

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ**  
**CENTRO DE GEOCIÊNCIAS**  
**CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM GEOFÍSICA**

**TESE DE DOUTORADO**

**DETERMINAÇÃO DAS VELOCIDADES INTERVALARES USANDO A  
TEORIA PARAXIAL DO RAIOS: APROXIMAÇÃO DE SEGUNDA ORDEM  
DOS TEMPOS DE TRÂNSITO**

**LUIS ALFREDO MONTES VIDES**



**BELÉM - PARÁ**  
**1998**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ  
CENTRO DE GEOCIÊNCIAS  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
GEOFÍSICA

DETERMINAÇÃO DAS VELOCIDADES INTERVALARES  
USANDO A TEORIA PARAXIAL DO RAIOS;  
APROXIMAÇÃO DE SEGUNDA ORDEM DOS  
TEMPOS DE TRÂNSITO

TESE APRESENTADA POR  
LUIS ALFREDO MONTES VIDES

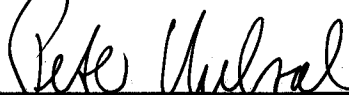
COMO REQUISITO PARCIAL À OBTENÇÃO DE GRAU DE  
DOUTOR EM CIÊNCIAS NA ÁREA DE GEOFÍSICA

Data de Aprovação: / / 1998

COMITÊ DE TESE:



Prof. Dr. Walter Franz Söllner (Orientador)



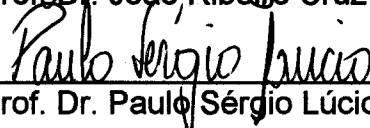
Prof. Dr. Peter Hubral



Prof. Dr. Martin Tygel



Prof. Dr. João Ribeiro Cruz



Prof. Dr. Paulo Sérgio Lúcio

BELÉM  
1998

A minha mãe:  
Polonia Vides,  
e a minha família:  
Fanny, Johannes e Ekaterina.

## AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Walter Söllner, pela orientação e valioso aprendizado que me proporcionou nestes dois anos.

Ao Dr. Peter Hubral, pelas sugestões e idéias fornecidas, para finalizar esta tese.

À Universidade Nacional da Colombia por ter me liberado das minhas funções acadêmicas durante a estadia no Brasil.

Ào corpo docente do CPGf/CG/UFPa, em particular ao diretor do curso o Dr. Lourenildo W. B. Leite.

A os amigos e colegas do CPGf, em especial ao German Garabito C. pelas constantes discussões teóricas e pela sua amizade.

À CAPES pelo suporte financeiro, na minha condição de bolsista.

# SUMÁRIO

	P.
DEDICATÓRIA . . . . .	i
AGRADECIMENTOS . . . . .	ii
LISTA DE ILUSTRAÇÕES . . . . .	v
RESUMO . . . . .	1
ABSTRACT . . . . .	2
1 - INTRODUÇÃO . . . . .	3
2 - TEORIA GEOMÉTRICA DO RAIO PARAXIAL . . . . .	7
2.1 TEORIA DO RAIO . . . . .	7
2.1.1 O raio paraxial . . . . .	9
2.1.2 Matriz propagadora . . . . .	10
2.2 FORMALISMO DA TEORIA GEOMÉTRICA DO RAIO . . . . .	11
2.2.1 Matriz de transferência do raio . . . . .	12
2.2.2 Raio transmitido e raio refletido . . . . .	13
2.2.3 Tempos de trânsito : aproximação parabólica . . . . .	15
2.2.4 Tempos de trânsito : aproximação hiperbólica . . . . .	16
3 - O MÉTODO DE REFLEXÃO SÍSMICA . . . . .	17
3.1 CONFIGURAÇÃO EM COBERTURA MÚLTIPLA . . . . .	18
3.2 CONFIGURAÇÃO PONTO MÉDIO COMUM . . . . .	19
3.3 CONFIGURAÇÃO AFASTAMENTO NULO . . . . .	20
3.4 CONFIGURAÇÃO FONTE COMUM . . . . .	21
3.5 CORREÇÕES DINÂMICAS . . . . .	22
3.6 EMPILHAMENTO CMP . . . . .	23
3.7 MIGRAÇÃO . . . . .	23
3.8 CONFIGURAÇÕES E FUNÇÃO CARACTERÍSTICA . . . . .	25

<b>4 - SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO</b> . . . . .	27
4.1 DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO CARACTERÍSTICA EM SUPERFÍCIE . .	28
4.2 DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO CARACTERÍSTICA EM PROFUNDIDADE	29
4.3 DETERMINAÇÃO DA VELOCIDADE E GEOMETRIA DA CAMADA . . . .	32
4.3.1 Determinação da velocidade intervalar . . . . .	34
4.3.2 Determinação da geometria da interface posterior . . . . .	36
4.4 CONTINUAÇÃO PARA BAIXO DOS RAIOS PARAXIAIS . . . . .	37
4.5 ALGORITMO DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO . . . . .	40
<b>5 - APLICAÇÃO EM MODELOS SINTÉTICOS</b> . . . . .	42
5.1 GERAÇÃO DE DADOS SINTÉTICOS . . . . .	43
5.2 MODELO ANTICLINAL . . . . .	44
5.3 MODELO GEOFÍSICO . . . . .	45
5.4 MODELO SINCLINAL . . . . .	46
5.5 MODELO DE DOMO . . . . .	48
5.6 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE . . . . .	49
<b>6 - CONCLUSÕES</b> . . . . .	53
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b> . . . . .	54
<b>A - PROPRIEDADE SIMPLÉTICA</b> . . . . .	57
<b>B - ANÁLISE DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA</b> . . . . .	59
B.1 ROTAÇÃO DO PLANO XY EM TORNO DO EIXO $\hat{z}$ . . . . .	60
B.2 TRANSFERÊNCIA ENTRE PLANOS PARALELOS . . . . .	60
B.3 TRANSFERÊNCIA SOBRE A SUPERFÍCIE TANGENTE . . . . .	62
B.4 OPERADOR PROJEÇÃO SOBRE A SUPERFÍCIE POSTERIOR . . . . .	64
<b>C - SOLUÇÃO DO PROBLEMA LINEAR INVERSO</b> . . . . .	68
C.1 REGRESSÃO A UMA PARABOLA . . . . .	69
C.2 VARIÂNCIA DOS PARÂMETROS DO MODELO ESTIMADO . . . . .	69

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

2.1	Sistema sísmico com o raio central e um raio paraxial, partindo da superfície anterior e atingindo a superfície posterior (modificado de BORTFELD, 1989) . . . . .	11
2.2	Sistema sísmico com os raios paraxiais transmitido e refletido, e o raio central (Modificado de BORTFELD, 1989) . . . . .	14
3.1	Configuração para obtenção de seções em cobertura múltipla. . . . .	18
3.2	Configuração de fontes-detetores em afastamento médio comum, e a frente de onda NIP (Tomado de HUBRAL, 1983) . . . . .	19
3.3	Levantamento hipotético com fontes-detetores em afastamento nulo e a frente da onda normal (Tomado de HUBRAL, 1983) . . . . .	20
3.4	(a) Configuração de fonte detetor em fonte comum. (b) Família de traços com fonte comum . . . . .	21
3.5	O ponto difrator em baixo da camada mergulhante gera uma curva de tempos de difração . . . . .	24
4.1	Se deseja determinar a função característica em profundidade, sobre a superfície de observação. . . . .	29
4.2	a) Raios transmitidos através de uma camada simples com raio central perpendicular à interface posterior. b) Refração do raio com ângulos de incidência e ângulo de refração . . . . .	32
4.3	O novo sistema de coordenadas cartesianas referenciado ao raio central na interseção com a interface, os raios paraxiais refratados continuam até a seguinte interface . . . . .	38
4.4	Raios atingindo à interface posterior, o central normalmente e raio paraxial com um ângulo de incidência . . . . .	39
4.5	a) Modelo sísmico de três camadas mostrando os raios normais associados a cada refletor. b) Geometria do raio na primeira camada . . . . .	40
5.1	Modelo geofísico representando um anticlinal mergulhante . . . . .	44
5.2	Modelos de velocidades intervalares estimadas nas posições (0,0) e (0,4.5) do modelo de anticlinal mergulhante, e erros nas velocidades . . . . .	45
5.3	Acima: Modelo geofísico. Acima: o modelo de uma situação mais realística. Embaixo: seção bidimensional do modelo com as posições onde os raios normais atingem às interfaces . . . . .	46

5.4	Sinclinal: à direita o modelo de sinclinal e com cruces a esquerda as posições finais dos raios obtidas com incerteza de 2ms nos tempos de trânsito . . . . .	47
5.5	Modelo do domo reconstruído pela aproximação polinomial das interfaces	48
5.6	Variação dos parâmetros (ordenada) em função da perturbação nos tempos de trânsito (abscissa) . . . . .	51
5.7	Variações em V, y e z (ordenada) em função das variações nos valores dos parâmetros (abscissa), para as três camadas do modelo sinclinal .	52
B.1	Uma camada com o raio central normal à interface posterior . . . . .	59
B.2	Rotação do sistema cartesiano em torno do eixo z . . . . .	60
B.3	Transferência desde plano normal ao raio na interface anterior até o plano paralelo . . . . .	61
B.4	Projeção desde plano paralelo até plano tangente à interface posterior	62
B.5	Transferência desde plano normal à superfície posterior até a interface posterior da camada . . . . .	64

## RESUMO

Neste trabalho foi desenvolvido um método de solução ao problema inverso para modelos sísmicos compostos por camadas homogêneas e isotrópicas separadas por superfícies suaves, que determina as velocidades intervalares em profundidade e calcula a geometria das interfaces.

O tempo de trânsito é expresso como uma função de parâmetros referidos a um sistema de coordenadas fixo no raio central, que é determinada numericamente na superfície superior do modelo. Essa função é posteriormente calculada na interface anterior que limita a camada não conhecida, através de um processo que determina a função característica em profundidade. A partir da função avaliada na interface anterior se calculam sua velocidade intervalar e a geometria da superfície posterior onde tem lugar a reflexão do raio. O procedimento se repete de uma forma recursiva nas camadas mais profundas obtendo assim a solução completa do modelo, não precisando em nenhum passo informação diferente à das camadas superiores.

O método foi expresso num algoritmo e se desenvolveram programas de computador, os quais foram testados com dados sintéticos de modelos que representam feições estruturais comuns nas seções geológicas, fornecendo as velocidades em profundidade e permitindo a reconstrução das interfaces. Uma análise de sensibilidade sobre os programas mostrou que a determinação da função característica e a estimação das velocidades intervalares e geometria das interfaces são feitos por métodos considerados estáveis.

O intervalo empírico de aplicabilidade das correções dinâmicas hiperbólicas foi tomado como uma estimativa da ordem de magnitude do intervalo válido para a aplicação do método.

## ABSTRACT

In this work a method was developed to solve the inverse seismic problem in models consisting of isotropic and homogeneous layers separated by smooth interfaces, which determines the interval velocities in depth and calculates the geometry of the interfaces.

The traveltimes is expressed by a function with parameters referred to a coordinated system fixed at the central ray, and numerically estimated at the superior surface of the model in the vicinity of the normal ray. The function is later recalculated at the anterior interface limiting the unknown layer, through a process which determines the characteristic function in depth. The characteristic function of the traveltimes evaluated at the anterior interface allows to know the interval velocity of the layer and the geometry of the posterior interface where the normal reflection takes place. The procedure is repeated recursively at deeper layers getting the complete solution without a priori knowledge but the upper determined layers.

Computer's programs expressing the algorithm of the method were developed and tested with synthetic seismic data, generated through models with structural factions very common in geological sections, obtaining the interval velocities in depth with considered acceptable errors and reconstructing the interfaces. A sensibility analysis was done in order to verify the stability of the two methods.

The empirical range of applicability of hyperbolic dynamic corrections was taken for the range of applicability of the developed method.

# 1 - INTRODUÇÃO

Na exploração sísmica procura-se a partir dos eventos de reflexão, determinar a geometria das interfaces que limitam as camadas rochosas e as velocidades com que as ondas sísmicas as percorrem. Determinar a velocidade é uma tarefa fundamental, sendo de suma importância nas etapas de processamento, avaliação e interpretação. O exato conhecimento das velocidades fornece considerável informação litológica e estratigráfica do subsolo, permitindo estimar a densidade e a porosidade das rochas, identificar zonas pressurizadas e indicar a presença de hidrocarbonetos.

Nos processos de empilhamento, correção de amplitudes, migração no tempo e conversão em profundidade, foram introduzidas vários conceitos de velocidades, entre outras: intervalar, RMS (*root mean square*), de empilhamento, NMO (*normal move out*) e de migração.

Na história da sísmica foram desenvolvidos muitos trabalhos com a finalidade de determinar as velocidades, a continuação fazemos uma breve resenha sobre alguns dos resultados apresentados nestas publicações. Usando modelos com camadas horizontais e com velocidades médias calculadas em subsuperfície, DIX (1955) achou uma fórmula iterativa para calcular as velocidades intervalares, obtendo bons resultados para pequenos afastamentos fonte-detector. BYUN & YOUNG (1989) encontraram que a fórmula DIX em modelos unidimensionais leva a erros em profundidade devido a dependência com o afastamento, e que pela iteratividade na computação a fórmula DIX sofre de instabilidade quando a distância entre a fonte e o detector diminui. Efeitos devidos à propagação de ondas como são atenuação inelástica e estratificação fina, introduzem erros adicionais no cálculo.

Estudando modelos com camadas plano-horizontais, AL-CHALABI (1974) encontrou as relações entre as velocidades RMS, média e de empilhamento. SHAH (1973a) desenvolveu o conceito de curvatura da frente de onda para relacionar as velocidades NMO com as propriedades do subsolo para modelos com camadas mergulhantes 2D e 3D. O conceito de curvatura da frente de onda foi estendido à meios 3D lateralmente não homogêneos com interfaces curvas por KREY (1976) e HUBRAL & KREY (1980).

TANER et al (1970), simulando seções sísmicas em modelos com horizontes refletor lineares e não lineares, concluíram que o método de reflexão precisa de uma superfície aproximadamente linear (*piece wise local linearity*) para poder usar na análise de velocidade a

fórmula NMO da aproximação hiperbólica. Segundo eles a não satisfação desta restrição compromete seriamente o cálculo da velocidade e profundidade destes horizontes.

Problemas na conversão de velocidade de empilhamento para a velocidade verdadeira em profundidade foram estudados por BLACKBURN (1980), que mostrou que a origem dos erros nessa conversão podem ser por incorreções nos tempos de trânsito como resultado da migração e pelas distorções das trajetórias dos raios ao percorrer estruturas geológicas complexas.

BICKEL (1990) mostrou que quando a velocidade sísmica varia lateralmente em comprimentos de onda menores do que três vezes a profundidade do perfil, a determinação da velocidade apresenta ambigüidade que não é possível resolver a partir da medida dos tempos de trânsito, e que pode causar uma forte oscilação da velocidade de empilhamento.

Usando a teoria do raio, SHAH (1973b) e posteriormente CERVENY (1985) calcularam a trajetória do raio ao atravessar um modelo. KREY (1976) usou-a também para calcular as velocidades intervalares em modelo de camadas homogêneas, fazendo uma expansão em série de Taylor dos tempos correspondentes à configuração afastamento médio comum, e levando em conta unicamente os termos de até segunda ordem usando um formalismo de álgebra matricial e indução matemática. A teoria do raio permitiu a HUBRAL & KREY (1980) e MAY & COVEY (1981) determinar as velocidades em modelos sísmicos a partir dos tempos de trânsito.

BORTFELD (1989) estabeleceu expressões matriciais que representam as propriedades globais para o raio transmitido e o raio refletido na vizinhança de um raio de referência nos modelos sísmicos compostos de camadas homogêneas e isotrópicas, separadas por interfaces suaves. Obteve a chamada matriz de transferência do raio que relaciona o raio na superfície de reflexão (posterior) com o raio na superfície onde ficam as fontes e os detectores (anterior). Achou uma função que estima os tempos de trânsito dos eventos de reflexão na vizinhança de um raio de referência (função característica), equivalente à função de ponto característico de Hamilton da ótica geométrica.

Os resultados de BORTFELD (1989) foram generalizados para modelos com camadas inomogêneas e isotrópicas por HUBRAL et al (1992a), que demonstraram a relação entre a matriz de transferência do raio com a matriz de propagação do raio encontrada por CERVENY (1985).

KAHN (1988) decompôs a matriz de transferência para uma camada num produto de matrizes que representam operações de projeção sobre as interfaces, rotações e deslocamento do raio entre as interfaces que limitam a camada. O produto expressa um conjunto de

equações não lineares que tem solução quando a função característica é conhecida na interface anterior da camada e a superfície anterior não é esférica.

Como objetivo deste trabalho se procura obter um método que usando os tempos de trânsito dos eventos de reflexão, estime as velocidades com que as ondas percorrem as camadas do modelo e determine as superfícies que as limitam, permitindo reconstruir a geometria das interfaces.

Neste trabalho se desenvolveu o procedimento para decompor a matriz de transferência do raio através de um sistema sísmico de várias camadas no produto das matrizes de transferência de cada uma das camadas. Como resultado se obteve uma expressão que permite calcular a função característica em profundidade, a partir do conhecimento das matrizes de transferência nas camadas suprajacentes. Para avaliar a função característica na superfície superior se realiza uma configuração de fontes e detetores em múltipla cobertura, e se indica um procedimento para obter a função característica dos tempos de trânsito.

Se obteve um método que determina as velocidades intervalares em profundidade e a geometria das superfícies refletoras, para modelos compostos de camadas homogêneas e isotrópicas separadas por interfaces suaves. Na superfície superior do modelo se calcula a nomeada função característica dos tempos de trânsito. A partir desta função se obtém a velocidade intervalar da primeira camada e a geometria da superfície refletora. Através de um processo chamado de continuação para baixo, a função característica é avaliada em profundidade sobre a superfície refletora, permitindo desta maneira conhecer a velocidade e a geometria da camada seguinte. A solução do problema inverso, se consegue através deste processo iterativo, sem o conhecimento prévio das velocidades das camadas nem da geometria das interfaces

O método foi embutido num algoritmo de natureza matricial, construindo-se dois programas no ambiente de computação MATLAB-v.4, os quais foram testados com dados sintéticos gerados a partir de modelos 3D que representam os rasgos estruturais comumente observados nas seções geológicas. Como resultado se obtiveram as velocidades intervalares dos modelos, e se reconstruíram as interfaces das camadas. O método oferece a possibilidade de calcular modelos em profundidade onde é mais fácil avaliar o objetivo estrutural.

O presente trabalho está composto pelos seguintes capítulos:

1. **Introdução:** Identifica-se o problema da estimação das velocidades intervalares e sua importância no processamento sísmico, incluindo uma breve resenha de trabalhos relacionados com a determinação das velocidades. São apresentados os objetivos da tese e o procedimento seguido na solução do problema considerado.

2. **Teoria geométrica do raio paraxial:** Se apresenta o formalismo matricial que descreve a transmissão dos raios através das camadas, mostrando no final a função que estima os tempos dos eventos de reflexão na vizinhança do raio de referência.

3. **O método sísmico:** Este capítulo mostra como a função característica expressa os tempos de trânsito nos diferentes arranjos de fonte e detector, os tempos de correção na configuração afastamento médio comum e o conceito do tempo de difração usado em migração.

4. **Solução do problema inverso:** Descreve como calcular a função característica na superfície superior do modelo e o método de estimar esta função em cada interface refletora. Se explica o procedimento iterativo que estima as velocidades intervalares em profundidade e a geometria das interfaces.

5. **Aplicação em dados sintéticos:** Se apresentam os resultados obtidos ao aplicar o algoritmo em diferentes modelos.

6. **Conclusões:** Se mostram as principais conclusões do trabalho, indicando as perspectivas de continuação.

7. **Referências bibliográficas.**

8. **Apêndices:** A - Propriedade simplética; B - Análise da matriz de transferência; C - Solução do problema linear inverso.

## 2 - TEORIA GEOMÉTRICA DO RAIOS PARAXIAL

A teoria geométrica do raio, na sismica, baseia-se em duas suposições físicas: a primeira é que num meio homogêneo e isotrópico a direção do fluxo de energia mecânica não muda de direção, percorrendo o meio ao longo de uma linha reta chamada raio; a segunda é que o raio muda de direção quando mudam as propriedades mecânicas do meio.

Quando o raio percorre o meio se supõe o seguinte: que num tempo igual ao período de oscilação, a frequência da onda permanece constante, e que ao longo de uma distância igual a um comprimento de onda, o número de onda não muda na sua direção e nem sua magnitude. Segundo o princípio de mínima ação, para conhecer a trajetória do raio é necessário determinar a solução da equação de Hamilton, minimizando a mudança total de fase.

As leis de propagação em linha reta, e as leis de reflexão e refração de Snell, são suficientes para construir as trajetórias que seguem as ondas quando atravessam um meio, como também para calcular os tempos de trânsito das ondas ao longo desses raios. Na aproximação de segunda ordem dos tempos de trânsito, a transferência do raio entre dois pontos se descreve mediante um formalismo matricial, na vizinhança de um raio de referência chamado raio central.

### 2.1 TEORIA DO RAIOS

Segundo a teoria da elastodinâmica clássica, quando uma perturbação sísmica se propaga através de um meio isotrópico e não homogêneo, as partículas que constituem o meio sofrem um deslocamento  $U(x_j, t)$  no tempo  $t$  e na posição  $(x_j)$  num sistema de coordenadas cartesianas. O deslocamento das partículas no meio é descrito segundo a chamada equação da elastodinâmica (AKI & RICHARDS, 1980)

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \vec{U}) + \mu \nabla^2 \vec{U} + \nabla \lambda(\nabla \cdot \vec{U}) + \nabla \mu(\nabla \times \vec{U}) + 2(\nabla \mu \cdot \nabla) \vec{U}, \quad (2.1)$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  representam os parâmetros de Lamé, e  $\rho$  a densidade do meio.

No domínio da frequência a equação (2.1) é dada por

$$\rho \omega^2 \vec{u} = (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u} + \nabla \lambda(\nabla \cdot \vec{u}) + \nabla \mu(\nabla \times \vec{u}) + 2(\nabla \mu \cdot \nabla) \vec{u}, \quad (2.2)$$

onde  $u(x_j, \omega)$  no domínio da frequência é a transformada de Fourier de  $U(x_j, t)$ , dada por

$$\vec{u}(x_j, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{U}(x_j, t) e^{i\omega t} dt. \quad (2.3)$$

Consideramos que os parâmetros de Lamé ( $\lambda, \mu$ ) e a densidade do meio  $\rho$  não mudam significativamente ao longo de uma distância de um comprimento de onda, e que o comprimento de onda do pulso que se propaga é pequeno comparado com as dimensões das estruturas do modelo. Com estas restrições a equação de onda (2.2) admite a solução assintótica obtida por CERVENY & RAVINDRA (1971)

$$\vec{u}(x_j, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \vec{u}^{(m)}(x_j) e^{i\omega\tau(x_j)} (-i\omega)^{-m}, \quad (2.4)$$

$\omega$  denota a frequência angular e  $i = \sqrt{-1}$ . Para  $\omega < 0$  a série (2.4) se toma como a complexa conjugada. A variável  $x_j$  toma os valores  $x_1, x_2, x_3$ . A função vetorial de variável complexa  $\vec{u}^{(m)}(x_j)$  representa os coeficientes de amplitude da série e a função escalar  $\tau(\vec{r}_j)$  representa o tempo de trânsito, chamada também função fase. As superfícies ao longo das quais a função de fase é constante para um tempo  $t$  são chamadas de frentes de onda.

O vetor  $\vec{p}$ , chamado vetor vagarosidade, é perpendicular à frente de onda

$$\vec{p} = \nabla\tau(x_j), \quad (2.5)$$

substituindo-se a série assintótica (2.4) na equação elastodinâmica no domínio da frequência, veja CERVENY & RAVINDRA (1971), obtem-se a chamada equação eiconal para o meio isotrópico, a saber

$$(\nabla\tau)^2 = \left(\frac{1}{V}\right)^2, \quad (2.6)$$

O vetor posição  $\vec{r}$  para um ponto  $O_s$  é descrito como  $\vec{r}(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$  na forma paramétrica, onde  $s$  é o comprimento de arco ao longo do raio. Como  $\frac{d\vec{r}}{ds}$  é vetor unitário tangente ao raio no ponto  $O_s$ , o vetor vagarosidade é  $\vec{p} = \frac{1}{V} \frac{d\vec{r}}{ds}$ . Em coordenadas cartesianas o vetor vagarosidade se expressa pelas equações (CERVENY, 1987)

$$\vec{p} = \frac{1}{v} \frac{d\vec{r}}{ds}, \quad (2.7)$$

$$\frac{d\vec{p}}{ds} = \nabla\left(\frac{1}{v}\right), \quad (2.8)$$

denominadas sistema de trajetória do raio, que permitem a partir das condições iniciais avaliar a trajetória percorrida pelo raio num meio não homogêneo e isotrópico.

### 2.1.1 O raio paraxial

Analiseemos a função eiconal  $\tau(\vec{r})$  na vizinhança do raio de referência dado denominado raio central. Consideremos um tubo que envolve o raio central e raios próximos ao raio central que denominaremos raios paraxiais. Seja um sistema de coordenadas  $(q_1, q_2, s)$  com origem no raio central, onde  $s$  é o comprimento de arco do raio, os vetores unitários  $\vec{q}_1$  e  $\vec{q}_2$  definem um plano que é normal à trajetória do raio. Neste sistema de coordenadas a equação eiconal (2.6) se expressa

$$\left(\frac{\partial\tau}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\tau}{\partial q_2}\right)^2 + \frac{1}{h^2}\left(\frac{\partial\tau}{\partial s}\right)^2 = \frac{1}{v(q_1, q_2, s)^2}, \quad (2.9)$$

sendo a velocidade  $v = v(q_1, q_2, s)$  e  $h$  o fator de escala na transformação do sistema cartesiano ao sistema com origem no raio central, definido como

$$h = 1 + \frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial q_1}q_1 + \frac{\partial v}{\partial q_2}q_2\right). \quad (2.10)$$

O tempo de trânsito de um raio paraxial situado em  $(q_1, q_2, s)$  na vizinhança do raio central  $(0, 0, s)$  coordenadas do raio central), se aproxima através da expansão em série de Taylor incluindo os termos de até segunda ordem:

$$\tau(q_1, q_2, s) = \tau(0, 0, s) + \frac{1}{2}\vec{q}(q_1, q_2)\underline{M}\vec{q}(q_1, q_2)^t, \quad (2.11)$$

onde  $\underline{M}_{2 \times 2}$  é matriz simétrica cujos componentes avaliados em  $(0, 0)$  são  $M_{ij} = \frac{\partial^2 \tau}{\partial q_i \partial q_j}$ .

