



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

REDUÇÃO DE RUÍDO EM IMAGEM USANDO LIMIARIZAÇÃO WAVELET ADAPTATIVA BASEADA NO FATOR DE PREDIÇÃO LINEAR

ANANIAS PEREIRA NETO

TD 18/2025

UFPA / ITEC / PPGEE
Campus Universitário do Guamá
Belém-Pará-Brasil

2025

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

ANANIAS PEREIRA NETO

TD 18/2025

**REDUÇÃO DE RUÍDO EM IMAGEM USANDO LIMIAZIZAÇÃO
WAVELET ADAPTATIVA BASEADA NO FATOR DE PREDIÇÃO
LINEAR**

Tese submetida à Banca Examinadora do
Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Elétrica da UFPA para obtenção do Grau de
Doutor em Engenharia Elétrica na Área de
Telecomunicações.

Orientador: Fabrício José Brito Barros

UFPA / ITEC / PPGEE
Campus Universitário do Guamá
Belém-Pará-Brasil

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) de acordo com ISBD
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Pará
Gerada automaticamente pelo módulo Ficat, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P436r Pereira Neto, Ananias.
 Redução de Ruído em Imagem usando Limiarização Wavelet
 Adaptativa baseada no Fator de Predição Linear / Ananias Pereira
 Neto. — 2025.
 132 f. : il. color.

 Orientador(a): Prof. Dr. Fabrício José Brito Barros
 Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de
 Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica,
 Belém, 2025.

 1. Transformada Wavelet. 2. Limiarização Wavelet. 3.
 Redução de Ruído de Imagem. 4. Limiarização Adaptativa. I.
 Título.

CDD 621.3822

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

REDUÇÃO DE RUÍDO EM IMAGEM USANDO LIMIAÇÃO WAVELET ADAPTATIVA BASEADA NO FATOR DE PREDIÇÃO LINEAR

AUTOR: ANANIAS PEREIRA NETO

TESE DE DOUTORADO SUBMETIDA À BANCA EXAMINADORA APROVADA PELO COLEGIADO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, SENDO JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA NA ÁREA DE TELECOMUNICAÇÕES.

APROVADA EM: 22/10/2025

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Fabrício José Brito Barros
(Orientador - PPGEE/ITEC/UFPA)

Prof. Dr. Leonardo Lira Ramalho
(Avaliador Interno - PPGEE/ITEC/UFPA)

Prof. Dr. Ronaldo de Freitas Zampolo
(Avaliador Externo ao Programa - FCT/UFPA)

Prof. Dr. Allan Douglas Bento da Costa
(Avaliador Externo - UFPA)

Prof. Dr. Johelden Campos Bezerra
(Avaliador Externo - IFPA)

VISTO:

Prof. Dr. Diego Lisboa Cardoso
(Coordenador do PPGEE/ITEC/UFPA)

A dedicatória

Dedico esse trabalho aos meus Pais, pelo grande amor e confiança que sempre depositaram em mim, e que nunca mediram esforços para que eu pudesse alcançar meus ideais de vida.

Agradecimentos

- Agradeço a Deus, pelo dom da vida e a oportunidade de descobrir novos conhecimentos.
- Aos meus Pais, José Antônio Pereira (em memória) e Maria do Socorro Martins Pereira, por me mostrar o verdadeiro caminho a seguir e pelo apoio que sempre me deram. Me mostraram que conhecimento é a única coisa que ninguém pode tirar, conhecimento é uma virtude.
- A minha eterna amiga, namorada e esposa, Morgana Rodrigues de Araújo Pereira e meu grande legado, meu filho amado Bernardo Rodrigues de Araújo Pereira, que foram minha força e persistência nessa jornada, meu sustento e vigor nessa luta.
- Aos meus irmãos, José Roberto, Edilberto e Vagner, a minha irmã Ana Cristina e meus familiares, onde mesmo na distância se fizeram presentes no meu coração.
- Ao meu orientador, Prof. Dr. Evaldo Gonçalves Pelaes, pelo apoio inicial nessa caminhada do doutorado e toda sua ajuda possível que me deu para o desenvolvimento e conclusão deste trabalho.
- Ao meu orientador, Prof. Dr. Fabrício José Brito Barros, pelo grande apoio final nessa jornada do doutorado, sou grato por tudo, obrigado pela paciência e confiança.
- A Universidade Federal do Pará - UFPA, minha eterna casa de sabedoria, pois nessa instituição fiz minhas graduações, meu mestrado e por fim, meu doutorado.
- A todos os Professores e Funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da UFPA - PPGEE.
- Ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará - IFPA, nela comecei minha caminhada como professor (ETFPa/CEFET-PA), nela com toda certeza concluirei minha missão como docente.
- A todos os meus amigos, que contribuíram de alguma forma para o desenvolvimento desta tese de doutorado.

“O melhor acaba sempre acontecendo e o futuro é melhor do que qualquer passado.”
Chiara Lubich

Resumo

As técnicas de limiarização *wavelet*, através de ajustes dos coeficientes *wavelets*, têm como função básica reduzir ou eliminar efeitos indesejados em meios de comunicação de dados, em especial aplicativos computacionais, armazenamento digital, em alguma etapa desse processo as informações podem ser modificadas por diversas interferências, principalmente devido ao ruído. A redução ou eliminação de ruído em imagem se tornou um procedimento importante para melhorar os problemas encontrados nas características visuais desse tipo de sinal. A eficiência das funções de limiarização baseadas na transformada *wavelet* para redução de ruído é fundamental para a qualidade da imagem, devido apresentar menos efeitos de bordas e texturas, além da redução de ruído ser mais uniforme. Diversas funções de limiarização são propostas para melhorar o desempenho na redução do ruído em imagem, no entanto, alguns desses métodos apresentam problemas incluindo ausência de bordas e texturas, baixa suavidade, descontinuidade da função, além de parâmetros determinados por tentativa e erro. Este trabalho, para aprimorar essas deficiências, propõe um método de redução de ruído de imagem de ressonância magnética cerebral, na proposta, utiliza-se a limiarização *wavelet* adaptativa reduzindo ou anulando os coeficientes ruidosos da transformada *wavelet* que são considerados irrelevantes para a imagem processada, além do ajuste do limiar com base no Fator de Predição Linear, que considera a correlação entre a imagem original e ruidosa. O parâmetro de predição linear utiliza as informações temporais das imagens, de acordo com as características das imagens ruidosa e original, ponderando um novo limiar que é aplicado na função de limiarização para o ajuste dos coeficientes da transformada, resultando na redução do ruído. A técnica proposta foi comparada com técnicas tradicionais na literatura. Os resultados experimentais mostram que o método apresenta melhorias significativas em métricas de MSE (*Mean Squared Error*), PSNR (*Peak Signal-to-Noise Ratio*) e SSIM (*Structural Similarity Index*).

Palavras-chave: Transformada Wavelet, Limiarização Wavelet, Redução de Ruído de Imagem, Limiarização Adaptativa, MSE, PSNR, SSIM.

Abstract

Wavelet thresholding techniques, which adjust wavelet coefficients, are essential to mitigate or eradicate unwanted distortions in data communication systems. This is particularly important in computer applications and digital storage, where various interferences, primarily noise, can alter the information at different stages of the process. Noise reduction in images has become an important step in improving the visual quality of signals. The effectiveness of wavelet transform-based thresholding functions is vital for enhancing image quality, as they typically result in fewer edge and texture artifacts, providing more uniform noise reduction. Several thresholding functions have been proposed to improve noise reduction in images. However, some existing methods often present issues such as missing edges and textures, poor smoothness, discontinuous functions, and the need for parameters determined through trial and error. To address these challenges, this study proposes a new method for noise reduction in brain magnetic resonance imaging (MRI). The proposed approach uses an adaptive wavelet thresholding technique that selectively reduces or eliminates noise wavelet coefficients deemed irrelevant to the processed image. The threshold is adjusted based on a linear prediction factor, which exploits the correlation between the original and noise images. The linear prediction factor utilizes temporal information from the images, along with features from both the noise and original versions, to compute a weighted threshold. This threshold is subsequently applied in the wavelet thresholding function to refine the wavelet coefficients, leading to a more efficient noise reduction. The proposed method was evaluated against state-of-the-art noise reduction techniques. Experimental results show that it delivers significant improvements in key metrics such as mean squared error (MSE), peak signal-to-noise ratio (PSNR), and structural similarity index (SSIM).

Keywords: Wavelet Transform, Wavelet Thresholding, Image Noise Reduction, Adaptive Thresholding, MSE, PSNR, SSIM.

Lista de Figuras

Figura 1	– Representação da imagem monocromática em $f(x, y)$, representando o produto entre a iluminância $i(x, y)$ e reflectância $r(x, y)$	11
Figura 2	– Exemplo de Imagem em Níveis de Cinza: (a) Boat tamanho 256×256 e (b) detalhe da representação em <i>pixels</i>	11
Figura 3	– Imagem da Akiyo, tamanho 352×288 : (a) Imagem Original, (b) Imagem da Componente R , (c) Imagem da Componente G e (d) Imagem da Componente B	13
Figura 4	– Imagem da Akiyo, tamanho 352×288 : (a) Imagem Original, (b) Imagem da Componente Y , (c) Imagem da Componente U e (d) Imagem da Componente V	14
Figura 5	– Exemplo de Imagem Original e Imagem Ruidosa: Imagem Boat Original (a), Histograma da Imagem Boat Original (b), Imagem Boat Ruidosa (c) e Histograma da Imagem Boat Ruidosa (d).	16
Figura 6	– Exemplo de Ruído Sal e Pimenta, Imagem Cameraman, tons de cinza, tamanho 512×512 : (a) Imagem Original e (b) Imagem Ruidosa.	17
Figura 7	– Função Densidade de Probabilidade da distribuição de Poisson, com o parâmetro $\lambda = 10$, função que representa o ruído de Poisson (quântico).	18
Figura 8	– Exemplo de Ruído de Poisson, Imagem Jetplane, tons de cinza, tamanho 512×512 : (a) Imagem Original e (b) Imagem Ruidosa.	19
Figura 9	– Função Densidade de Probabilidade da distribuição gaussiana normal, com os parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, função que representa o AWGN.	20
Figura 10	– Exemplo de Ruído Aditivo Gaussiano Branco: (a) Imagem Original Peppers, colorido, tamanho 512×512 e (b) Imagem Ruidosa Peppers, colorido, tamanho 512×512 , com variância de 0.05.	21
Figura 11	– Função Densidade de Probabilidade da distribuição de Rayleigh, com o parâmetro $\sigma = 0.5$, função que representa o ruído da distribuição de Rayleigh.	22
Figura 12	– Exemplo de Ruído de Rayleigh: (a) Imagem Original Mandril, colorido, tamanho 512×512 e (b) Imagem Ruidosa Mandril, colorido, tamanho 512×512	23
Figura 13	– Função Densidade de Probabilidade da distribuição Gamma, com o parâmetro $a = 2$ e $b = 6$, função que representa o ruído da distribuição Gamma.	23
Figura 14	– Exemplo de Ruído de Gamma: (a) Imagem Original Barbara, tons de cinza, tamanho 512×512 e (b) Imagem Ruidosa Barbara, tons de cinza, tamanho 512×512	24
Figura 15	– Exemplo de Ruído de Mancha, Imagem Boat, tons de cinza, tamanho 512×512 : (a) Imagem Original e (b) Imagem Ruidosa.	25

Figura 16 – Imagem Peppers, colorido, tamanho 512×512 : (a) Imagem Original e (b) Imagem com MSE = 786. Exemplo que representa a imagem processada na avaliação da similaridade.	26
Figura 17 – Imagem Coastguard, tamanho 352×288 : (a) Imagem Original, (b) Imagem com PSNR = 31 dB, (c) Imagem com PSNR = 21.45 dB e (d) Imagem com PSNR = 17.22 dB.	27
Figura 18 – Imagem Highway, tamanho 352×288 : (a) Imagem Original, (b) Imagem com SSIM = 0.97, (c) Imagem com SSIM = 0.85 e (d) Imagem com SSIM = 0.79.	29
Figura 19 – Formas de Ondas: (a) Onda Senoidal, utilizada na Transformada de Fourier como base para decompor um sinal complexo em seus componentes de diferentes frequências e (b) <i>Wavelet</i> de Morlet.	32
Figura 20 – Sinal de Eletrocardiograma (ECG) Humano, amostrado em 180 Hz. Exemplo de aplicação da Transformada <i>Wavelet</i> Contínua.	34
Figura 21 – Transformada <i>Wavelet</i> Contínua do Sinal de Eletrocardiograma (ECG) Humano. O exemplo mostra oscilações quase estáveis próximas de 30 Hz a 37 Hz.	35
Figura 22 – Transformada <i>Wavelet</i> Discreta do Sinal Doppler Ruidoso e Sinal Reconstruído. Reconstrução de uma versão suavizada do sinal utilizando os coeficientes de aproximação da DWT.	36
Figura 23 – <i>Wavelet</i> de Haar. Função quadrada (degrau) que pode ser usada para decompor um sinal em diferentes escalas e resoluções.	38
Figura 24 – <i>Wavelet</i> Meyer com base ortonormal, suavizada e infinitamente diferenciável: (a) Função de escala $\phi(\omega)$ e (b) Função <i>wavelet</i> de Meyer $\psi(\omega)$	39
Figura 25 – <i>Wavelet</i> de Morlet: representa uma senoide (ou cossenoide) modulada por uma função gaussiana (curva em forma de sino).	40
Figura 26 – <i>Wavelet</i> de Daubechies é ortogonal, o que permite a decomposição e recomposição de sinais sem perda de informação: (a) Função Escala de Daubechies <i>db4</i> , (b) Função <i>Wavelet</i> de Daubechies <i>db4</i> , (c) Função Escala de Daubechies <i>db8</i> e (d) Função <i>Wavelet</i> de Daubechies <i>db8</i>	42
Figura 27 – <i>Wavelet</i> do Chapéu Mexicano: é uma função de base utilizada na análise de <i>wavelet</i> , notavelmente na transformada <i>wavelet</i> contínua (CWT).	43
Figura 28 – <i>Wavelet</i> de Coiflet, caracterizada por ter múltiplos momentos nulos, tanto para a função escala quanto para a função <i>wavelet</i> : (a) Função Escala de Coiflet <i>coif3</i> , (b) Função <i>Wavelet</i> de Coiflet <i>coif3</i> , (c) Função Escala de Coiflet <i>coif5</i> e (d) Função <i>Wavelet</i> de Coiflet <i>coif5</i>	44
Figura 29 – <i>Wavelet</i> de Symlet é uma versão simétrica (ou quase simétrica) com suporte compacto: (a) Função Escala de Symlet <i>sym4</i> , (b) Função <i>Wavelet</i> de Symlet <i>sym4</i> , (c) Função Escala de Symlet <i>sym8</i> e (d) Função <i>Wavelet</i> de Symlet <i>sym8</i>	45

Figura 30 – Wavelet Biortogonal <i>bior3.9</i> : (a) Função escala de análise para decomposição do sinal $\phi(t)$ e (b) Função escala de síntese para a reconstrução do sinal $\tilde{\phi}(t)$.	47
Figura 31 – Wavelet Biortogonal <i>bior3.9</i> : (a) Função <i>wavelet</i> de análise para decomposição do sinal $\psi(t)$ e (b) Função <i>wavelet</i> de síntese para a reconstrução do sinal $\tilde{\psi}(t)$.	48
Figura 32 – Diagrama do processo de decomposição 2D DWT, imagem <i>Football</i> , tamanho 352×288 . Utilizado no processamento de imagens para separar as informações da imagem em diferentes componentes de frequência ou sub-bandas.	49
Figura 33 – Imagem <i>Football</i> , tamanho 352×288 : (a) após o primeiro nível de decomposição para as quatro sub-bandas e (b) as quatro sub-bandas LL_1 , LH_1 , HL_1 e HH_1 .	49
Figura 34 – Diagrama de blocos do método de redução de ruído do limiar <i>wavelet</i> . Consiste nas etapas de decomposição (DWT), cálculo do limiar, aplicação do limiar e reconstrução (IDWT).	51
Figura 35 – Aplicação da Técnica de <i>Denoising</i> na Imagem Mandril Colorida, tamanho 512×512 : (a) Imagem Original, (b) Imagem Ruidosa, variância de 0.03 e (c) Imagem com <i>Denoising</i> .	54
Figura 36 – Aplicação da Técnica de <i>Denoising</i> na Imagem Peppers Colorida, tamanho 512×512 : (a) Imagem Original, (b) Imagem Ruidosa, variância de 0.05 e (c) Imagem com <i>Denoising</i> .	54
Figura 37 – Comparação entre as funções de limiarização: (a) <i>soft thresholding</i> , (b) <i>hard thresholding</i> , (c) <i>semisoft thresholding</i> e (d) a nova função de limiarização proposta.	64
Figura 38 – Imagens Cerebrais de Ressonância Magnética Originais, Tons de Cinza: (a) ICRM 1, (b) ICRM 2, (c) ICRM 3, (d) ICRM 4, (e) ICRM 5 e (f) ICRM 6.	66
Figura 39 – Imagens Cerebrais de Ressonância Magnética Originais, Coloridas: (a) ICRM 7, (b) ICRM 8, (c) ICRM 9, (d) ICRM 10, (e) ICRM 11 e (f) ICRM 12.	67
Figura 40 – Comparação de desempenho de redução de ruído imagem ICRM 1 com variância de 0.01: (a) Imagem Original, (b) Imagem Ruidosa, (c) Método Proposto, (d) VisuShrink, (e) BayesShrink, (f) Kernel Gaussiana, (g) Limiar Melhorado e (h) AGGD.	74
Figura 41 – Comparação de desempenho de redução de ruído imagem ICRM 2 com variância de 0.02: (a) Imagem Original, (b) Imagem Ruidosa, (c) Método Proposto, (d) VisuShrink, (e) BayesShrink, (f) Kernel Gaussiana, (g) Limiar Melhorado e (h) AGGD.	75
Figura 42 – Comparação de desempenho de redução de ruído imagem ICRM 3 com variância de 0.03: (a) Imagem Original, (b) Imagem Ruidosa, (c) Método Proposto, (d) VisuShrink, (e) BayesShrink, (f) Kernel Gaussiana, (g) Limiar Melhorado e (h) AGGD.	76

Figura 43 – Comparação de desempenho de redução de ruído imagem ICRM 4 com variância de 0.04: (a) Imagem Original, (b) Imagem Ruidosa, (c) Método Proposto, (d) VisuShrink, (e) BayesShrink, (f) Kernel Gaussiana, (g) Limiar Melhorado e (h) AGGD.	76
Figura 44 – Comparação de desempenho de redução de ruído imagem ICRM 6 com variância de 0.05: (a) Imagem Original, (b) Imagem Ruidosa, (c) Método Proposto, (d) VisuShrink, (e) BayesShrink, (f) Kernel Gaussiana, (g) Limiar Melhorado e (h) AGGD.	77
Figura 45 – Comparação de desempenho de redução de ruído imagem ICRM 7 com variância de 0.01: (a) Imagem Original, (b) Imagem Ruidosa, (c) Método Proposto, (d) VisuShrink, (e) BayesShrink, (f) Kernel Gaussiana, (g) Limiar Melhorado e (h) AGGD.	78
Figura 46 – Comparação de desempenho de redução de ruído imagem ICRM 8 com variância de 0.02: (a) Imagem Original, (b) Imagem Ruidosa, (c) Método Proposto, (d) VisuShrink, (e) BayesShrink, (f) Kernel Gaussiana, (g) Limiar Melhorado e (h) AGGD.	78
Figura 47 – Comparação de desempenho de redução de ruído imagem ICRM 9 com variância de 0.03: (a) Imagem Original, (b) Imagem Ruidosa, (c) Método Proposto, (d) VisuShrink, (e) BayesShrink, (f) Kernel Gaussiana, (g) Limiar Melhorado e (h) AGGD.	79
Figura 48 – Comparação de desempenho de redução de ruído imagem ICRM 10 com variância de 0.04: (a) Imagem Original, (b) Imagem Ruidosa, (c) Método Proposto, (d) VisuShrink, (e) BayesShrink, (f) Kernel Gaussiana, (g) Limiar Melhorado e (h) AGGD.	79
Figura 49 – Comparação de desempenho de redução de ruído imagem ICRM 11 com variância de 0.05: (a) Imagem Original, (b) Imagem Ruidosa, (c) Método Proposto, (d) VisuShrink, (e) BayesShrink, (f) Kernel Gaussiana, (g) Limiar Melhorado e (h) AGGD.	80
Figura 50 – Resultado de PSNR para os métodos <i>wavelet</i> imagem ICRM 1 e as diferentes bases <i>wavelet bior3.9, db4, sym8 e coif2</i>	81
Figura 51 – Resultado de SSIM para os métodos <i>wavelet</i> imagem ICRM 1 e as diferentes bases <i>wavelet bior3.9, db4, sym8 e coif2</i>	82
Figura 52 – Resultado de MSE para os métodos <i>wavelet</i> imagem ICRM 1 e as diferentes bases <i>wavelet bior3.9, db4, sym8 e coif2</i>	82
Figura 53 – Resultado de PSNR para os métodos <i>wavelet</i> imagem ICRM 7 e as diferentes bases <i>wavelet bior3.9, db4, sym8 e coif2</i>	83
Figura 54 – Resultado de SSIM para os métodos <i>wavelet</i> imagem ICRM 7 e as diferentes bases <i>wavelet bior3.9, db4, sym8 e coif2</i>	84

Figura 55 – Resultado de MSE para os métodos <i>wavelet</i> imagem ICRM 7 e as diferentes bases <i>wavelet</i> <i>bior3.9</i> , <i>db4</i> , <i>sym8</i> e <i>coif2</i>	85
---	----

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Resultados de MSE, PSNR(dB) e SSIM para os métodos <i>wavelet</i> , imagens ICRM 1 e ICRM 2, com a base <i>wavelet bior3.9</i>	68
Tabela 2 – Resultados de MSE, PSNR(dB) e SSIM para os métodos <i>wavelet</i> , imagens ICRM 3 e ICRM 4, com a base <i>wavelet bior3.9</i>	69
Tabela 3 – Resultados de MSE, PSNR(dB) e SSIM para os métodos <i>wavelet</i> , imagens ICRM 5 e ICRM 6, com a base <i>wavelet bior3.9</i>	70
Tabela 4 – Resultados de MSE, PSNR(dB) e SSIM para os métodos <i>wavelet</i> , imagens ICRM 7 e ICRM 8, com a base <i>wavelet bior3.9</i>	71
Tabela 5 – Resultados de MSE, PSNR(dB) e SSIM para os métodos <i>wavelet</i> , imagens ICRM 9 e ICRM 10, com a base <i>wavelet bior3.9</i>	72
Tabela 6 – Resultados de MSE, PSNR(dB) e SSIM para os métodos <i>wavelet</i> , imagens ICRM 11 e ICRM 12, com a base <i>wavelet bior3.9</i>	73

Lista de abreviaturas e siglas

AGGD	Adaptive Generalized Gaussian Distribution
AWGN	Additive White Gaussian Noise
CD-CSC	Content-Dependent 3-D Convolutional Sparse Coding
CNN	Convolutional Neural Network
CWT	Continuous Wavelet Transform
CMY	Cyan-Magenta-Yellow
DL	Deep Learning
DnCNN	Deep Neural Convolutional Network
DWT	Discrete Wavelet Transform
DU	Deep Unfolding
ECG	Eletrocardiograma
HHO	Harris Hawks Optimization
HSI	Hue-Saturation-Intensity
HSV	Hue-Saturation-Value
HVS	Human Visual System
ICRM	Imagem Cerebral de Ressonância Magnética
ITU	International Telecommunication Union
JPEG	Joint Photographic Experts Group
LCD	Liquid Crystal Display
LED	Light Emitting Diode
LPIPS	Learned Perceptual Image Patch Similarity
MOS	Mean Opinion Score
MRI	Magnetic Resonance Imaging

MSE	Mean Squared Error
NS	Neutrosophic Set
OCT	Optical Coherence Tomography
PNG	Portable Network Graphics
PSNR	Peak Signal to Noise Ratio
PSO	Particle Swarm Optimization
QoE	Quality of Experience
QMF	Quadrature Mirror Filters
RGB	Red-Green-Blue
SNR	Signal to Noise Ratio
SSIM	Structural Similarity Index
SR-RDFAN	Super-Resolution Reconstruction Network called Residual Dense Feature Aggregation
SWT	Shift-Invariant Wavelet Transform
TIFF	Tag Image File Format
VQM	Video Quality Measure
WDR	Wavelet Difference Reduction
2D DWT	2D Discrete Wavelet Transform

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Contexto e Motivação	1
1.2	Objetivos	4
1.2.1	Objetivo Geral	4
1.2.2	Objetivos Específicos	4
1.3	Trabalhos Correlatos	5
1.4	Organização da Proposta da Tese	8
1.5	Considerações Finais	9
2	Fundamentos de Imagens	10
2.1	Introdução	10
2.2	Imagens Digitais	10
2.2.1	RGB e YUV	12
2.3	Ruído	15
2.3.1	Ruído Impulsivo	17
2.3.1.1	Ruído Sal e Pimenta	17
2.3.2	Ruído de Disparo (Quântico)	18
2.3.2.1	Ruído de Poisson	18
2.3.3	Ruído Aditivo	19
2.3.3.1	Ruído Aditivo Gaussiano Branco	20
2.3.3.2	Ruído da Distribuição de Rayleigh	22
2.3.3.3	Ruído da Distribuição Gamma	23
2.3.4	Ruído Multiplicativo	24
2.3.4.1	Ruído de Manchas	24
2.4	Métricas de Qualidade em Imagens	25
2.4.1	MSE (<i>Mean Squared Error</i>)	26
2.4.2	PSNR (<i>Peak Signal to Noise Ratio</i>)	26
2.4.3	SSIM (<i>Structural Similarity Index</i>)	28
2.5	Considerações Finais	30
3	Transformada Wavelet	31
3.1	Introdução	31
3.2	Transformada Wavelet	31
3.2.1	Transformada Wavelet Contínua	33
3.2.2	Transformada Wavelet Discreta	35
3.3	Bases Wavelet	37
3.3.1	Wavelet de Haar	37
3.3.2	Wavelet de Meyer	38

3.3.3	Wavelet de Morlet	40
3.3.4	Wavelet de Daubechies	40
3.3.5	Wavelet do Chapéu Mexicano	42
3.3.6	Wavelet de Coiflet	43
3.3.7	Wavelet de Symlet	44
3.3.8	Wavelet de Biortogonal	46
3.4	2D DWT (2D Discrete Wavelet Transform)	48
3.5	Redução de Ruído com Limiarização Wavelet	50
3.6	Considerações Finais	55
4	Metodologia	56
4.1	Introdução	56
4.2	Estimador de Limiar Proposto	60
4.3	Fator de Predição Linear	61
4.4	Nova Função de Limiar Adaptativa	62
4.5	Considerações Finais	64
5	Resultados	66
5.1	Introdução	66
5.2	Avaliação Quantitativa	67
5.3	Avaliação Qualitativa	73
5.4	Resultados para as Bases Wavelet	80
5.5	Desempenho Computacional	85
5.6	Considerações Finais	85
6	Conclusões e Trabalhos Futuros	87
6.1	Conclusões	87
6.2	Trabalhos Futuros	89
6.3	Publicações Realizadas pelo Autor	90
6.3.1	Artigos Completos Publicados em Periódicos e Congressos	90
	Referências	91
A	Apêndice	101
A.1	Código Desenvolvido no Matlab do Método Proposto Fator de Predição Linear:	101
A.2	Código Desenvolvido no Matlab do Estimador de Limiar do Método Proposto Fator de Predição Linear:	102
A.3	Código Desenvolvido no Matlab da Nova Função de Limiar Adaptativa do Método Proposto Fator de Predição Linear:	103
A.4	Código Desenvolvido no Matlab do Método <i>VisuShrink</i> :	103

A.5	Código Desenvolvido no Matlab do Estimador de Limiar do Método <i>VisuShrink</i> :	104
A.6	Código Desenvolvido no Matlab da Função de Limiar do Método <i>VisuShrink</i> :	104
A.7	Código Desenvolvido no Matlab do Método <i>BayesShrink</i> :	105
A.8	Código Desenvolvido no Matlab do Estimador de Limiar do Método <i>BayesShrink</i> :	106
A.9	Código Desenvolvido no Matlab da Função de Limiar do Método <i>BayesShrink</i> :	106
A.10	Código Desenvolvido no Matlab do Método Limiar Melhorado:	107
A.11	Código Desenvolvido no Matlab do Estimador de Limiar do Método Limiar Melhorado:	108
A.12	Código Desenvolvido no Matlab da Função de Limiar do Método Limiar Melho- rado:	108
A.13	Código Desenvolvido no Matlab do Método Kernel Gaussiana:	109
A.14	Código Desenvolvido no Matlab do Estimador de Limiar do Método Kernel Gaussiana:	110
A.15	Código Desenvolvido no Matlab da Função de Limiar do Método Kernel Gaussiana:	110
A.16	Código Desenvolvido no Matlab do Método AGGD:	111
A.17	Código Desenvolvido no Matlab do Estimador de Limiar do Método AGGD:	112
A.18	Código Desenvolvido no Matlab da Função de Limiar do Método AGGD:	112

1 Introdução

Este capítulo apresenta os principais tópicos que contemplam a importância deste trabalho no contexto atual, apresentando o contexto e motivação, o objetivo geral e os objetivos específicos, os trabalhos correlatos, juntamente com a descrição da organização e proposta dos temas que serão tratados no desenvolvimento dessa tese.

1.1 Contexto e Motivação

O avanço dos serviços e técnicas multimídia impulsiona a transmissão de imagem, voz, vídeo e dados enviados através de sistemas de comunicações cada vez mais complexos. No entanto, a qualidade desses recursos em inúmeras aplicações tem se mostrado aquém do ideal. Isso é particularmente crítico em aplicações de imagens médicas de alta qualidade, que exigem novas soluções.

No contexto de imagens médicas, o desafio das tecnologias emergentes é atender a requisitos rigorosos de qualidade visual, minimizando artefatos como ruído que causam problemas na qualidade visual da imagem e consequentemente impactam em um diagnóstico por imagem, portanto, a precisão e a clareza dessas imagens são cruciais para diagnósticos e tratamentos eficazes. A perda de detalhes ou a introdução de ruído podem comprometer a interpretação das imagens e levar a decisões equivocadas por parte do profissional especializado. Consequentemente, a otimização da qualidade visual da imagem médica é fundamental para garantir um bom diagnóstico.

Neste contexto, um dos desafios na concepção dos sistemas de processamento de dados, em especial, processamento de imagens consiste no desenvolvimento de novas metodologias que viabilizem o processamento de imagem médica mitigando artefatos como o ruído. O estudo de técnicas de redução de ruído tem recebido grande atenção por parte de diversos pesquisadores e trabalhos na literatura (JI et al., 2024; ZHANG; CHANDLER; MOU, 2023; SUN et al., 2024; ZHU BINGYOU LIU; FAN, 2024). Em especial a Transformada *Wavelet* tem apresentado eficiência em termos de qualidade visual e métricas objetivas, tais como, PSNR (*Peak Signal to Noise Ratio*), SSIM (*Structural Similarity Index*), MSE (*Mean Squared Error*), entre outras. Esses bons resultados são alcançados pois a técnica tem apresentado um algoritmo mais rápido, utilizando poucos coeficientes para concentrar a energia do sinal, transmissão progressiva, bases *wavelets* que permitem maior flexibilidade no projeto dos filtros, bem como a inexistência de efeitos de blocos (KUMAR; RANI, 2024).

No entanto, quanto se trata de processamento digital de imagens utilizando a transformada *wavelet* podem ocorrer problemas nas características visuais das imagens, tais como, *ringing*,

embaçamento e até mesmo ruído, evidenciando efeitos de bloco e textura. Para minimizar tais efeitos e utilizar os benefícios da transformada *wavelet*, diversas técnicas são utilizadas em conjunto como, por exemplo, ajustar os coeficientes da *wavelet* através da *thresholding* adaptativa, permitindo uma melhor adaptação de acordo com a decomposição da *wavelet* que estima as propriedades do sinal no domínio da frequência (KARALASINGHAM et al., 2024).

Por ser uma área desafiadora e bastante estudada na comunidade científica, a pesquisa em temas de fronteira de processamento digital de sinais é muito atraente para a proposta deste estudo, além de possuir elevado grau de relacionamento da percepção humana com as técnicas adaptativas aplicada na redução de ruído em imagens médicas. Em particular, a combinação das transformadas *wavelets*, com adaptação dos coeficientes limiarizados da *wavelet*, para auxiliar na redução de ruído.

As imagens médicas cerebrais, obtidas por técnicas como a ressonância magnética e a tomografia computadorizada, são ferramentas inestimáveis para a medicina, permitindo diagnósticos precisos e a avaliação de doenças neurológicas. No entanto, a utilidade diagnóstica dessas imagens depende diretamente de sua qualidade, que é frequentemente comprometida por artefatos e ruídos intrínsecos ao processo de aquisição. Diferente de erros de transmissão de dados, esses ruídos de aquisição podem ser gerados por diversos fatores. As fontes principais incluem fatores físicos como, por exemplo, do ruído térmico gerado nos detectores, limitações do equipamento gerando imperfeições no campo magnético e espalhamento de radiação, além de fatores relacionados ao paciente, sendo o movimento voluntário ou involuntário um dos mais críticos (AMIRIAN et al., 2024). Esse ruído tem um impacto direto na qualidade da imagem, podendo mascarar detalhes importantes, levar a diagnósticos incorretos e dificultar a análise de estruturas cerebrais. Por isso, sua redução e/ou remoção é importante para garantir a confiabilidade das informações e a precisão dos diagnósticos.

A transformada *wavelet* tem se mostrado uma ferramenta eficaz e amplamente utilizada no tratamento de imagens para redução do ruído, especialmente em imagens médicas. Essa transformada permite decompor a imagem em diferentes frequências e escalas, é particularmente eficiente por sua capacidade de separar o ruído, que geralmente se concentra em coeficientes de baixa magnitude, dos sinais importantes da imagem, que tendem a ter coeficientes de alta magnitude.

O grande desafio da transformada *wavelet* em relação as imagens médicas, particularmente em imagens médicas cerebrais reside na escolha do limiar, deste modo, o limiar atua decidindo a magnitude mínima que um coeficiente *wavelet* deve ter para ser classificado como sinal significativo, eliminando tudo abaixo disso como ruído. Se o limiar for muito alto, ele pode remover não apenas o ruído, mas também detalhes importantes da imagem, resultando em uma imagem excessivamente suavizada. Por outro lado, um limiar muito baixo pode não remover o ruído de forma eficaz.

Para superar esse dilema, pesquisas têm se dedicado ao desenvolvimento de métodos

de limiarização *wavelets* adaptativas. Essas abordagens não aplicam um único limiar para toda a imagem, mas sim limiares que se ajustam localmente, levando em conta as características específicas de cada região da imagem. Essa adaptação é fundamental para preservar as bordas e os detalhes finos das imagens médicas cerebrais, enquanto o ruído é efetivamente removido.

Diversos estudos exploram a melhoria da redução de ruído em imagens cerebrais utilizando a transformada *wavelet* adaptativa, em particular, os trabalhos desenvolvidos por (ZHANG et al., 2019) e (GOLILARZ et al., 2020) que motivaram o desenvolvimento dessa tese. A principal contribuição do trabalho desenvolvido em (ZHANG et al., 2019) foi propor um método que supera as limitações das funções de limiarização tradicionais, os métodos de limiar rígido e suave. O trabalho proporcionou para a área de redução de ruído em imagens médicas cerebrais a introdução de uma função de limiarização apropriada que evita descontinuidade e consequentemente, melhora a qualidade da imagem. Adicionalmente, em (GOLILARZ; GAO; DEMIREL, 2019) foi proposta uma nova função de limiarização baseada em uma distribuição gaussiana generalizada adaptativa, diferente dos métodos tradicionais (limiar rígido e suave), a função de limiarização é dependente dos dados da imagem, ajustando-se as características específicas do ruído e do sinal, apresentando redução na complexidade computacional e melhoria na qualidade qualitativa e quantitativa das imagens médicas cerebrais.

Portanto, motivados por esses trabalhos em imagens médicas cerebrais, ao final desta tese, pretende-se desenvolver e analisar uma função de limiarização *wavelet* adaptativa para redução de ruído em imagens médicas, baseado na composição da transformada *wavelet* com *thresholding* adaptativa. O limiar proposto é baseado no estimador universal desenvolvido em (DONOHO; JOHNSTONE, 1994) e (DONOHO, 1995). O limiar universal apresenta uma abordagem por nível, de forma global, com um único parâmetro de dispersão para todas as escalas.

A proposta principal do trabalho é utilizar a limiarização *wavelet* adaptativa para estimar os coeficientes *wavelet*, que podem ter seus valores diminuídos ou anulados nos vários níveis de decomposição gerados pela *wavelet*, aliando parâmetros de ponderação à função de limiarização, tais como, o comprimento do vetor de entrada, a variância do ruído, o nível de decomposição da *wavelet* e o Fator de Predição Linear baseado na imagem original e ruidosa. Neste último, o objetivo é encontrar o coeficiente ideal que minimize o erro médio quadrático entre as imagens.

Para fins de desenvolvimento e validação do método, este trabalho foca na supressão do Ruído Aditivo Gaussiano Branco. Essa escolha é justificada por ser um modelo matemático robusto e amplamente utilizado na literatura, servindo como uma aproximação eficaz para o ruído térmico gerado aleatoriamente nos detectores dos equipamentos de ressonância magnética e tomografia computadorizada durante a aquisição do sinal. Em um cenário clínico real, a utilidade deste método se destacaria em duas frentes principais:

- Como pré-processamento para análise computacional: A remoção do ruído é vital antes da aplicação de algoritmos de segmentação de tumores, registro de imagens ou sistemas

de diagnóstico auxiliado por computador, que são notoriamente sensíveis a variações de intensidade causadas pelo ruído.

- Na recuperação de exames de aquisição rápida: O método proposto poderia ser usado para melhorar a qualidade visual tanto de tomografias computadorizadas, onde a redução da radiação no paciente resulta em um aumento de ruído, quanto na sequências de imagens de ressonância magnéticas de aquisição rápida. Nestas últimas, a redução do tempo de exame, embora benéfica para mitigar artefatos de movimento, tem como contrapartida uma menor Relação Sinal-Ruído.

A técnica de limiarização *wavelet* adaptativa para redução de ruído em imagens médicas será avaliada e comparada com métodos tradicionais da literatura. A performance da técnica proposta será confrontada com a de algoritmos tradicionais, além de métodos mais atuais, como *VisuShrink* (DONOHO; JOHNSTONE, 1994), *BayesShrink* (CHANG; YU; VETTERLI, 2000), Limiar Melhorado em (ZHANG et al., 2019), Kernel Gaussiana em (SUN; YIU; LI, 2019) e AGGD (GOLILARZ et al., 2020). A análise comparativa considerará a base *wavelet* biortogonal *bior3.9*, amplamente utilizada em processamento de imagens médicas devido à sua capacidade de preservar detalhes finos e minimizar artefatos de ruído, além das *wavelets* biortogonais usarem pares distintos de funções para análise (função de decomposição) e síntese (função de reconstrução), o que permite maior flexibilidade e uma boa reconstrução do sinal, ao contrário das *wavelets* ortogonais, onde a função de análise e a função de síntese são idênticas.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

A proposta da tese tem por objetivo principal desenvolver uma função de limiarização *wavelet* adaptativa para redução de ruído em imagens médicas, especificamente, em imagens de ressonância magnética cerebral, baseado no Fator de Predição Linear, que considera a correlação entre a imagem original e ruidosa. O parâmetro de predição linear utiliza as informações das imagens, de acordo com as características das imagens ruidosa e original, ponderando um novo limiar que é aplicado na função de limiarização para o ajuste dos coeficientes da transformada, resultando na redução do ruído.

1.2.2 Objetivos Específicos

A técnica proposta considera que, para cada nível de decomposição, a variação do ruído e a minimização do erro médio quadrático entre a imagem original e imagem ruidosa. Esse processo de minimização é ponderado pelo fator de predição linear associado à variação do ruído, permitindo um limiar adaptativo que se ajuste às características do sinal em diferentes escalas. O

método estima um limiar apropriado para o nível do sinal ruidoso. Essa etapa é importante para a técnica de limiarização *wavelet* adaptativa aplicada nas imagens médicas, pois possibilitará a redução do ruído e efeitos visuais dessas imagens. Os principais objetivos específicos da pesquisa são:

- Analisar e criticar as metodologias existentes para redução de ruído utilizando transformada *wavelet*, além da comparação com a metodologia proposta, referente a avaliação das métricas objetiva.
- Estudar detalhadamente o estimador de reajuste do *thresholding* de acordo com o nível decomposições da *wavelet*, o fator de predição linear e a variância do ruído aplicados na função de limiarização *wavelet* adaptativa.
- Descrever as recomendações práticas no *software* Matlab e implementar da função de limiarização *wavelet* adaptativa para redução de ruído em imagens de ressonância magnética cerebral.
- Demonstrar a efetividade e confiabilidade da técnica de limiarização *wavelet* adaptativa para redução de ruído em imagens de ressonância magnética cerebral por meio de métricas objetivas, avaliação quantitativa e qualitativa.

1.3 Trabalhos Correlatos

Uma revisão do estado da arte das técnicas de processamento de imagens digitais, com ênfase na redução de ruído e artefatos, demonstra uma clara evolução dos métodos clássicos para as abordagens híbridas e adaptativas. A Transformada *Wavelet* continua sendo uma ferramenta central devido à sua capacidade de concentrar a energia do sinal, sendo frequentemente comparada a outras transformadas multiescala, como *curvelets* e *shearlets*, na busca pela captura ideal de detalhes da imagem. Contudo, o foco da pesquisa atual reside em superar as limitações dos algoritmos de limiarização tradicionais.

No trabalho desenvolvido por (SONIA; SUMATHI, 2022) é explorado a aplicação de técnicas de limiar de *wavelets* para a redução de ruído *speckle*. A pesquisa avalia o desempenho de diferentes famílias de *wavelets*, como Morlet, Symlet, Daubechies e Haar, utilizando métricas como SNR, PSNR e MSE. Os resultados indicam que a família de *wavelets* Symlet se destaca por sua eficácia na remoção de ruído, demonstrando maior capacidade de concentrar a energia do sinal, o que resulta em uma melhoria significativa na qualidade da imagem para fins clínicos.

Visando primorizar a qualidade de imagens de raios-X torácicos (CXRs), frequentemente degradadas por ruído e artefatos de espalhamento, (SONG; YE, 2023) propõem um novo método de restauração de imagem não supervisionado. No estudo são abordadas as limitações do WavCycleGAN, que, embora eficaz na preservação de componentes de alta frequência, exige

a transformada *wavelet* tanto no treinamento quanto na inferência, além de poder introduzir artefatos e ser de difícil aplicação quando os artefatos estão presentes em todas as subbandas. A principal contribuição do trabalho é um discriminador de subbanda *wavelet*. Este discriminador é integrado a uma arquitetura CycleGAN, permitindo que a transformada *wavelet* seja aplicada apenas durante a fase de treinamento e especificamente para os discriminadores. Os geradores da rede operam diretamente no domínio da imagem, o que, auxiliado por uma perda de consistência de ciclo no domínio da imagem, evita os artefatos não naturais associados à reconstrução no domínio *wavelet*. Esta abordagem permite que a rede aprenda a remover ruídos e corrigir o espalhamento de forma eficiente, utilizando discriminadores específicos de frequência, sem a necessidade de etapas de processamento adicionais durante a fase de teste. Os resultados experimentais, avaliação qualitativa, demonstram que o método proposto alcança desempenho competitivo na remoção de ruído e espalhamento em CXRs, superando artefatos gerados pelo WavCycleGAN e, quando combinado com o Switchable CycleGAN, oferece flexibilidade para gerar diferentes níveis de remoção de artefatos.

Consequentemente, o trabalho desenvolvido em (PANIMALAR D. AARTHI; VARALAKSHMI, 2023) propôs um método para a redução de ruído em imagens médicas combinando a Transformada *Wavelet* Discreta com a teoria do Conjunto Neutrosófico (NS - *Neutrosophic Set*). O objetivo é lidar com a incerteza e a indeterminação inerentes aos dados de imagens. O método utiliza a *wavelet* de Haar e, posteriormente, traduz a imagem para um conjunto neutrosófico, categorizando os *pixels* como verdadeiros, indeterminados ou falsos. O desempenho da abordagem é comparado aos filtros Mediano e Wiener, demonstrando a superioridade do método proposto na remoção de ruído gaussiano e de sal e pimenta. A pesquisa enfatiza a capacidade do Conjunto Neutrosófico de fornecer um processo de redução de ruído mais robusto e preciso.

Em (ZHU BINGYOU LIU; FAN, 2024) os autores propuseram a adoção de um algoritmo inovador para a redução de ruído em imagens, focado em ambientes com alta intensidade de ruído. O método aprimora o algoritmo de limiar *wavelet* tradicional, abordando a limitação do limiar fixo e introduzindo uma nova função de limiar que supera as limitações das funções rígida e suave convencionais. A combinação desses aprimoramentos melhora a precisão do limiar *wavelet*, permitindo uma separação mais eficaz entre o sinal da imagem e o ruído. Os resultados demonstram que o algoritmo proposto não só remove o ruído com eficiência, mas também alcança valores superiores de PSNR e menores de MSE, indicando uma melhoria substancial na qualidade da imagem final.

Em (LI et al., 2024b), foi realizado um estudo que aborda as limitações das funções de limiar *wavelet* existentes, que não são contínuas e não foram otimizadas para múltiplos tipos de ruído. Uma nova função de limiar contínua e ajustável é proposta e avaliada. Os experimentos demonstram que esta nova função supera métodos tradicionais na remoção de ruídos de sal e pimenta, gaussiano e *speckle*, preservando mais detalhes da imagem. A pesquisa oferece uma solução viável e eficaz para o processamento de imagens com diferentes características de ruído.

A redução e/ou remoção de ruído foi analisada em (REDDY et al., 2024), este estudo explora o desempenho de quatro transformações multiescala — *ridgelets*, *shearlets*, *curvelets* e *wavelets* — na remoção de ruído. O estudo compara a eficácia de cada método em imagens artificiais e reais, analisando a capacidade de cada transformação de capturar e preservar detalhes da imagem em diferentes escalas e orientações. A avaliação é realizada com base na relação sinal-ruído (SNR - *Signal to Noise Ratio*), revelando as vantagens e desvantagens de cada abordagem em relação a diversos tipos de ruído e conteúdo de imagem.

