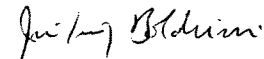


# ANÁLISE DE UM MODELO MATEMÁTICO DE CONDUÇÃO-CONVECÇÃO DO TIPO CAMPO DE FASES PARA SOLIDIFICAÇÃO

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Cristina Lúcia Dias Vaz** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 28 de Fevereiro de 2000

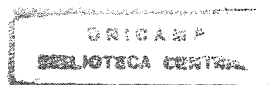


Prof. Dr. José Luiz Boldrini  
Orientador

Banca Examinadora :

Prof. Dr. José Luiz Boldrini (Orientador - DMA-IMECC-UNICAMP)  
Prof. Dr. Marko Antonio Rojas Medar (DMA-IMECC-UNICAMP)  
Prof. Dr. Sebastián Antonio Lorca Pizarro (DM-IMECC-UNICAMP)  
Prof. Dr. Jorge Ferreira (DM-UEM)  
Prof. Dr. Luiz Augusto Fernandes de Oliveira (DM-USP)

Tese apresentada ao **Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP**, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutora em Matemática Aplicada.



UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA:	T/UNICAMP
	V477a
	Et.
OMBO BC/	41259
ROC.	278/00
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREC.	R\$ 11,00
DATA	30-06-00
L.º CPD.	

CM-00142242-1

### FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Vaz, Cristina Lúcia Dias

V477a      Análise de um modelo matemático de condução-convecção do tipo campo de fases para solidificação / Cristina Lúcia Dias Vaz -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2000.

Orientador : José Luiz Boldrini

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Navier-Stokes, Equações de. 2. Mecânica dos fluidos. 3. Equações diferenciais parabólicas. 4. Solidificação. I. Boldrini, José Luiz. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

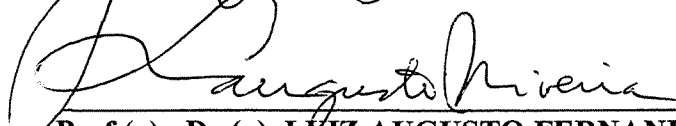
**Tese de Doutorado defendida em 23 de fevereiro de 2000**  
**e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

  
\_\_\_\_\_  
**Prof (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI**

  
\_\_\_\_\_  
**Prof (a). Dr (a). MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR**

  
\_\_\_\_\_  
**Prof (a). Dr (a). SEBASTIAN ANTONIO LORCA PIZARRO**

  
\_\_\_\_\_  
**Prof (a). Dr (a). JORGE FERREIRA**

  
\_\_\_\_\_  
**Prof (a). Dr (a). LUIZ AUGUSTO FERNANDES DE OLIVEIRA**

UNICAMP  
BIBLIOTECA CENTRAL  
SEÇÃO CIRCULANTE

## Resumo

Neste trabalho apresentaremos resultados de existência e regularidade das soluções de alguns modelos matemáticos relativamente simples (primeiras aproximações) de condução-convecção do tipo campo de fases que tratam problemas de solidificação de materiais puros ou impuros (ligas). A característica fundamental dos modelos tratados neste trabalho é que o indicador das fases, a fração sólida, dependerá apenas do campo de fases. Para o caso de ligas binárias obtivemos a existência de soluções apenas quando a concentração inicial do soluto é suficientemente pequena (isto é, para materiais dopantes).

Estes modelos são governados pela equação do campo de fases, pela equação do calor e/ou a equação da concentração, acopladas com as equações de Navier-Stokes modificadas por um termo fonte que simula a zona *mushy* (interface líquido/sólido) como um meio poroso. Para tratarmos tal sistema, procedemos da seguinte forma: primeiramente o sistema é adequadamente regularizado e uma sequência de soluções aproximadas é obtida aplicando-se o Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder. Depois, por um processo de passagem ao limite nas equações regularizadas, obtemos uma solução usando argumentos de compacidade. A seguir, por argumentos de *bootstrapping*, prova-se que a solução é de fato mais regular do que inicialmente considerada.

## Abstract

In this work we present results on existence and regularity of solutions of some conduction-convection models of phase-field type for solidification of either pure or impure (alloy) materials. The essential characteristic of this models is that the solid fraction has a functional relation only with the phase field. For binary alloy solidification we are able to prove the existence of solutions only when the initial solute concentration is sufficiently small (that is, for dopant materials.)

The governing equations of the model are the phase field equation, the heat equation and/or solute equation coupled with a modified Navier-Stokes equations whose source term simulates the mushy region as a porous medium. Existence and regularity of the corresponding solutions are obtained as follows: firstly, the problem is adequately regularized and a sequence of regularized solutions is obtained using the Leray-Schauder's fixed point theorem. Then, by using compactness arguments, one proves that this sequence has a limit point which is a solution of the original problem. The corresponding regularity is obtained using bootstrapping arguments.

*Para meu filho Arnaldo.*

*Foram tantas horas ausentes e tantos momentos perdidos do nosso convívio para escrever este trabalho. Por isso ele te pertence, filho.*

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi realizado graças a sabedoria e ajuda de várias pessoas. Sou extremamente grata a todas elas.

Sou grata a minha família pelo amor, apoio e a paciência durante estes anos de completa dedicação à realização deste trabalho.

Agradeço ao Prof. Dr. José Luiz Boldrini pela oportunidade de conviver e trabalhar com um profissional extremamente talentoso; uma convivência generosa, amigável e gratificante. Por sua orientação segura, exigente e competente e pelas conversas intelectualmente interessantes.

Agradeço aos professores do Departamento de Matemática Aplicada e do Departamento de Matemática do IMECC que contribuíram para minha formação acadêmica ao longo destes quatro anos.

Sou grata aos amigos do IMECC pela gratificante convivência e pela amizade.

Sou grata a Universidade Federal do Pará-UFPa, em particular, ao Departamento de Matemática, por sua política *agressiva* de capacitação docente.

Agradeço aos funcionários do IMECC pela apoio técnico e pela boa vontade.

Finalmente, agradeço a todas as pessoas que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

# Índice

<b>Introdução</b>	<b>i</b>
<b>Capítulo 1 : Preliminares</b>	<b>1</b>
1. Notações e Espaços Funcionais . . . . .	1
2. Resultados Auxiliares . . . . .	5
3. Problema auxiliar : Campo de fases . . . . .	13
4. Problema auxiliar: Velocidade . . . . .	19
<b>Capítulo 2 : Um modelo do tipo campo de fases para solidificação com convecção: materiais puros</b>	<b>23</b>
1. Descrição do Modelo . . . . .	23
1.2 Definição de solução generalizada . . . . .	29
2. Caso Bidimensional . . . . .	32
2.1 Problema Regularizado . . . . .	32
2.2 Existência e Regularidade da Solução . . . . .	42
3. Caso Tridimensional . . . . .	49
3.1 Problema Regularizado . . . . .	49
3.2 Existência e Regularidade da solução . . . . .	56
<b>Capítulo 3 : Um modelo do tipo campo de fases para solidificação com convecção: ligas binárias</b>	<b>64</b>
1. Descrição do Modelo . . . . .	65
1.1 Definição de solução generalizada . . . . .	67
2. Caso Bidimensional . . . . .	68
2.1 Problema Regularizado . . . . .	69
2.2 Existência e Regularidade da Solução . . . . .	80

3.	Caso Tridimensional . . . . .	84
3.1	Problema Regularizado . . . . .	85
3.2	Existência e Regularidade da solução . . . . .	89
	<b>Capitulo 4 : Conclusões Gerais</b>	<b>92</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>94</b>



# Introdução

Neste trabalho estudaremos certos sistemas de equações diferenciais parciais não lineares que correspondem a modelos matemáticos que descrevem aspectos importantes de processos de solidificação de materiais puros ou impuros. Neste modelos, o mecanismo de solidificação/fusão é descrito com o auxílio de uma metodologia de campo de fases e também levam em consideração os mecanismos de condução e convecção da energia e do material. Em outras palavras, são modelos que pretendem tratar a mudança de fase, a transferência de calor e/ou massa e os efeitos convectivos que ocorrem neste processo. Tais modelos estão baseados no trabalho de Caginalp [8], que usa um parâmetro de ordem (campo de fases ou *phase field*) para identificar a mudança de fase, e nos trabalhos de Blanc *et al* [3] e Voller & Prakash [36], que usam leis de conservação de massa e energia para descrever a transferência de calor e/ou massa e os efeitos convectivos. Os modelos em que estamos interessados, utilizam o parâmetro de ordem, mas de forma indireta, pois o indicador básico das fases será a fração sólida, representada por  $f_s$  e tal que  $f_s = 1$  na região sólida,  $0 < f_s < 1$  na região *mushy* e  $f_s = 0$  na região líquida. Em geral, este é o indicador mais conveniente e ele está relacionado com as variáveis termodinâmicas envolvidas no processo, inclusive com o parâmetro de ordem. Em nosso trabalho, como primeira aproximação, vamos considerar a fração sólida  $f_s$  como uma função apenas do parâmetro de ordem, representado por  $\varphi(x, t)$ . Esta é a característica fundamental dos modelos deste trabalho e será chamada de metodologia do campo de fases (*phase field methodology*). Assim, os problemas analisados podem ser considerados como problemas de fronteira livre, pois as regiões nas quais nossas equações farão sentido são desconhecidas *a priori*. Especificamente, as fases líquida, *mushy* e sólida serão identificadas, respectivamente, com os conjuntos  $Q_l$ ,  $Q_m$  e  $Q_s$ , a serem determinados pela fração sólida, no cilindro  $Q = \Omega \times (0, T)$  sendo

$\Omega$  um domínio limitado do  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , onde se dão os processos físicos de nosso interesse. No decorrer do trabalho descreveremos em detalhe como tais regiões são definidas.

Para introduzirmos os problemas que serão posteriormente tratados apresentaremos agora os nossos modelos que são os seguintes sistemas de equações diferenciais:

a) **Materiais puros**

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \theta & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta = \frac{\ell}{2} \frac{\partial f_s}{\partial t}(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \text{em } Q, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p + k(f_s(\varphi))v = \vec{\sigma} \theta & \text{em } Q_{ml}, \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{em } Q_{ml}, \\ v = 0 & \text{em } \overset{0}{Q}_s, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ \theta = 0 & \text{em } S, \\ v = 0 & \text{em } S_{ml}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & \text{em } \Omega, \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) & \text{em } \Omega, \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{em } \Omega_{ml}(0). \end{array} \right.$$

Nestas equações  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $v$  e  $p$  são, respectivamente, o campo de fases (*phase field*), a temperatura, a velocidade e a pressão.  $a(x, t)$  e  $b(x, t)$  são funções conhecidas e  $\alpha$ ,  $\nu$  e  $\ell$  são constantes positivas chamadas parâmetro de dilatação, viscosidade e calor latente, respectivamente.

Além disso,  $Q_{mi} = Q_m \cup Q_l$ , que é a união da zona líquida com a zona *mushy*, corresponde à região não sólida na qual pode ocorrer a movimentação (convecção) do material;  $S_{mi}$  é a fronteira de  $Q_{mi}$ ,  $\Omega_{mi}(0)$  correspondendo à região espacial não sólida no instante inicial (estes conjuntos serão descritos com detalhes no trabalho),  $Q_s^0$  é o interior de  $Q_s$  e  $\frac{\partial}{\partial \eta}$  representa a derivada normal exterior na fronteira de  $\Omega$ .

**b) Ligas Binárias (materiais impuros)**

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \theta & \text{em } Q, \\
 \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta = \frac{\ell}{2} \frac{\partial f_s}{\partial \varphi}(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \text{em } Q, \\
 \frac{\partial c}{\partial t} - \Delta c + v \cdot \nabla [(1 - f_s(\varphi))c] = 0 & \text{em } Q, \\
 \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p + k(f_s(\varphi))v = \vec{\sigma}_1 \theta + \vec{\sigma}_2 c & \text{em } Q_{mi}, \\
 \operatorname{div} v = 0 & \text{em } Q_{mi}, \\
 v = 0 & \text{em } Q_s^0, \\
 \\
 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\
 \frac{\partial c}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\
 \theta = 0 & \text{em } S, \\
 v = 0 & \text{em } S_{mi},
 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & \text{em } \Omega, \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) & \text{em } \Omega, \\ c(x, 0) = c_0(x) & \text{em } \Omega, \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{em } \Omega_{ml}(0). \end{array} \right.$$

Aqui as notações são como no caso anterior e  $c(x, t)$  representa a concentração do soluto.

Antes de descrever os nossos resultados sobre os problemas anteriores e para situá-los num contexto histórico, faremos um breve relato sobre alguns trabalhos anteriores relacionados com o nosso tema.

Lembramos que problemas com mudança de fase tem sido extensivamente estudados desde o século passado quando J. Stefan formulou o problema para encontrar a distribuição de temperatura durante a solidificação da água. No sentido metodológico, entendemos que o estudo dos problemas de mudança de fase podem ser classificados em três grupos: problemas do tipo Stefan, método da entalpia e modelos do tipo campo de fases (*phase field*). Nos problemas clássicos do tipo Stefan tanto para solidificação de materiais puros quanto impuros (tais como ligas), a hipótese fundamental é aquela de considerar a região de transição líquido/sólido muito fina de tal modo que possa ser descrita por uma superfície regular com localização desconhecida, chamada interface. Nestes modelos as equações que governam as variáveis termodinâmicas, tais como temperatura e/ou concentração, são baseadas em princípios de conservação e formuladas independentemente em cada fase do processo, isto é, são válidas em cada lado da interface. Além disso, uma condição que representa conservação de energia e/ou massa, é imposta na interface e conhecida como *condição de Stefan*. Em geral, os modelos clássicos do tipo Stefan não incorporam vários efeitos, em particular, os efeitos causados pela tensão superficial e os efeitos convectivos. Efeitos causados pela tensão superficial são tratados nos modelos chamados problemas de Stefan modificados através de uma condição chamada condição do tipo *Gibbs-Thompson* (Collis [11] e Mullis [28]). Mais detalhes sobre os problemas do tipo Stefan podem ser encontrados em Alexiades & Solomon [1] e Rubinstein [32].

Do ponto de vista computacional a maior dificuldade dos modelos do tipo Stefan é a exigência que a fronteira livre (interface) seja numericamente *seguida*. Assim, formulações que incorporam implicitamente a condição de Stefan são mais versáteis para simular processos de mudança de fase nos quais as fronteiras das regiões das várias fases se tornam complexas.

O método da entalpia é uma formulação fraca dos problemas do tipo Stefan que incorpora a condição da interface usando a variável física a entalpia para descrever as fases do processo. Em tais formulações não existe nenhuma suposição *a priori* sobre a regularidade da interface líquido/sólido, que pode ser uma superfície regular ou uma zona *mushy* qualquer (Alexiades [1]; p.207), porém o método da entalpia tem a desvantagem de não incorporar algumas condições especiais na interface, tais como efeitos de super-resfriamento (Wheeler *et al* [38]-[39]-[40]).

Uma formulação alternativa, que também incorpora implicitamente condições de Stefan, são os modelos campo de fases (*phase field*) que usam um parâmetro de ordem para descrever as fases. Estes modelos têm raízes na mecânica estatística pois empregam o funcional energia de Landau-Ginzburg (Landau [25]). Fix [15] foi o primeiro a formular e estudar analítica e numericamente um modelo do tipo campo de fases, seguido por Caginalp [8] que estudou extensivamente este modelo e suas variações (Caginalp [4]-[5]-[6]-[7]). Caginalp usa um funcional energia para descrever a cinemática do campo de fases e uma equação de balanço modificada para descrever a condução de calor. Fundamentalmente, estes modelos usam a energia para descrever as fases do processo. Introduzem uma nova variável (o campo de fases) que satisfaz as equações de Euler-Lagrange de um funcional energia. Isto torna o modelo muito atrativo tanto analítica como numericamente, pois os efeitos da tensão superficial e de super-resfriamento, que são difíceis de serem incorporados adequadamente nas formulações do tipo entalpia, são mais facilmente tratados neste modelo. Além disso, como não envolve condições explícitas na interface, esta não precisa ser numericamente seguida (*front tracking*). Um exemplo importante da aplicabilidade dos modelos do tipo campo de fases é o estudo de crescimento de cristais (Caginalp [5] e Kobayshi [23]). Resaltamos, porém, que nenhum dos trabalhos anteriores considera os efeitos convectivos existentes nas fases não sólidas do processo de solidificação. Tais efeitos convectivos foram estudados por Cannon *et al* [10]-[9], DiBenedetto & Friedman [13], DiBenedetto & O'Leray [12] e O'Leray [24] com modelos do tipo entalpia acoplados as equações do tipo Navier-Stokes.

Também, Blanc *et al* [3], Pericleous *et al* [29] e Voller *et al* [36]-[37] usam uma formulação do tipo entalpia junto com equações Navier-Stokes modificadas para tratar os efeitos convectivos mas com uma metodologia diferente. Descrevem a mudança de fase utilizando a fração sólida  $f_s$ , a qual é incorporada ao modelo através de uma relação funcional com a entalpia e um termo fonte nas equações de Navier-Stokes. Este termo fonte simula o comportamento da zona *mushy* como um meio poroso usando uma formulação especial (penalização do tipo Carman-Koseny) que também está relacionada com a fração sólida. A característica principal deste modelo é que relaciona as variáveis entalpia e velocidade com a mudança de fase (fração sólida) por meio de termos fontes.

Os modelos considerados neste trabalho usam as idéias de Caginalp [8] e a metodologia dos trabalhos de Blanc [3] e Voller [36] para tratar a solidificação de materiais puros ou impuros. Descrevem a mudança de fase com a fração sólida  $f_s$  dotada de uma *metodologia campo de fases* e relacionada com as outras variáveis por termos fontes. Apresentaremos resultados de existência e regularidade para os modelos de materiais puros e impuros usando uma técnica de regularização similar aquela introduzida no trabalho de Blanc [3], bem como argumentos de compacidade (passagem ao limite) e argumentos do tipo *bootstrapping*. O objetivo da regularização é poder utilizar as equações do tipo Navier-Stokes no domínio todo e não apenas nas regiões desconhecidas  $Q_l$  e  $Q_m$ . Optamos por regularizações diferentes para os casos bi e tridimensionais devido às diferentes particularidades das equações do tipo Navier-Stokes nestas dimensões. Portanto, primeiramente o problema original será adequadamente regularizado, para cada problema regularizado (que depende de um parâmetro, que se aproximará de zero), uma solução regularizada será obtida quando aplicarmos o Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder. Obtêm-se assim uma sequência de soluções aproximadas do problema original. Depois, por um processo de *passagem ao limite* nas equações regularizadas mostraremos, usando argumentos de compacidade, que o limite desta sequência é uma solução generalizada do problema. Para finalizar, com os resultados da teoria  $L_p$  para equações diferenciais parabólicas lineares, bem como argumentos do tipo *bootstrapping*, provaremos que a solução obtida é de fato um pouco mais regular do que inicialmente considerada.

O trabalho foi organizado do seguinte modo: no Capítulo 1 descreveremos as notações e os espaços que serão usados; destacaremos alguns resultados de imersões do tipo Sobolev e da teoria  $L_p$  das equações diferenciais parabólicas

lineares (Ladyzenskaja [27], capítulo IV). Além disso, analisaremos dois problemas auxiliares que ajudarão nas demonstrações de nossos resultados. No Capítulo 2 provaremos um resultado de existência e regularidade para o modelo de materiais puros usando o procedimento descrito acima. Neste caso, os pontos relevantes da prova estão relacionados com a regularidade obtida na solução das equações do tipo Navier-Stokes e com a não-linearidade na equação da temperatura pois a solução campo de fases (*phase field*) é bastante regular. Na Seção 2.1 detalharemos o modelo enfatizando a simulação dos efeitos convectivos na zona *mushy* sugerida por Voller [36]. Nas Seções 2.2 e 2.3 trataremos, respectivamente, os casos bi e tridimensionais do modelo de materiais puros para destacarmos as particularidades de cada um.

No Capítulo 3 provaremos um resultado de existência e regularidade para o modelo de ligas usando novamente o procedimento anterior. Neste caso, além da regularidade da solução das equações do tipo Navier-Stokes e da não-linearidade na equação do calor teremos também as não-linearidades na equação da concentração. Estas introduzirão uma restrição técnica que produzirá um resultado de existência somente para problemas com concentração inicial suficientemente pequena. Isto caracteriza nosso modelo para ligas como sendo um modelo para solidificação de misturas de materiais dopantes. Em termos matemáticos isto significa que na aplicação do Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder ao problema regularizado, as estimativas uniformes dos pontos fixos serão obtidas somente quando uma certa norma da concentração inicial é suficientemente pequena. Na Seção 3.1 detalharemos o modelo de ligas destacando as idéias para solidificação de ligas binárias introduzidas por Blanc [3]. Nas Seções 3.2 e 3.3 novamente trataremos, respectivamente, os casos bi e tridimensionais para tornar a exposição mais clara e destacarmos as particularidades de cada um.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo descreveremos as notações e os espaços funcionais que serão usados no decorrer deste trabalho; recordaremos alguns resultados importantes de imersões de Sobolev e da teoria das equações diferenciais parabólicas lineares. Analisaremos também alguns problemas auxiliares que serão usados com frequência nas demonstrações de nossos resultados.

### 1.1 Notações e Espaços Funcionais

Ao longo deste trabalho usaremos coordenadas cartesianas e as seguintes notações :

$\mathbb{R}^n$  representará espaço euclidiano n-dimensional.

$\Omega$  é um aberto limitado do  $\mathbb{R}^n$  com medida de Lebesgue  $|\Omega|$  e fronteira  $\partial\Omega$ .

$Q$  é representará o cilindro  $\Omega \times (0, T)$ .

$S = \partial\Omega \times (0, T)$  representará a superfície lateral do cilindro  $Q$ .

$\vec{\eta}$  representará a normal unitária exterior à  $S$ .

$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{i=1}^n$  representará o operador gradiente.

$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  representará o operador Laplaciano.

$\text{div} = \nabla \cdot$  é o operador divergente; para uma função vetorial  $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$

tem-se  $\text{div } \vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ .



$D_x^j$  e  $D_t$  são as derivadas com relação as variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de ordem  $j$  e com relação a  $t$ , respectivamente.

$\sum_{(j)}$  é o somatório sobre todos os possíveis  $j$ .

$|x| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$  e  $|\nabla u| = \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right)^{1/2}$  é norma euclidiana de  $x \in \mathbb{R}^n$  e do vetor gradiente.

$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}$  é o campo vetorial de  $i$ -ésima componente  $\sum_{i=1}^n u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ .

A letra  $M$  representará as constantes genéricas.

Necessitaremos também dos seguintes espaços funcionais:

$C^m(\Omega)$  é o espaço das funções com todas as derivadas de ordem  $\leq m$  contínuas em  $\Omega$  ( $m$  inteiro positivo ou  $m=\infty$ ).

$\mathcal{D}(\Omega)$  é o espaço vetorial das funções em  $C^\infty(\Omega)$  com suporte compacto em  $\Omega$ .

$L^q(\Omega)$  é o espaço de Banach das (classes de) funções  $u(x)$  de  $\Omega$  em  $\mathbb{R}$  mensuráveis (no sentido de Lebesgue) e  $q$ -integráveis ( $q \geq 1$ ) cuja norma é dada por

$$\|u\|_{q,\Omega} = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^q dx \right)^{1/q} \quad (1 \leq q < \infty).$$

$$\|u\|_{\infty,\Omega} = \text{ess sup}_{\Omega} |u(x)| \quad (q = \infty).$$

$C_b^m(\Omega)$  é o espaço das funções em  $C^m(\Omega)$  com derivadas de ordem  $\leq m$  em  $L^\infty(\Omega)$ .

$W_q^p(\Omega)$  é o espaço de Banach (com  $p$  inteiro) das funções  $u(x)$  em  $L^q(\Omega)$  com derivadas generalizadas (no sentido usual) de ordem  $\leq p$  que pertencem a  $L^q(\Omega)$  e cuja norma é dada por

$$\|u\|_{W_q^p(\Omega)} = \sum_{j=0}^p \sum_{(j)} \|D_x^j u\|_{q,\Omega}.$$

$\overset{0}{W}_q^p(\Omega)$  representará o fecho de  $\mathcal{D}(\Omega)$  em  $W_q^p(\Omega)$ .

Frequentemente, precisaremos dos espaços das funções vetoriais com  $n$  componentes em algum dos espaços enunciados acima. Usaremos, estão a notação  $\mathcal{D}(\Omega)^n$ ,  $L^q(\Omega)^n$ ,  $W_q^p(\Omega)^n$  e vamos supor que estes espaços produtos são equipados com a norma do produto usual (exceto  $\mathcal{D}(\Omega)^n$  que não é um espaço normado).

Para os resultados que envolverão as equações do tipo Navier-Stokes usaremos os seguintes espaços :

$\mathcal{V}$  representará o espaço das funções  $\vec{u}(x)$  em  $\mathcal{D}(\Omega)^n$  com divergente nulo.

$H$  representará fecho de  $\mathcal{V}$  em  $L^2(\Omega)^n$ .

$V$  representará fecho de  $\mathcal{V}$  em  $\overset{0}{W}_2^1(\Omega)^n$ .

Para funções dependendo de variáveis espaciais e temporais usaremos os seguintes espaços funcionais, cujas notações e definições podem ser encontradas em Ladyzenskaja ([27], Capítulo I).

$L^{q,r}(Q)$  é o espaço de Banach das (classes de) funções  $u(x,t)$  de  $Q$  em  $\mathbb{R}$  mensuráveis (no sentido de Lebesgue) cuja norma é dada por

$$\|u\|_{q,r,Q} = \left( \int_0^T \left( \int_{\Omega} |u(x,t)|^q dx \right)^{r/q} dt \right)^{1/r}, \quad (q, r \geq 1).$$

Para  $q=r$  usaremos a notação  $L^{q,q}(Q) = L^q(Q)$ .

$W_q^{2,1}(Q)$  é o espaço de Banach ( $q \geq 1$ ) das funções  $u(x,t)$  em  $L^q(Q)$  com derivadas generalizadas  $D_x u$ ,  $D_x^2 u$ ,  $D_t u$  em  $L^q(Q)$  com norma definida por

$$\|u\|_{q,Q}^{(2)} = \|u\|_{q,Q} + \|D_x u\|_{q,Q} + \|D_x^2 u\|_{q,Q} + \|D_t u\|_{q,Q}$$

$W_2^{1,0}(Q)$  é o espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v)_{W_2^{1,0}} = \int_Q uv + \nabla u \cdot \nabla v \, dxdt$$

$W_2^{1,1}(Q)$  é o espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v)_{W_2^{1,1}} = \int_Q uv + \nabla u \cdot \nabla v + D_t u D_t v \, dxdt$$

$W_2^{1,1}(Q)$  é o subespaço de  $W_2^{1,1}(Q)$  cujas funções se anulam em S no sentido do traços.

Consideremos, agora, a classe das funções  $u(x,t)$  de  $W_2^{1,0}(Q)$  com norma dada por

$$|u|_{V_2(Q)} = \text{ess sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(x,t)\|_{2,\Omega} + \|\nabla u(x,t)\|_{2,Q}$$

finita. Então, podemos definir o seguinte espaço de Banach

$$V_2(Q) = \{u \in W_2^{1,0}(Q); |u|_{V_2(Q)} < \infty\} \quad (1.1)$$

$V_2^0(Q)$  é o subespaço de  $V_2(Q)$  cujas funções se anulam em S no sentido dos traços.

Agora definiremos o espaço das funções que são contínuas no sentido de Hölder. Dizemos que uma função  $u(x,t)$  definida em  $\bar{Q}$  é Hölder contínua em  $x$  e  $t$ , respectivamente, com expoentes  $\alpha$  e  $\beta$  em  $(0,1)$  se as seguintes quantidades, chamadas constantes de Hölder, são finitas :

$$\langle u \rangle_x^{(\alpha)} = \sup_{\substack{(x_1,t),(x_2,t) \in \bar{Q} \\ x_1 \neq x_2}} \frac{|u(x_1,t) - u(x_2,t)|}{|x_1 - x_2|^\alpha}$$

$$\langle u \rangle_t^{(\beta)} = \sup_{\substack{(x,t_1),(x,t_2) \in \bar{Q} \\ t_1 \neq t_2}} \frac{|u(x,t_1) - u(x,t_2)|}{|t_1 - t_2|^\beta}$$

Agora, dado  $\tau > 0$  não inteiro, considere a seguinte norma :

$$|u|_Q^{(\tau)} = \sum_{(2r+s=\lceil\tau\rceil)} \langle D_t^r D_x^s \rangle_x^{(\tau-\lceil\tau\rceil)} + \sum_{0 < \tau - 2r - s < 2} \langle D_t^r D_x^s u \rangle_t^{(\frac{\tau-2r-s}{2})} + \sum_{j=0}^{\lceil\tau\rceil} \langle u \rangle_Q^{(j)}$$

com  $\langle u \rangle_Q^{(j)} = \sum_{(2r+s=j)} \max |D_t^r D_x^s u|$  e  $\lceil\tau\rceil$  o maior inteiro menor que  $\tau$ .