Substituindo (2.11) e (2.10) na equação (2.9) e usando a aproximação  $\frac{\partial \tau}{\partial s} \approx \frac{1}{v}$  no ponto  $(0, 0)$ , se consegue a seguinte equação tipo Ricatti

$$\frac{d\underline{M}}{ds} + v\underline{M}^2 + v^{-2}\underline{V} = \underline{0}, \quad (2.12)$$

onde  $\underline{V}_{2 \times 2}$  é matriz cujos componentes avaliados em  $(q_1, q_2) = (0, 0)$  são  $V_{ij} = \frac{\partial^2 v}{\partial q_i \partial q_j}$ .

Pela relação  $\underline{M} = \frac{1}{v}\frac{d\underline{Q}}{ds}\underline{Q}^{-1}$  a equação (2.12) simplifica-se em

$$\frac{d}{ds}\left(v^{-1}\frac{d\underline{Q}}{ds}\right) + v^2\underline{V}\underline{Q} = \underline{0}. \quad (2.13)$$

Se tomarmos  $\frac{d\underline{P}}{ds} = -v^2\underline{V}\underline{Q}$  com  $\underline{P} = v^{-1}\frac{d\underline{Q}}{ds}$ , as equações (2.13) são acopladas em

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \underline{Q} \\ \underline{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} & v\underline{I} \\ v^{-2}\underline{V} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{Q} \\ \underline{P} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Segundo CERVENY(1987),  $\underline{Q}$  se interpreta como a matriz de transformação de coordenadas do raio  $(x_1, x_2)$  a coordenadas centradas no raio  $(q_1, q_2)$ . O sistema (2.14) é chamado de sistema de equações dinâmicas do raio, e tem solução se são conhecidos os valores de  $\underline{P}$  e  $\underline{Q}$  em algum ponto sobre o raio central.

### 2.1.2 Matriz propagadora

Consideremos o sistema de equações (2.14) sob a forma  $\frac{d}{ds}W = SW$ , com  $W$  matriz coluna e onde os elementos da matriz  $S_{4 \times 4}$  são funções contínuas de  $s$ . A matriz constituída por 4 soluções independentes do sistema anterior é chamada de propagadora se é matriz identidade em  $(0, 0, s_o)$ , com  $W(s_o) = W_o$ . A matriz propagadora do raio  $\pi(s, s_o)$  que satisfaz a relação  $\pi(s_o, s_o) = I$ , denominada matriz integral

$$\frac{d}{ds}\pi = S\pi, \quad (2.15)$$

definida como

$$\pi(s, s_o) = \begin{bmatrix} Q_1(s, s_o) & Q_2(s, s_o) \\ P_1(s, s_o) & P_2(s, s_o) \end{bmatrix}_{4 \times 4}. \quad (2.16)$$

Na equação (2.16) os termos  $Q_1(s, s_o)$  e  $P_1(s, s_o)$  são soluções do sistema quando as condições iniciais representam uma onda plana, isto é  $Q(s_o, s_o) = I$  e  $P(s_o, s_o) = 0$ . As soluções  $Q_2(s, s_o)$  e  $P_2(s, s_o)$  satisfazem a  $Q(s_o, s_o) = 0$  e  $P(s_o, s_o) = I$  que representam condições iniciais para uma fonte pontual.

Como a matriz  $\pi$  é simplética (CERVENY, 1987), satisfaz a relação

$$\pi^t \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix} \pi = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

desta forma  $\det(\pi) = 1$ , logo não singular ao longo do raio. A matriz propagadora além disto satisfaz a regra da cadeia

$$\pi(s, s_o) = \pi(s, s_1)\pi(s_1, s_o), \quad (2.18)$$

onde o ponto  $s_1$  sobre o raio não fica necessariamente entre  $s$  e  $s_o$ . Pela regra da cadeia  $\pi(s_o, s_o) = \pi(s_o, s_1)\pi(s_1, s_o) = I$  e pela condição de não singularidade  $\pi^{-1}(s, s_o) = \pi(s_o, s)$ .

Se  $o_o$  e  $o_s$  representam pontos sobre o raio central com  $\pi(o_s, o_o)$  conhecida, a solução do sistema em  $o_s$  para condições iniciais em  $o_o$  será

$$W(o_s) = \pi(o_s, o_o)W(o_o). \quad (2.19)$$

Se  $W$  é a matriz coluna composta pêlos vetores  $\vec{p} = (p_1, p_2)$  e  $\vec{q} = (q_1, q_2)$ , que no plano normal ao raio central representam as coordenadas e as componentes da vagarosidade do raio paraxial, então existe a relação linear (CERVENY, 1987)

$$\begin{bmatrix} \vec{q}(o_s) \\ \vec{p}(o_s) \end{bmatrix} = \pi(o_s, o_o) \begin{bmatrix} \vec{q}(o_o) \\ \vec{p}(o_o) \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

indicando que as coordenadas e componentes da vagarosidade no plano normal ao raio central em  $o_s$ , podem ser calculadas a partir dos valores iniciais no plano em  $o_o$  e do conhecimento da matriz de propagação.

## 2.2 FORMALISMO DA TEORIA GEOMÉTRICA DO RAI0

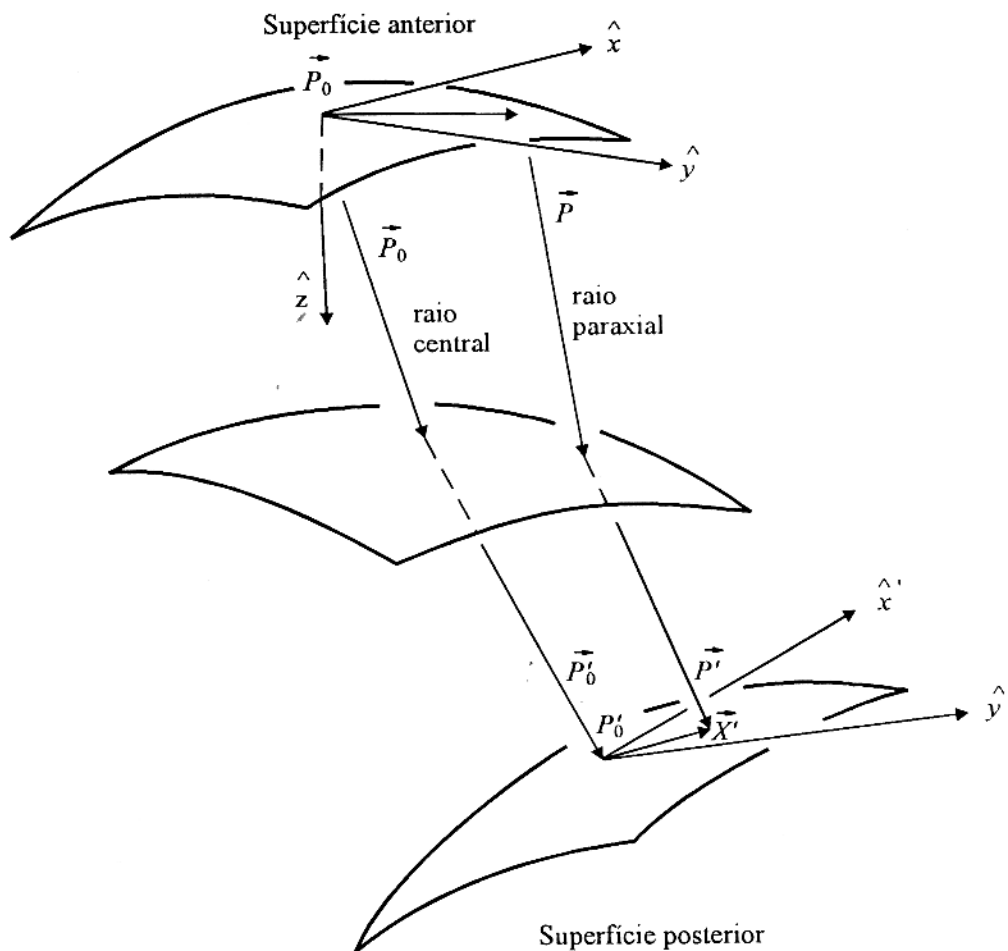


Figura 2.1 - Sistema sísmico com o raio central e um raio paraxial, partindo da superfície anterior e atingindo a superfície posterior (modificado de BORTFELD, 1989)

O sistema sísmico é uma pilha de camadas isotrópicas e homogêneas separadas por interfaces suaves, o gradiente nessas superfícies é contínuo. A superfície superior de referência onde estão localizados os detetores e as fontes é chamada de anterior e a superfície inferior de referência, onde tem lugar a reflexão do raio, chama-se de posterior, tal como foi introduzido por DESCHAMPS (1972). As velocidades intervalares e os contrastes de densidades das camadas podem assumir qualquer valor positivo.

Um raio arbitrário que atravessa o sistema sísmico é chamado raio central. Os parâmetros associados com este raio tem o subscrito  $\sigma$ ; todos os raios são referenciados ao raio central.

Seja  $P_o$  o ponto de interseção do raio central com a superfície anterior. O plano tangente à superfície em  $P_o$  é o plano  $xy$  de um sistema de coordenadas cartesianas com origem em  $P_o$ , Figura 2.1. O vetor vagarosidade inicial do raio central  $\vec{P}_o$  é definido como  $V^{-1}$  vezes o vetor unitário na direção do raio central no ponto  $P_o$ , onde  $V$  é a velocidade inicial. Análogo às quantidades iniciais na superfície anterior existem quantidades finais na superfície posterior. Elas são denotadas pelas correspondentes quantidades com primo, medidas no sistema de coordenadas cartesianas denotado com primo  $x'y'z'$  com origem no ponto  $P'_o$  onde o raio central intersecta a superfície posterior.

Consideremos um raio que atravessa o sistema sísmico partindo numa direção arbitrária no ponto  $P$  sob a superfície anterior, veja Figura 2.1. Para especificar este raio se precisa de quatro vetores de três componentes: os vetores posição inicial  $\vec{X}$  e final  $\vec{X}'$ , e os vetores vagarosidade inicial  $\vec{P}$  e final  $\vec{P}'$ . Os vetores de três componentes  $\vec{X}$  e  $\vec{P}$  são representados por vetores de dois componentes no plano  $xy$ , denotados  $\vec{x} = (x, y)^T$  e  $\vec{p} = (p, q)^T$ . As representações correspondentes dos vetores finais na superfície posterior se obtém substituindo quantidades sem primo por quantidades com primo.

O vetor bidimensional  $\vec{x} = (x, y)$  é a projeção do vetor  $\vec{X}(x, y, z)$  sobre o plano  $xy$ . O vetor  $\vec{p} = (p, q)$  se obtém ao projetar  $\vec{P}(p, q, r)$  sob o plano tangente no ponto  $P$  obtendo-se o vetor vagarosidade tangencial  $\vec{P}_T$ . Esta componente tangencial  $\vec{P}_T$  finalmente se projeta sobre o plano  $xy$  do sistema de coordenadas. O raio central se assume normal à superfície posterior, portanto  $\vec{p}'_o = (0, 0)$ . Segundo a lei de Snell o vetor vagarosidade tangencial é invariante na refração e na reflexão, em consequência os vetores vagarosidade tangenciais dos raios incidente e refletido são iguais.

### 2.2.1 Matriz de transferência do raio

Para cada par de vetores bidimensionais  $\vec{x}' = (x', y')$  e  $\vec{p}' = (p', q')$  na superfície posterior existe um par de vetores  $\vec{x} = (x, y)$  e  $\vec{p} = (p, q)$  na superfície anterior, essa relação permite expressar os vetores em posição e vagarosidade na superfície posterior como funções complicadas da posição e vagarosidade na superfície anterior:  $\vec{x}' = \vec{x}'(x, y)$  e  $\vec{p}' = \vec{p}'(p, q)$ .

Na vizinhança do raio central, se define o vetor  $d\vec{x} = \vec{x} - \vec{x}_o$ , onde  $\vec{x}$  e  $\vec{x}_o$  são posições dos raios paraxial e central respectivamente na superfície anterior. A diferença entre as vagarosidade  $\vec{p}$  do raio paraxial e  $\vec{p}_o$  do raio central, na superfície anterior como  $d\vec{p} = \vec{p} - \vec{p}_o$ . Vetores similares se definem sobre a superfície posterior:  $d\vec{x}' = \vec{x}' - \vec{x}'_o$  e  $d\vec{p}' = \vec{p}' - \vec{p}'_o$ .

Fazendo uma expansão em série de Taylor em torno do raio central, os vetores  $d\vec{x}'$  e  $d\vec{p}'$

se expressam como:

$$d\vec{x}' = \sum_{k=1}^n d\vec{x}_k = \sum_{k=0}^{n-1} [\underline{A}_k d\vec{x} + \underline{B}_k d\vec{p}], \quad (2.21)$$

$$d\vec{p}' = \sum_{k=1}^n d\vec{p}_k = \sum_{k=0}^{n-1} [\underline{C}_k d\vec{x} + \underline{D}_k d\vec{p}], \quad (2.22)$$

onde  $\underline{A}_k$ ,  $\underline{B}_k$ ,  $\underline{C}_k$ , e  $\underline{D}_k$ , são as matrizes Jacobianas avaliadas no raio central sob a superfície anterior. As equações (2.21) e (2.22) representam diferenciais totais. Integrando (2.21) no intervalo  $[\vec{0}, \vec{x}]$  e (2.22) no intervalo  $[\vec{p}_o, \vec{p}']$  obtemos

$$\vec{x}' = \underline{A}_o \vec{x} + \underline{B}_o (\vec{p}' - \vec{p}_o), \quad (2.23)$$

$$\vec{p}' = \underline{C}_o \vec{x} + \underline{D}_o (\vec{p}' - \vec{p}_o), \quad (2.24)$$

no qual  $\underline{A}_o = \frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)}$ ,  $\underline{B}_o = \frac{\partial(x',y')}{\partial(p,q)}$ ,  $\underline{C}_o = \frac{\partial(p',q')}{\partial(x,y)}$  e  $\underline{D}_o = \frac{\partial(p',q')}{\partial(p,q)}$  conformam a matriz de propagação do raio. As equações (2.23) e (2.24) representam um formalismo matricial que descreve todo raio transmitido através do sistema sísmico na vizinhança do raio central.

## 2.2.2 Raio transmitido e raio refletido :

Uma reflexão sísmica se compõe num raio transmitido desde a fonte na superfície anterior até o ponto de reflexão na superfície posterior, e um raio refletido que desde o ponto refletor até o detector na superfície anterior. O raio refletido se representa por um raio transmitido normal levando a direção contrária para indicar a direção correta, veja Figura 2.2. Usaremos o subscrito 's' para os vetores associados ao raio transmitido com início na fonte e o subscrito 'g' para os associados com o raio transmitido com início no ponto refletor.

Para o raio refletido as equações (2.23) e (2.24) segundo a nomenclatura estabelecida serão:

$$\vec{x}'_g = \underline{A}_o \vec{x}_g + \underline{B}_o (\vec{p}'_g - \vec{p}_o), \quad (2.25)$$

$$\vec{p}'_g = \underline{C}_o \vec{x}_g + \underline{D}_o (\vec{p}'_g - \vec{p}_o). \quad (2.26)$$

Para o raio transmitido as equações (2.23) e (2.24) serão:

$$\vec{x}'_s = \underline{A}_o \vec{x}_s + \underline{B}_o (\vec{p}'_s - \vec{p}_o), \quad (2.27)$$

$$\vec{p}'_s = \underline{C}_o \vec{x}_s + \underline{D}_o (\vec{p}'_s - \vec{p}_o). \quad (2.28)$$

Na superfície refletora o raio transmitido e o raio refletido atingem a mesma posição  $\vec{x}'_s = \vec{x}'_g$ .

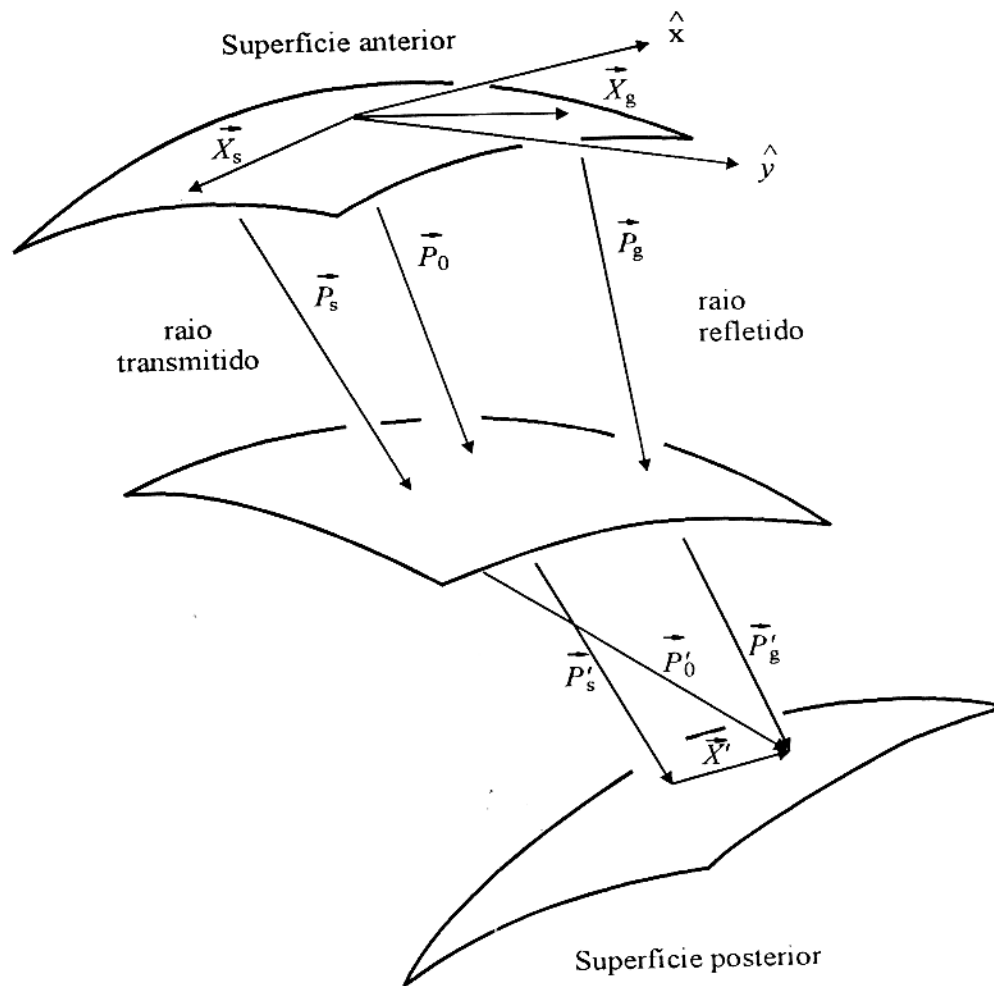


Figura 2.2 - Sistema sísmico com os raios paraxiais transmitido e refletido, e o raio central (Modificado de BORTFELD, 1989)

Igualando as equações (2.25) e (2.27) obtemos

$$B_o \frac{\vec{p}_g - \vec{p}_s}{2} = -A_o \frac{\vec{x}_g - \vec{x}_s}{2}, \quad (2.29)$$

$$\frac{\vec{p}_g - \vec{p}_s}{2} = -B_o^{-1} A_o \frac{\vec{x}_g - \vec{x}_s}{2}. \quad (2.30)$$

A componente tangencial da vagarosidade se conserva na reflexão, ao considerar o sentido contrario do raio refletido  $\vec{p}'_s = -\vec{p}_g$ , que expressado com (2.26) e (2.28) é

$$D_o \frac{\vec{p}_g - \vec{p}_o + \vec{p}_s - \vec{p}_o}{2} = -C_o \frac{\vec{x}_g + \vec{x}_s}{2}, \quad (2.31)$$

$$\frac{\vec{p}_g - \vec{p}_o + \vec{p}_s - \vec{p}_o}{2} = -D_o^{-1} C_o \frac{\vec{x}_g + \vec{x}_s}{2}. \quad (2.32)$$

### 2.2.3 Tempos de trânsito : aproximação parabólica

Consideremos o caso dos raios transmitido e refletido da Figura 2.2, lembrando que o raio refletido é considerado como um raio transmitido porém com direção invertida. Tomando em conta o sentido contraio do raio refletido, a equação de Hamilton escreve-se

$$dt(\vec{X}_s, \vec{X}_g) = -\vec{P}_s \cdot d\vec{X}_s - \vec{P}_g \cdot d\vec{X}_g, \quad (2.33)$$

onde  $\vec{X}_s$ ,  $\vec{P}_s$ ,  $\vec{X}_g$ , e  $\vec{P}_g$  representam vetores 3D. Os vetores 2D se representam em minúscula. Pela definição de interfaces suaves, elas podem ser escritas como funções  $z = f(x, y)$  que possuem até segundas derivadas. O vetor posição na vizinhança de  $\vec{X}$  se expressa como

$$\vec{X} + d\vec{X} = \vec{X} + (dx, dy, f_x dx + f_y dy) = \vec{X} + [d\vec{x}, \nabla f \cdot d\vec{x}] \quad (2.34)$$

O vetor  $\vec{P}$  na vizinhança de  $\vec{X}$  se decompõe numa componente normal e uma componente tangencial à superfície anterior. Da Figura 2.2 se deduz que  $\vec{P} \cdot d\vec{X} = \vec{P}_t n \cdot d\vec{X}$  onde a componente tangencial escreve-se  $\vec{P}_t n = [\vec{p}, \nabla f \cdot \vec{p}]$  com vetor bidimensional  $\vec{p} = \vec{p}(p, q)$ . Substituindo os termos equivalentes na equação (2.33) chega-se

$$dt(\vec{X}_s, \vec{X}_g) = -[\vec{p}_s, \nabla f \cdot \vec{p}_s] \cdot [d\vec{x}_s, \nabla f \cdot d\vec{x}_s] - [\vec{p}_g, \nabla f \cdot \vec{p}_g] \cdot [d\vec{x}_g, \nabla f \cdot d\vec{x}_g], \quad (2.35)$$

e portanto

$$dt(\vec{X}_s, \vec{X}_g) = -(\vec{p}_s \nabla f \cdot \vec{p}_s) d\vec{x}_s - (\vec{p}_g \nabla f \cdot \vec{p}_g) d\vec{x}_g. \quad (2.36)$$

Negligenciando os termos tipo  $(\nabla f \cdot \vec{p})(\nabla f \cdot \vec{x})$  obtemos

$$dt(\vec{x}_s, \vec{x}_g) = -\vec{p}_s \cdot d\vec{x}_s - \vec{p}_g \cdot d\vec{x}_g. \quad (2.37)$$

Somando (2.30) com (2.32) obtemos  $\vec{p}_g$

$$\vec{p}_g = \vec{p}_o - \underline{B}_o^{-1} \underline{A}_o \frac{\vec{x}_g - \vec{x}_s}{2} - \underline{D}_o^{-1} \underline{C}_o \frac{\vec{x}_g + \vec{x}_s}{2}. \quad (2.38)$$

Subtraindo (2.32) de (2.30) obtemos  $\vec{p}_s$

$$\vec{p}_s = \vec{p}_o + \underline{B}_o^{-1} \underline{A}_o^{-1} \frac{\vec{x}_g - \vec{x}_s}{2} - \underline{D}_o^{-1} \underline{C}_o^{-1} \frac{\vec{x}_g + \vec{x}_s}{2}. \quad (2.39)$$

Substituindo  $\vec{p}_g$  e  $\vec{p}_s$  em (2.37) e agrupando termos

$$dt(\vec{X}_s, \vec{X}_g) = -(d\vec{x}_g + d\vec{x}_s) \cdot \vec{p}_o + (d\vec{x}_g - d\vec{x}_s) \cdot \underline{B}_o^{-1} \underline{A} \frac{\vec{x}_g - \vec{x}_s}{2} + (d\vec{x}_g + d\vec{x}_s) \cdot \underline{D}_o^{-1} \underline{C} \frac{\vec{x}_g + \vec{x}_s}{2}. \quad (2.40)$$

Calculando a derivada parcial em relação a variável  $\vec{x}_s$

$$\frac{\partial t}{\partial \vec{x}_s} = -\vec{p}_o - \underline{B}_o^{-1} \underline{A} \frac{\vec{x}_g + \vec{x}_s}{2} + \underline{D}_o^{-1} \underline{C} \frac{\vec{x}_g + \vec{x}_s}{2}, \quad (2.41)$$

e agora a derivada parcial em relação a variável  $\vec{x}_g$

$$\frac{\partial t}{\partial \vec{x}_g} = -\vec{p}_o - \underline{B}_o^{-1} \underline{A} \frac{\vec{x}_g + \vec{x}_s}{2} + \underline{D}_o^{-1} \underline{C}_o \frac{\vec{x}_g + \vec{x}_s}{2}. \quad (2.42)$$

Segundo BORTFELD (1989), a função que satisfaz as relações 2.41 e 2.42, é a função

$$t(\vec{X}_g, \vec{X}_s) = T_o - 2\vec{p}_o \cdot \frac{\vec{x}_g + \vec{x}_s}{2} + \frac{\vec{x}_g + \vec{x}_s}{2} \cdot \underline{D}_o^{-1} \underline{C}_o^{-1} \frac{\vec{x}_g + \vec{x}_s}{2} + \frac{\vec{x}_g - \vec{x}_s}{2} \cdot \underline{B}_o^{-1} \underline{A}_o^{-1} \frac{\vec{x}_g - \vec{x}_s}{2}, \quad (2.43)$$

onde  $T_o$  é o tempo de trânsito do raio central (BORTFELD, 1989). A equação (2.43) da os tempos de trânsito dos eventos refletidos. Em ótica, esta equação corresponde a função característica do ponto de Hamilton e estabelece o tempo de trânsito entre dois pontos ao longo do raio, esta função geralmente não é conhecida, mas em sismica pode ser estimada.

## 2.2.4 Tempos de trânsito : aproximação hiperbólica

Na exploração sísmica sabe-se há tempo que para meios com camadas planas e horizontais, os tempos de trânsito das reflexões aproximadamente verticais se ajustam melhor por funções de tempo hiperbólicas do que parabólicas. URSIN (1982) mostrou que a expansão hiperbólica aproxima melhor os tempos de trânsito.

