

MÉTODOS NUMÉRICOS PARA PROBLEMAS DE
EVOLUÇÃO E APLICAÇÕES

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Srta. Cristina Lucia Dias Vaz e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 26 de Agosto de 1988.



Profa.Dra. Maria Cristina Cunha Bezerra
Orientadora

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática Aplicada.

Aos meus pais,

Arnaldo e Walnildes

e aos meus irmãos

Roberto e Luiz.

Por todos os momentos, por toda a

força, por todo este amor.

AGRADECIMENTOS

À minha orientadora, Profa. Dra. Maria Cristina Cunha Bezerra, pela orientação, segurança e competência, dando-me estímulo e confiança ao longo deste trabalho.

Ao Professor Petronio Pulino, pela extrema paciência e disponibilidade no esclarecimento de dúvidas.

Aos amigos do curso de Matemática Aplicada (1985), pela união que transformou os problemas em acontecimentos descontraídos.

À todos os professores do Departamento de Matemática Aplicada do IMECC - UNICAMP que colaboraram, em algum sentido, para a realização deste trabalho.

À minha amiga Maria Cristina Wolff, pelo ombro amigo sempre disponível durante estes três últimos anos.

À Sra. Maria de Lourdes Soares da Silva, pela dedicação e competência com que datilografou este trabalho.

Este trabalho foi realizado com auxílio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP).

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	i
CAPÍTULO I - MÉTODOS SPLITTING-UP	1
1.1 - Considerações Gerais	1
1.2 - Estabilidade e Convergência	4
1.3 - Métodos Splitting-Up	10
1.4 - Equações Hiperbólicas	29
CAPÍTULO II - APLICAÇÕES	33
2.1 - Descrição do Problema	33
2.2 - Redução à um Problema de 1 ^a Ordem	34
2.3 - Formulação por Elementos Finitos	45
CAPÍTULO III - IMPLIMENTAÇÃO	54
3.1 - Estrutura do Programa para os Métodos Splitting-Up	54
3.2 - Estrutura do Programa de Elementos Finitos	56
CAPÍTULO IV - CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS	69
4.1 - Resultados	69
4.2 - Conclusões	92
BIBLIOGRAFIA	93

INTRODUÇÃO

Equações diferenciais evolutivas (ou problemas de valor inicial) são freqüentes em vários ramos da Física e Engenharia. Por exemplo, equações de transporte modelam fluxo de calor e fenômenos de difusão; a equação da onda tem papel fundamental na acústica e na mecânica.

Esta freqüência associada às dificuldades de obtenção de expressões analíticas de soluções fazem com que soluções numéricas aproximadas desempenhem papel importante no contexto da resolução efetiva das equações evolutivas.

Ao optar por métodos numéricos surgem questões envolvendo os algoritmos de cálculo, estabilidade, precisão e convergência das aproximações.

O objetivo principal desta dissertação é descrever, analisar e implementar métodos numéricos que resolvam o seguinte problema de evolução:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + AU &= F & \text{em } D \times D_t \\ aU &= \varphi & \text{em } \partial D \times D_t \\ U &= g & \text{em } D \text{ para } t = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde A e a são operadores lineares e U , F e g são funções suficientemente suaves.

No Capítulo I, na primeira secção, apresentaremos alguns conceitos matemáticos necessários para atingirmos nossos objetivos.

Na segunda secção, apresentaremos alguns esquemas simples de aproximação com relação ao tempo sem detalharmos a discretização no espaço. Para tais esquemas introduziremos os conceitos de Estabilidade e Convergência.

Na terceira secção analisaremos os *Métodos Splitting-Up*, que foram iniciados por Douglas, Peaceman e Rachford e depois desenvolvidos pelos matemáticos soviéticos Yamenko, Samarskii, Marchuk e outros. Tais métodos são utilizados em problemas complicados que podem ser reduzidos a problemas consistindo duma cadeia de problemas simples. Esta redução é possível nos casos onde o operador original do problema pode ser decomposto na soma de operadores de estrutura mais simples.

Centralizamos nossa atenção no caso em que o operador A pode ser representado apenas como a soma de dois outros operadores. Particularmente, discutiremos os esquemas Estabilização, Preditor-Corretor e Splitting-Up componente a componente analisando as questões sobre Estabilidade e Convergência.

Na quarta secção, discutiremos alguns esquemas de aproximação para problemas do tipo hiperbólico enfatizando a dificuldade inerente na construção de esquemas Splitting-Up para este tipo de problema.

No Capítulo II, descreveremos o problema do tipo hiperbólico de nosso interesse e tentaremos resolvê-lo do seguinte modo:

- i) Reduziremos o problema de 2^a ordem a um problema de 1^a ordem e aplicaremos os métodos Splitting-Up discutidos no Capítulo I para o tempo e diferenças finitas no espaço;
- ii) Usaremos o esquema Crank-Nicholson no tempo e Métodos Elementos Finitos no espaço.

No Capítulo III discutiremos a implementação do procedimento discutido no Capítulo II.

Finalmente, no Capítulo IV apresentaremos os resultados obtidos e nossas conclusões sobre os métodos estudados.

CAPÍTULO I

CONSIDERAÇÃO SOBRE ESTABILIDADE E CONVERGÊNCIA

1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Consideremos uma região D do espaço euclidiano n -dimensional \mathbb{R}^n e denotaremos por $L_2(D)$ o espaço de Hilbert das funções mensuráveis reais quadrado integrável com produto interno

$$(f, g) = \int_D f(x)g(x)dx$$

e a norma

$$\|f\| = (f, f)^{1/2}$$

Dizemos que um operador linear A , definido no subespaço Φ de $L_2(D)$, é *semidefinido positivo* se

$$(A\mu, \mu) \geq 0$$

para todo $\mu \in \Phi$ com a igualdade válida para elementos não nulos μ e denotaremos por $A \geq 0$.

Se a igualdade acima não é válida para elementos não nulos, isto é,

$$(A\mu, \mu) > 0, \quad \mu \neq 0$$

dizemos que o operador A é *positivo* e denotaremos por $A > 0$.

No caso da desigualdade forte

$$(A\mu, \mu) \geq \alpha (\mu, \mu) \quad , \quad \mu \in \Phi$$

onde $\alpha > 0$ é uma constante independente de μ , dizemos que o operador A é *positivo definido*.

O subespaço Φ é chamado o *domínio* do operador A e denotamos por $\Phi(A)$.

Consideremos o operador *adjunto* A^* definido pela identidade de Lagrange, quando $\Phi(A)$ é denso em Φ .

$$(Ag, h) = (g, A^*h)$$

onde $g \in \Phi(A)$ e $h \in \Phi(A^*)$.

Em geral, os subespaços $\Phi(A)$ e $\Phi(A^*)$ não coincidem apesar de seus elementos estarem definidos na mesma região D do \mathbb{R}^n .

Dizemos que o operador A é *auto-adjunto* se

$$Ah = A^*h$$

para todo $h \in \Phi(A)$ e $\Phi(A) = \Phi(A^*)$.

A *norma* do operador A é definida por

$$\|A\|^2 = \sup_{\substack{\mu \in \Phi \\ \mu \neq 0}} \frac{(A\mu, A\mu)}{(\mu, \mu)}$$

Observemos que, se $A\mu \in \Phi(A^*)$ então

$$(A\mu, A\mu) = (\mu, A^*A\mu)$$

e portanto o quadrado da norma do operador A pode ser expressa por

$$\|A\|^2 = \frac{(\mu, A^*A\mu)}{(\mu, \mu)}$$

$A\mu \in \Phi(A^*)$
 $\mu \neq 0$

Consideremos um operador fixo C cujo domínio Φ é denso em $L_2(D)$. Suponhamos que C seja positivo e auto-adjunto, então $C^*\mu$ existe para todo $\mu \in \Phi$ e

$$(C^*\mu, \mu) = (\mu, C\mu) = (C\mu, \mu).$$

Conseqüentemente,

$$(C\mu, \mu) = \frac{1}{2} [C + C^*]\mu, \mu)$$

onde $\frac{1}{2} [C + C^*]$ é um operador simétrico e positivo.

Introduzimos o seguinte produto interno em Φ

$$(f, g)_{\bar{C}} = (\bar{C}f, g)$$

e a norma $\|\mu\|_{\bar{C}}^2 = (C\mu, \mu) = (\bar{C}\mu, \mu)$

onde $\bar{C} = \frac{1}{2} [C + C^*]$.

Esta norma é chamada *norma energia*.

Por outro lado, ao discutirmos as aproximações consideraremos um conjunto de pontos (X_h, T_τ) onde $X_h = mh$ e $t_\tau = \tau J$ com $m \in \mathbb{Z}$ e $J = 0, 1, \dots, T/\tau$ inteiros positivos arbitrários. Este conjunto de pontos é chamado *Rede* e os elementos deste conjunto pontos da rede.

As quantidades $h > 0$ e $\tau > 0$ são o *tamanho da rede* nas

direções x e t respectivamente.

Denotaremos por

$$D_{h\tau} = \{(X_h, t_h) \mid m \in \mathbb{Z} \text{ e } J=0,1,\dots,T/\tau\}$$

e $\partial D_{h\tau}$ a rede constituída dos pontos da fronteira de $D_{h\tau}$.

Uma função cujo domínio é uma rede é chamada *função rede*.

O conjunto das funções rede $(\mu)_{h\tau}$ definidas em $D_{h\tau}$ será de notado por $\Phi_{h\tau}$.

Toda função $\mu \in \Phi$ pode ser considerada uma função rede $(\mu)_{h\tau}$ do seguinte modo: o valor de $(\mu)_{h\tau}$ para (X_h, t_τ) é igual a $\mu(X_h, t_\tau)$. Esta correspondência é um operador linear do espaço Φ em $\Phi_{h\tau}$, chamado operador *projeção*.

Se A é um operador linear definido em Φ então a função $f = A\mu$, $\mu \in \Phi$ pode ser projetada na rede fazendo-se $(f)_{h\tau} = (A\mu)_{h\tau}$. A correspondência $\mu \longrightarrow (A\mu)_{h\tau}$ é novamente um operador linear definido nas funções rede $(\mu)_{h\tau}$, chamado a *projeção de A na rede* e denotaremos por $(A)_{h\tau}$.

Projeções deste tipo levam à aproximação tipo diferenças finitas de equações.

1.2. ESTABILIDADE E CONVERGÊNCIA

Supondo que o problema (1.1) já esteja discretizado com relação as variáveis espaciais incluindo as condições de fronteira,

teremos o seguinte sistema de equações ordinárias

$$\frac{d\mu}{dt} + \Lambda\mu = f \quad (1.2)$$

$$\mu = g \quad \text{para} \quad t = 0$$

onde Λ , μ e f aproximam A , U e F respectivamente com f e u suaves no tempo.

Para discretizar (1.2) com relação ao tempo propomos os seguintes esquemas simples:

ESQUEMA EXPLÍCITO DE 1^a ORDEM

$$\frac{\mu^{J+1} - \mu^J}{\tau} + \Lambda\mu^J = f^J$$

$$\mu^0 = g$$

(1.3)

$$\tau = t_{J+1} - t_J$$

$$f^J = f(t_J).$$

ESQUEMA IMPLÍCITO DE 1ª ORDEM

$$\frac{\mu^{J+1} - \mu^J}{\tau} + \Lambda \mu^{J+1} = f^J$$

$$\mu^0 = g \tag{1.4}$$

$$f^J = f(t_{J+1})$$

ESQUEMA IMPLÍCITO DE 2ª ORDEM (Crank-Nicholson):

$$\frac{\mu^{J+1} - \mu^J}{\tau} + \Lambda \left(\frac{\mu^{J+1} + \mu^J}{2} \right) = f^J$$

$$\mu^0 = g \tag{1.5}$$

$$f^J = f(t_{J+1/2})$$

Estes esquemas podem ser unificados pela seguinte notação:

$$\mu^{J+1} = T\mu^J + \tau S f^J \tag{1.6}$$

$$\mu^0 = g$$

onde $T = I - \tau \Lambda$ e $S = T$ para (1.3)

$T = (I + \tau \Lambda)^{-1}$ e $S = T$ para (1.4)

$T = (I + \frac{\tau}{2} \Lambda)^{-1} (I - \frac{\tau}{2} \Lambda)$ e $S = (I + \frac{\tau}{2} \Lambda)^{-1}$ para (1.5).

Além disso, em alguns casos é mais conveniente escrevermos tais esquemas como um sistema de equações da forma

$$L^{h\tau} \mu^{h\tau} = f^{h\tau} \quad \text{em } D_{h\tau} \quad (1.7)$$

$$a^{h\tau} \mu^{h\tau} = g^{h\tau} \quad \text{em } \partial D_{h\tau}$$

onde $L^{h\tau}$ aproxima $L = \frac{\partial}{\partial t} + \Lambda$, $a^{h\tau}$ aproxima as condições de fronteira no intervalo $0 \leq t \leq T$ com $D_{h\tau} = D_h \times D_\tau$ e $\partial D_{h\tau} = D_h \times \{0\} \cup \partial D_h \times D_\tau$ e $f^{h\tau} \in F_{h\tau}$, $g^{h\tau} \in G_{h\tau}$ sendo $F_{h\tau}$ e $G_{h\tau}$ espaços euclidianos.

1.2. ESTABILIDADE E CONVERGÊNCIA

Dizemos que (1.7) é uma aproximação de ordem n no espaço e p no tempo de (1.2) se existem constantes \bar{h} , $\bar{\tau}$, M_1, M_2, N_1, N_2 , que dependem de μ , tais que para $h < \bar{h}$ e $\tau < \bar{\tau}$ temos

$$\| (L\mu)_{h\tau} - L^{h\tau}(\mu)_{h\tau} \|_{F_{h\tau}} \leq M_1 h^n + N_1 \tau^p \quad (1.8)$$

$$\| (a\mu)_{h\tau} - a^{h\tau}(\mu)_{h\tau} \|_{G_{h\tau}} \leq M_2 h^n + N_2 \tau^p$$

onde $(\cdot)_{h\tau}$ representa a projeção de U no espaço $D_{h\tau}$.

Os conceitos de Convergência e Estabilidade para Algoritmos Lineares estão estritamente relacionados. Embora existam várias definições de estabilidade, apresentaremos a mais geral e usual na literatura.

Dizemos que o esquema (1.7) é estável se para qualquer h e $J \leq T/\tau$ temos

$$\|\mu^{h\tau}\| \leq C_1 \|f^{h\tau}\| + C_2 \|g^{h\tau}\| \quad (1.9)$$

Se considerarmos as aproximações na forma (1.6) temos

$$\|\mu^J\| \leq C_1 \|f^{h\tau}\| + C_2 \|g\|$$

onde C_1 e C_2 são constantes uniformemente limitados em $0 \leq t \leq T$ e independem de τ , h , g e f .

Esta definição de estabilidade relaciona-se com a noção de problema BEM-POSTO, isto é, dizemos que estabilidade no sentido (1.9) implicará na dependência contínua da solução com os dados do problema.

Por outro lado, para construirmos esquemas de aproximação estáveis, consideramos usualmente como relacionam-se τ e h de modo que tenhamos estabilidade. Se uma certa dependência entre τ e h é necessária para garantir a estabilidade o esquema é dito *condicionalmente estável*, caso contrário dizemos que é *absolutamente estável*.

Para analisar a estabilidade do esquema (1.3) resolveremos recursivamente (1.6) e depois estimamos a norma obtendo

$$\|\mu^J\| \leq \|T\|^J \|g\| + \tau \sum_{i=1}^J \|T^{J-i}\| \|f^{i-1}\|$$

Se $\|f^{h\tau}\| = \max_J \|f^i\|$, a relação acima torna-se

$$\|\mu^J\| \leq \|T\|^J \|g\| + \tau \frac{1 - \|T\|^J}{1 - \|T\|} \|f^{h\tau}\|$$

Assumindo que $\|T\| < 1$ teremos a estabilidade do esquema. Claramente, esta condição é apenas *suficiente*.