Definimos o espaço de Banach  $H^{\tau,\tau/2}(Q)$  com  $\tau$  um número não inteiro, como o espaço das funções  $u(x,t)$  contínuas em  $\bar{Q}$  com derivadas da forma  $D_t^r D_x^s u$  com  $2r + s < \tau$  também contínuas e que tem a norma  $|u|_Q^{(\tau)}$  finita.

Particularmente, estaremos interessados nos espaços de Hölder  $H^{\tau, \tau/2}(Q)$  com  $0 \leq \tau < 1$  ou  $1 \leq \tau < 2$  com as seguintes normas, respectivamente

$$|u|_Q^{(\tau)} = \max_Q |u| + \langle u \rangle_x^{(\tau)} + \langle u \rangle_t^{(\tau/2)}$$

$$|u|_Q^{(\tau)} = \max_Q |u| + \sum \max_Q |D_x u| + \langle D_x u \rangle_x^{(\tau-1)} + \langle u \rangle_t^{(\tau/2)}$$

Além disso, também usaremos os seguintes espaços funcionais abstratos :

Sejam  $B$  um espaço de Banach qualquer com norma  $\|\cdot\|_B$  e  $0 < T < \infty$ .  $L^p(0, T; B)$  é o espaço de Banach das (classes de) funções  $u: [0, T] \rightarrow B$ , mensuráveis tal que a função  $t \in [0, T] \rightarrow \|u(t)\|_B$  (definidas q.t.p) é  $p$ -integrável ( $1 \leq p \leq \infty$ ) com norma dada por

$$\|u\|_{L^p(0, T; B)} = \left( \int_0^T \|u(t)\|_B^p dt \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty).$$

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; B)} = \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_B \quad (p = \infty).$$

$C([0, T]; B)$  é o espaço de Banach das funções  $u: [0, T] \rightarrow B$ , contínuas (com relação a topologia forte de  $B$ ).

$W^{m, p}(0, T; B)$  é o espaço das (classes de) funções em  $L^p(0, T; B)$  cujas derivadas generalizadas de ordem  $\leq m$  também pertencem a  $L^p(0, T; B)$ .

## 1.2 Resultados Auxiliares

Nesta seção lembraremos alguns resultados clássicos de imersão do tipo Sobolev.

**Lema 1.2.1** *Seja  $\Omega$  um domínio limitado do  $\mathbb{R}^n$  com fronteira suficientemente suave ( $\partial\Omega$  de classe  $C^m$ ). Se  $k, m$  e  $p$  são inteiros e  $p \geq 1$  então as seguintes imersões são contínuas :*

$$W_p^k(\Omega) \longrightarrow L^{p^*}(\Omega) \quad \text{para } kp < n \text{ e } p^* = \frac{np}{(n - kp)}$$

$$W_p^k(\Omega) \longrightarrow C^m(\bar{\Omega}) \quad \text{para } 0 \leq m < k - \frac{n}{p}$$

**Lema 1.2.2** *Seja  $\Omega$  um domínio limitado do  $\mathbb{R}^n$  com fronteira suficientemente suave ( $\partial\Omega$  de classe  $C^1$ ) e  $r \geq 1$ ,  $p < \infty$ . Se  $j$  e  $m$  são inteiros tais que  $0 \leq j < m$  e*

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{r} + \frac{j}{n} - \frac{m}{n}$$

*então a seguinte imersão é compacta :*

$$W_r^m(\Omega) \longrightarrow W_p^j$$

As imersões acima são também válidas para  $W_p^0(\Omega)$  com  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  arbitrário.

Os dois lemas seguintes podem ser encontrados em Ladyzenskaja ([27]; p.74).

**Lema 1.2.3** *Seja  $\Omega$  um domínio do  $\mathbb{R}^n$  com fronteira  $\partial\Omega$  suficientemente suave. Então para qualquer função  $u(x,t)$  de  $V_2(Q)$  (veja (1.1)) vale a seguinte desigualdade de interpolação:*

$$\|u\|_{q,r,Q} \leq M \left( \operatorname{ess\,sup}_{0 \leq t \leq T} \|u\|_{2,\Omega} \right)^{1-\frac{2}{r}} \|\nabla u\|_{2,Q}^{\frac{2}{r}}$$

com

$$\frac{1}{r} + \frac{n}{2q} = \frac{n}{4}$$

$$\begin{cases} r \in [2, \infty], q \in \left[2, \frac{2n}{n-2}\right] & \text{para } n > 2 \\ r \in [2, \infty], q \in [2, \infty) & \text{para } n = 2 \end{cases}$$

**Lema 1.2.4** *Seja  $\Omega$  um domínio do  $\mathbb{R}^n$  com fronteira  $\partial\Omega$  suficientemente suave. Então qualquer função  $u(x,t)$  de  $V_2(Q)$  (veja (1.1)) pertence  $L^{q,r}(Q)$  e existe uma constante  $M$  que depende apenas de  $n$ ,  $q$  e  $\Omega$  tal que*

$$\|u\|_{q,r,Q} \leq M |u|_{V_2(Q)}$$

O seguinte resultado, conhecido com *Imersão de Aubion-Lions* pode ser encontrado em Temam ([35]; p.271, Teorema 2.1).

**Lema 1.2.5** *Sejam  $X, B$  e  $Y$  espaços de Banach reflexivos tais que  $X \rightarrow B \rightarrow Y$  com as imersões contínuas,  $X \rightarrow B$  compacta. Sejam  $0 < T < \infty$  e  $\alpha_0, \alpha_1$  números finitos tais que  $\alpha_i > 1, i = 0, 1$ . Considere o seguinte espaço de Banach*

$$W = \{u \in L^{\alpha_0}(0, T; X); D_t u \in L^{\alpha_1}(0, T; Y)\}$$

*Então,  $W \rightarrow L^{\alpha_0}(0, T; B)$  com imersão compacta.*

As seguinte imersões podem ser encontradas em Simon [34].

**Lema 1.2.6** *Sejam  $X, B$  e  $Y$  espaços de Banach tais que  $X \rightarrow B \rightarrow Y$  com as imersões contínuas,  $X \rightarrow B$  compacta. Então, a seguinte imersão é compactas :*

$$L^\infty(0, T; X) \cap \{u; D_t u \in L^r(0, T; Y)\} \rightarrow C(0, T; B) \quad 1 < r \leq \infty$$

O próximo resultado é um caso particular do Lema 3.3 em Ladyzenskaja([27]; p.80) com  $l = 1$  e  $r=s=0$ .

**Lema 1.2.7** *Seja  $\Omega$  um domínio do  $\mathbb{R}^n$  com fronteira  $\partial\Omega$  suficientemente suave (com a propriedade do cone). Então para qualquer função  $u \in W_q^{2,1}(Q)$  valem as seguintes desigualdades :*

$$\text{a) } \|u\|_{p,Q} \leq M \|u\|_{q,Q}^{(2)} \quad \text{com } p \geq q \text{ e } 2 - \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right)(n+2) \geq 0$$

$$\text{b) } |u|_Q^{(\tau)} \leq M \|u\|_{q,Q}^{(2)} \quad \text{com } q > \frac{n+2}{2} \text{ e } 0 \leq \tau = 2 - \left(\frac{n+2}{q}\right)$$

com  $M$  uma constante que depende de  $p, q, n$  e  $\Omega$ .

**Observação 1.2.1** *Para  $q > n+2$  no Lema 1.2.7, temos que as derivadas da função  $u \in W_q^{2,1}(Q)$  com relação a  $x_i$  também satisfazem uma condição de Hölder em  $x$  e  $t$  e a desigualdade **b**).*

Em particular, estaremos interessados nos casos  $n = 2, 3$  e vamos reescrever o Lema 1.2.7 como segue:

**Lema 1.2.8** *Seja  $\Omega$  um domínio do  $\mathbb{R}^n, n=2,3$ , com fronteira  $\partial\Omega$  suficientemente suave (com a propriedade do cone). Então a imersão  $W_q^{2,1}(Q) \rightarrow L^p(Q)$  é contínua e existe uma constante  $M$  que depende de  $p, q$  e  $\Omega$  tal que*

$$\|u\|_{p,Q} \leq M \|u\|_{q,Q}^{(2)}$$

com  $p$  dado, para  $n=2$ , por

$$p = \begin{cases} \infty & \text{se } \frac{1}{q} - \frac{1}{2} < 0 \\ \forall p \geq 1 & \text{se } \frac{1}{q} - \frac{1}{2} = 0 \\ (\frac{1}{q} - \frac{1}{2})^{-1} & \text{se } \frac{1}{q} - \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$$

e com  $p$  dado, para  $n=3$ , por

$$p = \begin{cases} \infty & \text{se } \frac{1}{q} - \frac{2}{5} < 0 \\ \forall p \geq 1 & \text{se } \frac{1}{q} - \frac{2}{5} = 0 \\ (\frac{1}{q} - \frac{2}{5})^{-1} & \text{se } \frac{1}{q} - \frac{2}{5} > 0 \end{cases}$$

**Lema 1.2.9** *Seja  $\Omega$  um domínio do  $\mathbb{R}^n$ ,  $n=2,3$ , com fronteira  $\partial\Omega$  suficientemente suave (com a propriedade do cone). Então a imersão  $W_q^{2,1}(Q) \rightarrow H^{\tau, \tau/2}(Q)$  é contínua e existe uma constante  $M$  que depende de  $p$ ,  $q$  e  $\Omega$  tal que*

$$|u|_Q^{(\tau)} \leq M \|u\|_{q,Q}^{(2)}$$

com  $q > 2$  e  $0 \leq \tau = 2 - \frac{4}{q}$  se  $n = 2$  ou  $q > \frac{5}{2}$  e  $0 \leq \tau = 2 - \frac{5}{q}$  se  $n = 3$ .

**Observação 1.2.2** *Para  $q > 4$  e  $0 \leq \tau = 2 - \frac{4}{q}$  se  $n = 2$  ou  $q > 5$  e  $0 \leq \tau = 2 - \frac{5}{q}$  se  $n = 3$  temos que as derivadas de  $u$  com relação a  $x_i$  satisfazem o **Lema 1.2.9**.*

O próximo resultado é o conhecido *Teorema de Arzela-Ascoli* e pode ser encontrado em Friedman([16]; p.112 Teorema 3.6.4).

**Lema 1.2.10** *Seja  $\mathcal{K}$  uma família de funções equicontínuas e uniformemente limitada definidas no espaço métrico compacto  $X$ . Então, qualquer sequência  $\{u_n\}$  de funções de  $\mathcal{K}$  tem uma subsequência que converge uniformemente em  $X$  para uma função contínua.*

Agora, enunciaremos o Teorema de ponto fixo devido a Leray e Schauder (Friedman [17]; p.189 Teorema 3)

**Lema 1.2.11** *Sejam  $X$  um espaço de Banach e  $T : [a,b] \times X \longrightarrow X$  uma transformação tal que  $y = T(\lambda,x)$  com  $x,y \in X$  e  $\lambda \in [a,b]$ . Suponha que :*

- a)  $T(\lambda,x)$  está definida  $\forall x \in X$  e  $\forall \lambda \in [a,b]$ .
- b) Para  $\lambda$  fixo,  $T(\lambda,x)$  é contínua em  $X$ .
- c) Para  $x \in A$ ,  $A \subset X$  limitado,  $T(\lambda,x)$  é uniformemente contínua em  $\lambda$ .
- d) Para  $\lambda$  fixo,  $T(\lambda,x)$  é uma transformação compacta.
- e) Existe uma constante (finita)  $M$  tal que toda possível solução  $x$  de  $x = T(\lambda,x)$  satisfaz  $\|x\|_X \leq M$ .
- f) A equação  $x = T(a,x)$  tem uma única solução em  $X$ .

Então, existe uma solução da equação  $x = T(b,x)$ .

Os seguintes resultados são teoremas clássicos da teoria  $L_p$  para as equações diferenciais parabólicas lineares.

Considere a seguinte problema parabólico linear:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \sum_{i=1}^n b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x,t)u = f(x,t) & \text{em } Q \\ u(x,t) = 0 & \text{em } S \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (1.2)$$

O seguinte Lema pode ser encontrado em Ladyzenskaja([27]; p.180, Remark 6.3).

**Lema 1.2.12** *Seja  $\Omega$  um domínio do  $\mathbb{R}^n$  com fronteira  $\partial\Omega$  suficientemente suave. Suponha que:*

- a)  $f \in L^2(Q)$ .
- b)  $u_0 \in \overset{0}{W} \frac{1}{2}(\Omega)$ .
- c)  $b_i \in L^{q,r}(Q)$  com  $\frac{1}{r} + \frac{n}{2q} = \frac{1}{2}$  e  $r < \infty$ .



d)  $a \in L^{q,r}(Q)$  com  $r < \infty$  e

$$\begin{cases} \frac{1}{r} + \frac{n}{2q} = 1 & \text{para } n \geq 4 \\ \frac{1}{r} + \frac{n}{2q} = 1 & q > 2 \text{ para } n = 3 \\ r > 4 & q = 2 \text{ para } n = 3 \\ r > 2 & q = 2 \text{ para } n = 2 \end{cases}$$

Então, existe uma única solução  $u \in W_2^{2,1}(Q)$  do problema (1.2) satisfazendo a seguinte estimativa:

$$\|u\|_{2,Q}^{(2)} \leq M \left( \|f\|_{2,Q} + \left( \|\vec{b}\|_{q,r,Q} + \|a\|_{q,r,Q} \right) \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u_0\|_{W_2^1(\Omega)} \right)$$

com  $M$  uma constante que depende  $T$ ,  $q$ ,  $r$  e  $\Omega$ .

**Observação 1.2.3** O Lema 1.2.12 também vale quando temos a condição de contorno do tipo Neumann (veja Ladyzenskaja([27]; p. 180, Remark 6.3).

O próximo resultado pode ser encontrado Ladyzenskaja([27]; p. 341).

**Lema 1.2.13** Sejam  $q > 1$  e  $\Omega$  um domínio do  $\mathbb{R}^n$  com fronteira  $\partial\Omega$  suficientemente suave. Suponha que:

a)  $f \in L^q(Q)$  com  $q \neq 3/2$ .

b)  $u_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega)$  com  $q \neq 3/2$ .

c)  $b_i \in L^r(Q)$  com  $r = \max(q, n+2)$  se  $q \neq n+2$  ou  $r = n+2 + \epsilon$  se  $q = n+2, \forall \epsilon > 0$ .

d)  $a \in L^s(Q)$  com  $s = \max(q, \frac{n+2}{2})$  se  $q \neq \frac{n+2}{2}$  ou  $r = \frac{n+2}{2} + \epsilon$  se  $q = \frac{n+2}{2}, \forall \epsilon > 0$ .

e)  $u_0(x) = 0$  em  $\partial\Omega$  se  $q > 3/2$ .

Então, existe uma única solução  $u \in W_q^{2,1}(Q)$  do problema (1.2) satisfazendo, para  $q > 3/2$ , a seguinte estimativa:

$$\|u\|_{q,Q}^{(2)} \leq M \left( \|f\|_q + \left( \|\vec{b}\|_{r,Q} + \|a\|_{s,Q} \right) \|u_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} + \|u_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} \right)$$

com  $M$  uma constante que depende de  $T$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $s$  e  $\Omega$ .

Vamos, agora, enunciar o resultado do **Lema 1.2.13** para o problema parabólico com condições de Neumann (Ladyzenskaja [27]; p.351). Considere, então, o seguinte problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x, t)u = f(x, t) & \text{em } Q \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (1.3)$$

**Lema 1.2.14** *Sejam  $q > 1$  e  $\Omega$  um domínio do  $\mathbb{R}^n$  com fronteira  $\partial\Omega$  suficientemente suave. Suponha que:*

- a)  $f \in L^q(Q)$  com  $q \neq 3$ .
- b)  $u_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega) \cap W_q^{3/2-\delta}(\Omega)$  com  $q \neq 3/2$  e  $\delta \in (0, 1)$ .
- c)  $b_i \in L^r(Q)$  com  $r = \max(q, n+2)$  se  $q \neq n+2$  ou  $r = n+2 + \epsilon$  se  $q = n+2, \forall \epsilon > 0$ .
- d)  $a \in L^s(Q)$  com  $s = \max(q, \frac{n+2}{2})$  se  $q \neq \frac{n+2}{2}$  ou  $r = \frac{n+2}{2} + \epsilon$  se  $q = \frac{n+2}{2}, \forall \epsilon > 0$ .
- e)  $\frac{\partial u_0}{\partial \eta} = 0$  em  $\partial\Omega$  se  $q > 3$ .

Então, existe uma única solução  $u \in W_q^{2,1}(Q)$  do problem (1.3) satisfazendo, para  $q > 3$ , a seguinte estimativa:

$$\|u\|_{q,Q}^{(2)} \leq M \left( \|f\|_{q,Q} + \left( \|\vec{b}\|_{r,Q} + \|a\|_{s,Q} \right) \|u_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} + \|u_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} \right)$$

com  $M$  uma constante que depende de  $T, q, r, s$  e  $\Omega$ .

**Observação 1.2.4** *Devemos ressaltar que o resultado do **Lema 1.2.14** vale também para  $q = 3$  (veja Ladyzenskaja [27]; p.351).*

O seguinte resultado é um teorema clássico da teoria matemática dos fluidos incompressíveis para o problema de Stokes e pode ser encontrado em Ladyzenskaja ([26]; p.100, Teorema 6).

Considere o problema de Stokes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \nabla p = f(x, t) & \text{em } Q \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{em } Q \\ v = 0 & \text{em } S \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{em } \Omega \end{array} \right. \quad (1.4)$$

**Lema 1.2.15** *Sejam  $1 < q < \infty$  e  $\Omega$  aberto limitado do  $\mathbb{R}^3$  com fronteira  $\partial\Omega$  suficientemente suave (de classe  $C^2$ ). Suponha que:*

- a)  $f \in L^q(Q)$ .
- b)  $v_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega) \cap H$ .
- c)  $v_0(x) = 0$  em  $\partial\Omega$  se  $q > 3/2$  ou

$$\int_{\Omega} v_0(x) \Phi(x) dx = 0 \text{ para } \forall \Phi \text{ suave se } q < 3/2$$

*Então, existe uma única solução  $(v, p)$  do problema (1.4) tal que  $v \in W_q^{2,1}(Q)^3$  e  $\nabla p \in L^q(Q)^3$  satisfazendo a seguinte estimativa:*

$$\|\vec{v}\|_{q,Q}^{(2)} + \|\nabla p\|_{q,Q} \leq M \left( \|f\|_{q,Q} + \|v_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} \right)$$

*com  $M$  independente de  $f$  e  $v_0$ .*

**Observação 1.2.5** *Para  $q = 2$  o resultado do Lema 1.2.15 vale para qualquer dimensão (veja Temam [35]; p.267 Proposição 1.2).*

### 1.3 Problema auxiliar : Campo de fases

Nesta seção provaremos um resultado de existência, unicidade e regularidade para um problema auxiliar relacionado com o campo de fases  $\varphi(x, t)$ , que será importante nas demonstrações de nossos resultados.

Considere o seguinte problema :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + g & \text{em } Q \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (1.5)$$

com  $\alpha$  uma constante positiva,  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$  e  $g(x, t)$  funções conhecidas.

**Teorema 1.3.1** *Seja  $\Omega$  domínio do  $\mathbb{R}^n$  ( $n = 2, 3$ ) com fronteira  $\partial\Omega$  suficientemente suave. Suponha que  $a(x, t), b(x, t) \in L^\infty(Q)$ ,  $g \in L^q(Q)$  ( $q \geq 2$ ),  $\varphi_0 \in W_q^1(\Omega) \cap W_2^{3/2+\delta}(\Omega)$ ,  $\delta \in (0, 1)$  e  $q \geq 2$ , satisfazendo  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} = 0$  em  $\partial\Omega$ . Então, existe uma única solução  $\varphi \in W_q^{2,1}(Q)$  do problema (1.5) satisfazendo a seguinte estimativa:*

$$\|\varphi\|_{q,Q}^{(2)} \leq M(\|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|g\|_{q,Q})$$

com  $M$  uma constante que depende de  $T$ ,  $|\Omega|$ ,  $\|a\|_{\infty,Q}$ ,  $\|b\|_{\infty,Q}$  e  $\|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)}$ .

A prova deste teorema encontra-se em Hoffman [19] para o caso  $n = 3$  (o resultando também vale para  $n = 2$ ). Porém, neste trabalho, necessitaremos de mais informações sobre a solução do problema acima do que aquelas obtidas em [19]. Assim, para facilitar a referência, para complementar a exposição e para obtermos alguns resultados extras e necessários, daremos a seguir uma prova similar àquela de [19], porém mais simples.

#### Prova do Teorema 1.3.1 :

Aplicaremos o Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder (veja Lema 1.2.11). Considere o operador  $T(\lambda, \cdot)$  definido em  $L^6(Q)$ , ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ), que associa a cada  $w \in L^6(Q)$  a única solução do seguinte problema linear:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = aw + bw^2 - w^3 + \lambda g & \text{em } Q \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & \text{em } \Omega \end{array} \right. \quad (1.6)$$

Vamos verificar que de fato  $T(\lambda, \cdot)$  está bem definido em  $L^6(Q)$ ,  $\forall \lambda \in [0, 1]$ . Observe que para  $w \in L^6(Q)$  temos que  $aw + bw^2 - w^3 \in L^2(Q)$  e, logo, se  $g \in L^q(Q)$  ( $q \geq 2$ ) e  $\varphi_0 \in W_2^1(\Omega) \cap W_2^{3/2+\delta}(\Omega)$  então pelos Lemas 1.2.8 e 1.2.14 existe uma única solução  $\varphi \in W_2^{2,1}(Q) \cap L^p(Q)$  com  $p \geq 2$  se  $n = 2$  e  $p = 10$  se  $n = 3$ . Portanto,  $T(\lambda, \cdot)$  está bem definido de  $L^6(Q)$  em  $L^6(Q)$ .

Para mostrarmos que  $T(\lambda, \cdot)$  é contínuo em  $L^6(Q)$  para  $\forall \lambda \in [0, 1]$  fixo, considere  $w_1, w_2 \in L^6(Q)$ , as correspondentes soluções  $\varphi_1 = T(\lambda, w_1)$  e  $\varphi_2 = T(\lambda, w_2)$  e o problema (1.6) para a diferença  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  dado por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = B(x, t)(w_1 - w_2) & \text{em } Q \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S \\ \varphi(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega \end{array} \right. \quad (1.7)$$

com  $B(x, t) = a + b(w_1 + w_2) - (w_1^2 + w_1 w_2 + w_2^2) \in L^3(Q)$ .

Multiplicando a equação (1.7) por  $\varphi$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $-\Delta \varphi$ , respectivamente, integrando por partes e usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx + \alpha^2 \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx dt \leq \\ & \frac{1}{2} \left( \int_0^T \int_{\Omega} |B|^3 dx dt \right)^{2/3} \left( \int_0^T \int_{\Omega} |w_1 - w_2|^6 dx dt \right)^{1/3} + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx dt \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|^2 dxdt + \alpha^2 \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dxdt \leq \\ & \frac{1}{2} \left( \int_0^T \int_{\Omega} |B|^3 dxdt \right)^{2/3} \left( \int_0^T \int_{\Omega} |w_1 - w_2|^6 dxdt \right)^{1/3} \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dxdt + \frac{\alpha^2}{2} \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta \varphi|^2 dxdt \leq \\ & \frac{1}{2\alpha^2} \left( \int_0^T \int_{\Omega} |B|^3 dxdt \right)^{2/3} \left( \int_0^T \int_{\Omega} |w_1 - w_2|^6 dxdt \right)^{1/3} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Usando a desigualdade de Gronwall e combinando as estimativas (1.8), (1.9) e (1.10) temos que

$$\|\varphi\|_{2,Q}^{(2)} \leq M \|B\|_{3,Q} \|w_1 - w_2\|_{6,Q} \quad (1.11)$$

Logo, pelo Lema 1.2.8 do Capítulo 1 e a estimativa (1.11) temos que

$$\|T(\lambda, w_1) - T(\lambda, w_2)\|_{p,Q} \leq \|B\|_{3,Q} \|w_1 - w_2\|_{6,Q}$$

com  $p \geq 2$  se  $n = 2$  e  $p = 10$  se  $n = 3$ .

E logo,  $T(\lambda, \cdot)$  é localmente Lipschitz em  $L^6(Q)$  e, conseqüentemente, contínuo em  $L^6(Q)$ .

Para provarmos que  $T(\lambda, \cdot)$  é um operador compacto  $\forall \lambda \in [0,1]$  observe que pelo Lema 1.2.5 do Capítulo 1 a imersão de  $W_2^{2,1}(Q)$  em  $L^6(Q)$  é compacta. Além disso, que  $\|\varphi\|_{2,Q}^{(2)} \leq M$ . Assim, seja  $\mathcal{A} \subset L^6(Q)$  um conjunto limitado e  $\{w_n\} \subset \mathcal{A}$  qualquer seqüência então pela definição do operador  $T(\lambda, \cdot)$  temos que  $T(\lambda, w_n) = \varphi_n$  e  $\|T(\lambda, w_n)\|_{2,Q}^{(2)} \leq M(\mathcal{A})$ . Como  $W_2^{2,1}(Q) \rightarrow L^6(Q)$  é compacta temos que existe uma subseqüência  $T(\lambda, w_k)$  convergindo forte em  $L^6(Q)$ .

Para verificarmos que  $T(\lambda, \cdot)$  é uniformemente contínuo com relação a  $\lambda$ , considere  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , as correspondentes soluções  $\varphi_1 = T(\lambda_1, w_1)$  e  $\varphi_2 = T(\lambda_2, w_2)$  e o problema (1.6) para a diferença  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  dado por:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = B(w_1 - w_2) + (\lambda_1 - \lambda_2)g(x, t) & \text{em } Q \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S \\ \varphi(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

com  $B(x, t) = a + b(w_1 + w_2) - (w_1^2 + w_1 w_2 + w_2^2) \in L^3(Q)$ .

De modo análogo como na prova da continuidade podemos provar que

$$\|T(\lambda_1, w_1) - T(\lambda_2, w_2)\|_{p,Q} \leq M \|B\|_{3,Q} \|w_1 - w_2\|_{6,Q} + |\lambda_1 - \lambda_2| \|g\|_{2,Q}$$

Portanto,  $T(\lambda, \cdot)$  é localmente Lipschitz com relação a  $\lambda$ .

Agora, para  $\lambda = 0$  o problema (1.6) torna-se

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = aw + bw^2 - w^3 & \text{em } Q \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (1.12)$$

Pelo Lema 1.2.14 temos que existe uma única solução do problema (1.12) tal que  $\varphi \in W_2^{2,1}(Q) \cap L^p(Q)$  com  $p \geq 2$  se  $n = 2$  e  $p = 10$  se  $n = 3$ .

Agora, provaremos que o conjunto dos pontos fixos de  $T(\lambda, \cdot)$  é uniformemente limitado. Se  $\varphi_\lambda$  é o ponto fixo de  $T(\lambda, \cdot)$  então deve satisfazer o seguinte problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi_\lambda = a\varphi_\lambda + b\varphi_\lambda^2 - \varphi_\lambda^3 + \lambda g & \text{em } Q \\ \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S \\ \varphi_\lambda(x, 0) = \varphi_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (1.13)$$

Multiplicando a equação (1.13) por  $\varphi_\lambda$ ,  $\dot{\varphi}_\lambda$ ,  $-\Delta\varphi_\lambda$  respectivamente, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\varphi_\lambda|^2 dx + \alpha^2 \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \varphi_\lambda|^2 dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} |\varphi_\lambda|^4 dx dt \leq \\ & M \left( \int_{\Omega} |\varphi_0|^2 dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} |g|^2 dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} |\varphi_\lambda|^2 dx dt \right) \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial t} \right|^2 dx dt + \int_{\Omega} |\nabla \varphi_\lambda|^2 dx + \leq \\ & M \left( \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} |g|^2 dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} |\varphi_\lambda|^2 dx dt \right) \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\nabla \varphi_\lambda|^2 dx + \alpha^2 \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta \varphi_\lambda|^2 dx dt + 3 \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \varphi_\lambda|^2 \varphi_\lambda^2 dx dt \leq \\ & M \left( \int_{\Omega} |\nabla \varphi_0|^2 dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} |g|^2 dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} |\varphi_\lambda|^2 dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} |\varphi_\lambda|^4 dx dt \right) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Usando a desigualdade de Gronwall e combinando as estimativas (1.14), (1.15) e (1.16) obtemos

$$\|\varphi_\lambda\|_{2,Q}^{(2)} \leq M \|g\|_{2,Q} + \|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)}$$

Assim, pelo Lema 1.2.8 do Capítulo 1 temos que

$$\|\varphi_\lambda\|_{p,Q} \leq M \left( \|g\|_{2,Q} + \|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)} \right)$$

com  $p \geq 2$  se  $n = 2$  e  $p = 10$  se  $n = 3$ .

Portanto, pelo Teorema de Leray-Schauder (Lema 1.2.11),  $T(1, \varphi)$  tem um ponto fixo, isto é, existe  $\varphi \in L^6(Q)$  solução do problema (1.5).