Consideremos o quadrado dos tempos de trânsito segundo a equação (2.45)

$$t(\vec{X}_g, \vec{X}_s)^2 = \left[ (T_o - 2\vec{p}_o \cdot \frac{\vec{x}_g + \vec{x}_s}{2}) + \left( \frac{\vec{x}_g + \vec{x}_s}{2} \cdot \underline{D}_o^{-1} \underline{C}_o^{-1} \frac{\vec{x}_g + \vec{x}_s}{2} + \frac{\vec{x}_g - \vec{x}_s}{2} \cdot \underline{B}_o^{-1} \underline{A}_o^{-1} \frac{\vec{x}_g - \vec{x}_s}{2} \right) \right]^2, \quad (2.44)$$

e negligenciando os termos de ordem maior que 2 obtemos o tempo nesta aproximação

$$t(\vec{X}_g, \vec{X}_s)^2 = (T_o^2 - 2\vec{p}_o \cdot \frac{\vec{x}_g + \vec{x}_s}{2})^2 + 2T_o \left[ \frac{\vec{x}_g + \vec{x}_s}{2} \cdot \underline{D}_o^{-1} \underline{C}_o^{-1} \frac{\vec{x}_g + \vec{x}_s}{2} + \frac{\vec{x}_g - \vec{x}_s}{2} \cdot \underline{B}_o^{-1} \underline{A}_o^{-1} \frac{\vec{x}_g - \vec{x}_s}{2} \right]. \quad (2.45)$$

A equação (2.45) representa a aproximação hiperbólica dos tempos de trânsito.

### 3 - O MÉTODO DE REFLEXÃO SÍSMICA

O levantamento de dados sísmicos de cobertura múltipla usando a configuração geométrica de ponto médio comum (CMP) tem sido a técnica adotada em prospecção a partir da década de 60. Esta técnica permite melhorar a qualidade dos dados pela redundância na amostragem do refletor. Os procedimentos considerados mais importantes no processamento das seções sísmicas são: deconvolução, empilhamento e migração.

Neste capítulo se resumem aspectos pertinentes ao levantamento e processamento de dados no método de reflexão sísmica. Mostra-se como a função característica dos tempos de trânsito expressa os tempos de reflexão nas configurações ponto médio comum, afastamento nulo e fonte comum, e como representa as correções dinâmicas para o empilhamento e os tempos das difrações na migração. Se interpreta a relação entre a matriz de curvatura dos tempos de trânsito de arranjos em configuração CMP e a curvatura da frente da onda NIP (*Normal Incidence Point*). Assim como a relação entre a matriz de curvatura dos tempos de trânsito em configuração afastamento nulo e a curvatura da frente da onda Normal.

No final se analisam como os tempos de trânsito dos diferentes arranjos fonte- detector incidem na determinação dos parâmetros da função característica, definindo os tempos considerados apropriados para sua estimação.

### 3.1 CONFIGURAÇÃO EM COBERTURA MÚLTIPLA

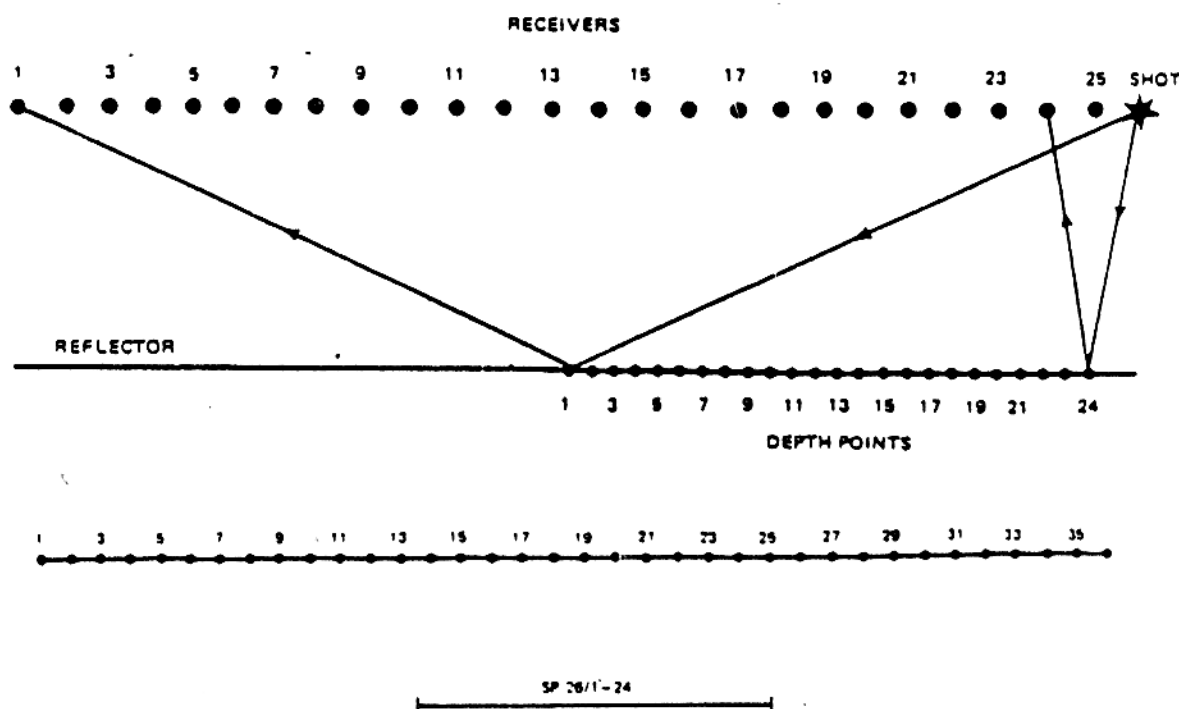


Figura 3.1 - Configuração para obtenção de seções em cobertura múltipla.

Vamos considerar as trajetórias dos raios que são refletidos entre a fonte e os detetores, num arranjo de 24 geofones com a fonte no extremo figura 3.1. O ponto no refletor onde os raios se refletem são chamados pontos em profundidade. Neste arranjo se tem uma cobertura do refletor nos pontos em profundidade 1 a 24. O intervalo de cobertura do refletor é a metade do intervalo de detetores em superfície. Se deslocamos o arranjo uma posição em superfície para a esquerda teremos novamente coberto o intervalo dos pontos em profundidade 1 a 23. Repetindo o processo, teríamos coberto três vezes o intervalo 1 a 22. O procedimento é repetido deste modo, obtendo os traços sísmicos em cobertura múltipla.

Os traços sísmicos são agrupados em conjuntos que compartilhem um atributo comum, dando lugar às famílias (*gather*) de: traços obtidos a partir de uma única fonte (CSP: *Common Shot Point*), traços registrados num único detetor usando diferentes fontes (CRP: *Common Receiver Point*); traços com um mesmo ponto médio entre a fonte e o detetor (CMP: *Common Mid Point*) e traços cujos afastamentos fonte-detetor tem o mesmo valor (CHP: *Common Half Offset*). A família CSP é gerada utilizando uma única fonte, porém a família CMP precisa de várias fontes.

## 3.2 CONFIGURAÇÃO PONTO MÉDIO COMUM

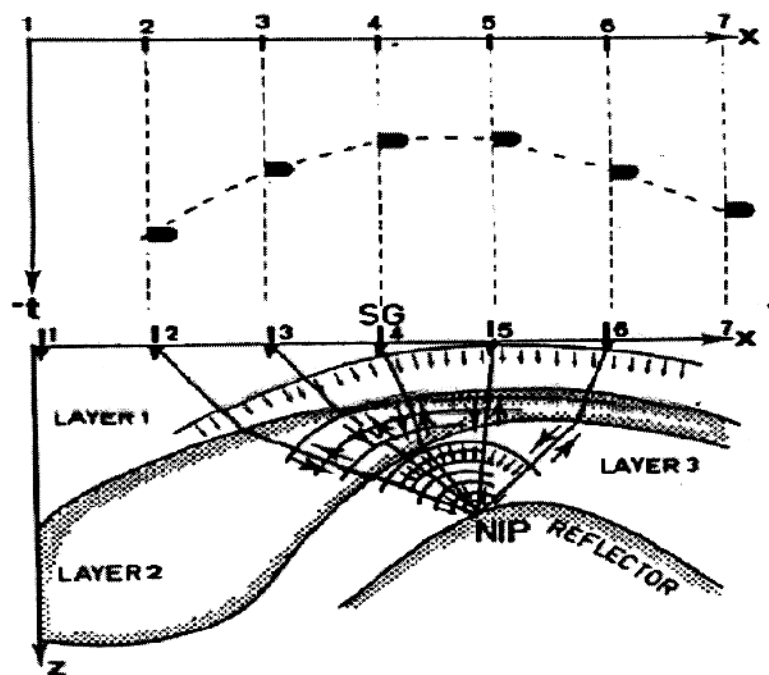


Figura 3.2 - Configuração de fontes-detetores em afastamento médio comum, e a frente de onda NIP (Tomado de HUBRAL, 1983)

Usemos o formalismo matricial para expressar o tempo de trânsito da reflexão em configuração ponto médio comum, ver Figura 3.2, onde segundo a função característica (2.43).

$$t(\vec{x}_s, \vec{x}_g) = T_o - 2\vec{p}_o \cdot \frac{1}{2}(\vec{x}_g + \vec{x}_s) + \frac{1}{2}(\vec{x}_g - \vec{x}_s) \cdot \underline{B}_o^{-1} \underline{A}_o \frac{1}{2}(\vec{x}_g - \vec{x}_s) + \frac{1}{2}(\vec{x}_g + \vec{x}_s) \cdot \underline{D}_o^{-1} \underline{C}_o \frac{1}{2}(\vec{x}_g + \vec{x}_s). \quad (3.1)$$

Pela simetria entre a fonte e o detetor e pelo fato do sistema de coordenadas ser fixo no raio central,  $\vec{x}_s = -\vec{x}_g = \vec{x}$  e portanto  $\frac{1}{2}[\vec{x}_g + \vec{x}_s] = \vec{0}$ . Como consequência o tempo de trânsito simplifica-se

$$t(\vec{0}, \vec{x}) = T_o + \vec{x} \cdot \underline{B}_o^{-1} \underline{A}_o \vec{x}, \quad (3.2)$$

onde  $T_o$  corresponde ao tempo de trânsito do raio com origem em  $\vec{x} = \vec{0}$ , que corresponde à situação hipotética de fonte e o detetor na mesma posição. A equação mostra que o tempo de trânsito em configuração CMP depende exclusivamente do médio afastamento  $\vec{x}$ .

Define-se o modelo com a metade da velocidade, como aquele onde os parâmetros das camadas são reduzidos à metade do valor, incluso a velocidade. Seja coberta a superfície densamente com fontes na vizinhança do raio central, veja Figura 3.2. Segundo HUBRAL(1983) estas fontes criam na superfície com respeito a cada refletor, um campo vetorial de deslocamento de amplitude unitária chamado onda NIP. Todas as ondas atingem o ponto NIP,

focalizando-se sob o refletor e tornando à superfície com uma frente de onda idêntica a aquela com que foi transmitida na terra.

O termo  $\underline{B}_o^{-1} \underline{A}_o$  representa a matriz de curvatura da onda NIP, na vizinhança do raio normal na configuração CMP.

### 3.3 CONFIGURAÇÃO AFASTAMENTO NULO

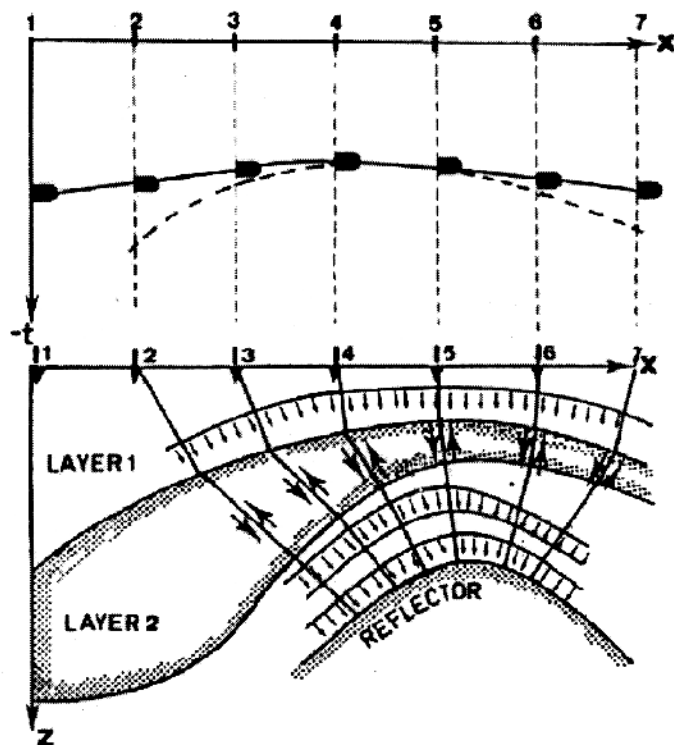


Figura 3.3 - Levantamento hipotético com fontes-detetores em afastamento nulo e a frente da onda normal (Tomado de HUBRAL, 1983)

Nesta configuração simula-se um arranjo geométrico hipotético no qual as fontes e os detetores estariam na mesma posição  $\vec{x}_s = \vec{x}_g$ . A Figura mostra a frente de onda dos raios que atingem normalmente a superfície refletora, pelo que são chamados raios normais. Pela condição de afastamento nulo e segundo a função característica (2.43), qualquer raio que incida normalmente no refletor seria registrado na posição  $\vec{x}$  num tempo

$$t(\vec{x}) = t_o - 2\vec{p}_o \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \underline{D}_o^{-1} \underline{C}_o \vec{x}. \quad (3.3)$$

No modelo com a metade da velocidade, as fontes criam uma onda normal respeito a cada refletor. A onda Normal percorre todos os raios normais e atinge simultaneamente o refletor no tempo zero, tornando à superfície com a mesma frente de onda com a qual foi transmitido

na terra, veja Figura 3.3. Na expressão (3.3) o termo  $D_o^{-1}C_o$  representa a matriz de curvatura da onda Normal, na vizinhança do raio normal (HUBRAL, 1983). O frente de onda da onda Normal é a envoltória das ondas NIP.

### 3.4 CONFIGURAÇÃO FONTE COMUM

Consideremos o tempo de trânsito das reflexões em fonte comum que tem lugar num refletor plano horizontal, como se mostra na Figura 3.4(a). O pulso em cada traço na Figura 3.4(b) indica o tempo de trânsito da onda desde a fonte até o refletor, e continuar até ser registrada na posição do detector.

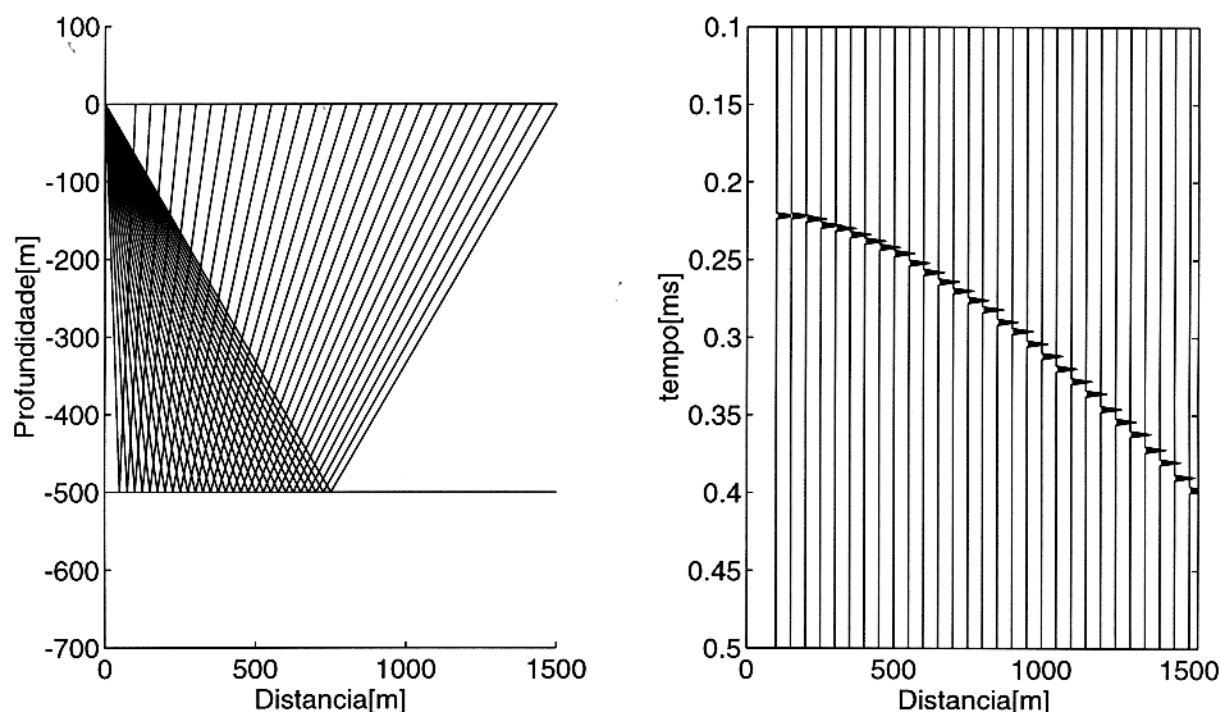


Figura 3.4 - (a) Configuração de fonte detector em fonte comum. (b) Família de traços com fonte comum

Segundo a geometria da Figura 3.4(a) que mostra o caso de uma camada com velocidade constante, o tempo de trânsito de um raio refletido que percorre a trajetória fonte-refletor-detector é  $t(\bar{x})^2 = t_o^2 + (\frac{\bar{x}}{v})^2$  que representa uma equação parabólica, onde  $v$  é a velocidade na camada,  $h$  é a profundidade do horizonte, e  $t_o$  o tempo que toma a onda para atingir normalmente o refletor e voltar à superfície.

Consideremos a função característica na vizinhança do raio central dada no capítulo anterior expressa na equação (2.43) O sistema de referência fixo no raio central indica que

$\vec{x}_s = \vec{0}$  e que  $\vec{x}_g = \vec{x}$ , reduzindo a expressão (2.43) do tempo a

$$t(\vec{x}) = t_o - \vec{p}_o \cdot \vec{x} + \frac{1}{4} \vec{x} \cdot [\underline{B}_o^{-1} \underline{A}_o + \underline{D}_o^{-1} \underline{C}_o] \vec{x}. \quad (3.4)$$

A equação (3.4) representa o tempo das reflexões perto do raio central sem nenhuma restrição sobre a geometria do refletor. A equação coincide com o resultado obtido por SHAH (1973b). Segundo os resultados das seções de afastamento nulo e CMP, podemos observar a contribuição das ondas Normal e NIP no tempo de trânsito da seção fonte comum expresso na equação (3.4). No caso de modelos com camadas planas e horizontais,  $\vec{p}_o$  é perpendicular à superfície  $z = 0$  anulando o segundo termo da equação (3.4). Pela definição das matrizes  $\underline{C}_o = \underline{0}$  e  $\underline{A}_o = \underline{I}$ , obtem-se neste caso o tempo de trânsito

$$t(\vec{x}) = t_o + \frac{1}{4} \vec{x} \cdot \underline{B}_o^{-1} \vec{x}. \quad (3.5)$$

### 3.5 CORREÇÕES DINÂMICAS

Estas correções são feitas nas seções de famílias CMP com o fim de gerar uma seção com afastamento nulo. Para isso os tempos dos traços associados a um refletor devem ser deslocados no tempo um fator tal que permitam estes traços posicionar-se sobre o plano  $t_o$ . Este fator é chamado de tempo NMO (*Normal Move Out*).

O tempo de trânsito é uma função analítica que depende do ponto de origem e da direção de saída do raio  $t = t(\vec{X}, \vec{P})$ . Sem ter em conta o modelo do subsolo, a função tempo de trânsito pode-se expandir numa série de Taylor ao redor da posição da fonte:

$$t(\vec{r}) = t_o(0) + a_2 r^2 + a_4 r^4 + a_6 r^6 + \dots, \quad (3.6)$$

com  $r$  a distância fonte-detector e  $a_j$  coeficientes que dependem da geometria e velocidades das camadas percorridas pelo raio até o refletor. Costuma-se expandir em série de Taylor o quadrado da função tempo de trânsito, truncando-a no termo de segunda ordem

$$t^2(r) = t_o^2(r) + \frac{1}{V_{emp}^2} r^2, \quad (3.7)$$

onde  $V_{emp}$  é uma velocidade que desloca os traços até  $t_o$  chamada de empilhamento, no caso particular de camadas plano horizontais paralelas é igual à velocidade  $V_{RMS}$ .

$$V_{emp}^2 = V_{RMS}^2 = \frac{1}{t_o} \sum_{j=1}^N V_j^2 \Delta t_j(0), \quad (3.8)$$

com  $\Delta t_j(0)$  tempo duplo através da camada  $j$ -ésima,  $V_j$  com velocidade intervalar  $V_j$  e  $t(0)$  tempo de reflexão em afastamento nulo.

No caso de camadas plano paralelas mergulhantes, a velocidade NMO é corrigida por um fator que inclui o ângulo de inclinação  $\phi$ . Segundo LEVIN (1971), para uma camada o fator corretor está relacionado com a velocidade segundo  $V_{NMO} = \frac{V}{\cos(\phi)}$ .

### 3.6 EMPILHAMENTO CMP

O processo de empilhamento adiciona a energia de todos os pontos da hipérbole da família CMP e ao posiciona-la em profundidade, gera uma seção empilhada CMP. Interpretada como o resultado de colocar a fonte e o detetor na mesma posição,  $\vec{x}_s = \vec{x}_g = \vec{x}$ , a seção CMP segundo (2.43) tem tempos de trânsito dados por

$$t(\vec{x}_s, \vec{x}_g) = t_o - 2\vec{p}_o \cdot \frac{1}{2}(\vec{x}_g + \vec{x}_s) + \frac{1}{2}(\vec{x}_g + \vec{x}_s) \cdot \underline{D}_o^{-1} \underline{C}_o \frac{1}{2}(\vec{x}_g + \vec{x}_s). \quad (3.9)$$

Ao comparar este resultado com a equação (2.43), chega-se à conclusão de que o resultado anterior é igual ao tempo de trânsito definido pela função característica deslocado um fator igual a

$$\Delta t = \frac{1}{2}(\vec{x}_g - \vec{x}_s) \cdot \underline{B}_o^{-1} \underline{A}_o \frac{1}{2}(\vec{x}_g - \vec{x}_s). \quad (3.10)$$

A equação (3.10) representa a correção dinâmica na seção afastamento nulo válida para qualquer geometria do refletor. Ao subtrair o termo (3.10) da equação (2.43), transforma o tempo de trânsito a tempos em afastamento nulo na posição  $\vec{x}_{cmp} = \frac{1}{2}[\vec{x}_g - \vec{x}_s]$ . A correção NMO segundo (3.10) depende do afastamento entre a fonte e o detetor, e que na vizinhança do raio central a correção NMO seja igual para todos os ponto médios  $\frac{1}{2}(\vec{x}_g + \vec{x}_s)$ .

### 3.7 MIGRAÇÃO

Segundo o princípio de Huygens o ponto iluminado por uma fonte situada na superfície atua como ponto difrator, comportando-se como uma fonte secundária. Considerando o ponto difrator da Figura 3.5, o tempo de trânsito desde esta fonte secundária até o detetor na superfície é dado por uma superfície parabólica. Esta curva é chamada curva de tempos de difração e a migração mapea a energia distribuída nesta superfície no ponto difrator. Limitando a ângulo de abertura da superfície de migração ao redor do ponto mínimo chamado ápice, a curva aproxima-se a um parabolóide rotacional. Segundo BORTFELD (1989), o tempo de trânsito desde uma fonte na posição  $\vec{x}'$  sobre a interface posterior até o detetor em

$\vec{x}$  na interface anterior é dado por

$$t(\vec{x}', \vec{x}) = t_o + \vec{p}_o \cdot \vec{x} + \frac{1}{2} \vec{x}' \cdot \underline{D}_o \underline{B}_o^{-1} \vec{x}' + \frac{1}{2} \vec{x} \cdot \underline{B}_o^{-1} \underline{A}_o \vec{x} - \vec{x} \cdot \underline{B}_o^{-1} \vec{x}'. \quad (3.11)$$

A equação (3.11) representa o ponto característico de Hamilton para eventos transmitidos.

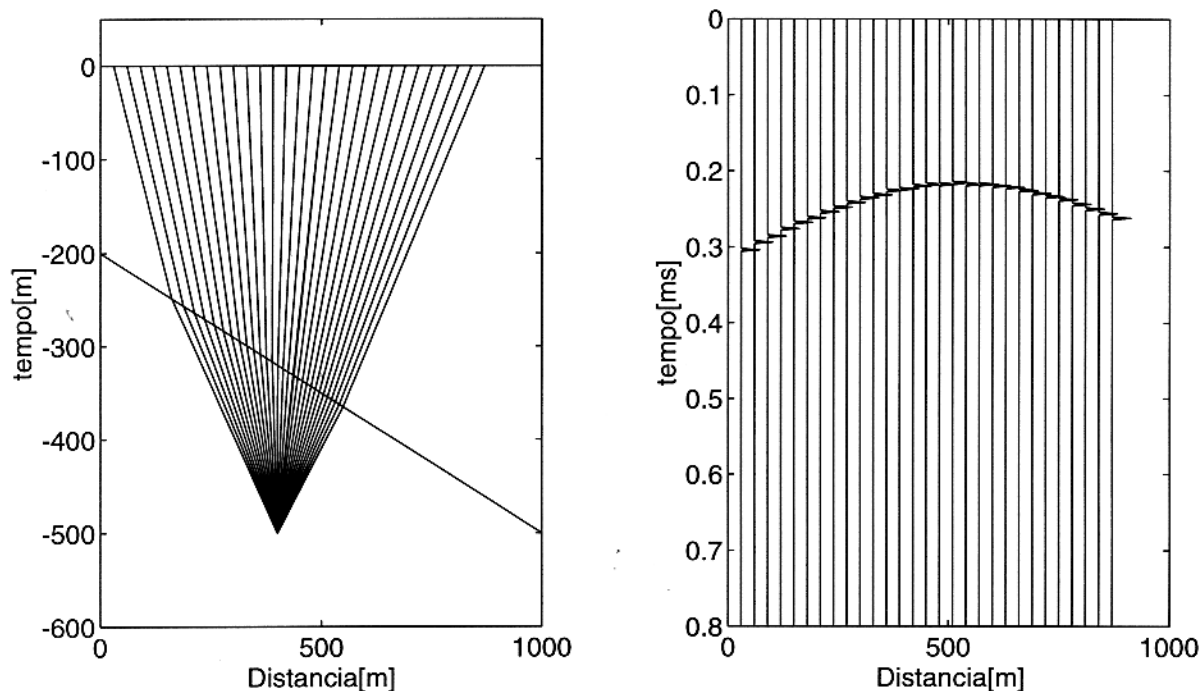


Figura 3.5 - O ponto difrator em baixo da camada mergulhante gera uma curva de tempos de difração

O tempo de difração para um ponto difrator situado em  $\vec{x}' = \vec{0}$  é igual ao dobro do tempo  $t(\vec{x}, \vec{0})$  na equação (3.11).

$$t = t_o - 2\vec{p}_o \cdot \vec{x} + \vec{x} \cdot \underline{B}_o^{-1} \underline{A}_o \vec{x}. \quad (3.12)$$

A equação (3.12) calcula o tempo de difração na superfície de difração na vizinhança do raio central. A projeção do ápice em profundidade não coincide com a posição do ponto difrator em meios lateralmente não homogêneos, (HUBRAL et al., 1993). Para corrigir a posição lateral do evento é preciso fazer uma migração em profundidade para o qual é necessário conhecer a distribuição de velocidade em profundidade.