Procedendo de modo similar para os esquemas (1.4) e (1.5) teremos

$$\|\mu^J\| \leq \|T\|^J \|g\| + \frac{1 - \|T\|^J}{1 - \|T\|} \tau \|S\| \|f^{h\tau}\|$$

E não é difícil mostrar que os esquemas são absolutamente estáveis para A simétrico, auto-adjunto e positivo com

$$\|\mu^J\| = \left(\sum_{k, \ell} |\mu_{k\ell}^J|^2 h \right)^{1/2}$$

TEOREMA DA CONVERGÊNCIA

Supondo que:

- (a) O esquema (1.7) aproxima o problema (1.1) com ordem n no espaço e p no tempo à solução U ;
- (b) Os operadores $L^{h\tau}$ e $a^{h\tau}$ são lineares;
- (c) O esquema (1.7) é estável no sentido (1.9).

Então, a solução $\mu^{h\tau}$ do problema de diferença converge à solução U do problema original, isto é,

$$\lim_{h\tau \rightarrow 0} \|(U)_{h\tau} - \mu^{h\tau}\| = 0$$

com a seguinte estimativa da razão de convergência

$$\| (U)_{h\tau} - \mu^{h\tau} \| \leq K_1 h^n + K_2 \tau^p$$

onde $K_1 = C_1 M_1 + C_2 M_2$ e $K_2 = C_1 N_1 + C_2 N_2$ com as constantes M_1 , M_2 , N_1 e N_2 definidas em (1.8).

1.3. MÉTODOS SPLITTING-UP

Consideremos o problema (1.1) onde $A = A_1 + A_2$ com A_1 e A_2 semidefinidos positivos, assumindo (sempre que necessário) que o mesmo já esteja discretizado e portanto A , A_1 e A_2 são matrizes.

Inicialmente, analisaremos o caso que o operador A não depende do tempo e os operadores A_1 e A_2 comutam, isto é, $A_1 A_2 = A_2 A_1$.

Por simplicidade, denotaremos

$$B_1 = (I + \frac{\tau}{2} A_1) \quad ; \quad D_1 = (I + \frac{\tau}{2} A_2) \tag{1.10}$$

$$B_2 = (I - \frac{\tau}{2} A_1) \quad ; \quad D_2 = (I - \frac{\tau}{2} A_2) .$$

Para o caso homogêneo de (1.1) consideremos o seguinte esquema de aproximação

$$B_1 D_1 \left(\frac{-\mu^{J+1} - \mu^J}{\tau} \right) + \Lambda \mu^J = 0 \tag{1.11}$$

$$\mu^0 = g$$

Para $\Lambda = A$ o esquema é chamado *Método Estabilização* e $\Lambda = B_1 D_1 A D_1^{-1} B_1^{-1}$ o esquema é chamado *Preditor-Corretor*.

Através de manipulação simples podemos escrever (1.11) na forma

$$B_1 D_1 \mu^{J+1} = [B_1 D_1 - \tau \Lambda] \mu^J \quad (1.12)$$

Para o Método Estabilização temos

$$B_1 D_1 - \tau A = B_2 D_2$$

No Preditor-Corretor

$B_1 D_1 - \tau \Lambda = B_1 D_1 - \tau B_1 D_1 A D_1^{-1} B_1^{-1}$, mas pela comutatividade de A_1 e A_2 temos que $B_1 D_1 A = A B_1 D_1$ e portanto

$$B_1 D_1 - \tau \Lambda = B_1 D_1 - \tau A = B_2 D_2.$$

Desse modo, para os dois métodos podemos escrever (1.12) como

$$B_1 D_1 \mu^{J+1} = B_2 D_2 \mu^J$$

$$\mu^{J+1} = [D_1^{-1} B_1^{-1} B_2 D_2] \mu^J \quad (1.13)$$

Além disso, $B_1 D_1 = D_1 B_1$ e $D_1 B_2 = B_2 D_1$ implicam que $D_1^{-1} B_1^{-1} = B_1^{-1} D_1^{-1}$ e $B_2 D_1^{-1} = D_1^{-1} B_2$. Aplicando tais relações em (1.13) temos

$$\mu^{J+1} = [B_1^{-1} B_2 D_1^{-1} D_2] \mu^J$$

ou

$$\mu^{j+1} = T\mu^j$$

(1.14)

$$\text{onde } T = B_1^{-1} B_2 D_1^{-1} D_2 .$$

Isto significa que para o caso homogêneo de (1.1) onde A independe do tempo e A_1 e A_2 comutam os métodos Estabilização e Preditor-Corretor são mutuamente equivalentes.

Observemos que para analisar a estabilidade do esquema (1.14) seguindo a definição dada na secção anterior, basta estimarmos a norma do operador T . Para realizarmos esta estimativa precisamos dos seguintes resultados ([11] pp. 12-13):

Para qualquer matriz A semidefinida positiva e qualquer parâmetro $\sigma \geq 0$ temos

$$(i) \quad \|(I + \sigma A)^{-1}\| \leq 1$$

$$(ii) \quad \text{Lema de Kellog: } \|(I - \sigma A)(I + \sigma A)^{-1}\| \leq 1 .$$

Claramente, para as matrizes em (2.1) temos

$$\|B_1^{-1}\| \leq 1 \quad ; \quad \|B_2 B^{-1}\| \leq 1$$

$$\|D_1^{-1}\| \leq 1 \quad ; \quad \|D_2 D_1^{-1}\| \leq 1$$

Agora, estimando (1.14) obtemos

$$\|\mu^{J+1}\| \leq \|T\| \|\mu^J\|$$

(1.15)

$$\text{onde } \|T\| \leq \|B_1^{-1}B_2\| \|D_1^{-1}D_2\|$$

Mas, $B_1B_2 = B_2B_1$ e $D_1D_2 = D_2D_1$ o que implica $B_1^{-1}B_2 = B_2B_1^{-1}$ e $D_1^{-1}D_2 = D_2D_1^{-1}$. Observemos que para estas relações não necessitamos da condição de comutatividade de A_1 e A_2 .

Deste modo, podemos escrever $\|T\|$ como

$$\|T\| \leq \|B_2B_1^{-1}\| \|D_2D_1^{-1}\|$$

Finalmente, aplicando o Lema de Kellog obtemos

$$\|T\| \leq 1 .$$

Para verificarmos a ordem de aproximação escrevemos os esquemas da seguinte forma:

$$\text{ESTABILIZAÇÃO: } \left(I + \frac{\tau}{4} A_1A_2\right) \left(\frac{\mu^{J+1} - \mu^J}{\tau}\right) + A \left(\frac{\mu^{J+1} + \mu^J}{2}\right) = 0$$

$$\text{PREDITOR-CORRETOR: } \left(I + \frac{\tau}{4} A_1A_2\right) \left(\frac{\mu^{J+1} - \mu^J}{\tau}\right) + \Lambda\mu^J = 0 .$$

Desde que a solução seja bastante suave, podemos observar que a ordem de aproximação do Método Estabilização coincide com a ordem do Esquema Crank-Nicholson.

Para o Método Preditor-Corretor, expandindo A em potências

de τ e assumindo $\frac{\tau}{2} \|A_\alpha\| < 1$, $\alpha = 1, 2$ obtemos facilmente $\Lambda = A + O(\tau^2)$ e a ordem de aproximação é a mesma do Estabilização.

No caso em que os operadores A_1 e A_2 não comutam, isto é, $A_1 A_2 \neq A_2 A_1$ teremos um pouco mais de trabalho para analisar a estabilidade dos esquemas, pois os operadores T serão totalmente diferentes.

Neste caso, para o Método Estabilização a relação (1.12) deve ser escrita na forma

$$\mu^{J+1} = [D^{-1} B^{-1} B_2 D_2] \mu^J \quad (1.16)$$

Se considerarmos a seguinte mudança de variável

$$W^J = D_1 \mu^J$$

teremos por (1.16)

$$W^{J+1} = [B_1^{-1} B_2 D_2 D_1^{-1}] W^J \quad (1.17)$$

Mas, $D_1 D_2 = D_2 D_1$ que implica $D_1^{-1} D_2 = D_2 D_1^{-1}$. Portanto, (2.8) torna-se

$$W^J = T W^J$$

$$\text{onde } T = B_1^{-1} B_2 D_1^{-1} D_2$$

que é análoga a equação (1.14), portanto sabemos que $\|T\| \leq 1$ e conseqüentemente

$$\|W^{J+1}\| \leq \|W^J\| \quad (1.18)$$

Retornando a variável original, (1.17) torna-se

$$\|D_1 \mu^{J+1}\| \leq \|D_1 \mu^J\| \quad (1.19)$$

Se introduzirmos a seguinte norma (C_2 depende de μ)

$$\|D_1 \mu\| = (C_2 \mu, \mu)^{1/2} = \|\mu\|_{C_2} \quad (1.20)$$

onde $C_\alpha = (I + \frac{\tau}{2} A_\alpha^*) (I + \frac{\tau}{2} A_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$.

a relação (1.19) torna-se $\|\mu^{J+1}\|_{C_2} \leq \|\mu^J\|_{C_2}$, obtendo-se deste modo estabilidade absoluta para o Método Estabilização na norma $\|\cdot\|_{C_2}$.

Para o Método Preditor-Corretor temos que (1.12) é

$$\begin{aligned} B_1 D_1 \mu^{J+1} &= [B_1 D_1 - \tau B_1 D_1 A D_1^{-1} B_1^{-1}] \mu^J \\ \mu^{J+1} &= [I - \tau A D_1^{-1} B_1^{-1}] \mu^J \end{aligned} \quad (1.21)$$

Agora, consideremos a seguinte mudança de variável

$$W^J = D_1^{-1} B_1^{-1} \mu^J$$

(2.12) torna-se

$$B_1 D_1 \left(\frac{W^{J+1} - W^J}{\tau} \right) + A W^J = 0$$

Isto é, o esquema Estabilização para variável W^J .

Deste modo, sabemos que $\|W^{J+1}\|_{C_2} \leq \|W^J\|_{C_2}$ e retornando à variável original

$$\|D_1^{-1} B_1^{-1} \mu^{J+1}\|_{C_2} \leq \|D_1^{-1} B_1^{-1} \mu^J\|_{C_2} \quad (1.22)$$

ou

$$\|B^{-1} \mu^{J+1}\| \leq \|B^{-1} \mu^J\|.$$

Se introduzirmos a seguinte métrica (C_1^{-1} depende de μ)

$$\|B^{-1} \mu\| = (C^{-1}_{\mu, \mu})^{1/2} = \|\mu\|_{C_1^{-1}} \quad (1.23)$$

$$\text{onde } C_1^{-1} = (I + \frac{\tau}{2} A_1^*)^{-1} (I + \frac{\tau}{2} A_1)^{-1}$$

a relação (1.22) torna-se $\|\mu^{J+1}\|_{C_1^{-1}} \leq \|\mu^J\|_{C_1^{-1}}$ e temos estabilidade absoluta do Método Preditor-Corretor na métrica (1.23).

O Método Estabilização pode ser convenientemente implementado através das seguintes equações:

$$F^J = A\mu^J$$

$$(I + \frac{\tau}{2} A_1) \xi^{J+1/2} = -F^J$$

$$(I + \frac{\tau}{2} A_2) \xi^{J+1} = \xi^{J+1/2}$$

$$\mu^{J+1} = \mu^J + \tau \xi^{J+1}$$

onde $\xi^{J+1/2}$ e ξ^{J+1} são apenas variáveis auxiliares.

Por exemplo, consideremos a equação linear de difusão

$$\mu_t = \Delta \mu, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

com a seguinte aproximação de elementos finitos

$$\mu_h(x, y, t) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{J=1}^{N_y} \mu_{iJ}(t) \varphi_i(x) \varphi_J(y)$$

A aproximação de Galerkin do problema variacional para esta equação de difusão satisfaz

$$\int_{\Omega} (\mu_h)_t \varphi_m(x) \varphi_n(y) dx dy + \int_{\Omega} [\nabla \mu_h \cdot \nabla (\varphi_m(x) \varphi_n(y))] dx dy = 0$$

para $m = 1, 2, \dots, N_x$; $n = 1, 2, \dots, N_y$.

Procedendo de modo usual (não detalharemos) obtêm-se

$$\sum_{i,j}^{N_x N_y} [M_{im}^x M_{Jn}^y \frac{d\mu_{iJ}(t)}{dt} + (K_{im}^x M_{Jn}^y + M_{im}^x K_{Jn}^y) \mu_{iJ}(t)] = 0$$

onde

$$M_{im}^x = \int_{\Omega_x} \varphi_i(x) \varphi_m(x) dx ; \quad M_{Jn}^y = \int_{\Omega_y} \varphi_J(y) \varphi_n(y) dy$$

$$K_{im}^x = \int_{\Omega_x} (\varphi_i)_x (\varphi_m)_x dx ; \quad K_{Jn}^y = \int_{\Omega_y} (\varphi_J)_y (\varphi_n)_y dy$$

Aplicando o Método Estabilização teremos

$$F_{i,J}^K = \sum_{i,J} (K_{im}^X M_{Jn}^Y + M_{im} K_{Jn}^Y) \mu_{iJ}^K$$

$$\sum_{i,J} (I + \frac{\tau}{2} K_{im}^X M_{Jn}^Y) \xi_{iJ}^{K+1/2} = - F_{iJ}^K$$

$$\sum_{i,J} (I + \frac{\tau}{2} M_{im}^X K_{Jn}^Y) \xi_{iJ}^{K+1} = \xi_{iJ}^{K+1/2}$$

$$\mu_{iJ}^{K+1} = \mu_{iJ}^K + \tau \xi_{iJ}^{K+1}$$

Por outro lado, se discretizarmos Δ por diferenças finitas centrais teremos o seguinte esquema de estabilização:

$$F_{k\ell}^J = \frac{\mu_{k+1\ell}^J - 2\mu_{k\ell}^J + \mu_{k-1\ell}^J}{h^2} + \frac{\mu_{k\ell+1}^J - 2\mu_{k\ell}^J + \mu_{k\ell-1}^J}{h^2}$$

$$\xi_{k\ell}^{J+1/2} + \frac{\tau}{2} [\xi_{k+1\ell}^{J+1/2} - 2\xi_{k\ell}^{J+1/2} + \xi_{k-1\ell}^{J+1/2}] = - F_{k\ell}^J$$

$$\xi_{k\ell}^{J+1} + \frac{\tau}{2} [\xi_{k\ell+1}^{J+1} - 2\xi_{k\ell}^{J+1} + \xi_{k\ell-1}^{J+1}] = \xi_{k\ell}^{J+1/2}$$

$$\mu_{k\ell}^{J+1} = \mu_{k\ell}^J + \tau \xi_{k\ell}^{J+1}$$

O Método Preditor-Corrector possui o seguinte esquema:

$$\frac{\mu^{J+1/4} - \mu^J}{\tau/2} + A_1 \mu^{J+1/4} = 0$$

$$\frac{\mu^{J+1/2} - \mu^{J+1/4}}{\tau/2} + A_2 \mu^{J+1/2} = 0$$

$$\frac{\mu^{J+1} - \mu^J}{\tau} + A \mu^{J+1/2} = 0$$

A característica fundamental deste método é resolver o problema (1.1) em cada subintervalo $t_J \leq t \leq t_{J+1}$ usando um esquema de aproximação de 1ª ordem (preditor) com "alto grau" de estabilidade que permite encontrar uma solução aproximada em $t_{J+1/2}$ e depois usando um esquema de 2ª ordem (corretor) no intervalo (t_J, t_{J+1}) que utiliza a solução "grosseira" em $t_{J+1/2}$.