Para concluirmos a demonstração, vamos analisar a regularidade desta solução usando um argumento de *bootstrapping*. Para isto, observe que, com  $\varphi \in L^6(Q)$  e  $g \in L^q(Q)$  ( $q \geq 2$ ) temos que  $a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 \in L^2(Q)$ , e, logo, pelo Lema 1.2.8 com  $\varphi_0 \in W_2^1(\Omega) \cap W_2^{3/2+\delta}$ ,  $\delta \in (0,1)$ , existe uma única solução  $\varphi \in W_2^{2,1}(Q)(\Omega) \cap L^p(Q)$  com  $p \geq 2$  se  $n = 2$  e  $p = 10$  se  $n = 3$  satisfazendo

$$\|\varphi\|_{p,Q} \leq M \|\varphi\|_{2,Q}^{(2)} \leq M \left( \|g\|_{2,Q} + \|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)} \right) \quad (1.17)$$

Aplicando novamente o Lema 1.2.8 com  $n = 3$  (o caso  $n = 2$  é análogo) tem-se para  $\varphi \in L^9(Q)$  e  $g \in L^q(Q)$  ( $q \geq 3$ ) que  $\varphi \in W_3^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$  satisfazendo, com  $\varphi_0 \in W_3^{4/3}(\Omega) \cap W_2^{3/2+\delta}(\Omega)$ ,  $\delta \in (0,1)$ ,

$$\|\varphi\|_{\infty,Q} \leq M \|\varphi\|_{3,Q}^{(2)} \leq M \left( \|(a + b\varphi - \varphi^2)\varphi\|_{3,Q} + \|g\|_{3,Q} + \|\varphi_0\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} \right)$$

Usando o fato que existe  $\max_{\substack{s \in \mathbb{R} \\ (x,t) \in Q}} (a(x,t) + b(x,t)s - s^2)$  temos que

$$\|\varphi\|_{\infty,Q} \leq M \|\varphi\|_{3,Q}^{(2)} \leq M \left( \|\varphi\|_{6,Q} + \|g\|_{3,Q} + \|\varphi_0\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} \right)$$

e, pela estimativa (1.17) obtemos

$$\|\varphi\|_{\infty,Q} \leq M \|\varphi\|_{3,Q}^{(2)} \leq M \left( \|\varphi\|_{2,Q}^{(2)} + \|g\|_{3,Q} + \|\varphi_0\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} \right)$$

e, logo,

$$\|\varphi\|_{\infty,Q} \leq M \|\varphi\|_{3,Q}^{(2)} \leq M \left( \|g\|_{3,Q} + \|\varphi_0\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} \right)$$

Repetindo este argumento, obteremos  $\varphi \in W_q^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$  com  $\varphi_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega) \cap W_2^{3/2+\delta}(\Omega)$ ,  $\delta \in (0,1)$  satisfazendo

$$\|\varphi\|_{q,Q}^{(2)} \leq M \left( \|g\|_{q,Q} + \|\varphi_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} \right)$$

com a constante  $M$  dependendo de  $T$ ,  $|\Omega|$ ,  $\|a\|_\infty$ ,  $\|b\|_\infty$  e  $\|\varphi_0\|_{W_2^1}$  e  $q \geq 2$ .

A unicidade é obtida de modo usual por argumento de contradição. De fato, considere  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  duas soluções do problema (1.6) então  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  satisfaz

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = B(x, t)(\varphi_1 - \varphi_2) & \text{em } Q \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S \\ \varphi(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (1.18)$$

com  $B(x, t) = a + b(\varphi_1 + \varphi_2) - (\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2)$  tal que  $\max_Q B(x, t) \leq \|a\|_\infty + \|b\|_\infty^2$ .

Multiplicando a equação (1.18) por  $\varphi$ , integrando por partes, usando as desigualdades de Young e Gronwall obtemos

$$\frac{d}{dt} (\|\varphi(t)\|_{2,\Omega}^2) \leq 0$$

Integrando e usando  $\|\varphi_0\|_{2,\Omega} = 0$  obtemos o resultado desejado e a prova do Teorema 1.3.1 está completa.  $\blacksquare$

## 1.4 Problema auxiliar: Velocidade

Nesta seção provaremos dois teoremas de existência e unicidade para dois problemas auxiliares relacionados com a velocidade  $v$ , que serão importantes nas demonstrações de nossos resultados.

### Caso Bidimensional

Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p + k(x, t)v = f(x, t) & \text{em } Q \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{em } Q \\ v = 0 & \text{em } S \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (1.19)$$

**Teorema 1.4.1** *Seja  $\Omega$  um domínio limitado do  $\mathbb{R}^2$  com fronteira  $\partial\Omega$  suficientemente suave. Se  $k(x, t) \in C^0(Q)$ ,  $k(x, t) \geq 0$ ,  $f(x, t) \in L^2(Q)$  e  $v_0(x) \in H$ . Então, existe uma única solução  $v(x, t) \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$  do problema (1.19).*

### Caso Tridimensional

Considere o seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p + k(x, t)v + \varepsilon|v|^4v = f(x, t) & \text{em } Q \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{em } Q \\ v = 0 & \text{em } S \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{em } \Omega \end{array} \right. \quad (1.20)$$

com  $\varepsilon$  uma constante positiva.

**Teorema 1.4.2** *Seja  $\Omega$  um domínio limitado do  $\mathbb{R}^3$  com fronteira  $\partial\Omega$  suficientemente suave. Se  $k(x, t) \in C^0(Q)$ ,  $k(x, t) \geq 0$ ,  $f(x, t) \in L^2(Q)$  e  $v_0(x) \in V$ . Então, existe uma única solução  $v(x, t) \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$  do problema (1.20).*

A prova da existência e unicidade das soluções dos problemas (1.19) e (1.20) são similares. Por isso, provaremos apenas o Teorema 1.4.2 e destacaremos as particularidades do caso bidimensional.

#### Prova do Teorema 1.4.2 :

Para provarmos a existência da solução do problema (1.20) usaremos o método de Galerkin e argumentos análogos aos da prova do Teorema 3.1 em Temam ([35]; p.282). Por esta razão, faremos um esboço da prova e analisaremos apenas o comportamento dos termos  $k(x, t)v(x, t)$  e  $|v(x, t)|^4v(x, t)$ . Assim, como  $k(x, t) \geq 0$  podemos mostrar que a sequência de soluções aproximadas de (1.20),  $\{v_m\}$ , dada pela aproximação de Galerkin são limitadas em  $L^2(0, T; V)$  e  $L^\infty(0, T; H)$  para o caso bidimensional e  $L^2(0, T; V)$ ,  $L^\infty(0, T; H)$  e  $L^6(Q)$  para o caso tridimensional. Ao passarmos o limite no

problema aproximado as convergências são obtidas exatamente do mesmo modo, exceto para os termos

$$\int_0^T \int_{\Omega} k(x, t) v_m(x, t) \psi(t) w_j(x) dx dt$$

$$\int_0^T \int_{\Omega} |v_m(x, t)|^4 v_m(x, t) \psi(t) w_j(x) dx dt$$

com  $\{w_j\}_{j=1}^m$  uma base de Galerkin de  $V$  e  $\psi \in C^1[0, T]$  tal que  $\psi(T) = 0$ .

A convergência da primeira integral é trivial pois  $k(x, t) \in C_b^1(Q)$  e para provarmos a convergência da segunda precisamos mostrar, primeiro, que  $h(y) = |y|^4 y \forall y \in R^3$  é uma função contínua. De fato, como a norma euclidiana é uma função contínua temos que  $|y|^4$  é contínua, e logo, as derivadas parciais  $D_x h_k$  existem e são contínuas.

Agora, considere a sequência  $g_m = |h(v_m) - h(v)|^3$ .

Como  $v_m \rightarrow v$  em  $L^2(0, T; H)$  então  $v_m \rightarrow v$  q.t.p. mas  $h(y)$  é contínua, e logo,  $h(v_m) \rightarrow h(v)$  q.t.p. Então,  $g_m \rightarrow 0$  q.t.p. Além disso,  $|g_m| \leq 2^3 \|h(v)\|_{\infty}^3$ . Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue podemos concluir que  $g_m \rightarrow 0$  em  $L^1(Q)$  e, logo,  $h(v_m) \rightarrow h(v)$  em  $L^3(Q)$  e temos a convergência desejada.

Para provarmos a unicidade considere  $v_i(x, t) (i = 1, 2)$  duas soluções do problema (1.20) então  $v(x, t) = v_1(x, t) - v_2(x, t)$  satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \nabla p + kv + \varepsilon (|v_1|^4 v_1 - |v_2|^4 v_2) \\ \quad \quad \quad = (v_2 \cdot \nabla) v_2 - (v_1 \cdot \nabla) v_1 & \text{em } Q \\ \text{div } v = 0 & \text{em } Q \\ v = 0 & \text{em } S \\ v(x, 0) = 0 & \text{em } \Omega \end{array} \right. \quad (1.21)$$

Multiplicando escalarmente a equação (1.21) por  $v(x, t)$ , integrando por partes, usando a desigualdade de interpolação (1.2.3) com  $n = 3$  obtemos

$$\int_{\Omega} v^2 + \int_{Q_t} |\nabla v|^2 dxdt + \int_{Q_t} kv^2 dxdt + \varepsilon \int_{Q_t} (|v_1|^4 v_1 - |v_2|^4 v_2) \cdot v dxdt \leq \widetilde{M} \int_0^T \int_{\Omega} |v|^2 dxdt \quad (1.22)$$

com  $\widetilde{M}$  uma constante que depende de  $\|\nabla v_1\|_2$  para  $n = 2$  e  $\|v_1\|_5$  para  $n = 3$ .

Observe que para o caso  $n = 2$  basta usarmos a desigualdade de Gronwall pois  $k(x, t) > 0$ . Para o caso  $n = 3$ , se provarmos que

$$\varepsilon \int_{Q_t} (|v_1|^4 v_1 - |v_2|^4 v_2) \cdot v dxdt \geq 0 \quad (1.23)$$

podemos concluir, usando (1.22), (1.23) e a desigualdade de Gronwall, o resultado desejado. Mas (1.23) é consequência do fato da função  $h(y) = |y|^4 y$ ,  $y \in \mathbb{R}^3$ , ser exatamente o gradiente da função  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $G(y) = \frac{1}{6}|y|^6$ , para  $y \in \mathbb{R}^3$  e  $\|\cdot\|$  a norma euclidiana de  $\mathbb{R}^3$ , a qual é convexa e, portanto,  $h(\cdot)$  é monotônica (veja Kavian [22]; p.136 Proposição 1.6 e *Remarque 1.7*).

Este argumento completa a prova do Teorema 1.4.2. ■

**Observação 1.4.1** *Note que a função  $h(v)$ , definida na prova do Teorema 1.4.2, pode ser mais geral. De fato, pode ser qualquer função  $h(\cdot)$  tal que  $h(\cdot)$  é a derivada de alguma função  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  Gâteaux diferenciável e convexa.*

## Capítulo 2

# Um modelo do tipo campo de fases para solidificação com convecção: materiais puros

Neste capítulo apresentaremos resultados de existência e regularidade para um modelo de condução-convecção do tipo campo de fases para a solidificação de materiais puros. Primeiro, faremos uma descrição do nosso modelo, que tem forte influência dos trabalhos de Caginalp [8] e Voller [37]. Em seguida, apresentaremos separadamente os casos bi e tridimensionais para ressaltarmos as particularidades de cada um. Para ambos os casos provaremos um resultado de existência e regularidade.

As técnicas que usaremos por todo este trabalho são clássicas: Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder (veja Lema 1.2.11), argumentos de compacidade e argumentos do tipo *bootstrapping*.

Vale ressaltar que, modelos do tipo campo de fases que tratam os efeitos da convecção, mesmo para o caso da solidificação de materiais puros, ainda não foram adequadamente explorados na literatura.

### 2.1 Descrição do Modelo

Nosso modelo é baseado no modelo de Voller *et al* [37] que usa leis de conservação de massa e energia para descrever as equações que governam a transferência de calor e a dinâmica de um fluido newtoniano incompressível e no modelo de Caginalp [8] que usa um funcional energia para descrever as

equações do parâmetro de ordem.

Em nosso modelo a mudança de fase é determinada pelo valor da fração sólida  $f_s$ , sendo  $f_s=1$  na região sólida,  $0 < f_s < 1$  na região *mushy* e  $f_s=0$  na região líquida. Esta fração sólida pode ser determinada por outras variáveis que influenciam na mudança de fase; em nosso caso, ela dependerá apenas do campo de fases.

Seguindo o modelo de Caginalp [8] e o trabalho de Hoffman [19] a equação do campo de fases, que descreve as fases da solidificação de materiais puros, é dada por:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \theta \quad (2.1)$$

com  $\varphi$  o campo de fases (*phase field*),  $\theta$  a temperatura e  $\alpha$  um parâmetro de dilatação.

A função  $g(s) = as + bs^2 - s^3 + \theta$  está relacionada com o chamado potencial *double-well*. Este potencial representa a densidade de energia da fase do sistema quando  $\varphi$  é constante e Caginalp [8] (veja também Wheeler *et al* [38]) propõe um potencial *double-well* que possui mínimos em  $\varphi = \pm 1$  para  $T=T_m$  com  $T_m$  a temperatura de *melting*. Estes pontos de mínimos representam as fases líquida e sólida e a zona *mushy* é representada pelos valores de  $\varphi$  entre -1 e +1 para os quais o potencial *double-well* cresce comparado com a fase líquida ou sólida. Por exemplo, o valor deste potencial em -1 a uma dada temperatura representa que o sistema está na fase sólida.

Em nosso modelo estas interpretações continuam válidas pois a equação do campo de fases, equação (2.1), é a mesma usada por Caginalp com exceção do potencial *double-well* que é mais geral e foi sugerido por Hoffman [19].

Para descrever a lei de conservação de energia relacionada com a condução de calor vamos considerar a densidade de energia interna dada por

$$e = \theta + \frac{\ell}{2}(1 - f_s)$$

com  $\theta = T - T_m$  o calor sensível e  $\ell$  o calor latente (relacionado com a mudança de fase).

Para a solidificação de muitos materiais puros, o calor latente muda na temperatura *melting*  $T_m$  (vê Alexiades [1]) e, logo,

com  $\kappa$  a permeabilidade do meio. Isto fornece uma expressão para  $-\nabla p_e$  (e, logo, para  $G(f_s, v)$ ) em termos de  $f_s$  e  $v$  :

$$G = -k(f_s)v$$

com  $k(f_s)$  uma função adequada e tal que  $k(f_s) \rightarrow +\infty$  quando  $f_s \uparrow 1$  ( a zona *mushy* torna-se sólida). Além disso,  $k(0) = 0$ .

Deste modo, na fase puramente líquida  $G$  é zero e as equações do momento linear são as equações de Navier-Stokes usuais.

A função  $k(f_s)$  mais usada na literatura (veja [29]-[36]-[37]) é a obtida da equação de Carman-Koseny, dada por

$$k(f_s) = \frac{f_s^2}{(1 - f_s)^3}$$

Como no trabalho de Blanc *et al* [3] para ligas, a função  $k(\cdot)$  pode ser estendida por zero ao intervalo  $(-\infty, 1)$  e, logo, podemos considerar situações mais gerais assumindo que :  $k \in C^0(-\infty, 1)$ ,  $k(0) = 0$ ,  $k = 0$  em  $\mathbb{R}^-$ ,  $k$  não negativa e  $\lim_{y \rightarrow 1} k(y) = +\infty$ .

O termo fonte  $F(\theta)$  é usado para modelar a convecção natural. Assumindo que vale a aproximação de Boussinesq, isto é, que a densidade é constante em todos os termos exceto na força de gravidade, temos que

$$F(\theta) = M\rho\mathbf{g}(\theta - \theta_r)$$

com  $M$  uma constante,  $\rho$  a densidade média,  $\mathbf{g}$  a força da gravidade e  $\theta_r$  uma temperatura referência. Por simplicidade, escreveremos  $F(\theta) = \vec{\sigma} \theta$ .

Finalmente, para concluirmos a descrição completa do nosso modelo devemos definir claramente as regiões onde as nossas equações devem ser válidas. Vamos considerar a solidificação no cilindro  $Q$  onde as fases líquida, *mashy* e sólida são identificadas com os conjuntos abertos  $Q_l$ ,  $Q_m$  e  $Q_s$  respectivamente. Deste modo, usando a fração sólida, definimos as regiões  $Q_l$ ,  $Q_m$  e  $Q_s$  como segue:

$$Q_l = \{(x, t) \in Q ; f_s(\varphi(x, t)) = 0\}$$

$$Q_s = \{(x, t) \in Q ; f_s(\varphi(x, t)) = 1\}$$

$$Q_m = \{(x, t) \in Q ; 0 < f_s(\varphi(x, t)) < 1\}$$



com  $\kappa$  a permeabilidade do meio. Isto fornece uma expressão para  $-\nabla p_e$  (e, logo, para  $G(f_s, v)$ ) em termos de  $f_s$  e  $v$  :

$$G = -k(f_s)v$$

com  $k(f_s)$  uma função adequada e tal que  $k(f_s) \rightarrow +\infty$  quando  $f_s \uparrow 1$  ( a zona *mushy* torna-se sólida). Além disso,  $k(0) = 0$ .

Deste modo, na fase puramente líquida  $G$  é zero e as equações do momento linear são as equações de Navier-Stokes usuais.

A função  $k(f_s)$  mais usada na literatura (veja [29]-[36]-[37]) é a obtida da equação de Carman-Koseny, dada por

$$k(f_s) = \frac{f_s^2}{(1 - f_s)^3}$$

Como no trabalho de Blanc *et al* [3] para ligas, a função  $k(\cdot)$  pode ser estendida por zero ao intervalo  $(-\infty, 1)$  e, logo, podemos considerar situações mais gerais assumindo que :  $k \in C^0(-\infty, 1)$ ,  $k(0) = 0$ ,  $k = 0$  em  $\mathbb{R}^-$  e  $\lim_{y \rightarrow 1} k(y) = +\infty$ .

O termo fonte  $F(\theta)$  é usado para modelar a convecção natural. Assumindo que vale a aproximação de Boussinesq, isto é, que a densidade é constante em todos os termos exceto na força de gravidade, temos que

$$F(\theta) = M\rho g(\theta - \theta_r)$$

com  $M$  uma constante,  $\rho$  a densidade média,  $\mathbf{g}$  a força da gravidade e  $\theta_r$  uma temperatura referência. Por simplicidade, escreveremos  $F(\theta) = \vec{\sigma} \theta$ .

Finalmente, para concluirmos a descrição completa do nosso modelo devemos definir claramente as regiões onde as nossas equações devem ser válidas. Vamos considerar a solidificação no cilindro  $Q$  onde as fases líquida, *mushy* e sólida são identificadas com os conjuntos abertos  $Q_l$ ,  $Q_m$  e  $Q_s$  respectivamente. Deste modo, usando a fração sólida, definimos as regiões  $Q_l$ ,  $Q_m$  e  $Q_s$  como segue:

$$Q_l = \{(x, t) \in Q ; f_s(\varphi(x, t)) = 0\}$$

$$Q_s = \{(x, t) \in Q ; f_s(\varphi(x, t)) = 1\}$$

$$Q_m = \{(x, t) \in Q ; 0 < f_s(\varphi(x, t)) < 1\}$$

$$Q_{ml} = \{(x, t) \in Q; 0 \leq f_s(\varphi(x, t)) < 1\}$$

$$S_l = \{(x, t) \in S; f_s(\varphi(x, t)) = 0\}$$

Além disso, para cada  $t \in [0, T]$  definimos

$$\Omega_s(t) = \{x \in \Omega; f_s(\varphi(x, t)) = 1\}$$

$$\Omega_{ml}(t) = \{x \in \Omega; 0 \leq f_s(\varphi(x, t)) < 1\}$$

$$\Omega_{ml}(0) = \{x \in \Omega; 0 \leq f_s(\varphi(x, 0)) < 1\}$$

Seja  $B(x, r)$  a bola aberta de centro  $x \in \Omega$  e raio  $r$ , então

$$\Gamma_s(t) = \{x \in \Omega; \exists y \in \Omega_s(t), \exists z \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_s(t) \mid y, z \in B(x, r)\}$$

E logo,

$$\Gamma_s = \bigcup_{0 < t < T} \Gamma_s(t),$$

$$S_{ml} = \Gamma_s \cup S_l,$$

$$Q = Q_s \cup Q_{ml}.$$

**Observação 2.1.1** *Devemos ressaltar que o nosso modelo pode ser considerado um problema de fronteira livre pois as regiões  $Q_l$ ,  $Q_m$  e  $Q_s$  são desconhecidas a priori.*

Resumindo, nosso modelo é o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \theta & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta = \frac{\ell}{2} \frac{\partial f_s}{\partial \varphi}(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \text{em } Q, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p + k(f_s(\varphi))v = \vec{\sigma} \theta & \text{em } Q_{ml}, \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{em } Q_{ml}, \\ v = 0 & \text{em } Q_s^0. \end{array} \right. \quad (2.3)$$

juntamente com as condições de fronteira

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S, \\ \theta = 0 & \text{em } S, \\ v = 0 & \text{em } S_{ml}. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

e as condições iniciais

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & \text{em } \Omega, \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) & \text{em } \Omega, \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{em } \Omega_{ml}(0). \end{array} \right. \quad (2.5)$$

### 2.1.1 Definição de solução generalizada

Vamos, agora, definir o que entendemos por solução generalizada do problema (2.3)-(2.4)-(2.5). Para simplificar a exposição, primeiramente, definiremos o que entenderemos por solução generalizada de cada equação separadamente.

#### *Campo de Fases*

Considere o seguinte problema :

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + g(x, t) & \text{em } Q \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 & \text{em } S \\ \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (2.6)$$

com  $\alpha$  uma constante positiva,  $a(x,t)$ ,  $b(x,t)$  e  $g(x,t)$  funções conhecidas.

**Definição 2.1.1** Dizemos que  $\varphi$  é solução generalizada do problema (2.6) na classe  $V_2(Q)$  se  $\varphi \in V_2(Q)$  (veja (1.1) do Capítulo 1) e satisfaz a seguinte identidade integral :

$$\begin{aligned} - \int_Q \varphi \beta_t dxdt + \alpha^2 \int_Q \nabla \varphi \nabla \beta dxdt &= \int_Q (a + b\varphi - \varphi^2) \varphi \beta dxdt + \\ &+ \int_Q g\varphi dxdt + \int_\Omega \varphi(x, 0)\beta(x, 0) dx \end{aligned} \quad (2.7)$$

para toda  $\beta$  em  $W_2^{1,1}(Q)$  com  $\beta(x, T) = 0$  e  $g \in L^{q_1, r_1}(Q)$  tal que

$$\begin{cases} \frac{1}{r_1} + \frac{n}{2q_1} = 1 + \frac{n}{4} \\ q_1 \in (1, 2], r_1 \in [1, 2) \quad \text{se } n = 2 \\ q_1 \in \left(\frac{6}{5}, 2\right], r_1 \in [1, 2] \quad \text{se } n = 3 \end{cases} \quad (2.8)$$

## Temperatura

Considere o seguinte problema :

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + \sum_{i=1}^n v_i(x, t) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = f(x, t) & \text{em } Q \\ \theta(x, t) = 0 & \text{em } S \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) & \text{em } \Omega \end{cases} \quad (2.9)$$

**Definição 2.1.2** Dizemos que  $\theta$  é solução generalizada do problema (2.9) na classe  $V_2^0(Q)$  se  $\theta \in V_2^0(Q)$  e satisfaz a seguinte identidade integral :

$$\begin{aligned} - \int_Q \theta \xi_t dxdt + \int_Q \nabla \theta \nabla \xi dxdt + \int_Q v \cdot \nabla \theta \xi dxdt = \\ + \int_Q f \xi dxdt + \int_{\Omega} \theta(x, 0) \xi(x, 0) dx \end{aligned} \quad (2.10)$$

para toda  $\xi$  em  $W_2^{1,1}(Q)$  com  $\xi(x, T) = 0$ ,  $f \in L^{q_1, r_1}(Q)$ ,  $q_1$  e  $r_1$  dados em (2.8) e com  $v$  satisfazendo  $\left\| \sum_{i=1}^n v_i^2 \right\|_{q, r} < \infty$  tal que

$$\begin{cases} \frac{1}{r} + \frac{n}{2q} = 1 \\ q \in \left( \frac{n}{2}, \infty \right], r \in [1, \infty) \text{ se } n \geq 2 \end{cases} \quad (2.11)$$

## Velocidade

Considere o seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p + k(f_s(\varphi))v = h(x, t) & \text{em } Q_{ml}, \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{em } Q_{ml}, \\ v = 0 & \text{em } \overset{0}{Q}_s, \\ v = 0 & \text{em } S_{ml}, \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{em } \Omega_{ml}(0). \end{array} \right. \quad (2.12)$$

**Definição 2.1.3** Dizemos que  $v$  é solução generalizada do problema (2.12) na classe  $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ , com  $n = 2, 3$ , se  $v \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ ,  $v = 0$  em  $\overset{0}{Q}_s$  q.t.p e satisfaz a seguinte identidade integral :

$$\begin{aligned} & - \int_{Q_{ml}} v \phi_t \, dxdt + \nu \int_{Q_{ml}} \nabla v \nabla \phi \, dxdt + \int_{Q_{ml}} (v \cdot \nabla)v \phi \, dxdt + \\ & + \int_{Q_{ml}} k(f_s(\varphi))v \phi \, dxdt = \int_{Q_{ml}} h \phi \, dxdt + \int_{\Omega_{ml}(0)} v(x, 0)\phi(x, 0) \, dx \end{aligned} \quad (2.13)$$

para toda  $\phi \in C([0, T]; W_2^1(\Omega_{ml}(t)))$  tal que  $\operatorname{supp} \phi(x, t)$  seja um subconjunto compacto de  $Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0)$ ,  $\operatorname{div} \phi(\cdot, t) = 0$  para todo  $t \in [0, T]$  e  $\phi(\cdot, T) = 0$ . Além disso,  $h \in L^2(Q)$ ,  $k \in C^0(Q)$ ,  $f_s \in C_b^1(\mathbb{R})$  e  $\varphi \in V_2(Q)$  (veja (1.1) do Capítulo 1).

Note que se  $Q_{ml} = \emptyset$  estaríamos no caso em que a região  $Q = Q_s$  é totalmente sólida, e portanto,  $v \equiv 0$ .

Agora, podemos definir claramente o que significa *solução generalizada* do nosso modelo (2.3)-(2.4)-2.5).

**Definição 2.1.4** Dizemos que  $(\varphi, v, \theta)$  é solução generalizada do problema (2.3)-(2.4)-2.5) na classe

$$W = V_2(Q) \times (L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)) \times \dot{V}_2(Q)$$

se  $\varphi \in V_2(Q)$ ,  $v \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ ,  $v = 0$  em  $\dot{Q}_s$  q.t.p,  $\theta \in \dot{V}_2(Q)$  e as identidades integrais (2.7), (2.10) e (2.13) são satisfeitas com  $\psi$ ,  $\xi$  e  $\phi$  dadas nas definições (2.1.1), (2.1.2) e (2.1.3) respectivamente.

## 2.2 Caso Bidimensional

A existência da solução do problema (2.3)-(2.4)-(2.5) será obtida usando-se uma técnica de regularização baseada no trabalho de Blanc [3]. O objetivo desta regularização é poder tratar as equações de Navier-Stokes no domínio todo e não em regiões desconhecidas. Primeiro, o problema será adequadamente regularizado e uma sequência de soluções regularizadas será obtida usando-se o Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder (veja Lema 1.2.11 do Capítulo 1). Depois, passaremos o limite nas equações regularizadas e mostraremos que o limite desta sequência é a solução do problema usando argumentos de compacidade (Proposições 2.2.1 e 2.3.1 e Teoremas 2.2.1 e 2.3.1 a serem descritos neste capítulo).

### 2.2.1 Problema Regularizado

**Proposição 2.2.1** *Suponha que:*

- i)  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  seja um domínio aberto limitado com  $\partial\Omega$  suficientemente regular e  $T$  um número positivo finito;
- ii)  $f_s(\cdot) \in C_b^1(\mathbb{R})$ ,  $0 \leq f_s(z) \leq 1$  for all  $z \in \mathbb{R}$ ;
- iii)  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$  são funções em  $L^\infty(Q)$ ;
- iv)  $k(y) \in C^0(-\infty, 1)$ ,  $k(0) = 0$ ,  $k(y) = 0$  em  $\mathbb{R}^-$ ,  $k(y)$  não negativa e  $\lim_{y \rightarrow 1} k(y) = +\infty$ ;
- v)  $\varphi_0 \in W_3^{4/3}(\Omega) \cap W_2^{3/2+\delta}(\Omega)$  com  $\delta \in (0, 1)$ ;

vii)  $v_0 \in H$ .