Se compararmos o tempo de difração com o tempo de trânsito da seção Ponto Médio Comum observamos que diferem no termo  $-2\vec{p}_o \cdot \vec{x}$ , o que indica que representam eventos sísmicos distintos, como havia sido assinado por HUBRAL (1983).

### 3.8 CONFIGURAÇÕES E FUNÇÃO CARACTERÍSTICA

Para estimar a função característica (2.43) nós precisamos de pelo menos 9 medidas de tempos de chegada das ondas refletidas, já que a função contém 9 incógnitas, (uma para  $T_o$ , duas para  $\vec{p}_o$ , três para  $\underline{B}_o^{-1}\underline{A}_o$  e três para  $\underline{D}_o^{-1}\underline{C}_o$ ), com configurações apropriadamente selecionadas. Com os tempos medidos, constitui-se um sistema matricial sobredeterminado de  $n$  equações e 9 incógnitas. Para simplificar as expressões definiremos os parâmetros da função característica da seguinte forma:

$$\underline{B}_o^{-1}\underline{A}_o = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{12} & U_{22} \end{bmatrix}, \quad \underline{D}_o^{-1}\underline{C}_o = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{12} & V_{22} \end{bmatrix}, \quad \vec{p}_o = (p_o, q_o). \quad (3.13)$$

Consideremos uma família de traços obtidos a partir de um único tiro (CSP) com fonte na origem do sistema de coordenadas  $\vec{x} = (0,0)$ . O sistema de equações definidas para esta configuração segundo (2.43) é

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \\ t_8 \\ t_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -x_{g1} & -y_{g1} & x_{g1}^2 & x_{g1}y_{g1} & y_{g1}^2 & x_{g1}^2 & x_{g1}y_{g1} & y_{g1}^2 \\ 1 & -x_{g2} & -y_{g2} & x_{g2}^2 & x_{g2}y_{g2} & y_{g2}^2 & x_{g2}^2 & x_{g2}y_{g2} & y_{g2}^2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 1 & -x_{g9} & -y_{g9} & x_{g9}^2 & x_{g9}y_{g9} & y_{g9}^2 & x_{g9}^2 & x_{g9}y_{g9} & y_{g9}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_o \\ p_o \\ q_o \\ \frac{1}{4}U_{11} \\ \frac{1}{2}U_{12} \\ \frac{1}{4}U_{22} \\ \frac{1}{4}V_{11} \\ \frac{1}{2}V_{12} \\ \frac{1}{4}V_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Observamos que no sistema acima existem 3 pares de colunas idênticas: as colunas 4 e 7, coluna 5 e 8 e finalmente as colunas 6 e 9. Isto significa que as mencionadas colunas são linearmente dependentes e que em conseqüência o sistema de equações não tem solução única. Este resultado indica é impossível conhecer os parâmetros da função característica a partir de um único tiro. Uma análise semelhante para a uma família de traços com um detetor comum situado na posição  $\vec{x}_g = (x_g = o, y_g = 0)$ , produz um sistema matricial de equações, similar ao caso anterior (CSP) com seis graus de liberdade, impossibilitando a obter uma única solução para o sistema (3.14).

Definamos  $\vec{x}_{cmp} = (x_m, y_m) = \frac{1}{2}[\vec{x}_s + \vec{x}_g]$  e  $\vec{x}_d = (x_d, y_d) = \frac{1}{2}[\vec{x}_s - \vec{x}_g]$ , para uma família de

traços em configuração CMP. Segundo (2.43) o sistema de equações temos

$$\begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \\ t_8 \\ t_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -x_{m1} & -y_{m1} & x_{d1}^2 & x_{d1}y_{d1} & y_{d1}^2 & x_m^2 & x_my_m & y_m^2 \\ 1 & -x_{m2} & -y_{m2} & x_{d2}^2 & x_{d2}y_{d2} & y_{d2}^2 & x_m^2 & x_my_m & y_m^2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 1 & -x_{m9} & -y_{m9} & x_{d9}^2 & x_{d9}y_{d9} & y_{d9}^2 & x_m^2 & x_my_m & y_m^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_o \\ p_o \\ q_o \\ \frac{1}{4}U_{11} \\ \frac{1}{2}U_{12} \\ \frac{1}{4}U_{22} \\ \frac{1}{4}V_{11} \\ \frac{1}{2}V_{12} \\ \frac{1}{4}V_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Observa-se no sistema acima que as últimas 3 colunas (7, 8 e 9) são colunas constantes, já que todos os traços tem o mesmo ponto comum. Essas colunas podem-se expressar como produtos do valor constante pela primeira coluna. Novamente o sistema tem só 6 graus de liberdade, impossibilitando achar uma solução unívoca do sistema (3.15). Conclui-se que os tempos de um único arranjo CMP não permitem determinar a função característica. No caso de famílias de traços com afastamento médio comum as colunas 4, 5 e 6 são constantes e linearmente dependentes com a coluna 1, indicando que o sistema não tem solução única. Finalmente consideramos o levantamento de dados em configuração em cruz (*cross spread*), situando as fontes em  $\vec{x}_{si} = (0, y_{gi})$  e os detetores em  $\vec{x}_{gi} = (x_{gi}, 0)$ , com  $i = 1 \dots n$ . Nesta configuração o sistema de equações seria

$$\begin{bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ t_3 \\ t_4 \\ t_5 \\ t_6 \\ t_7 \\ t_8 \\ t_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -x_{s1} & -y_{g1} & x_{s1}^2 & x_{s1}y_{g1} & y_{g1}^2 & x_{s1}^2 & x_{s1}y_{g1} & y_{g1}^2 \\ 1 & -x_{s2} & -y_{g2} & x_{s2}^2 & x_{s2}y_{g2} & y_{g2}^2 & x_{s2}^2 & x_{s2}y_{g2} & y_{g2}^2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ 1 & -x_{s9} & -y_{g9} & x_{s9}^2 & x_{s9}y_{g9} & y_{g9}^2 & x_{s9}^2 & x_{s9}y_{g9} & y_{g9}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_o \\ p_o \\ q_o \\ \frac{1}{4}U_{11} \\ \frac{1}{2}U_{12} \\ \frac{1}{4}U_{22} \\ \frac{1}{4}V_{11} \\ \frac{1}{2}V_{12} \\ \frac{1}{4}V_{22} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

O sistema acima apresenta a mesma situação da configuração CMP e portanto as mesmas limitações para conhecer a função característica. Os resultados mostrados indicam que não é possível determinar tais parâmetros a partir de uma única configuração. É preciso garantir a independência linear entre as colunas da matriz, o qual se consegue com vários tiros num levantamento de dados em cobertura múltipla.

## 4 - SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO

No contexto da sismica de reflexão, solucionar o problema inverso consiste em determinar um modelo geofísico a partir dos dados de reflexão obtidos no levantamento sísmico em campo. Encontrar o modelo implica em conhecer a geometria dos elementos estruturais que o constituem e definir a distribuição das velocidades no modelo. A solução do problema inverso na aproximação de segunda ordem dos tempos de trânsito consegue-se através de um processo iterativo, no qual se distinguem quatro passos básicos.

O passo primeiro determina a função característica de Hamilton a partir da identificação do refletor associado e posterior seleção de um conjunto de tempos de trânsito apropriados, avaliados sobre a superfície superior do modelo. Neste procedimento foi utilizada a aproximação hiperbólica dos tempos de trânsito.

O passo segundo, baseia-se no fato de que a matriz de transferência do raio através de várias camadas é igual a um produto de matrizes, com cada matriz associada a uma camada particular. Este processo permite conhecer a função característica sobre a interface anterior de uma camada particular a partir da função característica avaliada na superfície superior do modelo e das matrizes associadas com as camadas sobrepostas à camada em questão. Este é um procedimento original desenvolvido no trabalho de tese, a partir de uma demonstração analítica que relaciona todas as matrizes de transferência do sistema sísmico; possibilitando o logro dos objetivos da tese.

No passo terceiro, definida a função característica sobre a interface anterior da camada não conhecida, com o raio central atingindo normalmente a interface posterior, se calcula a velocidade intervalar da camada e a geometria da interface posterior na vizinhança do raio normal.

Finalmente, se transferem os raios paraxiais ao raio central desde a interface anterior até a superfície refletora, definindo os pontos atingidos pelos raios e calculando nessas posições os vetores normais e os ângulos de incidência, além das trajetórias percorridas pelos raios através da camada.

#### 4.1 DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO CARACTERÍSTICA EM SUPERFÍCIE

Segundo se explicou na última seção do capítulo anterior, para determinar a função característica é preciso escolher traços sísmicos correspondentes a várias fontes em distintas posições, de uma configuração de múltipla cobertura. Escolhidos os traços identifica-se os tempos de trânsito do evento refletido em cada traço, e se constroem um conjunto de equações equivalentes a uma equação matricial. No caso da aproximação parabólica este conjunto de equações é definido por:

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{m1} & y_{m1} & x_{m1}^2 & x_{m1}y_{m1} & y_{m1}^2 & x_{h1}^2 & x_{h1}y_{h1} & y_{h1}^2 \\ 1 & x_{m2} & y_{m2} & x_{m2}^2 & x_{m2}y_{m2} & y_{m2}^2 & x_{h2}^2 & x_{h2}y_{h2} & y_{h2}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{mN} & y_{mN} & x_{mN}^2 & x_{mN}y_{mN} & y_{mN}^2 & x_{hN}^2 & x_{hN}y_{hN} & y_{hN}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_o \\ -2p_o \\ -2q_o \\ V_{11} \\ 2V_{12} \\ V_{22} \\ U_{11} \\ 2U_{12} \\ U_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

e para o caso da aproximação hiperbólica:

$$\begin{bmatrix} t_1^2 \\ t_2^2 \\ \vdots \\ t_N^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{m1} & y_{m1} & x_{m1}^2 & x_{m1}y_{m1} & y_{m1}^2 & x_{h1}^2 & x_{h1}y_{h1} & y_{h1}^2 \\ 1 & x_{m2} & y_{m2} & x_{m2}^2 & x_{m2}y_{m2} & y_{m2}^2 & x_{h2}^2 & x_{h2}y_{h2} & y_{h2}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{mN} & y_{mN} & x_{mN}^2 & x_{mN}y_{mN} & y_{mN}^2 & x_{hN}^2 & x_{hN}y_{hN} & y_{hN}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_o^2 \\ -4T_o p_o \\ -4T_o q_o \\ 4p_o^2 + 2T_o V_{11} \\ 8p_o q_o + 4V_{12} \\ 4q_o^2 + 2T_o V_{22} \\ 2T_o U_{11} \\ 4T_o U_{12} \\ 2T_o U_{22} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

onde  $(x_m, y_m) = \frac{1}{2}[(x_g, y_g) + (x_s, y_s)]$ ,  $\vec{p}_o = (p_o, q_o)$ ,  $(x_h, y_h) = \frac{1}{2}[(x_g, y_g) - (x_s, y_s)]$ ,  $\underline{U} = \underline{B}_o^{-1} \underline{A}_o$  e  $\underline{V} = \underline{D}_o^{-1} \underline{C}_o$ .

A determinação dos parâmetros da função característica usando as aproximações parabólica ou hiperbólica, se reduz a resolver um sistema matricial que tem mais equações do que incógnitas, chamado de sistema sobre-determinado,

$$[T]_{N \times 1} = [M]_{N \times 9} [B]_{9 \times 1} \quad (4.3)$$

Este sistema é resolvido pelo chamado método de ajuste no sentido dos mínimos erros quadráticos, onde os parâmetros são determinados do modo que a soma dos quadrados de todas as diferenças entre os tempos estimados pela função característica e os tempos observados no campo seja a menor possível, veja Apêndice C.

As equações matriciais tipo (4.3) são resolvidas usando a matriz inversa generalizada, (MENKE, 1984), onde a solução é a seguinte:

$$[(M)_{9 \times N}^t (M)_{N \times 9}]^{-1} [M]_{9 \times N}^t [T]_{N \times 1} = [B]_{9 \times 1} \quad (4.4)$$

## 4.2 DETERMINAÇÃO DA FUNÇÃO CARACTERÍSTICA EM PROFUNDIDADE

A determinação da função característica em profundidade se interpreta como se a fonte  $S$  e o detector  $G$  situados na superfície superior do modelo da Figura 4.1, se transladassem ao longo das trajetórias dos raios até se posicionarem em  $S^*$  e  $G^*$  sobre a superfície anterior da camada em questão, chamada de superfície de observação. A camada de interesse é identificada como aquela camada sobre cuja interface posterior tem lugar a reflexão do raio.

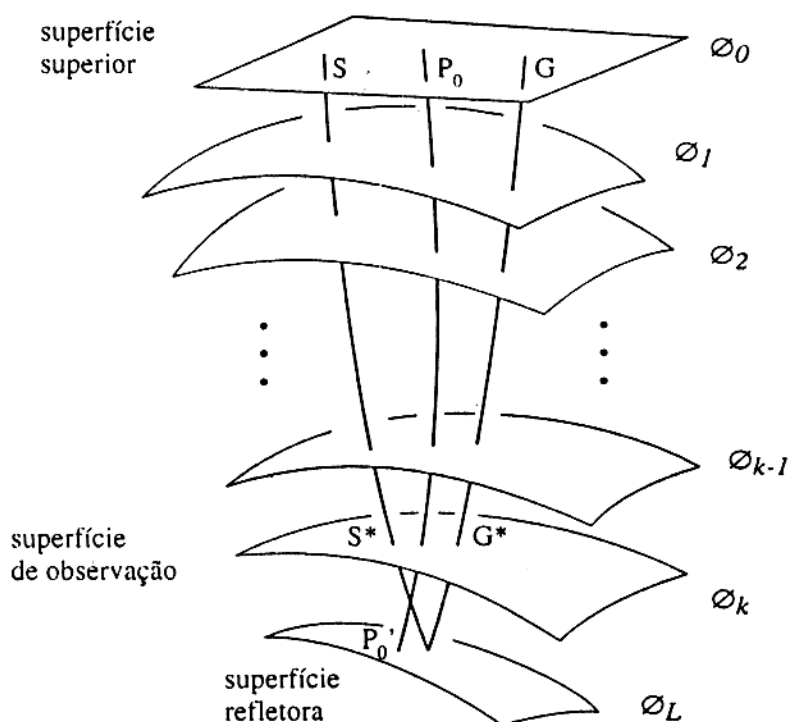


Figura 4.1 - Se deseja determinar a função característica em profundidade, sobre a superfície de observação.

Num sistema composto de  $j$  camadas, a matriz que transfere o raio desde a superfície

superior do modelos até a superfície refletora se decompõe no produto das matrizes individuais de transferência em cada camada. Esse produto igual a

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_o & \underline{B}_o \\ \underline{C}_o & \underline{D}_o \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^j \begin{bmatrix} \underline{A}_i & \underline{B}_i \\ \underline{C}_i & \underline{D}_i \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

ou em outra forma

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_o & \underline{B}_o \\ \underline{C}_o & \underline{D}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_j & \underline{B}_j \\ \underline{C}_j & \underline{D}_j \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{k=j-1} \begin{bmatrix} \underline{A}_i & \underline{B}_i \\ \underline{C}_i & \underline{D}_i \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Se supomos conhecidas as matrizes de transferências para cada uma das  $k$  camada sobrepostas a camada de interesse, podemos expressar a matriz de transferência até a superfície de observação pelo produto

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_k & \underline{B}_k \\ \underline{C}_k & \underline{D}_k \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{k=j-1} \begin{bmatrix} \underline{A}_i & \underline{B}_i \\ \underline{C}_i & \underline{D}_i \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

então a matriz associada ao raio que atravessa o sistema desde a superfície superior do modelo até a superfície refletora ser expressa como

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_o & \underline{B}_o \\ \underline{C}_o & \underline{D}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_j & \underline{B}_j \\ \underline{C}_j & \underline{D}_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_k & \underline{B}_k \\ \underline{C}_k & \underline{D}_k \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

A existência da inversa da matriz está ligada com a geometria do modelo, conforme foi discutido por BORTFELD & KEMPER (1990). Multiplicando a esquerda pela inversa desta matriz

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_j & \underline{B}_j \\ \underline{C}_j & \underline{D}_j \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{A}_o & \underline{B}_o \\ \underline{C}_o & \underline{D}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_k & \underline{B}_k \\ \underline{C}_k & \underline{D}_k \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Fazendo uso da propriedade simplética da matriz de transferência, cuja demonstração se apresenta no Apêndice B, a inversa desta matriz é

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_j & \underline{B}_j \\ \underline{C}_j & \underline{D}_j \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{D}_j^t & -\underline{B}_j^t \\ -\underline{C}_j^t & \underline{A}_j^t \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

o superescrito  $t$  indica que essa matriz é transposta. Substituindo este resultado na equação (4.9)

$$\begin{bmatrix} \underline{D}_j^t & -\underline{B}_j^t \\ -\underline{C}_j^t & \underline{A}_j^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_o & \underline{B}_o \\ \underline{C}_o & \underline{D}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_k & \underline{B}_k \\ \underline{C}_k & \underline{D}_k \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

e multiplicando à direita pela inversa da matriz obtemos a matriz de transferência da camada não conhecida

$$\begin{bmatrix} \underline{D}_j^t & -\underline{B}_j^t \\ -\underline{C}_j^t & \underline{A}_j^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_k & \underline{B}_k \\ \underline{C}_k & \underline{D}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_o & \underline{B}_o \\ \underline{C}_o & \underline{D}_o \end{bmatrix}^{-1}, \quad (4.12)$$

assim, pela propriedade simplética da matriz de transferência, se tem finalmente

$$\begin{bmatrix} \underline{D}_j^t & -\underline{B}_j^t \\ -\underline{C}_j^t & \underline{A}_j^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_k & \underline{B}_k \\ \underline{C}_k & \underline{D}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{D}_o^t & -\underline{B}_o^t \\ -\underline{C}_o^t & \underline{A}_o^t \end{bmatrix}. \quad (4.13)$$

Fazendo o produto das matrizes da direita

$$\begin{bmatrix} \underline{D}_j^t & -\underline{B}_j^t \\ -\underline{C}_j^t & \underline{A}_j^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_k \underline{D}_o^t - \underline{B}_k \underline{C}_o^t & \underline{B}_k \underline{A}_o^t - \underline{A}_k \underline{B}_o^t \\ \underline{C}_k \underline{D}_o^t - \underline{D}_k \underline{C}_o^t & \underline{D}_k \underline{A}_o^t - \underline{C}_k \underline{B}_o^t \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

Pelo fato de serem matrizes simétricas, veja Apêndice A, podemos afirmar que  $\underline{D}_j^{-1} \underline{C}_j = \underline{C}_j^t \underline{D}_j^{-t}$  e substituindo segundo o resultado mostrado na equação (4.14), chega-se a

$$\underline{D}_j^{-1} \underline{C}_j = [\underline{D}_k \underline{C}_o^t - \underline{C}_k \underline{D}_o^t] [\underline{A}_k \underline{D}_o^t - \underline{B}_k \underline{C}_o^t]^{-1}. \quad (4.15)$$

Fatorizando  $\underline{D}_o^t$  no extremo da esquerda

$$\underline{D}_j^{-1} \underline{C}_j = [\underline{D}_k \underline{C}_o^t - \underline{C}_k^t \underline{D}_o^t] [(\underline{A}_k - \underline{B}_k \underline{C}_o^t \underline{D}_o^{-t}) \underline{D}_o^t]^{-1}. \quad (4.16)$$

O produto de matrizes simétricas é comutativo, portanto

$$\underline{D}_j^{-1} \underline{C}_j = [\underline{D}_k \underline{C}_o^t - \underline{C}_k^t \underline{D}_o^t] \underline{D}_o^{-t} [\underline{A}_k - \underline{B}_k \underline{C}_o^t \underline{D}_o^{-t}]^{-1}. \quad (4.17)$$

Multiplicando  $\underline{D}_o^{-t}$  pelo primeiro termo da esquerda, obtemos:

$$\underline{D}_j^{-1} \underline{C}_j = [\underline{D}_k (\underline{C}_o^t \underline{D}_o^{-t}) - \underline{C}_k] [\underline{A}_k - \underline{B}_k (\underline{C}_o^t \underline{D}_o^{-t})]^{-1}. \quad (4.18)$$

A simetria da matriz  $\underline{D}_o^{-1} \underline{C}_o$  leva-no a relação

$$(\underline{D}_j^{-1} \underline{C}_j) = [\underline{D}_k (\underline{D}_o^{-1} \underline{C}_o) - \underline{C}_k] \cdot [\underline{A}_k - \underline{B}_k (\underline{D}_o^{-1} \underline{C}_o)]^{-1} \quad (4.19)$$

Pela simetria das matrizes  $\underline{B}_j^{-1} \underline{A}_j = \underline{A}_j^t \underline{B}_j^{-t}$ , substituindo segundo (4.14)

$$\underline{B}_j^{-1} \underline{A}_j = [\underline{D}_k \underline{A}_o^t - \underline{C}_k \underline{B}_o^t] [\underline{A}_k \underline{B}_o^t - \underline{B}_k \underline{A}_o^t]^{-1}, \quad (4.20)$$

e fatorizando  $\underline{B}_o^t$  no extremo da esquerda

$$\underline{B}_j^{-1} \underline{A}_j = [\underline{D}_k \underline{A}_o^t - \underline{C}_k^t \underline{B}_o^t] [(\underline{A}_k - \underline{B}_k \underline{A}_o^t \underline{B}_o^{-t}) \underline{B}_o^t]^{-1}. \quad (4.21)$$

Pela comutatividade do produto de matrizes simétricas

$$\underline{B}_j^{-1} \underline{A}_j = [\underline{D}_k \underline{A}_o^t - \underline{C}_k^t \underline{B}_o^t] \underline{B}_o^{-t} [\underline{A}_k - \underline{B}_k \underline{A}_o^t \underline{B}_o^{-t}]^{-1}. \quad (4.22)$$

Multiplicando-se  $\underline{B}_o^{-t}$  à esquerda

$$\underline{B}_j^{-1} \underline{A}_j = [\underline{D}_k (\underline{A}_o^t \underline{B}_o^{-t}) - \underline{C}_k] [\underline{A}_k - \underline{B}_k (\underline{A}_o^t \underline{B}_o^{-t})]^{-1}, \quad (4.23)$$

para se obter ao final

$$\underline{B}_j^{-1} \underline{A}_j = [\underline{D}_k(\underline{B}_o^{-1} \underline{A}_o) - \underline{C}_k][\underline{A}_k - \underline{B}_k(\underline{B}_o^{-1} \underline{A}_o)]^{-1}. \quad (4.24)$$

As equações (4.19) e (4.24) mostram que a função característica dos tempos de trânsito pode ser determinada na interface anterior de uma camada, sendo preciso conhecer as matrizes que transferem os raios até a interface superior da camada em questão. Em outros termos, ter resolvido o problema de estimar a velocidade e geometria do modelo, até a interface anterior da camada desconhecida.

Não se conhece publicação alguma que mostre ou use os resultados expressados nas (4.19) e (4.24), sendo esta demonstração e estes resultados uma contribuição fundamental na solução do problema inverso.

### 4.3 DETERMINAÇÃO DA VELOCIDADE E GEOMETRIA DA CAMADA

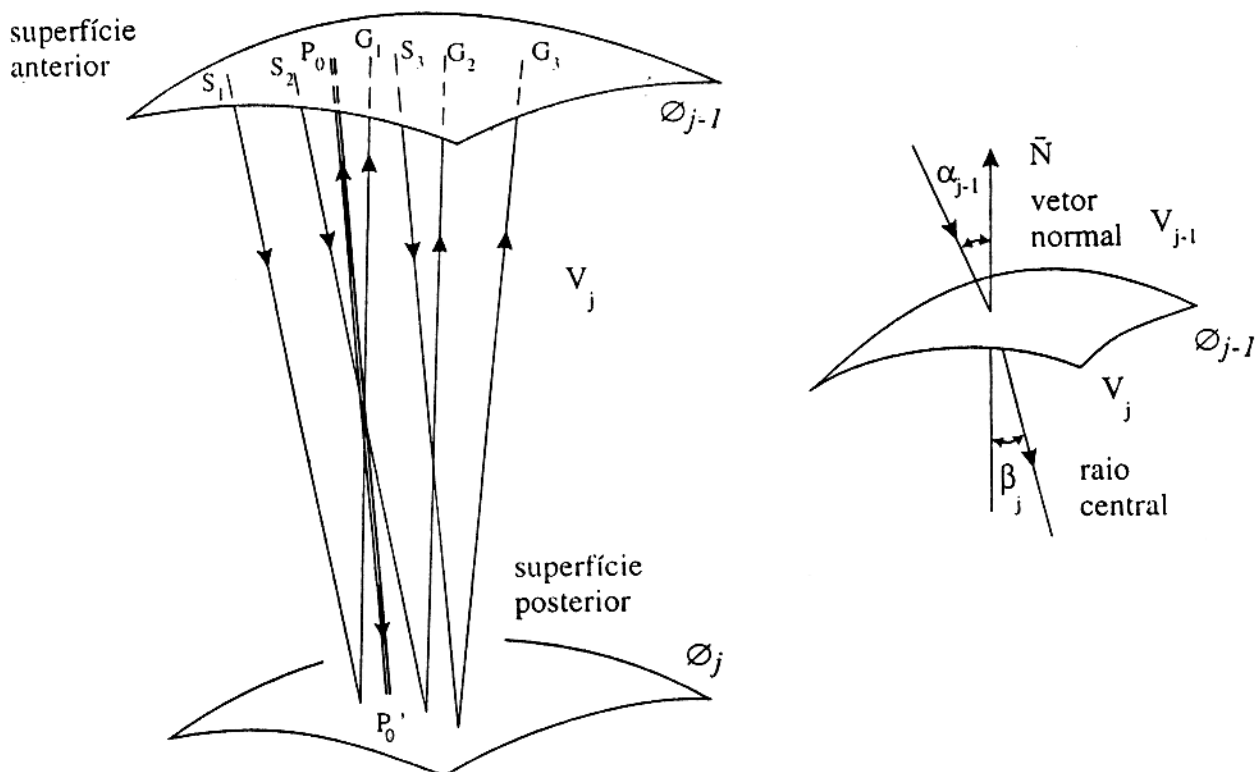


Figura 4.2 - a) Raios transmitidos através de uma camada simples com raio central perpendicular à interface posterior. b) Refração do raio com ângulos de incidência e ângulo de refração

Consideremos a situação do modelo sísmico para a  $j$ -ésima camada, na qual as fontes  $S_1, S_2 \dots$  e os detetores  $G_1, G_2$  estão situados na superfície anterior  $\phi_{j-1}$  e as reflexões tem lugar na superfície posterior  $\phi_j$  como se mostra na Figura 4.2(a). A interface anterior  $\phi_{j-1}$  supostamente conhecida, não é necessariamente plana. O ponto  $P_o$  na interface anterior corresponde a posição do raio e  $P'_o$  ao ponto de incidência normal do raio sobre a superfície posterior.

