



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E CIENTÍFICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS
DOUTORADO ACADÊMICO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICAS

JOSÉ DOS SANTOS GUIMARÃES FILHO

SISTEMATIZAÇÃO DAS TÉCNICAS ARITMÉTICAS NA EUROPA DO SÉCULO XIII

Belém
2024

JOSÉ DOS SANTOS GUIMARÃES FILHO

SISTEMATIZAÇÃO DAS TÉCNICAS ARITMÉTICAS NA EUROPA DO SÉCULO XIII

Tese Doutoral apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM) da Universidade Federal do Pará, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas.

Área de concentração: Educação Matemática

Linha de pesquisa: História, Filosofia e Estudos Culturais

Orientador: Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg

Belém
2024

Revisão

Margarida Maria Knobbe

Design Editorial

Luis Andrés Castillo Bracho

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo autor

G963s Guimarães Filho, José dos Santos.

Sistematização das Técnicas Aritméticas na Europa do século XIII / José dos Santos Guimarães Filho. — 2024.

138 f. : il. color

Orientador: Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg

Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2024.

1. Matemática – História. 2. Aritméticas – Métodos e técnicas. 3. Aritmética – Século XIII. 4. Liber Abaci. I. Título.

CDD 370

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

GUIMARÃES FILHO, José dos Santos. **Sistematização das Técnicas Aritméticas na Europa do século XIII**. 2024. 138f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2024.

SISTEMATIZAÇÃO DAS TÉCNICAS ARITMÉTICAS NA EUROPA DO SÉCULO XIII

Tese Doutoral apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas, área de concentração: Educação Matemática.

Aprovada em: 28/02/2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma – Orientador – Presidente
Universidade Federal do Pará

Prof. Dr. Elielson Ribeiro de Sales – Membro Titular Interno
Universidade Federal do Pará

Prof. Dr. Paulo Vilhena da Silva – Membro Titular Interno
Universidade Federal do Pará

Prof. Dr. Fumikazu Saito – Examinador Externo
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Prof. Dr. Miguel Chaquiam – Examinador Externo
Universidade do Estado do Pará

AGRADECIMENTOS

Não tenho como iniciar meus agradecimentos, sem agradecer ao Rei do universo, Salvador e Senhor da minha vida, o qual me manteve e me susteve até o momento. YHWH, agradeço por me conduzir em cada pensamento, por renovar minha mente sempre que necessário, em abençoar minhas mãos ao escrever em cada folha, cada parágrafo, oração, linha e letra.

Agradeço por usar pessoas ao meu redor, quando os meus ouvidos não te foram atentos, pela misericórdia e compaixão de ser conduzido a pessoas que me ajudaram dando forças quando estive fraco, que me deram limites quando estava soberbo, que me deram carinho quando estava carente, que me deram alegria de sorrir quando estava triste, que me ouviram quando precisei falar ou desabafar, que me orientaram quando estava sem um rumo preciso, que me deram referências quando estava sem embasamento teórico, que me ajudaram a encontrar materiais na internet quando estava à deriva pela “rede”, que encontraram passagens quando precisei viajar, que me deram abrigo em terra estranha, que me alimentaram quando estava desejando comer, que fizeram minhas vontades só para eu ficar mais confortável, que me ajudaram a melhorar o meu currículo Lattes para não ficar para trás... (pausa, respiração forte e algumas lágrimas) por Deus colocar pessoas esperadas e inesperadas em minha vida acadêmica, profissional, social, familiar e congregacional.

Gostaria de evidências algumas dessas pessoas, não para exaltá-las, mas para expressar a gratidão pela ajuda que recebi!

Agradeço aos meus pais, José dos Santos Guimarães, que gentilmente me deu seu nome por não lembrar no ato do registro de nascimento o nome escolhido por minha mãe, por razões que desconhecemos, mas que desconfiamos (provavelmente o mijo do nascimento) e Lúcia Borges Guimarães. Não tenho como agradecer tanta dedicação e cuidado, quantas abnegações e restrições passaram para que eu e minha irmã tivéssemos sempre o melhor!

Devo a eles minha profissão e dedicação, pois me ensinaram a fazer o melhor sempre, hoje maduro (não o suficiente) entendo a influência dos dois em minha vida, meu pai exímio motorista de profissão e professor de direção da família (que o DETRAN não ouça) nunca permitiu que eu desse menos do que o máximo na direção, pois, segundo ele: carro é uma arma! Nunca permitiu se quer que eu estacionasse desalinhado ou com as rodas sem estarem na posição correta.

Minha mãe, costureira e professora e nas horas vagas tesoureira... mulher de um pouco menos de um metro e meio de altura, mas que se agiganta em suas atitudes de deixar tudo perfeito, reclamação? Sim! Mas, não seria uma mãe se não o fizesse! Em minha infância não ensinou a penas a mim e minha irmã, mas muitas pessoas, provavelmente todas que queriam. Sem conhecimento técnico e acadêmico, pois não havia completado seu ensino fundamental, vinda do interior teve que

trabalhar muito jovem, mas não lhe faltava criatividade e esforço para que cada um de seus alunos aprendesse a matéria ensinada!

Mas, como disse, esta mulher se agiganta em suas atitudes! Quando estava em idade de autonomia de ficar em casa depois da escola, ela saía para continuar seus estudos, e adivinhem? Não somente terminou, mas se formou em Magistério! Deverasmente minha mãe é uma professora!

Meus Pais, muito obrigado!

Agradeço também, aos meus pais de coração, que são meus sogros, que torcem diariamente por mim, e que não negam forças em me ajudar sempre que preciso.

Agradeço as minhas mães Maria Francisca e Elizabeth, tias de sangue e mães de coração, as quais pulsa uma vibração incomensurável de me ver crescer e vencer.

Agradeço imensamente a minha irmã, Margareth por me ensinar a amar, por ser minha revisora incansável, por me defender quando não pude, por ser a líder de torcida! Amo-te! (Com professora de português não podemos vacilar!)

Agradeço a professora Dr^a. Maria José que um dia abriu uma porta que não se fechou mais para mim!

Agradeço ao Professor Dr. Natanael Freitas Cabral que um dia me ensinou o que é epistemologia, termo esse que me acompanha até hoje, me fez ver a ciência em uma perspectiva diferente e que me deu o endereço do Grupo de Estudos e Pesquisa em História e Ensino da Matemática (GEHEM) – porta aberta pela professora Dr^a. Maria José – o qual me abrigou, recepcionou, ajudou, ensinou, educou, reeducou, oportunizou e direcionou em quase todo o meu percurso acadêmico. Estendo minha gratidão a toda família GEHEM, em nome da professora Dr^a. Maria Lúcia, que sempre torce por nós e nos orienta em tudo que precisamos.

Agradeço ao meu orientador e pai acadêmico, professor Dr. João Cláudio Brandemberg, por acreditar em mim antes de saber quem de fato eu era, sempre me orientando nas áreas acadêmica, profissional e pessoal. Ao Brand, ilustre orientador, professor, amigo e pai, meu muito obrigado pelas palavras sempre encorajadoras, por estar sempre disponível para ajudar quando precisei e por sempre torcer pelo meu melhor. Agradeço pela paciência, pela ajuda a amadurecer academicamente e profissionalmente.

Agradeço pela oportunidade de estudar na biblioteca do Instituto de Educação Matemática e Científica, um espaço disponível para todos, extremamente agradável e adequado para a produção científica, lugar esse, que me fez conhecer duas bibliotecárias maravilhosas! Dona Kátia e Heloísa, meu muito obrigado pelas conversas, orientações, conselhos, suportes técnicos e histórias de vida, que me fizeram admirá-las.

Obrigado meus amigos e parceiros de biblioteca, Ivonne Sánchez, José Erildo e Luis Castillo que entre conversas e arepas aprendemos na frase “Não te bate” muitas coisas, dentre elas, destaco o hábito saudável do companheirismo e a alegria de estar junto de pessoas que torcem verdadeiramente por você e o quanto isso nos faz sentir bem em meio a tantas cobranças e prazos que a vida acadêmica nos coloca.

Agradeço aos professores doutores Carlos Aldemir Farias e Iran Abreu Mendes que formam uma dupla inestimável a comunidade científica, os quais, me apoiaram com muitas orientações, informações, receitas e conversas divertidas pelos corredores da vida acadêmica, que em atos simples oferecem grandes ensinamentos.

Agradeço à banca examinadora, Prof. Dr. Fumikazu Saito por tantas contribuições e dedicação à leitura, as quais renderam muitos refinamentos para tese. Prof. Dr. Miguel Chaquiam, por sua solicitude e generosidade e por me ajudar em minha trajetória acadêmica. Prof. Dr. Elielson Sales, pelo olhar sempre humanizado por cada aluno. Prof. Dr. Paulo Vilhena, pelas propostas de ajustes que enriqueceram o trabalho.

Não poderia deixar de agradecer a professora e nutricionista Me. Iane Guimarães, minha melhor amiga, companheira de aventuras, secretária particular, nutricionista e esposa, agradeço pelo incentivo, ajuda, cuidado que tem tido por mim, pela cumplicidade que temos em cada ato. Agora é sua vez! Te amo!

Agradeço a Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo fomento a minha pesquisa.

Agradeço ao Ensino Público de Qualidade que vivenciei em todos os níveis de ensino, que me fazem não esquecer de onde eu vim e para que estou aqui!

Termino esse agradecimento dizendo uma frase que vi em uma loja de presentes referente ao título de uma música escrita pelo cantor e compositor Wagão: Nunca foi sorte, sempre foi Deus!

Muito obrigado!

RESUMO

Observa-se que, no século XIII, os europeus usavam o ábaco e os algarismos romanos. O ábaco, para operacionalizar seus problemas, e os algarismos romanos, para registrá-los. Naquele mesmo período entrou em cena um matemático italiano chamado Leonardo Fibonacci (1170 – 1240) que trouxe, após suas viagens pelo Oriente, uma aritmética que não havia sido divulgada amplamente na Europa, bem como cifras indianas e seu sistema de numeração posicional decimal, que foram organizados e sistematizados no *Liber Abaci*. Nessas circunstâncias, questiona-se: quais as demandas atendidas no contexto da Europa do século XIII pela sistematização dos saberes aritméticos no *Liber Abaci*, escrito por Leonardo Fibonacci? Na busca por resposta a esse questionamento, objetiva-se nesta pesquisa identificar demandas atendidas pela sistematização do conjunto de práticas aritméticas no *Liber Abaci* que estavam em produção e uso na Europa do século XIII. Para tanto, recorreu-se a uma proposta qualitativa, a qual permitiu um processo reflexivo e analítico dos aspectos historiográficos da implementação dos métodos e técnicas aritméticas na Europa no século XIII, guiado pelas três esferas de análise da historiografia atualizada. Esses processos reflexivos mostraram que o conjunto de práticas aritméticas, dispostas e organizadas no *Liber Abaci*, estava alcançando o clero com a utilização da língua litúrgica e o auxílio na exegese bíblica e contagem de datas importantes para a cristandade. A organização desse livro, que está disposto do simples para o complexo, mostra sua interação com tratados mais teóricos, um dos indícios que estava na direção de alcançar as universidades. Sua sistematização mostra uma otimização exequível em contas de valores elevados, assim podia ser utilizado para a movimentação de grandes quantidades, seja de bens ou valores monetários, oferecendo à sociedade um critério claro e confiável nas contas, o que ajudava a solucionar problemas comerciais, agrários e tributáveis. À vista disso, a sistematização das técnicas aritméticas na Europa do século XIII contidas no *Liber Abaci* estava atendendo demandas religiosas, acadêmicas, sociais e comerciais, urbanas ou mercantis.

Palavras-chave: Matemática – História. Aritméticas – Métodos e técnicas. Aritmética – Século XIII. *Liber Abaci*.

ABSTRACT

It is observed that, in the 13th century, Europeans used the abacus and Roman numerals. The abacus, to operationalize your problems, and the Roman numerals, to record them. In that same period, an Italian mathematician called Leonardo Fibonacci (1170 – 1240) came onto the scene who, after his travels in the East, brought an arithmetic that had not been widely disseminated in Europe, as well as Indian ciphers and their decimal positional number system, which were organized and systematized in *Liber Abaci*. In these circumstances, the question arises: what demands were met in the context of 13th century Europe by the systematization of arithmetic knowledge in the *Liber Abaci*, written by Leonardo Fibonacci? In the search for an answer to this question, the objective of this research is to identify demands met by the systematization of the set of arithmetic practices in *Liber Abaci* that were in production and use in Europe in the 13th century. To this end, a qualitative proposal was used, which allowed a reflective and analytical process of the historiographical aspects of the implementation of arithmetic methods and techniques in Europe in the 13th century, guided by the three spheres of analysis of updated historiography. These reflective processes showed that the set of arithmetic practices, arranged and organized in *Liber Abaci*, was reaching the clergy with the use of liturgical language and assistance in biblical exegesis and counting important dates for Christianity. The organization of this book, which is arranged from simple to complex, shows its interaction with more theoretical treatises, one of the signs that it was in the direction of reaching universities. Its systematization shows a feasible optimization in accounts with high values, so it could be used to move large quantities, whether of goods or monetary values, offering society a clear and reliable criterion in the accounts, which helped to solve commercial and agrarian problems. and taxable. In view of this, the systematization of arithmetic techniques in 13th century Europe contained in the *Liber Abaci* was meeting religious, academic, social and commercial, urban or mercantile demands.

Keywords: Mathematics – History. Arithmetic – Methods and techniques. Arithmetic – 13th century. *Liber Abaci*.

RESUMEN

Se observa que, en el siglo XIII, los europeos utilizaban el ábaco y los números romanos. El ábaco, para operacionalizar tus problemas, y los números romanos, para registrarlos. En ese mismo período entró en escena un matemático italiano llamado Leonardo Fibonacci (1170 – 1240) quien, luego de sus viajes por Oriente, trajo una aritmética que no había sido ampliamente difundida en Europa, así como las cifras indias y sus decimales posicionales. sistema numérico, que fueron organizados y sistematizados en *Liber Abaci*. En estas circunstancias, surge la pregunta: ¿qué demandas se cumplieron en el contexto de la Europa del siglo XIII con la sistematización del conocimiento aritmético en el *Liber Abaci*, escrito por Leonardo Fibonacci? En la búsqueda de una respuesta a esta pregunta, el objetivo de esta investigación es identificar las demandas atendidas por la sistematización del conjunto de prácticas aritméticas del *Liber Abaci* que se producían y utilizaban en Europa en el siglo XIII. Para ello, se utilizó una propuesta cualitativa, que permitió un proceso reflexivo y analítico de los aspectos historiográficos de la implementación de métodos y técnicas aritméticas en la Europa del siglo XIII, guiado por las tres esferas de análisis de la historiografía actualizada. Estos procesos reflexivos mostraron que el conjunto de prácticas aritméticas, dispuestas y organizadas en el *Liber Abaci*, llegaban al clero con el uso del lenguaje litúrgico y la asistencia en la exégesis bíblica y el conteo de fechas importantes para el cristianismo. La organización de este libro, que va de lo simple a lo complejo, muestra su interacción con tratados más teóricos, una de las señales de que iba en dirección a llegar a las universidades. Su sistematización muestra una posible optimización en cuentas con valores elevados, por lo que podría utilizarse para mover grandes cantidades, ya sean de bienes o de valores monetarios, ofreciendo a la sociedad un criterio claro y confiable en las cuentas, que ayudara a resolver problemas comerciales y agrarios. imponible. Ante ello, la sistematización de las técnicas aritméticas en la Europa del siglo XIII contenida en el *Liber Abaci* iba atendiendo a demandas religiosas, académicas, sociales y comerciales, urbanas o mercantiles.

Palabras clave: Matemáticas – Historia. Aritmética – Métodos y técnicas. Aritmética – siglo XIII. *Liber Abaci*.

LISTA DE FIGURA

Figura 1 – Delimitação do Tema.....	24
Figura 2 – O campo da História.	25
Figura 3 – O <i>iceberg</i> da historiografia.....	26
Figura 4 – As três esferas de análise.	30
Figura 5 – As três esferas de análise de um documento.....	30
Figura 6 – Esferas de análise da Historiografia Atualizada	31
Figura 7 – Octógono da Educação.....	45
Figura 8 – <i>Liber Abaci</i>	62
Figura 9 – Leonardo Fibonacci.	63
Figura 10 – Capa do <i>Liber Abaci</i> da edição de 1857.....	64
Figura 11 – Lombada da quinta classe.	65
Figura 12 – Recorte da apresentação das cifras indianas.	68
Figura 13 – Valoração posicional.	68
Figura 14 – Leitura dos números com a regra das varas de três.....	69
Figura 15 – Uma forma de datilologia para guardar na mão.....	70
Figura 16 – Recorte da tabela de adição e multiplicação do capítulo I.....	71
Figura 17 – Exemplos de multiplicações do capítulo II.	72
Figura 18 – Exemplo de multiplicação por zero.	72
Figura 19 – Método do tabuleiro de xadrez.	73
Figura 20 – Técnica da adição por colunas.	73
Figura 21 – Exemplo de contas monetárias e despesas em tabela com <i>Libre, Soldi e Denari</i>	74
Figura 22 – Exemplos de subtração.....	74
Figura 23 – Recorte da tabela de divisão.	75
Figura 24 – Exemplo de multiplicação com quebrados.	76
Figura 25 – Exemplos de multiplicação com mais de uma rajada sob uma vara.....	76
Figura 26 – Quadro de adição de frações.	77
Figura 27 – Exemplo presente na quarta parte do capítulo VI.....	77
Figura 28 – Exemplo presente na quinta parte do capítulo VI.	78
Figura 29 – Exemplo da primeira particularidade presente na quarta parte do capítulo VI.....	78
Figura 30 – Exemplo da segunda particularidade presente na quarta parte do capítulo VI.	79
Figura 31 – Exemplo da multiplicação presente na sexta parte do capítulo VI.....	79
Figura 32 – Exemplo da primeira particularidade presente na sexta parte do capítulo VI.	79
Figura 33 – Exemplo da segunda particularidade presente na sexta parte do capítulo VI.....	80
Figura 34 – Exemplo da terceira particularidade presente na sexta parte do capítulo VI.	80
Figura 35 – Exemplo da quarta particularidade presente na sexta parte do capítulo VI.	80

Figura 36 – Exemplo da quinta particularidade presente na sexta parte do capítulo VI.	81
Figura 37 – Exemplo de multiplicação presente na sétima parte do capítulo VI.	81
Figura 38 – Exemplo presente na oitava parte do capítulo VI.	82
Figura 39 – Exemplo de adição de números fracionários.....	83
Figura 40 – Exemplos de adição e subtração presentes na segunda parte do capítulo VII.	83
Figura 41 – Adição com a regra de composição dos números.....	84
Figura 42 – Exemplos de divisão presente na terceira parte do capítulo VII.	84
Figura 43 – Exemplos de adição, subtração e divisão presentes na quarta parte do capítulo VII.	85
Figura 44 – Exemplos de adição, subtração e divisão presentes na quinta parte do capítulo VII.	86
Figura 45 – Exemplo para encontrar o preço dos rolos.....	87
Figura 46 – Exemplo para encontrar a quantidade dos rolos.	87
Figura 47 – Exemplo do capítulo VIII, com ajuste monetário.....	88
Figura 48 – Exemplo presente na primeira parte do capítulo IX.	89
Figura 49 – Exemplo com câmbio.	89
Figura 50 – Exemplo com o método de troca.	90
Figura 51 – Exemplo com o método de negociação.	90
Figura 52 – Exemplo da situação dos cavalos que comem cevada presente no capítulo IX.....	91
Figura 53 – Exemplo do capítulo X para dois sócios.	92
Figura 54 – Exemplo do capítulo X para três sócios.	93
Figura 55 – Exemplo do capítulo X para quatro sócios.	93
Figura 56 – Exemplo do capítulo XI primeira diferença.....	94
Figura 57 – Exemplo do capítulo XI segunda parte.....	95
Figura 58 – Exemplo do capítulo XI terceira diferença.....	96
Figura 59 – Exemplo do capítulo XII primeira parte.....	97
Figura 60 – Exemplo do capítulo XII terceira parte.	99
Figura 61 – Exemplo do capítulo XII quarta parte.....	100
Figura 62 – Composição gráfica do capítulo XV primeira parte.....	106
Figura 63 – Exemplo do capítulo XV da segunda parte.....	107
Figura 64 – Exemplo do capítulo XV terceira parte.	109
Figura 65 – Recortes de diferentes páginas com algumas simbologias.....	109
Figura 66 – Segundo problema do livro <i>De Arismetica</i>	119

SUMÁRIO

1 APENAS UM HISTORNAUTA	14
2 APORTE TEÓRICO E METODOLÓGICO	23
2.1 História e Historiografia.....	23
2.2 Historiografia Atualizada.....	27
2.3 O texto histórico como suporte de uma fonte histórica	34
2.4 Procedimentos metodológicos	36
3 SITUANDO A PESQUISA EM MEIO AO CAMPO DE INVESTIGAÇÃO.....	40
3.1 Sobre a Educação Matemática	41
3.2 O lugar da pesquisa na Educação Matemática	46
4 UM ESTUDO DO LIBER ABACI E SEU CONTEXTO.....	50
4.1 Aspectos contextuais da composição do Liber Abaci	51
4.2 O Liber Abaci.....	62
4.3 Técnicas Aritméticas encontradas no Liber Abaci.....	67
4.3.1 Aritmética básica	68
4.3.2 Aritmética comercial	86
4.3.3 Situações-problemas	97
5 CONSTRUINDO DIÁLOGOS HISTORIOGRÁFICOS.....	111
5.1 Fatores contextuais do Liber Abaci	111
5.2 Demandas atendidas pela sistematização aritmética do Liber Abaci	114
6 ESPETÁCULO DO SOL POENTE	121
REFERÊNCIAS	130
ÍNDICE REMISSIVO	136

1

APENAS UM HISTORNAUTA

Afirmo desde o início deste relatório de pesquisa que não sou um historiador e também não sou um matemático, sou apenas um HistorNauta¹!

Para entender minha assertiva, trago uma inquietação que há algum tempo carrego. Se não sou um historiador, porque não tenho formação em História, e também não sou um matemático, porque minha formação não foi em Bacharelado em Matemática, qual é de fato minha identidade, as características que fazem de mim um pesquisador da/na História da Matemática?

Por vezes, ouvi que era apenas um entusiasta da História e que, por possuir formação docente em Matemática, poderia visualizar histórias das matemáticas. Porém, o que corriqueiramente acontecia era a visualização ou discussões de uma matemática em determinada história. Embora a justificativa de entusiasta, para descrever a minha epistemologia contextual ou minha posição epistêmica, fosse inicialmente satisfatória, não me preenchia, sentia que algo estava faltando.

Mesmo com essa incompletude identitária, sempre estive em busca de um lugar onde pudesse me encontrar de fato. Nessa busca, acabei me tornando um *Bigollo*² pelos ramos da História da Matemática, experimentando novas perspectivas, interagindo com diferentes pensamentos em trânsito que perpassam a história e a cultura, absorvendo experiências únicas oferecidas pelos destinos visitados.

Como *Bigollo*, experimentei muitos pensamentos, mas para a assertiva inicial, trago um conceito de Amílcar Martins³ com o epíteto de ArteNauta. Esse conceito advém, conforme Farias

¹ Será esclarecido na página 11.

² Leonardo Fibonacci (1170 – 1240), em muitas de suas cartas assinava como Bigollo, que quer dizer, possivelmente em dialeto toscano, viajante. Atribuição que o despertou para um mundo matemático que o acompanhou até o final de sua vida, consagrando-o como um dos matemáticos centrais na Idade Média.

³ Amílcar Martins é professor da Universidade Aberta de Portugal (Lisboa). Doutor em Ciências de Educação (Didática das Artes), pela Universidade de Montreal, Canadá. Licenciado no curso de Atores e Encenadores pela Escola Superior de Teatro do Conservatório Nacional de Lisboa. Dedicar-se à pesquisa de grupos étnicos diferenciados e é investigador integrado no Centro de Investigação em Artes e Comunicação (Polo da UAb)

(2017), da atuação de um personagem chamado ArteNauta Amilcarins interpretado por Amílcar Martins. Esse personagem era um viajante que vinha do planeta Z para o planeta Terra para descobrir o território das artes em suas diversas manifestações expressivas.

Esse conceito está na direção de um viajante no universo das artes que, ao ser interligado com a pedagogia de situações⁴, amplia-se com a dimensão performática do ArteNauta, o que faz entrar em cena os papéis na ação docente do pedagogo, de viajante, animador, brincador, contador, educador, curador e pesquisador.

A história, para Amílcar Martins, apresenta-se como um dos papéis na ação docente, fazendo do professor um arte-contador, pois a viagem dá o que contar, transformando-o num História-Nauta. No entanto, para mim, a história, em particular a História da Matemática, apresenta-se não como um papel docente, mas como um universo de experimentações.

Dessa forma, a partir das percepções de ArteNauta, trago a noção que me faz ter uma identidade e um lugar, a noção de HistorNauta. Essa noção está na direção de **um viajante que explora e interage com universo da História da Matemática, testemunhando performances de personagens e suas interações com esse campo de estudo e conhecimento. Essas interações trazem um despertar para a ciência contemporânea e passada, levando à humanização do fazer matemático e gerando uma ação docente de pesquisar, ensinar, contar histórias, viajar, animar, brincar e curar**⁵.

Com o esclarecimento inicial, compartilharei algumas narrativas de minha jornada como *Bigollo*, com o destino de apresentar terras e mares navegados até o cais do porto da presente tese. Mares e terras permitiram aventuras e desventuras, encontros e desencontros, levando-me ao envolvimento com a temática trabalhada neste relatório de pesquisa.

Nessas viagens, carrego algumas preocupações ou questionamentos que, por vezes, se configuraram como barreiras a serem superadas para o amadurecimento acadêmico e profissional. Muitas dessas barreiras foram vividas como acadêmico do curso de Licenciatura Plena em Matemática (sic) na Universidade do Estado do Pará (UEPA), no início de 2010.

Foi no primeiro ano letivo desse curso que tive a oportunidade do primeiro contato com a História da Matemática. Naquele momento, foi apresentada como uma tendência em Educação Matemática. Esse momento me causou estranhezas em compreender o significado de uma tendência de ensino, bem como, de surpresas com novas possibilidades metodológicas.

Desde então, senti a necessidade de investigar melhor esse campo de estudo, rever minhas leituras, ler materiais da área e participar de eventos, como o Encontro Paraense de Educação Ma-

⁴ Perspectiva proposta por Gisèle Barret para a área de Expressão Dramática, com aplicações em outras áreas artísticas ou em outras áreas do saber.

⁵ Uma busca, no sentido de adequar a percepção equivocada que possa haver da Matemática e de sua história.

temática (EPAEM), e alguns outros específicos da área da História da Matemática, como o Seminário Nacional de História da Matemática (SNHM), na tentativa de sanar minhas curiosidades e consolidar conhecimentos.

A participação da disciplina referente à História da Matemática, assim como de eventos, como os já referidos, não foi suficiente para suprir meus questionamentos, dentre os quais apresento alguns: em quais termos a História da Matemática contribui para o ensino de Matemática? Se há potencial didático na História da Matemática, quais são? É possível utilizar a História da Matemática para o ensino de qualquer objeto matemático? Em qualquer nível de instrução? Apenas a História da Matemática é suficiente para superar as barreiras do/no ensino?

Por outro lado, o que me permitiu estudos e discussões sobre a História da Matemática efetivamente foi a oportunidade de participar do Grupo de Estudos e Pesquisa em História e Ensino de Matemática (GEHEM), desde o ano de 2013, que é vinculado ao Programa de Pós-Graduação de Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM) e está sediado no Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI) da Universidade Federal do Pará (UFPA).

Esse grupo proporcionou leituras mais consistentes, bem como a participação em discussões de diversos textos referentes à História da Matemática. Os textos, como a tese doutoral de Miguel (1993), o livro de Wussing (1998), entre outros, permitiram novas compreensões a respeito do tema. O GEHEM oportunizou também a participação ativa em alguns eventos que tratavam da História da Matemática. Esse envolvimento permitiu conhecer autores renomados nessa área, assim como dialogar com pesquisadores, seja pessoalmente ou através de seus trabalhos.

Outra oportunidade foi a construção e publicação de alguns artigos em parceria com alguns colegas participantes do GEHEM em eventos locais, regionais, nacionais e internacionais. Todas essas atividades proporcionaram o amadurecimento e a construção de uma trajetória acadêmica definida na Educação Matemática, de forma mais específica na História da Matemática.

Nessas viagens percorridas, prezei por sanar minhas insatisfações e questionamentos. Um desses questionamentos se refere ao uso da História da Matemática em sala de aula. Muitos trabalhos e percepções em relação a esse campo de pesquisa como tendência metodológica causavam incômodo. Haja vista que esses trabalhos apresentavam a História da Matemática como uma ferramenta didática, mas a História da Matemática ali apresentada não fazia parte do processo de construção do conhecimento e nem eram apresentadas suas potencialidades, fossem didáticas ou pedagógicas, nem mesmo como um organizador prévio dos conteúdos, como indicado por Nunes, Almouloud e Guerra (2010).

Esses pontos abordados até aqui, em relação ao uso da História da Matemática em sala de aula, me levaram a cursar a especialização em Ensino de Matemática, na qual concluí todas as disciplinas e outros requisitos para a integralização, sem a defesa da monografia. Essa especialização,

mesmo não sendo concluída, me proporcionou novas discussões em relação à Educação Matemática e em História da Matemática. As discussões oportunizaram uma compreensão mais adequada quanto à historiografia da Matemática, dentre outros aspectos, como os argumentos questionadores e reforçadores da História da Matemática apresentados por Miguel (1997), que já foram atualizados.

As novas informações referentes à Educação Matemática e à História da Matemática permitiram vislumbrar possibilidades para o uso da História da Matemática. A partir das informações históricas, é possível construir conhecimentos ou noções conceituais e definições de objetos matemáticos no contexto escolar ou acadêmico. Também é possível compreender a História da Matemática como componente metodológico, como proposto por Brandenberg (2010, 2022). Em outros trabalhos de sua autoria, esse pesquisador amadurece essa percepção, além de descrever a pesquisa de textos históricos (Brandenberg, 2021) de um ponto de vista histórico e epistemológico, que coaduna com as ideias de Barros (2022) e Saito (2015).

A contínua exploração de terras e mares em busca de respostas aos meus questionamentos, como em relação às potencialidades da História da Matemática para o ensino, me levaram ao mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas cursado no IEMCI, com início das atividades no ano de 2016 e defesa de dissertação de mestrado no ano de 2018, o qual proporcionou-me experiências decisivas que fortaleceram a atividade de pesquisa no campo da História da Matemática, tais como: contínuas leituras e releituras de textos da área; publicações de textos acadêmicos; participação ativa no GEHEM em eventos e parcerias em pesquisas de textos históricos.

Nesse contexto de atividades de pesquisa, pude ter uma melhor compreensão a partir das leituras de trabalhos, tais como Miguel (1993, 1997, 2015), Miguel e Miorim (2004), Mendes (2009a, 2009b, 2015, 2017), Brandenberg (2009, 2017), Saito e Dias (2013) e Saito (2015), que permitiram empreender outras compreensões quanto à implementação da História da Matemática em sala de aula. Ampliou-se minha percepção do que deve ser construído em sala a partir de informações históricas, como articulações didáticas, contrapondo à premissa de ensinar História da Matemática em sala de aula, questão discutida por Mendes (2009b). Outro artifício para a implementação dessa articulação é apresentado por Saito e Dias (2013) como interfaces entre a História e o Ensino da Matemática.

A apropriação de novas compreensões como essas consubstanciaram o avanço para outros questionamentos gerais em relação à História da Matemática, como quais informações históricas devem ser movimentadas em sala de aula? Ou, como Mendes (2016, 2017) apresenta em seus trabalhos, qual História e qual Matemática devem ser tratadas para o ensino? Ou ainda, a partir de Valente (2017) e Hofstetter e Schneuwly (2017), quais saberes devem ser movimentados em sala ao utilizar a História da Matemática como um recurso didático? Bem como Saito (2015) traz, como construir uma interface entre História da Matemática e Ensino?

Esses questionamentos e a construção da pesquisa para a consolidação da dissertação de mestrado, levaram-me a questionar sobre as potencialidades didáticas ou pedagógicas da História da Matemática, em particular de textos antigos ou clássicos, a partir de conversas com o orientador, que me levaram também a pesquisar epistemologicamente esses textos históricos.

Posteriormente à finalização do mestrado, tive a oportunidade de ingressar na Universidade Federal do Pará no Campus Universitário do Baixo Tocantins/Cametá, como Professor Substituto do magistério superior. Na carreira docente, os conhecimentos construídos, assim como os em construção, possibilitaram-me realizar algumas adequações nas minhas práticas de ensino de Matemática, oportunizando a construção de atividades dentro e fora dos muros da universidade, como a produção de jornais pedagógicos. Esses jornais se configuraram como articulações didáticas com o uso das informações históricas, com potencialidades para o ensino de conteúdos matemáticos.

Como docente do ensino superior, tive a oportunidade de lecionar a disciplina Evolução da Matemática, na qual, pude fazer aproximações da História da Matemática com contexto escolar, contribuindo para o desenvolvimento de uma visão dinâmica dos alunos quanto ao campo de pesquisa e estudo História da Matemática. Outrossim, pude fazer o uso da História da Matemática em sala de aula em outras disciplinas, como Metodologia do Ensino da Matemática, Prática docente II, entre outras, bem como em outros cursos, como agronomia e ciências naturais.

Assim, foi-me oportunizado promover o fortalecimento, mesmo que em pequena escala, da iniciação à pesquisa científica em Educação Matemática, de forma singular, da História da Matemática. Do mesmo modo que, em eventos como duas semanas da matemática ou de forma mais específica, de um seminário temático e um minicurso sobre pesquisa em História da Matemática, resultando em uma orientação de Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) com tema em História da Matemática, e também na participação em bancas de defesas de TCC's e monografias, além de outras orientações de trabalhos dentro da Educação Matemática.

O envolvimento com a pesquisa, a busca contínua por respostas e a necessidade de aprofundamento técnico e teórico, levaram-me a retornar ao programa de pós-graduação do IEMCI como estudante do curso de doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas. Nessa trajetória, ainda vivenciada, tenho a oportunidade de me dedicar a estudos de materiais, reuniões, cursos de curta duração, minicursos, palestras, eventos, disciplinas obrigatórias e optativas e conversas formais e informais com professores pesquisadores.

Toda essa dinâmica resultou em apresentações e publicações em eventos e artigos em revistas, centrados na aritmética do século XIII, permitindo imergir e submergir nos campos teóricos e epistemológicos da História da Matemática a cada respirar dos pensamentos.

Para além de um estudo do conteúdo de texto histórico, essas viagens apontaram para a busca da contextualização do conhecimento nos termos da Historiografia Atualizada, o que me fez retomar os estudos à dissertação de mestrado com o estudo do *Liber Quadratorum* (1225).

Nesse estudo, percebemos, entre outras coisas, que Leonardo Fibonacci (1170 – 1240), autor do livro, recorreu a uma álgebra geométrica, com a utilização das cifras e do sistema numérico posicional dos indianos, para a demonstração e estudo das proposições que compõem o *Liber Quadratorum* em um momento da história que não era comum o uso de tais cifras, o que instigou a investigação do *Liber Abaci* (1202), primeiro livro de Leonardo Fibonacci. Esse livro aponta para métodos e técnicas aritméticas com a utilização das cifras indianas, assim como do sistema de numeração posicional.

Olhando para o cenário da Europa desse período de construção dos livros, o século XIII, observamos, a partir de Potro (2000) e Vasconcelos (1925), que naquele século fazia-se uso de métodos aritméticos com o manuseio do ábaco e dos algarismos romanos. No entanto, a nova forma de manuseio aritmético com as cifras indianas e seu sistema de numeração, que Leonardo Fibonacci trouxe em seu *Liber Abaci* e em outros livros, nos permitiu trazer uma reflexão em relação a essas divergências de métodos aritméticos na Europa do século XIII.

Apresentamos, dessa forma, a sistematização das técnicas aritméticas contidas no *Liber Abaci* como nosso objeto de investigação, a partir do qual podemos compreender as demandas atendidas por essa sistematização proposta por Leonardo Fibonacci no século XIII.

Como foi elucidado até aqui, nossa trajetória acadêmica aponta para estudos de métodos algébricos, aritméticos e geométricos em textos históricos, em particular, dos livros de Leonardo Fibonacci.

Observamos, ao nos concentrar no século XIII, que as obras desse autor trouxeram inovações para o contexto da Europa medieval. No entanto, essas inovações, mesmo que beneficiando o comércio e outras áreas, como das ciências e das artes e os ofícios urbanos, não foram bem recebidas por todos (Ifrah, 2005).

Nosso estudo, com base em Potro (2000, 2004, 2007, 2012), Brito (2007), Castillo (2007), Franco Júnior (2001), Schramm (2001), Vasconcelos (1925), Ifrah (2005) e Leonardo Pisano (1857), aponta que os métodos⁶ que utilizavam o ábaco romano estavam instituídos na Europa nos finais do século XII.

Temos ainda que os conhecimentos naquele cenário estavam ancorados em uma estrutura hierárquica que primava pela teologia; ou seja, os conhecimentos estavam a serviço da igreja. Assim, ainda que os métodos e técnicas trazidos por Leonardo Fibonacci apresentassem vantagens e

⁶ Tomamos métodos em seu sentido amplo, o que inclui também técnicas para cálculos aritméticos, pois Leonardo Pisano (1857) não apresenta uma nomenclatura padrão.

otimizações para os cálculos requeridos pelo comércio e por outras áreas do contexto medieval, não foram suficientes para que de imediato pudessem substituir os métodos instituídos com o ábaco romano, pois além de estarem consolidados, instituíram ofícios, como os abacistas, que tinham a aceitação da igreja.

Vemos também que houve uma republicação do *Liber Abaci* no ano de 1228, o que nos leva a supor que os métodos que utilizavam as cifras indianas começaram a ter alguma importância e utilidade, em certa medida, ainda na primeira metade do século XIII, que começaram a se consolidar na segunda metade daquele mesmo século.

Haja vista não ter acontecido de imediato essa consolidação e aceitação, surgem algumas inquietações paralelas que corroboram com a questão de pesquisa e que podem melhor evidenciar o contexto dos métodos aritméticos do século XIII, tais como: por que os métodos trazidos por Leonardo Fibonacci não tiveram sucesso imediato? Quais foram os fatores que impediram o uso e a divulgação nos primeiros anos do século XIII? Quais fatores favoreceram os métodos aritméticos que utilizavam as cifras indianas nos anos posteriores? O que faz do *Liber Abaci* uma obra tão divulgada? O que fez esses métodos serem tão utilizados, ao ponto de terem uma repercussão mundial? O que fez ou faz esses métodos terem êxito para ainda utilizarmos uma boa parte de suas propostas? Houve conflitos para a implementação dos métodos e das técnicas organizados no *Liber Abaci*?

Dessas e outras inquietações, que surgiram ao longo dos estudos dos textos de aritmética medieval, em particular do *Liber Abaci* de Leonardo Fibonacci, apresentamos como questão norteadora desta pesquisa: **Quais as demandas atendidas no contexto da Europa do século XIII pela sistematização dos saberes aritméticos no *Liber Abaci* escrito por Leonardo Fibonacci?**

Ao refletir criticamente acerca da questão que norteou a investigação, construímos possíveis respostas, que se configuram como hipóteses para a presente pesquisa. A partir dos estudos mencionados dos métodos aritméticos, assim como do contexto do conhecimento da Europa do século XIII, presumimos que os aspectos que permeiam a Europa no início do século XIII, como a **hierarquia de conhecimento que primava pela teologia, o desinteresse por parte do clero pelos conhecimentos vindos do Oriente e o poder político-social da igreja**, não permitiram a implementação das inovações trazidas pelo *Liber Abaci* nesses anos iniciais.

No entanto, esses aspectos passam por algumas mudanças, como **o financiamento do conhecimento pela corte, bem como o aquecimento do comércio com rotas locais e internacionais e o crescimento dos ofícios urbanos**, o que levou à necessidade de cálculos mais elaborados, logo, de livros técnicos que os auxiliassem. Assim, os métodos aritméticos com a utilização das cifras indianas superaram os métodos com o ábaco romano.

Dessa forma, essas hipóteses dos aspectos que constituem os fatores da implementação dos métodos aritméticos no século XIII, indicaram a direção da pesquisa norteadora pela tese de que

os fatores contextuais impulsionaram um ambiente propício para que Leonardo Fibonacci escrevesse o *Liber Abaci*, e sua sistematização atendia às demandas internas e externas de seu contexto histórico, social, político, religioso e econômico, isto é, à sua malha histórica. Isso atribuiu significado à prática matemática e deu sentido ao fazer matemático da época, o que pode ser retratado nesse texto do e no século XIII, e possivelmente em séculos posteriores.

Mesmo que aparentemente os métodos aritméticos que utilizavam o ábaco romano sendo favorecidos pela hierarquia de conhecimento e pelos abacistas e pelas escolas que ensinavam esses métodos, traçamos a seguir os objetivos da pesquisa, com a finalidade de sustentarmos a tese proposta e responder à questão de pesquisa apresentada.

Assim, objetivamos identificar demandas atendidas pela sistematização do conjunto de práticas aritméticas no *Liber Abaci* que estavam em produção e uso na Europa do século XIII. Para alcançar nosso objetivo geral, trazemos os seguintes objetivos específicos que nortearam nossas ações:

- a) Estabelecer relações entre materiais que possam dar suporte para o estudo de textos históricos e seus contextos, com vistas a apresentar a investigação de aspectos historiográficos da aritmética tratada na Europa no século XIII;
- b) Assegurar alguns fundamentos históricos e epistemológicos para situar nossa pesquisa dentro da História da Matemática no campo de estudo e conhecimento da Educação Matemática;
- c) Discutir aspectos historiográficos da construção do *Liber Abaci* e elementos aritméticos que o compõem, com vistas a compreender o contexto histórico da elaboração do livro;
- d) Apresentar a sistematização do conjunto de práticas aritméticas na Europa do século XIII a partir do *Liber Abaci*, com vistas à sua caracterização e determinação de possíveis demandas atendidas por ele;
- e) Identificar demandas atendidas pelo *Liber Abaci* no século XIII, para dar sentido ao fazer matemático da época.

Para cumprir os objetivos estabelecidos, possibilitando um delineamento profícuo guiado por nosso questionamento, com vistas à validação ou a refutação de nossas hipóteses, realizamos uma pesquisa de abordagem qualitativa, visto que há subjetividades e nuances que não são quantificáveis por si sós. Construímos um processo reflexivo e analítico que nos levou à compreensão da implementação dos métodos aritméticos na Europa do século XIII em seu contexto histórico, possibilitando descrever, compreender e explicar aspectos e fatores daquele contexto medieval (Oliveira, 2007).

