

# INTERPOLAÇÃO DE DADOS DE CAMPO POTENCIAL ATRAVÉS DA CAMADA EQUIVALENTE

por

**CARLOS ALBERTO MENDONÇA**

Geólogo (Universidade de São Paulo - 1985)

Tese submetida como requisito parcial ao grau de

**DOUTOR EM CIÊNCIAS**

em

**GEOFÍSICA**

ao

Colegiado do Curso de Pós-Graduação em

Geofísica

da

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**

Banca Examinadora :

Dr. João Batista C. da Silva (Orientador)

Dr. Douglas Patrick O'Brien

Dr. Marco Polo P. da Boa Hora

Dr. Nelsi Cogo de Sá

Dr. Wladimir Shukowsky

The image shows four horizontal lines, each with a handwritten signature above it. The signatures are: 1. João Batista C. da Silva (Orientador), 2. Douglas Patrick O'Brien, 3. Marco Polo P. da Boa Hora, and 4. Wladimir Shukowsky.

DATA DA APROVAÇÃO : 15/09/1992

**MENDONÇA, Carlos Alberto. Interpolação de dados de campo potencial através da camada equivalente. Belém, Universidade Federal do Pará. Centro de Geociências, 1992. 177 p. il.**

**Tese (Doutorado em Geofísica) – Curso de Pós-Graduação em Geofísica, Centro de Geociências, UFPa., 1992.**

**1. INTERPOLAÇÃO. 2. CAMADA EQUIVALENTE.  
3. CAMPO POTENCIAL. 4. ALGORÍTMO. I. Título**

*Para Elsa, Rosa e Sara.*

## AGRADECIMENTOS

Aos corpos docente, discente, técnico e administrativo, do Núcleo de Pesquisas em Geofísica do Petróleo (NPGP) do Centro de Geociências da UFPA por terem propiciado os meios e o ambiente indispensáveis para a realização deste trabalho.

Ao Prof. Carlos A. Dias pela implantação do NPGP na UFPA.

À PETROBRAS pelo custeio deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora pelas sugestões apresentadas.

Ao meu orientador, João Batista C. da Silva, pela atenção e responsabilidade com que conduziu esta pesquisa.

Aos colegas Jessé C. Costa e João dos Santos Protázio pelos freqüentes socorros matemáticos.

À atual Coordenadora do Curso de Pós-Graduação em Geofísica da UFPA, Sônia Dias C. Guerreiro, pela preocupação em empregar um certo recém-doutor.

Aos meus pais, Oswaldo Ferreira de Mendonça e Elsa Eduardo, pela educação e formação recebidas.

À minha esposa, Rosa Ângela de Sousa, e à minha filha, Sara Sousa Mendonça, pelo incentivo que me deram ao longo desta jornada.

# SUMÁRIO

DEDICATÓRIA .....	i
AGRADECIMENTOS .....	ii
SUMÁRIO .....	iii
LISTA DE ILUSTRAÇÕES .....	vii
RESUMO .....	1
ABSTRACT .....	4
<b>1- INTRODUÇÃO .....</b>	<b>6</b>
<b>2- METODOLOGIA .....</b>	<b>13</b>
2.1 A TÉCNICA DA CAMADA EQUIVALENTE .....	13
2.2 O CONCEITO DE OBSERVAÇÕES EQUIVALENTES .....	22
2.2.1 Definição de Observações Equivalentes .....	23
2.3 DETERMINAÇÃO DAS OBSERVAÇÕES EQUIVALENTES: ALGORITMOS DOE E DOEg .....	24
2.3.1 Algoritmo DOE .....	24
2.3.2 Dois Exemplos de Funcionamento do Algoritmo DOE .....	26
2.3.3 Algoritmo DOEg .....	27
2.4 MÉTODO EGTG .....	29

2.4.1 O Produto Interno $\mathbf{g}^{iT} \mathbf{g}^j$ visto como uma Integração Discreta .....	29
2.4.2 Verificação numérica da aproximação (73) .....	32
<b>2.5 DUAS IMPLEMENTAÇÕES DO ALGORITMO DOE .....</b>	<b>33</b>
2.5.1 Implementação do Algoritmo DOE modificando o Algoritmo ART .....	35
2.5.2 Implementação do Algoritmo DOE usando a Decomposição de Cholesky e o Método EGTG .....	38
<b>2.6 INTERPOLAÇÃO PELA CAMADA EQUIVALENTE APLICANDO OS ALGORITMOS DOE E DOEg .....</b>	<b>44</b>
2.6.1 Interpolação na forma global aplicando o Algoritmo DOE .....	45
2.6.2 Interpolação na forma local aplicando o Algoritmo DOEg .....	46
<b>3- APLICAÇÕES EM DADOS SINTÉTICOS .....</b>	<b>49</b>
Teste 1: Eficiência dos métodos de interpolação em recuperar os flancos sub-amostrados de algumas anomalias magnéticas .....	51
Teste 2: Eficiência dos métodos de interpolação em recuperar a amplitude máxima sub-amostrada de algumas anomalias magnéticas .....	52
Teste 3: Eficiência dos métodos de interpolação em recuperar as feições lineares de algumas anomalias magnéticas .....	53
Teste 4: Eficiência dos métodos de interpolação quando aplicados em dados adquiridos em diferentes alturas .....	54
Teste 5: Eficiência da interpolação utilizando camadas equivalentes em diferentes profundidades .....	55

Teste 6: Capacidade de ajuste da camada equivalente .....	56
<b>4- APLICAÇÕES EM DADOS REAIS .....</b>	<b>58</b>
Aplicação 1: Ajuste de um perfil de anomalia ar-livre usando camadas equivalentes com diferentes profundidades .....	58
Aplicação 2: Ajuste dos dados aeromagnéticos do Perfil número 68 do Levantamento Carauari-Norte .....	59
Aplicação 3: Interpolação utilizando o algoritmo DOE em parte dos dados do Levantamento Equant-2 colocando a camada equivalente na profundidade de 20 km .....	60
Aplicação 4: Interpolação utilizando o algoritmo DOE em parte dos dados do levantamento Equant-2 colocando a camada equivalente na profundidade de 10 km .....	61
Aplicação 5: Interpolação utilizando o algoritmo DOE em parte dos dados do levantamento Carauari-Norte .....	62
Aplicação 6: Interpolação local dos dados do Levantamento Carauari-Norte usando o algoritmo DOEg .....	64
Aplicação 7: Interpolação local dos dados do Levantamento Equant-2 usando o algoritmo DOEg .....	67
<b>5- CONCLUSÕES E CONTINUIDADE DO TRABALHO ...</b>	<b>70</b>
5.1 CONCLUSÕES .....	70
5.2 CONTINUIDADE DO TRABALHO .....	72
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>75</b>

APÊNDICE A Cálculo da integral dada na equação (72) .....	78
APÊNDICE B Solução de problemas de mínimos quadrados linha-a-linha .....	82
APÊNDICE C Decomposição de Cholesky linha-a-linha .....	87
ANEXO 1 Interpolação na forma global aplicando o Algoritmo DOE: programas utilizados .	89
ANEXO 2 Interpolação na forma local aplicando o Algoritmo DOEg: programas utilizados .	92
ANEXO 3 Subrotinas chamadas pelos programas dos Anexos 1 e 2 .....	96
ANEXO 4 Figuras .....	103

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

### FIGURAS

Figura 1- Exemplo 1: Secção das fontes prismáticas e anomalia sintética usada para ilustrar o funcionamento do algoritmo DOE .....	104
Figura 2- Exemplo 1: Iterações de números 2 a 7 do algoritmo DOE .....	105
Figura 3- Exemplo 1: Iterações de números 8 a 12 e última do algoritmo DOE .....	106
Figura 4- Exemplo 2: Dados sintéticos da Figura 1 contaminados por ruído .....	107
Figura 5- Exemplo 2: Ajustes produzidos pelo algoritmo DOE usando $\lambda = 0,001$ e $\lambda = 0,1$ .....	108
Figura 6- Posições relativas entre fontes equivalentes e uma observação .....	109
Figura 7- Posições relativas entre fontes equivalentes e uma observação se a função de Green tiver simetria radial .....	110
Figura 8- Posições relativas entre fontes equivalentes e duas observações se a função de Green tiver simetria radial .....	111
Figura 9- Verificação numérica da validade da aproximação (73): camada equivalente com 25 fontes pontuais .....	112
Figura 10- Verificação numérica da validade da aproximação (73): camada equivalente com 49 fontes pontuais .....	112
Figura 11- Verificação numérica da validade da aproximação (73): convergência da integração discreta para o valor fornecido pela integral analítica. verticais .....	113
Figura 12- Número de multiplicações no algoritmo DOE(implementação DOE1) .....	114
Figura 13- Número de multiplicações no algoritmo DOE(implementação DOE2) .....	115
Figura 14- Exemplo 3: Anomalia magnética verdadeira e posicionamento da amostragem .....	116

Figura 15- Exemplo 3: Anomalia magnética interpolada e mapa de posicionamento da amostragem .....	117
Figura 16- Exemplo 4: Anomalia magnética verdadeira e posicionamento da amostragem .	118
Figura 17- Exemplo 4: Anomalia magnética interpolada e posicionamento da amostragem	119
Figura 18- Exemplo 5: Ilustração do conceito de celas e janelas .....	120
Figura 19- Exemplo 5: Mapa das celas sobreposto ao posicionamento dos dados e e das observações equivalentes .....	121
Figura 20- Exemplo 5: Anomalia magnética interpolada e mapa de posicionamento das observações equivalentes .....	122
Figura 21- Teste 1: Comparação dos resíduos produzidos pelos métodos da mínima curvatura e da camada equivalente. Profundidade do topo do prisma igual a 5 km .....	123
Figura 22- Teste 1: Comparação dos resíduos produzidos pelos métodos da mínima curvatura e da camada equivalente. Profundidade do topo do prisma igual a 10 km .....	124
Figura 23- Teste 1: Comparação dos resíduos produzidos pelos métodos da mínima curvatura e da camada equivalente. Profundidade do topo do prisma igual a 15 km .....	125
Figura 24- Teste 1: Comparação dos resíduos produzidos pelos métodos da mínima curvatura e da camada equivalente. Profundidade do topo do prisma igual a 20 km .....	126
Figura 25- Teste 1: Normas (quadrática e infinita) do vetor de resíduos em função da profundidade do topo do prisma. ....	127
Figura 26- Teste 2: Comparação dos resíduos produzidos pelos métodos da mínima curvatura e da camada equivalente. Profundidade do topo do prisma igual a 5 km .....	128
Figura 27- Teste 2: Comparação dos resíduos produzidos pelos métodos da mínima curvatura e da camada equivalente. Profundidade do topo do prisma igual a 10 km .....	129
Figura 28- Teste 2: Comparação dos resíduos produzidos pelos métodos da mínima curvatura e da camada equivalente. Profundidade do topo do prisma igual a 15 km .....	130

Figura 29- Teste 2: Comparação dos resíduos produzidos pelos métodos da mínima curvatura e da camada equivalente. Profundidade do topo do prisma igual a 20 km .....	131
Figura 30- Teste 2: Normas (quadrática e infinita) do vetor de resíduos em função da profundidade do topo do prisma. ....	132
Figura 31- Teste 3: Comparação dos resíduos produzidos pelos métodos da mínima curvatura e da camada equivalente. Profundidade do topo do prisma igual a 5 km .....	133
Figura 32- Teste 3: Comparação dos resíduos produzidos pelos métodos da mínima curvatura e da camada equivalente. Profundidade do topo do prisma igual a 10 km .....	134
Figura 33- Teste 3: Comparação dos resíduos produzidos pelos métodos da mínima curvatura e da camada equivalente. Profundidade do topo do prisma igual a 15 km .....	135
Figura 34- Teste 3: Comparação dos resíduos produzidos pelos métodos da mínima curvatura e da camada equivalente. Profundidade do topo do prisma igual a 20 km .....	136
Figura 35- Teste 3: Normas (quadrática e infinita) do vetor de resíduos em função da profundidade do topo do prisma. ....	137
Figura 36- Teste 4: Comparação dos resíduos produzidos pelos métodos da mínima curvatura e da camada equivalente. Profundidade do topo do prisma igual a 5 km .....	138
Figura 37- Teste 4: Comparação dos resíduos produzidos pelos métodos da mínima curvatura e da camada equivalente. Profundidade do topo do prisma igual a 10 km .....	139
Figura 38- Teste 4: Comparação dos resíduos produzidos pelos métodos da mínima curvatura e da camada equivalente. Profundidade do topo do prisma igual a 15 km .....	140
Figura 39- Teste 4: Comparação dos resíduos produzidos pelos métodos da mínima curvatura e da camada equivalente. Profundidade do topo do prisma igual a 20 km .....	141
Figura 40- Teste 4: Normas (quadrática e infinita) do vetor de resíduos em função da profundidade do topo do prisma. ....	142
Figura 41- Teste 5: Interpolação utilizando camadas equivalentes em diferentes profundidades e o modelo de fontes do Teste 1 .....	143

Figura 42- Teste 5: Interpolação utilizando camadas equivalentes em diferentes profundidades e o modelo de fontes do Teste 2 .....	144
Figura 43- Teste 5: Interpolação utilizando camadas equivalentes em diferentes profundidades e o modelo de fontes do Teste 3 .....	145
Figura 44- Teste 5: Interpolação utilizando camadas equivalentes em diferentes profundidades e o modelo de fontes do Teste 4 .....	146
Figura 45- Teste 6: Posição das amostras no levantamento simulado .....	147
Figura 46- Teste 6: Relação espacial entre fontes gravimétricas e a camada equivalente ...	147
Figura 47- Mapa de posicionamento das amostras no Projeto Equant-2 .....	148
Figura 48- Teste 6 : Capacidade de ajuste da camada equivalente .....	149
Figura 49- Mapa de posicionamento das amostras no Projeto Caruari-Norte .....	150
Figura 50- Aplicação 1: Posicionamento dos traços do navio em parte do Projeto Equant-2	151
Figura 51- Aplicação 1: Ajustes produzidos por camadas equivalentes com profundidades iguais a 5, 10, 15, 20 e 25 km .....	152
Figura 52- Aplicação 2: Perfil da anomalia magnética ao longo da linha de vôo de número 68 e as observações equivalentes identificadas neste perfil .....	153
Figura 53- Aplicação 3: Posicionamento de parte dos dados do Projeto Equant-2 .....	154
Figura 54- Aplicação 3: Anomalia ar-livre interpolada por uma camada equivalente na profundidade de 20 km .....	155
Figura 55- Aplicação 3: Anomalia da Figura 54 sobreposta ao mapa com os traços do navio	156
Figura 56- Aplicação 3: Anomalia da Figura 54 sobreposta ao mapa do posicionamento das observações equivalentes .....	157
Figura 57- Aplicação 4: Anomalia ar-livre interpolada por uma camada equivalente na profundidade de 10 km .....	158

Figura 58- Aplicação 4: Anomalia da Figura 57 sobreposta aos traços do navio .....	159
Figura 59- Aplicação 4: Anomalia da Figura 57 sobreposta ao mapa de posicionamento das observações equivalentes .....	160
Figura 60- Aplicação 4: Anomalia ar-livre interpolada pelo método da mínima curvatura .	161
Figura 61- Aplicação 5: Linhas de vôo em parte do Projeto Carauari-Norte .....	162
Figura 62- Aplicação 5: Perfis da anomalia magnética ao longo das linhas de vôo de números 7, 13, 28 e 29 .....	163
Figura 63- Aplicação 5: Anomalia magnética interpolada pelo método da camada equivalente .....	164
Figura 64- Aplicação 5: Anomalia da Figura 63 sobreposta ao mapa de posicionamento das observações equivalentes .....	165
Figura 65- Aplicação 5: Anomalia magnética interpolada pelo método da mínima curvatura	166
Figura 66- Aplicação 6: Posicionamento dos dados do Projeto Carauari-Norte .....	167
Figura 67- Aplicação 6: Posicionamento das celas que subdividem a área do Projeto Carauari-Norte .....	168
Figura 68- Aplicação 6: Posicionamento das observações equivalentes indentificadas pelo algoritmo DOEg .....	169
Figura 69- Aplicação 6: Anomalia magnética do levantamento Carauari-Norte interpolada na forma local pela camada equivalente .....	170
Figura 70- Aplicação 6: Anomalia magnética da Figura 69 sobreposta ao mapa de posicionamento das observações equivalentes .....	171
Figura 71- Aplicação 6: Anomalia magnética interpolada pelo método da mínima curvatura	172
Figura 72- Aplicação 7: Posicionamento dos dados no Projeto Equant-2 .....	173
Figura 73- Aplicação 7: Posicionamento das observações equivalentes identificadas pelo algoritmo DOEg .....	174

Figura 74- Aplicação 7: Anomalia ar-livre do Projeto Equant-2 interpolada na forma local pelo método da camada equivalente .....	175
Figura 75- Aplicação 7: Anomalia da Figura 74 sobreposta ao mapa de posicionamento das observações equivalentes .....	176
Figura 76- Aplicação 7: Anomalia ar-livre do Projeto Equant-2 interpolada pelo método da mínima curvatura .....	177

## TABELAS

<b>Tabela 1</b> Classificação dos resíduos na Aplicação 3 .....	60
<b>Tabela 2</b> Classificação dos resíduos na Aplicação 4 .....	61
<b>Tabela 3</b> Classificação dos resíduos na Aplicação 5 .....	62
<b>Tabela 4</b> Classificação dos resíduos na Aplicação 6 .....	65
<b>Tabela 5</b> Ordens dos sistemas lineares que foram resolvidos na Aplicação 6 (interpolação por janela) utilizando o algoritmo DOEg .....	65
<b>Tabela 6</b> Ordens dos sistemas lineares que teriam que ser resolvidos na Aplicação 6 (interpolação por janela) caso o algoritmo DOEg não fosse aplicado .....	66
<b>Tabela 7</b> Classificação dos resíduos na Aplicação 7 .....	67
<b>Tabela 8</b> Ordens dos sistemas lineares que foram resolvidos na Aplicação 7 (interpolação por janela) utilizando o algoritmo DOEg .....	68
<b>Tabela 9</b> Ordens dos sistemas lineares que teriam que ser resolvidos na Aplicação 7 (interpolação por janela) caso o algoritmo DOEg não fosse aplicado .....	68

# INTERPOLAÇÃO DE DADOS DE CAMPO POTENCIAL ATRAVÉS DA CAMADA EQUIVALENTE

(TESE DE DOUTORADO : Out./92)

CARLOS ALBERTO MENDONÇA

Orientador : Dr. João Batista Corrêa da Silva

*Departamento de Geofísica – Centro de Geociências/UFPA*

*Caixa Postal 309 – Belém, PA, Brasil*

## RESUMO

O uso da técnica da camada equivalente na interpolação de dados de campo potencial permite levar em consideração que a anomalia, gravimétrica ou magnética, a ser interpolada é uma função harmônica. Entretanto, esta técnica tem aplicação computacional restrita aos levantamentos com pequeno número de dados, uma vez que ela exige a solução de um problema de mínimos quadrados com ordem igual a este número. Para viabilizar a aplicação da técnica da camada equivalente aos levantamentos com grande número de dados, nós desenvolvemos o conceito de observações equivalentes e o método EGTG, que, respectivamente, diminui a demanda em memória do computador e otimiza as avaliações dos produtos internos inerentes à solução dos problemas de mínimos quadrados.

Basicamente, o conceito de observações equivalentes consiste em selecionar algumas observações, entre todas as observações originais, tais que o ajuste por mínimos quadrados, que ajusta as observações selecionadas, ajusta automaticamente (dentro de um critério de tolerância pré-estabelecido) todas as demais que não foram escolhidas. As observações selecionadas são denominadas *observações equivalentes* e as restantes são denominadas *observações redundantes*. Isto corresponde a partir o sistema linear original em dois sistemas lineares com ordens menores. O primeiro com apenas as observações equivalentes e o segundo apenas com as observações redundantes, de tal forma que a solução de mínimos quadrados, obtida a partir do primeiro sistema linear, é também a solução do segundo sistema. Este procedimento possibilita ajustar todos os dados amostrados usando apenas as observações equivalentes (e não todas as observações originais) o que reduz a quantidade de operações e a utilização de memória pelo computador.

O método EGTG consiste, primeiramente, em identificar o produto interno como sendo

uma integração discreta de uma integral analítica conhecida e, em seguida, em substituir a integração discreta pela avaliação do resultado da integral analítica. Este método deve ser aplicado quando a avaliação da integral analítica exigir menor quantidade de cálculos do que a exigida para computar a avaliação da integral discreta.

Para determinar as observações equivalentes, nós desenvolvemos dois algoritmos iterativos denominados DOE e DOEg. O primeiro algoritmo identifica as observações equivalentes do sistema linear como um todo, enquanto que o segundo as identifica em subsistemas disjuntos do sistema linear original. Cada iteração do algoritmo DOEg consiste de uma aplicação do algoritmo DOE em uma partição do sistema linear original. Na interpolação, o algoritmo DOE fornece uma superfície interpoladora que ajusta todos os dados permitindo a interpolação na forma global. O algoritmo DOEg, por outro lado, otimiza a interpolação na forma local uma vez que ele emprega somente as observações equivalentes, em contraste com os algoritmos existentes para a interpolação local que empregam todas as observações.

Os métodos de interpolação utilizando a técnica da camada equivalente e o método da mínima curvatura foram comparados quanto às suas capacidades de recuperar os valores verdadeiros da anomalia durante o processo de interpolação. Os testes utilizaram dados sintéticos (produzidos por modelos de fontes prismáticas) a partir dos quais os valores interpolados sobre a malha regular foram obtidos. Estes valores interpolados foram comparados com os valores teóricos, calculados a partir do modelo de fontes sobre a mesma malha, permitindo avaliar a eficiência do método de interpolação em recuperar os verdadeiros valores da anomalia. Em todos os testes realizados o método da camada equivalente recuperou mais fielmente o valor verdadeiro da anomalia do que o método da mínima curvatura. Particularmente em situações de sub-amostragem, o método da mínima curvatura se mostrou incapaz de recuperar o valor verdadeiro da anomalia nos lugares em que ela apresentou curvaturas mais pronunciadas. Para dados adquiridos em níveis diferentes o método da mínima curvatura apresentou o seu pior desempenho, ao contrário do método da camada equivalente que realizou, simultaneamente, a interpolação e o nivelamento.

Utilizando o algoritmo DOE foi possível aplicar a técnica da camada equivalente na interpolação (na forma global) dos 3137 dados de anomalia ar-livre de parte do levantamento marinho Equant-2 e 4941 dados de anomalia magnética de campo total de parte do levantamento aero-

magnético Carauari-Norte. Os números de observações equivalentes identificados em cada caso foram, respectivamente, iguais a 294 e 299. Utilizando o algoritmo DOEg nós otimizamos a interpolação (na forma local) da totalidade dos dados de ambos os levantamentos citados. Todas as interpolações realizadas não seriam possíveis sem a aplicação do conceito de observações equivalentes. A proporção entre o tempo de CPU (rodando os programas no mesmo espaço de memória) gasto pelo método da mínima curvatura e pela camada equivalente (interpolação global) foi de 1:31. Esta razão para a interpolação local foi praticamente de 1:1.

# THE GRIDDING OF SCATTERED POTENTIAL FIELD DATA USING THE EQUIVALENT LAYER TECHNIQUE

(PHD. THESIS : Oct./92)

CARLOS ALBERTO MENDONÇA  
Adviser : Dr. João Batista Corrêa da Silva

*Departamento de Geofísica – Centro de Geociências/UFPa*  
*Caixa Postal 309 – Belém, PA, Brazil*

## ABSTRACT

The equivalent layer technique is an useful tool to incorporate (in the process of interpolation of potential field data) the constraint that the anomaly is a harmonic function. However, this technique can be applied only in surveys with small number of data points because it demands the solution of a least-squares problem involving a linear system whose order is the number of data. In order to make feasible the application of the equivalent layer technique to surveys with large data sets we developed the concept of equivalent data and the EGTG method.

Basically, the equivalent data principle consists in selecting a subset of the data such that the least-squares fitting obtained using only this selected subset will also fit all the remaining data within a threshold value. The selected data will be called *equivalent data* and the remaining data, *redundant data*. This is equivalent to splitting the original linear systems in two sub-systems. The first one related with the equivalent data and, the second one, with the redundant data in such way that, the least-squares solution obtained by the first one, will reproduce all the redundant data. This procedure enables fitting all the measured data using only the equivalent data (and not the entire data set) reducing, in this way, the amount of operations and the demand of computer memory .

The EGTG method optimizes the evaluation of dot products in solving least-squares problems. First, the dot product is identified as being a discrete integration of a known analytic integral. Then, the evaluation of the discrete integral is approximated by the evaluation of the analytic integral. This method should be applied when the evaluation of analytic integral needs less computational efforts than the discrete integration.

To determine the equivalent data we developed two algorithms namely DOE and DOEg.

The first one identifies the equivalent data of the whole linear systems while the second algorithm identifies the equivalent data in sub-systems of the entire linear systems. Each DOEG's iteration consists of one application of the DOE algorithm in a given subsystem. The algorithm DOE yields an interpolating surface that fits all data points allowing a global interpolation. On the other hand, the algorithm DOEG optimizes the local interpolation because it employs only the equivalent data while the other current algorithms for local interpolation employ all data.

The interpolation methods using the equivalent layer technique was comparatively tested with the minimum curvature method by using synthetic data produced by prismatic source model. The interpolated values were compared with the true values evaluated from the source model. In all tests, the equivalent layer method had a better performance than the minimum curvature method. Particularly, in the case of bad sampled anomaly, the minimum curvature method does not recover the anomalies at the points where the anomaly presents high curvature. For data acquired at different levels, the minimum curvature method presented the worse performance while the equivalent layer produced very good results.

By applying the DOE algorithm, it was possible to fit, using an equivalent layer model, 3137 gravity free-air data and 4941 total field anomaly data from the marine Equant-2 Project and the aeromagnetic Carauari-Norte Project, respectively. The DOEG algorithm was also applied in the same data sets optimizing the local interpolation. It is important to stress that none of these applications would have been possible without the concept of equivalent data. The ratio between CPU times (executing the programs with the same memory allocation) required by the minimum curvature method and the equivalent layer method in global interpolation was 1:31. This ratio was 1:1 in local interpolation.

# 1- INTRODUÇÃO

Várias técnicas para a interpretação de dados de campo potencial na geofísica de exploração exigem o conhecimento da anomalia sobre uma malha regular. A aquisição de dados em intervalos regulares é, porém, de difícil execução prática tornando-se usual o procedimento de calcular os valores da anomalia sobre a malha regular a partir do conhecimento dos dados amostrados irregularmente. Este processo recebe o nome de interpolação ("gridding") e ocupa, necessariamente, as etapas iniciais do tratamento e interpretação dos dados adquiridos.

A partir de um conjunto de dados amostrados é possível gerar infinitos conjuntos de valores interpolados regularmente. Dentre todos os conjuntos, apenas alguns são aprovados pela inspeção visual do intérprete uma vez que ele sabe, *a priori*, que uma anomalia interpolada deve ser contínua, suave e não oscilar nos vazios de amostragem. Diferentes métodos matemáticos fornecem malhas interpoladas com estas características, como por exemplo, a média ponderada pelo inverso da distância, o ajuste por polinômios de baixo grau e as funções tipo *splines*. Comentaremos a seguir cada um destes métodos.

O método da média ponderada pelo inverso da distância fornece (Franke,1980) o valor interpolado  $d_k$  na posição  $(x_k, y_k)$ , usando  $n$  observações localizadas nas posições  $(x_i, y_i)$ , segundo

$$d_k = \sum_{j=1}^n w_{j,k} d_j \quad (1)$$

sendo que o peso  $w_{j,k}$  é dado por

$$w_{j,k} = \frac{R_{j,k}^{-1}}{\sum_{i=1}^n R_{i,k}^{-1}} \quad (2)$$

sendo

$$R_{i,k} = [(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2]^\gamma \quad (3)$$

Com base nestas três equações podem-se construir vários métodos de interpolação (La Porte,1962; Shepard,1969) que diferem entre si quanto aos valores escolhido para  $\gamma$  e quanto ao número de dados que será usado no cálculo de  $d_k$ . Quanto maior o valor de  $\gamma$ , maior será a suavidade da superfície interpolada e, à medida que  $\gamma$  diminui, maior a capacidade do método em representar os gradientes abruptos. A escolha de  $n$  está diretamente ligada à escolha do raio de um círculo de vizinhança,

centrado no ponto  $(x_k, y_k)$ , dentro do qual estão situadas as observações que, supostamente, exercem maior influência no valor interpolado  $d_k$ . Se o raio de influência for grande, a superfície interpoladora será suave perdendo assim a capacidade de representar os gradientes mais abruptos. As escolhas de  $\gamma$  e  $n$  são, de um modo geral, feitas em bases subjetivas.

A interpolação polinomial consiste, inicialmente, em ajustar os dados por mínimos quadrados usando como modelo um polinômio de grau pré-estabelecido. Em seguida, os pontos sobre os nós da malha regular são interpolados através do polinômio. O inconveniente deste método é que, para ajustar todos os dados amostrados, é preciso usar um polinômio de grau elevado o que pode produzir uma superfície interpoladora oscilante entre os pontos amostrados. Este problema é contornado (Braille,1978) ajustando o polinômio não em todos os dados amostrados mas somente naqueles pontos que estejam nas imediações do ponto a ser interpolado. Um método de interpolação que adota este procedimento é denominado de método local (Crain & Bhattacharyya,1967; Crain,1970; Franke,1980) e será descrito com mais detalhes na secção 2.6.

A interpolação por meio de funções do tipo *splines* compreende uma ampla variedade de métodos. Uma função deste tipo não só minimiza o funcional curvatura, dado por

$$C(f) = \iint \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)^2 dx dy \quad , \quad (4)$$

como também é a solução da equação biharmônica,  $\nabla^4 f = 0$ , sendo

$$\nabla^4 f = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \quad , \quad (5)$$

com condições que garantam a continuidade da função  $f$  e das suas primeira e segunda derivadas nos pontos amostrados (Gonzalez-Casanova & Alvarez,1985). A equação diferencial  $\nabla^4 f = 0$  com as condições acima é denominada equação de Euler-Lagrange associada à minimização do funcional curvatura. As funções tipo *splines* podem ser obtidas tanto minimizando o funcional curvatura como resolvendo a equação diferencial.

Os *splines* utilizados na interpolação de dados bidimensionais podem ser classificados (Gonzalez-Casanova & Alvarez,1985) como *splines* quase-bidimensionais e *splines* bidimensionais. A seguir descreveremos brevemente cada um destes tipos. Os *splines* quase-bidimensionais consistem em aplicar o *spline* cúbico unidimensional para dados amostrados sobre um plano. Para

isto, é necessário fazer a hipótese de que a amostragem foi efetuada ao longo de linhas retas e paralelas entre si o que simula, de forma bastante simplificada, os levantamentos com padrão aeromagnético. O procedimento geral consiste em construir *splines* unidimensionais ao longo de cada linha interpolando os valores da anomalia em pontos equi-espaciaos ao longo da linha. Em seguida, são construídos outros *splines* unidimensionais na direção perpendicular às linhas de amostragem usando apenas os valores interpolados anteriormente. A obtenção da malha regular é feita usando funções interpoladoras originadas da multiplicação de dois *splines* cúbicos (um ao longo da linha de amostragem e o outro perpendicular a esta linha) mais próximos do nó a ser interpolado. Como na prática os traçados das linhas de vôo não são perfeitamente retos e nem paralelos, diferentes procedimentos preparatórios foram introduzidos para tornar os dados perfeitamente alinhados sobre as retas o que produziu diferentes métodos de interpolação baseados neste tipo de *splines* (Bhattacharyya,1969; Hessing et al.,1972; Rasmussen & Sharma,1979).

Os *splines* bidimensionais foram desenvolvidos por Briggs(1974) e Duchon(1975). O primeiro método discretiza o funcional dado na equação (4) por meio de diferenças finitas fazendo

$$C(f) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j})^2 / h^2 \quad , \quad (6)$$

sendo  $h$  a distância entre os nós da malha e  $u_{i,j}$  o valor da anomalia no nó  $i, j$ . Minimizando o funcional discretizado, Briggs(1974) encontrou a seguinte equação

$$\begin{aligned} & u_{i+2,j} + u_{i,j+2} + u_{i-2,j} + u_{i,j-2} + \\ & 2(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) - \\ & 8(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) + 20u_{i,j} = 0 \quad , \end{aligned} \quad (7)$$

que é escrita para cada nó  $u_{i,j}$  a ser interpolado. Para cada nó que coincidir com um ponto amostrado, é colocado o valor medido no lugar da variável  $u_{k,l}$  correspondente, passando os valores numéricos para o segundo membro da equação. Para os pontos amostrados que não se encontram sobre os nós outra equação é montada usando, agora, a expansão em série de Taylor da equação bi-harmônica. Este procedimento gera um sistema de equações lineares com ordem igual ao número de nós a serem interpolados. Como a matriz associada é esparsa, a solução do sistema pode ser obtida aplicando o método iterativo de Gauss-Seidel (Swain,1976).

O segundo método, decorrente do trabalho de Duchon(1975), prova que a função que minimiza o funcional curvatura pode ser escrita segundo

$$f(x_k, y_k) = \sum_{i=1}^N \lambda_i K(r_{i,k}) + \alpha_1 x_k + \alpha_2 y_k + \alpha_3 \quad , \quad (8)$$

sendo

$$K(r_{i,k}) \equiv K_{i,k} \equiv K_{k,i} = \begin{cases} |r_{i,k}|^2 \log(|r_{i,k}|^2) & , i \neq k \\ 0 & , i = k \end{cases} \quad , \quad (9)$$

e

$$r_{i,k} = [(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2]^{1/2} \quad , \quad (10)$$

sendo que os parâmetros  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  são tais que

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (11)$$

Além destes vínculos a função interpoladora deve ajustar os  $n$  pontos amostrados o que leva à resolução do sistema linear

$$\begin{pmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \dots & K_{1,n} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & \dots & K_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n,1} & K_{n,2} & \dots & K_{n,n} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix} \quad (12)$$

para a determinação dos "λ" e dos "α". A dimensão deste sistema inviabiliza o uso deste método nos levantamentos com grande número de dados. Nestes casos, sua implementação é feita na forma local (Enriquez et al.,1983) através de janelas.

Contudo, todos os métodos comentados acima presumem apenas que a função interpoladora seja suave, não exigindo que ela seja uma função harmônica como é a anomalia de campo potencial. Mesmo para a anomalia magnética de campo total esta exigência é procedente, já que ela também é uma função harmônica sempre que a magnitude do campo anômalo for muito menor que a magnitude do campo indutor da Terra <sup>1</sup>. São raros os lugares na superfície da Terra em que esta

<sup>1</sup>O'Brien, D. P., Notas de aula do curso de Métodos Gravimétrico e Magnético proferido na UFPA, 1991, Bélem,PA.

relação entre magnitudes não é verificada. Então, como regra geral, nós podemos exigir que a função que interpola a anomalia magnética de campo total seja uma função harmônica. Assim, entre as infinitas malhas que podem ser interpoladas, nós devemos encontrar aquela que, além de ajustar os dados amostrados e satisfazer a inspeção visual do intérprete, seja também resultado da avaliação de uma função interpoladora harmônica.

Há na literatura dois métodos que, ao menos teoricamente, possibilitam obter esta função. O primeiro é o método da colocação (Moritz,1977;1978) e tem sido usado com frequência na representação do potencial gravimétrico anômalo da Terra mas muito pouco em exploração (Morrison & Douglas,1984). O segundo é a técnica da camada equivalente (Dampney,1969) que tem sido usado de diferentes maneiras no tratamento de dados de campo potencial (Bott,1967; Bott & Ingles,1972; Dampney,1969; Emilia,1973; Frese et al.,1981; Mayhew et al.,1980; Silva,1986; Leão & Silva,1989) mas apenas recentemente (Cordell,1992) é que ela foi usada na interpolação.

A razão da pouca utilização dos métodos da camada equivalente e da colocação na interpolação de dados de campo potencial é que eles possuem severas restrições computacionais quanto ao número de dados no levantamento. Isto acontece porque, em ambos os casos, um sistema linear, de ordem igual ao número de dados, deve ser resolvido. No primeiro método o sistema linear é resolvido para obter os coeficientes lineares do modelo que ajusta os dados e, no segundo, para obter os parâmetros lineares das fontes equivalentes. A resolução do sistema linear restringe a aplicação de ambos os métodos aos levantamentos cujo número de dados não ultrapasse a ordem de um milhar. Esta é uma restrição muito severa uma vez que, comumente, o número de dados em um levantamento atinge a ordem de dezenas de milhares ou mesmo centenas de milhares, como em alguns levantamentos aeromagnéticos. O algoritmo iterativo proposto por Cordell(1992) para obter os parâmetros lineares das fontes equivalentes (embora não exigindo a resolução do sistema linear) não possui garantia de convergência. Além disto, sua aplicação em levantamentos com grande número de dados pode ser inviabilizada computacionalmente devido à elevada quantidade de avaliações de resíduos requeridas pelo algoritmo. Por exemplo, o autor aplica a sua metodologia na interpolação de uma anomalia gravimétrica que foi amostrada em apenas 213 estações.

É possível resolver sistemas lineares de grande porte se as matrizes associadas forem esparsas e/ou estruturadas. Porém, as matrizes decorrentes dos problemas de camada equivalente e de

colocação são cheias e sem estrutura já que os dados amostrados estão irregularmente distribuídos no espaço. Isto inviabiliza computacionalmente a solução destes problemas devido às limitações em memória dos computadores atuais e ao proibitivo tempo de processamento necessário para efetuar esta tarefa.

Uma situação particular acontece quando o número de dados é elevado mas a anomalia é muito suave como, por exemplo, em dados magnéticos medidos em satélites. Neste caso, apenas algumas poucas fontes na camada equivalente consegue ajustar todos os dados amostrados (Mayhew et al., 1980) e o problema de camada equivalente pode ser formulado na forma sobredeterminada (número de fontes menor que o número de observações). Assim, o sistema linear a ser resolvido tem ordem igual ao número de fontes e não igual ao número de dados. Infelizmente, esta formulação não fornece bons ajustes para dados que não sejam tão suaves quanto os dados de satélite porque, quanto mais complexa for a anomalia, maior deve ser o número de fontes necessárias para representá-la, fazendo com que o número de fontes seja tão elevado quanto o número de observações.

Para utilizar a técnica da camada equivalente na interpolação é necessário criar procedimentos que viabilizem a solução de problemas de mínimos quadrados, com matrizes cheias e não estruturadas, para grande número de dados. O nosso trabalho apresenta uma contribuição para a solução deste grande problema.

Esta dissertação é constituída por cinco capítulos, cada um dividido em secções. Cada capítulo (bem como cada secção) é iniciado com comentários e motivações sobre os assuntos que serão tratados na seqüência. O Capítulo 2 apresenta a formulação da técnica da camada equivalente, comenta como ela pode ser usada na interpolação de dados de campo potencial, mostra suas limitações em tratar grande volume de dados e apresenta as soluções por nós desenvolvidas a saber: a utilização do conceito de *observações equivalentes* e a otimização computacional dos cálculos dos produtos internos produzida pelo método que denominamos EGTG. As metodologias desenvolvidas no Capítulo 2 permitem a construção de programas que realizam a interpolação dos dados de campos potenciais usando a camada equivalente. Estes programas são testados em dados sintéticos no Capítulo 3 simulando basicamente levantamentos com padrão aeromagnético. No Capítulo 4 estes programas são aplicados na interpolação de dados aeromagnéticos do Levantamento Carauari-Norte, pertencentes à Petrobrás, e de dados gravimétricos marinhos do Levantamento Equant-

2, pertencentes ao Governo do Brasil. Finalmente, no Capítulo 5 são mostradas as conclusões alcançadas por este trabalho bem como as sugestões de aplicação dos conceitos aqui desenvolvidos em outras áreas da Geofísica como, por exemplo, na tomografia acústica e na representação do potencial gravimétrico anômalo da Terra.

## 2- METODOLOGIA

Este capítulo possui seis secções. Inicialmente, na secção 2.1, apresentaremos os fundamentos teóricos da técnica da camada equivalente, deduzindo a sua formulação discreta e mostrando como ela pode ser usada na interpolação de dados de campo potencial. Comentaremos as limitações da técnica quando aplicada em levantamentos com grande número de dados e apresentaremos também quais as soluções encontradas para superar estas limitações, a saber, o conceito de observações equivalentes e o método EGTG (evitar calcular produtos internos do tipo  $\mathbf{g}^T \mathbf{g}$ ). A seguir, na secção 2.2, definiremos o conceito de observações equivalentes associado a um sistema linear qualquer e, na secção 2.3, desenvolveremos os algoritmos DOE (Determinação das Observações Equivalentes) e DOEg (Determinação das Observações Equivalentes de grupo-em-grupo) propostos para encontrar estas observações. Na secção 2.4, abordaremos a construção do método EGTG. Na secção 2.5 forneceremos duas implementações computacionais do algoritmo DOE apropriadas para operar com sistemas lineares associados com matrizes cheias e não estruturadas. Finalmente, na secção 2.6, apresentaremos as maneiras de usar a camada equivalente na interpolação de dados de campo potencial usando os algoritmos DOE e DOEg.

### 2.1 A TÉCNICA DA CAMADA EQUIVALENTE

A solução do problema de Dirichlet de determinar a função harmônica  $d(x, y, z)$  fora das fontes, a partir do conhecimento desta função no nível constante  $\gamma$ , representada por  $d_0(\alpha, \beta, \gamma)$ , é dada, de forma unívoca, por

$$d(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma - z}{[(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2]^{3/2}} d_0(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta \quad (13)$$

que é denominada equação da continuação (Henderson;1970). Assim, um dado de campo potencial  $d(x_i, y_i, z_i)$ , medido na posição  $(x_i, y_i, z_i)$  pode ser escrito como

$$d(x_i, y_i, z_i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma - z_i}{[(\alpha - x_i)^2 + (\beta - y_i)^2 + (\gamma - z_i)^2]^{3/2}} d_0(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta \quad (14)$$

A partir de um conjunto de medidas  $d_i$  com  $i = 1, \dots, N$ , podemos determinar infinitas soluções  $d_0(\alpha, \beta, \gamma)$  (Parker,1977) que satisfazem a equação integral (14) já que os dados estão num espaço

$N$ -dimensional e  $d_0(\alpha, \beta, \gamma)$  pertence a um espaço de funções que tem dimensão infinita. Entre as infinitas soluções, podemos escolher a solução particular

$$\hat{d}_0(\alpha, \beta, h) = \sum_{j=1}^M p_j g(\alpha - x_j, \beta - y_j, \gamma - h) \quad (15)$$

que será única caso o conjunto de funções harmônicas  $g(\alpha - x_j, \beta - y_j, \gamma - h)$  constituir uma base no espaço  $M$ -dimensional. A função  $g$  deve ser harmônica e decair até o valor zero quando a distância entre os pontos  $(\alpha, \beta, \gamma)$  e  $(x_k, y_k, z_k)$  tender ao infinito, pois assim ela satisfaz as condições de contorno do problema de Dirichlet. Após a escolha de  $g$ , temos liberdade para escolher o valor de  $M$  e o conjunto de pares  $(x_j, y_j)$  da equação (15). O parâmetro  $h$  controla a suavidade da função base e o seu significado físico será dado a seguir.

Substituindo a equação (15) na equação (14) temos

$$\hat{d}(x_i, y_i, z_i) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma - z_i}{[(\alpha - x_i)^2 + (\beta - y_i)^2 + (\gamma - z_i)^2]^{3/2}} \sum_{j=1}^M p_j g(\alpha - x_j, \beta - y_j, \gamma - h) d\alpha d\beta \quad (16)$$

ou

$$\hat{d}(x_i, y_i, z_i) = \sum_{j=1}^M p_j \left( \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma - z_i}{[(\alpha - x_i)^2 + (\beta - y_i)^2 + (\gamma - z_i)^2]^{3/2}} g(\alpha - x_j, \beta - y_j, \gamma - h) d\alpha d\beta \right) \quad (17)$$

Fazendo  $\gamma - h = \gamma'$ ,  $\alpha - x_j = \alpha'$  e  $\beta - y_j = \beta'$  temos que

$$\hat{d}(x_i, y_i, z_i) = \sum_{j=1}^M p_j \left( \frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma' - (z_i - h)}{[\alpha'^2 - (x_i - x_j)^2 + \beta'^2 - (y_i - y_j)^2 + [\gamma' - (z_i - h)]^2]^{3/2}} g(\alpha', \beta', \gamma') d\alpha' d\beta' \right) \quad (18)$$

Comparando a integral dentro do parêntesis na equação (18) com a integral dada na equação (14) obtemos

$$\frac{1}{2\pi} \int \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma - z_i}{[(\alpha - x_i)^2 + (\beta - y_i)^2 + (\gamma - z_i)^2]^{3/2}} g(\alpha - x_j, \beta - y_j, \gamma - h) d\alpha d\beta = g(x_i - x_j, y_i - y_j, z_i - h) \quad (19)$$

A equação (19) mostra que o cálculo da integral dada na equação (18) é imediato pois, a função base  $g(\alpha - x_j, \beta - y_j, \gamma - h)$  é uma função harmônica definida no nível  $\gamma'$  e a integral em questão é a equação da continuação do nível  $\gamma'$  até o nível  $z_i - h$ . O resultado da integração é, portanto, a própria função  $g$  avaliada em  $(x_i - x_j, y_i - y_j, z_i - h)$ . Substituindo a equação (19) na

equação (18) temos que

$$\hat{d}(x_i, y_i, z_i) = \sum_{j=1}^M p_j g(x_i - x_j, y_i - y_j, z_i - h) . \quad (20)$$

Assim, um ponto interpolado na posição genérica  $(x_k, y_k, z_k)$  pode ser obtido segundo

$$\hat{d}(x_k, y_k, z_k) = \sum_{j=1}^M p_j g(x_k - x_j, y_k - y_j, z_k - h) . \quad (21)$$

Na escolha da função base é conveniente, visando a interpolação em uma altitude fixa (uma vez que os dados podem ter sido amostrados em diferentes altitudes), escolher a função matemática que modela uma anomalia gravimétrica devida a uma massa pontual se  $d_i$  for um dado gravimétrico. Se  $d_i$  for um dado magnético, a função matemática escolhida deverá ser aquela que modela a anomalia magnética de campo total produzida por um dipolo magnético que, por conveniência computacional, será um dipolo vertical. Com estas escolhas é possível efetuar, mais fielmente, a interpolação na altitude selecionada, pois estas funções melhor simulam o decaimento das anomalias gravimétrica e magnética, respectivamente, com a altitude. As determinações, de forma automática, de  $M$  e dos pares  $(x_j, y_j)$ , são realizadas aplicando o algoritmo DOE descrito na secção 2.3.

A base constituída por estas funções matemáticas, permite interpretar o campo dado pela equação (20) como decorrente de uma camada com fontes pontuais, na profundidade constante  $h$ , a partir da qual o dado amostrado,  $d_i$ , pode ser reconstituído ao mesmo tempo que, usando a equação (21), qualquer ponto acima das fontes pode ser interpolado. Esta interpretação também é válida nos casos em que a função  $g$  representar a anomalia devida a outros modelos de fontes (gravimétricas ou magnéticas) como, por exemplo: prismas (Bott & Ingles, 1972) e linhas infinitas (Emilia, 1973).

O conjunto de parâmetros  $p_j$  deve ser encontrado exigindo que a equação (20) seja satisfeita para todos os  $N$  dados fornecendo a equação matricial

$$\mathbf{d} = \mathbf{Gp} , \quad (22)$$

sendo  $\mathbf{d}$  o vetor com os  $N$  dados,  $\mathbf{p}$  o vetor com os  $M$  parâmetros e  $\mathbf{G}$  a matriz de sensibilidade de dimensões  $N \times M$  cujo elemento  $g_{i,j}$  é obtido avaliando  $g(x_i - x_j, y_i - y_j, z_i - h)$ .

A equação (22) é a formulação matemática da técnica da camada equivalente tal como aplicada por Bott & Ingles(1972), Dampney(1969), Emilia(1973) e Silva(1986), na interpretação de dados de campo potencial. Entretanto, diferentemente dos trabalhos anteriores, a dedução aqui realizada obtem a formulação matemática do problema e generaliza a técnica da camada equivalente colocando-a nos moldes clássicos de solução de equações integrais do cálculo variacional.

A estimativa  $\hat{\mathbf{p}}$  do vetor solução  $\mathbf{p}$  é o ponto de partida para o uso da camada equivalente como técnica de processamento de dados de campo potencial. Definindo o vetor de resíduos

$$\mathbf{e} = \mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{p} \quad (23)$$

e tendo em vista que a dependência entre dados e parâmetros é linear, podemos obter um estimador  $\hat{\mathbf{p}}$  minimizando o funcional

$$Q = \mathbf{e}^T \mathbf{W}_e \mathbf{e} + (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^T \mathbf{W}_p (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \quad , \quad (24)$$

obtendo assim que

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}_0 + \mathbf{G}^+ (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{p}_0) \quad , \quad (25)$$

sendo

$$\mathbf{G}^+ = \left( \mathbf{G}^T \mathbf{W}_e \mathbf{G} + \mathbf{W}_p \right)^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{W}_e \quad . \quad (26)$$

Nas equações acima,  $\mathbf{p}_0$  é o conhecimento *a priori* sobre  $\mathbf{p}$ , enquanto que  $\mathbf{W}_p$  e  $\mathbf{W}_e$  são matrizes de pesos simétricas e positivo-definidas. Estas matrizes carregam as informações *a priori* sobre, respectivamente, a dispersão dos parâmetros no entorno de  $\mathbf{p}_0$  e sobre a dispersão do resíduo  $\mathbf{e}$  no entorno do vetor nulo. A finalidade das matrizes  $\mathbf{W}_p$  e  $\mathbf{W}_e$  é de estabilizar o operador inverso  $\mathbf{G}^+$ .

Utilizando a identidade matricial (Beck & Arnold,1977)

$$\left( \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} + \mathbf{B} \right)^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C}^T \left( \mathbf{C} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C}^T + \mathbf{A} \right)^{-1} \quad , \quad (27)$$

pressupondo que as operações inversas sejam definidas, podemos escrever  $\mathbf{G}^+$  também como

$$\mathbf{G}^+ = \mathbf{W}_p^{-1} \mathbf{G}^T \left( \mathbf{G} \mathbf{W}_p^{-1} \mathbf{G}^T + \mathbf{W}_e^{-1} \right)^{-1} \quad . \quad (28)$$

Os operadores dados pelas equações (26) e (28) produzem a mesma solução. Entretanto, o operador  $G^+$ , como escrito na equação (28), exige a solução de um sistema linear de ordem  $N$  (número de dados) e, quando escrito como na equação (26), exige a solução de um sistema linear de ordem  $M$  (número de parâmetros). Assim, se formularmos o problema de camada equivalente na forma sobredeterminada ( $N > M$ ) deveremos usar o operador dado na equação (26) mas, se formularmos o problema na forma subdeterminada ( $N < M$ ), deveremos usar o operador dado na equação (28) uma vez que, procedendo desta maneira, estaremos sempre resolvendo o sistema linear de menor dimensão o que é muito vantajoso computacionalmente. Formularemos o problema de camada equivalente na forma subdeterminada pois, nesta forma, é possível construir uma superfície interpoladora que consegue ajustar (ponto a ponto) todos os dados, ao contrário do ajuste resultante da formulação sobredeterminada. Conseqüentemente, usaremos sempre o operador dado pela equação (28).

Diferentes escolhas de matrizes positivo-definidas  $W_p$  e  $W_e$  minimizam diferentes funcionais  $Q$  construindo, assim, diferentes operadores  $G^+$ . Na verdade, esta escolha gera uma ampla variedade de estimadores <sup>2</sup> tais como *máxima a posteriori*, *"ridge regression"*, *inverso generalizado*, *mínimos quadrados*, *menor norma euclidiana dos parâmetros* além de estimadores que fornecem estimativa de parâmetros com máxima compacidade ou com menor momento de inércia em relação a um eixo pré-determinado (Last & Kubik, 1983; Guillen & Menichetti, 1984).

Na interpolação, porém, usaremos  $W_p$  e  $W_e$  apenas com o intuito de controlar o grau de suavidade da estimativa  $\hat{p}$  e, conseqüentemente, controlar a suavidade da superfície interpoladora. Isto é conseguido igualando  $p_0$  ao vetor nulo de ordem  $M$  e escolhendo

$$W_p = \lambda I_M \quad (29)$$

e

$$W_e = I_N \quad (30)$$

sendo  $\lambda$  um escalar positivo e  $I_N$  e  $I_M$  as matrizes identidade de ordens  $N$  e  $M$ , respectivamente. O funcional minimizado neste caso é dado por

$$Q = e^T e + \lambda p^T p \quad (31)$$

<sup>2</sup>Silva, J. B. C., Apostila do curso de interpretação gravimétrica e magnética proferido no Primeiro Congresso da SBGf, 1989, Rio de Janeiro, RJ.

que fornece o estimador

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{G}_\lambda^+ \mathbf{d} \quad (32)$$

com

$$\mathbf{G}_\lambda^+ = \mathbf{G}^T (\mathbf{G}\mathbf{G}^T + \lambda \mathbf{I}_N)^{-1} \quad (33)$$

que é o estimador denominado *ridge regression* (Hoerl & Kennard, 1970a;b).

O expoente  $(-1)$  na equação (33) significa, formalmente, que a matriz será invertida durante a computação de  $\hat{\mathbf{p}}$ . Na prática porém, esta matriz não é invertida e a computação é feita resolvendo o sistema linear

$$(\mathbf{G}\mathbf{G}^T + \lambda \mathbf{I}_N) \mathbf{w} = \mathbf{d} \quad (34)$$

obtendo o estimador

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{G}^T \mathbf{w} \quad (35)$$

Esta implementação é mais eficiente do que computar a matriz inversa pois a inversão de uma matriz simétrica e positivo-definida, como é  $(\mathbf{G}\mathbf{G}^T + \lambda \mathbf{I}_N)$ , é obtida fazendo sua decomposição de Cholesky, (Tarantola, 1987) e resolvendo, em seguida,  $N$  sistemas lineares por meio de substituição regressiva ("backward substitution") e progressiva ("forward substitution"). Por outro lado, a obtenção de  $\mathbf{w}$  usando a equação (34) exige a solução de apenas um sistema linear, após a decomposição.

De posse da estimativa  $\hat{\mathbf{p}}$  podemos obter o vetor de resíduos  $\mathbf{r}$  dado por

$$\mathbf{r} = [\mathbf{I} - \mathbf{G}\mathbf{G}^T(\mathbf{G}\mathbf{G}^T + \lambda \mathbf{I}_N)^{-1}] \mathbf{d} \quad (36)$$

cuja norma mede a qualidade do ajuste entre a superfície interpoladora e os dados. O parâmetro  $\lambda$  controla a qualidade deste ajuste. Por exemplo, se  $\lambda = 0$  o vetor de resíduos é o vetor nulo significando que a função interpoladora ajusta exatamente todos os dados. O mesmo não acontece quando  $\lambda \neq 0$ . Para construir a superfície interpoladora, não é aconselhável usar  $\lambda = 0$  pois não faz sentido ajustar exatamente dados contaminados com ruído. Também,  $\lambda$  não deve ser muito grande pois neste caso a superfície interpoladora será por demais suave não recuperando a parte determinística contida nos dados. A escolha do valor para  $\lambda$  é diretamente proporcional ao nível de ruído presente nos dados. Seu valor numérico deve ser procurado no intervalo

$$0.001\lambda_{max} \leq \lambda \leq 1.00\lambda_{max} \quad (37)$$

sendo  $\lambda_{max}$  o maior autovalor de  $GG^T$ . Se a matriz  $GG^T$  for normalizada conforme faz Silva(1986), o valor numérico de  $\lambda$  deve ser procurado no intervalo

$$0.001 \leq \lambda \leq 1.00 \quad (38)$$

Esta normalização evita a determinação de  $\lambda_{max}$  que é uma operação muito dispendiosa computacionalmente.

Com a obtenção de  $\hat{p}$  é obtida também a estimativa de  $\hat{d}(x, y, z)$  dada por

$$\hat{d}(x, y, z) = \sum_{j=1}^M \hat{p}_j g(x - x_j, y - y_j, z - h) \quad (39)$$

Isto possibilita que qualquer seqüência de transformações lineares (continuação, derivação, redução ao polo, interpolação etc.) possa ser realizada aplicando os operadores, correspondentes às transformações lineares desejadas, na função base  $g(x - x_j, y - y_j, z - h)$ , obtendo assim, uma nova expressão matemática,  $t(x, y, z)$ , para o campo transformado segundo

$$t(x, y, z) = \sum_{j=1}^M \hat{p}_j s(x - x_j, y - y_j, z - h), \quad (40)$$

sendo

$$s(x - x_j, y - y_j, z - h) = T[g(x - x_j, y - y_j, z - h)] \quad (41)$$

e  $T$  o operador linear associado à transformação linear desejada.

A obtenção de um número finito de pontos transformados  $t_k$  para  $k = 1, \dots, L$  é feita avaliando a equação (40) nas posições  $(x_k, y_k, z_k)$  conforme

$$\begin{cases} t(x_1, y_1, z_1) = \sum_{j=1}^M \hat{p}_j s(x_1 - x_j, y_1 - y_j, z_1 - h) \\ t(x_2, y_2, z_2) = \sum_{j=1}^M \hat{p}_j s(x_2 - x_j, y_2 - y_j, z_2 - h) \\ \vdots \\ t(x_L, y_L, z_L) = \sum_{j=1}^M \hat{p}_j s(x_L - x_j, y_L - y_j, z_L - h) \end{cases} \quad (42)$$

ou na forma matricial segundo

$$\mathbf{t} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{p}} \quad (43)$$

A obtenção de dados interpolados em uma malha regular a partir das fontes equivalentes, é um caso particular de transformação  $T$  em que

$$s(x_k - x_j, y_k - y_j, z_k - h) = g(x_k - x_j, y_k - y_j, z_k - h), \quad (44)$$

para um conjunto de pontos transformados situados sobre os nós de uma malha regular. A interpolação é feita simultaneamente com o nivelamento (Dampney,1969) já que a altura de aquisição de dados nem sempre é constante. O valor interpolado,  $d_k$ , na posição  $(x_k, y_k, z_k)$  pode ser escrito em notação matricial como

$$d_k = \mathbf{p}^T \mathbf{g}^k, \quad (45)$$

sendo que o  $j$ -ésimo elemento do vetor  $\mathbf{g}^k$  é dado por

$$g_j^k = g(x_k - x_j, y_k - y_j, z_k - h). \quad (46)$$

A técnica da camada equivalente, como apresentada acima, não pode ser aplicada em situações em que o número de dados é elevado pois, neste caso, a resolução do sistema linear, dado na equação (34), é computacionalmente inviável devido a dois aspectos:

- a) excessivo dispêndio computacional e uso de memória requerido para resolver este sistema,
- b) excessivo dispêndio computacional requerido para efetuar a operação  $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$  que requer  $N(N+1)/2$  cálculos do produto interno  $\mathbf{g}^{iT}\mathbf{g}^j$  (cada um com  $M$  multiplicações) sendo  $\mathbf{g}^i$  e  $\mathbf{g}^j$  a  $i$ -ésima e a  $j$ -ésima linhas da matriz de sensibilidade  $\mathbf{G}$ , respectivamente.

O primeiro item torna proibitivo o uso desta técnica pois a resolução do sistema linear na equação (34) demanda, em termos de ordem de grandeza,  $N^3$  multiplicações. Considerando que uma operação de multiplicação utiliza, em termos de ordem de grandeza,  $10^{-6}$  segundos de CPU, e que um levantamento pode ter, por exemplo,  $N = 10^5$  dados, gastaríamos aproximadamente  $10^5$  horas de CPU para resolver o sistema linear dado na equação (34). Além do mais, a memória envolvida nesta tarefa supera a capacidade dos computadores atuais, já que pelo menos uma das dimensões de  $\mathbf{G}$  é igual a  $N$ . O item b também contribui para a ineficiência computacional pois o número de multiplicações para computar  $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$  pode atingir a ordem de grandeza de  $N^3$  caso  $M$  seja aproximadamente igual a  $N$ .

Visando eliminar a dependência restritiva do uso da camada equivalente quanto ao número de dados, duas abordagens independentes foram desenvolvidas:

- a) os algoritmos DOE e DOEg, fundamentados no conceito de observações equivalentes, que selecionam um conjunto com  $e$  observações entre as  $N$  amostradas, sendo  $e < N$ , tais que a superfície interpoladora que ajusta as observações selecionadas ajusta também todas as demais não selecionadas;

b) o método EGTG (evitar fazer  $\mathbf{g}^{iT} \mathbf{g}^j$ ) que consiste em associar o produto interno  $\mathbf{g}^{iT} \mathbf{g}^j$  com uma integração discreta, aproximando-o então, pela integral analítica que pode ser avaliada usando um número de multiplicações menor que  $M$ .

Os algoritmos DOE e DOEg diminuem a ordem do sistema linear a ser resolvido enquanto que o método EGTG permite otimizar o cálculo do produto matricial  $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ . A combinação de ambos, é fundamental para a construção dos programas de interpolação.

## 2.2 O CONCEITO DE OBSERVAÇÕES EQUIVALENTES

A idéia envolvida nesta secção pode ser expressa com o seguinte exemplo. Suponha que vamos medir a altura do relevo ao longo de uma estrada longa, cuja projeção horizontal é uma reta, de tal forma que um número astronômico de valores será anotado ao término desta tarefa. Porém, se esta estrada estiver sobre um plano, apenas duas medidas não coincidentes, serão suficientes para traçar o perfil do relevo, que neste caso, seria uma reta. Assim, em lugar de guardarmos uma tabela com todas as medidas, poderemos guardar apenas duas, que serão denominadas *observações equivalentes*. As demais observações serão denominadas *observações redundantes*. Se o perfil do relevo ao longo da estrada fosse uma parábola, três medidas bastariam e assim podemos concluir que, quanto mais complexo fosse o perfil, maior deveria ser o número de pontos amostrados.

Infelizmente não é possível programar a amostragem segundo a complexidade da superfície, pois ela nos é desconhecida e só o deixará de ser após intensa amostragem. Entretanto, após a amostragem, nós podemos identificar as observações equivalentes e, conseqüentemente, descartar as observações redundantes pois, a curva que ajusta as observações equivalentes, implicitamente ajusta as redundantes.

Embora o conceito de observações equivalentes possa ser apreendido mais facilmente usando a noção de superfície espacial, matematicamente, ele pode ser definido, de forma mais rigorosa, quando o associamos a um sistema linear. Geralmente a determinação de uma superfície que ajusta um certo conjunto de dados está associada com a solução de um sistema linear, porém, nem todos sistemas lineares estão, fisicamente, associados à noção de superfície espacial. A definição de observações equivalentes usando a partição da matriz que está associada a um sistema linear, conforme faremos na secção 2.2.1, amplia a idéia inicial de superfície, como também, amplia o campo de aplicação deste conceito para qualquer problema que possa ser formulado por meio de um sistema linear.