Em (JANNATI; ZOEJ, 2024) propuseram uma estrutura híbrida com base na limiarização inteligente indireta dos coeficientes de decomposição de *wavelet*, denominada limiarização inteligente de coeficiente de *wavelet*, no estudo, para determinar automaticamente um limiar ideal, foi usado um modelo híbrido, no qual os coeficientes de transformação de *wavelet* foram pesquisados usando a combinação de métodos de otimização meta-heurística de otimização genética e de enxame de partículas, o PSO (*Particle Swarm Optimization*). O PSO é baseado em um conjunto soluções aleatórias, no qual o algoritmo atribui partículas baseado na decomposição da *wavelet*. O algoritmo proposto foi aplicado as imagens de aparência única e as imagens de aparência múltipla. Com base nos resultados, o método proposto, que sugere a limiarização indireta dos coeficientes *wavelet*, apresenta bom desempenho na redução de manchas.

Em (YIN; CHEN, 2024) foi desenvolvido uma rede de redução de ruído em imagens hiperespectrais HSI (*hyperspectral image*) baseado em uma nova rede de desdobramento profundo, DU (*Deep Unfolding*) inspirada na CD-CSC (*Content-Dependent 3-D Convolutional Sparse Coding*), denominado de CD-CSCNet. O desdobramento profundo é uma maneira viável de melhorar a interpretabilidade da rede profunda, na proposta desenvolvida, o método representa o conjunto espacial-espectral para redução de ruído de HSI minimizando o efeito desagradável da distorção espectral. Os resultados experimentais abrangentes dos conjuntos de dados demonstram que o CD-CSCNet supera quantitativa e visualmente várias redes recentes baseadas em dados puros e em DU.

No trabalho desenvolvido em (LI; CONG; MO, 2024) foi proposto um método para a redução de ruído em imagens que combina a transformada *wavelet* com uma função de limiar aprimorada. A principal inovação é a função de limiar contínua, que visa superar as limitações dos métodos tradicionais, evitando o efeito pseudo-Gibbs e a perda de detalhes. A pesquisa avalia o desempenho do algoritmo na remoção de ruído gaussiano, mostrando um aumento significativo na relação sinal-ruído de pico (PSNR), uma redução no erro quadrático médio (MSE) e um tempo de processamento consideravelmente menor em comparação com os algoritmos de limiar rígido e suave. O estudo demonstra a eficácia e a estabilidade do método, sugerindo sua aplicabilidade no campo do processamento de imagens digitais.

No trabalho desenvolvido em (TAASSORI, 2024) foi proposta uma abordagem de remoção de ruído em imagens médicas que combina a transformada *wavelet* com filtragem espacial. O método utiliza primeiramente o *denoising* via transformada *wavelet* e, em seguida,

aplica um filtro bilateral como etapa de pós-processamento, explorando a capacidade deste filtro em preservar bordas enquanto suaviza o ruído. A principal contribuição do trabalho reside na otimização dos parâmetros do filtro bilateral, que é realizada automaticamente através de otimização Bayesiana. Esta técnica busca encontrar eficientemente a melhor combinação de parâmetros para equilibrar a remoção de ruído e a preservação de detalhes da imagem.

Em (RAHMAN; AFJAL; MAMUN, 2025) foi realizado um estudo para aprimorar a remoção de ruído em imagens biomédicas. O objetivo principal foi identificar a configuração ideal como, tipo de *wavelet*, método de limiarização e nível de decomposição para mitigar o ruído em imagens de ressonância magnética cerebral. Na pesquisa foram comparados sistematicamente as *wavelets db3*, *bior6.8* e *sym4*, combinadas com os métodos de cálculo de limiar Bayes e Universal, e técnicas de limiarização *hard* e *soft*. O método foi avaliado em imagens de MRI às quais foi adicionado ruído Gaussiano em diferentes níveis. Utilizando métricas quantitativas de PSNR, de SSIM e de MSE, o estudo concluiu que a *wavelet db3* combinada com o método de limiarização Universal proporcionou o desempenho de *denoising* mais eficaz, alcançando os valores de PSNR mais elevados.

Um algoritmo híbrido para a redução de ruído *speckle* em imagens de Tomografia de Coerência Óptica (OCT - *Optical Coherence Tomography*) foi proposto por (LI et al., 2025). O método proposto combina a Transformada *Wavelet* Discreta e a Transformada *Wavelet* Invariante de Deslocamento (SWT - *Shift-Invariant Wavelet Transform*) com uma Rede Neural Convolucional Profunda (DnCNN - *Deep Neural Convolutional Network*). A abordagem de duplo caminho processa os coeficientes de alta frequência de ambas as transformadas de forma independente, utilizando a DnCNN para a remoção de ruído, e depois funde os resultados para preservar detalhes importantes. O estudo demonstra a eficácia do algoritmo em termos de PSNR, MSE e SSIM, validando sua capacidade de suprimir o ruído e, ao mesmo tempo, melhorar a clareza e a nitidez das bordas das imagens, o que é essencial para o diagnóstico em imagens médicas.

1.4 Organização da Proposta da Tese

A organização deste trabalho, com exceção do Capítulo 1, que serve como introdução, é apresentada a seguir:

O **Capítulo 2 - Fundamentos de Imagens** apresenta uma revisão teórica dos tópicos: conceitos básicos sobre imagem, imagem digital, espaço de cor RGB e YUV, ruído e as métricas de qualidade em imagens.

A seguir, no **Capítulo 3 - Transformada Wavelet** são definidas as transformadas *wavelets* contínua e discreta, as bases ou famílias *wavelets*, 2D DWT (2D *Discrete Wavelet Transform*), o conceito de redução de ruído com a utilização da limiarização *wavelet*.

O **Capítulo 4 - Metodologia** descreve a metodologia empregada na definição da função de limiarização *wavelet* adaptativa para redução do ruído em imagens, incluindo o estimador de reajuste de *thresholding* adaptativo proposto, os parâmetros da função e as etapas da limiarização adaptativa aplicada nas imagens de ressonância magnética cerebral desenvolvida no *software* Matlab.

No **Capítulo 5 - Resultados** são apresentados os resultados da função de limiarização *wavelet* adaptativa proposta, baseado no Fator de Predição Linear, resultados em termos quantitativos utilizando métrica objetivas MSE, PSNR e SSIM, além de resultados que expressam a qualidade visual da imagem, os resultados qualitativos. O capítulo apresenta a análise comparativa entre as bases *wavelet bior3.9*, *db4*, *sym8* e *coif2* e por fim, o desempenho computacional dos métodos de limiarização *wavelet*.

O **Capítulo 6 - Conclusões e Trabalhos Futuros** encerra a proposta da tese apresentando as considerações finais, contribuições, limitações deste trabalho, as sugestões para trabalhos futuros.

1.5 Considerações Finais

Este capítulo introduziu a proposta de pesquisa, focando na investigação objetiva do método para redução de ruído em imagens de ressonância magnética cerebral. A abordagem central é a limiarização *wavelet* baseada no fator de predição linear. A contextualização inicial apresentou a proposta em um panorama contemporâneo, seguida pela motivação que impulsionou esta pesquisa. Posteriormente, foram delineados o objetivo geral e os objetivos específicos do estudo. Por fim, este capítulo apresentou os trabalhos correlatos, além de detalhar a organização da tese nos capítulos subsequentes.

2 Fundamentos de Imagens

2.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo apresentar os fundamentos teóricos necessários para compreender os conceitos sobre imagens digitais, seus formatos e características. Conceitos sobre o ruído aditivo e ruído multiplicativo, além das principais métricas quantitativa ou de fidelidade das imagens que são utilizadas para avaliar a similaridade de uma imagem processada em relação à sua imagem original.

2.2 Imagens Digitais

Uma imagem digital é composta por um conjunto de pontos (*pixels*), cada um armazenando informações de cor e brilho. A resolução da imagem é determinada pela quantidade de *pixels* por unidade de área. Uma imagem monocromática digital é estruturada como uma matriz bidimensional, onde cada elemento representa um *pixel* da imagem (FILHO; NETO, 1999). A posição desse *pixel* na imagem é determinada pelos índices de linha e coluna da matriz, enquanto o valor numérico armazenado nesse elemento corresponde à intensidade do nível de cinza naquele ponto específico.

Deste modo, uma imagem é modelada pela função $f(x, y)$, no qual representa uma intensidade luminosa em uma imagem bidimensional. Nessa função, as variáveis x e y representam as coordenadas espaciais de cada ponto na imagem, enquanto o valor $f(x, y)$ indica o nível de brilho nesse ponto específico. Em outras palavras, $f(x, y)$ quantifica o quão claro ou escuro é cada *pixel* na imagem. A intensidade de luz pode ser modelada como expresso em (2.1) (GONZALEZ; WOODS, 2009):

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y) \quad (2.1)$$

onde i representa a iluminação do ambiente, definido em $0 < i(x, y) < \infty$ e r representa a refletância dos objetos, definido em $0 < r(x, y) < 1$.

A Figura 1 ilustra a representação de uma imagem monocromática como uma matriz. Cada elemento dessa matriz corresponde a um *pixel* na imagem. A posição do *pixel* na imagem é determinada pelos índices de linha x e coluna da matriz y , enquanto o valor numérico do elemento representa o nível de cinza do *pixel* naquele ponto específico. Portanto, para representar uma imagem no contexto digital, é necessário quantizar tanto as coordenadas espaciais (x, y) quanto a intensidade da luz.

Figura 1 – Representação da imagem monocromática em $f(x, y)$, representando o produto entre a iluminância $i(x, y)$ e reflectância $r(x, y)$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma imagem policromática é construída pela combinação de múltiplas funções de intensidade luminosa bidimensionais, cada uma representando uma cor primária ou um canal de cor. Essas funções, denotadas por $f_i(x, y)$, onde x e y são as coordenadas espaciais, descrevem a intensidade da luz para a cor i em cada ponto da imagem. As imagens digitais podem ser armazenadas em diferentes formatos, sendo os mais comuns JPEG (*Joint Photographic Experts Group*), PNG (*Portable Network Graphics*) e TIFF (*Tag Image File Format*).

A forma mais comum de se ilustrar uma imagem é pela divisão de linhas e colunas ou simplesmente no formato de uma tabela, ou matriz de *pixel*, conforme mostra a Figura 2, que ilustra um exemplo de imagem Boat em níveis de cinza tamanho 256×256 , Figura 2a e sua representação no detalhe dos *pixels*, Figura 2b. Um *pixel* é simplesmente uma representação de uma determinada cor, em uma imagem colorida, ou intensidade, níveis ou tons de cinza, conforme mostra a Figura 2.

Figura 2 – Exemplo de Imagem em Níveis de Cinza: (a) Boat tamanho 256×256 e (b) detalhe da representação em *pixels*.



(a)

120	135	136	141	134	134	98	93	78	52	51	73	79
124	152	145	149	147	164	157	146	96	73	111	154	127
132	175	174	175	176	195	194	190	153	161	182	163	135
160	190	196	171	187	206	186	180	178	163	133	109	94
171	183	181	148	193	178	147	150	124	98	85	84	85
162	178	149	138	174	128	101	97	81	80	93	90	86
158	156	126	119	107	80	92	107	94	80	92	94	96
129	102	85	85	86	77	96	132	100	83	102	131	168
80	80	84	87	84	77	82	126	122	145	185	213	225
73	79	79	87	84	92	127	172	202	222	227	221	220
89	105	94	123	149	183	211	226	222	222	216	215	213
144	154	179	204	219	223	220	221	219	216	200	200	213
201	215	226	224	224	222	217	222	219	216	205	209	217

(b)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em relação as imagens, o HVS (*Human Visual System*) possui elementos sensíveis à intensidade luminosa e às cores primárias, deste modo, uma imagem colorida está relacionado à interpretação das cores, denominado de espaço de cores (ZHANG; XIU, 2024). O espaço de cores é uma estrutura que representa várias combinações para indicar o brilho e/ou a luminância de cada amostra espacial, neste caso, as combinações do espaço de cores são as três posições de *pixel* para representar as cores com exatidão, representando uma matriz tridimensional de inteiros. A escolha do espaço de cores a ser utilizado para representar uma imagem digital é de fundamental importância para determinar o quanto a codificação é eficiente para essa imagem. Na codificação existem muitos espaços de cores utilizados para representar a imagem, tais como, RGB (*Red-Green-Blue*), CMY (*Cyan-Magenta-Yellow*), YUV, YCbCr, HSV (*Hue-Saturation-Value*) e HSI (*Hue-Saturation-Intensity*) (LISSNER; URBAN, 2012), (CHAVES-GONZÁLEZ et al., 2010).

2.2.1 RGB e YUV

No espaço de cor RGB, uma amostra da imagem é representada pelas três matrizes distintas que indicam as proporções relativas as cores primárias aditivas: vermelho, verde e azul. A combinação das cores dominantes em diferentes níveis de intensidade retrata as cores presentes na natureza. O RGB é o espaço de cor mais comum, sendo, portanto utilizado pelos fabricantes de digitalizadores, televisores, *smartphones*, monitores e câmeras digitais (CHAVES-GONZÁLEZ et al., 2010).

O espaço de cor RGB é bastante adequado para a captura e exibição de imagens a cores, devido o processo utilizar filtros e sensores em separados para cada componente das amostras vermelha, verde e azul (BRATKOVA; BOULOS; SHIRLEY, 2009). Imagens exibidas, por exemplo, pelas telas de LCD (*Liquid Crystal Display*) ou pelas telas de LED (*Light Emitting Diode*) que utilizam as amostras do espaço de cor RGB, iluminando separadamente os componentes vermelho, verde e azul de cada *pixel*, de acordo com a intensidade de cada um. A partir de uma distância de visualização, os componentes separados combinam-se e resultam em uma aparência de cor com nitidez incrível. Devido a importância das três amostras no espaço de cor RGB, normalmente as representações de imagens coloridas são armazenadas na mesma resolução, no entanto, é possível representar uma imagem colorida de forma mais eficiente através da separação das componentes da luminância e cromaticidade.

O espaço de cor YUV e suas variações, por vezes referido como YCbCr, são formas mais eficientes de representar as imagens coloridas (LISSNER; URBAN, 2012), (CHAVES-GONZÁLEZ et al., 2010), além de possuir uma grande aproximação da percepção do olho humano (BENOIT et al., 2010). A componente *Y* representa a luminância, neste caso, define a intensidade luminosa ou o brilho e as componentes *U* e *V* representam a codificação de cromaticidade, a informação da cor.

Comparando o espaço de cor YUV com o RGB, as componentes do RGB possuem

um alto grau de correlação, apresentando um elevado nível de processamento de cada uma das informações de cor de forma independente. No espaço de cor YUV, a informação de cor pode ser representada como a diferença da componente de cromaticidade, em cada componente de cromaticidade existe uma diferença com a componente de luminância. Desta forma, a informação de cor está separada da informação de luminância.

A Figura 3 representa a imagem da Akiyo, tamanho 352×288 , Figura 3a Imagem original, Figura 3b Imagem da Componente R que consiste em todas as amostras vermelhas, Figura 3c Imagem da Componente G que consiste em todas as amostras verdes e Figura 3d Imagem da Componente B que consiste em todas as amostras azuis, do espaço de cor RGB.

Figura 3 – Imagem da Akiyo, tamanho 352×288 : (a) Imagem Original, (b) Imagem da Componente R , (c) Imagem da Componente G e (d) Imagem da Componente B .



Fonte: Elaborado pelo autor.

A conversão do espaço de cores YUV para RGB é baseado na recomendação ITU-R BT.601-7 (ITU, 2011) da Norma ITU-R. As expressões de conversão, definida pela recomendação, entre o espaço de cor YUV para RGB são formuladas respectivamente, para componente R , componente G e componente B expressas, respectivamente, em (2.2), (2.3) e (2.4):

$$R = 1.164 * (Y - 16) + 1.596 * (V - 128) \quad (2.2)$$

$$G = 1.164 * (Y - 16) - 0.391 * (U - 128) - 0.813 * (V - 128) \quad (2.3)$$

$$B = 1.164 * (Y - 16) + 2.018 * (U - 128) \quad (2.4)$$

No processo inverso, conforme a recomendação ITU-R BT.601-7 (ITU, 2011) da Norma ITU-R, as expressões de conversão, definida pela recomendação, entre o espaço de cor RGB para YUV são formuladas respectivamente, para componente Y , componente U e componente V expressas, respectivamente, em (2.5), (2.6) e (2.7):

$$Y = (0.257 * R) + (0.504 * G) + (0.098 * B) + 16 \quad (2.5)$$

$$U = -(0.648 * R) - (0.291 * G) + (0.439 * B) + 128 \quad (2.6)$$

$$V = (0.439 * R) - (0.368 * G) - (0.071 * B) + 128 \quad (2.7)$$

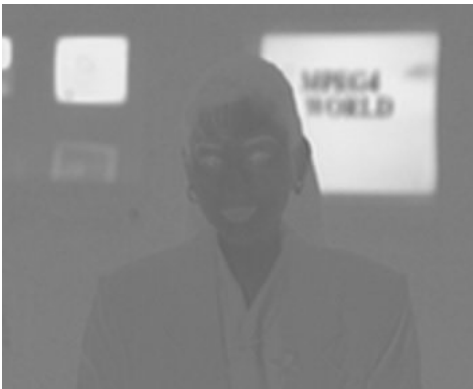
Figura 4 – Imagem da Akiyo, tamanho 352×288: (a) Imagem Original, (b) Imagem da Componente Y , (c) Imagem da Componente U e (d) Imagem da Componente V .



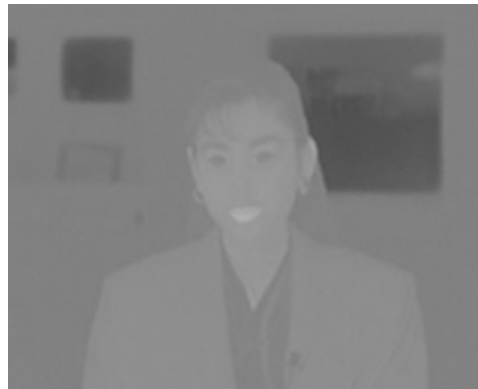
(a)



(b)



(c)



(d)

Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 4 mostra a imagem da Akiyo, tamanho 352×288 , Figura 4a Imagem original, Figura 4b Imagem da componente de luminância Y , Figura 4c e Figura 4d as imagens das componentes de croma U e V , respectivamente, que correspondem as componentes RGB da Figura 3.

2.3 Ruído

O ruído é definido como um sinal indesejado, prejudica a qualidade da maioria dos sinais, tais como, sinal de voz, vídeo e imagem. Ele pode ser causado por diversas fontes, como interferências eletromagnéticas, ruído térmico e distorções nos componentes eletrônicos (KOKIL; PRATAP, 2021). Embora seja um obstáculo, o ruído também carrega informações sobre sua origem e o ambiente de propagação. Essa dualidade torna-o um objeto de estudo na área de processamento de sinais, onde busca-se minimizá-lo, além de ser explorado para extrair informações relevantes.

A variedade de fontes de ruído e suas distorções são bastantes vastas e, geralmente, impactam diversos tipos de sistemas e incluem: 1. Ruído eletrônico, como o ruído térmico e ruído de disparo; 2. Ruído acústico proveniente de fontes de movimento, vibração ou colisão, como máquinas, motores, veículos em movimento, condições climáticas, como vento ou chuva. 3. Ruído eletromagnético que pode interferir na transmissão e recepção de voz, imagem e dados relacionados ao espectro de radiofrequência; 4. Ruído eletrostático gerado pela presença de tensão; 5. Distorção e desvanecimento do canal de comunicação; 6. Ruído de quantização e perda de pacotes de dados devido ao congestionamento de uma rede de computadores.

A capacidade de transmissão de dados em sistemas de telecomunicações e a precisão dos resultados em sistemas de medição são severamente limitadas pela presença do ruído. A modelagem precisa desse fenômeno e o desenvolvimento de técnicas eficazes para sua redução são fundamentais para o avanço da teoria e da prática das comunicações e de processamento de sinais, especificamente em áreas, como comunicação móvel, reconhecimento de voz, processamento de imagens e medicina dependem de soluções robustas para lidar com a degradação dos sinais causada pelo ruído.

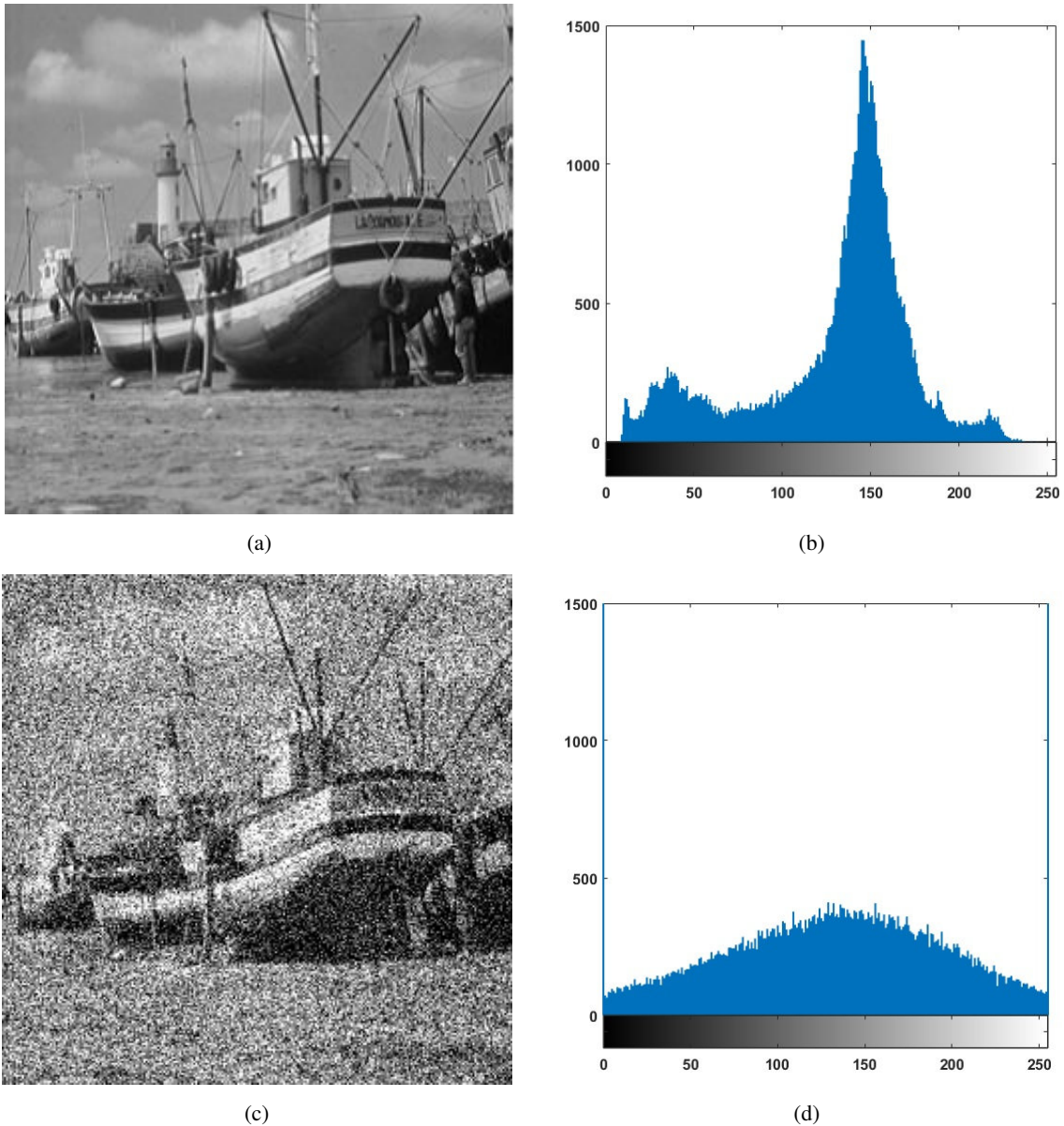
Portanto, o ruído representa variações aleatórias e imprevisíveis que degradam a qualidade de um sinal ou imagem. Em imagens digitais, o ruído se manifesta como *pixels* ou manchas coloridas que não pertencem à cena original, resultando em perda de detalhes e nitidez. A presença excessiva de ruído pode prejudicar a identificação de objetos e informações importantes na imagem.

Felizmente, existem diversas técnicas de processamento de imagem para mitigar o ruído digital. Filtros de suavização e métodos de remoção manual são exemplos comuns. Contudo, é fundamental estar ciente de que essas técnicas podem levar à perda de detalhes e nitidez. Portanto, a escolha da abordagem ideal deve ser feita com cautela, considerando as características

específicas de cada imagem.

A Figura 5 ilustra um exemplo da imagem Boat em tons de cinza, tamanho 256×256 e sua imagem ruidosa. A Figura 5a mostra a imagem Boat original e a Figura 5b o histograma da imagem Boat original. Enquanto que na Figura 5c ilustra a imagem Boat com adição de ruído gaussiano e a Figura 5d o histograma da imagem Boat ruidosa.

Figura 5 – Exemplo de Imagem Original e Imagem Ruidosa: Imagem Boat Original (a), Histograma da Imagem Boat Original (b), Imagem Boat Ruidosa (c) e Histograma da Imagem Boat Ruidosa (d).



Fonte: Elaborado pelo autor.

De modo geral, o ruído é uma alteração aleatória da informação espacial, como brilho ou a cor. Existem muitas variantes desta aleatoriedade, no entanto, podem ser classificadas em: impulsivo, disparo (Quântico), ruído aditivo e ruído multiplicativo (YU; LI, 2022).

2.3.1 Ruído Impulsivo

O ruído impulsivo é caracterizado por perturbações abruptas e localizadas na imagem, que fazem com que os *pixels* afetados assumam valores de intensidade (brilho) extremamente altos ou extremamente baixos, independentemente do valor real do *pixel* original (LIANG; LI; ZHAO, 2021). O ruído impulsivo afeta apenas alguns *pixels* na imagem, em locais selecionados aleatoriamente. Não afeta a imagem inteira de maneira uniforme. O tipo mais comum e mais estudado de ruído impulsivo é o ruído Sal e Pimenta (*Salt and Pepper*).

2.3.1.1 Ruído Sal e Pimenta

O ruído sal e pimenta, também conhecido como ruído de impulso, é uma forma de degradação comum em imagens digitais. Ele se manifesta como *pixels* isolados que assumem valores de intensidade extremos, seja o valor máximo (branco, sal) ou o valor mínimo (preto, pimenta) (XU et al., 2018). Essa natureza bipolar resulta em uma aparência pontilhada, semelhante a grãos de sal e pimenta espalhados pela imagem. A função densidade de probabilidade do ruído sal e pimenta é definido em (2.8):

$$f(x) = \begin{cases} P_a, & \text{para } x = a \\ P_b, & \text{para } x = b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.8)$$

A Figura 6a mostra a imagem original Cameraman em tons de cinza, tamanho 512×512 e a Figura 6b mostra a imagem com ruído sal e pimenta, com densidade de ruído igual a 0.05.

Figura 6 – Exemplo de Ruído Sal e Pimenta, Imagem Cameraman, tons de cinza, tamanho 512×512: (a) Imagem Original e (b) Imagem Ruidosa.



(a)



(b)

Fonte: Elaborado pelo autor.

2.3.2 Ruído de Disparo (Quântico)

É inerente à natureza discreta da luz e da matéria. Ele surge da incerteza estatística no número de fótons que atingem o sensor em um determinado período. Em condições de pouca luz ou iluminação fraca, os fotodiodos ficam sem fótons, ou seja, uma baixa contagem de fótons é recebida no dispositivo eletrônico (MANNAM et al., 2022). Isso leva ao ruído de disparo, que não só distorce os valores do sinal, mas também leva a um baixo contraste na imagem. Ao contrário do ruído aditivo sistemático, o ruído de disparo é difícil de lidar, pois depende da intensidade (ou magnitude) do sinal verdadeiro.

2.3.2.1 Ruído de Poisson

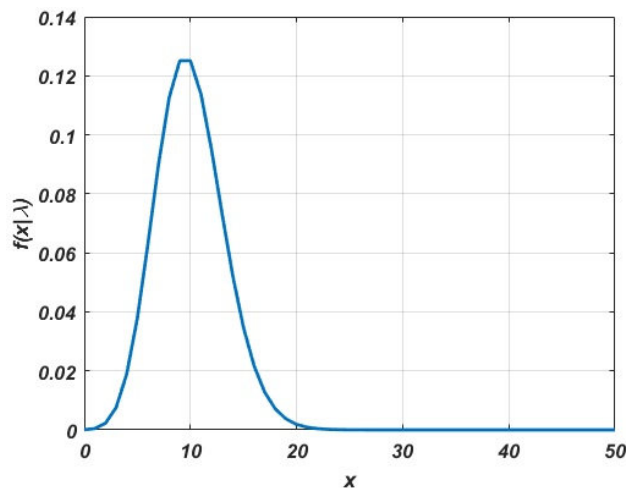
O ruído de Poisson, também conhecido como ruído quântico (fóton) ou ruído de disparo, é um tipo de ruído inerente a sistemas que detectam eventos discretos, como a emissão de fótons em ondas eletromagnéticas. Sua origem reside na natureza estatística desses eventos, que ocorrem de forma aleatória e independente. Embora não seja estritamente proporcional ao sinal, o ruído de Poisson exibe um comportamento semelhante ao ruído multiplicativo, pois sua variância aumenta com a intensidade do sinal. A distribuição de Poisson é matematicamente definida pela função densidade de probabilidade expresso em (2.9) (LE; CHARTRAND; ASAKI, 2007; XIANG; XIANG; WANG, 2023):

$$f(x|\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad (2.9)$$

onde λ é o número esperado de fótons por *pixel* e x é número real de fótons por *pixel*.

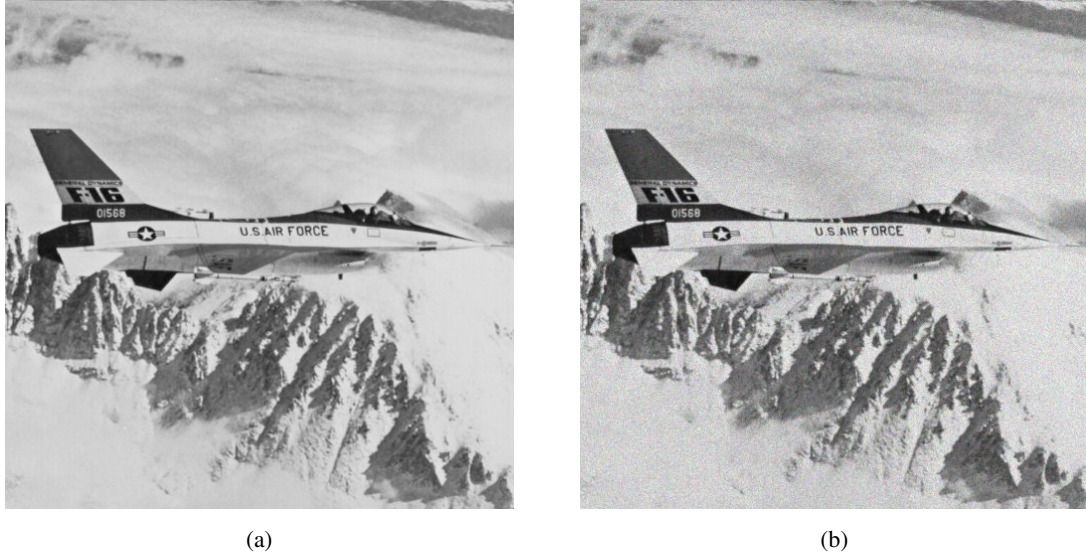
A Figura 7 mostra a função densidade de probabilidade da distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = 10$. A Figura 8a mostra a imagem original Jetplane tons de cinza, tamanho 512×512 e a Figura 8b ilustra a imagem com ruído de Poisson.

Figura 7 – Função Densidade de Probabilidade da distribuição de Poisson, com o parâmetro $\lambda = 10$, função que representa o ruído de Poisson (quântico).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 8 – Exemplo de Ruído de Poisson, Imagem Jetplane, tons de cinza, tamanho 512×512: (a) Imagem Original e (b) Imagem Ruidosa.



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.3.3 Ruído Aditivo

O ruído aditivo caracteriza-se pela adição de sinais indesejados ao sinal original durante sua transmissão ou processamento (YU; LI, 2022). Essa adição, resultante de fenômenos como interferências eletromagnéticas, ruídos térmicos ou a presença de sinais externos, compromete a integridade e a fidelidade dos dados transmitidos. Devido ao ruído aditivo, o sinal original perde a clareza e fidelidade, o que pode levar a distorções, erros de interpretação e até mesmo à perda de informações importantes.

Para modelar o ruído como um processo aleatório representado por $r_{i,j}$, pode-se definir uma imagem contaminada pelo ruído aditivo dado por $y_{i,j}$ como, uma função da imagem original $x_{i,j}$ e da composição do ruído expresso em (2.10):

$$y_{i,j} = f(x_{i,j}, r_{i,j}) \quad (2.10)$$

onde, i e j são as coordenadas espaciais para a localização da imagem.

Se o ruído for independente do sinal da imagem e for sobreposto à imagem, o ruído é considerado como o ruído aditivo. No ruído aditivo essa relação é representada pela equação expressa em (2.11) (HASAN, 2014):

$$y_{i,j} = x_{i,j} + r_{i,j} \quad (2.11)$$

2.3.3.1 Ruído Aditivo Gaussiano Branco

O Ruído Aditivo Gaussiano Branco ou AWGN (*Additive White Gaussian Noise*) é um fenômeno presente em diversas áreas da engenharia, incluindo telecomunicações, processamento de sinais, controle e automação. Este ruído é caracterizado por uma distribuição de probabilidade Gaussiana, com média nula e variância constante (RAO, 1958). Portanto, o AWGN representa um modelo matemático fundamental para descrever o ruído aleatório em sistemas de comunicação (KHMAG, 2023).

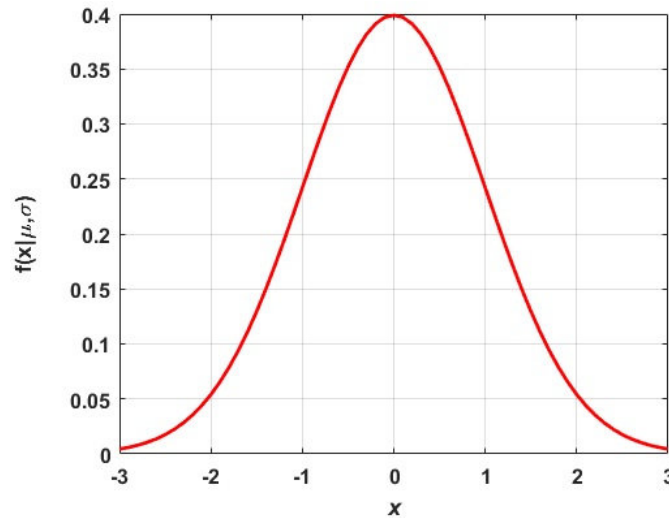
A função densidade de probabilidade de uma variável aleatória gaussiana, x é dada pela expressão (2.12):

$$f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.12)$$

onde x representa a variável aleatória, μ é o valor médio ou esperado da distribuição gaussiana e σ o desvio padrão, que mede a dispersão da distribuição gaussiana.

A Figura 9 apresenta a distribuição gaussiana padrão, também conhecida mais comumente como distribuição normal padrão, onde o valor médio $\mu = 0$ e o desvio padrão $\sigma = 1$. A Figura 10a mostra a imagem original Peppers colorida, tamanho 512×512 e a Figura 10b ilustra a imagem com ruído aditivo gaussiano branco, com média nula e variância de 0.05.

Figura 9 – Função Densidade de Probabilidade da distribuição gaussiana normal, com os parâmetros $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, função que representa o AWGN.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O ruído aditivo gaussiano branco (AWGN) é um tipo de ruído que degrada significativamente a qualidade do sinal, sendo um fator crucial em projetos de processamento de sinais. A identificação e modelagem precisas do AWGN são essenciais para prevenir e mitigar seus efeitos adversos em medições e transmissões de sinais em sistemas de comunicação.

Figura 10 – Exemplo de Ruído Aditivo Gaussiano Branco: (a) Imagem Original Peppers, colorido, tamanho 512×512 e (b) Imagem Ruidosa Peppers, colorido, tamanho 512×512 , com variância de 0.05.



Fonte: Elaborado pelo autor.

No contexto de processamento de imagens digitais, o ruído aditivo gaussiano branco é um modelo de degradação amplamente utilizado e altamente realista. Ele simula com precisão o ruído gerado pelos componentes eletrônicos internos do sistema de captura. Assim, a degradação de uma imagem é frequentemente modelada como a imagem original mais o ruído aditivo gaussiano. Portanto, o ruído aditivo gaussiano branco não é apenas um modelo teórico, é um padrão fundamental no processamento de imagens devido à sua excelente capacidade de simular o ruído físico inerente ao sistema de captura.

A razão do uso do AWGN em estudos com imagens digitais reside em duas características principais:

- **Realismo:** O ruído AWGN representa uma fidelidade física nos sistemas de imagens, por exemplo, na captura de câmeras, apresentando frequentemente o resultado de múltiplas fontes de perturbação eletrônica independentes (como ruído térmico, ruído de disparo e ruído de leitura). De acordo, com o Teorema do Limite Central, quando muitas variáveis aleatórias independentes se somam, a distribuição da soma tende a ser uma distribuição Gaussiana (Normal), independentemente da distribuição original de cada fonte. Assim, o ruído total, que é a soma de todos esses pequenos ruídos, é bem modelado por uma distribuição Gaussiana.
- **Simplicidade Matemática:** O termo ruído branco refere-se à sua Densidade Espectral de Potência constante em todas as frequências (como a luz branca que contém todas as cores). Isso implica que não há correlação espacial entre os *pixels* de ruído. Desde modo, a distribuição Gaussiana é a que oferece maior facilidade para análise e manipulação em

domínios como o espacial e o da frequência, o que é importante para o desenvolvimento de filtros de remoção de ruído.

2.3.3.2 Ruído da Distribuição de Rayleigh

O ruído de Rayleigh é caracterizado pela distribuição de Rayleigh (RAYLEIGH, 1880), uma função de densidade de probabilidade contínua que descreve a probabilidade de uma variável aleatória positiva assumir um determinado valor. Essa distribuição é particularmente útil para modelar fenômenos onde a magnitude de um vetor aleatório é relevante.

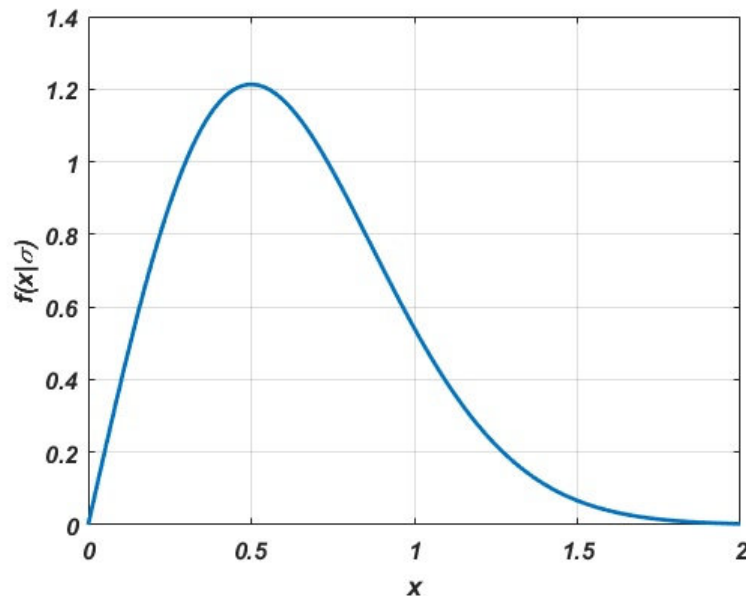
A distribuição de Rayleigh se aplica a variáveis contínuas positivas e não limitadas, o que significa que ela pode descrever uma ampla gama de valores para a variável em questão. A função de densidade de probabilidade de Rayleigh é expressa matematicamente pela equação (2.13) (JUNEJA et al., 2024):

$$f(x|\sigma) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

onde σ é o parâmetro de escala da distribuição de Rayleigh.

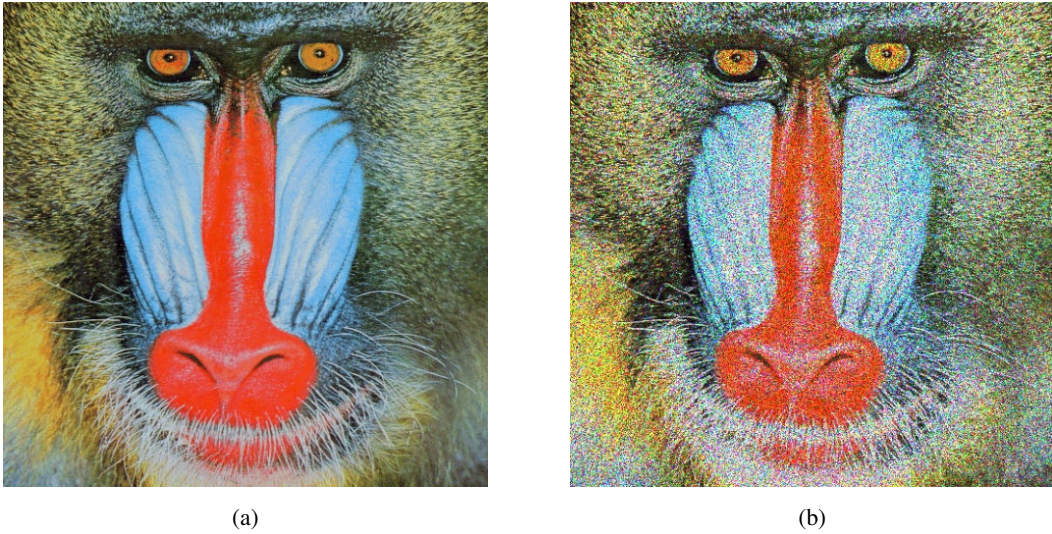
A Figura 11 mostra a função densidade de probabilidade da distribuição de Rayleigh com parâmetro $\sigma = 0.5$. A Figura 12a mostra a imagem original Mandril colorido, tamanho 512×512 e a Figura 12b ilustra a imagem com ruído de Rayleigh.

Figura 11 – Função Densidade de Probabilidade da distribuição de Rayleigh, com o parâmetro $\sigma = 0.5$, função que representa o ruído da distribuição de Rayleigh.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 12 – Exemplo de Ruído de Rayleigh: (a) Imagem Original Mandril, colorido, tamanho 512×512 e (b) Imagem Ruidosa Mandril, colorido, tamanho 512×512.



Fonte: Elaborado pelo autor.

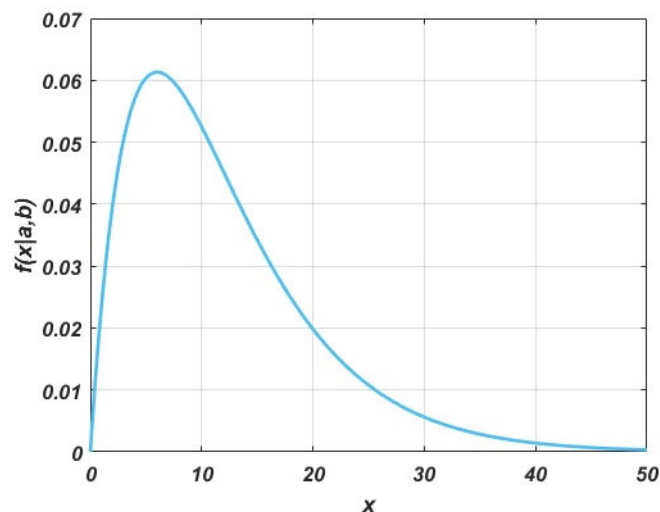
2.3.3.3 Ruído da Distribuição Gamma

O ruído Gamma, também conhecido como ruído Erlang, é um tipo de ruído estatístico que se caracteriza por sua distribuição de probabilidade assimétrica, inclinada para a direita, conforme ilustrado na Figura 13. Essa distribuição é matematicamente definida pela expressão (2.14), a função densidade de probabilidade e depende de dois parâmetros importantes:

$$f(x|a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b^a \Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\frac{x}{b}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

onde a é o parâmetro da forma ($a > 0$), b é o parâmetro de escala ($b > 0$) e $\Gamma(\cdot)$ é a função Gamma.

Figura 13 – Função Densidade de Probabilidade da distribuição Gamma, com o parâmetro $a = 2$ e $b = 6$, função que representa o ruído da distribuição Gamma.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 14a apresenta a imagem original da Barbara em tons de cinza, tamanho 512×512 e a Figura 14b mostra a imagem com ruído Gamma.

Figura 14 – Exemplo de Ruído de Gamma: (a) Imagem Original Barbara, tons de cinza, tamanho 512×512 e (b) Imagem Ruidosa Barbara, tons de cinza, tamanho 512×512.



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.3.4 Ruído Multiplicativo

O ruído multiplicativo representa uma forma significativa de degradação em imagens digitais, distinguindo-se do ruído aditivo por sua dependência direta do sinal da imagem. Em vez de ser somado à imagem, o ruído multiplicativo é multiplicado por ela, resultando em uma intensidade de ruído que varia proporcionalmente à intensidade do sinal original (JAIN, 1989). O ruído multiplicativo é expresso pela equação em (2.15) (SINGH et al., 2021):

$$y_{i,j} = x_{i,j}r_{i,j} \quad (2.15)$$

onde $y_{i,j}$ representa uma imagem contaminada pelo ruído multiplicativo, $x_{i,j}$ representa a imagem original e $r_{i,j}$ representa o ruído multiplicativo. Neste modelo, o ruído não é um valor constante, mas sim multiplicado pelo sinal $x_{i,j}$, o que faz com que sua amplitude e intensidade dependam diretamente do sinal original.

A seguir será explanado um tipo mais comuns de ruído multiplicativo, detalhando suas características e impactos nas imagens digitais.

2.3.4.1 Ruído de Manchas

O ruído de manchas ou *Speckle Noise* é caracterizado pelo ruído granular que distorce as estruturas subadjacentes da imagem. O ruído de manchas é uma forma que ocorre comumente em imagens adquiridas por meio de técnicas de geração de imagens coerentes, como imagens de

ultrassom, radar e imagens a laser. Ao contrário do ruído gaussiano, que se manifestam como distúrbio aditivo, o ruído de manchas é de natureza multiplicativa. Isso significa que ele afeta a variação dos valores de *pixel* em vez de sua intensidade média (HUANG; LI; YUAN, 2020).

O ruído de manchas é expresso matematicamente pela expressão formulada em (2.16) (ROY; GHOSH; GHOSH, 2024):

$$y_{i,j} = x_{i,j} + \eta x_{i,j} \quad (2.16)$$

onde $y_{i,j}$ é a imagem ruidosa, $x_{i,j}$ é a imagem original e $\eta x_{i,j}$ é equivalente ao ruído aleatório uniformemente distribuído com média zero e variância ajustável.