Temos, ainda, que a natureza desta pesquisa é básica, pois buscamos agregar conhecimentos novos para o avanço das investigações acerca da aritmética medieval, no entanto, sem aplicações práticas. Apresenta-se também como exploratória, ao objetivar oportunizar maior familiaridade com a aritmética, bem como descritiva, ao objetivar, de igual forma, caracterizar os aspectos e os fatores do contexto da Europa no século XIII. Além disso, é uma pesquisa de base documental, uma

vez que foi elaborada a partir de alguns materiais que não receberam um tratamento analítico específico, o que possibilita ser uma nova fonte de consulta (Silveira e Córdova, 2009; Prodanov, 2013).

Para tanto, nos valem da História da Matemática, em particular da História e Epistemologia, aliada às esferas de análise da historiografia atualizada a partir de textos históricos para o cumprimento dos objetivos propostos.

A partir de Creswell (2007) e Oliveira (2007), optamos pela pesquisa qualitativa, por ser considerada interpretativa, proporcionando a construção adequada de diálogos e discussões, a fim de abarcar compreensões que contextualizam os métodos aritméticos no recorte de tempo e espaço proposto. Não pretendemos acumular informações desses métodos, mas investigar os aspectos dos acontecimentos dos fatos da Europa do século XIII e de seu entorno.

Para este relatório de pesquisa sobre o contexto da sistematização das técnicas aritméticas no *Liber Abaci*, iniciamos com os aportes teóricos e metodológicos, no sentido das contribuições dadas por pesquisas ao nosso tema e direcionamentos tomados, norteando nosso planejamento e os procedimentos tomados. Em seguida, caracterizamos nossa pesquisa no campo da História da Matemática e da Educação Matemática, a fim de localizar em que campo de estudos e conhecimentos nossa investigação se encontra, coadunando com nossa postura ao realizar a presente pesquisa.

Após apresentar os aportes que nos sustentaram, os delineamentos tomados e de que campo estamos falando, temos a segurança de apresentar nosso estudo sobre a aritmética da Europa no século XIII a partir do *Liber Abaci* e de seu contexto. Pontuamos aspectos historiográficos que caracterizam o contexto europeu do século XIII, o livro e a edição investigada, bem como a sistematização das técnicas encontradas, seguidos de diálogos relativos aos fatores contextuais e demandas atendidas. Dessa forma, trazemos a seguir nossos suportes teóricos e metodológicos, como referido anteriormente.

2

APORTE TEÓRICO E METODOLÓGICO

Separamos este capítulo para apresentar aportes teóricos e metodológicos que subsidiaram nossa pesquisa. Escolhemos o termo **aporte** para ilustrar que não trazemos teóricos⁷ que embasaram nossa pesquisa, mas contribuições científicas de pesquisadores da História, da História da Matemática, da História da Ciência e da Historiografia, os quais aparecem mediante a explanação das noções necessárias para o desenvolvimento da pesquisa e seu relatório, com o rigor necessário da ciência histórica para uma escrita científica coerente.

Objetivamos estabelecer relações entre materiais que pudessem dar suporte para nosso estudo de textos históricos e seus contextos, para apresentar pontos que nos permitiriam investigar aspectos historiográficos da aritmética tratada na Europa no século XIII. Para tanto, iniciamos com a apresentação das percepções requeridas da História e a Historiografia, seguido da Historiografia Atualizada e das noções de texto histórico.

2.1 História e Historiografia

Iniciamos evidenciando a História que, para Marc Bloch (1886 – 1944), é a **ciência dos homens no tempo**. Em complemento, Barros (2022) comenta que continua bastante atual e postula a História como uma ciência, ou ao menos ser um saber cientificamente conduzido.

Barros (2022) argumenta ainda que, a partir da definição, entende-se a História como uma ciência dos seres humanos – uma ciência humana. Isso leva a reconhecer que o humano envolve a história em três dimensões: “a história fala de seres humanos, é escrita por seres humanos e dirige-se aos seres humanos que serão os seus leitores ou ouvintes” (Barros, 2022, p. 8).

Não podemos nos esquecer que esses agentes da História – os seres humanos – estão intimamente ligados ao tempo. Assim, os historiadores escrevem sobre seres humanos que viveram em

⁷ Teóricos no sentido de teorias didáticas, metodológicas, etc.

tempos diversos, sem esquecer que o próprio historiador, ao escrever a respeito de um determinado tempo, está ligado a um tempo de pertencimento. Dessa forma, Barros (2022) afirma que:

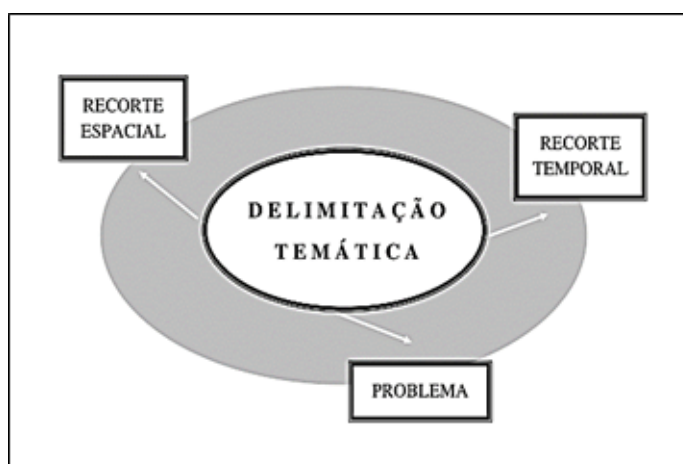
A História, enfim, é “humana” e “temporal” e isto tanto no que se concerne ao seu *objeto* de estudo, ao seu *sujeito* que produz este tipo de conhecimento (o historiador) e aos sujeitos que irão usufruir das realizações daí decorrentes como *leitores* ou *espectadores* (Barros, 2022, p. 8, grifos do autor).

Nesse mesmo sentido, encontramos em D’Ambrosio (2004, p. 166) uma proximidade de ideias quanto à História, afirmando que ela, resumidamente, “é o conjunto dos acontecimentos humanos ocorridos no passado”. Observamos que D’Ambrosio (2004) amarra o conjunto de acontecimentos ao humano e ao tempo, o que clarifica nossas tomadas de decisões aglutinadas na história, pois nossa pesquisa trata de ações da sociedade (humana) na Idade Média (tempo). Evidenciamos que o autor salienta que a história tem sido praticada em setores, onde, residimos na história dos conhecimentos matemáticos, ou seja, o estudo de ações humanas com o intuito de compreender conhecimentos matemáticos.

Julgamos importante considerar que a História não está em um ato meramente descritivo, mas que se origina em um problema. A integração de uma problemática à História torna-se essencial e determinante no âmbito da prática do historiador em qualquer gênero historiográfico. Em nosso caso, de todo profissional que recorre à História como meio para a investigação de um determinado objeto ou tema matemático, o qual não será necessariamente atravessado por um problema único.

Devemos ainda considerar que o problema, juntamente com o recorte espacial e o temporal, fazem parte das dimensões que delimitam o tema e o que tornam a pesquisa viável ou não, devendo aparecer de forma clara nas pesquisas históricas, como ilustrado na figura 1 (Barros, 2005).

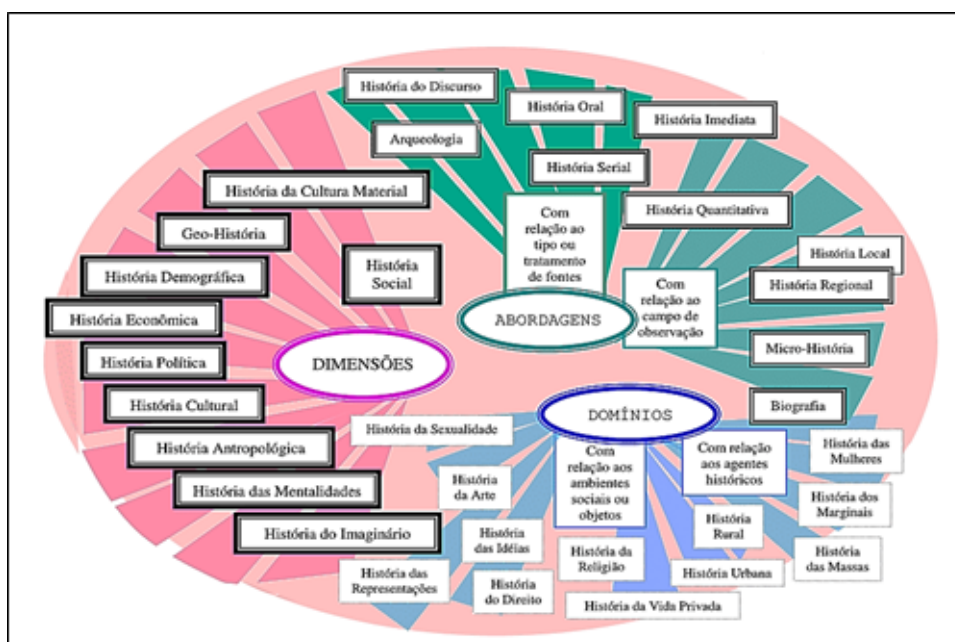
Figura 1 – Delimitação do Tema.



Fonte: Barros (2005, p. 41).

Além disso, Barros (2005) apresenta uma questão que considera extremamente complexa: a importância das delimitações de uma pesquisa para caracterização de seu campo de estudo, nesse caso, o campo histórico. Mesmo com essa complexidade, o autor apresenta um panorama com várias possibilidades, baseados em critérios que dividem os saberes históricos em três categorias ou ordens, como descrito pelo próprio autor na figura 2.

Figura 2 – O campo da História.



Fonte: Barros (2005).

Podemos observar a partir da figura 2 que essas três ordens de critérios dividem os saberes históricos que compõem seu campo: as dimensões, as abordagens e os domínios. Essas ordens de critérios estão intimamente ligadas com as teorias (dimensão), utilizadas para construir um arcabouço conceitual, gerando um conjunto de princípios e ideias que poderão garantir compreender, explicar e interpretar os fenômenos estudados, com os métodos (abordagens) que serão as ferramentas utilizadas para a execução da pesquisa, e pelos temas (domínios) orientados pelos agentes examinados, pelos ambientes e pelos objetos estudados, ou seja, pela delimitação do tema.

Embora a maior parte do trabalho histórico seja holístico, como considera D'Ambrosio (2004), temos a necessidade de registrar esses conjuntos de ações humanas ocorridas no passado de forma reflexiva. Esses registros são definidos como historiografia, entendida como “o conjunto de registros, interpretações e análises desses acontecimentos” (D'Ambrosio, 2004, p. 166).

Temos, de forma mais específica, que a historiografia é “essencialmente a história das narrativas, do registro dessas narrativas e da interpretação dos processos de decisão tomados por grupos sociais” (D'Ambrosio, 2004, p. 166).

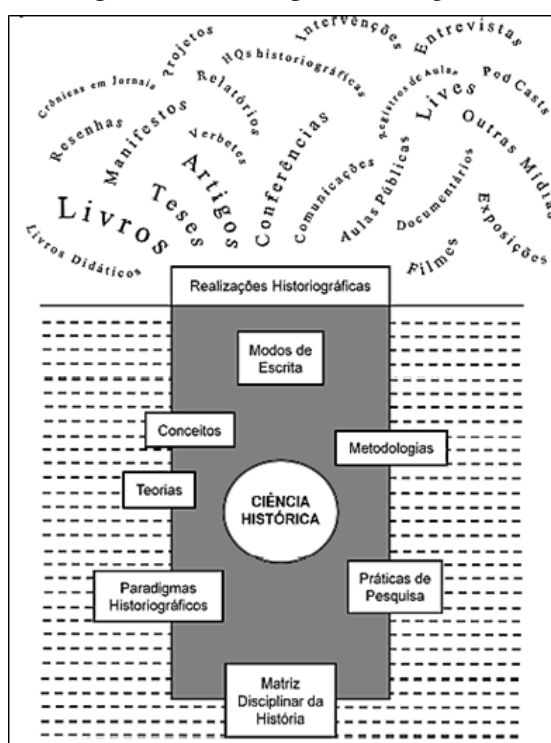
Podemos ampliar essa perspectiva aliando-a com a de Barros (2022)⁸, que afirma:

A Historiografia – ou História – pode ser compreendida como o vasto universo de realizações produzidas até hoje por todos os historiadores e autores da História. Neste sentido, a Historiografia é a “História escrita”; de modo que não é à toa que a expressão indica literalmente isso (historio-grafia) (Barros, 2022, p. 15, grifos do autor).

No entanto, não temos, na historiografia, apenas uma escrita ou uma reescrita da História. Temos mais do que isso, haja vista ser constituída por sistemas conceituais, por metodologias empregadas, por paradigmas teóricos, por hipóteses e por objetos de investigação, o que transforma a história escrita em uma modalidade científica do saber. A historiografia também inclui, dentro do próprio campo do saber ou disciplina, a própria História, o que faz dela um dos poucos campos do saber em que o nome da disciplina coincide com aquilo que estuda. Isto é: a História (historiografia) estuda a própria História (Barros, 2022).

Vemos também, a partir de Barros (2022), que a historiografia não é simplificadaamente as construções textuais. Ela é constituída por tudo o que já foi feito, em particular, por tudo o que os historiadores fizeram e pensaram, bem como pelos modos de como agiram. Dessa forma, o autor entende que qualquer realização textual ou midiática constitui apenas a ponta de um grande *iceberg* que pode ser a historiografia (figura 3).

Figura 3 – O *iceberg* da historiografia.



Fonte: Barros (2002, p. 21).

⁸ Neste trabalho escrito por Barros (2022), entende-se História, com “H” maiúsculo, quando se refere à historiografia, ou seja, História como gênero científico que relata o passado.

Podemos observar na figura 3 as realizações mais visíveis e materiais, como aquelas imateriais de menor visibilidade que, unidas, constituem o conjunto de realizações que leva o historiador a construir uma historiografia, seja com a parte visível superior do *iceberg* ou com a parte de dimensão teórica, metodológica, de modos de escrita e dos critérios compreendidos como inerentes à Historiografia que estão situados na parte inferior. Assim, o autor consegue ilustrar todo um conjunto de ações que uma comunidade de historiadores movimenta para a construção ou materialização de uma dita Historiografia.

Podemos perceber que a Historiografia nesta pesquisa não é uma mera coadjuvante, afinal, “a historiografia é tão importante quanto a própria História, pois ela define a busca e a interpretação do fato histórico” (D’Ambrosio, 2004). Dessa forma, podemos elucidar que uma construção historiográfica do/no contexto da Idade Média se faz importante e necessária no processo de investigação desta pesquisa, oportunizando a busca e a interpretação dos acontecimentos dos fatos e de suas disseminações.

2.2 Historiografia atualizada

Com essas noções em mente, buscamos os critérios mínimos para a construção de uma historiografia sobre o medievo. Nesse sentido, Barros (2022) destaca que, muito embora haja muitas modificações naturalmente ao longo da história da Historiografia, essencialmente a escrita da História deve ter o relato na forma de narrativas ou descrições, a análise conforme o que se quer apresentar, a época historiográfica de produção do texto e a escola histórica ou o estilo pessoal de cada historiador.

Para tanto, tivemos que fazer algumas escolhas para a construção de uma historiografia da Idade Média. Assim, ao propor um estudo da Aritmética na Europa no século XIII, se tornou inevitável uma reescrita do passado com a intencionalidade de evidenciar a aritmética do século XIII. Exigir que as intencionalidades de evidenciar algum agente, ambiente ou objeto não tenham qualquer influência no exercício histórico é um engano (Kragh, 2001).

Observamos ainda que não são todos os fatos que ocorreram no passado que compõem a historiografia de um determinado objeto de investigação, pois há necessidades de recortes, de delimitações, como visto anteriormente, para que o objeto seja investigado adequadamente. Dessa forma, apenas alguns acontecimentos passados ganharão o *status* de histórico que é atribuído pelo historiador, ou melhor, pela problemática e pelos objetivos traçados pelo historiador.

Percebemos que o *status* de acontecimento histórico em uma investigação historiográfica será dada a partir de uma interpretação guiada por critérios de análise historiográfica ajustada aos objetivos da investigação histórica. Assim,

A relatividade dos dados históricos está em concordância com o facto de que os factos do passado podem ser transformados em factos históricos. É o que sucede nos casos em que contributos científicos, previamente ignorados, são “redescobertos” (Kragh, 2001, p. 48).

Beltran, Saito e Trindade (2014) argumentam que a intencionalidade é evidente, pois toda narrativa da História é historiograficamente orientada. Sendo assim, a Historiografia construída não pode ser neutra. Mas isso não faz tendenciosa essa escrita da narrativa histórica, pois o intuito principal é desvelar a Aritmética – a temática – em uma malha histórica.

De forma mais direta, a intencionalidade mencionada aqui compõe as direções e caminhos tomados para que os acontecimentos dos fatos históricos possam dar visibilidade ao objeto de investigação dentro de uma malha histórica. Em relação à construção de uma História historiograficamente orientada, encontra-se na direção da escolha de critérios da investigação e da escrita histórica, para evidenciar de forma adequada o objeto a ser investigado.

Dessa forma, com a finalidade de contextualizar a aritmética contida *no Liber Abaci*, optamos pelo critério de escrita da História com características atualizadas. Esse critério de escrita será nomeado a partir daqui como Historiografia Atualizada, tendo como fundamento os trabalhos de Saito e Dias (2013), Beltran, Saito e Trindade (2014) e Saito (2015).

Fazemos uso desses critérios mais atualizados, pois a Historiografia Atualizada permite questionar sobre o processo de construção do conhecimento, elaborando explicações para as ações dos matemáticos e outros personagens contemporâneos que puderam contribuir para a consolidação da ciência no recorte histórico investigado (Saito, 2015).

Nesse sentido, contrasta-se em termos mais gerais critérios de escrita atualizados e critérios tradicionais. Nosso intuito aqui não é explorar essas divergências entre essas duas tendências historiográficas. No entanto, apresentamos de forma resumida, a seguir, segundo Beltran, Saito e Trindade (2014, p. 34), algumas características da historiografia tradicional:

- a) Narra uma história linear e progressista;
- b) Tem como modelo as ciências físicas (mecânica) e matemáticas;
- c) Seleciona no passado apenas o que parece ter permanecido;
- d) Dá ênfase em erros e acertos;
- e) Busca os “precursores” e os “pais” da ciência moderna;
- f) Parte da distinção entre “ciência” e “pseudociência”.

Ao observar essas características, percebemos que essa vertente historiográfica limita a investigação histórica, fato esse que nos encorajou a adotar a Historiografia Atualizada, na tentativa de restituir a aritmética do passado, no passado, evitando uma mera comparação, com um olhar

presentista, possibilitando novos critérios de escrita invertendo o sentido histórico – do passado para o presente, bem como afastar-se de anacronismos.

Historiadores da Matemática, como Gert Schubring, também destacam a percepção das limitações da historiografia tradicional. Schubring (2018) argumenta que a abordagem tradicional da História da Matemática não se mostra suficiente para abordar com eficácia novos questionamentos. Em especial, para o autor, no processo de aprendizado da Matemática, pois as narrativas tradicionais focam principalmente em momentos de destaque na História da Matemática, negligenciando muitos desenvolvimentos e perdendo a abordagem abrangente e integral da disciplina.

De forma suplementar, Barros (2022) esclarece não haver mais o reconhecimento, por parte dos historiadores, de uma historiografia meramente narrativa e descritiva sem uma análise ou uma interpretação dos fatos e dos dados. Assim, a Historiografia é necessariamente problematizada, constituindo a matriz disciplinar da História.

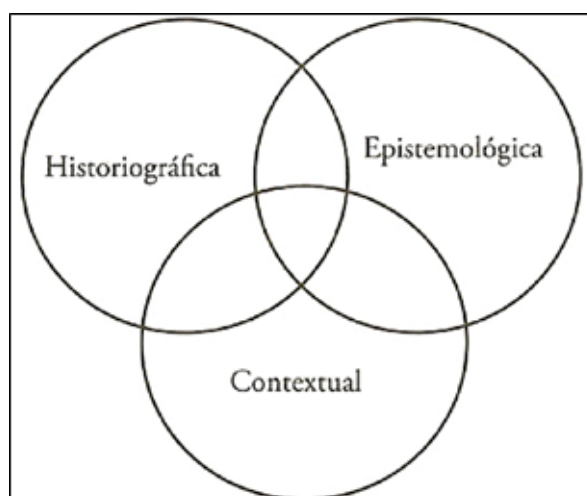
Nesse sentido, a Historiografia Atualizada permite contextualizar a aritmética do século XIII com base em três esferas de análise histórica: contextual, historiográfica e epistemológica. Isso nos leva a observar aspectos internos e externos, bem como aspectos contínuos e descontínuos da consolidação do conhecimento (Beltran, Saito e Trindade, 2014).

Silva (2020) destaca essas esferas de análise de uma forma que coaduna com nossa pesquisa. A autora diz que:

A esfera contextual é mobilizada no início de uma investigação sobre um documento original, em que o pesquisador busca onde e quando ele foi escrito e o que estava acontecendo nessa determinada região e época. A esfera historiográfica é mobilizada no estudo crítico do que já foi escrito sobre esse material, buscando as razões pelas quais ele foi produzido nesse período. Por fim, a esfera epistemológica objetiva conhecer os conceitos e conteúdos que estão inseridos na obra dentro do seu próprio contexto (Silva, 2020, p. 45).

A autora ainda comenta que a mobilização dessas esferas não possui uma ordem hierarquizada, deixando claro ainda que pode ser necessário mobilizar mais de uma dessas esferas conjuntamente. Essas esferas de análise permitem “emergir do próprio processo histórico novas questões epistemológicas que podem ser trabalhadas pelo educador matemático” (Saito, 2013, p. 4).

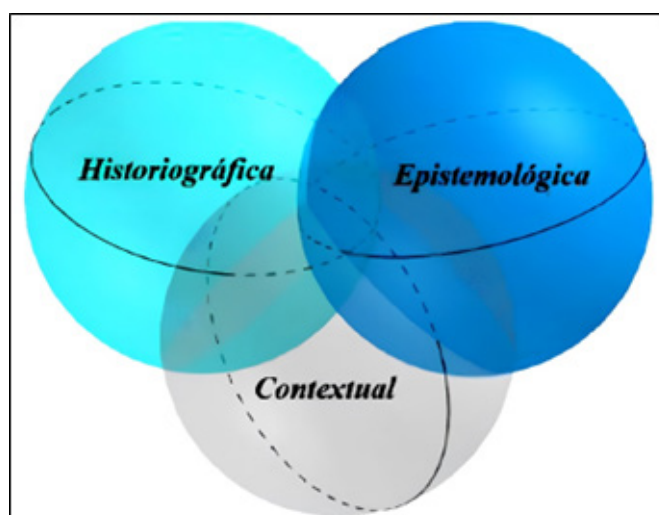
A proposta de utilizar as esferas de análise como ferramenta da Historiografia Atualizada, em um âmbito geral, é a representação por um diagrama de Venn (ver figura 4, a seguir).

Figura 4 – As três esferas de análise.

Fonte: Saito (2016, p. 260).

No entanto, de acordo com Saito (2020), essa representação se mostra limitada para uma compreensão mais ampla dessa ferramenta, pois as esferas de análise não se referem apenas aos elementos das interseções, e deveriam incluir os pontos comuns e as regiões adjacentes formadas na composição do diagrama.

Ao buscar na literatura propostas que pudessem ajustar tal representação, encontramos em Oliveira (2023) um exemplo (ver figura 5). O autor representa as esferas em três dimensões. Em nossa compreensão, estão interpostas em algumas regiões, formando agora não apenas interseções planas, mas espaços compostos por mais elementos de análise.

Figura 5 – As três esferas de análise de um documento

Fonte: Oliveira (2023, p. 26).

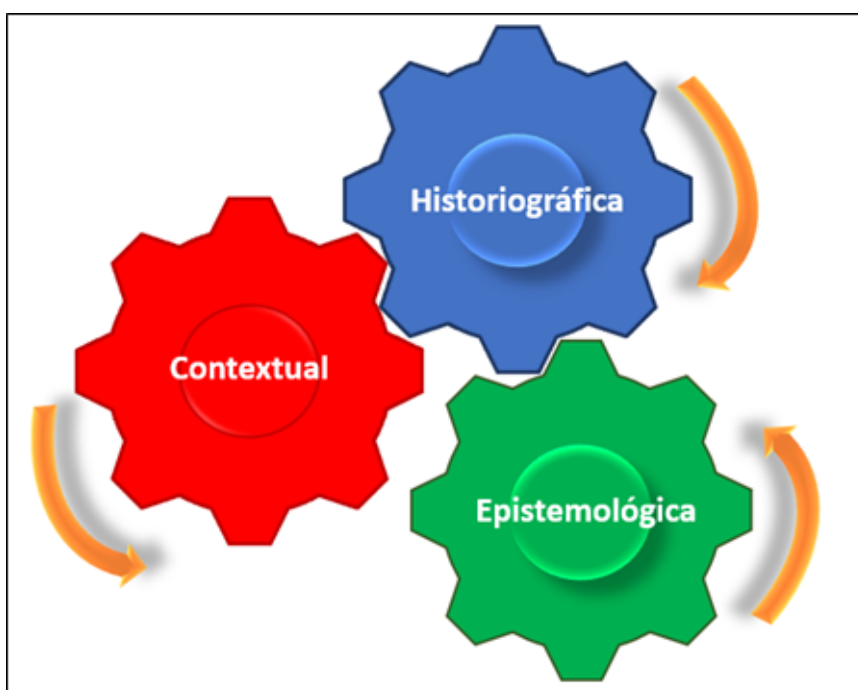
Embora a construção espacial traga mais elementos na composição das esferas de análise, em uma visão mais ampla do que o diagrama de Venn, proposto anteriormente, julgamos não estar

ainda bem ajustada a noção das esferas de análise da Historiografia Atualizada. De fato, ainda há espaços onde apenas uma das esferas atua.

Nós consideramos que a atuação de análise por parte das esferas não é disjunta em nenhuma parte de seu campo de atuação, delimitado pela sua superfície, conforme a figura 5, ou seja, a atuação de cada esfera propõe ser completa em toda sua delimitação espacial.

Diante da busca por uma visão ampla das esferas de análise da Historiografia Atualizada, construímos uma proposta que caminha na direção de ajustar ainda mais sua representação. Balizados pela leitura disponível e participação em eventos nos quais discutimos o tema, propomos a seguinte representação:

Figura 6 – Esferas de análise da Historiografia Atualizada



Fonte: Elaborado pelo autor (2023).

A princípio, nossa representação – por engrenagens – pode causar estranhezas pelo fato de não apresentar figuras esféricas. No entanto, ressaltamos que as esferas de análise não precisam necessariamente ser representadas por esferas do campo da geometria. As esferas de análise da Historiografia Atualizada encontram-se no campo teórico, conceitual e metodológico, o que nos permite transpor a imagem de uma representação esférica habitual.

Desvencilhados de uma imagem esférica, tivemos a oportunidade de nos centrar na compreensão de sua funcionalidade, no movimento de análise que as esferas proporcionam, ou seja, em uma ação conjunta, o que lhes é próprio. Dessa forma, é oportunizada a ampliação da compreensão e da representação das esferas de análise, o que permitirá sanar a estranheza das esferas como engre-

nagens. Para descrever o que estamos propondo, tomaremos como exemplo a análise de documentos, como um texto histórico.

Primeiramente, deixamos claro que a ação de cada esfera não deve ser separada, seccionada, pois poderá gerar equívocos ou contextualizações inadequadas, como anacronismos, na análise de um determinado texto histórico. Ao utilizar uma das esferas, ela apresentará seu sentido completo pela ação das duas outras esferas, o que dá um dinamismo, um movimento. Embora seja possível usar apenas alguns elementos de uma determinada esfera, ela terá que ser movimentada por completo, ajustada para emergir o que se procura ou surpreender-se com coisas novas ou não previstas.

Ao analisar textos históricos, um dos objetivos circundantes é a contextualização do objeto de investigação, que pode ser um objeto (conceito, processo) matemático (científico) ou pode ser o próprio texto (Brandemberg, 2021).

Iniciando com a investigação do próprio texto, ele direcionará a análise, nos levando a restituir o objeto pesquisado à sua malha histórica, ou seja, ao seu sistema de ideias⁹. O texto histórico, por sua vez, é o produto e a de um (con)texto, por atender a uma demanda desse sistema de ideias e também por desvelar qual foi a demanda atendida, dando sentido ao fazer matemático (científico) da época.

Vinculado às demandas atendidas e desveladas, temos um contexto mais amplo, no qual transita todo o conhecimento de uma determinada época. Esse contexto irá ditar o que é Matemática (o que é científico), nos permitindo entender as ideias que estarão em análise e localizar o objeto investigado dentro de uma época e lugar, dando sentido à elaboração, consolidação, sistematização, divulgação ou transmissão do objeto investigado.

No entanto, o que dará sentido a tudo isso serão os diálogos e questionamentos estabelecidos a partir das fontes secundárias¹⁰. Essas fontes darão ressignificado ao texto investigado, preenchendo lacunas no desenvolvimento matemático (científico), com o estabelecimento de diálogos entre os historiadores. O texto investigado oportunizará examinar criticamente do ponto de vista historiográfico as fontes secundárias, o que nos levará a olhar a epistemologia do texto histórico novamente, que será validada pelo contexto e que será ajustada pelos diálogos e interrogações historiográficas novamente. Observamos, assim, que as esferas epistemológica, contextual e historiográfica são movimentadas conjuntamente com uma relação de interdependência, como nas engrenagens propostas na figura 6.

Percebemos a eficácia dessa vertente para a pesquisa, quando possibilita o surgimento de novos objetos de investigação na História,

⁹ Conjunto de saberes práticos ou teóricos, de crenças e de valores compartilhados pelos indivíduos que residem em uma mesma época e lugar, ou seja, o (con)texto.

¹⁰Vide: Beltran, Saitor e Trindade (2014).

[...] tais como processos que conduzem, por exemplo, a compreender o papel da representação, visualização, abstração, raciocínio, demonstração, métodos, definições, etc., na construção do conhecimento, bem como outros aspectos da matemática e de sua prática (Saito, 2013, p. 5).

Desse modo, a historiografia de um objeto de investigação, mediada por essas esferas de análise, coaduna com nossa proposta, que confronta a ideia de subsidiar uma simulação ou reprodução do passado, fazendo com que o leitor apenas refaça ou reviva os passos axiomatizados dos matemáticos ou das obras pesquisadas. Vale ressaltar que não criticamos esses métodos, apenas eles não compõem nossos interesses para esta pesquisa.

No entanto, buscamos articular questões que surgem do processo de construção do conhecimento epistemologicamente contextualizado, permitindo, para além da compreensão da natureza do conhecimento, os meios pelos quais foram consolidados, transmitidos e divulgados.

Assim, nosso interesse não é apenas nos fatos históricos medievais, mas no acontecimento dos fatos, com vistas à compreensão desses fatos no passado, com o contexto do passado, que podem emergir a partir de textos históricos, ou seja, ao investigar estes textos, passamos a ter informações históricas “com o texto”. Assim, temos um (con)texto a ser investigado e incorporado na pesquisa.

É possível situar epistemologias que surgem da malha histórica da aritmética do século XIII, sem furtar do seu contexto a historicidade que lhe é inerente, pois toda epistemologia é construída em meio a proposições de conflitos e controvérsias, as quais proporcionam reflexões, consolidações, divulgações e novamente conflitos e controvérsias, dando um dinamismo ao conhecimento. Observa-se ainda que épocas diferentes promovem epistemologias diferentes, por estarem fundamentadas em modelos de conhecimento diferentes, como perceberemos no capítulo 5 desta tese (Saito, 2016).

Buscamos na malha histórica um conjunto de conhecimentos matemáticos ou não matemáticos com o intuito de reorientação do conhecimento aritmético medieval. Ao buscar esses conjuntos de conhecimentos no passado, fugindo da concepção linear e de um olhar presentista, temos a oportunidade de nos surpreender com as técnicas aritméticas empregadas na Europa do século XIII (Saito, 2015; D’Ambrosio, 2004).

Uma vez que elegemos a aritmética europeia do século XIII a partir do *Liber Abaci* como nosso objeto de pesquisa, precisávamos da relação dos acontecimentos dos fatos, das datas e dos nomes que estavam em torno desses métodos aritméticos, que só poderiam surgir de uma multiplicidade de registros, como memórias, documentos, monumentos, artefatos, cartas, entre outros. Ou seja, nosso trabalho só poderia se dar a partir de fontes históricas, as quais adotamos como primárias e secundárias¹¹ (D’Ambrosio, 2004).

¹¹Vide: Beltran, Saito e Trindade (2014).

2.3 O texto histórico como suporte de uma fonte histórica

Buscamos selecionar fontes que pudessem dar associações e interpretações à Europa do século XIII, o que pode nos levar ao conhecimento científico de outros tempos e de outras civilizações e entender um pouco do desenvolvimento do conhecimento humano. Um conhecimento, no qual a ciência se insere, e que nos leva a cumprir objetivos da historiografia da ciência (D'Ambrosio, 2004).

No entanto, Barros (2022) afirma que não é possível construir uma Historiografia sem fontes históricas, pois é o único recurso que permite acessar uma comunidade humana em um tempo passado que, logicamente, não está presentificada. Em nossa atualidade não existe uma ferramenta ou uma tecnologia que permita esse acesso, essa visualização instantânea de períodos passados, a não ser as fontes históricas.

Nessa busca por fontes históricas, encontramos nos textos históricos nossas fontes principais. Mas nos ocorreram algumas questões: como entender ou categorizar esses textos históricos? Que definições temos para classificar os textos encontrados como históricos ou não históricos? Buscamos na literatura por autores que nos auxiliassem nesses conflitos e encontramos em Brandenberg (2021, 2022) um suporte para tal, nos brindando com um estudo sobre fontes históricas.

Brandenberg (2021) apresenta que os textos históricos são fontes essenciais de materiais para a construção de atividades didáticas. No entanto, inferimos que vão para além dessas atividades, pois podem apresentar características tanto didáticas como de pesquisa e estudo. Esse autor deixa evidente uma distinção entre *textos clássicos*¹² e *textos históricos*. Os primeiros se classificam na direção de sua importância, do seu “sucesso”, em sua divulgação em larga escala, e sobre eles não nos deteremos.

Para nós, o que terá mais relevância será a construção de Brandenberg (2021) da concepção de textos históricos, para melhor classificar e validar o *Liber Abaci* como tal, o qual se configura como fonte primária na pesquisa. Para tanto, recorreremos à definição (conceito) de Brandenberg (2021) que, em sua concepção, balizada, define ser:

[...] **um documento** que, composto (impressão, pictografia, escrita) de formatos e materiais (argila, papiro, pergaminho, bambu, papel) variados em algum momento da história, **nos permite acessar** de maneira implícita e explícita **elementos do contexto de sua composição e da relevância de seu conteúdo** com vistas ao **entendimento** do conhecimento matemático, de sua **produção, desenvolvimento e divulgação** (Brandenberg, 2021, p. 28, grifo nosso).

¹² Brandenberg (2021) apresenta dois tipos de textos clássicos em seu trabalho, quanto à sua importância e quanto ao distanciamento. Para o autor, textos publicados até o ano de 1820. Para essa distinção, traremos “Textos Clássicos” quanto à importância e “textos clássicos” quanto ao distanciamento.

Dessa forma, podemos validar o *Liber Abaci* como texto histórico, pois se configura como um documento escrito e impresso em papel em um dado momento da História, o século XIII, e nos permite acessar implicitamente o contexto daquele século e explicitamente o teor aritmético que compõe o livro, o que pode levar ao entendimento do conhecimento matemático produzido, desenvolvido e divulgado no século XIII e, talvez, em momentos adjacentes.

Após o balizamento da nossa fonte primária como texto histórico, a partir de Brandemberg (2021, 2022), cabe localizá-la dentro da classificação construída por esse autor. Para tanto, trazemos o quadro 1 – apresentado por Brandemberg (2021), que diz sintetizar sua classificação – as categorias e suas respectivas classificações.

Quadro 1 – Uma síntese da classificação de textos históricos.

Para uma Classificação Inicial de Texto Histórico de Matemática	
Obs.: Pensamos em cinco classes e suas categorias. Algumas ainda em desenvolvimento.	
Quanto ao conteúdo	Texto de Matemática; Texto de História da Matemática; Texto de divulgação matemática.
Quanto ao distanciamento	Textos clássicos; Textos modernos.
Quanto ao uso	Livro texto; Livro fonte (consulta/estudo).
Quanto a investigação	Fonte principal; Fonte complementar.
Quanto ao contexto	Buscamos uma classificação que considere o contexto da escrita do texto e o contexto na escrita do texto...???

Fonte: Brandemberg (2021).

Essa classificação permite uma visualização exequível do uso e do estudo de textos históricos. Assim, a presente classificação reside na importância de evidenciar caminhos, possibilidades, esclarecimentos na pesquisa, no estudo ou na utilização de um texto histórico em suas múltiplas possibilidades, o que permitirá maior simplicidade e objetivação na apresentação (investigação) de um dado objeto matemático (de pesquisa) (Brandemberg, 2022).

Assim, partir da classificação apresentada no quadro 1 podemos asseverar que nossa fonte primária, o *Liber Abaci*, está classificado como texto histórico, quanto:

- Ao conteúdo: pois se configura como texto de Matemática, por se tratar de aritmética, também inclui aspectos de divulgação matemática, permitindo que não apenas estudiosos da época, mas também o grande público, incluindo comerciantes de todos os níveis e outros profissionais urbanos em ascensão, tivessem acesso ao conhecimento matemático apresentado;
- Ao distanciamento: por ser compreendido como texto clássico, construído e divulgado no século XIII;

- c) Ao uso: por se comportar como livro-texto, promovendo a aritmética em ambientes sistematizados ou institucionalizados;
- d) À investigação: pois se configura como fonte principal (primária) para a pesquisa;
- e) Ao contexto: por estar carregado de conhecimentos construídos, instituídos e divulgados em um sistema de ideias que dá significado ao século XIII.

Com essas ponderações, podemos garantir que o *Liber Abaci* é um texto histórico, pois está bem ajustado à definição (conceito), à classificação e às categorias ora apresentadas. Resta, ainda, categorizar o *Liber Abaci* como um Texto Clássico, pois seu conteúdo toma proporções universais para a Matemática em muitos aspectos. Um deles: o emblema da universalidade das cifras indianas e seu sistema de numeração decimal e posicional.

Validamos ainda essa obra como texto histórico de Matemática, haja vista Brandemberg (2022) considerar nessa categoria aqueles compostos por conteúdos matemáticos, como se desenvolveram e os que buscam a aproximação da Matemática com a sociedade. O autor ainda garante que essas classificações são importantes para evidenciar possibilidades do uso de textos históricos para o ensino de conteúdos matemáticos (Brandemberg, 2022).

Também apontamos o estudo de textos históricos extraídos de fontes primárias como um de vários aspectos da História da Matemática, quanto à forma de buscar informações do desenvolvimento de conceitos (conteúdos) matemáticos, com o propósito de estudar suas formas e contextos de produção, seja em um estudo macro – aspecto sociocultural de sua produção, desenvolvimento e ensino – ou micro – conteúdo (objeto) selecionado do texto histórico para análise e potencialidades didáticas (Brandemberg, 2020).

Com as relações estabelecidas, nos dando suporte teórico e metodológico para a pesquisa realizada, temos os fundamentos necessários para a organização de nosso roteiro de pesquisa, apresentados na próxima seção, objetivando indicar cada etapa tomada para a materialização deste relatório de pesquisa.

2.4 Procedimentos metodológicos

Iniciamos as investigações com uma pesquisa no Catálogo de teses e dissertações da CAPES. No entanto, o CREPHIMat¹³ foi mais efetivo na busca por trabalhos no campo da História da Matemática dentro da temática aritmética, aritmética do século XIII, aritmética medieval, aritmética da/na Europa do/no século XIII, métodos aritméticos, *Liber Abaci* e esferas de análise. Nessas buscas, não encontramos estudos que objetivaram este tipo de pesquisa no período de investigação (século XIII), ligados aos métodos aritméticos que utilizavam as cifras indianas e seu sistema decimal posicional.

¹³Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática (<http://www.crephimat.com/>).

Desse modo, a presente pesquisa pode apresentar importantes aportes para a Educação Matemática, em particular no campo de estudos em História da Matemática, contribuindo tanto com o objeto a ser investigado (técnicas aritméticas), quanto com o estudo historiográfico (demandas atendidas). Observou-se, em pesquisas que tratam dos métodos e técnicas aritméticas, que foram estudados em períodos distintos do proposto por nós ou foram estudados na vertente da História da Educação Matemática.

Em relação ao recorte histórico, as pesquisas tendem a estudar a álgebra daquele período, quase sempre com propostas de atividades de resolução de problemas a partir de textos históricos, como o *Liber Abaci*. Assim, esta pesquisa poderá sanar lacunas, responder questionamentos ainda não respondidos, bem como possibilitar novos horizontes de investigação.

Por conseguinte, percebemos a necessidade de objetivar estudos mais específicos, no que corresponde a uma compreensão dos métodos e técnicas aritméticas na Europa no século XIII ancorados em um sistema de ideias¹⁴, o qual estruturamos em nossas argumentações com as esferas de análise da Historiografia Atualizada¹⁵ a partir de textos históricos.

Posteriormente, partimos para uma revisão bibliográfica de livros, artigos, teses e dissertações concernentes à História, História da Idade Média, História da Matemática, História da Matemática medieval, aritmética medieval, aritmética prática e mercantil, textos históricos, historiografia, historiografia atualizada e textos históricos. Nesses textos encontramos autores, como Beltran, Saito e Trindade, (2014); Potro (2000, 2004, 2007, 2012); Brito (2007); Castillo (2007); Saito (2015); Eves (2011); Franco Júnior (2001); Garbi (2009); Schramm (2001); Vasconcelos (1925); Barros (2022) e Brandemberg (2021, 2022), dentre outros. Além disso, investigamos também o conjunto de saberes contidos no *Liber Abaci*, edição de 1857, que será melhor comentado no capítulo 4, o que faz de Leonardo Pisano (1857) uma das nossas principais referências.

Com essas e outras referências, tivemos a possibilidade de construir uma historiografia dos métodos aritméticos da Europa do século XIII, estabelecendo diálogos entre fontes primárias e secundárias, analisadas a partir das três esferas da Historiografia Atualizada. Faz-se necessário evidenciar que construímos uma historiografia, pois, em acordo com Beltran, Saito e Trindade (2014), entendemos que a própria História sofre reinterpretações ao longo dos tempos.

Tomamos também como fontes primária e secundária a concepção abordada pelos mesmos autores, que apresentam como fonte primária textos originais, imagens ou documentos materiais, ou seja, físicos, que trazem conhecimentos elaborados, transmitidos e adaptados em outros tempos e culturas, aos quais podemos ter acesso. Nesta pesquisa adotamos como fonte primária o *Liber Abaci*. As fontes secundárias incluem os trabalhos que se referiram à Aritmética do século XIII, ao

¹⁴Conjunto de saberes práticos ou teóricos, de crenças e de valores compartilhados pelos indivíduos que residem em uma mesma época e lugar, ou seja, o (con)texto.

