalhamento, quando apenas 20 camadas foram utilizadas. Valores de redução equivalentes foram obtidos na literatura com no mínimo 80 camadas. Esses resultados foram obtidos em microondas.

Nós obtivemos uma redução, com relação a esfera sem cobertura, de 32 dB na seção reta de espalhamento total para uma cobertura estratificada (não obtida a partir de camadas anisotrópicas) em apenas 13 camadas. Esses resultados foram obtidos em microondas.

Nós otimizamos coberturas de invisibilidade dispersivas que apresentaram uma faixa de largura 5,4 vezes maior do que a que seria obtida sem considerar os efeitos dispersivos, na faixa de microondas.

Foram projetadas coberturas de invisibilidade que funcionam em frequências ópticas, para uma faixa de frequências.

*Palavras-chave:* Espalhamento eletromagnético, algoritmos bio-inspirados, otimização por enxame de partículas, algoritmo genético, método da matriz de transição, coberturas de invisibilidade.

## Abstract

In this work, we analyze and optimize invisibility cloaks stratified in concentric spherical homogeneous and isotropic layers, in which both the total scattering cross section and the number of layers have been minimized. In order to increase the range of frequencies in which there is invisibility, dispersive effects are taken into account.

In microwaves, We obtained discretized invisibility cloaks (obtained from anisotropic cloaks) with significant reductions (greater than 20 dB) of the total scattering cross section, for only 20 layers (which is achieved in the literature with at least 80 layers).

We obtained a reduction of 32 dB in the total scattering cross section for a cloak stratified in only 13 layers. This result was obtained in microwaves.

In microwaves, we optimized dispersive invisibility cloaks which present a bandwidth 5.4 times larger than would be obtained by a optimized cloak without dispersive effects.

Cloaks are designed to operate in optical frequencies, for a wide range of frequencies.

*Keywords:* Electromagnetic scattering, bio-inspired algorithms, particle swarm optimization technique (PSO), genetic algorithm (GA), transition matrix method, invisibility cloaks.

# Capítulo 1

## Introdução

Malgrado um corpo invisível não seja um objeto que faça parte do nosso cotidiano, é possível descrever facilmente o seu comportamento físico. O que torna um objeto visível é o campo espalhado produzido quando sobre ele incide uma onda. Pois, no momento em que esse campo espalhado está disponível para detecção por um sensor (que pode ser a retina humana, por exemplo) pertencente a um determinado sistema externo ao objeto, é possível afirmar que o objeto está visível a esse sistema, mesmo que por alguma falha de qualquer ordem, o sistema não seja capaz de efetivamente "enxergar o objeto" (como no caso dos deficientes visuais).

Dessa feita, uma cobertura de invisibilidade pode ser definida como a estrutura que ao ser utilizada para envolver um objeto, torna-o invisível ou, reduz drasticamente a sua visibilidade. Em outras palavras, uma cobertura de invisibilidade é a estrutura capaz de praticamente eliminar o campo espalhado produzido por um objeto. Contudo, essa redução do espalhamento não deve ter a absorção como causa, pois, nesse caso, tratar-se-ia de um corpo negro, o qual obviamente não estaria invisível.

Em termos técnicos, podemos afirmar que um objeto é perfeitamente invisível se a sua seção transversal de espalhamento total, que é média dos valores de seção transversal de radar em todas as direções [1], é nula [2, 3].

Uma vultosa quantidade de trabalhos vem sendo publicada recentemente sobre coberturas de invisibilidade, devido ao interesse em suas muitas possibilidades de aplicação, tais como: camuflagem de sensores [4, 5, 6, 7]; redução da seção transversal de radar de aeronaves e mísseis (aplicações militares) [8, 9, 10]; eliminação do efeito de carga (*loading effect*) de objetos de grandes dimensões próximos a antenas irradiando [11]; camuflagem e sondagem não-invasiva em nano-óptica [12]; super-antenas [13]; substratos para antenas conformes [10], redução dos efeitos da desorganização urbana que intefere nas comunicações em microondas [10] e redução da perturbação eletromagnética da medição em um microscópio óptico de varredura de campo-próximo [5].

As coberturas de invisibilidade não se restringem aos problemas de eletrodinâmica, existindo, por exemplo, coberturas de invisibilidade acústicas [14, 15, 16, 17] e quânticas [18, 16, 17]. Entre as possíveis aplicações de coberturas de invisibilidade acústicas estão a

obtenção de isolamento acústico [14] e a ocultação de submarinos que estejam na circunvizinhança de um sonar [15]. Por sua vez, a cobertura de invisibilidade quântica possui as armadilhas de íons eletrostáticas quase invisíveis para ondas de matéria como uma de suas possíveis aplicações [18].

Diversos efeitos físicos podem ser utilizados na obtenção de coberturas de invisibilidade, a saber: cancelamento de espalhamento [3, 19, 4, 5], transformação de coordenadas [20, 21, 22], redes de linhas de transmissão [2], mapeamento conforme [23], ressonâncias plasmônicas [24] e material de índice negativo [25].

As aplicações do método da transformação de coordenadas não se restringem a coberturas de invisibilidade. Outras possibilidades de aplicação podem ser: concentradores, rotacionadores [26, 27, 28], buracos de minhoca eletromagnéticos [28], ilusões ópticas com transformação da forma do objeto [29], ilusões ópticas com deslocamento e aumento do tamanho do objeto [30].

Verificações experimentais de dispositivos de invisibilidade, baseadas no método da transformação de coordenadas, foram realizadas por meio de dispositivos operando em uma faixa de frequências estreita na região de microondas para uma geometria cilíndrica [31, 10] e, mais recentemente, em banda larga na faixa da luz visível para uma geometria poligonal [32].

O uso de metamateriais, os quais possuem propriedades físicas diferentes daquelas apresentadas pelos materiais convencionais, tem-se mostrado importante para a realização prática de dispositivos de invisibilidade [10, 31, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39].

A unicidade do problema de espalhamento inverso para ondas propagando em um meio isotrópico [40] torna impossível a existência de coberturas isotrópicas perfeitamente invisíveis, uma vez que, sendo a solução única, o caso de espalhamento nulo deve sempre coincidir com o vácuo sem obstáculos. Portanto, só resta a possibilidade de que uma cobertura perfeitamente invisível seja anisotrópica.

Em 2006, coberturas anisotrópicas perfeitamente invisíveis foram teoricamente propostas [20, 21], corroborando o que fora previsto anteriormente. Além disso, constatou-se que essas coberturas deveriam ser heterogêneas, com parâmetros eletromagnéticos que variam ao longo do raio. Diante dessas adversidades, podemos afirmar que a fabricação dessas coberturas de invisibilidade anisotrópicas é praticamente impossível com a tecnologia atual, e até mesmo a simulação computacional de tais estruturas é uma tarefa complexa [41].

Por outro lado, boas aproximações para as coberturas de invisibilidade anisotrópicas podem ser obtidas utilizando a teoria de meios de parâmetros efetivos, através de estruturas constituídas de múltiplas camadas homogêneas e isotrópicas, as quais apresentam dois tipos de materiais dielétricos alternantes [42, 43]. Entretanto, estruturas estratificadas em múltiplas camadas homogêneas e isotrópicas baseadas em outros efeitos físicos, como o cancelamento de espalhamento, podem ser utilizadas para produzir coberturas de invisibilidade [12, 44]. Para diferenciar essas estruturas, adicionaremos o termo "discretizada" para a cobertura estratificada obtida por discretização de uma cobertura anisotrópica.

A principal diferença entre elas é que uma cobertura de invisibilidade discretizada requer a igualdade entre a permissividade relativa e a permeabilidade relativa de cada uma das camadas, o que não ocorre para outros tipos de coberturas de invisibilidade.

Existem coberturas de invisibilidade capazes de envolver objetos com várias formas, tais como: cilíndricas [45, 46, 47, 48, 49], elípticas [50, 51, 52, 53], esféricas [20, 21, 54, 55] ou ainda, com formas arbitrárias [56, 57, 58].

Nós analisaremos coberturas de invisibilidade constituídas de múltiplas camadas esféricas concêntricas, homogêneas e isotrópicas. A fim de que possamos analisar o comportamento dessas estruturas para diferentes valores de frequência, serão feitas análises de campo distante baseadas em curvas de seção transversal de espalhamento total em função da frequência. Contudo, por menor que seja o valor da seção transversal de espalhamento total em uma certa frequência, não é possível garantir que em pelo menos uma direção específica, como na direção de espalhamento para trás ou na direção de espalhamento para frente, não ocorra um espalhamento acentuado. Assim, também precisaremos analisar as curvas de seção transversal de radar em função do ângulo de espalhamento.

Por outro lado, é importante também observar se nas proximidades do objeto são formadas figuras de interferência, através da deformação das frentes de onda. Pois, a ocorrência desse fenômeno indica que o objeto está perturbando o meio em suas proximidades e, portanto, pode ser detectado. Para garantir que isso não está ocorrendo, nós realizaremos análises de campo próximo, a partir das distribuições espaciais de campos eletromagnéticos.

Nosso objetivo geral foi obter coberturas de invisibilidade otimizadas, procurando reduzir o número de camadas e a espessura da cobertura bem como obter estruturas que funcionem para uma extensa faixa de frequências. O parâmetro de comprimento de um objeto esférico é igual a  $2\pi r/\lambda$ , onde  $r$  é o raio do objeto e  $\lambda$  é o comprimento de onda da radiação incidente. Para que os cálculos de função objetivo fossem obtidos com precisão e sem limitações quanto ao raio elétrico do objeto, nós utilizamos um método analítico baseado no método da matriz de transição (matriz T) [1, 59], o qual fornece a solução exata com baixo custo computacional.

Todas as análises foram realizadas através do método da matriz T. A seu turno, para a otimização das estruturas, nós utilizamos dois métodos de otimização bio-inspirados: o algoritmo genético e o enxame de partículas.

Nós desenvolvemos duas versões do algoritmo para o método da matriz T: um para um núcleo de PEC e outro para um núcleo dielétrico. A razão disso está em termos optado por trabalhar tanto na faixa óptica quanto em microondas. Pois, como a parte imaginária da permissividade complexa é inversamente proporcional a frequência, para altas frequências (faixa óptica), um núcleo condutor deve ser modelado como um dielétrico com permissividade complexa finita. Por sua vez, para frequências mais baixas (microondas), a parte imaginária da permissividade complexa de um condutor apresenta um valor tão elevado que precisa ser modelado como um valor tendendo ao infinito.

## 1.1 Objetivos do trabalho

Coberturas de invisibilidade aproximadas podem ser obtidas através de coberturas estratificadas em camadas homogêneas e isotrópicas obtidas por discretização de coberturas anisotrópicas [42, 43] ou não [12, 44]. Mas uma cobertura com muitas camadas é um problema tecnológico. Por outro lado, a redução no número de camadas faz com que o desempenho da cobertura de invisibilidade seja degradado, levando ao aumento do espalhamento eletromagnético.

Efeitos dispersivos devem ser levados em conta no projeto de coberturas de invisibilidade. Pois eles possuem uma relação estreita com a resposta dinâmica e a largura de banda de operação de dispositivos de invisibilidade [60, 61]. A consideração de efeitos de dispersão é fundamental na concepção de dispositivos de invisibilidade capazes de funcionar não apenas em uma única frequência, mas em uma certa faixa de frequências [62].

Nossos objetivos específicos relacionados à faixa de microondas são: melhorar as técnicas já disponibilizadas na literatura no projeto de coberturas discretizadas [42, 43]; obter os parâmetros eletromagnéticos para uma cobertura discretizada que funcione em uma larga faixa de frequências; obter uma cobertura de invisibilidade que apresente uma espessura reduzida e o menor número de camadas possível.

Para a faixa óptica, nossos objetivos específicos estão relacionados à obtenção de coberturas de invisibilidade operando em uma larga faixa de frequências.

## 1.2 Contribuições

Este trabalho apresenta importantes contribuições com relação a metodologia utilizada, pois, diferentemente das abordagens utilizadas em outros trabalhos, nosso método de análise e otimização não se restringe a região óptica (comprimento de onda muito menor do que as dimensões do objeto espalhador) nem a região de Rayleigh (comprimento de onda muito maior do que as dimensões do objeto espalhador), mas sim, além de poder ser utilizada nesses dois casos, também pode ser empregada quando o comprimento de onda da radiação incidente é da ordem das dimensões do objeto espalhador. Além disso, em nosso trabalho são considerados materiais mais realísticos, por exemplo, não são considerados materiais com índice de refração negativo. Ainda podemos destacar que o nosso método permite projetar estruturas que funcionem em uma larga faixa de frequências. Nosso método também permite que outras restrições sejam consideradas, por exemplo, além de minimizar o espalhamento, podemos maximizar o campo no interior do objeto espalhador, o que seria útil no caso da camuflagem de sensores.

As principais contribuições com relação aos resultados obtidos são: obtenção de coberturas de invisibilidade esférica isotrópicas com o menor número de camadas da literatura e coberturas de invisibilidade que operam em uma larga faixa de frequências, tanto em microondas como em frequências ópticas.

## 1.3 Organização do trabalho

Este trabalho está organizado em oito capítulos e cinco apêndices. O primeiro capítulo é constituído por esta introdução. No capítulo oito, são apresentadas as considerações finais.

No segundo capítulo, intitulado "a eletrodinâmica da invisibilidade", são discutidas as idéias e os conceitos que mostraram ser fisicamente possível a obtenção de invisibilidade, tais como, a técnica de cancelamento do espalhamento e a idéia de meios de transformação.

No terceiro capítulo, intitulado "validação dos métodos de análise", são mostrados alguns resultados que mostram a precisão dos algoritmos utilizados em nossas análises, a saber, o método da matriz de transição (matriz-T), o método IDFT+(matriz-T) e o método FDTD.

No quarto capítulo, intitulado "invisibilidade em microondas via coberturas discretizadas", são analisadas e otimizadas coberturas de invisibilidade isotrópicas obtidas pela discretização de coberturas anisotrópicas, em microondas. Nós utilizamos a técnica do enxame de partículas (PSO) para projetar coberturas de invisibilidade esféricas constituídas de múltiplas camadas homogêneas e isotrópicas, as quais foram obtidas pela discretização de coberturas anisotrópicas, com base na teoria de meios de parâmetros efetivos [42, 43]. Nosso objetivo nesse capítulo será ajustar os parâmetros eletromagnéticos e geométricos das camadas do meio de parâmetros efetivos para que uma melhor aproximação para o meio de material anisotrópico seja obtida. Para realizar esse ajuste nós utilizaremos a técnica de otimização por enxame de partículas.

No capítulo cinco, intitulado "Invisibilidade em microondas via coberturas discretizadas constituídas de materiais dispersivos", são analisadas e otimizadas coberturas de invisibilidade isotrópicas obtidas pela discretização de coberturas anisotrópicas, em microondas, considerando os efeitos de dispersão inerentes ao projeto de coberturas que funcionem em uma larga faixa de frequências. A partir de pequenas modificações nos parâmetros eletromagnéticos de uma das coberturas discretizadas otimizadas obtidas anteriormente, foram realizadas 40 simulações com o PSO para diferentes valores de  $r/\lambda$ , resultando em parâmetros otimizados para os quais foi realizado um ajuste de curva por "spline". Com esse procedimento, foram obtidas curvas de parâmetros eletromagnéticos em função da frequência para os materiais que compõem as camadas da cobertura, tais que a cobertura discretizada dispersiva obtida funciona em uma larga faixa de frequências em microondas.

No capítulo seis, intitulado "Invisibilidade em microondas via coberturas estratificadas", são analisadas e otimizadas (em microondas) coberturas de invisibilidade isotrópicas que não são obtidas pela discretização de coberturas anisotrópicas. Nós utilizamos a técnica do enxame de partículas (PSO) para projetar uma cobertura de invisibilidade esférica constituída de múltiplas camadas homogêneas e isotrópicas depositadas sobre um núcleo de PEC de raio  $r=0.983\lambda$ , de tal maneira que a espessura seja reduzida, e que ela possua o menor número possível de camadas, mas com uma redução da seção transversal de espalhamento total superior a 20 dB. Nosso objetivo é encontrar uma solução para um número de camadas muito menor do que os apresentados atualmente na literatura [41].

No capítulo sete, intitulado "Invisibilidade na faixa óptica via coberturas estratificadas constituídas de materiais dispersivos", são analisadas e otimizadas (em frequências ópticas) coberturas de invisibilidade isotrópicas que não são obtidas pela discretização de coberturas anisotrópicas, considerando os efeitos de dispersão inerentes ao projeto de coberturas que funcionem em uma larga faixa de valores de comprimento de onda. Nós analisamos uma esfera de ouro de raio 250 nm na faixa de frequências de 400 nm a 1000 nm. Os parâmetros otimizados de coberturas de invisibilidade esféricas de material dispersivo que funcionem em uma larga faixa de frequências serão obtidas, utilizando um enxame de partículas e um algoritmo genético. Serão consideradas uma cobertura de uma única camada de espessura 50 nm e uma cobertura de duas camadas de espessuras 50 nm e 60 nm. As permissividades das camadas serão utilizadas como parâmetros a serem otimizados.

No apêndice A, intitulado "Solução analítica do espalhamento eletromagnético por uma esfera homogênea e isotrópica", é apresentada a formulação geral do problema de espalhamento eletromagnético através da expansão em harmônicos vetoriais esféricos.

No apêndice B, intitulado "Meio de transformação", são apresentadas as equações de equivalência entre a métrica do vácuo com geometria não-euclidiana e os parâmetros eletromagnéticos de um meio dielétrico.

No apêndice C, intitulado "Método da matriz de transição", são obtidas as equações utilizadas no método da matriz de transição (matriz-T). Nós desenvolvemos um código baseado no método da matriz de transição para solucionar o problema de espalhamento eletromagnético por partículas esféricas estratificadas em múltiplas camadas, tanto um núcleo de material dielétrico quanto para um núcleo de material condutor eletricamente perfeito (PEC). Esse é um método analítico que fornece uma solução precisa para uma extensa faixa de valores de frequência. O algoritmo do método foi implementado em um código em FORTRAN 90. Esse código foi utilizado em todas as nossas simulações.

No apêndice D, intitulado "O método FDTD", é apresentado o método das diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD).

No apêndice E, intitulado "Algoritmo da técnica AG", são apresentados os conceitos relativos ao algoritmo genético implementado neste trabalho. A técnica de algoritmos genéticos (AGs) é uma técnica de otimização inspirada no neodarwinismo. Em que as soluções do problema são representadas por indivíduos de uma população. Os indivíduos mais aptos possuem maior probabilidade de propagarem o seu material genético. Assim, a tendência com a evolução do programa conforme são realizadas as iterações é que apenas os melhores indivíduos sobrevivam, isto é, as melhores soluções. O algoritmo do AG foi implementado em um código em FORTRAN 90.

No apêndice F, intitulado "Algoritmo da técnica PSO", é apresentado o algoritmo de otimização por enxame de partículas (PSO) apresentado neste trabalho. No algoritmo PSO, uma população de  $N$  partículas é definida no espaço de parâmetros  $\mathbb{R}^n$ , onde as  $n$  componentes do vetor posição de cada partícula representam os  $n$  parâmetros envolvidos no problema de otimização. As partículas movem-se por inércia em geral em um meio dissipativo e são atraídas por forças elásticas em direção aos pontos de mínimo local e

mínimo global, onde o mínimo global é o mínimo de todas as partículas e o mínimo local é o mínimo de cada partícula individual [63]. O algoritmo do PSO foi implementado em um código em FORTRAN 90.

## Capítulo 2

# A eletrodinâmica da invisibilidade

A seção transversal de espalhamento total tem sido utilizada como medida de visibilidade de coberturas de invisibilidade tanto em trabalhos teóricos [64, 65, 66, 61] quanto experimentais [67], assim como, em coberturas obtidas por diferentes efeitos físicos como: transformação de coordenadas [68], cancelamento de espalhamento [66] e redes de linhas de transmissão [69]. O fato da seção transversal de espalhamento levar em consideração tanto efeitos de reflexão quanto de sombreamento, a credencia como uma medida pela qual é possível avaliar a eficiência de uma cobertura de invisibilidade [68].

A seção transversal de espalhamento total é definida como a medida da energia total irradiada com relação a densidade de energia total que incide sobre um objeto, portanto, tendo unidade de área [68]. Assim, podemos afirmar que um objeto é perfeitamente invisível se a sua seção transversal de espalhamento total é nula [2, 3], pois, neste caso, não há campo espalhado. Todavia, como mencionado anteriormente, o conceito de coberturas perfeitamente invisíveis que sejam homogêneas e isotrópicas é conflitante com a teoria eletromagnética clássica [40]. Por outro lado, não existe nenhuma proibição teórica quanto à utilização de estruturas isotrópicas como aproximações para coberturas de invisibilidade. Dessa forma, não é possível obter uma cobertura de invisibilidade isotrópica com seção transversal de espalhamento total igual a zero, mas sim igual a um valor mínimo.

A seção transversal de espalhamento total não fornece informações detalhadas sobre o espalhamento eletromagnético. Por exemplo, ela não permite que possamos constatar se efetivamente ocorreu redução do espalhamento para trás ou do espalhamento para frente, pois, representa apenas o espalhamento médio com relação a todas as direções. Em um caso extremo, poderíamos considerar a situação em que o espalhamento torna-se nulo em todas as direções e muito intenso em uma direção específica, mas de tal forma que o valor de seção transversal de espalhamento total ainda fosse muito baixo. Como essa cobertura deixaria o objeto detectável, ela não produziria o efeito de invisibilidade.

Portanto, vemos que, outras formas de medir a visibilidade de uma cobertura também devem ser consideradas. A escolha natural é a da seção transversal de radar, a qual fisicamente tem o mesmo significado de razão entre a energia espalhada e a densidade de

energia que incide sobre o objeto, mas em uma direção específica. Em outras palavras, a seção transversal de espalhamento total é a média dos valores de seção transversal de radar em todas as direções [1]. Então, ao analisarmos a seção transversal de radar de uma cobertura podemos avaliar se ela provoca uma redução considerável no espalhamento em todas as direções, ou seja, se ela é realmente uma cobertura de invisibilidade.

Um efeito que geralmente está associado à invisibilidade é a blindagem. A invisibilidade faz com que um observador externo não tenha informações (campos espalhados) que permitam detectar a presença do objeto. Por sua vez, a blindagem faz com que não existam informações sobre os campos externos disponíveis no interior da região envolvida pela cobertura de invisibilidade. Contudo, através da escolha adequada dos parâmetros eletromagnéticos, é possível manter o efeito de invisibilidade e simultaneamente degradar o efeito de blindagem [70].

## 2.1 Equação e unidades de medida da seção transversal de radar

A seção transversal de radar (RCS), a qual é representada por  $\sigma(\phi, \theta)$ , é calculada pela equação expressa a seguir [71]:

$$\sigma(\phi, \theta) = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{|\tilde{E}_s(\phi, \theta)|^2}{|\tilde{E}_i(\phi, \theta)|^2}, \quad (2.1)$$

onde  $\tilde{E}_i$  e  $\tilde{E}_s$  são, respectivamente, as intensidades de campo incidente e de campo espalhado fasoriais, na região de campo distante.

O espaço que cerca uma antena normalmente é subdividido em três regiões: (a) região de campo próximo reativo, (b) região de campo próximo de irradiação (Fresnel) e (c) região de campo distante (Fraunhofer) como mostrado na Figura 2.5. Embora, vários critérios tenham sido estabelecidos e sejam comumente usados para identificar estas regiões, não há mudança abrupta nas configurações de campo nos limites entre as mesmas.

A região de campo próximo reativo é definida como: a região de campo próximo imediatamente ao redor da antena, na qual predominam campos reativos. Para muitas antenas, essa região é aquela para a qual  $R < 0,62\sqrt{D^3/\lambda}$ , onde  $R$  é a distância a partir da superfície da antena,  $\lambda$  é o comprimento de onda e  $D$  é a maior dimensão da antena. Para um dipolo muito curto, ou um irradiador equivalente, é necessário ter  $R < \lambda/2\pi$ .

A região de campo próximo de irradiação (ou região de Fresnel) é definida como: a região do campo de uma antena entre as regiões de campo próximo reativo e a região de campo distante na qual predominam campos irradiados, e na qual a distribuição angular do campo é dependente da distância da antena. Se a antena tem uma dimensão máxima que não é grande comparada ao comprimento de onda, esta região pode não existir. Para muitas antenas, essa região é aquela para a qual  $0,62\sqrt{D^3/\lambda} \leq R \leq 2D^2/\lambda$  (esses limites são válidos, de uma forma geral, somente quando  $D > \lambda$ ). Nesta região, o diagrama de irradiação é, em geral, uma função da distância radial.

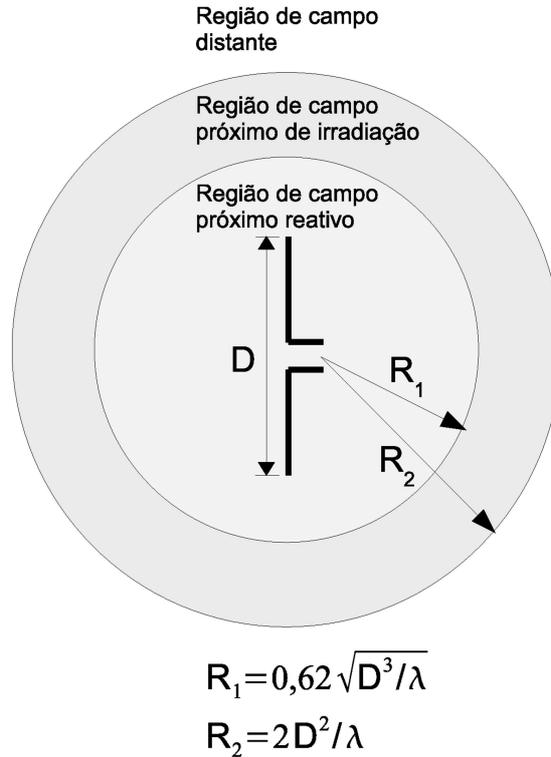


Figura 2.1: Regiões de campo próximo e campo distante de uma antena

A região de campo distante (ou região de Fraunhofer) é definida como: a região do campo de uma antena onde a distribuição angular do campo é essencialmente independente da distância da antena. Para muitas antenas, essa região é aquela para a qual  $R > 2D^2/\lambda$ . Os diagramas de irradiação de certas antenas são sensíveis às variações na fase sobre suas aberturas. Para estas antenas  $2D^2/\lambda$  pode ser inadequado. Se  $D \gg \pi/|\lambda|$ , então,  $R > |\lambda|D^2/\pi$ , onde  $\gamma$  é a constante de propagação do meio. Nesta região, as componentes de campo são essencialmente transversais e a distribuição angular é independente da distância radial onde as medidas são feitas. Para muitas antenas, essa região é aquela para a qual  $R > 2D^2/\lambda$ .

Podemos notar, a partir da equação (2.1) que, conquanto a seção transversal de radar seja proporcional a razão entre as potências espalhada e incidente, ela possui unidade de área e, o cálculo de dez vezes o logaritmo de base 10 da RCS, não representa um valor em decibéis ou dB, e sim, em decibéis metro-quadrado ou dBsm (*decibel square-meter*). Contudo, em alguns trabalhos, a RCS é dada em dB, quando aparece normalizada por uma certa área, em geral, a seção transversal geométrica.

## 2.2 Diferenciação entre coberturas absorventes e coberturas de invisibilidade

Uma maneira trivial de reduzir o espalhamento eletromagnético é utilizar uma cobertura constituída de um material de elevadas perdas, capaz de absorver bastante a onda incidente. Porém, essa cobertura não poderia ser considerada um cobertura de invisibilidade, uma vez que, apenas o retroespalhamento (potência espalhada para trás) seria reduzido. Por exemplo, considerando um obstáculo localizado entre duas antenas distantes, uma das quais produz uma onda plana incidente (antena transmissora), cuja potência será em parte espalhada e em parte absorvida pelo obstáculo, resultando em uma potência atenuada a qual será recebida na outra antena (antena receptora). Para essas antenas distantes, devem ser considerados o espalhamento para trás (em direção da antena transmissora), que pode ser medido em função da potência que é refletida de volta para a antena transmissora, e da onda espalhada para frente (em direção a antena receptora), a qual é medida pela diferença entre a potência transmitida através do obstáculo e a atenuação da potência. A atenuação da potência é representada pela potência espalhada em todas as direções (exceto em direção à antena transmissora) e a potência absorvida pelo obstáculo.

O espalhamento por um obstáculo, representado em termos das ondas espalhadas para frente e para trás, está ilustrado na Figura 2.2. Se o obstáculo é um corpo negro ideal, ele absorve toda a radiação incidente, e não reflete nada de volta; portanto, nesse caso, não há espalhamento para trás. Contudo, a radiação transmitida será bastante atenuada, e portanto, será mais perceptível para a antena receptora. Portanto, se o obstáculo for envolvido por uma cobertura de material altamente absorvedor, ocorre uma drástica redução na onda espalhada para trás, porém, a onda espalhada para a frente não será eliminada, como ilustrado na Figura 2.3. Portanto, um cobertura de invisibilidade não deve espalhar para frente, nem para trás, como ilustrado na Figura 2.4.

Vale lembrar ainda que um corpo negro, além de não permitir que se enxergue através dele, re-irradia na faixa do infravermelho, o que pode torná-lo detectável mesmo levando em conta apenas a direção de retroespalhamento.

## 2.3 Técnica de cancelamento de espalhamento

Uma onda eletromagnética pode ser descrita através dos momentos de multipolos de uma fonte irradiante, pois, a partir deles é possível calcular a energia e o momento angular transportados pela onda [72]. A solução do problema de espalhamento de uma onda eletromagnética por uma esfera isotrópica pode ser obtida através do método da expansão em multipolos [72, 73] (ver apêndice A).

A técnica do cancelamento de espalhamento foi proposta por Alú e Engheta em [3], e é fundamentada na idéia de que o espalhamento por um objeto atingido por uma onda eletromagnética ocorre devido às polarizações induzidas no mesmo (momentos de dipolo, quadrupolo, etc.). Quando o comprimento de onda da radiação incidente é muito maior

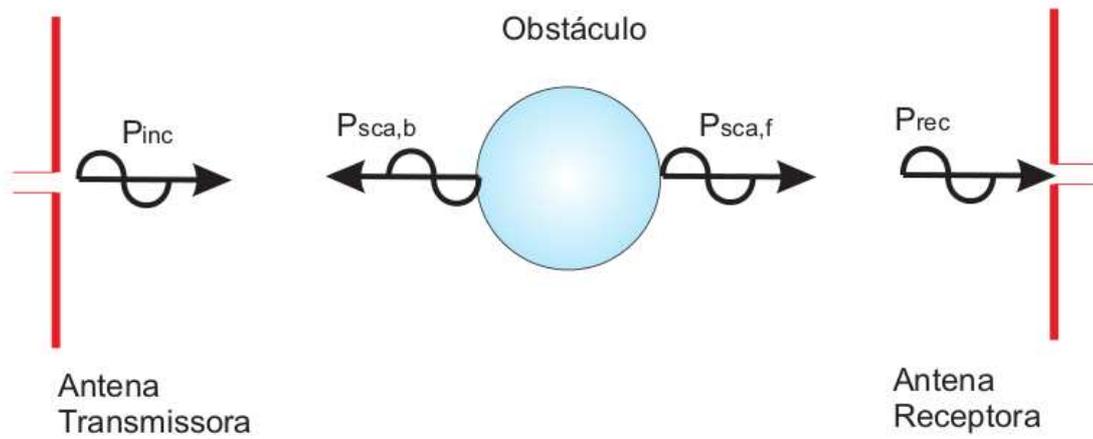


Figura 2.2: Um obstáculo é colocado entre duas antenas distantes.

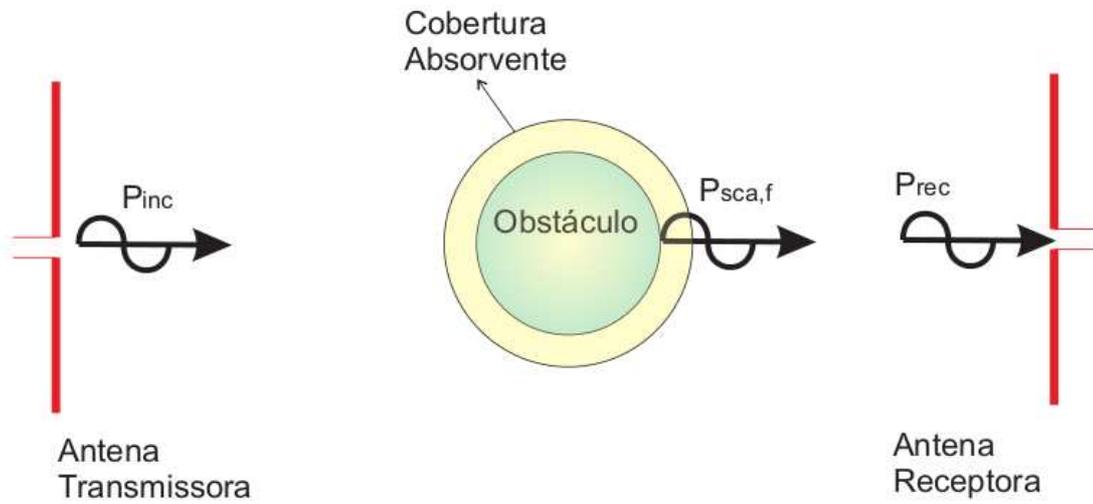


Figura 2.3: Quando o obstáculo é envolvido por uma camada de material absorvente o espalhamento para trás é eliminado.



Figura 2.4: Quando o obstáculo é envolvido por uma camada de camuflagem o espalhamento é removido completamente.

do que as dimensões da partícula, o modo fundamental, o qual corresponde à irradiação de um dipolo, é dominante. Se a partícula for envolvida por um cobertura de espessura e parâmetros constitutivos adequados, as polarizações induzidas na partícula e na cobertura cancelar-se-ão, como ilustrado na figura 2.5.

Uma cobertura esférica constituída de uma única camada esférica de raio externo  $b$ , composta de um material com permissividade relativa  $\varepsilon_c$  e permeabilidade relativa  $\mu_c$ , pode ser utilizada para tornar invisível um espalhador esférico de raio  $a$ , composto de um material homogêneo com permissividade relativa  $\varepsilon$  e permeabilidade relativa  $\mu$ . Pela teoria de Mie (ver apêndice A), o campo espalhado por uma onda plana é obtido como a soma dos harmônicos esféricos com amplitudes complexas  $c_n^{TE}$  e  $c_n^{TM}$  [3, 74], em que  $n$  é a ordem do harmônico. Esses coeficientes podem ser escritos na forma a seguir [3]:

$$c_n^{TE} = -\frac{U_n^{TE}}{U_n^{TE} + iV_n^{TE}} \quad (2.2)$$

para a polarização TE em relação a direção radial (o campo elétrico não possui componente radial, mas apenas componentes zenital e azimutal) e

$$c_n^{TM} = -\frac{U_n^{TM}}{U_n^{TM} + iV_n^{TM}}. \quad (2.3)$$

para a polarização TM em relação a direção radial (o campo elétrico não possui componente radial, mas apenas componentes zenital e azimutal), em que o valor de  $U_n^{TM}$ ,

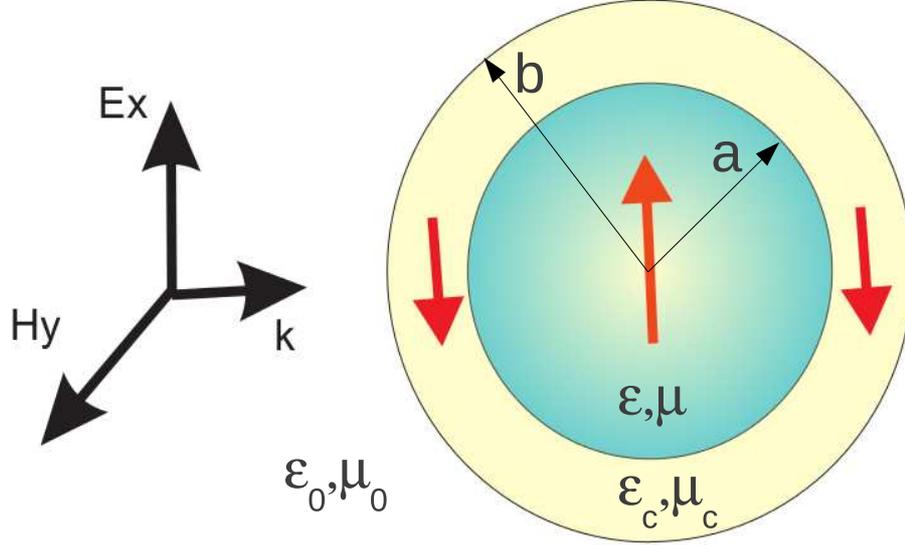


Figura 2.5: As polarizações da partícula e da cobertura de camuflagem cancelam-se mutuamente.

relativo à polarização TM, é real e dado pelo determinante a seguir:

$$U_n^{TM} = \begin{vmatrix} j_n(ka) & j_n(k_c a) & y_n(k_c a) & 0 \\ j'_n(ka)/\varepsilon & j'_n(k_c a)/\varepsilon_c & y'_n(k_c a)/\varepsilon_c & 0 \\ 0 & j_n(k_c b) & y_n(k_c b) & j_n(k_0 b) \\ 0 & j'_n(k_c b)/\varepsilon_c & y'_n(k_c b)/\varepsilon_c & j'_n(k_0 b)/\varepsilon_m \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

O valor de  $U_n^{TE}$ , relativo à polarização TE, é real e dado por uma expressão idêntica à equação (2.4), apenas com a substituição de  $\varepsilon$  por  $\mu$ . Nessas expressões,  $k$ ,  $k_c$  e  $k_0$ , são os números de onda do espalhador, da cobertura e do vácuo (meio envolvente), respectivamente. Como a seção transversal de espalhamento total é dada por [3]:

$$\sigma_{sca} = \frac{2\pi}{|k_0|^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|c_n^{TE}|^2 + |c_n^{TM}|^2), \quad (2.5)$$

para que a cobertura de raio  $b$  torne o espalhador esférico de raio  $a$  invisível, é necessário que  $\sigma_{sca} = 0$ . Essa condição pode ser obtida fazendo  $U_n^{TE} = 0$  e  $U_n^{TM} = 0$ . Entretanto, como explicado anteriormente, para um meio isotrópico não é possível obter  $\sigma_{sca} = 0$ , mas sim  $\sigma_{sca} \approx 0$ .

Uma versão menos elaborada dessas idéias fora apresentada anteriormente em [75, 76, 77], para os casos em que o corpo apresenta dimensões muito menores do que o comprimento de onda da radiação incidente, quando o espalhamento devido às contribuições de multipolos pode ser desprezado.

Para o caso especial de duas esferas concêntricas, a polarizabilidade, que é definida como o momento dipolar normalizado pela intensidade de campo incidente, é dada por [73]

$$\alpha = 4\pi b^3 \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_m)(\varepsilon + 2\varepsilon_c) + f(\varepsilon - \varepsilon_c)(\varepsilon_m + 2\varepsilon_c)}{(\varepsilon_c + 2\varepsilon_m)(\varepsilon + 2\varepsilon_c) + f(\varepsilon - \varepsilon_c)(-2\varepsilon_m + 2\varepsilon_c)}, \quad (2.6)$$

em que  $f = (a/b)^3$ , com  $a$  e  $b$  representando os raios do núcleo e da cobertura; e  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_c$  e  $\varepsilon_m$  são as permissividades relativas do núcleo, da cobertura e do meio externo (ar), respectivamente.

Podemos reduzir o espalhamento eliminando a contribuição de dipolo elétrico, a qual é mais significativa. Para isso fazemos a polarizabilidade igual a zero ( $\alpha = 0$ ), o que ocorre quando é satisfeita a condição mostrada a seguir [73]:

$$f = \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_m)(\varepsilon + 2\varepsilon_c)}{(\varepsilon_c - \varepsilon)(\varepsilon_m + 2\varepsilon_c)}. \quad (2.7)$$

Se o meio externo é o ar ( $\varepsilon_m = 1$ ), a solução da equação anterior é

$$\varepsilon_c = \frac{(2\varepsilon - 1)f + \varepsilon - 2 \pm \sqrt{(4\varepsilon^2 + 4\varepsilon + 1)f^2 + (4\varepsilon^2 - 26\varepsilon + 4)f + \varepsilon^2 + 4\varepsilon + 4}}{4f - 4}. \quad (2.8)$$

Para um núcleo feito de ouro, a permissividade relativa  $\varepsilon$ , na faixa de frequências de 400 a 1000 nanômetros é dada pela curva mostrada na figura 2.6 [78]. Se o núcleo é uma esfera de ouro de raio 250 nm, a permissividade relativa  $\varepsilon_c$  de uma cobertura de raio 300 nm, obtida pela equação (2.8), é dada pela curva mostrada na figura 2.7. Existe uma segunda solução da equação (2.8) que não será analisada aqui, pois representa uma estrutura constituída de um material absorvedor com elevadas perdas, e que, portanto, não constitui uma cobertura de invisibilidade. Como a espessura da camada é muito maior do que 0,5 nm, os efeitos quânticos podem ser desprezados [79].

Na figura 2.8, nós comparamos as seções transversais de espalhamento e de absorção para um núcleo de ouro sem e com cobertura esférica obtida pela equação (2.8), na faixa de 400 a 1000 nm. É interessante notar que, não é apenas a seção transversal de espalhamento que é reduzida, mas também, a seção transversal de absorção. Contudo, para o exemplo mostrado na figura 2.8, a redução do espalhamento é menor do que 80% (aproximadamente 7 dB) para qualquer valor de frequência.