### 2.2.1 Definição de Observações Equivalentes

O conceito de observações equivalentes é baseado na suposição de que para um sistema linear qualquer

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{p} \quad , \quad (47)$$

existe um número inteiro  $e$  tal que, partindo o sistema linear segundo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_e \\ \mathbf{d}_r \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_e \\ \mathbf{G}_r \end{pmatrix} \mathbf{p} \quad , \quad (48)$$

a estimativa obtida usando apenas o vetor de dados  $\mathbf{d}_e$ , a saber

$$\hat{\mathbf{p}}_e = \mathbf{G}_e^T (\mathbf{G}_e \mathbf{G}_e^T + \lambda \mathbf{I}_N)^{-1} \mathbf{d}_e \quad , \quad (49)$$

fornece um vetor de resíduos  $\mathbf{r}$ , dado por

$$\mathbf{r} = \mathbf{d}_r - \mathbf{G}_r \hat{\mathbf{p}}_e \quad , \quad (50)$$

cuja norma de Chebychev é menor que um valor pré-fixado  $\mathcal{C}$ .

Nas equações (48), (49) e (50),  $\mathbf{G}_e$  e  $\mathbf{G}_r$  são matrizes de dimensões  $e \times M$  e  $r \times M$ , respectivamente, e os vetores  $\mathbf{d}_e$  e  $\mathbf{d}_r$  são vetores de ordens iguais a  $e$  e  $r$ , respectivamente. Note que o estimador  $\hat{\mathbf{p}}_e$  utiliza apenas as observações contidas no vetor de dados  $\mathbf{d}_e$ . Estas observações são denominadas *observações equivalentes* porque, a partir delas, todas as demais observações (que estão no vetor  $\mathbf{d}_r$ ) podem ser obtidas, com erro menor ou igual a  $\mathcal{C}$ , por meio de combinações lineares segundo

$$\mathbf{d}_r = \mathbf{H}\mathbf{d}_e \quad , \quad (51)$$

sendo  $\mathbf{H}$  uma matriz de dimensões  $r \times e$  tal que

$$\mathbf{H} = \mathbf{G}_r \mathbf{G}_e^T (\mathbf{G}_e \mathbf{G}_e^T + \lambda \mathbf{I}_N)^{-1} \quad . \quad (52)$$

As observações contidas no vetor  $\mathbf{d}_r$ , são denominadas *observações redundantes*. A norma utilizada deve ser a de Chebychev pois o seu emprego garante que o resíduo seja menor que  $\mathcal{C}$  ponto a ponto. O parâmetro  $\lambda$  deve ser zero se os dados não contiverem ruído e deve ser tanto maior quanto maior for o nível de ruído presente nos dados.

## 2.3 DETERMINAÇÃO DAS OBSERVAÇÕES EQUIVALENTES: ALGORITMOS DOE e DOEg

Apresentaremos nesta secção dois algoritmos que se propõem a determinar as observações equivalentes. Ambos partem do pressuposto que as observações equivalentes existem justificando, assim, a sua busca. Se o número de observações equivalentes for igual ao número de observações originais, os algoritmos ainda funcionam e classificam todas as observações como sendo equivalentes.

O primeiro algoritmo, denominado de DOE (Determinação das Observações Equivalentes), identifica uma observação equivalente em cada iteração. Ele será ilustrado em dados sintéticos em perfil possibilitando a compreensão do seu funcionamento. Os dados sintéticos são devidos a três prismas bidimensionais, cujas secções transversais são representadas na Figura 1. Os valores da anomalia sintética foram calculados em 200 pontos com espaçamento médio de 0,25 km.

O algoritmo DOE não é eficiente se o número de observações equivalentes for elevado, pois a identificação de apenas uma observação equivalente em cada iteração degrada a sua eficiência. Para vencer esta dificuldade nós projetamos o segundo algoritmo, denominado DOEg (Determinação das Observações Equivalentes de grupo-em-grupo). Cada iteração do algoritmo DOEg consiste em uma aplicação do algoritmo DOE numa partição do sistema linear  $\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{p}$ .

### 2.3.1 Algoritmo DOE

O algoritmo DOE possui os seguintes passos.

**passo 1** Identificar o elemento,  $d_1$ , do vetor de dados,  $\mathbf{d}$ , que tiver o maior valor absoluto. O extremo,  $d_1$  será a primeira ( $n = 1$ ) observação equivalente:

**passo 2** Obter a estimativa,  $\hat{\mathbf{p}}$ , usando apenas as  $n$  observações equivalentes segundo

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{G}_n^T \mathbf{w}_n \quad (53)$$

sendo  $\mathbf{w}_n$  obtido resolvendo o sistema linear

$$(\mathbf{G}_n \mathbf{G}_n^T + \lambda \mathbf{I}_n) \mathbf{w}_n = \mathbf{d}_n \quad (54)$$

O número de multiplicações  $S(n)$  neste passo é devido à solução do sistema linear de ordem  $n$ .

**passo 3** Calcular o vetor de resíduos  $r$  tal que

$$r_i = d_i - \hat{p}^T g^i \quad (55)$$

para  $i = 1, 2, \dots, N$

O número de multiplicações deste passo é igual a  $NR(n)$  sendo  $R(n)$  o número de multiplicações necessárias para avaliar um resíduo apenas.

**passo 4** Identificar a observação  $d_q$  que esteja associada ao resíduo,  $r_q$ , com maior valor absoluto

**passo 5** Se o resíduo máximo for maior que o valor de tolerância  $C$ , incrementar a contagem ( $n \leftarrow n + 1$ ), permutar (no vetor de dados) a posição da observação  $d_q$  e as linhas de  $G$  com a observação  $d_n$  e retornar ao passo 2. Se  $r_q$  for menor que  $C$  fazer o passo 6.

**passo 6** Obter o número de observações equivalentes fazendo  $e = n$  e interromper as iterações.

Como os passos 2 e 3 são repetidos para  $n = 1, 2, 3, \dots, e$  temos que o total de multiplicações nestes passos são, respectivamente,  $N_2$  e  $N_3$ , tais que

$$N_2(e) = \sum_{n=1}^e S(n) \quad (56)$$

e

$$N_3(e, N) = \sum_{n=1}^e NR(n) \quad (57)$$

Assim, o número total de multiplicações,  $N_{doe}$ , envolvidas no algoritmo DOE é dado por

$$N_{doe} = N_2(e) + N_3(e, N) \quad (58)$$

### 2.3.2 Dois Exemplos de Funcionamento do Algoritmo DOE

Vamos apresentar dois exemplos de como o algoritmo DOE se desenvolve até encontrar o conjunto das observações equivalentes.

#### Exemplo 1 - Funcionamento em dados sem ruídos

O algoritmo DOE foi aplicado nos dados sintéticos não contaminados por ruído usando  $\lambda = 0,001$  e  $C = 1,0$  nT. As Figuras 2 e 3 mostram a evolução dos ajustes produzidos por este algoritmo em cada uma das suas iterações. Como vemos, cada iteração do algoritmo DOE consiste em ajustar o maior resíduo identificado na iteração precedente mantendo, entretanto, o ajuste em todas as observações equivalentes previamente determinadas. Ao fim do processo iterativo, 17 observações equivalentes foram determinadas e a curva que as ajustou, também ajustou as demais 183 observações redundantes. Note que para  $\lambda = 0,001$ , o ajuste é praticamente exato.

#### Exemplo 2 - Funcionamento em dados com ruídos

O algoritmo DOE foi aplicado nos mesmos dados sintéticos do teste anterior, mas agora contaminados por ruído com distribuição uniforme entre  $-4$  e  $+4$  nT. O perfil da anomalia magnética contaminada com ruído é mostrado na Figura 4. A Figura 5a mostra a curva interpoladora (linha pontilhada) produzida pelo algoritmo DOE usando  $\lambda = 0,001$  e  $C = 4$  nT. Note que esta curva oscila no entorno do valor verdadeiro da anomalia (linha sólida). Isto acontece porque, ao exigir o ajuste exato, o algoritmo DOE ajusta também a componente aleatória da observação não recuperando a parte determinística que está presente nos dados. A Figura 5b mostra a curva interpoladora (linha pontilhada) produzida por DOE usando  $\lambda = 0,1$  e  $C = 4$  nT. Note que, embora a curva interpoladora (linha pontilhada) não oscile, ela não recupera exatamente os valores verdadeiros da anomalia e deixa um resíduo (linha tracejada) sistemático entre esta curva e os valores teóricos (linha sólida). Isto é decorrência da própria incerteza dos dados que foram corrompidos com ruído e também da conseqüente necessidade de se exigir suavidade na curva interpoladora utilizando um maior valor para  $\lambda$ .

### 2.3.3 Algoritmo DOEG

O procedimento realizado em cada iteração do algoritmo DOE (identificação e processamento de apenas uma observação equivalente) torna-se bastante ineficiente se o número de observações equivalentes for elevado. Neste caso, a solução do sistema linear e a avaliação dos resíduos nos passos 2 e 3 do algoritmo DOE, respectivamente, tornam-se cada vez mais dispendiosas. Em casos extremos, o número de observações equivalentes pode ser tão grande a ponto de comprometer a própria solução do sistema linear. O algoritmo DOEG contorna estes problemas determinando as observações equivalentes de grupo em grupo. Os passos do algoritmo DOEG são os seguintes.

**passo 1** Partir o sistema linear  $\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{p}$  conforme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}^1 \\ \mathbf{d}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}^s \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}^1 \\ \mathbf{G}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{G}^s \end{pmatrix} \mathbf{p} \quad (59)$$

**passo 2** Identificar as observações equivalentes (aplicando o algoritmo DOE) em cada subsistema

$\mathbf{d}^i = \mathbf{G}^i \mathbf{p}$  para  $i = 1, 2, \dots, s$  dividindo-os segundo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_{e}^i \\ \mathbf{d}_{r}^i \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{e}^i \\ \mathbf{G}_{r}^i \end{pmatrix} \mathbf{p} \quad (60)$$

Isto permite escrever a equação (59) na forma

$$\begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{e1}^1 \\ \mathbf{d}_{r1}^1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{e2}^2 \\ \mathbf{d}_{r2}^2 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{es}^s \\ \mathbf{d}_{rs}^s \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{e1}^1 \\ \mathbf{G}_{r1}^1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{e2}^2 \\ \mathbf{G}_{r2}^2 \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{es}^s \\ \mathbf{G}_{rs}^s \end{pmatrix} \end{bmatrix} \mathbf{p} \quad (61)$$

**passo 3** Permutar as linhas da matriz  $\mathbf{G}$  e do correspondente vetor de dados  $\mathbf{d}$  da equação (61)

obtendo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_E \\ \mathbf{d}_R \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_E \\ \mathbf{G}_R \end{pmatrix} \mathbf{p} \quad (62)$$

sendo

$$\mathbf{d}_E = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{e1}^1 \\ \mathbf{d}_{e2}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{es}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{r1}^1 \\ \mathbf{d}_{r2}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{rs}^s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_E = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{e1}^1 \\ \mathbf{G}_{e2}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{G}_{es}^s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_R = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{r1}^1 \\ \mathbf{G}_{r2}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{G}_{rs}^s \end{pmatrix}. \quad (63)$$

Terminar a busca admitindo que o conjunto de dados contidos em  $\mathbf{d}_E$  seja o conjunto das observações equivalentes.

Se o número  $E$  não for muito grande, nós podemos verificar se  $\mathbf{d}_E$  satisfaz a definição das observações equivalentes fazendo

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{G}_E^T (\mathbf{G}_E \mathbf{G}_E^T + \lambda \mathbf{I}_E)^{-1} \mathbf{d}_E \quad (64)$$

e avaliando, em seguida, o resíduo

$$\mathbf{c}_R = \mathbf{d}_R - \mathbf{G}_R \hat{\mathbf{p}} \quad (65)$$

Se todos os elementos de  $\mathbf{c}_R$  tiverem valor absoluto menor que o nível de tolerância  $\mathcal{C}$ , então  $\mathbf{d}_E$  contém, de fato, o conjunto das observações equivalentes. Todo o elemento de  $\mathbf{c}_R$ , cujo valor absoluto seja maior que  $\mathcal{C}$ , deve ser classificado como sendo uma observação equivalente e, conseqüentemente, ser incluído no vetor  $\mathbf{d}_E$ . Entretanto, os testes em modelos sintéticos indicam que DOEg tende a colocar as observações redundantes entre as observações equivalentes e não o contrário. O algoritmo DOEg, ao contrário do algoritmo DOE, não obtém a estimativa  $\hat{\mathbf{p}}$ . Conforme veremos na secção 2.6, esta diferença entre os algoritmos DOE e DOEg, levará, respectivamente, à interpolação nas formas local e global (Crain & Bhattacharyya, 1967; Crain, 1970) quando aplicarmos o conceito de observações equivalentes na interpolação de dados de campo potencial utilizando a camada equivalente.

## 2.4 MÉTODO EGTG

Comentamos na secção 2.1 sobre o excessivo dispêndio computacional requerido para formar matrizes do tipo  $\mathbf{GG}^T$  principalmente quando  $\mathbf{G}$  for, como é no nosso caso, uma matriz cheia e não estruturada. Na secção 2.4.1 nosso objetivo é, inicialmente, identificar o produto interno  $\mathbf{g}^{iT} \mathbf{g}^j$  como sendo uma integração discreta de uma integral analítica conhecida. Após este reconhecimento o cálculo do produto interno será substituído pela avaliação do resultado da integral analítica que, no nosso caso, exige um número de multiplicações muito menor do que o número exigido para efetuar o produto  $\mathbf{g}^{iT} \mathbf{g}^j$ . Na secção 2.4.2 verificaremos numericamente a validade desta substituição para camadas equivalentes com diferentes número de fontes.

### 2.4.1 O Produto Interno $\mathbf{g}^{iT} \mathbf{g}^j$ visto como uma Integração Discreta

O valor de uma anomalia de campo potencial interpolado na posição  $(x_k, y_k, z_k)$  é escrito, a partir das  $M$  fontes equivalentes situadas nas posições  $(x_m, y_m, h)$ , segundo

$$d_k = \sum_{m=1}^M \hat{p}_m g(x_m - x_k, y_m - y_k, h - z_k) \quad (66)$$

ou, na notação matricial

$$d_k = \hat{\mathbf{p}}^T \mathbf{g}^k \quad (67)$$

Substituindo as equações (34) e (35) na equação (67) obtemos que

$$d_k = \mathbf{d}^T (\mathbf{GG}^T + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G} \mathbf{g}^k \quad (68)$$

A posição relativa entre as fontes na camada equivalente e as posições das observações é ilustrada na Figura 6.

O elemento  $i, j$  da matriz  $\mathbf{GG}^T$  é dado por

$$\mathbf{g}^{iT} \mathbf{g}^j = \sum_{m=1}^M g(x_m - x_i, y_m - y_i, h - z_i) \cdot g(x_m - x_j, y_m - y_j, h - z_j) \quad (69)$$

sendo  $\mathbf{g}^i$  e  $\mathbf{g}^j$ , respectivamente, as linhas de índices  $i$  e  $j$  da matriz  $\mathbf{G}$ .

As fontes são identificadas por apenas um índice e, geralmente, a enumeração é realizada

conforme ilustra a Figura 7. Porém, se usarmos dois índices, conforme ilustra a Figura 8, nós podemos escrever o produto interno na forma de um duplo somatório segundo

$$\mathbf{g}^{iT} \mathbf{g}^j = \sum_{i_y=1}^{M_y} \sum_{i_x=1}^{M_x} g(x_l - x_i, y_l - y_i, h - z_i) \cdot g(x_l - x_j, y_l - y_j, h - z_j) \quad , \quad (70)$$

sendo  $l = M_x(i_y - 1) + i_x$ , que nada mais é do que a versão discreta da integral

$$\mathbf{g}^{iT} \mathbf{g}^j \approx \frac{1}{\Delta x \Delta y} \int_{-L_x}^{+L_x} \int_{-L_y}^{+L_y} g(\alpha - x_i, \beta - y_i, h - z_i) \cdot g(\alpha - x_j, \beta - y_j, h - z_j) \, d\alpha \, d\beta \quad . \quad (71)$$

Na equação (70),  $M_x$  e  $M_y$  denotam, respectivamente, os números de fontes nas direções dos eixos  $x$  e  $y$ . Na equação (71),  $\Delta x$  e  $\Delta y$  são os espaçamentos regulares entre as fontes na camada equivalente nas direções dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente e  $L_x$  e  $L_y$  são valores que definem os limites da área contendo as fontes equivalentes. À medida que  $\Delta x$  e  $\Delta y$  tornam-se menores, a integral discreta dada na equação (70) tende para a integral analítica dada na equação (71).

Considerando que a função  $g$  possui decaimento proporcional ao inverso da  $n$ -ésima ordem de potência da distância ( $n = 2$  para a massa pontual e  $n = 3$  para o dipolo magnético), podemos escrever o produto interno  $\mathbf{g}^{iT} \mathbf{g}^j$  como sendo uma aproximação (decorrente da integração discreta) da seguinte integral

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\alpha - x_i, \beta - y_i, h - z_i) \cdot g(\alpha - x_j, \beta - y_j, h - z_j) \, d\alpha \, d\beta \\ & = f(x_i - x_j, y_i - y_j, 2h - z_i - z_j) \end{aligned} \quad (72)$$

de tal forma que

$$\mathbf{g}^{iT} \mathbf{g}^j \approx \frac{1}{\Delta x \Delta y} f(x_i - x_j, y_i - y_j, 2h - z_i - z_j) \quad . \quad (73)$$

A expressão analítica para  $f(x_i - x_j, y_i - y_j, 2h - z_i - z_j)$  é obtida no Apêndice A para os casos particulares em que as fontes na camada equivalente forem constituídas por massas pontuais e dipolos magnéticos verticais.

Considerando a aproximação (73) podemos fazer

$$\mathbf{G}\mathbf{G}^T = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \mathbf{F} \quad (74)$$

e

$$\mathbf{G}\mathbf{g}^k = \frac{1}{\Delta x \Delta y} \mathbf{f}^k \quad , \quad (75)$$

sendo

$$\mathbf{f}^k = \begin{bmatrix} f_{(k,1)} \\ f_{(k,2)} \\ \vdots \\ f_{(k,N)} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} f_{(1,1)} & f_{(1,2)} & \cdots & f_{(1,N)} \\ f_{(2,1)} & f_{(2,2)} & \cdots & f_{(2,N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{(1,N)} & f_{(2,N)} & \cdots & f_{(N,N)} \end{pmatrix}, \quad (76)$$

e

$$f_{(i,j)} = f(x_i - x_j, y_i - y_j, 2h - z_i - z_j) \quad (77)$$

O ponto interpolado na posição  $k$  é agora expresso por

$$d_k = \mathbf{w}^T \mathbf{f}^k \quad (78)$$

sendo que o vetor  $\mathbf{w}$  é obtido pela resolução do sistema linear

$$(\mathbf{F} + \lambda' \mathbf{I}) \mathbf{w} = \mathbf{d} \quad (79)$$

com

$$\lambda' = \lambda \Delta x \Delta y \quad (80)$$

A substituição

$$\begin{pmatrix} \mathbf{g}^{1T} \mathbf{g}^i & \mathbf{g}^{1T} \mathbf{g}^2 & \cdots & \mathbf{g}^{1T} \mathbf{g}^N \\ \mathbf{g}^{2T} \mathbf{g}^i & \mathbf{g}^{2T} \mathbf{g}^2 & \cdots & \mathbf{g}^{2T} \mathbf{g}^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{g}^{1T} \mathbf{g}^N & \mathbf{g}^{2T} \mathbf{g}^N & \cdots & \mathbf{g}^{NT} \mathbf{g}^N \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\Delta x \Delta y} \begin{pmatrix} f_{(1,1)} & f_{(1,2)} & \cdots & f_{(1,N)} \\ f_{(2,1)} & f_{(2,2)} & \cdots & f_{(2,N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{(1,N)} & f_{(2,N)} & \cdots & f_{(N,N)} \end{pmatrix} \quad (81)$$

corresponde, caso  $N \approx M$ , a fazer uma tarefa que demanda  $QN(N+1)/2 \approx N^2$  multiplicações no lugar de outra tarefa que demandaria  $MN(N+1)/2 \approx N^3$ . Se, por exemplo, discretizarmos as fontes equivalentes numa malha  $50 \times 50$  teremos que  $M = 2500$  enquanto  $Q$  permanecerá constante sendo  $Q = 7$  para massa pontual e  $Q = 9$  para dipolo magnético vertical mais uma extração de raiz quadrada em ambos os casos. Como vemos, a diminuição no número de multiplicações é significativa.

### 2.4.2 Verificação numérica da Aproximação (73)

A verificação da aproximação (73) é feita comparando a convergência, até o valor 1, da razão entre os valores obtidos pela integração discreta  $\mathbf{g}^{iT} \mathbf{g}^j$ , para diferentes espaçamentos  $\Delta x$  e  $\Delta y$  da equação (74), e o valor obtido através da integral analítica. A discretização das fontes na camada equivalente é ilustrada pela Figura 9. Cada discretização da camada fornece um valor particular da integral discreta. A Figura 9, por exemplo, está associada ao valor particular da integral discreta para a camada com  $M = 5^2$  fontes na camada equivalente. Os demais valores são obtidos procedendo da mesma maneira fazendo, porém,  $M = 3^2, 4^2, 5^2, \dots, 26^2$ , como ilustra a Figura 10 para o caso particular de  $M = 7^2$ . Note que o tamanho da janela e a profundidade  $h$  não variam enquanto que o espaçamento entre as fontes, diminui à medida que  $M$  cresce.

Desta maneira, foi construída a Figura 11 que ilustra a convergência da razão entre a integral discreta e a integral analítica (quadrados ligados pela linha tracejada) para o valor igual a 1 (linha reta horizontal) em função do número de fontes na camada equivalente. A validade da aproximação (73) foi testada, primeiramente, utilizando uma camada equivalente com massas pontuais e, depois, utilizando uma camada equivalente constituída por dipolos magnéticos verticais. A convergência, em ambos os testes, da razão para o valor igual a 1 ilustra a validade da aproximação (73).

## 2.5 DUAS IMPLEMENTAÇÕES DO ALGORITMO DOE

Na implementação computacional do algoritmo DOE uma atenção especial deve ser dada ao passo 2 deste algoritmo. Este passo exige a solução de um sistema linear de ordem  $n$ , o que demanda um número de multiplicações na ordem de grandeza de  $n^3$ . Como o algoritmo DOE resolve consecutivamente sistemas com ordem  $n = 1, 2, 3, 4, \dots, e$ , temos que, o número de multiplicações  $N_2(e)$ , definido pela equação (56), é da ordem de

$$N_2(e) \approx \sum_{n=1}^e n^3 \quad . \quad (82)$$

Usando a identidade

$$\sum_{i=1}^J i^3 = \frac{1}{4} J^2 (J+1)^2 \quad , \quad (83)$$

obtemos que

$$N_2(e) \approx \frac{1}{4} e^2 (e+1)^2 \quad . \quad (84)$$

Se cada vez que o passo 2 do algoritmo DOE for executado um novo sistema linear for resolvido, o número de multiplicações será da ordem de  $e^4$ . Isto poderá tornar DOE computacionalmente mais demorado que resolver o sistema linear de ordem  $N$  que exige  $N^3$  multiplicações. Apenas nos casos particulares em que  $e^4 \approx N^3$ , o algoritmo DOE levaria o mesmo tempo e só seria mais rápido quando  $e$  fosse muito menor do que  $N$ . Infelizmente, isto só acontece quando a anomalia for muito suave, a tal ponto que possa ser representada por uma superfície interpoladora com poucas observações equivalentes.

Como regra geral, o passo 2 deve ser otimizado de tal forma que a solução do sistema linear de ordem  $n+1$  possa ser obtida a partir da solução do sistema linear de ordem  $n$ , atualizando esta solução toda vez que uma nova observação equivalente for introduzida. Vamos apresentar duas implementações do algoritmo DOE apropriadas para sistemas lineares com matrizes cheias e não estruturadas como as que aparecem nos problemas de camada equivalente. A primeira, denominada DOE1, atualiza a solução usando o algoritmo ART (Algebraic Reconstruction Technique) de Tarantola (1987) cuja dedução é apresentada no Apêndice B. A segunda, denominada DOE2, atualiza a solução utilizando as propriedades da decomposição de Cholesky, explicitadas no Apêndice

C. Em ambas as implementações temos que  $N_2(e) \approx e^3$  viabilizando, assim, a implementação do algoritmo DOE e, conseqüentemente, a implementação do algoritmo DOEg.

### 2.5.1 Implementação computacional de DOE modificando o algoritmo ART

O termo ART engloba uma ampla variedade de algoritmos iterativos que têm em comum a característica de processar cada dado (linha da matriz) individualmente durante a solução de um problema de mínimos quadrados (Sluis & Vorst 1987). Eles são apropriados para resolver sistemas lineares com matrizes esparsas e, em Geofísica, têm sido aplicados na tomografia acústica. O algoritmo ART de Tarantola(1987) foi o escolhido nesta implementação porque, ao contrário dos demais, sua eficiência não é perdida quando ele é aplicado a sistemas com matrizes cheias e não estruturadas. Ele converge em  $N$  (número de dados) iterações e exige o armazenamento de uma matriz quadrada de ordem  $M$  (número de parâmetros). Nesta dissertação, ART será sempre o algoritmo dado por Tarantola(1987). Vamos, inicialmente, apresentar este algoritmo e depois, modificando apenas a seqüência em que as linhas são processadas, apresentar a implementação DOE1.

O algoritmo ART fornece a solução que minimiza o funcional

$$Q = \mathbf{e}^T \mathbf{C}_e^{-1} \mathbf{e} + (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^T \mathbf{C}_p^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \quad (85)$$

associado ao sistema linear  $\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{p}$  também escrito como

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}^{1T} \\ \mathbf{g}^{2T} \\ \vdots \\ \mathbf{g}^{NT} \end{bmatrix} \mathbf{p} \quad (86)$$

Sob o ponto de vista estatístico,  $\mathbf{C}_e$  e  $\mathbf{C}_p$  são matrizes de covariância *a priori* sobre o ruído  $\mathbf{e}$  e sobre os parâmetros  $\mathbf{p}$ , respectivamente, e  $\mathbf{p}_0$  é a esperança do vetor solução. No algoritmo ART,  $\mathbf{C}_e$  é uma matriz diagonal (erros não correlacionados) em que cada elemento diagonal,  $\sigma_k^2$  contém a variância do dado de número  $k$ . A estimativa  $\hat{\mathbf{p}}$  deste problema é obtida em  $N$  iterações sendo que, na  $k$ -ésima iteração, o  $k$ -ésimo dado ( $k$ -ésima linha) é processado através da realização dos seguintes passos.

**passo 1** Calcular resíduo com a aproximação  $\mathbf{p}_{(k-1)}$

$$r_k = d_k - \mathbf{p}_{(k-1)}^T \mathbf{g}^k \quad (87)$$

**passo 2** Obter vetor solução *a posteriori*

$$p^{(k)} = p^{(k-1)} + C_{(k-1)} g^k \frac{r_k}{g^{kT} C_{(k-1)} g^k + \sigma_k^2} \quad (88)$$

**passo 3** Obter matriz de covariância *a posteriori*

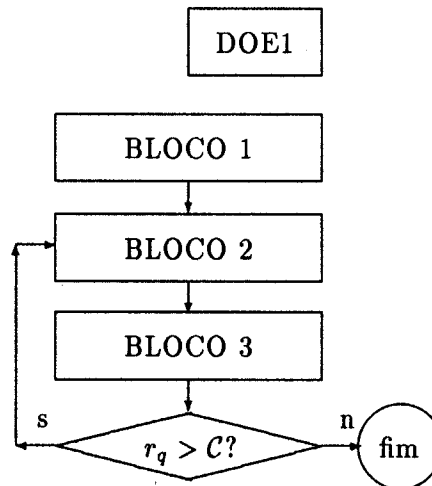
$$C_{(k)} = C_{(k-1)} - \frac{C_{(k-1)} g^k g^{kT} C_{(k-1)}}{g^{kT} C_{(k-1)} g^k + \sigma_k^2} \quad (89)$$

Na primeira iteração fazemos  $C_{(0)} = C_p$ . O número de multiplicações requeridas por este algoritmo é igual a  $N[\frac{3}{2}M^2 + \frac{9}{2}M + 1]$ .

No algoritmo ART as observações são introduzidas seqüencialmente segundo sua ordem de enumeração. Assim, este algoritmo é facilmente adaptado ao algoritmo DOE se adotarmos os dois procedimentos seguintes. Primeiro: processar, na  $k$ -ésima iteração, a observação  $d_k$  que tiver o maior resíduo calculado a partir da aproximação  $p^{(k-1)}$ . Segundo: interromper o processo iterativo se o resíduo for menor que o valor  $C$  pré-fixado.

Além de possibilitar a implementação computacional do algoritmo DOE, o algoritmo ART auxilia o entendimento do próprio conceito de observações equivalentes. Se, por exemplo, o resíduo  $r_k$  for nulo temos, pela equação (88), que a estimativa dos parâmetros não será modificada ao processarmos a observação  $d_k$ . Porém, pela equação (89), vemos que a matriz de covariância dos parâmetros será alterada se processarmos  $d_k$ . Isto nos mostra que o processamento das observações redundantes altera apenas o conhecimento do segundo momento (covariância) da estimativa não alterando o conhecimento da própria estimativa.

Com estas modificações, obtemos a implementação de DOE, denominada DOE1, estruturada da seguinte forma:



sendo que cada um destes blocos contém as seguintes operações:

#### **BLOCO 1** Inicializar

- 1-) definir nível de tolerância  $C$
- 2-) identificar o elemento  $d_1$  do vetor  $d$  que tenha o maior valor absoluto
- 3-) tornar  $d_1$  a primeira observação equivalente
- 4-) executar as seguintes operações

$$P_{(0)} = 0 \quad (90)$$

$$r_1 = d_1 - P_{(0)}^T g^1 \quad (91)$$

$$P_{(1)} = P_{(0)} + C_{(0)} g^1 \frac{r_1}{g^{1T} C_{(0)} g^1 + \sigma_1^2} \quad (92)$$

$$C_{(1)} = C_{(0)} - \frac{C_{(0)} g^1 g^{1T} C_{(0)}}{g^{1T} C_{(0)} g^1 + \sigma_1^2} \quad (93)$$

- 5-) identificar a observação  $d_q$  tal que o valor absoluto do resíduo  $r_q = d_q - P_{(1)}^T g^q$  seja máximo
- 6-) fazer  $n = 1$

#### **BLOCO 2** Introduzir uma observação equivalente

- 1-) incrementar a contagem das observações equivalentes ( $n \leftarrow n + 1$ )
- 2-) permutar, no vetor de dados, a posição de  $d_n$  com a de  $d_q$
- 3-) permutar, na matriz  $G$ , a posição da linha  $g^n$  com a da linha  $g^q$
- 4-) aplicar passos 1, 2 e 3 do algoritmo ART

$$r_n = d_n - P_{(n-1)}^T g^n \quad (94)$$

$$P_{(n)} = P_{(n-1)} + C_{(n-1)} \mathbf{g}^n \frac{r_n}{\mathbf{g}^{nT} C_{(n-1)} \mathbf{g}^n + \sigma_n^2} \quad (95)$$

$$C_{(n)} = C_{(n-1)} - \frac{C_{(n-1)} \mathbf{g}^n \mathbf{g}^{nT} C_{(n-1)}}{\mathbf{g}^{nT} C_{(n-1)} \mathbf{g}^n + \sigma_n^2} \quad (96)$$

O número de multiplicações é  $S(M) = \frac{3}{2}M^2 + \frac{9}{2}M + 1$ .

### **BLOCO 3** Escolher a nova observação equivalente

1-) calcular o vetor de resíduos  $\mathbf{r}$  tal que

$$r_i = d_i - \mathbf{p}_{(n)}^T \mathbf{g}^i \quad (97)$$

para  $i = 1, 2, \dots, N$

2-) identificar a observação  $d_q$  tal que o resíduo  $r_q$  tenha o maior valor absoluto

O número de multiplicações é  $R(n) = M$

Usando as equações (56) e (57) temos que

$$N_2(e) = \sum_{n=1}^e \left[ \frac{3}{2}M^2 + \frac{9}{2}M + 1 \right] = e \left[ \frac{3}{2}M^2 + \frac{9}{2}M + 1 \right] \quad (98)$$

e

$$N_3(e, N) = \sum_{n=1}^e NM = eNM \quad (99)$$

fornecendo o número total de multiplicações da implementação DOE1 segundo

$$N_{doe1} = e \left[ \frac{3}{2}M^2 + \frac{2N+9}{2}M + 1 \right] \quad (100)$$

A Figura 12 compara o número de multiplicações requeridas para resolver um problema de mínimos quadrados com 1000 observações e 500 parâmetros aplicando o algoritmo ART (que usa todas as observações) e aplicando o algoritmo DOE (na implementação DOE1) que identifica e utiliza apenas as  $e$  observações equivalentes. Conforme vemos na Figura 12, o algoritmo DOE será mais eficiente que o algoritmo ART se o número de observações equivalentes for menor que aproximadamente 500. Observe que o cálculo de resíduos (reta tracejada) é a operação mais dispendiosa nesta implementação.

### 2.5.2 Implementação computacional de DOE usando a decomposição de Cholesky e o método EGTG

Na  $n$ -ésima iteração do algoritmo DOE, o valor da anomalia na posição  $(x_k, y_k, z_k)$ , representado por  $d_k^{(n)}$ , é expresso pelas equações (76) a (80) segundo

$$d_k^{(n)} = \mathbf{w}_n^T \mathbf{f}_n^k, \quad (101)$$

sendo que  $\mathbf{w}_n$  é obtido resolvendo o sistema linear

$$(\mathbf{F}_n + \lambda \mathbf{I}_n) \mathbf{w}_n = \mathbf{d}_n \quad (102)$$

e

$$\mathbf{f}_n^k = \begin{bmatrix} f_{(k,1)} \\ \vdots \\ f_{(k,n)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_n = \begin{pmatrix} f_{(1,1)} & \cdots & f_{(1,n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{(1,n)} & \cdots & f_{(n,n)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_n = \begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}. \quad (103)$$

Os subscritos de vetores e matrizes, que adotaremos de agora em diante, fornecem, ao mesmo tempo, a dimensão e a iteração dos vetores  $\mathbf{f}_n^k$  e  $\mathbf{d}_n$  e das matrizes quadradas  $\mathbf{F}_n$  e  $\mathbf{I}_n$ . Esta notação é necessária pois, em cada iteração, a dimensão dos vetores e matrizes será aumentada em uma unidade. Nos escalares os sobrescritos entre parênteses assinalam o número da iteração.

Assim, a superfície interpoladora avaliada no ponto  $k$  na iteração  $n+1$ , será escrita  $d_k^{(n+1)}$ . Esta superfície ajusta  $n+1$  observações e é escrita segundo

$$d_k^{(n+1)} = \mathbf{w}_{n+1}^T \mathbf{f}_{n+1}^k, \quad (104)$$

sendo que  $\mathbf{w}_{n+1}$  é obtido resolvendo o sistema linear

$$(\mathbf{F}_{n+1} + \lambda \mathbf{I}_{n+1}) \mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{d}_{n+1}, \quad (105)$$

e

$$\mathbf{F}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_n & \mathbf{g}_n \\ \mathbf{g}_n^T & f_{(n+1,n+1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d}_{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_n \\ d_{n+1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_n = \begin{bmatrix} f_{(n+1,1)} \\ \vdots \\ f_{(n+1,n)} \end{bmatrix}, \quad (106)$$

sendo  $d_{n+1}$ , a mais recente observação equivalente.

Como  $\mathbf{F}_n + \lambda \mathbf{I}_n$  e  $\mathbf{F}_{n+1} + \lambda \mathbf{I}_{n+1}$  são matrizes simétricas e positivo-definidas podemos resolver os sistemas lineares das equações (106) e (109) efetuando a decomposição de Cholesky das matrizes correspondentes (Tarantola,1987) segundo

$$\mathbf{F}_n + \lambda \mathbf{I}_n = \mathbf{C}_n \mathbf{C}_n^T \quad (107)$$

e

$$\mathbf{F}_{n+1} + \lambda \mathbf{I}_{n+1} = \mathbf{C}_{n+1} \mathbf{C}_{n+1}^T, \quad (108)$$

resolvendo então os sistemas por meio das substituições regressiva e progressiva. As matrizes  $\mathbf{C}_n$  e  $\mathbf{C}_{n+1}$  são matrizes triangulares inferiores com dimensões dadas pelo subscrito.

Nosso objetivo é obter a matriz decomposta  $\mathbf{C}_{n+1}$  usando a matriz decomposta no passo anterior  $\mathbf{C}_n$  evitando, desta maneira, repetir os cálculos já efetuados. Considerando resultados do **Apêndice C**, podemos obter  $\mathbf{C}_{n+1}$  apenas acrescentando uma nova linha na matriz  $\mathbf{C}_n$  conforme

$$\mathbf{C}_{n+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_n & v_{n+1} \end{pmatrix}, \quad (109)$$

tal que o  $i$ -ésimo elemento de  $\mathbf{v}_n$  é dado por

$$v_i = \left( f_{(n+1,i)} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{i,k} v_k \right) / c_{i,i}, \quad (110)$$

sendo o elemento diagonal dado por

$$v_{n+1} = \left( \lambda + f_{(n+1,n+1)} - \sum_{k=1}^n v_k v_k \right)^{1/2}. \quad (111)$$

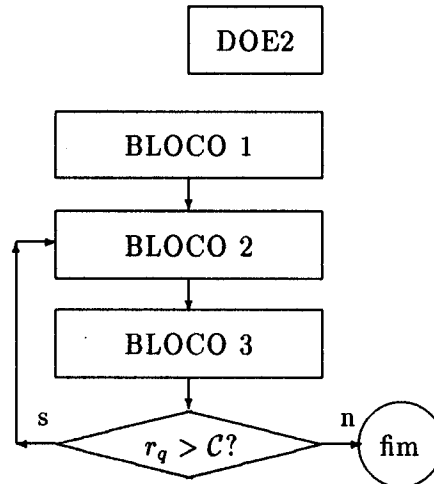
Os elementos de  $\mathbf{v}_n$  são obtidos recursivamente segundo

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_n \quad (112)$$

obtendo-se, por fim, o elemento diagonal  $v_{n+1}$  através da equação (111).

Assim, é possível obter  $\mathbf{C}_{n+1}$  acrescentando apenas uma nova linha na matriz  $\mathbf{C}_n$ , gastando com isso  $\frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2}$  multiplicações e apenas uma raiz quadrada. A obtenção de  $\mathbf{C}_{n+1}$ , sem utilizar os cálculos já efetuados na obtenção de  $\mathbf{C}_n$ , gastaria  $\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} - \frac{2n}{3}$  multiplicações mais  $n$  cálculos de raiz quadrada, ou seja, uma ordem de grandeza a mais. De posse da matriz decomposta,  $\mathbf{w}_{n+1}$  é prontamente obtido.

A implementação do algoritmo DOE usando o método EGTG e a decomposição de Cholesky, será denominada de DOE2 e possui os seguintes passos.



sendo

#### **BLOCO 1** Inicializar

- 1-) definir nível de tolerância  $C$
- 2-) identificar o elemento  $d_1$  do vetor  $d$  que tenha o maior valor absoluto
- 3-) tornar  $d_1$  a primeira observação equivalente
- 4-) determinar  $C_1$  tal que

$$(F_1 + \lambda I_1) = C_1 C_1^T \quad (113)$$

- 5-) obter o vetor  $w_1$  por meio de substituições regressiva e progressiva do sistema

$$C_1 C_1^T w_1 = d_1 \quad (114)$$

- 6-) identificar a observação  $d_q$  tal que  $r_q = d_q - w_1^T f_1^q$  seja máximo
- 7-) fazer  $n = 1$

#### **BLOCO 2** Introduzir uma observação equivalente

- 1-) permutar, no vetor de dados, a posição de  $d_{n+1}$  com a de  $d_q$
- 2-) Acrescentar uma nova linha na matriz  $C_n$  segundo

$$C_{n+1} = \begin{pmatrix} C_n & \mathbf{0} \\ v_n & v_{n+1} \end{pmatrix} \quad (115)$$

onde

$$v_i = \left( f_{(n+1,i)} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{i,k} v_k \right) / c_{i,i} \quad (116)$$

e

$$v_{n+1} = \left( \lambda + f_{(n+1,n+1)} - \sum_{k=1}^n v_k v_k \right)^{1/2} \quad (117)$$

Número de multiplicações é igual a  $\frac{n^2}{2} + \frac{3n}{2}$ .

3-) Obter  $w_{n+1}$  através de substituições regressiva e progressiva

$$C_{n+1} C_{n+1}^T w_{n+1} = d_{n+1} \quad (118)$$

Número de multiplicações é igual a  $(n^2 + n)$  (Bhattacharyya,1980).

4-) incrementar a contagem das observações equivalentes ( $n \leftarrow n + 1$ )

### **BLOCO 3** Escolher a nova observação equivalente

1-) calcular o vetor de resíduos  $r$  tal que

$$r_i = d_i - w_n^T f_n^i \quad (119)$$

para  $i = 1, 2, \dots, N$

2-) identificar a observação  $d_q$  tal que o resíduo  $r_q$  tenha o maior valor absoluto

3-) fazer  $e \leftarrow n$

número de multiplicações  $R(n, N) = Nn$

Usando as equações (56) e (57) temos que

$$N_2(e) = \sum_{n=1}^e \frac{3n^2}{2} + \frac{5n}{2} = \frac{1}{2}e^3 + 2e^2 + \frac{3}{2}e \quad (120)$$

e

$$N_3(e, N) = \sum_{n=1}^e Nn = \frac{N}{2} (e^2 + e) \quad (121)$$

fornecendo o número total de multiplicações da implementação DOE2 segundo

$$N_{doe2} = \frac{1}{2} [e^3 + (N+4)e^2 + (N+3)e] \quad (122)$$

Para obter um ajuste por mínimos quadrados nós podemos aplicar a implementação DOE2 gastando  $\frac{1}{2}[e^3 + (N+4)e^2 + (N+3)e]$  multiplicações ou resolver a equação (34) (utilizando todas as  $N$  observações) gastando  $\frac{N^3}{6} + \frac{3N^2}{2} + \frac{N}{3}$  multiplicações. A Figura 13 compara a eficiência entre

estes dois procedimentos. Conforme vemos na figura, o algoritmo DOE (implementação DOE2) será mais eficiente se o número de observações equivalentes for tal que  $e < 500$ .

O cálculo dos resíduos ainda é uma tarefa bastante dispendiosa nesta implementação sendo diretamente proporcional ao produto  $Ne^2$ . Porém, para pequenos valores de  $e$ , esta operação na implementação DOE2 exige menor número de multiplicações do que a mesma operação na implementação DOE1 (Figura 12). Isto decorre do fato da implementação DOE2 usar o método EGTG otimizando, assim, os cálculos dos produtos internos.

## 2.6 INTERPOLAÇÃO PELA CAMADA EQUIVALENTE APLICANDO OS ALGORITMOS DOE E DOEg

O objetivo desta secção é utilizar os algoritmos DOE e DOEg no sentido de viabilizar a técnica da camada equivalente (particularmente visando a interpolação) em levantamentos com grande número de dados. Quando o algoritmo DOE obtiver sucesso na solução por mínimos quadrados do sistema linear dado na equação (22) (formulação do problema de camada equivalente), os problemas em usar a camada equivalente em levantamento com grande número de dados estarão resolvidos. Isto acontece porque o algoritmo DOE determina a expressão analítica (superfície interpoladora) que ajusta todos os dados do levantamento permitindo que a interpolação seja realizada através da avaliação da superfície interpoladora nos pontos da malha regular. Infelizmente o algoritmo DOE nem sempre tem sucesso, pois de um modo geral, o número de observações equivalentes é ainda muito grande impedindo que o sistema linear, com ordem igual a este número, seja resolvido pelo computador. Mesmo que o sistema linear possa ser resolvido, o elevado número de observações degrada o desempenho do algoritmo pois as avaliações de resíduos tornam-se cada vez mais dispendiosas. Por outro lado, o algoritmo DOEg sempre pode ser aplicado embora ele não forneça a superfície interpoladora que ajusta todos os dados do levantamento e sim apenas um sistema linear com dimensão menor que o original (geralmente maior do que aquele sistema linear que o computador pode resolver). Esta diferença entre ambos faz com que os algoritmos DOE e DOEg apontem para diferentes formas de interpolação: o primeiro para a interpolação na forma global e o segundo para interpolação na forma local (Crain & Bhattacharyya, 1967; Crain, 1970; Franke, 1980).

Em 2.6.1 nós apresentaremos dois exemplos de utilização do algoritmo DOEg na interpolação de anomalias magnéticas sintéticas. No exemplo 3 a anomalia foi relativamente suave e o algoritmo DOE obteve pleno sucesso na determinação das observações equivalentes. No exemplo 4, porém, ele encontrou algumas dificuldades pois a anomalia sintética escolhida foi mais complexa do que a anomalia anterior aumentando o número de observações equivalentes necessárias para ajustar todos os dados. Em 2.6.2 nós comentaremos, inicialmente, a adaptação do algoritmo DOEg para a interpolação na forma local e em seguida, no exemplo 5, nós interpolaremos os mesmos dados sintéticos utilizados no exemplo 4.

### 2.6.1 Interpolação na forma global aplicando o algoritmo DOE

Vamos apresentar dois exemplos de como o algoritmo DOE pode ser usado na interpolação de dados de campo potencial.

#### Exemplo 3-

Usamos neste exemplo os dados magnéticos sintéticos devidos a um prisma magnetizado com espessura infinita e profundidade do topo igual a 15 km. A Figura 14a mostra a localização, as dimensões horizontais e a direção do prisma sobreposto ao contorno da anomalia magnética por ele gerada. A Figura 14b mostra a posição da amostragem que foi simulada no padrão aeromagnético com 14 linhas de vôo equi-espaciaadas entre si pela distância de 7,41 km e com distância média entre as amostras ao longo da linha de vôo igual a 0,74 km. O número de dados sintéticos no levantamento foi igual a 2072.

Nós aplicamos o algoritmo DOE (implementação DOE2) usando  $\lambda = 0,001$ ,  $C = 0,5$  nT e colocando a camada equivalente na profundidade de 20 km. Dentre as 2072 observações originais, o algoritmo DOE determinou 93 observações equivalentes cujas posições são mostradas na Figura 15a. O tempo de CPU gasto na identificação das 93 observações equivalentes foi igual a 8 minutos. A Figura 15b mostra a sobreposição entre o mapa de contorno dos isovalores da anomalia interpolada e a posição das 97 observações equivalentes. O tempo de CPU gasto para calcular os 2500 valores interpolados na malha ( $50 \times 50$ ) foi igual a 11 segundos. As normas quadrática e de Chebyshev do vetor de resíduos (obtido fazendo a diferença entre os 2500 valores das anomalias verdadeira e interpolada) foram iguais a 443,0 e 2,4 nT, respectivamente.

#### Exemplo 4-

Neste exemplo nós utilizamos uma anomalia magnética sintética mais complexa que a do exemplo anterior mantendo, porém, o mesmo posicionamento da amostragem. O modelo de fontes que gerou a anomalia deste exemplo é constituído por cinco prismas magnetizados, cujas dimensões e posições são mostradas na Figura 16a. A Figura 16b mostra a sobreposição do mapa de contorno da anomalia sintética verdadeira com o mapa de posicionamento dos dados sintéticos.

Nós aplicamos o algoritmo DOE (implementação DOE2) usando  $\lambda = 0,001$ ,  $C = 0,5$  nT e

colocando a camada equivalente na profundidade de 20 km. Dentre as 2072 observações originais, o algoritmo DOE determinou 248 observações equivalentes gastando nesta tarefa 55 minutos de CPU. A Figura 17a mostra as posições das observações identificadas e a Figura 17b mostra a sobreposição entre o mapa de contorno dos isovalores da anomalia interpolada (a partir da superfície interpoladora fornecida pelo algoritmo DOE) e a posição das 248 observações equivalentes. O tempo gasto para calcular os 2500 valores interpolados na malha ( $50 \times 50$ ) foi igual a 28 segundos. As normas quadrática e de Chebyshev do vetor de resíduos (obtido fazendo a diferença entre os 2500 valores das anomalias verdadeira e interpolada) foram iguais a 3105 e 6,2 nT, respectivamente.

Comparando os resultados dos exemplos 3 e 4, vemos que o algoritmo DOE teve seu desempenho (em termos de tempo computacional) rapidamente degradado no momento em que foi utilizada uma anomalia mais complexa. Quanto mais complexa a anomalia, maior o número de observações equivalentes e, conseqüentemente, maior o tempo que o algoritmo DOE leva para identifica-las. Observe que, embora complexa, a anomalia sintética do exemplo 4 é ainda bastante suave e bem "comportada" se comparada com os dados de levantamentos reais.

### 2.6.2 Interpolação na forma local aplicando o algoritmo DOEg

De um modo geral, os dados em um levantamento são enumerados segundo diferentes critérios tais como: seqüência temporal de aquisição, proximidade entre as linhas de amostragem, posicionamento sobre uma mesma linha de amostragem etc. Embora estes critérios de enumeração tenham algumas utilidades (facilitar o acesso de dados ao longo de um perfil, por exemplo) nenhum deles é o critério mais adequado para re-enumerar os dados visando a aplicação do algoritmo DOEg. Para este propósito, o critério mais adequado é o que exige que, todos os dados dentro de uma mesma *cela* fiquem seqüencialmente enumerados. O termo *cela* denota a unidade geométrica básica de subdivisão na qual a área retangular que engloba todo o levantamento é subdividida. Conforme veremos logo a seguir, as celas serão utilizadas tanto na re-enumeração dos dados como também na interpolação local no momento em que definirmos o conceito de janela como sendo um agrupamento de celas adjacentes. A Figura 18 ilustra graficamente os conceitos geométricos de cela e janela em relação à área que engloba todos os dados amostrados em um levantamento.

A interpolação na forma local é realizada obtendo, primeiramente, a superfície interpo-

ladora que ajusta todos os dados dentro da janela (assinalada por **J** na Figura 18) interpolando, em seguida, os valores da anomalia na cela central (representada em negrito na mesma figura). Este procedimento é repetido para cada uma das celas permitindo, assim, a obtenção de todos os valores interpolados. Cada janela deve ser constituída, no mínimo, por nove celas para reduzir possíveis descontinuidades entre os valores interpolados em janelas adjacentes.

A formação da matriz de sensibilidade **G** da equação (22), após a re-enumeração dos dados, deixa as linhas da matriz **G** agrupadas de tal forma que cada um dos grupos fica associado aos dados dentro de uma cela específica. A partição do sistema linear no passo 1 do algoritmo DOEG pode, então, ser realizada de tal forma que cada sistema  $\mathbf{d}^i = \mathbf{G}^i \mathbf{p}$ , da equação (60), fique associado aos dados  $\mathbf{d}^i$  da *i*-ésima cela. Nestas condições, a aplicação do passo 2 do algoritmo DOEG corresponde a identificar as observações equivalentes dentro de cada cela através da aplicação do algoritmo DOE em cada um dos sistemas  $\mathbf{d}^i = \mathbf{G}^i \mathbf{p}$ .

Como nós vimos acima, a interpolação na forma local utiliza todas as observações dentro da janela para construir a superfície interpoladora para a posterior interpolação na cela central. Para esta tarefa deve ser resolvido um problema de mínimos quadrados com número de dados igual ao número de observações dentro da janela. Por outro lado, o algoritmo DOEG identifica as observações equivalentes dentro de cada cela significando que, esta mesma superfície interpoladora, pode ser obtida usando apenas as observações equivalentes que são em menor quantidade do que as observações originais. Assim, nós podemos fazer a interpolação na forma local utilizando apenas as observações equivalentes dentro da janela pois, a superfície que as ajusta, também ajustará todas as demais observações dentro desta janela.

#### Exemplo 5-

Nós vamos aplicar a interpolação local no mesmo levantamento sintético utilizado no exemplo 4. Inicialmente, a área que engloba o levantamento sintético foi subdividida em 16 celas que são mostradas na Figura 19a. As celas são quadradas com arestas iguais a 27,5 km e, devido a este tamanho, pelo menos parte de três linhas de amostragem adjacentes ficaram dentro de uma cela. Em seguida, os dados foram re-enumerados e a identificação das observações equivalentes foi realizada dentro de cada uma das celas identificando 397 observações equivalentes cujo mapa de

posicionamento é mostrado na Figura 19b. O tempo de CPU gasto pelo algoritmo DOEg para identificar as observações equivalentes foi igual a dois minutos e meio (o algoritmo DOE levou 55 minutos).

Após a identificação das observações equivalentes nós fizemos a interpolação na forma local usando uma janela quadrada composta por nove celas. A Figura 20a mostra o mapa de contorno de isovalores da anomalia interpolada na forma local sobreposto ao mapa de posicionamento das observações equivalentes. A Figura 20b mostra apenas o mapa de contorno de isovalores da anomalia interpolada. O tempo de CPU para a interpolação na forma local foi igual a dois minutos. As normas quadrática e de Chebyshev do vetor de resíduos (obtido fazendo a diferença entre os 2500 valores das anomalias verdadeira e interpolada) foram iguais a 3005 e 6,0 nT, respectivamente.

### 3- APLICAÇÕES EM DADOS SINTÉTICOS

Um método de interpolação de dados de campo potencial é eficiente se ele conseguir prever os valores da anomalia em lugares (próximos da região amostrada) em que ela não tenha sido amostrada. Até recentemente, a eficiência dos métodos de interpolação foi avaliada apenas qualitativamente através da análise do mapa de contorno dos valores interpolados (La Porte,1962; Battacharyya,1969). Nesta análise, o intérprete voltava a sua atenção para a capacidade dos métodos em representar os altos gradientes da anomalia onde ela fosse bem amostrada e para a capacidade de interpolar valores suaves nos lugares com pouca ou nenhuma amostragem. Este critério é muito subjetivo já que, não se sabendo o valor verdadeiro da anomalia em cada ponto interpolado, não é possível verificar a eficiência do método que está sendo testado.

Embora difícil, é possível julgar a eficiência de um método de interpolação utilizando apenas dados reais (Braile,1978; Morrison & Douglas,1984). Este procedimento consiste em selecionar alguns pontos amostrados, usar apenas os restantes para construir a função interpoladora e calcular os resíduos, nos dados previamente selecionados, através de avaliações da função interpoladora. Diferentes estatísticas sobre o resíduo conseguem avaliar a eficiência do método de interpolação em prever o valor verdadeiro da anomalia. A dificuldade deste procedimento é que ele não é suficientemente versátil para testar intensivamente a eficiência de um método de interpolação pois, as conclusões obtidas, ficam restritas ao levantamento particular em que o teste foi realizado. Os testes utilizando dados sintéticos, gerados pelo computador, superam esta dificuldade já que o valor verdadeiro da anomalia pode ser calculado em qualquer posição e diferentes anomalias e padrões de amostragem podem ser simulados.

O uso de dados sintéticos, em procedimentos que testam a eficiência dos métodos de interpolação, foi realizado por Rasmussen & Sharma(1979), Franke(1980) e Morrison & Douglas(1984). De um modo geral, estes procedimentos possuem três etapas. Primeiramente, o levantamento é simulado usando um modelo de fontes e um conjunto de pontos (estações) onde os valores da anomalia sintética são calculados. Depois, duas malhas são obtidas: uma por interpolação dos dados sintéticos e a outra por cálculo (nos mesmos nós da malha interpolada) do valor teórico da anomalia usando o modelo das fontes. Finalmente, é construído o vetor de resíduos entre as duas malhas,

malhas, cuja norma, mede a eficiência do método de interpolação. Diferentes normas podem ser usadas de tal forma que diferentes aspectos do ajuste possam ser salientados.

Neste capítulo, nós utilizamos dados sintéticos, de forma ligeiramente diferente da descrita acima, para testar a eficiência dos métodos de interpolação baseados nos princípios da camada equivalente e da mínima curvatura. A principal diferença no uso dos dados sintéticos é que, a eficiência do método de interpolação, será avaliada em diferentes anomalias e não mais em uma anomalia específica. O procedimento usado é estruturado conforme descrito a seguir.

- 1) Simular as posições de amostragem.
- 2) Definir a malha regular onde a anomalia será interpolada.
- 3) Escolher o modelo das fontes que produzirá a anomalia magnética.
- 4) Calcular, a partir do modelo de fontes, o valor da anomalia em cada posição de amostragem.
- 5) Obter uma malha regular interpolada para cada um dos métodos de interpolação a ser testado.
- 6) Calcular o valor verdadeiro da anomalia sobre a malha regular utilizando o modelo de fontes.
- 7) Calcular os vetores de resíduos entre as anomalias interpoladas no item 5 e a anomalia calculada no item 6.
- 8) Obter a norma de cada um dos vetores de resíduos e, opcionalmente, desenhar o seu mapa de contorno de isovalores.
- 9) Aumentar a profundidade do topo de todas as fontes e refazer as etapas compreendidas entre os itens 4 e 8.

Para manter o teste sob controle, nós fixamos os posicionamentos da amostragem e da malha regular escolhendo, porém, diferentes modelos de fontes para cada um dos testes realizados. Para cada teste, o mesmo modelo de fontes foi colocado em profundidades gradativamente maiores fazendo com que os métodos de interpolação fossem testados, inicialmente, em severa condição de sub-amostragem que foi diminuída à medida que as fontes ficaram mais profundas. Cada modelo de fontes foi escolhido com propósito de realçar um aspecto qualitativo específico da anomalia interpolada (por exemplo, capacidade de recuperar as feições lineares da anomalia). A eficiência relativa entre os métodos é mostrada por meio dos mapas de contorno dos isovalores dos resíduos como também por meio de gráficos que mostram as suas normas (quadrática e de Chebyshev) em função das profundidades dos topos do modelo de fontes. O levantamento simulado é constituído

por 7 linhas de amostragem equi-espaçadas de 8,6 km ao longo das quais a distância entre duas amostras consecutivas é igual a 0,86 km. O número de dados no levantamento é igual a 448. Todos os modelos de fontes são constituídos por prismas (com dimensões especificadas em cada um dos testes) magnetizados por indução apenas sendo que o campo indutor tem inclinação e declinação nulas. O módulo da magnetização varia em função da profundidade do topo do prisma de tal forma que o valor da anomalia, no ponto da superfície do terreno exatamente acima do centro do prisma, fique sempre igual a -100 nT.

### **Teste 1- Eficiência dos métodos de interpolação em recuperar os flancos sub-amostrados de algumas anomalias magnéticas**

O modelo de fontes escolhido para testar esta condição de sub-amostragem foi constituído por um cubo com arestas iguais a 8 km centrado exatamente no ponto médio da linha de amostragem central. Como o campo indutor postulado tem inclinação igual a zero grau, o mínimo da anomalia estará localizado sobre o centro do prisma e, conseqüentemente, sempre será amostrado pela linha de amostragem central. Variando a profundidade do prisma e mantendo o valor mínimo da anomalia em -100 nT, podemos testar o método de interpolação quanto à sua capacidade em recuperar os flancos (decaimento lateral em relação ao mínimo amostrado) da anomalia. Para prismas rasos, por exemplo, o decaimento será abrupto de tal forma que a linha de amostragem adjacente praticamente não registrará a curvatura do decaimento. À medida que o prisma for colocado em profundidades maiores, a anomalia ficará mais suave a tal ponto que a linha adjacente passará a identificar a curvatura do decaimento. Desta forma, diferentes condições de sub-amostragem nos flancos da anomalia puderam ser simuladas simplesmente fazendo variar a profundidade do topo do prisma de 5 km até 25 km em intervalos regulares iguais a 1 km.

As Figuras 21, 22, 23, e 24 representam os estágios do teste em que as profundidades do topo do prismas foram iguais a 5, 10, 15 e 20 km. Cada uma destas figuras contém cinco mapas de contorno de isovalores que são enumerados usando o número da figura acrescido de uma das cinco primeiras letras do alfabeto (por exemplo, Figura 22a, Figura 22b, etc). As extensões utilizando as letras *a*, *b* e *c* são usadas nos mapas de contorno da anomalia verdadeira, da anomalia interpolada

pelo método da camada equivalente (na profundidade de 15 km) e da anomalia interpolada pelo método da mínima curvatura, respectivamente. As extensões utilizando as letras *d* e *e* são usadas para os mapas de contorno dos resíduos devidos aos métodos da camada equivalente e da mínima curvatura, respectivamente.

As Figuras 25a e 25b mostram, respectivamente, a variação das normas quadrática e de Chebyshev dos vetores de resíduos devidos aos métodos da camada equivalente (linha sólida) e ao método da mínima curvatura (linha pontilhada) em função das profundidades do topo do prisma. Estas duas figuras possibilitam monitorar a variação dos resíduos nos estágios intermediários àqueles que geraram as figuras 21, 22, 23 e 24. Figuras como a 25 serão constantemente utilizadas neste Capítulo uma vez que elas sintetizam os resultados obtidos e evitam a apresentação de um número excessivo de mapas de contorno.

Analisando os resíduos nas Figuras 21e e 22e, verificamos que o método da mínima curvatura sempre ajusta exatamente os dados ao longo da linha de amostragem embora isto não garanta a recuperação dos valores verdadeiros da anomalia nos pontos localizados entre as linhas de amostragem. Por outro lado, o método da camada equivalente em condições de sub-amostragem não ajusta exatamente o mínimo da anomalia (Figuras 21d e 22d) mas, apesar disto, recupera melhor a anomalia verdadeira nos flancos. De um modo geral, estas figuras mostram a maior eficiência do método da camada equivalente sobre o método da mínima curvatura, principalmente nas situações de sub-amostragem mais severas. Em situações em que a anomalia foi bem amostrada, os dois métodos tiveram eficiências semelhantes.

Os 5 testes seguintes têm a mesma estrutura deste teste, diferenciando-se apenas pela adoção de outros modelos de fontes e, conseqüentemente, de outros padrões de anomalias sintéticas.

## **Teste 2- Eficiência dos métodos de interpolação em recuperar a amplitude máxima sub-amostrada de algumas anomalias magnéticas**

O modelo de fontes escolhido para testar esta condição de sub-amostragem foi constituído pelo mesmo prisma utilizado no Teste 1 centrado, porém, no meio de duas linhas de amostragem adjacentes e, não mais, sobre a linha de amostragem central. Como a amplitude extrema da

anomalia está localizada sobre o centro do prisma, nenhuma linha de amostragem registrará estes valores mas apenas os valores nos flancos da anomalia. Variando a profundidade do prisma e mantendo a amplitude mínima da anomalia em  $-100$  nT, podemos testar os métodos de interpolação quanto às suas capacidades em recuperar esta amplitude (que praticamente não foi amostrada) a partir da amostragem nos flancos das anomalias com diferentes curvaturas.