Agora, para o caso não-homogêneo de (1.1) consideramos o seguinte esquema

$$B_1 D_1 \left(\frac{\mu^{J+1} - \mu^J}{\tau} \right) + A \mu^J = S_1 f^J \quad (1.24)$$

onde

$$S_1 = I \quad \text{para o Método Estabilização,}$$

$$S_1 = B_1 D_1 - \frac{\tau}{2} A \quad \text{para o Método Preditor-Corretor}$$

$$f^J = f(t_{J+1/2})$$

Novamente, através de manipulação simples teremos (1.24) na forma

$$B_1 D_1 \mu^{J+1} = [B_1 D_1 - \tau A] \mu^J + \tau S_1 f^J \quad (1.25)$$

No caso em que os operadores A_1 e A_2 comutam sabemos que

$$\mu^{J+1} = T\mu^J + \tau S_2 f^J$$

$$\text{onde } T = B_1^{-1} B_2 D_1^{-1} D_2$$

$$S_2 = D_1^{-1} B_1^{-1} S_1 .$$

Como já temos $\|T\| \leq 1$, basta estimar a norma de S_2 para analisarmos a estabilidade. De fato, obtemos facilmente a estabilidade aplicando os resultados (i) e (ii).

$$\|\mu^{J+1}\| \leq \|T\| \|\mu^J\| + \tau \|S_2\| \|f^J\| \quad (1.26)$$

mas

$$\|S_2\| \leq \|D_1^{-1}\| \|B_1^{-1}\| \leq 1 \quad \text{para Estabilização}$$

$$\|S_2\| \leq \|(I - \frac{\tau}{2} A) D_1^{-1}\| \|B_1^{-1}\| \leq 1 \quad \text{para Preditor-Corretor.}$$

Portanto, (1.26) torna-se

$$\|\mu^{J+1}\| \leq \|\mu^J\| + \tau \|f^J\| .$$

Resolvendo recursivamente a relação anterior, obtemos a seguinte estimativa

$$\|\mu^J\| \leq \|g\| + J\tau \|f\|$$

$$\text{onde } \|f\| = \text{MAX}_J \|f^J\| .$$

Para o caso em que os operadores A_1 e A_2 não comutam, o

procedimento é similar ao do caso homogêneo.

Ao considerarmos o Método Estabilização faremos a mudança (1.18) e a equação (1.25) torna-se

$$W^{J+1} = T.W^J + \tau B_1^{-1} f^J \quad (1.27)$$

$$\text{onde } T = B_1^{-1} B_2 D_2 D_1^{-1} .$$

Além disso, podemos escrever

$$\|f^J\| = \|D_1^{-1} D_1 f^J\| \leq \|D_1^{-1}\| \|D_1 f^J\| \quad (1.28)$$

Estimando (1.27), usando (1.28) e aplicando o resultado (i) obtemos

$$\|W^{J+1}\| \leq \|W^J\| + \tau \|D_1 f^J\| \quad (1.29)$$

Agora, retornando à variável original (2.20) torna-se

$$\|\mu^{J+1}\|_{C_2} \leq \|\mu^J\|_{C_2} + \tau \|f^J\|_{C_2}$$

Resolvendo recursivamente a relação anterior temos a seguinte estimativa

$$\|\mu^J\|_{C_2} \leq \|g\|_{C_2} + J\tau \|f\|_{C_2}$$

$$\text{onde } \|f\|_{C_2} = \max_J \|f^J\|_{C_2} .$$

Para o Método Preditor-Corretor a mudança de variável é totalmente diferente do caso homogêneo.

Primeiro, escrevemos o esquema do seguinte modo:

$$\frac{\mu^{J+1} - \mu^J}{\tau} + AD_1^{-1} B_1^{-1} (\mu^J + \frac{\tau}{2} f^J) = f^J \quad (1.30)$$

Fazendo a seguinte mudança de variável $W^J = B_1^{-1} (\mu^J + \frac{\tau}{2} f^J)$ o esquema (1.30) torna-se

$$\frac{W^{J+1} - W^J}{\tau} + B_1^{-1} AD_1^{-1} W^J = B_1^{-1} (\frac{f^{J+1} + f^J}{2}) \quad (1.31)$$

Resolvendo (1.31) para W^{J+1} tem-se

$$W^{J+1} = [I - \tau B_1^{-1} AD_1^{-1}] W^J + \tau B_1^{-1} (\frac{f^{J+1} + f^J}{2})$$

Além disso, podemos escrever

$$[I - \tau B_1^{-1} AD_1^{-1}] = B_1^{-1} [B_1 D_1 - \tau A] D_1^{-1} = B_1^{-1} B_2 D_2 D_1^{-1}$$

Então,

$$W^{J+1} = T W^J + \tau B_1^{-1} (\frac{f^{J+1} + f^J}{2}) \quad (1.32)$$

onde $T = B_1^{-1} B_2 D_2 D_1^{-1}$.

Recordando que $\|T\| \leq 1$, por (1.32) obtemos

$$\|w^{J+1}\| \leq \|w^J\| + \tau \|B_1^{-1} (\frac{f^{J+1} + f^J}{2})\|$$

Retornando à variável original

$$\|\mu^{J+1} + \frac{\tau}{2} f^{J+1}\|_{C_1^{-1}} \leq \|\mu^J + \frac{\tau}{2} f^J\|_{C_1^{-1}} + \tau \|\frac{f^{J+1} + f^J}{2}\|_{C_1^{-1}}$$

Resolvendo recursivamente a relação anterior temos

$$\|\mu^J + \frac{\tau}{2} f^J\|_{C_1^{-1}} \leq \|g + \frac{\tau}{2} f^0\|_{C_1^{-1}} + \tau \|f\|_{C_1^{-1}}$$

$$\text{onde } \|f\|_{C_1^{-1}} = \text{MAX}_J \|f^J\|_{C_1^{-1}} .$$

Portanto, se a solução U e a função f são suficientemente suaves os métodos Estabilização e Preditor-Corretor são absolutamente estáveis e aproximam o problema (1.1) com 2ª ordem em τ .

Analogamente, estes métodos para o caso não-homogêneo podem ser formulados da seguinte forma:

ESTABILIZAÇÃO:

$$F^J = -A\mu^J + f^J$$

$$(I + \frac{\tau}{2} A_1) \xi^{J+1/2} = -F^J$$

$$(I + \frac{\tau}{2} A_2) \xi^{J+1} = \xi^{J+1/2}$$

$$\mu^{J+1} = \mu^J + \tau \xi^{J+1}$$

PREDITOR-CORRETOR:

$$\frac{\mu^{J+1/4} - \mu^J}{\tau/2} + A_1 \mu^{J+1/4} = f^J$$

$$\frac{\mu^{J+1/2} - \mu^{J+1/4}}{\tau/2} + A_2 \mu^{J+1/2} = 0$$

$$\frac{\mu^{J+1} - \mu^J}{\tau} + A \mu^{J+1/2} = f^J$$

Agora, descreveremos o Método Splitting-Up componente por componente para o qual o operador A depende do tempo. Em geral, a análise da estabilidade quanto o operador do problema original depende do tempo torna-se consideravelmente mais difícil e a melhor maneira de evitar tais dificuldades é construir esquemas absolutamente estáveis.

Consideremos o caso homogêneo de (1.1) e assumindo que as entradas de $A_1(t)$ e $A_2(t)$ sejam suficientemente suaves, fazemos a seguinte aproximação destes operadores em $t_J \leq t \leq t_{J+1}$

$$\Lambda_\alpha^J = A_\alpha(t_{J+1/2}), \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.33)$$

Neste caso, o esquema consistirá da seguinte sequência de esquemas Crank - Nicholson

$$\frac{\mu^{J+1/2} - \mu^J}{\tau} + \Lambda_1^J \left(\frac{\mu^{J+1/2} + \mu^J}{2} \right) = 0$$

(1.34)

$$\frac{\mu^{J+1} - \mu^{J+1/2}}{\tau} + \Lambda_2^J \left(\frac{\mu^{J+1} + \mu^{J+1/2}}{2} \right) = 0$$

Pela eliminação da variável auxiliar $\mu^{J+1/2}$, (1.34) pode ser escrito como

$$\mu^{J+1} = T^J \mu^J \quad (1.35)$$

$$\text{onde } T^J = (D_1^J)^{-1} D_2^J (B_1^J)^{-1} B_2^J$$

Recordando que $\|T^J\| \leq 1$ pelo Lema de Kellog e estimando (1.35) teremos

$$\|\mu^{J+1}\| \leq \|\mu^J\| \quad (1.36)$$

Resolvendo recursivamente a relação anterior

$$\|\mu^J\| \leq \|g\| .$$

Para sabermos a ordem de aproximação do esquema, expandiremos T^J em potências de τ e assumindo $\frac{\tau}{2} \|\Lambda_\alpha^J\| < 1$, $\alpha = 1, 2$ teremos

$$T^J = I - \tau \Lambda^J + \frac{\tau^2}{2} [(\Lambda_1^J)^2 + 2\Lambda_2^J \Lambda_1^J + (\Lambda_2^J)^2] - \dots \quad (1.37)$$

Se os operadores Λ_1^J e Λ_2^J não comutam, a relação (1.37) mostra que a aproximação será de 1^a ordem em τ . Caso contrário, podemos escrever (1.37) como

$$T^J = I - \tau \Lambda^J + \frac{\tau^2}{2} (\Lambda^J)^2 - \dots$$

e a aproximação será de 2^a ordem em τ .

Para obtermos uma aproximação de 2ª ordem no caso para o qual os operadores não comutam, devemos além de usar a aproximação (1.33) no intervalo $t_J \leq t \leq t_{J+1}$, usar no intervalo $t_{J-1} \leq t \leq t_J$ a seguinte aproximação

$$\Lambda_{\alpha}^J = A_{\alpha}(t_J) \quad (1.38)$$

Neste caso, o esquema será

$$\begin{aligned} \frac{\mu^{J-1/2} - \mu^{J-1}}{\tau} + \Lambda_1^J \left(\frac{\mu^{J-1/2} - \mu^{J-1}}{2} \right) &= 0 \\ \frac{\mu^J - \mu^{J-1/2}}{\tau} + \Lambda_2^J \left(\frac{\mu^J + \mu^{J-1/2}}{2} \right) &= 0 \\ \frac{\mu^{J+1/2} - \mu^J}{\tau} + \Lambda_2^J \left(\frac{\mu^{J+1/2} + \mu^J}{2} \right) &= 0 \\ \frac{\mu^{J+1} - \mu^{J+1/2}}{\tau} + \Lambda_1^J \left(\frac{\mu^{J+1} + \mu^{J+1/2}}{2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

Isto significa que o esquema (2.25) é primeiro resolvido em $t_{J-1} \leq t \leq t_J$ para $\alpha = 1, 2$ e depois em $t_J \leq t \leq t_{J+1}$ para $\alpha = 2, 1$.

Eliminando as variáveis auxiliares, o esquema (1.39) pode ser escrito por

$$\mu^{J+1} = T^J \mu^{J-1} \quad (1.40)$$

$$\text{onde } T^J = (B_1^J)^{-1} B_2^J (D_1^J)^{-1} D_2^J (D_1^J)^{-1} D_2^J (B_1^J)^{-1}$$

Além disso,

$$T^J = I - 2\tau(\Lambda^J) + \frac{(2\tau)^2}{2}(\Lambda^J)^2 - \dots \quad (1.41)$$

Se compararmos o operador T^J em (1.41) com o operador T^J do seguinte esquema Crank-Nicholson no intervalo $t_{J-1} \leq t \leq t_{J+1}$

$$\frac{\mu^{J+1} - \mu^{J-1}}{2\tau} + \Lambda^J \left(\frac{\mu^{J+1} + \mu^{J-1}}{2} \right) = 0$$

Observaremos que estes operadores coincidem com precisão da $O(\tau^2)$ sem a restrição de comutatividade.

Além disso, a estimativa (1.36) vale para cada ciclo de (1.39), provando a estabilidade deste esquema.

Para o caso não-homogêneo de (1.1) consideraremos o seguinte esquema em $t_{J-1} \leq t \leq t_{J+1}$

$$\begin{aligned} (I + \frac{\tau}{2} \Lambda_1^J) \mu^{J-1/2} &= (I - \frac{\tau}{2} \Lambda_1^J) \mu^{J-1} \\ (I + \frac{\tau}{2} \Lambda_2^J) (\mu^J - \tau f^J) &= (I - \frac{\tau}{2} \Lambda_2^J) \mu^{J-1/2} \\ (I + \frac{\tau}{2} \Lambda_2^J) \mu^{J+1/2} &= (I - \frac{\tau}{2} \Lambda_2^J) (\mu^J + \tau f^J) \\ (I + \frac{\tau}{2} \Lambda_1^J) \mu^{J+1} &= (I - \frac{\tau}{2} \Lambda_1^J) \mu^{J+1/2} \end{aligned} \quad (1.42)$$

onde $\Lambda_\alpha^J = A_\alpha(t_J)$ e $f^J = f(t_J)$.

Resolvendo para μ^{J+1} , obtemos

$$\mu^{J+1} = T^J \mu^{J-1} + 2\tau T_1^J T_2^J f^J \quad (1.43)$$

onde $T^J = T_1^J T_2^J T_2^J T_1^J$ e $T_1^J = (B_1^J)^{-1} B_2^J$

$$T_2^J = (D_1^J)^{-1} D_2^J$$

Para obtermos a ordem de aproximação expandimos T^J , T_1^J e T_2^J em potências de τ transformando (1.43) em

$$\mu^{J+1} = [I - 2\tau\Lambda^J + \frac{(2\tau)^2}{2}(\Lambda^J)^2] \mu^{J-1} + 2\tau(I - \tau\Lambda^J) f^J + O(\tau^3)$$

ou

$$\frac{\mu^{J+1} - \mu^{J-1}}{2\tau} + \Lambda^J (I - \tau\Lambda^J) \mu^{J-1} = (I - \tau\Lambda^J) f^J + O(\tau^2) \quad (1.44)$$

Agora, expandindo μ^J em série de Taylor em torno de t_{J-1} teremos

$$\mu^J = \mu^{J-1} + \tau \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{J-1} + O(\tau^2) \quad (1.45)$$

Mas, $\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{J-1} = -\Lambda^J \mu^{J-1} + f^J + O(\tau)$ então (1.45) torna-se

$$\mu^J = (I - \tau\Lambda^J) \mu^{J-1} + \tau f^J + O(\tau^2) \quad (1.46)$$

Usando esta relação em (1.44) obtemos

$$\frac{\mu^{J+1} - \mu^{J-1}}{2\tau} + \Lambda^J \mu^J = f^J + O(\tau^2) \quad (1.47)$$

Claramente, (1.47) é uma aproximação de 2ª ordem em τ no intervalo $t_{J-1} \leq t \leq t_{J+1}$.

Para analisar a estabilidade do esquema, estimamos (1.43) e lembrando que $\|T_{\alpha}^J\| \leq 1$ teremos

$$\|\mu^{J+1}\| \leq \|\mu^{J-1}\| + 2\tau \|f^J\|$$

Agora, usando a relação recursiva (1.46) teremos

$$\|\mu^J\| \leq \|g\| + \tau^J \|f\|$$

$$\text{onde } \|f\| = \max_J \|f^J\|.$$

Em resumo, se as matrizes semipositivas definidas $A_1(t)$ e $A_2(t)$ e U são bastante suaves então o Método Splitting-Up componente por componente em $t_{J-1} \leq t \leq t_{J+1}$ é absolutamente estável e aproxima (1.1) com 2ª ordem em τ .

1.4 - EQUAÇÕES DO TIPO HIPERBÓLICO

Consideremos o seguinte problema hiperbólico

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + AU = F \quad \text{em } D \times D_t$$

$$U = p \quad (1.48)$$

$$\text{em } D \text{ para } t = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = q$$

onde A é um operador positivo definido independente do tempo e p, q possuem propriedades que garantem a suavidade da solução.

Ao realizarmos a discretização espacial de (1.48) obtemos o seguinte sistema de equações ordinárias

$$\frac{d^2 \mu}{dt^2} + A\mu = f$$

$$\mu^0 = p \tag{1.49}$$

$$\frac{d\mu^0}{dt} = q$$

onde A é o operador discreto no espaço, μ e f aproximam U e F respectivamente.

Em primeiro lugar, consideremos a seguinte aproximação de (1.49)

$$\frac{\mu^{J+1} - 2\mu^J + \mu^{J-1}}{\tau^2} + A\mu^J = f^J \tag{1.50}$$

$$\mu^0 = p \tag{1.51}$$

$$\mu^1 = \left(I - \frac{\tau^2}{2} A\right)p + \tau q + \frac{\tau^2}{2} f^0$$

Não é difícil mostrar que (1.50) junto com (1.51) aproximam (1.49) com 2^{a} ordem de precisão em τ .

Para analisar a estabilidade de (1.50) usa-se o método espectral [11] obtendo que

$$\tau < \frac{2}{\sqrt{\|A\|}}$$

Portanto, o esquema é condicionalmente estável.