Embora o momento dipolar seja dominante, nós constatamos que o espalhamento não tende a zero, isso ocorre porque as contribuições de multipolos maiores do que o dipolo não podem ser ignoradas para frequências diferentes de zero. Além disso, a partir da figura 2.8 podemos constatar que essas contribuições tornam-se cada vez mais significativas à

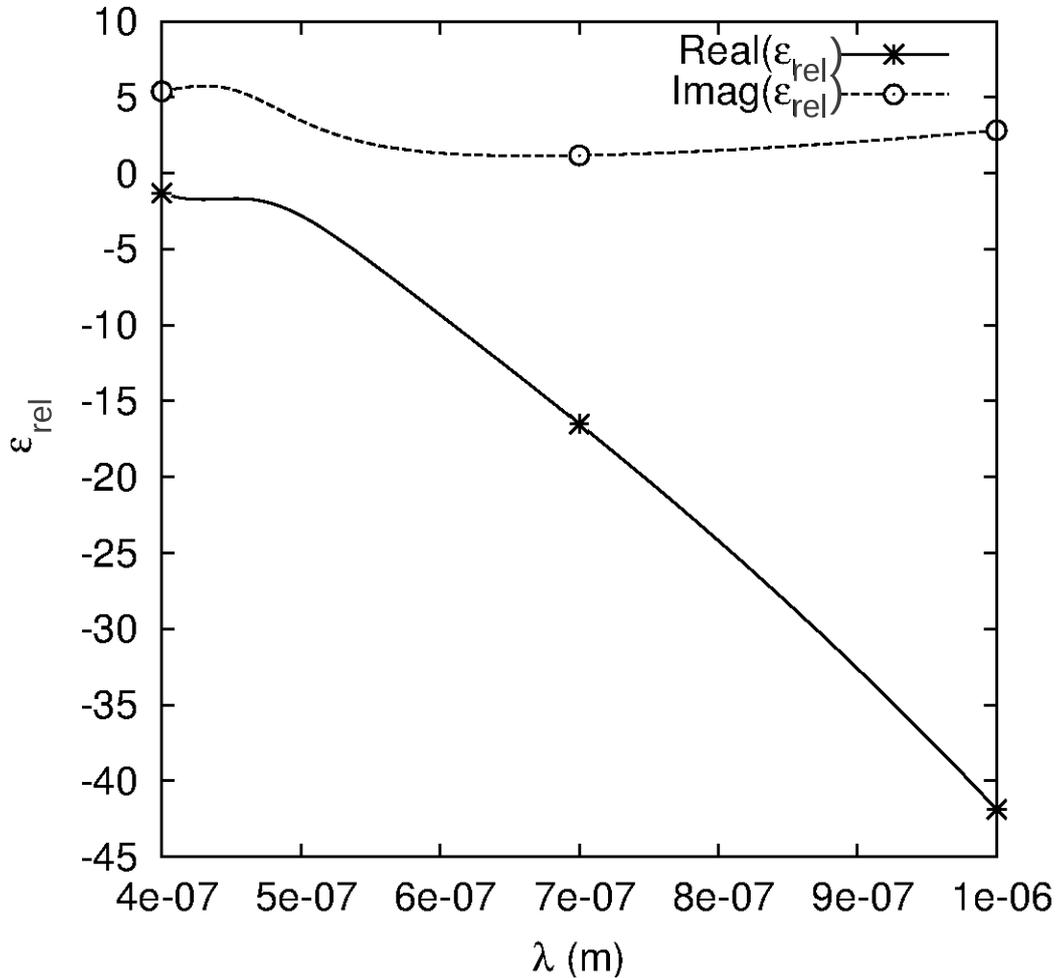


Figura 2.6: Partes real e imaginária da permissividade relativa do ouro.

medida que frequências maiores são consideradas, reduzindo a eficiência da cobertura de invisibilidade obtida por aproximação quase-estática.

Se considerarmos partículas menores do que 250 nm na equação (2.8), as contribuições de multipolos de ordem superior ao dipolo tornam-se menos significativas. Como consequência, maiores reduções de espalhamento podem ser obtidas. Na figura 2.9, é analisada uma partícula de ouro de raio 80 nm, com ou sem cobertura de espessura 20 nm. É possível notar que nesse caso maiores reduções de espalhamento são obtidas, sendo que na frequência de 568 nm, a redução de seção transversal de espalhamento total é de 99,2% (aproximadamente 21 dB).

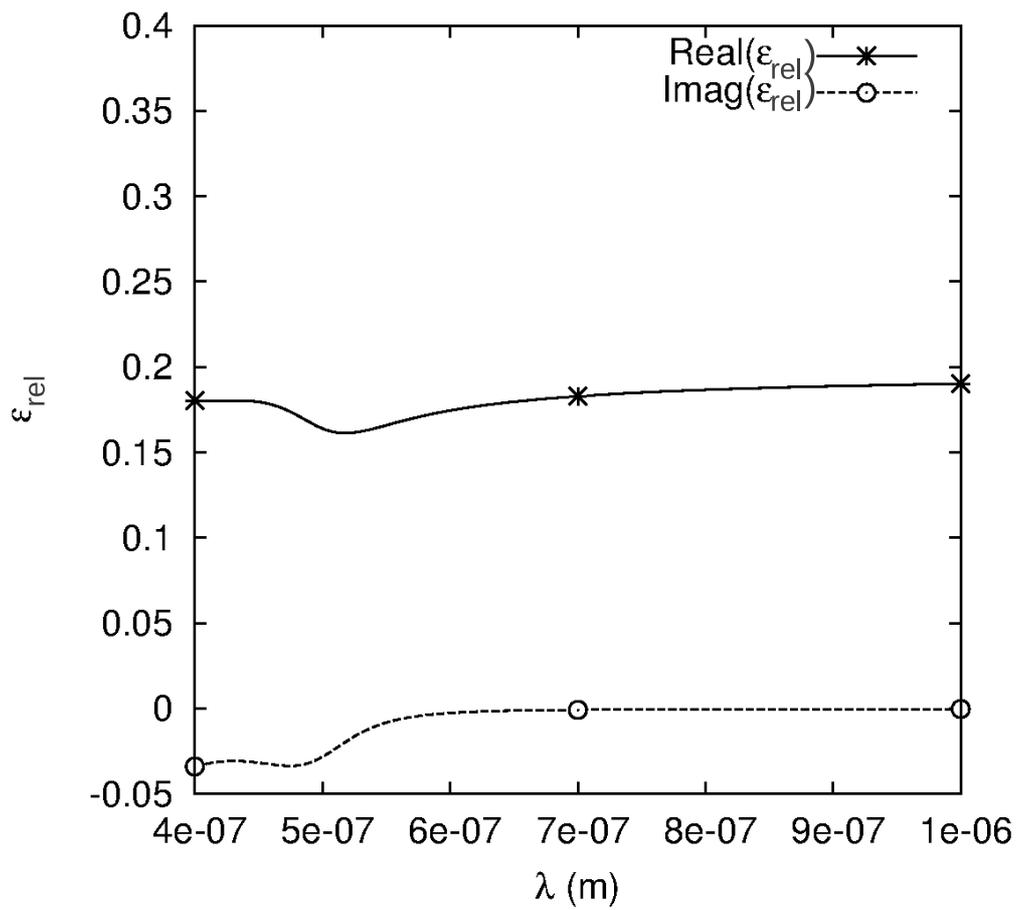


Figura 2.7: Partes real e imaginária da permissividade relativa de uma cobertura esférica depositada sobre um núcleo de ouro obtida por aproximação quase-estática.

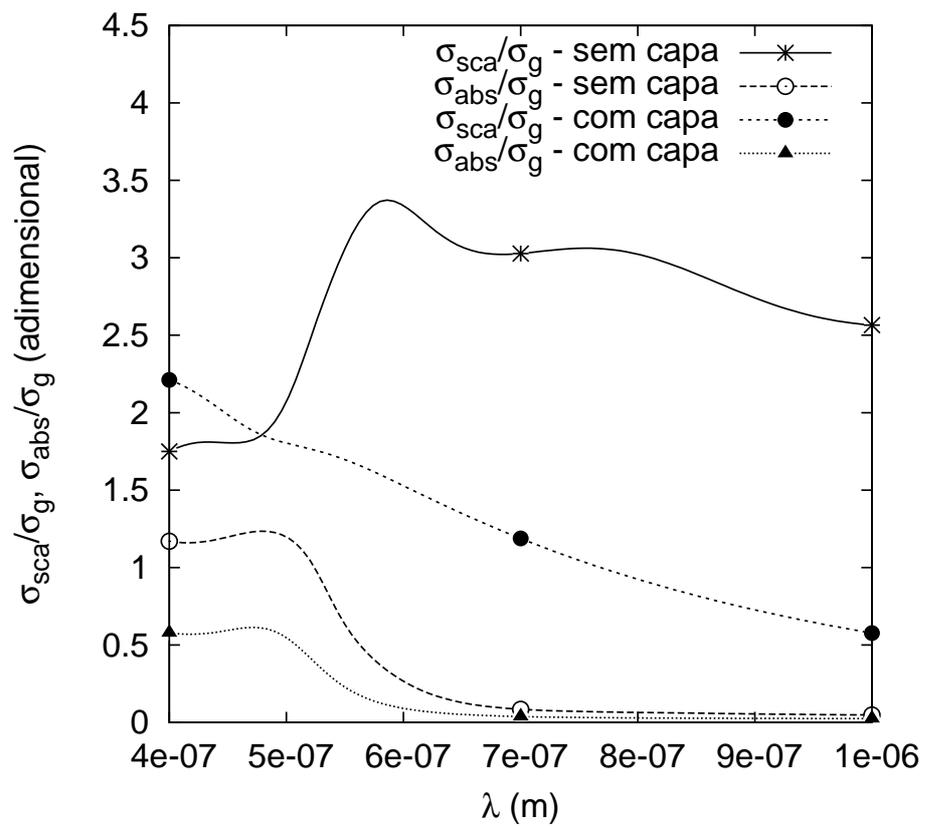


Figura 2.8: Seções transversais de espalhamento e de absorção de um núcleo de ouro de raio 250 nm sem e com cobertura esférica de espessura 50 nm obtida pela equação (2.8).

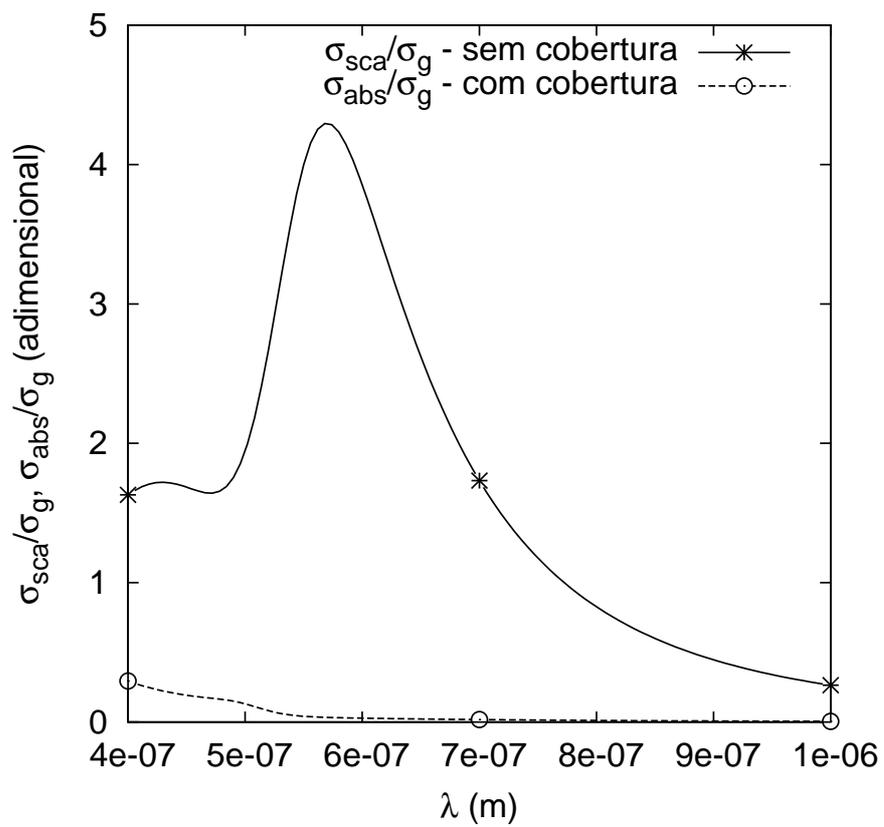


Figura 2.9: Seções transversais de espalhamento e de absorção de um núcleo de ouro de raio 80 nm sem e com cobertura esférica de espessura 20 nm obtida por aproximação quase-estática.

## 2.4 Método da transformação de coordenadas

A invisibilidade de um objeto pode ser obtida por transformação de coordenadas [20, 21, 22]. Para entendermos como funciona esse método, é necessário introduzirmos inicialmente alguns conceitos. Primeiro, vamos considerar um raio luminoso propagando no vácuo conforme ilustrado na figura 2.11.

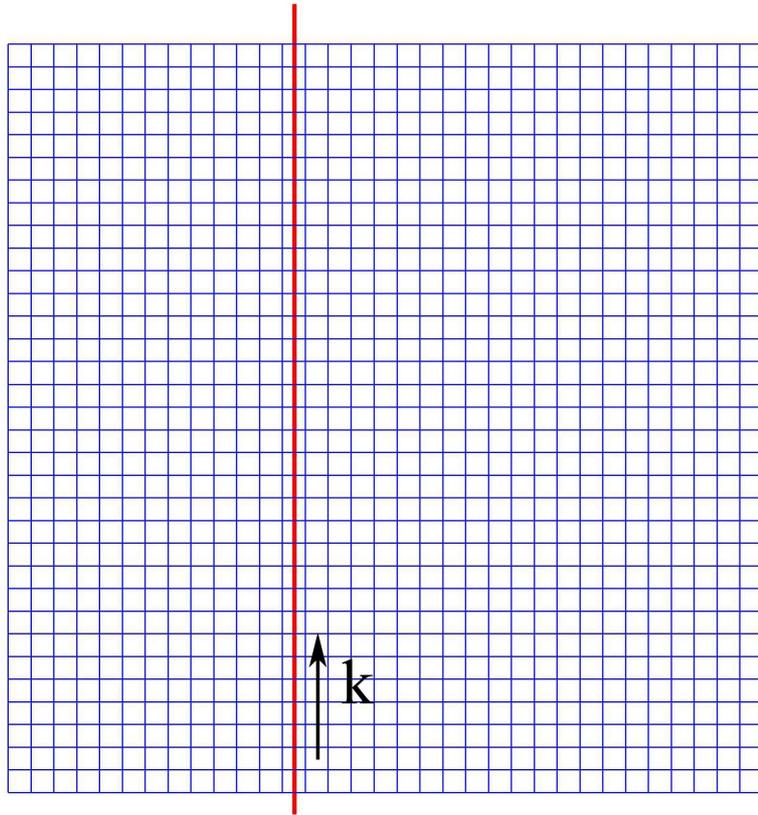


Figura 2.10: Raio luminoso propagando no vácuo.

Nesse caso, foi utilizado o sistema de coordenadas cartesianas. A propagação desse raio luminoso pode ser descrita através das equações de Maxwell para o vácuo com fontes, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{H} &= 0\end{aligned}\tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

onde  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  são, respectivamente, os vetores intensidade de campo elétrico e indução magnética. Os parâmetros  $\varepsilon_0$  e  $\mu_0$  são, respectivamente, a permissividade elétrica do vácuo e a permeabilidade magnética do vácuo. As fontes de excitação são representadas pela densidade de carga  $\rho$  e densidade de corrente  $\vec{j}$ .

O segundo caso mostrado na figura 2.11 se distingue do primeiro (figura 2.10) apenas pelo sistema de coordenadas. Esse novo sistema de coordenadas é caracterizado por conter uma singularidade esférica de raio  $a$  substituindo a origem. Para a região externa à superfície esférica de raio  $b$ , os pontos apresentam as mesmas coordenadas em ambos os sistemas. No entanto, as situações ilustradas nas figuras 2.10 e 2.11 representam uma mesma situação física, ambas descrevem um raio luminoso propagando no vácuo. Por isso, não ocorre espalhamento em ambos os casos.

O método da transformação de coordenadas baseia-se no conceito de meio de transformação, que representa um meio material cujos efeitos são equivalentes aos produzidos por uma geometria artificial. Como será explicado mais adiante, uma forma mais exata de conceituar meio de transformação é: meio material de parâmetros eletromagnéticos  $\vec{\varepsilon} = \vec{\mu}$ , que do ponto de vista dos efeitos eletromagnéticos produzidos, não pode ser diferenciado do vácuo com geometria de tensor métrico  $g_{ij}$ .

Uma grande variedade de efeitos pode ser obtida através do método da transformação de coordenadas [26, 27, 28, 29, 30]. Para cada um desses efeitos um tipo diferente de transformação de coordenadas deve ser utilizado. A invisibilidade é obtida quando utilizamos um meio de transformação equivalente à geometria mostrada na figura 2.11 [20, 21, 22]. Isso pode ser realizado a partir da escolha dos parâmetros eletromagnéticos do material localizado em  $a < r < b$  capaz de tornar o objeto localizado na região  $0 < r < a$  invisível. Podemos notar que nesse caso, os raios luminosos não serão espalhados, pois serão guiados através da cobertura de invisibilidade definida na região  $a < r < b$  e posteriormente seguirão suas trajetórias originais na direção de avanço da propagação.

O espaço em que o meio de transformação é definido é dito espaço físico e o espaço que ele reproduz artificialmente é o espaço virtual. Para obter invisibilidade devemos utilizar um meio de transformação que reproduza o espaço virtual mostrado na figura 2.10.

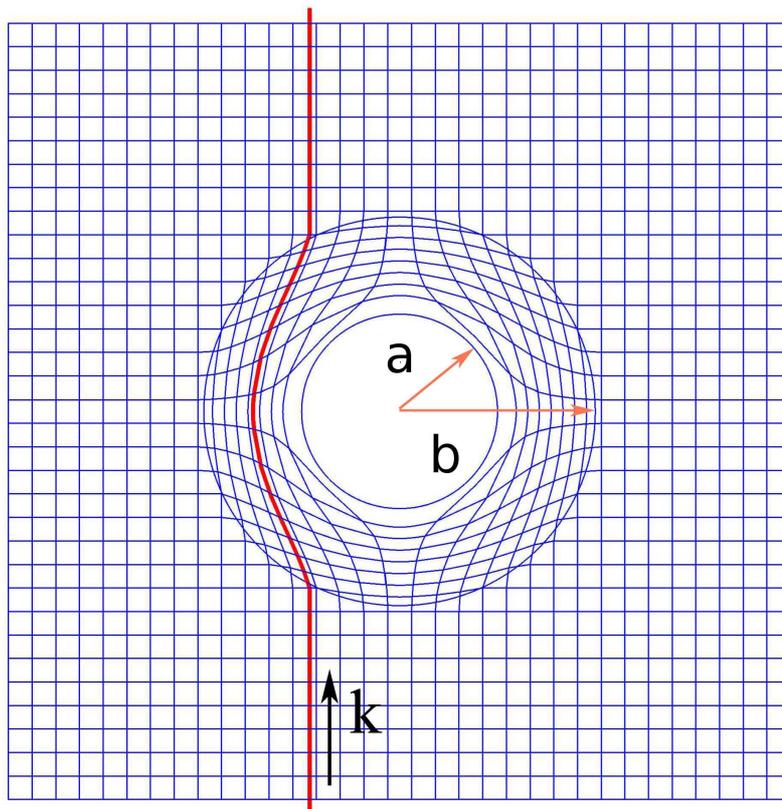


Figura 2.11: Vácuo em sistema de coordenadas com uma singularidade esférica: os raios incidentes são guiados ao redor de uma singularidade esférica de raio  $a$ , através da região delimitada pelas superfícies esféricas de raio  $a$  e  $b$ , e seguem a trajetória original na direção de avanço da propagação.

## 2.5 Coberturas de invisibilidade anisotrópicas

As transformações de coordenadas inerentes à obtenção de invisibilidade requerem que uma superfície esférica de raio  $a$  centrada na origem do espaço físico seja transformada na origem do espaço virtual. Então, um espalhador contido no interior da superfície esférica de raio  $a$  centrada na origem do espaço físico, ficará contido no interior da origem do espaço virtual; ou seja, tornar-se-á invisível. Como a origem pode ser entendida como uma superfície esférica de raio igual a zero, então, o que a transformação descrita anteriormente faz é apenas modificar o raio de uma superfície esférica; por conseguinte, a utilização do sistema de coordenadas esféricas mostra-se mais adequada tanto para o espaço físico quanto para o espaço virtual.

Na figura 2.12, mostramos uma ilustração de como devem ser definidos o espaço físico e o espaço virtual para a realização da transformação de coordenadas que produz invisibilidade. Podemos escrever essa transformação de coordenadas de acordo com a expressão a seguir:

$$\begin{aligned}\theta' &= \theta, \\ \phi' &= \phi, \\ r' &= f(r), \\ f(a) &= 0, \\ f(b) &= b.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Podemos, em outras palavras, escrever que não deve ocorrer mudança nos ângulos zenital e azimutal, mas o raio  $r'$  deve ser uma função  $f(r)$ .

Um problema eletromagnético equivalente ao do espaço físico ilustrado na figura 2.12, pode ser obtido se em vez de modificarmos a geometria, utilizarmos um meio material de parâmetros eletromagnéticos dados pela equação, no sistema de coordenadas esféricas, a seguir (ver apêndice B) [21]:

$$\bar{\bar{\epsilon}} = \bar{\bar{\mu}} = \begin{bmatrix} \frac{f(r)^2}{r^2 f'(r)} & 0 & 0 \\ 0 & f'(r) & 0 \\ 0 & 0 & f'(r) \end{bmatrix}.\tag{2.11}$$

Em que  $f'$  é a derivada de  $f(r)$  com relação a  $r$ . Portanto, a obtenção de invisibilidade via transformação de coordenadas requer a utilização de materiais anisotrópicos. Para que tenhamos uma cobertura de invisibilidade, devemos ter permissividades elétricas relativas radial ( $\epsilon_r$ ) e tangencial ( $\epsilon_t$ ) e, permeabilidades magnéticas relativas radial ( $\mu_r$ ) e tangencial ( $\mu_t$ ), em função do raio  $r$  ( $a < r < b$ ), dadas por

$$\epsilon_r = \mu_r = \frac{f(r)^2}{r^2 f'(r)}\tag{2.12}$$

$$\epsilon_t = \mu_t = f'(r),\tag{2.13}$$

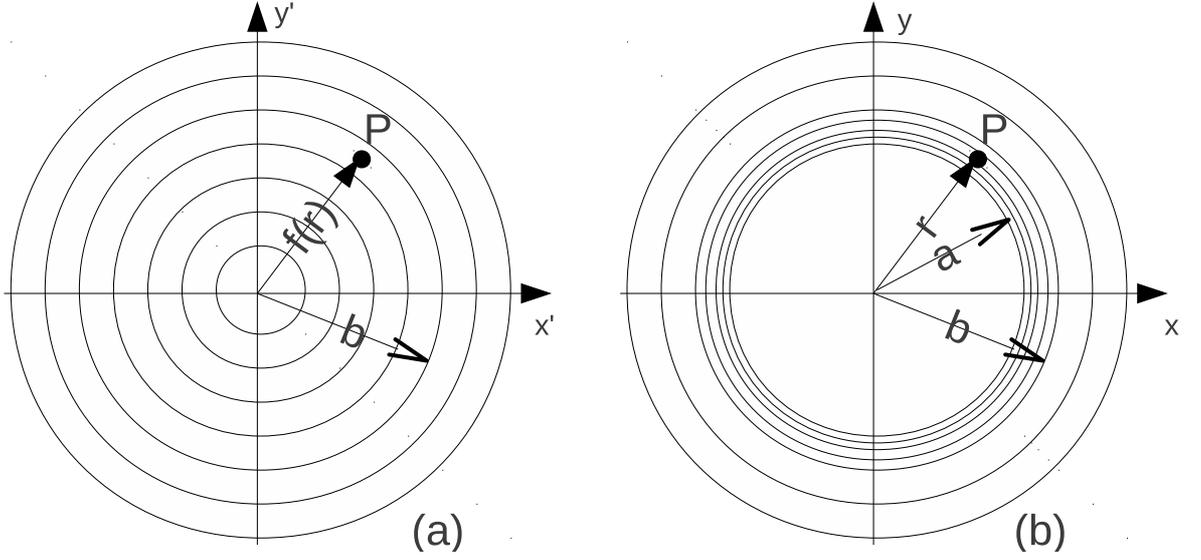


Figura 2.12: Espaços virtual (a) e espaço físico (b) em coordenadas esféricas utilizados na obtenção de uma cobertura de invisibilidade.

com  $f(a) = 0$  e  $f(b) = b$ , onde  $a$  e  $b$  são os raios das superfícies interna e externa da cobertura, respectivamente.

Dados os campos elétrico e magnético incidentes,  $\vec{E}^i = (E_r^i, E_\theta^i, E_\phi^i)$  e  $\vec{H}^i = (H_r^i, H_\theta^i, H_\phi^i)$ , os campos internos à cobertura são dados por [62]:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}_r(r, \theta, \phi) &= f'(r) E_r^i(r, \theta, \phi) \hat{e}_r \\
 \vec{E}_\theta(r, \theta, \phi) &= \frac{f(r)}{r} E_\theta^i(r, \theta, \phi) \hat{e}_\theta \\
 \vec{E}_\phi(r, \theta, \phi) &= \frac{f(r)}{r} E_\phi^i(r, \theta, \phi) \hat{e}_\phi
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

e

$$\begin{aligned}
 \vec{H}_r(r, \theta, \phi) &= f'(r) H_r^i(r, \theta, \phi) \hat{e}_r \\
 \vec{H}_\theta(r, \theta, \phi) &= \frac{f(r)}{r} H_\theta^i(r, \theta, \phi) \hat{e}_\theta \\
 \vec{H}_\phi(r, \theta, \phi) &= \frac{f(r)}{r} H_\phi^i(r, \theta, \phi) \hat{e}_\phi.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Em que  $\hat{e}_r$ ,  $\hat{e}_\phi$  e  $\hat{e}_\theta$  são os versores das direções radial, azimutal e zenital, respectivamente. Observando as equações (2.7) e (2.13), notamos que os parâmetros eletromagnéticos tangenciais são expressos em termos de  $f(r)$  e da derivada  $\frac{d}{dr}f(r)$ , portanto,

vemos que a escolha do tipo de transformação de coordenadas é que determina o perfil dos parâmetros eletromagnéticos da cobertura de invisibilidade.

## 2.6 Transformação de coordenadas

Vários tipos de transformação de coordenadas relacionados a parâmetros eletromagnéticos de perfis lineares [20], quadráticos, gaussianos, lorentzianos e hiperbólicos [16] foram propostos na literatura.

Neste trabalho, nós propomos perfis que estejam relacionados às transformações de coordenadas caracterizadas por:

$$f'(r) \propto 1/r^\alpha. \quad (2.16)$$

A partir de várias simulações constatamos que esse perfil apresentava resultados melhores do que outros perfis propostos na literatura.

Como visto anteriormente, os parâmetros eletromagnéticos relativos tangenciais  $\varepsilon_\theta$ ,  $\varepsilon_\phi$ ,  $\mu_\theta$  e  $\mu_\phi$  são iguais a  $f'(r)$ . A equação (2.16) fornece perfis que decrescem gradualmente ao longo do raio e que facilitam o casamento de impedância com o meio envolvente. A seu turno, os perfis obtidos para os parâmetros eletromagnéticos relativos radiais  $\varepsilon_r$  e  $\mu_r$  crescem com o raio e também podem facilmente apresentar casamento de impedância com o meio.

Integrando a equação (2.16), nós obtemos  $f(r)$  dada por

$$f(r) = \begin{cases} b \frac{(r/a)^{1-\alpha}-1}{(b/a)^{1-\alpha}-1} & \text{se } \alpha \neq 1 \\ b \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} & \text{se } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.17)$$

O casamento de impedância com o meio externo (o ar),  $\varepsilon_r = \mu_r = \varepsilon_t = \mu_t = 1$  para  $r = b$ , é obtido pela condição

$$f'(b) = 1. \quad (2.18)$$

Como uma consequência dessa condição, nós temos que

$$f(r) = \begin{cases} b\alpha[(r/a)^{1-\alpha} - 1]/(1-\alpha) & \text{se } \alpha \neq 1 \\ b \ln(r/a) & \text{se } \alpha = 1 \end{cases} \quad (2.19)$$

e

$$f'(r) = \begin{cases} b\alpha a^{\alpha-1}/r^\alpha & \text{se } \alpha \neq 1 \\ b/r & \text{se } \alpha = 1, \end{cases} \quad (2.20)$$

onde a razão  $b/a$  é dada por:

$$\frac{b}{a} = \begin{cases} \alpha^{\frac{1}{\alpha-1}} & \text{se } \alpha \neq 1 \\ e & \text{se } \alpha = 1. \end{cases} \quad (2.21)$$

Para o perfil dado na equação (2.17) com  $\alpha = 1$ , e utilizando a equação (2.14), podemos obter a distribuição de campos mostrada na figura 2.13.

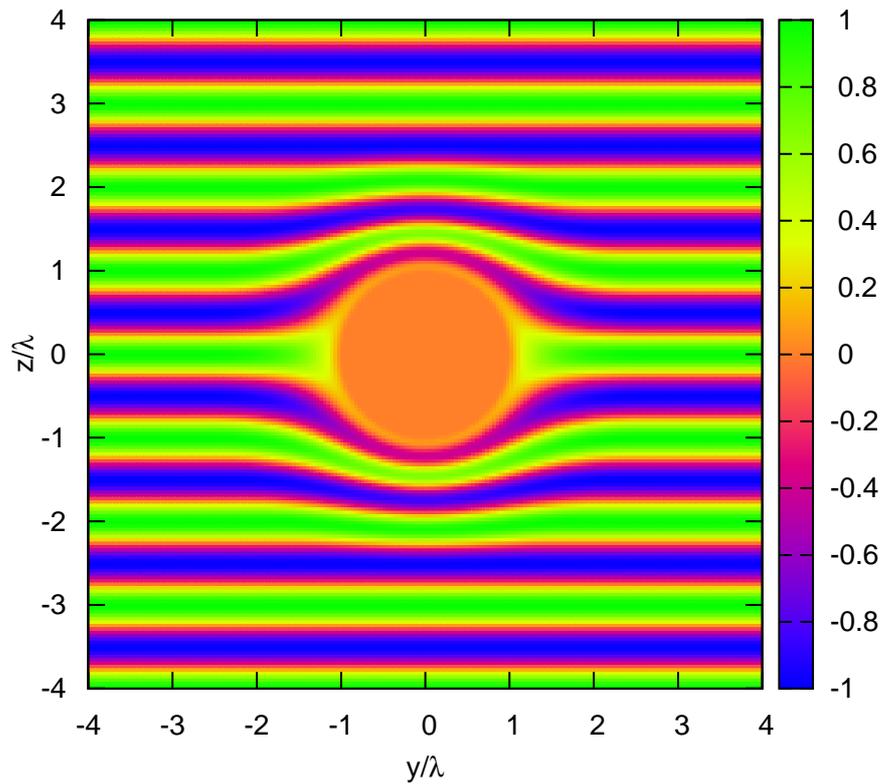


Figura 2.13: Distribuição de campos para o perfil proposto neste trabalho com  $\alpha = 1$ , obtidos a partir das equações de campo mostradas anteriormente, com valores em volt/metro, para uma onda plana incidente de amplitude 1 volt/metro.

## 2.7 Coberturas de invisibilidade discretizadas

Uma cobertura de invisibilidade isotrópica pode ser obtida através do cancelamento de espalhamento, como discutido anteriormente. No entanto, também podemos obtê-la através de uma estrutura estratificada em múltiplas camadas homogêneas e isotrópicas obtida pela discretização de uma cobertura de invisibilidade anisotrópica em um número de camadas igual a  $2M$ . As camadas são constituídas de tipos alternantes de materiais dielétricos (A e B) (ver figura 2.14) [42, 43].

Dado um meio anisotrópico, sobre uma superfície em que a permissividade (e a permeabilidade) possua componentes radial ( $\varepsilon_r$ ) e tangencial ( $\varepsilon_t$ ) e, supondo que essa superfície separa dois meios de permissividades (permeabilidades)  $\varepsilon_A$  e  $\varepsilon_B$ , pela teoria dos meios de parâmetros efetivos [42, 43], podemos obter as seguintes expressões para o cálculo de  $\varepsilon_r$  e  $\varepsilon_t$ , em termos de  $\varepsilon_A$  e  $\varepsilon_B$ :

$$\varepsilon_t = \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B}{2} \quad (2.22)$$

e

$$\varepsilon_r = \frac{2\varepsilon_A\varepsilon_B}{\varepsilon_A + \varepsilon_B}. \quad (2.23)$$

Combinando as equações (2.22) e (2.23) podemos obter os valores de  $\varepsilon_A$  e  $\varepsilon_B$ , os quais são dados por

$$\varepsilon_A = \varepsilon_t \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_t}}\right) \quad (2.24)$$

e

$$\varepsilon_B = \varepsilon_t \left(1 + \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_t}}\right). \quad (2.25)$$

Equações análogas a essas podem ser obtidas para a permeabilidade, portanto, os parâmetros eletromagnéticos que caracterizam as camadas da cobertura ilustrada na figura 2.14 são dados por:

$$\varepsilon_{A_k} = \mu_{A_k} = \varepsilon_t(r_{A_k}) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_r(r_{A_k})}{\varepsilon_t(r_{A_k})}}\right] \quad (2.26)$$

e

$$\varepsilon_{B_k} = \mu_{B_k} = \varepsilon_t(r_{B_k}) \left[1 + \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_r(r_{B_k})}{\varepsilon_t(r_{B_k})}}\right], \quad (2.27)$$

onde  $k = 1, 2, \dots, M$ . Assim, utilizando os valores de permissividade e permeabilidade fornecidos pelas equações 2.26 e 2.27, é possível obter uma aproximação para uma estrutura anisotrópica, como aquela que constitui uma cobertura perfeitamente invisível.

Os valores de  $r_{A_k}$  e  $r_{B_k}$  podem ser obtidos, por exemplo, através das equações a seguir:

$$r_{A_k} = \frac{r_{2k} + r_{2k-1}}{2} \quad (2.28)$$

e

$$r_{B_k} = \frac{r_{2k+1} + r_{2k}}{2}, \quad (2.29)$$

para  $k = 1, 2, \dots, M$ .

O valor de  $r_j$  ( $j = 2k - 1$ ,  $j = 2k$  ou  $j = 2k + 1$ ) é dado por:

$$r_j = a + (j - 1)\Delta r, \quad (2.30)$$

com  $j = 1, 2, \dots, 2M + 1$ , em que  $\Delta r$  é o incremento radial e  $a$  é o raio da superfície esférica interna da cobertura.

Para obter o incremento radial  $\Delta r$  devemos dividir a espessura da cobertura  $b - a$ , em que  $b$  é o raio da superfície esférica externa da cobertura, pelo número de camadas  $2M$ , como resultado é encontrado o valor:

$$\Delta r = \frac{b - a}{2M}. \quad (2.31)$$

Neste trabalho, nós denominaremos os raios  $r_{A_k}$  e  $r_{B_k}$  obtidos, respectivamente, através das equações (2.28) e (2.29) de "raios efetivos". Os raios obtidos a partir da equação (2.30) serão denominados de "raios discretos".

Como é possível notar, a partir das equações (2.26) e (2.27), as coberturas discretizadas requerem materiais que possuam valores de permissividade e permeabilidade relativas iguais:  $\varepsilon_{A_k} = \mu_{A_k} = \varepsilon_t(r_{A_k})$  e  $\varepsilon_{B_k} = \mu_{B_k} = \varepsilon_t(r_{B_k})$ ; o que não ocorre para coberturas estratificadas, em que geralmente esses valores são diferentes.

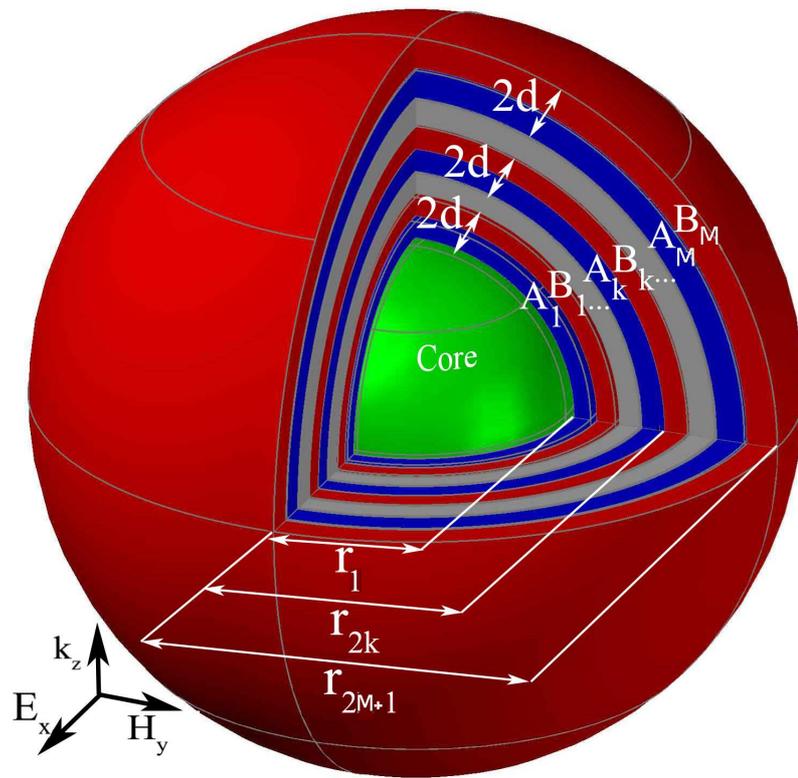


Figura 2.14: Cobertura de invisibilidade discretizada em um número de camadas igual a  $2M$ . As camadas azuis representam o dielétrico do tipo A, as camadas vermelhas representam o material do tipo B, a esfera verde é o núcleo da estrutura. Para não sobrecarregar a figura, foram colocadas as partes cinzas, que representam conjuntos com um número finito de pares de camadas dos dielétricos A e B.

# Capítulo 3

## Validação dos métodos de análise

Neste capítulo, nós apresentamos a validação do algoritmo computacional utilizado em nossas análises, o qual é baseado no método da matriz de transição para a solução do espalhamento eletromagnético por uma esfera estratificada em múltiplas camadas. Todas as camadas esféricas são dielétricas, a exceção da mais interna (o núcleo) que pode ser dielétrica ou condutora eletricamente perfeita (PEC). Mais detalhes sobre a implementação do método podem ser obtidas no Apêndice C.

### 3.1 Validação para as análises de campo próximo

As análises de campo próximo foram baseadas no cálculo da seção transversal de radar e da seção transversal de espalhamento total. A seção transversal de espalhamento total por ser representada por um único número a cada simulação, diferentemente da seção transversal de radar que apresenta um valor diferente para cada par  $(\theta, \phi)$ , portanto, a seção de espalhamento total é mais apropriada para ser utilizada como função objetivo a ser minimizada, assim como, para analisar o espalhamento em termos da frequência. Por sua vez, a seção transversal de radar pode ser utilizada em uma análise mais minuciosa do espalhamento, com relação as diferentes direções  $(\theta, \phi)$ , sendo possível perceber se juntamente com a redução total do espalhamento ocorreu ou não redução em uma direção específica, como a de retroespalhamento ou de espalhamento para frente.

#### 3.1.1 Seção transversal de radar

A precisão do método pode ser ilustrada na figura 3.1, na qual os resultados apresentados em [43] são comparados aos obtidos em nossas simulações para o mesmo problema (espalhamento por uma esfera em que um núcleo PEC é coberto por múltiplas camadas dielétricas homogêneas e isotrópicas), nos casos em que o número de camadas são  $2M = 40$  e  $2M = 200$  com núcleo PEC, e para uma esfera PEC sem cobertura. É importante notar que os valores de seção transversal de radar em [43] foram convertidos de dBsm para

dB, em que os valores em dB estão relacionados a seção transversal de radar normalizada pela seção geométrica. A conversão foi realizada a partir da equação a seguir:

$$\left[ \frac{\sigma(\theta, \phi)}{\sigma_g} \right]_{dB} = \left[ \frac{\sigma(\theta, \phi)}{\sigma_g} \right]_{dBsm} - 10 \log_{10} [\pi a^2]. \quad (3.1)$$

Onde  $a$  é o raio da esfera PEC correspondente ao núcleo. O resultados apresentados no artigo [43] são obtidos para um raio do núcleo igual a  $a = 0,15m$ . Assim, os valores em dB foram obtidos a partir dos valores em dBsm através da expressão:

$$\left[ \frac{\sigma(\theta, \phi)}{\sigma_g} \right]_{dB} = \left[ \frac{\sigma(\theta, \phi)}{\sigma_g} \right]_{dBsm} + 11.507. \quad (3.2)$$

Esse problema refere-se ao espalhamento eletromagnético por uma cobertura de invisibilidade isotrópica obtida por discretização de uma cobertura de invisibilidade anisotrópica, em camadas homogêneas. Maiores detalhes sobre esse tipo de estrutura são fornecidas no capítulo dedicado à coberturas de invisibilidade ou, consultando o artigo [43].