As Figuras 26, 27, 28, e 29 representam os estágios do teste em que as profundidades do topo do prismas foram iguais a 5, 10, 15 e 20 km. A Figura 30 mostra a variação das normas quadrática e de Chebyshev dos vetores de resíduos em função das profundidades do topo do prisma. Analisando estas figuras (especialmente as Figuras 26e e 27e) verificamos a incapacidade do método da mínima curvatura em recuperar a amplitude mínima da anomalia em situações de sub-amostragem. Esta incapacidade é consequência do próprio fundamento do método que, ao minimizar a curvatura, impede a recuperação da anomalia verdadeira nos lugares em que ela tiver curvatura acentuada. Por outro lado, as premissas inerentes ao método da camada equivalente conduzem a melhores resultados nestas situações. À medida que as anomalias ficaram mais suaves, as eficiências de ambos os métodos se tornaram semelhantes.

### **Teste 3- Eficiência dos métodos de interpolação em recuperar as feições lineares de algumas anomalias magnéticas**

Neste teste nós utilizaremos anomalias que tenham padrões alongados procurando simular, de forma bastante simplificada, as feições de anomalias magnéticas reais que são genericamente denominadas de lineamentos. Neste sentido, nós escolhemos como modelo gerador da anomalia magnética um prisma com secção horizontal retangular cujas larguras mínima e máxima foram, respectivamente, iguais a 4 e 20 km. A espessura do prisma foi igual a 8 km e a profundidade do topo variou entre 5 km e 25 km em intervalos regulares iguais a 1 km. As Figuras 31, 32, 33 e 34 representam os estágios do teste em que as profundidades do topo do prisma foram iguais a 5, 10, 15 e 20 km. A Figura 35 mostra a variação das normas quadrática e de Chebyshev dos vetores de resíduos em função das profundidades do topo do prisma.

Analisando estas figuras, constatamos a superioridade da interpolação produzida pelo

método da camada equivalente sobre o método da mínima curvatura conforme mostra a variação das normas dos resíduos resultantes da interpolação usando estes dois métodos. Além disto, podemos ver na Figuras 31b e 32b que a interpolação usando a camada equivalente melhor representou o lineamento da anomalia na região imediatamente acima do prisma, ao contrário do método da mínima curvatura (Figuras 31c e 32c) que criou falsas feições circulares, desconectadas entre si e centradas sobre as linhas de amostragem. Nas condições de sub-amostragem nenhum dos dois métodos recuperou exatamente as amplitudes verdadeiras da anomalia mas, apesar disto, o método da camada equivalente recuperou o padrão verdadeiro da anomalia enquanto que, o método da mínima curvatura, criou falsos padrões circulares não conseguindo reconstituir a feição alongada da anomalia sobre o prisma.

#### **Teste 4- Eficiência dos métodos de interpolação quando aplicados em dados adquiridos em diferentes alturas**

O método da mínima curvatura é, por excelência, um método de interpolação de dados bi-dimensionais. Ao ser aplicado na interpolação de dados de campo potencial é presumido, implicitamente, que a altitude de aquisição dos dados foi constante ou que o gradiente vertical da anomalia seja muito pequeno em relação à variação topográfica da área. Isto nem sempre é verdade (Cordell,1992), particularmente em levantamentos terrestres efetuados em regiões de relevo acidentado.

Para testar a eficiência em recuperar os valores verdadeiros da anomalia em dados adquiridos em diferentes níveis nós simulamos um levantamento sintético cujos dados foram medidos em dois níveis diferentes. Os dados na metade inferior da área que abrange o levantamento, foram "medidos" no nível de 500 metros acima do solo enquanto que os dados na metade superior foram "medidos" ao nível do solo. O modelo de fontes que gerou os dados sintéticos foi constituído por um prisma cúbico com arestas iguais a 8 km centrado exatamente no meio da linha de amostragem central (mesmo modelo do Teste 1). As Figuras 36, 37, 38 e 39 representam os estágios do teste em que as profundidades do topo do prismas foram iguais a 5, 10, 15 e 20 km. Os mapas nas Figuras 36a, 37a, 38a e 39a representam as anomalias verdadeiras calculadas no nível de 500 metros acima

do solo. São as anomalias neste nível que serviram de base para calcular os resíduos produzidos pelas anomalias interpoladas. Os valores interpolados pelo método da camada equivalente foram avaliados também ao nível de 500 metros. A Figura 40 mostra a variação das normas quadrática e de Chebyshev dos vetores de resíduos em função das profundidades do topo do prisma.

Como era de se esperar, o método da mínima curvatura ignorou completamente o desnível dos dados e falhou, sistematicamente, na recuperação dos valores verdadeiros da anomalia na metade superior da área amostrada. Esta falha foi mais acentuada para as anomalias devidas aos prismas rasos (anomalia com maior gradiente vertical) mas persistiu, também nas anomalias devidas aos prismas mais profundos. Ao contrário, o método da camada equivalente manteve, praticamente, a mesma eficiência obtida no Teste 1 no qual todos os dados foram "medidos" no nível constante de 500 metros.

#### **Teste 5- Eficiência da interpolação utilizando camadas equivalentes em diferentes profundidades**

A eficiência da interpolação usando o método da camada equivalente é dependente da profundidade em que a camada é colocada. Desta forma, os resultados obtidos nos Testes 1, 2, 3 e 4 (nos quais a camada foi colocada na profundidade de 15 km) podem ser alterados com a adoção de outra profundidade para a camada. Para visualizar esta dependência nós fizemos toda série de interpolações, que foi realizada utilizando a camada na profundidade de 15 km, utilizando duas outras camadas: a primeira na profundidade de 10 km e a outra na profundidade de 25 km. Assim nós obtivemos as Figuras 41 a 44 que contêm as normas quadrática e de Chebyshev dos vetores de resíduos relativos ao modelo de fontes dos Testes 1 a 4, respectivamente.

Analisando estas figuras notamos que elas são bastante parecidas indicando que as diferenças entre os modelos usados não foram as causas das diferentes recuperações da anomalia verdadeira no processo de interpolação. Se o modelo de fontes fosse a causa determinante, os padrões das figuras seriam diferentes entre si e não haveria a acentuada similaridade encontrada.

A tendência notada é que, as anomalias devidas aos prismas rasos são melhor recuperadas usando camadas equivalentes rasas (e *vice-versa*). O ajuste cruzado, ou seja, o ajuste de uma

anomalia devida a um prisma raso utilizando uma camada equivalente profunda (e *vice-versa*), conduz aos piores desempenhos do método. A camada na profundidade de 10 km, por exemplo, produziu, sistematicamente, melhores resultados que as outras duas camadas durante a interpolação das anomalias devidas a prismas rasos. O mesmo acontece nas interpolações usando a camada na profundidade de 25 km em anomalias devidas a prismas profundos.

### Teste 6- Capacidade de ajuste da camada equivalente

Este teste possui estrutura diferente dos testes anteriores e tem como objetivo investigar em que condições a camada equivalente consegue ajustar exatamente os dados amostrados. A motivação deste teste surgiu da constatação de que não é possível ajustar exatamente os valores amostrados de uma anomalia com gradiente elevado usando fontes equivalentes muito profundas e que o ajuste exato só é obtido se a profundidade das fontes equivalentes for apropriada ao gradiente da anomalia. Este teste procura mapear quais as situações em que o ajuste exato pode ser obtido no caso particular em que a anomalia gravimétrica for modelada por uma massa pontual e o padrão de amostragem, ilustrado na Figura 45, simular o padrão de alguns levantamentos gravimétricos marinhos.

Definida a posição da amostragem, nós colocaremos uma massa pontual localizada no centro do perfil  $AA'$  e na profundidade  $f = d$  calculando, a seguir, os valores da anomalia gravimétrica em cada uma das estações. Estes mesmos valores serão ajustados por camadas equivalentes em diferentes profundidades,  $c$ , tal que  $c = d, 2d, \dots, 25d$ . Cada ajuste é realizado por apenas uma camada equivalente aplicando as equações (80), (83) e (84). Para cada ajuste obtido, é calculado o vetor de resíduos ( $\mathbf{r}$ ) nos mesmos dados sintéticos, segundo

$$\mathbf{r} = \mathbf{d} - \mathbf{F}(\mathbf{F} + \lambda'\mathbf{I})^{-1}\mathbf{d} , \quad (123)$$

e também a sua correspondente norma quadrática. Feito isto, a profundidade da massa é aumentada e todo o procedimento descrito acima é repetido. Assim, cada par  $(c, f)$ , fica associado a um valor da norma que mede o ajuste realizado por uma camada equivalente (na profundidade  $c$ ) nos dados sintéticos gerados por uma massa pontual (na profundidade  $f$ ). A Figura 46, por exemplo, mostra a secção vertical ao longo do perfil  $AA'$  da Figura 45 e as posições relativas entre a massa pontual

(no caso particular em que  $f = 5d$ ) e as diferentes camadas equivalentes que ajustam a anomalia devida a esta fonte. Visando testar a capacidade da camada equivalente em representar diferentes gradientes, nós fixamos em 100 mGal o valor da anomalia,  $g_c$ , no centro do perfil  $AA'$ . Isto foi possível fazendo a massa pontual variar em função da profundidade  $f$  segundo

$$M = g_c \frac{f^2}{G} \quad (124)$$

sendo  $G$  a constante universal da atração gravitacional.

De posse das normas quadráticas dos vetores de resíduos para cada par  $(c, f)$ , nós elaboramos a Figura 48 que representa o contorno dos isovalores em função de  $c$  e de  $f$ . Esta figura separa a região onde a camada equivalente produz ajuste exato (área hachurada) da região onde o ajuste exato não é obtido.

Analisando a Figura 48, vemos que sempre seria possível ajustar exatamente todos os dados ao longo do perfil, bastando, para tanto, utilizar uma camada equivalente suficientemente rasa. Na prática, porém, esta profundidade não deve ser menor que duas vezes e meia o espaçamento entre as linhas  $D$  (Dampney, 1969) para não se acentuar o efeito do *aliasing* na direção perpendicular às linhas de amostragem. Por exemplo, para  $D$  igual a  $4,8d$  nós teríamos que colocar a mais rasa camada equivalente na profundidade de  $12d$ . Entretanto, como mostra a Figura 48, esta camada não conseguiria ajustar todas as anomalias que tivessem gradientes iguais aos gradientes produzidos por massas pontuais  $M$  (com  $M = g_c f^2 / G$ ) localizadas em profundidades menores que  $10d$ . Para ajustar estes gradientes seria necessário colocar a camada numa profundidade menor que  $2,5D$  aumentando, em contra-partida, o *aliasing* na direção perpendicular às linhas de amostragem. De um modo geral, todas as vezes em que a camada equivalente for incapaz de ajustar exatamente os dados ao longo de um perfil, nós podemos concluir que a anomalia foi sub-amostrada neste levantamento e que, a distância  $D$  entre-linhas, foi muito grande em relação à profundidade das fontes.

## 4- APLICAÇÕES EM DADOS REAIS

Neste capítulo, nós aplicaremos os algoritmos DOE e DOEG na interpolação de dados gravimétricos marinhos do Levantamento Equant-2 e de dados aeromagnéticos do Levantamento Carauari-Norte.

A área do Levantamento Equant-2 está situada na foz do rio Amazonas na costa norte do Brasil. Os dados utilizados são constituídos por 19047 valores da anomalia ar-livre cujas localizações geográficas são mostradas na Figura 47. A distância média entre as amostras ao longo do traço do navio é de 1 km enquanto que a distância média entre dois traços adjacentes é igual a 18,74 km.

O Levantamento Carauari-Norte foi executado em 1981 pela empresa LASA S.A. como resultado de contrato firmado com o Departamento de Exploração da PETROBRAS (DEPEX). A Figura 49 mostra a disposição espacial das linhas de vôo bem como a localização geográfica do levantamento. O levantamento possui 487090 dados num total de 258 linhas de vôo (209 de produção e 49 de amarração) totalizando 31469 quilômetros voados em 136 horas de vôo. Os espaçamentos médios ao longo das linhas de vôo, entre as linhas de vôo e entre as linhas de amarração são, respectivamente, iguais a 60 metros, 2500 metros e 7500 metros. A altura de vôo em relação à topografia, embora planejada ser constante e igual a 800 metros, varia entre os extremos mínimo e máximo de 681 e 909 metros, respectivamente. A empresa contratada forneceu os dados nivelados e corrigidos da variação diurna. O campo geomagnético, na época do levantamento, tinha inclinação de -7 graus e declinação de 17 graus.

### **Aplicação 1- Ajuste de um perfil de anomalia ar-livre usando camadas equivalentes com diferentes profundidades**

Esta aplicação ilustra a limitação, já discutida no capítulo anterior, que a camada equivalente possui em representar os pequenos comprimentos de onda que são bem amostrados ao longo do traço do navio, mas sub-amostrados na direção ortogonal a este traço. Os 185 valores da anomalia ar-livre utilizados nesta aplicação pertencem ao perfil do Levantamento Equant-2 que é assinalado por AA' na Figura 50. Estes dados foram ajustados de cinco maneiras diferentes, cada uma delas associada a uma camada equivalente a uma profundidade específica. As profundidades escolhidas

foram iguais a 5, 10, 15, 20 e 25 km que produziram os diferentes ajustes mostrado na Figura 51. Como vemos, o ajuste é cada vez pior à medida que a profundidade da camada equivalente aumenta, fornecendo um péssimo ajuste quando ela está a profundidade igual a 25 km (Figura 51e).

Se colocássemos a camada equivalente na profundidade igual a 46,8 km (aproximadamente duas vezes e meia a distância entre as linhas), o ajuste obtido seria segundo o critério dos mínimos quadrados e, os dados ao longo do traço do navio, não seriam ajustados exatamente. O ajuste exato seria obtido utilizando uma camada equivalente mais rasa, mas, conforme mostrado por Dampney(1969), se a profundidade for menor que duas vezes e meia a maior distância entre as estações, o efeito do *aliasing* é acentuado. Nos levantamentos com sub-amostragem existe, então, um compromisso entre o ajuste exato dos dados e a intensidade do *aliasing* na direção perpendicular à linha de amostragem. Sob este ponto de vista, a incapacidade da camada equivalente em ajustar exatamente os dados, pode ser interpretada como sendo a consequência da sub-amostragem existente entre os traços do navio pois, se esta distância fosse menor, a camada equivalente poderia ser mais rasa e o ajuste exato poderia ser obtido. As interpolações realizadas nos dados do Levantamento Equant-2, que serão apresentadas a seguir, colocam a camada equivalente nas profundidades de 10 e 20 km possibilitando bons ajustes ao longo dos traços, embora os efeitos do *aliasing* já se tornem bastante evidenciados (vide comparação entre as malhas interpoladas colocando a camada equivalente nas profundidades de 20 e 10 km nas Figuras 55 e 58, respectivamente).

### Aplicação 2- Ajuste dos dados aeromagnéticos do Perfil número 68 do Levantamento Carauari-Norte

Esta aplicação ilustra o desempenho do algoritmo DOE nos 1180 dados magnéticos amostrados ao longo da linha de vôo de número 68 cuja posição é assinalada na Figura 49. O perfil da anomalia magnética ao longo desta linha de vôo é mostrado na Figura 52a. Nós aplicamos o algoritmo DOE (implementação DOE2) usando  $\lambda = 0,01$ ,  $C = 6$  nT e colocando a camada equivalente na profundidade de 6,25 km (duas vezes e meia a distância média entre as linhas de vôo). A Figura 52b mostra as 38 observações equivalentes determinadas por DOE e os resíduos entre a curva que as ajusta e as demais 1142 observações redundantes. As normas quadrática e de Chebyshev do vetor de resíduos foram respectivamente iguais a 57,23 nT e 5,7 nT. Este ajuste está dentro

da ordem de grandeza do ruído que contamina as observações (observe a oscilação da anomalia). Como vemos, esta anomalia é perfeitamente ajustada usando profundidade da camada equivalente compatível com a distância entre as linhas de vôo que, ao menos para a anomalia deste perfil, a subamostragem lateral não foi tão significativa. Neste sentido, esta aplicação é um contra-exemplo da Aplicação 1.

### **Aplicação 3- Interpolação utilizando o algoritmo DOE em parte dos dados do Levantamento Equant-2 colocando a camada equivalente na profundidade de 20 km**

Nesta aplicação do algoritmo DOE nós utilizamos os dados do Levantamento Equant-2 localizados dentro de uma área de tamanho de  $2^{\circ} \times 2^{\circ}$  cujo mapa é mostrado na Figura 53. O número de valores da anomalia ar-livre dentro desta área é igual a 3137. Nós aplicamos o algoritmo DOE colocando a camada equivalente na profundidade igual a 20 km usando  $\lambda = 0.01$  e  $C = 3,0$  mGal. O número de observações equivalentes identificadas foi igual a 311.

A partir da superfície interpoladora (que ajustou as 311 observações equivalentes), nós calculamos o vetor de resíduos em todos os 3137 dados originais para verificar a qualidade do ajuste. A normas absoluta e quadrática deste vetor foram iguais a 1,365 e 97,18 mGal, respectivamente. O maior resíduo, igual a 7,9 mGal, foi justamente em uma observação equivalente indicando que a camada equivalente na profundidade de 20 km não conseguiu ajustar exatamente todos os valores da anomalia ar-livre. O maior resíduo nas observações redundantes foi igual a 2,9 mGal. A Tabela 1 mostra o número de elementos do vetor de resíduos que se encontram dentro dos intervalos de variação especificados. Como vemos, mais de 93% dos resíduos são menores que 3 mGal, mostrando que o ajuste foi muito bom apesar dos valores elevados em alguns pontos isolados. O tempo de CPU utilizado para identificar as 311 observações equivalentes foi igual a 44 minutos.

O mapa de contorno de isovalores da anomalia ar-livre interpolada é mostrado na Figura 54. A Figura 55 mostra a sobreposição do mapa de contorno com os traços do navio mostrando que as curvas de contorno não são tão distorcidas ao longo dos traços do navio. Sempre que esta distorção acontece, deve-se duvidar da qualidade dos dados ou da eficiência do método de interpolação (ou ambos) uma vez que não é racionalmente explicável que as anomalias de campo

Tabela 1: Classificação dos resíduos obtidos por avaliação da superfície interpoladora nos dados usados na Aplicação 3.

Intervalo de variação do resíduo (mGal)	Número de elementos no intervalo	Percentual no intervalo
0-1	1343	42,8
1-2	1042	33,2
2-3	556	17,7
3-4	120	3,9
4-5	48	1,6
5-6	17	0,6
6-7	8	0,3
> 7	3	0,0

potencial na natureza tenham que se apresentar distorcidas justamente nos lugares em que foram medidas. A Figura 56 mostra as posições das 311 observações equivalentes sobrepostas ao mapa de contorno. Observe que as observações equivalentes se concentram nos locais onde a anomalia sofre inflexões mais pronunciadas. Esta tendência também ocorre nos lugares onde a anomalia possui feições que a camada equivalente não consegue ajustar. Feições como estas podem ser devidas a ruído, a problemas na amarração nos traços que se cruzam ou a gradientes elevados provocados pela presença de fontes muito rasas em relação à profundidade da camada equivalente.

#### **Aplicação 4- Interpolação utilizando o algoritmo DOE em parte dos dados do Levantamento Equant-2 colocando a camada equivalente na profundidade de 10 km**

Esta aplicação foi realizada na mesma área descrita na aplicação anterior usando também os mesmos valores para os parâmetros  $\lambda$  e  $C$  (0,01 e 3,0 mGal, respectivamente). A única diferença é que, nesta aplicação, a camada equivalente foi colocada na profundidade de 10 km.

Nestas condições, o algoritmo DOE (implementação DOE2) identificou 294 observações equivalentes dentre as 3137 observações originais. O vetor de resíduos tem a norma absoluta igual 0,897 mGal e a norma quadrática igual a 65,84 mGal. O maior resíduo nas observações equivalentes foi igual a 5.4 mGal enquanto que o maior resíduo nas observações redundantes foi igual a 2,9

Tabela 2: Classificação dos resíduos obtidos por avaliação da superfície interpoladora nos dados usados na Aplicação 4.

Intervalo de variação do resíduo (mGal)	Número de elementos no intervalo	Percentual no intervalo
0-1	2002	63,8
1-2	845	26,9
2-3	270	8,6
3-4	15	0,5
4-5	3	0.0
> 5	2	0.0

mGal. A Tabela 2 mostra a contagem dos elementos do vetor de resíduos que se encontram dentro de cada intervalo de variação especificado. Mais de 99% dos resíduos são menores que o valor pré-estabelecido para  $C$ . O tempo de CPU utilizado nesta aplicação foi igual a 39 minutos.

Como vemos, a camada equivalente na profundidade de 10 km fornece um melhor ajuste do que aquele produzido pela camada na profundidade de 20 km. Apesar disso, a anomalia interpolada pela camada equivalente mais rasá, mostrada na Figura 57, se apresenta mais distorcida ao longo dos traços do navio como mostra a Figura 58. Note também a presença de feições circulares desconectadas entre si e centradas sobre os traços de amostragem especialmente nas posições assinaladas por A e B nesta Figura. Estas feições serão cada vez mais acentuadas à medida que a camada equivalente for colocada em profundidades menores. Note que na interpolação produzida pela camada equivalente na profundidade de 20 km (Figura 54) elas não estão tão evidenciadas. A Figura 59 mostra as posições das 294 observações equivalentes sobrepostas ao mapa de contorno da anomalia interpolada. A Figura 60 mostra o mapa de contorno dos isovalores obtido através da interpolação utilizando o método da mínima curvatura que, à semelhança do mapa da Figura 57, apresenta distorção ao longo dos traços do navio. O tempo de CPU para esta interpolação foi igual a dois minutos e meio.

#### Aplicação 5- Interpolação utilizando o algoritmo DOE em parte dos dados do Levantamento Carauari-Norte

Esta aplicação do algoritmo DOE (implementação DOE2) foi realizada usando apenas a parte dos dados que está dentro de uma área com tamanho de  $30 \times 30$  minutos de grau localizada no canto sudoeste do Levantamento Carauari-Norte. A disposição das linhas de vôo nesta área é mostrada na Figura 61. O número total de dados é igual a 24709.

Antes da aplicação do algoritmo DOE, nós decimamos os 24709 dados com passo igual a 5 o que forneceu 4941 dados. Isto permitiu que o tempo de computação fosse diminuído pois, o número de resíduos calculados, tornou-se cinco vezes menor. A camada equivalente foi colocada na profundidade de 6,25 km (duas vezes e meia a distância média entre as linhas de vôo). O valor de  $\lambda$  foi igual a 0,01 e o valor de  $C$  foi igual a 9 nT. O valor de corte  $C$  foi escolhido propositadamente alto devido ao elevado nível de ruído que contamina a anomalia magnética em algumas linhas de vôo como, por exemplo, nas linhas 7, 13, 28 e 29 cujos perfis são mostrados na Figura 62.

Dentre as 4941 observações, DOE determinou apenas 299 observações equivalentes. O maior resíduo nas observações equivalentes foi igual a 19 nT indicando que a camada equivalente nesta profundidade, não consegue ajustar exatamente os dados ao longo de algumas linhas de vôo nesta região do levantamento. O maior resíduo nas observações redundantes foi igual a 9 nT. Calculando o vetor de resíduos nas 24709 observações originais, obtivemos suas normas quadrática e de Chebyshev respectivamente iguais a 580,66 nT e 22,8 nT. O elevado valor para a norma de Chebyshev pode dar a falsa idéia de que o ajuste não foi satisfatório. A Tabela 3 mostra o número de elementos do vetor de resíduos que se encontram dentro dos intervalos de variação especificados. Como vemos, mais de 98% dos dados tiveram resíduos menores que  $C$  tornando evidente a qualidade do ajuste obtido pelo algoritmo DOE. O tempo de CPU gasto na determinação das observações equivalentes foi igual a uma hora e 56 minutos e, em grande parte, foi conseqüência da enorme quantidade de avaliações de resíduos, ainda grande, mesmo após a decimação.

A Figura 63 mostra o mapa de contorno dos isovalores da malha interpolada. Esta malha foi interpolada na altura de 800 metros pois a altura das posições de medidas varia de 712 a 883 metros acima do nível do mar. A Figura 64 mostra o mesmo mapa de contorno da Figura 63, sobreposto ao mapa que mostra a distribuição espacial das observações equivalentes. A Figura 65 mostra o mapa de contorno dos isovalores interpolados pelo método da mínima curvatura. O tempo de CPU para esta interpolação foi igual a 3 minutos.

Tabela 3: Classificação dos resíduos obtidos por avaliação da superfície interpoladora nos dados usados na Aplicação 5.

Intervalo de variação do resíduo (nT)	Número de elementos no intervalo	Percentual no intervalo
0-3	15038	60,9
3-6	7297	29,5
6-9	2033	8,2
9-12	204	0,8
12-15	59	0,2
15-18	46	0,2
18-21	30	0,1
> 21	2	0,0

### Aplicação 6- Interpolação local dos dados do Levantamento Carauari-Norte usando o algoritmo DOEG

Para evitar o excessivo número de cálculos de resíduos durante a aplicação do algoritmo DOEG, nós fizemos a decimação (no passo 4) dos 365319 dados originais, amostrados ao longo das linhas de produção do Levantamento Carauari-Norte. Esta decimação forneceu 91329 dados, entre os quais, as observações equivalentes foram identificadas. A localização dos dados decimados é mostrada na Figura 66.

Inicialmente, a área do levantamento foi dividida em celas quadráticas com arestas iguais a 5,5 km, pois com este tamanho, pelo menos parte de duas linhas de vôo adjacentes (que são equi-espaçadas por 2,5 km) ficaram dentro de uma mesma cela. A Figura 67 mostra o reticulado que define o conjunto de 2046 celas sendo, 33 celas na direção Norte-Sul e 62 celas na direção Leste-Oeste. Em seguida, os 91329 dados foram re-enumerados de tal forma que, todos os dados dentro de uma mesma cela, ficaram seqüencialmente enumerados. Isto possibilitou subdividir o sistema  $\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{p}$  (passo 2 do algoritmo DOEG) em 2046 sistemas lineares  $\mathbf{d}^i = \mathbf{G}^i\mathbf{p}$  de tal forma que, cada vetor  $\mathbf{d}^i$ , passou a ter apenas os dados localizados no interior da  $i$ -ésima cela. Posteriormente, as observações equivalentes foram identificadas em cada um dos 2046 sistemas lineares, usando para isto uma camada equivalente na profundidade de 6,25 km e fazendo os parâmetros  $C$  e  $\lambda$ , respectivamente, iguais a 6 nT e 0,01. Dentre as 91329 observações decimadas, DOEG determinou 16929 observações equivalentes gastando nesta operação 5 minutos de CPU. O número máximo de

observações dentro de uma janela foi igual a 34. O maior resíduo em uma observação equivalente foi igual a 28,9 nT e o maior resíduo em uma observação redundante foi igual a 5,9 nT. A Figura 68 mostra o mapa das posições das observações equivalentes sobreposto ao mapa das celas quadráticas nas quais a área do levantamento foi subdividida.

O número de observações equivalentes determinadas por DOEG é ainda muito elevado e impede a interpolação na forma global. Por esta razão, nós fizemos a interpolação na forma local usando apenas as observações equivalentes identificadas. A interpolação foi realizada de cela em cela, aplicando em cada uma delas os seguintes procedimentos:

- a) construção de uma janela quadrática (centrada na cela em questão) composta por nove celas,
- b) obtenção da superfície interpoladora que ajusta todas as observações equivalentes dentro da janela,
- c) interpolação dos valores da anomalia nos pontos sobre a malha regular localizados no interior da cela central da janela.

Dentro da cela central, 36 valores foram interpolados sobre uma malha  $6 \times 6$  com espaçamentos iguais a 1,1 km tanto na direção Norte-Sul como da direção Leste-Oeste. Este procedimento produziu os valores interpolados sobre a malha regular cujo mapa de contorno dos isovalores (com níveis equi-espaçados por 5 nT) é mostrado na Figura 69. A Figura 70 mostra a sobreposição do mapa de contorno da Figura 69 com o mapa das posições das observações equivalentes. O tempo de CPU gasto na interpolação foi igual a 24 minutos.

Usando as observações equivalentes, nós calculamos os resíduos (entre a superfície interpoladora que ajusta as observações equivalentes e os valores amostrados) nos 182659 valores, obtidos por decimação dos dados originais no passo 2, para verificar a qualidade do ajuste obtido. Este cálculo foi realizado do mesmo modo que a interpolação foi realizada. Inicialmente, os dados foram re-enumerados de tal forma que, aqueles localizados dentro de uma mesma cela, ficaram sequencialmente enumerados. Em seguida, para cada uma das celas, foi construída uma superfície interpoladora que ajustou tanto as observações equivalentes dentro da cela como também aquelas dentro das oito celas vizinhas. Finalmente, usando esta superfície interpoladora, foram calculados os resíduos nos dados (decimados no passo 2) que se encontravam dentro da cela central. A Tabela 4 mostra o número de elementos do vetor de resíduos que se encontram dentro dos intervalos de

Tabela 4: Classificação dos resíduos obtidos por avaliação da superfície interpoladora nos dados usados na Aplicação 6.

Intervalo de variação do resíduo (nT)	Número de residuais no intervalo	Percentual no intervalo
0-4	150130	82,2
4-8	27585	15,1
8-12	3475	1,9
12-16	735	0,4
16-20	368	0,2
20-24	269	0,1
> 24	97	-

Tabela 5: Ordens dos sistemas lineares resolvidos durante a interpolação na forma local usando as observações equivalentes identificadas pelo algoritmo DOEg na Aplicação 6.

Ordem da matriz	Número de sistemas resolvidos	Percentual no intervalo
1-50	440	21,5
50-100	1217	59,5
100-150	362	17,7
150-200	27	1,3

variação especificados.

Para a interpolação dentro de cada cela, um sistema linear teve que ser resolvido totalizando, assim, 2046 sistemas lineares resolvidos. A Tabela 5 mostra o número de sistemas resolvidos de acordo com a ordem da matriz associada. Observe que 81% dos sistemas resolvidos possuem ordem menor do que 100 e que "apenas" 19% deles possuem ordens entre 100 e 200. Por outro lado, se aplicássemos diretamente o processamento por janela nos 91329 dados sem utilizar o algoritmo DOEg, os sistemas a serem resolvidos teriam ordens dadas pela Tabela 6. Como vemos, mais de 89% dos sistemas que deveriam ser resolvidos teriam ordem maior que 350. O tempo computacional para resolver todos os sistemas inviabilizaria a interpolação na forma local a menos que decimássemos os dados em passos maiores do que 4 o que aumentaria substancialmente o *aliasing* na amostragem. A comparação entre as Tabelas 5 e 6, mostra a utilidade da prévia aplicação do algoritmo DOEg na interpolação segundo a forma local. A Figura 71 mostra o mapa de contorno

Tabela 6: Ordens dos sistemas lineares que deveriam ser resolvidos durante a interpolação na forma local se fossem usadas todas as 91329 observações da Aplicação 6.

Ordem da matriz	Número de sistemas que seriam resolvidos	Percentual no intervalo
1-50	0	-
50-100	4	0,2
100-150	55	2,7
150-200	50	2,4
200-250	56	2,7
250-300	48	2,3
300-350	87	4,6
350-400	551	26,9
400-450	790	38,6
450-500	388	19,0
> 500	17	0,8

de isovalores obtido através da interpolação utilizando o método da mínima curvatura. O tempo de CPU (igual a 30 minutos) foi em grande parte devido á paginação pois a interpolação foi executada no mesmo espaço de memória (*working set*) em que foi realizada a interpolação utilizando a camada equivalente.

### Aplicação 7- Interpolação local dos dados do Levantamento Equant-2 usando o algoritmo DOEg

A Figura 72 mostra os 19047 dados do Levantamento Equant-2 sobrepostos às 638 celas quadráticas, cada uma com arestas iguais a 40 km, nas quais a área do levantamento foi subdividida. Os números de celas na direção Norte-Sul e Leste-Oeste são iguais a 22 e 29, respectivamente.

Nós aplicamos DOEg em todos os dados amostrados. Inicialmente (no passo 1 do algoritmo DOEg), estes dados foram re-enumerados de tal forma que, todos aqueles dentro de uma mesma cela, ficaram com numeração seqüencial. Em seguida (passo 2 do algoritmo DOEg) foi realizada a identificação das observações equivalentes dentro de cada uma das celas. Nesta identificação, a camada equivalente foi colocada na profundidade de 15 km e os parâmetros  $C$  e  $\lambda$  foram respectivamente iguais a 2,5 mGal e 0,01.

Dentre as 19047 observações originais, DOEg determinou 3130 observações equivalentes

Tabela 7: Classificação dos resíduos obtidos por avaliação da superfície interpoladora nos 19047 dados do usados na Aplicação 7.

Intervalo de variação do resíduo (mGal)	Número de elementos no intervalo	Percentual no intervalo
0-1	10189	53,5
1-2	5655	29,7
2-3	2278	12,0
3-4	615	3,2
4-5	188	1,0
5-6	81	0,5
6-7	22	0,1
7-8	10	-
> 8	9	-

gastando nesta operação 3 minutos de CPU. O maior resíduo em uma observação equivalente foi igual a 8,6 mGal e o maior resíduo em uma observação redundante foi igual a 2,4 mGal. A Figura 73 mostra as posições das 3130 observações equivalentes sobrepostas ao reticulado no qual a área do levantamento foi subdividida.

A interpolação local foi realizada, em seguida, utilizando apenas as 3130 observações equivalentes. Em cada uma das 638 celas foi construída uma superfície interpoladora que ajustou todas as observações equivalentes localizadas dentro desta cela (cela central) como também aquelas dentro das oito celas vizinhas. A partir da superfície interpoladora, foram calculados os valores da anomalia nos pontos localizados sobre os nós da malha regular no interior da cela central. Dentro da cela central foram interpolados 121 valores ( $11 \times 11$ ) igualmente espaçados. O tempo de CPU gasto na interpolação foi igual a 7 minutos. A Figura 74 mostra o mapa de contorno dos isovalores da anomalia ar-livre interpolada. A Figura 75 mostra a sobreposição deste mapa de contorno com o mapa que mostra o posicionamento das observações equivalentes. A contagem nos resíduos nos 19047 dados é fornecida na Tabela 7.

Dado o contorno irregular da área do levantamento, apenas 327 celas contiveram dados e, conseqüentemente 327 sistemas lineares foram resolvidos durante a obtenção da malha interpolada. O número de sistemas lineares classificados segundo a sua ordem é dado na Tabela 8. Se aplicássemos diretamente o processamento por janela nos 19047 dados, sem a prévia aplicação do

Tabela 8: Ordens dos sistemas lineares resolvidos durante a interpolação na forma local usando as 3130 observações equivalentes identificadas pelo algoritmo DOEg Aplicação 7.

Ordem do sistema	Número de sistemas resolvidos	Percentual no intervalo
1-50	131	40,0
50-100	60	18,3
100-150	74	22,6
150-200	42	12,9
200-250	18	5,5
250-300	2	0,6

Tabela 9: Ordens dos sistemas lineares que deveriam ser resolvidos durante a interpolação na forma local se fossem usadas as 19047 observações do Levantamento Equant-2.

Ordem do sistema	Número de sistemas resolvidos	Percentual no intervalo
1-50	35	10,7
50-100	21	6,4
100-150	31	9,5
150-200	9	2,8
200-250	10	3,0
250-300	11	3,4
300-1150	210	64,2

algoritmo DOEg, os sistemas a serem resolvidos teriam ordens dadas pela Tabela 9. Como vemos, mais que 67% dos sistemas que seriam resolvidos teriam ordens maiores do que 300 o que inviabilizaria a interpolação na forma local mostrando, mais uma vez, a utilidade do algoritmo DOEg como etapa precursora da interpolação na forma local. A Figura 76 mostra o mapa de contorno dos isovalores obtido através da interpolação utilizando o método da mínima curvatura. O tempo de CPU (igual a 15 minutos) foi em grande parte devido à paginação pois a interpolação foi executada no mesmo espaço de memória (*working set*) em que foi realizada a interpolação utilizando a camada equivalente.

## 5- CONCLUSÕES E CONTINUIDADE DO TRABALHO

### 5.1 CONCLUSÕES

Tradicionalmente, a técnica da camada equivalente tem tido aplicação restrita aos levantamentos com poucos dados pois ela exige a solução de um problema de mínimos quadrados com ordem igual ao número de dados. O uso da técnica da camada equivalente na interpolação de dados de campo potencial permite introduzir a informação de que a anomalia interpolada é uma função harmônica e não apenas uma função "suave" como exigem os métodos de interpolação correntemente utilizados. O desenvolvimento do conceito de observações equivalentes e do método EGTG, realizados neste trabalho, permitiu que a aplicação da técnica fosse estendida aos levantamentos com grande número de dados e, conseqüentemente, viabilizou a nossa proposta inicial de utilizar a camada equivalente na interpolação de dados de campo potencial.

O conceito de observações equivalentes possibilitou, ainda, a resolução de problemas de mínimos quadrados com grande número de dados e com matrizes de sensibilidade cheias e não estruturadas (como são as matrizes do problema de camada equivalente). Basicamente, este conceito consiste em ajustar todos os dados amostrados utilizando apenas uma parte destes dados que são denominados *observações equivalentes*. As observações não classificadas como equivalentes são denominadas *observações redundantes* e são reproduzidas a partir da solução de mínimos quadrados obtida utilizando apenas as observações equivalentes. Assim, o número de operações e requerimento em memória exigidos para resolver o problema mínimos quadrados tornam-se proporcionais ao número de observações equivalentes e não mais ao número de observações originais. O conceito de observações equivalentes é genérico e pode ser aplicado a qualquer problema de ajuste segundo o critério dos mínimos quadrados.

A otimização das avaliações de produtos internos foi realizada aplicando o método EGTG. Este método consiste, primeiramente, em interpretar um produto interno com sendo uma integração discreta de uma integral analítica conhecida e em substituir, em seguida, a avaliação da integral discreta pela avaliação da integração analítica. Sua aplicação é recomendável quando a avaliação da integral analítica exigir menor quantidade de cálculos do que a exigida para avaliar a integral discreta.

Dois algoritmos foram propostos para determinar as observações equivalentes associadas a um sistema linear. O primeiro algoritmo, denominado DOE(determinação das observações equivalentes), determina as observações equivalentes de uma-em-uma enquanto que, o segundo, denominado DOEg, as determina de grupo-em-grupo. O algoritmo DOEg pode ser aplicado em qualquer problema de ajuste segundo o critério dos mínimos quadrados, ao contrário do algoritmo DOE que pode ser aplicado apenas aos problemas cujo número de observações equivalentes não seja grande o suficiente a ponto de inviabilizar a solução de um problema de mínimos quadrados com número de dados iguais ao número de observações equivalentes. Na interpolação, o algoritmo DOE fornece uma superfície interpoladora que ajusta todos os dados, permitindo a interpolação na forma global. O algoritmo DOEg, por outro lado, otimiza a interpolação na forma local.

A implementação computacional do algoritmo DOE deve ser realizada usando relações matriciais que atualizem a solução de mínimos quadrados toda vez que uma nova observação (linha da matriz) for processada. Nós fizemos duas implementações deste algoritmo que são apropriadas para trabalhar com matrizes cheias e não estruturadas. A primeira implementação, denominada DOE1, é obtida através da modificação do algoritmo ART(Tarantola,1987) e a segunda, denominada DOE2, é obtida utilizando a propriedade de atualização da decomposição de Cholesky e o método EGTG. Por exemplo, para um problema de mínimos quadrados com números de dados e parâmetros respectivamente iguais a 1000 e 500 temos que o algoritmo DOE será mais eficiente do que o algoritmo ART (que usa todos os dados ) se o número de observações equivalentes for menor que 450. O desempenho da implementação DOE1 é alterado caso o número de parâmetros seja mudado pois a avaliação dos produtos internos é sensível ao número de parâmetros. O desempenho da implementação DOE2, entretanto, permanece inalterado já que o número de operações envolvidas no cálculo do produto interno utilizando o método EGTG não depende do número de parâmetros.

Os testes comparativos (utilizando dados sintéticos) da eficiência na interpolação entre os métodos da camada equivalente e da mínima curvatura mostraram, sistematicamente, a superioridade do primeiro método sobre o segundo. Particularmente em situações de sub-amostragem, o método da mínima curvatura não recuperou o valor verdadeiro da anomalia nos lugares em que ela apresentava curvaturas mais pronunciadas. Para dados adquiridos em níveis diferentes o método da mínima curvatura apresentou o seu pior desempenho ao contrário do método da camada equivalente

que realizou, com sucesso, a interpolação de forma simultânea com o nivelamento (interpolação em três dimensões).

A qualidade da interpolação utilizando a técnica da camada equivalente depende da profundidade em que a camada equivalente é colocada e do gradiente da anomalia amostrada. Anomalias com gradientes elevados são melhor recuperadas utilizando uma camada equivalente rasa e as anomalias suaves são melhor recuperadas utilizando uma camada equivalente profunda.

A interpolação utilizando a técnica da camada equivalente foi realizada com sucesso em dados aeromagnéticos do Levantamento Carauari-Norte e em dados gravimétricos marinhos do Levantamento Equant-2. Aplicando o algoritmo DOE, por exemplo, foi possível resolver problemas de mínimos quadrados com 3135 dados de anomalia ar-livre e com 4941 dados de anomalia magnética de campo total. Os números de observações equivalentes em cada caso foram iguais a 294 e 299, respectivamente. Note que a resolução destes problemas teria sido impossível sem o conceito de observações equivalentes.

A proporção entre o tempo de CPU (rodando os programas no mesmo espaço de memória) gasto pelo método da mínima curvatura e pela camada equivalente (interpolação global) foi de 1:31. A proporção entre os métodos da mínima curvatura e da camada equivalente (interpolação local) foi, praticamente, de 1:1. Considerando estas proporções e a eficiência da técnica da camada equivalente na interpolação de dados de campo potencial (conforme mostrado nos testes em dados sintéticos) nós sugerimos a utilização mais intensiva desta técnica na interpolação e tratamento de dados gravimétricos e magnéticos.

## 5.2 CONTINUIDADE DO TRABALHO

É recomendável que os procedimentos desenvolvidos no Capítulo 3, que testaram comparativamente os métodos da camada equivalente e da mínima curvatura, sejam aplicados para testar outros métodos de interpolação utilizados na exploração geofísica tais como os métodos das médias ponderadas pelo inverso da distância (La Porte,1962; Shepard,1969), ajustes por polinômios de baixo grau (Braille,1980), *splines* quasi-bidimensionais (Bhattacharyya,1969; Hessing et al.,1972; Rasmussen & Sharma,1979) e *splines* bidimensionais (Enriquez et al.,1983). Embora teoricamente

simples, esta tarefa é muito trabalhosa sob o ponto de vista prático e requer um levantamento específico para ser realizada.

O método EGTG torna as relações matriciais da interpolação utilizando a camada equivalente iguais às relações matriciais que ocorrem nos problemas de colocação (Moritz 1977) sendo que, neste caso, a integração analítica tem o significado de função covariância. Isto permite a aplicação do algoritmo DOE2 na resolução dos problemas de colocação simplesmente mudando a subrotina que avalia a função covariância. Desta forma, o conceito de observações equivalentes poderá ser útil na implementação computacional dos problemas de colocação quando aplicados na representação do potencial gravimétrico anômalo da Terra.

Outros algoritmos de busca poderão ser propostos para identificar as observações equivalentes. A posterior comparação da rapidez entre as diferentes estratégias de busca é também uma continuidade natural deste trabalho.

O algoritmo DOE é um novo tipo de algoritmo ART, diferindo deles por escolher, em cada iteração, qual a linha da matriz de sensibilidade será processada. Nos algoritmos ART as linhas são processadas sequencialmente segundo a sua ordem de enumeração. É possível, então, aplicar o algoritmo DOE em todos os problemas (tomografia acústica, por exemplo) em que os algoritmos do tipo ART são aplicados fazendo pequenas mudanças no programa fonte. O algoritmo DOE será mais rápido que o ART sempre que o número de observações equivalentes for suficientemente pequeno a ponto de compensar o cálculos de resíduos em cada uma das iterações.

Em problemas de tomografia acústica, o conceito de observações equivalentes pode estar relacionado com a complexidade do meio. Por exemplo, se o sistema linear em um problema de tomografia tiver apenas uma observação equivalente, ou seja, a solução do problema inverso é obtida usando somente uma observação, a conclusão imediata é que o meio é homogêneo a despeito do grande volume de dados medidos. De um modo geral, quanto mais complexo for o meio, maior será o número de observações equivalentes e vice-versa. As observações equivalentes escolhidas deverão ser tais que as trajetórias dos raios correspondentes fiquem concentrados sobre a região do substrato que apresentar maior complexidade na distribuição de velocidades.

Ainda nos problemas de tomografia acústica, o algoritmo DOEG poderia ser aplicado de tal

forma que cada um dos subsistemas (em que o sistema linear original é dividido) ficasse relacionado ao conjunto de geofones que estão associados ao mesmo tiro. Desta forma, a identificação dos *raios equivalentes* seria feita no interior de cada feixe de raios.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Beck, J. V. & Arnold, K. J. 1977. Parameter estimation in engineering and science. John Wiley & Sons, Inc. 501 pag.
- Bhattacharyya, B. K. 1969. Bicubic spline interpolation as a method for treatment of potential field data. *Geophysics*, 34(3):402-423.
- Bhattacharyya, B. K. 1980. A generalized multibody model for inversion of magnetic anomalies. *Geophysics*, 45(2):255-270.
- Bott, M. H. P. 1967. Solution of the linear inverse problem in magnetic interpretation with application to oceanic magnetic anomalies. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 13(1-3):313-323.
- Bott, M. H. P. & Ingles, A. 1972. Matrix method for joint interpretation of two-dimensional gravity and magnetic anomalies with application to the Iceland-Faeroe Ridge. *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, 30(1):55-67.
- Braile, L. W. 1978. Comparison of four random to grid methods. *Computer & Geosciences*, 4(4):341-349.
- Briggs, I. C. 1974. Machine contouring using minimum curvature. *Geophysics*, 39(1):39-48.
- Cordell, L. 1992. A scattered equivalent-source method for interpolation and gridding of potential-field data in three dimensions. *Geophysics*, 57(4):629-636.
- Crain, I. K. 1970. Computer interpolation and contouring of two-dimensional data: A review. *Geoexploration*, 8(2):71-86.
- Crain, I. K. & Bhattacharyya, B. K. 1967. Treatment of non-equispaced two-dimensional data with a digital computer. *Geoexploration*, 5(4):173-194.
- Dampney, C. N. G. 1969. The equivalent source technique. *Geophysics*, 34(1):39-53.
- Duchon, J. 1975. Fonctions spline du type plaque mince en dimension 2. Séminaire d'analyse numérique, n. 231, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, France.

- Emilia, D. A. 1973. Equivalent sources used as an analytic base for processing total magnetic field profiles. *Geophysics*, 38(2):339-348.
- Enriquez, J. O. C.; Thomann, J.; Goupillot, M. 1983. Applications of bidimensional spline functions to geophysics. *Geophysics*, 48(9):1269-1273.
- Franke, R. 1980. Scattered data interpolation: tests of some methods. *Math. Comp.*, 38(157):181-200.
- Frese, R. R. B. von ; Hinze, W. J.; Braile, L. W. 1981. Spherical earth gravity and magnetic anomaly analysis by equivalent point source inversion. *Earth Plan. Sci. Lett.*, 53(1):69-83.
- Golub, H. G. & van Loan, C. F. 1989. *Matrix computations*. The Johns Hopkins University Press, Baltimore. 624 pag.
- Gonzalez-Casanova, P. & Alvarez, R. 1985. Splines in geophysics. *Geophysics*, 50(12):2831-2848.
- Guillen, A. & Menichetti, V. 1984. Gravity and magnetic inversion with minimization of a specific functional. *Geophysics*, 49(8):1354-1360.
- Henderson, R. G. 1970. On the validity of the use of the upward continuation integral for total magnetic intensity data. *Geophysics*, 35(5):916-919.
- Hessing, R. C.; Lee, H. K.; Price, A.; Powers, E. N. 1972. Automatic contouring using bicubic functions. *Geophysics*, 37(4):669-674.
- Hoerl, A. E. & Kennard, R. W. 1970a. Ridge regression: biased estimation for nonorthogonal problems. *Technometrics*, 12:55-67.
- Hoerl, A. E. & Kennard, R. W. 1970b. Ridge regression: application to nonorthogonal problems. *Technometrics*, 12:69-82.
- La Porte, M. 1962. Elaboration rapide des cartes gravimetriques deduites de l'anomalie de Bouguer á l'aide d'une calculatrice electronique. *Geophys. Prosp.*, 10(3):238-259.
- Last, B. J. & Kubik, K. 1983. Compact gravity inversion. *Geophysics*, 48(6):713-721.

- Leão, J. W. D. & Silva, J. B. C. 1989. Discrete linear transformations of potential field data. *Geophysics*, 54(4):497-507.
- Mayhew, M. A.; Johnson, B. D.; Langel, R. A. 1980. An equivalent source model of the satellite-altitude magnetic anomaly field over Australia. *Earth Plan. Sci. Lett.*, 51(3):189-198.
- Moritz, H. 1977. Least-squares collocation and the gravitational inverse problem. *J. of Geophys.*, 43(3):153-162.
- Moritz, H. 1978. Least-squares collocation. *Rev. Geophys. Space Phys.*, 16(3):421-430.
- Morrison, F. F. & Douglas, B. C. 1984. A comparison of gravity prediction methods on actual and simulated data. *Geophysics*, 49(10):1774-1778.
- Parker, R. L. 1977. Understanding inverse theory. *Ann. Rev. Earth Planet. Sci.*, 5:35-64.
- Rasmussen, K. L. & Sharma, P. V. 1979. Bicubic spline interpolation: A quantitative test of accuracy and efficiency. *Geophys. Prosp.*, 27(2):394-408.
- Shepard, D. 1969. A two-dimensional interpolation function for irregularly spaced data. *Proc. 23rd Nat. Conf. ACM.* p. 517-523.
- Silva, J. B. C. 1986. Reduction to the pole as an inverse problem and its application to low-latitude anomalies. *Geophysics*, 51(3):369-382.
- Sluis, A. van der & Vorst, H. A. van der 1987. Numerical solution of large, sparse linear algebraic systems arising from tomographic problems. In: Nolet, G. ed. *Seismic Tomography*. D. Reidel. p. 49-83.
- Swain, C., J. 1976. A FORTRAN IV program for interpolating irregularly spaced data using the difference equations for minimum curvature. *Computer & Geosciences*, 1(4):231-240.
- Tarantola, A. 1987. *Inverse problems theory*. Elsevier, Amsterdam. 613 pag.

## APÊNDICE A

### Cálculo da integral dada na equação (72)

A integral dada na equação (72) é do tipo

$$\int \int_{-\infty}^{+\infty} g(\alpha - x_i, \beta - y_i, h - z_i) \cdot g(\alpha - x_j, \beta - y_j, h - z_j) d\alpha d\beta = f(x_i - x_j, y_i - y_j, 2h - z_i - z_j) \quad (\text{A-1})$$

e deve ser avaliada em duas situações diferentes. A primeira se  $g$  for a expressão matemática da anomalia gravimétrica devida a uma massa pontual e a segunda se  $g$  for a expressão matemática da anomalia devida a um dipolo magnético. O cálculo da integral em (A-1) é realizado, em ambas as situações, utilizando o Teorema de Parseval e propriedades da transformada de Fourier das funções harmônicas. O Teorema de Parseval garante que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\alpha, \beta) \cdot h_2(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H_1(-k_x, -k_y) \cdot H_2(k_x, k_y) dk_x dk_y, \quad (\text{A-2})$$

se as funções  $h_1(\alpha, \beta)$  e  $h_2(\alpha, \beta)$  constituírem pares de transformadas de Fourier com as funções  $H_1(k_x, k_y)$  e  $H_2(k_x, k_y)$ , respectivamente, e  $\iota = \sqrt{-1}$ . O par de transformadas

$$\frac{-(h-z)}{[(\alpha-x)^2 + (\beta-y)^2 + (h-z)^2]^{3/2}} \longleftrightarrow 2\pi e^{-(h-z)|K|} e^{-\iota(xk_x + yk_y)} \quad (\text{A-3})$$

também será utilizado no cálculo. Na relação (A-3)  $|K|$  é tal que  $|K| = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$  sendo  $k_x$  e  $k_y$  os números de onda associados com as direções Sul-Norte e Oeste-Leste, respectivamente.

### 1 Massa pontual

A expressão matemática da anomalia gravimétrica devida a uma massa pontual igual a  $1/\mathcal{G}$ , sendo  $\mathcal{G}$  a constante universal da atração gravitacional, é dada por

$$g(\alpha - x_i, \beta - y_i, h - z_i) = \frac{-(z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left| \begin{array}{l} x = \alpha - x_i \\ y = \beta - y_i \\ z = h - z_i \end{array} \right. d\alpha d\beta \quad (\text{A-4})$$

permitindo escrever a integral (A-1) segundo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-(z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left| \begin{array}{l} x = \alpha - x_i \\ y = \beta - y_i \\ z = h - z_i \end{array} \right. \cdot \frac{-(z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left| \begin{array}{l} x = \alpha - x_j \\ y = \beta - y_j \\ z = h - z_j \end{array} \right. d\alpha d\beta. \quad (\text{A-5})$$

Usando o par de transformadas de Fourier dado em (A-3) e o Teorema de Parseval, a integral (A-1) torna-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(h-z_i)|K|} e^{i(x_i k_x + y_i k_y)} \cdot e^{-(h-z_j)|K|} e^{-i(x_j k_x + y_j k_y)} dk_x dk_y, \quad (\text{A-6})$$

ou

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(2h-z_i-z_j)|K|} e^{-i((x_j-x_i)k_x + (y_j-y_i)k_y)} e^{i(\alpha k_x + \beta k_y)} dk_x dk_y \Big|_{(\alpha, \beta) = (0, 0)} \quad (\text{A-7})$$

A expressão (A-7) é uma transformada inversa de Fourier avaliada na origem. Considerando o par de transformadas dado em (A-3), obtemos o resultado da integral segundo

$$f(x_j - x_i, y_j - y_i, 2h - z_j - z_i) = -2\pi \frac{z}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \Bigg|_{\substack{x = x_j - x_i \\ y = y_j - y_i \\ z = 2h - z_j - z_i}}, \quad (\text{A-8})$$

que é o resultado da integral (A-1) para o caso gravimétrico.

## 2 Dipolo magnético

O efeito devido a um dipolo magnético centrado na origem do sistema de coordenadas e com módulo do momento do dipolo igual a  $1/\mu_0$ , sendo  $\mu_0$  a permeabilidade magnética no vácuo, é dado por

$$g(\alpha - x_i, \beta - y_i, h - z_i) = \left( l \frac{\partial}{\partial x} + m \frac{\partial}{\partial y} + n \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( L \frac{\partial}{\partial x} + M \frac{\partial}{\partial y} + N \frac{\partial}{\partial z} \right) \left[ \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right] \Bigg|_{\substack{x = \alpha - x_i \\ y = \beta - y_i \\ z = h - z_i}} \quad (\text{A-9})$$

sendo  $l, m, n$  os cossenos diretores do momento de dipolo e  $L, M, N$  os cossenos diretores da componente da anomalia calculada. Se  $(L, M, N)$  for igual a  $(l, m, n)$  temos que

$$g(\alpha - x_i, \beta - y_i, h - z_i) = \left( L \frac{\partial}{\partial x} + M \frac{\partial}{\partial y} + N \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \cdot \left[ \frac{-1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right] \Bigg|_{\substack{x = \alpha - x_i \\ y = \beta - y_i \\ z = h - z_i}} \quad (\text{A-10})$$

ou

$$g(\alpha - x_i, \beta - y_i, h - z_i) = \frac{-3[Lx + My + Nz]}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \left[ 3 - 5 \frac{(Lx + My + Nz)^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right] \left. \begin{array}{l} x = \alpha - x_i \\ y = \beta - y_i \\ z = h - z_i \end{array} \right\} \quad (A-11)$$

Substituindo a equação (A-11) na equação (A-1) obtemos que

$$f(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-3[Lx + My + Nz]}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \left( 3 - 5 \frac{(Lx + My + Nz)^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right) \left. \begin{array}{l} x = \alpha - x_i \\ y = \beta - y_i \\ z = h - z_i \end{array} \right\} \quad (A-12)$$

$$\frac{-3[Lx + My + Nz]}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \left( 3 - 5 \frac{(Lx + My + Nz)^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right) \left. \begin{array}{l} x = \alpha - x_j \\ y = \beta - y_j \\ z = h - z_j \end{array} \right\} \quad d\alpha d\beta$$

Usando o par de transformadas de Fourier.

$$\left( L \frac{\partial}{\partial x} + M \frac{\partial}{\partial y} + N \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \cdot \left[ -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right] \left. \begin{array}{l} x = \alpha - x_j \\ y = \beta - y_j \\ z = h - z_j \end{array} \right\} \quad (A-13)$$

↓

$$2\pi [iLk_x + iMk_y + N |K|]^2 \frac{e^{-(h-z_i)|K|}}{|K|} e^{-i(x_i k_x + y_i k_y)}$$

e o Teorema de Parseval, podemos escrever a equação (A-12) como

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[iLk_x + iMk_y + N |K|]^2}{|K|} \left( \frac{[iLk_x + iMk_y + N |K|]^2 e^{-(2h-z_i-z_j)|K|}}{|K|} \right) e^{-i[(x_j - x_i)k_x + (y_j - y_i)k_y]} dk_x dk_y \quad (A-14)$$

ou

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[iLk_x + iMk_y + N |K|]^2}{|K|}$$

$$\left( [iLk_x + iMk_y + N |K|]^2 \frac{e^{-(2h-z_i-z_j)|K|}}{|K|} \right) e^{-i[(x_j-x_i)k_x + (y_j-y_i)k_y]} e^{i(\alpha k_x + \beta k_y)} dk_x dk_y \Big|_{(\alpha, \beta) = (0, 0)} \quad (\text{A-15})$$

A equação (A-15) é uma transformada inversa de Fourier e avaliada na origem do sistema de coordenadas e constitui um par de transformada com

$$f(x, y, z) = \int_{-\infty}^z \left( L \frac{\partial}{\partial x} + M \frac{\partial}{\partial y} + N \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 g(x, y, z) dz \quad \left| \begin{array}{l} x = x_j - x_i \\ y = y_j - y_i \\ z = 2h - z_j - z_i \end{array} \right. \quad (\text{A-16})$$

que pode ser escrita também como

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 2\pi \int_{-\infty}^z \left\{ \left( L \frac{\partial}{\partial x} + M \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + 2N \left( L \frac{\partial}{\partial x} + M \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial z} + N^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right\} g(x, y, z) dz \quad \left| \begin{array}{l} x = x_j - x_i \\ y = y_j - y_i \\ z = 2h - z_j - z_i \end{array} \right. \quad (\text{A-17}) \\ &= 2\pi \left\{ \int_{-\infty}^z \left( L \frac{\partial}{\partial x} + M \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 g(x, y, z) dz + 2N \left( L \frac{\partial}{\partial x} + M \frac{\partial}{\partial y} \right) g(x, y, z) + N^2 \frac{\partial}{\partial z} g(x, y, z) \right\} \quad \left| \begin{array}{l} x = x_j - x_i \\ y = y_j - y_i \\ z = 2h - z_j - z_i \end{array} \right. \end{aligned}$$

Por simplicidade matemática utilizaremos apenas o dipolo vertical obtendo que

$$f(x, y, z) = 2\pi \frac{\partial}{\partial z} g(x, y, z) \quad \left| \begin{array}{l} x = x_j - x_i \\ y = y_j - y_i \\ z = 2h - z_j - z_i \end{array} \right. \quad (\text{A-18})$$

ou

$$f(x, y, z) = 2\pi \frac{-3z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \left[ 3 - 5 \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} \right] \quad \left| \begin{array}{l} x = x_j - x_i \\ y = y_j - y_i \\ z = 2h - z_j - z_i \end{array} \right. \quad (\text{A-19})$$

que é o resultado da integral (A-1) para o dipolo magnético vertical.

## APÊNDICE B

### Resolução de problemas de mínimos quadrados linha-a-linha

Este apêndice refaz, detalhadamente, a dedução de Tarantola(1987), páginas 245 e 294-296, da solução generalizada do problema de mínimos quadrados em termos de matrizes particionadas.

A solução  $\hat{\mathbf{p}}$  do sistema linear

$$\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{p} \tag{B-1}$$

que minimiza o funcional

$$Q = (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{p})^T \mathbf{C}_e^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{p}) + (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0)^T \mathbf{C}_p^{-1} (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \tag{B-2}$$

é dada por

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}_0 + [\mathbf{G}^T \mathbf{C}_e^{-1} \mathbf{G} + \mathbf{C}_p^{-1}]^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{C}_e^{-1} (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{p}_0) \tag{B-3}$$

$\mathbf{C}_p$  e  $\mathbf{C}_e$ , são matrizes de covariância com ordens  $M \times M$  e  $N \times N$ , respectivamente, que carregam a informação *a priori* sobre do vetor solução  $\mathbf{p}$  (de ordem  $M$ ) e sobre o ruído (de ordem  $N$ ) que, na hipótese do erro ser aditivo e da média ser nula, é aproximado por  $\mathbf{e} = (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{p})$ .

Nosso objetivo inicial é escrever a solução  $\hat{\mathbf{p}}$  em termos da partição do sistema (B-1) segundo

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_s \\ \mathbf{d}_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s \\ \mathbf{G}_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_i \end{bmatrix}, \tag{B-4}$$

particularizando, depois, para o caso em que a matriz  $\mathbf{G}_i$  possui apenas uma linha. As relações matricias, assim obtidas, permitirão construir o algoritmo ART.

