



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
NÚCLEO DE DESENVOLVIMENTO AMAZÔNICO EM ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE INFRAESTRUTURA E
DESENVOLVIMENTO ENERGÉTICO

JOÃO GUILHERME PINTO DE FREITAS

PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM CADEIAS GRANULARES COM DESORDEM

TUCURUÍ - PA

2025



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
NÚCLEO DE DESENVOLVIMENTO AMAZÔNICO EM ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE INFRAESTRUTURA E
DESENVOLVIMENTO ENERGÉTICO

JOÃO GUILHERME PINTO DE FREITAS

PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM CADEIAS GRANULARES COM DESORDEM

Tucuruí - PA

2025

JOÃO GUILHERME PINTO DE FREITAS

PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM CADEIAS GRANULARES COM DESORDEM

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Infraestrutura e Desenvolvimento Energético do Núcleo de Desenvolvimento Amazônico em Engenharia, da Universidade Federal do Pará, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Infraestrutura e Desenvolvimento Energético. Área de concentração: Tecnologias Sustentáveis.

Orientador: Prof. Dr. Luis Paulo Silveira Machado.

Tucuruí-PA

2025

JOÃO GUILHERME PINTO DE FREITAS

PROPAGAÇÃO DE ONDAS EM CADEIAS GRANULARES COM DESORDEM

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Infraestrutura e Desenvolvimento Energético do Núcleo de Desenvolvimento Amazônico em Engenharia, da Universidade Federal do Pará, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Infraestrutura e Desenvolvimento Energético. Área de concentração: Tecnologias Sustentáveis.

Orientador: Prof. Dr. Luis Paulo Silveira Machado.

Aprovado em 28 de fevereiro de 2025

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Luis Paulo Silveira Machado

Orientador - PPGINDE/UFPA

Prof. Dr. Andre Luiz Amarante Mesquita

Examinador Interno- PPGINDE/UFPA

Prof. Dr. Humberto Belich Junior

Examinador externo - PPGEM/UFES

Tucuruí-PA

2025

Dedico este trabalho a minha filha
Mabel Cristina Araújo de Freitas

Agradecimentos

Primeiramente agradecer a Deus e aos bons espíritos amigos que me acompanharam nessa nova etapa da minha vida, a oportunidade de estudar, aprender sobre a natureza, sobre sua grandiosidade e a cada novo aprendizado um universo novo expande-se em minha mente e me motiva para continuar nessa jornada maravilhosa com sede de aprendizado.

As palavras não são suficientes para expressar minha gratidão a minha mãe Maria Joana Pinto Macieira, ao meu pai João de Jesus de Freitas pelo apoio, parceria, amor, carinho, o colo deles é o lugar onde sei que estou no paraíso, no meu paraíso, o lugar em que aprendo sobre o amor verdadeiro.

Quero agradecer a minha namorada (atual) e futura esposa Kemily Cristine de Araújo Silva pela companheirismo, atenção, amor, carinho, uma pessoa que eu não sei onde eu estaria se não fosse sua presença e companhia ao meu lado, uma pessoa que sei que os obstáculos são apenas barreiras momentâneas para um futuro, um sorriso, um abraço de felicidade. Obrigado por tanto e principalmente, obrigado por acreditar em mim e não desistir da gente.

Quero agradecer a minha família que sempre esteve ao meu lado nos momentos difíceis: Cristina Brauer, Eduardo Brauer, Gabriela Brauer, Gisele Freitas da Rocha, Michael da Rocha, Julia da Rocha, Giovana da Rocha, Olga Regina, Kleber, Mariana, Isabele, Gilza Karoline, Rodrigo Bittencourt, Sarah Bittencourt, Maria Eduarda Bittencourt, Livia Maria, Alfredo, Angelina, Matheus.

Quero agradecer a minha querida e amada filha Mabel Cristina Araújo de Freitas por ser o maior presente que Deus poderia ter me dado e por ser a maior motivação de terminar ciclos e começar novos.

Quero agradecer ao meu orientador Prof. Dr. Luis Paulo pela confiança no meu trabalho, por acreditar na minha capacidade, pela paciência em se reunir em todos os horários possíveis, por sentar, conversar e fazer junto muitas das vezes.

Quero agradecer ao Prof. André Mesquita que com suas conversas e palavras que me ensinam todos os dias, me motivam a buscar sempre a humildade, por fazer eu perceber carências na minha personalidade e além, disso me dar conselhos de como solucioná-las, por sempre me ouvir quando eu vou a sua sala e me mostrar que com humildade, amor e compaixão, um universo de oportunidades se expandem.

Quero agradecer a meu sogro e sogra Ivanilson e Antonia Cleia pelas palavras de conforto e esperança.

Quero agradecer a meus companheiros de tecnolago que jamais poderia deixar de mencionar pelas boas conversas e risadas: Lucas Carvalho, Alex Lopes, Hermeson Wanzeler, Ryan, Arthur Fontana, Maycon Castro, Gabriel Vilhena, Francisco Angelim, Maciel, Davi sales, Everton Kassio, Rodrigo, Danilo, Jhonata amorim, Hugo Mesquita, Rodolfo Vitorino.

A todos, muito obrigado!

"Venham a mim, todos aqueles que estão cansados e sobrecarregados, e eu darei descanso a vocês" Matheus

11:28

"Viva **simples**, sonhe **grande**, seja **grato**, dê **amor**, **ria** muito." Auto desconhecido.

Resumo

A propagação da amplitude da frente de onda em cadeias granulares desordenadas apresenta características distintas, influenciadas pela variabilidade estrutural, pelas propriedades mecânicas dos grãos e pelas condições iniciais de excitação. Neste trabalho, realizamos simulações numéricas utilizando um modelo baseado na interação de Hertz e um método de integração preditor-corretor, analisando o impacto do grau de desordem na dissipação do momento linear ao longo da cadeia. Foram considerados diferentes materiais e velocidades iniciais para avaliar a propagação. Os resultados indicam que, para baixa desordem ($\epsilon \leq 10\%$), a frente de onda mantém sua coerência. Em altos níveis de desordem ($10\% \leq \epsilon \leq 100\%$), ocorre fragmentação intensa da frente de onda, caracterizando um regime dominado por interações locais. Ajustes quadráticos foram empregados para descrever o decaimento da amplitude da frente de onda em cadeias com baixa desordem, enquanto um ajuste por lei de potência mostrou-se adequado para níveis elevados de desordem. A influência das propriedades mecânicas dos grãos foi analisada, demonstrando que a rigidez do material afeta a dispersão da energia, mas não altera significativamente o padrão global do decaimento. Estes resultados contribuem para a compreensão da dinâmica de sistemas granularmente desordenados e suas aplicações na engenharia de materiais e no controle de impacto.

Palavras-chave: propagação de ondas, cadeias granulares, desordem estrutural, dissipação de energia, modelagem numérica.

Abstract

The propagation of wavefront amplitude in disordered granular chains exhibits distinct characteristics influenced by structural variability, grain mechanical properties, and initial excitation conditions. In this work, we perform numerical simulations using a model based on Hertzian interaction and a predictor-corrector integration method to analyze the impact of disorder level on momentum dissipation along the chain. Different materials and initial velocities were considered to evaluate wavefront propagation. The results indicate that, for low disorder ($\epsilon \leq 10\%$), the wavefront maintains its coherence. At high disorder levels ($10\% \leq \epsilon \leq 100\%$), intense wavefront fragmentation occurs, characterizing a regime dominated by local interactions. Quadratic fits were employed to describe the decay of the wavefront amplitude in low-disorder chains, while a power-law fit was found to be suitable for highly disordered systems. The influence of grain mechanical properties was analyzed, demonstrating that material stiffness affects energy dispersion but does not significantly alter the global decay pattern. These results contribute to the understanding of the dynamics of disordered granular systems and their applications in material engineering and impact control.

Keywords: wave propagation, granular chains, structural disorder, energy dissipation, numerical modeling.

Lista de Figuras

2.1	Exemplificação da sobreposição de esferas. Fonte:RODRIGUES,2017	14
3.1	Exemplo de cadeia granular desordenada com a presença de precompressão. A desordem considerada ocorre nos raios das esferas, que são distribuídos aleatoriamente dentro de um intervalo definido.	16
3.2	Exemplo de cadeia granular unidimensional com desordem fixando um grão ao final da cadeia. Fonte: HASAN. M.A. 2014	16
3.3	Exemplo de cadeia granular desordenada a partir de materiais diferentes.	17
4.1	Exemplos das cadeias granulares com desordem investigadas nesse trabalho, para $\epsilon = 1\%$, 50% e 100% , que representa o grau de desordem do sistema.	20
4.2	Distribuição dos raios sorteados para $\epsilon = 1\%$, 50% e 100%	23
5.1	Propagação do momento linear de $\epsilon = 5\%$	29
5.2	Propagação do momento linear de $\epsilon = 50\%$	31
5.3	Diagrama de caixa da frente de onda de do momento linear de $\epsilon = 5\%$	33
5.4	Diagrama de caixa da frente de onda de do momento linear de $\epsilon = 50\%$	35
5.5	Decaimento das Medianas do Momento Linear Normalizado.	36
5.6	Melhor curva de ajuste para o decaimento do momento linear normalizado no intervalo de: $1\% \leq \epsilon \leq 7\%$	39
5.7	Melhor curva de ajuste para o decaimento do momento linear normalizado no intervalo de: $10\% \leq \epsilon \leq 100\%$	39
5.8	Aplicação da equação quadrática $P(k, \epsilon)$ à mediana do momento linear normalizado, para diferentes valores de ϵ no regime de baixa desordem.	42
5.9	Comportamento dos coeficientes da equação $P(k, \epsilon)$ quadrática em função do grau de desordem ϵ	43
5.10	Aplicação da equação $P(k, \epsilon)$ potência na mediana do momento linear normalizado.	45
5.11	Comportamento dos coeficientes da equação $P(k, \epsilon) = D(\epsilon)k^{-E(\epsilon)}$ em função do grau de desordem ϵ	45
5.12	Decaimento da mediana do momento linear normalizado para desordem de $\epsilon = 5\%$	47
5.13	Decaimento da mediana do momento linear normalizado para desordem de $\epsilon = 50\%$	48
5.14	Decaimento da mediana do momento linear normalizado para $\epsilon = 5\%$ para diferentes materiais.	50
5.15	Decaimento da mediana do momento linear normalizado para $\epsilon = 50\%$ para diferentes materiais.	51

Lista de Tabelas

4.1	Constantes materiais utilizadas no modelo.	24
5.1	Constantes materiais utilizadas no modelo.	49

Sumário

Resumo	5
Abstract	6
1 Introdução	10
2 Cadeias Granulares	12
3 Cadeias Granulares Desordenadas	15
3.1 Revisão Bibliográfica	15
3.1.1 Aplicações	19
4 Proposta de cadeia granular desordenada: aleatoriedade gaussiana nos raios	20
4.1 Visão Geral	20
4.2 Implementação da desordem no sistema	22
4.2.1 Variação dos Raios e Conservação da Densidade	22
4.3 Equações de movimento	24
4.3.1 Força de Hertz (elástica)	24
4.3.2 Inclusão da dissipação	25
4.4 Método de Integração Numérica	25
5 Resultados	27
5.1 Análise da Propagação do Pulso	27
5.2 Diagrama de caixa da Frente de Onda	32
5.3 Decaimento das medianas do Momento Linear	36
5.4 Curva de Ajuste para o decaimento do Momento Linear	38
5.5 Descrição Semi-Analítica do Decaimento do Momento linear	41
5.5.1 Regime Quadrático	41
5.5.2 Regime Potência	44
5.6 Variação de Velocidade	46
5.7 Variação de Material	49
.1 Apêndice A	58

Capítulo 1

Introdução

Os sistemas granulares, compostos por partículas, cujas interações são dominadas por forças de contato e força gravitacional, representam uma classe de materiais que exibem variados fenômenos dinâmicos e estruturais. A relevância desses sistemas é evidenciada pela presença em diferentes contextos naturais e tecnológicos, abrangendo desde a movimentação de grãos em silos, compactação de solos e comportamento de dunas de areia até a concepção de dispositivos para mitigação de impacto, absorção de energia e isolamento acústico (JAEGER *et al.*, 1996; ANDREOTTI *et al.*, 2013). Estudos nessa área demonstram como os sistemas granulares podem exibir propriedades distintas, dependendo de suas configurações e condições externas.

A diversidade desses sistemas decorre de suas características intrínsecas, como a não linearidade das interações, fenômenos entre os grãos, dissipação de energia e transições entre regimes sólidos e fluidizados (GOLDHIRSCH, 2003; ARANSON & TSIMRING, 2009). Estudos sobre o comportamento dinâmico dos sistemas granulares destacam a importância dessas propriedades na formação de estruturas emergentes em meios desordenados. O estudo de sistemas granulares tem sido amplamente explorado por sua aplicabilidade em engenharia e física da matéria condensada. Uma área de especial interesse trata da propagação de ondas mecânicas em cristais granulares, com investigações sobre a propagação de ondas em cadeias granulares, formação de ondas compactas e influência das propriedades materiais sobre a transmissão de energia (NESTERENKO, 1983; COSTE & GILLES, 1999).

Em particular, cadeias granulares têm sido utilizadas como plataformas experimentais para o estudo de fenômenos emergentes, como ondas solitárias e localização de energia (FRIESECKE & WATTIS, 1993; VAKAKIS *et al.*, 2009). Modelos matemáticos e experimentais descrevem esses fenômenos, enfatizando a influência da não linearidade e das propriedades estruturais das cadeias. Além disso, estudos sobre desordem estrutural em cadeias granulares revelam impactos significativos na propagação de ondas, tornando-se um elemento importante para o desenvolvimento de materiais funcionais. Análises do efeito da introdução de desordem nos parâmetros dos grãos indicam regimes de propagação distintos, dependendo da intensidade da variação estrutural (MANJUNATH *et al.*, 2012; ROSAS & LINDENBERG, 2004). Essas características tornam os sistemas granulares um tema interdisciplinar, conectando áreas como ciência dos materiais, engenharia mecânica, geociências e biologia. Estudos demonstram a importância das redes de força formadas em sistemas granulares e como esses padrões estruturais influenciam sua estabilidade e resistência mecânica (GOLDENBERG & GOLDHIRSCH, 2002; MAJMUDAR & BEHRINGER, 2005).

Nesse contexto, um caso interesse dentro dos sistemas granulares são as cadeias granulares, que se destacam por suas interações mecânicas e dinâmicas singulares. Essas cadeias são compostas por partículas discretas em contato mecânico, cujas interações são dominadas por forças normais de compressão. Devido às propriedades emergentes discutidas anterior-

mente, como a dissipação de energia e a influência da desordem estrutural, esses sistemas têm sido amplamente estudados na física da matéria condensada, bem como em aplicações de engenharia, ciência dos materiais e geofísica (THEOCHARIS *et al.*, 2012). Diferentemente dos meios contínuos, onde a propagação de ondas é regida por equações diferenciais lineares clássicas, as cadeias granulares apresentam um comportamento intrinsecamente não linear devido à natureza do contato entre os grãos, geralmente modelado pela lei de Hertz.

Um dos aspectos mais notáveis das cadeias granulares é a ausência de uma resposta elástica linear sob pequenas perturbações, o que leva a fenômenos emergentes como a formação de ondas solitárias, ondas de choque e o transporte de energia altamente localizado. Além disso, a dinâmica dessas cadeias pode ser drasticamente modificada pela introdução de desordem, seja na distribuição de massas, raios ou propriedades mecânicas dos grãos (KIM *et al.*, 2018). Essas variações estruturais influenciam diretamente a propagação de ondas, podendo levar a regimes de transporte balístico, difusivo ou até mesmo à localização de energia.

As propriedades das cadeias granulares podem ser exploradas para diversas aplicações tecnológicas. Em particular, esses sistemas têm sido utilizados no desenvolvimento de materiais com controle passivo de vibração (VAKAKIS *et al.*, 2013), dispositivos de mitigação de impacto (DARAIO *et al.*, 2024) e metamateriais acústicos projetados para manipular a propagação de ondas mecânicas (BOECHAT *et al.*, 2014). Além disso, a compreensão dos fenômenos não lineares presentes nesses sistemas tem implicações na modelagem de materiais granulares naturais, como solos e formações rochosas, sendo relevante para engenharia civil, geofísica e até mesmo para a astrofísica, onde cadeias de colisão entre partículas podem descrever processos de agregação e dissipação em discos protoplanetários (ESPINOSA *et al.*, 2024).

Na sequência desses avanços, investigações experimentais validaram a aplicabilidade da lei de Hertz às interações entre partículas, revelando como propriedades materiais, como módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, determinam o comportamento dinâmico de cadeias granulares (COSTE & GILLES, 1999). Além disso, os resultados evidenciaram a capacidade desses sistemas de absorver e dissipar energia de maneira eficiente, ampliando seu potencial para aplicações práticas em dispositivos de proteção e amortecimento. Estudos teóricos estabeleceram uma base matemática sólida para descrever padrões de propagação e comportamento dinâmico em sistemas granulares, destacando o papel da estrutura discreta e da não linearidade (FRIESECKE & WATTIS, 1993).

Avanços computacionais impulsionaram a pesquisa em cadeias granularmente desordenadas, investigando o impacto de desordens em cadeias unidimensionais e explorando como variações em massa, raio e rigidez afetam a propagação de ondas. Foi identificado que a desordem no raio das partículas tem o maior impacto na dissipação de energia (MANJUNATH *et al.*, 2012). Estudos numéricos também demonstraram como a fragmentação de ondas solitárias ocorre em cadeias granularmente desordenadas, reduzindo a eficiência do transporte de energia e influenciando o desenvolvimento de materiais que requerem controle preciso sobre a dissipação de energia (ROSAS & LINDENBERG, 2004).

Devido à natureza multifacetada dos sistemas granulares e à ampla gama de fenômenos emergentes que apresentam, diversas revisões têm sido conduzidas para consolidar os avanços teóricos e experimentais na área (SEN *et al.*, 2008; ROSAS & LINDENBERG, 2009). Esses estudos são fundamentais para compreender a inter-relação entre as propriedades mecânicas das cadeias granulares e suas possíveis aplicações em engenharia, ciência dos materiais e geofísica.

Capítulo 2

Cadeias Granulares

Esse trabalho investigará a dinâmica em um tipo de Cadeia Granular, a qual, de maneira geral, são sistemas físicos compostos por partículas discretas dispostas em uma configuração unidimensional, que interagem por meio de forças de contato. Ao contrário dos meios contínuos, nos quais as propriedades elásticas seguem um comportamento linear bem estabelecido, as cadeias granulares exibem uma dinâmica intrinsecamente não linear, influenciada pela forma como os grãos interagem mecanicamente. Essa não linearidade decorre da força de contato entre partículas não crescer proporcionalmente à deformação, mas seguir uma relação não linear fortemente dependente das características geométricas e mecânicas das partículas em contato. Essa propriedade gera comportamentos dinâmicos únicos e confere a esses sistemas uma importância crescente tanto na pesquisa teórica quanto em aplicações tecnológicas (NESTERENKO, 1983; VAKAKIS *et al.*, 2009; DARAIO *et al.*, 2005; SEN *et al.*, 2008).

Estudos experimentais e teóricos demonstram que cadeias granulares apresentam regimes de propagação de ondas altamente não lineares, nos quais a dispersão pode ser suprimida e a energia transportada de forma localizada em estruturas denominadas ondas solitárias. Nesterenko (1983) foi pioneiro no estudo dessas cadeias, demonstrando experimentalmente que a interação não linear entre os grãos permite a formação de pulsos compactos, que se propagam sem dispersão significativa. Daraio *et al.* (2005) verificaram a transmissão de pulsos não lineares em cadeias de esferas de Teflon, demonstrando que as interações de contato podem ser ajustadas para modificar a resposta da cadeia, um avanço significativo para aplicações em engenharia de materiais.

Coste e Gilles (1999) investigaram a validade da lei de Hertz para contatos granulares e confirmaram experimentalmente a robustez dessa abordagem na descrição da dinâmica de cadeias granulares. Seu estudo mostrou que a transmissão de ondas nesses sistemas não pode ser adequadamente descrita por teorias lineares clássicas, sendo necessário um modelo fortemente não linear.

A estrutura das cadeias granulares pode variar conforme a organização das partículas. Em cadeias periódicas, onde todos os grãos possuem as mesmas propriedades geométricas e mecânicas, a transmissão de energia ocorre de maneira previsível e ordenada, favorecendo a formação de pulsos altamente coerentes. Já em cadeias heterogêneas, nas quais há variações nas propriedades dos grãos ao longo da estrutura, os padrões de propagação se tornam mais complexos, podendo levar a efeitos como localização de energia e transporte irregular da energia mecânica (TEOCHARIS *et al.*, 2013; ROSAS & LINDENBERG, 2004). Rosas e Lindenberg (2004) analisaram o fenômeno da fragmentação de pulsos solitários em cadeias granularmente desordenadas, observando que a introdução de desordem causa a divisão de pulsos em subestruturas menores, afetando a eficiência da transmissão de energia.

Além da estrutura geométrica, outros fatores influenciam a dinâmica das cadeias granulares, incluindo a presença de forças dissipativas, como atrito entre os grãos ou amorte-

cimento mecânico. Esses mecanismos de dissipação podem afetar significativamente a transmissão de energia, reduzindo a amplitude dos pulsos conforme eles se propagam ao longo da cadeia. O efeito da dissipação nesses sistemas é um dos desafios na modelagem teórica, pois altera a estabilidade dos pulsos e pode modificar os regimes de transporte de energia, tornando a cadeia mais eficiente para determinadas aplicações ou reduzindo sua capacidade de manter pulsos altamente localizados (MANJUNATH *et al.*, 2012; DONEY & SEN, 2006). Doney e Sen (2006) investigaram a propagação de impulsos não lineares em cadeias granulares, destacando que a presença de dissipação influencia a estrutura das ondas e pode ser explorada para controle de vibrações e absorção de impacto.

Cadeias granulares também exibem propriedades emergentes quando sujeitas à desordem estrutural. Estudos mostram que pequenas variações no tamanho ou na distribuição de massas dos grãos podem induzir a localização de energia e modificar a forma dos pulsos propagantes. Gómez *et al.* (2012) analisaram a transição entre regimes balísticos e difusivos de propagação de ondas em cadeias granulares desordenadas, mostrando que a desordem pode ser utilizada para controlar a transmissão de energia em sistemas granularmente estruturados.

Outro campo relevante de aplicação está na engenharia sísmica, onde cadeias granulares são investigadas como elementos para controle e dissipação de ondas sísmicas. A possibilidade de manipular a transmissão de energia por meio da estrutura da cadeia torna esses sistemas candidatos promissores para o desenvolvimento de barreiras sísmicas, capazes de reduzir a propagação de vibrações destrutivas em infraestruturas urbanas. Estudos recentes indicam que ao projetar cadeias com diferentes distribuições de partículas, é possível atenuar seletivamente ondas de determinadas frequências, reduzindo os danos provocados por terremotos e impactos mecânicos de grande escala (ESPINOSA *et al.*, 2024; DARAIO *et al.*, 2005).