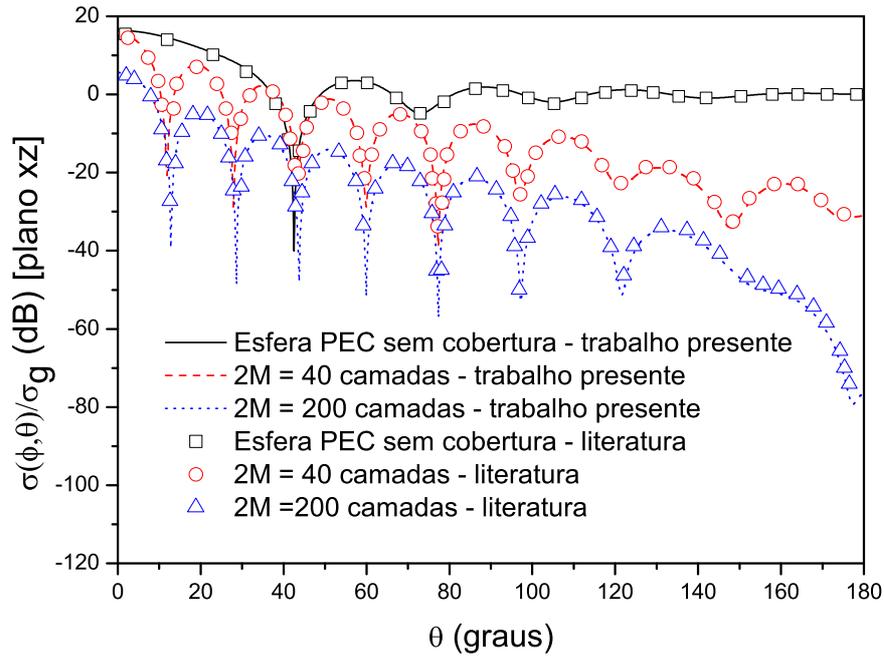


Figura 3.1: Seção transversal de radar normalizada pela pela seção transversal de geométrica em função do ângulo de espalhamento no plano xz.

### 3.1.2 Seção transversal de espalhamento total

Utilizando o algoritmo para o espalhamento por uma esfera estratificada em múltiplas camadas (método da matriz de transição), foi obtida a seção transversal de espalhamento total normalizada pela seção transversal geométrica para uma esfera dielétrica, de permissividade elétrica relativa  $\varepsilon_1 = 2,0$  em função do parâmetro de comprimento  $x_1 = \frac{2\pi r}{\lambda}$ , para uma esfera coberta por três camadas de materiais dielétricos. Os valores adotados para as camadas dielétricas foram:  $\varepsilon_2 = 3,0$  e  $x_2 = x_1 + 0,3$ ;  $\varepsilon_3 = 2,9$  e  $x_3 = x_2 + 0,2$ ;  $\varepsilon_4 = 2,8$  e  $x_4 = x_3 + 0,2$ . Esses resultados podem ser visualizados na figura 3.2, e estão de acordo com os apresentados em [1].

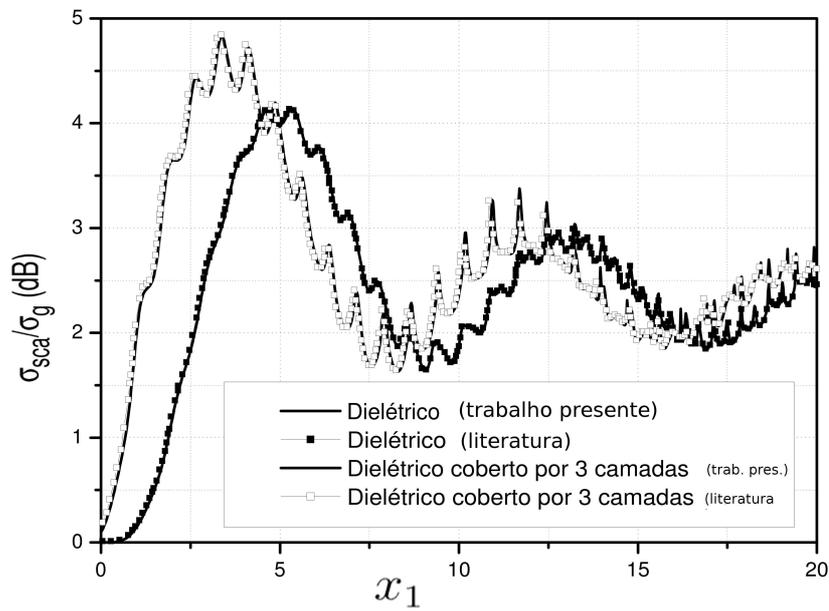


Figura 3.2: Seção transversal de espalhamento total normalizada pela seção transversal geométrica como função de  $x_1 = \frac{2\pi r}{\lambda}$  para uma esfera dielétrica sem cobertura e para uma esfera coberta por três camadas dielétricas.

### 3.1.3 Distribuição espacial de campo elétrico

Com a finalidade de validar nosso código com relação aos resultados obtidos para os campos eletromagnéticos calculados a partir das equações apresentadas no apêndice C, nós comparamos os campos eletromagnéticos totais, resultantes da superposição das ondas eletromagnéticas incidente e espalhada, utilizando dois diferentes métodos: o método da matriz de transição (apresentado no Apêndice C) e o método das diferenças finitas no domínio do tempo (discutido no apêndice D). Nesses exemplos, o campo elétrico incidente de amplitude 1 volt/metro está polarizado na direção  $x$  e a onda propaga na direção  $z$ .

O obstáculo considerado na comparação dos métodos é uma esfera de raio igual a  $\lambda/6$  (onde  $\lambda/$  é o comprimento de onda da radiação incidente) de permissividade elétrica relativa igual a 30 e condutividade elétrica igual a  $0,3S/m$  coberta por duas camadas esféricas de espessura  $\lambda/12$ , de permissividades elétricas relativas iguais a 10 e 20 e condutividades elétricas iguais a  $0,1S/m$  e  $0,2S/m$ . Esses detalhes relativos ao obstáculo estão ilustrados na Figura 3.3.

As distribuições das componentes de campo elétrico  $E_x$  no plano H e do campo magnético  $H_y$  no plano E, obtidas pelo método da matriz de transição, são mostradas, respectivamente, nas figuras (3.4) e (3.6). Essas distribuições de campo correspondem a parte real do campo elétrico fasorial obtido com o método da matriz de transição. Podemos compará-las as distribuições das componentes de campo elétrico  $E_x$  no plano H e do campo magnético  $H_y$  no plano E, obtidas pelo método FDTD, mostradas, respectivamente, nas figuras (3.5) e (3.7). No método FDTD, essas distribuições de campo são obtidas no domínio do tempo e posteriormente passadas para o domínio da frequência através da transformada de Fourier. Nas figuras (3.4), (3.6), (3.5) e (3.7), as escalas estão em volt/metro.

Na figura 3.8, é mostrada a distribuição da componente de campo elétrico  $E_x$  ao longo do eixo  $z$  de uma esfera de raio igual a  $\lambda/6$  de permissividade elétrica relativa igual a 30 e condutividade elétrica igual a  $0,3S/m$  coberta por duas camadas esféricas de espessura  $\lambda/12$  de permissividades elétricas relativas iguais a 10 e 20 e condutividades elétricas iguais a  $0,1S/m$  e  $0,2S/m$ .

Notamos que, o cálculo dos campos, realizado em nosso código a partir das equações apresentadas no apêndice C está de acordo com o que é obtido pelo método FDTD apresentado no apêndice D.

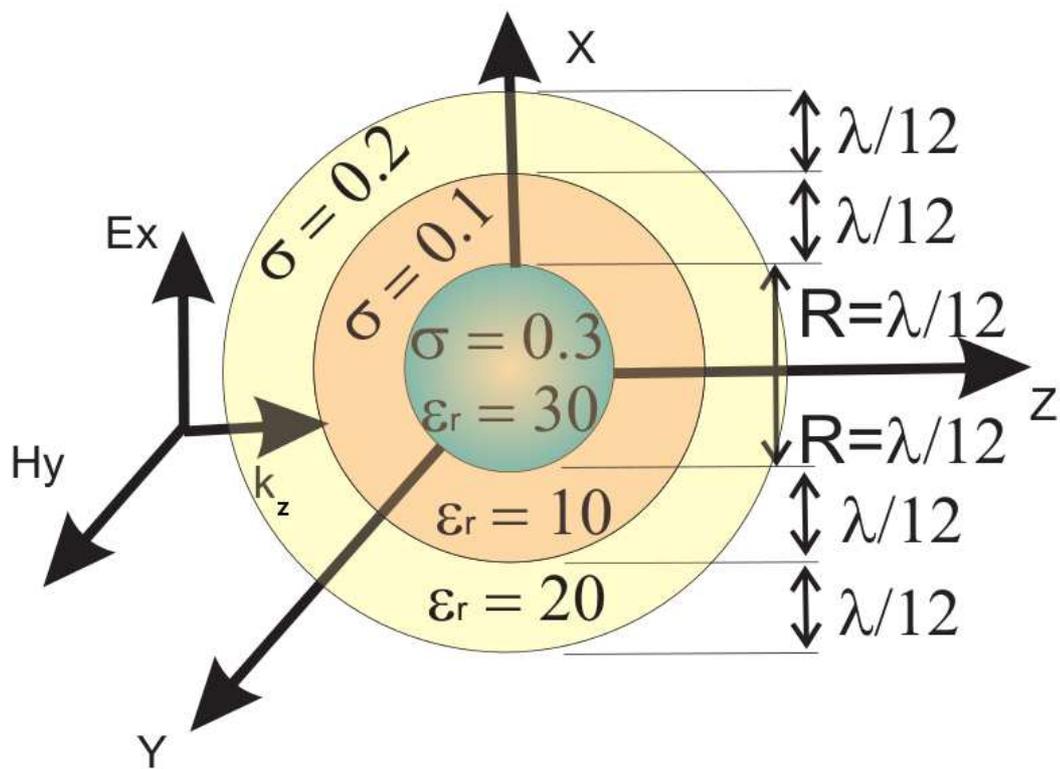


Figura 3.3: Esfera estratificada em três camadas dielétricas utilizada para validar os resultados obtidos para as distribuições de campo.

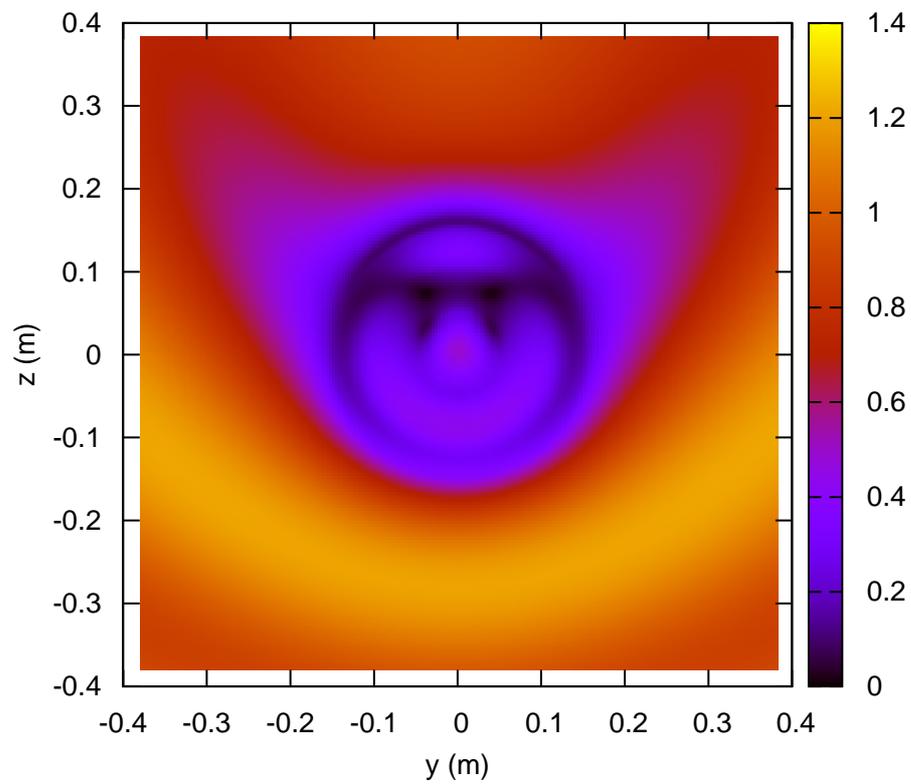


Figura 3.4: Distribuição da componente de campo elétrico  $E_x$  no plano H obtida pelo método da matriz de transição.

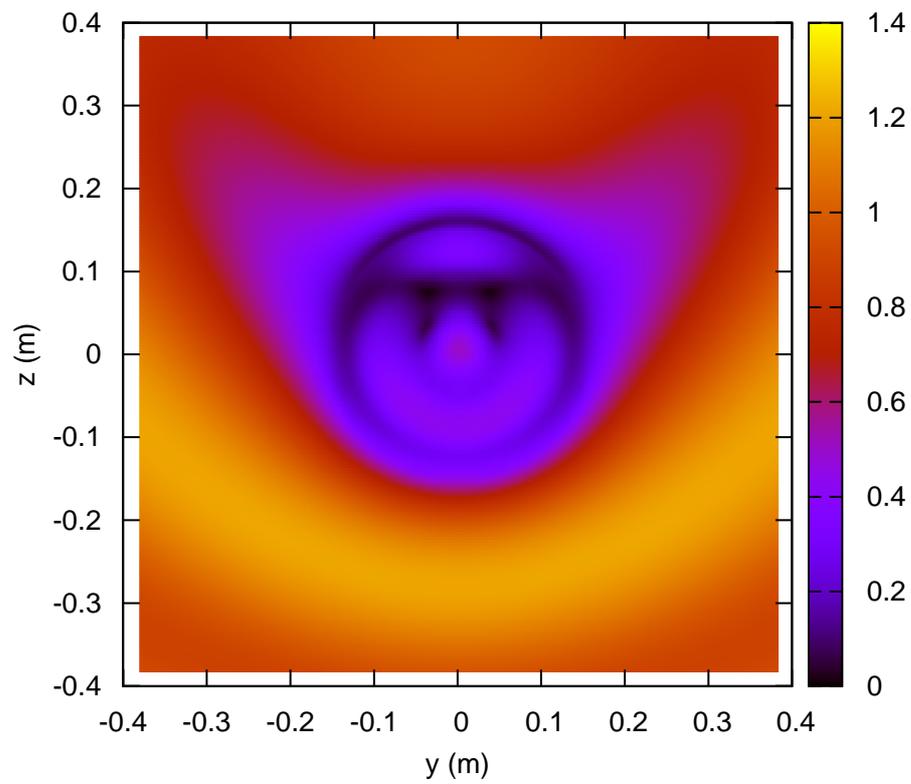


Figura 3.5: Distribuição da componente de campo elétrico  $E_x$  no plano H obtida pelo método FDTD.

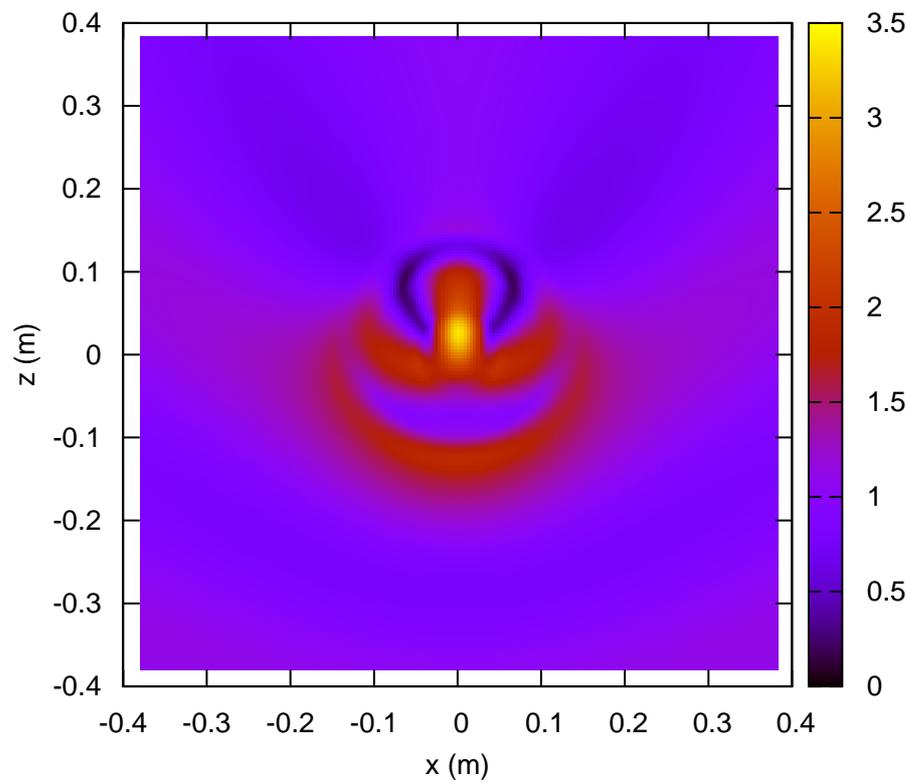


Figura 3.6: Distribuição da componente de campo magnético  $H_y$  no plano E obtida pelo método da matriz de transição.

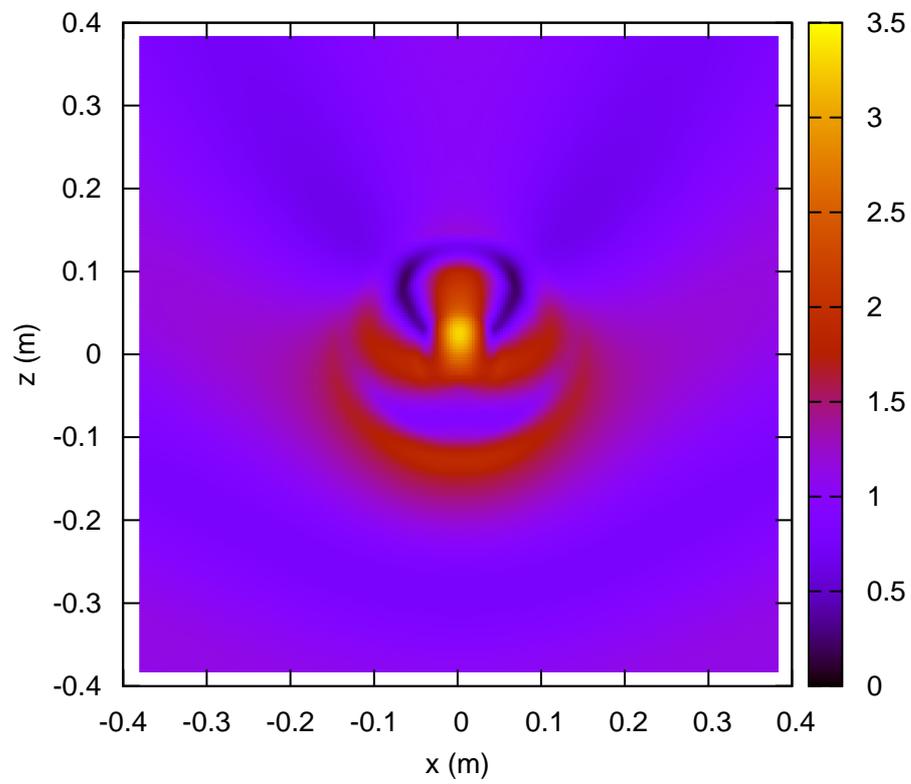


Figura 3.7: Distribuição da componente de campo magnético  $H_y$  no plano E obtida pelo método FDTD.

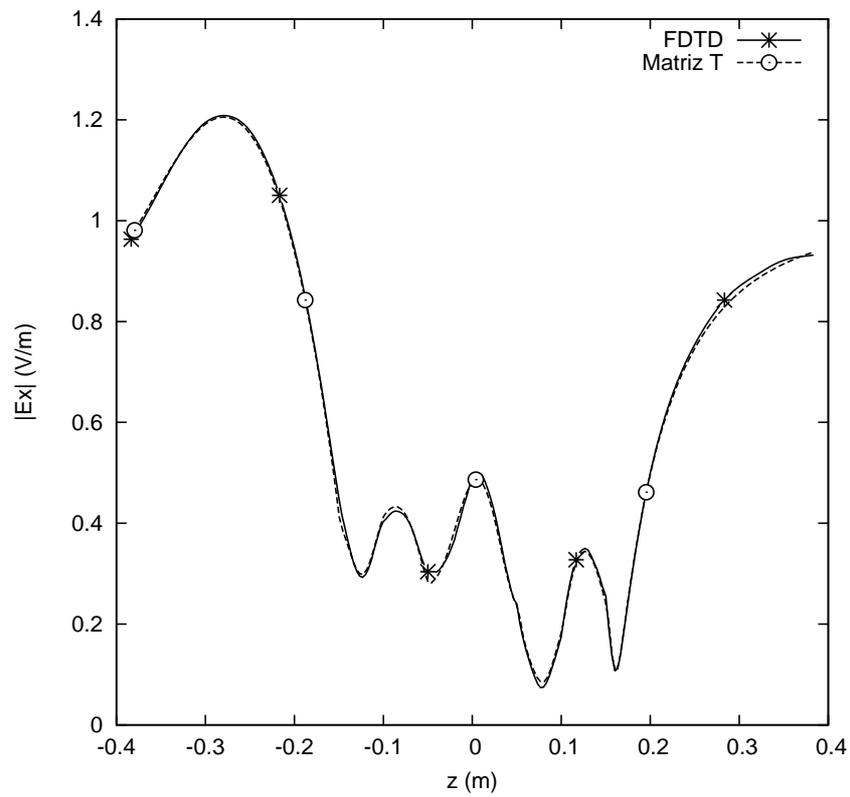


Figura 3.8: Distribuição da componente de campo elétrico  $E_x$  ao longo do eixo  $z$  obtida pelos métodos da matriz de transição e por FDTD.

## 3.2 Transformada inversa de Fourier

Na figura 3.9, nós mostramos uma comparação entre as distribuições de campo elétrico no domínio do tempo, a quais foram obtidas através dos métodos FDTD e IDFT+Matriz-T. Tanto o eixo da horizontal (eixo  $y$ ) quanto o vertical (eixo  $z$ ) são mostrados entre  $-\lambda$  e  $+\lambda$ . O diâmetro da esfera é  $\lambda$ . O campo incidente está orientado na direção  $x$  e a onda propaga na direção  $z$ . A permissividade elétrica relativa da esfera é 3 e a permeabilidade magnética relativa é 2. O raio da esfera é de  $1m$ . Foi utilizado um incremento temporal  $dt = 0.953 \times 10^{-9}$ .

A transformada inversa de Fourier discreta é dada por

$$x(t_n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(\omega_k) e^{i\omega_k t_n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.3)$$

onde  $i = \sqrt{-1}$  é a unidade imaginária,  $\omega_k$  é uma das frequências consideradas no cálculo da transformada inversa e,  $N$  é o número de frequências consideradas. Nesse caso, o sinal é discreto no domínio da frequência, resultando em um sinal periódico no domínio do tempo. A fim de evitar superposição das formas de onda no domínio do tempo, é necessário obter grandes períodos, o que pode ser feito reduzindo o incremento de frequência e aumentando o número de frequências consideradas. Nós aumentamos gradualmente o número de frequências consideradas, até que os valores de  $x(t_n)$  convergissem a valores precisos.

Foi analisado o espalhamento eletromagnético no domínio do tempo para um pulso cosseno modulado por gaussiana, dado por:

$$g(t) = \cos(\omega_c t) e^{-\frac{t^2}{\tau^2}} \quad (3.4)$$

Com  $\tau = 6,4 \times 10^{-9}$ . A transformada de Fourier desse pulso é dado por:

$$G(\omega) = \frac{\tau\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{t^2(\omega-\omega_c)^2}{4}} + \frac{\tau\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{t^2(\omega+\omega_c)^2}{4}}. \quad (3.5)$$

As amplitudes do pulso gaussiano no domínio da frequência foram utilizadas como amplitudes dos campos incidentes no método da matriz de transição (matriz-T), a fim de obter os campos totais no domínio da frequência, os quais foram convertidos para o domínio do tempo através da transformada inversa de Fourier.

Comparando os resultados mostrados na figura 3.9, verificamos que os resultados obtidos por transformada inversa de Fourier estão de acordo com aqueles obtidos por FDTD.

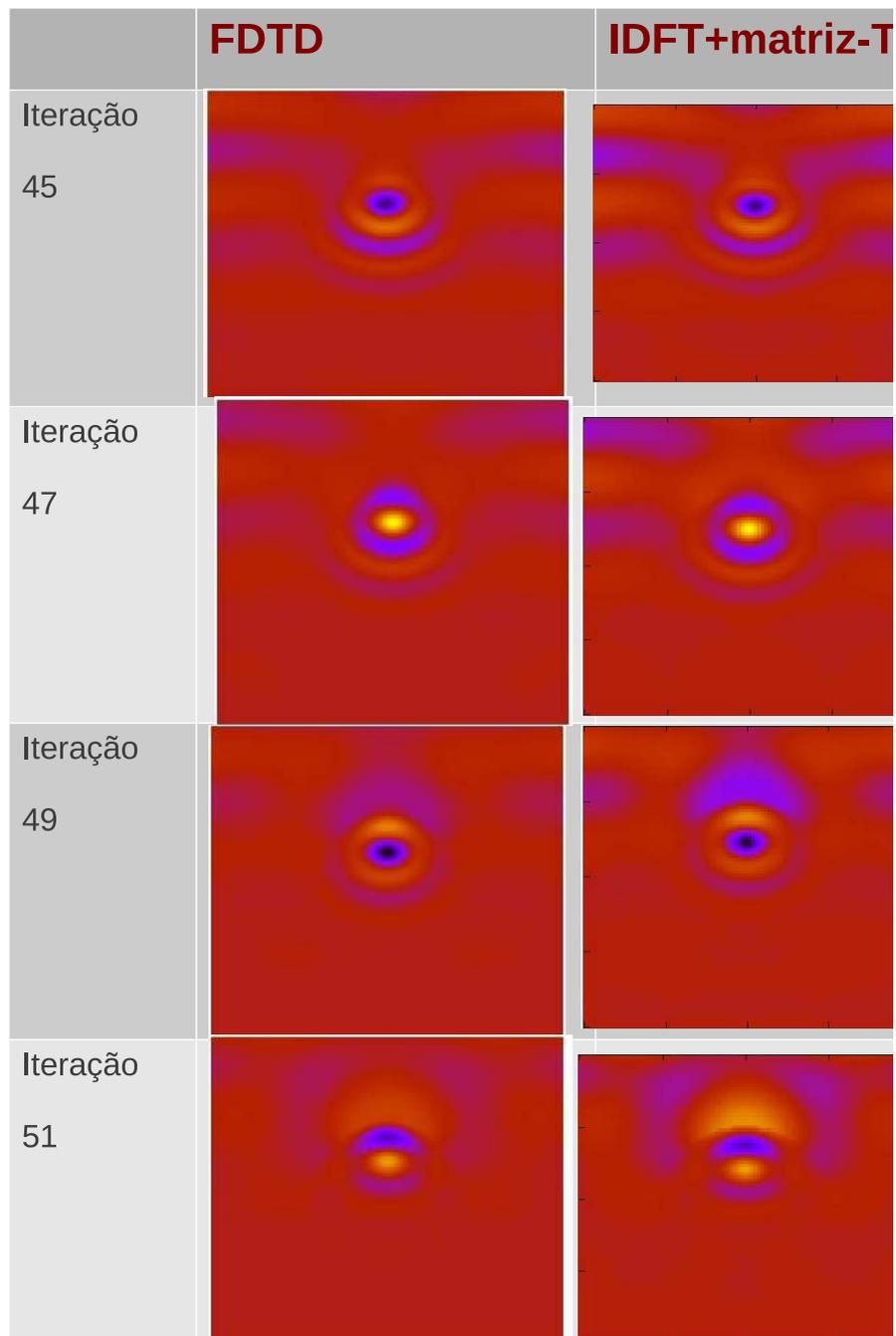


Figura 3.9: Comparação entre as distribuições de campo elétrico no domínio do tempo, a quais foram obtidas através dos métodos FDTD e IDFT-matriz-T.

## Capítulo 4

# Invisibilidade em microondas via coberturas discretizadas

Nós utilizamos a técnica do enxame de partículas (PSO) para projetar coberturas de invisibilidade esféricas constituídas de múltiplas camadas homogêneas e isotrópicas, as quais foram obtidas pela discretização de coberturas anisotrópicas, com base na teoria de meios de parâmetros efetivos [42, 43].

A redução da espessura e do número de camadas da cobertura é importante para facilitar a sua realização prática. Por outro lado, tal procedimento diminui o desempenho dessas estruturas. Utilizando técnicas de otimização é possível obter coberturas de menor espessura com um número reduzido de camadas e com seção transversal de espalhamento total mínima.

A teoria de meios de parâmetros efetivos permite que uma estrutura constituída de múltiplas camadas de materiais homogêneos e isotrópicos seja utilizada como aproximação para uma estrutura de material heterogêneo e anisotrópico. Essas aproximações de materiais são utilizadas, por exemplo, para obter modelos de subcélula no método das diferenças finitas [80, 81, 82].

A idéia por trás dessas aproximações é que os fluxos em uma dada seção transversal perpendicular a uma superfície entre dois meios de materiais com parâmetros efetivos possam ser utilizados para obter uma aproximação para o fluxo médio no material, na mesma seção transversal. Além disso, a aproximação deve levar em conta também o gradiente de potencial na direção normal à superfície entre os meios de materiais de parâmetros efetivos. Para isso, basta que a diferença de potencial entre dois pontos localizados em lados diferentes da superfície de contato entre os meios seja dada pela soma das diferenças de potencial entre cada um dos pontos e um ponto localizado na superfície.

A obtenção de aproximações pela teoria de meios efetivos pode tornar-se bastante complexa, exigindo o cálculo de integrais complicadas para que os parâmetros efetivos sejam obtidos [80]. Todavia, métodos simplificados também estão disponíveis na literatura [82]. Em geral, as soluções mais elaboradas fornecem melhores resultados do que

as soluções simplificadas. Entretanto, para o tipo de problema analisado aqui apenas métodos simplificados têm sido utilizados [42, 43].

Nosso objetivo nesse capítulo será ajustar os parâmetros eletromagnéticos e geométricos das camadas do meio de parâmetros efetivos para que uma melhor aproximação para o meio de material anisotrópico seja obtida. Para realizar esse ajuste nós utilizaremos a técnica de otimização por enxame de partículas.

Algumas técnicas já foram propostas para melhorar a aproximação de coberturas esféricas anisotrópicas por coberturas esféricas isotrópicas [41]. Contudo, não houve uma redução considerável no número de camadas, sendo necessário utilizar um número superior a 80 camadas para que a redução da seção transversal de radar de um objeto seja significativa (acima de 20 dB).

Para melhorar o processo de discretização, nós propomos, neste capítulo, novas formas de calcular tanto as "posições para as camadas anisotrópicas" quanto os "raios discretos". Essas novas formas permitem ajustar melhor os parâmetros geométricos envolvidos na teoria de meios de parâmetros efetivos.

Afirmaremos que uma aproximação é melhor do que as demais quando ela possuir menor valor de seção transversal de espalhamento total. Essa idéia é justificada pelo fato de que neste caso, a seção transversal de espalhamento total apresenta um valor mais próximo de zero, que é o valor obtido por uma cobertura anisotrópica.

Dessa forma, obter uma melhor aproximação para uma cobertura anisotrópica, utilizando uma cobertura discretizada, depende da nossa capacidade de minimizar a seção transversal de espalhamento total. Para alcançar essa meta, utilizaremos a técnica de otimização por enxame de partículas (PSO).

Neste capítulo, restringiremos nossas análises a faixa de microondas, uma vez que coberturas discretizadas requerem materiais com permeabilidade diferente da permeabilidade do vácuo, o que é difícil de obter na faixa óptica.

## 4.1 Caso 1: "raios discretos" como parâmetros de busca

A discretização de um cobertura de invisibilidade anisotrópica pode ser feita nos espaços físico ( $a < r < b$ ) [43] ou virtual ( $0 < f(r) < b$ ) [41]. Resultados significativamente melhores são obtidos no segundo caso, pois a discretização leva em conta as variações dos parâmetros materiais ao longo do raio, discretizando mais onde os parâmetros variam e discretizando menos onde os parâmetros variam menos.

Como visto anteriormente coberturas isotrópicas são obtidas de coberturas anisotrópicas através da discretização em  $2M$  camadas isotrópicas, sendo  $M$  camadas do dielétrico tipo A e  $M$  camadas do dielétrico do tipo B, as quais aparecem ao longo do raio de forma alternada.

### 4.1.1 Discretização do espaço físico

O espaço virtual é definido no sistema de coordenadas  $(f(r), \theta', \phi')$  e o espaço físico no sistema de coordenadas  $(r, \theta, \phi)$ , conforme ilustrado na figura 2.12.

A discretização no espaço físico utiliza o incremento radial  $\Delta r$ , o qual pode ser calculado como:

$$\Delta r = \frac{b - a}{2M}, \quad (4.1)$$

onde  $a$  é o raio da superfície interna e  $b$  é o raio da superfície externa da cobertura de invisibilidade. Dessa forma, a posição radial  $r$  ao longo do raio no espaço físico é discretizada em valores  $r_l$  (raios discretos) de acordo com a equação a seguir:

$$r_l = a + (l - 1)\Delta r = a + (l - 1)\frac{b - a}{2M} \quad (4.2)$$

para  $l = 1, 2, \dots, 2M + 1$ .

### 4.1.2 Discretização do espaço virtual

O incremento radial  $\Delta f$  no espaço virtual é dado por:

$$\Delta f = \frac{b}{2M}, \quad (4.3)$$

onde  $b$  é o raio da superfície externa da cobertura de invisibilidade. Dessa forma, a posição radial  $f(r)$  ao longo do raio no espaço virtual é discretizada em valores  $f_l$  de acordo com a equação a seguir:

$$f_l = l\Delta f = l\frac{b}{2M}, \quad (4.4)$$

para  $l = 1, 2, \dots, 2M + 1$ . Então, de (2.19), nós obtemos o raio discreto  $r_l$  de cada uma das camadas  $l$  ( $l = 1, 2, \dots, 2M + 1$ ):

$$r_l = \begin{cases} a \left[ \frac{l-1}{2M} \frac{1-\alpha}{\alpha} + 1 \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{se } \alpha \neq 1 \\ a e^{\frac{l-1}{2M}} & \text{se } \alpha = 1 \end{cases} \quad (4.5)$$

Essa não é a única forma possível de discretizar a cobertura. Outras formas de discretização podem ser utilizadas na tentativa de encontrar melhores aproximações para coberturas anisotrópicas, através da teoria de meios de parâmetros efetivos.

### 4.1.3 Discretização proposta no presente trabalho

As formas de discretização apresentadas anteriormente, utilizam um incremento radial que é constante ao longo do raio ou no espaço físico ou no espaço virtual. Porém, nada nos impede de utilizarmos incrementos radiais que variam ao longo do raio tanto no espaço físico

quanto no espaço virtual. Utilizando incrementos radiais que não são constantes temos mais possibilidades de ajuste dos raios discretos, a fim de obtermos melhores resultados.

Neste capítulo, nós propomos a utilização de raios discretos  $r_l$  dados pela equação a seguir:

$$r_l = r_{l-1} + (b - a) \frac{p_{l-1}}{\sum_{l=1}^{2M} p_l}, \quad (4.6)$$

onde  $l = 2, 3, \dots, 2M + 1$  e  $r_1 = a$ . O conjunto  $\{p_l\}$ , com  $l = 1, 2, \dots, 2M$  e  $p_l \in [1, P]$ , representa um conjunto de parâmetros de busca ao qual nos referiremos como "caso 1". Usando (4.6) nós temos que o maior incremento radial é  $P$  vezes maior do que o menor incremento radial no espaço físico. Dessa forma, podemos garantir que as espessuras das camadas variem com uma certa uniformidade, não sendo permitidas camadas muito mais finas ou muito mais espessas do que as demais.

## 4.2 Caso 2: "posições para as camadas anisotrópicas" como parâmetros de busca

Considere as "posições para as camadas anisotrópicas" das camadas,  $r_{A_k}$  e  $r_{B_k}$ , relativos às camadas  $A_k$  e  $B_k$ , que representam os dois tipos alternantes de dielétricos utilizados na discretização da cobertura anisotrópica. Em que a expressão: "posições para as camadas anisotrópicas" está sendo utilizada de acordo com a nomenclatura utilizada em [41]. A partir das "posições para as camadas anisotrópicas" é possível realizar o cálculo dos parâmetros eletromagnéticos das camadas  $\varepsilon_{A_k}$ ,  $\mu_{A_k}$ ,  $\varepsilon_{B_k}$  e  $\mu_{B_k}$ , os quais são dados por:

$$\varepsilon_{A_k} = \mu_{A_k} = \varepsilon_t(r_{A_k}) \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_r(r_{A_k})}{\varepsilon_t(r_{A_k})}} \right] \quad (4.7)$$

e

$$\varepsilon_{B_k} = \mu_{B_k} = \varepsilon_t(r_{B_k}) \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{\varepsilon_r(r_{B_k})}{\varepsilon_t(r_{B_k})}} \right]. \quad (4.8)$$

### 4.2.1 Cálculo das "posições para as camadas anisotrópicas" como ponto médio dos raios discretos

As "posições para as camadas anisotrópicas" das camadas  $A_k$  e  $B_k$  para  $k = 1, 2, \dots, M$ , utilizados nas equações (4.7) e (4.8), podem ser obtidos como o ponto médio entre os raios discretos das camadas [41], sendo nesse caso expressos na forma mostrada a seguir:

$$r_{A_k} = \frac{r_{2k} + r_{2k-1}}{2} \quad (4.9)$$

e

$$r_{B_k} = \frac{r_{2k+1} + r_{2k}}{2}. \quad (4.10)$$

### 4.2.2 Cálculo das "posições para as camadas anisotrópicas" coincidindo com os raios discretos

As "posições para as camadas anisotrópicas" também podem ser escolhidos como sendo coincidentes com os raios discretos, nesse caso tem-se que eles são expressos da maneira mostrada a seguir [43]:

$$r_{A_k} = r_{2k} \quad (4.11)$$

e

$$r_{B_k} = r_{2k+1}. \quad (4.12)$$

### 4.2.3 Cálculo das "posições para as camadas anisotrópicas" proposto no presente trabalho

Todavia, a fim de tenhamos uma maior flexibilidade da escolha das "posições para as camadas anisotrópicas", permitindo que melhores aproximações por meios de parâmetros efetivos sejam obtidas, nós utilizaremos as "posições para as camadas anisotrópicas" calculados pelas expressões a seguir:

$$r_{A_k} = q_{l-1}r_l + (1 - q_{l-1})r_{l-1} \quad (4.13)$$

e

$$r_{B_k} = q_l r_{l+1} + (1 - q_l)r_l, \quad (4.14)$$

onde  $l = 2k$ ,  $q_l \in [0, 1]$  e  $k = 1, 2, \dots, M$ .

As equações (4.13) e (4.14) permitem a "posição para a camada anisotrópica" de uma dada camada seja obtido como um ponto intermediário entre os raios discretos das superfícies esféricas que delimitam a camada.

Se fizermos  $q_{l-1} = 1$  nas equações (4.13) e (4.14), serão obtidas as equações (4.11) e (4.12), respectivamente. Portanto, a escolha  $q_{l-1} = 1$  faz com que as "posições para as camadas anisotrópicas" coincidam com os raios discretos das camadas.

Por outro lado, se fizermos  $q_{l-1} = 0$  nas equações (4.13) e (4.14), serão obtidas "posições para as camadas anisotrópicas" que coincidem com os raios discretos das camadas anteriores, isto é: a "posição para a camada anisotrópica" da primeira camada da cobertura ( $r_{A_1}$ ) será igual ao raio discreto do núcleo ( $r_1$ ), a "posição para a camada anisotrópica" da segunda camada da cobertura ( $r_{B_1}$ ) será igual ao raio discreto da primeira camada da cobertura ( $r_2$ ), e assim por diante.

Se fizermos  $q_{l-1} = 0,5$  nas equações (4.13) e (4.14), serão obtidas as equações (4.9) e (4.10), respectivamente. Portanto, a escolha  $q_{l-1} = 0,5$  faz com que as "posições para as camadas anisotrópicas" de uma dada camada sejam as médias dos raios discretos das superfícies esféricas que delimitam essa camada.

As fórmulas de cálculo para as "posições para as camadas anisotrópicas" apresentadas nas equações (4.13) e (4.14), possibilitam que as "posições para as camadas anisotrópicas"  $r_{A_k}$  e  $r_{B_k}$  sejam definidos como pontos intermediários, respectivamente, dos intervalos  $[r_{2k-1}, r_{2k}]$  e  $[r_{2k}, r_{2k+1}]$ . Assim, as possibilidades de ajuste para a teoria de meios de parâmetros efetivos aumenta consideravelmente, uma vez que para cada camada podemos ter uma forma diferente de calcular as "posições para as camadas anisotrópicas".

Portanto, nós obtivemos  $\{q_l\}$ , com  $l = 1, 2, \dots, 2M$ , como um segundo conjunto de parâmetros de busca, o qual será utilizado para minimizar a seção transversal de espalhamento total utilizando a técnica de otimização do PSO. A esse segundo conjunto de parâmetros de busca, nos referiremos como "caso 2".

### 4.3 Comparações entre o caso 1 e o caso 2

Neste capítulo, foi analisado o espalhamento por uma esfera constituída de material condutor (PEC) com raio igual ao comprimento de onda da radiação incidente. Apesar de terem sido utilizados parâmetros de comprimento normalizados pelo comprimento de onda, as análises restringem-se à faixa de microondas, uma vez que permeabilidades diferentes da unidade são necessárias, e tais valores de permeabilidade dificilmente são obtidos na faixa óptica.