Em termos da partição temos

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}_0 + \left( \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s^T \mathbf{C}_s^{-1} & \mathbf{G}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s \\ \mathbf{G}_i \end{bmatrix} + \mathbf{C}_p^{-1} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_s^T \mathbf{C}_s^{-1} & \mathbf{G}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_s - \mathbf{G}_s \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{d}_i - \mathbf{G}_i \mathbf{p}_0 \end{bmatrix} \tag{B-5}$$

fornecendo

$$\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}_0 + \left( \mathbf{G}_s^T \mathbf{C}_s^{-1} \mathbf{G}_s + \mathbf{G}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{G}_i + \mathbf{C}_p^{-1} \right)^{-1} \left[ \mathbf{G}_s^T \mathbf{C}_s^{-1} (\mathbf{d}_s - \mathbf{G}_s \mathbf{p}_0) + \mathbf{G}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} (\mathbf{d}_i - \mathbf{G}_i \mathbf{p}_0) \right] \tag{B-6}$$

ou

$$\begin{aligned} \mathbf{p} = \mathbf{p}_0 &+ \left( \mathbf{G}_s^T \mathbf{C}_s^{-1} \mathbf{G}_s + \mathbf{G}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{G}_i + \mathbf{C}_p^{-1} \right)^{-1} \mathbf{G}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} (\mathbf{d}_i - \mathbf{G}_i \mathbf{p}_0) \\ &+ \left( \mathbf{G}_s^T \mathbf{C}_s^{-1} \mathbf{G}_s + \mathbf{G}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{G}_i + \mathbf{C}_p^{-1} \right)^{-1} \mathbf{G}_s^T \mathbf{C}_s^{-1} (\mathbf{d}_s - \mathbf{G}_s \mathbf{p}_0) \end{aligned} \quad (\text{B-7})$$

Usando a identidade matricial

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})^{-1} = (\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})^{-1} \cdot [(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}) - \mathbf{C}] \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}, \quad (\text{B-8})$$

ou

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})^{-1} = [\mathbf{I}_p - (\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}] \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1}, \quad (\text{B-9})$$

para matrizes  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  quadradas de ordem  $p$  e fazendo

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}_p^{-1} \quad (\text{B-10})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{G}_s^T \mathbf{C}_s^{-1} \mathbf{G}_s \quad (\text{B-11})$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{G}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{G}_i \quad (\text{B-12})$$

temos que:

$$\begin{aligned} &\left( \mathbf{G}_s^T \mathbf{C}_s^{-1} \mathbf{G}_s + \mathbf{G}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{G}_i + \mathbf{C}_p^{-1} \right)^{-1} = \\ &[\mathbf{I}_p - (\mathbf{C}_p^{-1} + \mathbf{G}_s^T \mathbf{C}_s^{-1} \mathbf{G}_s + \mathbf{G}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{G}_i)^{-1} \mathbf{G}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{G}_i] (\mathbf{C}_p^{-1} + \mathbf{G}_s^T \mathbf{C}_s^{-1} \mathbf{G}_s)^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{B-13})$$

Substituindo a equação (B-13) no termo que multiplica  $\mathbf{G}_s^T \mathbf{C}_s^{-1} (\mathbf{d}_s - \mathbf{G}_s \mathbf{p}_0)$  na equação (B-7) temos que:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}_0 &+ \left( \mathbf{G}_s^T \mathbf{C}_s^{-1} \mathbf{G}_s + \mathbf{G}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{G}_i + \mathbf{C}_p^{-1} \right)^{-1} \mathbf{G}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} (\mathbf{d}_i - \mathbf{G}_i \mathbf{p}_0) \\ &+ [\mathbf{I}_p - (\mathbf{C}_p^{-1} + \mathbf{G}_s^T \mathbf{C}_s^{-1} \mathbf{G}_s + \mathbf{G}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{G}_i)^{-1} \mathbf{G}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{G}_i] \\ &\times (\mathbf{C}_p^{-1} + \mathbf{G}_s^T \mathbf{C}_s^{-1} \mathbf{G}_s)^{-1} \mathbf{G}_s^T \mathbf{C}_s^{-1} (\mathbf{d}_s - \mathbf{G}_s \mathbf{p}_0) \end{aligned} \quad (\text{B-14})$$

Definindo a matriz  $\mathbf{C}_A$  tal que

$$\mathbf{C}_A^{-1} = \mathbf{C}_p^{-1} + \mathbf{G}_s^T \mathbf{C}_s^{-1} \mathbf{G}_s, \quad (\text{B-15})$$

temos que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}_0 &+ \left( \mathbf{G}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{G}_i + \mathbf{C}_A^{-1} \right)^{-1} \mathbf{G}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} (\mathbf{d}_i - \mathbf{G}_i \mathbf{p}_0) \\ &+ [\mathbf{I}_p - (\mathbf{G}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{G}_i + \mathbf{C}_A^{-1})^{-1} \mathbf{G}_i^T \mathbf{C}_i^{-1} \mathbf{G}_i] \\ &\times \mathbf{C}_A \mathbf{G}_s^T \mathbf{C}_s^{-1} (\mathbf{d}_s - \mathbf{G}_s \mathbf{p}_0) \end{aligned} \quad (\text{B-16})$$

Definindo o vetor  $\hat{p}_A$  como

$$p_A = p_0 + C_A G_s^T C_s^{-1} (d_s - G_s p_0), \quad (B-17)$$

temos que

$$\begin{aligned} \hat{p} &= p_0 + (G_i^T C_i^{-1} G_i + C_A^{-1})^{-1} G_i^T C_i^{-1} (d_i - G_i p_0) \\ &+ [I_p - (G_i^T C_i^{-1} G_i + C_A^{-1})^{-1} G_i^T C_i^{-1} G_i] (p_A - p_0), \end{aligned} \quad (B-18)$$

ou

$$\hat{p} = p_A + (G_i^T C_i^{-1} G_i + C_A^{-1})^{-1} G_i^T C_i^{-1} (d_i - G_i p_0 + G_i p_0 - G_i p_A), \quad (B-19)$$

que fornece

$$\hat{p} = p_A + (G_i^T C_i^{-1} G_i + C_A^{-1})^{-1} \cdot G_i^T C_i^{-1} (d_i - G_i p_A). \quad (B-20)$$

Vamos interpretar estes resultados. O conhecimento *a priori* sobre os parâmetros estava contido no vetor  $p_0$  e na matriz de covariância  $C_p$ . Após a inversão da primeira partição, aplicando as equações (B-15) e (B-16), o vetor solução bem como a matriz de covariância, foram atualizados obtendo o vetor  $p_A$  e a matriz  $C_A$  que carregam o conhecimento *a posteriori* sobre o vetor  $p$ . Usando este conhecimento *a posteriori* como conhecimento *a priori* para a segunda partição, nós obtemos a solução do problema aplicando a equação (B-20). Note que esta solução é a mesma que é obtida aplicando a equação (B-3) que faz a inversão sem a partição da matriz.

Um caso particular de partição ocorre se considerarmos que o erro nas observações são não correlacionáveis deixando a matriz  $C_e$  segundo

$$C_e = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}, \quad (B-21)$$

e se partirmos o sistema em (B-1) linha-a-linha deixando o vetor de  $d$  e a matriz  $G$  segundo

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} g^{1T} \\ g^{2T} \\ \vdots \\ g^{NT} \end{bmatrix}. \quad (B-22)$$

A solução *a posteriori* usando a primeira linha é dada por

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 + (\mathbf{g}^1 \sigma_1^{-2} \mathbf{g}^{1T} + \mathbf{C}_p^{-1})^{-1} \mathbf{g}^1 \sigma_1^{-2} (d_1 - \mathbf{g}^{1T} \mathbf{p}_0) \quad (\text{B-23})$$

e a matriz de covariância *a posteriori*  $\mathbf{C}_1$  é tal que

$$\mathbf{C}_1^{-1} = (\mathbf{C}_p^{-1} + \sigma_1^{-2} \mathbf{g}^1 \mathbf{g}^{1T}) \quad (\text{B-24})$$

Aplicando a identidade matricial (Beck & Arnold, 1977)

$$(\mathbf{C}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C} + \mathbf{B})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C}^T + \mathbf{A})^{-1}, \quad (\text{B-25})$$

pressupondo que as operações inversas sejam definidas, podemos escrever (B-23) como

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 + \mathbf{C}_p \mathbf{g}^1 (\mathbf{g}^{1T} \mathbf{C}_p \mathbf{g}^1 + \sigma_1^2)^{-1} (d_1 - \mathbf{g}^{1T} \mathbf{p}_0) \quad (\text{B-26})$$

O fator  $(\mathbf{g}^{1T} \mathbf{C}_p \mathbf{g}^1 + \sigma_1^2)$  é um escalar, assim, apenas uma divisão é necessária para computar o operador inverso dado na equação (B-26).

A segunda linha da matriz  $\mathbf{G}$  pode, da mesma maneira, ser processada fazendo

$$\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{C}_1 \mathbf{g}^2 (\mathbf{g}^{2T} \mathbf{C}_1 \mathbf{g}^2 + \sigma_2^2)^{-1} (d_2 - \mathbf{g}^{2T} \mathbf{p}_1) \quad (\text{B-27})$$

mas, para isto, é necessário obter a matriz  $\mathbf{C}_1$  já que a equação (B-24) nos fornece a sua inversa.

Usando a fórmula de Sherman-Morrison (Golub & van Loan 1989), dada por

$$\left( \mathbf{A} - \frac{\mathbf{g} \mathbf{g}^T}{\beta} \right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{g} \mathbf{g}^T \mathbf{A}^{-1}}{\beta - \mathbf{g}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{g}}, \quad (\text{B-28})$$

e fazendo  $\mathbf{C}_p^{-1} = \mathbf{A}$  e  $\beta = -\sigma^2$ , temos que

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_p - \frac{\mathbf{C}_p \mathbf{g}^1 \mathbf{g}^{1T} \mathbf{C}_p}{\mathbf{g}^{1T} \mathbf{C}_p \mathbf{g}^1 + \sigma_1^2}, \quad (\text{B-29})$$

o que permite obter  $\mathbf{C}_1$  sem que haja a inversão da matriz dada na equação (B-24).

As equações (B-23) e (B-29) permitem atualizar, o vetor de solução *a posteriori* e a matriz de covariância *a posteriori* dos parâmetros, respectivamente, sempre que uma nova linha de  $\mathbf{G}$  for processada. Isto permite obter a solução que minimiza o funcional  $Q$ , dado na equação (B-2), fazendo  $k$  repetições ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) dos três seguintes passos.

passo 1 Calcular resíduo

$$r_k = d_k - \mathbf{p}_{(k-1)}^T \mathbf{g}^k \quad (\text{B-30})$$

**passo 2** Obter vetor solução *a posteriori*

$$\mathbf{p}^{(k)} = \mathbf{p}^{(k-1)} + \mathbf{C}_{(k-1)} \mathbf{g}^k \frac{r_k}{\mathbf{g}^{kT} \mathbf{C}_{(k-1)} \mathbf{g}^k + \sigma_k^2} \quad (\text{B-31})$$

**passo 3** Obter matriz de covariância *a posteriori*

$$\mathbf{C}_{(k)} = \mathbf{C}_{(k-1)} - \frac{\mathbf{C}_{(k-1)} \mathbf{g}^k \mathbf{g}^{kT} \mathbf{C}_{(k-1)}}{\mathbf{g}^{kT} \mathbf{C}_{(k-1)} \mathbf{g}^k + \sigma_k^2} \quad (\text{B-32})$$

O número mínimo de multiplicações requeridas neste algoritmo é igual a  $N[\frac{3}{2}M^2 + \frac{9}{2}M + 1]$ .

## APÊNDICE C

### Decomposição de Cholesky linha-a-linha

Consideremos uma matriz  $A$  de ordem  $n$  simétrica e positivo-definida. A decomposição de Cholesky de  $A$  é a matriz triangular inferior  $C_n$ , de ordem  $n$ , tal que

$$A = C_n C_n^T \quad (C-1)$$

O elemento fora da diagonal de  $C_n$  é dado (Tarantola,1987) por

$$c_{i,j} = \left( a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{i,k} c_{j,k} \right) / c_{i,i} \quad (C-2)$$

enquanto que o elemento diagonal é dado por

$$c_{i,i} = \left( a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{i,k}^2 \right)^{1/2} \quad (C-3)$$

Nosso objetivo é obter a matriz decoposta  $D_{n+1}$ , tal que

$$\begin{pmatrix} A & b \\ b^T & \beta \end{pmatrix} = D_{n+1} D_{n+1}^T \quad (C-4)$$

a partir do conhecimento de  $C_n$ .

Analisando a equação (C-2) notamos que o elemento  $d_{i,j}$  da matriz triangular inferior  $D_{n+1}$  é igual a  $c_{i,j}$  para todo  $i \leq n$  tal que  $j < i$ . Da mesma forma, analisando a equação (C-3), temos que o elemento  $d_{i,j}$  é igual a  $c_{i,j}$  para todos valores  $i, j$  tal que  $i = n$  e  $j = n$ . Concluimos, então, que  $d_{i,j} = c_{i,j}$  para todos os valores de  $i$  e  $j$  tais que  $i \leq n$  e  $j \leq n$ . Isto nos permite escrever  $D_{n+1}$  em função de  $C_{n+1}$  conforme

$$D_{n+1} = \begin{pmatrix} C_n & 0 \\ d^T & \gamma \end{pmatrix} \quad (C-5)$$

A equação (C-5) mostra que, a introdução de uma linha na matriz  $A$ , segundo a equação (C-4), não altera a parte da matriz  $D_{n+1}$  diretamente relacionada com a matriz  $A$ . Assim, para determinar  $D_{n+1}$ , basta determinar o vetor  $d$  e o elemento diagonal  $\gamma$ .

Os elementos de  $d$  podem ser obtidos recursivamente

$$d_1 \rightarrow d_2 \rightarrow \dots \rightarrow d_n \quad (C-6)$$

segundo

$$d_j = \left( b_j - \sum_{k=1}^{j-1} d_k c_{j,k} \right) / c_{j,j} \quad (\text{C-7})$$

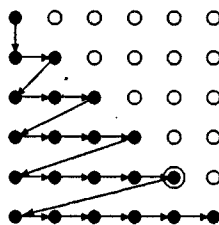
que é justamente a equação (C-2) se fizermos

$$a_{n+1,j} = b_j \quad e \quad c_{n+1,j} = d_j \quad . \quad (\text{C-8})$$

Após o cálculo do vetor  $\mathbf{d}$  podemos obter o elemento diagonal  $\gamma$  segundo

$$\gamma = \left( \beta - \sum_{k=1}^n d_k d_k \right)^{1/2} \quad . \quad (\text{C-9})$$

Para facilitar o entendimento do problema fizemos a figura abaixo que mostra a sequência apropriada em que os elementos de uma matriz decomposta por Cholesky devem ser calculados.



Os círculos cheios formam a matriz triangular inferior, os círculos vazios representam os elementos nulos desta matriz e o círculo cheio contornado por um vazio representa o elemento diagonal  $c_{n,n}$ . Note que o cálculo de um elemento genérico da matriz decomposta é feito utilizando apenas os elementos anteriores a ele. Isto permite obter a matriz  $\mathbf{D}_{n+1}$ , conforme dada em (C-4), aplicando as equações (C-7) e (C-9), ou seja, calculando os elementos posteriores ao elemento diagonal  $c_{n,n}$  de acordo com a sequência ilustrada na figura acima.

O número de operações para obter a matriz  $\mathbf{D}_{n+1}$  a partir de  $\mathbf{C}_n$  é de  $(n^2 + 3n)/2$  multiplicações mais uma extração de raiz quadrada.

## ANEXO 1

Interpolação na forma global aplicando o Algoritmo DOE: programas utilizados

```

PROGRAM DOE2
C.....
C
C Objetivo: IMPLEMENTACAO DO ALGORITMO DOE USANDO A DECOMPOSICAO DE CHOLESKY
C           E O METODO EGTG
C
C Entrada: (x,y,z,d)
C           x,y,z - coordenadas das observacoes
C           d     - valores da anomalia
C
C Saida: (x,y,z,t)
C           x,y,z - coordenadas das observacoes equivalentes
C           t     - parametros lineares do somatorio que ajusta as OE
C
C Subrotinas chamadas: DOT, READ, TROCA, ONELINE, DECOMP_ONE, DOWNUP
C
C Autor: C. A. Mendonca NPGP-UFPA 1992
C.....
C           parameter nz=10000,nd=250,ndi=nz
C           dimension z(4,nz)
C           dimension a(nd,nd),d(nd),g(nd),y(nd),w(nd)
C           integer id(ndi)
C           data xf,yf,xi,yi/-1e30,-1e30,1e30,1e30/
C           common/cntr/h,flanda,cut
C           data isw,isr/6,5/
C
C.....[Entrada de dados e parametros ]
C
C           call read(z,nz,na,xi,xf,yi,yf,ds,dn,dw,de)
C           nid=na
C           divx=xf-xi
C           divy=yf-yi
C           write(isw,*)' Lambda? (0.001) '
C           read(isr,*)flanda
C           write(isw,*)' Profundidade da camada? (km) '
C           read(isr,*)h
C           write(isw,*)' Fator de corte? (3.)'
C           read(isr,*)cut
C
C.....[BLOCO 1]
C
C           do 12 i=1,na
C             id(i)=i
C             if(z(4,i).le.v)goto 12
C             v=z(4,i)
C             ima=i
12          continue
C           call troca(id,ndi,1,ima)
C
C.....[BLOCO 2 e BLOCO 3]
C
C           do 100 nin=1,(nd-2)
C             call oneline(z,nz,g,w,id,nd,ndi,nin)
C             call decomp_one(a,g,nd,nin)

```

```

y(nin)=z(4,id(nin))*w(nin)
call downup(a,d,y,nd,nin)
do 4 i=1,nin
4 d(i)=d(i)*w(i)
call ident(z,d,id,nz,nd,ndi,nin,(nin+1),nid,vp,v2,ima)
call troca(id,ndi,nin+1,ima)
100 if (vp.le.cut) goto 103
103 nin=nin+1
c
c.....[Saida das observacoes equivalentes]
c
OPEN(UNIT=13,FILE='OBSEVQ',STATUS='new',ACCESS='SEQUENTIAL',
*FORM='UNFORMATTED',RECORDTYPE='FIXED',recl=5)
write(13)1,xi,xf,yi,yf
write(13)2,ds,dn,dw,de
write(13)3,fac,divx,divy,h
do 42 i=1,nin
42 write(13)h,z(2,id(i)),z(1,id(i)),d(i),z(3,id(i))
1789 close(unit=13)
1992 stop
end

```

PROGRAM INTER\_GLOBAL

```

c.....
c
c Objetivo: INTERPOLACAO GLOBAL ATRAVES DA AVALIACAO DA SUPERFICIE
c INTERPOLADORA OBTIDA PELO PROGRAMA DOE2
c
c Entrada: (x,y,z,t)
c x,y,z - coordenadas das observacoes equivalentes
c t - parametros lineares do somatorio
c
c Saida:
c Valores interpolados sobre a malha regular
c
c Subrotinas chamadas: DOT
c
c Autor: C. A. Mendonca NPGP-UFGA 1992
c.....
parameter nd=2000,ns=700
dimension z(4,nd),d(nd),g(ns),hb(nd)
character*30 datfil
data isw,isr/6,5/
c
c.....[ Leitura das fontes equivalentes ]
c
write(isw,*)' Nome do arquivo das fontes equivalentes '
read(isr,'(a30)')datfil
OPEN(UNIT=13,FILE=datfil,STATUS='old',ACCESS='SEQUENTIAL',
*FORM='UNFORMATTED',RECORDTYPE='FIXED')
read(13)i,xi,xf,yi,yf
read(13)i,ds,dn,dw,de
read(13)i,fac,div,dil,hbed
do 202 i=1,100000
202 read(13,end=200)hb(i),z(2,i),z(1,i),d(i),z(3,i)
200 close(unit=13)
nin=i-1
c
c.....[ Parametros da malha interpolada]
c
write(isw,*)' Altura dos dados? (negativo para cima) (km)'
read(isr,*)hz

```

```
write(isw,*)' Numero de pontos interpolados em x ( SUL-NORTE)? (km)'  
read(isr,*)nx  
write(isw,*)' Numero de pontos interpolados em y (LESTE-OESTE)? (km)'  
read(isr,*)ny  
dx=(xf-xi)/(nx-1)  
dy=(yf-yi)/(ny-1)  
write(isw,*)' Nome do arquivo da malha interpolada'  
read(isr,'(a30)')datfil  
open(unit=14,file=datfil,form='unformatted',status='new',recl=nx)  
write(14)nx,ny,dx,dy  
ay=yi  
do 30 iy=1,ny  
ax=xi  
do 31 ix=1,nx  
g(ix)=0.  
do 40 i=1,nin  
40 g(ix)=g(ix)+dot(ax,ay,hz,z(1,i),z(2,i),z(3,i),hb(i))*d(i)  
31 ax=ax+dx  
write(14)(g(ix),ix=1,nx)  
30 ay=ay+dy  
close(unit=14)  
1992 stop  
end
```

## ANEXO 2

Interpolação na forma local aplicando o Algoritmo DOEG: programas utilizados

```

PROGRAM DOEG
C.....
C
C Objetivo: IMPLEMENTACAO DO ALGORITMO DOEG.
C
C Este programa tem tres etapas:
C   1- Leitura de dados
C   2- Reenumeracao dos dados segundo sua distribuicao dentro de cada cela
C   3- Determinacao das observacoes equivalentes no interior de cada cela
C
C Entrada: (x,y,z,d)
C   x,y,z - coordenadas das observacoes
C   d     - valores da anomalia
C
C Saida: (x,y,z,d)
C   x,y,z - coordenadas das observacoes equivalentes
C   d     - valores da anomalia
C   mark  - controle da re-enumeracao dos dados
C
C Subrotinas chamadas: DOT, READ, TROCA, ONELINE, DECOMP_ONE, DOWNUP, SORT
C
C Autor: C. A. Mendonca NPGP-UFGA 1992
C.....
      parameter nz=5000,nw=250,nd=100,ndi=nz
      dimension z(4,nz),vp(3)
      dimension a(nd,nd),d(nd),g(nd),y(nd),w(nd)
      integer id(ndi),mark(nw+1,nw+1)
      data xf,yf,xi,yi/-1e30,-1e30,1e30,1e30/
      common/cntr/h,flanda,cut
      data isw,isr/6,5/
C
C.....[1] Entrada de dados e parametros
C
      call read(z,nz,na,xi,xf,yi,yf,ds,dn,dw,de)
      write(isw,*)' Numero celas na direcao Norte-Sul? (p.ex 5)'
      read(isr,*)ndiv
      div=amax1((yf-yi)/ndiv,(xf-xi)/ndiv)
      write(isw,*)' Profundidade da camada?'
      read(isr,*)h
      write(isw,*)' Fator de corte? (3.)'
      read(isr,*)cut
      write(isw,*)' Lambda? (0.01)'
      read(isr,*)flanda
      OPEN(UNIT=12,FILE='eqv',STATUS='new',ACCESS='SEQUENTIAL',
* FORM='UNFORMATTED',RECORDTYPE='FIXED',RECL=5)
      write(12)1,xi,xf,yi,yf
      write(12)2,ds,dn,dw,de
      write(12)3,cut,div,flanda,h
C
C.....[2] Subdivisao da area em celas quadraticas e reenumeracao dos dados
C
      call sort(z,nz,na,mark,nw,mx,my,div,div,xi,xf,yi,yf)
C
C.....[3] Aplicacao de DOE em no interior de cada cela

```

```

c
v1=0.
v3=0.
nin=3
do 10 iy=1,my
do 10 ix=1,mx
call control(mark,nw,ix,iy,mx,my,id,ndi,nid,0)
if(nid.le.2)goto 10
v=0.
do 52 i=1,nid
if(abs(z(4,id(i))).le.v)goto 52
v=abs(z(4,id(i)))
ima=i
52 continue
call troca(id,ndi,1,ima)
do 150 nin=1,(nd-1)
call oneline(z,nz,g,w,id,nd,ndi,nin)
call decomp_one(a,g,nd,nin)
y(nin)=z(4,id(nin))*w(nin)
call downup(a,d,y,nd,nin)
do 54 i=1,nin
54 d(i)=d(i)*w(i)
call ident(z,d,id,nz,nd,ndi,nin,(nin+1),nid,v3,v2,ima)
call troca(id,ndi,nin+1,ima)
150 if (v3.le.cut) goto 153
153 nin=nin+1
if(vp(1).gt.v1)v1=vp(1)
if(vp(3).gt.v3)v3=vp(3)
nimax=jmax0(nimax,nin)
do 11 i=(nin+1),nid
11 z(1,id(i))=1.e30
ntot=ntot+jmin0(nin,nid)
10 continue
write(isw,*)' Numero de observacoes equivalentes      =', ntot
write(isw,*)' Maior residuo nas observacoes equivalentes =', v1
write(isw,*)' Maior residuo nas observacoes redundantes =', v2
c
c
c.....[Saida das observacoes equivalentes ]
c
c
call sort(z,nz,na,mark,nw,mx,my,div,div,xi,xf,yi,yf)
do 70 iy=1,my
do 70 ix=1,mx
do 70 ki=mark(ix,iy),(mark(ix+1,iy)-1)
70 write(12)ki,z(2,ki),z(1,ki),z(4,ki),z(3,ki)
close(unit=12)
open(unit=16,file='mark',status='new',FORM='UNFORMATTED',recl=mx+1)
write(16)mx,my
do 71 iy=1,my
71 write(16)(mark(ix,iy),ix=1,(mx+1))
close(unit=16)
1992 stop
end

```

PROGRAM INTER\_LOCAL

```

c.....
c
c Objetivo: INTERPOLACAO LOCAL UTILIZANDO AS OBSERVACOES EQUIVALENTES
c IDENTIFICADAS POR PROGRAMA DOEG
c

```

```

c Entrada: (x,y,z,d)
c   x,y,z - coordenadas das observacoes equivalentes
c   d     - valores da anomalia
c   mark  - controle da re-enumeraçao dos dados
c
c Saida:
c Valores interpolados sobre a malha regular
c
c Subrotinas chamadas: DOT, CONTROL, SOLVE, DECOMP_all, DOWNUP
c
c Autor: C. A. Mendonca NPGP-UFFA 1992
c.....
parameter nz=30000,nw=125,nd=300
dimension z(4,nz),d(nd),w(500,20)
integer id(nd),mark(nw+1,nw+1)
common/cntr/h,flanda,cut
character*30 datfil
data isw,isr/6,5/
c
c.....[ Leitura das observacoes equivalentes]
c
OPEN(UNIT=12,FILE='eqv',STATUS='old',ACCESS='SEQUENTIAL',
* FORM='UNFORMATTED',RECORDTYPE='FIXED')
read(12)na,xi,xf,yi,yf
read(12)na,ds,dn,dw,de
read(12)na,fac,div,dil,h
do 3 i=1,1000000
3 read(12,end=4)na,z(2,i),z(1,i),z(4,i),z(3,i)
4 close(unit=12)
open(unit=16,file='mark',status='old',FORM='UNFORMATTED')
read(16)mx,my
do 300 iy=1,my
300 read(16)(mark(ix,iy),ix=1,(mx+1))
close(unit=16)
c
c.....[ Parametros da interpolacao ]
c
write(isw,*)' Nome do arquivo da malha regular '
read(isr,'(a30)')datfil
write(isw,*)' Numero valores interpolados dentro de cada cela? '
read(isr,*)nc
if(nc.gt.20)nc=20
nc=nc-1
dd=div/float(nc)
write(isw,*)' Nivel da interpolacao (km)? (negativo para cima) '
read(isr,*)hz
write(isw,*)' Numero de quadrados vizinhos? (1,2,...)'
read(isr,*)nsq
write(isw,*)' Lambda? (0.001) '
read(isr,*)flanda
c
c.....[Interpolacao ]
c
nx=mx*nc
ny=my*nc
open(unit=13,file=datfil,form='unformatted',status='new',recl=nx)
write(13)nx,ny,dd,dd
do 150 iy=1,my
do 26 jy=1,nc
do 26 jx=1,nx
26 w(jx,jy)=9999.

```

```
do 10 ix=1,mx
call control(mark,nw,ix,iy,mx,my,id,nd,nin,nsq)
if(nin.eq.0.)goto 10
call solve(z,d,id,nz,nd,nin)
ii=nc*(ix-1)+1
if=ii+nc-1
ay=yi+nc*(iy-1)*dd
do 50 jy=1,nc
ax=xi+nc*(ix-1)*dd
do 51 jx=ii,if
zj=0.
do 52 i=1,nin
k=id(i)
52 zj=zj+dot(ax,ay,hz,z(1,k),z(2,k),z(3,k),h)*d(i)
w(jx,jy)=zj
51 ax=ax+dd
50 ay=ay+dd
10 continue
do 16 jy=1,nc
16 write(13)(w(jx,jy),jx=1,nx)
150 continue
close(unit=13)
1992 stop
end
```

## ANEXO 3

Subrotinas auxiliares utilizadas pelos programas dos anexos 1 e 2

```

subroutine ident(z,d,id,nz,nd,ndi,nin,ni,nf,vma,v2,ima)
c.....
c
c OBJETIVO: IDENTIFICAR UMA OBSERVACAO EQUIVALENTE (OE).
c
c Z - matriz dos dados
c D - parametros lineares que ajusta as NIN correntes OE.
c ID - vetor auxiliar que identifica as correntes OE.
c ND - dimensao do vetor D
c NDI - dimensao do vetor ID
c NIN - numero das correntes OE.
c NI - indice da primeira amostra em que o residuo sera calculado
c NF - indice da ultima amostra em que o residuo sera calculado
c VMA - maior residuo calculado
c IMA - indice do dado associado ao maior residuo
c V2 - norma quadratica do ajuste nos (NF-NI+1) dados
c
c Subrotinas chamadas: DOT
c
c Autor: C. A. Mendonca NPGP-UFGA 1992
c.....
dimension z(4,nz),d(nd)
integer id(ndi)
common/cntr/h,flanda,cut
v2=0.0
vma=-1.0
do 1 j=ni,nf
kj=id(j)
zj=0.
do 2 i=1,nin
ki=id(i)
2 zj=zj+dot(z(1,kj),z(2,kj),z(3,kj),z(1,ki),z(2,ki),z(3,ki),h)*d(i)
v=abs(z(4,kj)-zj)
v2=v2+v*v
if(v.le.vma)goto 1
vma=v
ima=j
1 continue
return
end

subroutine troca(id,ndi,n1,n2)
c.....
c
c Objetivo: PERMUTAR NO VETOR DE INDICES A POSICAO n1 COM A POSICAO n2
c
c ID - vetor auxiliar que identifica as correntes OE.
c NDI - dimensao do vetor ID
c N1 - numero das correntes OE.
c N2 - indice do dado associado ao maior residuo
c
c Autor: C. A. Mendonca NPGP-UFGA 1992

```

```

c.....
integer id(ndi)
itr=id(n2)
id(n2)=id(n1)
id(n1)=itr
return
end

subroutine oneline(z,nz,g,w,id,nd,ndi,m)
c.....
c
c Objetivo: CALCULAR A LINHA DA MATRIZ DE (GG+LAMBDA I) RELATIVA AO DADO
c DE NUMERO ID(M).
c
c Z - matriz dos dados
c G - linha normalizada da matriz (AAt+lambda I) associada com a OE mais recente.
c W - vetor de trabalho referente a normalizacao.
c ID - vetor auxiliar que identifica as correntes OE.
c ND - dimensao da matriz G e do vetor W.
c NDI - dimensao do vetor ID
c M - tal que ID(M) identifica a mais recente OE.
c
c Subrotinas chamadas: DOT
c
c Autor: C. A. Mendonca NPGP-UFGA 1992
c.....
dimension z(4,nz),g(nd),w(nd)
integer id(ndi)
common/cntr/h,flanda,cut
km=id(m)
do 1 j=1,m
kj=id(j)
1 g(j)=dot(z(1,km),z(2,km),z(3,km),z(1,kj),z(2,kj),z(3,kj),h)
w(m)=1./sqrt(g(m))
do 2 i=1,(m-1)
2 g(i)=g(i)*w(m)*w(i)
g(m)=1.+flanda
return
end

subroutine decomp_one(c,g,nd,m)
c.....
c
c Objetivo: OBTER A M-ESIMA LINHA DA MATRIZ DECOMPOSTA POR CHOLESKY
c ADIMITINDO QUE AS M-1 LINHAS DESTA MATRIZ JA FORAM OBTIDAS.
c
c C - matriz triangular superior decomposta por Cholesky
c G - m-esima linha normalizada da matriz (AAt+lambda I).
c ND - dimensao da matriz C e do vetor G.
c M - tal que M-1 seja a dimensao efetiva da matriz C.
c
c Autor: C. A. Mendonca NPGP-UFGA 1992
c.....
dimension c(nd,nd),g(nd)
s=g(m)

```

```

do 3 i=1,(m-1)
  s1=g(i)
  do 1 k=1,(i-1)
1    s1=s1-c(k,i)*g(k)
    s1=s1/c(i,i)
    s=s-s1*s1
3    g(i)=s1
    g(m)=sqrt(s)
  do 4 i=1,m
4    c(i,m)=g(i)
  return
end

```

```

subroutine downup(g,x,y,nd,n)

```

```

c.....
c
c Objetivo: OBTENHA A SOLUCAO DO SISTEMA LINEAR (GT G x=y) FAZENDO AS
c AS SUBSTITUICOES PROGRESSIVA E REGRESSIVA.
c G - matriz triangular superior decomposta por Cholesky
c X - solucao do sistema linear Gt G x=y
c Y - vetor de dados
c ND - dimensao da matriz G e do vetores X e Y.
c
c Autor: C. A. Mendonca NPGP-UFPA 1992

```

```

c.....
  dimension g(nd,nd),x(nd),y(nd)
  do 1 j=1,n
    s=y(j)
  do 10 k=1,(j-1)
10   s=s-g(k,j)*x(k)
  1   x(j)=s/g(j,j)
    do 2 j=n,1,-1
      s=x(j)
    do 20 k=(j+1),n
20   s=s-g(j,k)*x(k)
  2   x(j)=s/g(j,j)
    return
  end

```

```

subroutine solve(z,d,id,nz,nd,npt)

```

```

c.....
c
c Objetivo: FORMAR A MATRIZ NORMALIZADA (GGT+LAMBDA I) E RESOLVER O SISTEMA
c LINEAR (GGT+LAMBDA I)d=z(4,1:npt) UTILIZANDO A DECOMPOSICAO DE CHOLESKY
c Z - matriz dos dados
c ID - vetor com de indice de dadosolucao do sistema linear (GGT+LAMBDA I)d=z(4,1:n
c D - vetor solucao do sistema linear (GGT+LAMBDA I)d=z(4,1:npt)
c ND - dimensao do vetor solucao D.
c
c Subrotinas chamadas: DOT, DECOMP_ALL, DOWNUP.
c
c Autor: C. A. Mendonca NPGP-UFPA 1992

```

```

c.....
  parameter nw=300
  dimension z(4,nz),d(nd)

```

```

dimension g(nw,nw),v1(nw),y(nw)
integer id(nd)
common/cntr/h,flanda,cut
do 1 j=1,npt
kj=id(j)
g(j,j)=dot(z(1,kj),z(2,kj),z(3,kj),z(1,kj),z(2,kj),z(3,kj),h)
v1(j)=1./sqrt(g(j,j))
do 1 i=(j+1),npt
ki=id(i)
1 g(i,j)=dot(z(1,ki),z(2,ki),z(3,ki),z(1,kj),z(2,kj),z(3,kj),h)
do 2 j=1,npt
a1=v1(j)
y(j)=z(4,id(j))*a1
do 2 i=j,npt
2 g(i,j)=g(i,j)*v1(i)*a1
do 3 i=1,npt
3 g(i,i)=1.+flanda
call decomp_all(g,d,nd,npt)
call downup(g,d,y,nd,npt)
do 4 i=1,npt
4 d(i)=d(i)*v1(i)
return
end

```

```

subroutine decomp_all(g,w,nd,n)
C.....
C
c Objetivo: DECOMPOR A MATRIZ G POR CHOLESKY.
c OBS-(a diagonal e a parte triangular superior de G sao destruidas)
C
c G - matriz simetrica positivo-definida
c W - vetor de trabalho
c ND - dimensao da matriz G e do vetor W.
c N - dimensao efetiva da matriz G e do vetor W.
C
c Autor: C. A. Mendonca NPGP-UFGA 1992
C.....
dimension g(nd,nd),w(nd)
do 4 j=1,n
s=g(j,j)
do 1 k=1,(j-1)
w(k)=g(k,j)
1 s=s-w(k)*w(k)
s=sqrt(s)
g(j,j)=s
do 3 i=(j+1),n
s1=g(i,j)
do 2 k=1,j-1
2 s1=s1-g(k,i)*w(k)
s1=s1/s
3 g(j,i)=s1
4 continue
return
end

```





c NIN - numero de dados dentro da janela

c

c Autor: C. A. Mendonca NPGP-UFPA 1992

```

C.....
  integer id(nd),mark(nw+1,nw+1)
  nin=0
  ni=jmax0(1 ,iy-nsq)
  nf=jmin0(my,iy+nsq)
  mi=jmax0(1,ix-nsq)
  mf=jmin0(mx,ix+nsq)
  do 1 jy=ni,nf
  do 1 jx=mark(mi,jy),(mark(mf+1,jy)-1)
  nin=nin+1
1  id(nin)=jx
  return
  end

```

function dot(x,y,z,xi,yi,zi,h)

C.....

c

c Objetivo: AVALIACAO DA INTEGRAL ANALITICA PARA A MASSA PONTUAL GRAVIMETRICA

c

c (x,y,z) - coordenadas da primeira observacao

c (xi,yi,zi) - coordenadas da segunda observacao

c h - profundidade da camada equivalente.

c

c Autor: C. A. Mendonca NPGP-UFPA 1992

```

C.....
  ax=x-xi
  ay=y-yi
  az=h+h-(z+zi)
  dot=(ax*ax+ay*ay+az*az)
  dot=dot*sqrt(dot)
  dot=az/dot
  return
  end

```

function dot(x,y,z,xi,yi,zi,h)

C.....

c

c Objetivo: AVALIACAO DA INTEGRAL ANALITICA PARA O DIPOLO MAGNETICO VERTICAL

c

c (x,y,z) - coordenadas da primeira observacao

c (xi,yi,zi) - coordenadas da segunda observacao

c h - profundidade da camada equivalente.

c

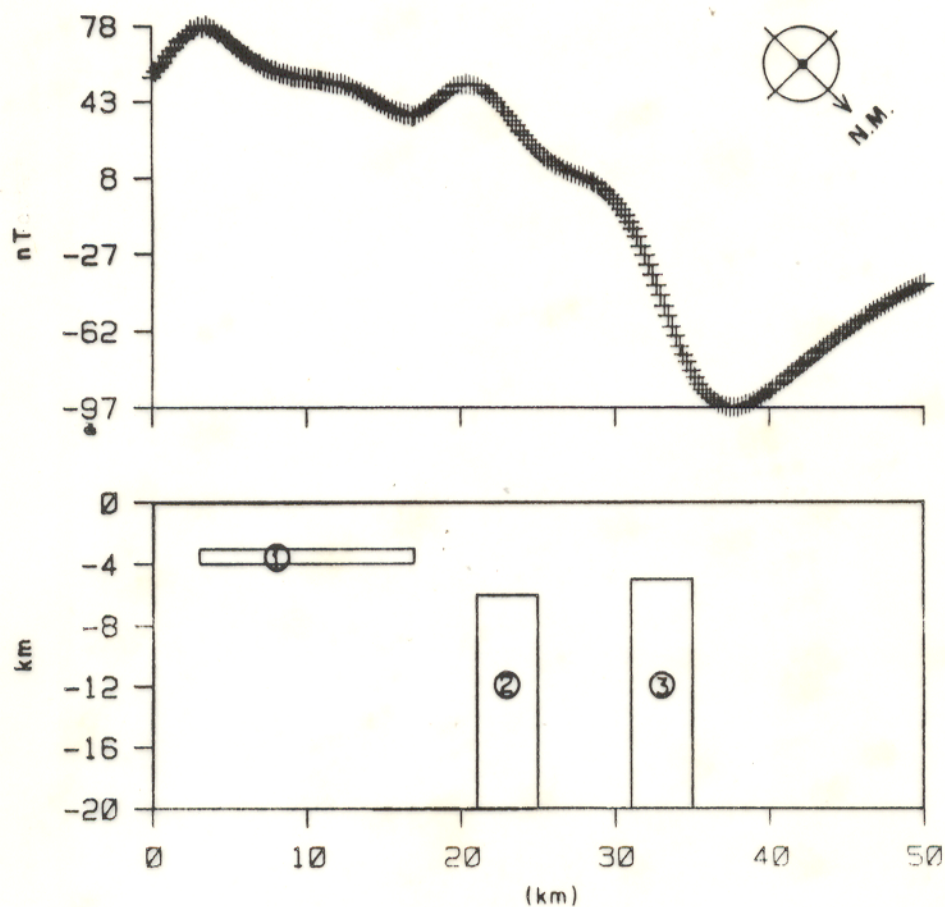
c Autor: C. A. Mendonca NPGP-UFPA 1992

```

C.....
  ax=x-xi
  ay=y-yi
  az=h+h-(z+zi)
  r2=(ax*ax+ay*ay+az*az)
  zr=az/r2
  dot=(-9+15*az*zr)*zr
  dot=dot/(r2*sqrt(r2))
  return
  end

```

**ANEXO 4**  
**Figuras**



**Figura 1-** Secção vertical dos prismas bidimensionais magnetizados que geram os dados magnéticos sintéticos (em cruzes) utilizados para exemplificar o algoritmo DOE. Todos os prismas possuem magnetização induzida apenas com magnetização igual a 1 A/m. O campo indutor está no plano da figura e possui inclinação igual a 45 graus e declinação nula. O prisma 1 tem espessura igual a 1 km, largura igual a 14 km e profundidade do topo igual a 3 km. Os prismas 2 e 3, têm espessuras infinitas e larguras iguais a 4 km. A profundidade do topo do prisma 2 é igual a 6 km e a do prisma 3 é igual a 5 km. O espaçamento médio entre os dados é de 0,25 km e a altura em que os dados sintéticos foram calculados é igual a 0,5 km.

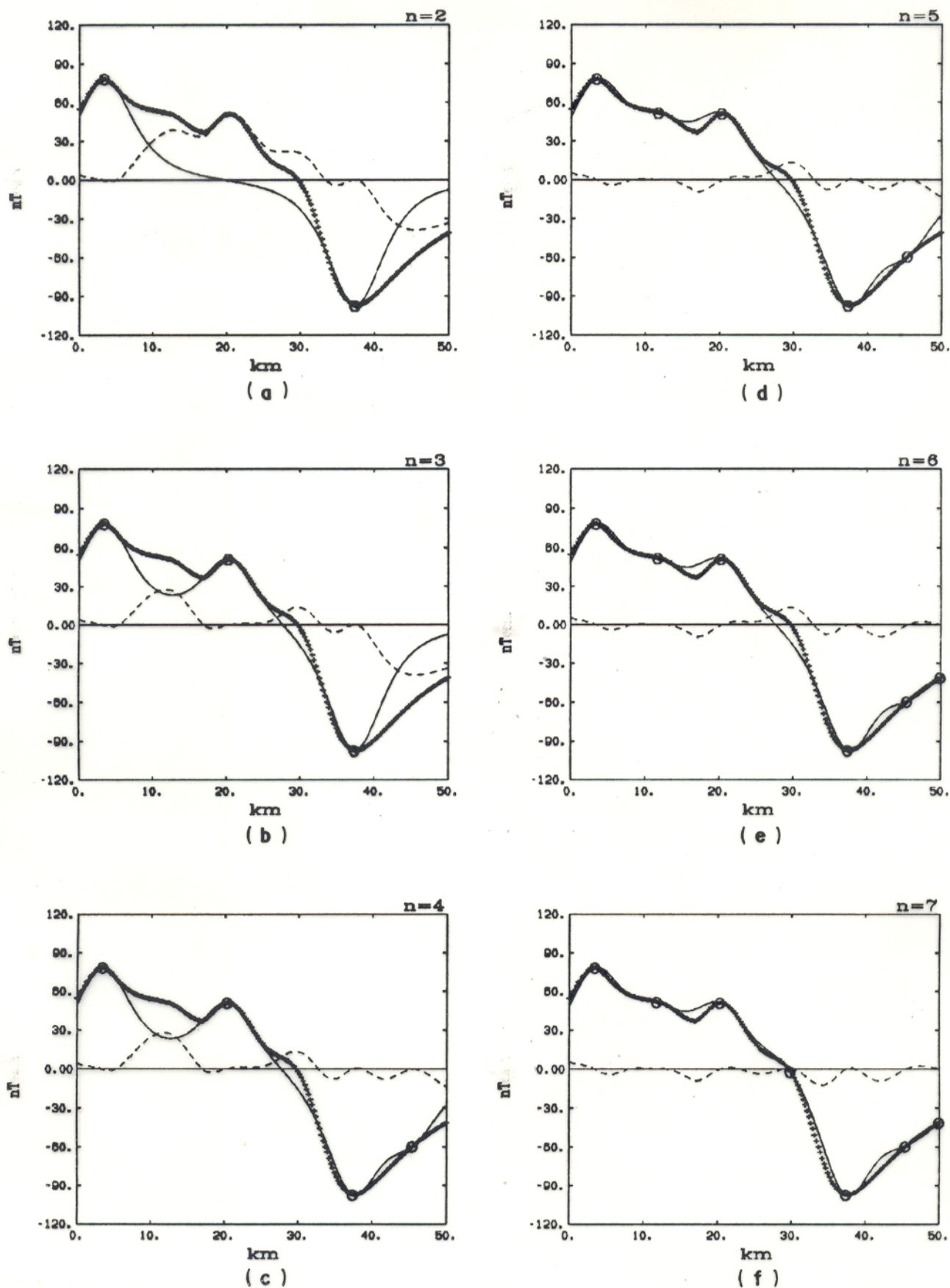


Figura 2- Exemplo 1

Iterações de números 2 (a) a 7 (f) do algoritmo DOE. As cruzes, a linha sólida e a linha tracejada representam, respectivamente, os valores da anomalia, a curva interpoladora e a curva residual. As observações equivalentes são assinaladas por círculos.

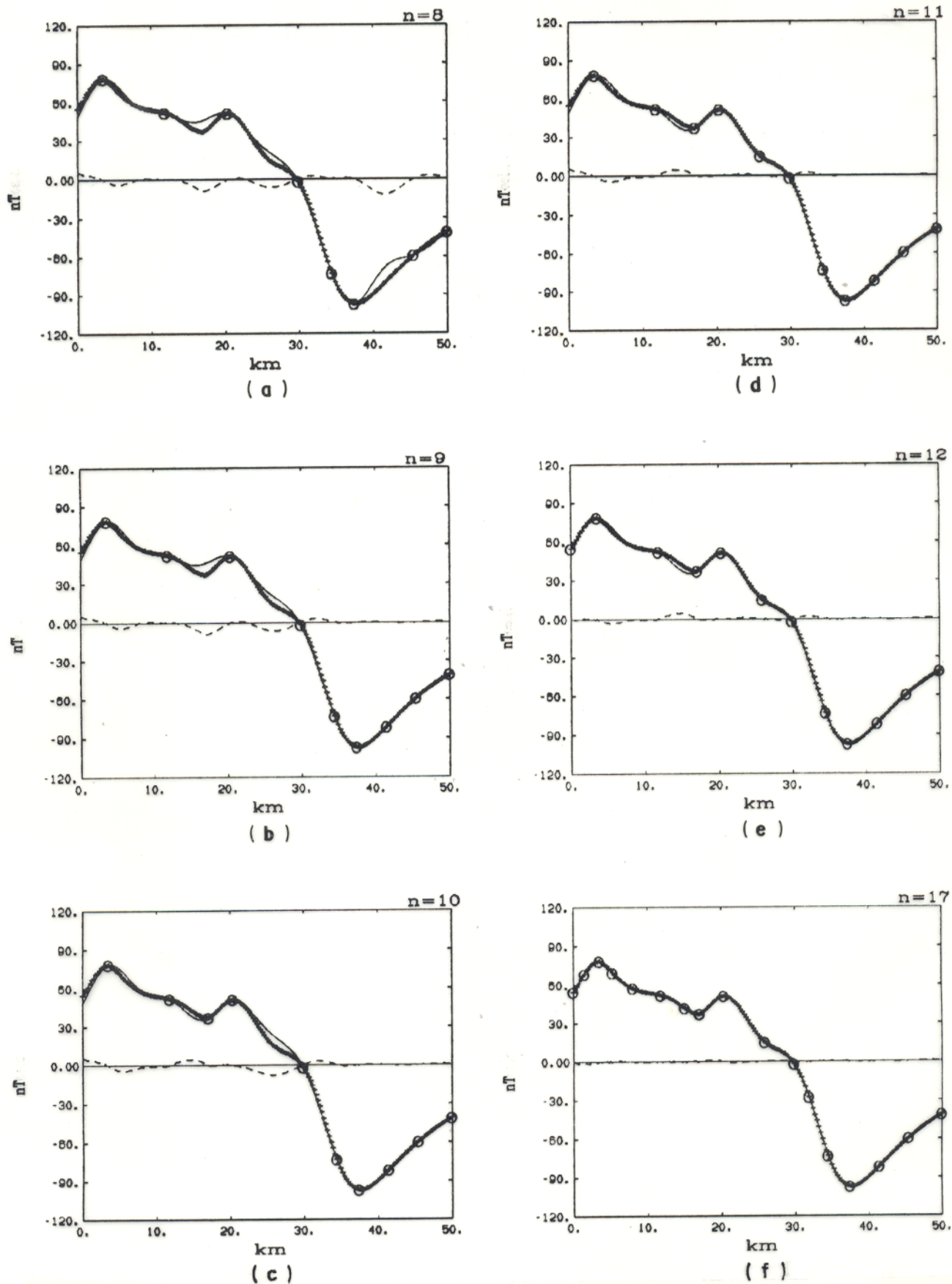


Figura 3- Exemplo 1

Iterações de números 8 (a) a 12 (e) e última (f) do algoritmo DOE. As cruces, a linha sólida e a linha tracejada representam, respectivamente, os valores da anomalia, a curva interpoladora e a curva residual. As observações equivalentes são assinaladas por círculos.

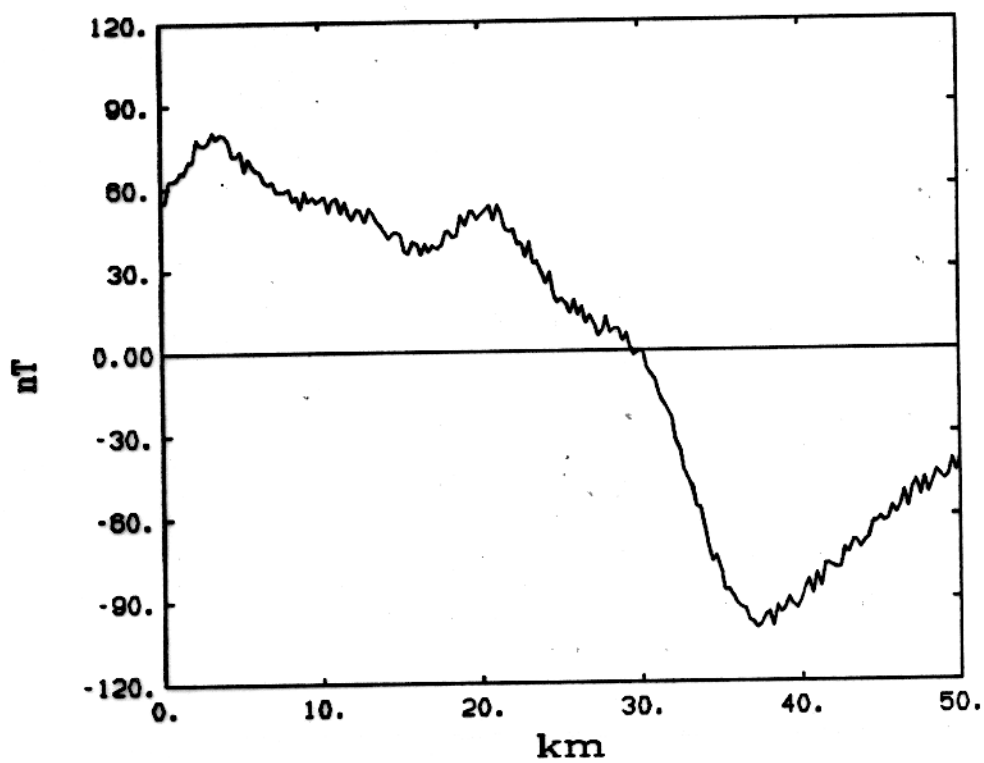


Figura 4- Exemplo 2  
Dados sintéticos da Figura 1 contaminados por ruído com distribuição uniforme entre -4 e +4 nT

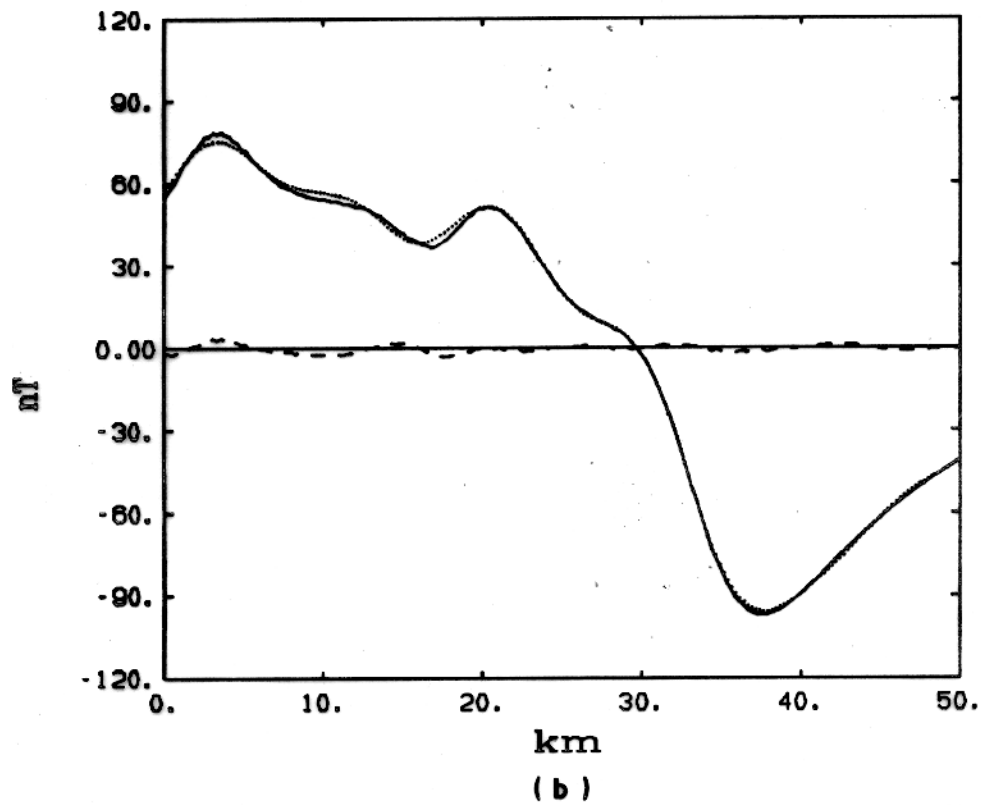
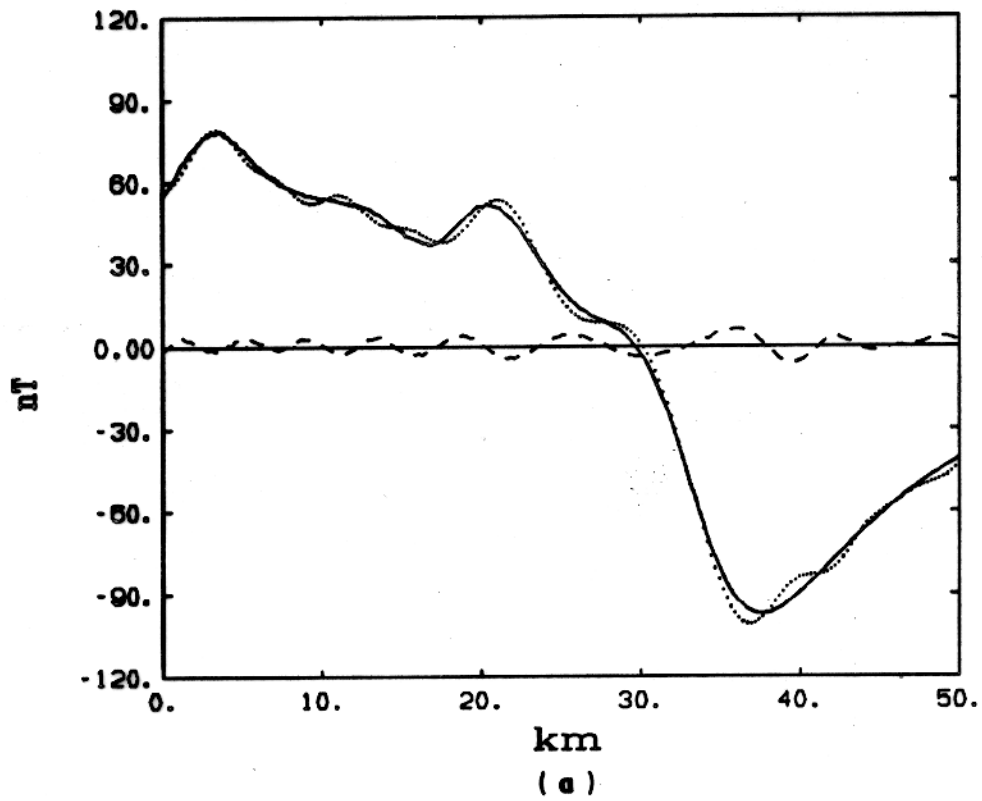


Figura 5- Exemplo 2

Ajuste dos dados da Figura 4 produzido pelo algoritmo DOE. A anomalia verdadeira está em traço sólido, o ajuste produzido pelo algoritmo DOE está em pontilhado e o resíduo entre as duas curvas anteriores está em tracejado. (a)  $\lambda = 0,001$  e (b)  $\lambda = 0,01$ .

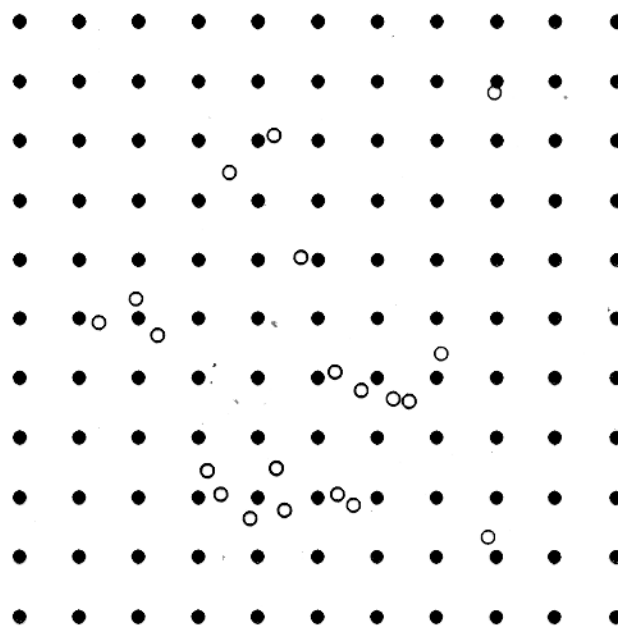


Figura 6: Posições relativa entre as observações (círculos vazios) e as as fontes na camada equivalente (círculos cheios).

11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
10	21	32	43	54	65	76	87	98	109	120
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
9	20	31	42	53	64	75	86	97	108	119
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
8	19	30	41	52	63	74	85	96	107	118
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
7	18	29	40	51	62	73	84	95	106	117
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
6	17	28	39	50	61	72	83	94	105	116
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
5	16	27	38	49	60	71	82	93	104	115
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
4	15	26	37	48	59	70	81	92	103	114
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
3	14	25	36	47	58	69	80	91	102	113
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
2	13	24	35	46	57	68	79	90	101	112
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●
1	12	23	34	45	56	67	78	89	100	111
●	●	●	●	●	●	●	●	●	●	●

Figura 7: Enumeração das fontes na camada equivalente com um único índice

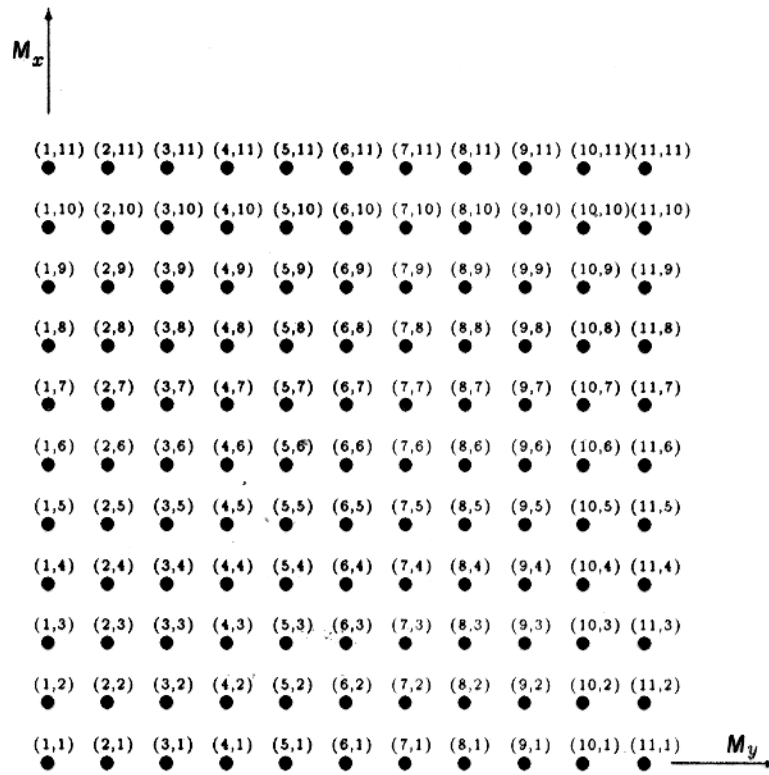


Figura 8: Enumeração das fontes na camada equivalente com duplo índice

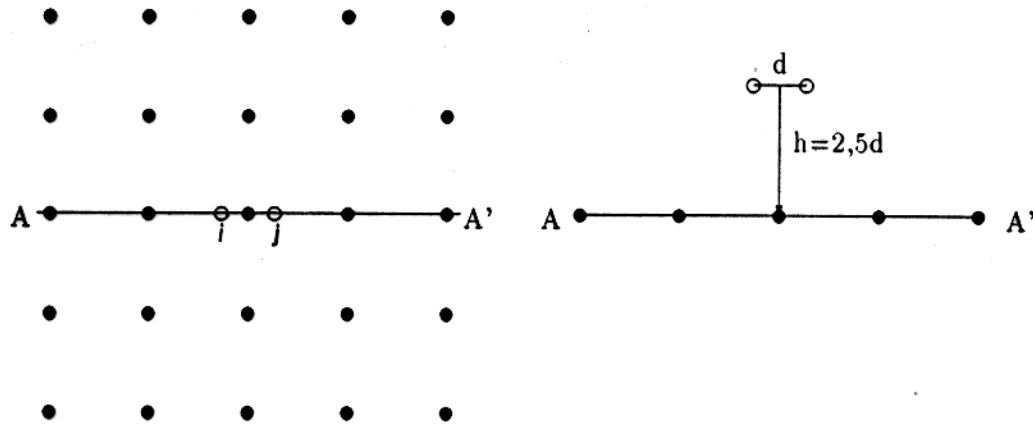


Figura 9: Discretização da camada equivalente visando a verificação numérica a aproximação (73). O lado esquerdo da figura mostra a visão em planta e o direito a secção vertical ao longo do perfil  $AA'$ . Os círculos cheios representam as fontes na camada equivalente e os círculos vazios assinalam as posições dos dados  $i$  e  $j$  que são separados entre si pela distância  $d$ . A profundidade da camada equivalente,  $h$ , é igual a  $2,5d$ .