Além disso, as cadeias granulares têm sido amplamente estudadas no contexto de metamateriais mecânicos, nos quais sua estrutura é projetada para manipular seletivamente a propagação de ondas mecânicas. Essas aplicações incluem desde dispositivos acústicos avançados até materiais com resposta mecânica programável, que podem ser ajustados para filtrar ou amplificar determinadas faixas de frequência (KIM *et al.*, 2018; TEOCHARIS *et al.*, 2013). O estudo desses sistemas é especialmente relevante para o desenvolvimento de novas tecnologias em controle de vibração, materiais inteligentes e estruturas adaptativas, capazes de modificar suas propriedades mecânicas conforme as condições externas.

Nessas cadeias, a força entre partículas adjacentes é frequentemente modelada pelo potencial de Hertz, que estabelece uma relação não linear entre a força F e a sobreposição relativa δ , dada por:

$$F \sim \delta^{3/2} \quad (2.1)$$

A equação 2.1, formulada a partir da teoria da elasticidade, descreve a resposta mecânica das interações de contato entre esferas elásticas e tem sido amplamente utilizada na modelagem de cadeias granulares (JOHNSON, 1985). Essa relação implica que o comportamento mecânico do sistema não segue uma resposta elástica linear típica de sólidos contínuos, resultando em fenômenos emergentes como a propagação de ondas solitárias.

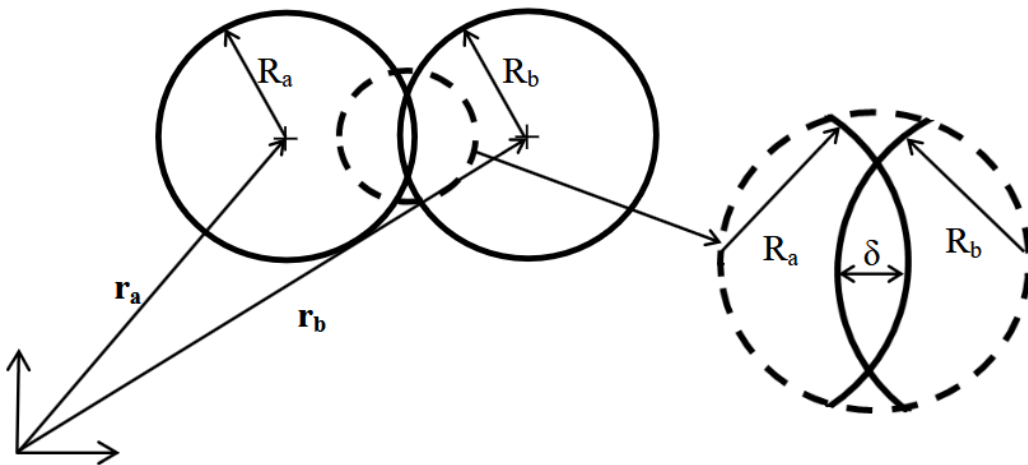


Figura 2.1: Exemplificação da sobreposição de esferas. Fonte:RODRIGUES,2017

A figura 2.1 exemplifica a sobreposição da lei de Hertz. A lei de Hertz leva em consideração partículas perfeitamente elásticas. Considerando o contato entre duas esferas, a deformação das esferas com raio R_a e R_b é definida pela sobreposição das esferas denominada δ . A definição de sobreposição é $R_a + R_b - |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$ onde $|\mathbf{r}_a|$ e $|\mathbf{r}_b|$ é a posição dos centros das esferas. Portanto a equação $R_a + R_b - |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$ representa a quantidade de sobreposição há na esfera sob a outra.

Em cadeias homogêneas, essa característica resulta na propagação de ondas solitárias, que mantêm sua forma ao longo da propagação devido à ausência de dispersão significativa (FRIESECKE & WATTIS, 1993). Diferente das ondas clássicas em sólidos, que sofrem dispersão ao longo do tempo, as ondas solitárias em cadeias granulares podem ser descritas por equações não lineares diferenciais, como a equação de Korteweg-de Vries (NESTERENKO, 2001).

Esse comportamento tem importantes implicações para diversas aplicações tecnológicas, como amortecimento passivo de vibrações, propagação controlada de energia em materiais avançados e design de dispositivos mecânicos capazes de manipular ondas de impacto de maneira eficiente. Estudos como os de Daraio *et al.* (2005) demonstraram que ao modificar os parâmetros geométricos das cadeias, é possível projetar estruturas que permitam o controle preciso da propagação de ondas mecânicas.

Assim, o modelo de Hertz e a dinâmica das ondas solitárias formam a base para o entendimento teórico e experimental das cadeias granulares e sua aplicabilidade em sistemas mecânicos, estruturais e acústicos avançados.

Capítulo 3

Cadeias Granulares Desordenadas

A desordem desempenha um papel fundamental na física de sistemas complexos, influenciando uma ampla variedade de fenômenos, desde a propagação de ondas até a dissipação de energia. Em meios contínuos, a presença de irregularidades estruturais pode gerar dispersão e atenuação de sinais, um efeito amplamente estudado em sistemas acústicos e mecânicos desordenados (ASTE, DI MATTEO & GALEANI D'AGLIANO, 2001; LAGENDIJK, VAN TIGGELEN & WIERSMA, 2009). No caso de sistemas discretos, como redes mecânicas e materiais granulares, a desordem pode modificar drasticamente o comportamento coletivo do sistema, afetando a propagação de ondas mecânicas e a dissipação de energia (GÓMEZ *et al.*, 2012; ROSAS & LINDENBERG, 2004).

A introdução de desordem pode ocorrer naturalmente devido a variações nas propriedades mecânicas do meio, como em solos e materiais particulados, onde heterogeneidades estruturais afetam a transmissão de ondas mecânicas (BOUCHAUD *et al.*, 1990). Além disso, a desordem pode ser intencionalmente introduzida para explorar propriedades emergentes, como a localização de energia e a transição entre diferentes regimes de transporte (MANJUNATH *et al.*, 2012). Essas propriedades são de particular interesse no estudo de cadeias granulares, onde pequenas perturbações estruturais podem levar a regimes de propagação distintos, variando de transporte balístico a localização de energia (THEOCHARIS *et al.*, 2013). Estudos indicam que, em materiais granulares próximos à transição de jamming, pequenas perturbações podem gerar choques supersônicos devido às propriedades mecânicas singulares do sistema (GÓMEZ *et al.*, 2012).

3.1 Revisão Bibliográfica

As cadeias granulares representam um modelo fundamental para o estudo da desordem, pois permitem a análise isolada dos efeitos de variações estruturais sem a complexidade adicional das interações em múltiplas direções.

Quando a variação estrutural é pequena em cadeias granulares, as ondas mecânicas podem se propagar de forma relativamente ordenada, preservando suas características iniciais, ainda que com pequenas flutuações na amplitude e na velocidade de propagação. No entanto, à medida que a desordem estrutural aumenta, o comportamento da propagação de ondas sofre mudanças significativas. Inicialmente, ocorre um regime quase-balístico, no qual a onda mantém sua coerência ao longo da cadeia, embora sujeita a perturbações. Com um nível maior de desordem, o regime de propagação pode se tornar difusivo, caracterizado por uma dispersão crescente da energia ao longo da estrutura, dificultando a manutenção da forma original da onda (MANJUNATH *et al.*, 2012).

Nos casos de desordem extrema, pode ocorrer um fenômeno conhecido como localização da energia, no qual a propagação da onda é drasticamente reduzida, e a energia se

acumula em regiões específicas da cadeia granular. Esse efeito está relacionado ao fenômeno de localização de Anderson, originalmente estudado em sistemas eletrônicos, mas posteriormente identificado em sistemas mecânicos e acústicos (THEOCHARIS *et al.*, 2013; MANJUNATH *et al.*, 2012). Em cadeias granulares, esse fenômeno pode surgir devido a flutuações desordenadas na massa das partículas ou nas interações de contato, impedindo a propagação eficiente das ondas.

A desordem em cadeias unidimensionais pode ser implementada de diversas formas, sendo uma das abordagens mais comuns a variação aleatória no raio das partículas, o que impacta diretamente sua massa e as forças de contato. Trabalhos como os de Manjunath *et al.* (2012) demonstraram que a introdução de desordem estrutural, especialmente pela variação do raio das partículas, altera significativamente a transmissão de energia ao longo da cadeia, podendo tanto aumentar a dispersão quanto promover a localização da energia, dependendo da intensidade da desordem e das condições iniciais da onda incidente.

As Figuras 3.1, 3.2 e 3.3 ilustram diferentes tipos de desordem que já foram investigadas em cadeias granulares.

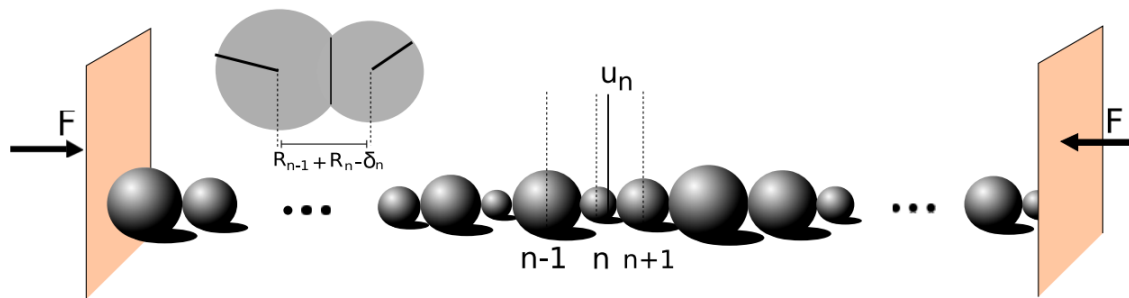


Figura 3.1: Exemplo de cadeia granular desordenada com a presença de precompressão. A desordem considerada ocorre nos raios das esferas, que são distribuídos aleatoriamente dentro de um intervalo definido.

Fonte: ACHILEOS.V. 2016

Figura 3.1 mostra uma cadeia granular desordenada, composta por esferas de diferentes tamanhos em contato. As extremidades da cadeia estão submetidas a uma força de pré-compressão (F), garantindo a interação entre os grãos por meio de contatos hertzianos. Devido à variação dos tamanhos das esferas, a cadeia apresenta desordem, o que influencia a propagação da energia e das ondas mecânicas. O estudo de Achileos *et al.*, 2016 identificou três regimes distintos de transporte de energia: um regime quase linear, onde a energia permanece localizada; um regime fracamente não linear, no qual parte da energia se destrava ao longo do tempo; e um regime altamente não linear, no qual a energia se propaga de maneira quase balística devido à formação de estruturas tipo choque. Os resultados mostram que, em altas não linearidades, as diferenças entre os tipos de excitação inicial desaparecem, sugerindo que o transporte de energia nesses sistemas depende fortemente da amplitude da excitação.

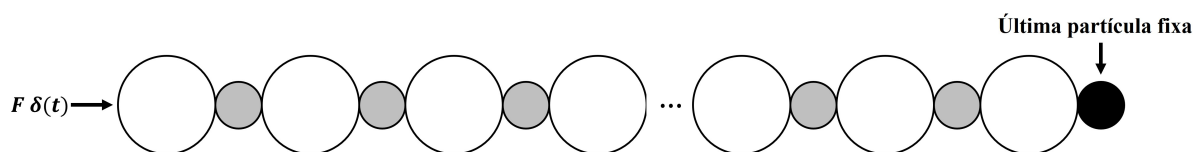


Figura 3.2: Exemplo de cadeia granular unidimensional com desordem fixando um grão ao final da cadeia. Fonte: HASAN. M.A. 2014

A Figura 3.2 representa uma cadeia granular dímica, composta por esferas alternadas de massas e tamanhos diferentes. Os grãos "pesados"(brancos) e "leves"(cinzas) estão dispostos sequencialmente ao longo da cadeia. A extremidade esquerda recebe um impulso externo $F\delta(t)$, enquanto a última esfera leve, na extremidade direita, está fixa, servindo como uma barreira final. Esse arranjo cria um sistema fortemente não linear, no qual a propagação do pulso depende das interações entre os grãos e da relação entre seus tamanhos e massas.

A alternância entre grãos pesados e leves introduz um efeito de dispersão e espalhamento da energia, reduzindo a amplitude do pulso transmitido até a extremidade fixa. Além disso, a desordem foi aplicada na distribuição dos raios das esferas leves, modelados como variáveis aleatórias Gaussianas, o que leva a flutuações na razão de massas e nas forças de contato Hertzianas. Essa variabilidade gera um espalhamento estocástico dos pulsos e influencia os mecanismos de ressonância e anti-ressonância no sistema. O estudo concluiu que a propagação do pulso em cadeias dímicas desordenadas depende fortemente da razão entre os tamanhos dos grãos leves e pesados. No sistema determinístico (sem desordem), ocorre uma atenuação máxima da força transmitida na razão ótima dos raios ($\varepsilon = 0.83$), associada a um mecanismo de ressonância não linear 1:1. No entanto, a introdução de desordem na distribuição dos raios das esferas leves pode intensificar ou prejudicar a atenuação do pulso, dependendo da configuração espacial da desordem. A análise de Monte Carlo revelou que determinadas distribuições estocásticas podem melhorar a atenuação em até 4% em relação ao caso determinístico ótimo, indicando que variações controladas podem aprimorar a dissipação de impactos. Além disso, observou-se que os primeiros e últimos grãos leves exercem maior influência na propagação do pulso, conforme indicado pela análise de sensibilidade. A pré-compressão reduz a capacidade de mitigação de choque do sistema, tornando a resposta mais linear e diminuindo a dispersão da energia. Dessa forma, a melhor atenuação ocorre em um regime fortemente não linear, com uma configuração específica de desordem. Esses resultados são fundamentais para o desenvolvimento de materiais granulares estruturados voltados para dissipação de impacto e controle de ondas mecânicas.

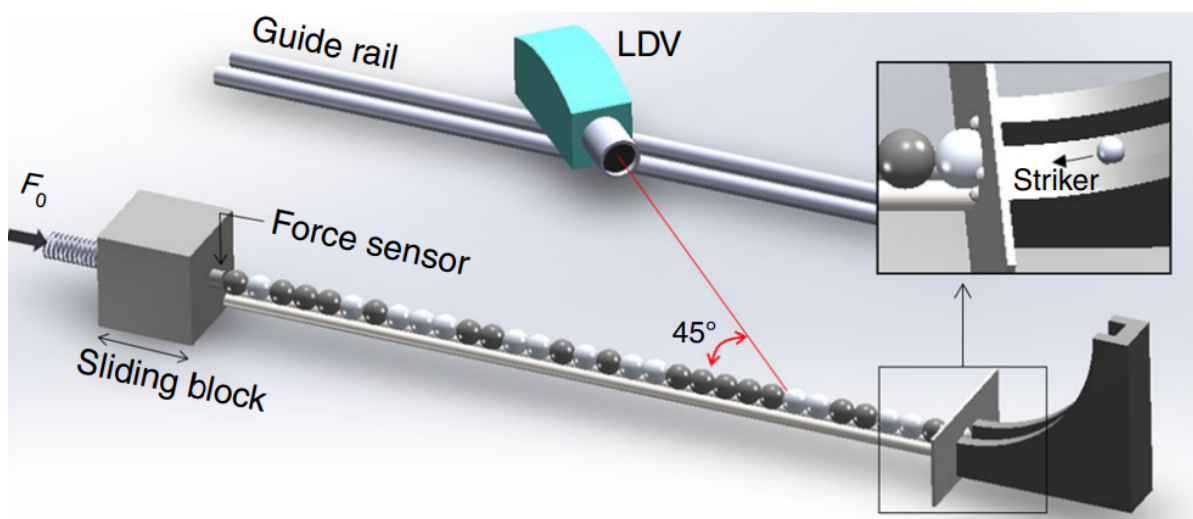


Figura 3.3: Exemplo de cadeia granular desordenada a partir de materiais diferentes.

Fonte: KIM.E. 2018

A Figura 3.3 representa o arranjo experimental utilizado para investigar o transporte de energia em cadeias granulares desordenadas. A cadeia é composta por esferas de diferentes materiais, dispostas em um trilho para garantir o alinhamento. Um bloco deslizante aplica

uma força de pré-compressão F_0 na extremidade da cadeia, enquanto um impactador colide com a primeira esfera, gerando uma onda de choque propagante. O experimento utiliza um vibrômetro a laser Doppler (LDV) para medir a velocidade das esferas ao longo do tempo, permitindo a análise da propagação da energia.

A desordem na cadeia é introduzida pela alternância entre esferas de diferentes densidades e módulos de elasticidade, modificando as interações hertzianas entre os grãos e afetando a propagação das ondas mecânicas. Esse fenômeno influencia diretamente os regimes de transporte da energia. Dependendo da intensidade da pré-compressão e da não linearidade do sistema, observa-se um comportamento de transporte que pode ser superdifusivo, no qual a dispersão da energia cresce mais rapidamente que em um sistema difusivo normal ($m_2 \sim t^\gamma$ com $1 < \gamma < 2$), ou subdifusivo, no qual a energia se espalha mais lentamente ($0 < \gamma < 1$) devido à competição entre desordem e não linearidade.

O expoente γ caracteriza a taxa de crescimento do segundo momento da distribuição da energia cinética ao longo do tempo, definida pela relação $m_2(t) \sim t^\gamma$, onde $m_2(t)$ representa a extensão espacial da energia transportada. Valores de γ próximos a 2 indicam transporte balístico, enquanto valores entre 0 e 1 sugerem transporte subdifusivo, associado à forte influência da desordem no sistema.

Esses exemplos demonstram a ampla variabilidade dos métodos de desordem aplicados a cadeias granulares unidimensionais. No entanto, os trabalhos apresentados representam apenas uma parte do conjunto de investigações existentes sobre o tema. Estudos adicionais, tanto experimentais quanto numéricos, exploram diferentes configurações de desordem e seus impactos no transporte de energia, sendo um campo ainda em expansão (KIM *et al.*, 2018; ACHILLEOS *et al.*, 2016; HASAN *et al.*, 2014).

A desordem nas cadeias granulares pode ser implementada de diversas formas, como a introdução de variações nos raios das esferas, a mistura de materiais com diferentes densidades e módulos de elasticidade ou a aplicação de arranjos não periódicos na estrutura da cadeia. Esse tipo de modificação altera as interações entre os grãos, influenciando a propagação de ondas mecânicas. Em função dessas características, esses sistemas podem apresentar uma transição entre distintos regimes de transporte de energia, variando entre propagação localizada e superdifusão.

A propagação localizada ocorre quando a energia injetada na cadeia permanece confinada em uma região específica, sem se espalhar significativamente ao longo do tempo. Esse fenômeno pode ser atribuído à localização de Anderson, na qual a interferência destrutiva entre múltiplos caminhos de propagação impede a difusão da energia (Anderson, 1958), ou a estados estacionários como os breathers discretos, que surgem devido à não linearidade do sistema (FLACH & GORBACH, 2008).

Por outro lado, a superdifusão caracteriza-se por um espalhamento acelerado da energia ao longo da cadeia, superando o comportamento difusivo clássico. Esse efeito é descrito matematicamente pela relação $m_2 \sim t^\gamma$, onde m_2 representa o segundo momento da distribuição energética e $\gamma > 1$ indica que a propagação ocorre de maneira mais rápida do que a difusão normal (KIM *et al.*, 2018). A competição entre não linearidade e desordem pode favorecer esse comportamento, permitindo o transporte eficiente de energia sob certas condições dinâmicas (ACHILLEOS *et al.*, 2016).

Além dessas transições, observa-se a fragmentação de ondas solitárias, um fenômeno que ocorre quando solitons interagem com irregularidades estruturais, resultando em padrões de propagação complexos e, em alguns casos, caóticos (SEN *et al.*, 2008). A presença de estados de transporte irregular, nos quais a energia se propaga de forma altamente sensível às condições iniciais e ao nível de excitação, também tem sido observada e associada ao

acoplamento entre modos oscilatórios da cadeia (HASAN *et al.*, 2014).

A compreensão dessas dinâmicas é fundamental para o avanço das aplicações das cadeias granulares, que vão desde a modelagem de materiais dissipativos até o desenvolvimento de metamateriais acústicos capazes de controlar a propagação de ondas mecânicas (NESTERENKO, 2001; PORTER *et al.*, 2015). O ajuste da desordem e da pré-compressão nesses sistemas pode oferecer novas abordagens para engenharia de materiais com propriedades ajustáveis de atenuação de impacto e controle de vibrações.

Embora grande parte dos estudos sobre desordem em sistemas granulares seja conduzida em cadeias unidimensionais devido à sua simplicidade, a compreensão da desordem em redes bidimensionais e tridimensionais é fundamental para o desenvolvimento de aplicações práticas e para a modelagem de materiais reais. Em redes bidimensionais, a propagação de ondas ocorre em múltiplas direções, sendo fortemente influenciada por interações laterais que modificam os padrões de transporte de energia (LIU & NAGEL, 2010). A presença de desordem nesses sistemas pode gerar efeitos anisotrópicos na transmissão de forças e na dissipação de energia, levando à formação de frentes de onda irregulares e redes de força heterogêneas (DANIELS & HAYMAN, 2008). Esses efeitos são particularmente relevantes em materiais granulares naturais, onde a distribuição aleatória das partículas pode gerar padrões complexos de transmissão de tensões e acomodação estrutural (RADJAI & ROUX, 2002).

Nos sistemas tridimensionais, a complexidade aumenta ainda mais devido ao crescimento do número de vizinhos interagentes e às múltiplas direções possíveis de propagação das ondas mecânicas. A desordem pode afetar a estabilidade estrutural das cadeias, promovendo rearranjos internos que alteram as trajetórias de propagação da energia (TORDESILLAS *et al.*, 2010). Estudos experimentais e numéricos demonstram que, em sistemas tridimensionais desordenados, a localização da energia ocorre de maneira mais difusa do que em cadeias unidimensionais, tornando a dissipação um fator ainda mais relevante para a dinâmica do sistema (OWENS & DANIELS, 2011). Além disso, a distribuição espacial das partículas e a formação de cadeias de força desempenham um papel essencial na propagação de ondas mecânicas, impactando diretamente a resposta do material sob excitação externa (VITELLI *et al.*, 2014).

3.1.1 Aplicações

Os fenômenos dinâmicos descritos têm implicações para o entendimento de processos fundamentais relacionados ao transporte de energia em sistemas desordenados. Esses estudos são relevante para o desenvolvimento de novas tecnologias em engenharia e materiais. Por exemplo, as cadeias granulares podem ser utilizadas em dispositivos de amortecimento que exploram a dissipação de energia em regimes difusivos. Além disso, a possibilidade de projetar metamateriais baseados em propriedades dinâmicas emergentes, como transporte superdifusivo, abre novas perspectivas para o design de estruturas.

Outro aspecto importante está relacionado à transmissão de ondas mecânicas. A habilidade de manipular a propagação de energia em cadeias granulares oferece oportunidades para aplicações em isolamento sísmico, controle de vibrações e design de sistemas de transmissão de energia mecânica eficientes. Os resultados obtidos a partir de simulações desses sistemas não apenas aprofundam o conhecimento científico, mas também fornecem uma base sólida para a inovação tecnológica em múltiplas áreas.