Reduções acima de 20 dB para a seção transversal de espalhamento total foram obtidas utilizando a técnica de otimização por enxame de partículas, para coberturas isotrópicas de 20 camadas. A seguir serão apresentadas análises de campo próximo e de campo distante realizadas, respectivamente, através de curvas de seção transversal de radar e de distribuições de campo elétrico.

Na figuras 4.1, 4.2 e 4.3, nós comparamos as curvas de seção transversal de radar normalizada pela seção transversal geométrica em função do ângulo de espalhamento nos planos  $xz$ ,  $yz$  e  $xy$ . Nós podemos ver que os resultados obtidos por PSO ("caso 1" e "caso 2") apresentam uma drástica redução no espalhamento eletromagnético. A cobertura de invisibilidade obtida de acordo com a literatura (como indicado na legenda), refere-se a cobertura obtida pela técnica melhorada proposta em [41], mas com o mesmo número de camadas utilizados para as demais simulações (20 camadas).

A partir dessas figuras podemos constatar que as coberturas otimizadas por PSO, tanto para o "caso 1" quanto para o "caso 2", apresentaram curvas de seção transversal de radar com redução acima de 20 dB para todas as direções, nos três planos considerados. É importante ressaltar que embora a otimização seja feita com a seção transversal de espalhamento total, a qual também foi reduzida, só é possível afirmar que a estrutura realmente é uma cobertura de invisibilidade se for constatada a redução do espalhamento de forma significativa, em todas as direções, inclusive nas direções de espalhamento para frente e de

retroespalhamento. Portanto, analisando as figuras 4.1, 4.2 e 4.3, podemos constatar que coberturas de invisibilidade eficientes foram obtidas com um número reduzido de camadas (20 camadas).

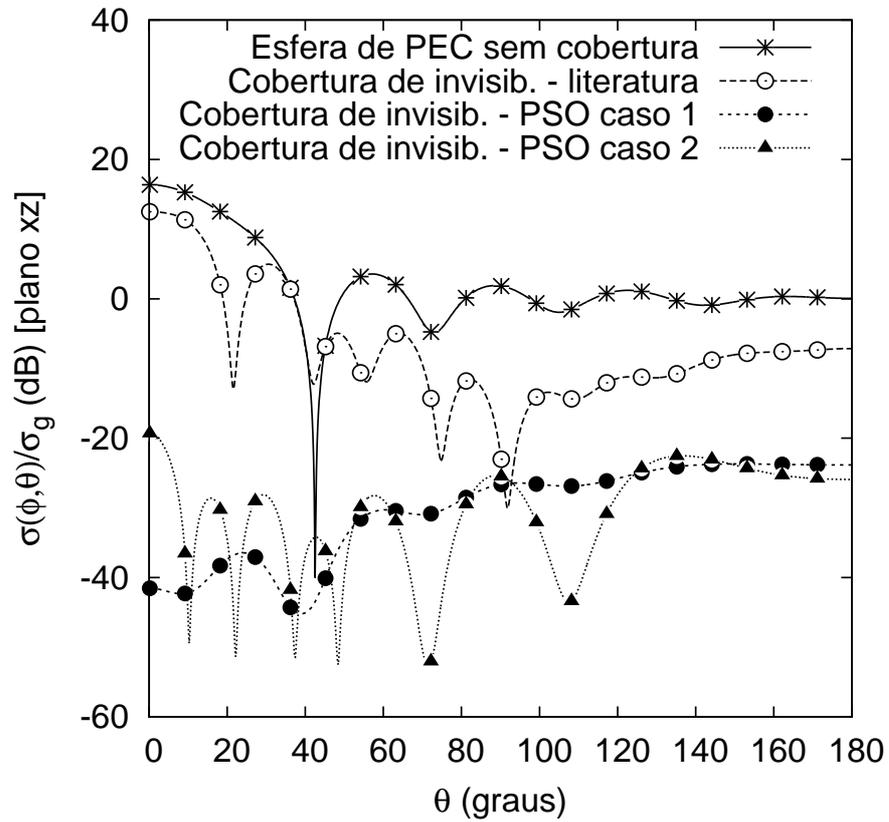


Figura 4.1: Seção transversal de radar normalizada pela seção transversal geométrica em função do ângulo de espalhamento no plano xz.

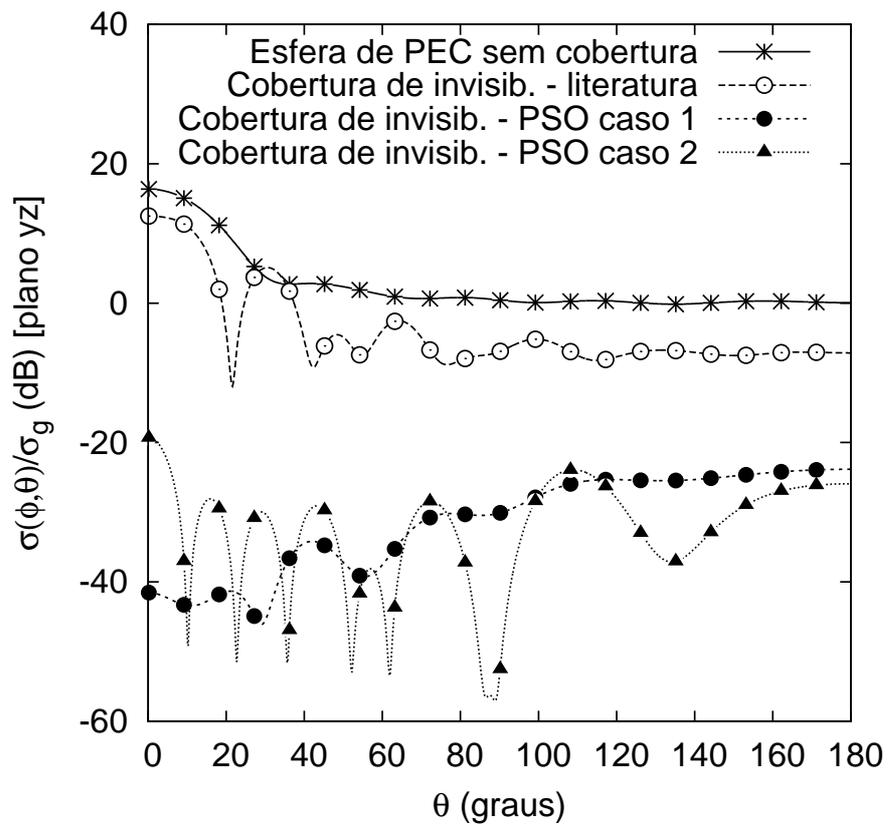


Figura 4.2: Seção transversal de radar normalizada pela seção transversal geométrica em função do ângulo de espalhamento no plano yz.

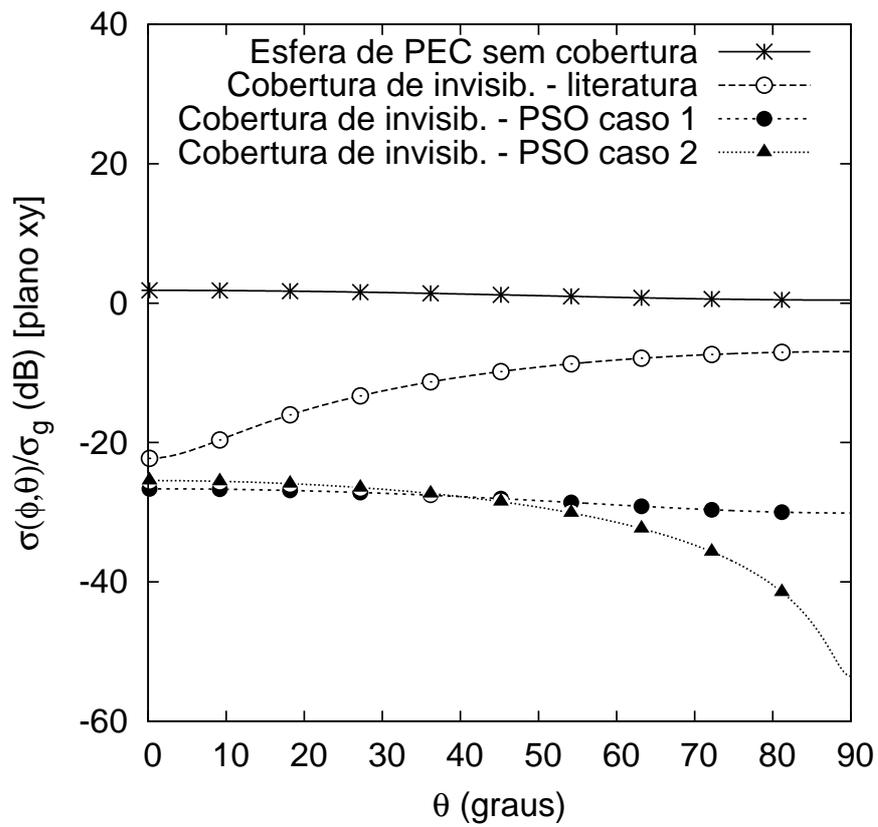


Figura 4.3: Seção transversal de radar normalizada pela seção transversal geométrica em função do ângulo de espalhamento no plano xy.

Na figuras 4.4, 4.5 e 4.6, nós mostramos a distribuição espacial do campo elétrico para uma esfera de PEC com  $r_1=\lambda$  em três casos: (a) para uma esfera de PEC sem cobertura, (b) para um cobertura utilizando a técnica proposta em [41] e (c) para o cobertura otimizada ("caso 1") proposta aqui. Note que não existe perturbação perceptível na onda incidente para o cobertura otimizada.

Analisando essas figuras verificamos que com apenas 20 camadas, não é possível obter estruturas que sejam eficientemente invisíveis, utilizando as técnicas disponíveis na literatura [41]. Contudo, a partir das técnicas apresentadas aqui, foram obtidas coberturas de invisibilidade eficientes (com apenas 20 camadas), capazes de não perturbar o meio, quando por ele se propaga uma onda eletromagnética.

Como comentamos anteriormente, a interpretação física para o fato de que melhores resultados são obtidos quando diferentes escolhas de parâmetros para a obtenção de meios efetivos são utilizadas (como os parâmetros do "caso 1" e do "caso 2" propostos aqui), está relacionada a uma melhor reorganização dos fluxos dentro das camadas e do gradiente de potencial ao longo do raio, produzindo uma melhor aproximação para o meio anisotrópico. Contudo, a interpretação física dada pela técnica de cancelamento de espalhamento também é válida. Segundo essa interpretação, uma cobertura isotrópica torna-se invisível devido ao cancelamento dos campos espalhados produzidos pelos diferentes multipolos induzidos nas diversas camadas que compõem a estrutura, quando um campo eletromagnético incidente está presente.

Valores otimizados para os parâmetros apresentados nas equações 4.6 (caso 1), 4.13 (caso 2) e 4.14 (caso 2), obtidos via PSO, são mostrados na tabela 4.1.

Na tabela 4.2, é mostrada a redução média da seção transversal de espalhamento total da cobertura de invisibilidade do "caso 1" para diferentes variações de parâmetros. Notamos que para variações de até 2% nos parâmetros eletromagnéticos obtidos para as camadas, a média de reduções de seção transversal de espalhamento total ainda é menor do que 20 dB. Portanto, vemos que as coberturas de invisibilidade obtidas aqui apresentam uma sensibilidade a variação de parâmetros aceitável, o que é outro requisito importante para que essas estruturas sejam factíveis.

Cada um dos resultados apresentados na tabela 4.2, foi obtido a partir da média da variação de seção transversal de espalhamento total  $\Delta\sigma_{sca}$  em decibéis, para 2000 simulações com parâmetros eletromagnéticos que apresentam variações máximas em percentagem de  $\Delta\varepsilon_r$  com relação aos parâmetros eletromagnéticos ótimos obtidos para o "caso 1". Sem essas perturbações a redução é de 26,22 dB. Para essa análise foram realizadas 20000 simulações.

O PSO foi configurado com os seguintes valores: número de partículas igual a 1000, número de iterações igual a 1000 e 21 variáveis. Uma das variáveis é a mesma tanto no "caso 1" quanto no "caso 2", e corresponde ao valor de  $\alpha$  que aparece na equação (2.16). Para o "caso 1", as variáveis são os valores de  $\{p_l\}$ , para  $l = 1, 2, \dots, 20$ . Para o "caso 2", as variáveis são os valores de  $\{q_l\}$ , para  $l = 1, 2, \dots, 20$ . Os demais parâmetros de configuração do PSO são aqueles apresentados no apêndice F.

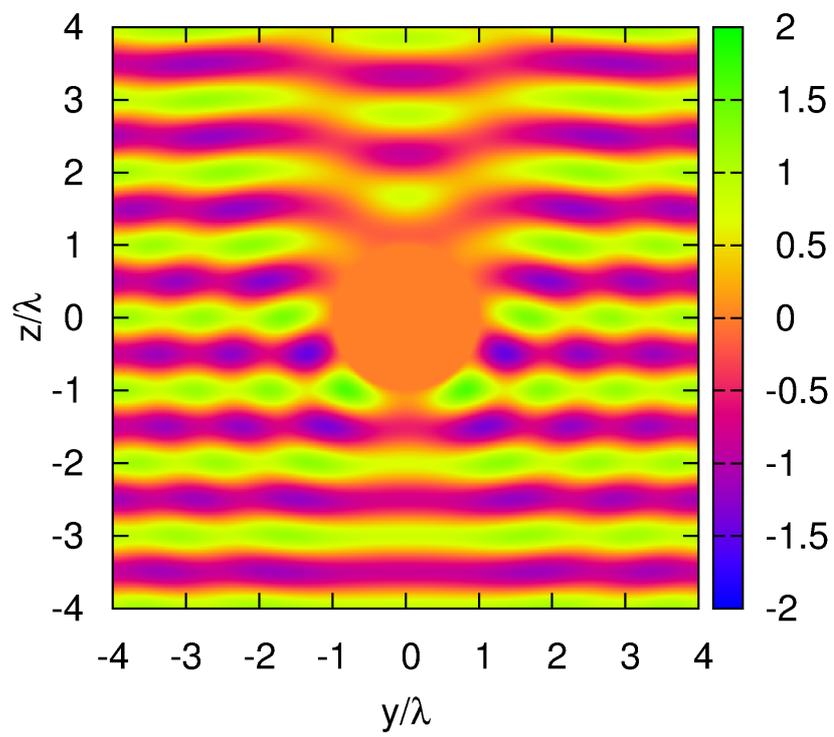


Figura 4.4: Distribuição espacial do campo elétrico para uma esfera de PEC com  $r_1=\lambda$  para uma esfera sem cobertura

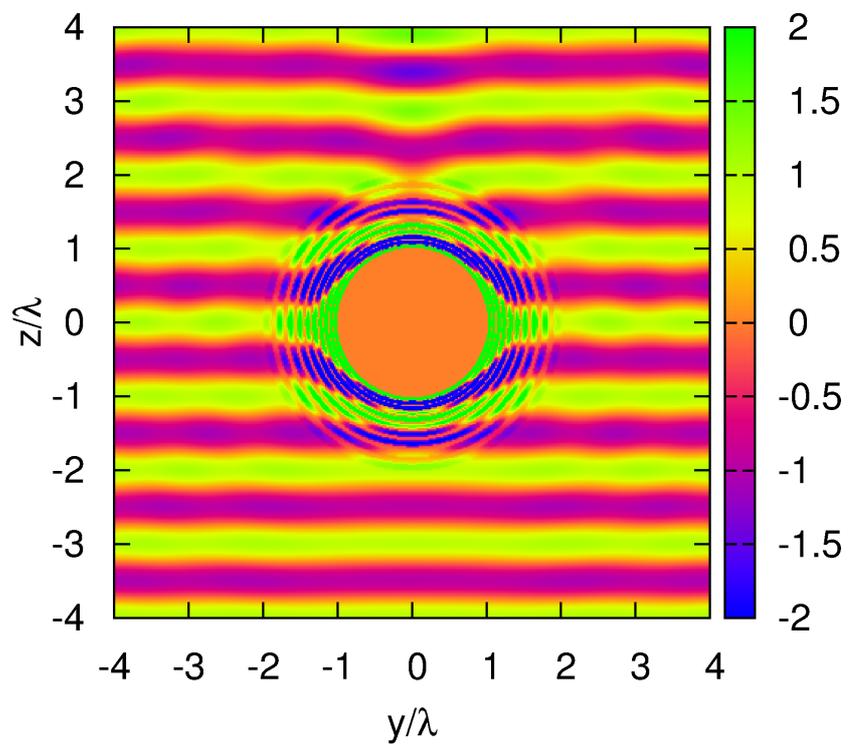


Figura 4.5: Distribuição espacial do campo elétrico para uma esfera de PEC com  $r_1=\lambda$  usando as técnicas propostas em na literatura

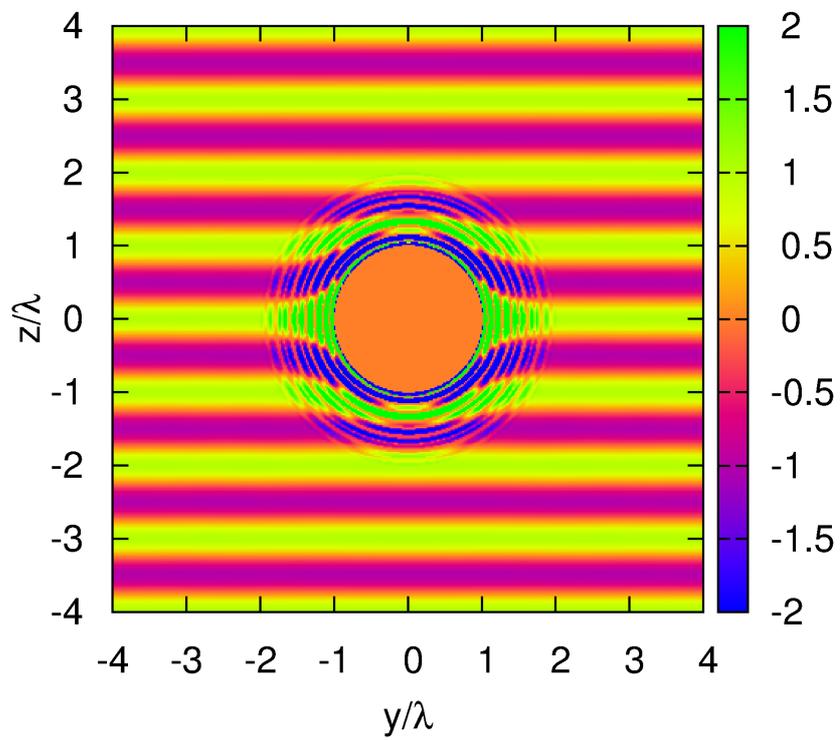


Figura 4.6: Distribuição espacial do campo elétrico para uma esfera de PEC com  $r_1=\lambda$  para o caso 1 proposto aqui.

Tabela 4.1: Valores otimizados para os parâmetros apresentados nas equações 4.6, 4.13 e 4.14, obtidos via PSO.

$p_1$	1.0000322	$q_1$	0.99402988
$p_2$	1.9573383	$q_2$	5.71277769E-06
$p_3$	2.3665304	$q_3$	0.40558136
$p_4$	2.4637742	$q_4$	0.58739233
$p_5$	2.6236758	$q_5$	2.08408497E-02
$p_6$	3.1372926	$q_6$	9.83838513E-02
$p_7$	3.0949275	$q_7$	0.0000000
$p_8$	3.8768449	$q_8$	0.33959588
$p_9$	3.1414609	$q_9$	0.39255771
$p_{10}$	2.6668687	$q_{10}$	0.15491971
$p_{11}$	2.2503004	$q_{11}$	0.27017230
$p_{12}$	3.2402809	$q_{12}$	4.69684787E-02
$p_{13}$	3.6963906	$q_{13}$	0.14206879
$p_{14}$	3.1345472	$q_{14}$	6.34407566E-04
$p_{15}$	1.4965906	$q_{15}$	0.89291263
$p_{16}$	2.3817937	$q_{16}$	0.99259722
$p_{17}$	3.8302257	$q_{17}$	0.96351773
$p_{18}$	3.9955389	$q_{18}$	0.23442300
$p_{19}$	3.1001663	$q_{19}$	0.99978071
$p_{20}$	1.8353270	$q_{20}$	0.91070235

Tabela 4.2: Redução média da seção transversal de espalhamento total da cobertura de camuflagem do "caso 1" para diferentes variações de parâmetros.

$\Delta\varepsilon_r\%$	$\Delta\sigma_{sca}(dB)$
$\pm 0,5$	-25.675
$\pm 1,0$	-23.651
$\pm 2,0$	-20.467
$\pm 3,0$	-17.244
$\pm 4,0$	-15.416
$\pm 5,0$	-13.518
$\pm 10,0$	-7.8669
$\pm 15,0$	-4.2853
$\pm 20,0$	-2.7335
$\pm 25,0$	-0.48756

## Capítulo 5

# Invisibilidade em microondas via coberturas discretizadas constituídas de materiais dispersivos

Na maioria dos trabalhos em que coberturas discretizadas são analisadas, os efeitos de dispersão são desconsiderados [16, 41, 43, 55, 62]. Contudo, efeitos dispersivos devem ser levados em conta, pois, tais coberturas são constituídas de materiais com parâmetros elétricos relativos menores do que a unidade ( $\varepsilon_r, \mu_r < 1$ ) [2].

A análise de efeitos de dispersão é importante para solucionar problemas relacionados à resposta dinâmica e à largura de banda de operação de dispositivos de invisibilidade [60, 61]. Quando um pulso incidir sobre um dispositivo de invisibilidade, as velocidades de grupo ao longo da distância radial apresentam valores diferentes devido aos efeitos de dispersão, produzindo deformação das frentes de onda [83].

Portanto, a consideração de efeitos de dispersão é fundamental na concepção de dispositivos de invisibilidade capazes de funcionar não apenas em uma única frequência, mas em uma certa faixa de frequências [62].

Anteriormente, nós realizamos o projeto de duas coberturas de invisibilidade através da otimização com a técnica PSO. Para isso foram utilizados dois diferentes tipos de conjuntos de parâmetros, em duas situações que denominamos "caso 1" e "caso 2". Nós agora propomos uma técnica para obter uma cobertura de invisibilidade dispersiva, a partir da cobertura otimizada do "caso 1".

Nas simulações nós utilizamos um número de camadas igual a  $2M = 20$  depositadas sobre um núcleo esférico constituído de PEC com raio igual a  $r = \lambda$ . Inicialmente, os mesmos parâmetros eletromagnéticos ótimos do "caso 1" foram utilizados. A medida que pequenas variações foram feitas em  $r/\lambda$ , pequenos intervalos de parâmetros de busca centrados nos parâmetros ótimos do "caso 1" foram utilizados em otimizações por PSO. Dessa forma, foram obtidos perfis de parâmetros eletromagnéticos em função de  $r/\lambda$  sem variações abruptas.

## 5.1 Algoritmo utilizado no cálculo dos parâmetros eletromagnéticos das coberturas dispersivas

Ao todo foram feitas 40 simulações para diferentes valores da razão  $r/\lambda$  variando de 0,05 até 2,0, com espaçamento de 0,05. Ao final foi utilizada a função "spline" do programa livre *octave* para fazer o ajuste de curvas, a fim de que pudessemos utilizar um número grande de frequências, permitindo que fosse possível analisar de maneira eficiente a variação da taxa de redução da seção transversal de espalhamento em função da frequência. Pois, se utilizássemos apenas os 40 pontos para os quais foram feitas as otimizações com o PSO, existiria uma quantidade grande de informação a qual nós não conheceríamos com exatidão, por exemplo, entre dois pontos com redução maior do que 20 dB haveria um intervalo em  $r/\lambda$  de 0,05, no qual poderia existir um pico com elevado valor de espalhamento, o qual passaria despercebido. Utilizamos ajuste de curvas em vez de interpolação a fim de obter uma curva mais suave.

## 5.2 Parâmetros eletromagnéticos em função da frequência para as coberturas dispersivas

Curvas de permissividade elétrica relativa em função da frequência para as camadas de dielétrico do tipo A da cobertura discretizada dispersiva são mostradas na figura 5.1. Percebemos que esses valores são factíveis, sendo definidos no intervalo de 1,5 a 9,0. A camada de número "1", é a camada que está depositada diretamente sobre o núcleo de PEC, e camada de número "19" é a penúltima camada mais externa. É possível notar que a medida que nos aproximamos da camada mais externa o valor da permissividade relativa da camada aproxima-se de 1, isso ocorre porque como explicado anteriormente, nós tivemos a preocupação de garantir que os parâmetros eletromagnéticos das camadas variassem gradualmente até atingir um valor próximo a 1, garantindo o casamento da camada mais externa com o meio envolvente (no caso, o ar).

Curvas de permissividade elétrica relativa em função da frequência para as camadas de dielétrico do tipo B da cobertura discretizada dispersiva são mostradas na figura 5.2. Esses valores são definidos no intervalo de 0,05 a 1,0, e constituem materiais, mas que não estão fora da realidade, e que dependendo da faixa de frequências podem ser obtidos por materiais convencionais ou por metamateriais. A camada de número "2", é a camada que está depositada sobre a camada de número "1", e a camada de número "20" é a camada mais externa. É possível notar que a medida que nos aproximamos da camada mais externa o valor da permissividade relativa da camada aproxima-se de 1, garantindo o casamento da camada mais externa com o meio envolvente.

Curvas de permeabilidade magnética relativa em função da frequência para as camadas de dielétrico A da cobertura discretizada dispersiva são apresentadas na figura 5.3. Curvas de permeabilidade magnética relativa em função da frequência para as camadas de dielétrico do tipo B da cobertura discretizada dispersiva são mostradas na figura 5.4.

Na figura 5.5, são mostradas curvas de dispersão da permissividade e da permeabilidade para algumas camadas da cobertura isotrópica dispersiva. Note que nesse caso, as permissividades não coincidem com as permeabilidades, como ocorre para coberturas discretizadas não-dispersivas. Na figura 5.6, é mostrada a taxa de redução da seção transversal de espalhamento total da cobertura isotrópica dispersiva com relação ao objeto de PEC esférico de raio  $r = \lambda$  sem cobertura.

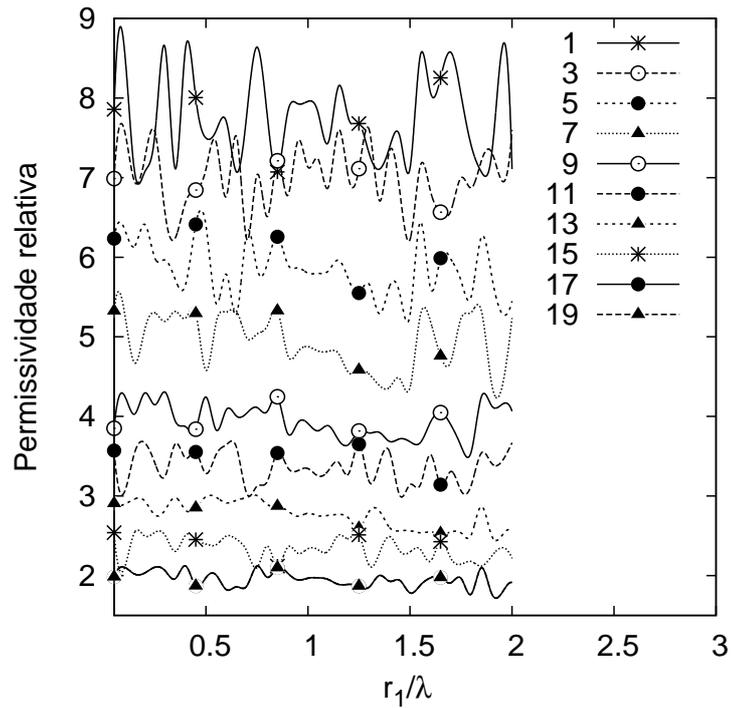


Figura 5.1: Curvas de dispersão da permissividade para as camadas de dielétrico do tipo A da cobertura isotrópica dispersiva.

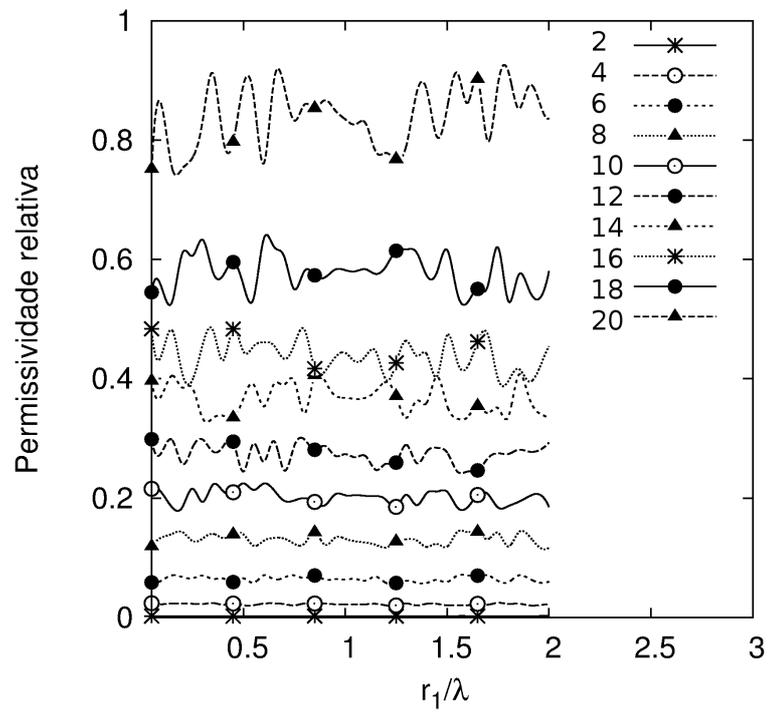


Figura 5.2: Curvas de dispersão da permissividade para as camadas de dielétrico do tipo B da cobertura isotrópica dispersiva.

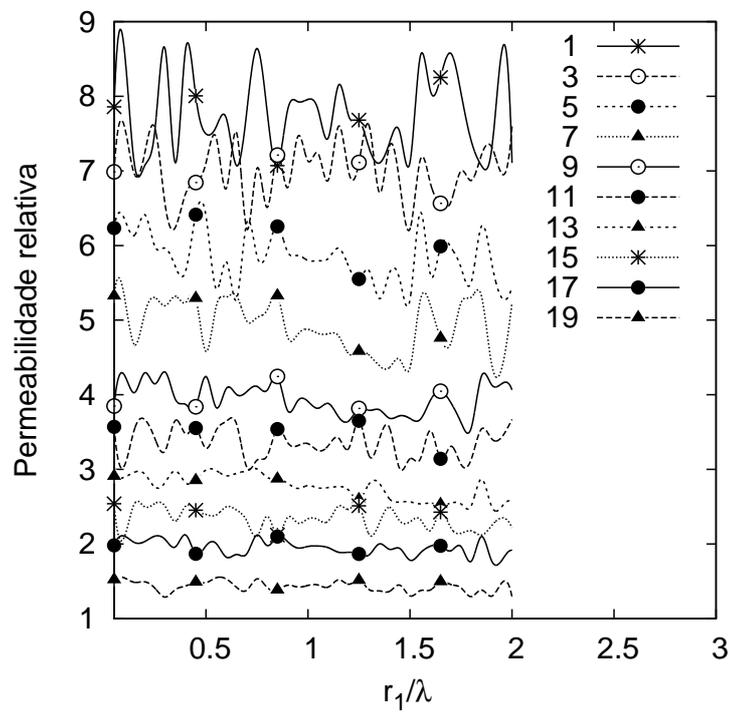


Figura 5.3: Curvas de dispersão da permeabilidade para as camadas de dielétrico do tipo A da cobertura isotrópica dispersiva.

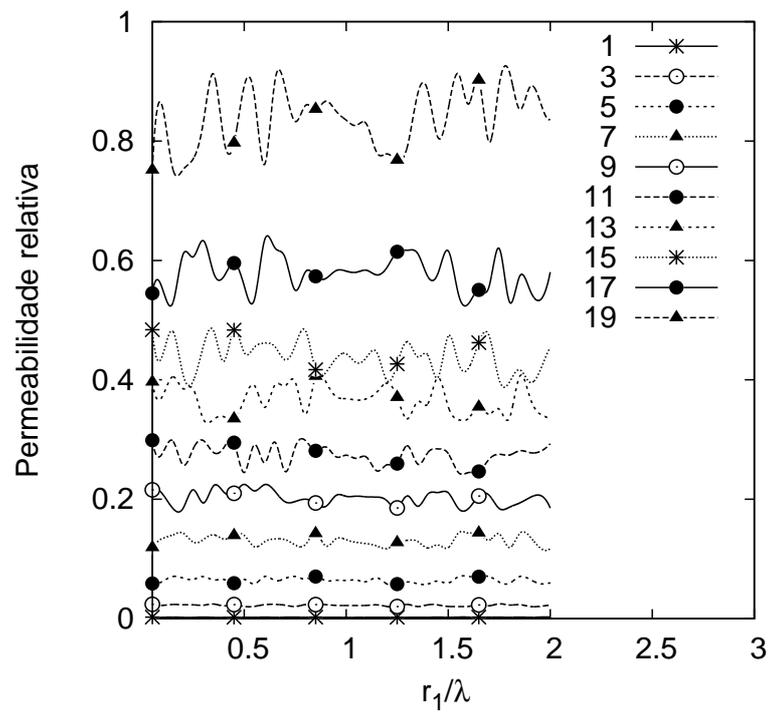


Figura 5.4: Curvas de dispersão da permeabilidade para as camadas de dielétrico do tipo B da cobertura isotrópica dispersiva.

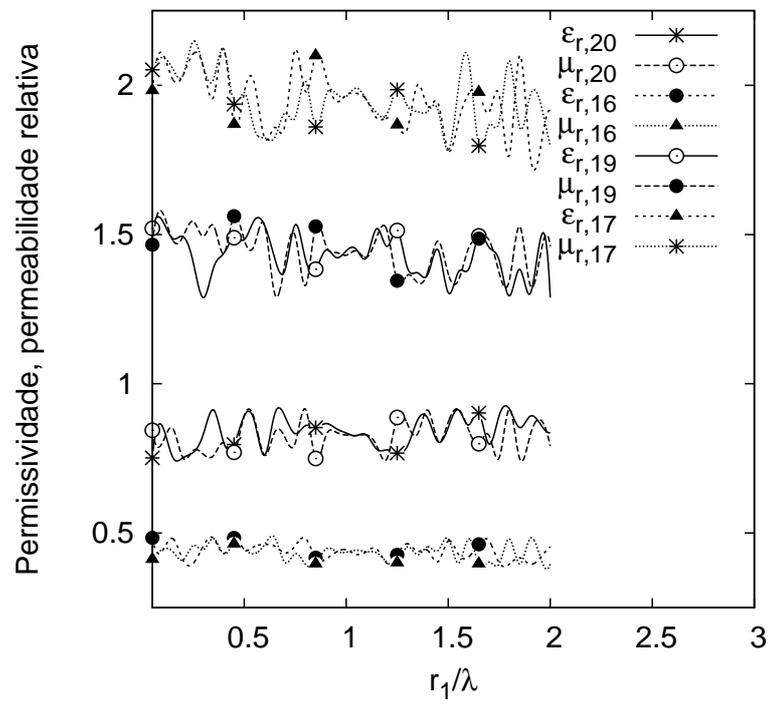


Figura 5.5: Curvas de dispersão da permissividade e da permeabilidade para algumas camadas da cobertura isotrópica dispersiva.

### 5.3 Invisibilidade em maior faixa de frequências utilizando efeitos dispersivos

Notamos que com a cobertura dispersiva ocorreu o aumento de ambas as bandas de frequências em que a cobertura de invisibilidade funciona. As bandas de operação da cobertura de invisibilidade foram definidas com base em uma redução de espalhamento acima de 20 dB. Para o "caso 1", as duas bandas estavam em  $r/\lambda < 0,038$  e  $0,935 < r/\lambda < 1,026$ . Por sua vez, para cobertura de invisibilidade dispersiva, as duas bandas são  $r/\lambda < 0,578$  e  $0,622 < r/\lambda < 1,208$ . Dessa forma, a cobertura otimizada dispersiva, com relação a cobertura otimizada do "caso 1", apresenta um aumento na largura da faixa de frequências de mais de cinco vezes, para a banda centrada em  $r/\lambda = 1$ .

O nível de redução na primeira banda obtido para a cobertura dispersiva é superior ao obtido para a cobertura do "caso 1". Na posição  $r/\lambda = 1$ , a cobertura otimizada dispersiva apresentou uma redução menor do que a obtida para a cobertura do "caso 1", e não igual como se era de esperar, porque os valores dos parâmetros otimizados encontrados nas 40 simulações foram um pouco "piorados" após fazermos o ajuste de curvas por "spline".

A obtenção de materiais com as curvas de dispersão mostradas 5.2, 5.1, 5.4 e 5.3, para toda a faixa de frequências considerada é uma tarefa difícil de ser realizada. Porém, a reprodução dessas curvas para pequenos subintervalos já é capazes de fornecer dispositivos de invisibilidade que funcionem em uma faixa de frequências, e não em uma única frequência.

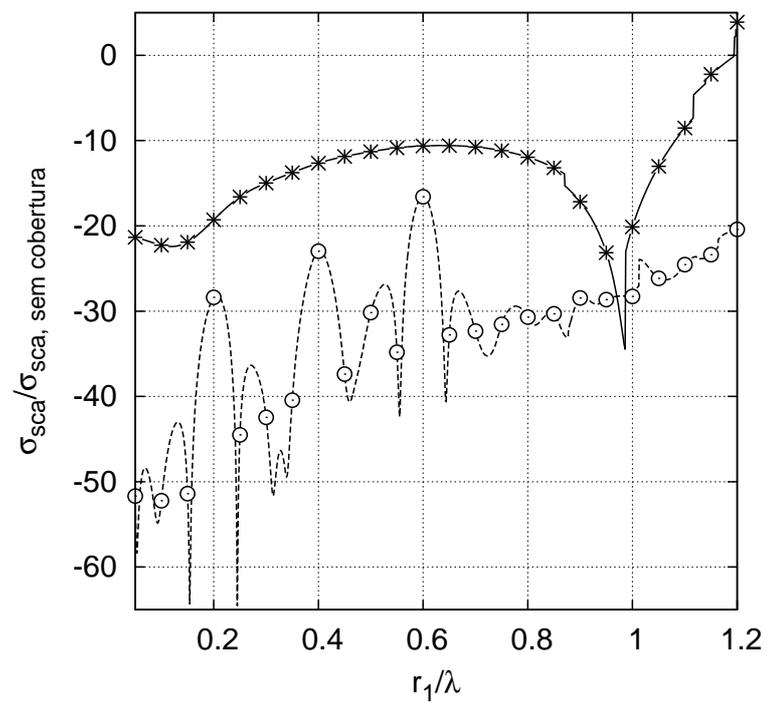


Figura 5.6: Taxa de redução da seção transversal de espalhamento total da cobertura isotrópica dispersiva com relação ao objeto de PEC esférico de raio  $r = \lambda$  sem cobertura.

## Capítulo 6

# Invisibilidade em microndas via coberturas estratificadas

Nós utilizamos a técnica do enxame de partículas (PSO) para projetar uma cobertura de invisibilidade esférica constituída de múltiplas camadas homogêneas e isotrópicas depositadas sobre um núcleo de PEC de raio  $r=0.983\lambda$ , de tal maneira que espessura seja reduzida, e que ela possua o menor número possível de camadas, mas com uma redução da seção transversal de espalhamento total superior a 20 dB. Nessas coberturas, as permissividades relativas não são necessariamente iguais as permeabilidades relativas, como ocorre para coberturas discretizadas.

### 6.1 Resultados obtidos através de otimização com PSO

Em nossas otimizações via PSO, nós consideramos uma esfera de PEC coberta por um cobertura estratificada em multicamadas. O raio da esfera foi configurado com o valor igual a  $r=0.983\lambda$ . Nós utilizamos tanto as propriedades materiais (permissividade e permeabilidade relativas) e as espessuras das camadas como parâmetros de otimização. Nosso objetivo foi achar um número mínimo de camadas que poderiam prover uma redução de 20 dB na seção transversal de radar normalizada. Nós atingimos essa meta com um cobertura de 13 camadas. A redução de seção transversal de espalhamento total normalizada pela seção geométrica das coberturas otimizadas, para 11, 12 e 13 camadas, foram de 11,46 dB, 12,43 dB e 32,43 dB, respectivamente.

A curva de custo em função das iterações, obtida por simulação com PSO é mostrada na figura 6.1, em que a função custo é o valor da seção transversal de espalhamento total. Nós usamos uma população de 10.000 partículas e realizamos 1.000 iterações. O espaço de busca para as propriedades materiais e as espessuras são, respectivamente, os intervalos  $[0.05, 10]$  e  $[0.05\lambda, \lambda]$ . A tabela 6.1 resume os parâmetros otimizados.