¹⁵Termo apresentado por Saito (2015).

seu contexto ou à fonte primária, como Potro (2000, 2004, 2007, 2012), Franco Júnior (2001) e Sigler (2002).

Para o tratamento e classificação da nossa fonte primária como texto histórico, temos os trabalhos de Brandemberg (2021, 2022). Em relação às esferas de análise da Historiografia Atualizada – epistemológica, historiográfica e contextual – tomamos os trabalhos de Beltran, Saito e Trindade (2014) e Saito (2015) para orientar nossa ambientação medieval, com uma percepção que não fosse linear e nem progressista, mas que prezou por um fio condutor de acontecimentos e repercussões de fatos, gerando a possibilidade de uma visualização adequada dos aspectos historiográficos da sistematização proposta por Leonardo Fibonacci.

Em nossa pesquisa, a esfera de análise epistemológica se configura na investigação dos argumentos e das técnicas aritméticas encontradas no *Liber Abaci*, nossa fonte primária.

Cruzamos as fontes primárias com algumas secundárias, os textos que se referem aos Métodos e Técnicas Aritméticas do século XIII ou do *Liber Abaci* – os textos que analisaram o livro e suas técnicas –, para identificar e compreender os métodos e suas técnicas, compondo a esfera historiográfica de análise.

Para o contexto histórico de instituição e divulgação desses métodos e técnicas, recorremos à esfera contextual, para ambientar o leitor em uma vivência medieval, considerando as circunstâncias que levaram à construção e divulgação do *Liber Abaci*. Desvinculamos da História da Matemática ou da Historiografia da Matemática a característica de ser uma mera contadora de fatos passados, atribuindo-lhe um caráter propulsor dos acontecimentos dos fatos e de suas repercussões, movidas pelas necessidades vividas por cada sociedade em seu tempo passado (Saito, 2015).

A partir do exposto, foi possível investigar os conflitos, o movimento e as mudanças que os métodos aritméticos na Europa do século XIII sofreram em uma malha histórica. Para tanto, organizamos eletivamente a seguinte trajetória metodológica:

- a) Iniciada com uma pesquisa bibliográfica, para aprofundamento teórico e metodológico, bem como para selecionar as fontes primárias e secundárias que integraram a pesquisa e as que serviram para a sustentação teórica da pesquisa.
- b) Em meio a esta pesquisa, buscou-se a fonte primária, em particular, um texto histórico do qual emergiram os métodos e técnicas aritméticas utilizadas, construídas e divulgadas na Europa no século XIII. Nessa busca, selecionamos o *Liber Abaci*, tendo em vista que Potro (2007) apresenta esse texto como central para a aritmética comercial. Selecionamos, de igual forma, as fontes secundárias, para a investigação do contexto no qual a fonte primária se encontra, ou seja, para a reconstrução da malha histórica que compõe a esfera contextual de análise, bem como para a investigação da fonte primária e seu conteúdo. Essas fontes secundárias podem ser de conteúdos matemáticos ou não matemáticos, sempre a fim de compreender o contexto do século XIII em que o *Liber Abaci* foi construído ou utilizado, possibilitando uma visão mais crítica e consistente

dos métodos e técnicas, compondo os critérios de escrita da historiografia atualizada.

- c) Com os textos selecionados, partimos para as esferas de análises historiográfica e epistemológica. Na esfera historiográfica, estudamos com uma leitura crítica as fontes secundárias que não são necessariamente históricas, mas materiais (textos, livros, artigos, capítulo de livros, etc.) que já foram escritos sobre a fonte primária ou sobre os métodos e as técnicas aritméticas da Europa no século XIII, com vistas à compreensão da razão da fonte primária ser escrita ou utilizada, bem como, das demandas atendidas. Já na esfera epistemológica, investigamos nos textos primários os conceitos e conteúdos apresentados no próprio contexto, isto é, sem um olhar presentista do que ali foi encontrado, na tentativa de não cometer anacronismos, interagindo com as outras esferas de análise. Nos possibilitando, apresentar os métodos e as técnicas aritméticas medievais em sua malha histórica.
- d) Com as investigações a partir das três esferas de análise dos textos primários e secundários, tivemos subsídios suficientes para identificar demandas que foram atendidas pela sistematização das práticas aritméticas encontradas no *Liber Abaci*.

Conseguimos dessa forma, materializar nossa pesquisa, com a ideia de expandir os horizontes de investigações acerca dos métodos e das técnicas aritméticas, contribuindo para a História da Matemática com reverberações para a Educação Matemática.

Gostaríamos de finalizar esta seção em conformidade com Fossa (2018), o qual aponta que:

É face ao desconhecido que o pesquisador traça seus objetivos e monta sua metodologia de investigação. Ao fazer isto, contudo, ele faz apenas um ponto de partida, pois com o esclarecimento parcial do desconhecido, novos objetivos (frequentemente objetivos mais refinados) e novas metodologias de investigação podem se revelar sendo como mais contundentes e, assim, as mudanças apropriadas nos planos originais devem ser feitas (Fossa, 2018, p. 21).

Dessa forma, as propostas aqui apresentadas foram dispostas ou organizadas metodologicamente, sofreram mudanças, adequações, reformulações, adaptações e inovações ao longo do processo de investigação. Em cada etapa, também refinamentos para uma pesquisa mais consistente e um relatório de pesquisa mais claro.

Com o suporte apresentado e os procedimentos delineados, julgamos possível dar seguimento à investigação da sistematização da aritmética na Europa no século XIII, com a construção de uma historiografia, considerando a articulação das esferas de análise em vertentes mais atualizadas da historiografia. A partir desses elementos, possibilita-se apresentar condições de contorno gerados na sociedade e no sistema de ideias, a partir de fontes primárias e secundárias, bem como da apresentação das técnicas aritméticas que compõem o *Liber Abaci*. Antes disso, no entanto, a seguir, localizamos essa investigação em meio ao vasto campo de estudo e conhecimento da Educação Matemática e da História da Matemática.

3

SITUANDO A PESQUISA EM MEIO AO CAMPO DE INVESTIGAÇÃO

Todo campo de estudo e conhecimento deve ser questionado em seus princípios de “ser” e “estar” sustentados por uma corrente filosófica, ou por uma pluralidade conceitual, que o definirá e demarcará seus limites como campo consolidado. Geralmente, advinda de nebulosidades de ver com clareza, do que e de qual perspectiva se fala, comunidades são motivadas a explorar, a questionar e adentrar em perspectivas novas que levam a configurar novos modos de pensar e de agir (Bicudo; Garnica, 2011).

Quando tratadas nas disciplinas mais específicas, como a Matemática, com aspectos mais pedagógicos e didáticos, tendo como pano de fundo a filosofia, na qual essas nebulosidades são de cunho educacional, constitui-se discursos na tentativa de responder perguntas, como, entre outras: qual Matemática deve ser ensinada? Por que essa Matemática deve ser ensinada? Como ela pode ser ensinada?

O que queremos deixar claro aqui é que a Educação Matemática, para ser constituída como campo de estudo e conhecimento, teve de forma embrionária que questionar-se em seu estado de “ser” e “estar”, pois de outra forma não poderia ser estruturada e sustentada. Todavia, esses são questionamentos iniciais, que motivaram grupos de pesquisadores a definirem melhor de quais perspectivas estavam observando as questões educacionais.

Nesse sentido, evidenciamos neste capítulo um cuidado ao tomar as perspectivas da Educação Matemática para a presente pesquisa, haja vista ser um campo tão vasto e complexo de estudo. Assim, questionamos de forma complementar – a fim de localizar a pesquisa neste campo de estudos e conhecimentos –: qual o lugar na Educação Matemática na investigação da sistematização das técnicas aritmética do *Liber Abaci* na Europa no século XIII, a partir de uma proposta da História da Matemática? Esta investigação pode se configurar como uma ferramenta potencialmente rica

para a Educação Matemática? Para tanto, temos o cuidado de tecer uma linha de apresentação de elementos que possam construir argumentos para as contribuições desta pesquisa nesse campo.

Objetivamos, dessa forma, assegurar alguns fundamentos históricos e epistemológicos, a fim de situar nossa pesquisa dentro da História da Matemática no campo de estudo e conhecimento da Educação Matemática. Para tanto, dividimos este capítulo em duas seções: uma para falar da Educação Matemática e outra para dar lugar à pesquisa na Educação Matemática.

3.1 Sobre a Educação Matemática

Podemos dizer que, em sua grande maioria, a sociedade apresenta de forma direta ou indireta preocupações com a educação, seja na esfera familiar, profissional, acadêmica, até mesmo religiosa e cultural. Percebemos essa preocupação quando algum agente dessas esferas tem interesses em constituir um legado, no qual deverá instruir o aprendiz, esperando que essa instrução seja consolidada, seja para a melhoria ou para a conservação do grupo instaurado em alguma dessas esferas, como nas famílias, com suas tradições, ou nos ambientes profissionais, com o interesse de crescimento e maior rentabilidade.

No entanto, consoante Saviani (1990), podemos evidenciar que, assim como na filosofia não basta exercer o pensamento para ser constituído um pensamento filosófico propriamente dito, na Educação não basta ter preocupações com a divulgação e preservação de conhecimentos para ser constituída como área de estudo e conhecimento. O filósofo não pensa apenas, mas exerce um pensamento com maior rigor lógico, com maior coerência, com maior espírito sistemático, ou seja, sabe quais as razões e condições para que o desenvolvimento do pensamento aconteça, bem como pode retomar os problemas do ponto em que sofreu alguma alteração.

Embora o assunto que ocupa o filósofo seja comum a todos os homens, isso não garante que todos os homens sejam filósofos ou que constituam algum grupo técnico/científico dentro de algum ramo da filosofia. Observamos que isso ocorre de forma semelhante na Educação. Segundo Oliveira (2013), o homem, sendo o sujeito da Educação, o que configura e constitui a Educação não é apenas o repasse de informações, mas um conjunto de critérios científicos e filosóficos, construindo uma epistemologia própria desse campo, demarcando seu lugar na ciência, gerando o que podemos chamar de Ciência(s) da Educação.

Entendendo os fenômenos dos processos de ensino e de aprendizagem como problemas reais, como algo que não é conhecido e precisa ser revelado, como uma dúvida ou dificuldade a ser superada, recorre-se à filosofia para que o processo de pensamento por ela gerenciado possa organizar ou reorganizar soluções consistentes frente às dificuldades, que podemos chamar de educacionais, que são enfrentadas, aliando-se a outras correntes ou campos de conhecimento, como Sociologia, Psicologia, Antropologia, História e outros (Saviani, 1990). Assim, na estruturação da Educação a

partir de várias áreas do conhecimento aliadas à filosofia, podemos formar, em conformidade com Barros (2016), os inúmeros acordes conceituais, que demarcam a Educação.

Nas condições indicadas, a filosofia pode contribuir para uma melhor configuração do objeto educativo à medida em que, problematizando-o, o tema como tema de reflexão e, aplicando as exigências metodológicas de radicalidade, rigor e globalidade, explicita suas características e diferencia-o dos fenômenos afins, pondo em evidência sua especificidade. Assim, procedendo, a filosofia contribui para uma melhor delimitação da educação enquanto objeto de conhecimento, viabilizando sua abordagem metódica e sistemática (Saviani, 1990, p. 4).

Percebemos que a filosofia se torna de grande valia para a consolidação e delimitação da Educação. Observamos, ainda, que a pesquisa educacional se encontra com uma epistemologia complexa e extremamente polissêmica, seja pela extensão do objeto que estuda ou pela variedade de campos de conhecimento que podem envolver seu estudo, permitindo uma multiplicidade de abordagens.

Dessa forma, o que aflora não é apenas um estudo sistemático da Educação, mas a constituição de Ciências da Educação (Saviani, 1990; Oliveira, 2013). Essas Ciências da Educação, em conformidade com Saviani (1990, p. 4), podem ser entendidas como “o conhecimento metódico e sistematizado da realidade educacional, obtido através da investigação e confirmado pela observação, raciocínio, experimentação”.

Com diferentes abordagens, dentro das Ciências da Educação temos diferentes teorias da Educação. Ressaltamos, assim, cinco eixos principais: concepção humanista moderna; concepção analítica; concepção produtivista; concepção crítico-reprodutivista; concepção dialética ou histórico-crítica. Cada eixo abarca três níveis distintos, articulados entre si: o nível correspondente à filosofia da educação; o nível da teoria da educação, e o nível da prática pedagógica. Dessa forma, os discursos educacionais não se distinguem por usar esse ou aquele nível, mas pela maneira que articula esses níveis e pela importância que cada nível adquire no interior de cada eixo (Saviani, 2007).

Em meio a essas diversas abordagens e diversas disciplinas incorporadas pelas Ciências da Educação, temos a Matemática, ou melhor, a preocupação ou a necessidade de ensinar e aprender objetos matemáticos de forma adequada e significativa, ou seja, a Educação Matemática começa a ganhar seu espaço e, como os demais campos de estudo e conhecimento, há necessidade de demarcações de seu território científico, de seu objeto, e do seu sujeito.

Essa visão de aparecimento de necessidades, em relação a ensinar e aprender, não partilha de uma linearidade, como se houvesse primeiramente uma necessidade de ensino geral (Ciências da Educação) e, posteriormente, necessidades específicas (Educação Matemática e educação nas demais disciplinas específicas). É possível observar que esses campos de conhecimento se apropriam mutuamente de seus conceitos que, em conformidade com Barros (2016), pode ser a partir de migração de conceitos, de conceitos agrupadores e/ou conceitos transversais.

Essas preocupações ou necessidades educacionais manifestam-se de forma mais direta em eventos, como a União Internacional de Matemática (IMU), em que foi constituída a Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI), tendo em vista necessidades mais específicas. É em meio a organizações como essas que surgem nomes como David Eugene Smith (1860 – 1944) e Felix Klein (1849 - 1925). Smith propôs no IV congresso internacional em Roma, em 1908, um estudo comparativo dos métodos de ensino da matemática em escolas secundárias. Sua proposta toma outras dimensões, incorporando escolas primárias, profissionais e as universidades. A ele é dado o posto de um dos fundadores da Educação Matemática como campo acadêmico nos Estados Unidos, ao lado de Albert Jacob William (Kilpatrick, 2008).

Em meio a esses acontecimentos, dois pontos importantes em relação às necessidades educacionais são apresentados. O primeiro, em relação ao currículo e o segundo, em relação à lacuna entre matemática como uma disciplina científica e a matemática ensinada nas escolas, pontos discutidos em alguns ICMI. Também foram discutidos, não apenas por uma reforma, mas para a formação do campo Educação Matemática.

No decorrer dessas discussões, emerge a preocupação com os professores, ou seja, com os profissionais que ensinavam essas matemáticas. Essa preocupação foi tratada posteriormente, nos finais do século XIX, como campo separado da academia. Temos, ainda, a matemática escolar, que outrora era apenas um campo de prática e vai tornando-se gradualmente em objeto de estudo, o que permitiu o surgimento de cadeiras na Educação dentro das universidades (Kilpatrick, 2008).

Em meio a essas necessidades de mudanças, temos as contribuições de Félix Klein, um desses reformadores, iniciando uma reforma no ensino secundário de matemática, incluindo o cálculo, com o intuito de elevar o grau de matemática nesse nível de ensino e, conseqüentemente, do ensino superior, na tentativa de construir uma aliança entre professores, cientistas e engenheiros que defendiam uma reforma no currículo de ciências e Matemática (Kilpatrick, 2008).

Kilpatrick (2008) esclarece ainda que essas e outras reformas, sejam no currículo, na matemática ensinada na escola, na matemática como disciplina científica ou em relação aos profissionais que ensinam a matemática, têm por parte da Educação Matemática um tratamento no ensino como uma prática profissional, exigindo aperfeiçoamento, experiência e certificação.

É evidente que o Ensino de Matemática se desenvolve como uma prática de diversos tipos de estruturas acadêmicas, enquanto a Educação Matemática, como campo de estudo, teve seu grande desenvolvimento nas universidades. Dessa forma, podemos dizer que a característica principal da Educação Matemática é que ela “deve ser constituída através do ensino, neste caso, através do ensino dos professores assim como estudantes, e através do ensino do professor, bem como para compreender e fazer matemática” (Kilpatrick, 2008, p. 15).

Ainda segundo o autor, muitas atividades do ICMI reverberam na Educação Matemática como um campo acadêmico conectado à Matemática por intermédio de um interesse mútuo com o ensino. Assim, a Educação Matemática não é uma disciplina e não é completamente uma profissão, mas um campo de estudo e conhecimento que continuará dependendo do apoio e da colaboração da Matemática, e essa relação será sempre mútua.

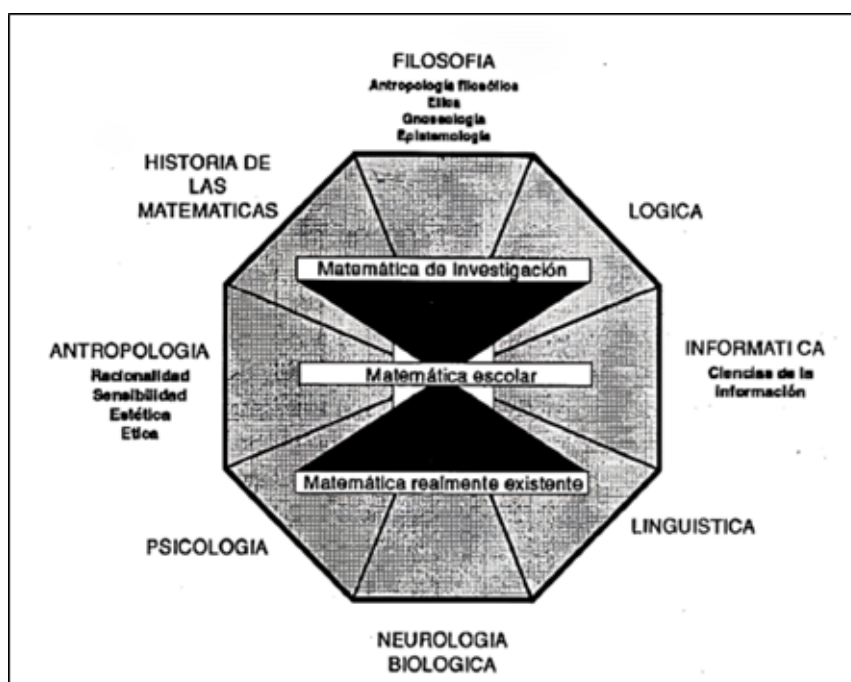
Corroborando com essas perspectivas, Schubring (2019) confirma que pesquisas recentes sobre a história social da matemática apresentam o ensino com um papel decisivo para o progresso das práticas de pesquisa. O autor ainda ressalta que a criação dos cursos de formação de professores de Matemática no ensino superior constitui o padrão estrutural predominante, tendo como ponto de partida a viabilização de atividades de investigação para os professores que ministram as aulas e orientações para a formação de professores, ou seja, cursos de estudos.

Com a preocupação de como ensinar objetos matemáticos, porque ensinar Matemática e o que ensinar da Matemática, surge uma necessidade de estudos mais aprofundados em relação ao ensino da Matemática, herdada da Educação, com a interação com outras áreas de estudo e conhecimentos, como a Sociologia, Antropologia, História e outros, como já mencionado anteriormente.

Podemos entender, a partir de Vasco (1994), que o ensino da Matemática é multifacetado, pois a visão que um psicólogo tem de como um aluno aprende é diferente da visão de um sociólogo, assim como de um antropólogo. Dessa forma, a Educação Matemática começa uma aliança com outros campos de estudo, na tentativa de adequar ou efetivar o ensino e a aprendizagem.

Podemos dizer ainda que a investigação sobre a história do ensino e da aprendizagem da Matemática não é independente nem autônoma, ou seja, constitui uma atividade profundamente interdisciplinar, possuindo intersecções importantes, com a História, a História da Educação, a Sociologia e a História da Matemática, entre outros (Schubring, 2014). Isso reforça a concepção de que a construção da Educação Matemática necessita de interações com outros campos de estudo para o seu desenvolvimento e consolidação.

Buscamos no octógono da Educação Matemática (figura 7) de Vasco (1994), o qual relaciona áreas de conhecimento que interagem, com a intenção de adequar o ensino e o estudo da Matemática, seja escolar, disciplina científica e/ou de investigação, como uma exemplificação das interações mencionadas.

Figura 7 – Octógono da Educação.

Fonte: Vasco (1994)

Um exemplo claro desse octógono proposto por Vasco (1994) são as teorias cognitivistas, por sua interação com outras áreas, como a Psicologia e a Antropologia, dentre as quais, podemos mencionar a Teoria dos Campos Conceituais, Teoria da Aprendizagem Significativa, Teoria Antropológica do Didático, Teoria do Pensamento Matemático Avançado, e de outras áreas, como a cultura e a História, a exemplo da Teoria da Objetivação, dentre outras.

Destacamos que esse octógono proposto por Vasco (1994) nos permite vislumbrar as interações que a pesquisa possui, principalmente com a História, a Historiografia e a Matemática. Com a História, por sua relevância para a metodologia da investigação, pois seus métodos trazem confiabilidade na busca das fontes, das interpretações e das avaliações para a construção de contextos, em particular do contexto medieval (Schubring, 2014).

Com a Historiografia, a partir de seus critérios de escrita e ferramentas de análise, por permitir materializar uma escrita da história investigada de uma forma compreensível e ajustada para desvelar um objeto de investigação (Barros, 2022; Beltran; Saito e Trindade, 2014). E, por fim, com a Matemática, buscando alguns de seus objetos em um recorte histórico que motivam a pesquisa, em particular a aritmética medieval.

É importante evidenciar que esse octógono não compõe todas as áreas das quais a Educação se apropria. No entanto, o apresentamos como ilustração para clarificar a interação da Educação Matemática com outros campos, oportunizando o ensino da Matemática a partir de diversas vertentes e compressões. Podemos, a partir desse octógono, localizar nossa pesquisa dentro dessas interações, na História da(s) Matemática(s), assim, encontramos nesse campo um viés, tanto para

a matemática de investigação quanto para a matemática escolar e científica. Após as argumentações apresentadas até aqui, explanaremos na seção seguinte alguns pontos da História da Matemática.

3.2 O lugar da pesquisa na Educação Matemática

Relacionar História da Matemática, Educação e Ensino de Matemática não é uma tarefa fácil e não é nosso objetivo exaurir as possibilidades ou definir essa relação, mas apresentar alguns pensamentos e contribuições da História da Matemática para a Educação Matemática e para o Ensino de Matemática. Por conseguinte, em um âmbito geral da investigação dos métodos e técnicas aritméticas da Europa no século XIII.

Para tanto, recorreremos inicialmente à perspectiva de D'Ambrósio (1996) em relação à Matemática:

[...] a disciplina matemática como uma estratégia desenvolvida pela espécie humana ao longo de sua história para explicar, para entender, para manejar e conviver com a realidade sensível, perceptível e com o seu imaginário naturalmente dentro de um contexto natural e cultural. [...]. Trata-se da construção de corpos de conhecimento em total simbiose dentro de um mesmo contexto temporal e espacial, que obviamente tem variado de acordo com a geografia e as histórias dos indivíduos e dos vários grupos culturais a que eles pertencem – famílias, tribos, sociedades e civilizações (D'Ambrósio, 1996, p. 7).

Podemos inferir, a partir de D'Ambrósio (1996), que esses corpos de conhecimento materializam a vontade de sobrevivência desses grupos culturais em seus ambientes e fora deles. Munidos dessa perspectiva, aliamos à da Educação, que vem a ser uma estratégia de estímulo ao desenvolvimento individual e coletivo com o objetivo de sobrevivência e de transcendência dos grupos (D'Ambrósio, 1996). Podemos dizer que esse elo entre Matemática e Educação será a consolidação e conservação, bem como do aprimoramento desses corpos de conhecimento apresentados por D'Ambrósio (1996). O que coaduna com a posição de “dar à História da Matemática um enfoque teórico que considera a origem do pensamento matemático como estratégias desenvolvidas por comunidades para a sua sobrevivência e transcendência” (D'Ambrósio, 2013, p. 8).

Assim, temos na História uma forma de acessar fatos, questões, adversidades, contextos desses corpos de conhecimento e como foram construídos, constituídos, divulgados e preservados. Podemos, então, não somente resgatar informações de fatos históricos, mas resgatar nossa própria humanidade, nossa própria identidade como seres que produzem conhecimento em nossas práticas, permitindo um ensino mais humanizado, com significado e significância para o aluno, desmistificando que a Matemática é apenas produzida, praticada e entendida por grandes matemáticos ou por cientistas.

Desse modo, com a investigação dos métodos e técnicas aritméticas da Europa no século XIII, resgatamos um pouco de nossa história. Apresentamos que as organizações aritméticas utilizadas por nós, hoje, trazem uma história entrelaçada por conflitos e dificuldades sociais, econômicas e

clerical, as quais foram superadas, não por “um passe de mágica”, mas por muito esforço e diversos fatores contextuais daquele período, que geram ferramentas potencialmente ricas para a Educação Matemática.

Nesse sentido, D’Ambrósio (2013) sintetiza, a partir de uma obra de Dirk Struik (1894 – 2000), alguns motivos para o ensino da História da Matemática, dos quais elegemos três: (1) para situar a Matemática como uma manifestação cultural, assim como são manifestações culturais a linguagem, os costumes, os valores, as crenças e os hábitos; (2) para mostrar que a Matemática que se estuda nas escolas é uma das muitas formas de Matemática desenvolvidas pela humanidade; (3) para saber que, desde então, a Matemática foi incorporada aos sistemas escolares das nações colonizadas, tornando-se indispensável em todo o mundo em consequência do desenvolvimento científico, tecnológico e econômico, e avaliar as consequências socioculturais dessa incorporação.

Observamos que esses motivos aproximam a matemática do aluno, desvelando-a como uma prática comum, ou seja, uma prática de sua vivência ao ir ao supermercado, à feira, ao comprar açaí, ao jogar futebol, em suas refeições, ao construir estratégias para ganhar de um adversário em algum *game*. Isso mostra que o ensino e aprendizagem de Matemática poderá ganhar um novo *status* contrário ao que culturalmente se prega de ser apenas para superdotados e *nerds*.

Temos na História da Matemática a possibilidade de (re)construção de ideias ou noções conceituais presentes nos livros didáticos utilizados no contexto escolar, a partir de diversas articulações, de forma mais específica, que podem ser promovidas no tratamento didático do estudo de textos históricos, apresentando grandes vantagens para alunos e professores. Ou seja, a História da Matemática se mostra como uma ferramenta importante para a Educação Matemática por dar significado, tanto ao trabalho do professor, como na aprendizagem dos estudantes (Mendes, 2001; Brandenberg, 2010). Logo, temos na investigação do *Liber Abaci* um texto em potencial para alcançar significados importantes dos objetos matemáticos para alunos professores.

Hans Niels Jahnke efetiva essa compreensão, ao trabalhar um texto histórico de Johann Bernoulli (1667 – 1748) com alunos de um curso avançado de Matemática na Alemanha. Jahnke (2014) inicia seu texto apresentando algumas noções da História da Matemática. Uma dessas noções entende essa área de estudos como uma coleção de problemas interessantes, dos quais alguns podem ser trabalhados na escola.

Uma segunda noção está ligada ao que o autor chama de princípio genético, defendido por nomes como Felix Klein (1849 – 1925) e Otto Toeplitz (1881 – 1940), os quais entendiam que a História da Matemática podia auxiliar na compreensão dos alunos, ao tornar visíveis grandes linhas de desenvolvimento, podendo conectar assuntos aparentemente desconexos (Jahnke, 2014).

Para sua proposta, Jahnke (2014) propõe uma abordagem hermenêutica, que consiste em convidar os alunos a examinarem detalhadamente uma fonte histórica e explorar seus vários con-

textos de natureza histórica, cultural e científica. Nessa proposta, os alunos tomam a posição de um historiador, fazendo algumas perguntas que um historiador profissional da Matemática faria. Essas perguntas estão no sentido dos diferentes significados dos conceitos e das diferentes estruturas conceituais entre a época de Bernoulli e o período presente dos alunos.

Seus resultados apontaram na direção do aprofundamento da compreensão em dois níveis – a partir da leitura de fontes históricas – no fazer matemática e no refletir sobre a Matemática. Também apresentam como considerações que existem diferentes perspectivas, que são efetivas, sobre a História da Matemática, e nenhuma delas tem o direito de reivindicar a verdade exclusiva para si.

Outra consideração é que uma construção textual consiste na fusão de diferentes horizontes, o horizonte do leitor e o horizonte do texto/autor, sem esquecer que leitores diferentes, com origens diferentes, chegam a interpretações diferentes desses textos. Podemos inferir que objetivos e delimitações temáticas diferentes nos levam a historiografias diferentes (Jahnke, 2014).

Mais uma perspectiva importante para contribuições da História da Matemática para o ensino e aprendizagem se revela a partir de tendências mais atualizadas da historiografia. Nesse sentido, Saito (2013) salienta que mais que um repositório de informações, a História da Matemática pode ser uma ferramenta importante viabilizando questões epistemológicas relevantes, pelas quais os professores poderão desenvolver ações mais críticas e criativas.

No entanto, questões como essas já eram levantadas por pesquisadores, como Hans Freudenthal (1905 – 1990), o qual tecia propostas para uma História da Matemática contextualizada, interessante e atrativa, opondo-se a uma História da Matemática anedotal, com histórias isoladas, que são mais entretenimento (D’Ambrósio, 2013).

Podemos dizer ainda que, usando fontes adequadas e atualizadas, o professor terá na História da Matemática uma ferramenta importante, que possibilita a promoção de conhecimentos matemáticos com uma visão mais crítica. Assim, podemos ter na História da Matemática um ponto de partida para ressignificar os objetos matemáticos e levantar discussões de diferentes modelos de conhecimento, como os métodos aritméticos do medievo (Saito, 2013).

Dando ênfase maior ao processo de conhecimento, ou seja, ao contexto em que os conceitos foram desenvolvidos, temos a possibilidade de construir interações entre História e Ensino ou Educação Matemática, buscando evidenciar o processo histórico conjuntamente com a formação das noções conceituais no processo de ensino e aprendizagem. Portanto, não basta considerar apenas os aspectos epistemológicos e metodológicos ligados à História da Matemática, e também à Educação Matemática, articulando concepções historiográficas do historiador e pedagógicas do educador (Saito, 2013).

Consideramos, portanto, a Educação Matemática como um campo de estudos e conhecimentos que interage com diversos campos na tentativa de solucionar problemas educacionais para

a efetivação do ensino e da aprendizagem da Matemática. Temos, nesses mais variados campos, a História da Matemática, que consideramos para a presente pesquisa para interações com a Educação Matemática.

Dessa forma, ao investigar os métodos e técnicas aritméticas da Europa no século XIII e seu contexto de construção de conhecimento, temos como contribuir para diversas investigações educacionais dentro da História da Matemática que, por extensão, oportunizam soluções para o ensino e para aprendizagem da Matemática. Ou seja, traz contribuições para a Educação Matemática, não porque traremos uma proposta de ensino, mas por contribuir epistemologicamente para a construção de objetos matemáticos.

Nosso lugar, desta forma, na Educação Matemática, encontra-se na proposta de articular, a partir da historiografia atualizada, a construção de conhecimentos contextuais, epistemológicos e historiográficos de investigações de textos históricos e seus contextos, promovendo articulações com diversas áreas, conforme proposições não somente de Vasco (1994), mas igualmente por Saito (2015), Schubring (2014) e Barros (2022). Apresentamos no capítulo seguinte essa construção do contexto da Idade Média, da caracterização do *Liber Abaci* e de seu conteúdo.

4

UM ESTUDO DO LIBER ABACI E SEU CONTEXTO

O matemático italiano Leonardo de Pisa (1170 – 1240) é também denominado como Leonardo Pisano, Leonardo *Bigollo* ou Leonardo Fibonacci. Porém, é mais conhecido simplesmente por Fibonacci, alcunha dada seiscentos anos mais tarde por Guillaume Libre (1803 – 1869), que deve ser entendida como ‘membro da família Bonacci’ e não filho de um pai chamado Bonacci (Vogel, 2007). Esse italiano é considerado um dos matemáticos de maior destaque do cenário europeu. Leonardo Fibonacci obteve esse destaque a partir de suas obras publicadas¹⁶ no século XIII, em especial, com seu primeiro livro intitulado *Liber Abaci*, por trazer inovações para o cenário europeu, como os algarismos indo-arábicos e o sistema posicional decimal dos indianos. Temos também, a partir desse livro, questões bem famosas, como do crescimento populacional ou da reprodução de coelhos, que gera uma sequência numérica que ficou conhecida como número de ouro ou proporção áurea. Assim, esse matemático ocupa uma posição de grande relevância na história.

Muito embora essa fala seja conhecida de muitos, temos algumas divergências por parte da historiografia medieval, a qual apresenta que Leonardo Fibonacci não foi o primeiro a inserir as cifras indianas na Europa. Antes dele, temos Boécio (480 – 524) e Gebert d’Aurillac (950 – 1003), assim como Adelard de Bath (1180 – 1252), que também viajou pelo mundo árabe no século XII, tendo contato com matemáticas não divulgadas na Europa. Dessa forma, fizemos os seguintes questionamentos, em direção à questão de pesquisa e ao objetivo que guiaram este capítulo: quais foram os elementos historiográficos e aritméticos que deram ao *Liber Abaci* tanta visibilidade? Esse livro teve potencialidades para o século XIII?

¹⁶ Para as obras no período da Idade Média, o termo publicação estará no sentido de tornar a obra (livro, texto) conhecida, pois o fato de uma obra ser conhecida não garante que tenha sido publicada (Arns, 2007).

Tendo como referência esses questionamentos, objetivamos discutir neste capítulo aspectos historiográficos da construção do *Liber Abaci* e elementos aritméticos que o compõem, com vistas a compreender o contexto histórico da elaboração do livro. Para tanto, investigamos o conjunto de saberes contidos no *Liber Abaci* da edição de 1857.

Para alcançar nosso objetivo, organizamos o presente capítulo em três seções. Na primeira, apresentamos os aspectos historiográficos em torno do *Liber Abaci*, para visualizar o que Saito (2015) chama de ‘malha histórica da construção do texto’. Na segunda seção, fazemos a apresentação do livro, em particular da edição de 1857. Em seguida, apresentamos os elementos aritméticos que classificaram o *Liber Abaci* como um manual de aritmética. A seguir, apresentamos o entrelaçamento dos acontecimentos dos fatos históricos medievais.

4.1 Aspectos contextuais da composição do *Liber Abaci*

Nesta seção, trazemos aspectos contextuais que podem nos ajudar em uma ambientação medieval, na qual Leonardo Fibonacci escreveu seu primeiro livro. Para tanto, faz-se necessário elucidar alguns posicionamentos tomados para esse fim. Seguindo alguns pressupostos de Saito (2015), inicialmente deixamos claro que não pretendemos seguir uma linearidade dos fatos, mas propor uma organização historiográfica que permita uma aproximação com o cenário medieval. Assim, nossa preocupação não se fixa nos fatos em si, mas nos acontecimentos dos fatos ou em suas projeções, disseminações ou repercussões, na tentativa de identificar fatores influenciadores, sejam diretos ou indiretos, para a construção do *Liber Abaci*.

A partir de Lindberg (2013), tomamos os termos ciência, teologia e igreja como abstrações e não como realidades tangíveis. No medievo, nem sempre a ciência e a teologia estavam separadas por fronteiras disciplinares. Os estudiosos que mantinham percepções científicas eram os mesmos que contribuíam para o avanço da teologia, havendo uma espécie de interação. Dessa forma, esses termos aparecem neste relatório de pesquisa ao fazer referência a práticas sociais e culturais do contexto medieval, e tomamos a mesma referência para religião e clero, bem como para suas derivações.

Apontamos também que, embora seja comum a quebra do paradigma de que a Idade Média tenha sido a “idade das trevas”, é válido observar, a partir de Franco Júnior (2001), que até mesmo a rotulação de “idade média” foi dada posteriormente, no século XVI, na tentativa de construir uma quebra com o passado. Segundo o autor, isso se deu a partir de um desprezo indisfarçado com o período entre a antiguidade clássica e o próprio século XVI. Dessa forma, o século XVI via o renascimento da civilização greco-latina ao olhar para um espelho; tudo o que estava antes não passava de um intervalo, um tempo intermediário, daí Idade Média.

Após esses esclarecimentos, apresentaremos um conjunto de aspectos que caracterizam a Idade Média. Vale destacar que, de acordo com Franco Júnior (2001), não há um consenso entre os historiadores em relação a esse período específico, mas, para os fins de nossa pesquisa, adotamos

o intervalo compreendido entre os séculos IV e XV. Nesse sentido, selecionamos os aspectos que julgamos importantes e que perpassam aqueles séculos para nossas discussões e ambientações.

Iniciamos lembrando do declínio do Império Romano, que rompeu fronteiras geográficas e culturais, bem como de outros aspectos, tendo como consequência obstáculos de relações importantes, como nas ciências e nas artes e o distanciamento linguístico, o que dificultou cada vez mais o acesso a obras anteriores ao século III. A parte ocidental preferiu, depois do século III, técnicas mais tradicionais de medidas e de contagens do que, por exemplo, a geometria pura e axiomatizada dos gregos.

Como apontado por Brito (2007), um outro aspecto importante foi a função absorvida pela igreja de ser a principal mediadora da produção, divulgação e manutenção das ideias e saberes, assim como de ser a detentora da habilidade de leitura e da escrita, centralizando o acesso e a produção de conhecimento no clero. Isso delimitou os critérios de acesso e da produção de conhecimento. Essa veiculação do saber não poderia ser de outra forma, a não ser de estar a serviço da igreja, do conhecimento de Deus e do aprofundamento da teologia.

Um resultado esperado, pois foi o clero que garantiu uma estratégia de estímulo ao desenvolvimento individual e coletivo, com o objetivo de sobrevivência e de transcendência de seu grupo, utilizando os saberes para explicar, entender e conviver com a realidade sensível, perceptível e imaginária (D'Ambrosio, 1996).

Por consequência, muitas das obras greco-romanas produzidas serviram para subsidiar os dogmas cristãos. Os textos que divergiam desses interesses foram deixados de lado, alegorizados, adaptados ou reduzidos, com o intuito de não contrariarem os ideais religiosos.

Temos, então, nos séculos VI e VII, a construção de manuais dos saberes já produzidos, restringindo-se em sua maioria a traduções dos textos, como os feitos por Boécio (480 – 524); os compêndios de teologia; os manuais que tentavam reunir as artes liberais, com vistas à exegese bíblica; textos sobre as artes liberais de Cassiodoro (480 – 575); os livros dos números e as etimologias de Isidoro de Sevilha (550 - 636); manuais de gromática¹⁷ que eram mais usados em situações práticas (Brito, 2007).

Assim, esta matemática medieval se formou a partir da releitura que a sociedade ocidental da Idade Média fez de fragmentos da matemática grega, releitura esta muitas vezes revestida de aspectos simbólicos e realizada a partir das necessidades relacionadas tanto às especulações metafísicas quanto às questões de trabalho e de sobrevivência (Brito, 2007, p. 128).

No entanto, o que nos chama atenção é esse contexto que não era homogêneo em toda a parte ocidental, a qual passaremos a denominar de Europa. Observamos, primeiramente, que pos-

¹⁷ Relativo à agrimensura e medição de terras a partir da groma, uma ferramenta de medida utilizada pelos romanos.

teriormente ao período de Maomé (571 – 632) e de seus principais seguidores, quando a Biblioteca de Alexandria foi destruída¹⁸ e que se perderam muitas obras, entra em cena o período de sultanato, iniciado com Al-Mansur (714 – 775) e seguido de outros sultões, no qual foi estabelecida Bagdá como a nova capital. Juntamente, houve uma escola científica denominada de *Bait Al-hikma* (Casa da Sabedoria), cuja biblioteca, segundo Garbi (2009), teve uma importância mundial, garantindo estudos posteriores na Europa. Essa escola não só garantiu a preservação das ciências e das artes conhecidas, como a divulgação, o estudo e a construção de novos saberes, os quais se estenderam pelas fronteiras do Oriente com a Europa.

Também observamos que não havia uma hegemonia territorial e de governo único, ou seja, o território europeu não partilhava de uma só cultura, sociedade, economia e liderança, fazendo com que fosse um território diversificado. Essa configuração permitiu a entrada, em alguns pontos da Europa, de novas literaturas; conhecimentos da língua árabe; estilos artísticos; técnicas para o comércio, para a agricultura e para a manufatura, como a agricultura e a irrigação vinda do Egito, assim como o conhecimento da bússola, do papel e da pólvora vinda da China (Vasconcelos, 1925).

Não podemos pintar um mundo europeu em uníssono, pois além de cada classe social e profissional pintar um mundo diferente para a sua época, temos muitos mundos dentro da Europa. O que se estende à ciência medieval, composta por um conjunto de teorias, sem uniformidade nem constituição monolítica. Sua prática era tão diversificada quanto os eruditos que as exploravam, o que acontecia semelhantemente com a teologia e a religião medievais (Lindberg, 2013).

No reino da Sicília havia um desses ambientes heterogêneos. Schramm (2001) apresenta esse reino como um ponto de interesse para as potências estrangeiras, o qual teve sua colonização com os gregos, mas conquistado pelos romanos, seguidos pelos godos, bizantinos e árabes. Cada uma dessas potências deixou suas marcas, suas influências na cultura, na sociedade, na ciência e nas artes, sendo os árabes os mais marcantes.

Em dois séculos, os árabes, naquela região, dominaram o *mar tirreno* e fizeram a religião, a cultura e a língua ganharem características tão próprias que deram a esse reinado um aspecto não europeu. Essa caracterização muda com a conquista pelos normandos, sobrepondo os aspectos deixados pelos árabes, que trazem novamente as influências românicas e gregas bizantinas (Schramm, 2001).

Percebemos que aquela sociedade passou por muitas transformações a curto prazo, gerando possíveis conflitos ideológicos, pois posturas que anteriormente eram comuns, passavam a ser contraditórias e incompatíveis no novo reinado, bem como outras passavam a ser aceitas ou fundidas, transformando essa cultura em uma nova unidade que destoava em muitos aspectos da Europa.

¹⁸ A biblioteca de Alexandria não foi destruída simplesmente pelos islâmicos; no entanto, passou por três grandes ataques. Primeiramente, com Zenóbia (240 – c. 274), rainha do Império de Palmira, no ano de 269, seguido, em 415, por Cirilo de Alexandria (c. 375 – 444), quando Hipátia (c. 351/370 – 415) foi morta. Por fim, a biblioteca sofreu seu último ataque durante a invasão islâmica em 640.

Juntamente com esses conflitos, houve a oportunidade de acesso a livros em árabe e em grego em suas versões originais, aos quais boa parte da Europa só ia ter acesso tempos depois. Esses livros foram traduzidos para o latim, tornando essa a língua da ciência e deixando para esse reinado o legado de maiores eruditos da época, dado que os governantes normandos se congregavam em torno dessas obras.