Por outro lado, se considerarmos o seguinte esquema implícito:

$$\frac{\mu^{J+1} - 2\mu^J + \mu^{J-1}}{\tau^2} + A\left(\frac{\mu^{J+1} + \mu^J}{2}\right) = f^J$$

com (1.51), teremos uma aproximação também de 2ª ordem em τ e um esquema absolutamente estável [11].

No caso em que $A = A_1 + A_2$ com A_1 e A_2 semipositivos definidos se usamos um esquema similar ao Método Estabilização, isto é,

$$B_1 D_1 \left(\frac{\mu^{J+1} - 2\mu^J + \mu^{J-1}}{\tau^2} \right) + A\mu^J = f^J$$

ou

$$\frac{\mu^{J+1} - 2\mu^J + \mu^{J-1}}{\tau^2} + D_1^{-1} B_1^{-1} A \mu^J = D_1^{-1} B_1^{-1} f^J \quad (1.52)$$

então, pelos resultados anteriores, (1.52) é uma aproximação de 2ª ordem em τ . E pela análise de Fourier teremos estabilidade sempre que

$$\tau < \frac{2}{\sqrt{\beta(D_1^{-1} B_1^{-1} A)}} \quad (1.53)$$

onde $\beta(D_1^{-1} B_1^{-1} A)$ é o limite superior do espectro de $D_1^{-1} B_1^{-1} A$.

Supondo-se que todos os autovalores de $D_1^{-1} B_1^{-1} A$ são positivos, o problema de escolher τ satisfazendo (1.53) reduz-se a

calcular o maior autovalor do seguinte problema

$$A\varphi = \varphi (B_1 D_1)$$

É evidente que a construção de esquemas absolutamente estáveis para equações do tipo hiperbólico exige um tratamento especial dos Métodos Splitting-Up descritos para o problema parabólico.

CAPÍTULO II

APLICAÇÃO

2.1. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Os problemas de nosso interesse tem a seguinte formulação:

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(c^2 \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(c^2 \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) + F \quad (2.1)$$

$$\mu(x, y, 0) = p(x, y) \quad (x, y) \in D \quad (2.2)$$

$$\mu_t(x, y, 0) = q(x, y)$$

$$\mu(x, y, t) = g(x, y) \quad (x, y) \in \partial D \times D_t \quad (2.3)$$

com (2.1) definida em $D \times D_t$, $D \subset \mathbb{R}^2$ e $c^2 = c^2(x, y)$ o quadrado da velocidade de propagação e as funções dadas $p(x, y)$, $q(x, y)$, $g(x, y)$ são suficientemente suaves.

Tentaremos resolver o problema dos seguintes modos:

- i) Reduziremos o problema de 2^a ordem a um problema de 1^a ordem e aplicaremos os métodos Splitting-Up descritos no Capítulo I com diferenças finitas no espaço.

ii) Usaremos o esquema de Crank-Nilcholson no tempo e o Método Elementos Finitos no espaço.

2.2. REDUÇÃO A UM PROBLEMA DE 1^a ORDEM

Para ilustrar o procedimento tomaremos $c^2 = c^2(x,y)$ constante.

Se considerarmos as seguintes funções auxiliares

$$\frac{\partial W}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = c \frac{\partial u}{\partial y}$$

podemos escrever a equação da onda em (2.1) como o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial W}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} - c \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{em } D \times D_t \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} - c \frac{\partial W}{\partial x} - c \frac{\partial V}{\partial y} = H$$

onde $H(x,y,t) = \int_0^t F(x,y,t) dt$.

Além disso, se considerarmos os seguintes dados iniciais

$$w^0 = w^0(x,y) , v^0 = v^0(x,y) \text{ e } \mu = p(x,y) \text{ em } t = 0 \quad (2.5)$$

temos que w^0 e v^0 devem satisfazer condições de suavidade e a relação

$$c \left(\frac{\partial w^0}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial y} \right) + H^0(x,y) = q(x,y) \quad (2.6)$$

Introduzindo a seguinte notação matricial

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & c \frac{\partial}{\partial y} \\ c \frac{\partial}{\partial x} & c \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{vmatrix} ; \quad \mu = \begin{vmatrix} w \\ v \\ \mu \end{vmatrix}$$

podemos escrever as equações (2.4) e (2.5) do seguinte modo:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = A\mu + G \text{ em } D \times D_t \quad (2.7)$$

$$\mu = \mu^0 \text{ em } D \text{ para } t = 0$$

onde μ^0 tem componentes W^0 , V^0 e U^0 e G tem componentes, $0,0,$ e $H(x,y,t)$.

Para formulação do Método Splitting-Up de (2.7) introduzimos as seguintes matrizes

$$A_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 \\ c \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \end{vmatrix} ; \quad A_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & c \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{vmatrix}$$

e claramente $A = A_1 + A_2$.

Marchuk [11] mostra que $(A\mu, \mu) = 0$, $(A_1\mu, \mu) = 0$ e $(A_2\mu, \mu) = 0$. Além disso, mostra também a unicidade de (2.7).

Portanto, podemos discretizar (2.7) em $t_J \leq t \leq t_{J+1}$ usando o Método Preditor-Corretor, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\mu^{J+1/4} - \mu^J}{\tau/2} + A_1 \mu^{J+1/4} &= G^J \\ \frac{\mu^{J+1/2} - \mu^{J+1/4}}{\tau/2} + A_2 \mu^{J+1/2} &= 0 \\ \frac{\mu^{J+1} - \mu^J}{\tau} + A \mu^{J+1/2} &= G^J \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $G^J = G(t_{J+1/2})$.

Na forma escalar (2.8) escreve-se

$$\begin{aligned} \frac{W^{J+1/4} - W^J}{\tau/2} &= c \frac{\partial \mu^{J+1/4}}{\partial x} \\ \frac{V^{J+1/4} - V^J}{\tau/2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\frac{\mu^{J+1/4} - \mu^J}{\tau/2} = c \frac{\partial W^{J+1/4}}{\partial x} + H^J$$

$$\frac{W^{J+1/2} - W^{J+1/4}}{\tau/2} = 0$$

$$\frac{V^{J+1/2} - V^{J+1/4}}{\tau/2} = c \frac{\partial \mu^{J+1/2}}{\partial y} \quad (2.10)$$

$$\frac{\mu^{J+1/2} - \mu^{J+1/4}}{\tau/2} = c \frac{\partial V^{J+1/2}}{\partial y}$$

$$\frac{W^{J+1} - W^J}{\tau} = c \frac{\partial \mu^{J+1/2}}{\partial x}$$

$$\frac{V^{J+1} - V^J}{\tau} = c \frac{\partial \mu^{J+1/2}}{\partial y} \quad (2.11)$$

$$\frac{\mu^{J+1} - \mu^J}{\tau} = c \frac{\partial W^{J+1/2}}{\partial x} + c \frac{\partial V^{J+1/2}}{\partial y} + H^J$$

Usando o fato de $v^{J+1/4} = v^J$ e $w^{J+1/2} = v^{J+1/4}$ em (3.13) e (2.10) respectivamente, os esquemas podem ser simplificados e teremos o seguinte esquema para o problema (2.7)

$$\frac{w^{J+1/2} - w^J}{\tau/2} - c \frac{\partial \mu^{J+1/4}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\mu^{J+1/4} - \mu^J}{\tau/2} - c \frac{\partial w^{J+1/2}}{\partial x} = H^J$$

$$\frac{v^{J+1/2} - v^J}{\tau/2} - c \frac{\partial \mu^{J+1/2}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\mu^{J+1/2} - \mu^{J+1/4}}{\tau/2} - c \frac{\partial v^{J+1/2}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{w^{J+1} - w^J}{\tau} - c \frac{\partial \mu^{J+1/2}}{\partial x} = 0$$

$$\frac{v^{J+1} - v^J}{\tau} - c \frac{\partial \mu^{J+1/2}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\mu^{J+1} - \mu^J}{\tau} - c \frac{\partial w^{J+1/2}}{\partial x} - c \frac{\partial v^{J+1/2}}{\partial y} = H^J$$

As aproximações com relação a x e y serão escolhidas de modo a obtermos esquemas absolutamente estáveis e de segunda ordem para w , v e μ . Além disso, que preservem as condições $(A_1 \mu, \mu) = 0$ e $(A_2 \mu, \mu) = 0$ para as representações discretas de A_1

e A_2 . Assim,

$$\frac{W_{k\ell}^{J+1/2} - W_{k\ell}^J}{\tau/2} - \frac{c}{h_x} (\mu_{k\ell}^{J+1/4} - \mu_{k-1\ell}^{J+1/4}) = 0 \quad (2.12a)$$

$$\frac{\mu_{k\ell}^{J+1/4} - \mu_{k\ell}^J}{\tau/2} - \frac{c}{h_x} (W_{k+1\ell}^{J+1/2} - W_{k\ell}^{J+1/2}) = H^J \quad (2.12b)$$

$$\frac{V_{k\ell}^{J+1/2} - V_{k\ell}^J}{\tau/2} - \frac{c}{h_y} (\mu_{k\ell}^{J+1/2} - \mu_{k\ell-1}^{J+1/2}) = 0 \quad (2.13a)$$

$$\frac{\mu_k^{J+1/2} - \mu_k^{J+1/4}}{\tau/2} - \frac{c}{h_y} (V_{k\ell+1}^{J+1/2} - V_{k\ell}^{J+1/2}) = 0 \quad (2.13b)$$

$$\frac{W_{k\ell}^{J+1} - W_{k\ell}^J}{\tau} - \frac{c}{h_x} (\mu_{k\ell}^{J+1/2} - \mu_{k-1\ell}^{J+1/2}) = 0$$

$$\frac{V_{k\ell}^{J+1} - V_{k\ell}^J}{\tau} - \frac{c}{h_y} (\mu_{k\ell}^{J+1/2} - \mu_{k\ell-1}^{J+1/2}) = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\mu_{k\ell}^{J+1} - \mu_{k\ell}^J}{\tau} - \frac{c}{h_x} (W_{k+1\ell}^{J+1/2} - W_{k\ell}^{J+1/2}) - \frac{c}{h_y} (V_{k\ell+1}^{J+1/2} - V_{k\ell}^{J+1/2}) = H_{k\ell}^J$$

Agora, vamos eliminar $W^{J+1/2}$ e $V^{J+1/2}$ de (2.12b) e (2.13b) utilizando as equações (2.12a) e (2.13b).

Por (2.12a) e (2.13a) teremos

$$W_{kl}^{J+1/2} = W_{kl}^J + \frac{\tau c}{2h_x} (\mu_{kl}^{J+1/4} - \mu_{k-1l}^{J+1/4}) \quad (2.15a)$$

$$V_{kl}^{J+1/2} = V_{kl}^J + \frac{\tau c}{2h_y} (\mu_{kl}^{J+1/2} - \mu_{kl-1}^{J+1/2}) \quad (2.15b)$$

Substituindo (2.15a) em (2.12b) e (2.15b) em (2.13b) obteremos

$$\frac{c^2 \tau^2}{4h_x^2} (-\mu_{k+1l}^{J+1/4} + 2\mu_{kl}^{J+1/4} - \mu_{k-1l}^{J+1/4}) + \mu_{kl}^{J+1/4} = g_{kl}^J + \frac{\tau}{2} H_{kl}^J$$

onde $g_{kl}^J = \frac{\tau c}{2h_x} (W_{k+1l}^J - W_{kl}^J) + \mu_{kl}^J$.

$$\frac{c^2 \tau^2}{4h_y^2} (-\mu_{kl+1}^{J+1/2} + 2\mu_{kl}^{J+1/2} - \mu_{kl-1}^{J+1/2}) + \mu_{kl}^{J+1/2} = S_{kl}^J$$

onde $S_{kl}^J = \frac{\tau c}{2h_y} (V_{kl+1}^J - V_{kl}^J) + \mu_{kl}^{J+1/4}$

Deste modo, obtemos o seguinte algoritmo para solução numérica de (2.7):

(1) Calcular W^0 e V^0 que satisfaçam

$$c \left(\frac{W_{k+1l}^0 - W_{kl}^0}{h_x} + \frac{V_{kl+1}^0 - V_{kl}^0}{h_y} \right) + H_{kl}^0 = q(x_k, y_l)$$

(2) Calcular $g_{k\ell}^J$ e $\frac{\tau}{2} H_{k\ell}^J$ onde

$$g_{k\ell}^J = \frac{\tau c}{2h_x} (W_{k+1\ell}^J - W_{k\ell}^J) + \mu_{k\ell}^J$$

(3) Resolver o sistema

$$\frac{\tau^2 c^2}{4h_x^2} (-\mu_{k+1\ell}^{J+1/4} + 2\mu_{k\ell}^{J+1/4} - \mu_{k-1\ell}^{J+1/4}) + \mu_{k\ell}^{J+1/4} = g_{k\ell}^J + \frac{\tau}{2} H_{k\ell}^J$$

(4) Calcular $w_{k\ell}^{J+1/2} = \frac{\tau c}{2h_x} (\mu_{k\ell}^{J+1/4} - \mu_{k-1\ell}^{J+1/4}) + w_{k\ell}^J$

(5) Calcular $s_{k\ell}^J = \frac{\tau c}{2h_y} (v_{k\ell+1}^J - v_{k\ell}^J) + \mu_{k\ell}^{J+1/4}$

(6) Resolver o sistema

$$\frac{\tau^2 c^2}{4h_y^2} (-\mu_{k\ell+1}^{J+1/2} + 2\mu_{k\ell}^{J+1/2} - \mu_{k\ell-1}^{J+1/2}) + \mu_{k\ell}^{J+1/2} = s_{k\ell}^J$$

(7) Calcular $v_{k\ell}^{J+1/2} = \frac{\tau c}{2h_y} (\mu_{k\ell}^{J+1/2} - \mu_{k\ell-1}^{J+1/2}) + v_{k\ell}^J$

(8) Calcular com a ajuda de (4), (6) e (7)

$$w_{k\ell}^{J+1} = \frac{\tau c}{h_x} (\mu_{k\ell}^{J+1/2} - \mu_{k-1\ell}^{J+1/2}) + w_{k\ell}^J$$

$$V_{kl}^{J+1} = \frac{\tau c}{h_y} (\mu_{kl}^{J+1/2} - \mu_{kl-1}^{J+1/2}) + V_{kl}^J$$

$$\mu_{kl}^{J+1} = \frac{\tau c}{h_x} (w_{k+1l}^{J+1/2} - w_{kl}^{J+1/2}) + \frac{\tau c}{h_y} (v_{kl+1}^{J+1/2} - v_{kl}^{J+1/2}) + \tau H_{kl}^J + \mu_{kl}^J$$

completando o ciclo.

Finalmente, notemos que tal procedimento pode ser generalizado para equações hiperbólicas mais complicadas com o mínimo de exigência sobre A_α , $\alpha = 1, 2$.

De modo análogo podemos obter os algoritmos para os outros esquemas Splitting-Up. Descreveremos apenas alguns destes algoritmos.