Considere o seguinte espaço de Banach

$$\mathcal{X}_1 = \{(\varphi, v, \theta); \varphi \in L^6(Q), v \in L^2(0, T; H), \theta \in L^3(Q)\} \quad (2.14)$$

Se  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} = \theta_0 = 0$  em  $\partial\Omega$ . Então, para cada  $\varepsilon \in (0, 1]$  existe uma única solução  $(\varphi_\varepsilon, v_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \in \mathcal{X}_1$  do seguinte problema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi_\varepsilon = a\varphi_\varepsilon + b\varphi_\varepsilon^2 - \varphi_\varepsilon^3 + \theta_\varepsilon \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} - \nu \Delta v_\varepsilon + (v_\varepsilon \cdot \nabla)v_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon + k(f_s(\varphi_\varepsilon) - \varepsilon)v_\varepsilon = \vec{\sigma} \theta_\varepsilon \\ \operatorname{div} v_\varepsilon = 0 \\ \frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial t} - \Delta \theta_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla \theta_\varepsilon = \frac{\ell}{2} \frac{\partial f_s}{\partial \varphi}(\varphi_\varepsilon) \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t} \end{array} \right. \quad \text{em } Q \quad (2.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial \eta} = \theta_\varepsilon = 0 \\ v_\varepsilon = 0 \end{array} \right. \quad \text{em } S \quad (2.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_\varepsilon(x, 0) = \varphi_{0\varepsilon}(x) \\ \theta_\varepsilon(x, 0) = \theta_{0\varepsilon}(x) \\ v_\varepsilon(x, 0) = v_{0\varepsilon}(x) \end{array} \right. \quad \text{em } \Omega \quad (2.17)$$

Além disso, a solução  $(\varphi_\varepsilon, v_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$  é uniformemente limitada com relação a  $\varepsilon$ , no espaço

$$Z_1 = W_3^{2,1}(Q) \times Z_v \times W_3^{2,1}(Q) \quad (2.18)$$

com  $Z_v = L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ .

Para facilitar a compreensão dos argumentos que serão usados nesta demonstração, faremos, inicialmente, alguns comentários sobre os mesmos.



Aplicaremos o Teorema de Leray-Schauder (veja Lema 1.2.11 do Capítulo 1) para provarmos a solubilidade do problema (2.15)-(2.16)-(2.17). Para isto, vamos considerar um problema quasilinear associado com o problema (2.15)-(2.16)-(2.17) definindo um operador não linear  $T(\lambda, \cdot)$  em  $\mathcal{X}_1$  (veja (2.14)) e o seu ponto fixo para  $\lambda = 1$  são as soluções do problema (2.15)-(2.16)-(2.17). Para aplicarmos o Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder devemos provar que  $T(\lambda, \cdot)$  está bem definido em  $\mathcal{X}_1$ , que  $T(\lambda, \cdot)$  é um operador compacto e contínuo na topologia de  $\mathcal{X}_1$  para cada  $\lambda$  fixo. Também devemos provar que  $T(\lambda, \cdot)$  é uniformemente contínuo com relação a  $\lambda$ , que o problema (2.15)-(2.16)-(2.17) com  $\lambda = 0$  tem uma única solução e que o conjunto dos pontos fixos de  $T(\lambda, \cdot)$  é uniformemente limitado. Para provarmos estes resultados usaremos a teoria  $L_p$  para as equações diferenciais parabólicas ( veja Lemas 1.2.13 e 1.2.14 do Capítulo 1) e os Teoremas 1.3.1 e 1.4.1 da Seção de problemas auxiliares do Capítulo 1.

Nesta prova, a dimensão do espaço, a regularidade da solução das equações do tipo Navier-Stokes e da equação do campo de fases são fundamentais pois impõem restrições nos argumentos que usaremos para passar o limite. A não-linearidade na equação da temperatura restringirá a aplicabilidade da teoria  $L_p$  e conecta a dimensão com a regularidade das equações do tipo Navier-Stokes. Esta restrição está estritamente relacionada com a escolha da ordem das equações do problema quasilinear pois altera a escolha do espaço  $\mathcal{X}_1$  e, logo, a aplicação do Teorema de ponto fixo.

Por outro lado, a regularidade do campo de fases terá um papel fundamental na prova que  $v$  se anula em  $\overset{0}{Q}_s$ , pois o argumento que usaremos precisa da convergência uniforme.

Outro ponto importante é que o termo *Carman-Koseny* nas equações do tipo Navier-Stokes não permitirá obtermos estimativas uniformes em normas mais altas do que a norma do espaço  $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ . Isto gera muitas dificuldades técnicas como, por exemplo, não permite obtermos uma prova da unicidade mesmo no caso bidimensional.

### Prova da Proposição 2.2.1

Por simplicidade de notação, omitiremos o subíndice  $\varepsilon$  no que segue. Agora, para cada  $\lambda \in [0, 1]$  considere o operador  $T(\lambda, \cdot) : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_1$  que associa cada  $(\phi, u, \omega) \in \mathcal{X}_1$  com  $T(\lambda, \phi, u, \omega) = (\varphi, v, \theta)$  única solução do seguinte problema :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \lambda \omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p + k(f_s(\varphi) - \varepsilon)v = \lambda \vec{\sigma} \omega \\ \operatorname{div} v = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta = \lambda \frac{\ell}{2} \frac{\partial f_s}{\partial \varphi}(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{array} \right. \quad \text{em } Q \quad (2.19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \theta = 0 \\ v = 0 \end{array} \right. \quad \text{em } S \quad (2.20)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) \\ v(x, 0) = v_0(x) \end{array} \right. \quad \text{em } \Omega \quad (2.21)$$

Vamos provar que o operador  $T(\lambda, \cdot)$  está bem definido de  $\mathcal{X}_1$  em  $\mathcal{X}_1$ . Para isto, usando o Teorema 1.3.1 e o Lema 1.2.8 do Capítulo 1 com  $n = 2$ ,  $\omega \in L^3(Q)$ , obtemos que existe uma única solução  $\varphi \in W_3^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$ . Além disso, pelo Lema 1.2.9 do Capítulo 1 podemos concluir que  $\varphi \in H^{2/3, 1/3}(Q)$ .

Nas equações do tipo Navier-Stokes vamos aplicar o Teorema 1.4.1 do Capítulo 1 e obter que existe uma única solução  $v \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ . E pelo resultado de interpolação (veja 1.2.3 no Capítulo 1) temos que  $v \in L^4(Q)^2$ .

Agora, pelo Lema 1.2.8 e a teoria  $L_p$  para as equações parabólicas (veja Lema 1.2.13 do Capítulo 1) com  $\dot{\varphi} \in L^3(Q)$ ,  $f_s \in C_b^1(\mathbb{R})$  e  $v \in L^4(Q)^2$  temos que existe uma única solução  $\theta \in W_3^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$  e pelo Lema 1.2.9 do Capítulo 1,  $\theta \in H^{2/3, 1/3}(Q)$ .

Isto conclui a prova que  $T(\lambda, \cdot)$  está bem definido de  $\mathcal{X}_1$  em  $\mathcal{X}_1$ .

No que segue, provaremos que, para qualquer  $\lambda$  fixo em  $[0, 1]$ ,  $T(\lambda, \cdot)$  é um operador contínuo na topologia de  $\mathcal{X}_1$ , isto é, se  $\{(\phi_n, u_n, \omega_n)\}$  é uma

sequência que converge forte para  $(\phi, u, \omega)$  em  $\mathcal{X}_1$  então  $\{T(\lambda, \phi_n, u_n, \omega_n)\}$  converge forte para  $T(\phi, u, \omega)$  em  $\mathcal{X}_1$ . Assim, considere  $T(\lambda, \phi_n, u_n, \omega_n) = (\varphi_n, v_n, \theta_n)$  e o seguinte espaço de Banach reflexivo

$$W = W_2^{2,1}(Q) \times W_v \times W_2^{2,1}(Q)$$

com  $W_v = \{v \mid v \in L^2(0, T; V), \dot{v} \in L^2(0, T; V')\}$  e  $V'$  o dual de  $V$ .

Podemos provar que a norma de  $\{(\varphi_n, v_n, \theta_n)\}$  em  $W$  é uniformemente limitada (estimativas análogas as que serão obtidas para o ponto fixo), ou seja,  $\|(\varphi_n, v_n, \theta_n)\|_W < M, \forall n$ , então existe uma subsequência  $\{(\varphi_k, v_k, \theta_k)\}$  que converge para  $(\varphi, v, \theta)$  fracamente em  $W$ . Mas, a imersão de  $W$  em  $\mathcal{X}_1$  é compacta (consequência da imersão de *Aubin-Lions* do Capítulo 1) e, logo,  $\{(\varphi_k, v_k, \theta_k)\}$  converge para  $(\varphi, v, \theta)$  forte em  $\mathcal{X}_1$ . Agora, basta verificarmos que  $T(\lambda, \phi, u, \omega) = (\varphi, v, \theta)$ . Para isto, passando o limite no problema (2.19)-(2.20)-(2.21) com relação a subsequência obtemos que  $(\varphi, v, \theta)$  satisfaz (2.19)-(2.20)-(2.21) no sentido das distribuições e, logo,  $T(\lambda, \cdot)$  é contínuo com relação a subsequência. Pela unicidade do limite e a escolha arbitrária da subsequência temos que este resultado vale para a sequência toda e a prova está completa.

Seguindo o esquema da prova, vamos mostrar que  $T(\lambda, \cdot)$  é um operador compacto para qualquer  $\lambda$  fixo em  $[0, 1]$ , isto é, para qualquer sequência  $\{(\phi_n, u_n, \omega_n)\}$  limitada em  $\mathcal{X}_1$  existe uma subsequência que converge em  $\mathcal{X}_1$ . Assim, seja  $\{(\phi_n, u_n, \omega_n)\}$  uma sequência qualquer limitada em  $\mathcal{X}_1$  tal que  $T(\lambda, \phi_n, u_n, \omega_n) = (\varphi_n, v_n, \theta_n)$  e o conjunto  $W$  dado acima. Pelo que foi argumentado na prova da continuidade temos que a sequência tem norma uniformemente limitada em  $W$  e a imersão de  $W$  em  $\mathcal{X}_1$  é compacta então existe uma subsequência que converge em  $\mathcal{X}_1$  e a compacidade está provada.

Para verificarmos a continuidade uniforme de  $T(\lambda, \cdot)$  em  $\lambda$  para conjuntos limitados de  $\mathcal{X}_1$  tomamos dois elementos  $(\lambda_i, \phi_i, u_i, \omega_i)$  ( $i = 1, 2$ ) de  $[0, 1] \times \mathcal{X}_1$  e as correspondentes soluções  $T(\lambda_i, \phi_i, u_i, \omega_i) = (\varphi_i, v_i, \theta_i)$ . Subtraindo o problema (2.19)-(2.20)-(2.21) em  $(\varphi_2, v_2, \theta_2)$  de (2.19)-(2.20)-(2.21) em  $(\varphi_1, v_1, \theta_1)$  obteremos um problema quasilinear em  $(\varphi, v, \theta) = (\varphi_1 - \varphi_2, v_1 - v_2, \theta_1 - \theta_2)$ . Aplicando a técnica dos multiplicadores a este problema quasilinear obteremos um resultado de estabilidade do tipo  $\|(\varphi, v, \theta)\|_{\mathcal{X}_1} < M|\lambda_1 - \lambda_2|$  com a constante  $M$  independente de  $\lambda_i$ . Consequentemente a continuidade uniforme de  $T(\lambda, \cdot)$  em  $\lambda$  é estabelecida.

Agora, considere o problema (2.19)-(2.20)-(2.21) com  $\lambda = 0$ , tome dois elementos  $(0, \phi_1, u_1, \omega_1)$  e  $(0, \phi_2, u_2, \omega_2)$  e as correspondentes soluções  $T(0, \phi_i, u_i, \omega_i) = (\varphi_i, v_i, \theta_i)$  ( $i = 1, 2$ ). Novamente subtraindo o problema (2.19)-(2.20)-(2.21) em  $(\varphi_2, v_2, \theta_2)$  com  $\lambda = 0$  de (2.19)-(2.20)-(2.21) em  $(\varphi_1, v_1, \theta_1)$  com  $\lambda = 0$  obteremos um problema quasilinear em  $(\varphi, v, \theta) = (\varphi_1 - \varphi_2, v_1 - v_2, \theta_1 - \theta_2)$ . Aplicando a técnica dos multiplicadores e a desigualdade de Gronwall ao problema quasilinear resultante provaremos que  $\varphi_1 = \varphi_2$ ,  $\theta_1 = \theta_2$  e  $v_1 = v_2$ .

Finalmente, para completarmos a prova, resta estimar o conjunto dos pontos fixos de  $T(\lambda, \cdot)$ . Se  $(\varphi, v, \theta) \in \mathcal{X}_1$  é um ponto fixo de  $T(\lambda, \cdot)$ , então deve satisfazer o seguinte problema :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \lambda \theta \quad \text{em } Q, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p + k(f_s(\varphi) - \varepsilon)v = \lambda \vec{\sigma} \theta \quad \text{em } Q, \quad (2.23)$$

$$\operatorname{div} v = 0 \quad \text{em } Q,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta = \lambda \frac{\ell}{2} \frac{\partial f_s}{\partial \varphi}(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{em } Q, \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \theta &= 0 \\ v &= 0 \end{aligned} \quad \text{em } S, \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= \varphi_0(x) \\ \theta(x, 0) &= \theta_0(x) \\ v(x, 0) &= v_0(x) \end{aligned} \quad \text{em } \Omega. \quad (2.26)$$

**Observação 2.2.1** *Lembramos que, como é usual nas obtenções de estimativas,  $M$  representará uma constante genérica (dependendo apenas dos dados do problema) que pode mudar durante os cálculos.*

Para obter as estimativas dos pontos fixos de  $T(\lambda, \cdot)$ , multiplique as equações (2.22) e (2.24) por  $\dot{\varphi}$  and  $\dot{\theta}$ , respectivamente, integre por partes, use a desigualdade de Young e some o resultado para obter

$$\int_{\Omega} \theta^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \theta|^2 dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx dt \leq$$

$$M \left( \|\theta_0\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla \varphi_0\|_{2,\Omega}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} |\theta|^2 dx dt \right) \quad (2.27)$$

Novamente, multiplicando a equação (2.22) por  $\varphi$  e depois por  $-\Delta \varphi$ , integrando por partes e usando a desigualdade de Young temos que

$$\int_{\Omega} \varphi^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx dt + \frac{\lambda}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \varphi^4 dx dt \leq$$

$$M \left( \|\varphi_0\|_{2,\Omega}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} |\theta|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx dt \right) \quad (2.28)$$

$$\int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx + \alpha^2 \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta \varphi|^2 dx dt + 3 \int_0^t \int_{\Omega} \varphi^2 |\nabla \varphi|^2 dx dt \leq$$

$$M \left( \|\nabla \varphi_0\|_{2,\Omega}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} |\theta|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} |\varphi|^4 dx dt \right) \quad (2.29)$$

Usando as estimativas (2.27)-(2.28)-(2.29), a desigualdade de Gronwall e o Lema 1.2.8 do Capítulo 1 obtemos

$$\|\varphi\|_{p,Q} \leq M \|\varphi\|_{2,Q}^{(2)} \leq M \left( \|\theta_0\|_{2,\Omega} + \|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)} \right) \quad (2.30)$$

com  $p \geq 2$ .

Usando (2.30) em (2.27) concluímos que

$$\|\theta\|_{2,Q} + \|\nabla \theta\|_{2,Q} \leq M \left( \|\theta_0\|_{2,\Omega} + \|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)} \right) \quad (2.31)$$

Além disso, pelo Lema de interpolação 1.2.3 do Capítulo 1 tem-se

$$\|\theta\|_{4,Q} \leq M \left( \|\theta_0\|_{2,\Omega} + \|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)} \right) \quad (2.32)$$

Agora, multiplicando a equação (2.23) por  $v$ , integrando por partes e usando a desigualdade de Young obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx dt + \int_{\Omega} k(f_s(\varphi) - \varepsilon) v^2 dx \leq \\ M \left( \|v_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} |\theta|^2 dx dt \right) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Usando (2.32) em (2.33) e o fato que  $k(f_s(\varphi) - \varepsilon) \geq 0$ , podemos concluir

$$\|v\|_{L^\infty(0,T;\mathbb{H})} + \|v\|_{L^2(0,T;V)} \leq M \left( \|v_0\|_{2,\Omega} + \|\theta_0\|_{2,\Omega} + \|\varphi_0\|_{W_1^2(\Omega)} \right) \quad (2.34)$$

Finalmente, pelo Lema de interpolação 1.2.3 do Capítulo 1, temos

$$\|v\|_{4,Q} \leq M \left( \|v_0\|_{2,\Omega} + \|\theta_0\|_{2,\Omega} + \|\varphi_0\|_{W_1^2(\Omega)} \right) \quad (2.35)$$

Portanto, pelo Teorema de Leray-Schauder  $T(1, \cdot)$  tem um ponto fixo e, consequentemente, o problema (2.15)-(2.16)-(2.17) tem solução em  $\mathcal{X}_1$ .

Agora, mostraremos que para cada  $\varepsilon$  fixo em  $(0,1]$ , a solução do problema (2.15)-(2.16)-(2.17) é única. Novamente, no que segue, omitiremos o subíndice  $\varepsilon$ .

Considere  $\varphi_i$ ,  $v_i$ , e  $\theta_i$  ( $i = 1, 2$ ) duas soluções of problem (2.15)-(2.16)-(2.17), então a diferença  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ ,  $v = v_1 - v_2$  e  $\theta = \theta_1 - \theta_2$  satisfaz

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = B(x, t) \varphi + \theta, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + \nabla p + k(f_s(\varphi_1) - \varepsilon) v = \vec{\sigma} \theta + (v_2 \cdot \nabla) v_2 - (v_1 \cdot \nabla) v_1 + \\ (k(f_s(\varphi_2) - \varepsilon) - k(f_s(\varphi_1) - \varepsilon)) v_2, \\ \operatorname{div} v = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + v_1 \cdot \nabla \theta = -v \cdot \nabla \theta_2 + \partial_\varphi f_s(\varphi_1) \dot{\varphi} + (\partial_\varphi f_s(\varphi_2) - \partial_\varphi f_s(\varphi_1)) \dot{\varphi}_2 \end{cases} \quad \text{em } Q,$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \theta = 0, \\ v = 0, \end{cases} \quad \text{em } S,$$

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \theta(x, 0) = 0, \\ v(x, 0) = 0, \end{cases} \quad \text{em } \Omega.$$

com  $B(x,t) = a + b(\varphi_1 + \varphi_2) - (\varphi_1^2 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2)$  e  $\max_{\bar{Q}} B < \|a\|_\infty + \|b\|_\infty^2$ .

Multiplicando a primeira equação por  $\varphi$ ,  $-\Delta\varphi$  e  $\dot{\varphi}$  respectivamente, integrando por partes, usando as desigualdades de Young e Gronwall obtemos

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \varphi^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dxdt \leq M \left( \int_0^T \int_{\Omega} |\varphi|^2 dxdt + \int_0^T \int_{\Omega} |\theta|^2 dxdt \right) \quad (2.36)$$

$$\|\varphi\|_{p,Q} \leq \tilde{M} \|\varphi\|_{2,Q}^{(2)} \leq \tilde{M} \|\theta\|_{2,Q}^2 \quad (2.37)$$

com  $p \geq 2$ .

Usando a técnica dos multiplicadores na equação da velocidade, o Lema de interpolação 1.2.3 do Capítulo 1 com  $n = 2$ , as propriedades da função  $k(f_s(\varphi - \varepsilon))$  e a desigualdade de Young concluímos que

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \leq \tilde{M} \left( \int_0^T \int_{\Omega} |\varphi|^2 dxdt + \int_0^T \int_{\Omega} |\theta|^2 dxdt \right) \quad (2.38)$$

Novamente, usando a técnica dos multiplicadores na equação da temperatura, a desigualdade de Young,  $\text{div } v = 0$  e as estimativas (2.37) e (2.38) tem-se

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \theta^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla\theta|^2 dxdt \leq \tilde{M} \|\varphi\|_{2,Q}^2 + \|\theta\|_{2,Q}^2 \quad (2.39)$$

Combinando as estimativas (2.37) e (2.39) tem-se

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \theta^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla\theta|^2 dxdt \leq \tilde{M} \|\theta\|_{2,Q}^2 \quad (2.40)$$

com a constante  $\tilde{M}$  dependendo das normas de  $\varphi_i$ ,  $v_i$ , e  $\theta_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Agora, somando as estimativas (2.36)-(2.38)-(2.40) e usando a desigualdade de Gronwall obtemos

$$\frac{d}{dt} \left( \|\varphi\|_{2,\Omega}^2 + \|\theta\|_{2,\Omega}^2 + \|v\|_{2,H}^2 \right) \leq 0$$

Integrando e usando que  $\|\varphi_0\|_{2,\Omega}^2 = \|\theta_0\|_{2,\Omega}^2 = \|v_0\|_{2,H}^2 = 0$  encontramos o resultado desejado, ou seja,  $\varphi_1 = \varphi_2$ ,  $\theta_1 = \theta_2$   $v_1 = v_2$ .

Agora, observe que podemos melhorar a regularidade da sequência de soluções obtida na Proposição 2.2.1 melhorando a regularidade dos dados iniciais do campo de fases e da temperatura, aplicando o Teorema 1.3.1 e a teoria  $L_p$  (veja Lema 1.2.13 do Capítulo 1) na primeira e na quarta equações do problema (2.15)-(2.16)-(2.17), respectivamente, e aproveitando o tipo de não-linearidade da equação do campo de fases.

Para isto, observe que com  $\theta_\varepsilon \in L^3(Q)$  pelo Teorema 1.3.1 temos que  $\varphi_\varepsilon \in W_3^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$  satisfazendo

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{\infty,Q} \leq M \|\varphi_\varepsilon\|_{3,Q}^{(2)} \leq M \left( \|(a + b\varphi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon^2)\varphi_\varepsilon\|_{3,Q} + \|\theta_\varepsilon\|_{3,Q} + \|\varphi_{0\varepsilon}\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} \right) \quad (2.41)$$

Mas  $\max_{s \in \mathbb{R}, (x,t) \in Q} (a(x,t) + b(x,t)s - s^2)$  é finito e, logo, (2.41) torna-se

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{\infty,Q} \leq M \|\varphi_\varepsilon\|_{3,Q}^{(2)} \leq M \left( \|\varphi_\varepsilon\|_{6,Q} + \|\theta_\varepsilon\|_{3,Q} + \|\varphi_{0\varepsilon}\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} \right) \quad (2.42)$$

Agora, usando as estimativas (2.30) e (2.32) em (2.42) e a imersão de Sobolev (veja Lema 1.2.1 do Capítulo 1) concluímos que

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{\infty,Q} \leq M \|\varphi_\varepsilon\|_{3,Q}^{(2)} \leq M \left( \|\theta_{0\varepsilon}\|_{2,\Omega} + \|\varphi_{0\varepsilon}\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} \right) \quad (2.43)$$

Além disso, pelo Lema 1.2.9 do Capítulo 1 podemos concluir que  $\varphi_\varepsilon \in H^{2/3,1/3}(Q)$  com

$$|\varphi_\varepsilon|_Q^{(2/3)} \leq M \|\varphi_\varepsilon\|_{3,Q}^{(2)} \leq M \left( \|\theta_{0\varepsilon}\|_{2,\Omega} + \|\varphi_{0\varepsilon}\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} \right) \quad (2.44)$$

Para a estimar temperatura, observe que como  $\dot{\varphi}_\varepsilon \in L^3(Q)$ ,  $f_s \in C_b^1(\mathbb{R})$  e  $v_\varepsilon \in L^4(Q)^2$ , temos que  $\theta_\varepsilon \in W_3^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$  satisfazendo

$$\|\theta_\varepsilon\|_{3,Q}^{(2)} \leq M \left( \|v_\varepsilon\|_{4,Q} \|\theta_{0\varepsilon}\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} + \|\partial_\varphi f_s\|_{\infty,Q} \|\dot{\varphi}_\varepsilon\|_{3,Q} + \|\theta_{0\varepsilon}\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} \right) \quad (2.45)$$

Usando (2.35) e (2.43) em (2.45), temos que

$$\|\theta_\varepsilon\|_{3,Q}^{(2)} \leq M \left( \|v_{0\varepsilon}\|_{2,H} + \|\varphi_{0\varepsilon}\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} + \|\theta_{0\varepsilon}\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} \right) \quad (2.46)$$

Além disso, pelo Lema 1.2.9 do Capítulo 1  $\theta_\varepsilon \in H^{2/3,1/3}(Q)$  e satisfaz

$$|\theta_\varepsilon|_Q^{(2/3)} \leq M \|\theta_\varepsilon\|_{3,Q}^{(2)} \leq M \left( \|v_{0\varepsilon}\|_{2,H} + \|\varphi_{0\varepsilon}\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} + \|\theta_{0\varepsilon}\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} \right) \quad (2.47)$$



Escolhendo

$$\begin{aligned}\varphi_{0\varepsilon} &\rightarrow \varphi_0 && \text{em } W_3^{4/3}(\Omega) \\ \theta_{0\varepsilon} &\rightarrow \theta_0 && \text{em } W_3^{4/3}(\Omega) \\ v_{0\varepsilon} &\rightarrow v_0 && \text{em } H\end{aligned}$$

temos que a solução do problema (2.15)-(2.16)-(2.17) é uniformemente limitada em  $Z_1 = W_3^{2,1}(Q) \times Z_v \times W_3^{2,1}(Q)$  com relação a  $\varepsilon$  para  $Z_v = L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ .

Isto completa a prova da Proposição 2.2.1. ■

## 2.2.2 Existência e Regularidade da Solução

Nesta seção usaremos os resultados da seção anterior (Proposição 2.2.1), teoria  $L_p$  para equações parabólicas (veja Lema 1.2.13), o Teorema 1.3.1, resultados de imersão dados no Lema 1.2.9 e argumentos de compacidade para provar um resultado de existência e regularidade da solução do nosso modelo (2.3)-(2.4)-(2.5) para o caso bidimensional. Provaremos a existência passando o limite nas equações do problema regularizado (2.15)-(2.16)-(2.17). A convergência das equações é padrão, exceto as convergências das equações regularizadas do tipo Navier-Stokes que precisam de um argumento local. Para provarmos a regularidade da solução usaremos o conhecido argumento chamado *bootstrapping*, mas, infelizmente, devido ao termo adicional do tipo *Carman-Koseny* não podemos melhorar a regularidade da solução fraca das equações do tipo Navier-Stokes.

**Teorema 2.2.1** *Suponha que:*

- i)  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  seja um domínio aberto limitado com  $\partial\Omega$  suficientemente regular e  $T$  um número positivo finito;
- ii)  $f_s(\cdot) \in C_b^1(\mathbb{R})$ ,  $0 \leq f_s(z) \leq 1$  for all  $z \in \mathbb{R}$ ;
- iii)  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$  são funções em  $L^\infty(Q)$ ;
- iv)  $k(y) \in C^0(-\infty, 1)$ ,  $k(0) = 0$ ,  $k(y) = 0$  em  $\mathbb{R}^-$ ,  $k(y)$  não negativa e  $\lim_{y \rightarrow 1} k(y) = +\infty$ ;

vi)  $\theta_0 \in W_p^{2-2/p}(\Omega)$  com  $2 \leq p < 4$ ;

vii)  $v_0 \in H$ .

Se  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} = \theta_0 = 0$  em  $\partial\Omega$ . Então, existem

$$\varphi \in W_q^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q) \text{ para } q \geq 2,$$

$$v \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H),$$

$$\theta \in W_p^{2,1}(Q) \cap L_\infty(Q) \text{ para } 2 \leq p < 4,$$

que verificam o seguinte sistema de equações :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \theta \quad \text{em } Q, \quad (2.48)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta = \frac{\ell}{2} \frac{\partial f_s}{\partial \varphi}(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{em } Q, \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p + k(f_s(\varphi))v = \vec{\sigma} \theta \quad \text{em } Q_{ml}, \quad (2.50)$$

$$\operatorname{div} v = 0 \quad \text{em } Q_{ml}, \quad (2.51)$$

$$v = 0 \quad \text{em } \overset{0}{Q}_s, \quad (2.52)$$

juntamente com as condições de fronteira

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \quad \text{em } S, \quad (2.53)$$

$$\theta = 0 \quad \text{em } S, \quad (2.54)$$

$$v = 0 \quad \text{em } S_{ml}, \quad (2.55)$$

e as condições iniciais

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \text{em } \Omega, \quad (2.56)$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad \text{em } \Omega, \quad (2.57)$$

$$v(x, 0) = v_0(x) \quad \text{em } \Omega_{ml}(0). \quad (2.58)$$

O que segue são alguns comentários relevantes sobre os resultados do Teorema 2.2.1.

Para a equação do campo de fases (2.48) teremos solução clássica se o dado inicial for regular pois o termo  $a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \theta \in L^\infty(Q)$ . Para o caso de  $\varphi_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega) \cap W_2^{3/2+\delta}(\Omega)$  ( $q \geq 2$ ) temos solução forte e a equação (2.48) é satisfeita no sentido q.t.p. Além disso, as condições (2.53) e (2.56) são entendidas no sentido pontual pois  $\varphi \in C^1(Q)$ .