Portanto, o fato desse reinado ter sido multicultural até na língua, pois alguns falavam grego, árabe e latim, tornou os eruditos da Sicília tradutores de obras muito importantes, com revela Schramm (2001):

Bizâncio recompensou a reaproximação entregando manuscritos preciosos. Os escritos de Euclides, Proclo e até Ptolomeu viajaram para o oeste em manuscritos gregos e foram traduzidos para o latim por tradutores acadêmicos da **universidade de Salerno antes mesmo que a tarefa fosse realizada em Toledo** (Schramm, 2001, p. 290, tradução nossa, grifo nosso).

Schramm (2001) apresenta Amiratus Eugenius (1130 – 1202) como o tradutor da Óptica de Ptolomeu (90 – 168) de uma versão do árabe, “sem Eugenius, ativo como Amiratus na corte normanda, nada desse trabalho – de importância incomparável e seminal para nossa física – jamais teria chegado ao Ocidente” (Schramm, 2001, p. 290, tradução nossa).

Contudo, observamos que esses tradutores, diferentes do clero, não estavam subordinados aos interesses da igreja para suas traduções e estudos. Podemos observar que os reis sicilianos, ainda que no século XII com Roger II (1095 – 1154) e no século XIII com Frederico II (1194 – 1250), contemporâneo de Leonardo Fibonacci, estavam mais próximos de sultões orientais do que governantes europeus por seus estilos e princípios, suas políticas práticas, sua cultura e a sociedade que os sustentavam (Schramm, 2001).

Mesmos assim, inferimos que a igreja teve uma influência ao longo da Idade Média quanto à língua a ser traduzida em tais obras. Como vimos, o latim era a língua da ciência, talvez porque as primeiras traduções que priorizaram o conhecimento de Deus e da teologia para uma exegese bíblica fossem em latim, pois, conforme Le Goff e Schmitt (2006), o latim era a linguagem litúrgica em toda a Europa ocidental, o que pode ter feito desse idioma a língua da ciência efetivamente.

Essas diversidades na Europa repercutiram em muitos aspectos da vida medieval. No entanto, temos nas atividades comerciais um aspecto que permeou boa parte da Idade Média e por boa parte da Europa, influenciando áreas como as ciências e as artes. Mesmo tendo uma grande repercussão, há muitas nuances. Podemos concordar com Potro (2012), quando destaca:

O precursor do século XI não é o mesmo comerciante do século XIII nem aquele que superou as dificuldades do século XIV e projeta seu domínio indiscutível sobre o século XV. O comércio mercantil passou por importantes transformações ao longo desses séculos

que levaram à sua **profissionalização e aceitação social** (Potro, 2012, p. 202, tradução nossa, grifo nosso).

Embora seja um fato essas diferenças no comércio e no comerciante ao longo da Idade Média, vejamos alguns pontos importantes e influenciadores desse aspecto da vida medieval. Começamos salientando a citação acima, quando Potro (2012) apresenta que essas transformações, mesmo que heterogêneas, culminaram em sua profissionalização, bem como na profissionalização de outros trabalhadores, como os cambistas, banqueiros e na organização da sociedade em grupos de ofício. Desse modo, a organização urbana e consequentemente social e econômica sofreram modificações.

É perceptível que todas as mudanças enfrentam resistências, já que é natural haver divergências de opinião entre aqueles que defendem a continuidade e os que anseiam por inovações. No entanto, com o passar do tempo, essas transformações gradualmente ganharam aceitação na sociedade, a ponto de o clero também incorporar novas perspectivas.

Uma dessas perspectivas se refere ao valor das mercadorias vendidas pelos comerciantes, haja vista que em um dado momento eram contra a taxação acima do valor de custo de um produto. Com tantas transformações, passaram a aceitar a posição de que era justo cobrar uma quantia a mais em prol do trabalho e empenho empreendido pelos comerciantes ou pelos artífices que fabricavam os produtos (Guimarães Filho; Brandemberg, 2022).

O que converge com Huberman (1981), quando apresenta a concepção do clero a partir de um pensamento bíblico¹⁹ sobre emprestar dinheiro a juros. Esse autor apresenta que toda intenção de lucro em alguma transação se configurava como o pecado da usura. Pois, foi na Bíblia, que em meados do século XII, que os intelectuais basearam seus argumentos em relação à teoria política ou econômica (Le Goff; Schmitt, 2006).

Esse pensamento era partilhado pela sociedade e bem aceito, pois antes da expansão do comércio havia apenas pequenos comerciantes e sem alguns ofícios urbanos, como os banqueiros, sem a necessidade de grandes movimentações. Naquele contexto, “a possibilidade de investir dinheiro com lucro praticamente não existia, se alguém desejava um empréstimo, certamente não tinha por objetivo o enriquecimento, mas precisava dele para viver” (Huberman, 1981, p. 46).

Em linhas gerais, podemos evidenciar que a Europa do século XIII estava em um processo de transição. A partir de Franco Júnior (2001), podemos perceber que houve um crescimento demográfico, bem como da produção agrícola e artesanal dos produtos, levando a mudanças na demografia local e na economia.

Ainda em conformidade com o autor, em algumas partes da Europa, a sociedade estava dividida prioritariamente em *Oratores*, *Bellatores* e *Laboratores*. Esses consistiam em uma visão de interdependência de obrigações entre as partes, que consistia no clero – *Oratores*, do latim rezado-

¹⁹ Pois que aproveitará o homem se ganhar o mundo inteiro e perder a sua alma? (Bíblia [...], 1999, Mt 16, 26, p. 17).

res – detentores do poder da ordem, do conhecimento e da influência política; nobres – *Bellatores*, do latim guerreiros – os que detinham a posse das terras, caçadores ou os que eram envolvidos com atividades militares, e o povo (servos e súditos) – *Laboratores*, do latim trabalhadores – os que trabalhavam serviçalmente.

No século XIII havia uma política marcada por uma variação entre universalismo, particularismo e nacionalismo, juntamente com uma religião que experimentava os primeiros sinais de uma teocracia papal emergente. No campo das artes, o período medieval exibia os estilos românico e gótico, com uma rica variedade de expressões literárias, incluindo canções de gesta, romances arturianos, poesia lírica e trovadoresca. A filosofia da época era predominantemente escolástica, enquanto a ciência começava a florescer a partir de uma perspectiva naturalista do mundo, contribuindo para o surgimento de algumas universidades.

No final do século XIII, a dinâmica entre o feudalismo e a vassalagem começou a enfraquecer, dando lugar a um processo de fortalecimento da autoridade real na Europa. Esse período testemunhou o surgimento de um aparato burocrático, que posteriormente evoluiria para a formação dos Estados Nacionais entre os séculos XVII e XIX.

Vemos que os elementos historiográficos se entrelaçam à medida que absorvemos as informações contidas na história europeia. O crescimento comercial só avançou devido, dentre outros aspectos, aos três que são mencionados por Potro (2012): o crescimento demográfico, o crescimento da produção agrícola e uma maior estabilidade política.

O aumento da produção agrícola, o aumento da produção artesanal urbana e o contato com povos orientais possibilitaram ao comerciante gerar um impulso para desenvolver rotas locais e internacionais, tanto para o norte quanto para o sul, garantindo um grande aumento e a consolidação das atividades comerciais (Guimarães Filho; Brandemberg, 2018).

Potro (2012) garante essa concepção:

A conjunção desses três fatores, logo após o apocalíptico ano 1000, estabeleceu as condições ideais e totalmente necessárias para o desenvolvimento do comércio. A princípio lentamente, depois mais rapidamente, a sociedade medieval contemplou como o crescimento da população e o rendimento agrícola permitiam que um maior número de produtos fosse colocado em circulação. Primeiro foram produtos agrícolas, alimentos, panos e tecidos... pouco a pouco foram acrescentados produtos exóticos: perfumes, especiarias, tecidos finos... chegados de terras distantes e que a recente prosperidade do Ocidente tornou possível adquirir (Petro, 2012, p. 203, tradução nossa).

Temos, ainda, em conformidade com Potro (2012), os avanços tecnológicos dos navios e instrumentos de navegação, um aspecto importante para o crescimento comercial que possibilitou o aumento considerável de suas rotas. Esses avanços assistiam o desenvolvimento de serviços de transportes para longas viagens como um ofício complementar, possibilitando nas intermediações

do século XIII a separação de algumas funções, dentre as quais temos os comerciantes fixos, intermediários e transportadores, assim como o grande comerciante que administrava todo seu negócio da cidade em que morava, confiando algumas etapas da comercialização a agentes localizados em diferentes lugares ou terceirizando alguns serviços.

Havia também a ascensão de alguns serviços urbanos, como os banqueiros, já mencionados, que necessitavam de operações financeiras cada vez mais elaboradas e maiores, pois havia as operações de escambo, depósitos e empréstimos, bem como movimentos de quantias consideráveis e transferências de dinheiro sem o seu transporte físico. Vemos que o crescimento do comércio não só estimulou o desenvolvimento dos banqueiros, como também da circulação monetária e do crédito comercial.

Percebemos com esses desenvolvimentos a necessidade de materiais que orientassem os trabalhos exercidos por essas profissões urbanas, mais especificamente livros técnicos que, em geral, eram de aritmética, pois a grande parte do ofício desses trabalhadores era constituído de cálculos conhecidos como aritméticos, influenciando na maior circulação desses conhecimentos. Ressaltamos ainda que, segundo Arns (2007), a reprodução desses livros era atrativa para os livreiros – que eram bons comerciantes também – que sempre estavam à procura de obras que pudessem agradar ao público letrado.

Potro (2009) salienta que toda a produção, desses livros técnicos de aritmética europeus dos séculos XIII, XIV e XV, parece estar intimamente ligada ao crescimento comercial, como instrumentos essenciais de apoio às atividades contabilísticas e fiscais, tudo para ter mais eficiência no desenvolvimento de seus serviços.

O que coaduna com a afirmação de Le Goff e Schmitt (2006) de que, a partir do século XIII, os leigos encontram em língua vernácula instrumentos que corresponderam às suas necessidades específicas, como livros de contas dos comerciantes – livros técnicos, onde havia o interesse pela aritmética com cálculos que utilizassem as cifras indianas.

Toda essa movimentação leva ao que Potro (2009) denomina de alfabetismo de cunho utilitário, prático e profissional que, unido à aritmética, constituía um conhecimento indispensável para um bom negócio mercantil em qualquer escala, bem como para a administração empresarial e patrimonial e para outros setores urbanos.

Nesse ínterim, as universidades e os conventos não possuíam interesse ou vocação para ministrar esses saberes que a sociedade começou a requerer, fazendo com que fossem abertas escolas onde os filhos de comerciantes e de artesãos – e provavelmente de outros ofícios urbanos – pudessem adquirir esses conhecimentos de cunho prático, como a contabilidade, que não estavam tão ligados aos saberes clericais como antes. A teologia passa a ser um campo particular de conheci-

mento, consagrando esse saber nas universidades, bem como sua superioridade na hierarquia dos conhecimentos (Le Goff; Schmitt, 2006).

Nesse contexto, o *Trivium* e o *Quadrivium* eram os principais ramos do conhecimento reconhecidos, integrando as Artes Liberais. O *Trivium* incluía gramática, retórica e dialética, enquanto o *Quadrivium*, aritmética, geometria, música e astronomia. Embora esses conhecimentos fossem os oficiais e que os conhecimentos em trânsito na sociedade e na economia (dos comerciantes) não estivessem instituídos nas universidades, a igreja estava preocupada e interessada por esses conhecimentos que estavam sendo movimentados.

O clero estava preocupado e interessado nesses conhecimentos em movimento, pois acreditava que todo conhecimento humano era um dom de Deus e, portanto, poderia ser usado para interpretar as Escrituras. Assim, esses conhecimentos eram vistos como uma maneira de compreender melhor a vontade divina e a Bíblia.

Vemos que a complexidade dos problemas enfrentados pelo mercado, com sua expansão, exigiram cálculos mais elaborados e confiáveis, chegando um novo desafio para o mercador em suas atividades: ser entendido em suas contas. De acordo com Molland (2013), fragmentos de evidências literárias demonstram que o cálculo havia alcançado níveis de sofisticação que contrastavam com a simplicidade da maioria dos outros textos matemáticos daquela época.

Do mercador era exigido um papel importante na aprendizagem de cálculos aritméticos para além da vida cotidiana. Era necessário o uso de manuais técnicos que trouxessem uma sistematização dos cálculos, com a finalidade de entender e ser entendido. Nesse aspecto, podemos dizer que os italianos, orquestrados por Leonardo Fibonacci, se destacaram a partir do *Liber Abaci* escrito em 1202, o qual, será evidenciado na seção seguinte (Potro, 2012).

Todos estavam interessados em uma aritmética que os auxiliassem. Dessa forma, ela passa a ser valorizada e divulgada, tendo se configurado como uma ferramenta de trabalho indispensável para esses grupos da sociedade medieval, expressando até mesmo valores éticos, como honestidade, confiabilidade e lealdade, advindos da rigidez dos cálculos, o que coadunava com o conhecimento da sabedoria divina e com o que Deus requeria de seus fiéis.

Um outro aspecto importante para essa divulgação foi o financiamento dado pela corte com Frederico II, com a organização do sistema administrativo romano, incentivando o comércio, a agricultura, a indústria, os estudos das ciências e das artes, fundando universidades como a de Nápoles, a primeira laica (Guimarães Filho; Brandemberg, 2017).

Observamos ainda que a aritmética trazida pelo *Liber Abaci* no século XIII, a qual se consolida paralelamente com as cifras indianas, bem como com o sistema de numeração posicional, instituídos ao longo da história humana como um sistema universal, ofereceu algumas inovações aos cálculos aritméticos.

Para tanto, devemos lembrar que tanto a Europa quanto o Oriente passaram por períodos de instabilidade científica, pois vivenciaram intensos momentos de guerra. A Europa consegue de forma mais tardia seu desenvolvimento científico em relação ao Oriente, que arcou com a responsabilidade de reerguer um novo centro científico. Esse centro, chamado de *Bait al-hikma*, como dito anteriormente, impulsionou em grande medida o crescimento científico na Europa, bem como proporcionou a viajantes, como Leonardo Fibonacci, irem para o Oriente, possibilitando o contato com uma aritmética prática e comercial, desconhecida em grande parte da Europa (Petro, 2000; Guimarães Filho, 2018).

É no Oriente que observamos uma das obras que permite o estudo mais conciso da aritmética na Europa, um livro que, de acordo com Eves (2011), dá origem à palavra álgebra, intitulado de *Hisab Al-jabr Wal Muqābalah* de autoria de Al-khowarizmi (708 – 850). A obra permitiu que estudiosos europeus, como Leonardo Fibonacci, aprofundassem seus estudos em matemáticas não divulgadas amplamente na Europa.

Vemos ainda em Garbi (2009) que

Foi na extensa fronteira entre os mundos cristão e muçulmano que os europeus, realizando transações comerciais com os árabes, tiveram seus primeiros contatos com um outro tipo de Aritmética. A obra de Al-khwarizmi exerceu grande influência na matemática europeia durante os últimos séculos da idade média (Garbi, 2009, p. 24).

Consequentemente, percebemos que a Matemática, preservada e desenvolvida no Oriente, ajudou, anos mais tarde, o desenvolvimento de uma aritmética europeia, a qual tem como um dos maiores entusiastas, divulgador e contribuinte, Leonardo Fibonacci.

Ao olhar para alguns séculos anteriores a Leonardo Fibonacci, temos na Europa tradutores muçulmanos e judeus, os quais, segundo Petro (2000), não foram meros tradutores. Inferimos que esses estudiosos contribuíram para o fortalecimento e desenvolvimento da aritmética europeia, bem como de outras áreas da Matemática.

Em consonância com a nossa inferência, temos em Lindberg (2013) a compreensão de que os estudiosos medievais aprenderam a pensar sobre a natureza, reproduzindo a cultura científica mais avançada que estava disponível. Notamos que as ciências clássicas importadas foram recebidas não como produtos acabados, mas como obras em andamento, para serem assimiladas, esclarecidas, criticadas, corrigidas e ampliadas, o que fez da ciência medieval uma continuação da tradição clássica de origem grega com importantes acréscimos por esses estudiosos, como os muçulmanos.

Assim, cria-se em Córdoba um clima semelhante ao de Bagdá, permitindo formar escolas de matemáticas, astronomia, medicina e botânica, nas quais já eram conhecidos muitos dos autores árabes em todo o século IX, que não eram apenas estudados, mas comentados, testados e comprovados. Dando continuidade a esses estudos, temos no século X a Escola de Astronomia Andaluzes,

com membros importantes, como Ibn al Samh (979 – 1035) e Al-Zahrawi (936 – 1013), que foram mestres da aritmética e da geometria, os quais escreveram sobre Aritmética Prática e Aritmética Comercial. Essa última, intitulada de *Al-Muawalat* (Petro, 2000).

Percebemos ainda que a influência cristã não esteve ausente desses movimentos. Se a característica do conhecimento científico da Idade Média era a sua origem clássica, certamente uma poderosa força foi o contexto cristão, no qual ocorreram investigações científicas enraizadas na tradição clássica, por vezes nutridas, negligenciadas ou combatidas, mas em todos os casos visivelmente moldados pelas instituições, valores e crenças dessa cultura medieval (Lindberg, 2013).

Outra influência que nos oportuniza surpresas são tanto as guerras como as diferenças religiosas, bem como os acordos entre reinos, os quais movimentavam fontes, ou seja, movimentavam textos que eram traduzidos para sua língua materna ou científica da Europa medieval. Nesse movimento, ocorria inclusive a troca de estudiosos entre as cortes desses reinos, como quando, de acordo com Burnett (2013), o sultão ʿĀl-Malik ʿĀl-Kāmil Nasr ʿĀd-Dīn Abū ʿĀl-Māli Muḥammad (1180 – 1238) enviou a Frederico II um ilustre estudioso muçulmano para dar assistência na interpretação da lógica árabe.

O que coaduna com Ifrah (2005), quando apresenta alguns aspectos das cruzadas:

Reconquistar a ciência e a cultura não era exatamente o objetivo das Cruzadas. No entanto, foi este o resultado dessas guerras insensatas. De 1095 a 1270 aproximadamente, os poderosos príncipes e cavaleiros cristãos tentaram impor pela espada sua tradição e sua religião aos infiéis do Oriente. Mas, ao contrário do resultado procurado, os cruzados voltaram para casa enriquecidos pelo patrimônio da cultura que buscavam combater na Terra Santa. O que permitiu finalmente os avanços que nem a ciência nem a pedagogia de Gerbert d'Aurillac tinham conseguido impor ao Ocidente dois ou três séculos antes (Ifrah, 2005, p. 312).

Dessa forma, muitos do clero aprenderam o cálculo ao modo de Al-Khowarizmi, ou seja, sem a necessidade do ábaco romano. Foi nesse contexto que surgiram, nas portas de Jerusalém, os primeiros algoristas europeus, os quais, tiveram que adotar o zero para substituir o espaço vazio no ábaco que utilizavam, entrando na Europa os cálculos e as cifras de origem indiana de forma mais efetiva (Ifrah, 2005).

Posteriormente, temos Leonardo Fibonacci, que Castillo (2007) apresenta como o primeiro matemático medieval que traz, após suas viagens em 1202, não somente uma álgebra e uma aritmética desconhecidas pela maioria dos europeus, mas os algarismos e o sistema numérico decimal e posicional dos indianos, os quais apresentaram muitas vantagens em relação a outros sistemas e outros algarismos, sufocando da aritmética os algarismos romanos e otimizando muitas atividades práticas, como o comércio e outras atividades urbanas, bem como a própria aritmética comercial e mercantil.

Leonardo Fibonacci reuniu em seu tempo os conhecimentos acumulados e iniciou uma série de publicações de livros, dos quais o primeiro e mais divulgado é o *Liber Abaci*, publicado pela primeira vez em 1202. Suas ideias foram amplamente aceitas na Itália e posteriormente na Europa, chamando a atenção de eruditos da época, como João de Palermo (1208 – 1289), e da corte, como o rei Frederico II (1194 – 1250), que passa a ser um financiador da divulgação e implementação desse sistema numérico posicional decimal e suas cifras, assim como da aritmética e da álgebra geométrica apresentadas por Leonardo Fibonacci (Guimarães Filho; Brandemberg, 2017).

Como consequência, temos que o *Liber Abaci* ofusca algumas obras importantes para o medievo, como o *Al-Muawalat* (Potro, 2000). Assim, são dadas evidentes otimizações nos cálculos aritméticos, proporcionando cálculos mais rápidos e sofisticados, permitindo resolver problemas práticos, mercantis e de outras naturezas posteriormente.

Não podemos deixar de mencionar o ábaco romano, pois ele possuía uma íntima relação com a aritmética. Boécio, um dos grandes pensadores do início da Idade Média, atribuiu uma valorização à aritmética escrevendo alguns livros, como o seu primeiro livro de aritmética, no qual é explicada a regularidade dos números, definição de números pares, ímpares, primos, entre outras coisas. Sua aritmética estava baseada na aritmética grega de Nicômaco (60 – 120), compondo disciplinas da escola romana, na qual essa aritmética cumpria aspectos práticos do cálculo digital e a capacidade de manipulação do ábaco romano (Eastwood, 2013).

Essa relação mencionada entre a aritmética e o ábaco perdura por alguns séculos da era medieval. Inferimos que esse aspecto promoveu o crescimento de uma classe prestadora de serviços chamada de abacistas, profissionais consolidados à época. Recebiam esse título por usarem o ábaco para os seus cálculos, prestavam serviço a quem necessitava, sendo remunerados por isso.

Como muito dos serviços, sejam comerciais, mercantis, administrativos ou domésticos, necessitavam de cálculos, os abacistas exerciam um papel fundamental na sociedade medieval, detendo o privilégio desse conhecimento. A necessidade desses profissionais no contexto da Europa medieval apresenta-se na complexidade dos cálculos, pois muitos dos cálculos que eram feitos, que hoje consideramos simples, os quais podem ser feitos em poucos minutos, para o século XII poderiam significar dias de trabalho e esforço (Dantzig, 1970).

Esses abacistas utilizavam os algarismos romanos para os registros dos cálculos inicialmente. No entanto, à medida em que as cifras indianas foram se popularizando, também, segundo Eastwood (2013), foram sendo combinadas com o manuseio do ábaco. Uma prova de que, mesmo com divergências, poderia haver harmonia entre as técnicas aritméticas, e talvez até cooperação.

O privilégio, ora apresentado, era endossado pela igreja, pois, ao limitar o conhecimento, mantinha seu domínio. No entanto, com um contexto favorável, Leonardo Fibonacci com seu *Liber Abaci* dá uma contribuição muito importante para a democratização dos cálculos (Ifrah, 2005).

Inferimos que a democratização referida está no sentido de ser um conhecimento que, quando necessário, poderia ser acessado, pois estaria preservado, haja vista ser de interesse a preservação desse conhecimento por parte da igreja, bem como da corte, para auxiliar na mediação de conflitos, como os fundiários e de impostos.

Com demandas maiores de cálculos, com cálculos mais complexos e com as otimizações dadas pelo novo método organizado no *Liber Abaci*, os abacistas deixaram de ser procurados ao longo do tempo, havendo alguns pontos de conflito pela sua resistência, levando em certa medida ao seu enfraquecimento e posterior desaparecimento.

4.2 O Liber Abaci

Cabe, neste momento, clarificar nossa escolha pelo *Liber Abaci* (figura 8) para representar as técnicas aritméticas divulgadas na Europa do século XIII que utilizavam as cifras indianas. Essa escolha se baseia nos estudos ao longo de nossa jornada acadêmica, comentada no primeiro capítulo deste relatório de pesquisa; e pelo estudo de autores como Potro (2007), Ifrah (2005) e Sigler (2002), que apresentam o *Liber Abaci* como um texto central para a aritmética comercial do século XIII. Logo, sua importância reside em apresentar uma aritmética geral, ou seja, com generalizações para diversas situações, e por apresentar a aritmética comercial, uma das principais atividades naquele século, bem como para outras atividades urbanas, como comentado na seção anterior.

Figura 8 – *Liber Abaci*.



Fonte: <https://www.twistedlifestyle.com/fibonaccis-liber-abaci-auctioned/>

O *Liber Abaci* foi escrito por Leonardo Fibonacci (figura 9) em 1202, ao retornar de suas viagens pelo Oriente, quando seu pai Guilielmo Bonacci – secretário da república de Pisa – foi enviado por volta de 1192 para Bugia, cidade portuária no litoral mediterrâneo da Argélia, onde ficava situada uma colônia comercial de Pisa. Guilielmo leva o filho com o intuito de aprender os cálculos comerciais para que Leonardo Fibonacci se tornasse um comerciante (Vogel, 2007).

Essas colônias, instaladas por volta das décadas de 1108 e 1111, estavam para além das funções comerciais. Ofereciam grandes oportunidades para estudantes latinos trabalharem no meio de comerciantes árabes e gregos. Inferimos, ainda, que nessas instalações havia a troca de muitos conhecimentos, transmitidos oralmente, em suas atividades práticas ou no acesso a livros com esses e outros conhecimentos. Outro aspecto notável durante esse período foi o impulso dado às traduções e à compreensão das línguas orientais, especialmente no que se refere a questões financeiras. Isso se reflete no caso de Leonardo Fibonacci, cujo interesse levou-o a explorar a matemática oriental (Burnett, 2013).

Esse livro, que foi escrito por volta de seus 32 anos, é o responsável por levar o conhecimento de suas habilidades à corte de Frederico II, com uma reedição em 1228 pelo próprio autor, a partir de algumas considerações feitas por Michael Scott²⁰ (1175 – 1235), citado nas primeiras linhas dessa reedição. O *Liber Abaci* teve um papel importante na Europa, como o de ser um dos responsáveis pela divulgação das cifras indianas. Para o século XIII, foi aquele que proporcionou uma organização e sistematização das técnicas exigidas pelo comércio em suas diversas atividades, bem como pelos ofícios urbanos.

Figura 9 – Leonardo Fibonacci.



Fonte: <http://berg.com.ua/profile/fibonacci/>

Quando o *Liber Abaci* é traduzido para o português, geralmente é interpretado como Livro do Ábaco. Isso pode levar o leitor a inicialmente concluir que o conteúdo do livro se trata de um guia para utilizar um ábaco. Isso pode ocorrer, também, ao se remeter para o contexto histórico, porque os europeus mantinham uma forte conexão com o ábaco, uma vez que essa ferramenta desempenhava um papel crucial nas atividades que envolviam cálculos. No entanto, ao examinamos mais detalhadamente esse texto histórico, percebemos que é um livro que trata de cálculos sem a necessidade do ábaco, o que ofereceu um certo conforto para as atividades urbanas e comerciais da sociedade medieval.

²⁰ Foi filósofo e um dos estudiosos da corte do rei Frederico II.

Portanto, inferimos que uma tradução mais adequada do título do livro é **Livro do Cálculo**, uma escolha que se fundamenta no conteúdo da obra, que se concentra na instrução de cálculos baseados em algoritmos de operações aritméticas.

Outra inferência quanto ao título do livro, é que a edição de 1857 (figura 10), que comentaremos a seguir, traz como título do livro *Liber Abbaci*, o que nos causou uma certa inquietação. Ao investigar, encontramos que a palavra *abaci* refere-se no século XIII, contraditoriamente, ao cálculo sem o uso do ábaco, mais um motivo de não ser uma tradução adequada “livro do ábaco” (Sigler, 2002). Quanto a *abbaci*, Sigler (2002, p. 4, tradução nossa) apresenta que “um *maestro d’abbaco* era uma pessoa que calculava diretamente com números hindus sem usar o ábaco, e o *abaco* é a disciplina necessária para fazer isso”.

Ainda a respeito do título do livro, temos em Molland (2013, p. 521) a assertiva: “o que caracterizava a aritmética do *abbacus* era uma comunidade mercantil italiana”. Dessa forma, podemos asseverar que o *Liber Abaci* é um livro que trata de cálculos aritméticos com a utilização das cifras indianas sem a utilização do ábaco romano.

Figura 10 – Capa do *Liber Abaci* da edição de 1857.



Fonte: Acervo do autor (2022).

Vale ressaltar que não conseguimos ter acesso à primeira edição de 1202; também não tivemos sucesso na busca pela segunda edição de 1228. Nessa busca pelo texto original, encontramos apenas a edição de 1857 do Códice Magliabechiano (figura 11), composto por cerca de 6.000 manuscritos, sendo o acervo mais antigo da Biblioteca Nacional Central de Florença (BNCF), estruturado em 40 classes temáticas, nas quais se encontra o *Il Liber Abbaci di Leonardo Pisano* na classe cinco, edição a partir de Baldassarre Boncompagni (1821 – 1894), um historiador da matemática e aristocrata italiano.

Figura 11 – Lombada da quinta classe.



Fonte: Acervo do autor (2022).

A edição que investigamos foi publicada pela Tipografia das Ciências Matemáticas e Físicas na *Via Lata* nº 211, atual *Via del Corso*, em Roma, em 1857. É uma edição completa referente à reedição de 1228 revisada por Leonardo Fibonacci. Como não tivemos acesso à primeira edição, pois não há conhecimento sobre essa cópia, apenas de três manuscritos completos dos séculos XIII e XIV, não houve a possibilidade de comparar as edições e nem avaliar as mudanças que foram feitas na edição de 1228. Mesmo assim, é possível notar, a partir da fala de Leonardo Fibonacci, algumas intenções presentes na edição revisada (Vorgel, 2007).

Em contato com o livro, o leitor se depara com a fala inicial de Leonardo Fibonacci, Leonardo Pisano²¹ a partir daqui, em primeira pessoa apresenta sua própria postura sobre a intencionalidade e o assunto de sua obra. Podemos, então, afirmar que esse livro trata de cálculos, ou melhor, da sistematização dos cálculos com a utilização das cifras e do sistema numérico decimal posicional dos indianos, pois Leonardo Pisano (1857, p. 1, tradução nossa) declara em sua obra: “[...] publiquei a doutrina completa dos números, segundo o jeito dos índios, método esse que escolhi, na própria ciência, mais elevada”. Isso mostra, de uma forma bem direta, que Leonardo Pisano (1857) considerava seu livro como do ramo da aritmética, e sua escolha pelo método indiano se baseia em

²¹ Escolhemos deste momento em diante nos referir a Leonardo Fibonacci pelo seu nome de citação da edição de 1857.

considerar uma ciência mais elevada do que os métodos instituídos, o que implica também em dizer que essa ciência podia elevar seu estudante até Deus, atendendo, dessa forma, demandas clericais.

Pelo seu histórico de familiarização com as atividades comerciais de seu pai, podemos sugerir que o livro, além de teórico e sistematizado, estava a serviço de uma aritmética prática, influenciado pelos árabes e pelos indianos; porém, ajustado a uma matemática comercial italiana, pois o autor deixa claro o desejo de o povo italiano ser instruído acima de todos os outros (Leonardo Pisano, 1857).

Como não tivemos acesso à primeira edição do *Liber Abaci*, não temos como dizer se possuía uma preocupação com a instrução. Todavia, nessa segunda edição podemos perceber, sem que haja dúvida, essa preocupação. Podemos evidenciar tal intenção quando Leonardo Pisano (1857) reorganiza os capítulos para ser melhor compreendido, permitindo que os futuros leitores ou aprendizes pudessem entender de uma forma mais clara seu conteúdo, dando a chance para os discípulos alcançarem a perfeição (Leonardo Pisano, 1857).

Percebemos também a intenção de ser um manual, quando o autor apresenta à corte sua intenção de facilitar o ensino em sua nova organização. Esse pensamento coaduna com Potro (2004), quando afirma ser o primeiro manual europeu em língua latina. Deixamos claro que a concepção de manual para a Europa do século XIII não é a mesma de nossos dias. Para o contexto medieval daquele século, manual está na direção de um livro que reúne, compila vários conhecimentos de um determinado assunto ou tema, à disposição para consulta de quem puder tê-lo. Naquele momento os livros ainda eram onerosos.

Leonardo Pisano (1857), em seu prólogo, faz menção a outro livro escrito por ele sobre geometria. Concordamos com Sigler (2002) em ser o *Practica Geometriae*, composto em 1220. O autor faz essa menção para declarar que as demonstrações contidas no *Liber Abaci* evitam em boa parte a geometria. Declara também, para os que desejarem aprender a prática da aritmética, que chama de ciência, a necessidade de estudarem continuamente o livro através da prática cotidiana, levando-os ao hábito, à memorização e à relação das mãos com as cifras indianas. As mãos, no contexto do livro, estão no sentido de serem ferramentas para contar ou fazer contas e, principalmente, de guardar quantidades exigidas pelos métodos ensinados por Leonardo Pisano (1857) nas operações aritméticas.

Ele deixa claro que tentou reunir todos os conhecimentos tomados em suas viagens para ensinar esse novo método aritmético e para facilitar a compreensão das teorias apresentadas, como ele mesmo julga. Divide o livro em quinze capítulos, os quais são apresentados logo após o prólogo em uma espécie de índice. Leonardo Pisano (1857) não traz nenhum tipo de numeração nesse momento; no entanto, no decorrer do livro traz uma organização ordinal. Assim, temos os seguintes capítulos:

- I. Sobre o conhecimento das nove figuras indianas, e como cada número é escrito com elas, e quais números, e como devem ser retidos nas mãos e nas introduções do cálculo.
- II. Sobre a multiplicação de números inteiros.
- III. Sobre adição um com o outro.
- IV. Sobre a extração de números menores de números maiores.
- V. Sobre a divisão de números inteiros por números inteiros.
- VI. Sobre a multiplicação de números inteiros com quebras e quebras sem inteiros.
- VII. Sobre a adição, extração e divisão de números inteiros com quebras e a redução de números quebrados em uma parte.
- VIII. Na compra e venda de mercadorias e afins.
- IX. Sobre a permuta de bens imóveis, sobre a compra de bens imóveis e algumas regras semelhantes sobre as parcerias feitas entre associados.
- X. Sobre a parceria feita entre sócios.
- XI. Sobre a consolação das moedas e suas regras, que se refere ao conforto.
- XII. Sobre as soluções de muitas questões colocadas, que chamamos de erráticas (errantes).
- XIII. Sobre a regra de *Elchataym*, como quase todas as questões errantes são resolvidas por ela.
- XIV. Sobre a descoberta de raízes quadradas e cúbicas por multiplicação e divisão, ou extraíndo-as de si mesmas, e sobre o tratamento de binômios e suas raízes.
- XV. Sobre as regras relativas às proporções geométricas: sobre questões de álgebra e *Almuchabala*.

Leonardo Pisano (1857) nos impressiona como termina seu prólogo, humildemente deixa seu trabalho à disposição de avaliações, ressaltando que esse prólogo é escrito a Michael Scott, em nome da corte do rei Frederico II. Assim, termina declarando que: “Se, por acaso, omiti algo menos ou mais apropriado, ou necessário, sua indulgência por mim é solicitada, pois não há ninguém que seja isento de culpa e em todas as coisas seja totalmente circunspecto” (Leonardo Pisano, 1857, p. 1).

4.3 Técnicas Aritméticas encontradas no Liber Abaci

Com o intuito de identificar elementos aritméticos que compõem o *Liber Abaci*, organizamos, para um melhor entendimento desses capítulos, em três temáticas. Do capítulo I ao capítulo VII, temos a parte do livro que trata da Aritmética Básica; do capítulo VIII ao capítulo XI, temos a parte da Aritmética Comercial; para finalizar, do capítulo XII ao XV, temos Situações-Problemas

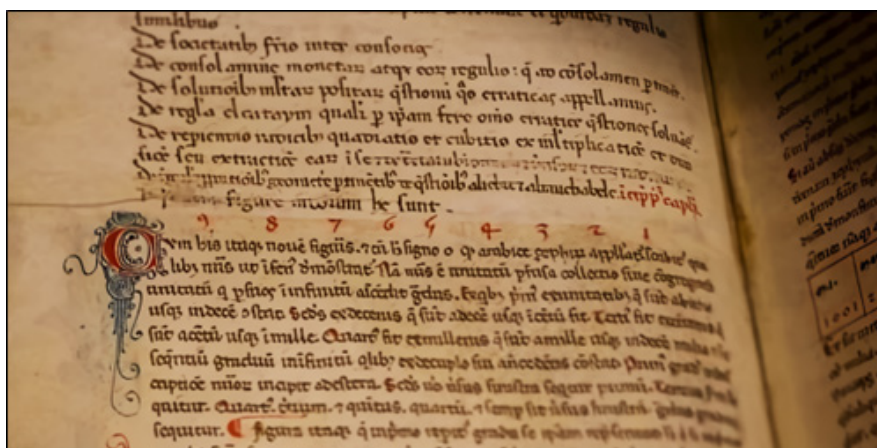
(problemas diversos). Deixamos claro que essa divisão temática foi elaborada por nós. Leonardo Pisano (1857) não faz qualquer menção a essas temáticas dessa forma.

Encontramos na literatura outras divisões, como a apresentada por Vogel (2007), que divide o *Liber Abaci* em quatro temáticas: algarismos romanos e computação digital (I - VII); problemas que preocupam os comerciantes (VIII - XI); *erraticae questiones* (XII - XIII); métodos algébricos (XIV - XV). Em relação a essa última, divergimos, pois defendemos que no contexto de escrita do livro esses problemas eram considerados de aritmética.

4.3.1 Aritmética básica

Os capítulos iniciam com a seguinte apresentação das nove cifras indianas (figura 12): “O primeiro capítulo começa. São as nove figuras dos indianos 9 8 7 6 5 4 3 2 1 e assim, com essas nove figuras, e para elas, este é o sinal de 0, que é chamado em árabe de *zephirum*, se forma qualquer tipo de número” (Leonardo Pisano, 1857, p. 2, tradução nossa).

Figura 12 – Recorte da apresentação das cifras indianas.



Fonte: <https://www.festivaldelmedioevo.it/portal/fibonacci-i-numeri-indiani/>

O autor apresenta em seguida o funcionamento do sistema numérico decimal posicional adotado, explica de forma minuciosa a valoração posicional que cada cifra passa a ter a partir de seu posicionamento (figura 13), nossas conhecidas unidades, dezenas, centenas, etc. Para tanto, utiliza uma espécie de legenda com os algarismos romanos, que eram mais conhecidos à época.

Figura 13 – Valoração posicional.

M .I	MMXXIII	MMMXXII	MMMXX	MMMMDC	MMM	MCXI	MCCXXXIII	MMMMCCCXXI
1001	2 0 2 3	3 0 2 2	3 0 2 0	5 0 0 0	3 0 0 0	1 1 1 1	1 2 3 4	4 3 2 1

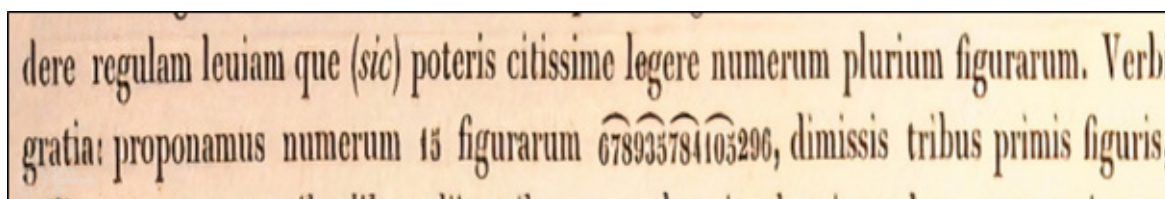
Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 3).

Da citação anterior, podemos perceber que Leonardo Pisano (1857) apresenta o zero separado das nove cifras indianas. Isso nos dá a possibilidade de sugerir que, para o autor, o zero não tinha um valor numérico, não era um número, uma cifra, mas apenas um símbolo, como são os símbolos de conjunto vazio, está contido, maior, menor e outros de nossa matemática moderna. O zero representava a ausência de valoração em uma determinada posição das casas decimais.

Há um cuidado no livro de ensinar como devem ser lidos os números na regra dos indianos. Para tanto, além de trazer uma legenda, o autor ensina a separação das casas decimais, que chama de varas de três, ou seja, de três em três cifras (figura 14), sempre da direita para a esquerda, apresentando dessa forma a regra de como deve ser lido cada valor escrito.

Inferimos que essa regra era conhecida de alguns na Europa como arcos pitagóricos (triplos), apresentados por Gebert d'Aurillac anteriormente, os quais usamos até hoje (Sigler, 2002). Leonardo Pisano (1857) apresenta variados exemplos de quantidades pequenas, de grandes quantidades, bem como com repetição de algarismos e com casas decimais sem valoração, representadas pelo zero.

Figura 14 – Leitura dos números com a regra das varas de três.



Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 4).

Ainda no primeiro capítulo do livro, são mencionados os cálculos digitais, ou seja, os cálculos e os registros dos cálculos com as mãos para a sua otimização. Também é ensinado a guardar na mão, que é o registro de quantidades que serão necessárias para continuar ou concluir os cálculos de uma casa decimal para outra sem os registros escritos, com o intuito, de igual forma, da otimização dos cálculos. No entanto, nesta edição de 1857, não há a composição gráfica dessa instrução, ou seja, não existem ilustrações para a referida técnica de guardar na mão.

Não sabemos ao certo o porquê, no entanto, sugerimos que no período da redação e publicação dessa referida edição, havia o acesso ao papel com mais facilidade e menos custos do que no século XIII, assim, não tendo a necessidade de usar a menor quantidade de papel possível em cálculos escritos, dispensando os registros com as mãos. Outra sugestão que damos é o acesso a tabelas de cálculos com mais precisão, as ditas contas astronômicas. Também temos as calculadoras mecanizadas, que não estavam em uso comum em 1857, sendo menos provável. O mais provável é que essa técnica estivesse em desuso na Itália do século XIX.

Contudo, Leonardo Pisano (1857) chama a atenção que, para quem quiser ser engenhoso e sutil com os cálculos, deve conhecer a arte de guardar na mão, que não foi inventada por ele, mas nos tempos antigos, sem definir de qual tempo estava falando.

Inferimos que Leonardo Pisano (1857), quando fez referência a esses tempos antigos, poderia estar se referindo a Beda (637 - 735), um dos primeiros a organizar uma instrução adequada sobre a contagem e tabulação nos dedos. Embora a técnica dos dedos – cálculo digital – fosse conhecida dos romanos, Beda quis garantir uma explicação melhor para seus alunos, os quais não usavam apenas para trabalhos aritméticos, mas para a comunicação de quantidades, na qual a memorização de somas e múltiplos eram essenciais para o uso da técnica (Eastwood, 2013).

Em uma busca simples na internet, conseguimos algumas ilustrações da referida técnica (figura 15). Entretanto, não podemos asseverar a qual edição do *Liber Abaci* tais ilustrações pertencem. Podemos afirmar apenas que essas ilustrações existem em outras edições e foram retiradas da referida edição investigada, pois temos a seguinte declaração na conclusão desta instrução: “como é demonstrado na página seguinte pelas mãos pintadas” (Leonardo Pisano, 1857, p. 5).

Figura 15 – Uma forma de datilologia para guardar na mão.