A Figura 15 apresenta um exemplo de ruído multiplicativo de mancha para a imagem original Boat, em tons de cinza, tamanho 512×512 , Figura 15a e a imagem com ruído de mancha Boat, em tons de cinza, tamanho 512×512 , com variância de 0.05, Figura 15b.

Figura 15 – Exemplo de Ruído de Mancha, Imagem Boat, tons de cinza, tamanho 512×512 : (a) Imagem Original e (b) Imagem Ruidosa.



(a)



(b)

Fonte: Elaborado pelo autor.

2.4 Métricas de Qualidade em Imagens

A avaliação da qualidade de imagem é realizada por métricas objetivas e subjetivas. As métricas subjetivas são baseadas na percepção humana e as métricas objetivas são baseadas em modelos matemáticos, para estimar a média das opiniões dos usuários, essas avaliações são denominadas de QoE (*Quality of Experience*) (JULURI; TAMARAPALLI; MEDHI, 2016), (MÖLLER; RAAKE, 2014). As avaliações de QoE focam nas melhorias para aplicações multimídias a partir da percepção e experiência humana, desta forma, as métricas de QoE apresentam valores quantitativos que são mapeados em valores qualitativos. Nesta seção serão abordados as principais métricas objetivas que determinam a qualidade de uma imagem.

2.4.1 MSE (*Mean Squared Error*)

O erro médio quadrático ou MSE (*Mean Squared Error*) é uma métrica estatística amplamente utilizada para quantificar a diferença entre duas imagens digitais. Essa medida, herdada dos princípios de probabilidade e estatística, fornece uma avaliação da similaridade entre uma imagem original e uma imagem processada ou reconstruída. Formalmente, o erro médio quadrático entre a imagem original e a imagem reconstruída é definido em (2.17) (HASAN; EL-SAKKA, 2018):

$$MSE = \frac{1}{M \times N} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N |x_{(m,n)} - y_{(m,n)}|^2 \quad (2.17)$$

onde $x_{(m,n)}$ representa os valores de *pixels* da imagem original, $y_{(m,n)}$ representa os valores de *pixels* do quadro reconstituído, M e N são as dimensões da matriz que representa a imagem, no caso, a quantidade de *pixel* da imagem. A Figura 16 ilustra um exemplo para valor de MSE, para o imagem Peppers, tamanho 512×512 , (a) Imagem Original e (b) Imagem com MSE = 786.

Figura 16 – Imagem Peppers, colorido, tamanho 512×512 : (a) Imagem Original e (b) Imagem com MSE = 786. Exemplo que representa a imagem processada na avaliação da similaridade.



Fonte: Elaborado pelo autor.

2.4.2 PSNR (*Peak Signal to Noise Ratio*)

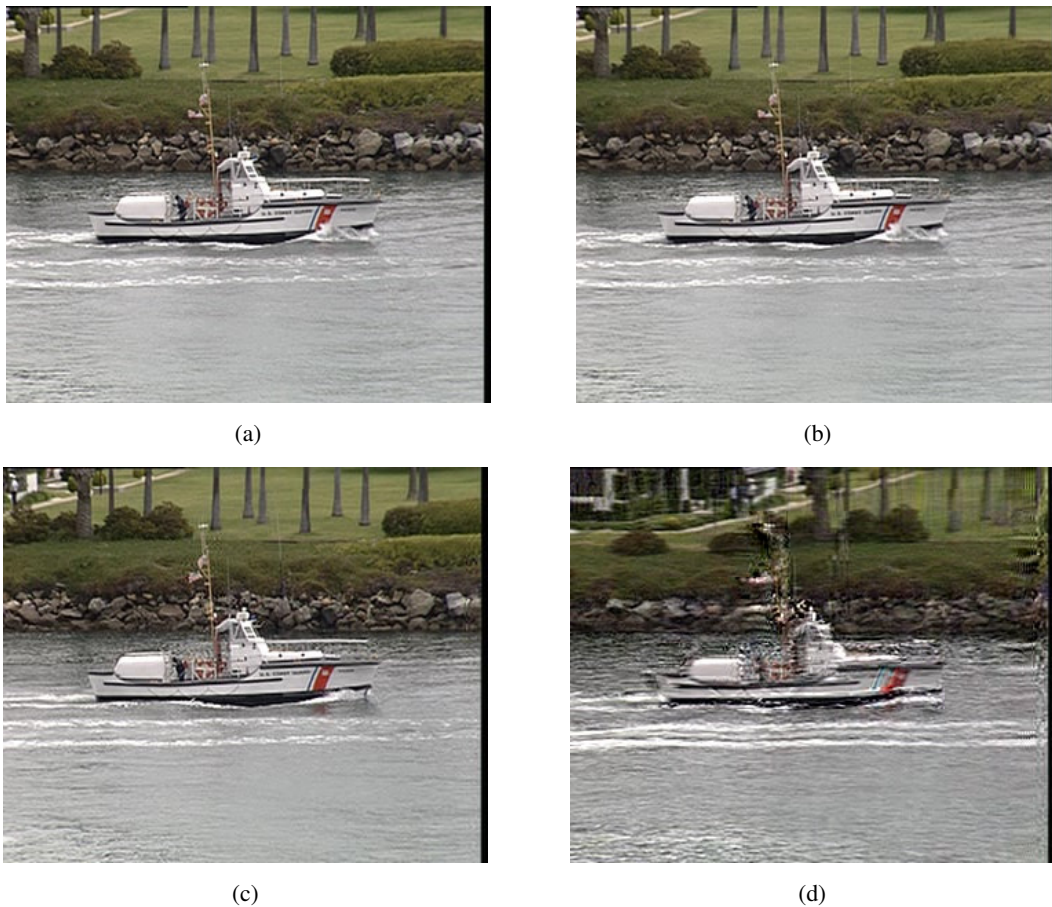
O PSNR (*Peak Signal to Noise Ratio*) é uma métrica objetiva que compara a qualidade da imagem processada pelo usuário em relação a imagem original. O PSNR, desta forma, determina o valor máximo de luminosidade para cada *pixel*, comparando a taxa de erro da imagem reconstruída. O PSNR é formulado a partir da equação (2.17), para uma imagem original x e uma imagem reconstruída y , de dimensão $M \times N$, pode ser calculada usando a seguinte expressão (2.18) (CHAN; WHITEMAN, 1983; FERREIRA et al., 2024):

$$PSNR(x,y) = 10 \log_{10} \left[\frac{L^2}{MSE} \right] \quad (2.18)$$

onde L é considerada a faixa dinâmica da imagem, por exemplo, para uma imagem codificada em 8 bpp (256 níveis de cinza), $L = 255$ e conforme expresso em (2.18), o PSNR é derivado de outra métrica, o MSE apresentado na subseção (2.4.1), que calcula a média de erro de variação de um atributo real, em relação ao qual esse mesmo atributo foi estimado, ou seja, compara a qualidade da imagem original (FERREIRA et al., 2024).

Para cada *pixel*, o PSNR, representa uma dedução do MSE em relação ao valor máximo de luminosidade, aplicado ao processamento de imagem, os valores de luminosidade, caracterizados pela ocorrência aleatória de *pixel*, diferem significativamente dos valores dos seus *pixels* vizinhos, apresentando o efeito característico do ruído. Utilizando o conceito na compressão de imagem, o PSNR é a relação entre a entrada e saída de um processo de compressão com perdas, que avalia o quanto a compressão introduziu ruído na imagem original. Desta forma, quanto maior o valor do PSNR, maior é a relação entre a potência do sinal pela potência do ruído, o que representa melhor qualidade da imagem.

Figura 17 – Imagem Coastguard, tamanho 352×288: (a) Imagem Original, (b) Imagem com PSNR = 31 dB, (c) Imagem com PSNR = 21.45 dB e (d) Imagem com PSNR = 17.22 dB.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 17 apresenta um exemplo para diversos valores de PSNR, dado em decibel (dB), que é uma unidade de medida relativa, adimensional, correspondente à décima parte do bel, para o imagem Coastguard, tamanho 352×288 , (a) imagem original, (b) imagem com PSNR = 31 dB, (c) imagem com PSNR = 21.45 dB e (d) imagem com PSNR = 17.22 dB.

O PSNR indica apenas a diferença entre a imagem processada em relação a imagem original, portanto, não é considerado uma métrica mais completa, desconsiderando características importantes do HVS (*Human Visual System*), sistema visual humano. Em termos gerais, valores de PSNR acima de 42 dB apresentam compressões que introduzem perdas imperceptíveis ao HVS, portanto uma qualidade excelente. Para imagens com PSNR acima de 37 dB correspondem uma qualidade aceitável, entre 31 dB e 37 dB uma qualidade mediana e abaixo de 31 dB uma qualidade de regular a péssima (MÖLLER; RAAKE, 2014).

2.4.3 SSIM (*Structural Similarity Index*)

A métrica SSIM (*Structural Similarity Index*), diferentemente do PSNR, que somente compara a taxa de erro da imagem recebida em relação a imagem original, avalia a imagem recebida considerando outros fatores, como o HVS, conforme descreve em (WANG et al., 2004; BHATT; NAIK; SUBRAMANIAN, 2021). O SSIM analisa a similaridade, luminosidade, contraste e estrutura, deste modo, surgiu em função do HVS e é altamente eficiente em extrair informações visuais das imagens e não das taxas de erro.

Os valores extraídos da imagem reconstituída pelo usuário e da imagem original são armazenados em vetores, separadamente, sendo um vetor para cada cor. Deste modo, a métrica estima a similaridade entre a imagem original e a imagem processada, comparando a luminosidade $l(x, y)$, contraste $c(x, y)$ e estrutura $s(x, y)$ da imagem original x e da imagem processada y de tamanho $N \times N$, de acordo com as seguintes expressões, respectivamente, para luminosidade, contraste e estrutura (2.19), (2.20) e (2.21):

$$l(x, y) = \frac{(2\mu_x\mu_y + C_1)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1)} \quad (2.19)$$

$$c(x, y) = \frac{(2\sigma_x\sigma_y + C_2)}{(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2)} \quad (2.20)$$

$$s(x, y) = \frac{(\sigma_{xy} + C_3)}{(\sigma_x\sigma_y + C_3)} \quad (2.21)$$

onde μ_x e μ_y é a média local de x e y , respectivamente, σ_x e σ_y é o desvio padrão local de x e y , respectivamente, σ_x^2 e σ_y^2 é a variância de x e y , respectivamente, σ_{xy} é a covariância de x e y , respectivamente, C_1 , C_2 e C_3 são constantes para estabilizar a divisão com o denominador, quando o mesmo tender a zero, as constantes são expressas em (2.22), (2.23) e (2.24):

$$C_1 = (K_1 \cdot L)^2 \quad (2.22)$$

$$C_2 = (K_2 \cdot L)^2 \quad (2.23)$$

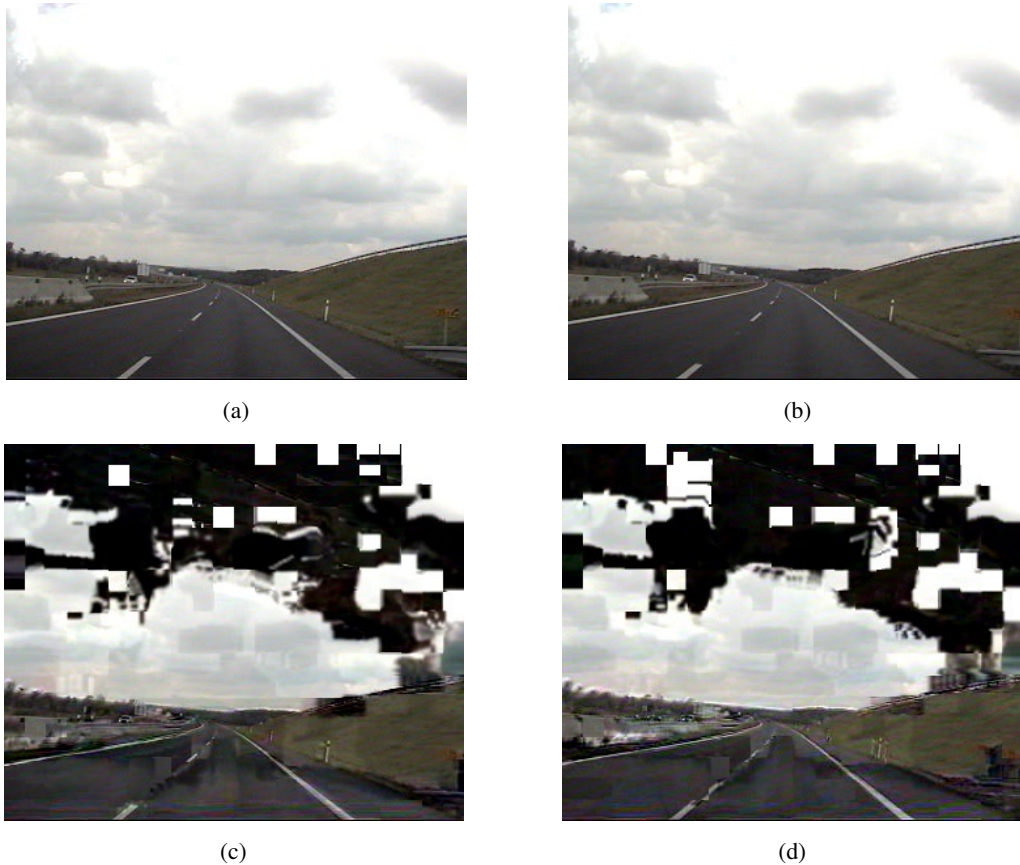
$$C_3 = \frac{C_2}{2} \quad (2.24)$$

onde L é o valor máximo que pode ser atribuído a cada pixel, para um valor de 8 bits/pixel, L é igual a 255, $K_1 = 0.01$ e $K_2 = 0.03$ por padrão. O valor de SSIM é expresso pela seguinte expressão (2.25):

$$SSIM(x, y) = [l(x, y)]^\alpha \cdot [c(x, y)]^\beta \cdot [s(x, y)]^\gamma \quad (2.25)$$

onde α , β e γ são parâmetros que definem a importância relativa das componentes de luminosidade, contraste e estrutura, respectivamente. Posteriormente, se $\alpha = \beta = \gamma = 1$, a expressão (2.25) é simplificada e, desta forma, obtém-se a média de cada vetor e a combinação dessas três médias gera o valor do SSIM, indicando a qualidade da imagem (PENG et al., 2014).

Figura 18 – Imagem Highway, tamanho 352×288 : (a) Imagem Original, (b) Imagem com SSIM = 0.97, (c) Imagem com SSIM = 0.85 e (d) Imagem com SSIM = 0.79.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O valor do SSIM é obtido pela equação (2.26):

$$SSIM(x, y) = \frac{(2\mu_x\mu_y + C_1)(2\sigma_x\sigma_y + C_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + C_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + C_2)} \quad (2.26)$$

O SSIM é expresso em valor decimal, entre 0 (zero) e 1 (um). Quanto mais próximo de 0 (zero), pior é a qualidade da imagem (menor a similaridade), e quanto mais próximo de 1 (um), melhor é a qualidade da imagem (maior a similaridade).

A Figura 18 ilustra vários exemplos da imagem Highway, tamanho 352×288 , para diversos valores de SSIM: (a) Imagem Original, (b) Imagem com SSIM = 0.97, (c) Imagem com SSIM = 0.85 e (d) Imagem com SSIM = 0.79.

2.5 Considerações Finais

Este capítulo apresentou as principais características das imagens digitais. A primeira seção faz uma introdução sobre conceitos de imagens digitais. Na segunda seção foi especificado a imagem na sua forma matemática e sua composição em linhas e colunas de *pixels*, o espaço de cores RGB e YUV foram descritos como as três matrizes distintas que representam as proporções relativas das cores. A terceira seção introduz o importante conceito de ruído, além de apresentar a classificação em dois grupos, o ruído aditivo e multiplicativo e fornece exemplos de ruídos específicos desses grupos. Finalmente, a quarta seção trata das métricas de qualidade em imagens, especificamente as métricas objetivas, o MSE, o PSNR e o SSIM.

3 Transformada Wavelet

3.1 Introdução

Neste capítulo serão apresentados os conceitos teóricos da transformada *wavelet* contínua e discreta, além dos princípios básicos da aplicação da transformada na redução e/ou remoção de ruído, em conjunto com os ajustes adaptativos da *thresholding* de acordo com a decomposição da *wavelet*, esses ajustes são baseados na busca da solução ótima para os coeficientes da transformada *wavelet*. A transformada *wavelet* apresenta para o cenário de processamento de sinais um grande impacto nos últimos anos, especialmente na análise, redução e/ou remoção de ruído em imagens e vídeos, apresentando propriedades importantes, tais como, a compactação de alta energia e a reconstrução progressiva, apropriados para o processamento desses artefatos (SARKAR; BHAIRANNAWAR, 2021; YOU et al., 2023; ABBASI et al., 2023; KIM et al., 2022; CHEN; XIE; QIAN, 2021). A transformada *wavelet* possui características para alcançar altas taxas de compressão sem sacrificar tanto a qualidade visual de imagens e vídeos (ZHANG; BULL, 2016).

3.2 Transformada Wavelet

As *wavelets* são conceituadas como um conjunto de funções matemáticas que podem ser utilizadas para representar dados ou até mesmo outras funções, tais como, uma imagem, um vídeo, uma curva, uma superfície, um sinal de radar ou um sinal de voz (KUSETOGULLARI, 2015; ABDELFAHATTAH et al., 2024; NITHIN et al., 2022; DOST et al., 2022; BHANGALE; KOTHANDARAMAN, 2024). Elas possuem propriedades específicas que permitem, por meio de funções matemáticas, decompor funções hierarquicamente, proporcionando a representação dos níveis de detalhes presentes. Deste modo, as *wavelets* descrevem funções em termos de uma forma mais grosseira ou em termos globais e uma outra forma que apresente detalhes mais finos ou suaves.

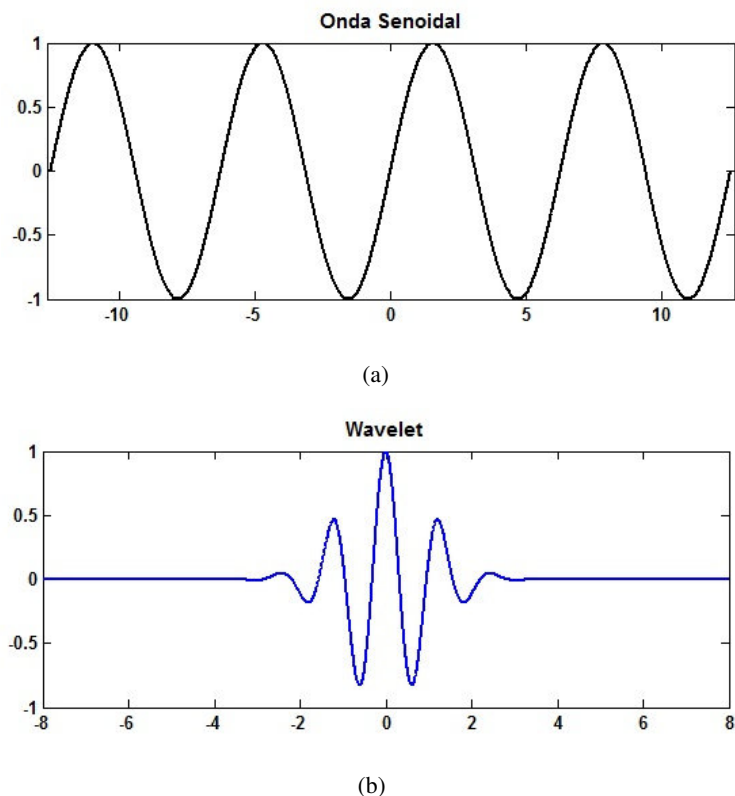
Os trabalhos de Stephane Mallat (MALLAT, 1989) e Yves Meyer (MEYER, 1993) proporcionaram a integração da área de processamento de sinais e as *wavelets*, apresentando características continuamente diferenciáveis e, logo em seguida, Ingrid Daubechies (DAUBECHIES, 1988; DAUBECHIES, 1990; DAUBECHIES, 1992) construiu com uma base ortonormal da *wavelet*, com suportes compactos, no qual agregou grandes contribuições para a teoria *wavelet*. Esses trabalhos contribuíram para que, os algoritmos *wavelet*, realizassem um processamento de dados em diferentes escalas ou resoluções, independente da função de interesse.

Conforme a tradução da palavra *wavelet*, que significa ondas pequenas, a *wavelet* é uma

forma de onda de duração efetivamente limitada, no sentido de possuir uma boa localização no tempo, significando que a energia de uma *wavelet* está concentrada em um intervalo finito, no qual tem um valor médio zero, possuindo suporte compacto, denominado de *wavelet* mãe (VETTERLI; HERLEY, 1992). Comparando as *wavelet* e as ondas senoidais, que são representações da análise de Fourier, as ondas senoidais não têm duração limitada, estendendo de menos a mais infinito. Enquanto que as ondas senoidais são suaves e previsíveis, as *wavelets* tendem a ser irregulares e assimétricas (DAUBECHIES, 1992). A análise de Fourier divide um sinal em ondas senoidais de diferentes frequências, da mesma forma, a *wavelet* só que em versões deslocadas e escalonadas da *wavelet* original ou mãe.

A Figura 19 ilustra as formas de ondas, Figura 19a Senoidal e Figura 19b *Wavelet* de Morlet, nestas figuras, pode-se observar intuitivamente que sinais com mudanças bruscas podem ser melhor analisadas com a *wavelet*, do que com a onda senoidal. Outra observação é que a análise *wavelet* não é feita segundo a frequência, e sim segundo a escala, processando os dados em diferentes escalas e resoluções. Sendo assim, as *wavelets* oferecem uma técnica elegante na representação dos níveis de detalhes presentes no sinal.

Figura 19 – Formas de Ondas: (a) Onda Senoidal, utilizada na Transformada de Fourier como base para decompor um sinal complexo em seus componentes de diferentes frequências e (b) *Wavelet* de Morlet.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Semelhante a transformada de Fourier, a transformada *wavelet* possui duas versões, a Transformada *Wavelet* Contínua ou CWT (*Continuous Wavelet Transform*) e a Transformada *Wavelet* Discreta ou DWT (*Discrete Wavelet Transform*). As subseções a seguir descrevem sobre as duas versões da Transformada *Wavelet*.

3.2.1 Transformada Wavelet Contínua

A Transformada *Wavelet* Contínua ou CWT (*Continuous Wavelet Transform*) é uma soma ao longo do tempo de um sinal multiplicado por uma escala, e deslocado por uma função *wavelet*, também denominada de *wavelet* mãe. A definição formal da CWT é descrito a seguir. Dado um sinal de tempo contínuo $f(t)$, $-\infty \leq t \leq \infty$, a CWT $W(s, \tau)$ é definida conforme a equação (3.1) (THYAGARAJAN, 2011), (DAUBECHIES, 1990):

$$W(s, \tau) = \langle f(t), \psi_{s,\tau} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{s,\tau}(t) dt \quad (3.1)$$

onde o parâmetro s é a escala, responsável pela compressão ou expansão da função, representa uma contração ou dilatação do sinal, para $s > 1$ a função sofre uma dilatação e para $s < 1$ obtém-se uma contração do sinal, e o parâmetro τ , é a posição ou deslocamento, responsável pela translação da função ao longo da escala no tempo. A função $\psi_{s,\tau}(t)$ é denominada de *wavelet* mãe ou base, a partir desta função básica, que a *wavelet* é construída, gerando as bases a partir de deslocamentos e dilatações, segundo a equação (3.2) (THYAGARAJAN, 2011), (GROSSMANN; MORLET, 1984):

$$\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t - \tau}{s}\right) \quad (3.2)$$

Na equação (3.1), ambos os parâmetros de escala e deslocamento são variáveis contínuas, desta forma, a escala é proporcional à duração das funções *wavelet*. Por isso, se a escala aumenta, $\psi_{s,\tau}(t)$ aumenta no tempo, o efeito é de capturar comportamentos a longo prazo, desta forma, escala maior, significa uma visão global. Por outro lado, escala menor implica em curta duração para as *wavelets* e a expansão do sinal, assim, significa uma visualização de detalhes.

Assim, a análise *wavelet* proporciona a obtenção de tendências, tanto de longo e curto prazo, enquanto que, em um sinal na análise da transformada de Fourier, capta apenas o comportamento a longo prazo de um sinal, uma vez que todas as funções de base têm duração infinita. O fator $\frac{1}{\sqrt{s}}$ na equação (3.2), dá garantias de que as *wavelets* têm a mesma energia, dado pela equação (3.3) (THYAGARAJAN, 2011), (GROSSMANN; MORLET, 1984):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{s,\tau}(t) \psi_{s,\tau}^*(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{s,\tau}(t)|^2 dt = \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \psi\left(\frac{t - \tau}{s}\right) \right|^2 dt \quad (3.3)$$

fazendo $u = \frac{t - \tau}{s}$ na equação (3.3), tem-se a equação (3.4):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{s,\tau}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(u)|^2 du \quad (3.4)$$

Deste modo, todas as ondas têm a mesma energia, semelhante a *wavelet* mãe. A partir da equação (3.1), observa-se que o parâmetro de escala dá uma medida da frequência do sinal, a um instante de tempo especificado pelo parâmetro de deslocamento. Portanto, a CWT é única e pode-se recuperar o sinal $f(t)$, a partir de $W(s, \tau)$ de acordo com a equação (3.5) inversa de CWT (THYAGARAJAN, 2011), (GROSSMANN; MORLET, 1984):

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W(s, \tau) \psi_{s,\tau}(t) dt \frac{ds}{s^2} \quad (3.5)$$

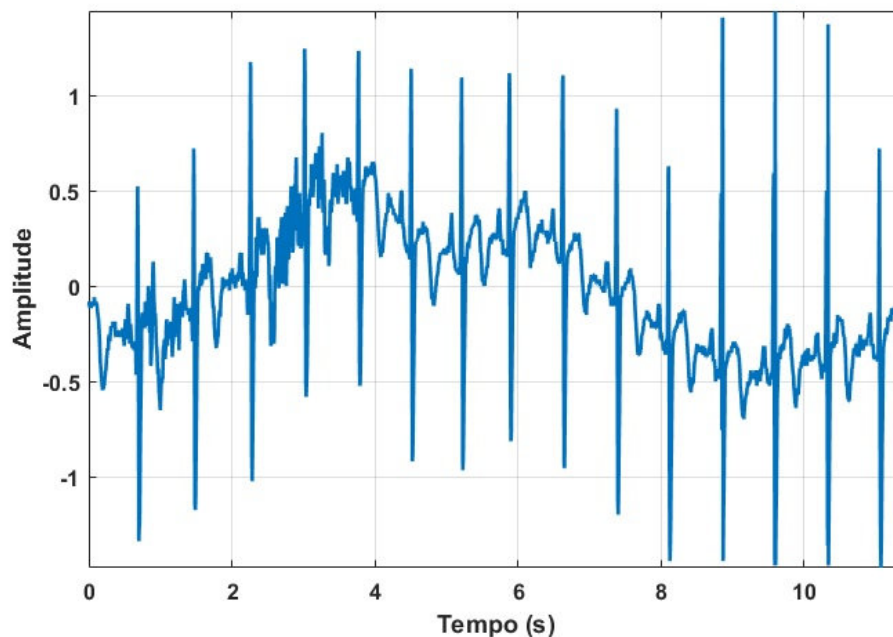
onde a constante C_ψ é dada pela equação (3.6) (THYAGARAJAN, 2011), (GROSSMANN; MORLET, 1984):

$$C_\psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (3.6)$$

Na equação (3.6), $\psi(\omega)$ é a transformada de Fourier da *wavelet* mãe $\psi_{s,\tau}(t)$. Observa-se que a partir da equação (3.6), que para C_ψ existir, é necessário que $\psi(0) = 0$. Isto implica que, o valor médio da *wavelet* mãe, $\psi_{s,\tau}(t)$, deve ser zero.

A seguir um exemplo da aplicação da CWT, os sinais do mundo real frequentemente exibem uma relação inversa entre frequência e duração. Eventos de alta frequência são geralmente de curta duração, e eventos de baixa frequência, de longa duração. Um sinal de eletrocardiograma (ECG) humano, que pode ser carregado e visualizado. Este sinal é amostrado a 180 Hz, o que significa que 180 amostras são coletadas por segundo, conforme ilustra a Figura 20.

Figura 20 – Sinal de Eletrocardiograma (ECG) Humano, amostrado em 180 Hz. Exemplo de aplicação da Transformada Wavelet Contínua.

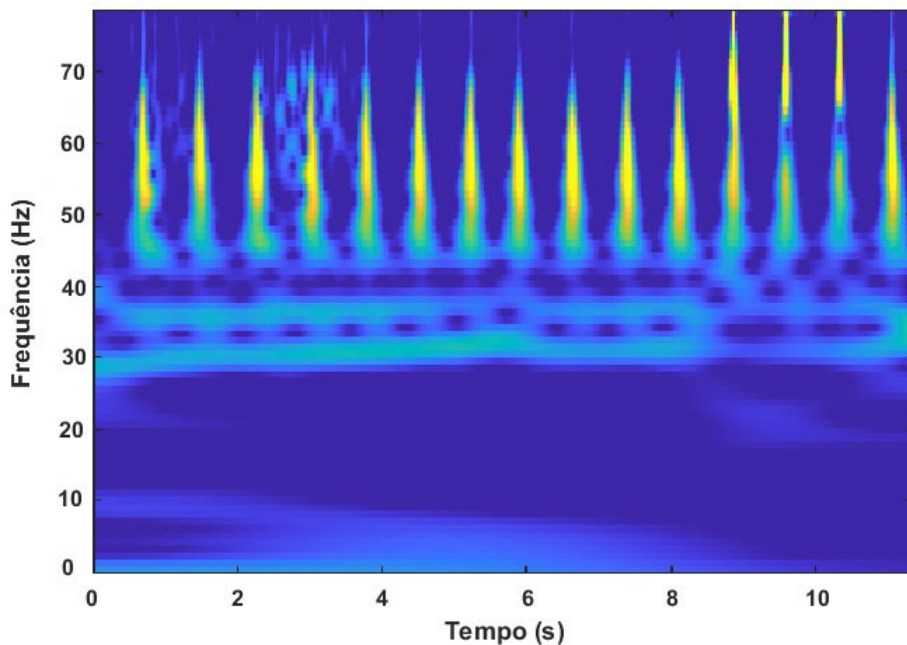


Fonte: Adaptado de (MATHWORKS, 2025a).

No exemplo do ECG da Figura 20, o sinal exibe componentes de alta frequência, modulados por transientes de baixa frequência que correspondem à propagação dos impulsos elétricos no coração. A análise temporal precisa desses transientes e exige uma janela de análise curta, comprometendo a resolução de frequência. Em contraste, a identificação das oscilações de baixa frequência requer uma janela de análise longa para melhor resolução espectral.

A Figura 21 apresenta a aplicação da CWT, no qual revela oscilações de estado quase constante em torno de 30 Hz e 37 Hz, além dos eventos transitórios que representam os batimentos cardíacos. Essa análise permite a observação simultânea de ambos os fenômenos em uma única representação tempo-frequência.

Figura 21 – Transformada *Wavelet* Contínua do Sinal de Eletrocardiograma (ECG) Humano. O exemplo mostra oscilações quase estáveis próximas de 30 Hz a 37 Hz.



Fonte: Adaptado de (MATHWORKS, 2025a).

3.2.2 Transformada Wavelet Discreta

A base matemática necessária para obter e entender as propriedades das funções *wavelet* é constituída com a compreensão dos fundamentos teóricos da transformada *wavelet* contínua, conforme descrito na subseção (3.2.1), no qual apresenta uma análise de interesse teórico para a representação de sinais contínuos finitos. Neste contexto, para aplicações práticas de armazenamento, processamento ou até mesmo compressão de imagens e vídeo, a sua discretização se faz necessária.

A definição de transformada *wavelet* discreta ou DWT (*Discrete Wavelet Transform*) é a representação de um sinal de tempo discreto. Entende-se que a DWT é a representação de uma sequência constituída por duas expansões em série, conforme a transformada *wavelet* contínua,

no entanto, se os parâmetros de escala e deslocamento na equação (3.1) são discretos, em vez de contínuos, então é possível expandir $f(t)$ de uma série *wavelet* discretizada.

A DWT é obtida quando os parâmetros de escala e deslocamento da equação (3.2) são discretizados, deste modo, os coeficientes da DWT correspondem a um conjunto de pontos de uma matriz bidimensional no domínio deslocamento-escala. A DWT $W(j, k)$ é definida conforme a equação (3.7) (MALLAT, 1989):

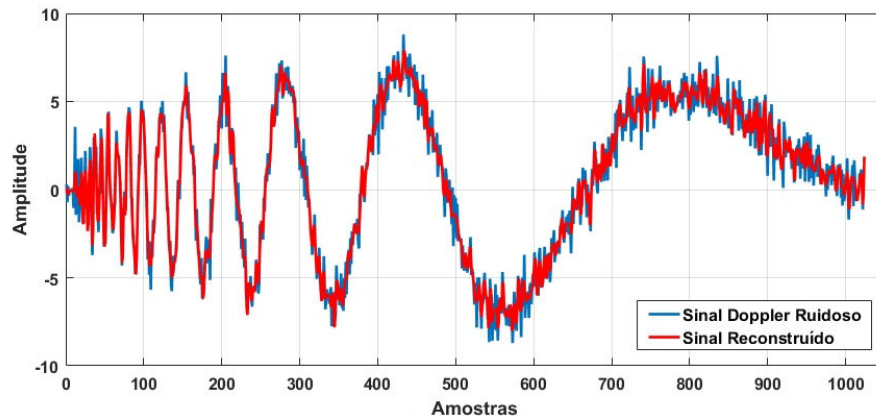
$$W(j, k) = \langle f(t), \psi_{j,k} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^*(2^{-j}t - k) dt \quad j, k \in Z \quad (3.7)$$

onde o inteiro j está relacionado à escala e o segundo inteiro k , está relacionado ao deslocamento. O parâmetro de escalonamento s é discretizado de forma exponencial, $s = 2^j$, escala binária, enquanto o que o parâmetro de deslocamento τ é discretizado proporcionalmente ao parâmetro de escala s , $\tau = k2^j$.

Para a análise de um sinal usando a DWT, o primeiro procedimento que se deve tomar é determinar o valor de k , que representa o deslocamento, após essa definição, deve-se escolher o fator de amplificação, ou seja, 2^{-j} . Para detalhes muito pequenos do sinal, a ampliação deve ser grande e, portanto, $j < 0$. Para áreas maiores, deve-se escolher uma ampliação menor e, portanto, $k2^j$ deverá ser maior, obtendo-se deslocamentos maiores.

A Figura 22 ilustra a aplicação da DWT de nível único, utilizando os coeficientes de aproximação, para um sinal Doppler com a presença de ruído. O sinal ruidoso Doppler exibe oscilações irregulares e um padrão de ruído perceptível, o que dificulta a análise direta das características do sinal. Após a reconstrução com a DWT, o sinal reconstruído apresenta uma forma de onda significativamente mais suave, com uma redução considerável do ruído de alta frequência. A DWT proporciona manter as características principais do sinal original, como as oscilações de baixa frequência. Deste modo, a reconstrução suavizada segue a tendência geral do sinal original, demonstrando a eficácia da DWT de nível único na remoção do ruído.

Figura 22 – Transformada *Wavelet* Discreta do Sinal Doppler Ruidoso e Sinal Reconstruído. Reconstrução de uma versão suavizada do sinal utilizando os coeficientes de aproximação da DWT.



Fonte: Adaptado de (MATHWORKS, 2025b)

3.3 Bases Wavelet

As Bases *Wavelets* são conjunto de funções matemáticas com propriedades únicas que as tornam valiosas para a análise de sinais e processamento de imagens. Diferentemente das funções tradicionais de Fourier, que representam os sinais em termos de frequências senoidais que se estendem infinitamente no tempo, as *wavelets* são localizadas tanto no tempo quanto na frequência (MALLAT, 1989; MEYER, 1993; DAUBECHIES, 1988), (AKUJUOBI, 2022). Essa característica permite que as *wavelets* capturem informações sobre o sinal em diferentes escalas e posições, tornando-as ideais para analisar sinais não estacionários, ou seja, sinais cujas características variam ao longo do tempo. Além disso, a base *wavelet* é útil para análise de imagem, reconhecimento de padrões, compressão de dados, detecção de erros, entre outros.

A transformada *wavelet* é importante, devido fornecer informações do tempo e da frequência de forma simultânea, portanto destaca-se pela representação de tempo – frequência do sinal (MALLAT, 1989; MEYER, 1993; DAUBECHIES, 1988), (AKUJUOBI, 2022). As *Wavelets* são classes de funções usadas para localizar um determinado sinal ao mesmo tempo em posição e escala. Desta forma, uma família *wavelet* pode ser construída a partir de uma função denominada, Mãe ou Base *Wavelet*. A translação e contração da *Wavelet* Mãe geram as *Wavelets* Filhas.

Algumas bases *wavelets*, como as de Daubechies, apresentam bases ortogonais e suporte compacto. Já outras, como as *wavelets* de Meyer, não possuem bases ortogonais nem suporte compacto. No entanto, essas últimas se destacam por serem continuamente diferenciáveis, o que garante maior suavidade nas suas representações. Existem diversas famílias de *wavelets*, cada uma com suas próprias características e propriedades, as principais são: Haar, Daubechies, Symlets, Coiflets, Biorthogonal, Reverse biorthogonal, Meyer, Gaussian, Complex Gaussian, Mexican hat, Morlet, Complex Morlet, Shannon, Fejer-Korovkin. A seguir são descritas algumas dessas bases.

3.3.1 Wavelet de Haar

Proposta por Alfred Haar em 1910 (HAAR, 1910), muito antes da formalização da teoria das transformadas *wavelet* por Daubechies, a base *wavelet* de Haar foi posteriormente reconhecida e classificada como um conjunto de funções *wavelets* ortonormais. Por ser a primeira *wavelet* historicamente desenvolvida, a Transformada *Wavelet* de Haar se destaca por sua formulação elementar, cuja função é definida em (3.8):

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.8)$$

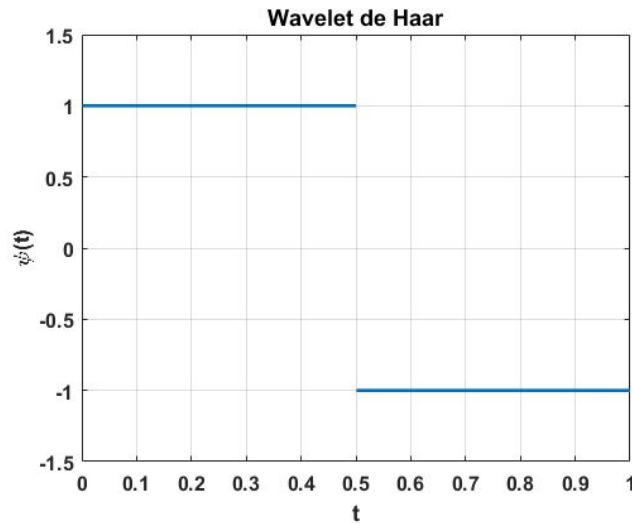
A descontinuidade da *wavelet* de Haar limita seu uso em aplicações que exigem suavidade, como redução de ruído e compressão. No entanto, sua localização temporal (espa-

cial) e eficiência computacional a tornam valiosa para outras aplicações. A *wavelet* de Haar é gerada a partir da função *wavelet* mãe $\phi(t)$, por meio de transformações que alteram sua escala (mudança de escala) e posição (translação). A função resultante $\psi(t)$, representada por $\psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t - 1)$, pode ser expressa da seguinte forma em (3.9):

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ -1, & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.9)$$

A Figura 23 ilustra a função $\psi(t)$ que representa a transformada *wavelet* de Haar, que é um caso particular da transformada *wavelet* discreta, onde a *wavelet* de Haar é um pulso quadrado definido em (3.9).

Figura 23 – *Wavelet* de Haar. Função quadrada (degrau) que pode ser usada para decompor um sinal em diferentes escalas e resoluções.



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3.2 Wavelet de Meyer

Além da *wavelet* de Haar, Yves Meyer (MEYER, 1990) desenvolveu a primeira *wavelet* com características distintas. A *wavelet* de Meyer, por ser continuamente diferenciável, constitui uma base ortonormal. A função escala e a função *wavelet* de Meyer se destacam por sua convergência rápida no domínio da frequência e por serem infinitamente diferenciáveis, características que as colocam entre as primeiras bases ortogonais com tais propriedades.

A função de escala e a função *wavelet* de Meyer são definidas no domínio da frequência, respectivamente, nas expressões (3.10) e (3.11):

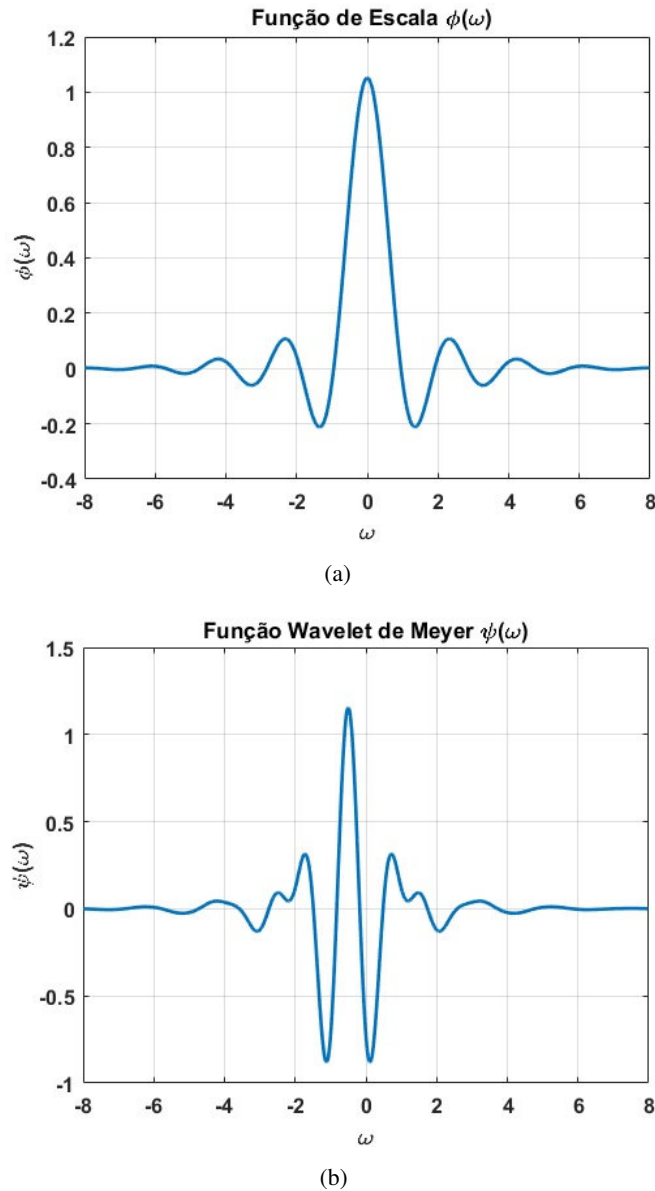
$$\hat{\phi}(\omega) = \begin{cases} (2\pi)^{-1/2}, & \text{se } |\omega| \leq \frac{2\pi}{3} \\ (2\pi)^{-1/2} \cos\left[\frac{\pi}{2} v\left(\frac{3}{2\pi}|\omega| - 1\right)\right], & \text{se } \frac{2\pi}{3} \leq \omega \leq \frac{4\pi}{3} \\ 0, & \text{se } |\omega| > \frac{4\pi}{3} \end{cases} \quad (3.10)$$

onde $v(a) = a^4(35 - 84a + 70a^2 - 20a^3)$, $a \in [0, 1]$ representa uma função auxiliar v .

$$\hat{\psi}(\omega) = \begin{cases} (2\pi)^{-1/2} e^{j\omega/2} \sin\left[\frac{\pi}{2} v\left(\frac{3}{2\pi}|\omega| - 1\right)\right] & \text{se } \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3} \\ (2\pi)^{-1/2} e^{j\omega/2} \cos\left[\frac{\pi}{2} v\left(\frac{3}{4\pi}|\omega| - 1\right)\right], & \text{se } \frac{4\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{8\pi}{3} \\ 0, & \text{se caso contrário} \end{cases} \quad (3.11)$$

A função de escala $\phi(\omega)$ e função *wavelet* de Meyer $\psi(\omega)$ são definidas no domínio da frequência, a Figura 24 mostra, respectivamente, a função de escala Figura 24a e a função *wavelet* de Meyer Figura 24b.

Figura 24 – Wavelet Meyer com base ortonormal, suavizada e infinitamente diferenciável: (a) Função de escala $\phi(\omega)$ e (b) Função *wavelet* de Meyer $\psi(\omega)$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3.3 Wavelet de Morlet

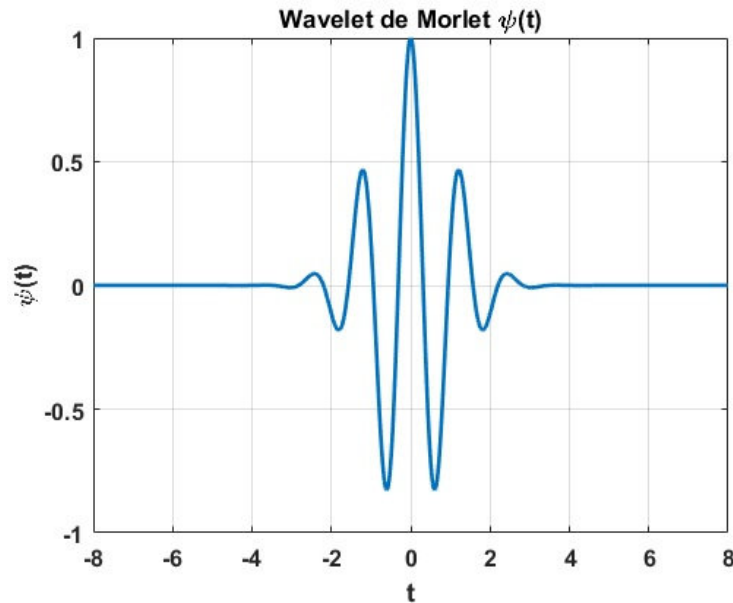
A base *wavelet* de Morlet (MORLET, 1983), pertencente à família não ortogonal, distingue-se por não possuir uma função de escala. Sua modelagem se dá através de uma função gaussiana modulada, cuidadosamente ajustada para satisfazer a condição $\psi(0) = C$. A *wavelet* de Morlet de valor real é definida conforme expresso em (3.12):

$$\psi(t) = C e^{-\frac{t^2}{2}} \cos(5t) \quad (3.12)$$

onde a constante C é usada para normalização em vista da reconstrução.