Capítulo 4

Proposta de cadeia granular desordenada: aleatoriedade gaussiana nos raios

Este capítulo é dedicado à apresentação do modelo de cadeia granular estudado, delineando claramente o problema de interesse. Serão discutidos aspectos fundamentais do sistema, incluindo as características geométricas e materiais dos grãos, as condições iniciais e de fronteira aplicadas, bem como as equações de movimento que regem sua dinâmica, abrangendo tanto as forças elásticas quanto as dissipativas. Além disso, será descrito o método numérico utilizado para a solução do problema, garantindo uma fundamentação rigorosa para a análise subsequente.

4.1 Visão Geral

O modelo analisado considera cadeias granulares compostas por grãos esféricos, dispostos de maneira perfeitamente alinhada ao longo de seus centros geométricos. Inicialmente, as partículas estão em contato apenas com seus vizinhos imediatos e possuem raios distribuídos de forma aleatória. A Figura 4.1 ilustra exemplos representativos dessas cadeias.

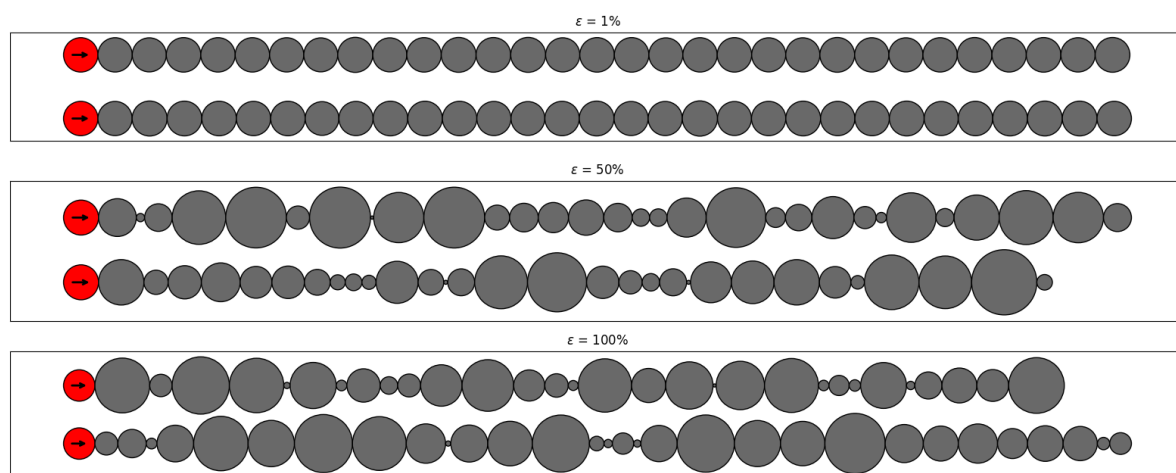


Figura 4.1: Exemplos das cadeias granulares com desordem investigadas nesse trabalho, para $\epsilon = 1\%$, 50% e 100% , que representa o grau de desordem do sistema.

A Figura 4.1 apresenta diferentes configurações de cadeias granulares compostas por grãos esféricos, onde o parâmetro ϵ representa o grau de aleatoriedade dos raios das partículas,

o qual será detalhadamente definido na próxima seção. À medida que ε aumenta, a distribuição dos tamanhos se torna mais dispersa, passando de uma estrutura *quase homogênea* ($\varepsilon = 1\%$) para um regime altamente desordenado ($\varepsilon = 100\%$). Essa variação nos raios dos grãos esféricos impacta diretamente a organização da cadeia e influencia sua resposta dinâmica.

As partículas na extremidade esquerda da Figura 4.1, marcadas em vermelho, colidem com os demais grãos da cadeia, sendo responsáveis pela perturbação inicial no sistema. Esse impacto gera ondas mecânicas que se propagam ao longo da estrutura. Em cadeias ordenadas, a transmissão de energia ocorre de maneira previsível, enquanto em cadeias desordenadas há maior dispersão e confinamento da energia em determinadas regiões da estrutura. Esse fenômeno, conhecido como localização de energia, refere-se à concentração da energia mecânica em certos grupos de grãos, em vez de se distribuir uniformemente pela cadeia. Tais regiões localizadas dependem da variação dos raios das partículas e da forma como as forças de contato são distribuídas.

Além disso, a variação no tamanho dos grãos influencia a impedância mecânica, que é a resistência oferecida pelo material à propagação das ondas mecânicas. Em regiões onde há grandes diferenças entre os raios das partículas, essa impedância varia significativamente, criando barreiras naturais que dificultam a transmissão da energia e favorecem a formação de modos de vibração localizados. A distribuição dos raios também afeta a conectividade entre os grãos e a intensidade das forças de contato. Em cadeias ordenadas, essas interações são mais homogêneas, promovendo uma propagação mais coerente das excitações mecânicas. Já em cadeias altamente desordenadas, os pontos de contato tornam-se irregulares, resultando em reflexões internas das ondas e até amplificação localizada das tensões.

A Figura 4.1 ilustra, portanto, a organização geométrica da cadeia granular e as variações estruturais associadas à desordem, sem entrar diretamente na discussão sobre os fenômenos resultantes desse comportamento, que já foram abordados em capítulos anteriores. A principal característica de interesse no modelo estudado é a influência da aleatoriedade nos raios dos grãos na propagação de pulsos mecânicos dentro da cadeia granular. Embora outros parâmetros do sistema possam apresentar variações aleatórias, seu impacto na dinâmica da propagação de ondas é, em geral, menos significativo quando comparado à desordem no tamanho das partículas. Estudos anteriores indicam que a distribuição dos raios das partículas afeta significativamente as interações de contato na cadeia granular, influenciando a transmissão de energia e a propagação das ondas mecânicas (ROSAS & LINDENBERG, 2004; TEOCHARIS *et al.*, 2013). A variação aleatória dos raios introduz heterogeneidades na rigidez efetiva da cadeia, resultando em dispersão, localização de energia e alteração da velocidade dos pulsos. Esse efeito é ainda mais pronunciado em cadeias sem pré-compressão, onde a dinâmica é altamente sensível à estrutura geométrica dos contatos (NESTERENKO, 1983).

Por outro lado, a aleatoriedade em parâmetros como massas das partículas ou coeficientes de amortecimento tende a ter menor impacto na propagação das ondas (MANJUNATH *et al.*, 2012). Isso ocorre porque, em cadeias dominadas por interações de contato não lineares, a rigidez efetiva influencia mais a propagação dos pulsos do que as propriedades inerciais individuais das partículas.

Além disso, a introdução de aleatoriedade no coeficiente de restituição ou na dissipação viscosa entre os grãos afeta primariamente a taxa de atenuação dos pulsos, mas não altera de maneira significativa sua estrutura espacial ou sua velocidade de propagação. Estudos numéricos mostram que, mesmo em cadeias com amortecimento variável, os pulsos solitários podem manter suas características fundamentais desde que a dissipação seja relativamente baixa (DARAIO *et al.*, 2005; BOECHLER *et al.*, 2011).

Portanto, a principal razão pela qual a aleatoriedade nos raios das partículas é o

fator dominante na propagação dos pulsos é que essa variação afeta diretamente a geometria da cadeia, modificando os pontos de contato e a rigidez local do sistema. Em contraste, variações aleatórias em parâmetros como massa, amortecimento ou coeficiente de restituição influenciam a propagação de maneira secundária, muitas vezes apenas alterando a taxa de dissipação da energia e não sua transmissão ou localização espacial.

4.2 Implementação da desordem no sistema

No presente modelo, o raio de cada grão é sorteado seguindo uma distribuição gaussiana, onde o único parâmetro de controle, que regula o grau de desordem do sistema, é o Coeficiente de Variação do Desvio Padrão, definido como

$$\varepsilon = \left(\frac{\sigma}{\mu} \right) 100\%, \quad (4.1)$$

onde σ e μ são o desvio padrão e média, respectivamente, da distribuição dos raios. Em princípio, tem-se que $0 \leq \varepsilon \leq \infty$, onde $\varepsilon = 0$ representa uma cadeia monodispersa. Quanto maior o valor de ε , maior a dispersão dos raios e maior é a desordem do sistema.

A escolha do Coeficiente de Variação, em vez do Desvio Padrão Absoluto, é justificada por sua independência em relação às unidades de medida. Isso significa que os resultados obtidos podem ser comparados com sistemas que possuam diferentes escalas de comprimento dos seus constituintes (μ). Dessa forma, torna-se possível explorar de maneira sistemática como o grau de desordem estrutural influencia os diferentes regimes dinâmicos observados. Destaca-se que a densidade dos grãos foi mantida constante. Como consequência, a variação nos raios das partículas resulta em uma distribuição não uniforme de massas ao longo da cadeia, o que pode impactar a dinâmica da propagação de pulsos mecânicos. Geralmente usa-se N para o número de grão e k como representação da posição do grão na cadeia.

4.2.1 Variação dos Raios e Conservação da Densidade

A desordem nos raios foi modelada com sua variação em torno de um valor de referência, sendo identificado por \bar{R} , e correspondendo a média dos raios. A variação dos raios segue uma distribuição gaussiana. Dessa forma, é natural adotar a média dos raios como referência, uma vez que a simetria da distribuição garante que esse valor represente adequadamente a tendência central do sistema.

O raio do i -ésimo grão R_i foi determinado por:

$$R_i = \bar{R}(1 + r_{\text{sorteado}}), \quad (4.2)$$

onde:

- \bar{R} é o raio médio das partículas na cadeia,
- r_{sorteado} é um número aleatório com distribuição normal, com média zero e desvio padrão normalizado pela média. Ou seja, segue uma distribuição $N(0, \varepsilon)$.

Na maioria dos estudos experimentais sobre cadeias granulares, os grãos utilizados apresentam raios da ordem de 5 mm. Por exemplo, Pinto et al. (2016) utilizaram esferas de aço carbono com diâmetros entre 5,17 mm e 5,73 mm. Estudos semelhantes também empregaram

materiais como aço inoxidável e vidro, com diâmetros na mesma faixa, para investigar a propagação de ondas mecânicas e efeitos de dispersão em cadeias granulares (Coste et al., 1997; Job et al., 2005; Daraio et al., 2006). Essas pesquisas destacam a influência do tamanho das partículas na resposta dinâmica do sistema, reforçando a importância da caracterização geométrica dos grãos nos experimentos. Essa escolha é comum devido ao equilíbrio entre a precisão das medições e a viabilidade na fabricação e manipulação das amostras, apesar disso tratam-se de valores pequenos. Assim, grandes variações em torno desse valor podem resultar em valores negativos. A fim de garantir que os raios assumam valores físicos reais e viáveis, evitando erros de simulação, foi imposto um truncamento na distribuição, restringindo os valores de r_{sorteado} ao intervalo:

$$-0.95 \leq r_{\text{sorteado}} \leq 0.95. \quad (4.3)$$

Dado que a densidade ρ do material permanece constante, a massa de cada partícula foi ajustada proporcionalmente ao volume da esfera, dada pela relação:

$$M_i = M_{\text{GRÃO}} \left(\frac{R_i}{\bar{R}} \right)^3. \quad (4.4)$$

Essa escolha assegura que, mesmo com a variação nos tamanhos das partículas, a densidade do material não sofra alterações.

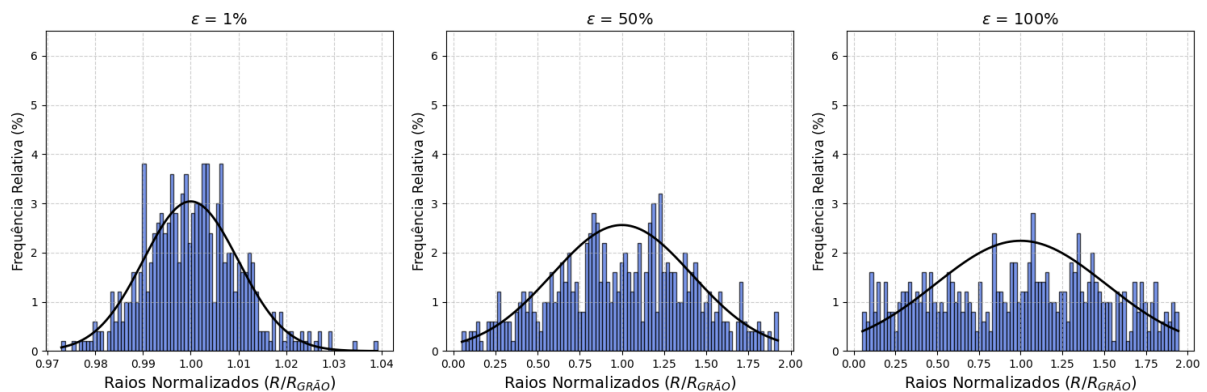


Figura 4.2: Distribuição dos raios sorteados para $\varepsilon = 1\%$, 50% e 100%

A Figura 4.2 apresenta a distribuição dos raios normalizados (R/\bar{R}) para diferentes valores do coeficiente de variação ε , evidenciando o impacto do aumento da desordem estrutural na dispersão dos tamanhos das partículas.

No painel esquerdo ($\varepsilon = 1\%$), a distribuição é concentrada em torno do valor médio, indicando baixa dispersão. A curva de ajuste, representada pela linha preta, mostra um comportamento aproximadamente gaussiano bem definido, caracterizando um sistema *quase monodisperso*, onde a variabilidade dos raios é pequena.

Para $\varepsilon = 50\%$, a dispersão da distribuição se torna mais pronunciada. A presença de partículas com tamanhos significativamente diferentes da média aumenta a heterogeneidade estrutural da cadeia. Embora a distribuição ainda retenha um perfil aproximadamente gaussiano, observa-se um alargamento da curva, refletindo uma maior variabilidade nos tamanhos das partículas.

Para o caso extremo ($\varepsilon = 100\%$), a distribuição se torna ainda mais espalhada, representando um sistema altamente desordenado. A curva de ajuste indica que a dispersão dos raios abrange uma faixa significativamente mais ampla, com a presença de partículas muito

menores ou muito maiores do que a média. Esse nível de desordem modifica a conectividade e a distribuição das forças de contato dentro da cadeia granular, afetando diretamente a propagação de ondas mecânicas e a transmissão de tensões na estrutura.

Em síntese, a Figura 4.2 demonstra a influência do coeficiente de variação ε na organização estrutural do sistema granular. Para valores baixos, a distribuição mantém-se estreita e concentrada, caracterizando um sistema ordenado. À medida que ε aumenta, observa-se um alargamento da distribuição e um crescimento na variabilidade dos tamanhos das partículas, evidenciando a transição para um regime estruturalmente mais desordenado.

4.3 Equações de movimento

A dinâmica do sistema é regida pelas equações de movimento da mecânica clássica:

$$M_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_j F_{ij}, \quad (4.5)$$

onde x_i representa a posição da partícula i , e F_{ij} são as forças de contato atuando entre os grãos adjacentes.

4.3.1 Força de Hertz (elástica)

As interações elásticas entre os grãos foram modeladas pela lei de contato de Hertz, que trata as partículas como pontos materiais ligados por molas não-lineares puramente repulsivas. A força normal entre os grãos é expressa por:

$$F_{i,i+1} = \alpha_{ij} \delta_{i,i+1}^{3/2}, \quad (4.6)$$

onde i e $i + 1$ representam grãos vizinhos, e $\delta_{i,i+1}$ é a sobreposição na direção normal das partículas.

A constante de rigidez efetiva α_{ij} entre as partículas depende do módulo de elasticidade E , do coeficiente de Poisson P e da geometria dos grãos:

$$\alpha_{ij} = C_{\text{material}} \sqrt{\frac{R_i R_{i+1}}{R_i + R_{i+1}}}, \quad (4.7)$$

onde

$$C_{\text{material}} = \frac{2E}{3(1 - P^2)}. \quad (4.8)$$

A Tabela 4.1 lista os parâmetros utilizados na lei de Hertz.

Material	Módulo de Elasticidade (GPa)	Coefficiente de Poisson	Massa específica (kg/m ³)
Aço Inoxidável	200	0.30	7850

Tabela 4.1: Constantes materiais utilizadas no modelo.

A escolha de parâmetros realistas para a massa e o raio dos grãos foi baseada em propriedades de materiais granulares, como aço inoxidável, turgstênio e Delrin, garantindo a representatividade física do modelo, permitindo a análise da cadeia no cenário de materiais diferentes na mesma cadeia granular.

4.3.2 Inclusão da dissipação

No modelo considerado, a dissipação foi incorporada na fase de descompressão entre os grãos adjacentes. Esse tratamento consiste na introdução de um coeficiente que captura as perdas restitutivas e reduz a intensidade da força restauradora ao longo do sistema. Dessa forma, a relação entre a força restauradora ($F_{\text{restauradora}}$) e a força de compressão ($F_{\text{compressão}}$) pode ser descrita pela seguinte equação:

$$\frac{F_{\text{restauradora}}}{F_{\text{compressão}}} = 1 - w, \quad (4.9)$$

onde $F_{\text{compressão}}$ corresponde à força de Hertz, e w é um parâmetro que é restrito ao intervalo $0 < w \ll 1$. Quando $w = 0$, as colisões são puramente elásticas, caracterizando um sistema sem dissipação.

Estudos anteriores demonstraram que a dissipação desempenha um papel fundamental na propagação de pulsos mecânicos em cadeias granulares. Machado (2011) investigou a propagação do momento linear e da energia cinética em cadeias granulares afiladas, analisando o efeito da dissipação na transmissão de energia. Posteriormente, Machado (2014) expandiu essa análise ao estudar cadeias granulares quase unidimensionais como dispositivos para absorção de impactos, destacando a importância da dissipação na dissipação e redistribuição da energia mecânica ao longo da cadeia. Esses trabalhos demonstram que pequenas variações no coeficiente w podem modificar significativamente o comportamento dinâmico do sistema, influenciando a dispersão de pulsos e o amortecimento de oscilações.

4.4 Método de Integração Numérica

O método numérico utilizado para resolver as equações diferenciais do sistema foi a integração de Gear-5 (GEAR,1971), uma técnica baseada em séries de Taylor para prever e corrigir as variáveis dinâmicas. O preditor calcula aproximações para as posições, velocidades e acelerações das partículas a partir da expansão em série de Taylor:

$$x_i^{(p)} = x_i + c_0 v_i + c_1 a_i + c_2 \dot{a}_i + c_3 \ddot{a}_i + c_4 \dddot{a}_i, \quad (4.10)$$

$$v_i^{(p)} = v_i + c_0 a_i + c_1 \dot{a}_i + c_2 \ddot{a}_i + c_3 \dddot{a}_i, \quad (4.11)$$

$$a_i^{(p)} = a_i + c_0 \dot{a}_i + c_1 \ddot{a}_i + c_2 \dddot{a}_i, \quad (4.12)$$

onde os coeficientes de Taylor são dados por:

$$c_0 = \Delta t, \quad c_1 = \frac{\Delta t^2}{2}, \quad c_2 = \frac{\Delta t^3}{3}, \quad c_3 = \frac{\Delta t^4}{4}, \quad c_4 = \frac{\Delta t^5}{5}. \quad (4.13)$$

Após a etapa de predição, os valores são corrigidos para garantir a estabilidade da integração numérica. A correção das variáveis dinâmicas é feita utilizando coeficientes específicos:

$$\Delta a_i = a_i^{(c)} - a_i^{(p)}, \quad (4.14)$$

$$x_i = x_i^{(p)} + a_0 \Delta a_i, \quad v_i = v_i^{(p)} + a_1 \Delta a_i, \quad a_i = a_i^{(p)} + a_2 \Delta a_i, \quad (4.15)$$

onde os coeficientes de correção são:

$$a_0 = \frac{3}{20}, \quad a_1 = \frac{251}{360}, \quad a_2 = 1. \quad (4.16)$$

Capítulo 5

Resultados

Neste capítulo, são apresentados os resultados das simulações, com ênfase no comportamento dinâmico. Reforçamos que o objetivo desse trabalho é descrever o comportamento da propagação da frente de onda de uma perturbação gerada nas extremidades do sistemas. Em específico, foca-se no decaimento da amplitude da frente de onda.

O passo de tempo adotado na simulação foi de $\Delta t = 1.0 \times 10^{-7}$ s, escolhido com base na análise da conservação de energia ao longo do tempo. Esse valor foi determinado de forma a minimizar erros numéricos sem comprometer a eficiência computacional, garantindo a precisão na propagação dos pulsos mecânicos na cadeia granular. A validação do método numérico foi realizada por meio da verificação do erro relativo da energia total do sistema, que permaneceu abaixo de 10^{-5} , ou seja, a energia mecânica foi preservada.

Além disso, o erro relativo do momento linear foi monitorado e manteve-se abaixo de 10^{-6} , assegurando que a dinâmica do sistema fosse corretamente reproduzida. O gráfico da energia total ao longo do tempo confirma que a dissipação observada é decorrente exclusivamente do modelo físico adotado, sem deriva significativa causada pelo método numérico. Dessa forma, a escolha do passo de tempo e a estabilidade do esquema de integração garantem a fidelidade da simulação ao comportamento real das cadeias granulares desordenadas.

A conservação de energia foi monitorada ao longo de toda a simulação para garantir a precisão do método numérico. Em sistemas hamiltonianos, como as cadeias granulares sem dissipação, a energia total do sistema deve permanecer aproximadamente constante, e qualquer variação significativa pode indicar acúmulo de erro numérico devido à integração temporal. No presente estudo, o erro relativo da energia foi mantido abaixo de 10^{-5} , evidenciando a eficiência do método Gear-5 em preservar a energia do sistema ao longo da evolução temporal.

A validação desse critério foi realizada por meio do gráfico da energia total do sistema, que confirma a ausência de deriva numérica significativa. Esse comportamento indica que as flutuações observadas na energia são puramente decorrentes das interações físicas entre os grãos e não de erros numéricos acumulados. Dessa forma, a escolha do passo de tempo adequado e a robustez do método garantem uma representação fiel da dinâmica das cadeias granulares, permitindo análises confiáveis sobre a propagação de pulsos mecânicos e seus efeitos dissipativos.

5.1 Análise da Propagação do Pulso

No contexto deste trabalho, a análise da propagação de pulsos em cadeias granularmente desordenadas é realizada com foco em como diferentes níveis de desordem, controlados pelo Coeficiente de Variação ϵ , influenciam na propagação do pulso de momento linear ao longo da cadeia. Essa abordagem permite identificar padrões de dissipação de energia e fragmentação de pulsos, destacando os mecanismos subjacentes que governam a dinâmica do sistema.

As Figuras 5.1 e 5.2 ilustram os efeitos de diferentes níveis de desordem, abordando os cenários de baixa e alta desordem ($\epsilon = 5\%$ e 50%) sobre a evolução temporal do perfil do pulso do momento linear. Este resultado fornece uma visão detalhada, como “fotos” de um filme, de como as variações estruturais alteram a dinâmica de propagação das ondas, possibilitando a identificação de transições críticas e os limites de eficiência energética em cadeias granularmente desordenadas.