Fonte: <https://www.festivaldelmedioevo.it/portal/fibonacci-i-numeri-indiani/>

Complementando a técnica de guardar na mão, o matemático encerra o primeiro capítulo com tabelas de adição e multiplicação (figura 16), com unidades e dezenas. Essas tabelas tinham por finalidade a memorização que, aliada às técnicas das mãos, oferecia as ferramentas necessárias para um bom desempenho nesse novo método aritmético.

Figura 16 – Recorte da tabela de adição e multiplicação do capítulo I.

Introductiones in ac ditione (sic) et multiprichatione numerorum											
2 et 2 fiunt 4			Ianua sexagenarii			60 et 60 fiunt 120			De Quinario		
2	3	5	7	7	14	60	70	130	5 uices 5 fiunt 5		
2	4	6	7	8	15	60	80	140			
2	5	7	7	9	16	60	90	150			
2	6	8	7	10	17	70 et 70 fiunt 140					
2	7	9	8 et 8 fiunt 16			70	80	150	5	6	30
2	8	10	8	9	17	70	90	160	5	7	35
2	9	11	8	10	18	80 et 80 fiunt 160			5	8	40
2	10	12	9 et 9 fiunt 18			80	90	170	5	9	45
Ianua ternarii									5	10	50
									De senario		

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 6).

Assim, Leonardo Pisano (1857) encerra o primeiro capítulo com o seguinte pensamento:

Portanto, que eles sempre usem para aprender a coletar as ligações e multiplicações acima mencionadas nas tabuinhas em suas mãos, de modo que a mente possa se tornar mais acessível igualmente com as mãos em adições e multiplicações de quaisquer números (Leonardo Pisano, 1857, p. 7)

No capítulo seguinte é ensinado o algoritmo da multiplicação, o que pode causar um certo desconforto para a matemática escolar que tradicionalmente inicia o ensino de cálculos aritméticos com a adição de um algarismo (unidade com unidade). Contudo, para a organização do século XIII, o autor inicia com a multiplicação (parte esquerda da figura 17) de dois algarismos (dezenas por dezenas).

Em seguida, apresenta mais uma multiplicação do mesmo tipo (parte direita da figura 17), mas diferente do cálculo anterior é proposta uma prova para verificação da confiabilidade do que foi calculado, que podemos traduzir como método de resíduos módulo nove, que seria a prova real, em uma matemática moderna, o famoso “noves fora”, mas que Sigler (2002) apresenta como método de verificação “lançando noves”. Para esse exemplo, temos como prova o número um. Ao olhar para o trinta e nove, após o processo de “noves fora”, temos um como resultado, e ao olhar para mil trezentos e sessenta e nove, temos de igual forma o um como resultado, provando que o cálculo está correto.

Figura 17 – Exemplos de multiplicações do capítulo II.

descriptio prima	4 12 12	9 37 37
Secunda	44 12 12	69 37 37
Vltima	144 12 12	1369 proba est .1. 37 37

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 7, 8).

Leonardo Pisano (1857) ainda apresenta a noção de multiplicação por zero, associada à compreensão de ausência de valoração em determinada casa decimal. Assim, no exemplo a seguir (figura 18), o matemático se preocupa apenas com a multiplicação de sete por sete, acrescentando um zero para cada casa decimal, ou seja, embora não efetuasse o cálculo com o zero, como na matemática moderna, o autor obedecia estritamente às casas decimais. Vale ressaltar que todo o capítulo é permeado pelo cálculo digital, seja para guardar os números ou para calcular outros.

Figura 18 – Exemplo de multiplicação por zero.

4900
70
70

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 9).

No terceiro capítulo, apresenta-se um algoritmo para adição de números inteiros e para números de tamanho arbitrário. Podemos inferir que, de fato, esses cálculos apreciavam as necessidades comerciais em suas expansões e complexidades nos cálculos. Para viabilizar os cálculos, é explicado um sistema medieval chamado: multiplicação do tabuleiro de xadrez (figura 19)²². Como anteriormente, uma prova de resíduo nove é fornecida para a ratificação dos resultados, o que permeia quase todo o livro.

²² Retificamos que o valor correto onde se lê 527 é 567 na figura 19.

Figura 19 – Método do tabuleiro de xadrez.

2 4 5 0 0 0 7						
4 3 2 1						
3	0	2	4	7	7 2 5	
2	5	9	2	6		
2	1	6	0	5		

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 19), marcação nossa.

Neste mesmo capítulo é ensinada mais uma técnica, a adição por colunas (figura 20), que requer as técnicas de guardar na mão. Evidenciamos que Leonardo Pisano (1857) traz algumas provas de sua técnica com nomenclaturas semelhantes às que encontramos no *Liber Quadratorum*, no qual representa números por letras com um ponto final antes e um depois de cada letra para suas generalizações e provas.

Figura 20 – Técnica da adição por colunas.

2 4 5 0 0 0 7						
4 3 2 1						
3	0	2	4	7	7 2 5	
2	5	9	2	6		
2	1	6	0	5		

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 19).

O autor finaliza com um procedimento para manter as despesas em uma tabela com colunas para *Libras*, *Soldi* e *Denari*, que eram sistemas monetários da época (figura 21).

Figura 21 – Exemplo de contas monetárias e despesas em tabela com *Libre, Soldi e Denari*.

pagine uel cartule. Verbi gratia: ut si quidam renuntiet in quadam expensa quod dedisset in tali et in talibus rebus, ut in sequenti pagina denotatur, adiscat scribere numeros librarum, soldorum et denariorum, sicut in eadem pagina describuntur, in qua pagina denarii qui sunt in ea sunt in summa 72, qui sunt soldi 6 et denarii 1: cum quibus soldi 6 junctis soldi, qui sunt in eadem pagina, frunt 122 qui sunt libre 6 et soldi 2; et cum ipsis libris 6 colligat libras, reperiet in summa libras 268: est ergo summa librarum omnium soldorum et denariorum insimul iunctorum libre 268 et soldi 2 et denarii 1 que summa est reservanda in fine pagine, de qua expensa collecta est; et sic per ordinem colligat expensas per paginas et unicuique pagine summa faciendo: post hec rescribat in tabula summas cunctarum paginarum, et faciet inde summam summarum; et sic poterit colligere quaslibet expensas bizantium, et karatorum, et auri unciarum, et tarehorum genoninorum, cantaniorum, etiam et rotulorum et cunctarum rerum numeris adiacentium.	568	2	1
	libre	soldi	denarii
32	4	2	
12	13	5	
32			
80	15		
	18		
	9	10	
		11	
		7	
5	6	11	
8	7	8	
57		9	
9	6		
27	15	6	
	13		
30	8	7	
6	6		

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 21, 22).

No quarto capítulo, Leonardo Pisano (1857) apresenta o algoritmo da subtração no conjunto dos números inteiros. Para tanto, organiza as operações com casas decimais de mesma magnitude, iniciando com a subtração de um número maior e um menor, ambos com dois algarismos (89-35). Posteriormente, ainda com dois algarismos. No entanto, o número menor com o algarismo da unidade maior (85-39), que podemos ver na figura 22. Segue com dois exemplos com o maior número com três algarismos e o menor com dois, seguindo de três por três, cinco por três.

Figura 22 – Exemplos de subtração.

54	46
89	85
35	39

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 22)

Nos chama atenção o fato de Leonardo Pisano (1857) apresentar o resultado na parte superior do algoritmo e acrescentar 10 a cada valor menor do que será retirado, como no caso de retirar nove de cinco na subtração 85-39 apresentado na figura 22. Para esse caso, adiciona-se um ao valor da próxima casa decimal do menor número, ao invés de subtrair um da próxima casa decimal como é feito na matemática moderna.

No capítulo V, o autor inicia anunciando que são necessárias duas coisas para aprender a dividir: (1) para aprender dividir se deve começar a dividir por dois; (2) para aprender a dividir se deve saber de cor (*sic*) algumas divisões, que são apresentadas na tabela deste capítulo (figura 23).

Figura 23 – Recorte da tabela de divisão.

DIVISIONES PER BINARIUM				
$\frac{1}{2}$	de 1	est	0	et remanet 1
$\frac{1}{2}$	2	est	1	
$\frac{1}{2}$	3		1	1
$\frac{1}{2}$	4		2	
$\frac{1}{2}$	5		2	1
$\frac{1}{2}$	6		3	
$\frac{1}{2}$	7		3	1
$\frac{1}{2}$	8		4	
$\frac{1}{2}$	9		4	1
$\frac{1}{2}$	10		5	

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 25).

Observamos, a partir da figura 23, que Leonardo Pisano (1857) utiliza a multiplicação de números inteiros por frações para efetuar suas divisões, como: $\frac{1}{2} \times 4$, representando quatro dividido por dois, dois que divide quatro ou quantos dois cabem em quatro. Todas essas noções estão permeadas no livro para as questões monetárias. O autor também apresenta outras formas de representações numéricas, como na decomposição de números referidos no capítulo, como $\frac{1}{12} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{0}{6}$. No entanto, nem todos os números podem ser decompostos, pois existem números *hasam* (do árabe), incompostos ou irregulares, como é referido no livro, que são os números primos. Também apresenta outra técnica de divisão, utilizando esta forma de decomposição e o resto, como no caso de $749 \div 75$, temos que, $\frac{1}{75} \rightarrow \frac{1}{3} \frac{0}{5} \frac{0}{5}$, logo, $749 \div 75 \rightarrow 9 \frac{74}{75} \rightarrow \frac{2}{3} \frac{4}{5} \frac{4}{5} 9$. Esse último é uma outra forma de representação numérica, denominada no livro de inteiro e quebrados.

É ensinado no sexto capítulo como fazer os cálculos de multiplicação com números inteiros e quebrados. Para tanto, apresenta uma breve explicação e, para uma melhor compreensão desses cálculos e suas variadas situações, divide o capítulo em oito partes, as quais são compostas por mais algumas situações específicas.

Dessa forma temos:

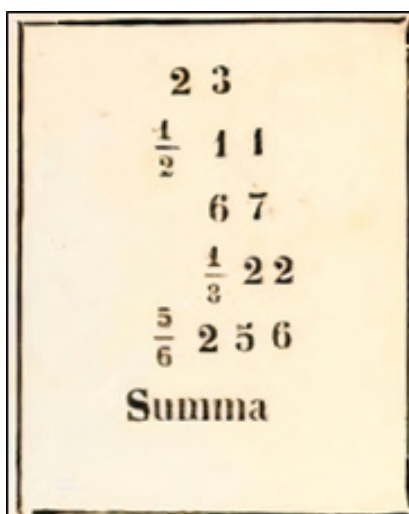
Parte primeira da multiplicação de números inteiros com uma coluna quebrada sob uma rajada (vara).

Antes de comentar sobre essa multiplicação, faz-se necessário explicar que um número inteiro com uma coluna ou pé quebrado é conhecido na matemática moderna como número misto. Mas, para Leonardo Pisano (1857) representava uma espécie de número com parte decimal. Assim,

o autor, ao escrever $\frac{1}{2}11$, não estava dizendo que tinha onze inteiros e um meio, mas um meio e onze (11,5). Assim, o autor trocava as partes decimais por quebrados (frações).

O algoritmo usado nessa multiplicação (figura 24) é parecido com o que utilizamos atualmente. No entanto, em sua representação visual são colocados os valores um embaixo do outro, como nas multiplicações anteriores, apenas com os numeradores de cada valor, com o resultado principal na parte inferior.

Figura 24 – Exemplo de multiplicação com quebrados.

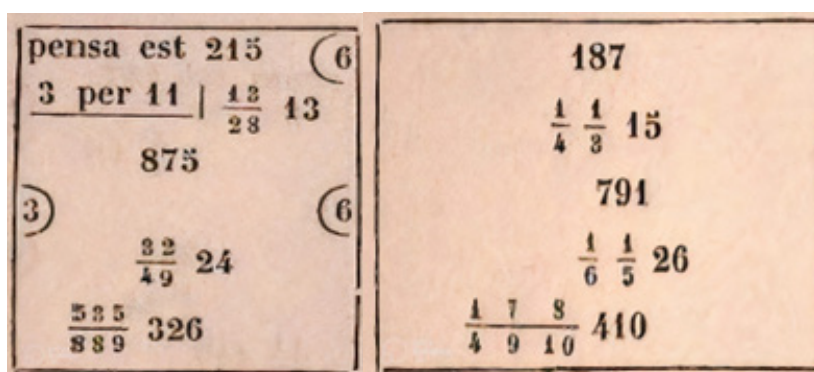


Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 47).

Parte segunda sobre a multiplicação dos números com duas e três rajadas sob uma vara.

Temos a mesma ideia anterior, com a particularidade de ter um número fracionário decomposto e um inteiro, bem como dois números fracionários e um inteiro (parte direita da figura 25). Vale lembrar que, mesmo com essas partes aparentemente separadas, Leonardo Pisano (1857) entendia como um único número (parte esquerda da figura 25).

Figura 25 – Exemplos de multiplicação com mais de uma rajada sob uma vara.



Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 52).

A segunda parte traz, em seguida, um quadro mostrando a adição de frações, com o objetivo de reduzir frações de duas aspas para apenas uma vara (reduzir as frações para apenas uma). As somas que formam um número com o numerador maior que o denominador são transformadas em números com parte inteira (números mistos).

Figura 26 – Quadro de adição de frações.

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1 sano	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$ 1 sano	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{8}$ 1 sano
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{10}$ 1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$ 1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{5}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$ 1	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{5}$ 1
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$ 1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{2}{5}$ 1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$ 1	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 54).

O terceiro do uso de números com duas rajadas (varas) sob duas aspas (barras).

Esta parte não foi identificada nomeadamente no capítulo, no entanto, o tipo de número mencionado e seu uso foram identificados, como será mostrado a seguir na quarta parte.

A quarta é sobre como modificar os números com o número de aspas quebradas.

Trata-se apenas de uma ampliação da segunda parte, como podemos apresentar na figura 27.

Figura 27 – Exemplo presente na quarta parte do capítulo VI.

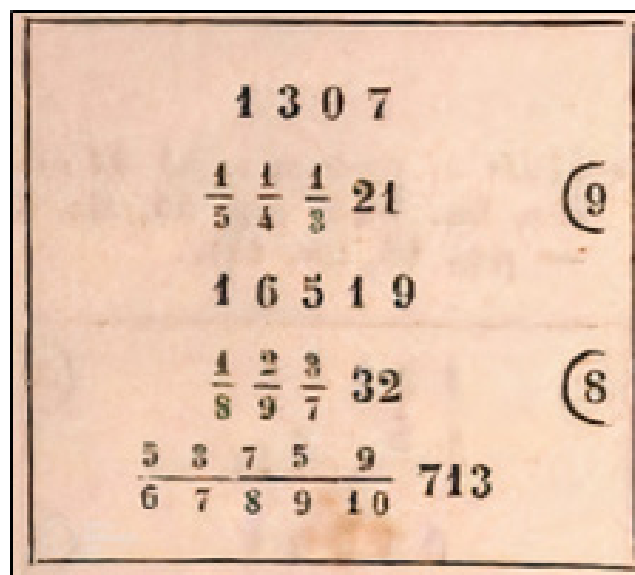
1	2	9	1	1						(3)
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	17						
6	3	0	9	1						(0)
$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{11}$	28						
$\frac{1}{2}$	6	4	1	2	7	2				
2	8	9	10	10	10	11	514			

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 55).

Quinta da multiplicação de números com três aspas.

Temos a mesma ideia da quarta parte, adicionando mais uma aspa, com duas particularidades.

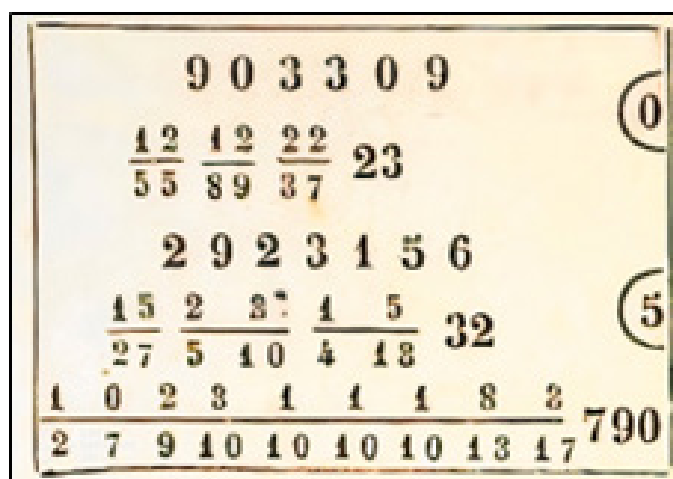
Figura 28 – Exemplo presente na quinta parte do capítulo VI.



Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 56).

Particularidade 1: sobre a multiplicação de números inteiros com três varas e duas rajadas sob a vara.

Figura 29 – Exemplo da primeira particularidade presente na quarta parte do capítulo VI.



Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 57).

Particularidade 2: o mesmo com três rajadas sob cada aspa

Figura 30 – Exemplo da segunda particularidade presente na quarta parte do capítulo VI.

pensa est 10 per 11											
3 8 5 1 3 1 3 0											
1	2	1	1	2	3	1	1	6	11		
3	5	5	2	9	10	2	7	17			
145288710											
2	5	1	1	2	2	1	3	3	22		
3	6	7	5	7	9	2	8	10			
pensa est (10)											
1	2	1	0	1	3	9	5	0	4	274	
2	7	7	8	9	9	10	10	10	17		

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 58).

Sexto da multiplicação de ossos quebrados sem som (saudável, são, inteiro).

Trata-se da multiplicação apenas de números fracionários, ou seja, sem partes inteiras, com cinco particularidades. Também é apresentada a simplificação de fração. Na figura 31, temos um exemplo da multiplicação de quebrados sem partes inteiras.

Figura 31 – Exemplo da multiplicação presente na sexta parte do capítulo VI.

Item si uolueris multiplicare $\frac{2}{3}$ per $\frac{3}{4}$, multiplica 2, que sunt super 3, per 3 que sunt super 4, erunt 6; que diuide per 3 et per 4 que sunt sub uirgulis, exhibunt $\frac{1}{2}$ unius integri.

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 59).

Particularidade 1: sobre o mesmo com três quebrados sob uma rajada (vara).

Figura 32 – Exemplo da primeira particularidade presente na sexta parte do capítulo VI.

59					(3)
1	5	3			
2	8	11			
202					(6)
1	4	7			
3	9	13			
1	2	5	5	2	
					0
3	8	9	11	13	

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 59).

Particularidade 2: sobre o mesmo com duas varas.

Figura 33 – Exemplo da segunda particularidade presente na sexta parte do capítulo VI.

$$\begin{array}{r} 11 \\ \frac{1}{4} \quad \frac{2}{3} \\ 23 \\ \frac{1}{6} \quad \frac{3}{5} \\ \hline 4 \quad 9 \quad 10 \quad 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} (4) \\ (2) \end{array}$$

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 60).

Particularidade 3: sobre o mesmo com duas quebradas sob cada.

Figura 34 – Exemplo da terceira particularidade presente na sexta parte do capítulo VI.

$$\begin{array}{r} (2) \\ 470 \\ \frac{13}{48} \quad \frac{14}{27} \\ 1407 \\ \frac{12}{611} \quad \frac{15}{89} \\ \hline 6 \quad 8 \quad 8 \quad 9 \quad 11 \quad 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} (3) \end{array}$$

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 60).

Particularidade 4: sobre três aspas.

Figura 35 – Exemplo da quarta particularidade presente na sexta parte do capítulo VI.

$$\begin{array}{r} \text{pensa est} \quad 47 \\ \text{per 11} \\ \frac{1}{5} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3} \\ (5) \quad 149 \\ \frac{1}{7} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{2}{5} \quad (6) \\ \hline 2 \quad 7 \quad 9 \quad 10 \quad 10 \end{array}$$

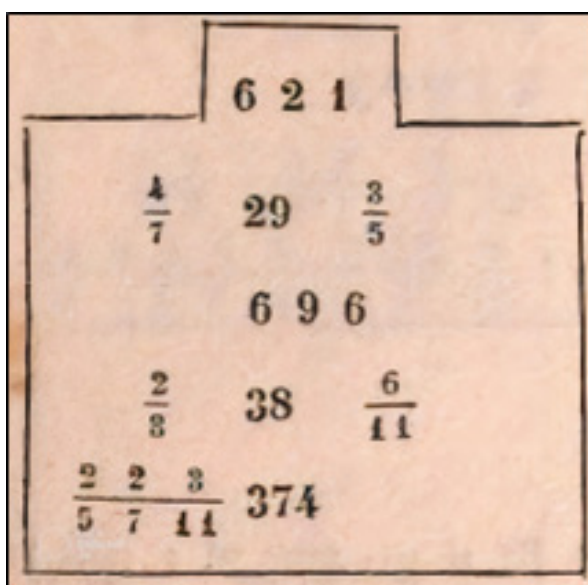
Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 60).

Vale ressaltar que os valores descritos no exemplo da figura 37 estão errados. No entanto, Leonardo Pisano (1857), ao descrevê-los, coloca os valores corretamente para a primeira 2572 e para a segunda 14292.

A oitava parte da multiplicação das partes dos números e quebrados.

Nesta parte é apresentada pelo autor a multiplicação de números que são representados por números mistos e partes fracionárias. Assim, ao ver no exemplo a seguir o número $\frac{4}{7} 29 \frac{3}{5}$, trata-se de apenas um número e não de três números.

Figura 38 – Exemplo presente na oitava parte do capítulo VI.



Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 62).

O capítulo termina com mais exemplos dos mesmos tipos com mais números quebrados. O mesmo ocorre com o sétimo capítulo. Para fins de melhor compreensão, é dividido em seis partes. De forma geral, trata da adição, subtração, divisão e decomposição de números fracionários, assim como essas mesmas operações aritméticas para números inteiros com fracionários. Percebemos que o autor apresenta também a redução dos números fracionários para as frações unitárias, as quais Sigler (2002) chama de frações egípcias.

Na primeira parte, mostraremos a adição de uma vara a outra, a extração de uma vara de outra e a divisão de uma vara por outra.

Leonardo Pisano (1857) apresenta duas técnicas de fazer a adição, as quais valem para a subtração, que estão muito próximas de como é feito na matemática moderna. Na primeira, multiplica-se os denominadores. Em seguida, o resultado é dividido separadamente por cada denominador e a soma desses resultados será o numerador. Na segunda, o numerador do primeiro número é multiplicado pelo denominador do segundo e adicionado ao resultado da multiplicação do numerador

do segundo número pelo denominador do primeiro número. Esse resultado será o numerador da soma. E o denominador da soma será o produto dos denominadores. De igual forma, essas duas técnicas valem para a subtração.

Figura 39 – Exemplo de adição de números fracionários.

$$\begin{array}{r} 3 \qquad 4 \\ \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{3} \\ \hline \frac{7}{12} \text{ addictio} \end{array}$$

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 64).

Segunda parte, a designação e o desenho de duas hastes com duas e a divisão delas uma na outra.

Nesta segunda parte segue o mesmo padrão que na anterior. No entanto, temos um número com uma configuração diferente, apresentado nos capítulos anteriores. Vale ressaltar que Leonardo Pisano (1857) não apresenta a divisão de números fracionários como esperamos (com a regra de conservar o primeiro e multiplicar pelo inverso do segundo), simplesmente é dividido o numerador pelo denominador nos resultados, que será de fato apresentado por ele na terceira parte desse capítulo.

Figura 40 – Exemplos de adição e subtração presentes na segunda parte do capítulo VII.

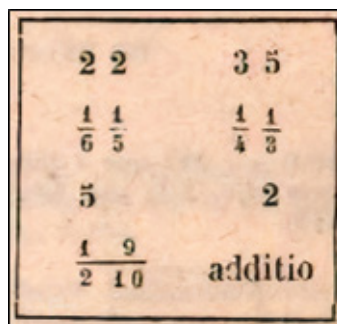
$$\begin{array}{r} 144 \qquad 245 \\ \frac{1}{7} \frac{1}{5} \qquad \frac{1}{4} \frac{1}{3} \\ \hline \frac{5}{6} \frac{19}{710} \text{ additio} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 144 \qquad 245 \\ \frac{1}{7} \frac{1}{5} \qquad \frac{1}{4} \frac{1}{3} \\ \hline \frac{5}{6} \frac{2}{7} \frac{2}{10} \text{ extractio} \end{array}$$

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 65, 66).

No próximo exemplo (figura 41) entram em cena dois elementos: o cinco (5) e o dois (2), que estão embaixo dos números fracionários, pois o autor faz uma simplificação, com a assertiva de que o 6 compõe a regra do 30 (6×5) e a regra do 12 ($4 \times 3 = 6 \times 2$). Dessa forma, retira-se

de cada denominador 6 (simplifica-se por seis), restando 5 e 2. Antes disso, são encontrados os numeradores de cada número fracionário para efetuar as devidas multiplicações.

Figura 41 – Adição com a regra de composição dos números.



Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 67).

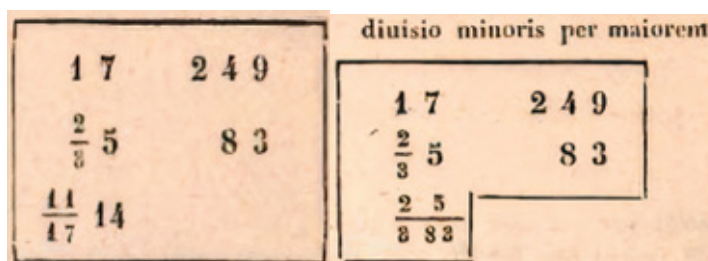
Na terceira parte, divisão de números inteiros por inteiros e fragmentos e seus opostos.

A terceira parte começa com a divisão de números inteiros por inteiros quebrados e também com essa ordem inversa. Para tanto, Leonardo Pisano (1857) apresenta uma generalização,

Quando você quiser dividir um número inteiro com um número quebrado ou um número, ou vice-versa, um número inteiro com outro número inteiro quebrado, faça as rajadas de cada número, como aquele, ou aqueles que foram colocados com um dos números: então, divida a soma desse número pela soma dos números quebrados, um dos quebrados, e você terá a divisão que quiser (Leonardo Pisano, 1857, p. 69, tradução nossa).

Para essa divisão, temos que multiplicar o número inteiro pelo denominador do número fracionário e dividir ou ser dividido pelo numerador do número fracionário, que não está distante de nossa matemática moderna. Para tanto, Leonardo Pisano (1857) apresenta alguns exemplos, tanto com a divisão de um número maior por um menor, como de um número menor por um maior, descritos a seguir na figura 42 com alguns comentários²³.

Figura 42 – Exemplos de divisão presente na terceira parte do capítulo VII.



Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 69).

²³ Disso, portanto, é evidente que a divisão de 83 em 235 é a mesma que a de 249 em 17; e é isso que Euclides, o matemático mais habilidoso, declara em seu livro: que todo número tem a mesma razão que qualquer número para qualquer número; que são, então, múltiplos (*sic*) de 17 de 235. Múltiplos de 249 de 83: pois existem 17 triplos de 235 e 249 triplos de 83. E se, por outro lado, você quiser dividir 235 por 83, divida 17 pela regra 249, que é 1 03 83. Eles sairão 3 53 83 para a pergunta feita (Leonardo Pisano, 1857, p. 69, tradução nossa).

Na quarta parte, adição extração e divisão de números inteiros com rupturas.

Nesta parte, o autor inicia com uma generalização bem detalhada, que podemos resumir no algoritmo utilizado na matemática moderna por nós hoje.

Mas quando você deseja adicionar qualquer número com um quebrado, ou mais de qualquer outro número um número menor com seu rompido ou rompido no lado direito da tabela. E o maior com sua rajada, na mesma linha para a esquerda, como apontamos na seção anterior, e multiplique o número menor por sua vara, como mostramos acima; e multiplique a soma por todos os números que estão sob uma vara, ou pelo número de varas de maior número. E a multiplicação, que deve ocorrer no número menor prescrito, será reservada. Em seguida, multiplique o número maior por sua própria vara, ou pelas barras, e por todos os números que estão sob uma vara, ou pelo número de varas menores. E descreva a soma acima do maior número. E então, se você quiser somar, você vai somar os números inventados, e dividir a soma unificada por todas as rajadas que estarão na posição, e você terá a soma delas. E se você quiser extrair o maior do maior, você extrairá o número encontrado, e dependendo do número menor do número encontrado, e colocando o maior, divida o resto por todas as rajadas, e você terá o resto que está entre o maior e o menor. E se você quiser dividir o maior pelo menor, divida o maior número encontrado pelo menor. E se você não está disposto a dividir o menor pelo maior, divida o menor número encontrado pelo maior; e assim você terá a divisão deles como desejar (Leonardo Pisano, 1857, p. 71, tradução nossa)

Em seguida, ainda nesta parte é apresentada uma outra forma de fazer a adição de números inteiros e quebrados. Para essa outra técnica, Leonardo Pisano (1857) soma primeiramente as partes inteiras e, em seguida, as partes fracionárias.

Figura 43 – Exemplos de adição, subtração e divisão presentes na quarta parte do capítulo VII.

$\begin{array}{r} 1\ 5\ 2\ 1 \\ \frac{3}{4}\ 1\ 2\ 6 \\ \hline \end{array}$ Summa iunctionis $\frac{1}{12}\ 1\ 3\ 9$	$\begin{array}{r} 1\ 5\ 2\ 1 \\ \frac{3}{4}\ 1\ 2\ 6 \\ \hline \end{array}$ Residuum extractionis $\frac{5}{12}\ 1\ 1\ 4$	$\begin{array}{r} 1\ 5\ 2\ 1 \\ \frac{3}{4}\ 1\ 2\ 6 \\ \hline \end{array}$ divisio minoris per maiorem $\frac{4\ 8\ 1}{9\ 13\ 13}$
---	--	--

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 71, 72).

Na quinta parte da adição e extração ou divisão de partes números inteiros com rupturas.

Nesta seção, não há introdução ou generalizações, apenas exemplos (figura 44), por serem ampliações das seções anteriores.

Figura 44 – Exemplos de adição, subtração e divisão presentes na quinta parte do capítulo VII.

$\begin{array}{r} \textcircled{10} \quad \textcircled{8} \\ 1\ 1\ 5\ 4\ 0\ 0 \quad 2\ 7\ 7\ 8\ 3 \\ \frac{2}{9} \ 128\ \frac{5}{7} \quad \frac{2}{5} \ 29\ \frac{3}{4} \\ \text{addictio} \\ \frac{1\ 2\ 3\ 6}{2\ 7\ 9\ 10} \ 113 \\ \text{extractio} \\ \frac{1\ 2\ 3\ 5}{2\ 7\ 9\ 10} \ 69 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{divisio maioris per minorem} \\ \frac{5\ 0\ 3\ 3\ 1}{7\ 7\ 7\ 9\ 9} \ 4 \\ \text{divisio minoris per maiorem} \\ \frac{1\ 1\ 9\ 1\ 3\ 8}{2\ 10\ 10\ 5\ 7\ 7} \end{array}$	$\begin{array}{r} \textcircled{0} \quad \textcircled{7} \\ 3152175 \quad 884488 \\ \frac{1}{11} \ \frac{5}{6} \ 244 \ \frac{13}{47} \ \frac{25}{79} \ 33 \ \frac{1}{5} \ \frac{3}{4} \\ \text{pensa est per } 13 \cdot \textcircled{7} \\ \frac{3\ 3\ 4\ 8\ 6}{4\ 7\ 9\ 10\ 11} \ 145 \end{array}$
---	---	--

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 75, 76).

Inicia a parte sexta do sétimo capítulo da expansão das partes em cada seção.

Nesta seção, o autor apresenta várias simplificações, sempre tentando reduzir a fração unitária. Para tanto, apresenta sete diferenças (situações), dentre as quais encontramos situações em que o número maior não é divisível pelo menor. É apresentada ainda uma tabela para a memorização e exemplos para denominadores primos.

4.3.2 Aritmética comercial

O capítulo VIII começa com uma introdução, a qual apresenta a regra geral para a técnica que será apresentada em relação a proporções nas vendas de mercadorias, nas palavras de Leonardo Pisano (1857, p. 83, tradução nossa): “o oitavo capítulo começa com a constatação do preço mais alto das mercadorias”, ou seja, é apresentada uma técnica para encontrar o maior preço pelo qual você pode vender uma mercadoria. Assim, o autor toma o seguinte discurso:

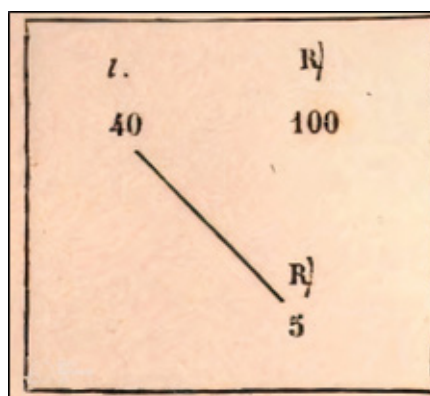
Em toda mercadoria, portanto, sempre se encontram quatro números proporcionais, dos quais três são conhecidos, mas o resto é desconhecido. [...]. Portanto, para que um número desconhecido seja encontrado por conhecidos, damos em todos uma regra universal, a saber, que no topo da mesa, à direita, você escreverá o primeiro número, ou seja, a mercadoria; atrás na mesma linha pode trazer o preço da mercadoria em si, nomeadamente de acordo com o número; terceiro também se ele comprar escreva-o sob o preço, isto é, sob o primeiro; e se houver um preço, escreva-o sob o preço, ou seja, sob o segundo. [...]. Quando essas coisas forem assim descritas, parecerá mais evidente que os dois serão sempre colocados no lado oposto, que será multiplicado ao mesmo tempo; e a soma de sua multiplicação, se for dividida pelo resto do terceiro número, sem dúvida será encontrada desconhecida para o quarto (Leonardo Pisano, p. 83-84, tradução nossa).

A partir dessa regra geral, que nos parece ser de proporção linear, Leonardo Pisano (1857) apresenta várias situações em que pode ser aplicada a técnica admitida. É apresentada a seguinte si-

tuação como primeiro exemplo (figura 45), onde são dados os rolos como informação, tendo como coeficiente de proporcionalidade $\frac{5}{2}$.

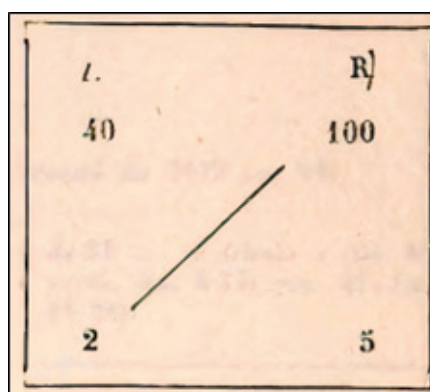
O que dizer se for vendido por 40 libras; e que ele pergunte quanto valem os rolos 5: porque três números conhecidos são colocados nesta posição, como dissemos anteriormente, que seria necessário para rolos 100, e libras 40, e rolos 5, dos quais dois são do mesmo tipo, a saber, Rolo 100 e Rolo 5; quais 100 são a recompensa. [...]. E haverá dois números de um tipo, um sob o outro, como dissemos antes, ou seja, os rolos 5 sob os rolos 100: então, com os assim descritos, você multiplicará os números que estão do outro lado, ou seja, de 5 a 40, serão 200; e dividir por 100, ele sai 2 libras o preço desses 5 rolos, que são descritos em 40: porque esse número, que chega por divisão, é sempre do gênero desse número sozinho, que está nos três números mencionados (Leonardo Pisano, 1857, p. 84-85, tradução nossa).

Figura 45 – Exemplo para encontrar o preço dos rolos.



Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 84).

Figura 46 – Exemplo para encontrar a quantidade dos rolos.

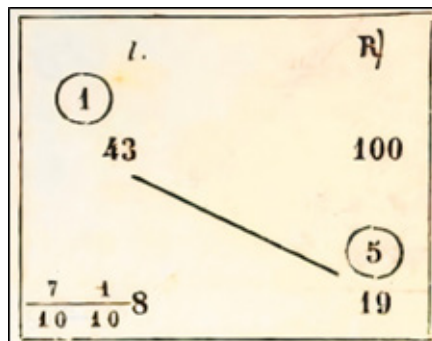


Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 85).

Leonardo Pisano (1857) apresenta mais alguns exemplos. No entanto, temos alguns que nos chamaram a atenção, pelo fato de terem como resultado $\frac{7}{10} \frac{1}{10}$ 8, pelo fato de ser um número inteiro e quebrado, o autor nesse exemplo (figura 47) faz uma espécie de conversão da parte quebrada (fracionária ou decimal), onde $\frac{7}{10} \frac{1}{10} \rightarrow 0,17$, o que seriam os centavos do nosso sistema monetário. Para tanto, utiliza um método de dobrar a parte superior (7 e 1) e acrescenta 5 aos 19

rolos e 1 às libras. Assim, podemos inferir que era uma técnica na negociação para ter o máximo de lucro, sem perda de mercadorias.

Figura 47 – Exemplo do capítulo VIII, com ajuste monetário.



Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 85).

O autor apresenta outros exemplos do mesmo tipo, com divisões com o divisor diferente de 100 e com outras moedas, como o *Massamutini*, uma moeda de ouro registrada em vários documentos dos séculos XII e XIII. Temos exemplos para pimentas, câmbios de moedas (libras, denarios, centavos, soldis), queijos pisanos, joio, panos, etc. Leonardo Pisano (1857) apresenta aplicações dessa técnica em ambientes (lugares e povos) de negociações diversas, como Suria, Alexandria, Constantinopolis, Karatos, Mulçumanos, Bizâncio, terminando com mais exemplos com variados materiais, como o vinho.

O nono capítulo inicia explicando que será dividido em três partes. Aqui, Leonardo Pisano (1857) deixa claro o motivo: o de oferecer uma organização acessível para o leitor ter a possibilidade de acessar direto o assunto que deseja encontrar, como uma espécie de catálogo, iniciando com a troca de mercadorias e coisas semelhantes.

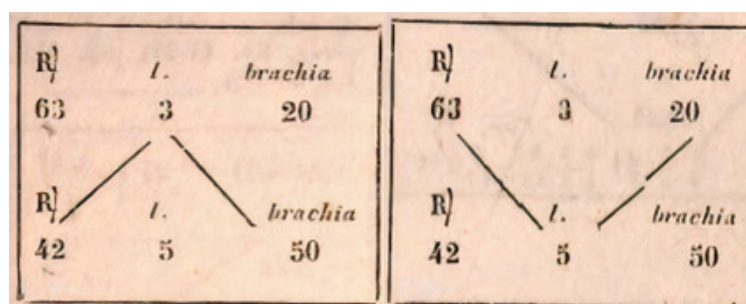
Este capítulo utiliza a proporção como no capítulo anterior, acrescida de uma quantidade maior de grandezas em uma única conta. Dessa forma, o autor apresenta uma regra geral,

Mas quando você quer comprar qualquer tipo de mercadoria com qualquer outra mercadoria, isto é, baratear, você deve aprender o preço de cada mercadoria; cujo preço deve ser sempre de uma moeda. E você está descrevendo uma dessas mercadorias no topo da mesa e está escrevendo o preço dessa mercadoria no canto esquerdo da mesa na mesma linha, como descrevemos no capítulo anterior sobre negociação. Então, sob o preço dessa recompensa, ele descreve em outra linha o preço da recompensa de outro; e volta descreve a mercadoria desse preço. E se a remuneração que você deseja trocar por outra remuneração for de uma remuneração superior à primeira descrita na tabela, você colocará sob a mesma remuneração a quantidade dessa mercadoria que você tinha. E se foi de outra mercadoria, descrever a quantidade dessa mercadoria acima dela, assim como, acabamos de dizer, o preço de uma remuneração deve ser descrito sob o preço de outra, assim também remunerações semelhantes são descritas sob o mesmo preço. E tendo escrito, portanto, cinco deles. Desses números, então multiplique o menor deles pelo número do valor oposto, e os quocientes virão dele, e esforce-se para desenhar o número oposto em outro pelo mesmo preço: divida a soma desses números pelos outros dois números, e você terá o resultado desejado. Por exemplo, os braços de 20 libras de pano podem valer

3; e os rolos de marmelos podem valer da mesma maneira que os Pisanini; ele reclama de quantos pedaços de pano serão obtidos na frente de seus braços (Leonardo Pisano, 1857, p. 118, tradução nossa).

Para o exemplo proposto na citação, o autor apresenta uma composição gráfica (parte esquerda da figura 48), dando as seguintes informações: além de 20 braços de pano valer 3 libras, 5 libras valem 42 rolos de algodão. Assim, pergunta-se: 50 braços de pano valem quantos rolos de algodão? Apresenta também um exemplo com as mesmas informações, mas perguntando quantos braços de pano valem 63 rolos de algodão (parte direita da figura 48)?

Figura 48 – Exemplo presente na primeira parte do capítulo IX.



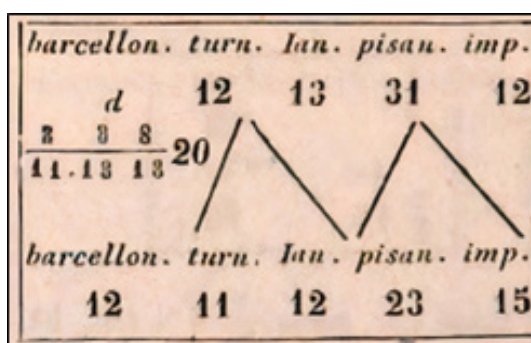
Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 118, 119).

Leonardo Pisano (1857), para este exemplo, comentou que utilizou ensinamentos do Almagesto de Ptolomeu (100 – 170) e o tratado de proporção e proporcionalidade de Ametus Filius (839 – 912), matemáticos que influenciaram suas construções e demonstrações. O autor continua com outros exemplos com a mesma técnica, mas com outros tipos de mercadorias e de moedas.

Para exemplos com moedas, temos,

Doze denários imperiais valem 31 denários de Pisa, e um soldo genovês vale 23 denários de Pisa; e um soldo de Turim [pág. 127] vale 13 denários genoveses, e um soldo de Barcelona vale 11 denários de Turim; pergunta-se quantos denários de Barcelona valem 15 denários imperiais. De fato, de acordo com o método comum, primeiro considera-se quantos denários de Pisa valem 15 denários imperiais (Leonardo Pisano, 1857, p. 126, tradução nossa).

Figura 49 – Exemplo com câmbio.



Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 127).

Nesse exemplo, encontramos Leonardo Pisano (1857) ensinando uma técnica nos cálculos, que em uma tradução direta do latim pode ser lida como: você evitará o que poderá ser evitado, ou seja, não fazer cálculos que podem ser evitados para que a conta seja otimizada. Na matemática moderna são as nossas simplificações.

Em seguida, o livro traz uma explicação para valoração das moedas,

De fato, as moedas que compam apenas o valor da prata que nelas estão são chamadas de moedas comuns; as composições de todas as moedas são determinadas separando-as em um vaso sobre fogo. Portanto, devemos descobrir qual é o preço pelo método de troca, ou pelo peso em libras, ou pelo valor de face, como mostraremos (Leonardo Pisano, 1857, p. 127, tradução nossa).