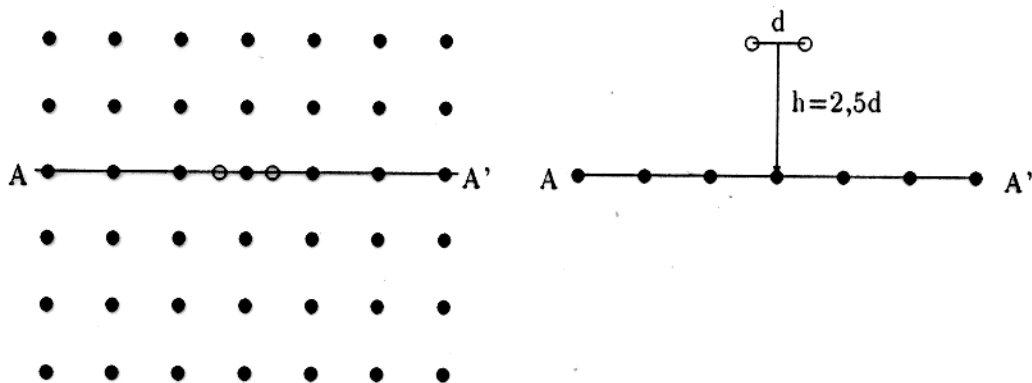


Figura 10: Discretização da camada equivalente colocando 49 fontes na camada equivalente.

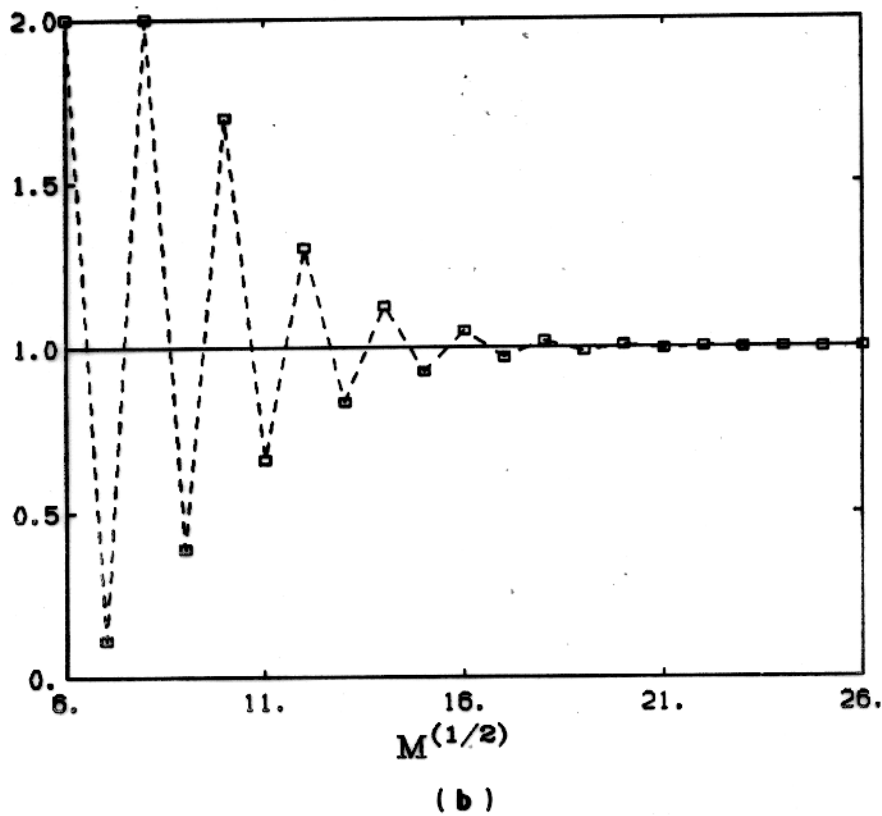
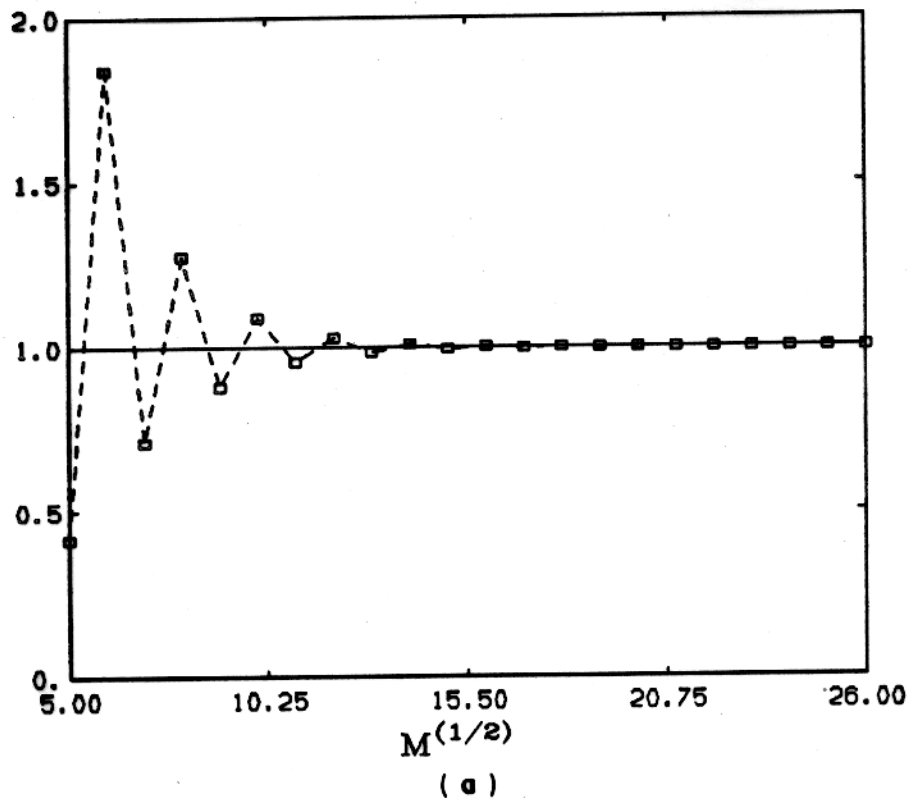


Figura 11- Verificação da aproximação (73). A camada equivalente tem forma quadrática com arestas iguais a  $5h$ , profundidade ( $h$ ) igual a 2,  $5d$  sendo  $d$  a distância entre as duas posições de amostragem (vide Figuras 9 e 10). Cada quadrado assinala a razão entre o valor da integração discreta, utilizando uma camada equivalente com  $M$  fontes, e o valor da integral analítica. (a) massas pontuais; (b) dipolos magnéticos verticais.

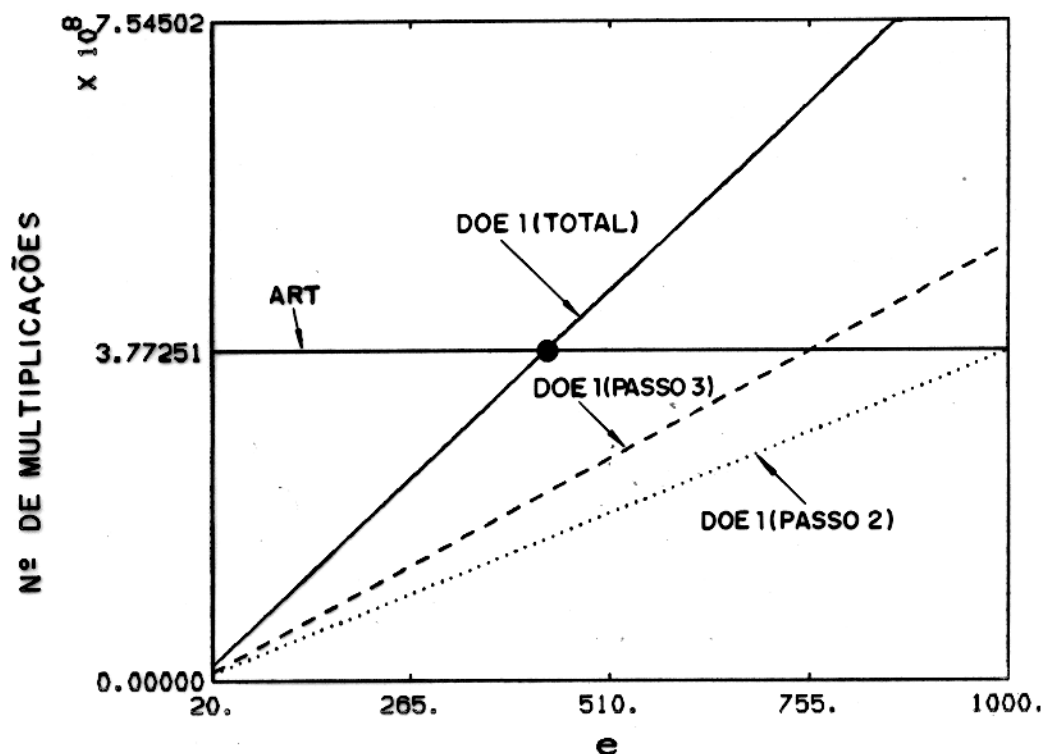
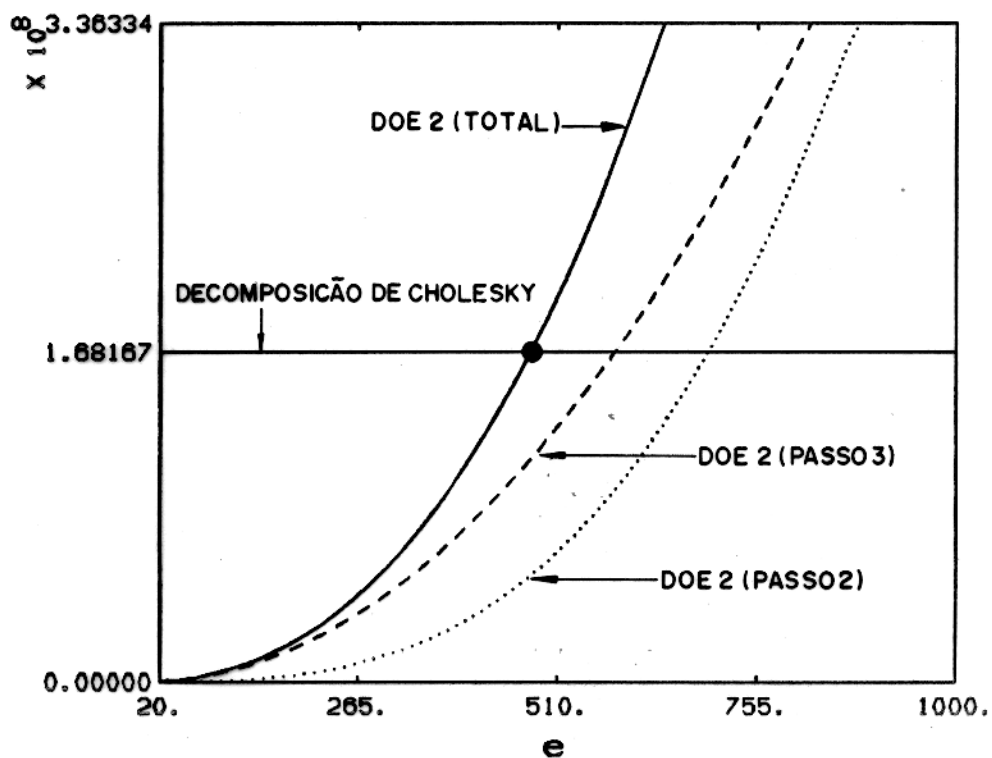
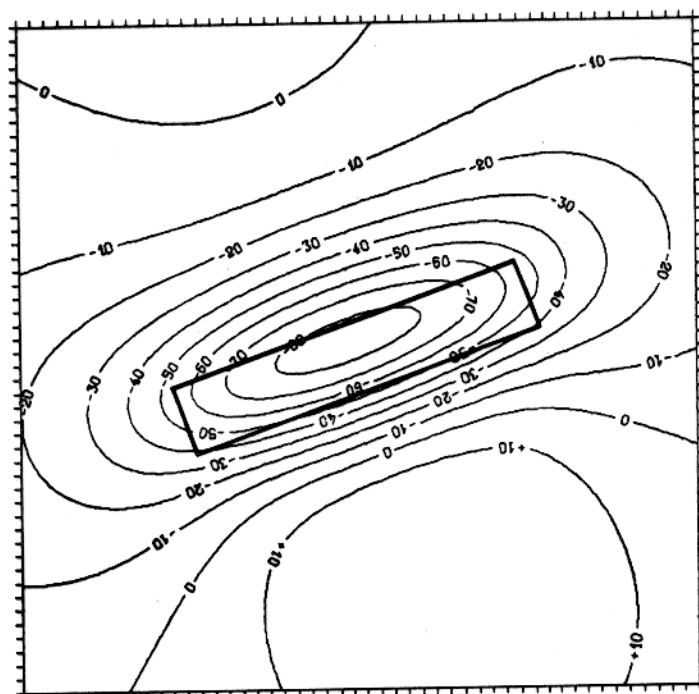


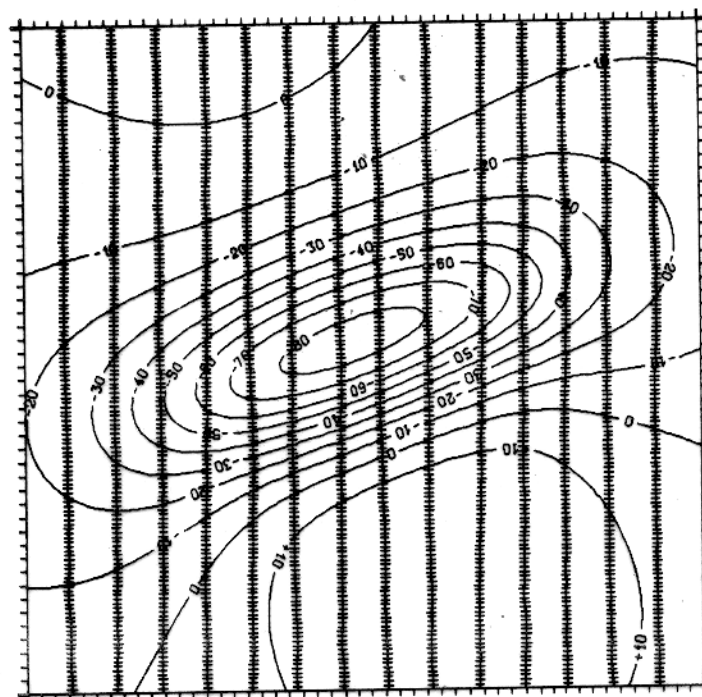
Figura 12- Comparação entre o número de multiplicações usadas pelo algoritmo ART e pelo algoritmo DOE (implementação DOE1) para resolver um problema de mínimos quadrados com 1000 dados e 500 parâmetros. O algoritmo DOE será mais eficiente que o algoritmo ART se o número de observações equivalentes for menor que o número correspondente ao círculo cheio (aproximadamente 450).



**Figura 13-** Comparação entre o número de multiplicações usadas para obter um ajuste por mínimos quadrados em 1000 observações aplicando a decomposição de Cholesky e usando as observações equivalentes aplicando o algoritmo DOE (implementação DOE2). O ajuste usando apenas as observações equivalentes será obtido mais rapidamente sempre que o número de observações equivalentes for menor que o número correspondente ao círculo cheio (aproximadamente 450).



(a)



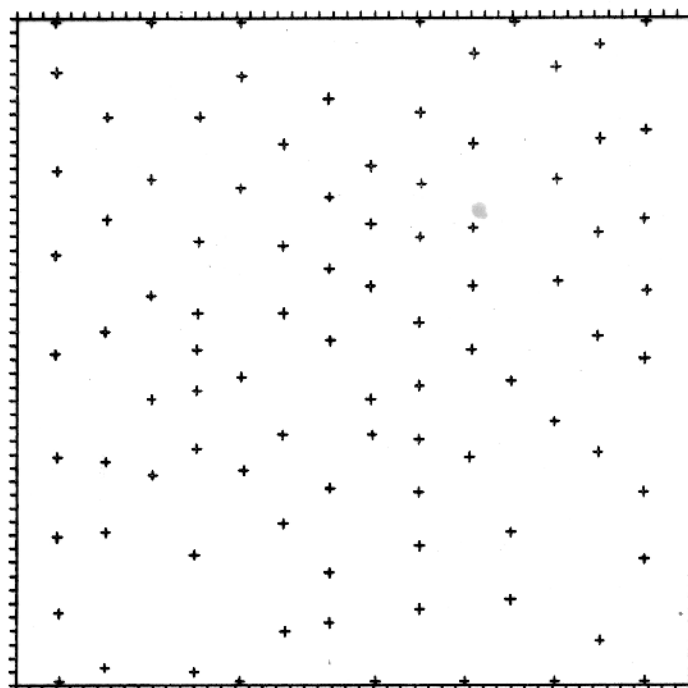
(b)

**Figura 14- Exemplo 3**

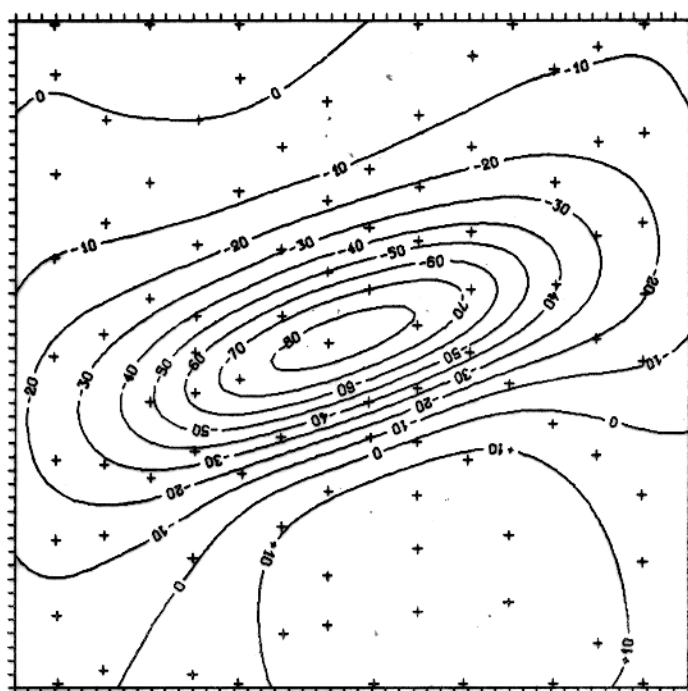
Anomalia magnética sintética devida a um prisma com espessura vertical infinita, profundidade do topo igual a 15 km e dimensões horizontais iguais a 12 e 60 km. A magnetização é induzida apenas sendo a declinação nula, inclinação igual a 10 graus e módulo igual a 1 A/m. O intervalo de contorno é igual a 10 nT.

(a) anomalia e projeção horizontal do prisma.

(b) anomalia e posicionamento das linhas de amostragem. A distância média entre as linhas de amostragem é igual a 7,4 km e a distância média ao longo das linhas é igual a 0,74 km. O número total de dados é igual a 2072.



(a)

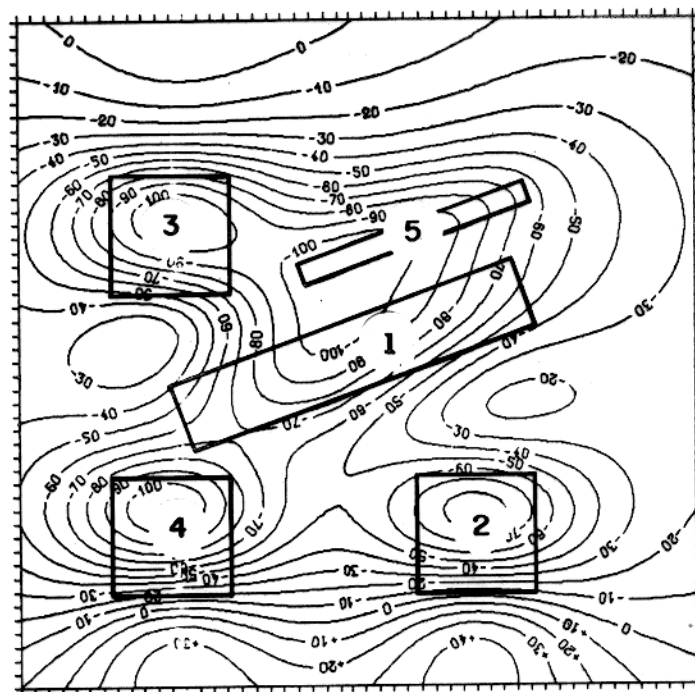


(b)

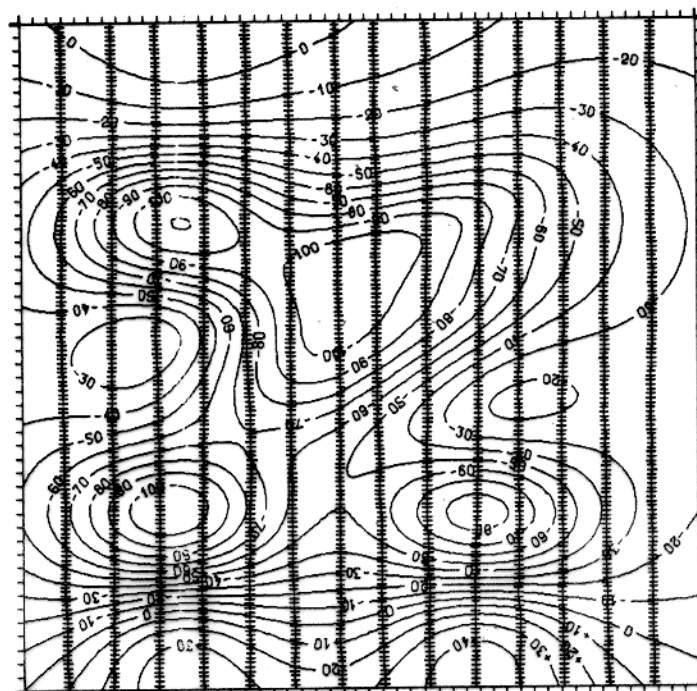
**Figura 15- Exemplo 3**

(a) Posicionamento das 93 observações equivalentes (cruzes) determinadas pelo algoritmo DOE.

(b) Mapa de contorno dos isovalores interpolados pela camada equivalente sobre a malha regular ( $50 \times 50$ ) através da avaliação da função interpoladora que ajusta as 91 observações equivalentes representadas por cruces. O intervalo de contorno é igual a 10 nT.



(a)



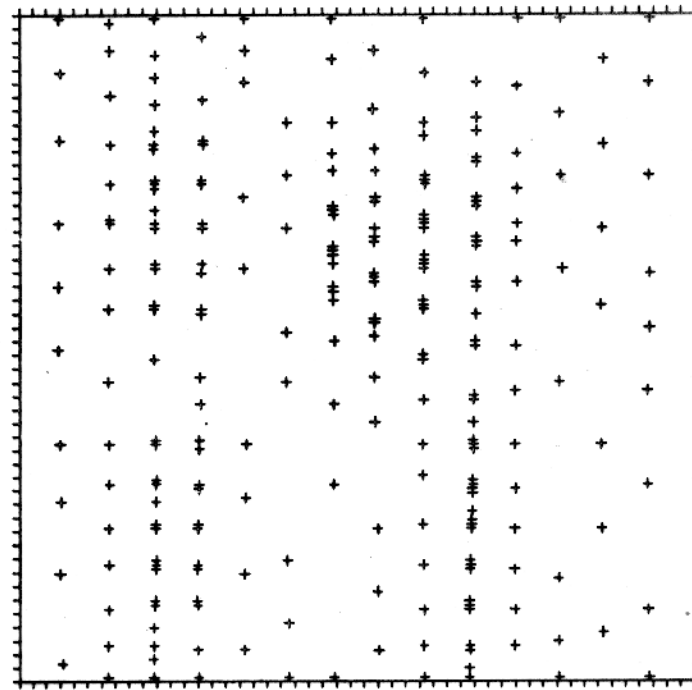
(b)

**Figura 16- Exemplo 4**

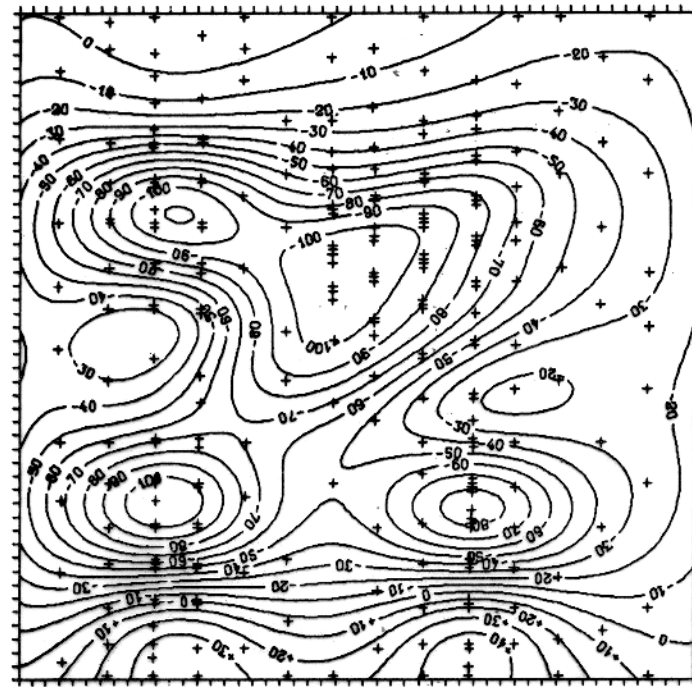
Anomalia magnética sintética devida a 5 prismas. A magnetização em todos os prismas é induzida apenas com módulo igual a 1 A/m, sendo a declinação nula e a inclinação igual a 10 graus. Os prismas 2, 3 e 4 possuem profundidades do topo iguais a 10 km e secções horizontais quadráticas com arestas iguais a 20 km. O prisma 1 tem profundidade do topo igual a 15 km e secção horizontal retangular com arestas iguais a 60 km e 12 km. O prisma 5 tem profundidade do topo igual a 10 km e secção horizontal retangular com arestas iguais a 40 km e 4 km. O intervalo de contorno é igual a 10 nT.

(a) anomalia e projeção horizontal dos prismas.

(b) anomalia e posicionamento das linhas de amostragem. A distância média entre as linhas de amostragem é igual a 7,4 km e a distância média ao longo das linhas é igual a 0,74 km. O número total de dados é igual a 2072.



(a)

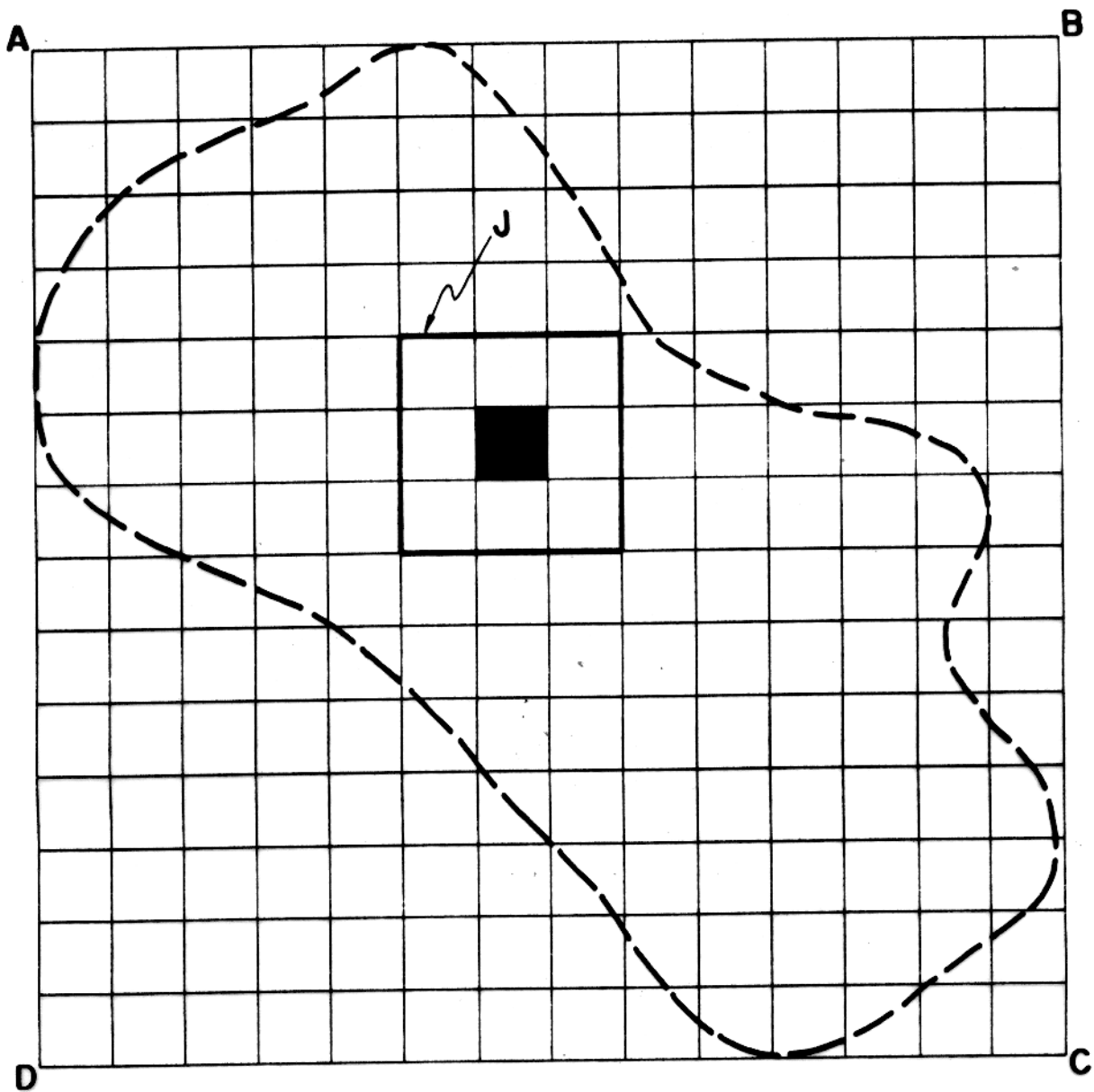


(b)

**Figura 17- Exemplo 4**

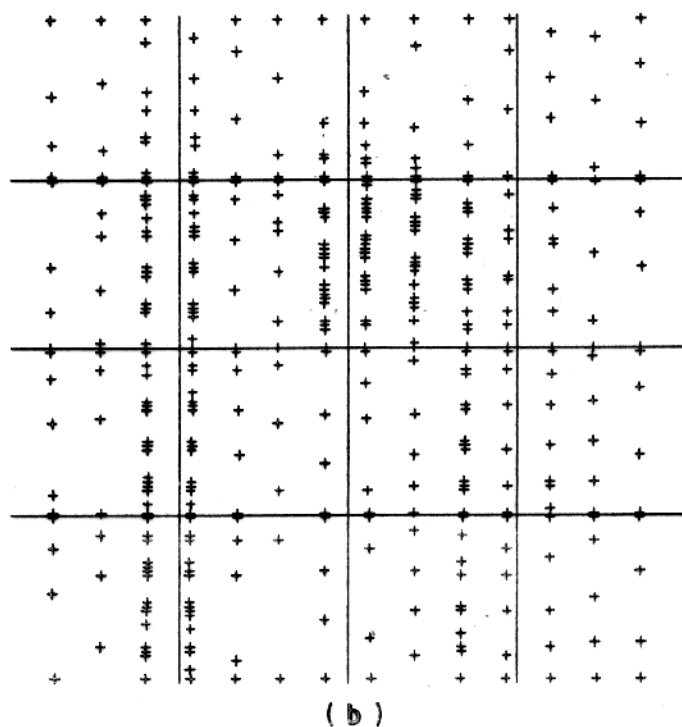
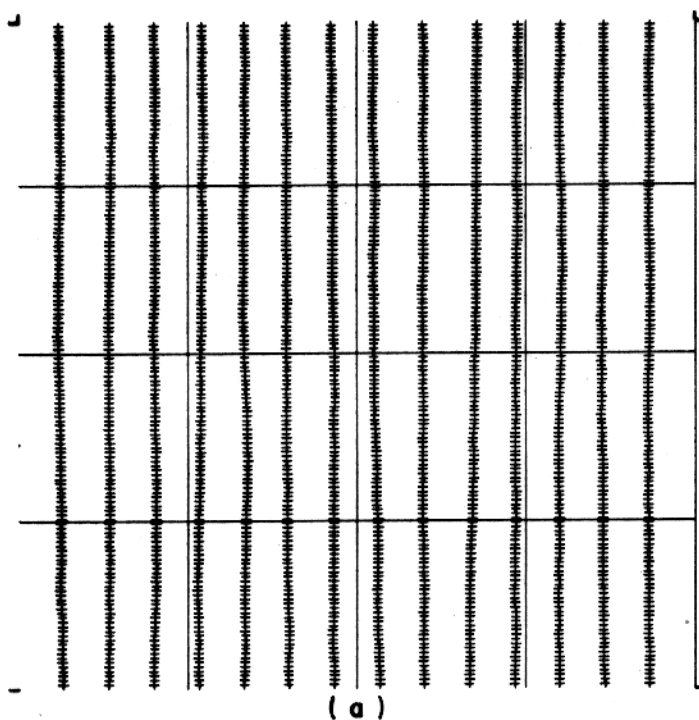
(a) Mapa de posicionamento das 248 observações equivalentes (cruzes) determinadas pelo algoritmo DOE.

(b) Anomalia interpolada pela camada equivalente sobre a malha regular ( $50 \times 50$ ) através da avaliação da função interpoladora que ajusta as 248 observações equivalentes representadas por cruces. O intervalo de contorno é igual a 10 nT.



**Figura 18- Exemplo 5**

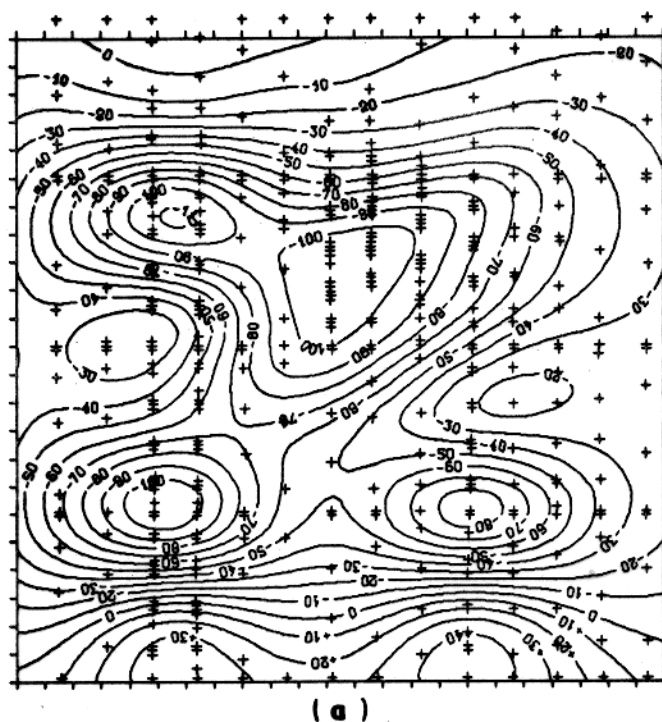
Ilustração dos conceitos de cela e janela. A curva tracejada representa o limite da área em cujo interior se encontram os dados amostrados. O polígono ABCD representa a área retangular que engloba todo o levantamento e que é dividida em celas (reticulado). O quadrado em negrito (assinalado pela letra J) representa uma janela constituída, neste caso, pelo agrupamento de nove celas. A interpolação na cela central (totalmente escura) é realizada avaliando a superfície interpoladora que ajusta todos os pontos dentro da janela.



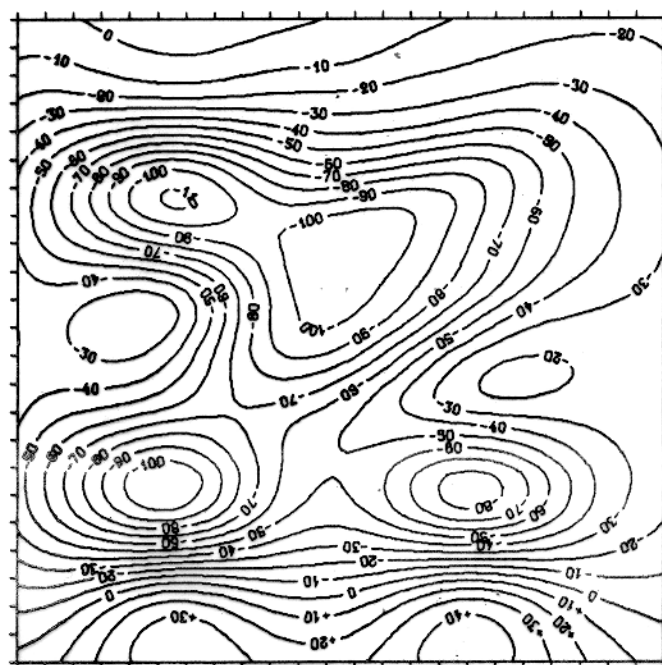
**Figura 19- Exemplo 5**

(a) Mapa do levantamento aeromagnético simulado sobreposto ao mapa com as 16 celas quadráticas que divide a área que engloba todos os dados do levantamento. As celas são quadráticas com arestas iguais a 27,5 km. A distância média entre as linhas de amostragem é igual a 7,4 km e a distância média das observações ao longo das linhas é igual a 0,74 km. O número total de dados é igual a 2072.

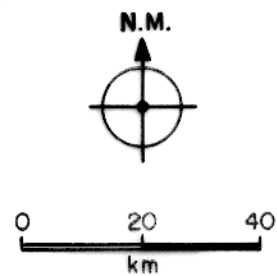
(b) Posicionamento das 397 observações equivalentes identificadas pelo algoritmo DOEg.



(a)



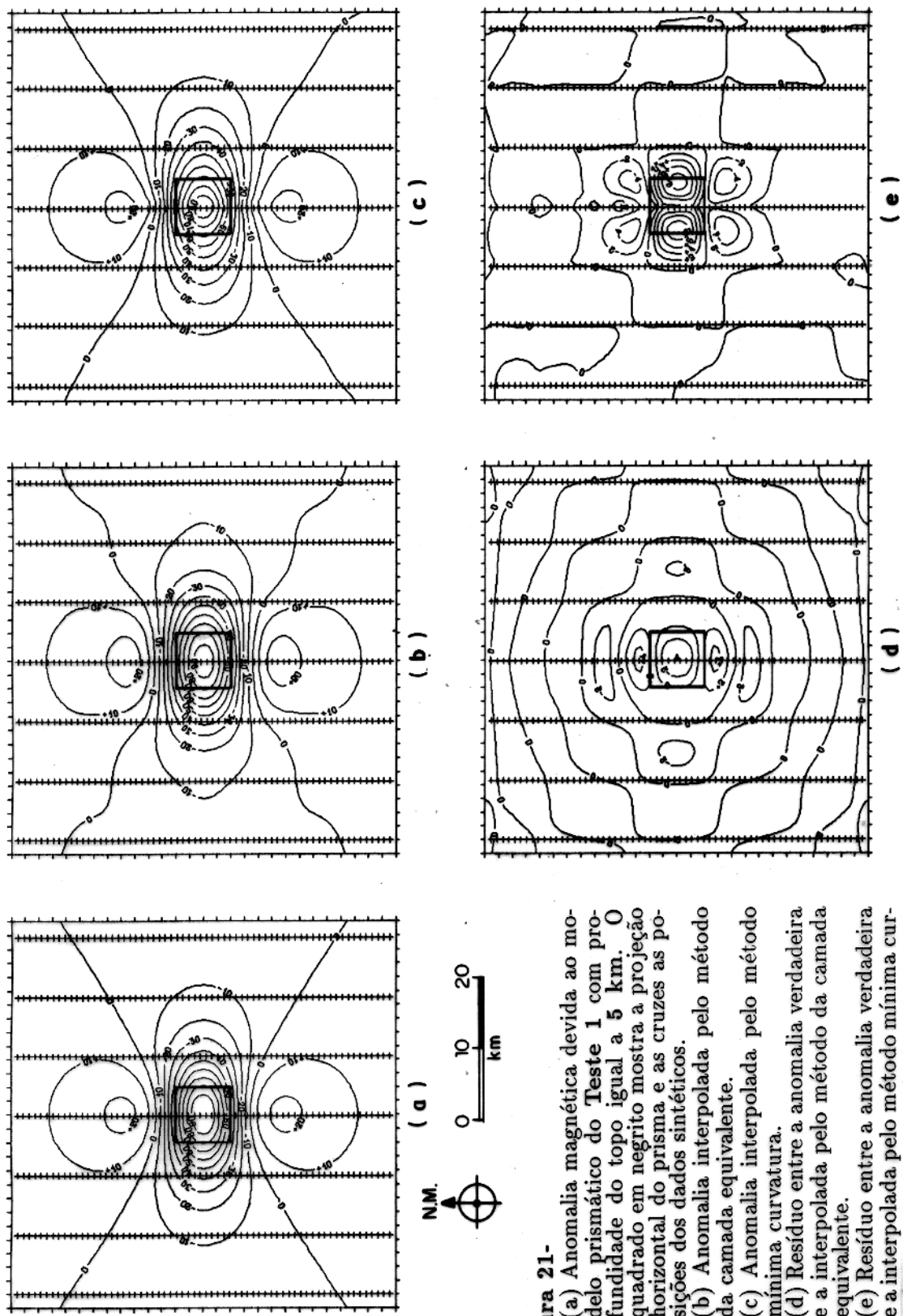
(b)

**Figura 20- Exemplo 5**

Mapa de contorno dos isovalores da anomalia interpolada na forma local com intervalo de contorno de 10 nT.

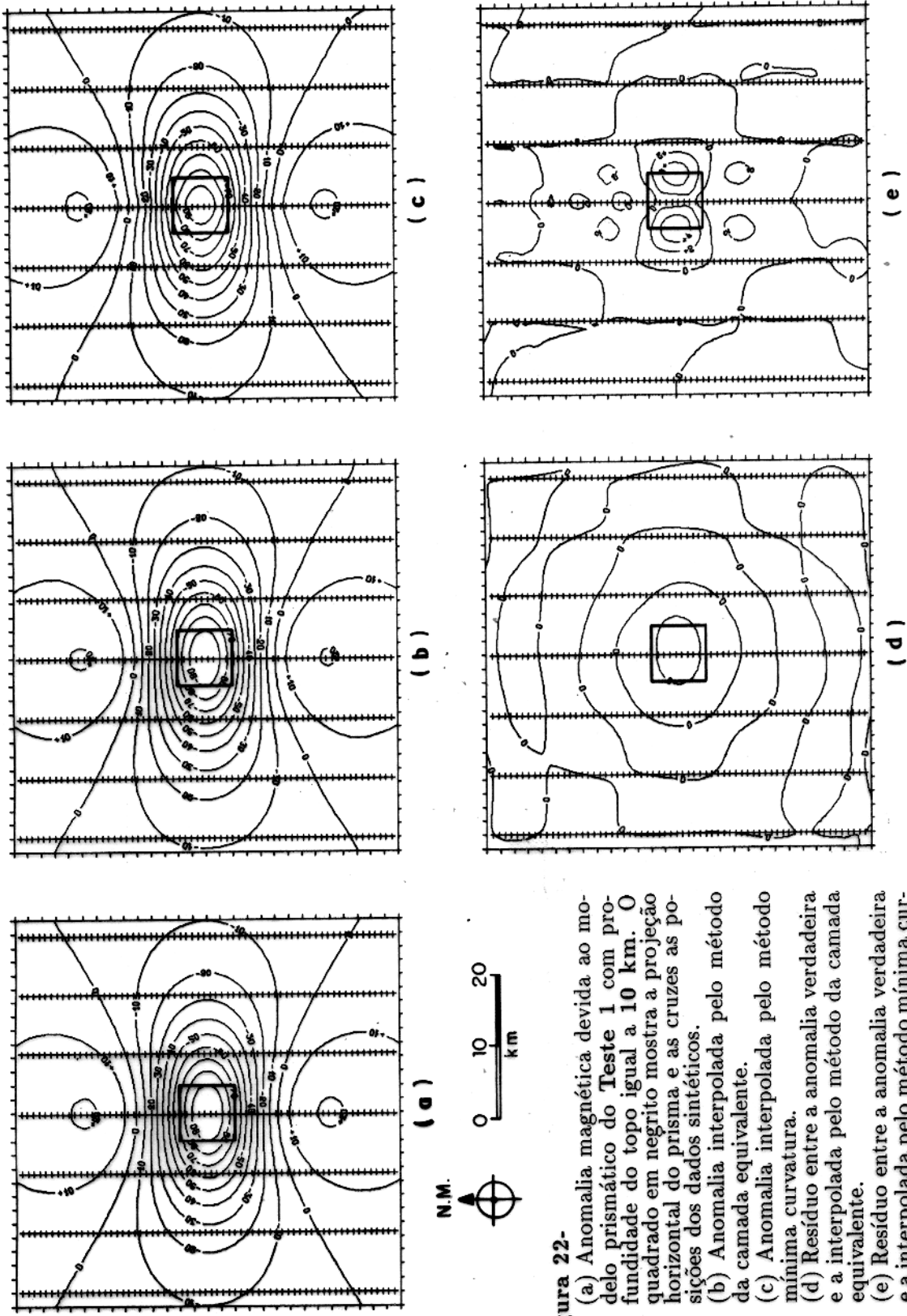
(a) sobreposto ao mapa com o posicionamento das 397 observações equivalentes identificadas pelo algoritmo DOEg.

(b) sem sobreposição do mapa das observações equivalentes.



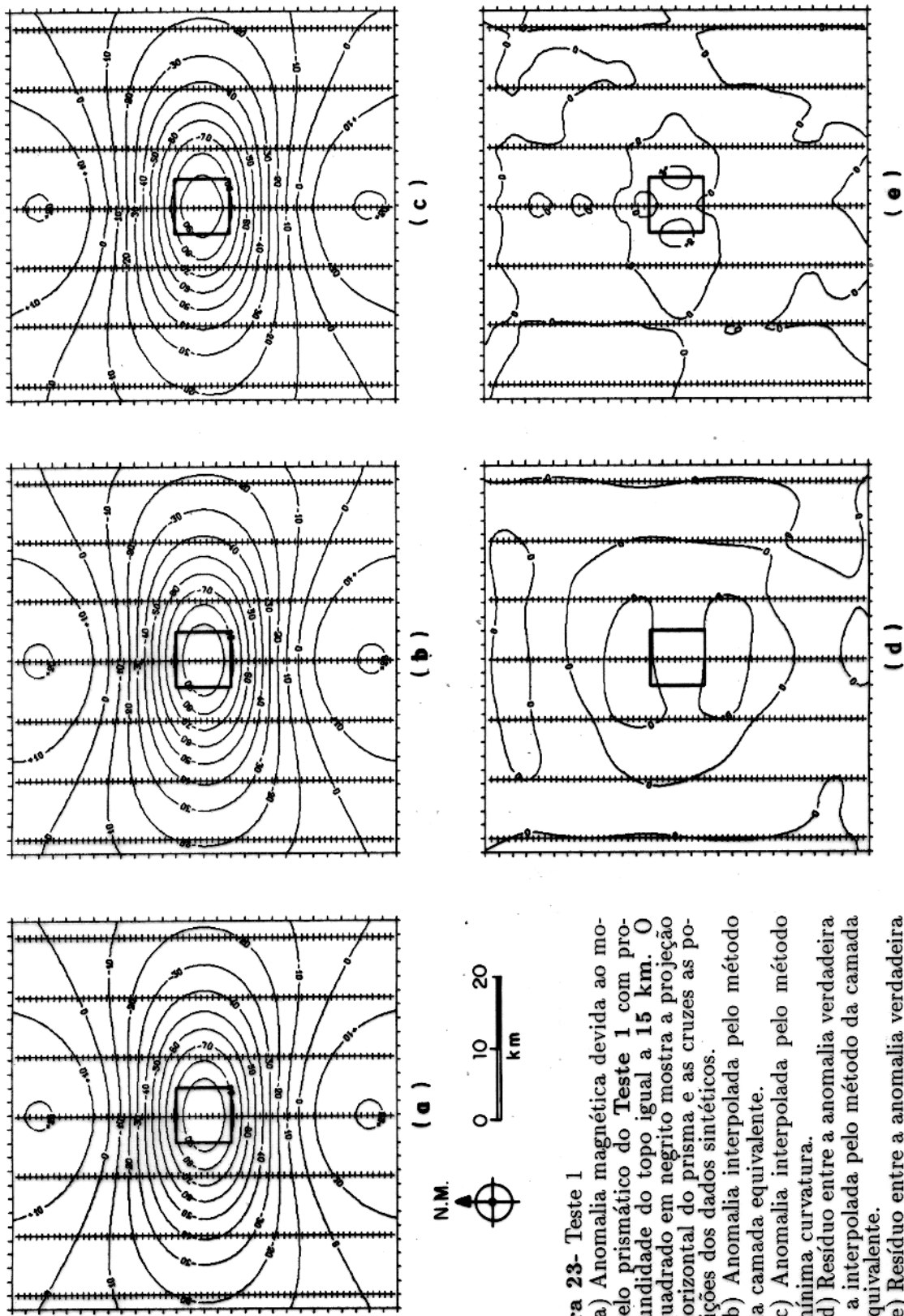
**Figura 21-** Anomalia magnética devida ao modelo prismático do Teste 1 com profundidade do topo igual a 5 km. O quadrado em negro mostra a projeção horizontal do prisma e as cruzes as posições dos dados sintéticos.  
 (b) Anomalia interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (c) Anomalia interpolada pelo método mínima curvatura.  
 (d) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (e) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método mínima curvatura.

Intervalo de contorno igual a 10 nT (a,b,c) e 2 nT (d,e).



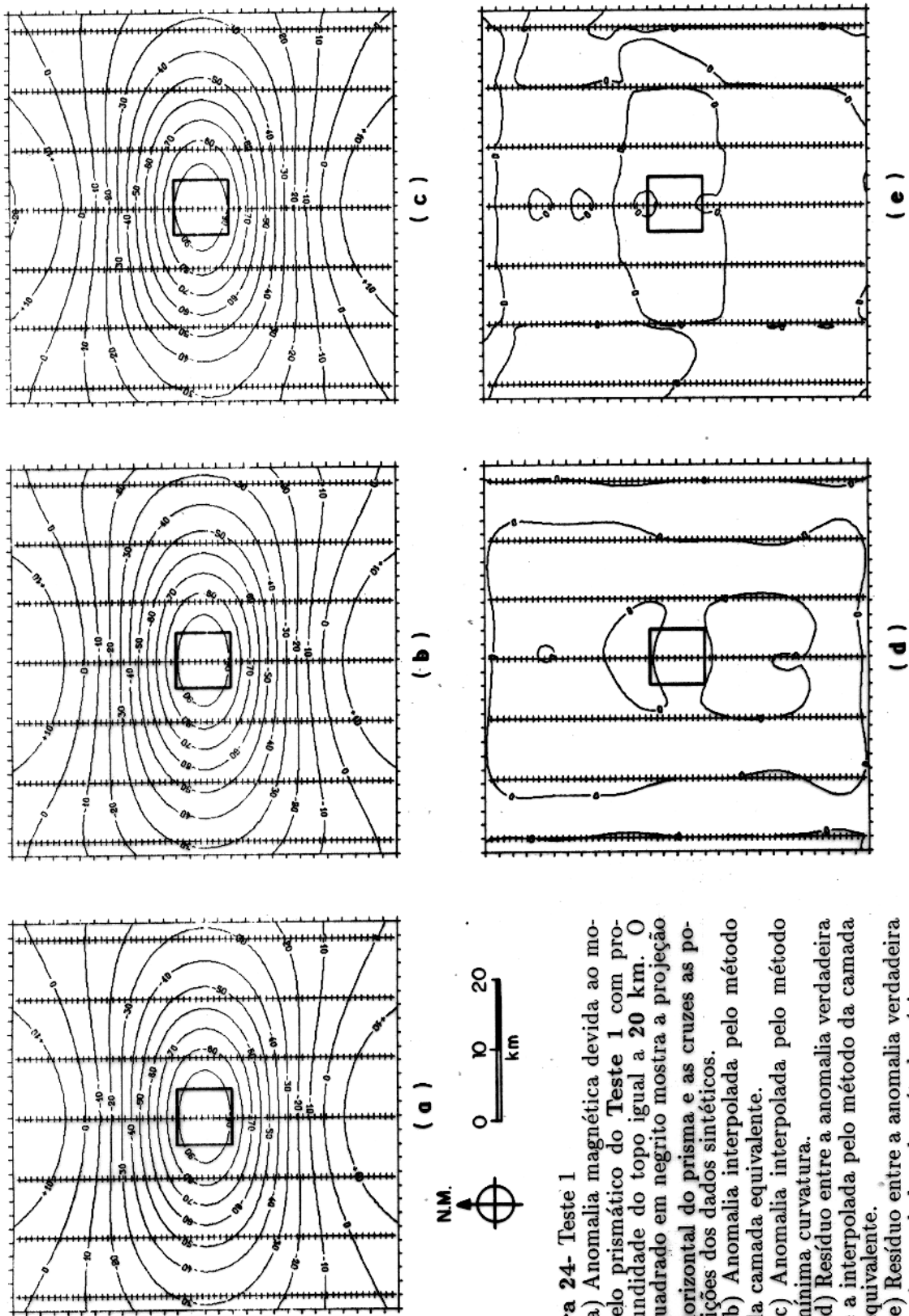
**Figura 22-**  
 (a) Anomalia magnética devida ao modelo prismático do Teste 1 com profundidade do topo igual a 10 km. O quadrado em negro mostra a projeção horizontal do prisma e as cruces as posições dos dados sintéticos.  
 (b) Anomalia interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (c) Anomalia interpolada pelo método mínima curvatura.  
 (d) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (e) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método mínima curvatura.

**Intervalo de contorno igual a 10 nT (a,b,c) e 2 nT (d,e).**



**Figura 23- Teste 1**  
 (a) Anomalia magnética devida ao modelo prismático do Teste 1 com profundidade do topo igual a 15 km. O quadrado em negrito mostra a projeção horizontal do prisma e as cruzes as posições dos dados sintéticos.  
 (b) Anomalia interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (c) Anomalia interpolada pelo método mínima curvatura.  
 (d) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (e) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método mínima curvatura.

Intervalo de contorno igual a 10 nT (a,b,c) e 2 nT (d,e).



**Figura 24- Teste 1**  
 (a) Anomalia magnética devida ao modelo prismático do Teste 1 com profundidade do topo igual a 20 km. O quadrado em negrito mostra a projeção horizontal do prisma e as cruzes as posições dos dados sintéticos.  
 (b) Anomalia interpolada pelo método da camada interpolada.  
 (c) Anomalia interpolada pelo método mínima curvatura.  
 (d) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (e) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método mínima curvatura.

Intervalo de contorno igual a 10 nT (a,b,c) e 2 nT (d,e).

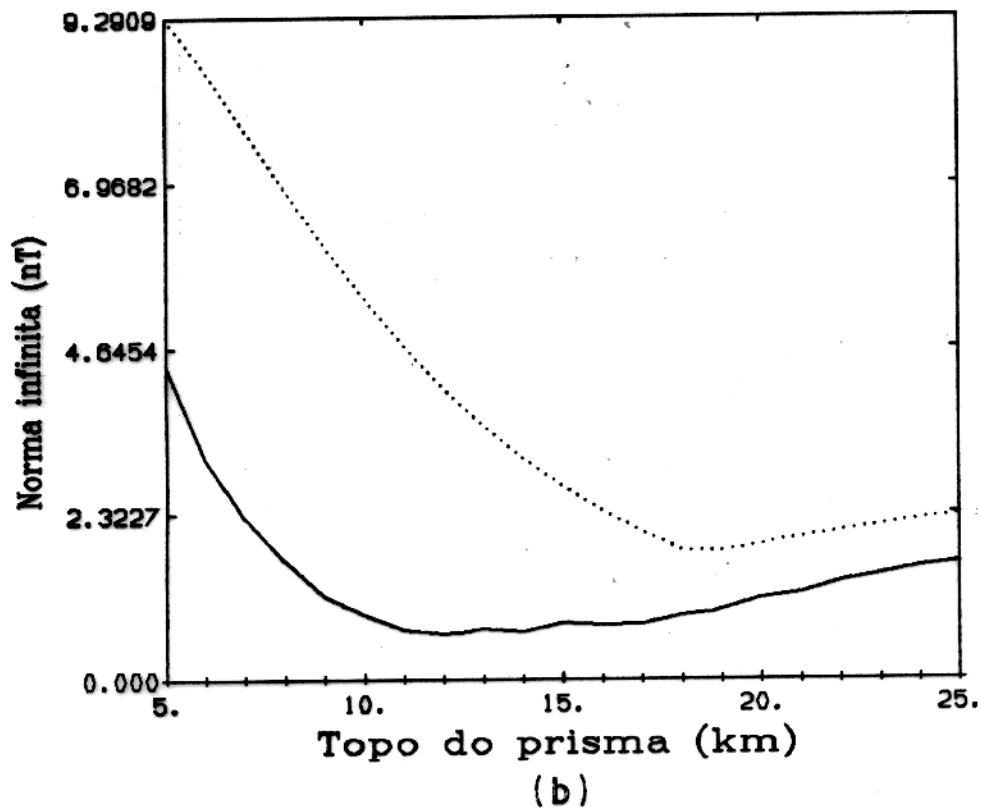
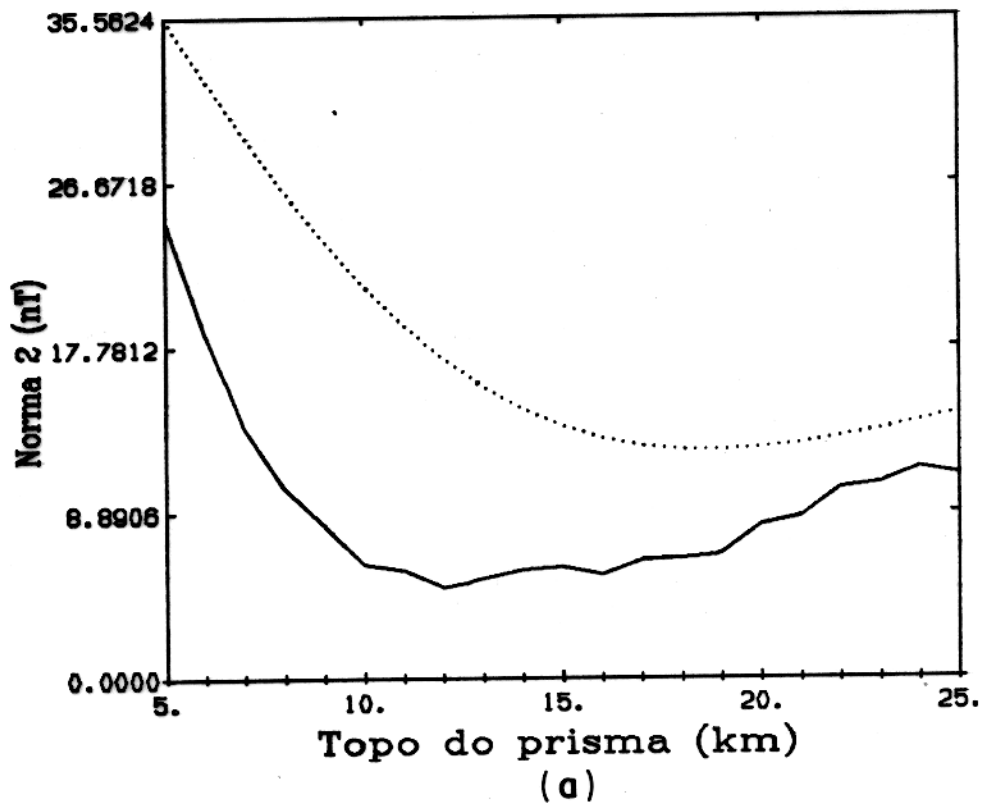
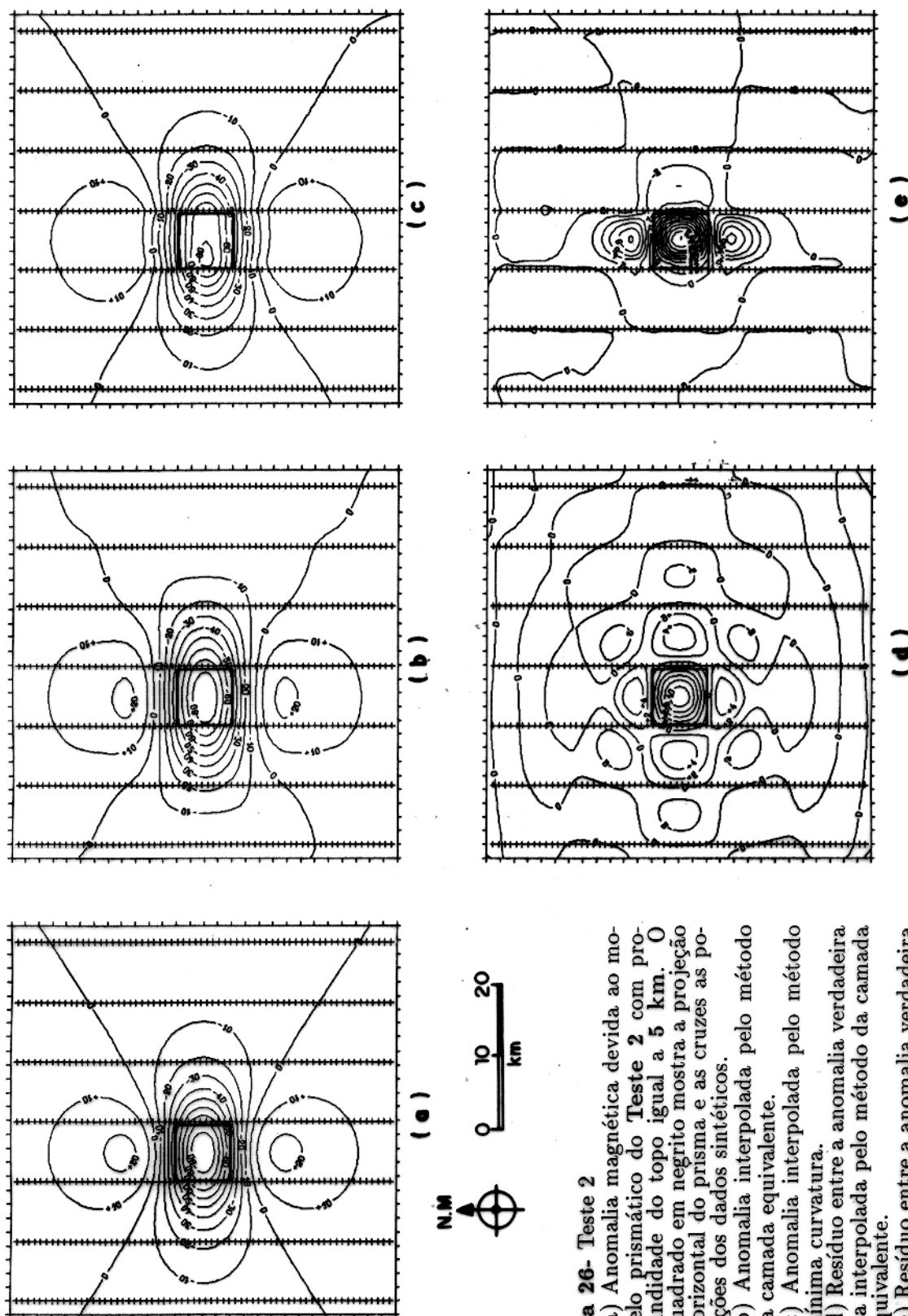


Figura 25- Teste 1

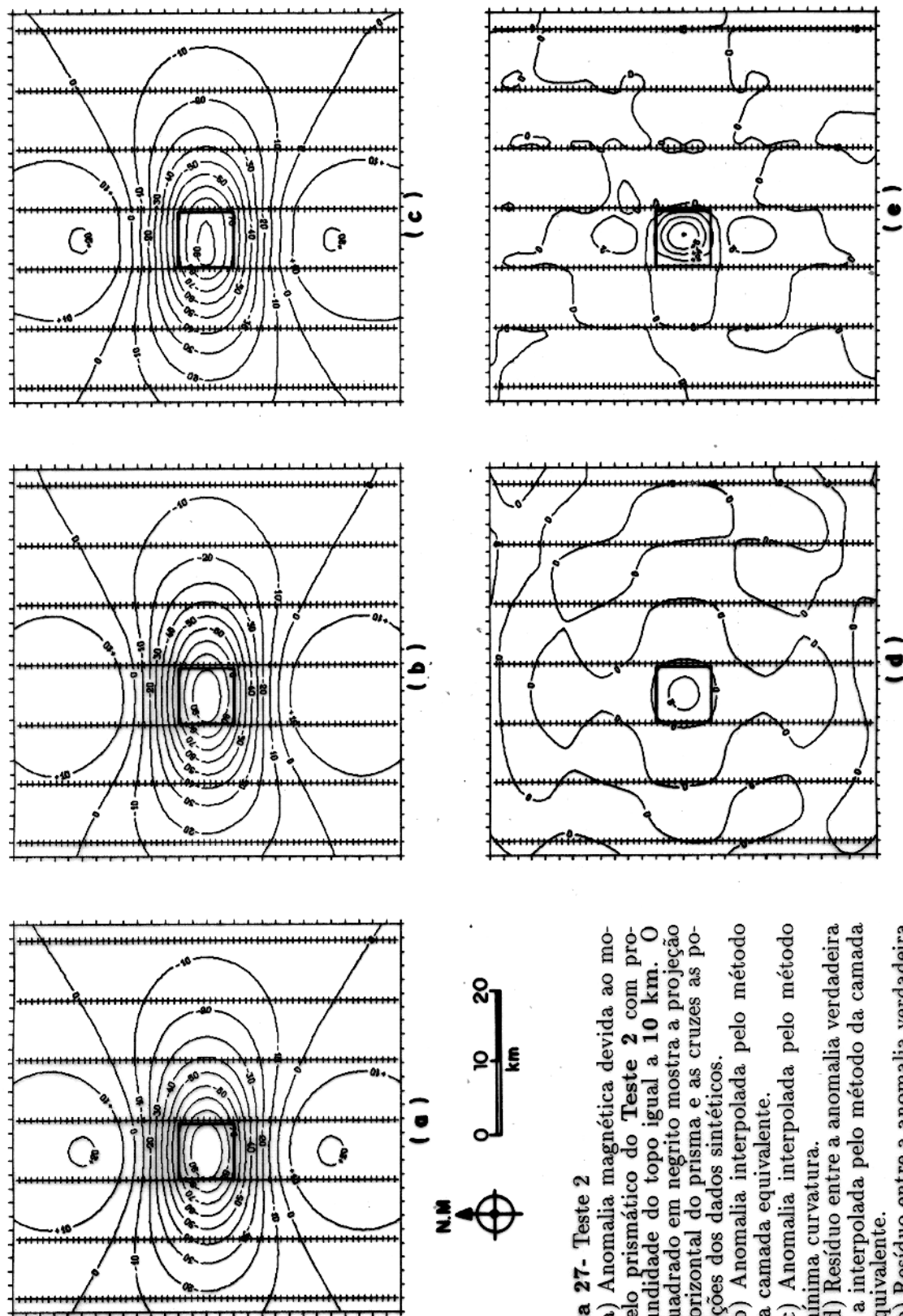
Comparação entre as normas dos resíduos devidos à interpolação pelo método da camada equivalente (linha sólida) e pelo método da mínima curvatura (linha pontilhada). (a) Norma quadrática. (b) Norma infinita.