As transições críticas observadas neste sistema referem-se à mudança no comportamento da propagação do pulso de momento linear à medida que a desordem estrutural aumenta. Em cadeias granularmente ordenadas ou com baixa desordem ($\epsilon = 5\%$), a propagação ocorre de maneira predominantemente balística, caracterizando um transporte altamente eficiente do momento linear, onde a coerência do pulso é preservada e há pouca dispersão da energia mecânica. No entanto, conforme a desordem estrutural se intensifica ($\epsilon = 50\%$), a propagação do pulso se torna difusa, e a energia mecânica começa a se espalhar por diferentes modos vibracionais, marcando a transição para um regime difusivo. Essa mudança decorre da heterogeneidade nas interações entre os grãos, que introduzem flutuações na rigidez dos contatos e alteram a coerência da transmissão do pulso. Em casos de desordem ainda mais acentuada, pode-se observar um comportamento no qual a energia e o momento linear permanecem confinados em regiões específicas da cadeia, caracterizando um regime de localização de energia, análogo à localização de Anderson em sistemas desordenados.

Os limites de eficiência energética nesse contexto são determinados pela fração de momento linear que é efetivamente transmitida ao longo da cadeia. Em cadeias com baixa desordem, a transmissão ocorre de maneira eficiente, com mínima perda de energia para modos vibracionais internos. Com o aumento da desordem, a eficiência do transporte diminui progressivamente devido ao espalhamento da energia e ao aumento da dissipação ao longo do tempo. Em níveis extremos de desordem, a energia mecânica se distribui de forma altamente irregular, impedindo a propagação coerente do pulso e reduzindo significativamente a transmissão efetiva do momento linear. Esse limite inferior de eficiência tem implicações importantes para aplicações tecnológicas, especialmente no desenvolvimento de materiais dissipativos e dispositivos de controle de impacto, onde a manipulação da desordem pode ser explorada para otimizar a absorção e dissipação de energia mecânica.

As curvas apresentadas nos gráficos foram obtidas a partir da normalização do momento linear em relação ao momento total inicial do sistema, garantindo a conservação adequada da quantidade de movimento. O momento linear total no instante t foi calculado como:

$$P_{\text{total}}(t) = \sum_{i=1}^N M_i V_i(t), \quad (5.1)$$

onde M_i e $V_i(t)$ representam, respectivamente, a massa e a velocidade do grão i no instante t , e N é o número total de partículas na cadeia. Para que os valores fossem comparáveis entre diferentes configurações da cadeia granular, a normalização foi realizada utilizando o momento total inicial:

$$P_{\text{norm}}(t) = \frac{P_{\text{total}}(t)}{P_{\text{total}}(0)}, \quad (5.2)$$

onde $P_{\text{total}}(0)$ representa o momento total do sistema no instante inicial. Essa normalização assegura que no instante $t = 0$, a fração do momento seja exatamente 1, permitindo uma avaliação quantitativa da eficiência da transmissão do pulso ao longo do tempo.

A escolha dessa normalização justifica-se pelo fato de que, ao longo da evolução da

cadeia granular, a propagação do momento linear é afetada por fenômenos de dissipação e dispersão, tornando essencial uma referência global que permita comparar diferentes regimes dinâmicos. Se cada momento individual fosse normalizado separadamente, as flutuações locais poderiam introduzir artefatos indesejados nos gráficos, dificultando a interpretação dos resultados. Com a normalização pelo momento total inicial, torna-se possível analisar como a fração do momento transmitida decai em função da desordem, evidenciando a transição entre os regimes balístico, difusivo e de localização de energia.

Nos gráficos apresentados, observa-se que, mesmo para valores baixos de desordem ($\epsilon = 5\%$), a amplitude do pulso do momento linear não se mantém constante, mas apresenta uma redução progressiva ao longo do tempo. A amplitude inicial próxima de 0.6 decai para aproximadamente 0.2, evidenciando que, mesmo em cadeias de baixa desordem, há dissipação de energia e perda de coerência na transmissão do momento linear. Essa atenuação é um indicativo de que, além do espalhamento devido à desordem, outros mecanismos, como a dissipação inerente à interação entre os grãos, desempenham um papel significativo na dinâmica do sistema.

Esse comportamento se intensifica para cadeias com alta desordem ($\epsilon = 50\%$), onde a amplitude do momento linear apresenta um decaimento acentuado, confirmando a transição para um regime de propagação altamente difusivo. Nesse cenário, a dispersão do momento é tão significativa que o pulso inicial perde completamente sua identidade ao longo do tempo, tornando-se indistinguível no meio granular. Esse efeito destaca a limitação na eficiência da transmissão de energia nesses sistemas e reforça a importância da caracterização quantitativa das perdas mecânicas para aplicações tecnológicas, como amortecimento passivo e controle de impacto.

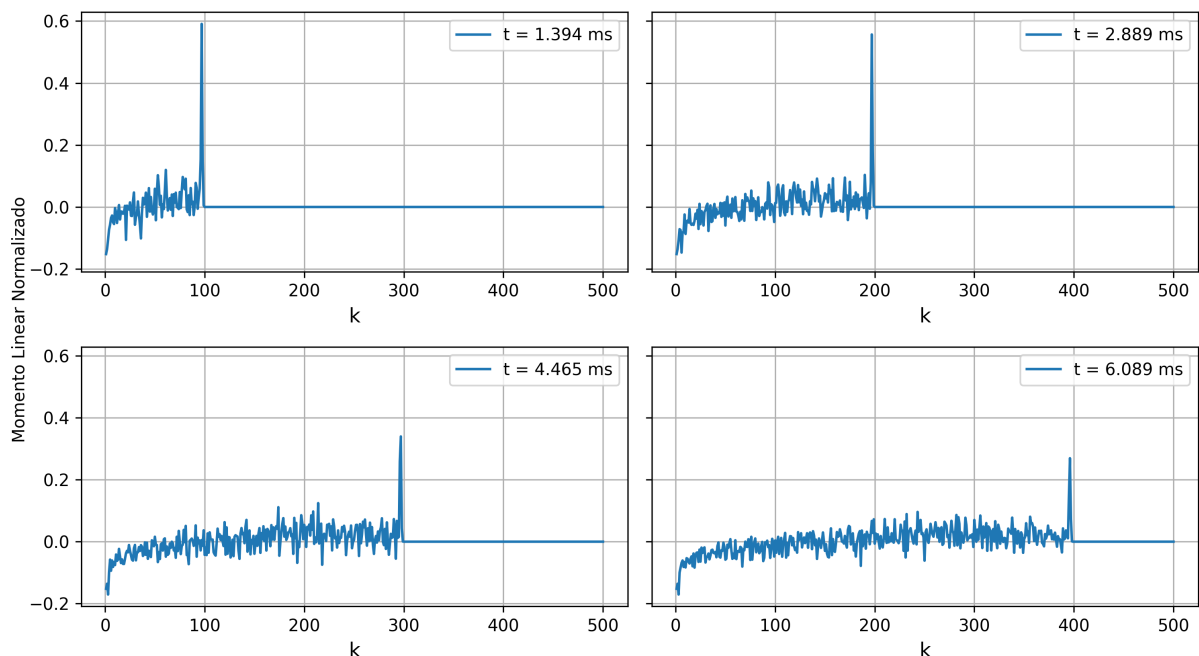


Figura 5.1: Propagação do momento linear de $\epsilon = 5\%$

A Figura 5.1 representa a evolução temporal do momento linear normalizado ao longo da cadeia granular para um nível de desordem moderado, $\epsilon = 5\%$. Nesse caso, observa-se que a frente de onda é formada por um pulso líder bem definido, que mantém sua estrutura coesa ao longo da propagação, evidenciando um regime predominantemente balístico.

O regime balístico caracteriza-se pela propagação do pulso com mínima dispersão e baixa dissipação de energia, de forma que a maior parte do momento linear é transmitida eficientemente ao longo da cadeia. Esse regime ocorre quando as variações estruturais entre os grãos são pequenas, permitindo que a energia do pulso inicial seja preservada sem conversão significativa para outros modos vibracionais. Dessa forma, o pulso mantém sua coerência estrutural e viaja de maneira quase não afetada pelas irregularidades do meio.

A propagação balística ocorre devido à baixa variação estrutural entre os grãos, o que mantém a integridade do pulso inicial ao longo do tempo. Esse comportamento é caracterizado por uma transmissão eficiente de energia, onde a maior parte do momento linear é preservada ao longo da cadeia. Pequenas flutuações são visíveis ao longo da trajetória do pulso, mas sua amplitude se mantém relativamente constante até atingir os grãos mais distantes. Isso confirma que, para valores baixos de desordem, a dispersão do momento linear é limitada, permitindo que a energia do impacto inicial seja conduzida de maneira eficiente até os extremos da cadeia granular.

Na cauda do pulso líder, existem oscilações de baixa amplitude, atribuídas à energia e ao momento linear não transmitidos para frente. Essas reflexões são responsáveis por um leve espalhamento da energia, mas não são suficientemente intensas para comprometer a integridade da onda propagante. Esse comportamento é característico de cadeias granularmente ordenadas ou com baixa desordem, onde o transporte de energia ocorre de maneira relativamente eficiente, com perdas reduzidas. Com o avanço da propagação, observa-se um decaimento gradual na amplitude do momento linear, especialmente nas regiões mais distantes da perturbação inicial. Esse efeito está diretamente associado à dissipação inerente do sistema e ao espalhamento da energia devido às pequenas irregularidades introduzidas pela desordem. A atenuação da amplitude indica que, embora a propagação ocorra predominantemente no regime balístico, há uma conversão parcial da energia inicial para modos vibracionais secundários ao longo da cadeia.

Contudo, a dispersão permanece baixa, demonstrando que, mesmo para um nível de desordem de $\epsilon = 5\%$, o transporte de energia, embora não totalmente conservativo, ainda ocorre de maneira eficiente, com perdas moderadas ao longo do tempo. Esse comportamento confirma que, apesar do leve decaimento na amplitude, a maior parte do momento linear continua sendo transmitida, diferindo significativamente do regime difusivo observado em níveis mais altos de desordem.

A ausência de fragmentação significativa do pulso e a manutenção de um pulso líder coeso indicam que o sistema opera dentro de um regime não linear dominado pela interação hertziana entre os grãos, onde as forças de contato são suficientemente fortes para impedir a dispersão excessiva da energia.

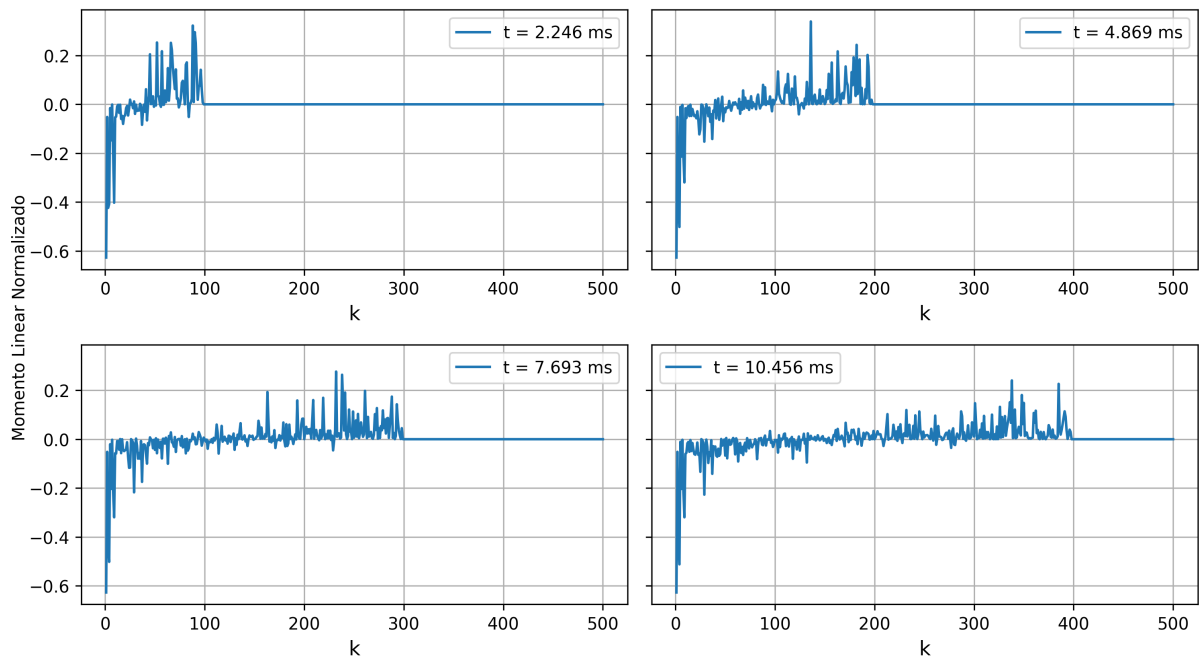


Figura 5.2: Propagação do momento linear de $\epsilon = 50\%$

A Figura 5.2 ilustra a propagação do momento linear para $\epsilon = 50\%$, representando um cenário onde a desordem estrutural é significativamente intensa. O comportamento dinâmico desse sistema contrasta fortemente com o observado para $\epsilon = 5\%$, evidenciando uma mudança qualitativa na propagação do momento linear. Enquanto em cadeias com baixa desordem o pulso líder mantém sua coerência e transmite a maior parte do momento linear de forma localizada, para $\epsilon = 50\%$, a propagação torna-se altamente dispersiva e não há um único pulso bem definido conduzindo a energia ao longo da cadeia.

O principal efeito observado nesse caso é a rápida fragmentação do pulso inicial. Diferentemente do que ocorre para níveis baixos de desordem, a energia não se mantém concentrada em uma única estrutura propagante, mas é distribuída em pulsos secundários menores que se dispersam ao longo da cadeia. Esse comportamento indica que a transmissão eficiente de energia, característica de cadeias granularmente ordenadas, foi suprimida, sendo substituída por um regime onde a dissipação e o espalhamento dominam a dinâmica do sistema.

Essa mudança no padrão de propagação pode ser associada a um aumento da interação não linear entre os grãos devido às variações aleatórias em seus raios. Essas flutuações estruturais alteram significativamente os tempos de contato e a rigidez efetiva dos enlaces entre os grãos, favorecendo a dispersão da energia mecânica em múltiplas direções. Como consequência, a propagação do momento linear ocorre de forma fragmentada, e a fração de energia efetivamente transmitida ao longo da cadeia é reduzida.

A ausência de oscilações de alta amplitude ao longo da cadeia indica que a energia é redistribuída de maneira desordenada, dificultando a manutenção da coesão do pulso original. Esse fenômeno pode ser compreendido como uma consequência da forte heterogeneidade na rigidez efetiva entre os grãos, resultante da aleatoriedade dos raios. Como consequência, as forças de contato variam de forma irregular, causando uma propagação de energia desorganizada e dispersiva. Outro aspecto relevante é a formação de regiões onde a energia do momento linear parece se acumular temporariamente. Esse efeito sugere que a desordem estrutural pode estar induzindo o confinamento parcial da energia em certas regiões da cadeia, dificultando sua transmissão para grãos mais afastados. Esse fenômeno de confinamento pode ser explicado

pela interferência múltipla entre os contatos desordenados, levando a uma redistribuição não homogênea da energia ao longo da cadeia.

Esse comportamento apresenta semelhanças com mecanismos de localização observados em sistemas desordenados, nos quais a propagação de ondas pode ser inibida devido à interação complexa entre os elementos estruturais do meio. Entretanto, a caracterização precisa desse efeito requer uma análise mais detalhada, considerando tanto as propriedades espectrais das oscilações quanto a evolução temporal da distribuição da energia. Além disso, a dissipação energética nesse regime é muito mais acentuada do que no caso de $\epsilon = 5\%$. O momento linear inicial é rapidamente atenuado, indicando que a energia do pulso se dissipa ao longo do tempo devido à complexa interação entre os grãos. Esse fenômeno está diretamente associado à combinação da não linearidade do contato hertziano com os efeitos da desordem, resultando em uma transição para um regime difusivo.

A análise comparativa entre $\epsilon = 5\%$ e $\epsilon = 50\%$ reforça a ideia de que a desordem estrutural desempenha um papel crucial na dinâmica de cadeias granulares. Em níveis baixos de desordem, o sistema mantém uma elevada eficiência no transporte de energia, permitindo a propagação de pulsos compactos e bem definidos. No entanto, conforme ϵ aumenta, a propagação coerente do pulso inicial é progressivamente substituída por mecanismos de dispersão e atenuação da energia, levando à fragmentação da estrutura propagante e à dissipação acelerada do momento linear.

A transição entre esses regimes tem implicações importantes para o estudo de materiais granulares desordenados, fornecendo informações que podem contribuir para aplicações tecnológicas, como absorção de impacto, controle de vibrações e metamateriais acústicos. O comportamento observado nos gráficos apresenta similaridades com os estudos numéricos e teóricos reportados em outros trabalhos, como os de Manjunath et al. (2012), que analisaram a influência da desordem na propagação de ondas mecânicas em cadeias granulares. Embora o estudo de Manjunath et al. (2012) seja numérico, seus resultados demonstram que a introdução de desordem estrutural pode modificar significativamente os padrões de transmissão de energia, uma característica que pode ser investigada experimentalmente em trabalhos futuros.

5.2 Diagrama de caixa da Frente de Onda

Para investigar a estabilidade do decaimento da amplitude da frente de onda, 100 cadeias com o mesmo grau de desordem foram geradas, onde cada cadeia contém 500 grãos. Dessa forma, simulações sobre a evolução dinâmica foram realizadas. Optou-se por apresentar os resultados na forma de boxplots, pois são ferramentas estatísticas que facilitam a visualização e análise de dados, uma vez que resumem a distribuição dos valores, apresentando a mediana, dispersão, simetria e a presença de valores atípicos, elementos centrais em análises quantitativas.

A utilização de boxplots é amplamente recomendada para a interpretação de conjuntos de dados em diversas áreas da ciência, especialmente na análise exploratória de dados (TUKEY, 1977). Essa abordagem permite a identificação de padrões de variabilidade, auxiliando na compreensão da estabilidade das medidas estatísticas analisadas (WILCOX, 2017). Além disso, a aplicação de boxplots em experimentos numéricos é uma técnica consolidada em estudos estatísticos para a caracterização de distribuições empíricas (MONTGOMERY & RUNGER, 2014).

1

¹A estrutura de um boxplot inclui componentes que capturam diferentes aspectos da distribuição dos dados: a mediana, representada por uma linha central dentro da caixa, oferece uma medida robusta de tendência

2

A necessidade de utilizar boxplots surge especialmente em cenários onde há elevada quantidade de dados ou quando se deseja comparar diferentes condições de análise de forma direta. A Figura 5.3 apresenta o boxplot da frente de onda do momento linear para $\epsilon = 5\%$ ao longo da cadeia granular, onde k representa a posição do grão na cadeia. A escolha dessa representação gráfica permite visualizar a dispersão estatística dos valores obtidos em diferentes realizações do sistema, evidenciando a variabilidade dos dados ao longo da propagação do pulso mecânico.

O momento linear foi normalizado de modo a facilitar a comparação entre diferentes sistemas e configurações de desordem, eliminando dependências triviais com fatores de escala. Essa normalização é essencial para que a análise da dissipação e da propagação da frente de onda seja realizada de maneira mais generalizável, garantindo que os efeitos observados sejam intrínsecos à dinâmica do sistema e não apenas consequência de características arbitrárias das unidades adotadas.

A mediana, representada pela linha central de cada caixa, reflete o comportamento típico ou central da frente de onda para cada valor de k .

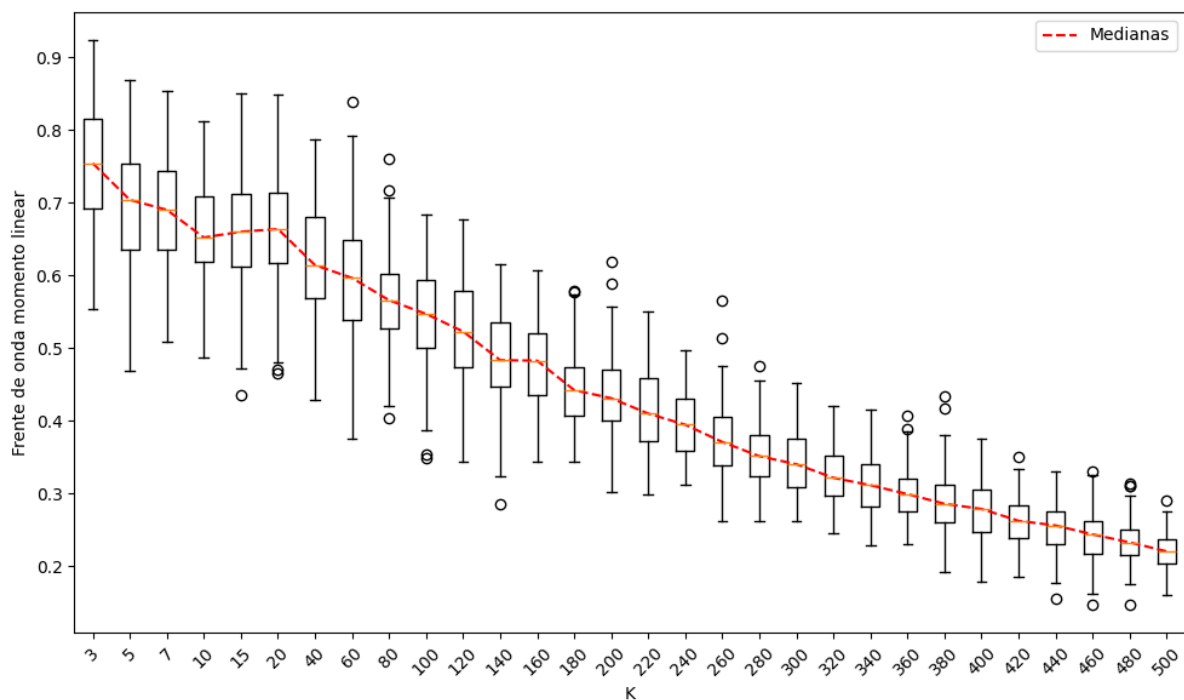


Figura 5.3: Diagrama de caixa da frente de onda de do momento linear de $\epsilon = 5\%$

À medida que k aumenta, observa-se um decaimento na mediana, indicando uma redução progressiva da frente de onda. Esse comportamento reflete o efeito da dispersão central; o intervalo interquartil (IQR), delimitado pelos quartis inferior e superior, destaca a variabilidade dos dados em sua porção central; e os "whiskers", que se estendem a uma distância típica de $1,5 \times IQR$ além dos quartis, indicam a faixa de variação esperada dos valores. Além disso, possíveis outliers, que representam eventos fora dessa faixa, são exibidos como marcadores individuais, permitindo uma rápida identificação de anomalias.

²Diferentemente de tabelas ou outras representações menos visuais, os boxplots facilitam a identificação de padrões, tendências e discrepâncias nos dados, permitindo inferências qualitativas e quantitativas mais robustas. Eles são particularmente vantajosos para detectar assimetrias e variabilidade nas distribuições, que podem não ser evidentes em outras formas de análise.

induzida pela desordem estrutural, que provoca a redistribuição gradual da energia ao longo da cadeia. Como resultado, a frente de onda do momento linear decai e se espalha ao longo do tempo, reduzindo sua amplitude.