Leonardo Pisano (1857) traz o seguinte exemplo:

Com efeito, tem-se 11 libras por peso de moeda comum que está com 2 onças de prata; isto é, 2 onças de prata estão contidas em uma libra dela. E uma libra de prata vale 7 libras pisanas. E se pergunta quantas libras pisanas você deve ter para 11 libras de moedas (Leonardo Pisano, 1857, p. 128, tradução nossa).

Vale ressaltar que o autor não coloca ponto de interrogação em suas perguntas, pois o latim não utiliza o ponto gramatical de interrogação como na língua portuguesa. Em vez de ponto de interrogação, faz uso de partículas – que para essa língua compõe um grande número de palavras de mais de uma classe gramatical – que, para frases interrogativas, são *num* e *ne*. Outro ponto importante é o fato de ser resolvido com a utilização de duas técnicas, com o método de troca e o método de negociação.

Figura 50 – Exemplo com o método de troca.

<i>l.</i>	<i>argenti</i>	<i>bol.</i>
$\frac{5}{6}$ 12	<i>unc.</i>	<i>l.</i>
	2	1
<i>p.</i>		
<i>l.</i>	<i>unc.</i>	<i>bol.</i>
7	12	11

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 128).

Figura 51 – Exemplo com o método de negociação.

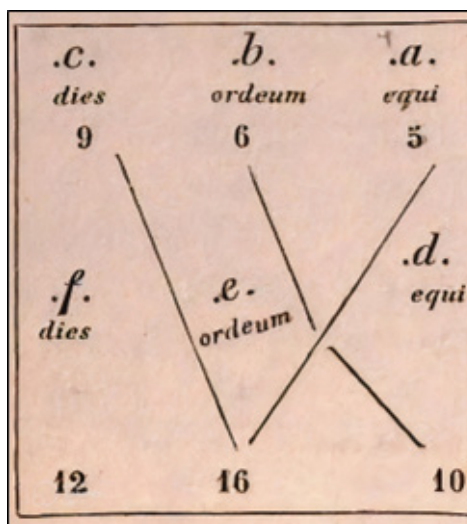
<i>l.</i>	<i>unc.</i>
7	12
<i>s.</i>	<i>unc.</i>
$\frac{5}{6}$ 12	22

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 128).

O autor, ao tratar de um exemplo com uma certa quantidade de cavalos que comem cevada em determinados dias, apresenta uma generalização, ou uma forma geral para resolver qualquer situação-problema que envolva proporção composta. Em suas próprias palavras:

Cinco cavalos comem 6 sestari de cevada em 9 dias; procura-se pela mesma regra quantos dias serão necessários dez cavalos para comer 16 sestari. [...]. Podemos mostrar neste problema 18 combinações de proporções que são ilustradas em seis linhas na primeira figura retangular. Seja, portanto, .e. ser o primeiro número, e .f. ser o segundo, e .d. ser o terceiro, e .a. ser o quarto, e .b. ser o quinto, e também .c. ser o sexto número; e deixe .a.e.c. seja uma conjunção dos números, que se chama o primeiro; .d.b.f. é a segunda conjunção. A proporção de qualquer número da primeira conjunção para qualquer número da segunda conjunção é composta dos quatro números restantes, dois deles são antecedentes e dois deles consequentes. Portanto, qualquer proporção das proporções compostas que são 9 são compostas de acordo com uma combinação de proporções porque qualquer proporção é composta do primeiro antecedente e do primeiro consequente, e do segundo antecedente e do segundo consequente, a proporção ainda composta da mesma proporção que o primeiro antecedente tem para o segundo consequente, e da proporção que o segundo antecedente tem para o primeiro consequente. Há uma mudança do antecedente e do consequente e com ela a proporção composta que se compõe de dois antecedentes ditos e de dois consequentes. Da mesma forma, a proporção de qualquer número da segunda conjunção para qualquer número da primeira conjunção é composta dos quatro números restantes, dos quais dois são antecedentes e dois são consequentes. Daí existem 9 combinações (Leonardo Pisano, 1857, p. 132, tradução nossa).

Figura 52 – Exemplo da situação dos cavalos que comem cevada presente no capítulo IX.



Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 132).

Observamos o domínio técnico que Leonardo Pisano (1857) tem sobre as regras colocadas, apresentadas com um padrão que encontramos também nas proposições do *Liber Quadratorum*, de trazer letras, ou segmentos de retas para representar quantidades (números), com um ponto na frente e outro atrás da letra. Não sabemos se o autor trazia esse mesmo padrão na edição de 1202, mas podemos afirmar que trazia o mesmo conhecimento técnico, contribuindo para as exigências vigentes.

O décimo capítulo traz instruções sobre como dividir o lucro de algum investimento proporcionalmente a cada investidor. Esse capítulo é dividido em três partes, nas quais são ensinadas técnicas para dois, três e quatro investidores, mas, inferimos que a técnica ensinada sirva para n investidores. Observamos também ser uma técnica utilizada em nossa matemática moderna para distribuições proporcionais, que Leonardo Pisano (1857) nomeia como método da empresa, o qual, concordamos com Sigler (2002), nos dá uma noção de como a contabilidade era conduzida no século XIII.

O autor apresenta uma regra geral para essa técnica,

E ele gostaria de saber quanto do lucro de cada um vai acontecer com ele; coloque a parte do primeiro parceiro na cabeceira do tabuleiro do lado direito; em seguida, na mesma linha para a esquerda, tente colocar as porções dos outros em ordem; e o lucro que eles fizeram, em outro capítulo da tabela, você deve descrever na mesma linha, no lado esquerdo da tabela. Em seguida, você agregará as ações de todos os parceiros em um e fechará a soma agregada. Em que ele divide singularmente as multiplicações da porção de cada sócio no lucro total; e assim terá isto que acontece a cada um do seu próprio proveito (Leonardo Pisano, 1857, p. 135, tradução nossa).

Na primeira parte, o livro traz a seguinte situação-problema,

Propõe-se que dois homens que juntos façam uma empresa na qual o primeiro ponha na sociedade acima 18 libras de algum dinheiro, e o outro ponha na mesma empresa 25 libras, e então a empresa tenha um lucro de 7 libras, e pergunta-se quanto das 7 libras cada um vai conter (Leonardo Pisano, 1857, p. 135, tradução nossa).

Ao resolver, a partir da regra geral, o autor apresenta a seguinte resolução (figura 53) no que ele chama de mesa ou tabuleiro:

Figura 53 – Exemplo do capítulo X para dois sócios.

1680	(7)		(7)
240		(3)	
		<i>l.</i>	<i>l.</i>
<i>lucr. 7 port. sec.</i>	<i>25 port. pri.</i>	<i>18</i>	
	(10)	(5)	
	<i>l.</i>	<i>l.</i>	
pensa per 41	$\frac{3}{43}$	4	$\frac{40}{43}$
			2

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 135).

Para a segunda parte, temos o seguinte exemplo com uma orientação prática para o cálculo na mesa ou tabuleiro,

Três homens fizeram uma empresa na qual o primeiro colocou 17 libras, o segundo 29 libras, o terceiro 42 libras, e o lucro foi de 100 libras; primeiro você escreve o problema

Nessa última parte, temos a aplicação da técnica para quatro sócios, mas observamos que para que essa situação seja otimizada. Leonardo Pisano (1857) recorre à regra do cancelamento, aliada às regras de cada número. Em nossa matemática moderna, utilizamos o Mínimo Múltiplo Comum (MMC).

No capítulo XI, Leonardo Pisano (1857) ensina sobre a liga de dinheiro de uma forma mais simples. Ensina quanto deve ter de cada material, como cobre e prata em cada moeda, explanando três situações. A primeira é quando se mistura uma certa quantidade de prata com o cobre; a segunda é quando se adiciona uma certa quantia de prata ou de cobre à moeda, e a terceira é quando você possui uma moeda, mas quer aumentar ou diminuir seu valor. O autor organiza o capítulo em sete diferenças, com o objetivo de serem melhor exploradas as possíveis situações.

Na primeira diferença, temos na liga de dinheiro uma dada quantia de prata ou cobre, para a qual é apresentado o seguinte exemplo:

Um certo homem tem 7 libras de prata com as quais deseja ganhar dinheiro com 2 onças de prata em uma libra, e deseja saber qual será a quantidade total da liga e a quantidade de cobre a juntar. Das 7 libras de prata você realmente faz onças; haverá 84 onças que você divide pelas 2 onças acima escritas; o quociente será 42, e esse será o número de libras na liga total prescrita. Por exemplo, quando em cada libra de dinheiro se deve ter 2 onças de prata, então quantas vezes 2 onças cabem em 84 onças (Leonardo Pisano, 1857, p. 144, tradução nossa).

Figura 56 – Exemplo do capítulo XI primeira diferença.

<i>l. ra.</i>	<i>l. arg.</i>
10	2
35	7
<i>l. ra.</i>	<i>l. ar.</i>
10	2
7	$\frac{2}{5}$ 1

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 144).

Com alguns ajustes, o autor ensina que essa situação pode ser reduzida ao método de negociação, como vemos na figura 56. Observamos também que o autor utiliza uma noção de divisão para efetivação dos cálculos, quando em sua fala questiona o aprendiz (leitor) ao dizer: “então quantas vezes 2 onças cabem em 84 onças; [...], existem quarenta e duas vezes as 2 onças nas 84 onças.

[...], se em uma libra do dito dinheiro há 10 onças de cobre, então quantas vezes as 10 onças vão para as 7 libras, [...]” (Leonardo Pisano, 1857, p. 144, tradução nossa).

Para esse exemplo, o autor calcula tanto com sete libras de prata (parte superior da figura 56) como para sete libras de cobre (parte inferior da figura 56).

Na segunda diferença, temos uma liga quando determinada quantia de dinheiro é colocada e outra moeda é feita com uma libra que tem menos prata do que o dinheiro original. Essa liga não podia ser feita sem a adição de cobre, vemos a seguinte situação no exemplo a seguir:

Um certo homem tem 7 libras de dinheiro que está com 5 onças com as quais ele deseja ganhar dinheiro com 2 onças, e procura-se quanto cobre é agregado, e a quantidade total da liga. Você escreve de fato as 5 onças de prata que estão em cada libra abaixo das 7 libras, e descobre quantas onças de prata existem nas 7 libras, ou seja, você multiplicará 5 por 7; haverá 35 onças, e esta é a prata nas 7 libras acima escritas; estas 35 onças realmente podem ser ligadas ao dinheiro do produto com 2 onças para a libra. Quantas 2 onças existem em 35 onças; portanto, você divide o 35 pelo 2; o quociente será de $\frac{1}{2}17$ libras para a quantidade da referida liga; dele você subtrai as 7 libras acima escritas; restará $\frac{1}{2}10$ libras para a quantidade de cobre adicionada (Leonardo Pisano, 1857, p. 145, tradução nossa).

Figura 57 – Exemplo do capítulo XI segunda parte.

<i>Vuc. er.</i>	<i>Vuc. ar.</i>
$\frac{1}{2}$ 10	35
Summa consol.	l.
$\frac{1}{2}$ 17	7
<i>Vuc.</i>	<i>Vuc.</i>
2	5

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 145).

Nessa diferença, Leonardo Pisano (1857) apresenta uma regra universal que se encaixa perfeitamente com o exemplo anterior:

Na verdade, se for proposto juntar três ou quatro ou mais moedas diferentes, então você soma as onças de prata que estão em todas as moedas colocadas; você o divide pelas onças de prata que estão em uma libra do dinheiro que você deseja fazer; você encontra a quantidade da liga total. Desta soma você subtrai as libras de dinheiro que são colocadas na liga; o cobre adjacente é deixado (Leonardo Pisano, 1857, p. 145, tradução nossa).

A terceira diferença é semelhante, pois trata de uma quantia de dinheiro que é colocada, e se deseja fazer dessa quantia um dinheiro com uma libra contendo mais prata do que no original. Isso não pode ser feito sem a adição de prata. Para essa situação, o autor traz o seguinte exemplo:

Um certo homem tem 9 libras de um dinheiro que está com 2 onças de prata da qual ele deseja ganhar dinheiro com 5 onças e, portanto, à liga ele une a prata. Porém nesta distinção considera-se o cobre que está no dinheiro posado; portanto, você subtrai as 2 onças de uma libra; restarão 10 onças, e esse número de onças de cobre é em cada libra o dito dinheiro; portanto, você escreve o 10 abaixo das 9 libras e multiplica o 10 pelo 9; serão 90, e essa quantidade de onças de cobre está nas 9 libras; e as 90 onças que você divide pelas onças de cobre que estão nas libras de dinheiro que você deseja ligar, ou seja, pelos 7 porque quantas vezes as 7 onças vão para as 90 onças, esse é o número total de libras que você pode ligar de 90 onças; o quociente será de $\frac{6}{7}$ 12 libras para a quantidade total da liga; dele você subtrai as 9 libras; restam $\frac{6}{7}$ 3 libras para a prata adicionada (Leonardo Pisano, 1857, p. 147 tradução nossa).

Figura 58 – Exemplo do capítulo XI terceira diferença.

<i>iunctio arg.</i>	<i>Vnc. er.</i>
$\frac{6}{7}$ 3	90
<i>.s. consol.</i>	<i>.l.</i>
$\frac{6}{7}$ 12	9
<i>Vnc. er.</i>	<i>Vnc. ra.</i>
7	10

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 147).

Em seguida, Leonardo Pisano (1857) apresenta uma noção universal para saber se deve adicionar prata ou cobre em alguma liga. Explica que, se for proposto juntar três ou mais quantias de qualquer dinheiro, sejam libras ou onças, se for desejado fazer mais ou menos dinheiro, terá que saber se deve adicionar prata ou cobre. Para isso, são tomadas todas as onças de prata, as quais serão divididas pelas onças de prata em uma libra do dinheiro que se deseja ligar. Se o quociente resultante for maior que a soma de todas as moedas, então deve-se juntar o cobre, e se for menor, então deve-se juntar prata, e se não for nem menor nem maior, então, nem cobre nem prata devem ser adicionados.

As restantes das diferenças consistem em uma variação do apresentado até aqui, não havendo variação na técnica. Assim, temos na quarta diferença uma quantia desconhecida de dinheiro que é colocada e, a partir dela, se deseja fazer alguma quantia de qualquer quantia menor pela adição de cobre. Na quinta, há de forma semelhante uma quantia desconhecida de dinheiro que é colocada e, a partir dela, você desejará fazer alguma quantia de dinheiro maior com a adição de prata. A sexta diferença é de fato sobre um dinheiro menor ou maior do que o dinheiro que você deseja ganhar; logo, a liga é sem a adição de cobre ou prata. E a sétima diferença se refere a regras para a mistura de coisas análogas.

O autor termina com exemplos variados, dentre os quais encontramos: sobre um homem que vende duas moedas de ouro; sobre um homem que compra 7 libras de três carnes por 7 denários; sobre uma comerciante que compra maçãs e peras (que nos chama a atenção e nos possibili-

tando inferir que havia mulheres no comércio também, mas que os homens eram predominantes pela quantidade de exemplos dados com homens e mulheres); sobre compra de grãos; sobre um sino feito de cinco metais; sobre um homem que compra trinta pássaros de três espécies diferentes por 30 denários.

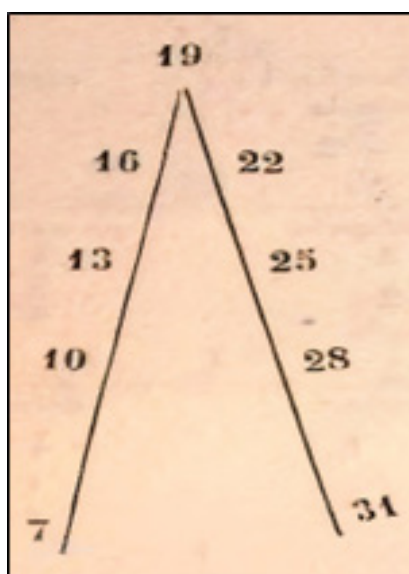
4.3.3 Situações-problemas

Com o capítulo doze, Leonardo Pisano (1857) inicia seu bloco de situações-problemas. Anuncia que esse capítulo será dividido em nove partes, com a seguinte fala: “Portanto, dividimos o capítulo doze sobre problemas de *abbaci* em nove partes” (Leonardo Pisano, 1857, p. 166, tradução e grifo nosso). Inferimos que essa divisão foi para uma melhor apreciação do aprendiz (leitor), bem como para uma melhor organização, com situações diversas, como vem acontecendo em todo o livro. Inferimos também que *abbaci*, como no título do livro da presente edição, refere-se a cálculos sem o ábaco.

Em seguida, Leonardo Pisano (1857) inicia com a generalização para as somas de séries numéricas com um exemplo:

Quando você deseja somar uma determinada série de números que aumenta em um determinado número, como crescente em um, ou dois, ou três, ou qualquer outro número, então você multiplica metade do número de números na série vezes a soma do primeiro e os últimos números da série, ou multiplique metade da soma do primeiro e do último número da série pelo número de números da série, e você terá a proposição. Por exemplo, desejo somar 7 números que aumentam de três de sete até 31, ou seja, 7, 10, 13 e assim por diante até 31. O número dos números mencionados é de fato 9, ou seja, há nove números na série acima mencionada, da qual a primeira é a sete (Leonardo Pisano, 1857, p. 166, tradução nossa).

Figura 59 – Exemplo do capítulo XII primeira parte.



Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 166)

Em seguida, continua com outra forma de calcular a soma, valendo para séries que se iniciam com o número do aumento, ou seja, iniciam com a razão:

Se você deseja somar uma série de números que aumentam em ordem de um começando com um, ou aumentam de dois começando com 2, ou aumentam de qualquer outro número começando com esse número, então você divide o último número pelo primeiro número e você adiciona um ao quociente e manterá o resultado; você o multiplica pela metade do último número ou multiplica o último número pela metade do número mantido (Leonardo Pisano, 1857, p.167, tradução nossa).

Podemos observar que Leonardo Pisano (1857) apresenta uma outra regra para essa situação, mas que poderia ser resolvida pela regra anterior, o que o próprio autor deixa claro. Segue com suas generalizações aplicando a técnica a soma de quadrados. Faz menção que provou essa técnica geometricamente no *Liber Quadratorum*, quando diz: “Com efeito, provei geometricamente que esta é a dita soma de quadrados no livro que compus sobre quadrados” (Leonardo Pisano, 1857, p. 168, tradução nossa).

Após as regras gerais, o autor parte para aplicações mais práticas em diversas situações, quando evidencia que “as regras para a soma das séries foram de fato mostradas; agora são mostradas verdadeiras aplicações delas” (Leonardo Pisano, 1857, p. 168). Dessa forma, é feita a aplicação nas seguintes situações: sobre dois viajantes, um dos quais segue o outro em ritmo crescente; mais sobre dois viajantes, um dos quais segue o outro com números crescentes; sobre dois viajantes, um dos quais segue o outro por números pares; quando um homem vai atrás de outro aumentando três ou algum outro número; do mesmo modo para um aumento de cinco; outro quando o número de milhas que aquele que percorre igualmente diariamente não é integralmente divisível pelo aumento do número do outro.

Na segunda parte, temos proporcionalidade entre diferentes números (quantidades), como segue:

Um número tem que fazer com outro número uma proporção igual ou maior ou menor. A proporção é igual quando os próprios números são iguais, como 3 e 3. Os números que estão em maior proporção têm proporção de acordo com o que sai da divisão do maior pelo menor, como 8 para 4, que estão em dobro na proporção porque o 8 dividido pelo 4 tem quociente 2, ou porque o 8 é o dobro do 4. [...] Os números que têm menor proporção estão na proporção que resulta da divisão do menor pelo maior, como acontece com 4 a 8, que estão em meia proporção porque o 4 dividido pelo 8 resulta em um meio, ou porque o 4 é meio do 8. [...] Se um número for procurado de modo que de 6 a esse número tenha a mesma proporção de 3 a 5, então você faz isso. Você multiplica o 5 pelo 6; serão 30 que você divide por 3; haverá 10 que é o número procurado porque como 3 está para 5, assim está 6 para 10 (Leonardo Pisano, 1857, p. 169 - 170, tradução nossa).

Resumidamente, podemos dizer que temos três tipos de proporção entre números, proporções iguais ($a = b$), maiores ($a > b$) e menores ($a < b$) que são resolvidas por métodos apresentados em capítulos anteriores, sem trazer uma composição gráfica para esses exemplos. O autor

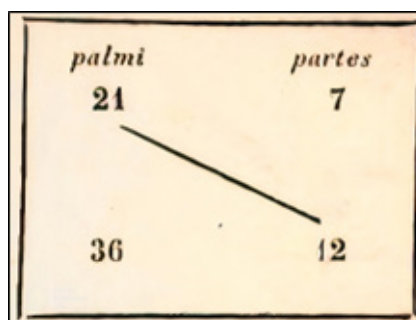
segue com outros exemplos, dentre os quais temos: sobre quatro números proporcionais; sobre a separação de 10 em quatro partes proporcionais; na proporção contínua; sobre como encontrar dois números, $\frac{2}{7}$ de um é $\frac{3}{8}$ do outro; em três números, para os quais $\frac{2}{5}$ do primeiro é $\frac{3}{7}$ do segundo e $\frac{4}{9}$ do terceiro.

Para a terceira parte, Leonardo Pisano (1857) apresenta exemplos com os mesmos métodos em situações em que se procura alturas de árvores,

Há uma árvore, da qual $\frac{1}{4} \frac{1}{3}$ está escondido sob o solo; e há 21 palmos: pergunta-se qual é o comprimento dessa árvore: como $\frac{1}{4} \frac{1}{3}$ se encontram em 12, entenda que a própria árvore

é dividida em 12 partes iguais; a terceira e a quarta, a saber, 7 partes, são 21 palmas: portanto, é proporcionalmente de 7 a 21, portanto, 12 partes ao comprimento da árvore. E como os quatro números são proporcionais, a multiplicação do primeiro pelo quarto é igual à multiplicação do segundo pelo terceiro: portanto, se você multiplicar o segundo 21 pelo terceiro 12 conhecido e dividir pelo primeiro número do mesmo caminho, ou seja, por 7, 36 sairá para o quarto número desconhecido, ou seja, para o comprimento dessa árvore: ou como 21 são triplos de 7, pegue o triplo de 12 e você também terá 36 (Leonardo Pisano, 1857, p. 173, tradução nossa).

Figura 60 – Exemplo do capítulo XII terceira parte.



Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 173)

O autor continua com outros exemplos com medidas de árvores, mas diversifica seus exemplos com cálculos numéricos e outras situações-problemas, como: ao encontrar um certo número para o qual $\frac{1}{6} \frac{1}{5} \frac{1}{4} \frac{1}{3}$ é a raiz do mesmo número; sobre o leão que estava na cova; que é um quarto disso vezes um quinto disso. Vale ressaltar que esses problemas podem ser aplicados para vários cálculos aritméticos.

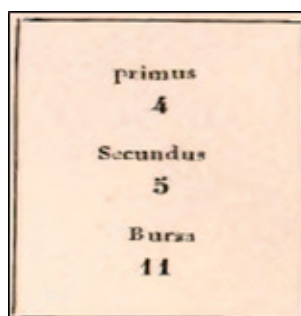
Na quarta parte não há nenhuma introdução, o autor inicia com o primeiro exemplo que consiste na seguinte situação problema:

Dois homens que tinham denários encontraram uma bolsa com denários; assim encontrado, o primeiro homem disse ao segundo: Se eu tirar esses denários da bolsa, então com os denários que tenho terei três vezes mais do que você. Alternadamente, o outro homem respondeu: E se eu ficar com os denários da bolsa com meu denário, terei quatro vezes

mais do que você. Procura-se quantos denários cada um tem e quantos denários encontraram na bolsa (Leonardo Pisano, 1857, p. 212, tradução nossa).

Para esse problema, o autor faz uma redução à unidade para encontrar a solução mais rápida. Assim, apresenta uma fração proporcional para cada homem do problema. Para o primeiro $\frac{3}{4}$ e para o segundo $\frac{4}{5}$ dando um total de 20 denários. Utilizando as devidas proporções e retirando as quantias que se repetem, temos os seguintes valores na figura 61.

Figura 61 – Exemplo do capítulo XII quarta parte.



primus	4
Secundus	5
Bursa	11

Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 213)

Leonardo Pisano (1857) segue com muitos outros exemplos, todos parecidos, acrescentando homens à situação de encontrar uma bolsa e descobrir a quantia que cada um terá.

Em seguida, na quinta parte, apresenta também uma regra de proporção, mas com a compra de cavalos, a qual segue:

Dois homens tendo bizanthios encontraram um cavalo à venda; como eles queriam comprá-lo, o primeiro disse ao segundo: Se você me der $\frac{1}{3}$ de seus besantes, terei o preço do cavalo. E o outro homem propôs ter o mesmo preço do cavalo se ele levasse $\frac{1}{4}$ dos besantes do primeiro. Procura-se o preço do cavalo e os besantes de cada homem; você coloca $\frac{1}{4} \frac{1}{3}$ em ordem e subtrai o 1 que está sobre o 3 do próprio 3; resta 2 que você multiplica pelo 4; haverá 8 besantes, e o primeiro tem tantos. Também o 1 que está sobre o 4 é subtraído do 4; restam 3 que você multiplica pelo 3; restam 9 besantes, e o outro homem tem tantos. Novamente você multiplica o 3 pelo 4; será 12 do qual você tira o 1 que sai da multiplicação do 1 que está sobre o 3 pelo 1 que está sobre o 4; restam 11 besantes para o preço do cavalo; este método procede da regra da proporção, ou seja, da descoberta da proporção dos besantes de um homem para os besantes do outro; a proporção é encontrada assim (Leonardo Pisano, 1857, p. 228, tradução nossa).

Observamos nesse problema muitas semelhanças com o problema da parte quatro; no entanto, em uma situação diferente. Essa regra de proporcionalidade continua sendo explorada em diversos problemas nesta quinta parte, como: sobre quatro homens quando dois tiram de um em ordem de acordo com o mesmo método; um problema solucionável com 7 homens; sobre dois homens e dois cavalos.

Seguindo com a parte seis, também não temos introdução, o autor inicia indo direto para a seguinte situação problema:

Um certo homem indo a Lucca a negócios para lucrar, dobrou seu dinheiro e gastou lá 12 denários. Ele então partiu e passou por Florença; ele ali dobrou seu dinheiro e gastou 12 denários. Então ele voltou para Pisa, dobrou seu dinheiro e gastou 12 denários, e dizem que ele não tinha mais nada. Procura-se quanto ele tinha no início (Leonardo Pisano, 1857, p. 258, tradução nossa).

Podemos pensar em algumas soluções simples para esse problema; no entanto, Leonardo Pisano (1857) apresentou uma solução que acompanha toda trajetória do capítulo XII com soluções com regras de proporcionalidade

Porque é proposto que ele sempre dobrou seu dinheiro, é claro que 2 serão feitos de um. Daí se vê que fração 1 é de 2, ou seja, $\frac{1}{2}$, que assim se escreve três vezes por causa das três viagens que ele fez: $\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$, e o 2 é multiplicado pelo 2 e os outros dois que estão sob a fração; haverá 8 dos quais você tira $\frac{1}{2}$, ou seja, 4, dos quais você tira $\frac{1}{2}$, ou seja, 2, e dos 2 você tira $\frac{1}{2}$, ou seja, 1. Depois disso, você adiciona o 4 ao 2 e o 1; serão 7 que você multiplica pelos 12 denários que ele gastou; haverá 84 que você divide por 8; o quociente será $\frac{1}{2}$ 10 denários, e o homem tinha tantos (Leonardo Pisano, 1857, p. 258, tradução nossa).

O autor segue com outros exemplos semelhantes, dentre os quais temos: sobre um homem que fez quatro viagens; um problema notável sobre um homem que troca cem libras em algum banco por juros; sobre um homem que investe por juros sem aviso prévio; sobre um soldado recebendo trezentos besantes para seu feudo; sobre dois homens que tinham uma empresa em Constantinopla. Assim, podemos observar como o autor consegue a medida de cada parte do capítulo ampliar sua regra de proporcionalidade.

Na sétima parte, o autor anuncia que o problema será sobre o método da falsa posição para dois homens que enviam lá por uma taxa (frete em um barco). É apresentado o seguinte problema:

Um certo homem carregou em um certo navio 13 fardos de lã de igual preço, e outro homem 17 fardos do mesmo preço; quando chegou ao local onde deveria desembarcar, o barqueiro pediu-lhe que pagasse o frete; como ele não tinha dinheiro para pagar o frete, o primeiro lhe disse: Pegue um dos meus fardos para o frete dos meus 13 fardos e dê-me o troco pelo excesso. O barqueiro pegou o fardo e devolveu 10 soldos que, junto com o frete dos 13 fardos, valia o fardo. Além disso, pelo frete dos 17 pacotes do outro homem, ele pegou um pacote dele e devolveu 3 soldos. Procura-se quanto valia o fardo, e quanto foi dado pelo frete de cada fardo. Você pega a diferença entre os pacotes de 13 e 17 que é 4. Também você pega a diferença entre os 3 e os 10 soldos que são 7 soldos; portanto, pelos 4 fardos que um homem tinha a mais do que o outro, ele recebeu 7 soldos a menos; portanto, é muito evidente que o barqueiro reteve 7 soldos para os 4 feixes; portanto, para todos os IIII pacotes, é dado um frete de 7 soldos; portanto se os 7 soldos que são 84 denários vamos dividir pelos 4 fardos, então o quociente será de 21 denários para o frete

de cada fardo; portanto, para os 13 fardos, ele deu pelo frete 13 vezes 21 denários, que são 22 soldos e 9 denários; estes são adicionados aos 10 soldos que o barqueiro lhe devolveu; haverá 32 soldos e 9 denários, e cada fardo valia esta quantia. E se você tomar o frete dos 17 fardos do outro homem, são 29 soldos e 9 denários que resulta da multiplicação de 17 por 21 denários, e a isso você adiciona os 3 soldos que o barqueiro devolveu a ele, e você encontra os mesmos 32 soldos e 9 denários (Leonardo Pisano, 1857, p. 276, tradução nossa).

Chama a atenção que, nesse problema, de fato, em sua solução não é apresentado o método da falsa posição, o que veremos em capítulos posteriores, mas faz organizações aritméticas para a sua solução. Nossa atenção é atraída também pelo fato de o autor usar conversões monetárias para uma solução mais fácil, desviando dos números fracionários e lidando apenas com números inteiros. O autor continua com outros problemas, como: sobre um comerciante carregando pedras preciosas para Constantinopla; sobre inteiros misturados com frações; em um homem que compra 100 *Sestari* de milho; sobre um homem que tinha cinco vasos de prata.

A oitava parte trata de adivinhações baseadas em padrões numéricos, a primeira consiste em:

Uma certa pessoa guarda algum número em sua memória e deseja que você o descubra; você prescreve que ele coloque metade de seu número acima do número e se a fração metade ocorrer, você prescreve que ele pegue o próximo número inteiro maior. Do total dos dois números, você prescreve que ele coloque novamente metade acima, e se alguma fração ocorrer a metade, então novamente ele pegue o próximo número inteiro maior. Em seguida, você pede a ele para dar o número de nove contidos na soma de seus três números. E para cada 9 você retém um 4 em sua memória, e você considera se na primeira posição quando ele colocou metade do número dado acima do número havia a fração um meio, e se sim você segura na mão 1. Se na segunda posição, então você segura 2 na mão. E se em ambas as posições houver frações, você segura 3 na mão. E ao total dos quatro você adiciona o dito um, dois ou três, e você terá o número proposto. Por exemplo, que ele coloca 1 em sua memória; acima deste 1 ele colocou metade dele, e haverá um e meio; da metade é feito um e haverá 2. E você segura na mão 1 pela metade. Novamente ele colocou metade do 2 acima do 2 e haverá 3. Como não houve fração na segunda vez, e porque não há 9 no 3, sabe-se que ele colocou um em sua memória. (Leonardo Pisano, 1857, p. 303, tradução nossa).

Contrariando um pouco sua proposta, não apenas neste capítulo como no restante do livro, Leonardo Pisano (1857) apresenta essa e outras adivinhações. Não sabemos com qual finalidade, mas podemos inferir que possa ser o que no século XIV será chamada de aritmética recreativa, bem como que o interesse maior do autor tenha sido nos padrões numéricos por trás das adivinhações.

Na nona e última parte do capítulo XII, temos, em uma linguagem moderna, potências com base dois. O autor dobra os valores encontrados, o que ele chama de dobrar ou duplicar o *scacherii* (xadrez), termo que pode ter sido usado pelo autor devido a uma técnica de multiplicação chamada de tabuleiro de xadrez, pela disposição dos valores em uma tábua ou mesa, parecido com o que foi descrito no capítulo III. Pisano inicia da seguinte forma:

A duplicação, de fato, é proposta de maneira dupla; uma delas é quando o ponto seguinte é o dobro do anterior; outro, quando o ponto seguinte é proposto como o dobro de todos

os pontos anteriores. De onde, de que maneira, se a duplicação deve ser feita, nos esforçamos para mostrar no momento. Pois o primeiro pode fazê-lo dobrando, ou seja, se de um lugar para outro se operar dobrando até o último lugar; a outra forma é que você dobra a quantidade do primeiro lugar, e você terá dois, e os dois você multiplica por si mesmo; haverá 4, e o 4 é 1 maior que o total das duas casas. Por exemplo, no primeiro ponto você coloca 1, no segundo 2, que somado ao primeiro dá 3; este três mais 1 é o 4 acima escrito; o 4 multiplicado por ele mesmo dá 16 cujo número é um maior que a soma com mais dois pontos, ou seja, de 4 pontos. Por exemplo, no primeiro há 1, no segundo há 2, no terceiro 4, no quarto 8, que somados dão 15 que é 1 menor que 16 (Leonardo Pisano, 1857, p. 309, tradução nossa).

Como dito anteriormente, essa regra pode ser solucionada com potências de base dois, formando uma sequência numérica. No entanto, podemos perceber que o matemático dobra os números em uma sequência e, somando os números da sequência mais um resulta exatamente em potências de base dois. Observamos que a soma dessa sequência está muito próxima à soma de números ímpares que resultam em números quadrados encontrados no *Liber Quadratorum*.

Leonardo Pisano (1857) continua seu exemplo até um número com trinta e nove casas decimais, tendo que recorrer de forma gráfica à regra da vara de três para organizar esse número, com a finalidade de mostrar que isso pode ser feito sem fim. Também observamos que essas duplicações serão usadas em situações práticas, como carregar um navio com grãos de milho.

Vale ressaltar que apresentamos aqui apenas a primeira duplicata proposta por Leonardo Pisano (1857) e que o capítulo continua com várias situações-problemas com duplicações de grãos de milho, viajantes, ramos de árvores e investimentos.

No capítulo XIII temos o método *Elchataym* (do árabe), que consiste no método da falsa posição dupla, mas o que nos chama atenção é a ousadia de Leonardo Pisano (1857) em sustentar a ideia de que esse método é capaz de resolver quase todos os problemas de cálculo, o que Sigler (2002) traduz como problemas de matemática.

O autor objetiva neste capítulo mostrar que nem em todos os problemas devem ser usados todo o *Elchataym*, mas só parte dele, ou seja, apenas uma posição, e outros que necessitam de todo o método. Dessa forma, foi mostrado que esse método pode ser usado para resolver muitos problemas.

O método consiste em escolher números arbitrários, que podem ser maiores, menores ou um maior e outro menor do que a verdadeira posição (resultado), construindo-se uma regra proporcional com a diferença das duas posições falsas: “o primeiro número é a diferença entre uma posição falsa e a outra. A segunda é a diferença entre as aproximações do valor verdadeiro. O terceiro é a diferença entre a segunda aproximação e o valor verdadeiro” (Leonardo Pisano, 1857, p. 318, tradução nossa).

Com essa explicação prévia, Leonardo Pisano (1857) apresenta o primeiro problema deste capítulo como modelo:

De fato, o valor de cem pesos, ou seja, 100 rolos, é de 13 libras, e busca-se quanto vale 1 rolo; colocamos arbitrariamente que um rolo vale 1 soldo; portanto, 100 rolos, ou seja, cem pesos, valerão pela mesma regra 100 soldos, ou seja, 5 libras; mas como o preço de cem quilos é de 13 libras, a primeira posição falsa rende 5 e difere do valor verdadeiro em 8 libras, ou seja, a diferença entre as 5 libras e as 13 libras. Daí pelo preço de um rolo colocamos 2, ou seja, 1 soldo a mais que a primeira posição; pela regra dos cem pesos valerá 200 soldos, ou seja, 10 libras; e esse valor é igualmente falso e fica aquém do valor verdadeiro em 3 libras, ou seja, a diferença entre 10 libras e 13 libras. E com a primeira posição ficamos aquém do valor real em 8 libras, a segunda 3 libras. Portanto, com a diferença entre a primeira posição e a segunda, ou seja, 1 soldo, aproximamos o valor verdadeiro mais de 5 libras, ou seja, a diferença de 8 para 13 libras, e a aproximação fica aquém de 3 libras; portanto, você diz: pelos 12 denários que acrescentei ao preço de um rolo, aproximei-me mais do preço de cem quilos em 5 libras; portanto, o que devo acrescentar ao preço do mesmo rolo para diminuir a diferença de 3 libras que resultou da segunda posição para o preço real dos mesmos quinhentos? Você, portanto, multiplica os números extremos e divide pelo do meio, como demonstramos no método da árvore e métodos semelhantes, ou seja, o 12 pelo 3, e você divide pelo 5 que é o número do meio; o quociente é $\frac{1}{5}7$ denário que é adicionado aos 2 soldos que foram colocados na segunda posição; você terá 2 soldos e $\frac{1}{5}7$ denário pelo preço de um rolo: de fato, essas duas posições eram menores do que o verdadeiro argumento (Leonardo Pisano, 1857, p. 318, tradução nossa).

Após essa primeira explicação, é feita a prova ou a generalização desse método, dividindo os problemas do capítulo em duas partes. Na primeira, temos: problema notável em um trabalhador; em uma árvore; sobre um homem mantido em serviço; sobre quatro homens que encontraram uma bolsa; sobre cinco homens que compraram um cavalo; sobre um homem que foi a negócios para Lucca; em um homem que investiu; em dois pássaros; em três homens tendo denário; sobre quatro homens que encontram uma bolsa; sobre quatro homens que desejam comprar um cavalo.

Na segunda parte, Leonardo Pisano (1857) inicia com um problema parecido com o exemplo do capítulo XII da quarta parte (citação a seguir). No entanto, sua solução é construída com o método *Elchataym* como modelo para os demais problemas:

Dois homens tinham denários; o primeiro deles disse ao segundo: Se me deres a terça parte dos teus denários, terei 14 denários. O segundo respondeu a ele, e disse: e se você me der a quarta parte dos seus denários, então terei 17 denários. Procura-se quantos cada um tinha (Leonardo Pisano, 1857, p. 336, tradução nossa).

Dessa forma, o autor continua com os seguintes problemas: em três homens tendo denário; mais pelo método das proporções; em cinco homens; sobre três homens que têm denário; em três homens; mais pelo método das proporções; em quatro homens; em quatro homens e uma bolsa.

Seguindo para o capítulo XIV, temos, em resumo, o cálculo de raízes quadradas e cúbicas e as operações aritméticas com essas raízes. Mas o que nos chama atenção é a fala inicial de Leonardo Pisano (1857) e suas ideias que preparam o capítulo para a busca e operacionalizações das raízes cúbicas e quadradas.

Em sua fala inicial, Leonardo Pisano (1857) expõe:

Deixe-me inserir neste capítulo sobre as raízes algo necessário, que são chamados de pregos; que, uma vez que eles são mostrados nas demonstrações abertas do segundo livro de Euclides, é suficiente prosseguir em suas definições apenas em termos de números (Leonardo Pisano, 1857, p. 352, tradução nossa).

Para uma melhor compreensão do que queremos mostrar, separamos alguns pontos dessa fala inicial. Primeiro, o que temos como **pregos** pode ser traduzido também como chaves ou base; segundo, **em termos de números** pode ser traduzido como aritmética; terceiro, o autor faz uma menção ao livro II de Euclides e suas demonstrações, livro que compõe a primeira parte que é sobre geometria plana, de maneira mais específica no livro II de álgebra geométrica. Assim, podemos inferir que Leonardo Pisano (1857) poderia resolver os problemas deste capítulo com outros métodos, mas escolhe como base para todo o capítulo a aritmética, guiado/alicerçado pelas demonstrações de Euclides.

Em relação às ideias iniciais de Leonardo Pisano (1857, p. 352), que inferimos advir dos livros de Euclides, temos uma espécie de cinco postulados para constituir a base de todo o capítulo, os quais seguem:

- a) Com o número separado em partes; os produtos das partes pelo número inteiro separado somados são iguais ao número separado ao quadrado, ou seja, o produto do número por si mesmo;
- b) Se algum número for separado em partes, e cada parte for multiplicada por algum outro número, e todos os produtos forem somados, eles serão iguais ao produto do número separado pelo outro número;
- c) Se um número for separado em quaisquer duas partes, então o produto de cada parte por si mesmo mais o dobro do produto de uma parte pela outra é igual ao quadrado do número inteiro;
- d) Se um número é separado em duas partes iguais e em duas partes desiguais, então o produto da parte menor pela parte maior mais o quadrado da diferença entre a parte menor e a metade de todo o número separado é igual ao quadrado da referida metade;
- e) Se um número for separado em duas partes iguais e qualquer número for adicionado a ele, o produto do número pela metade do número separado mais o número ao quadrado será igual ao quadrado da metade do número separado mais o segundo número.

Dessa forma, Leonardo Pisano (1857, p. 353) conclui sua fundamentação do capítulo da seguinte forma: “com efeito, a estas duas últimas definições reduzem todos os problemas que estão

no livro *Almuchabala*, isto é, no livro do desprezo e da solidificação”. Podemos em uma linguagem moderna aproximar *Almuchabala* (do árabe) da álgebra (restauração e oposição), o que vai ser encontrado séculos mais tarde no capítulo I do livro de álgebra de Cristoph Clavius (1537 – 1612).

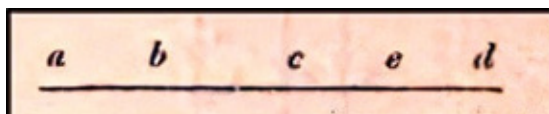
Leonardo Pisano (1857), após sua construção inicial, divide o capítulo em cinco partes. A primeira trata sobre a descoberta de raízes; a segunda é sobre a multiplicação das raízes entre si; a terceira é sobre a adição de raízes; a quarta é sobre a subtração, e a quinta é sobre a divisão de raízes e binômios.

Por fim, temos o capítulo XV, que de forma geral trata da álgebra geométrica, e de forma mais específica foi dividido em três partes. Na primeira parte temos proporções de três e quatro quantidades, com as quais se reduzem muitas questões de geometria; na segunda parte temos soluções de questões geométricas, e na terceira, métodos envolvendo *Almuchabala*.