A Figura 25 apresenta a *wavelet* de Morlet, um exemplo de *wavelet* com duração finita e frequência específica. Essa *wavelet* se destaca por incorporar uma onda com período determinado, confinada por um envelope gaussiano que define seus limites. Matematicamente, a *wavelet* de Morlet pode ser descrita como uma onda cosseno multiplicada por esse envelope gaussiano, tanto em sua parte superior quanto inferior. Essa construção garante que a *wavelet* tenha extensão finita, facilitando sua aplicação em diversas áreas.

Figura 25 – *Wavelet* de Morlet: representa uma senoide (ou cossenoide) modulada por uma função gaussiana (curva em forma de sino).



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3.4 Wavelet de Daubechies

As *wavelets* de Ingrid Daubechies (DAUBECHIES, 1992) representam uma base ortogonal de *wavelets* com suporte compacto no tempo. Essa característica implica que a função *wavelet* $\psi(t)$ é não nula apenas em um intervalo de tempo finito, conferindo-lhe localização temporal precisa. No entanto, no domínio da frequência, as *wavelets* de Daubechies exibem um grau significativo de sobreposição espectral entre as diferentes escalas. Apesar dessa sobre-

posição, a principal vantagem das *wavelets* de Daubechies reside na sua ortogonalidade. Essa propriedade garante que erros no sinal de entrada não se propaguem e se amplifiquem durante a transformação, assegurando a estabilidade numérica computacional do processo.

A construção das *wavelets* de Daubechies envolve a escolha de uma função escala $\phi(t)$ com suporte compacto. A função *wavelet* $\psi(t)$ é então derivada da função escala através de um processo de refinamento e translação. A condição de que tanto $\psi(t)$ quanto $\phi(t)$ tenham suporte compacto é essencial para garantir as propriedades de localização temporal e ortogonalidade da base *wavelets*. A função escala $\phi(t)$ da *wavelet* de Daubechies é expresso em (3.13):

$$\phi(t) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \alpha_k \phi(2t - k) \quad (3.13)$$

onde os α_k são os coeficientes de filtro.

A escolha precisa de certas condições sobre os coeficientes do filtro garante propriedades importantes para um conjunto de funções *wavelet*, como a ortonormalidade. No caso específico das *wavelets* de Daubechies, alguns fatores que garantem que as *wavelets* Daubechies possuam suporte compacto são: o fato de que um número finito de coeficientes de filtro deve ser diferente de zero; o número de coeficientes a_k diferentes de zero define diferentes famílias da *wavelets* de Daubechies; o valor de N corresponde à metade do número de coeficientes do filtro utilizado na função *wavelet* e as funções escala assumem valores diferentes de zero no intervalo $[0, 2N - 1]$, o que é conhecido como o suporte da função.

As *wavelets* de Daubechies são construídas através da definição de famílias paramétricas, onde o parâmetro N determina as características da *wavelet*. Para cada valor de N , existe uma família de *wavelets* de Daubechies com propriedades específicas. Dado um número N inteiro positivo, é possível representar qualquer polinômio de grau igual ou inferior a $N - 1$ de forma exata por uma combinação linear da função escala $\phi(t)$ e suas translações inteiras. Essa propriedade é fundamental na construção das *wavelets* de Daubechies.

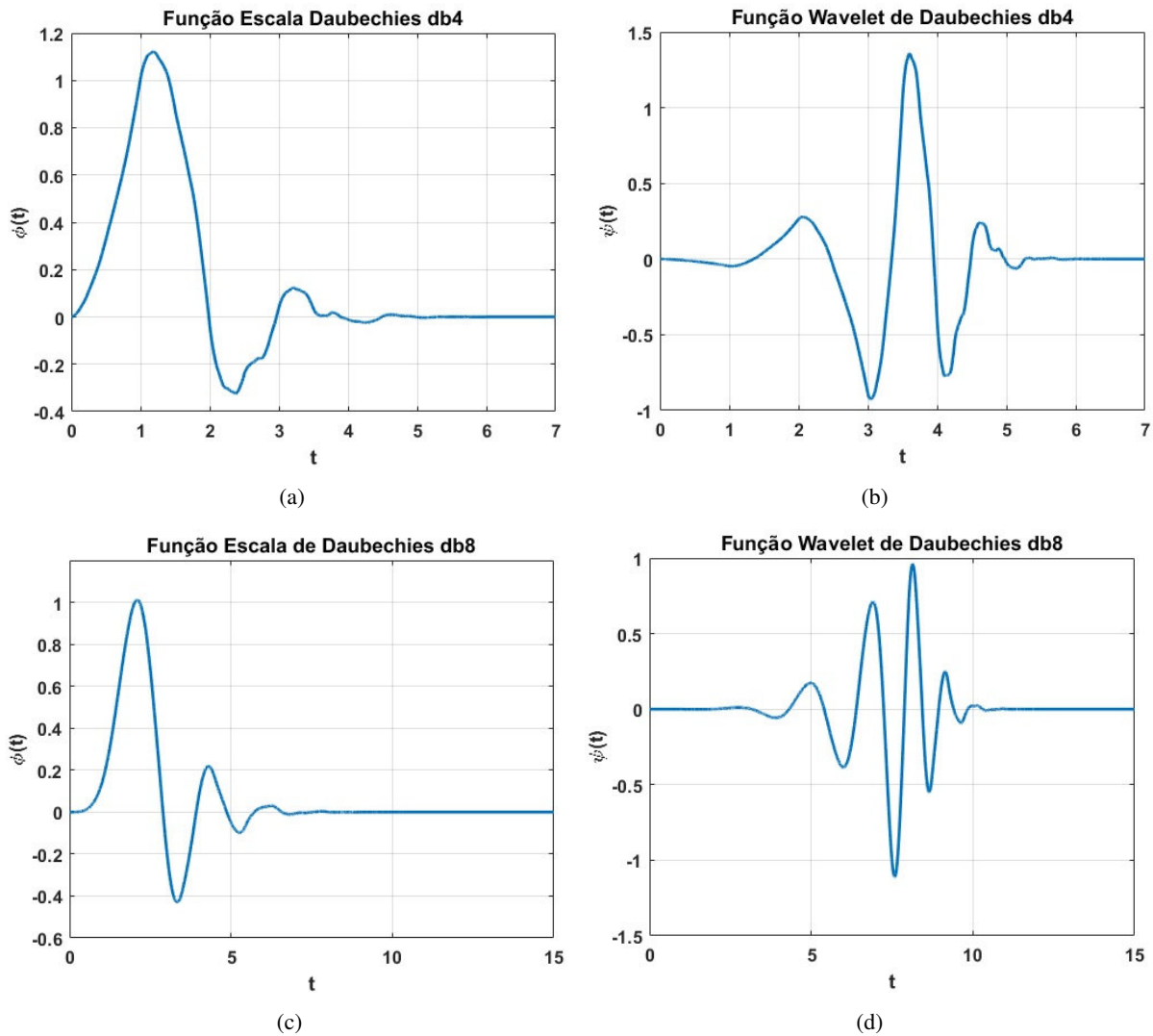
A *wavelet* primária, que é a base para a construção de toda a família de *wavelets* associada a N , pode ser definida em (3.14):

$$\psi_N(t) = \sum_{k=0}^{2N-1} b_k \phi_N(2t - k) = \sum_{k=0}^{2N-1} (-1)^k \alpha_{2N-1-k} \phi_N(2t - k) \quad (3.14)$$

onde a escolha dos coeficientes $b_k = (-1)^k \alpha_{2N-1-k}$ é determinada pela necessidade de garantir a ortonormalidade entre a função escala $\phi(t)$ e a *wavelet* primária $\psi_N(t)$.

A Figura 26 apresenta a família de *wavelets* de Daubechies do índice de filtragem 4 e 8, no qual indica o número de momentos nulos da função *wavelet* de Daubechies $\psi_N(t)$ associado à função escala $\phi_N(t)$. A função escala Daubechies *db4*, Figura 26a, a função *wavelet* de Daubechies *db4*, Figura 26b, a função escala Daubechies *db8*, Figura 26c e a função *wavelet* de Daubechies *db8*, Figura 26d.

Figura 26 – *Wavelet* de Daubechies é ortogonal, o que permite a decomposição e recomposição de sinais sem perda de informação: (a) Função Escala de Daubechies *db4*, (b) Função *Wavelet* de Daubechies *db4*, (c) Função Escala de Daubechies *db8* e (d) Função *Wavelet* de Daubechies *db8*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3.5 Wavelet do Chapéu Mexicano

A *wavelet* do Chapéu Mexicano ou *wavelet* de Ricker, é uma *wavelet* complexa de baixa oscilação, comumente empregada na transformada de *wavelet* contínua. Sua formulação matemática deriva da segunda derivada da função de densidade de probabilidade gaussiana, e uma característica distintiva é a ausência de uma função de escala associada (SHARK; YU, 2006).

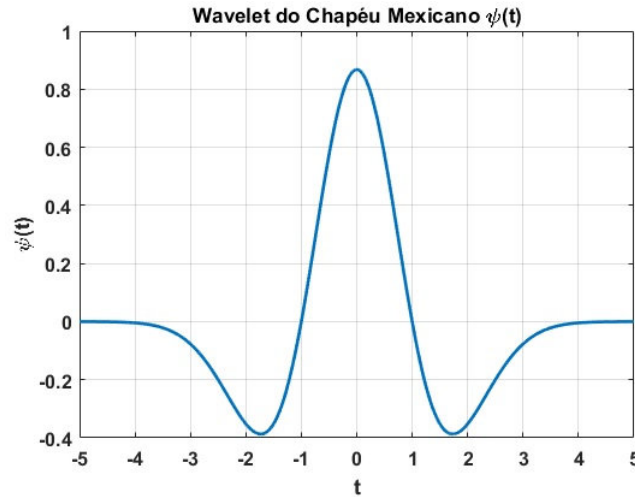
A expressão matemática da *wavelet* básica do chapéu mexicano no domínio do tempo contínuo é dada por (3.15):

$$\psi(t) = (1 - t^2)e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (3.15)$$

onde t é a variável do tempo (ou espaço, dependendo da aplicação).

A Figura 27 ilustra a *wavelet* do chapéu mexicano. A *wavelet* do chapéu mexicano tem uma resolução de frequência mais fraca do que a *wavelet* Morlet, mas frequentemente uma melhor resolução temporal.

Figura 27 – *Wavelet* do Chapéu Mexicano: é uma função de base utilizada na análise de *wavelet*, notavelmente na transformada wavelet contínua (CWT).



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.3.6 Wavelet de Coiflet

As *wavelets* de Coiflet são semelhantes às *wavelets* de Daubechies, foram concebidas por Ingrid Daubechies (DAUBECHIES, 1988; DAUBECHIES, 1990; DAUBECHIES, 1992), a pedido de Ronald Coifman e destacam-se pela característica adicional de suas funções escala possuírem momentos nulos. As *wavelets* de Coiflet representam um avanço significativo na teoria das *wavelets*, especialmente para as tarefas de processamento de sinais. A ideia de Coifman estendeu o conceito de momentos de fuga para as funções de escala e de *wavelet*, indo além do foco anterior apenas na função de *wavelet* $\psi(t)$.

As *wavelets* são quase simétricas, elas são chamadas de *wavelets CoifN*, em que *Coif* é uma abreviação de Coifman e enquanto *N* é o número de momentos de fuga para as funções de *wavelet* e de escala. As suas funções *wavelets* tem $2N$ momentos iguais a 0 e, o que é mais incomum, a função tem $2N - 1$ momentos iguais a 0. As duas funções têm um suporte de comprimento $6N - 1$.

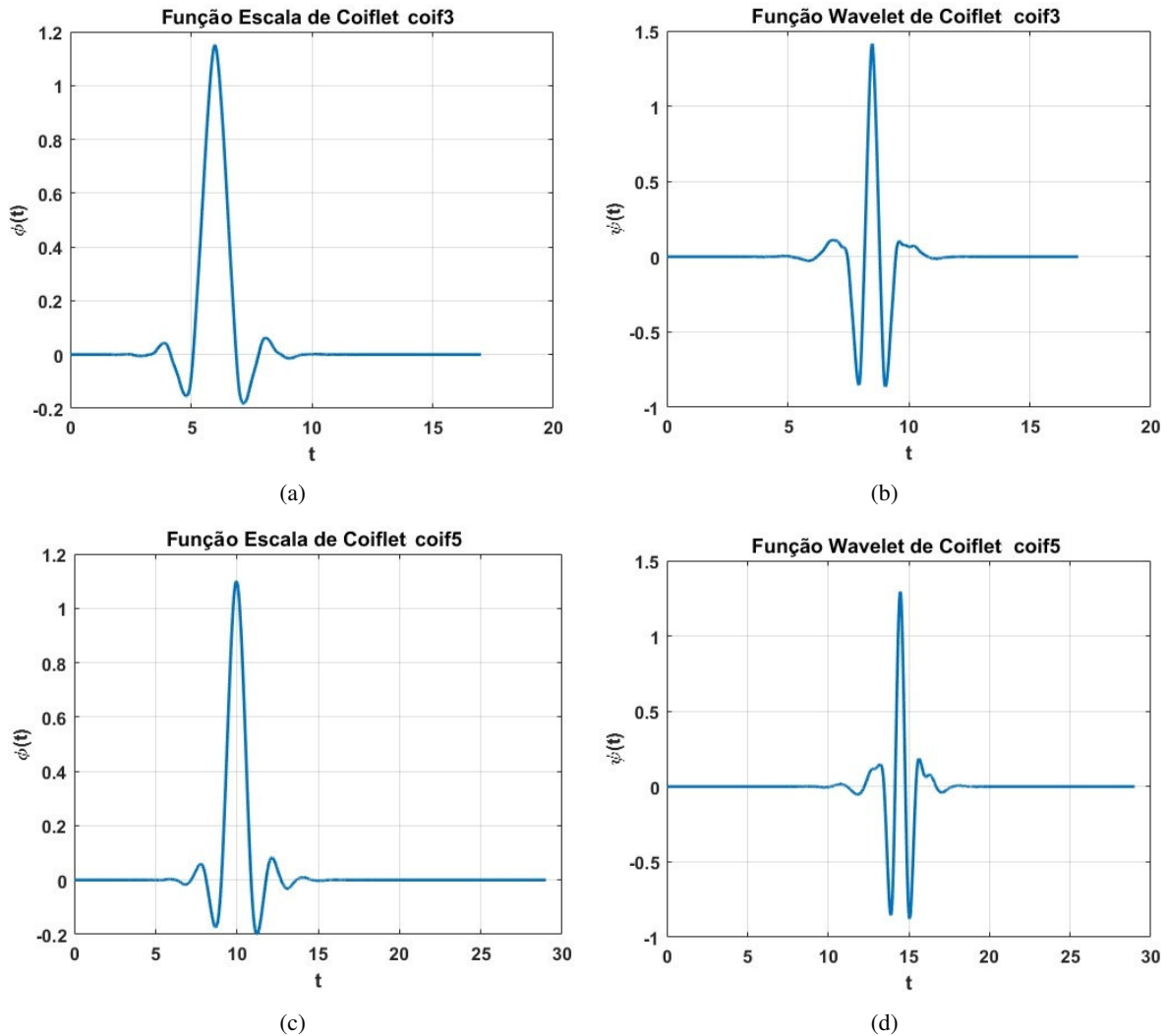
A forma matemática da *wavelet* de Coiflet $\psi(t)$ é derivada da *wavelet* mãe por meio de escalonamento e translação, e é calculada de acordo com a expressão definida em (3.16) (ELIAS; ALI, 2025):

$$\psi(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) \quad (3.16)$$

onde j representa o parâmetro de escala e k é o parâmetro de translação.

A Figura 28 apresenta a base da *wavelet* de Coiflet, para $N = 3$ e $N = 5$ no qual indica o número de momentos nulos. A função escala Coiflet *coif3*, Figura 28a, a função *wavelet* de Coiflet *coif3*, Figura 28b, a função escala de Coiflet *coif5*, Figura 28c e a função *wavelet* de Coiflet *coif5*, Figura 28d.

Figura 28 – *Wavelet* de Coiflet, caracterizada por ter múltiplos momentos nulos, tanto para a função escala quanto para a função *wavelet*: (a) Função Escala de Coiflet *coif3*, (b) Função *Wavelet* de Coiflet *coif3*, (c) Função Escala de Coiflet *coif5* e (d) Função *Wavelet* de Coiflet *coif5*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

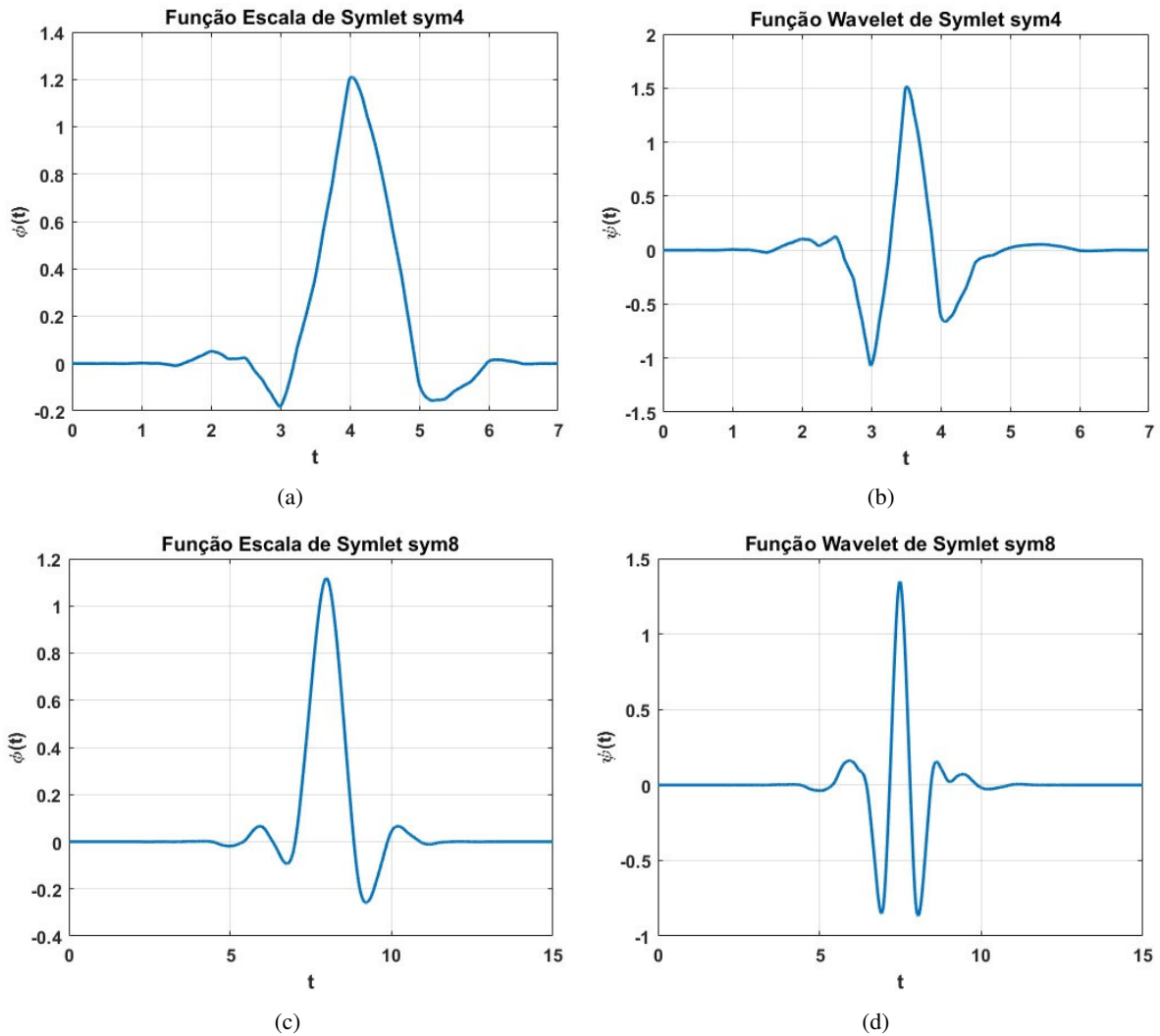
3.3.7 Wavelet de Symlet

A *wavelet* Symlet é uma base ortogonal aproximadamente simétrica, derivada das *wavelets* de Daubechies. Desenvolvida por Ingrid Daubechies (DAUBECHIES, 1992), a família Symlet preserva as características das *wavelets* de Daubechies, oferecendo melhor simetria, mantendo propriedades importantes para a análise de sinais. A propriedade de ortogonalidade da *wavelet* impede a propagação de erros no sinal de entrada durante a transformação, assegurando a estabilidade numérica do processo computacional. A fase aproximadamente linear da

wavelet também contribui para a precisão na localização de eventos no domínio *wavelet* e para a fidelidade na reconstrução do sinal original.

A Figura 29 apresenta a base da *wavelets* de Symlet, para $N = 4$ e $N = 8$ no qual indica o número de momentos nulos. A função escala Symlet *sym4*, Figura 29a, a função *wavelet* de Symlet *sym4*, Figura 29b, a função escala de Symlet *sym8*, Figura 29c e a função *wavelet* de Symlet *sym8*, Figura 29d.

Figura 29 – Wavelet de Symlet é uma versão simétrica (ou quase simétrica) com suporte compacto: (a) Função Escala de Symlet *sym4*, (b) Função Wavelet de Symlet *sym4*, (c) Função Escala de Symlet *sym8* e (d) Função Wavelet de Symlet *sym8*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

As *wavelets* Symlet, representadas por $\psi(t)$, são construídas a partir de filtros com N coeficientes. A fórmula exata de $\psi(t)$ varia conforme o valor de N , mas em geral, envolve operações de dilatação e translação. Essencialmente, cada Symlet é uma função contínua definida por uma combinação linear de versões escaladas e deslocadas de uma função-mãe. Para um dado N , $\psi_N(t)$ é uma função contínua expressa em (3.17) (DAUBECHIES, 1992):

$$\psi_N(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{k=0}^{N-1} h_k \phi(2t - k) - \sum_{k=0}^{N-1} g_k \phi(2t + k) \right) \quad (3.17)$$

onde h_k são os coeficientes do filtro de análise, relacionados a função escala $\phi(t)$ associada a *wavelet* e g_k são os coeficientes do filtro de síntese.

3.3.8 Wavelet de Biortogonal

As *wavelets* Biortogonais representam uma evolução na teoria das *wavelets*, ao introduzir o conceito de bases duais para decomposição e reconstrução de sinais. Essa característica confere a elas uma superioridade em termos de flexibilidade de design, permitindo alcançar simetria e um controle mais preciso sobre a forma das funções *wavelet*. Essa capacidade de ajuste fino é importante em aplicações que exigem alta fidelidade na análise e síntese de sinais (COHEN; DAUBECHIES; FEAUVEAU, 1992).

Portanto, diferentemente das *wavelets* ortogonais, as *wavelets* biortogonais empregam duas bases distintas para a decomposição e reconstrução de sinais, utilizando funções de escala $\phi(t)$ e funções *wavelet* $\psi(t)$ separadas. A biortogonalidade se manifesta na relação entre essas funções, permitindo que a reconstrução perfeita do sinal seja alcançada, mesmo quando as funções de análise e síntese não são idênticas. Essa propriedade oferece a flexibilidade de otimizar separadamente as características de cada conjunto de funções, como a simetria e a regularidade, para atender às necessidades específicas de cada aplicação.

A função escala $\phi(t)$ fornece uma representação aproximada de um sinal, focando em suas características de baixa frequência ou em sua versão suavizada. Nas *wavelets* biortogonais, a definição de $\phi(t)$ é flexível, permitindo a construção de funções escala com diferentes propriedades. Essa flexibilidade é alcançada através de uma definição recursiva, onde $\phi(t)$ é expressa em termos de si mesma, ponderada por coeficientes que controlam sua forma e características.

A equação geral que descreve a função escala de análise $\phi(t)$, função essa que gera os subespaços de aproximação para a decomposição do sinal em uma *wavelet* biortogonal é expressa em (3.18) (HAN; MICHELLE, 2021):

$$\phi(t) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2t - k) \quad (3.18)$$

onde a_k são os coeficientes do filtro de escala de análise.

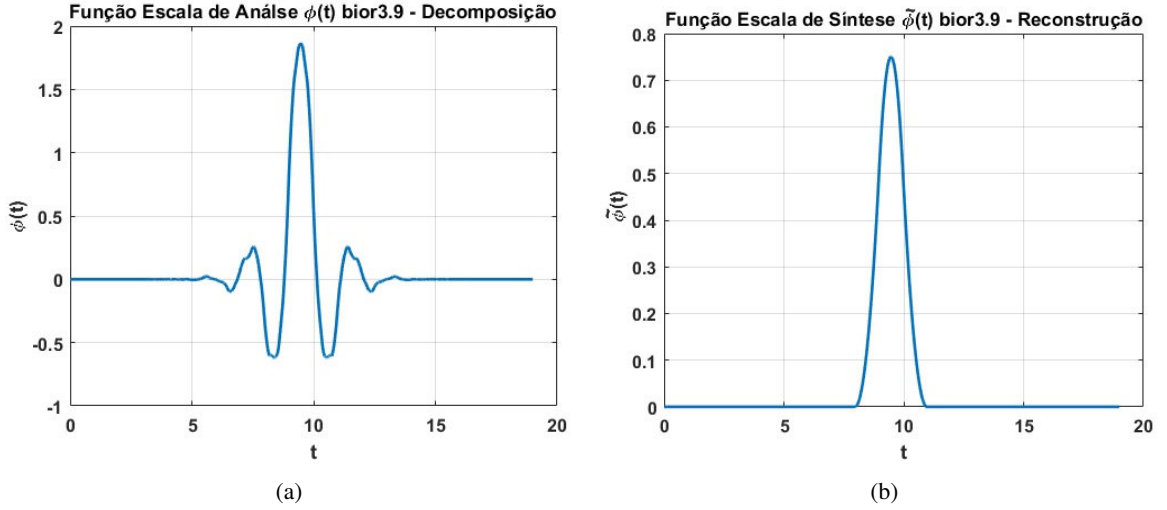
A função escala de síntese $\tilde{\phi}(t)$ em uma *wavelet* biortogonal é usada para reconstruir o sinal a partir dos coeficientes de aproximação e é definida pela equação expressa em (3.19) (HAN; MICHELLE, 2021):

$$\tilde{\phi}(t) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{a}_k \tilde{\phi}(2t - k) \quad (3.19)$$

onde $\tilde{a}_k$ são os coeficientes do filtro de escala de síntese.

A Figura 30 apresenta a família da *Wavelet* Biortogonal *bior3.9*. A função escala de análise para decomposição do sinal $\phi(t)$ em uma *wavelet* biortogonal *bior3.9*, Figura 30a e a função escala de síntese para a reconstrução do sinal $\tilde{\phi}(t)$ em uma *wavelet* biortogonal *bior3.9*, Figura 30b.

Figura 30 – *Wavelet* Biortogonal *bior3.9*: (a) Função escala de análise para decomposição do sinal $\phi(t)$ e (b) Função escala de síntese para a reconstrução do sinal $\tilde{\phi}(t)$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A função *wavelet* $\psi(t)$ é essencial para a análise de detalhes de alta frequência em um sinal, representando as discrepâncias entre o sinal original e sua aproximação de baixa frequência obtida pela função escala $\phi(t)$. Nas *wavelets* biortogonais, $\psi(t)$ é construída a partir de $\phi(t)$ através de uma equação de recorrência, empregando um conjunto distinto de coeficientes que realçam as transições rápidas e os componentes de alta frequência do sinal.

A função *wavelet* de análise $\psi(t)$ em uma *wavelet* biortogonal é a função que gera os subespaços de detalhes para a decomposição do sinal e sua expressão é definida em (3.20) (HAN; MICHELLE, 2021):

$$\psi(t) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \phi(2t - k) \quad (3.20)$$

onde b_k são os coeficientes do filtro *wavelet* de análise.

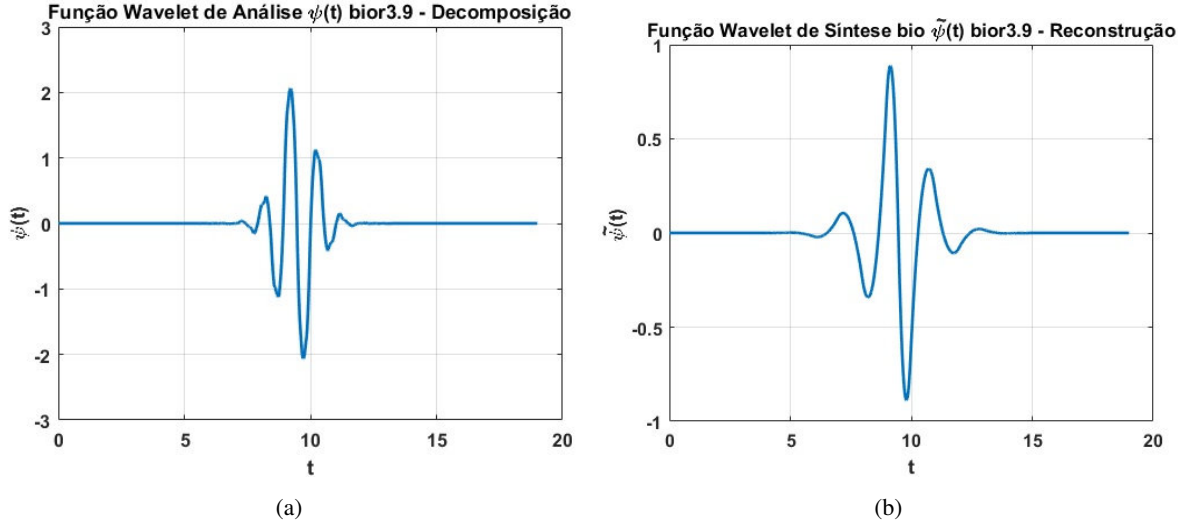
Já a função *wavelet* de síntese $\tilde{\psi}(t)$ em uma *wavelet* biortogonal é a função usada para reconstruir o sinal a partir dos coeficientes de detalhes e é definida pela expressão em (3.21) (HAN; MICHELLE, 2021):

$$\tilde{\psi}(t) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{b}_k \tilde{\phi}(2t - k) \quad (3.21)$$

onde $\tilde{b}_k$ são os coeficientes do filtro *wavelet* de síntese.

A Figura 31 ilustra a família da *Wavelet* Biortogonal *bior3.9*. A função *wavelet* de análise para decomposição do sinal $\psi(t)$ em uma *wavelet* biortogonal *bior3.9*, Figura 31a e a função *wavelet* de síntese para reconstrução do sinal $\tilde{\psi}(t)$ em uma *wavelet* biortogonal *bior3.9*, Figura 31b.

Figura 31 – *Wavelet* Biortogonal *bior3.9*: (a) Função *wavelet* de análise para decomposição do sinal $\psi(t)$ e (b) Função *wavelet* de síntese para a reconstrução do sinal $\tilde{\psi}(t)$.



Fonte: Elaborado pelo autor.

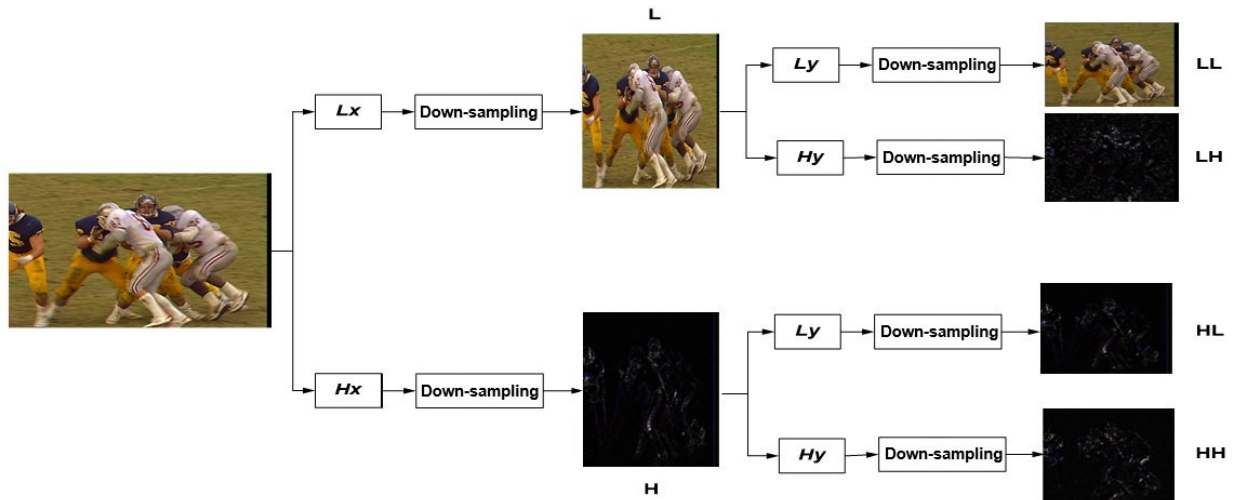
3.4 2D DWT (2D Discrete Wavelet Transform)

A transformada *wavelet* discreta 2D ou 2D DWT pode ser descrita como um sistema *wavelet* 1D DWT, que realiza a transformada ao longo das linhas e, em seguida, realiza a transformada ao longo das colunas. Essa descrição da 2D DWT ou *wavelet* bidimensional pode ser estendida para se aplicar a um sinal bidimensional, tal como uma imagem ou um *frame* de um vídeo.

Cada linha de uma imagem ou um *frame* 2D é filtrada com um filtro passa-baixa (L_x) e um filtro passa-alta (H_x) e a saída de cada filtro representa uma baixa-amostragem definida pelo fator de dois para produzir imagens intermediárias L e H . Em processamento de imagens e vídeos, as transformadas bidimensionais são aplicadas por um conjunto denominado de QMF (*Quadrature Mirror Filters*) (ESTEBAN; GALAND, 1977; CROCHIERE, 1981; RIBEIRO et al., 2024), formados pelos filtros L e H . L é a imagem original filtrada com o filtro passa-baixa e a resolução diminuída na direção x . H é a imagem original filtrada com o filtro passa-alta e a resolução diminuída na direção x . Em seguida, cada coluna destas novas imagens é filtrada com um filtro passa-baixa (L_y) e com um filtro passa-alta (H_y), da mesma maneira do procedimento inicial, a saída de cada filtro representa uma baixa-amostragem por um fator de dois para produzir quatro sub-bandas.

A Figura 32 mostra um exemplo do processo de decomposição de uma *wavelet* discreta 2D, da imagem *Football*, tamanho 352×288 . O sufixo *LL* representa a saída dos filtros passa-baixa em ambas as dimensões. O *LH* representa a saída do filtro passa-baixa primeiro ao longo da linha e depois o filtro passa-alta ao longo da coluna. O sufixo *HL* representa a saída do filtro passa-alta ao longo da linha e o segundo ao longo da coluna do filtro passa-baixa. O *HH* representa a saída dos filtros passa-alta em ambas as dimensões.

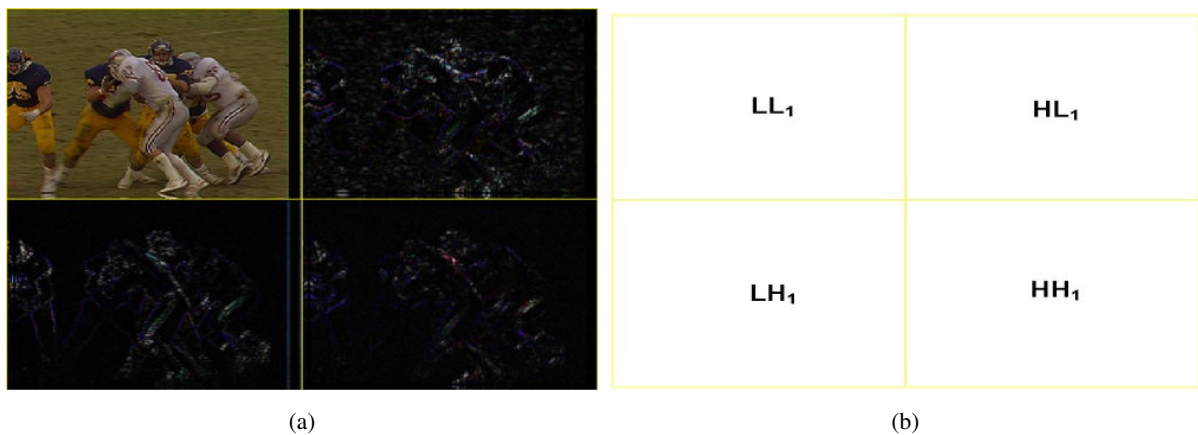
Figura 32 – Diagrama do processo de decomposição 2D DWT, imagem *Football*, tamanho 352×288 . Utilizado no processamento de imagens para separar as informações da imagem em diferentes componentes de frequência ou sub-bandas.



Fonte: Elaborado pelo autor.

O processo final resulta nas quatro sub-bandas da imagem *LL*, *LH*, *HL* e *HH*. Essas quatro sub-bandas da imagem podem ser combinadas para criar uma imagem com o mesmo número de amostras da imagem original. A Figura 33 ilustra a imagem *Football*, tamanho 352×288 , após o primeiro nível de decomposição, Figura 33a, para as quatro sub-bandas LL_1 , LH_1 , HL_1 e HH_1 , Figura 33b.

Figura 33 – Imagem *Football*, tamanho 352×288 : (a) após o primeiro nível de decomposição para as quatro sub-bandas e (b) as quatro sub-bandas LL_1 , LH_1 , HL_1 e HH_1 .



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.5 Redução de Ruído com Limiarização Wavelet

A transformada *wavelet* tem motivado diversas aplicações nas mais variadas áreas do conhecimento humano, o interesse pode ser atribuído as suas funções bases *wavelets* e suas propriedades de compactação ou concentração de energia e localização no plano tempo-frequência, especialmente no processamento de sinais, tais como, voz, sinal de radar, imagem e vídeo (SHANTHAMALLAPPA et al., 2024; TARANENKO; OLIINYK, 2024; DIZON; HOGAN, 2024; ZHOU et al., 2023; CHEN, 2024; ZHOU et al., 2020; LI et al., 2024a; HUANG; DRAGOTTI, 2022; LI et al., 2022; CHEN; KRZYZAK, 2024). A técnica de limiarização *wavelet*, através de ajustes dos coeficientes *wavelet*, tem como função reduzir ou eliminar efeitos indesejados em sistemas de comunicação, em especial aplicativos computacionais, armazenamento digital, em alguma etapa desse processo as informações podem ser modificadas por diversas formas de interferências.

A limiarização *wavelet* é simples e seus procedimentos compreendem uma vasta coleção de opções e parâmetros que podem ser projetados para reduzir a probabilidade de erro no processamento. Portanto, os seus coeficientes que são irrelevantes para o sinal processado, geralmente em relação a um determinado limiar, são reduzidos ou anulados (BNOU; RAGHAY; HAKIM, 2020). Diferentes métodos de limiarização são propostos na literatura para escolher o limiar, a seleção do limiar *wavelet* é um passo importante, pois ocasiona um impacto na redução do ruído e possivelmente nas características visuais dos sinais.

De acordo com as propriedades da limiarização *wavelet*, Donoho e Johnstone (DONOHO, 1995) propuseram o uso de funções de base *wavelets* ortonormais para remover ruído de sinais e a esse procedimento denominaram *denoising*. Os procedimentos de *denoising* atuam diretamente sobre os coeficientes da transformada *wavelet* da observação ruidosa e se beneficiam da propriedade de concentração da energia dessa transformada que permite representar, com boa fidelidade, as funções do espaço de sinal com uma pequena parcela dos coeficientes da expansão, o que não se verifica para o ruído.

No domínio da transformada os coeficientes são contaminados pelo ruído com variâncias iguais aquela do ruído presente nas amostras do sinal no domínio do tempo, porém a energia do sinal fica confinada a poucos coeficientes. Em função disso, o nível de ruído pode ser reduzido zerando os coeficientes da expansão que se encontram abaixo de um limiar determinado. Esse limiar de comparação influencia diretamente no desempenho do método de *denoising*. Segundo Donoho e Johnstone, se este parâmetro for adequadamente escolhido bons resultados podem ser obtidos para diversos tipos de sinais (DONOHO; JOHNSTONE, 1994).

Outra observação, bastante importante, é o uso da transformada *wavelet* que está relacionado com a escolha da família de funções de base. Na transformada *wavelet*, diversas famílias de funções podem ser usadas para realizar a decomposição desde que atendam a determinados requisitos. A estratégia é que as referidas funções concentrem a energia do sinal útil em poucos

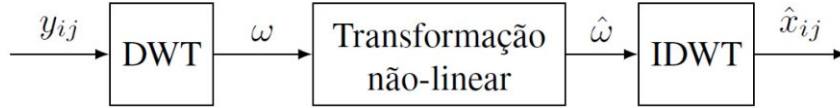
coeficientes de expansão. Neste caso, quanto maior for a concentração, mais coeficientes da expansão poderão ser eliminados no processamento sem provocar muita distorção, proporcionando, dessa forma, uma boa redução no nível do ruído.

No método de *denoising*, o problema de interesse consiste em se estimar o sinal original, por exemplo, uma imagem $\{x_{ij}, i, j = 1, \dots, N\}$ a partir de observações do sinal ruidoso desta imagem $\{y_{ij}, i, j = 1, \dots, N\}$, dado por (3.22):

$$y_{ij} = x_{ij} + \varepsilon_{ij} \quad (3.22)$$

onde $\{\varepsilon_{ij}, i, j = 1, \dots, N\}$ é o ruído modelado por um processo estocástico gaussiano estacionário, com média nula e variância σ^2 , $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ (AL-AZZAWI, 2020; YILMAZ, 2020). O método *denoising wavelet* toma a transformada *wavelet* discreta do sinal ruidoso y_{ij} e passam os coeficientes da transformada por um processador não-linear, no qual as amplitudes desses coeficientes são comparadas com um limiar T . A estimativa de x_{ij} , que será denotada por $\hat{x}_{ij}$, é obtida realizando a transformada *wavelet* discreta inversa dos coeficientes resultantes, conforme ilustra o diagrama de blocos na Figura 34.

Figura 34 – Diagrama de blocos do método de redução de ruído do limiar *wavelet*. Consiste nas etapas de decomposição (DWT), cálculo do limiar, aplicação do limiar e reconstrução (IDWT).



Fonte: Elaborado pelo autor.

No diagrama de blocos da Figura 34, ω é o vetor cujas componentes representam os coeficientes da transformada *wavelet* discreta de y , dado por (3.23):

$$\omega = Wy \quad (3.23)$$

onde W é o operador linear bidimensional responsável pela realização da transformada *wavelet* ortogonal diádico. De forma similar, aplicando o operador W em x e ε obtém-se os coeficientes *wavelet* Wx do sinal sem ruído e $W\varepsilon$ do sinal com ruído, respectivamente.

Os procedimentos de *denoising* utilizam funções de base *wavelets* ortonormais. Assim sendo, dado por (3.24):

$$W^{-1}W = I \quad (3.24)$$

onde W^{-1} é o operador da transformada inversa *wavelet* e I é a matriz identidade. O método *denoising* filtra cada coeficiente y_{ij} das sub-bandas de detalhes com a função de limiar para obter x_{ij} . Sendo assim, o sinal estimado na saída método *denoising wavelet* $\hat{x}$, é dado por (3.25):

$$\hat{x} = W^{-1}\hat{\omega} \quad (3.25)$$

Segundo (DONOHO; JOHNSTONE, 1994) foram propostos dois procedimentos para obter os coeficientes modificados a partir da comparação com o limiar T , denotado por $\hat{\omega}_{ij}$. Portanto, $\hat{\omega}_{ij}$ é o resultado dos coeficientes *wavelet* processados pelas funções de limiarização. Sendo que um deles adota um limiar rígido e outro um limiar suave.

No método de limiar rígido os valores dos coeficientes acima do limiar são mantidos, ao contrário dos valores dos coeficientes abaixo do limiar que são excluídos, dado por (3.26):

$$\hat{\omega}_{ij} = \begin{cases} \omega_{ij}, & |\omega_{ij}| \geq T \\ 0, & |\omega_{ij}| < T \end{cases} \quad (3.26)$$

No procedimento com limiar suave se um coeficiente possui amplitude menor que o limiar, o mesmo é igualado a zero. Do contrário, sua amplitude é reduzida por uma quantidade igual ao limiar. É definido como segue em (3.27):

$$\hat{\omega}_{ij} = \begin{cases} \text{sgn}(\omega_{ij})(|\omega_{ij}| - T), & |\omega_{ij}| \geq T \\ 0, & |\omega_{ij}| < T \end{cases} \quad (3.27)$$

em que $\text{sgn}(\cdot)$ denota a função sinal.

Um terceiro método de limiar baseia-se na adição do parâmetro α que está compreendido na faixa de 0 - 1. O cálculo dos coeficientes *wavelet* estão entre os cálculos dos métodos de limiar rígido e suave, denominado de limiarização semi-suave (semisoft) (WANG et al., 2021). Pode ser descrito como o segue em (3.28):

$$\hat{\omega}_{ij} = \begin{cases} \text{sgn}(\omega_{ij})(|\omega_{ij}| - \alpha T), & |\omega_{ij}| \geq T \\ 0, & |\omega_{ij}| < T \end{cases} \quad (3.28)$$

Para uma mesma família de funções de base *wavelet*, o desempenho das técnicas de *denoising* depende basicamente do limiar T e da estratégia de mapeamento. Em (DONOHO; JOHNSTONE, 1994) e (DONOHO, 1995) foi proposto o limiar universal, que segundo os autores produz bons padrões de desempenho. Pode ser definido como segue em (3.29):

$$T = \sigma \sqrt{2 \log N} \quad (3.29)$$

onde N denota o comprimento do sinal de entrada e σ é a estimativa do nível de ruído, esse desvio padrão é estimado com base nos dados dos coeficientes da *wavelet*. Em (DONOHO; JOHNSTONE, 1994) e (DONOHO, 1995) determina que a utilização de um estimador robusto com base na mediana dos coeficientes *wavelet* no nível de decomposição mais fino, é dado por (3.30):

$$\sigma = \frac{\text{median}(|\omega_{ij}|)}{0.6745} \quad (3.30)$$

onde $\omega_{ij} \in$ a sub-banda HH_1 . HH_1 são os coeficientes de detalhes da diagonal do primeiro nível da decomposição da *wavelet*.

O limiar universal resulta de uma estimativa no sentido de minimizar o erro do limiar dos coeficientes da *wavelet* ao longo do processamento, essa proposta é denominada de estimador de limiar *VisuShrink* definido em (3.29).