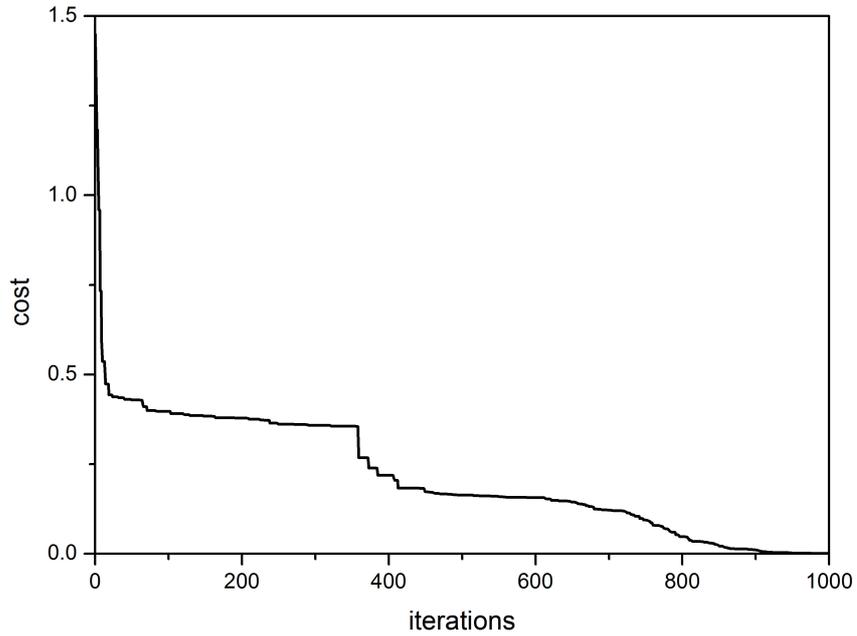


Figura 6.1: Função custo (seção transversal de espalhamento total) versus número de iterações nas simulações com PSO.

Tabela 6.1: Parâmetros da cobertura otimizada: propriedades materiais (permissividade e permeabilidade relativas) e os raios das camadas.

$l$	$r/\lambda$	$\varepsilon_r$	$\mu_r$
1	1,000000	0,008208	8,907839
2	1,015598	9,917844	4,652834
3	1,031196	9,677464	0,022260
4	1,046794	0,015038	9,985788
5	1,062392	4,096512	9,992937
6	1,077990	9,748927	3,311049
7	1,093588	0,294915	0,026139
8	1,109186	1,768592	3,209067
9	1,124785	9,971361	5,088651
10	1,140383	0,134066	0,199034
11	1,155981	0,498421	5,419352
12	1,171579	0,131510	0,110672
13	1,187177	7,227612	2,478084

## 6.2 Análise de campo distante

Na análise de campo distante, nós obtivemos os valores de seção transversal de radar normalizada. Nas figuras 6.2, 6.3 e 6.4, nós comparamos as curvas de seção transversal de radar normalizada da esfera de PEC e da cobertura otimizada por PSO em função do ângulo de espalhamento (ângulo zenital que é medido a partir do eixo z em coordenadas esféricas), nos planos xz e yz, respectivamente. Como nós podemos ver, uma redução menor do que 20 dB foi obtida para todos os ângulos de espalhamento incluindo a região onde usualmente ocorreria um alto grau de espalhamento.

Como nós podemos ver, há uma redução significativa do espalhamento eletromagnético na cobertura otimizada proposta aqui para o intervalo  $0,85 < r/\lambda < 1,1$ . Mas esta redução é alcançada a custo da degradação das características em altas frequências  $r/\lambda > 1,2$ .

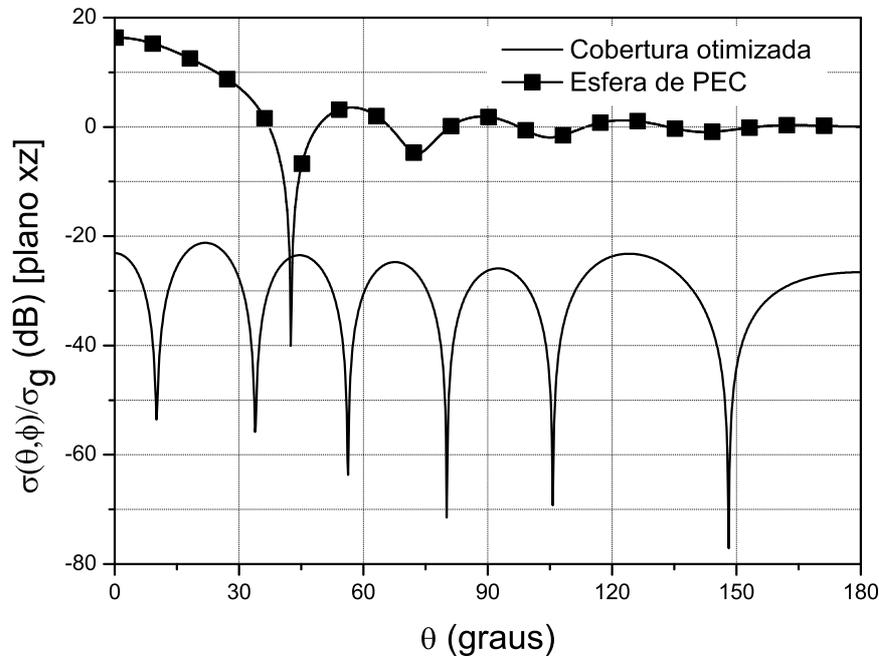


Figura 6.2: Seção transversal de radar normalizada no plano xz como uma função do ângulo  $\theta$  para uma esfera de PEC e para o cobertura otimizado com PSO.

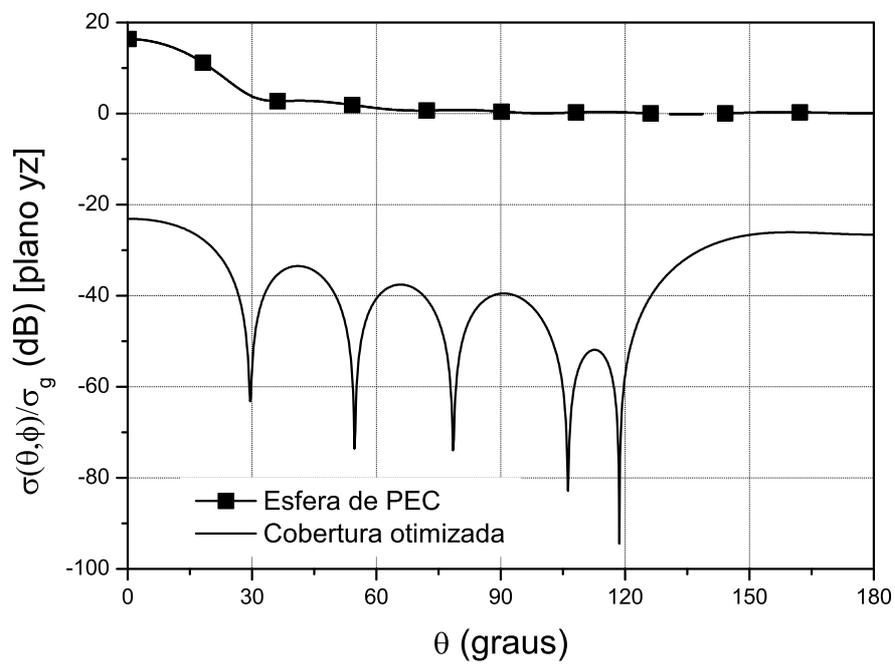


Figura 6.3: Seção transversal de radar normalizada no plano yz como uma função do ângulo  $\theta$  para uma esfera de PEC e para o cobertura otimizado com PSO.

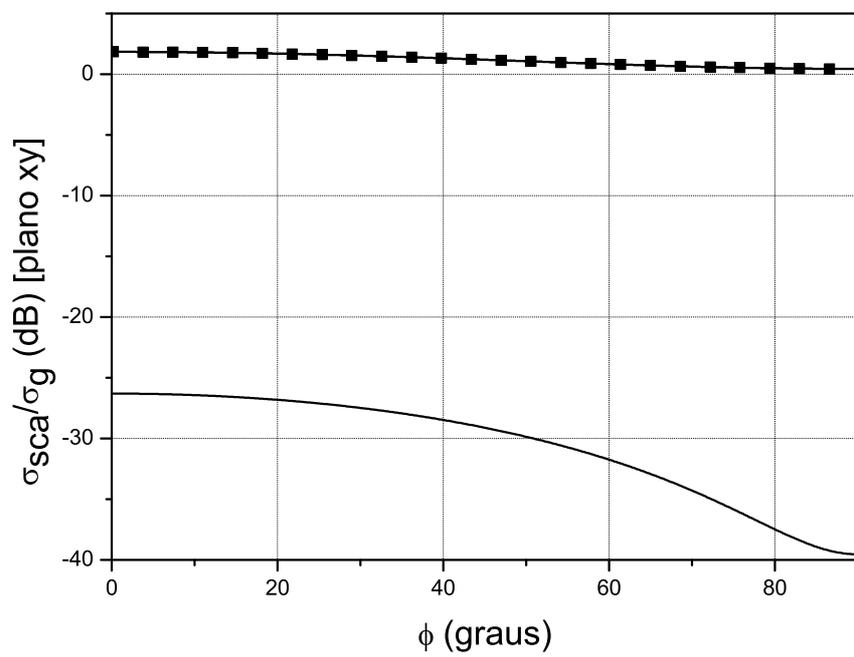


Figura 6.4: Seção transversal de radar normalizada no plano xy como uma função do ângulo  $\phi$  para uma esfera de PEC e para o cobertura otimizado com PSO.

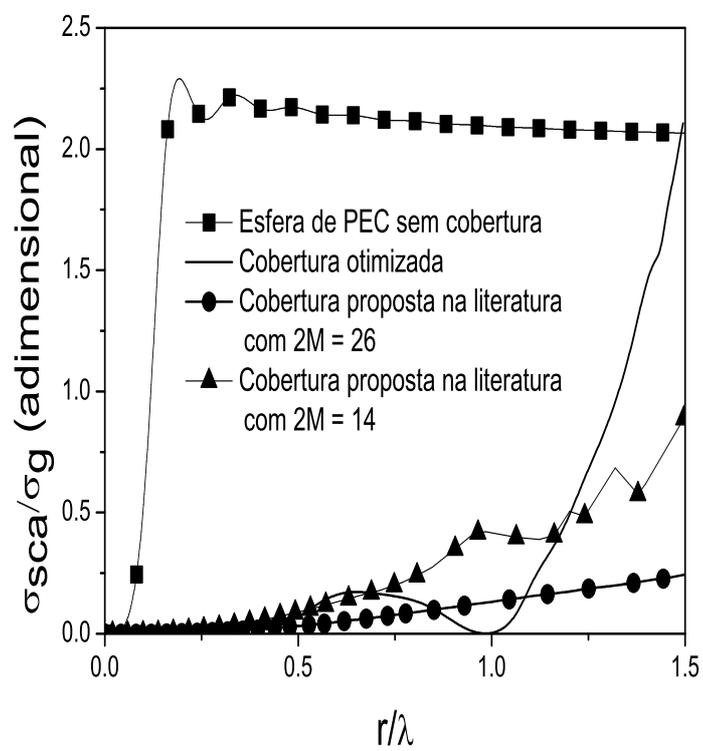


Figura 6.5: Seção transversal de espalhamento normalizada pela seção transversal geométrica em função do raio  $r/\lambda$ .

### 6.3 Análise de campo próximo

Na análise de campo próximo, nós calculamos a distribuição espacial da parte real da componente  $E_x$  do campo elétrico total no plano  $yz$ . Nas figuras 6.6, 6.7 e 6.8, os valores ao longo dos eixos  $y$  e  $z$  são normalizados por  $\lambda$ . No lado direito, a barra de cores representa os valores do campo elétrico total normalizado pela amplitude do campo elétrico incidente. Os resultados são obtidos para o raio da esfera igual a  $0,983\lambda$ .

Na figura 6.6, uma onda eletromagnética plana incidente é perturbada por uma esfera de PEC.

Na figura 6.7, a esfera de PEC é coberta pelo cobertura otimizado e a perturbação eletromagnética no meio exterior é eliminada. Contudo, o campo interior ao cobertura torna-se mais intenso pois a energia que antes era espalhada pela esfera de PEC agora é guiada por dentro da cobertura.

Na figura 6.8, os valores de campos elétricos mostrados na figura 6.7 foram limitados ao intervalo  $[-2:2]$  a fim de facilitar a visualização da distribuição de campo.

Na figura 6.5, nós mostramos curvas de seção transversal de espalhamento total normalizada pela seção transversal geométrica em função de  $r/\lambda$  ( $r$  é o raio da esfera de PEC) para quatro casos: a esfera de PEC, nossa cobertura otimizada, a cobertura proposta em [43] com  $2M=14$  e  $2M=26$ .

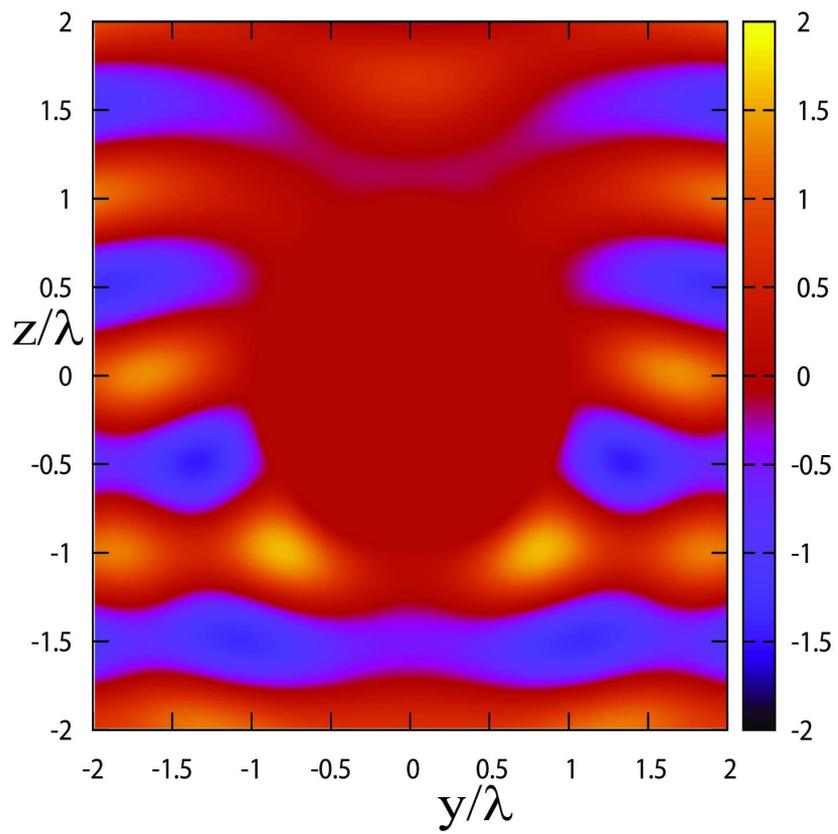


Figura 6.6: Distribuição espacial da parte real da componente  $E_x$  do campo elétrico total. O obstáculo é uma esfera de PEC com raio igual a  $0.983\lambda$ .

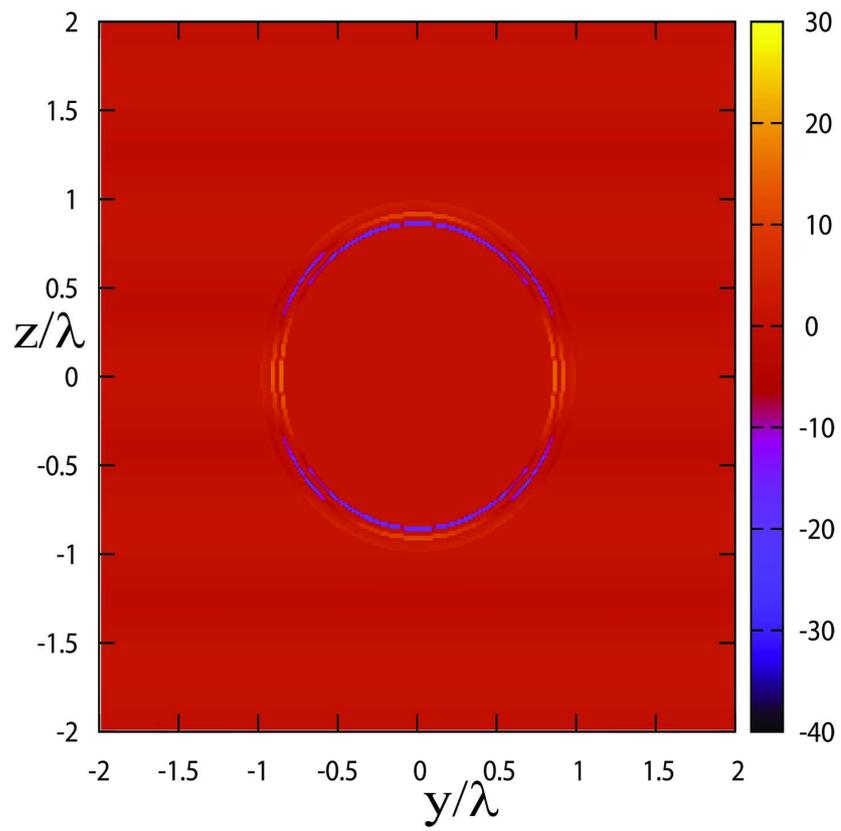


Figura 6.7: Distribuição espacial da parte real da componente  $E_x$  do campo elétrico total. O obstáculo é o cobertura otimizado.

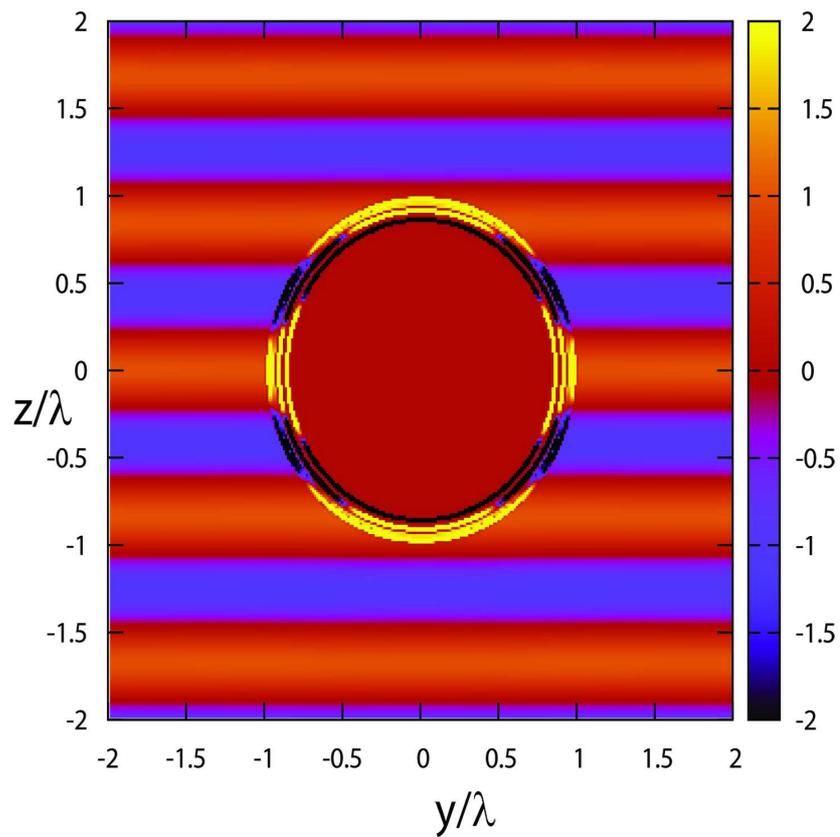


Figura 6.8: Distribuição espacial da parte real da componente  $E_x$  do campo elétrico total. O obstáculo é o cobertura otimizado. Os valores do campo elétrico são limitados no intervalo  $[-2:2]$  a fim de facilitar a visualização.

## Capítulo 7

# Invisibilidade na faixa óptica via coberturas estratificadas constituídas de materiais dispersivos

Nós analisamos uma esfera de ouro de raio 250 nm na faixa de frequências de 400 nm a 1000 nm. Os parâmetros otimizados de uma cobertura de invisibilidade esférica de material dispersivo foram obtidos. A fim de comparar o desempenho de diferentes métodos de otimização, um enxame de partículas e um algoritmo genético foram utilizados na solução do problema.

Nós consideramos dois casos: uma cobertura de uma única camada de espessura 50 nm e uma cobertura de duas camadas de espessuras 50 nm e 60 nm. As permissividades das camadas foram utilizadas como parâmetros a serem otimizados. Efeitos quânticos foram desprezados, pois as espessuras das camadas são muito maiores do que o  $0.5nm$  [84]. Assim, um modelo totalmente baseado na eletrodinâmica clássica, como o utilizado no método da matriz de transição implementado por nós, pode ser utilizado.

Foram consideradas camadas não-magnéticas, pois, materiais magnéticos são difíceis de obter na faixa óptica [85, 62]. Além disso, foram considerados materiais dispersivos para as camadas, pois, como explicado anteriormente, os mesmos são necessários na obtenção de coberturas com operação em uma larga faixa de frequências.

Para uma coleção de partículas suficientemente espaçadas e com dimensões reduzidas, o campo espalhado pode ser calculado pela soma dos campos espalhados pelas partículas individuais [73]. Portanto, a partir do estudo de coberturas de invisibilidade para nanopartículas, podemos fazer análises para materiais constituídos por uma coleção de partículas.

## 7.1 Coberturas de um única e de duas camadas otimizadas por PSO

Nós projetamos coberturas de invisibilidade para uma nanoesfera de de ouro de raio 250 nm na faixa de frequências de 400 nm a 1000 nm. Para realizar esta tarefa, utilizamos um enxame de partículas (PSO) com seção reta de espalhamento total como função objetivo. Foram considerados coberturas não-magnéticos de uma única camada e de duas camadas. Utilizamos uma espessura de 50 nm para o cobertura de uma única camada e espessuras de 50 nm e 60 nm para o cobertura de duas camadas. Utilizamos as constantes dielétricas das camadas como parâmetros de otimização.

A curva de permissividade relativa em função do comprimento de onda obtida através do PSO para a cobertura de uma única camada é mostrada na figura 7.1, juntamente com a curva analítica mostrada na figura 2.7. Vemos que em ambos os casos valores factíveis são obtidos.

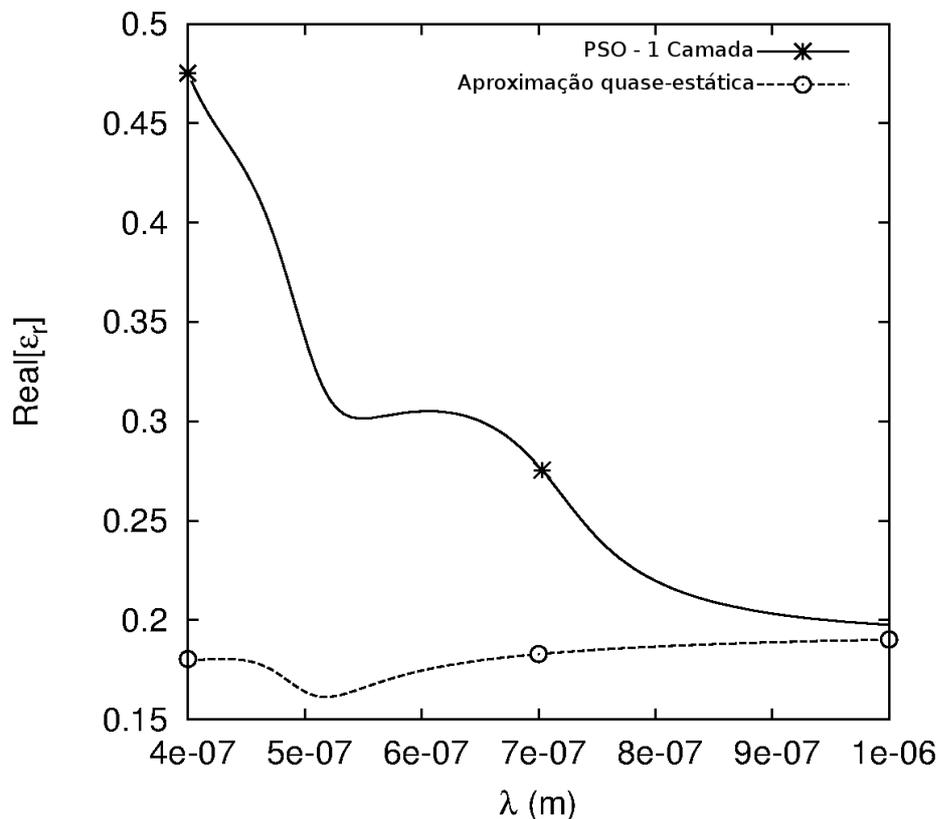


Figura 7.1: Comparação entre as curvas de permissividade relativa em função da frequência para a solução analítica (válida para o caso quase-estático) e para o cobertura de uma única camada obtida por PSO.

A curva de permissividade relativa em função do comprimento de onda obtida através

do PSO para a cobertura de duas camadas é mostrada na figura 7.2. Na figura são mostrados os perfis de permissividade elétrica relativa de ambas as camadas da cobertura, assim como, o perfil de permissividade elétrica relativa para o caso analítico mostrado na figura 2.7. Nesse caso verificamos que também foram obtidos valores realizáveis na prática.

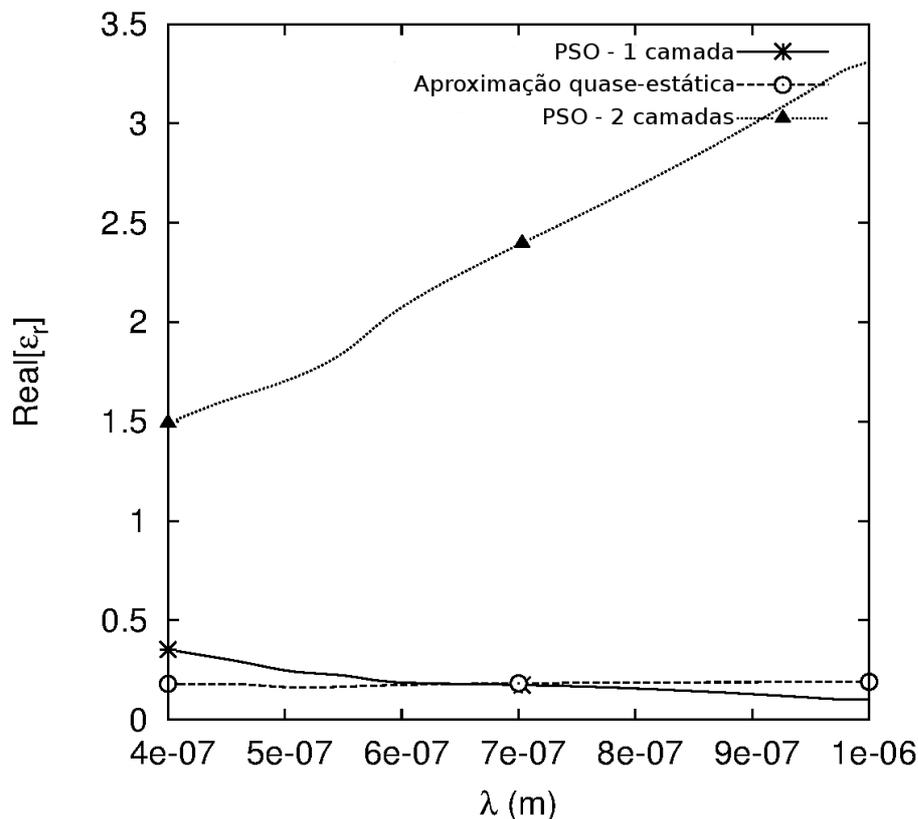


Figura 7.2: Comparação entre as curvas de permissividade relativa em função da frequência para as duas camadas de uma cobertura obtida por PSO, e da única camada da cobertura obtida de forma analítica.

A curva de seção reta de espalhamento total normalizada pela seção geométrica em função do comprimento de onda obtida através do PSO para a cobertura de uma única camada é mostrada na figura 7.3. Nessa figura, a curva obtida através do PSO é comparada com a curva analítica mostrada na figura 2.8.

A cobertura de uma única camada otimizada por PSO com relação a solução analítica, apresenta uma maior redução de espalhamento para altas frequências e, um desempenho equivalente para baixas frequências. Isso pode ser explicado pela limitação da validade de soluções analíticas quase-estáticas às baixas frequências. Por sua vez, o método utilizado aqui não apresenta qualquer restrição quanto a frequência analisada, uma vez que utiliza um método (matriz de transição) baseado em uma solução geral (expansão em harmônicos esféricos) que leva conta as componentes harmônicas desde ordens mais baixas até ordens

mais elevadas, e que não é limitada a uma determinada faixa de frequências.

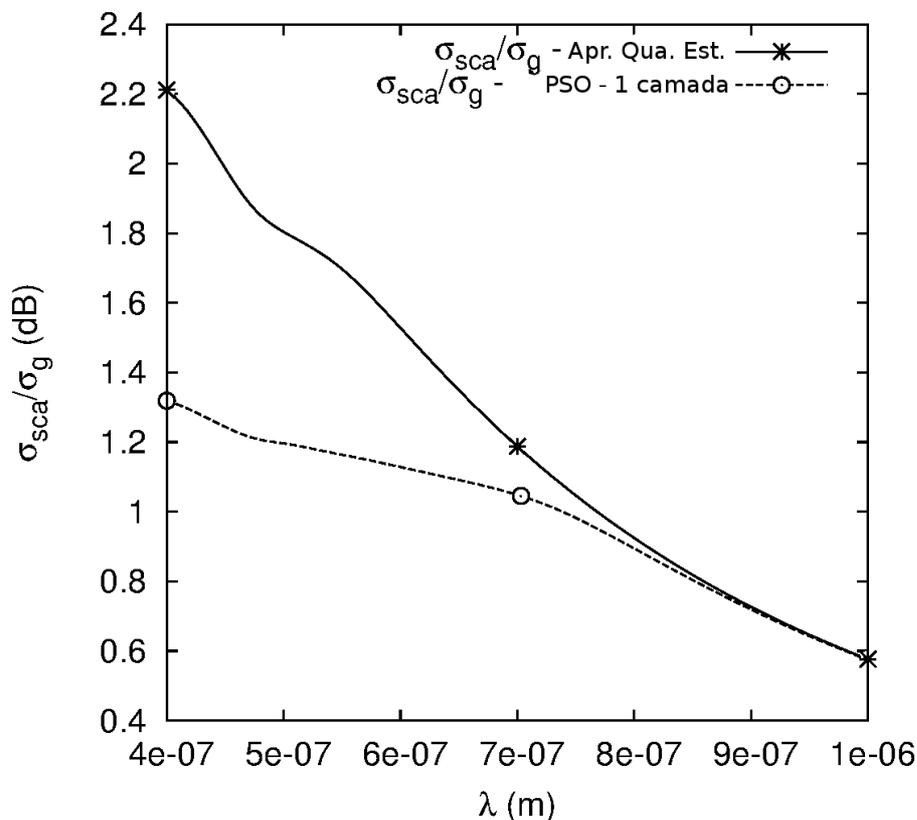


Figura 7.3: Seção reta de espalhamento total em função da frequência para a cobertura de uma única camada otimizada por PSO e para a solução analítica.

A curva de seção reta de espalhamento total em função do comprimento de onda obtida através do PSO para a cobertura de duas camadas é mostrada na figura 7.4. Nessa figura, a curva obtida através do PSO para a cobertura de uma única camada é comparada com a curva da cobertura de duas camadas.

A cobertura de duas camadas otimizado por PSO apresenta uma maior redução de espalhamento do que a cobertura otimizada de uma única camada, em toda a faixa de frequências considerada. Esse melhor resultado obtido ao utilizarmos duas camadas, deve-se, muito provavelmente, ao fato de que para duas camadas há um maior número de parâmetros de otimização, o que permite uma busca em um espaço de parâmetros mais amplo, o qual possui um maior número de pontos de mínimos locais, e consecutivamente, um maior número de concorrentes a mínimo global.

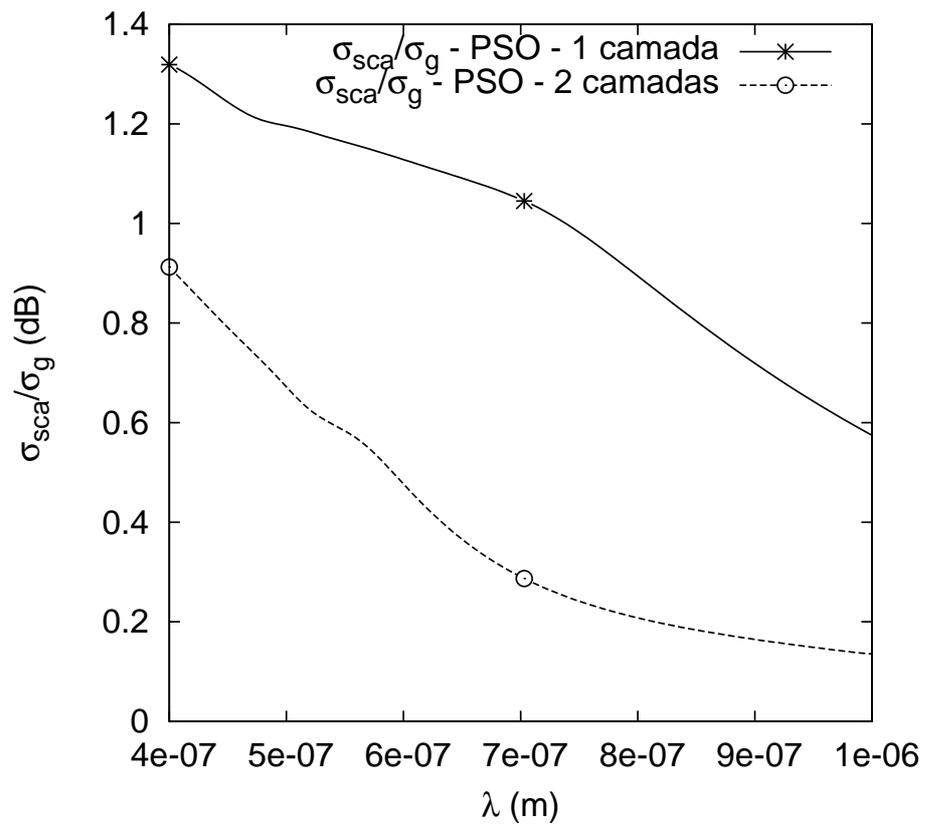


Figura 7.4: Seção reta de espalhamento total em função da frequência para a cobertura de uma única camada e para a cobertura de duas camadas otimizadas por PSO

## 7.2 Coberturas de duas camadas otimizadas por AG

Nesta seção, o mesmo problema da seção anterior em que uma cobertura de duas camadas é otimizada é simulado, mas utilizando um algoritmo genético (AG), em vez de um PSO.

As curvas de permissividades elétricas relativas em função da frequência para coberturas de invisibilidade de duas camadas obtidas através de otimização por AG, são comparadas as curvas anteriormente obtidas utilizando otimização por PSO. Esses resultados são mostrados na figura 7.5.

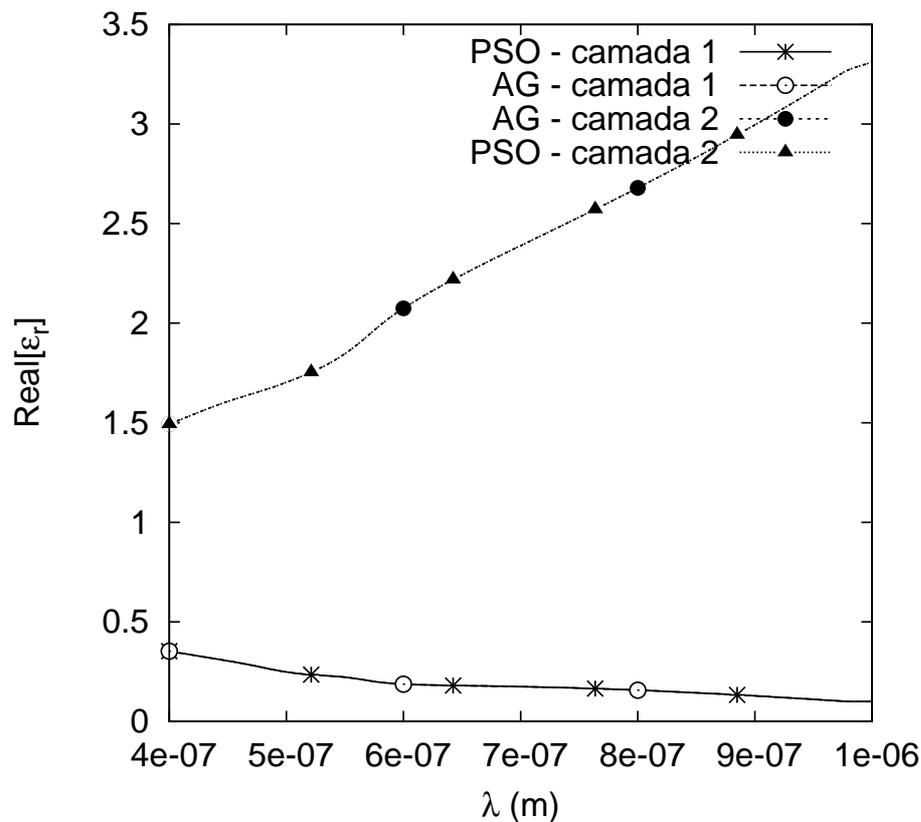


Figura 7.5: Permissividades elétricas relativas em função da frequência para coberturas de invisibilidade de duas camadas, para a camada mais interna (camada 1) e para a camada mais externa (camada 2), obtidas através de otimização por PSO e por AG.

As curvas de seção reta de espalhamento total em função da frequência para coberturas de invisibilidade de duas camadas obtidas através de otimização por AG, são comparadas as curvas anteriormente obtidas utilizando otimização por PSO. Esses resultados são mostrados na figura 7.5.

Vemos que os mesmos resultados foram obtidos utilizando dois métodos diferentes, o que é uma boa indicação de que a solução realmente corresponde a um mínimo global. Para o AG e o PSO foram utilizadas configurações compatíveis (população de 1000 in-

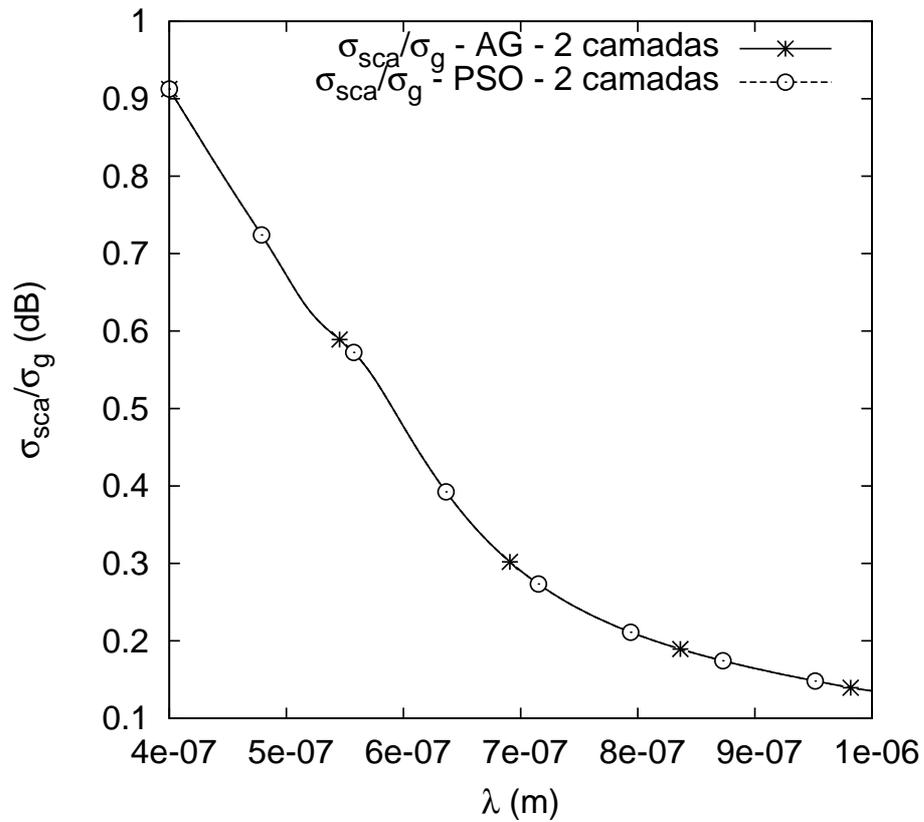


Figura 7.6: Seção reta de espalhamento total em função da frequência para coberturas de invisibilidade de duas camadas, para a camada mais interna (camada 1) e para a camada mais externa (camada 2), obtidas através de otimização por PSO e por AG.

divíduos, com 100 iterações e 2 variáveis de busca), resultando em tempos de processamento muito próximos (com seleção por torneio para o AG).

### 7.3 Cobertura de invisibilidade dispersiva na faixa óptica no domínio do tempo

Utilizando a transformada inversa de Fourier discreta e o método da matriz de transição, podemos calcular os campos no domínio do tempo (mais detalhes de como esse cálculos são realizados podem ser encontrados no capítulo 3). Na figura 7.7, mostramos um pulso cosseno modulado por uma gaussiana, com frequência central de 850 nm e largura de 300 nm. A partir dessa figura, podemos mostrar que um cobertura de invisibilidade é capaz de esconder um objeto, mesmo quando sobre ele incide um pulso no domínio do tempo, para o qual temos de considerar uma certa largura de banda.

Notamos que, mesmo em um caso como o mostrado na figura 7.7, em que a redução é menor do que 94,7% (12,8 dB), o espalhamento no domínio do tempo para um objeto com um cobertura de invisibilidade é significativamente menor do que aquele sem a cobertura de invisibilidade.