ALGORÍTMO SPLITTING-UP componente a componente aplicando-se o esquema (1.34):

(1) Calcular w^0 e v^0 que satisfaçam

$$c \left(\frac{w_{k+1l}^0 - w_{kl}^0}{h_x} + \frac{v_{kl+1}^0 - v_{kl}^0}{h_y} \right) = q(x_k, y_l)$$

(2) Calcular $g_{kl}^J = \frac{\tau c}{2h_x} (w_{k+1l}^J - w_{kl}^J) + \mu_{kl}^J$

(3) Resolver o sistema

$$\frac{\tau c^2}{4h_x^2} (-\mu_{k+1l}^{J+1/4} + 2\mu_{kl}^{J+1/4} - \mu_{k-1l}^{J+1/4}) + \mu_{kl}^{J+1/4} = g_{kl}^J$$

(4) Calcular $\mu_{kl}^{J+1/2} = 2\mu_{kl}^{J+1/4} - \mu_{kl}^J$

(5) Calcular $S_{kl}^J = \frac{\tau c}{2h_y} (V_{kl+1}^J - V_{kl}^J) + \mu_{kl}^{J+1/2}$

(6) Resolver o sistema

$$\frac{\tau^2 c^2}{4h_y^2} (-\mu_{kl+1}^{J+3/4} + 2\mu_{kl}^{J+3/4} - \mu_{kl+1}^{J+3/4}) + \mu_{kl}^{J+3/4} = S_{kl}^J$$

(7) Calcular

$$\mu_{kl}^{J+1} = 2\mu_{kl}^{J+3/4} - \mu_{kl}^{J+1/2}$$

$$W_{kl}^{J+1} = W_{kl}^J + \frac{\tau c}{2h_x} [(\mu_{kl}^{J+1/2} - \mu_{k-1l}^{J+1/2}) + (\mu_{kl}^J - \mu_{k-1l}^J)]$$

$$V_{kl}^{J+1} = V_{kl}^J + \frac{\tau c}{2h_y} [(\mu_{kl}^{J+1} - \mu_{kl-1}^{J+1}) + (\mu_{kl}^{J+1/2} - \mu_{kl-1}^{J+1/2})]$$

ALGORÍTMO ESTABILIZAÇÃO para o caso homogêneo:

(1) Calcular w^0 e v^0 que satisfaçam

$$c \left(\frac{w_{k+1l}^0 - w_{kl}^0}{h_x} + \frac{v_{kl+1}^0 - v_{kl}^0}{h_y} \right) = q(x_k, y_l)$$

(2) Calcular

$$g_{kl}^J = \frac{\tau c^2}{2h_x^2} (\mu_{k+1l}^J - 2\mu_{kl}^J + \mu_{k-1l}^J)$$

$$f_{kl}^J = \frac{c}{h_x} (W_{k+1l}^J - W_{kl}^J) + \frac{c}{h_y} (V_{kl+1}^J - V_{kl}^J)$$

(3) Resolver o sistema

$$\frac{\tau c^2}{4h_x^2} (-\beta_{k+1l}^{J+1/2} + 2\beta_{kl}^{J+1/2} - \beta_{k-1l}^{J+1/2}) + \beta_{kl}^{J+1/2} = g_{kl}^J + f_{kl}^J$$

(4) Calcular

$$\alpha_{kl}^{J+1} = \frac{\tau c}{2h_x} (\beta_{kl}^{J+1/2} - \beta_{k-1l}^{J+1/2}) + \frac{c}{h_x} (\mu_{kl}^J - \mu_{k-1l}^J)$$

(5) Calcular $S_{kl}^J = \frac{\tau c^2}{2h_y} (\mu_{kl+1}^J - 2\mu_{kl}^J + \mu_{kl-1}^J) + \beta_{kl}^{J+1/2}$

(6) Resolver o sistema

$$\frac{\tau c^2}{4h_y^2} (-\beta_{kl+1}^{J+1} + 2\beta_{kl}^{J+1} - \beta_{kl-1}^{J+1}) + \beta_{kl}^{J+1} = S_{kl}^J$$

(7) Calcular $\theta_k^{J+1} = \frac{\tau c}{2h_y} (\beta_{kl}^{J+1} - \beta_{kl-1}^{J+1}) + \frac{c}{h_y} (\mu_{kl}^J - \mu_{kl-1}^J)$

(8) Calcular

$$W_{kl}^{J+1} = W_{kl}^J + \tau \alpha_{kl}^{J+1}$$

$$V_{kl}^{J+1} = V_{kl}^J + \tau \theta_{kl}^{J+1}$$

$$\mu_{kl}^{J+1} = \mu_{kl}^J + \tau \beta_{kl}^{J+1}$$

onde $\xi = \begin{vmatrix} \alpha \\ \theta \\ \beta \end{vmatrix}$

2.3. FORMULAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

Consideremos um domínio D cujo interior possui propriedades distintas em subregiões D_1 e D_2 separadas por uma interface plana Γ (Figura 1). Naturalmente, estas propriedades são caracterizadas por diferentes velocidades de propagação. Consideremos $c^2 = c^2(x,y)$ constantes distintas em cada subregião.

Além disso, podemos supor que a fonte F é uma função descontínua nos pontos da interface Γ .

Em situações físicas desta natureza, supondo que a normal exterior η_1 para D_1 como a negativa de η_2 para D_2 e recordando que $\frac{\partial \mu}{\partial \eta} = \nabla \mu \cdot \eta$, o princípio da conservação estabelece que nos pontos da interface Γ temos

$$\frac{\partial \mu^{(+)}}{\partial \eta} = \frac{\partial \mu^{(-)}}{\partial \eta} \quad (2.16)$$

onde $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ é a normal exterior a D .

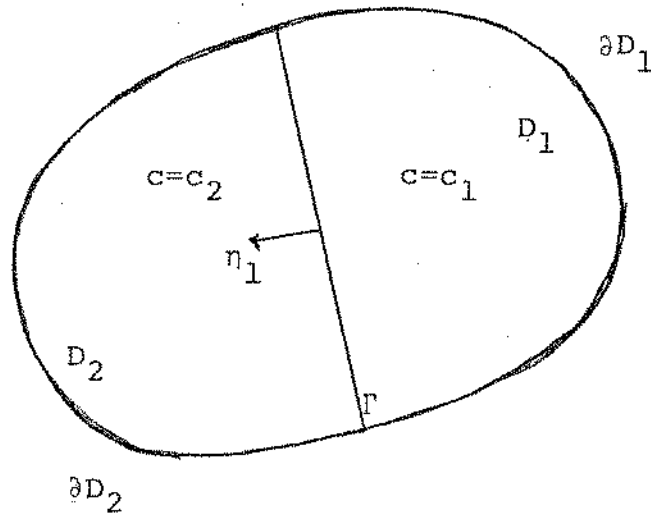


Figura 1

Portanto, nosso problema consiste em encontrar $U(x,y,t) \in D \times (0,T]$ que satisfaz a equação (2.1) nos pontos interiores de D com os seguintes dados:

- i) A fonte $F = F_k(x,y)$ em D_k , $k = 1,2$
- ii) As velocidades de propagação $c = c_k(x,y)$ em D_k , $k = 1,2$
- iii) A condição de contorno (2.3) em $\partial D_k \times D_t$
- iv) As condições iniciais (2.2) em D
- v) A condição (2.16) na interface Γ .

FORMULAÇÃO VARIACIONAL

Seja $V = \{v : v \in H^1(D), v = 0 \text{ em } \partial D\}$.

Multiplicando a equação (2.1) por $v \in V$ e integrado obtemos

$$\sum_{k=1}^2 \iint_{D_k} \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} - c^2 \Delta \mu \right) v \, dx dy = \sum_{k=1}^2 \iint_{D_k} F v \, dx dy$$

Aplicando o teorema de Green em cada subregião D_k , $k = 1, 2$ teremos

$$\sum_{k=1}^2 \iint_{D_k} \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} v - \int_{\partial D_k} v \frac{\partial \mu}{\partial n} \, dr + c^2 \iint_{D_k} \nabla \mu \cdot \nabla v \, dx dy = \sum_{k=1}^2 \iint_{D_k} F v \, dx dy \quad (2.17)$$

Devemos ter um certo cuidado ao escrevermos as integrais por fronteira em (2.17). Devemos ter em mente os domínios onde as funções estão definidas. Para melhor compreensão, na figura 2 mostramos D_1 e D_2 separadamente com a fronteira de cada subregião dividida em duas partes — as partes de ∂D_k que não coincidem com a interface Γ denotamos por $\partial D_k - \Gamma$, $k = 1, 2$.

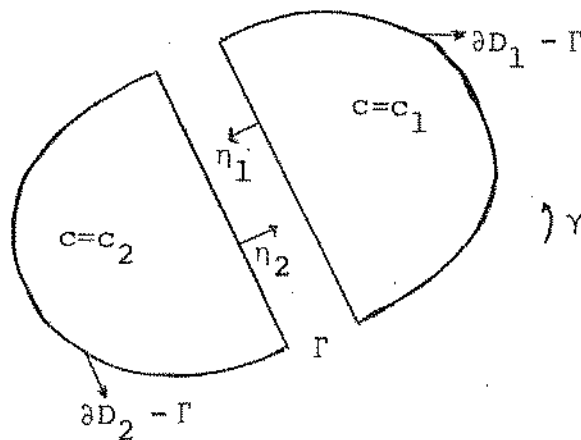


Figura 2

Decompondo as integrais de fronteira em (2.17) teremos

$$\sum_{k=1}^2 \int_{\partial D_k} v \frac{\partial \mu}{\partial \eta} dr = \int_{\partial D_1 - \Gamma} \frac{\partial \mu}{\partial \eta} v dr + \int_{\partial D_2 - \Gamma} \frac{\partial \mu}{\partial \eta} v dr + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \eta}\right)_1 v d\Gamma + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \eta}\right)_2 v d\Gamma$$

onde $\left(\frac{\partial \mu}{\partial \eta}\right)_k$ indica que $\frac{\partial \mu}{\partial \eta}$ está sendo avaliada na subregião k .

Pelo fato que a normal exterior η_1 da subregião D_1 ser a negativa de η_2 em cada ponto de Γ , podemos escrever as integrais em Γ como

$$\int_{\Gamma} v \left(\frac{\partial \mu}{\partial \eta}^{(+)} + \frac{\partial \mu}{\partial \eta}^{(-)} \right) d\Gamma .$$

Esta integral anula-se devido a condição (2.16).

Por outro lado, podemos combinar as integrais restantes na única sobre a fronteira ∂D , isto é,

$$\int_{\partial D} \frac{\partial \mu}{\partial \eta} v dr$$

e como estamos considerando $v \in V$, esta integral também se anulará.

Assumindo que μ é suficientemente suave, podemos escrever (2.17) como

$$\iint_D \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} v dx dy + c^2 \iint_D \nabla \mu \cdot \nabla v dx dy = \iint_D F v dx dy \quad (2.18)$$

Portanto, nosso problema variacional consiste em encontrar $\mu(x,y,t)$ tal que para todo t , $t \in [0, T]$, $\mu(x,y,t) \in H^1(D)$ satisfaça

(2.18) para $v \in V$ e

$$\mu(x,y,0) = p(x,y)$$

em $(x,y) \in D$

$$\mu_t(x,y,0) = q(x,y)$$

$$\mu(x,y,t) = g(x,y) \quad \text{em } \partial D \times D_t$$

com $c = c_k(x,y)$ e $F = F_k(x,y)$ para $(x,y) \in D_k$, $k = 1,2$.

APROXIMAÇÃO DE GALERKIN:

Consideremos uma base $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ que define um subespaço m -dimensional H^h de $H^1(D)$.

Buscaremos uma solução aproximada $\mu_h \in H^h$ da seguinte forma

$$\mu_h(x,y,t) = \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \varphi_i(x,y)$$

e tomaremos $v_h = \varphi_i(x,y)$, $1 \leq i \leq M$.

Fazendo tais escolhas, o problema aproximado consiste no seguinte sistema semi-discreto:

$$\iint_D \frac{\partial^2 \mu_h}{\partial t^2} v_h \, dx dy + c^2 \iint_D \nabla \mu_h \cdot \nabla v_h \, dx dy = \iint_D F v_h \, dx dy$$

com $\mu_h(x, y, 0) \longrightarrow p(x, y)$

$$\frac{\partial \mu_h}{\partial t}(x, y, 0) \longrightarrow q(x, y)$$

$$\mu_h(x, y, t) = g(x, y) .$$

APROXIMAÇÃO ELEMENTOS FINITOS

Substituiremos o domínio D pelo domínio D_h que consiste de uma coleção de E elementos finitos e N pontos nodais e definimos as funções φ_i , $1 \leq i \leq M$ como polinômios de Lagrange lineares por partes nas direções x e y .

Visto que as funções φ_i serão contínuas apenas em cada elemento finito, sempre escolheremos a localização dos nós e as fronteiras dos elementos de modo que coincidam com a interface Γ na qual ocorre a descontinuidade de c .

Tomando μ_h como a seguinte interpolação de u

$$\mu_h = \sum_{i=1}^M \mu_i(t) \varphi_i(x, y)$$

onde μ_i é o valor de u no nó (x_J, y_J) no tempo t , o sistema anterior torna-se

$$\begin{aligned} \iint_{D_h} \frac{d^2 \mu_i(t)}{dt^2} \varphi_i \varphi_J \, dx dy + c^2 \iint_{D_h} (\mu_i(t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_J}{\partial x} + \mu_i(t) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_J}{\partial y}) \, dx dy = \\ = \iint_{D_h} F \varphi_i \, dx dy \end{aligned} \quad (2.19)$$

Portanto, procuramos uma função $\mu_h \in H^h$ na forma

$$\mu_h(x, y, t) = \sum_{i=1}^M \mu_i(t) \varphi_i(x, y)$$

tal que (2.19) valha para toda $v \in V$ e $\mu_i = g(x, y)$ em ∂D_h

$$\mu_i \Big|_{t=0} \longrightarrow p(x, y)$$

$$\frac{d\mu_i}{dt} \Big|_{t=0} \longrightarrow q(x, y) .$$

Em forma matricial, (2.19) pode ser escrita como

$$IM \frac{d^2 \mu}{dt^2} + IK \mu = IF(t) \quad (2.20)$$

onde

$$IM = \iint_{D_h} \varphi_i \varphi_J \, dx dy$$

$$IK = \iint_{D_h} c^2 \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi_J}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi_J}{\partial y} \right) \, dx dy$$

$$IF(t) = \iint_{D_h} F(x,y,t) \varphi_i \, dx dy$$

com

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1(t) \\ \mu_2(t) \\ \vdots \\ \mu_M(t) \end{pmatrix} ; (i,J) = 1,2,3,\dots,M$$

DISCRETIZAÇÃO NO TEMPO

Particionaremos o intervalo temporal $0 \leq t \leq T$ em m intervalos de comprimento $\tau = T/m$ e usaremos para discretizar o problema (2.20) o esquema de Crank-Nicholson, portanto teremos

$$IM \left(\frac{\mu^{k+1} - 2\mu^k + \mu^{k-1}}{\tau^2} \right) + IK \left(\frac{\mu^{k+1} + \mu^{k-1}}{2} \right) = IF^{k+1/2}$$

ou

$$(2IM + \tau^2 IK) \mu^{k+1} = 4IM \mu^k - (2IM + \tau^2 IK) \mu^{k-1} + 2\tau^2 IF^{k+1/2}$$

onde $t_k = k\tau$.

APROXIMAÇÃO DAS CONDIÇÕES INICIAIS:

Para obtermos μ^1 expandiremos a solução $\mu(x,y,t)$ em série de Taylor em torno de $t = 0$, assim

$$\mu^1 = \mu(0) + \tau \left. \frac{d\mu}{dt} \right|_{t=0} + \frac{\tau^2}{2} \left. \frac{d^2\mu}{dt^2} \right|_{t=0}$$

Usando a equação (2.20) e as condições iniciais teremos

$$\mu^1 = p + \tau q + \frac{\tau^2}{2} \mathbb{M}^{-1} \mathbb{F}(0) - \mathbb{M}^{-1} \mathbb{K} p \quad (2.21)$$

Deste modo, para obtermos μ^1 com 2ª ordem em τ devemos resolver o sistema (2.21).

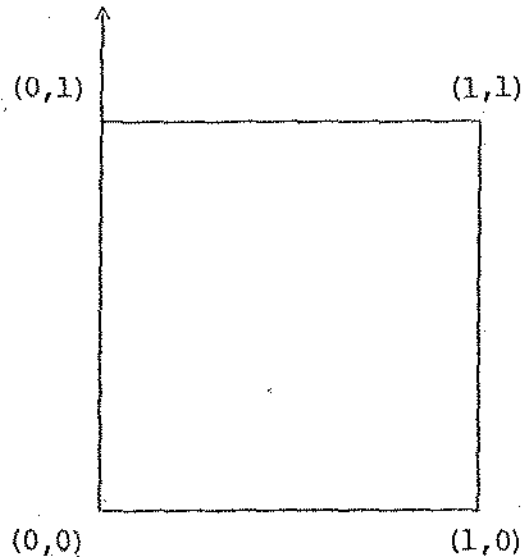
É bem conhecido da literatura que a solução do problema variacional existe, é única e tem dependência contínua com os dados do problema e que a solução aproximada μ_h converge para a solução deste problema. Citamos [13], [15] e [18] como referências básicas para tal procedimento.