**Figura 26- Teste 2**

(a) Anomalia magnética devida ao modelo prismático do Teste 2 com profundidade do topo igual a 5 km. O quadrado em negro mostra a projeção horizontal do prisma e as cruzes as posições dos dados sintéticos.  
 (b) Anomalia interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (c) Anomalia interpolada pelo método mínima curvatura.  
 (d) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (e) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método mínima curvatura.

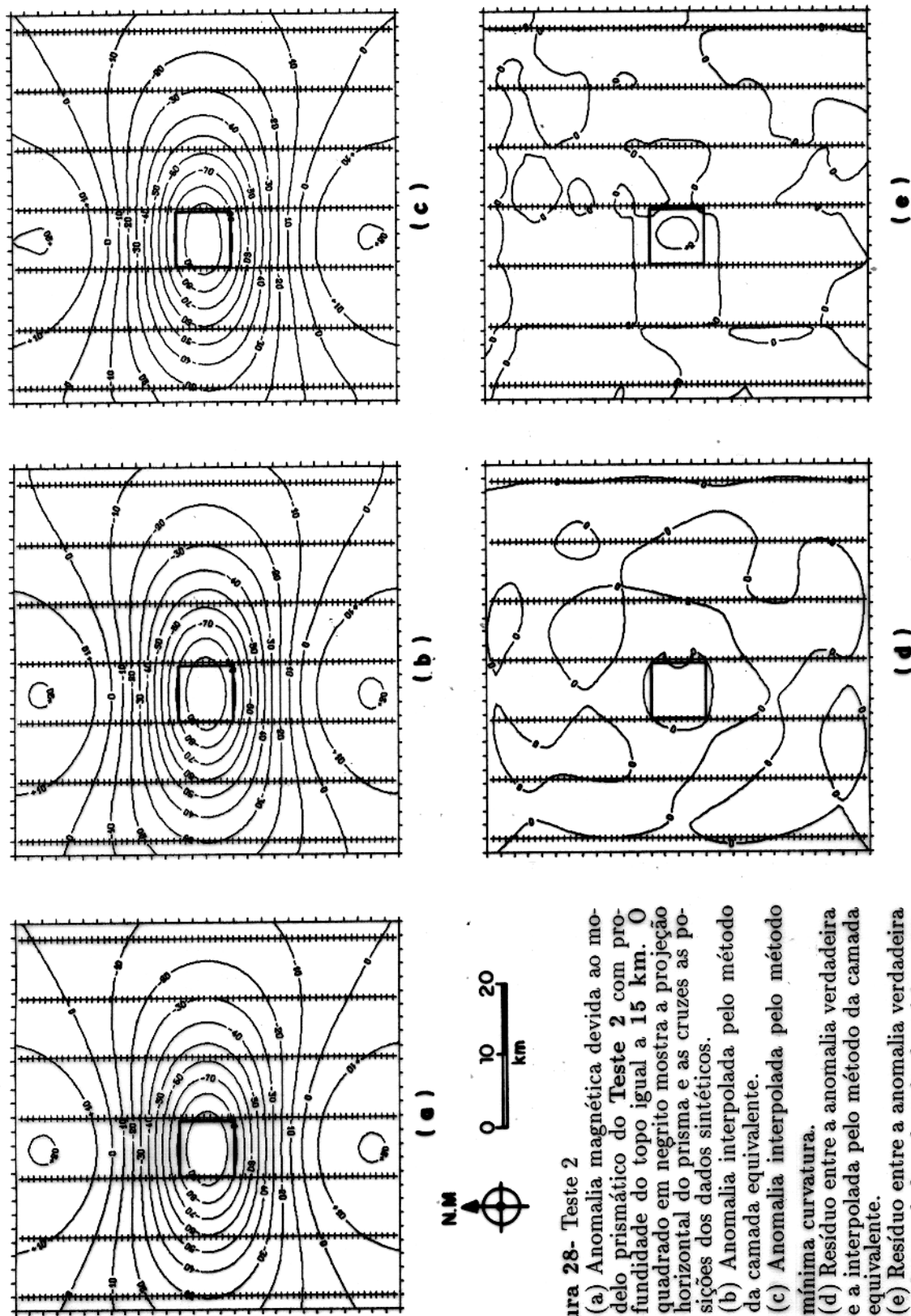
Intervalo de contorno igual a 10 nT (a,b,c) e 2 nT (d,e).



**Figura 27- Teste 2**

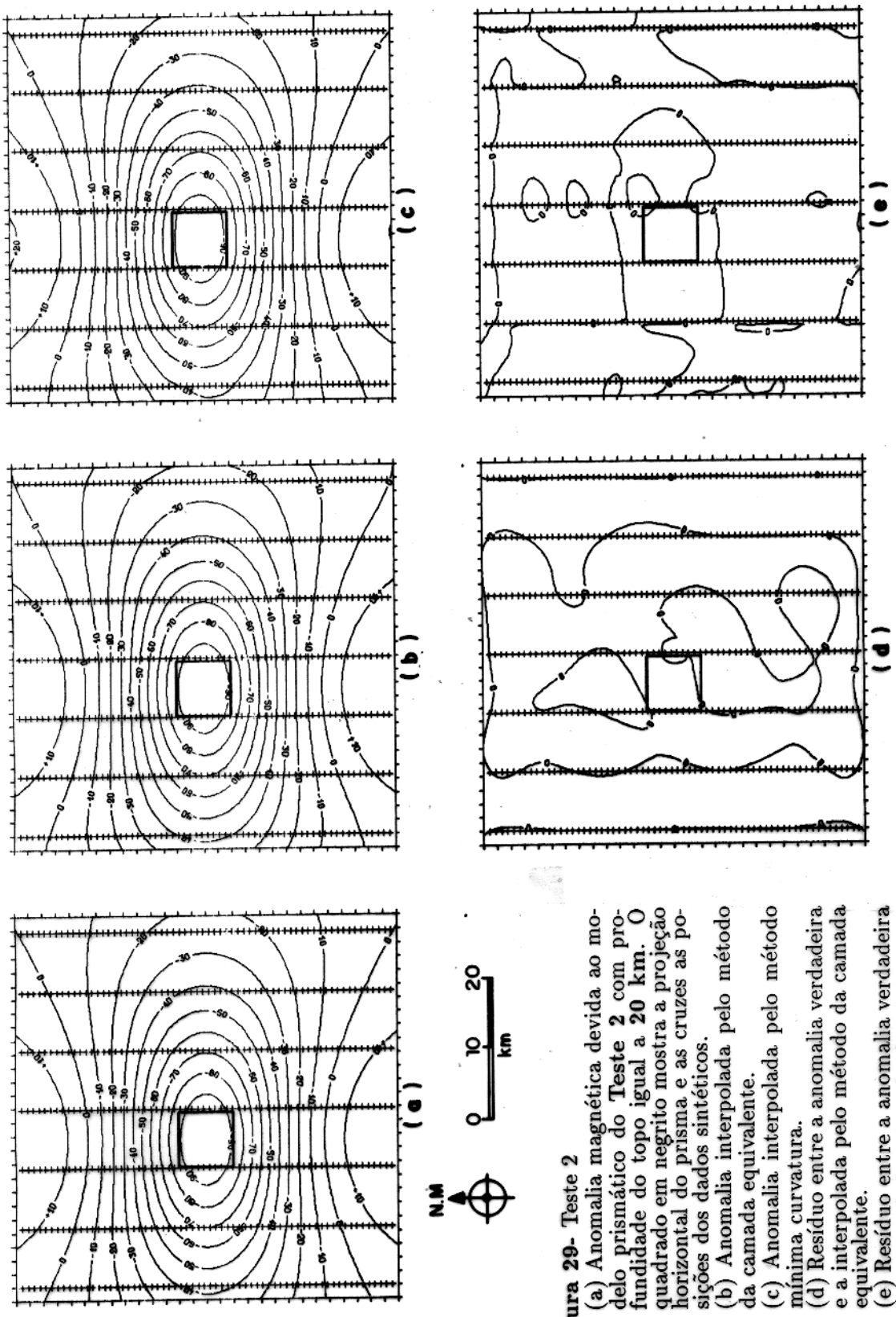
- (a) Anomalia magnética devida ao modelo prismático do Teste 2 com profundidade do topo igual a 10 km. O quadrado em negrito mostra a projeção horizontal do prisma e as cruzes as posições dos dados sintéticos.
- (b) Anomalia interpolada pelo método da camada equivalente.
- (c) Anomalia interpolada pelo método mínima curvatura.
- (d) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método da camada equivalente.
- (e) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método mínima curvatura.

Intervalo de contorno igual a 10 nT (a,b,c) e 2 nT (d,e).



**Figura 28- Teste 2**  
 (a) Anomalia magnética devida ao modelo prismático do Teste 2 com profundidade do topo igual a 15 km. O quadrado em negrito mostra a projeção horizontal do prisma e as cruzes as posições dos dados sintéticos.  
 (b) Anomalia interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (c) Anomalia interpolada pelo método mínima curvatura.  
 (d) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (e) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método mínima curvatura.

Intervalo de contorno igual a 10 nT (a,b,c) e 2 nT (d,e).



**Figura 29- Teste 2**  
 (a) Anomalia magnética devida ao modelo prismático do Teste 2 com profundidade do topo igual a 20 km. O quadrado em negro mostra a projeção horizontal do prisma e as cruzes as posições dos dados sintéticos.  
 (b) Anomalia interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (c) Anomalia interpolada pelo método mínima curvatura.  
 (d) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (e) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método mínima curvatura.  
 Intervalo de contorno igual a 10 nT (a,b,c) e 2 nT (d,e).

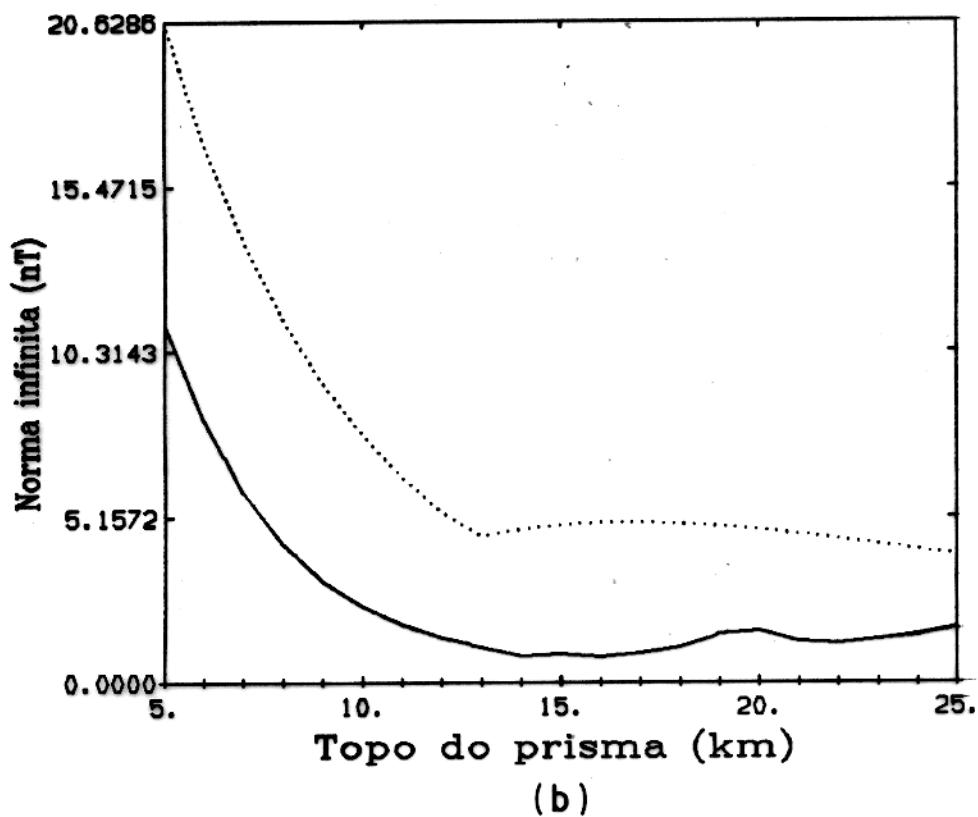
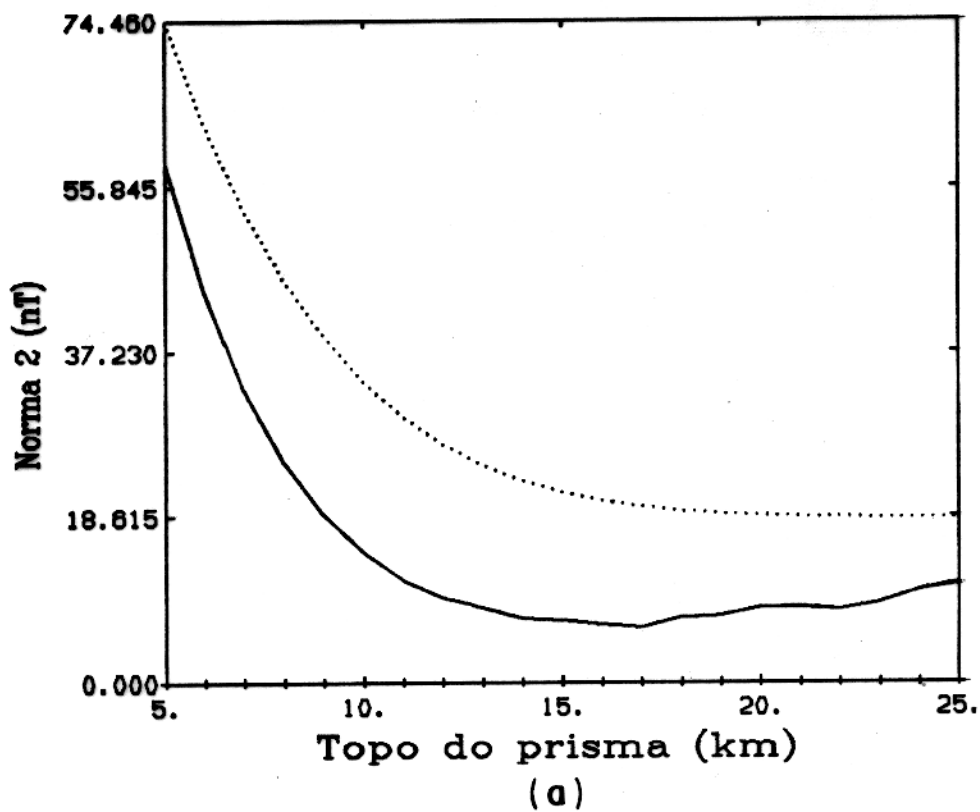
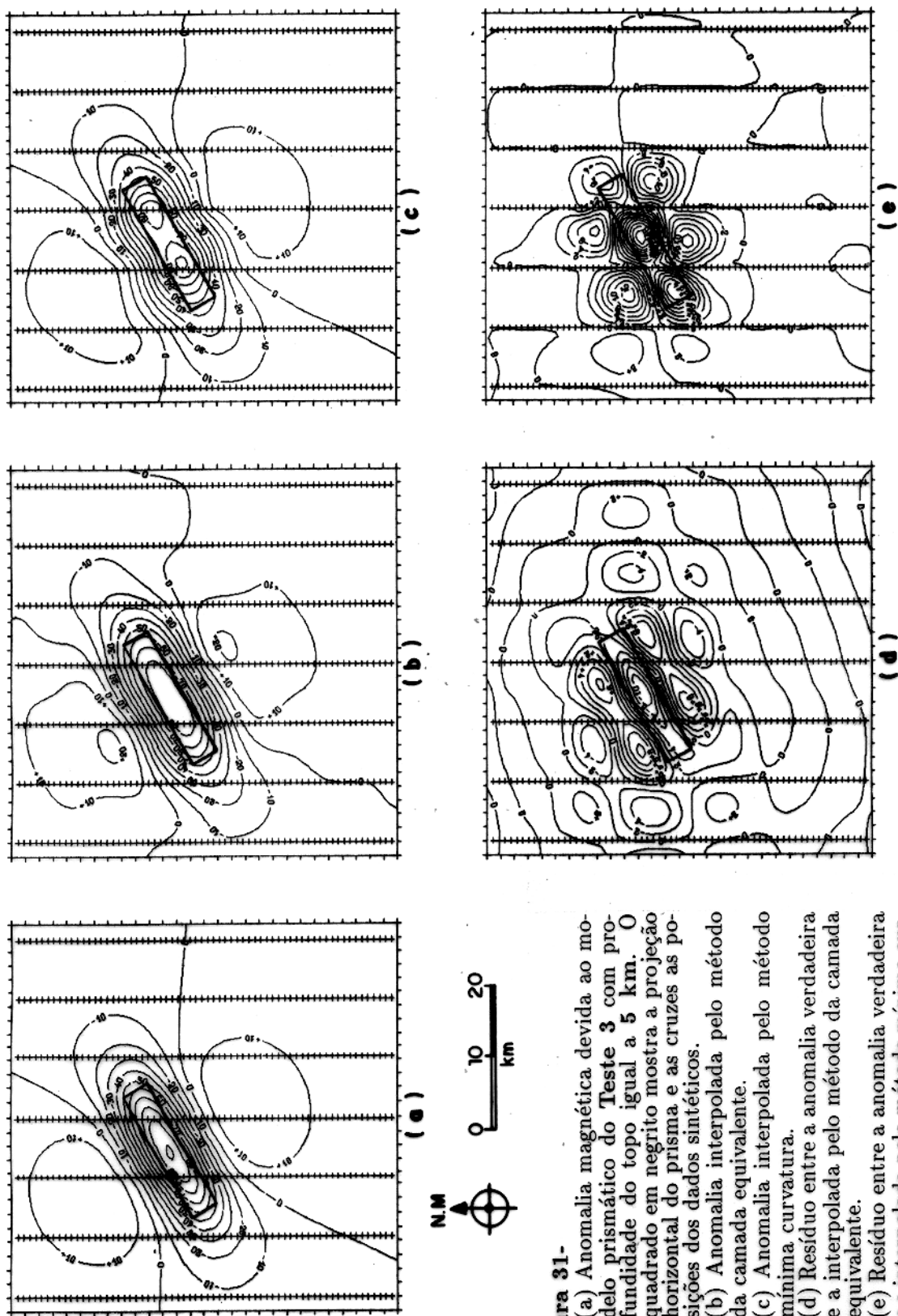


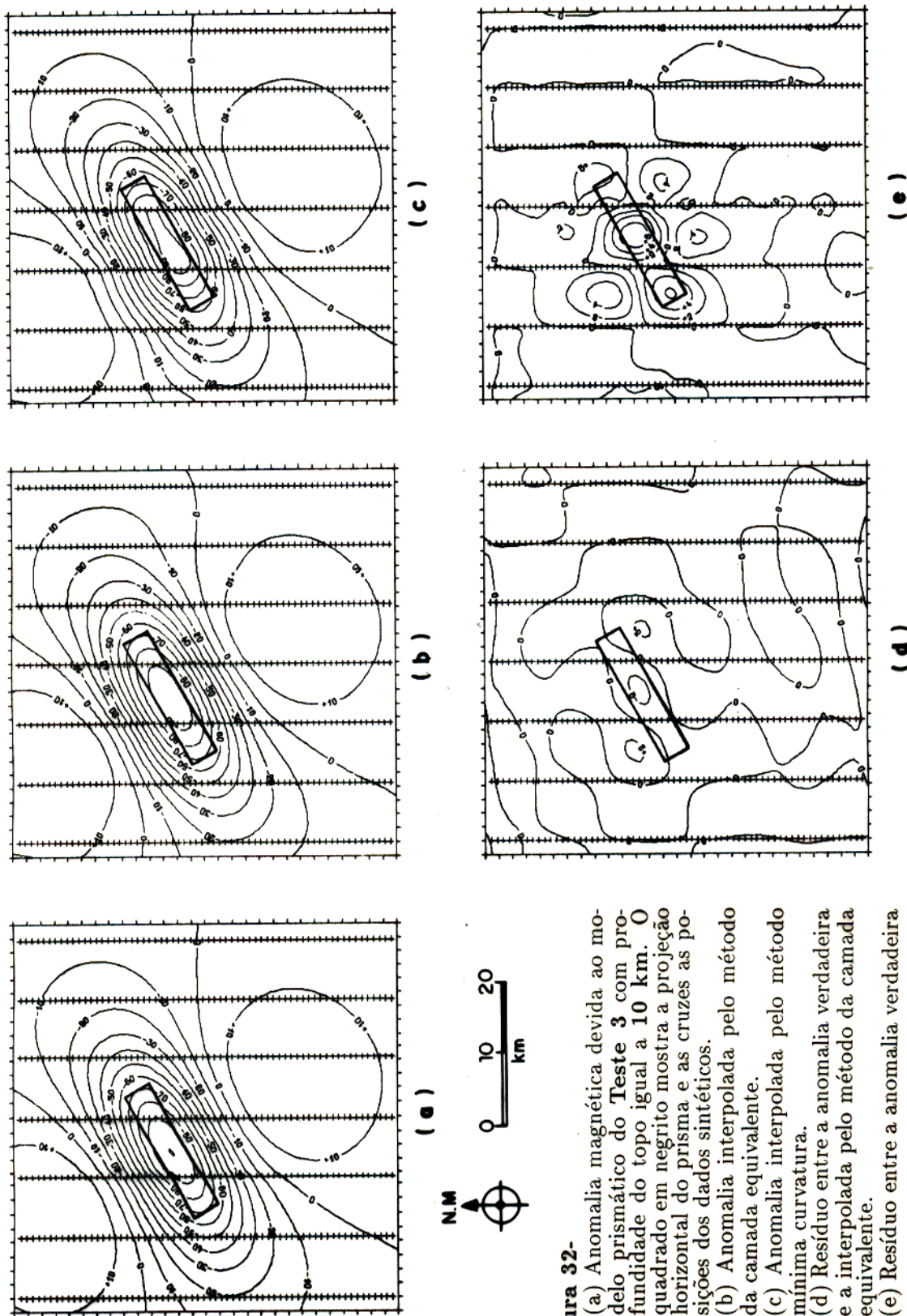
Figura 30- Teste 2

Comparação entre as normas dos resíduos devidos à interpolação pelo método da camada equivalente (linha sólida) e pelo método da mínima curvatura (linha pontilhada). (a) Norma quadrática. (b) Norma infinita.



**Figura 31-**  
 (a) Anomalia magnética devida ao modelo prismático do Teste 3 com profundidade do topo igual a 5 km. O quadrado em negro mostra a projeção horizontal do prisma e as cruzes as posições dos dados sintéticos.  
 (b) Anomalia interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (c) Anomalia interpolada pelo método mínima curvatura.  
 (d) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (e) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método mínima curvatura.

Intervalo de contorno igual a 10 nT (a,b,c) e 2 nT (d,e).



**Figura 32-**

(a) Anomalia magnética verdadeira devido ao modelo prismático do Teste 3 com profundidade do topo igual a 10 km. O quadrado em negrito mostra a projeção horizontal do prisma e as cruzes as posições dos dados sintéticos.

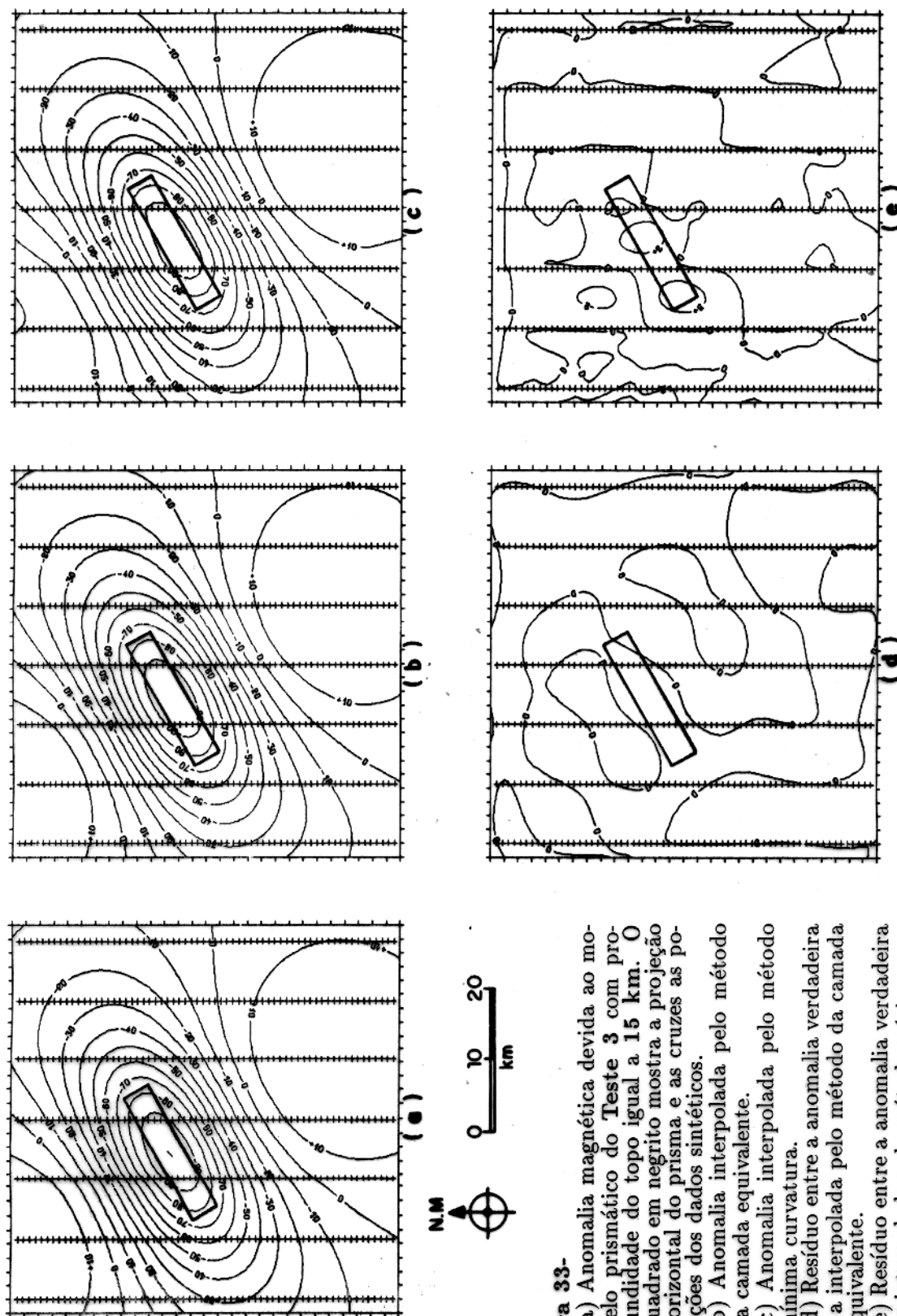
(b) Anomalia interpolada pelo método da camada equivalente.

(c) Anomalia interpolada pelo método mínima curvatura.

(d) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método da camada equivalente.

(e) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método mínima curvatura.

Intervalo de contorno igual a 10 nT (a,b,c) e 2 nT (d,e).



**Figura 33-**  
 (a) Anomalia magnética devida ao modelo prismático do Teste 3 com profundidade do topo igual a 15 km. O quadrado em negro mostra a projeção horizontal do prisma, e as cruzes as posições dos dados sintéticos.  
 (b) Anomalia interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (c) Anomalia interpolada pelo método mínima curvatura.  
 (d) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (e) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método mínima curvatura.

Intervalo de contorno igual a 10 nT (a,b,c) e 2 nT (d,e).

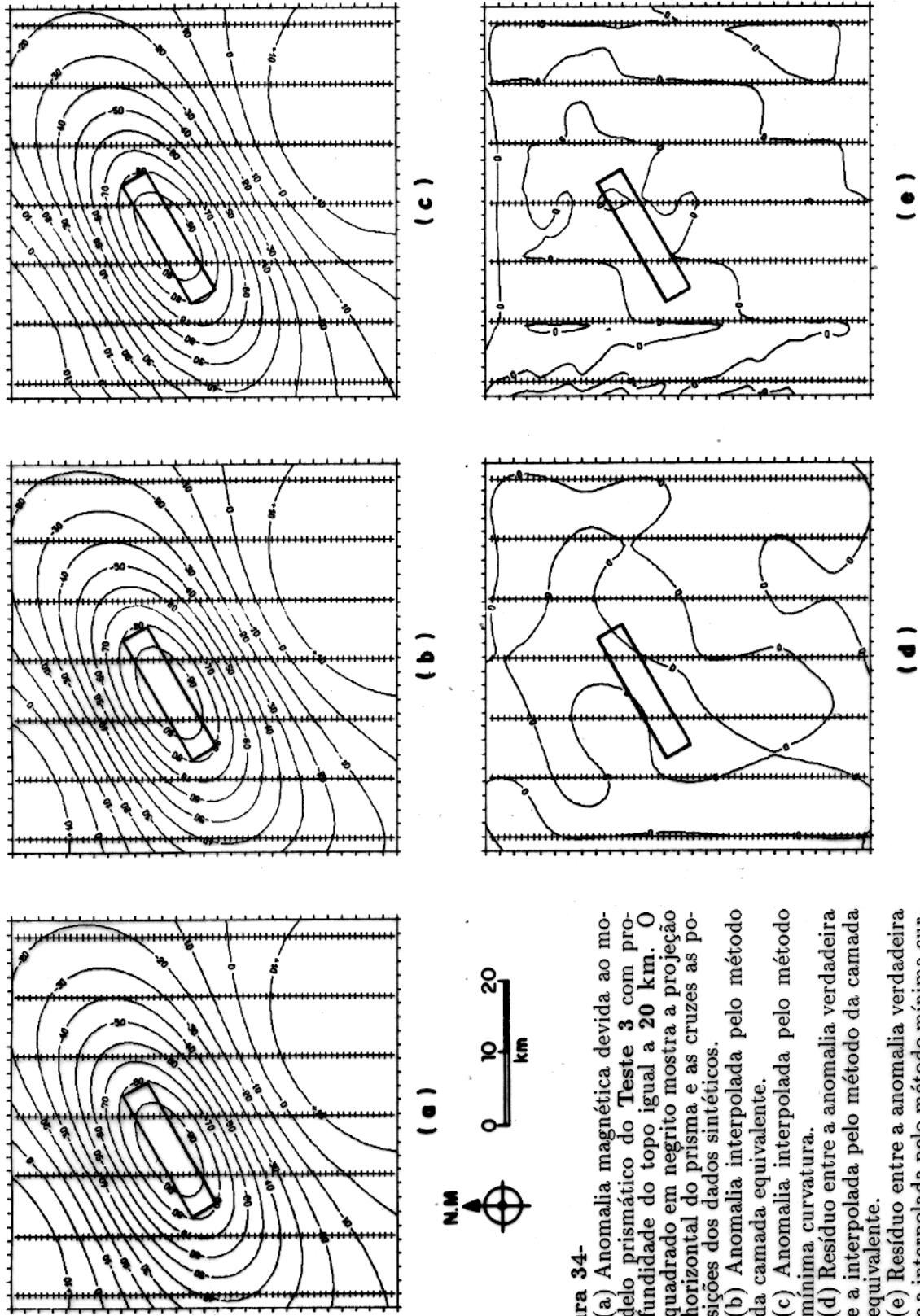


Figura 34-

- (a) Anomalia magnética devida ao modelo prismático do Teste 3 com profundidade do topo igual a 20 km. O quadrado em negrito mostra a projeção horizontal do prisma e as cruzes as posições dos dados sintéticos.
- (b) Anomalia interpolada pelo método da camada equivalente.
- (c) Anomalia interpolada pelo método mínima curvatura.
- (d) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método da camada equivalente.
- (e) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método mínima curvatura.

Intervalo de contorno igual a 10 nT (a,b,c) e 2 nT (d,e).

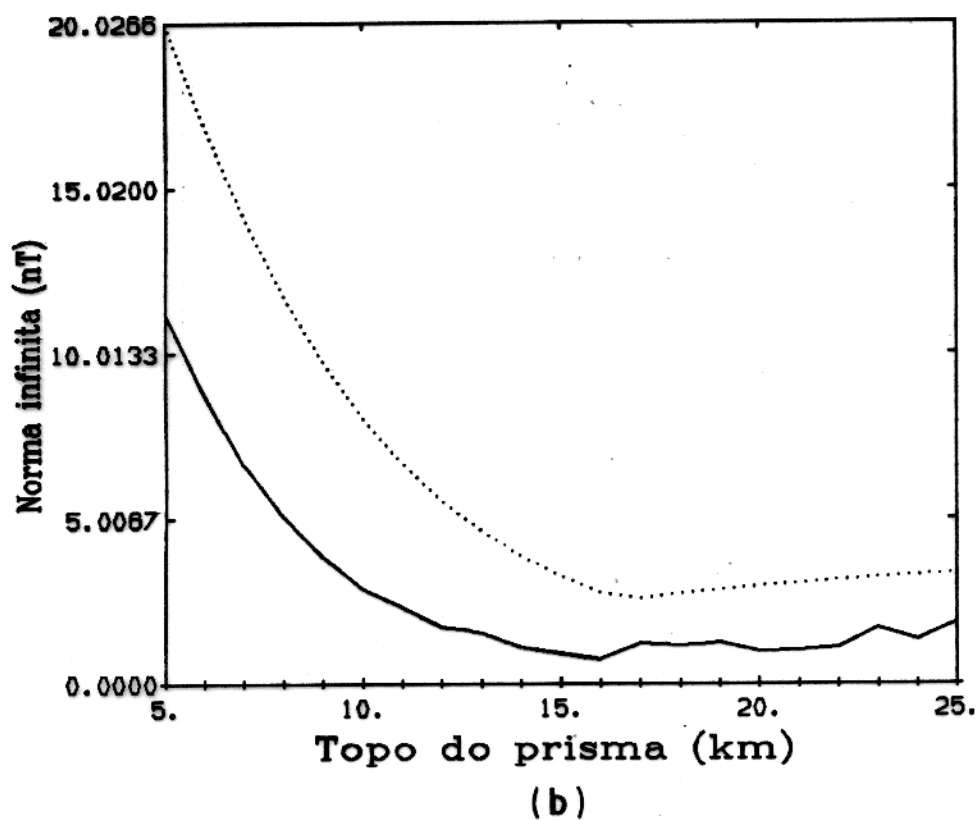
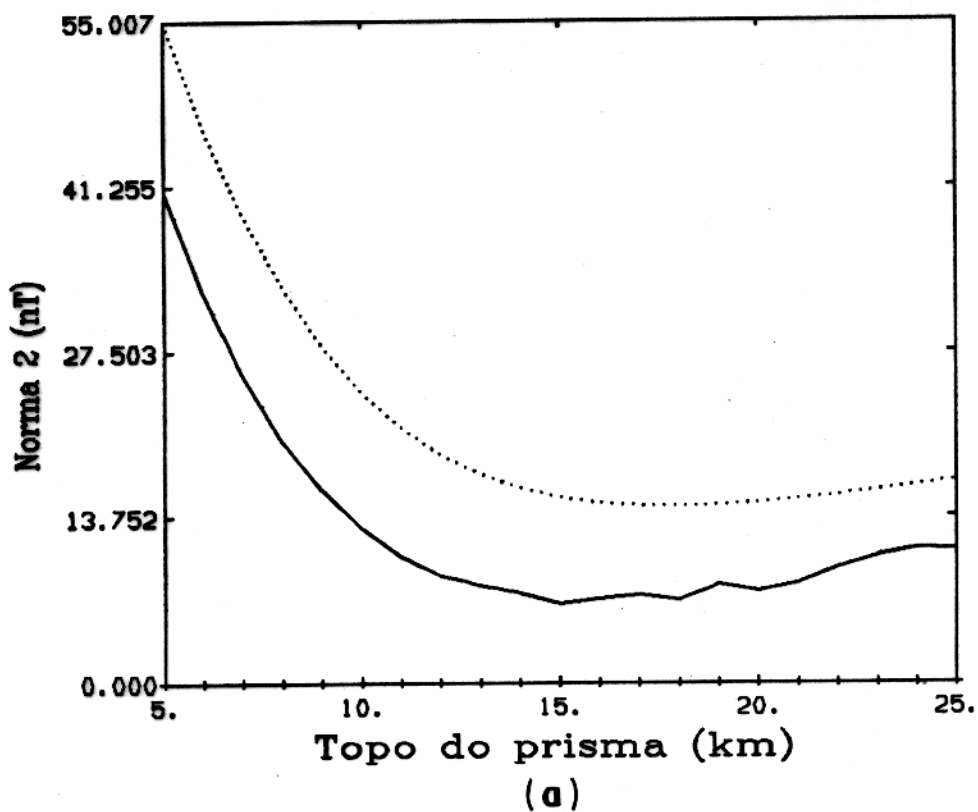
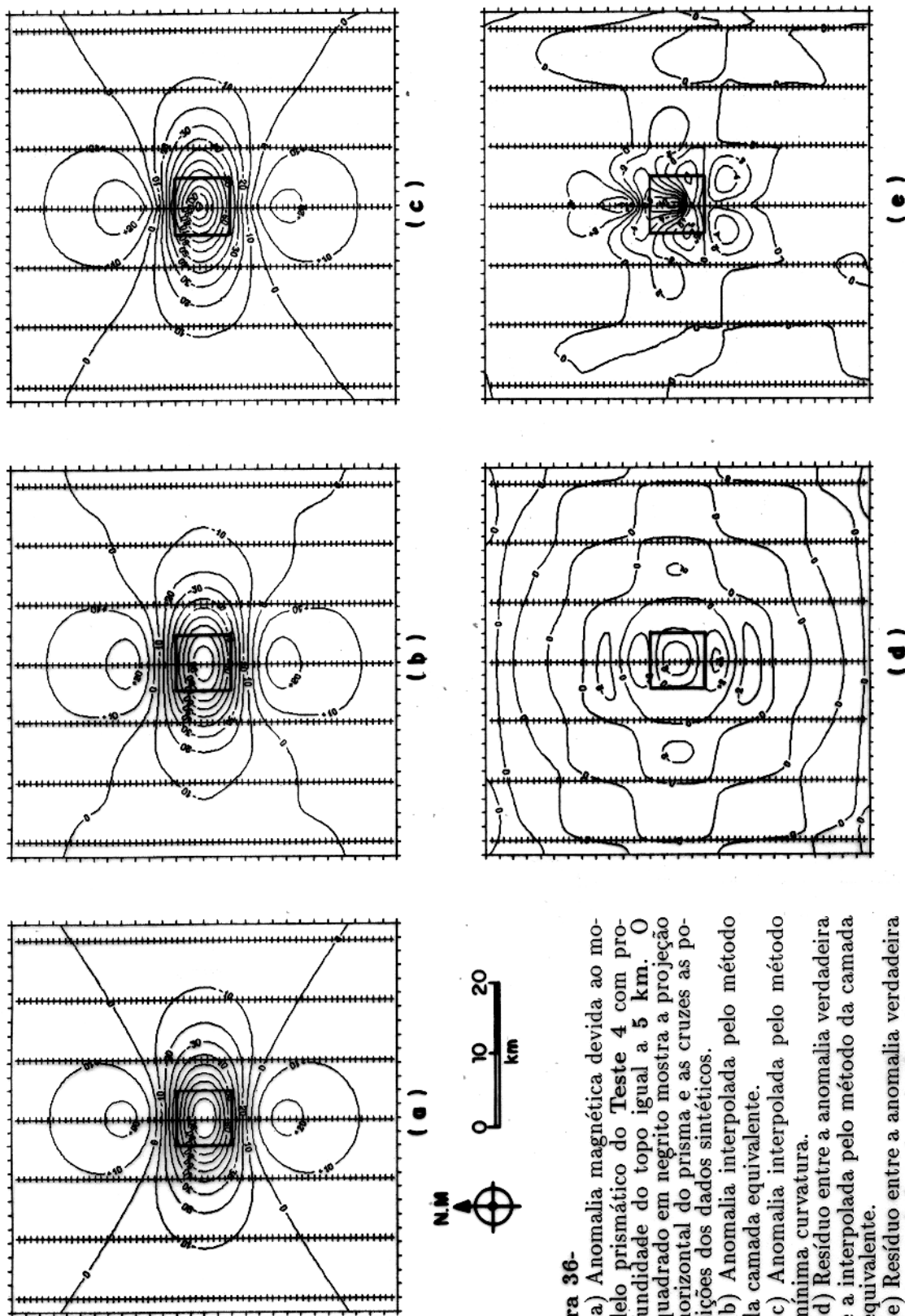


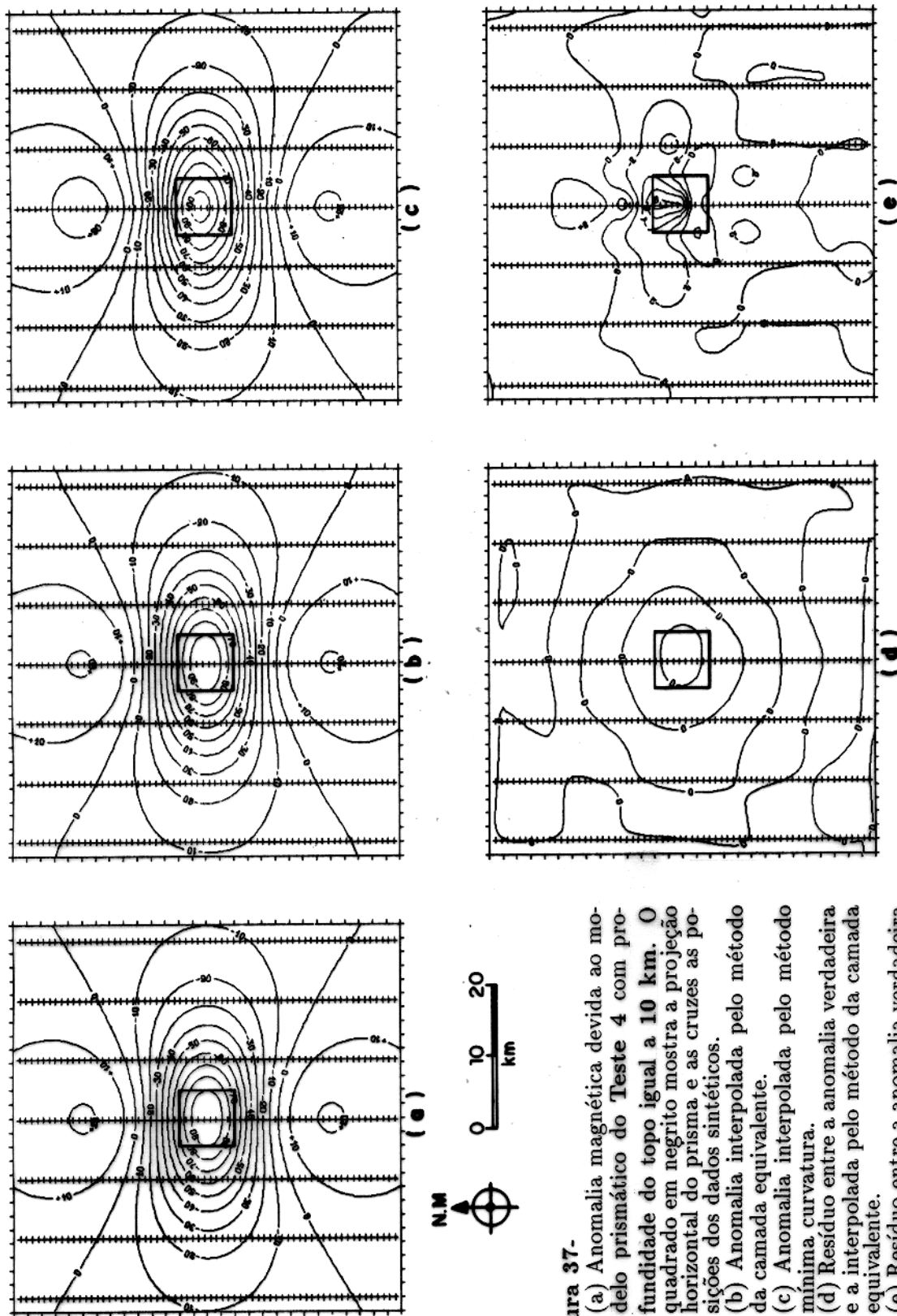
Figura 35- Teste 3

Comparação entre as normas dos resíduos devidos à interpolação pelo método da camada equivalente (linha sólida) e pelo método da mínima curvatura (linha pontilhada). (a) Norma quadrática. (b) Norma infinita.



**Figura 36-**  
 (a) Anomalia magnética devida ao modelo prismático do Teste 4 com profundidade do topo igual a 5 km. O quadrado em negrito mostra a projeção horizontal do prisma e as cruzes as posições dos dados sintéticos.  
 (b) Anomalia interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (c) Anomalia interpolada pelo método mínima curvatura.  
 (d) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (e) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método mínima curvatura.

Intervalo de contorno igual a 10 nT (a,b,c) e 2 nT (d,e).



**Figura 37.**  
 (a) Anomalia magnética devida ao modelo prismático do Teste 4 com profundidade do topo igual a 10 km. O quadrado em negro mostra a projeção horizontal do prisma e as cruzes as posições dos dados sintéticos.  
 (b) Anomalia interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (c) Anomalia interpolada pelo método mínima curvatura.  
 (d) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (e) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método mínima curvatura.

Intervalo de contorno igual a 10 nT (a,b,c) e 2 nT (d,e).

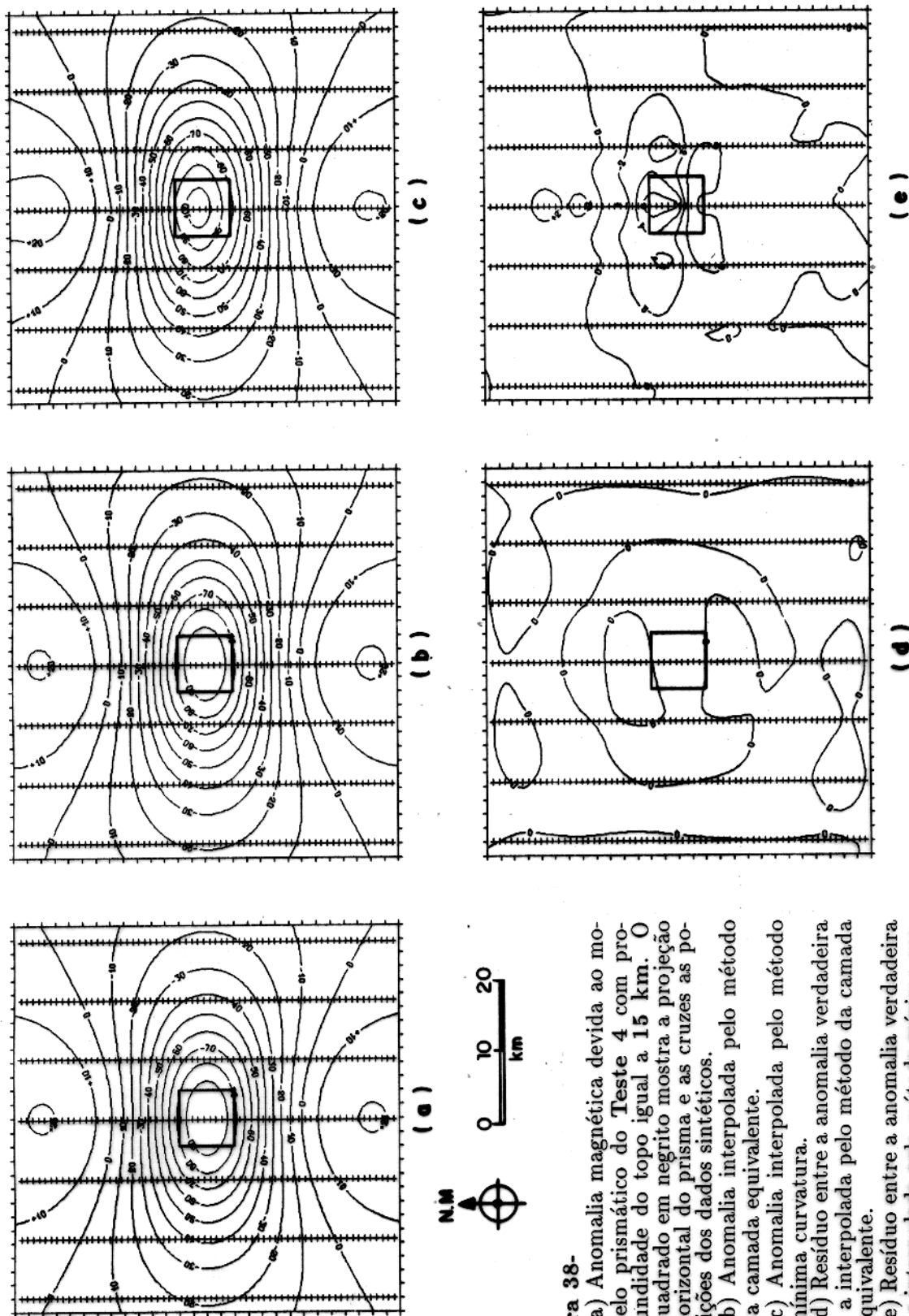
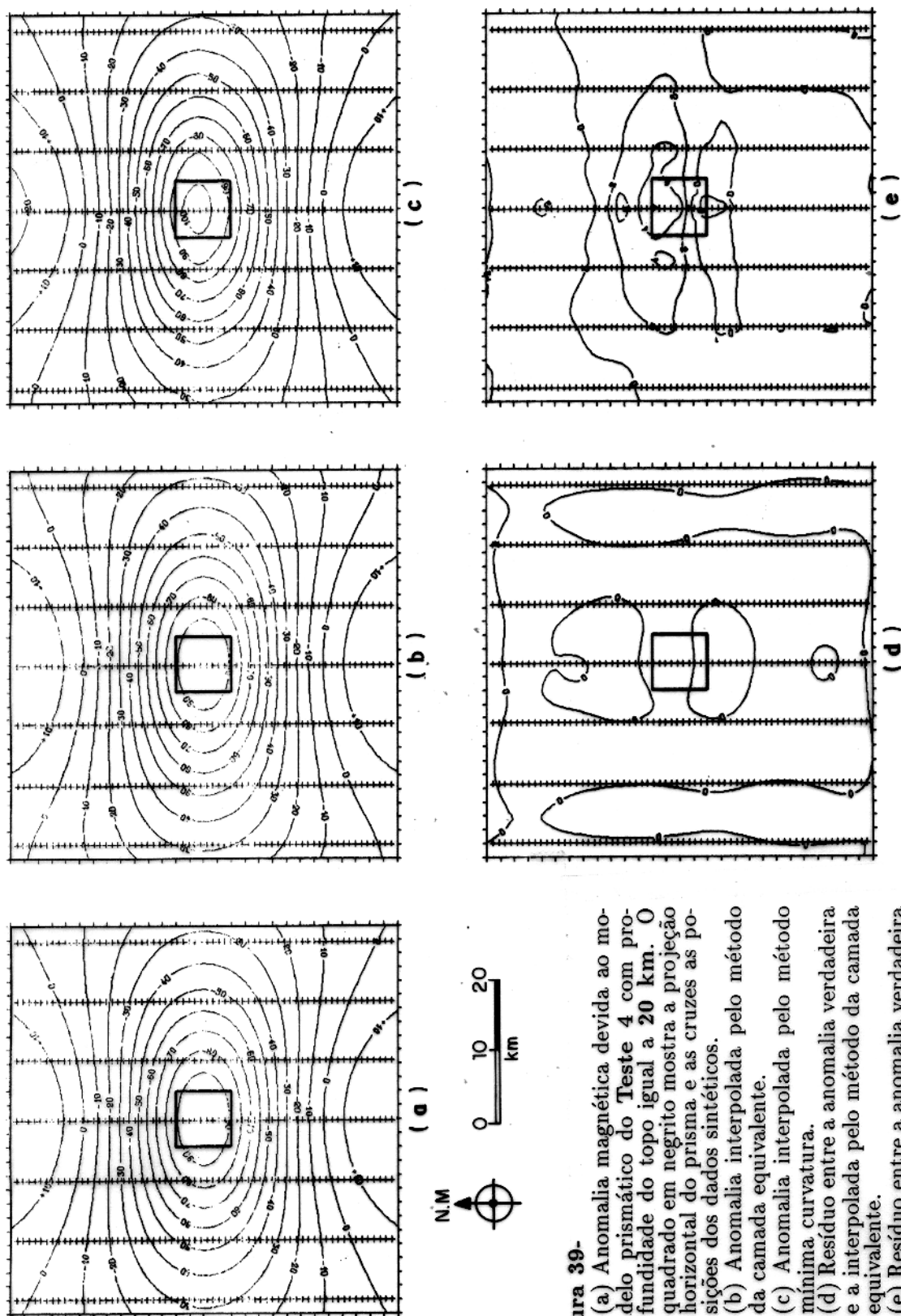


Figura 38-

- (a) Anomalia magnética devida ao modelo prismático do Teste 4 com profundidade do topo igual a 15 km. O quadrado em negro mostra a projeção horizontal do prisma e as cruzes as posições dos dados sintéticos.  
 (b) Anomalia interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (c) Anomalia interpolada pelo método mínima curvatura.  
 (d) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (e) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método mínima curvatura.

Intervalo de contorno igual a 10 nT (a,b,c) e 2 nT (d,e).



**Figura 39-**

(a) Anomalia magnética devida ao modelo prismático do Teste 4 com profundidade do topo igual a 20 km. O quadrado em negrito mostra a projeção horizontal do prisma e as cruzes as posições dos dados sintéticos.  
 (b) Anomalia interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (c) Anomalia interpolada pelo método mínima curvatura.  
 (d) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método da camada equivalente.  
 (e) Resíduo entre a anomalia verdadeira e a interpolada pelo método mínima curvatura.

Intervalo de contorno igual a 10 nT (a,b,c) e 2 nT (d,e).

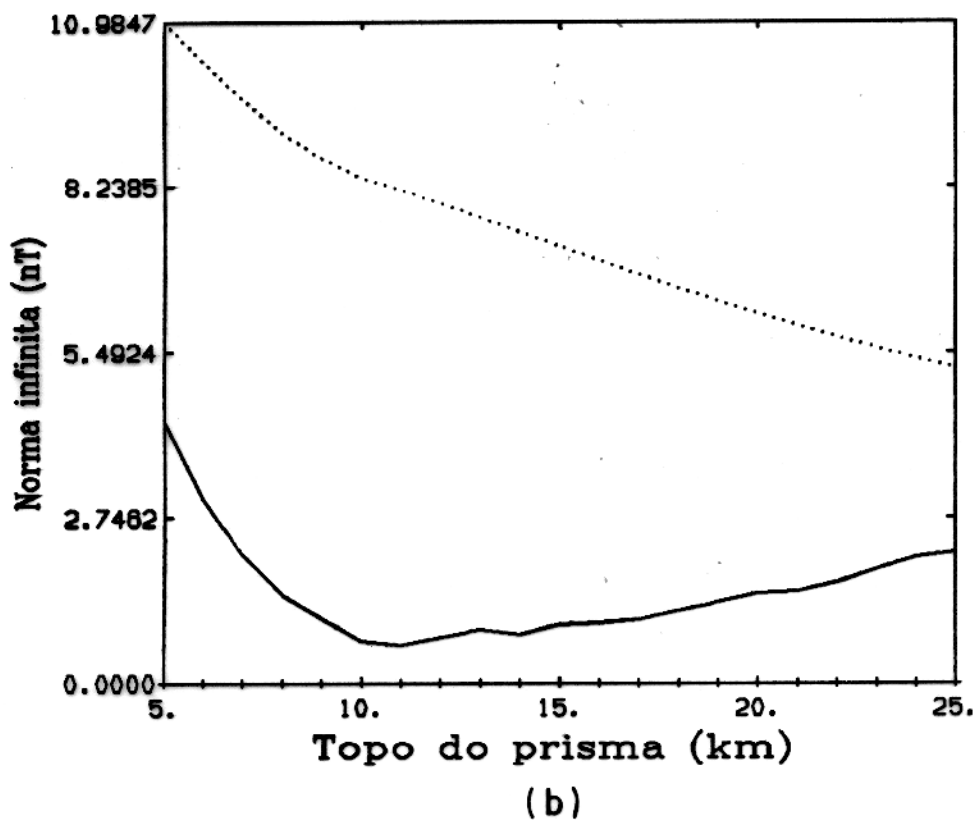
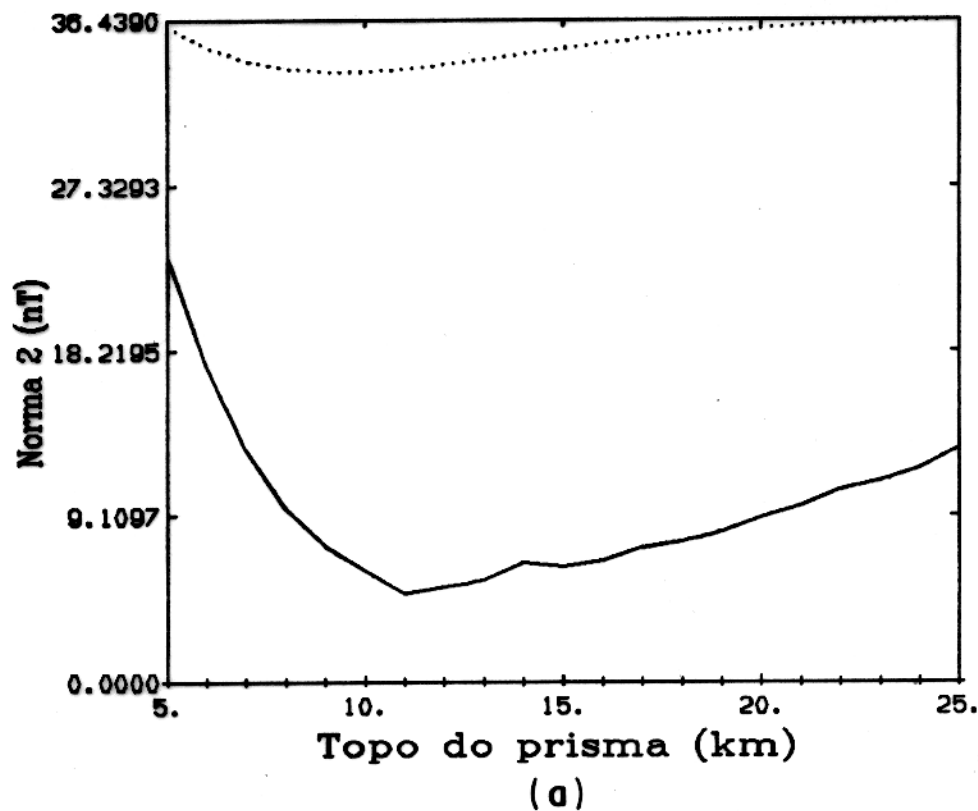


Figura 40- Teste 4

Comparação entre as normas dos resíduos devidos à interpolação pelo método da camada equivalente (linha sólida) e pelo método da mínima curvatura (linha pontilhada). (a) Norma quadrática. (b) Norma infinita.