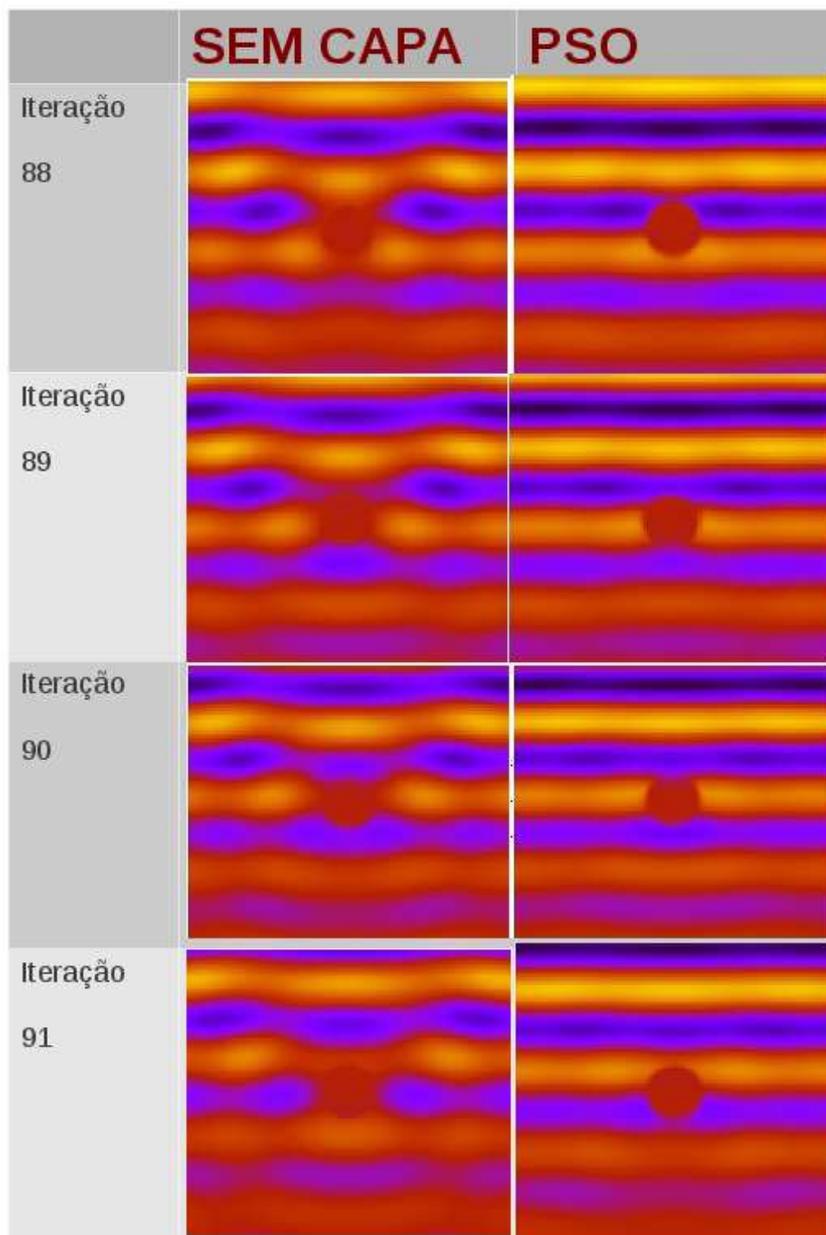


Figura 7.7: Campos elétricos totais no domínio do tempo para um objeto sem e com a cobertura de invisibilidade de duas camadas otimizada.

# Capítulo 8

## Considerações finais

Neste trabalho, foram analisadas e otimizadas coberturas de invisibilidade estratificadas em múltiplas camadas esféricas concêntricas que são constituídas por materiais dielétricos homogêneos e isotrópicos, em que tanto a seção transversal de espalhamento total quanto o número de camadas foram minimizados. Também foram realizadas otimizações para aumentar a faixa de frequências na qual há invisibilidade, para isso, efeitos dispersivos foram levados em conta. A seção transversal de espalhamento total das coberturas foi minimizada através de algoritmos de otimização bio-inspirados e o número de camadas das coberturas foi minimizado por busca direta.

Foram analisados dois tipos de cobertura de invisibilidade: uma que denominamos de cobertura discretizada, em que para cada uma das camadas a permissividade relativa é igual a permeabilidade relativa; e outra que denominamos de coberturas estratificadas, em que esses parâmetros foram utilizados com valores diferentes.

Nós utilizamos um método analítico baseado no método da matriz de transição (matriz  $T$ ) para obter soluções exatas com baixo custo computacional, e sem limitações com relação às dimensões elétricas do espalhador. Foram desenvolvidas duas versões do código: uma para um núcleo dielétrico (utilizada em frequências ópticas) e outra para um núcleo de PEC (utilizada em microondas).

Os métodos do algoritmo genético e do enxame de partículas foram utilizados para realizar a otimização das estruturas consideradas neste trabalho.

Foram obtidas coberturas discretizadas com reduções significativas (maiores do que 20 dB) da seção transversal de espalhamento total com relação ao espalhador sem cobertura, quando apenas 20 camadas foram utilizadas. Valores de redução equivalentes foram obtidos na literatura com no mínimo 80 camadas [41]. Para isso, foram propostas outras formas de discretizar as estruturas anisotrópicas, permitindo os ajustes dos "raios discretos" e das "posições para as camadas anisotrópicas" através de técnicas de otimização. Esses resultados foram obtidos em microondas.

Nós obtivemos uma redução, com relação a esfera sem cobertura, de 32 dB na seção transversal de espalhamento total para uma cobertura estratificada em apenas 13 camadas. Esse resultado foi obtido em microondas para um núcleo de PEC de raio  $r =$

$0.983\lambda$  [44]. Para uma cobertura de espessura igual  $0,2 \times r$ .

Nós otimizamos coberturas de invisibilidade dispersivas que apresentaram uma faixa de largura 5,4 vezes maior do que a que seria obtida sem considerar os efeitos dispersivos, na faixa de microondas. Para isso foram feitas 40 simulações com o PSO, e posteriormente foi realizado o ajuste de curvas por spline, a fim de obter os perfis dos parâmetros otimizados, representados pelas curvas de parâmetros eletromagnéticos em função da frequência para as camadas da cobertura.

Há alguns trabalhos em que coberturas de invisibilidade passivas e estratificadas em camadas são obtidas na faixa óptica, para faixas de frequências com  $\lambda > 700 \text{ nm}$  e  $570 < \lambda < 600 \text{ nm}$  [86]. Neste trabalho, foram projetadas coberturas de invisibilidade que funcionam em frequências ópticas, para  $400 < \lambda < 1000 \text{ nm}$ . Esses resultados foram obtidos para uma esfera de ouro de raio 250 nm, para dois casos: uma cobertura de uma única camada de espessura 50 nm e outro de duas camadas de espessuras 50 nm e 60 nm.

Uma sugestão para trabalhos futuros é a análise e a otimização de outros dispositivos utilizando os mesmos algoritmos utilizada neste trabalho. Dispositivos baseados em transformação de coordenadas que alteram apenas o raio, como concentradores e ilusões ópticas de tamanho, podem ser analisados pelos métodos utilizados neste trabalho.

Outra sugestão, é o projeto de dispositivos práticos como coberturas de invisibilidade que façam com que sensores perturbem menos o ambiente. Para otimizar uma cobertura utilizada na camuflagem de sensores, não é necessário levar em conta apenas a redução do espalhamento, mas também, é preciso reduzir a blindagem da cobertura. Nesse caso, a complexidade desse tipo de dispositivo está em tentar conciliar esses dois efeitos. Porém, do ponto de vista dos algoritmos utilizados neste trabalho, teríamos de considerar a maximização dos campos no interior do objeto espalhador (o qual deveria ser constituído de material dielétrico em vez de PEC) além de minimizar a seção transversal de espalhamento total.

Outra sugestão, a qual pode ser implementada a partir dos algoritmos dos quais já dispomos, seria utilizarmos modelos mais realísticos (como os modelos de Drude e de Lorentz) para obter os materiais das camadas na faixa óptica. Assim, poderíamos investigar o uso de materiais convencionais já existentes ou de fácil obtenção no projeto de coberturas de invisibilidade.

Nossos trabalhos publicados em anais de congresso que dizem respeito ao tema tratado aqui, foram os seguintes:

- T. C. Martins and V. Dmitriev, Design of dielectric cloaks by scattering cancellation technique using genetic algorithms, Proc. IEEE MTT-S Int. Conf. Microwave and Optoelectronics (Belem, Brazil), (2009), 766-769.
- T. C. Martins and V. Dmitriev, Projeto de coberturas para camuflagem eletromagnética utilizando um algoritmo genético, Proc. MOMAG (Vila-Velha, Brazil), (2009).

Nosso trabalho aceito para publicação em periódico, relativo ao tema, é:

- MARTINS, T. C. ; DIMITRIEV, Victor . Spherical Invisibility Cloak with Minimum Number of Layers of Isotropic Materials. Microwave and Optical Technology Letters (Print), 2012.

# Apêndice A

## Solução analítica do espalhamento eletromagnético por uma esfera homogênea e isotrópica

Em 1871, Lord Rayleigh, a partir da sua teoria do espalhamento eletromagnético por partículas esféricas pequenas, pode fornecer uma explicação para a cor azul do céu, a qual representava um enigma até então. Contudo, essa teoria limitava-se a partículas de dimensões muito menores do que o comprimento de onda da luz espalhada. Além disso, a solução do problema do espalhamento eletromagnético por esferas muito maiores do que o comprimento de onda fora conhecida desde 1621, através da lei da refração de Snell. Por outro lado, uma solução geral, a qual incluisse além desses casos particulares, a solução para a situação em que o diâmetro da esfera é da ordem do comprimento de onda, só foi proposta em 1908, por Gustav Mie, através do método da expansão em multipolos dos campos incidentes e espalhados pela partícula esférica [72, 73, 74].

O resumo apresentado neste capítulo é baseado nas referências [72, 73, 74], para maiores detalhes é recomendável consultá-las.

### A.1 Formulação geral do problema de espalhamento

Uma onda monocromática arbitrariamente polarizada ao incidir sobre um obstáculo é espalhada em diferentes direções ou absorvida de acordo com a forma, tamanho e tipo de material que constitui o obstáculo. Se esta onda propaga-se em um meio dielétrico com perdas, linear, isotrópico e livre de cargas, então, as equações de Maxwell que descrevem este problema, na forma harmônica temporal, com o termo  $e^{j\omega t}$  subentendido, são

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \tag{A.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \tag{A.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H}, \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\mathbf{E}. \quad (\text{A.4})$$

A aplicação do rotacional em ambos os lados da equação (A.3) resulta em

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\nabla \times \mathbf{H}. \quad (\text{A.5})$$

Utilizando a identidade vetorial

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (\text{A.6})$$

e as equações (A.5) e (A.4) obtém-se

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \omega^2 \mu \varepsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right) \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0. \quad (\text{A.7})$$

De forma análoga encontra-se

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0. \quad (\text{A.8})$$

As equações (A.7) e (A.8) são conhecidas como equações vetoriais homogêneas de Helmholtz, onde  $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)$ .

Os campos elétrico e magnético da onda incidente que se propaga na direção  $x$  são dados por

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_o e^{-j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (\text{A.9})$$

e

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_o e^{-j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (\text{A.10})$$

Os campos eletromagnéticos dentro do objeto espalhador são  $\mathbf{E}_1$  e  $\mathbf{H}_1$ . Por sua vez, os campos eletromagnéticos fora do objeto espalhador são  $\mathbf{E}_2$  e  $\mathbf{H}_2$ ; os quais são obtidos pela superposição dos campos espalhados  $\mathbf{E}_s$  e  $\mathbf{H}_s$ , e os campos incidentes  $\mathbf{E}_i$  e  $\mathbf{H}_i$ , como mostrado a seguir,

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s \quad e \quad \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s. \quad (\text{A.11})$$

## A.2 Solução da equação de Helmholtz vetorial em coordenadas esféricas

Dada uma função escalar  $\psi$  e um vetor constante  $\mathbf{c}$ , é possível definir uma função vetorial  $\mathbf{M}$ , tal que,

$$\mathbf{M} \equiv \nabla \times (\mathbf{c}\psi) = \psi(\nabla \times \mathbf{c}) + (\nabla\psi) \times \mathbf{c} = (\nabla\psi) \times \mathbf{c} = -\mathbf{c} \times \nabla\psi. \quad (\text{A.12})$$

Como essa função vetorial foi definida como o rotacional de um vetor, então,

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = \nabla \cdot (\nabla \times (\mathbf{c}\psi)) = 0. \quad (\text{A.13})$$

Por sua vez, o laplaciano de  $\mathbf{M}$  é dado por

$$\nabla^2 \mathbf{M} = \nabla^2 (\nabla \times (\mathbf{c}\psi)) = \nabla \times (\nabla^2 (\mathbf{c}\psi)) = \nabla \times (\mathbf{c}\nabla^2 \psi). \quad (\text{A.14})$$

Além disso,

$$k^2 \mathbf{M} = k^2 (\nabla \times (\mathbf{c}\psi)) = \nabla \times (\mathbf{c}k^2 \psi). \quad (\text{A.15})$$

Somando as equações (A.14) e (A.15) resulta em

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{M} + k^2 \mathbf{M} &= \nabla \times (\mathbf{c}\nabla^2 \psi) + \nabla \times (\mathbf{c}k^2 \psi) \\ &= \nabla \times (\mathbf{c}\nabla^2 \psi + \mathbf{c}k^2 \psi) = \nabla \times [\mathbf{c}(\nabla^2 \psi + k^2 \psi)]. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Logo, para que  $\mathbf{M}$  seja uma solução da equação vetorial homogênea de Helmholtz, é necessário que

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0. \quad (\text{A.17})$$

Ou seja, se  $\psi$  satisfaz a equação de Helmholtz,  $\mathbf{M}$  também a satisfaz. Além disso, é possível definir ainda uma segunda função vetorial que satisfaz a equação de Helmholtz, a saber,

$$\mathbf{N} \equiv \frac{\nabla \times \mathbf{M}}{k}. \quad (\text{A.18})$$

Pois,

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{N} &= \frac{1}{k} \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{M}) = \frac{1}{k} \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{M}) \\ &= \frac{1}{k} \nabla \times (-k^2 \mathbf{M}) = -k \nabla \times \mathbf{M} = -k^2 \mathbf{N}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

E, portanto,

$$\nabla^2 \mathbf{N} + k^2 \mathbf{N} = 0. \quad (\text{A.20})$$

Se o operador rotacional é aplicado sobre  $\mathbf{N}$ , obtém-se

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{N} &= \nabla \times \left( \frac{1}{k} \nabla \times \mathbf{M} \right) = \frac{1}{k} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{M}) = \frac{1}{k} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{M}) - \frac{1}{k} \nabla \cdot (\nabla \mathbf{M}) \\
&= -\frac{1}{k} \nabla \cdot (\nabla \mathbf{M}) = -\frac{1}{k} \nabla^2 \mathbf{M} = k \mathbf{M}.
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Aplicando o produto escalar de  $\mathbf{c}$  na equação (A.12) obtém-se

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{M} = -\mathbf{c} \cdot (\mathbf{c} \times \nabla \psi) = -\nabla \psi \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{c}) = -\nabla \psi \cdot (\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \tag{A.22}$$

Ou seja,  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{M}$  são perpendiculares. Dessa forma, se  $\mathbf{c} = \mathbf{r}$ , onde  $\mathbf{r}$  é o raio vetor, então,  $\mathbf{M}$  é um vetor que tangencia as superfícies de coordenadas  $|\mathbf{r}| = \text{constante}$ . Portanto, para obter a solução da equação (A.12) em coordenadas esféricas utilizar-se-á  $\mathbf{c} = \mathbf{r}$ . Logo, a solução da equação de Helmholtz vetorial em coordenadas esféricas é dada por

$$\mathbf{M} = \nabla \times (\mathbf{r}\psi). \tag{A.23}$$

### A.3 Solução da equação de Helmholtz escalar em coordenadas esféricas

No sistemas de coordenadas esféricas, em que um ponto P é representado como  $(r, \theta, \phi)$ , conforme ilustrado na Figura A.1, a equação de Helmholtz escalar em (A.17) é expressa por

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + k^2 \psi = 0. \tag{A.24}$$

Para solucionar essa equação pelo método de separação de variáveis em coordenadas esféricas, tem-se de representá-la como um produto de funções das variáveis  $r$ ,  $\theta$  e  $\phi$ , como expresso na equação a seguir,

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi). \tag{A.25}$$

Substituindo (A.25) em (A.24), e multiplicando por  $r^2/(R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi))$ , obtém-se

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + k^2 r^2 = 0. \tag{A.26}$$

#### A.3.1 Parte angular da solução da equação escalar de Helmholtz (hamônicos esféricos)

Multiplicando a equação (A.26) por  $\sin^2 \theta$ , separando o termo que está apenas em função de  $\phi$  e, utilizando a constante de separação  $m^2$ , tem-se

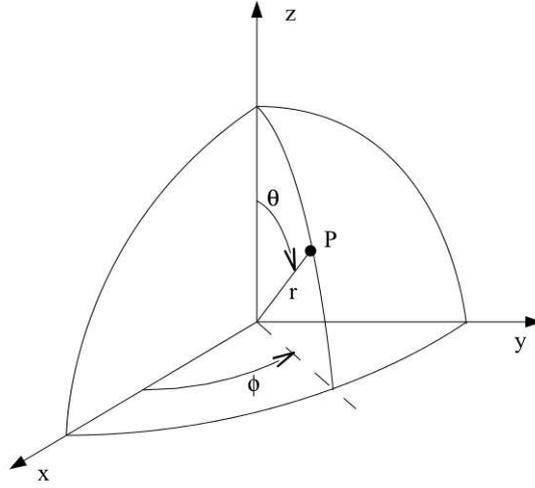


Figura A.1: Representação de um ponto P no sistema de coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} & \frac{\text{sen}^2\theta}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{\text{sen}\theta}{\Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{sen}\theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + \text{sen}^2\theta k^2 r^2 = 0, \\ & \frac{\text{sen}^2\theta}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{\text{sen}\theta}{\Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{sen}\theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \text{sen}^2\theta k^2 r^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = m^2, \\ & \implies \frac{\text{sen}^2\theta}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{\text{sen}\theta}{\Theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{sen}\theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + \text{sen}^2\theta k^2 r^2 - m^2 = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

$$e \frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = -m^2. \quad (\text{A.28})$$

A solução da equação (A.28) é dada por

$$\Phi(\phi) = \frac{1}{\sqrt{L_\phi}} e^{jm\phi}. \quad (\text{A.29})$$

onde  $m$  é um número inteiro, pois,  $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$ . Na equação (A.29),  $\frac{1}{\sqrt{L_\phi}}$  é uma constante de normalização. Para que  $\Phi(\phi)$  forme um conjunto completo de soluções ortonormais da equação (A.28), no intervalo  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ , é necessário que

$$\int_0^{2\pi} \Phi_m^*(\phi) \Phi_{m'}(\phi) d\phi = \frac{2\pi}{L_\phi} \delta_{mm'} = \delta_{mm'} \quad (\text{A.30})$$

Dessa forma, a solução (A.29) pode ser reescrita como

$$\Phi(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{jm\phi}. \quad (\text{A.31})$$

Dividindo a equação (A.27) por  $\text{sen}^2\theta$ , obtém-se

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{sen}\theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) + k^2 r^2 - m^2 \text{sen}^2\theta = 0. \quad (\text{A.32})$$

Separando as variáveis  $r$  e  $\theta$  e, utilizando a constante de separação  $l(l+1)$ , são obtidas as seguintes equações,

$$\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \text{sen}\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\text{sen}^2\theta} \right] \Theta = 0 \quad (\text{A.33})$$

e

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + [k^2 r^2 - l(l+1)] R = 0. \quad (\text{A.34})$$

Fazendo  $x = \cos\theta$ , com  $dx = -\text{sen}\theta d\theta$ , a equação (A.33) torna-se a equação de Legendre generalizada,

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{d\Theta(x)}{dx} \right] + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta(x) = 0. \quad (\text{A.35})$$

Essa equação pode ser resolvida pelo método de Frobenius, realizando a expansão em série de potências de sua solução geral,

$$\Theta(x) = x^\gamma \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k. \quad (\text{A.36})$$

As soluções são obtidas em termos dos polinômios de Legendre associados  $P_l^m(\cos\theta)$  como,  $\Theta(\cos\theta) = \frac{1}{\sqrt{L_\theta}} P_l^m(\cos\theta)$ . A equação de Legendre generalizada (A.35) apresenta soluções polinomiais  $P_l^m$  para  $l$  e  $m$  inteiros, tais que,  $0 \leq m \leq l$ . Essas soluções são obtidas pela fórmula

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x). \quad (\text{A.37})$$

Além disso, as soluções para  $m = 0$  são dadas pela fórmula de Rodrigues, expressa a seguir,

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l. \quad (\text{A.38})$$

Um conjunto completo de soluções ortonormais para a equação (A.27) é formado por  $\Theta(\cos\theta)$ , quando

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{L_\theta}} P_l^{m*}(\cos\theta) \frac{1}{\sqrt{L_\theta}} P_l^m(\cos\theta) d(\cos\theta) = \frac{1}{L_\theta} \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} = \delta_{ll'} \quad (\text{A.39})$$

Assim, a solução da equação (A.27) é dada por

$$\Theta(\cos\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta). \quad (\text{A.40})$$

Os harmônicos esféricos, os quais são a parte angular da solução da equação de Helmholtz, são dados por

$$Y_l^m(\theta, \phi) = \Theta(\cos\theta) \Phi(\phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{jm\phi}. \quad (\text{A.41})$$

onde o termo em  $l = 1$  é o termo de dipolo, o termo em  $l = 2$  é o termo de quadrupolo e, assim por diante [72].

### A.3.2 Parte radial da solução da equação escalar de Helmholtz

Para encontrar a parte radial da solução da equação escalar de Helmholtz, utiliza-se a equação (A.34), a qual é expressa apenas em termos da variável  $r$ . Fazendo as substituições  $x = kr$  e  $y(x) \equiv R(r)$  na equação (A.34), obtém-se

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + [x^2 - l(l+1)]y = 0. \quad (\text{A.42})$$

A substituição de  $y(x) = \frac{u(x)}{\sqrt{x}}$  na equação (A.42) resulta em

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + \left[ 1 - \frac{(l+1/2)^2}{x^2} \right] u = 0. \quad (\text{A.43})$$

Essa é a equação de Bessel de ordem  $(l+1/2)$ . As soluções dessa equação são as funções de Bessel  $J_{l+1/2}(x)$  e de Neumann  $N_{l+1/2}(x)$ , multiplicadas por  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ . Essas funções dão origem às funções esféricas de Bessel e de Neumann, respectivamente,  $j_l(x)$  e  $n_l(x)$ ,

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x) \quad (\text{A.44})$$

e

$$n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+1/2}(x). \quad (\text{A.45})$$

Representado ambas as funções por  $z_l(x)$ , tem-se que a parte radial da solução da equação de Helmholtz é  $R(r) = z_l(kr)$ .

A solução geral da equação escalar de Helmholtz é

$$F(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} z_l(kr) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (\text{A.46})$$

onde os coeficientes  $a_{lm}$  são determinados pelas condições de contorno.

Vê-se, portanto, que a solução da equação de Helmholtz escalar em coordenadas esféricas pode ser representada como a combinação linear de soluções pares e ímpares, respectivamente, nas formas

$$\psi_{eml} = \cos m\phi P_l^m(\cos\theta) z_l(kr) \quad (\text{A.47})$$

e

$$\psi_{oml} = \sin m\phi P_l^m(\cos\theta) z_l(kr). \quad (\text{A.48})$$

Dessa forma, as soluções da equação vetorial de Helmholtz (A.23) são dadas por

$$\mathbf{M}_{eml} = \nabla \times (\mathbf{r}\psi_{eml}), \quad (\text{A.49})$$

$$\mathbf{M}_{oml} = \nabla \times (\mathbf{r}\psi_{oml}), \quad (\text{A.50})$$

$$\mathbf{N}_{eml} = \frac{\nabla \times M_{eml}}{k}, \quad (\text{A.51})$$

$$\mathbf{N}_{oml} = \frac{\nabla \times M_{oml}}{k}. \quad (\text{A.52})$$

Substituindo (A.47) e (A.48) em (A.49), (A.50), (A.51) e (A.52), resulta nas equações

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{eml} &= \frac{-m}{\sin\theta} \cos m\phi P_l^m(\cos\theta) z_l(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &\quad - \cos m\phi \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} z_l(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi, \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{oml} &= \frac{m}{\sin\theta} \sin m\phi P_l^m(\cos\theta) z_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &\quad - \sin m\phi \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} z_n(\rho) \hat{\mathbf{e}}_\phi, \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_{eml} &= \frac{z_n(\rho)}{\rho} \cos m\phi n(n+1) P_n^m(\cos\theta) \hat{\mathbf{e}}_r \\ &\quad + \cos m\phi \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ &\quad - m \sin m\phi \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\sin\theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{\mathbf{e}}_\phi, \end{aligned} \quad (\text{A.55})$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_{omn} &= \frac{z_n(\rho)}{\rho} \text{sen}m\phi n(n+1)P_n^m(\cos\theta)\hat{\mathbf{e}}_r \\
&+ \text{sen}m\phi \frac{dP_n^m(\cos\theta)}{d\theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{\mathbf{e}}_\theta \\
&- m \cos m\phi \frac{P_n^m(\cos\theta)}{\text{sen}\theta} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho z_n(\rho)] \hat{\mathbf{e}}_\phi.
\end{aligned} \tag{A.56}$$

## A.4 Expansão de uma onda plana em harmônicos vetoriais esféricos

Uma onda plana incidente polarizada na direção  $x$  é representada em coordenadas esféricas como

$$\mathbf{E}_i = E_0 e^{jkr \cos\theta} \hat{\mathbf{e}}_x, \tag{A.57}$$

onde

$$\hat{\mathbf{e}}_x = \text{sen}\theta \cos\phi \hat{\mathbf{e}}_r + \cos\theta \cos\phi \hat{\mathbf{e}}_\theta - \text{sen}\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi. \tag{A.58}$$

A equação (A.57) expandida em harmônicos esféricos vetoriais pode ser reescrita como

$$\mathbf{E}_i = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} (A_{eml} \mathbf{M}_{eml} + A_{oml} \mathbf{M}_{oml} + B_{eml} \mathbf{N}_{eml} + B_{oml} \mathbf{N}_{oml}) \tag{A.59}$$

Devido à ortogonalidade dos termos  $\text{sen}(m\phi)$  e  $\cos(m\phi)$  têm-se

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{M}_{em'l'} \cdot \mathbf{M}_{oml} \text{sen}\theta d\theta d\phi = 0, \tag{A.60}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{N}_{em'l'} \cdot \mathbf{N}_{oml} \text{sen}\theta d\theta d\phi = 0, \tag{A.61}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{M}_{em'l'} \cdot \mathbf{N}_{eml} \text{sen}\theta d\theta d\phi = 0, \tag{A.62}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{M}_{om'l'} \cdot \mathbf{N}_{oml} \text{sen}\theta d\theta d\phi = 0, \tag{A.63}$$

para qualquer valor de  $l$ ,  $l'$ ,  $m$  e  $m'$ .

Por outro lado, com base nas propriedades de ortogonalidade das funções de Legendre associadas

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{M}_{em'l'} \cdot \mathbf{N}_{oml} \text{sen}\theta d\theta d\phi = 0, \tag{A.64}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{M}_{om'l'} \cdot \mathbf{N}_{eml} \text{sen}\theta d\theta d\phi = 0, \quad (\text{A.65})$$

para qualquer valor de  $l$ ,  $l'$ ,  $m$  e  $m'$ . Além disso,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{M}_{eml'} \cdot \mathbf{M}_{eml} \text{sen}\theta d\theta d\phi = 0, \quad (\text{A.66})$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{M}_{oml'} \cdot \mathbf{M}_{oml} \text{sen}\theta d\theta d\phi = 0, \quad (\text{A.67})$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{N}_{eml'} \cdot \mathbf{N}_{eml} \text{sen}\theta d\theta d\phi = 0, \quad (\text{A.68})$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{N}_{oml'} \cdot \mathbf{N}_{oml} \text{sen}\theta d\theta d\phi = 0, \quad (\text{A.69})$$

para  $m \neq 0$  e  $l \neq l'$ .

Os coeficientes da expansão em harmônicos esféricos vetoriais da equação (A.59) são dados por

$$A_{eml} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{eml} \text{sen}\theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{M}_{eml}|^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi}, \quad (\text{A.70})$$

$$A_{oml} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{M}_{oml} \text{sen}\theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{M}_{oml}|^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi}, \quad (\text{A.71})$$

$$B_{eml} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{N}_{eml} \text{sen}\theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{N}_{eml}|^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi} \quad (\text{A.72})$$

e

$$B_{oml} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{N}_{oml} \text{sen}\theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{N}_{oml}|^2 \text{sen}\theta d\theta d\phi}. \quad (\text{A.73})$$

Assim,  $A_{eml} = 0$  e  $B_{oml} = 0$ , para qualquer valor de  $m$  e  $l$ . Além disso,  $A_{oml} = 0$  e  $B_{eml} = 0$  quando  $m \neq 1$ .

Portanto,  $\mathbf{E}_i$  pode ser expandido em harmônicos esféricos vetoriais como,

$$\mathbf{E}_i = \sum_{l=1}^{\infty} (A_{o1l} \mathbf{M}_{o1l}^{(1)} + B_{e1l} \mathbf{N}_{e1l}^{(1)}), \quad (\text{A.74})$$

onde o sobrescrito (1) indica que a parte radial da solução é dada em termos da função de Bessel esférica de primeira espécie  $j_l$ , em vez da função de Hankel esférica  $h_l$ , a qual é representada pelo sobrescrito (3).

Calculando as integrais nas equações (A.71) e (A.72), obtém-se

$$A_{o1l} = j^l E_0 \frac{2l+1}{l(l+1)}. \quad (\text{A.75})$$

$$B_{e1l} = -j E_0 j^l \frac{2l+1}{l(l+1)} \quad (\text{A.76})$$

Finalmente, a expansão da onda plana em hamônicos esféricos vetoriais é dada por

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 \sum_{l=1}^{\infty} j^l \frac{2l+1}{l(l+1)} (\mathbf{M}_{o1l}^{(1)} - i\mathbf{N}_{e1l}^{(1)}). \quad (\text{A.77})$$

Utilizando a equação (A.3), obtém-se

$$\mathbf{H}_i = \frac{k}{\omega\mu} \mathbf{E}_0 \sum_{l=1}^{\infty} j^l \frac{2l+1}{l(l+1)} (\mathbf{M}_{e1l}^{(1)} + i\mathbf{N}_{o1l}^{(1)}) \quad (\text{A.78})$$

## A.5 Campos internos e espalhados por uma esfera homogênea e isotrópica

Considerando que uma onda plana polarizada na direção  $x$  incide sobre uma esfera homogênea e isotrópica de raio  $R$ , conforme ilustrado na Figura A.2. Essa onda plana incidente pode ser expandida em harmônicos esféricos vetoriais consoante realizado nas equações (A.77) e (A.78). De forma análoga, é possível expandir os campos espalhados  $(\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s)$  e o campo dentro da esfera  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$  em harmônicos esféricos vetoriais. Assim, a expansão do campo  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1)$  é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_1 &= \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{E}_l (c_l \mathbf{M}_{o1l}^{(1)} - j d_l \mathbf{N}_{e1l}^{(1)}), \\ \mathbf{H}_1 &= \frac{-k_1}{\omega\mu_1} \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{E}_l (d_l \mathbf{M}_{e1l}^{(1)} - j c_l \mathbf{N}_{o1l}^{(1)}), \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

onde

$$\mathbf{E}_l = j^l E_0 (2l+1)/(l(l+1)), \quad (\text{A.80})$$

e  $\mu_1$  é a permeabilidade da esfera. Nota-se que essa expansão é realizada em termos de funções de Bessel esféricas de primeira espécie  $j_l(k_1 r)$ , essa escolha está baseada no fato de que, o perfil dessas funções é mais apropriado do que o das funções de Hankel esféricas, pois, ao contrário destas, aquelas apresentam valores finitos na origem ( $r = 0$ ). Por outro lado, dado que a forma assintótica das funções de Hankel esféricas é dada pelas equações

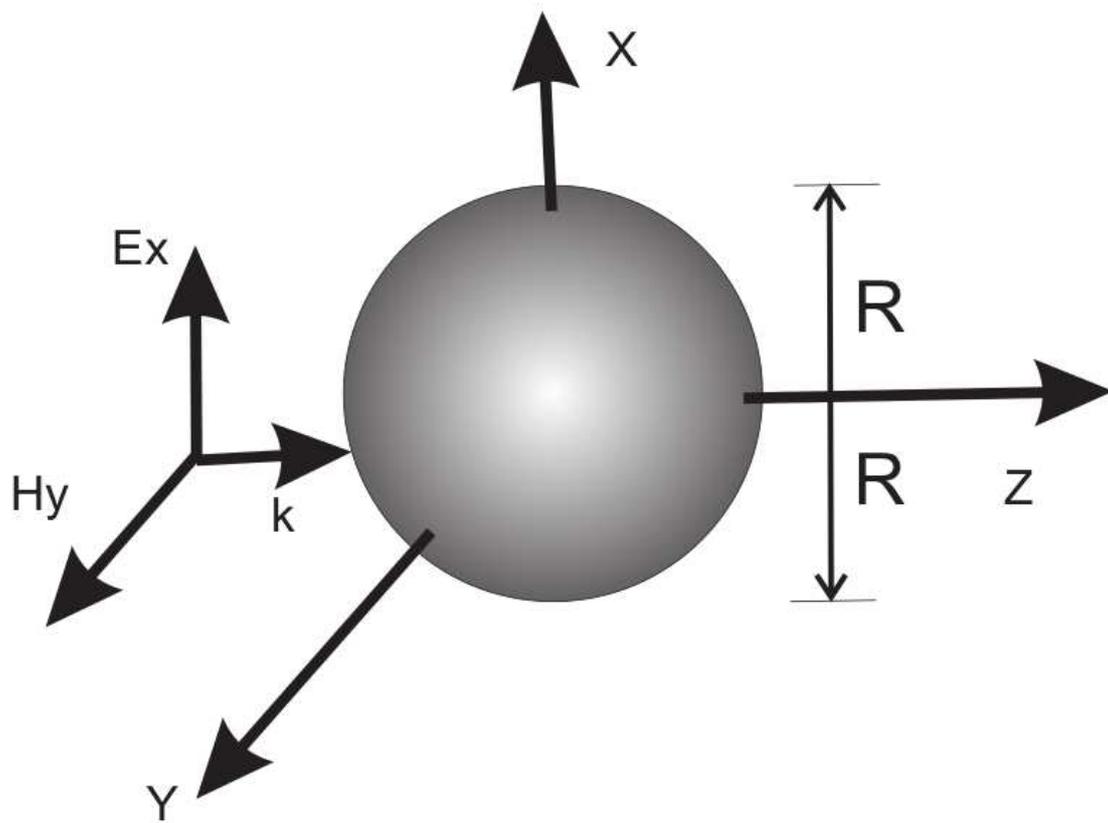


Figura A.2: Onda plana polarizada na direção  $x$  incidindo sobre uma esfera homogênea isotrópica de raio  $R$

$$h_l^{(1)}(kr) \sim \frac{(-j)^l e^{ikr}}{jkr}, \quad (\text{A.81})$$

$$h_l^{(2)}(kr) \sim -\frac{(j)^l e^{-jkr}}{jkr}, \quad kr \gg l^2. \quad (\text{A.82})$$

As quais representam, respectivamente, ondas esféricas em direção ao infinito e em direção à origem. Assim, podemos expressar o campo espalhado apenas em termos de funções de Hankel, na região externa à esfera. Dessa forma, expandindo os campos espalhados em harmônicos esféricos vetoriais, obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s &= \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{E}_l (j b_l \mathbf{N}_{o1l}^{(3)} - a_l \mathbf{M}_{o1l}^{(3)}), \\ \mathbf{H}_s &= \frac{-k}{\omega \mu} \sum_{l=1}^{\infty} \mathbf{E}_l (j a_l \mathbf{N}_{o1l}^{(3)} + b_l \mathbf{M}_{e1l}^{(3)}). \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$

### A.5.1 Cálculo dos coeficientes de espalhamento

Como os campos totais fora da esfera são calculados pela soma dos campos incidentes com os campos espalhados, as condições de contorno na superfície esférica entre a esfera e o meio circunvizinho são dadas por

$$(\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s - \mathbf{E}_1) \times \hat{e}_r = (\mathbf{H}_i + \mathbf{H}_s - \mathbf{H}_1) \times \hat{e}_r = 0. \quad (\text{A.84})$$

A partir dessas condições de contorno, obtém quatro equações, a saber

$$\begin{aligned} E_{i\theta} + E_{s\theta} &= E_{1\theta}, \\ E_{i\phi} + E_{s\phi} &= E_{1\phi}, \\ H_{i\theta} + H_{s\theta} &= H_{1\theta}, \\ H_{i\phi} + H_{s\phi} &= H_{1\phi}, \quad r = R. \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

Substituindo as equações, (A.53), (A.54), (A.55) e (A.56), nas equações, (A.78), (A.5), (A.84) e (A.83), obtém-se o sistema de equações lineares a seguir,

$$\begin{aligned} j_n(mx)c_n + h_n^{(1)}a_n &= j_n(x), \\ \mu[mxj_n(mx)]'c_n + \mu_1[xh_n^{(1)}(x)]'a_n &= \mu_1[xj_n(x)]', \\ \mu mj_n(mx)d_n + \mu_1 h_n^{(1)}(x)b_n &= \mu_1 j_n(x), \\ [mxj_n(mx)]'d_n + m[xh_n^{(1)}(x)]'b_n &= m[xj_n(x)]' \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

onde

$$x = ka = \frac{2\pi Na}{\lambda}, \quad m = \frac{k_1}{k} = \frac{N_1}{N}. \quad (\text{A.87})$$

em que  $x$  é o parâmetro de tamanho e  $m$  é o índice de refração relativo. Os índices de refração do meio e da esfera dielétrica são, respectivamente,  $N$  e  $N_1$ . As permeabilidades magnéticas do meio e da esfera são, respectivamente,  $\mu$  e  $\mu_1$ . Nesse trabalho, serão considerados meios não magnéticos, tal que,  $\mu = \mu_1$ .

A solução do sistema de equações (A.86) resulta nos coeficientes de espalhamento,  $b_l$  e  $a_l$ , e nos coeficientes dos campos internos da esfera,  $c_l$  e  $d_l$ , mostrados a seguir,

$$\begin{aligned} b_l &= \frac{\mu m^2 j_l(mx) [x j_l(x)]' - \mu_1 j_l(x) [mx j_l(mx)]'}{\mu m^2 j_l(mx) [x h_l^{(1)}(x)]' - \mu_1 h_l^{(1)}(x) [mx j_l(mx)]'}, \\ a_l &= \frac{\mu_1 j_l(mx) [x j_l(x)]' - \mu j_l(x) [mx j_l(mx)]'}{\mu_1 j_l(mx) [x h_l^{(1)}(x)]' - \mu h_l^{(1)}(x) [mx j_l(mx)]'}, \\ c_l &= \frac{\mu_1 j_l(x) [x h_l^{(1)}(x)]' - \mu_1 h_l^{(1)}(x) [x j_l(x)]'}{\mu_1 j_l(mx) [x h_l^{(1)}(x)]' - \mu h_l^{(1)}(x) [mx j_l(mx)]'}, \\ d_l &= \frac{\mu_1 m j_l(x) [x h_l^{(1)}(x)]' - \mu_1 m h_l^{(1)}(x) [x j_l(x)]'}{\mu m^2 j_l(mx) [x h_l^{(1)}(x)]' - \mu_1 h_l^{(1)}(x) [mx j_l(mx)]'}. \end{aligned} \quad (\text{A.88})$$

Esses coeficientes podem ser simplificados como mostrado a seguir

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{m\psi_n(mx)\psi_n'(x) - \psi_n(x)\psi_n'(mx)}{m\psi_n(mx)\xi_n'(x) - \xi_n(x)\psi_n'(mx)}, \\ b_n &= \frac{\psi_n(mx)\psi_n'(x) - m\psi_n(x)\psi_n'(mx)}{\psi_n(mx)\xi_n'(x) - m\xi_n(x)\psi_n'(mx)}, \\ c_n &= \frac{m\psi_n(x)\xi_n'(x) - m\xi_n(x)\psi_n'(x)}{\psi_n(mx)\xi_n'(x) - m\xi_n(x)\psi_n'(mx)}, \\ d_n &= \frac{m\psi_n(x)\xi_n'(x) - m\xi_n(x)\psi_n'(x)}{m\psi_n(mx)\xi_n'(x) - \xi_n(x)\psi_n'(mx)}. \end{aligned} \quad (\text{A.89})$$

Onde  $\psi_\rho$  e  $\xi_\rho$  são as funções de Riccati-Bessel, dadas por

$$\psi_\rho = \rho j_n(\rho), \quad \xi_n(\rho) = \rho h_n^{(1)}(\rho). \quad (\text{A.90})$$

# Apêndice B

## Meio de transformação

A seguir, serão apresentados alguns conceitos preliminares e chegaremos a expressão do meio de transformação que pode ser utilizado para obter invisibilidade.

### B.1 Divergente e rotacional em coordenadas arbitrárias

Em coordenadas arbitrárias  $x^i$ , o divergente  $\nabla \cdot \vec{V}$  do vetor  $\vec{V}$  é dado por:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} V^i), \quad (\text{B.1})$$

e o rotacional por:

$$\nabla \times \vec{V} = \epsilon^{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} V_k, \quad (\text{B.2})$$

onde foi utilizada a convenção de Einstein para somas;  $g$  é o determinante do tensor métrico  $g_{ij}$ ;  $V^i$  e  $V_k$  são as componentes, respectivamente, contravariante e covariante, do vetor  $\vec{V}$  e;  $\epsilon^{ijk}$  é o símbolo de Levi-Civita.