A partir do trabalho proposto em (DONOHO; JOHNSTONE, 1994) muitos métodos de *denoising* foram e continuam sendo propostos (JUNEJA et al., 2021), (BENHASSINE; BOUKAACHE; BOUDJEHEM, 2021), (SONIA; SUMATHI, 2022), (LI et al., 2022) e (CHEN; KRZYZAK, 2024). Como o método *SureShrink* que foi desenvolvido para determinar um limiar adaptativo de sub-banda, baseado no risco imparcial do estimador de Stein (DONOHO; JOHNSTONE, 1995), (STEIN, 1981). Além, do método da estimação bayesiana, o *BayesShrink* (CHANG; YU; VETTERLI, 2000), assim como o *SureShrink* é baseado no limiar adaptativo através da estratégia do limiar suave, no qual deriva do limiar em uma estrutura bayesiana assumindo uma distribuição gaussiana generalizada.

O *BayesShrink* apresenta melhor desempenho em relação ao erro médio quadrático (MSE), em comparação ao *SureShrink*. O *BayesShrink* é um método adaptativo para cada sub-banda individual a um determinado nível de resolução da imagem. Devido às adaptações que ocorrem nos coeficientes *wavelets*, pode-se obter bons níveis de eficiência no processo de *denoising*. O limiar de uma determinada sub-banda deriva da minimização de risco e é dado por (3.31):

$$T = \frac{\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}_x} \quad (3.31)$$

onde $\hat{\sigma}^2$ é variância do nível de ruído estimado para a sub-banda HH_1 , expresso em (3.30) e $\hat{\sigma}_x$ é o desvio padrão dos coeficientes *wavelets* cuja estimativa é calculada usando a expressão em (3.32):

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{\max(\hat{\sigma}_y^2 - \hat{\sigma}^2, 0)} \quad (3.32)$$

onde $\hat{\sigma}_y^2$ é a variância de ω_{ij} e pode ser calculado por (3.33):

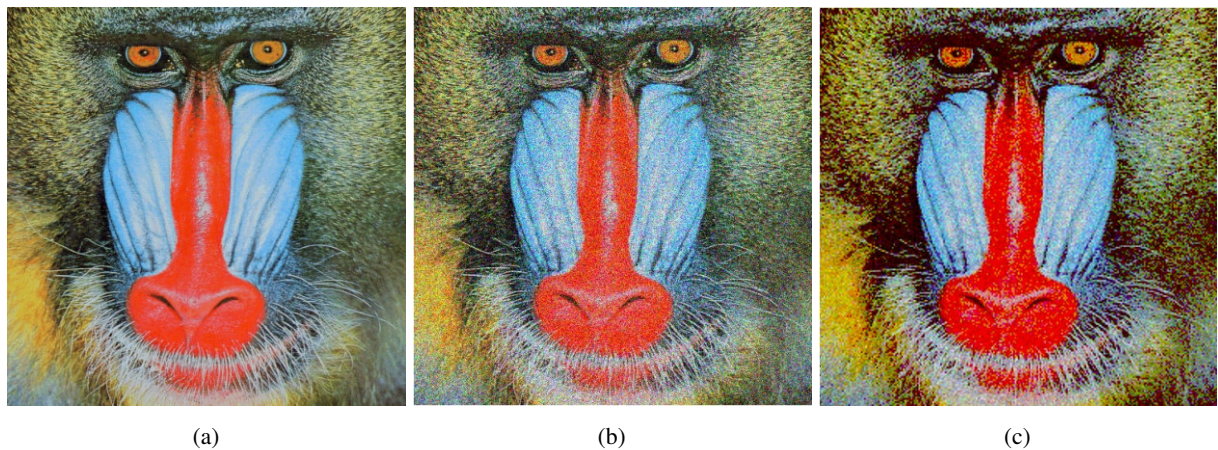
$$\hat{\sigma}_y^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1}^K \omega_{ij}^2 \quad (3.33)$$

O método de *denoising BayesShrink* está entre os mais eficientes para o tratamento de sinais bidimensionais, tais como, imagens e vídeos. Considerando os fatores que são desempenho e simplicidade de implementação, segundo (CHANG; YU; VETTERLI, 2000), o método

BayesShrink é considerado o processo com maiores índices de aproveitamento na reconstrução de sinais bidimensionais.

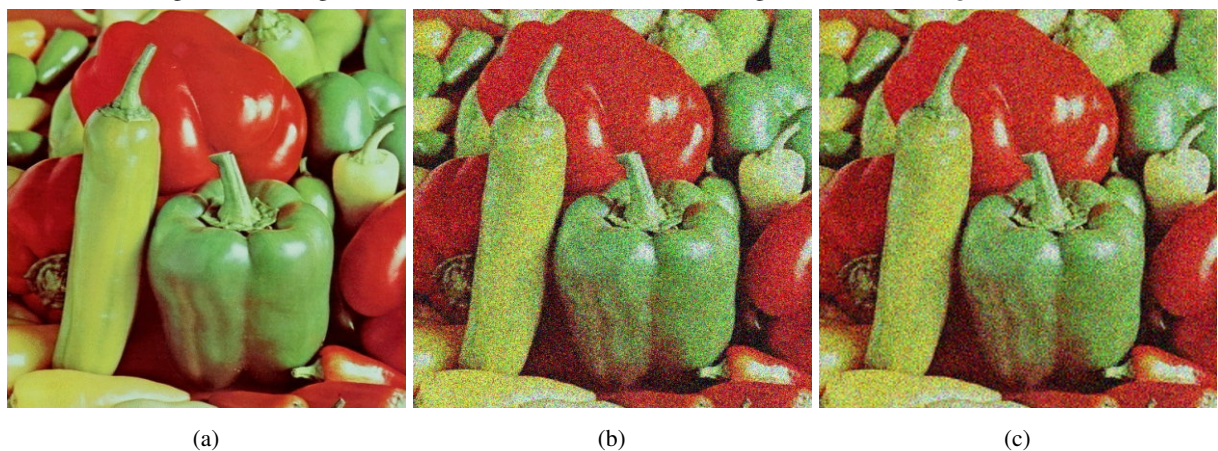
A Figura 35 mostra as comparações visuais dos resultados da aplicação de redução de ruído, técnica de *denoising*, na imagem Mandril colorida, tamanho 512×512 , para o valor de variância de 0.03, corrompidos com ruído branco gaussiano aditivo. A Figura 35a ilustra a imagem original, a Figura 35b apresenta a imagem ruidosa para a variância de 0.03 e a Figura 35c mostra a aplicação da redução de ruído (*denoising*). Um segundo exemplo de *denoising*, é ilustrado na Figura 36, para a imagem Peppers colorida, tamanho 512×512 , para o valor de variância de 0.05. A Figura 36a mostra a imagem original, a Figura 36b ilustra a imagem ruidosa para variância de 0.05 e a Figura 36c apresenta a aplicação da técnica de *denoising*.

Figura 35 – Aplicação da Técnica de *Denoising* na Imagem Mandril Colorida, tamanho 512×512 : (a) Imagem Original, (b) Imagem Ruidosa, variância de 0.03 e (c) Imagem com *Denoising*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 36 – Aplicação da Técnica de *Denoising* na Imagem Peppers Colorida, tamanho 512×512 : (a) Imagem Original, (b) Imagem Ruidosa, variância de 0.05 e (c) Imagem com *Denoising*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

3.6 Considerações Finais

O Capítulo 3, explorou a Transformada *Wavelet*, apresentando uma ferramenta poderosa para análise de sinais, com foco em suas diversas particularidades e aplicações. Ao longo das seções, foi apresentado os fundamentos teóricos, destacando sua versatilidade e relevância em diversos campos. O capítulo também demonstrou que a transformada *wavelet* decompõe um sinal em diferentes escalas e frequências, revelando detalhes que seriam obscurecidos por outras técnicas, além de apresentar as duas formas principais da transformada *wavelet*: a Contínua (CWT), que fornece uma representação redundante do sinal, e a Discreta (DWT), mais eficiente para aplicações práticas.

O capítulo apresentou uma variedade de bases *wavelet*, cada uma com características únicas que as tornam adequadas para diferentes aplicações. Desde a simples *Wavelet* de Haar até *wavelets* mais complexas como Daubechies, Symlet e Biortogonal, a escolha da base *wavelet* influencia significativamente os resultados das análises de sinais. *Wavelets* como a de Morlet e o Chapéu Mexicano são particularmente úteis para análise de transientes e detecção de singularidades. Apresentou também a *Wavelet* Biortogonal, essencial para o desenvolvimento desta tese, destacando sua maior flexibilidade, pois podem ser construídas de maneira que satisfaçam propriedades de ortogonalidade em um espaço de funções apropriado, mas com flexibilidade quanto à sua simetria e forma.

A Transformada *Wavelet* Discreta 2D (2D DWT) estende o poder da transformada para análise de imagens, permitindo a decomposição em sub-bandas de diferentes frequências e orientações. E por fim, introduziu a técnica de limiarização *wavelet*, no qual demonstra a eficácia da transformada *wavelet* na remoção de ruídos indesejados, preservando detalhes importantes do sinal. Ao explorar a capacidade da transformada de separar componentes de diferentes escalas, é possível identificar e remover o ruído de forma eficiente.

4 Metodologia

4.1 Introdução

Diagnósticos utilizando imagens médicas agregam contribuições essenciais para a medicina atual, especialmente a Ressonância Magnética por Imagem (MRI - *Magnetic Resonance Imaging*) que apresenta alta precisão e qualidade no detalhamento das imagens do corpo humano, incluindo as imagens cerebrais de ressonância magnética (CHANG et al., 2024). Entretanto, o ruído agregado durante aquisição da imagem dificulta as análises e interpretações pelo especialista, o que pode comprometer a qualidade do diagnóstico. Neste contexto, a redução do ruído em imagens de ressonância magnética torna-se uma etapa crucial para melhorar a precisão e confiabilidade do diagnóstico (MISHRO et al., 2022).

Uma abordagem promissora para reduzir o ruído em imagens baseia-se no uso de *Wavelets* Adaptativas. As *Wavelets* Adaptativas são ferramentas poderosas para o processamento de sinais e imagens que têm se mostrado eficazes na redução de ruído em imagens cerebrais de ressonância magnética (ZHANG et al., 2019; GOLILARZ; GAO; DEMIREL, 2019; ASSAM et al., 2021; JUNEJA et al., 2021; SONIA; SUMATHI, 2022; BENHASSINE; BOUKAACHE; BOUDJEHEM, 2021).

Para utilizar os benefícios da transformada *wavelet* e minimizar os efeitos do ruído, os diversos métodos de limiarização *wavelet* adaptativa utilizam, para o ajuste dos coeficientes ruidosos da *wavelet* uma combinação de parâmetros como o desvio padrão do ruído, o comprimento do sinal processado e o nível de decomposição da transformada que estima as propriedades do sinal no domínio da frequência (SAHOO; FREED; SRIVASTAVA, 2024). No entanto, esses parâmetros aplicados nos métodos de limiarização *wavelet* adaptativa não utilizam informações temporais acessíveis na sequência do sinal processado, além dos efeitos ruidosos que estão presentes, uma vez que o processamento do sinal ignora o aspecto temporal para a sequência do sinal com alta intensidade de movimento. A grande parte dos métodos de limiarização *wavelet* são apropriadas somente para processar sequência de sinais com baixa e média intensidade de movimento. Neste contexto, os métodos de limiarização *wavelet* adaptativa atuais, que são utilizadas para eliminação do ruído, precisam de parâmetros que considerem a correlação entre coeficientes ruidosos e não ruidosos, garantindo assim a eliminação do ruído no domínio temporal.

O método de limiarização *wavelet* original para redução de ruído foi desenvolvida por Donoho e Johnstone (DONOHO; JOHNSTONE, 1994; DONOHO, 1995; DONOHO; JOHNSTONE, 1995), os trabalhos desenvolvidos mostram vários métodos de limiar, o principal denominado de limiar universal. Esse limiar resulta de uma estimativa ótima no sentido de minimizar

o erro do limiar dos coeficientes da *wavelet* ao longo do processamento dos sinais, essa proposta também conhecida como estimador do limiar *VisuShrink*. A técnica consiste na transformada *wavelet* e no limiar apresentando características simples e eficientes de implementação.

Afim de melhorar os principais trabalhos propostos por Donoho e seus colaboradores, um limiar derivado de uma estrutura bayesiana é proposto em (CHANG; YU; VETTERLI, 2000), denominado de *BayesShrink*. O limiar *BayesShrink* é simples e adaptável a cada sub-banda que depende de estimativas baseadas em dados, resultando em parâmetros escolhidos de acordo com critérios derivado do comprimento mínimo de descrição que ajudam significativamente na redução do ruído baseado no limiar suave *wavelet*.

Trabalhos na literatura desempenham um papel fundamental na redução de ruído utilizando *wavelets* e são utilizados amplamente na remoção de ruído de imagem de ressonância magnética cerebral. Esses trabalhos procuram focar em uma *wavelet* ideal para redução do ruído, além do desenvolvimento de uma nova função de limiarização e novos valores de limiar.

Em (SUN; YIU; LI, 2019) foi proposto uma nova função de limiarização para a transformada *wavelet*, baseada na função Kernel Gaussiana combinado com a função de limiar suave. A proposta utiliza um kernel de exponencial quadrático, também conhecido como função de base radial ou Kernel Gaussiana, apresentando uma função melhorada, mais adaptável aos parâmetros que difere de outras funções de limiarização. A função proposta determina condições de limiarização satisfatórias para aplicações em detalhes de imagens, desde modo, a nova função proporciona a adequação no limiar reduzindo ruídos e apresenta nos seus resultados vantagens significativas sobre o método suave de limiarização e demais métodos propostos na literatura, além de superar problemas de descontinuidade da função, ausência de borda da imagem, baixa suavidade no processamento da imagem.

Neste trabalho (SUN; YIU; LI, 2019), uma nova função de limiar é proposta e expresso em (4.1):

$$\hat{\omega}_{ij} = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\omega_{ij})(|\omega_{ij}| - \lambda e^{-\frac{[\alpha((\omega_{ij}-\lambda)/\lambda)-\mu]^2}{2\sigma^2}}), & |\omega_{ij}| \geq \lambda \\ 0, & |\omega_{ij}| < \lambda \end{cases} \quad (4.1)$$

onde o parâmetro λ é a representação do limiar, $\hat{\omega}_{ij}$ representa a estimação dos coeficientes da *wavelet* processada, $\omega_{i,j}$ representa os coeficientes *wavelet* do ruído da imagem e $\operatorname{sgn}(\ast)$ representa a função simbólica o sinal de $\omega_{i,j}$.

O estudo propõem um parâmetro de limiar otimizado definido em (4.2):

$$\lambda = \frac{\varepsilon \sqrt{2 \log N}}{\log(1 + e^j)} \quad (4.2)$$

onde ε e N são a variação do ruído e o comprimento de amostragem do sinal, respectivamente e j denota o nível de decomposição da *wavelet*, nessa expressão, é possível observar que se j aumentar, a otimização será gradualmente reduzida.

Em (ZHANG et al., 2019) foi proposto um método para remoção de ruído em imagem de ressonância magnética cerebral utilizando uma nova função de limiar que combina as vantagens das funções de limiar suave e rígida ajustado pelo valor do parâmetro k , além disso, a proposta evita o fenômeno de oscilação gerado pela redução do ruído e a precisão da estimativa de limiar é melhorado pelo ajuste do parâmetro α , desde modo, quando α é menor, um limiar de alta frequência é calculado, resultando em um limiar ligeiramente maior, quando α é maior, um limiar de baixa frequência é calculado, resultando em um limite ligeiramente menor.

Na proposta do estudo em (ZHANG et al., 2019) foram aprimorados as funções de limiar definida inicialmente em (4.3) e no mesmo estudo, uma nova função de limiar foi proposta, de acordo com a adição de um fator de ajuste, conforme expresso em (4.4):

$$\hat{\omega}_{ij} = \begin{cases} \omega_{ij} - \frac{\omega_{i,j}}{2} \cdot \frac{1}{100^{|\omega_{i,j}|^\lambda - 99}}, & |\omega_{ij}| \geq \lambda \\ \frac{\omega_{i,j}}{2} \cdot \frac{1}{1 - \log_{100}(|\omega_{i,j}|/\lambda)}, & |\omega_{ij}| < \lambda \end{cases} \quad (4.3)$$

$$\hat{\omega}_{ij} = \begin{cases} \omega_{ij} - \frac{\omega_{i,j} \cdot m}{2} \cdot \frac{1}{100^{|\omega_{i,j}|^\lambda - 99}}, & |\omega_{ij}| \geq \lambda \\ \frac{\omega_{i,j} \cdot m}{2} \cdot \frac{1}{1 - \log_{100}(|\omega_{i,j}|/\lambda)}, & |\omega_{ij}| < \lambda \end{cases} \quad (4.4)$$

onde λ representa o limiar, ω_{ij} representa os coeficientes *wavelet* do ruído, $\hat{\omega}_{ij}$ é a estimativa dos coeficientes da *wavelet* processada e m é um parâmetro de ajuste da variação dos coeficientes da *wavelet*, onde $m \in \mathbb{Z}$.

No método proposto em (ZHANG et al., 2019) é determinada a estimativa de limiar expresso em (4.5):

$$\lambda = \sigma \sqrt{2 \log M * N} \cdot (1 - \alpha * j) \quad (4.5)$$

onde j é o nível de decomposição da *wavelet*, $M \times N$ representa o tamanho da imagem e α representa um valor de ajuste compreendido entre $0 < \alpha < 1$, portanto, como descrito anteriormente, valores pequenos de α resultam em um limiar de alta frequência ligeiramente maior, enquanto valores maiores de α levam a um limiar de baixa frequência ligeiramente menor.

No trabalho desenvolvido em (GOLILARZ; GAO; DEMIREL, 2019) foi proposto um algoritmo de otimização meta-heurística inspirado na natureza, denominado de Otimização Harris Wawk (HHO - *Harris Hawks Optimization*), com o objetivo de encontrar soluções eficientes para os parâmetros da função de limiarização. O algoritmo HHO proporciona a obtenção dos coeficientes de *wavelets* otimizados antes da aplicação da transformada *wavelet* inversa. Em uma

segunda etapa, os autores propuseram um limiar baseado na distribuição gaussiana generalizada adaptativa (AGGD). Essa função é orientada a dados com valor de limiar adaptativo e usada para melhorar a qualidade da imagem no processo de redução de ruído. A função de limiar AGGD é conduzida por uma outra função não linear suave dentro de um intervalo para tornar a função totalmente não linear e diferenciável.

Em (GOLILARZ et al., 2020) foi desenvolvido um método de limiarização *wavelet* baseado na distribuição gaussiana generalizada adaptativa (AGGD - *Adaptive Generalized Gaussian Distribution*) aprimorada do trabalho em (GOLILARZ; GAO; DEMIREL, 2019) para eliminação de ruído em imagem de ressonância magnética cerebral. A limiarização AGGD aprimorada trata de uma função de limiarização orientada para a distribuição gaussiana aplicada na redução ou eliminação de ruído em imagem. Essa função é baseada por dados, não linear, flexível e ajustada para qualquer tipo de imagem. A função ajusta os coeficientes não importantes utilizando a função limiar de distribuição gaussiana generalizada adaptativa em vez de fixar os coeficientes em zero, utilizando o intervalo $[-T, T]$.

Nesse estudo (GOLILARZ et al., 2020) é evidente que todos os coeficientes podem ser ajustados por meio de funções não lineares orientadas por dados. Similarmente à função de limite do AGGD, o valor do limite pode ser obtido sem recorrer a otimização ou algoritmos de aprendizado. A função de limiarização proposta no trabalho é expressa em (4.6):

$$\mu(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{1+e^{x+t}} \right) x - \frac{t}{2}, & x < -t \\ s(x) - s(0), & |x| \leq t \\ \left(\frac{1}{1+e^{-x+t}} \right) x + \frac{t}{2}, & x > t \end{cases} \quad (4.6)$$

onde $\mu(x)$ é o limiar aprimorado do AGGD. Na expressão (4.6) $s(x)$ é definido em (4.7):

$$s(x) = \sigma_n \left(e^{\frac{x^2}{2\sigma_n^2} - \frac{1}{2}} \right) \quad (4.7)$$

onde x representa os coeficientes da *wavelet*, σ_n é o estimador mediano robusto e t é o valor de limiar.

Nos métodos de remoção de ruído a escolha do limiar e o desenvolvimento de uma nova função de limiar são recursos importantes para a remoção de ruído. Neste capítulo, um novo limiar e uma nova função de limiar são propostas para redução de ruído em imagem de ressonância magnética cerebral, utilizando parâmetros adicionais que levam em consideração os níveis de decomposição da *wavelet* e principalmente da adição do fator de predição linear que representa uma ponderação na estimativa do limiar, baseado em minimizar o erro de predição

representado pela diferença temporal obtida pela imagem ruidosa e a imagem original. Deste modo, o método calcula o fator de predição linear que reduz o erro médio quadrático (MSE), entre a imagem ruidosa e a imagem original.

Nesta tese de doutorado, as principais contribuições são destacadas a seguir:

1. Um novo estimador de limiar e uma nova função de limiarização *wavelet* são desenvolvidas para melhorar os efeitos de redução do ruído em imagem de ressonância magnética cerebral de acordo com as características e informações temporais entre a imagem ruidosa e a imagem original, proporcionando a redução do ruído no domínio temporal.
2. O novo estimador de limiar adapta-se as diferentes características de sub-banda da transformada *wavelet* para cada imagem, estimando os coeficientes da *wavelet* de acordo com as condições da imagem ruidosa, devido a ponderação do fator de predição linear e do nível de decomposição da *wavelet*.
3. O novo método de limiarização *wavelet* adaptativa proposto utiliza a correlação entre a imagem ruidosa e a imagem original, calculando um custo para minimizar o erro de predição entre as imagens ruidosa e original, o fator de predição linear melhora a precisão e escolha dos coeficientes da *wavelet* próximo ao limiar.
4. A nova função de limiar adaptativa proposta evita as deficiências apresentadas pela função de limiar rígido que é a descontinuidade e pela função de limiar suave que perde as características do sinal original, ocasionando efeitos borrados nas bordas da imagem, além de minimizar os efeitos de oscilação causados pelos limiares rígido e suave, como o fenômeno de pseudo-Gibbs.

4.2 Estimador de Limiar Proposto

O limiar proposto neste trabalho é baseado no limiar universal com a adição de dois novos parâmetros: a escala ou nível de decomposição j da transformada *wavelet* e o fator de predição linear β . A adição do parâmetro de predição linear tem como função minimizar o erro médio quadrático entre a imagem ruidosa e a imagem original. Esse novo limiar aplicado na função de limiarização, ajusta os novos coeficientes *wavelets* para redução do ruído. A expressão do limiar proposta neste artigo é definida em (4.8):

$$T = \frac{\sigma \sqrt{2 \log N}}{\log(1 + j)^\beta} \quad (4.8)$$

onde σ é o desvio padrão do ruído, N é o comprimento do sinal, $\log$ representa o logaritmo natural, j é a escala de decomposição e β é o fator de predição linear determinado pelo erro de predição que representa a diferença residual entre a imagem ruidosa $I_r[m, n]$ e a imagem

original $I_o[m, n]$. Para o limiar proposto em (4.8), a ponderação do fator de predição linear β em conjunto com o nível de decomposição j , proporciona um aprimoramento no limiar T em diferentes escalas da transformada *wavelet* resultando em uma redução de ruído mais eficiente.

4.3 Fator de Predição Linear

O estimador de limiar proposto em (4.8) foi desenvolvido para calcular o limiar T e a partir desse limiar determinar quais os coeficientes *wavelets* serão modificados, além de adaptar as diferentes características de sub-bandas de acordo com a imagem, neste caso, de acordo com as condições da imagem ruidosa e a imagem original. O fator de predição linear β é obtido minimizando o erro médio quadrático (MSE), entre a imagem ruidosa e a original. Nesta abordagem, o erro de predição representa a diferença residual obtida pela subtração da imagem ruidosa $I_r[m, n]$ pela imagem original $I_o[m, n]$ sendo que a imagem original é ponderada pelo fator β , o erro de predição é dado por (4.9):

$$e_{pred}[m, n] = I_r[m, n] - \beta I_o[m, n] \quad (4.9)$$

O fator de predição linear β é obtido minimizando o erro médio quadrático (MSE), entre a imagem ruidosa e a imagem original, expresso em (4.10):

$$\beta = \min E\{e_{pred}^2[m, n]\} \quad (4.10)$$

Resolvendo a equação diferencial em relação ao fator de predição linear β em (4.11), onde primeiro aplica-se a regra da cadeia em (4.12), para obter a expressão (4.13) e igualando a derivada a zero em (4.14), em seguida distribui e aplica a linearidade da esperença matemática a expressão se simplifica em (4.15), posteriormente pela linearidade de E tem-se a expressão em (4.16) e por fim, isolando o β em (4.17) obtém-se o fator predição linear:

$$\frac{\partial E\{e_{pred}^2\}}{\partial \beta} = \frac{\partial E\{I_r[m, n] - \beta I_o[m, n]\}^2}{\partial \beta} \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial E\{e_{pred}^2\}}{\partial \beta} = E\left[\frac{\partial}{\partial \beta}(I_r[m, n] - \beta I_o[m, n])^2\right] \quad (4.12)$$

$$E\left[2(I_r[m, n] - \beta I_o[m, n])\left(\frac{\partial}{\partial \beta}(I_r[m, n] - \beta I_o[m, n])\right)\right] = 0 \quad (4.13)$$

$$2E\{[(I_r[m, n] - \beta I_o[m, n])(-I_o[m, n])]\} = 0 \quad (4.14)$$

$$E\{I_r[m, n](-I_o[m, n]) - \beta I_o[m, n](-I_o[m, n])\} = 0 \quad (4.15)$$

$$-E\{I_r[m, n](I_o[m, n])\} + \beta E\{I_o^2[m, n]\} = 0 \quad (4.16)$$

$$\beta E\{I_o^2[m, n]\} = E\{I_o[m, n](I_r[m, n])\} \quad (4.17)$$

Deste modo, o fator β que minimiza o erro médio quadrático entre as imagens ruidosa e original é obtido utilizando a expressão dado por (4.18):

$$\beta = \frac{E\{I_o[m, n]I_r[m, n]\}}{E\{I_o^2[m, n]\}} \quad (4.18)$$

Assumindo as imagens ruidosa e original com média aleatória não nula e a distribuição de probabilidade conjunta não conhecida, o fator de predição linear β é obtido a partir da aproximação discreta da esperança matemática dado por (4.19):

$$\beta = \frac{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N I_o[m, n]I_r[m, n]}{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N I_o^2[m, n]} \quad (4.19)$$

O Fator de Predição Linear β foi determinado empiricamente, sendo um componente chave da metodologia proposta de limiarização *wavelet* adaptativa, que considera a correlação entre a imagem original e a imagem ruidosa. A natureza empírica da determinação desse fator decorre do seu objetivo fundamental: encontrar o coeficiente ideal que tem a finalidade de minimizar o erro médio quadrático (MSE) entre as imagens. Dessa forma, o valor de β é ajustado com base na observação e no desempenho experimental obtido a partir dos processamentos de imagens, de modo a garantir que o novo limiar ponderado realize a redução do ruído e preserve as características visuais nas imagens.

4.4 Nova Função de Limiar Adaptativa

Nos métodos de limiarização clássicos proposto por Donoho, as funções de limiarização rígido e suave apresentam imperfeições. A função de limiarização rígido apesar de manter as informações efetivas do sinal original, apresenta descontinuidade nos coeficientes *wavelets* ruidosos, causando distorção visual nas imagens devido ao fenômeno de pseudo-Gibbs na borda da imagem.

Na função de limiarização suave, ao contrário da limiarização rígido, os limiares são contínuos mantendo os coeficientes *wavelets* ruidosos constantes em relação aos coeficientes das imagens, ocasionando a redução do fenômeno de pseudo-Gibbs. No entanto, remover o ruído com a limiarização suave, o sinal reconstruído perderá facilmente as características comparado ao sinal original, apresentando nas bordas das imagens efeitos borrados, isso devido aos valores maiores dos coeficientes *wavelets* ruidosos em comparação aos valores de limiar processados.

Deste modo, utilizando as abordagens tradicionais de limiarização, se o limiar T processado for muito grande, os detalhes serão perdidos, caso contrário, se o limiar T processado for muito pequeno o ruído permanecerá. Para alcançar melhores resultados na redução de ruído em imagem, destacando melhor os detalhes das imagens processadas e reduzindo o fenômeno de pseudo-Gibbs, uma nova função de limite adaptável é proposta neste trabalho e definido em (4.20):

$$\hat{\omega}_{ij} = \begin{cases} \text{sgn}(\omega_{ij})(|\omega_{ij}| - \sin(\frac{\pi}{2}(\frac{T}{|\omega_{ij}|})^{\frac{\beta}{T}})T), & |\omega_{ij}| \geq T \\ 0, & |\omega_{ij}| < T \end{cases} \quad (4.20)$$

onde ω_{ij} e T representam os coeficientes *wavelet* do ruído da imagem e o limiar, respectivamente, e $\hat{\omega}_{ij}$ é o resultado dos coeficientes *wavelet* processados pela nova função de limite adaptável, $\text{sgn}(\omega_{ij})$ representa o sinal de ω_{ij} e β é o fator de predição linear.

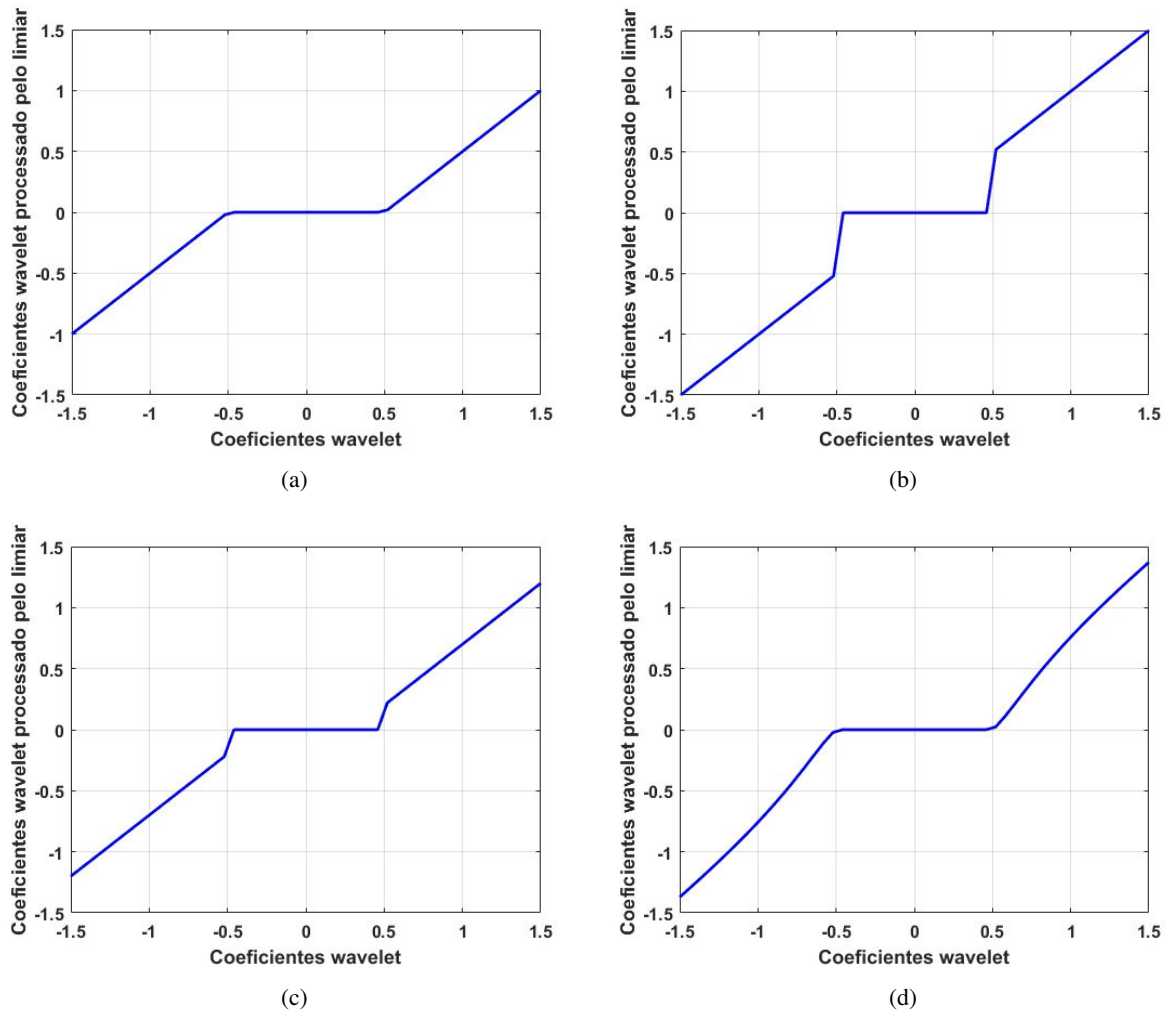
A Figura 37 ilustra a comparação entre as funções de limiarização: suave (*soft thresholding*), Figura 37a, rígida (*hard thresholding*), Figura 37b, semi-suave (*semisoft thresholding*), Figura 37c e a nova função de limiarização proposta Figura 37d. Observa-se na função de limiarização rígida que não possui continuidade no limiar T , ocasionando oscilações na recuperação da imagem ruidosa.

Ao contrário da limiarização rígida, a função de limiarização suave não apresenta descontinuidade, no entanto, a imagem reconstruída apresenta diferenças para a imagem original, devido aos coeficientes *wavelets* ruidosos apresentar valores elevados em relação ao limiar processado.

Na nova função limiar proposta neste trabalho, se $|\omega_{ij}| \rightarrow T$, o valor de $\hat{\omega}_{ij}$ apresenta-se progressivamente próximo de zero, $\hat{\omega}_{ij} \rightarrow 0$. Portanto, a nova função de limiar é continua no ponto limiar T e o fenômeno de Gibbs é reduzido. Se $|\omega_{ij}| \rightarrow \infty$, o valor de $\hat{\omega}_{ij} \rightarrow \omega_{ij}$, a função tem as características da função limiar rígido, portanto, a diferença entre ω_{ij} e $\hat{\omega}_{ij}$ reduz sensivelmente, ocasionando a diminuição do efeito de desvio constante observado na função de limiarização suave.

O valor do fator β é ajustado de acordo predição linear entre as imagens ruidosa e original, dependendo dos diferentes limites das imagens, possibilitando a nova função de limiarização adaptar melhor a cada imagem processada. Por consequência, a nova função de limiarização reduz imperfeições causadas pelas funções de limiarização rígido e suave, realizando um processamento da imagem com características da função continua e suave para reduzir as flutuações do fenômeno de Gibbs e principalmente para reduzir o efeito do ruído na imagem.

Figura 37 – Comparação entre as funções de limiarização: (a) *soft thresholding*, (b) *hard thresholding*, (c) *semisoft thresholding* e (d) a nova função de limiarização proposta.



Fonte: Elaborado pelo autor.

4.5 Considerações Finais

No capítulo 4 - METODOLOGIA foi apresentado uma nova técnica de limiarização *wavelet* adaptativa para redução de ruído, aplicado em imagens de ressonância magnética cerebral (MRI - *Magnetic Resonance Imaging*), no qual os resultados serão descritos no capítulo 5. O método proposto utiliza um Fator de Predição Linear para ajustar o limiar de forma adaptativa. Este fator aproveita informações temporais e características de ambas as imagens originais e ruidosas para determinar um limiar ponderado. Esta abordagem de limiarização dinâmica visa reduzir ou eliminar seletivamente coeficientes de ruído enquanto preserva características essenciais da imagem.

O método proposto foi rigorosamente avaliado em relação a técnicas de redução de ruído existentes, de modo objetivo, foi apresentado os principais métodos de limiarização *wavelet* adaptativa, bem como suas funções de limiar adaptativa, assim como seus estimadores de limiar. Neste capítulo foram destacados as principais contribuições da proposta do método, além de

apresentar o Estimador de Limiar Proposto, o Fator de Predição Linear β e Nova Função de Limiar Adaptativa. Os resultados experimentais, que serão demonstrados e discutidos no capítulo 5, apresentam melhorias significativas em métricas objetivas, como erro quadrático médio (MSE), relação sinal-ruído de pico (PSNR) e índice de similaridade estrutural (SSIM).

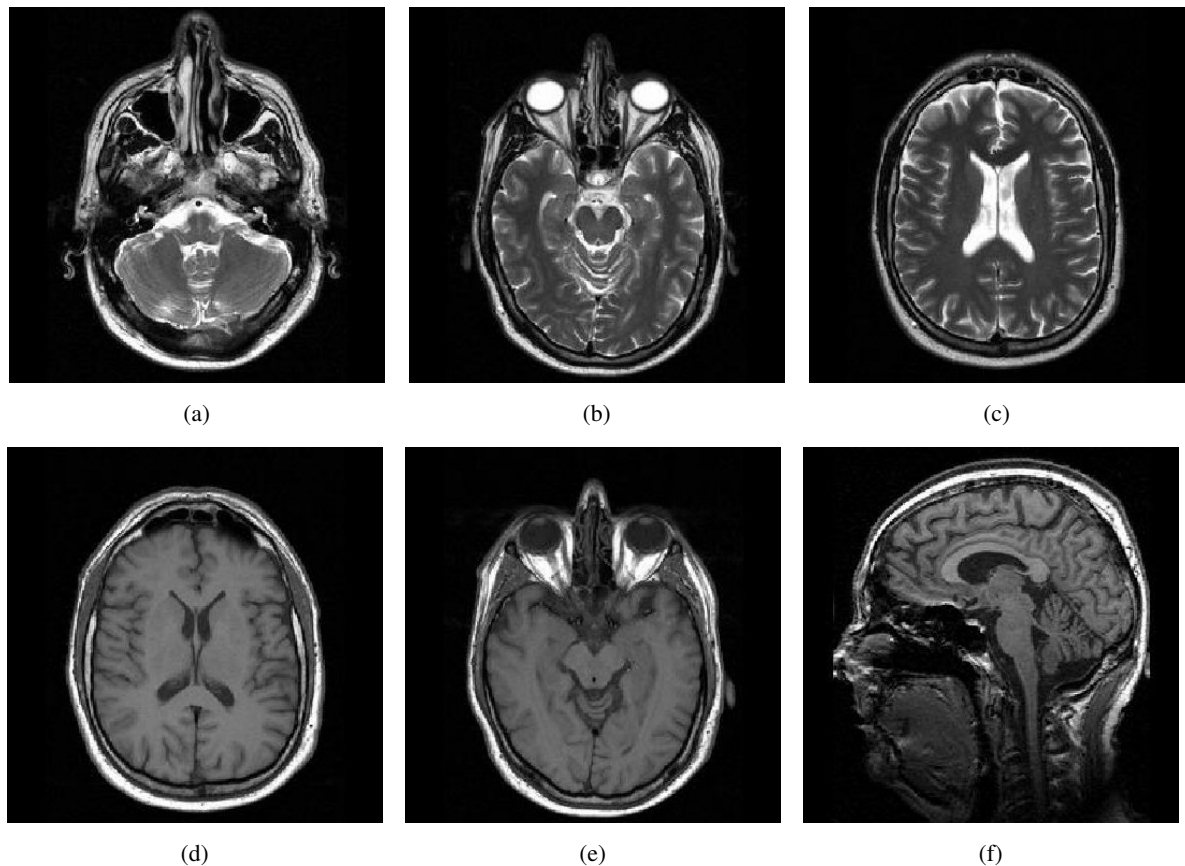
A técnica de limiarização adaptativa proposta aborda efetivamente as limitações dos métodos existentes, fornecendo uma abordagem de redução de ruído mais eficiente e precisa. Ao ajustar dinamicamente o limiar com base nas características específicas da imagem, este método preserva efetivamente detalhes da imagem enquanto suprime ruído de forma eficaz. Estes resultados destacam o potencial do método proposto para melhorar a qualidade e interpretabilidade de imagens médicas.

5 Resultados

5.1 Introdução

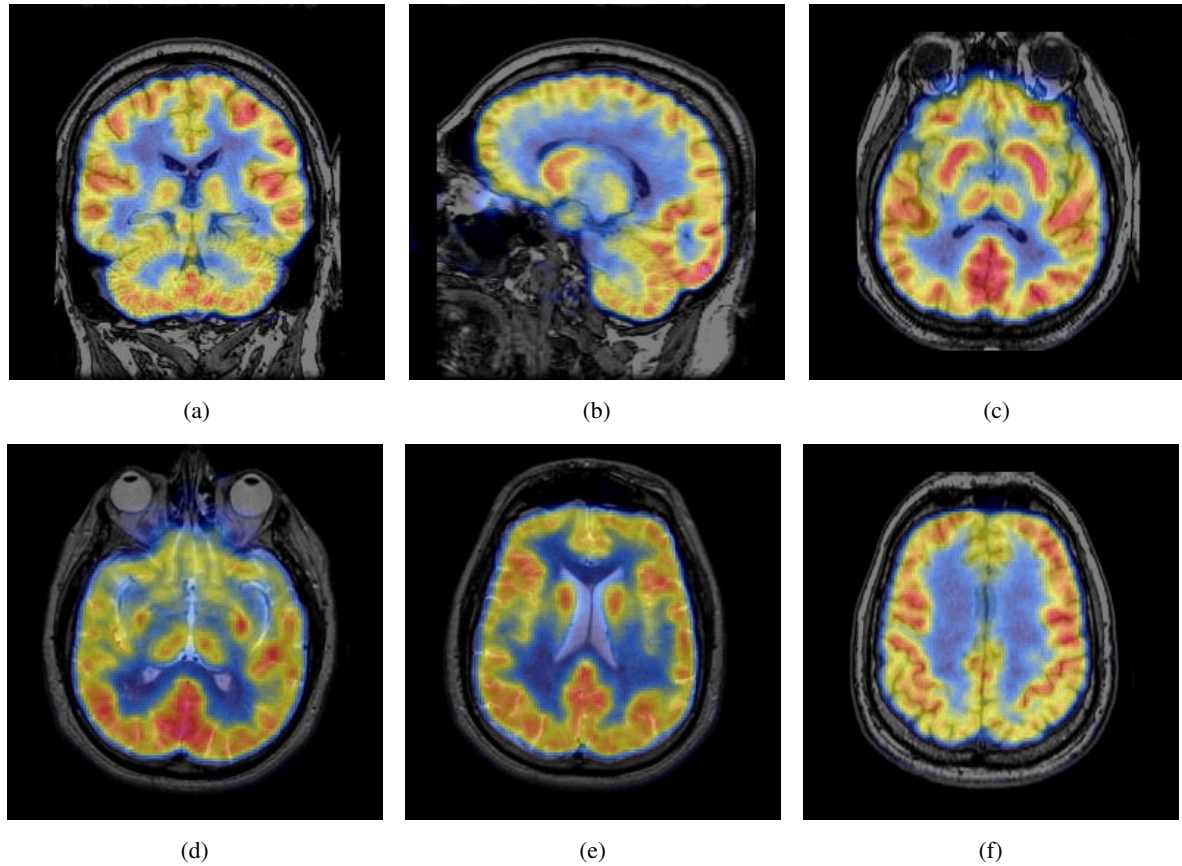
Este capítulo apresenta os resultados relacionados ao método de redução de ruído baseado no fator predição linear. Para avaliar a eficiência do método proposto, a técnica foi comparada com diversos métodos de redução de ruído e submetidos ao processamento de 6 Imagens Cerebrais de Ressonância Magnética (ICRM), em tons de cinza (DATASET, 2024), Figura 38 e 6 ICRM coloridas (DATASET, 2025), Figura 39, utilizando os critérios quantitativo e qualitativo quando corrompidos com ruído branco gaussiano aditivo para variância entre 0.01 à 0.05. Na análise, a técnica foi comparada com os métodos *VisuShrink* (DONOHO; JOHNSTONE, 1994), *BayesShrink* (CHANG; YU; VETTERLI, 2000), Limiar Melhorado em (ZHANG et al., 2019), Kernel Gaussiana em (SUN; YIU; LI, 2019) e AGGD (GOLILARZ et al., 2020) utilizando as bases *wavelets* biortogonal *bior3.9*, a *db4*, a *sym8* e a *coif2*, além da *wavelet* em três níveis de decomposição. As implementações e os resultados experimentais foram desenvolvidos na linguagem de programação do MATLAB R2020a.

Figura 38 – Imagens Cerebrais de Ressonância Magnética Originais, Tons de Cinza: (a) ICRM 1, (b) ICRM 2, (c) ICRM 3, (d) ICRM 4, (e) ICRM 5 e (f) ICRM 6.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 39 – Imagens Cerebrais de Ressonância Magnética Originais, Coloridas: (a) ICRM 7, (b) ICRM 8, (c) ICRM 9, (d) ICRM 10, (e) ICRM 11 e (f) ICRM 12.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5.2 Avaliação Quantitativa

Na comparação quantitativa foram utilizadas três métricas objetivas que são: o Erro Médio Quadrático (MSE – *Mean Squared Error*), a Relação Sinal Ruído de Pico (PSNR – *Peak Signal-to-Noise Ratio*), que indica a diferença entre uma imagem processada em relação a uma imagem original (FERREIRA et al., 2024) e o Índice de Similaridade Estrutural (SSIM – *Structural Similarity Index*) (WANG et al., 2004; BHATT; NAIK; SUBRAMANIAN, 2021), utilizado para medir a semelhança entre duas imagens, analisando a similaridade, luminosidade, contraste e estrutura. O SSIM é considerado uma métrica mais completa que o PSNR e MSE, pois considera características importante do HSV (*Human Visual System*).

A Tabela 1 mostra os valores médios de MSE, PSNR e SSIM obtidos a partir dos métodos *wavelet* de redução de ruído, para as imagens ICRM 1 e ICRM 2, utilizando a base *wavelet bior3.9*. De acordo com os resultados apresentados, o desempenho da técnica proposta de redução de ruído em imagem mostrou-se superior as demais técnicas baseados na transformada *wavelet*. A técnica proposta envolvendo o fator de predição linear β , empregado no estimador de limiar que executa de forma eficiente a redução do ruído da imagem produz melhores valores de MSE, PSNR e SSIM, comparados aos demais métodos.

Tabela 1 – Resultados de MSE, PSNR(dB) e SSIM para os métodos *wavelet*, imagens ICRM 1 e ICRM 2, com a base *wavelet bior3.9*.