Para a temperatura também temos solução forte e  $\theta \in C^0(Q)$  e, logo, a equação (2.49) é satisfeita no sentido q.t.p. e os dados, (2.54) e (2.57) são também entendidos no sentido pontual.

Agora, no caso da velocidade só temos solução generalizada e a equação (2.50) é entendida no sentido da definição (2.1.3). Observe que a regularidade obtida para a velocidade não garante a continuidade de  $v$  no tempo e, por isso a condição inicial (2.58) é incorporada na formulação generalizada. Além disso, as equações (2.51) e (2.52) são entendidas no sentido q.t.p. e a condição contorno (2.55) é entendida no sentido dos traços.

Com respeito à demonstração do Teorema 2.2.1, ela está baseada num argumento de compacidade sobre a sequência de soluções regularizadas (aproximadas) obtidas na Proposição 2.2.1 da seção anterior, que permitirá, por um processo de *passagem ao limite* sobre as equações regularizadas (aproximadas) do problema (2.15)-(2.16)-(2.17), obtermos uma solução *generalizada* do problema, exceto para a equação (2.52). Gostaríamos de ressaltar que nesta prova destacaremos apenas as convergências dos termos não-lineares que aparecem no modelo (2.3)-(2.4)-(2.5). Para os outros, as convergências são obtidas de modo usual e serão omitidas.

A regularidade da solução será obtida usando-se um argumento de *bootstrapping*, análogo ao usado na demonstração da Proposição 2.2.1 da seção anterior.

Para provarmos que a velocidade se anula em  $\overset{0}{Q}_s$  q.t.p. usaremos um argumento local similar ao introduzido por Blanc *et al* [3] que fundamentalmente usa a convergência uniforme de  $\{\varphi_\varepsilon\}$ .

### Prova do Teorema 2.2.1

Como consequência da Proposição 2.2.1 da Seção anterior, para  $\varepsilon \in (0, 1]$ , qualquer solução  $(\varphi_\varepsilon, v_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \in \mathcal{X}_1$  (veja (2.14)) do problema (2.15)-(2.16)-(2.17) é uniformemente limitada em  $Z_1$  (veja (2.18)) com relação a  $\varepsilon$ .

Por este resultado e a imersão compacta de  $Z_1$  em  $\mathcal{X}_1$  concluímos que existe  $(\varphi, v, \theta) \in \mathcal{X}_1$  e uma subsequência, também indexada por  $\varepsilon$ , tais que, quando  $\varepsilon \uparrow 0$  temos as seguintes convergências:

$$\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi \quad \text{em } L^q(Q) \quad (q \geq 2)$$

$$\nabla \varphi_\varepsilon \rightarrow \nabla \varphi \quad \text{em } L^3(Q)^2$$

$$\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi \quad \text{em } W_3^{2,1}(Q)$$

$$\theta_\varepsilon \rightarrow \theta \quad \text{em } L^p(Q) \quad (p \geq 2)$$

$$\nabla \theta_\varepsilon \rightarrow \nabla \theta \quad \text{em } L^3(Q)^2$$

$$\theta_\varepsilon \rightarrow \theta \quad \text{em } W_3^{2,1}(Q)$$

$$v_\varepsilon \rightarrow v \quad \text{em } L^2(0, T; H)$$

$$v_\varepsilon \rightarrow v \quad \text{em } L^2(0, T; V)$$

Além disso, temos que  $\varphi \in H^{2/3, 1/3}(Q)$  e pela estimativa (2.47), em particular,  $\sup_{\overline{Q}} |\varphi_\varepsilon(x, t)| \leq M$  e  $\langle \varphi_\varepsilon \rangle_t^{(1/3)} \leq M$ .

Assim,  $\{\varphi_\varepsilon\}$  é uma família de funções equicontínuas e uniformemente limitada em  $\overline{Q}$ . Pelo Teorema de Arzela-Ascoli (veja Lema 1.2.10 do Capítulo 1) existe uma subsequência, que representaremos novamente por  $\{\varphi_\varepsilon\}$ , tal que  $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi$  uniformemente em  $\overline{Q}$ .

Agora podemos verificar que  $(\varphi, v, \theta) \in \mathcal{X}_1$  é solução do problema (2.3)-(2.4)-(2.5) para o caso bidimensional.

Primeiro, provaremos que  $v = 0$  em  $\overset{0}{Q}_s$ . Para isto, seja  $K$  um subconjunto compacto de  $Q_s$ . Como  $f_s \in C_b^1(\mathbb{R})$  e  $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi$  uniformemente em  $\overline{Q}$ , então existe um  $\varepsilon_K$  suficientemente pequeno e positivo tal que

$$f_s(\varphi_\varepsilon(x, t)) = 1 \quad \text{em } K$$

sempre que  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_K)$ .

Multiplicando a equação regularizada da velocidade de (2.15)-(2.16)-(2.17) por  $v_\varepsilon$  com  $0 < \varepsilon < \varepsilon_K$ , integrando por partes e usando Young obtemos

$$k(1 - \varepsilon) \|v_\varepsilon\|_{2,K} \leq M \tag{2.59}$$

sempre que  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_K)$  com  $M$  uma constante independente de  $\varepsilon$ .

Observe que quando  $\varepsilon$  aproxima-se de zero,  $k(1 - \varepsilon)$  aproxima-se de  $+\infty$  e a expressão (2.59) força  $\|v_\varepsilon\|_{L^2(K)^2}$  convergir para 0. Consequentemente  $v = 0$  em  $K$  e como  $K$  é arbitrário,  $v = 0$  em  $\overset{0}{Q}_s$ .

Agora, observamos que  $k(f_s(\varphi_\varepsilon) - \varepsilon)$  converge para  $k(f_s(\varphi))$  em  $C^0(K_{ml})$  com  $K_{ml}$  um subconjunto compacto arbitrário de  $Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0)$ . De fato, em  $K_{ml}$  as funções  $k(f_s(\varphi_\varepsilon(x, t)) - \varepsilon)$  e  $k(f_s(\varphi(x, t)))$ ,  $\forall t \in (0, T]$ , são uniformemente contínuas e limitadas e, como  $f_s(\varphi_\varepsilon) - \varepsilon$  converge para  $f_s(\varphi)$  em  $C^0(K_{ml})$  quando  $\varepsilon \uparrow 0$ , obtemos o resultado desejado.

Para provarmos que  $v$  é solução generalizada da equação do tipo Navier-Stokes do problema (2.3)-(2.4)-(2.5), procedemos da seguinte forma.

Fixamos  $\phi \in C([0, T]; W_2^1(\Omega_{ml}(t)))$  tal que  $supp \phi(x, t)$  seja um subconjunto compacto de  $Q_{ml} \cup \Omega_{ml}(0)$ ,  $div \phi(., t) = 0$  para todo  $t \in [0, T]$  e  $\phi(., T) = 0$ . Multiplicamos a equação regularizada correspondente em (2.15) por  $\phi$ , integramos em  $Q$  e fazemos as integrações por partes usuais, levando em conta as propriedades da  $\phi$ . Agora, com o suporte da  $\phi$  compacto em  $Q_{ml}$ , a observação anterior sobre a convergência de  $k(f_s(\varphi_\varepsilon) - \varepsilon)$  e as convergências obtidas anteriormente, podemos passar ao limite os termos da equação regularizada da velocidade e concluir que  $v$  é solução generalizada da equação do tipo Navier-Stokes do problema (2.3)-(2.4)-(2.5) para o caso bidimensional.

No que segue, vamos considerar  $\beta \in W_2^{1,1}(Q)$  com  $\beta(x, T) = 0$  e  $\xi \in \overset{0}{W}^{1,1}(Q)$  com  $\xi(x, T) = 0$ .

Para verificarmos que  $\varphi$  é solução generalizada da equação do campo de fases, note que da convergência  $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi$  em  $L^{10}(Q)$  podemos deduzir que

$$\int_Q (a\varphi_\varepsilon + b\varphi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon^3) \beta \, dxdt \rightarrow \int_Q (a\varphi + b\varphi - \varphi^3) \beta \, dxdt \quad (2.60)$$

Usando (2.60) e passando o limite na equação regularizada do campo de fases concluímos que  $\varphi$  é solução generalizada da equação do campo de fases (*phase field*) do problema (2.3)-(2.4)-(2.5).

Finalmente, para verificarmos que  $\theta$  é solução generalizada da equação da temperatura usaremos as convergências  $v_\varepsilon \rightharpoonup v$  em  $L^4(Q)^2$  e  $\nabla\theta_\varepsilon \rightarrow \nabla\theta$  em  $L^2(Q)^2$  para obter

$$\int_Q (v_\varepsilon \cdot \nabla\theta_\varepsilon) \xi \, dxdt \rightarrow \int_Q (v \cdot \nabla\theta) \xi \, dxdt$$

e poder passar o limite na equação da temperatura do problema (2.15)-(2.16)-(2.17).

Isto completa a prova que  $(\varphi, v, \theta)$  é solução generalizada do problema (2.3)-(2.4)-(2.5).

Vamos, agora, discutir a regularidade da solução obtida.

Para isto, observe que com  $\theta \in L^3(Q)$ , pelo Teorema 1.3.1 do Capítulo 1, temos que  $\varphi \in W_3^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$  satisfazendo

$$\|\varphi\|_{\infty, Q} \leq M \|\varphi\|_{3, Q}^{(2)} \leq M \left( \|\theta_0\|_{2, \Omega} + \|\varphi_0\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} \right) \quad (2.61)$$

Além disso, pelo Lema 1.2.9 com  $n = 2$  podemos concluir que  $\varphi \in H^{2/3, 1/3}(Q)$ .

Para a temperatura, aplicando a teoria  $L_p$  (veja Lema 1.2.13 do Capítulo 1) com  $\dot{\varphi} \in L^3(Q)$ ,  $f_s \in C_b^1(\mathbb{R})$  e  $v \in L^4(Q)^2$  e o resultado de imersão dado no Lema 1.2.8 do Capítulo 1 com  $n = 2$  temos que  $\theta \in W_3^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$  satisfazendo

$$\|\theta\|_{\infty, Q} \leq M \|\theta\|_{3, Q}^{(2)} \leq M \left( \|v_0\|_{2, H} + \|\varphi_0\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} + \|\theta_0\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} \right) \quad (2.62)$$

Usando um argumento *bootstrapping* com  $\theta \in L^q(Q)$  ( $q \geq 2$ ), temos, pelo Teorema 1.3.1, que  $\varphi \in W_q^{2,1}(Q)$  ( $q \geq 2$ ) com  $\varphi_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega) \cap W_2^{3/2+\delta}(\Omega)$ ,  $0 < \delta < 1$  e  $q \geq 2$ , satisfazendo

$$\|\varphi\|_{q, Q}^{(2)} \leq M \left( \|\theta\|_{q, Q} + \|\varphi_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} \right) \quad (2.63)$$

Para estimar  $\|\theta\|_{q, Q}$  vamos aproveitar a não-linearidade da equação da temperatura e o fato do  $\operatorname{div} v = 0$ . Para isto, multiplicando a equação da temperatura por  $q = 2j - 1$ ,  $j \geq 2$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , integrando por partes e usando Young obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{q+1} \int_{\Omega} \theta^{q+1} dx + p \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \theta|^2 \theta^{q+1} dx dt \leq \\ & M \left( \int_{\Omega} \theta_0^{q+1} dx + \int_0^T \int_{\Omega} |\dot{\varphi}|^{q+1} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} |\theta|^{q+1} dx dt \right) \end{aligned} \quad (2.64)$$

Usando a estimativa (2.63) em (2.64) e a desigualdade de Gronwall podemos concluir

$$\|\theta\|_{q+1,Q} \leq M \left( \|\theta_0\|_{q+1,\Omega} + \|\varphi_0\|_{W_{q+1}^{2-2/q+1}(\Omega)} \right) \quad (2.65)$$

Observe que a estimativa (2.65) é válida para todo número inteiro  $q$  ímpar, mas, por interpolação, temos que também valem para os inteiros pares e, portanto, para todo  $q \geq 2$ . Como  $\theta_0 \in W_3^{4/3}(\Omega)$  e, logo,  $\theta_0 \in L^q(\Omega)$  ( $q \geq 2$ ). Assim, (2.63) torna-se

$$\|\varphi\|_{q,Q}^{(2)} \leq M \left( \|\theta_0\|_{q,\Omega} + \|\varphi_0\|_{W_q^{2-2/q}(\Omega)} \right) \quad (2.66)$$

Além disso, pelo Lema 1.2.9  $\theta \in H^{2/3,1/3}(Q)$ .

Para completarmos a prova do Teorema 2.2.1 vamos usar a teoria  $L_p$  para as equações diferenciais parabólicas (veja Lema 1.2.13 do Capítulo 1) com  $\dot{\varphi} \in L^p(Q)$  com  $2 \leq p < 4$ ,  $f_s \in C_b^1(\mathbb{R})$  e  $v \in L^4(Q)^2$  temos que  $\theta \in W_p^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$  para  $2 \leq p < 4$ .

Isto completa a prova do Teorema 2.2.1. ■

**Observação 2.2.2** *Devemos ressaltar que mesmo no caso bidimensional não fomos capazes de demonstrar unicidade da solução e nem um resultado de regularidade para velocidade análogo àquele válido para as equações de Navier-Stokes usuais. O termo adicional do tipo Carman-Koseny impossibilitou qualquer tentativa de estimativa uniforme da derivada temporal da velocidade.*

**Observação 2.2.3** *Para recuperarmos informações sobre a pressão podemos usar a Proposição 1.1 dada em Temam([35]; p. 14).*

## 2.3 Caso Tridimensional

De modo geral, as técnicas usadas no caso tridimensional são as mesmas usadas no caso bidimensional. A diferença fundamental entre eles é o tratamento das equações do tipo Navier-Stokes pois, como é bem conhecido, não tem unicidade garantida no espaço  $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ . Como a unicidade é essencial na definição do operador que se buscará o ponto fixo, vamos

## 2.3 Caso Tridimensional

De modo geral, as técnicas usadas no caso tridimensional são as mesmas usadas no caso bidimensional. A diferença fundamental entre eles é o tratamento das equações do tipo Navier-Stokes pois, como é bem conhecido, não tem unicidade garantida no espaço  $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ . Como a unicidade é essencial na definição do operador que se buscará o ponto fixo, vamos contornar esta questão fazendo uma regularização adequada do problema (2.3)-(2.4)-(2.5) diferente do caso bidimensional, que garantirá a unicidade necessária das equações do tipo Navier-Stokes regularizadas e com isto podemos usar o mesmo procedimento da Proposição 2.2.1. Devemos ressaltar que este procedimento só garantirá a unicidade do problema regularizado associado ao modelo e que a regularidade obtida desta forma, não fornecerá uma estimativa uniforme numa norma mais alta do que a do espaço  $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ .

Além das dificuldades geradas pela dimensão temos também as causadas pelo termo adicional do tipo *Carman-Koseny*. Mesmo melhorando os dados iniciais do nosso problema, este termo impedirá a obtenção de solução forte para as equações do tipo Navier-Stokes pois também gera estimativas não uniformes em normas mais altas.

Obviamente, neste caso teremos uma perda de regularidade da solução comparada com o caso bidimensional.

### 2.3.1 Problema Regularizado

Para provarmos a existência e regularidade da solução do problema (2.3)-(2.4)-(2.5) usaremos as técnicas de: regularização, argumento de compacidade e argumento de *bootstrapping*.

**Proposição 2.3.1** *Suponha que:*

- i)  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  seja um domínio aberto limitado com  $\partial\Omega$  suficientemente regular e  $T$  um número positivo finito;
- ii)  $f_s(\cdot) \in C_b^1(\mathbb{R})$ ,  $0 \leq f_s(z) \leq 1$  for all  $z \in \mathbb{R}$ ;
- iii)  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$  são funções em  $L^\infty(Q)$ ;



- iv)  $k(y) \in C^0(-\infty, 1)$ ,  $k(0) = 0$ ,  $k(y) = 0$  em  $\mathbb{R}^-$ ,  $k(y)$  não negativa e  $\lim_{y \rightarrow 1} k(y) = +\infty$ ;
- v)  $\varphi_0 \in W_3^{4/3}(\Omega) \cap W_2^{3/2+\delta}(\Omega)$  com  $\delta \in (0, 1)$ ;
- vi)  $\theta_0 \in \overset{0}{W} \frac{1}{2}(\Omega)$ ;
- vii)  $v_0 \in V$ .

Considere o seguinte espaço de Banach

$$\mathcal{X}_1 = \{(\varphi, v, \theta); \varphi \in L^6(Q), v \in L^2(0, T; H), \theta \in L^3(Q)\}$$

Se  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} = 0$  em  $\partial\Omega$ . Então, para cada  $\varepsilon \in (0, 1]$  existe uma única solução  $(\varphi_\varepsilon, v_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \in \mathcal{X}_1$  do seguinte problema :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi_\varepsilon = a\varphi_\varepsilon + b\varphi_\varepsilon^2 - \varphi_\varepsilon^3 + \theta_\varepsilon \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} - \nu \Delta v_\varepsilon + (v_\varepsilon \cdot \nabla) v_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon + k(f_s(\varphi_\varepsilon) - \varepsilon)v_\varepsilon + \varepsilon |v_\varepsilon|^4 v_\varepsilon = \vec{\sigma} \theta_\varepsilon \\ \text{div } v_\varepsilon = 0 \\ \frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial t} - \Delta \theta_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla \theta_\varepsilon = \frac{\ell}{2} \frac{\partial f_s}{\partial \varphi}(\varphi_\varepsilon) \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t} \end{array} \right. \quad \text{em } Q, \quad (2.67)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial \eta} = 0 \\ \theta_\varepsilon = 0 \\ v_\varepsilon = 0 \end{array} \right. \quad \text{em } S, \quad (2.68)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_\varepsilon(x, 0) = \varphi_{0\varepsilon}(x) \\ \theta_\varepsilon(x, 0) = \theta_{0\varepsilon}(x) \\ v_\varepsilon(x, 0) = v_{0\varepsilon}(x) \end{array} \right. \quad \text{em } \Omega. \quad (2.69)$$

Além disso, a solução  $(\varphi_\varepsilon, v_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$  é uniformemente limitada com relação a  $\varepsilon$ , no espaço

$$Z_2 = W_3^{2,1}(Q) \times Z_v \times W_2^{2,1}(Q) \quad (2.70)$$

com  $Z_v = L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ .

Analogamente, ao caso bidimensional, aplicaremos o Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder (veja Lema 1.2.11 do Capítulo 1) ao problema (2.67)-(2.68)-(2.69) e para alcançar este objetivo, usaremos, particularmente, os resultados do Teorema 1.4.2 da seção de problemas auxiliares do Capítulo 1.

### Prova da Proposição 2.3.1:

Por simplicidade de notação, omitiremos o subíndice  $\varepsilon$  no que segue.

Agora, para cada  $\lambda \in [0, 1]$  considere o operador  $T(\lambda, \cdot) : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{X}_1$  que associa cada  $(\phi, u, \omega) \in \mathcal{X}_1$  com  $T(\lambda, \phi, u, \omega) = (\varphi, v, \theta)$  única solução do seguinte problema :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \lambda \omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p + k(f_s(\varphi) - \varepsilon)v + \varepsilon|v|^4 v = \lambda \vec{\sigma} \omega \\ \operatorname{div} v = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta = \lambda \frac{\ell}{2} \frac{\partial f_s}{\partial \varphi}(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \end{array} \right. \quad \text{em } Q, \quad (2.71)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \\ \theta = 0 \\ v = 0 \end{array} \right. \quad \text{em } S, \quad (2.72)$$

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x), \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) \\ v(x, 0) = v_0(x) \end{cases} \quad \text{em } \Omega. \quad (2.73)$$

Vamos provar que o operador  $T(\lambda, \cdot)$  está bem definido de  $\mathcal{X}_1$  em  $\mathcal{X}_1$ .

Para isto, usando o Teorema 1.3.1 e o Lema 1.2.8 dados no Capítulo 1 com  $n = 3$ ,  $\omega \in L^3(Q)$  obtemos que existe uma única solução  $\varphi \in W_3^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$ . Além disso, pelo Lema (1.2.9) podemos concluir que  $\varphi \in H^{1/3, 1/6}(Q)$ .

Nas equações de Navier-Stokes vamos aplicar o Teorema 1.4.2 do Capítulo 1 e obter que existe uma única solução  $v \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \cap L^6(Q)$ .

Agora, pela teoria  $L_p$  para as equações parabólicas (veja Lema 1.2.12 do Capítulo 1) com  $q = \infty$  e  $r = 2$  e o Lema 1.2.8 com  $\dot{\varphi} \in L^3(Q)$ ,  $f_s \in C_b^1(\mathbb{R})$  e  $v \in L^\infty(0, T; H)$  temos que existe uma única solução  $\theta \in W_2^{2,1}(Q) \cap L^{10}(Q)$ .

Estes argumentos mostram que  $T(\lambda, \cdot)$  está bem definido de  $\mathcal{X}_1$  em  $\mathcal{X}_1$ .

Nas provas da continuidade, compacidade e continuidade uniforme com relação a  $\lambda$  do operador  $T(\lambda, \cdot)$  e da unicidade do problema (2.71)-(2.72)-(2.73) para  $\lambda = 0$  usamos os mesmos argumentos do caso bidimensional com as seguintes diferenças:

a) Nas provas de continuidade e compacidade o espaço  $W_v$  é dado por

$$W_v = \{v \mid v \in L^2(0, T; V), \dot{v} \in L_s(Q)^3 (1 < s < \frac{3}{2})\}$$

Por isso vamos precisar de  $v_0 \in V$  (usamos o Lema 1.2.15 do Capítulo 1 para obter a estimativa uniforme na norma de  $W$ ).

b) continuidade.

Para provarmos que o limite  $(\varphi, v, \theta)$  satisfaz (2.71)-(2.72)-(2.73) no sentido das distribuições devemos mostrar que o termo adicional  $\varepsilon|v_k|^4 v_k$  converge para  $\varepsilon|v|^4 v$  em algum sentido. Usando o fato que  $h(v) = |v|^4 v$  é uma função contínua em  $\mathbb{R}^3$ , que  $v_k \rightarrow v$  q.t.p e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (análogo ao que feito na prova do Teorema 1.4.2) podemos provar que  $\varepsilon|v_k|^4 v_k$  converge fraco para  $\varepsilon|v|^4 v$ .

c) compacidade e continuidade uniforme com relação a  $\lambda$ .

As provas da compacidade e continuidade uniforme com relação a  $\lambda$  são análogas ao caso bidimensional usando-se o novo espaço  $W_v$  e o fato que  $v \in L^6(Q)^3$ .

d) unicidade.

Nesta prova o procedimento é padrão (argumento de contradição e aplicação da desigualdade de Gronwall).

Para obter o resultado desejado usamos que  $v \in L^6(Q)^3$  e

$$\varepsilon \int_{\Omega} (|v_1|^4 - |v_1|^4) v \geq 0$$

Para finalizarmos a prova, basta estimar os pontos fixos de  $T(\lambda, \cdot)$ .

Esta etapa também é similar ao caso bidimensional pois se  $(\varphi, v, \theta) \in \mathcal{X}_1$  é um ponto fixo de  $T(\lambda, \cdot)$ , então deve satisfazer o seguinte problema :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \lambda \theta \quad \text{em } Q, (2.74)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla) v + \nabla p + k(f_s(\varphi - \varepsilon)v + \varepsilon |v|^4 v) = \lambda \vec{\sigma} \theta, \quad \text{em } Q, (2.75)$$

$$\operatorname{div} v = 0 \quad \text{em } Q,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta = \lambda \frac{\ell}{2} \frac{\partial f_s}{\partial \varphi}(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{em } Q, (2.76)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= 0, \\ \theta &= 0 \\ v &= 0, \end{aligned} \quad \text{em } S, (2.77)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= \varphi_0(x), \\ \theta(x, 0) &= \theta_0(x) \\ v(x, 0) &= v_0(x), \end{aligned} \quad \text{em } \Omega. (2.78)$$

Note que a única diferença entre os dois sistemas é o termo adicional  $\varepsilon|v|^4v$ .

As estimativas do campo de fases e da temperatura são iguais às dadas em (2.30) e (2.31) da Seção 2.2.

Na obtenção das estimativas correspondentes ao caso bidimensional para a velocidade, o termo adicional não causará maiores dificuldades pois, quando usarmos a técnica dos multiplicadores na equação regularizada, obteremos um termo positivo dado por

$$\varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} |v|^6 dx dt$$

Deve-se ressaltar que este é o único termo cuja estimativa correspondente não é uniforme em  $\varepsilon$ .

Portanto, a estimativa (2.34) da Seção 2.2 vale para o problema regularizado tridimensional. E, logo, pelo Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder,  $T(1, \varphi)$  tem um ponto fixo.

A prova da unicidade da solução do problema (2.67)-(2.68)-(2.69) é a mesma dada na Seção 2.2 para o caso bidimensional pois o termo adicional que aparecerá na equação regularizada da velocidade, dado por

$$\varepsilon \int_0^t \int_{\Omega} (|v_1|^4 v_1 - |v_2|^4 v_2) v dx dt$$

com  $v = v_1 - v_2$ , é positivo (como foi mostrado na prova do Teorema 1.4.2 do Capítulo 1) e não modificará os cálculos efetuados anteriormente.

Agora, analisaremos a regularidade da solução.

Para melhorarmos a regularidade da solução e concluirmos que a mesma é uniformemente limitada, com relação a  $\varepsilon$ , em

$$Z_2 = W_3^{2,1}(Q) \times Z_v \times W_2^{2,1}(Q)$$

com  $Z_v = L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ , devemos primeiro, melhorar a regularidade de  $\theta_\varepsilon$  pois não podemos aplicar a teoria  $L_p$  dada no Lema 1.2.13 do Capítulo 1 na equação da temperatura devido termos estimativas uniformes em  $\varepsilon$  da velocidade apenas no espaço  $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ . Para este espaço só podemos aplicar o resultado de regularidade para equações parabólicas lineares dado no Lema 1.2.12 do Capítulo 1 com  $v \in L^\infty(0, T; H)$ .

Para melhorar a regularidade da temperatura, usando o Lema de interpolação 1.2.3 do Capítulo 1 temos que  $\theta_\varepsilon \in L^3(Q)$  e satisfaz

$$\|\theta_\varepsilon\|_{3,Q} \leq M \left( \|\theta_{0\varepsilon}\|_{2,\Omega} + \|\varphi_{0\varepsilon}\|_{W_2^1(\Omega)} \right) \quad (2.79)$$

Então pelo Teorema 1.3.1 e o resultado de imersão dado no Lema 1.2.8 do Capítulo 1 temos que  $\varphi_\varepsilon \in W_3^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$  e satisfaz

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{\infty,Q} \leq M \|\varphi_\varepsilon\|_{3,Q}^{(2)} \leq M \left( \|(a + b\varphi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon^2)\varphi_\varepsilon\|_{3,Q} + \|\theta_\varepsilon\|_{3,Q} + \|\varphi_{0\varepsilon}\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} \right) \quad (2.80)$$

mas a função  $a(x, t) + b(x, t)s - s^2$  é limitada por uma constante em  $Q$ , e logo,

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{\infty,Q} \leq M \|\varphi_\varepsilon\|_{3,Q}^{(2)} \leq M \left( \|\varphi_\varepsilon\|_{6,Q} + \|\theta_\varepsilon\|_{3,Q} + \|\varphi_{0\varepsilon}\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} \right) \quad (2.81)$$

Mas,  $W_2^{2,1}(Q) \rightarrow L^{10}(Q)$  quando  $n = 3$  e pela estimativa (2.79) podemos concluir que

$$\|\varphi_\varepsilon\|_{\infty,Q} \leq M \|\varphi_\varepsilon\|_{3,Q}^{(2)} \leq M \left( \|\theta_{0\varepsilon}\|_{2,\Omega} + \|\varphi_{0\varepsilon}\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} \right) \quad (2.82)$$

Além disso, pelo resultado de imersão dado no Lema 1.2.9 do Capítulo 1 temos que  $\varphi_\varepsilon \in H^{1/3,1/6}(Q)$  e satisfaz

$$|\varphi_\varepsilon|_Q^{(1/3)} \leq M \|\varphi_\varepsilon\|_{3,Q}^{(2)} \leq M \left( \|\theta_{0\varepsilon}\|_{2,\Omega} + \|\varphi_{0\varepsilon}\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} \right) \quad (2.83)$$

Agora, aplicando a teoria  $L_p$  (veja Lema 1.2.12 do Capítulo 1) com  $\dot{\varphi}_\varepsilon \in L^2(Q)$ ,  $f_s \in C_b^1(\mathbb{R})$  e  $v \in L^\infty(0, T; H)$  temos que  $\theta_\varepsilon \in W_2^{2,1}(Q) \cap L^{10}(Q)$  e satisfaz

$$\|\theta_\varepsilon\|_{2,Q}^{(2)} \leq M \left( \|v_\varepsilon\|_{L^\infty(0,T;H)} \|\theta_{0\varepsilon}\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\partial_\varphi f_s\|_{\infty,Q} \|\dot{\varphi}_\varepsilon\|_{2,Q} + \|\theta_{0\varepsilon}\|_{W_2^1(\Omega)} \right) \quad (2.84)$$

Usando (2.30) e (2.35) em (2.84) e o resultado de imersão dado no Lema 1.2.8 do Capítulo 1 temos que

$$\|\theta_\varepsilon\|_{10,Q} \leq M \|\theta_\varepsilon\|_{2,Q}^{(2)} \leq M \left( \|v_{0\varepsilon}\|_{2,H} + \|\varphi_{0\varepsilon}\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\theta_{0\varepsilon}\|_{W_2^1(\Omega)} \right) \quad (2.85)$$

Agora, escolhendo

$$\begin{aligned}\varphi_{0\varepsilon} &\rightarrow \varphi_0 && \text{em } W_3^{4/3}(\Omega) \\ \theta_{0\varepsilon} &\rightarrow \theta_0 && \text{em } \overset{0}{W}_2^1(\Omega) \\ v_{0\varepsilon} &\rightarrow v_0 && \text{em } V\end{aligned}$$

temos que a solução do problema (2.67)-(2.68)-(2.69) é uniformemente limitada, com relação a  $\varepsilon$ , em

$$Z = W_3^{2,1}(Q) \times Z_v \times W_2^{2,1}(Q) \quad (2.86)$$

com  $Z_v = L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ .

E, isto completa a prova da Proposição 2.3.1. ■

### 2.3.2 Existência e Regularidade da Solução

Nesta seção usaremos a Proposição 2.3.1 da seção anterior, a teoria  $L_p$  para equações parabólicas (veja Lema 1.2.12 do Capítulo 1), o Teorema 1.3.1, resultados de imersão (veja Lemas 1.2.8 e 1.2.9) e argumentos de compacidade para provar um resultado de existência e regularidade da solução do nosso modelo (2.3)-(2.4)-(2.5) para o caso tridimensional.

Provaremos a existência passando o limite nas equações do problema regularizado (2.67)-(2.68)-(2.69). O procedimento é análogo ao do caso bidimensional, exceto para as equações regularizadas do tipo Navier-Stokes. Mostraremos que o termo adicional introduzido no caso tridimensional para garantir que o operador  $T(\lambda, \cdot)$  que definiu o problema quasilinear (2.71)-(2.72)-(2.73) da seção anterior estivesse bem definido, converge para zero quando  $\varepsilon$  aproxima-se de zero. Este é o ponto relevante da prova.

Quanto à regularidade, o argumento usado também será o de *bootstrapping*, porém neste caso teremos uma perda de regularidade da temperatura pois esta depende da dimensão e da regularidade da Navier-Stokes. Apenas para as equações do tipo Navier-Stokes teremos a mesma regularidade obtida no caso bidimensional.

**Teorema 2.3.1** *Suponha que:*

- i)  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  seja um domínio aberto limitado com  $\partial\Omega$  suficientemente regular e  $T$  um número positivo finito;
- ii)  $f_s(\cdot) \in C_b^1(\mathbb{R})$ ,  $0 \leq f_s(z) \leq 1$  for all  $z \in \mathbb{R}$ ;
- iii)  $a(x,t)$ ,  $b(x,t)$  são funções em  $L^\infty(Q)$ ;
- iv)  $k(y) \in C^0(-\infty, 1)$ ,  $k(0) = 0$ ,  $k(y) = 0$  em  $\mathbb{R}^-$ ,  $k(y)$  não negativa e  $\lim_{y \rightarrow 1} k(y) = +\infty$ ;
- v)  $\varphi_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega) \cap W_2^{3/2+\delta}(\Omega)$  com  $\delta \in (0, 1)$  e  $q \geq 2$ ;
- vi)  $\theta_0 \in \overset{0}{W} \frac{1}{2}(\Omega) \cap L^m(\Omega)$  para  $m \geq 2$ ;
- vii)  $v_0 \in V$ .

Se  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} = 0$  em  $\partial\Omega$ . Então, existem

$$\varphi \in W_q^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q) \text{ para } q \geq 2$$

$$v \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$$

$$\theta \in W_2^{2,1}(Q) \cap L^m(Q) \text{ para } m \geq 2$$

que verificam o seguinte sistema de equações :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \theta \quad \text{em } Q, \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta = \frac{\ell}{2} \frac{\partial f_s}{\partial \varphi}(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{em } Q, \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p + k(f_s(\varphi))v = \vec{\sigma} \theta \quad \text{em } Q_{ml}, \quad (2.89)$$



$$\operatorname{div} v = 0 \quad \text{em } Q_{ml}, \quad (2.90)$$

$$v = 0 \quad \text{em } \overset{0}{Q}_s, \quad (2.91)$$

*juntamente com as condições de fronteira*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \quad \text{em } S, \quad (2.92)$$

$$\theta = 0 \quad \text{em } S, \quad (2.93)$$

$$v = 0 \quad \text{em } S_{ml}, \quad (2.94)$$

*e as condições iniciais*

$$\varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \quad \text{em } \Omega, \quad (2.95)$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad \text{em } \Omega, \quad (2.96)$$

$$v(x, 0) = v_0(x) \quad \text{em } \Omega_{ml}(0). \quad (2.97)$$

No que segue destacaremos alguns pontos relevantes sobre os resultados do Teorema 2.3.1.

Observe que também neste caso temos solução forte para a equação do campo de fases (2.87) e da temperatura (2.88) e solução generalizada para a equação da velocidade (2.89) e as mesmas interpretações dadas para o caso bidimensional valem aqui também, exceto que  $\theta \in C^0(Q)$ .

Neste caso temos que  $\theta \in C([0, T]; W_2^1(\Omega))$  e a condição inicial (2.96) faz sentido.

A prova do Teorema 2.3.1 segue a mesma linha que no caso bidimensional.

### **Prova do Teorema 2.3.1 :**

Como consequência da Proposição 2.3.1 da seção anterior, para  $\varepsilon \in (0, 1]$ , qualquer solução  $(\varphi_\varepsilon, v_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \in \mathcal{X}_1$  do problema (2.67)-(2.68)-(2.69) é uniformemente limitada em  $Z_2$  (veja (2.86)) com relação a  $\varepsilon$ .

Por este resultado e a imersão compacta de  $Z_2$  em  $\mathcal{X}_1$  concluímos que existe  $(\varphi, v, \theta) \in \mathcal{X}_1$  e uma subsequência, também indexada por  $\varepsilon$ , tais que, quando  $\varepsilon \uparrow 0$  temos as seguintes convergências:

$$\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi \quad \text{em } L^q(Q) (q \geq 2)$$

$$\nabla \varphi_\varepsilon \rightarrow \nabla \varphi \quad \text{em } L^6(Q)^2$$

$$\varphi_\varepsilon \rightharpoonup \varphi \quad \text{em } W_3^{2,1}(Q)$$

$$\theta_\varepsilon \rightarrow \theta \quad \text{em } L^{10}(Q)$$

$$\nabla \theta_\varepsilon \rightarrow \nabla \theta \quad \text{em } L^2(Q)^2$$

$$\theta_\varepsilon \rightharpoonup \theta \quad \text{em } W_2^{2,1}(Q)$$

$$v_\varepsilon \rightarrow v \quad \text{em } L^2(0, T; H)$$

$$v_\varepsilon \rightharpoonup v \quad \text{em } L^2(0, T; V)$$

Além disso, temos que  $\varphi \in H^{1/3, 1/6}(Q)$  e, pela estimativa (2.83), em particular temos que  $\sup_{\overline{Q}} |\varphi_\varepsilon(x, t)| \leq M$  e  $\langle \varphi_\varepsilon \rangle_t^{(1/6)} \leq M$ .

Assim,  $\{\varphi_\varepsilon\}$  é uma família de funções equicontínuas e uniformemente limitada em  $\overline{Q}$ . Pelo Teorema de Arzela-Ascoli (veja Lema 1.2.10) existe uma subsequência, que representaremos novamente por  $\{\varphi_\varepsilon\}$ , tal que  $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi$  uniformemente em  $\overline{Q}$ .

Agora podemos verificar que  $(\varphi, v, \theta) \in \mathcal{X}_1$  é solução do problema (2.3)-(2.4)-(2.5).

As provas de que  $v = 0$  em  $\overset{0}{Q}_s$  e de que  $k(f_s(\varphi_\varepsilon) - \varepsilon)$  converge para  $k(f_s(\varphi))$  em  $C^0(K_{ml})$ , onde  $K_{ml}$  é um subconjunto compacto arbitrário de  $Q_{ml}$  são as mesmas que as do caso bidimensional. De fato, temos as mesmas convergências que naquele caso pois o termo adicional nas equações regularizadas do tipo Navier-Stokes produz um termo adicional positivo quando usamos a técnica dos multiplicadores nestas equações.

Para completar a demonstração de que realmente temos uma solução generalizada do problema tridimensional, é necessário provarmos que  $\varepsilon |v_\varepsilon|^4 v_\varepsilon$

converge para zero num sentido adequado quando  $\varepsilon \uparrow 0$ , (lembramos que este é o único termo diferente quando comparamos com as equações regularizadas do caso bidimensional).

Para isto precisamos de uma estimativa adicional, obtida como se segue: multiplicamos a equação regularizada da velocidade por  $v_\varepsilon$ , integramos em  $Q_{m_i}$  e usamos as desigualdades de Poincaré e Young para obter

$$\int_{\Omega} v_\varepsilon^2 dx + \int_Q |\nabla v_\varepsilon|^2 dx dt + \int_Q k(f_s(\varphi_\varepsilon) - \varepsilon) v_\varepsilon^2 dx dt + \varepsilon \int_Q |v_\varepsilon|^6 dx dt \leq M \left( \|v_{0\varepsilon}\|_{2,\Omega}^2 + \|\theta_\varepsilon\|_{2,Q}^2 \right). \quad (2.98)$$

Usando a estimativa (2.31) em (2.98) e o fato de  $(\varphi_\varepsilon, v_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$  ser uniformemente limitada em  $Z_2$  (veja (2.86)) com relação a  $\varepsilon$ , obtemos

$$\varepsilon \int_Q |v_\varepsilon|^6 dx dt \leq M \left( \|v_0\|_{2,\Omega}^2 + \|\theta_0\|_{2,\Omega}^2 + \|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \right). \quad (2.99)$$

Agora estamos em condições de passar ao limite.

Seja  $\phi \in C([0, T]; W_2^1(\Omega_{m_i}(t)))$  com  $\text{supp } \phi(x, t)$  subconjunto compacto em  $Q_{m_i} \cup \Omega_{m_i}(0)$ ,  $\text{div } \phi(\cdot, t) = 0$  para todo  $t \in [0, T]$  e  $\phi(\cdot, T) = 0$ . Procedendo exatamente como na prova do Teorema 2.2.1 da Seção 2.2 (multiplicando a equação do tipo Navier-Stokes por  $\phi$ , integrando, etc), podemos utilizar os mesmos argumentos e concluir que todos os termos têm como limite os termos corretos, com a única exceção do termo corresponde ao adicional cujo limite temos que provar que é zero.

Para isto, observamos que, sendo  $\phi$  como acima, pela desigualdade de Young temos que

$$\varepsilon \int_Q |v_\varepsilon|^4 v_\varepsilon \phi dx dt \leq \varepsilon \int_Q |v_\varepsilon|^5 \phi dx dt \leq \varepsilon \|v_\varepsilon\|_{6,Q}^5 \|\phi\|_{6,Q}. \quad (2.100)$$

Mas podemos escrever  $\varepsilon \|v_\varepsilon\|_{6,Q}^5$  do seguinte modo:

$$\varepsilon \|v_\varepsilon\|_{6,Q}^5 = \varepsilon^{1/6} \varepsilon^{5/6} \|v_\varepsilon\|_{6,Q}^5 = \varepsilon^{1/6} \left( \varepsilon^{1/6} \|v_\varepsilon\|_{6,Q} \right)^5. \quad (2.101)$$

Combinando (2.99) e (2.101) obtemos

$$\varepsilon \|v_\varepsilon\|_{6,Q}^5 \leq \varepsilon^{1/6} \left( \|v_0\|_{2,\Omega}^2 + \|\theta_0\|_{2,\Omega}^2 + \|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \right)^5. \quad (2.102)$$

Usando (2.102) em (2.100) tem-se

$$\varepsilon \int_Q |v_\varepsilon|^4 v_\varepsilon \phi \, dxdt \leq M \varepsilon^{1/6} \left( \|v_0\|_{2,\Omega}^2 + \|\theta_0\|_{2,\Omega}^2 + \|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \right)$$

e, logo,

$$\varepsilon \int_Q |v_\varepsilon|^4 v_\varepsilon \phi \, dxdt \rightarrow 0 \quad \text{quando } \varepsilon \uparrow 0.$$

Portanto, podemos passar ao limite todos os termos na equação regularizada da velocidade e concluir que  $v$  é solução generalizada da equação do tipo Navier-Stokes do problema (2.3)-(2.4)-(2.5) para o caso tridimensional.

Para verificarmos que  $\varphi$  é solução generalizada da equação do campo de fases, note que da convergência  $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi$  em  $L^{10}(Q)$  temos o mesmo resultado dado em (2.60) e passando ao limite na equação regularizada do campo de fases (*phase field*) podemos concluir que  $\varphi$  é solução generalizada da equação do campo de fases do problema (2.3)-(2.4)-(2.5) para o caso tridimensional.

Finalmente, para verificarmos que  $\theta$  é solução generalizada da equação da temperatura usaremos as convergências  $v_\varepsilon \rightarrow v$  em  $L^{10/3}(Q)^3$  e  $\nabla \theta_\varepsilon \rightarrow \nabla \theta$  em  $L^2(Q)^3$  para obter, com  $\xi \in \overset{0}{W}{}^{1,1}_2(Q)$  e  $\xi(x, T) = 0$ ,

$$\int_Q (v_\varepsilon \cdot \nabla \theta_\varepsilon) \xi \, dxdt \rightarrow \int_Q (v \cdot \nabla \theta) \xi \, dxdt$$

e poder passar ao limite na equação regularizada da temperatura .

Isto completa a prova que  $(\varphi, v, \theta)$  é solução generalizada do problema (2.3)-(2.4)-(2.5) para o caso tridimensional.

Agora, vamos analisar a regularidade da solução.

Para isto, observe que com  $\theta \in L^3(Q)$  pelo Teorema 1.3.1 do Capítulo 1 temos que  $\varphi \in W_3^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$  satisfazendo

$$\|\varphi\|_{\infty, Q} \leq M \|\varphi\|_{3, Q}^{(2)} \leq M \left( \|\theta_0\|_{2, \Omega} + \|\varphi_0\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} \right). \quad (2.103)$$

Além disso, pelo Lema 1.2.9 do Capítulo 1 com  $n = 3$  podemos concluir que  $\varphi \in H^{1/3, 1/6}(Q)$ .

Para a temperatura, aplicando a teoria  $L_p$  (veja Lema 1.2.12 do Capítulo 1) com  $\dot{\varphi} \in L^3(Q)$ ,  $f_s \in C_b^1(\mathbb{R})$  e  $v \in L^\infty(0, T; H)$  e o resultado de imersão dado no Lema 1.2.8 com  $n = 3$  temos que  $\theta \in W_2^{2,1}(Q) \cap L^{10}(Q)$  satisfazendo

$$\|\theta\|_{10,Q} \leq M \|\theta\|_{2,Q}^{(2)} \leq M \left( \|v_0\|_{2,H} + \|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)} + \|\theta_0\|_{W_2^1(\Omega)} \right). \quad (2.104)$$

Usando novamente o Teorema 1.3.1 e o resultado de imersão dado no Lema 1.2.8 do Capítulo 1 (argumento de *bootstrapping*) com  $\theta \in L^{10}(Q)$  obtemos  $\varphi \in W_{10}^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$  satisfazendo

$$\|\varphi\|_{\infty,Q} \leq M \|\varphi\|_{10,Q}^{(2)} \leq M \left( \|(a + b\varphi - \varphi^2)\varphi\|_{10,Q} + \|\theta\|_{10,Q} + \|\varphi_0\|_{W_{10}^{9/5}(\Omega)} \right) \quad (2.105)$$

e, logo,

$$\|\varphi\|_{\infty,Q} \leq M \|\varphi\|_{10,Q}^{(2)} \leq M \left( \|\varphi\|_{\infty,Q} + \|\theta\|_{10,Q} + \|\varphi_0\|_{W_{10}^{9/5}(\Omega)} \right). \quad (2.106)$$

Usando (2.103) em (2.106) obtemos

$$\|\varphi\|_{10,Q}^{(2)} \leq M \left( \|\theta\|_{10,Q} + \|\theta_0\|_{2,\Omega} + \|\varphi_0\|_{W_{10}^{9/5}(\Omega)} \right). \quad (2.107)$$

Agora, vamos obter uma estimativa para  $\|\theta\|_{10,Q}$  usando a técnica dos multiplicadores na equação do calor. Multiplique esta equação por  $\theta^9$ , integre por partes, use  $\operatorname{div} v = 0$  e a desigualdade de Young para obter

$$\begin{aligned} & \frac{1}{10} \int_{\Omega} \theta^{10} dx + 9 \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \theta|^2 \theta^8 dx dt \leq \\ & M \left( \int_{\Omega} \theta_0^{10} dx + \int_0^T \int_{\Omega} |\dot{\varphi}|^{10} dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} |\theta|^{10} dx dt \right). \end{aligned} \quad (2.108)$$

Usando (2.107) em (2.108) e aplicando a desigualdade de Gronwall ao resultado obtemos

$$\|\theta\|_{10,Q} \leq M \left( \|\theta_0\|_{10,\Omega} + \|\varphi_0\|_{W_{10}^{9/5}(\Omega)} \right). \quad (2.109)$$

Agora, combinando (2.107) e (2.109) tem-se

$$\|\varphi\|_{10,Q}^{(2)} \leq M \left( \|\theta_0\|_{10,\Omega} + \|\varphi_0\|_{W_{10}^{9/5}(\Omega)} \right). \quad (2.110)$$

Como  $\theta_0 \in L^m(\Omega)$  para  $m \geq 2$  podemos efetuar cálculos análogos aos da Seção 2.2.1 e estimar a norma  $\|\theta\|_{m,Q}$  usando a não linearidade da equação da temperatura e o fato do  $\operatorname{div} v = 0$ . Portanto, pelo Teorema 1.3.1 para  $m = q \geq 2$  podemos concluir que  $\varphi \in W_q^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$  para  $q \geq 2$ . Além disso, por (2.110) e o Lema 1.2.9 do Capítulo 1 temos que  $\varphi \in H^{3/2,3/4}(Q)$ .

Isto completa a prova do Teorema 2.3.1. ■

## Capítulo 3

# Um modelo do tipo campo de fases para solidificação com convecção: ligas binárias

Neste capítulo apresentaremos resultados de existência e regularidade para um modelo condução-convecção do tipo campo de fases (*phase field*) para a solidificação de materiais impuros (ligas binárias). O modelo é uma adaptação do modelo apresentado no Capítulo 2, que incorporará uma nova variável, a concentração  $c(x,t)$  do soluto na liga e está baseado nos trabalhos de Caginalp [8], Voller [37] e Blanc [3] e será detalhado na Seção 3.1. A característica fundamental do nosso modelo é ser um modelo para misturas de materiais dopantes; em outras palavras, nosso resultado de existência é obtido apenas com concentração inicial suficientemente pequena. Esta restrição, gerada pela não-linearidade que aparecerá na equação da concentração é de natureza puramente técnica, pois fisicamente nada restringe a concentração inicial da solidificação de ligas.

Como no caso de materiais puros, apresentaremos separadamente os casos bi e tridimensionais para tornar a exposição mais clara e destacarmos as particularidades de cada um. O procedimento técnico é análogo ao caso puro e, portanto, as técnicas usadas serão : teorema de ponto fixo, argumento de compacidade e argumento de *bootstrapping*.

Vale ressaltar que modelos do tipo campo de fases para a solidificação de ligas binárias que tratam os efeitos convectivos foram pouco explorados pois o acoplamento das equações de Navier-Stokes ao processo complica bastante

a análise do sistema de equações diferenciais do modelo.

### 3.1 Descrição do Modelo

A solidificação de materiais impuros, tais como ligas ou misturas, é um processo que depende da condução de calor e da redistribuição da impureza ou soluto na mistura. Esta redistribuição pode ser feita por difusão e convecção e isto torna o fenômeno um processo acoplado de condução de calor, difusão de material e efeitos convectivos.

Vamos considerar uma *liga binária*, que é um sistema composto de dois materiais A e B com concentração  $c(x,t)$ . O composto A é chamado **solvente** e B o **soluto** e a concentração  $c(x,t)$  representará a fração do material B na mistura. As mudanças de fase numa liga binária são governadas por seu *diagrama de fase* que descreve os estados termodinâmico nos quais as fases podem coexistir em equilíbrio termodinâmico (veja Alexiades [1] e Gordon [18]).

Neste trabalho vamos tratar um modelo do tipo campo de fases (*phase field*) que descreverá os processos de condução, difusão e convecção da solidificação de ligas binárias de modo bem simples. O nosso modelo para ligas será uma adaptação do modelo para materiais puros, descrito no Capítulo 2.

Usaremos novamente a metodologia campo de fases (*phase field*) considerada na Seção 2.1 do Capítulo 2 para descrever as mudanças de fase e trataremos a zona *mushy* novamente como um meio poroso, como foi sugerido no trabalho de Voller *et al* [37].

Deste modo, a equação do campo de fases não será alterada e é dada pela expressão (2.1) na Seção 2.1.

Para o fluido, o termo fonte  $F$ , dependerá da concentração e, portanto, assumindo a hipótese de Boussineq, este termo é dado por

$$F(\theta, c) = \rho g [M_1(\theta - \theta_r) + M_2(c - c_r)],$$

com  $M_1$  e  $M_2$  constantes e  $c_r$  uma concentração referência.

Por simplicidade, faremos  $F(\theta, c) = \vec{\sigma}_1 \theta + \vec{\sigma}_2 c$ .

Na formulação da equação da temperatura a única alteração que faremos é na expressão da energia relacionada com a condução de calor para introduzir



o fato que, para o caso da solidificação de ligas binárias, o calor latente muda numa faixa de temperaturas  $T_L < T < T_S$ . Deste modo, a energia é por

$$e = \begin{cases} \theta + \frac{\ell}{2} & \text{se } f_s = 0 \quad \text{ou } T > T_L, \\ \theta + \frac{\ell}{2}(1 - f_s) & \text{se } 0 < f_s < 1 \quad \text{ou } T_L < T < T_S, \\ \theta & \text{se } f_s = 1 \quad \text{ou } T < T_S. \end{cases}$$

com  $T_L$  e  $T_S$  a temperatura *liquidus* e *solidus* respectivamente.

Assim, o balanço de energia é análogo ao do Capítulo 2.

Finalmente, para concentração vamos considerar o seguinte balanço baseado na lei de Fick para difusão de material :

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \Delta c + v \cdot \nabla [(1 - f_s(\varphi)) c] = 0$$

Portanto, considerando as regiões  $Q_l$ ,  $Q_m$  e  $Q_s$  definidas na Seção 2.1 do Capítulo 2, nosso modelo para solidificação de ligas binárias é o seguinte sistema de equações diferenciais :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \theta & \text{em } Q, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta = \frac{\ell}{2} \frac{\partial f_s}{\partial \varphi}(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \text{em } Q, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla) v + \nabla p + k(f_s(\varphi)) v = \vec{\sigma}_1 \theta + \vec{\sigma}_2 c & \text{em } Q_{ml}, \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{em } Q_{ml}, \\ v = 0 & \text{em } Q_s^0, \\ \frac{\partial c}{\partial t} - \Delta c + v \cdot \nabla [(1 - f_s(\varphi)) c] = 0 & \text{em } Q, \end{array} \right. \quad (3.1)$$

juntamente com as condições de fronteira

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0 \\ \theta = 0 \\ v = 0 \\ \frac{\partial c}{\partial \eta} = 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{em } S, \\ \text{em } S, \\ \text{em } S_{ml}, \\ \text{em } S, \end{array} \quad (3.2)$$

e as condições iniciais

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) \\ c(x, 0) = c_0(x) \\ v(x, 0) = v_0(x) \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{em } \Omega, \\ \text{em } \Omega, \\ \text{em } \Omega, \\ \text{em } \Omega_{ml}(0). \end{array} \quad (3.3)$$

### 3.1.1 Definição de solução generalizada

Nesta seção vamos dizer claramente o que entenderemos como solução generalizada do problema (3.1)-(3.2)-(3.3).

Na seção 2.1.1 do Capítulo 2 já definimos solução generalizada para as equações do campo de fases (veja definição 2.1.1), temperatura (veja definição 2.1.2) e velocidade (veja definição 2.1.3), portanto basta definirmos solução generalizada para a equação da concentração. Para isto, considere o seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c}{\partial t} - \Delta c + (1 - f_s) \left( \sum_{i=1}^n v_i(x, t) \frac{\partial c}{\partial x_i} \right) - \left( \sum_{i=1}^n v_i(x, t) \right) \frac{\partial f_s}{\partial x_i} c = z(x, t) \\ \frac{\partial c}{\partial \eta} = 0 \\ c(x, 0) = c_0(x) \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{em } Q, \\ \text{em } S, \\ \text{em } \Omega. \end{array} \quad (3.4)$$

**Definição 3.1.1** Dizemos que  $c(x, t)$  é solução generalizada do problema (3.4) na classe  $V_2(Q)$  (veja (1.1)) se  $c \in V_2(Q)$  e satisfaz a seguinte identidade integral :

$$- \int_Q c \sigma_t dxdt + \int_Q \nabla c \nabla \sigma dxdt + \int_Q (1 - f_s) v \cdot \nabla c \sigma dxdt - \int_Q v \cdot \nabla f_s c \sigma dxdt =$$

$$+ \int_Q z \sigma \, dxdt + \int_{\Omega} c(x, 0) \sigma(x, 0) \, dx \quad (3.5)$$

para toda  $\sigma$  em  $W_2^{1,1}(Q)$  com  $\sigma(x, T) = 0$ ,  $z \in L^{q_1, r_1}(Q)$ ,  $q_1$  e  $r_1$  dados em (2.8) da Seção 2.1.1 do Capítulo 2,  $f_s \in C_b^1(\mathbb{R})$ ,  $v$  e  $v \cdot \nabla f_s$  satisfazendo  $\left\| \sum_{i=1}^n v_i^2 \right\|_{q,r} < \infty$  e  $\|v \cdot \nabla f_s\|_{q,r} < \infty$  com  $r$  e  $q$  dados em (2.11) da Seção 2.1.1 do Capítulo 2.

Agora, podemos definir claramente o que significa *solução generalizada* do nosso modelo (3.1)-(3.2)-(3.3) para ligas.

**Definição 3.1.2** Dizemos que  $(\varphi, v, \theta, c)$  é *solução generalizada* do problema (3.1)-(3.2)-(3.3) na classe

$$W = V_2(Q) \times (L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)) \times V_2(Q) \times \overset{0}{V}_2(Q)$$

se  $\varphi \in V_2(Q)$ ,  $v \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ ,  $v = 0$  q.t.p em  $\overset{0}{Q}_s$ ,  $\theta \in \overset{0}{V}_2(Q)$ ,  $c \in V_2(Q)$  e as identidades integrais (2.7), (2.10), (2.13) e (3.5) são satisfeitas com  $\beta$ ,  $\xi$ ,  $\phi$  e  $\sigma$  dadas nas definições (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) e (3.1.1), respectivamente.

## 3.2 Caso Bidimensional

Para provarmos a existência de solução do problema (3.1)-(3.2)-(3.3) usaremos uma regularização análoga ao caso bidimensional de solidificação de materiais puros (veja Proposição 2.2.1 do Capítulo 2) e trataremos do mesmo modo as equações do tipo Navier-Stokes.

Novamente, obteremos uma sequência de soluções regularizadas aplicando o Teorema de ponto fixo de Leray-Schauder. Depois, passaremos o limite nas equações regularizadas e obteremos a solução por argumento de compacidade.

A característica fundamental dos modelos para ligas binárias que apresentaremos neste trabalho é serem modelos para materiais dopantes. Em termos matemáticos, isto significa que na aplicação do Teorema de Leray-Schauder (veja Lema 1.2.11 do Capítulo 1) as estimativas uniformes para o conjunto dos pontos fixos foi obtida somente no caso que uma certa norma da concentração inicial é suficientemente pequena. Esta restrição é puramente técnica,

decorrente das não-linearidades da equação da concentração e aparece na prova da existência de solução do problema regularizado.

### 3.2.1 Problema Regularizado

**Proposição 3.2.1** *Suponha que:*

- i)  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  seja um domínio aberto limitado com  $\partial\Omega$  suficientemente regular e  $T$  um número positivo finito;
- ii)  $f_s(\cdot) \in C_b^1(\mathbb{R})$ ,  $0 \leq f_s(z) \leq 1$  for all  $z \in \mathbb{R}$ ;
- iii)  $a(x,t)$ ,  $b(x,t)$  são funções em  $L^\infty(Q)$ ;
- iv)  $k(y) \in C^0(-\infty, 1)$ ,  $k(0) = 0$ ,  $k(y) = 0$  em  $\mathbb{R}^-$ ,  $k(y)$  não negativa e  $\lim_{y \rightarrow 1} k(y) = +\infty$ ;
- v)  $\varphi_0 \in W_6^{5/6}(\Omega) \cap W_2^{3/2+\delta}(\Omega)$  com  $\delta \in (0,1)$ ;
- vi)  $\theta_0 \in W_3^{4/3}(\Omega)$ ;
- vii)  $v_0 \in H$ ;
- viii)  $c_0 \in W_2^1(\Omega)$ .