Pelo primeiro processo explicado na seção anterior deste capítulo, determinam-se os parâmetros  $T_o, \vec{p}_o, \underline{B}_o^{-1} \underline{A}_o$  e  $\underline{D}_o^{-1} \underline{C}_o$  da função característica de Hamilton  $t(\vec{x}_s, \vec{x}_g)$  avaliada sobre a superfície anterior, usando a aproximação hiperbólica dos tempos de trânsito.

A matriz que transfere o raio através de uma camada até a superfície posterior, atingindo-a normalmente é, veja demonstração no Apêndice B (KAHN, 1988)

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_o & \underline{B}_o \\ \underline{C}_o & \underline{D}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ V_j^{-1} \underline{K}_j & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I} & V_j S_j \underline{I} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau(\beta_j) & \underline{0} \\ \underline{0} & \tau^{-1}(\beta_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ -\frac{\cos(\beta_j)}{V_j} \underline{K}_{j-1} & \underline{I} \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

onde  $\underline{I}$  é matriz identidade,  $\underline{0}$  é matriz nula,  $V_j$  é a velocidade intervalar da camada  $j$ -ésima,  $\underline{K}_{j-1}$  e  $\underline{K}_j$  são as matrizes de curvatura das interfaces anterior e posterior,  $S_j$  o deslocamento do raio através da camada, e  $\beta_j$  é o ângulo entre o vetor normal à superfície anterior da camada  $j$ -ésima no ponto de interseção com o raio central; veja a Figura 4.2(b). As matrizes do lado direito da equação (4.25) são responsáveis (de esquerda para direita) das transferências dos vetores de posição e vagarosidade: (1) de interface  $j - 1$ -ésima no plano tangente, (2) do plano tangente até o plano perpendicular ao raio central, (3) do plano perpendicular até o plano perpendicular ao raio no refletor, e finalmente (4) do plano tangente até a interface  $j$ -ésima.

Realizando o produto matricial em (4.25) e comparando termo a termo com a matriz da esquerda, temos:

$$\underline{A}_o = \tau(\beta_j) - \cos(\beta_j) S_j \tau^{-1}(\beta_j) \underline{K}_{j-1}, \quad (4.26)$$

$$\underline{B}_o = V_j S_j \tau^{-1}(\beta_j), \quad (4.27)$$

$$\underline{C}_o = V_j^{-1} \underline{K}_j \tau(\beta_j) - V_j^{-1} \cos(\beta_j) [S_j \underline{K}_j + \underline{I}] \tau^{-1}(\beta_j) \underline{K}_{j-1}, \quad (4.28)$$

$$\underline{D}_o = [S_j \underline{K}_j + \underline{I}] \tau^{-1}(\beta_j). \quad (4.29)$$

Analisando estes resultados observa-se que a matriz  $\underline{B}_o$  depende, entre outras, da velocidade intervalar  $V_j$ , e que a matriz  $\underline{A}_o$  depende da matriz de curvatura da interface anterior  $\underline{K}_{j-1}$ , no entanto elas não dependem da matriz de curvatura  $\underline{K}_j$  da superfície posterior.

### 4.3.1 Determinação da velocidade intervalar

Da equação (4.27) obtemos a inversa de  $\underline{B}_o$

$$\underline{B}_o^{-1} = \frac{1}{V_j S_j} \underline{\tau}(\beta_j), \quad (4.30)$$

e com a equação (4.26) o produto  $\underline{B}_o^{-1} \underline{A}_o$  que nomearemos  $\underline{U}$  nos fornece o sistema de equações

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{12} & U_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{V_j S_j} \underline{\tau}^2(\beta_j) - \frac{\cos(\beta_j)}{V_j} \underline{K}_{j-1}. \quad (4.31)$$

Esse produto matricial é equivalente às seguintes três equações:

$$U_{11} = \frac{1}{V_j S_j} \cos^2(\beta_j) - \frac{1}{V_j} \cos(\beta_j) K_{j-1,11}, \quad (4.32)$$

$$U_{12} = -\frac{1}{V_j S_j} \cos(\beta_j) K_{j-1,12}, \quad (4.33)$$

$$U_{22} = \frac{1}{S_j V_j} - \frac{1}{V_j} \cos(\beta_j) K_{j-1,22}. \quad (4.34)$$

Na interface anterior a relação entre o ângulo de incidência  $\alpha_{j-1}$  e o ângulo de transmissão  $\beta_j$  satisfazem à lei de Snell

$$\cos^2(\beta_j) = 1 - \sin^2(\alpha_{j-1}) \left( \frac{V_j}{V_{j-1}} \right)^2. \quad (4.35)$$

Pela a definição da velocidade intervalar, temos

$$V_j = \frac{2S_j}{\Delta t_j}, \quad (4.36)$$

onde  $\Delta t_j$  é o tempo de trânsito do raio para atravessar a camada. Para resolver o sistema de equações (4.31) consideramos cinco casos possíveis a se apresentar. A primeira situação é a mais simples, é o caso da interface anterior plana  $K_{j-1,11} = 0$ ;  $K_{j-1,12} = 0$  e  $K_{j-1,22} = 0$ . Substituindo (4.36) na equação (4.34) quando  $K_{j-1,22} = 0$ :

$$V_j = \sqrt{\frac{2}{U_{22} \Delta t_j}}. \quad (4.37)$$

Na segunda situação  $K_{j-1,12} \neq 0$ , e nesse caso das equações (4.35) e (4.33):

$$V_j^2 = \left( \frac{K_{j-1,12}}{U_{12}} \right)^2 \left( 1 - \sin^2(\alpha_{j-1}) \frac{V_j^2}{V_{j-1}^2} \right), \quad (4.38)$$

agrupando e isolando o termo  $V_j^2$  na expressão de acima

$$V_j = \left[ \frac{U_{12}^2}{K_{j-1,12}^2} + \frac{\sin^2(\alpha_{j-1})}{V_{j-1}^2} \right]^{-1/2}. \quad (4.39)$$

Para o terceiro caso com  $K_{j-1,12} = 0$ ,  $K_{j-1,11} = 0$  e  $K_{j-1,22} \neq 0$ , substituímos a equação (4.35) em (4.32)

$$U_{11} = \frac{1}{V_j S_j} (1 - \sin^2(\alpha_{j-1}) \frac{V_j^2}{V_{j-1}^2}). \quad (4.40)$$

Substituindo (4.36) na anterior equação e agrupando os termos  $V_j^2$ , temos

$$V_j = \left[ \frac{\Delta t_j U_{11}}{2} + \frac{\sin^2(\alpha_{j-1})}{V_{j-1}^2} \right]^{-1/2}. \quad (4.41)$$

Na quarta situação tem-se  $K_{j-1,12} = 0$ ,  $K_{j-1,22} = 0$  e  $K_{j-1,11} \neq 0$ , na qual substituímos (4.36) na equação (4.34), com resultado análogo ao primeiro caso

$$V_j = \sqrt{\frac{2}{U_{22} \Delta t_j}}. \quad (4.42)$$

Quando  $K_{j-1,11} \neq K_{j-1,22} \neq 0$  e  $K_{j-1,12} = 0$  temos o quinto caso. Rescrevemos a equação (4.32) como

$$\frac{U_{11}}{K_{j-1,11}} = \frac{\cos(\beta_j^2)}{V_j S_j K_{j-1,11}} - \frac{\cos(\beta_j)}{V_j}, \quad (4.43)$$

e a equação 4.34 como

$$\frac{U_{22}}{K_{j-1,22}} = \frac{1}{V_j S_j K_{j-1,22}} - \frac{\cos(\beta_j)}{V_j}. \quad (4.44)$$

Fazendo-se a subtração das duas anteriores equações e fatorizando ( $V_j S_j$ ) a ambos lados da igualdade, obtemos:

$$V_j S_j [U_{11} - U_{22} \frac{K_{j-1,11}}{K_{j-1,22}}] + \frac{K_{j-1,11}}{K_{j-1,22}} = 1 - \sin^2(\alpha_{j-1}) \frac{V_j}{V_{j-1}}, \quad (4.45)$$

reorganizando os termos após a inclusão da equação (4.36) obtemos finalmente

$$V_j = \sqrt{\frac{K_{j-1,11}^{-1} - K_{j-1,22}^{-1}}{\frac{\sin^2(\alpha_{j-1})}{K_{j-1,11} V_{j-1}^2} + \frac{\Delta t_j}{2} \left[ \frac{U_{11}}{K_{j-1,11}} - \frac{U_{22}}{K_{j-1,22}} \right]}}. \quad (4.46)$$

O sexto e último caso  $K_{j-1,11} = K_{j-1,22} \neq 0$  e  $K_{j-1,12} = 0$ , corresponde a uma superfície esférica. Subtraindo (4.34) de (4.32)

$$U_{22} - U_{11} = \frac{1}{V_j S_j} [1 - \cos^2(\beta_j)], \quad (4.47)$$

pela inclusão das equações (4.35) e (4.36)

$$U_{22} - U_{11} = \frac{2 \sin^2(\alpha_{j-1})}{\Delta t_j V_{j-1}}. \quad (4.48)$$

Nesta equação desaparece o termo incógnito  $V_j$ , indicando que nesta situação as equações (4.32) e (4.34) são linearmente dependentes. Limitando-nos à equação (4.34) isolamos o fator  $\cos(\beta_j)$

$$\cos(\beta_j) = \frac{1}{K_{j-1,22} S_j} - \frac{V_j U_{22}}{K_{j-1,22}}. \quad (4.49)$$

Substituindo a equação (4.35) na equação (4.49) e tomado o quadrado da expressão resultante, temos:

$$1 - \frac{\sin^2(\alpha_{j-1}) V_j^2}{V_{j-1}^2} = \left[ \frac{1}{K_{j-1,22} S_j} - \frac{V_j U_{22}}{K_{j-1,22}} \right]^2, \quad (4.50)$$

substituindo (4.36) na (4.50)

$$K_{j-1,22}^2 - K_{j-1,22}^2 \sin^2(\alpha_{j-1}) \frac{V_j^2}{V_{j-1}^2} = \frac{4}{V_j^2 \Delta t_j^2} - 4 \frac{U_{22}}{\Delta t_j} + V_j^2 U_{22}, \quad (4.51)$$

agrupando em potências de  $V_j$  e reorganizando, obtemos:

$$\left[ U_{22} + K_{j-1,22} \frac{\sin^2(\alpha_{j-1})}{V_{j-1}} \right] V_j^4 + \left[ -K_{j-1,22} - 4 \frac{U_{22}}{\Delta t_j} \right] V_j^2 + \frac{4}{\Delta t_j^2} = 0. \quad (4.52)$$

A expressão (4.52) é uma equação de quarto grau:  $aV_j^4 + bV_j^2 + c$ , cuja solução é dada pela expressão  $V_j^2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ . Em consequência não existe solução única ao problema, apresentando-se uma ambigüidade na solução para o cálculo da velocidade intervalar. Esta situação tinha sido prevista e discutida por KAHN (1988) e posteriormente por KREY (1989).

Para a primeira camada se supõe em geral que a interface anterior seja plana  $K_{j-1} = 0$  a situação é aquela do primeiro caso. Conhecida a velocidade intervalar da camada, a distância percorrida pelo raio entre as interfaces que a limitam vem dada por

$$S_1 = V_1 \frac{\Delta t_1}{2}, \quad (4.53)$$

e a partir de  $\vec{p}_o = (p_0, q_0)$  e  $V_1$  conseguimos o ângulo de mergulho do raio central

$$\beta_1 = \sin^{-1}(V_1 \sqrt{p_o^2 + q_o^2}). \quad (4.54)$$

#### 4.3.2 Determinação da geometria da interface posterior

Calculemos a inversa da matriz  $\underline{D}_o$  usando a equação (4.29)

$$\underline{D}_o^{-1} = [(S_j \underline{K}_j + \underline{I}) \underline{\tau}^{-1}(\beta_j)]^{-1} = \underline{\tau}(\beta_j) [S_j \underline{K}_j + \underline{I}]^{-1}, \quad (4.55)$$

fazendo o produto do fator  $\underline{C}_o$  dada pela equação (4.28)

$$\underline{D}_o^1 \underline{C}_o = \underline{\tau}(\beta_j) [(S_j \underline{K}_j + \underline{I}]^{-1} \left[ \frac{1}{V_j} \underline{K}_j \underline{\tau}(\beta_j) - \frac{\cos(\beta_j)}{V_j} [S_j \underline{K}_j + \underline{I}] \underline{\tau}^{-1}(\beta_j) \underline{K}_{j-1} \right], \quad (4.56)$$

multiplicando e reorganizando os

$$\underline{\tau}(\beta_j) [S_j \underline{K}_j + \underline{I}]^{-1} \underline{K}_j \underline{\tau}(\beta_j) - \cos(\beta_j) \underline{K}_{j-1} = V_j \underline{D}_o^{-1} \underline{C}_o, \quad (4.57)$$

$$\underline{\tau}(\beta_j) [S_j \underline{K}_j + \underline{I}]^{-1} \underline{K}_j \underline{\tau}(\beta_j) = V_j \underline{D}_o^{-1} \underline{C}_o + \cos(\beta_j) \underline{K}_{j-1}, \quad (4.58)$$

$$[S_j \underline{K}_j + \underline{I}]^{-1} \underline{K}_j = \underline{\tau}^{-1}(\beta_j) V_j \underline{D}_o^{-1} \underline{C}_o + \cos(\beta_j) \underline{K}_{j-1} \underline{\tau}^{-1}(\beta_j), \quad (4.59)$$

e denominando o termo  $\underline{Q}_o = \underline{\tau}^{-1}(\beta_j) [V_j \underline{D}_o^{-1} \underline{C}_o + \cos(\beta_j) \underline{K}_{j-1}] \underline{\tau}^{-1}(\beta_j)$ , fazemos o seguinte desenvolvimento:

$$\underline{K}_j = [S_j \underline{K}_j + \underline{I}]^{-1} \underline{Q}_o, \quad (4.60)$$

até finalmente obter:

$$\underline{K}_j = [\underline{Q}_o [\underline{I} - S_j \underline{Q}_o]^{-1}]. \quad (4.61)$$

Esta última expressão representa a matriz de curvatura da interface posterior a partir dos parâmetros da camada e dos parâmetros do raio central.

#### 4.4 CONTINUAÇÃO PARA BAIXO DOS RAIOS PARAXIAIS

Nesta seção determinamos as posições onde os raios paraxiais atingem a superfície posterior, Figura 4.3. A origem do novo sistema de coordenadas é referenciado ao raio central na interseção do raio com a interface conhecida, os raios paraxiais são refratados na interface conhecida.

Na vizinhança do raio central, a interface é aproximada pelo polinômio de segundo grau  $z = \frac{1}{2}(x, y) \cdot \underline{K}_j(x, y)$ , assim a determinação do ponto  $(x, y, z)$  onde o raio paraxial intercepta a superfície refletora se reduz a calcular a interseção da reta  $\vec{r}_2$  com a superfície  $\Phi_j$ .

Da Figura 4.4 vemos o vetor atingindo a superfície posterior em

$$[xyz] = -\vec{r}_1 + \Delta \vec{r} + \vec{r}_2, \quad (4.62)$$

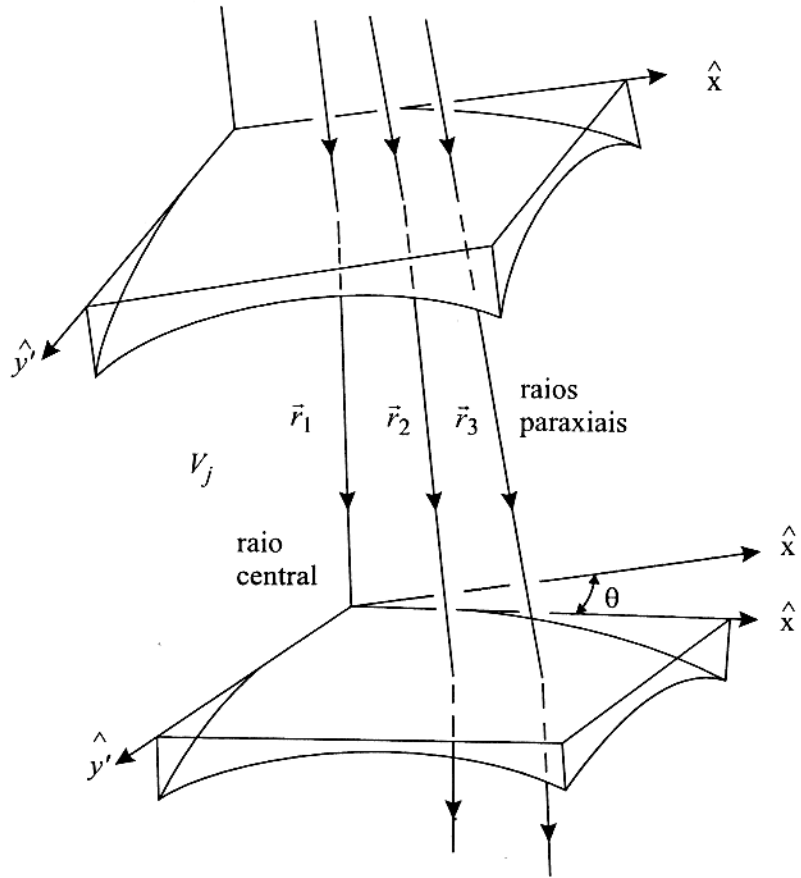


Figura 4.3 - O novo sistema de coordenadas cartesianas referenciado ao raio central na interseção com a interface, os raios paraxiais refratados continuam até a seguinte interface

onde se definem

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{1}{2}(x, y) \cdot \underline{K}(x, y) \\
 \vec{r}_1 &= (0, 0, S_1), \\
 \vec{r}_2 &= S_2(\sin(\beta) \cos(\theta), \sin(\beta) \sin(\theta), \cos(\beta)), \\
 \Delta \vec{r} &= (\Delta r_1, \Delta r_2, \Delta r_3).
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

Substituindo o sistema de equações de acima em (4.62)

$$\begin{aligned}
 (0, 0, -S_1) + (\Delta r_1, \Delta r_2, \Delta r_3) + S_2(\sin(\beta) \cos(\theta), \sin(\beta) \sin(\theta) \cos(\beta)) = \\
 (x, y, \frac{1}{2}(x, y) \cdot \underline{K}(x, y)),
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

igualando termo a termo, obtemos o sistema:

$$\begin{aligned}
 x &= \Delta r_1 + S_2 \sin(\beta) \cos(\theta), \\
 y &= \Delta r_2 + S_2 \sin(\beta) \sin(\theta), \\
 -S_1 + \Delta r_3 + S_2 \cos(\beta) &= \frac{1}{2}K_{11}x^2 + K_{12}xy + \frac{1}{2}K_{22}y^2.
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

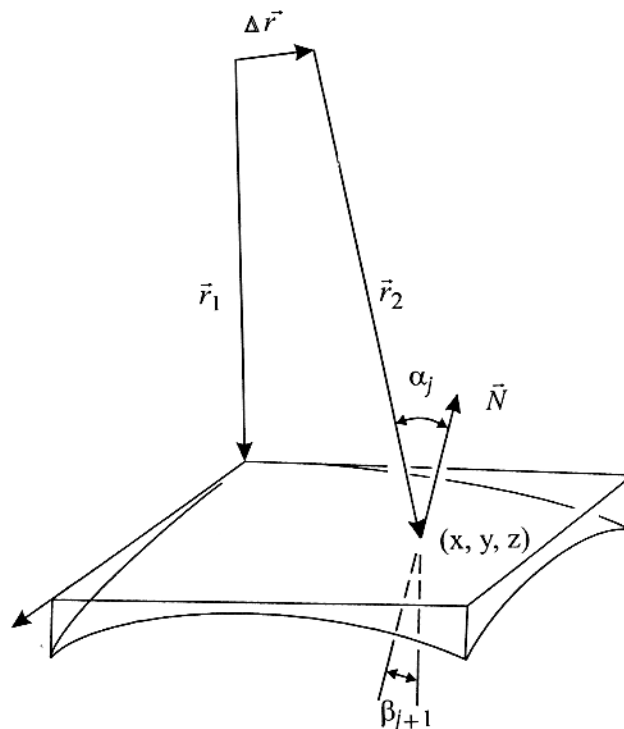


Figura 4.4 - Raios atingindo à interface posterior, o central normalmente e raio paraxial com um ângulo de incidência

Consideremos os termos de segunda ordem

$$\begin{aligned} x^2 &= \Delta r_1^2 + 2S_2 \sin(\beta) \cos(\theta) \Delta r_1 + S_2^2 (\sin(\beta) \cos(\theta))^2, \\ y^2 &= \Delta r_2^2 + 2S_2 \sin(\beta) \cos(\theta) \Delta r_2 + S_2^2 (\sin(\beta) \cos(\theta))^2, \\ xy &= \Delta r_1 \Delta r_2 + S_2^2 \sin^2(\beta) \sin(\theta) \cos(\theta) + S_2 \sin(\beta) \sin(\theta) \Delta r_1 + S_2 \sin(\beta) \cos(\theta) \Delta r_2. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Substituindo estes resultados na terceira equação do sistema (4.65), e reorganizando os termos

$$\begin{aligned} &S_2^2 [\frac{1}{2} K_{11} (\sin(\beta) \cos(\theta))^2 + \frac{1}{2} K_{22} (\sin(\beta) \sin(\theta))^2] + K_{12} \sin^2(\beta) \sin(\theta) \cos(\theta) + \\ &S_2 [-\cos(\beta) + K_{11} \sin(\beta) \cos(\theta) \Delta r_1 + K_{22} \sin(\beta) \sin(\theta) \Delta r_2 \\ &\quad + K_{12} \sin(\beta) \sin(\theta) \Delta r_1 + K_{12} \sin(\beta) \cos(\theta) \Delta r_2] + \\ &[S_1 - \Delta r_3 = \frac{1}{2} K_{11} \Delta r_1^2 + \frac{1}{2} K_{22} \Delta r_2^2 + K_{12} \Delta r_1 \Delta r_2] = 0. \end{aligned} \quad (4.67)$$

A expressão de acima representa uma equação quadrática da forma  $AS^2 + BS + C = 0$  com solução conhecida. Se o raio intercepta a superfície as duas raízes são reais. Quando a interface é convexa as duas raízes são positivas, o menor valor representa a resposta certa. Quando a interface é côncava tem-se uma raiz positiva e outra negativa; a solução corresponde ao valor positivo.

Definidas as coordenadas  $(x, y, z)$  calcula-se o vetor normal  $\vec{N}$  à superfície neste ponto,

usando a definição do gradiente no ponto

$$\vec{N} = \frac{\nabla\Phi_j}{|\nabla\Phi_j|}|_{(x,y,z)}. \quad (4.68)$$

O ângulo de incidência do raio medido em relação ao vetor normal, é dado segundo

$$\cos(\alpha_j) = -\frac{\vec{N} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|}. \quad (4.69)$$

Como resultado se obtém as distâncias percorridas pelos raios através da camada, as posições onde eles atingem a superfície posterior e os ângulos de incidência medidos em relação à normal. Estes parâmetros,  $S_j$  e  $\alpha_j$ , são necessários para definir as matrizes de transferência para os raios paraxiais através desta camada.

#### 4.5 ALGORITMO DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA INVERSO

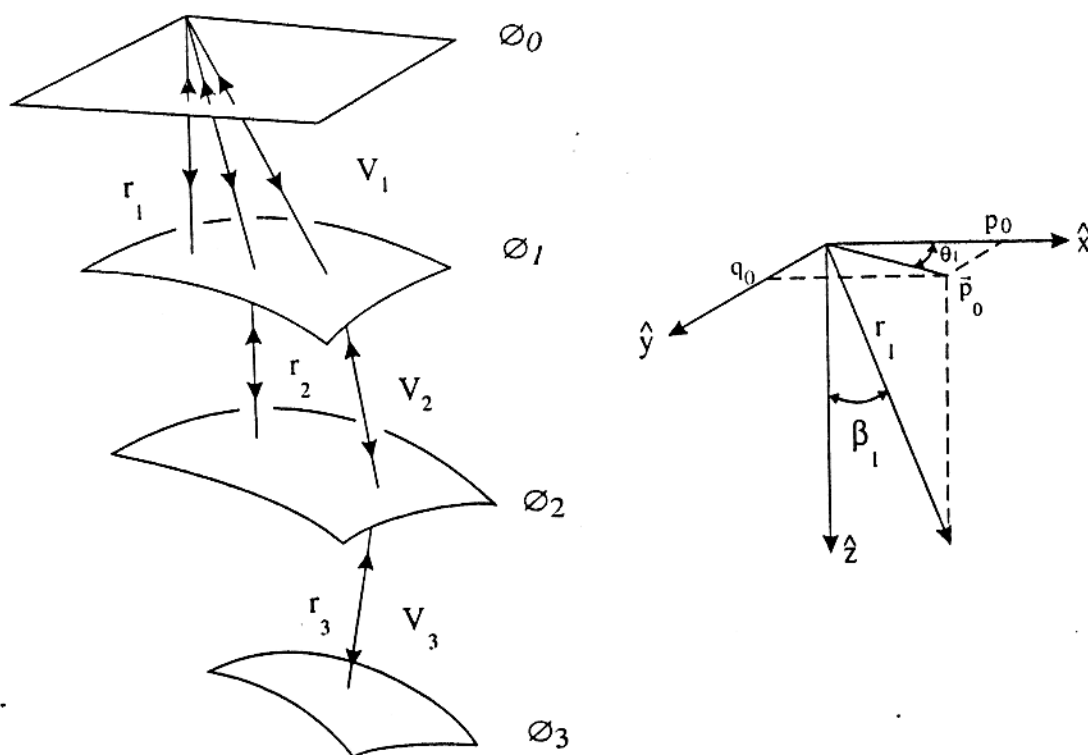


Figura 4.5 - a) Modelo sísmico de três camadas mostrando os raios normais associados a cada refletor. b) Geometria do raio na primeira camada

Para explicar o funcionamento completo para a solução do problema inverso usaremos um modelo simples com camadas homogêneas e isotrópicas, no qual observamos três raios,

cada um normal a um refletor em profundidade, Figura 4.5. Cada superfície refletora tem associada a ela um raio central e uma função característica própria avaliada na superfície superior do modelo.