Imagem	ICRM 1					ICRM 2				
Variância do ruído(σ)	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
MSE										
Proposta	29	31	32	33	34	27	31	33	33	34
<i>VisuShrink</i>	259	415	571	726	868	235	391	543	692	839
<i>BayesShrink</i>	89	116	129	139	145	88	115	129	138	144
<i>Kernel Gaussiana</i>	90	115	129	137	143	89	114	127	136	143
<i>Limiar Melhorado</i>	91	116	129	138	144	90	115	129	137	143
AGGD	32	35	36	37	38	32	35	37	38	39
PSNR(dB)										
Proposta	33.55	33.12	33.01	32.93	32.86	33.74	33.21	33.00	32.97	32.88
<i>VisuShrink</i>	23.99	21.95	20.56	19.52	18.75	24.43	22.20	20.78	19.73	18.89
<i>BayesShrink</i>	28.62	27.49	27.01	26.71	26.50	28.71	27.54	27.03	26.75	26.54
<i>Kernel Gaussiana</i>	28.59	27.53	27.03	26.77	26.57	28.65	27.55	27.08	26.79	26.59
<i>Limiar Melhorado</i>	28.53	27.47	27.01	26.73	26.55	28.61	27.52	27.03	26.77	26.59
AGGD	33.09	32.72	32.57	32.47	32.39	33.10	32.65	32.48	32.33	32.26
SSIM										
Proposta	0.520	0.439	0.393	0.363	0.342	0.502	0.421	0.373	0.346	0.317
<i>VisuShrink</i>	0.476	0.390	0.339	0.306	0.284	0.451	0.363	0.317	0.285	0.263
<i>BayesShrink</i>	0.475	0.394	0.347	0.318	0.295	0.451	0.367	0.322	0.294	0.271
<i>Kernel Gaussiana</i>	0.469	0.387	0.341	0.312	0.290	0.444	0.361	0.315	0.287	0.264
<i>Limiar Melhorado</i>	0.467	0.385	0.341	0.312	0.288	0.444	0.360	0.316	0.287	0.264
AGGD	0.444	0.366	0.321	0.291	0.271	0.416	0.337	0.296	0.267	0.244

Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir dos resultados obtidos de MSE, na Tabela 1 para a imagem ICRM 1, o valor médio da métrica foi de aproximadamente 32 para o método proposto em relação a variância entre 0.01 à 0.05. É nítido que o método de redução de ruído baseado no fator de predição linear β obteve melhor desempenho comparado com as demais técnicas, obteve uma diferença inferior de 11% no erro médio quadrático em relação ao segundo melhor método, o AGGD que obteve uma média de MSE de 36. Em relação ao PSNR, o valor médio obtido para a imagem ICRM 1 foi de aproximadamente 33.10 dB, o melhor resultado entre as demais técnicas. Para o SSIM, o método proposto apresentou melhor qualidade visual, no qual ficou evidente pelos resultados apresentado, obteve-se uma média de 0.411, um bom resultado na qualidade da imagem, apresentando um valor bastante elevado em comparação as demais técnicas. Portanto, o método baseado no fator de predição linear preserva mais a estrutura da imagem processada na redução do ruído.

Com base na análise dos resultados de MSE apresentados na Tabela 1 para a imagem ICRM 2, observou-se que o método proposto é bastante eficaz na redução do ruído. O valor médio do MSE foi de aproximadamente 32, uma diferença de 11% inferior no erro médio quadrático comparado com o segundo melhor caso, o método AGGD, além disso, o método proposto também obteve o melhor resultado em termos de PSNR, com um valor médio de aproximadamente 33,16 dB para a ICRM 2, superior as demais técnicas. No que diz respeito ao SSIM, o valor médio entre todas as variâncias é de aproximadamente 0.392. Este valor é

consideravelmente mais alto do que os obtidos pelas outras técnicas, evidenciando a superioridade do método na redução de ruído.

A Tabela 2 apresenta os resultados de desempenho em termos de MSE, PSNR e SSIM para as imagens ICRM 3 e ICRM 4, utilizando diferentes métodos de redução de ruído baseados em limiarização *wavelet* adaptativa, com a base *bior3.9*. Os dados indicam que o método proposto neste estudo supera as técnicas concorrentes em todas as métricas avaliadas. De maneira geral, o fator de predição linear combinado com a escala de decomposição da transformada *wavelet*, como proposto neste estudo, demonstrou-se mais eficiente do que as técnicas alternativas para as imagens ICRM 3 e ICRM 4, especialmente com níveis crescente de ruído.

Tabela 2 – Resultados de MSE, PSNR(dB) e SSIM para os métodos *wavelet*, imagens ICRM 3 e ICRM 4, com a base *wavelet bior3.9*.

Imagem	ICRM 3					ICRM 4				
Variância do ruído(σ)	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
MSE										
Proposta	25	30	30	31	31	26	30	32	34	35
<i>VisuShrink</i>	219	375	528	676	826	220	380	535	685	829
<i>BayesShrink</i>	88	115	129	138	145	85	113	126	136	142
<i>Kernel Gaussiana</i>	88	115	127	136	143	86	112	125	134	140
<i>Limiar Melhorado</i>	90	116	129	137	144	87	113	126	135	140
AGGD	30	34	36	37	38	31	37	39	42	44
PSNR(dB)										
Proposta	34.09	33.43	33.30	33.21	33.16	34.05	33.21	33.03	32.83	32.69
<i>VisuShrink</i>	24.72	22.39	20.90	19.83	18.96	24.71	22.34	20.85	19.78	18.95
<i>BayesShrink</i>	28.69	27.52	27.02	26.72	26.52	28.85	27.61	27.12	26.80	26.62
<i>Kernel Gaussiana</i>	28.69	27.54	27.09	26.78	26.58	28.78	27.62	27.15	26.87	26.66
<i>Limiar Melhorado</i>	28.59	27.50	27.04	26.75	26.56	28.76	27.60	27.12	26.84	26.67
AGGD	33.29	32.76	32.56	32.47	32.37	33.18	32.50	32.19	31.88	31.66
SSIM										
Proposta	0.486	0.409	0.367	0.333	0.313	0.478	0.397	0.348	0.313	0.289
<i>VisuShrink</i>	0.430	0.346	0.300	0.271	0.247	0.412	0.319	0.272	0.241	0.220
<i>BayesShrink</i>	0.429	0.349	0.307	0.278	0.258	0.413	0.323	0.279	0.247	0.226
<i>Kernel Gaussiana</i>	0.422	0.341	0.300	0.271	0.251	0.405	0.316	0.269	0.241	0.221
<i>Limiar Melhorado</i>	0.419	0.340	0.300	0.272	0.249	0.405	0.314	0.269	0.241	0.220
AGGD	0.395	0.319	0.279	0.253	0.232	0.375	0.290	0.247	0.218	0.200

Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com os valores apresentados na Tabela 2, a melhora de desempenho é bastante significativa na imagem ICRM 3, a partir dos resultados obtidos para o MSE, o valor médio obtido foi de 29 para a técnica proposta neste estudo. Comparado ao segundo melhor caso, o método AGGD, o método proposto obteve um valor inferior no erro médio quadrático de aproximadamente 17%. Para o PSNR a média foi de 33.44 dB e para o SSIM um valor médio de 0.382, os melhores resultados entre as demais técnicas.

Para a imagem ICRM 4 o valor médio de MSE obtido foi de aproximadamente 31 para o método proposto neste artigo, uma diferença inferior de 21% no erro médio quadrático em comparação ao segundo melhor método, o AGGD. Em relação ao PSNR o valor médio foi de aproximadamente 33.16 dB para o método proposto, apresentando uma melhoria de 0.88 dB em

relação ao segundo melhor caso, o método AGGD. Para o SSIM, o método proposto apresentou um valor médio de 0.365, com variância do ruído entre 0.01 à 0.05, obtendo uma superioridade de aproximadamente 0.100 para o pior caso, o método AGGD. Esses resultados demonstram a eficácia na redução do ruído da técnica proposta neste trabalho.

Os resultados para as métricas MSE, PSNR e SSIM, das imagens ICRM 5 e ICRM 6, são apresentadas na Tabela 3, utilizando a base *bior3.9*. Para a imagem ICRM 5, o valor médio de MSE para o melhor resultado, o método proposto, foi de aproximadamente 30, uma diferença considerada no erro médio quadrático de aproximadamente 19% inferior em relação ao segundo melhor caso, o método AGGD. Para o PSNR, o valor médio do melhor caso, o método proposto neste trabalho, foi de aproximadamente 33.40 dB, uma melhoria de aproximadamente 1 dB para o segundo melhor caso, o método AGGD. Em relação aos resultados SSIM, o valor médio do melhor caso foi para técnica proposta, um valor de aproximadamente 0.365, obtendo uma melhoria de 0.102 em relação ao pior caso, o método AGGD. Para a imagem ICRM 6, o valor médio de MSE para o melhor resultado, o método proposto, foi de aproximadamente 33, uma diferença no erro médio quadrático de 21% em relação ao segundo melhor caso, o método AGGD. Em relação a métrica PSNR, o valor médio do melhor caso, o método proposto, foi de aproximadamente 32.90 dB, uma melhoria de aproximadamente 1 dB para o segundo melhor caso, o método AGGD. Para a métrica SSIM, o valor médio foi de 0.442 para o método proposto, uma diferença de aproximadamente 0.100 para o pior caso, o método AGGD.

Tabela 3 – Resultados de MSE, PSNR(dB) e SSIM para os métodos *wavelet*, imagens ICRM 5 e ICRM 6, com a base *wavelet bior3.9*.

Imagem	ICRM 5					ICRM 6				
Variância do ruído(σ)	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
MSE										
Proposta	25	29	31	32	33	31	33	34	34	35
<i>VisuShrink</i>	216	373	525	681	812	239	390	536	680	818
<i>BayesShrink</i>	85	112	126	136	141	82	107	120	130	137
<i>Kernel Gaussiana</i>	85	112	125	133	140	82	106	119	129	134
<i>Limiar Melhorado</i>	87	112	126	134	141	82	106	120	128	134
AGGD	31	36	38	40	41	37	41	43	44	44
PSNR(dB)										
Proposta	34.11	33.45	33.24	33.06	32.89	33.24	32.92	32.85	32.77	32.69
<i>VisuShrink</i>	24.80	22.42	20.93	19.80	19.03	24.34	22.22	20.84	19.81	19.00
<i>BayesShrink</i>	28.85	27.63	27.12	26.80	26.63	29.00	27.85	27.33	27.00	26.78
<i>Kernel Gaussiana</i>	28.83	27.64	27.16	26.88	26.67	28.98	27.86	27.37	27.04	26.84
<i>Limiar Melhorado</i>	28.72	27.63	27.13	26.86	26.63	29.01	27.87	27.34	27.06	26.85
AGGD	33.18	32.53	32.30	32.11	32.02	32.49	32.01	31.81	31.71	31.67
SSIM										
Proposta	0.479	0.394	0.346	0.315	0.289	0.559	0.477	0.427	0.388	0.360
<i>VisuShrink</i>	0.411	0.317	0.267	0.234	0.216	0.498	0.407	0.350	0.311	0.283
<i>BayesShrink</i>	0.413	0.321	0.276	0.245	0.223	0.515	0.423	0.366	0.330	0.301
<i>Kernel Gaussiana</i>	0.405	0.311	0.266	0.237	0.216	0.509	0.414	0.358	0.319	0.292
<i>Limiar Melhorado</i>	0.403	0.313	0.266	0.239	0.216	0.509	0.413	0.358	0.320	0.292
AGGD	0.374	0.286	0.245	0.217	0.195	0.479	0.384	0.331	0.294	0.263

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os resultados apresentados na Tabela 4 para a imagem ICRM 7, utilizando a base *wavelet bior3.9*, especificamente para a métrica MSE indicam que o método proposto, atingiu um valor médio de cerca de 40 na métrica analisada, com variância entre 0.01 à 0.05. A superioridade deste método na redução de ruído é clara ao compará-lo com as outras técnicas. Ele demonstrou uma redução de 10% no erro médio quadrático em relação ao segundo melhor método, AGGD, que registrou uma média de MSE de 44. No que diz respeito ao PSNR, o método proposto alcançou o valor médio mais alto, aproximadamente 32.16 dB. Quanto ao SSIM, a qualidade visual proporcionada pelo método proposto foi notavelmente superior, com uma média de 0.430, um resultado consideravelmente elevado quando comparado às demais técnicas. Conclui-se, portanto, que o método baseado no fator de predição linear é mais eficaz na preservação da estrutura da imagem durante o processo de redução de ruído.

Os resultados de MSE apresentados na Tabela 4 para a imagem ICRM 8 indicam a notável eficácia do método proposto na atenuação do ruído. O método alcançou um valor médio de MSE de aproximadamente 39, o que representa uma melhoria de 17% em comparação com o segundo melhor desempenho, obtido pelo método AGGD. Além disso, o método proposto também se destacou ao apresentar o maior valor médio de PSNR, aproximadamente 32.27 dB, para a imagem ICRM 8, superando as demais abordagens. No que tange ao SSIM, o método proposto atingiu um valor médio de cerca de 0.466 para todas as variâncias. Este resultado consideravelmente superior aos das outras técnicas evidencia a sua eficácia na redução de ruído.

Tabela 4 – Resultados de MSE, PSNR(dB) e SSIM para os métodos *wavelet*, imagens ICRM 7 e ICRM 8, com a base *wavelet bior3.9*.

Imagem	ICRM 7					ICRM 8				
Variância do ruído(σ)	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
MSE										
Proposta	33	38	41	43	44	32	37	40	42	43
<i>VisuShrink</i>	233	392	544	681	837	205	361	519	651	795
<i>BayesShrink</i>	86	110	123	131	135	78	103	115	124	130
<i>Kernel Gaussiana</i>	86	110	122	129	134	79	102	115	123	128
<i>Limiar Melhorado</i>	88	110	124	130	136	81	104	116	125	129
AGGD	37	42	46	48	49	38	45	48	51	52
PSNR(dB)										
Proposta	32.94	32.31	31.98	31.84	31.72	33.07	32.43	32.14	31.94	31.78
<i>VisuShrink</i>	24.45	22.19	20.77	19.80	18.90	25.00	22.55	20.98	20.00	19.13
<i>BayesShrink</i>	28.78	27.71	27.24	26.97	26.82	29.20	28.02	27.54	27.19	26.98
<i>Kernel Gaussiana</i>	28.78	27.73	27.28	27.02	26.85	29.14	28.03	27.52	27.24	27.05
<i>Limiar Melhorado</i>	28.70	27.71	27.20	26.98	26.79	29.04	27.96	27.50	27.18	27.02
AGGD	32.48	31.90	31.52	31.30	31.19	32.35	31.63	31.31	31.03	30.96
SSIM										
Proposta	0.518	0.455	0.416	0.395	0.367	0.572	0.498	0.451	0.421	0.390
<i>VisuShrink</i>	0.499	0.422	0.375	0.345	0.313	0.535	0.442	0.382	0.349	0.312
<i>BayesShrink</i>	0.512	0.441	0.396	0.363	0.339	0.554	0.468	0.414	0.373	0.340
<i>Kernel Gaussiana</i>	0.507	0.436	0.390	0.355	0.331	0.549	0.458	0.400	0.358	0.330
<i>Limiar Melhorado</i>	0.508	0.435	0.391	0.356	0.330	0.548	0.459	0.404	0.362	0.331
AGGD	0.496	0.422	0.379	0.339	0.313	0.530	0.437	0.381	0.347	0.308

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os resultados para as métricas MSE, PSNR e SSIM, aplicadas às imagens ICRM 9 e ICRM 10, são apresentados na Tabela 5, combinando nos métodos de limiarização *wavelet* a base *bior3.9*. Para a imagem ICRM 9, o método proposto apresentou o melhor desempenho, com valor médio de MSE de aproximadamente 35, o que representa uma diferença de cerca de 13% inferior ao segundo melhor resultado, obtido pelo método AGGD. Em termos de PSNR, o método proposto atingiu um valor médio de 32.74 dB, superando o segundo melhor caso (AGGD) em aproximadamente 0.65 dB. Para a métrica SSIM, o método proposto alcançou um valor médio de aproximadamente 0.416, representando uma melhoria de 0.052 em relação ao pior resultado, obtido pelo método AGGD. Para a imagem ICRM 10, o método proposto também apresentou o melhor desempenho. O valor médio de MSE foi de cerca de 29, o que corresponde a uma diferença de aproximadamente 23% inferior ao segundo melhor resultado, novamente alcançado pelo método AGGD. Em relação à métrica PSNR, o método proposto atingiu uma média de 33,49 dB, com uma vantagem de 1.12 dB sobre o segundo melhor resultado. Por fim, para a métrica SSIM, o valor médio foi de 0.397, representando uma diferença de aproximadamente 0.078 em relação ao pior desempenho, novamente observado com o método AGGD.

Tabela 5 – Resultados de MSE, PSNR(dB) e SSIM para os métodos *wavelet*, imagens ICRM 9 e ICRM 10, com a base *wavelet bior3.9*.

Imagem	ICRM 9					ICRM 10				
Variância do ruído(σ)	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
MSE										
Proposta	29	33	36	38	39	24	29	30	32	32
<i>VisuShrink</i>	208	363	519	663	811	184	342	493	639	786
<i>BayesShrink</i>	86	112	125	134	140	84	112	126	135	142
<i>Kernel Gaussiana</i>	86	112	124	133	137	83	112	126	134	140
<i>Limiar Melhorado</i>	88	113	126	134	139	86	112	127	135	141
AGGD	32	38	41	44	46	31	37	39	41	42
PSNR(dB)										
Proposta	33.56	32.95	32.61	32.38	32.18	34.31	33.56	33.39	33.12	33.05
<i>VisuShrink</i>	24.95	22.53	20.98	19.92	19.04	25.47	22.79	21.20	20.08	19.18
<i>BayesShrink</i>	28.81	27.66	27.16	26.86	26.68	28.87	27.66	27.11	26.83	26.61
<i>Kernel Gaussiana</i>	28.78	27.66	27.19	26.91	26.75	28.92	27.65	27.14	26.85	26.66
<i>Limiar Melhorado</i>	28.70	27.60	27.14	26.87	26.71	28.80	27.63	27.10	26.84	26.64
AGGD	33.03	32.29	31.96	31.68	31.50	33.20	32.48	32.23	32.02	31.91
SSIM										
Proposta	0.505	0.441	0.404	0.372	0.356	0.496	0.422	0.380	0.353	0.335
<i>VisuShrink</i>	0.483	0.405	0.354	0.320	0.293	0.454	0.362	0.310	0.273	0.246
<i>BayesShrink</i>	0.494	0.422	0.377	0.342	0.316	0.467	0.383	0.332	0.292	0.266
<i>Kernel Gaussiana</i>	0.490	0.415	0.370	0.333	0.310	0.465	0.374	0.321	0.287	0.256
<i>Limiar Melhorado</i>	0.490	0.416	0.369	0.338	0.306	0.462	0.372	0.322	0.284	0.259
AGGD	0.475	0.395	0.347	0.316	0.287	0.441	0.353	0.302	0.264	0.238

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os resultados das métricas MSE, PSNR e SSIM, aplicadas às imagens ICRM 11 e ICRM 12, são apresentados na Tabela 6, com a utilização da base *wavelet bior3.9*. Para a imagem ICRM 11, o método proposto demonstrou o melhor desempenho entre os avaliados, com um valor médio de MSE de aproximadamente 26, cerca de 23% inferior ao segundo melhor resultado,

obtido pelo método AGGD. Em relação ao PSNR, o método proposto alcançou uma média de 34 dB, superando o AGGD em aproximadamente 1.14 dB. Já para a métrica SSIM, a proposta obteve um valor médio de 0.378, representando uma melhoria de 0.072 em relação ao pior desempenho, também atribuído ao AGGD. Para a imagem ICRM 12, o método proposto manteve a superioridade. O valor médio de MSE foi de aproximadamente 32, o que corresponde a uma redução de 12% em relação ao segundo melhor resultado, novamente obtido pelo AGGD. Na métrica PSNR, o método proposto atingiu 33.12 dB em média, com uma vantagem de 0.55 dB em relação ao segundo melhor resultado. Por fim, para a métrica SSIM, o valor médio foi de 0.370, o que representa uma diferença de cerca de 0.050 em relação ao pior resultado, mais uma vez verificado no método AGGD.

Tabela 6 – Resultados de MSE, PSNR(dB) e SSIM para os métodos *wavelet*, imagens ICRM 11 e ICRM 12, com a base *wavelet bior3.9*.

Imagem	ICRM 11					ICRM 12				
Variância do ruído(σ)	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
MSE										
Proposta	22	25	27	28	30	26	30	32	35	37
<i>VisuShrink</i>	183	339	492	635	791	197	354	506	660	806
<i>BayesShrink</i>	86	114	129	139	146	88	115	130	138	144
<i>Kernel Gaussiana</i>	86	114	129	137	144	89	116	129	137	143
<i>Limiar Melhorado</i>	88	116	130	139	145	90	117	130	138	144
AGGD	28	33	35	37	39	28	35	37	40	41
PSNR(dB)										
Proposta	34.73	34.16	33.80	33.62	33.30	34.05	33.30	33.02	32.73	32.49
<i>VisuShrink</i>	25.51	22.83	21.21	20.10	19.15	25.19	22.63	21.09	19.94	19.07
<i>BayesShrink</i>	28.79	27.57	27.02	26.71	26.50	28.67	27.51	26.98	26.74	26.53
<i>Kernel Gaussiana</i>	28.80	27.56	27.03	26.77	26.55	28.65	27.50	27.04	26.76	26.59
<i>Limiar Melhorado</i>	28.68	27.48	27.00	26.71	26.51	28.59	27.45	27.00	26.73	26.56
AGGD	33.66	32.90	32.65	32.49	32.22	33.60	32.67	32.40	32.14	32.03
SSIM										
Proposta	0.474	0.403	0.363	0.336	0.312	0.456	0.394	0.360	0.329	0.311
<i>VisuShrink</i>	0.427	0.341	0.290	0.257	0.230	0.433	0.359	0.317	0.284	0.260
<i>BayesShrink</i>	0.440	0.361	0.312	0.275	0.254	0.444	0.376	0.331	0.304	0.282
<i>Kernel Gaussiana</i>	0.435	0.351	0.302	0.268	0.246	0.438	0.367	0.330	0.295	0.272
<i>Limiar Melhorado</i>	0.434	0.350	0.300	0.267	0.244	0.438	0.367	0.324	0.295	0.273
AGGD	0.419	0.339	0.288	0.254	0.228	0.421	0.349	0.306	0.277	0.251

Fonte: Elaborado pelo autor.

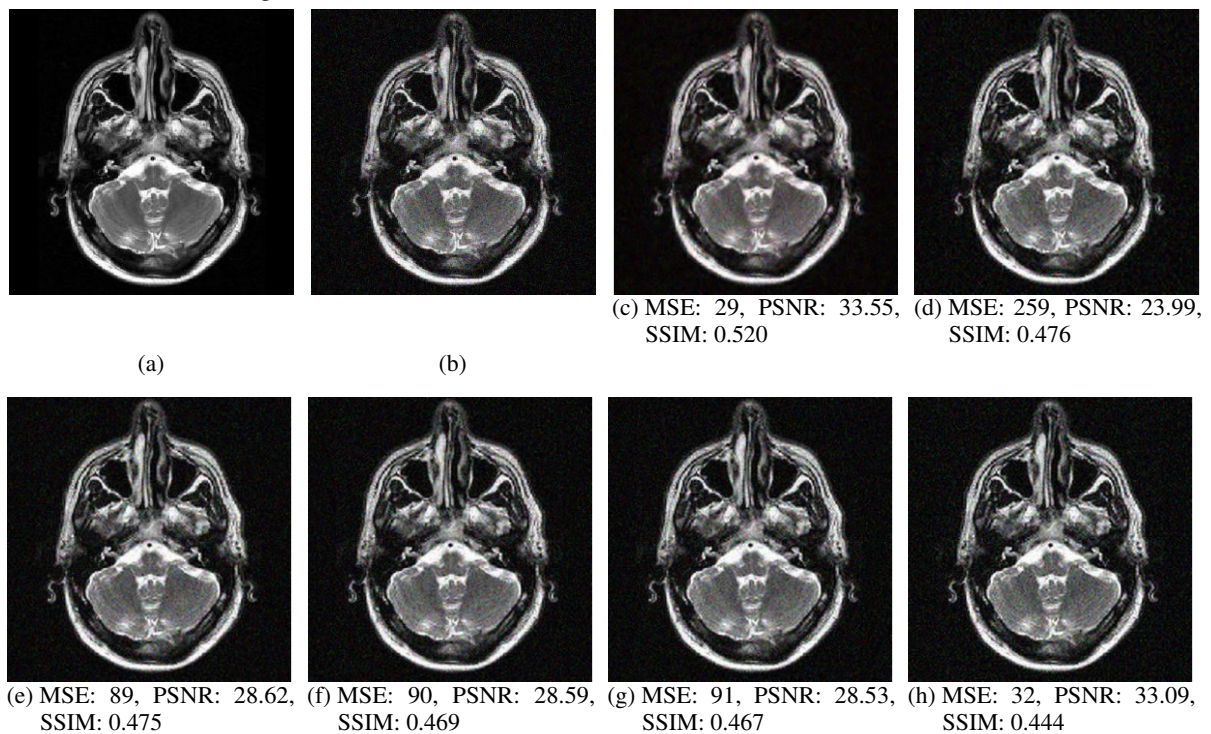
5.3 Avaliação Qualitativa

Os resultados qualitativos em termos de efeito visual para o método proposto e os demais métodos analisados de redução de ruído são comparados a imagem original e a imagem ruidosa, tons de cinza, são ilustrados na Figura 40 para a imagem ICRM 1, com variância do ruído gaussiano de 0.01, Figura 41 para a imagem ICRM 2, com variância do ruído gaussiano de 0.02, Figura 42 para a imagem ICRM 3, com variância do ruído branco gaussiano de 0.03, Figura 43 para a imagem ICRM 4, com variância do ruído branco gaussiano de 0.04 e Figura 44 para

imagem ICRM 6, com variância do ruído branco gaussiano de 0.05. Para as imagens cerebrais de ressonância magnética, coloridas, os resultados qualitativos do método proposto e os demais métodos analisados são apresentado na Figura 45 para imagem ICRM 7, com variância do ruído branco gaussiano de 0.01, Figura 46 para imagem ICRM 8, com variância do ruído branco gaussiano de 0.02, Figura 47 para imagem ICRM 9, com variância do ruído branco gaussiano de 0.03, Figura 48 para imagem ICRM 10, com variância do ruído branco gaussiano de 0.04 e Figura 49 para imagem ICRM 11, com variância do ruído branco gaussiano de 0.05.

Pode-se observar nas Figuras 40a à 40h, para imagem ICRM 1, os resultados qualitativos das imagens processadas pelos métodos de redução de ruído usando a transformada *wavelet*, para a base *biot3.9*. A técnica proposta, baseado no fator de predição linear β , para essa comparação, apresenta melhor qualidade visual, no qual ficou evidente pelo resultado do SSIM, valor de 0.520, um bom resultado na qualidade visual da imagem, apresentando um valor bastante elevado em comparação as demais técnicas. Comparando com o menor valor de SSIM encontrado, no caso, o método AGGD com valor de 0.444, obtendo uma melhoria de aproximadamente 15%. O método proposto funciona adequadamente na redução do ruído a partir da imagem reconstruída, isto é evidente também nas métricas de MSE e PSNR. Para MSE, o método proposto obteve um valor de 29, o menor erro médio quadrático entre todas os métodos comparados. Em relação ao PSNR, o valor obtido foi de 33.55 dB, o melhor resultado entre as demais técnicas. Portanto, a técnica proposta preserva mais a estrutura e detalhes da imagem processada na redução do ruído.

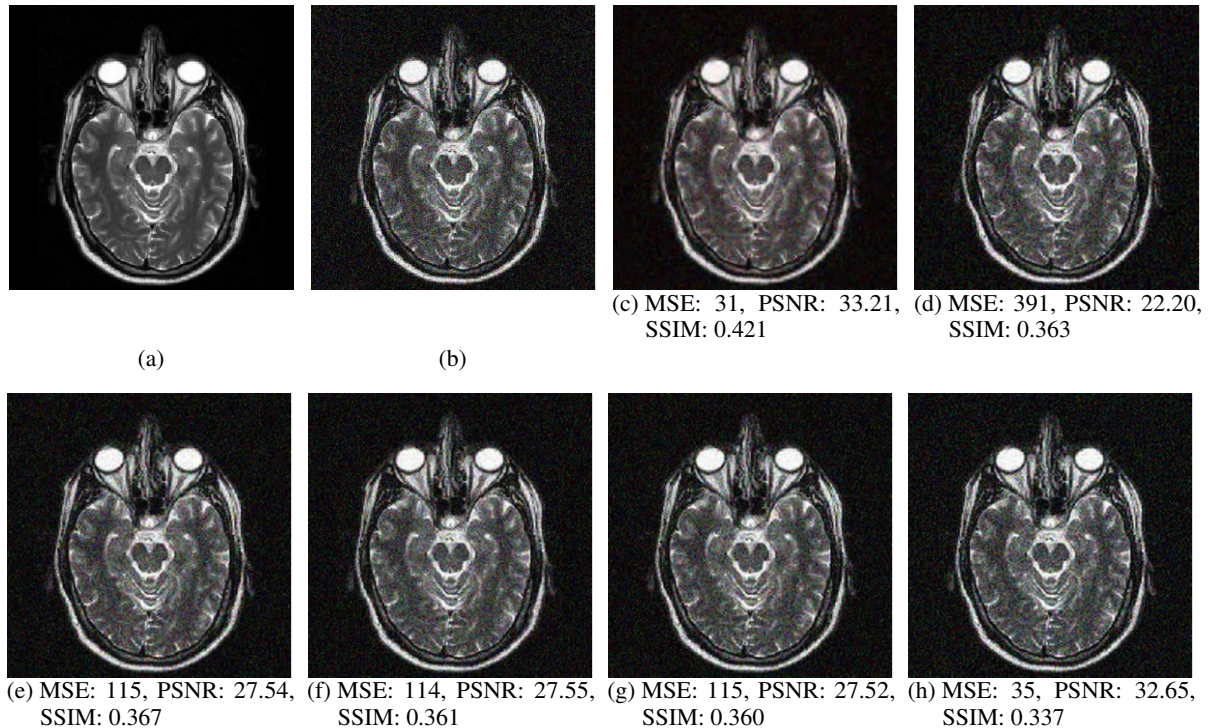
Figura 40 – Comparação de desempenho de redução de ruído imagem ICRM 1 com variância de 0.01: (a) Imagem Original, (b) Imagem Ruidosa, (c) Método Proposto, (d) VisuShrink, (e) BayesShrink, (f) Kernel Gaussiana, (g) Limiar Melhorado e (h) AGGD.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Uma observação equivalente também foi feita com resultados apresentados na imagem ICRM 2, ilustrado na Figura 41a à 41h. Na Figura 41c, imagem ICRM 2, o método proposto apresenta uma melhor qualidade visual em comparação aos demais métodos, obtendo um valor de SSIM de 0.421, um ganho de aproximadamente 20% em relação ao pior caso, o método AGGD, que obteve um valor de SSIM de 0.337.

Figura 41 – Comparação de desempenho de redução de ruído imagem ICRM 2 com variância de 0.02: (a) Imagem Original, (b) Imagem Ruidosa, (c) Método Proposto, (d) VisuShrink, (e) BayesShrink, (f) Kernel Gaussiana, (g) Limiar Melhorado e (h) AGGD.



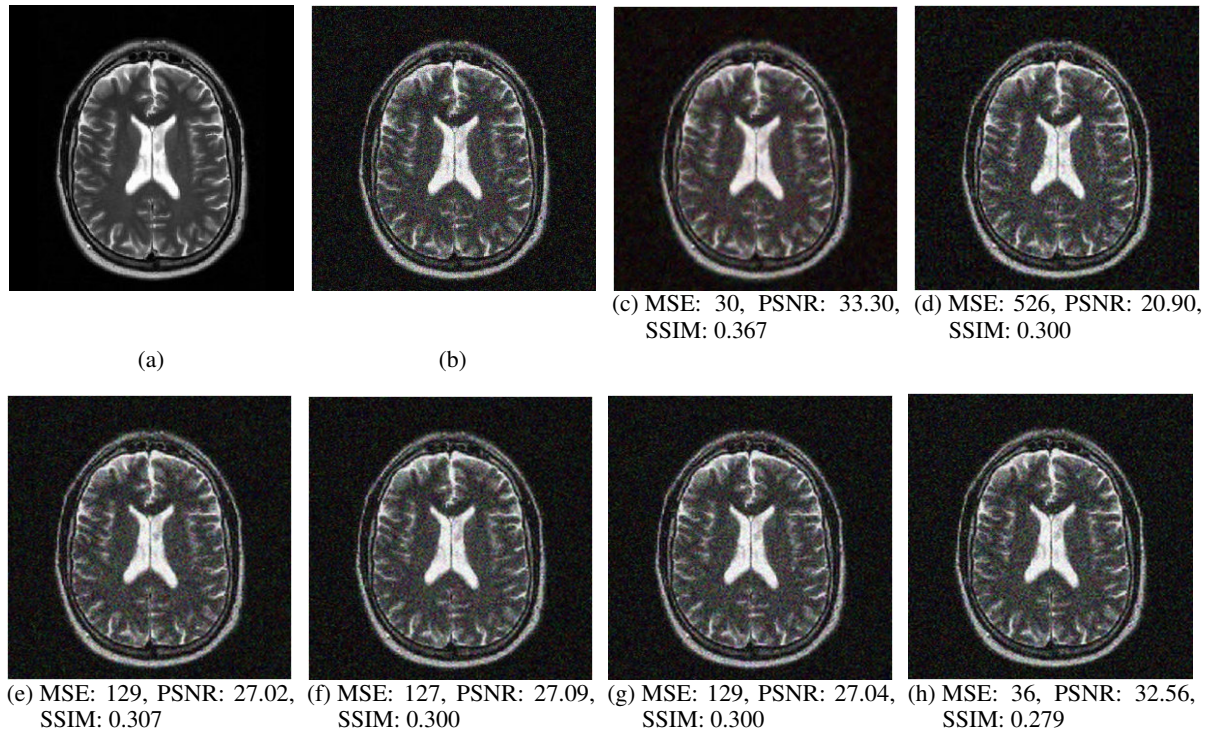
Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise da imagem ICRM 3, apresentadas nas Figuras 42a à 42h, demonstra que a imagem reconstruída pelo método proposto, Figura 42c alcançou um Índice de Similaridade Estrutural (SSIM) de 0.367. Este resultado representa uma melhoria de aproximadamente 24% em relação ao método AGGD, que apresentou o desempenho inferior com um valor de SSIM de 0.279.

Para o caso da imagem ICRM 4, apresentado nas Figuras 43a à 43h, a imagem reconstruída por meio do método proposto, Figura 43c, obteve um Índice de Similaridade Estrutural (SSIM) de 0.313. Esse valor representa uma melhoria de aproximadamente 30% em relação ao menor desempenho registrado, correspondente ao método AGGD, cujo SSIM foi de 0.218.

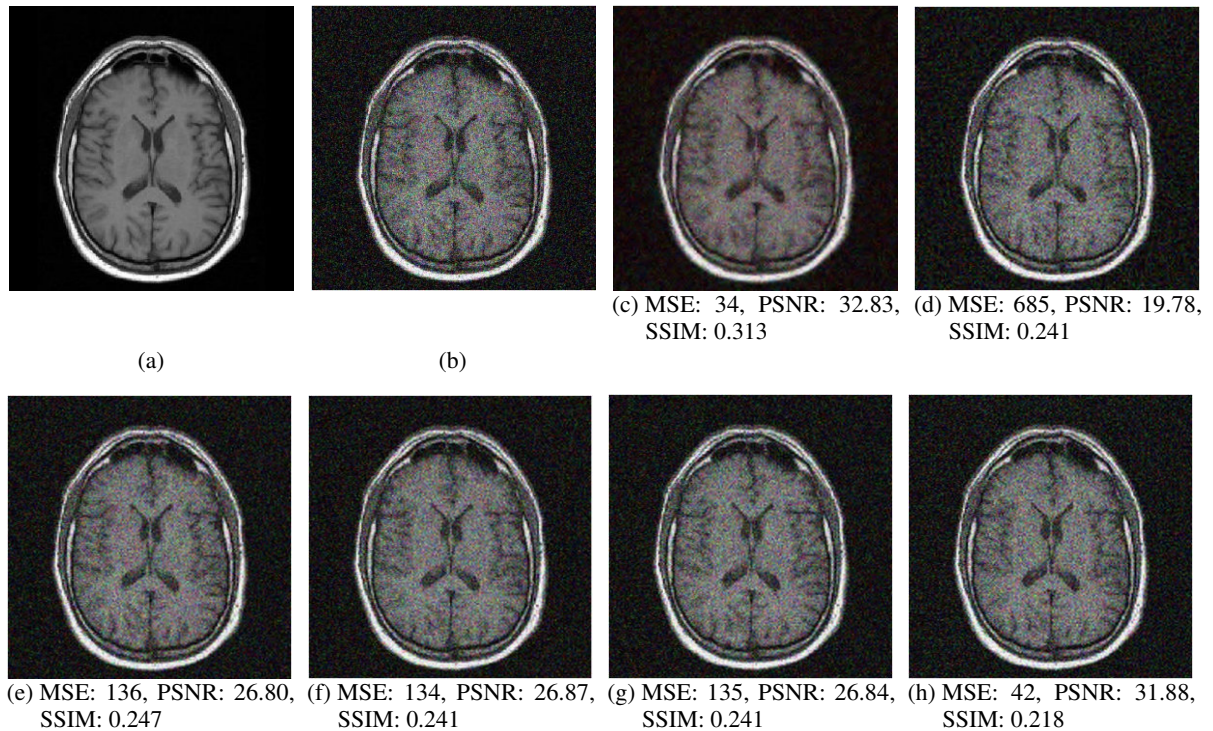
Na imagem ICRM 6, ilustrado nas Figuras 44a à 44h, observa-se que a imagem reconstruída pelo método proposto, apresentada na Figura 44c, demonstra qualidade visual superior em comparação aos demais métodos avaliados. O Índice de Similaridade Estrutural (SSIM) obtido foi de 0.360, representando um ganho aproximado de 26% em relação ao pior desempenho registrado, correspondente ao método AGGD, cujo valor de SSIM foi de 0.265.

Figura 42 – Comparação de desempenho de redução de ruído imagem ICRM 3 com variância de 0.03: (a) Imagem Original, (b) Imagem Ruidosa, (c) Método Proposto, (d) VisuShrink, (e) BayesShrink, (f) Kernel Gaussiana, (g) Limiar Melhorado e (h) AGGD.



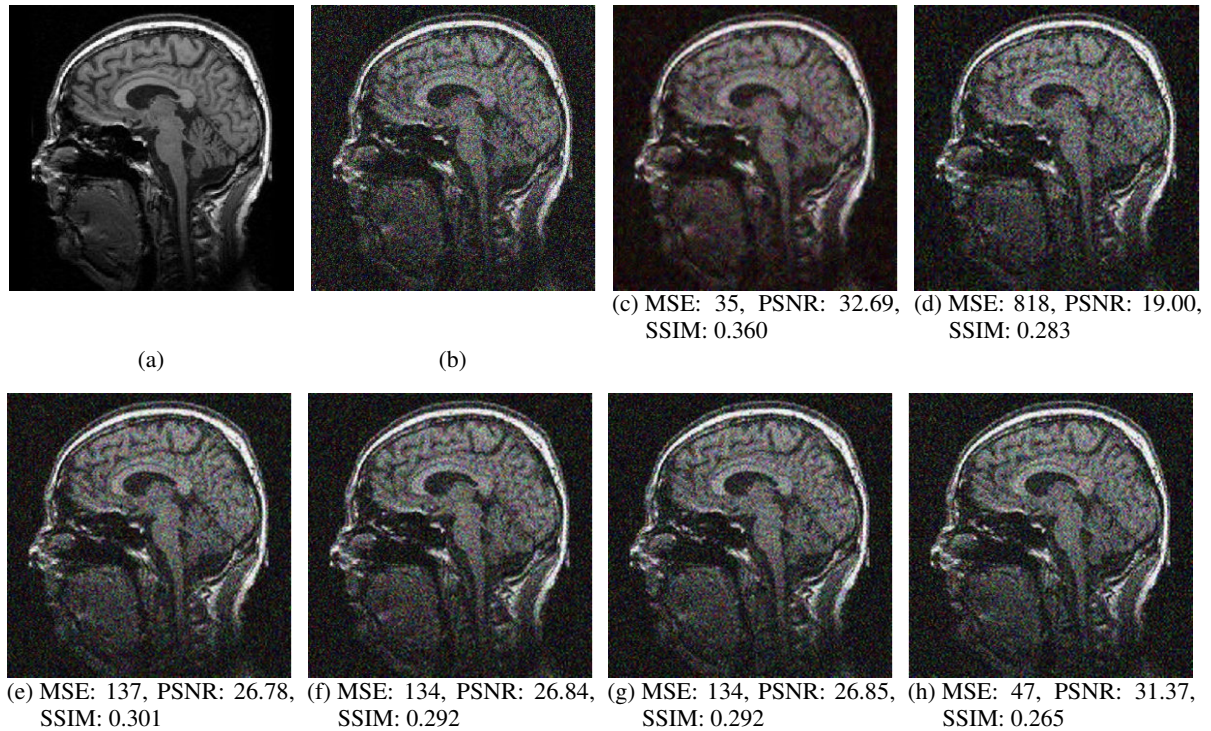
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 43 – Comparação de desempenho de redução de ruído imagem ICRM 4 com variância de 0.04: (a) Imagem Original, (b) Imagem Ruidosa, (c) Método Proposto, (d) VisuShrink, (e) BayesShrink, (f) Kernel Gaussiana, (g) Limiar Melhorado e (h) AGGD.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 44 – Comparação de desempenho de redução de ruído imagem ICRM 6 com variância de 0.05: (a) Imagem Original, (b) Imagem Ruidosa, (c) Método Proposto, (d) VisuShrink, (e) BayesShrink, (f) Kernel Gaussiana, (g) Limiar Melhorado e (h) AGGD.



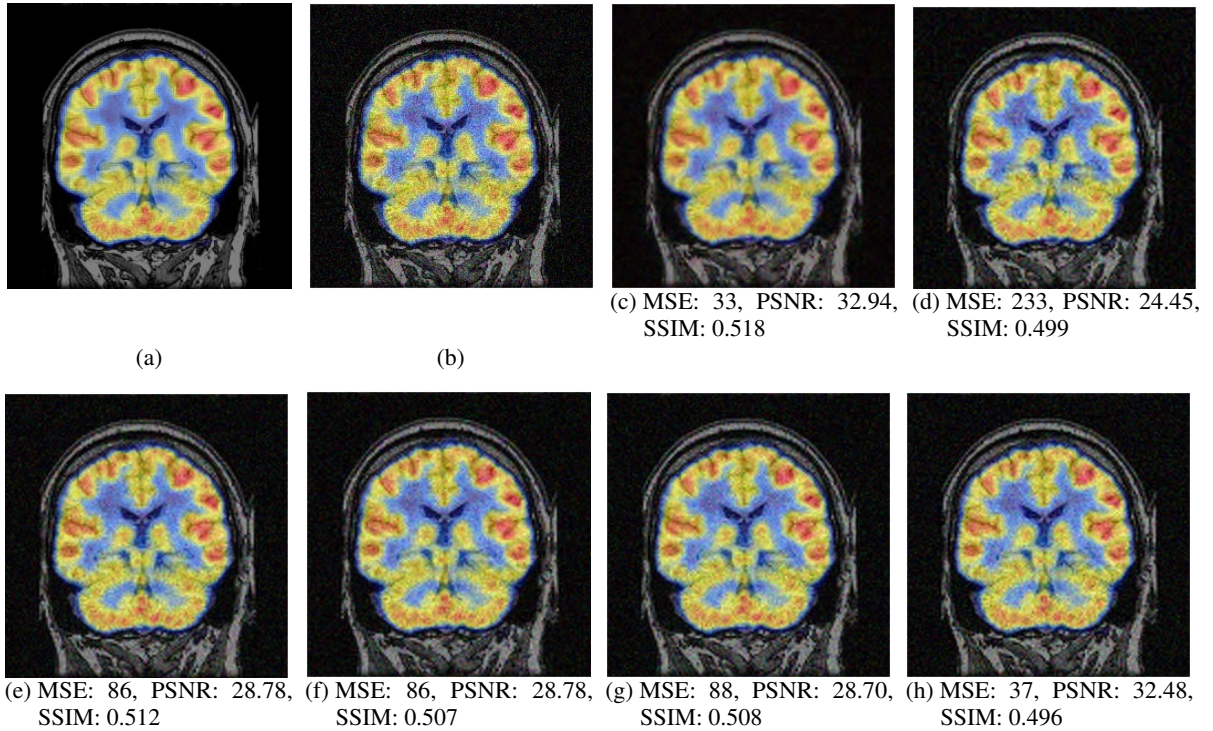
Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise da imagem ICRM 7, cujas representações são apresentadas nas Figuras 45a à 45h, demonstra que a imagem reconstruída pelo método proposto, Figura 45c, exibe a qualidade visual subjetivamente superior em relação às reconstruções obtidas pelos demais métodos investigados. Em termos de avaliação objetiva, o método proposto alcançou um Índice de Similaridade Estrutural (SSIM) de 0.518. Este valor representa um aumento de aproximadamente 4% em comparação com o método AGGD, que apresentou o menor desempenho com um SSIM de 0.496.

Analizando os resultados para a imagem ICRM 8, ilustrados nas Figuras 46a à 46h, a reconstrução obtida através da metodologia proposta, exibida na Figura 46c, demonstra superioridade visual em relação aos demais métodos avaliados. Quantitativamente, o Índice de Similaridade Estrutural (SSIM) alcançado foi de 0.498. Este valor representa um ganho de aproximadamente 12% em relação ao desempenho inferior observado para o método AGGD, que registrou um SSIM de 0.437.