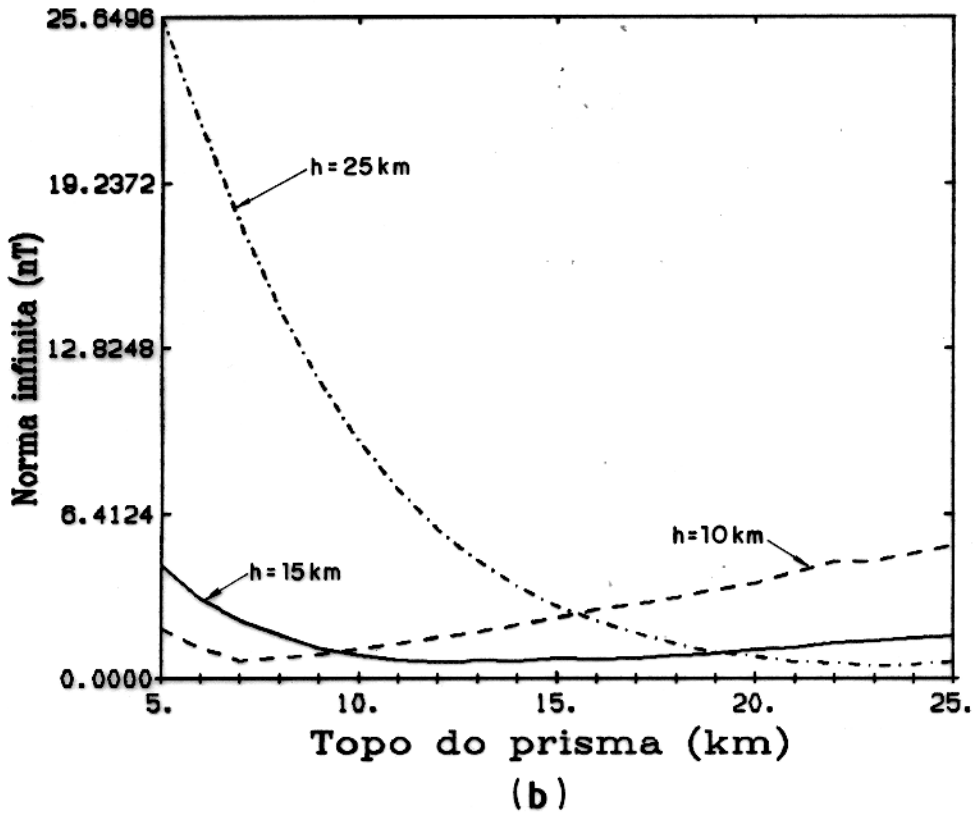
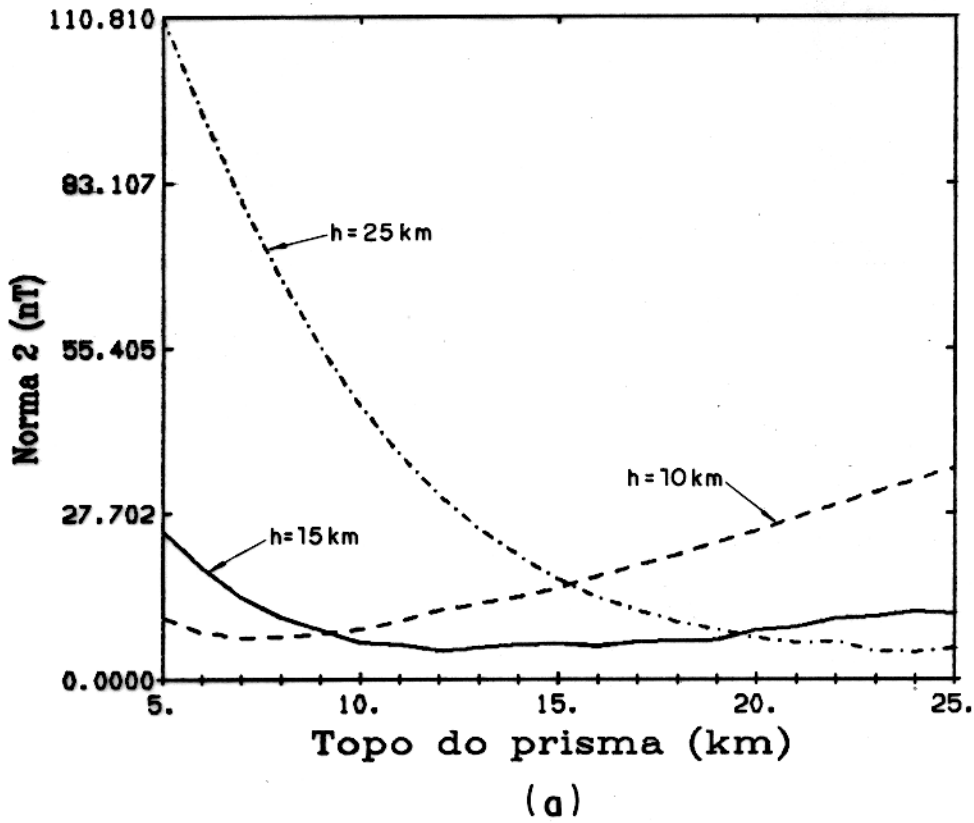


Figura 41- Comparação entre as normas dos resíduos devidos à interpolação utilizando o método da camada equivalente com camadas em diferentes profundidades. O modelo de fontes é o mesmo do Teste 1. (a) Norma quadrática. (b) Norma infinita.

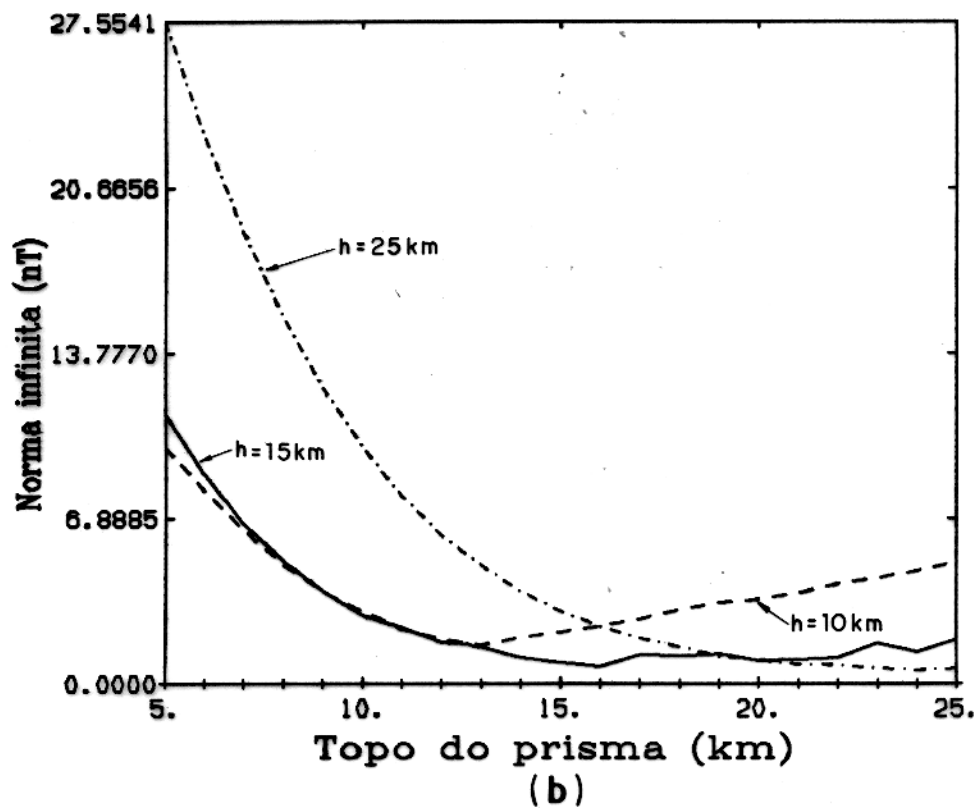
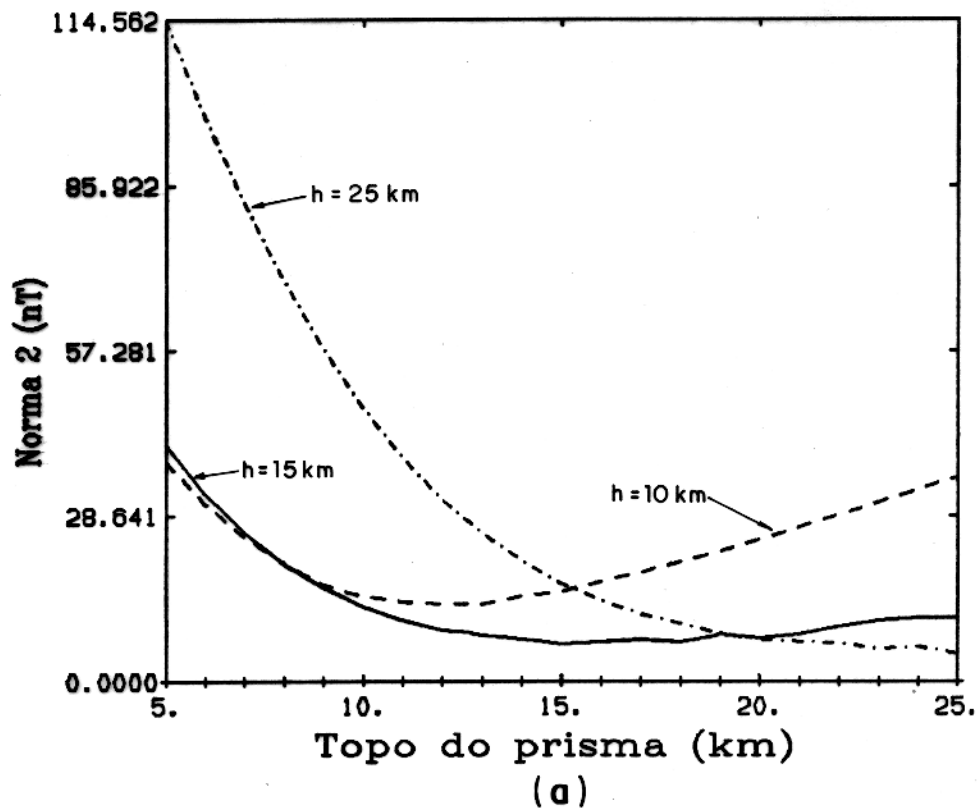


Figura 42- Comparação entre as normas dos resíduos devidos à interpolação utilizando o método da camada equivalente com camadas em diferentes profundidades. O modelo de fontes é o mesmo do Teste 2. (a) Norma quadrática. (b) Norma infinita.

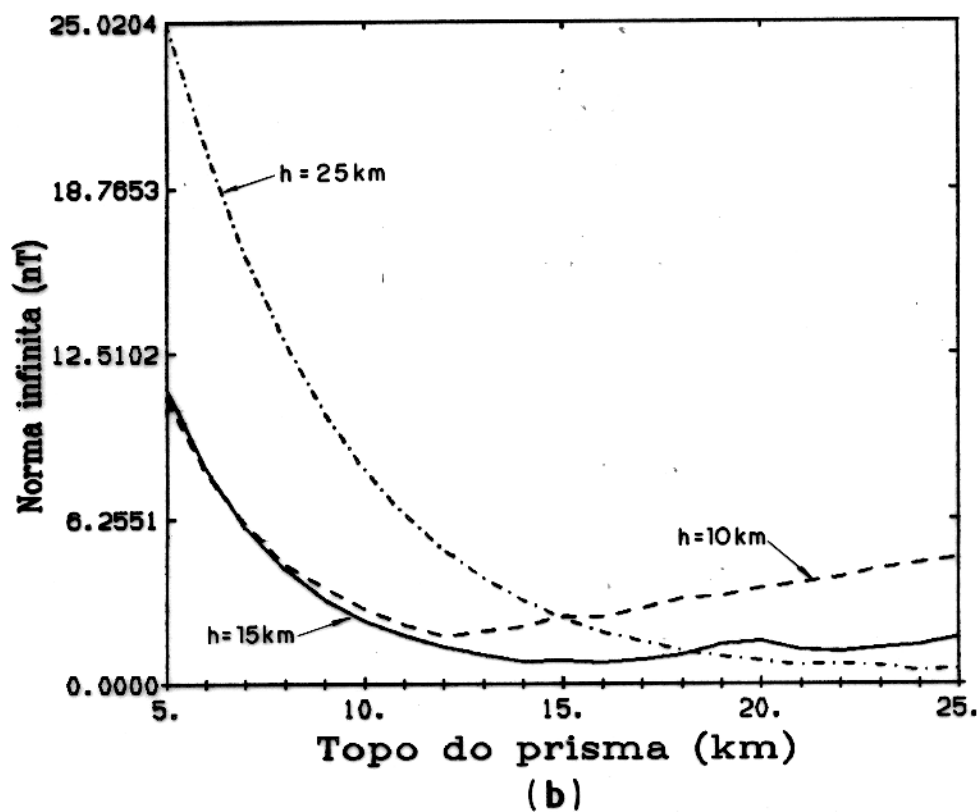
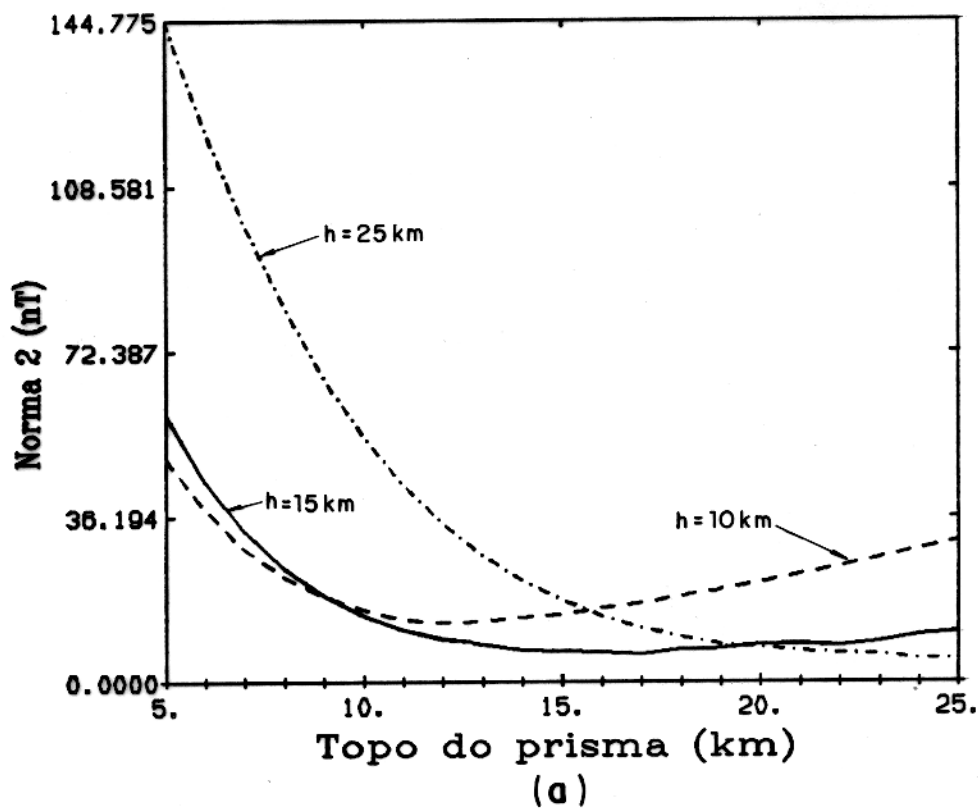


Figura 43- Comparação entre as normas dos resíduos devidos à interpolação utilizando o método da camada equivalente com camadas em diferentes profundidades. O modelo de fontes é o mesmo do Teste 3. (a) Norma quadrática. (b) Norma infinita.

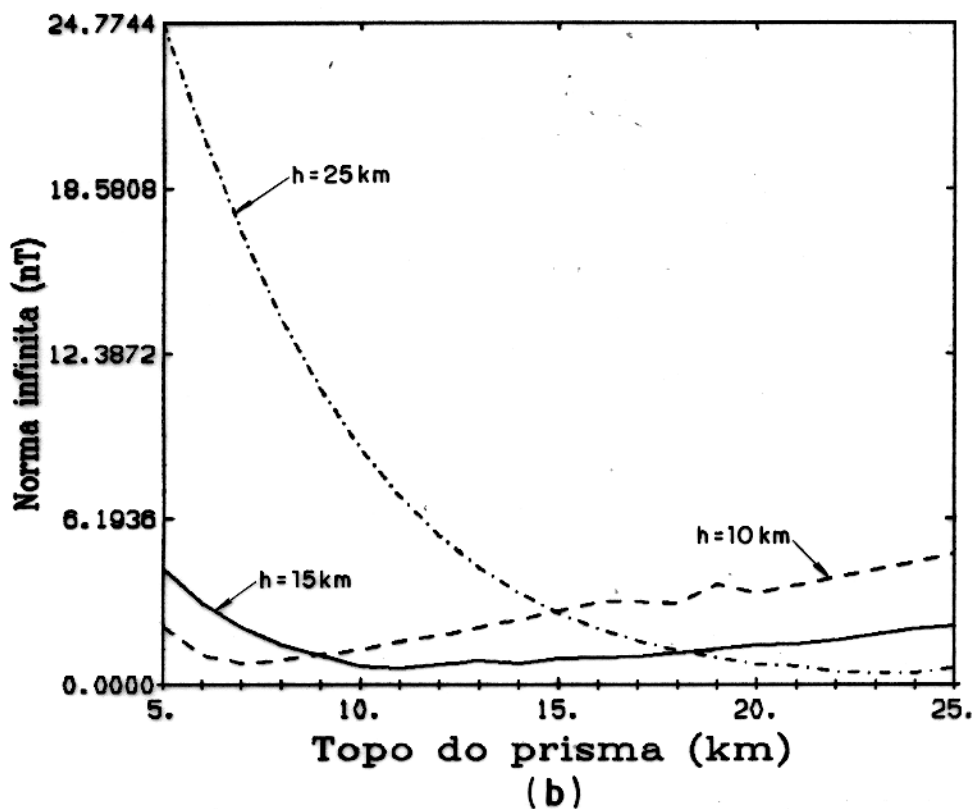
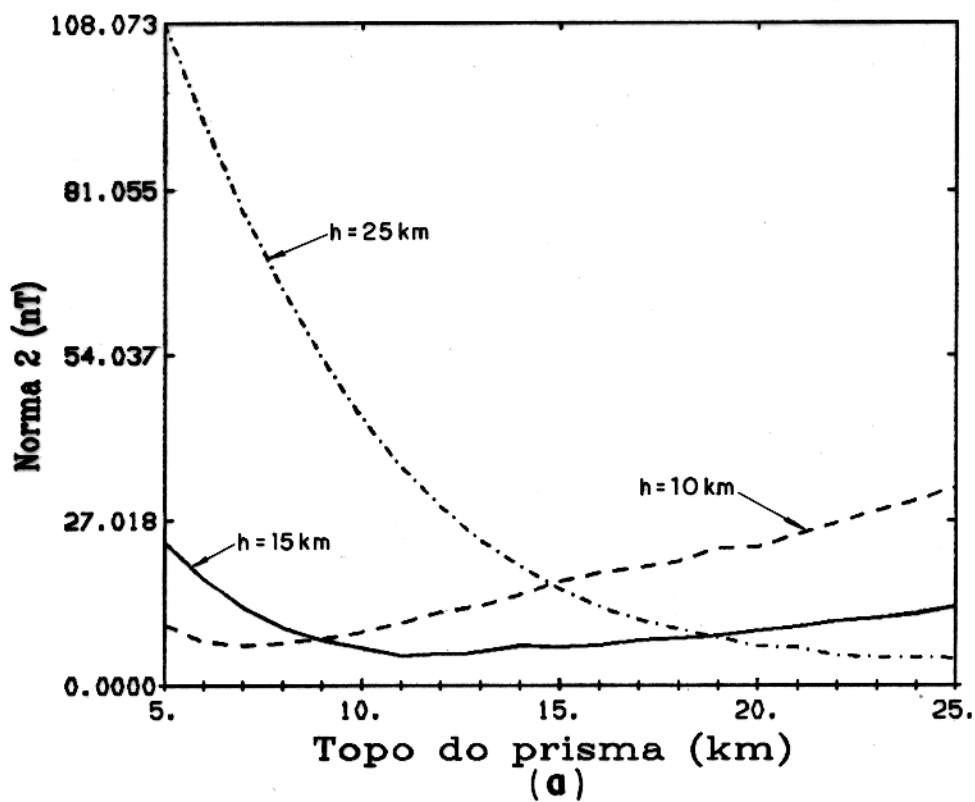


Figura 44- Comparação entre as normas dos resíduos devidos à interpolação utilizando o método da camada equivalente com camadas em diferentes profundidades. O modelo de fontes é o mesmo do Teste 4. (a) Norma quadrática. (b) Norma infinita.

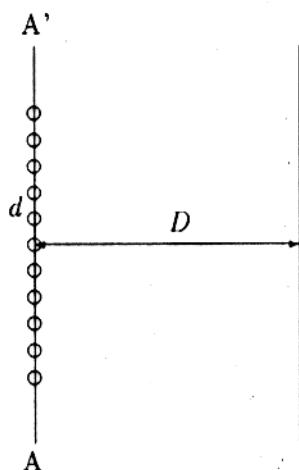


Figura 45: Posicionamento das estações no levantamento simulado. Os círculos vazios assinalam as posições dos dados sintéticos. A distância entre dois dados consecutivos é igual a  $d$  e a distância entre duas linhas de amostragem adjacentes é igual a  $D$ .

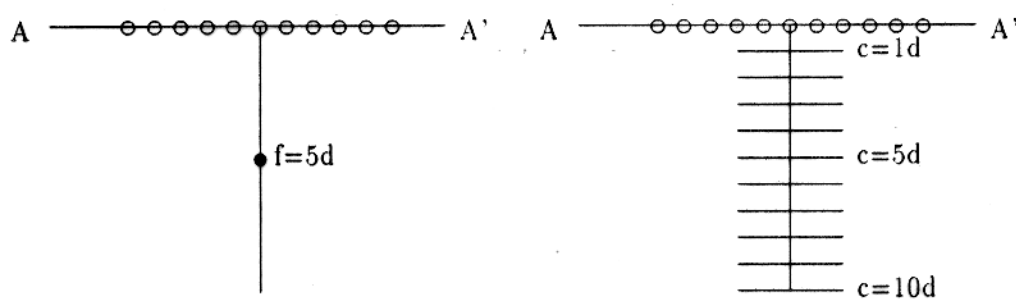


Figura 46: Corte ao longo do perfil AA' da Figura 71. O círculo cheio, no lado esquerdo da figura, representa uma massa pontual na profundidade  $f$  igual a  $5d$ . As camadas equivalentes são representadas no lado direito da figura através de segmentos de retas horizontais nas profundidades  $c$  sucessivamente iguais a  $d, 2d, \dots, 10d$ .

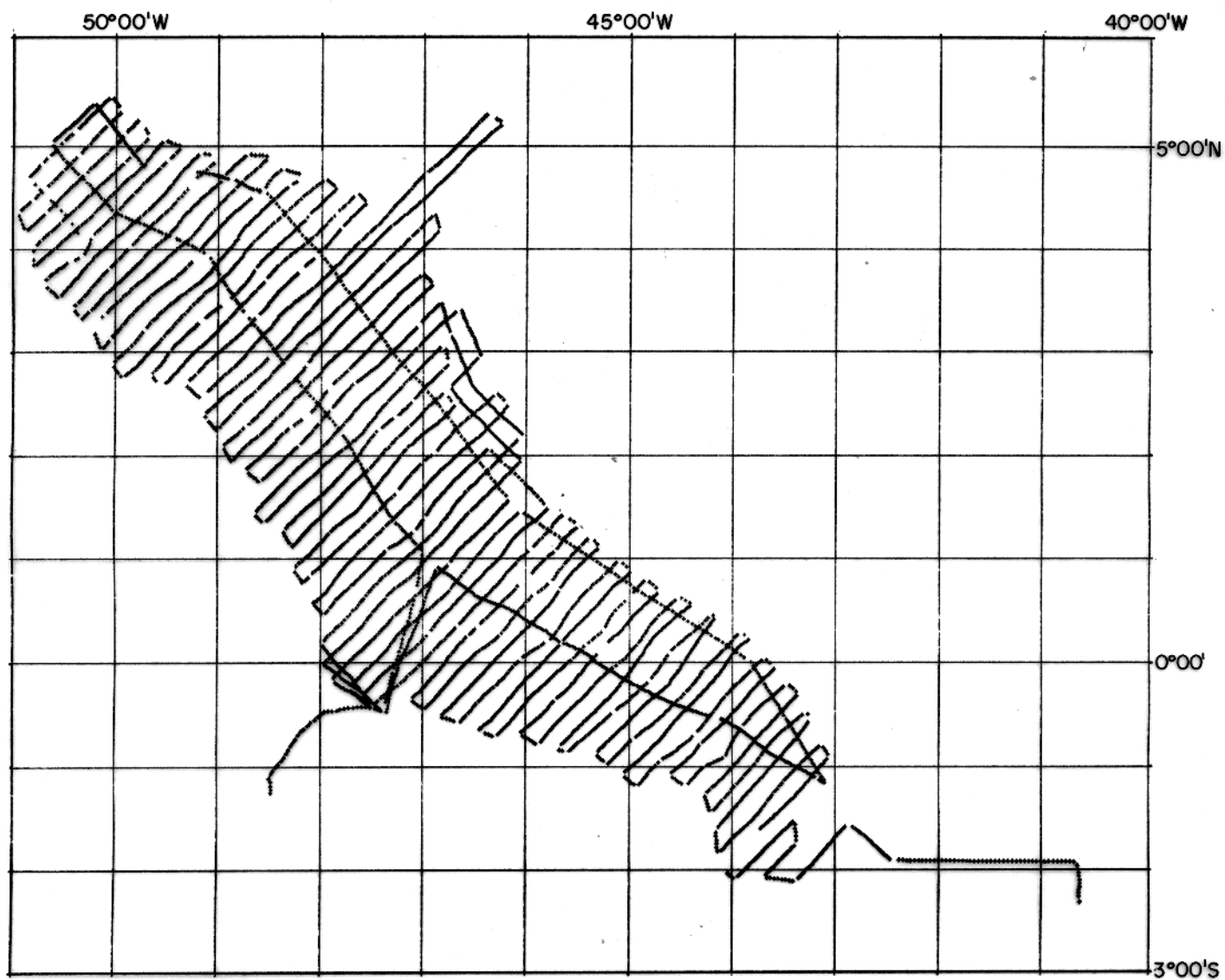
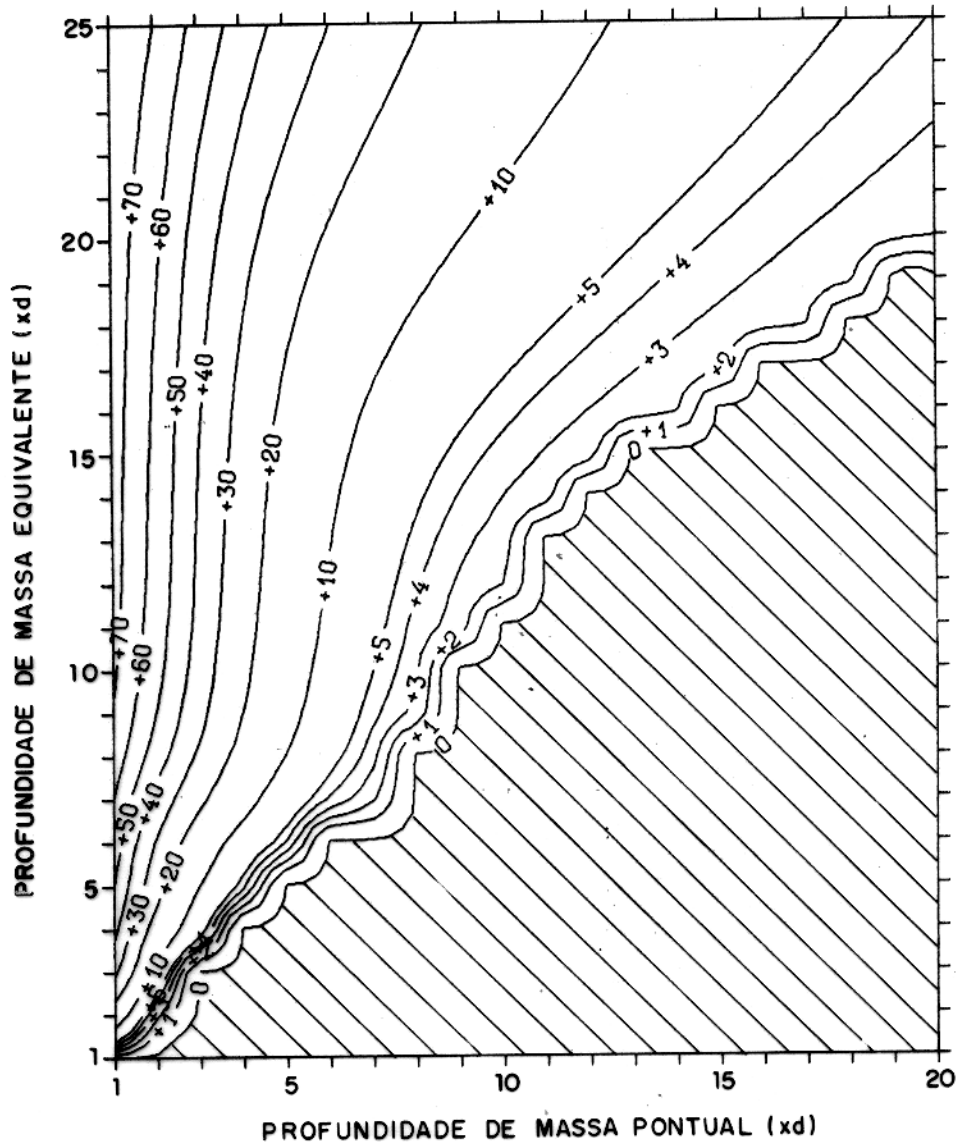


Figura 47- Mapa de posicionamento dos pontos de amostragem do Projeto Equant-2.



**Figura 48-** Isovalores da norma quadrática do vetor de resíduos produzido entre o valor verdadeiro do dado sintético e o valor representado pela camada equivalente em função da profundidade da massa pontual que gerou os dados sintéticos (eixo horizontal) e da profundidade da camada equivalente (eixo vertical) que ajustou estes dados. A área hachurada contém os pares  $(c, f)$  tais que o ajuste produzido pela camada é exato.

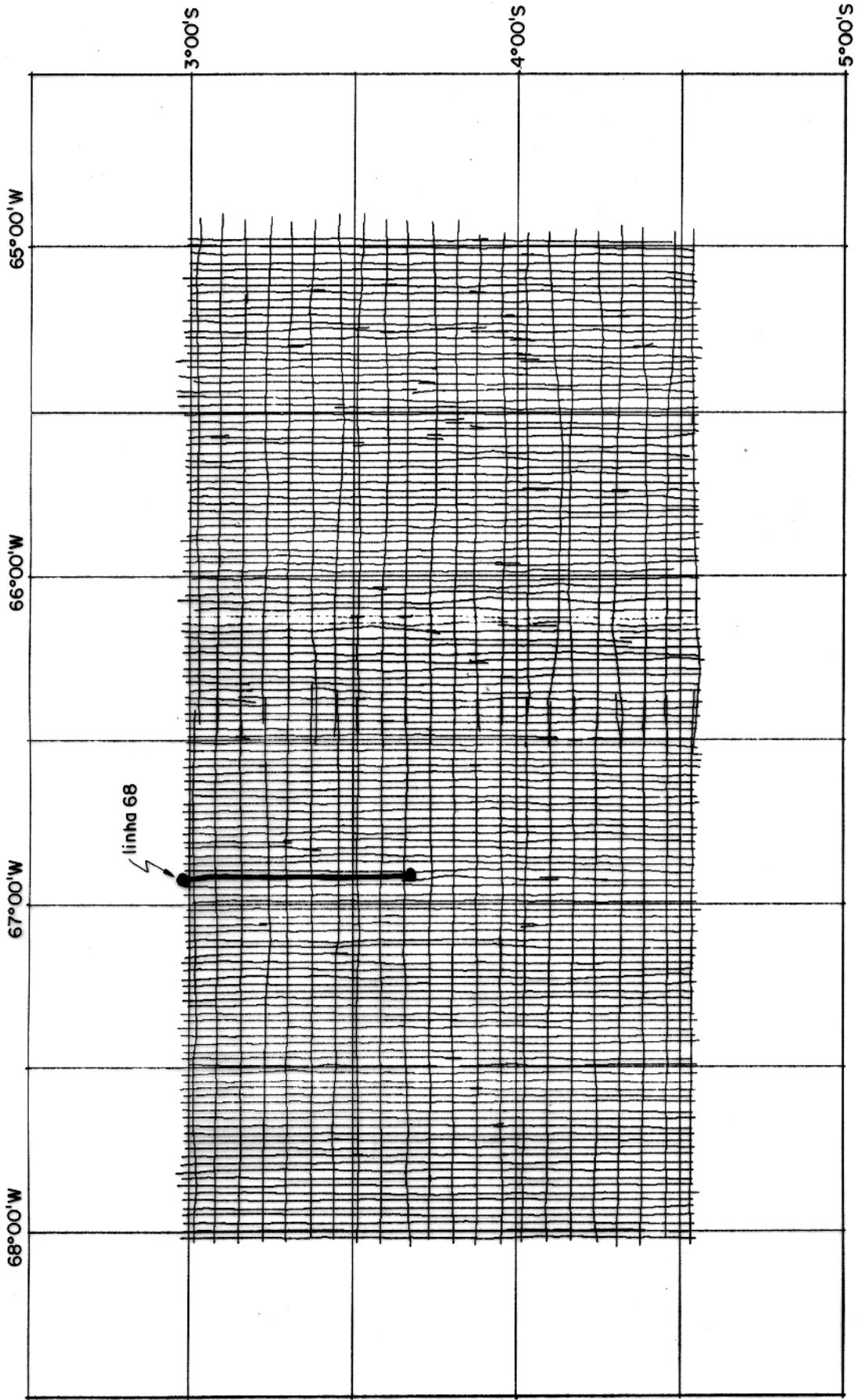
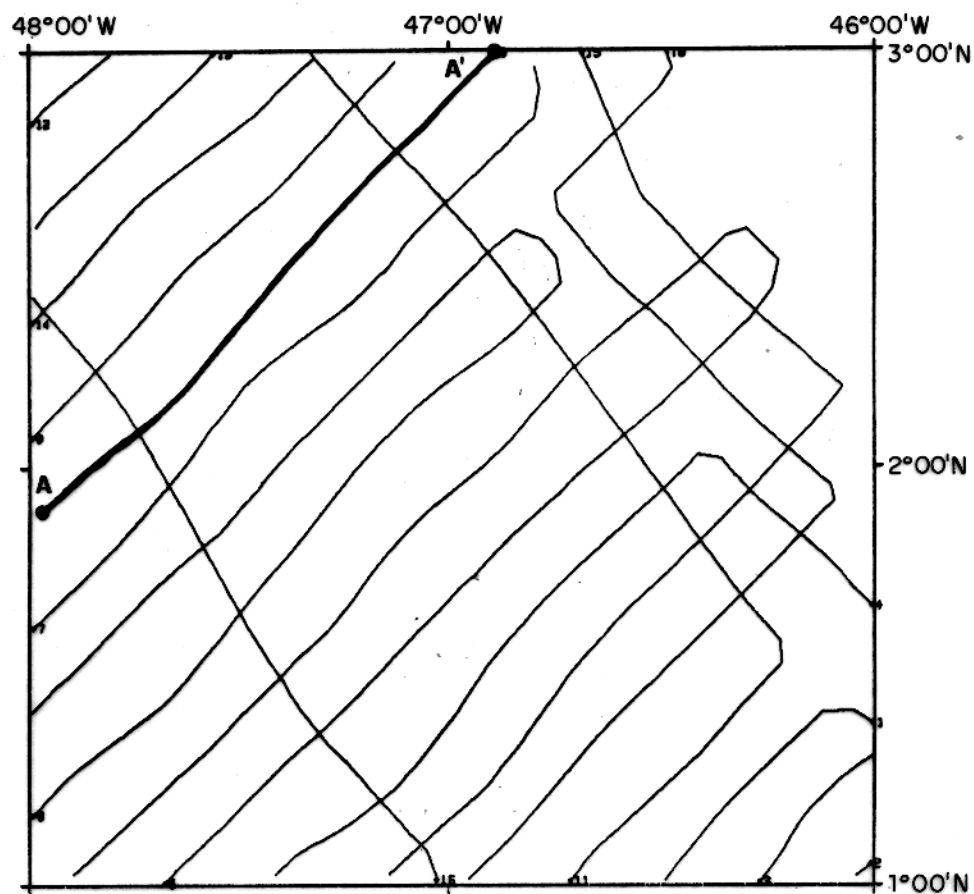
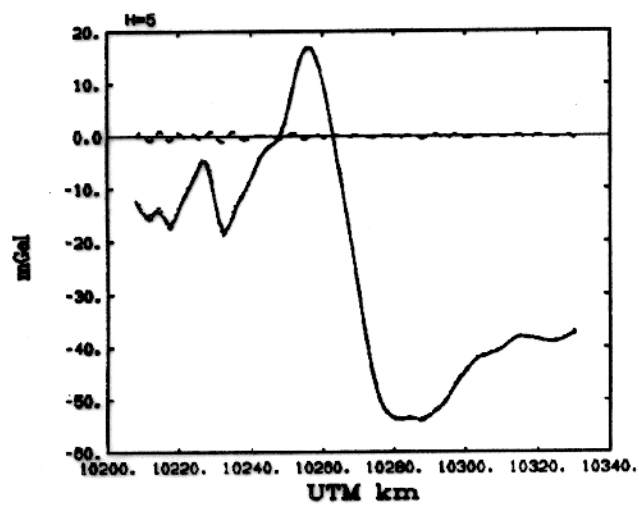


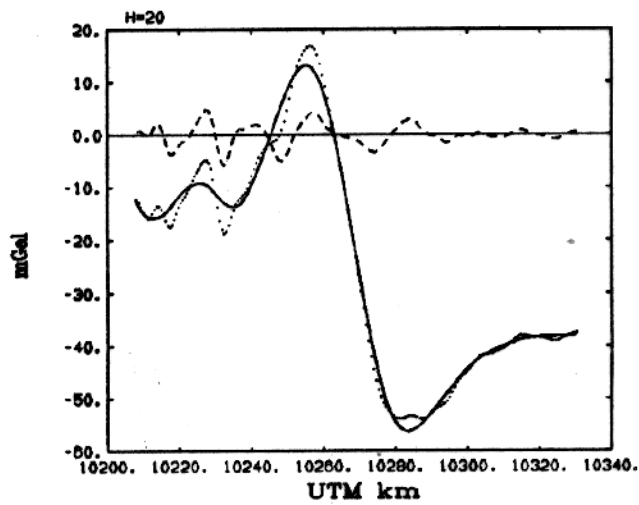
Figura 49- Mapa de posicionamento das linhas de vôo do Projeto Carauari-Norte. As linhas na direção Norte-Sul são denominadas linhas de produção e as linhas na direção Leste-Oeste são denominadas de linhas de amarração. A linha assinalada com o número 68 contém os dados utilizados na Aplicação 2.



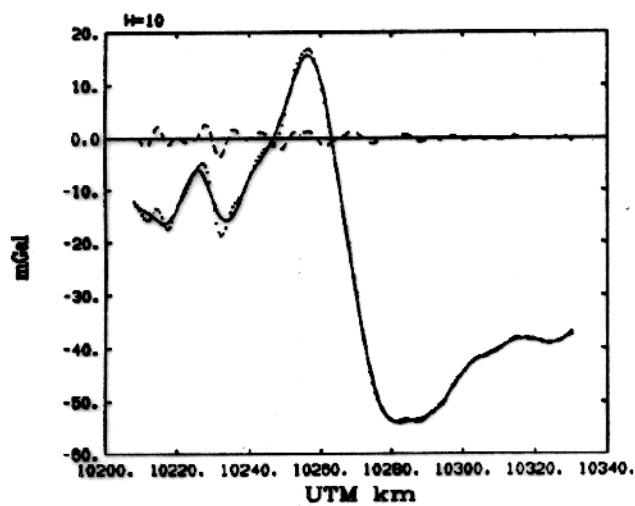
**Figura 50- Aplicação 1**  
Mapa do posicionamento do traço do navio na sub-área do projeto Equant-2 onde se localiza o perfil AA'.



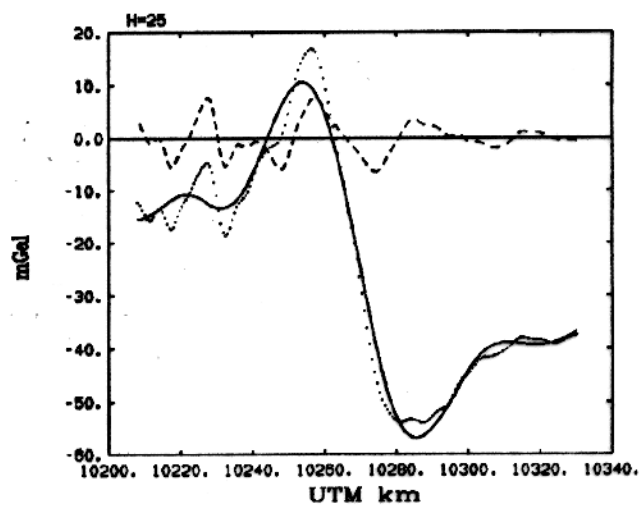
(a)



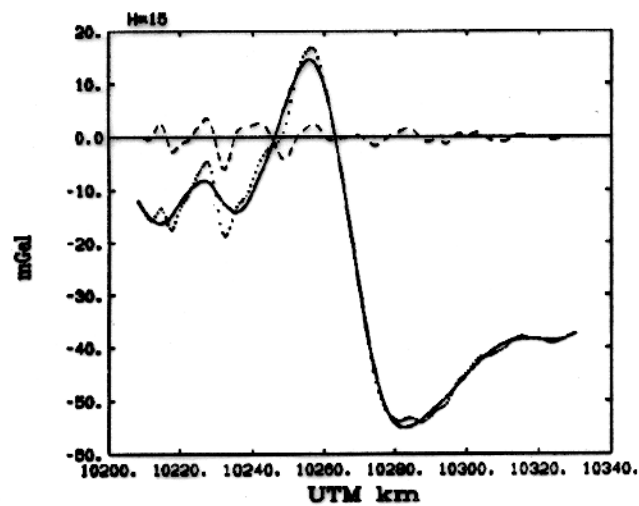
(d)



(b)



(e)

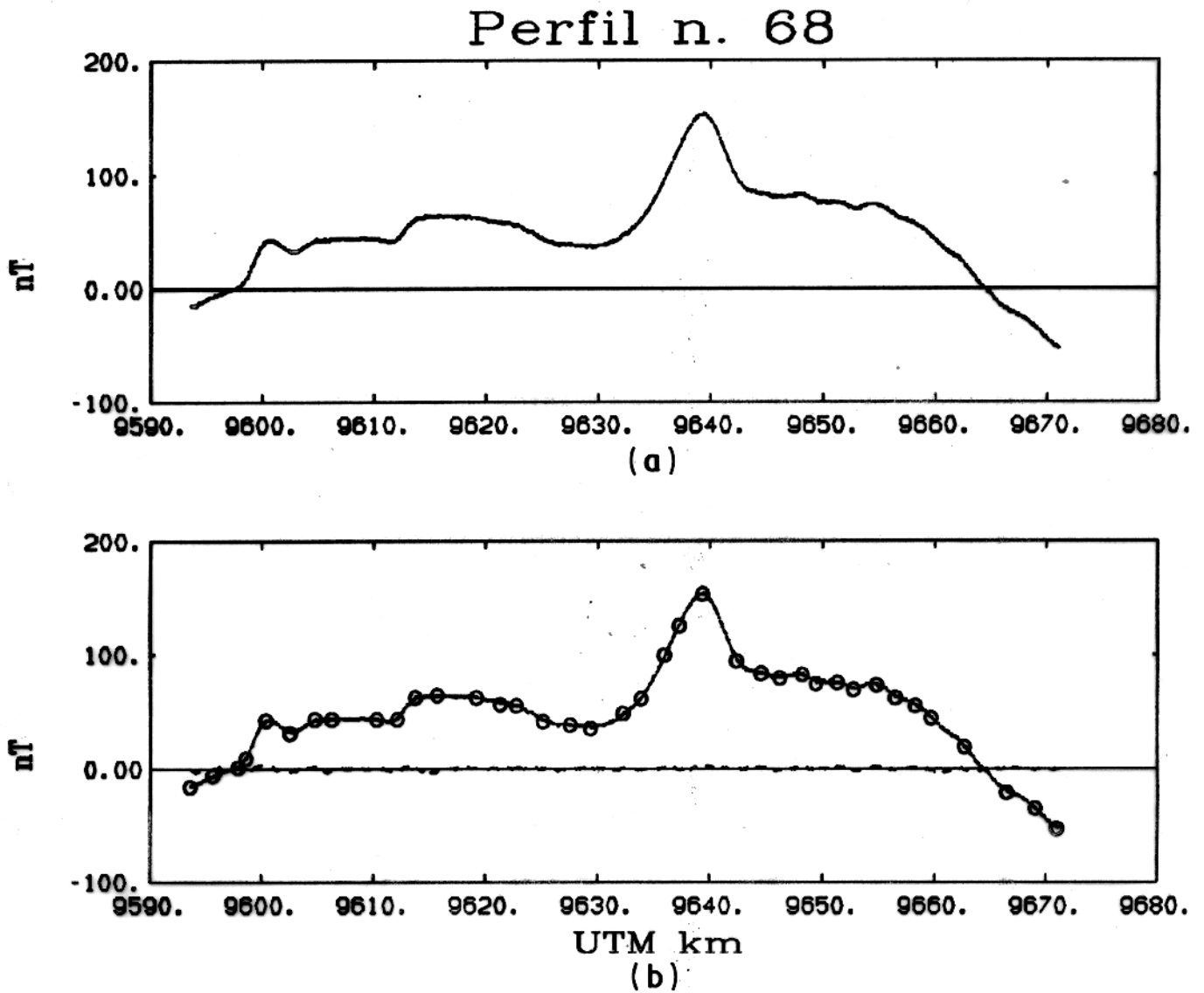


(c)

Figura 51- Aplicação 1

Ajuste (linha sólida) da anomalia ar-livre (linha pontilhada) ao longo do perfil AA' por camadas equivalentes em diferentes profundidades ( $H$ ) e resíduo correspondente (linha tracejada).

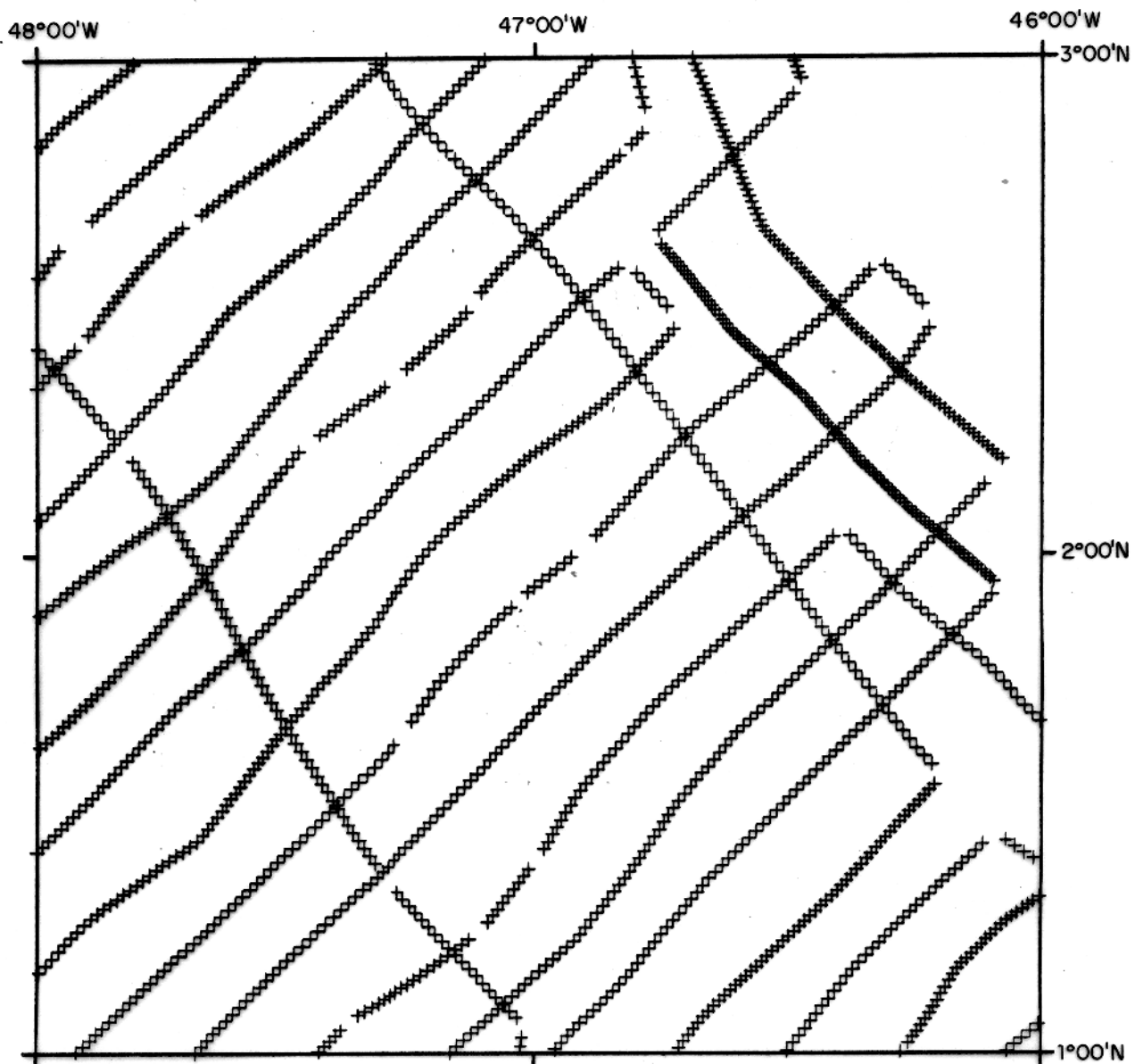
(a)  $H=5$  km; (b)  $H=10$  km; (c)  $H=15$  km; (d)  $H=20$  km; (e)  $H=25$  km.



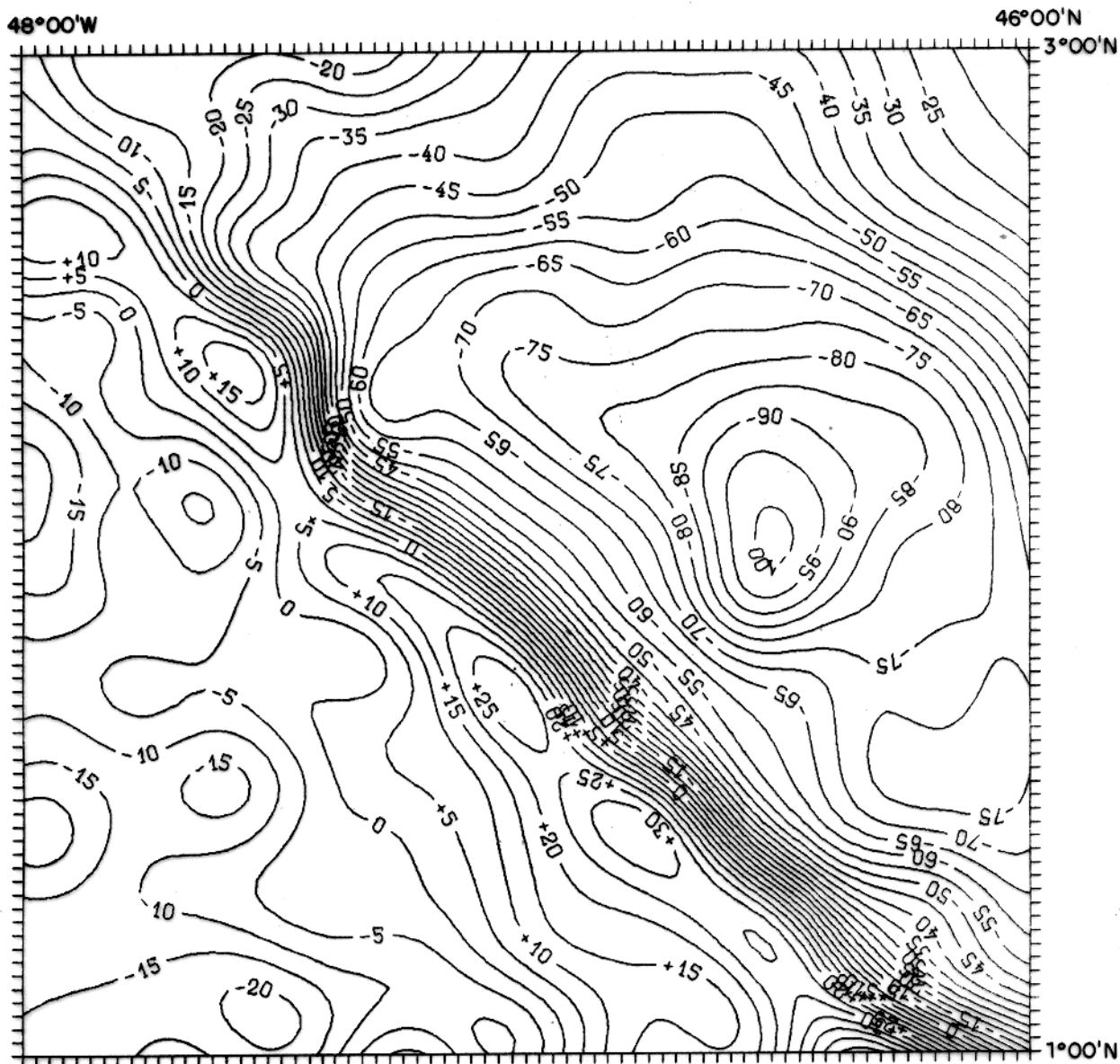
**Figura 52- Aplicação 2**

(a) Perfil da anomalia magnética ao longo da linha de vôo de número 68.

(b) Observações equivalentes (círculos) identificadas pelo algoritmo DOE. A linha tracejada representa o resíduo entre a curva interpoladora que ajusta as 38 observações equivalentes e os valores amostrados.

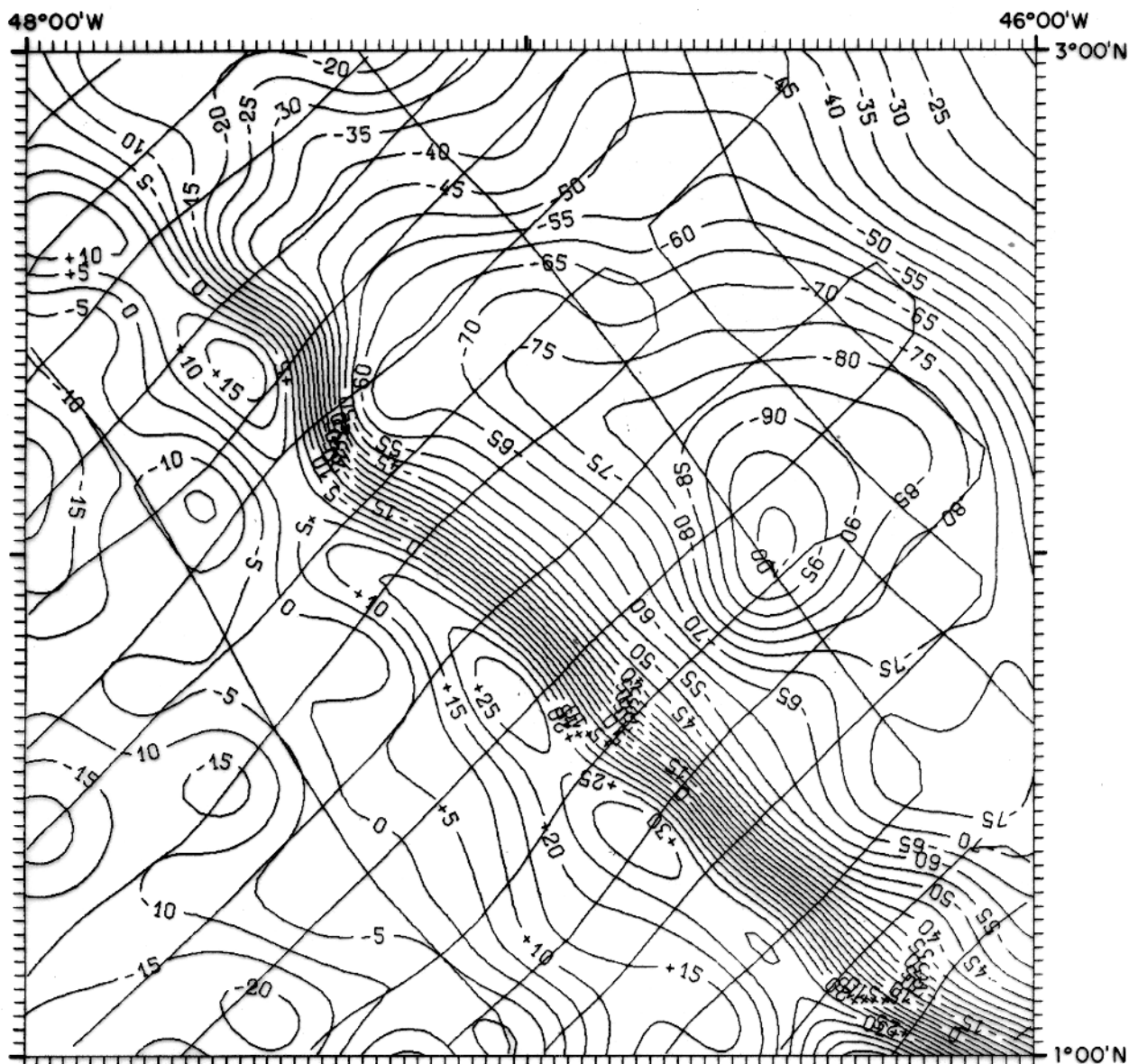


**Figura 53- Aplicação 3**  
Mapa de posicionamento dos dados (cruzes) na sub-área do Projeto Equant-2 utilizados nas Aplicações 3 e 4.



**Figura 54- Aplicação 3**

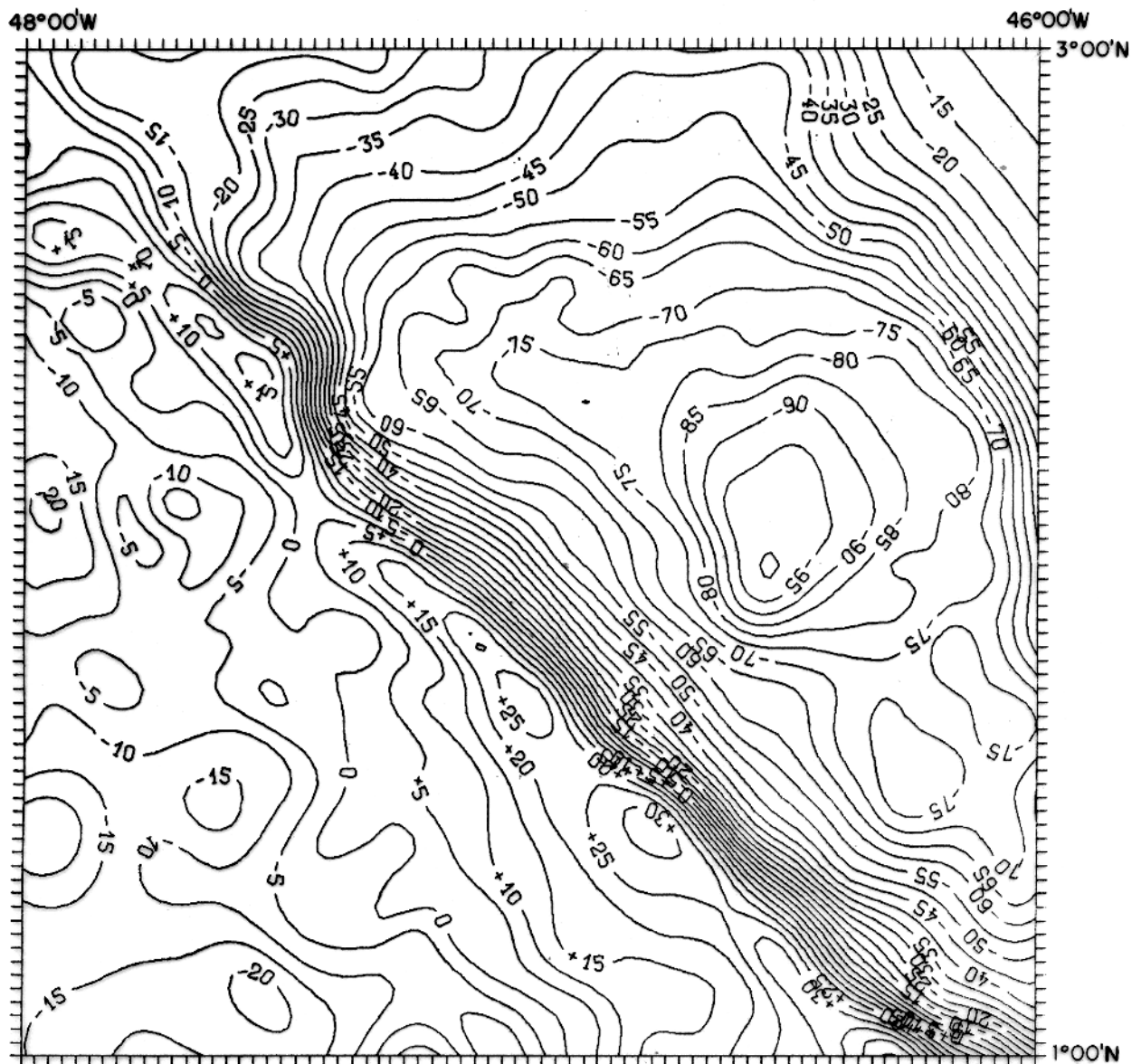
Mapa da anomalia ar-livre, na região da Figura 53, interpolada por meio de uma camada equivalente na profundidade de 20 km. A malha regular tem  $75 \times 75$  com espaçamentos entre os nós iguais a 2,9 km. O intervalo de contorno é igual a 5 mGal.