Além disso, citamos [1] e [7] que obtêm estimativas a priori do erro.

CAPÍTULO III

IMPLEMENTAÇÃO E RESULTADOS

Por simplicidade, suponhamos que (2.1) esteja definida em $D = [0,1] \times [0,1]$ como mostra a Figura 3.



(Figura 3)

3.1. ESTRUTURA DO PROGRAMA PARA OS MÉTODOS SPLITTING-UP

Os métodos Splitting-Up implementados foram o Preditor - Corretor e Splitting-Up componente a componente. A estrutura dos programas para estes métodos é extremamente simples, cuja orientação são os algoritmos apresentados no Capítulo II.

Destacamos o fato de considerarmos a estrutura das matrizes (tridiagonais) na implementação, o que acarretou economia de

memória e tempo de processamento. Além disso, devido o operador do problema original ser definido positivo e simétrico, optamos pelo Método de Cholesky para solução dos sistemas, tornando o programa bastante eficiente.

Relação das Variáveis e Dimensões

IWB	banda da matriz dos sistemas
MPOIN	número de pontos em cada direção com exceção dos pontos de fronteira
NXNODE	número de pontos na direção X
NYNODE	número de pontos na direção Y
MAUX	$(MPOIN + 1) * (MPOIN)$
NAUX	$(MPOIN) * (NYNODE)$
A(NPOIN, IWB)	matriz dos sistemas
XCOORD(NXNODE)	matriz das coordenadas cartesianas na direção X
YCOORD(NYNODE)	matriz das coordenadas cartesianas na direção Y
APROX(NAUX, 2)	matriz solução
W(MAUX, 2)	matriz da função auxiliar W
V(MAUX, 2)	matriz da função auxiliar V.

Descrição das Subrotinas

Subrotina ENTRADA: Constrói as matrizes XCOORD(NXNODE) e YCOORD(NYNODE)

Subrotina Process: Processa os algoritmos descritos no Capítulo II

Subrotina Cholesky: Decompõe a matriz A(MPOIN, IWB)

Subrotina Solve: Resolve os sistemas.

3.2. ESTRUTURA DO PROGRAMA ELEMENTOS FINITOS

A estrutura do programa Elementos Finitos tem maior grau de complexidade. Para melhor compreensão do programa discutiremos sucintamente alguns aspectos que operacionalizam o cálculo das matrizes de rigidez e massa e do vetor carga. Em seguida, descreveremos os aspectos computacionais propriamente ditos.

CÁLCULO ELEMENTO FINITO

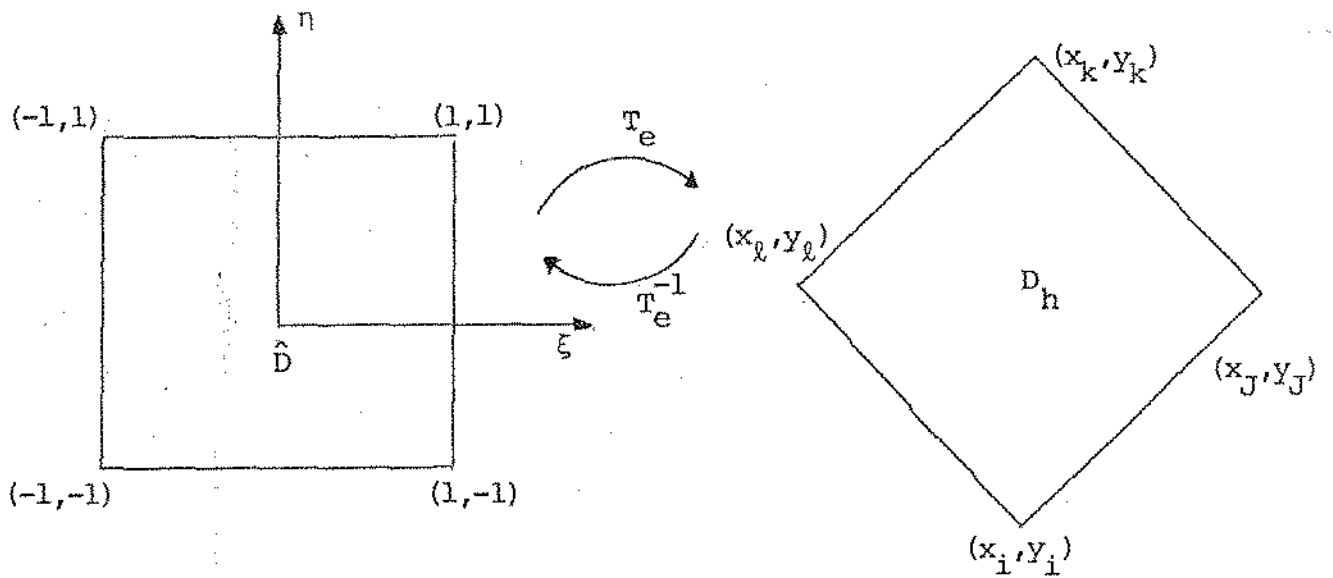
Elemento Padrão.

Usamos um quadrado de vértices $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,1)$ e $(1,-1)$ (Figura 4) e definimos a transformação $T_e: \hat{D} \longrightarrow D_h$ por

$$T_e : \hat{D} \longrightarrow D_h$$

$$(\xi, \eta) \longrightarrow x = x(\xi, \eta) = \sum_{J=1}^N x_J \varphi_J(\xi, \eta)$$

$$y = y(\xi, \eta) = \sum_{J=1}^N y_J \varphi_J(\xi, \eta)$$



(Figura 4)

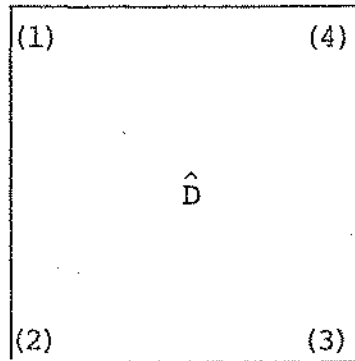
A matriz jacobiana desta transformação é dada por

$$J = \sum_{J=1}^N \begin{bmatrix} x_J \frac{\partial \hat{\varphi}_J}{\partial \xi} & x_J \frac{\partial \hat{\varphi}_J}{\partial \eta} \\ y_J \frac{\partial \hat{\varphi}_J}{\partial \xi} & y_J \frac{\partial \hat{\varphi}_J}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

FUNÇÕES DE FORMAS E SUAS DERIVADAS

Enumeração do Elemento Padrão

Como estamos considerando D_h quadrados (elementos não curvos) usamos uma transformação isoparamétrica e a seguinte enumeração para o elemento padrão (enumeração local):



As funções de forma são as seguintes funções de Lagrange lineares por partes:

$$\hat{\varphi}_1(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$$

$$\hat{\varphi}_2(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$\hat{\varphi}_3(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$\hat{\varphi}_4(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$$

cujas as derivadas são:

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 + \eta) \quad ; \quad \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 - \eta)$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial \xi} = -\frac{1}{4}(1 - \eta) \quad ; \quad \frac{\partial \hat{\varphi}_4}{\partial \xi} = \frac{1}{4}(1 + \eta)$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_1}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 - \xi) \quad ; \quad \frac{\partial \hat{\varphi}_3}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1 + \xi)$$

$$\frac{\partial \hat{\varphi}_2}{\partial \eta} = -\frac{1}{4}(1 - \xi) \quad ; \quad \frac{\partial \hat{\varphi}_4}{\partial \eta} = \frac{1}{4}(1 + \xi)$$

MATRIZ DE RIGIDEZ

$$K = c^2 \iint_{D_h} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \quad \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \quad \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} \right) dx dy$$

as funções de base $\varphi_i(x,y)$ são definidas em \hat{D} por

$$\varphi_i(x,y) = \hat{\varphi}_i(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)) = \hat{\varphi}_i(\xi,\eta)$$

Aplicando a regra da cadeia temos

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

onde J^{-1} é a jacobiana inversa.

ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Dados de Controle

NELEN número de elementos no domínio
NXELEN número de elementos na direção X
NYELEN número de elementos na direção y

NTIME	número de divisões no tempo
NGAUS	número de pontos da regra de integração
NXNODE	número de pontos na direção X
NYNODE	número de pontos na direção Y
NTOTAL	número total de pontos no domínio
NPOIN	número de pontos internos no domínio
IWB	banda das matrizes globais
NNODE	número de pontos no elemento padrão
NDIME	dimensão do domínio.

COORDENADAS CARTESIANAS DO DOMÍNIO

As coordenadas cartesianas do domínio são armazenadas em `COORD(NTOTAL, NDIME)` onde

$$\text{COORD} = [x_i \quad Y_i] \quad 1 \leq i \leq \text{NTOTAL}$$

As coordenadas de cada elemento são armazenadas em `ELCOD(NDIME, NNODE)` onde,

$$\text{ELCOD} = \begin{bmatrix} x_i \\ Y_i \end{bmatrix} \quad 1 \leq i \leq \text{NNODE}$$

A matriz `COORD` é construída com o auxílio das matrizes `XCOORD(NXNODE)` e `YCOORD(NYNODE)` onde

`XCOORD(i)`: i-ésima coordenada cartesiana na direção X

`YCOORD(i)`: i-ésima coordenada cartesiana na direção Y.

JACOBIANA, JACOBIANA INVERSA E DETERMINANTE

Armazenamos J em $XJACM(2,2)$, J^{-1} em $XJACI(2,2)$ e $\det J$ em $DJACB$.

FUNÇÕES DE FORMAS E SUAS DERIVADAS

As funções de forma são armazenadas em $FORMA(NNODE)$ onde

$$FORMA = [\hat{\varphi}_i(\xi, \eta)] \quad 1 \leq i \leq NNODE$$

e suas derivadas em $DERIV(NDIME, NNODE)$ onde

$$DERIV = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad 1 \leq i \leq NNODE$$

MATRÍZ DE RIGIDEZ

As derivadas cartesianas das funções em cada elemento são armazenadas em $CARTD(NDIME, NNODE)$ onde

$$CARTD = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \end{bmatrix}$$

portanto

$$CARTD = XJACI * DERIV.$$

Construímos a matriz CATCA(NNODE, NNODE) para cada elemento onde

$$\text{CATCA} = \text{CARTD}^t * \text{CARTD}$$

Deste modo, cada entrada da matriz de rigidez IK no elemento padrão é dada por

$$\hat{K}_{iJ} = c^2 \iint_{\hat{D}} \text{CATCA}(\xi, \eta) \text{DJACB} \, d\xi d\eta.$$

Para calcular estas integrais usamos quadratura gaussiana de ordem NGAUS por direção.

Então

$$\hat{K}_{iJ} = c^2 \sum_{m=1}^{\text{NGAUS}} \left[\sum_{\ell=1}^{\text{NGAUS}} \text{CATCA}(\xi_m, \eta_\ell) \text{DJACB} \, c^2 \, W(\ell) \right] W(m)$$

onde (ξ_m, η_ℓ) são os pontos de Gauss com $W(m)$ e $W(\ell)$ os respectivos pesos.

Os pontos de Gauss são armazenados em POSGP(NGAUS) e os pesos em WEIGP(NGAUS).

A matriz de rigidez por elemento é armazenada em KELEM(NNODE, NNODE) e a matriz de rigidez global em KGLOB(NPOIN, IWB).

MATRIZ DE MASSA

Cada entrada da matriz de massa IM no elemento padrão é dada por

$$\hat{m}_{iJ} = \iint_{\hat{D}} \hat{\varphi}_i(\xi, \eta) \hat{\varphi}_j(\xi, \eta) DJACB d\xi d\eta .$$

Armazenamos o produto das funções de forma em FPROD(NNODE, NNODE) onde

$$FPROD = [\hat{\varphi}_i * \hat{\varphi}_j]$$

Portanto,

$$\hat{m}_{ij} = \sum_{m=1}^{NGAUS} \left[\sum_{\ell=1}^{NGAUS} FPROD(\xi_m, \eta_\ell) DJACB W(\ell) \right] W(m)$$

Armazenamos a matriz de massa por elemento em MELEM(NNODE, NNODE) e a matriz de massa global em MGLOB(MPOIM, IWB).

VETOR DE CARGA

$$IF = \iint_{D_h} F(x, y, t) \varphi_i(x, y) dx dy$$

Neste caso devemos avaliar o termo $F(x, y, t)$ nas coordenadas (ξ, η) para cada elemento do seguinte modo:

$$\bar{\xi} = \sum_{i=1}^{NNODE} x_i \hat{\varphi}_i(\xi, \eta)$$

$$\bar{\eta} = \sum_{i=1}^{NNODE} y_i \hat{\varphi}_i(\xi, \eta)$$

Portanto, cada entrada do vetor de carga no elemento padrão é dada por

$$\hat{f}_i = \iint_{\hat{D}} F(\bar{\xi}, \bar{\eta}, t) \hat{\varphi}_i(\xi, \eta) DJACB d\xi d\eta$$

$$\hat{f}_i = \sum_{m=1}^{NGAUS} \left[\sum_{\ell=1}^{NGAUS} F(\bar{\xi}, \bar{\eta}, t) \hat{\varphi}_i(\xi_m, \eta_\ell) DJACB W(\ell) \right] W(m) .$$

Armazenamos o vetor de carga por elemento em FELEM(NNODE) e o vetor de carga global em FTIME(NPOIN)

ENUMERAÇÃO GLOBAL

Escolhemos a enumeração dos pontos do domínio no sentido vertical na direção de cima para baixo e a enumeração dos elementos no sentido horizontal na direção da esquerda para direita. A figura 5 exemplifica tais escolhas.

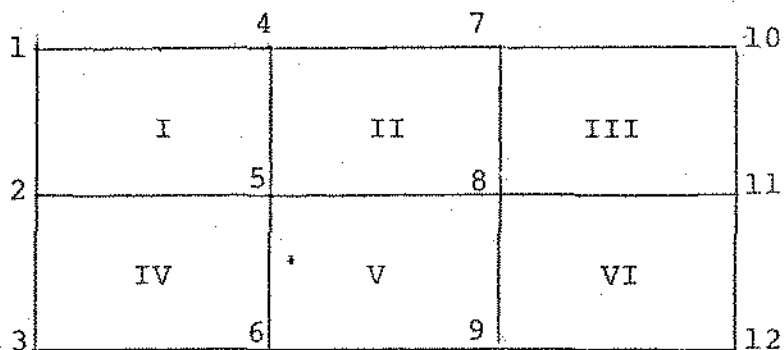


Figura 5

A enumeração de cada elemento é armazenada em LNODS(NELEM, NNODE).

CONDIÇÕES DE FRONTEIRA

Como a solução é conhecida nos pontos de fronteira, tais pontos não são considerados na formação de KGLOB e MGLOB, apenas na formação de FTIME.

Identificamos os pontos de fronteira do seguinte modo:

- 1 - está na fronteira
- 0 - caso contrário.

Os valores pré-estabelecidos da solução são armazenados em PREFIX(NTOTAL).

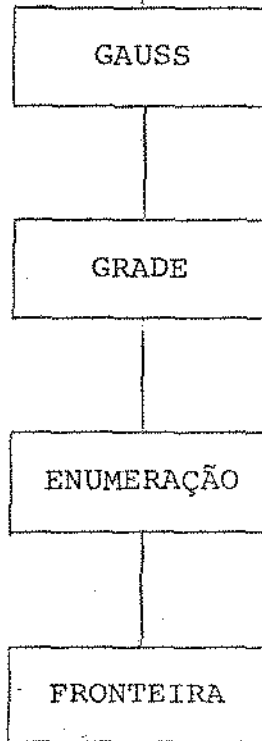
A identificação dos pontos de fronteira é armazenada em NOFIX(NTOTAL).