*Considere o seguinte espaço de Banach*

$$\mathcal{X}_2 = \{(\varphi, v, \theta); \varphi \in L^6(Q), v \in L^2(0, T; H), \theta \in L^6(Q), c \in L^4(Q)\} \quad (3.6)$$

*Se  $\frac{\partial\varphi_0}{\partial\eta} = \theta_0 = 0$  em  $\partial\Omega$  e  $\|c_0\|_{W_2^1(\Omega)}$  é suficientemente suave. Então, para cada  $\varepsilon \in (0, 1]$  existe uma única solução  $(\varphi_\varepsilon, v_\varepsilon, \theta_\varepsilon, c_\varepsilon) \in \mathcal{X}_2$  do seguinte problema :*

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi_\varepsilon = a \varphi_\varepsilon + b \varphi_\varepsilon^2 - \varphi_\varepsilon^3 + \theta_\varepsilon \\
\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} - \nu \Delta v_\varepsilon + (v_\varepsilon \cdot \nabla) v_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon + k(f_s(\varphi_\varepsilon) - \varepsilon) v_\varepsilon = \vec{\sigma}_1 \theta_\varepsilon + \vec{\sigma}_2 c_\varepsilon \\
\operatorname{div} v_\varepsilon = 0 \\
\frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial t} - \Delta \theta_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla \theta_\varepsilon = \frac{\ell}{2} \frac{\partial f_s}{\partial \varphi}(\varphi_\varepsilon) \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t} \\
\frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t} - \Delta c_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla [(1 - f_s(\varphi_\varepsilon)) c_\varepsilon] = 0
\end{array} \right. \quad \text{em } Q, \quad (3.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial \eta} = 0 \\
\frac{\partial c_\varepsilon}{\partial \eta} = 0 \\
\theta_\varepsilon = 0 \\
v_\varepsilon = 0
\end{array} \right. \quad \text{em } S, \quad (3.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\varphi_\varepsilon(x, 0) = \varphi_{0\varepsilon}(x) \\
\theta_\varepsilon(x, 0) = \theta_{0\varepsilon}(x) \\
c_\varepsilon(x, 0) = c_{0\varepsilon}(x) \\
v_\varepsilon(x, 0) = v_{0\varepsilon}(x)
\end{array} \right. \quad \text{em } \Omega, \quad (3.9)$$

Além disso, a solução  $(\varphi_\varepsilon, v_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$  é uniformemente limitada com relação a  $\varepsilon$ , no espaço

$$Z_3 = W_6^{2,1}(Q) \times Z_v \times W_3^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \quad (3.10)$$

com  $Z_v = L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ .

O que segue são alguns comentários sobre as características similares e/ou diferentes entre a prova da proposição acima e a prova da Proposição 2.2.1 dada na Seção 2.2.1 do Capítulo 2.

A prova da Proposição 3.2.1 é análoga a da Proposição 2.2.1 do ponto de vista das técnicas que serão empregadas, porém com algumas particularidades originadas pelas não-linearidades da equação da concentração.

Nesta prova novamente a dimensão do espaço, a regularidade da equação do tipo Navier-Stokes e da equação do campo de fases terão um papel importante nos argumentos que usaremos para passar o limite nas equações regularizadas.

Por outro lado, além da não-linearidade da equação da temperatura, também as não-linearidades da equação de concentração influenciarão na aplicabilidade da teoria  $L_p$  para equações parabólicas (veja Lemas 1.2.13 e 1.2.14 do Capítulo 1) ao problema e relacionarão a dimensão com a regularidade da equação do tipo Navier-Stokes e a regularidade do campo de fases.

Estas não-linearidades afetam a escolha da ordem das equações do problema regularizado, alterando, assim, a escolha do espaço  $\mathcal{X}_2$  e, também, todo o processo de aplicação do Teorema de ponto fixo.

Como optamos pelo mesmo tipo de regularização para os casos bidimensionais, tanto para materiais puros quanto para ligas binárias, não obteremos mais regularidade para a velocidade do que  $L^4(Q)^2$  devido ao termo do tipo *Carman-Koseny* e, portanto, a regularidade do campo de fases será fundamental tanto na aplicação do Teorema de ponto fixo como na prova que  $v$  se anula em  $\overset{0}{Q}_s$ .

Outro ponto importante é o fato de provarmos que o conjunto dos pontos fixos do operador quasilinear  $T(\lambda, \cdot)$  é limitado em  $\mathcal{X}_2$  somente quando a norma  $W_2^1(\Omega)$  da concentração inicial  $c_0(x)$  é suficientemente pequena (esta *pequenez* será claramente explicada durante a prova).

### **Prova da Proposição 3.2.1 :**

Por simplicidade de notação, omitiremos o subíndice  $\varepsilon$  no que segue.

Agora, para cada  $\lambda \in [0, 1]$  considere o operador  $T(\lambda, \cdot) : \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{X}_2$  que associa cada  $(\phi, u, \omega, z) \in \mathcal{X}_2$  com  $T(\lambda, \phi, u, \omega, z) = (\varphi, v, \theta, c)$  única solução do seguinte problema :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \lambda \omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p + k(f_s(\varphi) - \varepsilon)v = \lambda (\vec{\sigma}_1 \omega + \vec{\sigma}_2 z) \\ \operatorname{div} v = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta = \lambda \frac{\ell}{2} \frac{\partial f_s}{\partial \varphi}(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \frac{\partial c}{\partial t} - \Delta c + v \cdot \nabla [(1 - f_s(\varphi))c] = 0 \end{array} \right. \quad \text{em } Q, \quad (3.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial c}{\partial \eta} = \theta = 0 \\ v = 0 \end{array} \right. \quad \text{em } S, \quad (3.12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) \\ c(x, 0) = c_0(x) \\ v(x, 0) = v_0(x) \end{array} \right. \quad \text{em } \Omega, \quad (3.13)$$

Para verificarmos que  $T(\lambda, \cdot)$  está bem definido em  $\mathcal{X}_2$  (veja 3.6) para  $\forall \lambda$  vamos aplicar o Teorema 1.3.1 e o Lema 1.2.8 do Capítulo 1 com  $n = 2$ ,  $\omega \in L^6(Q)$  para obter  $\varphi \in W_6^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$ .

Para as equações do tipo Navier-Stokes pelo o Teorema 1.4.1 da seção de problemas auxiliares do Capítulo 1 temos que  $v \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$  e por interpolação,  $v \in L_4(Q)^2$ .

Agora, pela teoria  $L_p$  para as equações parabólicas (veja Lema 1.2.13 do Capítulo 1) e o Lema 1.2.8 com  $n = 2$ ,  $\dot{\varphi} \in L^6(Q)$ ,  $f_s \in C_b^1(\mathbb{R})$  e  $v \in L^4(Q)^2$  podemos concluir que  $\theta \in W_3^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$ .

Observe que a não-linearidade na equação do calor e, conseqüentemente, a dimensão do espaço e a regularidade de  $v$  controlam a aplicabilidade da teoria  $L_p$  para as equações parabólicas (Lema 1.2.13).

Para a concentração, usando o Lema 1.2.14 dado no Capítulo 1 com  $n = 2$ ,  $f_s \in C_b^1(\mathbb{R})$ ,  $\nabla\varphi \in L^6(Q)^2$  e  $v \in L^4(Q)^2$  temos que existe uma única solução  $c \in W_2^{2,1}(Q) \cap L^{10}(Q)$ .

Note que, agora, também a regularidade de  $\varphi$  controla a aplicabilidade do Lema 1.2.14.

Pelas conclusões acima,  $T(\lambda, \cdot)$  está bem definido de  $\mathcal{X}_2$  em  $\mathcal{X}_2$ .

Para provarmos que  $T(\lambda, \cdot)$  é contínuo em  $\mathcal{X}_2$  para qualquer  $\lambda$  fixo em  $[0,1]$  vamos tomar  $\{(\phi_n, u_n, \omega_n, z_n)\}$  convergindo forte para  $(\phi, u, \omega, z)$  em  $\mathcal{X}_2$ . Então, para  $T(\lambda, \phi_n, u_n, \omega_n, z_n) = (\varphi_n, v_n, \theta_n, c_n)$  e

$$W = W_2^{2,1}(Q) \times W_v \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$$

com  $W_v = \{v \mid v \in L^2(0, T; V), \dot{v} \in L^2(0, T; V')\}$  e  $V'$  o espaço dual de  $V$ , podemos provar que  $\|(\varphi_n, v_n, \theta_n, c_n)\|_W < M \forall n$ , portanto existe uma subsequência  $\{(\varphi_k, v_k, \theta_k, c_k)\}$  que converge para  $(\varphi, v, \theta, c)$  fraco em  $W$ . Como a imersão de  $W$  em  $\mathcal{X}_2$  é compacta temos que  $\{(\varphi_k, v_k, \theta_k, c_k)\}$  converge para  $(\varphi, v, \theta, c)$  forte em  $\mathcal{X}_2$ . Resta verificar que  $T(\lambda, \phi, u, \omega, z) = (\varphi, v, \theta, c)$ . Para isto passando o limite no problema (3.11)-(3.12)-(3.13) com relação a subsequência podemos provar que  $(\varphi, v, \theta, c)$  satisfaz (3.11)-(3.12)-(3.13) no sentido das distribuições, pela unicidade do limite e a escolha arbitrária da subsequência a prova da continuidade está completa.

Os resultados que  $T(\lambda, \cdot)$  é compacto e uniformemente contínuo com relação a  $\lambda$  são provados de modo similar ao caso bidimensional para materiais puros e estas verificações serão omitidas.

Agora, considere o problema (3.11)-(3.12)-(3.13) com  $\lambda = 0$ , tome dois elementos  $(0, \phi_1, u_1, \omega_1, z_1)$  e  $(0, \phi_2, u_2, \omega_2, z_2)$  e as correspondentes soluções  $T(0, \phi_i, u_i, \omega_i, z_i) = (\varphi_i, v_i, \theta_i, c_i)$  ( $i = 1, 2$ ).

Subtraindo o problema (3.11)-(3.12)-(3.13) em  $(\varphi_2, v_2, \theta_2, c_2)$  com  $\lambda = 0$  de (3.11)-(3.12)-(3.13) em  $(\varphi_1, v_1, \theta_1, c_1)$  com  $\lambda = 0$  obteremos um problema quasilinear em  $(\varphi, v, \theta, c) = (\varphi_1 - \varphi_2, v_1 - v_2, \theta_1 - \theta_2, c_1 - c_2)$ .

Claro que este problema dará um pouco mais de trabalho que o anterior, devido a equação da concentração, mas as regularidades que temos permitem aplicarmos a técnica dos multiplicadores e a desigualdade de Gronwall ao problema e provarmos que  $\varphi_1 = \varphi_2, \theta_1 = \theta_2, v_1 = v_2$  e  $c_1 = c_2$ .

Finalmente, para completarmos a prova, devemos estimar o conjunto dos pontos fixos de  $T(\lambda, \cdot)$ . Se  $(\varphi, v, \theta, c) \in \mathcal{X}_2$  é um ponto fixo de  $T(\lambda, \cdot)$ , então deve satisfazer o seguinte problema :



$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \lambda \theta, \quad \text{em } Q, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla) v + \nabla p + k(f_s(\varphi - \varepsilon)v) = \lambda (\vec{\sigma}_1 \theta + \vec{\sigma}_2 c) \quad \text{em } Q, \quad (3.15)$$

$$\operatorname{div} v = 0 \quad \text{em } Q,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta = \lambda \frac{\ell}{2} \frac{\partial f_s}{\partial \varphi}(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{em } Q, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \Delta c + v \cdot \nabla [(1 - f_s(\varphi))c] = 0 \quad \text{em } Q, \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial c}{\partial \eta} = \theta = 0 \\ v = 0 \end{cases} \quad \text{em } S$$

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) \\ c(x, 0) = c_0(x) \\ v(x, 0) = v_0(x) \end{cases} \quad \text{em } \Omega$$

Vamos usar a técnica dos multiplicadores para obtermos estimativas uniformes para o ponto fixo de  $T(\lambda, \cdot)$ . Assim, multiplique as equações (3.14) e (3.16) por  $\dot{\varphi}$  and  $\theta$ , respectivamente, integre por partes, use a desigualdade de Young e some o resultado para obter

$$\int_{\Omega} \theta^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \theta|^2 dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 dx dt + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 dx dt \leq$$

$$M \left( \|\theta_0\|_{2,\Omega}^2 + \|\nabla \varphi_0\|_{2,\Omega}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} |\varphi|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} |\theta|^2 dx dt \right) \quad (3.18)$$

Novamente, multiplicando a equação (3.14) por  $\varphi$  e depois por  $-\Delta\varphi$ , integrando por partes e usando a desigualdade de Young temos que

$$\int_{\Omega} \varphi^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dxdt + \frac{\lambda}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \varphi^4 dxdt \leq$$

$$M \left( \|\varphi_0\|_{2,\Omega}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} |\theta|^2 dxdt + \int_0^T \int_{\Omega} |\varphi|^2 dxdt \right) \quad (3.19)$$

$$\int_{\Omega} |\nabla\varphi|^2 dx + \alpha^2 \int_0^t \int_{\Omega} |\Delta\varphi|^2 dxdt + 3 \int_0^t \int_{\Omega} \varphi^2 |\nabla\varphi|^2 dxdt \leq$$

$$M \left( \|\nabla\varphi_0\|_{2,\Omega}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} |\theta|^2 dxdt + \int_0^T \int_{\Omega} |\varphi|^2 dxdt + \int_0^T \int_{\Omega} |\varphi|^4 dxdt \right) \quad (3.20)$$

Usando as estimativas (3.18)-(3.19)-(3.20), a desigualdade de Gronwall e o Lema 1.2.8 do Capítulo 1 obtemos

$$\|\varphi\|_{p,Q} \leq M \|\varphi\|_{2,Q}^{(2)} \leq M \left( \|\theta_0\|_{2,\Omega} + \|\varphi_0\|_{W_2^1(\Omega)} \right) \quad (3.21)$$

com  $p \geq 2$ .

Aplicando o Lema 1.2.14 do Capítulo 1 na equação (3.14) e aproveitando a sua não-linearidade temos que

$$\|\varphi_t\|_{6,Q} \leq \|\varphi\|_{6,Q}^{(2)} \leq M \left( \|\theta\|_{6,Q} + \|\varphi\|_{2,Q}^{(2)} + \|\varphi_0\|_{W_6^{5/3}(\Omega)} \right) \quad (3.22)$$

Agora, para estimar  $\|\theta\|_{6,Q}$ , multiplique a equação (3.16) por  $\theta^6$ , integre por partes, use que  $\operatorname{div} v = 0$  e obtenha

$$\frac{1}{6} \int_{\Omega} \theta^6 dx + 5 \int_0^t \int_{\Omega} \theta^4 |\nabla\theta|^2 dxdt \leq \frac{\ell}{2} \|\partial_{\varphi} f_s\|_{\infty,Q} \left\| \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right\|_{6,Q} \|\theta^5\|_{\frac{6}{5},Q} + \frac{1}{6} \int_{\Omega} \theta_0^6 dx \quad (3.23)$$

Combinando as estimativas (3.21)-(3.22)-(3.23), usando a desigualdades de Young e Gronwall tem-se

$$\|\theta\|_{6,Q} \leq M \left( \|\theta_0\|_{6,\Omega} + \|\varphi_0\|_{W_6^{5/3}(\Omega)} \right) \quad (3.24)$$

Agora, combinando as estimativas (3.22) e (3.24) concluímos

$$\|\varphi\|_{6,Q}^{(2)} \leq M \left( \|\theta_0\|_{6,\Omega} + \|\varphi_0\|_{W_6^{5/3}(\Omega)} \right) \quad (3.25)$$

Observe que no caso bidimensional para materiais puros não foi necessário obtermos a regularidade dada em (3.24) para temperatura. Esta é necessária para termos (3.25), ou melhor,  $\nabla\varphi \in L^6(Q)^2$  e podermos aplicar o Lema 1.2.14 na equação (3.17) com  $q = 2$  e calcular a seguinte estimativa

$$\|c\|_{2,Q}^{(2)} \leq M \left( \|c_0\|_{W_2^1(\Omega)} \|v\|_{4,Q} + \|c_0\|_{W_2^1(\Omega)} \|v\|_{4,Q} \|\partial_\varphi f_s\|_{\infty,Q} \|\nabla\varphi\|_{6,Q} + \|c_0\|_{W_2^1(\Omega)} \right) \quad (3.26)$$

Para obtermos as estimativas para velocidade vamos multiplicar escalarmente a equação (3.15) por  $v$ , integrar por partes e usar Young para obter

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx dt + \int_{\Omega} k(f_s(\varphi) - \varepsilon) v^2 dx \leq \\ & M \left( \|v_0\|_{\mathbb{H}}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} |\theta|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} |c|^2 dx dt \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Este é o ponto crucial desta prova. Para entendermos claramente o que está acontecendo, vamos, primeiro, usar (3.25) em (3.26) e concluir

$$\|c\|_{2,Q}^{(2)} \leq M \left( \|c_0\|_{W_2^1(\Omega)} \|v\|_{4,Q} + \|c_0\|_{W_2^1(\Omega)} \right) \quad (3.28)$$

Agora, por (3.27) e o Lema de interpolação 1.2.3 do Capítulo 1 tem-se

$$\|v\|_{4,Q} \leq M \left( \|\theta\|_{2,Q} + \|c\|_{2,Q} + \|v_0\|_{2,\Omega} \right) \quad (3.29)$$

Portanto, por (3.28) e (3.29) fica claro que não podemos desacoplar a norma da velocidade e a norma da concentração sem usar a norma de  $c_0(x)$ .

Se tivéssemos tentado obter uma estimativa da norma  $\|c\|_{2,Q}$  diretamente da equação (3.17), usando a técnica dos multiplicadores obteríamos

$$\int_{\Omega} c^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla c|^2 dx dt \leq M \left( \|c_0\|_{2,\Omega}^2 + \int_0^T \int_{\Omega} |v| |\nabla \varphi| |c|^2 dx dt \right) \quad (3.30)$$

Observe que pelo Lema 1.2.9 do Capítulo 1 com  $n = 2$  e  $q = 6$  e a estimativa (3.25) temos  $\varphi \in H^{4/3,2/3}(Q)$ , logo,  $\nabla \varphi \in L^\infty(Q)$ , mas ainda assim não é possível obtermos a estimativa desejada.

Portanto, pelo que foi exposto acima, se  $\|c_0\|_{W_2^1(\Omega)} \leq M$  então

$$\|v\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq M \left( \|v_0\|_{2,\Omega} + \|\theta_0\|_{2,\Omega} + \|\varphi_0\|_{W_6^{5/3}(\Omega)} + \|c_0\|_{W_2^1(\Omega)} \right) \quad (3.31)$$

$$\|v\|_{L^2(0,T;V)} \leq M \left( \|v_0\|_{2,\Omega} + \|\theta_0\|_{2,\Omega} + \|\varphi_0\|_{W_6^{5/3}(\Omega)} + \|c_0\|_{W_2^1(\Omega)} \right) \quad (3.32)$$

$$\|c\|_{2,Q}^{(2)} \leq M \left( \|v_0\|_{2,\Omega} + \|\theta_0\|_{2,\Omega} + \|\varphi_0\|_{W_6^{5/3}(\Omega)} + \|c_0\|_{W_2^1(\Omega)} \right) \quad (3.33)$$

Assim, pelo Teorema de Leray-Schauder  $T(1, \cdot)$  tem um ponto fixo e, consequentemente o problema (3.7)-(3.8)- (3.9) tem solução em  $\mathcal{X}_2$ .

Vamos provar que esta solução é única. Por simplicidade, omitiremos o índice  $\varepsilon$  no que segue.

Considere  $\varphi_i$ ,  $v_i$ ,  $\theta_i$  e  $c_i$  ( $i = 1, 2$ ) duas soluções of problem (3.7)-(3.8)- (3.9), então a diferença  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ ,  $v = v_1 - v_2$ ,  $\theta = \theta_1 - \theta_2$  e  $c_1 - c_2$  satisfaz



$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} v^2 dx + \frac{\nu}{2} \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx dt + \int_{\Omega} k(f_s(\varphi_1) - \varepsilon) v^2 dx \leq \widetilde{M} \left( \|v\|_{2,Q}^2 + \|\theta\|_{2,Q}^2 + \|c\|_{2,Q}^2 \right) \quad (3.36)$$

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \theta^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla \theta|^2 dx dt \leq \widetilde{M} \left( \|v\|_{2,Q}^2 + \|\theta\|_{2,Q}^2 \right) \quad (3.37)$$

com  $p \geq 2$ .

Agora, multiplicando a equação da concentração por  $c(x, t)$ , integrando por partes, usando as estimativas (3.35) e (3.36) obtemos

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} c^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} |\nabla c|^2 dx dt \leq \widetilde{M} \left( \|\theta\|_{2,Q}^2 + \|\varphi\|_{2,Q}^2 \right) + \|c\|_{2,Q}^2 \quad (3.38)$$

Somando as estimativas (3.34), (3.36), (3.37) e (3.38) temos que

$$\frac{d}{dt} \left( \|\varphi\|_2^2 + \|v\|_2^2 + \|\theta\|_2^2 + \|c\|_2^2 \right) \leq 0$$

Integrando e usando  $\|\varphi_0\|_{2,\Omega}^2 = \|v_0\|_{2,\Omega}^2 = \|\theta_0\|_{2,\Omega}^2 = \|c_0\|_{2,\Omega}^2 = 0$  obtemos o resultado desejado.

Agora, para finalizarmos, vamos analisar a regularidade da solução.

Devemos provar que a sequência de soluções regularizadas é uniformemente limitada, com relação a  $\varepsilon$ , em

$$Z = W_6^{2,1}(Q) \times Z_v \times W_3^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \quad (3.39)$$

com  $Z_v = L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ .

Para isto, vamos escolher

$$\begin{aligned} \varphi_{0\varepsilon} &\rightarrow \varphi_0 && \text{em } W_6^{5/6}(\Omega) \\ \theta_{0\varepsilon} &\rightarrow \theta_0 && \text{em } W_3^{4/3}(\Omega) \\ c_{0\varepsilon} &\rightarrow c_0 && \text{em } W_2^1(\Omega) \\ v_{0\varepsilon} &\rightarrow v_0 && \text{em } H \end{aligned}$$

Assim, pelas estimativas (3.31) e (3.32) temos que  $v_\varepsilon$  é uniformemente limitada em  $Z_v$ .

Além disso, aplicando o Teorema 1.3.1 do Capítulo 1 com  $\theta_\varepsilon \in L^6(Q)$  temos que  $\varphi_\varepsilon \in W_6^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$  e satisfaz a estimativa (3.25).

Para temperatura, vamos aplicar o Lema 1.2.13 com  $n = 2$ ,  $\dot{\varphi}_\varepsilon \in L^6(Q)$ ,  $f_s \in C_b^1(\mathbb{R})$  e  $v_\varepsilon \in L^4(Q)^2$  para obter  $\theta_\varepsilon \in W_3^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$  satisfazendo

$$\|\theta_\varepsilon\|_{3,Q}^{(2)} \leq M \left( \|v_\varepsilon\|_{4,Q} \|\theta_{0\varepsilon}\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} + \|\partial_\varphi f_s\|_{\infty,Q} \|\dot{\varphi}_\varepsilon\|_{6,Q} + \|\theta_{0\varepsilon}\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} \right) \quad (3.40)$$

Usando as estimativas (3.25), (3.31) e (3.32) e o Lema 1.2.8 tem-se

$$\|\theta_\varepsilon\|_{\infty,Q} \leq M \|\theta_\varepsilon\|_3^{(2)} \leq M \left( \|v_{0\varepsilon}\|_{2,\Omega} + \|\varphi_{0\varepsilon}\|_{W_6^{5/6}(\Omega)} + \|\theta_{0\varepsilon}\|_{W_3^{4/3}(\Omega)} \right) \quad (3.41)$$

Finalmente, para a concentração vamos aplicar o Lema 1.2.14 do Capítulo 1 com  $n = 2$ ,  $\nabla\varphi_\varepsilon \in L^6(Q)^2$ ,  $f_s \in C_b^1(\mathbb{R})$  e  $v_\varepsilon \in L^4(Q)^2$  para obter  $c_\varepsilon \in W_2^{2,1}(Q) \cap L^{10}(Q)$  satisfazendo a estimativa (3.33) e temos o resultado desejado.

Isto completa a prova da Proposição 3.2.1. ■

### 3.2.2 Existência e Regularidade da Solução

Nesta seção provaremos um resultado de existência e regularidade para o problema (3.1)-(3.2)-(3.3) usando os resultados da Proposição 3.2.1 da seção anterior, argumentos de compacidade e argumento de *bootstrapping*.

**Teorema 3.2.1** *Suponha que:*

- i)  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  seja um domínio aberto limitado com  $\partial\Omega$  suficientemente regular e  $T$  um número positivo finito;
- ii)  $f_s(\cdot) \in C_b^1(\mathbb{R})$ ,  $0 \leq f_s(z) \leq 1$  for all  $z \in \mathbb{R}$ ;
- iii)  $a(x,t)$ ,  $b(x,t)$  são funções em  $L^\infty(Q)$ ;
- iv)  $k(y) \in C^0(-\infty, 1)$ ,  $k(0) = 0$ ,  $k(y) = 0$  em  $\mathbb{R}^-$ ,  $k(y)$  não negativa e  $\lim_{y \rightarrow 1} k(y) = +\infty$ ;
- v)  $\varphi_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega) \cap W_2^{3/2+\delta}(\Omega)$  com  $\delta \in (0, 1)$  e  $q \geq 2$ ;

vi)  $\theta_0 \in W_p^{2-2/p}(\Omega)$  para  $2 \leq p < 4$ ;

vii)  $v_0 \in V$ ;

viii)  $c_0 \in W_k^{2-2/k}(\Omega) \cap W_2^{3/2+\delta}(\Omega)$  com  $\delta \in (0,1)$  e  $2 \leq k < 4$ .

Se  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} = \frac{\partial c_0}{\partial \eta} = \theta_0 = 0$  em  $\partial\Omega$  e  $\|c_0\|_{W_2^1(\Omega)}$  é suficientemente pequena.

Então, existem

$$\varphi \in W_q^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q) \text{ para } q \geq 2$$

$$v \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$$

$$\theta \in W_p^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q) \text{ para } 2 \leq p < 4$$

$$c \in W_k^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q) \text{ para } 2 \leq k < 4$$

que verificam o seguinte sistema de equações :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \theta \quad \text{em } Q,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta = \frac{\ell}{2} \frac{\partial f_s}{\partial \varphi}(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{em } Q,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p + k(f_s(\varphi))v = \vec{\sigma}_1 \theta + \vec{\sigma}_2 c \quad \text{em } Q_{ml},$$

$$\operatorname{div} v = 0 \quad \text{em } Q_{ml},$$

$$v = 0 \quad \text{em } \overset{0}{Q}_s,$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \Delta c + v \cdot \nabla [(1 - f_s(\varphi))c] = 0 \quad \text{em } Q,$$



juntamente com as condições de fronteira

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= 0 && \text{em } S, \\ \frac{\partial c}{\partial \eta} &= 0 && \text{em } S, \\ \theta &= 0 && \text{em } S, \\ v &= 0 && \text{em } S_{ml}, \end{aligned}$$

e as condições iniciais

$$\begin{aligned} \varphi(x, 0) &= \varphi_0(x) && \text{em } \Omega, \\ \theta(x, 0) &= \theta_0(x) && \text{em } \Omega, \\ c(x, 0) &= c_0(x) && \text{em } \Omega, \\ v(x, 0) &= v_0(x) && \text{em } \Omega_{ml}(0). \end{aligned}$$

Nesta prova entenderemos solução generalizada no sentido das definições dadas na Seções 2.1.1 do Capítulo 2 e Seção 3.1.1 deste capítulo.

A prova é similar a prova do Teorema 2.2.1 do Capítulo 2 e, por esta razão, vamos destacar apenas os pontos referentes a equação da concentração e analisar apenas as convergências dos termos não-lineares. Para os outros termos, as convergências são obtidas de modo usual e serão omitidas.