Nota-se que, no início da cadeia, correspondente a valores baixos de k , há uma maior variabilidade nos valores da frente de onda. Esse comportamento sugere um regime mais desordenado ou sujeito a flutuações significativas. Tal efeito pode ser atribuído às condições de fronteira impostas ao sistema, que influenciam diretamente a dinâmica inicial da propagação da onda mecânica. Dependendo da natureza dessas condições, pode ocorrer a introdução de reflexões parciais, variações na transmissão da energia inicial e até mesmo perturbações que amplificam momentaneamente a dispersão dos valores observados.

Além disso, essa região inicial da cadeia corresponde ao estágio de formação da frente de onda, em que as interações entre os grãos ainda estão se ajustando à estrutura granular e ao grau de desordem do sistema. Nessa fase, oscilações transitórias podem ocorrer antes que o pulso mecânico adquira uma configuração mais estável.

As extensões dos diagramas de caixa (boxplot), que se estendem até um limite baseado na estatística da distribuição dos dados, revelam a faixa de variação dentro de 1,5 o intervalo entre quartis a partir do primeiro e do terceiro quartis. Dessa forma, elas indicam a dispersão estatística dos valores sem considerar os elementos extremos da amostra. A redução progressiva da extensão dessas barras com o aumento de k reflete a diminuição da dispersão estatística dos dados, sugerindo uma estabilização gradual das interações dinâmicas no sistema.

A presença de valores atípicos, representados por pontos isolados fora dessa faixa, indica eventos que se desviam significativamente do padrão típico do sistema. Esses valores podem ser interpretados como flutuações locais intensas ou como transições abruptas entre diferentes estados dinâmicos da cadeia granular. Por conta desses valores extremos, optou-se por utilizar a mediana em vez da média para representar a tendência central dos dados. A média aritmética pode ser influenciada por valores atípicos, deslocando-se para valores que não representam o comportamento predominante do sistema. Por conta disso optou-se por uma mediana desenvolvida, menos sensível a essas variações extremas, proporcionando uma representação mais confiável da evolução da frente de onda ao longo da cadeia.

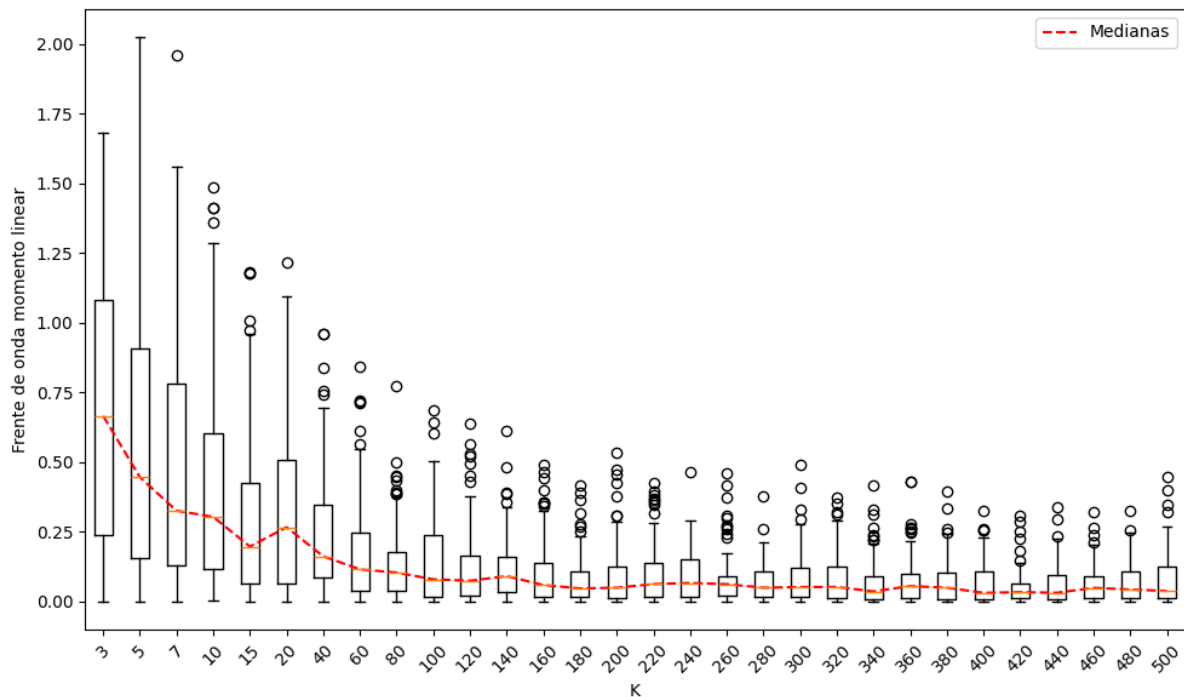


Figura 5.4: Diagrama de caixa da frente de onda de do momento linear de $\epsilon = 50\%$

A Figura 5.4 apresenta o diagrama de caixa da distribuição da amplitude da frente de onda para $\epsilon = 50\%$ ao longo da cadeia, sendo k a posição do grão da cadeia.

A dispersão dos dados, indicada pelo comprimento das caixas (intervalo entre quartis), é significativamente maior nos valores iniciais de k . Esse efeito pode ser atribuído não apenas às interações não lineares intensas, mas também à influência das condições de contorno do sistema, que podem introduzir variabilidade adicional na propagação inicial da frente de onda. Além disso, a região inicial da cadeia corresponde à fase de estabelecimento da propagação do pulso mecânico, na qual a energia ainda está sendo redistribuída entre os grãos, resultando em flutuações mais expressivas.

Esse comportamento sugere que, para valores baixos de k , há uma maior instabilidade e uma sensibilidade acentuada a perturbações externas ou variações na estrutura da cadeia. À medida que k aumenta, observa-se um estreitamento progressivo das caixas, indicando uma redução na dispersão dos valores e uma estabilização do regime dinâmico. Essa transição para um comportamento mais regular pode estar associada ao amortecimento das oscilações iniciais e à adaptação da propagação da frente de onda às características estatísticas do meio granular.

As extensões dos diagramas de caixa, que representam os limites da distribuição dos dados sem considerar valores atípicos, indicam a dispersão estatística dentro de um intervalo estabelecido. Essas extensões não se estendem até os valores mínimo e máximo absolutos, mas 1,5 o intervalo entre quartis a partir do primeiro e do terceiro quartis. Assim, elas delimitam a faixa principal de variação dos dados, excluindo elementos que se afastam excessivamente do padrão estatístico esperado.

Nos valores iniciais de k , observa-se que essas extensões são significativamente maiores, indicando uma maior variabilidade na propagação da frente de onda. Esse comportamento sugere que a dinâmica inicial do sistema está sujeita a flutuações mais intensas, possivelmente devido às condições de contorno e à formação inicial do pulso mecânico. Conforme k cresce, as extensões tornam-se progressivamente menores, refletindo uma estabilização da dinâmica

do sistema e a predominância de um comportamento mais regular.

Os valores atípicos, representados por pontos fora das extensões dos diagramas de caixa, aparecem em maior número nos valores iniciais de k , sugerindo a ocorrência de estados dinâmicos extremos ou transições abruptas no sistema. Esses valores podem ser interpretados como eventos raros associados a interações altamente não lineares, oscilações locais intensificadas ou flutuações estatísticas decorrentes da configuração granular. A presença desses valores reforça a necessidade de utilizar a mediana, em vez da média, para descrever a tendência central do sistema, uma vez que a média pode ser fortemente influenciada por essas variações extremas.

5.3 Decaimento das medianas do Momento Linear

Uma das características mais importantes do modelo é o uso da mediana como métrica para calcular o momento linear normalizado. A escolha da mediana, em vez da média, é justificada pela presença de muitos valores atípicos na distribuição dos dados que distorcem a média especialmente em sistemas altamente desordenados, onde valores extremos (outliers) podem distorcer os resultados. A mediana fornece uma medida estável e representativa do comportamento central do sistema, capturando tendências gerais de forma mais confiável, especialmente em regimes dinâmicos complexos.

A partir das 100 configurações geradas, para cada epsilon, capturamos a mediana do momento linear normalizado. A escolha da mediana é devido a sua sensibilidade estatística, em cadeias granulares desordenadas, a desordem pode causar flutuações locais significativas, ou seja, oscilações extremas do momento linear. A mediana fornece uma medida estável e central do comportamento da cadeia, possibilitando a melhor captura das tendências gerais do decaimento do momento linear. A Figura 5.5 apresenta o decaimento da mediana do momento linear normalizado de todos os ϵ da cadeia granular:

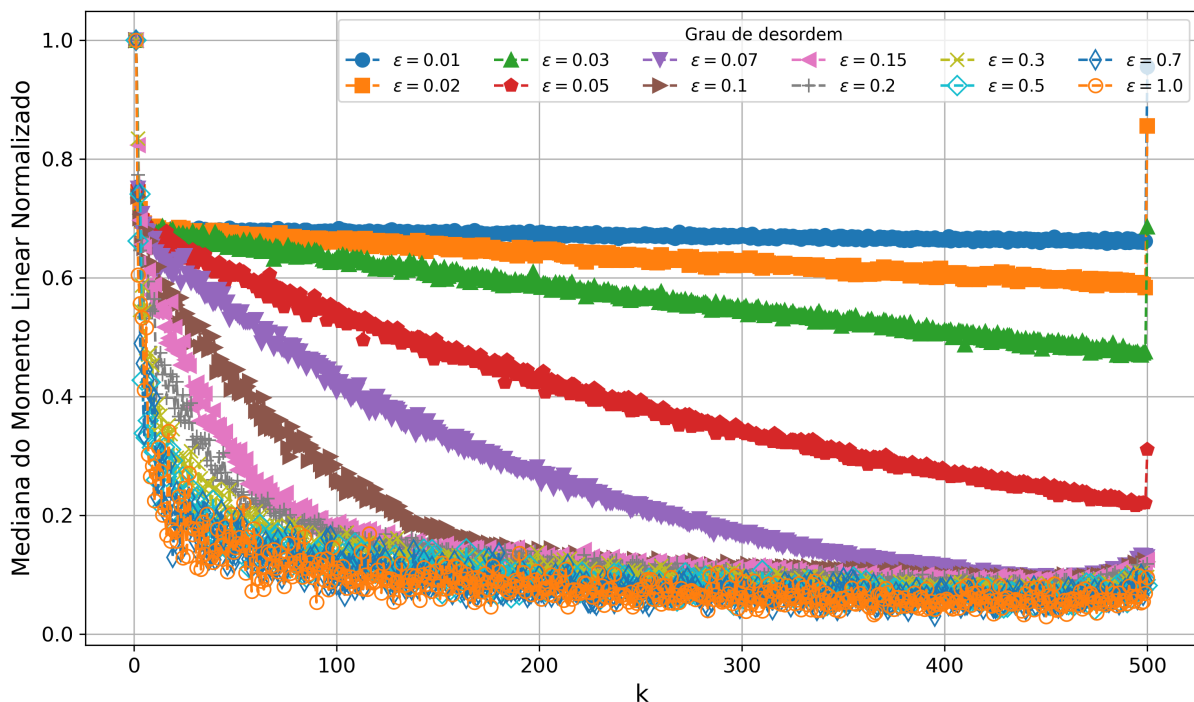


Figura 5.5: Decaimento das Medianas do Momento Linear Normalizado.

Cada curva representa a mediana do momento linear normalizado calculada ao longo da cadeia, refletindo como a desordem afeta a propagação do momento linear na cadeia desordenada proposta.

Para baixos valores de ϵ ($\epsilon = 1\%$ e $\epsilon = 3\%$), o decaimento é lento e progressivo. Nesse cenário, as ondas que se propagam ao longo da cadeia são pouco afetadas pelas irregularidades estruturais, preservando grande parte de sua energia. Este comportamento é típico de sistemas com baixa dispersão, onde as propriedades das partículas favorecem a transmissão de energia de maneira eficiente.

À medida que o grau de desordem aumenta ($5\% \leq \epsilon \leq 1\%$), observa-se um decaimento mais acentuado na mediana do momento linear normalizado, indicando uma transição para um regime intermediário. Nessa faixa, há um aumento na dispersão da energia mecânica ao longo da cadeia, decorrente da maior influência das reflexões e da fragmentação das ondas mecânicas. Essas irregularidades surgem devido às flutuações nas propriedades locais dos grãos, como diferenças de massa e rigidez, que modificam a propagação da frente de onda. Esse regime transicional evidencia a competição entre a conservação parcial da energia, típica de ondas não lineares, e a dispersão induzida pela desordem estrutural.

Para valores de $\epsilon \geq 3\%$, o decaimento torna-se significativamente mais abrupto, caracterizando um regime dominado pela desordem. Nesse cenário, as ondas mecânicas perdem sua integridade estrutural rapidamente, resultando na fragmentação da propagação do momento linear. A energia, que em sistemas mais ordenados é transportada de maneira predominantemente coerente e direcionada, passa a ser distribuída de forma irregular ao longo da cadeia, levando à sua localização em determinadas regiões. Esse fenômeno reflete a predominância da desordem sobre os efeitos não lineares, favorecendo a redistribuição energética e a dissipação mais acelerada ao longo do sistema.

O decaimento observado para $\epsilon \geq 3\%$ indica que o sistema atinge um regime no qual o momento linear restante ao longo da cadeia se reduz rapidamente a níveis mínimos. Esse efeito ocorre porque a alta desordem dificulta a transmissão eficiente do momento linear, impedindo a formação de frentes de onda bem definidas. Com isso, a propagação do pulso mecânico se torna irregular, sendo fragmentada por interações locais que dispersam o momento ao longo da cadeia.

A fragmentação da frente de onda em pulsos secundários de menor intensidade contribui para a dispersão do momento linear, reduzindo a coerência da propagação. Esse fenômeno leva à formação de padrões irregulares na transmissão do momento ao longo da cadeia, onde parte do pulso mecânico se dissipa em interações locais antes de alcançar distâncias maiores. Como resultado, a propagação deixa de ser dominada por trajetórias bem definidas, dando lugar a um regime onde o transporte do momento linear ocorre de maneira fragmentada e menos eficiente.

Esses resultados evidenciam que o parâmetro ϵ ou seja, a variação dos raios dos grãos, exerce um impacto direto na propagação do momento linear ao longo da cadeia granular. Para baixos valores de ϵ , a transmissão do momento ocorre de forma mais eficiente, preservando uma estrutura coerente na propagação da frente de onda. À medida que ϵ aumenta, a desordem estrutural impõe obstáculos à propagação, promovendo dispersão e reduzindo a capacidade de transporte ao longo da cadeia. Para valores elevados de ϵ , a propagação deixa de ser dominada por trajetórias bem definidas, passando a ocorrer de maneira irregular e fragmentada.

Esse comportamento sugere uma transição progressiva entre diferentes regimes de propagação. Inicialmente, para níveis baixos de desordem, a propagação mantém características predominantemente coerentes. Com o aumento de ϵ , a dispersão do momento linear se intensifica, reduzindo a eficiência do transporte. Para valores suficientemente altos, o sistema

atinge um regime em que grande parte do momento linear é redistribuído localmente, sem propagação significativa ao longo da cadeia. Este padrão é consistente com estudos prévios que analisaram o impacto da desordem em sistemas granulares. Em particular, os resultados de Manjunath et al. (2012) identificaram diferentes regimes de decaimento da amplitude das ondas em função da intensidade da desordem, destacando o papel da variabilidade estrutural na dinâmica desses sistemas.

A escolha da normalização do momento linear e da mediana como medida central tem o objetivo de garantir a comparabilidade dos resultados em diferentes níveis de desordem. Em sistemas granulares com forte interação não linear, essas abordagens permitem uma avaliação quantitativa da transição entre regimes dinâmicos, evidenciando o impacto da desordem na propagação do momento linear.

O decaimento do momento linear normalizado em função de ϵ revela a complexidade dos sistemas granularmente desordenados. A relação entre desordem estrutural e não linearidade influencia diretamente a evolução da propagação do momento linear, modificando os mecanismos de transporte e redistribuição da energia ao longo da cadeia.

5.4 Curva de Ajuste para o decaimento do Momento Linear

A análise do decaimento das medianas do momento linear normalizado em função da posição k permite caracterizar a influência da desordem na propagação da amplitude da frente de onda em cadeias granulares. Ao comparar o comportamento desse decaimento para diferentes valores de ϵ , observa-se que a evolução da frente de onda depende tanto do número de grãos k quanto do grau de desordem ϵ , influenciando a taxa de dissipação e a distribuição do momento linear ao longo da cadeia.

Determinar os regimes matemáticos que descrevem esses decaimentos é um passo fundamental para a formulação de uma equação geral que represente a propagação da amplitude da frente de onda em função da desordem. A transição entre ajustes quadráticos e funções de potência indica que diferentes regimes dinâmicos emergem conforme a desordem estrutural aumenta, exigindo modelagens distintas para baixos e altos valores de ϵ .

A Figura 5.6 apresenta curvas de ajuste referente ao decaimento da mediana do momento linear normalizado para alguns valores em que $\epsilon < 10\%$ ou seja, para regimes de baixa desordem, o comportamento do decaimento pode ser bem representado por um ajuste quadrático.

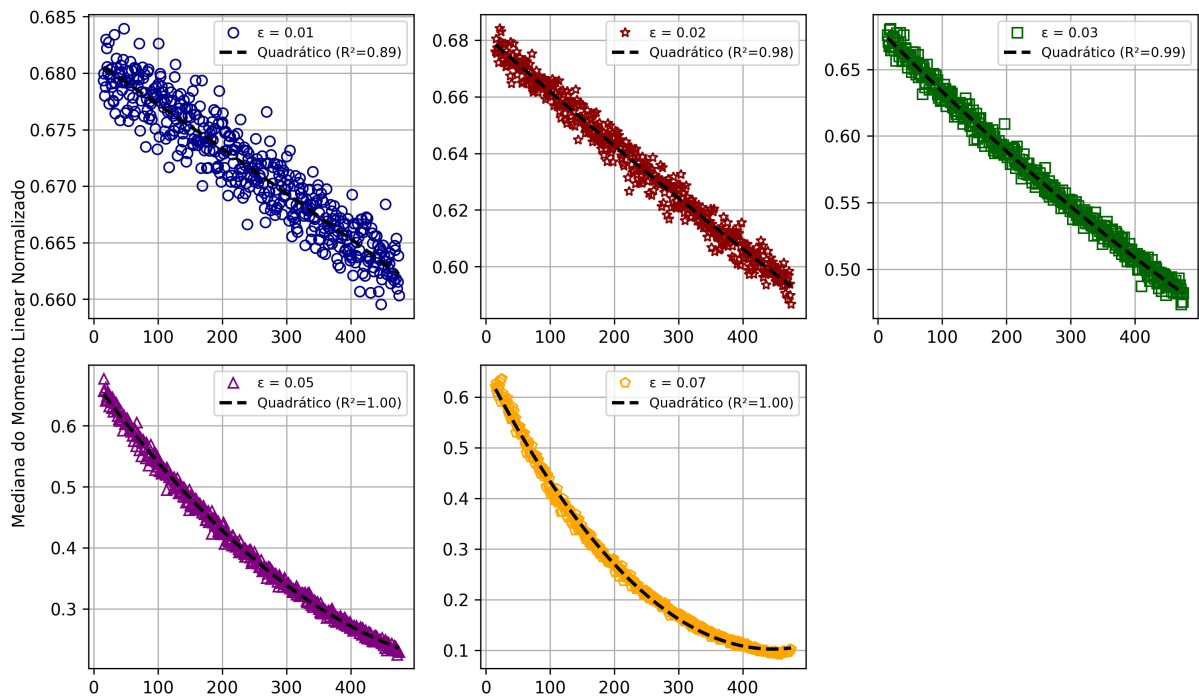


Figura 5.6: Melhor curva de ajuste para o decaimento do momento linear normalizado no intervalo de: $1\% \leq \epsilon \leq 7\%$

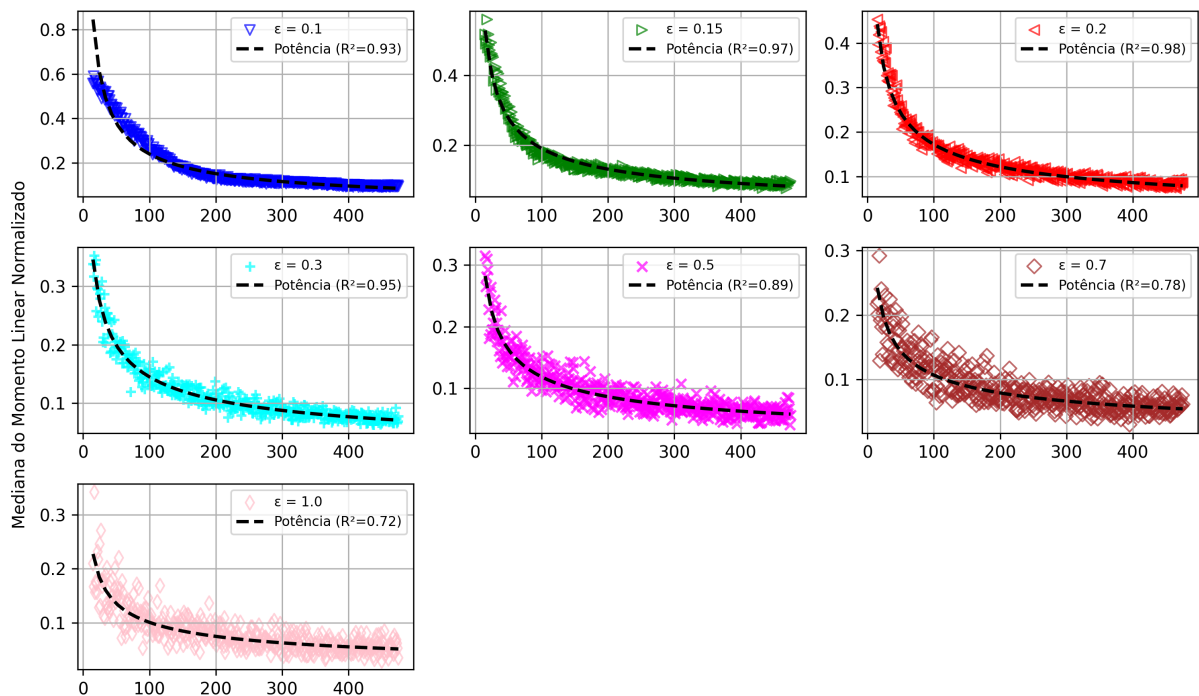


Figura 5.7: Melhor curva de ajuste para o decaimento do momento linear normalizado no intervalo de: $10\% \leq \epsilon \leq 100\%$

A Figura 5.7 apresenta os resultados para valores de desordem no intervalo $10\% \leq \epsilon \leq 100\%$. Para esses regimes, a curva de ajuste mais adequada, com base no coeficiente de determinação (R^2), segue uma lei de potência. A análise do decaimento da mediana do momento linear normalizado em função da posição k indica que o comportamento dos sistemas

granularmente desordenados pode ser descrito com precisão por uma lei de potência da forma $P(k, \epsilon) = D(\epsilon)k^{-E(\epsilon)}$. A dependência explícita de ϵ nos coeficientes do ajuste evidencia a influência direta do grau de desordem na dinâmica de propagação da amplitude da frente de onda. O parâmetro $D(\epsilon)$ regula a escala inicial do momento linear, enquanto $E(\epsilon)$ determina a taxa de decaimento ao longo da cadeia, refletindo a transição progressiva para regimes onde a dissipação e dispersão do momento linear são dominantes.