Na primeira parte, o autor constrói a regra geral para encontrar e manusear esses números proporcionais e nos permite entender que esta primeira parte tem como função construir bases para os cálculos que vão ser requeridos nos problemas geométricos. O autor inicia da seguinte forma:

Primeiro deixe .a.b., .b.c., .c.d., ser três números em proporção contínua, ou seja, como .a.b. é para .b.c., assim como .b.d. para .c.d., e deixe a soma dos números .a.b. e .b.c. seja 10, e deixe o número .c.d. ser 9, e a diferença dos números .a.b. e .b.c. é procurado; porque .a.b. é para .b.c. como .b.c. é para .c.d., a soma dos dois antecedentes está para um deles assim como a soma dos antecedentes restantes está para o conseqüente; isto é, como primeiro .a.e. é para o segundo .b.e., assim como o terceiro .b.d. para a quarta .e.d., e o primeiro e o quarto são conhecidos, e porque quando quatro números são proporcionais, o produto do primeiro e do quarto é igual ao produto do segundo e do terceiro; (Leonardo Pisano, 1857, p. 387, tradução nossa).

Figura 62 – Composição gráfica do capítulo XV primeira parte.



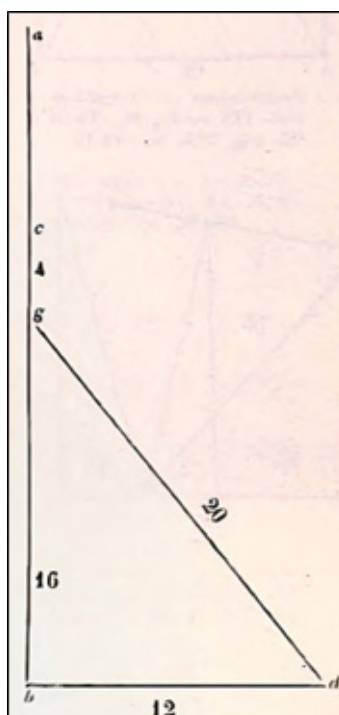
Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 387)

O autor continua com outros exemplos e problemas e, ao observar a forma com a qual Leonardo Pisano (1857) apresenta suas soluções e suas composições gráficas como da figura 62, percebemos mais uma vez a proximidade com o *Liber Quadratorum*, por utilizar também a mesma linguagem da álgebra geométrica, mas não sabemos se em sua primeira edição havia essa linguagem ou se foi influenciada pelo referido livro.

Na segunda parte temos o que o autor chama de problemas geométricos, iniciando com o seguinte problema: “há um poste encostado em uma certa torre, com 20 pés de comprimento; o pé do poste é separado da torre por 12 pés; procura-se quantos pés a ponta do poste cai abaixo do topo da torre” (Leonardo Pisano, 1857, p. 397, tradução nossa).

Para esse problema, o autor recorre às regras da primeira parte do capítulo e ao livro I de Euclides, citando um de seus teoremas bem conhecidos em nossa matemática moderna. Dessa forma, Leonardo Pisano (1857, p. 397, tradução nossa) apresenta a seguinte proposição para sua resolução: “Euclides disse na penúltima proposição em seu primeiro livro, em um triângulo retângulo o quadrado do lado subtendido pelo ângulo reto é igual à soma dos quadrados dos dois lados restantes contendo o ângulo reto”, nosso conhecido teorema de Pitágoras, o que fica bem evidente com a figura 63, seguido de outros problemas geométricos.

Figura 63 – Exemplo do capítulo XV da segunda parte.



Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 397)

Seguindo para a terceira parte, temos seis regras iniciais para a solução de alguns problemas geométricos que podem ser resolvidos algebricamente. Essas regras consistem em encontrar quadrados e suas raízes, quando desconhecidas. Leonardo Pisano (1857) inicia sua fala da seguinte forma:

Na composição da álgebra e almuchabala consideram-se três propriedades que estão em quaisquer números; eles são raízes, quadrados e números simples. Portanto, quando qualquer número é multiplicado por si mesmo, o número resultante é um quadrado e o número multiplicado é uma raiz. [...]. E quando um número não é tido em relação a um quadrado ou raiz, então é chamado de número simples; além disso, nas soluções de problemas existem seis modos, dos quais três são simples e três são compostos (Leonardo Pisano, 1857, p. 406, tradução nossa).

Dessa forma, seguem os seis modos/regras propostos:

- a) o primeiro é quando o quadrado que é chamado de censo é igual a um número de raízes;

- b) o segundo é quando o censo é igual a um número;
- c) o terceiro é quando a raiz é igual a um número;
- d) quando o censo mais as raízes são iguais a um número;
- e) quando as raízes mais um número são iguais ao censo;
- f) quando o censo mais um número é igual a raízes.

Inferimos que Leonardo Fibonacci tenha examinado essas regras durante seus estudos do *Al-Jabr* de Al-Khowarizmi, uma vez que encontramos tais regras nessa obra. Além disso, Leonardo Pisano (1857) as expande com duas observações:

- a) E quando terminar na solução de algum problema que o censo é igual a um número de raízes mais um número, então você adiciona o quadrado da metade do número de raízes ao número; e à raiz do que resultar você adiciona metade do número de raízes, e você terá a raiz do censo procurado;
- b) E quando ocorrer que o censo mais um número será igual a um número de raízes, então você sabe que pode operar sempre que o número for igual ou menor que o quadrado da metade do número de raízes; se for igual, então metade do número de raízes é tido para a raiz do censo, e se o número que com o censo é igual ao número de raízes for menor que o quadrado da metade do número de raízes, então você subtrai o número do quadrado e o que resta você subtrai da metade do número de raízes; e se o que restar não for a raiz do censo procurado, então você adiciona o que você subtraiu ao número do qual você subtraiu, e você terá a raiz do censo procurado.

Com essas regras, Leonardo Pisano (1857) prepara o aprendiz (leitor) para resolver todos os problemas contidos na terceira parte. No entanto, o matemático vai além e afirma: “com essas seis regras podem ser encontradas as soluções para um número infinito de problemas” (Leonardo Pisano, 1857, p. 409).

Temos em um desses exemplos a seguinte situação referente à regra *d* acima:

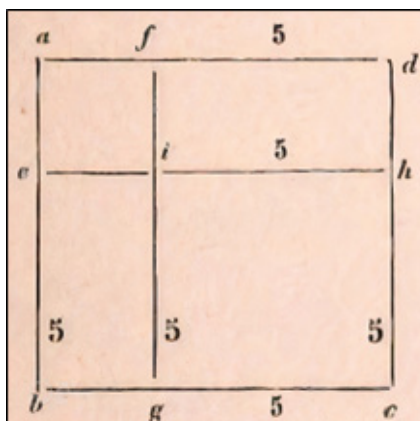
Conseguirei mostrar como esta regra funciona usando dois algarismos; seja adjacente ao tetrágono .a.b.c.d. tendo cada lado maior que 5 côvados, e que seja levado para o lado .a.b. ponto .e., é tomado no lado .a.d., o ponto .f. e no lado .b.c., o ponto .g., no lado .d.c. o ponto .h.; e deixe cada segmento de linhas retas .b.e., .c.g., .c.h., e .d.f. ser de 5 côvados, e conectar os segmentos de linha .e.h. e .f.g.; e porque o tetrágono .a.c. é um quadrado o segmento de reta .d.a. será igual ao segmento de reta .b.a., [...]. (Leonardo Pisano, 1857, p. 408, tradução nossa).

Essa citação, como parte da situação-problema exemplificada na figura 64, dá uma boa ideia do que Leonardo Pisano (1857) estava mostrando. A seguir, trazemos sua resolução:

Colocarei, portanto, para o censo solicitado, o quadrilátero .e.f. que tem lado desconhecido; a raiz do censo é cada um dos segmentos de linha .e.i. e .i.f.; mas o segmento de linha .e.i. multiplicado pelo segmento de reta .i.g. é a área do retângulo .b.i., ou seja, as cinco raízes do censo .e.f., e similarmente a área do retângulo .i.d. constitui 5 raízes do censo

.e.f.; mas o censo mais 10 raízes é igual a 39 denários; portanto, as três áreas mencionadas .e.f., .b.i. e .i.d. total 39; portanto, se 25 for adicionado a ele, ou seja, o quadrilátero .g.h., cada lado do qual é 5, então 64 é obtido para todo o quadrilátero .a.b.c.d.; a raiz disso, ou seja, 8, é o comprimento de cada lado do quadrilátero; portanto, se o segmento de linha .b.e. é subtraído do segmento de linha .b.a., ou seja, o 5 do 8, sobrarão 3 para o segmento de linha .e.a.; portanto, a raiz do censo procurado é 3, e o censo é 9; isso adicionado a dez de suas raízes perfaz 39, como deve ser (Leonardo Pisano, 1857, p. 408, tradução nossa).

Figura 64 – Exemplo do capítulo XV terceira parte.



Fonte: Leonardo Pisano (1857, p. 408)

Leonardo Pisano (1857) também introduz algumas simbologias em seu *Liber Abaci* para uma melhor fluidez dos cálculos, uma vez que as equações eram escritas utilizando muitas palavras, sem simbologias para coisas simples como para os valores desconhecidos e suas potências e raízes, como foi possível observar ao longo dos quinze capítulos descritos até agora.

Suprindo essa carência, encontramos no *Liber Abaci*, segundo Garbi (2009), algumas simbologias, como **res** e **radix** para representar os valores desconhecidos; **census** e **cubus** para representar respectivamente o quadrado e o cubo de um número; o **R** para representar a raiz quadrada, sendo um dos primeiros a usar um traço horizontal na representação das frações. No entanto, discordamos de Garbi (2009), pois o que nos parece é que Leonardo Pisano (1857) recorreu a abreviações e não a símbolos, como podemos observar a seguir na figura 65:

Figura 65 – Recortes de diferentes páginas com algumas simbologias.

...narius 7, sequitur necessario, illum habere quinque res minus denarius 7: quia cum ipse habuerit 7 de denariis secundi, tunc habebit quinque **(res)** integras; et secundo remanebit res una; et sic primus habebit quincuplum eius: quare si de portione primi hominis addantur 5 secundo, que petit ei; et habebit utique secundus rem, et denarios uel diminutus equabitur alicui numero. Sed ut hec apertius habeantur, ponantur 5 census equari denariis 45: diuides ergo 45 per 5, uenient denarii 9, qui equantur censui, hoc est **(census)** est 9, et **(radix)** eius est 3. | Similiter cum census $\frac{1}{4}$ 4 equatur denariis 26, diuides 26 per $\frac{1}{4}$ 4, scilicet 78, per 13, exhibunt 6; quibus equatur unus census. Quare radix eius est surda, cum sit radix numeri non quadrati. Et cum $\frac{1}{4}$ unius census numeri radicem cubicam non habeant: sed si primus numerus eorum, et ultimus essent cubi, uel habentes proportionem inter se sicut **(cubus)** numerus ad cubum numerum; tunc intercederet inter eos duo numeri ratiocinati. Verbi gratia: si primus numerus

Fonte: Leonardo Pisano (1857).

Encontramos em Vogel (2007) algumas justificativas para essas abreviações. Leonardo Pisano (1857) chamou o termo desconhecido de **res** – do árabe *shai*, ou seja, coisa – e como ele não usou símbolos operacionais nem notações para outras incógnitas, esse matemático teve que fazer algumas nomenclaturas, como *denarii secundi* ou, conforme o caso, *denarii tercii hominis*, tendo que sustentar os cálculos e suas explicações com essas palavras, apresentando quase sempre pelo menos duas formas de solução para os problemas propostos.

Leonardo Pisano (1857) termina seu livro sem nenhuma conclusão ou palavras finais, apenas terminando o último problema da terceira parte do capítulo XV. Ainda assim, foi possível ter um vislumbre da genialidade de Leonardo Pisano, garantindo uma riqueza de detalhes e ensinamentos em cada capítulo do *Liber Abaci*, promovendo inúmeras potencialidades para a Europa do século XIII, atendendo a muitas de suas demandas, seja na vida cotidiana, urbana e principalmente comercial e mercantil que, segundo Vogel (2007), chegavam até nas fronteiras europeias.

Podemos dizer também que Leonardo Pisano (1857) alcança seu objetivo de fazer com que o povo italiano fosse instruído acima de todos os outros ao longo da história. Em conformidade com Ifrah (2005), a Itália torna-se um dos centros comerciais mais importantes dos séculos XIV e XV.

Observamos ainda que o leitor, ao consultar o *Liber Abaci*, necessitava de conhecimentos prévios de matemática, pois o seu livro foi direcionado para o aprendiz, ou seja, para o indivíduo que possuía conhecimentos matemáticos, mas que estava em busca de aprimoramento da técnica e de otimizações dos cálculos, além de possuir a habilidade da leitura.

Temos nessa obra uma sistematização que parte do mais simples para o mais complexo, o que foi possível constatar no decorrer do presente capítulo. Para nós, mostra que Leonardo Pisano estava com a intenção de dialogar com tratados mais teóricos em circulação, como os de Boécio.

Ressaltamos, ainda, que a efetivação dos métodos e técnicas no século XIII, advindas do *Liber Abaci*, não dependeram apenas da inteligência do autor, mas de um conjunto de fatores, como elencados no presente capítulo, os quais não minorizaram o trabalho de Leonardo Pisano, mas potencializaram seu uso e divulgação, oferecendo ricas ferramentas para o século XIII e para séculos posteriores.

Dessa forma, fica evidente no decorrer do capítulo que os elementos historiográficos e aritméticos que fazem o *Liber Abaci* ter importância, não seminal, mas de carregar a responsabilidade da sistematização das técnicas aritméticas para atender demandas europeias de seu contexto, bem como a responsabilidade de fazer esses conhecimentos chegarem ao clero e às universidades. Para esclarecer essa assertiva, apresentamos a seguir os fatores contextuais e demandas atendidas pelo livro que o fizeram ter potencialidades para o medievo.

5

CONSTRUINDO DIÁLOGOS HISTORIOGRÁFICOS

A pós a apresentação dos aspectos do contexto da Europa do século XIII, bem como dos métodos aritméticos encontrados no *Liber Abaci*, que atualmente se tem como principal obra em termos de aritmética medieval nesse século, construímos subsídios suficientes para a última parte do nosso roteiro de pesquisa.

Objetivamos neste capítulo identificar demandas atendidas pelo *Liber Abaci* no século XIII, pois ele se torna um produto e também uma evidência de seu contexto, o que deu sentido ao fazer matemático (aritmético) da época. Para tanto, apresentamos inicialmente fatores da malha histórica da composição das técnicas propostas no *Liber Abaci* no século XIII.

5.1 Fatores contextuais do *Liber Abaci*

Nesta seção, apresentamos fatores do contexto da Europa do século XIII para a implementação das técnicas aritméticas encontradas no *Liber Abaci*. Esses apontamentos emergem a partir dos aspectos historiográficos discutidos na seção 4.1, que se constituirão na presente seção como fatores, bem como de diálogos com outros historiadores.

O que queremos deixar claro nesta seção é que anteriormente observamos um contexto, algo amplo, aparente. Ou seja, o que foi possível observar em uma construção historiográfica do contexto europeu foram os aspectos e a reflexão crítica, a partir das três esferas de análise da historiografia atualizada a respeito. Esses aspectos nos levaram a identificar agentes do contexto do *Liber Abaci* e de seu entorno, o que chamamos de fatores, os quais geram subsídios para os apontamentos das demandas atendidas por esse livro.

Dessa forma, iniciamos pelo papel absorvido pela igreja de mediar o conhecimento. Entendemos essa função como um fator efetivo do contexto da publicação e da reedição do *Liber Abaci* na Idade Média. Essa função não foi simplesmente imposta pela própria igreja, mas o contexto medieval levou a essa posição. No entanto, salientamos o fato de que os clérigos eram os detentores da habilidade da leitura, ou seja, eram os poucos alfabetizados a época.

Essa função remodela os princípios do conhecimento, pois a igreja olha para as ciências conhecidas com a finalidade da compreensão e estudo de Deus, seja com a exegese bíblica ou com os estudos filosóficos que ajudam ou cooperam na exaltação da onipotência, onisciência e onipresença divina, como foram as obras de Aristóteles (384 a.C – 322 a.C). Dessa forma, a igreja via as ciências e a filosofia – tradição clássica – como valiosas servas da religião e da teologia (Lindberg, 2013).

A teologia estava acima das outras ciências, uma espécie de hierarquia científica da tradição medieval. Isso, inicialmente, pode aparentar um processo de barreira para o crescimento científico, mas não foi o que houve. Ao estudar as historiografias daquele período, vemos que a igreja entendia essas ciências como servas da teologia, via nas ciências e na filosofia um auxílio para se manter de pé e em constante desenvolvimento.

Nos surpreendemos ao perceber que, ao tê-las como servas, necessitavam de seu auxílio, pois não poderiam atingir seus objetivos sem elas. Essas ciências tiveram em certa medida a proteção da igreja – pois o Senhor sempre cuida de seus servos – o que vai de encontro com muitas percepções de que a igreja construiu um mundo obscuro para a ciência medieval.

Lindberg (2013) apresenta que, entre essas servas se destacavam algumas, como: matemática, astronomia, astrologia, óptica, medicina e ciências experimentais. Temos, por exemplo, a matemática que auxiliava na exegese bíblica e na contagem das datas religiosas; a ciência natural que permitia uma hermenêutica, como a compreensão de analogias de virtudes que os cristãos deveriam ter com habilidades ou comportamentos de alguns animais descritos na bíblia, e as ciências experimentais que poderiam promover tecnologias para combater o anticristo.

A teologia necessitava do conhecimento das coisas criadas, mas para o contexto da igreja medieval sem a matemática, por exemplo, as coisas criadas não podem ser conhecidas. Assim, a matemática é totalmente necessária para o conhecimento sagrado.

Temos em Agostinho (354 – 430), mais conhecido como santo Agostinho, um desses personagens clericais interessados na matemática e nas ciências naturais. Ele entendia que a ignorância dos números não permitia uma interpretação das coisas escondidas nas sagradas escrituras, que está cheia de números e de padrões numéricos carecendo da aritmética para sua compreensão, dando muito mais valor à aritmética do que às outras ciências (Lindberg, 2013; Eastwood, 2013).

O clero não rejeitou as ciências e a filosofia, mas assenhorou-se delas quando criou, de fato, um novo modelo para os princípios do conhecimento e colocou a igreja em um rumo que teve im-

plicações profundas para a história da ciência ocidental. Temos, ainda, a função que a igreja toma de preservar o conhecimento em seus arquivos, pois era necessário reunir todo o conhecimento dado por Deus ao homem para O compreender, seja pelo caminho segundo a dignidade da natureza – através da fé – ou pelo caminho da afinidade metodológica – através da razão.

Dessa forma, a igreja tornou-se patrona das ciências através do seu apoio a escolas e universidades que estavam sob a sua autoridade e proteção, financiando estudiosos que julgava ser promissores. Vemos, dessa forma, que a função da igreja se torna efetivamente um fator no contexto medieval.

Nos lugares em que a igreja não possuía o domínio pleno, a ciência também progrediu – de uma forma diferente –, como foi no reino da Sicília. Seus tradutores e estudiosos não estavam a serviço do clero, estudando além da tradição clássica obras em árabe, provavelmente advindas da circulação e divulgação de conhecimentos da casa da sabedoria em Bagdá, tornando-os um fator para o preparo de um contexto mais adequado para a implementação da sistematização da aritmética do *Liber Abaci*.

Toda essa movimentação científica, comenta Burnett (2013), marca o século XIII com uma elevada atividade intelectual, havendo uma troca de conhecimentos um tanto que frenética, que não ocorre subitamente. Esse preparo vinha sendo construído século após século ao longo da história medieval. Esse é o cenário encontrado por Leonardo Fibonacci ao voltar de suas viagens, aproveitando o momento para escrever seus livros.

Nesse ínterim, temos os fatores da expansão das atividades urbanas junto da necessidade da democratização dos cálculos, bem como o crescimento da produção agrícola e expansão do comércio por rotas locais e internacionais, que careciam naquele momento de duas coisas: a otimização dos cálculos supridos por livros técnicos e o avanço tecnológico dos instrumentos de navegação.

Podemos inferir que a construção desses instrumentos, assim como de outros tipos, foi um fator de aproximação da teoria – que estava nas universidades e mosteiros – com a prática – que estava nos serviços urbanos, comerciais e mercantis. De acordo com Stock (1978), o artesão-cientista, muitas das vezes considerado um excêntrico no mundo antigo, era mais admitido no mundo islâmico. No entanto, a dependência de aparelhos bem-feitos possibilitou a aproximação da teoria e da prática.

Outro fator foi a estabilidade política, apontado por Potro (2012), embora no período do século XIII houvesse ainda as cruzadas. Porém, para além da conquista da terra santa, elas movimentavam uma grande quantidade de conhecimentos entre o mundo ocidental e oriental, o que fez dessas batalhas excelentes promotoras da veiculação das ciências árabes e indianas do Oriente para o Ocidente.

Essa estabilidade permitiu que o comércio ganhasse força e abrangência – tornando-se mais um fator do contexto medieval – pois é no comércio que a difusão dos numerais indianos e do seu sistema posicional decimal foi provocada, ou seja, foi no comércio que efetivamente se divulgou e consolidou inicialmente essas técnicas orientais de cálculos e de seus registros (Stock, 1978).

Sabemos que os tradutores foram fatores imprescindíveis para o crescimento científico, tanto na Europa quanto no Oriente, pois, como já vimos, não foram meros taquígrafos ou copistas, mas assumiam a função de comentar, testar, provar e, em alguns casos, inovar. Nesse movimento, encontrava-se outro fator indispensável para os tradutores e um tanto despercebidos por alguns: o papel.

Stock (1978) comenta que as traduções apresentaram um êxito graças à disponibilidade do papel, um meio que não era barato, mas eficiente, que se adequou muito bem em um clima seco. Conhecido, anos antes, pelos chineses, chegando a Bagdá por volta de 794, permitiu que a cultura árabe, que era em grande parte oral, se transformasse em uma forma escrita, auxiliando a divulgação e preservação do conhecimento, um aspecto para a divulgação da ciência oriental no Ocidente. Esse movimento de tradução, preservação e divulgação é replicado na Europa com algumas particularidades contextuais e efetivado em grande parte mediante o uso de papel, conforme Arns (2007).

Finalizamos esta seção com o fato de os abacistas, embora apoiados pela igreja, utilizaram as cifras indianas para os seus cálculos, trazendo uma movimentação para a aritmética que, em certa medida contribuiu para o preparo de um contexto favorável para a construção organizacional de Leonardo Fibonacci. O que podemos inferir é que, tanto as técnicas com o ábaco, como as técnicas sem o ábaco, coexistiram atendendo a demandas diferentes no mesmo contexto.

Podemos perceber que, ao refletir criticamente sobre os aspectos contextuais da Idade Média, estabelecendo um diálogo com historiadores da área, surgem fatores que agem sobre o contexto, gerando demandas a serem atendidas. Essas demandas podem ser atendidas pelas construções culturais, religiosas, sociais, políticas e científicas, em particular pelo *Liber Abaci*. Discutiremos essas demandas na seção seguinte.

5.2 Demandas atendidas pela sistematização aritmética do *Liber Abaci*

Como apresentado no capítulo 4, Leonardo Fibonacci traz uma organização em seu *Liber Abaci*, que julgamos refletir um conjunto de práticas que atendem a uma demanda do contexto do século XIII. Como dito, o *Liber Abaci* é um produto e também uma evidência de seu contexto. Assim, seguimos no diálogo de demandas atendidas pela sua sistematização aritmética, para a validação e aprovação de seu conteúdo.

Podemos de antemão considerar o porquê de o *Liber Abaci* ter sido escrito em latim. Inferimos que Leonardo Fibonacci estava atendendo a uma demanda científica e litúrgica da igreja, que

considerava o latim como uma língua sagrada. O que coaduna com Le Goff e Schmitt (2006), ao apresentarem que, a partir do século XIII, os leigos encontram em língua vernácula instrumentos que corresponderam às suas necessidades específicas, como livros de contas dos comerciantes, ou seja, livros técnicos. Havia o interesse pela aritmética com cálculos que utilizassem as cifras indianas, o que não justificaria o *Liber Abaci* ter sido escrito em latim, a não ser seu interesse de ser lido e apreciado pelo clero e pelas universidades.

Nesse ínterim, as universidades e os mosteiros não possuíam interesse ou vocação para ministrar esses saberes que a sociedade começou a requerer, fazendo com que fossem abertas escolas onde os filhos de comerciantes e de artesãos – e provavelmente de outros ofícios urbanos – pudessem adquirir esses conhecimentos de cunho prático, como a contabilidade, que não estava tão ligada ao saber tido como científico no contexto medieval.

Podemos, de igual forma, avaliar o que levou Leonardo Fibonacci, dentre tantos conhecimentos estudados, escolher a aritmética para compor seu primeiro livro. Consideramos que, naquele contexto, essa disciplina científica possuía uma valorização a mais do que as outras encontradas nas artes liberais, por auxiliar a exegese bíblica – demanda clerical –, assim como no comércio e nas atividades urbanas – demandas sociais e econômicas, o que para nós revela o motivo da sua escolha.

Essa valorização, comentada por Eastwood (2013), pensamos ser uma das promotoras da organização do *Liber Abaci*, que inicia com o que definimos ser aritmética básica, talvez para chamar a atenção dos principais detentores do conhecimento. Essa percepção da intencionalidade de Leonardo Fibonacci de chegar às universidades e de convencer o clero, muito provavelmente seja o ponto inicial para que o *Liber Abaci* tenha sido escrito em latim e sistematizado na ordem proposta, iniciando com uma aritmética básica, um tanto que teórica para a época, mas que se estendia aos problemas comerciais, práticos e até recreativos (Ifrah, 2005).

Entendemos que, ao iniciar com a aritmética básica, Leonardo Fibonacci estava atendendo a uma demanda de seu contexto. Para tanto, apresenta as nove figuras indianas acrescidas do zero, que era conhecido de alguns, por conta de variadas circunstâncias como as cruzadas. O autor, para esse momento, não apresenta de forma apressada essas cifras, mas de maneira cautelosa e sistematizada, com exemplos e legendas com algarismos romanos e a técnica de como deveriam ser lidos, tornando compreensível e atraente aos leitores ávidos do século XIII.

Não poderia faltar no início do livro o sistema manual de contagem, um instrumento importante de ensino para o cálculo. Um manual de aritmética só era considerado completo à época se trouxesse a explicação dessa técnica. Dessa forma, trazê-la no *Liber Abaci* atendia a mais uma demanda do contexto medieval, em relação à própria matemática.

Com essa ornamentação inicial, o autor poderia garantir que os leitores se interessassem pelo conteúdo do livro, por trazer sistemicamente a explicação de numerais emergentes de seu

contexto. Se o leitor fosse conquistado pelo primeiro capítulo, Leonardo Fibonacci havia preparado uma segunda manobra para convencer o leitor de sua eficiência, a multiplicação.

Para nós é uma surpresa, por não iniciar com a adição, mas Leonardo Fibonacci estava focado em convencer seu leitor. Inferimos que essa escolha estava na direção de mostrar as vantagens das técnicas empregadas para fazer cálculos complexos, trabalhosos e com números extensos, por haver uma demanda no comércio em expansão, nas atividades urbanas, na igreja e nos reinados que movimentavam grandes volumes de produtos e de dinheiro. O que fica aparente é a intencionalidade de mostrar a eficiência e a otimização das técnicas, que supriam as necessidades encontradas, bem como a superioridade sobre as técnicas que utilizavam o ábaco romano.

Podemos observar essa movimentação em três momentos. O primeiro é que Leonardo Fibonacci inicia com contas com duas casas decimais, no entanto, seus exemplos se estendem até oito casas decimais ainda com a mesma eficiência e otimização. Para garantir a confiabilidade, apresenta uma técnica de comprovação do resultado: a técnica resíduo, módulo que poderia ser sete, nove, onze ou outro valor irregular (primo), compondo o segundo momento. O terceiro é a noção da multiplicação por zero, ainda incompreendido pela maioria, o que facilitou muitos cálculos, acrescentando do seu valor posicional.

Leonardo Fibonacci segue com as mesmas intencionalidades nos capítulos seguintes que compõem a temática da aritmética básica, se estendendo até o capítulo VII. Nesses capítulos, temos que atentar para os cálculos de adição, subtração, multiplicação e divisão que não se detêm apenas nos números inteiros, mas são apresentadas técnicas para números quebrados (fracionários). Essas técnicas preparam para cálculos futuros e atendem a demandas monetárias do comércio, do clero, de reis e de senhores feudais, para solucionar contendas de produção agrícola, divisões de terras, escambos de mercadorias, câmbio de moedas, entre outras daquele contexto.

Ao seguir para a temática da aritmética comercial, temos muitos indícios do contexto de Leonardo Fibonacci. Ele não resolveria problemas que não fossem centrais para o século XIII, assim, ao preparar o leitor com a aritmética básica, ataca problemas relevantes, os quais não necessitavam apenas de soluções, mas de uma ferramenta que pudesse resolver todos os problemas do tipo. Para tanto, propõe formas gerais, sistematizando os passos a serem dados, bem como explana sobre essas generalizações em diversos exemplos do contexto da compra e venda de mercadorias e imóveis, parcerias comerciais e do contexto monetário, tanto com o câmbio como para as ligas de moedas.

Vemos que os problemas centrais do início do século XIII giram em torno de algumas situações, como: comprar uma mercadoria pelo menor preço e vender pelo maior preço possível; comprar e vender com mais de uma moeda e seus câmbios; controle de estoque de mercadorias e quantidade necessária para durar um determinado tempo, a alimentação de algum animal; lucratividade em determinados negócios, bem como a parceria em algum investimento; quantidade de

metal que cada moeda deve ter para aumentar ou diminuir seu valor. Todas essas situações são bem explicadas, sempre combinando números inteiros e quebrados.

O leitor, ao passar pela primeira e segunda temáticas, ainda não estava na metade do livro, mas, presumimos, que iria até o fim, pois as potencialidades encontradas faziam do *Liber Abaci* um ótimo manual para suprir as demandas encontradas nessa primeira metade do século.

Na temática que intitulamos como situações-problemas, percebemos a mesma intencionalidade de Leonardo Fibonacci: apresentar técnicas que sistematizem as soluções para problemas do cotidiano europeu. Embora os títulos dos capítulos apresentem uma rigidez matemática, seu conteúdo mostra várias situações do cotidiano, como também as de quebra-cabeça, chamada posteriormente de aritmética recreativa que estava mais nas ruas da Europa, o que justifica a seriedade nos títulos dados pelo autor.

Podemos elencar alguns problemas centrais, como as séries numéricas que estavam aplicadas a viajantes; proporções com inteiros e quebrados, que podiam atender a várias demandas de trocas e vendas de mercadorias, como panos e ovos; divisão de números primos requeridos no comércio e na solução de conflitos, como os fundiários; compra de cavalos por mais de uma pessoa, que poderia ser estendido a outros tipos de bens; utilização da técnica da falsa posição em diversas situações; empréstimos a juros e investimentos a longo prazo.

Temos também o cálculo de raízes quadradas e cúbicas para solucionar problemas que exigiam essa habilidade; problemas envolvendo as ternas pitagóricas que poderiam atender demandas teóricas e práticas, como encontrar quadrados perfeitos e triângulos retângulos essenciais na arquitetura e na solução de problemas de medição de terra, além da demanda mística (simbolismo) da época, bem como atender à tradição clássica dos gregos benquistos pela igreja; muitas situações recreativas, algumas de “adivinhações”, mas sempre trazendo uma seriedade para problemas a partir da sistematização e generalizações aplicadas ao cotidiano com rigidez matemática.

Uma peça importante de toda essa movimentação e sistematização construída por Leonardo Fibonacci está na direção da mudança da representação e na compreensão de número. Temos um movimento da percepção de quantidade para a qualidade do número. Para ser possível tratar de muitos cálculos e de problemas práticos na Idade Média, fazia-se necessária a abstração do número, pois seria muito difícil tratar de números racionais (quebrados) e irracionais com a compreensão de quantidade.

Em conformidade com Eastwood (2013), na Idade Média considerava-se a aritmética e a geometria como delineadoras de um universo estruturado em torno de números e formas, desde a medição de intervalos de tempo, extensões de terra, distâncias de viagem, até transações comerciais e os diversos instrumentos de medidas, todos incorporavam princípios básicos da aritmética e da geometria. Essas disciplinas não apenas moldavam a cosmologia da época, mas também permeavam

aspectos práticos da vida, conferindo ordem numérica e geométrica à compreensão do cosmos e ao funcionamento de suas partes, tanto celestiais quanto terrestres.

Essas considerações estão de acordo com Molland (2013), quando apresenta ser crucial o critério da utilidade ao abordarmos a matemática no medievo. A ênfase subjacente recaía frequentemente no papel que a matemática desempenhava em diversos campos, incluindo medições práticas, comércio, filosofia natural, astronomia, música – consideradas partes integrantes da matemática – teologia, e até mesmo em atividades lúdicas.

Essa cosmovisão da Idade Média aponta para os problemas trazidos por Leonardo Fibonacci em seu *Liber Abaci*. Em vista disso, o livro apresenta as preocupações da época, ou seja, atendia efetivamente muitas das demandas do contexto medieval, sendo considerado como uma obra de grande importância no século XIII. Com o *Liber Abaci* é possível apresentar um contexto atendido pela matemática, como o comércio, a expansão das rotas comerciais, a reflexão sobre as técnicas de calcular e o volume de mercadorias que se tornaram bem maiores.

Sua otimização, oferecida pela sistematização, cumpre uma demanda histórica apontada por Stock (1978), o qual destaca que um dos principais aspectos mais marcantes da era medieval não foram os monumentos arquitetônicos, sua filosofia escolástica ou sua música, mas a percepção de ir em busca de uma tecnologia que economizasse trabalho, ou seja, a ênfase estava na busca por soluções que otimizassem sistematicamente as tarefas desenvolvidas.

O início de um novo capítulo na matemática ocidental foi marcado por Leonardo Fibonacci. No entanto, nem todas as suas ideias foram prontamente acolhidas. A influência direta foi exercida apenas pelas partes do *Liber Abaci* que serviram para introduzir os algarismos e as técnicas orientais que contribuíram para o domínio dos problemas do cotidiano medieval (Vogel, 2007).

Ao longo do tempo, os grandes pensadores encontraram uma crescente liberdade em relação à supervisão teológica ou religiosa do clero. Isso lhes permitiu se dedicarem a estudos sem a necessidade constante de articular justificações religiosas, uma circunstância que Leonardo Fibonacci não experimentou em seu tempo (Lindberg, 2013).

Depois de Leonardo Fibonacci, a maioria dos tratados matemáticos passou a ser escrita em língua vernácula, e seus autores eram comumente referidos como *maestri d'abbaco*. Foram estabelecidas diretrizes eficientes para a otimização da multiplicação, utilizando apenas caneta e tinta, evitando a necessidade constante de correções. Frequentemente, essas habilidades eram facilitadas por procedimentos baseados em padrões geométricos específicos, como cruzeiros, sinos e taças (Molland, 2013).

Observamos ainda que os conhecimentos trazidos no *Liber Abaci* não atenderam a demandas apenas do século XIII, pois encontramos vestígios de disseminações das mesmas técnicas em outros séculos. Não podemos garantir que esses conhecimentos são oriundos do *Liber Abaci*, mas

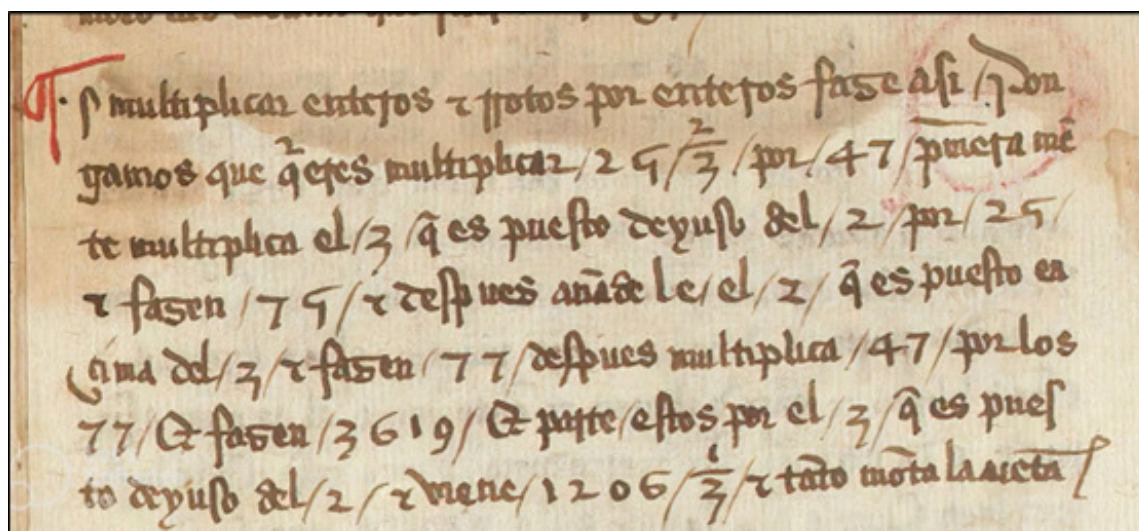
estavam presentes nele. Potro (2000 e 2003) aponta um livro de aritmética da segunda metade do século XIV, intitulado de *De Arismetica*, escrito em espanhol. Esse livro, segundo a autora, era voltado principalmente para o comércio.

De autoria desconhecida, o livro pode ser encontrado na *Real Academia Española*, composto por quarenta e oito problemas. Diferente do *Liber Abaci*, parte diretamente para os problemas, sem apresentar informações iniciais, como apresentação, objetivo do livro, índice, etc. Potro (2003) indica que esse livro encontrado em uma coleção chamada de Escritos Diversos não está completo, mas que os quarenta e oito problemas são suficientes para o aprendiz entender os cálculos requeridos pelo comércio, dando ao *De Arismetica* a classificação de um livro técnico.

Ptro (2003) apresenta duas classificações em relação aos problemas desse livro. A primeira e mais geral, classifica-os em três vertentes: problemas com frações, proporções e operações elementares. A partir dessa primeira classificação, é possível vislumbrar algumas possibilidades de disseminações. Em sua segunda classificação mais específica por tipo de problema, temos: cálculo (encontre um ou mais números que satisfaçam algumas condições); cálculo em relação à agilidade mental (encontre preços de produtos relacionados ou quantidades de produtos relacionados); espalhar dinheiro (inferimos ser de ligas de moedas); interesses e aluguéis; equivalência monetária.

Com essa segunda classificação, podemos quase asseverar as disseminações. Podemos observar as técnicas utilizadas na resolução desses problemas; assim, apresentamos a seguir, na figura 66, o segundo problema do livro *De Arismetica*.

Figura 66 – Segundo problema do livro *De Arismetica*.



Fonte: *De Arismetica* (p. 145).

Traduzimos da seguinte forma:

Para multiplicar inteiros e quebrados por inteiros faz assim. Digamos que você queira multiplicar $25\frac{2}{3}$ por 47. Primeiro multiplique o 3 que você usa de 2 por 25 e faz 75 e depois some o 2 que está colocado acima do 3 e faz 77, depois multiplique 47 por 77 e faz 3619 e parte estes pelo 3, que é a posição do uso do 2 e vem $1206\frac{1}{3}$ e tanto monta a conta (De Arismética, sd, p. 145, tradução nossa).

Nesse problema, identificamos algumas semelhanças e diferenças. Inicialmente, podemos inferir que a configuração de inteiros e quebrados é diferente da usada no século XIII por Leonardo Fibonacci, mas o método continuou o mesmo, tanto na técnica como na forma de explicar através de muitas palavras. A partir do exposto, mesmo que superficialmente, temos indicativos de disseminações das técnicas aritméticas que atendiam a demandas no século XIII. Muitos dos problemas abordados no *Liber Abaci*, especialmente aqueles relacionados a quebra-cabeças da aritmética recreativa, ressurgiram em manuscritos subsequentes e, mais tarde em manuais de aritmética de épocas posteriores.

Vogel (2007) aponta algumas disseminações, como os problemas de dar e receber, lebre e cão, a compra de cavalos, a bolsa encontrada, adivinhação de números, a herança dos gêmeos. Podemos, ainda, encontrar essas disseminações na *Summa* de 1494 de Luca Pacioli (1445 - 1517), apreciada por Cardano (1501 – 1576) em seu *Artis arithmeticae tractatus de integris*, que menciona com apreço as realizações de Leonardo Fibonacci, ao supor, segundo Vogel (2007), que o surgimento de nosso conhecimento em matemática não grega é atribuído em grande parte a Leonardo Fibonacci, o qual, muito antes de Pacioli, o recebeu por meio da influência dos indianos e árabes.

Temos também em Euler (1707 – 1783) o estabelecimento de uma solução detalhada, em sua álgebra de 1767, do problema indeterminado dos 100 pássaros, que reapareceu como a regra dos bebedores (*regula coecis, regula potatorum*) (Vogel, 2007). Vemos, assim, a importância dos conhecimentos trazidos no *Liber Abaci* de Leonardo Fibonacci na construção e estudo de objetos matemáticos ao longo dos séculos: XIII com o próprio Fibonacci; com *De Arismética* no século XIV; com Pacioli no século XV; com Cardano no século XVI, e com Euler no século XVIII. Esses conhecimentos preservados no século XIII influenciaram boa parte da história humana nas atividades que chamamos hoje de matemáticas.

6

ESPETÁCULO DO SOL POENTE

Essas não são apenas considerações finais, mas um espetáculo do sol poente, após navegar como um *Bigollo* por mares e terras, experimentando, explorando e interagindo com o universo da História da Matemática, que me despertaram para o fazer matemático passado e presente.

Esse despertar gerou diversas ações de viajar, animar, brincar, contar histórias, ensinar, curar e pesquisar em diversos ambientes, como a sala de aula, seja como aluno ou professor; no grupo de pesquisa, na tentativa de organizar os pensamentos; em conversas formais e informais; eventos científicos da área e tantos outros.

Dizer que essa fala final são considerações finais, seria o mesmo que observar a beleza de um pôr-do-sol sem levar em consideração tudo o que está por trás, todo um sistema solar que está em movimentação perfeita, regida por uma infinidade de leis físicas para que acontecesse. Ao contemplar o pôr-do-sol, levando em consideração toda essa movimentação celeste, ele se torna um espetáculo, que levou muitos estudiosos a construírem teorias fascinantes.

Ao tomar a posição de *Bigollo*, consegui, a partir de muitas experimentações, me reconhecer como um HistorNauta, me levando a não considerar ou concluir a pesquisa, mas a desfrutar de um espetáculo da formação do saber; da dinâmica de ir e vir dos pensamentos; das descobertas e surpresas; das quebras de paradigmas; de resgates de pensamentos e lembranças, todos em uma movimentação que culminaram neste relatório de pesquisa. Como o espetáculo do sol poente, que aparentemente é apenas uma grande bola luminosa descendo em direção à linha do horizonte até o seu desaparecimento, quando não se leva em consideração a movimentação que está por trás. Dessa forma, tentamos levar em consideração toda a movimentação que aconteceu para este diálogo final da presente pesquisa. Assim, apresento o meu espetáculo do sol poente.