O algoritmo baseado numa superfície superior plana resolve a primeira camada, determinando todos seus parâmetros e transferindo os raios paraxiais  $r_2$  e  $r_3$  até à interface  $\phi_1$ . Na primeira camada o procedimento de solução é diferente pelo fato de não se ter um raio acima da interface  $\phi_0$ .

O processo de continuação resolve a segunda camada, determinando os seus parâmetros e transfere o raio paraxial  $r_3$  até à interface  $\phi_2$  e finalmente resolve-se a terceira camada, dando fim ao processo de inversão. A partir da segunda camada o procedimento de solução utiliza a informação da camada anterior para resolver as camadas posteriores.

PASSO 0:

Identificar os refletores e determinar as funções características associadas

PASSO 1:

Velocidade intervalar  $V_1 = \sqrt{\frac{2}{U_{22}\Delta t_1}}$

Distância percorrida na camada  $S_1 = V_1 \frac{\Delta t_1}{2}$

ângulo de mergulho do raio central  $\beta_1 = \sin^{-1}(V_1 \sqrt{p_o^2 + q_o^2})$

ângulo de rotação do raio central  $\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{p_o}{q_o}\right)$

Matriz de curvatura da primeira interface.  $\underline{K}_1$

$j \leftarrow 1$

PASSO 2:

Determinar a função característica em profundidade até à interface  $\Phi_j$

Determinar  $V_{j+1}$  e  $\underline{K}_{j+1}$

Continuar os raios paraxiais desde  $\Phi_j$  até  $\Phi_{j+1}$

$j \leftarrow j + 1$

Se  $j <$  número de camadas faça PASSO 2: senão fim

## 5 - APLICAÇÃO EM MODELOS SINTÉTICOS

Neste capítulo são apresentadas as soluções encontradas ao aplicar o método em tempos de trânsito de eventos de reflexão, gerados sinteticamente através de diferentes modelos geofísicos usando traçamento de raios. O programa de computador que expressa o método de inversão, fornece as velocidades intervalares em profundidade e a geometria das interfaces. Os modelos são constituídas por camadas homogêneas e isotrópicas separadas por superfícies suaves.

Em concordância com o aspecto teórico desenvolvido no capítulo quarto, a metodologia seguida consta dos seguintes procedimentos:

Geração dos dados sintéticos: obtenção dos tempos de reflexão para as três superfícies refletoras do modelo fazendo uso do programa ANIS\_RAY\_3D, desenvolvido por COSTA et al. (1993). Este programa resolve o problema direto através do traçamento de raios em modelos tridimensionais compostos por camadas homogêneas isotrópicas ou não isotrópicas. A geração de dados sintéticos é feita sobre um agrupamento de fontes e detetores em configuração de múltipla cobertura, localizados na superfície superior do modelo.

Determinação da função característica na superfície superior do modelo: os tempos de trânsito dos eventos de reflexão numa interface são fornecidos a um programa que ajusta uma equação hiperbólica a estes tempos, minimizando a soma dos quadrados dos erros. Como resultado fornece os nove parâmetros que definem a função característica associada a um raio normal à interface mencionada e localizado na superfície superior.

Solução do problema inverso: os parâmetros das funções características associadas aos raios centrais com a mesma localização em superfície (cada raio central atinge normalmente um refletor), são fornecidos ao programa que resolve o problema inverso, camada por camada através de um processo iterativo cujo fundamento teórico foi mostrado no capítulo quarto. O programa calcula as velocidades intervalares das camadas e as coordenadas dos pontos onde os raios normais interceptam as superfícies refletoras, além das matrizes de curvatura das interfaces na vizinhança dos pontos de reflexão.

Análise de sensibilidade: finalmente foram feitos testes para estudar a estabilidade do método para determinar a função característica na superfície superior, pela contaminação dos tempos de trânsito com ruído aleatório. Também foi analisada a estabilidade do algoritmo para encontrar a solução do problema inverso, a partir da inclusão de erros na estimativa dos

parâmetros da função característica.

## 5.1 GERAÇÃO DE DADOS SINTÉTICOS

Pelo fato da aproximação ser válida na vizinhança do raio central, os arranjos de fontes e detetores em cobertura múltipla são posicionados numa área cujo centro coincide com as coordenadas do raio central. Esta área, onde é válida a aproximação, define os limites do chamado modelo local. Sua extensão depende das características de cada modelo, em outras palavras, da velocidade intervalar e da geometria das interfaces do protótipo.

Segundo BORTFELD (1989), estimar o intervalo de validade da aproximação é extremamente difícil. Embora, ele sugere considerar o intervalo empírico de aplicabilidade das correções dinâmicas hiperbólicas, como uma ordem de magnitude da estimativa de intervalo de aplicabilidade da aproximação  $T^2$ . Este critério indica que a aproximação é válida até posições afastadas do raio central, para as quais os tempos de correção NMO são menores do que 100 ms (SÖLLNER, comunicação pessoal). Este foi o critério seguido na definição do tamanho da área para os modelos do estudo.

O modelo, que nomeamos regional, se considera constituído por vários modelos locais. Cada modelo local foi definido numa área de  $1 \text{ Km}^2$ . Na área é válida a aproximação em relação à posição central. Os modelos regionais foram definidos sobre uma área de 10 km de largura por 10 km de comprimento.

O tamanho do modelo local da lugar a uma malha de 100 células na superfície superior. Cada célula foi coberta com uma malha de detetores, com afastamento de 50 m entre detetores consecutivos.

Nove fontes foram distribuídas ao longo de 3 linhas afastadas 100 metros uma da outra, sob a superfície superior do modelo. Cada linha continha 3 fontes com afastamentos de 100 metros entre elas. O raio central na superfície é posicionado no centro da área.

Como resultado se tem para cada área 3 conjunto de tempos de reflexão, cada conjunto foi gerado usando 9 fontes (9 conjuntos fonte-comum). Um conjunto corresponde às reflexões que tem lugar na primeira interface (sistema sísmico constituído pela primeira camada), outro conjunto para as eventos refletidos na segunda interface (sistema sísmico constituído pelas duas camadas superiores), e um último conjunto de traços associado às reflexões na interface que limita inferiormente o modelo (sistema conformado pelas três camadas).

Se testou o método em modelos com diferentes estruturas, incluindo superfícies côncavas,

convexas e planas. As velocidades intervalares se incrementam segundo a profundidade, embora considerou-se um modelo que apresentava inversão de velocidade. O programa testou-se num protótipo que apresentou diferentes características geométricas mais realistas.

## 5.2 MODELO ANTICLINAL

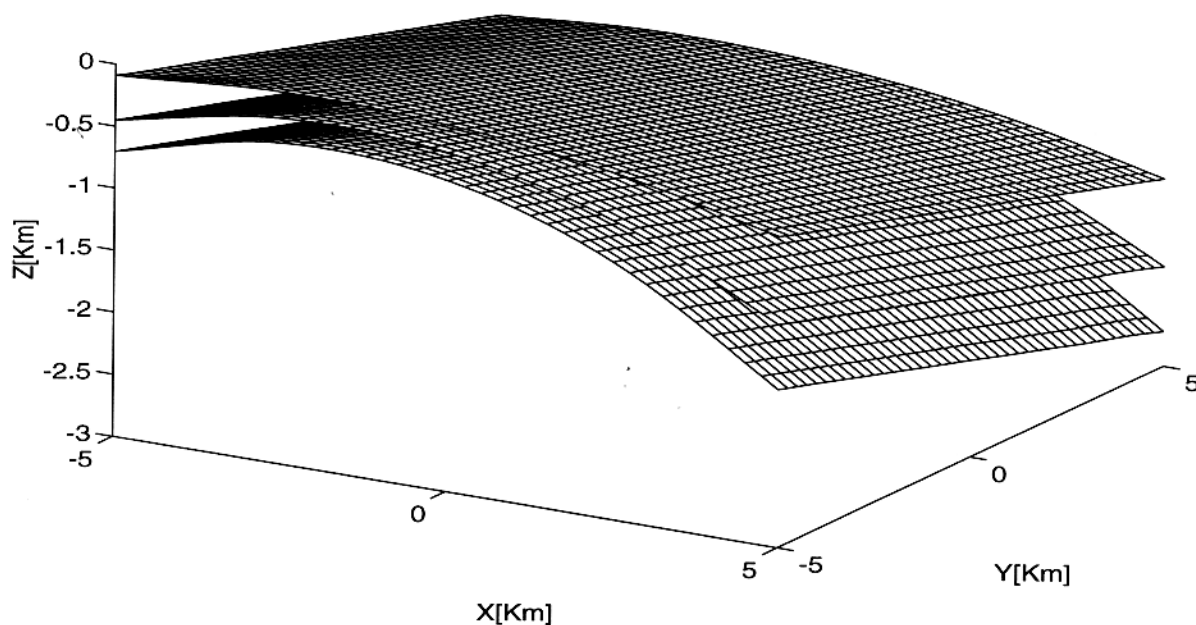


Figura 5.1 - Modelo geofísico representando um anticlinal mergulhante

O primeiro protótipo a considerar apresenta uma estrutura geológica de anticlinal regional, Figura 5.1. Frequentemente observada em ambientes deposicionais, o macromodelo representa uma seção geológica de deposição laminar posteriormente dobrada na direção  $\vec{x}$  e submetida a balanceamento na direção  $\vec{y}$ .

O modelo consta de três camadas lateralmente homogêneas que mergulham num ângulo de 7 graus na direção do vetor  $\vec{y}$ . As velocidades intervalares são 2000 m/s para a primeira camada, 3000 m/s para a segunda e 4000 m/s para a terceira.

As interfaces são planas e mergulhantes na direção  $\vec{y}$  e curvadas na direção  $\vec{x}$ , fazendo o ângulo de mergulho aumentar a medida que nos afastamos das coordenadas (0,0). Considerando a geometria do modelo foram selecionadas duas células para testar o método de inversão. A primeira com raio central nas coordenadas (0,0) e a outra com o raio em (4.5,0)

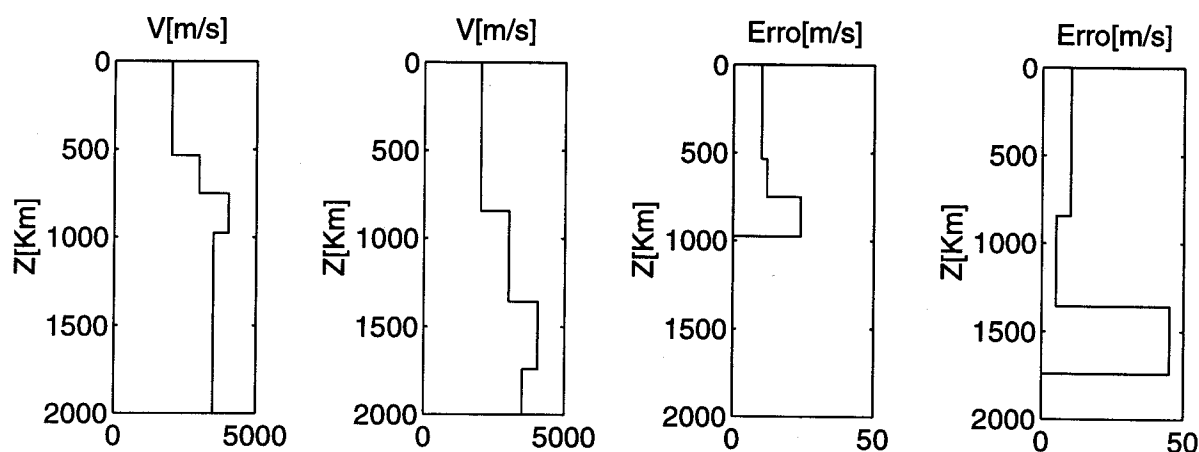


Figura 5.2 - Modelos de velocidades intervalares estimadas nas posições (0,0) e (0,4.5) do modelo de anticlinal mergulhante, e erros nas velocidades

Com os dados sintéticos gerados nessas duas áreas foram determinadas as funções características para os três horizontes refletoraes, para logo o programa que determina as velocidades intervalares e a geometria das interfaces.

Na Figura 5.2 se mostram os modelos de velocidade intervalar em profundidade obtidos nas duas posições mencionadas e os erros nas estimativas. Observa-se que o erro na estimação da velocidade é pequeno, com valores abaixo de 2% das velocidades exatas do anticlinal. Embora, observa-se nas camadas mais profundas uma crescente inexatidão.

### 5.3 MODELO GEOFÍSICO

Agora se quer estudar o comportamento do método na determinação da profundidade e na reconstrução das interfaces que separam as camadas, embora as interfaces do modelo variem unicamente na direção  $\vec{x}$ . Com esse objetivo foi construído o segundo modelo, o qual representa uma situação geológica mais real com diferentes feições estruturais; veja parte superior da Figura 5.3.

O modelo pode representar a borda de uma margem continental, onde tem lugar a formação de uma bacia sedimentar de extensão, ou a intrusão de um corpo num conjunto de camadas sedimentares, com estruturas típicas de anticlinal e sinclinal. Foram gerados dados nas 10 células com coordenadas  $(x, 0)$  para obter o perfil dos horizontes sísmicos ao longo do modelo na direção  $\vec{y}$ .

Os resultados se mostram na parte baixa da Figura 5.3, onde a linha contínua representa as interfaces do modelo, e os círculos os pontos estimados pelo método onde os raios atingem

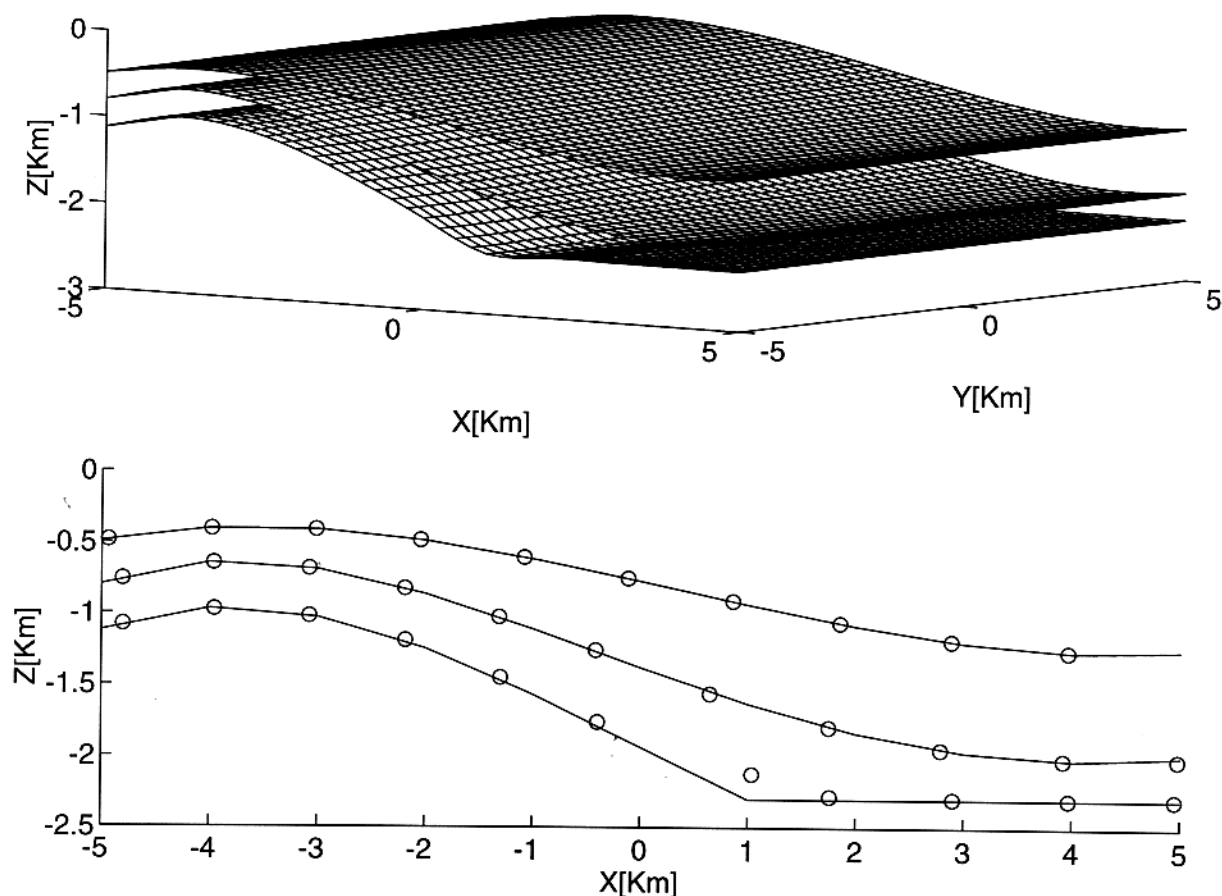


Figura 5.3 - Acima: Modelo geofísico. Acima: o modelo de uma situação mais realística. Embaixo: seção bidimensional do modelo com as posições onde os raios normais atingem às interfaces

normalmente as superfícies refletoras. A partir destes pontos estimados se reconstruiu a interface ajustando-as a um polinômio de terceira ordem. O bom comportamento do algoritmo se torna evidente na reconstrução das interfaces com erros inferiores nas velocidades à 3%.

#### 5.4 MODELO SINCLINAL

O terceiro modelo simula uma estrutura geológica de sinclinal, e representa uma seção de uma bacia sedimentar, Figura 5.4. A estrutura esta constituída por 3 camadas, as duas primeiras com velocidades de 2000 m/s e 3000 m/s respectivamente e a terceira apresenta uma inversão na velocidade com um valor de 2000 m/s. Esta situação acontece no caso de camadas com menor grau de compactação ou camadas de arenito que contêm argila.

Com este protótipo se procura observar o comportamento do método na situação mais realista, onde a discretização dos tempos registrados nos detetores introduz uma incertidão igual ao período de amostragem (2 ms). Além disso se permite a variação das interfaces nas duas direções  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$ , para analisar como se comporta o algoritmo na reconstrução bidimensional das interfaces e se considera a situação não pouco comum de camadas que apresentam inversão de velocidades.

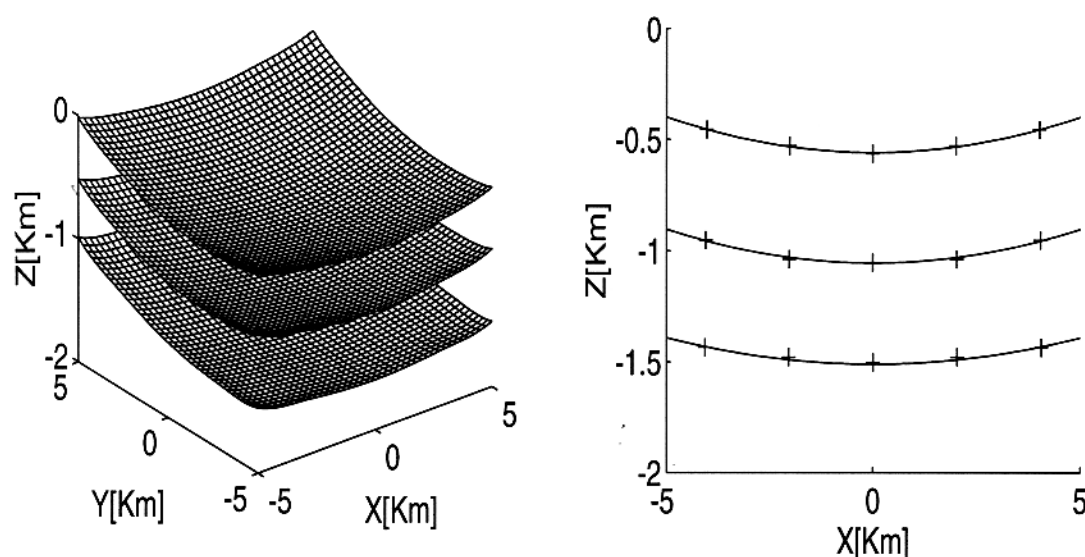


Figura 5.4 - Sinclinal: à direita o modelo de sinclinal e com cruces a esquerda as posições finais dos raios obtidas com incerteza de 2ms nos tempos de trânsito

Como não se pretende fazer a reconstrução tridimensional do modelo a geração dos dados foi restrito à cinco posições, nas células com raios centrais posicionados em  $(-4,0)$ ,  $(-2,0)$ ,  $(0,0)$ ,  $(2,0)$  e  $(4,0)$ . Estas posições indicam modelos locais, que garantem a aproximação hiperbólica até 1 km ao redor da posição do raio central.

Na direita da Figura 5.4 se observam as posições finais dos raios ao atingir as interfaces. As cruces correspondem às posições estimadas com incerteza nos tempos e a linha continua a interface verdadeira.

No caso de medida com incerteza obteve-se para a primeira camada uma velocidade intervalar de 2003 m/s, para a segunda de 3082 m/s e para a mais profunda 1938 m/s, que representam erros inferiores a 3% do valor verdadeiro.

## 5.5 MODELO DE DOMO

Com o objetivo de reconstruir as interfaces tridimensionais foi planejado um modelo final que representa a estrutura de um domo, com velocidades intervalares de 2000 m/s, 3000 m/s e 4000 m/s para a primeira, segunda e terceira camada respectivamente, veja a parte esquerda da Figura 5.5.

Neste exemplo se considerou a superfície superior discretizada por uma malha de 25 quadrados de 2 km de lado (células), gerou-se os dados sísmicos em cada uma delas cobrindo assim os limites do modelo. Como o centro da célula indica a posição do raio central em superfície, então a aproximação hiperbólica foi verificada até 1 km dessa posição. Para cada célula se obtiveram as posições em profundidade onde os raios normais atingem as interfaces, logo foram ajustadas tais posições utilizando uma interpolação cúbica tridimensional. O

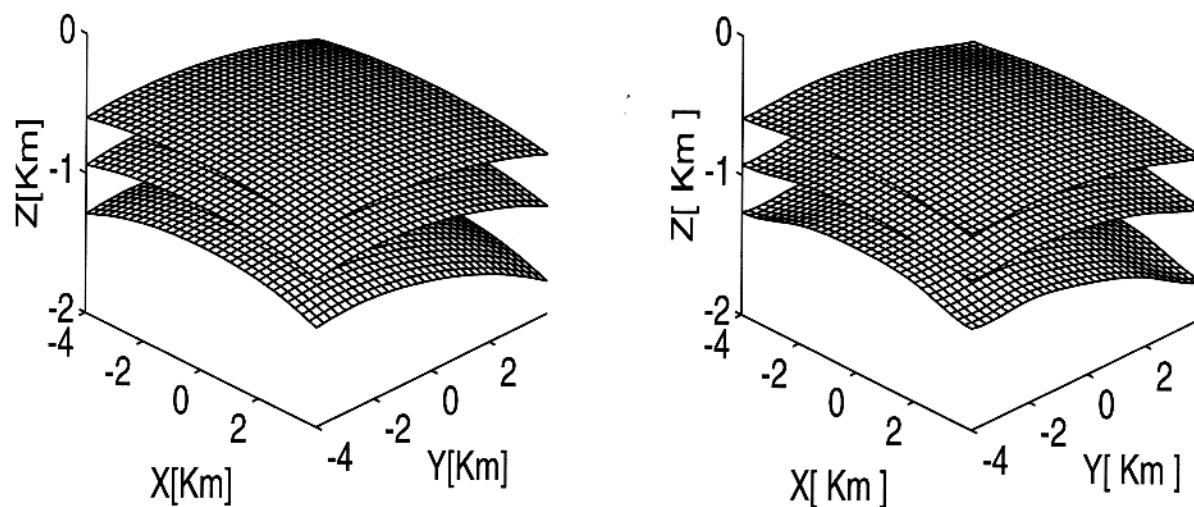


Figura 5.5 - Modelo do domo reconstruído pela aproximação polinomial das interfaces

método forneceu as velocidades intervalares em cada uma das 25 posições das células (modelos locais), com erros de estimação menores que 2% do valor verdadeiro. Na esquerda da Figura 5.5 se observam as interfaces ajustadas pela interpolação cúbica a partir das coordenadas geradas pelo algoritmo. Se observa nas bordas do modelo uma pequena distorção introduzida pela interpolação cúbica.

## 5.6 ANÁLISE DE SENSIBILIDADE

Determinar da função característica a partir dos tempos de trânsito dos eventos de reflexão é considerado um problema típico de regressão linear. O sistema de equações que vai se resolver tem mais equações do que incógnitas (sobre-determinado), é expresso na forma:

$$\text{Minimizar } \|\varepsilon\| = \|\underline{M} \cdot \vec{b} - \vec{t}\| \quad (5.1)$$

Onde  $\|\cdot\|$  indica a norma utilizada na minimização,  $\underline{M}$  é matriz do tipo (2.45) no caso da aproximação hiperbólica. A equação procura os melhores valores dos parâmetros da função característica  $\vec{b}$  que ajustem os tempos de trânsito  $\vec{t}$ , de modo que a medida do erro  $\|\varepsilon\|$  seja mínima.

A solução da equação (5.1) pode se derivar a partir do método dos erros mínimos quadráticos expresso na inversa generalizada que usa norma 2, ou através do mínimo do valor absoluto do erro expresso no método simplex da programação linear que usa norma 1 (ARTHANARI & DODGE, 1981).

A estabilidade se define como a propriedade que tem um estimador central de ser sensível a pequenos erros nos valores dos dados. Segundo TARANTOLA(1987), o fornecimento de informação a priori do modelo garante em geral a estabilidade. A robustez é a propriedade de insensibilidade do parâmetro em relação a pequenas quantidades de grandes erros no conjunto de dados. A análise de sensibilidade avalia a estabilidade e a robustez dos métodos de solução.

Para estudar a estabilidade e robustez na determinação da função característica perturbamos a equação 5.1, introduzindo erros aleatórios nos tempos de trânsito. Estas sequências de números aleatórios estão agrupadas segundo uma distribuição normal com média  $\mu$  zero e desvio padrão  $\sigma$  diferente de zero. Neste experimento se considerou um modelo de camadas planas e horizontais, já que a função característica associada é conhecida analiticamente a partir da definição dada em (2.43).

Foram realizados 9 testes com 9 funções de distribuição, cada uma com um desvio padrão diferente. A primeira com um desvio padrão de 2 ms, a segunda com 4 ms, aumentando sucessivamente em 2 ms até a última função de distribuição com 18 ms. Tomou-se o valor de 18 ms, em consideração ao seguinte fato: o erro na estimativa do tempo de chegada da onda sísmica está restrito ao comprimento do pulso. Considerando uma frequência dominante de 50 Hz no pulso, percorrendo uma camada com velocidade de 1000 m/s, encontramos que o comprimento do pulso nessa camada é 20 m equivalente a 20 ms.