As constantes que caracterizam os ajustes das curvas devem ser diferenciadas para cada modelo matemático, evitando interpretações ambíguas dos parâmetros. No caso do ajuste quadrático, os coeficientes $A(\epsilon)$, $B(\epsilon)$ e $C(\epsilon)$ representam, respectivamente, a escala inicial do momento linear, a taxa de variação ao longo da cadeia e um termo constante que influencia o valor inicial da curva. Esse modelo é adequado para sistemas com baixa desordem, onde a propagação do momento linear segue um padrão mais regular e previsível.

Para o ajuste por lei de potência, os coeficientes $D(\epsilon)$ e $E(\epsilon)$ descrevem a amplitude inicial e o expoente de decaimento, respectivamente. Esse modelo captura o comportamento observado em sistemas altamente desordenados, onde a dissipação do momento linear se intensifica, resultando em um decaimento não linear e mais abrupto da amplitude da frente de onda ao longo da cadeia.

Nos sistemas de baixa desordem ($\epsilon \leq 1\%$), o comportamento do decaimento é melhor descrito por um ajuste quadrático, indicando que a perda de momento linear ocorre de maneira progressiva e relativamente uniforme ao longo da cadeia. Nesse regime, a transmissão de energia ainda ocorre de forma eficiente, com oscilações reduzidas e uma propagação relativamente estável da amplitude da frente de onda. Para valores mais elevados de ϵ , observa-se uma transição para um ajuste por lei de potência, caracterizando um regime onde a dispersão do momento linear se intensifica. À medida que a desordem estrutural aumenta, os valores de $E(\epsilon)$ se tornam expressivos, refletindo um decaimento mais acentuado. Esse comportamento sugere que a propagação do momento linear se torna menos eficiente, levando à fragmentação da frente de onda e à predominância de mecanismos de dissipação e dispersão.

Para desordens moderadas ($1\% \leq \epsilon \leq 3\%$), as irregularidades locais começam a impactar de forma significativa a propagação do momento linear, promovendo a fragmentação da frente de onda e intensificando a dispersão do momento ao longo da cadeia. Esse regime reflete um equilíbrio entre transmissão e dispersão, onde a propagação ainda ocorre, mas de maneira menos eficiente em comparação com sistemas de baixa desordem.

Em desordens elevadas ($\epsilon > 3\%$), a propagação passa a ser fortemente influenciada pela dissipação e pela distribuição irregular do momento linear. O sistema entra em um regime onde a energia não se mantém coesa ao longo da cadeia, resultando na formação de pulsos secundários de baixa intensidade. Esses pulsos se espalham de maneira não uniforme, contribuindo para a localização do momento linear em regiões específicas e dificultando a transmissão eficiente ao longo da cadeia.

Os coeficientes de determinação (R^2) superiores a 0,9 para a maioria dos casos analisados destacam a adequação do modelo de lei de potência, embora em níveis mais altos de desordem ($\epsilon \geq 7\%$) a dispersão dos dados indique a presença de dinâmicas mais complexas que não são completamente capturadas pelo modelo. Esses resultados são consistentes com a transição progressiva de regimes balísticos para difusivos e, eventualmente, localivos, que dependem criticamente do grau de desordem estrutural.

A descrição do comportamento por uma lei de potência que depende de ϵ permite conectar a propagação de energia às propriedades intrínsecas do sistema granular, oferecendo uma visão quantitativa robusta das dinâmicas envolvidas. Essa abordagem também possibilita a extrapolação para regimes ainda não investigados experimentalmente, fornecendo uma base

sólida para estudos futuros e aplicações tecnológicas.

Observando a curva de ajuste que melhor adequou-se ao decaimento das medianas, as equações gerais que descrevem o sistema são do tipo quadrática e potencial predominantemente. Portanto conclui-se que as equações gerais são:

$$P(k, \epsilon) \begin{cases} = A(\epsilon)k^2 + B(\epsilon)k + C(\epsilon), & 1\% \leq \epsilon \leq 7\% \\ = D(\epsilon)k^{-E(\epsilon)}, & 10\% \leq \epsilon \leq 100\%. \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\begin{cases} A_0 = \\ = D(\epsilon)k^{-E(\epsilon)}, & 10\% \leq \epsilon \leq 100\%. \end{cases} \quad (5.4)$$

Os ajustes obtidos indicam que a propagação da amplitude da frente de onda pode ser descrita por dois regimes matemáticos distintos, dependendo do grau de desordem ϵ . Para baixa desordem ($1\% \leq \epsilon \leq 7\%$), o decaimento segue um comportamento quadrático, caracterizando uma perda gradual do momento linear ao longo da cadeia. Já para altos níveis de desordem ($10\% \leq \epsilon \leq 100\%$), a propagação assume um perfil de lei de potência, sugerindo um regime onde a dissipação e a fragmentação da frente de onda são dominantes.

A próxima seção explora a relação entre esses regimes e suas implicações para a propagação do momento linear em sistemas granularmente desordenados. O objetivo é compreender como a transição entre o comportamento quadrático e o regime de potência está relacionada à dinâmica coletiva dos grãos e às interações não lineares na cadeia.

5.5 Descrição Semi-Analítica do Decaimento do Momento linear

5.5.1 Regime Quadrático

A evolução da amplitude da frente de onda ao longo da cadeia granular desordenada, para valores baixos de desordem ($0,01 \leq \epsilon \leq 0,07$), pode ser ajustada por uma função quadrática da forma:

$$P(k, \epsilon) = A(\epsilon)k^2 + B(\epsilon)k + C(\epsilon), \quad (5.5)$$

onde os coeficientes $A(\epsilon)$, $B(\epsilon)$ e $C(\epsilon)$ dependem do grau de desordem ϵ . Esse ajuste descreve a curvatura observada no decaimento da amplitude da frente de onda, especialmente para baixos valores de ϵ , onde a dissipação de energia ocorre de maneira mais gradual e a propagação da onda primária mantém uma estrutura bem definida.

O comportamento quadrático se justifica pelo fato de que, em sistemas granularmente desordenados com perturbações relativamente pequenas, a dispersão do momento linear segue um padrão regular de desaceleração progressiva. Pequenas variações nas propriedades dos grãos resultam em um acúmulo gradual de efeitos dissipativos, os quais modificam a propagação da frente de onda sem introduzir variações abruptas no transporte do momento linear. Isso conduz a um decaimento não linear, mas ainda dominado por um comportamento polinomial de segunda ordem.

A adequação do ajuste quadrático é reforçada pelos altos valores de R^2 obtidos para os casos de baixa desordem, indicando uma forte correspondência entre o modelo e os dados experimentais. Essa aproximação é útil para descrever a transição entre um regime onde a propagação da frente de onda ocorre com menor dissipação e um regime onde a dispersão do momento linear se intensifica. Além disso, o ajuste quadrático estabelece uma base para a análise dos efeitos da desordem na propagação de ondas mecânicas em cadeias granulares, servindo como um modelo inicial para a descrição do sistema em regimes de baixa desordem.

No entanto, à medida que ϵ aumenta, o modelo quadrático começa a perder precisão, pois a dissipação de energia se torna mais significativa e a interação entre os grãos gera padrões de atenuação mais complexos, o que exige um modelo mais flexível para descrever a propagação do pulso de forma mais realista.

A Figura 5.8 apresenta a aplicação do ajuste quadrático à evolução da amplitude da frente de onda em função da posição k , para diferentes valores de baixa desordem ($1\% \leq \epsilon \leq 7\%$). Os pontos representam os valores da mediana do momento linear normalizado obtidos nas simulações, enquanto as curvas correspondem ao modelo quadrático ajustado. A boa concordância entre os dados e o ajuste reforça a validade desse modelo para desordens reduzidas.

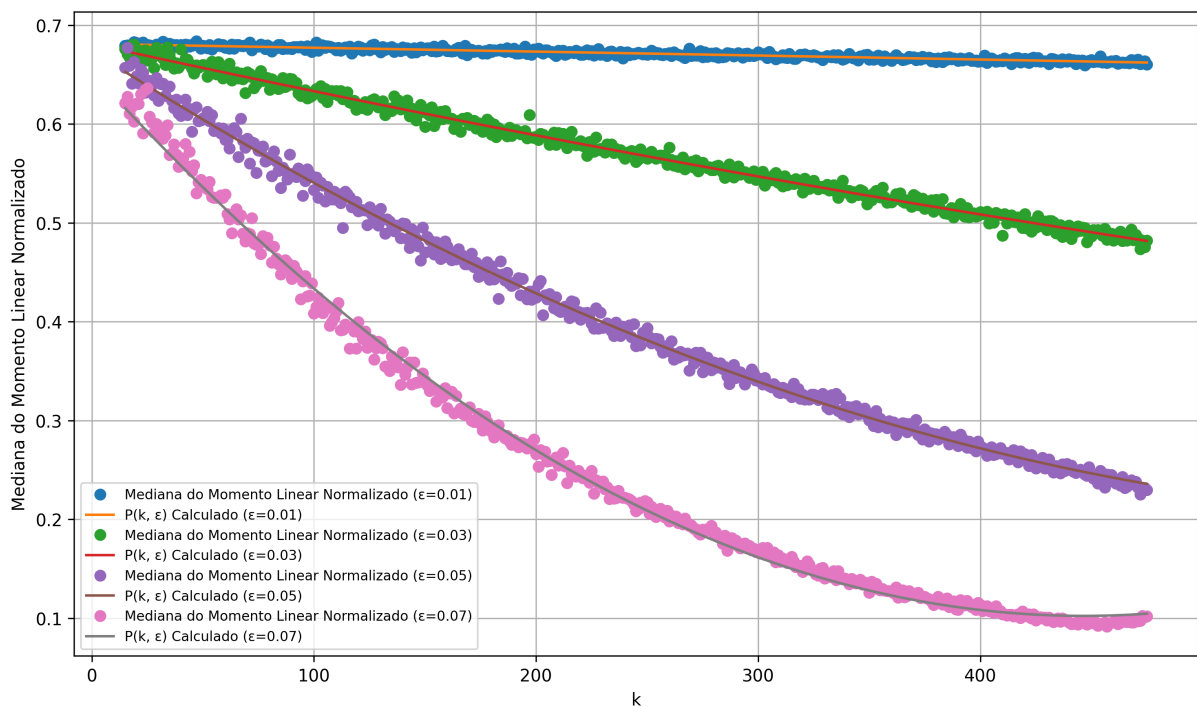


Figura 5.8: Aplicação da equação quadrática $P(k, \epsilon)$ à mediana do momento linear normalizado, para diferentes valores de ϵ no regime de baixa desordem.

Comportamento dos coeficientes do regime quadrático

A Figura 5.9 apresenta a variação dos coeficientes $A(\epsilon)$, $B(\epsilon)$ e $C(\epsilon)$, ajustados para o modelo quadrático de decaimento da amplitude da frente de onda em função do grau de desordem ϵ . Esses coeficientes descrevem como a estrutura do ajuste quadrático é modificada conforme a desordem aumenta.

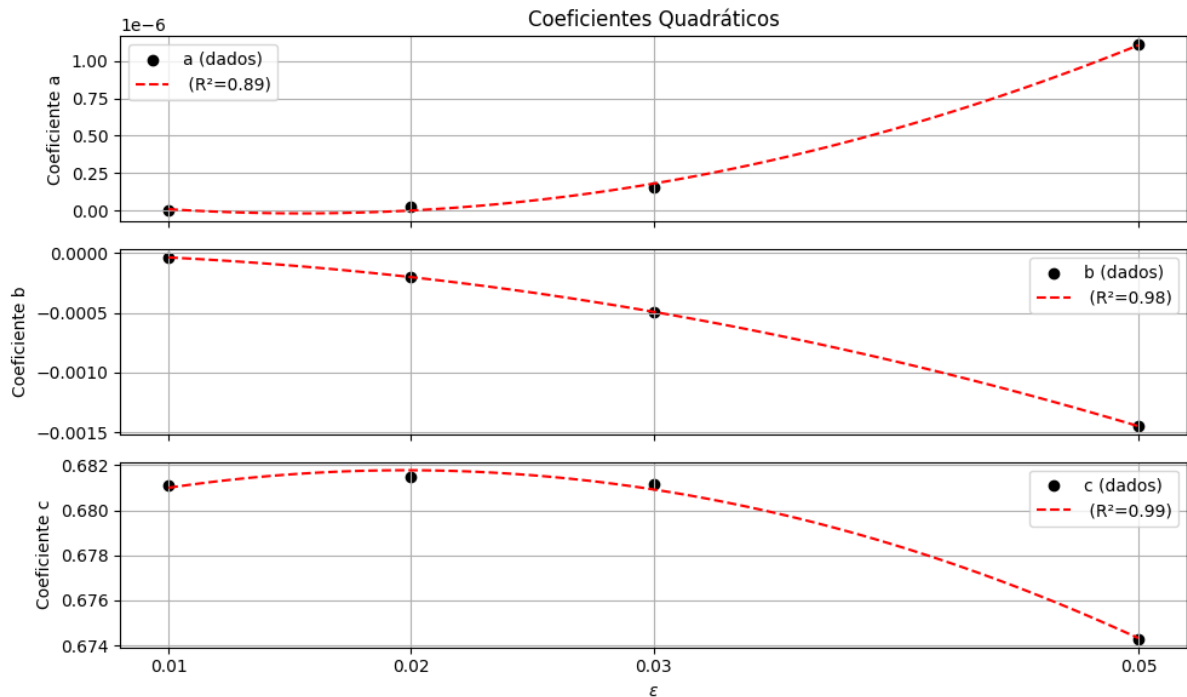


Figura 5.9: Comportamento dos coeficientes da equação $P(k, \epsilon)$ quadrática em função do grau de desordem ϵ .

No primeiro painel, o coeficiente $A(\epsilon)$ exibe um crescimento exponencial com o aumento de ϵ , seguindo a relação:

- $A(\epsilon) = A_0 e^{\lambda_A \epsilon}$ onde: $A_0 = 5.621 \times 10^{-8}$ e $\lambda_A \approx 56$

Esse comportamento indica que, para níveis mais elevados de desordem, o termo quadrático passa a desempenhar um papel mais significativo na modelagem da dissipação do momento linear ao longo da cadeia.

O segundo painel ilustra a evolução do coeficiente $B(\epsilon)$, que apresenta uma tendência de decréscimo conforme ϵ aumenta, seguindo uma relação aproximadamente linear:

- $B(\epsilon) = B_0 + \lambda_B \epsilon$ onde: $B_0 = 5.745 \times 10^{-4}$ e $\lambda_B = 0.04176$

Isso implica que, à medida que a desordem se intensifica, a inclinação da curva de decaimento se torna mais acentuada, refletindo um efeito de amortecimento mais pronunciado na propagação do momento linear. O ajuste indica que o coeficiente $B(\epsilon)$ tem forte dependência de ϵ , demonstrando que a relação entre os parâmetros dinâmicos e a intensidade da desordem.

Por fim, o terceiro painel exibe a evolução do coeficiente $C(\epsilon)$, que permanece praticamente constante para baixos valores de ϵ e começa a decrescer suavemente conforme a desordem aumenta, sendo ajustado pela relação:

- $C(\epsilon) = C_0 - \lambda_C \epsilon^2$ onde $C_0 \approx 0.7$ e $\lambda_C \approx 6.1$

Esse comportamento sugere que, em sistemas com baixa desordem, o termo independente no modelo quadrático se mantém relativamente estável, enquanto em altos níveis de desordem há uma leve influência desse coeficiente na modificação da estrutura do decaimento.

Os coeficientes ajustados refletem uma descrição quantitativa precisa do comportamento do sistema granular, como evidenciado pelos altos valores de R^2 , próximos de 0.99 em todos os casos. Isso indica que a regressão quadrática fornece um ajuste extremamente preciso para descrever a dissipação do momento linear normalizado, especialmente em regimes de baixa e média desordem.

5.5.2 Regime Potência

Para desordens mais elevadas, o decaimento da amplitude da frente de onda do momento linear normalizado ao longo da cadeia granular é mais adequadamente descrito por uma função tipo lei de potencia, da forma:

$$P(k, \epsilon) = D(\epsilon)k^{-E(\epsilon)}, \quad (5.6)$$

onde $D(\epsilon)$ e $E(\epsilon)$ são coeficientes ajustáveis que dependem do grau de desordem ϵ . O comportamento de lei de potência emerge naturalmente em sistemas onde há forte dispersão e redistribuição do momento linear, impedindo a propagação homogênea da frente de onda e favorecendo mecanismos de fragmentação progressiva.

Esse ajuste é particularmente adequado para regimes de desordem elevada porque, nessas condições, a atenuação do momento linear ocorre de maneira abrupta, com uma perda significativa nas primeiras interações da cadeia. Esse comportamento é característico de sistemas altamente não lineares, onde as interações entre os grãos são predominantemente dissipativas e a energia é redistribuída de forma irregular. A dependência da equação em $k^{-E(\epsilon)}$ indica uma transição para um regime onde o transporte do momento linear se torna altamente ineficiente. Em vez de uma propagação coerente ao longo da cadeia, a transmissão ocorre por meio de múltiplas interações locais, levando a um comportamento difusivo para valores moderados de ϵ e localizado para desordens mais extremas. Conforme ϵ cresce, o expoente $E(\epsilon)$ aumenta, refletindo que o decaimento do momento linear ocorre em escalas espaciais cada vez menores dentro da cadeia.

O ajuste por lei de potência está de acordo com modelos teóricos que descrevem a propagação do momento linear em sistemas granularmente desordenados, evidenciando que a desordem estrutural não apenas reduz a eficiência do transporte, mas também impõe um comportamento dinâmico regido por leis de escala típicas de sistemas complexos.

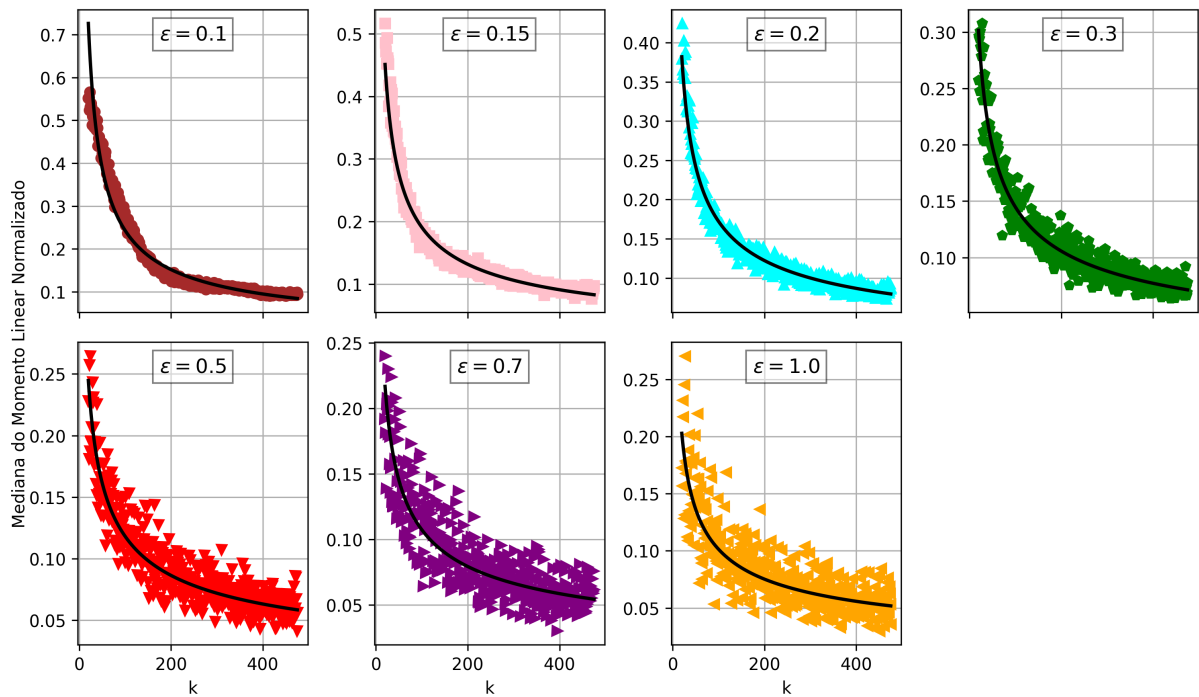


Figura 5.10: Aplicação da equação $P(k, \epsilon)$ potência na mediana do momento linear normalizado.

Comportamento dos coeficientes do regime lei de potência

A Figura 5.11 apresenta a variação dos coeficientes $D(\epsilon)$ e $E(\epsilon)$, bem como os ajustes obtidos para o modelo de lei de potência em função do grau de desordem ϵ . Esses coeficientes são essenciais para descrever como a propagação do momento linear normalizado é afetada pela desordem estrutural da cadeia granular.

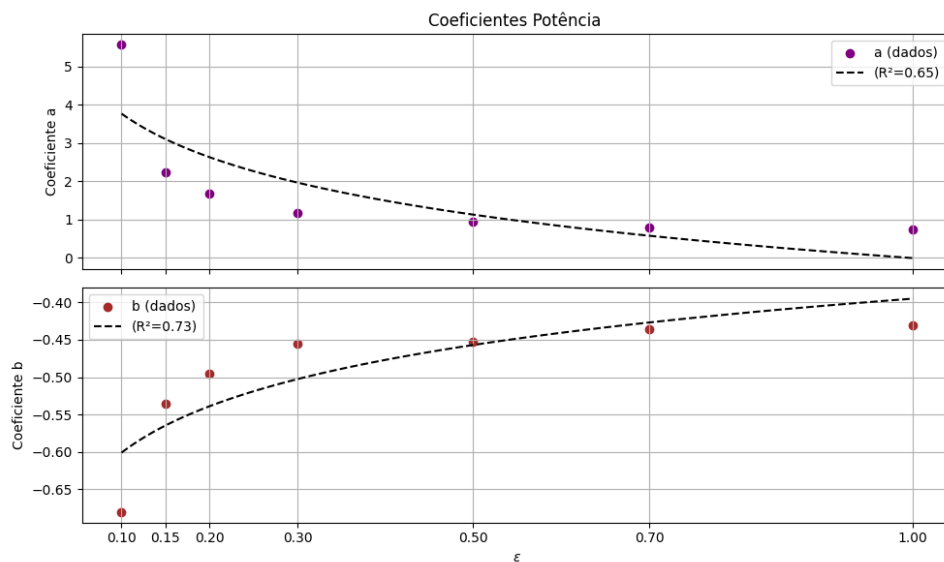


Figura 5.11: Comportamento dos coeficientes da equação $P(k, \epsilon) = D(\epsilon)k^{-E(\epsilon)}$ em função do grau de desordem ϵ .

No primeiro painel, observa-se que o coeficiente $D(\epsilon)$, que representa a amplitude inicial da frente de onda, decresce conforme a desordem aumenta. Esse comportamento indica

que, para altos valores de ϵ , a energia inicial da propagação diminui, sugerindo uma maior dissipação nas primeiras interações da cadeia. O ajuste segue um comportamento hiperbólico, descrito pela função:

- $D(\epsilon) = \frac{D_0}{1+\lambda_D \epsilon}$ onde: $D = 2.024 \times 10^8$ e $\lambda_d = 4.61 \times 10^8$

Essa relação implica que o impacto da desordem não é linear, mas sim assintótico, ou seja, para valores muito elevados de ϵ , $D(\epsilon)$ se estabiliza em um regime onde a amplitude inicial da frente de onda não pode mais decair significativamente.