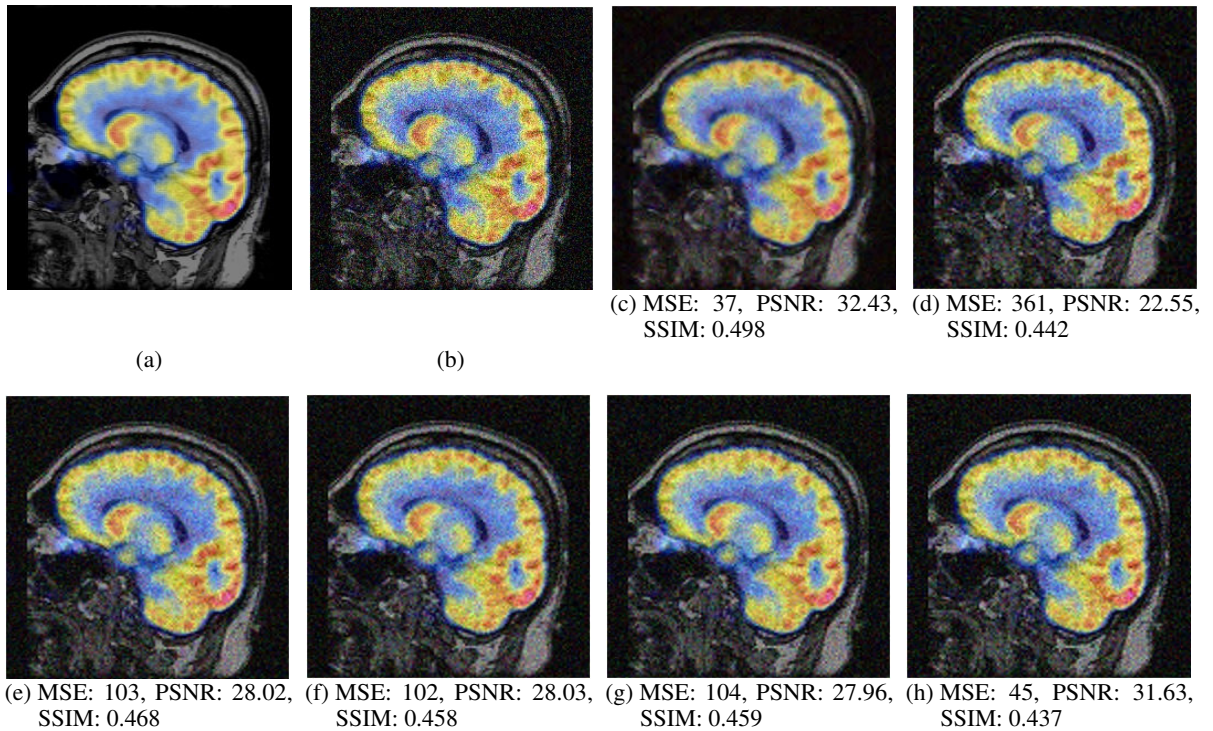
A avaliação da imagem ICRM 9, conforme ilustrado nas Figuras 47a à 47h, revela que a reconstrução gerada pela metodologia proposta, Figura 47c, exibe qualidade visual superior em comparação com as demais abordagens analisadas. Em termos quantitativos, o Índice de Similaridade Estrutural (SSIM) obtido para o método proposto foi de 0.404. Este resultado representa um incremento de aproximadamente 14% em relação ao desempenho menos expressivo, correspondente ao método AGGD, que apresentou um valor de SSIM de 0.347.

Figura 45 – Comparação de desempenho de redução de ruído imagem ICRM 7 com variância de 0.01: (a) Imagem Original, (b) Imagem Ruidosa, (c) Método Proposto, (d) VisuShrink, (e) BayesShrink, (f) Kernel Gaussiana, (g) Limiar Melhorado e (h) AGGD.



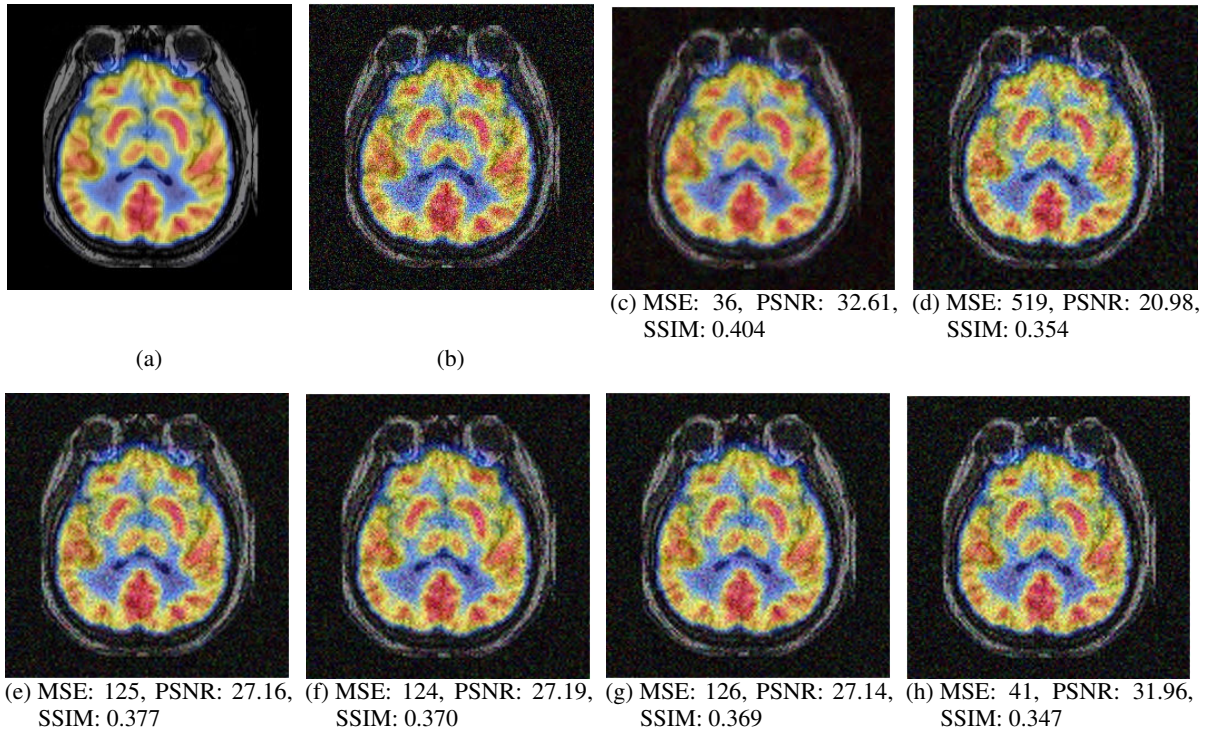
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 46 – Comparação de desempenho de redução de ruído imagem ICRM 8 com variância de 0.02: (a) Imagem Original, (b) Imagem Ruidosa, (c) Método Proposto, (d) VisuShrink, (e) BayesShrink, (f) Kernel Gaussiana, (g) Limiar Melhorado e (h) AGGD.



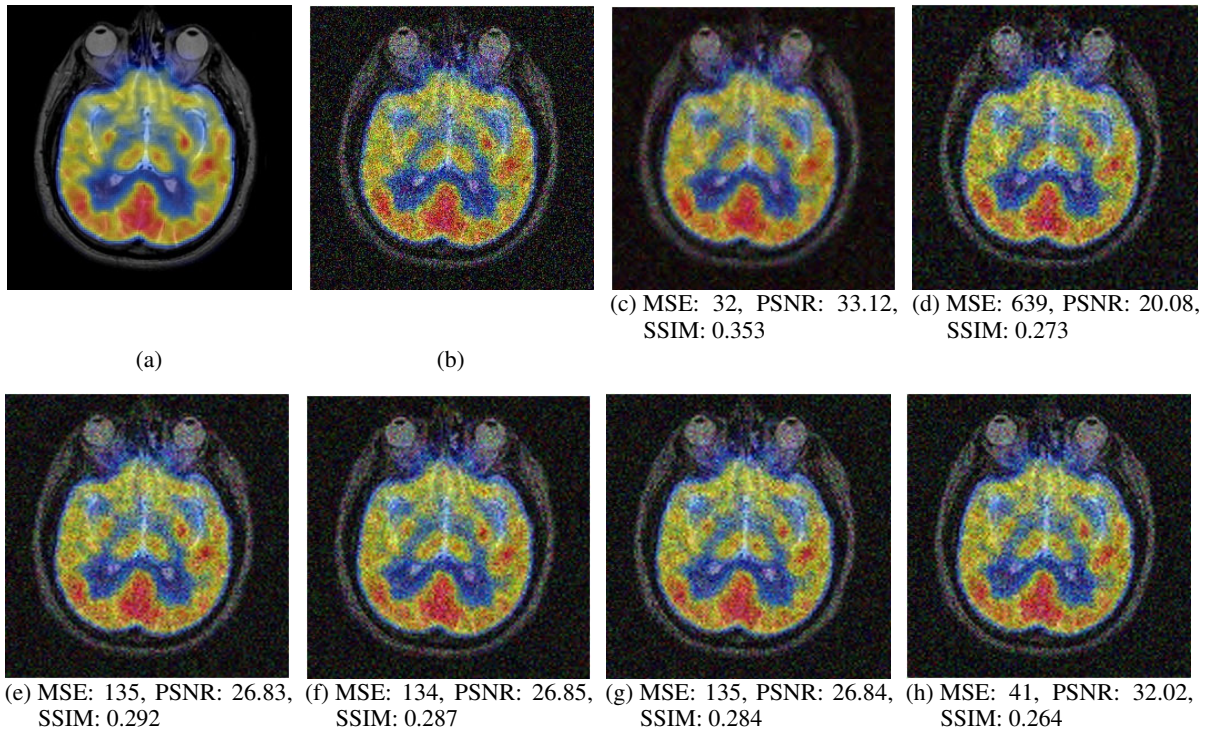
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 47 – Comparação de desempenho de redução de ruído imagem ICRM 9 com variância de 0.03: (a) Imagem Original, (b) Imagem Ruidosa, (c) Método Proposto, (d) VisuShrink, (e) BayesShrink, (f) Kernel Gaussiana, (g) Limiar Melhorado e (h) AGGD.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 48 – Comparação de desempenho de redução de ruído imagem ICRM 10 com variância de 0.04: (a) Imagem Original, (b) Imagem Ruidosa, (c) Método Proposto, (d) VisuShrink, (e) BayesShrink, (f) Kernel Gaussiana, (g) Limiar Melhorado e (h) AGGD.

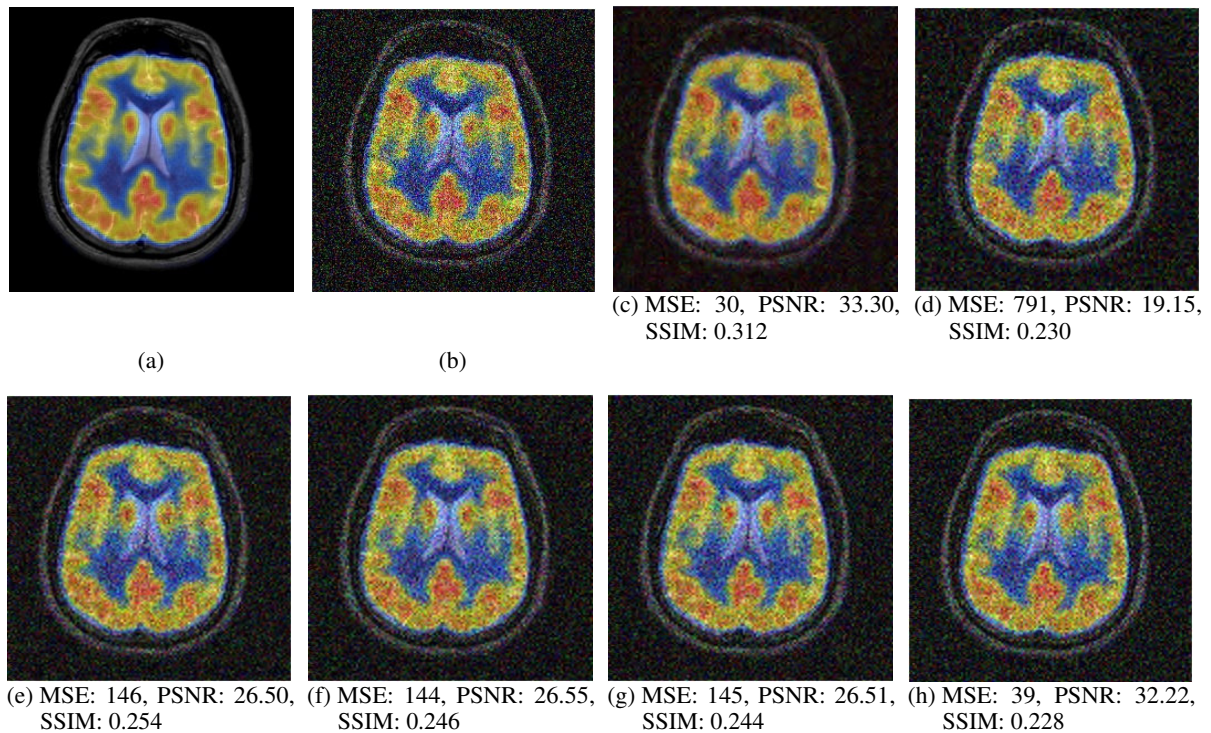


Fonte: Elaborado pelo autor.

A análise da imagem ICRM 10, cujas representações são apresentadas nas Figuras 48a à 48h, demonstra que a imagem reconstruída pela metodologia proposta, Figura 48c, exibe qualidade visual subjetivamente superior em relação às reconstruções obtidas pelos demais métodos investigados. Em termos de avaliação objetiva, o método proposto alcançou um Índice de Similaridade Estrutural (SSIM) de 0.353. Este valor representa um ganho de aproximadamente 25% em relação ao método AGGD, que apresentou o menor desempenho com um SSIM de 0.264.

A avaliação da imagem ICRM 11, apresentadas nas Figuras 49a à 49h, revela que a reconstrução gerada pelo método proposto, Figura 49c, exibe qualidade visual subjetivamente superior em comparação com as demais abordagens analisadas. Em termos de métricas de avaliação objetiva, o método proposto alcançou um Índice de Similaridade Estrutural (SSIM) de 0.312. Este resultado denota um incremento de aproximadamente 27% em relação ao método AGGD, que apresentou o menor valor de SSIM, correspondente a 0.228.

Figura 49 – Comparação de desempenho de redução de ruído imagem ICRM 11 com variância de 0.05: (a) Imagem Original, (b) Imagem Ruidosa, (c) Método Proposto, (d) VisuShrink, (e) BayesShrink, (f) Kernel Gaussiana, (g) Limiar Melhorado e (h) AGGD.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5.4 Resultados para as Bases Wavelet

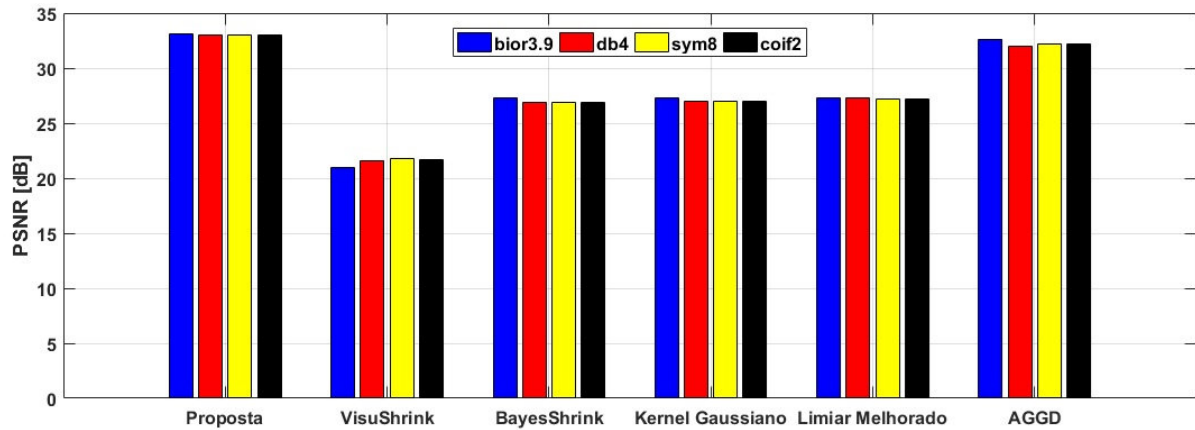
Para enriquecer a análise e demonstrar a robustez do método proposto, a seguir serão apresentados os resultados obtidos com a aplicação de diferentes bases *wavelet*, o comparativo entre a *bior3.9*, a *db4*, a *sym8* e a *coif2*. Esta abordagem permite uma comparação entre essas

principais bases *wavelet*, para duas imagens, uma em tons de cinza e outra colorida, contrastando com o desempenho dos métodos de referência *VisuShrink*, *BayesShrink*, Limiar Melhorado, Kernel Gaussiana e AGGD.

A avaliação inicial foi realizada utilizando a métrica PSNR, com resultados da média de todas as variâncias utilizadas no processamento das imagens ruidosas. A Figura 50 ilustra os resultados de PSNR para as bases *wavelet* *bior3.9*, *db4*, *sym8* e *coif2* da imagem ICRM 1 (Figura 38a).

Conforme observado na Figura 50, o método proposto apresentou melhor desempenho em relação a todos os outros métodos analisados, alcançando valores médios de PSNR de aproximadamente 33 dB em todas as bases *wavelet* testadas. Esse resultado indica que a proposta foi a que melhor preservou a qualidade da imagem, minimizando o ruído de forma mais eficaz.

Figura 50 – Resultado de PSNR para os métodos *wavelet* imagem ICRM 1 e as diferentes bases *wavelet* *bior3.9*, *db4*, *sym8* e *coif2*.



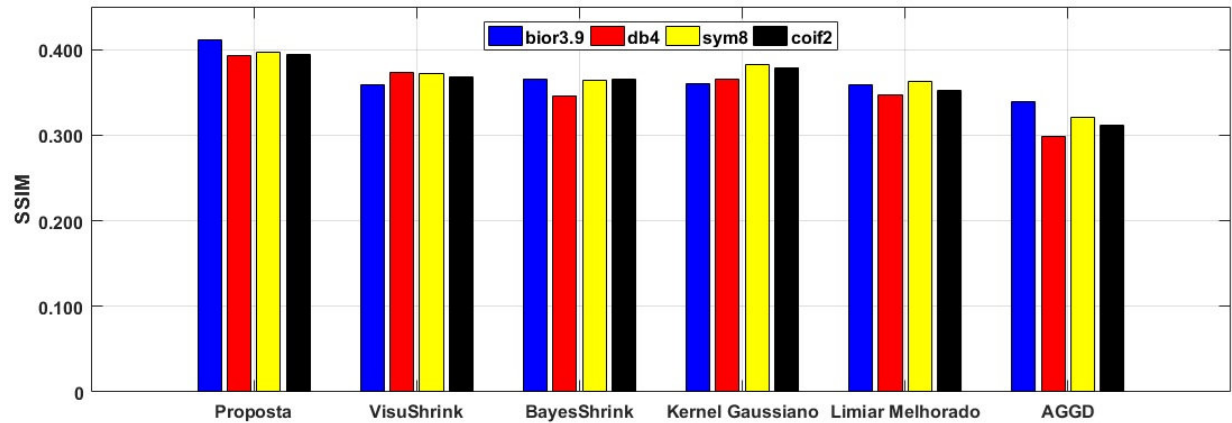
Fonte: Elaborado pelo autor.

Em contrapartida, o método *VisuShrink* apresentou os resultados mais baixos, com valores médios de PSNR em torno de 21 dB. Os métodos *BayesShrink* e Kernel Gaussiana mostraram um desempenho intermediário, com um PSNR médio de aproximadamente 27 dB e 27 dB, respectivamente, superando o *VisuShrink*, mas ficando significativamente abaixo da metodologia proposta. O método Limiar Melhorado e AGGD apresentaram um desempenho superior ao *BayesShrink* e Kernel Gaussiana, com valores médios de PSNR de aproximadamente 27.5 dB e 32.5 dB, respectivamente.

A Figura 51 mostra os resultados médios das bases *wavelet* *bior3.9*, *db4*, *sym8* e *coif2* para a métrica SSIM da imagem ICRM 1 (Figura 38a). Observa-se que o método proposto apresentou um desempenho superior em relação aos outros métodos analisados, alcançando valores médios de SSIM de aproximadamente 0.411 com a base *wavelet* *bior3.9*. Os resultados das bases *db4*, *sym8* e *coif2* foram aproximadamente 0.393, 0.397 e 0.394, respectivamente. Esses resultados demonstram que a proposta baseada no fator de predição linear β foi a que melhor preservou a qualidade estrutural da imagem, na redução do ruído.

Por outro lado, o método AGGD apresentou resultados inferiores, com valores médios de SSIM em torno de 0.339 para a base *wavelet bior3.9*, 0.299 com a *db4*, 0.321 com a *sym8* e 0.311 com a *coif2*. Os métodos *VisuShrink*, *BayesShrink*, Kernel Gaussiana e Limiar Melhorado mostram um desempenho intermediário para o SSIM, superando o método AGGD, mas ficando abaixo da metodologia proposta.

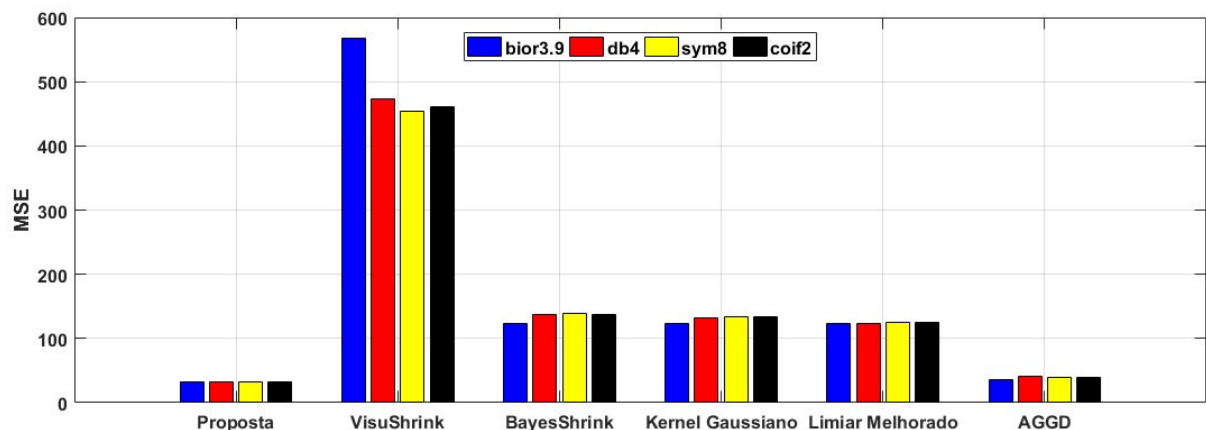
Figura 51 – Resultado de SSIM para os métodos *wavelet* imagem ICRM 1 e as diferentes bases *wavelet bior3.9*, *db4*, *sym8* e *coif2*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 52 apresenta os resultados dos valores médios para a métrica MSE da imagem ICRM 1 (Figura 38a), para as bases *wavelet bior3.9*, *db4*, *sym8* e *coif2*. Conforme observa-se no gráfico, o método proposto baseado no fator de predição linear β , apresentou um desempenho melhor em relação a todos os métodos analisados, alcançando valores médios de MSE de aproximadamente 31.80 para a base *wavelet bior3.9*. Os resultados das bases *db4*, *sym8* e *coif2* foram de aproximadamente 32.80, 32.60 e 32.80, respectivamente. Esses resultados apresentam os valores mais baixos em relação ao erro médio quadrático.

Figura 52 – Resultado de MSE para os métodos *wavelet* imagem ICRM 1 e as diferentes bases *wavelet bior3.9*, *db4*, *sym8* e *coif2*.



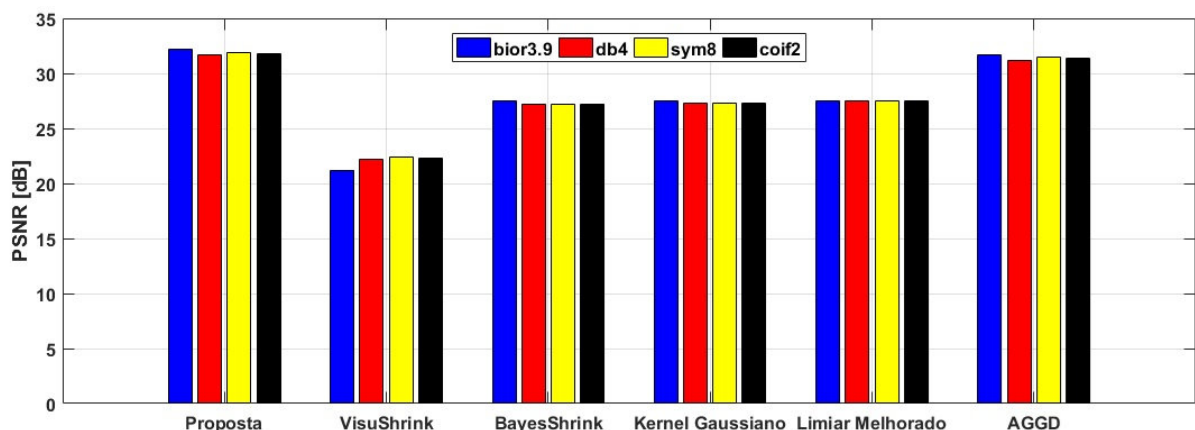
Fonte: Elaborado pelo autor.

Em compensação, o método *VisuShrink* apresentou resultados mais altos, com valores médios de MSE em torno de 567.80 para base *wavelet bior3.9*, 472.60 para a base *db4*, 453.60 para a base *sym8* e 461.00 para a base *coif2*. Os métodos *BayesShrink*, Kernel Gaussiana e Limiar Melhorado apresentaram um desempenho intermediário entre os demais métodos. O AGGD apresentou valores médios de MSE próximos do método proposto.

A Figura 53 ilustra uma análise comparativa do desempenho dos diferentes métodos de limiarização *wavelet*, avaliados por meio da métrica PSNR, para a imagem ICRM 7 (Figura 39a). Pode-se observar de forma clara que o método proposto alcançou o desempenho mais elevado entre as demais técnicas avaliadas. O valor médio de PSNR para a o método baseado no fator de predição linear β , especialmente, combinado com a base *wavelet bior3.9* atingiu o aproximadamente 32.16 dB. As demais bases *db4*, *sym8* e *coif2* também apresentaram resultados robustos com o método proposto, com valores muito próximos, em torno de 31.70 dB, 31.87 dB e 31.74 dB, respectivamente.

Similarmente, o método AGGD demonstrou um desempenho alto para o PSNR, o segundo melhor caso. Para a base *wavelet bior3.9* o valor médio foi de aproximadamente 31.68 dB, 31.19 dB com a base *db4*, 31.51 dB com a base *sym8* e 31.35 para a base *coif2*. O método *VisuShrink* apresentou o desempenho mais baixo e significativamente inferior aos demais. Os valores médios da métrica para a base *bior3.9* foi de 21.22 dB, com a *db4* foi de 22.19 dB, com a *sym8* foi de 22.36 dB e com a base *coif2* alcançou o valor de 22.28 dB. Os métodos *BayesShrink*, Kernel Gaussiana e Limiar Melhorado apresentaram valores médios intermediários para PSNR.

Figura 53 – Resultado de PSNR para os métodos *wavelet* imagem ICRM 7 e as diferentes bases *wavelet bior3.9*, *db4*, *sym8* e *coif2*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

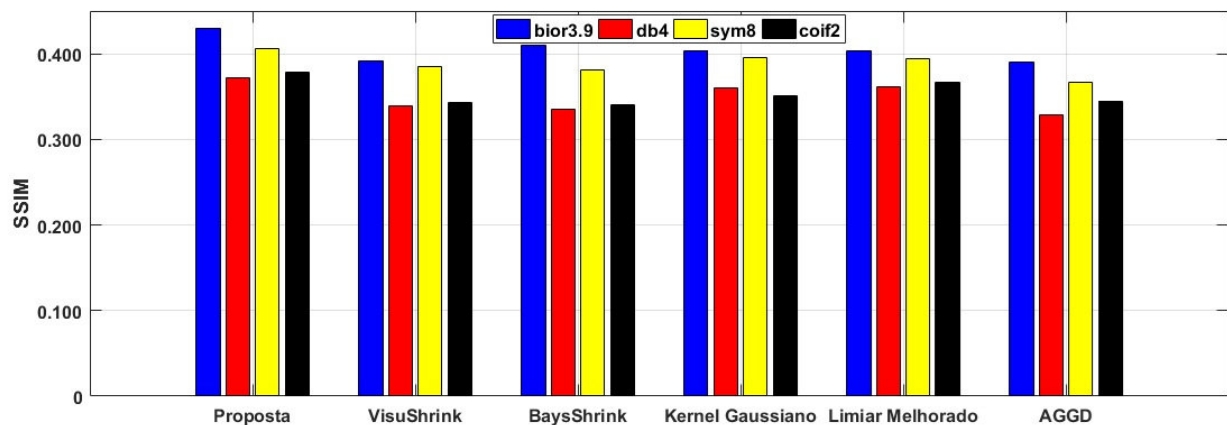
A Figura 54 apresenta os resultados dos valores médios para o SSIM, imagem ICRM 7 (Figura 39a). Essa métrica é fundamental para avaliar a eficácia de cada método de limiarização *wavelet* em preservar as características estruturais da imagem original após o processo de redução de ruído, auxiliando na análise baseada no PSNR, descrita anteriormente.

De maneira consistente com os resultados de PSNR, o método baseado no fator de

predição linear β , para a métrica SSIM, apresentou superioridade em relação aos demais métodos. O melhor resultado alcançado foi da combinação da proposta com a base *wavelet bior3.9*, que atingiu um valor de SSIM de aproximadamente 0.430 para a *bior3.9*, 0.372 para a base *db4*, 0.406 para a base *sym8* e 0.378 para a base *coif2*.

O desempenho de menor qualidade foi observada para o método AGGD, evidenciando sua menor eficácia para a preservação estrutural da imagem. Para a base *wavelet bior3.9* o valor foi de 0.390, para a base *db4* o valor alcançado foi de 0.328, para a base *sym8* foi de 0.367 e para a base *coif2* aproximadamente 0.345. As técnicas *VisuShrink*, *BayesShrink*, Kernel Gaussiana e Limiar Melhorado apresentaram, conforme ilustra a Figura 54, o desempenho intermediário para a métrica de SSIM.

Figura 54 – Resultado de SSIM para os métodos *wavelet* imagem ICRM 7 e as diferentes bases *wavelet bior3.9*, *db4*, *sym8* e *coif2*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para finalizar a análise e comparação da proposta e os demais métodos de limiarização *wavelet*, o estudo é aprofundado utilizando a métrica MSE, que quantifica a diferença média quadrática entre os *pixels* da imagem processada e da imagem original, no caso do MSE, valores mais baixos indicam um melhor desempenho, pois representam um menor erro de reconstrução e, consequentemente, uma redução de ruído mais eficaz.

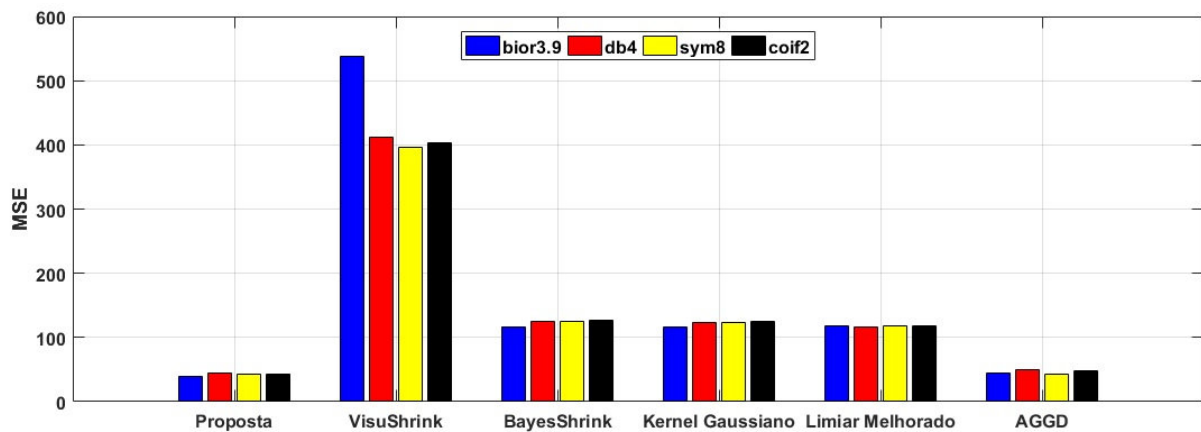
A Figura 55 mostra os resultados dos valores médios de MSE, para a proposta da tese e os diferentes métodos de limiarização *wavelet*. Os resultados ilustrados na Figura 55 mostram de forma conclusiva a superioridade do método proposto, pois alcançou os menores valores de MSE. Observa-se que para o método proposto e a combinação com a base *wavelet bior3.9* produziu um valor de MSE de aproximadamente 39.80, para a base *db4* o valor de 43.80, para a base *sym8* um valor de aproximadamente 42.80 e para a base *coif2* um valor de 43.60. De forma similar, o método AGGD também exibiu um excelente desempenho, com os valores de MSE. Para as bases *bior3.9*, *db4*, *sym8* e *coif2* os valores foram, respectivamente, 44.40, 49.60, 42.20 e 47.80.

Em contraste, o método *VisuShrink* apresentou o desempenho mais deficiente, caracterizado por um MSE elevado em comparação com todos os outros métodos. Os valores de MSE

para o método *VisuShrink* foram 537.40 para a base *bior3.9*, 411.40 com a *db4*, 396.20 com a *sym8* e 403.00 para a base *coif2*.

Os métodos *BayesShrink*, Kernel Gaussiana e Limiar Melhorado apresentaram resultados de MSE elevados e muitos similares entre si. Destacando um desempenho intermediários entre as técnicas analisadas, porém para a métrica de MSE, foram claramente inferior à alcançada pelo métodos proposto e AGGD.

Figura 55 – Resultado de MSE para os métodos *wavelet* imagem ICRM 7 e as diferentes bases *wavelet bior3.9*, *db4*, *sym8* e *coif2*.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5.5 Desempenho Computacional

Como forma de comparar o desempenho computacional entre os métodos analisados, o custo computacional em relação ao tempo de processamento entre as técnicas foi realizado para a imagem ICRM 1, com variância do ruído de 0.01. Os métodos de redução de ruído apresentam valores muito próximo para o processamento. O método proposto obteve um tempo de processamento igual 0.72 segundos, o Limiar Melhorado obteve 0.85 segundos, a técnica do Kernel Gaussiana processou a imagem em 0.78 segundos, o *VisuShrink* em 0.71 segundos, a técnica *BayesShrink* obteve um valor de 0.71 segundos e o AGGD obteve um valor de 0.75 segundos. Apesar das técnicas apresentarem valores próximos, é importante destacar o método proposto pois, devido utilizar o fator de predição linear que analisa a imagem original e a imagem ruidosa, apresentou melhores resultados em termos de métricas objetivas e quantitativas e principalmente qualitativa. Para todas as implementações e resultados experimentais, utilizou-se um computador com Intel Core i5, frequência de 1.80 GHz e 16 GB de RAM.

5.6 Considerações Finais

Neste capítulo 5 - RESULTADOS formam apresentados os resultados da avaliação quantitativa e qualitativa em relação as imagens cerebrais de ressonância magnética, em tons

de cinza e coloridas, quando corrompidos com ruído branco gaussiano aditivo para variância entre 0.01 à 0.05. A Proposta foi consistente e superior em todas as métricas: Menor MSE, maior PSNR e maior SSIM. O método AGGD aparece como segundo melhor método de forma recorrente, em níveis de PSNR e MSE, no entanto, na métrica SSIM apresentou valores inferiores aos demais métodos, demonstrando uma qualidade visual inferior aos demais métodos analisados. Métodos clássicos como *VisuShrink* apresentaram desempenho muito inferior, especialmente em MSE e PSNR. A proposta utilizando o fator de predição linear β se destaca tanto em condições de baixo ruído quanto em níveis mais altos, indicando robustez. Para as bases *wavelet bior3.9*, *db4*, *sym8* e *coif2* combinadas com os métodos de limiarização, pode-se concluir em síntese que, a análise dos resultados de PSNR, SSIM e MSE demonstram a superioridade do método proposto para redução de ruído em imagens de ressonância magnética, tons de cinza e colorida, de forma ainda mais contundente, para os valores alcançados na base *wavelet bior3.9*.

6 Conclusões e Trabalhos Futuros

6.1 Conclusões

Neste estudo, um método de redução de ruído em imagens cerebrais de ressonância magnética, baseado no fator de predição linear foi desenvolvido para estimar os coeficientes da transformada *wavelet*. No estudo foram expressos resultados quantitativos e qualitativos em relação a importância da utilização e análise aprofundado da *wavelet* e suas bases, abordando as técnicas de redução de ruídos em imagens, em limiarização *wavelet* adaptativa, utilizando a base *wavelet* biortogonal e métricas de redução de ruídos em imagens cerebrais de ressonância magnética, ressaltando a importância do uso da tecnologia e como pode ser útil para a medicina através de resultados conclusivos. Promovendo a detecção e visualização expressiva para o diagnóstico do mesmo. O estudo avançado da *wavelet* agrega altos segmentos para seu uso, devido ser uma ferramenta importante para compressão de sinais, imagens e para o processamento de dados, onde oferece uma análise mais precisa, em relação a decomposição de ruídos em imagens, facilitando a visualização da mesma.

Contudo, a técnica proposta que utiliza o fator de predição linear β , obteve o melhor desempenho tendo resultados expressivos em relação a suas médias, além do nível de decomposição que apresentou um melhor resultado na qualidade visual da imagem, evidente nos resultados encontrados na métrica SSIM, onde a técnica proposta teve os melhores resultados para a base *wavelet* biortogonal *bior3.9* destacados pela métrica SSIM, além das métricas de MSE e PSNR. O método proposto oferece boa percepção visual ao longo das métricas de avaliação, como pode ser visto nos resultados experimentais melhorando as regiões de bordas, regiões lisas e textura da imagem.

No estudo, pode-se observar que a base biortogonal *bior3.9* ofereceu benefícios significativos na reconstrução das imagens cerebrais de ressonância magnética. Desde modo, umas das maiores vantagens observadas foi a reconstrução no processamento das imagens, pois apesar de utilizarem bases duais para análise e síntese, as base biotogonol no estudo dessa tese garantiu a reconstrução com melhores resultados quantitativos e qualitativos em conjunto com o método proposto que utiliza o fator de predição linear, o que é fundamental para aplicações onde a integridade na imagem é primordial. A base biortogonal emprega as duas bases distintas para decomposição e reconstrução na imagem, utilizando a função de escala e a função *wavelet*.

Como destaque, dos resultado apresentados, pode-se ressaltar a imagem ICRM 1, tons de cinza, no qual apresentou ótima média para o SSIM, em aproximadamente 0.411, obtendo uma excelente qualidade visual da imagem, o PSNR em torno de aproximadamente 33.10 dB e o MSE em um valor médio da métrica em aproximadamente 32. Também em destaque das

imagens médicas de ressonância magnética, ainda em tons de cinza, a imagem ICRM 6, assim como a anterior obteve ótimos valores objetivos das métricas apresentadas, para o SSIM uma média de 0.442 o maior entre todas as imagens em tons de cinza, ressaltando a eficiência do método proposto de redução de ruído, além valor médio de PSNR em aproximadamente 32.90 dB e MSE em torno de 33.

Para as imagens cerebrais de ressonância magnéticas coloridas, a que melhor se destacou foi a imagem ICRM 7, com valor médio em torno de 0.430, apresentando um resultado consideravelmente elevado de SSIM, comparados as demais técnicas, isso evidencia que o método baseado no fator de predição linear possui ótimos desempenhos na redução do ruídos em imagens. A média do PSNR para essa imagem foi de aproximadamente 32.16 dB e o MSE em aproximadamente 44. Outra imagem colorida de ressonância magnética que apresentou destaque entre as demais, foi a imagem ICRM 8, com média de SSIM em torno de aproximadamente 0.466, o maior entre todas as imagens processadas, PSNR em média de 32.27 dB e MSE em média de aproximadamente 39.

No que se refere à influência da escolha da função mãe, a análise comparativa entre as bases *bior3.9*, *db4*, *sym8* e *coif2* demonstrou de forma conclusiva a superioridade da base Biortogonal *bior3.9*. Esta *wavelet* destacou-se constantemente ao proporcionar os resultados mais eficazes para o método proposto e para a maioria das técnicas de limiarização *wavelet*, alcançando os maiores valores de PSNR, SSIM e MSE. A base *wavelet bior3.9*, especialmente quando combinada ao método proposto, foi responsável pelos resultados mais expressivos, atingindo um PSNR de aproximadamente 33.09 para a imagem ICRM 1 (Figura 38a), um valor de SSIM de 0.430 para a imagem ICRM 7 (Figura 39a) e um valor de MSE de 31.80 para a imagem ICRM 1 (Figura 38a). Sua superioridade foi particularmente notável na preservação da informação estrutural da imagem, onde obteve a maior métrica de SSIM em todos os cenários avaliados. Embora as demais bases tenham apresentado um desempenho competente e muitas vezes similar entre si, os resultados validam a base *bior3.9* como a escolha ótima dentre as analisadas, consolidando-a como a mais adequada para a aplicação de remoção de ruído desenvolvida neste trabalho.

Por fim, em relação ao desempenho computacional, a análise revelou que todos os métodos avaliados possuem um custo de processamento notavelmente similar para a imagem processada, com tempos de execução variando em valores baixos. Os métodos *VisuShrink* e *BayesShrink* registraram os menores tempos, 0.71 segundos, enquanto que a proposta apresentou um valor de 0.72 segundos, seguido pelo método AGGD com 0.75 segundos, Kernel Gaussiana de 0.78 segundos e o Limiar Melhorado de 0.85 segundos.

6.2 Trabalhos Futuros

Como trabalhos futuros, pretende-se realizar melhorias combinando a técnica com filtros adaptativos, filtragem bilateral, filtragem conjunta bilateral e filtro de *Wiener*. Esses filtros, especialmente a filtragem adaptativa, integrados ao método proposto, possibilitarão a realização de filtragem não linear que preserva as bordas da imagem ao mesmo tempo em que suaviza o ruído, pois combinam informações de similaridade espacial e de intensidade, bem como o filtro de *Wiener*, que apresenta filtragem baseada na diminuição do erro quadrático médio entre a imagem original e a imagem com ruído, pois é inspirado em um modelo estatístico do sinal original e do ruído em termos de média, variância e autocorrelação.

Além do uso de filtros combinados com a técnica proposta nesse estudo, pretende-se utilizar uma estrutura híbrida com base na limiarização inteligente indireta dos coeficientes de decomposição de *wavelet*, denominada limiarização inteligente de coeficiente de *wavelet*. No estudo, para determinar automaticamente um limiar ideal, utiliza-se de um método híbrido, o qual os coeficientes de transformação da *wavelet* serão estimados usando a combinação de métodos de otimização meta-heurística de otimização genética e de enxame de partículas.

Também como proposta de estudo futuros, em conjunto com a técnica proposta, pretende-se analisar a possibilidade de utilizar uma rede de redução de ruído em imagens, baseado em novas redes de desdobramento profundo ou DU (*Deep Unfolding*), o desdobramento profundo é uma maneira viável de melhorar a interpretabilidade da rede profunda, além de analisar vários métodos de redução de ruído para imagens médicas, comparando técnicas e métodos tradicionais e também utilizando aprendizagem profunda, DL (*Deep Learning*). Futuramente explorar na técnica proposta nessa tese, a possibilidade e ajuste dos coeficientes da transformada *wavelet* com um método híbrido que utilize *Deep Learning*, especialmente aqueles que utilizam redes neurais convolucionais ou CNN (*Convolutional Neural Network*).

Uma limitação inerente ao método proposto reside na dependência do sinal original da imagem de ressonância magnética para a determinação ideal do Fator de Predição Linear β , que é um componente chave do estimador de limiar adaptativo. A formulação de β foi desenvolvida a partir da minimização do Erro Médio Quadrático (MSE) entre a imagem ruidosa e a imagem original, um procedimento que se mostrou altamente eficaz em ambientes de simulação e experimentos com imagens ICRM, tanto em tons de cinza, quanto em imagens coloridas, onde a imagem de referência é conhecida. Contudo, em um cenário clínico real, a imagem original e livre de ruído é inatingível, o que restringe a aplicação imediata do cálculo exato de β . Trabalhos futuros deverão, portanto, concentrar-se no desenvolvimento de técnicas de estimação cega para o fator β , utilizando apenas as características estatísticas da imagem ruidosa, visando garantir a plena aplicabilidade e robustez do método em contextos práticos de diagnóstico por imagem.

6.3 Publicações Realizadas pelo Autor

6.3.1 Artigos Completos Publicados em Periódicos e Congressos

1. PEREIRA NETO, ANANIAS; BARROS, FABRÍCIO J. B. Noise Reduction in Brain Magnetic Resonance Imaging using Adaptive Wavelet Thresholding based on Linear Prediction Factor. *Frontiers in Neuroscience, Sec. Brain Imaging Methods*, v. 18, p. 1-13, 2025, DOI:10.3389/fnins.2024.1516514, ISSN: 1662-453X (NETO; BARROS, 2025).
2. PEREIRA NETO, ANANIAS; BARROS, F. J. B. Redução de Ruído em Imagem de Ressonância Magnética Cerebral utilizando Limiarização Wavelet baseado no Fator de Predição Linear. In: *XLII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais*, 2024, Belém. DOI: 10.14209/sbrt.2024.1571032016 (NETO; BARROS, 2024).

Referências

ABBASI, A. et al. Mixed multiscale bm4d for three-dimensional optical coherence tomography denoising. *Computers in Biology and Medicine*, v. 155, p. 106658, 2023. ISSN 0010-4825. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0010482523001233>. Citado na página 31.

ABDELFATTAH, T. et al. Seamless optimization of wavelet parameters for denoising Ifm radar signals: An ai-based approach. *Remote Sensing*, v. 16, n. 22, 2024. ISSN 2072-4292. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2072-4292/16/22/4211>. Citado na página 31.

AKUJUOBI, C. M. *Wavelets and wavelet transform systems and their applications*. Springer, 2022. ISBN 978-3-030-87528-2. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-87528-2>. Citado na página 37.

AL-AZZAWI, A. K. High empirical study of edge detection-based image denoising corrupted by the additive white gaussian noise (wgn). *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, IOP Publishing, v. 881, n. 1, p. 012106, jul 2020. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1757-899X/881/1/012106>. Citado na página 51.

AMIRIAN, M. et al. Artifact reduction in 3d and 4d cone-beam computed tomography images with deep learning: A review. *IEEE Access*, v. 12, p. 10281–10295, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2024.3353195>. Citado na página 2.

ASSAM, M. et al. An efficient classification of mri brain images. *IEEE Access*, v. 9, p. 33313–33322, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3061487>. Citado na página 56.

BENHASSINE, N. E.; BOUKAACHE, A.; BOUDJEHEM, D. Medical image denoising using optimal thresholding of wavelet coefficients with selection of the best decomposition level and mother wavelet. *Int. J. Imaging Syst.*, v. 31, p. 1906–1920, 2021. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/ima.22589>. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 56.

BENOIT, A. et al. Using human visual system modeling for bio-inspired low level image processing. *Computer Vision and Image Understanding*, v. 114, n. 7, p. 758–773, 2010. ISSN 1077-3142. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1077314210000482>. Citado na página 12.

BHANGALE, K. B.; KOTHANDARAMAN, M. A novel two-way feature extraction technique using multiple acoustic and wavelets packets for deep learning based speech emotion recognition. *Multimedia Tools and Applications*, Springer, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11042-024-19674-y>. Citado na página 31.

BHATT, R.; NAIK, N.; SUBRAMANIAN, V. K. Ssim compliant modeling framework with denoising and deblurring applications. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 30, p. 2611–2626, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/TIP.2021.3053369>. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 67.