**Figura 55- Aplicação 3**

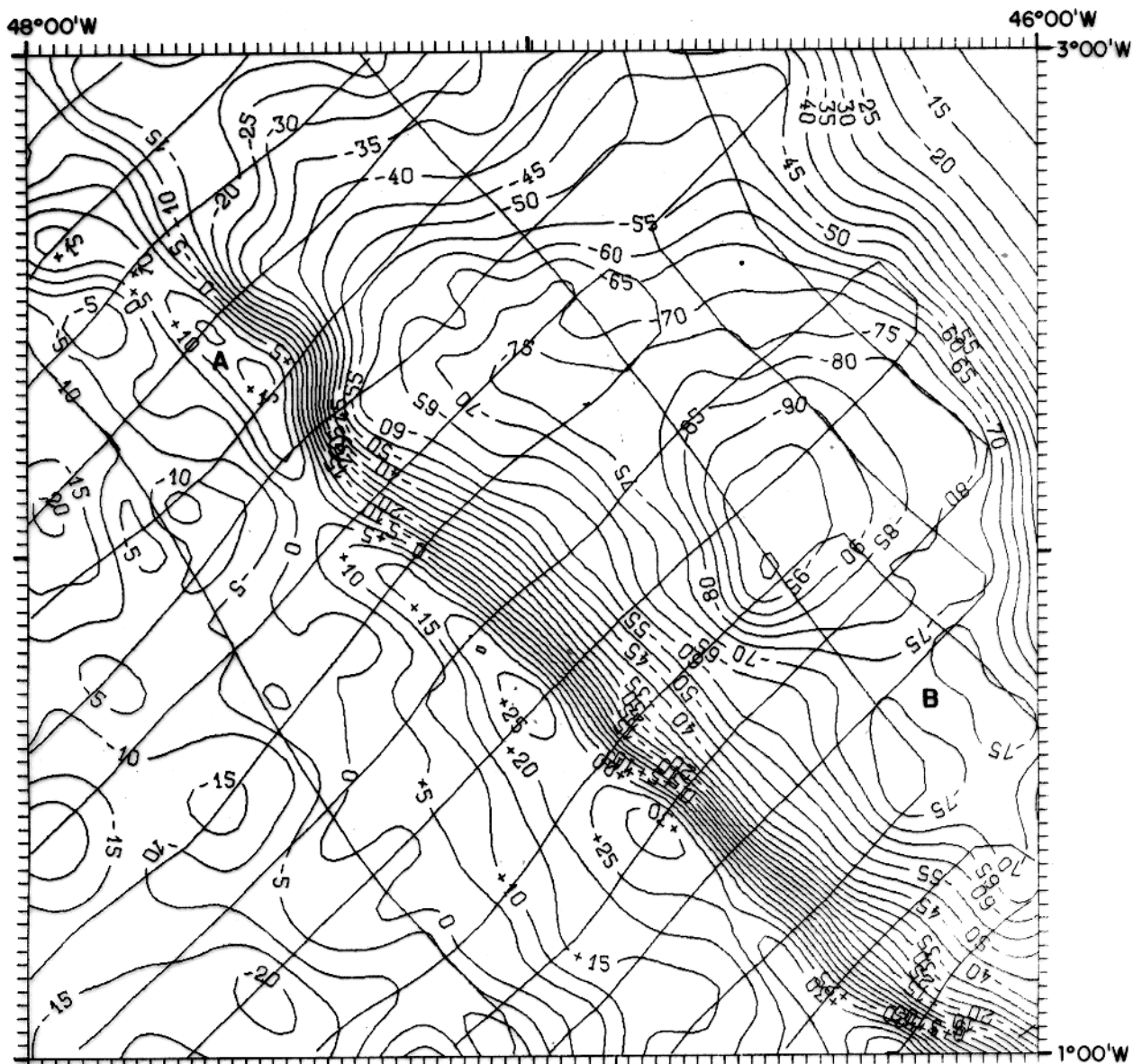
Sobreposição do mapa da anomalia ar-livre da Figura 54 com o mapa das linhas de amostragem (traço do navio). O intervalo de contorno é igual a 5 mGal.





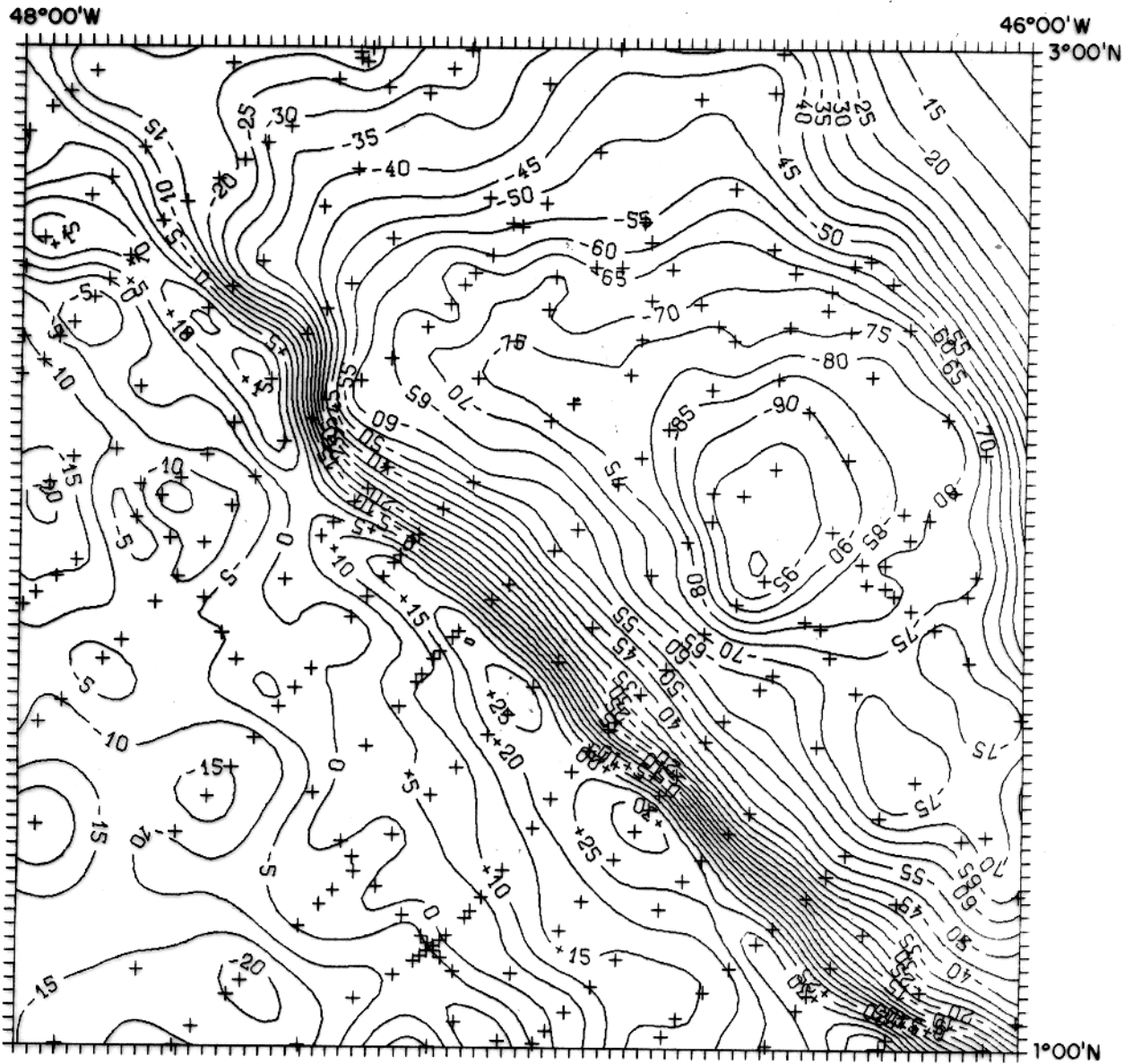
**Figura 57- Aplicação 4**

Mapa de contorno da anomalia ar-livre interpolada por meio de uma camada equivalente na profundidade de 10 km. A malha regular tem  $75 \times 75$  pontos com espaçamentos entre os nós iguais a 2,9 km. O intervalo de contorno é igual a 5 mGal.



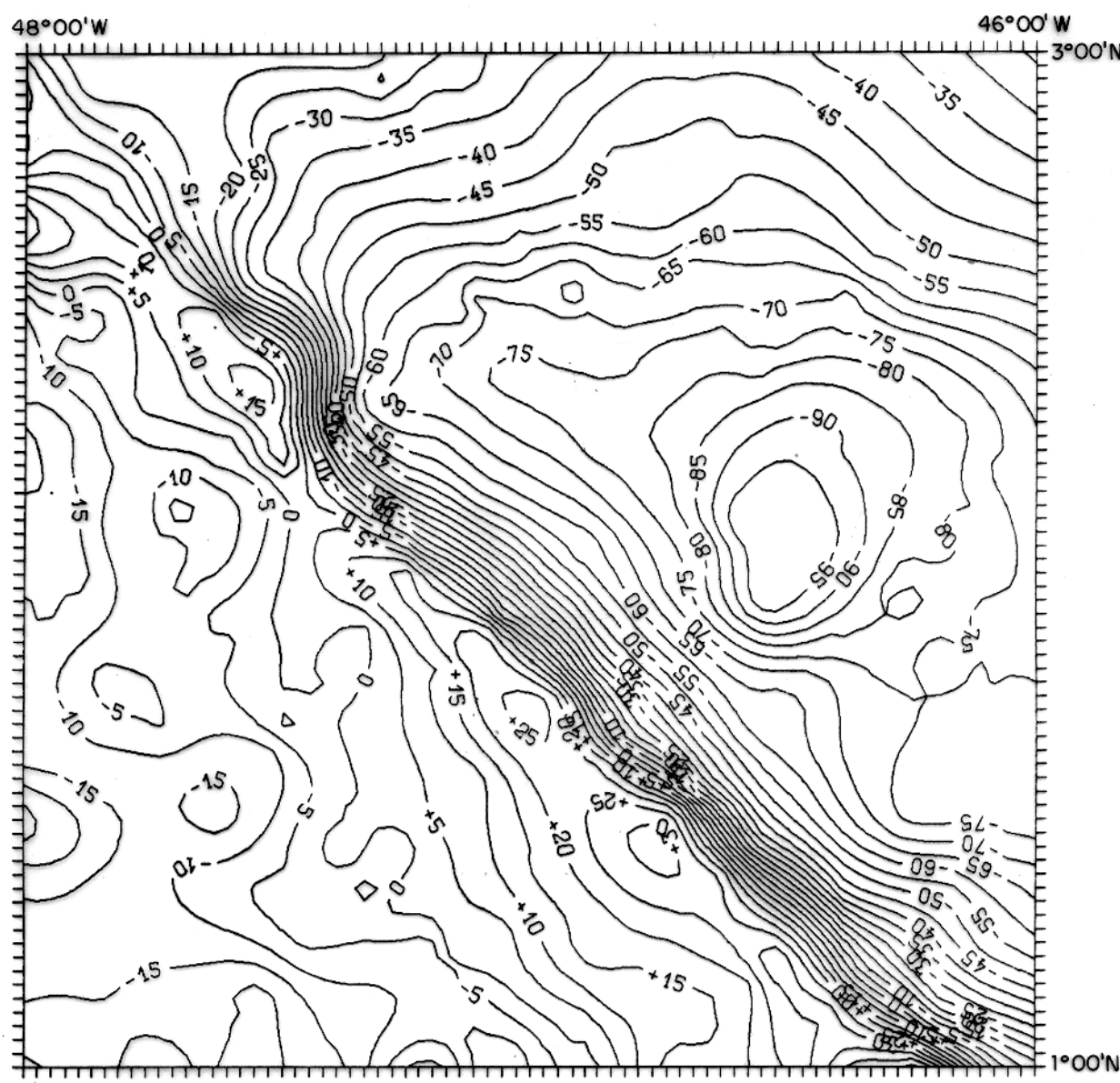
**Figura 58- Aplicação 4**

Sobreposição do mapa de contorno da anomalia ar-livre interpolada da Figura 57 com o mapa das linhas de amostragem (traço do navio). As letras A e B indicam as feições centradas sobre as linhas de amostragem que são acentuadas a medida que a camada equivalente é colocada em profundidades menores. O intervalo de contorno é igual a 5 mGal.

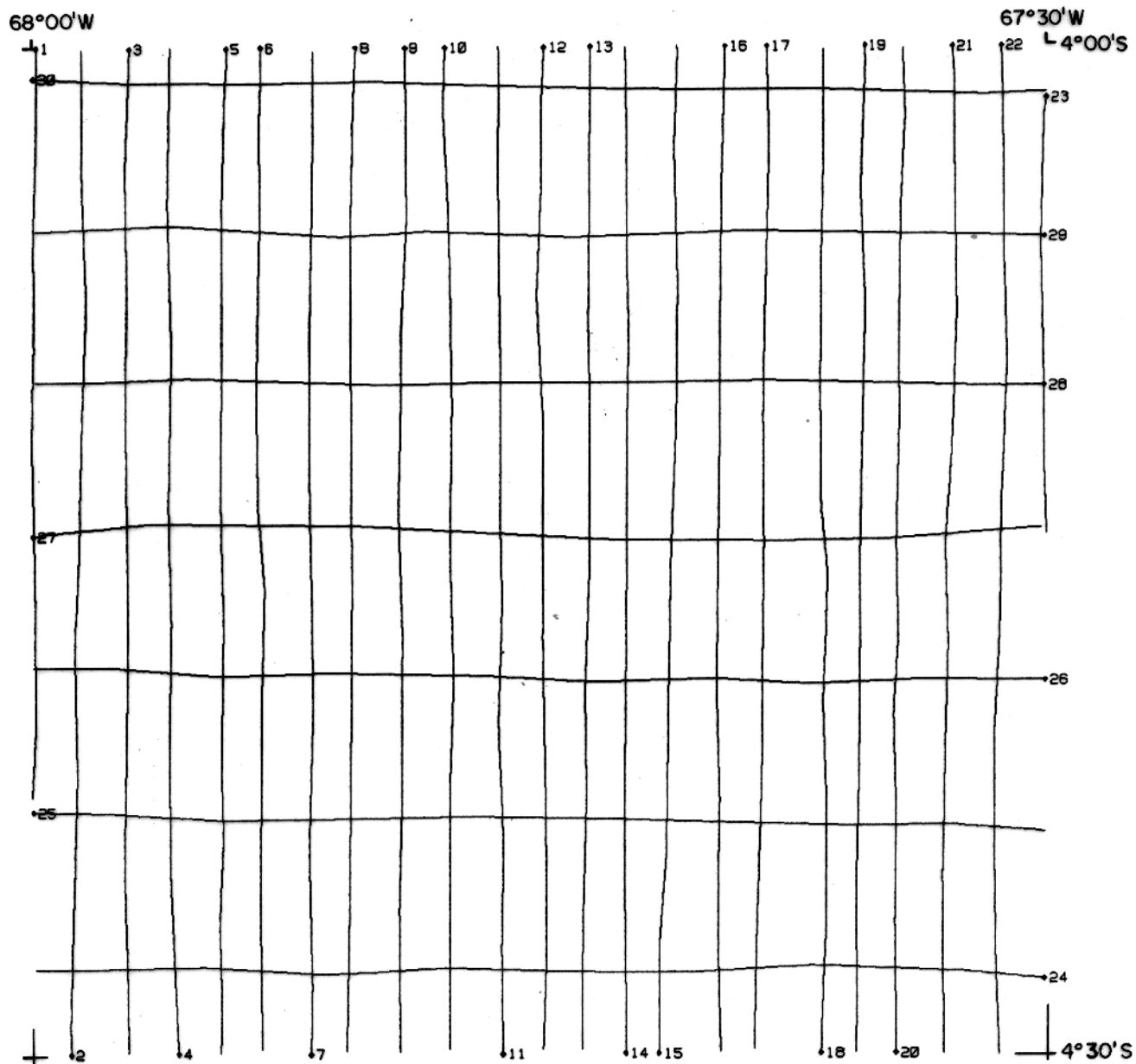


**Figura 59- Aplicação 4**

Sobreposição do mapa de contorno da anomalia ar-livre da Figura 57 com mapa que assinala o posicionamento (cruz) de cada uma das 294 observações equivalentes identificadas por aplicação do algoritmo DOE. O intervalo de contorno é igual a 5 mGal.



**Figura 60- Aplicação 4**  
Mapa de contorno dos isovalores da anomalia ar-livre interpolada pelo método da mínima curvatura. O intervalo de contorno é igual a 5 mGal.



**Figura 61- Aplicação 5**  
Mapa de posicionamento das 29 linhas de vô dentro da sub-área do Projeto Carauari-Norte.

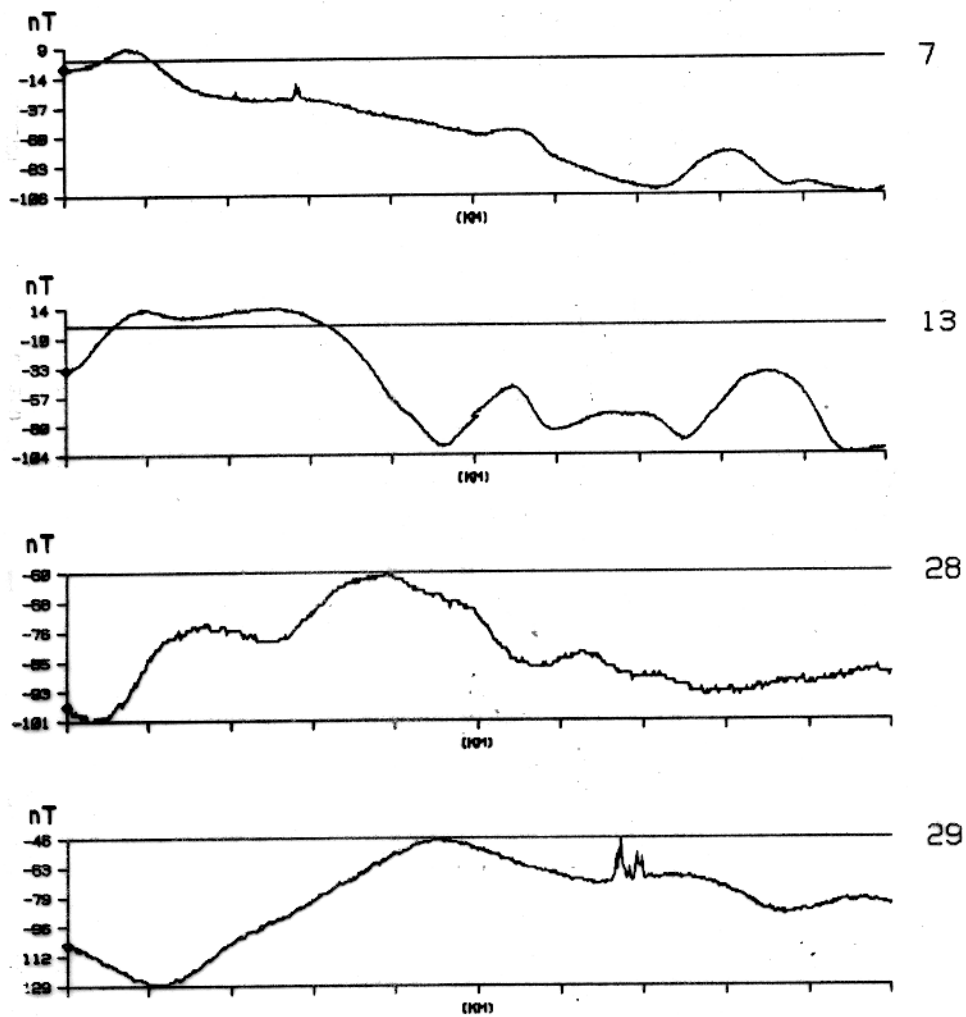


Figura 62- Aplicação 5  
Perfis da anomalia magnética ao longo das linhas de vôo de números 7, 13, 28 e 29, mostrando a grande amplitude do ruído.

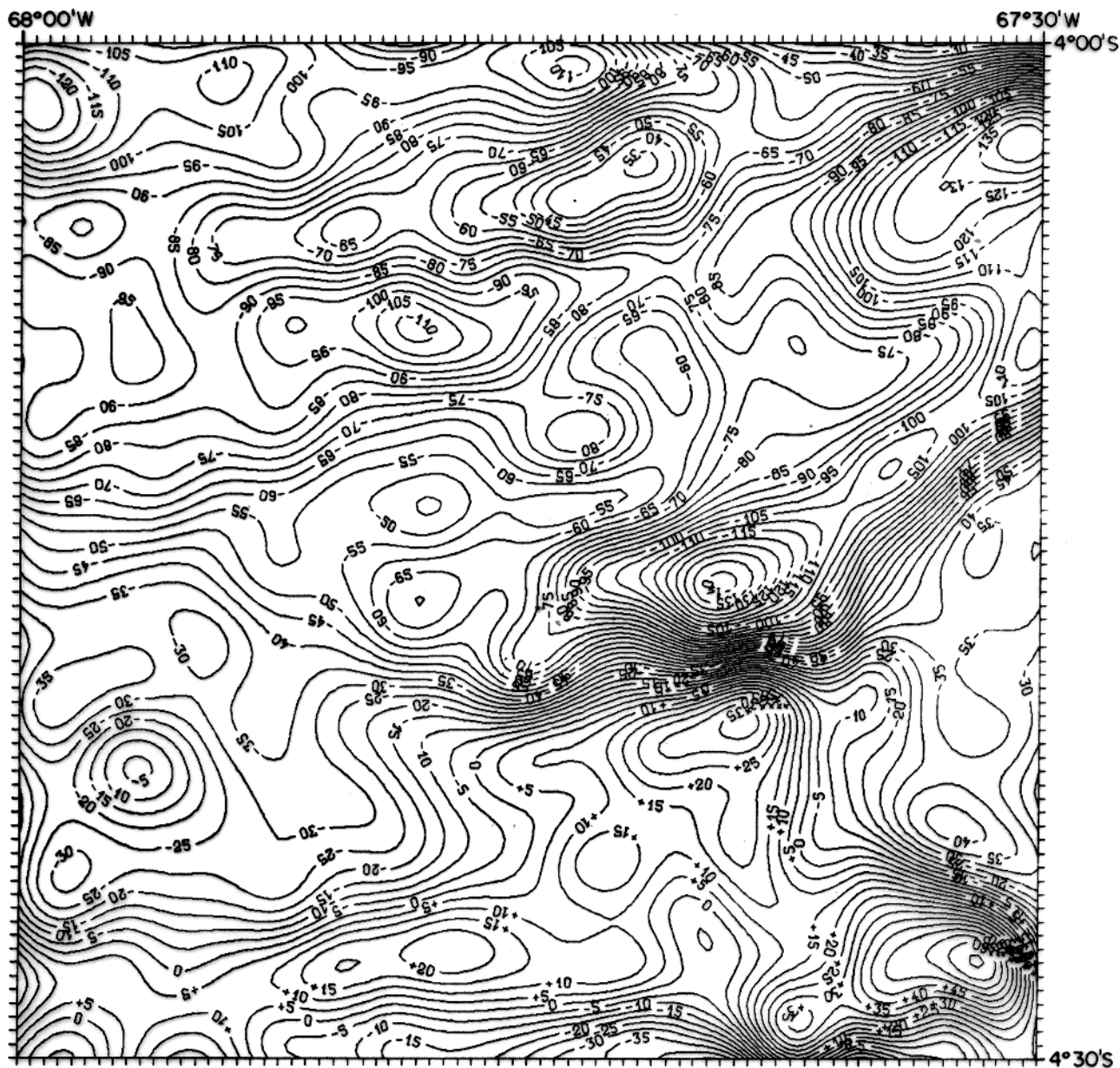


Figura 63- Aplicação 5

Mapa de contorno de isovalores da anomalia interpolada por uma camada equivalente na profundidade de 6,28 km. A malha regular tem  $75 \times 75$  com espaçamento entre os nós iguais a 0,75 km. O intervalo de contorno é igual a 5 nT.

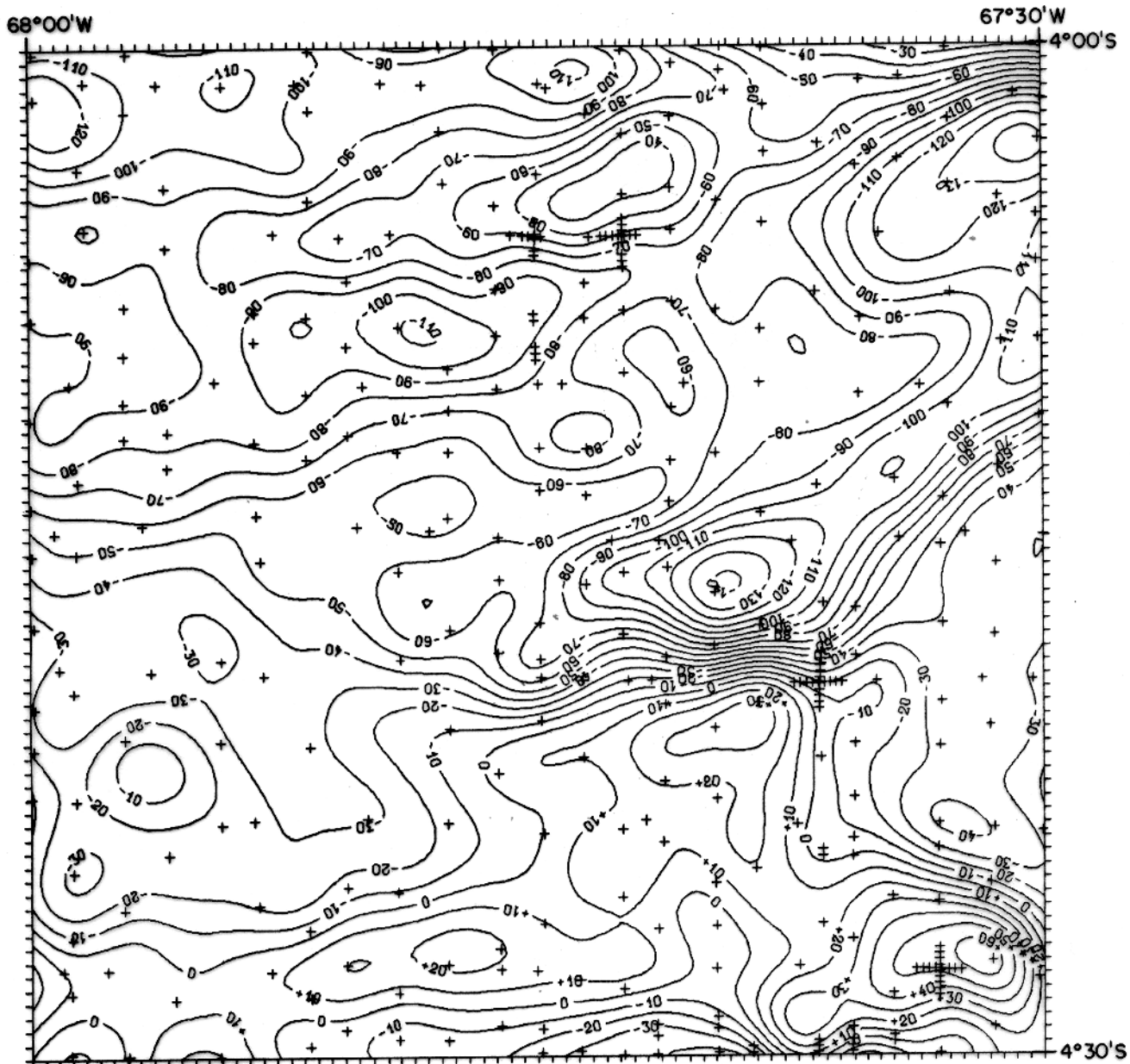
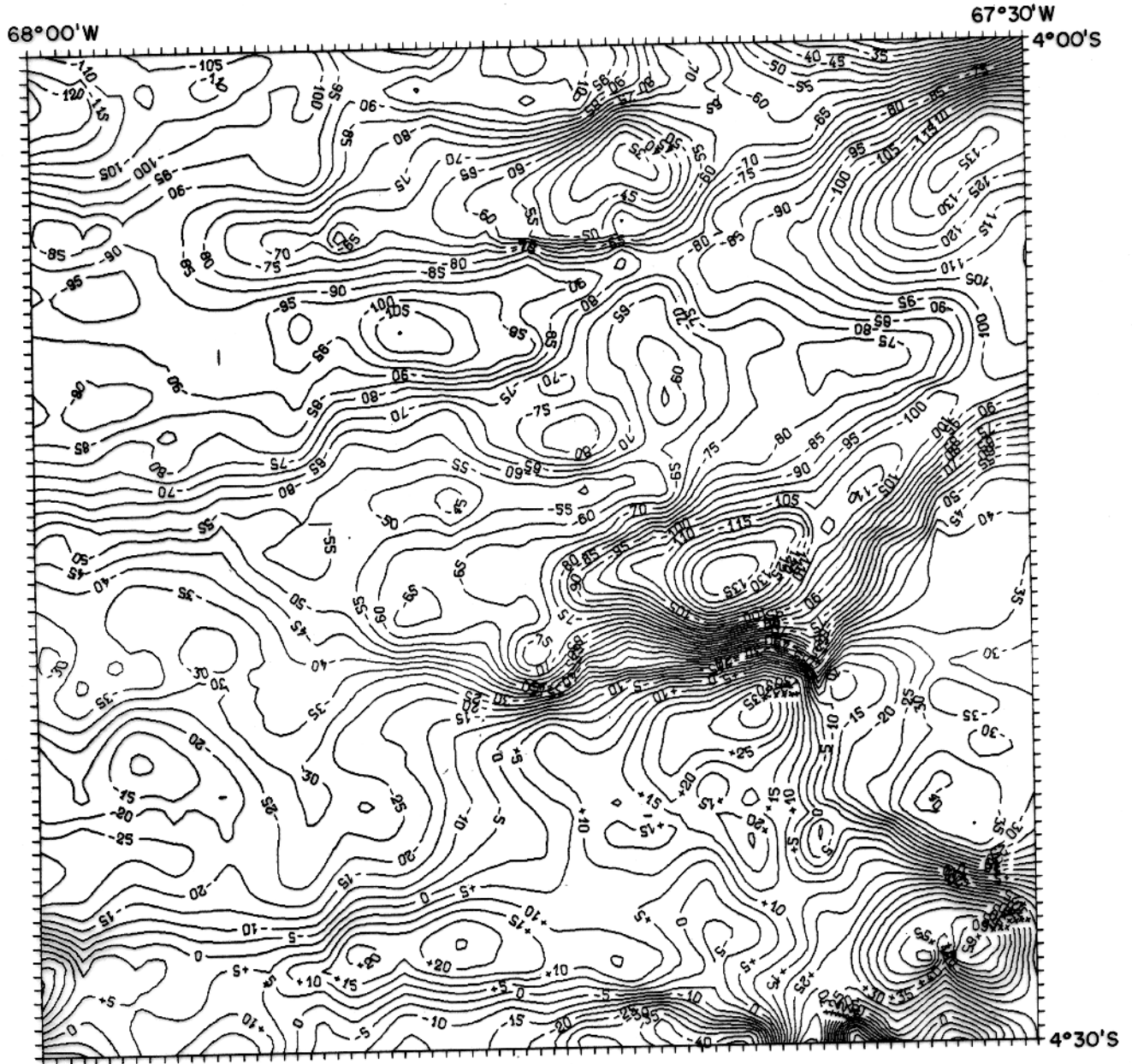
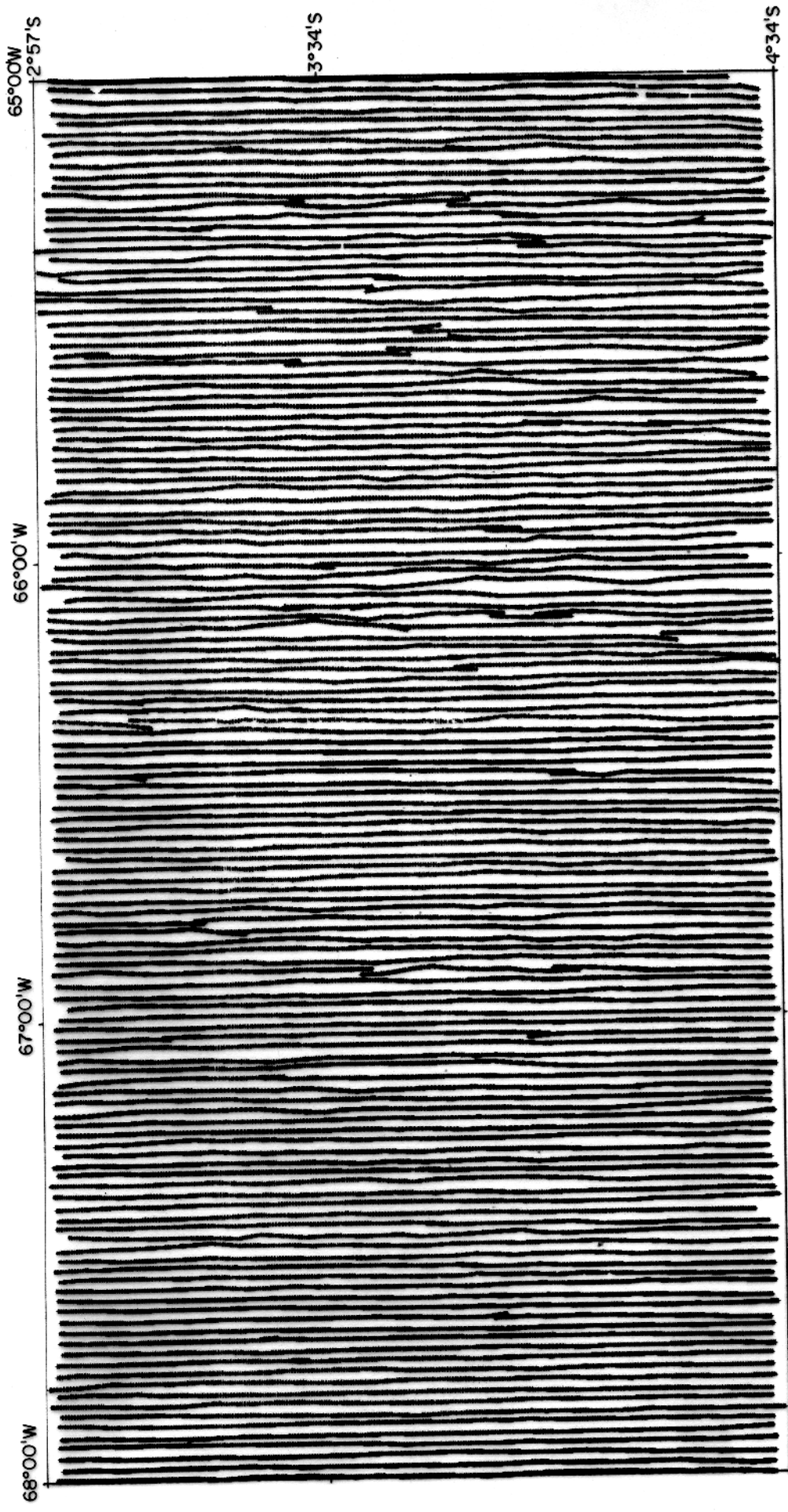


Figura 64- Aplicação 5

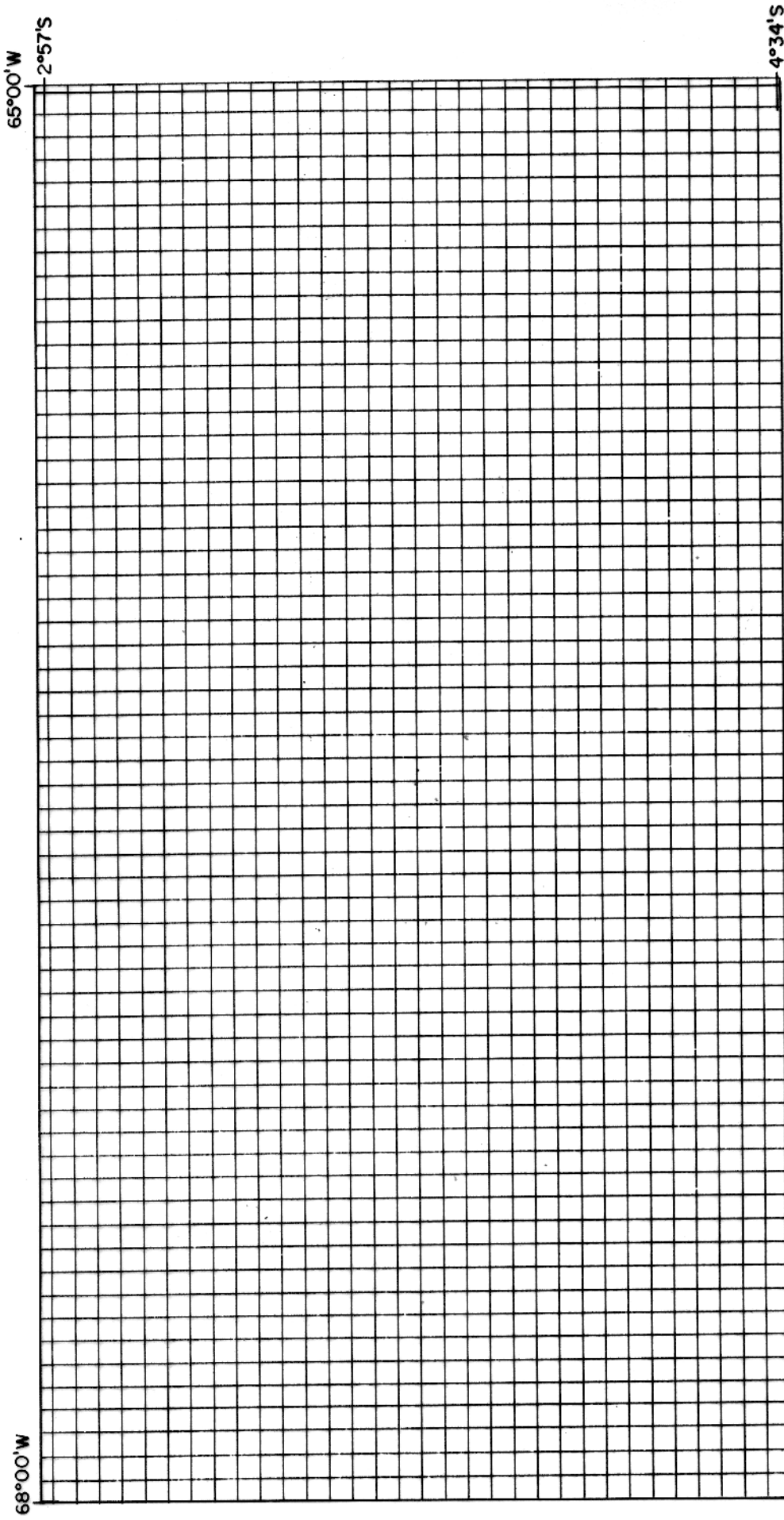
Sobreposição do mapa de isovalores da anomalia interpolada da Figura 63 com o mapa de posicionamento das 294 observações equivalentes (cruzes). O intervalo de contorno é igual a 10 nT.



**Figura 65- Aplicação 5**  
 Mapa de contorno de isovalores da anomalia interpolada pelo método da mínima curvatura.  
 O intervalo de contorno é igual a 5 nT.



**Figura 66- Aplicação 6**  
Mapa de posicionamento dos 91239 dados (cruzes) do Projeto Carauri-Norte. Estes dados foram obtidos por decimação (no passo 4) dos 365319 dados originais.



**Figura 67- Aplicação 6**  
Mapa com as celas que subdividem a área do Projeto Carauari-Norte. Os números de celas na direção Norte-Sul e Leste-Oeste são, respectivamente, iguais a 33 e 62. As celas são quadráticas com arestas iguais a 5,5 km.

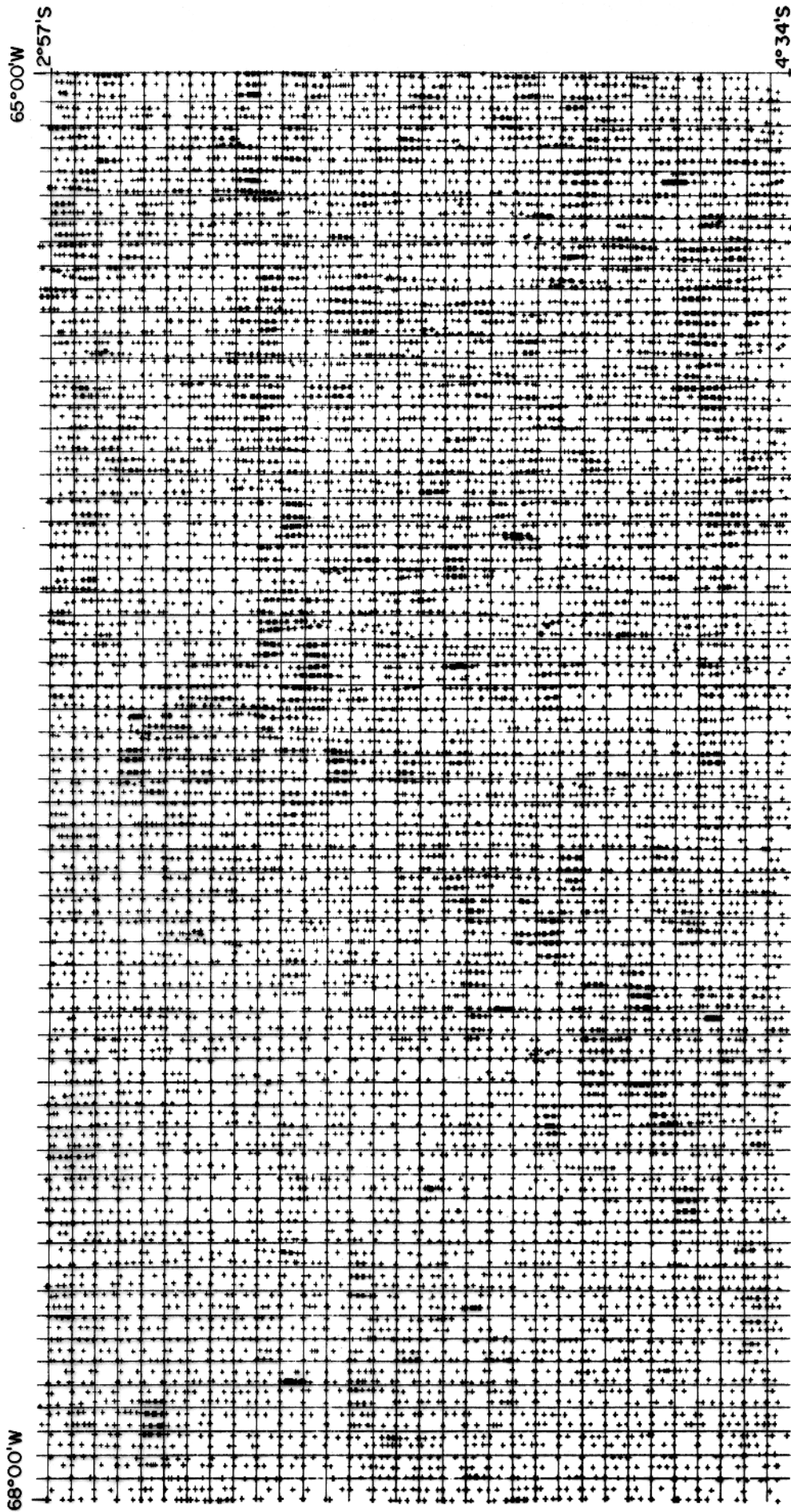
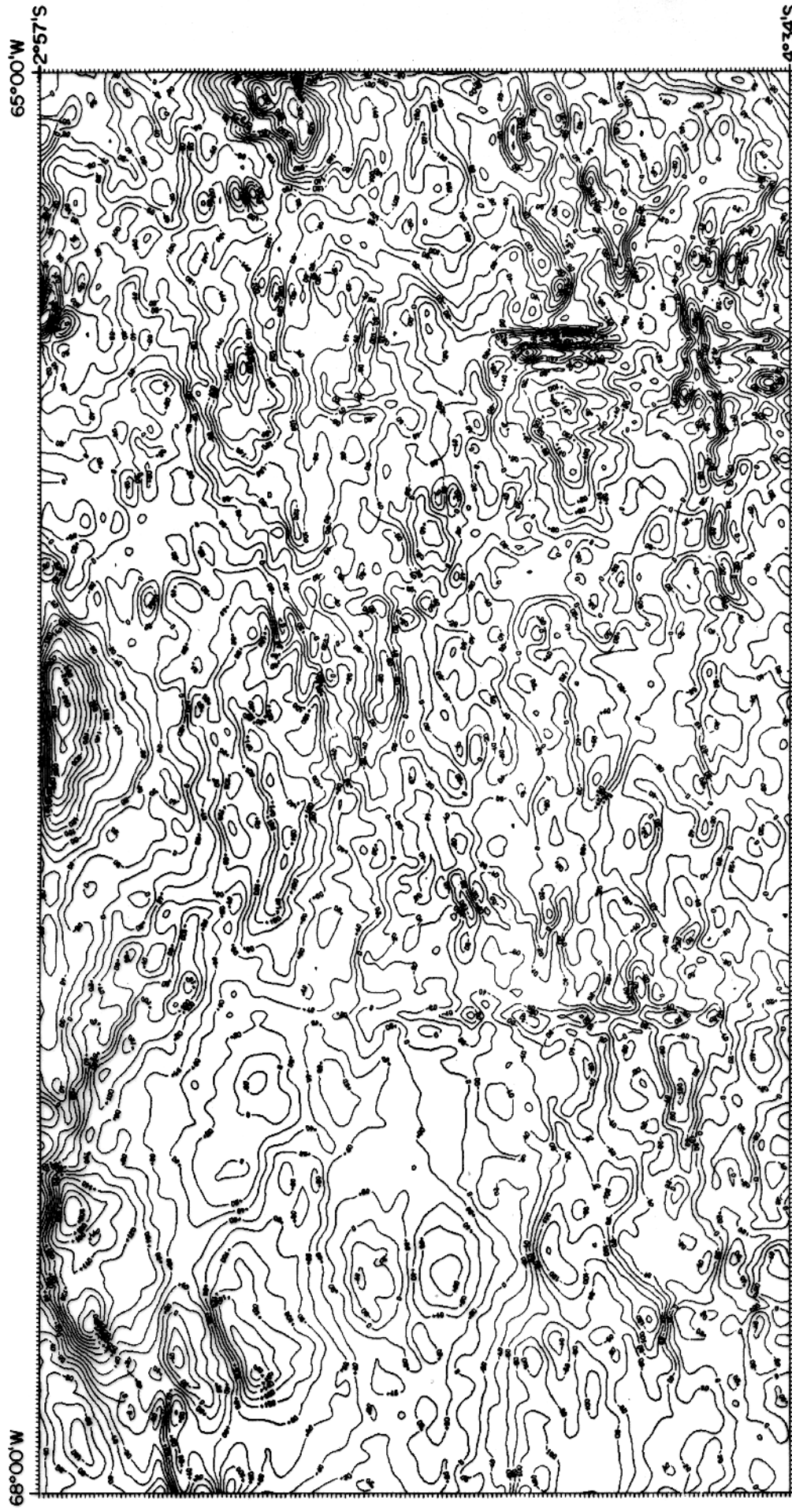
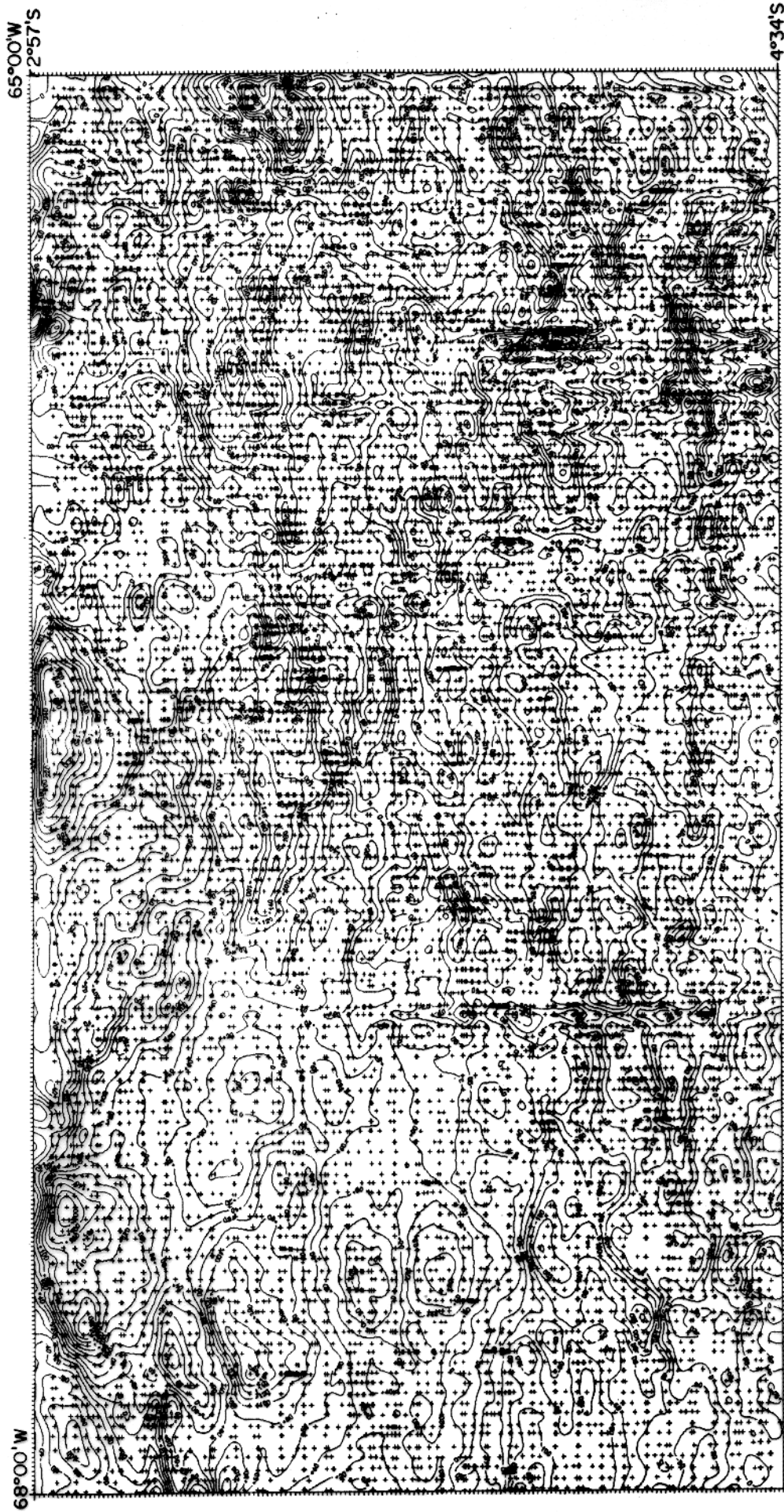


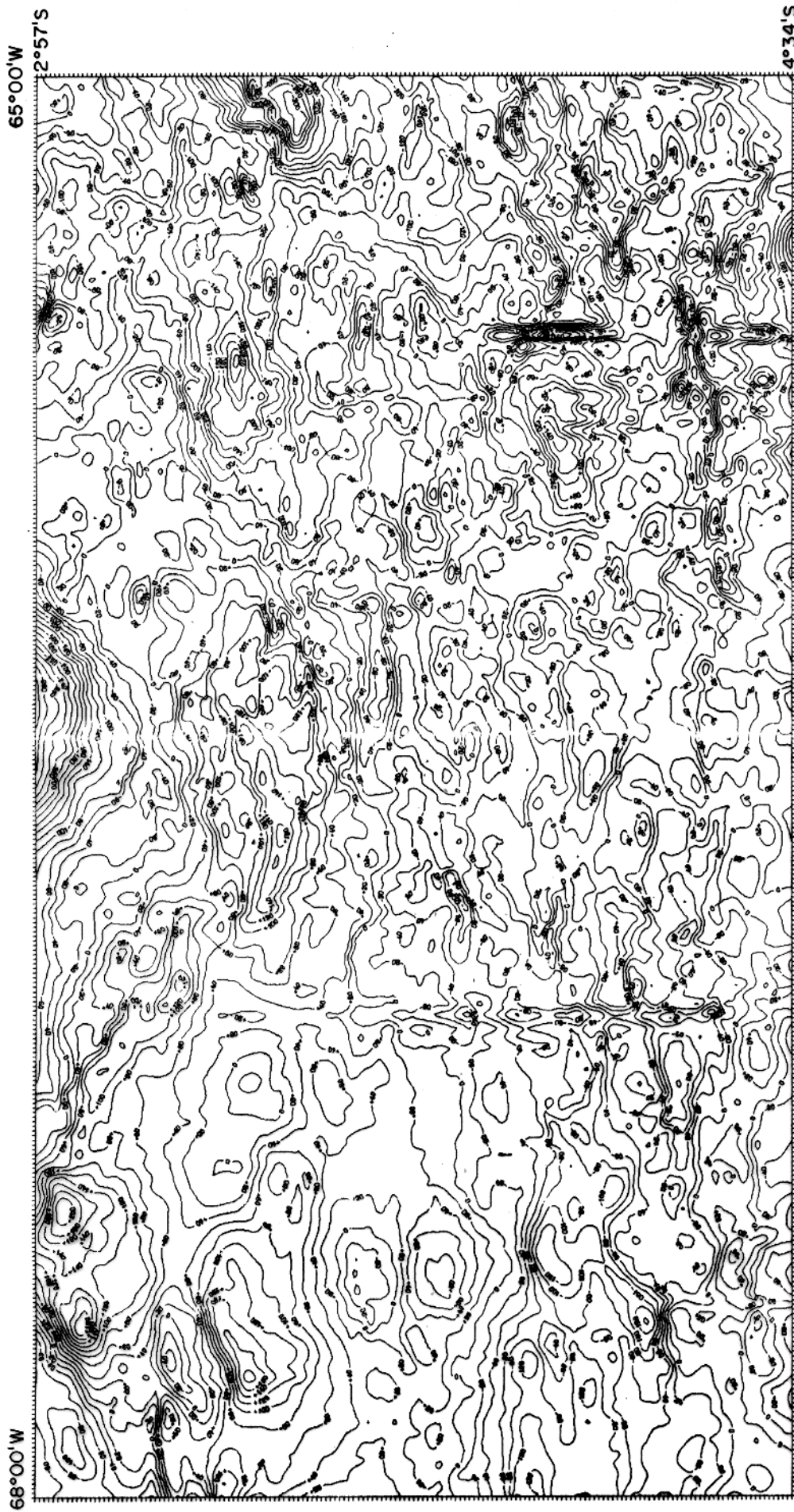
Figura 68- Aplicação 6  
Mapa do posicionamento das observações equivalentes que foram indentificadas aplicando o algoritmo DOEg.



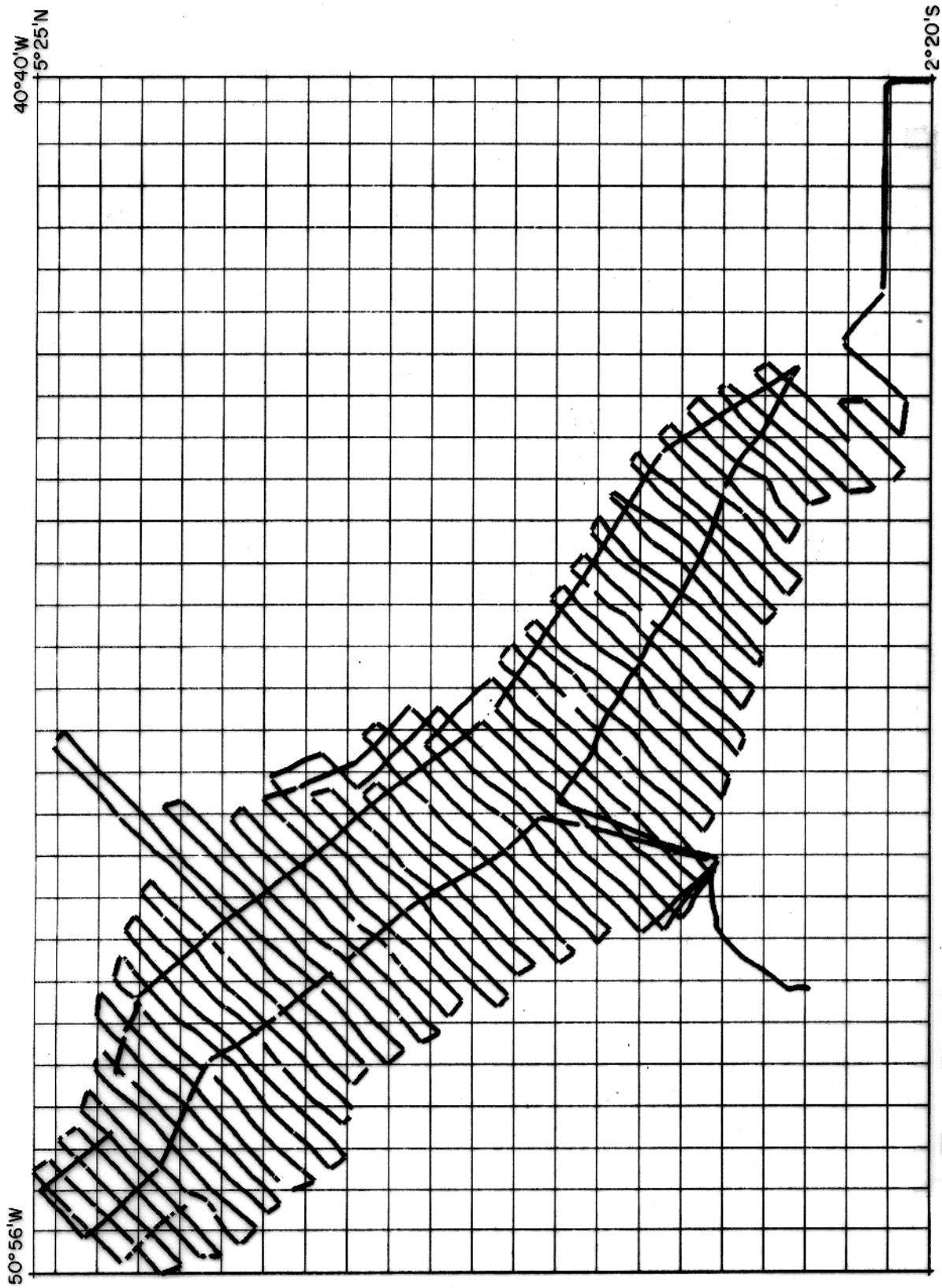
**Figura 69- Aplicação 6**  
Mapa da anomalia magnética do projeto Carauari-Norte interpolada na forma local pela camada equivalente. O intervalo de contorno é igual a 20 nT.



**Figura 70- Aplicação 6**  
Sobreposição da anomalia magnética da Figura 69 com o mapa do posicionamento das observações equivalentes. A janela usada na interpolação é quadrada e composta por nove células. O intervalo de contorno é igual a 20 nT.



**Figura 71- Aplicação 6**  
Mapa da anomalia magnética do projeto Carauari-Norte interpolada pelo método da mínima curvatura. O intervalo de contorno é igual a 20 nT.



**Figura 72-** Aplicação 7

Mapa do posicionamento dos 19047 dados do Projeto Equant-2 (cruzes) sobreposto ao mapa das celas que subdivide a área que engloba o levantamento. Os números de celas nas direções Norte-Sul e Leste-Oeste são, respectivamente, iguais a 22 e 29. As celas são quadráticas com arestas iguais a 40 km.

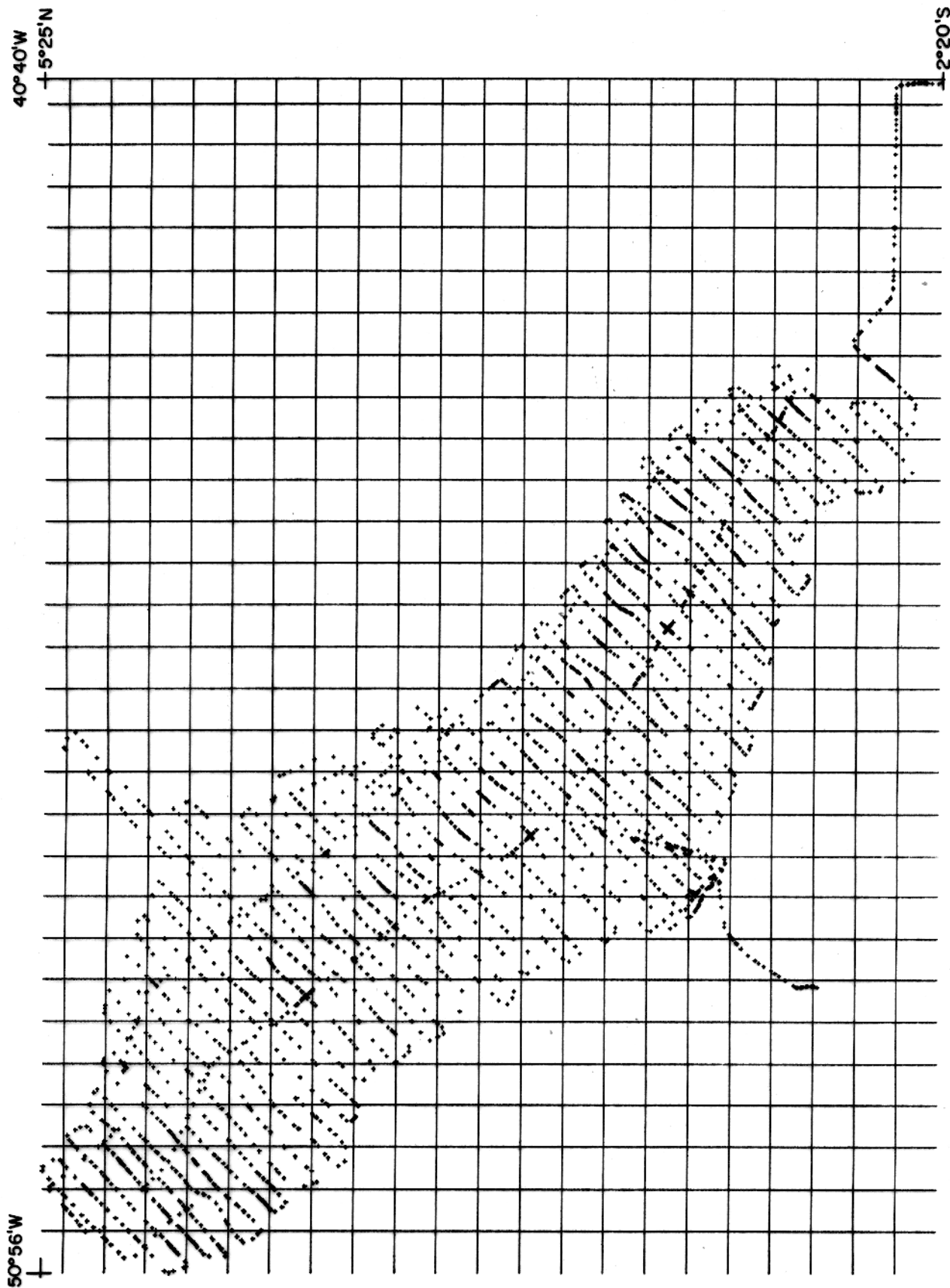


Figura 73- Aplicação 7  
Mapa do posicionamento das 3130 observações equivalentes (cruzes) que foram identificadas aplicando o algoritmo DOEg.



Figura 74- Aplicação 7

Mapa de contorno da anomalia ar-livre do Projeto Equant-2 interpolada na forma local pela método da camada equivalente. A janela usada na interpolação é quadrática e composta por nove células. O intervalo de contorno é igual a 5 mGal.



Figura 75- Aplicação 7  
Sobreposição do mapa de contorno da Figura 74 com o mapa do posicionamento das ob-  
servações equivalentes. O intervalo de contorno é igual a 5 mGal.

40° 40' W  
5° 25' N

50° 56' W



**Figura 76- Aplicação 7**  
Mapa de contorno da anomalia ar-livre do Projeto Equant-2 interpolada pelo método da mínima curvatura. O intervalo de contorno é igual a 5 mGal.