O segundo painel exibe a evolução do coeficiente $E(\epsilon)$, que determina a taxa de decaimento da frente de onda ao longo da cadeia. Observa-se que esse coeficiente cresce monotonicamente com ϵ , indicando que quanto maior a desordem, mais rápida é a atenuação do momento linear normalizado. O ajuste segue um comportamento logarítmico, descrito por:

- $E(\epsilon) = E_0 + \lambda_E \ln(\epsilon)$ onde : $E_0 \approx 0.4$ e $\lambda_E = 0.087$

Esse resultado sugere que o crescimento da taxa de dissipação não ocorre de forma abrupta, mas sim de maneira logarítmica, reforçando a ideia de que a desordem impõe uma transição progressiva entre transporte eficiente e fragmentado. Os coeficientes ajustados fornecem uma descrição quantitativa da influência da desordem sobre a propagação do momento linear normalizado. O coeficiente de determinação (R^2) obtido para os ajustes varia entre 0.65 e 0.73, indicando que o modelo de potência captura a tendência geral do sistema, embora haja variações inerentes associadas à complexidade da cadeia granular desordenada.

5.6 Variação de Velocidade

A análise da propagação de pulsos em cadeias granularmente desordenadas é sensível não apenas às propriedades estruturais dos grãos, mas também às condições iniciais impostas ao sistema, como a velocidade inicial aplicada aos grãos. A velocidade inicial desempenha um papel fundamental na dinâmica do sistema, influenciando diretamente a amplitude das forças de contato, o comportamento não linear das interações e os regimes de propagação resultantes. Em particular, a magnitude da velocidade inicial pode determinar se o sistema opera predominantemente em regimes balísticos, difusivos ou localizados.

No modelo granular considerado, a relação entre a velocidade inicial e o transporte de energia é mediada pelas características não lineares das forças de contato descritas pelo modelo de Hertz. Velocidades iniciais elevadas tendem a amplificar a intensidade das forças compressivas, promovendo a formação de pulsos de alta energia, que podem ser mais resistentes à fragmentação e à dissipação, dependendo do grau de desordem do sistema. Por outro lado, velocidades iniciais mais baixas geralmente resultam em pulsos de menor intensidade, mais susceptíveis à dispersão e à influência da desordem.

A investigação de como diferentes velocidades iniciais afetam a propagação de pulsos em sistemas granularmente desordenados pode auxiliar na compreensão da relação entre os cenários de perturbação do sistema e os regimes dinâmicos observados. Esse estudo também fornece insights sobre o controle e a otimização do transporte de energia em sistemas reais, como amortecedores de impacto e dispositivos de absorção de energia. Na análise que segue, são explorados os efeitos de diferentes valores de velocidade inicial, com o objetivo de identificar padrões dinâmicos específicos e as transições entre os regimes de propagação.

A variação da velocidade inicial do grão impactante influencia diretamente a propagação da amplitude da frente de onda na cadeia granular. Para investigar se essa variação

altera significativamente a dinâmica da propagação, foram realizadas simulações para os casos de $\epsilon = 5\%$ e $\epsilon = 50\%$, considerando velocidades iniciais de $v = (0.1, 1, 10)$ m/s para um material de aço inoxidável. O objetivo é determinar se a velocidade inicial do impacto afeta a forma do pulso mecânico ao longo da cadeia, além da variação esperada na escala temporal. Os resultados estão apresentados na Figura 5.12.

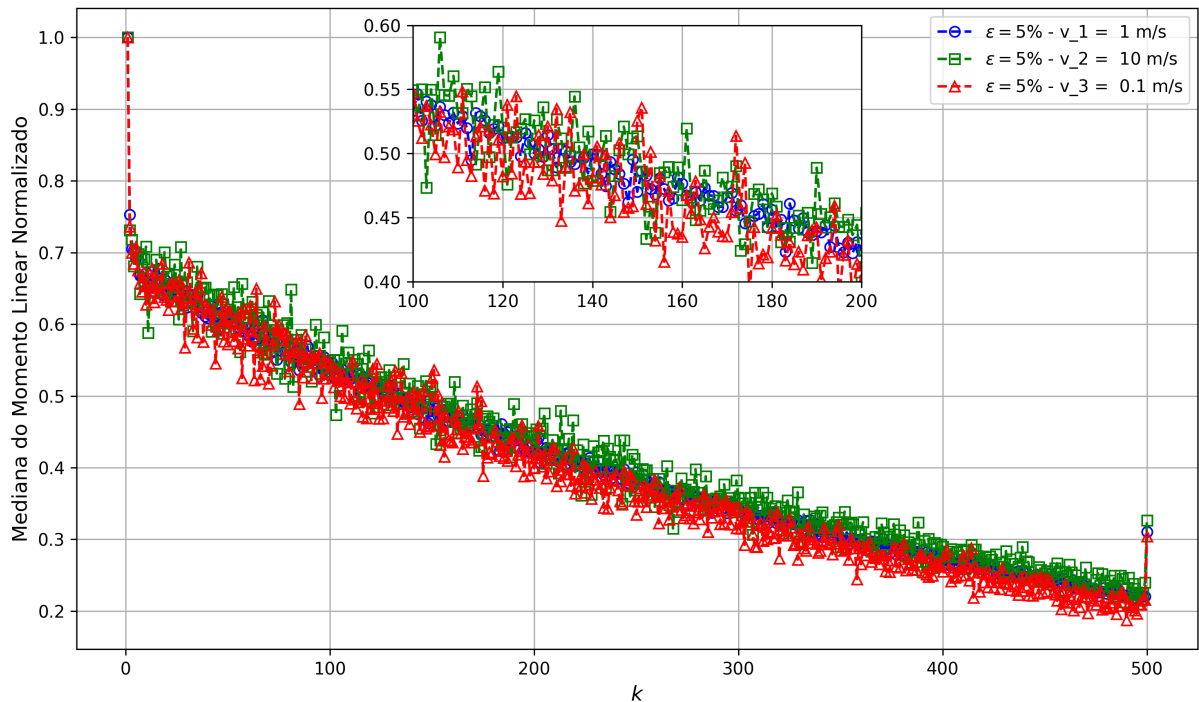


Figura 5.12: Decaimento da mediana do momento linear normalizado para desordem de $\epsilon = 5\%$.

Para o nível de desordem moderada ($\epsilon = 5\%$), o comportamento dinâmico da cadeia granular é caracterizado pela propagação do pulso mecânico com baixa atenuação, embora ainda apresente dispersão ao longo da cadeia. O gráfico evidencia que, apesar da presença de irregularidades estruturais, a frente de onda mantém sua coerência global, com um decaimento progressivo, mas sem fragmentação abrupta do momento linear. Esse padrão sugere um regime de transporte predominantemente coerente, no qual a energia se propaga sem perda significativa de integridade estrutural. No entanto, a dispersão do pulso ao longo da cadeia ainda está presente, refletindo os efeitos cumulativos das interações não lineares entre os grãos.

As condições de desordem controlada favorecem uma interação relativamente homogênea entre os grãos, reduzindo os efeitos de reflexões e irregularidades. Nesse contexto, as forças de contato, descritas pelo modelo de Hertz, permitem que a frente de onda se propague com baixa dispersão, mantendo um padrão organizado ao longo da cadeia. A transmissão do momento linear ocorre sem fragmentação significativa, sendo apenas moderadamente influenciada pelas flutuações estruturais entre os grãos.

A comparação entre velocidades iniciais ($v = 1$ m/s e $v = 10$ m/s) revela que, embora a maior velocidade inicial intensifique temporariamente as forças compressivas, o comportamento qualitativo da propagação permanece semelhante para ambas as condições. Esse resultado indica que, em desordem moderada, o transporte do momento linear é relativamente robusto a variações na velocidade inicial, sendo a taxa de dissipação predominantemente determinada pelo grau de desordem estrutural e não pela condição inicial de impacto.

No caso de alta desordem ($\epsilon = 50\%$), o comportamento dinâmico da cadeia granular sofre alterações significativas devido às variações substanciais nos parâmetros físicos dos grãos, como massa e raio. A Figura 5.13 evidencia que a propagação da amplitude da frente de onda ao longo da cadeia é fortemente dispersiva, com fragmentação acentuada do pulso inicial e redistribuição irregular da energia. Esse comportamento caracteriza um regime altamente não linear, no qual a energia transportada pelo pulso não se propaga de maneira uniforme, mas sim de forma fragmentada, com oscilações locais que podem confinar parte da energia em regiões específicas da cadeia.

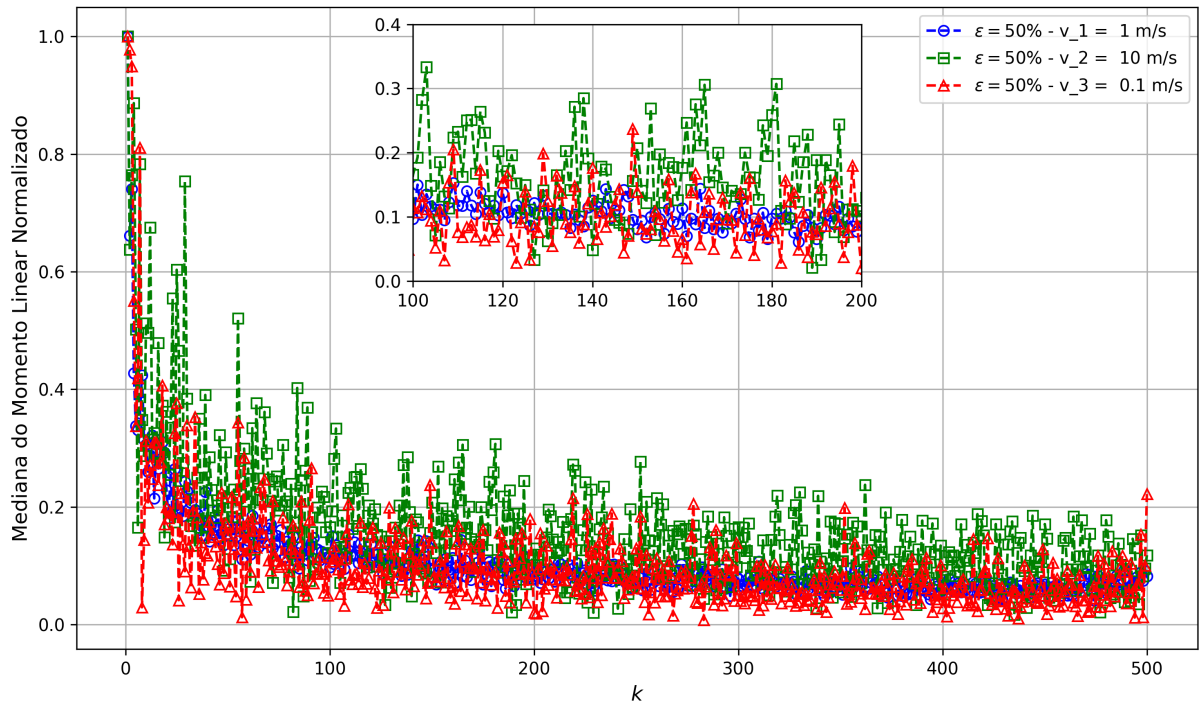


Figura 5.13: Decaimento da mediana do momento linear normalizado para desordem de $\epsilon = 50\%$.

Quando o nível de desordem aumenta para $\epsilon = 50\%$, o sistema granular passa a exibir um comportamento dinâmico dominado pela fragmentação e dispersão do pulso inicial. A propagação do momento linear, observada no gráfico, é altamente dispersiva, com uma dissipação significativa de energia ao longo da cadeia. Essa dinâmica indica a transição para um regime difusivo-localitivo, no qual a irregularidade estrutural desempenha um papel predominante na limitação do transporte.

A alta desordem estrutural resulta em variações substanciais nos parâmetros físicos dos grãos, gerando barreiras energéticas que dificultam a transmissão uniforme do pulso. O efeito combinado dessas barreiras leva à formação de subpulsos que perdem intensidade ao interagir com os grãos subsequentes. A energia transportada se dissipa rapidamente e, em muitos casos, é confinada em regiões específicas da cadeia, fenômeno associado à localização de Anderson em sistemas desordenados (ANDERSON, 1958).

Para velocidades iniciais maiores ($v = 10$ m/s), o sistema demonstra uma propagação inicial mais enérgica; no entanto, a alta desordem rapidamente neutraliza esse efeito, impondo limites severos ao transporte. Já para velocidades iniciais menores ($v = 1$ m/s), a fragmentação do pulso é ainda mais acentuada, com menor transferência de energia ao longo da cadeia. Em ambos os casos, o gráfico indica que o tempo de simulação não foi suficiente para que o

sistema alcançasse o equilíbrio dinâmico, tendo que ser alterado para 30 ms, demonstrando que para desordens elevadas e velocidades diferentes, a alteração mais significativa é na escala temporal da cadeia granular.

Esse regime de alta desordem ilustra como o transporte balístico observado em $\epsilon = 5\%$ é completamente suprimido, resultando em uma dinâmica caótica e altamente dependente das condições iniciais. Esse comportamento difusivo-locativo é especialmente relevante para aplicações em dispositivos de dissipação de energia, onde a fragmentação e o confinamento são desejáveis. No entanto, para sistemas que exigem transporte eficiente de energia, a alta desordem estrutural representa uma limitação fundamental, transformando o sistema em um meio altamente dispersivo.

5.7 Variação de Material

A escolha dos materiais que compõem os grãos em cadeias granularmente desordenadas desempenha um papel fundamental na dinâmica de propagação de energia. Propriedades como densidade, módulo de elasticidade, coeficiente de restituição e rigidez de contato afetam diretamente os mecanismos de interação entre partículas e, conseqüentemente, os regimes de transporte energético. Sistemas compostos por diferentes materiais oferecem uma oportunidade única de investigar como a composição do meio pode ser explorada para otimizar ou controlar fenômenos como dissipação, fragmentação e localização de energia.

No contexto granular, o modelo de Hertz descreve a força de contato entre partículas em função de suas propriedades materiais e geométricas. Para materiais de maior rigidez, como aço inoxidável, as forças de contato geradas durante a propagação de ondas tendem a ser mais intensas, resultando em maior eficiência de transporte em regimes balísticos. Por outro lado, materiais menos rígidos, como borracha, promovem maior dissipação de energia, favorecendo regimes difusivos. Esses contrastes ressaltam a relevância de compreender o impacto das propriedades materiais nos comportamentos dinâmicos.

Nesta seção, apresentamos os resultados de simulações realizadas com cadeias compostas por diferentes materiais, incluindo aço inoxidável, tungstênio e Delrin, avaliando como a propagação de pulsos é influenciada por suas propriedades intrínsecas. A seguir apresentaremos os gráficos da simulação que são resultados para os diferentes materiais na cadeia granular, realizou-se para $\epsilon = 5\%$ e $\epsilon = 50\%$ com objetivo de observação em amopbs os cenários de desordem moderada e desordem elevada.

A Figura 5.14 apresentado compara o decaimento da mediana do momento linear normalizado ao longo da cadeia granular para diferentes materiais: aço inoxidável, tungstênio e Delrin, todos sob o mesmo grau de desordem $\epsilon = 5\%$. Essa análise permite avaliar como as propriedades intrínsecas de cada material influenciam a dinâmica da propagação de pulsos em cadeias granularmente desordenadas.

A tabela 5.1 mostra as propriedades dos materiais utilizados para a simulação.

Material	Módulo de Elasticidade (GPa)	Coeficiente de Poisson	Densidade (kg/m ³)
Aço Inoxidável	200	0.30	7850
Tungstênio	411	0.28	19250
Delrin (POM)	3.6	0.35	1410

Tabela 5.1: Constantes materiais utilizadas no modelo.

Observa-se que, para $\epsilon = 0,05$, o comportamento geral do decaimento é similar entre os materiais analisados, caracterizando um regime predominantemente balístico. No entanto,

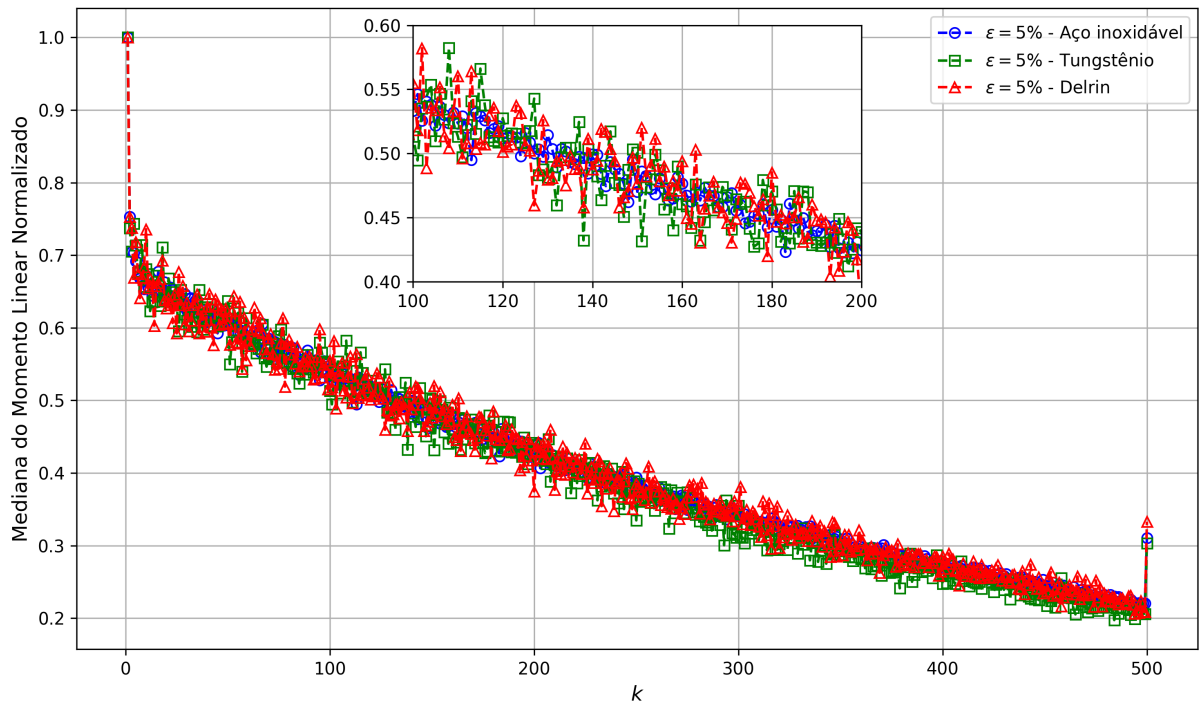


Figura 5.14: Decaimento da mediana do momento linear normalizado para $\epsilon = 5\%$ para diferentes materiais.

existem diferenças sutis na taxa de atenuação, que estão relacionadas às propriedades físicas de cada material, como densidade, módulo de elasticidade e coeficiente de restituição.

O aço inoxidável apresenta uma propagação relativamente estável, com um decaimento ligeiramente mais lento em comparação aos outros materiais. Isso se deve ao seu alto módulo de elasticidade e densidade moderada, que promovem uma transmissão eficiente da energia ao longo da cadeia. Esses fatores garantem que as forças de contato descritas pelo modelo de Hertz preservem a integridade do pulso durante a propagação.

Por outro lado, o tungstênio, devido à sua alta densidade e rigidez, apresenta uma taxa de decaimento mais acentuada nos primeiros grãos da cadeia. Essa característica é atribuída à maior intensidade das forças de contato iniciais, que aumentam a dissipação energética local, especialmente em regiões onde a desordem causa maior concentração de energia. Apesar disso, a robustez estrutural do tungstênio permite que o pulso mantenha sua coesão em distâncias mais longas, ainda dentro de um regime balístico.

O Delrin, por ser um material mais flexível e menos denso, exibe o decaimento mais rápido entre os materiais analisados. A menor rigidez reduz a eficiência da transmissão de energia ao longo da cadeia, resultando em maior dispersão do pulso. Essa característica é especialmente evidente em escalas maiores de k , onde a energia restante é insuficiente para manter a propagação coesa. A flexibilidade intrínseca do Delrin favorece um início de transição para regimes difusivos em cadeias mais longas ou em tempos de simulação mais extensos.

A inserção do gráfico em detalhe (zoom) revela que, embora o comportamento geral dos materiais seja semelhante, as diferenças nos padrões de propagação tornam-se mais perceptíveis nas regiões intermediárias da cadeia. Isso reflete como as propriedades específicas de cada material interagem com a desordem estrutural para moldar a dinâmica do sistema.

Para o caso de $\epsilon = 50\%$, a alta desordem estrutural altera drasticamente o comportamento dinâmico da cadeia granular. O gráfico evidencia que o momento linear normalizado

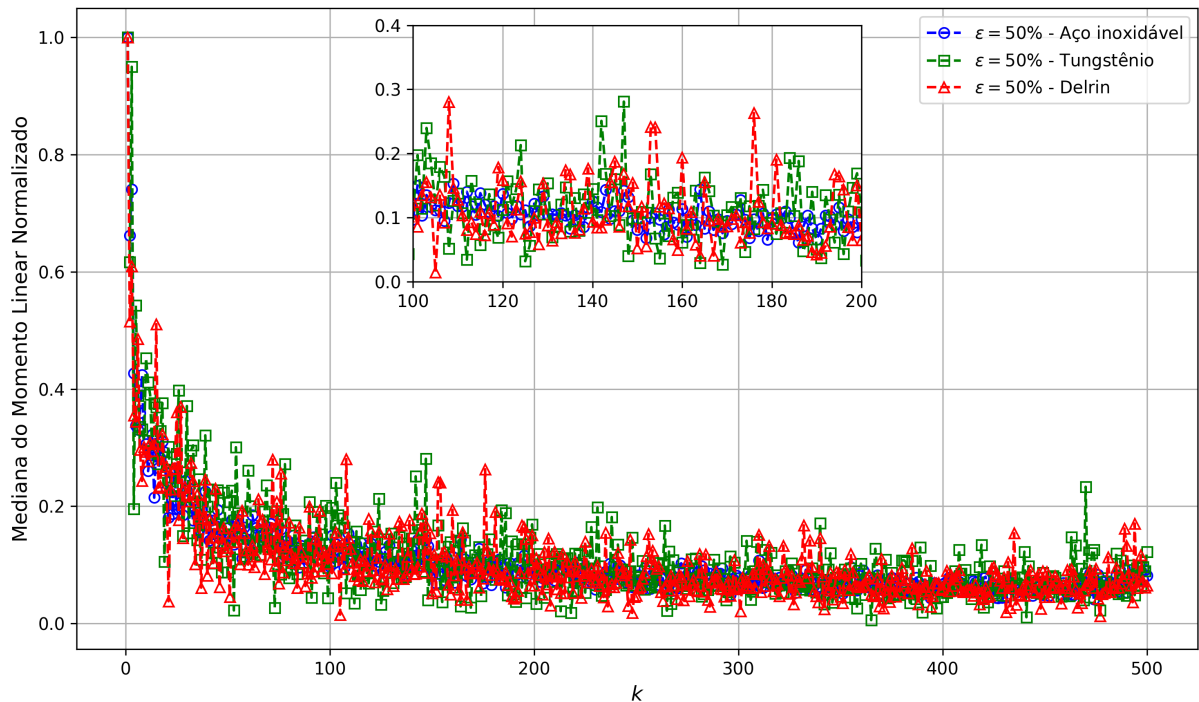


Figura 5.15: Decaimento da mediana do momento linear normalizado para $\epsilon = 50\%$ para diferentes materiais.

apresenta um decaimento acentuado logo nos primeiros grãos, refletindo a intensificação da dispersão e fragmentação do pulso inicial. Esse comportamento é característico de um regime difusivo-locativo, no qual a energia transportada pelo pulso é rapidamente dissipada e parcialmente confinada em regiões específicas da cadeia.