Quando fontes e detetores se configuram em arranjos CMP a função característica se

simplifica a:  $t(\vec{0}, \vec{x}) = t_o + \vec{x}\underline{U}\vec{x}$ , onde  $\underline{U} = \underline{B}_o^{-1}\underline{A}_o$ . Esta equação se expressa através das três equações:

$$t(0, x) = t_o + U_{11}x^2 \quad (5.2)$$

$$t(0, y) = t_o + U_{22}y^2 \quad (5.3)$$

$$t(\vec{0}, \vec{x}) - U_{11}x^2 - U_{22}y^2 = t_o + 2U_{12}x \cdot y \quad (5.4)$$

Baseados neste resultado, o sistema foi resolvido segundo o procedimento seguinte: (1) se colocaram as fontes e detetores em configuração CMP ao longo do eixo  $\hat{x}$  para determinar  $t_o$  e  $U_{11}$  através da equação (5.2). (2) Para determinar  $U_{22}$  usando a equação (5.3) se geraram dados na direção do eixo  $\hat{y}$  em configuração CMP. (3) Finalmente vários arranjos CMP adicionais para o parâmetro  $U_{12}$  utilizando a equação (5.4) com o conhecimento prévio de  $t_o$ ,  $U_{11}$  e  $U_{22}$  previamente obtidos. Os três sistemas de equações sobre-determinados se resolveram usando o método da inversa generalizada, veja Apêndice C.

Quando temos fontes e detetores em afastamento nulo, a função característica se reduz a:  $t(\vec{x}) = t_o + \vec{p} \cdot \vec{x}_o + \vec{x}\underline{V}\vec{x}$  com  $\underline{V} = \underline{D}_o^{-1}\underline{C}_o$ , esta equação pode-se decompor no seguinte sistema de equações:

$$t(x, 0) = t_o + p_x \cdot x + V_{11}x^2 \quad (5.5)$$

$$t(0, y) = t_o + p_y \cdot y + V_{22}y^2 \quad (5.6)$$

$$t(x, y) - V_{11}x^2 - V_{22}y^2 = t_o + 2V_{12}x \cdot y \quad (5.7)$$

Um processo análogo para estimar  $\underline{B}_o^{-1}\underline{A}_o$  foi usado: (1) Considerando os tempos de afastamento nulo na direção do eixo  $\hat{x}$  determinaram-se  $p_x$  e  $V_{11}$  usando a equação (5.5). (2) Os tempos na direção do eixo  $\hat{y}$  permitem conhecer  $p_y$  e  $V_{22}$  através da equação (5.6). (3) A partir de  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $V_{11}$ , e  $V_{22}$  e com outros tempos em afastamento nulo na vizinhança do raio central obteve-se  $V_{12}$  utilizando a equação (5.7).

O afastamento nulo na realidade do levantamento sísmico não existe, embora assumindo um pequeno erro, o tempo de afastamento nulo pode-se tomar como o correspondente ao tempo do detetor mais próximo à fonte. Nesta parte da análise de sensibilidade se estuda como o erro na determinação do tempo de afastamento nulo influi na determinação de  $\vec{p}_o$  e  $\underline{V}$ .

Os resultados obtidos na determinação dos parâmetros  $T_o$ ,  $\vec{p}_o$ ,  $\underline{B}_o^{-1}\underline{A}_o$ ,  $\underline{B}_o^{-1}\underline{A}_o$ , pela contaminação dos tempos de trânsito com ruído aleatório gerado por uma função de distribuição normal se mostra na Figura 5.6.

A Figura 5.6 mostra que a variação na estimação dos parâmetros é proporcional ao nível de ruído contaminador. Observa-se que quando o nível de ruído nos tempos de trânsito

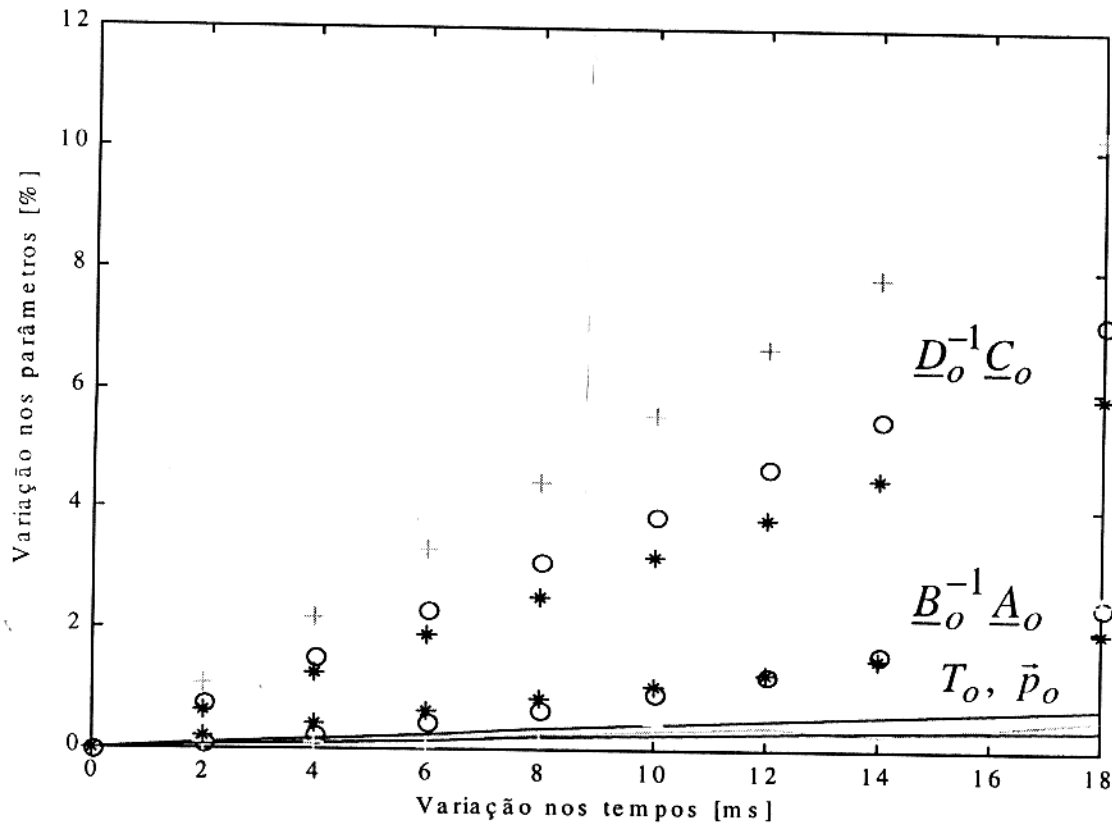


Figura 5.6 - Variação dos parâmetros (ordenada) em função da perturbação nos tempos de trânsito (abscissa)

CMP aumenta até chegar a desvio padrão de 18 ms, os parâmetros  $T_o$  e  $B_o^{-1} A_o$  calculados apresentam variações inferiores ao 3% dos seus valores exatos. Os resultados indicam que os parâmetros em menção se caracterizam por uma boa estabilidade ante esse nível do ruído.

Considerando erros na determinação dos tempos de afastamento nulo associados a desvio padrão de até 18 ms, relacionados com nível de ruído ou incerteza pela impossibilidade física de colocar fonte e detetor numa mesma posição, a Figura 5.6 indica que o valor de  $\bar{p}$  não muda significativamente do seu valor exato. Embora, o valor de  $D_o^{-1} C_o$  se desvia até 10% de seu valor exato ante esse nível máximo de perturbação nos tempos de afastamento nulo, manifestando uma sensibilidade maior. O nível de erro na determinação de  $D_o^{-1} C_o$  pode-se diminuir, se os  $T_o$  são calculados a partir de dados CMP usando as equações (5.2) ou (5.3), e considerando o tempo na posição de afastamento nulo como o tempo correspondente ao detetor mais próximo.

A diferença da determinação da função característica, a solução do problema inverso através do método apresentado é um típico problema de inversão, a ser resolvido a partir das funções características avaliadas na superfície superior e associadas a cada uma das interfaces

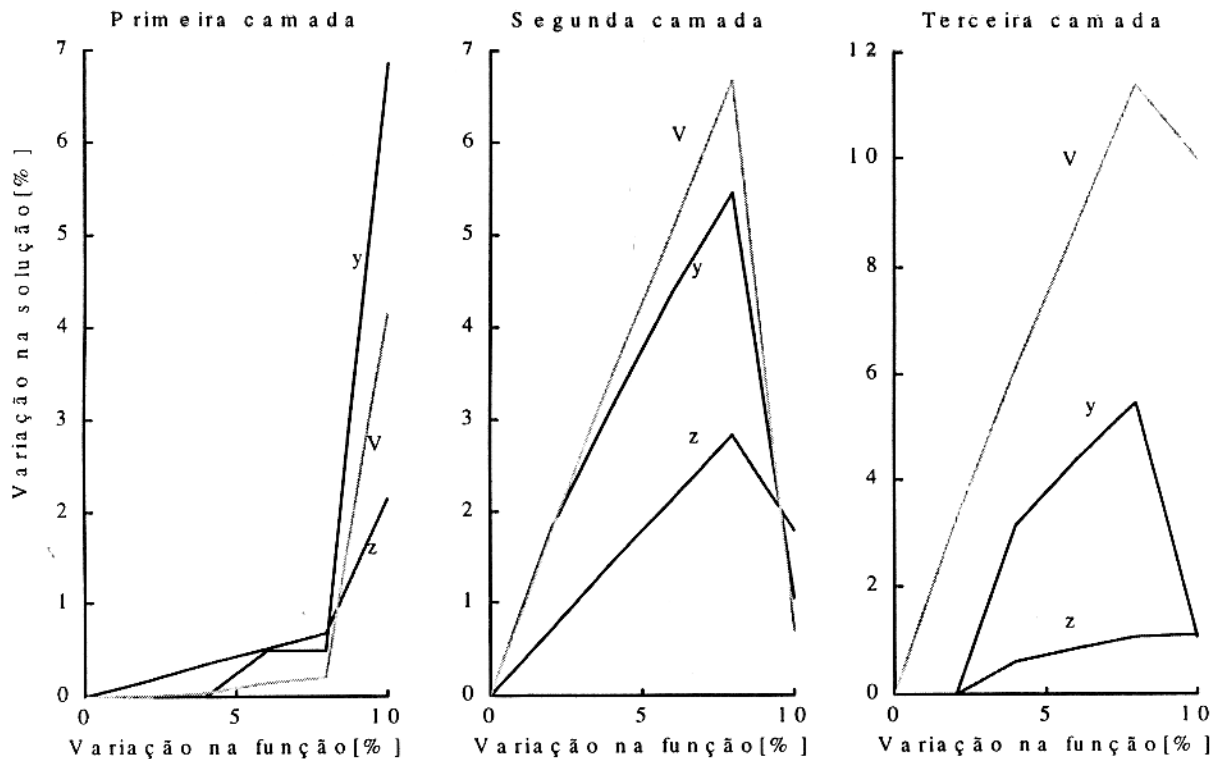


Figura 5.7 - Variações em V, y e z (ordenada) em função das variações nos valores dos parâmetros (abscissa), para as três camadas do modelo sinclinal

refletoras. Segundo a Figura 5.6 a determinação dos parâmetros da função característica não supera o 3% de erro. Embora, considerarmos erros aleatórios distribuídos normalmente com desvio padrão de 2%, 4%, 6%, 8% e 10% na estimativa do valor dos parâmetros, para observar a estabilidade do método de inversão.

Analisemos como a perturbação nos parâmetros da função influi na solução do modelo de sinclinal mostrado na Figura 5.4. Para uma posição definida na superfície superior avaliam-se as funções associadas às três interfaces refletoras. Estas funções são perturbadas com erros gerados aleatoriamente, observando-se como modifica as velocidades intervalares e as posições onde os raios centrais atingem as interfaces.

A Figura 5.7 mostra que a solução fornecida pelo método é proporcional às variações nos valores dos parâmetros, e que a velocidade intervalar é mais sensível ante erros cometidos na determinação dos tempos, sendo esta relação direta. As posições onde o raio atinge as interfaces apresentam uma estabilidade maior. Os resultados mostram que estes parâmetros são caracterizados por um bom nível de estabilidade ante este tipo de ruído, indicando um bom grau de estabilidade do método de inversão.

## 6 - CONCLUSÕES

Nesta tese foi desenvolvida uma metodologia baseada na função característica dos tempos de trânsito, que estima as velocidades intervalares em profundidade e a geometria das interfaces, em modelos compostos de camadas homogêneas e isotrópicas separadas por superfícies suaves.

Obteve-se um procedimento que permite estimar a função característica em profundidade, sobre a superfície anterior que limita uma camada a partir de um raio. O procedimento é uma contribuição fundamental na método de solução do problema inverso desenvolvido neste trabalho.

Os programas foram testados com dados sintéticos, gerados a partir de modelos que representam feições estruturais comumente achadas nas descrições geológicas reais. Estes dados permitiram estimar as velocidades intervalares dos modelos e reconstruir os horizontes que limitam as camadas, com uma margem de erro considerado aceitável.

Uma análise de sensibilidade, mostrou que o método de determinação da função característica é estável. Outra análise sob o método de inversão mostrou que a estimativa das velocidades intervalares e da geometria das interfaces fornece resultados estáveis. Nas análises foram contaminados os tempos de trânsito, com ruídos gerados por funções de distribuição com media zero.

O intervalo de aplicabilidade está restrito ao intervalo de validade das correções dinâmicas hiperbólicas dos tempos de trânsito. Em consequência, deve-se usar o método em modelos locais que constituam o modelo global, fornecendo soluções em regiões onde as restrições do sistema sísmico seja garantida. O conjunto de soluções locais (modelos locais) fornece a solução à macroescala.

O método de inversão é inviável em superfícies esféricas, onde apresenta-se ambigüidade na determinação das velocidades. Nesta situação o método deve-se aplicar na vizinhança da anterior posição onde a geometria da superfície muda, ou usar a velocidade estimada num ponto próximo.

É recomendável continuar com um trabalho posterior que faça testes com dados reais 3D.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AKI, K & RICHARDS, P. B. 1980. **Quantitative Seismology**. vol I. W. H. Freeman and Company.
- AL-CHALABI, M. 1974. An analysis of stacking, rms, average and interval velocities of a horizontal layered ground. **Geophysical Prospecting**, 22: 458-475.
- ARTHANARI, T. S. & DODGE, Y. 1981. **Mathematical Programming in Statistics**. J. Wiley & sons.
- BICKELL, S. 1990. Velocity-Depth ambiguity of reflection traveltimes. **Geophysics**, 55: 226-276.
- BLACKBURN, G. 1980. Errors in stacking velocity - True velocity conversion over complex geologic situations. **Geophysics**, 45: 1465-1488.
- BORTFELD, R. 1989. Geometrical ray theory: Rays and traveltimes in seismic systems. **Geophysics**, 54: 342-349.
- BORTFELD, R. & KEMPert, M. 1991. Geometrical ray theory: Line foci and point foci in the anterior surface of seismic systems (second order approximation of the traveltime. **Geophysics**, 56: 806-811.
- BYUNG, B. S. & YOUNG, C. Y. 1989. Effects on subsurface seismic measurements: A simulation study on horizontal layered media. **Geophysics**, 54: 730-737.
- CERVENY, V. 1985. **The application of ray tracing to the numerical modelling of seismic wavefields in complex structures**, Helbig, K. and Treitel, S. Editors. Seismic Shear waves. Part A: Vol. 15. Handbook Geophysical Exploration, 1-124. Geophysical Press. London-Amsterdam.
- CERVENY, V. 1987. **Ray methods for three-dimensional seismic modelling**. Petroleum industry course. Norwegian Institute for technology.
- CERVENY, V. & RAVINDRA R. 1971. **Theory of Seismic Headwaves**. University of Toronto Press.

- COSTA, J., SCHOENBER, M., URBAN, J. 1993. 3D Raytracing trough no-flat homogeneous anisotropic layers. 3rd International Congress of the Brazilian Geophysical Society. **Expanded Abstracts**, v1: 47-52.
- DANTZIG, G. B. 1963. **Linear programming and extensions**. Princeton University Press.
- DESCHAMPS, G. A. 1972. Ray techniques in electromagnetics. **Proceedings of the IEEE**, 60(9): 1022-1035.
- DIX, C. H. 1955. Seismic velocities from surface measurements. **Geophysics**, 20: 68-86.
- DUNKIN, J. W. & LEVIN, F. K. 1973. Effects of normal moveout on seismic pulse. **Geophysics**, 28: 635-642. Inc.
- HUBRAL, P. 1980. Computation of the normal moveout velocity in 3D laterally inhomogeneous media with curved interfaces. **Geophysical Prospecting**, 28: 221-239.
- HUBRAL, P. 1983. Computing true amplitudes reflections in a laterally inhomogeneous earth. **Geophysics**, 48: 1051-1062.
- HUBRAL, P. & KREY, Th. 1980. **Interval velocities from seismic reflection time measurements**. SEG. Tulsa. Ok.
- HUBRAL, P., SCHLEICHER, J., TYGEL, M. 1992a. Three dimensional paraxial ray properties, I. Basic relations. **Journal of Seismic Exploration**, 1: 265- 279.
- HUBRAL, P., SCHLEICHER, J., TYGEL, M. 1992b. Three dimensional paraxial ray properties, II. Applications. **Journal of Seismic Exploration**, 1: 347-362.
- HUBRAL, P., SCHLEICHER, J., TYGEL, M. 1993. Three dimensional primary zero offset reflections. **Geophysics**, 58: 692-702.
- KHAN, S. U. 1988. **Die Aufdeckung der Mehrdeutigkeiten in der reflexionsseismic: Dissertation**, Tech. Univ. Clausthal.
- KREY, T. 1976. Computation of interval velocities from common reflection point moveout times for n-layers with arbitrary dips and curvature in three dimensions when assuming small shot-geophone distance. **Geophysical Prospecting**, 24: 90-111.
- KREY, T. 1989. The nonuniqueness of the determination of interval velocities from moveout velocities. **Geophysics**, 54:1209-1211.

- LEVIN, F. K. 1971. Apparent velocity from dipping interface reflectors. **Geophysics**, 36: 510-516.
- MAY, B. T. & COVEY, J. D. 1981. An inverse ray method for computing geologic structures from seismic reflection zero offset. **Geophysics**, 46: 268-287.
- MENKE, W. 1984. **Geophysical data Analysis: Discrete inverse theory**. Ac. Press.
- SHAH, P. M. 1973a. Ray tracing in three dimensions. **Geophysics**, 38: 600- 604.
- SHAH, P. M. 1973b. Use of wavefront curvature to relate seismic data with subsurface parameters. **Geophysics**, 38: 812-825.
- TANNER, M. T. COOK, E., NEILL, N., 1970. Limitations of reflection seismic method; lessons from computer simulations. **Geophysics**, 39: 551-573.
- TARANTOLA, A. 1987. **Inverse problem theory: Methods for data fitting and model parameter estimation**. Elsevier Science Publishers.
- URSIN, B. 1982. Quadratic wavefront and travelttime approximations in homogeneous layered media with curved interfaces. **Geophysics**, 47:1012-1021.

## A - PROPRIEDADE SIMPLÉTICA

Para conhecer as propriedades da matriz de transferência e das submatrizes  $\underline{A}_o$ ,  $\underline{B}_o$ ,  $\underline{C}_o$  e  $\underline{D}_o$ , é preciso analisar as seguintes derivadas da função tempo de trânsito

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \vec{X}_s^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 t}{\partial x_s^2} & \frac{\partial^2 t}{\partial x_s \partial y_s} \\ \frac{\partial^2 t}{\partial y_s \partial x_s} & \frac{\partial^2 t}{\partial y_s^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \underline{B}_o^{-1} \underline{A}_o + \frac{1}{2} \underline{D}_o^{-1} \underline{C}_o, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \vec{X}_s \partial \vec{x}_g} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 t}{\partial x_s \partial x_g} & \frac{\partial^2 t}{\partial x_s \partial y_g} \\ \frac{\partial^2 t}{\partial y_s \partial x_g} & \frac{\partial^2 t}{\partial y_s \partial y_g} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \underline{B}_o^{-1} \underline{A}_o + \frac{1}{2} \underline{D}_o^{-1} \underline{C}_o. \quad (\text{A.2})$$

Como a ordem da derivação não faz diferença, as matrizes definidas anteriormente em (A.1) e (A.2) são simétricas, e o resultado da soma e da diferença delas também são simétricas. Concluindo-se que as matrizes  $\underline{D}_o^{-1} \underline{C}_o$  e  $\underline{B}_o^{-1} \underline{A}_o$  também são.

Para conhecer a inversa da matriz de transferência assumimos que ela é simplética, e pela definição de simplecticidade

$$\begin{bmatrix} \underline{D}_o^t & -\underline{B}_o^t \\ -\underline{C}_o^t & \underline{A}_o^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_o & \underline{B}_o \\ \underline{C}_o & \underline{D}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

o qual implica que se satisfazem as condições:

$$\underline{C}_o^t \underline{A}_o = \underline{A}_o^t \underline{C}_o, \quad (\text{A.4})$$

$$\underline{D}_o^t \underline{B}_o = \underline{B}_o^t \underline{D}_o, \quad (\text{A.5})$$

$$\underline{D}_o^t \underline{A}_o - \underline{B}_o^t \underline{C}_o = \underline{I}, \quad (\text{A.6})$$

$$\underline{A}_o^t \underline{D}_o - \underline{C}_o^t \underline{B}_o = \underline{I}. \quad (\text{A.7})$$

Retomando as equações de transferência do raio

$$\vec{x}' = \underline{A}_o \vec{x} + \underline{B}_o [\vec{p} - \vec{p}_o], \quad (\text{A.8})$$

$$\vec{p}' = \underline{C}_o \vec{x} + \underline{D}_o [\vec{p} - \vec{p}_o], \quad (\text{A.9})$$

sendo o diferencial da primeira  $d\vec{x}' = \underline{A}_o d\vec{x} + \underline{B}_o d\vec{p}$ .

Substituindo na equação de Hamilton  $dt = \vec{p}' \cdot d\vec{x}' - p \cdot \vec{d}\vec{x}$ , obtemos

$$dt = [\underline{C}_o \vec{x} + \underline{D}_o (\vec{p} - \vec{p}_o)] [\underline{A}_o \vec{x} + \underline{B}_o d\vec{p}] - \vec{p} d\vec{x}. \quad (\text{A.10})$$

Calculam-se as seguintes segundas derivadas na equação (A.10)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 t}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \underline{A}_o^t \underline{C}_o, \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 t}{\partial p^2} & \frac{\partial^2 t}{\partial p \partial q} \\ \frac{\partial^2 t}{\partial q \partial p} & \frac{\partial^2 t}{\partial q^2} \end{bmatrix} = \underline{B}_o^t \underline{D}_o, \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 t}{\partial p \partial x} & \frac{\partial^2 t}{\partial p \partial y} \\ \frac{\partial^2 t}{\partial q \partial x} & \frac{\partial^2 t}{\partial q \partial y} \end{bmatrix} = \underline{B}_o^t \underline{C}_o, \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial p} & \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial q} \\ \frac{\partial^2 t}{\partial y \partial p} & \frac{\partial^2 t}{\partial y \partial q} \end{bmatrix} = \underline{A}_o^t \underline{D}_o - \underline{I}. \quad (\text{A.14})$$

As matrizes definidas em (A.11), (A.12), (A.13) e (A.14) são simétricas pela propriedade comutativa da derivada, satisfazendo as condições (A.4) e (A.5).

As equações (A.13) e (A.14) satisfazem as condições (A.6) e (A.7), garantindo assim a propriedade de simpleticidade para a matriz de transferência do raio.

## B - ANÁLISE DA MATRIZ DE TRANSFERÊNCIA

Segundo KAHN (1988), a transferência do raio desde a interface superior até a interface inferior de uma camada simples, pode-se decompor em seis passos: (1) Transferência desde a interface anterior até o plano tangente à superfície anterior no raio central. (2) Transferência desde o plano tangente mencionado até o plano normal ao raio central. (3) Rotação do sistema de coordenadas  $xy$  para que o novo eixo  $\hat{x}'$  coincida com plano definido pelos raios  $\vec{P}_0$  e  $\vec{P}'$ . (4) Transferência desde o anterior plano normal até um plano paralelo afastado  $S_j$ , a distância percorrida pelo raio central na camada. (5) Transferência desde o plano paralelo até o plano normal à superfície posterior no ponto de interseção do raio central, e finalmente 6. Transferência até a superfície posterior. Para ser mais claros, foram analisadas só as

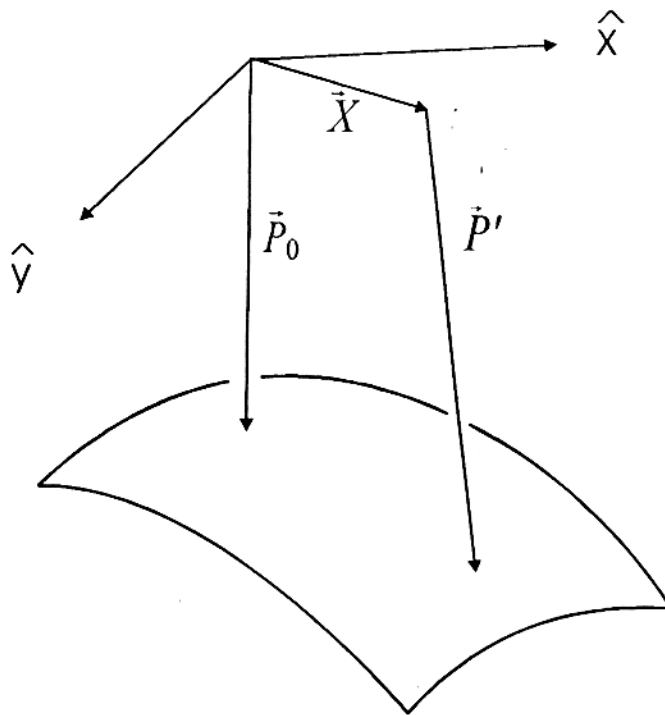


Figura B.1 - Uma camada com o raio central normal à interface posterior

últimas quatro operações, já que as duas primeiras são similares as duas últimas, mudando unicamente o sentido da transferência. Assumiremos que o raio se transmite desde o plano normal ao raio central na interface anterior até a interface posterior, veja-se Figura B.1.