- BNOU, K.; RAGHAY, S.; HAKIM, A. A wavelet denoising approach based on unsupervised learning model. *EURASIP J. Adv. Signal Process.*, v. 2020, n. 36, p. 1–26, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1186/s13634-020-00693-4>. Citado na página 50.
- BRATKOVA, M.; BOULOS, S.; SHIRLEY, P. orgb: A practical opponent color space for computer graphics. *IEEE Computer Graphics and Applications*, v. 29, n. 1, p. 42–55, 2009. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/MCG.2009.13>. Citado na página 12.
- CHAN, L. C.; WHITEMAN, P. Hardware-constrained hybrid coding of video imagery. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems.*, AES-19, n. 1, p. 71–84, 1983. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/TAES.1983.309421>. Citado na página 26.
- CHANG, C.-W. et al. High-resolution mri synthesis using a data-driven framework with denoising diffusion probabilistic modeling. *Phys. Med. Biol.*, v. 30, n. 30, p. 10127–10134, 2024. Disponível em: <https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/38241726/>. Citado na página 56.
- CHANG, S.; YU, B.; VETTERLI, M. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression. *IEEE Transactions on Image Processing.*, v. 9, n. 9, p. 1532–1546, 2000. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/83.862633>. Citado 4 vezes nas páginas 4, 53, 57 e 66.
- CHAVES-GONZÁLEZ, J. M. et al. Detecting skin in face recognition systems: A colour spaces study. *Digital Signal Processing*, v. 20, n. 3, p. 806–823, 2010. ISSN 1051-2004. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1051200409001869>. Citado na página 12.
- CHEN, G. Y.; KRZYŻAK, A. Wavelet-based 3d data cube denoising using three scales of dependency. *Circuits Syst. Signal Process.*, v. 43, p. 4010–4020, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00034-024-02638-w>. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 53.
- CHEN, G. Y.; XIE, W.; QIAN, S.-E. Hyperspectral imagery denoising using minimum noise fraction and VBM3D. *Journal of Applied Remote Sensing*, SPIE, v. 15, n. 3, p. 032208, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1117/1.JRS.15.032208>. Citado na página 31.
- CHEN, X. Optimization of image processing methods based on wavelet transform and adaptive thresholding. *Applied Mathematics and Nonlinear Sciences.*, v. 9, n. 1, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.2478/amns.2023.2.00665>. Citado na página 50.
- COHEN, A.; DAUBECHIES, I.; FEAUVEAU, J.-C. Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, v. 45, n. 5, p. 485–560, 1992. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/cpa.3160450502>. Citado na página 46.
- CROCHIERE, R. E. Digital signal processor: Sub-band coding. *Bell System Technical Journal*, v. 60, n. 7, p. 1633–1653, 1981. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/j.1538-7305.1981.tb00288.x>. Citado na página 48.
- DATASET. Brain mri. 2024. Acessado: 14 de agosto de 2024. Disponível em: <https://www.mr-tip.com/serv1.php?type=db1&db=Brain%20MRI>. Citado na página 66.
- DATASET. The whole brain. 2025. Acessado: 13 de fevereiro de 2025. Disponível em: <https://www.med.harvard.edu/AANLIB/cases/caseNA/pb9.htm>. Citado na página 66.

- DAUBECHIES, I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Communications on pure and applied mathematics*, Wiley Online Library, v. 41, n. 7, p. 909–996, 1988. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/cpa.3160410705>>. Citado 3 vezes nas páginas 31, 37 e 43.
- DAUBECHIES, I. The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis. *IEEE transactions on information theory*, Ieee, v. 36, n. 5, p. 961–1005, 1990. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/18.57199>>. Citado 3 vezes nas páginas 31, 33 e 43.
- DAUBECHIES, I. *Ten Lectures on Wavelets*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992. Disponível em: <<https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611970104>>. Citado 6 vezes nas páginas 31, 32, 40, 43, 44 e 45.
- DIZON, N. D.; HOGAN, J. A. Holistic processing of color images using novel quaternion-valued wavelets on the plane: A promising transformative tool [hypercomplex signal and image processing]. *IEEE Signal Processing Magazine.*, v. 41, n. 2, p. 51–63, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/MSP.2024.3379753>>. Citado na página 50.
- DONOHO, D. L. De-noising by soft-thresholding. *IEEE Transactions on Information Theory.*, v. 41, n. 3, p. 613–627, 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/18.382009>>. Citado 4 vezes nas páginas 3, 50, 52 e 56.
- DONOHO, D. L.; JOHNSTONE, I. M. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage. *Biometrika.*, v. 81, n. 3, p. 425–455, 09 1994. ISSN 0006-3444. Disponível em: <<https://doi.org/10.1093/biomet/81.3.425>>. Citado 7 vezes nas páginas 3, 4, 50, 52, 53, 56 e 66.
- DONOHO, D. L.; JOHNSTONE, I. M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. *Journal of the American Statistical Association.*, ASA Website, v. 90, n. 432, p. 1200–1224, 1995. Disponível em: <<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/01621459.1995.10476626>>. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 56.
- DOST, S. et al. Reduced reference image and video quality assessments: review of methods. *EURASIP Journal on Image and Video Processing*, Springer, v. 1, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1186/s13640-021-00578-y>>. Citado na página 31.
- ELIAS, I. I.; ALI, T. H. Optimal level and order of the coiflets wavelet in the var time series denoise analysis. *Frontiers in Applied Mathematics and Statistics*, v. 11, 2025. ISSN 2297-4687. Disponível em: <<https://www.frontiersin.org/journals/applied-mathematics-and-statistics/articles/10.3389/fams.2025.1526540>>. Citado na página 43.
- ESTEBAN, D.; GALAND, C. Application of quadrature mirror filters to split band voice coding schemes. In: IEEE. *ICASSP'77. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. 1977. v. 2, p. 191–195. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/ICASSP.1977.1170341>>. Citado na página 48.
- FERREIRA, A. et al. Gan-based generation of realistic 3d volumetric data: A systematic review and taxonomy. *Medical Image Analysis.*, v. 93, p. 103100, 2024. ISSN 1361-8415. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1361841524000252>>. Citado 3 vezes nas páginas 26, 27 e 67.
- FILHO, O. M.; NETO, H. V. *Processamento Digital de Imagens*. Editora Brasport, 1999. ISBN 8574520098. Disponível em: <<https://ogemarques.com/wp-content/uploads/2014/11/pdi99.pdf>>. Citado na página 10.

- GOLILARZ, N. A.; GAO, H.; DEMIREL, H. Satellite image de-noising with harris hawks meta heuristic optimization algorithm and improved adaptive generalized gaussian distribution threshold function. *IEEE Access.*, v. 7, p. 57459–57468, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2914101>. Citado 4 vezes nas páginas 3, 56, 58 e 59.
- GOLILARZ, N. A. et al. Adaptive wavelet based mri brain image de-noising. *Frontiers in Neuroscience.*, v. 14, p. 1–14, 2020. ISSN 1662-453X. Disponível em: <https://www.frontiersin.org/journals/neuroscience/articles/10.3389/fnins.2020.00728>. Citado 4 vezes nas páginas 3, 4, 59 e 66.
- GONZALEZ, R.; WOODS, R. *Processamento Digital de Imagens*. Pearson Universidades, 2009. ISBN 9788576054016. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=FyD5zwEACAAJ>. Citado na página 10.
- GROSSMANN, A.; MORLET, J. Decomposition of hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. *SIAM journal on mathematical analysis*, SIAM, v. 15, n. 4, p. 723–736, 1984. Disponível em: <https://doi.org/10.1137/0515056>. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.
- HAAR, A. Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme. *Mathematische Annalen*, v. 69, p. 331–371, 1910. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/BF01456326>. Citado na página 37.
- HAN, B.; MICHELLE, M. Wavelets on intervals derived from arbitrary compactly supported biorthogonal multiwavelets. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, v. 53, p. 270–331, 2021. ISSN 1063-5203. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1063520321000191>. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 47.
- HASAN, M. *BM3D Image Denoising using SSIM Optimized Wiener Filter*. Dissertação (Masters of Science) — The University of Western Ontario, Ontario, Canada, dez. 2014. Disponível em <https://ir.lib.uwo.ca/etd/2547>. Citado na página 19.
- HASAN, M.; EL-SAKKA, M. R. Improved bm3d image denoising using ssim-optimized wiener filter. *EURASIP Journal on Image and Video Processing*, v. 25, 2018. Disponível em: <https://doi.org/10.1186/s13640-018-0264-z>. Citado na página 26.
- HUANG, J.-J.; DRAGOTTI, P. L. Winnet: Wavelet-inspired invertible network for image denoising. *IEEE Transactions on Image Processing.*, v. 31, p. 4377–4392, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/TIP.2022.3184845>. Citado na página 50.
- HUANG, Y.; LI, W.; YUAN, F. Speckle noise reduction in sonar image based on adaptive redundant dictionary. *Journal of Marine Science and Engineering*, v. 8, n. 10, 2020. ISSN 2077-1312. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2077-1312/8/10/761>. Citado na página 25.
- ITU. *Studio Encoding Parameters of Digital Television for Standard 4:3 and Wide-screen 16:9 Aspect Ratios: Recommendation ITU-R BT.601-7*. International Telecommunication Union, 2011. Disponível em: https://www.itu.int/dms_pubrec/itu-r/rec/bt/R-REC-BT.601-7-201103-I!PDF-E.pdf. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 14.
- JAIN, A. K. *Fundamentals of digital image processing*. USA: Prentice-Hall, Inc., 1989. ISBN 0133361659. Citado na página 24.

JANNATI, H.; ZOEJ, M. J. V. Intelligent wavelet coefficients thresholding: Speckle reduction approach in sar imagery. *Journal of the Indian Society of Remote Sensing*, v. 52, p. 681–701, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s12524-024-01847-9>>. Citado na página 7.

Jl, X. et al. Image domain multi-material decomposition noise suppression through basis transformation and selective filtering. *IEEE Journal of Biomedical and Health Informatics*, v. 28, n. 5, p. 2891–2903, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/JBHI.2023.3348135>>. Citado na página 1.

JULURI, P.; TAMARAPALLI, V.; MEDHI, D. Measurement of quality of experience of video-on-demand services: A survey. *IEEE Communications Surveys and Tutorials*, v. 18, n. 1, p. 401–418, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/COMST.2015.2401424>>. Citado na página 25.

JUNEJA, M. et al. Denoising of magnetic resonance imaging using bayes shrinkage based fused wavelet transform and autoencoder based deep learning approach. *Biomedical Signal Processing and Control*, v. 69, p. 102844, 2021. ISSN 1746-8094. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1746809421004419>>. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 56.

JUNEJA, M. et al. Denoising of magnetic resonance images of brain tumor using bt-autonet. *Biomedical Signal Processing and Control*, v. 87, p. 105477, 2024. ISSN 1746-8094. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1746809423009102>>. Citado na página 22.

KARALASINGHAM, S. et al. Wavelet-fusion image super-resolution model with deep learning for downscaling remotely-sensed, multi-band spectral albedo imagery. *Remote Sensing Applications: Society and Environment*, v. 36, p. 101333, 2024. ISSN 2352-9385. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352938524001976>>. Citado na página 2.

KHMAG, A. Additive gaussian noise removal based on generative adversarial network model and semi-soft thresholding approach. *Multimedia Tools and Applications*, v. 82, p. 7757–7777, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s11042-022-13569-6>>. Citado na página 20.

KIM, W. et al. Wavelet subband-specific learning for low-dose computed tomography denoising. *PLOS ONE*, Public Library of Science, v. 17, n. 9, p. 1–25, 09 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1371/journal.pone.0274308>>. Citado na página 31.

KOKIL, P.; PRATAP, T. Additive white gaussian noise level estimation for natural images using linear scale-space features. *Circuits, Systems, and Signal Processing*, v. 40, p. 353–374, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00034-020-01475-x>>. Citado na página 15.

KUMAR, G. S.; RANI, M. L. P. Image compression using discrete wavelet transform and convolution neural networks. *Journal of Electrical Engineering and Technology*, v. 19, p. 3713–3721, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s42835-024-01803-0>>. Citado na página 1.

KUSETOGULLARI, H. Dynamic multiple description wavelet based image coding using enhanced particle swarm optimization. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, v. 9, n. 1, p. 125–138, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/JSTSP.2014.2331911>>. Citado na página 31.

- LE, T.; CHARTRAND, R.; ASAKI, T. J. A variational approach to reconstructing images corrupted by poisson noise. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, Springer, v. 27, n. 3, p. 257–263, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10851-007-0652-y>>. Citado na página 18.
- LI, B.; CONG, Y.; MO, H. Image denoising method integrating ridgelet transform and improved wavelet threshold. *PLOS ONE*, v. 19, n. 9, p. e0306706, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1371/journal.pone.0306706>>. Citado na página 7.
- LI, F. et al. Speckle noise removal in oct images via wavelet transform and dncnn. *Applied Sciences*, v. 15, n. 12, 2025. ISSN 2076-3417. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2076-3417/15/12/6557>>. Citado na página 8.
- LI, H. et al. Novel wavelet threshold denoising method to highlight the first break of noisy microseismic recordings. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, v. 60, p. 1–10, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TGRS.2022.3142089>>. Citado 2 vezes nas páginas 50 e 53.
- LI, S. et al. Adaptive wavelet threshold function-based m2m gaussian noise removal method. *IEEE Internet of Things Journal*, p. 1–1, 2024. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/JIOT.2024.3425614>>. Citado na página 50.
- LI, X. et al. Image denoising method with improved threshold function. In: HUANG, D.-S.; PREMARATNE, P.; YUAN, C. (Ed.). *Applied Intelligence*. Springer Nature Singapore, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-981-97-0903-8_19>. Citado na página 6.
- LIANG, H.; LI, N.; ZHAO, S. Salt and pepper noise removal method based on a detail-aware filter. *Symmetry*, v. 13, n. 3, 2021. ISSN 2073-8994. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2073-8994/13/3/515>>. Citado na página 17.
- LISSNER, I.; URBAN, P. Toward a unified color space for perception-based image processing. *IEEE Transactions on Image Processing*, v. 21, n. 3, p. 1153–1168, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/TIP.2011.2163522>>. Citado na página 12.
- MALLAT, S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, v. 11, n. 7, p. 674–693, 1989. Disponível em: <<https://doi.org/10.1109/34.192463>>. Citado 3 vezes nas páginas 31, 36 e 37.
- MANNAM, V. et al. Real-time image denoising of mixed poisson–gaussian noise in fluorescence microscopy images using imagej. *Optica*, Optica Publishing Group, v. 9, n. 4, p. 335–345, Apr 2022. Disponível em: <<https://opg.optica.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-9-4-335>>. Citado na página 18.
- MATHWORKS. Practical introduction to time-frequency analysis using the continuous wavelet transform. 2025. Acessado: 18 de julho de 2025. Disponível em: <<https://la.mathworks.com/help/wavelet/ug/practical-introduction-to-time-frequency-analysis-using-the-continuous-wavelet-transform.html>>. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.
- MATHWORKS. Single-level 1-d discrete wavelet transform - dwt. 2025. Acessado: 10 de agosto de 2025. Disponível em: <<https://la.mathworks.com/help/wavelet/ref/dwt.html>>. Citado na página 36.

- MEYER, Y. *Ondelettes et opérateurs: Ondelettes. I*. Editions Hermann, 1990. (Actualités mathématiques). ISBN 9782705661250. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=ZzbvAAAAMAAJ>>. Citado na página 38.
- MEYER, Y. *Wavelets: Algorithms & Applications*. [S.l.]: Philadelphia: SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics), 1993. ISBN 0-89871-309-9. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 37.
- MISHRO, P. K. et al. A survey on state-of-the-art denoising techniques for brain magnetic resonance images. *IEEE Rev Biomed Eng.*, v. 30, n. 30, p. 184–199, 2022. Disponível em: <<https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/33513109/>>. Citado na página 56.
- MORLET, J. Sampling theory and wave propagation. In: CHEN, C. H. (Ed.). *Issues in Acoustic Signal — Image Processing and Recognition*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1983. p. 233–261. ISBN 978-3-642-82002-1. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-82002-1_12>. Citado na página 40.
- MÖLLER, S.; RAAKE, A. Quality of experience: Terminology, methods and applications. *PIK - Praxis der Informationsverarbeitung und Kommunikation*, v. 37, n. 4, p. 255–263, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1515/pik-2014-0027>>. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 28.
- NETO, A. P.; BARROS, F. J. B. Redução de ruído em imagem de ressonância magnética cerebral utilizando limiarização wavelet baseado no fator de predição linear. *XLII Simpósio Brasileiro de Telecomunicações e Processamento de Sinais*, 2024. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.14209/sbrt.2024.1571032016>>. Citado na página 90.
- NETO, A. P.; BARROS, F. J. B. Noise reduction in brain magnetic resonance imaging using adaptive wavelet thresholding based on linear prediction factor. *Frontiers in Neuroscience*, v. 18, 2025. ISSN 1662-453X. Disponível em: <<https://www.frontiersin.org/journals/neuroscience/articles/10.3389/fnins.2024.1516514>>. Citado na página 90.
- NITHIN, S. S. et al. Developing novel video coding model using modified dual-tree wavelet-based multi-resolution technique. *Multimedia Systems*, Springer, v. 28, p. 643–657, 2022. Disponível em: <<https://link.springer.com/article/10.1007/s00530-021-00863-w>>. Citado na página 31.
- PANIMALAR D. AARTHI, S. S. K. A.; VARALAKSHMI, A. Analysing medical image with discrete wavelet transform under uncertainty. *Int. J. Appl. Comput. Math.*, v. 9, n. 114, 2023. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s40819-023-01566-8>>. Citado na página 6.
- PENG, Q. et al. Modeling of ssim-based end-to-end distortion for error-resilient video coding. *EURASIP Journal on Image and Video Processing*, Springer, v. 45, p. 1–12, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1186/1687-5281-2014-45>>. Citado na página 29.
- RAHMAN, A. B.; AFJAL, M. I.; MAMUN, M. A. A. Mitigating noise from biomedical images using wavelet transform techniques. In: *2025 International Conference on Electrical, Computer and Communication Engineering (ECCE)*. [S.l.: s.n.], 2025. p. 1–6. Citado na página 8.
- RAO, J. A characterization of the normal distribution. *The Annals of Mathematical Statistics*, JSTOR, v. 29, n. 3, p. 914–919, 1958. ISSN 00034851, 21688990. Disponível em: <<https://www.jstor.org/stable/2237278>>. Citado na página 20.

RAYLEIGH, L. Xii. on the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and of arbitrary phase. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, Taylor & Francis, v. 10, n. 60, p. 73–78, 1880. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/14786448008626893>. Citado na página 22.

REDDY, I. S. S. et al. Image denoising using multiscale transforms. In: *2024 15th International Conference on Computing Communication and Networking Technologies (ICCCNT)*. [s.n.], 2024. p. 1–6. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ICCCNT61001.2024.10724429>. Citado na página 7.

RIBEIRO, M. A. et al. Performance analysis of a nonlinear energy harvester with subharmonic responses based on discrete meyer wavelet filtering scheme. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 46, n. 411, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s40430-024-04977-w>. Citado na página 48.

ROY, R.; GHOSH, S.; GHOSH, A. Speckle noise removal: A local structure preserving approach. *SN Computer Science*, v. 5, n. 367, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s42979-024-02655-1>. Citado na página 25.

SAHOO, G. R.; FREED, J. H.; SRIVASTAVA, M. Optimal wavelet selection for signal denoising. *IEEE Access.*, v. 12, p. 45369–45380, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2024.3377664>. Citado na página 56.

SARKAR, S.; BHAIKANNAR, S. S. Efficient fpga architecture of optimized haar wavelet transform for image and video processing applications. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, Springer, v. 32, p. 821–844, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11045-020-00759-4>. Citado na página 31.

SHANTHAMALLAPPA, M. et al. Robust automatic speech recognition using wavelet-based adaptive wavelet thresholding: A review. *SN Comput. Sci.*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, v. 5, n. 2, feb 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s42979-023-02491-9>. Citado na página 50.

SHARK, L.-K.; YU, C. Design of matched wavelets based on generalized mexican-hat function. *Signal Processing*, v. 86, n. 7, p. 1451–1469, 2006. ISSN 0165-1684. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0165168405002604>. Citado na página 42.

SINGH, P. et al. A review on sar image and its despeckling. *Archives of Computational Methods in Engineering*, v. 28, p. 4633–4653, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11831-021-09548-z>. Citado na página 24.

SONG, J.; YE, J. C. Wavelet subband discriminator for efficient unsupervised chest x-ray image restoration. *Medical Physics*, v. 50, n. 4, p. 2263–2278, 2023. Disponível em: <https://aapm.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/mp.16088>. Citado na página 5.

SONIA, M. S.; SUMATHI, S. A comparative analysis of wavelet transforms for denoising mri brain images. In: *2022 International Conference on Power, Energy, Control and Transmission Systems (ICPECTS)*. [s.n.], 2022. p. 1–5. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ICPECTS56089.2022.10046675>. Citado 3 vezes nas páginas 5, 53 e 56.

STEIN, C. M. Estimation of the mean of a multivariate normal distribution. *The Annals of Statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 9, n. 6, p. 1135–1151, 1981. Disponível em: <https://www.jstor.org/stable/2240405>. Citado na página 53.

SUN, M. et al. *A CT Image Denoising Method Based on Projection Domain Feature*. 2024. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2412.06135>. Citado na página 1.

SUN, Y.; YIU, S.; LI, H. New wavelet threshold function based on gaussian kernel function for image de-noising. *Journal of Information Hiding and Multimedia Signal Processing (JIHMSP)*, v. 10, n. 1, p. 91–101, Jan. 2019. ISSN 2073-4212. Disponível em: <https://bit.kuas.edu.tw/~jihmsp/2019/vol1/JIH-MSP-2019-01-11.pdf>. Citado 3 vezes nas páginas 4, 57 e 66.

TAASSORI, M. Enhanced wavelet-based medical image denoising with bayesian-optimized bilateral filtering. *Sensors*, v. 24, n. 21, 2024. ISSN 1424-8220. Disponível em: <https://www.mdpi.com/1424-8220/24/21/6849>. Citado na página 7.

TARANENKO, Y. K.; OLIINYK, O. Y. Use of threshold and no-threshold methods of discrete wavelet filtering of radar signals. *Cybern. Syst. Analysis.*, v. 60, p. 656–666, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s10559-024-00704-4>. Citado na página 50.

THYAGARAJAN, K. S. *Still image and video compression with MATLAB*. John Wiley & Sons, 2011. Disponível em: https://books.google.com.br/books?hl=pt-BR&lr=&id=adv71MkRIWYC&oi=fnd&pg=PP10&dq=Still+Image+and+Video+Compression+with+Matlab&ots=gdanZOOWSU&sig=f47gWO_M-UcyUr7nvxNLPXQFHbU&redir_esc=y#v=onepage&q=Still%20Image%20and%20Video%20Compression%20with%20Matlab&f=false. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.

VETTERLI, M.; HERLEY, C. Wavelets and filter banks: Theory and design. *IEEE transactions on signal processing*, v. 40, n. 9, p. 2207–2232, 1992. ISSN 1053-587X. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/78.157221>. Citado na página 32.

WANG, M. et al. Research on modified wavelet threshold denoising algorithm based around semg signal. *Journal of Physics: Conference Series.*, IOP Publishing, v. 1880, n. 1, p. 012004, apr 2021. Disponível em: <https://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1880/1/012004>. Citado na página 52.

WANG, Z. et al. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity. *IEEE Transactions on Image Processing.*, v. 13, n. 4, p. 600–612, 2004. ISSN 1057-7149. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/TIP.2003.819861>. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 67.

XIANG, J.; XIANG, H.; WANG, L. Poisson noise image restoration method based on variational regularization. *Signal, Image and Video Processing*, v. 17, n. 3, p. 1555–1562, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11760-022-02364-3>. Citado na página 18.

XU, Q. et al. Removal of salt and pepper noise in corrupted image based on multilevel weighted graphs and igowa operator. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2018, n. 1, p. 7975248, 2018. Disponível em: <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1155/2018/7975248>. Citado na página 17.

YILMAZ, F. Mcleish distribution: Performance of digital communications over additive white mcleish noise (awmn) channels. *IEEE Access.*, v. 8, p. 19133–19195, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2967742>. Citado na página 51.

YIN, H.; CHEN, H. Deep content-dependent 3-d convolutional sparse coding for hyperspectral image denoising. *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, v. 17, p. 4125–4138, 2024. ISSN 1939-1404. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/JSTARS.2024.3357732>. Citado na página 7.

YOU, N. et al. Research on image denoising in edge detection based on wavelet transform. *Applied Sciences*, v. 13, n. 3, 2023. ISSN 2076-3417. Disponível em: <https://www.mdpi.com/2076-3417/13/3/1837>. Citado na página 31.

YU, X.; LI, J. Adaptive kalman filtering for recursive both additive noise and multiplicative noise. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, v. 58, n. 3, p. 1634–1649, 2022. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/TAES.2021.3117896>. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 19.

ZHANG, F.; BULL, D. R. A perception-based hybrid model for video quality assessment. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*, v. 26, n. 6, p. 1017–1028, 2016. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/TCSVT.2015.2428551>. Citado na página 31.

ZHANG, J.; XIU, Y. Image stitching based on human visual system and sift algorithm. *The Visual Computer*, v. 40, p. 427–439, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00371-023-02791-4>. Citado na página 12.

ZHANG, Y.; CHANDLER, D. M.; MOU, X. Deep steerable pyramid wavelet network for unified jpeg compression artifact reduction. *Signal Processing: Image Communication*, v. 118, p. 117011, 2023. ISSN 0923-5965. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0923596523000930>. Citado na página 1.

ZHANG, Y. et al. Improved wavelet threshold for image de-noising. *Front. Neurosci.*, v. 13, p. 1–7, 2019. ISSN 1662-453X. Disponível em: <https://www.frontiersin.org/journals/neuroscience/articles/10.3389/fnins.2019.00039>. Citado 5 vezes nas páginas 3, 4, 56, 58 e 66.

ZHOU, S. et al. Partial discharge signal denoising based on wavelet pair and block thresholding. *IEEE Access*, v. 8, p. 119688–119696, 2020. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.3006140>. Citado na página 50.

ZHOU, Y. et al. Low-frequency ultrasound thoracic signal processing based on music algorithm and emd wavelet thresholding. *IEEE Access*, v. 11, p. 73912–73921, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3296465>. Citado na página 50.

ZHU BINGYOU LIU, P. Y. G.; FAN, X. Image denoising method based on improved wavelet threshold algorithm. *Multimedia Tools and Applications*, v. 83, p. 67997–6801, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s11042-024-18197-w>. Citado 2 vezes nas páginas 1 e 6.

A Apêndice

A.1 Código Desenvolvido no Matlab do Método Proposto Fator de Predição Linear:

```

1 function [mediaPSNR, mediaSSIM] = ImgProPL(n,nivelJ,nwavelet,var)
2 tic;
3 ip = ['brain_image1.jpg'];
4 contPSNR = 0;
5 contSSIM = 0;
6 uip = imread(ip);
7 tam = size(uip);
8 linha = tam(1);
9 coluna = tam(2);
10 for i=1:n
11 uip = imread(ip);
12 uinp = imnoise(uip, 'gaussian', 0, var);
13 j = nivelJ;
14 wname = nwavelet;
15 [c,s] = wavedec2(uip,j,wname);
16 [c1,s1] = wavedec2(uinp,j,wname);
17 Inoise = uinp-mean2(uinp);
18 Iorg = uip -mean2(uip);
19 V = sum(sum((uip-mean2(uip)).*...
20 (uip-mean2(uip))));
21 a1 = sum(sum(Iorg .* Inoise))./V;
22 clear A1
23 clear B1
24 clear V
25 a1=mean2(a1);
26 st=(s1(1,1)^2)+1;
27 proc=[c1(1:st-1),zeros(1,length(st):length(c1))];
28 var1=length(c1)-s1(size(s1,1)-1,1)^2+1;
29 sigmahat=median(abs(c1(var1:length(c1))))/0.6745;
30 for jj=2:size(s1,1)-1
31 coefh=c1(st:st+s1(jj,1)^2-1);
32 thrh=thrPro(coefh, sigmahat, a1);

```

```

33     proc(st:st+s1(jj,1)^2-1)=sthrProv1(coefh, thrh, a1);
34     st=st+s1(jj,1)^2;
35     coefv=c1(st:st+s1(jj,1)^2-1);
36     thrv=thrPro(coefv, sigmahat, a1);
37     proc(st:st+s1(jj,1)^2-1)=sthrProv1(coefv, thrv, a1);
38     st=st+s1(jj,1)^2;
39     coefd=c1(st:st+s1(jj,1)^2-1);
40     thrd=thrPro(coefd, sigmahat, a1);
41     proc(st:st+s1(jj,1)^2-1)=sthrProv1(coefd, thrd, a1);
42     st=st+s1(jj,1)^2;
43 end
44 newProc=waverec2(proc,s1,wname);
45 newProcU=uint8(newProc);
46 figure color white
47 imshow(ui)
48 figure color white
49 imshow(uinp)
50 figure color white
51 imshow(newProcU)
52 toc
53 mseI1 = (ui(:, :, 1) - newProcU(:, :, 1)) .^ 2;
54 mse1 = sum(sum(mseI1)) / (linha * coluna);
55 PSNR_1 = 10 * log10((255)^2 / mse1);
56 PSNR_ = PSNR_1;
57 rmse = round((255^2)/(10^(PSNR_/10)))
58 SSIM1 = ssim2(ui(:, :, 1), newProcU(:, :, 1));
59 SSIM = SSIM1;
60 end
61 end

```

A.2 Código Desenvolvido no Matlab do Estimador de Limiar do Método Proposto Fator de Predição Linear:

```

1 function thr = thrPro(coef, sigmahat, a)
2     thr = (sigmahat*sqrt(2*log(length(coef))))/(log(1+3)^(a^1));
3 end

```

A.3 Código Desenvolvido no Matlab da Nova Função de Limiar Adaptativa do Método Proposto Fator de Predição Linear:

```

1 function parm=sthrPro1(y, T, a);
2     ind=find(abs(y)<T);
3     ind1=find(abs(y)>=T);
4     y(ind)=0;
5     parc = ( sin(teta.*((T./abs(y(ind1))).^(a/T))));
6     y(ind1)=sign(y(ind1)).*(abs(y(ind1))-parc*T);
7     parm=y;

```

A.4 Código Desenvolvido no Matlab do Método *VisuShrink*:

```

1 function [mediaPSNR,mediaSSIM]=ImgVisuShrink(n,nivelJ,nwavelet,var)
2 tic;
3 ip = [ 'brain_image1.jpg '];
4 contPSNR = 0;
5 contSSIM = 0;
6 for i=1:n
7     uip = imread(ip);
8     uinp = imnoise(uip, 'gaussian', 0, var);
9     tam = size(uip);
10    linha = tam(1);
11    coluna = tam(2);
12    j = nivelJ;
13    wname = nwavelet;
14    [c1,s1] = wavedec2(uinp,j,wname);
15    st=(s1(1,1)^2)+1;
16    VisuShrinkc=[c1(1:st-1),zeros(1,length(st-1:length(c1)))];
17    var1=length(c1)-s1(size(s1,1)-1,1)^2+1;
18    sigmahat=median(abs(c1(var1:length(c1))))/0.6745;
19    for jj=2:size(s1,1)-1
20        coefh=c1(st:st+s1(jj,1)^2-1);
21        thrh=thrVisuShrink(coefh, sigmahat);
22        VisuShrinkc(st:st+s1(jj,1)^2-1)=sthrVisuShrink(coefh, thrh);
23        st=st+s1(jj,1)^2;
24        coefv=c1(st:st+s1(jj,1)^2-1);

```

```

25     thrv=thrVisuShrink(coefv , sigmahat);
26     VisuShrinkc(st:st+s1(jj,1)^2-1)=sthrVisuShrink(coefv , thrv);
27     st=st+s1(jj,1)^2;
28     coefd=c1(st:st+s1(jj,1)^2-1);
29     thrd=thrVisuShrink(coefd , sigmahat);
30     VisuShrinkc(st:st+s1(jj,1)^2-1)=sthrVisuShrink(coefd , thrd);
31     st=st+s1(jj,1)^2;
32 end
33 newVisuShrinkc=waverec2(VisuShrinkc,s1,wname);
34 newVisuShrinkcU=uint8(newVisuShrinkc);
35 figure color white
36 imshow(uip)
37 figure color white
38 imshow(uinp)
39 figure color white
40 imshow(newVisuShrinkcU)
41 toc
42 PSNR1 = psnr(newVisuShrinkcU , uip);
43 mseI1 = (uip(:,:,1) - newVisuShrinkcU(:,:,1)) .^ 2;
44 mse1 = sum(sum(mseI1)) / (linha * coluna);
45 rmse = round((255^2)/(10^(PSNR1/10)));
46 SSIM1 = ssim2(uip(:,:,1) , newVisuShrinkcU(:,:,1));
47 end
48 end

```

A.5 Código Desenvolvido no Matlab do Estimador de Limiar do Método *VisuShrink*:

```

1 function thr = thrVisuShrink(coef , sigmahat)
2     thr=sigmahat*sqrt(2*log(length(coef)));
3 end

```

A.6 Código Desenvolvido no Matlab da Função de Limiar do Método *VisuShrink*:

```

1 function parm=sthrVisuShrink(y, T);
2     ind=find(abs(y)<T);

```

```

3     ind1=find(abs(y)>=T);
4     y(ind)=0;
5     y(ind1)=y(ind1);
6     parm=y;

```

A.7 Código Desenvolvido no Matlab do Método *BayesShrink*:

```

1 function [mediaPSNR,mediaSSIM]=ImgBayesShrink(n,nivelJ,nwavelet,var)
2 tic;
3 ip = ['brain_image1.jpg'];
4 contPSNR = 0;
5 contSSIM = 0;
6 for i=1:n
7     uip = imread(ip);
8     uinp = imnoise(uip, 'gaussian', 0, var);
9     tam = size(uip);
10    linha = tam(1);
11    coluna = tam(2);
12    j = nivelJ;
13    wname = nwavelet;
14    [c1,s1] = wavedec2(uinp,j,wname);
15    st=(s1(1,1)^2)+1;
16    bayesc=[c1(1:st-1),zeros(1,length(st:1:length(c1)))];
17    var1=length(c1)-s1(size(s1,1)-1,1)^2+1;
18    sigmahat=median(abs(c1(var1:length(c1))))/0.6745;
19    for jj=2:size(s1,1)-1
20        coefh=c1(st:st+s1(jj,1)^2-1);
21        thrh=bayes(coefh, sigmahat);
22        bayesc(st:st+s1(jj,1)^2-1)=sthresh(coefh, thrh);
23        st=st+s1(jj,1)^2;
24        coefv=c1(st:st+s1(jj,1)^2-1);
25        thrv=bayes(coefv, sigmahat);
26        bayesc(st:st+s1(jj,1)^2-1)=sthresh(coefv, thrv);
27        st=st+s1(jj,1)^2;
28        coefd=c1(st:st+s1(jj,1)^2-1);
29        thrd=bayes(coefd, sigmahat);
30        bayesc(st:st+s1(jj,1)^2-1)=sthresh(coefd, thrd);

```

```

31     st=st+s1(jj,1)^2;
32 end
33 newBayesc=waverec2(bayesc,s1,wname);
34 newBayescU=uint8(newBayesc);
35 figure color white
36 imshow(ui)
37 figure color white
38 imshow(uinp)
39 figure color white
40 imshow(newBayescU)
41 toc
42 PSNR1 = psnr(newBayescU, ui);
43 mseI1 = (ui(:, :, 1) - newBayescU(:, :, 1)).^ 2;
44 mse1 = sum(sum(mseI1)) / (linha * coluna);
45 rmse = round((255^2)/(10^(PSNR1/10)));
46 SSIM1 = ssim2(ui(:, :, 1), newBayescU(:, :, 1));
47 end
48 end

```

A.8 Código Desenvolvido no Matlab do Estimador de Limiar do Método *BayesShrink*:

```

1 function threshold=bayes(X,sigmahat)
2     len=length(X);
3     sigmay2=sum(X.^2)/len;
4     sigmax=sqrt(max(sigmay2-sigmahat^2,0));
5     if sigmax==0
6         threshold=max(abs(X));
7     else
8         threshold=sigmahat^2/sigmax;
9     end

```

A.9 Código Desenvolvido no Matlab da Função de Limiar do Método *BayesShrink*:

```

1 function parm=sthresh(y,T);
2     ind=find(abs(y)<=T);

```

```

3     ind1=find( abs(y)>T);
4     y(ind)=0;
5     y(ind1)=sign(y(ind1)).*( abs(y(ind1))-T);
6     parm=y;

```

A.10 Código Desenvolvido no Matlab do Método Limiar Melhorado:

```

1 function [mediaPSNR,mediaSSIM]=ImgPro19b(n,nivelJ,nwavelet,var)
2 tic;
3 ip = [ 'brain_image1.jpg' ];
4 contPSNR = 0;
5 contSSIM = 0;
6 for i=1:n
7     uip = imread(ip);
8     uinp = imnoise(uip, 'gaussian', 0, var);
9     tam = size(uip);
10    linha = tam(1);
11    coluna = tam(2);
12    j = nivelJ;
13    wname = nwavelet;
14    [c1,s1] = wavedec2(uinp,j,wname);
15    st=(s1(1,1)^2)+1;
16    pro19bc=[c1(1:st-1),zeros(1,length(st-1:length(c1)))];
17    var1=length(c1)-s1(size(s1,1)-1,1)^2+1;
18    sigmahat=median(abs(c1(var1:length(c1))))/0.6745;
19    for jj=2:size(s1,1)-1
20        coefh=c1(st:st+s1(jj,1)^2-1);
21        thrh=thrPro19b(coefh, sigmahat);
22        pro19bc(st:st+s1(jj,1)^2-1)=sthrPro19b(coefh, thrh);
23        st=st+s1(jj,1)^2;
24        coefv=c1(st:st+s1(jj,1)^2-1);
25        thrv=thrPro19b(coefv, sigmahat);
26        pro19bc(st:st+s1(jj,1)^2-1)=sthrPro19b(coefv, thrv);
27        st=st+s1(jj,1)^2;
28        coefd=c1(st:st+s1(jj,1)^2-1);
29        thrd=thrPro19b(coefd, sigmahat);
30        pro19bc(st:st+s1(jj,1)^2-1)=sthrPro19b(coefd, thrd);

```

```

31     st=st+s1(jj,1)^2;
32 end
33 newPro19bc=waverec2(pro19bc,s1,wname);
34 newPro19bcU=uint8(newPro19bc);
35 figure color white
36 imshow(ui)
37 figure color white
38 imshow(uinp)
39 figure color white
40 imshow(newPro19bcU)
41 toc
42 PSNR1 = psnr(newPro19bcU, ui);
43 mseI1 = (ui(:,:),1) - newPro19bcU(:,:),1).^ 2;
44 mse1 = sum(sum(mseI1)) / (linha * coluna);
45 rmse = round((255^2)/(10^(PSNR1/10)));
46 SSIM1 = ssim2(ui(:,:),1), newPro19bcU(:,:),1));
47 end
48 end

```

A.11 Código Desenvolvido no Matlab do Estimador de Limiar do Método Limiar Melhorado:

```

1 function thr = thrPro19b(coef, sigmahat)
2     e=2.718281828;
3     thr=sigmahat*sqrt(2*log(length(coef)))/(log(1+e^3));
4 end

```

A.12 Código Desenvolvido no Matlab da Função de Limiar do Método Limiar Melhorado:

```

1 function parm=sthrPro19b(y, T);
2     ind=find(abs(y)<=T);
3     ind1=find(abs(y)>T);
4     y(ind)=0;
5     alpha = 0.5;
6     mi = 5;
7     sigma = 0.5477;

```

```

8     e=2.718281828;
9     A = ( alpha*((y(ind1)-T)/T)-mi).^2;
10    B = 2*sigma^2;
11    parc = T*e.^(-(A/B));
12    y(ind1)=sign(y(ind1)).*(abs(y(ind1))-parc);
13    parm=y;

```

A.13 Código Desenvolvido no Matlab do Método Kernel Gaussiana:

```

1 function [mediaPSNR,mediaSSIM]=ImgPro19a(n,nivelJ,nwavelet,var)
2 tic;
3 ip = ['brain_image1.jpg'];
4 contPSNR = 0;
5 contSSIM = 0;
6 for i=1:n
7 uip = imread(ip);
8 uinp = imnoise(uip, 'gaussian', 0, var);
9 tam = size(uip);
10 linha = tam(1);
11 coluna = tam(2);
12 j = nivelJ;
13 wname = nwavelet;
14 [c1,s1] = wavedec2(uinp,j,wname);
15 st=(s1(1,1)^2)+1;
16 pro19ac=[c1(1:st-1),zeros(1,length(st):length(c1))];
17 var1=length(c1)-s1(size(s1,1)-1,1)^2+1;
18 sigmahat=median(abs(c1(var1:length(c1))))/0.6745;
19 for jj=2:size(s1,1)-1
20     coefh=c1(st:st+s1(jj,1)^2-1);
21     thrh=thrPro19(coefh, sigmahat);
22     pro19ac(st:st+s1(jj,1)^2-1)=sthrPro19(coefh, thrh);
23     st=st+s1(jj,1)^2;
24     coefv=c1(st:st+s1(jj,1)^2-1);
25     thrv=thrPro19(coefv, sigmahat);
26     pro19ac(st:st+s1(jj,1)^2-1)=sthrPro19(coefv, thrv);
27     st=st+s1(jj,1)^2;
28     coefd=c1(st:st+s1(jj,1)^2-1);

```

```

29     thrd=thrPro19(coefd , sigmahat);
30     pro19ac(st:st+s1(jj,1)^2-1)=sthrPro19(coefd , thrd);
31     st=st+s1(jj,1)^2;
32 end
33 newPro19ac=waverec2(pro19ac,s1,wname);
34 newPro19acU=uint8(newPro19ac);
35 figure color white
36 imshow(ui)
37 figure color white
38 imshow(uinp)
39 figure color white
40 imshow(newPro19acU)
41 toc
42 PSNR1 = psnr(newPro19acU , ui);
43 mseI1 = (ui(:,:,1) - newPro19acU(:,:,1)).^ 2;
44 mse1 = sum(sum(mseI1)) / (linha * coluna);
45 rmse = round((255^2)/(10^(PSNR1/10)));
46 SSIM1 = ssim2(ui(:,:,1) , newPro19acU(:,:,1));
47 end
48 end

```

A.14 Código Desenvolvido no Matlab do Estimador de Limiar do Método Kernel Gaussiana:

```

1 function thr = thrPro19(coef , sigmahat)
2     alpha = 1;
3     thr=sigmahat*sqrt(2*log(length(coef)))*(1-(alpha*3));
4 end

```

A.15 Código Desenvolvido no Matlab da Função de Limiar do Método Kernel Gaussiana:

```

1 function parm=sthrPro19(y, T);
2 ind=find(abs(y)<=T);
3 ind1=find(abs(y)>T);
4 y(ind)=(y(ind)/2).*(1./(1-((log10(abs(y(ind)))/T))./(log10(100))));
5 y(ind1)=y(ind1)-((y(ind1)/2).*(1./((100.^(abs(y(ind1))*T))-99)));
6 parm=y;

```

A.16 Código Desenvolvido no Matlab do Método AGGD:

```

1 function [mediaPSNR,mediaSSIM]=ImgPro20(n,nivelJ,nwavelet,var)
2 tic;
3 ip = ['brain_image1.jpg'];
4 contPSNR = 0;
5 contSSIM = 0;
6 for i=1:n
7 uip = imread(ip);
8 uinp = imnoise(uip, 'gaussian', 0, var);
9 tam = size(uip);
10 linha = tam(1);
11 coluna = tam(2);
12 j = nivelJ;
13 wname = nwavelet;
14 [c1,s1] = wavedec2(uinp,j,wname);
15 st=(s1(1,1)^2)+1;
16 pro20c=[c1(1:st-1),zeros(1,length(st):length(c1))];
17 var1=length(c1)-s1(size(s1,1)-1,1)^2+1;
18 sigmahat=median(abs(c1(var1:length(c1))))/0.6745;
19 for jj=2:size(s1,1)-1
20     coefh=c1(st:st+s1(jj,1)^2-1);
21     thrh=thrPro20(coefh, sigmahat);
22     pro20c(st:st+s1(jj,1)^2-1)=sthrPro20(coefh, thrh);
23     st=st+s1(jj,1)^2;
24     coefv=c1(st:st+s1(jj,1)^2-1);
25     thrv=thrPro20(coefv, sigmahat);
26     pro20c(st:st+s1(jj,1)^2-1)=sthrPro20(coefv, thrv);
27     st=st+s1(jj,1)^2;
28     coefd=c1(st:st+s1(jj,1)^2-1);
29     thrd=thrPro20(coefd, sigmahat);
30     pro20c(st:st+s1(jj,1)^2-1)=sthrPro20(coefd, thrd);
31     st=st+s1(jj,1)^2;
32 end
33 newPro20c=waverec2(pro20c,s1,wname);
34 newPro20cU=uint8(newPro20c);
35 figure color white
36 imshow(uip)
37 figure color white
38 imshow(uinp)

```

```

39 figure color white
40 imshow(newPro20cU)
41 toc
42 PSNR1 = psnr(uip , newPro20cU);
43 mseI1 = (uip(:, :, 1) - newPro20cU(:, :, 1)) .^ 2;
44 mse1 = sum(sum(mseI1)) / (linha * coluna);
45 rmse = round((255^2)/(10^(PSNR1/10)));
46 SSIM1 = ssim2(uip(:, :, 1), newPro20cU(:, :, 1));
47 end
48 end

```

A.17 Código Desenvolvido no Matlab do Estimador de Limiar do Método AGGD:

```

1 function thr = thrPro20(coef, sigmahat)
2     thr=sigmahat*1;
3 end

```

A.18 Código Desenvolvido no Matlab da Função de Limiar do Método AGGD:

```

1 function parm=sthrPro20(y, T, sig);
2     e=2.718281828;
3     ind=find(y<-T);
4     ind1=find(abs(y)<=T);
5     ind2=find(y>T);
6     y(ind)=((1./(1+(e.^(y(ind)+T)))).*y(ind))-(T/2);
7     y(ind2)=((1./(1+(e.^(-y(ind2)+T)))).*y(ind2))+(T/2);
8     A0 = (0^2/(2*(sig^2)));
9     A1 = (y(ind1).^2/(2*(sig^2)));
10    B = 1/2;
11    parc0 = A0-B;
12    parc1 = A1-B;
13    s0 = sig*(e.^(parc0));
14    s1 = sig*(e.^(parc1));
15    y(ind1)=s1-s0;
16    parm=y;

```