### B.2 O tensor métrico

O tensor métrico  $g_{ij}$  é utilizado para descrever a geometria do espaço. A partir dele podemos calcular o quadrado do elemento de comprimento  $ds^2$  do espaço, o qual é obtido através da expressão:

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j. \quad (\text{B.3})$$

A mudança de coordenadas do tensor métrico  $g_{i'j'}$  no sistema de coordenadas  $x^{i'}$  para o sistema de coordenadas  $x^i$  é realizada através da lei de transformação expressa na equação a seguir:

$$g_{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{i'j'}. \quad (\text{B.4})$$

O tensor métrico inverso  $g^{ij}$  é dado por:

$$g^{ij} g_{jk} = \delta_k^i. \quad (\text{B.5})$$

O tensor métrico é útil quando precisamos obter as componentes contravariantes,  $V^i$ , a partir das componentes covariantes,  $V_k$ , de um vetor  $\vec{V}$ , o que pode ser feito de acordo com a equação mostrada a seguir:

$$V^i = g^{ij} V_j. \quad (\text{B.6})$$

### B.3 Componentes contravariantes e covariantes de um vetor

Em coordenadas arbitrárias, um vetor  $\vec{V}$  pode ser representado em duas bases distintas: a base contravariante  $\vec{e}^k$ , formada por vetores normais às superfícies coordenadas e, a base covariante  $\vec{e}_i$ , formada por vetores tangentes às linhas coordenadas. O vetor  $\vec{V}$  pode ser expresso nessas bases, na forma seguinte:

$$\vec{V} = V_k \vec{e}^k = V^i \vec{e}_i. \quad (\text{B.7})$$

As componentes  $V_k$  e  $V^i$  são, respectivamente, as componentes covariantes e contravariantes do vetor  $\vec{V}$ .

### B.4 Tensor de Levi-Civita e símbolo de permutação

O tensor de Levi-Civita é dado pela seguinte equação:

$$\epsilon_{ijk} = \pm \frac{1}{\sqrt{g}} [i, j, k], \quad (\text{B.8})$$

onde  $[i, j, k]$  é o símbolo de permutação, o qual é dado por:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } (i, j, k) \text{ é } (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ ou } (3, 1, 2) \\ -1 & \text{se } (i, j, k) \text{ é } (3, 2, 1), (1, 3, 2) \text{ ou } (2, 1, 3) \\ 0 & i = j, j = k \text{ ou } k = i \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

## B.5 Equações de Maxwell para o vácuo em coordenadas arbitrárias

Dessa forma, as equações (2.9), que representam o vácuo com fontes, podem ser reescritas em coordenadas arbitrárias em um sistema de coordenadas cujo tensor métrico é  $g_{ij}$ , utilizando as equações (B.1), (B.2), (B.6) e (B.8) [87]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}g^{ij}E_j) &= \frac{\sqrt{g}\rho}{\varepsilon_0} & (B.10) \\ \frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}g^{ij}H_j) &= 0 \\ [ijk]\frac{\partial}{\partial x^j}E_k &= -\mu_0\frac{\partial(\pm\sqrt{g}g^{ij}H_j)}{\partial t} \\ [ijk]\frac{\partial}{\partial x^j}H_k &= \varepsilon_0\frac{\partial(\pm\sqrt{g}g^{ij}E_j)}{\partial t} \pm \sqrt{g}j^i. \end{aligned}$$

## B.6 Equações de Maxwell para um meio dielétrico em coordenadas arbitrárias

A seu turno, um meio dielétrico é descrito pelas seguintes equações de Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \rho & (B.11) \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

onde  $\vec{H}$  e  $\vec{D}$  são, respectivamente, os vetores intensidade de campo magnético e deslocamento elétrico.

As relações constitutivas são dada pelas equações a seguir:

$$\begin{aligned} D^i &= \varepsilon_0\varepsilon^{ij}E_j, & (B.12) \\ B^i &= \mu_0\mu^{ij}H_j. \end{aligned}$$

Para um meio dielétrico representado em um sistema de coordenadas cujo tensor métrico é  $\gamma_{ij}$ , o tensor permeabilidade que apresenta significado físico é o tensor misto  $\varepsilon_k^i$ , o qual é calculado pela expressão [87]:

$$\varepsilon_k^i = \varepsilon^{ij} \gamma_{jk}. \quad (\text{B.13})$$

Se as equações (B.11) forem reescritas em um sistema de coordenadas caracterizado pelo tensor métrico  $\gamma_{ij}$  e utilizarmos as equações (B.5), (B.12) e (B.13), teremos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{\gamma} \varepsilon_0 \varepsilon_k^i \gamma^{jk} E_j) &= \sqrt{\gamma} \rho \\ \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{\gamma} \mu_0 \mu_k^i \gamma^{jk} H_j) &= 0 \\ [ijk] \frac{\partial}{\partial x^j} E_k &= - \frac{\partial (\sqrt{\gamma} \mu_0 \mu_k^i \gamma^{jk} H_j)}{\partial t} \\ [ijk] \frac{\partial}{\partial x^j} H_k &= \frac{\partial (\sqrt{\gamma} \varepsilon_0 \varepsilon_k^i \gamma^{jk} E_j)}{\partial t} + \sqrt{\gamma} j^i. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

## B.7 Relação de equivalência entre métrica e parâmetros eletromagnéticos

Finalmente, reescalando a densidade de carga e a densidade de corrente, multiplicando por um fator  $\sqrt{g}/\sqrt{\gamma}$ , as equações (B.14) transformam-se em equações idênticas às apresentadas em (B.10), se escolhermos os parâmetros eletromagnéticos dados pela equação a seguir:

$$\varepsilon_k^i = \mu_k^i = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}} g^{ij} \gamma_{jk}. \quad (\text{B.15})$$

O meio caracterizado pela métrica  $\gamma_{jk}$ , com parâmetros eletromagnéticos  $\varepsilon_k^i$  e  $\mu_k^i$  expressos na forma da equação B.15, o qual possui a mesma solução do vácuo com geometria dada pela métrica  $g^{ij}$ , é chamado de meio de transformação.

A fim de simplificar os cálculos, vamos considerar que o espaço virtual e o espaço físico estão em coordenadas esféricas, como mostrado, respectivamente, nas figuras B.1 e B.2. Além disso, vamos considerar que  $\theta' = \theta$  e  $\phi' = \phi$ . Portanto, o espaço virtual apresenta o tensor métrico  $(g_{i'j'}) = \text{diag}(1, f(r)^2, f(r)^2 \text{sen}^2 \theta)$  no sistema de coordenadas  $(x^1, x^2, x^3) = (f(r), \theta, \phi)$  e, o espaço físico apresenta o tensor métrico  $(\gamma_{ij}) = \text{diag}(1, r^2, r^2 \text{sen}^2 \theta)$  no sistema de coordenadas  $(x^1, x^2, x^3) = (r, \theta, \phi)$ .

Para obtermos o tensor métrico  $g_{i'j'}$  no sistema de coordenadas  $(r, \theta, \phi)$ , devemos utilizar a lei de transformação da equação (B.4). Dessa forma, podemos mostrar que:

$$(g_{ij}) = \text{diag}(f'(r)^2, f(r)^2, f(r)^2 \text{sen}^2(\theta)). \quad (\text{B.16})$$

De (B.5), temos:

$$(g^{ij}) = \text{diag}\left(\frac{1}{f'(r)^2}, \frac{1}{f(r)^2}, \frac{1}{f(r)^2 \text{sen}^2(\theta)}\right). \quad (\text{B.17})$$

Como  $g$  e  $\gamma$  são, respectivamente, os determinantes de  $g_{ij}$  e  $\gamma_{ij}$ , então, podemos encontrar  $\sqrt{g} = f(r)^2 f'(r) \text{sen}\theta$  e  $\sqrt{\gamma} = r^2 \text{sen}\theta$ . Substituindo esses valores,  $(\gamma_{ij}) = \text{diag}(1, r^2, r^2 \text{sen}^2\theta)$  e a equação (B.17) em (B.15), nós obtemos a expressão para o tensor permissividade, o qual é dada por:

$$\bar{\epsilon} = \bar{\mu} = \text{diag}\left(\frac{f(r)^2}{r^2 f'(r)}, f'(r), f'(r)\right). \quad (\text{B.18})$$

Logo, o meio de transformação cujos parâmetros constitutivos são dados pela equação (B.18), produz geometrias artificiais para a luz. Uma escolha adequada dessa geometria pode ser utilizada para produzir o efeito de uma cobertura de invisibilidade.

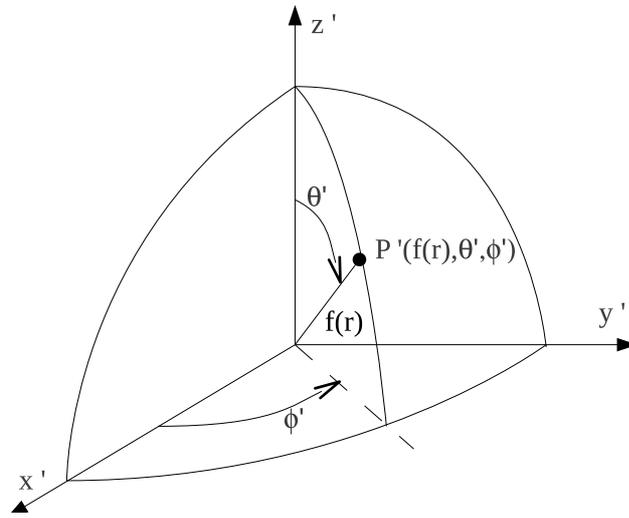


Figura B.1: Espaço virtual em coordenadas esféricas.

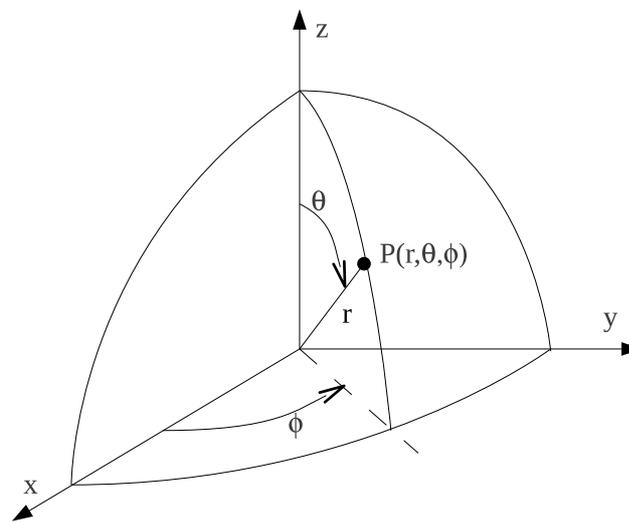


Figura B.2: Espaço físico em coordenadas esféricas.

# Apêndice C

## Método da matriz de transição

Neste capítulo é descrito um algoritmo recursivo para o cálculo dos campos totais e espalhados, assim como, da seção reta radar (*radar cross section*-RCS) de esferas multicamadas. A variação dos parâmetros constitutivos na direção radial foi realizada através da estratificação da esfera em camadas de diferentes permissividades e condutividades elétricas.

O estudo do espalhamento por esferas estratificadas em camadas múltiplas é importante em vários campos de investigação, tais como: astrofísica, engenharia química, ecologia, biologia e física atmosférica [88]. Nosso trabalho está focado na utilização dessas estruturas no desenvolvimento de coberturas de invisibilidade [4, 89] que reduzam o espalhamento eletromagnético de objetos atingidas por ondas eletromagnéticas incidentes, porém, sem aumentar significativamente a absorção.

Há atualmente uma grande disponibilidade de métodos os quais podem ser usados para solucionar o problema de espalhamento eletromagnético por partículas esféricas estratificadas em múltiplas camadas [88], tais como: técnica de multipolo generalizado (GMT), matriz-T (TMM), método das diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD), método dos momentos (MoM) e aproximação por dipolo discreta (DDA). Contudo, a abordagem mais comum é a solução analítica desse problema baseada na teoria de Mie [90], como realizado por Aden e Kerker [91] para duas esferas concêntrica homogêneas. Ao longo dos anos, vários algoritmos recursivos foram desenvolvidos para solucionar o problema do espalhamento por essas estruturas [1, 59, 92, 93, 94, 95, 96, 78, 97, 98, 99, 100].

Além disso, diversos códigos que podem ser usados na análise desses problemas estão disponíveis (<http://www.scattport.org>). Todavia, a maioria desses códigos leva em conta somente materiais não-magnéticos depositados sobre um núcleo dielétrico. Como nós precisamos analisar um problema em que camadas com propriedades magnéticas cobrem um núcleo condutor eletricamente perfeito (PEC), nós desenvolvemos um código em FORTRAN 90 para esse caso específico com um algoritmo baseado no método da matriz de transição (T-matrix).

## C.1 Método da matriz de transição

Nós desenvolvemos um código em FORTRAN 90 para analisar o espalhamento eletromagnético por um objeto esférico estratificado em múltiplas camadas através de um algoritmo baseado no método da matriz de transição (T-matrix). Este objeto consiste de um núcleo de material dielétrico ou condutor eletricamente perfeito (PEC) coberto por um número de  $L$  camadas de materiais em que a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética devem ser consideradas. O esquema utilizado na modelagem computacional da estrutura é mostrado na figura C.1. Os coeficientes de espalhamento para o  $n$ -ésimo harmônico esférico e a camada  $l$  ( $l = 1$  é a camada referente ao núcleo),  $a_n^l$  e  $d_n^l$ , podem ser obtidos em termos dos coeficientes de espalhamento,  $a_n^{l+1}$  e  $d_n^{l+1}$ , como segue [99]:

$$\begin{bmatrix} a_n^l & d_n^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}|_n^l & t_{12}|_n^l \\ t_{21}|_n^l & t_{22}|_n^l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n^{l+1} & d_n^{l+1} \end{bmatrix} = T_n^l \begin{bmatrix} a_n^{l+1} & d_n^{l+1} \end{bmatrix}. \quad (\text{C.1})$$

Onde

$$\begin{aligned} t_{11}|_n^l &= \left( \psi_n'^l(\nu_l) \zeta_n^{l+1}(\rho_l) - \psi_n^l(\nu_l) \zeta_n'^{l+1}(\rho_l) \frac{y_l}{y_{l+1}} \right) / i \\ t_{12}|_n^l &= \left( \psi_n^l(\nu_l) \psi_n'^{l+1}(\rho_l) \frac{y_l}{y_{l+1}} - \psi_n'^l(\nu_l) \psi_n^{l+1}(\rho_l) \right) / i \\ t_{21}|_n^l &= \left( \zeta_n'^l(\nu_l) \zeta_n^{l+1}(\rho_l) - \zeta_n^l(\nu_l) \zeta_n'^{l+1}(\rho_l) \right) \frac{y_l}{y_{l+1}} / i \\ t_{22}|_n^l &= \left( \zeta_n^l(\nu_l) \psi_n'^{l+1}(\rho_l) \frac{y_l}{y_{l+1}} - \zeta_n'^l(\nu_l) \psi_n^{l+1}(\rho_l) \right) / i, \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

onde  $x_l$ ,  $m_l$  e  $y_l$  são, respectivamente, o parâmetro de tamanho, o índice de refração e a admitância da camada  $l$ ;  $i$  é a unidade imaginária;  $\psi$  e  $\zeta$  são as funções de Riccati-Bessel que apresentam os argumentos  $\nu_l = m_l x_{l-1}$  e  $\rho_l = m_{l+1} x_{l+1}$ . Além disso, nós podemos definir a matriz  $Q_n^l$  dada por

$$\begin{aligned} Q_n^l \begin{bmatrix} a_n^l \\ d_n^l \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} q_{11}|_n^l & q_{12}|_n^l \\ q_{21}|_n^l & q_{22}|_n^l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n^l \\ d_n^l \end{bmatrix} = \\ &= T_n^l T_n^{l+1} \dots T_n^{L-1} T_n^L \begin{bmatrix} a_n^l \\ d_n^l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n^{L+1} \\ d_n^{L+1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

O coeficiente  $a_n^1 = 0$  é igual a zero, uma vez que não há campo espalhado no interior do núcleo. Visto que o campo é nulo dentro de um núcleo perfeitamente condutor, neste caso particular, todos os coeficientes são iguais a zero ( $a_n^1 = d_n^1 = 0$ ). Substituindo os valores de  $a_n^2$  e  $d_n^2$  obtidos a partir da equação (C.3) com  $l = 2$  na equação (C.1) com  $l = 1$ , nós obtemos as equações para os coeficientes espalhados:

$$a_n^{L+1} = \frac{t_{11}|_n^1 q_{12}|_n^2 + t_{12}|_n^1 q_{22}|_n^2}{t_{11}|_n^1 q_{11}|_n^2 + t_{12}|_n^1 q_{21}|_n^2} \quad (\text{C.4})$$

e

$$d_n^{L+1} = 1. \quad (\text{C.5})$$

Os coeficientes de espalhamento para as camadas internas podem ser calculadas por (C.3). Para um núcleo dielétrico temos que

$$a_n^{L+1} = -\frac{q_{12}|_n^L}{q_{12}|_n^L}. \quad (\text{C.6})$$

Nós temos a condição  $y_1/y_2 \rightarrow \infty$  para o núcleo de PEC ( $l = 1$ ). Assim, de (C.3) é possível mostrar que

$$t_{11}|_n^l = \zeta_n^2('m_2 x_1) \quad (\text{C.7})$$

e

$$t_{12}|_n^l = -\psi_n^2('m_2 x_2). \quad (\text{C.8})$$

Os coeficientes  $b_n^l$  e  $c_n^l$  podem ser calculados de uma forma similar.

A partir dos coeficientes de espalhamento  $a_n^{L+1}$  and  $b_n^{L+1}$ , é possível calcular as amplitudes de espalhamento

$$S_1(\theta) = \sum_{n=1}^{N_{max}} \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n^{L+1} \pi_n(\theta) + b_n^{L+1} \tau_n(\theta)) \quad (\text{C.9})$$

e

$$S_2(\theta) = \sum_{n=1}^{N_{max}} \frac{2n+1}{n(n+1)} (a_n^{L+1} \tau_n(\theta) + b_n^{L+1} \pi_n(\theta)). \quad (\text{C.10})$$

Aqui

$$\pi_n(\theta) = \frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} \quad (\text{C.11})$$

e

$$\tau_n(\theta) = \frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta}, \quad (\text{C.12})$$

onde  $P_n^1(\cos\theta)$  é a função de Legendre associada de primeira ordem. A seção reta radar bi-estática é

$$\sigma(\phi, \theta) = \frac{\lambda^2}{\pi} [\sin^2(\phi) S_1(\theta)^2 + \cos^2(\phi) S_2(\theta)^2]. \quad (\text{C.13})$$

A seção reta geométrica é

$$\sigma_g = \pi r_1^2 \quad (\text{C.14})$$

onde  $r_1$  é o raio do núcleo e a seção reta de espalhamento total é

$$\sigma_{sca} = \frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{N_{max}} (2n+1)(|a_n^{L+1}|^2 + |b_n^{L+1}|^2) \quad (\text{C.15})$$

O valor da seção reta radar é expresso em dBsm e seção reta radar normalizada,  $\sigma(\phi, \theta)/\sigma_g$ , em dB.

Por sua vez, os campos internos à  $l$ -ésima camada ( $l = 1, 2, \dots, L$ ) são dados por

$$\mathbf{E}^l = \sum_{n=1}^{\infty} E_n [c_n^l \mathbf{M}_{o1n}^{(1)} - id_n^l \mathbf{N}_{e1n}^{(1)} + a_n^l \mathbf{M}_{o1n}^{(3)} - ib_n^l \mathbf{N}_{e1n}^{(1)}] \quad (\text{C.16})$$

e

$$\mathbf{H}^{(i)} = -\frac{k_l}{\omega \mu_l} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}_n [d_n^l \mathbf{M}_{e1n}^{(1)} + ic_n^l \mathbf{N}_{o1n}^{(1)} + b_n^l \mathbf{M}_{e1n}^{(3)} + ia_n^l \mathbf{N}_{o1n}^{(1)}] \quad (\text{C.17})$$

onde  $k_l = k_0 m_l$  ( $k_0 = 2\pi/\lambda$ ), e  $\mathbf{M}_{e1n}$ ,  $\mathbf{M}_{o1n}$ ,  $\mathbf{N}_{e1n}$  e  $\mathbf{N}_{o1n}$  são os harmônicos esféricos vetoriais.

## C.2 Transformada inversa de Fourier

A partir dos campos obtidos no domínio da frequência através do método da matriz de transição, nós podemos obter os campos no domínio do tempo, utilizando a transformada inversa de Fourier discreta (IDFT). Como o número de frequências consideradas é necessariamente discreto, o pulso incidente é periódico. Para evitar que dois pulsos consecutivos sofram interferência, o período deve ser muito maior do que a largura do pulso. Para isso, o incremento de frequências deve ser suficientemente pequeno. Logo, quanto maior for o número de frequências utilizadas na IDFT, mais precisos serão os resultados obtidos.

Em nossas simulações, utilizamos um cosseno modulado por uma gaussiana como pulso incidente, o qual é dado pela equação:

$$x(t) = e^{-\left(\frac{t-t_o}{\tau}\right)^2} \cos(2\pi f_c(t - t_o)), \quad (\text{C.18})$$

cuja transformada de Fourier é dada por

$$X(f) = \left( \frac{\tau\sqrt{\pi}}{2} e^{-((f-f_c)\pi\tau)^2} + \frac{\tau\sqrt{\pi}}{2} e^{-((f+f_c)\pi\tau)^2} \right). \quad (\text{C.19})$$

A partir das amplitudes dos campos incidentes obtidos para cada uma das frequências consideradas, nós utilizamos o método da matriz de transição para obter os campos totais

no domínio da frequência. O campo total é o resultado da superposição do campo incidente com o campo espalhado. Dessa forma, podemos obter os campos totais no domínio do tempo utilizando a transformada inversa de Fourier discreta.

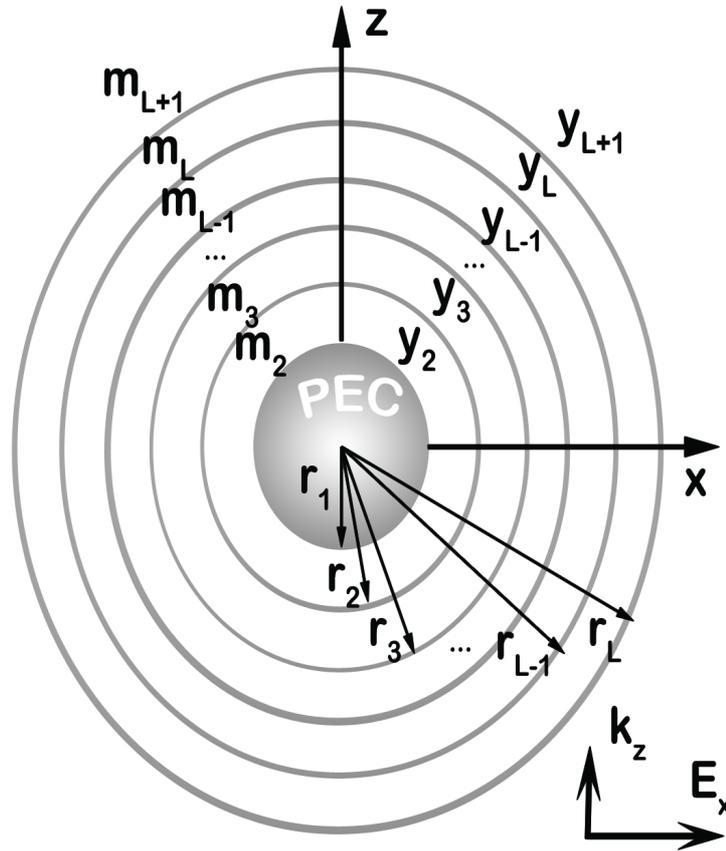


Figura C.1: Esquema de cálculo para uma estrutura esférica estratificada em múltiplas camadas.

# Apêndice D

## O método FDTD

Em 1920, Alexander Thom [101] desenvolveu o método das diferenças finitas (FDM), a fim de solucionar equações não lineares da hidrodinâmica. Essa técnica era baseada na aproximação de equações diferenciais por equações de diferenças finitas. Em 1966, Kane Yee [102] propôs uma técnica numérica para solucionar as equações rotacionais de Maxwell, utilizando o método das diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD).

### D.1 O algoritmo de Yee

O método das diferenças finitas no domínio do tempo (FDTD) utiliza razões entre diferenças algébricas como aproximações para derivadas em equações diferenciais. Quando este método envolve problemas concernentes à propagação de ondas eletromagnéticas, as equações diferenciais utilizadas são as equações de Maxwell na forma diferencial, mais especificamente as Leis de Faraday e de Ampère, respectivamente mostradas nas equações (D.1) e (D.2), para um meio linear e isotrópico,

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (\text{D.1})$$

e

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma \vec{E}, \quad (\text{D.2})$$

onde  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  são, respectivamente, os vetores intensidade de campo elétrico ( $V/m$ ) e intensidade de campo magnético ( $A/m$ ). E os símbolos  $\varepsilon$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  representam os parâmetros constitutivos do meio, os quais são, respectivamente, permissividade elétrica (farads/m), permeabilidade magnética (henrys/m) e condutividade elétrica (Siemens/m).

A discretização espacial das equações é feita com base na célula de Yee, mostrada na figura (D.1), resultando em aproximações por derivadas centradas. Os esquemas mais comumente utilizados na discretização temporal são *leap-frog* e *Cranck-Nicholson* [103]. Este emprega aproximações por derivadas avançadas e atrasadas resultando em um algoritmo implícito; aquele faz uso de uma aproximação por derivada centrada, resultando

em um algoritmo explícito. Esses algoritmos são incondicionalmente e condicionalmente estáveis, respectivamente.

Utilizando aproximações por derivadas centradas tanto para as derivadas espaciais quanto para a derivada temporal, são obtidas as equações de atualização das componentes dos campos [103]. A equação de atualização da componente  $y$  do campo magnético é dada por:

$$H_{y(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} = H_{y(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\mu} \left[ \frac{E_{x(i+\frac{1}{2},j,k+1)}^n - E_{z(i+\frac{1}{2},j,k)}^n}{\Delta z} - \frac{E_{z(i+1,j,k+\frac{1}{2})}^n - E_{z(i,j,k+\frac{1}{2})}^n}{\Delta x} \right], \quad (\text{D.3})$$

e a equação de atualização da componente  $x$  do campo elétrico é obtida pela expressão a seguir:

$$\begin{aligned} E_{x(i+\frac{1}{2},j,k)}^{n+1} &= E_{x(i+\frac{1}{2},j,k)}^n \left( \frac{1 - \sigma \frac{\Delta t}{2\epsilon}}{1 + \sigma \frac{\Delta t}{2\epsilon}} \right) + \frac{\Delta t}{\epsilon (1 + \sigma \frac{\Delta t}{2\epsilon})} \left[ \frac{H_{z(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)}^{n+\frac{1}{2}} - H_{z(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k)}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y} \right] \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\epsilon (1 + \sigma \frac{\Delta t}{2\epsilon})} \left[ \frac{H_{y(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}} - H_{y(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2})}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta z} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

## D.2 Precisão e Estabilidade do Método FDTD

O algoritmo FDTD pode apresentar dispersão numérica devido às distorções de magnitude e fase dos campos calculados, fazendo com que a velocidade dos modos de onda numéricos divirja da velocidade verdadeiramente apresentada pela onda eletromagnética. Dessa forma, para diferentes comprimentos de onda, direções de propagação ou níveis de discretização são obtidas diferentes velocidades de fase. A fim de eliminar essas distorções é necessário refinar a malha de discretização do domínio computacional, utilizando incrementos espaciais cada vez menores, até que as soluções converjam para valores com a precisão desejada. Como regra prática o incremento espacial  $\Delta x, y, z$  deve ser menor do que ou igual a décima parte do comprimento de onda da maior frequência analisada, como mostra a equação (D.5),

$$\Delta x, y, z \leq \frac{\lambda_{\min}}{10}. \quad (\text{D.5})$$

Além disso, o algoritmo FDTD requer que o passo temporal  $\Delta t$  apresente uma limitação específica em relação aos incrementos espaciais  $\Delta x, \Delta y$  e  $\Delta z$ . Essa limitação, apresentada na equação (D.6) e denominada *condição de Courant-Friedrichs-Lewy* [103], é necessária

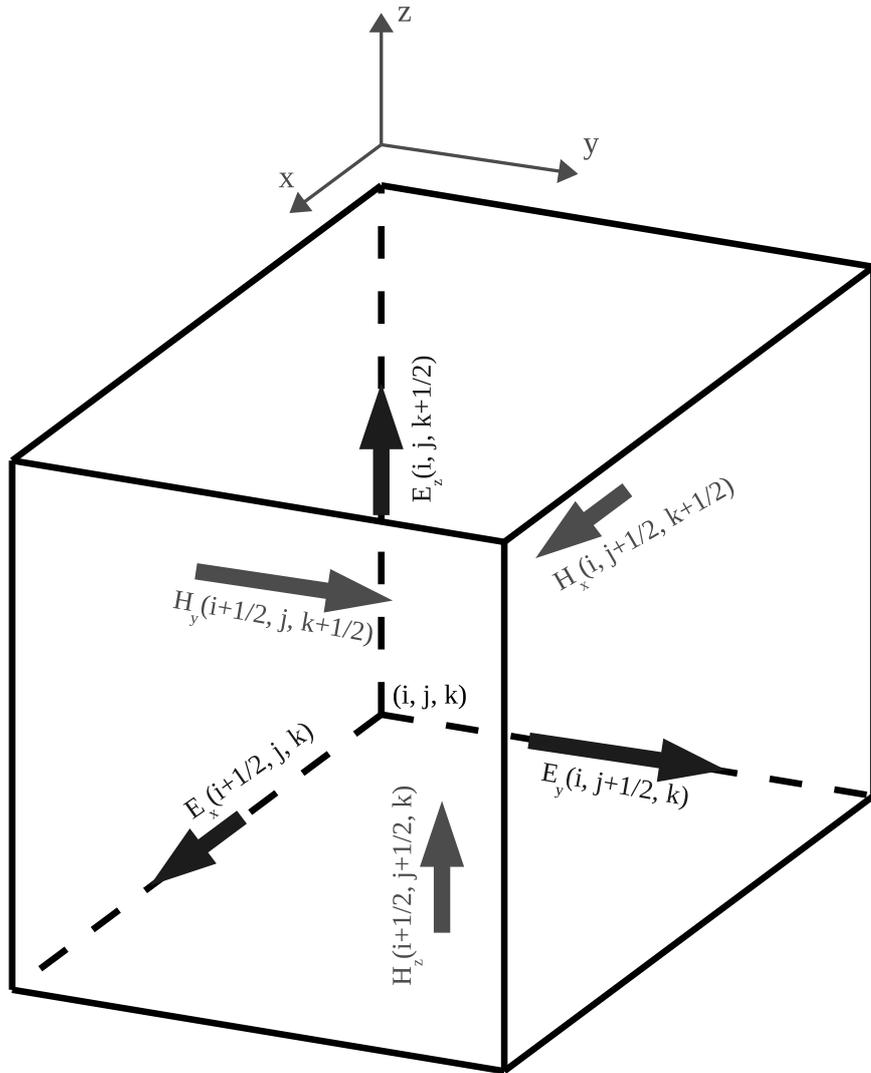


Figura D.1: Distribuição espacial das componentes dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  para a célula de Yee  $(i, j, k)$ .

para evitar a *instabilidade numérica*, uma possibilidade indesejada, a qual se manifesta através de um crescimento contínuo do erro computacional,

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}}}. \quad (\text{D.6})$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo.

## D.3 Condições de Contorno Absorvente

Como muitas vezes é preciso analisar a propagação de ondas eletromagnéticas em um ambiente aberto (não limitado por paredes condutoras perfeitas), faz-se necessária a truncagem do domínio de análise, pois, não é possível simular uma onda propagando-se em um espaço de dimensões infinitas, o que requereria uma quantidade também infinita de memória. Nesse trabalho, foi utilizada a camada perfeitamente casada convolucional (CPML - Convolutional Perfectly Matched Layer) [104, 105] como condição de contorno absorvente para truncar o domínio de análise. A CPML é capaz de atenuar modos evanescentes e evita o aparecimento de reflexões com retardo de tempo [106].

### D.3.1 Equações de atualização para a CPML

A equação de atualização da componente  $x$  do campo elétrico para a CPML é dada por [103]:

$$\begin{aligned} E_x^{n+\frac{1}{2}} &= C_{exe}(i, j, k) \times E_x^n(i, j, k) \\ &+ C_{exbz}(i, j, k) \times \left( H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i, j-1, k) \right) \\ &+ C_{exby}(i, j, k) \times \left( H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k-1) \right) \\ &+ C_{\psi_{exy}}(i, j, k) \times \psi_{exy}^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) + C_{\psi_{exz}}(i, j, k) \times \psi_{exz}^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k), \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

onde

$$\begin{aligned} C_{\psi_{exy}}(i, j, k) &= \Delta_y C_{exhz}(i, j, k), \quad C_{exbz}(i, j, k) = (1/\kappa_{ey}(i, j, k)) \times C_{exbz}(i, j, k), \\ C_{\psi_{exy}}(i, j, z) &= \Delta_z C_{exhy}(i, j, k), \quad C_{exby}(i, j, k) = (1/\kappa_{ey}(i, j, k)) \times C_{exby}(i, j, k). \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

### D.3.2 Distribuição de parâmetros da CPML

A condutividade máxima do perfil de condutividades é calculada em [104] usando  $\sigma_{max} = \sigma_{factor} \times \sigma_{opt}$ , onde

$$\sigma_{opt} = \frac{n_{pml} + 1}{150\pi\sqrt{\varepsilon_r}\Delta i}. \quad (D.9)$$

Um perfil polinomial de ordem  $n_{pml}$  para as condutividades da CPML são expressas por:

$$\sigma_{pei}(\rho) = \sigma_{max} \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^{n_{pml}}, \quad \sigma_{pmi}(\rho) = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \sigma_{max} \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^{n_{pml}}. \quad (D.10)$$

Por sua vez, os perfis de  $\kappa_{ei}$  e  $\kappa_{mi}$  podem ser calculados, respectivamente, por:

$$\kappa_{ei}(\rho) = 1 + (\kappa_{max} - 1) \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^{n_{pml}}, \quad \kappa_{mi}(\rho) = 1 + (\kappa_{max} - 1) \left(\frac{\rho}{\delta}\right)^{n_{pml}}. \quad (D.11)$$

E finalmente, os valores de  $\alpha_{ei}$  e  $\alpha_{mi}$  são dados por:

$$\alpha_{ei}(\rho) = \alpha_{min} + (\alpha_{max} - \alpha_{min}) \frac{\rho}{\delta}, \quad \alpha_{mi}(\rho) = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \left( \alpha_{min} + (\alpha_{max} - \alpha_{min}) \left(\frac{\rho}{\delta}\right) \right). \quad (D.12)$$

Estas distribuições espaciais dos valores dos parâmetros da CPML são escolhidas para minimizar o erro de reflexão dos modos propagantes, assim como, dos modos evanescentes [105].

## D.4 Formulação de Campo Espalhado

Em FDTD, as duas principais formulações utilizadas para simular a incidência de ondas eletromagnéticas sobre um objeto espalhador são formulação de campo-total-campo-espalhado (TFSF) e formulação de campo espalhado (SF), a qual foi utilizada neste trabalho. Na formulação de campo espalhado, os campos incidentes são definidos analiticamente em todo o domínio de análise [103].

### D.4.1 Equações de atualização dos campos espalhados.

A equação de atualização para a formulação de campo espalhado pode ser expressa para a componente  $x$  do campo elétrico como:

$$\begin{aligned} E_{scat,x}^{n+1}(i, j, k) &= C_{exe}(i, j, k) E_{scat,x}^n(i, j, k) \\ &+ C_{exhz}(i, j, k) \left[ H_{scat,z}^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - H_{scat,z}^{n+\frac{1}{2}}(i, j-1, k) \right] \\ &+ C_{exhy}(i, j, k) \left[ H_{scat,y}^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - H_{scat,y}^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k-1) \right] \\ &+ C_{exeic}(i, j, k) E_{inc,x}^{n+1}(i, j, k) + C_{exeip}(i, j, k) E_{inc,x}^n(i, j, k), \end{aligned} \quad (D.13)$$

onde

$$\begin{aligned}
C_{exe}(i, j, k) &= \frac{2\varepsilon_x(i, j, k) - \sigma_x^e(i, j, k)\Delta_t}{2\varepsilon_x(i, j, k) + \sigma_x^e(i, j, k)\Delta_t}, \\
C_{exhz}(i, j, k) &= \frac{2\Delta_t}{\Delta_y(2\varepsilon_x(i, j, k) + \sigma_x^e(i, j, k)\Delta_t)}, \\
C_{exhy}(i, j, k) &= -\frac{2\Delta_t}{\Delta_z(2\varepsilon_x(i, j, k) + \sigma_x^e(i, j, k)\Delta_t)}, \\
C_{exeic}(i, j, k) &= \frac{2(\varepsilon_0 - \varepsilon_x(i, j, k)) - \sigma_x^e(i, j, k)\Delta_t}{2\varepsilon_x(i, j, k) + \sigma_x^e(i, j, k)\Delta_t}, \\
C_{exeip}(i, j, k) &= -\frac{2(\varepsilon_0 - \varepsilon_x(i, j, k)) + \sigma_x^e(i, j, k)\Delta_t}{2\varepsilon_x(i, j, k) + \sigma_x^e(i, j, k)\Delta_t}. \tag{D.14}
\end{aligned}$$

A equação de atualização para a componente y do campo magnético pode ser expressa como:

$$\begin{aligned}
H_{scat,y}^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) &= C_{hyh}(i, j, k)H_{scat,y}^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k) \\
&+ C_{hyex}(i, j, k) [E_{scat,x}^n(i, j+1, k) - E_{scat,x}^n(i, j, k)] \\
&+ C_{hyez}(i, j, k) [E_{scat,z}^n(i, j, k+1) - E_{scat,z}^n(i, j, k)] \\
&+ C_{hyhic}(i, j, k)H_{inc,y}^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) + C_{hyhip}(i, j, k)H_{inc,y}^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k), \tag{D.15}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
C_{hyh}(i, j, k) &= \frac{2\mu_y(i, j, k) - \sigma_y^m(i, j, k)\Delta_t}{2\mu_y(i, j, k) + \sigma_y^m(i, j, k)\Delta_t}, \\
C_{hyex}(i, j, k) &= -\frac{2\Delta_t}{\Delta_z(2\mu_y(i, j, k) + \sigma_y^m(i, j, k)\Delta_t)}, \\
C_{hyez}(i, j, k) &= \frac{2\Delta_t}{\Delta_x(2\mu_y(i, j, k) + \sigma_y^m(i, j, k)\Delta_t)}, \\
C_{hyhic}(i, j, k) &= \frac{2(\mu_0 - \mu_y(i, j, k)) - \sigma_y^m(i, j, k)\Delta_t}{2\mu_y(i, j, k) + \sigma_y^m(i, j, k)\Delta_t}, \\
C_{hyhip}(i, j, k) &= -\frac{2(\mu_0 - \mu_y(i, j, k)) + \sigma_y^m(i, j, k)\Delta_t}{2\mu_y(i, j, k) + \sigma_y^m(i, j, k)\Delta_t}.
\end{aligned}$$

# Apêndice E

## Algoritmo da técnica AG

A técnica de algoritmos genéticos (AGs) é uma técnica de otimização inspirada no neo-darwinismo. Inicialmente, um conjunto de possíveis soluções para o problema é gerado de forma aleatória. O conjunto de soluções é tratado como uma população, na qual cada indivíduo corresponde a uma possível solução. Por sua vez, um indivíduo é representado por um cromossomo que corresponde a uma cadeia de bits "0"s e "1"s. Cada um desses cromossomos é dividido em genes, que correspondem às variáveis envolvidas na solução do problema. A partir de uma função objetivo, a qual se deseja minimizar, são atribuídos pesos a cada um dos indivíduos, que correspondem às avaliações dos mesmos. Esses pesos são denominados aptidões dos indivíduos. Os indivíduos mais aptos possuem maior probabilidade de serem escolhidos para o cruzamento. O método da roleta ponderada é o mais comumente utilizado na seleção desses indivíduos. Em seguida, são realizadas as operações de mutação dos indivíduos. Além disso, o indivíduo mais apto é preservado na geração seguinte, através de um procedimento conhecido como elitismo.