Podemos concordar, após os diálogos construídos até aqui, que os fatores para a sistematização das técnicas aritméticas com a utilização das cifras e do sistema decimal e posicional dos indianos, propostos por Leonardo Fibonacci em seu *Liber Abaci*, foram diversificados. Tais fatores

iniciam no momento de califado oriental, que preservou obras clássicas, bem como na construção e aprofundamento de outros conhecimentos, os quais chegam na Europa com os tradutores em meados do século IX até Leonardo Fibonacci, se estendendo por séculos esse dinamismo.

Esse matemático italiano não partilhava do mesmo período de instabilidade que seus antecessores, contribuindo não apenas com o seu *Liber Abaci*, mas com outras obras de sua autoria. Todas construídas com maestria, permitindo tanto o estudo mais conciso da aritmética, como da divulgação dos algarismos e do sistema indiano de numeração posicional.

Foi possível observar a diversificação dos fatores contextuais à medida que fomos implementando nosso roteiro de pesquisa, o qual sofreu ajustes e adequações, dos quais destacamos o ajuste temático, que inicialmente estava na direção de conflitos²⁴ no contexto do século XIII entre os métodos aritméticos que usavam o ábaco e os que usavam as técnicas de cálculo sem o ábaco.

Ao desenrolar das atividades do nosso roteiro, a pesquisa apontava para demandas atendidas pela sistematização do conjunto de práticas aritméticas que o *Liber Abaci* atendia em sua organização. Essa dinâmica, a cada passo, refinava a questão de pesquisa, nossas hipóteses, objetivos e, consequentemente, nossa tese ficava mais consistente e ajustada, sustentando cada vez melhor a pesquisa.

Assim, ao tecer um diálogo entre autores que balizaram nosso caminho epistêmico, na articulação da História, da História da Matemática, da História da Ciência e da Historiografia, foi possível perceber que História e a Historiografia, como um movimento humano para o humano, está intrinsecamente ligado ao tempo passado e presente, dando à História e à Historiografia a característica de ciência humana e temporal, não sendo meras ações descritivas, por se originarem em um problema que, juntamente com o recorte temporal e espacial, delimitam o tema a ser pesquisado.

Essas perspectivas nos permitiram olhar para os métodos e técnicas aritméticas do século XIII através dos conjuntos de registros das histórias de suas narrativas, suas historiografias. Essa, não apenas como uma mera escritora da história, mas como uma modalidade científica do saber que estuda a história, entendendo-a para além das construções textuais, que são apenas a ponta de um *iceberg*, seja com sua parte visível, materiais – os artigos, livros, vídeos e outros – ou submersa, que são as dimensões teóricas, metodológicas, de modos e critérios de escrita.

Com essa demanda submersa que orienta e direciona a parte superior do *iceberg* da Historiografia, tomamos as esferas de análise com perspectivas da Historiografia Atualizada para gerir nossa pesquisa e nossas análises das fontes primárias e secundárias. Dessa forma, nossa construção do contexto da Europa medieval foi historiograficamente orientada por esses critérios, com a finalidade de trazer à tona as técnicas aritméticas, sua sistematização e demandas atendidas, o que só foi possível a partir de um texto histórico, o *Liber Abaci*.

²⁴ Divergência de ideias nos métodos aritméticos utilizados na Europa no século XIII.

Essa construção epistêmica de um suporte para a pesquisa permitiu estabelecer relações entre diferentes pesquisas que deram suporte para nosso estudo do *Liber Abaci* de Leonardo Fibonacci e seu (con)texto, o que nos levou a estudar aspectos contextuais e a investigar aspectos historiográficos da aritmética em curso na Europa no século XIII.

Ao balizar nossa pesquisa com suportes teóricos e metodológicos, surgiu a necessidade de dar lugar à pesquisa em meio ao vasto campo de estudo e conhecimento da Educação Matemática. Percebemos que esse campo é uma necessidade humana de permanência e transcendência, que está ligada à filosofia, a qual fornece organizações ou reorganizações do pensamento frente a dificuldades educacionais, características advindas da Educação.

Aliando-se a outros campos do conhecimento, essas dificuldades são enfrentadas. Assim, a Educação, estrutura-se a partir de várias áreas do conhecimento, aliadas à filosofia, possuindo uma epistemologia complexa e extremamente polissêmica, pois tem um objeto de estudo extenso e grande variedade de interações, permitindo uma multiplicidade de abordagens, constituindo-as como Ciências da Educação.

O enfrentamento dessas dificuldades nos leva a uma necessidade mais direcionada: a de ensinar e aprender objetos matemáticos de forma adequada e significativa para o aluno e para o professor. Nesse enfrentamento, a Educação Matemática ganha um lugar, um espaço, mas que precisa ser demarcado, delimitado pelo seu objeto e sujeito, o que leva à organização de um conjunto de professores e pesquisadores com os mesmos interesses a se organizarem em grupos de estudos, gerando linhas de pesquisa, teorias, metodologias, currículos, graduações, pós-graduações, a aproximação da escola com a universidade e sociedades organizadas e regulamentadas.

As interações da Educação Matemática com outras áreas de conhecimento permite múltiplas realizações educacionais em escalas teóricas e práticas, bem como de preparação epistemológica de objetos matemáticos a ações didáticas em sala de aula. Dentro dessas interações, temos, em particular, a interação com a História, a historiografia e a Matemática.

A importância da História está na metodologia da nossa pesquisa. Seus métodos conferem confiabilidade na busca de fontes, interpretações e avaliações, contribuindo significativamente para a construção do contexto medieval. Através da historiografia, por meio de seus critérios de escrita e ferramentas analíticas, capacitaram uma narrativa de uma história, desenvolvida de maneira compreensível e adaptada, revelando as demandas atendidas pela sistematização das técnicas aritméticas, que não poderiam ser analisadas sem a Matemática.

A partir dessas interações mencionadas, foi possível resgatar corpos de conhecimentos matemáticos e como eles estavam dispostos em uma malha histórica, atendendo a demandas da diversificada Europa medieval. Podemos resgatar, dessa forma, nossa humanidade e identidade como seres

que geram conhecimento por meio de nossas práticas, viabilizando um ensino mais humanizado, dotado de significado e relevância.

Desse modo, a História da Matemática se apresenta como um ponto de partida para entender novos significados para objetos matemáticos e promover a investigação sobre diversos modelos de conhecimento, como os métodos e as técnicas aritméticas da Idade Média. Asseguramos, dessa forma, alguns fundamentos históricos e epistemológicos que situaram nossa pesquisa dentro da História da Matemática no campo de estudo e conhecimento da Educação Matemática, ao contribuir epistemologicamente para a construção de objetos matemáticos.

Com a segurança de estarmos situados na História da Matemática no campo da Educação Matemática, e a partir da Historiografia Atualizada com a concepção das esferas de análise como engrenagens e suas movimentações, foi possível discutir aspectos historiográficos da Europa medieval. Esses aspectos nos permitiram dois direcionamentos: imergir em um ambiente medieval e discutir aspectos contextuais e aritméticos.

A ambientação do contexto medieval foi possível ao prezarmos por uma organização historiográfica que direcionou os acontecimentos dos fatos, o que permitiu uma visualização efetiva das circunstâncias aparentes e os fatores que a mobilizaram, bem como os possíveis desdobramentos, nos afastando da simples linearidade dos fatos ocorridos no medievo.

Recapitulando os aspectos identificados, temos o distanciamento de obras orientais no declínio do império romano, postergando a divulgação de muitos conhecimentos científico na Europa, levando a centralização do conhecimento a Deus pelo clero. As constantes guerras, colonizações e disputas territoriais também foram aspectos que fizeram da Europa um território heterogêneo, o que permitiu em partes da Europa a não submissão do conhecimento à igreja.

Observamos que os fatores contextuais estavam para além da Europa, como foi possível notar na instituição da *Bait Al-hikma* em Bagdá, no período de sultanato no Oriente, tornando-se o centro do conhecimento oriental, que preservou e divulgou muitos conhecimentos para a Europa, como manuscritos em árabe e grego, os quais, anos mais tarde, seriam traduzidos para o latim, que carregava o título de língua da ciência.

Temos também na expansão das atividades comerciais um fator decisivo para a Europa do século XIII. Essa expansão trouxe influências para o cenário da Idade Média, algumas mais marcantes do que outras. Em particular, apontamos duas: a mudança em alguns princípios clericais, como a usura, e a necessidade de livros técnicos para a organização, confiabilidade e otimização dos cálculos – que estavam cada vez maiores e complexos – e davam suporte para a construção de algumas tecnologias, como as de navegação.

Tudo para atender às necessidades da exportação de produtos que estavam sendo produzidos, cultivados e dos ofícios urbanos emergentes, advindos de um momento social, político, religio-

so e cultural menos instável. O que não agradou a todos, mas contribuiu para um novo momento científico vivenciado gradativamente ao longo dos séculos medievais e modernos.

Temos, dessa forma, o *Liber Abaci* como um desses livros técnicos, que se configurou como o texto central de nossa pesquisa pela sua importância ao apresentar conhecimentos em trânsito na Idade Média. O texto em questão foi investigado, possibilitando um diálogo crítico com outros autores e fontes secundárias. Apresentamos essa investigação de maneira a viabilizar a exposição de sua sistematização e conteúdo, o que foi possível ao separarmos o conteúdo tematicamente e apresentando recortes comentados de seu conteúdo.

Nossa divisão temática do *Liber Abaci* mostra que efetivamente o livro foi sistematizado intencionalmente, ao dividir esse texto em Aritmética Básica, Aritmética Comercial e Situações-problemas foi possível identificar a linearidade sistemática da organização. Os blocos de capítulos revelaram estar juntos e conectados, respectivamente, capítulos de I a VII, de VIII a XI e de XII a XV. Ao tomar outras divisões, como a de Vogel (2007), temos a mesma linearidade, garantindo nossa assertiva sobre a organização.

Ao discutirmos aspectos historiográficos da construção de nossa fonte primária, assim como a apresentação e comentários de elementos aritméticos que o compõem, foi exequível a compreensão do contexto histórico da elaboração do *Liber Abaci*. Por conseguinte, a assertiva anterior, sobre a organização do livro, mostra a intencionalidade de Leonardo Fibonacci de fazer do seu livro um texto instrutivo, possivelmente para adentrar nas universidades, para convencer o clero de sua importância de ciência serva e para atender a demandas contextuais, tornando-se mais clara quando identificamos os fatores contextuais e as demandas atendidas.

Ao refletirmos criticamente, a partir da movimentação das esferas de análise da historiografia atualizada sobre os aspectos contextuais, foi possível constatar fatores do contexto da Europa no século XIII. Esses fatores estão na direção de agentes efetivos de movimentação na malha histórica medieval. Para o presente estudo, evidenciamos o papel da igreja em mediar o conhecimento, subordinando as ciências conhecidas a servas da teologia.

Essa subordinação, ao contrário de um senso comum, não atrapalhou ou impediu o crescimento científico na Europa. Entendemos que essa subordinação construiu um discurso protetivo e de incentivo às ciências, por serem ferramentas para a investigação da lógica de Deus impressa na Bíblia, fundamentando a compreensão e justificava de sua natureza divina.

Essa movimentação instituiu uma hierarquia científica, na qual a teologia estava acima de todas as outras, que disputavam qual poderia ser a melhor serva, dentre as quais se destacaram: matemática, astronomia, astrologia, óptica, medicina e ciências experimentais.

Inferimos que Leonardo Fibonacci, ao saber que a matemática estava no topo das servas, em particular a aritmética, justificada pela tradição clássica, utilizou esse interesse do clero para o

convencer e atender a suas demandas, conquistando sua aprovação, como de contribuir para o conhecimento existente, a exemplo do tratado de aritmética de Boécio.

Outro fator que evidenciamos é a expansão das atividades urbanas que envolvia, entre outros, os banqueiros, cambistas e comerciantes. Esses necessitavam não somente de livros técnicos, mas da democratização dos cálculos. Para essa democratização acontecer, bem como para o surgimento de livros técnicos, foi necessário dois fatores anteriores que estão interligados: os tradutores e o acesso ao papel.

Esses fatores apontam para as demandas atendidas que se entrelaçam com os outros mencionados até aqui. No entanto, ainda acrescentamos a língua com que foi escrito o *Liber Abaci*, que atendia a uma demanda do clero, por ser instituída como língua da ciência e utilizada em suas liturgias, uma forma encontrada por Leonardo Fibonacci de ser lido por esse público e de igual forma pelos que ocupavam as universidades.

Consideramos como principal evidência de demandas atendidas a sistematização das práticas aritméticas em curso na Europa no século XIII, organizadas por Leonardo Fibonacci em seu *Liber Abaci*. Essa sistematização nos permitiu visualizar, ao iniciar com a aritmética básica, que estava atendendo à hierarquia de conhecimento admitido pelo clero, apresentada de forma um tanto que teórica para atender as universidades, sem furtar dessa parte inicial o sistema manual de contagem – a técnica com as mãos – uma condição indispensável para um livro de aritmética naquele período.

Ao conquistar o interesse dos seus leitores pelo conteúdo inicial do livro, Leonardo Fibonacci passa a atender a necessidades emergentes do comércio, sistematizando transações, investimentos, questões monetárias de câmbios, finalizando com a liga de moedas na segunda temática sobre aritmética comercial. Na terceira temática, temos a sistematização de problemas do cotidiano europeu, pelos quais podem ser percebidos problemas centrais para o século XIII que Leonardo Fibonacci se propôs a solucionar.

Não vemos ineditismo nesses problemas, mas a organização, a sistematização e as generalizações propostas pelo matemático italiano demonstram sua genialidade e sua perspicácia para atender às demandas dos problemas e circunstâncias do século XIII, bem como sua organização intencional para o convencimento do clero de suas habilidades e da importância do método e das técnicas trazidas no *Liber Abaci*. Inferimos, dessa forma, que a parte que coube a Leonardo Fibonacci no processo de construção do saber foi otimizar as contas já existentes.

Ao construir esses diálogos historiográficos, foi possível identificar demandas atendidas pelo *Liber Abaci* no século XIII, o que, de fato, o tornou um produto e também uma evidência de seu contexto, que atribuiu sentido ao fazer matemático, aritmético, seja básico, comercial ou em situações-problemas.

Dessa forma, foi possível, a partir do roteiro de pesquisa proposto, das fundamentações teóricas e metodológicas e da investigação do texto e de seu contexto, dialogados até aqui, identificar demandas que foram atendidas pela sistematização do conjunto de práticas aritméticas disposto no *Liber Abaci*, que estavam em produção e uso na Europa do século XIII, o que atende ao nosso objetivo norteador.

Ao identificar demandas atendidas pelo *Liber Abaci*, validamos em parte nossa primeira hipótese. Presumimos que o aspecto contextual da **hierarquia de conhecimento que primava pela teologia, o desinteresse por parte do clero pelos conhecimentos vindos do Oriente e o poder político-social da igreja** não permitiram a implementação das inovações trazidas pelo *Liber Abaci* nesses anos iniciais.

Embora houvesse a hierarquia do conhecimento, o clero não tinha um desinteresse pelos conhecimentos vindos do Oriente, apenas selecionavam conhecimentos que o auxiliassem no conhecimento de Deus e que ajudassem na exegese bíblica. Assim, apesar de o *Liber Abaci* atender a demandas da igreja, o livro estava em análise pelo clero. Com as circunstâncias medievais, levaria alguns anos para ser realizada e tomar maiores proporções, como pode ser observado em sua republicação, feita somente 27 anos depois da primeira.

Em relação à nossa segunda hipótese, que consiste em dizer: os aspectos contextuais passam por algumas mudanças, como o **o financiamento do conhecimento pela corte, bem como o aquecimento do comércio com rotas locais e internacionais e o crescimento dos ofícios urbanos**, o que levou à necessidade de cálculos mais elaborados de livros técnicos, que auxiliassem os métodos aritméticos com a utilização das cifras indianas, superaram os métodos com o ábaco romano.

Consideramos que sua validação, como foi mostrado na construção a partir da movimentação das três esferas de análise, se deve, evidentemente, às mudanças nos aspectos e fatores contextuais, como os citados, que fazem o *Liber Abaci* tomar um lugar de importância, ao ponto de balizar em certa medida essa valorização dos métodos que não utilizavam o ábaco romano.

No entanto, faz-se necessário observar que a superação que o *Liber Abaci* proporcionou não foi imediata, mas foi gradativa e progressiva. Possivelmente, essa superação não tenha sido vivida por Leonardo Fibonacci, o qual presenciou, deusas, a convivência dos dois métodos, que atendiam a demandas diferentes do contexto medieval.

Ao retomar nossas hipóteses e discuti-las, conjuntamente com os diálogos historiográficos construídos, respondemos assertivamente nossa questão norteadora: **quais as demandas atendidas no contexto da Europa do século XIII pela sistematização dos saberes aritméticos no *Liber Abaci*, escrito por Leonardo Fibonacci?**

Nossa resposta está na direção e sustentação da tese proposta no início do presente relatório de pesquisa: **os fatores contextuais impulsionaram um ambiente propício para que Leonardo**

Fibonacci escrevesse o *Liber Abaci*, e sua sistematização atendia às demandas internas e externas de seu contexto histórico, social, político, religioso e econômico, isto é, à sua malha histórica. Isso atribuiu significado à prática matemática e deu sentido ao fazer matemático da época, o que pode ser retratado nesse texto do e no século XIII, e possivelmente em séculos posteriores.

Inferimos ainda que as técnicas aritméticas contidas no *Liber Abaci* não atenderam somente às demandas do século XIII. Nossa inferência pode ser validada pelas evidências de disseminações das técnicas encontradas em outros séculos, como o *De Arismetica* do século XIV de autoria desconhecida; os trabalhos de Luca Pacioi no século XV, e também na obra de Cardano no século XVI, bem como com Euler, em sua solução para um problema indeterminado com a *regula coecis* no século XVIII.

O que fez e faz dos conhecimentos reunidos por Leonardo Fibonacci nesse livro serem uma influência por séculos para as atividades comerciais, urbanas e teóricas na era moderna da Matemática. E, por que não dizer, na contemporânea? Afinal, utilizamos, ainda algumas de suas técnicas, outras bem aproximadas, além do sistema numérico, decimal e posicional indiano, assim como suas cifras, nossos algarismos indo-arábicos, todos propostos e organizados sistematicamente no *Liber Abaci*.

Leonardo Fibonacci ganha notoriedade pelo fato de recolher, organizar e sistematizar o conhecimento. Embora não possamos afirmar que esse matemático foi o principal ou único nesse processo, ele foi efetivamente um agente disseminador do conhecimento, ou seja, um personagem histórico que está na disseminação do processo de desenvolvimento científico.

Os resultados encontrados, os diálogos historiográficos e as discussões epistêmicas levantam contribuições para além da historiografia do medievo e as demandas atendidas. Esta pesquisa e este relatório fornecem materiais exequíveis para a composição de materiais didáticos e elaboração de aulas para o ensino de objetos matemáticos, permitindo a aproximação do aluno com os conteúdos ministrados. Ou seja, essa obra histórica não apenas fornece *insights* sobre o passado, mas também se revela como uma ferramenta valiosa para o ensino e aprendizagem da Matemática, promovendo uma abordagem humanizada, ao conectar os alunos com os objetos matemáticos em um contexto histórico.

Vemos na História da Matemática um dos inúmeros caminhos para transpor os problemas no ensino e na aprendizagem de conteúdos matemáticos. O que faz da historiografia construída do contexto da Europa no século XIII e do *Liber Abaci* ferramentas poderosas na mão do professor, e não apenas mais um acervo de informações de fatos históricos isolados.

Podemos, assim, gerar em sala um ambiente adequado para o ensino e para a aprendizagem de Matemática em todos os níveis de ensino, tendo a oportunidade de criar ferramentas para a

adequação da ação docente, a partir de textos históricos como o *Liber Abaci*. Podemos considerar que essa obra é rica para o século XIII e potencialmente rica para nossos dias. Com o tratamento didático necessário, pode atender às competências e habilidades das unidades de conhecimento, números e álgebra, propostos pela BNCC²⁵.

Notamos, ainda, que essa pesquisa pode ter desdobramentos, avanços e aprofundamentos em muitos aspectos. No desenrolar da pesquisa, nos deparamos com muitos materiais que não foram explorados por nós, por não comportar nossa delimitação temática, mas demonstraram ser material relevante para o estudo da aritmética, em muitos recortes temporais como o *Al-Muawalat*.

Temos no próprio *Liber Abaci* muito da aritmética medieval a ser explorada, tanto em sua epistemologia, como para o ensino de objetos matemáticos. Temos na técnica das mãos uma ferramenta a ser explorada, assim como a compreensão de fração e proporção, bem como as inúmeras técnicas para cálculos das operações aritméticas.

A liga de moedas e as generalizações para investimentos e investidores, ou as técnicas para saber o preço com maior rentabilidade, podem ser ótimos objetos de investigação em diversos níveis de instrução. As diversas situações-problemas na terceira parte temática do *Liber Abaci* são tão ricas para investigações futuras que não temos precedentes de suas aplicabilidades e desdobramentos.

Futuras investigações sobre as disseminações e influências das técnicas e conteúdo dessa obra medieval podem apontar gratas surpresas nas contribuições em diversas áreas de estudo, no decorrer dos séculos medievais, modernos e contemporâneos.

Caminhamos para um novo pôr-do-sol com duas provocações: Quais demandas atuais precisamos atender em nosso contexto escolar? A Matemática estudada na educação básica atende a essas demandas?

Logo, asseveramos... *Fabulam non est hic terminus! La storia non finisce qui!*²⁶

²⁵ Base Nacional Comum Curricular.

²⁶ A história não termina aqui!

REFERÊNCIAS

- ARNS, Paulo Evaristo. **A técnica do livro segundo são Gerônimo**. São Paulo: Cosac Naify, 2007.
- BARROS, José D'Assunção. O projeto de Pesquisa em História: da escolha do tema ao quadro teórico. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2005.
- BARROS, José D'Assunção. **Os conceitos**: seus usos nas ciências humanas. Ed. Vozes, Petrópolis: RJ, 2016
- BARROS, José D'Assunção. História e historiografia: todas as interações possíveis. In: BARROS, José D'Assunção (org). **A historiografia como fonte histórica**. Petrópolis, RJ: Editora Vozes, 2022.
- BELTRAN, M. H. R.; SAITO, F.; TRINDADE, L. S. P. **História da ciência para formação de professores**. São Paulo: Ed. Livraria da Física; CAPES/OBEDUC, 2014.
- BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; GARNICA, Antônio Vicente Marafioti. **Filosofia da Educação Matemática**. 4. Ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.
- BRANDEMBERG, João Cláudio. **Uma Análise Histórico-Epistemológica do conceito de Grupo**. (Tese de Doutorado). Natal, 2009.
- BRANDEMBERG, João Cláudio. **Uma Análise Histórico-Epistemológica do conceito de Grupo**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.
- BRANDEMBERG, João Cláudio. História e Ensino de Matemática. **Revista Exitus**, Santarém/PA, Vol. 7, N° 2, p. 16 - 30, Maio/Ago 2017.
- BRANDEMBERG, João Cláudio. Sobre textos históricos e o ensino de conteúdos matemáticos. (Lecture), Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Campus Canindé, em parceria com o Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática da Universidade Estadual do Ceará, realizado de modo on-line, 13 de julho de 2020.
- BRANDEMBERG, João Cláudio. Sobre textos históricos e o ensino de conteúdos matemáticos. In: PEREIRA, A. C. C.; MARTINS, E. B. (org). **Investigações científicas envolvendo a história da matemática sob o olhar da pluralidade**. Curitiba: CRV, 2021.
- BRANDEMBERG, João Cláudio. Revisitando a História da Matemática e enfatizando aspectos de sua formação (composição, consolidação) no campo da Educação Matemática. **Revista Cocar**. Edição Especial N.14/2022 p.1-21
- BRITO, Arlete de Jesus. Matemática na idade média: entre o místico e o científico. **Revista Brasileira de História da Matemática**, Especial no 1, p. 127-141, 2007.
- BURNETT, C. Translation and Transmission of Greek and Islamic Science to Latin Christendom In: LINDBERG, D. C.; SHANK, M. H. **The cambridge history of Science**. Volume 2. New York: Cambridge University Press, 2013. p. 268 – 285.
- CASTILLO, Ricardo Moreno. **Fibonacci**: El Primer Matemático Medieval. 2ª ed. Coleção – La

matemática em sus personajes. Espaha: Nivola, 2007.

CRESWELL, John W. **Projeto de pesquisa:** métodos qualitativos, quantitativos e misto. 2. Ed. Porto Alegre: Artmed, 2007. (Tradução Luciana de Oliveira da Rocha).

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:** Da teoria à prática. 20ª edição, – Campinas, SP: Papirus, 1996.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. Tendências historiográficas na história da ciência. In: Alfonso-Goldfarb, A. M.; Beltran, M. H. R (org). **Escrevendo a história da ciência:** tendências, propostas e discussões historiográficas. São Paulo, SP: EDUC/Livraria Editora da Física/Fapesp, 2004.

DANTZIG, T. **Número:** Linguagem da ciência. Rio de Janeiro: Zahar, 1970.

EASTWOOD, B. S. Early-medieval cosmology, astronomy, and mathematics. In: LINDBERG, D. C.; SHANK, M. H. **The cambridge history of Science.** Volume 2. New York: Cambridge University Press, 2013. p.302 – 322.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** 5ª ed. – Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FARIAS, Carlos Ademir. Dos jogos de imitação à estética corpórea da oralidade: entrevista com o ArteNauta Amílcar Martins. **ExperimentArt** – Ano 3 – n. 4 – jan./jun. 2017, p. 79 – 129.

FOSSA, John Andrew. Pesquisa em História e Filosofia da Matemática. In: MENDES, Iran Abreu.; Morey, Bernadete (org). **Debates temáticos sobre pesquisa em história da matemática e da educação matemática.** SP: Livraria da Física, 2018.

FRANCO JÚNIOR, H. **A Idade Média:** nascimento do ocidente. 2ª ed. rev. e ampl. São Paulo, SP: Brasiliense, 2001.

GARBI, Gilberto Geraldo. **O Romance das Equações Algébricas.** 3ª ed ver. e ampl. São Paulo, SP: Ed. Livraria da Física, 2009.

GUIMARÃES FILHO, José dos Santos; BRANDEMBERG, João Cláudio. Um estudo do *Liber Quadratorum* (1225) e suas potencialidades para o ensino de Matemática. **REMATEC/Ano 12/n. 26/set.-dez.** 2017, p. 71 – 85.

GUIMARÃES FILHO, José dos Santos. **Um estudo do *Liber Quadratorum* (1225) de Leonardo Fibonacci (1180 – 1250) e suas Potencialidades para o Ensino de Matemática.** (Dissertação de Mestrado). Belém-PA, 2018.

GUIMARÃES FILHO, J. S.; BRANDEMBERG, J. C. Liber Abaci: contexto, competências, habilidades e potencialidades. Número Especial – V Seminário cearense de História da Matemática. **Boletim Cearense de Educação e História da Matemática** – Volume 9, Número 26, 181 – 197, 2022.

HOFSTETTER, Rita.; SCHNEUWLY, Bernard. Saberes: um tema central para as profissões do ensino e da formação. In: HOFSTETTER, R. e VALENTE, W. R (org). **Saberes em (trans) formação:** tema central da formação dos professores. 1. ed. SP: Editora Livraria da Física, 2017. p. 113 – 172.

HUBERMAN, Leo. **História da riqueza do homem**. Nova York, NY: Zahar Editores, 1981.

IFRAH, Georges. **Os números: a história de uma grande invenção**. 11 ed. São Paulo: Globo, 2005.

JAHNKE, H. N. History in Mathematics Education. A Hermeneutic Approach. In: FRIED, M. N.; DREYFUS. T. **Education: Searching for Common Ground**. 1. Ed. New York: Springer, 2014. p. 75 – 88.

KRAGH, Helge. **Introdução à Historiografia da Ciência**. Porto: Porto Editora, 2001.

KILPATRICK, Jeremy. The development of mathematics education as an academic field. In: **Menghini M, Furinghetti F, Giacardi L, Arzarello F (eds) The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908 – 2008): reflecting and shaping the world of mathematics education**. Istituto della Enciclopedia Italiana, Rome, 2008, p. 25-39.

LE GOFF, J.; SCHMITT, J. C. **Dicionário temático do ocidente medieval**. Bauru, Sp: Edusc, 2006.

LEONARDO PISANO. **Liber Abbaci**. Secundo la lezione del codice magliabrchiano, C. I, 2616, Badia Fiorentina, nº 73, Roma: 1857.

LINDBERG, D. C. SCIENCE AND THE MEDIEVAL CHURCH. In: LINDBERG, D. C.; SHANK, M. H. **The cambridge history of Science**. Volume 2. New York: Cambridge University Press, 2013. p. 268 – 285.

MENDES, Iran Abreu. **O Ensino da Matemática por Atividades: uma aliança entre o Construtivismo e a História da Matemática**. Doutorado em Educação (Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, 2001.

MENDES, Iran Abreu. **Investigação Histórica no Ensino de Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009a.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem**. Ed. rev. e aum. – SP: Livraria da Física, 2009b.

MENDES, Iran Abreu. **História da Matemática no Ensino**. São Paulo, SP: Livraria da Física, 2015.

MENDES, Iran Abreu. História da matemática e reinvenção didática em sala de aula. In: MENDES, I. A.; CHAQUIAM, M. **História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores**. Belém: SBHMat, 2016.

MENDES, Iran Abreu. História para o ensino da matemática: uma reinvenção didática para a sala de aula. In: **Revista COCAR**, Belém, Edição Especial N.3, p. 145 a 166 – Jan./Jul. 2017.

MIGUEL, Antônio; **Três Estudos Sobre História e Educação Matemática**. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 1993.

MIGUEL, Antônio. As Potencialidades Pedagógicas da História da Matemática em Questão: argumentos reforçadores e questionadores. **Zetetiké**, Campinas, v. 5, n. 8, p.73-105, jul./dez. 1997. p. 73 – 105.

MIGUEL, Antônio.; MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática:** propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2004. 198p. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

MIGUEL, Antônio. **Uma investigação acerca de algumas formas de se conceber o papel da história da matemática na pesquisa contemporânea em educação matemática.** Campinas, SP: FE/UNICAMP, 2015.

MOLLAND, A. G. Mathematics. In: LINDBERG, D. C.; SHANK, M. H. **The cambridge history of Science.** Volume 2. New York: Cambridge University Press, 2013. p. 512 – 351.

NUNES, J. M. V.; ALMOULOUD, S. A. e GUERRA, R. B. O Contexto da História da Matemática como Organizador Prévio. In: **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 23, nº 35B, p. 537 a 561, Abril, 2010.

OLIVEIRA, Maria Marly de. **Como fazer pesquisa qualitativa.** – Petrópolis, RJ: Vozes, 2007.

OLIVEIRA, Damião Bezerra. **A Formação do pesquisador na Pós-graduação em educação na universidade moderna:** valores epistemológicos e ético-políticos. (Tese de Doutorado). Belém: PA, 2013.

OLIVEIRA, Francisco Wagner Soares. **O instrumento jacente no plano na transição da geometria plana para a espacial na formação de professores.** 2023. 149 f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Educação, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2023.

POTRO, B. C. El Arte Del Alguarismo Em La Europa Medieval. In: POTRO, B. C.; LLAVE, R. C. L. **El Arte Del Alguarismo:** um libro castellano de aritmética comercial y de ensayo de moneda del siglo XIV. Junta de Castlla y León, Espanha: 2000.

POTRO, B. C. De Arismetica. Un manual de aritmética para mercaderes. **Cuadernos de historia de España.** v.78 n.1 Buenos Aires ene./dic. 2003.

POTRO, B. C. Oficios Urbanos y Desarrollo de la Ciencia y de la Técnica en la Baja Edad Media: la corona de castilla. **Norba.** Revista de Historia, vol. 17, 2004, p. 41 - 68.

POTRO, Betsabé Caunedo. **La Aritmética Mercantil Castellana en la Edad Media:** una breve aproximación. Universidad Autónoma de Madri. LUL, vol. 30, 2007, 5 - 19.

POTRO, Betsabé Caunedo. Un Manual de Aritmética mercantil de Mosén Juan de Andrés. **Pecvnia**, 8, 2009, pp. 71-96.

POTRO, B. C. El desarrollo del comercio medieval y su repercusión en las técnicas mercantiles: Ejemplos castellanos. **Pecvnia**, n. 15 (julio-diciembre), 2012, p. 201- 220.

PRODANOV, C. C. **Metodologia do trabalho científico [recurso eletrônico]:** métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2ª ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

SAVIANI, Dermeval. Contribuições da Filosofia para a Educação. **Em Aberto.** Brasília, ano 9. n 45. jan mar 1990.

SAVIANI, Dermeval. Epistemologia e teorias da educação no Brasil. **Pro-Posições**, v. 18, n. 1 (52) - jan./abr. 2007

SAITO, Fumikazu; DIAS, Marisa da Silva. Interface entre História da Matemática e ensino: uma

atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. **Ciência e Educação**, v.19, no1, p. 89-111, 2013.

SAITO, Fumikazu. História da Matemática e Educação Matemática: Uma proposta para atualizar o diálogo entre historiadores e educadores. In: *Actas VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, 3979-3987. Montevideo: FISEM/SEMUR, 2013.

SAITO, Fumikazu. **História da matemática e suas (re)construções contextuais**. São Paulo: Ed. Livraria da Física/SBHMat, 2015.

SAITO, Fumikazu. História e ensino de matemática: construindo interfaces. In: FLORES SALAZAR, J.; UGARTE GUERRA, F. (eds.). *Investigaciones en Educación Matemática*. Lima: Fondo Editorial PUCP, 2016, p. 237-291.

SAITO, Fumikazu. O texto e o contexto: caminhos para a análise de documentos. (Lecture), Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará, Campus Canindé, em parceria com o Grupo de Pesquisa em Educação e História da Matemática da Universidade Estadual do Ceará, realizado de modo on-line, 13 de julho de 2020.

SCHRAMM, Matthias. Frederick II of Hohenstaufen and Arabic Science. **Science in Context** 14(1/2), 2001, p. 289-312.

SCHUBRING, Gert. On Historiography of Teaching and Learning Mathematics. In: KARP, Alexander; SCHUBRING, Gert (org). **Handbook on the History of Mathematics Education**. 1. ed. New York: Springer, 2014. p. 03 – 08.

SCHUBRING, Gert. Os números negativos: exemplos de obstáculos epistemológicos? São Paulo: Livraria da Física, 2018.

SCHUBRING, Gert. The Impact of Teaching Mathematics Upon the Development of Mathematical Practices. In: SCHUBRING, Gert (org). **Interfaces between Mathematical Practices and Mathematical Education**. 1. ed. Suíça: Springer, 2019. p. 123 – 141.

SIGLER, L. E. **Fibonacci's Liber Abaci**: a translation into modern english of Leonardo Pisano's book of calculation. New York: Ed. Springer, 2002.

SILVA, Isabelle Coelho Da. A articulação entre história e ensino de matemática a partir de textos originais: considerações iniciais para o educador matemático. In: PEREIRA, Ana Carolina Costa (Org.). **Ensino e história da matemática**: enfoques de uma prática. Fortaleza: EdUECE, 2020. p. 40-56.

SILVEIRA, D. T.; CÓRDOVA, F. P. A pesquisa científica. In: GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

STOCK, BRIAN. Science, technology, and economic progress in the early Middle Ages. In: LINDBERG, D. C. **Science in the Middle Ages**. Chicago: The University of Chicago Press, 1978. p. 1 – 51.

VALENTE, W. R. A matemática a ensinar e a matemática para ensinar: os saberes para a formação do educador matemático. In: HOFSTERTTER, R. e VALENTE, W. R. **Saberes em (trans) formação: tema central da formação dos professores**. 1. ed. SP: Editora Livraria da Física, 2017.

p. 201 – 228.

VASCO, Carlos Eduardo. La Educación Matemática: una disciplina en formación matemáticas. Enseñanza Universitaria. **Revista de la ERM**. Vol. 3, No. 2, Mayo 1994.

VASCONCELOS, Fernando Almeida e. **História Das Matemáticas na Antiguidade**. Lisboa: Livrarias Aillaud e Bertrand, 1925.

VOGEL, Kurt. Fibonacci, Leonardo. In: GILLISPIE, Charles Coulston. Dicionário de bibliografias científicas. Rio de Janeiro: Contraponto, 2007. p. 819 – 828.

ÍNDICE REMISSIVO

Adição.....	59, 60, 67, 70, 71, 72, 73, 77, 82, 83, 84, 85, 86, 95, 96, 106, 112, 113, 116, 117, 125
Aritmética básica	13, 68
Aritmética comercial	13, 60, 62, 86, 125, 133
Aritmética recreativa.....	117
Aritmética	2, 3, 4, 8, 10, 13, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 27, 28, 29, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 45, 46, 49, 51, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 64, 65, 66, 67, 68, 82, 86, 102, 105, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 133
Aspectos contextuais	13, 51, 114, 123, 124, 127
Atividades urbanas	63, 113, 115, 126
Bigollo	14, 15, 50, 121
Cifras indianas	8, 19, 20, 36, 50, 61, 64, 68, 114
Ciência	6, 15, 23, 28, 34, 51, 53, 54, 56, 57, 59, 60, 65, 112, 113, 114, 116, 122, 125, 126, 130, 132, 133, 134
Ciências da educação	42
Clero	8, 10, 20, 52, 55, 58, 60, 110, 112, 114, 125, 126, 127
Comércio	19, 20, 54, 55, 57, 60, 63, 96, 113, 114, 115, 116, 117, 127
Contexto	8, 10, 13, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 27, 29, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 60, 61, 63, 66, 68, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 118, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 129, 133
Contexto europeu	22, 111
Contexto medieval	21, 45, 66, 112, 114, 124
Cálculo.....	19, 20, 43, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 67, 69, 70, 71, 72, 75, 90, 92, 94, 97, 99, 103, 105, 106, 109, 110, 113, 114, 115, 116, 117, 119, 122, 124, 126, 127, 129
Cálculos aritméticos	58, 64, 71
Demandas atendidas	8, 10, 13, 19, 20, 21, 32, 110, 111, 114, 122, 123, 126, 127
Divisão.....	67, 75, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 94, 97, 98, 106, 116, 117, 125
Educação matemática.....	2, 3, 4, 6, 13, 15, 16, 17, 18, 21, 22, 37, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 123, 124, 130, 131, 132, 133, 134
Elchataym	67, 103, 104
Epistemologia contextual	14
Esfera contextual	29, 38
Esfera epistemológica	29

Esfera historiográfica	29, 38
Esferas de análise	8, 22, 29, 30, 31, 37, 38, 39, 111, 122, 124, 125
Europa do século XIII	2, 3, 4, 8, 19, 20, 21, 22, 33, 34, 37, 38, 55, 62, 66, 110, 111, 124, 127
Europa	2, 3, 4, 8, 10, 19, 20, 21, 22, 23, 27, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 46, 49, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 59, 60, 61, 62, 63, 66, 69, 110, 111, 114, 117, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 133
Fatos históricos	28, 33, 51, 128
Fonte histórica.....	13, 34, 47, 130
Fonte primária	34, 35, 37, 38, 39
Fração	79, 81, 86, 100, 101, 102, 129
Hierarquia de conhecimento	20, 21, 126, 127
HistorNauta	13, 14, 15, 121
Historiografia	8, 13, 16, 19, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 34, 37, 38, 45, 49, 50, 111, 122, 123, 124, 125, 128, 130, 132
Historiografia Atualizada.....	13, 22, 23, 27, 28, 29, 31, 37, 38, 111, 122, 124, 125
História	6, 13, 13, 14, 14, 15, 15, 16, 16, 17, 17, 18, 18, 19, 19, 21, 21, 22, 22, 23, 23, 24, 24, 25, 25, 26, 26, 27, 27, 28, 28, 29, 29, 35, 35, 36, 36, 37, 37, 38, 38, 39, 39, 40, 40, 41, 41, 44, 44, 45, 45, 46, 46, 47, 47, 48, 48, 49, 49, 56, 56, 58, 58, 112, 112, 113, 113, 120, 120, 121, 121, 122, 122, 123, 123, 124, 124, 128, 128, 129, 129, 130, 130, 131, 131, 132, 132, 133, 133, 134, 134, 135, 135
História da matemática	14, 15, 16, 17, 18, 21, 22, 23, 29, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 121, 122, 124, 128, 130, 131, 132, 133, 134
Idade média	24, 27, 51, 52, 54, 59, 60, 117, 118
Igreja.....	19, 20, 51, 52, 54, 58, 61, 112, 113, 114, 116, 117, 124, 125, 127
Leonardo Fibonacci.....	8, 9, 10, 14, 19, 20, 38, 50, 51, 54, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 65, 108, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 120, 121, 123, 125, 126, 127, 128, 131
Leonardo Pisano	19, 37, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110
Liber Abaci.....	3, 8, 9, 10, 13, 19, 20, 21, 22, 28, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 47, 49, 50, 51, 58, 61, 62, 63, 64, 66, 67, 68, 70, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 125, 126, 127, 128, 129, 131, 134
Malha histórica.....	20, 28, 32, 33, 38, 39, 51, 111, 123, 125, 127
Manual de aritmética.....	51, 115, 133

Matemática	2, 3, 4, 6, 8, 10, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 52, 59, 63, 65, 66, 69, 71, 72, 74, 75, 82, 84, 85, 90, 92, 94, 103, 107, 110, 112, 115, 117, 118, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135
Multiplicação	67, 70, 71, 72, 75, 76, 78, 79, 81, 82, 99, 100, 101, 102, 106, 116
Método da falsa posição	101, 102, 103
Métodos	3, 8, 10, 19, 20, 21, 22, 25, 33, 36, 37, 38, 39, 43, 45, 46, 48, 49, 65, 66, 68, 98, 99, 104, 106, 110, 111, 122, 123, 124, 127, 131, 133, 134
Oriente	20, 52, 59, 113, 127
Posição epistêmica	
Práticas aritméticas	8, 21, 39, 122, 126, 127
Razão	39, 84
Saberes aritmético.....	8, 20, 127
Sistematização	2, 3, 4, 8, 13, 19, 20, 21, 22, 32, 38, 39, 40, 58, 63, 65, 110, 113, 114, 117, 118, 121, 122, 123, 125, 126, 127
Situações-problema	13, 67, 97, 99, 103, 117, 125, 126, 129
Subtração	74, 82, 83, 85, 86, 106, 116
Século XIII.....	2, 3, 4, 8, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 27, 29, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 46, 49, 50, 54, 55, 56, 57, 58, 62, 63, 64, 66, 69, 71, 92, 110, 111, 113, 114, 115, 116, 118, 120, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128
Teologia	51, 53, 54, 57, 112, 125
Textos históricos	17, 21, 22, 23, 34, 36, 49, 128, 130
Tradutores	54, 59, 113, 114, 121, 126
Técnicas.....	2, 3, 4, 8, 10, 13, 19, 20, 22, 33, 37, 38, 39, 40, 46, 49, 52, 53, 61, 62, 63, 67, 70, 73, 82, 90, 92, 110, 111, 114, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 126, 128, 129, 133