### **Prova do Teorema : 3.2.1**

Como consequência da Proposição 3.2.1 da seção anterior, para  $\varepsilon \in (0, 1]$ , a sequência  $(\varphi_\varepsilon, v_\varepsilon, \theta_\varepsilon, c_\varepsilon) \in \mathcal{X}_2$  é uniformemente limitada em  $Z_3$  (veja (3.39)) com relação a  $\varepsilon$ . Usando este resultado e a imersão compacta de  $Z_3$  em  $\mathcal{X}_2$  concluímos que existe  $(\varphi, v, \theta, c) \in \mathcal{X}_2$  e uma subsequência, também indexada

por  $\varepsilon$ , tais que, quando  $\varepsilon \downarrow 0$  temos as seguintes convergências:

$$\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi \quad \text{em } L^q(Q) \quad (q \geq 2)$$

$$\nabla \varphi_\varepsilon \rightarrow \nabla \varphi \quad \text{em } L^6(Q)^2$$

$$\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi \quad \text{em } W_6^{2,1}(Q)$$

$$c_\varepsilon \rightarrow c \quad \text{em } L^{10}(Q)$$

$$\nabla c_\varepsilon \rightarrow \nabla c \quad \text{em } L^2(Q)^2$$

$$c_\varepsilon \rightarrow c \quad \text{em } W_2^{2,1}(Q)$$

$$\theta_\varepsilon \rightarrow \theta \quad \text{em } L^p(Q) \quad (p \geq 2)$$

$$\nabla \theta_\varepsilon \rightarrow \nabla \theta \quad \text{em } L^3(Q)^2$$

$$\theta_\varepsilon \rightarrow \theta \quad \text{em } W_3^{2,1}(Q)$$

$$v_\varepsilon \rightarrow v \quad \text{em } L^2(0, T; H)$$

$$v_\varepsilon \rightarrow v \quad \text{em } L^2(0, T; V)$$

Além disso, temos que  $\varphi \in H^{4/3, 2/3}(Q)$  e pela estimativa (3.25), em particular,  $\sup_{\overline{Q}} |\varphi_\varepsilon(x, t)| \leq M$ ,  $\sup_{\overline{Q}} |\nabla \varphi_\varepsilon| \leq M$  e  $\langle \varphi_\varepsilon \rangle_t^{(2/3)} \leq M$ .

Assim,  $\{\varphi_\varepsilon\}$  e  $\{\nabla \varphi_\varepsilon\}$  são famílias de funções equicontínuas e uniformemente limitada em  $\overline{Q}$  e pelo Teorema de Arzela-Ascoli (veja Lema 1.2.10) existem subsequências, que representaremos novamente por  $\{\varphi_\varepsilon\}$  e  $\{\nabla \varphi_\varepsilon\}$  tais que  $\varphi_\varepsilon \rightarrow \varphi$  uniformemente em  $\overline{Q}$  e  $\nabla \varphi_\varepsilon \rightarrow \nabla \varphi$  uniformemente em  $\overline{Q}$ .

Para verificarmos que  $c(x, t)$  é uma solução generalizada da equação da concentração, vamos tratar a equação regularizada da concentração do seguinte modo:

$$\frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t} - \Delta c_\varepsilon + (1 - f_s(\varphi_\varepsilon)) v_\varepsilon \cdot \nabla c_\varepsilon - \partial_\varphi f_s(\varphi_\varepsilon) v_\varepsilon \cdot \nabla \varphi_\varepsilon c_\varepsilon = 0 \quad (3.42)$$

Agora, como  $f_s(\varphi)$  e  $\partial_\varphi f_s(\varphi)$  são contínuas e  $\varphi_\varepsilon$  converge uniformemente temos que  $f_s(\varphi_\varepsilon) \rightarrow f_s(\varphi)$  e  $\partial_\varphi f_s(\varphi_\varepsilon) \rightarrow \partial_\varphi f_s(\varphi)$  uniformemente. Então, com

estas convergências, a convergência uniforme de  $\nabla\varphi_\varepsilon, v_\varepsilon \rightharpoonup v$  em  $L^4(Q)^2$  e  $\nabla c_\varepsilon \rightarrow \nabla c$  em  $L^2(Q)^2$  obtemos

$$\begin{aligned} \int_Q (1 - f_s(\varphi_\varepsilon)) v_\varepsilon \nabla c_\varepsilon \sigma \, dxdt &\rightarrow \int_Q (1 - f_s(\varphi)) v \nabla c \sigma \, dxdt \\ \int_Q \partial_\varphi f_s(\varphi_\varepsilon) v_\varepsilon \cdot \nabla \varphi_\varepsilon c_\varepsilon \sigma \, dxdt &\rightarrow \int_Q \partial_\varphi f_s(\varphi) v \cdot \nabla \varphi c \sigma \, dxdt \end{aligned} \tag{3.43}$$

para toda  $\sigma \in W_2^{1,1}(Q)$  com  $\sigma(x, T) = 0$ .

Usando (3.43) e passando o limite na equação regularizada (3.42) concluímos que  $c(x, t)$  é solução generalizada da equação (3.42).

Portanto, obtemos a solução generalizada do problema (3.1)-(3.2)-(3.3).

Vamos, agora, analisar a regularidade da solução obtida.

Usando os mesmos argumentos do Teorema 2.2.1 do Capítulo 2 podemos concluir que  $\varphi \in W_q^{2,1}(Q) \cap H^{\tau, \tau/2}(Q)$  com  $\tau = \frac{2}{q}(q-1)$ , ( $q > 4$ ) e também que  $\theta \in W_p^{2,1}(Q) \cap H^{2/3, 1/3}(Q)$  com ( $2 \leq p < 4$ ).

Para a concentração vamos aplicar o Lema 1.2.14 do Capítulo 1 com  $n = 2$ ,  $q = 2$ ,  $f_s \in C_b^1(\mathbb{R})$ ,  $v \in L^4(Q)^2$  e  $\nabla\varphi \in L^5(Q)^2$  para obter  $c \in W_2^{2,1}(Q) \cap L^{10}(Q)$ .

Agora, usando um argumento de *bootstrapping* com  $\nabla\varphi \in L^q(Q)^2$  ( $q \geq 6$ ) obtemos  $c \in W_k^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q)$  com ( $2 \leq k < 4$ ).

Isto completa a prova do Teorema 3.2.1. ■

### 3.3 Caso Tridimensional

A abordagem do nosso modelo para o caso tridimensional segue a metodologia introduzida na Seção 2.3.1 do Capítulo 2 para materiais puros.

Faremos a mesma regularização nas equações do tipo Navier-Stokes e usaremos os mesmos argumentos para obter a solução do problema. A diferença técnica fundamental entre os dois casos são as dificuldades geradas pelas não-linearidades da equação da concentração, que no caso das ligas, complicam a aplicação do Teorema de ponto fixo.

Por outro lado, como a diferença fundamental entre os casos bi e tridimensionais para as ligas é a regularização das equações do tipo Navier-Stokes, tópico já explorado na Seção 2.3.1 do Capítulo 2, esta seção será um resumo dos pontos mais relevantes do caso tridimensional.

### 3.3.1 Problema Regularizado

**Proposição 3.3.1** *Suponha que:*

- i)  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  seja um domínio aberto limitado com  $\partial\Omega$  suficientemente regular e  $T$  um número positivo finito;
- ii)  $f_s(\cdot) \in C_b^1(\mathbb{R})$ ,  $0 \leq f_s(z) \leq 1$  for all  $z \in \mathbb{R}$ ;
- iii)  $a(x,t)$ ,  $b(x,t)$  são funções em  $L^\infty(Q)$ ;
- iv)  $k(y) \in C^0(-\infty, 1)$ ,  $k(0) = 0$ ,  $k(y) = 0$  em  $\mathbb{R}^-$ ,  $k(y)$  não negativa e  $\lim_{y \rightarrow 1} k(y) = +\infty$ ;
- v)  $\varphi_0 \in W_6^{5/6}(\Omega) \cap W_2^{3/2+\delta}(\Omega)$  com  $\delta \in (0, 1)$ ;
- vi)  $\theta_0 \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ ;
- vii)  $v_0 \in V$ ;
- viii)  $c_0 \in W_2^1(\Omega)$ .

*Considere o seguinte espaço de Banach*

$$\mathcal{X}_2 = \{(\varphi, v, \theta); \varphi \in L^6(Q), v \in L^2(0, T; H), \theta \in L^6(Q), c \in L^4(Q)\} \quad (3.44)$$

Se  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} = 0$  em  $\partial\Omega$ . Então, para cada  $\varepsilon \in (0, 1]$  existe uma única solução  $(\varphi_\varepsilon, v_\varepsilon, \theta_\varepsilon) \in \mathcal{X}_2$  do seguinte problema :

$$\begin{cases}
\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi_\varepsilon = a\varphi_\varepsilon + b\varphi_\varepsilon^2 - \varphi_\varepsilon^3 + \theta_\varepsilon \\
\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} - \nu \Delta v_\varepsilon + (v_\varepsilon \cdot \nabla) v_\varepsilon + \nabla p_\varepsilon + k(f_s(\varphi_\varepsilon) - \varepsilon)v_\varepsilon + \varepsilon |v_\varepsilon|^4 v_\varepsilon = \vec{\sigma}_1 \theta_\varepsilon + \vec{\sigma}_2 c_\varepsilon \\
\operatorname{div} v_\varepsilon = 0 \\
\frac{\partial \theta_\varepsilon}{\partial t} - \Delta \theta_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla \theta_\varepsilon = \frac{\ell}{2} \frac{\partial f_s}{\partial \varphi}(\varphi_\varepsilon) \frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial t} \\
\frac{\partial c_\varepsilon}{\partial t} - \Delta c_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla [(1 - f_s(\varphi_\varepsilon)) c_\varepsilon] = 0
\end{cases} \quad \text{em } Q,$$

$$\begin{cases}
\frac{\partial \varphi_\varepsilon}{\partial \eta} = \frac{\partial c_\varepsilon}{\partial \eta} = \theta_\varepsilon = 0 \\
v_\varepsilon = 0
\end{cases} \quad \text{em } S,$$

$$\begin{cases}
\varphi_\varepsilon(x, 0) = \varphi_{0\varepsilon}(x) \\
c_\varepsilon(x, 0) = c_{0\varepsilon}(x) \\
\theta_\varepsilon(x, 0) = \theta_{0\varepsilon}(x) \\
v_\varepsilon(x, 0) = v_{0\varepsilon}(x)
\end{cases} \quad \text{em } \Omega.$$

Além disso, a solução  $(\varphi_\varepsilon, v_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$  é uniformemente limitada com respeito a  $\varepsilon$ , no espaço

$$Z_4 = W_6^{2,1}(Q) \times Z_v \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q) \quad (3.45)$$

com  $Z_v = L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ .

### Prova da Proposição 3.3.1 :

Para cada  $\lambda \in [0, 1]$  considere o operador  $T(\lambda, \cdot) : \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{X}_2$  que associa cada  $(\phi, u, \omega, z) \in \mathcal{X}_2$  com  $T(\lambda, \phi, u, \omega, z) = (\varphi, v, \theta, c)$  única solução do

seguinte problema :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \lambda \omega \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p + k(f_s(\varphi) - \varepsilon)v + \varepsilon|v|^4 v = \lambda(\vec{\sigma}_1 \omega + \vec{\sigma}_2 z) \\ \operatorname{div} v = 0 \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta = \lambda \frac{\ell}{2} \frac{\partial f_s}{\partial \varphi}(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \\ \frac{\partial c}{\partial t} - \Delta c + v \cdot \nabla [(1 - f_s(\varphi)) c] = 0 \end{array} \right. \quad \text{em } Q,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = \frac{\partial c}{\partial \eta} = \theta = 0 \\ v = 0 \end{array} \right. \quad \text{em } S,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, 0) = \varphi_0(x) \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x) \\ c(x, 0) = c_0(x) \\ v(x, 0) = v_0(x) \end{array} \right. \quad \text{em } \Omega.$$

Para provarmos que  $T(\lambda, \cdot)$  está bem definido em  $\mathcal{X}_2$  usaremos seguintes resultados : Teorema 1.3.1, Teorema 1.4.2, Lema 1.2.12 e o Lema 1.2.8 dados no Capítulo 1.

O ponto relevante desta parte é que a solução das equações do tipo Navier-Stokes é única, o que permite falarmos do operador  $T(\lambda, \cdot)$  e não de uma sequência de operadores e, além disso, esta solução tem a regularidade necessária para a aplicação da teoria  $L_p$  das equações parabólicas lineares (veja Lemas 1.2.13 e 1.2.14 do Capítulo 1) nas equações da temperatura e do concentração.

Vale destacar que se tivéssemos tentado a mesma regularização do caso bidimensional teríamos regularidade em  $L^\infty(0, T; H)$ , o permitiria aplicarmos o Lema 1.2.12 mas não garantiríamos a unicidade e, portanto, o operador  $T(\lambda, \cdot)$  não estaria bem definido. Logo, o ponto relevante é a unicidade da

solução das equações do tipo Navier-Stokes. Além disso, observe, também, que se tivéssemos usado no caso bidimensional a regularização usada neste caso obteríamos os mesmos resultados.

Do ponto de vista puramente técnico (só prova da existência de solução) a escolha do tipo de regularização não é tão relevante mas do ponto de vista computacional fica evidente que o problema aproximado do caso bidimensional, tanto para materiais puros como para ligas, é mais simples do que o caso tridimensional e que o tratamento numérico de um caso para o outro não é direto nem similar.

Nas provas da continuidade em  $\mathcal{X}_2$ , da compacidade, da continuidade uniforme em  $\lambda$  e a unicidade do problema regularizado acima para  $\lambda = 0$  o procedimento é o mesmo das provas da Proposição 3.2.1 com as particularidades mencionadas na Proposição 2.2.1 do Capítulo 2 no que se refere ao termo adicional  $\varepsilon|v|^4v$  das equações do tipo Navier-Stokes. Os pontos fundamentais destas etapas são os resultados que  $v \in L^6(Q)^3$  e

$$\varepsilon \int_{\Omega} (|v_1|^4 - |v_1|^4) v \geq 0 \quad (3.46)$$

Na prova da estimativa uniforme dos pontos fixos de  $T(\lambda, \cdot)$  destacamos a mesma dificuldade encontrada na prova da Proposição 3.2.1 da seção anterior, ou seja, este resultado só é obtido quando a norma  $W_2^1(\Omega)$  da concentração inicial  $c_0$  é suficientemente pequena. Como já foi mencionado, isto ocorre devido as relações não-lineares entre a velocidade e a concentração. Em particular, para obtermos uma estimativa do tipo (3.26) aplicamos o Lema 1.2.12 do Capítulo 1 na equação regularizada da concentração para obter

$$\|c\|_{10,Q} \leq M \|c\|_{2,Q}^{(2)} \leq$$

$$M \left( \|c_0\|_{W_2^1(\Omega)} \|v\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|c_0\|_{W_2^1(\Omega)} \|v\|_{L^2(0,T;V)} \|\partial_\varphi f_s\|_{\infty,Q} \|\nabla\varphi\|_{6,Q} + \right. \\ \left. + \|c_0\|_{W_2^1(\Omega)} \right)$$

Observe que não podemos aplicar o Lema (1.2.14) pois a estimativa da norma  $\|v\|_{6,Q}$  não é uniforme em  $\varepsilon$ .

Portanto, além da *pequenez* temos perda de regularidade da concentração.

Estes comentários são suficientes para concluirmos que o problema regularizado dado na Proposição 3.3.1 tem solução em  $\mathcal{X}_2$  (veja (3.44)).

Sobre a unicidade das soluções temos que os argumentos são similares aos da prova dada na Seção 3.2.1 pois ao aplicamos a técnica dos multiplicadores nas equações do tipo Navier-Stokes, o termo adicional  $\varepsilon|v|^4v$  vai produzir um termo positivo (veja 3.46), e logo, não influenciará nos cálculos que foram efetuados.

Para a regularidade, pelo Teorema 1.3.1 e o Lema 1.2.12 do Capítulo 1 temos que a solução é uniformemente limitada com relação a  $\varepsilon$  no espaço

$$Z = W_6^{2,1}(Q) \times Z_v \times W_2^{2,1}(Q) \times W_2^{2,1}(Q)$$

com  $Z_v = L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ .

Observe que também para a temperatura houve uma perda de regularidade.

Isto completa a prova da Proposição 3.3.1. ■

### 3.3.2 Existência e Regularidade da Solução

Agora, vamos provar o nosso resultado principal de existência e regularidade para o caso tridimensional para solidificação de ligas binárias.

**Teorema 3.3.1** *Suponha que:*

- i)  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  seja um domínio aberto limitado com  $\partial\Omega$  suficientemente regular e  $T$  um número positivo finito;
- ii)  $f_s(\cdot) \in C_b^1(\mathbb{R})$ ,  $0 \leq f_s(z) \leq 1$  for all  $z \in \mathbb{R}$ ;
- iii)  $a(x, t)$ ,  $b(x, t)$  são funções em  $L^\infty(Q)$ ;
- iv)  $k(y) \in C^0(-\infty, 1)$ ,  $k(0) = 0$ ,  $k(y) = 0$  em  $\mathbb{R}^-$ ,  $k(y)$  não negativa e  $\lim_{y \rightarrow 1} k(y) = +\infty$ ;



v)  $\varphi_0 \in W_q^{2-2/q}(\Omega) \cap W_2^{3/2+\delta}(\Omega)$  com  $\delta \in (0,1)$  e  $q \geq 2$ ;

vi)  $\theta_0 \in \dot{W}^1_2(\Omega) \cap L^m(\Omega)$  para  $m \geq 2$ ;

vii)  $v_0 \in V$ ;

viii)  $c_0 \in W_2^1(\Omega)$ .

Se  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial \eta} = 0$  em  $\partial\Omega$  e  $\|c_0\|_{W_2^1(\Omega)}$  é suficientemente pequena. Então, existem

$$\varphi \in W_q^{2,1}(Q) \cap L^\infty(Q) \text{ para } q \geq 2$$

$$\theta \in W_2^{2,1}(Q) \cap L^m(Q) \text{ para } m \geq 2$$

$$v \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$$

$$c \in W_2^{2,1}(Q) \cap L^{10}(Q)$$

que verificam o seguinte sistema de equações :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \theta \quad \text{em } Q,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta = \frac{\ell}{2} \frac{\partial f_s}{\partial \varphi}(\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{em } Q,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p + k(f_s(\varphi))v = \vec{\sigma}_1 \theta + \vec{\sigma}_2 c \quad \text{em } Q_{ml},$$

$$\operatorname{div} v = 0 \quad \text{em } Q_{ml},$$

$$v = 0 \quad \text{em } \overset{0}{Q}_s,$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \Delta c + v \cdot \nabla [(1 - f_s(\varphi))c] = 0 \quad \text{em } Q,$$

*juntamente com as condições de fronteira*

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} &= 0 && \text{em } S, \\ \frac{\partial c}{\partial \eta} &= 0 && \text{em } S, \\ \theta &= 0 && \text{em } S, \\ v &= 0 && \text{em } S_{ml},\end{aligned}$$

*e as condições iniciais*

$$\begin{aligned}\varphi(x, 0) &= \varphi_0(x) && \text{em } \Omega, \\ \theta(x, 0) &= \theta_0(x) && \text{em } \Omega, \\ c(x, 0) &= c_0(x) && \text{em } \Omega, \\ v(x, 0) &= v_0(x) && \text{em } \Omega_{ml}(0).\end{aligned}$$

**Prova do Teorema 3.3.1 :**

A demonstração deste Teorema segue as linhas gerais das provas dadas no Teorema 2.3.1 do Capítulo 2 e no Teorema 3.2.1 da Seção 3.2.1.

Destacamos, nestes resultados, a convergência do termo adicional  $\varepsilon|v|^4v$  dada na prova do Teorema 2.3.1 e a convergência da equação regularizada da concentração dada na prova do Teorema 3.2.1.

Portanto, a prova do Teorema 3.3.1 está completa. ■

# Capítulo 4

## Conclusões Gerais

Neste trabalho apresentamos resultados de existência e regularidade para alguns modelos matemáticos, relativamente simples (primeiras aproximações) de condução-convecção do tipo campo de fases que tratam de problemas de solidificação de materiais puros ou impuros (ligas). Para o caso de ligas binárias, tratamos um modelo que descreve a solidificação de materiais dopantes, isto é, materiais com concentração inicial do soluto suficientemente pequena.

A característica fundamental dos modelos analisados neste trabalho é a de descreverem a mudança de fase através da fração sólida, que por sua vez depende apenas do campo de fases. Modelos um pouco mais realísticos poderiam incluir também a influência de outras variáveis como, por exemplo, a temperatura.

Neste contexto, para o modelo de materiais puros, por exemplo, teríamos  $f_s = f_s(\varphi, \theta)$  e o seguinte sistema de equações diferenciais :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha^2 \Delta \varphi = a\varphi + b\varphi^2 - \varphi^3 + \theta & \text{em } Q, \\ (1 - \frac{\ell}{2} \frac{\partial f_s}{\partial \theta}(\varphi, \theta)) \frac{\partial \theta}{\partial t} - \Delta \theta + v \cdot \nabla \theta = \frac{\ell}{2} \frac{\partial f_s}{\partial \varphi}(\varphi, \theta) \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \text{em } Q, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p + k(f_s(\varphi, \theta))v = \vec{\sigma} \theta & \text{em } Q_{ml}, \\ \operatorname{div} v = 0 & \text{em } Q_{ml}, \\ v = 0 & \text{em } Q_s^0, \end{array} \right.$$

Matematicamente, o problema torna-se bem mais complicado e ao tentarmos adotar a mesma metodologia (regularização, técnica de ponto fixo

e argumentos de compacidade) empregada neste trabalho, para resolver o problema acima, encontramos, como obstáculo inicial, dificuldade em aplicar a teoria  $L_p$  das equações diferenciais. Portanto, estas técnicas devem ser aprimoradas para poderem ser utilizadas em tal modelo.

Além desta, outras modificações podem ser feitas para que estes modelos sejam aperfeiçoados. Por exemplo, poderíamos introduzir o termo convectivo e/ou a influência da concentração, através de um termo fonte, na equação do campo de fases. Ou considerar os parâmetros termodinâmicos, tais como condutividade térmica, coeficiente de difusão e o parâmetro de dilatação, variando durante o processo. Ou, ainda, introduzir a influência da variação da densidade de massa do material durante a mudança de fase. Também poderíamos considerar o calor latente função de algumas variáveis termodinâmicas (temperatura e/ou concentração).

Outro aspecto interessante do problema considerado é o de tentar obter soluções numéricas. Uma vez que temos garantida a existência da solução, poderíamos utilizar, por exemplo, o método de Galerkin (para uso posterior do método dos Elementos Finitos). Este tipo de tratamento está em fase inicial de investigação.

De modo geral, é de nosso interesse analisar alguns dos aspectos anteriormente citados para aprimorar nossos modelos e dar continuidade à pesquisa.

# Bibliografia

- [1] V. Alexiades and A.D. Solomon, *Mathematical modeling of Melting and Freezing Processes*, Hemisphere Publishing Corporation, 1971.
- [2] P.W. Bates, P.C. Fife, R.A. Garden and C.K.R.T. Jones, *The existence of travelling wave solutions of a generalized phase-field model*, SIAM J. Math. Anal, vol. 28, 1997, 1, pp. 60-93
- [3] Ph. Blanc, L. Gasser and J. Rappaz, *Existence for a stationary model of binary alloy solidification*, Math. Modelling. Num. Anal. vol. 29, 1995, 06, pp. 687-699.
- [4] G. Caginalp and J. Jones, *A derivation and analysis of phase field models of thermal alloys*, Annal. Phys. 237, 1995, pp. 66-107.
- [5] G. Caginalp, *Phase field computations of single-needle crystals, crystal growth and motion by mean curvature*, SIAM J. Sci. Comput, vol. 15, 1994, 1, pp. 106-126.
- [6] G. Caginalp and W. Xie, *Phase-field and sharp-interface alloy models*, Phys. Rev. E, vol. 48, 1993, 03, pp. 1897-1999.
- [7] G. Caginalp, *Stefan and Hele-Shaw type models as asymption limits of the phase-field equations*, Phys. Rev. A, vol. 39, 1989, 11, pp. 5887-5896.
- [8] G. Caginalp, *An Analysis of phase field model of a free boundary*, Arch. Rat. Mech. Anal. 92, 1986, pp. 205-245.
- [9] J.R. Cannon, E. DiBenedetto and G.H. Knighthly, *The bidimensional Stefan problem with convection time dependent case*, Comm. Partial. Diff. Eqs. 8 (14), 1983, pp. 1549-1604.

- [10] J.R. Cannon, E. DiBenedetto and G.H. Knightly, *The steady state Stefan problem with convection*, Arch. Rat. Mech. Anal. 73, 1980, pp. 79-97.
- [11] J.B. Collis, *Diffuse interface model of diffusion-limited crystal growth*, Phys Rev B, vol. 31, 1985, 9, pp.6119-6122.
- [12] E. DiBenedetto and M.O'Leray, *Three-dimensional conduction-convection problems with change of phase*, Arch. Rat. Mech. Anal. vol. 123, 1993, pp. 99-116.
- [13] E. DiBenedetto and A. Friedman, *Conduction-convection problems with change of phase*, J. Diff. Eqs. vol. 62, 1986, pp. 129-185.
- [14] A.C. Fowler, *The formulation of freckles in binary alloy*, IMA J. Appl. Math, vol. 35,1985, pp.159-174.
- [15] G.J. Fix, *Phase field methods for free boundary problems, Free boundary problems: theory and applications*, pp. 580-589, 1983.
- [16] A. Friedman, *Foundations of Modern Analysis*, Hold, Rinehart and Winston, INC, 1970.
- [17] A. Friedman, *Partial Differential Equation of Parabolic Type*, Prentice-Hall.
- [18] P. Gordon, *Principles of Phase Diagrams in Materials Systems*, McGraw-Hill Book Company, 1968.
- [19] K.H. Hoffman and L. Jiang, *Optimal Control a phase field model for solidification*, Numer. Funct. Anal. Optimiz. 13 (1& 2), 1992, pp. 11-27.
- [20] P.C. Hohenberg and B.I. Halderin, *Theory of dynamic critical phenomena*, Rev. Mod. Phys, vol. 49, 1977, 3, pp. 435-479.
- [21] D.R. Jenkins, *Non-linear interaction of morphological and convective instabilities during solidification of a dilute binary alloy*, IMA J. Appl. Math. vol. 35, 1985, pp145-157.
- [22] O. Kavian, *Introduction à la Théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Springer-Verlag, 1993.

- [23] R. Kobayshi, *Modeling and numerical simulation of dendritic crystal growth*, Phys. D vol. 63, 1993, pp. 410-479.
- [24] M. O'Leray, *Analysis of the mushy region in conduction-convection problems with change of phase*, Elect. Journal. Diff. Eqs. vol. 1997, 1997, 4, pp. 1-14.
- [25] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Statistical Physics*, Addison-Wesley Publishing Reaging, 1958.
- [26] O.A. Ladyzenskaja, *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*, Gordon and Breach Science Publishers Inc, 1969.
- [27] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov, N.N. Ural'ceva, *Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type*, American Mathematical Society, Providence, 1968.
- [28] W.W. Mullis, *Thermodynamic Equilibrium of crystal sphere in the fluid*, J. Chem. Phys. vol. 81, 1984, pp. 1436-1442.
- [29] K.A. Pericleous, M. Cross, G. Moran, P. Chow and K.S. Chan, *Free surface Navier-Stokes flows with simultaneous heat transfer and solidification/melting*, Adv. Comput. Math. vol. 6, 1996, pp.295-308.
- [30] O. Penrose and P.C. Fife, *On the relation between the standard phase-field model and a "thermodynamically consistent" phase-field model*, Phys. D, vol. 69, 1993, pp. 107-113.
- [31] O. Penrose and P.C. Fife. *Thermodynamically consistent models of phase-field type for the kinetic phase transitions*, Phys D, vol 43, 1990, pp. 44-62.
- [32] L. Rubinstein, *The Stefan Problem*, Amer. Math. Society., Providence, 1971.
- [33] J. Sprekels and S. Zheng, *Global smooth solution to a thermodynamically consistent model of phase-field type in higher space dimensions*, J. Math. Anal. Appl. vol 176, 1993, pp. 202-223.
- [34] J. Simon, *Existencia de Solucion del problema de Navier-Stokes con densidad variable*, Universidad de Sevilla, Facultad de Matemticas.

- [35] R. Temam, *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, North-Holland Publishing Company, 1977.
- [36] V.R. Voller and C. Prakash, *A fixed grid numerical modelling methodology for convection-diffusion mushy region phase-change problems*, Int. J. Mass. Transfer, vol. 30, 1987, 8, pp. 1709-1719.
- [37] V.R. Voller, M. Cross and N.C. Markatos, *An enthalpy method for convection/diffusion phase field models of solidification*, Int. J. Num. Methods. Eng. vol. 24, 1987, 1, pp. 271-284.
- [38] A.A. Wheeler, N.A. Ahmad, W.J. Boettinger et al., *Recent developments in phase field models of solidification*, preprint.
- [39] A.A. Wheeler, W.J. Boettinger and G.B. McFaden, *Phase field model of solute trapping during solidification*, Phys. Rev. E, vol. 47, 1993, 3, pp.1893-1909.
- [40] A.A.Wheeler, W.J. Boettinger and G.B. McFaden, *Phase field model for isothermal phase transitions in binary alloy*, Phys. Rev. A, vol. 47, 1992, 10, pp. 7424-7439.