### E.0.2 Etapa de inicialização do AG

Inicialmente, são escolhidos o número de variáveis consideradas na solução do problema, o intervalo de definição de cada uma das variáveis, a precisão com que essas variáveis serão escolhidas, o tamanho da população e o número máximo de gerações. Em seguida, é definido o número de bits de cada gene que representa uma variável. Considere o exemplo da Figura E.1. Essa figura representa a solução de um problema de cinco variáveis ou genes, sendo que a cada uma delas é reservado um certo número de bits. O gene da variável 2 igual a "00000" indica que ela armazena o menor valor do intervalo em que está definida. Por sua vez, o gene da variável 4 igual a "11111" indica que ela armazena o maior valor do intervalo em que está definida. O número de bits de cada gene e os valores assumidos pelas variáveis são dados, respectivamente, pelas equações (E.1) e (E.2).

$$N_i \geq \log_2 \left( \frac{var_{i,max} - var_{i,min}}{10^{-P}} \right). \quad (E.1)$$

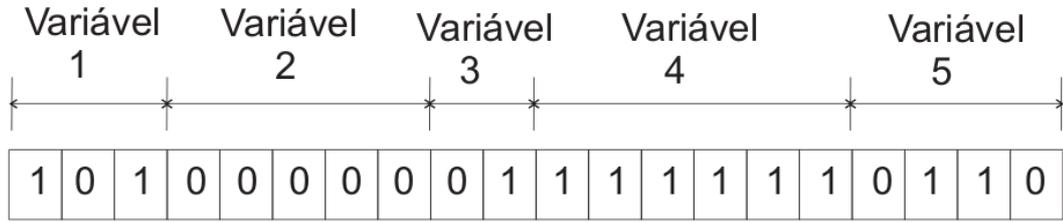


Figura E.1: O cromossomo reserva um certo número de genes para cada variável

Onde  $P$  é a precisão em casas decimais com que a variável  $i$  é definida,  $[var_{i,min}, var_{i,max}]$  é o intervalo em que a variável  $i$  é definida e  $N_i$  é o número de bits do gene correspondente à variável  $i$ . O tamanho total do cromossomo é dado pela soma dos tamanhos de todos os genes.

$$fen_{i,j} = int_{i,j} \frac{var_{i,max} - var_{i,min}}{2^{N_i} - 1.0} + var_{i,min} \quad (E.2)$$

Onde  $fen_{i,j}$  e  $int_{i,j}$  são, respectivamente, o fenótipo (valor da variável) e o inteiro correspondente ao número binário contido no gene da variável  $i$  do indivíduo  $j$ .

### E.0.3 Laço de gerações do AG

Após serem obtidos os fenótipos dos indivíduos, eles são avaliados; e a cada um deles é atribuída uma aptidão. Posteriormente, a roleta ponderada é utilizada para realizar a seleção dos indivíduos os quais serão utilizados na operação de cruzamento.

#### Avaliação dos indivíduos

A avaliação consiste na atribuição de aptidões aos indivíduos de acordo com o valor obtido para a função objetivo, a qual se deseja minimizar ou maximizar.

#### O elitismo

O elitismo é um recurso utilizado no AG para que o indivíduo mais apto nunca seja perdido, garantindo a convergência do AG. Pois, na pior das hipóteses, na próxima geração, ter-se-á um indivíduo de aptidão maior do que ou igual à aptidão do indivíduo mais apto da geração anterior.

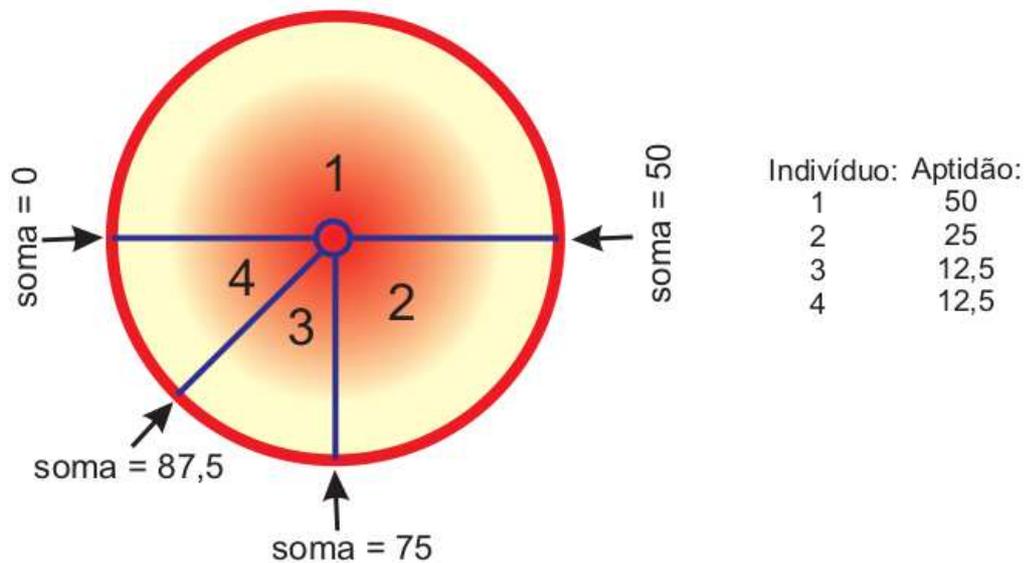


Figura E.2: Roleta ponderada.

### Seleção por roleta ponderada

A seleção na técnica de AG é realizada, neste trabalho, através da roleta ponderada, conforme ilustrado no exemplo da Figura E.2. Inicialmente, é gerado um número aleatório entre 0 e o valor da soma total das aptidões, no caso, 100. Em seguida, um laço de repetição acessa os indivíduos um a um, na sequência em que eles estão escritos na memória. A medida que eles vão sendo acessados, uma variável *soma* vai acumulando a soma das aptidões desses indivíduos. Quando a variável *soma* ultrapassa o valor aleatório (entre 0 e 100), o último indivíduo acessado é selecionado pela roleta. Nesse exemplo, se o número aleatório gerado for menor do que 50, então, o indivíduo 1 será escolhido. Por outro lado, se o número aleatório gerado estiver compreendido entre 50 e 75, então, o indivíduo 2 será escolhido. Contudo, se o número aleatório gerado estiver compreendido entre 75 e 87,5, então, o indivíduo 3 será escolhido. Finalmente, se o número aleatório gerado for maior do que 75, então, o indivíduo 4 será escolhido. Assim, nota-se que a probabilidade de um indivíduo ser selecionado é proporcional a sua aptidão.

Observando o funcionamento da roleta ponderada, é possível notar que, sem o elitismo, mesmo o indivíduo mais apto poderia ser eliminado. Além disso, vê-se que os indivíduos mais aptos tem maior probabilidade de serem selecionados. Ainda, é possível observar que nada impede que um determinado indivíduo seja selecionado mais de uma vez.

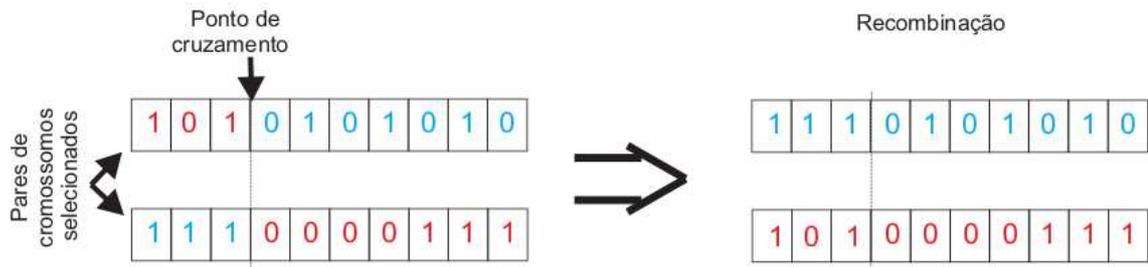


Figura E.3: Cruzamento entre pares de cromossomos selecionados. A partir do ponto de cruzamento, é feita quebra dos cromossomos, os quais são posteriormente recombinados.

### O cruzamento

O cruzamento é realizado entre pares de indivíduos selecionados pela roleta ponderada. Para isso, é escolhido um ponto de cruzamento. Na posição do ponto de cruzamento, os cromossomos do par de indivíduos selecionados são quebrados em duas partes, e posteriormente, recombinados, dando origem a dois novos indivíduos da nova geração. Esse processo de cruzamento de um par de indivíduos selecionados, e em seguida recombinados, é ilustrado na Figura E.3.

### A mutação

A mutação consiste na troca de cada um dos bits de um cromossomo de "0" por "1", ou vice-versa. A operação de mutação é realizada individualmente em cada bit dos cromossomos.

### Uso de algoritmos genéticos no projeto de coberturas de camuflagem eletromagnética

Neste trabalho, é proposta a minimização da seção reta de espalhamento total através da técnica de algoritmos genéticos. Esta minimização ocorre de acordo com o diagrama de blocos mostrado na Figura F.1.

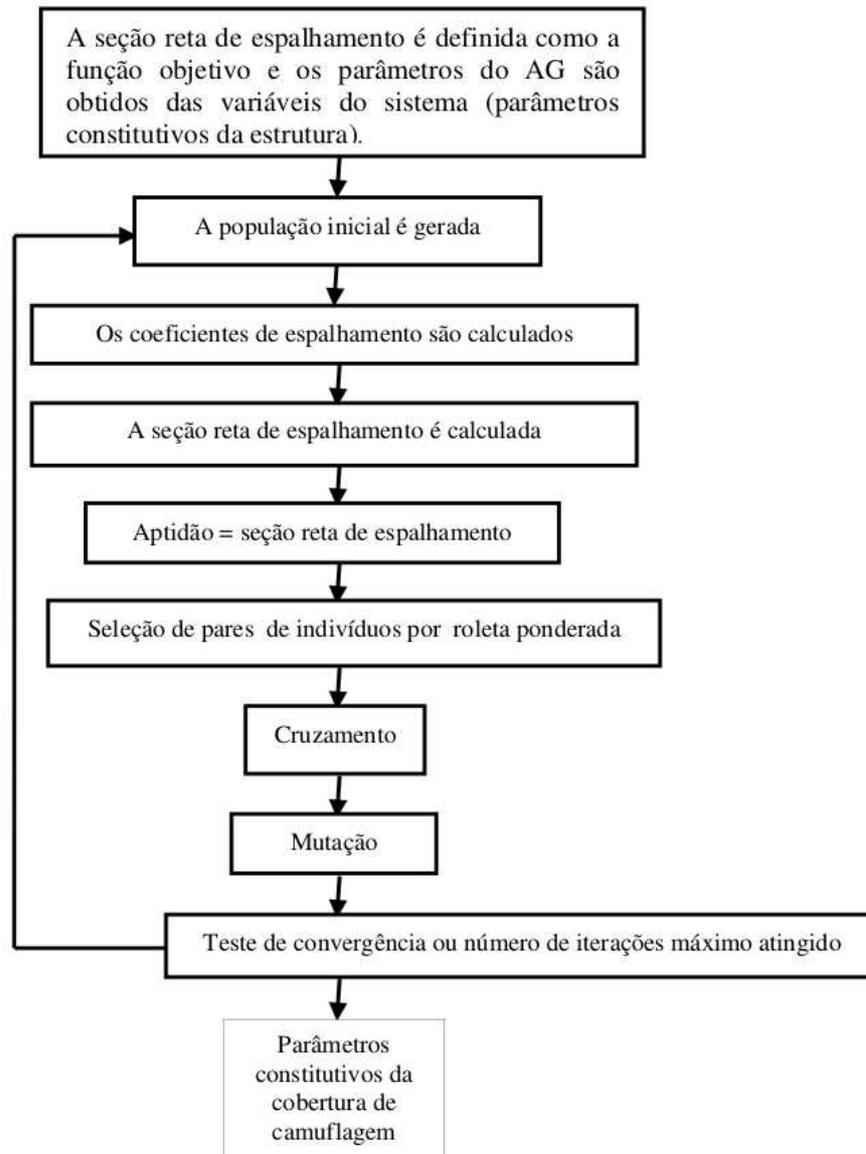


Figura E.4: Diagrama de blocos da minimização da seção reta de espalhamento através da técnica de algoritmos genéticos.

# Apêndice F

## Algoritmo da técnica PSO

No algoritmo PSO, uma população de  $N$  partículas é definida no espaço de parâmetros  $\mathbb{R}^n$ , onde as  $n$  componentes do vetor posição de cada partícula representam os  $n$  parâmetros envolvidos no problema de otimização. As partículas movem-se por inércia em geral em um meio dissipativo e são atraídas por forças elásticas em direção aos pontos de mínimo local e mínimo global, onde o mínimo global é o mínimo de todas as partículas e o mínimo local é o mínimo de cada partícula individual [63].

### F.1 Vetor posição

Cada componente  $x_j$  do vetor posição é limitada ao intervalo  $[x_{L,j}, x_{H,j}]$ . A equação de atualização do vetor posição é dada por [63]:

$$x_j \leftarrow x_j + v_j, \quad (\text{F.1})$$

em que  $v_j$  é o vetor velocidade.

### F.2 Vetor velocidade

A equação de atualização do vetor velocidade  $v_j$  é expressa como [63]:

$$v_f \leftarrow wv_f + c_1\varphi_1(x_{local,j} - x_j) + c_2\varphi_2(x_{global} - x_j), \quad (\text{F.2})$$

onde  $w$  é o peso de inércia,  $c_1 = 2$  é o fator cognitivo,  $c_2 = 2$  é o fator social,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são duas variáveis aleatórias distribuídas entre 0 e 1,  $x_{local,j}$  é a componente  $j$  do vetor posição do mínimo local e  $x_{global,j}$  é a componente  $j$  do vetor posição do mínimo global.

É realizado o controle do módulo da velocidade da partícula. Se o módulo da velocidade excede um certo valor máximo, então, ele é substituído por esse valor máximo.

### F.3 Dinâmica do PSO

Para entendermos a dinâmica do PSO, devemos considerar uma partícula de massa  $m$  localizada na posição  $\vec{x}$  e com velocidade  $\vec{v}$ , sendo atraída através de forças elásticas (de constantes elásticas  $k_{local}$  e  $k_{global}$ ) para os pontos cujos vetores posição são dados por  $\vec{x}_{local}$  e  $\vec{x}_{global}$ , em um meio conservativo. Para a componente  $j$ , temos que:

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = k_{local}(x_{local,j} - x_j) + k_{global}(x_{global} - x_j), \quad (\text{F.3})$$

$$v_f = v_i + \frac{\Delta t k_{local}}{m}(x_{local,j} - x_j) + \frac{\Delta t k_{global}}{m}(x_{global} - x_j). \quad (\text{F.4})$$

Fazendo um ajuste das constantes chegamos a equação (F.2).

### F.4 Condições de contorno

Se uma partícula colide com a parede que delimita o espaço de parâmetros na direção  $j$ , nós substituímos a componente  $v_j$  da velocidade da partícula por  $-v_j$ ; isto corresponde à condição de contorno reflexiva.

As partículas não passam através da parede devido à condição de contorno rígida: (se  $x_j < x_{L,j}$ , então  $x_j \leftarrow x_{L,j}$ ) e (se  $x_j > x_{H,j}$ , então  $x_j \rightarrow x_{H,j}$ ).

### F.5 Meio dissipativo

Um PSO com meio conservativo é aquele em que  $w = 1$  [63]. Um PSO com meio dissipativo é aquele em que  $0 < w < 1$  [63]. Em nossas simulações nós utilizamos um valor decrescente de  $w$ , tornando o meio mais dissipativo e, consecutivamente, as partículas mais lentas, com o passar do tempo.

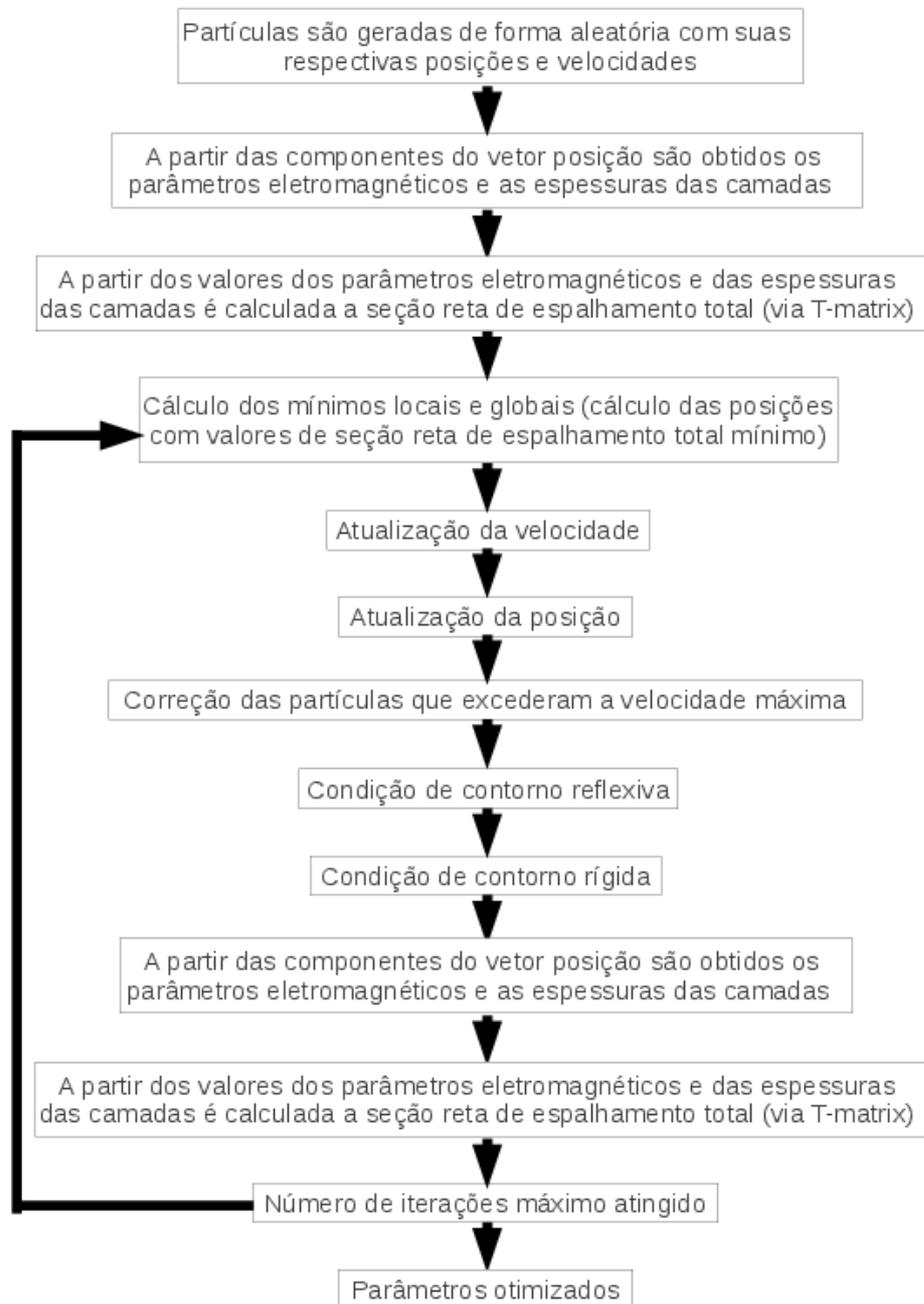


Figura F.1: Diagrama de blocos da minimização da seção reta de espalhamento total através da técnica de otimização por enxame de partículas.

# Referências Bibliográficas

- [1] N. L. Tsitsas and C. Athanasiadis, “On the scattering of spherical electromagnetic waves by a layered sphere,” *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 59, no. 1, pp. 55–74, Feb. 2006. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1093/qjmam/hbi031>
- [2] T. A. Alitalo, P., “Broadband microwave cloaking with periodic networks of transmission lines,” *Metamaterials?2008*, 2008.
- [3] A. Alu and N. Engheta, “Achieving transparency with plasmonic and metamaterial coatings,” *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, vol. 72, no. 1, p. 016623, 2005. [Online]. Available: <http://link.aps.org/abstract/PRE/v72/e016623>
- [4] —, “Cloaking a Sensor,” *Physical Review Letters*, vol. 102, no. 23, pp. 233 901–4, 2009. [Online]. Available: <http://link.aps.org/abstract/PRL/v102/e233901>
- [5] A. Alù and N. Engheta, “Cloaked Near-Field Scanning Optical Microscope Tip for Noninvasive Near-Field Imaging,” *Physical Review Letters*, vol. 105, no. 26, pp. 263 906+, Dec. 2010. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.263906>
- [6] A. Greenleaf, Y. Kurylev, M. Lassas, and G. Uhlmann, “Cloaking a sensor via transformation optics,” 2009.
- [7] X. Chen and G. Uhlmann, “Cloaking a sensor for three-dimensional maxwell’s equations: transformation optics approach,” *Opt. Express*, vol. 19, no. 21, pp. 20 518–20 530, Oct 2011. [Online]. Available: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-19-21-20518>
- [8] E. Irci and V. B. Ertürk, “Achieving transparency and maximizing scattering with metamaterial-coated conducting cylinders,” *Phys. Rev. E*, vol. 76, p. 056603, Nov 2007. [Online]. Available: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.76.056603>
- [9] O. Ozgun and M. Kuzuoglu, “Electromagnetic metamorphosis: Reshaping scatterers via conformal anisotropic metamaterial coatings,” *Microwave and*

- Optical Technology Letters*, vol. 49, no. 10, pp. 2386–2392, 2007. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1002/mop.22784>
- [10] V. Varadan, S. Puligalla, and A. Tellakula, “Experimental demonstration of cloaking by metamaterials,” pp. 1173–1176, june 2007.
- [11] D. H. Kwon and D. H. Werner, “Restoration of antenna parameters in scattering environments using electromagnetic cloaking,” *Applied Physics Letters*, no. 11.
- [12] A. Alu and N. Engheta, “Multifrequency optical invisibility cloak with layered plasmonic shells,” *PHYSICAL REVIEW LETTERS*, vol. 100, p. 113901, 2008.
- [13] U. Leonhardt and T. Tyc, “Superantenna made of transformation media,” *New J. Phys.*, vol. 10, no. 11, pp. 115 026+, Nov. 2008. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/10/11/115026>
- [14] Y. Cheng, F. Yang, J. Y. Xu, and X. J. Liu, “A multilayer structured acoustic cloak with homogeneous isotropic materials,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 92, pp. 151 913+, Apr. 2008. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1063/1.2903500>
- [15] Y. Cheng and X. Liu, “Three dimensional multilayered acoustic cloak with homogeneous isotropic materials,” *Applied Physics A: Materials Science & Processing*, vol. 94, no. 1, pp. 25–30, Jan. 2009. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1007/s00339-008-4882-7>
- [16] A. Novitsky, C.-W. Qiu, and S. Zouhdi, “Transformation-based spherical cloaks designed by an implicit transformation-independent method: theory and optimization,” *New Journal of Physics*.
- [17] A. Greenleaf, Y. Kurylev, M. Lassas, and G. Uhlmann, “Isotropic transformation optics: approximate acoustic and quantum cloaking,” Aug. 2008. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/0806.0085>
- [18] —, “Approximate quantum cloaking and almost-trapped states,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 101, p. 220404, Nov 2008. [Online]. Available: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.220404>
- [19] A. Alù and N. Engheta, “Plasmonic and metamaterial cloaking: physical mechanisms and potentials,” *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, vol. 10, no. 9, p. 093002, 2008. [Online]. Available: <http://stacks.iop.org/1464-4258/10/i=9/a=093002>
- [20] J. B. Pendry, D. Schurig, and D. R. Smith, “Controlling Electromagnetic Fields,” *Science*, vol. 312, no. 5781, pp. 1780–1782, June 2006. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1126/science.1125907>

- [21] U. Leonhardt, “Optical Conformal Mapping,” *Science*, vol. 312, no. 5781, pp. 1777–1780, June 2006. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1126/science.1126493>
- [22] L. M. U. G. Greenleaf, A., “On nonuniqueness for calderons inverse problem,” *Math. Res. Lett.*, vol. 10, pp. 685–693, 2003.
- [23] U. Leonhardt, “Optical Conformal Mapping,” *Science*, vol. 312, no. 5781, pp. 1777–1780, June 2006. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1126/science.1126493>
- [24] N. A. Nicorovici, R. C. McPhedran, and G. W. Milton, “Optical and dielectric properties of partially resonant composites,” *Phys. Rev. B*, vol. 49, pp. 8479–8482, Mar 1994. [Online]. Available: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.49.8479>
- [25] G. W. Milton and N.-A. P. Nicorovici, “On the cloaking effects associated with anomalous localized resonance,” *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 462, no. 2074, pp. 3027–3059, Oct. 2006. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2006.1715>
- [26] H. F. M. X. Y. Z. Wei Xiang Jiang, Tie Jun Cui, “Cylindrical-to-plane-wave conversion via embedded optical transformation,” *APPLIED PHYSICS LETTERS*, vol. 92, p. 261903, 2008.
- [27] C. Li and F. Li, “Two-dimensional electromagnetic cloaks,” *Optical Society of America*, 2008.
- [28] Z. R. M. Q. Wei Yan, Min Yan, “Perfect invisibility cloaks constructed by arbitrary coordinate transformations,” *Optical Society of America*, 2008.
- [29] Y. Lai, J. Ng, H. Chen, D. Han, J. Xiao, Z.-Q. Zhang, and C. T. Chan, “Illusion optics: The optical transformation of an object into another object,” May 2009. [Online]. Available: <http://arxiv.org/abs/0905.1484>
- [30] X. Wang, S. Qu, H. Ma, J. Wang, L. Lu, Z. Xu, and D. Huang, “Displacement cloaks: Rendering an object into a bigger illusion elsewhere,” *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, vol. 25, no. 10, pp. 1372–1381, 2011. [Online]. Available: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1163/156939311796351623>
- [31] D. Schurig, J. J. Mock, B. J. Justice, S. A. Cummer, J. B. Pendry, A. F. Starr, and D. R. Smith, “Metamaterial Electromagnetic Cloak at Microwave Frequencies,” *Science*, vol. 314, no. 5801, pp. 977–980, Nov. 2006. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1126/science.1133628>
- [32] H. Chen and B. Zheng, “Broadband polygonal invisibility cloak for visible light.” *Sci Rep*, vol. 2, 2012.

- [33] F. Falcone, T. Lopetegui, M. A. G. Laso, J. D. Baena, J. Bonache, M. Beruete, R. Marques, F. Martin, and M. Sorolla, “Babinet Principle Applied to the Design of Metasurfaces and Metamaterials,” *Physical Review Letters*, vol. 93, no. 19, p. 197401, 2004.
- [34] J. B. Pendry, A. J. Holden, D. J. Robbins, and W. J. Stewart, “Magnetism from conductors and enhanced nonlinear phenomena,” *IEEE Trans. Microw. Theory Tech*, 1999.
- [35] J. B. Pendry, A. J. Holden, W. J. Stewart, and I. Youngs, “Extremely Low Frequency Plasmons in Metallic Mesostructures,” *Physical Review Letters*, vol. 76, no. 25, pp. 4773–4776, June 1996. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.76.4773>
- [36] G. Dolling, C. Enkrich, M. Wegener, C. M. Soukoulis, and S. Linden, “Simultaneous Negative Phase and Group Velocity of Light in a Metamaterial,” *Science*, vol. 312, no. 5775, pp. 892–894, May 2006. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1126/science.1126021>
- [37] G. Dolling, C. Enkrich, M. Wegener, J. F. Zhou, C. M. Soukoulis, and S. Linden, “Cut-wire pairs and plate pairs as magnetic atoms for optical metamaterials,” *Opt. Lett.*, vol. 30, no. 23, pp. 3198–3200, Dec 2005. [Online]. Available: <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-30-23-3198>
- [38] V. M. Shalaev, T. A. Klar, V. P. Drachev, and A. V. Kildishev, “Optical negative-index metamaterials: From low to no loss,” *Photonic Metamaterials: From Random to Periodic*, p. TuC3, 2006. [Online]. Available: <http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?URI=META-2006-TuC3>
- [39] V. M. Shalaev, W. Cai, U. K. Chettiar, H.-K. Yuan, A. K. Sarychev, V. P. Drachev, and A. V. Kildishev, “Negative index of refraction in optical metamaterials,” *Opt. Lett.*, vol. 30, no. 24, pp. 3356–3358, Dec 2005. [Online]. Available: <http://ol.osa.org/abstract.cfm?URI=ol-30-24-3356>
- [40] A. I. Nachman, “Reconstructions from boundary measurements,” *The Annals of Mathematics*, vol. 128, no. 3, pp. 531–576, 1988.
- [41] C. Qiu, L. Hu, and S. Zouhdi, “Isotropic non-ideal cloaks providing improved invisibility by adaptive segmentation and optimal refractive index profile from ordering isotropic materials,” *Opt. Express*, vol. 18, no. 14, pp. 14 950–14 959, Jul 2010. [Online]. Available: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-18-14-14950>
- [42] Y. Huang, Y. Feng, and T. Jiang, “Electromagnetic cloaking by layered structure of homogeneous isotropic materials,” *Opt. Express*, vol. 15, pp. 11 133–11 141, 2007.

- [43] C. W. Qiu, L. Hu, X. Xu, and Y. Feng, “Spherical cloaking with homogeneous isotropic multilayered structures,” *Physical Review E (Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics)*, vol. 79, no. 4, pp. 047602+, 2009. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.79.047602>
- [44] T. C. Martins and V. Dmitriev, “Spherical invisibility cloak with minimum number of layers of isotropic materials,” *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 54, no. 9, pp. 2217–2220, 2012. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1002/mop.27024>
- [45] Z. Ruan, M. Yan, C. W. Neff, and M. Qiu, “Ideal Cylindrical Cloak: Perfect but Sensitive to Tiny Perturbations,” *Physical Review Letters*, vol. 99, no. 11, 2007. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.99.113903>
- [46] M. Yan, Z. Ruan, and M. Qiu, “Cylindrical Invisibility Cloak with Simplified Material Parameters is Inherently Visible,” *Physical Review Letters*, vol. 99, no. 23, 2007. [Online]. Available: <http://scitation.aip.org/getabs/servlet/GetabsServlet?prog=normal&id=PRLTAO0000990000>
- [47] B. Zhang, H. Chen, B. I. Wu, Y. Luo, L. Ran, and J. A. Kong, “Response of a cylindrical invisibility cloak to electromagnetic waves,” *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)*, vol. 76, no. 12, 2007. [Online]. Available: <http://scitation.aip.org/getabs/servlet/GetabsServlet?prog=normal&id=PRBMDO0000760000>
- [48] S. Xi, H. Chen, B. Zhang, B.-I. Wu, and J. A. Kong, “Route to low-scattering cylindrical cloaks with finite permittivity and permeability,” *Phys. Rev. B*, vol. 79, p. 155122, Apr 2009. [Online]. Available: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.79.155122>
- [49] C. Li, X. Liu, and F. Li, “Experimental observation of invisibility to a broadband electromagnetic pulse by a cloak using transformation media based on inductor-capacitor networks,” *Phys. Rev. B*, vol. 81, p. 115133, Mar 2010. [Online]. Available: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.81.115133>
- [50] H. Ma, S. Qu, Z. Xu, J. Zhang, B. Chen, and J. Wang, “Material parameter equation for elliptical cylindrical cloaks,” *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, vol. 77, no. 1, 2008.
- [51] Y. Luo and S. Zhu, “Design of electromagnetic cloaks with the same scattering patterns of a reduced perfect electric conducting line or ring,” *Physical Review E*, vol. 82, no. 3, pp. 036606+, Sept. 2010. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevE.82.036606>
- [52] W. X. Jiang, T. J. Cui, G. X. Yu, X. Q. Lin, Q. Cheng, and J. Y. Chin, “Arbitrarily elliptical?cylindrical invisible cloaking,” *Journal of Physics*

- D: Applied Physics*, vol. 41, no. 8, p. 085504, 2008. [Online]. Available: <http://stacks.iop.org/0022-3727/41/i=8/a=085504>
- [53] E. Cojocaru, “Exact analytical approaches for elliptic cylindrical invisibility cloaks,” *J. Opt. Soc. Am. B*, vol. 26, no. 5, pp. 1119–1128, May 2009. [Online]. Available: <http://josab.osa.org/abstract.cfm?URI=josab-26-5-1119>
- [54] P. C. Chaumet, A. Rahmani, F. Zolla, and A. Nicolet, “Electromagnetic forces on a discrete spherical invisibility cloak under time-harmonic illumination,” *Phys. Rev. E*, vol. 85, p. 056602, May 2012. [Online]. Available: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.85.056602>
- [55] C. Qiu, L. Hu, B. Zhang, B.-I. Wu, S. G. Johnson, and J. D. Joannopoulos, “Spherical cloaking using nonlinear transformations for improved segmentation into concentric isotropic coatings,” *Opt. Express*, vol. 17, no. 16, pp. 13 467–13 478, Aug 2009. [Online]. Available: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-17-16-13467>
- [56] Y. You, G. W. Kattawar, P.-W. Zhai, and P. Yang, “Invisibility cloaks for irregular particles using coordinate transformations,” *Opt. Express*, vol. 16, no. 9, pp. 6134–6145, Apr 2008. [Online]. Available: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-16-9-6134>
- [57] J. Hu, X. Zhou, and G. Hu, “Design method for electromagnetic cloak with arbitrary shapes based on laplace’s equation,” *Opt. Express*, vol. 17, no. 3, pp. 1308–1320, Feb 2009. [Online]. Available: <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-17-3-1308>
- [58] X. Wang, S. Qu, Z. Xu, H. Ma, J. Wang, C. Gu, and X. Wu, “Three-dimensional invisible cloaks with arbitrary shapes based on partial differential equation,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 216, no. 2, pp. 426–430, 2010.
- [59] A. Doicu and T. Wriedt, “Calculation of the t matrix in the null-field method with discrete sources,” *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 16, no. 10, pp. 2539–2544, Oct 1999. [Online]. Available: <http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-16-10-2539>
- [60] X. S. Zixian Liang, Peijun Yao and X. Jiang, “The physical picture and the essential elements of the dynamical process for dispersive cloaking structures,” *Appl. Phys. Lett.*, vol. 92, p. 131118, 2008.
- [61] H. Chen, Z. Liang, P. Yao, X. Jiang, H. Ma, and C. T. Chan, “Extending the bandwidth of electromagnetic cloaks,” *Physical Review B*, vol. 76, no. 24, pp. 241 104+, Dec. 2007. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.76.241104>
- [62] W. Y. Min Yan and M. Qiu, “Invisibility cloaking by coordinate transformation,” *Progress in optics*, vol. 52, pp. 261–304, 2009.

- [63] S. M. Mikki and A. A. Kishk, *Particle Swarm Optimization: A Physics-Based Approach*. Morgan & Claypool, 2008.
- [64] B. I. Popa and S. A. Cummer, “Cloaking with optimized homogeneous anisotropic layers,” *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, vol. 79, no. 2, 2009.
- [65] Y. Luo, J. Zhang, H. Chen, S. Xi, and B. I. Wu, “Cylindrical cloak with axial permittivity/permeability spatially invariant,” *Applied Physics Letters*, vol. 93, no. 3, 2008.
- [66] A. Alù and N. Engheta, “Effects of size and frequency dispersion in plasmonic cloaking,” *Phys. Rev. E*, vol. 78, p. 045602, Oct 2008. [Online]. Available: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.78.045602>
- [67] B. Edwards, A. Alù, M. G. Silveirinha, and N. Engheta, “Experimental Verification of Plasmonic Cloaking at Microwave Frequencies with Metamaterials,” *Physical Review Letters*, vol. 103, no. 15, pp. 153901+, 2009. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.153901>
- [68] N. Kundtz, D. Gaultney, and D. R. Smith, “Scattering cross-section of a transformation optics-based metamaterial cloak,” *New Journal of Physics*, vol. 12, no. 4, p. 043039, 2010. [Online]. Available: <http://stacks.iop.org/1367-2630/12/i=4/a=043039>
- [69] L. J. J. V. S. T. Pekka Alitalo, Olli Luukkonen, “Transmission-line networks cloaking objects from electromagnetic fields,” *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 56, pp. 416–424, 2008.
- [70] X. Chen and G. Uhlmann, “Cloaking a sensor for three-dimensional maxwell’s equations: transformation optics approach,” *Opt. Express*, no. 21, pp. 20 518–20 530, 2011.
- [71] C. Balanis, *Advanced Engineering Electromagnetics*. John Wiley & Sons, 1989.
- [72] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. Wiley, New York, 1962.
- [73] C. F. Bohren and D. R. Huffman, *Absorption and scattering of light by small particles*. John Wiley and Sons, 1983.
- [74] W. L. Stutzman and G. A. Thiele, *Electromagnetic Theory*. New York: McGraw-Hill, 1941.
- [75] M. Kerker, “Invisible bodies,” *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 65, no. 4, pp. 376–379, Apr 1975. [Online]. Available: <http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?URI=josa-65-4-376>

- [76] H. Chew and M. Kerker, “Abnormally low electromagnetic scattering cross sections,” *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 66, no. 5, pp. 445–449, May 1976. [Online]. Available: <http://www.opticsinfobase.org/abstract.cfm?URI=josa-66-5-445>
- [77] N. G. Alexopoulos and N. K. Uzunoglu, “Electromagnetic scattering from active objects: invisible scatterers,” *Appl. Opt.*, vol. 17, no. 2, pp. 235–239, Jan 1978. [Online]. Available: <http://ao.osa.org/abstract.cfm?URI=ao-17-2-235>
- [78] P. B. Johnson and R. W. Christy, “Optical constants of the noble metals,” *Phys. Rev. B*, vol. 6, pp. 4370–4379, Dec 1972. [Online]. Available: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.6.4370>
- [79] M. Essone Mezeme, S. Lasquelles, and C. Brosseau, “Electromagnetic properties of resonant magnetoplasmonic core-shell nanostructures,” *JOURNAL OF APPLIED PHYSICS*, 2011.
- [80] N. Kaneda, B. Houshmand, and T. Itoh, “FDTD analysis of dielectric resonators with curved surfaces,” *IEEE TRANSACTIONS ON MICROWAVE THEORY AND TECHNIQUES*, vol. 45, no. 9, pp. 1645–1648, 1997.
- [81] J.-Y. Lee and N.-H. Myung, “Locally tensor conformal fdtd method for modeling arbitrary dielectric surfaces,” *MICROWAVE AND OPTICAL TECHNOLOGY LETTERS*, vol. 23, no. 4, pp. 245–249, 1999.
- [82] S. Dey and R. Mittra, “A locally conformal finite difference time domain technique for modeling arbitrary shaped objects,” *IEEE Antennas Propagat Soc Int Symp*, vol. 1, pp. 584–587, 1998.
- [83] H. Chen and C. T. Chan, “Time delays and energy transport velocities in three dimensional ideal cloaking devices,” *J. Appl. Phys.*, vol. 104, p. 033113, 2008.
- [84] A. Mejdoubi, M. Malki, M. Essone Mezeme, Z. Sekkat, M. Bousmina, and C. Brosseau, “Optical scattering and electric field enhancement from core-shell plasmonic nanostructures,” *JOURNAL OF APPLIED PHYSICS*, vol. 110, 2011.
- [85] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, 1984.
- [86] A. Alù and N. Engheta, “Multifrequency Optical Invisibility Cloak with Layered Plasmonic Shells,” *Physical Review Letters*, vol. 100, no. 11, pp. 113901+, 2008. [Online]. Available: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.113901>
- [87] U. Leonhardt and T. G. Philbin, “Transformation optics and the geometry of light,” *Progress in Optics*, 2008.
- [88] A. Vinokurov, V. Farafonov, and V. Il’in, “Separation of variables method for multilayered nonspherical particles,” *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiate Transfer*, vol. 110, pp. 1356–1368, 2009.

- [89] T. C. Martins and V. Dmitriev, “Design of dielectric cloaks by scattering cancellation technique using genetic algorithms,” *IMOC 2009*, 2009.
- [90] G. Mie, “Beiträge zur optik trüber medien, speziell kolloidaler metalösungen,” *Ann. Phys.*, vol. 25, pp. 377–445, 1908.
- [91] M. Kerker, “Invisible bodies,” *J. Opt. Soc. Am.*, vol. 65, pp. 376–379, 1975.
- [92] J. R. Wait, “Electromagnetic scattering from a radially inhomogeneous sphere,” *Applied Scientific Research, Section B*, vol. 10, pp. 441–450, 1963.
- [93] R. Bhandari, “Scattering coefficients for a multilayered sphere: analytic expressions and algorithms,” *Appl. Opt.*, vol. 24, pp. 1960–1967, 1985.
- [94] Z. S. Wu and Y. P. Wang, “Electromagnetic scattering for multilayered sphere: recursive algorithms,” *Radio Sci.*, vol. 26, pp. 1396–1401, 1991.
- [95] L. Kai and P. Massoli, “Scattering of electromagnetic plane waves by radially inhomogeneous spheres: a finely stratified sphere model,” *Appl. Opt.*, vol. 33, pp. 501–511, 1994.
- [96] J. Sinzig and M. Quinten, “Scattering and absorption by spherical multilayer particles,” *Appl. Phys. A*, vol. 58, pp. 157–162, 1996.
- [97] Z. S. Wu, L. X. Guo, K. F. Ren, G. Gouesbet, and G. Grehan, “Improved algorithm for electromagnetic scattering of plane waves and shaped beams by multilayered sphere,” *Appl. Opt.*, vol. 36, 1997.
- [98] I. Gurvich, N. Shiloah, and M. Kleiman, “Calculations of the mie scattering coefficients for multilayered particles with large size parameters,” *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, vol. 70, pp. 433–440, 2001.
- [99] W. Yang, “Improved recursive algorithm for light scattering by a multilayered sphere,” *Applied Optics*, vol. 42, pp. 1710–1720, 2003.
- [100] T. V. Zinoveva, “Light scattering by an inhomogeneous spherical particle with intermediate layers,” *Optika i Spektroskopiya*, vol. 97, pp. 462–474, 2004.
- [101] A. Thom and C. J. Apelt, *Field Computations in Engineering and Physics*. D. Van Nostrand, London, 1961.
- [102] K. S. Yee, “Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell’s equations in isotropic media,” *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, vol. 14, pp. 302–307, 1966.
- [103] A. Taflove and S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. Artech House Inc., 2005.

- [104] J. Roden and S. Gedney, “Convolution pml(cpml): an efficient fdtd implementation of the cfs-pml for arbitrary media,” *Microwave and Optical Technology Letters*, no. 5.
- [105] J.-P. Bérenger, *Perfectly Matched Layer (PML) for Computational Electromagnetics*. Morgan & Claypool, 2007.
- [106] F. Teixeira and W. Chew, “On causality and dynamic stability of perfectly matched layers for fdtd simulations,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 47, pp. 775–785, 1999.