O comportamento observado varia de acordo com o material da cadeia granular. Para o aço inoxidável, que possui densidade intermediária e alto módulo de elasticidade, o transporte de energia é menos afetado em comparação aos outros materiais. Embora a desordem ainda impeça a propagação eficiente ao longo de toda a cadeia, a rigidez do aço favorece uma maior preservação da coesão do pulso inicial, especialmente nos primeiros instantes da propagação.

O tungstênio, devido à sua alta densidade e rigidez, apresenta um padrão dinâmico distinto. A energia do pulso inicial é fortemente concentrada nos grãos iniciais, resultando em um rápido decaimento da mediana do momento linear. Esse comportamento sugere que a alta densidade do tungstênio exacerba os efeitos locais de dispersão, dificultando ainda mais a propagação coesa do pulso ao longo da cadeia.

O Delrin, material caracterizado por sua flexibilidade e baixa densidade, exibe o maior grau de fragmentação e dispersão entre os materiais analisados. A baixa rigidez intrínseca do Delrin reduz a eficiência do transporte energético, levando a uma dissipação acelerada da energia transportada pelo pulso. Esse comportamento destaca a sensibilidade do transporte às propriedades materiais em condições de alta desordem.

Conclusão

Este trabalho investigou a propagação de ondas em cadeias granulares desordenadas, focando no impacto da desordem estrutural na dissipação do momento linear e na dinâmica da frente de onda. Por meio de simulações numéricas baseadas no modelo de interação de Hertz e no método de integração preditor-corretor, foi possível caracterizar os regimes de propagação em função do grau de desordem (ϵ), analisar a influência das propriedades materiais e propor descrições semi-analíticas para o decaimento da amplitude da frente de onda.

Os resultados demonstraram que a desordem nos raios das partículas desempenha um papel crucial na dinâmica do sistema. Para baixos níveis de desordem ($\epsilon \leq 10\%$), a frente de onda mantém sua coerência, com um decaimento gradual descrito por um ajuste quadrático. Esse regime é caracterizado por uma propagação quase balística, onde a energia é transmitida de forma eficiente ao longo da cadeia, embora com uma dissipação moderada devido às pequenas irregularidades estruturais. Esse comportamento é particularmente relevante para aplicações que demandam controle preciso da propagação de energia, como em dispositivos de amortecimento ou materiais inteligentes.

Em contraste, para altos níveis de desordem ($10\% \leq \epsilon \leq 100\%$), observou-se uma fragmentação intensa da frente de onda, seguindo um decaimento descrito por uma lei de potência. Nesse regime, a energia é rapidamente dispersa e localizada em regiões específicas da cadeia, caracterizando um comportamento difusivo-localitivo. Esse fenômeno está associado à interferência destrutiva causada pelas variações aleatórias nos raios das partículas, que impedem a formação de pulsos coerentes e promovem a dissipação acelerada da energia. Esses resultados são consistentes com a teoria de localização de Anderson em sistemas desordenados e têm implicações diretas para o desenvolvimento de materiais granulares destinados à absorção de impactos ou ao isolamento vibracional.

A análise da influência das propriedades materiais revelou que a rigidez dos grãos afeta a dispersão da energia, mas não altera significativamente o padrão global do decaimento. Materiais mais rígidos, como o aço inoxidável, apresentaram uma propagação mais eficiente em regimes de baixa desordem, enquanto materiais menos rígidos, como o Delrin, exibiram maior dissipação. No entanto, em altos níveis de desordem, todos os materiais convergiram para um comportamento dominado pela fragmentação e localização da energia, independentemente de suas propriedades intrínsecas.

Além disso, a variação da velocidade inicial do impacto mostrou que, embora escalas temporais possam ser afetadas, o comportamento qualitativo da propagação é determinado principalmente pelo grau de desordem estrutural. Isso reforça a ideia de que a desordem é o fator predominante na dinâmica do sistema, enquanto as condições iniciais atuam como moduladores secundários.

Em síntese, este trabalho contribui para a compreensão da dinâmica de sistemas granularmente desordenados, destacando a transição entre regimes de propagação coerente e fragmentada em função da desordem estrutural. Os resultados obtidos fornecem bases teóricas e numéricas para o projeto de materiais e dispositivos que explorem a desordem como ferramenta para controlar a propagação de energia. Aplicações potenciais incluem o

desenvolvimento de amortecedores de impacto, barreiras sísmicas e metamateriais acústicos, onde a manipulação da desordem pode ser utilizada para otimizar a dissipação e a absorção de energia.

Por fim, este estudo abre caminho para investigações futuras, como a extensão do modelo para cadeias bidimensionais e tridimensionais, a inclusão de efeitos de amortecimento mais complexos e a validação experimental dos resultados em configurações controladas. A integração entre simulações numéricas, modelos teóricos e experimentos práticos será essencial para consolidar o conhecimento sobre a propagação de ondas em sistemas granulares e suas aplicações tecnológicas.

Referências Bibliográficas

- [1] DYSON, F. J. (1953). **The Dynamics of a Disordered Linear Chain.** *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 9(6), 123.
- [2] ANDERSON, P. W. (1958). **Absence of Diffusion in Certain Random Lattices.** *Physical Review*, 109(5), 1492.
- [3] SCHMIDT, H. (1957). **Disordered One-Dimensional Crystals.** *Physical Review*, 105(2), 425-441.
- [4] NESTERENKO, V. F. (1983). **Propagation of Nonlinear Compression Pulses in Granular Media.** *Zhurnal Prikladnoi Mekhaniki i Tekhnicheskoi Fiziki*, 24(5), 136-148.
- [5] PONSON, L., BOECHLER, N., LAI, Y.M., POTER, M.A., KEVREKIDIS, P.G., & DARAIO, C. (2010). **Nonlinear waves in disordered diatomic granular chains** *Physical Review E*, 82, 021301.
- [6] COSTE, C., & GILLES, B. (1999). **On the Validity of Hertz Contact Law for Granular Material Acoustics.** *The European Physical Journal B*, 7(2), 155-168.
- [7] TAGHIZADEH, K., SHRIVASTAVA, R. K., & LUDING, S. (2021). **Stochastic model for energy propagation in disordered granular chains.** *Materials*, 14(7), 1815.
- [8] MANCIU, M., SEN, S., & HURD, A. J. (2001). **Impulse Propagation in Dissipative and Disordered Chains.** *Physica D*, 157(3), 226-240.
- [9] KIM, E., MARTÍNEZ, A. J., PHENISEE, S. E., et al. (2018). **Direct Measurement of Superdiffusive Energy Transport in Disordered Granular Chains.** *Nature Communications*, 9, 640.
- [10] ROSAS, A., & LINDENBERG, K. (2018). **Pulse Propagation in Granular Chains.** *Physics Reports*, 1993, 1-52.
- [11] ROSAS, A., ROMERO, A. H., NESTERENKO, V. F., & LINDENBERG, K. (2007). **Observation of Two-Wave Structure in Strongly Nonlinear Dissipative Granular Chains.** *Physical Review Letters*, 98(16), 164301.
- [12] SEN, S., HONG, J., BANG, J., AVALOS, E., & DONEY, R. (2008). **Solitary Waves in the Granular Chain.** *Physics Reports*, 462(1), 21-66.
- [13] FRATERNALI, F., PORTER, M. A., & DARAIO, C. (2021). **Optimal Design of Composite Granular Protectors.**
- [14] KERKIC, A., & VAN GORDER, R. A. (2018). **Wave Propagation Across Interfaces Induced by Different Interaction Exponents in Ordered and Disordered Hertz-like Granular Chains.** *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 384-385, 18-33.

-
- [15] ACHILLEOS, V., THEOCHARIS, G., & SKOKOS, C. (2016). **Energy Transport in Granular Solids.** *Physical Review E*, 93(2), 022903.
- [16] BODYFELT, J. D., LAPTYEVA, T. V., SKOKOS, C., et al. (2011). **Nonlinear Waves in Disordered Chains.** *Physical Review E*, 84(1), 016205.
- [17] MATA, I. G., & SHEPELYANSKY, D. L. (2009). **Nonlinear Delocalization on Disordered Stark Ladders.** *The European Physical Journal B*, 71(4), 555–560.
- [18] LAWNEY, B. P., & LUDING, S. (2014). **Frequency Filtering in Disordered Granular Chains.** *Acta Mechanica*, 225(8), 2385–2407.
- [19] PÖSCHEL, T., & BRILLIANTOV, N. V. (2001). **Extremal Collision Sequences of Particles on a Line: Optimal Transmission of Kinetic Energy.** *Physical Review E*, 63(2), 021505.
- [20] HIRAIWA, M., WALLEN, S. P., & BOECHLER, N. (2017). **Acoustic Wave Propagation in Disordered Microscale Granular Media.** *Granular Matter*, 19(62), 1–10.
- [21] HASAN, M. A., PICHLER, L., & VAKAKIS, A. F. (2014). **Effects of Uncertainties on Pulse Attenuation in Dimer Granular Chains.** *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 26(3), 401–416.
- [22] ROSAS.A, & LINDENBERG.K. (2004).**Pulse propagation in chains with nonlinear interactions.** *Physical Review E*, 69,016615.
- [23] JOB,S. MELO, F. SOKOLOW, A. SEN, S. (2005).**Ho Hertzian Solitary Waves Interact with Boundaries in a 1D Granular Medium** *Physical Review Letters*, PRL 94,178002.
- [24] LEONARD,A. & DARAIO,C. (2012).**Stress Wave Anisotropy in Centered Square Highly Nonlinear Granular System.** *Physical Review Letters*, PRL 108,214301.
- [25] VAKAKIS.A.F., GENDELMAN.O.V., BERGMAN.L.A.,MC FARLAND. D. M., KERSCHEN.G., & LEE.Y.S. (2009).**Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems.**
- [26] THEOCHARIS.G., BOECHLER.N. & DARAIO.C. (2012).**Nonlinear Periodic Phononic Structures and Granular Crystals.** *In:,(org.) Acoustic Metamaterials and Phononic Crystals.*Springer Series in Solid-State Science. pp.217-251.
- [27] MANJUNATH.M., AWASTHI.A.P. & GEUBELLE.P.H. (2012).**Wave propagation in random granular chains.***Physical Review E*. vol.**85**, PRL 031308.
- [28] ESPINOSA.M., CALIUS.E.P., DODD.G., DAS.R. (2024).**Pulse mitigation in ordered granular structures: from granular chains to granular networks.***Physical Review.*
- [29] FRIESECKE.G., WATTIS.J.A.D. (1994). **Existence Theorem for Solitary Waves on Lattices.** *Communications in Mathematical Physics*. pp.391-418.
- [30] GOLDENBERG.G & GOLDBIRSCHE. I **Force Chains, Microelasticity and Macroelasticity.** *Physical Review Letters*, vol:**89**.

-
- [31] MAJMUDAR.TS & BEHRINGER.R.P. **Contact force measurements and stress-induced anisotropy in granular materials.** Nature.23 de Jun 2005 .435(7045):1079-82.
- [32] WANG.Y.F., WANG.Y.S, LAUDE.V. **Wave propagation in two-dimensional viscoelastic metamaterials.** Physical Review B. vol: **92**,104110.
- [33] HARBOLA,U., ROSAS, A., HOMERO,A.H., & LINDENBERG, K.**Pulse propagation in decorated granular chains: An analytical approach.** Physical Review e. vol: **80**,051302.
- [34] GEAR, C. W. **Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations.** Prentice-Hall, 1971.
- [35] DARAIO, C., NESTERENKO, V. F., HERBOLD, E. B., & JIN, S. **Strongly nonlinear waves in a chain of Teflon beads.** Physical Review E, 72(1), 016603, 2005.
- [36] JOHNSON, K. L. **Contact Mechanics.** Cambridge University Press, 1985.
- [37] DONEY, R., & SEN, S. **Decorated, Tapered, and Highly Nonlinear Granular Chain.** Physical Review Letters, 97(15), 155502, 2006.
- [38] GÓMES, L. R., TURNER, A. M., & VITELLI, V. **Uniform shock waves in disordered granular matter.** Physical Review E, 86(4), 041302, 2012.
- [39] PORTER, M. A., KEBREKIDIS, P. G., & DARAIO, C. (2015). **Granular crystals: Non-linear dynamics meets materials engineering.** *Physics Today*, **68**(11), 44-50.
- [40] DANIELS, K. E., & HAYMAN, N. W. (2008). **Force chains in granular materials: On modeling and visualization.** *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **113**(B11), B11411.
- [41] LIU, A. J., & NAGEL, S. R. (2010). **The jamming transition and the marginally jammed solid.** *Annual Review of Condensed Matter Physics*, **1**, 347-369.
- [42] OWENS, E. T., & DANIELS, K. E. (2011). **Sound propagation and force chains in granular materials.** *Europhysics Letters*, **94**(5), 54005.
- [43] RADJAI, F., & ROUX, S. (2002). **Turbulence-like fluctuations in granular flows.** *Physical Review Letters*, **89**(6), 064302.
- [44] TORDESILLAS, A., WALKER, D. M., & LIN, Q. (2010). **Force cycles and force chains.** *Physical Review E*, **81**(1), 011302.
- [45] VITELLI, V., XU, N., WYART, M., LIU, A. J., & NAGEL, S. R. (2014). **Heat transport in model jammed solids.** *Physical Review E*, **89**(4), 042202.
- [46] FLACH, S., & GORBACH, A. (2008). **Discrete breathers: Advances in theory and applications.** *Physics Reports*, **467**, 1-116.
- [47] MACHADO, L. P. S. **Propagação do momento linear e energia cinética em cadeias granulares afiladas.** Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.

-
- [48] MACHADO, L. P. S. **Cadeia granular quase unidimensional como dispositivo para absorção de impactos**. Tese (Doutorado em Física) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2014.
- [49] VAKAKIS, Alexander F.; STAROSVETSKY, Yuli; GENDELMAN, Oleg V. Granular Media-Based Tunable Passive Vibration Suppressor. *NASA Technical Reports Server (NTRS)*, 2013.
- [50] DARAIO, Chiara; HATANAKA, Takuji; NESTERENKO, Vitali F. Pulse Mitigation in Ordered Granular Structures. *Nonlinear Dynamics*, v. 110, 2024.
- [51] BOECHAT, Helena; LOMONACO, Joana F.; MIKKELSEN, Lars P. Granular chains for passive control of wave propagation in structured materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, v. 69, p. 197-210, 2014.
- [52] RODRIGUES, Gustavo Simão. Mitigação de Esforços Impulsivos Utilizando Metamateriais Elásticos. 2017. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

.1 Apêndice A

```

language=Python ,
caption={Código Python da Simulação},

import math
import matplotlib.pyplot as plt
import random
import numpy as np
import os
#import sys
import modulo

pasta_base = 'configuracoes_{epsilon_values500100}'

# Caso a pasta base não exista, criar.
if not os.path.exists(pasta_base):
    os.makedirs(pasta_base)

# Parâmetros do material (aço inoxidável)
R_GRAIN = 4.76e-3 # raio de referência
E_GRAIN = 200e9
P_GRAIN = 0.28
M_GRAIN = 3.5e-3

# Parâmetros gerais da cadeia
POWER_FORCE = 1.5
N_GRAIN = 500
V_INITIAL = 1.
RESTITUTION = 0.
MOMENTO_STRIKER = M_GRAIN * V_INITIAL

# Parâmetros de sorteio da cadeia
N_CONFIG = 100 # Número de configurações
epsilon_values = [0.02]
#epsilon_values = [0.01, 0.03, 0.05, 0.07, 0.10, 0.15, 0.20, 0.30, 0.50, ]

# Considera o tempo
timeStep = 1e-7
final_time = 17e-3 # 3e-4

# Coeficientes para a etapa do Preditor (Série de Taylor).
c0 = timeStep
c1 = (c0 * timeStep) / 2.
c2 = (c1 * timeStep) / 3.
c3 = (c2 * timeStep) / 4.

```

```

c4 = (c3 * timeStep) / 5.

# Inicializa os coeficientes para a Etapa Corretora para ajustar as vari
a0 = 3. / 20.
a1 = 251. / 360.
a2 = 1.
a3 = 11. / 18.
a4 = 1. / 6.
a5 = 1. / 60.

for epsilon in epsilon_values:
    pasta = f'{pasta_base}/epsilon_{int(epsilon * 100)}%'
    if not os.path.exists(pasta):
        os.makedirs(pasta)

    #epsilon = 0.01
    #DES_PAD = epsilon * R_GRAIN
    for config in range(1, N_CONFIG + 1):

        # Reinicializa listas para cada configura o
        r, a, x_evolution, vel, accel, drdt3, drdt4, drdt5, new_accel, de

        # Inicializa o das vari veis
        massa.append(M_GRAIN)
        r.append(R_GRAIN)
        vel = [V_INITIAL] + [0. for _ in range(N_GRAIN - 1)]

        # Imprime a inicializa o da configura o atual
        print(f"Iniciando configura o {config} com epsilon {epsilon * 100}")

        # Condi es iniciais do striker
        soma_a = 0.
        a.append(soma_a)
        x_evolution.append(0.)
        vel.append(V_INITIAL)
        vel.append(0.)
        accel.append(0.)
        drdt3.append(0.)
        drdt4.append(0.)
        drdt5.append(0.)
        new_accel.append(0.)
        delta_correction.append(0.)
        previous_delta.append(0.)

        n_grain = 0
        while(n_grain < N_GRAIN):
            r_random = random.gauss(0., epsilon)
            #print(r_random, n_grain)

```

```

        if abs(r_random) < 0.95:
            n_grain = n_grain + 1
            r.append(R_GRAIN*(1. + r_random))
            #print(r_random, n_grain)

#sys.exit()

# Inicializa o dos demais gr os
for i in range(1, N_GRAIN):
    # Distribui o Gaussiana
    massa.append(M_GRAIN * (r[i] / R_GRAIN) ** 3)
    soma_a += (r[i - 1] + r[i])
    a.append(soma_a)
    x_evolution.append(0.)
    vel.append(0.)
    accel.append(0.)
    drdt3.append(0.)
    drdt4.append(0.)
    drdt5.append(0.)
    new_accel.append(0.)
    delta_correction.append(0.)
    previous_delta.append(0.)

    #print(r_random)

#sys.exit()

# Constante el stica entre os gr os
C_material = (2. * E_GRAIN) / (3. * (1. - P_GRAIN ** 2))
alpha_ij = []

for i in range(0, N_GRAIN - 1):
    raiz = math.sqrt((r[i] * r[i + 1]) / (r[i] + r[i + 1]))
    alpha = C_material * raiz
    alpha_ij.append(alpha)

    #print(i)
#sys.exit()

# Velocidades m ximas
velocidades_maximas = [0. for _ in range(N_GRAIN)]
contador_de_tempo = 0 # contador de tempo

# Momento linear normaliza o (strike)
momentos_lineares_por_esfera = [[] for _ in range(N_GRAIN)]

# Abre arquivo para escrever velocidades
with open(f'{pasta}/velocidades_esferas_N{N_GRAIN}_epsilon{int(eps

```

```

# Escreve cabe alho do arquivo de velocidades
header = "Tempo\t" + "\t".join([f"Esfera_{i}" for i in range(
arquivo_vel.write(header)

# C lculos e simula o
for time in np.arange(0., final_time, timeStep):
    # C lculos de energia e simula o
    p_total = 0.
    contador_de_tempo += 1 # Incrementa o contador a cada pa

# C lculo do momento linear de cada esfera e normaliza
momento_linear_atual = [massa[j] * vel[j] for j in range(
momento_linear_normalizado = [momento / MOMENTO_STRIKER f

for esfera, momento in enumerate(momento_linear_normaliza
    momentos_lineares_por_esfera[esfera].append(momento)

for i in range(N_GRAIN):
    p_total += massa[i] * vel[i]

# Atualizar velocidade instatanea
if contador_de_tempo % 5 == 0: # Grava dados a cada 5 pa
    velocidades_no_instante = [str(vel[i]) for i in range(
    linha = f"{time}\t" + "\t".join(velocidades_no_instan
    arquivo_vel.write(linha)

# Serie de Taylor
for i in range(N_GRAIN):
    x_evolution[i] += c0 * vel[i] + c1 * accel[i] + c2 *
    vel[i] += c0 * accel[i] + c1 * drdt3[i] + c2 * drdt4[
    accel[i] += c0 * drdt3[i] + c1 * drdt4[i] + c2 * drdt
    drdt3[i] += c0 * drdt4[i] + c1 * drdt5[i]
    drdt4[i] += c0 * drdt5[i]
    new_accel[i] = 0.

# Calculo da For a para corre o posterior
for i in range(N_GRAIN - 1):
    x_rel = a[i + 1] + x_evolution[i + 1] - (a[i] + x_ev
    R = math.hypot(x_rel, 0)
    delta = (r[i] + r[i + 1]) - R

    if delta <= 0:
        F = 0.
        previous_delta[i] = 0.
    else:
        if delta > previous_delta[i]: # compress o
            previous_delta[i] = delta
            F = alpha_ij[i] * (delta ** POWER_FORCE)

```

```

        else:
            F = (1 - RESTITUTION) * alpha_ij[i] * (delta
# descarga , descompress o

            new_accel[i + 1] += F / massa[i + 1]
            new_accel[i] -= F / massa[i]

        for i in range(N_GRAIN):
            delta_correction[i] = c1 * (new_accel[i] - accel[i])

        for i in range(N_GRAIN):
            x_evolution[i] += a0 * delta_correction[i]
            vel[i] += a1 * delta_correction[i] / c0
            accel[i] += a2 * delta_correction[i] / c1
            drdt3[i] += a3 * delta_correction[i] / c2
            drdt4[i] += a4 * delta_correction[i] / c3
            drdt5[i] += a5 * delta_correction[i] / c4

# Imprime a confirma o de conclus o da configura o atual
print(f"Fim da configura o {config} com epsilon {epsilon * 100}%

# Salvar o momento linear ao longo do tempo para cada configura
with open(os.path.join(pasta, f'configuracao_{config}_epsilon{int(
    header_momento = "Tempo\t" + "\t".join([f"Esfera_{i}" for i in
arquivo_momento_linear.write(header_momento)
for t in range(len(momentos_lineares_por_esfera[0])):
    linha_momento = f"{t * timeStep:.8f}\t" + "\t".join([f"{r
arquivo_momento_linear.write(linha_momento)

```