Como os pontos de fronteira não são considerados na formação de KGLOB e MGLOB, fazemos uma nova enumeração global no domínio e armazenamos esta informação em INODS(NTOTAL). Por exemplo,

1		5		9	13
2	(1)	6	(3)	10	14
3	(2)	7	(4)	11	15
4		8		12	16

DESCRIÇÃO DAS SUBROTINAS

ENTRADA



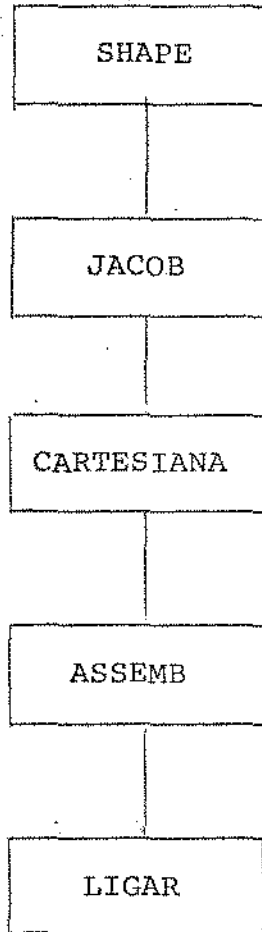
Subrotina GAUSS: Armazena POSGP e WEIGP

Subrotina GRADE: Constrói XCOORD, YCOORD e COORD

Subrotina ENUMERAÇÃO: Constrói LNODS

Subrotina FRONTEIRA: Constrói NOFIX, PREFIX, INODS .

TEMPO



Subrotina SHAPE: Calcula FORMA e DERIV

Subrotina JACOB: Calcula XJACM, XJACI, DJACB

Subrotina CARTESIANA: Calcula CARTD, CATCA, FPROD

Subrotina ASSEMB: Constrói FTIME

Subrotina LIGAR: Constrói KGLOB e MGLOB.

ALGORÍTMO

1. Laço sobre cada tempo: $I = 0, \dots, \text{NTIME}-1$
2. Laço sobre cada elemento: $J = 1, 2, \dots, \text{NELEM}$
3. Calcular FELEM

$$I \neq 0: \begin{cases} \text{SIM} - \text{PASSO 6} \\ \text{NÃO} - \text{SIGA} \end{cases}$$

$$J \neq 1: \begin{cases} \text{SIM} - \text{PASSO 5} \\ \text{NÃO} - \text{SIGA} \end{cases}$$

4. Calcular KELEM E MELEM
5. Construir $\text{KGLOB} = 2\text{MELEM} + \tau^2 \text{KELEM} + \text{MGLOB}$
6. Construir $\text{FTIME} - \text{PASSO 2}$

$$I = 0: \begin{cases} \text{SIM} - \text{SEGUE} \\ \text{NÃO} - \text{PASSO 9} \end{cases}$$

7. Calcular $B = 4\text{MGLOB} \mu^k - \text{KGLOB} \mu^{k-1} + 2\tau^2 \text{FTIME}$
8. Resolver $\text{KGLOB} \mu^{k+1} = B$ PASSO 1
9. Resolver $\text{MGLOB} \mu^{-1} = \text{FTIME}$ PASSO 1

CAPÍTULO IV

CONCLUSÕES E COMENTÁRIOS

4.1. RESULTADOS

Para testar a eficiência dos algoritmos implementados consideramos os seguintes exemplos:

ELEMENTOS FINITOS:

1. $\mu(x,y,t) = t^2(x^2 - x)(y^2 - y)$

$$\mu(x,y,0) = 0$$

$$\mu_t(x,y,0) = 0$$

$$\mu(x,y,t) = 0 \text{ em } \partial D$$

com $f(x,y,t) = 2(x^2 - x)(y^2 - y) - 2t^2(x^2 - x + y^2 - y)$ para $c \equiv 1$.

2. $\mu(x,y,t) = t^2(x^2 - x) \text{ sen } \pi y$

$$\mu(x,y,0) = 0$$

$$\mu_t(x,y,0) = 0$$

$$\mu(x,y,t) = 0 \text{ em } \partial D$$

com $f(x,y,t) = (x^2 - x)(2 + \pi^2 t^2) \text{ sen } \pi y - 2t^2 \text{ sen } \pi y$ para $c \equiv 1$.

SPLITTING-UP

$$\mu(x,y,t) = \cos \sqrt{2} \pi t \text{ sen } \pi x \text{ sen } \pi y \text{ para } c \equiv 1$$

$$\mu(x,y,0) = \text{sen } \pi x \text{ sen } \pi y$$

$$\mu_t(x,y,0) = 0$$

$$\mu(x,y,t) = 0 \text{ em } \partial D$$

$$w(x,y,t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}\sqrt{2} \pi t \cos \pi x \operatorname{sen} \pi y + k_1 y$$

$$w(x,y,0) = k_1 y$$

$$v(x,y,t) = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{sen}\sqrt{2} \pi t \operatorname{sen} \pi x \cos \pi y + k_2 x$$

$$v(x,y,0) = k_2 x$$

Para capacidade de memória disponível do sistema CCVAX no Laboratório de Matemática Aplicada executamos o programa Elementos Finitos com 50 elementos por direção e o programa Splitting - Up com 200 elementos por direção, isto é,

Elementos Finitos: NELEM = 2.500

Slitting-Up : NELEM = 40.000

Os tempos de execução para NELEM = 900 e NTIME=10 foram

Elementos Finitos:	{	TEMPO - 00:12:35
		CPU - 00:05:09
Componente a Componente:	{	TEMPO - 00:07:00
		CPU - 00:05:09
Preditor-Corretor:	{	TEMPO - 00:08:00
		CPU - 00:05:56

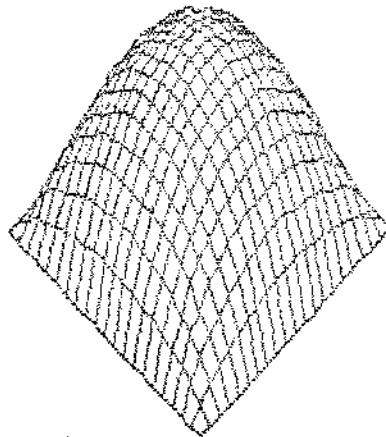
Os resultados teóricos justificados por [1] e [7] demonstram que o erro para o Método Elementos Finitos com Crank - Nicholson será da ordem de h e τ^2 . A tabela 1 mostra os resultados obtidos para o exemplo 1 com NELEM =400 e NTIME = 10.

TEMPO	$\ \mu - \mu_h\ _{L_2}$
t_1	$0.33 \cdot 10^{-3}$
t_2	$0.59 \cdot 10^{-3}$
t_3	$0.20 \cdot 10^{-2}$
t_4	$0.39 \cdot 10^{-2}$
t_5	$0.65 \cdot 10^{-2}$
t_6	$0.96 \cdot 10^{-2}$
t_7	$0.13 \cdot 10^{-1}$
t_8	$0.17 \cdot 10^{-1}$
t_9	$0.22 \cdot 10^{-1}$
t_{10}	$0.27 \cdot 10^{-1}$

Tabela 1

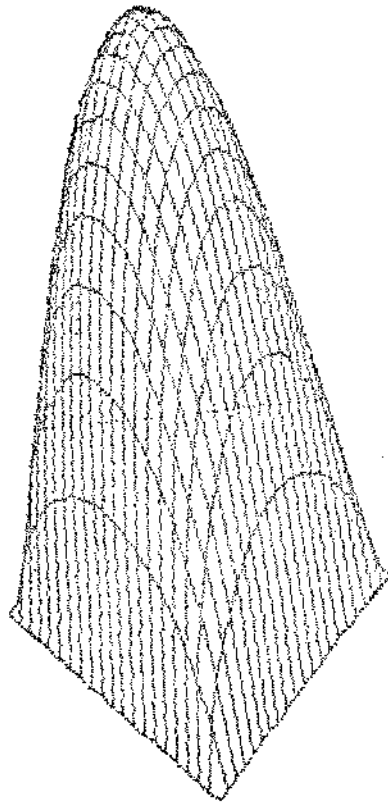
Os gráficos (a) e (b) a seguir mostram a solução aproximada neste caso nos níveis t_5 e t_{10} respectivamente.

ELEMENTOS FINITOS: 45



(a)

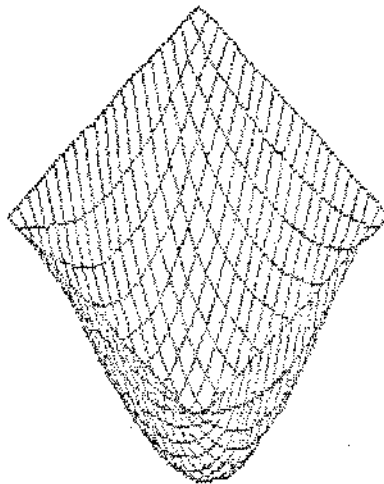
ELEMENTOS FINITOS: 110



(b)

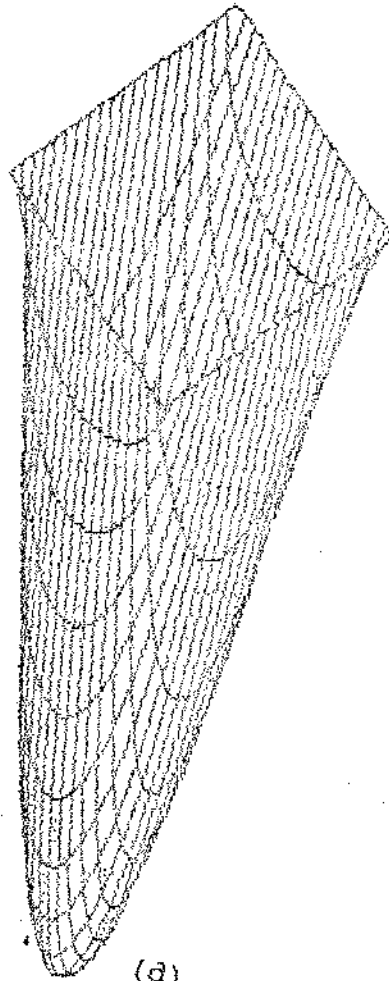
Os gráficos (c) e (d) a seguir mostram a solução aproximada para $NELEM = 400$ e $NTIME = 10$ nos níveis t_5 e t_{10} respectivamente.

ELEMENTOS FINITOS: t5 exemplo2



(c)

ELEMENTOS FINITOS: ejemplo 2



(a)

Para os métodos Splitting-Up, observemos que os operadores A_1 e A_2 não comutam e portanto, como foi mostrado no Capítulo II, o erro será da ordem de h^2 e τ^2 para o método Preditor-Corretor e da ordem de h^2 e τ para o método Splitting-Up componente a componente.

As tabelas 2 e 3 mostram os resultados obtidos com $NELEM = 400$ e $NTIME = 10$ para o Preditor-Corretor e componente a componente respectivamente com $k_1 = k_2 \equiv 0.0$.

TEMPO	$\ \mu - \mu_h\ _{\infty}$
t_1	$0.21 \cdot 10^{-2}$
t_2	$0.76 \cdot 10^{-2}$
t_3	$0.15 \cdot 10^{-1}$
t_4	$0.19 \cdot 10^{-1}$
t_5	$0.19 \cdot 10^{-1}$
t_6	$0.14 \cdot 10^{-1}$
t_7	$0.17 \cdot 10^{-2}$
t_8	$0.15 \cdot 10^{-1}$
t_9	$0.33 \cdot 10^{-1}$
t_{10}	$0.17 \cdot 10^{-1}$

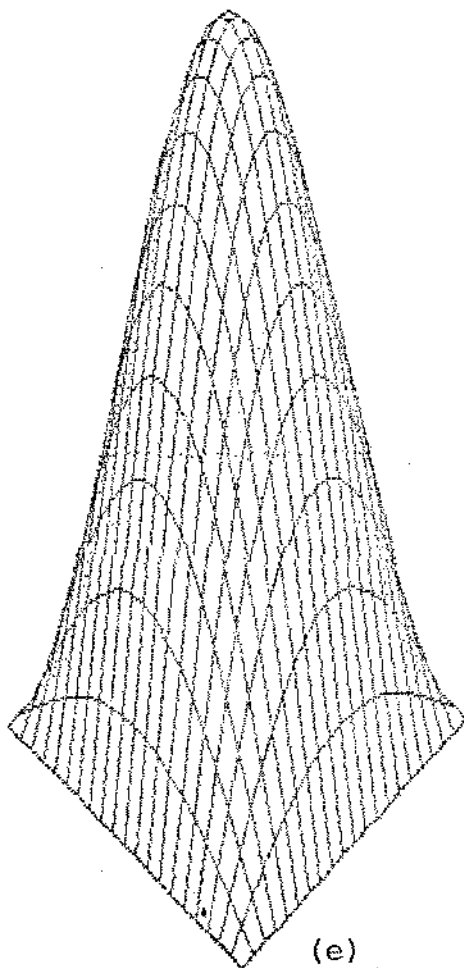
Tabela 2

TEMPO	$\ \mu - \mu_h\ _{\infty}$
t_1	$0.33 \cdot 10^{-2}$
t_2	$0.12 \cdot 10^{-1}$
t_3	$0.24 \cdot 10^{-1}$
t_4	$0.34 \cdot 10^{-1}$
t_5	$0.39 \cdot 10^{-1}$
t_6	$0.37 \cdot 10^{-1}$
t_7	$0.26 \cdot 10^{-1}$
t_8	$0.84 \cdot 10^{-2}$
t_9	$0.13 \cdot 10^{-1}$
t_{10}	$0.31 \cdot 10^{-1}$

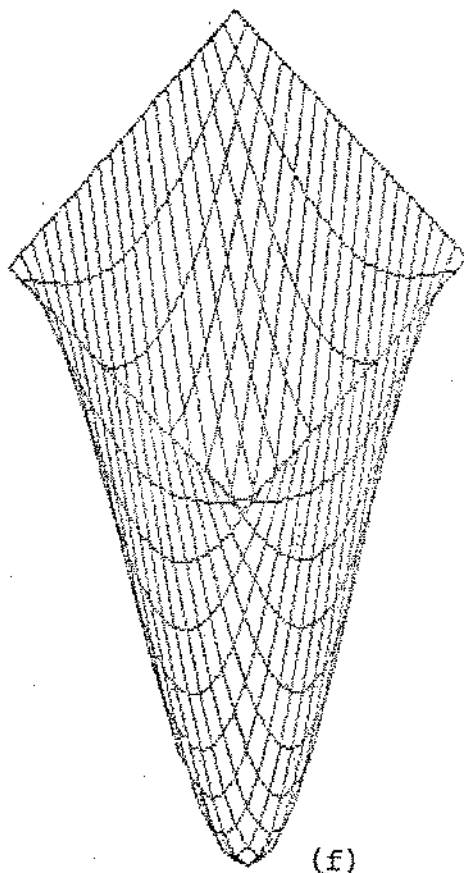
Tabela 3

Os gráficos (e) - (f) - (g) mostram a solução aproximada para o Método Splitting-Up componente a componente. E os gráficos (h) - (i) - (j) mostram a solução aproximada para o Método Preditor-Corretor.