## B.1 ROTAÇÃO DO PLANO XY EM TORNO DO EIXO $\hat{z}$

Na superfície anterior, o plano  $xy$  é rotacionado em torno do eixo  $\hat{z}$ , Figura B.2, para que o novo eixo  $\hat{x}$  coincida com o plano que contém os raios transmitidos  $\vec{P}'_o$  e  $\vec{P}_o$ . Do Cálculo Vetorial se conhece o operador matricial que faz esta rotação de eixos

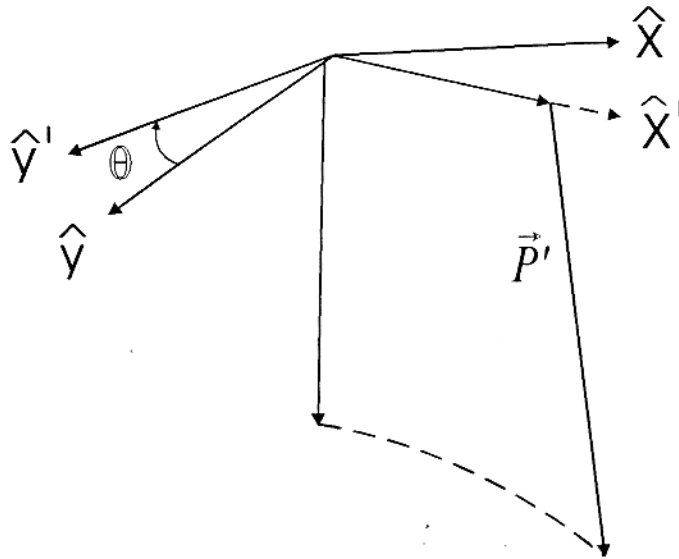


Figura B.2 - Rotação do sistema cartesiano em torno do eixo  $z$

$$\begin{bmatrix} \vec{x}' \\ \vec{p}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{D}(\phi_j) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{D}(\phi_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{p} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

onde

$$\underline{D}(\phi_j) = \begin{bmatrix} \cos(\phi_j) & \sin(\phi_j) \\ -\sin(\phi_j) & \cos(\phi_j) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

## B.2 TRANSFERÊNCIA ENTRE PLANOS PARALELOS

Consideremos a transferência do raio através de uma camada desde uma interface anterior plana  $z = 0$  até a interface posterior plana  $z = S_j$ . O raio central normal aos planos, portanto  $\vec{x}_o(x, y) = \vec{0}$ ,  $\vec{p}_o(p, q) = \vec{0}$  no plano anterior. Da Figura B.3

$$\begin{bmatrix} \vec{x}' \\ S_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{x} + \lambda \vec{p} \\ \lambda p_z \end{bmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

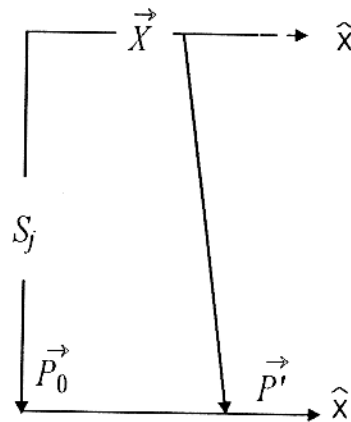


Figura B.3 - Transferência desde plano normal ao raio na interface anterior até o plano paralelo

onde  $\lambda \subset$  Reais positivos;

$P_j^2 = p_j^2 + p_z^2$ , sendo  $\vec{p}_j$  a projeção de  $\vec{P}$  no plano  $xy$ .

$$p_z = \sqrt{\frac{1}{V_j^2} - p^2} = \frac{1}{V_j} \sqrt{1 - V_j^2 p^2} \quad (\text{B.4})$$

Pela expansão da equação anterior em série de Taylor e pelo fato que  $V_j^2 p^2 \ll 1$ , truncamo-la tomando a aproximação

$$p_z \simeq \frac{1}{V_j} \left(1 - \frac{1}{2} V_j^2 p^2\right) \simeq \frac{1}{V_j}. \quad (\text{B.5})$$

Substituindo este resultado na equação B.3 segue-se que  $S_j = \lambda p_z$  portanto  $\lambda = S_j V_j$ , em decorrência do fato da transmissão do raio em linha reta num meio homogêneo

$$\begin{aligned} \vec{p}' &= \vec{p} \\ \vec{x}' &= \vec{x} + S_j V_j \vec{p}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Em forma matricial o operador de transferência entre estas superfícies paralelas tem a forma

$$\begin{bmatrix} \vec{x}' \\ \vec{p}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I} & S_j V_j \underline{I} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \vec{p} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

### B.3 TRANSFERÊNCIA SOBRE A SUPERFÍCIE TANGENTE

O raio central atingindo normalmente a superfície posterior define um plano tangente nesse ponto  $P_0$ , agora o raio paraxial se transfere até essa superfície. Do triângulo da esquerda na Figura B.4,  $z_c = x_c \tan(\alpha_j)$  e ao substituir na equação B.3

$$\begin{aligned} x_c &= x + \lambda p_x \\ z_c &= \lambda p_x = \frac{\lambda}{V_j}, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

se chega a  $[x + \lambda p_x] \tan(\alpha_j) = \frac{\lambda}{V_j}$ , ao isolar o termo  $\lambda$  obtemos:

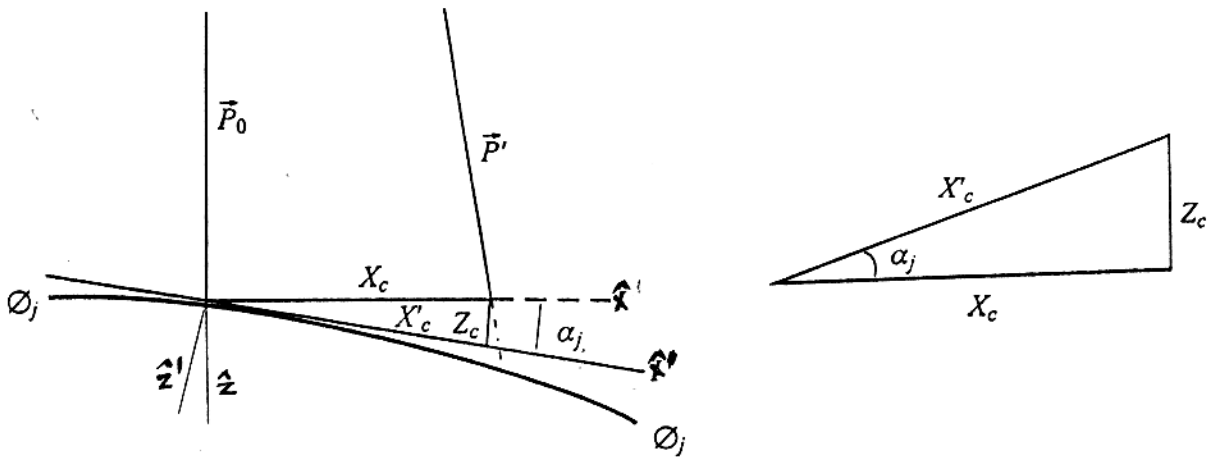


Figura B.4 - Projeção desde plano paralelo até plano tangente à interface posterior

$$\lambda = \frac{V_j x \tan(\alpha_j)}{1 - V_j p_x \tan(\alpha_j)}, \quad (\text{B.9})$$

substituindo a equação B.9 na equação B.3 se obtém

$$\begin{bmatrix} \vec{x}_c \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{V_j \tan(\alpha_j) \vec{x}}{1 - V_j p_x \tan(\alpha_j)} \begin{bmatrix} \vec{p} \\ V_j^{-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.10})$$

Fazendo uma expansão em série de Taylor da expressão  $[1 - V_j p_x \tan(\alpha_j)]^{-1}$  e tomando apenas o primeiro termo

$$\frac{x}{1 - V_j p_x \tan(\alpha_j)} \simeq x(1 + V_j p_x \tan(\alpha_j)). \quad (\text{B.11})$$

Tomando em conta que  $V_j p_x \tan(\alpha_j) \ll 1$ , a equação (B.10) fica

$$\begin{bmatrix} \vec{x}_c \\ z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ 0 \end{bmatrix} + [x + V_j x p_x \tan(\alpha_j)] V_j \tan(\alpha_j) \begin{bmatrix} \vec{p} \\ V_j^{-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

Considera-se agora o raio projetado sobre a superfície tangente mencionada, é feita uma rotação sobre o eixo  $\hat{y}$ , o operador neste caso segundo (B.1) é

$$\begin{aligned}\hat{x}' &= \cos(\alpha_j)\hat{x} + \sin(\alpha_j)\hat{z}, \\ \hat{z}' &= -\sin(\alpha_j)\hat{x} + \cos(\alpha_j)\hat{z}, \\ \hat{y}' &= \hat{y}.\end{aligned}\tag{B.13}$$

Este operador determina as coordenadas no novo sistema

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos(\alpha_j) + z \sin(\alpha_j) \\ y \\ -x \sin(\alpha_j) + z \cos(\alpha_j) \end{bmatrix},\tag{B.14}$$

com  $z = x \tan(\alpha_j)$ , e se substituímos na equação (B.14)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\cos(\alpha_j)} [\cos^2(\alpha_j) + \sin^2(\alpha_j)] \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\cos(\alpha_j)} \\ y \\ 0 \end{bmatrix}.\tag{B.15}$$

O operador não modifica a coordenada  $z$  portanto ele se resume a

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\cos(\alpha_j)} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.\tag{B.16}$$

Se aplicamos o mesmo procedimento para o vetor vagariedade, se obtém o seguinte resultado  $\Delta \vec{P} = \vec{P} - \vec{P}_o = \begin{bmatrix} \vec{p} - \vec{p}_o \\ p_x - p_{x_0} \end{bmatrix}$  é pela condição  $P_x \simeq V_j^{-1}$  se segue que  $\Delta P_x = 0$ , e em consequência

$$\begin{bmatrix} \Delta p'_x \\ \Delta p'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_j) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}.\tag{B.17}$$

Considerando as equações (B.16) e (B.17) o operador se reduz a

$$\begin{bmatrix} \Delta \vec{x}' \\ \Delta \vec{p}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}^{-1}(\alpha_j) & \underline{0} \\ \underline{0} & \mathcal{I}(\alpha_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \vec{x} \\ \Delta \vec{p} \end{bmatrix},\tag{B.18}$$

no qual o operador  $\mathcal{I}(\alpha_j)$  é definido como

$$\mathcal{I}(\alpha_j) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_j) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.\tag{B.19}$$

#### B.4 OPERADOR PROJEÇÃO SOBRE A SUPERFÍCIE POSTERIOR

O raio será transferido desde a superfície tangente à interface posterior no ponto de interseção do raio central até a interface posterior, Figura B.5. Na vizinhança do raio central, a interface  $\Phi_j$  se aproxima a um polinômio de segundo grau, sob a forma

$$\Phi_j(x, y, z) = \frac{\vec{X}^T \underline{K} \vec{X}}{2}. \quad (\text{B.20})$$

No novo sistema de coordenadas fixo no raio central o vetor unitário  $\hat{z}$  tem a direção do

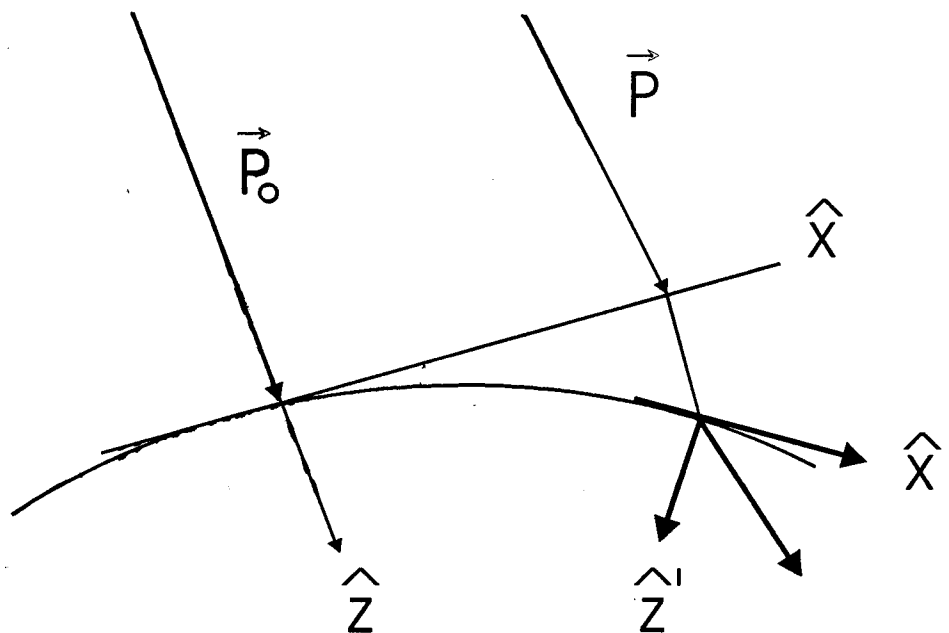


Figura B.5 - Transferência desde plano normal à superfície posterior até a interface posterior da camada

vetor normal à interface, determinado a partir do gradiente da função polinomial definida em (B.20)

$$\hat{z}' = \frac{\nabla \Phi_j}{|\nabla \Phi_j|} = \frac{1}{\sqrt{(\underline{K}_j \vec{X})^2 + 1}} \begin{bmatrix} -\underline{K}_j \vec{X} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.21})$$

Com a aproximação  $\sqrt{(\underline{K}_j \vec{X})^2 + 1} \approx 1$  o vetor unitário é determinado

$$\hat{z}' = [-(\underline{K}_j \vec{X})_x, -(\underline{K}_j \vec{X})_y, 1]. \quad (\text{B.22})$$

Os vetores unitários definidos como  $\hat{x}' = (a, b, c)^T$  e  $\hat{y}' = (d, e, f)^T$  no novo sistema de coordenadas satisfazem a relação  $\hat{z}' = \hat{x}' \times \hat{y}'$ .

Pela fato de  $\hat{x}' \cdot \hat{y}' = 0$

$$c = a(\underline{K}_j \vec{X})_x + b(\underline{K}_j \vec{X})_y, \quad (\text{B.23})$$

e pela condição  $\hat{y}' \cdot \hat{z}' = 0$

$$f = d(\underline{K}_j \vec{X})_x + e(\underline{K}_j \vec{X})_y. \quad (\text{B.24})$$

Como  $\hat{x}' \cdot \hat{x}' = 1$  então  $1 = a^2 + b^2 + c^2$  e na aproximação linear

$$b = \pm \sqrt{1 - a^2 - c^2} \simeq \sqrt{1 - a^2}. \quad (\text{B.25})$$

Como  $\hat{y}' \cdot \hat{y}' = 1$  então  $1 = d^2 + e^2 + f^2$  e pela aproximação

$$e = \pm \sqrt{1 - d^2 - f^2} \simeq \sqrt{1 - d^2}. \quad (\text{B.26})$$

Por serem ortonormais  $\hat{x}' \cdot \hat{y}' = 0$  e  $\hat{x}' \cdot \hat{y}' = 0$ , do qual se segue que  $ad + be + cf = 0$ , e na aproximação  $ad + be \approx 0$ , substituindo  $b$  e  $e$

$$ad = -\sqrt{1 - a^2} \sqrt{1 - d^2} \quad (\text{B.27})$$

Tomando o quadrado em ambos os lados e simplificando

$$1 = a^2 + d^2 \quad (\text{B.28})$$

Se tomamos  $a = 1$  resulta  $d = 0$ ,  $b = 0$ ,  $c = (\underline{K}_j \vec{X})_x$ ,  $e = \pm 1$  e  $f = \pm (\underline{K}_j \vec{X})_y$  e substituindo

$$\hat{x}' = (a, b, c) = [1, 0, (\underline{K}_j \vec{X})_x], \quad (\text{B.29})$$

$$\hat{y}' = (d, e, f) = [0, \pm 1, \pm (\underline{K}_j \vec{X})_y], \quad (\text{B.30})$$

$$\hat{z}' = (a, b, c) = [-(\underline{K}_j \vec{X})_x, (\underline{K}_j \vec{X})_y, 1]. \quad (\text{B.31})$$

Resumindo, o operador que realiza a anterior transformação

$$\underline{\Theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & (\underline{K}_j \vec{X})_x \\ 0 & 1 & (\underline{K}_j \vec{X})_y \\ -(\underline{K}_j \vec{X})_x & -(\underline{K}_j \vec{X})_y & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.32})$$

Como se demonstrou que  $\vec{x}'_c = \vec{x}$  e  $z_x = 0$  então  $\begin{bmatrix} \vec{x}' \\ z' \end{bmatrix} = \underline{\Theta} \begin{bmatrix} \vec{x} \\ 0 \end{bmatrix}$

Aplica-se o operador sobre o vetor vagarosidade, para o qual se apresenta da seguinte forma

$$\vec{P} = \vec{P}_o + \Delta\vec{P} = \begin{bmatrix} V_j^{-1} \sin(\alpha_j) + \Delta P_x \\ \Delta P_y \\ V_j^{-1} \cos(\alpha_j) + \Delta P_z \end{bmatrix},$$

e pela definição do operador de projeção sobre a superfície posterior

$$\vec{P}' = \underline{\Theta}\vec{P} = \begin{bmatrix} \sin(\alpha_j) + \Delta P_x + (\underline{K}_j \vec{X})_x (V_j^{-1} \cos(\alpha_j) + \Delta P_z) \\ \Delta P_y + (\underline{K}_j \vec{X})_y (V_j^{-1} \cos(\alpha_j) + \Delta P_z) \\ P'_z \end{bmatrix}, \quad (\text{B.33})$$

$$\Delta\vec{P}' = \vec{P}' - \vec{P}'_o = \begin{bmatrix} \Delta P_x + V_j^{-1} \cos(\alpha_j) (\underline{K}_j \vec{X})_x \\ \Delta P_y + V_j^{-1} \cos(\alpha_j) (\underline{K}_j \vec{X})_y \end{bmatrix} = \Delta P + V_j^{-1} \cos(\alpha_j) (\underline{K}_j \vec{X}). \quad (\text{B.34})$$

A equação anterior nos permite concluir que a transformação que projeta o raio desde a superfície tangente até a superfície posterior é

$$\begin{bmatrix} \Delta\vec{X}' \\ \Delta\vec{P}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ V_j^{-1} \cos(\alpha_j) \underline{K}_j & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\vec{X} \\ \Delta\vec{P} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.35})$$

Define-se um operador de projeção sobre a interface como o produto dos operadores (B.18) e (B.35), então

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ V_j^{-1} \cos(\alpha_j) \underline{K}_j & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\tau}^{-1}(\alpha_j) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\tau}(\alpha_j) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.36})$$

Calculando a inversa da anterior

$$\underline{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{\tau}^{-1}(\alpha_j) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\tau}(\alpha_j) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ V_j^{-1} \cos(\alpha_j) \underline{K}_j & \underline{I} \end{bmatrix}^{-1}, \quad (\text{B.37})$$

$$\underline{F}^{-1} = \begin{bmatrix} \underline{\tau}(\alpha_j)^t & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\tau}^{-t}(\alpha_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ -V_j^{-1} \cos(\alpha_j) \underline{K}_j & \underline{I} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.38})$$

e pela definição das matrizes  $\underline{K}_j^t = \underline{K}_j$  e  $\underline{\tau}_j^t(\alpha_j) = \underline{\tau}_j(\alpha_j)$ , e se além disso se aplica a lei de Snell entre o raio incidente na interface e o raio transmitido para a seguinte camada  $V_{j+1} \cos(\alpha_j) = V_j \cos(\beta_{j+1})$ , então

$$\begin{bmatrix} \Delta X' \\ \Delta P' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau^t \beta_{(j+1)} & \underline{0} \\ \underline{0} & \tau^{-t}(\beta_{j+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ -V_j^{-1} \cos(\beta_{j+1}) \underline{K}_j & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta P \end{bmatrix}. \quad (\text{B.39})$$

Ao reconsiderar o operador de transferência entre as duas interfaces, como composto pelo produto dos operadores de transferência entre interfaces planas com o produto entre os operadores de projeção sobre a superfície tangente e projeção sobre à interface mesma, se chega a

$$\begin{bmatrix} \Delta X' \\ \Delta P' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{I} & V_j S_j \underline{I} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau^t(\beta_{j+1}) & \underline{0} \\ \underline{0} & \tau^{-t}(\beta_{j+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ -V_j^{-1} \cos(\beta_{j+1}) \underline{K}_j & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta P \end{bmatrix}. \quad (\text{B.40})$$

A equação (B.40) representa o operador de transferência entre as interfaces que envolvem uma camada, quando a camada anterior é plana e perpendicular ao raio central. No caso de várias camadas o operador de transferência será aplicado tantas vezes quanto o número de camadas.

$$\begin{bmatrix} \Delta X' \\ \Delta P' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A}_o & \underline{B}_o \\ \underline{C}_o & \underline{D}_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta P \end{bmatrix} = \prod_{j=1}^n \underline{\Phi}_j \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta P \end{bmatrix}, \quad (\text{B.41})$$

onde

$$\underline{\Phi}_j = \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ \frac{1}{V_j} \underline{K}_j & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau^{-1}(\alpha_j) & \underline{0} \\ \underline{0} & \tau(\alpha_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{D}(\phi_j) & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{D}(\phi_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I} & V_j S_j \underline{I} \\ \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau(\beta_j) & \underline{0} \\ \underline{0} & \tau^{-1}(\beta_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I} & \underline{0} \\ -\frac{\cos(\beta_j)}{V_j} \underline{K}_{j-1} & \underline{I} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.42})$$

## C - SOLUÇÃO DO PROBLEMA LINEAR INVERSO

Um sistema algébrico linear com  $n$ -incógnitas  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  relacionadas através de  $m$ -equações se expressa como

$$\begin{aligned} g_{11}x_1 + g_{12}x_2 + \dots + g_{1n}x_n &= d_1, \\ g_{21}x_1 + g_{22}x_2 + \dots + g_{2n}x_n &= d_2, \\ &\dots \\ g_{r1}x_1 + g_{r2}x_2 + \dots + g_{rn}x_n &= d_r, \end{aligned} \tag{C.1}$$

onde  $a_{i,j}$  e  $d_i$  tem valores conhecidos. Quando o número de equações é maior do que o número de incógnitas o problema se diz sobre-determinado. Matricialmente (C.1) é representada por

$$\underline{G} \cdot \vec{m} = \vec{d}. \tag{C.2}$$

A idéia é estimar os parâmetros do modelo  $(\vec{m}^{est})$  de modo que os dados preditos  $(\vec{d}^{pre})$  sejam aproximados o melhor possível os dados observado  $(\vec{d}^{obs})$ . Para cada observação se tem um erro  $\vec{\epsilon} = \vec{d}^{obs} - \vec{d}^{pre}$ , e a melhor solução seria aquela que leve à mínima medida ou norma do erro  $\|L(\epsilon)\|$ . As normas mais utilizadas são  $\|L_1\| = \sum |\epsilon_i|$  e  $\|L_2\| = \sqrt{\sum |\epsilon_i|^2}$ , sendo esta última chamada de erro quadrático. A seleção da norma supõe que os dados seguem algum tipo de estatística, assim a norma de ordem 2 implica que os dados devem obedecer a uma distribuição Gaussiana. Se a minimização do erro é no sentido do mínimo quadrático a solução de (C.2) é dada pela chamada inversa generalizada de Moore-Penrose (MENKE, 1984):

$$\underline{G}^t \underline{G} \vec{m} = \underline{G}^t \vec{d}. \tag{C.3}$$

Note-se que esta equação é uma equação matricial quadrática  $(m \times m)$  para os parâmetros desconhecidos do modelo. Supondo que existe  $[\underline{G}^t \underline{G}]^{-1}$  obtemos a seguinte solução

$$\vec{m}^{est} = [\underline{G}^t \underline{G}]^{-1} \underline{G}^t \vec{d}. \tag{C.4}$$

No caso da norma de ordem 1, o problema é minimizar  $\sum |\epsilon_i|$  em relação a  $\vec{m}$ , o problema se estabelece como um problema de programação linear (ARTHANARI & DODGE, 1981):

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } \sum |\epsilon_i|, \\ & \text{Restrito a : } \underline{G} \vec{m} - \vec{\epsilon} = \vec{d}, \\ & \vec{\epsilon}, \vec{m} \subset \text{Reais}. \end{aligned} \tag{C.5}$$

Este problema foi resolvido utilizando o método Simplex e Simplex Revisado da Programação Linear (DANTZIG, 1963).

## C.1 REGRESSÃO A UMA PARABOLA

Nesta situação se procura ajustar os dados a uma parábola, assim a equação  $\underline{G}\vec{m} = \vec{d}$  tem a forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & z_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}. \quad (\text{C.6})$$

A solução em mínimos quadrados de (C.6) vem dada pela expressão da inversa generalizada  $\vec{m} = [\underline{G}^t \underline{G}]^{-1} \underline{G}^t \vec{d}$ , substituindo e multiplicando, obtemos:

$$\vec{m} = \begin{bmatrix} n & \sum z_i & \sum z_i^2 \\ \sum z_i & \sum z_i^2 & \sum z_i^3 \\ \sum z_i^2 & \sum z_i^3 & \sum z_i^4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum d_i \\ \sum z_i d_i \\ \sum z_i^2 d_i \end{bmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

## C.2 VARIÂNCIA DOS PARÂMETROS DO MODELO ESTIMADO

Os dados geralmente contém ruídos que causam erros na estimação dos parâmetros do modelo. Calcularemos como os erros nos dados estão relacionado com os erros em  $\vec{m}^{est}$ . Para isto assumimos que os dados têm uma distribuição cuja matriz de covariância é  $[cov \vec{d}]$ , as estimativas dos parâmetros terão uma distribuição cuja matriz de covariância é  $[cov \vec{m}] = \underline{M} \vec{d} \underline{M}^t$ , onde  $\underline{M}$  é a matriz inversa generalizada de Moore-Penrose. Se os dados não estão correlacionados e têm variância  $\sigma_d^2$ , então a solução de mínimos quadrados terá a matriz de covariância:

$$[cov \vec{m}] = [[\underline{G}^t \underline{G}]^{-1} \underline{G}] \sigma_d^2 [[\underline{G}^t \underline{G}]^{-1} \underline{G}]^t = \sigma_d^2 [\underline{G}^t \underline{G}]^{-1}. \quad (\text{C.8})$$

A matriz de covariância dos parâmetros do modelo é controlada pela matriz de covariância dos dados, e pela inversa generalizada.

A introdução da informação a priori pode garantir a obtenção a solução no problema de mínimos quadrados. A informação é uma restrição nos valores que os parâmetros poderão assumir, que se apresenta como o caso onde um parâmetro deve tomar um valor constante conhecido ou multiplicando por uma matriz de ponderadores, dando um valor maior aqueles que apresentam maior estabilidade.