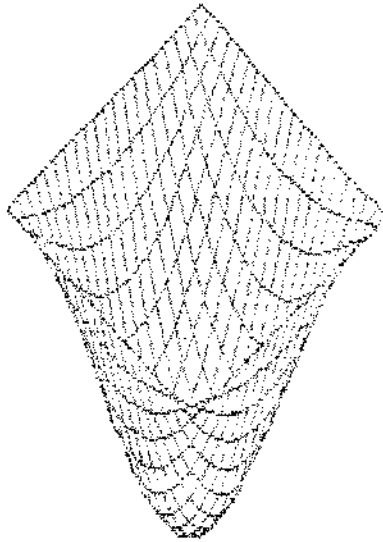
SPLITTING-UP COMPONENTE A COMPONENTE: 19



SPLITTING-UP COMPONENTE A COMPONENTE: t5

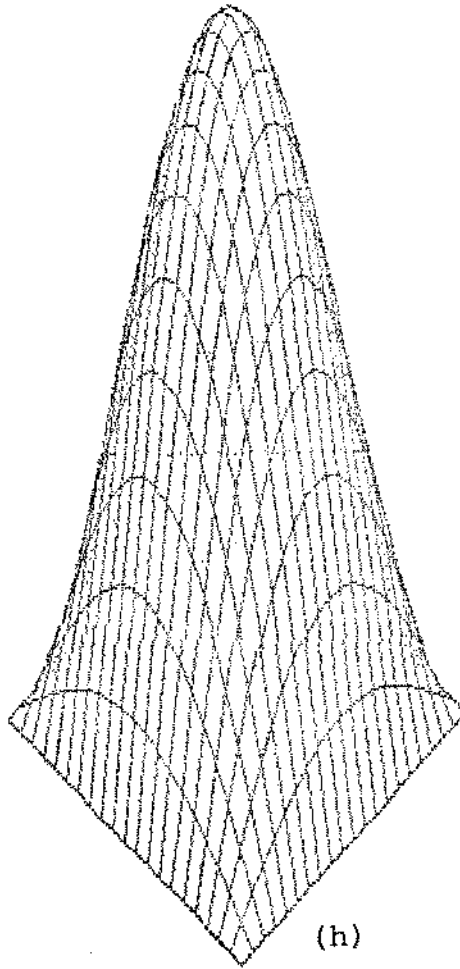


SPLITTING-UP COMPONENTS A COMPONENTS: 119

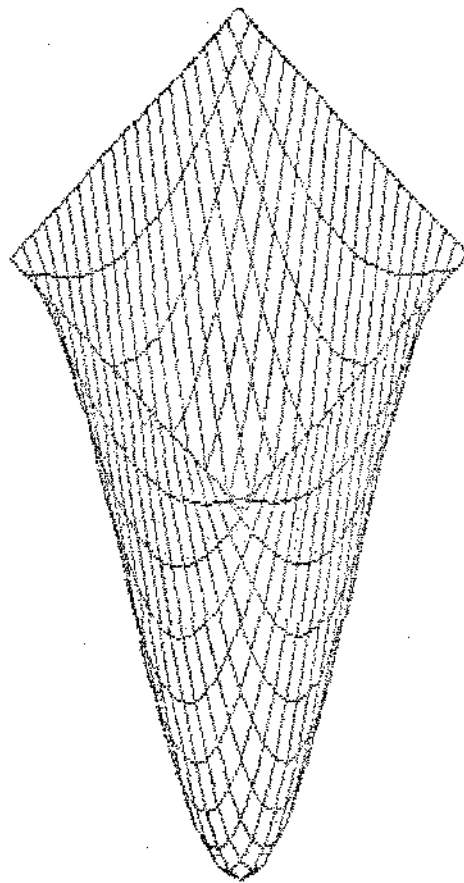


(g)

PREDICTOR-CORRECTOR: 18

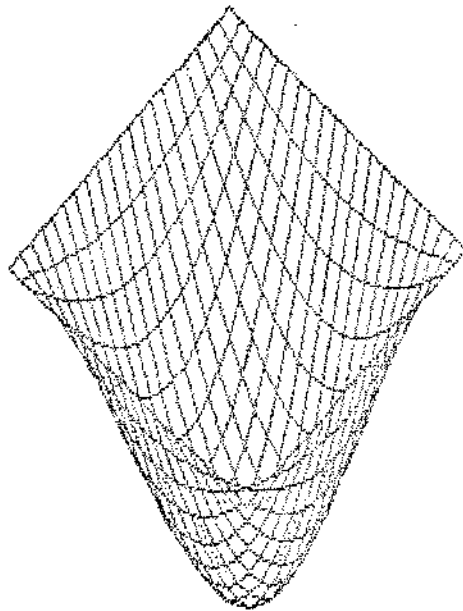


PREDITOR-CORRECTOR: 15



(1)

PREDITOR-CORRECTOR: t10



(j)

As tabelas 4 e 5 mostram os resultados obtidos para o caso anterior com $k_1 = k_2 = 1.0$.

TEMPO	$\ \mu - \mu_h\ _\infty$
t_1	$0.21 \cdot 10^{-2}$
t_2	$0.76 \cdot 10^{-2}$
t_3	$0.15 \cdot 10^{-1}$
t_4	$0.19 \cdot 10^{-1}$
t_5	$0.19 \cdot 10^{-1}$
t_6	$0.19 \cdot 10^{-1}$
t_7	$0.17 \cdot 10^{-2}$
t_8	$0.15 \cdot 10^{-1}$
t_9	$0.33 \cdot 10^{-1}$
t_{10}	$0.47 \cdot 10^{-1}$

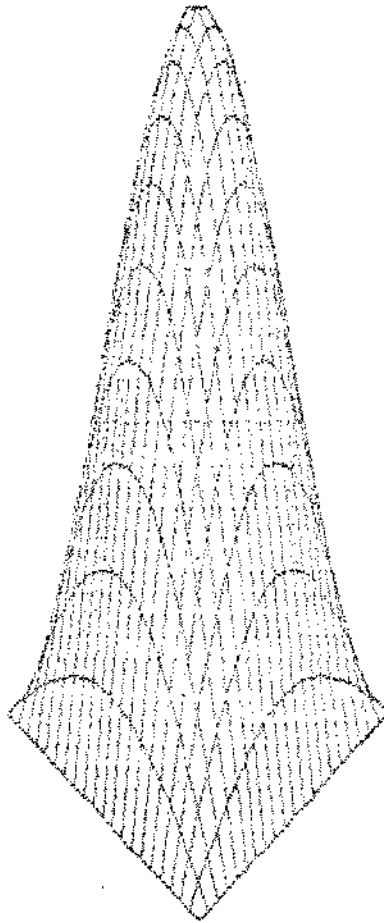
Tabela 5

TEMPO	$\ \mu - \mu_h\ _{\infty}$
t_1	$0.32 \cdot 10^{-2}$
t_2	$0.12 \cdot 10^{-1}$
t_3	$0.24 \cdot 10^{-1}$
t_4	$0.34 \cdot 10^{-1}$
t_5	$0.39 \cdot 10^{-1}$
t_6	$0.37 \cdot 10^{-1}$
t_7	$0.26 \cdot 10^{-1}$
t_8	$0.84 \cdot 10^{-2}$
t_9	$0.18 \cdot 10^{-1}$
t_{10}	$0.31 \cdot 10^{-1}$

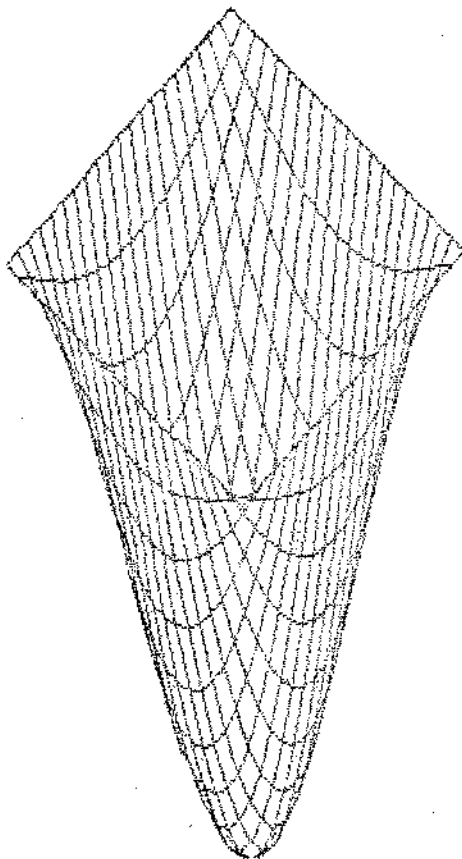
Tabela 5

Os gráficos a seguir mostram a solução aproximada para os Métodos Splitting-Up com $k_1 = k_2 = 1.0$.

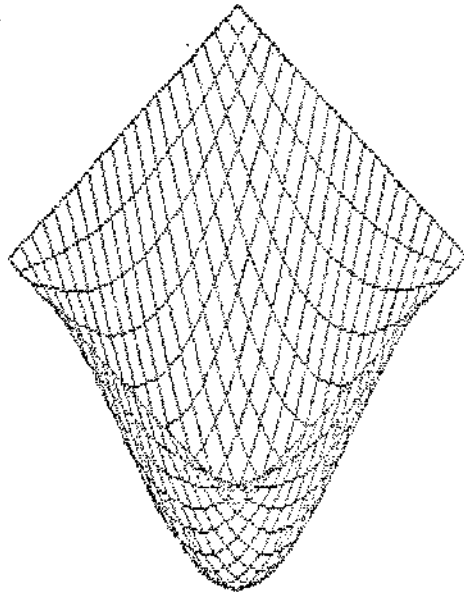
SPETTINA-HP COMPONENTE A COMPONENTE: TR 44-4 * 42-4



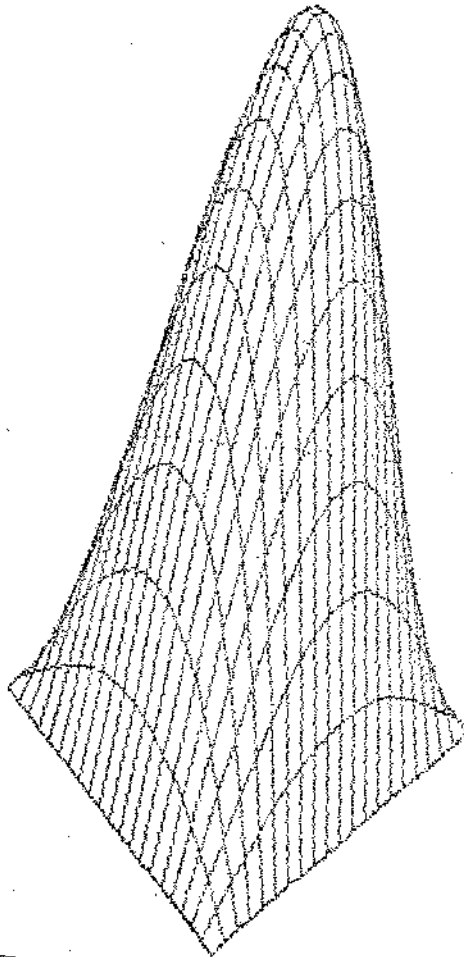
SPLITTING-HP COMPONENTE A COMPONENTE: t5 K1=1 e K2=1



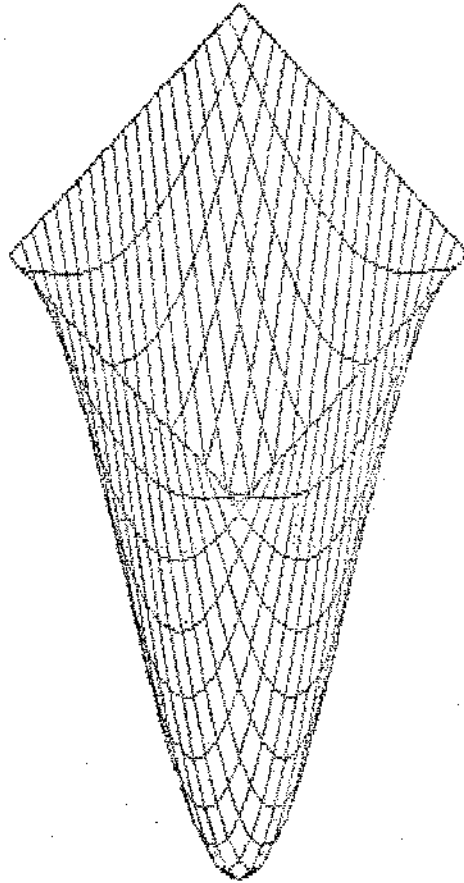
SPLITTING-UP COMPONENTE A COMPONENTE: t10 K1-1 e K2-1



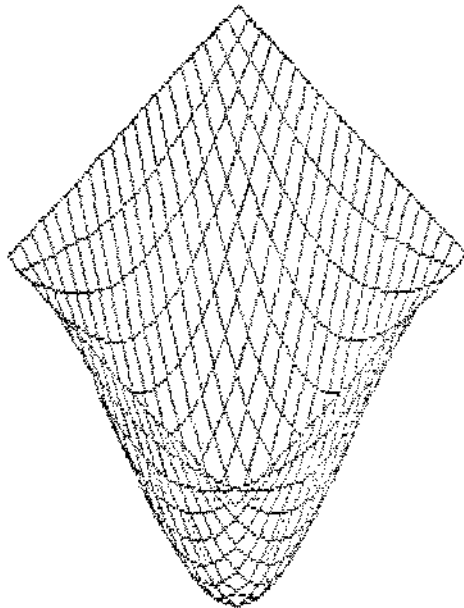
PREDITOR-CORRECTOR: 10 M1=1 * K2=1



PREDITOR-CORRECTOR: 15 K1-1 • K3-1



PREDITOR-CORRECTOR: t10 K1=1 e K2=1



4.2. CONCLUSÕES

Os Métodos Splitting-Up descritos e analisados neste trabalho apresentam-se como uma ferramenta potente na solução de equações diferenciais evolutivas, em particular, problemas do tipo hiperbólico.

Ao analisarmos os resultados obtidos podemos observar que o procedimento utilizando Crank-Nicholson e Elementos Finitos apresentou um custo computacional consideravelmente elevado e implementação bastante trabalhosa, o que não o torna atrativo quando estamos trabalhando com problemas de grande porte.

Por outro lado, os métodos Splitting-Up com diferenças finitas (segundo procedimento) apresentaram um custo computacional baixo e implementação extremamente simples. A estratégia de reduzir o problema de 2^a ordem a um problema de 1^a ordem introduzindo duas funções auxiliares apresenta-se como uma alternativa elegante e eficiente de abordar problemas hiperbólicos sem que isto signifique um esforço muito grande.

É importante ressaltar que apesar de haveremos considerado em nossas aplicações um domínio e condições de fronteira simples, isto não representa muita dificuldade quando optamos por aplicar tais métodos com Elementos Finitos, como foi exemplificado no Capítulo I.

Porém, a simplicidade computacional destes métodos com diferenças finitas é bastante atrativa pelo fato de possibilitar o uso de micro-computadores para problemas de porte relativamente grande, sem muita exigência de recursos adicionais.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BAKER, G.A., Error Estimates for Finite Element Methods for Second Order Hyperbolic Equations. SIAM J. Numer. Anal., vol. 13, N^o 4, September 1976, pp. 564-576.
- [2] BAKER, G.A. and DOUGLAS V.A., On the l^∞ -convergence of Galerkin Approximations for Second Order Hyperbolic Equations, Mathematics of Computation, vol. 34, N^o 150, April 1980, pp. 401-424.
- [3] BAYSAL E., KOSLOFF D.D. and SHERWOOD J.W.C., A two-way nonreflecting wave equation, Geophysics, vol. 49, N^o 2, February 1974, pp. 182-191.
- [4] CAREY G.F. and ODEN J.T., Finite Elements, vol. II e III, Prentice-Hall, New Jersey, 1984.
- [5] COLLATZ L., The Numerical Treatment of Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 1966.
- [6] DUFF G.F.D. and MAYLOR D., Differential Equations of Applied Mathematics, John-Wiley, New York, 1966.
- [7] DUPONT T., L^2 -estimates for Galerkin Methods for Second Order Hyperbolic Equations, SIAM J. Numer. Anal., vol. 10, N^o5, October 1973, pp. 880-889.

- [8] FORSYTHE G.E. and WASOW W.R., Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations, John-Wiley, New York, 1960.

- [9] KOSLOFF R., Absorbing Boundaries for Wave Propagation Problems, Journal of Computational Physics, vol. 23, Nº 2, April 1986, pp. 363-376.

- [10] HINTON E. and OWEN D.R.J., Finite Element Programming, Academic Press, New York, 1977.

- [11] MARCHUK G.I., Methods of Numerical Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1982.

- [12] MADEIROS L.A., Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1983.

- [13] MITCHELL A.R., The Finite Element Method in Partial Differential Equations, John-Wiley, New York, 1977.

- [14] MITCHELL A.R. and GRIFFITHS D.F., The Finite Difference Method in Partial Differential Equations, John-Wiley, New York, 1980.

- [15] REKTORYS K., Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering, D. Reidel Publishing Company, Boston, 1975.

- [16] RICHTMYER R.D. and MORTON K.W., Difference Methods for Initial Value Problems, John Wiley, New York, 1967.

- [17] SOCHACKI J., KUBICKER R., GEORGE J., FLETCHER W.R. and SMITHSON S., Absorbing Boundary Conditions and surface waves, Geophysics, vol. 52, No 1, January 1987, pp.60-71.

- [18] STRANG G. and FIX G.J., An Analysis of the Finite Element Method, Prentice-Hall, 1973.

- [19] ZIENKIEWICZ O.C., The Finite Element Method, McGraw-Hill, London, 1977.